SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Mathematische Annalen
Ort: Leipzig
Jahr: 1900
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN235181684_0053
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0053

LOG Id: LOG_0007
LOG Titel: Sophus Lie
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Sophus Lie.

Von

M. Noether in Erlangen.

Die mathematische Wissenschaft betrauert den Verlust eines ihrer führenden Geister: nachdem Lie ein Menschenalter hindurch rastlos gearbeitet, immer höhere und weitere Gebiete umfassend, immer richtunggebend, ist er mitten in energisch kräftigem Schaffen abberufen worden. Unsere Annalen sind an dem Verluste noch unmittelbarer betheiligt: einem Theile der Redaction war Lie persönlich und wissenschaftlich auf's Engste verbunden; die erste Hälfte seiner Schöpfungen ist in ihren Bänden niedergelegt oder zusammengefasst, und unsere Zeitschrift darf sich rühmen, Lie zuerst in seiner Bedeutung erkannt und seine Ideen verbreitet zu haben. Auch die Früchte seiner Einwirkung kommen schon in einer Reihe ihrer Publicationen in hervorragendem Masse zur Erscheinung. Wir entsprechen daher durch einen Nachruf auf Lie an dieser Stelle nicht nur einer wissenschaftlichen Pflicht gegen den grossen Forscher, sondern auch einem persönlichen Anliegen, und glauben diesen beiden Seiten am Besten dadurch gerecht werden zu können, dass wir am Faden seines Lebenslaufes vorzugsweise der Entwicklung der Ideen Lie's in den *ersten* Jahren seines Schaffens nachgehen, jener Zeit, aus welcher sein ganzes Werk zu erklären ist und welche uns zudem dadurch näher liegt, dass er sie theilweise in persönlichem Umgang und in Zusammenarbeit mit F. Klein verbracht hat.*) Ueber die späteren Jahre geben wir nur eine Uebersicht,

*) Die Bearbeitung des mir vorliegenden Materiales übernehme ich an Stelle und mit Unterstützung von Herrn F. Klein, dem jetzt die Zeit zur Darstellung nicht zur Verfügung stand. Von demselben finden sich übrigens allgemeine Besprechungen der Lie'schen Methoden und Ziele in seinen autographirten Vorlesungen (Einleitung in die höhere Geometrie 1892/93 und 1893) und seinem Evanston Colloquium 1893, wie auch in seinem Gutachten über den Lobatschewsky-Preis 1897. Dazu kommen als Material besonders einige handschriftliche Aufzeichnungen, welche aus persönlichen Besprechungen zwischen S. Lie und F. Klein Ostern 1891 und Herbst 1892 niedergelegt sind und welche ursprünglich zu einer Einleitung in eine für die Annalen

welche das weite Gebiet weder nach der historisch-kritischen Seite, noch nach der Seite einer Würdigung der Bedeutung Lie's hin erschöpfen will. Wir können uns um so eher auf die Genesis der Begriffe Lie's beschränken, als es noch verfrüht wäre, die Tragweite seiner Anschauungen heute schon abzustecken, eine spätere vollständige Würdigung aber nicht ausbleiben kann.

Marius Sophus Lie wurde am 17. December 1842 in Nordfjordeid am Eidsfjord als sechstes und jüngstes Kind des dortigen Pastors Johann Herman Lie geboren. Nach sechsjährigem Besuche der Schule von Moss, einer Insel im Kristianiafjord, wohin sein Vater versetzt war, brachte er die Jahre 1857—1859 an der Nissen'schen Privat-Lateinschule von Christiania zu, gleichmässig gut in allen Fächern, so dass er bei seinem Uebertritt an die Universität von Christiania, 1859, ebenso sehr an das Studium der Philologie, als an das der Realfächer dachte. Jedoch beschäftigte sich Lie während seines 6½-jährigen Universitätsstudiums vorzugsweise mit diesen Fächern, mit Naturwissenschaft, mit Astronomie, und hörte mathematische Vorlesungen bei Broch 1860/61, bei Bjerknes, bei Sylow auch über Substitutionentheorie, ohne dass der langsam Reifende damals noch einen tieferen Eindruck in dieser Richtung empfing. Vielmehr verliess er die Hochschule unter einem Drucke, an welchem ebensosehr der Mangel eines klaren Zieles, als eine wenig günstige äussere Lage ihren Antheil hatten. Nach December 1865 bestandenem Realexamen verbrachte Lie einige Zeit mit Privat- und Schulunterricht und versuchte sich auch in gut aufgenommenen Vorträgen über Astronomie, ja dachte daran, sich praktisch dieser Wissenschaft zu widmen. Jetzt erst, im Laufe des Jahres 1868, begann beim Selbststudium sein Interesse für Mechanik [illegible] metrie; er lernte mehr zufällig die französischen Werke über Mechanik

beabsichtigte Sammlung von Lie'schen, anderwärts publicirten Aufsätzen aus den ersten Jahren dienen sollten. Natürlich wurden auch die häufigen persönlichen und historischen Aeusserungen Lie's in seinen Abhandlungen und Vorreden benutzt, wenn auch die aus späterer Zeit mit grosser Vorsicht aufgenommen werden mussten. Endlich habe ich auch in die Briefe Lie's an Klein, freilich erst für die Zeit seit 1878, und in die an Herrn Engel (seit 1884) Einsicht nehmen dürfen.

Bekannt geworden sind mir ausserdem noch einige biographische Artikel und eine Universitätsrede auf Lie von E. Holst, der Nachruf auf Lie von G. Darboux in den C. R. der Pariser Akademie von 27. Febr. 1899, ein solcher von L. Bianchi in den Rendic. d. R. Acc. dei Lincei vom 9. Sept. d. J. und ein kürzerer von E. Segre in den Atti d. R. Acc. d. Sc. von Turin; endlich in der Sitzung der mathematischen Abtheilung der 71. Versammlung D. Naturf. u. Aerzte vom 18. Sept. d. J. ein mündlicher Nachruf von F. Engel. Eine Liste von Lie's Arbeiten, die aber nur als vorläufige gelten kann, findet sich in G. Loria's Bollett. di Bibl. e St. d. Sc. Mat., Apr.-Juni-Heft; eine genaue Liste wird F. Engel einem im November der Sächs. Ges. d. Wiss. vorzutragenden Nachruf beifügen.

von Duhamel, Jullien, Lamé, die geometrischen von Chasles, sowie Monge's und besonders Poncelet's Anwendungen der Analysis auf Geometrie kennen. Und die letzteren, in Verbindung mit Plücker's analytisch-geometrischen Werken regten endlich die bisher in ihm schlummernden Fähigkeiten plötzlich an und gaben ihm sogleich die Richtungslinie für sein ganzes Denken. Zwar von einer Reihe von Flugblättern, in denen er seine ersten Resultate hinauswarf, insbesondere von einem 1869 der Universität Christiania eingereichten Satz über die *Steiner'sche Fläche* — über den Ort der Pole einer festen Ebene in Bezug auf die Kegelschnittschaar der Fläche, der wieder eine Steiner'sche Fläche wird — wissen wir nur aus einer im Band III seines Archivs (1878) enthaltenen, gemischt synthetisch und analytisch gehaltenen Note. Aber gleich mit seiner ersten, der Oeffentlichkeit in geordneter Form übergebenen originalen Arbeit offenbarte sich ihm das Bewusstsein einer ihm innewohnenden mathematischen Productionskraft. Sie trägt schon so sehr Keime seines späteren fruchtbaren Schaffens an sich, dass wir genauer darauf einzugehen haben.

Diese Abhandlung *„Repräsentation des Imaginären der Plangeometrie"* ist in zwei bezw. vom Februar und August 1869 datirten Noten in den „Forhandlinger" der Gesellsch. der Wiss. von Christiania von 1869 in deutscher Sprache veröffentlicht (der erste Theil der ersten Note wegen Schwierigkeiten der Zulassung bei der Ges. der Wiss. ursprünglich schon selbständig, dann auch in Crelle's J. Bd. 70 erschienen). Indem Lie einen imaginären Punkt $X = x + yi$, $Z = z + pi$ der XZ-Ebene im reellen xyz-Raum durch den Punkt (x, y, z) mit dem „Gewicht" p repräsentirt, erhält er für jede imaginäre Curve der XZ-Ebene als Bild eine „gestreifte" Fläche, deren Streifen, Linien grösster Neigung der Fläche, durch $p = \text{const.}$ gegeben sind. Hervorzuheben ist schon hierbei die Angabe aller Bewegungen des Raumes, für welche die gestreifte Fäche Bild einer imaginären Curve der XZ-Ebene bleibt; also bereits der für Lie charakteristische *Operationsbegriff*. Weiter aber ordnet Lie jeder der ∞^4 complexen Geraden g der XZ-Ebene eine reelle Raumgerade γ zu, als 0-Streifen $(p = 0)$ der entsprechenden gestreiften Ebene; und zwar werden die zwei Liniencoordinaten von g, in ihre reellen und imaginären Theile zerlegt, gerade die vier Plücker'schen Coordinaten der Raumgeraden γ. Ein zweiter Ausgangspunkt Lie's — die Deutung der zwei Paare Bestimmungsstücke von g als Coordinaten zweier reeller Punkte zweier gegebener reeller Ebenen und die Auffassung von γ als Verbindungslinie dieser beiden Punkte — ist zwar einfacher, liefert aber nicht mehr als der frühere. Lie erhält zu den ∞^3 reellen Punkten P des xyz-Raumes durch $p = 0$ zuerst ∞^3 Imaginär-Punkte der XZ-Ebene, zu diesen dann vermöge einer polaren Beziehung dieser Ebene ∞^3 Imaginär-Gerade g und aus ihnen

durch eine Abbildung einen Liniencomplex Γ von ∞^3 reellen Raumgeraden γ. Dabei wird das Entsprechen zwischen den Punkten P und den Geraden γ von Γ ein derart reciprokes, dass auch umgekehrt den Punkten P' von γ Gerade γ' durch P entsprechen, so dass ein zweiter Complex Γ' von Geraden γ' entsteht. Γ und Γ' sind Complexe 2^{ten} Grades, wie sie weiterhin bei Lie als „Reye'sche“ oder, nach der späteren Bezeichnung, als „tetraedrale“ Complexe erscheinen, nur mit metrisch specialisirtem Tetraeder. Lie verfolgt schon, wie hierbei den Punkten einer beliebigen Geraden des Raumes die Erzeugenden einer Art eines Hyperboloids, denen einer Ebene des Raumes die Sehnen einer Raumcurve 3^{ter} Ordnung entsprechen, er verfolgt die Abbildung von Regelflächen 3^{ter} Ordnung auf Ebenen, von Plücker'schen Complexflächen auf Flächen 2^{ter} Ordnung, überhaupt die gegenseitige Abbildung der beiden Complexe in den Punktraum. Und wenn schon diese Untersuchungen die Vertrautheit mit den Arbeiten von Chasles, theilweise auch von Hamilton, vor Allem aber mit Plücker's damals gerade publicirter Liniengeometrie zeigen, so verrathen sie doch auch eine merkwürdige Selbständigkeit des Autodidakten, vor Allem aber ist das freie Schalten mit der Raumanschauung, die in der Geometrie irgend welche Elemente als die erzeugenden ansieht — so schon von einer Geometrie der Ebene spricht, welche die durch einen Punkt gehenden Kreise als ihre „Geraden“ benutzt — der hervortretende Zug. Man erkennt den ächten Geist Plücker's.

Dass die hier gefundene Punkt-Geraden-Transformation eine besondere Art von „Berührungstransformation“ ist, sollte für Lie von Wichtigkeit werden.

Für Lie hatte die Arbeit noch den unmittelbaren Erfolg, dass Broch ihm ein Universitätsstipendium und die Möglichkeit zur Fortsetzung seiner Studien im Auslande vermitteln konnte. Er wandte sich für den Winter 1869/70 zunächst nach Berlin, und hier wurde es von einschneidender Bedeutung für seine Entwicklung, dass er sogleich mit F. Klein zusammentraf und in engsten Ideenaustausch trat, der sich bald zu einer Arbeitsgemeinschaft herausbildete. In Klein, der damals schon, in Verwaltung der Erbschaft Plücker's, den zweiten Band von dessen Liniengeometrie herausgegeben, wie auch eine Reihe eigener Forschungen über allgemeine Liniencomplexe 2^{ten} Grades veröffentlicht hatte, fand Lie nicht nur mannigfache Förderung durch den Hinweis auf ihm bisher fremd gebliebene Gebiete, sondern vor Allem das offene Verständniss für seine liniengeometrischen Interessen, in welchem sich seine eigenen bisher noch unfertigen Gedanken klären konnten. Auch in dem Interesse für Transformationen trafen Beide zusammen, wenn auch Klein, mitten in der modern algebraisch-geometrischen, Clebsch'schen Richtung stehend, mehr den projectiven und constructiven, zuordnenden Charakter betonte, Lie aber,

von dem engeren Sinne des Projectiven unbeschränkt, mehr den erzeugenden, den allgemeinen Charakter der Transformationen. Der gegenseitige Anschluss wurde für die Beiden um so enger, als sie für ihre schon festgelegte Richtung bei Weierstrass keine weitere Anregung, nur in Kummer's Seminar einige Aufmunterung erhalten konnten. Anfangs beschäftigten sie sich eingehend mit der Abbildung des linearen Complexes auf den Punktraum, die im Sommer 1869 von anderer Seite (dem Referenten) gegeben worden war. Indem Lie zugleich an die Complexstudien seiner ersten Arbeit anschloss und hier, von Klein angeregt, die auftretenden Curven und Flächen anschaulicher erfasste, ergab sich ihm als Frucht eine Note „*Ueber die Reciprocitätsverhältnisse des Reye'schen Complexes*“ (Gött. Nachr. vom 16. Febr. 1870, dat. Jan. 1870), welche aber nicht nur die früher theilweise gelegten Keime weiter entwickelte, sondern auch die ersten Ansätze zu fast allen später zur Entfaltung gekommenen Ideen aus der Verwandtschaftslehre schon deutlich erkennen lässt.

Es handelt sich um den oben genannten Complex, der, specialisirt schon bei Binet und Chasles auftretend, allgemein von Reye als Erzeugniss zweier collinearer räumlicher Systeme 1868 discutirt worden war, hier aber, wovon sein späterer Name, als Gesammtheit der Geraden auftritt, welche die Seitenflächen eines Tetraeders nach constantem Doppelverhältniss schneiden. Bei Lie stellt sich als fundamentale Thatsache die Ableitung seiner *Eigenschaften* aus den *Transformationen* dar, welche der Complex *in sich* erleiden kann: den ∞^3 vertauschbaren Collineationen des Raumes, welche sein Fundamentaltetraeder unverändert lassen — einer continuirlichen Schaar von Transformationen, die eine „endliche“, d. h. von einer endlichen Anzahl von Parametern abhängige, „Gruppe“ bilden. Das Charakteristische für Lie ist, dass ihm gar nicht mehr der Geradencomplex an sich das geometrische Object der Betrachtung bleibt; vielmehr wendet er seine Transformationen auf irgend ein weiteres Element: eine Raumcurve, eine Fläche, an und erzeugt hierdurch neue Gebilde (Gattungen) von dreifach unendlichen Schaaren von Elementen, die alle als covariante Gebilde zum Complex und Tetraeder bezüglich der Transformationsschaar angesehen werden. Hierin geht Lie über seine beiden ursprünglichen Quellen, Monge's analytische Erzeugungen von Gebilden und die Ortsconstructionen der projectiven Geometrie, weit hinaus, hauptsächlich dadurch, dass er mit Plücker die Willkürlichkeit des Raumelements, auch innerhalb des Geradencomplexes, betont. So theilt er die von Complexgeraden umhüllten Raumcurven in Gattungen, unter denen dann die Punkte des Raumes nur eine specielle bilden, und von denen wieder jede Gattung die andere durch Umhüllung erzeugt; indem drei sich berührende Complexcurven immer zugleich ihre Osculationsebene

gemeinsam haben, wird jede dieser Curven durch „Rollen“ von einfach unendlich vielen einer andern Gattung erzeugt. Weiter aber werden Transformationen erörtert, welche jede dieser Gattungen in jede andere überzuführen erlauben, und zwar jede durch *eine* Gattung erzeugte Complexcurve oder -fläche in eine durch irgend eine zweite Gattung erzeugte solche Curve oder Fläche; und es wird schon von den algebraischen Haupttangentencurven dieser Complexflächen gehandelt.

Die hier von Lie angewandten Transformationen sind alle, in noch deutlicherer Weise, als in der Imaginärarbeit, das was er später als „Berührungstransformationen“ bezeichnet hat, und zwar solche von jeder existirenden Art, endliche und sogar „unendliche“ Gruppen, ohne dass freilich diese Gruppenbegriffe selbst, oder auch nur die späteren Lie'schen Begriffe von „vereinigten Flächenelementen“ hier schon *explicit* hervorträten. Wohl zu bemerken ist aber, dass die dem Complexe angehörigen Flächen, im Wesentlichen die tetraedralsymmetrischen Flächen von De la Gournerie (1867), in ihrer mehrfachen Erzeugung als Verallgemeinerung vieler bekannten Flächen, so der Centraflächen, erscheinen und als Transformation der *Minimalflächen* aufgefasst werden können, in die sie durch logarithmische Abbildung übergehen — eine Bemerkung, die Lie sehr bald darauf (Sommer 1870) machte, als er sich mit seiner Geraden-Kugel-Transformation zu beschäftigen anfing, die aber erst 1879 („Weitere Untersuchungen über Minimalflächen“, Archiv IV) ausgeführt wurde [nach einer der Gesellschaft von Christiania den 5. Juli 1870 eingereichten, aber ungedruckt gebliebenen Note; vgl. die Andeutungen im „Résumé“, Forh. 1872]. Auch die Auffassung des Liniencomplexes als eine partielle Differentialgleichung erster und eine solche zweiter Ordnung definirend, der Complexflächen als deren Integralflächen, ist hiernach dem Sommer 1870 zuzuweisen [entgegen einer Bemerkung Lie's in Math. Ann. XXIV, p. 540].

Dieser Sommer 1870, den Lie bis zum Ausbruch des Krieges in Gemeinschaft mit Klein in Paris verlebte, ist überhaupt als die Glanzzeit für seine ersten Conceptionen zu bezeichnen. Zunächst entstanden die gemeinsamen Noten „*Sur une certaine famille de courbes et de surfaces*“ (C. R. vom 6. und 13. Juni), welche die in der Note über den Reye'schen Complex noch übersehenen Raumcurven, bezw. Flächen betrachten, die durch eine continuirliche geschlossene Schaar von ∞^1, bezw. ∞^2, der linearen Tetraeder-Transformationen in sich übergehen, die „W-Curven und -Flächen“, eine Bezeichnung, die von dem Staudt'schen „Wurf“ abgeleitet ist und den „courbes anharmoniques“, nach dem späteren Ausdrucke Halphen's, entspricht. Die Curven sind die Integralcurven eines Systems gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen mit linearen Coefficienten, das eben nichts

weiter aussagt, als die in der Transformationsschaar enthaltene „infinitesimale" Transformation. Hier tritt dieser für Lie so wichtig gewordene Begriff zum ersten Male bei ihm auf, abgeleitet aus dem der continuirlich von einem Parameter abhängigen Schaar. Freilich war der Begriff selbst schon lange vorher von Sylvester in der Theorie der linearen Transformationen der Formen, zur Ableitung der die Invarianten definirenden partiellen Differentialgleichungen, eingeführt worden.

Was aber als Fortschritt zu betrachten ist, ist der Hinweis auf gewisse *weitere* Differentialgleichungen, welche durch die Kenntniss der Transformationsschaar und ihrer W-Curven von selbst mitintegrirt werden, derjenigen nämlich, deren Integrale durch die Schaar in ebensolche übergeführt werden; in den Noten freilich nur andeutungsweise, explicit erst in der in diesen Annalen, IV, vom März 1871, publicirten Ausführung über die *ebenen* W-Curven. Man braucht nur, wenn $\eta = \text{const.}$ die Trajectoriencurve der infinitesimalen Transformation ist, η als neue Variable einzuführen, um die Zurückführung auf Quadratur zu erkennen. Indem die Ausführung in Ann. IV so alle fünf Classen von linearen ∞^2-Gruppen der Ebene discutirt, ergeben sich zwar als W-Curven an sich nur bekannte Curven, wie die logarithmische Spirale, aber mit theilweise neuen Eigenschaften, und die bekannten werden allgemeinen Gesichtspunkten eingeordnet. Und dann wird auch ein Grund des Erfolgs der Integrationsmethode erkannt: die Einführung von η ist schon eine Art von Vorausnahme des viel späteren Begriffs der Differentialinvarianten. Uebrigens gehört eine noch directere Verwendung der Hülfs-Differentialgleichung, ohne deren vorgängige Integration, auch einer späteren Zeit an (s. unten, S. 26). Der Lie'sche Gedankengang war der, die ∞^3 Collineationen des Raums mittelst logarithmischer Abbildung durch die ∞^3 Translationen eines zweiten Raums zu ersetzen; und hieraus entstanden die in der genannten ungedruckten Note vom Juli 1870 zuerst auftretenden Translationsflächen.

Leider ist die für die Annalen beabsichtigte Ausführung auch der *räumlichen* Betrachtungen der C. R.-Noten nicht fertig gestellt worden. Aus den noch vorhandenen Bruchstücken von Entwürfen,*) wie aus der zweiten Note selbst, geht hervor, dass der Zusammenhang der Complexe von W-Curven und -Flächen mit den partiellen Differentialgleichungen, insbesondere für Sätze wie der, dass die W-Curven einer W-Fläche Haupttangentencurven auf derselben sind, in Lie's Geist schon völlig entwickelt war, sodass diese Arbeit einen wichtigen Durchgangspunkt zu den sogleich zu besprechenden Entwicklungen, welche in Annalen V zusammengefasst worden sind, bildet. Weiterhin wird in diesen Entwürfen die Ausdehnung

*) Im Besitze des Herrn Klein.

der projectiven und Reciprocitäts-Begriffe vom Endlichen auf Linien- und Flächen*element*, also auch auf das ganze differentielle Gebiet (die spätere Theorie der Berührungstransformationen) schon sehr deutlich; und es tritt der Begriff der infinitesimalen Transformation und der Transformationsgruppe, wenn auch in specieller Form, noch mehr in den Vordergrund, als in der eben angeführten Annalenarbeit, welche die Curvencomplexe selbst, also die erzeugten Gebilde, zum Ausgangspunkt nimmt.

Die hier hervorgehobenen Ideen der gemeinsamen W-Noten, mit Ausnahme der letzterwähnten Begriffe, gehören Lie allein an, während die invariantentheoretischen Beziehungen und das auf Specialisirungen des Grundtetraeders Bezügliche auf Klein zurückgeht. Gleichvertraut war beiden das Operiren mit *linearen* Substitutionen; und die Einführung des Begriffes der Abgeschlossenheit der Transformationsschaar, wie des der Vertauschbarkeit, ist auf den Einfluss der Galois'schen Ideen zurückzuführen, die damals im Gebiete der discontinuirlichen Substitutionsgruppen durch das eben erschienene Werk von C. Jordan, und den ein Jahr vorher in diesen Annalen (Bd. I) auf Veranlassung von Clebsch veröffentlichten Commentar verbreitet wurden. Waren ja doch diese Ideen, die auch zu den in der Zahlentheorie gebrauchten Begriffen von linearen Gruppen offene Analogien darboten, schon von Jordan selbst ebenfalls 1869 auf das Gebiet aller Gruppen von Bewegungen des Raums, der continuirlichen wie der discontinuirlichen, angewandt worden (Annali di Mat., ser. 2, II), doch ohne dass hierbei die analytische Seite in Betracht gezogen worden wäre.

Noch nach anderer Richtung sollten die damaligen Untersuchungen der französischen Mathematiker für die beiden Forscher von nachhaltiger Wichtigkeit werden, indem sie zugleich bei Lie eine verwandte Saite berührten. In der von Liouville, Lamé, J. A. Serret, Bonnet überkommenen Tradition bearbeitete man in Paris das Gebiet, welches nach Monge und Poncelet als Application de l'Analyse à la Géometrie bezeichnet werden kann; und zwar war das Interesse vorzugsweise den *Massverhältnissen* der Flächen zugewandt: den Krümmungscurven, den Orthogonalsystemen, etc. Und eine ganz analoge Richtung verfolgte man zugleich von projectiver Seite her, im Kreise der Schüler Chasles's: hier versuchte man, durch Heranziehen des imaginären Kugelkreises auch complicirte Massverhältnisse einem besseren Verständniss und einer allgemeinen Behandlungsweise zugänglich zu machen. Beide Richtungen trafen in den Untersuchungen der „Anallagmatiker" — Laguerre, Moutard, Darboux — zusammen; es war ein Vorgang, der als ein Spiegelbild von Lie's eigener an Monge und die projective Geometrie anschliessender Entwicklung auf diesen sonst schwer zugänglichen Forscher tiefen Eindruck machen musste. Zudem kamen

die beiden Freunde gerade mit Darboux sogleich in näheren persönlichen Verkehr.

Zwischen den Entwicklungen der anallagmatischen Richtung, die sich auf eine Art von *Kugel*geometrie bezog, und denen der *Linien*geometrie — z. B. zwischen den von Darboux mündlich mitgetheilten Formeln für das Orthogonalsystem der confocalen Cykliden und den Klein'schen Formeln für die ∞^1 zur nämlichen Kummer'schen Brennfläche gehörigen Complexe zweiten Grads; oder zwischen den Translationseigenschaften der Minimalflächen und Eigenschaften der beim Reye'schen Complex auftretenden Lie'schen Flächen — herrschte eine unverkennbare Analogie. Sollte nicht ein Uebertragungsprincip existiren, welches zwischen beiderlei Betrachtungsweisen vermittelte?

Lie erinnerte sich an seine Beschäftigung mit der Abbildung des linearen Complexes auf den Punktraum, an den hierbei in diesem Raume auftretenden ausgezeichneten Kegelschnitt; ein Schritt weiter: die Verlegung des Kegelschnitts in den Kugelkreis, und die merkwürdige Berührungstransformation, welche die Geraden eines Raumes R_1 in die Kugeln eines Raumes R_2 überführt, und damit, als Umhüllungsgebilde, die Haupttangentencurven der Flächen von R_1 in die Krümmungscurven der Flächen von R_2, stand da!

Es war Anfang Juli, dass Lie diesen entscheidenden Schritt that, von dem er aber erst am 31. October der Pariser Akademie Mittheilung machen konnte (C. R.: „Sur une transformation géométrique"; unter dem 24. October der Ges. von Christiania in der am 9. December erschienenen Note: „Om en Classe geometriske Transformationer"). Zur volleren Würdigung desselben muss man hier noch den Inhalt der ungedruckten Note vom Juli 1870 heranziehen; daselbst soll schon [cf. „Kurzes Résumé etc." in Forh. von 1872, S. 24] der Reye'sche Complex ausdrücklich als partielle Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung aufgefasst sein — nämlich als alle Flächen definirend, deren beide Haupttangenten in jedem Punkte harmonisch liegen zu den beiden Erzeugenden des Complexes in ihrer Ebene; wobei denn die zum Complex gehörige partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welche den jedem Punkt zugeordneten Complexkegel darstellt, ein singuläres Integral jener Gleichung zweiter Ordnung wird; und ebenso sollen die dem Complex angehörigen reciproken Beziehungen als Berührungstransformationen ihrer Integralflächen betrachtet sein.

In der That hatte Lie sich im Sommer 1870 intensiv mit Monge's Theorie der partiellen Differentialgleichungen befasst: mit dessen Eigenart, einerseits eine Reihe sehr allgemeiner geometrischer Begriffe, wie den der Erzeugung von Flächen durch Umhüllung, weiter auszubilden und die Gesetze dieser Erzeugung durch partielle Differentialgleichungen auszu-

drücken; andrerseits die Integrationen von solchen Gleichungen auf jene geometrischen Begriffe zurückzuführen. An der Hand dieser Anschauungen kam nun Lie zuerst ein Begriff zur Klarheit, der seiner bisherigen Denkweise mehr unbewusst zu Grunde gelegen: der Gedanke des *Flächenelementes*, des Grösseninbegriffs $\left(x,\ y,\ z,\ p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ als des eigentlichen Elementes der ganzen Theorie. Mit diesem neuen Begriff suchte Lie zuerst in Monge's Ideen, späterhin auch in Cauchy's Integrationsverfahren einzudringen; vor Allem in die Thatsache, dass zur Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung $F(x,y,z,p,q)=0$ schon die Integration des bekannten kanonischen Systems von *gewöhnlichen* Differentialgleichungen 1^{ter} Ordnung zwischen x, y, z, p, q, auf welches jedes Integrationsverfahren zuerst führt, genügt. Die allgemeine Aufgabe stellt sich für Lie dahin, die ∞^4 Flächenelemente, die durch $F=0$ definirt sind (also zu jedem Punkte des Raums eine Kegelhaube von solchen), entsprechend der Lagrange'schen „vollständigen Lösung" auf ∞^2 Elementvereine von je ∞^2 Elementen zu vertheilen. Wie er etwas später erkannte, brauchen übrigens diese Vereine nicht gerade Flächen zu bilden, sondern deren consecutive Elemente haben nur die Gleichung $dz-p\,dx-q\,dy=0$ zu befriedigen, d. h. müssen in der Art „vereinigt" liegen, dass immer das successive Element durch den Punkt des vorhergehenden geht. Während nun jenes kanonische System für Monge nur ∞^3 Punktkurven als „Charakteristiken" definirt, die je die Richtung der Erzeugenden der Kegelhauben haben, definirt dasselbe System für Lie ∞^3 „charakteristische *Streifen*", nämlich jene Curven, je verbunden mit den ∞^1 Flächenelementen von $F=0$, die sich an die Linienelemente einer solchen Curve anschmiegen. Diese Auffassung führt Lie dann zur Einsicht: dass, wenn für zwei benachbarte charakteristische Streifen bei *einer* Stelle die entsprechend benachbarten Flächenelemente von $F=0$ vereinigt liegen, dies längs der Ausdehnung der beiden Streifen überhaupt geschieht. Und von dieser Grundlage aus übersieht er den ganzen Inhalt und Umfang, welche irgend ein Integrationsverfahren von $F=0$ haben kann: indem man von irgend einem nicht-charakteristischen Streifen — d. h. irgend einer Curve mit $F=0$ zugehörigen Flächenelementen, bei Cauchy von einer Anfangscurve in $y=0$ — ausgeht, und von jedem Element desselben den hier auslaufenden charakteristischen Streifen zieht, erhält man immer eine Integralmannigfaltigkeit, und zwar die allgemeinste, wenn man die Ausgangscurve beliebig ändert. Die Integration ist also nur zur Bildung dieser ∞^1 charakteristischen Streifen erforderlich, während die zu Grunde gelegte Ausgangscurve die willkürlichen Elemente mit sich bringt. Insbesondere könnte man auch, mit Jacobi, die von einem festgewählten *Punkte* ausgehenden charakteristischen Streifen zusammenfassen.

Diese Grundauffassung Lie's, welche die Integralausdrücke mit zwei Variabeln auf solche mit nur einer Variabeln zurückführt, die willkürliche Zusammenfassung der Streifen zu Flächen aber als blosses Corollar behandelt, ist, mit den Anwendungen auf die nun zu besprechenden Abbildungen und die weiteren Problemstellungen Lie's, bis jetzt von den Differentialgeometern vielleicht noch zu wenig benutzt worden. Uebrigens ist sie in der angeführten Schlussform auch bei Lie nur nach und nach entstanden, indem noch die Abhandlung in Annalen V (1871) die Integralflächen von $F = 0$ nur als Zusammenfassung von irgend ∞^1 Charakteristikencurven, die eine Curve umhüllen, aufnimmt, für den Begriff des „Streifens" aber noch keinen besonderen Ausdruck hat; ein solcher tritt vielmehr nur erst in einer der Christiania-Gesellschaft im Sept. 1871 überreichten ungedruckten Note und in den später zu besprechenden Noten vom Frühjahr 1872 explicite auf. Auch hat die Betrachtungsweise ihren Vorläufer in dem Lie seit 1871 bekannt gewordenen Werke P. du Bois-Reymond's von 1864,*) in welchem der Begriff des Streifens, unter der Bezeichnung „Integralstreifen", und dessen Bestimmung durch ein Anfangselement, geometrisch entwickelt und benutzt wird, wenn auch nicht so allgemein und umfassend wie bei Lie.

Zunächst verband Lie diese Gedankenrichtung nur mit den Begriffen der Plücker'schen Geradencomplexe. Indem er damit an die Abbildung des linearen im Raume R_1 gelegenen Complexes auf den Punktraum R_2 herangeht, erkennt er, dass sie durch zwei lineo-lineare Gleichungen geleistet wird; dass aber durch solche in den *beiden* Räumen Liniencomplexe entstehen, deren Geraden je den Punkten des andern Raumes zugeordnet sind, und die im Allgemeinen zwei Reye'sche Complexe werden. Ein Complex m^{ten} Grades nun bestimmt ihm ein Integrationsproblem, nämlich in jedem Punkte x, y, z einen Kegel m^{ten} Grades, d. h. ∞^1 Richtungen $dx : dy : dz$ und damit eine Gleichung $f(x, y, z, dx, dy, dz) = 0$, die Gleichung für die Charakteristikenrichtungen einer partiellen Differentialgleichung 1^{ter} Ordnung, welche die Gleichung jenes Kegels in Ebenencoordinaten ist; und deren Integration verlangt, alle Flächen anzugeben, die in jedem ihrer Punkte den bezüglichen Kegel berühren. Die Correspondenz zwischen R_1 und R_2, auf die Lie hier geführt wurde, hat zugleich das Besondere, dass *Complex*-Curvenrichtungen der beiden Räume eindeutig einander zugeordnet werden, und zugleich reciprok, insofern, wenn man zwei sich entsprechende Complexcurven betrachtet, immer irgend eine von beiden als von den Punkten ihres Raumes erzeugt, die andere als von den entsprechenden Complexgeraden umhüllt angesehen werden darf. Von zwei

*) Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variabeln. Erstes Heft. Leipzig 1864.

sich entsprechenden Flächenelementen wird das eine ganz *beliebig*, insofern als, wenn ein Punkt sich auf einer Fläche bewegt, die entsprechende Gerade wieder eine Fläche umhüllt: die Brennfläche der durch sie erzeugten Congruenz.

Lie zögert aber nicht, diese Betrachtungen in ihrer generellen Bedeutung aufzufassen und baut daraus seinen allgemeinsten Begriff einer *Berührungstransformation* auf. Zu den altbekannten Transformationsarten, bei denen *Berührung* eine invariante Beziehung ist: der gewöhnlichen durch *drei* Gleichungen zwischen den Coordinaten vermittelten Punkttransformation, und der mittelst *einer* aequatio directrix von Plücker dargestellten reciproken Punkt-Flächen-Transformation, speciell der dualistischen Verwandtschaft, trat hier eine durch *zwei* lineare Gleichungen vermittelte reciproke Transformation, eine ganz neue Art, mit Eigenschaften der Berührung, der Zurückführbarkeit auf gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, die alle, wie aus seinem Begriff des Flächenelementes $(xyzpq)$ hervorgeht, erhalten bleiben, wenn man die zwei linearen Gleichungen durch zwei ganz beliebige Gleichungen zwischen zwei Werthsystemen $x_1 y_1 z_1$; $x_2 y_2 z_2$ ersetzt: eine Punkt-Curven-Transformation. Zugleich erkennt Lie, indem er alle Berührungstransformationen zwischen zwei Räumen als durch fünf Gleichungen zwischen $x_1 y_1 z_1 p_1 q_1$ und $x_2 y_2 z_2 p_2 q_2$ gegeben auffasst, aus denen die p, q zu eliminiren sind: dass es keine anderen solche Transformationen geben kann, als die drei eben vom Punktstandpunkt aus charakterisirten Arten.

So grundlegend für Lie's spätere Thätigkeit diese Generalisirungen wurden, so interessant gestaltete sich sogleich die Anwendung auf das speciell-vorliegende Problem. Die Specialisirung ging dahin, dass, statt der allgemeinen tetraedralen Complexe, in R_1 der allgemeine lineare Complex L, in R_2 der „Minimalcomplex" M, d. h. der Complex der den Kugelkreis schneidenden Geraden, der „Minimalgeraden" oder Geraden von Länge Null, gesetzt wurde. Nun gehen die Punkte einer beliebigen Geraden von R_1 in die eine Schaar imaginärer Geraden einer Kugel von R_2 über — die freilich, umgekehrt, durch ihre zweite Schaar noch auf eine andere Gerade von R_1 abgebildet wird —, die sich an die Gerade von R_1 anschmiegenden Flächenelemente in die Flächenelemente der Kugel von R_2. Die Geraden irgend eines linearen Complexes von R_1 transformiren sich in die Kugel von R_2, welche eine feste Kugel unter constantem Winkel treffen, senkrecht, wenn jener Complex mit L „involutorisch" lag; sich schneidende Gerade in sich berührende Kugeln. Die Gesammtheit der projectiven Transformationen des Raumes R_1 geht in die der Kugeltransformationen in R_2 über, von denen solche aller Arten auftreten: die gewöhnlichen Bewegungen, vor Allem die Transformationen durch reciproke

Radien und Paralleltransformationen — also eine auf ihre Fundamente zurückgeführte vollständige Analogie zwischen der *Geraden-* und *Kugelgeometrie*, eine merkwürdige intimste Beziehung zwischen der allgemeinen *projectiven* und zwischen der *metrischen*, auf reciproke Radien gegründeten Geometrie. Es war zugleich die erste, wirkliche Geometrie mit der *Kugel* als Element; geometrisch durch die Unterscheidung der beiden Geradenschaaren der Kugel (Vorzeichen des Radius) äquivalent der späteren Laguerre'schen Auffassung der Semisphären, eine Unterscheidung, welche die darauf folgende Darboux'sche und die spätere Reye'sche Kugelgeometrie nicht treffen.

Dazu gesellte nun Lie noch infinitesimal-geometrische Betrachtungen, die ihm die zu einem Complex von ∞^3 Curven gehörige partielle Differentialgleichung 1^{ter} Ordnung neu interpretirten: dass nämlich irgend eine von solchen Curven umhüllte „Complexcurve" in jedem ihrer Punkte nicht nur in der Richtung einer Erzeugenden des zugehörigen Kegels läuft, sondern auch dessen Tangentenebene zur Schmiegungsebene hat; dass also die Integralflächen in jedem ihrer Punkte von den berührenden Complexcurven osculirt werden und insbesondere, wenn der Complex ein Geradencomplex ist, dessen Geraden zu *Haupttangenten*, ihre charakteristischen Curven zu Haupttangentencurven haben.

Und gleich das erste Ergebniss dieser Anschauungen eröffnete die weitesten Perspectiven und war geeignet, einen kräftigen Anstoss zur Verfolgung dieser Theorien zu geben: eine Abbildung der *Haupttangentencurven* der Flächen von R_1 auf die *Krümmungscurven* der Flächen von R_2. In der That sind, nach einer in Forh. 1882 ausgesprochenen Formulirung, diese beiden Curvenarten als Ort von ∞^1 Flächenelementen anzusehen, unter denen je zwei consecutive einer Geraden, bezw. einer Kugel angehören. So ergaben sich, da die französischen Mathematiker die Krümmungscurven der Cykliden bestimmt hatten (C. R. t. 59), auf der Kummer'schen Fläche 4^{ter} Ordnung und 4^{ter} Classe die Haupttangentencurven als algebraische Curven 16^{ter} Ordnung und Classe: Curven, welche, wie Klein sodann erkannte, mit einem von ihm in Math. Ann. II behandelten, aus der Eigenschaft der Fläche als Singularitätenfläche von ∞^1 Complexen zweiten Grades fliessenden, Curvensystem identisch waren.

Unter den mannigfaltigen Richtungen, nach denen Lie diese Dinge verfolgte — so durch Untersuchung derjenigen partiellen Differentialgleichungen 1^{ter} Ordnung, deren charakteristische Curven Krümmungscurven sind; ferner, mittelst Betrachtung der Krümmungsmittelpunktsflächen, derjenigen Gleichungen, deren charakteristische Curven geodätische Curven werden; oder auch durch Betrachtung von Liniencomplexen mit infinitesimalen Transformationen in sich, als Erweiterung der früheren W-Theorie — müssen wir noch eine hervorheben: die Aufstellung einer jeweils zugehörigen partiellen

Differentialgleichung 2^{ter} *Ordnung*. Sie tritt auf, wenn man die Flächen sucht, welche an jeder Stelle drei consecutive Punkte mit einer Complexcurve der Gleichung 1^{ter} Ordnung gemein haben, oder deren Haupttangentencurven harmonisch liegen zu zwei Complexrichtungen; wenn man also die Flächen sucht, welche irgend ∞^1 der Charakteristiken der Gleichung 1^{ter} Ordnung enthalten. Hierbei erscheinen die bekannten Gleichungen von Monge-Ampère und deren Nachfolgern, mit der Reduction durch eine Berührungstransformation auf eine in den zweiten Differentialquotienten lineare Form, in neuem Lichte; und Lie verfolgt den besonderen Zweck, *alle* derartigen Gleichungen anzugeben, welche ein oder zwei erste allgemeine Integrale haben. Reichste Ausführungen finden sich in Lie's Noten in den Forh. von 1871: „Over en Classe geometriske Transformationer", von denen die beiden ersten Abschnitte, in norwegischer Sprache, Lie 1871 als Doctordissertation und Habilitationsschrift in Christiania gedient haben, während die übrigen Abschnitte, wie fast alle Arbeiten Lie's, in deutscher Sprache geschrieben sind; und in der in diesen Annalen, Bd. V, im Herbst 1871 erschienenen grossen Abhandlung: „Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugel-Complexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen". Zusammenfassend sind die in diesen Arbeiten zur Geltung gekommenen, beherrschenden Gedanken Lie's: die Zugrundelegung des *Flächenelementes*, der Begriff der *Berührungstransformation*, die Aufstellung *aller* solcher, ohne und mit Wechsel des Raumelements, die Durchdringung der Monge'schen Ideenbildungen mit diesen geometrischen Begriffen, ihre ausgiebige Verwendung für *metrische* Differentialverhältnisse der Flächentheorie und für die Auffassung der *partiellen* Differentialgleichungen.

Lie hatte Anfangs August bei Beginn des Krieges Paris verlassen, um zu Fuss nach Italien zu wandern, wurde aber schon in Fontainebleau irrthümlicherweise als Spion verhaftet und einige Wochen festgehalten. Seine Weiterreise führte ihn dann über Italien und die Schweiz, und auf dem Rückweg nach Christiania traf er nochmals kurz mit Klein zusammen, um eine gemeinsame, in den Berichten der Berliner Akademie vom 15. December 1870 erschienene Note über die oben erwähnten Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche zusammenzustellen. Dass die *gestaltlichen* Betrachtungen derselben, wie auch die Bestimmung der Plücker'schen Zahlen der Curven, Lie *nicht* angehören, ist charakteristisch für die Art seiner geometrischen Denkweise. Sicherlich wird man ihn, der bisher in seinem ganzen Gedankengange und in seinen Darstellungen den freiesten Gebrauch von Raumanschauungen gemacht, der aus solchen Anschauungen heraus die analytischen Forschungen aufgefasst und mit neuen Ideen über Trans-

formationen und differentielles Verhalten der Mannigfaltigkeiten durchsetzt hatte, dessen Bedeutung sogar zum grossen Theile gerade darauf beruht, dass er die ganze Beweglichkeit der projectiv-algebraischen Betrachtungsweisen, welche auch das complexe Gebiet im vollen Umfang in unserem Raum zulassen, ohne Weiteres auf das Differentielle und Transcendente anwendet, in erster Linie nicht als Analytiker, sondern als Geometer zu bezeichnen haben. Aber seine Anschauung bezieht sich eben auch nur auf dieses Verhalten von Gebilden im Unendlich-Kleinen oder begrenzten Gebiete. Das concrete Bild einer Gesammt-Mannigfaltigkeit in ihrer Gestalt, d. h. in ihren endlichen Formenbeziehungen, deren Wechsel bei variabeln Parametern, die Realitätsfragen überhaupt, haben Lie nie interessirt. In jenem Gebiet aber, das in den geometrischen Elementen und Operationen nur eine Versinnlichung, eine Zusammenfassung von ganz abstracten Begriffsbildungen, oft von den complicirtesten, sieht, war Lie Meister. Bezeichnend ist, dass Lie sich von vornherein nie auf das Algebraische beschränkte, sondern nur einen allgemeinen Functions- oder Abhängigkeitsbegriff benutzte, der geometrisch eben mit reinen Mannigfaltigkeitsbegriffen zusammenfiel und dem erst spät einige Merkmale der analytischen Function zugefügt wurden. Aber *einen* Vortheil begrifflich-geometrischer Auffassung analytischer Beziehungen hat Lie wie kein Anderer verwerthet: was in den Methoden der Formelsprache, die je besondere Elemente auszeichnen, oft die verschiedenartigste Darstellung annimmt, fällt, als begrifflich Gleiches, ihm unter einheitlichen Gesichtspunkt — wie sich ihm etwa die vom Standpunkt der Punktcoordinaten so verschiedenartigen Gebilde: Punkt, Curve, Fläche unter dem Grundbegriffe der Flächenelement-Erzeugung zusammenordnen. Seine Raumauffassungen, die er seine „synthetische" Methode zu nennen pflegte, werden in ihm wahrhaft schöpferisch anregend zu neuen Grundbegriffen.

Indess mag hierbei darauf hingewiesen werden, dass Lie, wie es scheint, seine geometrischen Begriffe doch nicht so weit differentiell ausgebildet hat, dass sie auch das Verhalten aller Berührungstransformationen an *speciellen* Stellen, wo sie unbestimmt werden, umfassen, wobei der im allgemeinen geltende Begriff der Invarianz von Berührung seine unmittelbare Bedeutung ändert; und doch ist diese Ausbildung im Anschluss an Plücker möglich und liegt auch im Wesentlichen geleistet vor. Auch das hängt mit dem Umstande zusammen, dass Lie bei seinen Transformationen erst nur einen unbestimmten Functionsbegriff, späterhin einen beschränkten Gültigkeitsbereich, ohne analytische Fortsetzung, im Auge hat.

Der auf allgemeinen Mannigfaltigkeitsbegriffen beruhenden Denkweise, wie sie unter den Geometern seit Ende der sechziger Jahre mehr und mehr Gemeingut geworden ist, ist nun die Richtung zuzuschreiben, welche

die Fortbildung von Lie's Ideen über Berührungstransformationen in den beiden folgenden Jahren nimmt: 1871, in Ausgestaltung der Krümmungs- und Orthogonaltheorien der Kugelgeometrie, auf eine *Krümmungstheorie höherer Räume;* von hier aus, 1872, auf ein geometrisches Eindringen in die *Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1ter Ordnung von mehr als drei Variabeln.*

Die erstere Ausbildung ist in einigen Noten Lie's (in den Gött. Nachr. vom Mai und November 1871, und in der ungedruckt gebliebenen, Sept. 1871 der Akad. von Christiania überreichten), welche analogen Noten von Klein folgen, niedergelegt. Wenn Klein (Gött. Nachr. März 1871) das Dupin'sche Theorem auf Involutionsbeziehungen an Liniencomplexen principiell überträgt, indem er den Plücker'schen Geradenraum als metrischen Punktraum von vier Dimensionen auffasst, so verallgemeinert nun Lie umgekehrt die Krümmungsbeziehungen selbst, deren Element die Kugel ist, auf den Punktraum von n Dimensionen (R_n), und stellt durch die ∞^{n+1} Kugeln desselben und ihre „Involutionsbeziehungen" eine Beziehung zur metrischen Geometrie des R_{n+1} her (gleichsam durch Schnitt der Minimalkegel des R_{n+1} mit einem ebenen R_n), wobei die conformen Transformationen des R_{n+1} in solche Berührungstransformationen des R_n übergehen, welche Krümmungscurven in ebensolche überführen, und zwar in die allgemeinsten dieser Eigenschaft. Die Darboux'sche Methode zur Uebertragung von Orthogonalsystemen (C. R. Aug. 1869) ist hiervon verschieden. Wie jede dieser ersten Arbeiten Lie's einen Ideenfortschritt aufweist, so auch die zwei Göttinger Noten, indem sie nicht nur die Ueberleitung zu der oben genannten Theorie von 1872 bilden, sondern auch, wenn auch noch in schüchterner Weise, zum ersten Male die in den W-Noten concipirten Ideen mit bewusster Betonung in allgemeine *gruppentheoretische* Operationen umsetzen, so wenn Lie aus einer endlichen Zahl infinitesimaler Operationen die endliche Gruppe der früher genannten „linearen Kugeltransformationen" des R_3, mit 15 Parametern, erzeugt.

Eine dritte für die Gött. Nachr. bestimmte Note über den R_n, welche, in Erweiterung der Arbeit in Annalen V, die Integrationsfragen noch schärfer betonen sollte,*) unterblieb, da sich bei Lie um diese Zeit die Ideen zu rasch fortbildeten, als dass er Musse zu ihrer ausführlichen Bearbeitung hätte finden können. Dass alle diese Probleme der metrischen Geometrie nur Specialfälle der allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen vorstellen, zu deren Behandlung auch bei generellster Fragestellung seine geometrischen Mittel sehr wohl ausreichen würden: das war die Ueberzeugung, die sich ihm immer mehr aufdrängte. Wenn er bislang mit seinen neuen Vorstellungen nur die Monge'schen Probleme

*) Ein Entwurf von Mai 1872 befindet sich in den Händen des H. Klein.

erfasst hatte, so musste jetzt sein Ziel werden, mit Hülfe der zuletzt gewonnenen geometrischen Begriffserweiterungen der allgemeinen Orthogonalitäts- oder Involutionsbeziehungen, in die Entwicklungen der *Analytiker*, wie Cauchy und Jacobi, über partielle Differentialgleichungen mit $n-1$ unabhängigen Variabeln einzudringen. Und nicht nur dies gelang ihm, sondern er ging sehr bald darüber hinaus zu *neuen allgemeinen Integrationstheorien* vor.

Ein „Kurzes Résumé mehrerer neuen Theorien" v. 30. April 1872 (Forh. v. 3. Mai), aus nur vier Seiten bestehend, und eine noch kürzere Note „Zur Theorie der Differentialprobleme" (Forh. v. 14. Nov. 1872) enthalten schon programmatisch die Lie'schen Ideen *zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1ter Ordnung:* die Berührungstransformationen haben den Zweck, diese Gleichungen auf ihre einfachsten Formen zurückzuführen; aber *eine* solche Gleichung hat noch keine Invariante, indem sie auf jede andere, wie auf $z=0$, zurückgeführt werden kann; wohl aber zwei Gleichungen $F=0$, $F_1=0$. Für sie ist das Poisson-Jacobi'sche Klammersymbol (FF_1) „charakteristisch", d. h. invariant, da $(FF_1)=0$ — eben die oben (S. 16) besprochene Relation der Orthogonalität oder der „Involution" — die Bedingung ausdrückt, dass die beiden Gleichungen $F=0$, $F_1=0$ „in Involution" sind, d. h. dass sie ein gemeinsames vollständiges Integral mit $n-2$ willkürlichen Constanten besitzen. Und indem Lie den Charakteristikenbegriff von Lagrange und Monge, und insbesondere seinen der „charakteristischen Streifen", auf höhere Räume erweitert, fasst er für $n-1$ unabhängige Variable die ganze Cauchy'sche Methode, die zur Integration von $F=0$ die Angabe aller F_1 verlangt, für welche $(FF_1)=0$ ist, in den Satz zusammen: Berühren sich zwei Integralmannigfaltigkeiten M_{n-1}, von $n-1$ Dimensionen, in einem Punkt, so haben sie einfach unendlich viele Flächenelemente, die einen charakteristischen Streifen bilden, gemeinsam; und — indem man die von den Punkten eines charakteristischen Streifens von F ausgehenden charakteristischen Streifen von F_1 zusammenfasst — sogar zweifach unendlich viele, wenn sie zwei in Involution liegenden partiellen Differentialgleichungen $F=0$, $F_1=0$ angehören.

Schon in einer Note vom 8. Mai (Forh. v. 10. Mai), wie in einer solchen vom 4. Juni (Gött. Nachr. v. 19. Juni), gelangt Lie von hier aus, ohne Hülfe des Poisson-Jacobi'schen Theorems, zu einem neuen Integrationsverfahren. Anknüpfend an diejenigen Integral-M_{n-1} des involutorischen Systems $F=0$, $F_1=0$, welche in der Jacobi'schen Weise aus den durch einen Punkt gehenden Charakteristiken sich zusammensetzen, zeigt Lie begrifflich, dass die aus Verbindung mit $x_{n-1}=\alpha$ und Elimination von $p_{n-1}=\frac{\partial z}{\partial x_{n-1}}$

folgenden Schnitte der M_{n-1} des ursprünglichen Systems $F=0$, $F_1=0$ ohne Weiteres in die Charakteristiken der durch die Elimination resultirenden *einen* partiellen Differentialgleichung $\varphi=0$ von $n-2$ unabhängigen Variabeln übergehen. Mit anderen Worten: sobald man von den $2n-3$ gewöhnlichen Differentialgleichungen für die charakteristischen Streifen der Gleichung $F=0$ — dem der linearen partiellen Differentialgleichung $(FF_1)=0$ entsprechenden Systeme — ein einziges Integral $F_1=c$ kennt, ist hierdurch schon die ganze Integration der Gleichung $F=0$ mit $n-1$ unabhängigen Variabeln auf die einer Gleichung $\varphi=0$ mit nur $n-2$ solchen reducirt.

Gegenüber Cauchy und Jacobi war hiermit die Ordnung und Anzahl der zur Integration vorzunehmenden Integraloperationen wesentlich erniedrigt. Aber in diesem *Resultate* traf Lie mit A. Mayer genau zusammen (Gött. Nachr. v. 12. Juni 1872); nur dass Letzterer auf scheinbar anderem Wege dazu gelangt war, indem er nämlich die Kenntniss *eines* Integrals jener Gleichung $\varphi=0$ zur Ableitung *eines* gemeinsamen Integrals von $F=0$, $F_1=0$ benutzte. In der That ist — freilich entgegengesetzt der Ansicht Lie's — das der Reduction zu Grunde liegende Princip, Lie's „Schnittmethode", bei beiden Autoren im Wesentlichen dasselbe; schon du Bois-Reymond hatte es (im § 1 des o. c. Werkes und in Cr. J. 70) zur Integration eines integrabeln totalen Differentialausdrucks $dz=\Sigma X_i dx_i$ mittelst *einer* Quadratur verwendet (wie man besser sieht, wenn man, statt $x_{n-1}=\alpha$ zu setzen, mittelst der Substitution $x_{n-2}=\alpha x_{n-1}$ an Stelle von x_{n-2} die Variable α einführt): constanten Werthen der alten Variabeln (hier $x_{n-1}=0$, $x_{n-2}=0$) wird eine unendliche Mannigfaltigkeit von Werthen der neuen Variabeln (hier $x_{n-1}=0$, α beliebig) zugeordnet, wobei denn in der transformirten Gleichung die erste Integrationsconstante von α unabhängig werden muss, also α nur noch die Rolle eines willkürlichen Parameters spielt.

Das analytische Verständniss der Lie'schen Methode, und ihrer Anwendung auf simultane Systeme, war damals der Vermittelung von A. Mayer zu verdanken; und der enge Verkehr mit diesem Forscher, der im Herbst 1872 begann, hat Lie von da an dazu geführt, die bisherige „synthetische", d. h. im Gewand der Mannigfaltigkeitsbegriffe einherschreitende Darstellungsweise seiner Arbeiten selbst immer mehr durch eine analytische zu ersetzen. Aber man sieht es diesen neuen Darstellungen doch an, dass sie eigentlich Uebertragungen aus einer anderen Denkweise sind, Verificationen von Sätzen, die in seiner Vorstellung fertig dastehen; sie bleiben, selbst wenn er seine eigensten, in sich abgeschlossenen Begriffe in Formeln fasst, hinter den klaren analytischen Entwicklungen von Mayer und Anderen zurück. Die begriffliche Auf-

fassung selbst ist für Lie auch späterhin immer das Primäre geblieben; sie ist es, welche Lie, wie in den Untersuchungen über Differentialgleichungen, so auch in seinen späteren Forschungen, in der Gruppentheorie und ihren vielgestaltigen Anwendungen, leitet; und die unmittelbare Zurückführung auf die Grundbegriffe allein ist es, welche ihn in seinen Schlüssen befriedigt. Und wenn schon jeder algebraische Geometer der neueren Schulen die Schwierigkeiten der Umsetzung begrifflicher Systeme in eine zusammenhängende verständliche analytische Sprache kennt, so kommt bei Lie hinzu, dass in seine „synthetischen" Begriffsbildungen manches zu Allgemeine, was noch der Präcisirung bedürftig war, mit unterlief. Es kommt weiter hinzu, dass seinem ganzen Wesen eine geordnete systematische Wiedergabe seiner Gedankenwelt überhaupt nicht entsprechend war, dass er vielmehr stets zu freiem Ergehen in Ausschnitten derselben, wie es kurze Noten gestatteten, zuneigte.

Uebrigens wird auch die scheinbar gewaltige Intuitionskraft, welche uns aus den analytischen Arbeiten Lie's entgegentritt, hier der Zergliederung zugänglich: sie ist nichts anderes, als eine Form des Ausdrucks seines vorgängigen begrifflichen Durchdenkens von einer möglichst umfassenden Grundlage aus; und auf denselben Umstand sind die manchmal gewaltsam erscheinenden späteren Interpretationen früherer Behauptungen zurückzuführen, indem Lie nicht das wirklich Ausgesprochene, sondern seinen, vielleicht nur erst unbestimmt umrissenen früheren Vorstellungsgang im Auge hatte.

Als die wesentliche Errungenschaft dieser Forschungsperiode ist, auch nach Lie's eigener späterer Auffassung, nicht etwa die Förderung des Jacobi'schen Standpunkts, welcher in den formalen Erniedrigungen der Integrationsordnungen den Fortschritt erblickt, zu betrachten, sondern eben die Erweiterung der begrifflichen Auffassung. Niedergelegt ist sie in der denkwürdigen, aus Erlangen den 11. October 1872 datirten Note „Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, insbesondere über eine Classification derselben" (Gött. Nachr. v. 30. October 1872), in Klein's Programm vom November 1872, nach Mittheilungen Lie's, und in Lie's Note „Zur analytischen Theorie der Berührungstransformationen" (Forh. von Frühjahr 1873).

Wenn früher alle Berührungstransformationen im Wesentlichen durch $1, 2, \ldots, n$ Gleichungen zwischen den Variabelnsystemen

$$(z, x_1, \ldots, x_{n-1}), \qquad (z', x_1', \ldots, x_{n-1}')$$

definirt waren [eine genauere Festlegung dieser Definition hat Lie 1876 in seinem Archiv, Bd. 1, und in Note 2 zu seinem Aufsatze in diesen Annalen, Bd. 11 gegeben], dann durch $2n - 1$ umkehrbare Gleichungen zwischen den Variabelnsystemen

$$\left(z,\ x_i,\ p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}\right), \quad \left(z',\ x_i',\ p_i' = \frac{\partial z'}{\partial x_i'}\right), \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

so jetzt, in correcterer Definition, durch $2n-1$ umkehrbare Gleichungen, welche die $2n-1$ gleichberechtigten Variabeln z', x_i', p_i' als Functionen der $2n-1$ Variabeln z_i, x_i, p_i derart bestimmen, dass eine Relation $dz - \Sigma p_i dx_i = 0$ in sich übergeht, d. h. dass eine Gleichung von der Form

$$dz' - \Sigma p_i' dx_i' = \varrho\ (dz - \Sigma p_i dx_i),$$

mit ϱ als irgend einer Function der z, x_i, p_i, existirt. Die Relation $dz - \Sigma p_i dx_i = 0$ bestimmt die „vereinigte Lage" des „Elements" (z, x_i, p_i) mit dem consecutiven $(z + dz,\ x_i + dx_i,\ p_i + dp_i)$. Aus dem Sinn einer partiellen Differentialgleichung $F(z, x_i, p_i) = 0$: ∞^{2n-2} Elemente zu bestimmen, und dem Sinn einer vollständigen Lösung von $F = 0$: diese Elemente auf alle möglichen Weisen zu ∞^{n-1} „Elementvereinen" von je ∞^{n-1} Elementen zusammenzuordnen — ergiebt sich von vornherein ein voller Ueberblick über die nothwendige Erweiterung des analytischen Apparates, wenn man alle Fälle von Gleichungen $F = 0$, auch die speciellsten, wie etwa die, welche gar keine p_i enthalten, und alle Arten von Lösungen, wenn sich die Elementvereine an Punkte, Curven, Flächen etc. anschmiegen, umfassen will. Insbesondere wird man nicht nur das Verhalten gegenüber *allen* Berührungstransformationen in's Auge zu fassen haben, für welches *eine* partielle Differentialgleichung ja nichts Ausgezeichnetes aufzuweisen hat; sondern z. B. gegenüber den Punkttransformationen (zx_i) im Raume von nur n Dimensionen; und auf dieses specielle Verhalten lässt sich eine Classification gründen, von ihm aus erscheinen die Integrationserleichterungen in speciellen Klassen, so für die in den p_i linearen Gleichungen, in neuem Lichte. Der eigentliche Lie'sche Standpunkt bleibt aber doch die Auffassung der $(z x_i p_i)$ als Coordinaten der Punkte eines Raums von $2n-1$ Dimensionen, mit der einen Bedingung $dz - \Sigma p_i dx_i = 0$; und wenn die analytischen Formeln aller Berührungstransformationen auch längst aufgetreten waren, wie in der Legendre'schen und der Ampère'schen Transformation, und vor Allem bei Jacobi in seinen Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen, Pfaff'sches Problem und Mechanik (s. Cr. J. II, C. R. t. V), so waren sie doch vor Lie nicht *an sich*, unabhängig von ihrer Anwendung auf diese Aufgaben, explicite betrachtet und als ein nothwendiges Mittel zur Einsicht in die Structur der Integrationsgebilde geometrisch erfasst. Merkwürdig ist dagegen die bald darauf folgende (Forh. vom 14. Nov. 1872) Entdeckung Lie's, dass eine seinem Ideenkreise völlig entsprechende analytische Fragestellung und Formulirung — insbesondere wenn man damit die von Clebsch in seiner Connextheorie eingeschlagene Homogenisirung verbindet — gerade diejenige ist,

welche Pfaff schon 1815 in seiner Untersuchung über das Problem, welches seinen Namen trägt, eingeschlagen hat (Abh. der Berliner Akad. von 1814/15): nämlich die allgemeinste Transformation eines kanonischen Ausdrucks $\Sigma X_i dx_i$, hier von $dz - \Sigma p_i dx_i$, in einen ähnlichen kanonischen Differentialausdruck $\Sigma Y_k dy_k$, mittelst Gleichungen (bei Pfaff im Allgemeinen mittelst einer, bei Jacobi (Cr. J. II) mittelst beliebig vieler Gleichungen) zwischen den Variabelnsystemen. Der Gedanke der Möglichkeit der allgemeinen Integration einer Gleichung $\Sigma Y_k dy_k = 0$ durch ein *System* von Integralgleichungen war übrigens von Pfaff selbst aus Monge (Hist. de l'Ac. des Sc., 1784) herübergenommen worden. Nachdem Lie diesen Pfaff'schen Standpunkt des Punktraums von $2n - 1$ Dimensionen wiedergefunden hat, stellt er sich auch fortan mit Vorliebe auf denselben und [illegible]ert von ihm aus, wie nicht weiter ausgeführt werden möge, später natürlich auch das allgemeinste Pfaff'sche Problem. Bemerkt sei jedoch, dass gerade die Leichtigkeit, mit der Lie, der Aufgabe entsprechend, vom einen zum andern Standpunkt überzugehen vermag, einen für sein Schaffen bezeichnenden Zug bildet.

In allen Untersuchungen Lie's von 1871 und 1872 spielen — indem immer wieder die drei Complexe: der lineare, der Minimal-, der Tetraeder-Complex ihn wechselseitig anregen und insbesondere die Translationsflächen der beiden letzteren herangezogen werden — *Systeme von infinitesimalen Berührungstransformationen*, zunächst nur von paarweise vertauschbaren, und auch schon der Begriff der Invarianz bei solchen Transformationen, eine Rolle. Die hier anknüpfende Entwicklung aber, die Lie zu seiner höchsten und bleibendsten Leistung führen sollte, ist nicht zu verstehen, ohne dass der damaligen Beziehungen zu F. Klein noch näher näher gedacht wird.

Schon frühe hatte Klein in der verwirrenden Mannigfaltigkeit geometrischer Betrachtungsweisen, wie sie bei den reinen Projectivikern, oder bei den nach der metrischen Richtung Neigenden, wie Grassmann, Moebius, Hamilton entgegentraten, nach einem Ordnungsprincip gesucht. Im Winter 1870/71 hatten beide Forscher dann im engsten brieflichen Verkehr gleichzeitig, wie schon oben berührt worden, die metrischen, an die Lie'sche Linien-Kugelgeometrie anknüpfenden Verhältnisse verfolgt. In diese Uebertragung, welche die in Deutschland bisher zurückgesetzte metrische Geometrie der projectiven als gleichwerthig an die Seite stellte, hatte Klein dadurch einen neuen Einblick gewonnen, dass er die projective Liniengeometrie unseres Raumes, mittelst der ihr zu Grunde liegenden quadratischen Gleichung, als metrische Punktgeometrie eines Raums von vier Dimensionen, genauer als Geometrie der „Inversionen" desselben auffasste,

und er hatte diese beiden Geometrien wegen der Ueberführbarkeit der beiderlei Transformationsgruppen in einander identificirt. Zu genau derselben Ideenverbindung drängte ihn nun seine erneute Beschäftigung mit der nichteuklidischen Geometrie (Ende 1871): es galt, den Kern des Grundes aufzudecken, nach dem diese Geometrie im Wesentlichen identisch ist mit der metrischen, auf der Cayley'schen absoluten Massbestimmung beruhenden Geometrie und mit der Riemann-Beltrami'schen Geometrie eines Raums von constantem Krümmungsmass; von innenheraus einzusehen, dass und warum diese Geometrien in die projective Behandlungsweise eingeschlossen sind. Die Juni 1872 in einem 1873 in Annalen VI veröffentlichten Aufsatz zuerst, wenn auch noch nicht in der späteren Allgemeinheit, ausgesprochenen Grundgedanken des Erlanger Programms von November 1872, welche die *Gesammtheit* der geometrischen Entwicklungen zu ordnen strebten, waren Lie schon im December 1871 mitgetheilt worden: dass das leitende Princip ausschliesslich im Gruppenbegriff, in der zu adjungirenden *Gruppe* von Transformationen zu suchen ist; dass es nämlich für das Studium einer Mannigfaltigkeit so viele verschiedene Behandlungsweisen gibt, als man continuirliche Gruppen irgend welcher Transformationen construiren kann, und ebensoviele „Invariantentheorien".

Beide Freunde verkehrten im Herbst 1872 zwei Monate lang persönlich mit einander zusammen, im September in Göttingen, im October in Erlangen, nachdem Lie am 1. Juli desselben Jahres zum ausserordentlichen Professor an der Universität Christiania ernannt worden war: eine auf die Urtheile von Clebsch und Cremona hin erfolgte Anerkennung, die übrigens Lie sehr wenig Verpflichtungen, nicht einmal die zu Vorlesungen, auferlegte. Jetzt fand eine erneute gegenseitige Einwirkung statt, unter der einerseits das Programm Klein's, andrerseits die Octobernote Lie's (Gött. Nachr.), sowie einige weitere noch zu besprechende Noten, zur Reife gediehen. Indem die Lie'schen Ideen über Berührungstransformationen und partielle Differentialgleichungen, bei denen nur mit invarianten Gebilden, den Flächenelementen, operirt und Transformationen aller Arten und an jeder Art von Mannigfaltigkeiten betrachtet wurden, Klein ein neues reiches Material darboten, musste sich die Tragweite der Ideen des Programms von selbst erweitern. Auf der anderen Seite war in dem Programm zum ersten Male die centrale Stellung der *Transformationsgruppe* für alle geometrischen Untersuchungen ausgesprochen: dass nicht einmal das *Element*, aus welchem man eine Mannigfaltigkeit erzeugt, deren charakteristische Eigenschaften bestimmt, sondern *einzig* die Gruppe; dass es sich für invariante Eigenschaften immer um Herstelluug von „Körpern" mittelst der Transformationen der Gruppe handelt; dass ihre Zusammensetzung aus Untergruppen die Unterfälle der betrachteten Geometrie festlegt; dass Abbildungen die

Gruppe, also auch die Geometrie, bestehen lassen. Lie, der sich mit den verschiedensten Gruppen beschäftigt hatte, dem aber ihre Bedeutung für Classification zunächst fremd geblieben war, war der Gedanke von vornherein congenial, da er aussprach, was Lie selbst mitvorbereitet, aber noch nicht zur Klarheit herausgearbeitet hatte; und so konnte er auf Lie sogleich derartigen Eindruck machen, dass er mit seinem Denksystem völlig zusammenschmolz.*)

Wenn auch die Interessen der beiden Forscher von da aus nach verschiedenen Richtungen auseinandergingen, bei dem einen zunächst nach der Seite der discontinuirlichen, bei dem anderen nach der der continuirlichen Gruppen, und wenn auch die persönlichen Beziehungen sich hierdurch immer mehr abschwächten: die Idee der Stellung des Gruppenbegriffs blieb der gemeinsame Ausgangspunkt. Die Fragen der invarianten Eigenschaften der partiellen Differentialgleichungen gegenüber der unendlichen Gruppe *aller* Berührungstransformationen traten Lie 1872—1873 entgegen; bald aber gingen ihm diese Gleichungen in der Transformationstheorie selbst völlig auf, aus einem Untersuchungsmittel stiegen die Gruppen zu dem eigentlichen Object der Untersuchung auf, und Lie's That wurde, den *Begriff der continuirlichen Gruppe* auszugestalten und zur Grundlage einer umfassendsten abstracten Theorie zu machen.

Die Einführung der *Gruppenideen* knüpft bei Lie an die Lösungen einer Gleichung

$$\Sigma P_i dX_i = \varrho \Sigma p_i dx_i,$$

wo die P_i, X_i nur von den p_i, x_i abhängen, mittelst der Pfaff'schen Theorie, also wiederum an die Herstellung aller Berührungstransformationen. Indem er die Clebsch-Mayer'sche Theorie des Pfaff'schen Problems verwendet, welche es auf ein vollständiges System linearer partieller Differentialgleichungen zurückführt, gelangt er zu den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Functionen X_i, den Involutionsrelationen

$$(X_i X_k) = 0, \quad \text{wo} \quad (XY) = \sum_j \left(\frac{\partial X}{\partial x_j} \frac{\partial Y}{\partial p_j} - \frac{\partial X}{\partial p_j} \frac{\partial Y}{\partial x_j} \right)$$

aus denen sich die übrigen

$$(P_i P_k) = 0, \quad (X_i P_k) = 0, \quad (X_i P_i) = \varrho$$

von selbst ergeben (Forh. von März 1873; Math. Ann. VIII, 1874).

Der hierdurch angeregte wichtigste Schritt, von dem schon eine kurze Note in Forh. v. 10. Dez. 1872 Mittheilung macht, eingehender aber in der umfassenden Arbeit „Begründung einer Invariantentheorie der Be-

*) Vgl. hierfür Aeusserungen von Lie im „Résumé" von 30. Apr. 1872, in der Octobernote in den Gött. Nachr. von 1872, in Math. Ann. XIV, S. 541 etc.

rührungstransformationen“ in diesen Annalen VIII berichtet wird, war der, dass an Stelle des bei einer partiellen Differentialgleichung $f = 0$ auftretenden vollständigen Systems linearer partieller Differentialgleichungen

$$(F_1 f) = 0, \cdots, (F_r f) = 0$$

in abstracterer Weise nun eine „r-gliedrige Functionengruppe“ $F_1, \ldots, F_r$ von $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ an sich betrachtet wird, von der Eigenschaft, dass alle $(F_i F_k)$ Functionen der F_i sind [in zunächst uneigentlicher Bedeutung des Wortes „Gruppe“]; und diese Functionengruppe soll auf alle Beziehungen hin untersucht werden, die bei beliebiger Berührungstransformation der x, p unveränderlich bleiben. Einer solchen Gruppe gesellt sich immer eine reciproke $(2n - r)$-gliedrige Functionengruppe $\Phi_1, \ldots, \Phi_{2n-r}$ zu, derart dass $(F_i \Phi_l)$ immer $= 0$ ist. Unter den Functionen F_i gibt es eine gewisse Anzahl r' von „ausgezeichneten“ Functionen F', für welche gegenüber allen F_i: $(F_i F') = 0$ ist, Functionen, welche gleichzeitig in der reciproken Gruppe ausgezeichnet sind, und deren Einführung, an Stelle von r' der Functionen F_i, dazu dient, die Gruppe auf eine kanonische Form zu bringen. Die Erhaltung der Zahlen r und r' wird, von Structureigenschaften abgesehen, die einzige invariante Eigenschaft der Gruppe.

Als blosse Anwendungen dieser Theorie erscheinen die Integrationsvorschriften für die Involutionssysteme $F_i = \text{Const.}$, und zwar gestattet sie, von vornherein die in speciellen Fällen möglichen Erniedrigungen der Integrationsordnungen systematisch festzustellen.

Wichtiger ist aber eine weitere — wieder an die Gedanken der W-Curven anschliessende — Auffassung dieser Theorie, wie sie von nun an in den Vordergrund tritt (s. die eben genannte Abh. Ann. VIII, und „Verallgemeinerung und neue Verwerthung der Jacobi'schen Multiplicatortheorie“, Forh. 1874). Für eine infinitesimale Punkttransformation

$$\delta x_i = B_i \delta t$$

wird zum ersten Male das *Symbol*

$$Bf \equiv \Sigma B_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

eingeführt, das anzeigt, dass durch sie f in $f + \delta t . Bf$ übergehe. Dass eine lineare partielle Differentialgleichung $Af = 0$ eine infinitesimale Transformation vom Symbol Bf gestattet, ist identisch mit der Behauptung, dass aus jeder Lösung f eine weitere Lösung Bf folge. Gestattet ein vollständiges System $A_i f = 0$ die infinitesimale Transformation Bf, so kann man auch, zur, freilich speciellen, Einordnung in den oben angeführten Begriff der „Functionengruppe“, sagen, dass alle $(A_i B)$, als lineare Functionen der A_i, deren Functionengruppe angehören.

Lie leitet hieraus eine *Rechnung mit infinitesimalen Transformationen* ab, indem er nur noch lineare vollständige Systeme mit *bekannten* infinitesimalen Transformationen betrachtet, und nach seiner Functionengruppentheorie nun die Gleichungen so normirt, dass für das Transformationssystem B_α alle $(B_\alpha B_\beta)$ nur wieder lineare Functionen der B_α werden. Diese Entwicklung nimmt also einen Grundgedanken der *Transformationsgruppentheorie* überhaupt (s. S. 28) schon in starkem Grade vorweg.

Unter den infinitesimalen Punkttransformationen im Raume der x_i, p_i hebt Lie eine besonders wichtige Classe hervor: die der *infinitesimalen homogenen Berührungstransformationen*. Sie haben die Eigenschaft, homogene Functionen hinsichtlich $p_1, \ldots, p_n$ in ebensolche überzuführen, und nehmen die kanonische Form an:

$$\delta x_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta t, \quad \delta p_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}\delta t,$$

wo die Stammfunction H irgend eine Function der x_i, p_i ist, die nur in den p_i homogen von der ersten Dimension ist; durch sie wird $\frac{\delta}{\delta t}(\Sigma p_i dx_i)$ ein vollständiges Differential dU. Wenn $(H\varphi) = 0$ ist, geht irgend ein Integral φ der partiellen Differentialgleichung $H = \text{const.}$ durch die H-Transformation in sich über; also auch die Gleichung $H = \text{const.}$ selbst durch die φ-Transformation, welche φ als Stammfunction hat. So erkennt man, dass die Aufgabe, eine partielle Differentialgleichung $H = \text{const.}$ zu integriren, identisch ist mit der, alle Functionen φ zu finden, für welche $(H\varphi) = 0$ ist, d. h.: alle infinitesimalen kanonischen Transformationen zu finden, durch welche H, also auch das zugehörige System von kanonischen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x_i},$$

in sich übergeht. Die *Theorie der Integration* dieses Systems, oder von $H = \text{const.}$, ist daher mit einem Problem der *Transformationstheorie* identisch; z. B. wird das Poisson-Jacobi'sche Theorem zu der selbstverständlichen Behauptung, dass zwei successive infinitesimale Berührungstransformationen wieder eine solche geben.

Man braucht sich nur an die Hamilton'sche Theorie zu erinnern — und Lie stand dieser ganze Zusammenhang von vornherein vor Augen —, um zu sehen, welches Licht von hier aus zunächst auf die *Mechanik* fällt. Das obige System von Differentialgleichungen der Mechanik, welches zugleich die charakteristischen Streifen von $H = \text{const.}$ bestimmt, hat ja die Eigenschaft, dass die zugehörigen Bahncurven der (x_i, p_i) eben durch die endliche eingliedrige Gruppe erzeugt werden, welche durch Wieder-

holung der infinitesimalen Transformation mit der Stammfunction H entsteht. Diese endliche Gruppe zu bestimmen, ist nur ein anderer Ausdruck für die Aufgabe, die Differentialgleichungen des von H abhängigen Problems der Mechanik zu lösen: *und so ist die ganze analytische Mechanik mit einem Schlage der Gruppentheorie eingeordnet.*

So verlangt nach Lie auch die *Störungstheorie* nur die Ueberführung aller kanonischen Differentialgleichungssysteme der obigen Art, aber mit *beliebigem* H, in dieselbe Form; und zwar geschieht dies durch Berührungstransformationen, für die $\Sigma P_i dX_i = c\,\Sigma p_i dx_i + dV$ ist (Archiv II, 1877).

Unter den Sätzen der Mechanik, die durch die Lie'sche Uebertragung evident werden, treten in erster Linie freilich nur die bekannten, auch sonst durch Verschiebungen und Drehungen des Systems zu findenden Integrale auf: diejenigen, welche zugleich rational und ganz, also linear in den p_i sind, die also in der That zu infinitesimalen *Punkt*-Transformationen des Systems in sich Veranlassung geben, so die Flächensätze und die ersten Schwerpunktsintegrale.

Von den zahlreichen Resultaten, welche Lie weiter aus diesen Theorien gezogen hat, erwähnen wir noch die Förderung des Pfaff'schen Problems (For. 1873). Vor Allem aber erwähnen wir den directen Zusammenhang der Lie'schen Theorien mit den Jacobi'schen Betrachtungen über *Multiplicatoren*, der ihn zu Ausdehnungen dieser Betrachtungen führte (Forh. 1874 und diese Annalen, XI); ein Zusammenhang, der ja schon an sich wahrscheinlich ist, indem das Wesen jener Theorien darin besteht, die Differentialgleichungen in ihrer Integrationsordnung zu erniedrigen. In Lie's Gedanken ging sogar die Anwendung der infinitesimalen Transformationen auf die Multiplicatortheorien der Erkenntniss der Integrationserleichterungen voraus [s. Ann. XI.] Ueber die ursprüngliche Theorie von 1870 und 1871 (Math. Ann. IV) hinaus ergiebt sich, dass für eine Differentialgleichung $Y dx - X dy = 0$, welche eine infinitesimale Transformation $\delta x = \xi \delta t$, $\delta y = \eta \delta t$ gestattet, sich ein Integrationsfactor, in der Form $M = \frac{1}{X\eta - Y\xi}$, unmittelbar angeben lässt, so dass auch die Integration der Hülfsgleichung $\eta dx - \xi dy = 0$ wegfällt (s. oben, S. 7). Auch die sogenannte *neue Integrationstheorie* von 1874 (s. Annalen XI, XXV, etc.) beruht, ausser auf der Heranziehung des Pfaff'schen Problems, darauf, dass bei vollständigen Systemen eine *bekannte* infinitesimale Transformation mit der Angabe eines Integrals identisch erscheint, und dass also bekannte Lösungen derselben als neue unabhängige Variable eingeführt werden — „Invarianten" bei infinitesimaler Transformation der Gleichungen. Dies führt zu Reductionen der vollständigen Systeme, von denen jedes Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen abhängt.

Die Anwendung solcher Sätze auf die letzten noch fehlenden Lösungen einer partiellen Differentialgleichung und die Untersuchung der Frage, ob seine Theorien an Einfachheit des Integrationsverfahrens im Jacobi'schen Sinne das Höchstmögliche leisten, bilden den vorläufigen Abschluss der Betrachtungen Lie's in dieser Jacobi'schen Richtung (bes. in Ann. XI, Archiv I und II etc.). Damals (1877) trug sich Lie mit dem Plane eines Werkes über Theorie der Berührungstransformationen und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung; aber erst viel später sollte dieser Gedanke durch die von Herrn Scheffers bearbeitete Vorlesung realisirt werden, in freilich elementarerer Weise, aber nun mit weiter vorgeschrittenen Ideen.

Wenn Lie in seinen früheren Arbeiten mannigfaltige von einer endlichen Zahl von Parametern abhängige, „endliche" Gruppen von Transformationen verwerthet hatte, und wenn alle zuletzt besprochenen Untersuchungen als solche angesehen werden können, die dem Gebiet der Invarianten und der Aequivalenzprobleme von Differentialausdrücken erster Ordnung gegenüber der ganzen unendlichen Gruppe aller Berührungstransformationen, oder doch von Untergruppen derselben, angehören, so war nun die Zeit reif zur Inangriffnahme des *principiellen Problems: zur systematischen Aufstellung aller Gruppen, zur Theorie der Transformationsgruppen.* Dieser hervortretendste Schritt in Lie's Werk, von ihm selbst mit dem von Descartes verglichen (Vorrede zu Bd. III der „Theorie der Transformationsgruppen"), fällt übrigens auch äusserlich mit einem wichtigen Abschnitt in seinem Leben zusammen, indem er sich mit Anna Sophie Birch, der Tochter eines Oberzollbeamten, Weihnachten 1873 verlobte und im Herbst 1874 vermälte. In diesem Winter 1873/74 entstanden die ersten systematischen Begriffsbildungen; und auf der Hochzeitsreise, bei der Lie erst nach Paris gegangen war, um die Beziehungen zu den dortigen Mathematikern zu erneuern und eifrig zu pflegen, sowie um die ersten Vorbereitungen für eine neue Herausgabe von Abel's Werken zu treffen, war es, dass er in Düsseldorf, wo er mit Klein und Mayer zusammen war, unterstützt von Ersterem, October 1874 die erste Aussprache seiner Ideen fand, in einer Note „Ueber Gruppen von Transformationen" (Gött. Nachr. v. 3. December), welche die Fundamente für die Theorie gelegt hat.

Einige Stadien in der Entstehung des Systems lassen sich auch in den Veröffentlichungen Lie's verfolgen; denn in dem eine besonders vollendete Theorie liefernden, mehrfach angeführten Aufsatz in diesen Annalen VIII: „Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen", vom 5. Juli 1874, findet sich, als Schlusszusatz, nachdem eine Gruppe infinitesimaler homogener Berührungstransformationen $H_1, \ldots, H_r$ durch die aus 1873

herrührenden Gleichungen $(H_i H_k) = \sum_s c_{iks} H_s$ definirt worden, nicht nur die Frage „nach den Eigenschaften einer gegebenen solchen Gruppe, die bei homogenen Berührungstransformationen invariant bleiben", angeregt, sondern die Angabe, „dass es eine *begrenzte* Zahl Typen jener Gruppen gäbe; es müsse spätern Arbeiten vorbehalten werden, den präcisen Sinn, die Richtigkeit und Bedeutung dieser Behauptung darzulegen." Diese letztere Fragestellung bezeichnet am Prägnantesten diejenige Entwicklung über das Klein'sche Programm hinaus, welche für Lie charakteristisch ist.

In der December-Note erscheint zum ersten Male die *explicite Definition* einer endlichen r-gliedrigen — d. h. von r continuirlichen Parametern abhängenden — Transformationsgruppe zwischen n Variabeln

$$x_j' = f_j\ (x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_r)$$

durch Functionalgleichungen zwischen den f_j; die Ausdehnung der Galois'schen Grundbegriffe der Substitutionsgruppen auf diese Gruppen, vor Allem des Begriffs der „Aehnlichkeit" (Isomorphismus); und es tritt, indem alle ähnlichen, also ineinander transformirbaren, Gruppen als gleichberechtigt betrachtet und in *einen* Typus zusammengefasst werden, die Frage nach der Anzahl der wesentlich verschiedenen Typen auf. Zur Untersuchung der Frage werden — indem noch die Existenz der identischen und paarweise inversen Transformationen innerhalb der Gruppe und ihres Parameterbereichs etwa als Axiom hinzugedacht ist — als erzeugende Operationen der Gruppe die ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen derselben

$$\delta x_j = X_{ij}\, \delta t \qquad (i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, n)$$

(mit Symbol $X_i f$) herangezogen und [späterer erster Hauptsatz der Theorie] die Differentialgleichungen aufgestellt, welche die $\frac{\partial f_j}{\partial a_i}$ als lineare Functionen der X_{ij}, und umgekehrt, ausdrücken. Die Grundlage der Untersuchung bilden dann die daraus folgenden Integrabilitätsbedingungen [zweiter Hauptsatz der Theorie]

$$X_i(X_k f) - X_k(X_i f) \equiv (X_i X_k) f = \sum_s c_{iks} X_s f,$$

mit constanten Zahlen c_{iks}: lineare partielle Differentialgleichungen, welchen die X_{ij} als Functionen der x genügen müssen und welche die Definitionsgleichungen der infinitesimalen Transformationen der Gruppe vorstellen. Die weitere Discussion dieser Zahlen c_{iks}, welche die Zusammensetzung der Gruppe bestimmen, und die übrigens nur mit den Gliedern 2$^{\text{ter}}$ Ordnung der infinitesimalen Transformationen zusammenhängen, wird hier noch nicht gegeben, sondern nur, unter Annahme speciell

normirter $X_i f$, aber unter Ausdehnung der Untersuchung auf *Berührungstransformationen*, die Hauptresultate für $n = 1$ und $n = 2$; also alle Gruppen der Geraden: als welche nur die 3-gliedrige gebrochene lineare Substitution mit ihren Untergruppen gefunden wird, und alle Gruppen der Ebene: Kreistransformationen, Collineationen etc. Auch die Wichtigkeit dieser Typentheorie mit $n=2$ für die Theorie der Differentialgleichungen zwischen zwei Variabeln, von höherer als 1ter Ordnung, wird erkannt: durch Einordnung einer gegebenen solchen Gleichung in einen der schon bekannten Typen soll eben gefunden werden, ob und welche Gruppe diese Gleichung gestattet, und so kann sie nach der Gruppe *classificirt* werden.

Um sich über seine neue Gruppentheorie und die in Aussicht genommenen Anwendungen eingehender aussprechen zu können, als es in den Forh. der Gesellsch. d. Wiss. von Christiania möglich war, mit der er überdies in Schwierigkeiten gerathen war, gründete Lie im Bunde mit einigen Naturforschern 1876 eine eigene Zeischrift: „Archiv for Mathematik og Naturvidenskab"; und hier finden sich denn die ersten Redactionen seiner Ausführungen, in deutscher Sprache, doch viel weniger lesbar geschrieben, als die in diesen Annalen erschienenen systematischeren Darstellungen. So bildet gerade für die allgemeine Gruppentheorie die in Math. Ann. XVI, Dec. 1879 gegebene Zusammenfassung die einfachste und übersichtlichste *Einleitung* in diese Theorie, und liefert zugleich alle Gruppen der Geraden und der Ebene, während freilich die in den Bänden I—IV des Archivs (1876—1879) enthaltenen fünf Aufsätze einige begriffliche Bildungen besser hervortreten lassen. Nur die 1885 wieder aufgenommene Untersuchung im 10ten Bande des Archivs erreicht in ihrem zweiten, schon mit Hülfe von F. Engel redigirten Theile die Stufe des Annalenaufsatzes.

In ihrer Gesammtheit bieten diese Arbeiten eine Fülle neuer Grundideen zur Gruppenlehre. Die wichtigste ist, dass vermöge der bekannten „Jacobi'schen Identität", angewandt auf je drei infinitesimale Transformationen der Gruppe, *quadratische Relationen* zwischen den Structurzahlen c_{iks} der Gruppe gebildet werden, und dass [als dritter Hauptsatz und hauptsächliches analytisches Mittel der Behandlung der Gruppentheorie] diese Relationen, verbunden mit den Gleichungen $c_{kis} = -c_{iks}$, auch als *hinreichend* erkannt werden, damit die r als unabhängig vorausgesetzten infinitesimalen Transformationen wirklich eine bestimmte r-gliedrige Gruppe erzeugen. Der Beweis erfolgt erst durch Einordnung der Gruppe unter die früher erwähnten „Functionengruppen" (Arch. I), allgemeiner aber (Arch. II) durch directe Bildung einer Gruppe von infinitesimalen Transformationen, deren Coefficienten *lineare* Functionen von $r' \leqq r$ Parametern sind, welche der gesuchten Gruppe isomorph ist und welche sich übrigens auch zu einer r-gliedrigen linearen Gruppe erweitern lässt. Jenes ist die 1884

(Forh.) noch mit dem besonderen Namen der „adjungirten Gruppe“ bezeichnete Gruppe: die Entwicklung kommt darauf hinaus, dass der Inbegriff aller ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen $\Sigma e_i B_i f$ einer endlichen Gruppe als lineare Punktmannigfaltigkeit R_{r-1} betrachtet wird, die vermöge aller Transformationen der endlichen Gruppe nur linear — eben durch die adjungirte Gruppe in den Variabeln e — transformirt wird. Dies ist Lie's eigentliche „fundamentale Auffassung“ (s. diese Annalen XXV); und mit ihrer Hülfe erkennt man, da die bei projectiven Transformationen ebener Räume festbleibenden Gebilde bekannt sind, die Structurverhältnisse und Aehnlichkeitskriterien der Gruppen mit gegebenen c_{iks} auf die anschaulichste Weise.

Auf ein weiteres Hülfsmittel dieser Arbeiten möge noch ausdrücklich hingewiesen werden: auf die Eintheilung der infinitesimalen Transformationen in „Ordnungen“, nach der Dimension des niedrigsten Gliedes der in der Umgebung eines beliebig gewählten Punktes gemachten Potenzentwicklung, von der auch das eben berührte Verhalten gegenüber der adjungirten Gruppe abhängt. Hierauf beruht vorzugsweise die kanonische Gestalt jener Transformationen, die Ermittelung der Typen für $n = 2$ — während die Aufstellung aller Typen für unsern Raum, $n = 3$, von Lie damals zwar schon im Wesentlichen geleistet war, aber erst sehr viel später (Bd. III der „Transformationsgruppen“, 1893) mit Hülfe der vereinfachten Methoden dargelegt wurde —; ferner aber die Bestimmung von Curvenschaaren (oder Differentialgleichungen), welche bei gegebenen infinitesimalen Transformationen invariant bleiben. Als allgemeines hierher gehöriges Resultat (Arch. III) sei angeführt, dass für den R_n die allgemeinste lineare Gruppe, nebst einigen ihrer Untergruppen, die einzige Gruppe ist, welche „im Infinitesimalen die grösstmögliche Transitivität hat“, d. h. welche ein jedes durch irgend einen Punkt allgemeiner Lage gehende Element in jedes andere Element dieses Punktes überzuführen erlaubt. Im ganzen kann man sagen, dass in dieser Periode die Erledigung aller Gruppenprobleme immer auf die Integration von gewöhnlichen totalen, unbeschränkt integrabeln Differentialgleichungen hinausläuft.

Während Lie's äussere Verhältnisse an der Universität Christiania sich um diese Zeit zu bessern anfingen, gewährte ihm die Aufnahme seiner abstracten Arbeiten von Seiten der Mathematiker immer weniger Befriedigung. Wie zur Ablenkung wandte er sich um 1877 zu dem Kreise der geometrischen Untersuchungen zurück, der ihn 1870—71 umfangen hatte: *zu den Krümmungsverhältnissen der Flächen*, um nun, neben blossen Rechnungen über Gruppen und neben Redactionen von früheren Arbeiten, besonders aber von der mit Sylow unternommenen und 1881 fertig ge-

stellten Ausgabe von Abel's Werken, einige Jahre lang auch dieses Gebiet mit seinen „synthetischen" und seinen gruppentheoretischen Ideen zu durchsetzen. Was Lie hier Erholungsarbeit wurde, lag aber doch zu sehr innerhalb seines eigensten Könnens und entsprach zu sehr der Hochschätzung, die er für Anwendungen hegte und die ihm trotz seiner auf's Allgemeinste gehenden Geistesrichtung immer als Richtschnur diente, als dass er nicht wieder zu glänzenden Bereicherungen des Gebiets hätte gelangen sollen. Und zwar war es gerade der Verfolg seiner früheren Betrachtungen über den tetraedralen und den Minimal-Complex, der ihm in der Theorie der *Minimalflächen*, und der *Translationsflächen* überhaupt, die schönsten Resultate brachte.

Wenn man einen Complex von Geraden in's Auge fasst, die eine ebene, im Unendlichen gelegene Curve treffen, erhält man alle Translationen des Raums als der Gruppe angehörig, welche der Complex gestattet; und Lie erzeugt nun aus den Complexcurven Translationsflächen, indem er irgend eine solche Curve derart congruent mit sich verschiebt, dass einer ihrer Punkte ebenfalls eine Complexcurve beschreibt, indem er also eine einfach unendliche Schaar von Translationen, die aber im Allgemeinen keine Gruppe bildet, anwendet. Die Fläche enthält dann zwei ∞^1-Schaaren von Complexcurven, durch jeden Punkt je zwei Curven, deren Richtungen harmonisch sind zu den beiden Haupttangenten der Fläche in diesem Punkt [vgl. oben S. 6, 7, 9, 13]. Die Specialisirung, dass die Haupttangenten senkrecht auf einander stehen, giebt die allgemeinsten Minimalflächen; eine andere Specialisirung, dass die beiden Curvenschaaren nur eine einzige irreductible Schaar bilden, liefert „Doppelflächen" (nach dem Ausdruck Klein's), auf welchen man nämlich stetig von der einen Seite zur anderen gelangen kann, Flächen, wie sie zuerst Moebius behandelt hat.

Lie's Verdienst ist, mit diesen geometrischen Hülfsmitteln sowohl die alte analytische Theorie von Monge, als auch die Weierstrass'schen Formeln über Minimalflächen, deren Interpretation wesentlich mit der der Monge'schen Gleichungen übereinstimmt (Arch. II), anschaulich aufgefasst zu haben, und zwar indem er sich in keiner Weise mehr auf die reellen Punkte dieser Flächen beschränkt. So betrachtet er hauptsächlich die *projectiven* Verallgemeinerungen der Minimalflächen, sowohl algebraische, als transcendente, von den letzteren die periodischen, d. h. solche, welche eine Translation von endlicher Amplitude in sich zulassen. Für die *algebraischen* Flächen dieser Art kommt hier auch einmal eine Seite zum Vorschein, die Lie sonst wenig entsprach: die *abzählende*, um untere Grenzen für Classen und Ordnungen der Flächen zu gewinnen, und zwar nicht nur im Anschluss an seine Constructionen, sondern auch zwecks Elimination an Reihenentwicklungen in singulären Punkten. So ergeben sich ihm

z. B. alle reellen algebraischen Minimalflächen (Doppelflächen), deren Classe eine Primzahl ist; und überhaupt eine Reihe von Verallgemeinerungen von Sätzen, die kurz vorher von anderer Seite bekannt gemacht waren (vgl., ausser Arch. II—IV und VII, besonders wieder die lesbar geschriebenen Aufsätze in diesen Annalen XIV und XV), sowie synthetisch neue Erzeugungen solcher Flächen (Arch. III etc.). Immer aber bleibt die freie Beherrschung des Imaginären auch in den differentialgeometrischen Betrachtungen, wie sie dem Geometer sonst nur bei algebraischen Gebilden geläufig war, bemerkenswerth. Auch darauf sei kurz hingewiesen, dass Lie in einigen Noten aus späterer Zeit (s. insbes. die Berichte der Sächs. Ges. d. W. von 1896) diesem Gebiete der Translationsflächen, und zwar denen mit mehr als zweifacher Translationserzeugung, oder vielmehr ihrer Verallgemeinerung auf p Dimensionen, die Additionstheoreme der Integrale algebraischer Functionen einordnete, indem diese Theoreme Gruppen von vertauschbaren algebraischen Transformationen, und zwar in der kanonischen Translationsform, liefern. Lie hatte gehofft, auf diese Weise nicht nur eine neue geometrische Anwendung des Abel'schen Theorems, sondern auch für sich einen Weg zur Forschung im Gebiete der Functionentheorie zu gewinnen.

Enger mit den *gruppen*theoretischen Fragen, als specielle Anwendung, hängt die nächste Serie von geometrischen Arbeiten Lie's, von 1879—1881, zusammen. Sie beziehen sich alle auf Flächenclassen, welche Gruppen von infinitesimalen Transformationen einer ihrer Curvenarten, so besonders ihrer geodätischen Curven, in sich gestatten: die in der italienischen und französischen Litteratur gerade vielfach behandelten Flächen constanter, oder constanter mittlerer, Krümmung etc. Immer wird nach der Aufsuchung dieser Flächenclassen selbst, und nach rationellen Integrationsmethoden für die Ermittelung ihrer besonderen Curvenarten gefragt: d. h. nach gewissen Differentialgleichungen 2ter Ordnung und ihren Berührungstransformationen. Eine dahin gehende Abhandlung „Classification der Flächen nach der Transformationsgruppe ihrer geodätischen Curven" ist 1879 als *Universitätsprogramm* von Christiania erschienen und in diesen Annalen, XX, im Wesentlichen wiedergegeben; und nach analogen Classificationsprincipien dachte sich Lie etwa auch die Probleme der Mechanik behandelt und in einander verwandelt, wie es ja in neueren Arbeiten, z. B. bezüglich der Kreiselprobleme, schon theilweise verwirklicht worden ist. Eines der hübschesten solcher specieller Resultate ist 1882 in einer Note mitgetheilt (Arch. VII), welche alle Flächen mit infinitesimalen linearen Transformationen in sich bestimmt: dass nämlich Gerade und Kugel die einzigen Gebilde unseres Raumes sind, die bei allen Bewegungen und Aehnlichkeitstransformationen genau ∞^4 verschiedene

Lagen einnehmen — also ein Charakteristikum der Linien- und Kugelgeometrie.

Die Bedeutung dieser Arbeitenreihe ist aber weniger in neuen Resultaten zu suchen, als darin, dass sie Lie wieder in seine Haupt-Gedankenrichtung zurückbrachten, aus der auch jetzt neue und umfassende Ideenbildungen hervorgehen sollten: über *Differentialinvarianten*, oder Differentialgleichungen mit Transformationen in sich, und über *unendliche Gruppen*.

Wie früher berührt, hatte Lie schon in seinen Programmnoten von 1872 (Forh.) und in der Decembernote von 1874 (Gött. Nachr.) Begriffe über Classification von *Differentialgleichungen*, Zurückführung auf Normalformen, und über *Invariantenbildungen* aus den Variabeln und (damals nur) ihren ersten Differentialquotienten gegenüber gewissen Gruppen von Transformationen, insbesondere der aller Berührungstransformationen, theils ausgeführt, theils in unbestimmter Form vorausgefühlt und erst späterhin im Sinne der Differentialinvarianten gedeutet, ohne dass er bis dahin eingehend darauf zurückgekommen wäre. War doch inzwischen die Aufgabe, den Gruppenbegriff an sich auszubilden, beherrschend an ihn herangetreten. Jetzt, bei längerer Beschäftigung mit dem Verhalten geometrischer Differentialausdrücke 2^{ter} Ordnung gegenüber Transformationen, stieg wieder mehr und mehr die Erkenntniss in ihm auf, dass seine Begriffe von invarianten Bildungen noch eine grosse Erweiterung zulassen müssten.*) Inzwischen aber war schon von anderer Seite das Problem mächtig gefördert worden, freilich nur in einem beschränkteren Gebiete: Halphen und Laguerre hatten sich seit 1875, bezw. 1879, der Theorie der Differentialinvarianten zugewandt, so für die endliche *projective* Gruppe der Ebene und — in der Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung — für die unendliche Gruppe $x_1 = F(x)$, $y_1 = y\Phi(x)$, mit willkürlichen Functionen $F(x), \Phi(x)$, während vorher nur einzelne solcher Invarianten (Riemann-Schwarz'scher Ausdruck) bekannt waren. Insbesondere hatte Halphen seine Theorie, welche von Früherem nur die W-Curven-Betrachtungen benutzt hatte, schon in einigen grösseren Arbeiten publicirt (1876—1880) und sogar bis zu Fragen der *Systemsbildung* von Differentialinvarianten (im Sinne der rationalen Abhängigkeit) durchgeführt, während freilich seine preisgekrönte wichtigste Arbeit von 1880 erst 1883 erschienen ist.

Es kann kein Zweifel sein, dass Lie hierdurch einen kräftigen Anreiz erhielt: er sah im Sommer 1882, dass sich die Differentialinvarianten überhaupt als Lösungen eines vollständigen Systems bestimmen lassen

*) Vgl. z. B. Lie's Referat von 1880 im Jahrb. über die Fortschr. d. Math. X, S. 260.

(Arch. VII, p. 192, Juni 1882); dass weiter die Hülfsdifferentialgleichungen 1ter Ordnung, welche von der Gruppe allein abhängen, noch specielle Affecte haben, so dass eine gewisse unter denselben auf eine Riccati'sche Gleichung zurückführbar ist (nämlich die einer invarianten Curvenschaar entsprechende, welche ∞^1 Geraden der Ebene in projectiven Punktreihen trifft); und dass sich die Laguerre'sche Classification seiner Gruppentheorie einordnen lasse (Forh. 1882, Nr. 21, 22 von Oct. u. Anfang Nov. 1882). Mit diesen Ueberlegungen reiste Lie (mit Universitätsstipendium) im October 1882, über Leipzig und die Schweiz, nach Paris und hielt dort am 3. November einen Vortrag über seine Integrationstheorien von 1874 (von vollständigen Systemen mit bekannten infinitesimalen Transformationen). Als nun in der Discussion Halphen auf die Beziehungen hinwies, welche diese Begriffe zu seinen eigenen Arbeiten über Differentialinvarianten der allgemeinen projectiven Gruppe und zu Transformation von einer Reihe zugehöriger Gleichungen auf *lineare* Gleichungen niedrigerer Ordnung haben (vgl. Lie in Ann. XXV), schlug dies zündend bei Lie ein: er sprach aus, dass *seine* Principien den Halphen'schen Fall umfassten und die Ausdehnung auf *alle* endlichen Gruppen zuliessen. Noch in Paris berechnete er für alle seine Gruppen der Ebene die zugehörigen Differentialinvarianten und gab die Theorie der Integration jeder daraus durch Nullsetzen entstehenden Differentialgleichung. Der Fortschritt aber, auf den eben Halphen's Bemerkungen Lie hingeleitet haben, ist der, dass nun durch Benutzung der *endlichen* Gleichungen der Gruppe die Hülfsgleichungen im Allgemeinen auf *lineare* homogene Differentialgleichungen zwischen *zwei* Variabeln zurückkommen. Die Entstehung der Differentialinvarianten durch Erweiterung der infinitesimalen Transformationen auch auf die höheren Differentialquotienten, ihre Bildungsweise für *jede* Gruppe, die Zurückführung des Aequivalenzproblems auf diese Formen: überhaupt das ganze Rüstzeug der linearen Invariantentheorie — die, in besonderer Auffassung, wenn man nämlich durch Einführung genügend vieler Variabeln die Gruppe durch eine ähnliche aus linearen Substitutionen ersetzt, übrigens selbst schon einen sehr grossen Theil der allgemeinen Gruppentheorie umfasst — stand sogleich in Ausdehnung auf alle endlichen Gruppen vor seinem geistigen Auge. Schon im December 1882 veröffentlichte Lie im VII. Bande des Archivs ein kurzes Programm dieser Richtung, die Ausführung in den Forh. von 1883 und in den Noten „Classification und Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten", Archiv von 1883 und 84 (abgedruckt in diesen Annalen XXXII, 1888). Alle früheren Probleme, wie Aufsuchung der Gruppe einer gegebenen Gleichung, Transformation auf eine kanonische Form bei bekannter Gruppe, erscheinen jetzt in dem

höheren Lichte der Differentialinvarianten und gestalten sich in Folge dessen plastischer und klarer.

Aber nicht nur auf diese principielle Seite der neuen Ansicht ist hier hinzuweisen. Lie selbst hat wiederholt darauf aufmerksam gemacht — und in einer schönen Schilderung der Bedeutung von Galois im „Centenaire de l'École Normale, Paris 1895", in der er sich eingehend über seine eigenen Ziele ausspricht, hat er mit Nachdruck dabei verweilt —, welch' grosse Analogie zwischen seinen Problemen in der Theorie der *Differentialgleichungen* mit denen von Abel und Galois in der Theorie der *algebraischen Gleichungen* bestehe.

In der That ist diese Analogie, soweit sie die Abel'schen Gleichungen betrifft, nicht zu verkennen: den Functionalgleichungen, durch welche bei diesen eine Wurzel an die andere gebunden ist, entsprechen zunächst die vertauschbaren linearen Transformationen, welche die Integrale der Differentialgleichungen in sich überführen, die auf die W-Curven führen (1870); weiterhin aber die Transformationen einer Gruppe, welche überhaupt eine Differentialgleichung gestatten kann. Und auch der Galois'sche Standpunkt, der auf die Erforschung der Gruppe einer Gleichung und ihrer Structur das Lösungsproblem der Gleichung gründet, findet sein Gegenbild in Lie's Standpunkt bei Differentialgleichungen; ja um so stärker, je mehr sich nach und nach ergab, dass besonders die Differentialgleichungen, zwischen deren particulären Lösungen constante Relationen vorhanden sind, oder welche aus particulären Fundamentallösungen auf das allgemeine Integral schliessen lassen, gerade vermöge dieser Eigenschaften besondere Transformationsgruppen (Rationalitätsgruppe, nicht Monodromiegruppe) zulassen, deren Herstellung mit der Bildung der Structur der Integrale identisch ist, und deren Erniedrigung auf Untergruppen durch Adjunction neuer Gleichungen hier, wie dort, die Frage der Lösung einschliesst. So ist nicht zu verwundern, dass Lie selbst diesen Galois'schen Standpunkt immer stärker betonte und sich als den eigentlichen Erben der Galois'schen Ideen betrachtete. Hierbei möge aber nicht vergessen werden, dass, wenn die Analogie mit Lagrange-Abel eine vollständige ist, die zu Galois nicht völlig durchgreift: so giebt es auf Quadratur zurückführbare Differentialgleichungen — wie die der geodätischen Linien eines Ellipsoides und anderer Flächenarten —, für welche keine Gruppeneigenschaft als der massgebende innere Grund der Reduction vorhanden ist, während doch die Galois'sche Theorie auch bei den speciellsten algebraischen Gleichungen durchschlagend bleibt. Lie pflegte solche Gleichungen als „auf ausführbare Operationen führende" oder als „triviale" einfach bei Seite zu setzen.

Auch nach anderer Richtung hin consolidirten sich Lie's Ideen in dieser für sein Schaffen denkwürdigen Zeit, offenbar ebenfalls durch den

Anstoss, den die Halphen-Laguerre'schen Arbeiten ihm gegeben hatten. nach der Seite der *unendlichen* continuirlichen Gruppen und ihrer *Differentialinvarianten.* Während bis dahin auch für Lie [abweichend von dem, was man aus der Vorrede zum III. Bande des Transformationswerks schliessen möchte] der Begriff „Gruppe" nur jede beliebige Gesammtheit von Transformationen bedeutete, von der Art dass je zwei, successive angewandt, wieder eine Transformation der Schaar erzeugen, begrenzt er jetzt (Forh. 1883: „Ueber unendliche continuirliche Gruppen" — d. h. über von willkürlichen Functionen abhängende Gruppen —) zum ersten Male ausdrücklich den Begriff dahin, dass ihre infinitesimalen Transformationen einem System linearer partieller Differentialgleichungen irgend einer Ordnung genügen sollen, äquivalent den „Definitionsgleichungen" einer endlichen Gruppe. Und unter dieser Beschränkung gelingt es ihm, auch für diese umfassenderen Gruppen, die in Lie's Sinne für die Transformationstheorien der Differentialgleichungen eine noch grössere Bedeutung erlangen sollen, als die endlichen Gruppen, eine der Theorie der letzteren völlig ähnliche Theorie aufzubauen, aus der nur das eine Resultat angeführt sei: dass von gewöhnlichen Differentialgleichungen nur diejenigen erster Ordnung, keine von höherer Ordnung, solche Gruppen zulassen. Auch hier haben diese Annalen („Ueber Differentialinvarianten", XXIV, 1884) eine zusammenfassende Redaction der ersten bezüglichen Untersuchungen Lie's gebracht, während seine weiteren Forschungen hauptsächlich in den Schriften der Sächs. Ges. d. Wiss. niedergelegt sind. Wie ausgedehnt das Gebiet ist, möge daraus entnommen werden, dass sich ihm z. B. die ganze Gauss'sche Krümmungstheorie, als Theorie der Differentialinvarianten der unendlichen Gruppe aller Biegungen, d. h. der Punkttransformationen, welche das Längenelement der Fläche unverändert lassen, einordnet und von diesem Gesichtspunkte aus durch Lie behandelt worden ist.

Wir haben Lie's Werk und Leben bis zum Jahre 1884, dem Höhepunkt seiner Entwicklung, verfolgt. Von da an galt es vorzugsweise, das grosse Ideenmaterial zusammenhängend zu verarbeiten und einen dauernden Bau daraus zu errichten, der zugleich Ausblicke nach allen Gebieten der Wissenschaft gewähren könnte, oder auch einzelne Ideen an sich weiter auszubilden. Lie hatte zunächst ein Werk über Transformationsgruppen in Aussicht genommen, das zu gleicher Zeit die Theorie der endlichen und unendlichen continuirlichen Gruppen, nebst ihrer Invariantentheorie, in einem Bande umfassen sollte; aber an eine Inangriffnahme konnte erst gedacht werden, nachdem Herr F. Engel, auf Veranlassung von Klein und Mayer, sich zur Unterstützung bereit gefunden und Lie mit beiden Händen dieses Anerbieten ergriffen hatte. Rasch entstand in dem Dreivierteljahr (Sept.

1884—Sommer 1885), das Engel in Christiania zubrachte, eine grössere Anzahl Capitel des Werkes in erster Anlage. Für den Fortgang aber wurde ein kurz darauf eintretender Umschwung in Lie's äusseren Lebensverhältnissen, seine Uebersiedlung nach Deutschland, von Wichtigkeit: einerseits durch die Förderung, welche der persönliche Umgang mit dem Bearbeiter nun dem Werke gewährte, andrerseits durch den Nachtheil der grossen Verpflichtungen, welche die neue Stellung mit sich brachte.

Lie erhielt eine Berufung an die Universität Leipzig als Nachfolger Klein's und entschloss sich ihr zu folgen. Mit seiner Familie, die sich inzwischen 1877—1884 um zwei Töchter und einen Sohn vergrössert hatte, siedelte er im Frühjahr 1886 über, um über zwölf Jahre seiner Thätigkeit einer deutschen Universität zu widmen. Es konnte nicht fehlen, dass die ungewohnten neuen Verhältnisse und Anforderungen dem Ausländer, der zudem von ausgeprägtester Eigenart, von urwüchsig geradem und offenem Wesen, und Vertreter einer speciellen Richtung war, deren Geltendmachung umfassende neue Unterrichtsorganisationen verlangte, eine Reihe von Schwierigkeiten und Lasten auferlegte, die nur durch grosse Energie und volles Selbstvertrauen zu überwinden waren. Aber diese Eigenschaften waren bei Lie, solange er sich körperlich wohl fühlte, in mächtigem Grade entwickelt, und so gelang es ihm denn, seine Vorlesungscyklen nach und nach immer höher anzulegen und eine Reihe tüchtiger Hörer zu gewinnen, von denen jetzt eine grössere Anzahl, In- und Ausländer, als hervorragende Forscher in der Gruppentheorie oder deren Anwendungen thätig sind. Unterbrochen wurde diese Thätigkeit nur im Jahre 1889—90, als dem scheinbar hünenhaften, unermüdlich schaffenden Manne in Folge von Ueberarbeitung und Schlaflosigkeit, und vielleicht auch durch Anlage, die Nerven den Dienst versagten: er verfiel in eine tiefe Depression, aus der er sich zwar bald zu seiner vollen geistigen Schaffenskraft wieder erhob, von der aber eine Ueberspannung des Selbstgefühls und ein Misstrauen gegen Andere in seinem Gemüthe zurückblieb. Zeugniss von der erneuten Vorlesungsthätigkeit Lie's liefern, ausser den Arbeiten seiner Schule, die von Herrn G. Scheffers seit 1890 herausgegebenen drei Vorlesungswerke, welche zur Einführung in die Lie'sche Theorie der Gruppen überhaupt, der Differentialgleichungen mit infinitesimalen Transformationen und der Geometrie der Berührungstransformationen — leider noch nicht in die Theorie der Differentialinvarianten und in die von Lie immer als Abschluss gedachte allgemeine Integrationstheorie — sehr geeignet sind.

Das grundlegende Werk, die *„Theorie der Transformationsgruppen"*, rückte unter diesen Umständen, und bei den übergrossen Schwierigkeiten, welche, wie sich nach und nach herausstellte, die Systematisirung der

Lie'schen Gedankengänge bot, viel langsamer voran, als in Christiania vorausgesehen war. Es galt zunächst, eine strengere Begründung zu geben, die nun von Lie auf functionentheoretischen Boden gestellt wurde, ohne dass übrigens dabei die Beschränkung der Gültigkeit auf einen endlichen Bereich überwunden wurde; es galt vor Allem, ebenso eine durchgreifende Gestaltung des Ganzen, wie eine Herausarbeitung der Details vorzunehmen, während Lie nur die oft unbehauenen Steine geliefert hatte. Uebrigens sind auch eine Reihe neuerer Lie'scher Ideen in dem Werke verwerthet, so die der „Parametergruppe": der r-gliedrigen Gruppe zwischen den r Parametern der Transformationsgruppe selbst, die durch das associative Gesetz der Operationen geliefert wird und die für die Fragen nach allen zu einer gegebenen Gruppe isomorphen Gruppen eine Rolle spielt — ein auch 1884 (Forh.) von Lie eingeschlagener Gang, der späterhin in dem Grundproblem der Gruppenlehre, der Zusammensetzungstheorie, noch eine grössere Litteratur im Gefolge hatte. So wuchs unter den Händen des hingebungsvollen Bearbeiters das Werk, dessen Zweck ist, die *Grundlagen*, bis zu den Anwendungen hin, darzubieten, nach und nach zu drei starken Bänden heran, erschienen 1888—1893: ein von Anfang bis Ende durchaus originales Werk, das seine Selbständigkeit bis zu dem Masse aufrecht erhält, dass es keinerlei fremden Arbeiten Einfluss auf seine Entwicklungen gestatten will. In seiner sehr abstract gehaltenen Form lässt es übrigens, vielleicht mit Ausnahme des II. Bandes, der von vornherein so angelegt wurde, dass er möglichst für sich verständlich würde, den synthetischen Gang der Lie'schen Ideenbildungen ziemlich zurücktreten. Zu bedauern bleibt, dass weder die Theorie der Differentialinvarianten eingehender berücksichtigt, noch die der unendlichen Gruppen berührt werden konnte, und dass die dahin zielenden Absichten Lie's auf ein weiteres systematisches Werk zu nichte geworden sind.

Aus der Leipziger Zeit ragt unter den *Anwendungen der Gruppentheorie* eine besonders hervor, die übrigens auch ihren Platz im III. Bande des Transformationswerkes gefunden hat: die auf das „Riemann-Helmholtz'sche Raumproblem", d. h. auf die Grundlagen der Geometrie. Früh schon durch Klein und dessen Programm auf den gruppentheoretischen Charakter des Problems, und insbesondere auf die Frage der Bedeutung des Helmholtz'schen „Monodromieaxioms" hingewiesen, wälzte Lie seit 1880 diese Fragen in sich, um zuerst 1886 bei Gelegenheit der Berliner Naturforscherversammlung mit seiner Ansicht hervorzutreten. Helmholtz' Auffassung selbst war, höchst bemerkenswerth für 1868, aber dem grossen Forscher unbewusst, eine gruppentheoretische gewesen, indem sie die Gruppen der ∞^6 Bewegungen des Raumes, welche zu den drei Geometrien

führen, gegenüber allen übrigen Gruppen zu charakterisiren sucht, nämlich durch die freie Beweglichkeit (innerhalb eines beschränkten Gebiets, wie Lie hinzufügte) der starren Körper, also durch die Existenz einer Invariante zwischen je zwei Punkten, als der einzig wesentlichen Invariante. Indem Lie nun dieses Problem principiell als Gruppenproblem aufgriff, erkannte er zunächst für unseren Raum die Ueberflüssigkeit desjenigen Theils des Monodromieaxioms, der zur freien Beweglichkeit um eine feste Axe (mit *einem* Grade der Freiheit) noch die Periodicität ausdrücklich postuliren zu müssen glaubte; vor Allem aber gab er, neben einer vollen Lösung des Problems im Helmholtz'schen Sinne, eine zweite noch tiefer gehende, welche nur mit den Begriffen Punkt, Linienelement, Flächenelement operirt, Annahmen über die Transitivität der Bewegungen nur für das Infinitesimale macht, und damit auch die Helmholtz'schen differentiellen Betrachtungen verbesserte. Zu dieser Untersuchungsreihe gehört auch Lie's Forschung über die Gruppen, welche einen quadratischen Differentialausdruck invariant lassen (ibidem), als Beitrag zur Begründung der Riemann'schen Abhandlung.

Der Werth dieser Untersuchungen welche natürlich den Betrachtungen von Riemann, Lipschitz etc. nur parallel laufen, liegt wohl hauptsächlich darin, dass sie erlauben, für jede Stufe der Geometrie das geeignete Axiomensystem auszuwählen; und so haben sie mit Recht 1897 [vgl. das in der Note S. 1 angeführte Gutachten, Annalen Bd. 50] den ersten von der Kasaner Gesellschaft vertheilten Lobatschewsky-Preis erhalten.

Fast noch stolzer als auf sein grosses Gruppenwerk war Lie auf diese Anwendungen, und auf die Anwendungen überhaupt: war ihm doch der Gruppen- und Invarianten-Gedanke nicht nur ein methodischer Gesichtspunkt, von dem aus er das ganze alte Gebiet der Mathematik neu durchdenken wollte, sondern auch das Element, das nach und nach alle mathematische Wissenschaft durchdringen oder einheitlich verbinden sollte. So erfüllte es ihn mit hoher Genugthuung, als in den achtziger Jahren in der Theorie der complexen Zahlensysteme durch Poincaré und durch Lie nahestehende deutsche Mathematiker, und in den functionentheoretischen Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen durch französische Mathematiker, der Begriff der continuirlichen Gruppen mit zu Grunde gelegt wurde, und zwar unter Berufung auf ihn selbst. In das erstere Gebiet griff Lie auch ein, indem er gelegentlich („Ueber irreductible Berührungstransformationsgruppen", Sächs. Ber. von 1889) auf die Existenz irreductibler Zahlensysteme hinwies. Das functionentheoretische Gebiet aber, mit seiner Anwendung von analytischen Fortsetzungen, und noch mehr das algebraische, und besonders das arithmetische mit vorgegebenem Rationalitätsbereich, lag ausserhalb der Sphäre des Lie'schen Schaffens. Sein ganzes Denken, wie sein Wissen, stand weit ab von jener Richtung, welche,

durch grosse Forscher gepflegt, als „Präcisionsmathematik" im Laufe dieses Jahrhunderts allmählich emporgestiegen ist und am Ende desselben fast die allein herrschende zu sein scheint: gerade ihr gegenüber steht Lie da wie rückweisend auf die früheren Classiker der infinitesimalen und projectiven Geometrie, als lebendiges Zeugniss, dass auch deren Gedankengebiet unter dem Einfluss eines naiv-schöpferischen Genies, das beide Geometrien vereint, wieder fruchtbar werden und zu unabsehbaren Neuentwicklungen, neu nach Inhalt und Tragweite, gelangen kann.

Will man den wirklichen Umfang des Lie'schen Schaffens durch ein Wort festlegen, das sowohl seine Transformations- und Invariantenrichtung, als seine geometrischen Untersuchungen einschliesst, so braucht man nur sein eigentliches Ziel: die Integration der Differentialgleichungen, zu nennen.

Und wenn es der Zukunft vorbehalten sein mag, auch in den Lie ferner liegenden Gebieten seine Ideen zur Geltung zu bringen, so ist doch zweifellos, dass diese nicht für sich den Angelpunkt aller Untersuchung, sondern immer nur einen Theil der mathematischen Speculationen umfassen können. Sie werden um so anregender wirken, je mehr wir sie als blosses *Hülfsmittel* der geometrischen und analytischen Forschung zu betrachten lernen werden. Das Transformationswerk Lie's an sich mag nach Fundamentirung und System, nach analytischer Form und nach der kritischen Seite hin, dem Wandel der Zeit und der fortschreitenden Wissenschaft verfallen — und Lie selbst hat seitdem die Systematik des I. Bandes in manchen Punkten überholt (Sächs. Ber. von 1890) —: die ihm tiefer zu Grunde liegenden *begrifflichen* Ideenverbindungen Lie's in ihrer umfassenden Einfachheit und in ihrer Beweglichkeit, die geometrische Erfassung der Transformations- und Invariantentheorien mit ihrer unbeschränkten Freiheit in der Wahl des Raumelements, sie sind es, welche ihre schaffende und ordnende Kraft, ihre problemstellenden und problemlösenden Eigenschaften, ihre „synthetische" Durchdringung der Wissenschaft, die für jeden ihrem Bereich unterzuordnenden Fall die geeignete analytische Formel aus sich herausbildet, immer bewähren werden. Denn wenn die Kraft von Lie's *Schaffen* aus der ausserordentlichen Concentration seines Denkens, aus der Ausbreitung von einem einzigen Punkte aus hervorgeht, in einem Masse, dass sie als eine auf die Spitze getriebene Einseitigkeit empfunden werden könnte, so beruht die Kraft seines *Einwirkens* eben auf einer mit jener Concentration verbundenen höchsten Abstractions- und Verallgemeinerungsfähigkeit — einer Fähigkeit, die darin den echt mathematischen Geist zeigt, dass ihre wenn auch rein begrifflichen Speculationen unmittelbar in analytisches Gewand gekleidet werden können.

Im Jahre 1898 zog es Lie zurück in sein norwegisches Heimathland, an dessen gewaltiger Natur er, der rüstige Fusswanderer, so oft Körper und Geist erfrischt hatte, und für das sein Herz hochschlug, wie für seine Familie und für seine Wissenschaft. Nachdem für ihn in Christiania wieder eine Universitätsprofessur unter ehrenvollen Bedingungen errichtet worden war, siedelte er im September dahin über. Aber seine körperlichen Kräfte waren gebrochen, und schon um Weihnachten zeigte sich der unvermeidliche Ausgang. Am 18. Februar 1899 erlag Lie einer perniciösen Anämie. Mit ihm schied der originalste und schöpferischste Vertreter der geometrischen Wissenschaft der letzten drei Decennnien dieses Jahrhunderts dahin.

Erlangen, September 1899.