Die charakteristischen Zahlen analytischer Kurven auf dem Kegel zweiter Ordnung und ihrer Studyschen Bildkurven.

Von

Helene Stähelin in Basel.

Einleitung.

Herr Study hat wohl zuerst darauf hingewiesen, daß eine analytische Kurve, die auf einer vorgegebenen Fläche liegt, nicht jede an sich mögliche Singularität besitzen kann. In seiner gedankenreichen Abhandlung: „Über S. Lies Geometrie der Kreise und Kugeln"[1]) hat Herr Study für die analytischen Kurven, die auf einer Fläche zweiter Ordnung, F_2, mit nicht verschwindender Diskriminante liegen, die Bedingungen aufgestellt, denen die charakteristischen Zahlen[2]) der einzelnen Stellen der Kurve genügen müssen. Die analogen Bedingungen für analytische Kurven auf einem irreduziblen Kegel zweiter Ordnung abzuleiten, ist eine *erste Aufgabe* der vorliegenden Arbeit.

Weiter hat Herr Study dann den Tangentenkomplex der F_2 auf ein Punktkontinuum abgebildet und die Beziehungen studiert, die für die Kurven auf der F_2, betrachtet als Enveloppen ihrer Tangenten, und ihre Bildkurven in jenem Punktkontinuum bestehen. Durch eine Parameterdarstellung des Tangentenkomplexes der F_2 hat Herr Study jeder Tangente zwei Punkte eines projektiven Punktkontinuums von drei komplexen Dimensionen zugeordnet, die dann und nur dann zusammenfallen, wenn die

---

[1]) E. Study, Über S. Lies Geometrie der Kreise und Kugeln, Math. Ann. **86**, S. 40–77; **87**, S. 207–228; **88**, S. 215–241; **89**, S. 298–314; **91**, S. 82–118 und 225–251.

[2]) Der Begriff der „charakteristischen Zahlen einer Stelle der Kurve" wird noch erklärt werden.

Tangente eine Erzeugende ist. Um die Abbildung eindeutig zu gestalten, werden die Tangenten einem Orientierungsprozeß unterworfen. Der Linienkomplex, der aus den „orientierten“ Tangenten einer nicht-singulären F_2 besteht, ist nun Träger eines quaternären Gebietes und kann daher birational, und zwar ausnahmslos umkehrbar eindeutig, auf ein projektives Punktkontinuum von drei komplexen Dimensionen abgebildet werden [3]). Den beiden Scharen der Erzeugenden der F_2 entsprechen die Punkte der beiden Leitgeraden einer allgemeinen Linienkongruenz erster Ordnung und erster Klasse. Jede analytische Kurve, die auf der F_2 verläuft, wird, wenn man sie als Umhüllungsgebilde ihrer orientierten Tangenten betrachtet, auf eine Asymptotenlinie einer geradlinigen Fläche, einer sogenannten nicht-parabolischen Netzfläche [4]), abgebildet, die dieser Kongruenz angehört [5]). Herr Study gelangt so zu Formeln, welche die charakteristischen Zahlen der Asymptotenlinien nicht-parabolischer Netzflächen mit denjenigen der zugehörigen Kurven auf einer allgemeinen F_2 verbinden [6]). Die analoge Aufgabe für die parabolischen Netzflächen durchzuführen, ist eine *zweite Aufgabe* der vorliegenden Arbeit.

In meiner vollständigen Dissertation [7]) habe ich sie zunächst dadurch behandelt, daß ich die Studysche Methode auf die analytischen Kurven auf dem irreduziblen Kegel zweiter Ordnung, K_2, angewandt habe. Die Parameterdarstellung des Tangentenkomplexes dieser Fläche wird dabei mit Ausnahme der Tangenten, die durch den Scheitelpunkt des Kegels gehen, und die nicht Erzeugende sind, umkehrbar eindeutig. Der Orientierungsprozeß fällt also weg. Im einzelnen findet man folgendes: *Der Gesamtheit der geradlinigen Erzeugenden des Kegels entsprechen bei der Abbildung die Punkte einer Geraden, die Leitlinie einer speziellen irreduziblen linearen Kongruenz ist. Jedem Tangentenbüschel des K_2 entspricht eine Gerade, welche die Leitlinie schneidet und dann und nur dann eine Gerade dieser Kongruenz ist, wenn der Scheitelpunkt des Tangentenbüschels auf der Fläche liegt. Im Scheitelpunkt des Kegels ist die Abbildung nicht mehr eindeutig, sondern jeder Geraden, die durch diesen Punkt geht, entspricht ein Punktepaar der Direktrix der speziellen Linienkongruenz des Bildraumes. Diese Punkte sind die Bildpunkte der Erzeugenden, längs welchen die Tangentialebenen, die man durch die Gerade an den Kegel legen kann,*

---

[3]) E. Study, l. c. Math. Ann. **86**, S. 46.

[4]) H. Mohrmann, Über die Haupttangentenkurven auf den Netzflächen, Math. Ann. **73**.

[5]) E. Study, Math. Ann. **88**, S. 222.

[6]) E. Study, Math. Ann. **87**, S. 217.

[7]) H. Stähelin, Basler Dissertation 1924. (Ein Exemplar dieser Dissertation in Maschinenschrift kann von der Universitätsbibliothek in Basel entliehen werden.)

diesen berühren. Sie fallen dann und nur dann zusammen, wenn die Gerade eine Erzeugende des Kegels ist. Schließt man diejenigen (uneigentlichen) Tangenten, die durch den Scheitelpunkt des Kegels gehen und nicht Erzeugende sind, aus, so entspricht jeder Tangente umkehrbar eindeutig ein Punkt einer komplexen dreidimensionalen Punktmannigfaltigkeit. Jeder analytischen Kurve, die auf dem Kegel liegt, entspricht, wenn man sie als Enveloppe ihrer Tangenten betrachtet, eine Asymptotenlinie einer parabolischen Netzfläche, deren geradlinige Erzeugende der speziellen Kongruenz des Bildraumes angehören. Mit Hilfe der von Herrn Study angegebenen Methoden gelangt man so auch zu den Beziehungen, die zwischen den charakteristischen Zahlen der analytischen Kurven auf dem Kegel zweiter Ordnung und denjenigen ihrer Bildkurven, den Asymptotenlinien auf parabolischen Netzflächen, bestehen.

Im folgenden soll nun ein anderer Weg eingeschlagen werden, auf dem man unschwer zu dem gleichen Ziele gelangt und gleichzeitig die Bedingungen gewinnt, denen die charakteristischen Zahlen der Stellen von analytischen Kurven auf einem irreduziblen Kegel zweiter Ordnung genügen müssen. Der Weg ist von Herrn Mohrmann[8]) gewiesen worden und beruht auf dem Gedanken[9]), die (parabolischen) Netzflächen als Örter von Schmiegungsstrahlen von Kurven zu betrachten, die einem allgemeinen linearen Komplex angehören und somit nur in sich duale Stellen besitzen.

I.

Die Punkte in der Nachbarschaft eines beliebigen Punktes O einer analytischen Kurve im projektiven Punktkontinuum $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ liegen auf einem oder mehreren Zweigen. Es läßt sich stets ein uniformisierender Parameter t so bestimmen, daß die Koordinaten der Punkte eines solchen Zweiges in einer gewissen Umgebung seines Ursprunges O sich in der folgenden Form durch nach wachsenden Potenzen von t fortschreitende Potenzreihen darstellen lassen:

$$(1) \qquad x_0 = 1, \quad x_1 = t^a, \quad x_2 = t^b + \ldots, \quad x_3 = t^c + \ldots$$
$$(0 < a < b < c),$$ [10])

---

[8]) H. Mohrmann, Bemerkungen zu E. Studys Aufsatz: „Über S. Lies Geometrie der Kreise und Kugeln“, Math. Ann. **89**, S. 317.

[9]) Einem Gedanken, den schon Herr P. Moor in seiner Basler Dissertation (1924) verwendet hat, um alle Netzflächen zu bestimmen, die eine Kurve dritter oder vierter Ordnung als Haupttangentenkurve haben.

[10]) C. Jordan, Cours d'analyse **1**, S. 409–415, 570.

wo a, b, c ganze Zahlen und relativ prim sind. Jedem Zweige durch den Punkt O ist eine durch ihn hindurchgehende Gerade T:

$$(2) \qquad (x\, x^{(a)}\, y\, z) = 0\,,\text{[11]}$$

die *Tangente* der Kurve an der Stelle $t = 0$, und eine diesen Punkt enthaltende Ebene S

$$(3) \qquad (x\, x^{(a)}\, x^{(b)}\, z) = 0\,,$$

die *Schmiegungsebene* der Kurve an der Stelle $t = 0$, zugeordnet.

Setzen wir mit Study

$$(4) \qquad \boxed{k_1 = a - 1, \quad k_2 = b - a - 1, \quad k_3 = c - b - 1}\,,$$

so wird der Kurvenzweig an der Stelle $t = 0$ charakterisiert durch das Symbol

$$(k_1,\, k_2,\, k_3).\text{[12]}$$

Ist $k_1 = 0$, so nennen wir den zur Stelle $t = 0$ gehörigen Punkt *regulär*, andernfalls *singulär*. Sind alle k_i gleich Null, so ist die Stelle $t = 0$ eine *reguläre*, in jedem anderen Falle eine *singuläre* oder *stationäre* Stelle der Kurve.

Die Zahlen k_i haben folgende geometrische Bedeutung: Jede Ebene durch den Ursprung O des Kurvenzweiges, welche die Tangente T in diesem Punkte nicht enthält, schneidet die Kurve an der Stelle $t = 0$ in $k_1 + 1$ Punkten; jede Ebene durch die Gerade T, die aber nicht die Schmiegungsebene S ist, schneidet die Kurve an der Stelle $t = 0$ in $k_1 + k_2 + 2$ Punkten; die Ebene S selbst hat $k_1 + k_2 + k_3 + 3$ bei O liegende Punkte mit der Kurve gemein. Daraus folgt sofort, daß die Zahlen k_1, k_2, k_3 dieselben sind für alle zueinander kollinearen Kurvenzweige. Wir können daher in den folgenden Betrachtungen von einer beliebigen, mit einem vorgegebenen Zweige behafteten Kurve ausgehen, insbesondere auch von einer algebraischen.

Jede algebraische Kurve mit zwei und nur zwei projektiv äquivalenten Zweigen ist rational und liegt in einem linearen Komplex L_1.[13]) Sie hat daher an jeder Stelle eine Charakteristik der Form $(\varkappa, \varkappa_2, \varkappa)$. Im pro-

[11]) Das Symbol $(x\, x^{(a)}\, y\, z)$ bedeutet die Determinante, die aus den Koordinaten des Punktes $t = 0$, ihrem a-ten Differentialquotienten nach dem Parameter t und den Koordinaten der variablen Punkte y, z gebildet ist.

[12]) E. Study, l. c. Math. Ann. 87, S. 212. — Vgl. auch Enzykl. d. M. W. III C 7 (*Segre*), S. 879.

[13]) H. Mohrmann, Bestimmung der algebraischen W-Kurven, Math. Ann. 89, S. 260—271. — Derselbe: Über die algebraischen W-Kurven im r-dimensionalen Raume, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo 47, S. 1—29.

jektiven Punktkontinuum $\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ kann eine solche Kurve stets mit Hilfe eines Parameters t dargestellt werden in der Form

$$(5)\qquad \begin{cases} \xi_0 = t^{n_1+n_2} = t^{\gamma} \\ \xi_1 = t^{n_1} \quad = t^{\beta} \\ \xi_2 = t^{n_2} \quad = t^{\alpha} \\ \xi_3 = 1 \end{cases} \qquad (0 < n_2 < n_1),$$

wo n_1 und n_2 ganze Zahlen und relativ prim sind.

An der Stelle $t = 0$ hat diese Kurve die charakteristischen Zahlen

$$\varkappa = n_2 - 1, \qquad \varkappa_2 = n_1 - n_2 - 1,$$

und es ist

$$\alpha = \varkappa + 1, \qquad \beta = \varkappa + \varkappa_2 + 2, \qquad \gamma = 2\varkappa + \varkappa_2 + 3.$$

Sie kann an dieser Stelle jede mögliche Singularität annehmen, und jede analytische Kurve, die *einem linearen Komplex angehört*, kann daher an dieser Stelle durch eine solche Kurve angenähert werden. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit unseren weiteren Untersuchungen die Kurve (5) zugrunde legen.

Wir bestimmen nun die parabolischen Netzflächen, die in der Schmiegungsstrahlenkongruenz der Raumkurve (5) enthalten sind. Diese Raumkurve ist Haupttangentenkurve der so bestimmten Netzfläche. Ordnen wir dieser ihr Plückersches Bild auf einem irreduziblen Kegel zweiter Ordnung zu, so finden wir die Bedingungen, denen die charakteristischen Zahlen an jeder Stelle einer analytischen Kurve, die auf einem irreduziblen Kegel zweiter Ordnung liegt, genügen müssen. Zugleich gelangen wir auch zu den Beziehungen, die zwischen den charakteristischen Zahlen der parabolischen Netzflächen und denjenigen ihrer Haupttangentenkurven an jeder Stelle bestehen.

Die Netzflächen, welche der Schmiegungsstrahlenkongruenz der Kurve $\xi(t)$ angehören, werden aus dieser Kongruenz durch einen weiteren linearen Komplex L_2 ausgeschnitten. Da aber die beiden linearen Komplexe L_1 und L_2 ein Büschel bestimmen, das zwei spezielle lineare Komplexe enthält, so kann der Komplex L_2 ohne Beschränkung der Allgemeinheit als spezieller linearer Komplex angenommen werden. Man findet daher die parabolischen Netzflächen, die in der Schmiegungsstrahlenkongruenz der Kurve $\xi(t)$ enthalten sind, indem man eine feste Gerade g, die Leitlinie des speziellen Komplexes L_2, welche zugleich dem Komplex L_1 angehört, mit dieser Kongruenz zum Schnitt bringt. Der Ort der

Schmiegungsstrahlen, welche die Gerade g treffen, ist die gesuchte Netzfläche[14] [15]).

Die Gerade g kann nun folgende Lagen zur Raumkurve $\xi(t)$ haben:

(A) g trifft weder die Tangente im Punkte $t=0$ noch den Punkt $t=0$ der Kurve $\xi(t)$.

(B) g trifft die Tangente, nicht aber den Punkt $t=0$ der Kurve $\xi(t)$.

(C) g geht durch den Punkt $t=0$, ist aber nicht Tangente an die Kurve $\xi(t)$ in diesem Punkte.

(D) g ist Tangente der Kurve $\xi(t)$ im Punkte $\xi(0)$.

Wir erhalten so vier verschiedene parabolische Netzflächen.

Wir bestimmen zunächst den linearen Komplex L_1, dem die Kurve (5) angehört. Aus der Matrix

$$\begin{Vmatrix} t^{n_1+n_2} & t^{n_1} & t^{n_2} & 1 \\ (n_1+n_2)\,t^{n_1+n_2-1} & n_1\,t^{n_1-1} & n_2 t^{n_2-1} & 0 \end{Vmatrix}$$

berechnen wir die Plückerschen Koordinaten Ξ_{ik} der Tangente im Punkte $\xi(t)$ dieser Kurve:

$$\begin{aligned} &\Xi_{01}=n_2\,t^{2n_1}, && \Xi_{02}= n_1\,t^{n_1+n_2}, && \Xi_{03}=(n_1+n_2)\,t^{n_1}, \\ &\Xi_{23}=n_2\quad, && \Xi_{31}=-n_1\,t^{n_1-n_2}, && \Xi_{12}=(n_1-n_2)\,t^{n_1}. \end{aligned}$$

Die Kurve (5) liegt also in dem linearen Komplex

$$\boxed{(n_1-n_2)\,\Xi_{03}-(n_1+n_2)\,\Xi_{12}=0}\,. \tag{6}$$

Die Koordinaten σ_{ik} eines Schmiegungsstrahles im Punkte $\xi(t)$ bestimmen wir aus der Matrix:

$$\begin{Vmatrix} t^{n_1+n_2} & t^{n_1} & t^{n_2} & 1 \\ (n_1+n_2)(n_1+n_2-1)\,t^{n_1+n_2-2} & n_1(n_1-1)\,t^{n_1-2} & n_2(n_2-1)\,t^{n_2-2} & 0 \end{Vmatrix}.$$

Es wird

$$\left\{\begin{aligned} &\sigma_{01}=n_2(2n_1+n_2-1)\,t^{2n_1}, && \sigma_{23}=n_2(n_2-1), \\ &\sigma_{02}=n_1(2n_2+n_1-1)\,t^{n_1+n_2}, && \sigma_{31}=-n_1(n_1-1)\,t^{n_1-n_2}, \\ &\sigma_{03}=(n_1+n_2)(n_1+n_2-1)\,t^{n_1}, && \sigma_{12}=[n_1(n_1-1)-n_2(n_2-1)]\,t^{n_1}. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Wir erhalten sämtliche Schmiegungsstrahlen Σ_{ik} der Kurve $\xi(t)$, wenn wir in jedem ihrer Punkte das durch die Tangente Ξ_{ik} und einen Schmiegungsstrahl (7) bestimmte Büschel $\Xi_{ik}+\lambda\sigma_{ik}$ bilden:

[14]) H. Mohrmann, Bemerkungen zu E. Studys Aufsatz: „Über S. Lies Geometrie der Kreise und Kugeln", Math. Ann. 89, S. 317.

[15]) P. Moor, Netzflächen mit Haupttangentenkurven 3. und 4. Ordnung, Basler Dissertation 1924.

$$(8)\qquad \begin{cases} \Sigma_{01} = n_2[1+\lambda(2n_1+n_2-1)]t^{2n_1}, \\ \Sigma_{02} = n_1[1+\lambda(2n_2+n_1-1)]t^{n_1+n_2}, \\ \Sigma_{03} = (n_1+n_2)[1+\lambda(n_1+n_2-1)]t^{n_1}, \\ \Sigma_{23} = n_2[1+\lambda(n_2-1)], \\ \Sigma_{31} = -n_1[1+\lambda(n_1-1)]t^{n_1-n_2}, \\ \Sigma_{12} = (n_1-n_2)[1+\lambda(n_1+n_2-1)]t^{n_1}. \end{cases}$$

Aus dieser Schmiegungsstrahlenkongruenz sollen nun diejenigen ∞^1 Geraden ausgesondert werden, die eine feste Gerade g treffen, die dem linearen Komplex (6) angehört. Die Koordinaten Ξ_{ik} dieser Geraden müssen also den Bedingungen genügen:

$$(9)\qquad \begin{cases} \Xi_{01}\Xi_{23} + \Xi_{02}\Xi_{31} + \Xi_{03}\Xi_{12} = 0 \\ (n_1-n_2)\Xi_{03} - (n_1+n_2)\Xi_{12} = 0 \\ \Xi_{23}\Sigma_{01} + \Xi_{31}\Sigma_{02} + \Xi_{12}\Sigma_{03} + \Xi_{01}\Sigma_{23} + \Xi_{02}\Sigma_{31} + \Xi_{03}\Sigma_{12} = 0. \end{cases}$$

An der Stelle $t=0$ hat unsere Kurve (5) die Gerade $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = 0$ zur Tangente und die Ebene $\xi_0 = 0$ zur Schmiegungsebene. Damit ist ihre Lage zu dem der Parameterdarstellung (5) zugrunde gelegten Koordinatentetraeder charakterisiert, und man sieht sofort, daß man als Gerade g in jedem Falle (A)—(D) eine Kante dieses Koordinatentetraeders wählen kann.

(A) Wir bringen die Kongruenz der Schmiegungsstrahlen zum Schnitt mit der Geraden $\Xi_{23} = 0$.

(Ich führe die Rechnung nur für diesen Fall durch, da sie in den anderen Fällen analog verläuft.)

Aus den Gleichungen (8) und (9) folgt, daß

$$\lambda = -\frac{1}{n_2-1}$$

sein muß. Setzen wir diesen Wert in die Koordinaten (8) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &\Sigma_{01} = 2n_2 t^{2n_1}, && \Sigma_{02} = (n_1+n_2)t^{n_1+n_2}, && \Sigma_{03} = (n_1+n_2)t^{n_1}, \\ &\Sigma_{23} = 0\quad, && \Sigma_{31} = -(n_1-n_2)t^{n_1-n_2}, && \Sigma_{12} = (n_1-n_2)t^{n_1}, \end{aligned}$$

oder, indem wir durch den Faktor $(n_1-n_2)t^{n_1-n_2}$ dividieren und die Σ_{ik} als Koordinaten eines Punktes x im Raume von fünf Dimensionen deuten:

$$\begin{aligned} &\Sigma_{01} = x_0 = \frac{2n_2}{n_1-n_2}t^{n_1+n_2}, && \Sigma_{02} = x_1 = \frac{n_1+n_2}{n_1-n_2}t^{2n_2}, && \Sigma_{03} = x_2 = \frac{n_1+n_2}{n_1-n_2}t^{n_2} \\ &\Sigma_{23} = x_5 = 0\quad, && \Sigma_{31} = x_4 = -1\quad, && \Sigma_{12} = x_3 = t^{n_2}. \end{aligned}$$

Wir führen folgende kollineare Transformation aus:

$$
\begin{aligned}
x_0^* &= -x_4\\
x_1^* &= \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\,x_1\\
x_2^* &= \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\,x_2\\
x_3^* &= \frac{n_1-n_2}{2\,n_2}\,x_0\\
x_4^* &= \frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\,x_2 - x_3\\
x_5^* &= x_5\,.
\end{aligned}
$$

Dadurch geht die Parameterdarstellung der Netzfläche über in:

$$
(10)\qquad \left\{
\begin{aligned}
x_0^* &= 1\\
x_1^* &= t^{2n_2}\\
x_2^* &= t^{n_2}\\
x_3^* &= t^{n_1+n_2}\\
x_4^* &= 0\\
x_5^* &= 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Das Plückersche Bild dieser Netzfläche ist eine Kurve $x^*(t)$, die auf dem Zylinder zweiter Ordnung

$$
(11)\qquad x_1^* - x_2^{*2} = 0, \qquad x_0^* \neq 0,
$$

liegt. Ihre Charakteristik an der Stelle $t = 0$ ist

$$
(k_1, k_2, k_3) = (n_2 - 1,\ n_2 - 1,\ n_1 - n_2 - 1).
$$

Es ist also

$$
\boxed{k_1 = k_2}\,,
$$

und, wenn wir unter a, b, c wieder die durch die Gleichungen (1) definierten Zahlen verstehen,

$$
b = 2\,a\,.
$$

Ferner folgt nach Gleichung (4):

Die Tangente an der Stelle $t = 0$ ist nicht Erzeugende, und die Schmiegungsebene dort ist nicht Tangentialebene an den Zylinder zweiter Ordnung (11).

Zwischen den charakteristischen Zahlen der Kurve (5) und denjenigen der Netzfläche (10) an der Stelle $t = 0$ bestehen die Beziehungen

$$
\boxed{(k_1, k_2, k_3) = (\varkappa, \varkappa, \varkappa_2)}\,.
$$

(B) Wir wählen

$$g \equiv \Xi_{31} = 0$$

und erhalten als Parameterdarstellung der Netzfläche, die durch diese Gerade aus der Schmiegungsstrahlenkongruenz der Kurve (5) ausgeschnitten wird:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = t^{2n_1} \\ x_2 = t^{n_1} \\ x_3 = t^{n_1 - n_2} \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0. \end{cases}$$

Die Kurve $x(t)$ liegt auf dem Zylinder zweiter Ordnung

$$x_1 - x_2^2 = 0, \qquad x_0 \neq 0.$$

und hat an der Stelle $t = 0$ [illegible]

$$(k_1, k_2, k_3) = \text{[illegible]}$$

Also ist

$$\boxed{k_1 = k_2 - k_3 - 1}, \qquad \{c = 2a\}.$$

Die Tangente an die Kurve $x(t)$ im Punkte $t = 0$ ist nicht Erzeugende des Zylinders zweiter Ordnung. Die Schmiegungsebene hingegen berührt ihn im Punkte $x(0)$.

Ferner ist nach den Gleichungen (5)

$$\boxed{(k_1, k_2, k_3) = (\varkappa + \varkappa_2 + 1,\ \varkappa, \varkappa_2)}.$$

(C) Als Gerade g wählen wir die Gerade

$$\Xi_{02} = 0$$

und erhalten als Plückersches Bild der zugehörigen Netzfläche die Kurve

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = t^{2n_1} \\ x_2 = t^{n_1} \\ x_3 = t^{n_1 - n_2}, \end{cases}$$

die auf dem Zylinder zweiter Ordnung

$$x_1 - x_2^2 = 0, \qquad x_0 \neq 0,$$

liegt. Sie hat an der Stelle $t = 0$ die Charakteristik

$$(k_1, k_2, k_3) = (n_1 - n_2 - 1,\ n_2 - 1,\ n_1 - 1).$$

Also ist

$$\boxed{k_3 = k_1 + k_2 + 1}, \qquad \{c = 2b\}.$$

Die Tangente im Punkte $x(0)$ ist Erzeugende des Zylinders, und die Schmiegungsebene dort ist Tangentialebene.

Aus den Gleichungen (5) folgt:

$$\boxed{(k_1, k_2, k_3) = (\varkappa_2, \varkappa, \varkappa + \varkappa_2 + 1)}.$$

(D) Die entsprechende Annahme ist

$$g \equiv \Xi_{01} = 0.$$

Als Plückersches Bild $x(t)$ der zugehörigen Netzfläche erhalten wir die Kurve

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = t^{n_1+n_2} \\ x_2 = t^{n_1} \\ x_3 = t^{n_1-n_2}. \end{cases}$$

Sie liegt auf dem Kegel zweiter Ordnung

$$x_1 x_3 - x_2^2 = 0, \qquad x_0 = 1.$$

Der Ursprung dieser Kurve ist der Scheitelpunkt des Kegels, und ihre Charakteristik an dieser Stelle lautet

$$(k_1, k_2, k_3) = (n_1 - n_2 - 1,\ n_2 - 1,\ n_2 - 1).$$

Also ist

$$\boxed{k_2 = k_3}, \qquad \{a + c = 2b\}.$$

Die Schmiegungsebene im Punkte $x(0)$ ist Tangentialebene des Kegels. Ferner folgt aus den Gleichungen (5)

$$\boxed{(k_1, k_2, k_3) = (\varkappa_2, \varkappa, \varkappa)}.$$

Aus unseren Untersuchungen folgt, daß gewisse Singularitäten für eine analytische Kurve, die auf einem irreduziblen Kegel zweiter Ordnung liegt, von vorneherein ausgeschlossen sind. So gibt es z. B. keine solche Kurve mit der Charakteristik $(0, 1, 0)$, also keine Kurve mit regulärem Punkt, gewöhnlicher stationärer Tangente und einer regulären Schmiegungsebene.

II.

Die Bedingungen, denen die charakteristischen Zahlen der Stellen von analytischen Kurven auf einem irreduziblen Kegel zweiter Ordnung genügen müssen, fassen wir zusammen in dem

Satz I[16]): *Liegt die Kurve $x(t)$ auf einem irreduziblen Kegel zweiter Ordnung, und ist $t = 0$ ein regulärer Punkt dieses Kegels, so bestehen folgende drei Möglichkeiten:*

(A) *Die Tangente an der Stelle $t = 0$ ist nicht Erzeugende, und es ist*

$$k_1 = k_2, \qquad \{b = 2a\}.$$

Die zugehörige Schmiegungsebene ist nicht Tangentialebene der Fläche.

(B) *Die Tangente an der Stelle $t = 0$ ist nicht Erzeugende, und es ist*

$$k_1 = k_2 + k_3 + 1, \qquad \{c = 2a\}.$$

Die zugehörige Schmiegungsebene berührt den Kegel zweiter Ordnung im Punkt $x(0)$.

(C) *Die Tangente an der Stelle $t = 0$ ist Erzeugende des Kegels. Dann ist*

$$k_3 = k_1 + k_2 - 1, \qquad \{c = 2b\},$$

und die Schmiegungsebene ist Tangentialebene der Fläche im Punkt $x(0)$.

(D) *Liegt der Ursprung des Kurvenzweiges nicht im Scheitel des Kegels, so ist die Schmieg*[illegible] *eine eigentliche Tangentialebene des Kegels, und es ist immer*

$$k_2 = k_3, \qquad \{a + c = 2b\}.$$

Unsere Untersuchungen haben ferner gezeigt, wie die charakteristischen Zahlen der Haupttangentenkurven $\xi(t)$ auf parabolischen Netzflächen mit denjenigen der zugehörigen Kurven $x(t)$ auf einem irreduziblen Kegel zweiter Ordnung zusammenhängen. Wir wollen diese Ergebnisse noch in folgendem Satze formulieren:

Satz II.[17]) *Für eine Kurve $x(t)$ auf einem irreduziblen Kegel zweiter Ordnung und die ihr zugeordnete Asymptotenlinie $\xi(t)$ einer parabolischen Netzfläche bestehen an einer beliebigen Stelle $t = 0$ folgende Möglichkeiten:*

(A) *Die Tangente im Punkte $x(0)$ ist nicht Erzeugende des irreduziblen Kegels zweiter Ordnung, und seine Schmiegungsebene ist nicht Tangentialebene.*	(A) *Die Tangente des Punktes $\xi(0)$ ist keine Gerade der speziellen linearen Kongruenz, welcher die Erzeugenden der Netzfläche angehören.*

Die charakteristischen Zahlen der Punkte $x(0)$ und $\xi(0)$ sind verbunden durch die Gleichungen:

$$(k_1, k_2, k_3) = (\varkappa, \varkappa, \varkappa_2).$$

---

[16]) Vgl. hierzu E. Study, Math. Ann. 87, S. 217.

[17]) Vgl. E. Study, Math. Ann. 87, S. 221.

(B) *Die Tangente im Punkte* $x(0)$ *ist nicht Erzeugende, aber seine Schmiegungsebene ist Tangentialebene des Kegels.*

(B) *Der Punkt* $\xi(0)$ *liegt nicht auf der Leitlinie der Kongruenz, aber seine Tangente ist eine Gerade dieser Kongruenz.*

Die zugehörigen charakteristischen Zahlen genügen den Bedingungen:

$$(k_1, k_2, k_3) = (\varkappa + \varkappa_2 + 1, \varkappa, \varkappa_2).$$

(C) *Die Tangente im Punkte* $x(0)$ *ist Erzeugende des Kegels, aber der Punkt* $x(0)$ *ist ein regulärer Punkt des Kegels. Seine Schmiegungsebene ist Tangentialebene der Fläche.*

(C) *Der Punkt* $\xi(0)$ *liegt auf der Leitlinie der Kongruenz, welcher die Netzfläche angehört. Seine Tangente ist aber nicht die Leitlinie dieser Kongruenz.*

Die charakteristischen Zahlen an dieser Stelle sind verbunden durch die Gleichungen:

$$(k_1, k_2, k_3) = (\varkappa_2, \varkappa, \varkappa + \varkappa_2 + 1).$$

(D) *Der Punkt* $x(0)$ *ist der Scheitelpunkt des Kegels. Die Schmiegungsebene ist Tangentialebene dieser Fläche.*

(D) *Die Tangente im Punkte* $\xi(0)$ *ist die Leitlinie der Kongruenz, durch welche die Netzfläche geht.*

Zwischen den charakteristischen Zahlen an dieser Stelle bestehen die Gleichungen:

$$(k_1, k_2, k_3) = (\varkappa_2, \varkappa, \varkappa).$$

Aus Satz II folgt, daß regulären Punkten der einen Kurve auch singuläre Punkte der anderen Kurve entsprechen können. Wir wollen die Bedingungen, unter denen dieser Fall eintritt, noch besonders formulieren:

Einem regulären Punkte $x(0)$ *der Kurve* $x(t)$ *entspricht immer dann und nur dann ein singulärer Punkt* $\xi(0)$ *der Kurve* $\xi(t)$, *wenn seine Tangente stationär und daher eine Erzeugende des irreduziblen Kegels zweiter Ordnung ist. Der Punkt* $\xi(0)$ *liegt dann immer auf der Leitlinie der speziellen Kongruenz, welcher die Erzeugenden der Netzfläche angehören:*

$$\{a = 1,\ b > 2;\ \ k_1 = 0,\ k_2 > 0\}.$$

Die Bedingung, daß die Tangente im Punkte $x(0)$ mehr als dreipunktig berühren muß, die bei Kurven $x(t)$ auf einer Fläche zweiter Ordnung mit nicht verschwindender Diskriminante hinzutritt[18]), wenn einem regulären Punkte $x(0)$ ein singulärer Punkt $\xi(0)$ entsprechen soll, fällt also hier weg. Dadurch wird das wesentlich verschiedene Verhalten

[18]) E. Study, Math. Ann. 87, S. 223.

der Asymptotenlinien parabolischer Netzflächen von demjenigen der Haupttangentenkurven nicht-parabolischer Netzflächen bedingt.

Einem regulären Punkte $\xi(0)$ *der Kurve* $\xi(t)$ *entspricht immer dann und nur dann ein singulärer Punkt* $x(0)$ *der Kurve* $x(t)$, *wenn seine Tangente eine Gerade der speziellen Kongruenz ist, welcher die Erzeugenden der parabolischen Netzfläche angehören, und außerdem eine von zwei weiteren Bedingungen erfüllt ist:*

Entweder der Punkt $\xi(0)$ *liegt nicht auf der Leitlinie dieser Kongruenz,*

oder er liegt auf dieser Leitlinie und seine Tangente ist stationär:

$$\{\alpha = 1 \ [illegible]$$

wo α, β die durch die Gleichungen (5) definierten Zahlen sind.

Lösen wir die in Satz II aufgestellten Gleichungen (A) bis (D), die zwischen den charakteristischen Zahlen der Kurven $x(t)$ und $\xi(t)$ bestehen, nach den $\varkappa$ auf, so [illegible] (A*) bis (D*):

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{A}^*) \quad (\varkappa, \varkappa_2, \varkappa) = (k_1 = k_2, k_3, k_1 = k_2),\\
&(\mathrm{B}^*) \quad (\varkappa, \varkappa_2, \varkappa) = (k_2, k_3, k_2),\\
&(\mathrm{C}^*) \quad (\varkappa, \varkappa_2, \varkappa) = (k_2, k_1, k_2),\\
&(\mathrm{D}^*) \quad (\varkappa, \varkappa_2, \varkappa) = (k_3 = k_2, k_1, k_3 = k_2).
\end{aligned}
$$

Daraus folgt, daß sich die Fälle (A), (D) und (B), (C) dual entsprechen.

Mathematisches Seminar der Universität Basel.

(Eingegangen am 20. 7. 1924.)