

Werk

Titel: Mathematische Annalen

Ort: Leipzig

Jahr: 1893

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN235181684_0043

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0043

LOG Id: LOG_0021

LOG Titel: Ueber die Transcendenz der Zahlen e und

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Ueber die Transcendenz der Zahlen e und π .*)

Von

DAVID HILBERT in Königsberg i. Pr.

Man nehme an, die Zahl e genüge der Gleichung n^{ten} Grades

$$a + a_1 e + a_2 e^2 + \dots + a_n e^n = 0,$$

deren Coefficienten $a, a_1, \dots, a_n$ ganze rationale Zahlen sind. Wird die linke Seite dieser Gleichung mit dem Integral

$$\int_0^\infty z^q [(z-1)(z-2)\dots(z-n)]^{q+1} e^{-z} dz$$

multiplicirt, wo q eine ganze positive Zahl bedeutet, so entsteht der Ausdruck

$$a \int_0^\infty + a_1 e \int_0^\infty + a_2 e^2 \int_0^\infty + \dots + a_n e^n \int_0^\infty$$

und dieser Ausdruck zerlegt sich in die Summe der beiden folgenden Ausdrücke:

$$P_1 = a \int_0^\infty + a_1 e \int_1^\infty + a_2 e^2 \int_2^\infty + \dots + a_n e^n \int_n^\infty,$$

$$P_2 = a_1 e \int_0^1 + a_2 e^2 \int_0^2 + \dots + a_n e^n \int_0^n.$$

Die Formel

$$\int_0^\infty z^q e^{-z} dz = q!$$

zeigt, dass das Integral $\int_0^\infty$ eine ganze rationale durch $q!$ theilbare Zahl ist und ebenso leicht folgt, wenn man bezüglich die Substitutionen $z = z' + 1, z = z' + 2, \dots, z = z' + n$ anwendet, dass

$$e \int_1^\infty, e^2 \int_2^\infty, \dots, e^n \int_n^\infty$$

ganze rationale durch $(q+1)!$ theilbare Zahlen sind. Daher ist auch

*) Abdruck aus Nr. 2 der Göttinger Nachrichten v. J. 1893.

P_1 eine durch $\varrho!$ theilbare ganze Zahl und zwar gilt, wie man sieht, nach dem Modul $\varrho + 1$ die Congruenz

$$(1) \quad \frac{P_1}{\varrho!} \equiv \pm a(n!)^{\varrho+1}. \quad (\varrho + 1)$$

Andererseits ist, wenn mit K bezüglich k die absolut grössten Werthe bezeichnet werden, welche die Functionen

$$z(z-1)(z-2)\dots(z-n)$$

bezüglich

$$(z-1)(z-2)\dots(z-n)e^{-z}$$

in dem Intervalle $z = 0$ bis $z = n$ annehmen:

$$\left| \int_0^1 \right| < k K e, \quad \left| \int_0^2 \right| < 2k K e, \dots \left| \int_0^n \right| < nk K e$$

und hieraus folgt, wenn zur Abkürzung

$$\kappa = \{|a_1 e| + 2|a_2 e^2| + \dots + n|a_n e^n|\} k$$

gesetzt wird, die Ungleichung

$$(2) \quad |P_2| < \kappa K e.$$

Nun bestimme man eine ganze positive Zahl ϱ , welche *erstens* durch die ganze Zahl $a \cdot n!$ theilbar ist und für welche *zweitens*

$\kappa \frac{K e}{\varrho!} < 1$ wird. Es ist dann $\frac{P_1}{\varrho!}$ infolge der Congruenz (1) eine nicht durch $\varrho + 1$ theilbare und daher nothwendig von 0 verschiedene ganze Zahl und da überdies $\frac{P_2}{\varrho!}$ infolge der Ungleichung (2) absolut genommen kleiner als 1 wird, so ist die Gleichung

$$\frac{P_1}{\varrho!} + \frac{P_2}{\varrho!} = 0$$

unmöglich.

Man nehme an, es sei π eine algebraische Zahl und zwar genüge die Zahl $\alpha_1 = i\pi$ einer Gleichung n^{ten} Grades mit ganzzahligen Coefficienten. Bezeichnen wir dann mit $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ die übrigen Wurzeln dieser Gleichung, so muss, da $1 + e^{i\pi}$ den Werth 0 hat, auch der Ausdruck

$$(1 + e^{\alpha_1})(1 + e^{\alpha_2}) \dots (1 + e^{\alpha_n}) = 1 + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \dots + e^{\beta_N}$$

den Werth 0 haben und hierin sind, wie man leicht sieht, die N Exponenten $\beta_1, \dots, \beta_N$ die Wurzeln einer Gleichung N^{ten} Grades mit ganzzahligen Coefficienten. Sind überdies etwa die M Exponenten $\beta_1, \dots, \beta_M$ von 0 verschieden, während die übrigen verschwinden, so sind diese M Exponenten $\beta_1, \dots, \beta_M$ die Wurzeln einer Gleichung M^{ten} Grades von der Gestalt

$$f(z) = bz^M + b_1 z^{M-1} + \dots + b_M = 0,$$

deren Coefficienten ebenfalls ganze rationale Zahlen sind und in welcher

insbesondere der letzte Coefficient b_M von Null verschieden ist. 1
 obige Ausdruck erhält dann die Gestalt

$$a + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \dots + e^{\beta_M},$$

wo a eine ganze positive Zahl ist.

Man multiplicire diesen Ausdruck mit dem Integral

$$\int_0^\infty = \int_0^\infty z^\varrho [g(z)]^{\varrho+1} e^{-z} dz,$$

wo ϱ wiederum eine ganze positive Zahl bedeutet und wo zur Abkürzung $g(z) = b^M f(z)$ gesetzt ist; dann ergibt sich

$$a \int_0^\infty + e^{\beta_1} \int_0^\infty + e^{\beta_2} \int_0^\infty + \dots + e^{\beta_M} \int_0^\infty$$

und dieser Ausdruck zerlegt sich in die Summe der beiden folgenden Ausdrücke:

$$P_1 = a \int_0^\infty + e^{\beta_1} \int_{\beta_1}^\infty + e^{\beta_2} \int_{\beta_2}^\infty + \dots + e^{\beta_M} \int_{\beta_M}^\infty,$$

$$P_2 = e^{\beta_1} \int_0^{\beta_1} + e^{\beta_2} \int_0^{\beta_2} + \dots + e^{\beta_M} \int_0^{\beta_M},$$

wo allgemein das Integral $\int_{\beta_i}^\infty$ in der complexen z -Ebene vom Punkte $z = \beta_i$ längs einer zur Axe der reellen Zahlen parallelen Geraden bis zu $z = +\infty$ hin und das Integral $\int_0^{\beta_i}$ vom Punkte $z = 0$ längs der geraden Verbindungslinie bis zum Punkte $z = \beta_i$ hin zu erstrecken ist.

Das Integral $\int_0^\infty$ ist wieder gleich einer ganzen rationalen durch $\varrho!$ theilbaren Zahl und zwar gilt, wie man sieht, nach dem Modul $\varrho + 1$ die Congruenz

$$\frac{1}{\varrho!} \int_0^\infty \equiv b^{\varrho M + M} b_M^{\varrho+1}. \quad (\varrho + 1)$$

Mittelst der Substitution $z = z' + \beta_i$ und wegen $g(\beta_i) = 0$ ergibt sich ferner

$$e^{\beta_i} \int_{\beta_i}^\infty = \int_0^\infty (z' + \beta_i)^\varrho [g(z' + \beta_i)]^{\varrho+1} e^{-z'} dz' = (\varrho + 1)! G(\beta_i),$$

wo $G(\beta_i)$ eine ganze ganzzahlige Function von β_i bedeutet, deren Grad in β_i unterhalb der Zahl $\varrho M + M$ bleibt und deren Coefficienten sämtlich durch $b^{\varrho M + M}$ theilbar sind. Da $\beta_1, \dots, \beta_M$ die Wurzeln

der ganzzahligen Gleichung $f(z) = 0$ sind und mithin durch Multiplication mit dem ersten Coefficienten b zu *ganzen* algebraischen Zahlen werden, so ist

$$G(\beta_1) + G(\beta_2) + \dots + G(\beta_M)$$

nothwendig eine *ganze rationale* Zahl. Hieraus folgt, dass der Ausdruck P_1 gleich einer ganzen rationalen durch $q!$ theilbaren Zahl wird und zwar gilt nach dem Modul $q + 1$ die Congruenz

$$(3) \quad \frac{P_1}{q!} \equiv a b^{q^{M+M}} b_M^{q^{+1}}. \quad (q+1)$$

Andererseits ist, wenn mit K bezüglich k die grössten absoluten Beträge bezeichnet werden, welche die Functionen $z g(z)$ bezüglich $g(z)e^{-z}$ auf den geradlinigen Integrationsstrecken zwischen $z = 0$ bis $z = \beta_i$ annehmen:

$$\left| \int_0^{\beta_i} \right| < |\beta_i| k K^q \quad (i=1, 2, \dots, M)$$

und hieraus folgt, wenn zur Abkürzung

$$\kappa = \{ |\beta_1 e^{\beta_1}| + |\beta_2 e^{\beta_2}| + \dots + |\beta_M e^{\beta_M}| \} k$$

gesetzt wird, die Ungleichung

$$(4) \quad |P_2| < \kappa K^q.$$

Nun bestimme man eine ganze positive Zahl q , welche *erstens* durch $ab b_M$ theilbar ist und für welche *zweitens* $\kappa \frac{K^q}{q!} < 1$ wird. Es ist dann $\frac{P_1}{q!}$ in Folge der Congruenz (3) eine nicht durch $q + 1$ theilbare und daher nothwendig von 0 verschiedene ganze Zahl und da überdies $\frac{P_2}{q!}$ in Folge der Ungleichung (4) absolut genommen kleiner als 1 wird, so ist die Gleichung

$$\frac{P_1}{q!} + \frac{P_2}{q!} = 0$$

unmöglich.

Es ist leicht zu erkennen, wie auf dem eingeschlagenen Wege ebenso einfach auch der allgemeinste Lindemann'sche Satz über die Exponentialfunction sich beweisen lässt.

Königsberg i. Pr., den 5. Januar 1893.