

## **Werk**

**Jahr:** 1985

**Kollektion:** fid.geo

**Signatur:** 8 Z NAT 2148:57

**Werk Id:** PPN1015067948\_0057

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN1015067948\\_0057](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN1015067948_0057) | LOG\_0015

## **Terms and Conditions**

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## **Contact**

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

# Stromfunktion des erdmagnetischen Hauptfeldes in der Quellschicht an der Kern/Mantel-Grenze

J. Meyer, J.-H. Hufen und M. Siebert

Institut für Geophysik der Universität Göttingen, Herzberger Landstr. 180, Postfach 2341, D-3400 Göttingen,  
Bundesrepublik Deutschland

**Zusammenfassung.** Das an der Erdoberfläche beobachtete Magnetfeld kann durch einen bekannten Formalismus im Rahmen der Potentialtheorie zurückgeführt werden auf eine äquivalente Stromverteilung für eine beliebig vorgegebene Kugel­fläche im Innern der Erde. Eine reale Bedeutung gewinnt ein solches Stromsystem, wenn es bezogen wird auf die Quellschicht nahe der Oberfläche des Erdkerns, in 3000 km Tiefe, deren Annahme nahegelegt wird durch das räumliche Spektrum der Energiedichte des Feldes. Auf der Grundlage neuerer Magsat-Ergebnisse (J.C. Cain's Feldmodell M051782) wird die Stromfunktion in dieser Tiefe global berechnet und die Stromverteilung graphisch dargestellt. Hierbei werden die Koeffizienten einer Kugelfunktionsentwicklung bis zu dem Grad und der Ordnung 12 berücksichtigt, sowohl unter Einbeziehung als auch bei Fortfall des Dipolanteils. Als der Realität am nächsten kommend wird dasjenige Stromsystem betrachtet, bei dem die äquatoriale Komponente des Dipols voll, die axiale Komponente aber nur zu rund einem Drittel einbezogen wird, gemäß einer Extrapolation des räumlichen Spektrums. (Der größere Teil des axialen Dipols wird vermutlich durch einen anderen Mechanismus erzeugt, der nicht direkt bzw. nicht allein in Verbindung steht mit Vorgängen innerhalb der Quellschicht an der Erdkernoberfläche.) Zum Vergleich wird die globale Verteilung des erdmagnetischen Hauptfeldes für den gleichen Bereich des räumlichen Spektrums herangezogen. Die Korrespondenz zur Stromverteilung wird besonders deutlich, wenn auch das Magnetfeld auf die Tiefe der Quellschicht reduziert wird. Dabei ist die Horizontalkomponente eng verknüpft mit der Stromdichte, d.h. mit dem Gradienten der Stromfunktion, die Vertikalkomponente mit der Stromfunktion selbst.

## Current function of the geomagnetic main field in the source layer at the core/mantle boundary

**Abstract.** The geomagnetic field observed at the surface of the earth can formally be produced, through a well-known procedure, by an equivalent current distribution on any spherical surface inside the earth. A real physical significance can be attributed to the current system if it is referred to the source layer near the surface of

the earth's core, at a depth of 3000 km, as inferred from the spatial energy density spectrum of the field. Based on the latest Magsat results (J.C. Cain's field model M051782), the current function at this depth has been calculated and plotted incorporating terms up to order and degree 12, both with and without the dipole constituent. The current system regarded as the most realistic one includes the equatorial and, by extrapolation from the spatial spectrum, about one third of the axial dipole is presumably caused by another mechanism not directly connected with the revealed source layer.) For comparison, the global distribution of the main field is shown likewise. The equivalence is particularly apparent if the field is also reduced to the depth of the source layer. Its horizontal component is closely related to the surface density of the current, i.e. the gradient of the current function, and its vertical component to the current function itself.

**Key words:** Geomagnetic main field – Current function – Source layer – Spherical harmonic analysis

## Einleitung

Seit der grundlegenden Arbeit von Gauß (1839), in der er festgestellt hat, daß die Quellen des Erdmagnetfeldes im wesentlichen ihren Sitz im Erdinnern haben, sind mannigfache Anstrengungen unternommen worden, den genauen Sitz dieser Quellen näher zu erschließen. Die Auswertung umfangreicher globaler Vermessungen im Verein mit theoretischen Erwägungen mündeten in die Erkenntnis, daß der Hauptteil des erdmagnetischen Innenfeldes dem flüssigen Erdkern entstammt und nur ein kleinerer Teil von magnetischen Mineralien in der Kruste herrührt, während der Erdmantel praktisch als quellenfrei angesehen werden kann. Die lange Zeit übliche Zweiteilung des Innenfeldes in Dipolanteil und Restfeld ließ eine weitergehende Trennung in Kern- und Krustenanteil jedoch nicht zu.

Ansätze zu einer solchen Trennung wurden erst gewonnen mit den erheblichen Fortschritten in der Vermessung des Feldes mittels Satelliten-Magnetometer – insbesondere durch die erste globale Vektorvermessung beim Magsat-Projekt 1979/80 – und der Beschreibung der globalen Feldverteilung durch das räumliche Spek-

trum der mittleren Energiedichte. Abgeleitet wird das räumliche Spektrum aus den Ergebnissen einer Kugelfunktionsanalyse der Meßdaten. Von Cain et al. (1984) ist eine derartige Analyse durchgeführt worden bis zu Termen vom Grad  $n=29$ . Das entsprechende räumliche Spektrum zeigt eine Aufteilung in zwei quasi-lineare Äste unterschiedlicher Neigung, von denen der eine (der „langwellige“ Spektralast) dem Kernfeld und der andere (der „kurzwellige“ Spektralast) dem Krustenfeld zugeschrieben werden kann. Der Übergang zwischen beiden liegt bei etwa  $n=13$ . Ein Vergleich mit analogen Ergebnissen für ein globales Krustenmodell-Feld zeigt, daß im Bereich niedrigerer Grade ein etwaiger Krustenanteil in allen Fällen klein ist gegenüber dem jeweiligen Kernfeldanteil (Meyer et al., 1983). Dadurch ermöglicht sich eine spezielle Untersuchung des Kernfeldes und seiner Quellen bereits nach dem pauschalen Abzug des Krustenanteils im räumlichen Spektrum des Innenfeldes.

Ungeachtet des besonderen Erzeugungsmechanismus kann angenommen werden, daß das aus dem Erdkern stammende Magnetfeld in Verbindung steht mit dort fließenden elektrischen Strömen. Eine Zurückführung des an der Erdoberfläche beobachteten Feldes auf eine äquivalente Stromverteilung ist in eindeutiger Weise möglich, wenn die Ströme beschränkt sind auf eine beliebige Kugelfläche (Chapman und Bartels, 1940). So hat bereits Vestine et al. (1947) für verschiedene Kugelradien äquivalente Stromverteilungen berechnet und dabei die Entwicklungskoeffizienten des Feldes bis zum Grad  $n=6$  berücksichtigt. Eine realistische Bedeutung gewinnt ein solches Stromsystem aber erst, wenn unabhängige Indizien dafür vorliegen, daß die Ströme tatsächlich in einer bestimmten, einheitlichen Tiefe fließen. Der Befund, daß das räumliche Spektrum des Kernfeldes in einer Tiefe von rund 3000 km quasi „weiß“ ist, läßt in der Tat auf die Existenz einer relativ dünnen Stromschicht knapp unterhalb der Erdoberfläche schließen und rechtfertigt zugleich, ebendiese Schicht als Quellschicht zu bezeichnen (Meyer et al., 1983).

Die nachfolgenden Untersuchungen behandeln die in dieser Quellschicht fließenden Ströme im Vergleich zu der entsprechenden Verteilung des auf das gleiche Bezugsniveau reduzierten Feldes, unter Einbeziehung des vollen Kernfeldanteils, d.h. aller Terme bis einschließlich  $n=12$ . Da Strom und Feld sich gegenseitig bedingen, erhält man ein anschauliches Bild von der Säkularvariation des Feldes mit der Vorstellung von zeitlichen Änderungen der dargestellten Stromverteilung.

### Berechnung der Stromfunktion

Sieht man von luftelektrischen Strömen ab, so läßt sich das Erdmagnetfeld  $\mathbf{B}$  überall außerhalb der Quellen darstellen als negativer Gradient eines Potentials  $V$ ,

$$\mathbf{B} = -\text{grad } V. \quad (1)$$

Dieses Potential wird in bekannter Weise an der Erdoberfläche (Erdradius  $R_E = 6371$  km) entwickelt in eine doppelte Reihe von Kugelflächenfunktionen vom Grad  $n$  und der Ordnung  $m$  (Normierung nach A. Schmidt),

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n = R_E \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\theta) \quad (2)$$

mit

$$V_n = R_E \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\theta) \quad (3)$$

( $\lambda =$  geographische Länge,  $\theta =$  Poldistanz).

Im folgenden wird angenommen, daß der äußere Anteil des Feldes durch eine Voranalyse bereits in Abzug gebracht worden ist. Demgemäß sind unter den Entwicklungskoeffizienten  $g_n^m$  und  $h_n^m$  in Gl. (2) und (3) allein die Koeffizienten des inneren Anteils zu verstehen.

Der Potentialanteil  $n$ -ten Grades,  $V_n$ , entspricht dem Feld eines bestimmten Multipoles ( $2^n$ -Pol) im Erdmittelpunkt. Die Verteilung der dieses Feld erzeugenden Flächenströme auf einer zur Erdoberfläche konzentrischen Kugel vom Radius  $a_c < R_E$ , d.h. im Innern der Erde, wird beschrieben durch die Stromfunktion  $J_n(\theta, \lambda)$ . Zwischen  $J_n$  und  $V_n$  besteht die Beziehung ( $\mu_0 =$  Permeabilität des Vakuums)

$$J_n(\theta, \lambda) = \frac{1}{\mu_0} \frac{2n+1}{n} \left(\frac{R_E}{a_c}\right)^{n+1} V_n = \frac{1}{\mu_0} \frac{2n+1}{n} \left(\frac{R_E}{a_c}\right)^{n+1} \times R_E \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\theta). \quad (4)$$

Über die Herleitung s. Chapman und Bartels (1940). Allgemein ist die Stromfunktion so definiert, daß der Strom in Richtung der Linien gleichen  $J$ -Wertes fließt und die Differenz  $\Delta J$  zweier Isolinien die Stärke des zwischen ihnen fließenden Stromes angibt. Aus dem Abstand der Isolinien von  $J$  ist somit unmittelbar die Flächenstromdichte ersichtlich. Dabei ist das Vorzeichen so gewählt, daß der Strom im Uhrzeigersinn um ein relatives Minimum von  $J$  fließt. Eine bei dieser Definition zunächst noch zulässige willkürliche additive Konstante verschwindet durch die Festsetzung, daß die Stromfunktion im Mittel über die Kugel gleich Null sein soll.

Die Stromfunktion ist wie das Potential des Magnetfeldes eine skalare Ortsfunktion, bei der die Anteile mit unterschiedlichem  $n$  summiert werden können. Für eine weitestgehende Einbeziehung aller Bestandteile des Kernfeldes wird die Summe bis  $n=12$  erstreckt, dem höchsten Multipolterm im räumlichen Spektrum des Innenfeldes, der noch ganz dem Kernfeld zugeschrieben werden darf. Im Prinzip erfolgt die Berechnung der gesamten Stromfunktion des Hauptfeldes damit in der Form

$$J(\theta, \lambda) = \sum_{n=1}^{12} J_n(\theta, \lambda) = \frac{R_E}{\mu_0} \sum_{n=1}^{12} \frac{2n+1}{n} \left(\frac{R_E}{a_c}\right)^{n+1} \times \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos m\lambda + h_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\theta). \quad (5)$$

### Globale Stromverteilung in der Quellschicht

Die Auswertung der räumlichen Spektren von sechs neueren Feldmodellen, die unter Verwendung von Magsat-Daten abgeleitet worden sind, hat eine mittlere

Quellschicht-Tiefe von 147 km unterhalb der seismisch erschlossenen Kern/Mantel-Grenze ergeben (Meyer et al., 1983). In Anbetracht eines mittleren Fehlers von  $\pm 50$  km genügt es, für die Tiefe unterhalb der Erdoberfläche einen gerundeten Wert von 3,000 km anzusetzen, entsprechend einem Radius der Bezugskugel von  $a_c = R_E - 3000$  km = 3371 km. Außerdem können die Ergebnisse dann direkt mit denen von Vestine et al. (1947) verglichen werden. Genauer gesagt, sind die auf diese Kugel bezogenen Flächenströme eine Projektion aller in der relativ dünnen Quellschicht nahe der Kern/Mantel-Grenze fließenden Ströme auf die zentrale Fläche dieser Schicht.

Nach Gl. (5) wurden die Werte der Stromfunktion in der Quellschicht-Tiefe für ein  $1^\circ \times 1^\circ$ -Gitternetz über die ganze Erde berechnet, basierend auf den Koeffizienten des Feldmodells M051782 von Cain et al. (1984). Die Abb. 1 zeigt das Ergebnis in Form von Isolinien, die zugleich Stromlinien sind, unter Einbeziehung des vollen Dipolanteils. Linien mit positiven Werten von  $J$  sind durchgezogen, solche mit negativen Werten gestrichelt. Zwischen je zwei benachbarten Linien fließt ein Strom von  $2 \times 10^8$  A. Zur Verdeutlichung ist die Richtung des Stromes durch Pfeile gekennzeichnet. Das Überwiegen des Dipolanteils im Hauptfeld äußert sich in der globalen Vorzugsrichtung der Ströme von Ost nach West. Darüber hinaus spiegelt sich jedoch nur wenig von der großräumigen Struktur des Oberflächenfeldes in der Stromverteilung wider. Dies ändert sich erst, wenn auch das Magnetfeld auf die Quellschicht-Tiefe reduziert wird (s.u.).

Die besondere Rolle, die das Dipolfeld ( $n=1$ ) im räumlichen Spektrum des Feldes spielt, deutet auf einen Erzeugungsmechanismus hin, der – anders als bei den Feldanteilen mit  $n>1$  – nicht nur eine relativ dünne Schicht nahe der Erdoberfläche betrifft, sondern offenbar größere Teile des Kernes einbezieht, wenn nicht gar den Kern als Ganzes. Es liegt deshalb nahe, eine äquivalente Stromverteilung in analoger Weise auch für das Magnetfeld nach Abzug des Dipolanteils zu berechnen. Dies geschieht, indem von vornherein in der Gl. (5) nur Koeffizienten mit  $n \geq 2$  berücksichtigt werden. In der Tat zeigt das entsprechende Bild der Isolinien (Abb. 2) keinen bevorzugten zonalen Anteil mehr. Die Spitzenwerte der Stromfunktion in höheren Breiten sind auf weniger als die Hälfte ihres Betrages zurückgegangen und positive wie negative Werte gleichermaßen über beide Hemisphären verteilt. Überhaupt ist das Gesamtbild deutlich differenzierter geworden; eine Feststellung, die formal darin begründet liegt, daß ohne den Dipol die Anteile der höheren Multipole klarer hervortreten.

In Anbetracht des quasi-weißen Feld-Spektrums in der Quellschicht-Tiefe im Bereich der höheren Harmonischen ist jedoch nicht anzunehmen, daß die globale Stromverteilung in dieser Tiefe gänzlich ohne Dipolanteil bleibt. Als der Realität am nächsten kommend wird dasjenige Stromsystem betrachtet, bei dem der Anteil ersten Grades mit Hilfe der spektralen Regressionsgeraden von  $n=2$  bis 12 extrapoliert wird. Hierbei wird die äquatoriale Komponente voll, die axiale Komponente aber nur zu einem Bruchteil einbezogen, der so bestimmt wird, daß der gesamte Term  $n=1$  auf der Regressionsgeraden liegt. Das nach wie vor negative Vorzeichen

des betreffenden Koeffizienten gewährleistet weiterhin eine ausgeglichene Bilanz der Energiedichte bei der Säkularvariation des Quellschicht-Feldes (vgl. Meyer, 1985a, b).

Mit einer wiederum aus sechs neueren Feldmodellen abgeleiteten mittleren Regressionsgeraden ergibt sich für den extrapolierten Koeffizienten  $g_1^0$  ein Wert von  $-11741$  nT. Dies ist gut ein Drittel des mittleren Wertes von  $-30107$  nT aus den verwendeten Feldmodellen direkt. Die damit berechnete Stromverteilung in der Quellschicht zeigt Abb. 3. Das Bild ähnelt dem der Abb. 2. Doch kommen gerade die großen Stromwirbel unter Nordamerika und Zentralasien bei der partiellen Berücksichtigung des Dipolanteils in Abb. 3 besser zum Ausdruck. Auffällig ist, daß die beiden entgegengesetzten Stromwirbel bei Südafrika in allen drei Darstellungen deutlich in Erscheinung treten.

### Zusammenhang mit den Komponenten des Erdmagnetfeldes

Die Stromverteilung in der Quellschicht-Tiefe, wie sie in den Abb. 1-3 dargestellt ist, ist eingeführt als Quellfunktion des an der Erdoberfläche beobachteten Feldes. Um den Zusammenhang beider zu demonstrieren, wird das Potential  $V_n$  für den Feldanteil  $n$ -ten Grades im Abstand  $r$  vom Erdmittelpunkt ausgedrückt durch den entsprechenden Anteil  $J_n$  der Stromfunktion (vgl. Gl. (4)):

$$V_n(r, \theta, \lambda) = \mu_0 \frac{n}{2n+1} \left(\frac{a_c}{r}\right)^{n+1} J_n(a_c, \theta, \lambda), \quad r \geq a_c. \quad (6)$$

Die Komponenten der Kraftflußdichte an der Erdoberfläche sind

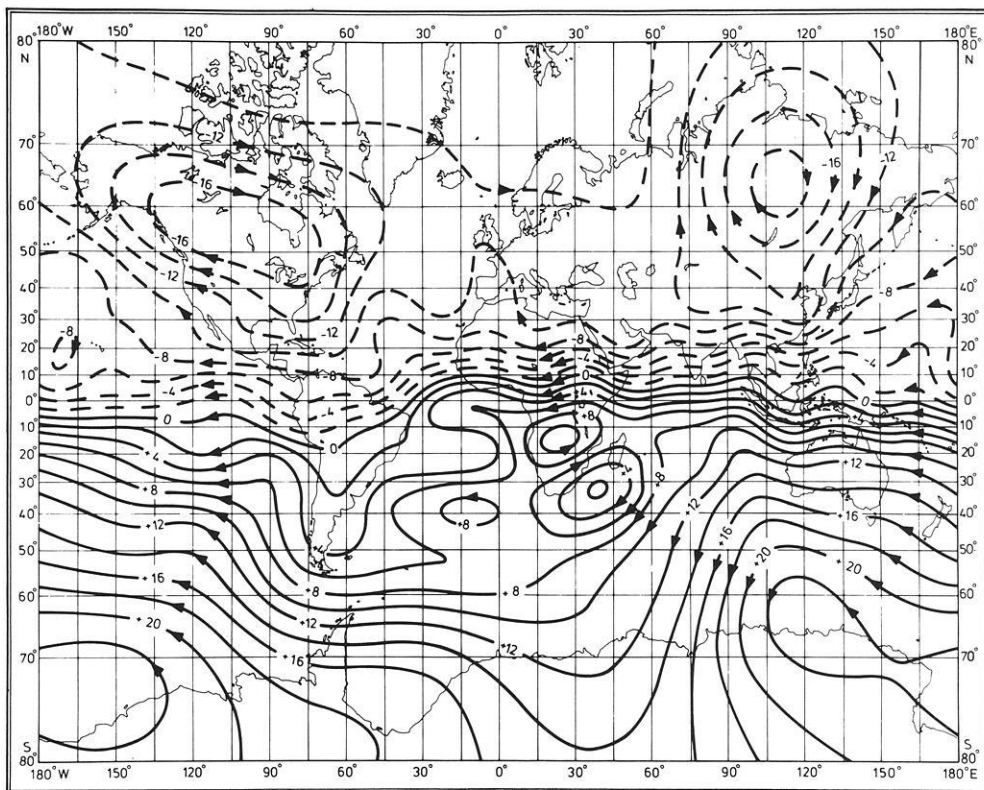
$$\begin{aligned} X_n(R_E, \theta, \lambda) &= \frac{1}{R_E} \left. \frac{\partial V_n}{\partial \theta} \right|_{r=R_E} \\ &= \mu_0 \frac{n}{2n+1} \left(\frac{a_c}{R_E}\right)^{n+1} \frac{1}{R_E} \frac{\partial J_n}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} Y_n(R_E, \theta, \lambda) &= -\frac{1}{R_E \sin \theta} \left. \frac{\partial V_n}{\partial \lambda} \right|_{r=R_E} \\ &= -\mu_0 \frac{n}{2n+1} \left(\frac{a_c}{R_E}\right)^{n+1} \frac{1}{R_E \sin \theta} \frac{\partial J_n}{\partial \lambda}, \end{aligned} \quad (7b)$$

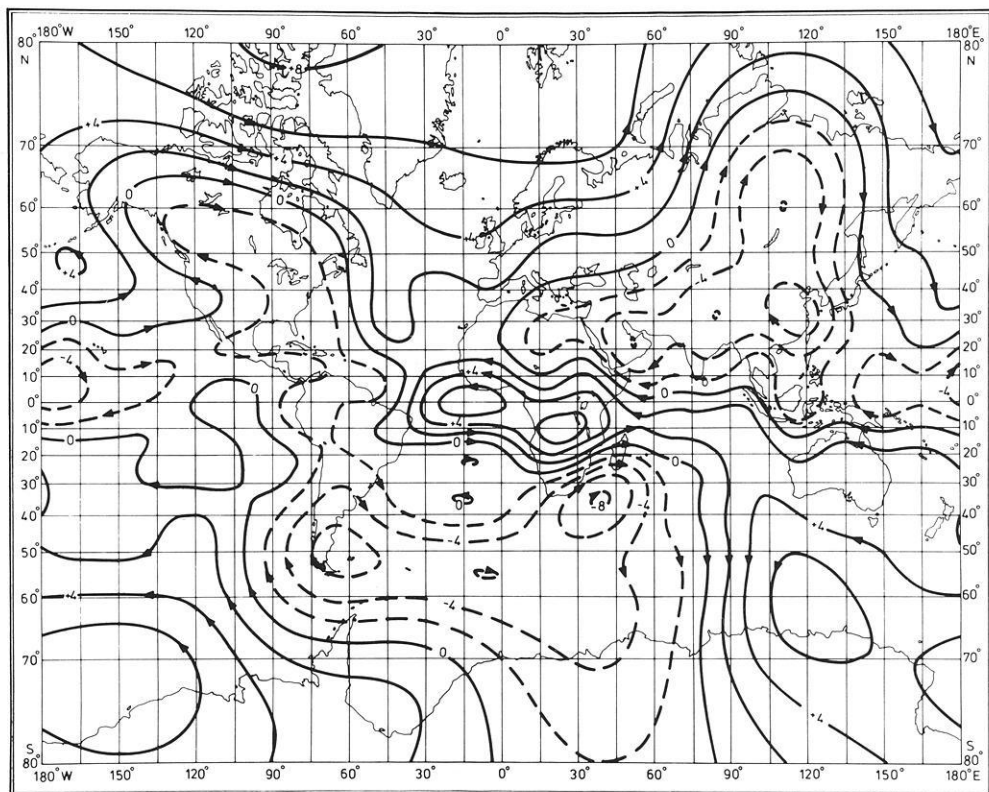
$$\begin{aligned} Z_n(R_E, \theta, \lambda) &= \left. \frac{\partial V_n}{\partial r} \right|_{r=R_E} \\ &= -\mu_0 \frac{n}{2n+1} \left(\frac{a_c}{R_E}\right)^{n+1} \frac{n+1}{R_E} J_n. \end{aligned} \quad (7c)$$

Damit ergibt sich für die Energiedichte der Horizontalkomponente dieses Feldanteils

$$\begin{aligned} W_{H_n}(R_E, \theta, \lambda) &= \frac{1}{2\mu_0} H_n^2 = \frac{1}{2\mu_0} (X_n^2 + Y_n^2) \\ &= \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^2 \left(\frac{a_c}{R_E}\right)^{2(n+1)} \\ &\quad \times \frac{1}{R_E^2} \left[ \left(\frac{\partial J_n}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial J_n}{\partial \lambda}\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (8)$$



**Abb. 1.** Isolinien der Stromfunktion für das gesamte Hauptfeld ( $n=1, \dots, 12$ ; Epoche 1980) in der Quellschicht-Tiefe von 3000 km. Einheit  $10^8$  A. Die Richtung des Stromes ist durch Pfeile gekennzeichnet



**Abb. 2.** Isolinien der Stromfunktion für das Hauptfeld ohne Dipolanteil ( $n=2, \dots, 12$ ; Epoche 1980). Einheit  $10^8$  A. Ansonsten wie Abb. 1

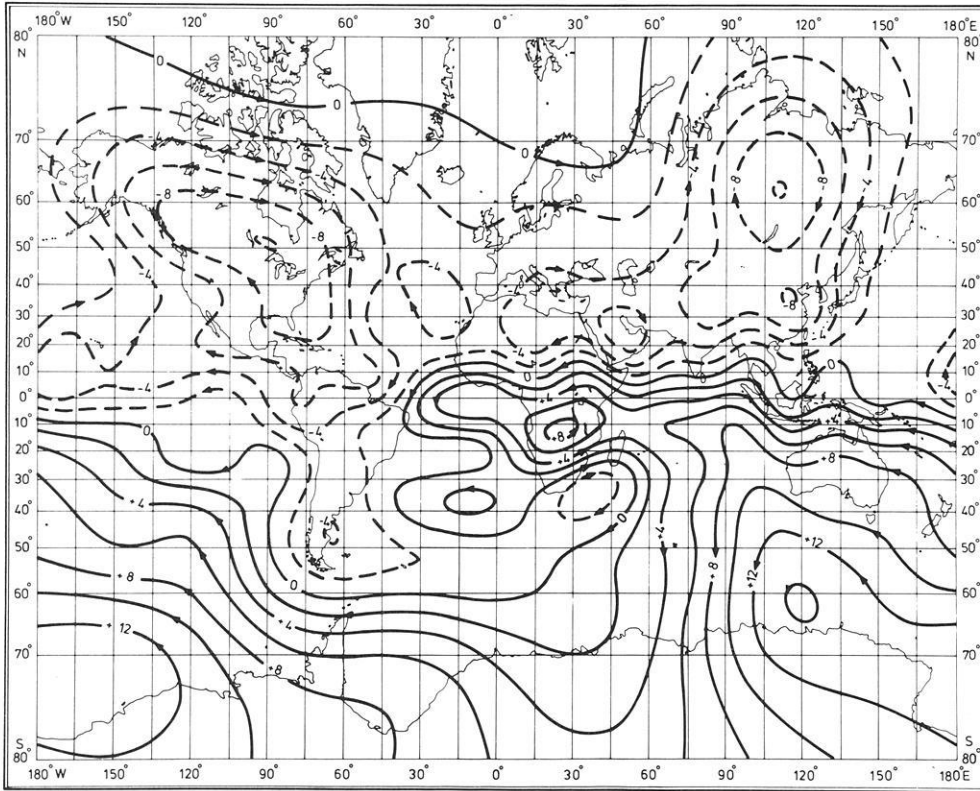
Andererseits ist die zugehörige Flächenstromdichte an der Kugelfläche mit dem Radius  $a_c$  ( $\mathbf{e}_r$  = Einheitsvektor in radialer Richtung)

$$\mathbf{j}_n = -\mathbf{e}_r \times \text{grad } J_n \quad (9)$$

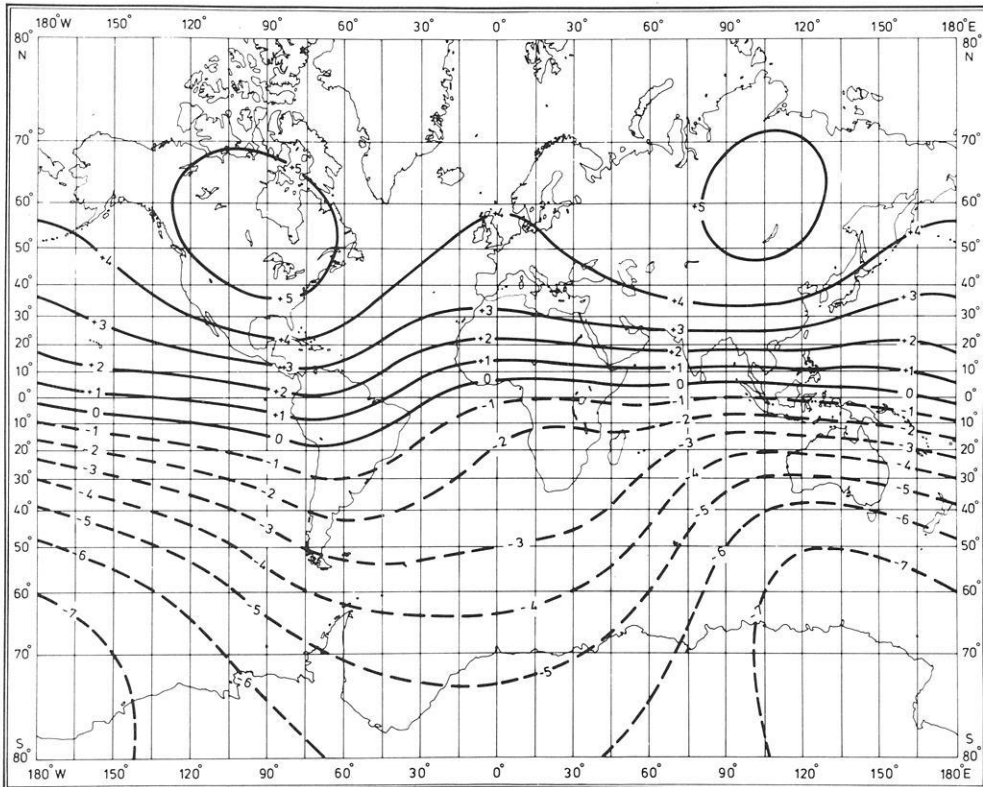
mit

$$j_n^2 = j_{\theta_n}^2 + j_{\lambda_n}^2 = \frac{1}{a_c^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial J_n}{\partial \lambda} \right)^2 + \frac{1}{a_c^2} \left( \frac{\partial J_n}{\partial \theta} \right)^2. \quad (10)$$

Daraus folgt als Beziehung zwischen dem Betrag der Flächenstromdichte  $j_n$  in der Quellschicht und der Energiedichte der Horizontalkomponente  $H_n$  des Ma-



**Abb. 3.** Isolinen der Stromfunktion bis  $n=12$  in der Quellschicht-Tiefe von 3000 km für das Hauptfeld mit extrapoliertem Dipolanteil (39% des axialen Dipolmomentes; Epoche 1980). Einheit  $10^8$  A



**Abb. 4.** Isodynamen der Vertikalkomponente des Hauptfeldes an der Erdoberfläche ( $n=1, \dots, 12$ ; Epoche 1980). Einheit  $10^4$  nT

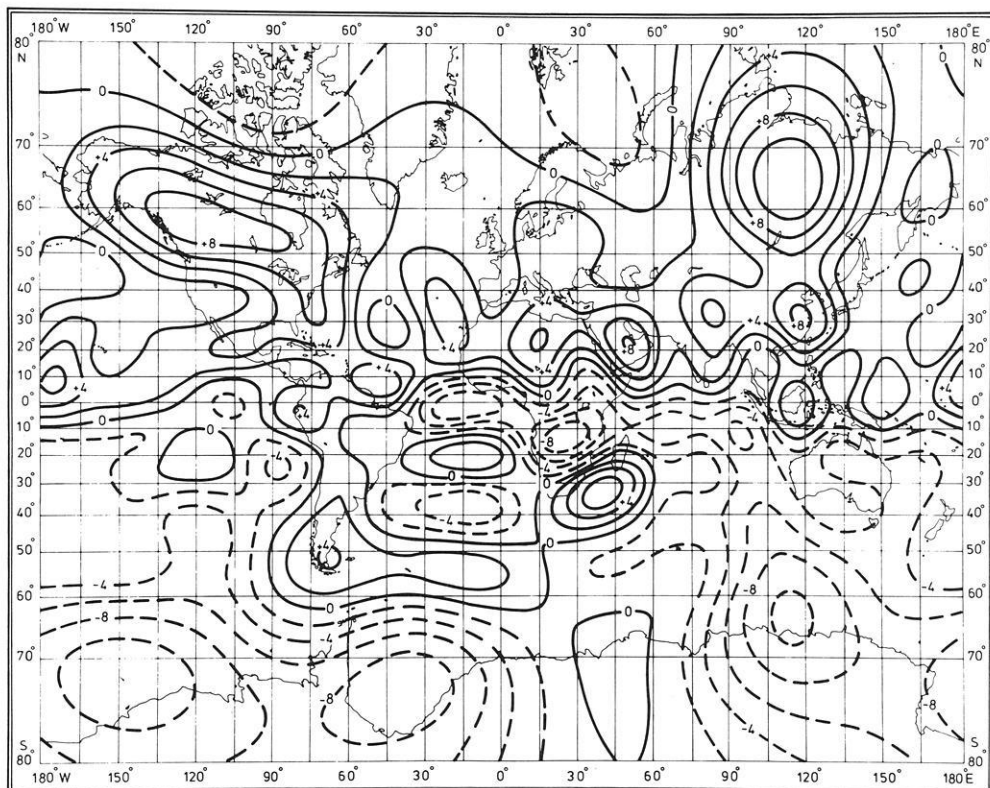
gnettefeldes an der Erdoberfläche:

$$W_{H_n}(R_E, \theta, \lambda) = \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^2 \left( \frac{a_c}{R_E} \right)^{2(n+2)} j_n^2(a_c, \theta, \lambda). \quad (11)$$

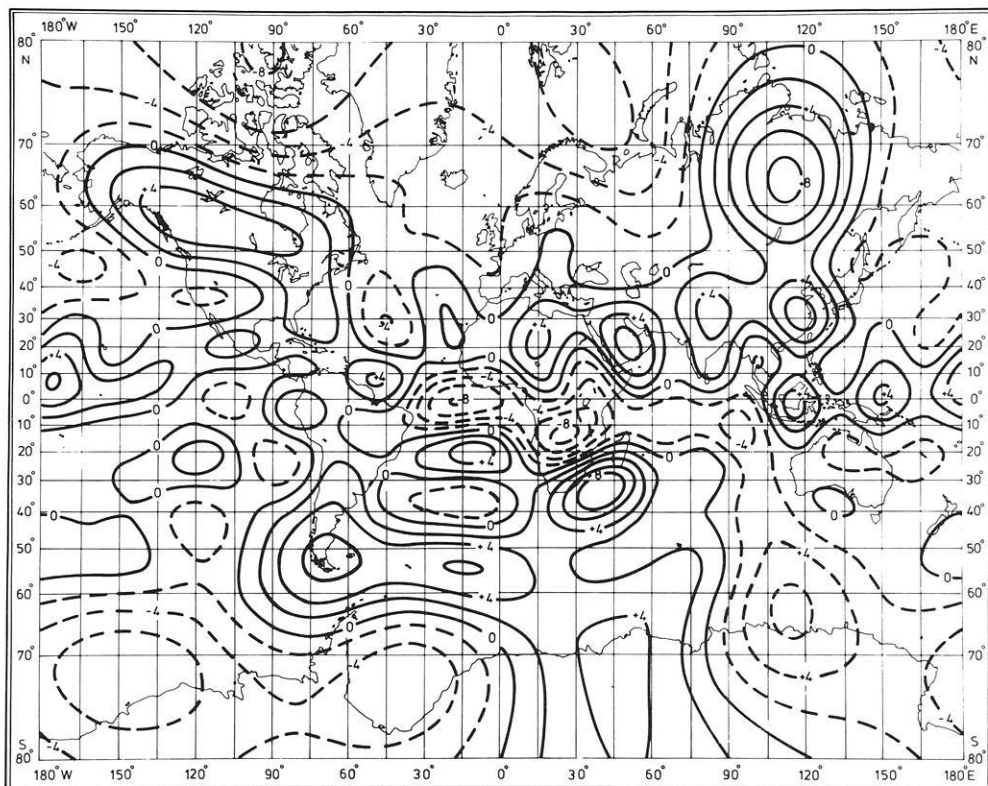
Flächenstromdichte und Horizontalkomponente des Magnetfeldes bedingen sich gegenseitig.  $H_n$  ist am größ-

ten, wo auch  $j_n$  am größten ist, und umgekehrt. Dabei ist die Richtung von  $H_n$  stets senkrecht zu den Isolinen der Stromfunktion, positiv nach abnehmenden  $J_n$ -Werten hin.

In ähnlicher Weise bedingen sich Stromfunktion  $J_n$  und Vertikalkomponente  $Z_n$  des Magnetfeldes gegensei-



**Abb. 5.** Isodynamen der Vertikalkomponente des Hauptfeldes in der Quellschicht-Tiefe von 3000 km ( $n=1, \dots, 12$ ; Epoche 1980) Einheit  $10^5$  nT



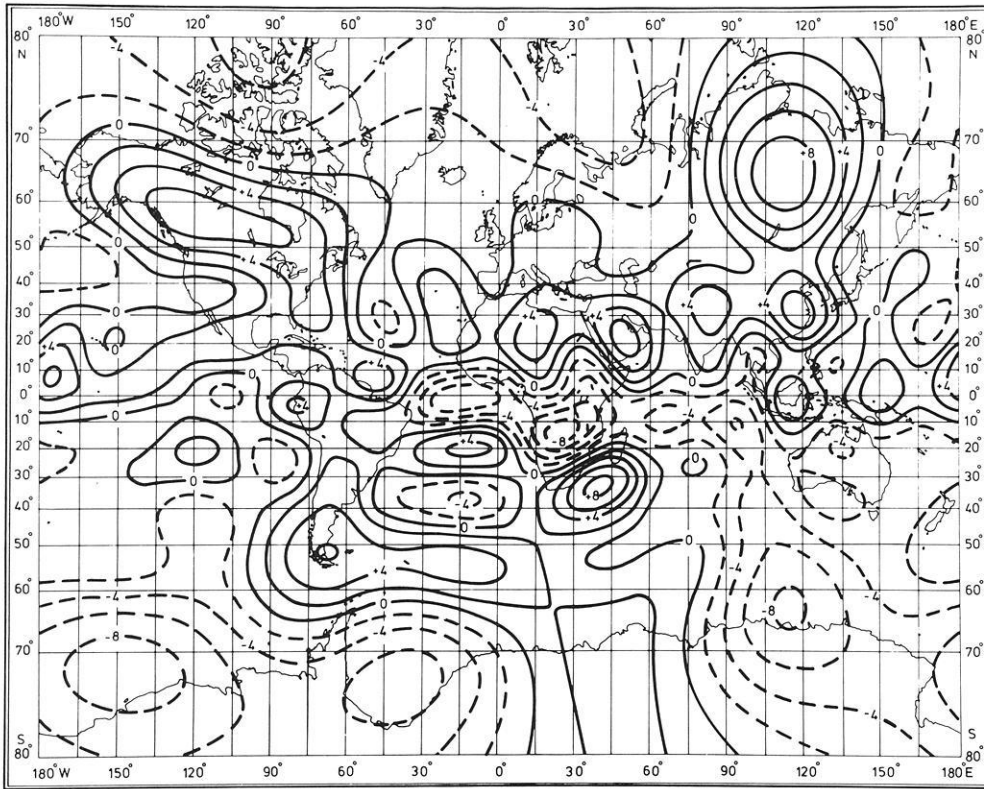
**Abb. 6.** Isodynamen der Vertikalkomponente des Hauptfeldes in der Quellschicht-Tiefe von 3000 km nach Abzug des Dipolanteils ( $n=2, \dots, 12$ ; Epoche 1980). Einheit  $10^5$  nT

tig; vgl. Gl. (7c). An Stellen mit minimalem  $J_n$  ist  $Z_n$  maximal und umgekehrt. Für die betreffende Energiedichte der vertikalen Feldkomponente gilt

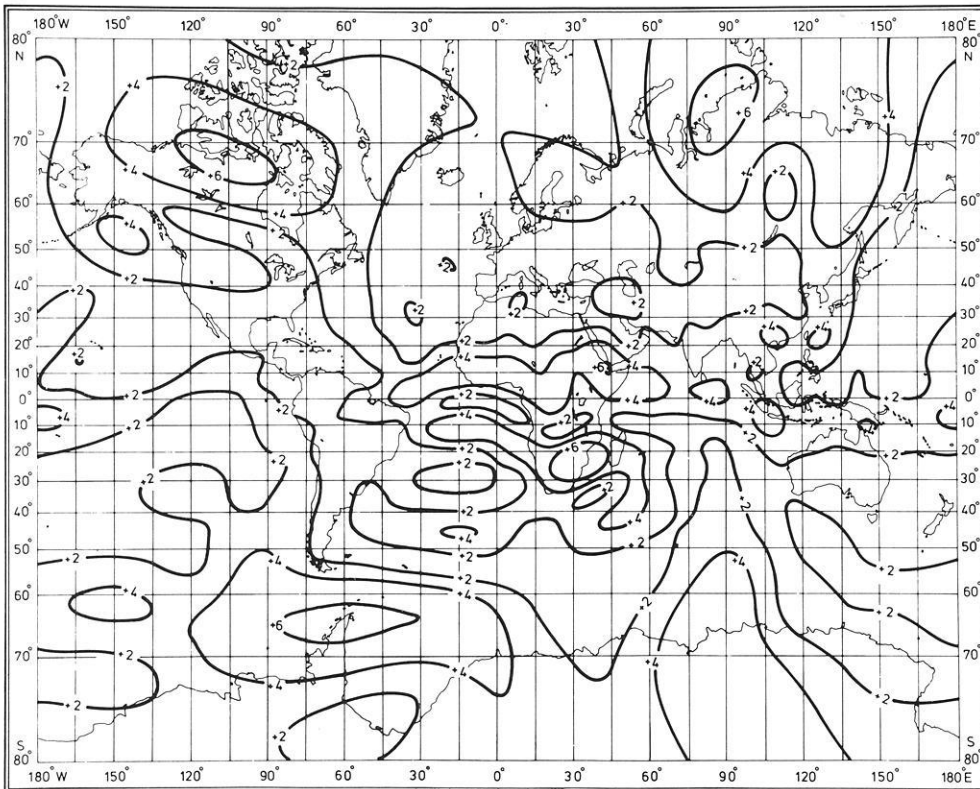
$$W_{Z_n}(R_E, \theta, \lambda) = \frac{1}{2\mu_0} Z_n^2$$

$$= \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^2 \left( \frac{a_c}{R_E} \right)^{2(n+1)} \left( \frac{n+1}{R_E} \right)^2 J_n^2(a_c, \theta, \lambda). \quad (12)$$

Die Energiedichte des gesamten Feldanteils vom Grad  $n$  an der Erdoberfläche wird somit bestimmt sowohl



**Abb. 7.** Isodynamen der Vertikalkomponente des Hauptfeldes bis  $n=12$  mit extrapoliertem Dipolanteil (39% des axialen Dipolmomentes; Epoche 1980) in der Quellschicht-Tiefe von 3000 km. Einheit  $10^5$  nT



**Abb. 8.** Isodynamen der Horizontalkomponente des Hauptfeldes bis  $n=12$  mit extrapoliertem Dipolanteil (39% des axialen Dipolmomentes; Epoche 1980) in der Quellschicht-Tiefe von 3000 km. Einheit  $10^5$  nT

durch den absoluten Wert der Stromfunktion am Quellschicht-Punkt mit den gleichen Koordinaten, als auch durch den dortigen Gradienten:

$$W_n(R_E, \theta, \lambda) = \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^2 \left( \frac{a_c}{R_E} \right)^{2(n+2)}$$

$$\times \left[ j_n^2(a_c, \theta, \lambda) + \left( \frac{n+1}{a_c} \right)^2 J_n(a_c, \theta, \lambda) \right]. \quad (13)$$

Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß die aufgezeigten Zusammenhänge in strenger Form nur für Verteilungen eines bestimmten, wenngleich beliebigen Grades



$n$  gelten. Sie gelten nicht mehr streng für die Summen von Verteilungen mit verschiedenem  $n$  oder gar für beliebige Verteilungen. Der Grund liegt in den unterschiedlichen, von  $n$  abhängigen Gewichtungsfaktoren zu den Ableitungen der Stromfunktion in der Formel für die Energiedichte des Feldes, beispielsweise der Horizontalkomponente:

$$W_H(R_E, \theta, \lambda) = \frac{\mu_0}{2R_E^2} \left\{ \left[ \sum_n \frac{n}{2n+1} \left( \frac{a_c}{R_E} \right)^{n+1} \frac{\partial J_n}{\partial \theta} \right]^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ \sum_n \frac{n}{2n+1} \left( \frac{a_c}{R_E} \right)^{n+1} \frac{\partial J_n}{\partial \lambda} \right]^2 \right\}. \quad (14)$$

Für die Flächenstromdichte dagegen ergibt sich

$$j^2(a_c, \theta, \lambda) = \frac{1}{a_c^2} \left\{ \left[ \sum_n \frac{\partial J_n}{\partial \theta} \right]^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ \sum_n \frac{\partial J_n}{\partial \lambda} \right]^2 \right\}. \quad (15)$$

Zwischen den entsprechenden Verteilungen des Gesamtfeldes an der Erdoberfläche und der zugehörigen Stromfunktion in der Quellschicht-Tiefe ist deshalb keineswegs eine Kongruenz, sondern lediglich eine Korrelation zu erwarten. In der Tat ist die Stromfunktion sowohl mit der Vertikal- als auch mit der Horizontalkomponente des Magnetfeldes eng korreliert.

Die Abb. 4 zeigt die Isodynamen der  $Z$ -Komponente des Hauptfeldes an der Erdoberfläche für den gleichen spektralen Bereich ( $n=1, \dots, 12$ ) wie bei der Stromfunktion in Abb. 1. Die Dominanz des Dipolfeldes, die im wesentlichen bedingt ist durch die immer stärker werdende radiale Abnahme der einzelnen Spektraltermen mit wachsendem  $n$ , erschwert allerdings den direkten Vergleich mit der Stromverteilung in der Quellschicht. Nur die großen Stromwirbel unter Nordamerika und Zentralasien sowie am Rande der Antarktis sind in der Feldverteilung wiederzuerkennen.

Ein besserer Vergleich ist möglich, wenn auch das Magnetfeld reduziert wird auf die Tiefe der Quellschicht, in der alle Terme annähernd gleiches Gewicht haben (Abb. 5). Hier im gemeinsamen Bezugsniveau ist die Ähnlichkeit der Strom- und der Feldverteilung unverkennbar. Im Uhrzeigersinn umflossene Stromwirbel sind verbunden mit Zentren positiver  $Z$ -Komponente, entgegen dem Uhrzeigersinn umflossene Stromwirbel mit Zentren negativer  $Z$ -Komponente. Darüber hinaus finden sich hohe Werte von  $Z$  an Stellen mit starker Änderung der Stromdichte, d.h. des Gradienten von  $J$ .

Noch enger wird die Korrelation zwischen der  $J$ - und der  $Z$ -Verteilung, wenn man in beiden Fällen den Dipolterm ( $n=1$ ) fortläßt (s. Abb. 6 im Vergleich zu Abb. 2). Dabei ändert der Abzug des Dipolanteils – anders als bei der Stromverteilung – die allgemeine Struktur der vertikalen Feldkomponente in niederen Breiten nur wenig. Er äußert sich hauptsächlich in einer verminderten Stärke der großen Zentren in höheren Breiten. Entsprechend gering ist die Änderung der Feldverteilung, wenn man vom Anteil ersten Grades gerade soviel einbezieht, wie sich durch Extrapolation des räumlichen Spektrums ergibt. Die Abb. 7 zeigt das so bestimmte Magnetfeld in der Quellschicht-Tiefe, das qualitativ mit der Stromverteilung in Abb. 3 verknüpft ist. Es dürfte ein realistisches Bild sein vom Feld der ge-

samten, unmittelbar in der Quellschicht fließenden Ströme.

Für die Horizontalkomponente  $H$  ist das Bild insofern etwas verwickelter, als diese nicht direkt proportional ist der Stromfunktion  $J$ , sondern verknüpft ist mit deren Gradienten (s. Gl. (11) bzw. (14)). Ermöglicht wird der Vergleich auch hier wieder erst nach Reduktion der Feldverteilung auf die Quellschicht-Tiefe von 3000 km. Der Kürze halber ist lediglich das Hauptfeld (bis einschließlich  $n=12$ ) mit dem für die Quellschicht extrapolierten Dipolanteil dargestellt (Abb. 8 im Vergleich zu Abb. 3). Entsprechend den Erwartungen, liegen die Zentren maximaler Horizontalkomponente an den Stellen größter Stromdichte, während die Zentren der Stromwirbel sich im allgemeinen in minimalen  $H$ -Werten widerspiegeln. Besonders deutlich treten diese Verhältnisse hervor bei den beiden Stromwirbeln nahe Südafrika.

## Diskussion

Das bisher rein formal bestimmbare Stromsystem zur Erzeugung des Erdmagnetfeldes kann den Anspruch weitestgehender Realität erheben, wenn es bezogen wird auf die Quellschicht nahe der Erdkernoberfläche, in 3000 km Tiefe, deren Annahme nahegelegt wird durch das räumliche Spektrum der mittleren Energiedichte des Feldes. Die besondere Bedeutung dieser Stromverteilung erwächst aus dem Sachverhalt, daß sie unmittelbar und in eindeutiger Weise bestimmt wird durch die gegebene Feldverteilung. Außer einem quellenfreien Erdmantel sind keinerlei zusätzliche Annahmen bzw. einschränkende theoretische Vorstellungen erforderlich. Daraus folgt eine direkte Verknüpfung der abgeleiteten Stromverteilung sowohl mit der Vertikal- als auch mit der Horizontalkomponente des beobachteten Feldes.

Der Darstellung von Details der Stromverteilung ist nur insofern eine Grenze gesetzt, als im räumlichen Spektrum ab  $n=15$  der Krustenanteil des Feldes das Kernfeld verdeckt. Umgekehrt kann im unteren Spektralbereich, bis  $n=12$ , ein etwaiger Feldanteil aus der Kruste vernachlässigt werden, wie schon durch Extrapolation des eigentlichen Spektralastes für das Krustenfeld leicht abzuschätzen ist. In der Tat führt eine gehäufte Berücksichtigung des Krustenanteils im Bereich niedrigerer Grade, unter Verwendung eines globalen Krustenmodell-Feldes (Meyer et al., 1983), zu Korrekturen der Stromverteilung, die im allgemeinen innerhalb der Zeichengenauigkeit liegen und auf die deshalb hier verzichtet worden ist.

Eine Sonderstellung innerhalb des Kernfeldes kommt lediglich dem Dipolterm ( $n=1$ ) zu, der von dem allgemeinen linearen Abfall des spektralen Hauptfeldastes in signifikanter Weise abweicht. Dies deutet darauf hin, daß das Dipolfeld und die mit ihm verknüpften Ströme wiederum aus zwei ursächlich getrennten Anteilen bestehen: einem ersten Anteil, der zusammen mit den höheren Multipolfeldern der erschlossenen Quellschicht entstammt, und einem zweiten Anteil, dem Hauptdipol, dessen Erzeugungsmechanismus vermutlich größere Teile des Erdkerns oder gar den Kern als Ganzes betrifft. Letzterer hat paläomagnetischen Untersuchungen zufolge offenbar eine achsenparallele Rich-

tung. Damit wird es möglich, durch Extrapolation des räumlichen Spektrums die Ströme für den aus der Quellschicht stammenden Dipolanteil voll mit in die Betrachtungen einzubeziehen. Das Bild der Abb. 3 stellt die gesamten Ströme dar, die ursächlich der Quellschicht nahe der Erdoberfläche zuzuordnen sind.

Eine gesonderte Behandlung von Quellschicht-Anteil des Dipolfeldes und Hauptdipol ist weiter gerechtfertigt durch das unterschiedliche Verhalten beider bezüglich der zeitlichen Änderung. Das räumliche Spektrum der Säkularvariation, bei dem – anders als bei dem räumlichen Spektrum des Feldes selbst – der Dipolterm voll mit in die lineare Regression einbezogen werden kann, läßt darauf schließen, daß die Ursache der gegenwärtig beobachteten Säkularvariation zur Gänze in den Änderungen der Quellschicht-Ströme zu sehen ist (vgl. Meyer, 1985a, b). Über die Verteilung der mit dem Feld des Hauptdipols verknüpften Ströme, die hierbei quasi als stationär anzusehen sind, kann vorerst nichts Genaueres gesagt werden. Überhaupt können diese Ströme wohl nur erschlossen werden in Verbindung mit Untersuchungen über den Mechanismus ihrer Erzeugung, der zugleich ihre langfristige Änderung, einschließlich ihrem Verhalten bei der Feldumkehr, einbezieht. So muß bis auf weiteres offenbleiben, wie groß der Anteil des Hauptdipols an den Strömen in der Quellschicht ist.

Die Abb. 3 zeigt die Stromverteilung, deren strukturelle Änderung unmittelbar im Zusammenhang steht mit der beobachteten Säkularvariation. Während die Säkularvariation des Feldes als räumliche Vektorverteilung nur unvollkommen in Form von Komponenten-Profilen graphisch dargestellt werden kann, läßt sie sich im Prinzip auf diese Weise durch eine „ebene“ Kugelflächen-Verteilung vollständig beschreiben.

*Danksagung.* Wir danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Förderung der vorliegenden Untersuchungen. Die numerischen Rechnungen wurden durchgeführt auf der Sperry 1100/83 der Gesellschaft für Wissenschaftliche Datenverarbeitung Göttingen (GWDG), bei der auch die Vorlagen für die Abbildungen angefertigt wurden. Herrn Dr. J.C. Cain vom U.S. Geological Survey in Denver/Colorado danken wir für die vorzeitige Überlassung der Koeffizienten des Feldmodells M 051782.

### Literaturverzeichnis

- Cain, J.C., Schmitz, D.R., Muth, L.: Small-scale features in the earth's magnetic field observed by Magsat. *J. Geophys. Res.* **89**, 1070–1076, 1984
- Chapman, S., Bartels, J.: *Geomagnetism*, Vol. II. Oxford: Clarendon 1940
- Gauss, C.F.: Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus. In: Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838, hrsg. v. C.F. Gauss und W. Weber: pp. 1–57. Leipzig: Verlag d. Weidmannschen Buchhdlg. 1839
- Meyer, J.: Secular variation of magnetic mean energy density at the source-layer depth. *Phys. Earth Planet. Int.* **39**, 1985a (im Druck)
- Meyer, J.: The decrease of the geomagnetic dipole field as part of the general secular variation. *J. Geomag. Geoelectr.* **37**, 153–158, 1985b
- Meyer, J., Hufen, J.-H., Siebert, M., Hahn, A.: Investigations of the internal geomagnetic field by means of a global model of the earth's crust. *J. Geophys.* **52**, 71–84, 1983
- Vestine, E.H., Laporte, L., Lange, I., Scott, W.E.: *The geomagnetic field. Its description and analysis.* Publ. no. 580, Carnegie Institution of Washington 1947

Eingegangen 13. März 1985

Angenommen 6. Mai 1985