

Werk

Jahr: 1974

Kollektion: fid.geo

Signatur: 8 Z NAT 2148:40

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN1015067948_0040

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN1015067948_0040

LOG Id: LOG_0062

LOG Titel: Die Bestimmung der Transmissivität von Grundwasserleitern aus dem Einschwingverhalten des Brunnen-Grundwasserleitersystems

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN1015067948

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN1015067948>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=1015067948>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Die Bestimmung der Transmissivität von Grundwasserleitern aus dem Einschwingverhalten des Brunnen-Grundwasserleitersystems

I. Krauss

Institut für Meteorologie und Geophysik, Frankfurt/Main

Eingegangen am 6. Februar 1974

The Determination of the Transmissibility of Aquifers from the Transient Motion of the Well-Aquifer System

Abstract. The analysis of transient motion of the well-aquifer system is used to determine the transmissibility of the confined aquifer without pumping test.

The relations between the parameters of transient motion, damping coefficient and natural frequency, and the hydrological parameters transmissibility and storage coefficient and the well geometry has been derived.

The agreement of transmissibility computed from transient motion with the results of pumping tests for 3 wells is shown to be good.

Key words: Transmissibility — Pumping Test — Confined Aquifer — Pressure Head — Transient Motion — Damping.

Zusammenfassung. Berechnungen der Transmissivität aus dem Einschwingvorgang und die Auswertung von Pumpversuchen liefern in etwa die gleichen Ergebnisse. Man gewinnt durch die Messung des Einschwingvorgangs zusätzlich Informationen über die Tiefe des GL. Zudem lassen sich mit dieser Methode mehrere Grundwasserstockwerke trennen. Die Methode ist damit praktisch anwendbar. Ihr Vorzug gegenüber dem Pumpversuch liegt in der einfachen und schnellen Messung und Auswertung.

Für den aperiodisch gedämpften Einschwingvorgang muß der Vergleich mit Pumpversuchsergebnissen noch durchgeführt werden. Die abgeleiteten Beziehungen gelten jedoch grundsätzlich auch für große Dämpfungen bzw. kleine Durchlässigkeiten.

Nomenklatur

$C = r_w^2 \cdot \omega_w / T$	Dämpfungsfaktor	(dimensionslos)
E_s	Kompressionsmodul des Gesteins	(Masse/L Zeit ²)
E_w	Kompressionsmodul des Wassers	(Masse/L Zeit ²)
d	Mächtigkeit des Grundwasserleiters	(m)

F	Querschnittsfläche des Brunnens	(m ²)
$F^* = 1/\sqrt{1-2\beta^2}$	Multiplikationsfaktor	(dimensionslos)
g	Erdbeschleunigung	(m/sec ²)
GL	Grundwasserleiter	
$h = p/\rho \cdot g$	Druckhöhenänderung (Absenkung)	(m)
H_0	Höhe der Wassersäule = Druckhöhe	(m)
$H^* = H_0 \cdot \omega_w^2$	Höhenfaktor	(m/sec ²)
k	Permeabilität	(m/sec)
$K_0(\alpha)$	Kelvinfunktion = Zylinder- funktion 2. Art, 0. Ordnung	(dimensionslos)
$KR(\alpha)$	Real- und Imaginärteil } von K_0	(dimensionslos)
$KI(\alpha)$		
n	Porosität	(dimensionslos)
p_0	Druck am oberen Rand des GL	(kg/m sec ²)
p	Druckänderung im GL	(kg/m sec ²)
Q	Zufluß zum Brunnen	(m ³ /sec)
$Q_r = 1/(2\beta\sqrt{1-\beta^2})$	Resonanzamplitude = Verstärkungsfaktor	(dimensionslos)
r	Abstand vom Brunnenmittelpunkt	(m)
r_w	Brunnenradius	(m)
$S = \rho \cdot g \cdot n \cdot d/E_w/(1+E_w/nE_s)$	Speicherkoeffizient	(dimensionslos)
t	Zeit	(sec)
$T = k \cdot d$	Transmissivität	(m ² /sec)
\varkappa	Wasserspiegelbewegung im Brunnen	(cm)
\varkappa_0	Anfangsamplitude des Einschwingvorgangs $\beta < 1$	(cm)
$\tilde{\varkappa}_0$	Anfangsamplitude des Einschwingvorgangs $\beta > 1$	(cm)
$\hat{\varkappa}_0 = \varkappa_0(1-i \cdot \beta/\sqrt{1-\beta^2})$	kompl. Anfangsamplitude des Einschwingvorgangs $\beta < 1$	(cm)
$\alpha = [(-\beta+i\sqrt{1-\beta^2}) \cdot C \cdot S]^{\frac{1}{2}}$	Arg. der Kelvinfunktion; $\beta < 1$	(dimensionslos)
$\tilde{\alpha} = [(-\beta+\sqrt{\beta^2-1}) \cdot C \cdot S]^{\frac{1}{2}}$	Arg. der Kelvinfunktion; $\beta > 1$	(dimensionslos)
β	Dämpfungskoeffizient	(dimensionslos)
$\beta' = \beta \cdot \omega_w$	Dämpfung des Einschwingvorgangs	(sec ⁻¹)
$\gamma = \omega_w(-\beta+i\sqrt{1-\beta^2})$	kompl. Exponent des Einschwingvorgangs; $\beta < 1$	(sec ⁻¹)
$\tilde{\gamma} = \omega_w(-\beta+\sqrt{\beta^2-1})$	reeller Exponent des Einschwingvorgangs; $\beta > 1$	(sec ⁻¹)
ρ	Dichte des Wassers	(Masse/Volumen)
$\omega' = \omega_w\sqrt{1-\beta^2}$	Frequenz des Einschwingvorgangs	(sec ⁻¹)
$\omega_r = \omega_w\sqrt{1-2\beta^2}$	Resonanzfrequenz	(sec ⁻¹)
ω_w	Eigenfrequenz des Brunnens	(sec ⁻¹)

τ_r	Resonanzperiode	(sec)
τ_w	Eigenperiode	(sec)
$R,$ $\kappa,$ A, B }	Hilfsvariablen zur Lösung der Gleichung des Grundwasserflusses	

Einleitung

Die vielfältigen Methoden, die Transmissivität und damit die Ergiebigkeit von Grundwasserleitern, zu bestimmen, basieren auf der Auswertung von Pumpversuchen. Beim Pumpversuch wird aus einem Pumpbrunnen Wasser gefördert und die Absenkung und/oder der Wiederanstieg im Pumpbrunnen oder in Beobachtungsbrunnen in Abhängigkeit von der Fördermenge und der Zeit gemessen. Pumpversuche sind daher im allgemeinen recht aufwendig. Im folgenden soll eine Methode vorgeschlagen werden, die schnell und ohne besondere Kosten Anhaltspunkte für die Durchlässigkeit des (gespannten) Grundwasserleiters (im folg. GL genannt) liefert. Sie soll den Pumpversuch nicht ersetzen, sondern dann zur Anwendung kommen, wenn schnell Ergebnisse erzielt werden sollen. Gedacht ist an Messungen während des Bohrens oder die Feststellung, ob sich durch Sprengungen die Durchlässigkeit eines GL geändert hat.

Ausgegangen wird von folgenden Überlegungen: Die Antwort des Brunnen-GL-Systems auf seismische Wellen zeigt, daß das System in 1. Näherung durch eine Differentialgleichung 2. Ordnung beschrieben werden kann und ein schwingungsfähiges System ist (Schenk und Krauss, 1972).

Ein solches System kann neben erzwungenen Schwingungen (durch Erdbeben) auch freie Schwingungen ausführen. Verlauf und Dauer dieses Einschwingvorgangs hängen von der Dämpfung und Eigenfrequenz des Systems ab. Diese wiederum werden beim Brunnen-GL-System durch die Parameter des GL, Transmissivität und Speicherkoeffizient, und die Brunnengeometrie bestimmt. Die Ableitung der exakten Zusammenhänge, ermöglicht es, die GL-Parameter aus den leicht bestimmbar Parametern des Einschwingvorgangs zu berechnen.

Die Entwicklung und Anwendung dieser Methode der Durchlässigkeitsbestimmung erfordert folgende Schritte:

1. Ableitung der Beziehungen
Dämpfungskoeffizient $\beta = \beta(T, S, H_0, r_w, \dots)$ (*)
Brunneneigenfrequenz $\omega_w = \omega_w(T, S, H_0, r_w, \dots)$
2. Anregung und Messung des Einschwingvorgangs
3. Bestimmung von β und ω_w aus dem Einschwingvorgang
4. Berechnung der Transmissivität unter Benutzung der Beziehungen (*)

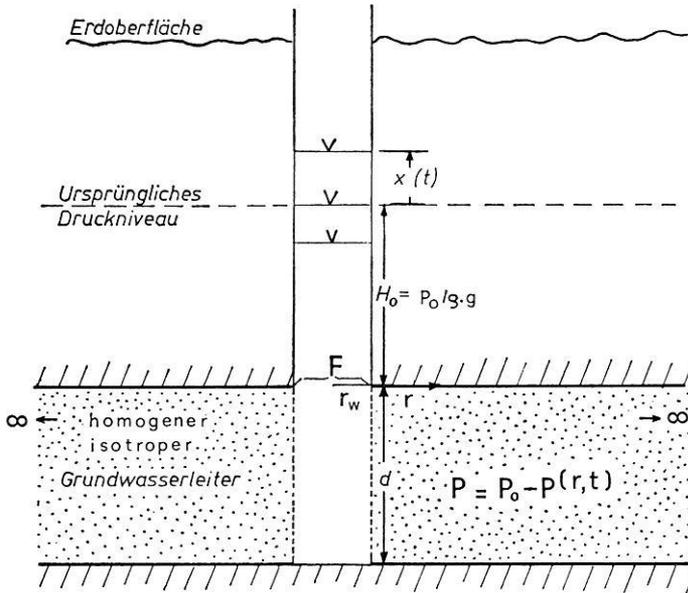


Abb. 1. Modell eines Brunnens im gespannten Grundwasserleiter. $x(t)$ = Einschwingung des Systems

Die Methode wird in diesen Schritten entwickelt und am Beispiel von 4 Probebrunnen praktisch angewendet. Für 3 Brunnen liegen Pumpversuchsergebnisse vor, so daß die Resultate überprüft werden können.

1. Ableitung der Beziehungen zwischen Dämpfung und Eigenfrequenz und den GL-Parametern

a) Modell

Ausgegangen wird von einem Brunnen in einem gespannten, nicht fließenden Grundwasserleiter (Abb. 1).

Der ideale gespannte GL besteht aus einem ausgedehnten permeablen Medium (homogen und isotrop), das mit Wasser gesättigt ist. Oben und unten ist der GL durch undurchlässige Schichten abgeschlossen. Die laterale Ausdehnung kann als Unendlich angesehen werden. Der Flüssigkeitsdruck im GL ist so groß, daß das Wasser in einem Brunnen bis über den GL ansteigt. Die Höhe der Wassersäule H_0 (Druckhöhe) ist dabei dem hydrostatischen Druck proportional (Bredhoeft, 1967).

Dieses Brunnen-GL-System ist schwingungsfähig und wird daher durch eine Schwingungsgleichung beschrieben:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\omega_w \frac{dx}{dt} + \omega_w^2 \cdot x = 0 \quad (1)$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung mit den Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \dot{x}(0) &= 0 \end{aligned}$$

liefert eine Form der Eigenschwingung des Systems und lautet:

$$x(t) = x_0 \frac{1}{s_2 - s_1} (s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}) \tag{2}$$

mit s_1, s_2 als Lösungen von $s^2 + 2\beta\omega_w s + \omega_w^2 = 0$ (Doetsch, 1961, S. 51).

Mit $\beta > 1$, $\beta' = \beta \cdot \omega_w$ und $\omega' = \omega_w \sqrt{1 - \beta^2}$ erhält man:

$$x(t) = x_0 e^{-\beta' t} (\cos \omega' t + \frac{\beta'}{\omega'} \sin \omega' t) \tag{3}$$

In komplexer Schreibweise:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{-\beta' t} \left(1 - i \frac{\beta'}{\omega'} \right) (\cos \omega' t + i \sin \omega' t) = \hat{x}_0 e^{(-\beta' + i\omega')t} = \hat{x}_0 e^{\gamma t} \\ \text{mit } \gamma &= -\beta' + i\omega' \text{ und } \hat{x}_0 = x_0 \left(1 - i \frac{\beta'}{\omega'} \right) \end{aligned} \tag{4}$$

Für $\beta > 1$ ergibt sich:

$$x(t) = x_0 e^{-\beta' t} \left(\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 1}}{2\sqrt{\beta^2 - 1}} e^{+\omega_w \sqrt{\beta^2 - 1} t} - \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 1}}{2\sqrt{\beta^2 - 1}} e^{-\omega_w \sqrt{\beta^2 - 1} t} \right) \tag{5}$$

Für $\beta \gg 1$ (hier genügt $\beta > 1.5$) kann $x(t)$ angenähert werden durch:

$$\begin{aligned} x(t) &\approx \hat{x}_0 e^{(-\beta\omega_w + \omega_w \sqrt{\beta^2 - 1})t} = \hat{x}_0 e^{\tilde{\gamma} t} \quad (\tilde{\gamma} \text{ reell}) \\ \text{mit } \tilde{\gamma} &= -\beta\omega_w + \omega_w \sqrt{\beta^2 - 1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Das Ziel ist es, β und ω_w in (1), bzw. (3) und (6) durch die Parameter des GL und die Brunnengeometrie auszudrücken.¹

b) Aufstellung einer Gleichgewichtsbeziehung

Das Brunnen-GL-System führte seine Eigenschwingung aus (Abb.1). Betrachtet man die Kräfte an der Fläche F , so läßt sich eine dynamische

¹ Der aperiodische Grenzfall $\beta = 1$ und der Bereich $1 = \beta \leq 1.5$ seien hier ausgeklammert, da die Ableitung für diese Fälle nicht in gleicher Form durchzuführen ist.

Gleichgewichtsbeziehung aufstellen. Es herrscht Gleichgewicht zwischen den Kräften im Brunnen und im GL.

$$\varrho \cdot F \left[\frac{d}{dt} \left((H_0 + x) \frac{dx}{dt} \right) + g (H_0 + x) \right] = F [p_0 - p(r, t)_{r_w}] \quad (7)$$

Der erste Term der linken Seite ist die Trägheitskraft und der zweite Term das Gewicht der Wassersäule.

Die rechte Seite setzt sich zusammen aus dem Normaldruck p_0 und einer Druckänderung $p(r, t)_{r_w}$, die im GL entsteht, wenn sich der Wasserspiegel im Brunnen ändert. Der zweite Term drückt damit die Rückkoppelung des variablen Wasserspiegels $x(t)$ auf den GL aus. Er hängt von der Entfernung r und der Zeit ab und ist an der Stelle $r = r_w$ zu nehmen.

Nach Differentiation und Linearisierung reduziert sich (7) zu

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{H_0} x = - \frac{g}{H_0} \cdot b(r, t)_{r_w} \quad (8)$$

mit Druckhöhenänderung $b(r, t) = p(r, t) / \varrho \cdot g$ und $H_0 = p_0 / \varrho \cdot g$.

In dieser Gleichung muß $b(r, t)$ berechnet werden.

c) Die Gleichung des Grundwasserflusses

Die Differentialgleichung für die Druckänderung b einer kompressiblen viskosen Flüssigkeit in einem elastischen gespannten GL lautet (De Wiest, 1966):

$$\Delta b(x, y, z, t) = \frac{S}{T} \cdot \frac{\partial b(x, y, z, t)}{\partial t} \quad (9)$$

(Typ Diffusionsgleichung)

Unter der Annahme, daß die Druckverteilung im GL zylindersymmetrisch zum Brunnen erfolgt, reduziert sich (9) zu

$$\frac{\partial^2 b(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial b(r, t)}{\partial r} = \frac{S}{T} \cdot \frac{\partial b(r, t)}{\partial t} \quad (10)$$

Für den betrachteten Fall sind die Randbedingungen:

1. $b(\infty, t) = 0$
2. $\lim_{r \rightarrow 0} \left(-T \cdot r \frac{\partial b(r, t)}{\partial r} \right) = \frac{Q}{2\pi} = \frac{F}{2\pi} \dot{x}$

Quellenbedingung (Tychonoff u. Samarski, 1959, S. 568)

Die 2. Randbedingung drückt die Übereinstimmung zwischen dem Zufluß Q , dem GL und dem Fluß im Brunnen aus.

Mit diesen Randbedingungen soll (10) gelöst werden.

Trennung der Variablen und der Ansatz $b(r, t) = R(r) \cdot e^{\gamma t}$ führt zu einer modifizierten Bessel'schen Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dR(r)}{dr} - \kappa^2 R(r) = 0; \quad \kappa^2 = \frac{\gamma \cdot S}{T} \tag{11}$$

Die Lösung dieser Gleichung läßt sich als Linearkombination der mod. Zylinderfunktion 1. Art 0. Ordnung I_0 und der modifizierten Zylinderfunktion 2. Art 0. Ordnung K_0 zusammensetzen (McLachlan, 1955, p. 116).

$$R(r) = A \cdot I_0(\kappa \cdot r) + B \cdot K_0(\kappa r) \tag{12}$$

$I_0(\kappa r)$ wächst monoton für $r \rightarrow \infty$, während $K_0(\kappa r)$ monoton gegen Null geht.

Da die Lösung im Unendlichen gegen Null gehen soll (1. Randbedingung), folgt, das $A = 0$ und

$$R(r) = B \cdot K_0(\kappa r) \text{ ist.} \tag{13}$$

Da sich $K_0(\kappa r)$ für $r \rightarrow 0$ wie $-\ln(\kappa r)$ verhält, folgt aus der 2. Randbedingung:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \left(-T \cdot r \frac{d(B \cdot K_0(\kappa r))}{dr} \right) e^{\gamma t} &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(T \cdot r \frac{d(B \cdot \ln(\kappa r))}{dr} \right) e^{\gamma t} = T \cdot B \cdot e^{\gamma t} \\ &= \frac{Q}{2\pi} = \frac{F \cdot \dot{\kappa}}{2\pi} \end{aligned} \tag{14}$$

Für B ergibt sich damit:

$$B = \frac{\hat{\kappa}_0 \cdot \gamma \cdot \pi \cdot r w^2}{2\pi \cdot T} \cdot \frac{e^{\gamma t}}{e^{\gamma t}} = \frac{\hat{\kappa}_0 \cdot \gamma \cdot r w^2}{2T} \text{ mit } \dot{\kappa} = \hat{\kappa}_0 \cdot \gamma \cdot e^{\gamma t} \tag{15}$$

und $F = \pi \cdot r w^2$

Die vollständige Lösung der Gleichung (10) lautet damit:

$$b(r, t) = \frac{\hat{\kappa}_0 \cdot \gamma \cdot r w^2}{2T} K_0 \left[\left(\frac{\gamma \cdot S \cdot r^2}{T} \right)^{\frac{1}{2}} \right] e^{\gamma t} \tag{16}$$

Die Lösung wird in Real- und Imaginärteil aufgespalten. Der Realteil der Lösung läßt sich für $\beta < 1$ umformen zu:

$$b(r, t) = \frac{r_w^2}{2T} \left[(KR(\alpha) - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} KI(\alpha)) \cdot \dot{x} - \frac{\omega_w}{\sqrt{1-\beta^2}} KI(\alpha) \cdot x \right]$$

mit

$$x = x_0 e^{-\beta \omega_w t} \left(\cos(\omega_w \sqrt{1-\beta^2} t) + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \sin(\omega_w \sqrt{1-\beta^2} t) \right) \quad (17)$$

und

$$\left. \begin{array}{l} KR(\alpha) \text{ Real- und} \\ KI(\alpha) \text{ Imaginärteil von} \end{array} \right\} K_0 \left[\left((-\beta + i\sqrt{1-\beta^2}) \frac{\omega_w \cdot r^2}{T} \cdot S \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Der Realteil von (16) läßt sich für $\beta > 1$ umschreiben zu:

$$b(r, t) = \frac{r_w^2}{2T} KR(\tilde{\alpha}) \cdot \dot{x} \quad (18)$$

mit $x = \tilde{x}_0 \cdot e^{(-\beta \omega_w + \omega_w \sqrt{\beta^2 - 1})t}$

$$\text{und } KR(\tilde{\alpha}) = \text{Realteil von } K_0 \left[\left((-\beta + \sqrt{\beta^2 - 1}) \frac{\omega_w \cdot r^2}{T} \cdot S \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

d) Schwingungsgleichung

Betrachtet man das jeweils gefundene $b(r, t)$ an der Stelle $r = r_w$ (gerade außerhalb des Brunnens) und setzt es in die Gleichgewichtsbeziehung (8) ein, so gelangt man zur Bewegungsgleichung des Wasserspiegels im Brunnen.

In beiden Fällen ergibt sich eine Schwingungsgleichung.

$$\beta < 1 \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{H_0} \cdot \frac{r_w^2}{2T} \left(KR(\alpha) - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} KI(\alpha) \right) \frac{dx}{dt} + \frac{g}{H_0} \left(1 - \frac{r_w^2 \cdot \omega_w}{2T \sqrt{1-\beta^2}} KI(\alpha) \right) x = 0 \quad (19)$$

$$\beta > 1 \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{g}{H_0} \cdot \frac{r_w^2}{2T} KR(\tilde{\alpha}) \frac{dx}{dt} + \frac{g}{H_0} x = 0 \quad (20)$$

Damit diese Gleichungen als Lösungen den angesetzten Einschwingvorgang haben, muß sein (Koeffizienten-Vergleich mit Gleichung (1)):

$$2\beta \omega_w = \frac{g}{H_0} \cdot \frac{r_w^2}{2T} \left(KR(\alpha) - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} KI(\alpha) \right) \quad (21)$$

$$\beta < 1$$

$$\omega_w^2 = \frac{g}{H_0} \left(1 - \frac{r_w^2 \cdot \omega_w}{2T \sqrt{1-\beta^2}} KI(\alpha) \right) \quad (22)$$

und

$$2\beta\omega_w = \frac{g}{H_0} \cdot \frac{r_w^2}{2T} KR(\bar{\alpha}) \tag{23}$$

$$\beta > 1$$

$$\omega_w^2 = \frac{g}{H_0} \tag{24}$$

Hiermit ist die gesuchte Abhängigkeit zwischen β und ω_w und den GL-Parametern im Grunde gegeben.

Leider lassen sich diese Gleichungen nicht explizit nach β und ω_w auflösen, da diese voneinander im Argument der Kelvinfunktion abhängen.

Darum wurde ein anderer Lösungsweg beschritten.

Eine Kombination von (21) und (22) mit $(r_w^2 \cdot \omega_w)/T = C$ ergibt:

$$\beta = \frac{1}{4} C \left(KR(\alpha) - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} KI(\alpha) \right) \cdot \left(1 - \frac{C}{2\sqrt{1-\beta^2}} KI(\alpha) \right)^{-1}; \beta < 1 \tag{25}$$

Eine Kombination von (23) und (24) liefert:

$$\beta = \frac{1}{4} C \cdot KR(\bar{\alpha}); \beta > 1 \tag{26}$$

In einem Variationsprogramm wurde nun der Dämpfungsfaktor $C = r_w^2 \cdot \omega_w/T$, der auch im Argument der Kelvinfunktion auftritt, so lange variiert, bis Gleichung (25) und (26) für jedes einzelne β erfüllt waren. Die Lösung ist (aus physikalischen Gründen) eindeutig, so daß zu jedem β nur ein einziges C und damit auch nur eine einzige Transmissivität T gehört.

Der Zusammenhang ist in 1. Näherung recht einfach (Abb. 2, Tabelle 1).

β ist in etwa proportional $1/T$. Die Abhängigkeit vom Speicherkoeffizienten ist sehr gering, da dieser nur im Argument der Kelvinfunktion vorkommt.

Die Werte für $\beta < 1$ und $\beta > 1$ schließen jedoch nicht direkt aneinander an. Hier macht sich die Vernachlässigung der nichtlinearen Terme bemerkbar. Eine Näherungslösung der nichtlinearen Schwingungsgleichung unter Benutzung der Laplace-Transformation (Doetsch, 1961, S. 110) ergibt zusätzliche Terme, die proportional $1/(1-\beta^2)$ sind. Für $\beta \rightarrow 1$ wird die lineare Näherung also immer schlechter. In der Beziehung zwischen β und C wurde der Bereich $0.5 \leq \beta \leq 1.2$ daher interpoliert (Abb. 2).

Tabelle 1. Zusammenhang zwischen dem Dämpfungskoeffizienten β und dem Dämpfungsfaktor C . Für den nichtlinearen Bereich der Diff.-Gleichungen (19) und (20) wurde der Zusammenhang interpoliert

S	β	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	
10^{-3} C	0.081	0.185	0.307	0.36	0.45	0.55	0.64	0.73	0.82	0.92	0.92	2.08	3.09	4.11	5.13	6.16	7.18	8.20	
10^{-4} C	0.064	0.145	0.232	0.330	0.36	0.44	0.51	0.58	0.66	0.73	0.73	1.55	2.32	3.08	3.85	4.62	5.39	6.14	
10^{-5} C	0.055	0.122	0.183	0.262	0.346	0.36	0.43	0.49	0.55	0.61	0.61	1.25	1.86	2.48	3.10	3.72	4.34	4.95	
10^{-4} H^*	10.09	10.45	10.89	11.41	12.06	—	—	—	—	—	—	9.81	9.81	9.81	9.81	9.81	9.81	9.81	$\frac{m}{s^2}$

= interpoliert

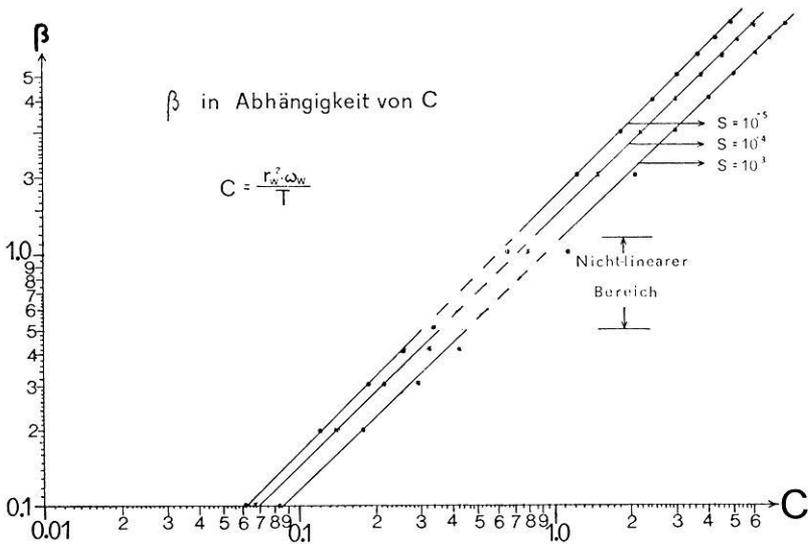


Abb. 2. Zusammenhang zwischen dem Dämpfungskoeffizienten β und dem Dämpfungsfaktor C für verschiedene Speicherkoeffizienten

Die gesuchte Abhängigkeit zwischen dem Dämpfungskoeffizienten β und der Transmissivität T bzw. dem Faktor $C = r_w \cdot \omega_w / T$ ist damit gefunden.

Mit diesem Faktor C (β) läßt sich jetzt die Abhängigkeit der Eigenfrequenz von der Druckhöhe berechnen. Aus (22) folgt:

$$H^* = H_0 \cdot \omega_w^2 = g [1 - 0.5 (1 - \beta^2)^{1/2} C \cdot K \cdot I(\alpha(C))] \quad (27)$$

Abb. 3 zeigt die Abhängigkeit zwischen H^* und β .

Auch hier schließen die Werte für $\beta > 1$ und $\beta < 1$ aus den oben erwähnten Gründen nicht aneinander an. Als Näherungswerte kann man annehmen:

$$\omega_w \approx 3.3 \sqrt{H_0} \quad (28)$$

$$\tau_w \approx 2 \sqrt{H_0} \quad (29)$$

Aus der Messung der Eigenfrequenz des Brunnens läßt sich also die Druckhöhe und damit die Tiefe der GL berechnen.

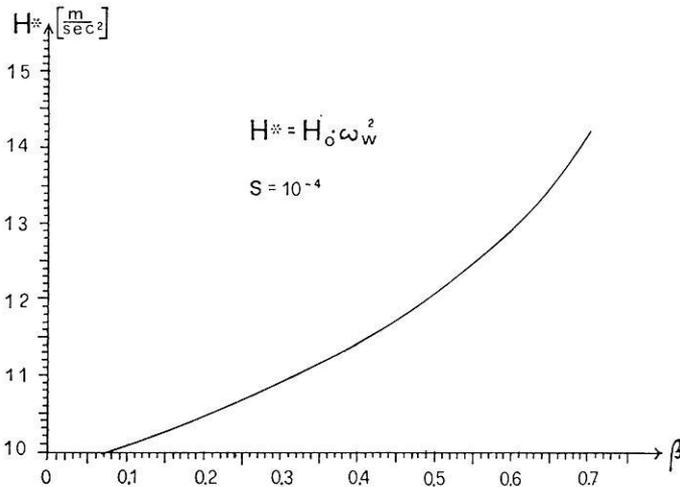


Abb. 3. Zusammenhang zwischen dem Höhenfaktor H^* und dem Dämpfungskoeffizienten β für $\beta < 0.7$

2. Anregung und Messung des Einschwingvorgangs

a) Anregung

Der Einschwingvorgang läßt sich auf folgender Art anregen: Der Brunnen wird zunächst gut abgedichtet. Bei kleinem Brunnenradius genügt z. B. ein einfacher Gummistopfen. Darauf wird Preßluft in den Brunnen eingelassen, bis sich der Wasserspiegel einige cm-dm unterhalb seines ursprünglichen Niveaus eingestellt hat. Dieser Gleichgewichtszustand wird ca. 0.5–1 Minute aufrecht erhalten. Dann wird die Abdichtung sprunghaft entfernt und der Wasserspiegel stellt sich in einem mehr oder minder gedämpften Einschwingvorgang auf seine Normallage ein.

b) Messung

Die Messung erfolgt am besten mit einer Druckdose. Messung mit einem Schwimmer ist nur bedingt geeignet, da Schwierigkeiten mit der Abdichtung auftreten.

Die für die vorliegenden Messungen verwendete Druckdose hängt ca. 70 cm im Wasser und registriert über einen induktiven Geber das Gewicht der Wassersäule über dem Aufhängepunkt. Dadurch kann auch das Absinken des Wasserspiegels kontrolliert werden. Die Abb. 4 zeigt den zeitlichen Verlauf der Wasserspiegeländerung.

Für verschiedene Brunnen ergibt sich je nach Dämpfung einer der möglichen Einschwingvorgänge. Die Dauer des Einschwingvorgangs

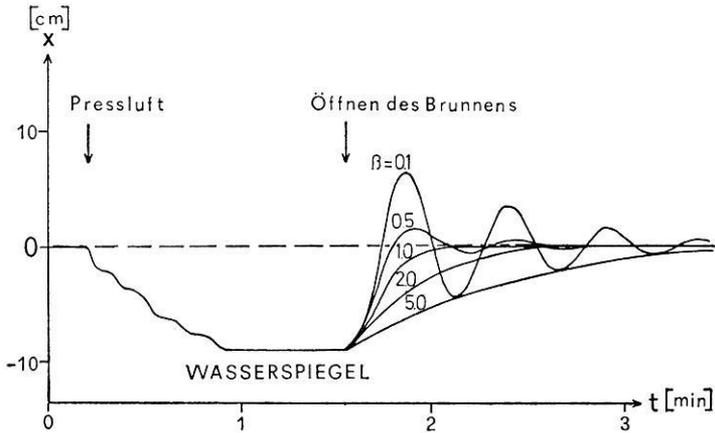


Abb. 4. Anregung und Einschwingvorgang. Wasserspiegel im Brunnen während der Messung des Einschwingvorgangs

liegt in der Größenordnung von Minuten. Die Reproduzierbarkeit ist sehr gut. Die Abweichung für verschiedene Messungen beträgt ca. 0,5%. Zu beachten ist:

Aus dem Verlauf des Einschwingvorgangs (oszillierend oder aperiodisch gedämpft) kann nicht direkt auf die Durchlässigkeit des GL geschlossen werden. Der Dämpfungskoeffizient wird, wie oben gezeigt, durch den Dämpfungsfaktor $C = r_w^2 \cdot \omega_w / T$ bestimmt. Starke Dämpfung auch bei guter Durchlässigkeit kann z. B. auch durch einen großen Brunnenradius r_w verursacht werden. Es empfiehlt sich daher, Brunnen mit möglichst kleinem Radius zu benutzen, um einen oszillierenden Einschwingvorgang zu erreichen. Aus ihm sind β und ω_w schneller zu ermitteln, als aus dem aperiodisch gedämpften Einschwingvorgang.

3. Bestimmung von β und ω_w aus dem Einschwingvorgang

a) Einschwingvorgang oszillierend

In diesem Fall gibt es zur Bestimmung der gesuchten Größen mehrere Möglichkeiten.

Am zuverlässigsten bestimmt man β und ω_w aus dem oszillierenden Einschwingvorgang ($\beta < 0,7$) durch Frequenzanalyse. Hierbei können eventuell vorhandene zusätzliche Resonanzmaxima, d. h. verschiedene Grundwasserstockwerke, erfaßt werden. Dazu wird die Eigenschwingung digitalisiert und einem Frequenzanalyseprogramm unterzogen. Ein solches Programm ist z. B. für die Telefunken TR 440 (GMD Darmstadt – hier benutzt) oder für die Univac U 1108 (Universität Frankfurt) vorhanden.

Aus dem sich ergebenden Amplitudenspektrum kann der Verstärkungsfaktor am Resonanzmaximum und daraus β und die Resonanzperiode abgelesen werden. Dieses Verfahren wird für die 4 Probebrunnen praktisch erläutert.

Ohne Frequenzanalyse läßt sich der Dämpfungskoeffizient aus dem Verhältnis aufeinanderfolgender Amplituden oder aus der Überschwingweite bestimmen. Die Eigenfrequenz kann aus der Frequenz des Einschwingvorgangs ω' berechnet werden. Es sei hierzu auf die einschlägige Literatur verwiesen.

b) Aperiodisch gedämpfter Einschwingvorgang

Hierbei lassen sich β und ω_w durch grafische Verfahren aus dem Einschwingvorgang bestimmen. Verwiesen sei hierzu z. B. auf Gille, Pelegrin, Decaulne, 1964.

In jedem Falle lassen sich also die gesuchten Parameter aus dem Einschwingvorgang bestimmen. Damit kann die Berechnung der Transmissivität durchgeführt werden.

4. Berechnung der Transmissivität

Dem gemessenen β entsprechend wird aus Abb. 2 oder Tabelle 1 der Wert für C abgelesen. Sind Informationen über den Speicherkoeffizienten² vorhanden, wird C aus der zugehörigen Kurve bestimmt. Andernfalls ergibt sich für C und damit für T nicht ein einzelner Wert, sondern ein Bereich. Dieser Bereich liegt jedoch innerhalb der Streuung, die sich bei der Auswertung von Pumpversuchen nach verschiedenen Methoden ebenfalls ergeben.

Aus $C(\beta) = r_w^2 \cdot \omega_w / T$ folgt mit bekanntem Brunnenradius r_w und ω_w sofort

$$T = r_w^2 \cdot \omega_w / C(\beta) \quad (30)$$

Damit ist die Methode und ihre Auswertung beschrieben. An Hand der Messung an 4 Probebrunnen soll diese Methode nun praktisch angewendet werden und ihre Ergebnisse mit Pumpversuchsresultaten verglichen werden.

5. Bestimmung der Transmissivität aus dem Einschwingvorgang von 4 Probebrunnen

a) Beschreibung der Brunnen

Der Einschwingvorgang wurde für ca. 15 Brunnen gemessen. Es wurden 4 Probebrunnen ausgewählt, da hierzu für 3 Brunnen Pump-

² Der Speicherkoeffizient S liegt je nach Porosität und Mächtigkeit des GL zwischen 10^{-3} und 10^{-5} . Ein gebräuchlicher Wert ist 10^{-4} .

Tabelle 2. Beschreibung der Probebrunnen

	Br. 81 Orbes	Br. 84 Orbes	Br. 51 Wallernhausen	Br. 87 Eckartsborn
	Entfernung ca. 250 m			
Hauptgestein	Wechsellagen von klüftigem Basalt und Tuff	Wechsellagen von klüftigem Basalt und Tuff	Wechsellagen von klüftigem Basalt und Tuff	Wechsellagen von klüftigem und tonigem Buntsandstein
Tiefe ab GOK (m)	107.6	100.6	83.3	186.5
Wasserspiegel ab GOK (m)	3.12	3.62	11.91	3.69
durchlässige Schichten ab GOK (m)	18–30 b	18–30 b	45–50 a	18–24 a 138–172
Druckhöhen (m) H_{01} H_{02}	≈ 15	≈ 15	≈ 33	≈ 14 ≈ 134

^a Aus Bohrberichten: 100 % Spülwasserverlust $\hat{=}$ durchlässige Schicht

^b Flow-meter Messungen

GOK = Geländeoberkante

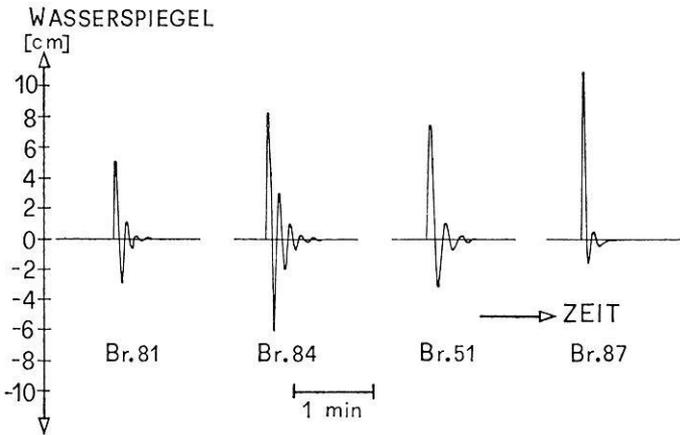


Abb. 5. Eigenschwingung verschiedener Brunnen

versuchsergebnisse vorlagen. Der 4. Brunnen (Wallernhausen) war auf seine seismischen Reaktionen intensiv untersucht worden, so daß hier ebenfalls Vergleichsmöglichkeiten gegeben waren (Schenk und Krauss, 1972).

Die Probebrunnen liegen im Vogelsberg. Eine kurze Beschreibung gibt Tabelle 2.

Die unterschiedlichen Eigenschwingungen dieser 4 Brunnen zeigt Abb. 5. Für alle Brunnen ist der Einschwingvorgang oszillierend, so daß eine Frequenzanalyse durchgeführt werden konnte. Die Amplitudenspektren sind in Abb. 6 dargestellt.

b) Auswertung

Die Auswertung erfolgt nach Tabelle 3.

1 Zunächst wird der Verstärkungsfaktor Q_r bestimmt. Er ist das Verhältnis der Maximalamplitude zur Amplitude des langperiodischen Grenzwertes. Das Niveau der Amplitudenspektren spielt hierbei keine Rolle. Es können mehrere Maxima auftreten (z. B. Abb. 6, Br. 87). Nach

$$\beta = \sqrt{0.5 - 0.5 \sqrt{1 - Q_r^2}} \quad (31)$$

wird β berechnet.

2 Bestimmung von ω_w nach Gleichung (32)

$$\omega_w = \omega_r \cdot F^* = \omega_r \cdot (1/\sqrt{1 - 2\beta^2}) \quad (32)$$

3 Aus dem Höhenfaktor H^* kann die Druckhöhe H_0 berechnet werden.

4 Der Brunnenradius an der Stelle $-H_0$ (Oberkante des GL) wird bestimmt.

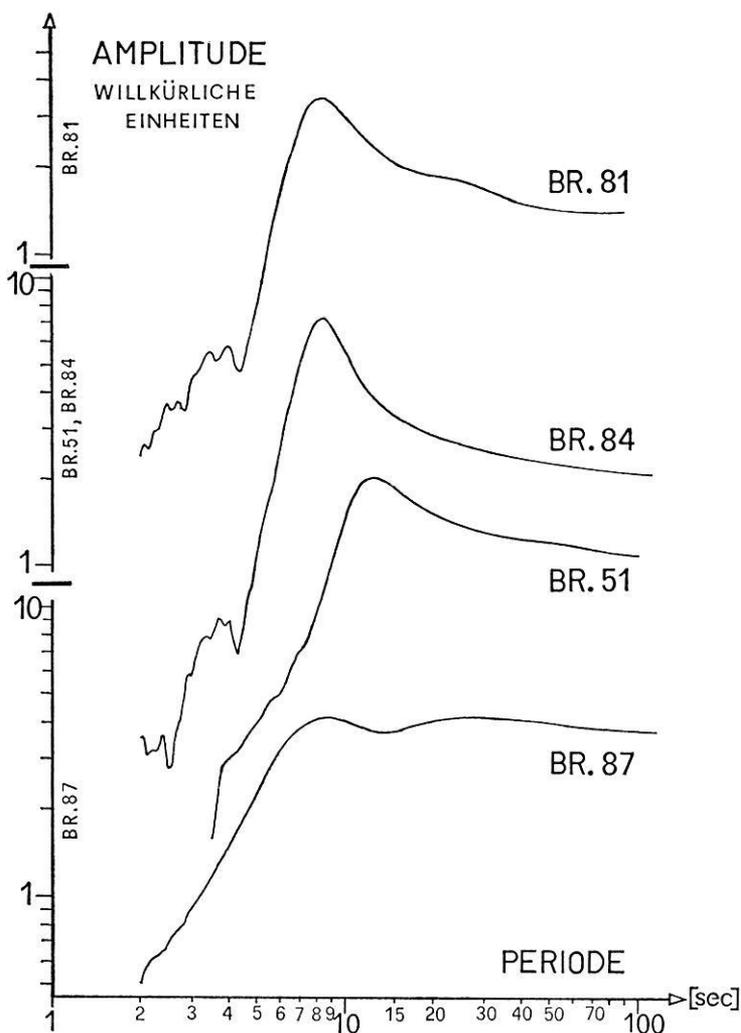


Abb. 6. Amplitudenspektren verschiedener Brunnen-Eigenschwingungen

5 Aus Abb. 2 wird $C(\beta)$ abgelesen und die Transmissivität T berechnet. Hier wurde C für den mittleren Speicherkoeffizienten $S = 10^{-4}$ benutzt.

c) Diskussion der Ergebnisse

Der Vergleich der Transmissivitäten mit Pumpversuchsergebnissen ergibt eine recht *gute Übereinstimmung*. Die aus der Eigenschwingung berechneten Transmissivitäten liegen allerdings generell etwas zu hoch. Es kann nicht entschieden werden, ob diese Abweichung systematisch ist, oder

Tabelle 3. Bestimmung der Transmissivität

	Brunnen 81 Orbes	Brunnen 84 Orbes	Brunnen 51 Wallernhausen	Brunnen Eckartsborn 1. Schicht	Brunnen Eckartsborn 2. Schicht
1 Verstärkungsfaktor	2.2	3.0	2.05	1.15	1.15
β	0.24	0.168	0.252	0.52	0.52
2 Resonanzperiode τ_r (sec)	8.78	8.78	13.0	8.19	30.72
$\omega_r = 2\pi/\tau_r$ (sec ⁻¹)	0.715	0.715	0.484	0.767	0.204
$1/\sqrt{1-2\beta^2} = F^*$	1.064	1.03	1.07	1.47	1.47
$\omega_w = \omega_r \cdot F^*$ (sec ⁻¹)	0.761	0.736	0.518	1.13	0.30
ω_w^2 (sec ⁻²)	0.579	0.542	0.268	1.28	0.09
3 Höhenfaktor $H^*(\beta)$ $\left(\frac{m^2}{sec}\right)$	10.60	10.30	10.68	12.25	12.25
Druckhöhe $H_0 = H^*/\omega_w^2$ (m)	18.4	19.0	39.8	9.6	136.0
4 Brunnenradius r_w (m)	$7.3 \cdot 10^{-2}$	$7.3 \cdot 10^{-2}$	$6.25 \cdot 10^{-2}$	$8.75 \cdot 10^{-2}$	$6.55 \cdot 10^{-2}$
Radiusquadrat r_w^2 (m ²)	$53.3 \cdot 10^{-4}$	$53.3 \cdot 10^{-4}$	$39.06 \cdot 10^{-4}$	$76.6 \cdot 10^{-4}$	$42.9 \cdot 10^{-4}$
5 $C(\beta)$ $S = 0.0001$	0.17	0.118	0.175	0.36	0.36
$T = (r_w^2 \cdot \omega_w)/C$ $\left(\frac{m^2}{sec}\right)$	$2.4 \cdot 10^{-2}$	$3.3 \cdot 10^{-2}$	$1.17 \cdot 10^{-2}$	$2.4 \cdot 10^{-2}$	$3.6 \cdot 10^{-3}$
Pumpversuch T $\left(\frac{m^2}{sec}\right)$	$1.8 \cdot 10^{-2}$	$2.4 \cdot 10^{-2}$	—	?	$3.2 \cdot 10^{-3}$

nur durch die Klüftigkeit der untersuchten GL mit lokal höheren Durchlässigkeiten verursacht wird. Dazu sollte die Methode an Brunnen getestet werden, die dem angenommenen Modell (homogener, isotroper GL) besser entsprechen.

Zur Abschätzung der Durchlässigkeit scheint die Methode jedoch geeignet.

Die berechneten Druckhöhen stimmen ebenfalls recht gut mit den angenommenen Druckhöhen für alle Brunnen überein.

6. Anmerkungen

a) Schichtdicke

Die Mächtigkeit des GL (Schichtdicke) wurde in die Ableitung der Bewegungsgleichung des Systems nicht mit einbezogen. Das geschah aus folgenden Gründen: Die Schichtdicke ist meist nicht bekannt, so daß eine weitere Unbekannte in der Rechnung auftreten würde. Eine Einbeziehung läßt sich in ihrer Wirkung außerdem recht gut abschätzen (Cooper *et al.*, 1965). Die Eigenfrequenz wird nun nicht allein durch die Druckhöhe H_0 , sondern durch eine effektive Säulenhöhe $= (H_0 + 3/8 \text{ Schichtdicke})$ bestimmt. Zur Berechnung der Transmissivität ist die Schichtdicke daher von untergeordneter Bedeutung.

b) Speicherkoeffizient

Nach der vorliegenden Ableitung ist der Speicherkoeffizient aus dem Einschwingvorgang nicht zu berechnen. Das Gleichungssystem für β und ω_w ist unterbestimmt. Zwei bekannten Veränderlichen β und ω_w entsprechen 3 Unbekannte: Druckhöhe H_0 , Transmissivität T und Speicherkoeffizient S . Da die Kenntnis der Druckhöhe, und damit der Tiefe des GL, hydrologisch interessanter erschien, wurde S als fester Parameter in die Berechnungen eingesetzt. Wie oben gezeigt, ist die Abhängigkeit vom Speicherkoeffizienten ohnehin gering.

c) Erfasster Radius

Berechnungen der Absenkung $b(r, t)$ für verschiedene Abstände r ergeben, daß der mit dieser Methode erfasste Radius um den Brunnen je nach Durchlässigkeit in der Größenordnung von 50–100 m liegt. Für recht homogene GL müßte dieser Bereich zur Bestimmung von T ausreichen. Bei inhomogenem GL könnte die Messung an mehreren Stellen wiederholt werden. Der Mittelwert dieser Messungen gibt hier die Gebietsdurchlässigkeit.

d) Stark klüftige Grundwasserleiter

Für stark klüftige GL (Kluftdurchmesser größer cm) ist die Methode nicht geeignet. Um die Ableitung auf diesen Fall auszudehnen, müssen die

Trägheitskräfte im GL und turbulenter Fluß berücksichtigt werden. Das führt auf mathematisch schwer zu behandelnde nichtlineare Gleichungen. (Bodvarsson, 1970).

Eine Messung der Durchlässigkeit in stark klüftigen GL mit Hilfe des Einschwingvorgangs liefert nur ein Maß für die Kluftdurchlässigkeit in der Umgebung des Brunnens. Diese kann sehr viel größer als die Gebietsdurchlässigkeit sein.

Ich möchte allen danken, die die Durchführung dieser Untersuchung ermöglicht haben.

Insbesondere danke ich Herrn Dr. E. Schenk, dem Leiter der Geologischen Forschungsstelle des ZOV und Herrn Prof. Dr. H. Berckhemer, Universität Frankfurt/Main.

Herrn Prof. Dr. F. W. Bauer bin ich für seine Unterstützung bei der Behandlung der mathematischen Probleme zu Dank verpflichtet. Für die Hilfe bei der numerischen Berechnung und der Programmierung danke ich Frau Dr. G. Stoll, GMD, Darmstadt.

Die Deutsche Forschungsgemeinschaft ermöglichte durch großzügige finanzielle Unterstützung die vorliegende Untersuchung. Ihr sei ebenfalls gedankt.

Literatur

- Bodvarsson, G.: Confined fluids as strain meters. *J. Geophys. Res.* 75, 2711–2718, 1970
- Bredehoeft, J.D.: Response of well-aquifer systems to earth tides. *J. Geophys. Res.* 72, 3075–3087, 1967
- Cooper, H.H., Jr., Bredehoeft, J.D., Papadopoulos, I.S., Bennet, R.R.: The response of well-aquifer systems to seismic waves. *J. Geophys. Res.* 70, 3915–3926, 1965
- Doetsch, G.: Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation. München: R. Oldenburg 1961
- Gille, J.C., Pelegrin, U., Decaulne, P.: Lehrgang der Regelungstechnik, 3. Auflage, Band 1. Berlin: VEB-Technik 1964
- McLachlan, N.W.: Bessel functions for engineers. 2nd ed. Oxford: At the Clarendon Press 1955
- Schenk, E., Krauss, I.: Hydroseismische Beobachtungen an Grundwasserbeobachtungsbrunnen im Festgestein und ihre hydrologische Bedeutung. *Z. Deutsch. Geol. Ges.* 123, 15–27, 1972
- Tychonoff, A.N., Samarski, A.A.: Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Berlin: VEB-Verlag 1959
- De Wiest, R.J.M.: On the storage coefficient and the equation of groundwater flow. *J. Geophys. Res.* 71, 1117–1122, 1966

Dipl.-Geophys. Irene Krauss
Institut für Meteorologie
und Geophysik
D-6000 Frankfurt am Main
Feldbergstr. 47
Bundesrepublik Deutschland