Leopold Kronecker.

Von

H. Weber in Göttingen*).

Seit der letzten Versammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung hat unsere Wissenschaft einen unersetzlichen Verlust zu beklagen.

Leopold Kronecker ist nicht mehr unter uns, der während der letzten Jahrzehnte eine so beherrschende Stellung im Kreise der deutschen Mathematiker eingenommen hat; dessen Geist so deutlich und eindringlich den Weg gewiesen hat für den Gang der Forschung.

Dass er es nicht verschmähte, als die deutschen Mathematiker vor zwei Jahren zu einer Gesellschaft zusammentraten, in diese Bestrebungen mit einzutreten, sie durch das Ansehen seines Namens zu stützen, das war von vorn herein für die junge Genossenschaft ein günstiges Omen, und an uns ist es daher vor allem, am heutigen Tage seiner und seiner Verdienste in dankbarer Erinnerung zu gedenken.

Der Vorstand unserer Vereinigung hat mir die Ehre erwiesen, mich zu dieser Gedächtnissrede aufzufordern; ich wollte mich dieser Aufgabe nicht entziehen, wenn ich auch nicht ohne Bedenken daran gegangen bin, und ich muss mit der Bitte um Nachsicht beginnen bei dem Versuch, den ich mache, ein Bild des Mannes und seines Wirkens zu entwerfen.

Ich habe nicht als Student zu Kronecker's Füssen gesessen, und wenn ich auch die Schriften des Meisters viel studirt und ihm viel zu verdanken habe, so bin ich doch nicht in alle Seiten seiner so vielseitigen Forschung gleichmässig eingedrungen, und ich zweifle, ob es mir gelingen wird, sie allseitig richtig zu würdigen.

Spät erst bin ich mit ihm persönlich bekannt geworden; aber wer unter uns ist, der nicht gleich mir in dem schönen Hause in der Bellevue-Strasse gastliche Aufnahme gefunden, der nicht in dem reich

---

*) Abgedruckt aus dem „Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung" 2. Band, 1892.

belebten Familienkreise herzlich willkommen geheissen und Anregung und Arbeitsfreude von da mitgenommen hätte? So steht wohl den meisten unter uns sein Bild noch lebendig vor der Seele, wie er nach eingehenden wissenschaftlichen Gesprächen, reich an Gedanken und Ausblicken, die Unterhaltung auch auf andere Dinge, auf Fragen der Kunst und Literatur oder des öffentlichen Lebens zu lenken und geistvoll zu beleben wusste. —

Durch freundliches Entgegenkommen des ältesten Sohnes und des Bruders des Verstorbenen ist es mir möglich gewesen, mir auch über meine persönliche Erinnerung hinaus ein lebendiges Bild von dem Lebensgang und dem geistigen Wesen des ausserordentlichen Mannes zu machen; möge es mir gelingen, Ihnen am Faden der Erzählung seines Lebens dies Bild zu übermitteln und zugleich eine Würdigung der Hauptmomente seines wissenschaftlichen Schaffens hinein zu verweben.

Leopold Kronecker wurde am 7. December 1823 zu Liegnitz geboren. Sein Vater, der dort ein kaufmännisches Geschäft betrieb und, wie der Briefwechsel mit dem Sohne ergiebt, ein Mann von bedeutender, namentlich auch philosophischer Bildung war, der dem Sohne die sorgfältigste Erziehung gab, liess ihn anfangs durch einen Hauslehrer unterrichten. Später trat der junge Leopold in die Vorschule des Conrectors Werner ein, der auch in der Folge auf dem Gymnasium sein Lehrer war, und nächst Kummer den grössten Einfluss auf seine Entwicklung übte. Namentlich von Werner's Unterricht in der philosophischen Propädeutik und in der christlichen Religionslehre, an dem er — obwohl Jude — theilnahm, sprach er stets mit grosser Begeisterung.

Auf dem Gymnasium zeichnete er sich in allen Fächern durch Fleiss und Talent aus: aber schon hier zeigte sich seine besondere Begabung und Neigung für die Mathematik, in der Kummer sein Lehrer war. Hier schon knüpfte sich die Beziehung an, die so entscheidend auf Kronecker's Entwicklung einwirkte und der Anfang einer bis zum Tode ungetrübten innigen Freundschaft war.

Als Kronecker im Frühjahr 1841 die Universität bezog, hatten die mathematischen Studien in Deutschland unter dem Einfluss der grossen Männer, deren Namen die erste Hälfte des Jahrhunderts zieren, einen neuen Aufschwung genommen. Er hörte in Berlin die Vorlesungen Dirichlet's, Jacobi's, Steiner's und später in Breslau seines alten Lehrers Kummer, der inzwischen als Professor dorthin berufen worden war.

Wenn auch von vorn herein die Mathematik Kronecker's Hauptstudium und nie aus dem Auge verlorenes Ziel bildete, so beschränkte er sich doch keineswegs einseitig auf das Fachstudium; ausser Natur-wissenschaften trieb er philosophische Studien in den Vorlesungen von Werder und Schelling, und auch in die Hegel'sche Philosophie hat er sich durch das Studium der Werke theilweise eingearbeitet.

Auch die Sprachen des classischen Alterthums, die er auf dem Gymnasium mit grosser Liebe betrieben hatte, hat er auf der Universität nicht aus dem Auge verloren.

Manche für das Leben wichtige Verbindung knüpfte sich in der Studienzeit an. Die Freundschaft mit seinem Schulgenossen Hugo Rühle, dem vor einigen Jahren verstorbenen Bonner Kliniker, brachte ihn mit Medicinern in Verbindung, unter denen ihm L. Traube für's Leben ein treuer Freund blieb.

Wichtig für Kronecker war auch der Verkehr im Hause des Banquiers Alexander Mendelssohn, in dem er durch Dirichlet Zutritt gefunden hatte, wo er unter anderm mit Felix Mendelssohn Bartholdy und mit Alexander von Humboldt Beziehungen anknüpfte.

In schöner, ideal verklärter Erinnerung stand ihm stets die kurze Bonner Studienzeit. Sie fiel noch in die Zeiten, in denen die burschenschaftlichen Bestrebungen an den Universitäten verdächtig und nach oben hin anrüchig und die Farben Schwarz-Roth-Gold streng verpönt waren. Es waren aber nicht die Schlechtesten unter der studirenden Jugend, die den Gedanken der Burschenschaft noch hochhielten und neu zu beleben suchten, und mancher Name vom besten Klang ist darunter zu finden. So war auch Kronecker in Bonn an der Begründung einer burschenschaftlichen Verbindung Friedericiana hervorragend thätig, an der sich Männer wie Geibel, Kinkel, Palleske, der Schillerbiograph und Becker (der sogenannte rothe Becker, später Bürgermeister von Köln) betheiligten. Die neue Verbindung, die bald mehr als ein Zehntel der ganzen Bonner Studentenschaft und darunter die fleissigsten und tüchtigsten umfasste, fand einflussreiche Freunde und Beschützer unter den Professoren, darunter der damalige Rector Naumann, F. Chr. Dahlmann, Nitzsch und E. M. Arndt. Deren Einfluss und Vermittlung war es zu danken, dass eine in Berlin beabsichtigte politische Untersuchung unterblieb.

Im Jahre 1845 wurde Kronecker in Berlin unter Böckh's Decanat mit Auszeichnung zum Doctor der Philosophie promovirt. Diesen Ehrentag mit dem sich anschliessenden Doctorschmaus, an dem auch Böckh theilnahm, rechnete Kronecker stets, nach den Berichten seines Sohnes, zu den schönsten Erinnerungen seines Lebens.

Indem ich aber die Dissertation „de unitatibus complexis" berühre, muss ich mit einigen Worten an die Geschichte der Wissenschaft jener Tage erinnern.

Seit dem Erscheinen von Gauss' zweiter Abhandlung über die biquadratischen Reste (1832) war der Zahlentheorie eine neue weitgreifende Aufgabe gestellt, der Ausbau der Theorie der complexen, allgemeiner der algebraischen Zahlen. Im fünften Jahrzehnt des Jahrhunderts bewegten diese Fragen die Gemüther besonders lebhaft, und neue Bahnen wurden damals eingeschlagen.

Es war die Zeit, da Jacobi nach seiner italienischen Reise sich in Berlin niedergelassen hatte und sich viel mit zahlentheoretischen Fragen beschäftigte, da Dirichlet, der mit Jacobi in Italien zusammengetroffen war, seine unsterblichen Untersuchungen bekannt machte, und da Kummer seine folgenreichen Arbeiten durch die „Disputatio de numeris complexis, qui unitatis radicibus et numeris realibus constant“ eröffnete. Hier trat nun Kronecker in einen Gedankenkreis ein, der seiner Denkweise vorzüglich angemessen war, in dem er später besonders seine Grösse entfalten sollte.

Bereits seine Dissertation befasst sich mit einem Gegenstand, der für die Theorie von fundamentalster Bedeutung ist, und noch im Jahre 1882 hielt sie der gereifte Verfasser mit Recht eines neuen Abdrucks für würdig, der im Journal für Mathematik zugleich mit den Schlussparagraphen, die, obwohl gleichzeitig entstanden, bei der ersten Publication nicht mit abgedruckt waren, erschienen ist.

Es handelt sich um die Theorie der Einheiten in einem algebraischen Zahlkörper; ich bediene mich dieses jetzt allgemein verständlichen und immer mehr gebräuchlichen Ausdrucks, obwohl er von Kronecker abgelehnt wurde. Die Theorie der Einheiten fällt in dem einfachsten Fall der quadratischen Körper im wesentlichen zusammen mit der Theorie der Pell'schen Gleichung, deren Begründung eine der schönsten Leistungen von Lagrange auf dem Gebiete der Zahlentheorie ist. Die Aufgabe ist die, das ganze System der Einheiten, deren es, mit wenigen Ausnahmen besonderer Natur, in jedem Körper unendlich viele giebt, als eine Gruppe, um mich der modernen Terminologie zu bedienen, darzustellen, und zwar als eine unendliche Gruppe vertauschbarer Elemente mit einer endlichen Basis, deren Elemente die fundamentalen Einheiten genannt werden.

Dirichlet hat während seines Aufenthaltes in Italien diese Frage nach Ueberwindung mannigfacher Schwierigkeiten in völliger Allgemeinheit und grossartiger Einfachheit zur Entscheidung gebracht; aber zur Zeit, da Kronecker seine Untersuchungen anstellte, waren die Resultate von Dirichlet noch nicht bekannt, und so war Kronecker's Arbeit, die für Kreistheilungszahlen die Frage erledigte und die bei diesen besonderen Zahlenarten bestehenden Verhältnisse klarlegte, immerhin von grosser Bedeutung. In den späteren Untersuchungen von Kummer über die allgemeinen Classenzahlen spielen diese Einheiten dieselbe Rolle, wie die Lösungen der Pell'schen

Gleichung bei den Classenzahlen der quadratischen Formen, und hierdurch gewannen diese Fragen noch ein erhöhtes Interesse. Es zeigte sich, dass die wirkliche Durchführung im einzelnen, d. h. die wirkliche Bestimmung eines Systems fundamentaler Einheiten, selbst in den einfachsten Fällen zu den unzugänglichsten und dornenvollsten Aufgaben der Mathematik gehört, wodurch wesentlich der Ausbau der Theorie gehemmt wurde.

Es traten nun im Leben Kronecker's Verhältnisse ein, durch die er zu Beschäftigungen gezwungen wurde, die von seinen mathematischen Interessen weit ablagen. Aber auch hier bewies er sein Talent und seine Tüchtigkeit. Im Interesse der Familie betrieb er die Landwirthschaft und ordnete mit grosser Gewandtheit das Geschäft eines verstorbenen Oheims, des Vaters seiner späteren Frau, wodurch er der Familie ein nicht unbeträchtliches Vermögen rettete.

Im Jahre 1848 verheirathete er sich mit seiner Cousine Fanny Prausnitzer, einer liebenswürdigen, geistig bedeutenden und tüchtigen Frau, die an den geistigen Interessen des Mannes und an seinen Erfolgen den lebhaftesten Antheil nahm. Dreiundvierzig Jahre, bis zu dem kurz vor seinem eigenen Ende erfolgten Tod der Gattin lebte er mit ihr in glücklichster Ehe, der sechs Kinder entsprossen, von denen noch vier, drei Söhne und eine Tochter, am Leben sind.

Der Erziehung und Berathung seiner Kinder widmete sich Leopold Kronecker im Verein mit seiner Gattin mit grösster Hingebung. Auch seines um siebzehn Jahre jüngeren Bruders Hugo, der jetzt Professor der Physiologie in Bern ist, hat er sich in fast väterlicher Weise angenommen und ihn menschlich und wissenschaftlich gefördert.

Der Lebensabschnitt, in dem Kronecker's Thätigkeit grösstentheils Familienangelegenheiten gewidmet war, in dem er überdies noch durch körperliche Beschwerden gehindert war, ist gekennzeichnet durch eine Lücke in der Reihe der Publicationen.

Zwischen den Jahren 1845 und 1853 finde ich keine Veröffentlichung zu verzeichnen. Dass er aber in dieser Zeit auch wissenschaftlich nicht müssig war, und dass hier vielleicht gerade die Zeit der wissenschaftlichen Entwicklung und Reife zu suchen ist, das beweist der Erfolg, auch wenn wir nicht wüssten, dass er während der ganzen Zeit eine eifrige wissenschaftliche Correspondenz, namentlich mit seinem Freunde Kummer, unterhielt.

Die Arbeit, mit der er zuerst wieder an die Oeffentlichkeit trat, übergab er im Mai 1853, als er auf einer Reise nach Paris in Berlin weilte, an Dirichlet, der sie am 20. Juni desselben Jahres der Berliner Akademie vorlegte, in deren Sitzungsberichten sie erschienen ist.

Es ist die berühmte Abhandlung über die algebraisch auflösbaren Gleichungen, eine Arbeit, die in ihrer Kürze und in ihrem Gedankenreichthum eine Fülle von Vorarbeiten voraussetzt, über die uns vielleicht noch die zu hoffenden Publicationen aus dem Nachlass Aufschluss geben werden.

Kronecker knüpft in dieser Arbeit an die nur fragmentarisch überlieferten algebraischen Untersuchungen Abel's an, dessen Sätze er zunächst zu beweisen sucht. Es ist mir zweifelhaft, ob die Arbeiten von Galois Kronecker damals schon bekannt waren. Diese für die Algebra so wichtigen Arbeiten waren zuerst erschienen in den Jahren 1828—30, aber wenig beachtet und bekannt, bis Liouville im Jahre 1846 einen neuen Abdruck in seinem Journal herausgab. Galois wird von Kronecker zuerst in einem Brief an Dirichlet vom 3. März 1856 und in der Arbeit, die am 14. April 1856 von Kummer der Berliner Akademie vorgelegt wurde, erwähnt, so dass die Vermuthung nahe liegt, dass er erst während seines Pariser Aufenthalts im Jahre 1853, wo er mit den bedeutendsten französischen Mathematikern, namentlich mit Hermite und Bertrand, enge Beziehungen anknüpfte, mit Galois' Arbeiten bekannt wurde. Wie dem aber auch sei, Kronecker's Arbeiten haben die Algebra über den Standpunkt hinaus gefördert, auf den sie durch Galois' geniale Schöpfung gehoben war. Galois hatte in der einer Gleichung eigenthümlichen Substitutionsgruppe den Kernpunkt aller tiefer eindringenden algebraischen Untersuchungen erkannt, und hatte damit die Grundfrage der Algebra in einfachster und allgemeinster Weise formulirt; damit ist aber zunächst nur die formale Seite getroffen. Das andere Ziel ist die Erforschung der Eigenschaften der durch die Gleichungen definirten Zahlenarten, die Anwendung der allgemeinen Grundsätze auf besondere Gleichungsarten, die tiefer gehende, jedem besonderen Falle angepasste Hülfsmittel erfordert. Hierzu finden sich bei Galois zwar Ansätze, z. B. in seinen Aussprüchen über die Modulargleichungen der Transformation 5ten, 7ten, 11ten Grades, aber keinerlei weitere Ausführungen. Mehr in dieser Richtung weisen die Sätze von Abel, die sich in einzelnen seiner algebraischen Fragmente finden, und vor allem in den Untersuchungen von Gauss über die Kreistheilung.

Die Frage, die die Algebraiker in erster Linie beschäftigte, die wohl auch den Anstoss zu allen diesen Untersuchungen gegeben hat, war die nach der algebraischen Auflösbarkeit der Gleichungen, d. h. der Reduction auf *reine* Gleichungen. Diese Fragestellung, die von einem höheren Standpunkte betrachtet, etwas Willkürliches hat und später weiter fortgebildet werden musste, war durch die elementare Algebra gegeben, und so bewegen sich auch Kronecker's algebraische Arbeiten zunächst in dieser Richtung. Wie kommt es, dass die höheren Gleichungen in diesem Sinne nicht mehr auflösbar sind, und welche Eigenschaften müssen die besonderen Gleichungen haben, die eine

Auflösung gestatten? Galois hat auf diese Fragen, wenigstens für Gleichungen von Primzahlgraden, eine Antwort aus der Natur der Gruppe abgeleitet, und dadurch ein Mittel gefunden, das wenigstens principiell in jedem besonderen Fall die Entscheidung giebt, wenn es auch meist nicht praktisch durchführbar sein wird. Kronecker löst die Aufgaben vollständiger, indem er einen algebraischen Ausdruck aufstellt, in dem *alle* Wurzeln auflösbarer Gleichungen von gegebenem Grad eines beliebigen Rationalitätsbereichs, und nichts anderes, enthalten sind, einen Ausdruck, der übrigens für Gleichungen fünften Grades schon von Abel ohne Beweis angegeben war.

Durch diesen allgemeineren Ausdruck wird die Aufgabe zunächst zurückgeführt auf die Bestimmung der Wurzeln einer sogenannten Abel'schen Gleichung, und die Sätze, die Kronecker über die letztere Gleichungsart bereits in seiner ersten Abhandlung mit voller Bestimmtheit ausspricht, und die sich dahin einfach zusammenfassen lassen, dass im absoluten Rationalitätsbereich, in dem nur die rationalen Zahlen als bekannt vorausgesetzt sind, alle Abel'schen Gleichungen unter den Kreistheilungsgleichungen enthalten sind, gehören mit den zu ihrem Beweis nöthigen und zu schaffenden Hülfsmitteln und mit dem, was weiter sich daran anschloss, zu den bedeutendsten Leistungen Kronecker's. Hierzu findet sich auch bei Abel noch kein Ansatz, und es war auch erst durch die von Kummer begründete Theorie der Zerlegung der algebraischen Zahlen in ihre Primfactoren möglich, an solche Fragen heranzutreten.

Am Schlusse der Abhandlung eröffnet Kronecker noch eine Perspective auf die Erweiterung dieser Sätze über Abel'sche Gleichungen für den Fall, dass nicht der absolute Rationalitätsbereich, sondern der der Gauss'schen complexen Zahlen zu Grunde gelegt wird, in dem an die Stelle der Kreistheilungszahlen, die aus der Lemniskatentheilung stammenden Zahlen treten. So finden sich auch die Untersuchungen über die singulären Moduln der elliptischen Functionen, die in den späteren Arbeiten Kronecker's eine so wichtige Rolle spielen, hier im Keime schon angedeutet.

Nachdem im Jahre 1855 die geschäftliche Thätigkeit ihren Abschluss gefunden hatte, siedelte Kronecker nach Berlin über, und hier schloss sich der enge Freundschaftsbund, dem die Wissenschaft so viel verdankt, zwischen vier Männern, die zu den ersten Vertretern der Mathematik in Deutschland zählen. Zwar hatte Dirichlet Berlin kurz vorher verlassen; aber statt dessen wurde Kronecker's alter Freund Kummer nach Berlin berufen, und kurze Zeit darauf Weierstrass. Zu diesem Kreis gehörte auch Borchardt, der seit Crelle's Tod die Herausgabe des Journals für Mathematik leitete und im Jahre 1856 in die Akademie der Wissenschaften aufgenommen wurde.

Kronecker, der 1861 in die Akademie eintrat, lebte in Berlin in glücklicher Musse seinen wissenschaftlichen Idealen, und reiche Früchte und innere Befriedigung krönten diese Thätigkeit.

Aus den ersten Jahren des Berliner Aufenthalts besitzen wir den wissenschaftlich und persönlich werthvollen Briefwechsel mit Dirichlet, den Schering in den Göttinger Nachrichten veröffentlicht hat, und dessen Originale die Göttinger Bibliothek aufbewahrt, der uns über Kronecker's Arbeiten in jener Zeit Aufschluss giebt.

Am 17. Mai 1857 schreibt er an Dirichlet: „Ich habe so manche sehr interessante Sachen gefunden, und da ich mich zunächst dadurch so unabhängig fühle, dass mich keine Spur irgend welchen Ehrgeizes quält, da ich vielmehr einzig und allein meine Freude in der Erkenntniss des Wahren habe, so kommt es mir wenig darauf an, wozu ich gerade meine Zeit verwende, wenn ich sie nur überhaupt gut benutze."

Und über die divinatorische Art seines Schaffens giebt ein Brief vom 26. Juni 1856 Aufschluss.

„Aber ich bin vielfach in der hoffnungsvollen Fernsicht dem, was ich beweisen kann, vorausgeeilt, und habe dabei Anschauungen von der Natur der Gleichungen gewonnen, die, wenn sie sich bewähren, ein ganz neues und erhebliches Interesse gewähren dürften. Bei der gänzlichen Neuheit des Feldes aber, auf welchem ich jetzt arbeite, und bei der kaum zu bewältigenden Complicirtheit, glaube ich, dass ich jahrelanger Arbeit bedürfen werde, ehe ich zu stricten Resultaten komme."

Kronecker hatte schon früh herausgefühlt, und die Abhandlung aus dem Jahre 1853 enthält darüber bereits eine Andeutung, dass nächst den Gleichungen, die wir jetzt in etwas weiterem Sinne, als Kronecker diesen Ausdruck ursprünglich brauchte, Abel'sche nennen, und die, wie Kronecker zuerst erkannt hat, alle durch die Einheitswurzeln gelöst werden, die aus der sogenannten complexen Multiplication der elliptischen Functionen stammenden Gleichungen von fundamentaler Bedeutung sind, dass gewissermassen die nächst höhere Zahlenart durch sie definirt wird. Diesen Gleichungen wandte sich daher im natürlichen Fortschritt seiner Untersuchungen sein hauptsächlichstes Interesse zu. Die Fortschritte, die wir Kronecker auf diesem Gebiete verdanken, gehören zu den werthvollsten Bereicherungen der Algebra.

Abel hatte in seinen Untersuchungen über elliptische Functionen die Frage gestellt, unter welchen Bedingungen eine algebraische Multiplication der elliptischen Functionen mit einem andern als ganzzahligen Multiplicator möglich sei; es ergiebt sich leicht, dass die Bedingung dafür die ist, dass die Perioden einer homogenen Gleichung zweiten Grades genügen, so dass das Periodenverhältniss durch die Quadratwurzel aus einer negativen ganzen Zahl ausgedrückt ist. Abel hatte auch erkannt, dass für den Modul der elliptischen Functionen hieraus eine algebraische Gleichung resultirt; und hat später ohne Beweis ausgesprochen, dass diese Gleichung zu den algebraisch lösbaren gehöre.

Zu diesen Sätzen hat Kronecker zunächst die Beweise gesucht, und wurde dadurch zu den merkwürdigsten Eigenschaften und Beziehungen dieser Gleichungen und der durch sie definirten algebraischen Zahlen geführt.

Der Kernpunkt dieser Ergebnisse ist die enge Beziehung zur Theorie der quadratischen Formen, eben jener Formen, deren Wurzeln die singulären Periodenverhältnisse sind. Es zeigt sich, dass zu jeder negativen Determinante eine algebraische Gleichung mit rationalen Coëfficienten gehört, deren Wurzeln die von Kronecker so genannten singulären Moduln sind, so dass jeder Wurzel dieser Gleichung eine Classe äquivalenter quadratischer Formen entspricht, und dass sonach der Grad dieser Gleichung der Classenzahl für die betreffende Determinante gleich ist. Die Gleichung ist irreducibel im absoluten Rationalitätsbereich, zerfällt aber in Factoren, wenn die Quadratwurzeln aus den in der Determinante aufgehenden Primzahlen adjungirt werden, und zwar entspricht jedem dieser Factoren ein Geschlecht von Formenclassen.

Die Gleichung ist, von einigen besonderen Fällen abgesehen, im absoluten Rationalitätsbereich keine Abel'sche; sie wird es erst durch Adjunction der Quadratwurzel aus der Determinante; dann aber entspricht ihre Gruppe genau der von Gauss entdeckten Gruppe der Composition der Classen quadratischer Formen; die Gleichung ist als Abel'sche algebraisch lösbar.

Dass diese Zahlen für die Abel'schen Gleichungen im quadratischen Rationalitätsbereich mit negativer Discriminante dieselbe allgemeine Rolle spielen, wie die Einheitswurzeln für den absoluten Rationalitätsbereich, d. h. dass die Wurzeln aller Gleichungen, die nach Adjunction einer imaginären Quadratwurzel Abel'sche Gleichungen sind, durch diese Zahlen rational darstellbar sind, hat Kronecker mehrfach ausgesprochen. Den Beweis dafür und ebenso die Uebertragung auf positive Discriminanten, mit der sich Kronecker gleichfalls beschäftigt hat, suchen wir noch vergeblich.

Indem ich so in den grossen Zügen die Hauptmomente der Theorie der complexen Multiplication aufführe, erkennt man leicht, wie sie vollständig parallel läuft mit der Theorie der quadratischen Formen von negativer Determinante, so dass diese auch aus der complexen Multiplication abgeleitet und bewiesen werden kann, und so zwischen zwei auf ganz verschiedenem Boden gewachsenen Disciplinen ein ebenso unerwarteter als merkwürdiger und fruchtbarer Zusammenhang hergestellt ist.

Noch mannigfache Resultate und Erscheinungen der Algebra und Zahlentheorie haben diese Untersuchungen zu Tage gebracht; ich erwähne die merkwürdige Beziehung zu der Pell'schen Gleichung, zum Beweis des Satzes, dass eine primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darstellen kann, die merkwürdigen Relationen zwischen den Classenzahlen quadratischer Formen verschiedener Determinanten und anderes, was sich hier nicht gut ausführen lässt. Die Anfänge dieser Arbeiten fallen, wie der erwähnte Briefwechsel mit Dirichlet zeigt, schon in die fünfziger Jahre, und vielleicht noch früher. Es zieht sich aber das Interesse an dem Gegenstand durch das ganze wissenschaftliche Leben Kronecker's, und noch in den Abhandlungen „Zur Theorie der elliptischen Functionen", die seit dem Jahre 1883 bis kurz vor des Verfassers Tod in längerer Reihe in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie erschienen sind, werden diese Fragen berührt.

Daneben geht noch eine andere Art der Anwendung der elliptischen Functionen auf die Zahlentheorie, die sich von der Theorie der singulären Moduln wesentlich dadurch unterscheidet, dass der Modul variabel bleibt; die Entdeckung dieser Beziehung geht auf Dirichlet zurück, der sie in seiner berühmten Abhandlung „Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres" zuerst berührt und die in dem erwähnten Briefwechsel schon Gegenstand der Besprechung ist; diese Untersuchungen, die auch auf das Gebiet der Thetafunctionen zweier Veränderlicher hinüberspielen, und auch für dieses bemerkenswerthe Resultate und Beziehungen zu elliptischen Thetafunctionen ergaben, werden von Kronecker in seinen letzten Publicationen in sehr merkwürdiger Weise verallgemeinert. Es ist mir aber hier nicht möglich, von dem Gedankeninhalt dieser Umformungen, die wohl noch einer weiteren Verarbeitung würdig wären, in kurzen Worten eine Vorstellung zu geben.

Um eine formale Seite der Kronecker'schen Forschungen zu erwähnen, die in seinen späteren Jahren mehr und mehr von ihm betont wird, will ich auf sein Bestreben hinweisen, invariante Eigenschaften möglichst, wie er sich ausdrückt, in Evidenz treten zu lassen, d. h. die Formeln in eine Gestalt zu bringen, in der ihre invarianten Eigenschaften unmittelbar in die Augen springen. Als Beispiel will ich die Formeln erwähnen, die ihn noch in seiner letzten Zeit beschäftigt haben, mittels deren er die elliptischen Functionen durch Fourier'sche Doppelreihen darstellt, die eine grosse Eleganz und Einfachheit der Form haben, und die die doppelte Periodicität unmittelbar erkennen lassen; freilich auf Kosten einer andern Eigenschaft, die darin verdeckt ist, nämlich Functionen complexen Arguments zu sein.

Kronecker hätte seine algebraischen Untersuchungen nicht mit dem glänzenden Erfolge führen können, wenn er nicht über ein Hülfsmittel verfügt hätte, auf das ich jetzt Ihre Aufmerksamkeit lenken möchte.

Durch die Einführung der complexen Zahlen hatte Gauss der Zahlentheorie ein grosses neues Forschungsgebiet eröffnet. Zunächst veranlasst durch die Untersuchung der biquadratischen Reste hatte Gauss einen Zahlkörper betrachtet, der ausser den rationalen Zahlen, vierte Einheitswurzeln enthält. Auf diesen Zahlkörpern lässt sich die rationale Zahlentheorie in allen wesentlichen Punkten, namentlich der Satz über Theilbarkeit und Zerlegung in Primfactoren, ohne Schwierigkeit übertragen, und dasselbe gelang auch bei anderen Zahlkörpern, z. B. dem, der aus cubischen Einheitswurzeln abgeleitet ist. Wie aber diese Betrachtungen weiter verfolgt und auf Einheitswurzeln höherer Grade übertragen wurden, trat eine Erscheinung zu Tage, die zunächst ein unüberwindliches Hinderniss eines weiteren Fortschritts schien.

Während nämlich im rationalen Zahlkörper die Primzahlen die doppelte Eigenschaft haben, nicht weiter in Factoren zerlegbar zu sein, und ein Product mehrerer Factoren nur dann zu theilen, wenn sie wenigstens einen der Factoren des Products theilen, woraus dann folgt, dass eine Zahl nur auf eine Art in Primfactoren zerlegbar ist, treten in den höheren Zahlkörpern Zahlen auf, die zwar nicht weiter zerlegbar sind, aber doch ein Product theilen können, ohne einen seiner Factoren zu theilen, so dass eine Zahl auf mehr als eine Art in unzerlegbare Factoren zerfällt werden kann. Diese unzerlegbaren Factoren haben also noch nicht den Charakter wahrer Primfactoren. Kummer hat für die Kreistheilungszahlen diese Schwierigkeit überwunden durch die Schöpfung der idealen Factoren, indem er definitionsweise sagt, eine Zahl ist durch einen gewissen idealen Factor (der keine selbständige Existenz hat) theilbar, wenn sie einer gewissen Congruenzbedingung genügt.

Diese Methode war aber nur den Kreistheilungszahlen angepasst und bedurfte der Verallgemeinerung auf beliebige Zahlkörper. Es ist klar, dass eine allgemeine Zahlentheorie, die zugleich die Algebra umfasst, erst dann sich entwickeln kann, wenn diese Schwierigkeit überwunden ist, und dass sie nur dadurch überwunden werden kann, dass man den Begriff der Theilbarkeit durch einen anderen ersetzt, aus dem die gewöhnliche Theilbarkeit als specieller Fall abgeleitet werden kann.

Auch in der Theorie der algebraischen Functionen einer oder mehrerer Veränderlichen herrschen analoge Gesetze wie in der Theorie der Zahlen, und eine allgemeine Theorie der Theilbarkeit muss auch diese umfassen.

Eine Verallgemeinerung eines Begriffes ist aber nach verschiedenen Seiten hin denkbar und möglich. So sind auch auf verschiedenen Wegen Kronecker und Dedekind zu einer gleich vollständigen Lösung dieser Aufgabe gelangt, Dedekind indem er nicht einzelne Zahlen, sondern Systeme von Zahlen betrachtet, die als Specialfall das System aller Multipla einer festen Zahl enthalten, die er *Ideale* nennt. ein Name, der aber nur historischen Ursprung hat, und zu Ehren der Kummer'schen Schöpfung gebildet ist. Nachdem Multiplication und Theilbarkeit dieser Ideale definirt ist, wird bewiesen, dass jedes Ideal auf eine einzige Weise in Primfactoren, d. h. Primideale, zerlegbar ist, in völliger Uebereinstimmung mit den Gesetzen der Theilbarkeit bei den rationalen Zahlen.

Kronecker hat seine Theorie, von der er längst Gebrauch gemacht hatte, im Zusammenhang veröffentlicht in der Festschrift, die er dem alten Freund Kummer zum fünfzigjährigen Doctorjubiläum am 10. Sept. 1881 mit warmen Worten der Dankbarkeit und Anhänglichkeit überreichte, die zugleich auch im Journal für Mathematik abgedruckt wurde.

Es ist unmöglich, in der Kürze und ohne Anwendung mathematischer Formeln einen Ueberblick über den Inhalt der gedankenreichen und schwer geschriebenen Festschrift zu geben. Vielleicht aber gelingt es mir, von dem Grundgedanken wenigstens eine ungefähre Vorstellung zu geben, wenn ich an ein Beispiel aus der Functionentheorie anknüpfe, wo die Verhältnisse durch die Benutzung der Riemann'schen Mittel anschaulicher werden und auch ohnehin wohl der Mehrzahl unter Ihnen vertrauter sind, als die analogen Begriffe der Zahlentheorie.

Man denke sich algebraische Functionen einer Veränderlichen in einer Riemann'schen Fläche dargestellt; das System aller dieser Functionen bildet einen Körper oder nach Kronecker's Terminologie einen Gattungsbereich. Die ganzen Functionen darunter sind die, die im Endlichen endlich bleiben. Das System aller ganzen Functionen, die in einem festen Punkt oder in einer festen Punktgruppe verschwinden, bildet nach Dedekind's Bezeichnung ein Ideal, und die Multiplication besteht in der Zusammenfassung der Nullpunkte der Factoren zu einer neuen Punktgruppe.

Kronecker bildet ganze rationale Formen von beliebigen Hülfsvariablen, die an sich mit der Frage nichts zu thun haben, deren Coëfficienten ganze Functionen des betrachteten Körpers sind. Wenn diese Coëfficienten alle in einem und demselben Punkt verschwinden, so werden die Coëfficienten der Norm ganze rationale Functionen der unabhängigen Variablen sein, die einen gemeinsamen Linearfactor haben. Haben die Coëfficienten der Norm keinen gemeinsamen Theiler, so heisst die Form eine *primitive.* Solche Formen spielen die Rolle von Einheiten und könnten daher wohl auch Einheitsformen genannt werden; und nun gelingt es, jede Form und folglich auch jede Function des Körpers in Primfactoren wirklich zu zerlegen, wenn man in den Factoren auch gebrochene Formen zulässt, die im Nenner Einheitsformen enthalten. Diese Zerlegung ist eine völlig bestimmte, abgesehen von Einheitsformen, die im Zähler und Nenner in verschiedener Weise auftreten können.

Ganz dasselbe gilt auch, wenn die Coefficienten der Formen nicht einem Functionenkörper, sondern einem Zahlenkörper angehören, und so ist eine ausreichende Grundlage für die Zahlentheorie aller dieser Körper gewonnen.

Hiermit ist nun freilich erst der Ausgangspunkt für die Theorie gekennzeichnet; alle die tiefer greifenden Untersuchungen, die wir in der Schrift noch finden, zumal die auf die Discriminante des Körpers und die Eigenschaften der in ihr enthaltenen Factoren sich beziehen, können hier nicht berührt werden; es sei nur noch erwähnt, dass die Theorien von Dedekind und Kronecker trotz der Verschiedenheit der Ausgangspunkte in den Resultaten übereinstimmen; genauer gesagt, dass die Dedekind'schen Primideale in wechselseitig eindeutiger Weise auf die Kronecker'schen Primfactoren bezogen werden können. Dies spricht für die innere Wahrheit und Nothwendigkeit beider Theorien.

Es kann nicht die Aufgabe dieser Gedächtnissrede sein, alle die schönen und werthvollen Untersuchungen zu besprechen oder auch nur zu erwähnen, die das reiche wissenschaftliche Leben Kronecker's ausmachen. Das Verzeichniss der Abhandlungen Kronecker's enthält nicht weniger als 144 Nummern; ich habe mich in meiner sehr unvollständigen Schilderung an das gehalten, was mir das allgemeinste, principiell wichtigste erschien, und wovon ich zugleich hoffen konnte, einem grösseren Kreis eine ungefähre Anschauung zu übermitteln. Auch sind mir selbst nicht alle Seiten von Kronecker's vielumfassender Thätigkeit gleichmässig vertraut und bekannt. Lassen Sie mich aber noch einen Gegenstand wenigstens kurz berühren, der einen bemerkenswerthen Fortschritt in Kronecker's algebraischen Anschauungen kennzeichnet, und der zugleich geeignet ist, in weiteren Kreisen Interesse zu erwecken, das sind seine Untersuchungen über die Gleichungen fünften Grades und ihren Zusammenhang mit der Transformationstheorie der elliptischen Functionen.

Es war wohl Hermite, der zuerst den Gedanken aussprach, dass, wenn man nach Galois die Modulargleichung sechsten Grades, die bei der Transformation fünften Grades der elliptischen Functionen auftritt, auf den fünften Grad reducirt, man mit Hülfe von Gleichungen, die den vierten Grad nicht übersteigen, eine Uebereinstimmung mit der *allgemeinen* Gleichung fünften Grades herstellen kann, und dass man daraus eine Art Auflösung der Gleichung fünften Grades gewinnt, ähnlich wie man seit lange gewohnt ist, die Dreitheilung des Winkels zur Auflösung einer Gleichung dritten Grades zu benutzen. In einem von Hermite veröffentlichten berühmt gewordenen Brief hat nun Kronecker diesen Gegenstand von ganz anderer Seite beleuchtet und auf seinen algebraischen Kern zurückgeführt.

Bei Kronecker tritt zunächst die Zurückführung auf die Transformationsgleichung der elliptischen Functionen zurück hinter der allgemeinen Frage, wie man die Gleichung fünften Grades von einer möglichst einfachen Normalgleichung abhängig machen kann. Als nächstliegendes Ziel stellt sich dar die Zurückführung auf eine Gleichung, die nur von *einem* Parameter abhängig ist, wie es in der That bei den aus der Transformation der elliptischen Functionen stammenden Gleichungen, die nur von dem Modul der elliptischen Functionen abhängig sind, zutrifft. Zunächst entspricht dieser Forderung bereits die Jerrard'sche Form der Gleichungen fünften Grades, deren sich Hermite bedient hat; aber auch gewisse Resolventen sechsten Grades, die sich, wie Kronecker gezeigt hat, auf mannigfache Weise mit den Modulargleichungen sechsten Grades in Einklang bringen lassen.

Aber Kronecker stellt sich noch eine weitere Aufgabe. Er versucht, das Ziel zu erreichen nur durch Benutzung solcher Irrationalitäten, die sich rational durch die Wurzeln der zu lösenden Gleichung ausdrücken lassen, die er als die einfachsten, der Gleichung natürlichsten betrachtet. Dieser Forderung legte er ein grosses Gewicht bei. Da aber der Versuch, ihr zu genügen, nicht gelang, so sprach er den Satz aus, dass die Forderung überhaupt unerfüllbar sei, dass also durch natürliche Irrationalitäten die Gleichung fünften Grades nicht in eine nur von *einem* Parameter abhängige Gleichung transformirbar sei. Einen Beweis für diesen Satz hat er nicht publicirt; dass aber der Satz richtig ist, haben spätere Untersuchungen dargethan.

Eine wesentliche Lücke würde aber in dem Bilde des *Mathematikers* Kronecker bleiben, wenn ich seine Stellung zu den fundamentalen, philosophischen Fragen der Mathematik mit Stillschweigen übergehen wollte. Es ist ein Standpunkt, der besonders in seinen späteren Jahren hervortrat, vielleicht mehr noch im persönlichen Verkehr als in der Oeffentlichkeit; aber auch öffentlich hat er seine Anschauungen nicht verleugnet und z. B. in der Festschrift zu Zeller's Jubiläum scharf hervorgekehrt.

In Bezug auf Strenge der Begriffe stellt er die höchsten Anforderungen und sucht alles, was Bürgerrecht in der Mathematik haben soll, in die krystallklare eckige Form der Zahlentheorie zu zwängen. Manche von Ihnen werden sich des Ausspruchs erinnern, den er in einem Vortrag bei der Berliner Naturforscher-Versammlung im Jahre 1886 that: „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk“.

So war ihm alles, was sich nicht eines arithmetischen Ursprungs unmittelbar bewusst war, unsympathisch, und sein Streben ging dahin, nicht nur in der Algebra, sondern auch in der Functionentheorie die arithmetische Abstammung deutlich hervortreten zu lassen.

Aber freilich hat er auch an jenem „Menschenwerk“ manches bekämpft und verworfen, was sich seit der Zeit des alten Euklid als gut und brauchbar und als logisch richtig erwiesen hat, wenn er z. B. eine Definition nur dann für zulässig erklärt, wenn sie in jedem Falle durch eine endliche Anzahl von Schlüssen erprobt werden kann. Er bricht damit den Stab nicht nur über alle die neueren Versuche, zu einer logisch verständlichen Auffassung der Irrationalzahlen zu gelangen, sondern auch über Euklid's darauf bezügliche Definitionen.

Die Consequenz dieser Auffassungsweise war, dass Kronecker der geometrischen Anschauung in mathematischen Dingen nur eine bedingte Berechtigung einräumte; und in der That findet man in seinen Arbeiten von diesem Hülfsmittel nur sehr beschränkten Gebrauch gemacht. Dass er es aber, wo er es am Platze hielt, mit Meisterschaft handhabte, beweisen seine Arbeiten über die Charakteristiken und die Sturm'schen Reihen, auf die hier näher einzugehen ich mir versagen muss.

Dass Kronecker's wissenschaftliche Arbeit eine ausgezeichnet productive war, der es nur auf das Entdecken und Erkennen ankam, hatte den Erfolg, dass viele seiner wichtigsten Schöpfungen lange Zeit nicht ausführlich und mit Beweisen publicirt waren; erst in den letzten Jahren hat er angefangen, manche seiner Untersuchungen im Zusammenhang darzustellen, und über manches dürfen wir vielleicht noch aus dem Nachlass Aufschluss hoffen.

Um so wichtiger war es, dass Kronecker von dem ihm als Mitglied der Akademie zustehenden Recht, an der Universität Vorlesungen zu halten, regelmässig und umfassend Gebrauch machte. Seine Vorlesungen waren ausschliesslich den Gegenständen gewidmet, denen er sein eigenes wissenschaftliches Interesse zugewandt hatte, und so waren seine Forschungsresultate dem Kreise seiner vertrauteren Schüler schon früh bekannt, und seine Vorlesungen gehörten, wenn auch nur den fortgeschrittenen und wissenschaftlich interessirten Schülern verständlich, zu dem Werthvollsten und Eigenartigsten, was die Berliner Universität dem Mathematiker bot.

Gleichwohl hat Kronecker nicht in dem Masse eine mathematische Schule begründet, wie wir das von anderen hervorragenden Lehrern wissen.

Er selbst spricht sich hierüber in dem schönen und merkwürdigen Briefe aus, den er einige Monate vor seinem Tode an Georg Cantor in Halle gerichtet hat, und der in dem vorigen Jahresbericht unserer Vereinigung abgedruckt ist.

„Ich mag auch bei uns nicht den Ausdruck „Schüler" gern; wir wollen und brauchen keine Schule, sondern wir gehen nur in den Wegen fort, die uns ein Lehrer oder Vorgänger geebnet und gewiesen hat, wenn wir meinen, auf diesem Wege weitere Ziele erreichen zu können. Wir wollen und brauchen keine Schule, weil in unserer absolut klaren Wissenschaft jede neue Entdeckung die bisherige Schulweisheit werthlos machen kann. Das hat uns ja die Geschichte unserer Wissenschaft oft genug gezeigt."

Eine Berufung nach Göttingen, die im Jahre 1868 an ihn ergangen war, lehnte er ab, da er seine Thätigkeit an der Berliner Universität im Kreise der wissenschaftlichen Freunde und Collegen aus der Akademie höher schätzte.

Als aber Kummer im Jahre 1883 wegen hohen Alters von der Lehrthätigkeit zurücktrat, übernahm Kronecker eine ordentliche Professur an der Berliner Universität. Den dadurch vermehrten Lehrpflichten in Vorlesungen und Seminar kam er mit grösstem Eifer nach. Seine den verschiedensten Nationalitäten angehörigen Schüler, denen er allen ein warmes persönliches Interesse entgegenbrachte, hingen mit grösster Verehrung und Dankbarkeit an ihm. Manche sind darunter, die seine Ideen selbständig weiter gebildet haben. Die ihm nach Borchardt's Tod zugefallene Redaction des Crelle'schen Journals leitete er seit dem Jahre 1881 mit Umsicht und Gewissenhaftigkeit.

Lassen sie mich schweigen von den Ehren und Auszeichnungen, die ihm ungesucht in reichem Masse von Regierungen und gelehrten Gesellschaften zu Theil wurden; aber ich will dem Bilde noch einige Züge hinzufügen, die geeignet sind, den ausserordentlichen Mann im Kreise seiner Freunde und Collegen und im öffentlichen Leben zu kennzeichnen, Züge, die ich den Mittheilungen des Sohnes des Verstorbenen verdanke.

Vermöge seiner grossen Erfahrung und Tüchtigkeit in Dingen des praktischen Lebens, seiner Gewandtheit im klaren und formvollendeten schriftlichen und mündlichen Ausdruck hat er sich auch den geschäftlichen Angelegenheiten, die seine Stellung als Mitglied der Akademie und der Facultät mit sich brachten, mit grossem Eifer und Erfolg gewidmet. Die mustergültige Ordnung der Angelegenheiten der *akademischen Druckerei*, die Neuredaction der *Akademie-Statuten* sind vorzugsweise sein Werk. Auch fungirte er erfolgreich als Mitglied des wissenschaftlichen Beiraths des *geodätischen Instituts* bis zu dem Zeitpunkt, wo dieser Beirath durch ministerielle Verfügung aufgelöst wurde.

In vielen wichtigen Fragen, die das Wohl der Universität und der Akademie betrafen, war sein Rath von entscheidendem Einfluss, und stets war er bereit, durch seine Erfahrung und practische Tüchtigkeit nicht nur dem Gemeinwohl, sondern auch seinen Freunden in wissenschaftlichen wie in persönlichen Angelegenheiten zu rathen und zu helfen.

Sein Haus war eine Stätte heiterer Geselligkeit. Er liebte es, seine Freunde und deren Familien in kleinerem und grösserem Kreise um sich zu versammeln. Er hatte es besonders gern, wenn diese Abende durch Musik verschönt wurden; diese war ihm überhaupt die liebste der Künste; er hat das Clavierspiel und in seiner Jugend auch den Gesang eifrigst gepflegt, sich auch in früheren Zeiten in eigenen Compositionen versucht.

Tieferes Interesse und Verständniss brachte er aber auch den bildenden Künsten entgegen. Seine Ferienreisen, die er alljährlich innerhalb Deutschlands, nach Oesterreich, der Schweiz und Italien, nach Frankreich, Holland und Belgien, nach Grossbritannien und Skandinavien unternahm, galten neben der körperlichen und geistigen Erholung und der Anknüpfung und Erhaltung der Verbindung mit wissenschaftlichen Freunden, dem Genuss der schönen Natur und dem Studium der Kunstwerke dieser Länder.

Für das classische Alterthum und seine Cultur hatte er stets eine grosse Vorliebe, und war in dem Meinungsstreit der letzten Jahre ein Gegner der Realschulbildung. Sein eigenes Interesse an der griechischen Sprache und Litteratur bethätigte er als eifriges Mitglied der „Graeca", einer geselligen Vereinigung, die sich mit der Uebersetzung und Erläuterung griechischer Classiker beschäftigte, zu der ausser den bedeutendsten Fachmännern der Berliner Universität und Akademie auch aus anderen Lebenskreisen gebildete und hochstehende Männer zählten.

Auch in der Politik ist Kronecker einmal hervorgetreten, als im Jahre 1869 der Finanz-Minister Camphausen den Gesetzentwurf über die Consolidation der Preussischen Staatsschuld einbrachte. Kronecker bekämpfte in einer Broschüre, der ausführliche Tabellen und Berechnungen beigegeben sind, diesen Gesetzentwurf, den er für nachtheilig hielt, freilich ohne Erfolg.

In seinen politischen Anschauungen war Kronecker 1848 und in den folgenden Jahren liberal, hat sich aber später gewendet. Er gehörte zu den ersten seines Kreises, die Bismarck's deutschen Beruf erkannten und blieb bis zu seinem Lebensende ein enthusiastischer Bewunderer des ersten deutschen Kanzlers. Den glücklichen Ausgang des Krieges 1870/71 sah er voraus. Am 30. Juli 1870, also *vor* der Schlacht bei Weissenburg, schreibt er an seine Frau, nachdem er die materiellen und sittlichen Grundlagen der deutschen Rüstung geschildert: „Sonst erhob eine feste Macht Frankreichs oder sein Bewusstsein der grossen Errungenschaften seiner Revolution den Muth seiner Armeen, selbst wenn sie einen Misserfolg hatten, — heut ist alles morsch und mürbe, und nach kurzem Donner der Kriegsgeschütze wird jenes Gebäude des zweiten Kaiserreichs zerfallen, dessen Glanz doch nur der eines Theaterpompes ist und dessen faule Grundlage nur auf der Vernichtung alles Sittlichen beruht.“

Seine religiöse Weltanschauung entsprach von der Zeit an, da er in den oberen Classen des Gymnasiums am christlichen Religionsunterricht theilnahm, den Lehren des evangelischen Christenthums, in denen er seine Kinder erziehen liess. Er selbst zögerte aus Gewissensbedenken mit seinem Uebertritt zum Christenthum bis in sein letztes Lebensjahr.

Kronecker war, obwohl von sehr kleiner Statur, bis in seine letzte Lebenszeit körperlich rüstig, in früherer Zeit ein guter Turner und Schwimmer, später ein tüchtiger Bergsteiger. Seit dem Tode seiner Frau (23. Aug. 1891) war er körperlich und seelisch gebrochen, wenn auch der Geist noch in der gewohnten Wissenschaft fortarbeitete. Mitte December befiel ihn eine Bronchitis, die die gesunkenen Kräfte rasch aufzehrte und am 29. Dez. 1891 seinem reichen Leben ein Ende machte. Sein Name aber wird in der Wissenschaft fortleben und unter den besten mit Ehren genannt werden.

Schriften von L. **Kronecker***).

1845.

1. Beweis, dass für jede Primzahl p die Gleichung $1+x+x^2+\cdots+x^{p-1}=0$ irreductibel ist. J. für Math. XXIX. 280.
2. De unitatibus complexis. Dissertatio inauguralis. §§ 1—16. Berolini. 35 S.

1853.

3. Ueber die algebraisch auflösbaren Gleichungen. Monatsber. 365—374.
   Uebersetzt in Serret, Cours d'Algèbre supérieure, I. Aufl. Note XIII. 560—569: Sur les équations résolubles algébriquement (1854), in den späteren Auflagen ebenfalls abgedruckt.

1854.

4. Mémoire sur les facteurs irréductibles de l'expression (x^n-1). Journ. de Math. (1) XIX. 193—208.

*) Nach dem durch K. Hensel vervollständigten Kataloge Kronecker's chronologisch geordnet von E. Lampe.

5. Note sur les fonctions semblables des racines d'une équation. Journ. de Math. (I) XIX. 279—280.

1856.

6. Sur quelques fonctions symétriques et sur les nombres de Bernoulli. Journ. de Math. (2) I. 385—391.
7. Sur une formule de Gauss. Journ. de Math. (2) I. 392—395.
8. Démonstration d'un théorème de M. Kummer. Journ. de Math. (2) I. 396—398.
9. Démonstration de l'irréductibilité de l'équation $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=0$ où n dénote un nombre premier. Journ. de Math. (2) I. 399—400.
10. Ueber die algebraisch auflösbaren Gleichungen. Monatsber. 203—215.

1857.

11. Ueber elliptische Functionen, für welche complexe Multiplication stattfindet, Monatsber. 455—460.
    Uebersetzt von Hoüel in Journ. de Math. (2) III. 265—270: Sur les fonctions elliptiques et sur la théorie des nombres (1858).
12. Zwei Sätze über Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten. J. für Math. LIII. 173—175.
13. Ueber complexe Einheiten. J. für Math. LIII. 176—181.

1858.

14. Sur la résolution de l'équation du cinquième degré. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. Comptes Rendus XLVI. (I. Sem.) 1150—52.
15. Ueber Gleichungen des siebenten Grades. Monatsber. 287—289.

1859.

16. Ueber kubische Gleichungen mit rationalen Coefficienten. Journ. für Math. LVI. 188.
17. Extrait d'une lettre de M. Kronecker à M. Brioschi (sur la théorie des substitutions). Annali di Mat. (2) II. 131.

1860.

18. Ueber die Anzahl der verschiedenen Klassen quadratischer Formen von negativer Determinante. J. für Math. LVII. 248—255.
    Uebersetzt von Hoüel in Journ. de Math. (2) V. 289—299: Sur le nombre de classes différentes de formes quadratiques à déterminants négatifs (1860).

1861.

19. Mittheilung über algebraische Arbeiten. Monatsber. 609—617.
    Uebersetzt von Hoüel in Ann. de l'Éc. Norm. III. 279—286: Note de M. Kronecker sur ses travaux algébriques (1866).
20. Ueber die Gleichungen fünften Grades. J. für Math. LIX. 306—310. (Theilweiser Abdruck von Nr. 19.)
21. Ueber die Bedingungen der Integrabilität. J. für Math. LIX. 311—312.
22. Antrittsrede. Monatsber. 637—639. (Erwiederung von Encke. 640—642).

1862.

23. Ueber eine neue Eigenschaft der quadratischen Formen von negativer Determinante. Monatsber. 302—311.
Uebersetzt von Hoüel in Ann de l'Éc. Norm. III. 287—294: Sur une nouvelle propriété des formes quadratiques de déterminant négatif (1866).
24. Ueber die complexe Multiplication der elliptischen Functionen. Monatsber. 363—372.
Uebersetzt von Hoüel in Ann. de l'Éc. Norm. III. 295—302; Sur la multiplication complexe des fonctions elliptiques (1866).

1863.

25. Ueber die Auflösung der Pell'schen Gleichung mittelst elliptischer Functionen. Monatsber. 44—50.
Uebersetzt von Hoüel in Ann. de l'Éc. Norm. III. 303—308: Sur la résolution de l'équation de Pell au moyen des fonctions elliptiques (1866).
26. Ueber die Klassenanzahl der aus Wurzeln der Einheit gebildeten complexen Zahlen. Monatsber. 340—345.

1864.

27. Ueber den Gebrauch der Dirichlet'schen Methoden in der Theorie der quadratischen Formen. Monatsber. 285—303.

1865.

28. Ueber einige Interpolationsformeln für ganze Functionen mehrerer Variabeln. Monatsber. 686—691.

1866.

29. Ueber bilineare Formen. Monatsber. 597—612.
Abgedruckt im J. für Math. LXVIII. 273—285. (1868).

1868.

30. Bemerkungen zu Weierstrass' Abhandlung: Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen. Monatsber. 339—346.

1869.

31. Ueber Systeme von Functionen mehrer Variabeln. Monatsber. 159—193.
31a. Ueber Systeme von Functionen mehrer Variabeln. Monatsber. 688—698.
32. Sur le théorème de Sturm. Comptes Rendus LXVIII. 1078—82.
33. Zur Potentialtheorie. J. für Math. LXX. 246—248.
34. Bemerkungen zur Determinantentheorie. J. für Math. LXXII. 152—175.
35. Bedenken gegen die Annahme des Gesetzentwurfs betreffend die Konsolidation preussischer Staatsanleihen. Berlin. Dümmler.
36. Tabelle zum Konsolidationsgesetz. Berlin. Dümmler.

1870.

37. Bemerkungen zu du Bois-Reymond's Arbeit: Die aperiodische Bewegung gedämpfter Magnete. Zweite Abhandlung. Monatsber. 569—570.
38. Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Klassenanzahl idealer complexer Zahlen. Monatsber. 881—889.

1872.

39. Zur algebraischen Theorie der quadratischen Formen. Monatsber. 490—504.
Uebersetzt in Darboux Bull. IV. 256—271: Sur la théorie algébrique des formes quadratiques (1873).
Darstellung dieser Untersuchungen nach einer Bearbeitung derselben von Kronecker: Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten. V. Aufl. S. 271—278.
40. Zeller's Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. Monatsber. 846—847.

1873.

41. Ueber die verschiedenen Sturm'schen Reihen und ihre gegenseitigen Beziehungen. Monatsber. 117—154.

1874.

42. Ueber Scharen von quadratischen Formen. Monatsber. 59—76.
43. Nachtrag zu diesem Aufsatze. 149—156.
44. Ueber Scharen von quadratischen und bilinearen Formen. Monatsber. 206—232.
45. Sur les faisceaux de formes quadratiques et bilinéaires. Comptes Rendus LXXVIII. 1181—1182.
46. Ueber die congruenten Transformationen der bilinearen Formen. Monatsber. 397—447.

1875.

47. Ueber quadratische Formen von negativer Determinante, und Bemerkungen über Reuschle's Tafeln complexer Primzahlen. Monatsber. 223—238.
48. Bemerkungen zur Geschichte des Reciprocitätsgesetzes. Monatsber. 267—274.
Italienische Uebers. von A. Sparagna in Boncompagni Bull. XVIII. 244 bis 249: Intorno alla storia della legge di reciprocità, osservazioni del prof. Leopoldo Kronecker (1885).
49. Ueber die algebraischen Gleichungen, von denen die Theilung der elliptischen Functionen abhängt. Monatsber. 498—507.

1876.

50. Bemerkung zu der Abhandlung Nr. 49 mit Bezug auf eine Notiz von Herrn Sylow. Monatsber. 242.
51. Ueber das Reciprocitätsgesetz. Monatsber. 331—341. Zur Mittheilung von Schering. Monatsber. 330—331.
Franz. Uebers. in Darboux Bull. (2) IV. 182—192: Sur la loi de réciprocité (1880).

1877.

52. Ueber Abel'sche Gleichungen. Monatsber. 845—851.

1878.

53. Notiz über Potenzreihen. Monatsber. 53—58.
54. Ueber Sturm'sche Functionen. Monatsber. 95—121.
55. Ueber die Charakteristik von Functionen-Systemen. Monatsber. 145—152.

1879.

56. Entwickelungen aus der Theorie der algebraischen Gleichungen. Monatsber. 205—229.

1880.

57. Ueber die Irreductibilität von Gleichungen. Monatsber. 155—162.
58. Ueber die Potenzreste gewisser complexer Zahlen. Monatsber. 404—407.
59. Ueber den vierten Gauss'schen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. Monatsber. 686—698, 854—860.
60. Ueber die symmetrischen Functionen. Monatsber. 936—948.

1881.

61. Ueber die in Heun's Aufsatz behandelten Determinanten. Göttinger Nachr. 271—279.
62. Zur Theorie der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen. Monatsber. 535—600.
63. Adresse der Academie zu E. E. Kummer's Doctorjubiläum. Monatsber. 895—898.
64. Zur Theorie der elliptischen Functionen. Monatsber. 1165—1172.
65. Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variablen. J. für Math. XCI. 301—334.
66. Ueber Potentiale n-facher Mannigfaltigkeiten. Coll. Math. in mem. Chelini. 224—231.

1882.

67. Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. J. für Math. XLII. 1—122.
68. De unitatibus complexis. Dissertatio inaug. arithmetica (vergl. No. 2; §§ 17—20 a. a. O. nicht veröffentlicht). J. für Math. XCIII. 1—52.
69. Festschrift zu Herrn Ernst Eduard Kummer's fünfzigjährigem Doctor-Jubiläum, 10. September 1881. Berlin. G. Reimer. (Enthaltend Widmung, No. 67 u. No. 68 vereinigt.)

    Darstellung des Inhaltes durch J. Molk in Darboux Bull. (2) VIII. 145—154.
70. Die Subdeterminanten symmetrischer Systeme. Sitzungsber. Berl. 821 bis 824.
71. Die Composition Abel'scher Gleichungen. Sitzungsber. Berl. 1059 bis 1064.
72. Die cubischen Abel'schen Gleichungen des Bereichs $\sqrt{-31}$. Sitzungsber. Berl. 1151—1154.
73. Zur Theorie der Abel'schen Gleichungen. J. für Math. XCIII. 338—364.
74. Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Formen. J. für Math. XCIII. 365—366.

1883.

75. Sur les unités complexes. Comptes Rendus XCVI. 93—98, 148—151, 216—221.

    Mit dieser Arbeit hängt eng zusammen und rührt inhaltlich zum Theil von Kronecker her:
76. Sur les unités complexes, par M. J. Molk. Darboux Bull. (2) VII. 133 bis 136.
77. Ueber die Bernoulli'schen Zahlen. J. für Math. XCIV. 268—269.
78. Die Zerlegung der ganzen Grössen eines natürlichen Rationalitäts-Bereichs in ihre irreductiblen Factoren. J. für Math. XCIV. 344—348.

79. Zur Theorie der elliptischen Functionen. I—V. Sitzungsber. Berl. 497 bis 506, 525—530.
80. Bemerkungen über die Multiplication der elliptischen Functionen. Sitzungsber. Berl. 717—729.
80a. Weitere Bemerkungen über die Multiplication der elliptischen Functionen. Sitzungsber. Berl. 949—956.
81. Zur Theorie der Formen höherer Stufen. Sitzungsber. Berl. 957—960.

1884.

82. Ueber bilineare Formen mit vier Variablen. Abhandl. Berl. Ac. II. (1883). 1—60.
83. Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. Sitzungsber. Berl. 519—537.
84. Desgl. (veränderte Darstellung von No. II der vorigen Arbeit). J. für Math. XCVI. 348.
85. Beweis einer Jacobi'schen Integralformel. Sitzungsber. Berl. 539—540.
86. Beweis des Puiseux'schen Satzes. Sitzungsber. Berl. 543—548.
87. Ueber den dritten Gauss'schen Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste. Sitzungsber. Berl. 645—647.
88. Der dritte Gauss'sche Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste, in vereinfachter Darstellung. J. für Math. XCVII 93—94.
89. Bemerkungen über ein System von Differentialgleichungen, welches in der vorstehenden Arbeit des Herrn von Helmholtz behandelt ist. J. für Math. XCVII. 141—145.
90. Additions au mémoire sur les unités complexes. Comptes Rendus IC 765—771.
91. Die Periodensysteme von Functionen reeller Variabeln. Sitzungsber. Berl. 1071—1080.
92. Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen. Sitzungsber. Berl. 1179—1193, 1271—1299.
93. E. du Bois-Reymond, Untersuchungen über thierische Elektricität. II. Band. II. Abth. S. 489—490. (Anmerkung.)

1885.

94. Sulle superficie algebriche irreduttibili aventi infinite molte sezioni piane che si spezzano in due curve. Rom. Acc. L. Rend. (4) II. 323—324.
95. Bemerkungen zu Herrn Ernst Schering's Mittheilung (über das Reciprocitätsgesetz). Sitzungsber. Berl. 117—118.
96. Die absolut kleinsten Reste reeller Grössen. Sitzungsber. Berl. 383 bis 396, 1045—1049.
97. Anmerkung zur Note des Herrn A. H. Anglin: „Zur Theorie der symmetrischen Functionen." J. für Math. XCVIII. 176.
98. Sur le second théorème de la moyenne par M. Mansion, avec un extrait d'une lettre de M. L. Kronecker (Une équivalence algébrique). Mathesis V. 97—102.
99. Ueber das Dirichlet'sche Integral. Sitzungsber. Berl. 641—665.
100. Ueber eine bei Anwendung der partiellen Integration nützliche Formel. Sitzungsber. Berl. 841—862.
101. Zur Theorie der elliptischen Functionen. VI—X. Sitzungsber. Berl. 761 bis 784.

102. Ueber den Cauchy'schen Satz. Sitzungsber. Berl. 785—787.
103. Briefwechsel zwischen Gustav Lejeune Dirichlet und Herrn Leopold Kronecker, herausgegeben von Ernst Schering. Göttinger Nachr. 361—382.

1886.

104. Ueber einige Anwendungen der Modulsysteme auf elementare algebraische Fragen. J. für Math. IC. 329—371.
105. Ein Satz über Discriminanten-Formen. J. für Math. C. 79—82.
106. Zur Theorie der Gattungen rationaler Functionen von mehreren Variablen. Sitzungsber. Berl. 251—253.
107. Zur Theorie der elliptischen Functionen. XI. Sitzungsber. Berl. 701 bis 780.
108. Ueber den Zahlbegriff. Samml. philos. Aufs. (Zeller). 263—274.
109. Quelques remarques sur la détermination des valeurs moyennes. Comptes Rendus CIII. 980—987.
110. Darlegung arithmetischer Eigenschaften der Kugelfunctionen. Tageblatt der Naturforsch. Vers. LIX. 123.
111. Zwei Noten zu der Abhandlung von E. E. Kummer: Zwei neue Beweise der allgemeinen Reciprocitätsgesetze. J. für Math. C. 12 u. 16.

1887.

112. Ein Fundamentalsatz der allgemeinen Arithmetik. J. für Math. C. 490 bis 510.
113. Ueber den Zahlbegriff (vgl. No. 108). J. für Math. CI. 337—355.
114. Bemerkungen über die Jacobi'schen Thetaformeln. J. für Math. CII. 260—272.
115. Vorwort zum hundertsten Bande des J. für Math.

1888.

116. Ueber die arithmetischen Sätze, welche Lejeune Dirichlet in seiner Breslauer Habilitationsschrift entwickelt hat. Sitzungsber. Berl. 417—423.
117. Zur Theorie der allgemeinen complexen Zahlen und der Modulsysteme. Sitzungsber. 429—438, 447—465, 557—578, 595—612, 983—1016.
118. Bemerkungen über Dirichlet's letzte Arbeiten. Sitzungsber. Berl. 439—442.

1889.

119. Zur Theorie der elliptischen Functionen. XII—XIX. Sitzungsber. Berl. 53—63, 123—135, 199—220, 255—275, 309—317.
120. Ueber symmetrische Systeme. Sitzungsber. Berl. 349—362.
121. Die Decomposition der Systeme von n^2 Grössen und ihre Anwendung auf die Theorie der Invarianten. Sitzungsber. Berl. 479—505, 603—614.
122. Ueber eine summatorische Function. Sitzungsber. Berl. 867—881.
123. Beweis des Reciprocitätsgesetzes für die quadratischen Reste (Auszug aus No. 96_2). J. für Math. CIV. 348—351.
124. Paul du Bois-Reymond. J. für Math. CIV. 352—354.
125. Bemerkungen über die Darstellung von Reihen durch Integrale. J. für Math. CV. 157—159, 345—354.
126. Summirung der Gauss'schen Reihen $\sum_{h=0}^{h=n-1} e^{\frac{2h^2\pi i}{n}}$. J. für Math. CV. 267—268.
127. Vorwort zu G. Lejeune Dirichlet's Werken, Bd. I, S. V—VI.

1890.

128. Ueber die Dirichlet'sche Methode der Werthbestimmung der Gauss'schen Reihen. Hamburger Festschr. 32—36.
129. Zur Theorie der elliptischen Functionen. XX—XXII. Sitzungsber. Berl. 99—120, 123—130, 219—241, 307—318, 1025—1029.
130. Ueber orthogonale Systeme. Sitzungsber. Berl. 525—541, 602—607, 692—699, 873—884, 1063—1080.
131. Ueber die Composition der Systeme von n^2 Grössen mit sich selbst. Sitzungsber. Berl. 1081—1088.
132. Algebraische Reduction der Scharen bilinearer Formen. Sitzungsber. Berl. 1225—1237.
133. Algebraische Reduction der Scharen quadratischer Formen. Sitzungsber. Berl. 1375—1383.
134. Bemerkungen über die von Gauss mit $[x]$ bezeichnete arithmetische Function einer reellen Grösse x. J. für Math. CVI. 346—348.
135. Reduction der Systeme von n^2 ganzzahligen Elementen. J. für Math. CVII. 135—136.
136. Anwendung der Modulsysteme auf Fragen der Determinantentheorie. J. für Math. CVII. 254—261.
137. Ueber eine Stelle in Jacobi's Aufsatz: „Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes. J. für Math. CVII. 349—352.

1891.

138. Algebraische Reduction der Scharen quadratischer Formen. Sitzungsber. Berl. 9—17, 33—44.
139. Die Legendre'sche Relation. Sitzungsber. Berl. 323—332, 343—358, 447—465, 905—908.
140. Die Clausius'schen Coordinaten. Sitzungsber. Berl. 881—890.
141. Sophie von Kowalevsky. J. für Math. CVIII. 88.
142. Eine analytisch-arithmetische Formel. J. für Math. CVIII. 348.
143. Ueber die Zeit und die Art der Entstehung der Jacobi'schen Thetaformeln Sitzungsber. Berl. 653—659, J. für Math. 325—334 (Abdruck nebst einem Verzeichnis der Jacobi'schen Vorlesungen).

1892.

144. Auszug aus einem Schreiben von L. Kronecker an Herrn Prof. G. Cantor. Jahresber. der Deutsch. Math. Ver. I. 23—25.