

Werk

Titel: Mathematische Annalen

Ort: Leipzig

Jahr: 1893

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN235181684_0043

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0043

LOG Id: LOG_0023

LOG Titel: Transcendenz von e und

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Transcendenz von e und π .

Von

P. GORDAN in Erlangen.

Hermite hat die Transcendenz von e und Lindemann die von π bewiesen, d. h. sie haben gezeigt, dass keine ganze Function mit ganzzahligen Coefficienten e oder π zur Wurzel hat.

Neuerdings haben Hilbert und Hurwitz Vereinfachungen des Beweises angebracht, in Folge deren er sich folgendermassen gestaltet.

Die Function e^x ist durch die Reihe defnirt:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdot \cdot \cdot$$

Dieselbe geht, wenn man die symbolische Bezeichnung einführt:

$$r! = h^r$$

und mit dieser Grösse und einer beliebigen ganzen Zahl c_r multiplicirt, in die Formel über:

$$(1) \quad c_r h^r e^x = c_r (x+h)^r + c_r x^r u_r \dots$$

wo u_r die Reihe:

$$u_r = \frac{x}{r+1} + \frac{x^2}{r+1 \cdot r+2} + \dots$$

bedeutet. Ist:

$$\xi = \text{mod. } x$$

so hat man:

$$\text{mod. } u_r < e^\xi$$

und wenn man:

$$u_r = q_r e^\xi$$

setzt:

$$\text{mod. } q_r < 1.$$

Aus der Formel (1) folgen nun die folgenden:

$$c_r h^r e^x = c_r (x+h)^r + c_r x^r q_r e^\xi,$$

$$e^x \sum_{r=0}^{r=s} c_r h^r = \sum_{r=0}^{r=s} c_r (x+h)^r + e^\xi \sum_{r=0}^{r=s} c_r q_r x^r$$

und, wenn man:

$$\sum_{r=0}^{r=s} c_r x^r = \varphi(x); \quad \sum_{r=0}^{r=s} c_r q_r x^r = \psi(x)$$

setzt:

$$(2) \quad e^x \varphi(h) = \varphi(x+h) + e^x \psi(x).$$

Giebt es nun eine Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten:

$$\sum_{x=0}^{x=n} C_x e^x = 0,$$

so wird aus Formel (2):

$$(3) \quad 0 = \sum_{x=0}^{x=n} C_x \varphi(x+h) + \sum_{x=0}^{x=n} C_x \psi(x) e^x.$$

Wählt man für φ die Function:

$$\varphi(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} (1-x, 2-x \dots n-x)^p$$

und für p eine Primzahl grösser als die Zahlen n und C_0 , so werden in F. (3) die Grössen:

$$\varphi(h+x)$$

ganze Zahlen.

$$\varphi(h+1), \varphi(h+2) \dots \varphi(h+n)$$

haben den Factor p ,

$$C_0 \varphi(h)$$

hat ihn nicht.

Lässt man p wachsen, so werden φ und ψ beliebig klein, Formel (3) ist unmöglich und die Zahl e transcendent.

Wäre $i\pi$ die Wurzel einer Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten

$$(4) \quad c(x-w_1)(x-w_2) \dots (x-w_\varrho) = 0,$$

so hätte man die Formel:

$$(5) \quad (1+e^{w_1})(1+e^{w_2}) \dots (1+e^{w_\varrho}).$$

Befinden sich unter den Summen

$$w_x; w_i + w_x; w_i + w_x + w_2 \dots$$

$C-1$ verschwindende Grössen und bezeichnet man die übrigen durch:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n$$

und ihre Moduln durch:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n,$$

so wird Formel (5):

$$(6) \quad 0 = C + \sum_{x=1}^{x=n} e^{\alpha_x}.$$

Sowohl die symmetrischen Functionen der $c\omega_x$ als auch die der $c\alpha_x$ sind ganze Zahlen.

Nach Formel (2) wird dann:

$$(7) \quad 0 = C\varphi(h) + \sum_{x=1}^{x=n} \varphi(\alpha_x + h) + \sum_{x=1}^{x=n} e^{\alpha_x} \psi(\alpha_x).$$

Dieses Mal sei:

$$\varphi(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} c^{np+p-1} (x - \alpha_1 \cdot x - \alpha_2 \cdot \dots \cdot x - \alpha_n)^p$$

und p eine Primzahl grösser als die Zahlen:

$$C; n; c; c^n \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n.$$

Die Grössen $\varphi(h)$ und $\sum_{x=1}^{x=n} \varphi(\alpha_x + h)$ sind ganze Zahlen:

$$\sum_{x=1}^{x=n} \varphi(\alpha_x + h)$$

hat den Factor p ; $C\varphi(h)$ aber nicht.

Wächst p , so werden die Moduln von φ und ψ beliebig klein.

Die Formel (7) ist unmöglich und daher π eine transcendente Zahl.

Erlangen im Mai 1893.
