Werk

Titel: Mathematische Annalen

Ort: Leipzig

Jahr: 1880

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN235181684_0017

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN235181684_0017|LOG_0061

Ueber die asymptotischen Werthe der Coefficienten in den nach der mittleren Anomalie vorgenommenen Entwickelungen*.)

Von

W. Scheibner in Leipzig.

§ 1.

Franz Carlini hat im Jahre 1817 eine Abhandlung unter dem Titel: „*Ricerche sulla convergenza della serie che serve alla soluzione del problema di Keplero, Milano* 1817.“ veröffentlicht, in welcher er sich hauptsächlich mit der Aufgabe beschäftigt, den Coefficienten des Sinus eines grossen Vielfachen der mittleren Anomalie in der Entwickelung der Mittelpunktsgleichung annähernd zu bestimmen. Diese Abhandlung ist in Nr. 709—712 der *Astronomischen Nachrichten***) von C. G. J. Jacobi mit Zusätzen und Verbesserungen reproducirt worden, nachdem derselbe bereits in einem früheren Aufsatze in Nr. 665***) auf verschiedene Fehler aufmerksam gemacht hatte, welche die Arbeit Carlini's entstellen und die Richtigkeit seiner Resultate beeinträchtigen. Trotzdem bezeichnet Jacobi die erwähnte Schrift, wegen der darin angewandten Methode und der Kühnheit ihrer Composition, als eine der wichtigsten und bedeutendsten Arbeiten über die Bestimmung der Werthe der Functionen grosser Zahlen, und sagt von der oben genannten Aufgabe, dass sie zu den schwierigsten ihrer Art gehöre, während die Auflösung des ähnlichen Problems in Bezug auf die Entwickelung des Radiusvectors, welche Carlini gleichfalls gibt, viel leichter sei. Die letztere Aufgabe hat auch Laplace (Supplement zum 5. Bande der *Mécanique céleste*, 1827†)) behandelt; jedoch entbehrt die von ihm eingeschlagene Methode — ebenfalls nach Jacobi's Urtheile — einer strengen Begründung und hat einen mehr divinatorischen Charakter. Wenn endlich Jacobi hinzufügt, dass er die Umarbeitung der Carlini'schen Abhandlung aus dem Grunde unternommen habe, um für die von ihm selbst über denselben Gegenstand

---

*) Aus den Berichten der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. vom 31. Mai 1856.

**) Bd. 30, S. 197—254.

***) Bd. 28, S. 257—270.

†) Siehe auch *Connaissance des Temps pour* 1828, p. 311.

gefundenen Resultate eine anderweitige Bestätigung zu erhalten, welche die Eigenthümlichkeit der von ihm angewandten Methoden wünschenswerth mache: so scheint daraus hervorzugehen, als sei Jacobi im Besitze einer auf anderen Principien beruhenden Lösung des in Rede stehenden Problems gewesen; jedoch ist ausser der erwähnten Reproduction des Carlini'schen Aufsatzes Nichts darüber bekannt geworden.

§ 2.

Ich werde im Folgenden eine allgemeine Methode angeben, mittelst deren man die asymptotischen Werthe der Coefficienten in den nach den trigonometrischen Functionen der Vielfachen der mittleren Anomalie fortschreitenden Entwickelungen finden kann. Dieselbe führt mit überraschender Kürze und Leichtigkeit zum Ziele, und erlaubt von den nach den absteigenden Potenzen des Index geordneten halbconvergirenden Reihen, durch welche jene asymptotischen Werthe dargestellt werden, beliebig viele Glieder zu berechnen. Die Entwickelung der Mittelpunktsgleichung und des Radiusvectors erscheinen beide als specielle Fälle viel allgemeinerer Functionen, welche sich nach der mittleren Anomalie entwickeln lassen. Die Richtigkeit der von Jacobi abgeleiteten Ausdrücke hat dabei ihre volle Bestätigung gefunden, wie ich bereits in Gould's *Astronomical Journal* bemerkt habe*), wo die auf die Entwickelung einer beliebigen Potenz des Radiusvectors bezüglichen Formeln, jedoch ohne ihre vollständige Herleitung, angeführt sind.

Die Methode, von welcher im Folgenden Gebrauch gemacht werden soll, beruht auf einer an sich höchst einfachen Transformation der bestimmten Integrale, durch welche man die zu betrachtenden Coefficienten darstellen kann. Da aber die Variabeln, durch deren Substitution jene Transformation erreicht wird, complexe Werthe durchlaufen, um von der untern zur oberen Integrationsgrenze zu gelangen, so erscheint es nicht unzweckmässig, um dem Verfahren die ganze wünschenswerthe Strenge zu verleihen, deren dasselbe fähig ist, einige Betrachtungen allgemeinerer Art über derartige imaginäre Substitutionen vorauszuschicken. . . .**)

§§ 3—8.

Wir beginnen mit der Untersuchung des Integrals

$$u_p = \int_{-T}^{T} t^p e^{-t^2} dt$$

*) Siehe den vorhergehenden Aufsatz, S. 531—544 dieses Bandes.

**) In den verflossenen Decennien ist die Theorie der Integrale mit complexem Integrationswege den Mathematikern so geläufig geworden, dass hier beim Wiederabdruck meiner im Jahre 1856 verfassten Abhandlung ein grosser Theil der erwähnten, in den §§ 3—8 enthaltenen Betrachtungen unterdrückt werden konnte.

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen, p einen beliebigen positiven oder negativen Exponenten, und T eine reelle positive Grösse bezeichnen sollen. Den Integrationsweg führen wir dergestalt am Nullpunkte vorüber, dass t einen positiven imaginären Werth erhält, (die Ordinatenaxe auf der positiven Seite schneidet), weil beim Durchgange durch den Nullpunkt $t^p = e^{p \log t}$ unendlich resp. unbestimmt werden, das Integral also seinen Sinn verlieren würde.

Man findet nun leicht

$$u_p = \int_{-\infty}^{\infty} t^p e^{-t^2} dt \qquad (1 + e^{p\pi i}) \int_{T}^{\infty} t^p e^{-t} dt$$

weil vermöge der gemachten Voraussetzung beim Durchgang durch die Ordinatenaxe $\log t$ den imaginären Theil $+\frac{\pi i}{2}$ erhält, folglich nach der Stetigkeit $\lg(-t) = \lg t + \pi i$ gesetzt werden muss. Führt man die Bezeichnung

$$v_p = \int_{-\infty}^{\infty} t^p e^{-t^2} dt, \qquad w_p = \int_{T}^{\infty} t^p e^{-t} dt$$

ein, so folgt

$$u_p = v_p - 2 e^{\frac{p\pi i}{2}} \cos \frac{p\pi}{2} \, w_p$$

Den Werth des Integrals v_p erhält man sogleich, für $p + 1 > 0$, bei unendlicher Annäherung an den reellen Integrationsweg

$$v_p = 2 e^{\frac{p\pi i}{2}} \cos \frac{p\pi}{2} \int_{0}^{\infty} t^p e^{-t^2} dt$$

$$= e^{\frac{p\pi i}{2}} \cos \frac{p\pi}{2} \, \Gamma \frac{1+p}{2}$$

wenn

$$\Gamma p = \lim_{m=\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdots m}{p \cdot \overline{p+1} \cdots \overline{p+m-1}} \, m^{p-1}$$

und da vermöge der Definitionsgleichung der Gammafunction

$$\Gamma \frac{1+p}{2} \, \Gamma \frac{1-p}{2} = \frac{\pi}{\cos \frac{p\pi}{2}}$$

so ergibt sich

$$v_p = \frac{\pi}{\Gamma \frac{1-p}{2}} \, e^{\frac{p\pi i}{2}}$$

mithin

$$u_p = e^{\frac{p\pi i}{2}} \left\{ \frac{\pi}{\Gamma \frac{1-p}{2}} - 2 w_p \cos \frac{p\pi}{2} \right\}$$

Nach bekannten Sätzen bleibt diese Gleichung auch für $p \leqq -1$ richtig, wenn der Integrationsweg, wie oben verlangt, an der positiven Seite des Nullpunktes vorübergeführt wird. Es liegt also der allgemeinen Geltung des für $\int\limits_{-T}^{T} t^p e^{-t^2} dt$ gefundenen Ausdruckes die Voraussetzung zu Grunde, dass t zwischen $-T$ und T solche Werthe durchlaufe, welche einen positiven imaginären Theil haben.

§ 9.

Wir benutzen die Gelegenheit, um über die Berechnung der Transscendente w_p Einiges zu sagen, obgleich dieselbe für einigermaassen grosse Werthe von T in der Regel vernachlässigt werden kann. Wir wollen für das Integral

$$w_p = \int\limits_T^\infty t^p \, e^{-t^2} dt$$

zuerst eine Entwickelung nach den absteigenden Potenzen von T ableiten. Hierzu setzen wir $t = T\sqrt{1+s}$, wodurch

$$w_p = \frac{1}{2} e^{-T^2} T^{p+1} \int\limits_0^\infty (1+s)^{-\frac{1-p}{2}} e^{-T^2 s} ds$$

erhalten wird. Die Entwickelung nach dem binomischen Satze gibt

$$w_p = \frac{1}{2} e^{-T^2} T^{p+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma\frac{1-p}{2}+n}{\Gamma\frac{1-p}{2}\,\Gamma n+1} \int\limits_0^\infty s^n e^{-T^2 s} ds$$

und nach Ausführung der Integration

$$w_p = \frac{1}{2} e^{-T^2} \sum (-1)^n \frac{\Gamma\frac{1-p}{2}+n}{\Gamma\frac{1-p}{2}} \cdot \frac{1}{T^{2n-p+1}}$$

oder

$$w_p = \frac{1}{2} e^{-T^2} T^{p-1} \left\{1 - \frac{1-p}{2T^2} + \frac{1-p\cdot 3-p}{4T^4} - \frac{1-p\cdot 3-p\cdot 5-p}{8T^6} \pm \cdots\right\}$$

Die Function innerhalb der Parenthese lässt sich als die Grenze darstellen, welcher sich die hypergeometrische Reihe

$$F\left(1, \frac{1-p}{2}, \omega, -\frac{\omega}{T^2}\right) =$$

$$1 - \frac{1-p}{2\omega}\frac{\omega}{T^2} + \frac{1-p\cdot 3-p}{4\omega\cdot\omega+1}\frac{\omega^2}{T^4} - \frac{1-p\cdot 3-p\cdot 5-p}{8\omega\cdot\omega+1\cdot\omega+2}\frac{\omega^3}{T^6} \pm \cdots$$

nähert, wenn ω über alle Grenzen wächst. Diese Reihe kann aber nach bekannten Formeln in einen Kettenbruch transformirt werden. Gauss hat in seiner berühmten Abhandlung über die hypergeometrische Reihe*) die Gleichung

$$F(1, \alpha, \gamma, x) = \frac{1}{1} \,\dot{-}\, \frac{ax}{1} \,\dot{-}\, \frac{bx}{1} \,\dot{-}\, \frac{cx}{1} \,\dot{-}\, \frac{dx}{1} \,\dot{-}\, \frac{ex}{1} \,\dot{-}\, \ldots$$

abgeleitet, wo

$$a = \frac{\alpha}{\gamma},\ b = \frac{1\cdot\gamma-\alpha}{\gamma\cdot\gamma+1},\ c = \frac{\alpha+1\cdot\gamma}{\gamma+1\cdot\gamma+2},\ d = \frac{2\cdot\gamma-\alpha+1}{\gamma+2\cdot\gamma+3},\ e = \frac{\alpha+2\cdot\gamma+1}{\gamma+3\cdot\gamma+4}\ldots$$

gesetzt ist. Wendet man diese Formel auf $\lim F\left(1, \frac{1-p}{2}, \omega, -\frac{\omega}{T^2}\right)$ an, so wird ohne Schwierigkeit die Kettenbruchsentwickelung erhalten:

$$w_p = \frac{1}{2} e^{-T^2} T^{p-1} \left\{ \frac{1}{1} \,\dot{+}\, \frac{\frac{1-p}{2T^2}}{1} \,\dot{+}\, \frac{\frac{1}{T^2}}{1} \,\dot{+}\, \frac{\frac{3-p}{2T^2}}{1} \,\dot{+}\, \frac{\frac{2}{T^2}}{1} \,\dot{+}\, \frac{\frac{5-p}{2T^2}}{1} \,\dot{+}\, \ldots \right\}$$

Für $p = 0$ geht daraus der bekannte Laplace'sche Kettenbruch hervor

$$\int_T^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \frac{e^{-T^2}}{T} \left\{ \frac{1}{1} \,\dot{+}\, \frac{\frac{1}{2T^2}}{1} \,\dot{+}\, \frac{\frac{1}{T^2}}{1} \,\dot{+}\, \frac{\frac{3}{2T^2}}{1} \,\dot{+}\, \frac{\frac{2}{T^2}}{1} \,\dot{+}\, \frac{\frac{5}{2T^2}}{1} \,\dot{+}\, \ldots \right\}$$

von welchem demnach im Vorstehenden eine bemerkenswerthe Verallgemeinerung gegeben worden ist.**)

§ 10.

Ich wende mich nach diesen Präliminarien zur Behandlung des eigentlichen Gegenstandes dieses Aufsatzes, nämlich zur Entwickelung gewisser sehr allgemeiner, von der wahren Anomalie abhängenden Ausdrücke nach der mittleren Anomalie.

Im Folgenden werde durch f die wahre, ε die excentrische, g die mittlere Anomalie bezeichnet; φ sei der Excentricitätswinkel, r der Radiusvector; nimmt man dann die halbe grosse Axe der Kürze halber als Einheit, so geben die bekannten Fundamentalgleichungen

$$\begin{aligned} r &= 1 - \sin\varphi \cos\varepsilon \\ r\cos f &= \cos\varepsilon - \sin\varphi \\ r\sin f &= \cos\varphi \sin\varepsilon \\ g &= \varepsilon - \sin\varphi \sin\varepsilon \\ dg &= r\,d\varepsilon \end{aligned}$$

---

*) *Disquisitiones generales circa seriem . . . p.* 15.
**) Vergl. Leipziger Berichte, Jahrg. 1864, S. 60.

Die Functionen, welche hier zunächst nach der mittleren Anomalie entwickelt werden sollen, sind, wenn k einen beliebigen reellen Exponenten, l und m beliebige ganze, positive oder negative Zahlen bedeuten

$$r^k \cos(lf + m\varepsilon) \quad \text{und} \quad r^k \sin(lf + m\varepsilon)$$

oder wenn wir die imaginären Exponentialgrössen einführen, die Function

$$u = r^k e^{(lf + m\varepsilon)i}$$

Die Entwickelung nach den trigonometrischen Functionen der Vielfachen der mittleren Anomalie lässt sich gleichfalls, da u die Periode 2π besitzt, auf eine nach den positiven und negativen Potenzen der Exponentialgrösse e^{gi} fortschreitende Reihe reduciren, so dass man allgemein setzen darf

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ngi}$$

Die Coefficienten c_n lassen sich bekanntermaassen als bestimmte Integrale darstellen, und es ist nicht schwer, augenblicklich den betreffenden in der Gleichung

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u e^{-ngi} dg$$

enthaltenen Ausdruck zu verificiren.

Wenn wir im Folgenden unter n eine ganze positive Zahl von einer gewissen Grösse verstehen wollen, so haben wir die beiden Integrale

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r^k e^{(lf + m\varepsilon - ng)i} dg \quad \text{und} \quad c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r^k e^{(lf + m\varepsilon + ng)i} dg$$

zu betrachten. Führt man unter dem Integralzeichen $-g$ statt g ein, so kehrt sich in beiden Ausdrücken das Zeichen von i um, woraus hervorgeht, dass die Coefficienten c sämmtlich reelle Werthe haben. Ferner ergiebt sich, dass die Werthe von c_n und c_{-n} durch Vertauschung der Vorzeichen von l und m in einander übergehen, wesshalb wir bloss die Entwickelung des einen der beiden Ausdrücke zu untersuchen brauchen.

§ 11.

Wir legen unserer Untersuchung den Ausdruck

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r^k e^{(lf+m\varepsilon-ng)i}\,dg$$

zu Grunde, und setzen voraus, dass die positive Zahl n grösser sei, als der numerische Werth der Summe $l+m$, also $n > \pm(l+m)$. Das Integral ist so zu verstehen, dass die Variable g von der untern zur oberen Grenze alle reellen Werthe zwischen $-\pi$ und π durchläuft. Dasselbe gilt von dem Ausdrucke, welcher durch die Transformation des obigen Integrals erhalten wird, wenn man statt der mittleren die excentrische Anomalie als Integrationsvariable einführt. Dann wird vermöge der zwischen r, f, g und ε bestehenden Relationen

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r^{k+l+1}(r\cos f - ir\sin f)^{-l} e^{-(n-m)\varepsilon i + n(\varepsilon-g)i}\,d\varepsilon$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\sin\varphi\cos\varepsilon)^{k+l+1}(\cos\varepsilon - \sin\varphi - i\cos\varphi\sin\varepsilon)^{-l}\times$$
$$e^{-(n-m)\varepsilon i + n i \sin\varphi\sin\varepsilon}\,d\varepsilon$$

Auf dieses Integral wenden wir die imaginäre Substitution

$$e^{\vartheta i} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\, e^{\varepsilon i}$$

an, statt deren wir auch schreiben können

$$\vartheta = \varepsilon + \omega i,$$

wenn zur Abkürzung $\omega = \log\cot\frac{1}{2}\varphi$ gesetzt wird. Damit erhalten wir $d\varepsilon = d\vartheta$, nebst den Integrationsgrenzen $-\pi+\omega i$ und $\pi+\omega i$; der Weg zwischen diesen beiden complexen Werthen ist so beschaffen, dass die Variable ϑ nicht verschwinden kann, sondern stets den positiven imaginären Theil ωi behält. Aus den Gleichungen

$$e^{\varepsilon i} + e^{-\varepsilon i} = \cot\tfrac{1}{2}\varphi\, e^{\vartheta i} + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\, e^{-\vartheta i}$$
$$e^{\varepsilon i} - e^{-\varepsilon i} = \cot\tfrac{1}{2}\varphi\, e^{\vartheta i} + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\, e^{-\vartheta}$$

folgt

$$2\cos\varepsilon = (\cot\tfrac{1}{2}\varphi + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi)\cos\vartheta + i(\cot\tfrac{1}{2}\varphi - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi)\sin\vartheta$$
$$2i\sin\varepsilon = (\cot\tfrac{1}{2}\varphi - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi)\cos\vartheta + i(\cot\tfrac{1}{2}\varphi + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi)\sin\vartheta$$

und durch Multiplication mit $\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi$

$$\sin\varphi\cos\varepsilon = \cos\vartheta + i\cos\varphi\sin\vartheta$$
$$i\sin\varphi\sin\varepsilon = \cos\varphi\cos\vartheta + i\sin\vartheta\,.$$

Hiermit entsteht die neue Integralformel

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi+\omega i}^{\pi+\omega i}(1-\cos\vartheta - i\cos\varphi\sin\vartheta)^{k+l+1}(\sin\varphi\cos\vartheta-\sin\varphi)^{-l}\times$$
$$e^{-(n-m)(\omega+\vartheta i)+n i\sin\vartheta+n\cos\varphi\cos\vartheta}\,d\vartheta$$
$$=\sin^{-l}\varphi\,\mathrm{tg}^{\,n-m}\tfrac{1}{2}\varphi\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi+\omega i}^{\pi+\omega i}(1-\cos\vartheta-i\cos\varphi\sin\vartheta)^{k+l+1}(\cos\vartheta-1)^{-l}\times$$
$$e^{m\vartheta i-n(\vartheta-\sin\vartheta)i+n\cos\varphi\cos\vartheta}\,d\vartheta$$

§ 12.

Um diesen Ausdruck nach den absteigenden Potenzen von n zu entwickeln, führen wir

$$s=\sin\tfrac{1}{2}\vartheta$$

als neue Variable ein, die sich auf imaginärem Wege zwischen den reellen Grenzen $\sin(-\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\omega i)=-S$ und $\sin(\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\omega i)=S$ bewegt, und zwar ohne durch Null hindurchzugehen, weil ϑ nicht verschwinden kann. Der Werth von S wird leicht aus der Gleichung

$$S=\cos\tfrac{1}{2}\omega i=\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}\omega}+e^{-\frac{1}{2}\omega}\right)$$
$$=\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\varphi}+\sqrt{\cot\tfrac{1}{2}\varphi}\right)=\sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{2\sin\varphi}}$$

gefunden; berücksichtigt man ferner die Relationen

$$\cos\vartheta=1-2s^2,\qquad \sin\vartheta=2s\sqrt{1-s^2}$$
$$e^{\pm\frac{1}{2}\vartheta i}=\sqrt{1-s^2}\pm is,\quad d\vartheta=\frac{2\,ds}{\sqrt{1-s^2}}$$
$$\vartheta-\sin\vartheta=\int\limits_0^{\vartheta}(1-\cos\vartheta)\,d\vartheta=4\int\limits_0^{s}\frac{s^2\,ds}{\sqrt{1-s^2}}=4\sigma$$

wo

$$\sigma=\frac{1}{3}s^3+\frac{1}{10}s^5+\frac{3}{56}s^7+\frac{5}{144}s^9+\frac{35}{1408}s^{11}+\cdots$$

zur Abkürzung geschrieben ist, so folgt

$$c_n = \sin^{-l}\varphi \,\mathrm{tg}^{n-m}\tfrac{1}{2}\varphi \, e^{n\cos\varphi}\,\frac{1}{\pi}\times$$

$$\int_{-S}^{S}(2s^2 - 2is\cos\varphi\sqrt{1-s^2})^{\lambda+l+1}(-2s^2)^{-l}(\sqrt{1-s^2}\pm is)^{\pm 2m}\times$$

$$e^{-4n\sigma\iota - 2ns^2\cos\varphi}\frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}$$

$$= (2\cos\varphi)^{\lambda+1}\,\mathrm{tg}^{-l}\varphi\,\mathrm{tg}^{n-m}\tfrac{1}{2}\varphi\, e^{n\cos\varphi}\,\frac{1}{\pi}\times$$

$$\int_{-S}^{S}\left(1+\frac{i}{\cos\varphi}\,\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\right)^{\lambda+l+1}\left(1+i\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\right)^{2m}(1-s^2)^{\frac{\lambda+l+2m}{2}}\times$$

$$e^{-4n\sigma\iota - 2ns^2\cos\varphi}\left(\frac{s}{i}\right)^{k-l+1}ds$$

Setzt man $N^2 = 2n\cos\varphi$, so ist hier endlich $t = Ns$ zu substituiren, wo t gleichfalls ohne durch Null hindurchzugehen, auf imaginärem Wege von $-T$ bis

$$+T = NS = \sqrt{n(\cos\varphi + \cot\varphi)}$$

variirt. Damit wird schliesslich der Ausdruck erhalten:

$$c_n = n^{-\frac{\lambda-l+2}{2}}(2\cos\varphi)^{\frac{\lambda+l}{2}}\,\mathrm{tg}^{-l}\varphi\,\mathrm{tg}^{n-m}\tfrac{1}{2}\varphi\, e^{n\cos\varphi}\,\frac{1}{\pi}\times$$

$$\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{t}{Ni\cos\varphi}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{\lambda+l+1}\left(1-\frac{t}{Ni}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{2m}\times$$

$$\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{\frac{k+l+2m}{2}} e^{-4n\sigma i - t^2}\left(\frac{t}{i}\right)^{k-l+1}dt$$

und durch Umkehr der Vorzeichen von l und m

$$c_{-n} = n^{-\frac{k+l+2}{2}}(2\cos\varphi)^{\frac{k-l}{2}}\,\mathrm{tg}^{l}\varphi\,\mathrm{tg}^{n+m}\tfrac{1}{2}\varphi\, e^{n\cos\varphi}\,\frac{1}{\pi}\times$$

$$\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{t}{Ni\cos\varphi}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{k-l+1}\left(1+\frac{t}{Ni}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{2m}\times$$

$$\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{\frac{k-l+2m}{2}} e^{-4n\sigma\iota - t^2}\left(\frac{t}{i}\right)^{k+l+1}dt$$

Man sieht aus den gefundenen Formeln, wesshalb die Annahme $n > \pm(l+m)$ gemacht worden ist: damit nämlich die Factoren vor dem Integralzeichen bei beiden Coefficienten c_n und c_{-n} von derjenigen Ordnung in Bezug auf die Excentricität oder den Winkel φ werden, welche diesen Coefficienten in der That zukommt. Das im Vorhergehenden auseinandergesetzte Verfahren bleibt zwar richtig, auch wenn die angegebene Ungleichung nicht erfüllt ist; schreitet man jedoch zu der Entwickelung nach den absteigenden Potenzen von n, so zeigt sich, dass wenn n die Exponenten m und l an Grösse nicht wesentlich übersteigt, die Convergenz selbst in den ersten Gliedern der Entwickelung für die numerische Berechnung zu gering wird.

Es ist nun nichts leichter, als mit Hülfe der abgeleiteten Formeln für das Integral $u_p = \int_{-T}^{T} t^p e^{-t^2} dt$ die Entwickelung von c_n und c_{-n} nach den absteigenden Potenzen von n oder N zu bewirken. Denn die Functionen unter dem Integralzeichen lassen sich nach bekannten Sätzen in lauter Glieder auflösen, welche von der Form $\alpha_\lambda t^p e^{-t^2} n^{-\lambda}$ sind, durch deren Integration das Erforderliche geleistet wird. Die imaginären Glieder müssen dabei, wegen der früher bewiesenen Realität von c_n und c_{-n}, verschwinden; auch ist die Bedingung erfüllt, dass t auf imaginärem Wege von $-T$ nach T gelangt, während sein imaginärer Theil beständig positiv bleibt. Diess folgt aus der Gleichung

$$t = \sqrt{2n\cos\varphi}\,\sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon + \omega i)$$
$$= \sqrt{\tfrac{n}{2}\cos\varphi}\left\{\left(e^{\frac{1}{2}\omega} + e^{-\frac{1}{2}\omega}\right)\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon + i\left(e^{\frac{1}{2}\omega} - e^{-\frac{1}{2}\omega}\right)\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon\right\}$$

wo ε zwischen $-\pi$ und π enthalten ist.

§ 13.

Die Ausführung der weiteren Entwickelung ist lediglich Sache der Rechnung. Man leitet leicht die Reihenentwickelungen ab:

$$e^{-4n\sigma i} = 1 - \frac{2i}{\cos\varphi} N^2\sigma - \frac{2}{\cos^2\varphi} N^1\sigma^2 + \frac{4i}{3\cos^3\varphi} N^6\sigma^3 +$$
$$+ \frac{2}{3\cos^4\varphi} N^8\sigma^4 - \frac{4i}{15\cos^5\varphi} N^{10}\sigma^5 \ldots$$

$$N^2\sigma = \frac{t^3}{3N} + \frac{t^5}{10N^3} + \frac{3t^7}{56N^5} \ldots$$

folglich

$$e^{-4n\sigma i} = 1 + \frac{2t^3}{3\cos\varphi}\frac{1}{Ni} + \frac{2t^6}{9\cos^2\varphi}\frac{1}{(Ni)^2} - \left(\frac{t^5}{5\cos\varphi} - \frac{4t^9}{81\cos^3\varphi}\right)\frac{1}{(Ni)^3}$$
$$- \left(\frac{2t^8}{15\cos^2\varphi} - \frac{2t^{12}}{243\cos^4\varphi}\right)\frac{1}{(Ni)^4} + \left(\frac{3t^7}{28\cos\varphi} - \frac{2t^{11}}{45\cos^3\varphi} + \frac{4t^{15}}{3645\cos^5\varphi}\right)\frac{1}{(Ni)^5} \ldots$$

Ferner giebt der binomische Lehrsatz

$$\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{\frac{k+l}{2}}\left[1-\frac{1}{Ni\cos\varphi}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{k+l+1}=\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{\frac{k+l}{2}}$$

$$-\frac{k+l+1}{1}\,\frac{t}{Ni\cos\varphi}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{\frac{k+l-1}{2}}+\frac{k+l+1\ k+l}{1\cdot 2}\,\frac{t^2}{(Ni)^2\cos^2\varphi}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{\frac{k+l-2}{2}}$$

$$-\frac{k+l+1\cdot k+l\cdot k+l-1}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{t^3}{(Ni)^3\cos^3\varphi}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{\frac{k+l-3}{2}}$$

$$+\frac{k+l+1\cdot k+l\cdot k+l-1\ k+l-2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,\frac{t^2}{(Ni)^4\cos^4\varphi}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{\frac{k+l-4}{2}}$$

$$-\frac{k+l+1\cdot k+l\cdot k+l-1\cdot k+l-2\cdot k+l-3}{1\cdot 2\cdot 3\ 4\cdot 5}\,\frac{t^5}{(Ni)^5\cos^5\varphi}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{\frac{k+l-5}{2}}\cdots$$

folglich

$$\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{\frac{k+l}{2}}\left[1-\frac{t}{Ni\cos\varphi}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{k+l+1}=1-\frac{k+l+1}{\cos\varphi}\,\frac{t}{Ni}$$

$$+\frac{k+l}{2}\left(1+\frac{k+l+1}{\cos^2\varphi}\right)\frac{t^2}{(Ni)^2}-\frac{k+l-1\cdot k+l+1}{2\cos\varphi}\left(1+\frac{k+l}{3\cos^2\varphi}\right)\frac{t^3}{(Ni)^3}$$

$$+\frac{k+l-2\cdot k+l}{8}\left(1+2\,\frac{k+l+1}{\cos^2\varphi}+\frac{k+l-1\ k+l+1}{3\cos^4\varphi}\right)\frac{t^4}{(Ni)^4}$$

$$-\frac{k+l-3\cdot k+l-1\cdot k+l+1}{8\cos\varphi}\left(1+\frac{2}{3}\,\frac{k+l}{\cos^2\varphi}+\frac{k+l-2\ k+l}{15\cos^4\varphi}\right)\frac{t^5}{(Ni)^5}\cdots$$

Auf analoge Weise erhält man

$$\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{\pm m}\left[1\mp\frac{t}{Ni}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{\pm 2m}=\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{m}$$

$$-\frac{2m}{1}\,\frac{t}{Ni}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{m-\frac{1}{2}}+\frac{2m\ 2m-1}{1\cdot 2}\,\frac{t^2}{(Ni)^2}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{m-1}$$

$$-\frac{2m\cdot 2m-1\ 2m-2}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{t^3}{(Ni)^3}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{m-\frac{3}{2}}$$

$$+\frac{2m\cdot 2m-1\ 2m-2\cdot 2m-3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,\frac{t^4}{(Ni)^4}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{m-2}$$

$$-\frac{2m\cdot 2m-1\cdot 2m-2\cdot 2m-3\cdot 2m-4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,\frac{t^5}{(Ni)^5}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{m-\frac{5}{2}}\cdots$$

womit sich ergibt

$$\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{\pm m}\left[1\mp\frac{t}{Ni}\left(1-\frac{t^2}{N^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{\pm 2m}=1-2m\frac{t}{Ni}+2m^2\frac{t^2}{(Ni)^2}$$

$$-\frac{2m-1\cdot 2m\cdot 2m+1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{t^3}{(Ni)^3}+\frac{2m-2\cdot 2m\cdot 2m\cdot 2m+2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{t^4}{(Ni)^4}$$

$$-\frac{2m-3\;2m-1\cdot 2m\cdot 2m+1\cdot 2m+3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\frac{t^5}{(Ni)^5}\cdots$$

Durch Multiplication dieser Ausdrücke folgt das Product

$$1-\frac{1}{Ni}\left\{\left[2m+\frac{k+l+1}{\cos\varphi}\right]t-\frac{2}{3\cos\varphi}t^3\right\}$$

$$+\frac{1}{(Ni)^2}\left\{\left[2m^2+2m\frac{k+l+1}{\cos\varphi}+\frac{k+l}{2}\left(1+\frac{k+l+1}{\cos^2\varphi}\right)\right]t^2-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{4}{3}\frac{m}{\cos\varphi}+\frac{2}{3}\frac{k+l+1}{\cos^2\varphi}\right]t^4+\frac{2}{9\cos^2\varphi}t^6\right\}$$

$$-\frac{1}{(Ni)^3}\left\{\left[\frac{m(4m^2-1)}{3}+2m^2\frac{k+l+1}{\cos\varphi}+m(k+l)\left(1+\frac{k+l+1}{\cos^2\varphi}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{k+l-1\;k+l+1}{2\cos\varphi}\left(1+\frac{k+l}{3\cos^2\varphi}\right)\right]t^3-$$

$$-\left[\frac{4}{3}\frac{m^2}{\cos\varphi}+\frac{4}{3}m\frac{k+l+1}{\cos^2\varphi}-\frac{1}{5\cos\varphi}+\frac{k+l}{3\cos\varphi}\left(1+\frac{k+l+1}{\cos^2\varphi}\right)\right]t^5+$$

$$\left.+\left[\frac{4}{9}\frac{m}{\cos^2\varphi}+\frac{2}{9}\frac{k+l+1}{\cos^3\varphi}\right]t^7-\frac{4}{81\cos^3\varphi}t^9\right\}\cdots$$

Damit erhält der Ausdruck für c_n die Form

$$c_n=n^{-\frac{k-l+2}{2}}(2\cos\varphi)^{\frac{k+l}{2}}\operatorname{tg}^{-l}\varphi\operatorname{tg}^{n-m}\tfrac{1}{2}\varphi\, e^{n\cos\varphi}\frac{1}{\pi}\times$$

$$\int_{-T}^{T}e^{-t^2}\left(\frac{t}{i}\right)^{k-l+1}\left\{1-\frac{1}{Ni}(\alpha t-\beta t^3)+\frac{1}{(Ni)^2}(\gamma t^2-\delta t^4+\varepsilon t^6)-\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda}{(Ni)^3}(\zeta t^3-\eta t^5+\vartheta t^7-\iota t^9)\cdots\right\}dt$$

wo die Werthe der Coefficienten α, β, γ, δ, ε, ζ, η, ϑ, ι aus der voranstehenden Gleichung zu entnehmen sind. Hier hat die Integration nicht die mindeste Schwierigkeit, da früher allgemein

$$\int_{-T}^{T}e^{-t^2}\left(\frac{t}{i}\right)^p dt=\frac{\pi}{\Gamma\frac{1-p}{2}}-2w_p\cos\frac{p\pi}{2}$$

gefunden worden ist. Wir wollen, mit Vernachlässigung der Transscendente w_p, die ersten Glieder hinschreiben, und erhalten:

$$c_n = n^{-\frac{k-l+2}{2}} (2\cos\varphi)^{\frac{k+l}{2}} \operatorname{tg}^{-l}\varphi \operatorname{tg}^{n-m}\tfrac{1}{2}\varphi \, e^{n\cos\varphi} H$$

$$H = \frac{1}{\Gamma\frac{l-k}{2}} - \frac{1}{N}\left\{\left(2m + \frac{k+l+1}{\cos\varphi}\right)\frac{1}{\Gamma\left(\frac{l-k}{2}-1\right)} + \frac{2}{3\cos\varphi}\,\frac{1}{\Gamma\left(\frac{l-k}{2}-3\right)}\right\}$$

$$= \frac{1}{\Gamma\frac{l-k}{2}} - \sqrt{\frac{2}{n\cos\varphi}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{l-k}{2}-1\right)}\left(m + \frac{k+2l}{2\cos\varphi}\right) \cdots$$

Der entsprechende Werth für c_{-n} geht durch Umkehr der Vorzeichen von l und m hervor. Die vernachlässigten Glieder in H sind durch $n\cos\varphi$ dividirt, welches Product also gross genug sein muss, wenn eine hinreichende Annäherung erzielt werden soll

Wir können jetzt bereits den von Jacobi für die Coefficienten der Mittelpunktsgleichung gegebenen Ausdruck verificiren. Um dazu zu gelangen, erinnern wir uns an die Differentialformel

$$df = \frac{\cos\varphi}{r^2}\, dg$$

Setzt man hier

$$\frac{1}{r^2} = c_0 + 2\sum_1^{\infty} c_n \cos ng$$

und integrirt, so folgt wegen $c_0 = \frac{1}{\cos\varphi}$ sogleich

$$f = g + \sum_1^{\infty} \frac{2\cos\varphi}{n}\, c_n \sin ng$$

Jacobi schreibt $f - g = \Sigma P \sin pg$, folglich

$$P = \frac{2\cos\varphi}{p}\, c_p$$

wenn $k = -2$, $l = m = 0$ gesetzt werden. Damit folgt aber

$$P = \frac{1}{p}\left(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi \, e^{\cos\varphi}\right)^p \left\{1 + \frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt{2p\pi}\cos^3\varphi}\right\}$$

identisch mit dem in Nr. 712 der *Astron. Nachrichten*, S. 245 gefundenen Werthe. Zugleich geht aus unserer Ableitung hervor, dass die aufgestellten Formeln für beliebige Werthe der Excentricität richtig bleiben, während Jacobi den Fall kleiner Excentricitäten am Schlusse seiner Abhandlung in einem besonderen Zusatze erörtert.

§ 14.

Wir wollen zum Schlusse noch den speciellen Fall ins Auge fassen, wo $c_n = c_{-n}$, d. h. wo $l = m = 0$ ist, und die Coefficienten in der Entwickelung von r^k zu bestimmen sind. Schreibt man der Bequemlichkeit halber $-k$ statt k, so wird für

$$\left(\frac{a}{r}\right)^k = c_0^{(k)} + 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)} \cos ng$$

$$c_n^{(k)} = n^{\frac{k-2}{2}} (2\cos\varphi)^{-\frac{k}{2}} \operatorname{tg}^n \tfrac{1}{2}\varphi \, e^{n\cos\varphi} \left\{ \frac{A}{\Gamma\frac{k}{2}} + \frac{k}{3\cos\varphi}\sqrt{\frac{2}{n\cos\varphi}} \frac{B}{\Gamma\frac{k-1}{2}} - \frac{2}{\pi} C \right\}$$

erhalten, wo sich für A, B und C ohne weitere Schwierigkeit, als die Länge der Rechnung, folgende Werthe ergeben:

$$A = 1 - \frac{k(k-2)}{8n\cos\varphi}(1) + \frac{k(k-2)(k-4)}{64n^2\cos^2\varphi}(2)\cdots$$

$$B = 1 - \frac{k-3}{8n\cos\varphi}[1] + \frac{(k-3)(k-5)}{320n^2\cos^2\varphi}[2]\cdots$$

$$C = w_{1-k}\sin\frac{k\pi}{2} - \frac{1}{\cos\varphi\sqrt{2n\cos\varphi}}\left[(k-1)w_{2-k} + \frac{2}{3}w_{4-k}\right]\cos\frac{k\pi}{2}\cdots$$

In diesen Gleichungen ist zur Abkürzung geschrieben

$$(1) = 1 - \frac{4k+11}{9\cos^2\varphi}$$

$$[1] = \frac{5k+11}{5} - \frac{4k^2+33k+59}{27\cos^2\varphi}$$

$$(2) = \frac{k+2}{2} - \frac{20k^3+143k^2+222}{45\cos^2\varphi} + \frac{16k^3+264k^2+1307k+1878}{486\cos^4\varphi}$$

$$[2] = \frac{35k^2+224k+317}{14} - \frac{20k^3+297k^2+1324k+1719}{27\cos^2\varphi}$$
$$+ \frac{16k^4+440k^3+4175k^2+15880k+19809}{486\cos^4\varphi}$$

Diess sind die Formeln, welche ich bereits in dem *Astronomical Journal*, zugleich mit einem indirecten Nachweise für ihre Richtigkeit, mitgetheilt habe. Für $k = -1$ geht daraus die Entwickelung des Radiusvectors, übereinstimmend mit Jacobi a. a. O. hervor. Man erhält leicht, da die in B multiplicirten Glieder wegen des Nenners $\Gamma\frac{k-1}{2}$ verschwinden:

$$c_n^{(-1)} = -\left(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\, e^{\cos\varphi}\right)^n \sqrt{\frac{\cos\varphi}{2n^3\pi}} \left\{1 - \frac{3}{8n\cos\varphi}\left(1 - \frac{7}{9\cos^2\varphi}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{15}{64n^2\cos^2\varphi}\left(\frac{1}{2} - \frac{11}{5\cos^2\varphi} + \frac{91}{54\cos^4\varphi}\right)\cdots\right\}$$

Auch die Coefficienten der Mittelpunktsgleichung können wir jetzt genauer erhalten, wenn wir den Werth von $\frac{2\cos\varphi}{n}\, c_n^{(2)}$ aufsuchen

$$\frac{2\cos\varphi}{n}\, c_n^{(2)} = \frac{1}{n}\left(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\, e^{\cos\varphi}\right)^n \left\{1 + \frac{2}{3\cos\varphi}\sqrt{\frac{2}{n\pi\cos\varphi}}\left[1 + \frac{1}{8n\cos\varphi}\left(\frac{21}{5} \quad \frac{47}{9\cos^2\varphi}\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{64n^2\cos^2\varphi}\left(\frac{543}{14} - \frac{127}{\cos^2\varphi} + \frac{1601}{18\cos^4\varphi}\right)\cdots\right]\right\}$$

Es ist nicht uninteressant, von diesem Ausdrucke eine numerische Anwendung zu machen. Da die aufgestellten Formeln gelten, wie klein auch die Excentricität genommen werden möge, wollen wir der Einfachheit halber den numerischen Werth der Grenze für $\varphi = 0$ suchen. Allerdings verschwinden dabei die Ausdrücke unserer Coefficienten wegen des Factors $\operatorname{tg}^n\frac{1}{2}\varphi$, durch den wir desshalb zuvor beide Seiten der Gleichung dividiren. Dann wird

$$\lim \frac{2}{n}\,\frac{\cos\varphi}{\operatorname{tg}^n\frac{1}{2}\varphi}\, c_n^{(2)} = \frac{e^n}{n}\left\{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{n\pi}}\left(1 - \frac{23}{180n} + \frac{23}{2016n^2}\cdots\right)\right\}$$

Vergleichen wir damit die von Hansen zuerst gegebene Entwickelung der Mittelpunktsgleichung*)

$$f - g = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{i}\operatorname{tg}^i\tfrac{1}{2}\varphi\left\{\mathfrak{M}_i - \mathfrak{N}_1\mathfrak{M}_{i+1}\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}\varphi + \right.$$
$$\left. + \mathfrak{N}_2\mathfrak{M}_{i+2}\operatorname{tg}^4\tfrac{1}{2}\varphi\cdots\right\}\sin ig$$

so folgt für $i = n$ und $\varphi = 0$

$$\lim \frac{2}{n}\,\frac{\cos\varphi}{\operatorname{tg}^n\frac{1}{2}\varphi}\, c_n^{(2)} = \frac{2}{n}\mathfrak{M}_n = \frac{2}{n}\left\{1 + n + \frac{n^2}{2!} + \frac{n^3}{3!}\cdots + \frac{n^n}{n!}\right\}$$

oder

$$1 + n + \frac{n^2}{2!}\cdots + \frac{n^n}{n!} = e^n\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{n\pi}}\left(1 - \frac{23}{180n} + \frac{23}{2016n^2}\cdots\right)\right\}$$

---

*) Abhandlungen der k. sächs. Gesellschaft, II. Band, S. 276 fg.

Berechnet man beide Seiten dieser Gleichung für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, so erhält man folgende Werthe der Logarithmen:

$n = 1,$	$\lg 2 = 0{\cdot}3010300$	approximativ	$= 0{\cdot}3005888$	diff.	4412
$n = 2,$	$\lg 5 = 0{\cdot}6989700$	„	$= 0{\cdot}6989110$	„	590
$n = 3,$	$\lg 13 = 1{\cdot}1139434$	„	$= 1{\cdot}1139289$	„	145
$n = 4,$	$\lg \frac{103}{3} = 1{\cdot}5357159$	„	$= 1{\cdot}5357095$	„	64
$n = 5,$	$\lg \frac{1097}{12} = 1{\cdot}9610254$	„	$= 1{\cdot}9610223$	„	31
$n = 6,$	$\lg \frac{1223}{5} = 2{\cdot}3884565$	„	$= 2{\cdot}3884548$	„	17

woraus die Genauigkeit der Formel beurtheilt werden kann.

Gotha, März 1856.