SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Mathematische Annalen
Ort: Leipzig
Jahr: 1891
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN235181684_0039
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0039

LOG Id: LOG_0023
LOG Titel: Ueber die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche.
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Ueber die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche.

Von

A. Hurwitz in Königsberg i. Pr.

Man kann bekanntlich jede Irrationalzahl α durch eine unbegrenzte Reihe von rationalen Brüchen

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \cdots \tag{1}$$

derart annähern, dass, abgesehen vom Vorzeichen,

$$\alpha - \frac{x_n}{y_n} < \frac{1}{y_n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{2}$$

ist. Dieser Satz ergiebt sich unmittelbar aus der Lehre von den Kettenbrüchen; er lässt sich aber auch durch andere sehr verallgemeinerungsfähige Methoden beweisen. Ich erinnere insbesondere an die Methode von Hermite*), welche insofern bemerkenswerth ist, als sie ein weitergehendes Resultat liefert.

Die Methode von Hermite ergiebt nämlich zu jeder Irrationalzahl α eine Reihe (1) von rationalen Brüchen, für welche an Stelle der Ungleichung (2) die folgende tritt:

$$\alpha - \frac{x_n}{y_n} < \frac{1}{\sqrt{3}\, y_n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots). \tag{3}$$

Es erhebt sich nun die Frage, ob der Factor $\sqrt{3}$ durch eine noch grössere Zahl ersetzt werden kann, ob also zu jeder Irrationalzahl α eine Reihe (1) herstellbar ist, welche die Zahl α noch stärker annähert, als die Reihe, welche sich nach der Methode von Hermite ergiebt. Diese Frage erledigt sich (und zwar im bejahenden Sinne) durch die nachstehenden Sätze, welche ich im Folgenden beweisen will:

Satz I. *Jede Irrationalzahl α lässt sich durch eine unbegrenzte Reihe von rationalen Brüchen*

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \cdots$$

derart annähern, dass, abgesehen vom Vorzeichen,

$$\alpha - \frac{x_n}{y_n} < \frac{1}{\sqrt{5}\, y_n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ist.

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 41, pag. 195.

Satz II. *Bedeutet λ eine Zahl, die grösser ist als $\sqrt{5}$, so giebt es Irrationalzahlen α, welche sich durch eine unbegrenzte Reihe von rationalen Brüchen*

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \cdots$$

nicht derart annähern lassen, dass, abgesehen vom Vorzeichen

$$\alpha - \frac{x_n}{y_n} < \frac{1}{\lambda \cdot y_n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

ist.

Der zweite Satz bildet eine wesentliche Ergänzung des ersten, insofern er zeigt, dass in dem Ausspruch des ersten Satzes $\sqrt{5}$ nicht durch eine grössere Zahl ersetzt werden kann.

Um den Satz I. zu beweisen, entwickeln wir die Irrationalzahl α in einen Kettenbruch. Wir setzen also

$$(4) \quad \alpha = \mu_1 + \frac{1}{\alpha_1}, \quad \alpha_1 = \mu_2 + \frac{1}{\alpha_2}, \cdots, \alpha_{n-1} = \mu_n + \frac{1}{\alpha_n}, \cdots,$$

indem wir allgemein mit μ_n die grösste in α_{n-1} enthaltene ganze Zahl bezeichnen. Die Entwicklung von α in einen Kettenbruch, welche sich aus den ersten n Gleichungen (4) ergiebt, wollen wir zur Abkürzung durch die Gleichung

$$(5) \quad \alpha = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n, \alpha_n)$$

andeuten, und wir wollen ferner den n^{ten} Näherungsbruch mit

$$(6) \quad \frac{p_n}{q_n} = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$$

bezeichnen. Es ist nun bekanntlich

$$(7) \quad \alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\pm 1}{q_n(\alpha_n q_n + q_{n-1})} = \frac{\pm 1}{r_n q_n^2},$$

wenn wir Kürze halber

$$(8) \quad r_n = \alpha_n + \frac{q_{n-1}}{q_n} = (\mu_{n+1}, \mu_{n+2}, \cdots) + (0, \mu_n, \mu_{n-1}, \cdots, \mu_2)$$

setzen. Offenbar genügt es nun zu zeigen, dass für unendlich viele Indices n die Ungleichung

$$(9) \quad r_n > \sqrt{5}$$

stattfindet. Denn, der Gleichung (7) zufolge, werden die diesen Indices entsprechenden Brüche $\frac{p_n}{q_n}$ eine Reihe bilden, welche die in unserem Satze angegebene Beschaffenheit besitzt.

Um nun die Existenz von unendlich vielen Indices n nachzuweisen, für welche die Ungleichung (9) erfüllt ist, müssen wir mehrere Fälle unterscheiden.

1. Fall: Unter den Zahlen $\mu_2, \mu_3, \mu_4, \ldots$ giebt es unendlich viele, welche grösser als 2 sind.

Da nach Gleichung (8) $r_n > \mu_{n+1}$ ist, so giebt es in diesem Falle unzählig viele Indices n, für welche $r_n > 3$, also um so mehr $r_n > \sqrt{5}$ ist.

2. Fall: Von einer gewissen Stelle ab kommt in der Reihe $\mu_2, \mu_3, \mu_4, \ldots$ keine Zahl mehr vor, welche grösser als 2 ist.

In diesem Falle kann man also den Index k so bestimmen, dass jede Zahl der Reihe

$$(R) \qquad \mu_k, \mu_{k+1}, \mu_{k+2}, \ldots$$

entweder den Werth 1 oder den Werth 2 besitzt. Hier unterscheiden wir nun zwei Unterfälle. Nämlich:

2a. In der Reihe (R) tritt die Zahl 2 unendlich oft auf.

Es giebt dann unendlich viele Indices $n > k$, für welche $\mu_{n+1} = 2$, also

$$r_n = (2, \mu_{n+2}, \mu_{n+3}, \ldots) + (0, \mu_n, \mu_{n-1}, \ldots, \mu_{k-1}, \ldots, \mu_2)$$

wird. Wir vergleichen diesen Werth von r_n mit

$$r_n' = (2, 2, 1, 2, 1, 2, 1, \ldots) + (0, 2, 1, 2, 1, \ldots, \mu_{k-1}, \ldots, \mu_2).$$

Offenbar ist

$$(10) \qquad r_n \geqq r_n';$$

denn der Werth eines Kettenbruches wird verkleinert, wenn man die Theilnenner ungerader Ordnung durch grössere, die Theilnenner gerader Ordnung durch kleinere Zahlen ersetzt.

Der periodische Kettenbruch $(0, 2, 1, 2, 1, \ldots)$ besitzt nun den Werth $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, und hieraus ergiebt sich leicht

$$\lim_{n=\infty} r_n' = 2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{3} + 1 > \sqrt{5}.$$

Von einem bestimmten Index n ab ist also beständig $r_n' > \sqrt{5}$ und es giebt daher, zufolge der Ungleichung (10), auch unendlich viele Indices n, für welche $r_n > \sqrt{5}$ ist.

Wir haben nun noch den zweiten Unterfall zu betrachten:

2b. In der Reihe (R) tritt die Zahl 2 nur endlich oft auf.

Dann dürfen wir annehmen, dass alle Glieder der Reihe (R) den Werth 1 besitzen. Denn andernfalls können wir dieses dadurch erreichen, dass wir einige Anfangsglieder der Reihe (R) fortlassen, oder, was dasselbe ist, den Index k durch einen geeignet gewählten grösseren Index ersetzen. Da nun alle Glieder der Reihe (R) den Werth 1 besitzen, so ist für jeden Index $n > k$:

$$r_n = (1, 1, 1, \ldots) + (0, 1, 1, \ldots, \mu_{k-1}, \ldots, \mu_2).$$

Für den Grenzwerth von r_n findet man

$$\lim_{n=\infty} r_n = \sqrt{5},$$

und zwar liegen die Werthe von r_n abwechselnd über und unter $\sqrt{5}$, so dass es unzählig viele Indices n giebt, für welche $r_n > \sqrt{5}$ wird. —

Wir sehen also, dass die Ungleichung (9) in jedem Falle für unendlich viele Indices n erfüllt ist. Hieraus geht, wie wir schon oben bemerkt haben, die Richtigkeit des Satzes I. unmittelbar hervor.

Zum Beweise des Satzes II. betrachten wir diejenigen Zahlen, deren Kettenbruchentwicklung mit der Periode $(1, 1, 1, \ldots)$ endigt. Wir wollen zeigen, dass jede solche Zahl α die in unserem Satze behauptete Eigenschaft besitzt. Diese Eigenschaft lässt sich aber offenbar so aussprechen: Es giebt entweder überhaupt keinen oder doch nur eine endliche Anzahl von rationalen Brüchen $\frac{x}{y}$, welche der Bedingung

$$\alpha - \frac{x}{y} < \frac{1}{\lambda y^2} \tag{11}$$

genügen, wo λ eine Zahl grösser als $\sqrt{5}$ bedeutet.

Um dieses nun zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass nach einem bekannten Satze von Lagrange*) sich jeder Bruch, welcher der Ungleichung (11) genügt, unter den Näherungsbrüchen

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots \tag{12}$$

der Zahl α befinden muss. Setzen wir nun, wie oben,

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\pm 1}{r_n q_n^2},$$

so ist $\lim_{n=\infty} r_n = \sqrt{5}$, und da $\lambda > \sqrt{5}$ ist, so wird von einem bestimmten Index n ab r_n beständig kleiner als λ, also

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} > \frac{1}{\lambda q_n^2}$$

sein. Es giebt also in der That in der Reihe (12), wenn überhaupt, nur eine endliche Anzahl von Brüchen, welche der Bedingung (11) genügen.

Unter den hier betrachteten Zahlen α ist die einfachste die Zahl

$$\varrho = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = (1, 1, 1, \ldots),$$

und es ergiebt sich aus einem bekannten Satze**) unmittelbar, dass alle anderen Zahlen α der Zahl ϱ äquivalent, d. h. in der Form

$$\alpha = \frac{a\varrho + b}{c\varrho + d}$$

enthalten sind, wo a, b, c, d ganze Zahlen bedeuten, welche der Gleichung $ad - bc = \pm 1$ genügen.

*) Vgl. Serret, Cours d'algèbre supérieure (Paris 1877) Bd. I, pag. 19.
**) Serret, Cours d'algèbre supérieure (Paris 1877) Bd. I, pag. 34.

Wir wollen nun an die vorstehend bewiesenen Sätze noch einige Bemerkungen anknüpfen.

Es sei α irgend eine Irrationalzahl und es sei ferner

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \ldots$$

eine unbegrenzte Reihe von rationalen Brüchen, deren Grenze die Zahl α ist. Wenn nun λ eine positive Zahl bezeichnet, so kann man die Frage erheben, ob jene Reihe so bestimmt werden kann, dass abgesehen vom Vorzeichen

$$\alpha - \frac{x_n}{y_n} < \frac{1}{\lambda y_n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist. Betrachten wir das System aller Zahlen λ, für welche diese Frage zu bejahen ist! Zu diesen Zahlen gehören nach Satz I. stets diejenigen Zahlen, welche $\sqrt{5}$ nicht überschreiten. Ueberhaupt leuchtet ein, dass, wenn λ_0 irgend eine zu dem Systeme der Zahlen λ gehörige Zahl bedeutet, auch jede Zahl, welche kleiner als λ_0 ist, zu dem Systeme gehört. Um alle Zahlen λ angeben zu können, braucht man hiernach nur die obere Grenze dieser Zahlen zu bestimmen. Wenn nämlich g diese obere Grenze bezeichnet, so wird das System der Zahlen λ aus allen positiven Zahlen bestehen, welche g nicht überschreiten (wobei indessen möglicher Weise die Zahl g selber auszuschliessen ist).

Die Zahl g ist durch die Irrationalzahl α offenbar vollständig bestimmt; es gelten von ihr die nachstehenden Sätze:

1) „Wenn in der Kettenbruchentwicklung von α unendlich viele verschiedene Theilnenner auftreten, so ist die zu α gehörige Zahl g unendlich gross".

2) „Wenn in der Kettenbruchentwicklung von α nur eine endliche Anzahl verschiedener Theilnenner auftreten, so besitzt die Zahl g einen endlichen Werth, welcher folgendermassen näher bestimmt werden kann:

Es sei, wie oben, $\alpha = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots)$, sowie

$$r_n = (\mu_{n+1}, \mu_{n+2}, \ldots) + (0, \mu_n, \mu_{n-1}, \ldots, \mu_2).$$

Man bilde nun die Häufungsstellen der Werthemenge

$$r_1, r_2, r_3, \ldots .$$

Dann wird die obere Grenze dieser Häufungsstellen die zur Zahl α gehörige Zahl g sein".

Infolge des letzteren Satzes führt die nähere Untersuchung der Zahlen g auf Betrachtungen, wie sie sich in dem Aufsatz von Herrn Markoff „Sur les formes quadratiques binaires indéfinies"*) finden.

*) Mathematische Annalen, Bd. 15, pag. 381. Der Zusammenhang, in welchem die Untersuchungen des Herrn Markoff mit der von uns behandelten Frage

Um die hauptsächlichsten Resultate, zu welchen die Untersuchung der Zahlen g führt, in einfacher Form aussprechen zu können, wollen wir eine Eintheilung der Gesammtheit aller Irrationalzahlen in Classen vornehmen. Und zwar soll diese Eintheilung nach der Massgabe geschehen, dass zwei Zahlen α und α' stets und nur dann in dieselbe Classe gerechnet werden, wenn sie äquivalent sind, d. h. wenn zwischen ihnen eine Gleichung der Gestalt

$$\alpha' = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$$

besteht, wo a, b, c, d vier ganze, der Bedingung $ad - bc = \pm 1$ genügende Zahlen bedeuten. Dies vorausgeschickt bestehen nun die folgenden Sätze, deren Beweise man leicht den Markoff'schen Betrachtungen entnimmt:

1) *Irrationalzahlen, welche in dieselbe Classe gehören, entspricht dieselbe Zahl g.*

2) *Jede Irrationalzahl α, mit Ausschluss der zu $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ äquivalenten Zahlen, lässt sich durch eine unbegrenzte Reihe von rationalen Brüchen*

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \ldots$$

derart annähern, dass, abgesehen vom Vorzeichen,

$$\alpha - \frac{x_n}{y_n} < \frac{1}{\sqrt{8}\cdot y_n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist.

3) *Ist die Zahl λ grösser als $\sqrt{5}$, so lässt sich jede Irrationalzahl α, mit Ausschluss gewisser Irrationalzahlen, durch eine unbegrenzte Reihe von rationalen Brüchen*

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \ldots$$

derart annähern, dass, abgesehen vom Vorzeichen,

$$\alpha - \frac{x_n}{y_n} < \frac{1}{\lambda y_n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist. Die auszuschliessenden Irrationalzahlen bilden eine endliche Anzahl von Classen, wenn $\lambda < 3$ ist; sie bilden unendlich viele Classen, wenn $\lambda \geqq 3$ ist.

Königsberg i./Pr., 16. Juni 1891.

---

stehen, erklärt sich aus dem Umstande, dass diese Frage auf die Untersuchung der Werthe hinausläuft, welche die quadratische Form $y(\alpha y - x)$ für ganzzahlige Werthe der Unbestimmten x, y annimmt.