Untersuchungen über das Eliminationsproblem der mathematischen Logik.

Von

Wilhelm Ackermann in Burgsteinfurt.

1. Einleitung.

Das Eliminationsproblem der mathematischen Logik ist von Schröder aufgeworfen worden und gehört ebenso wie das Entscheidungsproblem zu den Hauptproblemen dieses Wissenschaftszweiges. Es enthält sogar in seiner allgemeinsten Fassung das Entscheidungsproblem. Auch nach der (einmal vorausgesetzten) Lösung des Entscheidungsproblems würden nämlich noch unbeantwortete Fragen, auch theoretisch, in der Mathematik übrigbleiben. Eine häufig auftretende Frage ist z. B. die nach der notwendigen und hinreichenden Bedingung für das Vorhandensein irgendeiner Eigenschaft bei einer Gruppe, einem System von Zahlen usw. Dabei wird verlangt, daß die gesuchte Bedingung in gewisser Beziehung einfacher ist als die Eigenschaft selbst, der sie äquivalent ist, z. B. daß sich bei konkreten Zahlensystemen ihr Erfülltsein oder Nichterfülltsein leicht feststellen läßt. In den Bereich des Entscheidungsproblems würde nur die Frage fallen, ob eine bestimmte Vermutung, die wir über die genannte Bedingung haben, richtig ist oder nicht, nicht aber das Aufsuchen dieser Bedingung selbst. Dagegen befaßt sich gerade das Eliminationsproblem mit der Frage, wie man einen logischen Ausdruck durch einen äquivalenten ersetzen kann, dessen logische Struktur in gewisser Weise einfacher ist.

Ehe ich daran gehe, das Eliminationsproblem näher zu erläutern, seien noch einige grundlegende Bemerkungen zu der Beweisführung gemacht. Da das Ziel der folgenden Untersuchungen kein Widerspruchsfreiheitsbeweis ist, habe ich im Gebrauch der Schlußweisen dieselbe Freiheit wie sonst in der Mathematik. Bei den logischen Formeln wird durchaus von ihrer inhaltlichen Bedeutung Gebrauch gemacht. Ein bestimmtes Axiomensystem wird nicht zugrunde gelegt.

Wir mögen nun einen nicht näher bestimmten Bereich von Dingen oder Individuen haben. Ferner treten Prädikate auf, die als Argumente Dinge dieses Bereiches haben; wir nennen sie ein-, zwei- oder mehrstellig je nach der Zahl der zu ihnen gehörenden Argumente. Die Prädikate mit zwei und mehr Argumenten werden sonst auch wohl Relationen genannt. Die Prädikate mit eingesetzten Individuenvariablen sind die

Elementaraussagen unserer Theorie. In unseren Formeln kommen übrigens nur variable Prädikate vor; eine Ausnahme bildet nur das individuelle Prädikat, das man gewöhnlich als Gleichheitsrelation bezeichnet. Einen logischen Ausdruck, der sich aus derartigen Elementaraussagen in üblicher Weise unter Benutzung der logischen Verknüpfungen „und“, „oder“, „nicht“ usw. und der All- und Seinszeichen für Individuen aufbaut, nennt man gewöhnlich einen logischen Ausdruck der ersten Stufe. Wir wollen ihn, um einen kurzen Ausdruck zu haben, als *Zählausdruck* bezeichnen. Die Symbolik ist die übliche; also große lateinische Buchstaben stehen für Prädikatenvariable, kleine lateinische für Individuenvariable. Gelegentlich im Beweis vorkommende individuelle Prädikate bezeichne ich mit großen griechischen Buchstaben. Statt $F(x, y)$ („das Prädikat F trifft auf das Paar x, y zu“) gebrauche ich in dieser Arbeit die etwas bequemere Schreibweise Fxy; ebenso stehe Fx für $F(x)$ usw. Statt All- und Seinszeichen gebrauche ich auch gelegentlich den zusammenfassenden Ausdruck Individuenoperatoren.

Der Wahrheitswert eines Zählausdrucks hängt ab von den Werten der variablen Prädikate und der etwa vorkommenden freien, d. h. nicht durch ein All- oder Seinszeichen gebundenen Individuenvariablen. Es sei nun F eine Prädikatenvariable, die in dem Zählausdruck vorkommt. Setzt man vor den Zählausdruck das zu F gehörige All- oder Seinszeichen, also (EF) bzw. (F), so geht der Zählausdruck in einen anderen logischen Ausdruck über, dessen Wahrheitswert von der Variablen F nicht mehr abhängt. Ist z. B.

$$(x)(y)Fxy\,Axy \;\&\; \overline{F}xy\,Bxy$$[1])

der in Frage stehende Zählausdruck, so ist sein Wahrheitswert zunächst eine Funktion der Variablen F, A und B. Bildet man nun

$$(EF)(x)(y)Fxy\,Axy \;\&\; \overline{F}xy\,Bxy,$$

so hängt der Wahrheitswert des Ausdrucks nur noch von A und B ab. Beim Eliminationsproblem handelt es sich in seiner einfachsten Fassung zunächst um die folgende Frage: Gibt es einen *Zählausdruck*, der dem durch Vorsetzen des Zeichens (EF) entstandenen Ausdruck für jeden Wert der vorkommenden freien Prädikaten- und Individuenvariablen und unabhängig von dem zugrunde gelegten Individuenbereich äquivalent ist? Bei dem oben angegebenen speziellen Beispiel kann man die Frage bejahen. Es gilt nämlich die Äquivalenz:

$$(EF)(x)(y)(Fxy\,Axy \;\&\; \overline{F}xy\,Bxy) \longleftrightarrow (x)(y)Axy\,Bxy.$$

[1]) Das direkte Hintereinandersetzen von Elementaraussagen drückt wie üblich die Disjunktion aus; gelegentlich gebrauchen wir auch $\vee$ als Disjunktionszeichen.

Ebenso hat man dual:

$$(F)(Ex)(Ey)(Fxy \mathbin{\&} Axy) \vee (\bar{F}xy \mathbin{\&} Bxy) \longleftrightarrow (Ex)(Ey)(Axy \mathbin{\&} Bxy).$$

Die Formel $(x)(y)AxyBxy$ bzw. $(Ex)(Ey)(Axy \mathbin{\&} Bxy)$, die das Resultat der Elimination darstellt, bezeichnen wir als *Resultante.*

Offenbar hat das Eliminationsproblem eine enge Beziehung zum Entscheidungsproblem. Das Entscheidungsproblem der ersten Stufe betrifft ja die Frage, ob ein vorgelegter Zählausdruck für alle Werte der darin vorkommenden Prädikatenvariablen wahr ist oder nicht, bzw. in der dualen Form, ob es überhaupt eine Einsetzung für die variablen Prädikate gibt, so daß der Zählausdruck den Wert „wahr" erhält. Man kann auch sagen: es handelt sich um die Richtigkeit oder Falschheit des Ausdrucks, der entsteht, wenn man vor den Zählausdruck entweder alle Seinszeichen oder alle Allzeichen für Prädikate setzt. In der Tat, hätte das Eliminationsproblem immer eine Lösung in dem angegebenen einfachen Sinne und würde man ein Verfahren kennen, das gestatten würde, die Lösung in jedem vorgelegten Falle anzugeben, so brauchte man ja nur die All- und Seinszeichen für Prädikate von hinten anfangend nacheinander zu eliminieren und man würde als Gesamtresultat der Elimination entweder wahr oder falsch erhalten.

Systematisch untersucht worden ist das Eliminationsproblem bisher für den Fall, daß nur Prädikate im engeren Sinne, d. h. mit einem Argument vorkommen, durch Löwenheim, Skolem, Behmann[2]). Für diesen Fall ließ sich als Resultat der Elimination immer ein endlicher Zählausdruck angeben, und man gelangte so auch zu einer Lösung des Entscheidungsproblems für die einstelligen Prädikate. Für den weit schwierigeren Fall, daß auch mehrstellige Prädikate vorkommen, lagen bisher keine Untersuchungen von allgemeinerem Charakter vor. Für zahlreiche Einzelformeln dieser Art findet man allerdings das Eliminationsresultat bei Schröder. Mit der vorliegenden Arbeit soll nun die Untersuchung des Eliminationsproblems für zwei- und mehrstellige Prädikate in genereller Weise in Angriff genommen werden. Der Ausdehnungsbereich der Untersuchungen wird weiter unten näher präzisiert werden.

2. Beispiele für die Elimination beim Vorkommen mehrstelliger Prädikate.

Wir hatten in der Einleitung das Eliminationsproblem in seiner einfachsten Fassung eingeführt und wollen nun seine Lösbarkeit näher unter-

---

[2]) Löwenheim, Über Möglichkeiten im Relativkalkül, Math. Annalen **76** (1915); Skolem, Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls, Oslo Vidensk. Skrifter I. Math-nat. Klasse 1919, Nr. 3; Behmann, Beiträge zur Algebra der Logik und zum Entscheidungsproblem, Math. Annalen **86** (1922).

suchen. Zunächst soll an einigen Beispielen gezeigt werden, daß wir in besonderen Fällen des Auftretens von mehrstelligen Prädikaten ohne große Mühe als Resultante einen Zählausdruck finden. Wie wir schon in der Einleitung kurz bemerkten, können wir uns auf den Fall beschränken, daß das zu eliminierende Prädikat mit einem *Seinszeichen* vor der Formel steht. Die Elimination beim Auftreten von Allzeichen für Prädikate ergibt sich daraus gemäß dem logischen Dualitätsprinzip. Ferner heben wir hervor, daß die Schwierigkeit gegenüber dem Löwenheim-Skolem-Behmannschen Fall nicht allein darin liegt, daß das zu *eliminierende* Prädikat mehr als ein Argument hat. Ebenso große Schwierigkeiten bietet der Fall, daß das zu eliminierende Prädikat zwar einstellig ist, daß aber im übrigen Prädikate mit zwei und mehr Argumenten vorkommen. Es wird sich sogar, wie wir später sehen werden, der erste Fall in gewisser Weise auf den zweiten zurückführen lassen.

Als erstes Beispiel nehmen wir die schon in der Einleitung erwähnte Formel:

$$(1)\qquad (EF)(x)(y)(AxyFxy \ \&\ \bar{F}xyBxy).$$

Hier hatten wir als Resultante angegeben:

$$(x)(y)AxyBxy.$$

Den Beweis waren wir bisher schuldig geblieben. Es wäre also zu zeigen, daß, beliebige Werte der A und B vorausgesetzt und ohne irgendeine besondere Annahme über den Individuenbereich zu machen, die Richtigkeit der Formel (1) die der Resultante impliziert, und umgekehrt. Nun ist

$$AxyBxyFxy \ \&\ AxyBxy\bar{F}xy$$

offenbar ein schwächerer Ausdruck als $AxyFxy \ \&\ Bxy\bar{F}xy$. Für $AxyBxyFxy \ \&\ AxyBxy\bar{F}xy$ können wir auch schreiben $AxyBxy(Fxy \ \&\ \bar{F}xy)$. Hier dürfen wir den falschen Faktor $Fxy \ \&\ \bar{F}xy$ fortlassen. Damit ist der erste Teil der Behauptung bereits gezeigt. Ferner gibt es, die Richtigkeit von $(x)(y)AxyBxy$ vorausgesetzt, offenbar ein Prädikat F, so daß $(x)(y)(AxyFxy \ \&\ Bxy\bar{F}xy)$ eine richtige Behauptung darstellt. Man braucht nur Fxy gleich $\bar{A}xy$ zu nehmen.

2. Beispiel.

$$(2)\qquad (EF)(x)(y)(AxyFxy \ \&\ Bxy\bar{F}xx \ \&\ Cxy\bar{F}xx\bar{F}yy).$$

Die Resultante ist

$$(x)(y)(BxyAxx \ \&\ CxyAxxAyy).$$

3. Beispiel.

$$(3)\qquad (EF)((x)(y)AxyFxy \ \&\ (x)(Ey)(Bxy \ \&\ \bar{F}xy)).$$

Resultante:

$$(x)(Ey)(Bxy \ \&\ Axy).$$

Die Lösungen für diese beiden Beispiele, wie übrigens auch die von (1) entspringen aus *einer* Quelle. Hinter dem (EF) kommt nämlich jedesmal $(x)(y)\,A\,x\,y\,F\,x\,y$, dann weiter durch & verknüpft ein Bestandteil, der F nur in der Form $\overline{F}$ enthält, ganz abgesehen davon, welche Individuenoperatoren vorkommen und welche Argumente F hat. Vorausgesetzt ist nur, daß die Negationsstriche nur über den Elementaraussagen stehen. Wir können derartige Formeln unter der Bezeichnung

(4) $$(EF)((x)(y)\,A\,x\,y\,F\,x\,y \;\&\; \mathfrak{A}(\overline{F}))$$

zusammenfassen. Die Resultante ist hier jedesmal $\mathfrak{A}(A)$. Zunächst ist nämlich (4) eine Folgerung von $\mathfrak{A}(A)$. Ich brauche ja nur $\overline{A}$ als das erfüllende Prädikat zu nehmen. Andererseits ergibt sich aus der Gestalt von $\mathfrak{A}$, daß $(x)(y)(H\,x\,y \rightarrow G\,x\,y)$ immer $\mathfrak{A}(H) \rightarrow \mathfrak{A}(G)$ zur Folge hat. Es sei nun Φ ein erfüllendes Prädikat. Es gilt dann: $(x)(y)\,A\,x\,y\,\Phi\,x\,y \;\&\; \mathfrak{A}(\overline{\Phi})$. Für $(x)(y)\,A\,x\,y\,\Phi\,x\,y$ können wir auch schreiben $(x)(y)(\overline{\Phi}\,x\,y \rightarrow A\,x\,y)$. Da $\mathfrak{A}(\overline{\Phi})$ richtig ist, so gilt daher dasselbe für $\mathfrak{A}(A)$, was zu beweisen war.

Es sei übrigens bemerkt, daß (ganz abgesehen vom Dualitätsprinzip) mit dem Auffinden der Resultante irgendeiner Formel gleichzeitig die Resultante einer zweiten Formel gefunden ist, nämlich derjenigen Formel, die aus der ersten dadurch hervorgeht, daß man F überall durch $\overline{F}$ ersetzt. Das geht unmittelbar aus der Bedeutung des Seinszeichens hervor. Z. B. hat nicht nur die Formel (3), sondern auch die Formel

$$(EF)((x)(y)\,A\,x\,y\,\overline{F}\,x\,y \;\&\; (x)(Ey)(B\,x\,y \;\&\; F\,x\,y))$$

die Resultante $(x)(Ey)(B\,x\,y \;\&\; A\,x\,y)$.

Wir geben nun noch zwei Beispiele, bei denen das zu eliminierende Prädikat einstellig ist.

(5) $$(EF)(x)(y)(F\,x\,F\,y\,A\,x\,y \;\&\; F\,x\,B\,x \;\&\; \overline{F}\,x\,C\,x).$$

Resultante: $(x)(y)(C\,x\,C\,y\,A\,x\,y \;\&\; C\,x\,B\,x)$.

Auch diese Formel vertritt eine ganze Klasse von Formeln, bei denen die Elimination leicht erfolgt. Es sei $\mathfrak{A}(\overline{F})$ eine Formel, bei der ganz wie oben F nur in der Form $\overline{F}$ vorkommt. Wir betrachten dann

(6) $$(EF)((x)\,A\,x\,F\,x \;\&\; \mathfrak{A}(\overline{F})).$$

Genau wie oben ergibt sich dann als Resultante $\mathfrak{A}(A)$. Ebenso hat

$$(EF)((x)\,A\,x\,\overline{F}\,x \;\&\; \mathfrak{A}(F))$$

die Resultante $\mathfrak{A}(A)$. Ein Spezialfall der letzten Formel ist aber (5).

Als letztes Beispiel nehmen wir

(7) $$(EF)(x)(y)(F\,x\,A\,x\,y \;\&\; \overline{F}\,x\,B\,x\,y \;\&\; F\,x\,\overline{F}\,y\,C\,x\,C\,y).$$

In dieser Formel spielen die Prädikate mit zwei Argumenten nur scheinbar eine Rolle. Wir schreiben die Formel (7) zunächst

$$(EF)\,[(x)(F\,x\,(y)\,A\,x\,y) \;\&\; (x)(\overline{F}\,x\,(y)\,B\,x\,y) \;\&\; (x)\,F\,x\,C\,x\,(y)\,\overline{F}\,y\,C\,y].$$

Diese Formel geht nun durch Einsetzung aus einer solchen hervor, in der nur einstellige Prädikate vorkommen. Man erhält sie, indem man in der Formel

(8) $$(EF)((x)FxGx \mathbin{\&} (x)\overline{F}xHx \mathbin{\&} (x)FxCx(y)\overline{F}yCy)$$

Gx durch $(y)Axy$ und Hx durch $(y)Bxy$ ersetzt. Bei (8) kann die Elimination in der folgenden Weise vollzogen werden. Man bringt den hinter (EF) stehenden Teil zunächst auf die disjunktive Normalform und darf dann (EF) zu jedem Disjunktionsglied setzen:

$$(EF)[(x)FxGx \mathbin{\&} (x)\overline{F}xHx \mathbin{\&} (x)FxCx]$$
$$\vee (EF)[(x)FxGx \mathbin{\&} (x)\overline{F}xHx \mathbin{\&} (x)\overline{F}xCx].$$

Gemäß Formel (6) erhält man als Resultante

$$(x)(HxGx \mathbin{\&} HxCx) \vee (x)(HxGx \mathbin{\&} GxCx).$$

Diese Formel läßt sich noch kürzen zu

$$(x)(HxGx) \mathbin{\&} (x)HxCx \vee (x)GxCx.$$

Setzt man für Gx und Hx wieder $(y)Axy$ bzw. $(y)Bxy$ ein, so hat man die Resultante der Formel (7).

3. Unmöglichkeit der allgemeinen Lösung des Eliminationsproblems im bisherigen Sinne.

Man könnte nach den im 2. Abschnitt gebrachten Beispielen vermuten, daß das Eliminationsproblem im bisherigen Sinne immer lösbar sei, wie schwierig die Lösung vielleicht auch im Einzelfall zu finden sei. Das ist aber nicht der Fall. Es gibt Formeln, die keine Resultante haben, wenn der Begriff der Resultante seine alte Bedeutung behält. Es ist interessant, daß dieser Fall schon dann eintreten kann, wenn es sich um die Elimination eines Prädikates mit *einer* Variablen handelt. Selbstverständlich haben dann die übrigen vorkommenden Prädikate zum Teil mehrere Variable; sonst kämen wir ja auf den Löwenheim-Skolem-Behmannschen Fall zurück. Als Beispiel einer derartigen Formel nennen wir:

(9) $$(EF)(Fx \mathbin{\&} \overline{F}y \mathbin{\&} (u)(v)\overline{F}uFv\overline{N}uv).$$

Die Formel wird uns vertrauter, wenn wir zu ihrer Negation übergehen:

$$(F)(\overline{F}xFy \vee (Eu)(Ev)(Fu \mathbin{\&} \overline{F}v \mathbin{\&} Nuv)),$$

die wir noch umformen können zu

$$(F)\langle[Fx \mathbin{\&} (u)(v)((Fu \mathbin{\&} Nuv) \rightarrow Fv)] \rightarrow Fy\rangle.$$

Denken wir uns unter dem Individuenbereich die natürlichen Zahlen, unter Nuv die Nachfolgerrelation und für x den Wert 0 eingesetzt, so ist die letzte Formel nichts anderes als das *Axiom der vollständigen Induktion.* Würde die Formel (9) einen Zählausdruck als Resultante haben, so würde das bedeuten, daß man das Induktionsaxiom ohne Gebrauch einer Prädikatenvariablen als Axiom der ersten Stufe genau wie die übrigen zahlentheoretischen Axiome schreiben kann. Diese Möglichkeit wird durch den folgenden Beweis ausgeschlossen. (Selbstverständlich ist dabei vorausgesetzt, daß man die Zahlen als einzige Individuen beibehält. Läßt man auch Prädikate oder zahlentheoretische Funktionen als Dinge im Individuenbereich zu, so läßt sich natürlich das Induktionsaxiom als Axiom der ersten Stufe schreiben. Diese Vereinfachung ist aber rein äußerlich und nimmt dem Axiom nicht seinen schwierigen Charakter.)

Wir bemerken zunächst, daß wir uns darauf beschränken können, daß die etwa vorhandenen resultierenden Zählausdrücke sich mit Hilfe des Prädikates N und des Prädikates der Gleichheit aufbauen. Etwa vorkommende andere Prädikatenvariable $A\,x$, $B\,x\,y$, $C\,x\,y\,z$ usw. könnte man nämlich sofort durch $N\,x\,x$, $N\,x\,y$, $N\,x\,y\,N\,y\,z$ usw. ersetzen. Als Argumente von N und dem Gleichheitsprädikat brauchen wir nur x, y und solche Individuenvariable zu berücksichtigen, die durch All- oder Seinszeichen gebunden sind. Von x und y verschiedene freie Variable könnte man ja durch x oder y ersetzen.

Zum Beweise unserer Behauptung genügt es, wenn wir für einen *bestimmten* Individuenbereich und ein *bestimmtes* Prädikat N das Nichtvorhandensein einer Resultante dartun. Wir nehmen als Individuenbereich die negativen und positiven ganzen Zahlen einschließlich 0, als Prädikat N die in diesem Bereich definierte erweiterte Nachfolgerrelation; d. h. $N\,x\,y$ bedeutet $y = x + 1$. Zur Abkürzung bezeichnen wir

$$(EF)(F\,x \;\&\; \overline{F}\,y \;\&\; (u)(v)\overline{F}\,u\,F\,v\,\overline{N}\,u\,v)$$

mit $\mathfrak{A}\,x\,y$. Offenbar ist dann $\mathfrak{A}\,x\,y$ bei der angegebenen Spezialisierung mit $y < x$ identisch.

Ich nehme nun einen ganz beliebigen Zählausdruck $\mathfrak{B}\,x\,y$, der als einzige Prädikate N und die Gleichheitsrelation enthält, und zeige, daß dieser nicht mit $\mathfrak{A}\,x\,y$ äquivalent sein kann. Zu dem Zweck bringe ich ihn zunächst auf die Normalform, in der alle All- und Seinszeichen unnegiert zu Anfang der Formel stehen, so daß sich ihr Wirkungsbereich auf die ganze Formel erstreckt. Ferner sei der hinter den Individuenoperatoren stehende Teil der Formel auf die konjunktive Normalform des Aussagenkalküls gebracht. Die Anzahl der Individuenoperatoren, die der Zählausdruck enthält, sei k. Ich werde dann zeigen, daß für jedes x $\mathfrak{B}(x, x + 2k + 2)$ den gleichen Wahrheitswert hat wie $\mathfrak{B}(x, x - 2k - 2)$. Da $\mathfrak{A}(x, x + 2k + 2)$ und $\mathfrak{A}(x, x - 2k - 2)$ oder, was dasselbe ist,

$x+2k+2<x$ und $x-2k-2<x$ nicht äquivalent sind, wäre damit der Beweis erbracht.

Die in $\mathfrak{B}(x, y)$ vorkommenden, zu den Individuenoperatoren gehörenden Variablen seien $u_1, u_2, \ldots, u_k$, hier in derselben Reihenfolge aufgezählt, wie sie zu Beginn von $\mathfrak{B}(x, y)$ stehen. Den hinter diesen All- und Seinszeichen stehenden Teil von $\mathfrak{B}(x, y)$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{C}(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_k)$. Wir wollen nun schrittweise $\mathfrak{B}(x, y)$ durch äquivalente Ausdrücke ersetzen, die immer einen Individuenoperator weniger enthalten. Wir beginnen mit der Ausmerzung von u_k. Wir unterscheiden folgende Fälle[3]):

a) Zu u_k gehöre ein Allzeichen.

Wir ersetzen dann in $\mathfrak{C}(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_k)$ u_k der Reihe nach durch $x, y, u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$, $x+1$, $y+1$, $u_1+1, \ldots, u_{k-1}+1$, $x-1$, $y-1$, $u_1-1, \ldots, u_{k-1}-1$. Die entstehenden Formeln werden durch & verbunden und noch

$$\&\,(u_k)\,[(u_k \neq x \;\&\; u_k \neq y \;\&\; \ldots \;\&\; u_k \neq u_{k-1}-1) \rightarrow \mathfrak{C}(x, y, u_1, \ldots, u_k)]$$

hinzugefügt. Offenbar ist der ganze Ausdruck $(u_k)\,\mathfrak{C}(x, y, u_1, \ldots, u_k)$ äquivalent. Das zuletzt hinzugefügte Konjunktionsglied läßt sich nun so umformen, daß es die Variable u_k nicht mehr enthält. Falls nämlich u_k nicht gleich einem der Werte aus der vorhin gegebenen Reihe $x, y, \ldots, u_{k-1}-1$ ist, so sind alle in $\mathfrak{C}(x, y, u_1, \ldots, u_k)$ vorkommenden Elementaraussagen $t=u_k$, $N u_k u_k$, $N t u_k$, $N u_k t$ $(t = x, y, \ldots, u_{k-1})$ falsch, während $u_k = u_k$ richtig ist. ($N u_k$, u_k+1, das auch richtig wäre, kommt hier nicht vor). Wir berücksichtigen nun die bekannten logischen Gesetze: Eine falsche Aussage darf in einer Disjunktion weggelassen werden ebenso wie eine wahre Aussage in einer Konjunktion; eine wahre Aussage als Disjunktionsglied macht die ganze Disjunktion wahr, eine falsche Aussage als Konjunktionsglied die ganze Konjunktion falsch; die Negation einer falschen Aussage ist eine wahre Aussage, und umgekehrt. Mit ihrer Hilfe läßt sich

$$(u_k)\,[(u_k \neq x \;\&\; u_k \neq y \;\&\; \ldots \;\&\; u_k \neq u_{k-1}-1) \rightarrow \mathfrak{C}(x, y, u_1, \ldots, u_k)]$$

durch einen Ausdruck ersetzen, der nicht u_k und auch keine All- und Seinszeichen mehr enthält. Im ganzen ist dann $(u_k)\,\mathfrak{C}(x, y, u_1, \ldots, u_k)$ in einen Ausdruck übergegangen, bei dem die Variable u_k und das zu-

[3]) Die im folgenden benutzte Methode der Wegschaffung von All- und Seinszeichen hat bereits mehrfach Anwendung gefunden, z. B. bei Presburger und Herbrand; vgl. Presburger, Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, Compt. Rend. du premier Congr. d. Math. des Pays Slaves 1929, Warschau 1930; Herbrand, Recherches sur la théorie de la démonstration, Paris 1930. Presburger zitiert seinerseits als Vorläufer Skolem und Langford.

gehörige Allzeichen verschwunden ist; dafür sind neue Argumente aufgetreten. Zu $x, y, u_1, \ldots, u_{k-1}$ sind $x+1, y+1, u_1+1, \ldots, u_{k-1}+1$ und $x-1, y-1, \ldots, x_{k-1}-1$ hinzugekommen.

b) Falls zu u_k ein Seinszeichen gehört, gehen wir ähnlich vor. Wir ersetzen diesmal $(E u_k)\, \mathfrak{C}(x, y, \ldots, u_k)$ durch eine Disjunktion

$$\mathfrak{C}(x, y, \ldots, x) \vee \mathfrak{C}(x, y, \ldots, y) \vee \mathfrak{C}(x, y, \ldots, u_1) \vee \ldots \vee \mathfrak{C}(x, y, \ldots, u_{k-1}-1)$$
$$\vee (E u_k)(u_k \neq x \;\&\; u_k \neq y \;\&\; \ldots \;\&\; u_k \neq u_{k-1}-1 \;\&\; \mathfrak{C}(x, y, \ldots, u_k)).$$

Im letzten Gliede der Disjunktion kann man wieder u_k auf dieselbe Weise herausschaffen wie das u_k im Falle a).

In derselben Weise wird nun die Variable u_{k-1} und der zugehörige Operator herausgeschafft, indem man die beiden Fälle unterscheidet, daß u_{k-1} gleich einem der Dinge $x, y, \ldots, u_{k-2}, x+1, y+1, \ldots, u_{k-2}+1, x-1, y-1, \ldots, u_{k-2}-1$ bzw. gleich den Zahlen ist, die um 1 größer oder kleiner als die genannten sind oder aber von allen diesen Zahlen verschieden ist. Im letzten Falle bekommt jede Elementaraussage mit u_{k-1} als Argument den Wert wahr oder falsch. Zum Beispiel sind $N u_{k-1} u_{k-1}$, $N u_{k-1}, u_{k-1}-1$, $N u_{k-1}-1, u_{k-1}+1$ falsch und $u_{k-1} = u_{k-1}$, $N u_{k-1}, u_{k-1}+1$ und andere wahr. Entsprechend verfährt man bei der Herausschaffung der weiteren Variablen.

Man gelangt schließlich zu einem logischen Ausdruck, der keine All- und Seinszeichen mehr enthält und der als Argumente solche aus der Reihe

(A) $$x-k,\ x-k+1, \ldots, x-1,\ x,\ x+1, \ldots, x+k$$

oder aus der Reihe

(B) $$y-k, \ldots, y, \ldots, y+k$$

enthält. Haben wir nun eine Elementaraussage $N r s$ oder $r = s$, wo r und s beide zu (A) oder beide zu (B) gehören, so läßt sich ihr Wahrheitswert angeben. $N r s$ ist nur wahr, wenn r und s aufeinanderfolgende Zahlen sind, $r = s$ nur, wenn r und s dieselben Zahlen sind. Im übrigen sind die genannten Elementaraussagen immer falsch. Dadurch reduziert sich der Ausdruck weiter, es bleiben schließlich nur Elementaraussagen $N r s$, $r = s$ übrig, bei denen von den beiden Dingen r und s eines zu (A) und eines zu (B) gehört, Wir wollen diesen Ausdruck $\mathfrak{D}\, x y$ nennen. $\mathfrak{D}\, x y$ ist natürlich $\mathfrak{B}\, x y$ äquivalent. Wir betrachten nun den Wahrheitswert der Aussage $\mathfrak{D}\, x y$ speziell für den Fall, daß $|x-y| = 2k+2$. Für diesen Fall sind alle Aussagen $N r s$ und $r = s$ falsch. $\mathfrak{D}\, x y$ hat für diesen Fall immer denselben Wahrheitswert, ganz gleich, ob x oder y die größere Zahl ist. Daraus ergibt sich, daß $\mathfrak{D}\, x y$, also auch $\mathfrak{B}\, x y$ mit $\mathfrak{A}\, x y$ nicht äquivalent sein kann.

4. Die Erweiterung des Resultantenbegriffs; Elimination der einstelligen Prädikate, falls nur Allzeichen vorkommen.

Die Formel

$$(9) \qquad (EF)(Fx \,\&\, \overline{F}y \,\&\, (u)(v)\overline{F}uFv\overline{N}uv)$$

besaß keine Resultante im alten Sinne des Wortes. Wir müssen also entweder das Eliminationsproblem in seiner Allgemeinheit für unlösbar erklären oder einen anderen Resultantenbegriff einführen. Sehen wir uns dazu die Formel (9) näher an. Ihr Gegenteil würde offenbar bedeuten (wie wir uns aus der Interpretation als Axiom der vollständigen Induktion klarmachen können), daß y von x aus durch eine Kette von Individuen $x, z_1, z_2, \ldots, z_n, y$ erreicht werden kann, so daß für zwei Individuen r und s, die in der Kette unmittelbar aufeinanderfolgen, Nrs richtig ist, oder aber, daß y mit x identisch ist. Demgemäß würde die Formel selbst bedeuten, daß bei einer derartigen Kette mindestens einmal für zwei aufeinanderfolgende Glieder $\overline{N}rs$ gilt, und daß außerdem x und y verschieden sind. Dieser Sachverhalt läßt sich allerdings nicht durch *einen* Zählausdruck wiedergeben. Vielmehr besagt er, daß alle die Zählausdrücke: $x \neq y$, $\overline{N}xy$, $(z)\overline{N}xz\overline{N}zy$, $(z)(u)\overline{N}xz\overline{N}zu\overline{N}uy$ usw. gleichzeitig richtig sind. Alle diese Zählausdrücke haben aber denselben Typ, der durch

$$(10) \qquad (z_1)(z_2)\ldots(z_n)\overline{N}xz_1\overline{N}z_1z_2\ldots\overline{N}z_{n-1}z_n\overline{N}z_ny$$

dargestellt wird. (10) kann man als Resultante im weiteren Sinne des Wortes ansehen.

Wir wollen also den Resultantenbegriff so erweitern, daß wir als Resultat der Elimination nicht nur einen bestimmten Zählausdruck bezeichnen, sondern auch eine ganze Klasse von Zählausdrücken, wenn deren logische Summe der Formel, an der die Elimination vorgenommen wird, äquivalent ist. Wir werden sagen, wir haben das Eliminationsproblem gelöst, wenn der Typ dieser Formeln sich so angeben läßt, daß man von einem vorgelegten Zählausdruck angeben kann, ob er zu diesen Formeln gehört oder nicht.

Wir beschränken uns bei unseren Untersuchungen zunächst darauf, daß das zu eliminierende Prädikat nur ein Argument hat. Daß wir damit nicht auf den auf Seite 392 erwähnten Fall zurückkommen, sehen wir ja am Beispiel der Formel (9). Ferner machen wir die weitere Einschränkung, daß die hinter (EF) vorkommenden Individuenoperatoren sämtlich Allzeichen sind. Wie weit diese Beschränkungen wesentlich sind, wird in den folgenden beiden Abschnitten untersucht werden.

Um unsere Resultante zu finden, wollen wir zunächst eine neue Schreibweise für die variablen Prädikate einführen, die in der der Elimination zu unterwerfenden Formel vorkommen. Betrachten wir einmal die Formel

(11) $(EF)(x)(y)(Fx\,Gx \,\&\, \overline{F}x\,Hx \,\&\, Fx\,Fy\,Axy \,\&\, Fx\,\overline{F}y\,Bxy \,\&\, \overline{F}x\,\overline{F}y\,Cxy)$.

In dieser Formel kommen neben dem zu eliminierenden Prädikat F die variablen Prädikate G, H, A, B, C vor. Für Gx, Hx, Axy, Bxy, Cxy wollen wir (nur für die Zwecke dieses Beweises) eine andere Schreibweise einführen, nämlich $G_x, H^x, A_{xy}, B^y_x, C^{xy}$. Diese Schreibweise läßt unmittelbar erkennen, welche Disjunktionsglieder zu den 5 Prädikaten in der Formel (11) gehören; einem untenstehenden Argument x oder y entspricht Fx oder Fy, einem obenstehenden $\overline{F}x$ oder $\overline{F}y$. Bei der Formel

(12) $(EF)(x)(y)(z)(u)(Fx\,\overline{F}y\,Fz\,\overline{F}u\,Axyzu \,\&\, \overline{F}x\,Fu\,Bxu \,\&\, Fx\,\overline{F}z\,\overline{F}u\,Cxzu)$

würden wir schreiben $A^{yu}_{xz}, B^x_u, C^{zu}_x$.

Allgemein können wir folgendes sagen: Unsere Formel, bei der die Elimination vorgenommen werden soll, sei $\mathfrak{F}$. Die in $\mathfrak{F}$ vorkommenden Allzeichen für Individuen, die wir mit $(x_1), (x_2), \ldots, (x_n)$ bezeichnen, sollen sämtlich am Anfang der Formel stehen, also hinter (EF). (Bekanntlich kann ja jeder Zählausdruck so umgeformt werden, daß die Individuenoperatoren alle vorn stehen und sich ihr Wirkungsbereich auf die ganze Formel erstreckt). Den hinter den Individuenoperatoren folgenden Teil nennen wir die *Matrix* von $\mathfrak{F}$. Diese sei auf die konjunktive Normalform des Aussagenkalküls gebracht. Jedes Konjunktionsglied der Matrix besteht aus Faktoren aus der Reihe $Fx_1, Fx_2, \ldots, Fx_n$, die teils negiert, teils unnegiert auftreten. Zu diesen Faktoreu treten dann noch variable Prädikate mit Argumenten aus der Reihe $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Wir dürfen annehmen, daß jedes Konjunktionsglied nur *ein* variables Prädikat enthält. Haben wir nämlich beispielsweise ein Konjunktionsglied $Fx\,\overline{F}y\,(Axy \,\&\, Bxx)\,Cyy$, so können wir dieses durch $Fx\,\overline{F}y\,Hxy$ ersetzen, indem wir $(Axy \,\&\, Bxx)\,Cyy$ als eine Einsetzung für Hxy ansehen. Die Elimination wird dann bei der Formel mit Hxy vorgenommen und nach vollzogener Elimination für Hxy wieder $(Axy \,\&\, Bxx)\,Cyy$ eingesetzt. Ferner dürfen wir annehmen, daß das zu den F enthaltenden Faktoren hinzukommende variable Prädikat nur solche Variable als Argumente hat, die auch als Argumente von F in den begleitenden Faktoren vorkommen. Hätten wir z. B. eine Formel

$$(EF)(x)(y)(z)(u)(Fx\,Fy\,Axyzu \,\&\, \overline{F}x\,\overline{F}y\,\overline{F}z\,\overline{F}u\,Bxyzu),$$

so könnten wir die Allzeichen (z) und (u) gemäß der Formel

$$(x)(Ax \,\&\, Bx) \longleftrightarrow (x)((y)\,Ay \,\&\, Bx)$$

aufspalten und in die Konjunktion hineinziehen, also schreiben:

$$(EF)(x)(y)(z)(u)(Fx\,Fy\,(r)(s)\,Axyrs \,\&\, \overline{F}x\,\overline{F}y\,\overline{F}z\,\overline{F}u\,Bxyzu).$$

$(r)(s) A x y r s$ kann dann als eine Einsetzung für $C x y$ aufgefaßt werden, so daß wir uns nur mit der Formel

$$(E F)(x)(y)(z)(u)(F x F y C x y \,\&\, \overline{F} x \overline{F} y \overline{F} z \overline{F} u B x y z u)$$

zu befassen hätten.

Nun können wir, wie bei der Formel (11) und (12), bei den in $\mathfrak{F}$ auftretenden, von F verschiedenen Prädikaten die Argumente teils unten, teils oben hinsetzen. Ein Argument z kommt nach unten hin, wenn $F z$, nach oben hin, wenn $\overline{F} z$ als Faktor vor dem Prädikat steht.

Wir erklären nun, was wir unter *Zählausdrücken der Klasse* I bezüglich der Formel $\mathfrak{F}$ verstehen wollen. Es sind dies gewisse Prädikate, also Ausdrücke mit freien Individuenvariablen, die sich durch Kombination der in $\mathfrak{F}$ vorkommenden variablen Prädikate bilden. Die freien Variablen werden also teils oben, teils unten als Argumente stehen, können aber auch ganz fehlen. Die Definition geschieht durch Rekursion. Zunächst sind Zählausdrücke der Klasse I die in $\mathfrak{F}$ vorkommenden variablen Prädikate selbst, also z. B. bei der Formel (12) A^{yu}_{xz}, B^{x}_{u}, C^{zu}_{x}. Weiter kann aus zwei Zählausdrücken der Klasse I unter Umständen ein neuer gebildet werden. $\mathfrak{A}$ sei ein Zählausdruck der Klasse I mit $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ als oberen und $y_1, y_2, \ldots, y_m$ als unteren Variablen; wir schreiben dafür $\mathfrak{A}^{x_1 \ldots x_n, z}_{y_1 \ldots y_m}$. $\mathfrak{B}^{p_1 \ldots p_u}_{q_1 \ldots q_l\, z}$ sei ein anderer Zählausdruck der Klasse I. Dann soll auch

$$(z)\, \mathfrak{A}^{x_1 \ldots x_n z}_{y_1 \ldots y_m}\, \mathfrak{B}^{p_1 \ldots p_k}_{q_1 \ldots q_l\, z}$$

ein Zählausdruck der ersten Klasse sein. Dieser hätte die Form $\mathfrak{C}^{x_1 \ldots x_n\, p_1 \ldots p_k}_{y_1 \ldots y_m\, q_1 \ldots q_e}$. (Die Reihenfolge der Argumente soll übrigens bei diesen Abkürzungen ohne Bedeutung sein.) Ferner entsteht aus einem Zählausdruck der Klasse I ein neuer, wenn man obere freie Variable oder untere freie Variable unter sich gleichsetzt.

Ein Beispiel möge die Bildung erläutern. Bei der Formel (11) hat man zunächst als Zählausdrücke I G_x, H^x, A_{xy}, B^y_x, C^{xy}. Man kann nun schrittweise bilden:

$$A_{xy},\ (y) A_{xy} B^y_z,\ (y)(z) A_{xy} B^y_z C^{zv},\ (x)(y)(z) A_{xy} B^y_z C^{zv} C^{xu},$$
$$(x)(y)(z)(u) A_{xy} B^y_z C^{zv} C^{xu} B^t_u.$$

Man würde diese Ausdrücke abgekürzt mit $\mathfrak{A}_{xy}$, $\mathfrak{B}_{xz}$, $\mathfrak{C}^v_x$, $\mathfrak{D}^{vu}$, $\mathfrak{E}^{vt}$ bezeichnen. Daß sie gemäß unseren Regeln gebildet sind, geht aus $\mathfrak{B}_{xz} = (y)\mathfrak{A}_{xy} B^y_z$; $\mathfrak{C}^v_x = (z)\mathfrak{B}_{xz} C^{zv}$; $\mathfrak{D}^{vu} = (x)\mathfrak{C}^v_x C^{xu}$; $\mathfrak{E}^{vt} = (u)\mathfrak{D}^{vu} B^t_u$ hervor. Die Benennung der Allzeichen und der freien Variablen ist dabei natürlich prinzipiell gleichgültig. Aus dem letzten hingeschriebenen Ausdruck entsteht durch Gleichsetzung von freien Variablen

(13) $$(x)(y)(z)(u) A_{xy} B^y_z C^{zv} C^{xu} B^v_u.$$

Wir können diesen Ausdruck $\mathfrak{A}^v$ nennen.

Ein anderer Zählausdruck der Klasse I, der zur Formel (11) gehört, ist $(p) A_{pv} B^p_v$ (14), der durch Gleichsetzung der Argumente aus $(p) A_{p\nu} B^p_\nu$ entstanden ist. Wir gebrauchen dafür die Abkürzung $\mathfrak{B}_v$. Aus (13) und (14) kann man einen neuen Zählausdruck der Klasse I

(15) $$(x)(y)(z)(u)(v)(p) A_{xy} B^y_z C^{zv} C^{xu} B^v_u A_{pv} B^p_v$$

bilden. Das Bemerkenswerte an diesem Zählausdruck ist, daß er keine freien Variablen mehr enthält. Zählausdrücke der Klasse I wie (15), die keine freien Variablen mehr enthalten, sollen als *Zählausdrücke der Klasse* II bezeichnet werden. Diese Ausdrücke haben alle die Form $(x)\mathfrak{A}_x\mathfrak{B}^x$, wie aus unseren Bildungsgesetzen hervorgeht. Die verschiedene Stellung der Argumente, die nur den Zweck hatte, die Bildung der Zählausdrücke der Klasse II zu erleichtern, können wir dann wieder aufgeben. Es ist nach dem Vorhergehenden klar, daß es zu einer vorgegebenen Zahl der Allzeichen oder auch der Disjunktionsglieder nur endlich viele Zählausdrücke der Klasse II gibt, die man leicht angeben kann. Es läßt sich also auch bei einem vorgelegten Zählausdruck immer entscheiden, ob er der Klasse II bezüglich einer Formel angehört oder nicht.

Unsere Behauptung lautet nun: *Die logische Summe aller Zählausdrücke der Klasse* II *ist die Resultante der Formel* $\mathfrak{F}$.

Ehe wir in den Beweis eintreten, machen wir eine Anwendung unseres Satzes. Wir nehmen die Elimination bei der Formel (9) vor. Zugleich werden wir an diesem Beispiel sehen, wie wir uns beim Auftreten von freien Variablen zu verhalten haben. Die Formel (9) hieß:

$$(EF)(Fx \,\&\, \overline{F}y \,\&\, (u)(v)\overline{F}u F v \overline{N} uv).$$

Unter Benutzung der logischen Identität $(u)((u \neq x) Fu) \longleftrightarrow Fx$ wird der Ausdruck umgeformt zu

$$(EF)(u)(v)[Fu(u \neq x) \,\&\, \overline{F}u(u \neq y) \,\&\, \overline{F}u F v \overline{N} uv].$$

Zur Bildung der Resultante haben wir also die Prädikate ${}_u{\neq}\, x$, ${}^u{\neq}\, y$, $\overline{N}^u_v$. x und y sind hier als Konstante anzusehen. Durch Induktionsschluß, den wir seiner Einfachheit wegen nicht ausführen, beweist man, daß Zählausdrücke I mit freien Variablen nur von der Form $\mathfrak{A}_u$, $\mathfrak{B}^t_s$, $\mathfrak{C}^u$ sich bilden lassen, ferner, daß über ihre Gestalt folgendes gilt:

$$\mathfrak{B}^t_s \text{ ist gleich } (y)(z)\ldots(v)\overline{N}^t_y \overline{N}^y_z \ldots \overline{N}^v_s;$$

$$\mathfrak{A}_u \text{ ist gleich } {}_u{\neq}\, x,\ (v)_v \neq x \overline{N}^v_u,\ (v)(w)_v \neq x \overline{N}^v_w \overline{N}^w_u \text{ usw.};$$

$$\mathfrak{C}^u \text{ ist gleich } {}^u{\neq}\, y,\ (v)^v \neq y \overline{N}^u_v,\ (v)(w)^v \neq y \overline{N}^w_v \overline{N}^u_w \text{ usw.}$$

Demnach kommen als Zählausdrücke der Klasse II, die die Form $(u)\mathfrak{A}_u\mathfrak{B}^u$ haben müssen, nur folgende in Frage:

$$(u)(u \neq x \;\; u \neq y);\ (u)(v)(u \neq x \;\; \overline{N} uv \;\; v \neq y);$$

$$(u)(v)(w)(u \neq x \;\; \overline{N} uv \overline{N} vw \;\; u \neq y) \text{ usw.}$$

Diese Formeln kann man wieder mit Hilfe der Identität $(u)((u \neq x)\,F u) \longleftrightarrow F x$ vereinfachen zu:

$$x \neq y,\ \bar{N} x y,\ (v)\,\bar{N} x v \bar{N} v y,\ (v)(w)\,\bar{N} x v \bar{N} v w \bar{N} w y \text{ usw.}$$

Demnach haben wir als Resultante der Formel (9)

$$x \neq y \,\&\, \bar{N} x y \,\&\, (v)\,\bar{N} x v \bar{N} v y \,\&\ldots,$$

wie wir schon oben vermutet hatten.

Um allgemein die Resultante als Folgerung von $\mathfrak{F}$ zu erweisen, zeigen wir, daß für einen Ausdruck $\mathfrak{A}^{y_1 y_2 \ldots y_k}_{x_1 x_2 \ldots x_n}$ und ein zu $\mathfrak{F}$ gehöriges erfüllendes Prädikat Φ die Beziehung

$$\mathfrak{A}^{y_1 \ldots y_k}_{x_1 \ldots x_n}\, \Phi x_1 \Phi x_2 \ldots \Phi x_n \bar{\Phi} y_1 \ldots \bar{\Phi} y_k$$

für alle Werte von $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k$ gilt. Der Fall, daß bei $\mathfrak{A}$ oben oder unten keine Variablen vorkommen, ist dabei eingeschlossen. Der Beweis geht durch Induktion nach der Anzahl der in $\mathfrak{A}$ auftretenden Disjunktionsglieder. Ist diese Anzahl 1, so ist die Behauptung offenbar richtig. Ist sie größer als 1, so läßt sich $\mathfrak{A}^{y_1 \ldots y_k}_{x_1 \ldots x_n}$ zerlegen in

$$(z)\, \mathfrak{B}^{p_1 \ldots p_l}_{q_1 \ldots q_m z}\, \mathfrak{C}^{z s_1 \ldots s_j}_{t_1 \ldots t_i}.$$

Dabei ist die Reihe $p_1, \ldots, p_l, s_1, \ldots, s_j$ von der Reihenfolge und etwaigen Wiederholungen abgesehen, mit $y_1, y_2, \ldots, y_k$ und $q_1, q_2, \ldots, q_m, t_1, \ldots, t_i$ mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ identisch. Da $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ weniger Glieder als $\mathfrak{A}$ enthalten, dürfen wir annehmen, daß

$$\mathfrak{B}^{p_1 \ldots p_l}_{q_1 \ldots q_m z}\, \Phi q_1 \ldots \Phi q_m \Phi z \bar{\Phi} p_1 \ldots \bar{\Phi} p_l \quad \text{und} \quad \mathfrak{C}^{z s_1 \ldots s_j}_{t_1 \ldots t_i}\, \Phi t_1 \ldots \Phi t_i \bar{\Phi} z \bar{\Phi} s_1 \ldots \bar{\Phi} s_j$$

für alle Werte der hingeschriebenen Individuenvariablen richtige Formeln darstellen. Unter Benutzung der Formel

$$(16) \qquad (x)(A x \Phi x \,\&\, B x \bar{\Phi} x) \rightarrow (x)\, A x\, B x,$$

die eine Anwendung der Formel (6) auf S. 394 ist, erhält man daraus

$$(z)\, \mathfrak{B}^{p_1 \ldots p_l}_{q_1 \ldots q_m z}\, \mathfrak{C}^{z s_1 \ldots s_j}_{t_1 \ldots t_i}\, \Phi q_1 \ldots \Phi q_m \Phi t_1 \ldots \Phi t_i \bar{\Phi} p_1 \ldots \bar{\Phi} p_l \bar{\Phi} s_1 \ldots \bar{\Phi} s_j,$$

d. h. aber

$$\mathfrak{A}^{y_1 \ldots y_k}_{x_1 \ldots x_n}\, \Phi x_1 \ldots \Phi x_n \bar{\Phi} y_1 \ldots \bar{\Phi} y_k.$$

Als Spezialfall der Behauptung hat man, daß $(x)\,\mathfrak{A}_x \Phi x$ und $(x)\,\mathfrak{B}^x \bar{\Phi} x$ für beliebige $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ richtig sind, also auch gemäß (16) die Zählausdrücke der Klasse II. Es kommt nun umgekehrt darauf an, unter Voraussetzung der Richtigkeit der Zählausdrücke II zu zeigen, daß sich ein erfüllendes Prädikat Φ definieren läßt. Wir betrachten dabei nur solche Individuenbereiche, die wohlgeordnet sind.

Wir denken uns alle Zählausdrücke der Klasse I gebildet und teilen alle Individuen in drei Klassen, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$, ein. $\mathfrak{K}_1$ besteht aus den Elementen x, für die es ein $\mathfrak{A}$ gibt, so daß $\mathfrak{A}_x$ falsch ist, $\mathfrak{K}_2$ aus denjenigen x, für die ein $\mathfrak{B}^x$ falsch ist. In allen übrigen Fällen kommt x

in $\mathfrak{K}_3$. $\mathfrak{K}_3$ hat schon laut Definition mit $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ keine gemeinsamen Elemente, aber auch $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ sind elementenfremd. Wäre nämlich für ein x gleichzeitig ein $\mathfrak{A}_x$ und ein $\mathfrak{B}^x$ falsch, so wäre die Formel $(x)\,\mathfrak{A}_x\,\mathfrak{B}^x$ falsch, im Widerspruch zu der Voraussetzung, daß die Formeln der Klasse II für den Individuenbereich richtig sind.

Die Klasse $\mathfrak{K}_3$ wird noch in zwei Unterklassen, $\mathfrak{K}_4$ und $\mathfrak{K}_5$, gespalten. Wir betrachten die Zählausdrücke $\mathfrak{D}$ der Klasse I, bei denen die freien Variablen alle oben stehen. Setzen wir für die freien Argumente der Zählausdrücke $\mathfrak{D}$ nur Elemente einer bestimmten Untermenge M von $\mathfrak{K}_3$ ein, so können diese Ausdrücke teils zu richtigen, teils zu falschen Aussagen werden. Wir fassen nun solche Untermengen M von $\mathfrak{K}_3$ ins Auge, bei denen die Zählausdrücke $\mathfrak{D}$ immer richtig werden, welche der genannten Ausdrücke man auch nimmt und wie man auch die Argumente aus M wählt. Derartige Mengen sollen *Mengen der ersten Art* heißen. Wir bezeichnen sie durch einen großen lateinischen Buchstaben mit einem dahintergesetzten Strich.

Ist eine Menge von der ersten Art, so ist natürlich auch jede ihrer Teilmengen von der ersten Art. Innerhalb der Gesamtheit der Mengen der ersten Art läßt sich eine Ordnung herstellen. Sind K' und M' zwei Mengen der ersten Art, die nicht identisch sind, so hat man in K' und M' als Teilmengen die Mengen derjenigen Elemente, die nicht K' und M' gemeinsam angehören. Die ersten Elemente dieser Teilmengen seien k und m. Steht nun k vor m, so soll auch K' dem M' in der Ordnung vorangehen. Falls eine der Teilmengen, etwa die von K', leerwar, so kommt es darauf an, ob m später ist als sämtliche Elemente von K' oder nicht. Im ersten Falle geht K' dem M' voran, im zweiten Falle ist es umgekehrt. Man überzeugt sich leicht, daß die definierte Beziehung zwischen zwei Mengen die Eigenschaften einer Ordnungsrelation besitzt.

In der Gesamtheit der Mengen der ersten Art wollen wir nun einige ausmerzen. Eine Menge der ersten Art soll gestrichen werden, wenn ihr eine andere Menge der ersten Art voraufgeht, die keine Teilmenge von ihr ist. Die übrigbleibenden Mengen nennen wir *Mengen zweiter Art*. Es gibt überhaupt Mengen zweiter Art, sofern $\mathfrak{K}_3$ nicht leer ist; z. B. ist eine solche die Menge, deren einziges Element das „erste“ Element von $\mathfrak{K}_3$ ist. Diese Menge gehört nämlich zur ersten Art, wie aus der Definition von $\mathfrak{K}_3$ folgt; andererseits geht diese Menge sämtlichen anderen vorauf. Wir bezeichnen die Mengen der zweiten Art mit M'', K'' usw.

Nach dem Gesagten ist klar, daß in der Gesamtheit der Mengen zweiter Art jeder Menge K'' nur solche andere M'' voraufgehen können, die echte Teilmengen von ihr sind. Ferner gehen die Elemente von M'', die ja auch in K'' vorkommen, dort sämtlichen anderen Elementen vor-aus. Es gilt aber auch das Umgekehrte: Ist K eine Teilmenge von M'' mit den gerade angegebenen Eigenschaften, z. B. eine Teilmenge von M'', die aus allen Elementen von M'' besteht, die einem Element y von $\mathfrak{K}_3$ vorangehen, so ist auch K eine Menge der zweiten Art. Denn zunächst ist K eine Menge der ersten Art. Wäre K beim Übergang zu den Mengen der zweiten Art gestrichen, so gäbe es eine K vorangehende Menge L', die nicht Teilmenge von K ist. Diese Menge L' besitzt gemäß unserer Festsetzung der Ordnung zwischen den Mengen der ersten Art ein Element l, das nicht in K vorkommt; ferner gibt es in K ein k, das auf l folgt. Da die Elemente, die M'' mehr enthält als K, alle auf die Elemente von K nach Voraussetzung folgen, so kann l nicht zu M'' gehören. Da L also keine Teilmenge von M'' ist und andererseits M'' voraufgeht, hätte auch M'' gestrichen werden müssen, während doch M'' eine Menge der zweiten Art ist.

Die Vereinigungsmenge V aller Mengen der zweiten Art ist selbst eine Menge der zweiten Art. Zunächst ist sie nämlich eine Menge der ersten Art. Um das zu beweisen, müssen wir zeigen, daß $\mathfrak{D}^{p_1 \dots p_n}$ richtig wird, wenn wir $p_1, \dots, p_n$ aus V entnehmen. p_i sei das letzte Element der $p_1, \dots, p_n$. Es gibt eine zugehörige Menge M'' der zweiten Art, in der p_i vorkommt. Die Menge M'' enthält auch die anderen Elemente $p_1, \dots, p_n$, da bei den späteren Mengen nur Elemente hinzukommen, die auf p_i folgen. Daher ist $\mathfrak{D}^{p_1 \dots p_n}$ richtig. — Wäre nun V nicht Menge der zweiten Art, so gäbe es eine Menge K' und ein Element v von V und ein Element k von K, so daß die v in V und k in K' voraufgehenden Elemente identisch sind; gleichzeitig steht k vor v. Es gibt nun eine Menge L'' der zweiten Art, in der v vorkommt. Die in dieser Menge v voraufgehenden Elemente sind dieselben wie diejenigen, die v in V voraufgehen. Es hätte also auch L'' gestrichen werden müssen, was einen Widerspruch ergibt.

Unsere Klasse $\mathfrak{K}_4$ ist nun gleich V. $\mathfrak{K}_5$ besteht aus den übrigen Elementen von $\mathfrak{K}_3$.

Die Definition der erfüllenden Funktion Φ sieht folgendermaßen aus: Φ ist wahr, wenn x zu $\mathfrak{K}_1$ oder $\mathfrak{K}_4$ gehört, falsch, wenn x zu $\mathfrak{K}_2$ oder $\mathfrak{K}_5$ gehört.

Es sei nun $\mathfrak{A}^{x_1 \dots x_m}_{y_1 \dots y_n}$ ein Zählausdruck I. Wir zeigen, daß

$$\mathfrak{A}^{x_1 \dots x_m}_{y_1 \dots y_n} \overline{\Phi} x_1 \dots \overline{\Phi} x_m \Phi y_1 \dots \Phi y_n$$

sich beweisen läßt. In dieser Behauptung ist als Spezialfall enthalten, daß Φ ein erfüllendes Prädikat für die Formel $\mathfrak{F}$ ist.

Die Behauptung könnte nur dann fraglich sein, wenn die x alle zu $\mathfrak{K}_1$ oder $\mathfrak{K}_4$, die y alle zu $\mathfrak{K}_2$ oder $\mathfrak{K}_5$ gehörten. Es möge $p_1, \dots, p_k$ zu

$\mathfrak{K}_1$, $q_1, \ldots, q_l$ zu $\mathfrak{K}_4$, $r_1, \ldots, r_i$ zu $\mathfrak{K}_2$, $s_1, \ldots, s_j$ zu $\mathfrak{K}_5$ gehören. Es gibt dann Zählausdrücke $\mathfrak{B}^{(i)}$ und $\mathfrak{C}^{(i)}$, so daß $\mathfrak{B}^{(1)}_{p_1}, \ldots, \mathfrak{B}^{(k)}_{p_k}, \mathfrak{C}^{(1)\,r_1}, \ldots, \mathfrak{C}^{(i)\,r_i}$ alle falsch sind. Ist nun $\mathfrak{A}^{p_1 \ldots p_k\, q_1 \ldots q_l}_{r_1 \ldots r_i\, s_1 \ldots s_j}$ falsch, so gilt dasselbe für

$$(u_1) \ldots (u_k)\,(v_1) \ldots (v_i)\,\mathfrak{B}^{(1)}_{u_1} \ldots \mathfrak{B}^{(k)}_{u_k}\,\mathfrak{C}^{(1)\,v_1} \ldots \mathfrak{C}^{(i)\,v_i}\,\mathfrak{A}^{u_1 \ldots u_k\, q_1 \ldots q_l}_{v_1 \ldots v_i\, s_1 \ldots s_j}.$$

Dieser Ausdruck hat aber die Form $\mathfrak{H}^{q_1 \ldots q_l}_{s_1 \ldots s_j}$. Wir können uns daher beim Beweise unserer Behauptung auf den Fall beschränken, daß $x_1, \ldots, x_m$ zu $\mathfrak{K}_4$ und $y_1, \ldots, y_n$ zu $\mathfrak{K}_5$ gehören.

M'' sei die Menge der Elemente von $\mathfrak{K}_4$, die y_1 voraufgehen. Die Menge, die entsteht, wenn man zu den Elementen von M'' noch y_1 hinzunimmt, nennen wir (M'', y_1).

1. Fall: (M'', y_1) sei Menge der ersten Art. Da M'' Menge der zweiten Art ist, (M'', y_1) aber nicht, müßte es eine oder mehrere Mengen der ersten Art geben, die die Elemente von M'' und außerdem noch ein Element z enthielten, das y_1 voraufgeht. Unter der Menge dieser z sei z_i das erste Element. Die Menge (M'', z_i) muß dann eine Menge der zweiten Art sein. Das steht damit im Widerspruch, daß M'' alle y_1 voraufgehenden Elemente enthalten sollte. Dieser Fall ist also nicht möglich.

2. Fall: (M'', y_1) sei nicht Menge der ersten Art. Es gäbe dann Elemente $p_1, \ldots, p_k$ von M'' und einen Ausdruck $\mathfrak{B}$, so daß $\mathfrak{B}^{p_1 \ldots p_k\, y_1}$ falsch ist. Wäre nun $\mathfrak{A}^{x_1 \ldots x_m}_{y_1 \ldots y_n}$ falsch, so würde dasselbe für

$$(z)\,\mathfrak{B}^{p_1 \ldots p_k\, z}\,\mathfrak{A}^{x_1 \ldots x_m}_{z\, y_2 \ldots y_n}$$

gelten. Diesen Ausdruck kann man aber auch schreiben als

$$\mathfrak{C}^{p_1 \ldots p_k\, x_1 \ldots x_m}_{y_2 \ldots y_n}.$$

Wäre also ein $\mathfrak{A}^{x_1 \ldots x_m}_{y_1 \ldots y_n}$ falsch, so auch ein anderer Ausdruck derselben Art, bei dem unten weniger Argumente stehen. Durch wiederholte Anwendung dieser Schlußweise würden wir schließlich einen Ausdruck $\mathfrak{C}^{q_1 \ldots q_l}$ bekommen, der ebenfalls falsch ist, während die Argumente $q_1, \ldots, q_l$ ($l \neq 0$ vorausgesetzt) alle zu $\mathfrak{K}_4$ gehören. Das ist aber ein Widerspruch. Ist $l = 0$, so haben wir einen Zählausdruck der zweiten Klasse erhalten, der falsch sein müßte, und kommen also in Widerspruch mit unserer Voraussetzung. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

5. Elimination von Prädikaten mit zwei und mehr Leerstellen; Beispiele für Anwendung des in § 4 bewiesenen Hauptsatzes.

Wir lassen jetzt zu, daß das zu eliminierende Prädikat zwei und mehr Argumente hat. Dieser Fall wird darauf zurückgeführt werden, daß F nur ein Argument hat. Die Zurückführung ist aber nicht so zu verstehen, daß zu jeder Formel $(EF)\,\mathfrak{A}(F)$, in der F ein Prädikat mit mehreren

Leerstellen ist, eine Formel $(EF)\mathfrak{B}(F)$ angegeben wird, in der F ein Prädikat im engeren Sinne ist und die in dem gleichen Individuenbereich definiert und $(EF)\mathfrak{A}(F)$ äquivalent ist. Vermutlich ist eine derartige Zurückführung sogar nicht möglich. Vielmehr wird die Formel $(EF)\mathfrak{B}(F)$ in einem neuen Individuenbereiche konstruiert werden. Diese Zurückführung gilt übrigens auch für den noch nicht behandelten Fall, daß auch Seinszeichen für Individuen vorkommen.

Beschränken wir unsere Untersuchungen zunächst darauf, daß alle in $(EF)\mathfrak{A}(F)$ vorkommenden Prädikate höchstens zweistellig sind. Wir können dann annehmen, daß auch wirklich *alle* Prädikate zweistellig sind. Ein Prädikat Ax kann nämlich ersetzt werden durch ein Prädikat Axx, das für alle x mit Ax wahrheitsgleich ist.

Es sei nun J der ursprüngliche Individuenbereich. Wir ordnen dem Bereich J einen neuen J' zu, dessen Individuen alle geordneten Paare (x, y) sind, bei denen x und y Elemente von J sind. Jedem zweistelligen Prädikat Axy in J entspricht dann ein einstelliges Prädikat A' in J' und umgekehrt. Einem Element x von J entspricht in eindeutiger Weise ein Element (x, x) von J', das wir auch mit x' bezeichnen. In J' definieren wir nun drei individuelle Prädikate, ein einstelliges und zwei zweistellige. Sx bedeute, das Paar x hat gleiches Vorder- und Hinterglied, d. h. also x ist gleich z', wo z ein Element von J ist. Vxy bedeute, das Paar x hat mit dem Paar y gleiches Vorderglied; Hxy steht für: das Paar x hat mit dem Paar y gleiches Hinterglied.

Wir zeigen nun, das sich zu der Formel $\mathfrak{A}(F)$ in J eine äquivalente Formel $\mathfrak{B}(F')$ in J' angeben läßt, wobei F und F' die angegebene Beziehung haben. Es würde dann folgen, daß auch $(EF)\mathfrak{A}(F)$ in J und $(EF')\mathfrak{B}(F')$ in J' gleichwertig sind. Wir lassen dabei den Fall zu, daß $\mathfrak{A}(F)$ auch freie, d. h. nicht durch All- oder Seinszeichen gebundene Individuenvariable enthält. $\mathfrak{A}(F)$ sei natürlich auf die Normalform gebracht, bei der alle Individuenoperatoren an der Spitze stehen. Der Beweis geschieht durch Induktion nach der Anzahl der in $\mathfrak{A}(F)$ vorkommenden Individuenoperatoren.

1) $\mathfrak{A}(F)$ enthalte keine Individuenoperatoren. Es hat dann die Form $\mathfrak{A}(x, y, \ldots, n)$, wo $x, y, \ldots, n$ freie Variable sind. Es gibt dann einen Ausdruck $\mathfrak{B}(x', y', \ldots, n')$ in J', der mit $\mathfrak{A}$ gleichwertig ist. Wir ersetzen nämlich jede Elementaraussage Auv von $\mathfrak{A}(F)$ durch die ihr in J' gleichwertige $(z)(\overline{V}zu'\,\overline{H}zv'\,A'z)$, womit der Beweis schon geführt ist.

2) $\mathfrak{A}(F)$ enthalte $p+1$ Individuenoperatoren. Es hat dann entweder die Form $(u)\mathfrak{A}(u, x, y, \ldots, n)$ oder aber $(Eu)\mathfrak{A}(u, x, y, \ldots, n)$. Da $\mathfrak{A}$ nur p Individuenoperatoren enthält, dürfen wir für $\mathfrak{A}$ die Behauptung als bewiesen annehmen. Es ist also der Ausdruck $\mathfrak{A}(u, x, \ldots, n)$ in J gleich-

wertig dem Ausdruck $\mathfrak{B}(u', x', y', \ldots, n')$ in J'. Dann ist aber auch der Ausdruck $(u)\mathfrak{A}(u, x, y, \ldots, n)$ in J gleichwertig dem Ausdruck $(u)\overline{S}u\,\mathfrak{B}(u, x', y', \ldots, n')$ in J', bzw. $(Eu)\mathfrak{A}(u, x, \ldots, n)$ gleichwertig $(Eu)(Su\ \&\ \mathfrak{B}(u, x', \ldots, n')$. Damit ist die Behauptung bewiesen[4]).

Als Beispiel einer umzuwandelnden Formel nehmen wir

$$(x)(Ey)FxyFyxAxx\ \&\ \overline{F}xyFxxByx.$$

Die Umwandlung ergibt hier

$$(x)(Ey)\overline{S}x[Sy\ \&\ (z)(u)(\overline{V}xz\overline{H}yz\overline{V}yu\overline{H}xuF'zF'uA'x) \\ \&\ (v)(w)(\overline{V}xv\overline{H}yv\overline{V}yw\overline{H}xwF'vF'xB'w)].$$

Übrigens erkennt man an diesem Beispiel, wie auch allgemein an den vorstehenden Überlegungen, daß der Ausdruck in J' dieselbe Folge von Individuenoperatoren enthält wie der in J; nur kommen am Schluß noch Allzeichen hinzu.

Nach dem bisherigen läßt sich die Elimination eines zweistelligen Prädikats immer durch die eines einstelligen ersetzen. Jedoch wird dann die Resultante im Bereich J' definiert sein. Zu einer vollständigen Lösung des Eliminationsproblems wäre erforderlich, daß sich die Resultante in J angeben läßt. Während wir also vorher zum Bereich J' übergingen, müssen wir nach der Elimination zum Bereich J zurückkehren. Dies ist nun verhältnismäßig leicht. Die Resultante in J' enthält außer variablen einstelligen Prädikaten S, V und H. Die Aussagen mit den Individuen von J' als Argumenten sind Aussagen über die Vorder- und Hinterglieder der Paare (x, y). Kommt nun in der Resultante eine gebundene Variable z in der Verbindung $A'z$ vor, so wird sie durch Az_1z_2 ersetzt. z_1 und z_2 wären hier das Vorder- und Hinterglied von z. Das Allzeichen (z) wird durch $(z_1)(z_2)$, ein Seinszeichen (Ez) durch $(Ez_1)(Ez_2)$ ersetzt. An Stelle von Sz schreibt man $z_1 = z_2$. Für Vuz bzw. Huz schreibt man $u_1 = z_1$, bzw. $u_2 = z_2$, wenn u in u_1 und u_2 aufgespalten wird. Kommen noch freie Variable x', y', usw. vor, so werden sie in (x, x), bzw. (y, y) aufgespalten. Der so entstehende Ausdruck ist wieder ein Ausdruck in J; seine Äquivalenz mit dem Ausdruck in J', aus dem er entstanden ist, ist klar.

Wir hatten uns auf den Fall von zweistelligen Prädikaten beschränkt; bei drei- und mehrstelligen ist das Verfahren, das ja durchsichtig genug ist, entsprechend. Bei dreistelligen Prädikaten z. B. besteht der Bereich J' nicht aus Zahlenpaaren, sondern aus Zahlentripeln. An individuellen Prädikaten haben wir hier vier, nämlich Sx, Vxy, Mxy, Hxy. Sie

---

[4]) In ähnlicher Weise, aber zu anderen Zwecken, findet sich eine Reduzierung der Zahl der Prädikatenargumente schon in der in Anmerkung [2]) erwähnten Arbeit von Löwenheim.

entsprechen den vier Aussagen: Das erste, zweite und dritte Glied von x sind identisch; die beiden Vorderglieder von x und y sind gleich; die beiden Mittelglieder von x und y sind gleich; die beiden hinteren Glieder von x und y sind gleich. Bei der Rückverwandlung haben wir jedes Ding von J' in drei Dinge aufzuspalten.

An einigen Beispielen wollen wir nun das Verfahren, wie auch den in § 4 bewiesenen Hauptsatz erläutern.

1. Beispiel:

$$(EF)(x)(y)(AxyFxy \;\&\; Bxy\overline{F}xy). \tag{17}$$

Der Übergang zu J' läßt sich hier etwas einfacher gestalten als nach unserem allgemeinen Verfahren. Offenbar entspricht der Formel in J' die äquivalente

$$(EF')(z)(A'zF'z \;\&\; B'z\overline{F'}z).$$

Als Resultante findet man $(z)A'zB'z$. Zu J zurückkehrend bekommt man $(x)(y)AxyBxy$.

2. Beispiel:

$$(EF)(x)(y)(FxxFxyAxy \;\&\; \overline{F}xxBxy). \tag{18}$$

Beim Übergang zu J' verwandelt sich der Ausdruck in

$$(EF')(x)(y)\overline{S}x\overline{S}y[(z)F'xF'zA'z\overline{V}xz\overline{H}yz \;\&\; (u)\overline{F'}x\overline{V}ux\overline{H}yuB'u].$$

Durch Umstellung der Allzeichen erhält man daraus

$$(EF')(x)(z)[F'xF'zA'z\overline{V}xz\overline{S}x(y)\overline{S}y\overline{H}yz \;\&\; \overline{S}x\overline{F'}x(u)\overline{V}uxB'u(y)\overline{S}y\overline{H}yu].$$

Dieser Ausdruck läßt sich vereinfachen. $(y)\overline{S}y\overline{H}yz$ ist offenbar für jedes z falsch, so daß man diesen Faktor fortlassen kann.

Dasselbe gilt für $(y)\overline{S}y\overline{H}yu$. Man erhält

$$(EF')(x)(z)(F'xF'zA'z\overline{V}xz\overline{S}x \;\&\; \overline{F'}x\overline{S}x(u)\overline{V}uxB'u).$$

Diese Formel geht aus

$$(EF')(x)(z)(F'xF'zMxz \;\&\; \overline{F'}xNx) \tag{19}$$

hervor, indem man $A'z\overline{V}xz\overline{S}x$ für Mxz und $\overline{S}x(u)\overline{V}uxB'u$ für Nx einsetzt. Wir gebrauchen bei den variablen Prädikaten M und N die Schreibweise M_{xz} und N^{x}. Bildet man die Zählausdrücke der Klasse II gemäß § 4, so zeigt sich, daß es nur einen derartigen Zählausdruck gibt, nämlich

$$(x)(z)NxMxzNz.$$

Diese letzte Formel ist also die Resultante von (19). Setzt man für M und N wieder die Werte ein, so erhält man nach entsprechender Umordnung der Glieder

$$(x)(z)(u)(v)\overline{S}x\overline{S}z\overline{V}xz\overline{V}uxB'uA'z\overline{V}vzB'v.$$

Wir spalten nun die Variablen auf.

$$(x_1)(x_2)(z_1)(z_2)(u_1)(u_2)(v_1)(v_2)(x_1 \neq x_2)(z_1 \neq z_2)(x_1 \neq z_1)(u_1 \neq x_1)$$
$$B u_1 u_2 A z_1 z_2 (v_1 \neq z_1) B v_1 v_2.$$

Dieser Ausdruck ist nur dann nicht bedeutungslos, wenn $x_1 = x_2 = z_1 = z_2 = u_1 = v_1$ genommen wird. Man darf also schreiben

$$(x_1)(u_2)(v_2) B x_1 u_2 A x_1 x_1 B x_1 v_2,$$

oder wenn wir den Index bei den Variablen fortlassen,

$$(x)(u)(v) B x u A x x B x v.$$

Eine Umstellung der Allzeichen ergibt

$$(x)[A x x (u) B x u (v) B x v].$$

Der Faktor $(u) B x u$, der doppelt auftritt, braucht nur einmal gesetzt zu werden. Demnach erhalten wir als Endresultat

$$(x)(u) A x x B x u.$$

Dieses Resultat hätte man, wenn es uns nur auf die Formel (18) angekommen wäre, natürlich auch einfacher finden können; die Ableitung hatte aber den Zweck, die Anwendung unserer allgemeinen Methode zu zeigen.

3. Beispiel:

$$(EF)(x)(y) A x y (F x F y \,\&\, \overline{F} x \overline{F} y). \tag{20}$$

Die inhaltliche Bedeutung dieser Formel ist die folgende: Es wird gefordert, daß sich der Individuenbereich so in zwei sich ausschließende Klassen zerlegen läßt, daß, wenn x und y zur selben Klasse gehören, auch $A x y$ wahr ist. Es handelt sich darum, für diese Forderung die notwendigen und hinreichenden Bedingungen zu finden.

Die Formel wird zunächst auf die in § 4 erwähnte Ausgangsform gebracht.

$$(EF)(x)(y)(F x F y A x y \,\&\, \overline{F} x \overline{F} y A x y).$$

Diese Formel entsteht durch Einsetzung aus

$$(EF)(x)(y)(F x F y A x y \,\&\, \overline{F} x \overline{F} y B x y). \tag{21}$$

Zur Bildung der Zählausdrücke I haben wir die Grundprädikate A_{xy} und B^{xy}. Wir bilden nun Zählausdrücke der folgenden Arten

$$(z_1) \dots (z_n) A_{x z_1} B^{z_1 z_2} A_{z_2 z_3} \dots B^{z_{n-1} z_n} A_{z_n y}$$
$$(z_1) \dots (z_n) A_{x z_1} B^{z_1 z_2} A_{z_2 z_3} \dots A_{z_{n-1} z_n} B^{z_n y}$$
$$(z_1) \dots (z_n) B^{x z_1} A_{z_1 z_2} B^{z_2 z_3} \dots A_{z_{n-1} z_n} B^{z_n y}.$$

(Selbstverständlich ist n bei der 1. und 3. Formel eine gerade, bei der 2. Formel eine ungerade Zahl). Es soll also auf ein A immer ein B folgen und umgekehrt, sofern nicht der Ausdruck schon zu Ende ist. A_{xy} und B^{xy} sollen auch Spezialfälle der 1. bzw. 3. Formel sein.

Unter $\mathfrak{A}xy$ wollen wir im folgenden immer eine Formel der ersten Art verstehen, oder aber eine Formel, die aus einer solchen dadurch hervorgeht, daß in einzelnen Disjunktionsgliedern ein A_{uv} durch A_{vu} bzw. ein B^{uv} durch B^{vu} ersetzt wird. Entsprechend haben wir die Abkürzungen $\mathfrak{A}_x^y$ und $\mathfrak{A}^{xy}$ für Formeln der zweiten und dritten Art. Natürlich gebrauchen wir andere deutsche Buchstaben in derselben Bedeutung. Wir behaupten nun: a) Bei der Formel (21) haben die Zählausdrücke der Klasse I mit zwei freien Variablen die Formen $\mathfrak{A}^{xy}$, $\mathfrak{A}_x^y$, $\mathfrak{A}^{xy}$; b) die Zählausdrücke I mit einer freien Variablen haben eine der Formen $\mathfrak{A}_{xx}$; $(z)\mathfrak{A}_{zz}\mathfrak{B}_x^z$; $(z)\mathfrak{A}^{zz}\mathfrak{B}_{zx}$, wenn die freie Variable unten steht. Sie haben eine der Formen $\mathfrak{A}^{xx}$; $(z)\mathfrak{A}^{zz}\mathfrak{B}_z^x$; $(z)\mathfrak{A}_{zz}\mathfrak{B}^{zx}$, wenn die freie Variable oben steht. Zählausdrücke mit mehr als zwei freien Variablen können übrigens nicht vorkommen.

Die Richtigkeit der obigen Behauptung ergibt sich sofort daraus, daß eine Zusammensetzung von obigen Zählausdrücken gemäß den in § 4 angegebenen Regeln immer wieder Ausdrücke derselben Art liefert und daß unsere Grundprädikate A_{xy} und B^{xy} ebenfalls die genannte Form haben. Demnach kommen als Zählausdrücke der II. Klasse nur folgende Typen in Frage:

$$\begin{aligned}
&1)\quad (x)\,\mathfrak{A}_{xx}\mathfrak{B}^{xx}\\
&2)\quad (x)\,(y)\,\mathfrak{A}_{xx}\mathfrak{B}^{xy}\mathfrak{C}_{yy}\\
&3)\quad (x)\,(y)\,\mathfrak{A}_{xx}\mathfrak{B}_y^x\mathfrak{C}^{yy}\\
&4)\quad (x)\,(y)\,\mathfrak{A}^{xx}\mathfrak{B}_{xy}\mathfrak{C}^{yy}.
\end{aligned}$$

(Man beachte, daß $(y)\,\mathfrak{B}_x^y\mathfrak{B}_y^z$ gleich $\mathfrak{C}_x^z$ ist).

Die Summe aller Ausdrücke dieser vier Typen würde die Resultante von (21) bilden. Die Resultante unserer Ausgangsformel (20) bekommen wir, wenn wir in obigen vier Formeltypen Bxy durch Axy ersetzen. Ein Ausdruck $(x)\,\mathfrak{A}_{xx}\mathfrak{B}^{xx}$ würde nach Einsetzung von A die Form haben

$$(x)\,[(z_1)\ldots(z_n)\,A\,x\,z_1\,A\,z_1\,z_2\ldots A\,z_n\,x\ \ (z_1)\ldots(z_m)\,A\,x\,z_1\ldots A\,z_m\,x].$$

Es ist hier zu beachten, daß der von $(z_1)\ldots(z_n)$ abhängige Teil eine ungerade Anzahl von Faktoren enthält. Nehmen wir nun m und n gleich, so braucht man den doppelt auftretenden Teil der Formel nur einmal zu schreiben. Es ergibt sich, daß jede Formel

$$(25)\qquad (x)\,(z_1)\ldots(z_n)\,A\,x\,z_1\,A\,z_1\,z_2\ldots A\,z_{n-1}\,z_n\,A\,z_n\,x\quad (n = 2\,k),$$

bei der die Anzahl der Disjunktionsglieder ungerade ist, ein Zählausdruck II ist. Nun sind aber alle aus 1) bis 4) durch Einsetzung von A für B sonst entstehenden Formeln sämtlich Folgerungen einer Formel vom Typ (25).. Daher ist die logische Summe aller Formeln (25) die Resultante der Formel (20).

6. Das Auftreten von Seinszeichen.

Es soll jetzt auf den Fall, daß in der der Elimination zu unterwerfenden Formel auch Seinszeichen vorkommen, eingegangen werden. Dieser Fall wird hier allerdings nicht abschließend behandelt werden, jedoch läßt er sich mit Hilfe der früheren Resultate einfacher und durchsichtiger gestalten, so daß in besonderen Fällen die Elimination gelingt. Das Problem läßt sich nämlich ebenfalls in ein solches umformen, bei dem nur Allzeichen vorkommen. Dafür ist aber die zu eliminierende Funktion kein Prädikat mehr, sondern eine Belegungsfunktion, d. h. eine Funktion, deren Argumente und Werte Individuen sind, eine Funktion also, die den Charakter einer mathematischen Funktion hat. Diese Umformung zu zeigen, ist das Ziel dieses Abschnitts.

$(EF)\mathfrak{A}(F)$ sei die in Frage stehende Formel. Die Individuenoperatoren stehen wie gewöhnlich alle vorn. Folgen nun hinter (EF) Seinszeichen für Individuen, so können diese vor (EF) gezogen werden. Kommen weiter keine Seinszeichen vor, so ist der Fall schon durch unsere vorstehenden Untersuchungen erledigt. Wir dürfen daher annehmen, daß hinter (EF) zunächst Allzeichen auftreten und dann wieder ein Seinszeichen. $(EF)\mathfrak{A}(F)$ habe also die Gestalt $(EF)(x_1)\ldots(x_k)(Ey)\mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_k,y,F)$. Hier kann $\mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_k,y,F)$ natürlich unter Umständen weitere All- und Seinszeichen enthalten. Da durch $\mathfrak{A}(F)$ verlangt wird, daß es zu jeder Kombination $x_1,\ldots,x_k$ ein y gibt, so daß $\mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_k,y,F)$ richtig ist, so muß es eine Funktion $g(x_1,\ldots,x_k)$ geben, deren Wert wieder ein Element des Individuenbereichs ist, und die die Rolle von y vertritt. Demnach kann ich

$$(EF)(x_1)\ldots(x_k)(Ey)\mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_k,y,F)$$

durch

$$(EF)(Eg)(x_1)\ldots(x_k)\mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_k,g(x_1,\ldots,x_k),F)$$

ersetzen. (Eg) kann dann noch mit (EF) die Stellung vertauschen. Der Unannehmlichkeit, daß nun $g(x_1,\ldots,x_k)$ als Argument auftritt, können wir dadurch entgehen, daß wir die letzte Formel durch die äquivalente

$$(Eg)(EF)(x_1)\ldots(x_k)(y)\big(g(x_1,\ldots,x_k)\neq y\big)\mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_k,y,F)$$

ersetzen. Wir haben dadurch erreicht, daß hinter (EF) ein Seinszeichen weniger auftritt. Dieses Verfahren setzen wir so lange fort, bis sämtliche Seinszeichen für Individuen verschwunden sind. Die Elimination von F läßt sich dann wie früher ausführen. Dabei stören uns Faktoren wie $g(x_1,\ldots,x_k)\neq y$ nicht; denn sie lassen sich durch ein variables Prädikat $Ax_1\ldots x_k y$ ersetzen, und nach der Elimination kann man dafür wieder $g(x_1,\ldots,x_k)\neq y$ schreiben.

Nun haben wir aber nach der Elimination die Seinszeichen für Belegungsfunktionen dastehen. In besonderen Fällen wird es ohne weiteres gelingen, diese Belegungsfunktionen in ähnlicher Weise, wie wir sie eingeführt hatten, auch wieder rückgängig zu machen. Im allgemeinen wird man das aber nicht erwarten können, da ja die Struktur von $\mathfrak{A}(F)$ durch die Elimination verändert wird. Das Fortschaffen der Belegungsfunktionen stellt sich vielmehr als ein besonderes Eliminationsproblem dar, für das eine allgemeine Lösung bisher nicht vorhanden ist. Als ein Fall, in dem die Herausschaffung der Belegungsfunktionen mühelos gelingt, sei hier noch folgende Formel behandelt:

$$(EF)\,[(x)\,(Ey)\,(Axy\ \&\ Fxy)\ \&\ (x)\,(Ey)\,(Bxy\ \&\ \overline{F}xy)]. \tag{26}$$

Die Einführung von zwei Belegungsfunktionen g und h ergibt

$$(Eg)\,(Eh)\,(EF)\,[(x)\,(y)\,(gx \mp y)\,(Axy\ \&\ Fxy)\ \&\ (x)\,(y)\,(hx \mp y)\,(Bxy\ \&\ \overline{F}xy)].$$

Der hinter (EF) stehende Teil dieser Formel läßt sich umformen zu

$$(x)(y)\big((gx \mp y)\,Axy\ \&\ (hx \mp y)\,Bxy\big)\ \&\ (x)(y)\big((gx \mp y)\,Fxy\ \&\ (hx \mp y)\,\overline{F}xy\big).$$

Da F nur in dem zweiten Konjunktionsgliede vorkommt, kann (EF) dorthin gesetzt werden und die Elimination von F gemäß (17) vollzogen werden. Man erhält also

$$(Eg)(Eh)[(x)(y)\big((gx \mp y)\,Axy\ \&\ (hx \mp y)\,Bxy\big)\ \&\ (x)(y)\big((gx \mp y)\,hx \mp y\big)].$$

Wir ordnen die Glieder um:

$$(Eh)\,[(x)\,(y)\,(hx \mp y)\,Bxy\ \&\ (Eg)\,(x)\,(y)\,(gx \mp y)\,(Axy\ \&\ hx \mp y)],$$

g kann jetzt eliminiert werden. Wir geben gleichzeitig der ersten Variablen y eine andere Benennung:

$$(Eh)\,[(x)\,(z)\,(hx \mp z)\,Bxz\ \&\ (x)\,(Ey)\,(Axy\ \&\ hx \mp y)].$$

Für $(x)\,(Ey)\,(Axy\ \&\ hx \mp y)$ darf man schreiben

$$(x)\,(z)\,(hx \mp z)\,(Ey)\,(Axy\ \&\ z \mp y).$$

Dieses Glied kann dann mit dem ersten vereinigt werden zu

$$(Eh)\,(x)\,(z)\,(hx \mp z)\,(Bxz\ \&\ (Ey)\,(Axy\ \&\ z \mp y).$$

Jetzt wird h eliminiert:

$$(x)\,(Ez)\,\big(Bxz\ \&\ (Ey)\,(Axy\ \&\ z \mp y)\big).$$

Wir haben also als Resultante

$$(x)\,(Ey)\,(Ez)\,(Axy\ \&\ Bxz\ \&\ z \mp y).$$

(Eingegangen am 13. 1. 1934.)