

Werk

Titel: Mathematische Annalen

Ort: Leipzig

Jahr: 1893

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN235181684_0043

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0043

LOG Id: LOG_0022

LOG Titel: Beweis der Transcendenz der Zahl e.

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Beweis der Transcendenz der Zahl e .

Von

A. HURWITZ in Zürich.*)

Einer brieflichen Mittheilung von Herrn Hilbert verdanke ich die Kenntniss seines neuen, überaus einfachen Beweises für die Transcendenz der Zahl e .

Ich habe nun bemerkt, dass man bei diesem Beweise die Benutzung der Integrale vermeiden kann, so dass der Beweis sich nur noch auf die ersten Elemente der Differentialrechnung stützt. In den folgenden Zeilen möchte ich mir erlauben, diese Modification des Hilbert'schen Beweises kurz mitzuthemen**).

Bezeichnet $f(x)$ eine ganze rationale Function r^{ten} Grades von x , und setzt man zur Abkürzung

$$(1) \quad F(x) = f(x) + f'(x) + \dots + f^{(r)}(x),$$

so ist der Differentialquotient von $e^{-x} F(x)$ gleich $-e^{-x} f(x)$. Zuzufolge des bekannten Satzes:

$$\varphi(x) - \varphi(0) = x\varphi'(\vartheta x) \quad (0 < \vartheta < 1).$$

besteht daher die Gleichung

$$e^{-x} F(x) - F(0) = -xe^{-\vartheta x} f(\vartheta x),$$

oder

$$(2) \quad F(x) - e^x F(0) = -xe^{(1-\vartheta)x} f(\vartheta x), \quad (0 < \vartheta < 1).$$

Angenommen nun, die Zahl e genüge der Gleichung

$$(3) \quad C_0 + C_1 e + C_2 e^2 + \dots + C_n e^n = 0,$$

wobei $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ ganze Zahlen bedeuten, von denen die erste C_0 , unbeschadet der Allgemeinheit, als von Null verschieden und positiv vorausgesetzt werde.

Ich wende nun die Gleichung (2) auf die Function

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} (1-x)^p (2-x)^p \dots (n-x)^p$$

*) Abgedruckt aus Nr. 4 der Göttinger Nachrichten v. J. 1893.

**) Herr Hilbert hat übrigens, wie ich von ihm neuerdings erfahre, auch schon gelegentlich eines Vortrages Andeutungen gegeben, wie man die Integrale (und zugleich das Differenziren) bei seinem Beweise vermeiden kann, indem man die Integrale durch Grenzwerte ersetzt.

an, wo p eine Primzahl bedeutet, die grösser als die grössere der beiden Zahlen n und C_0 ist. Setzt man dann der Reihe nach $x = 1, 2, \dots n$, so ergibt sich

$$(4) \quad \begin{cases} F(1) - e F(0) = \varepsilon_1, \\ F(2) - e^2 F(0) = \varepsilon_2, \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ F(n) - e^n F(0) = \varepsilon_n, \end{cases}$$

wo

$$\varepsilon_k = -k \cdot e^{(1-\vartheta)k} \frac{(\vartheta k)^{p-1} (1-\vartheta k)^p \dots (n-\vartheta k)^p}{(p-1)!} \quad (k = 1, 2, \dots n)$$

mit wachsendem p unter alle Grenzen sinkt. Man erhält aber nach (1) den Werth von $F(k)$ offenbar, indem man $f(k+h)$ nach Potenzen von h entwickelt, und sodann die Potenz $h, h^2, h^3, \dots$ bezüglich durch $1!, 2!, 3!,$ ersetzt. Daher sind

$$F(1), F(2), \dots F(n)$$

ganze Zahlen, die durch p theilbar sind, $F(0)$ eine durch p nicht theilbare ganze Zahl.

Aus den Gleichungen (4) folgt nun mit Rücksicht auf (3):

$$C_1 F(1) + C_2 F(2) + \dots + C_n F(n) + C_0 F(0) = C_1 \varepsilon_1 + C_2 \varepsilon_2 + \dots + C_n \varepsilon_n.$$

Da die rechte Seite mit wachsendem p unter alle Grenzen sinkt, die linke Seite aber stets eine ganze Zahl ist, so muss

$$(5) \quad C_1 F(1) + C_2 F(2) + \dots + C_n F(n) + C_0 F(0) = 0$$

sein, wenn man die Primzahl p genügend gross wählt. Die Gleichung (5) ist aber unmöglich, da auf der linken Seite eine durch p nicht theilbare ganze Zahl steht. Die Annahme e genüge einer Gleichung der Gestalt (3), führt also auf einen Widerspruch, die Annahme ist also unzulässig; mit anderen Worten: e ist eine transcendente Zahl. *)

Zürich, den 18. Januar 1893.

*) Herr Gordan hat kürzlich eine Abänderung des obigen Beweises gegeben, bei welcher nur von der Reihenentwicklung der Function e^x Gebrauch gemacht wird. Vgl. Comptes Rendus 1893. [Juli 1893].