

Werk

Titel: Mathematische Annalen

Jahr: 1919

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN235181684_0079

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0079

LOG Id: LOG_0013

LOG Titel: Dimension und äußeres Maß

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Dimension und äußeres Maß.

Von

FELIX HAUSDORFF in Greifswald.

Herr Carathéodory hat eine hervorragend einfache und allgemeine, die Lebesguesche als Spezialfall enthaltende Maßtheorie entwickelt*) und damit insbesondere das p -dimensionale Maß einer Punktmenge im q -dimensionalen Raume definiert. Hierzu geben wir im folgenden einen kleinen Beitrag. Nach einleitenden Betrachtungen, die das Carathéodorysche Längenmaß in naheliegender Weise verallgemeinern und einen Überblick über die reiche Fülle analoger Maßbegriffe gestatten, stellen wir eine Erklärung des p -dimensionalen Maßes auf, die sich unmittelbar auf nicht ganzzahlige Werte von p ausdehnen und Mengen *gebrochener Dimension* als möglich erscheinen läßt, ja sogar solche, deren Dimensionen die Skala der positiven Zahlen zu einer verfeinerten, etwa logarithmischen Skala ausfüllen. Die Dimension wird so zu einem Graduierungsmerkmal wie die „Ordnung“ des Nullwerdens, die „Stärke“ der Konvergenz und verwandte Begriffe. In wesentlich anderer Art hat bekanntlich Herr Fréchet Dimensionstypen definiert, die die Reihe der natürlichen Zahlen interpolieren.**)

Nicht so ungezwungen wie unser Dimensionsbegriff ist freilich der Nachweis, daß es Mengen gibt, die genau von vorgeschriebener Dimension sind, d. h. ein entsprechendes Maß besitzen, das weder Null noch unendlich ist; wir beschränken uns in dieser Hinsicht auf die einfachsten Beispiele, nämlich gewisse lineare nirgendsdichte perfekte Mengen (auf welche, für abnormes Verhalten aller Art typische, Mengengattung hier ein neues Licht fällt) und die hieraus durch Multiplikation entstehenden ebenen und räumlichen Mengen.

*) C. Carathéodory, Über das lineare Maß von Punktmengen — eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs, Gött. Nachr. 1914, S. 404—426. Hierauf beziehen sich unsere Zitate. Die etwas modifizierte Darstellung in den Vorlesungen über reelle Funktionen (Teubner 1918) enthält gerade den Teil der Theorie nicht, an den sich unsere Arbeit anschließt, und konnte daher außer Betracht bleiben.

**) M. Fréchet, Les dimensions d'un ensemble abstrait, Math. Ann. 68 (1910), S. 145—168.

1. Die Voraussetzungen der Carathéodoryschen Maßtheorie sind:

I. Jeder Punktmenge A eines q -dimensionalen euklidischen Raumes ist eine Zahl $L(A)$ eindeutig zugeordnet, die entweder Null oder positiv oder unendlich ist ($0 \leq L(A) \leq \infty$).

II. Für eine Teilmenge B von A ist $L(B) \leq L(A)$.

III. Ist A die Summe von endlich oder abzählbar vielen Mengen $A_1, A_2, \dots$, so ist $L(A) \leq L(A_1) + L(A_2) + \dots$.

IV. Sind A und B zwei Mengen, deren Entfernung positiv ist, so ist

$$L(A \mp B) = L(A) + L(B).$$

V. $L(A)$ ist die untere Grenze von $L(B)$ für die meßbaren Mengen B über A (d. h. die A als Teilmenge enthalten).

Meßbar (bezüglich L) heißt eine Menge A , wenn für jede Menge W die Gleichung gilt

$$L(W) = L(AW) + L(W - AW).$$

Jede Mengenfunktion $L(A)$, die diesen fünf Bedingungen genügt, heiße ein *äußeres Maß*; ihr entspricht ein System meßbarer Mengen und eine Maßtheorie mit den von Herrn Carathéodory entwickelten Eigenschaften. Auf Grund von IV. sind die Würfel des q -dimensionalen Raumes, die abgeschlossenen Mengen, die offenen Mengen oder Gebiete und die (hieraus durch wiederholte Summen- und Durchschnittsbildung über Mengenfolgen entstehenden) *Borelschen Mengen* stets meßbar.

Wenn $L(A)$ nur die vier ersten Bedingungen erfüllt, so definiere man $M(A)$ resp. $N(A)$ als untere Grenze von $L(B)$ für die (bezüglich L) meßbaren resp. Borelschen Mengen B über A . Diese beiden Funktionen erfüllen dann alle fünf Bedingungen und sind also äußere Maße. Wir unterdrücken den einfachen Beweis dieser Bemerkung, von der wir im folgenden keinen Gebrauch machen.

Wir werden uns naturgemäß auf äußere Maße beschränken, die für kongruente Mengen gleich ausfallen. Wenn überdies $L(B) = m^p L(A)$ ist, sobald B zu A im Verhältnis $m:1$ ähnlich ist, so nennen wir L ein *äußeres Maß von der Dimension p* .

Wenn zwei äußere Maße $L(A)$, $M(A)$ für jede Menge A gleichzeitig Null oder positiv oder unendlich sind, so nennen wir sie *von gleicher Ordnung*; das ist insbesondere der Fall, wenn mit zwei positiven Konstanten h, k stets

$$hL(A) \leq M(A) \leq kL(A)$$

gilt. Wenn $M(A)$ stets 0 ist, sobald $L(A)$ endlich ausfällt (oder $L(A)$ stets ∞ , sobald $M(A)$ von Null verschieden ist), so heiße L *von niedrigerer*, M *von höherer Ordnung*; das ist insbesondere der Fall, wenn für jedes

positive ε $M(A) \leq \varepsilon L(A)$ gilt.

2. Es sei $\mathfrak{U}$ ein System beschränkter Punktmengen U des q -dimensionalen Raumes von der Art, daß man jede beliebige Menge A dieses Raumes in endlich oder abzählbar viele Mengen U mit beliebig kleinen Durchmessern $d(U)$ einschließen kann; jeder Menge U sei eine endliche, nicht negative Zahl $l(U)$ zugeordnet. Schließen wir, bei gegebenem positiven ϱ , A in $\mathfrak{S} U_n$ ein mit $d(U_n) < \varrho$; die untere Grenze der bei allen solchen Mengenfolgen auftretenden Summen $\sum l(U_n)$ heiße $L_\varrho(A)$; sie kann Null, positiv oder unendlich sein. Nimmt ϱ ab, so verschärfen sich die Bedingungen, $L_\varrho(A)$ nimmt nicht ab und hat einen endlichen oder unendlichen Grenzwert

$$\begin{aligned} L(A) &= \lim_{\varrho \rightarrow 0} L_\varrho(A) \\ &= \liminf_{\varrho \rightarrow 0} \sum l(U_n) \\ &\geq L_\varrho(A). \end{aligned}$$

Diese Mengenfunktion erfüllt, ohne weitere Einschränkung über $l(U)$, die vier ersten Carathéodoryschen Bedingungen und, wenn die U Borelsche Mengen sind, auch die fünfte.

Der Beweis mag unterdrückt werden, da er fast wörtlich wie der Carathéodorysche (S. 17 ff) für das lineare Maß verläuft. Zur fünften Bedingung sei bemerkt, daß es über jeder Menge A eine Menge W mit $L(W) = L(A)$ von folgender besonderer Form gibt: W ist Durchschnitt abzählbar vieler Mengen V , die ihrerseits Summen abzählbar vieler Mengen U sind. Mit den U ist also auch W eine Borelsche, insbesondere meßbare Menge, und die Bedingung V. ist erfüllt.

3. Sei $\mathfrak{B}$ ein zweites Mengensystem wie $\mathfrak{U}$ und jeder Menge V dieses Systems eine endliche Zahl $m(V) \geq 0$ zugeordnet; wir definieren damit analog wie zuvor die Zahlen $M_\varrho(A)$, $M(A)$. Nehmen wir an, zwischen diesen Systemen und zugeordneten Funktionen l , m bestehe die folgende Beziehung:

a) Zu jeder Menge U und jedem positiven ε gibt es eine Menge V über U derart, daß

$$d(V) < rd(U) + \varepsilon, \quad m(V) < kl(U) + \varepsilon,$$

wo r, k zwei positive Konstanten sind.

Man schließt leicht, daß dann für jede Menge A

$$M_{r\varrho}(A) \leq kL_\varrho(A), \quad M(A) \leq kL(A)$$

ist. Ein besonderer Fall dieses Verhaltens (mit $r = k = 1$) ist der, daß $\mathfrak{U}$ Teilsystem von $\mathfrak{B}$ und $l(U) = m(U)$ ist; dann ist also $M(A) \leq L(A)$.

Steht jedes der beiden Systeme zum andern in einer solchen Beziehung, so ist mit zwei positiven Konstanten h, k

$$hL(A) \leq M(A) \leq kL(A),$$

die beiden Mengenfunktionen sind von gleicher Ordnung. Ist überdies $h = k$, $M(A)$ mit $L(A)$ proportional, und besteht $\mathfrak{B}$ aus Borelschen Mengen, so ist auch für die auf $\mathfrak{U}$ beruhende Mengenfunktion $L(A)$ die fünfte Carathéodorysche Bedingung erfüllt und es gibt über jeder Menge A eine Borelsche Menge B mit $L(B) = L(A)$.

4. Die Funktion $l(U) \geq 0$, die wir uns übrigens für jede beschränkte Menge definiert denken, habe eine der folgenden Eigenschaften:

A) Für die kleinste abgeschlossene Menge U_α über U ist

$$l(U_\alpha) = l(U).$$

B) Umgibt man jeden Punkt von U als Mittelpunkt mit einer Kugel vom Radius β und ist U_β die Menge der inneren Punkte dieser Kugeln, so ist für beliebiges $\varepsilon > 0$ und hinreichend kleines β

$$l(U_\beta) < l(U) + \varepsilon.$$

Wir wollen die Funktion $l(U)$ im Falle A) *abschließbar*, im Falle B) *stetig* nennen.

Sei nun $\mathfrak{U}$ wieder ein Mengensystem von der bekannten Art; unter $\mathfrak{B}$ verstehen wir entweder das System der abgeschlossenen Mengen U_α oder das der offenen Mengen U_β (wo β alle positiven Zahlen oder eine Menge solcher mit der Häufungsstelle 0 durchläuft). Da auch der Durchmesser $d(U)$ eine abschließbare und stetige Mengenfunktion ist, so kann man zu gegebenem U und ε ein $V = U_\alpha$ oder $V = U_\beta$ so bestimmen, daß entweder $d(V) = d(U)$, $l(V) = l(U)$ oder wenigstens $d(V) < d(U) + \varepsilon$, $l(V) < l(U) + \varepsilon$.

Das ist eine Beziehung von der Form $\alpha)$ und demnach

$$M(A) \leq L(A),$$

wo das äußere Maß M sich auf das System $\mathfrak{B}$ und die gleiche Funktion $l(V)$ bezieht.

Ist $\mathfrak{U}$ das System *aller* beschränkten Mengen, also $\mathfrak{B}$ Teilsystem von $\mathfrak{U}$, so ist andererseits

$$L(A) \leq M(A)$$

und $L(A) = M(A)$ ist ein äußeres Maß, das auch die fünfte Carathéodorysche Bedingung erfüllt und zu jeder Menge A die Existenz einer Borelschen Menge B über A mit $L(B) = L(A)$ sichert. Wir können also den Satz aussprechen:

Ist $l(U) \geq 0$ eine für beschränktes U definierte, abschließbare oder stetige Mengenfunktion und schließt man A in endlich oder abzählbar viele beschränkte Mengen U_n mit Durchmessern $< \rho$ ein, so ist

$$L(A) = \liminf_{\rho \rightarrow 0} \sum l(U_n) \quad \text{ein äußeres Maß.}$$

5. Die Funktion $l(U)$ sei *stetig* und überdies *monoton*, d. h. ist U Teilmenge von V , so ist $l(U) \leq l(V)$.

Sie ist dann auch abschließbar, denn U_α ist der Durchschnitt der Mengen U_β .

Es seien dann $\mathfrak{U}, \mathfrak{B}$ zwei Mengensysteme von folgender Art:

Zwischen U und U_β liegt stets ein V ; zwischen V und V_β liegt stets ein U .

• Da auch der Durchmesser $d(U)$ stetig und monoton ist, so kann man zu jedem U und positiven ε ein V angeben mit

$$d(V) < d(U) + \varepsilon, \quad l(V) < l(U) + \varepsilon$$

und es ist also $M(A) \leq L(A)$, umgekehrt aber auch $L(A) \leq M(A)$, also stimmen die (auf $\mathfrak{U}, \mathfrak{B}$ und die Funktion l bezüglichen) Mengenfunktionen $L(A), M(A)$ überein:

Die Voraussetzung trifft z. B. zu, wenn die U abgeschlossene, die V offene Kugeln des q -dimensionalen Raumes sind. Die hierauf gegründeten $L(A), M(A)$ würden zwar ohne jede Einschränkung über die Funktion l (die nur ≥ 0 sein muß) äußere Maße sein, da es sich um Borelsche Mengen handelt; aber auf ihre Gleichheit könnte im allgemeinen nicht geschlossen werden.

Dasselbe gilt, wenn man statt der Kugeln Würfel, Quadern (= rechtwinklige Parallelepipeda), Simplexe des q -dimensionalen Raumes verwendet; es ist bei stetiger monotoner Funktion $l(U)$ gleichgültig, ob diese Figuren abgeschlossen oder offen (mit oder ohne Begrenzung) gewählt werden.

6. Wir nennen einige Beispiele monotoner stetiger Funktionen $l = l(U)$.

A) Der Durchmesser d , d. i. die obere Grenze der Entfernung eines zu U gehörigen Punktepaars $u_0 u_1$.

B) Die obere Grenze Δ der Fläche eines Dreiecks $u_0 u_1 u_2$, dessen Ecken auf U liegen.

C) Die obere Grenze Δ_p des p -dimensionalen Volumens eines Simplex $u_0 u_1 \dots u_p$, dessen Ecken auf U liegen.

Hiervon sind d und Δ Spezialfälle für $p = 1, 2$. Ein auf $l = \Delta_p$ bezügliches äußeres Maß hat die Dimension p . Ein auf Δ_q bezügliches ist nicht nur bei längentreuer, sondern auch bei affiner volumentreuer Transformation des q -dimensionalen Raumes invariant.

D) Die untere Grenze des (elementargeometrischen) q -dimensionalen Volumens einer Kugel (oder eines Würfels, Quaders, Simplex), die die Menge U enthält.

E) Die untere Grenze der Volumenssummen *endlich* vieler Kugeln (oder dergl.), die U einschließen, d. h. der äußere *Inhalt* von U (im Jordan-Peanoschen Sinne, nicht das äußere Lebesguesche Maß).

F) Das q -dimensionale Volumen (im Jordanschen oder Lebesgueschen Sinne) der kleinsten *konvexen* Menge U_c über U .

G) Die obere Grenze des p -dimensionalen Volumens der senkrechten Projektion von U_c auf eine p -dimensionale Ebene; dies nennt Carathéodory den p -dimensionalen Durchmesser von U . Hiervon sind A) und F) Spezialfälle für $p = 1$, $p = q$.

Der Beweis, daß diese Mengenfunktionen stetig sind, ist elementargeometrischer Natur bis auf die letzten beiden Fälle, die eingehendere Betrachtungen über konvexe Mengen erfordern; übrigens genügt ja die leichter zu beweisende Abschließbarkeit.

Bedenkt man nun noch, daß jede nichtnegative resp. stetige resp. monotone (mit wachsendem t nicht abnehmende) Funktion $\lambda(t)$ von $t \geq 0$ aus einer nichtnegativen resp. stetigen resp. monotonen Mengenfunktion $l(U)$ eine ebensolche $\lambda(l(U))$ hervorgehen läßt, daß man auch mehrere Mengenfunktionen in analoger Weise verknüpfen kann und daß endlich noch die Wahl des Systems U freisteht, so ergibt sich ein weiter Spielraum von Möglichkeiten, äußere Maße im Sinne Carathéodorys zu definieren. Um abseits der folgenden Betrachtungen, die sich auf Funktionen von $d(U)$ beschränken, noch ein einzelnes unter B) oder D) fallendes Beispiel zu nennen: schließt man die ebene Menge A in Dreiecke Δ_n von Durchmessern $< \rho$ ein, so erhält man ein äußeres Maß (von der Dimension $\frac{2}{3}$)

$$L(A) = \liminf_{\rho \rightarrow 0} \sum \Delta_n^{\frac{1}{3}},$$

das nach einer Bemerkung von Herrn Blaschke*) für konvexe Kurvenbögen auf die „Affinlänge“

$$\int k^{\frac{1}{3}} ds$$

(k Krümmung, s Bogenlänge) führt.

7. Für $p = 1, 2, \dots$ erhält man das p -dimensionale äußere Maß von Carathéodory, indem man für die Mengenfunktion $l(U)$ des Satzes am Schlusse von Nr. 4 den in Nr. 6, G) erklärten p -dimensionalen Durchmesser wählt. Da diese Definition ziemlich viel aus der Theorie der kon-

*) W. Blaschke, Über affine Geometrie III. Eine Minimumeigenschaft der Ellipse (Leipz. Berichte 69 (1917), S. 12).

vexen Mengen voraussetzt, scheint eine Vereinfachung erwünscht. Wenn man z. B. statt der Mengen U speziell Kugeln setzt, erhält man ein — im Sinne von Nr. 1 jedenfalls p -dimensionales — äußeres Maß L_p durch die Vorschrift:

Definition 1. Man schließe A in endlich oder abzählbar viele Kugeln K_n von Durchmessern $d_n < \varrho$ ein und bilde

$$L_p(A) = \liminf_{\varrho \rightarrow 0} c_p \sum d_n^p,$$

wobei

$$c_p = \pi^{\frac{p}{2}} : 2^p \Pi\left(\frac{p}{2}\right)$$

das Volumen einer p -dimensionalen Kugel vom Durchmesser 1 ist.

Übrigens kann man nun den p -dimensionalen Durchmesser ganz beiseite lassen, denn L_p ist nach Nr. 2 sicherlich ein äußeres Maß, da die Kugeln Borelsche Mengen sind, und würde, da $d(U)^p$ eine stetige Mengenfunktion ist, auch eins bleiben, wenn man sie durch beliebige beschränkte Mengen ersetzt. Man könnte ferner die Definition durch Benutzung von Würfeln, Quadern, Simplexen an Stelle der Kugeln modifizieren, mit eventueller Änderung des Faktors c_p ; da $d(U)^p$ auch monoton ist, kommt es nicht darauf an, ob diese Mengen als abgeschlossen oder offen gedacht werden. Alle diese äußeren Maße sind übrigens von gleicher Ordnung, da man jede Menge der einen Gattung vom Durchmesser d in eine Menge der andern vom Durchmesser rd einschließen kann, wo r ein konstanter Faktor ist; z. B. kann man eine beschränkte Menge vom Durchmesser d des q -dimensionalen Raumes gewiß in eine Kugel vom Durchmesser $2d$, sogar vom Durchmesser $\left(\frac{2q}{q+1}\right)^{\frac{1}{2}} d$ einschließen.*)

Bleiben wir bei der Definition 1 und zeigen, daß sie in den Fällen $p = 1$, $p = 2$, $p = q$ wenigstens bei den einfachsten Mengen die üblichen Ausdrücke für Länge, Fläche, Volumen liefert.

a) Für jede Menge A des q -dimensionalen Raumes ist $L_q(A)$ gleich dem äußeren Lebesgueschen Maße $m(A)$.

Es ist einerseits bei jeder Einschließung von A in Kugeln die Summe ihrer Volumina $\geq m(A)$, also $L_q(A) \geq m(A)$. Andererseits kann man nach bekannten Überdeckungssätzen von Vitali und Lebesgue A in Kugeln von beliebig kleinen Durchmessern so einschließen, daß die Summe ihrer Volumina $m(A)$ beliebig wenig übertrifft, also ist stets $L_q(A) \leq m(A)$ und $L_q(A) \leq m(A)$.

*) H. Jung, Über die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschließt, Diss. Marburg 1899 = Journal f. Math. 123 (1901), S. 241—257.

β) Für einen einfachen Kurvenbogen A ist $L_1(A)$ gleich der Länge $\lambda(A)$, d. h. der oberen Grenze der Längen der in A eingeschriebenen Polygone.

Man hat A in Kugeln K_n von Durchmessern $d_n < \varrho$ einzuschließen und

$$L_1(A) = \liminf_{\varrho \rightarrow 0} \sum d_n$$

zu bilden. Der Beweis, daß $L_1 \geq \lambda$, verläuft genau wie bei Carathéodory (S. 21); man kann auch sagen, er ist in dem Carathéodoryschen Beweis enthalten, da dessen L_1 , auf Zulassung aller beschränkten Mengen U beruhend, kleiner oder gleich dem unsrigen, auf Benutzung von Kugeln beruhenden, ist. Um auch $L_1 \leq \lambda$ zu beweisen, wo λ endlich angenommen werden kann, teile man A in Teilbögen von Längen $\lambda_n < \varrho$ und schließe jeden solchen in eine Kugel vom Durchmesser λ_n ein (ein Kurvenbogen von der Länge λ liegt ganz in einer Kugel vom Radius $\frac{\lambda}{2}$, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt des Bogens ist); es ist also $L_1 \leq \sum \lambda_n = \lambda$, $L_1 \leq \lambda$.

γ) Für das Flächenstück

$$F: \quad a \leq x \leq A, \quad b \leq y \leq B, \quad z = f(x, y)$$

mit stetigen Ableitungen $p = f_x$, $q = f_y$ ist $L_2(F)$ gleich dem Integral

$$\int_a^A \int_b^B \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy.$$

Der Beweis braucht nur kurz angedeutet zu werden. Es ist $L_2(F) = L = \lim_{\varrho \rightarrow 0} L_\varrho$ und L_ϱ (eigentlich $L_{2\varrho}$) die untere Grenze von $\pi \sum \varrho_n^2$, wenn F in Kugeln von Radien $\varrho_n < \varrho$ eingeschlossen wird. Man kann nun das Rechteck

$$R: \quad a \leq x \leq A, \quad b \leq y \leq B$$

in Teilrechtecke mit beliebig kleiner Schwankung von p, q zerlegen; nehmen wir zunächst an, R selbst sei ein solches Teilrechteck, ziehen die Tangentialebene in einem Punkte s_0 von F und projizieren jeden Punkt s von F durch Vertikalen (Parallelen zur z -Achse) in einen Punkt t der Tangentialebene, wodurch ein ebenes Viereck T entsteht; andererseits sei T^* die senkrechte Projektion von F auf dieselbe Ebene. Man kann dann annehmen (wenn man die elementaren Inhalte dieser Mengen mit denselben Buchstaben bezeichnet):

daß T und T^* sich von F (dem obigen Integral) um weniger als εR unterscheiden,

und daß bei der ersten Projektion der Verzerrungsquotient $ss_1:tt_1$ kleiner als $1 + \varepsilon$ ist.

Nun schließe man T in Kreise mit Mittelpunkten t_n (in T selbst) und Radien $\tau_n < \frac{\varrho}{1+\varepsilon}$ ein derart, daß

$$\pi \sum \tau_n^2 < T + \delta,$$

wo $\delta > 0$ beliebig ist. Dann schließen die Kugeln mit Mittelpunkten s_n (den zu t_n entsprechenden Flächenpunkten) und Radien $(1+\varepsilon)\tau_n < \varrho$ die Fläche F ein und es ist

$$L_\varrho \leq \pi \sum (1+\varepsilon)^2 \tau_n^2 < (1+\varepsilon)^2 (T + \delta),$$

also, wenn man ϱ und δ nach 0 konvergieren läßt: $L \leq (1+\varepsilon)^2 T$.

Schließt man andererseits F in Kugeln mit Radien $\varrho_n < \varrho$ und

$$\pi \sum \varrho_n^2 < L_\varrho + \delta$$

ein, so erhält man durch senkrechte Projektion auf die Tangentialebene Kreise mit denselben Radien, die T^* einschließen, also

$$T^* \leq \pi \sum \varrho_n^2$$

oder $T^* \leq L$. Zusammengefaßt

$$F - \varepsilon R < L < (1+\varepsilon)^2 \cdot (F + \varepsilon R).$$

Man beachte noch, daß $L(F)$ sich nicht ändert, wenn man die vier Begrenzungslinien (den Rechteckseiten entsprechend) wegläßt, weil sie als ebene Kurven das Lebesguesche Flächenmaß 0 und daher auch das L -Maß 0 haben (vgl. diese Nr., α).

Kehren wir zu der ursprünglichen Bedeutung von R zurück, zerlegen es in Teilrechtecke R_n obiger Beschaffenheit und beachten, daß nach der letzten Bemerkung $L = \sum L_n$, so ergibt sich obige Ungleichung auch für das ganze Rechteck und daher $L = F$.

8. Nachdem die Definition 1 so ihre Existenzberechtigung wenigstens in gewissem Umfange erwiesen hat, ist es ein naheliegender Gedanke (der bei der Carathéodoryschen Definition ausgeschlossen wäre), sie auch auf *nicht ganzzahlige* positive Zahlen p auszudehnen. Es ist nur die Frage, ob dies nicht vielleicht in dem Sinne zu einer Trivialität führt, daß dann alle Mengen das äußere Maß 0 oder ∞ bekommen, d. h. es erwächst die Aufgabe, Mengen A zu konstruieren, für die $0 < L_p(A) < \infty$ und die in diesem Sinne genau von der Dimension p sind. Dies Problem läßt sich noch erweitern. Bei der Definition von L_p hat, vom Zahlenfaktor c_p abgesehen, die p te Potenz des Durchmessers d die Rolle der Mengenfunktion l gespielt: kann man dafür auch etwa eine Funktion wie $d^p \log \frac{1}{d}$ setzen, die für $d \rightarrow 0$ schwächer als d^p , aber stärker als jede niedrigere Potenz Null wird, und in diesem Sinne Mengen bilden, deren Dimension in die

Zwischenstufen der Skala der positiven Zahlen fällt? Wir werden also von der in Nr. 6. hervorgehobenen Freiheit Gebrauch machen und jeder *positiven, stetigen, mit x wachsenden und zugleich mit x nach 0 konvergierenden Funktion* $\lambda(x)$ ein äußeres Maß $L(A)$ zuordnen nach folgender Vorschrift:

Definition 2. Man schließe A in endlich oder abzählbar viele Kugeln K_n ein, deren Durchmesser $d_n < \varrho$ sind, und bilde

$$L(A) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} L_{\varrho}(A),$$

wo $L_{\varrho}(A)$ die untere Grenze der Summen $\sum \lambda(d_n)$ ist.

Die Einschränkungen, denen wir $\lambda(x)$ unterworfen haben, sind zwar nicht unbedingt notwendig, aber im Sinne von Nr. 4 und 5 zweckmäßig und zugleich der Absicht entsprechend, das Null- oder Unendlichwerden aller $L(A)$ auszuschließen.

Wenn $0 < L(A) < \infty$, so sagen wir, A sei von der Dimension $[\lambda(x)]$. Die Dimension $[x^p]$ bezeichnen wir auch mit (p) ; eine Menge dieser Dimension ist im früheren Sinne (Nr. 1) von der Dimension p , aber nicht umgekehrt (s. u.).

Sind $\lambda(x)$, $\mu(x)$ zwei Funktionen, denen die äußeren Maße $L(A)$, $M(A)$ entsprechen, und sind L , M von gleicher Ordnung, so nennen wir die Dimensionen $[\lambda]$, $[\mu]$ gleich: jede Menge von der Dimension $[\lambda]$ ist gleichzeitig von der Dimension $[\mu]$ und umgekehrt. Ist M von höherer Ordnung als L , so nennen wir auch $[\mu]$ die höhere, $[\lambda]$ die niedere Dimension; eine Menge von bestimmter Dimension hat für jede höhere Dimension das Maß 0, für jede niedere das Maß ∞ . Natürlich brauchen zwei Dimensionen nicht in diesem Sinne vergleichbar zu sein.

Offenbar hängt $L(A)$ nur von dem Verhalten von $\lambda(x)$ in einer beliebig kleinen Nachbarschaft der Stelle $x = 0$ ab, d. h. die Dimension erscheint hier als Abstufungsmerkmal wie die „Ordnung“ des Nullwerdens einer Funktion und verwandte Begriffe. Ist $\lambda(x) \leq \mu(x)$ für hinreichend kleines x , so ist $L(A) \leq M(A)$ für jede Menge A ; ist $\mu = c\lambda$ ($c > 0$), so ist $M = cL$. Liegt $\frac{\mu}{\lambda}$ zwischen zwei positiven Schranken, so sind die Dimensionen $[\lambda]$, $[\mu]$ gleich. Ist $\frac{\mu}{\lambda} \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$, so ist $M \leq \varepsilon L$ für jedes positive ε , M verschwindet bei endlichem L , und $[\mu]$ ist die höhere, $[\lambda]$ die niedere Dimension. Speziell ist (q) die höhere, (p) die niedere Dimension, wenn $q > p$. Einer Funktion wie $e^{-\frac{1}{x}}$, die stärker Null wird als jedes x^p , entspricht eine unendlich große Dimension, die von keiner euklidischen Punktmenge erreicht wird, während unendlich kleine Dimensionen sich im folgenden als realisierbar erweisen werden. Die Funktionen der bekannten logarithmischen Skala

$$\lambda(x) = x^{p_0} \left(\frac{1}{l \frac{1}{x}} \right)^{p_1} \left(\frac{1}{l_2 \frac{1}{x}} \right)^{p_2} \cdots \left(\frac{1}{l_k \frac{1}{x}} \right)^{p_k}; \quad **)$$

worin das erste nichtverschwindende p_i positiv sein soll, sind für hinreichend kleines x mitsamt ihren Ableitungen positiv, unseren Voraussetzungen entsprechend; sie definieren Dimensionen, die auch mit

$$P = (p_0, p_1, \dots, p_k)$$

bezeichnet werden mögen*) und lexikographische Anordnung zeigen, d. h. Q ist höher als P , wenn die erste nichtverschwindende Differenz $q_i - p_i$ positiv ist. Wir scheiden sie in zwei Klassen:

Dimensionen niedriger als (1): $\frac{\lambda(x)}{x} \rightarrow \infty$.

Hier ist $\lambda'(x) \rightarrow \infty$, $\lambda''(x)$ negativ für kleine x , die Funktion $\lambda(x)$ *konvex* (nach oben). Für die Exponenten gilt

entweder $p_0 = 0$ und das erste nichtverschwindende $p_i > 0$,

oder $0 < p_0 < 1$,

oder $p_0 = 1$ und das nächste nichtverschwindende $p_k < 0$.

Dimensionen höher als (1): $\frac{\lambda(x)}{x} \rightarrow 0$.

Hier ist $\lambda'(x) \rightarrow 0$, $\lambda''(x)$ positiv, $\lambda(x)$ *konkav*;

entweder $p_0 = 1$ und das nächste nichtverschwindende $p_k > 0$,

oder $p_0 > 1$.

Den Übergang bildet die Dimension (1) mit $\lambda(x) = x$.

9. Um *lineare* Mengen vorgeschriebener Dimension $[\lambda(x)]$ zu bilden, wollen wir nach diesem Fingerzeig $\lambda(x)$ als *konvex* voraussetzen. Unsere Annahmen für die stetige Funktion $\lambda(x)$ der positiven Variablen x sind also:

$$(\alpha) \quad \lambda(x) > 0.$$

$$(\beta) \quad \lambda(x_1) < \lambda(x_2) \quad \text{für} \quad x_1 < x_2.$$

$$(\gamma) \quad \begin{vmatrix} \lambda(x_1) & x_1 & 1 \\ \lambda(x_2) & x_2 & 1 \\ \lambda(x_3) & x_3 & 1 \end{vmatrix} > 0 \quad \text{für} \quad x_1 < x_2 < x_3.$$

$$(\delta) \quad \lambda(x) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad x \rightarrow 0$$

$$(\varepsilon) \quad \lambda(x) \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad x \rightarrow \infty.$$

*) Eine Menge dieser Dimension ist, im Sinne des Verhaltens bei ähnlicher Vergrößerung, von der Dimension p_0 ; der jetzige Dimensionsbegriff unterscheidet feiner als der frühere.

*) $\log_k t = \underbrace{\log_2 \log_2 \dots \log_2 t}_k$

Wesentlich sind nur die vier ersten Bedingungen für eine Nachbarschaft der Stelle $x = 0$; der Einfachheit wegen denken wir uns aber $\lambda(x)$ so fortgesetzt, daß sie für alle positiven x erfüllt sind und auch (ε) gilt.

Nach (γ) ist die Kurve $y = \lambda(x)$ nach oben konvex, der Kurvenpunkt 2 liegt über der Sehne 13 und es folgt für die Differenzenquotienten

$$12 > 13 > 23,$$

wenn
$$ik = \frac{\lambda(x_k) - \lambda(x_i)}{x_k - x_i}$$

gesetzt wird. Ist also auch $x_1 < x_4 < x_3$, so ist zugleich

$$14 > 13 > 43,$$

also
$$14 > 23, \quad 12 > 43.$$

In der ersten dieser Relationen nehme man $x_4 = x_1 - x_2 + x_3$ zu x_2 in bezug auf die Mitte von x_1, x_3 symmetrisch; es kommt

$$(\xi) \quad \lambda(x_1 - x_2 + x_3) > \lambda(x_1) - \lambda(x_2) + \lambda(x_3) \quad (x_1 < x_2 < x_3).$$

In der zweiten Relation nehme man, mit $\alpha > 1$, $x_4 = \alpha x_1$ und $x_3 = \alpha x_2$ an; es kommt

$$(\eta) \quad \alpha \lambda(x_2) - \alpha \lambda(x_1) > \lambda(\alpha x_2) - \lambda(\alpha x_1) \quad (x_1 < x_2, \alpha > 1).$$

Die Funktion $\alpha \lambda(x) - \lambda(\alpha x)$ nimmt also mit x zu und ist größer als ihr Grenzwert 0 für $x \rightarrow 0$, also

$$(\vartheta) \quad \alpha \lambda(x) > \lambda(\alpha x) \quad (\alpha > 1).$$

Setzt man in (ξ) $x_3 = x_2 + h$, so ist

$$\lambda(x_1 + h) - \lambda(x_1) > \lambda(x_2 + h) - \lambda(x_2) \quad (x_1 < x_2, h > 0),$$

die Funktion $\lambda(x + h) - \lambda(x)$ nimmt mit wachsendem x ab und ist kleiner als ihr Grenzwert $\lambda(h)$ für $x \rightarrow 0$, also

$$(\iota) \quad \lambda(x_1 + x_2) < \lambda(x_1) + \lambda(x_2).$$

Nach dieser Vorbetrachtung wollen wir zeigen, daß es lineare abgeschlossene Mengen A von der Dimension $[\lambda(x)]$, d. h. mit endlichem positiven Maß $L(A)$ gibt; $L(A)$ ist $\lim_{\varrho \rightarrow 0} L_\varrho(A)$ und $L_\varrho(A)$ die untere

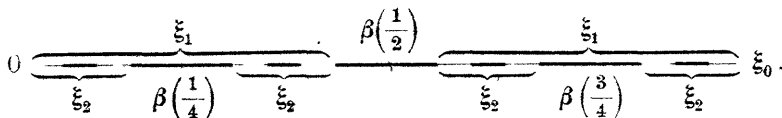
Grenze von $\sum \lambda(\alpha_n)$, wenn man A in Intervalle von Längen $\alpha_n < \varrho$ einschließt.

10. Wir nehmen eine Folge positiver Zahlen $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ mit

$$(1) \quad \xi_0 > 2\xi_1, \quad \xi_1 > 2\xi_2, \quad \dots$$

an. Aus dem abgeschlossenen Intervall $[0, \xi_0]$ der x -Achse tilgen wir das mittlere offene, zweckmäßig mit $\beta\left(\frac{1}{2}\right)$ zu bezeichnende Intervall von der

Länge $\xi_0 - 2\xi_1$; aus den verbleibenden beiden abgeschlossenen Intervallen von der Länge ξ_1 tilgen wir je das mittlere offene Intervall von der Länge $\xi_1 - 2\xi_2$ und nennen diese getilgten Intervalle links $\beta\left(\frac{1}{4}\right)$, rechts $\beta\left(\frac{3}{4}\right)$; aus den verbleibenden vier abgeschlossenen Intervallen von der Länge ξ_2 tilgen wir je das mittlere offene Intervall von der Länge $\xi_2 - 2\xi_3$ und nennen diese getilgten Intervalle von links nach rechts $\beta\left(\frac{1}{8}\right)$, $\beta\left(\frac{3}{8}\right)$, $\beta\left(\frac{5}{8}\right)$, $\beta\left(\frac{7}{8}\right)$; usw.



So wird jeder dyadisch rationalen Zahl y zwischen 0 und 1 ein offenes Intervall $\beta(y)$ zugeordnet, und nach Tilgung der offenen Menge $B = \sum \beta(y)$ aus dem Grundintervall $[0, \xi_0]$ verbleibt eine perfekte, nirgendsdichte Menge A , die sich für $n = 0, 1, 2, \dots$ in 2^n Intervalle von der Länge ξ_n einschließen läßt und deren Maß $L(A)$, wegen $\xi_n \rightarrow 0$, daher höchstens gleich $\liminf. 2^n \lambda(\xi_n)$ ist. Wir wählen die ξ_n nun der Bedingung

$$(2) \quad 2^n \lambda(\xi_n) = 1$$

entsprechend, wodurch $L \leq 1$ wird; diese Wahl ist zulässig, da $\lambda(x)$ jeden positiven Wert einmal und nur einmal annimmt*) und wegen (ϑ)

$$\lambda(\xi_{n-1}) = 2\lambda(\xi_n) > \lambda(2\xi_n), \quad \text{also } \xi_{n-1} > 2\xi_n \text{ ist.}$$

Nun ist andererseits $L \geq 1$ zu beweisen. Unsere Konstruktion bestand darin, daß zwischen zwei Intervallen $\beta\left(\frac{k-1}{2^n}\right)$ und $\beta\left(\frac{k}{2^n}\right)$, die aufeinanderfolgenden dyadischen Zahlen mit dem Nenner 2^n entsprechen, ein Intervall von der Länge ξ_n frei blieb; nennt man also $u(y)$ den linken, $v(y)$ den rechten Endpunkt von $\beta(y)$ (beide Punkte waren dem offenen Intervall nicht zuzurechnen), so ist

$$(3) \quad u\left(\frac{k}{2^n}\right) - v\left(\frac{k-1}{2^n}\right) = \xi_n$$

*) Wir erinnern daran, daß diese Eigenschaft nur zur Vereinfachung dient und an sich unwesentlich ist; L hängt natürlich nur von dem schließlichen Verhalten der ξ_n für $n \rightarrow \infty$ ab. Z. B. zerfällt A in zwei kongruente Hälften A_1 , A_2 links und rechts von $\beta\left(\frac{1}{2}\right)$ und es ist $L(A) = L(A_1) + L(A_2) = 2L(A_1)$, also von ξ_0 unabhängig, ebenso von beliebig vielen Anfangsgliedern der Folge $\xi_0, \xi_1, \dots$.

und dies gilt zunächst für $n > 1$ und $k = 2, 3, \dots, 2^n - 1$, aber auch für $k = 1$, $k = 2^n$ und $n = 1$, $n = 0$, wenn man ergänzungsweise

$$v(0) = 0, \quad u(1) = \xi_0$$

setzt. Die Formel (3), die wir vereinfacht

$$(4) \quad u(y_2) - v(y_1) = \xi_n$$

schreiben, kann zur rekursiven Bestimmung dieser Intervall-Endpunkte dienen, denn eine dyadische Zahl $y = \frac{2k-1}{2^{n+1}}$, die in reduzierter Gestalt den Nenner 2^{n+1} hat, ist arithmetisches Mittel ihrer „Nachbarzahlen“, d. h. zweier aufeinanderfolgender Zahlen $y_1 = \frac{k-1}{2^n}$, $y_2 = \frac{k}{2^n}$ mit Nennern 2^n , und man hat nach (3)

$$(5) \quad u(y_2) - v(y) = u(y) - v(y_1) = \xi_{n+1}.$$

Wir behaupten nun, daß das zwischen zwei Intervallen $\beta(y)$, $\beta(\eta)$ für $y < \eta$ freibleibende Stück

$$(6) \quad \alpha = u(\eta) - v(y) \quad \text{die Ungleichung}$$

$$(7) \quad \lambda(\alpha) \geq \eta - y$$

erfüllt, die wir sogar in etwas erweitertem Umfange für $0 \leq y < \eta \leq 1$ nachweisen wollen. Da sie in den niedrigsten Fällen (z. B. $y = 0$, $\eta = 1$, $\alpha = \xi_0$, $\lambda(\alpha) = 1$) unmittelbar verifiziert werden kann, so beweisen wir sie durch Rekursion für dyadische Zahlen mit Nennern $\leq 2^{n+1}$, wenn sie für solche mit Nennern $\leq 2^n$ bereits feststeht. Es ist zu unterscheiden, ob nur y oder η oder beide den reduzierten Nenner 2^{n+1} haben.

A) y habe den reduzierten Nenner 2^{n+1} , η den Nenner $\leq 2^n$. Sind y_1, y_2 die wie oben bestimmten Nachbarzahlen von y , also $y_1 < y_2 \leq \eta$, so ist

$$\begin{aligned} u(y_2) - v(y_1) &= \xi_n, \\ u(y_2) - v(y) &= \xi_{n+1}, \\ v(y) &= v(y_1) + \xi_n - \xi_{n+1}, \\ \alpha &= \alpha^* - \xi_n + \xi_{n+1}, \end{aligned}$$

wobei
$$\alpha^* = u(\eta) - v(y_1) \geq u(y_2) - v(y_1) = \xi_n.$$

(Man beachte, daß, für $y < \eta$, $\beta(y)$ links von $\beta(\eta)$ liegt). Auf Grund von (§) in Nr. 9 ist daher

$$\lambda(\alpha) \geq \lambda(\alpha^*) - \lambda(\xi_n) + \lambda(\xi_{n+1})$$

und, weil für α^* die Ungleichung (7) bereits feststeht,

$$\lambda(\alpha) \geq (\eta - y_1) - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \eta - y.$$

B) η habe den reduzierten Nenner 2^{n+1} , y den Nenner $\leq 2^n$. Sind η_1, η_2 die Nachbarzahlen von η , also $y \leq \eta_1 < \eta_2$, so ist

$$\begin{aligned} u(\eta_2) - v(\eta_1) &= \xi_n, \\ u(\eta) - v(\eta_1) &= \xi_{n+1}, \\ u(\eta) &= u(\eta_2) - \xi_n + \xi_{n+1}, \\ \alpha &= \alpha^* - \xi_n + \xi_{n+1}, \end{aligned}$$

wobei $\alpha^* = u(\eta_2) - v(y) \geq u(\eta_2) - v(\eta_1) = \xi_n$.

Also wieder
$$\begin{aligned} \lambda(\alpha) &\geq \lambda(\alpha^*) - \lambda(\xi_n) + \lambda(\xi_{n+1}) \\ &\geq (\eta_2 - y) - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \eta - y. \end{aligned}$$

C) y und η haben den reduzierten Nenner 2^{n+1} . Sind y_1, y_2 und η_1, η_2 die Nachbarzahlen, also $y_1 < y_2 \leq \eta_1 < \eta_2$, so wird wie oben

$$\begin{aligned} v(y) &= v(y_1) + \xi_n - \xi_{n+1}, \\ u(\eta) &= u(\eta_2) - \xi_n + \xi_{n+1}, \\ \alpha &= \alpha^* - 2\xi_n + 2\xi_{n+1}, \end{aligned}$$

wobei
$$\begin{aligned} \alpha^* &= u(\eta_2) - v(y_1) \\ &> u(\eta_2) - v(\eta_1) + u(y_2) - v(y_1) \\ &= 2\xi_n. \end{aligned}$$

Nach den Ungleichungen (ξ), (η) (für $\alpha = 2$) der vorigen Nr. wird also

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha) &> \lambda(\alpha^*) - \lambda(2\xi_n) + \lambda(2\xi_{n+1}) \\ &> \lambda(\alpha^*) - 2\lambda(\xi_n) + 2\lambda(\xi_{n+1}) \\ &\geq (\eta_2 - y_1) - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = \eta - y. \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis der Ungleichung (7) erbracht.

Schließen wir nun A in zunächst offene Intervalle $\alpha_n < \rho$ ein mit

$$\sum \lambda(\alpha_n) < L_\rho + \varepsilon.$$

Ohne die Summe links zu vergrößern, kann man sich mit einer endlichen Anzahl der α begnügen (Borelscher Satz), kann diese durch abgeschlossene Intervalle, die Teile des Grundintervalls $[0, \xi_0]$ sind, ersetzen, kann zwei übereinandergreifende oder zusammenstoßende α nach Nr. 9, (i) durch ein einziges ersetzen und kann endlich ein α , das in ein $\beta(y)$ übergreift, (ohne $\beta(y)$ ganz in seinem Innern zu enthalten), um das übergreifende Stück verkürzen. So bleiben schließlich $n+1$ Intervalle $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$, die zusammen mit gewissen Intervallen $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ aus der Reihe der

$\beta(y)$ das Grundintervall einfach bedecken. Wenn diese letztere den dyadischen Zahlen $y_1, y_2, \dots, y_n$ entsprechen, so ist nach (7)

$$\begin{aligned}\lambda(\alpha_0) &\geq y_1, \\ \lambda(\alpha_1) &\geq y_2 - y_1, \\ &\dots \dots \dots \\ \lambda(\alpha_{n-1}) &\geq y_n - y_{n-1}, \\ \lambda(\alpha_n) &\geq 1 - y_n,\end{aligned}$$

also
folglich $L_\varepsilon + \varepsilon > \sum \lambda(\alpha_i) \geq 1$,
 $L_\varepsilon \geq 1 \geq L \geq L_\varepsilon$, also $L_\varepsilon = L = 1$.

Die Menge A ist also von der Dimension $[\lambda(x)]$.

Beispiele: Um eine Menge von der Dimension (p) ($0 < p < 1$) zu erhalten, haben wir zu setzen $\lambda(x) = x^p$, welche Funktion für alle positiven x unseren Anforderungen genügt, sodann nach (2)

$$\begin{aligned}2^* \xi_n^p &= 1, \\ \xi_n &= \xi^n \quad \text{mit} \quad \xi = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Um z. B. die Dimension $\frac{1}{2}$ zu erhalten, hat man $\xi = \frac{1}{4}$ zu wählen, d. h. jeweils die mittlere Hälfte der verbleibenden Intervalle zu tilgen. Bei gegebenem ξ ($0 < \xi < \frac{1}{2}$) bestimmt sich die Dimension zu

$$p = \log 2 : \log \frac{1}{\xi};$$

z. B. hat die klassische Cantorsche Menge, bei der jeweils das mittlere Drittel der Intervalle getilgt wird ($\xi = \frac{1}{3}$) die Dimension $p = \log 2 : \log 3 = 0,63093$.

Um eine Menge von der „unendlich kleinen“ Dimension $(0, p)$ der logarithmischen Skala zu bilden ($p > 0$), ist

$$\lambda(x) = 1 : \left(\log \frac{1}{x}\right)^p$$

zu setzen, welche Funktion allerdings erst für hinreichend kleine x konvex ist, sodann von einem gewissen n ab

$$\left(\log \frac{1}{\xi_n}\right)^p = 2^n,$$

$$\xi_n = e^{-\eta^n} \quad \text{mit} \quad \eta = 2^{\frac{1}{p}} > 1;$$

die Forderung (1) $\xi_{n-1} : \xi_n > 2$, $\eta^n - \eta^{n-1} > \log 2$
wird auch erst von einem gewissen n ab erfüllt.

Ersetzt man (2) durch $2^n \lambda(\xi_n) = L$,

so wird $L(A) = L$. Bringt man in die von A freigelassenen Intervalle $\beta(y)$ wieder solche Mengen wie A , von derselben Dimension $[\lambda(x)]$ und mit konvergenter Summe ihrer L -Maße, verfährt mit den danach freibleibenden Intervallen ebenso und setzt dies, mit endlicher Summe aller L -Maße, unbegrenzt fort, so erhält man eine Menge, die in jedem Intervall von der Dimension $[\lambda(x)]$ ist.

Dagegen ist es nicht möglich, etwa eine Menge A zu bilden, deren Durchschnitt A_0^a mit dem Intervall $0 \leq x < a$ eine mit a monoton wachsende Dimension $[\lambda_a(x)]$ hätte, in dem S. 166 erklärten Sinne, daß $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda_b(x)}{\lambda_a(x)} = 0$ für $b > a$. Denn konvergiert a_n wachsend nach b , so wäre $L_b(A_0^{a_n}) = 0$ und, da das L -Maß aufsteigender Mengen nach dem ihrer Summe konvergiert (Carathéodory, Satz 13), auch $L_b(A_0^b) = 0$, also A_0^b nicht von der Dimension $[\lambda_b(x)]$. Wenn also die Dimension $[\lambda_a(x)]$ überhaupt vorhanden und mit a veränderlich ist, so kommen in jedem noch so kleinen Intervall unvergleichbare Dimensionen vor.

II. Definieren wir, zu der speziellen perfekten Menge A von Nr. 10 zurückkehrend, in der Menge $B = \sum \beta(y)$ die streckenweise konstante Funktion $\varphi(x)$ durch

$$\varphi(x) = y, \quad \text{wenn } x \text{ in } \beta(y) \text{ liegt.}$$

Sind x und $\xi > x$ zwei Stellen in B , so gehören sie entweder demselben $\beta(y)$ an und es ist $\varphi(\xi) - \varphi(x) = 0$, oder sie gehören zu verschiedenen Intervallen $\beta(y), \beta(\eta)$ mit $y < \eta$ und es ist dann

$$\xi - x > u(\eta) - v(y) = \alpha,$$

also nach (7) $\lambda(\xi - x) > \eta - y = \varphi(\xi) - \varphi(x)$,

unter allen Umständen also

$$0 \leq \varphi(\xi) - \varphi(x) < \lambda(\xi - x) \quad \text{für } x < \xi.$$

Diese Funktion ist also in B gleichmäßig stetig und kann daher zu einer im Grundintervall $[0, \xi_0]$, in dem B dicht ist, stetigen Funktion $\varphi(x)$ erweitert werden, für die allgemein

$$(8) \quad 0 \leq \varphi(\xi) - \varphi(x) \leq \lambda(\xi - x) \quad \text{für } x < \xi$$

gilt; sie ist monoton, nimmt mit wachsendem x nicht ab, läuft von 0 bis 1 und nimmt jeden ihrer Werte an mindestens einer Stelle von A an.

Vermöge der Abbildung $y = \varphi(x)$

wird das Intervall $0 \leq y \leq 1$ eindeutiges (nicht umkehrbar eindeutiges) Bild des Intervalls $0 \leq x \leq \xi_0$, und einem Intervall α der x -Achse ent-

spricht nach (8) ein Intervall $\gamma \leq \lambda(\alpha)$ der y -Achse. Diese Abbildung läßt den letzten Teil des Beweises in voriger Nr. noch etwas deutlicher hervortreten: schließt man A in Intervalle α_n mit

$$\sum \lambda(\alpha_n) < L_0 + \varepsilon$$

ein, die wir dem Grundintervall angehörig annehmen, so müssen die entsprechenden Intervalle γ_n das ganze Intervall $0 \leq y \leq 1$ bedecken, denn jedem y ($0 \leq y \leq 1$) entspricht mindestens eine Stelle x von A , deren Bild sie ist, und wenn x in α_n liegt, liegt y in γ_n . Demnach ist $\sum \gamma_n \geq 1$, um so mehr $\sum \lambda(\alpha_n) \geq 1$ und weiter wie oben.

Die inverse Funktion $x = \psi(y)$

ist an den dyadisch rationalen Stellen zwischen 0 und 1 unendlich vieldeutig, sie bedeutet dort eben alle Werte von $u(y)$ bis $v(y)$ (beide inkl.), während $\psi(0) = 0$ und $\psi(1) = \xi_0$ ist. Sie läßt sich beiläufig folgendermaßen explizite darstellen: ist y *dyadisch irrational* und

$$y = \frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2^2} + \dots \quad (y_n = 0, 1)$$

ihre dyadische Entwicklung, so ist

$$x = \psi(y) = y_1 \xi_0 + (y_2 - y_1) \xi_1 + (y_3 - y_2) \xi_2 + \dots$$

Dies gilt auch noch für $y = 0$, $y = 1$; ist dagegen y dyadisch rational und $0 < y < 1$, so gestattet y zwei dyadische Entwicklungen, die eine mit Einsen, die andere mit Nullen endigend:

$$y = \frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2^2} + \dots \quad (u_n \rightarrow 1)$$

$$= \frac{v_1}{2} + \frac{v_2}{2^2} + \dots \quad (v_n \rightarrow 0)$$

und diesen entsprechen gerade die Endpunkte des Intervalls $\beta(y)$

$$u(y) = u_1 \xi_0 + (u_2 - u_1) \xi_1 + (u_3 - u_2) \xi_2 + \dots$$

$$v(y) = v_1 \xi_0 + (v_2 - v_1) \xi_1 + (v_3 - v_2) \xi_2 + \dots$$

Den Beweis dieser Behauptungen wollen wir unterdrücken; die Darstellung von $u(y)$, $v(y)$ läßt sich wieder rekursiv mittels (4), (5) verifizieren und daraus der Schluß auf $\psi(y)$ ziehen.

Die Funktion $\varphi(x)$ hat folgende einfache Bedeutung: ist A_a^b der Durchschnitt von A mit dem Intervall J_a^b ($a \leq x < b$), so ist

$$(9) \quad \varphi(x) = L(A_a^x),$$

wie man zunächst für die Punkte von $B = \sum \beta(y)$ und auf Grund der Monotonie beider Funktionen allgemein erkennt. Denn liegt x in $\beta(y)$

mit $y = \frac{k}{2^n}$, so zerfällt durch die β -Intervalle, die den dyadischen Zahlen mit dem Nenner 2^n entsprechen, A in 2^n kongruente Stücke, jedes vom Maße $\frac{1}{2^n}$, und da links von $\beta(y)$ k solche Stücke liegen, ist

$$L(A_0^x) = \frac{k}{2^n} = y = \varphi(x).$$

12. Die Funktion (9) läßt sich unter allgemeineren Voraussetzungen betrachten.*) Das äußere Maß L möge für einzelne Punkte verschwinden, und es gebe über jeder Menge eine maßgleiche Borelsche Menge; A liege im Intervall J_0^a und habe positives (endliches) $L(A) = L$. $\varphi(x)$ geht monoton von 0 bis L , wenn x von 0 bis a geht. Wegen der Meßbarkeit der Intervalle ist

$$(10) \quad \varphi(\xi) - \varphi(x) = L(A_x^{\xi}) \quad (x < \xi),$$

$$\text{insbesondere} \quad L - \varphi(x) = L(A_x^a).$$

$\varphi(x)$ ist stetig, denn nach einer schon erwähnten Eigenschaft der äußeren Masse ist

$$L(A_0^x) \rightarrow L(A_0^{\xi}), \quad L(A_x^a) \rightarrow L(A_{\xi}^a),$$

wenn x wachsend resp. abnehmend nach ξ konvergiert.

Die Abbildung

$$x^* = \varphi(x)$$

ordnet jeder Menge X des Intervalls $[0, a]$ eindeutig eine Bildmenge X^* des Intervalls $[0, L]$ zu. Sie ist im allgemeinen nicht eindeutig umkehrbar, denn $\varphi(x)$ kann (höchstens abzählbar viele) Konstanzintervalle haben; sind aber X, Y ohne gemeinsame Punkte, so haben X^*, Y^* höchstens abzählbar viele Punkte gemein. Mit einer Menge X^* ist ihr Urbild nicht eindeutig bestimmt, wohl aber ihr größtes Urbild X , d. h. die Menge aller Punkte x , deren Bilder in X^* fallen (sie enthält also von einem Konstanzintervall entweder keinen Punkt oder alle). Das Bild und das größte Urbild einer Borelschen Menge ist wieder eine solche.

Für ein Intervall J ist nach (10)

$$m(J^*) = L(AJ),$$

wenn m das Lebesguesche äußere Linearmaß bezeichnet. Für eine beliebige Menge X gilt zunächst nur die *Ungleichung*

) $f(X) = L(AX)$ ist für die bezüglich L meßbaren Mengen X eine absolut additive Mengenfunktion, $\varphi(x)$ die zugeordnete Punktfunktion. Vgl. die Schrift von J. Radon, Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen (Wiener Akad. Ber. 122 (1913), S. 1295—1438), die für die Behandlung Carathéodoryscher Maße noch mancherlei Stoff bietet. Statt der Abbildung $x^ = \varphi(x)$ (vgl. dazu Radon, S. 1343) könnte man auch die eineindeutige Abbildung $x^* = x + \varphi(x)$ heranziehen, auf die mich Herr Carathéodory brieflich aufmerksam machte.

$$(11) \quad m(X^*) \geq L(AX),$$

denn schließt man X^* in (dem Intervall $[0, L]$ angehörige) Intervalle J_n^* ein mit

$$\sum m(J_n^*) < m(X^*) + \varepsilon,$$

so schließen die größten Urbildintervalle J_n die Menge X ein und es ist

$$L(AX) \leq \sum L(AJ_n) = \sum m(J_n^*).$$

Die Gleichung

$$(12) \quad m(X^*) = L(AX)$$

(deren linke Seite die obere Variation von $\varphi(x)$ in X oder das obere Stieltjes-Lebesguesche Integral $\int_X d\varphi$ ist) gilt aber gewiß in folgenden Fällen:

α) wenn X eine Borelsche Menge ist. Denn ist Y deren Komplement in bezug auf ein Intervall J , so haben die Borelschen Mengen X^* , Y^* höchstens abzählbar viele Punkte gemein und es ist

$$\begin{aligned} m(J^*) &= m(X^*) + m(Y^*) \\ &\geq L(AX) + L(AY) \geq L(AJ) = m(J^*), \end{aligned}$$

sodaß für X und Y in (11) das Gleichheitszeichen gilt.

β) wenn X Teilmenge von A ist. Denn ist V eine Borelsche Menge über X mit $L(V) = L(X)$, so liegt AV zwischen X und V , also auch $L(AV) = L(X)$, und man hat

$$m(V^*) \geq m(X^*) \geq L(AX) = L(AV) = m(V^*).$$

γ) Sie gilt für jedes X dann und nur dann, wenn A bezüglich L meßbar ist. Denn ist B das Komplement von A (in bezug auf das Grundintervall $[0, a]$) und gilt (12) allgemein, so ist insbesondere

$$(13) \quad m(B^*) = 0,$$

und umgekehrt folgt hieraus für beliebiges X , wegen (β)

$$m(X^*) = m((AX)^*) = L(AX).$$

Aus (13) wieder folgt die Existenz einer Borelschen Menge V^* über B^* mit $m(V^*) = 0$; ihr größtes Urbild V ist eine Borelsche Menge über B mit $L(AV) = 0$ und deren Komplement U also eine Borelsche Menge unter A mit $L(U) = L(A)$, A ist bezüglich L meßbar; rückwärts führt dieser Schluß wieder zu (13) zurück.

Wenn A bezüglich L meßbar ist, schließt man leicht aus (12), daß AX dann und nur dann bezüglich L meßbar ist, wenn X^* linear meßbar ist.

Wenn L gemäß Def. 2 aus $\lambda(x)$ entspringt, so ist auch die Funktion

$$\varphi_\rho(x) = L_\rho(A_x^*)$$

wegen einer nachherigen Anwendung bemerkenswert. Sie geht monoton von 0 bis $L_\rho(A)$; wegen

$$L_\rho(X + Y) \leq L_\rho(X) + L_\rho(Y)$$

ist

$$\varphi_\rho(\xi) - \varphi_\rho(x) \leq L_\rho(A_x^*) \quad (x < \xi)$$

und offenbar für $\xi - x < \rho$

$$L_\rho(A_x^*) \leq \lambda(\xi - x),$$

woraus die Stetigkeit von $\varphi_\rho(x)$ folgt; die (von ρ abhängige) Abbildung $x^* = \varphi_\rho(x)$ ordnet jedem Intervall $\alpha < \rho$ ein Bildintervall $\alpha^* \leq \lambda(\alpha)$ zu. Man schließt daraus beiläufig auf die Ungleichung

$$m(X^*) \leq L_\rho(X)$$

zwischen einer Menge und ihrem Bilde.

13. Die Konstruktion ebener Mengen vorgeschriebener Dimension ist nicht ohne Schwierigkeit. Sei A eine Menge auf der x -Achse, B eine Menge auf der y -Achse, $C = A \times B$ die ebene Menge der Punkte (x, y) , wo x die Menge A und y die Menge B durchläuft. Wir werden unter gewissen Einschränkungen beweisen, daß C von der Dimension $[\lambda(t)\mu(t)]$ ist, wenn A von der Dimension $[\lambda(t)]$ und B von der Dimension $[\mu(t)]$ ist; die entsprechenden äußeren Maße von A, B, C seien L, M, N . Beide Funktionen $\lambda(t), \mu(t)$ seien wie in Nr 9 gewählt, insbesondere konvex.

A sei die spezielle perfekte Menge der Nr. 10, auf den durch

$$2^m \lambda(\xi_m) = L$$

bestimmten Intervalllängen beruhend, während wir über B nichts weiter voraussetzen brauchen. Schließen wir B in Intervalle $\eta_n < \rho$ ein mit

$$\sum \mu(\eta_n) < M + \varepsilon,$$

wodurch C in die Mengen $C_n = A \times \eta_n$ eingeschlossen wird. Wählen wir, $\rho \leq \xi_0$ vorausgesetzt, zu jedem n den Index m derart, daß

$$\xi_{m-1} > \eta_n \geq \xi_m$$

und schließen A in 2^m Intervalle von der Länge ξ_m ein; dadurch wird C_n in 2^m Rechtecke mit den Seiten ξ_m, η_n oder in 2^m Kreise mit den Durchmessern $d_{mn} = \sqrt{\xi_m^2 + \eta_n^2}$ eingeschlossen. Wegen $\xi_m < \frac{1}{2} \xi_{m-1}$ ist

$$d_{mn} \leq \sqrt{2} \eta_n < 2\rho,$$

$$d_{mn} \leq \sqrt{\xi_m^2 + \eta_n^2} < \sqrt{5} \xi_{m-1},$$

also nach Nr. 9, (ϑ)

$$\lambda(d_{mn})\mu(d_{mn}) < \frac{\sqrt[5]{2}}{2} \lambda(\xi_{m-1}) \cdot \sqrt[5]{2} \mu(\eta_n).$$

Daher folgt

$$\begin{aligned} N_{2\varrho}(C) &\leq \sum_n 2^m \lambda(d_{mn}) \mu(d_{mn}) \\ &< \sum_n \sqrt[5]{10} 2^{m-1} \lambda(\xi_{m-1}) \mu(\eta_n) \\ &= \sqrt[5]{10} L \sum \mu(\eta_n) < \sqrt[5]{10} L(M + \varepsilon), \end{aligned}$$

demnach

$$N \leq \sqrt[5]{10} LM.$$

Um N nach unten abzuschätzen, nehmen wir A, B als abgeschlossene Mengen in den Intervallen $[0, \xi_0]$, $[0, \eta_0]$ an und schließen C in Kreise K_n von Durchmessern $d_n < \varrho$ ein mit

$$\sum \lambda(d_n) \mu(d_n) < N_\varrho + \varepsilon;$$

zu jedem Kreis gehört ein umschriebenes Quadrat mit achsenparallelen Seiten und dessen Durchschnitt R_n mit dem Grundrechteck ($0 \leq x \leq \xi_0$, $0 \leq y \leq \eta_0$); R_n ist ein Rechteck mit Seiten $\alpha_n, \beta_n \leq d_n$. Nehmen wir nun die am Ende voriger Nr. erwähnten Funktionen

$$\varphi_\varrho(x) = L_\varrho(A_0^n), \quad \psi_\varrho(y) = M_\varrho(B_0^n).$$

Durch

$$u = \varphi_\varrho(x), \quad v = \psi_\varrho(y)$$

wird R_n auf ein Rechteck der uv -Ebene abgebildet mit Seiten

$$\gamma_n \leq \lambda(\alpha_n), \quad \delta_n \leq \mu(\beta_n),$$

und diese Rechtecke müssen das ganze Rechteck

$$0 \leq u \leq L_\varrho, \quad 0 \leq v \leq M_\varrho$$

bedecken, da $\varphi_\varrho(x)$ jeden Wert an mindestens einer Stelle von A , $\psi_\varrho(y)$ jeden an einer Stelle von B annimmt. Also ist $\sum \gamma_n \delta_n \geq L_\varrho M_\varrho$ und um

so mehr

$$\begin{aligned} \sum \lambda(d_n) \mu(d_n) &\geq \sum \lambda(\alpha_n) \mu(\beta_n) \\ &\geq \sum \gamma_n \delta_n \geq L_\varrho M_\varrho, \end{aligned}$$

also $N_\varrho \geq L_\varrho M_\varrho$ und

$$N \geq LM.$$

Kombinieren wir die erhaltenen Ungleichungen, so sehen wir z. B., daß C gewiß von der Dimension $[\lambda\mu]$ wird, wenn A und B spezielle perfekte Mengen von der Art in Nr. 10 sind, von den Dimensionen $[\lambda]$, $[\mu]$, die zu konvexen Funktionen gehören; so kann man der Menge C z. B. jede Dimension der logarithmischen Skala geben, die niedriger als 2 ist. Macht man diese Dimension höher als 1 und ergänzt die punkthafte Menge C (die keine zusammenhängende Teilmenge außer ihren einzelnen

Punkten hat) durch Hinzufügung von abzählbar vielen Strecken, die also das N -Maß 0 haben, zu einer einfachen Kurve*), so hat diese dasselbe N -Maß wie C : es gibt also ebene Jordansche Kurven, die von einer beliebigen Dimension zwischen 1 und 2 sind. Bekanntlich gibt es auch solche von der Dimension 2, und in ähnlicher Weise wie man in diesem Falle verfährt oder wie für lineare Mengen am Schlusse von Nr. 10 angedeutet ist, kann man auch ebene Jordansche Kurven erzeugen, von denen jeder Teilbogen von derselben Dimension zwischen 1 und 2 ist.

Mit drei konvexen Funktionen λ, μ, ν und drei speziellen perfekten Mengen A, B, C (von der Art in Nr. 10) kann man eine räumliche Menge $A \times B \times C$ von der Dimension $[\lambda\mu\nu]$ bilden und entsprechende Schlüsse daran knüpfen.

Greifswald, März 1918.

*) Vgl. z. B. meine Grundzüge der Mengenlehre (Leipzig 1914), S. 374.