SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Mathematische Annalen
Ort: Leipzig
Jahr: 1891
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN235181684_0038
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0038

LOG Id: LOG_0040
LOG Titel: Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück.*)

Von

David Hilbert in Königsberg i. Pr.

Peano hat kürzlich in den Mathematischen Annalen**) durch eine arithmetische Betrachtung gezeigt, wie die Punkte einer Linie stetig auf die Punkte eines Flächenstückes abgebildet werden können. Die für eine solche Abbildung erforderlichen Functionen lassen sich in übersichtlicherer Weise herstellen, wenn man sich der folgenden geometrischen Anschauung bedient. Die abzubildende Linie — etwa eine Gerade von der Länge 1 — theilen wir zunächst in 4 gleiche Theile 1, 2, 3, 4 und das Flächenstück, welches wir in der Gestalt eines Quadrates von der Seitenlänge 1 annehmen, theilen wir durch zwei zu einander senkrechte Gerade in 4 gleiche Quadrate 1, 2, 3, 4 (Fig. 1). Zweitens theilen wir jede der Theilstrecken 1, 2, 3, 4 wiederum in 4 gleiche Theile, so dass wir auf der Geraden die 16 Theilstrecken 1, 2, 3, . . ., 16 erhalten; gleichzeitig werde jedes der 4 Quadrate 1, 2, 3, 4 in 4 gleiche Quadrate getheilt und den so entstehenden 16 Quadraten

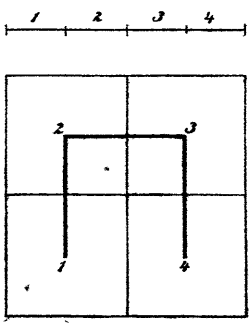


Fig. 1.

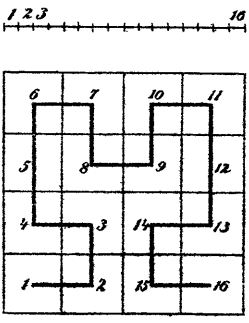


Fig. 2.

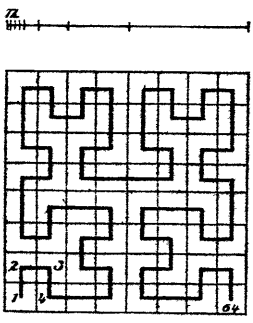


Fig. 3.

werden dann die Zahlen 1, 2 . . . 16 eingeschrieben, wobei jedoch die Reihenfolge der Quadrate so zu wählen ist, dass jedes folgende Quadrat sich mit einer Seite an das vorhergehende anlehnt (Fig. 2). Denken wir uns dieses Verfahren fortgesetzt — Fig. 3 veranschaulicht den

*) Vergl. eine Mittheilung über denselben Gegenstand in den Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte. Bremen 1890.

**) Bd. 36, S. 157.

nächsten Schritt —, so ist leicht ersichtlich, wie man einem jeden gegebenen Punkte der Geraden einen einzigen bestimmten Punkt des Quadrates zuordnen kann. Man hat nur nöthig, diejenigen Theilstrecken der Geraden zu bestimmen, auf welche der gegebene Punkt fällt. Die mit den nämlichen Zahlen bezeichneten Quadrate liegen nothwendig in einander und schliessen in der Grenze einen bestimmten Punkt des Flächenstückes ein. Dies sei der dem gegebenen Punkte zugeordnete Punkt. *Die so gefundene Abbildung ist eindeutig und stetig und umgekehrt einem jeden Punkte des Quadrates entsprechen ein, zwei oder vier Punkte der Linie.* Es erscheint überdies bemerkenswerth, dass durch geeignete Abänderung der Theillinien in dem Quadrate sich leicht *eine eindeutige und stetige Abbildung finden lässt, deren Umkehrung eine nirgends mehr als dreideutige ist.*

Die oben gefundenen abbildenden Functionen sind zugleich einfache Beispiele für überall stetige und nirgends differentiirbare Functionen.

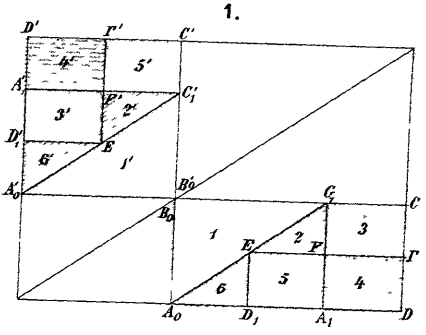
Die mechanische Bedeutung der erörterten Abbildung ist folgende: *Es kann sich ein Punkt stetig derart bewegen, dass er während einer endlichen Zeit sämmtliche Punkte eines Flächenstückes trifft.* Auch kann man — ebenfalls durch geeignete Abänderung der Theillinien im Quadrate — zugleich bewirken, *dass in unendlich vielen überall dichtvertheilten Punkten des Quadrates eine bestimmte Bewegungsrichtung sowohl nach vorwärts wie nach rückwärts existirt.*

Was die analytische Darstellung der abbildenden Functionen anbetrifft, so folgt aus ihrer Stetigkeit nach einem allgemeinen von K. Weierstrass bewiesenen Satze*) sofort, dass diese Functionen sich in unendliche nach ganzen rationalen Functionen fortschreitende Reihen entwickeln lassen, welche im ganzen Intervall absolut und gleichmässig convergiren.

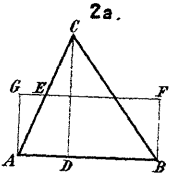
Königsberg i. Pr., 4. März 1891.

*) Vergl. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 9. Juli 1885.

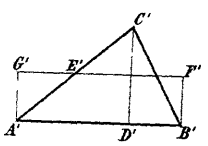
1.



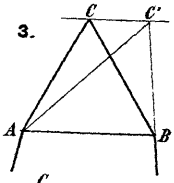
2a.



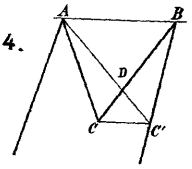
2b.



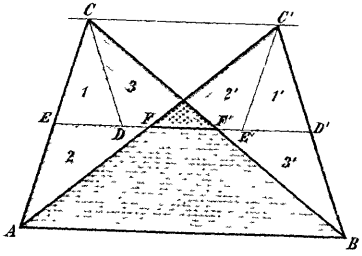
3.



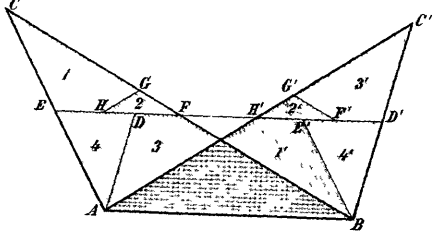
4.



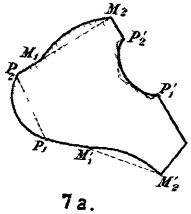
5.



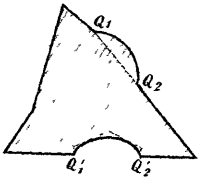
6.



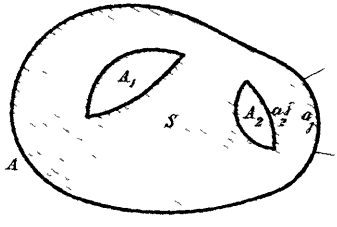
7a.



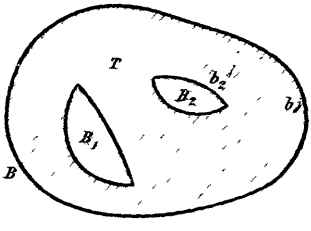
7b.



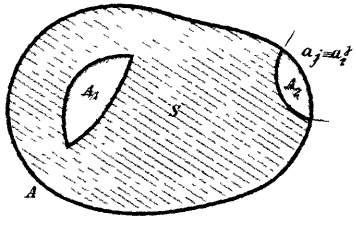
8a.



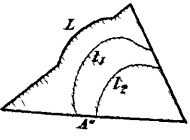
8b.



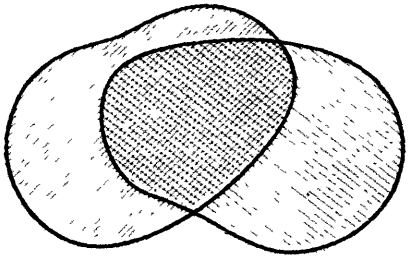
8c.



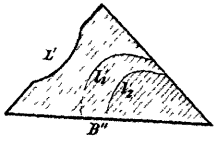
10a.



9.

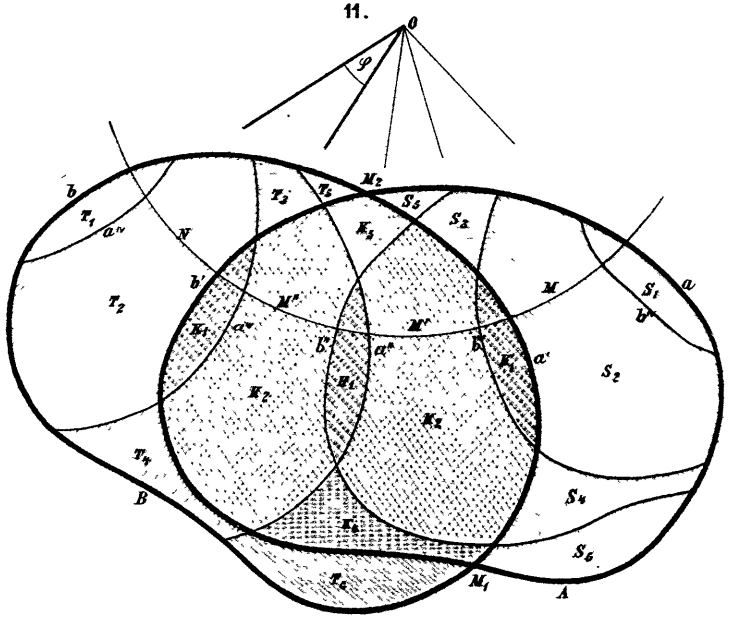


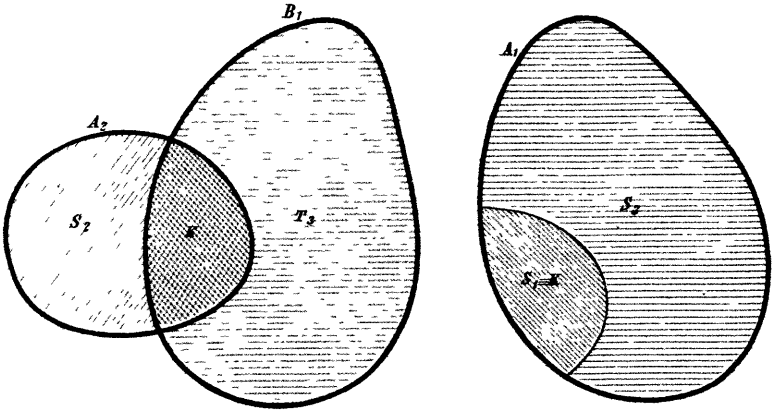
10b.



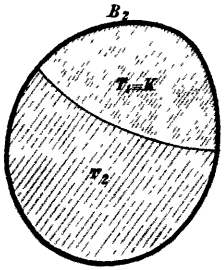
Lith. W. Grund Nachf. Budapest.

11.

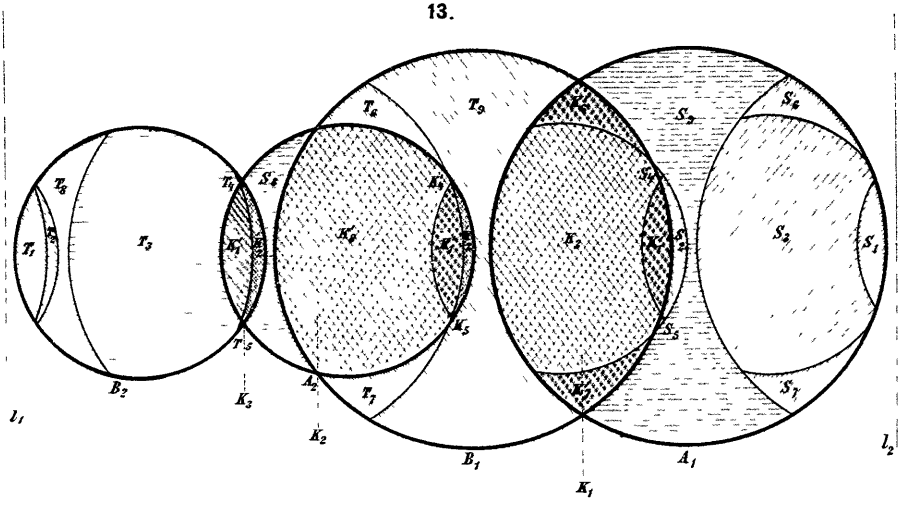

O
φ
b
T_1
a^{IV}
N
T_3
T_5
M_2
S_3
S_2
K_3
M
S_1
a
b^{IV}
T_2
b'
M^{IV}
M^{III}
K_1
a^{III}
b^{II}
a^{II}
b^{I}
K_4
a^{I}
S_2
K_2
K_5
T_4
B
S_4
K_6
S_6
T_6
M_1
A


B_1
A_2
S_2
K
T_3
A_1
S_3
$S_1 = K$

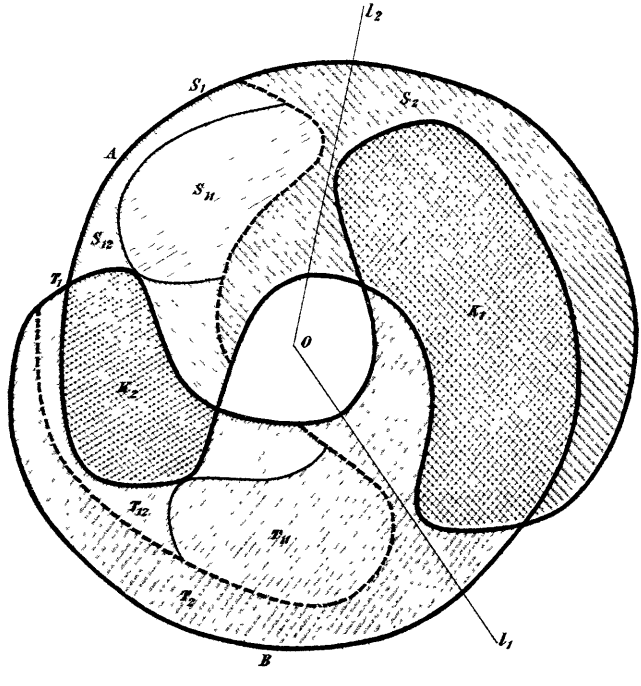
12.


B_2
$T_1 = K$
K_2

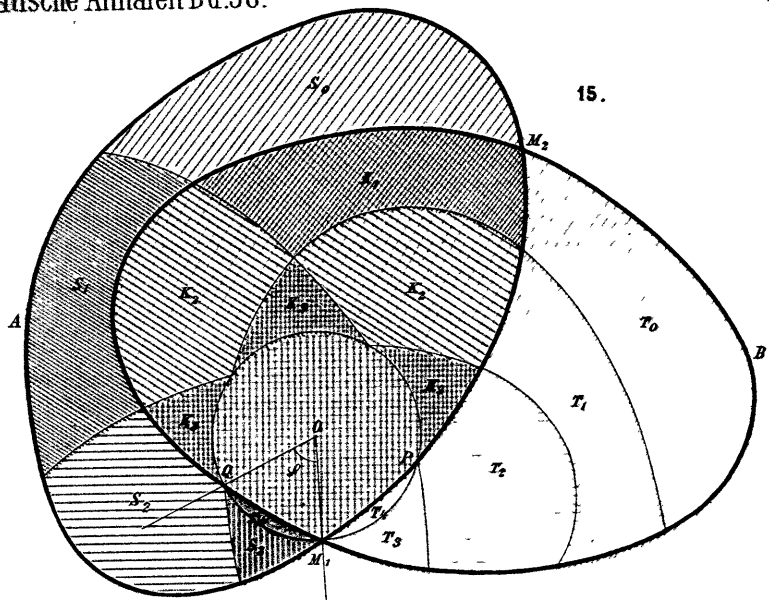
13.


T_6
T_9
K_3
S_7
S_6
T_8
T_3
S_4
K_4
S_4
T_4
T_2
K_6
K_2
S_2
S_1
K_5
S_5
T_5
A_2
T_1
K_7
S_3
B_2
K_2
K_2
B_1
A_1
K_1
l_1
l_2

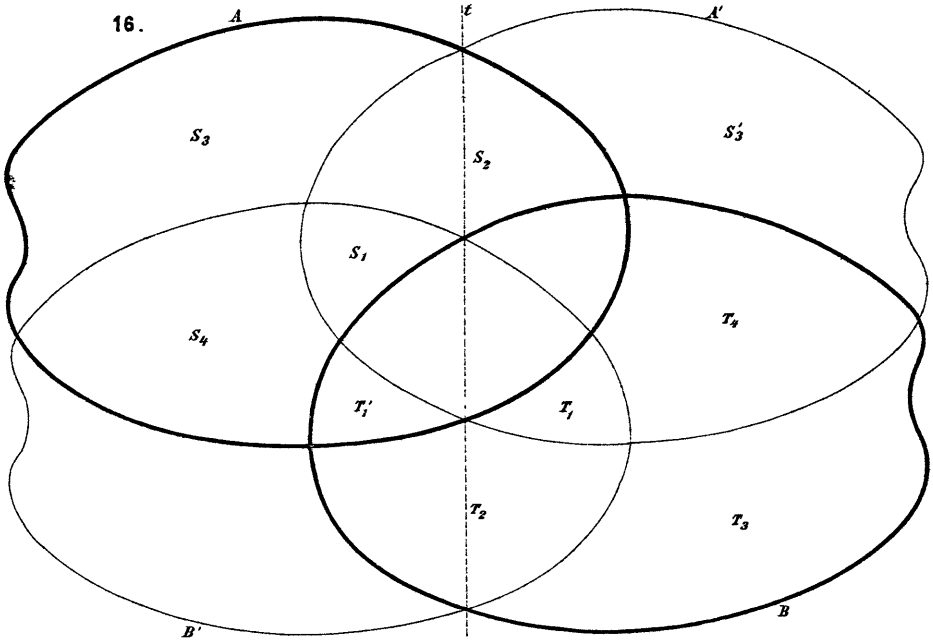
14.


l_2
S_1
S_2
A
S_{11}
S_{12}
T_1
K_1
O
K_2
T_{12}
T_{11}
T_2
B
l_1

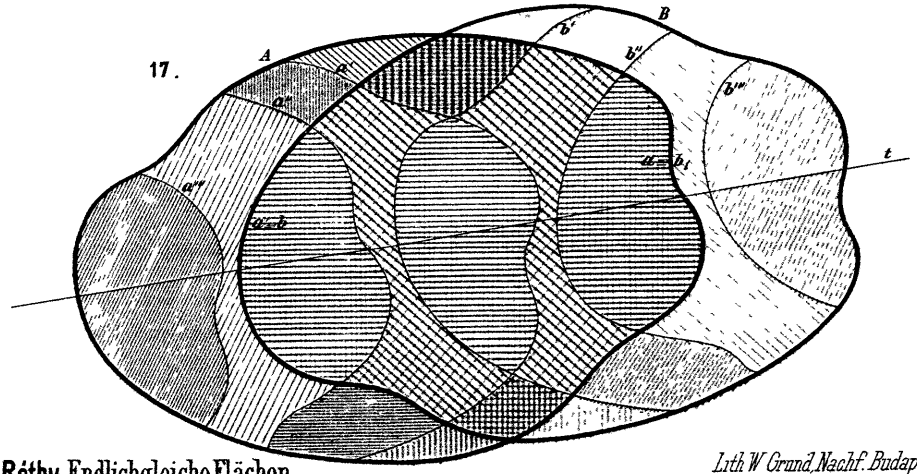
15.



16.



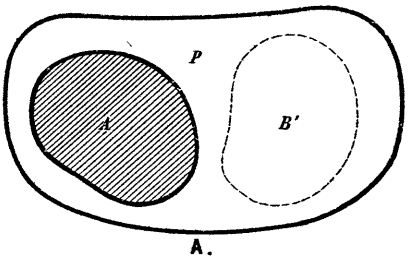
17.



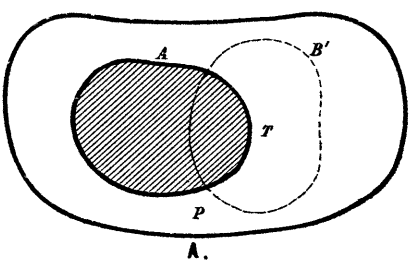
Lith. W. Grund, Nachf. Budapest

Aus den Ber. der ung. Akad. d. W. 1890.

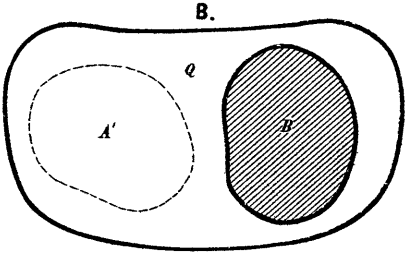
18.



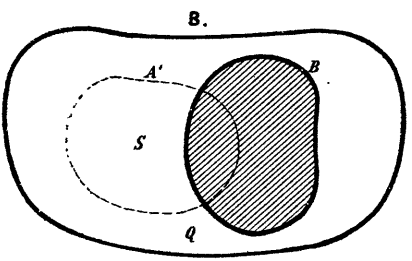
19.



B.



B.



20.

