

Werk

Jahr: 1970

Kollektion: fid.geo

Signatur: 8 Z NAT 2148:36

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN101433392X_0036

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X_0036

LOG Id: LOG_0163

LOG Titel: Eine neue Methode zur Bestimmung der terrestrischen Wärmestromdichte in Binnenseen

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN101433392X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN101433392X>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Eine neue Methode zur Bestimmung der terrestrischen Wärmestromdichte in Binnenseen

A New Method for the Determination of the Heat Flow in Lakes

Von R. HÄNEL, Hannover¹⁾

Eingegangen am 18. Oktober 1969

(in geänderter Fassung am 30. Juni 1970)

Zusammenfassung: Die Dichte des terrestrischen Wärmestromes kann aus Messungen in den Lockersedimenten am Boden von Binnenseen ermittelt werden, wenn die Meßstelle in mindestens 50 m Wassertiefe liegt und wenn man die Messungen im Herbst durchführt. Diese Bedingungen ergeben sich aus einer Betrachtung der raumzeitlichen Temperaturverteilung im Wasser von Binnenseen. An den Ergebnissen ist im wesentlichen noch eine Korrektur anzubringen wegen der durch den See hervorgerufenen Störung des Temperaturfeldes im Boden. Der Gesamtfehler der Methode wird auf $\pm 20\%$ oder kleiner geschätzt.

Um diese Möglichkeit auszunutzen, wurde eine Sonde gebaut, mit der folgende Größen gemessen werden können:

1. Die Temperaturdifferenz in Seeböden zwischen ca. 1,9 und 3,5 m Tiefe mit einem Fehler kleiner als $\pm 0,002$ grad.
2. Die Bodentemperatur mit dem Fehler $\pm 0,05$ grad.
3. Die Wärmeleitfähigkeit des Seesediments mit dem geschätzten Fehler $\pm 5\%$.
4. Die Neigung der Sonde auf $\pm 1^\circ$ und die Wassertiefe auf ± 2 m genau.

Die Sonde wiegt 25 kg.

Die Überprüfung der Methode in drei Seen am nördlichen Alpenrand ergab für die Wärmestromdichte durchaus plausible Werte um $2 \mu\text{cal}/\text{cm}^2\text{s}$.

Summary: The terrestrial heat flow can be determined from measurements in the unconsolidated sediments at the bottom of lakes, if the measuring point is covered by at least 50 m of water and if the measurements are carried out in autumn. These conditions follow from a consideration of the temperature variation in space and time occurring in the water of lakes. The results of such measurements are still to be corrected for the disturbance of the terrestrial temperature field caused by the lake itself. The error of the final result is estimated to be appr. $\pm 20\%$ or less.

In order to use this opportunity a probe was constructed which allows to measure the following quantities:

1. The temperature difference in lake bottoms in a depth between about 1,9 and 3,5 m, with an error smaller than $\pm 0,002$ degree.
2. The soil temperature with the error $\pm 0,05$ degree.
3. The heat conductivity of the lakes sediments with the estimated error $\pm 5\%$.
4. The inclination of the probe to ± 1 degree, and the water depth with an accuracy of ± 2 m.

The weight of the probe is 25 kg.

A check of the method in three different lakes at the northern border of the Alps yielded for the heat flow the plausible values of about $2 \mu\text{cal}/\text{cm}^2\text{s}$.

¹⁾ Dr. R. HÄNEL, Niedersächsisches Landesamt für Bodenforschung, 3 Hannover-Buchholz, Stilleweg 2.

1. Einleitung

Die Dichte des terrestrischen Wärmestromes ist die Wärmemenge, die pro Zeiteinheit und pro Flächeneinheit aus dem tiefen Untergrund zur Erdoberfläche strömt. Sie wird gewöhnlich ermittelt als Produkt aus dem Gradienten des Temperaturfeldes im Gebirge und der Wärmeleitfähigkeit des Gesteins, gemessen im Bereich des Temperaturgradienten.

Am Boden tiefer Ozeane sind solche Messungen prinzipiell einfach, weil hier das Temperaturfeld über sehr lange Zeiten konstant bleibt. Die günstigsten Voraussetzungen sind der Grund dafür, daß es gegenwärtig sehr viel mehr Wärmestromdichtewerte aus Tiefseeböden gibt als von Kontinenten.

Auf den Kontinenten bereitet nämlich die Bestimmung des ungestörten Temperaturgradienten Schwierigkeiten, da in der Nähe der Erdoberfläche die jahreszeitlichen Temperaturschwankungen der Luft das Temperaturfeld bis in 30 m Tiefe beeinflussen. Man ist daher auf Messungen in Bohrungen, Tunnelbauten oder Bergwerken angewiesen. Oft ist das Temperaturfeld sogar noch in über 100 m Tiefe durch Grundwasserbewegungen gestört. Hinderlich ist ferner, daß Bohrungen allein für Temperaturmessungen zu teuer sind.

Zwar wurden auch geothermische Untersuchungen in den Böden von Binnenseen bekannt; diese stellen aber nur eine gelegentliche Anwendung der für Messungen in tiefen Ozeanen entwickelten Methoden und Geräte dar [DIMENT and WERRE 1965, LUBIMOV and SHELYAGIN 1966, STEINHART and HART 1965].

Im folgenden wird über spezielle Untersuchungen zur Bestimmung der terrestrischen Wärmestromdichte in Binnenseen berichtet, die geeignet sind, das Netz der Meßpunkte auf den Kontinenten zu verdichten. Eine ausführliche Beschreibung der Methode kann der Arbeit von HÄNEL [1968] entnommen werden.

2. Die Binnenseesonde

Da auf Binnenseen oft nur kleine Boote zur Verfügung stehen, müssen die Sonde und die dazugehörigen Meßapparaturen leicht und handlich sein. Unter diesem Gesichtspunkt wurde die in Abb. 1 gezeigte Sonde gebaut. Sie wiegt 25 kg und die gesamte Meßeinrichtung 200 kg. Die Meßeinrichtung besteht im wesentlichen aus der Sonde, dem elektrischen selbsttragenden Kabel mit Motorwinde, dem Meßkasten mit den elektrischen Schaltungen, einem 12-V-Akkumulator, einer Stoppuhr und einer Boje.

Aus Versuchen im Seeburger See bei Göttingen und im Starnberger See geht hervor, daß diese Sonde, wenn sie 5 m über Grund von ihrem Halteseil gelöst wird und „frei“ fallen kann, mit ihrer Spitze ca. 3,5 m tief in die Seeablagerungen eindringt. Da erfahrungsgemäß in natürlichen, tiefen Seen die Ausbildung der Sedimente ähnlich ist, ist auch in anderen Seen eine Eindringtiefe von ca. 3,5 m zu erwarten.

Zwecks Bestimmung der Sondenposition wird im Sondenkopf die Wassertiefe mit einer Druckdose und die Neigung gegen das Lot mit einem Neigungsmesser gemessen.

Die Eindringtiefe in den Seeboden wird kontrolliert durch zwei parallele Stäbe, die dem Sondenkopf aufgesetzt sind. Den Glühbirnen des einen Stabes stehen Fotozellen des anderen Stabes gegenüber; das zwischen die Stäbe eindringende Material löscht eine entsprechende Anzahl dieser Lichtstrecken.

Mit der Sonde werden folgende Messungen ausgeführt:

2.1 Temperaturmessung

Die Temperatur wird mit einem Thermistor gemessen, der in der Mitte des Sondenstabes eingebaut ist. Als Meßschaltung dient die WHEATSTONESche Brücke, die mit Hilfe eines Potentiometers abgeglichen wird. Die gesamte Meßanordnung wurde mit einem geeichten Quecksilberthermometer kalibriert. Dabei ist zu beachten, daß einerseits die gewünschte Meßgenauigkeit durch eine Mindestspannung U_{\min} garantiert wird und andererseits der Leistungsabfall im Thermistor so klein bleibt, daß die gewünschte Meßgenauigkeit nicht durch Selbstaufheizung infolge Überschreitung einer maximalen Spannung U_{\max} gefährdet wird. Mithin gilt für die anzulegende Brückenspannung U

$$\frac{4 \delta U}{\beta \delta T} \leq U \leq 2 \sqrt{N R_x \delta T} . \quad (1)$$

Dabei bedeuten:

δU [V]	Anzeigempfindlichkeit des Brückenvoltmeters,
β [%/grad]	Temperaturkoeffizient des Thermistors,
δT [grad]	gewünschte Meßgenauigkeit,
N [Watt/grad]	Leistung, bei der sich ein Thermistor in 25 grad warmer Luft um 1 grad aufheizt (Firmenangabe),
R_x [Ω]	Thermistorwiderstand.

Die Meßgenauigkeit der gewählten Schaltung beträgt $\pm 0,05$ grad.

Die links stehende Minimalspannung ergibt sich aus den für eine halbsymmetrische Brücke geltenden Gesetzen. Die rechts angeschriebene Maximalspannung folgt fast unmittelbar aus der Bedeutung der Größe N . Wichtig ist, daß die Maximalspannung tatsächlich größer als die Minimalspannung ist.

2.2 Temperaturdifferenzmessung

Zur Bestimmung des Temperaturgradienten wird die Temperaturdifferenz über eine Distanz von ca. 160 cm gemessen. Als Meßelemente dienen zwei Thermistoren $R_x^{(1)}$ und $R_x^{(2)}$, die je in einem Brückenweig liegen. Ein an den Thermistoren auftretender Temperaturunterschied wird durch Kompensation der Brücke gemessen.

Im Bereich der angestrebten Genauigkeit von $\pm 0,002$ grad sind identische Thermistoren weder bezüglich des Widerstandes noch des Temperaturkoeffizienten erhältlich. Die Kalibrierung dieser Meßanordnung mußte daher so vorgenommen werden, daß

aus entsprechenden Meßreihen durch eine Ausgleichsrechnung mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate eine bestmögliche Kurvenschar ermittelt wurde.

Sowohl bei der Temperaturmessung als auch bei der Temperaturdifferenzmessung werden künstlich gealterte Thermistoren von $100\text{ k}\Omega$ verwendet.

2.3 Wärmeleitfähigkeitsmessung in situ

Die Theorie der Wärmeleitfähigkeitsmessung in situ wird unter anderem von BUETTNER [1955] und LEE [1965] ausführlich beschrieben. Mit großem Erfolg wird das Prinzip der Nadelsonde angewendet. Darunter ist eine unendlich lange linienförmige oder zylinderförmige Wärmequelle zu verstehen. Die Bedingung der unendlich langen

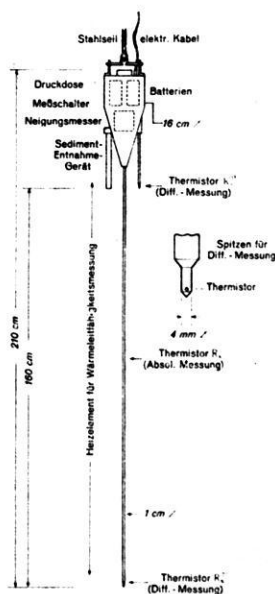


Abb. 1: Schematische Darstellung der Binnenseesonde.

Schematic representation of the lake probe.

Wärmequelle wird erfüllt, wenn der Durchmesser der Wärmequelle kleiner als $1/30$ der Länge ist [BLACKWELL 1956], und wenn der zeitliche Verlauf der Temperatur, aus dem dann die Wärmeleitfähigkeit des Sediments bestimmt wird, in der Mitte der Nadelsonde gemessen wird.

Die Gerätekonstante des als Zylinderquelle verwendeten Sondenstabes (Abb. 1) wurde nach einem Verfahren von BUETTNER errechnet. Die so erhaltene Berechnungsformel für die Wärmeleitfähigkeit wurde anschließend durch Eichmessungen in Paraffin überprüft. Die Wärmeleitfähigkeit des verwendeten Paraffins war zu diesem Zweck

mit einer von CREUTZBURG [1964] beschriebenen Apparatur gemessen worden. Der Vergleich ergab einen Unterschied von 6%, der vermutlich auf zu starke Vereinfachungen bei der Berechnung nach BUETTNER beruht.

In der Praxis muß etwa 10 Minuten lang geheizt werden. Man liest in regelmäßigen Zeitabständen die Temperatur ab und trägt sie in linearem Maßstab über einer logarithmischen Zeitskala auf. Die aufeinanderfolgenden Punkte liegen nach einer kurzen Einlaufzeit auf einer Geraden. Man entnimmt über einer Dekade der Zeitskala die Temperaturdifferenz ΔT_λ und erhält daraus die Wärmeleitfähigkeit

$$\lambda = 0,133 \frac{I^2}{\Delta T_\lambda} \text{ (cal/cm s grad)}, \quad (2)$$

wobei I der Heizstrom in Ampere ist. In dem Faktor 0,133 sind die Gerätekonstante und der Widerstand des Heizdrahtes enthalten. Der Fehler dieses Verfahrens beträgt ca. $\pm 5\%$. Ein Beispiel für eine solche Messung ist in Abb. 2 dargestellt. Man sieht, daß in der Tat die Temperaturdifferenz praktisch proportional zum Logarithmus der Zeit verläuft.

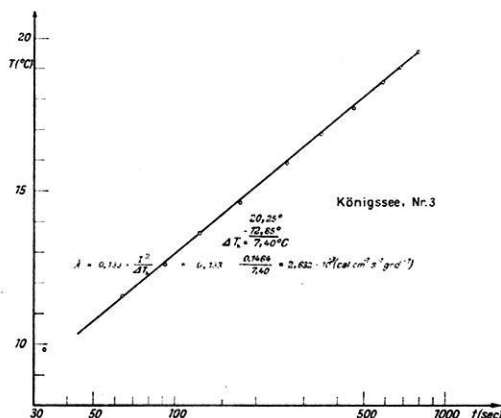


Abb. 2: Beispiel für eine Messung zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit in situ.

Example for a measurement for the determination of the conductivity in situ.

3. Korrekturen für die Auswertung der Meßergebnisse

3.1 Wassertemperaturgangkorrektur

Bei geothermischen Messungen in Binnenseen muß der für die terrestrische Wärmestromdichte repräsentative Temperaturgradient unter einer Wasserbedeckung bestimmt werden, die so gering ist, daß sich der jahreszeitliche Temperaturgang der Luft noch auf das Temperaturfeld im Seeboden auswirken kann.

Um diese Auswirkung abschätzen zu können, wurde ausgegangen von dem Temperaturverlauf in 50 m, 100 m und 200 m Wassertiefe. Entsprechende Beobachtungswerte wurden den Arbeiten von BURZ [1951], FOREL [1893], KÜHL [1928] und WACHTER [1959] entnommen und zum Teil durch geringfügige Interpolation entsprechend den angegebenen Temperaturtabellen vervollständigt (Abb. 3). Durch visuelle Mittelung wurden die stark ausgezogenen Temperaturkurven gewonnen und in eine endliche trigonometrische Reihe bis zur 11. Ordnung entwickelt. Das hierdurch im Untergrund verursachte zeitabhängige Temperaturfeld kann daraus bei Annahme reiner Wärmeleitung berechnet werden [CARSLAW und JAEGER 1959].

Die hier allein interessierende Temperaturdifferenz zwischen den Tiefen $z_2 = 3,5$ m und $z_1 = 1,9$ m, die von den Temperaturmeßstellen der Sonde normalerweise eingenommen werden, geteilt durch deren Abstand 1,6 m ist als Korrektur der Gradientenmessung ($\text{grad } T_k$) für verschiedene Wassertiefen H in Abb. 4 dargestellt. Der schraf-

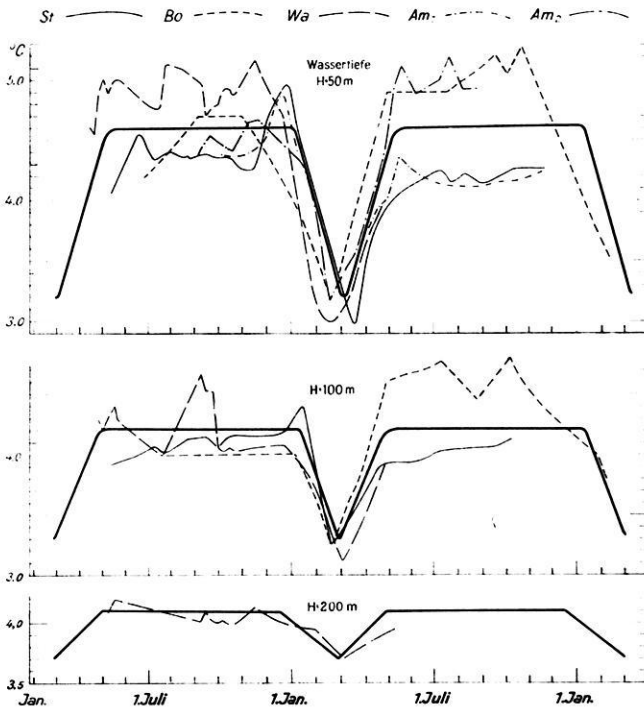


Abb. 3: Temperaturvariationen in Binnenseen in verschiedenen Wassertiefen H . Die stark ausgezogenen Linien sind durch visuelle Mittelung der Meßkurven gewonnen. St = Starnberger See, Wa = Walchensee, Bo = Bodensee, Am = Ammersee.

Variation of temperature in lakes with different water depths H . The thick lines are the visual means of the curves representing measured values.

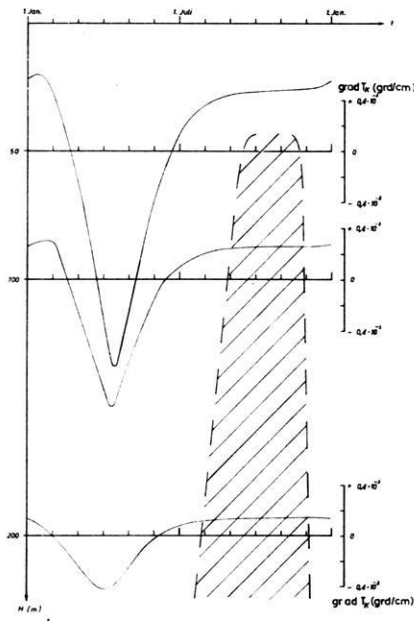


Abb. 4: Variationen der Korrekturgröße $\text{grad } T_k$ für die Tiefen $z_1 = 1,9 \text{ m}$, $z_2 = 3,5 \text{ m}$ in verschiedenen Wassertiefen H . In dem schraffierten Zeitintervall beträgt die Unsicherheit der Korrektur weniger als 20% des ungestörten Temperaturgradienten.

Variation of $\text{grad } T_k$ for the depths $z_1 = 1,9 \text{ m}$, $z_2 = 3,5 \text{ m}$ in different water depths H . In the hatched time interval inaccuracy of the correction is less than 20% of the normal temperature gradient.

fierte Zeitbereich im Herbst eignet sich offenbar am besten für die Messungen; zu anderen Jahreszeiten kann die Korrektur $\text{grad } T_k$ nur dann berechnet werden, wenn der Temperaturgang des Wassers über der Meßstelle bekannt ist, da bereits eine geringe Verschiebung des tatsächlichen Temperaturverlaufs (s. Abb. 3) einen großen Einfluß auf $\text{grad } T_k$ ausübt. In Wassertiefen kleiner als 50 m können Werte für $\text{grad } T_k$ nur mit Hilfe von fortlaufenden Temperaturregistrierungen in Meßpunktnähe erhalten werden. Bei Wassertiefen zwischen 50 m und 100 m müssen gegebenenfalls die Wasserzu- und -abflüsse sowie die Störungen im See beachtet werden.

Der Fehler, der durch die von der visuell gemittelten Kurve abweichenden Temperaturen entsteht und durch die schwankende Eindringtiefe der Sonde, wird für 50 m Wassertiefe auf ca. 20% geschätzt. Er wird mit zunehmender Tiefe kleiner.

3.2 Topographiekorrektur

In Abb. 5 ist der Einfluß eines Sees auf den Verlauf der Geoisothermen schematisch dargestellt. Man sieht, daß die Geoisothermen unterhalb des Seebodens gedrängt

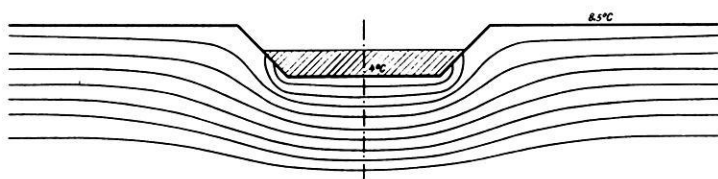


Abb. 5: Flächen gleicher Temperatur in einem schematischen Profil eines Sees.

Planes of equal temperature in a schematic profile of a lake.

werden. Ein im Sediment gemessener Temperaturgradient wird also stets größer sein als ein im ungestörten, ebenen Gelände gemessener Gradient. Die Störung wird um so größer, je tiefer und schmaler der See ist.

Für die topographischen Korrekturen wurde die Form der Seen durch entsprechende längssymmetrische oder rotationssymmetrische Formen angenähert und nur Punkte nahe der Seemitte betrachtet.

Das stationäre Temperaturfeld unter und neben einem See genügt der LAPLACESchen Gleichung. Im Falle eines achsialsymmetrischen Sees hat man:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

Bei rotationssymmetrischen Formen gilt:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{\partial T}{r \partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (4)$$

Darin bedeuten:

T Temperatur,

x horizontale Koordinate, senkrecht zur Symmetrieachse,

z Vertikalkoordinate,

r Radialkoordinate.

Die Randbedingungen zu (3) lauten folgendermaßen (Bezeichnungen siehe Abb. 6):

$$\left. \begin{array}{l} \text{In der Fläche} \quad x \geq x_2, z = 0 \\ \text{ist} \quad T = T_1 \quad (= \text{mittlere Jahrestemperatur an der Erdoberfläche}). \\ \text{In} \quad x \leq x_1, z = z_1 \\ \text{ist} \quad T = T_2 \quad (= \text{mittlere Jahrestemperatur am Boden des Sees}). \\ \text{In} \quad x_1 \leq x \leq x_2, z = -z_1(x - x_2)/(x_2 - x_1) \\ \text{ist} \quad T_2 \leq T \leq T = T_1, \end{array} \right\} (5)$$

wobei T entsprechend den Temperaturbedingungen des zu untersuchenden Sees gewählt wird.

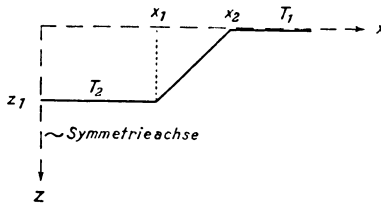


Abb. 6: Zur Berechnung des Temperaturfeldes in der Umgebung eines Sees.

Determination of the temperature field in the neighbourhood of a lake.

In der Symmetrieebene $x = 0$ gilt überall:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

Mit wachsendem Abstand von der Störung (See) nähert sich die Temperatur ihrem ungestörten Wert:

für $\sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty$

wird $T = T_1 + g \cdot z,$

wobei g der ungestörte Temperaturgradient ist. Für den rotationssymmetrischen Fall wird in die Randbedingungen und in die Symmetriebedingungen statt x die Größe r eingesetzt.

Zur numerischen Lösung dieses Problems wurde ein Verfahren von COLLATZ [1955] in der Form benutzt, wie es auch MUNDY [1964] auf Probleme der Wärmeleitung angewandt hat. Dabei werden die Temperaturen in den Eckpunkten eines Quadratnetzes (Zähler $i \parallel x, j \parallel y$) iterativ so bestimmt, daß sie den jeweils gegebenen Differentialgleichungen angenähert genügen. Zu diesem Zweck werden, ausgehend vom Wert $T_{i,j}$ in (i, j) , die Werte in den benachbarten Gitterpunkten als TAYLOR-Entwicklung dargestellt. Es ist nämlich:

$$\left. \begin{aligned} T_{i+k,j} &= T_{i,j} + khT'_{i,j} + \frac{(kh)^2}{2!} T''_{i,j} + \frac{(kh)^3}{3!} T'''_{i,j} + \frac{(kh)^4}{4!} T^{(4)}_{i,j} + D_{i,j}^{(5)} \\ T_{i,j+l} &= T_{i,j} + lhT^{(')}_{i,j} + \frac{(lh)^2}{2!} T^{(2)}_{i,j} + \frac{(lh)^3}{3!} T^{(3)}_{i,j} + \frac{(lh)^4}{4!} T^{(4)}_{i,j} + E_{i,j}^{(5)} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

kh und lh sind die mit den Koordinaten x bzw. y kommensurablen Abstände des Aufpunktes von den jeweils betrachteten Nachbarpunkten. Die Unbekannten sind hier die 1. bis 4. Ableitungen der Funktion T nach x und y , gekennzeichnet durch hochgesetzte Striche bzw. Striche in Klammern, insgesamt also 8 Unbekannte. Man stellt

nun diese Gleichungen für die 8 in der Umgebung von i, j liegenden Maschenpunkte auf, und zwar für $k = -2, -1, 1, 2, l = 0$ und $l = -2, -1, 1, 2, k = 0$ und erhält so ein inhomogenes Gleichungssystem, aus dem man insbesondere die in Gleichung (6) vorkommenden 2. Ableitungen bestimmen kann.

Auf diese Weise erhält man je einen Ausdruck für $\partial^2 T / \partial x^2$ und $\partial^2 T / \partial y^2$, in Form einer bewichteten Summe der Werte $T_{i+k, j}$ bzw. $T_{i, j+l}$ im Intervall:

$$-2 \leq k \leq +2, \quad l = 0$$

$$-2 \leq l \leq +2, \quad k = 0.$$

Diese Ausdrücke in die Potentialgleichung (4) eingesetzt führen zu:

$$T_{i, j} = \frac{1}{60} (-T_{i-2, j} + 16 T_{i-1, j} + 16 T_{i+1, j} - T_{i+2, j} - T_{i, j-2} + 16 T_{i, j-1} \\ + 16 T_{i, j+1} - T_{i, j+2} + \bar{D}_{i, j}^{(5)}).$$

Da das Restglied in der weiteren Rechnung nicht mitgeführt werden soll, wird anstelle von $T_{i, j}$ die Näherungsfunktion $V_{i, j}$ verwendet und man erhält:

$$V_{i, j} = \frac{1}{60} (16(V_{i\pm 1} + V_{i, j\pm 1}) - V_{i\pm 2} - V_{i, j\pm 2}) \quad (7)$$

Hierin ist $V_{i\pm 1, j} = V_{i+1, j} + V_{i-1, j}$ usw.

Voraussetzung dafür ist, daß das Restglied vernachlässigt werden kann, ist offenbar, daß die Maschenweite h klein genug gewählt wird.

Zur Bestimmung der Näherungswerte $V_{i, j}$ unmittelbar unterhalb des Seebodens und der Erdoberfläche wird eine einseitig unsymmetrische Umgebung von i, j in Betracht gezogen:

$$-2 \leq k \leq +2, \quad l = 0$$

$$-1 \leq l \leq +3, \quad k = 0.$$

Analog zu den Ausführungen oben erhält man:

$$V_{i, j} = \frac{1}{50} (-V_{i-2, j} + 16 V_{i-1, j} + 16 V_{i+1, j} - V_{i+2, j} + 11 V_{i, j-1} + 6 V_{i, j+1} \\ + 4 V_{i, j+2} - V_{i, j+3}). \quad (8)$$

Für die Eckpunkte ist eine zweiseitig unsymmetrische Umgebung zu verwenden. Mit:

$$-1 \leq k \leq +3, \quad l=0$$

erhält man:

$$-1 \leq l \leq +3, \quad k=0$$

$$V_{i,j} = \frac{1}{40} (11 V_{i-1,j} + 6 V_{i+1,j} + 4 V_{i+2,j} - V_{i+3,j} + 11 V_{i,j-1} + 6 V_{i,j+1} + 4 V_{i,j+2} - V_{i,j+3}). \quad (9)$$

Ähnlich findet man mit Hilfe der Gleichung (4) für die rotationssymmetrischen Seen:

$$V_{i,j} = \frac{1}{60} \left[- \left(1 - \frac{1}{r_0} \right) V_{i-2,j} + 16 \left(1 - \frac{1}{2r_0} \right) V_{i-1,j} + 16 \left(1 + \frac{1}{2r_0} \right) V_{i+1,j} - \left(1 + \frac{1}{r_0} \right) V_{i+2,j} - V_{i,j-2} + 16 V_{i,j-1} + 16 V_{i,j+1} - V_{i,j+2} \right] \quad (10)$$

für die einseitig unsymmetrische Umgebung:

$$V_{i,j} = \frac{1}{50} \left[- \left(1 - \frac{1}{r_0} \right) V_{i-2,j} + 16 \left(1 - \frac{1}{2r_0} \right) V_{i-1,j} + 16 \left(1 + \frac{1}{2r_0} \right) V_{i+1,j} - \left(1 + \frac{1}{r_0} \right) V_{i+2,j} + 11 V_{i,j-1} + 6 V_{i,j+1} + 4 V_{i,j+2} - V_{i,j+3} \right] \quad (11)$$

und für die zweiseitig unsymmetrische Umgebung:

$$V_{i,j} = \frac{1}{40 \left(1 + \frac{1}{4r_0} \right)} \left[11 \left(1 - \frac{3}{11r_0} \right) V_{i-1,j} + 6 \left(1 + \frac{3}{r_0} \right) V_{i+1,j} + 4 \left(1 - \frac{3}{2r_0} \right) V_{i+2,j} - \left(1 - \frac{1}{r_0} \right) V_{i+3,j} + 11 V_{i,j-1} + 6 V_{i,j+1} + 4 V_{i,j+2} - V_{i,j+3} \right]. \quad \dots (12)$$

Bei der praktischen Berechnung werden in die Gitterpunkte an der Erdoberfläche außerhalb des Sees die Jahresdurchschnittswerte eingetragen (Lufttemperatur aus dem Klimaatlas + 1 grd; KÖNIGSBERGER und MÜHLFELD [1911]). Am Seeboden wird zwischen dem gemessenen Wert und dem Seeufer gemäß (5) interpoliert. Nun setzt man

in dem Vertikalprofil, das am weitesten vom See entfernt liegt¹⁾, zunächst den normalen Temperaturgradienten (in Mitteleuropa z. B. 3 grd/100 m) an; in die übrigen Gitterpunkte trägt man geschätzte Temperaturwerte ein. Diese Werte justiert man nun mit Hilfe der Gleichungen (7), (8), (9) bzw. (10), (11), (12), wobei die Randwerte an der Oberfläche einschließlich Seeboden und in dem am weitesten entfernten Randprofil fest bleiben. Man erhält so im Meßpunkt, der gewöhnlich in der Mitte des Sees liegt, einen gerechneten Temperaturgradienten.

Für den Vergleich dieses gerechneten Temperaturgradienten mit dem im Seesediment gemessenen wird vorausgesetzt, daß der Wärmestrom unter dem Seeboden quellenfrei ist. Da im Modell die Wärmeleitfähigkeit $6 \cdot 10^{-3}$ cal/cm s grd (empirischer Mittelwert der Krustengesteine) angesetzt wird, während im Seesediment in der Umgebung der Sonde Werte um $2 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 10^{-3}$ cal/cm s grd gemessen werden, ist der gerechnete Gradient mit dem Verhältnis dieser beiden Werte zu multiplizieren, um mit dem gemessenen vergleichbar zu sein.

Durch passende Variation des Temperaturgradienten in dem Randprofil wird die im allgemeinen zunächst vorhandene Differenz zwischen dem gerechneten und dem gemessenen (und wegen der Zeitvariationen korrigierten) Gradienten im Meßpunkt iterativ auf einen Wert kleiner als 0,1 grd/100 m gebracht.

Der entsprechende, im letzten Rechengang angesetzte Gradient im Randprofil ist das gesuchte Ergebnis für die Korrekturrechnung.

Der Fehler dieses Verfahrens wird auf $\pm 5\%$ geschätzt.

3.3 Weitere Korrekturbetrachtungen

a) Sedimentationskorrektur: Zur Bestimmung der Sedimentationskorrektur geben von HERZEN and UYEDA [1963] eine Berechnungsformel an, die im wesentlichen die Sedimentationsgeschwindigkeit im Meßpunkt als bekannt voraussetzt. Sie wird in den vermessenen Seen auf 0,5 mm/Jahr geschätzt, woraus man eine Korrektur von +2% errechnet. Dieser Wert wurde bei allen Messungen berücksichtigt.

b) Migration des Wassers: Hierzu werden Korrekturverfahren von LEE [1965] angegeben. Unter plausiblen Annahmen errechnet man einen Einfluß von $< 0,1\%$, der offenbar vernachlässigt werden kann.

c) Wärmeerzeugung durch Zersetzung von tierischen und pflanzlichen Stoffen: Die Umsetzung der organischen Bestandteile erfolgt zum größten Teil im Kontakt mit sauerstoffreichem Wasser in den ersten 1—3 Jahren nach der Sedimentation. Darunter folgt die anaerobe Zone, in der nur noch geringe Umsetzungen stattfinden. Man kann abschätzen, daß der Einfluß der organischen Zersetzung auf die zu bestimmende Wärmestromdichte sicher weniger als 1% ausmacht.

¹⁾ Dieses Randprofil soll für die numerische Rechnung die ungestörten Verhältnisse unendlich großer Entfernung repräsentieren. Sein Abstand ist durch Probieren zu ermitteln.

4. Wärmestromdichtemessungen in Binnenseen

Es wird hier über Messungen im Starnberger See, Walchensee und Königssee berichtet. Aus Abb. 7 ist die Lage der Meßpunkte zu ersehen. Am häufigsten wurde im Starnberger See gemessen. Das Gerät wurde hier erprobt und die Methode überprüft.

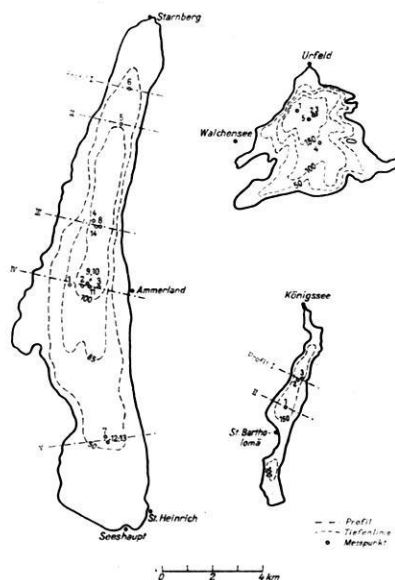


Abb. 7: Meßpunkte im Starnberger See, Walchensee und Königssee sowie Lage der für die topographische Korrektur benutzten Profile (die relative Lage der Seen entspricht nicht der Natur).

Measurements in the Starnberger See, Walchensee and Königssee and profiles of topographic correction (the relative position of the lakes is not real).

4.1 Die topographische Korrektur

Zur Berechnung der topographischen Korrektur wurden der Starnberger See und der Königssee durch längssymmetrische Formen angenähert. Die repräsentativen Profile verlaufen senkrecht zur Längsachse durch die Meßpunkte. Beim Starnberger See wurden diese Profile sowohl durch ein einfaches als auch durch ein stufenförmiges Modell angenähert. Da aber der Unterschied in der Korrekturgröße nur ca. 2% beträgt, wird nachfolgend nur das einfache Modell studiert.

Der Walchensee wurde durch eine rotationssymmetrische Form angenähert, wobei die mittlere Reliefhöhe bis 3 km vom Seeufer bestimmt wurde.

4.2 Diskussion der Meßwerte

In den Tabellen 1—3 sind die Meß- und Auswertergebnisse zusammengefaßt. Dabei haben die Spalten nacheinander folgende Bedeutung:

Meßpunktbezeichnung entsprechend der Abb. 7, Datum, Meßtiefe, Temperatur, gemessen in der Mitte des Sondenstabes, Neigung der Sonde, Wärmeleitfähigkeit des Sediments, gemessener Temperaturgradient grad T auf 1 cm bezogen, Wassertemperaturgangkorrektur grad T_k . In Spalte 9 ist der Temperaturgradient grad T_{stat} (= grad T + grad T_k + Sedimentationskorrektur + Neigungskorrektur) eingetragen. In Klammern wird angegeben, wieviel Prozent grad T_{stat} gemäß der topographischen Korrektur beträgt. Die Spalte 10 gibt den mit allen Korrekturen versehenen Temperaturgradienten grad ${}_k T$ wieder und Spalte 11 die dazugehörige Wärmestromdichte.

Das Mittel aller Werte in den einzelnen Seen beträgt:

Sarnberger See	$q = 2,08 \mu\text{cal/cm}^2\text{s}$
Walchensee	$q = 1,81 \mu\text{cal/cm}^2\text{s}$
Königssee	$q = 1,82 \mu\text{cal/cm}^2\text{s}$

Im Sarnberger See und Walchensee verursacht die Topographie des Seegrundes und die Umgebung der Seen eine Erhöhung der Wärmestromdichte um den Faktor 1,15—1,4 (siehe Tabelle 1—3). Im Königssee dagegen verursachen die hoch aufragenden Berge in der Umgebung des Sees eine Erhöhung der Wärmestromdichte um den Faktor 2,5. An diesem Beispiel wird die Notwendigkeit der topographischen Korrektur für Seen im Gebirge besonders deutlich.

Da im Sarnberger See mehrere Messungen erfolgten, können die Werte nach verschiedenen Gesichtspunkten zusammengefaßt werden, wobei der mittlere Fehler aus den Abweichungen der Einzelwerte vom Mittelwert der bekannten Beziehung berechnet wurde:

Meßpunkte 2—14	$q = (2,08 \pm 0,08) \mu\text{cal/cm}^2\text{s}$
1966	$q = (2,18 \pm 0,11) \mu\text{cal/cm}^2\text{s}$
1967	$q = (1,96 \pm 0,11) \mu\text{cal/cm}^2\text{s}$
Nord (Punkte 5, 6)	$q = 2,37 \mu\text{cal/cm}^2\text{s}$
Mitte (2—4, 8—11, 14)	$q = (2,06 \pm 0,05) \mu\text{cal/cm}^2\text{s}$
Süd (Punkte 7, 12, 13)	$q = 1,95 \mu\text{cal/cm}^2\text{s}$
Wassertiefe $H < 100$ m (Punkte 6, 7, 12, 13)	$q = (2,10 \pm 0,30) \mu\text{cal/cm}^2\text{s}$
Wassertiefe $H \geq 100$ m (Punkte 2—5, 8—11, 14)	$q = (2,07 \pm 0,05) \mu\text{cal/cm}^2\text{s}$

Man erkennt, daß die mittleren Fehler der Mittelwerte stets kleiner als 20% sind. Der systematische Fehler aus dem Jahresgang der Lufttemperatur kann erst nach Messungen über mehrere Jahre ermittelt werden. Er deutet sich aber bereits in den Unterschieden der Ergebnisse von 1966 und 1967 an.

Tabelle 1: Starnberger See

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Lfd. Nr.	Datum	Tiefe (m)	absolute Temperatur (°C)	Neigung (Grad)	Neigung $\lambda \cdot 10^3$ (cal/cm s grad)	$\text{grad } T \cdot 10^3$ (grad/cm)	$\text{grad } T_k \cdot 10^3$ (grad/cm)	$\text{grad } T_{\text{stat}} \cdot 10^3$ (grad/cm) einschließlich ΔT_k , Neigungs- und Sedimentationskorrektur	$\text{grad}_k T \cdot 10^3$ (grad/cm)	$q = \lambda \cdot \text{grad}_k T$ ($\mu\text{cal/cm}^2\text{s}$)
1	15. 9. 66	88	4,25	16	2,77	0,4309	—*	1,1344 (120%)	0,9453	1,93
2	27. 9. 66	107	4,15	18	2,04	0,8200	0,255	1,0686 (122%)	0,8759	1,98
3	28. 9. 66	104	4,15	16	2,26	0,7668	0,255	1,0800 (124%)	0,8710	1,97
4	29. 9. 66	115	4,15	36	2,26	0,6781	0,225	1,2456 (125%)	0,9965	2,15
5	30. 9. 66	100	4,25	8	2,16	0,9569	0,260	1,0362 (120%)	0,8635	2,59
6	30. 9. 66	76	4,30	4	3,00	0,7100	0,310	0,9685 (115%)	0,8422	2,56
7	1. 10. 66	60	4,40	5	3,04	0,5748	0,380	1,2154 (126%)	0,9646	2,11
8	12. 11. 66	115	4,15	5	2,19	0,9674	0,225	1,2467 (121%)	1,0303	2,22
9	27. 4. 67	108	4,02	3	2,16	1,9450	— 0,740	1,3513 (121%)	1,1168	2,30
10	28. 4. 67	110	4,01	2	2,06	2,0350	— 0,740	1,1530 (120%)	0,9608	1,87
11	8. 8. 67	116	4,05	2	1,95	0,9386	0,195	0,9258 (115%)	0,8050	1,66
12	9. 8. 67	57	4,22	4	2,07	0,5240	0,390	1,0198 (115%)	0,8868	1,62
13	9. 8. 67	57	4,26	4	1,82	0,6160	0,390	1,3827 (126%)	1,0974	2,06
14	9. 8. 67	117	3,96	2	1,88	1,1686	0,190			

*) Gradientenmessungen gestört

Tabelle 2: Walchensee

1	5. 11. 66	193	4,00	—	1,87	1,2020	0,145	1,3710 (138%)	0,9935	1,86
2	8. 11. 66	192	4,00	1	2,26	0,8212	0,145	0,9826 (134%)	0,7333	1,66
3	8. 11. 66	193	4,00	1	2,14	0,8100	0,145	0,9712 (134%)	0,7248	1,55
4	8. 11. 66	145	4,03	1	3,15	0,7675	0,180	0,9629 (127%)	0,7582	2,39
5	8. 11. 66	193	4,00	5	2,25	0,7650	0,145	0,9287 (131%)	0,7098	1,60

Tabelle 3: Königssee

1	10. 11. 66	177	4,80	2	2,71	1,2080	0,155	1,3879 (225%)	0,6168	1,67
2	10. 11. 66	188	4,80	1	2,60	1,6890	0,145	1,8678 (250%)	0,7471	1,94
3	10. 11. 66	188	4,80	2	2,63	1,7070	0,145	1,8872 (267%)	0,7068	1,86

4.3 Vergleich mit anderen Wärmestromdichten

In Abb. 8 sind in einer Karte die bisher gemessenen Wärmestromdichten eingetragen. Im einzelnen sind die Ergebnisse den Arbeiten folgender Autoren entnommen: CLARK [1961], CREUTZBURG [1964], HÄNEL [1966a, 1966b], HÜCKEL und KAPPELMEYER [1966], KAPPELMEYER [1966], KAPPELMEYER und HÄNEL [1967].



Abb. 8: Dichte des terrestrischen Wärmestromes in der Bundesrepublik Deutschland, Österreich und in der Schweiz.

- | | |
|--------------------|-------------------|
| ● Bergwerksmessung | ○ Bohrlochmessung |
| ♣ Tunnelmessung | + Seemessung |

Heat flow in Federal Republic of Germany, Austria and Switzerland.

- | | |
|----------------------|--------------------------|
| ● mine measurement | ○ drill hole measurement |
| ♣ tunnel measurement | + lake measurement |

Aufgrund der relativ wenigen Werte für dieses große Gebiet ist eine eindeutige Zunahme oder Abnahme der Wärmestromdichten in einer bestimmten Richtung nicht zu erkennen. Dabei muß beachtet werden, daß die hohen Werte in Salzdiapiren gemessen sind und die Verhältnisse ihrer Umgebung nicht repräsentieren. Die einzige deutlich ausgebildete Anomalie deutet sich in dem Wert $2,9 \mu\text{cal}/\text{cm}^2\text{s}$ bei Landau an. Die Binnenseewerte fügen sich gut in die bereits vorhandenen Werte im Bereich der Voralpen und Alpen ein.

Bemerkenswert ist, daß die Werte im Gebiet Starnberger See—Walchensee eine systematische Abnahme nach Süden anzuzeigen scheinen.

In 10—15 km Entfernung vom Königssee liegt ein Wert aus dem Salzbergwerk Berchtesgaden mit $0,8 \mu\text{cal}/\text{cm}^2\text{s}$ vor. Dieser Wert ist wesentlich kleiner als die im Königssee gemessene Wärmestromdichte. Wahrscheinlich ist der niedrige Wert durch das Alter und die damit verbundene starke Auskühlung des Bergwerks bedingt.

Danksagung

Zahlreiche Hinweise und fruchtbare Anregungen erhielt ich von Herrn Prof. Dr.-Ing. O. ROSENBACH, Herrn Dr. O. KAPPELMEYER, Herrn Prof. Dr. A. HAHN, Herrn Dr. E. MUNDRY und Herrn Dr. I. WENDT. Ihnen möchte ich hierfür danken. Schließlich sei noch auf die Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft hingewiesen, die durch die Bewilligung der erforderlichen Mittel die Untersuchungen ermöglichte. Die umfangreichen Korrekturrechnungen wurden im Deutschen Rechenzentrum in Darmstadt durchgeführt.

Literatur

- BLACKWELL, J. H.: The axial-flow error in the thermal-conductivity probe. *Can. J. Phys.* 34, 412—416, 1956
- BUETTNER, K.: Evaluation of soil heat conductivity with cylindrical test bodies. *Trans. Am. Geophys. Union* 36 (5), 831—837, 1955
- BURZ, J.: Der Wärmehaushalt des Ammersees. Naturschutzbund in Bayern e.V., München 1951
- CARSLAW, H. S., and J. C. JAEGER: *Conduction of heat in solids*. Clarendon Press, Oxford, 2. Aufl., 1959
- CLARK, S. P.: Heat flow in the Austrian Alps. *Geophys. J.* 6, 54—63, 1961
- COLLATZ, L.: *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*. 2. Aufl., Berlin/Göttingen/Heidelberg 1955
- CREUTZBURG, H.: Untersuchungen über den Wärmestrom der Erde in Westdeutschland. *Kali und Steinsalz*, 73—108, 1964
- DIMENT, W. H., and R. W. WERRE: Heat flux through the bottom of meromictic lake. *Trans. Am. Geophys. Union* 46 (7), 175—176, 1965

- FOREL, F. A.: Temperaturverhältnisse des Bodensees. Schriften d. Ver. f. Geschichte d. Bodensees, Lindau, 22, 1–25, 1893
- HÄNEL, R.: Temperaturmessungen im Bohrloch Singen. Bericht d. Nieders. Landesamtes f. Bodenforschung, Hannover, 1966a
- : Temperaturmessungen im Bohrloch Donaustetten (Ulm). Bericht d. Nieders. Landesamtes f. Bodenforschung, Hannover, 1966b
- : Untersuchungen zur Bestimmung der terrestrischen Wärmestromdichte in Binnenseen. Dissertation Clausthal, 1968
- HERZEN, R. P. VON, and S. UYEDA: Heat flow through the Eastern Pacific Floor. *J. Geophys. Res.* 68, 4230–4240, 1963
- HÜCKEL, B., and O. KAPPELMEYER: Geothermische Untersuchungen im Saarkarbon. *Z. deut. geol. Ges.* 117, 280–311, 1966
- KAPPELMEYER, O.: Bericht über die Bestimmung der ursprünglichen Gebirgstemperatur im Salzbergwerk Berchtesgaden. Bericht d. Nieders. Landesamtes f. Bodenforschung, Hannover, 1966
- KAPPELMEYER, O., and R. HÄNEL: Temperaturmessungen im Oberrheintal. Bericht d. Nieders. Landesamtes f. Bodenforschung, Hannover, 1967
- KÖNIGSBERGER, J., and MÜHLFELD, M.: Über Messungen der geothermischen Tiefenstufe, deren Technik und Verwertung zur geologischen Prognose und über neue Messungen in Mexiko. *Neues Jb. f. Mineral., Stuttgart, Beil.-Bd.* 31, 1911
- KÜHL, F.: Untersuchungen über Temperaturverhältnisse und Sichtigkeit im Walchensee und Kochelsee in den Jahren 1921–1923. *Arch. Hydrobiol., Suppl.* 6, Tab. 1, 57–95, 1928
- LEE, H. K.: Terrestrial heat flow. *Geoph. Monogr. No. 8*, Am. Geoph. Union Publ. 1288, Washington, 1965
- LUBIMOVA, E. A., and V. A. SHELYAGIN: Heat flow through the bottom of lake Baykal. *Doklady (USSR), Earth Science, Transl. by Am. Geol. Inst., Washington, Vol.* 171, 25–28, 1966
- MUNDRY, E.: Zur Berechnung der Gebirgstemperatur bei der Grubenbewetterung mit Anwendung zur Vorausbestimmung von Bohrlochtemperaturen. Dissertation Clausthal, 1964
- STEINHART, J. S.: A study of heat flow and thermal properties in Seneca Lake, New York. *Trans. Am. Geophys. Union* 46 (1), 175–176, 1965
- STEINHART, J. S., and S. R. HART: Terrestrial heat flow-measurements in lake bottoms. *Sci. Washington, Vol.* 149, No. 3691, 1499–1501, 1965
- WACHTER, H.: Würm- und Ammersee: Ein hydrographischer Vergleich. *Gewässer u. Abwässer* 6, 1–51, 1959