Werk

Titel: Mathematische Annalen
Ort: Berlin
Jahr: 1922
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN235181684_0086
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0086

LOG Id: LOG_0018
LOG Titel: Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684

Terms and Conditions

Contact

Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem.

Von

Heinrich Behmann in Göttingen.

Einleitung.

§ 1.

Wesen und Aufgabe der Algebra der Logik.

Auch noch innerhalb der gegenwärtigen symbolischen Logik hebt sich mit hinreichender Klarheit dasjenige Teilgebiet oder, vielleicht besser gesagt, diejenige besondere Richtung heraus, die, schon verhältnismäßig früh zu einer gewissen Höhe der Ausbildung gelangt, ihrerseits einen nicht geringen Anreiz zu der inzwischen erfolgten bedeutenden Entfaltung der symbolischen Logik gegeben hat und die man sehr treffend als die *Algebra der Logik* bezeichnet. Wie schon der Name sagt, handelt es sich bei ihr in erster Linie um solche Zusammenhänge und Fragestellungen, wie sie von der Zahlenalgebra her bekannt und geläufig sind, insbesondere um die Ausbildung den algebraischen nachgebildeter Rechenverfahren für die Lösung gewisser hierfür geeigneter Klassen logischer Aufgaben.

Wenn auch außer Frage steht, daß die Algebra der Logik bei ihrer Ausbildung von dem Vorbild der hochentwickelten Zahlenalgebra außerordentlichen Nutzen gehabt hat — man kann wohl sagen, daß sie ohne ein solches Vorbild gewiß niemals entstanden wäre —, da sie nun nicht wie jene in jahrhundertelanger Entwicklung — ohne ein fester umrissenes Ziel als das der Erweiterung des ihr eigentümlichen Erkenntnisbereiches überhaupt und ohne einen klarer vorgezeichneten Weg als den im einzelnen Augenblick durch die mehr oder minder zufälligen Neigungen oder glücklichen Einfälle einzelner Forscher bestimmten — allmählich ihr Gebiet erobern mußte, sondern statt dessen an dem sicheren Leitfaden der Analogie ihren Weg gleichsam abschreiten durfte, so darf gleichwohl nicht verkannt werden, daß, wie dies vielleicht im Wesen des überragenden Vorbildes überhaupt liegt, auch dieses hier doch manche bedenkliche Folgen gehabt hat. Es lag hier nämlich die Gefahr vor — und so ist es denn auch tatsächlich gekommen —, daß die in langer Entwicklung gewordene und bewährte Darstellungs- und Betrachtungsweise der Zahlenalgebra nunmehr auf die Logik, die ihrerseits einer Zeichensprache dringend bedurfte und die ohne eine solche in der Tat „seit dem Aristoteles .. keinen Schritt vorwärts hat tun können“ (Kant), in einer allzu äußerlichen Weise als auf ein doch im Grunde wesensfremdes Gebiet übertragen wurde, das mit in Rücksicht zu ziehen den Schöpfern jener algebraischen Zeichensprache ja niemals hatte in den Sinn kommen können[1]).

Dies zeigt sich bereits bei der Benennung und der Bezeichnung der grundlegenden Verknüpfungen. Man erkennt hier wirklich keine Nötigung, die Verknüpfungen der Disjunktion — des nicht ausschließenden „oder“ — und der Konjunktion — des „und“ zwischen Aussagen oder Prädikaten —, die einander in der symbolischen Logik bekanntlich ganz gleichberechtigt gegenüberstehen, gerade mit den Namen und den Zeichen der Addition und der Multiplikation zu versehen. Es wäre in der Tat genau so berechtigt und nicht weniger sinnvoll gewesen, die Konjunktion — als das logische „und“! — als Addition und die Disjunktion demgegenüber als Multiplikation zu bezeichnen, wie dies von Hilbert[2]) tatsächlich geschieht; vom Standpunkt der Aussagen- oder Inhaltslogik ist der zweite Weg genau ebenso der natürlichere, wie der erste von der Klassen- oder Umfangslogik — dem „Gebietekalkül“ der Algebra der Logik — her näher liegen mußte. Ich habe jedenfalls den Eindruck, daß die obige falsche Parallele, statt das Verständnis zu erleichtern, in Wahrheit nur Verwirrung gestiftet hat.

Dazu kam das seltsame Vorurteil, daß, wie in der Zahlenalgebra der Hauptgegenstand und das Haupthilfsmittel die Gleichung ist, darum auch in der Logik jede Aussage sich als Gleichung — d. h. als die besondere Aussage der Gleichheit zweier Größen — darstellen müsse. Aussagen, die sich dieser Forderung nicht oder doch nur allzu gezwungen fügen wollten, wurden immerhin als „Ungleichungen“ geduldet und als solche, freilich mit einer gewissen Zurückhaltung, mit in den Kreis der Betrachtung gezogen. Diese der Logik aufgezwungene künstliche Darstellung verhalf ihr denn auch zu einem Scheinreichtum, der eben nur durch die Weitschweifigkeit und unfruchtbare Vielfältigkeit der Darstellungsmittel vorgetäuscht wurde.

Mochte diese Abhängigkeit der logischen von der Zahlenalgebra im Anfange vielleicht auch unvermeidlich sein, so hätte sich doch, wie ich meine, das Streben ihrer Vertreter schon sehr viel früher, als es tatsächlich durch Peano geschehen ist, darauf richten müssen, sich so bald wie

---

[1]) Der gerügte Fehler entspricht genau demjenigen der klassischen Logik, daß sie sich von dem für sie im Anfange in der Tat unerläßlichen Vorbild der Sprache auch später nicht hat losreißen können, während diese ja von Hause aus gewiß nicht als ein Hilfsmittel zum logischen Denken gemeint ist.

[2]) Vorlesung über die Prinzipien der Mathematik.

möglich von diesem Zwange zu befreien — noch ehe man die Algebra der Logik auf Gebiete ausdehnte, denen sie in ihrer seitherigen Gestalt unmöglich voll gerecht werden konnte. Denn tatsächlich beherrschte das Vorbild der Zahlenalgebra nicht bloß das Darstellungs- und Rechnungsschema, sondern darüber hinaus sogar die besonderen Fragestellungen wie die allgemeine Zielsetzung der logischen Algebra, ohne daß auf die doch unzweifelhaft vorhandenen Eigenbedürfnisse der Logik angemessen Rücksicht genommen wurde. Dies ging sogar so weit, daß allgemeine Ergebnisse, die in rein formal-algebraischer Absicht gewonnen waren, nun auch stets nur von dem gleichen Standpunkt gewertet wurden, ohne daß ihr in der Tat ganz hervorragender Wert für die Logik als allgemeine Denklehre überhaupt Beachtung fand — während auf der anderen Seite manche Dinge als bedeutsame Errungenschaften des Kalküls gefeiert wurden, die, als Ausdruck rein logischer Sachverhalte verstanden, wohl das Äußerste an Plattheit darstellen, was selbst innerhalb der Logik als der Lehre von dem „Selbstverständlichen" eben noch erträglich ist. (Schröders klassische Darstellung der Algebra der Logik bietet hierfür mehr als ein Beispiel.)

Durch die vorstehenden Erwägungen ist der Zweck der gegenwärtigen Abhandlung nach ihrer negativen Seite bereits gekennzeichnet. Positiv soll versucht werden, die heutige Höhe der Entwicklung der allgemeinen symbolischen Logik nun auch für das Sondergebiet der Algebra der Logik fruchtbar zu machen, dieses Gebiet auf eine neue Weise und vor allem mit neuen, angemesseneren Darstellungsmitteln wenigstens in seinen grundlegenden Teilen aufzubauen. Freilich soll dieser Aufbau auch innerhalb dieser Beschränkung nicht vollständig geleistet, vielmehr nur in seinen Hauptzügen entwickelt werden. Um dieser insofern vorläufigen Darstellung nichtsdestoweniger eine gewisse innere Geschlossenheit zu geben, möchte ich ihr gewissermaßen als Leitgedanken die Aufgabe zuweisen, zu der Lösung des folgenden logischen Problems beizutragen, das ich geradezu als das *Hauptproblem der symbolischen Logik* bezeichnen möchte:

Es soll eine ganz bestimmte allgemeine Vorschrift angegeben werden, die über die Richtigkeit oder Falschheit einer beliebig vorgelegten mit rein logischen Mitteln darstellbaren Behauptung nach einer endlichen Anzahl von Schritten zu entscheiden gestattet, oder zum mindesten dieses Ziel innerhalb derjenigen — genau festzulegenden — Grenzen verwirklicht werden, innerhalb deren seine Verwirklichung tatsächlich möglich ist.

Wenn auch heute selbstverständlich noch nicht im entferntesten daran gedacht werden kann, dieses Problem, dessen Auflösung die ganze Mathematik in eine ungeheure Trivialität verwandeln würde[3]), in seiner vollen

[3]) Wie namentlich Peano und Russell erkannt haben, läßt sich in der Tat jeder mathematische Satz letztlich als ein rein logischer Sachverhalt auffassen.

Allgemeinheit in Angriff zu nehmen, so verlohnt es sich, wie ich glaube, dennoch — und eben dies soll im folgenden geschehen —, es wenigstens für einen passend gewählten bescheideneren Bereich von Aussagen vollständig durchzuführen, der nichtsdestoweniger über den von der Algebra der Logik — im Gegensatz zur symbolischen Logik überhaupt — bisher in Betracht gezogenen Aussagenbereich in einer gewissen Hinsicht ganz erheblich hinausgeht. Und zwar wird es sich in der vorliegenden Untersuchung letztlich um denjenigen Bereich von Aussagen handeln, den Whitehead und Russell[4]) als die *zweite Aussagenordnung* bezeichnen, mit der Einschränkung freilich, daß an logischen Allgemeinheiten im wesentlichen nur Eigenschaften — bzw. Klassen —, von den Beziehungen dagegen nur die rein logische der Identität als Grundbestandteile auftreten dürfen.

Die Darstellungsform wird nicht die axiomatische sein, sondern es sollen hier die Bedürfnisse des praktischen Rechnens im Vordergrund stehen. Das Ziel ist also nicht, alles auf eine möglichst geringe Zahl logisch voneinander unabhängiger Formeln und Regeln zurückzuführen; im Gegenteil werden möglichst leicht aufzufassende und dabei möglichst weittragende Regeln in solcher Anzahl gegeben werden, wie nach meiner Ansicht dem praktischen Bedürfnis entspricht. Dabei wird uns die logische Abhängigkeit von Regeln durchaus nicht kümmern, sofern diesen nur eine selbständige praktische Bedeutung zuerkannt wird. Der Beweis der Regeln, soweit ein solcher gegeben wird, wird infolgedessen nicht im eigentlichen Sinne ein Zurückführen auf Axiome sein können; vielmehr erstrebe ich in der gegenwärtigen Abhandlung nichts weiter, als ihre Gültigkeit zur klaren Einsicht zu bringen. Ich werde mich also hier durchaus mit demjenigen Maß von Strenge begnügen, das gemeinhin von mathematischen Untersuchungen gefordert zu werden pflegt, wo man seine Ergebnisse durch einleuchtende Schlüsse und Überlegungen gewinnt, ohne die Richtigkeit der verwendeten Schlußweisen ihrerseits zu beweisen. Selbstverständlich soll damit weder der Wert eines rein axiomatischen Aufbaus überhaupt bestritten noch einem solchen durch den hier gewählten Weg vorgegriffen werden. Es schien mir eben nur nicht ratsam, eine Untersuchung, die zu einem wesentlichen Teile der Aufweisung neuer Erkenntnisse dient, bereits mit derartigen Forderungen zu beschweren, denen in einer späteren mehr systematischen Darstellung des Gesamtgebietes ohnehin leicht Genüge geschehen kann.

---

[4]) A. N. Whitehead and B. Russell, Principia Mathematica.

I. Die elementare Verknüpfungsaussage.

§ 2.

Symbolik. Rechenregeln für umkehrbare Schlüsse.

Eines der wichtigsten Erfordernisse für die folgende Untersuchung ist die Bereitstellung einer geeigneten *Symbolik.* Es möchte hier als das Gegebene erscheinen, die alte Schrödersche Symbolik durch diejenige neuere zu ersetzen, die gegenwärtig am meisten geschätzt wird und wohl am ehesten Aussicht hat, allgemein durchzudringen, nämlich die der *Principia Mathematica* von Whitehead und Russell. Aber so dringend wichtig die Einheitlichkeit der Bezeichnung auch zweifellos ist und so sehr alles vermieden werden sollte, was sie ohne Not gefährdet, so darf es dessenungeachtet nicht verwehrt sein, sich für bestimmte Sonderzwecke innerhalb der symbolischen Logik, wie den gegenwärtigen des logischen Rechnens, einer in gewissen Punkten abweichenden Symbolik zu bedienen, die gerade das für diesen besonderen Zweck wesentliche Gefüge der Aussage und auch nur dieses in der irgend erreichbaren übersichtlichsten und gedrängtesten Form zum Ausdruck bringt. Denn nichts ist bei längeren Rechnungen hinderlicher, als allerlei für den gerade vorliegenden Zweck unnötiges und dabei den Überblick hinderndes Beiwerk mitschleppen zu müssen; so nützlich gerade dieses Beiwerk in anderer Absicht — z. B. für die Heraushebung einer bestimmten beabsichtigten oder vorzugsweise interessierenden Lesart der fraglichen Aussage — gelegentlich sein mag. Dazu kommt noch, daß, je sorgfältiger und sparsamer das System der symbolischen Grundzeichen ausgewählt worden ist, um so einfacher und durchsichtiger die festzustellenden allgemeinen Gesetzmäßigkeiten ausfallen werden. Eine notwendige Vorbedingung für eine derartige Sonderbezeichnung ist freilich, daß die Zeichen der besonderen Symbolik nicht bereits in der allgemeinen in abweichender Bedeutung gebraucht werden.

Eine *Aussage,* auf deren besonderen Inhalt es nicht ankommt, werde durch einen der Buchstaben p, q, r, s bezeichnet. Ich schreibe die *Negation* einer Aussage p, wie in der Algebra der Logik zumeist üblich, als

$$\bar{p},$$

zu lesen: „nicht-p“. Die *Disjunktion*[5])[6]) von p und q, d. h. die Ver-

[5]) Dies Wort darf hier offenbar — wie manches andere in der *Mathematik* — nicht in seinem ursprünglichen Wortsinne verstanden werden. Es kann jedoch nicht entbehrt werden, da die Sprache für die oben gemeinte Beziehung keinen angemessenen Ausdruck hat.

[6]) Sollte auf eine kurze *Sonderbezeichnung der verknüpfenden Tätigkeit* wie auch der Verknüpfungsglieder Wert gelegt werden, so steht nach meiner Ansicht

knüpfung durch das nicht ausschließende „oder“, bezeichne ich (mit einer gewissen Anlehnung an Hilbert, der sie freilich als Produkt auffaßt) als

$$p\,q$$

ohne besonderes Verknüpfungszeichen. Die Konjunktion[6]) „p und q“ und die Implikation oder Folgebeziehung „wenn p, so q“ stellen sich dann augenscheinlich als

$$\overline{\bar{p}\,\bar{q}} \quad \text{und} \quad \bar{p}\,q$$

dar, bedürfen also keiner neuen Zeichen.

Durch diese Auswahl und Bezeichnung der Grundverknüpfungen ist ein Ziel, das bereits Frege[7]) vorgeschwebt hat, in der wohl denkbar einfachsten Weise erreicht. Obgleich Frege erkannt hatte, daß man beim logischen Rechnen, abgesehen von der Möglichkeit der Einsetzung besonderer Werte in eine allgemeine Form, grundsätzlich mit der einen inhaltlichen — d. h. als solche nicht selbst symbolisch darzustellenden — Schlußregel auskommen würde: „Eine von einer richtigen implizierte Aussage ist selbst richtig“, entschied er sich doch in der Praxis dafür, eine Mehrheit von Schlußregeln von möglichster Einfachheit, dabei aber von möglichst großer praktischer Tragweite, bereitzustellen, deren wesentliches Ziel mithin die Bequemlichkeit des logischen Rechnens war. Augenscheinlich um die Anzahl der erforderlichen Fallunterscheidungen nach Möglichkeit herabzudrücken, stellt Frege alle Aussagenverknüpfungen durch die beiden einzigen der Negation und der Implikation dar, von denen die erste überhaupt unentbehrlich, die zweite aber die für den Prozeß des logischen Schließens belangreichste ist. Unglücklicherweise stellen sich nun aber die symmetrischen Verknüpfungen der Disjunktion und der Konjunktion in der Folge in unsymmetrischer Weise dar, wodurch die Übersicht und die Handhabung in hohem Grade erschwert wird.

Alle Übelstände der Fregeschen Aussagensymbolik, unter anderem auch die recht lästige Mehrzeiligkeit der Formeln, fallen nun mit einem Schlage weg, wenn man statt der Implikation die Disjunktion zugrunde legt (gegen die Bevorzugung der Konjunktion sprechen gewisse Bequemlichkeitsgründe) und diese obendrein auf die denkbar einfachste Weise, durch die bloße Nebeneinanderstellung, ausdrückt. Der volle Gehalt der Fregeschen *Regeln*[8]) *für umkehrbare Schlüsse* stellt sich dann in der folgenden einfachen und übersichtlichen Weise dar:

---

nichts im Wege, nach dem Vorbild der arithmetischen Fachsprache hier von „disjungieren“, „konjungieren“, „Disjungenden“ und „Konjungenden“ zu sprechen. Praktisch kommt man freilich mit den von mir durchweg verwendeten naheliegenden Umschreibungen vollkommen aus.

[7]) G. Frege, Grundgesetze der Arithmetik. Vgl. insbesondere **1**, S. 25–26.

[8]) Grundgesetze **1**, S. 61.

I. Satz von der doppelten Verneinung. *Doppelte Verneinungsstriche über demselben Bestandteil einer Aussage können nach Belieben gesetzt oder weggelassen werden.* $\overline{\overline{p\,\bar{q}}}\,r \longleftrightarrow (p\,\bar{q})\,r$.

II′ Vereinigungssatz. *Disjunktionsglieder können nach Belieben zusammengefaßt oder getrennt werden.* (Klammern sind somit entbehrlich). $(p\,\bar{q})\,r \longleftrightarrow p\,(\bar{q}\,r) \longleftrightarrow p\,\bar{q}\,r$

III′ Vertauschungssatz. *Die Reihenfolge der Glieder einer Disjunktion ist beliebig.* $\overline{p\,q}\,r\,\bar{s} \longleftrightarrow \bar{s}\,\overline{q\,p}\,r$

IV′ Verschmelzungssatz. *Tritt in einer Disjunktion ein Glied mehrmals auf, so braucht es nur einmal gesetzt zu werden, und umgekehrt.* $\bar{p}\,\bar{p}\,q \longleftrightarrow \bar{p}\,q$.

Zu diesen Regeln ist noch folgendes zu bemerken:

Die Regeln I und II′ — der beigesetzte Strich nimmt Rücksicht auf eine spätere Erweiterung — sind bei Frege nicht ausdrücklich formuliert, hier aber der Vollständigkeit halber ergänzt.

Es mag beachtet werden, wie gerade die Regel II′ dazu beiträgt, daß letztlich allein noch der für den Rechenprozeß wesentliche Gehalt der Aussage zum Ausdruck gebracht wird. So kann z. B. ein Ausdruck wie

$$\bar{p}\,\bar{q}\,r$$

gelesen werden: „Entweder gilt p nicht oder q gilt nicht oder r gilt" — dies ist die schematischste und daher unlebendigste Art der Auffassung — oder: „Wenn p gilt, so gilt, wenn q gilt, auch r" oder: „Wenn p und q gelten, so gilt auch r" — wohl die praktisch zumeist wertvollste Lesart —, womit freilich noch keineswegs alle Möglichkeiten erschöpft sind. Soll im besonderen Fall eine bestimmte Lesart nahegelegt werden, so kann dies leicht durch Klammern oder auch durch doppelte Verneinungsstriche geschehen. So würden z. B. die Schreibungen

$$\bar{p}\,(\bar{q}\,r) \quad \text{und} \quad \overline{\overline{\bar{p}\,\bar{q}}}\,r$$

vorzugsweise auf die zweite und die dritte der obigen Deutungen abzielen.

Die Regel III′ faßt die Fregeschen Regeln 2 und 3 in eine zusammen, die ihrerseits einfacher ist als jede von diesen.

Die Regel IV′ ist sogar stärker als die Fregesche Regel 4, die nur von den Vordersätzen einer Implikation handelt.

§ 3.

Nicht umkehrbare Schlüsse.

Die durch die Regeln I—IV′ beschriebenen Prozesse hatte ich vorhin als „umkehrbare Schlüsse" bezeichnet. Sie würden statt dessen, da sie sozusagen auf bloße Umformungen der gegebenen Aussage hinauslaufen, vielleicht auch den Namen „uneigentliche Schlüsse" verdienen. In der klassischen Logik – wohl aus dem zuletzt genannten Grunde — einigermaßen mißachtet, sind sie in der Tat erst durch die moderne symbolische Logik zu ihrem wahren Recht gekommen. Die Algebra der Logik, so wie sie hier verstanden werden soll, insbesondere auch das nachher zu entwickelnde Entscheidungsverfahren, hat sogar die Eigentümlichkeit, ungeachtet der Tatsache, daß sie gerade auch in dem nicht umkehrbaren Schluß einen wichtigen Gegenstand ihrer Forschung sieht, doch selber ausschließlich mit umkehrbaren Schlüssen zu arbeiten, derart, daß also jede ihrer Schlußketten ohne weiteres auch rückwärts durchlaufen werden kann.

Um jedoch die besondere Eignung der hier verwendeten Symbolik gerade auch für das Arbeiten mit nicht umkehrbaren Schlüssen zu zeigen, möchte ich auch dieses Thema wenigstens streifen und gebe in dieser Absicht zunächst die einfache Regel an, die in unserer Symbolik die drei Fregeschen Schlußregeln 6—8 nicht nur ersetzt, sondern sogar noch überbietet. Ich formuliere sie als:

V Eliminationssatz. *Aus irgend zwei richtigen Aussagen erhält man wieder eine richtige, indem man gegebenenfalls einmal ein freies Disjunktionsglied* (d. h. nicht ein Glied einer selbst unter Verneinungsstrichen stehenden Disjunktion) *der einen Aussage, das sich von einem solchen der anderen Aussage nur durch den darübergesetzten Verneinungsstrich unterscheidet, gegen dieses weghebt und die übrigen disjunktiv verknüpft.* (Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Aussage selbst auch als eingliedrige Disjunktion gefaßt werden darf.) Z. B.: $p\overline{\bar{q}r}$, $\bar{q}rps \rightarrow p\overline{\bar{p}s}$.

Der wichtigste Sonderfall dieses Satzes ist derjenige der Fregeschen Regel 6, wo der eine der beiden Vordersätze als eingliedrige Disjunktion behandelt wird, in Zeichen: $p, \bar{p}q \rightarrow q$.

Die Regel V verkörpert, wie schon gesagt, den eigentlichen Schluß, denjenigen, bei welchem die Vordersätze ihrerseits aus dem Schlußsatz nicht wieder zurückgewonnen werden können, dieser also weniger besagt als jene zusammen. — Ihre Gültigkeit ist wie folgt einzusehen: Auf Grund der gegenwärtigen Symbolik stellen die Vordersätze sich als — gegebenenfalls eingliedrige — Disjunktionen dar. Unter den Disjunktionsgliedern ist beide Male mindestens ein richtiges, da ja sonst die Disjunktionen selber nicht richtig wären, im ganzen also mindestens zwei. Nun entsteht der Schlußsatz durch Weglassung zweier Glieder, von denen gewiß eines richtig und eines falsch ist, und Vereinigung der übrigen, hat also seinerseits immer noch mindestens ein richtiges Disjunktionsglied und ist folglich selbst richtig. — Anschaulich mag man sich den Inhalt der Regel etwa so klar machen: Man denke sich zwei Gefäße mit teils weißen, teils schwarzen Kugeln. Es sei bekannt, daß jedes der beiden Gefäße mindestens eine weiße Kugel enthält. Wird nun der Inhalt der Gefäße in einem dritten zusammengeschüttet und werden aus dem Gemisch zwei Kugeln verschiedener Farbe entfernt, so enthält das dritte Gefäß auch dann noch gewiß mindestens eine weiße Kugel.

Natürlich darf man nicht etwa mehr als *ein* Paar Glieder gleichzeitig wegheben. Haben nämlich die Vordersätze nur je ein richtiges Glied — dessen Verneinung dann jeweils in der anderen Aussage auftritt —, so wird, wenn man beide Gliederpaare weghebt, der Schlußsatz sicher falsch. So folgt aus pqr und $\bar{p}\bar{q}$ nicht etwa r, denn falls p und q verschiedenen Wahrheitswert haben, sind die Vordersätze offenbar erfüllt, unabhängig von der Geltung von r. Tatsächlich würde die Regel V hier nur die trivialen Folgerungen $pr\bar{p}$ und $qr\bar{q}$ gestatten.

Die Regel V ist übrigens noch einer Verallgemeinerung fähig, die über den in Freges „Grundgesetzen der Arithmetik" dargelegten Standpunkt noch erheblich hinausgeht. Um diese zu gewinnen, wollen wir jene Regel zunächst ein wenig anders fassen.

Ist uns irgendeine als richtig vorausgesetzte Aussage in der Form einer — möglicherweise eingliedrigen — Disjunktion gegeben, z. B. $\bar{p}qr$, so kann man augenscheinlich irgendeines der freien Disjunktionsglieder, etwa q, durch eine von ihm implizierte Aussage ersetzen, d. h. durch eine solche, deren Richtigkeit zum mindesten für den Fall der Richtigkeit von q verbürgt ist, ohne damit die Richtigkeit der gegebenen Aussage zu gefährden, weil dadurch die Anzahl der richtigen Disjunktionsglieder ja höchstens noch vermehrt wird. Mit anderen Worten: Gilt $\bar{p}qr$ und überdies $\bar{q}s$, so gilt gewiß auch $\bar{p}sr$. Oder allgemein: Eine Aussage bleibt richtig, wenn man ein freies Disjunktionsglied durch eine von ihm implizierte Aussage ersetzt. Diese Regel ist nur scheinbar eingeschränkter als V; in Wahrheit leistet sie genau dasselbe, da man vermöge der Regel II′ irgendeinen der Vordersätze stets passend als Implikation schreiben kann.

Eben diese letzte unsymmetrische Form der Regel V läßt sich nun von den freien Disjunktionsgliedern auf beliebige Bestandteile der gegebenen Aussage sinngemäß erweitern.

Betrachten wir etwa die Aussage $\bar{p}qr$ oder die Aussage $\overline{pq}r$. Hier darf der Bestandteil p, der ja kein freies Disjunktionsglied ist — im Gegensatz zu $\bar{p}$ bzw. $\overline{pq}$ — nicht ohne weiteres durch eine von p implizierte Aussage ersetzt werden, da seine Falschheit hier ja gerade der günstige Fall ist und nicht gestört werden darf, vielmehr nur durch eine solche, die falsch ist, wenn p falsch ist, m. a. W. durch eine Aussage, die ihrerseits p impliziert.

Um die fragliche Regel allgemein zu fassen, verstehen wir zunächst allgemein unter einem „*Bestandteil*" einer Aussage eine Teilaussage — unter anderem auch die gegebene Aussage selbst —, von der aus die gegebene Aussage als durch die Verknüpfungen der Negation und der Disjunktion — zu denen später noch die Konjunktion und die beiden Verallgemeinerungs-operationen treten werden — aufgebaut gedacht werden kann. Ein Bestandteil soll insbesondere *gerade* heißen, wenn er keinen oder eine gerade Anzahl von Verneinungsstrichen über sich hat — auch die über ihn hinwegstreichenden mitgezählt —, sonst *ungerade*. So sind in $\overline{\bar{p}q}r$ die Bestandteile p, $\overline{\bar{p}q}$, r gerade, $\bar{p}$, q, $\bar{p}q$ dagegen ungerade, während z. B. pq oder qr überhaupt kein Bestandteil der Aussage ist. Es gilt dann die folgende einfache

Implikationsregel $\overline{\mathrm{V}}$ *Aus einer richtigen Aussage erhält man wieder eine richtige, wenn man einen geraden Bestandteil durch eine von ihm implizierte oder einen ungeraden durch eine ihn implizierende Aussage ersetzt.*

Um diese Regel — wie übrigens auch eine später aufzustellende — noch ein wenig sinnfälliger fassen zu können, führe ich die folgende Redeweise ein: Gilt die Implikation $\bar{p}q$ ohne die umgekehrte $p\bar{q}$, so soll p „*stärker*" als q heißen und andererseits q „*schwächer*" als p. Die schwächere Aussage kann also stets aus der stärkeren erschlossen werden — sie ist gewissermaßen in ihr mit enthalten —, aber nicht umgekehrt. Gelten beide Implikationen gleichzeitig, so heißen p und q bekanntlich „äquivalent". (Augenscheinlich geht eine symbolisch darstellbare Aussage durch Ersetzung eines Bestandteils durch einen äquivalenten selbst in eine äquivalente über.)

Praktisch werden wir diese Redeweise freilich zumeist nicht streng im Sinne dieser Erklärung verwenden, sondern eine Aussage p vielmehr schon stärker als eine Aussage q nennen, sobald die Gültigkeit der Implikation $\bar{p}q$ feststeht, während die der umgekehrten Implikation nicht ersichtlich oder im Augenblick nicht von Belang ist. Kurz gesagt: Wir werden zur Vermeidung von Weitläufigkeiten im Ausdruck die Worte „stärker" und „schwächer" entgegen der genauen Wortbedeutung vorzugsweise im Sinne von „stärker oder äquivalent" und „schwächer oder äquivalent" verwenden.

Behalten wir dies im Auge, so werden wir die Regel $\overline{\mathrm{V}}$ nunmehr auch so aussprechen können:

Aus einer richtigen Aussage erhält man wieder eine richtige, indem man einen geraden Bestandteil abschwächt oder einen ungeraden verstärkt.

Gegenüber der Regel V ist dies bereits eine viel tiefer eindringende Schlußweise. Ihre eigentliche Tragweite kann freilich erst klargemacht werden, nachdem wir, wie dies sogleich geschehen wird, zu allgemeinen Aussagen übergegangen sind. Der Beweis mag hier übergangen werden; er ergibt sich übrigens am einfachsten durch Zurückführung der gegebenen Aussage auf eine der sogenannten Normalformen.

II. Die Begriffslogik.

§ 4.

Allgemeine und partikuläre Aussagen.

Außer den beiden Worten „nicht“ und „oder“ brauchen wir in der Logik als drittes noch das Wort „alle“. Bezeichnen wir mit

$$f_a$$

die Aussage: „Das Ding (Individuum) a fällt unter den Begriff f (hat die Eigenschaft f)“, so soll

$$x f_x$$

die Aussage bedeuten: „Alle Dinge (eines gewissen einwandfrei festgelegt zu denkenden Bereiches) fallen unter den Begriff f“. (Die obige Bezeichnung ist nur eine gedrängtere Form derjenigen von Whitehead und Russell.) Die Aussage: „Es gibt mindestens ein Ding, das unter den Begriff f fällt“, oder: „Der Umfang des Begriffes f ist nicht leer“ stellt sich dann augenscheinlich als

$$x \overline{f_x}$$

dar, d. h. „Es ist falsch, daß f_x für alle x nicht gilt“.

Man erkennt nun leicht, daß die Regeln I—V auch dann gültig bleiben, wenn die in Rede stehenden Aussagen von einem Operator x beherrscht werden. Vor allem ist bemerkenswert, daß die neue Implikationsregel $\overline{\mathrm{V}}^*$, bei der jetzt die Hilfsimplikation als allgemein, d. h. als von der Form

$$x \overline{f_x} g_x$$

vorauszusetzen ist, mit einem Schlage alle von der symbolischen Logik als rechtmäßig anerkannten *Aristotelischen Schlüsse* zu ziehen gestattet. Die Schlüsse mit zwei allgemeinen Vordersätzen ließen sich sogar schon nach der neuen Regel V^* erledigen, während bei den übrigen Schlüssen stets der allgemeine Vordersatz als Hilfsimplikation für $\overline{\mathrm{V}}^*$ dient.

Als Beispiel sei zunächst der Schluß *Barbara*

$$x \overline{f_x} g_x, \quad x \overline{g_x} h_x \rightarrow x \overline{f_x} h_x$$

angeführt, der sich richtig schon nach V^* ergibt. Weiter der Schluß *Ferio*:

$$\overline{x \overline{f_x} g_x}, \quad x \overline{g_x}\, \overline{h_x} \rightarrow \overline{x \overline{f_x} h_x}.$$

Da g_x allgemein $\overline{h_x}$ impliziert, kann g_x im ersten Vordersatz nach $\overline{\mathrm{V}}^*$ durch $\overline{h_x}$ ersetzt werden, womit dieser in den Schlußsatz übergeht. Ganz entsprechend bei den übrigen Aristotelischen Schlüssen[9]).

Nach $\overline{\mathrm{V}}^*$ läßt sich der Schluß Barbara übrigens, wie alle Schlüsse mit zwei allgemeinen Vordersätzen, auf zweifache Weise behandeln, indem man entweder vermöge des zweiten Vordersatzes g_x als h_x oder aber vermöge des ersten $\overline{g_x}$ als $\overline{f_x}$ implizierend betrachtet und jeweils in dem anderen Vordersatz die bezügliche Ersetzung vornimmt.

Bei der obigen Verwendung der Symbolik habe ich mir eine Freiheit gestattet, die aber wohl kaum der ausdrücklichen Rechtfertigung bedarf. Offenbar war es unnötig, oben ausdrücklich $x(\overline{f_x} g_x)$ zu schreiben, weil das g_x, als von x abhängig, ja notwendig zum Wirkungsbereich des Operators x gehört und mithin keine Gefahr besteht, daß die Aussage fälschlich als $(x\overline{f_x})g_x$ gelesen wird. Aber auch wenn der zweite Bestandteil von x unabhängig wäre, die Aussage also z. B. $x f_x p$ lautete, bliebe die klammerfreie Schreibung unbedenklich, wegen der naheliegenden Äquivalenzen:

$$x(f_x p) \longleftrightarrow (x f_x) p \longleftrightarrow x p f_x \longleftrightarrow p x f_x,$$

wo auch die letzten beiden Schreibungen je nur eine Lesart zulassen. Anders gewendet: Es ist für die Richtigkeit der Aussage $x f_x p$ gleichgültig, ob man das p in den Wirkungsbereich des Operators x einbezieht oder nicht. Allgemein:

Der Wirkungsbereich eines Operators erstreckt sich beliebig weit nach rechts — sofern nicht etwa ausdrücklich Klammern gesetzt sind oder Verneinungsstriche dies hindern —, *mindestens aber bis zur letzten durch die Verwendung des gleichen Buchstabens als zugehörig gekennzeichneten Argumentstelle.*

Übrigens ist der Ausdruck

$$x f_x p$$

oben insofern bloß als allgemeines Schema aufzufassen, als in Wirklichkeit f_x und p selber auch zusammengesetzte Ausdrücke sein können, die noch von irgendwelchen anderen Dingen $y, z, \ldots$ abhängen. Vorausgesetzt ist nur, daß p nicht von x abhängt.

Vergleichen wir einen Augenblick die drei Aussagen

$$\overline{x\overline{\overline{f_x}}}\,pq, \qquad \overline{x\overline{f_x p}}\,q, \qquad \overline{x\overline{f_x pq}},$$

so erkennen wir leicht alle drei als äquivalent. Die erste bedeutet nämlich: „Entweder gibt es ein x, das f_x erfüllt, oder p gilt oder q gilt“,

---

[9]) Abgesehen freilich von den später noch zu erörternden p-Schlüssen.

die zweite: „Entweder gibt es ein x, so daß entweder f_x oder p gilt, oder es gilt q“, und schließlich die dritte. „Es gibt ein x, so daß entweder f_x oder p oder q gilt“ Man kann also den Doppelstrich über dem Operanden, der hier die Klammer erspart, beliebig nach rechts verlängern, ohne an der Richtigkeit oder Falschheit der Aussage etwas zu ändern. Es würde somit augenscheinlich genügen, den partikulären Charakter der Aussage bloß an dem Operator anzudeuten, da die ausdrückliche Abgrenzung des Operanden hier in der Tat bloßer Ballast ist. Dies soll nun dadurch geschehen, daß wir die übereinanderliegenden Teile der Verneinungsstriche gewissermaßen vollständig gegeneinander „wegheben“ und die obige Aussage demgemäß einfach als

$$\bar{x} f_x p q$$

schreiben, wo der Wirkungsbereich wiederum beliebig ist[10]. Die Aussage $\overline{x \overline{f_x}}$ („Es gibt ein x von der Eigenschaft f“) schreiben wir somit einfach

$$\bar{x} f_x.$$

Es bestehen nun augenscheinlich die Äquivalenzen:

$$(\mathrm{VI}^*) \qquad \begin{array}{lcl} \overline{x f_x} \longleftrightarrow \bar{x}\, \overline{f_x} & \qquad & \overline{\bar{x} f_x} \longleftrightarrow x \overline{f_x} \\ \bar{x}\, y\, \overline{f_{xy}} \longleftrightarrow \bar{x}\, \bar{y}\, \overline{f_{xy}} & \qquad & \bar{x}\, \bar{y}\, \overline{f_{xy}} \longleftrightarrow x\, y\, \overline{f_{xy}} \\ \overline{x\, \bar{y}\, f_{xy}} \longleftrightarrow \bar{x}\, y\, \overline{f_{xy}} & \qquad & \bar{x}\, y\, \overline{f_{xy}} \longleftrightarrow x\, \bar{y}\, \overline{f_{xy}} \quad \text{usf.} \end{array}$$

wobei die späteren Zeilen einfach durch wiederholte Anwendung der Formeln der ersten entstehen. In Worten: *Die Negation einer Operatoraussage wird ausgeführt, indem man den Verneinungsstrich zwischen und nach den voranstehenden Operatoren unterbricht, entstehende Doppelstriche aber sogleich wegläßt.*

Damit ist unserem allgemeinen Operator x auf ganz natürliche Weise der partikuläre Operator $\bar{x}$ an die Seite getreten. Auch auf die von einem partikulären Operator beherrschten Aussagen sind die Regeln I—IV′ ohne weiteres anwendbar, dagegen nicht mehr die Regel V, der hier vielmehr ein duales Gegenstück ohne praktisches Interesse entspricht. Dagegen

---

[10]) Allerdings ist hierbei vorausgesetzt, daß es mindestens ein Individuum gibt. Wäre nämlich der Individuenbereich leer, so wäre, im Falle daß p eine richtige Aussage ist, von den beiden Aussagen

$$\bar{x}(f_x p) \qquad \text{und} \qquad (\bar{x} f_x) p$$

offenbar die erste Aussage falsch — denn gibt es überhaupt kein x, so gibt es auch keines von einer irgendwie gearteten Eigenschaft —, die zweite dagegen richtig, da ja nach Voraussetzung ihr zweites Disjunktionsglied richtig ist. In diesem trivialen Ausnahmefall hört der oben beschriebene Prozeß also auf, eine äquivalente Umformung darzustellen.

gilt die Implikationsregel $\overline{\mathrm{V}}^*$ nach wie vor, da die Anzahl der Verneinungsstriche über irgendeinem Bestandteil sich ja nur um eine gerade Zahl vermindert haben kann, nur muß die Hilfsimplikation, wie gesagt, stets eine allgemeine sein.

§ 5.

Formale Eigenschaften der Operatoren.

Vom Standpunkt des logischen Rechnens scheint es mir eine recht nützliche Bemerkung, daß die Operatoren x und $\bar{x}$ sich bis zu einem gewissen Grade selber den für die Verknüpfung von Aussagen gültigen Gesetzen fügen. Es liegt in der Tat nahe, unsere Regeln II′ und III′ gerade in der folgenden Form zu verallgemeinern.

II* *Treten in einer Disjunktion oder Konjunktion*[11]) *Operatoren auf, so dürfen die vorkommenden Symbole nach Belieben zusammengefaßt und getrennt werden, mit der Einschränkung jedoch, daß kein Argument von dem zugehörigen Operator in einer diesen Zusammenhang mißachtenden Weise getrennt werden darf.*

III* *Auch die Reihenfolge der vorkommenden Symbole ist beliebig, mit den beiden Einschränkungen, daß 1. jeder Operator links von den zugehörigen Argumenten bleiben muß und 2. die Reihenfolge der Operatoren untereinander die gleiche bleibt. Doch ist in dem Falle, daß zwei oder mehrere gleichartige Operatoren unmittelbar benachbart sind, deren Reihenfolge beliebig.*

Um die Gültigkeit der obigen Regeln einzusehen, wird es genügen, die folgenden Äquivalenzen zu betrachten:

$$x\bar{y}f_x g_y \longleftrightarrow (xf_x)(\bar{y}g_y) \longleftrightarrow x(f_x\bar{y}g_y) \quad {}^{12})$$

$$x\bar{y}f_x g_{xy} \longleftrightarrow xf_x\bar{y}g_{xy}$$

$$xyf_{xy} \longleftrightarrow yxf_{xy} \qquad \bar{x}\bar{y}f_{xy} \longleftrightarrow \bar{y}\bar{x}f_{xy}.$$

Dagegen gilt $\bar{x}yf_{xy} \longrightarrow y\bar{x}f_{xy}$ im allgemeinen nur einseitig.

Wie Whitehead und Russell[13]) gezeigt haben, läßt sich sogar *jede* Aussage in der Weise schreiben, daß links sämtliche Operatoren vereinigt sind und dahinter die sogenannte „Matrix" steht, die ihrerseits keine Operatoren mehr enthält. Auf Grund der gegenwärtigen Symbolik stellt sich diese merkwürdige Operation nun einfach so dar, daß sämtliche

---

[11]) Die Rechtfertigung dieses Zusatzes wird später nachgeholt werden.

[12]) Auf Grund des zweiten Ausdrucks, in welchem die Veränderlichen getrennt sind, dürften hier die Operatoren sogar untereinander ihre Reihenfolge vertauschen.

[13]) Principia Mathematica, 1, S. 135—136.

innerhalb der Aussage an Operatorstelle stehenden x, y. [14]) — wobei die vorkommenden Operatoren als durch lauter verschiedene Zeichen dargestellt angenommen werden — an eben diesen Stellen getilgt und in derselben Reihenfolge, die sie ursprünglich innehatten, an die Spitze der Aussage gestellt werden; jedoch so, daß jedes x, y, , das ursprünglich keinen oder eine gerade Anzahl von Strichen — den Strich des partikulären Operators eingerechnet — über sich hatte, vorn ohne Strich, d. h. als allgemeiner Operator, dagegen jedes mit einer ungeraden Anzahl von Strichen über sich vorn überstrichen, als partikulärer Operator, erscheint. Das folgende Beispiel mag diesen Prozeß verdeutlichen.

$$\overline{xy\overline{f_{xy}}\,\overline{g_y}\,\bar{z}\,\overline{h_{yz}}} \longleftrightarrow x\bar{y}zf_{xy}g_y\overline{\overline{h_{yz}}}.$$

Abgesehen von dem soeben erklärten Prozeß ist es übrigens weder notwendig noch empfehlenswert, die innerhalb einer Aussage vorkommenden Veränderlichen stets durch lauter verschiedene Zeichen wiederzugeben. So ist z. B. die Aussage

$$x\varphi_x\chi_x\bar{x}\varphi_x\bar{x}\chi_x,$$

d. h. „Fällt alles, was unter den Begriff φ fällt, auch unter den Begriff χ, so ist, wenn φ nicht leer ist, auch χ nicht leer", wie oben geschrieben, völlig unmißverständlich, da hier jeder der beiden ersten Operatoren offenbar nicht weiter wirken kann als bis zum Ende des Verneinungsstriches, unter dem er selber steht. Schreibt man die Aussage jedoch in der Form:

$$\bar{x}\overline{\overline{\varphi_x}}\chi_x x\varphi_x\bar{x}\chi_x,$$

so ist man hier nach unseren Abmachungen allerdings berechtigt, den Wirkungsbereich des ersten $\bar{x}$ und den des x bis zum Ende der Aussage erstreckt zu denken. Um nun unbeschadet der früheren Verabredung auch für derartige Fälle die Gleichbezeichnung der Veränderlichen unbedenklich aufrechterhalten zu können, setzen wir fest, daß *jede Argumentstelle stets zu dem nächstvorhergehenden gleichnamigen Operator* (von welchem sie nicht durch Klammern oder durch die Klammerwirkung von Verneinungsstrichen abgeschlossen ist) gehören soll. Hiernach darf man also insbesondere Veränderliche, deren Bereiche als getrennt liegend betrachtet werden dürfen (oder auf andere Weise unverkennbar unterschieden sind), ohne weiteres mit demselben Buchstaben bezeichnen. Der eingeklammerte Teil der Festsetzung bezieht sich auf Fälle wie

$$xf_x\overline{xg_x}h_x,$$

die, obzwar unmißverständlich, doch vielleicht besser vermieden werden.

[14]) Später werden noch die veränderlichen Begriffe φ, χ, ψ hinzukommen.

§ 6.

Abschluß der Begriffssymbolik.

Um die Rechengesetze für Operatoren zum Abschluß zu bringen, empfiehlt es sich, nunmehr für die *Konjunktion* die in Aussicht genommene *abkürzende Bezeichnung* einzuführen. In dieser Absicht stellen wir nach dem Vorbild von Whitehead und Russell

$$p\cdot q$$

als neue Schreibung für die Verknüpfung „p und q" zur Verfügung.

Berücksichtigt man, daß bei Verwendung dieser Schreibweise gelegentlich allerdings Klammern notwendig werden, wie z. B. bei

$$(p.q)r$$

— gegenüber $p.qr$, das als $p.(qr)$ gelesen werden soll —, so bleiben im übrigen, wie man leicht nachprüft, die Rechenregeln I—IV' auch dann noch gültig, wenn man das Wort „Disjunktion" überall durch „Konjunktion" ersetzt. In gleichmäßiger Anwendung auf beide Verknüpfungen werden wir diese Regeln nunmehr ohne Strich zitieren. Die Regeln II* und III* sind der Einfachheit halber bereits mit Rücksicht auf diese Erweiterung formuliert worden. Auch zu V (bzw. V*) gibt es übrigens ein Gegenstück, freilich ohne praktische Bedeutung. Die Regel $\overline{\text{V}}$ (bzw. $\overline{\text{V}}^*$) gilt ihrerseits ganz unverändert weiter, da ja die Anzahl der Verneinungsstriche über einem Bestandteil infolge der Einführung des Konjunktionspunktes sich höchstens wieder um eine gerade Zahl vermindert haben kann.

Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit und zur Ersparung von Klammern soll statt

$$x(f_x\cdot g_x) \quad \text{und} \quad \bar{x}(f_x\, g_x)$$

auch noch die Schreibung

$$x\cdot f_x\cdot g_x \quad \text{und} \quad \bar{x}.f_x\cdot g_x$$

bereit gestellt werden, wo der erste Punkt den Operator befähigen soll, über den zweiten hinüber zu wirken, und augenscheinlich nicht als Konjunktionszeichen gelesen werden kann. Soweit noch Konjunktionsglieder folgen, wie in

$$x.f_x\, g_x\cdot p,$$

braucht auch hier der Wirkungsbereich des Operators nicht nach rechts abgegrenzt zu werden.

Vermöge der zuletzt entwickelten Symbolik stellen sich nun die Verschmelzungssätze für Operatoren wie folgt dar:

(IV*) $\qquad xf_x.xg_x \longleftrightarrow x.f_x\cdot g_x, \qquad \bar{x}f_x\bar{x}g_x \longleftrightarrow \bar{x}f_xg_x.$

(Natürlich könnten die Veränderlichen je in den beiden Teilaussagen links auch verschieden bezeichnet sein.) Diese beiden Sätze, die sich auch leicht in Worten ausdrücken lassen, werden, namentlich von rechts nach links gelesen, in der Folge von besonderem Belang sein.

Die Veränderlichen einer Aussage brauchen nun aber nicht bloß Individuen zu sein, sondern es können auch *veränderliche Begriffe* auftreten. So z. B. gilt die schon betrachtete Aussage

$$\overline{x\,\overline{\varphi_x}\,\chi_x}\;\overline{\bar{x}\,\varphi_x}\;\bar{x}\,\chi_x$$

augenscheinlich für beliebige Begriffe φ^x und χ^x[15]). In der Tat wird der obige Ausdruck eigentlich erst dann eine bestimmte Aussage, wenn man entweder für φ^x und χ^x bestimmt gegebene Begriffe einsetzt oder aber eben sein Erfülltsein für beliebige derartige Begriffe behauptet. So wie er dasteht, ist der Ausdruck vielmehr *abhängig* von den beiden Begriffen φ^x und χ^x, er würde sich im Sinne unserer Symbolik daher schematisch als

$$F_{\varphi\chi},$$

die entsprechende allgemeine Aussage demgegenüber als

$$\varphi\chi F_{\varphi\chi}$$

darstellen, wo φ und χ, da sie ja ohne Argument stehen, offenbar nicht als Disjunktionsglieder gelesen werden können. Entsprechend bedeutet natürlich

$$\varphi\bar{\chi}G_{\varphi\chi},$$

daß es, wie auch der Begriff φ^x gewählt sein mag, stets einen Begriff χ^x gibt, derart daß $G_{\varphi\chi}$ eine richtige Aussage ist.

Man bestätigt ohne viel Mühe, daß die Regeln für Operatoren wörtlich richtig bleiben, wenn man auch φ und $\bar{\varphi}$ unter deren Zahl aufnimmt. Der Nachweis im einzelnen mag daher hier übergangen werden.

Damit ist die Aussagen- und Begriffssymbolik, von der wir in der Folge Gebrauch machen wollen, im wesentlichen entwickelt.

Indessen sei hier noch die folgende Bemerkung beigefügt: Man könnte auf Grund der Kenntnis gewisser logischer Widersprüche, wie z. B. desjenigen des Begriffes des nicht unter sich selber fallenden Begriffes (von dem ohne Widerspruch weder behauptet werden kann, daß er seinerseits unter sich selber fällt, noch daß er nicht unter sich selber

---

[15]) Um logische Allgemeinheiten ihrer Natur nach ausdrücklich zu kennzeichnen, füge ich den Begriffsbuchstaben die Argumente als obere Indizes bei. Liest man also f^x — im Gegensatz zu f^{xy} oder F^{φ} —, so versteht man ohne besonderen Hinweis, daß f hier als Eigenschaft von Individuen, nicht aber z. B. als Beziehung unter Individuen oder als Eigenschaft von Begriffen, gemeint ist.

fällt) oder der neuerdings namentlich von H. Weyl erhobenen Einwendungen wohl die Befürchtung haben, ob nicht unsere Untersuchung durch die Zulassung der obigen veränderlichen Begriffe bereits in die Gefahrzone derartiger logischer Zirkel und Widersprüche gekommen sein mag. Hierzu ist nun folgendes zu sagen: Einmal steht nichts im Wege, unsere Begriffe f^x, g^x, φ^x, χ^x durchweg als „prädikativ" im Russellschen Sinne, d. h. als ihrerseits keine Begriffe als Operatoren enthaltend, vorauszusetzen, da wir in der Praxis für sie niemals Begriffe höherer Ordnung einsetzen werden. Andererseits würde die Zugrundelegung des von Russell aufgestellten „Axioms der Reduzierbarkeit" die einwandfreie Möglichkeit bieten, auch unabhängig von der genannten Beschränkung ohne die Gefahr eines Zirkels in der Weise, wie dies künftig geschehen soll, mit veränderlichen Begriffen zu arbeiten. Obendrein werden wir — dies ist eine Eigentümlichkeit der gegenwärtigen Untersuchung — sogar alle tatsächlich vorkommenden nicht prädikativen Begriffe als auf prädikative zurückführbar erweisen. Zu Bedenken der besprochenen Art liegt also innerhalb desjenigen Gebietes, in welchem sich unsere Untersuchung bewegen wird, jedenfalls noch kein Anlaß vor, ebensowenig, hier bereits vorgreifend zu entscheiden, wie ihnen auf einer späteren Stufe zu begegnen sei.

III. Das elementare Entscheidungsproblem.

§ 7.

Das praktische Verfahren.

Wir sind nunmehr in der Lage, unsere Hauptaufgabe der Aufweisung eines Verfahrens, das über Richtigkeit oder Falschheit irgendeiner Aussage eines gewissen klar abgesteckten Aussagenbereiches zu entscheiden gestattet, wenigstens in einer gewissen vorläufigen Weise in Angriff zu nehmen.

Was zunächst diejenigen Aussagen betrifft, die *allein durch die elementaren Verknüpfungen der Negation, Disjunktion und Konjunktion* entstehen, so ist bereits seit längerem ein Verfahren bekannt, um über die Allgemeingültigkeit einer derartigen Aussage zu entscheiden. Man führt dazu mit Vorteil zwei Rechenzeichen ein, eines für die Wahrheit und eines für die Falschheit, und zwar verwendet man hierfür gewöhnlich die Ziffern 0 und 1, wobei die Zuordnung der Zeichen zu den beiden Begriffen freilich im Grunde willkürlich ist. Aus den eingangs auseinandergesetzten Gründen sollen hier wiederum statt der Moduln der arithmetischen Verknüpfungen neutrale Zeichen verwendet werden, und zwar wähle ich für die *Wahrheit* das Widderzeichen ♈, das an den Anfangsbuchstaben des Wortes *verum* erinnern mag, für die *Falschheit* das umgekehrte Zeichen $\curlywedge$.

Ist z. B. der Satz vorgelegt, der nach Whitehead und Russell

$$p \supset . p \supset q \supset q,$$

in unserer Symbolik

$$\overline{p}\,\overline{\overline{p}q}\,q$$

geschrieben wird (in Worten: „Wenn p gilt, so gilt, wenn q aus p folgt, auch q"), so leuchtet unmittelbar ein, daß es für die Gültigkeit derartiger Verknüpfungsaussagen auf den besonderen Inhalt der Grundaussagen p und q gar nicht ankommt, sondern nur auf ihre Richtigkeit oder Falschheit, ihren „Wahrheitswert". Ersetzt man also p und q irgendwie durch die Zeichen $\curlyvee$ und $\curlywedge$ und bestimmt den Wahrheitswert der Verknüpfungsaussage auf Grund der Rechenregeln

$$\overline{\curlyvee} = \curlywedge, \qquad \overline{\curlywedge} = \curlyvee. \qquad \curlyvee\curlyvee = \curlyvee\curlywedge = \curlywedge\curlyvee = \curlyvee \qquad \curlywedge\curlywedge = \curlywedge,$$

so wird sich die Allgemeingültigkeit der gegebenen Aussage offenbar dadurch kundgeben müssen, daß, wie man auch die Einsetzung auf die vier verschiedenen möglichen Arten vornehmen mag, sich stets gerade der Wahrheitswert $\curlyvee$ ergibt. Dies ist nun bei der obigen Aussage in der Tat der Fall.

Praktisch einfacher und eleganter als das eben geschilderte ist dasjenige Verfahren, das sich der sogenannten *Normalform* der elementaren Verknüpfungsaussage bedient[16]. Versteht man unter „*Grundbestandteilen*" einer derartigen Verknüpfungsaussage die nicht weiter zerlegbaren Aussagen $p, q, r, \ldots$ selbst, so läßt sich bekanntlich vermöge der Formeln für die Ausführung der Negation

(VI)
$$\overline{pq} \leftrightarrow \overline{p} . \overline{q}$$
$$\overline{p.q} \leftrightarrow \overline{p}\,\overline{q}$$

und der Distributionssätze

(VII)
$$pq\;r \leftrightarrow (p.r)(q\;r)$$
$$(p.q)r \leftrightarrow pr\;qr$$

— die ebenso wie die vorigen in naheliegender Verallgemeinerung auf eine beliebige endliche Zahl von Disjunktions- und Konjunktionsgliedern unseren Rechenregeln hinzugefügt gedacht werden mögen — die Gesamtaussage als Konjunktion von lauter Disjunktionen teils verneinter, teils unverneinter Grundbestandteile oder auch dual entsprechend als Disjunktion von lauter derartigen Konjunktionen darstellen. Ich werde diese beiden Formen als die *konjunktive* und die *disjunktive Normalform* unterscheiden.

[16]) Vgl. P. Bernays, Beiträge zur axiomatischen Behandlung des Logikkalküls. (Habilitationsschrift.)

Der Übergang von der einen zur anderen wird durch die Distributionssätze vermittelt.

Das allgemeine Entscheidungsverfahren besteht nun einfach darin, daß man eine konjunktive Normalform herstellt, in der, soll die Gesamtaussage allgemeingültig sein, natürlich jedes einzelne Konjunktionsglied eine allgemeingültige Aussage darstellen muß. Nun läßt sich aber leicht zeigen, daß eine Disjunktion von unverneinten und verneinten Grundbestandteilen immer und nur dann allgemeingültig ist, wenn derselbe Bestandteil sowohl unüberstrichen als auch überstrichen vorkommt. Trifft dies letzte bei jedem Konjunktionsglied zu, so ist die Aussage allgemeingültig, im anderen Falle nicht.

Es sei z. B. die etwas verwickeltere Aussage

$$p \supset q \quad r \supset s \quad \supset : p \quad r \quad \supset \quad q . s,$$

in unserer Symbolik

$$\overline{p} q \overline{r} s \overline{p . r} (q . s)$$

vorgelegt. (In Worten „Folgt q aus p und s aus r, so folgt q und s aus p und r“.) Durch Ausführung der Negationen erhält man zunächst die disjunktive Normalform

$$(p . \overline{q})(r \quad \overline{s}) \overline{p} \overline{r} (q . s),$$

und hieraus würde sich durch Distribution eine achtgliedrige konjunktive Normalform ergeben, für welche die vorhin aufgestellte Bedingung der Allgemeingültigkeit in der Tat erfüllt ist. Die ein wenig lästige Rechnung soll hier nicht durchgeführt werden, da wir in Kürze auf das Beispiel zurückkommen werden.

Wesentlich auf dem obigen Satz VI in Verbindung mit den früheren I und VI* beruht das bekannte *Dualitätsprinzip* der symbolischen Logik. Ich will dieses Prinzip hier nur in derjenigen engeren Form aussprechen, in der ich es in dieser Untersuchung verwenden werde:

VIII. Dualitätssatz. *Eine Aussagenäquivalenz bleibt gültig, wenn man in den beiden verglichenen Aussagen überall die Verknüpfungen der Disjunktion und der Konjunktion miteinander vertauscht und überdies alle allgemeinen Operatoren als partikuläre schreibt und umgekehrt.*

Der Beweis ergibt sich einfach so, daß man beide Seiten der Äquivalenz verneint und diese Verneinungen nach den genannten Regeln ausgeführt denkt, bis sie zu den Grundbestandteilen gelangt sind. Ersetzt man diese Grundbestandteile — p, q, . . , f_x, . , φ_x, . , F_φ usw. — durch ihre Negationen, was unbeschadet der Gültigkeit der Äquivalenz geschehen kann[17]; so geht diese damit augenscheinlich in die beschriebene „duale“ über.

[17]) Wegen $\varphi F_{.\varphi} \longleftrightarrow \varphi F_{\bar{\varphi}}$, $\bar{\varphi} F_{\varphi} \longleftrightarrow \bar{\varphi} F_{\bar{\varphi}}$ usf.

Im Zusammenhang mit künftigen Erweiterungen des Bezeichnungsvorrats werden später entsprechende Ergänzungen des obigen Prinzips notwendig werden.

§ 8.

Das Rechnen mit Normalformen.

Da wir in Zukunft viel mit Normalformen zu arbeiten haben werden, soll zur Erhöhung der Gleichförmigkeit, insbesondere zur Vermeidung von Klammern, die ja nur bei der disjunktiven Form auftreten, eine neue Schreibweise eingeführt werden. Und zwar mag ein hochgestelltes kleines Kreuz als *neues Zeichen für die Disjunktion* dienen, mit der Festsetzung, daß dieses Disjunktionskreuz seinerseits weniger eng verbinden soll als der Konjunktionspunkt. Die Disjunktivform des letzten Beispiels schreibt sich dann augenscheinlich folgendermaßen.

$$p.\bar{q}\,{}^{+}r\;\bar{s}\,{}^{+}\bar{p}\,{}^{+}\bar{r}\,{}^{+}q.s.$$

Allerdings soll diese Schreibung nun nicht durchweg, sondern nur in solchen Fällen gebraucht werden, wo ihre Verwendung Klammern erspart und zugleich die Übersichtlichkeit erhöht, also in erster Linie gerade bei der disjunktiven Normalform.

Grundsätzlich würde ich allerdings auch hier ein von arithmetischen Anklängen freies Zeichen für wünschenswerter halten. Es wird indessen schwer sein, ein Zeichen zu finden, das in gleichem Maße wie das hier gewählte deutliche Erkennbarkeit mit leichter Ausführbarkeit vereinigt. Auf der anderen Seite wird der Umstand, daß im Falle der Überordnung der Disjunktion unser Punkt auf der Zeile dem Malzeichen und unser Kreuz dem Pluszeichen der bisherigen Algebra der Logik entspricht, für den mit dieser bereits Vertrauten eine gewisse Erleichterung bedeuten. Gegenüber der älteren logischen Algebra haben wir jedenfalls den Vorteil einer erheblich einfacheren Darstellung der Konjunktion von Disjunktionen, womit einer innerhalb jener mitunter recht störenden willkürlichen Bevorzugung der einen Form vor der anderen aus der hier offenbar ganz unberechtigten rein äußerlichen Rücksicht der Klammerersparnis und der zufälligen Gewöhnung von vornherein vorgebeugt ist[18]).

Nennen wir die enger verbundenen Glieder einer (konjunktiven oder disjunktiven) Normalform — wie oben $p, \bar{q}, r$ usf. — kurz *Unterglieder*, die weiter verbundenen — wie $p.\bar{q}$, $r\;\bar{s}$ usf. — *Oberglieder*, so gelten die folgenden leicht zu bewahrheitenden Sätze, die wir zusammenfassen zu den

[18]) Recht bezeichnend ist in diesem Zusammenhange eine Bemerkung Schröders in seiner Algebra der Logik, 2, S. 190—191, die den Grund für manche sonst ganz unverständliche Willkür aufdeckt.

Vereinfachungssätzen IX.

1. *Ein Oberglied einer Normalform*[19]) *kann weggelassen werden, wenn es alle Unterglieder eines anderen Obergliedes enthält.*

2. *Ein Unterglied einer Normalform kann weggelassen werden, wenn seine Negation außerdem noch selbständig als Oberglied vorkommt.*

Dies beruht auf den Formeln

$$p \cdot pq \longleftrightarrow p \qquad\qquad p \,^{+} p \cdot q \longleftrightarrow p$$

$$p \cdot \bar{p}q \longleftrightarrow p \cdot q \qquad\qquad p \,^{+} \bar{p} \cdot q \longleftrightarrow p \,^{+} q$$

Im Falle unseres Beispiels läßt sich nach der ersten Regel IX augenscheinlich nichts vereinfachen, weil hier kein Oberglied ganz in einem anderen enthalten ist, wohl aber nach der zweiten. Nach ihr vereinfacht sich unsere Disjunktivform sogleich zu

$$\bar{q}\, s\, \bar{p}\, \bar{r}\, (q . s),$$

wo man, ohne die Distribution wirklich auszuführen, ohne weiteres sieht, daß im ersten der entstehenden Konjunktionsglieder q, im zweiten s sowohl unüberstrichen als auch überstrichen vorkommen wird.

Es könnte im ersten Augenblick scheinen, als ob im Widerstreit zu dem allgemeinen dualen Entsprechen von Disjunktion und Konjunktion hier eine einseitige Bevorzugung der konjunktiven Normalform vorläge. In Wirklichkeit ist eine solche aber bereits in der Aufgabestellung begründet. Unsere gegebene Aussage sollte nämlich streng genommen

$$(p\, q\, r\, s)\, \overline{\bar{p}\, q}\, \overline{\bar{r}\, s}\, \overline{p . r}\, (q . s)$$

geschrieben werden, wo die links — sonst scheinbar überflüssigerweise — eingeklammerten Buchstaben als allgemeine Operatoren zu lesen sind. Demgegenüber würde die Aussage

$$(\bar{p}\bar{q}) \cdot pq \;\; p\bar{q} \cdot \bar{p}\bar{q}$$

offensichtlich bedeuten, daß es eine Aussage p und eine Aussage q, bestimmter gesagt: einen Wahrheitswert p und einen Wahrheitswert q gibt, so daß $pq \cdot p\bar{q} \cdot \bar{p}\bar{q}$ den Wahrheitswert $\curlyvee$ annimmt. Um die Gültigkeit *dieser* Aussage zu erweisen, nützt uns aber die konjunktive Normalform nichts; vielmehr tritt hier gerade die disjunktive Normalform in ihr Recht. Vermöge der Regeln VII und IX, zu denen noch unsere früheren Rechenregeln in ihrer Anwendung auf die disjunktive Verknüpfung kommen, ergibt sich eine solche in unserem Falle als

$$p \cdot \bar{p} \,^{+} p \cdot \bar{q} \,^{+} q \;\; \bar{q}$$

[19]) Mit diesem Ausdruck meinen wir hier übrigens ganz allgemein eine Konjunktion von Disjunktionen oder eine Disjunktion von Konjunktionen, also nicht unbedingt eine Normalform von Grundbestandteilen.

Nun läßt sich eine Form wie die obige offenbar dann und nur dann erfüllen, wenn mindestens eines der Disjunktionsglieder sich erfüllen läßt; und dies wird dann der Fall sein, wenn mindestens eines dieser Glieder nicht schon in sich widersprechend ist, also nicht dieselbe Grundaussage sowohl unüberstrichen als auch überstrichen enthält. Im gegenwärtigen Fall ist das Glied $p\ \bar{q}$ widerspruchsfrei, die gegebene Aussage also richtig. In der Tat wird die durch sie gestellte Bedingung durch die Wertverteilung $p = \curlyvee$ und $q = \curlywedge$ erfüllt.

Ein noch allgemeinerer Fall wäre der folgende:

$$(p\bar{q})\ pq\ \bar{p}\bar{q}\,,$$

d. h., „Wie auch der Wahrheitswert p gewählt sein mag, in jedem Falle gibt es einen Wahrheitswert q, so daß der Operand den Wert $\curlyvee$ annimmt.“ Das Einsetzungsverfahren führt hier ersichtlich ohne weiteres zum Ziel. Wir erhalten nämlich — wenn wir den Operanden kurz F_{pq} schreiben — augenscheinlich:

$$F_{\curlyvee\curlyvee} = \curlywedge, \qquad F_{\curlyvee\curlywedge} = \curlyvee, \qquad F_{\curlywedge\curlyvee} = \curlyvee, \qquad F_{\curlywedge\curlywedge} = \curlywedge$$

Es läßt sich also in der Tat für jeden Wert p der Wert q so wählen, daß F_{pq} den Wert $\curlyvee$ hat. — Im Falle des zweiten Verfahrens hätte man hier von beiden Normalformen nacheinander in geeigneter Weise Gebrauch zu machen. Wir werden auf dieses Beispiel an passender Stelle zurückkommen.

IV. Die erste Stufe des allgemeineren Entscheidungsproblems.

§ 9.

Problemstellung. Einfachste Beispiele.

Bevor wir daran gehen, unser allgemeines Problem auch für den Fall in Angriff zu nehmen, daß nicht nur Aussagen im ganzen, sondern auch *Dinge* und *Begriffe* auftreten — *veränderliche* Dinge und Begriffe selbstverständlich, denn für Aussagen über diese oder jene bestimmten Dinge oder besondere außerlogische Begriffe hätte unsere Fragestellung ja gar keinen Sinn —, werden wir offenbar zunächst danach zu trachten haben, nach Möglichkeit auch für diesen höheren Aussagenbereich eine Art von *Normalform* aufzuweisen, die uns dann für unsere tiefere Problemstellung als Ausgangspunkt dienen kann.

Man könnte versuchen, hier so vorzugehen, daß man, wie dies früher (S. 177—178) beschrieben wurde, alle Operatoren nach vorn schafft und die übrigbleibende elementare Verknüpfungsaussage als konjunktive oder disjunktive Normalform darstellt. Indessen würde diese Form, da sie das eigentliche

Gefüge der Aussage eher verwischt als hervorhebt, für unser Hauptproblem keine geeigneten Angriffspunkte bieten. Ganz im Gegenteil werden wir unserem Ziel nur dadurch näherkommen, daß wir die Operatoren so weit wie möglich in die Aussage hineinzutreiben suchen, derart, daß der Wirkungsbereich jedes von ihnen so klein wie möglich wird.

Es wird sich empfehlen, unser Problem der Normalform zunächst für einen gewissen engeren Bereich als den letztlich für uns in Frage kommenden anzugreifen. Und zwar soll jener Bereich — wir wollen ihn den *Bereich A* nennen — alle diejenigen Aussagen enthalten, die *zwar veränderliche Individuen* — daneben möglicherweise auch konstante —, *aber bloß konstante Begriffe, und zwar eines Arguments*, also keine Beziehungen, aufweisen und somit einen gewissen Teilbereich des Aussagenbereiches erster Ordnung gemäß der Einteilung von Whitehead und Russell darstellen. Natürlich hat der so abgesteckte Aussagenbereich unmittelbar nur für das engere Problem der Normalform ein Interesse und erst von hier aus mittelbar für das allgemeine, das es ja, wie bereits gesagt, gar nicht auf Aussagen mit außerlogischen konstanten Bestandteilen abgesehen hat. Der nächste Schritt wird dann naturgemäß sein, die wichtigste Beziehung, die wir kennen, die der Identität unter Individuen, überdies hinzuzunehmen. — Als ein weiterer wäre etwa ins Auge zu fassen, auch beliebige Beziehungen zwischen Individuen zu berücksichtigen — wofür mir ein gangbarer Lösungsweg bis so weit noch nicht bekannt ist. Bis zur Beherrschung von Begriffen und Beziehungen höherer Ordnungen wäre dann freilich immer noch ein weiter Weg.

Wir wollen nunmehr den bereits ausgesprochenen Leitgedanken der „*Hineintreibung der Operatoren*“ zunächst an bestimmten Beispielen durchführen, um überhaupt einmal zu sehen, was sich damit erreichen läßt. Dabei mag von dem Auftreten konstanter Individuen und der praktisch überhaupt unwichtigen konstanten Aussagen vorläufig abgesehen werden. Als erstes Beispiel wähle ich die Aussage:

$$\beta \subset \alpha . \alpha - \beta = \gamma . \supset . \alpha - \gamma = \beta$$

Sie besagt, daß, wenn alle β α sind und γ die Klasse derjenigen α ist, die nicht β sind, dann andererseits β die Klasse derjenigen α ist, die nicht γ sind. Daß dies insbesondere eine in α, β, γ allgemeingültige Aussage ist, soll uns vorerst nicht kümmern. Betrachten wir die Klassen α, β, γ als durch die Begriffe φ^x, χ^x, ψ^x bestimmt und bedenken wir, daß

$$\alpha - \beta = \gamma \longleftrightarrow \alpha \cap - \beta \subset \gamma \quad \gamma \subset \alpha \cap - \beta ,$$

so werden wir schreiben, indem wir das Argument x der Kürze halber überall weglassen (Begriffe als Operatoren kommen ja nicht vor!):

$$\overline{x \bar{\chi} \varphi}\, \overline{x \overline{\varphi . \bar{\chi}} \psi . x (\varphi . \bar{\chi}) \bar{\psi}} [x \overline{\varphi . \bar{\psi}} \chi . x (\varphi \quad \bar{\psi}) \bar{\chi}]$$

Hieraus ergibt sich vermittelst einer Reihe einfacher Umformungen nach VII, IX und IV* (wobei diese letzte Regel im Sinne unseres Leitgedankens stets rückwärts anzuwenden ist):

$$\overline{x\bar{\chi}\varphi}\,\overline{x\bar{\varphi}\chi\psi}\,\overline{x\varphi\bar{\psi}}\,\overline{x\bar{\chi}\psi}\,(x\bar{\varphi}\psi\chi\quad x\varphi\bar{\chi}\quad x\psi\bar{\chi})$$

Weiter läßt sich der Prozeß offenbar nicht treiben, da die wesentlich in Betracht kommende Regel IV* hierfür keine Handhabe bietet. Aber die nunmehr erreichte Form kann uns offensichtlich auch genügen, da sie ja bereits eine disjunktive Normalform im früheren Sinne darstellt. Obendrein sehen wir, daß zu jedem Glied in der Klammer außerhalb der Klammer die Negation vorkommt, daß also die durch Distribuieren herzustellende konjunktive Normalform in der Tat in jedem Oberglied zu einem der Unterglieder zugleich seine Verneinung enthalten wird. Damit ist nun sogar bereits die Allgemeingültigkeit der obigen Aussage erwiesen; in der Tat ist sie ja nur ein besonderer Fall von

$$\bar{p}\,\bar{q}\,\bar{r}\,\bar{s}\,(q\quad p\,.\,s).$$

Es wäre freilich verfehlt, anzunehmen, daß nun bei allen derartigen Aussagen der Beweis der Allgemeingültigkeit sich nach diesem einfachen Schema führen ließe. Nehmen wir etwa die bereits behandelte Aussage

$$\overline{x\,\overline{\overline{\varphi_x}}}\,\chi_x\,\overline{\bar{x}\,\varphi_x}\,\bar{x}\,\chi_x\,,$$

die sich offenbar auch

$$\bar{x}\,.\,\varphi_x\,.\,\chi_x + x\,\bar{\varphi}_x + \bar{x}\,\chi_x$$

schreiben läßt. Auch hier vermögen wir die Operatoren nicht weiter hineinzutreiben und werden daher die obige Form bereits als — in diesem Falle gleichzeitig konjunktive und disjunktive — Normalform anzusehen haben. Trotz der Allgemeingültigkeit der Aussage ist aber hier kein Glied die Verneinung eines anderen, womit wir in diesem Falle einen wesentlichen Unterschied gegenüber der elementaren Verknüpfungsaussage gewahr werden.

Wir könnten nun allerdings der Allgemeingültigkeit der gegebenen Aussage durch bloße Rechnung auf die folgende Weise leicht inne werden: Ist $(\bar{x}\chi_x) = \curlyvee$, so ist die Aussage offenbar erfüllt; es bleibt also nur noch der Fall $(\bar{x}\chi_x) = \curlywedge$ zu betrachten. Dies bedeutet aber $(x\overline{\chi_x}) = \curlyvee$, mit anderen Worten, daß χ_x stets den Wert $\curlywedge$ hat. Setzt man dies oben ein, so ergibt sich

$$\bar{x}\,(\varphi_x\,.\curlyvee)\,x\,\overline{\varphi_x}\,\curlywedge\,.$$

Vermöge des naheliegenden Systems von Sätzen:

$$p\curlyvee \longleftrightarrow \curlyvee \qquad p\,.\curlyvee \longleftrightarrow p$$

$$p\curlywedge \longleftrightarrow p \qquad p\,.\curlywedge \longleftrightarrow \curlywedge$$

wird hieraus

$$\bar{x}\,\varphi_x\, x\, \bar{\varphi}_x\,,$$

wo nun in der Tat das zweite Glied die Verneinung des ersten ist. Aber selbstverständlich ist hiermit für unser allgemeines Entscheidungsproblem nichts gewonnen, denn dieses verlangt ja nicht, einzelne Aussagen durch eigens für sie zu ersinnende Verfahren auf ihre Gültigkeit zu prüfen, sondern, weit darüber hinaus, ein einheitliches Verfahren zu ermitteln, das diese Aufgabe für alle Aussagen des angegebenen Bereiches gleichmäßig löst. Augenscheinlich ist die Lösung *dieser* Aufgabe mit der Aufstellung der Normalform noch nicht ohne weiteres gegeben.

Die vorhin angeführten vier Sätze sind besondere Fälle einer viel allgemeineren Rechenregel, die uns noch oft von Nutzen sein wird und die ich in der folgenden Weise fassen möchte:

X. Verdrängungssatz. *In einer Konjunktion verdrängt stets das stärkere Glied das schwächere* — d. h. dieses kann neben jenem weggelassen werden —, *in einer Disjunktion umgekehrt das schwächere das stärkere.*

(Man erkennt übrigens, daß die frühere Regel IX 1 — unbeschadet ihres Eigenwertes für das praktische Rechnen — als ein Sonderfall der obigen betrachtet werden kann.)

Die Richtigkeit der Regel leuchtet unmittelbar ein. Folgt nämlich in der Konjunktion $p.q$ die Aussage q aus p, so ist es offenbar gleichgültig, ob sie neben dieser noch ausdrücklich genannt wird oder nicht, während im gleichen Falle die Disjunktion pq augenscheinlich nichts weiter behauptet als eben q.

Die bereits genannten vier Sätze entspringen auf Grund der Tatsache, daß die richtige Aussage $\vee$ von jeder Aussage impliziert wird, also stets der schwächste Bestandteil ist, während $\wedge$ seinerseits jede Aussage impliziert und daher als stärkster Bestandteil gilt.

§ 10.

Die Normalform.

Als weiteres Beispiel behandeln wir die Aussage

$$x\,\bar{y}\,.\,f_x g_y\; h_x k_y\,,$$

die offenbar nicht allgemeingültig ist, vielmehr die vier Begriffe f, g, h, k zueinander in Beziehung setzt.

Es scheint mir sehr bemerkenswert, daß die Aussage, wie sie oben steht, sich durch die Symbolik des Schröderschen Gebietekalküls gar nicht darstellen läßt, obgleich sie als eine gewiß nicht fernliegende oder schwierig aufzufassende Beziehung zwischen vier Gebieten gedeutet werden kann. Erst der Relativkalkül, in welchem die Gebiete als ausgeartete Relative behandelt werden, vermag auch solche Aussagen mit der ihm eigenen Umständlichkeit und Künstlichkeit in Formeln zu kleiden.

In der Absicht, das $\bar{y}$ hineinzubringen, wird zunächst distribuiert:

$$x\bar{y}^{+} f_x \cdot h_x{}^{+} f_x \;\; k_y{}^{+} g_y \;\; h_x{}^{+} g_y \;\; k_y .$$

(Hier soll das erste Kreuz die Wirkung der Operatoren bis über die anderen Kreuze hinwegleiten.) Wir setzen nunmehr nach IV* $\bar{y}$ einzeln zu jedem Oberglied, nehmen aber obendrein nach II* und III* jeweils nur diejenigen Unterglieder in den Wirkungsbereich von $\bar{y}$ auf, die wirklich von y abhängen:

$$x^{+} f_x \;\; h_x{}^{+} f_x \;\; \bar{y} k_y{}^{+} \bar{y} g_y \;\; h_x{}^{+} (\bar{y} \;\; g_y \;\; k_y).$$

Im ersten Oberglied ist $\bar{y}$ augenscheinlich ganz weggefallen. Um nun auch den allgemeinen Operator hineinbringen zu können, haben wir nochmals zu distribuieren. Tun wir dies, so bleibt unter Berücksichtigung insbesondere von IV — auch für konjunktive Verknüpfung — und IX schließlich übrig:

$$x \;\; f_x \bar{y} g_y (\bar{y} \;\; g_y \;\; k_y) \;\; f_x h_x (\bar{y} \;\; g_y \;\; k_y) \;\; h_x y k_y (y \;\; g_y \;\; k_y).$$

Hier ist nun die Aussage $\bar{y} \;\; g_y \;\; k_y$ offenbar stärker als jede der Aussagen $\bar{y} g_y$ und $\bar{y} k_y$ und wird daher in den Disjunktionen nach X von diesen verdrängt. Bringt man, dies berücksichtigend, nunmehr x hinein, so erhält man schließlich

$$(x f_x)(\bar{y} g_y) \cdot (x f_x h_x)(\bar{y} \cdot g_y \cdot k_y) \cdot (x h_x)(\bar{y} k_y)$$

als konjunktive Normalform der gegebenen Aussage. (Die Klammern sind zur deutlichen Hervorhebung der verknüpften Bestandteile gesetzt.)

Unsere Rechnungen haben zu dem Ergebnis geführt, daß die betrachteten Aussagen sich allein aus Bestandteilen von den folgenden ihrerseits nicht weiter zurückführbaren Formen:

$$\begin{array}{lll} x f_x & x f_x g_x & x f_x g_x h_x \\ \bar{x} f_x & \bar{x} \cdot f_x \cdot g_x & \bar{x} \cdot f_x \cdot g_x \cdot h_x \end{array}$$

durch elementare Verknüpfung aufbauen, insbesondere somit auch als Normalform derartiger Bestandteile darstellen lassen.

Wir können nun der Allgemeingültigkeit dieser Zurückführung auf die folgende Weise leicht inne werden: Wir nehmen — nur zum Zweck des Beweises, nicht etwa im Sinne einer praktischen Rechenvorschrift — an, daß alle Operatoren in der früher beschriebenen Weise nach vorn geschafft sind. Der der Matrix zunächst stehende Operator sei etwa $\bar{x}$, also partikulär. Wir denken dann die Matrix als disjunktive Normalform geschrieben und nach IV* $\bar{x}$ zu jedem Oberglied gesetzt. Dann sieht irgendeins dieser Disjunktionsglieder etwa so aus

$$\bar{x} \cdot f_x \cdot g_x \; h_y \cdot k_z \cdot f_a' \cdot p,$$

wo y und z Veränderliche sein mögen, deren Operatoren anfänglich links von $\bar{x}$ standen. Nach II* können wir dies lesen als:

$$(\bar{x} \cdot f_x \cdot g_x) \; h_y \cdot k_z \cdot f_a' \; p.$$

Nunmehr kommt x nur noch in Aussagen vor, die bereits die gewünschte Form haben und in der Folge einfach als konstante Bestandteile — wie oben f_a' und p — mitgenommen werden. Damit haben wir wieder dasselbe Problem vor uns wie zu Anfang, aber mit einer Veränderlichen weniger. Ist der nächste Operator partikulär, so verfahren wir nochmals wie eben, ist er allgemein, entsprechend dual, und zwar so lange, bis alle Operatoren in der beschriebenen Weise untergebracht sind.

Es gilt somit der wichtige Satz: *Jede Aussage des Bereiches A läßt sich allein aus Bestandteilen von den in den obigen Reihen aufgeführten Formen, sowie* — im Falle, daß konstante Individuen und Aussagen als Grundbestandteile auftreten — *solchen von den Formen f_a und p durch elementare Verknüpfung aufbauen, insbesondere also auch als konjunktive oder disjunktive Normalform derartiger Bestandteile schreiben.*

§ 11.

Die Klassensymbolik.

Es wird für die Folge von hervorragendem Nutzen sein, für die obigen unzerlegbaren Bestandteile — ich möchte sie die „*Bausteine*“ der gegebenen Aussage nennen — kurze und übersichtliche Zeichen einer den besonderen Bedürfnissen des logischen Rechnens angepaßten *Klassensymbolik* verfügbar zu haben, die also der Klassensymbolik von Whitehead und Russell in ganz derselben Art an die Seite tritt wie die von mir entwickelte Aussagen- und Begriffssymbolik derjenigen der gleichen Verfasser.

In dieser Absicht bezeichne ich zunächst die durch die Begriffe $f^x, g^x, h^x, \ldots, \varphi^x, \chi^x, \psi^x$, bestimmten Klassen durch $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varrho, \sigma, \tau, \ldots$ (Auch die wechselseitige Zuordnung der Begriffs- und der Klassenbuchstaben soll künftig in der Hauptsache festgehalten werden.) Die *Allklasse* werde wie bei Whitehead und Russell durch V, die *Nullklasse* entsprechend durch Λ wiedergegeben. Die Negation einer Klasse, die sogenannte *Ergänzungsklasse,* deute ich durch einen übergesetzten Punkt an. Die Aussage, daß a ein Element der Klasse α ist, werde als α_a geschrieben.

Weiter sollen — dies ist der wesentlichste Punkt — die unzerlegbaren Aussagen der beiden Reihen die kurzen Zeichen

$$\underset{\smile}{\alpha},\ \underset{\smile}{\alpha\beta},\ \underset{\smile}{\alpha\beta\gamma},\ \ldots$$

$$\overset{\frown}{\alpha},\ \overset{\frown}{\alpha\beta},\ \overset{\frown}{\alpha\beta\gamma},$$

erhalten. Der *unter* eine Gruppe von Klassen gesetzte Bogen bedeutet also, daß diese Klassen zusammen alle Individuen enthalten, m. a. W., daß ihre Vereinigungsklasse die Allklasse ist, der *über* sie gesetzte Bogen, daß sie wenigstens ein gemeinsames Element haben, daß ihre Durchschnittsklasse nicht die Nullklasse ist. Insbesondere bedeutet $\underset{\smile}{\alpha}$, daß α alle Individuen, und $\overset{\frown}{\alpha}$, daß α mindestens ein Individuum enthält.

Damit lassen sich zunächst die üblichen Klassenbeziehungen leicht und übersichtlich darstellen. So bedeutet $\underset{\smile}{\dot\alpha\beta}$ offenbar, daß α eine Teilklasse von β ist, $\underset{\smile}{\dot\alpha\dot\beta}$ — als Negation von $\overset{\frown}{\alpha\beta}$ —, daß α und β kein Element gemeinsam haben, $\overset{\frown}{\alpha\dot\beta}$ — als Negation von $\underset{\smile}{\dot\alpha\beta}$ —, daß einige α nicht β sind, usf.

Wir sehen bereits, wie zu einer Grundaussage der Klassensymbolik die *Verneinung* gebildet wird: man ersetzt alle vorkommenden Klassen durch ihre Ergänzungsklassen und kehrt überdies den Bogen um. (Dies ist einfach das Seitenstück von VI für Klassen.) So ist z. B.

$$\overline{\underset{\smile}{\dot\alpha\dot\beta\gamma}} \longleftrightarrow \overset{\frown}{\alpha\beta\dot\gamma},$$

wo $\underset{\smile}{\dot\alpha\dot\beta\gamma}$ augenscheinlich besagt, daß der gemeinsame Teil von α und β in γ enthalten ist, $\overset{\frown}{\alpha\beta\dot\gamma}$ dagegen, daß es ein gemeinsames Element von α und β gibt, das nicht zu γ gehört.

Um etwa die bereits ein wenig verwickeltere Aussage

$$\alpha \cup \beta = \gamma,$$

die besagt, daß γ die Vereinigungsklasse von α und β ist, in unsere Symbolik zu übertragen, schreiben wir sie zunächst als:

$$\alpha \cup \beta \subset \gamma \,.\, \gamma \subset \alpha \cup \beta,$$

wo die erste Teilaussage ihrerseits als

$$\alpha \subset \gamma \,.\, \beta \subset \gamma$$

zerlegt werden kann. Die gesuchte Normaldarstellung ist somit:

$$\underset{\smile}{\dot\alpha\gamma} \,.\, \underset{\smile}{\dot\beta\gamma} \,.\, \underset{\smile}{\alpha\beta\dot\gamma}.$$

Die in den aufgeführten Reihen übereinander stehenden Bausteine sind duale Bestandteile im Sinne der Regel VIII. Um von einem Baustein zu dem dual entsprechenden überzugehen, hat man also einfach den unteren Bogen durch den oberen zu ersetzen und umgekehrt. (Nur im Falle der später auftretenden Einheitsklassen bedarf es hier noch einer gewissen Vorsichtsmaßregel.)

Die soeben entwickelte Klassensymbolik wird nunmehr das Mittel sein, um unsere Normalform der Aussagen von A auf die wohl denkbar knappste und durchsichtigste Art darzustellen. So werden wir z. B. die Normalform der Aussage

$$x\bar{y}\,.\,f_x g_y\,.\,h_x k_y$$

in der neuen Klassensymbolik als

$$\underset{\smile}{\alpha}\overset{\frown}{\beta}\,.\,\underset{\smile}{\alpha\gamma}\;\overset{\frown}{\beta\delta}\;\underset{\smile}{\gamma}\overset{\frown}{\delta}$$

schreiben. Ebenso haben wir

$$\overline{x\,\overline{\gamma_x}\,\chi_x}\;\bar{x}\,\varphi_x\,\bar{x}\,\chi_x \longleftrightarrow \overline{\underset{\smile}{\dot{\varrho}\sigma}}\,\underset{\smile}{\overset{\frown}{\bar{\varrho}}}\overset{\frown}{\sigma} \longleftrightarrow \overset{\frown}{\varrho\dot{\sigma}}\,\underset{\smile}{\dot{\varrho}}\overset{\frown}{\sigma}$$

Oder, um ein anderes Beispiel zu nehmen:

$$\bar{x}\bar{y}\,.\,f_x g_y\,.\,h_x k_y \longleftrightarrow \overset{\frown}{\alpha\gamma}{}^{+}\overset{\frown}{\alpha}\,.\,\overset{\frown}{\delta}{}^{+}\overset{\frown}{\beta}\,.\,\overset{\frown}{\gamma}{}^{+}\overset{\frown}{\beta\delta}$$

$$\longleftrightarrow \overset{\frown}{\alpha}\overset{\frown}{\beta}\,.\,\overset{\frown}{\alpha}\overset{\frown}{\gamma}\,\overset{\frown}{\beta\delta}\,.\,\overset{\frown}{\alpha\gamma}\,\overset{\frown}{\beta}\overset{\frown}{\delta}\;{}^{-}\overset{\frown}{\delta}\,.$$

Hier ist die konjunktive Normalform aus der disjunktiven durch Distribution gewonnen und für ihre Vereinfachung die Tatsache benutzt worden, daß allgemein $\overset{\frown}{\varrho\sigma}$ stärker ist als $\overset{\frown}{\varrho}$ und $\overset{\frown}{\sigma}$.

Ich möchte hier noch auf den immerhin bemerkenswerten Umstand hinweisen, daß der Gedanke der Hineintreibung der Operatoren bei den *begriffsfreien Aussagen* sogar unmittelbar die Entscheidung herbeiführt. Ich knüpfe dazu an unser früheres Beispiel

$$(p\bar{q})\,.\,pq\,.\,\bar{p}\bar{q}$$

an. Nach Distribution des Operanden:

$$(p\bar{q})\,{}^{+}p\,.\,\bar{q}\,{}^{+}\bar{p}\,.\,q$$

können wir $(\bar{q})$ hineinnehmen:

$$(p)\,{}^{+}p\,.\,(\bar{q})\bar{q}\,{}^{+}\bar{p}\,.\,(\bar{q})\,q\,.$$

Nochmalige Distribution ergibt:

$$(p)\,.\,p(\bar{q})\,q\,.\,\bar{p}\,(\bar{q})\,\bar{q}$$ [20]

---

[20]) So auf Grund der allgemeinen Formel

$$pr\,.\,q\bar{r} \longleftrightarrow q\,.\,r\,{}^{+}p\,.\,\bar{r}$$

für die Distribution „homogener Entwicklungsformen" (Schröder 1, S. 376). Andernfalls käme noch das Konjunktionsglied $(\bar{q})\,\bar{q}\,(\bar{q})\,q$ hinzu.

und endlich die Zerspaltung nach (p):

$$(p)\,p\,(\bar{q})\,q \quad (p)\,\bar{p}\,(\bar{q})\,\bar{q}.$$

Nun sind aber die Aussagen $(p)\,p$ und $(p)\,\bar{p}$ offensichtlich falsch, da ja in der Tat weder alle Aussagen[21]) richtig noch alle Aussagen falsch sind, und entsprechend die Aussagen $(\bar{q})\,q$ und $(q)\,\bar{q}$ richtig. Die Einsetzung dieser Wahrheitswerte ergibt:

$$\curlywedge\curlyvee \quad \curlywedge\curlyvee \leftrightarrow \curlyvee,$$

womit die gegebene Aussage als gültig erwiesen ist.

V. Vom Entscheidungsproblem zum Eliminationsproblem.

§ 12.

Grundsätzliche Zurückführung.

Mit dem bisher gewonnenen Rüstzeug wollen wir nunmehr an unser *allgemeines Entscheidungsproblem* herantreten. Da, wie bereits erwähnt, dieses Problem hinsichtlich der Aussagen von A selbst noch keinen Sinn hat, könnte man zunächst daran denken, nach der Allgemeingültigkeit der Aussagen von A in den vorkommenden Begriffen und Individuen, also nach der Richtigkeit oder Falschheit der so entspringenden Aussagen zweiter Ordnung, zu fragen. Es hindert uns indessen nichts, sogleich eine viel größere Allgemeinheit zu erstreben, indem wir unserer Untersuchung von vornherein den Bereich derjenigen Aussagen zweiter Ordnung zugrunde legen, die — wie es ja selbstverständlich ist — *nur veränderliche*, d. h. gleichzeitig durch am Anfang oder irgendwo innerhalb der Aussage stehende allgemeine oder partikuläre Operatoren vertretene, *Individuen und Begriffe eines Arguments, aber keine Beziehungen* als Grundbestandteile enthalten[22]). Wir wollen diesen Aussagenbereich den *Bereich B* nennen. (Später werden wir freilich sehen, daß, auch wenn Beziehungen auftreten, unser Lösungsverfahren noch sehr wohl anwendbar sein kann, sofern die Beziehungen nur nicht gerade in einer noch näher zu kennzeichnenden störenden Weise in die Aussage eingehen.) Eine ganz einfache Aussage unseres Bereiches B ist z. B.:

$$\varphi\,\bar{\chi}\,x \,.\, \varphi_x\,\chi_x \,.\, \overline{\varphi_x}\,\overline{\chi_x},$$

die aussagt, daß es zu jedem Begriff φ^x einen Begriff χ^x gibt, so daß jedes Individuum x unter genau einen der beiden Begriffe fällt.

Man könnte nun vermuten, daß auch die Aussagen dieses neuen Bereiches sich vollständig aus den früher angegebenen Bausteinen zusammen-

[21]) Vorsichtiger: alle Aussagen bis zu irgendeiner gegebenen Ordnung.

[22]) Von den praktisch völlig belanglosen Aussagenoperatoren sehe ich der Einfachheit halber ab.

setzen ließen, wobei nur irgendwie zwischen diesen verstreut oder, wenn man will, auch sämtlich am Anfang der Aussage die Operatoren φ, $\bar{\chi}$, .. hinzugefügt wären. Aber so einfach liegt die Sache hier nun nicht. Vielmehr müssen wir jetzt durchaus mit der Möglichkeit rechnen, daß die Trennung der veränderlichen Individuen durch das Dazwischentreten der Begriffsoperatoren unmöglich gemacht wird. Ändert man z. B. die obige Aussage ab in

$$x\varphi\bar{\chi}\cdot\varphi_x\chi_x\cdot\overline{\varphi_x\chi_x},$$

so daß sie nunmehr aussagt, daß, wenn irgendein Individuum x gegeben ist, es zu einem Begriff φ^x stets einen Begriff χ^x gibt, so daß x unter genau einen der beiden Begriffe fällt, so kann man zwar nach III* die Operatoren x und φ vertauschen; dagegen gibt es kein allgemeines logisches Gesetz, das gestatten würde, das x auch noch über das $\bar{\chi}$ hinüberzubringen. Wir gelangen daher in diesem Falle nicht zur Trennung der veränderlichen Individuen und infolgedessen auch nicht zu einer Normalform im früheren Sinne.

Zum Glück bedeutet dieser Umstand für das zu entwickelnde allgemeine Entscheidungsverfahren durchaus kein Hindernis. Ja, es wird sich im Gegenteil sogar zumeist als günstig erweisen, die Individuenoperatoren, wenn möglich, nach links noch über benachbarte Begriffsoperatoren hinüberzuschieben. Die Begriffsoperatoren ihrerseits werden wir möglichst weit „hineinzutreiben", d. h. nach rechts zu rücken und zu zerspalten suchen, wobei eine völlige Trennung freilich nur in besonderen Fällen erreicht werden wird.

Es sei nunmehr etwa $\bar{\varphi}$ der am weitesten rechts stehende[23]) Begriffsoperator — natürlich könnte dieser ebensogut ein allgemeiner sein — und $F_{\varphi\chi uv}$ sein Operand, wo u, v solche Individuen innerhalb F sein mögen, deren Operatoren noch links von $\bar{\varphi}$ stehen[24]), während χ ein anderer noch im letzten Operanden vorkommender Begriff sein möge, dessen Operator sich dann natürlich links von $\bar{\varphi}$ befindet. Greifen wir nun aus der Gesamtaussage allein den Bestandteil

$$\bar{\varphi}\,F_{\varphi\chi uv}$$

heraus, so liegt der Kern des Entscheidungsverfahrens, kurz gesagt, darin, daß es, sofern unsere Voraussetzungen erfüllt sind, stets möglich ist, nach einer gewissen Regel die obige Teilaussage durch eine äquivalente zu er-

[23]) Bzw. allgemeiner ein solcher, der seinerseits keine Begriffsoperatoren mehr unter sich hat.

[24]) Die mitsamt ihren Operatoren in F vorkommenden Individuen sind offenbar unter den Argumenten nicht mit aufzuführen, weil von ihnen der Ausdruck F ja nicht abhängt.

setzen, die den Begriff φ nicht mehr enthält, also überhaupt ohne Begriffsoperator ist. Der Begriff φ ist damit aus der Aussage gewissermaßen „eliminiert", die Anzahl der vorkommenden Begriffe überhaupt um Eins vermindert. Durch Fortsetzung des Verfahrens werden nun nach und nach alle Begriffe aus der gegebenen Aussage beseitigt und wird diese selbst in eine reine Trivialität übergeführt, nämlich entweder in einen der Wahrheitswerte $\curlyvee$ und $\curlywedge$ oder aber in eine außerlogische Voraussetzung über die Anzahl der vorhandenen Individuen, falls die gegebene Aussage von einer solchen abhängt.

§ 13.

Formulierung des Eliminationsproblems. Ein wichtiges Eliminationsergebnis.

Die letzte Wendung hat uns bereits auf das Grundproblem der ganzen Untersuchung geführt, mit dessen Bewältigung die des Entscheidungsproblems — wenigstens innerhalb des von uns zu betrachtenden Aussagenbereiches — steht und fällt. Ich möchte dieses neue „*Eliminationsproblem*" in der folgenden Weise bestimmter fassen.

Gegeben ist eine Aussage

$$\varphi F_{\varphi f g a b} \quad \text{oder} \quad \overline{\varphi} F_{\varphi f g a b},$$

wo der Operand eine Aussage unseres früheren Bereiches A ist und, abgesehen von φ^x, nur konstante Eigenschaften, natürlich in beliebiger endlicher Anzahl, enthält — da sie nämlich innerhalb des obigen Ausdrucks nicht durch Operatoren vertreten sind, haben wir sie eben, solange wir unser Augenmerk nur auf diesen richten, als konstant anzusehen[25]) —, außerdem möglicherweise noch konstante und veränderliche Individuen; diese letzten natürlich zugleich als Operatoren, daher oben nicht angedeutet. (Das Auftreten von Aussagen $p, q, .$ als Grundbestandteilen hat im gegenwärtigen Zusammenhang kaum praktische Bedeutung.) *Es soll nun eine oder* — wie wir bestimmter sagen dürfen — *diejenige Aussage (erster Ordnung) gefunden werden, die der gegebenen äquivalent ist* — natürlich für irgendwelche Werte von f, g, a, b —, *den Begriff φ^x jedoch nicht mehr enthält.* Mit anderen Worten: *Es soll diejenige Beziehung (erster Ordnung) zwischen den Konstanten f, g, a, b ermittelt werden, deren Bestehen die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist,*

---

[25]) Ich nenne also die Grundbestandteile eines Ausdrucks „*veränderlich*" oder „*konstant*", je nachdem sie innerhalb des fraglichen Ausdrucks durch Operatoren vertreten sind oder nicht. Soviel ich sehe, ist dies genau der Sinn, in welchem diese Unterscheidung in der Mathematik tatsächlich gemacht wird.

daß $F_{\varphi fgab}$ je nachdem für beliebige Begriffe φ^x oder für mindestens einen Begriff φ^x eine richtige Aussage darstellt.

Das Wesen des Problems wird wohl am besten dadurch klarer werden, daß ich, sogleich in seine Behandlung eintretend, es zunächst für denjenigen Fall durchführe, an welchem die Algebra der Logik bisher vorzugsweise ihre Kräfte erprobt hat — allerdings in einer gegenüber der üblichen etwas abweichenden Darstellung.

Wissen wir von drei Begriffen f^x, χ^x, h^x, daß zwischen ihnen die Beziehung

$$x\overline{f_x}\chi_x \cdot x\overline{\chi_x}h_x$$

besteht, m. a. W., daß sie die Prämissen des Schlusses Barbara erfüllen, so vermögen wir bekanntlich — dies ist eben der Sinn jenes Schlusses — eine Beziehung zwischen f und h allein anzugeben, nämlich

$$x\overline{f_x}h_x,$$

die dann ebenfalls notwendig erfüllt ist. Sind f und h fest gegeben, so ist die obige Bedingung also gewiß nur dann durch einen Begriff χ erfüllbar, wenn tatsächlich $x\overline{f_x}h_x$ gilt. Aber auch umgekehrt gibt es, falls f und h die „*Resultante*" $x\overline{f_x}h_x$ befriedigen, gewiß ein χ der verlangten Art; denn man braucht ja nur einen der Begriffe f und h selbst für χ einzusetzen, um auf die als richtig vorausgesetzte Resultante zurückzukommen. Die Erfüllung der Resultante $x\overline{f_x}h_x$ ist also gerade notwendig und hinreichend dafür, daß es ein χ gibt, das der Bedingung

$$x\overline{f_x}\chi_x \cdot x\overline{\chi_x}h_x$$

genügt; d. h. aber:

$$\bar{\chi} \cdot x\overline{f_x}\chi_x \cdot x\overline{\chi_x}h_x \longleftrightarrow x\overline{f_x}h_x$$

Oder, bei anderer Wahl der Buchstaben:

$$\bar{\varphi} \cdot xf_x\varphi_x \quad xg_x\overline{\varphi_x} \longleftrightarrow xf_xg_x,$$

in K l a s s e n s c h r i f t:

$$\bar{\varrho} \cdot \underset{\smile}{\alpha\varrho} \cdot \underset{\smile}{\beta\dot{\varrho}} \longleftrightarrow \underset{\smile}{\alpha\beta}.$$

Dies ist bereits unser erstes wichtiges Eliminationsergebnis. In Wirklichkeit reicht es nun sehr viel weiter, als auf den ersten Blick scheinen mag. Dies wird deutlicher werden, wenn wir nunmehr unser allgemeines Eliminationsproblem wieder aufnehmen, um es noch erheblich weiter, als bisher geschehen, zurückzuführen. Einzig von dem Auftreten konstanter Aussagen und Individuen wollen wir zunächst aus Bequemlichkeitsgründen absehen.

§ 14.

Herstellung der Eliminationshauptform.

Denken wir uns in

$$\varrho F_{\varrho\alpha\beta\ldots},$$

indem wir uns auf den historisch früheren Fall des partikulären Begriffsoperators beschränken — der andere Fall erledigt sich natürlich einfach durch duale Übertragung des Ergebnisses —, den Operanden als disjunktive Normalform geschrieben, so können wir nach IV* zunächst den Operator $\bar{\varrho}$ vor jedes einzelne Oberglied setzen. Nach II* können wir diese Oberglieder nun so schreiben, daß alle nicht von ϱ abhängigen Unterglieder links von $\bar{\varrho}$ stehen, also beim Eliminationsprozeß außer Betracht bleiben. Dann haben wir einzig noch die Aufgabe zu lösen, aus einer Aussage der folgenden Form

$$\bar{\varrho}.\underparen{\alpha\varrho}.\underparen{\alpha'\varrho} \quad \underparen{\beta\varrho} \quad \underparen{\beta'\dot{\varrho}} \quad \overparen{\gamma\varrho}.\overparen{\gamma'\varrho}. \quad \overparen{\delta\dot{\varrho}}.\overparen{\delta'\varrho}$$

die Klasse ϱ zu eliminieren.

Hierbei ist nun freilich — anscheinend unberechtigterweise — angenommen worden, daß jeder ϱ enthaltende Baustein sich gerade auf eine der obigen vier Arten schreiben läßt. Andere zweigliedrige Bausteine kommen jedenfalls nicht in Betracht, da ja $\underparen{\varrho\varrho}$ oder $\overparen{\varrho\varrho}$ usw. in Wahrheit eingliedrig sind, wohingegen $\underparen{\varrho\dot{\varrho}}$ den Wert $\curlyvee$ und $\overparen{\varrho\dot{\varrho}}$ den Wert $\curlywedge$ hat. Weiter gilt offenbar allgemein

$$\underparen{\alpha} \longleftrightarrow \underparen{\Lambda\alpha}, \qquad \overparen{\alpha} \longleftrightarrow \overparen{V\alpha},$$

womit auch die eingliedrigen Bausteine erledigt sind.

Bezüglich der drei- und mehrgliedrigen Bausteine möchte ich dagegen zunächst zwei neue Symbole einführen, und zwar verstehe ich unter

$$\underbracket{\alpha\beta}$$

die *Vereinigungsklasse* der Klassen α, β, selbst — im Gegensatz zu der Aussage, daß diese die Allklasse ist — und entsprechend unter

$$\overbracket{\alpha\beta}\,.$$

ihre *Durchschnittsklasse.* Es ist nun aber augenscheinlich

$$\underparen{\alpha\beta\gamma} \longleftrightarrow \underparen{\underbracket{\alpha\beta}\gamma} \longleftrightarrow \underparen{\alpha\underbracket{\beta\gamma}}$$

usf. (wo die letzte Schreibung freilich praktisch kaum vorkommen wird) und entsprechend

$$\overparen{\alpha\beta\gamma} \longleftrightarrow \overparen{\overbracket{\alpha\beta}\gamma} \longleftrightarrow \overparen{\alpha\overbracket{\beta\gamma}}$$

usf. Wir können also in einem mehr als zweigliedrigen Baustein alle Glieder außer ϱ bzw. $\bar{\varrho}$ — auch hier werden ϱ und $\bar{\varrho}$ weder mehrfach noch zusammen auftreten — durch den dem Klammerbogen gleichartigen Klammerhaken zusammenfassen und ihn damit ebenfalls auf einen zweigliedrigen der obigen vier Arten zurückführen.

Natürlich gilt ebenso der dem obigen dual entsprechende Satz, daß das andere allgemeine Eliminationsproblem

$$\varrho\, F_{\varrho\alpha\beta\,..}$$

sich auf das folgende besondere zurückführen läßt:

$$\varrho\, \overparen{\alpha\varrho}\; \overparen{\alpha'\varrho} \quad \overparen{\beta\varrho}\; \overparen{\beta'\varrho} \quad \underparen{\gamma\varrho}\; \underparen{\gamma'\varrho} \quad .\underparen{\delta\varrho}\; \underparen{\delta'\varrho}. \quad ,$$

wo die wagerechten Striche bedeuten, daß die disjunktiv verbundenen Glieder jeder Art in beliebiger endlicher Anzahl vorhanden sein können.

Wir dürfen sogar noch insbesondere voraussetzen, daß die in Rede stehende Form gerade genau ein α-Glied und genau ein β-Glied enthält. Ist nämlich zunächst im Falle des Operators $\bar{\varrho}$ eine der beiden Arten nicht vertreten, so können wir vermöge des Verdrängungssatzes X das Glied $\underparen{V\varrho}$ bzw. $\underparen{V\bar{\varrho}}$, deren jedes den Wert $\curlyvee$ hat, als weiteres Konjunktionsglied hinzufügen. Sind dagegen mehrere α-Glieder oder β-Glieder vorhanden, so bedienen wir uns der Formel

$$\underparen{\alpha\gamma}\,.\,\underparen{\beta\gamma} \leftrightarrow \underparen{\overline{\alpha\beta}\gamma},$$

die ganz entsprechend auch für mehr als zwei Glieder gilt. Sie ist eine Art *Distributionssatz für Klassen* und als

$$x f_x h_x \,.\, x g_x h_x \leftrightarrow x(f_x \,.\, g_x) h_x$$

eine unmittelbare Folge von IV* und VII. Ganz entsprechend kann im Falle des Operators ϱ vermöge

$$\overparen{\Lambda\varrho} \leftrightarrow \overparen{\Lambda\bar{\varrho}} \leftrightarrow \curlywedge$$

und

$$\overparen{\alpha\gamma}\,\overparen{\beta\gamma} \leftrightarrow \overparen{\underline{\alpha\beta}\gamma}$$

die Anzahl der α- und der β-Glieder je genau auf Eins gebracht werden. Für die γ- und die δ-Glieder ist eine derartige Vereinfachung dagegen nicht möglich.

Die obige Zurückführung ist, wie Schröder[26]) berichtet, im wesentlichen bereits von O. H. Mitchell angegeben worden. Freilich ist bei der Beurteilung zu berücksichtigen, daß Mitchell ebenso wie später Schröder

---

[26]) Algebra der Logik 2, S. 191.

die gegebene Aussage *von vornherein als Klassenaussage*, d. h. bereits in derjenigen Form, die allein der von ihnen verwendeten Symbolik zugänglich war, geschrieben voraussetzt. In der vorliegenden Untersuchung ist demgegenüber der wirkliche Geltungsbereich dieser Zurückführung aufgewiesen worden, der in der Tat alle Aussagen unseres so sehr viel weiteren Bereiches A umfaßt — wobei einzig für den Fall, daß konstante Individuen auftreten, der Nachweis vorläufig noch aussteht.

Um nunmehr auch diesen Fall zu erledigen, stellen wir zunächst fest, daß Ausdrücke wie p und f_a bzw. α_a ebensowenig wie den Aufbau der Normalform den Prozeß der Elimination irgendwie stören können, da sie sich ja stets vor den Operator ϱ oder $\bar{\varrho}$ schieben lassen. Tritt dagegen φ_a bzw. ϱ_a auf, so bedenken wir, daß offenbar gilt:

$$\text{(XI)} \qquad \varrho_a \longleftrightarrow \underbrace{\dot{a}\varrho} \longleftrightarrow \widehat{a\varrho},$$

wo der Buchstabe a innerhalb des Klammerbogens, wie dies wohl ohne die Gefahr eines Mißverständnisses geschehen kann, nicht mehr das Individuum a, sondern die aus dem einen Individuum a bestehende Klasse bedeutet. In Begriffsschrift lautet die obige Äquivalenz:

$$f_a \longleftrightarrow x\,\overline{x = a}\,f_x \longleftrightarrow \bar{x}.x = a.f_x,$$

wir machen also hier versteckterweise bereits von der Beziehung der Identität unter Individuen Gebrauch[27]).

Nach Belieben eine der obigen Umschreibungen verwendend, können wir also auch die Formen ϱ_a und ϱ_a ohne weiteres auf die vorhin betrachteten zurückführen, so daß wir somit, wenigstens bezüglich der *ersten* innerhalb einer Aussage des Bereiches B vorzunehmenden Begriffselimination — für die folgenden können wir im Augenblick noch nichts Bestimmtes sagen, da ja noch ungewiß ist, inwieweit die resultierenden Aussagen wiederum dem Bereich B angehören werden — das oben formulierte Problem in der Tat als das allgemeinste erkennen, mit dem wir uns überhaupt abzugeben haben werden.

Insbesondere sehen wir, daß wir mit unserer ersten Eliminationsformel

$$\bar{\varrho}.\underbrace{\alpha\varrho}.\underbrace{\beta\varrho} \longleftrightarrow \underbrace{\alpha\beta}$$

und der dual entsprechenden

$$\varrho\,\widehat{\alpha\varrho}\,\widehat{\beta\dot{\varrho}} \longleftrightarrow \widehat{\alpha\beta}$$

zum mindesten die Fälle, daß bei partikulärem Begriffsoperator nur all-

27) Der erwähnte Zusammenhang spielt übrigens schon in der klassischen Logik eine gewisse Rolle, insofern diese bekanntlich die singulären Urteile durchweg vermöge der ersten Teiläquivalenz durch allgemeine ersetzt, jedoch ohne die völlige Gleichberechtigung der partikulären Umschreibung gewahr zu werden.

gemeine Individuenoperatoren und bei allgemeinem Begriffsoperator nur partikuläre Individuenoperatoren rechts von $\bar{\varphi}$ bzw. φ auftreten, bereits vollständig beherrschen.

Für praktische Anwendungen wird die Bemerkung von Nutzen sein, *daß man die Eliminationshauptform nicht*, wie es hier der Bequemlichkeit und Übersichtlichkeit der Darstellung zuliebe geschehen ist, gerade unbedingt auf dem Wege über die vollständig entwickelte Normalform zu gewinnen braucht, vielmehr genügt es hier augenscheinlich, bloß den gerade zu eliminierenden Begriff hinsichtlich der zugehörigen veränderlichen Individuen von den übrigen zu trennen. So braucht man einen Ausdruck wie

$$\bar{x} . f_x g_x \cdot \varphi_x$$

ersichtlich nicht weiter zu zerlegen, sondern wird ihn ohne weiteres in

$$\widehat{\underbracket{\alpha\beta}\varrho}$$

umschreiben. In dieser Weise verfahrend, erhält man eine bloß nach φ bzw. ϱ „entwickelte" Form, die in der Tat meist rascher auf die Eliminationshauptform führt als die nach allen Begriffen entwickelte Normalform. — Gerade diese Entwicklungsformen zeigen eine ganze Reihe merkwürdiger Gesetzmäßigkeiten und stehen den Normalformen an theoretischer und praktischer Bedeutung kaum nach. Wir wollen indessen diesen Gedanken hier nicht weiter verfolgen; denn es ist ja nicht unsere Absicht, hier gerade den im gegebenen besonderen Fall am raschesten zum Ziel führenden Weg auszumachen, vielmehr nur ein einheitliches, leicht verständliches und übersichtliches Verfahren aufzustellen, das allen in seinen Bereich fallenden Aufgaben gleichmäßig gerecht wird; und darum werden wir die Fragen der Aufdeckung und Verwertung besonderer „Rechenvorteile" hier auf sich beruhen lassen.

V. Das Eliminationsproblem auf der ersten Stufe.

§ 15.

Rechnerische Lösung.

Gehen wir nun über zum allgemeinen Problem der *Elimination von ϱ aus unserer Hauptform*

$$\bar{\varrho} . \underset{\smile}{\alpha\varrho} . \underset{\smile}{\beta\dot{\varrho}} . \widehat{\gamma\varrho} . \widehat{\gamma'\varrho} \ldots \quad \widehat{\delta\dot{\varrho}} . \widehat{\delta'\dot{\varrho}} \ldots$$

— einer Aufgabe, die Schröder mit den unzulänglichen Darstellungsmitteln seiner Algebra der Logik nicht zu meistern vermochte und bezüglich deren er sich daher schließlich bescheidete, sie im Schlußsatz der ersten

Abteilung seines zweiten Bandes den Forschern zur weiteren Bearbeitung angelegentlich zu empfehlen —, so ergibt sich für uns vielmehr die überraschende Tatsache, daß wir im gegenwärtigen Augenblick bereits alle Mittel an der Hand haben, um die vollständige Lösung dieser Aufgabe rein rechnerisch zu gewinnen, daß es hierzu also im Grunde gar keines neuen Gedankens mehr bedarf. Wir brauchen bei unserer Aufgabe nämlich nur zu bedenken, daß in den γ- und δ-Gliedern ja Operatoren von der Form $\bar{x}$ stecken, die als mit $\bar{\varphi}$ gleichartig über dieses hinübergeschafft werden können, womit dann die im Operanden verbleibenden zugehörigen Individuen die Rolle von Konstanten übernehmen.

Nur um bequemer schreiben zu können, wollen wir für die Herleitung der Lösung annehmen, daß es sich gerade um zwei γ-Glieder und zwei δ-Glieder handeln möge, ohne daß die Einsicht in die Allgemeingültigkeit der Herleitung und die Gestalt des allgemeinen Ergebnisses hierdurch irgend behindert werden wird. Die Aussage

$$\bar{\varrho} . \underparen{\alpha\varrho} . \underparen{\beta\dot{\varrho}} . \overparen{\gamma\varrho} . \overparen{\gamma'\varrho} . \overparen{\delta\dot{\varrho}} . \overparen{\delta'\dot{\varrho}}$$

lautet in Begriffsschrift:

$$\bar{\varphi}\;\; x f_x \varphi_x . x g_x \overline{\varphi_x} . \bar{u} . h_u . \varphi_u . \overline{u'}\;\; h'_{u'} . \varphi_{u'}\;\; \bar{v} . k_v\;\; \varphi_v\;\; \overline{v'}\;\; k'_{v'} . \overline{\varphi_{v'}},$$

wobei die buchstäbliche Unterscheidung der veränderlichen Individuen nicht an sich, sondern nur für unsere gegenwärtige Absicht erforderlich ist. Nach III* können wir die Operatoren $\bar{u}$, $\overline{u'}$, $\bar{v}$, $\overline{v'}$ zunächst an den Anfang des Hauptoperanden und weiterhin, als nunmehr zu $\bar{\varphi}$ benachbart und diesem gleichartig, vor den Begriffsoperator bringen, so daß wir erhalten.

$$\bar{u}\,\overline{u'}\,\bar{v}\,\overline{v'}\,\bar{\varphi} . x f_x \varphi_x . x g_x \overline{\varphi_x} . h_u . \varphi_u . h'_{u'} . \varphi_{u'}\;\; k_v . \varphi_v . k'_{v'} . \overline{\varphi_{v'}} .$$

Vermöge des gleichen Vertauschungssatzes können wir nunmehr die von φ unabhängigen Konjunktionsglieder über $\bar{\varphi}$ hinwegbringen[28]):

$$\bar{u}\,\overline{u'}\,\bar{v}\,\overline{v'} . h_u . h'_{u'} . k_r . k'_{v'}\;\; \bar{\varphi}\;\; x f_x \varphi_x . x g_x \overline{\varphi_x} . \varphi_u . \varphi_{u'} . \bar{\varphi}_v . \overline{\varphi_{v'}} .$$

Der letzte Teil — von $\bar{\varphi}$ an — lautet in Klassenschrift:

$$\bar{\varrho} . \underparen{\alpha\varrho} . \underparen{\beta\dot{\varrho}} . \underparen{\dot{u}\varrho} . \underparen{\dot{u}'\varrho} . \underparen{\dot{v}\dot{\varrho}} . \underparen{\dot{v}'\dot{\varrho}},$$

wo u, u', v, v' nunmehr Konstante im Sinne unserer früheren Erklärung (S. 196) sind. Zusammenziehung nach dem Distributionssatz für Klassen (S. 199) ergibt:

$$\bar{\varrho} . \underparen{\overline{\alpha\dot{u}\dot{u}'}\varrho} . \underparen{\overline{\beta\dot{v}\dot{v}'}\varrho},$$

28) Der geübtere Rechner wird sich freilich diese Operation ersparen und statt dessen von der naheliegenden Regel Gebrauch machen, daß konstante Bestandteile bei der Elimination einfach stehen bleiben.

und hierfür liefert unsere frühere Eliminationsregel die Resultante

$$\overline{\alpha \dot{u} \dot{u}'}\, \overline{\beta \dot{v} \dot{v}'}$$

Nach dem gleichen Distributionssatz schreiben wir dies wieder um in:

$$\undergroup{\alpha\beta}\;\; \undergroup{\alpha\dot{v}}.\undergroup{\alpha\dot{v}'}\;\; \undergroup{\dot{u}\beta}.\undergroup{\dot{u}'\beta}.\undergroup{\dot{u}\dot{v}}\;\; \undergroup{\dot{u}\dot{v}'}\;\; \undergroup{\dot{u}'\dot{v}}.\undergroup{\dot{u}'\dot{v}'}$$

oder in Begriffsschrift:

$$x f_x g_x \;\; f_v \;\; f_{v'} \;\; g_u \cdot g_{u'} \cdot u \neq v . u \neq v' \;\; u' \neq v . u' \neq v',$$

da allgemein $\undergroup{\dot{a}\dot{b}}$ offenbar nichts anderes als die Verschiedenheit der beiden Individuen a und b ausdrückt. Indem wir dies in unsere Gesamtaussage einsetzen, bringen wir gleichzeitig die vorhin vorausgestellten Teilaussagen wieder an ihre ursprünglichen Plätze. Bedienen wir uns überdies für

$$u \neq v . u \neq v' \;\; u' \neq v . u' \neq v'$$

der leichtverständlichen abkürzenden Schreibweise

$$(uu' \mid vv'),$$

so bekommen wir als Endergebnis:

$$x f_x g_x \cdot \bar{u}\overline{u'}\,\bar{v}\overline{v'} . (uu' \mid vv') \;\; h_u \;\; g_u \;\; h'_{u'} \cdot g_{u'} \;\; k_v \;\; f_v \;\; k'_{v'} \;\; f_{v'} .$$

Um die gewonnene Resultante — deren allgemeine Gestalt für beliebige Anzahlen von γ- und δ-Gliedern aus der obigen vermöge der Herleitung ohne weiteres klar sein wird — in Klassenschrift auszudrücken, reichen die bisherigen Mittel unserer Klassensymbolik offenbar nicht hin, aus dem einfachen Grunde, weil die obige Aussage ja noch die Beziehung der *Identität*, und zwar zwischen veränderlichen Individuen, als Grundbestandteil voraussetzt und infolgedessen — im Gegensatz zum Hauptoperanden der gegebenen Aussage — unserem Bereich A im allgemeinen nicht mehr angehört.

Lassen wir für den Augenblick einmal die „Klausel“ $(uu' \mid vv')$ beiseite — womit die Aussage ersichtlich in eine abgeschwächte, aus ihr bloß zu folgernde, übergeht —, so hindert uns nun natürlich nichts, die veränderlichen Individuen zu trennen und demgemäß zu schreiben:

$$\undergroup{\alpha\beta} . \overgroup{\gamma\beta} . \overgroup{\gamma'\beta} . \overgroup{\delta\alpha} . \overgroup{\delta'\alpha} .$$

Dies ist die „rohe Resultante“, wie sie Schröder nennt. Sie besagt augenscheinlich, daß jedenfalls nur dann die gegebene Aussage richtig sein, m. a. W eine der vorausgesetzten Bedingung genügende Klasse ϱ vorhanden sein kann, wenn zunächst α und β zusammen kein Individuum auslassen und überdies sowohl γ und γ' mit β wie auch δ und δ' mit α je mindestens ein Element gemeinsam haben. Um aber die Existenz der fraglichen Klasse verbürgen zu können, müssen wir natürlich noch die Klausel $(\boldsymbol{uu'}\,|\,\boldsymbol{vv'})$ berücksichtigen. Diese bringt nun ihrerseits die weitere Bedingung hinzu, daß die Auswahl der entsprechend gemeinsamen Elemente insbesondere so getroffen werden kann, daß diejenigen, deren Existenz durch die γ-Glieder der rohen Resultante gefordert wird, von den durch die δ-Glieder geforderten durchweg verschieden sind. (Natürlich ist damit nicht gesagt, daß die Durchschnittsklassen $\overline{\gamma\beta}$ und $\overline{\gamma'\beta}$ zu $\overline{\delta\alpha}$ und $\overline{\delta'\alpha}$ jeweils elementefremd sein müßten; sie brauchen nicht einmal verschieden zu sein.)

Ich werde nun die volle, d. h. durch die Klausel ergänzte, Resultante in möglichster Anlehnung an die rohe künftig als

$$\underset{\smile}{\alpha\beta}\cdot\left[\overset{\frown}{\gamma\beta}\ \overset{\frown}{\gamma'\beta}\cdot\ \middle|\ \overset{\frown}{\delta\alpha}\ \overset{\frown}{\delta'\alpha}\right]$$

schreiben. Der zwischengestellte Strich soll hier den Klauselzusatz zum Ausdruck bringen, daß die gemeinsamen Elemente, deren Existenz links vom Strich behauptet wird, von denjenigen, deren Existenz rechts vom Strich behauptet wird, durchweg verschieden wählbar sein sollen.

§ 16.

Anschauliche Lösung. Das allgemeine Ergebnis.

Wegen seiner Wichtigkeit möchte ich das Ergebnis des vorigen Paragraphen in anderer Weise nochmals ableiten, und zwar statt durch Rechnung diesmal durch eine mehr anschaulich geführte Überlegung, die den eigentlichen Sinn jenes Ergebnisses wohl noch deutlicher zum Bewußtsein bringen wird. (Dies ist zugleich auch der Weg, auf dem ich die Lösung des Problems zuerst gefunden habe.) Die Anzahlen der γ- und der δ-Glieder werde ich diesmal von vornherein als beliebig annehmen.

Ist unsere Ausgangsaussage

$$\bar{\varrho}\cdot\underset{\smile}{\alpha\varrho}\cdot\underset{\smile}{\beta\varrho}\cdot\overset{\frown}{\gamma\varrho}\ \overset{\frown}{\gamma'\varrho}\quad\overset{\frown}{\delta\varrho}\cdot\overset{\frown}{\delta'\varrho}\quad,$$

so soll nach den ersten beiden Teilbedingungen

$$\underset{\smile}{\alpha\varrho}\cdot\underset{\smile}{\beta\varrho}$$

sein, d. h. $\dot{\alpha}$ soll in ϱ als Teilklasse enthalten sein und ϱ seinerseits in β, oder — wie wir hierfür auch sagen wollen — es soll ϱ eine „Zwischenklasse" zu $\dot{\alpha}$ und β sein. Verwenden wir für den Augenblick statt $\underset{\smile}{\alpha\beta}$ die Peanosche Bezeichnung $\alpha \subset \beta$, so können wir diesen Sachverhalt als

$$\dot{\alpha} \subset \varrho \subset \beta$$

oder auch als

$$\dot\beta \subset \varrho \subset \alpha$$

übersichtlich in eine Formel zusammenziehen. Dafür, daß es ein derartiges ϱ gibt, ist, wie wir wissen, die Bedingung $\underset{\smile}{\alpha\beta}$ — nämlich, daß $\dot\alpha$ eine Teilklasse von β ist — notwendig und hinreichend.

Überdies soll ϱ nun mit $\gamma, \gamma',$. je mindestens ein Element gemeinsam haben, und zwar mögen dies, wie wir bestimmter annehmen wollen, die Elemente $u, u',$ sein. Entsprechend seien als solche Elemente, die $\dot\varrho$ mit $\delta, \delta',$. gemeinsam hat, $v, v',$. gewählt. Es sollen also $u, u',$. entsprechend Elemente von $\gamma, \gamma',$ sein, zugleich aber Elemente von ϱ, ebenso $v, v',$ entsprechend Elemente von $\delta, \delta',$. und zugleich Elemente von $\dot\varrho$. Dies heißt einerseits:

$$h_u\ h'_{u'} . \qquad \text{und} \qquad k_v . k'_{v'} \ldots$$

Andererseits liegt, wie schon festgestellt, ϱ in β und $\dot\varrho$ in α; es ist also um so mehr:

$$g_u . g_{u'} \qquad \text{und} \qquad f_v . f_{v'} \quad .$$

Obendrein muß, da kein Ding gleichzeitig Element von ϱ und $\dot\varrho$ sein kann, jedes u notwendig von jedem v verschieden sein, also

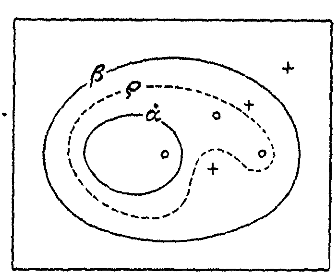
$$(u u'\underline{\ \ } \mid v v'\underline{\ \ }).$$

Damit es eine Klasse ϱ von den verlangten Eigenschaften gibt, muß also jedenfalls insgesamt gefordert werden:

$$x f_x g_x . \bar u\, \overline{u'\underline{\ \ }}\ \bar v\, \overline{v'\underline{\ \ }} . h_u . g_u . h'_{u'} . g_{u'} \ . \ k_v . f_v . k'_{v'} . f_{v'} \ .. \ (u u'\underline{\ \ } \mid v v'\underline{\ \ }).$$

Diese Bedingung ist nun aber andererseits gewiß auch hinreichend. Denn sind zwei Klassen $\dot\alpha$ und β gegeben, so daß $\dot\alpha$ in β enthalten ist, so läßt sich gewiß ein ϱ als Zwischenklasse wählen, und zwar auch dann noch, wenn dabei gewisse in β enthaltene Individuen $u, u',$. . ausdrücklich in ϱ eingeschlossen, gewisse von jenen verschiedene und nicht in $\dot\alpha$ enthaltene $v, v',$. von ϱ ausgeschlossen sein sollen.

Ich möchte diesen letzten Sachverhalt durch die nebenstehende Figur verdeutlichen. Das Rechteck stellt den Individuenbereich dar. $\dot\alpha$ ist eine Teilklasse von β, was nichts anderes besagt, als daß α und β zusammen alle Individuen enthalten. Die Individuen $u, u',$ .. sind durch Ringe, die Individuen $v, v',$. . durch Kreuze hervorgehoben; und zwar liegen die Ringe sämtlich innerhalb β, die Kreuze sämtlich außerhalb $\dot\alpha$, überdies fällt nie-



mals ein Ring mit einem Kreuz zusammen. Es ist nun offenbar ein leichtes, eine Zwischenklasse ϱ anzugeben, die alle Ringe, aber kein einziges Kreuz enthält. Sollte nämlich irgendeine aufs Geratewohl angenommene Zwischenklasse — z. B. insbesondere eine der Klassen α und β selbst — nicht bereits die Zusatzbedingung erfüllen, so braucht man ja nur nachträglich die in ihr etwa enthaltenen Kreuzelemente von ihr auszunehmen und die nicht in ihr enthaltenen Ringelemente ihr hinzuzufügen, wobei die Klasse gewiß nicht aufhören wird, Zwischenklasse zu sein. — Die vorhin aufgezählten Bedingungen sind somit für die Existenz der Klasse ϱ nicht nur notwendig, sondern zugleich auch hinreichend.

Unser *allgemeines Ergebnis* ist somit wiederum:

$$\bar{\varrho}.\underparen{\alpha\varrho}.\underparen{\beta\varrho}.\overparen{\gamma\varrho}.\overparen{\gamma'\varrho} \quad \overparen{\delta\dot{\varrho}}.\overparen{\delta'\dot{\varrho}} \quad \longleftrightarrow \underparen{\alpha\beta}\,[\overparen{\gamma\beta}.\overparen{\gamma'\beta}\ .\ |.\overparen{\delta\alpha}.\overparen{\delta'\alpha} \quad].$$

Dual entsprechend wird natürlich gelten:

$$\varrho\,\overparen{\alpha\varrho}\,\overparen{\beta\dot{\varrho}}\,\underparen{\gamma\varrho}\,\underparen{\gamma'\varrho}\_\;\underparen{\delta\dot{\varrho}}\,\underparen{\delta'\varrho}\_ \longleftrightarrow \overparen{\alpha\beta}\,[\underparen{\gamma\beta}\,\underparen{\gamma'\beta}\_ \mid \underparen{\delta\alpha}\,\underparen{\delta'\alpha}\_],$$

wo nunmehr

$$[\underparen{\alpha}\underparen{\beta} \mid \underparen{\gamma}\underparen{\delta}] \longleftrightarrow uu'vv'(u=v)\,(u=v')\,(u'=v)\,(u'=v')\,\alpha_u\,\beta_{u'}.\gamma_v\,\delta_{v'}$$
$$\longleftrightarrow uu'vv'\,\overline{(uu' \mid vv')}\,\alpha_u\,\beta_{u'}\,\gamma_v\,\delta_{v'},$$

die Klausel also nicht mehr Zusatzbedingung, sondern Voraussetzung ist.

In Worten: Um aus der Eliminationshauptform die Klasse ϱ zu eliminieren, zieht man 1 den Koeffizienten des α-Gliedes mit dem des β-Gliedes durch den gleichartigen Klammerbogen zusammen, setzt 2. den ersten an die Stelle von $\dot{\varrho}$ in die δ-Glieder und den zweiten an die Stelle von ϱ in die γ-Glieder — also gewissermaßen über Kreuz — ein, wobei 3. die resultierenden γ- und δ-Glieder durch die eckige Klammer zusammengefaßt und zugleich durch den die zusätzliche oder bedingende Klausel andeutenden senkrechten Strich getrennt werden. Im übrigen sind die Glieder der Resultante genau so untereinander verknüpft wie die entsprechenden der gegebenen Form.

Da die Zurückführung der α- und der β-Glieder auf die Einzahl in der Praxis oft lästig sein wird, möchte ich hier noch die von dieser Beschränkung unabhängige Lösungsform angeben. Sie lautet:

$$\bar{\varrho}.\underparen{\alpha\varrho}.\underparen{\alpha'\varrho}\ ..\ \underparen{\beta\dot{\varrho}}.\underparen{\beta'\dot{\varrho}}.\ .\overparen{\gamma\varrho}.\overparen{\gamma'\varrho}. \quad \overparen{\delta\dot{\varrho}}.\overparen{\delta'\dot{\varrho}}$$
$$\longleftrightarrow \underparen{\overline{\alpha\alpha'\_}\,\overline{\beta\beta'\_}}\ [\overparen{\gamma\beta\beta'\_}.\overparen{\gamma'\beta\beta'\_}\ldots \mid \overparen{\delta\alpha\alpha'\_}.\overparen{\delta'\alpha\alpha'\_}\ .\ .]$$

und entsprechend dual:

$$\varrho\ \overparen{\alpha\varrho}\ \overparen{\alpha'\varrho}\text{--}\ \overparen{\beta\dot{\varrho}}\ \overparen{\beta'\dot{\varrho}}\text{--}\ \underparen{\gamma\varrho}\ \underparen{\gamma'\varrho}\text{--}\ \underparen{\delta\dot{\varrho}}\ \underparen{\delta'\dot{\varrho}}\text{--}$$

$$\longleftrightarrow \overparen{\underbracket{\alpha\alpha'\text{--}}\ \underbracket{\beta\beta'\text{--}}}\ [\underparen{\gamma\beta\beta'\text{--}}\ \underparen{\gamma'\beta\beta'\text{--}}\ \text{--}\ |\ \underparen{\delta\alpha\alpha'\text{--}}\ \underparen{\delta'\alpha\alpha'\text{--}}\ \text{--}]$$

Sie wird natürlich einfach erhalten, indem man die gegebene Form zunächst in der früheren Weise zurückführt und dann die obige engere Regel anwendet. — Diese Formeln gelten nun für ganz beliebige Anzahlen von Gliedern der vier Arten, auch dann, wie man leicht bestätigt, wenn die Anzahl der Glieder irgendeiner Art Null ist; es fällt dann die zugehörige Koeffizienten- oder Gliederreihe eben ganz aus. Sind z. B. keine δ-Glieder vorhanden, so fällt die Reihe hinter dem Strich ganz weg; die Klausel wird dann augenscheinlich nichtssagend und braucht nicht mehr angedeutet zu werden. Ist kein α-Glied vorhanden, so fallen sämtliche Buchstaben $\alpha, \alpha', .$ weg und obendrein — vermöge $\overbracket{\;\;} = V$ und $\underbracket{\;\;} = \Lambda$, wo also innerhalb des Klammerhakens gar keine Klasse steht — das $\alpha\beta$-Glied der Resultante usf. Dieses kann übrigens allgemein noch nach dem Distributionssatz zerlegt werden.

Wenn man die beiden Lösungswege, namentlich den zweiten fast rein anschaulichen ins Auge faßt, so wird es einem gewiß verwunderlich dünken, daß ein so scharfsinniger Denker wie Schröder diese Aufgabe — deren grundlegende Bedeutung für unser Beweisproblem ihm vermutlich verborgen geblieben ist — trotz aller aufgewendeten Mühe schließlich unerledigt stehen lassen mußte. Der entscheidende Grund liegt nach meiner Ansicht durchaus in der Sprödigkeit seiner Symbolik, die ganz und gar ungeeignet ist, die Lösung auch nur darzustellen. Nur hierdurch konnte Schröder auf den verfehlten Gedanken kommen, die Klausel in ganz unangemessener Weise als Zusatzbedingung zur rohen Resultante fassen zu wollen, wobei er über gewisse im wesentlichen nur mit Worten umschriebene Teilergebnisse nicht hinauskam.

Man ersieht schon allein hieraus, von wie grundlegender Wichtigkeit in der symbolischen Logik — nicht minder übrigens in irgendeinem Zweige der Mathematik im weitesten Sinne — die Aufstellung und Verwendung einer mit aller Sorgfalt den Problemen angepaßten Symbolik nicht etwa bloß für die Darstellung, sondern für den Fortschritt der Erkenntnis selbst ist.

§ 17.

Das Eliminationsproblem für mehrere Begriffe.

Mit der in den vorangehenden Paragraphen entwickelten Lösung des Eliminationsproblems für einen Begriffsoperator ist die allgemeine Lösung des Entscheidungsproblems innerhalb B augenscheinlich noch nicht gegeben, weil ja schon nach der ersten Begriffselimination die Resultante im allgemeinen nicht wieder eine Aussage des Bereiches B, sondern mit Klauseln behaftet ist, die das Hinzukommen der einen konstanten Beziehung der Identität von Individuen zum Ausdruck bringen. Wir werden also gewissermaßen durch den Verlauf der Untersuchung selbst in die zweite Stufe unseres Problems hineingedrängt, welche die Beziehung der Individuenidentität von vornherein mit in Betracht ziehen soll. Immerhin mag der bereits gewonnene Erkenntnisstandpunkt dadurch noch etwas weiter ausgebaut werden, daß wir auf den praktisch wichtigen besonderen Fall des Eliminationsproblems innerhalb B näher eingehen, daß die auftretenden Begriffsoperatoren untereinander gleichartig und nicht durch ihnen ungleichartige Individuenoperatoren getrennt sind, eine Aufgabe, die uns auf dem gegenwärtigen Standpunkt keine Schwierigkeit mehr bereiten wird.

Wir betrachten hierzu das folgende für unsere Zwecke hinreichend allgemeine *Beispiel*:

$$\bar{\varrho}\,\bar{\sigma}\;\; \underparen{\alpha\varrho\sigma}\;\; \underparen{\beta\varrho\dot{\sigma}}\;\; \underparen{\gamma\dot{\varrho}\sigma}\;\; \underparen{\delta\dot{\varrho}\dot{\sigma}}\;\; \overparen{\alpha'\varrho\sigma}\;\; \overparen{\beta'\varrho\dot{\sigma}}\;\; \overparen{\gamma'\dot{\varrho}\sigma}\;\; \overparen{\delta'\dot{\varrho}\dot{\sigma}}$$

— nach Schröder wiederum eines der „gewichtigen noch ungelösten Probleme“ unserer Wissenschaft. Nur der Bequemlichkeit halber ist von jeder der acht möglichen Arten nur ein Glied angenommen worden. Von Gliedern, die nur eine der beiden Veränderlichen enthalten, dürfen wir übrigens wegen

$$\underparen{\alpha\varrho} \longleftrightarrow \underparen{\alpha\varrho\,\overbracket{\sigma\dot{\sigma}}} \longleftrightarrow \underparen{\alpha\varrho\sigma}\;\; \underparen{\alpha\varrho\dot{\sigma}}$$

usf. ohne Einbuße an Allgemeinheit absehen.

Man kann hier nun genau wie im Fall eines Begriffsoperators die in den partikulären Gliedern steckenden Operatoren $\bar{x}$ vor die Begriffsoperatoren bringen zugleich mit den nunmehr entstandenen von ϱ und σ unabhängigen Bestandteilen — für den geübten Rechner ist diese letzte Umstellung freilich unnötig — und aus dem verbleibenden Rest, der als Konjunktion von lauter allgemeinen Bausteinen zu schreiben ist, σ und ϱ nacheinander eliminieren, ohne schon hierbei durch das Hinzutreten einer Klausel behindert zu sein. Der weitere Verlauf gestaltet sich dann ganz wie im früheren Fall.

Freilich möchte ich an dieser Stelle gegenüber der etwas ermüdenden Rechnung dem zweiten, anschaulichen Weg den Vorzug geben, zumal dieser auch hier vielleicht den klareren Einblick in das Wesen des Problems gibt.

Wir überlegen folgendes: Durch die Abgrenzung der Klassen ϱ und σ wird der Individuenbereich V offenbar in die vier untereinander elementefremden Klassen $\overbracket{\varrho\sigma}$, $\overbracket{\varrho\dot{\sigma}}$, $\overbracket{\dot{\varrho}\sigma}$, $\overbracket{\dot{\varrho}\dot{\sigma}}$ zerlegt. (Natürlich brauchen nicht alle vier Klassen von Λ verschieden zu sein.) Die erste Bedingung $\underparen{\alpha\varrho\sigma}$ kann nun aber auch

$$\underbrace{\alpha\,\underline{\varrho\sigma}} \quad \text{bzw.} \quad \underbrace{\alpha\,\overline{\dot{\varrho}\sigma}}$$

geschrieben werden; sie besagt also, daß $\overline{\dot{\varrho}\sigma}$ in α enthalten ist. Insgesamt können wir die ersten vier Bedingungen schreiben:

$$\overline{\dot{\varrho}\sigma}\,\mathrm{C}\,\alpha, \quad \overline{\dot{\varrho}\sigma}\,\mathrm{C}\,\beta, \quad \overline{\varrho\dot{\sigma}}\,\mathrm{C}\,\gamma, \quad \overline{\varrho\sigma}\,\mathrm{C}\,\delta.$$

Da hier die linken Seiten zusammen alle Individuen enthalten, muß dies von den rechten Seiten erst recht gelten; es wird also

$$\underbrace{\alpha\beta\gamma\delta}$$

sein müssen. Nun soll nach den weiteren Bedingungen $\widehat{\alpha'\overline{\varrho\sigma}}$ usw. sein, d. h. es soll Individuen w, x, y, z geben, die der Reihe nach in je einer der Vierteilungsklassen liegen, also gewiß verschieden sind. Zugleich aber liegen sie der Reihe nach in $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ und gemäß den früheren Bedingungen der Reihe nach in $\delta, \gamma, \beta, \alpha$. Dies gibt insgesamt:

$$u\, f_u\, g_u\, h_u\, k_u \cdot \overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\;(w\,|\,x\,|\,y\,|\,z)\cdot f'_w \cdot k_w \cdot g'_x \cdot h_x \cdot h'_y \cdot g_y \cdot k'_z \cdot f_z,$$

wo $(w\,|\,x\,|\,y\,|\,z)$ kurz ausdrücken soll, daß die vier Individuen untereinander verschieden sind.

Daß für die Existenz von ϱ und σ diese Bedingungen auch hinreichend sind, ist wiederum leicht einzusehen. Das Gebiet V denken wir uns zunächst im Sinne der ersten vier Bedingungen der gegebenen Aussage aufgeteilt. Wegen der ersten Bedingung der Resultante ist dies gewiß möglich; wir brauchen hierzu nämlich nur die Individuen, die z. B. bloß zu α, aber zu keinem der Gebiete β, γ, δ gehören, der Vierteilungsklasse $\overline{\dot{\varrho}\sigma}$ zuzuweisen usf. und im übrigen solche Gebietsteile, die zu mehr als einem der Gebiete $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gehören, nach Willkür unter die jeweils in Betracht kommenden Vierteilungsklassen aufzuteilen. Wiederum können wir auch hier über die (als gegeben zu denkenden) vier Individuen w, x, y, z nachträglich im Sinne der vier letzten Bedingungen neu verfügen, wobei vermöge der Resultante die vier ersten Bedingungen nicht aufhören erfüllt zu sein.

In Klassenschrift werden wir unsere Resultante augenscheinlich als:

$$\underbrace{\alpha\beta\gamma\delta}\cdot[\widehat{\alpha'\delta}\cdot|\cdot\widehat{\beta'\gamma}\cdot|\cdot\widehat{\gamma'\beta}\cdot|\cdot\widehat{\delta'\alpha}]$$

zu schreiben haben — womit wir gewahr werden, daß dieses Ergebnis von dem des früheren Problems seinem Wesen nach nicht verschieden ist. Zugleich wird man nach der Analogie des Früheren hier ohne weiteres erkennen, wie die Resultante ausfallen muß, wenn die Glieder der acht Arten nicht gerade in der Einzahl vorhanden sind. Ebenso läßt sich der Fall, daß die Anzahl der voranstehenden gleichartigen Begriffsoperatoren größer als zwei ist, von hier aus leicht übersehen.

Beherrschen wir hiermit unser allgemeines Entscheidungsproblem hinsichtlich des Aussagenbereiches B nun auch noch keineswegs vollständig, so doch unter anderem bereits den praktisch wichtigsten Fall, daß insbesondere alle Begriffsoperatoren als allgemeine und nicht durch partikuläre Individuenoperatoren getrennt am Anfang der Aussage stehen — nämlich durch duale Übertragung des obigen Ergebnisses —; mit anderen Worten: das früher bereits flüchtig gekennzeichnete engere Problem der *Entscheidung über die Allgemeingültigkeit einer beliebigen Aussage des Bereiches* A, mithin einer beliebigen beziehungsfreien Aussage erster Ordnung ist an diesem Punkte bereits vollständig erledigt. Die Lösung des *allgemeinen* Entscheidungsproblems hinsichtlich des bisher betrachteten Aussagenbereiches werden wir jedoch besser der zweiten Stufe unseres Problems zuweisen, wo wir die Identität unter Individuen von vornherein als Grundbestandteil der zu behandelnden Aussagen hinzunehmen.

VII. Anwendungen der bisherigen Ergebnisse.

§ 18.

Anwendungen aus der klassischen Syllogistik.

In diesem und dem folgenden Paragraphen soll versucht werden, durch die Behandlung einiger passend ausgewählter Beispiele von der Tragweite der bisherigen Ergebnisse ein ungefähres Bild zu geben und gleichzeitig dadurch mit diesen näher vertraut zu machen. Für die letzten beiden Paragraphen der Abhandlung, welche die Erweiterung des Eliminations- und des Entscheidungsproblems durch die Hinzunahme der Individuenidentität bringen sollen, wird von den folgenden Erörterungen nichts vorausgesetzt werden.

Die einfachsten Anwendungen von einigem Gehalt stellen die in anderem Zusammenhange bereits besprochenen *Aristotelischen Schlüsse* dar. Nehmen wir, um zunächst das Grundsätzliche des Schlußverfahrens vor Augen zu stellen, als Beispiel etwa wiederum den Schluß *Ferio* mit den Vordersätzen

$$\overparen{\alpha\beta} \,.\, \underparen{\dot{\beta}\gamma}$$

Zu einem solchen System von Vordersätzen verlangen wir nun in der Algebra der Logik den sogenannten *vollen Schlußsatz* kennen zu lernen, d. h. eine, bestimmter gesagt: diejenige Aussage, die 1. durch die gegebene Aussage impliziert wird, 2. den Mittelbegriff β nicht enthält und 3. — eine zusätzliche Anforderung gegenüber der klassischen Logik — die stärkste

Aussage von den Eigenschaften (1) und (2) ist, d. h. eine solche, aus der jede andere jene Bedingungen erfüllende Aussage gefolgert werden kann.

Um ebendiese Aussage zu gewinnen, überlegen wir folgendes: Die Vordersätze können ihrerseits aus dem Schlußsatz jedenfalls nicht wieder zurückgewonnen werden, weil jene ja noch obendrein den Mittelbegriff enthalten. Immerhin wird uns der volle Schlußsatz eine solche Beziehung der beiden Klassen zueinander verraten müssen, daß der fragliche Schluß überhaupt gezogen werden konnte, derart, daß wir aus dem Schlußsatz wenigstens die Existenz eines passenden Mittelbegriffs wieder rückwärts erschließen können. Aber gewiß auch nicht mehr als dieses, weil jede über die bloße Sicherung dieser Existenz hinausgehende Behauptung nicht umhin können würde, den Mittelbegriff selbst zu erwähnen[29]. Der gewünschte volle Schlußsatz wird somit gerade äquivalent der Behauptung:

$$\bar{\sigma}.\overparen{\alpha\sigma}\ \underparen{\dot{\sigma}\gamma}$$

und aus ihr offenbar durch Elimination von σ zu gewinnen sein, die durch die allgemeine Formel auf S. 206 (unten) ohne weiteres geleistet wird. Wollen wir statt dessen auf die engere Eliminationshauptform zurückgehen, so werden wir die obige Behauptung umzuschreiben haben in:

$$\bar{\sigma}.\underparen{V\sigma}\ \underparen{\dot{\gamma}\dot{\sigma}}.\overparen{\alpha\sigma},$$

womit die Resultante sich schematisch als:

$$\underparen{V\dot{\gamma}}.\overparen{\alpha\dot{\gamma}}$$

ergibt. Hier ist nun aber das erste Glied wiederum nichtssagend, und wir erhalten als Resultante und mithin als vollen Schlußsatz:

$$\overparen{\alpha\dot{\gamma}},$$

den bekannten Schlußsatz des Schlusses Ferio: „Einige α sind nicht γ".

---

[29]) Die Tatsache, daß allgemein jede β nicht enthaltende logische Folgerung aus einer Aussage $F_{\alpha\beta\gamma}$ — wo F außer α, β, γ keine außerlogischen konstanten Bestandteile enthält — bereits aus $\bar{\sigma}F_{\alpha\sigma\gamma}$ erschlossen werden kann, wäre streng etwa so zu beweisen:

Ist $G_{\alpha\gamma}$ eine β nicht enthaltende Aussage, die aus $F_{\alpha\beta\gamma}$ logisch herleitbar ist, d. h. von ihr allgemein in α, β, γ impliziert wird — dies ist ja der Sinn der logischen Abfolge! —, derart, daß also

$$\varrho\sigma\tau\overline{F_{\varrho\sigma\tau}}G_{\varrho\tau}$$

gilt, so können wir diese letzte Bedingung vermöge der Regeln III* und VI* offenbar auch als

$$\varrho\tau\overline{\bar{\sigma}F_{\varrho\sigma\tau}}G_{\varrho\tau}$$

schreiben. In dieser Form sagt sie eben aus, daß $G_{\alpha\gamma}$ aus $\bar{\sigma}F_{\alpha\sigma\gamma}$ logisch herleitbar ist.

Gemäß der Herleitung erfüllt dieser Schlußsatz in der Tat alle drei Bedingungen. Er wird von der Konjunktion der Vordersätze impliziert, er *enthält* β nicht, und er impliziert seinerseits jede Aussage, der die beiden ersten Eigenschaften zukommen; wie z. B.

$$\widehat{\alpha} . \widehat{\dot{\gamma}},$$

derart, daß also diese sich aus jenem herleiten läßt. — Im Sinne dieser Betrachtung lassen sich auch die übrigen Schlußmodi des klassischen Schemas beurteilen.

Die Behandlung der Aristotelischen Schlüsse auf Grund der Algebra der Logik möchte ich noch etwas vervollständigen, indem ich kurz auf die *p-Schlüsse* eingehe, diejenigen Schlüsse, die aus zwei allgemeinen Vordersätzen eine partikuläre Folgerung ziehen. Sie verdanken ihr Dasein in der Hauptsache einer Unvollkommenheit der klassischen Logik, welche die Nullklasse noch nicht kannte und leere Begriffe demgemäß von vornherein außer Betracht ließ. Dessenungeachtet geht die Zurückweisung, die sie sich in der modernen symbolischen Logik, z. B. von Schröder, gefallen lassen mußten, doch in einem gewissen sogleich zu erörternden Punkte über das Ziel hinaus.

Nehmen wir z. B. den Schluß *Darapti*:

$$\underbrace{\dot{\beta}\alpha} . \underbrace{\dot{\beta}\gamma} \longrightarrow \widehat{\alpha\gamma},$$

so ist er in dieser Form allerdings unrichtig. Denn, falls β leer ist, sind die Vordersätze richtig, ohne daß der Schlußsatz richtig zu sein braucht. Der Schluß müßte also eigentlich vollständig lauten:

$$\underbrace{\dot{\beta}\alpha} . \underbrace{\dot{\beta}\gamma} . \widehat{\beta} \longrightarrow \widehat{\alpha\gamma}.$$

In der Tat ergibt sich als Eliminationsresultante von

$$\bar{\sigma} . \underbrace{\dot{\sigma}\alpha} . \underbrace{\dot{\sigma}\gamma} . \widehat{\sigma} \quad \text{bzw.} \quad \bar{\sigma} . \underbrace{\overline{\alpha\gamma}\dot{\sigma}} \quad \widehat{V\sigma}$$

nach unserer Regel der Schlußsatz $\widehat{\alpha\gamma}$.

Erinnern wir uns indessen, daß in der klassischen Logik nach einer gewissen Verabredung die allgemeinen Aussagen die singulären mit zu vertreten haben, so erkennen wir, daß auch der folgende einwandfreie Schluß:

$$\underbrace{\dot{b}\alpha} . \underbrace{\dot{b}\gamma} \longrightarrow \widehat{\alpha\gamma}$$

unter die klassische Form Darapti fällt. Dieser verkörpert nun seinerseits die Äquivalenz:

$$\bar{y} . \underbrace{\dot{y}\alpha} . \underbrace{\dot{y}\gamma} \longleftrightarrow \widehat{\alpha\gamma}$$

oder, anders geschrieben:

$$\bar{y} . \alpha_u . \gamma_u \longleftrightarrow \widehat{\alpha\gamma},$$

wo bereits links und rechts dasselbe steht, also nichts mehr zu eliminieren ist[30]).

Wenn Schröder für die *singuläre* Form des Modus Darapti — freilich ohne diesen Umstand hervorzuheben — das Beispiel anführt: „Die 2 ist eine Primzahl, 2 ist eine gerade Zahl; ergo: mindestens eine Primzahl ist gerade" (2, S. 237), so ist die von ihm fälschlich auch hier geforderte Zusatzvoraussetzung: „Es gibt eine — oder die — Zahl 2" offenbar entweder überflüssig oder sinnlos. Das Erste dann, wenn sie heißen soll: „Es gibt etwas, das gleich 2 ist," da ja die Aussage: „Es gibt ein Ding, das mit x identisch ist," für jedes x gilt; das Zweite dagegen, wenn sie auf eine Behauptung von der Form hinauslaufen soll: „Dieses Ding hier gibt es", die ich mit Whitehead und Russell[31]) als unsinnig ablehnen muß. (Abgesehen von diesem Punkt besteht die Schrödersche Kritik der klassischen Syllogistik selbstverständlich durchaus zu Recht.)

Erwähnenswert ist in diesem Zusammenhange noch die Bemerkung Schröders, daß die klassische Syllogistik nicht immer den vollen Schlußsatz liefert, sondern nur dann, wenn sie diesen mit ihren Mitteln auszudrücken vermag. Das merkwürdigste Beispiel hierfür ist wohl das folgende von ihm selbst angegebene[32]) mit den Vordersätzen:

$$\widehat{\alpha\dot{\beta}}\,.\,\widehat{\beta\dot{\gamma}}\,.$$

In Worten: „Einige α *sind nicht* β. *Einige* β *sind nicht* γ." Gemäß den bekannten Grundsätzen der klassischen Logik hat diese im obigen Fall sogar doppelte Veranlassung, auf jede Folgerung zu verzichten: die Vordersätze sind nämlich sowohl beide partikulär als auch beide verneinend. Nach dem Verfahren der Algebra der Logik erhalten wir dagegen:

$$\bar{\sigma}\ \widehat{\alpha\dot{\sigma}}\,.\,\widehat{\sigma\dot{\gamma}} \longleftrightarrow [\widehat{\alpha}\,|\,.\,\widehat{\dot{\gamma}}]\,.$$

Der Schlußsatz sollte also von Rechts wegen lauten: „Es gibt ein Paar von Dingen, derart, daß das eine zu α und das andere nicht zu γ gehört". Immerhin eine bemerkenswerte Folgerung, die der klassischen Logik völlig fern lag!

---

[30]) Würde man dagegen, was an sich gewiß ebenso berechtigt ist, die singulären Vordersätze des Schlusses

$$\alpha_b\,.\,\gamma_b \longrightarrow \widehat{\alpha\gamma}$$

als

$$\underbrace{\dot{b}\alpha}\ \widehat{b\gamma} \qquad \text{oder} \qquad \widehat{b\alpha}\ \underbrace{\dot{b}\gamma}$$

teilweise partikulär umschreiben, so würde man statt auf Darapti vielmehr auf Disamis oder Datisi bzw. diesen nahe verwandte Modi kommen.

[31]) Principia Mathematica 1, S. 183.

[32]) Algebra der Logik 2, S. 361.

Es mag noch die folgende Aufgabe behandelt werden, die auf einen sogenannten „zusammengesetzten Syllogismus“ führt[33]): Aus der Gesamtaussage:

$$\underparen{\dot\varrho\alpha}\ \underparen{\dot\sigma\beta}\ \overparen{\varrho\sigma}$$

soll die stärkste von ϱ und σ freie Folgerung gezogen werden. Nach unseren Überlegungen ist diese äquivalent der Aussage:

$$\bar\varrho\bar\sigma\ \underparen{\dot\varrho\alpha}\,.\,\underparen{\dot\sigma\beta}\,.\,\overparen{\varrho\sigma}$$

und aus ihr durch Elimination von ϱ und σ zu gewinnen. Da wegen des Fehlens der δ-Glieder keine Klausel in Frage kommt, können wir hier unbesorgt etwa erst σ und dann ϱ eliminieren:

$$\bar\varrho\,.\,\underparen{\alpha\dot\varrho}\,.\,\bar\sigma\,.\,\underparen{\beta\dot\sigma}\ \overparen{\varrho\sigma} \longleftrightarrow \bar\varrho\,.\,\underparen{\alpha\dot\varrho}\ \overparen{\beta\varrho} \longleftrightarrow \overparen{\alpha\beta}$$

Die gesuchte Folgerung ist somit $\overparen{\alpha\beta}$

Daß ich die vorstehenden einfachsten und sachlich wohl kaum irgend etwas Neues bietenden Anwendungen des Eliminationsverfahrens gerade der klassischen Syllogistik entnahm, geschah selbstverständlich nur in der Absicht, nach Möglichkeit an Bekanntes anzuknüpfen, und nicht etwa, dieser selbst einen hervorragenden Platz innerhalb der Logik überhaupt einzuräumen. Vom Standpunkt der modernen symbolischen Logik hat jene Lehre vielmehr nur noch historischen Wert. In der Tat ist sie ja durch die ganze vorausgehende Untersuchung als ein bescheidener, nach Gesichtspunkten, die der Logik als solcher wesensfremd sind, abgegrenzter und eben darum für sich gar keiner wissenschaftlich geschlossenen Darstellung fähiger Teil eines sehr viel umfassenderen Gebietes von ungleich größerer Einheitlichkeit und Durchsichtigkeit erwiesen worden.

§ 19.

Anwendungen aus dem Relativkalkül.

Eine weitere Gruppe nunmehr etwas tiefer gehender Anwendungen soll sich auf den *Relativkalkül* der Algebra der Logik beziehen; und zwar wähle ich dieses Gebiet einerseits darum, weil gerade hier in der Literatur bereits Beispiele von einigem Belange vorliegen, die mir für eine unbefangene Vergleichung des Schröderschen Kalküls mit dem in der gegenwärtigen Abhandlung entwickelten Rechenverfahren vorzugsweise geeignet erscheinen. Obwohl wir nämlich bei unserem Verfahren das Auftreten von Beziehungen noch gar nicht berücksichtigt haben, wird sich dieses dessenungeachtet auch auf das genannte Gebiet in weitem Maße anwendbar er-

[33]) Ebenda S. 283.

weisen. Der Grund liegt einfach darin, daß es für die Verwendung unseres Verfahrens ja an sich gar nicht auf die tatsächliche Anzahl der Argumente der auftretenden Begriffe ankommt, sondern nur darauf, daß unter den Argumenten eines Begriffes niemals mehr als eines als „veränderlich“ im Sinne der früheren Erklärung (S. 196) behandelt werden muß. Eben dieser Umstand wird uns auf der anderen Seite ein willkommener Anlaß sein, mit der eigentlich praktischen Tragweite des bereits gewonnenen Standpunktes zugleich die Künstlichkeit und Verfehltheit der hergebrachten Trennung der Algebra der Logik in Gebietekalkül und Relativkalkül in helles Licht zu rücken, sofern nicht schon das Unangemessene des Versuches, die in der Relativalgebra in der Tat unentbehrlichen Klassen und Klassenzusammenhänge in die starre Form dieses Kalküls zu zwängen, an sich einleuchtend genug sein sollte.

Auf S. 491 des dritten Bandes seiner Algebra der Logik gibt Schröder ein System sogenannter „Entwicklungsformeln“, die, wie er berichtet, von Peirce ohne Beweis aufgestellt worden sind. Als Probe mag hier die folgende genügen, die sich in der Schröderschen Bezeichnungsweise als:

$$(a + b) \dagger c = \sum_u \{a \dagger (u + c)\}\{b \dagger (\bar{u} + c)\}$$

darstellt, während die übrigen drei durch duale und konverse Übertragung entstehen. Schröder gelingt nun der Beweis — wie es scheint, nach manchen vergeblichen Versuchen — durch ein einigermaßen künstliches Verfahren, nachdem ihm ein zufällig entdeckter glücklicher Umstand zu Hilfe gekommen ist.

Von unserem Standpunkt stellt sich der von Peirce angegebene Zusammenhang fast als eine reine Selbstverständlichkeit dar. Die rechte Seite lautet nämlich in unserer Begriffsschrift folgendermaßen:

$$\bar{\varphi} \quad z f_{xz} \varphi_{zy} h_{zy} \cdot z g_{xz} \overline{\varphi_{zy}} h_{zy},$$

und unser allgemeines Beweisverfahren legt uns nahe, die Elimination der Beziehung φ^{xy} anzustreben. Da die Peircesche Äquivalenz in den Individuen x und y allgemein gelten soll, spielen diese in dem obigen Teilausdruck offenbar die Rolle von Konstanten. Um sie der klareren Einsicht halber auch für das Auge zu unterdrücken, schreiben wir abkürzend:

$$f_{xz} \longleftrightarrow f'_z, \qquad g_{xz} \longleftrightarrow g'_z, \qquad h_{zy} \longleftrightarrow h'_z, \qquad \varphi_{zy} \longleftrightarrow \varphi'_z,$$

womit der obige Ausdruck sich als

$$\overline{\varphi'} \,.\, z f'_z h'_z \varphi'_z \quad z g'_z h'_z \overline{\varphi'_z}$$

darstellt[34]). Und hier ist das Eliminationsergebnis bekanntlich[35]):

$$z f'_z g'_z h'_z,$$

was ausführlich bedeutet:

$$z f_{xz} g_{xz} h_{zy}.$$

Dies ist nun aber genau die linke Seite der Peirceschen Äquivalenz. (Wir erkennen überdies, daß jene Äquivalenz richtig bleibt, wenn man das c rechts einmal wegläßt, weil dies für das Eliminationsergebnis offenbar nichts ausmacht.)

Wie wir gesehen haben, bietet allgemein die Elimination aus einer Beziehung

$$\varphi F_{\varphi x y} \qquad \text{oder} \qquad \overline{\varphi} F_{\varphi x y}$$

gegenüber der Elimination aus einer Aussage nichts grundsätzlich Neues, weil ja x und y einfach als Konstante behandelt werden.

Wir betrachten weiterhin das folgende Schrödersche Beispiel einer „Produktationsaufgabe“[36]):

$$x = \prod_u (u ; a + \overline{u} \dagger b),$$

in unserer Begriffsschrift:

$$\varphi(\overline{u} \cdot \varphi_{xu} \cdot f_{uy})\, v \overline{\overline{\varphi_{xv}}}\, g_{vy}.$$

Wir setzen, sogleich zur Klassenschreibung übergehend:

$$f_{zy} \longleftrightarrow \alpha_z, \qquad g_{zy} \longleftrightarrow \beta_z, \qquad \varphi_{xz} \longleftrightarrow \varrho_z.$$

Dies gibt:

$$\varrho(\overline{u} \cdot \varrho_u \cdot \alpha_u)\, v \dot{\varrho}_v \beta_v \qquad \text{bzw.} \qquad \varrho \overgroup{\alpha \varrho} \undergroup{\beta \dot{\varrho}}.$$

Nach der allgemeineren Eliminationsformel[37]) ist dies äquivalent mit

$$\undergroup{\alpha \beta},$$

was gemäß unseren Abkürzungen besagt:

$$z f_{zy} g_{zy}.$$

Ein Ding x und ein Ding y stehen also dann und nur dann in der ge-

---

[34]) Wo φ' freilich, genau betrachtet, nicht die Begriffe φ^z, sondern diejenigen φ^z_y durchläuft. Da es hier aber nur auf die Begriffs*umfänge* ankommt, ist dieser Umstand offenbar unwesentlich.

[35]) In Klassenschrift stellt sich die obige Elimination ersichtlich dar als:

$$\overline{\varrho} \cdot \undergroup{\alpha \gamma \varrho} \cdot \undergroup{\beta \gamma \dot{\varrho}} \longleftrightarrow \undergroup{\alpha \beta \gamma}.$$

[36]) Algebra der Logik 3, S. 508.

[37]) Um statt dessen auf die Eliminationshauptform zu kommen, würden wir, $\overgroup{\Lambda \dot{\varrho}}$ vermöge X als falsches Disjunktionsglied hinzufügend, rechnen:

$$\overgroup{\alpha \varrho}\, \overgroup{\Lambda \dot{\varrho}}\, \undergroup{\beta \dot{\varrho}} \longleftrightarrow \overgroup{\alpha \Lambda}\, \undergroup{\beta \alpha} \longleftrightarrow \undergroup{\alpha \beta}$$

gebenen Beziehung, wenn x ein beliebiges Individuum ist und y die letzte Bedingung erfüllt. Wir haben es demzufolge oben mit einer zerfallenden Beziehung, einem „Quaderrelativ" nach Schröders Ausdrucksweise, zu tun. Sie stellt sich bei ihm übrigens in der Form $0 \dagger (a + b)$ dar.

Selbstverständlich wird unser Verfahren innerhalb dieses Gebietes, für das es ja noch gar nicht allgemein entwickelt worden ist, nun nicht etwa alles leisten können. So werden ihm Aufgaben wie z. B.[38]):

$$x = \prod_u \{u + (\bar{u} \dagger a); b\},$$

in unserer Schrift:

$$\varphi\,\varphi_{xy}\,\bar{v}\,(u\,\overline{\varphi_{xu}}\,f_{uv} \cdot g_{vy}),$$

vorderhand unzugänglich bleiben müssen, weil hier in der Tat eine Beziehung zwischen den beiden *Veränderlichen* u und v auftritt.

Dagegen kann man sich in Fällen wie diesem zunächst schwer angreifbar erscheinenden[39]):

$$\sum_u (a \dagger u)(\bar{u} \dagger b),$$

in unserer Begriffsschrift:

$$\bar{\varphi} . z f_{xz} \varphi_{zy} . z \overline{\varphi_{xz}}\, g_{zy},$$

den Schröder durch eine Art von Exhaustionsverfahren erledigt, durch den folgenden Kunstgriff helfen. Wir setzen zunächst unbekümmert:

$$f_{xz} \longleftrightarrow \alpha_z, \qquad g_{zy} \longleftrightarrow \beta_z, \qquad \varphi_{zy} \longleftrightarrow \varrho_z, \qquad \varphi_{xz} \longleftrightarrow \sigma_z,$$

als ob φ_y^z und φ_x^z unabhängige Begriffe wären. Natürlich verlangt dann die Bedingung

$$\bar{\varrho}\,\bar{\sigma} . \underbrace{\alpha\varrho} . \underbrace{\beta\dot{\sigma}}$$

zu wenig, da ja in Wahrheit ϱ und σ in einem gewissen Zusammenhange stehen. Vergleichen wir nämlich die beiden von z abhängigen Ausdrücke

$$\varphi_{zy} \quad \text{und} \quad \varphi_{xz},$$

so besteht allerdings, solange wenigstens eines der Argumente des ersten von dem entsprechenden des andern verschieden ist, kein notwendiger Zusammenhang zwischen den Wahrheitswerten der beiden Aussagen. Dagegen muß selbstverständlich der Wahrheitswert von φ_{zy} für $z = x$ und der von φ_{xz} für $z = y$ der gleiche sein, weil ja der Wahrheitswert von φ_{xy} — x und y sind konstant! — nur ein einziger ist. Es muß somit gelten:

$$\varrho_x \longleftrightarrow \sigma_y, \quad \text{d. h.} \quad (\varrho_x \cdot \sigma_y)(\dot{\varrho}_x \cdot \dot{\sigma}_y),$$

---

[38]) Algebra der Logik 3, S. 510.

[39]) Ebenda S. 545.

was eben besagt, daß ϱ_x und σ_y entweder beide richtig oder beide falsch sind.

Die in diesem Sinne vervollständigte Bedingung lautet nunmehr:

$$\bar{\varrho}\bar{\sigma}\,.\,\underbrace{\alpha\varrho}\,.\,\underbrace{\beta\dot{\sigma}}\;(\varrho_x\cdot\sigma_y)(\varrho_x\cdot\dot{\sigma}_y).$$

Vermöge VII und IV* wird hieraus:

$$\varrho\bar{\sigma}\;\underbrace{\alpha\varrho}\,.\,\underbrace{\beta\dot{\sigma}}\;\varrho_x\;\sigma_y{}^{+}\bar{\varrho}\sigma\;\underbrace{\alpha\varrho}\,.\,\underbrace{\beta\dot{\sigma}}\;\varrho_x\cdot\dot{\sigma}_y$$

und nach der naheliegenden Trennung der veränderlichen Klassen.

$$(\bar{\varrho}\,.\,\underbrace{\alpha\varrho}\;\underbrace{\dot{x}\varrho}).(\bar{\sigma}\,.\,\underbrace{\beta\dot{\sigma}}\;\underbrace{\dot{y}\sigma})^{+}(\bar{\varrho}\,.\,\underbrace{\alpha\varrho}\;\underbrace{\dot{x}\varrho}).(\bar{\sigma}\,.\,\underbrace{\beta\dot{\sigma}}\,.\,\underbrace{\dot{y}\sigma}).$$

Das erste und das letzte Glied geben augenscheinlich die Resultante $\curlyvee$, und es bleibt als Eliminationsergebnis schließlich übrig:

$$\underbrace{\beta\dot{y}}\underbrace{\alpha\dot{x}} \quad \text{d. h.} \quad \alpha_x\beta_y$$

oder vermöge der Bedeutung von α und β:

$$f_{rx}g_{yy},$$

die gesuchte resultierende Beziehung. Bei Schröder[40]) ergibt sie sich in der merkwürdigen Gestalt:

$$(0'+a)\mathbin{\text{ɟ}}0\mathbin{\text{ɟ}}(b+0'),$$

die nichtsdestoweniger die einfachste Darstellung zu sein scheint, welche dem Relativkalkül für unseren Ausdruck $f_{xx}g_{yy}$ zur Verfügung steht.

Die nicht bloß im gegenwärtigen Zusammenhange, sondern im ganzen Verlauf unserer Untersuchung benutzte Tatsache, daß die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß es einen Begriff φ gibt, der F_φ zu einer richtigen Aussage macht, eben die Geltung der Aussage $\bar{\varphi}F_\varphi$ ist, wird gewiß jedem derartig trivial erscheinen, daß er wohl weder eine Veranlassung sehen wird, sie noch ausdrücklich zu formulieren, noch selbst die Möglichkeit, dies in einer einigermaßen gehaltvollen Weise zu tun. Es scheint mir nun kaum irgend etwas so bezeichnend zu sein für die allgemeine Einstellung, die der Algebra der Logik gegenüber selbst ihre berufensten Vertreter eingenommen haben, daß z. B. Schröder hier durchaus zwei Probleme unterscheidet, nämlich einmal das „Eliminationsproblem", das die von φ freie Bedingung für die Erfüllbarkeit von F_φ, und auf der anderen Seite das „Summationsproblem", das eine äquivalente von φ freie Schreibung des Ausdrucks $\bar{\varphi}F_\varphi$ verlangt. Erst bei der Drucklegung

[40]) In Wirklichkeit behandelt Schröder allerdings das zu dem obigen duale Problem mit einer gewissen hinzutretenden, für das Wesen der Aufgabe belanglosen Verwicklung.

seines dritten Bandes kommt ihm „zu guter Letzt" die Entdeckung, daß das Eliminationsproblem sich auf das Summationsproblem „zurückführen" und damit „allgemein lösen" lasse (S. 489—490), und erst von dieser Stelle an erscheinen die beiden Probleme als gleichwertig.

Den tieferen Grund dieser doch immerhin seltsamen Verkennung des logischen Sachverhalts glaube ich in folgendem finden zu sollen: Schröder hat sich offenbar bemüht, zu den bekannten Problemen der Zahlenalgebra innerhalb der logischen Algebra Seitenstücke aufzuweisen und zu behandeln. So nun insbesondere zu dem Problem der Auflösung einer Gleichung oder eines Systems von Gleichungen, mit welchem bekanntlich das algebraische Eliminationsproblem eng verknüpft ist. In der Tat liegt die Sache in der Algebra der Logik bis zu einem gewissen Grade entsprechend, mit dem praktischen Unterschiede freilich, daß in dieser das von Schröder stark in den Vordergrund gerückte Auflösungsproblem, rein sachlich beurteilt, von ganz untergeordneter Bedeutung ist. Auf der anderen Seite haben wir nun in der Zahlenalgebra Aufgaben wie die der Summation einer Reihe oder — um noch die Analysis hinzuzunehmen — der Auswertung eines Integrals, die, formal betrachtet, darauf abzielen, eine in dem jeweils gegebenen Ausdruck auftretende Veränderliche — den Stellenzeiger oder die Integrationsvariable — aus seiner Darstellung zu beseitigen. Daß nun aber in der logischen Algebra das Eliminationsproblem [41]) und das Summationsproblem nicht nur äquivalent, sondern identisch sind, scheint Schröder völlig entgangen zu sein — gewiß ein merkwürdiger Beleg dafür, in welchem Grade für ihn der Inhalt gegenüber der Form zurücktrat!

Die im gegenwärtigen Paragraphen behandelten Beispiele betrafen durchweg das Summationsproblem und das diesem dual entsprechende „Produktationsproblem".

VIII. Die zweite Stufe des Entscheidungsproblems.

§ 20.

Das Problem der Normalform.

Um den Gegenstand der vorliegenden Untersuchung überhaupt zu einem gewissen Abschluß bringen zu können, hat es sich bereits als das Gegebene herausgestellt, unser Entscheidungsproblem auch auf den Fall auszudehnen, daß wir zu den Begriffen φ^{x} noch die konstante Beziehung $x = y$, also der *Identität von Individuen* [42]), hinzunehmen. In dieser

[41]) Im engeren Sinne, wie bei Schröder gemeint.

[42]) Nur auf diese kommt es an; die Identität von Klassen hat uns, wie erinnerlich, keine Schwierigkeiten gemacht.

Absicht werden wir zunächst unser *Problem der Normalform* entsprechend zu erweitern haben.

Ich nenne A^* den Aussagenbereich, der aus A durch Hinzunahme der Beziehung $x = y$ entsteht. Eine Aussage aus A^* kann somit als Grundbestandteile enthalten: 1. konstante und veränderliche Individuen, 2. konstante Aussagen, 3. konstante Begriffe eines Individuums und 4. die eine konstante Beziehung $x = y$.

Ich behaupte nun: *Um eine Aussage aus A^* als elementare Verknüpfungsaussage, insbesondere als Normalform, zu schreiben, bedarf es außer den früher aufgezählten Bausteinen nur noch solcher von den Formen:*

$$\underset{\smile}{\underset{\smile}{\alpha}},\quad \underset{\smile}{\underset{\smile}{\alpha\beta}},\quad \underset{\smile}{\underset{\smile}{\alpha\beta\gamma}},\quad \ldots,\quad \underset{\smile}{\underset{\smile}{\underset{\smile}{\alpha}}},\quad \underset{\smile}{\underset{\smile}{\underset{\smile}{\alpha\beta}}},$$

$$\overset{\frown}{\overset{\frown}{\alpha}},\quad \overset{\frown}{\overset{\frown}{\alpha\beta}},\quad \overset{\frown}{\overset{\frown}{\alpha\beta\gamma}},\quad \ldots,\quad \overset{\frown}{\overset{\frown}{\overset{\frown}{\alpha}}},\quad \overset{\frown}{\overset{\frown}{\overset{\frown}{\alpha\beta}}},\ldots$$

Hier soll nun der untere Doppelbogen bedeuten, daß die fragliche Klasse oder die fraglichen Klassen zusammen höchstens ein Individuum — weniger als zwei! — auslassen, und der obere Doppelbogen, daß die fraglichen Klassen mindestens zwei Individuen gemeinsam haben, allgemein *der n-fache untere Bogen, daß die Vereinigungsklasse der durch ihn zusammengefaßten Klassen weniger als n Individuen ausläßt, und der n-fache obere Bogen, daß die Durchschnittsklasse der in Rede stehenden Klassen mindestens n Individuen enthält.*

Von dem hiermit gegenüber den bisherigen Klassenverknüpfungen gewonnenen Reichtum an Ausdrucksmöglichkeiten werden schon die folgenden einfachsten Beispiele eine gewisse Vorstellung geben. So bedeuten z. B. die Aussagen:

$$\underset{\smile}{\underset{\smile}{\dot\alpha}},\quad \overset{\frown}{\alpha}.\underset{\smile}{\underset{\smile}{\dot\alpha}},\quad \overset{\frown}{\overset{\frown}{\alpha}}.\underset{\smile}{\underset{\smile}{\underset{\smile}{\dot\alpha}}},\quad \overset{\frown}{\alpha}.\underset{\smile}{\underset{\smile}{\underset{\smile}{\dot\alpha}}},\quad \underset{\smile}{\underset{\smile}{\dot\alpha\beta}}$$

der Reihe nach, daß α höchstens ein Element hat, daß α genau ein Element hat, daß α genau zwei Elemente hat, daß α ein oder zwei Elemente hat, und endlich, daß alle Elemente von α mit höchstens einer Ausnahme auch Elemente von β sind.

Die *Verneinung* einer Klassenaussage wird genau wie früher gebildet, d. h. nach dem Schema

$$\underset{\smile}{\underset{\smile}{\overline{\dot\alpha\dot\beta\gamma}}} \longleftrightarrow \overset{\frown}{\overset{\frown}{\alpha\beta\dot\gamma}},$$

wie man vermöge der Bedeutung der mehrfachen Bogen leicht überlegt. Die übereinanderstehenden Bausteine der obigen Reihen sind natürlich wiederum duale Bestandteile im Sinne der Regel VIII.

Um nunmehr die vorhin behauptete Zurückführbarkeit der Aussagen von A^* allgemein nachzuweisen, denken wir uns die gegebene Aussage zunächst wieder in der bekannten Weise ausgedrückt, daß alle Operatoren — es handelt sich nur um Individuenoperatoren — am Anfang der Aussage stehen und ihre Wirkungsbereiche sich sämtlich bis an den Schluß der Aussage erstrecken. Der der Matrix zunächst stehende Operator sei wiederum, wie wir uns bestimmter vorstellen wollen, der partikuläre Operator $\bar{x}$. Denken wir uns die Matrix wieder als disjunktive Normalform geschrieben, so können wir genau wie früher nach $\bar{x}$ zerspalten und den Wirkungsbereich jedes $\bar{x}$ auf diejenigen Bestandteile beschränken, die wirklich von x abhängen. Ein solcher Wirkungsbereich wird dann etwa so aussehen:

$$\bar{x} . f_x . g_x . x \neq y . x \neq z$$

(Natürlich ist die Anzahl der Bestandteile jeder der beiden Formen in Wirklichkeit unbeschränkt.) y und z sollen Individuen vorstellen, deren Operatoren entweder ursprünglich links von $\bar{x}$ standen oder die möglicherweise auch ohne Operator stehen, also konstant sind. Unverneinte Identitäten von der Form $x = u$ brauchen wir offenbar nicht zu berücksichtigen, weil wir im Fall einer solchen ja vermöge der Regel XI im obigen Ausdruck x durch u ersetzen dürften und damit den Operator $\bar{x}$ bereits beseitigt hätten.

Als zu dem obigen Ausdruck gehöriges Klassenschriftzeichen ergibt sich uns zunächst

$$\overset{\frown}{\alpha\beta\dot{y}\dot{z}}$$

oder, wenn wir zur Abkürzung

$$\overline{\alpha\beta} = \gamma$$

setzen:

$$\overset{\frown}{\gamma\dot{y}\dot{z}},$$

womit die Veränderliche x für das Auge bereits verschwunden ist.

Freilich hilft uns der letzte Ausdruck in dieser Form noch nicht viel; wir müssen vielmehr, um die Trennung der Veränderlichen weiter durchführen zu können, die Individuen y und z gewissermaßen „freizumachen" suchen. Dies gelingt nun bemerkenswerterweise einfach dadurch, daß wir uns die Bedeutung des Ausdrucks

$$\overset{\frown}{\gamma\dot{y}\dot{z}}$$

genauer überlegen. Er besagt, wie wir wissen, daß γ mindestens ein von y und z verschiedenes Individuum enthält, oder — anders gewendet —, daß γ, auch nachdem man die Individuen y und z, soweit es diese etwa enthalten sollte, aus ihm entfernt hat, immer noch mindestens ein Individuum enthält.

Im Falle dieses Sachverhalts bestehen nun offenbar die folgenden drei Möglichkeiten: 1. γ hat mindestens drei Elemente; dann kommt es für die Richtigkeit der obigen Aussage auf y und z nicht an. 2. Es ist nur bekannt, daß γ wenigstens zwei Elemente hat; in diesem Falle können wir die Gültigkeit der Aussage offensichtlich nur dann verbürgen, wenn entweder $y = z$ ist oder aber mindestens eines der Individuen y und z schon außerhalb γ liegt. 3. Wir wissen bloß, daß γ wenigstens ein Element hat; dann darf weder y noch z Element von γ sein. Dies heißt insgesamt:

$$\hat{\hat{\hat{\gamma}}} + \hat{\hat{\gamma}} \cdot \dot{\gamma}_y \dot{\gamma}_z (y = z) + \hat{\gamma}\ \dot{\gamma}_y \cdot \dot{\gamma}_z$$

Oder nach Distribution und Kürzung vermöge X

$$\hat{\gamma}\ \hat{\hat{\gamma}}(\dot{\gamma}_y \cdot \dot{\gamma}_z)\ \hat{\hat{\hat{\gamma}}} \dot{\gamma}_y \dot{\gamma}_z (y = z).$$

Die letzte Form kann so gelesen werden. „γ hat auf jeden Fall wenigstens ein Element. Hat es weniger als zwei Elemente, so enthält es weder y noch z. Hat es weniger als drei Elemente, so enthält es mindestens eines der Individuen y und z nicht, es sei denn, daß y mit z identisch ist.“

Der strenge Beweis der obigen Zerlegung ergibt sich wohl am einfachsten auf Grund der Tatsache, daß $\widehat{\gamma \dot{y} \dot{z}}$ von jedem Glied der disjunktiven Form impliziert wird, während es seinerseits jedes Glied der konjunktiven Form impliziert.

Damit haben wir nun aber wieder genau dasselbe Problem vor uns wie zu Anfang, nur mit einer Veränderlichen weniger. $\hat{\gamma}$, $\hat{\hat{\gamma}}$ und $\hat{\hat{\hat{\gamma}}}$ gelten natürlich als konstante Aussagen und werden einfach als solche mitgenommen. Setzen wir das Verfahren auch für die übrigen veränderlichen Individuen fort — im Falle eines partikulären Operators wie oben, im Falle eines allgemeinen entsprechend dual vorgehend —, so müssen wir schließlich mit dem Augenblick, wo keine Individuen mehr explizite auftreten — auch die konstanten Individuen mögen wir uns, obwohl das für den Eliminationsprozeß nicht nötig ist, freigemacht vorstellen —, auf eine elementare Verknüpfungsaussage allein aus Bestandteilen der beschriebenen Art kommen, die wir vermöge des Distributionssatzes nach Belieben auch als konjunktive oder disjunktive Normalform schreiben können.

Ich stelle die für die *Freimachung von Individuen* benötigten Formeln für die einfachsten Fälle übersichtlich zusammen.

$$\underset{\smile}{\alpha u} \leftrightarrow \underset{\smile}{\underset{\smile}{\alpha}}\ \underset{\smile}{\alpha}\,\dot{\alpha}_u \leftrightarrow \underset{\smile}{\alpha} + \underset{\smile}{\underset{\smile}{\alpha}}\cdot\dot{\alpha}_u \qquad \wideparen{\alpha\dot{u}} \leftrightarrow \overset{\frown}{\overset{\frown}{\alpha}} + \overset{\frown}{\alpha}\ \dot{\alpha}_u \leftrightarrow \overset{\frown}{\alpha}\cdot\overset{\frown}{\overset{\frown}{\alpha}}\,\dot{\alpha}_u$$

$$\underset{\smile}{\alpha u v} \leftrightarrow \underset{\smile}{\underset{\smile}{\underset{\smile}{\alpha}}}\cdot\underset{\smile}{\underset{\smile}{\alpha}}\,(\dot{\alpha}_u\cdot\dot{\alpha}_v\cdot u \neq v)\cdot\underset{\smile}{\alpha}\,\dot{\alpha}_u\,\alpha_v \qquad \wideparen{\alpha\dot{u}\dot{v}} \leftrightarrow \overset{\frown}{\overset{\frown}{\overset{\frown}{\alpha}}} + \overset{\frown}{\overset{\frown}{\alpha}}\cdot\dot{\alpha}_u\,\dot{\alpha}_v(u = v) + \overset{\frown}{\alpha}\cdot\dot{\alpha}_u\cdot\dot{\alpha}_v$$

$$\leftrightarrow \underset{\smile}{\alpha} + \underset{\smile}{\underset{\smile}{\alpha}}\cdot\alpha_u\,\dot{\alpha}_v + \underset{\smile}{\underset{\smile}{\underset{\smile}{\alpha}}}\ \alpha_u\ \dot{\alpha}_v\ \ u \neq v \qquad \leftrightarrow \overset{\frown}{\alpha}\ \overset{\frown}{\overset{\frown}{\alpha}}(\dot{\alpha}_u\ \dot{\alpha}_v)\cdot\overset{\frown}{\overset{\frown}{\overset{\frown}{\alpha}}}\,\dot{\alpha}_u\,\dot{\alpha}_v(u = v)\,.$$

Die Formeln für mehr als zwei Individuen lassen sich leicht entsprechend bilden. Beim Übergang von einer Formel zur dualen ist übrigens zu beachten, daß die Einheitsklassen nicht etwa nach dem Vorbild der frei veränderlichen Klassen stehen bleiben dürfen, sondern in ihre Ergänzungsklassen übergehen, und umgekehrt.

§ 21.

Das Problem der Elimination. Das Schlußergebnis.

Es bleibt nun noch übrig, das *Eliminationsproblem*

$$\varphi F_{\varphi f g a b} \quad \text{oder} \quad \bar{\varphi} F_{\varphi f g a b}\,,$$

wo F nunmehr eine Aussage des Bereiches A^* ist, zu lösen — womit dann gemäß den Überlegungen des § 12 das allgemeine Entscheidungsproblem für den höheren *Aussagenbereich* B^*, der durch die *Hinzunahme der konstanten Beziehung* $x = y$ zu den Grundbestandteilen von B entsteht, ohne weiteres erledigt sein wird.

Wieder legen wir für unsere Überlegung den Fall des partikulären Begriffsoperators zugrunde. Ganz entsprechend wie früher denken wir uns F nunmehr in der erweiterten Klassenschrift als disjunktive Normalform geschrieben, nach $\bar{\varrho}$ zerspalten und die Wirkungsbereiche der Operatoren $\bar{\varrho}$ auf die ϱ wirklich enthaltenden Bausteine beschränkt. Eine von einem Operator $\bar{\varrho}$ beherrschte Teilaussage wird dann so aussehen:

$$\bar{\varrho}\cdot\underset{\smile}{\alpha\varrho}\quad \underset{\smile}{\beta\dot{\varrho}}\cdot\wideparen{\gamma\varrho}\quad \wideparen{\delta\dot{\varrho}}\cdot\underset{\smile}{\underset{\smile}{\alpha'\varrho}}\cdot\underset{\smile}{\underset{\smile}{\beta'\dot{\varrho}}}\quad \overset{\frown}{\overset{\frown}{\gamma'\varrho}}\cdot\overset{\frown}{\overset{\frown}{\delta'\dot{\varrho}}}\cdot\underset{\smile}{\underset{\smile}{\underset{\smile}{\alpha''\varrho}}}\quad ,$$

nachdem Bausteine von anderer Gliederzahl und Form genau nach den früheren Überlegungen zurückgeführt worden sind.

Es kommen uns hier nun die folgenden *Formeln* zu Hilfe:

$$\wideparen{\alpha\beta} \leftrightarrow \bar{x}\cdot\underset{\smile}{\alpha\dot{x}}\ \underset{\smile}{\beta\dot{x}} \qquad \underset{\smile}{\underset{\smile}{\alpha\beta}} \leftrightarrow \bar{x}\ \underset{\smile}{\alpha\beta x}$$

$$\overset{\frown}{\overset{\frown}{\alpha\beta}} \leftrightarrow \bar{x}\bar{y}\ \underset{\smile}{\alpha\dot{x}}\cdot\underset{\smile}{\beta\dot{x}}\cdot\underset{\smile}{\alpha\dot{y}}\cdot\underset{\smile}{\beta\dot{y}}\ \underset{\smile}{\dot{x}\dot{y}} \qquad \underset{\smile}{\underset{\smile}{\underset{\smile}{\alpha\beta}}} \leftrightarrow \bar{x}\bar{y}\cdot\underset{\smile}{\alpha\beta x y}$$

usf. Die rechten Seiten bedeuten der Reihe nach: „Es gibt ein Individuum, das sowohl in α als auch in β enthalten ist.“ „Es gibt ein Individuum, das gegebenenfalls α und β zur Allklasse ergänzt." (Es könnte natürlich trotzdem $\underparen{\alpha\beta}$ sein; dann ist das Individuum x eben beliebig.) „Es gibt zwei verschiedene Individuen x und y, deren jedes in α und in β enthalten ist." „Es gibt ein Individuum x und ein Individuum y, so daß α, β, x, y zusammen alle Individuen ausmachen." Sie umschreiben also nur in naheliegender Weise die Bedeutungen der linken Seiten.

Vermittelst der obigen Formeln lassen sich nun augenscheinlich in unserer Hauptform alle oberen Bogen und alle mehrfachen unteren Bogen beseitigen, so daß nur untere einfache Bogen übrigbleiben, während die neu heraustretenden Individuenoperatoren sich wieder über den Operator $\bar{\varrho}$ nach links hinüberschieben lassen. Somit haben wir im Wirkungsbereich von $\bar{\varrho}$ nur noch α- und β-Glieder und können die Elimination ohne weiteres in der bekannten Weise vollziehen.

Im Falle des allgemeinen Begriffsoperators verfährt man natürlich entsprechend dual und verwendet demgemäß für die Zurückführung der Bausteine mit unteren Bogen und mehrfachen oberen Bogen die zu den obigen dualen *Formeln*:

$$\underparen{\alpha\beta} \longleftrightarrow x\,\overparen{\alpha x}\,\overparen{\beta x} \qquad\qquad \overparen{\overparen{\alpha\beta}} \longleftrightarrow x\,\overparen{\alpha\beta\dot{x}}$$

$$\underparen{\underparen{\underparen{\alpha\beta}}} \longleftrightarrow xy\,\overparen{\alpha x}\,\overparen{\beta x}\,\overparen{\alpha y}\,\overparen{\beta y}\,\overparen{xy} \qquad\qquad \overparen{\overparen{\overparen{\alpha\beta}}} \longleftrightarrow xy\,\overparen{\alpha\beta\dot{x}\dot{y}} \quad \text{usf.}$$

In jedem Falle gehört die Resultante, wie man ohne weiteres übersieht, wieder dem Bereich A^* an, die vereinfachte Gesamtaussage also ihrerseits wiederum dem Bereich B^*, so daß alle in einer Aussage von B^* auftretenden Begriffe in der Tat nach ein und demselben Schema eliminiert werden können[48]).

Nachdem aus der gegebenen Aussage von B^* alle veränderlichen Begriffe auf die beschriebene Weise beseitigt sind, kann das endgültige Eliminationsergebnis ersichtlich nur noch Bausteine enthalten, die völlig von Buchstabenzeichen ϱ, σ, . , x, y, frei sind. Da nun obendrein jede Verknüpfungsklasse aus den Grundbestandteilen V und Λ ersichtlich selbst einen dieser beiden Werte hat, werden wir es infolgedessen zunächst als Normalform aus Bestandteilen:

$$\underparen{V}, \underparen{\underparen{V}}, \qquad \overparen{V}, \overparen{\overparen{V}}, \qquad \underparen{\Lambda}, \underparen{\underparen{\Lambda}}, \qquad \overparen{\Lambda}, \overparen{\overparen{\Lambda}}, .$$

voraussetzen. Von diesen vier Reihen enthält nun aber die erste lauter unbedingt richtige und die letzte lauter unbedingt falsche Bausteine, so daß diese gemäß X für die Betrachtung ausscheiden.

---

[48]) Individuenoperatoren zwischen den Begriffsoperatoren oder zu Eingang der Aussage sind natürlich jeweils nach der in § 20 gegebenen Vorschrift hineinzubringen.

Was die beiden mittleren Reihen betrifft, so bedeutet $\overset{\frown}{V}$, daß es mindestens ein Individuum gibt, $\overset{\frown}{\overset{\frown}{V}}$, daß es mindestens zwei Individuen gibt, usf., und entsprechend $\underset{\smile}{\Lambda}$, daß es kein Individuum, $\underset{\smile}{\underset{\smile}{\Lambda}}$, daß es höchstens ein Individuum gibt, usf. Innerhalb jeder Reihe impliziert somit von zwei Gliedern stets eines das andere; daher werden wir Disjunktionen oder Konjunktionen gleichartiger Glieder überhaupt nicht in Betracht zu ziehen haben, sondern nur solche von zwei ungleichartigen Gliedern.

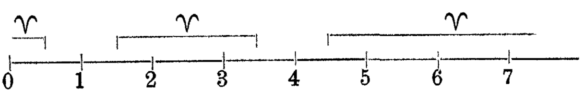
Statt diese Erörterung weiter in abstrakter Allgemeinheit durchzuführen, möchte ich ihr lieber das folgende konkrete *Beispiel* hinreichend allgemeiner Natur einer derartigen Restaussage zugrunde legen:

$$\overset{\frown}{\overset{\frown}{\overset{\frown}{\overset{\frown}{\overset{\frown}{V}}}}}{}^{+}\overset{\frown}{V} \quad \underset{\smile}{\underset{\smile}{\underset{\smile}{\underset{\smile}{\Lambda}}}}{}^{+}\overset{\frown}{\overset{\frown}{\overset{\frown}{V}}} \quad \underset{\smile}{\underset{\smile}{\Lambda}}{}^{+}\underset{\smile}{\Lambda}$$

Von eingliedrigen Obergliedern wird von jeder Art offenbar nicht mehr als eines aufzutreten brauchen. (Der Sperrigkeit der Symbolik abzuhelfen, wäre natürlich leicht, aber für den Augenblick kaum lohnend.)

Das erste Oberglied unseres Beispiels besagt, daß V mindestens 5 Individuen enthält; es würde also für sich allein die mit der Gültigkeit der Aussage verträgliche Individuenanzahl nach unten beschränken. Das zweite bringt zum Ausdruck, daß es mindestens 2 und höchstens 3 Individuen gibt und würde folglich nur die Individuenanzahlen 2 und 3 zulassen. Das dritte besagt, daß es mindestens 3 und höchstens 1 Individuum gibt, fordert also Unmögliches. Das vierte endlich sagt aus, daß der Individuenbereich überhaupt leer ist.

Im Falle unseres Beispiels wäre somit die Aussage, über deren Wahrheitswert entschieden werden soll, richtig: 1. für alle Individuenanzahlen von 5 an, 2. für die Anzahlen 2 und 3, 3. für Anzahlen größer und zugleich kleiner als 2, deren es freilich keine gibt, 4. für die Anzahl 0[44]), für alle übrigen aber falsch. Unser endgültiges Ergebnis würde somit sein, daß die in Rede stehende Aussage in allen Individuenbereichen richtig ist mit Ausnahme derjenigen, die gerade 1 oder gerade 4 Individuen enthalten. Das folgende Schema mag dies näher verdeutlichen:



Allgemein werden wir sagen: Jedes Oberglied einer disjunktiven Normalform einer Eliminationsrestaussage von B^* schneidet aus der An-

[44]) Übrigens ist für den trivialen Fall $\underset{\smile}{\Lambda}$ wegen des Versagens von II^* unsere Entscheidung im allgemeinen unzuverlässig, indessen, falls hierauf Wert gelegt werden sollte, durch unmittelbare Prüfung der gegebenen Aussage leicht zu ergänzen.

zahlenreihe ein entweder nur nach unten oder beiderseits begrenztes Stück aus. Die Gesamtheit dieser Stücke umfaßt genau diejenigen Individuenanzahlen, für welche die fragliche Aussage richtig ist. Diese ist also entweder richtig für alle Individuenanzahlen mit Ausnahme höchstens endlich vieler oder falsch für alle Individuenanzahlen mit Ausnahme höchstens endlich vieler.

Das *Schlußergebnis* unseres Entscheidungsverfahrens für eine beliebige Aussage des Bereiches B^* wird also notwendig *die folgende Gestalt haben* müssen: *Die gegebene Aussage ist richtig — falsch — für alle Individuenanzahlen mit Ausnahme — gegebenenfalls — der endlich vielen Anzahlen* $m, n, \ldots$ Für hinreichend große, insbesondere unendliche Individuenbereiche liegt der Wahrheitswert somit stets eindeutig fest und ist im letzten Falle von der Mächtigkeit unabhängig.

Es darf nicht befremden, sondern liegt vielmehr durchaus in der Natur der Sache, daß das Entscheidungsverfahren, so wie es hier in voller Allgemeinheit begründet worden ist, bei der Durchführung im praktischen Einzelfall einigermaßen umständlich erscheinen wird. Abgesehen davon, daß die strenge Zwangläufigkeit unseres Verfahrens seine anscheinende Schwerfälligkeit wohl mehr als aufwiegt, beruht diese doch vielleicht letztlich nur auf dem Umstand, daß auf diesem verhältnismäßig wenig bearbeiteten und zum Teil erst neu erschlossenen Gebiet bis jetzt noch nicht genügend allgemeine Gesetze bekannt sind, die — etwa nach dem Muster unserer früheren Regel für die Elimination aus der Eliminationshauptform — mit Nutzen zur Abkürzung der Rechnung verwandt werden könnten. Innerhalb der gegenwärtigen Untersuchung ist in der Tat nur gerade so viel an Formeln und Gesetzen aufgewiesen und benutzt worden, wie zur Aufstellung des in Rede stehenden Verfahrens eben hinreicht. Trotz der bereits gegebenen allgemeinen Lösung harren also selbst hinsichtlich des bisher betrachteten Aussagenbereiches noch eine Reihe nicht minder bedeutsamer als anziehender Aufgaben der weiteren Bearbeitung.

Was die Erweiterung des Entscheidungsproblems auf beliebige Beziehungen und höhere Begriffe angeht, so erscheint es immerhin fraglich, ob auch hier das Eliminationsproblem weiterhin als geeignete Grundlage dienen können wird, und zwar auf Grund der folgenden Überlegung: Genügen etwa zwei Klassen α und β einer rein logisch angebbaren Bedingung, innerhalb deren irgendwelche veränderliche Klassen vorkommen — sagen wir z. B. derjenigen, daß es eine dritte Klasse gibt, die α als Teilklasse enthält und ihrerseits als Teilklasse in β enthalten ist —, so wissen wir allerdings, daß wir eine solche Bedingung gewiß auch ohne Erwähnung derartiger veränderlicher Klassen auszudrücken vermögen. Die Sache liegt indessen, wie es scheint, wesentlich verwickelter, sobald eine veränderliche

Beziehung in Frage kommt, wie z. B. bei der Aussage, daß die Klassen α und β gleichzahlig sind, d. h. daß durch eine gewisse Beziehung die Elemente der einen denen der anderen umkehrbar eindeutig zugeordnet werden. Hier sieht man durchaus keine Möglichkeit, die Bedingung der Gleichzahligkeit zweier Klassen allgemein ohne einen Hinweis auf eine derartige veränderliche Beziehung auszudrücken. Vermutlich wird es hier also wiederum eines ganz neuen Gedankens bedürfen.

Anhang.

Zusammenstellung der Rechenregeln.

I. Satz von der doppelten Verneinung. Doppelte Verneinungsstriche über demselben Bestandteil können nach Belieben gesetzt oder weggelassen werden.

II. Vereinigungssatz. Die Glieder einer Disjunktion oder Konjunktion können nach Belieben zusammengefaßt oder getrennt werden.

II* Treten im Zusammenhang mit durchweg disjunktiver oder durchweg konjunktiver Verknüpfung auch Operatoren auf, so dürfen die vorkommenden Symbole nach Belieben zusammengefaßt oder getrennt werden, mit der Einschränkung jedoch, daß kein Argument von dem zugehörigen Operator in einer diesen Zusammenhang mißachtenden Weise getrennt werden darf.

III. Vertauschungssatz. Die Reihenfolge der Glieder einer Disjunktion oder Konjunktion ist beliebig.

III* Treten im Zusammenhang mit durchweg disjunktiver oder durchweg konjunktiver Verknüpfung auch Operatoren auf, so ist die Reihenfolge der vorkommenden Symbole beliebig, mit den beiden Einschränkungen, daß 1. jeder Operator links von den zugehörigen Argumenten und 2. die Reihenfolge der Operatoren untereinander die gleiche bleiben muß. Doch ist in dem Falle, daß zwei oder mehrere gleichartige Operatoren nicht durch ihnen ungleichartige getrennt sind, die Reihenfolge jener beliebig.

IV. Verschmelzungssatz. Tritt in einer Disjunktion oder Konjunktion ein Glied mehrmals auf, so braucht es nur einmal gesetzt zu werden, und umgekehrt.

IV* In einer Disjunktion von partikulären oder einer Konjunktion von allgemeinen Aussagen können die Operatoren, soweit sie vom gleichen logischen Typus sind, in einen verschmolzen werden. Umgekehrt kann in einer partikulären Disjunktion oder einer allgemeinen Konjunktion der Operator zerspalten und zu den einzelnen Gliedern gesetzt werden.

[V. Eliminationssatz. Aus irgend zwei richtigen Aussagen erhält man wieder eine richtige, indem man gegebenenfalls *einmal* ein freies Disjunktionsglied — als welches auch die Aussage selbst betrachtet werden darf — der einen Aussage, das sich von einem solchen der anderen Aussage nur durch den darüberstehenden *Verneinungsstrich* unterscheidet, gegen dieses weghebt und die übrigen disjunktiv verknüpft.

V* Zusatz zu V. Sind die beiden gegebenen Aussagen allgemein und die Operatoren entsprechend vom gleichen logischen Typus, so kann die Regel V sinngemäß auf die Operanden angewandt werden, wobei der Schlußsatz seinerseits dieselben Operatoren erhält wie jeder der Vordersätze.

$\overline{\mathrm{V}}$. Implikationssatz. Aus einer richtigen Aussage erhält man wieder eine richtige, indem man einen geraden Bestandteil durch eine von ihm implizierte oder einen ungeraden durch eine ihn implizierende Aussage ersetzt, anders gesagt: indem man einen geraden Bestandteil abschwächt oder einen ungeraden verstärkt.

$\overline{\mathrm{V}}$* Zusatz zu V Enthalten die auszuwechselnden Bestandteile Veränderliche, so muß die vorausgesetzte Implikation in diesen Veränderlichen allgemein gelten.]

VI. Satz von der Ausführung der Negation. Die Negation einer Disjunktion ist äquivalent der Konjunktion der Negationen der einzelnen Glieder; die Negation einer Konjunktion ist äquivalent der Disjunktion der Negationen der einzelnen Glieder.

VI* Hinsichtlich der Ausführung der Negation und der Umkehrung dieser Operation werden Operatoren wie elementare Verknüpfungsglieder behandelt, nur daß rechts vom Operator kein Wechsel der Verknüpfung eintritt[45]) und im zweiten Fall kein Argument von dem zugehörigen Operator sinnwidrig getrennt werden darf.

VII. Distributionssatz. Eine Konjunktion von Disjunktionen kann äquivalent als eine Disjunktion von Konjunktionen geschrieben werden und entsprechend eine Disjunktion von Konjunktionen als eine Konjunktion von Disjunktionen, und zwar erhält man die Oberglieder der neuen Form dadurch, daß man aus den Obergliedern der alten auf alle möglichen Arten je ein Unterglied auswählt.

VIII. Dualitätssatz. Eine — in den etwaigen relativen Konstanten (vgl. S. 196) der beiden Teilaussagen allgemeingültige — Aussagenäquivalenz bleibt richtig, wenn man in den verglichenen Aussagen überall die Verknüpfungen der Disjunktion und der Konjunktion gegeneinander auswechselt

[45]) Die als Lesezeichen dienenden Zwischensymbole wird man übrigens dessenungeachtet schematisch auswechseln. (Vgl. S. 179 u. 190.)

und überdies alle allgemeinen Operatoren durch partikuläre ersetzt und umgekehrt.

IX. Vereinfachungssätze.

1. Ein Oberglied einer Normalform — im weiteren Sinne, d. h. einer Konjunktion von Disjunktionen oder einer Disjunktion von Konjunktionen — kann weggelassen werden, wenn es alle Unterglieder eines anderen Obergliedes enthält.

2. Ein Unterglied einer Normalform kann weggelassen werden, wenn seine Negation außerdem noch selbständig als Oberglied vorkommt.

X. Verdrängungssatz. In einer Konjunktion verdrängt stets das stärkere Glied das schwächere — d. h. dieses kann neben jenem weggelassen werden —, in einer Disjunktion umgekehrt das schwächere das stärkere.

XI. Satz von der Umschreibung der singulären Aussage. Mit der singulären Aussage f_a sind äquivalent die allgemeine Aussage $x\,x = a\,f_x$ und die partikuläre Aussage $\bar{x}.x = a.f_x$.

Der Einheitlichkeit zuliebe sind die obigen Regeln — zum Teil in einer gegenüber der im Text der Abhandlung gegebenen etwas abweichenden Form — sämtlich als solche der reinen Aussagen- und Begriffsdarstellung gefaßt worden. Doch läßt sich die Mehrzahl von ihnen auf die Klassenlogik teils formal übertragen, indem man die Negation, die Disjunktion und die Konjunktion als die entsprechenden Klassenverknüpfungen versteht — wobei übrigens noch die Wahl bleibt zwischen der Verknüpfungsaussage und der Verknüpfungsklasse —, teils inhaltlich, indem man einfach den Gehalt der Regeln in der Klassensymbolik ausdrückt. Wertvoll sind in der ersten Auffassung namentlich die Regeln I—IV, VI, VII, IX, X, in der zweiten die Regeln VIII und XI. Die mit dem Stern versehenen Regeln haben überwiegend nur für die Aussagen- und Begriffslogik Bedeutung.

(Eingegangen am 16. 7. 1921.)