Zum Eliminationsproblem der mathematischen Logik.

Von

Wilhelm Ackermann in Burgsteinfurt.

In einer kürzlich in dieser Zeitschrift erschienenen Arbeit[1]) hatte ich das Eliminationsproblem allgemein für den Fall gelöst, daß hinter dem Seinszeichen für das zu eliminierende Prädikat lauter Allzeichen für Individuen vorkommen[2]). Für den Fall, daß ein Wechsel von All- und Seinszeichen auftritt, konnte keine allgemeine Lösungsmethode angegeben werden; es wurde nur darauf hingewiesen, daß sich durch Einführung von Belegungsfunktionen das Problem auf ein solches reduziert, bei dem das ursprüngliche Prädikat verschwunden ist und dafür zu eliminierende Belegungsfunktionen auftreten[3]). Der Vorteil, den die Einführung von Belegungsfunktionen bietet, besteht darin, daß in gewissen einfachen Fällen sich die Belegungsfunktionen wieder fortschaffen lassen, womit dann die Elimination vollständig vollzogen ist. Zu diesen einfachen Fällen gehört z. B. das Beispiel (26) auf Seite 413 meiner genannten Arbeit. Die optimistischen Erwartungen, die man danach allgemein von dieser Methode haben könnte, erweisen sich leider als nicht begründet; vielmehr entstehen durch Einführung der Belegungsfunktionen derart verwickelte Aufgaben, daß man diese Funktionen gern vermeiden möchte, falls die in den besonderen Fällen erreichten Resultate sich auch auf andere Weise erzielen ließen. Das ist in der Tat der Fall. Mit der neuen, im folgenden anzugebenden Methode gelingt z. B. ebenso wie mit der Methode der Belegungsfunktionen die Lösung der meisten Eliminationsprobleme, die von Schröder im 3. Band seiner Algebra der Logik aufgeworfen worden sind. Zugleich wird uns aber klar werden, weshalb man diese Methode nicht zu einer

[1]) Untersuchungen über das Eliminationsproblem der mathematischen Logik, Math. Annalen 110, S. 390—413.

[2]) Der Fall, daß hinter dem Seinszeichen für Prädikate lauter Seinszeichen für Individuen vorkommen, ist trivial. da er sich auf ein Eliminationsproblem des Aussagenkalküls reduziert.

[3]) Das Ersetzen der Seinszeichen durch Belegungsfunktionen ist im wesentlichen schon von Schröder bei seiner Ausführung von logischen Produkten und Summen benutzt worden; in klarer Fassung ausgesprochen hat es zuerst Th. Skolem 1920. Seitdem ist dieses Prinzip mehrfach bei Untersuchungen über den Logikkalkül benutzt worden. — Auf die Vorteile, die die Einführung von Belegungsfunktionen für das Eliminationsproblem bietet, hat auch schon H. Behmann in einem Vortrage auf der Mathematikerversammlung in Düsseldorf 1926 hingewiesen.

allgemein anwendbaren erweitern kann, was bei Einführung der Belegungsfunktionen einigermaßen unklar blieb. Zu den von Schröder behandelten Problemen gehören z. B.

(I) $(EF)\,[(x)\,(Ey)\,(Axy \,\&\, Fxy) \,\&\, (x)\,(Ez)\,(Bxz \,\&\, \bar{F}xz)],$

(II) $(EF)\,((x)\,(Eu)\,(Axu \,\&\, Fxu) \,\&\, (x)\,(y)\,(Ez)\,[Bxy\,(Cyz \,\&\, \bar{F}xz)]),$

(III) $(EF)\,\{(x)\,(Eu)\,(Axu \,\&\, Fxu) \,\&\, (x)\,(Ey)\,(z)\,(Bxy \,\&\, Cyz\bar{F}xz)\},$

(IV) $(EF)\,\{(x)\,(y)\,(Ez)\,[Axy\,(Byz \,\&\, Fxz)] \,\&\, (x)\,(Ey)\,(z)\,(Cxy \,\&\, Dyz\bar{F}xz)\},$

(V) $(EF)\,\{(x)\,(Ey)\,(z)\,[Axy \,\&\, ByzFxz] \,\&\, (x)\,(Ey)\,(z)\,(Cxy \,\&\, Dyz\bar{F}xz)\}.$

Die Formel (I) ist die obenerwähnte Formel (26) meiner Arbeit. Die Resultanten aller dieser 5 Formeln sind von Schröder nur (allerdings richtig) vermutet worden. Es fällt uns bei diesen Formeln auf, daß die äußersten Individuenoperatoren Allzeichen für x sind (die man übrigens vereinigen kann), und daß F als erstes Argument immer x hat. Wir wollen allgemein eine derartige Formel mit $(EF)\,(x)\,\mathfrak{A}_c\,(Fxc, x)$ bezeichnen. Wir behaupten nun, es gilt

(VI) $$(EF)\,(x)\,\mathfrak{A}_c\,(Fxc, x) \longleftrightarrow (x)\,(EG)\,\mathfrak{A}_c\,(Gc, x)$$

Dabei ist G ein einstelliges Prädikat. Die Richtigkeit dieser Formel ist leicht einzusehen. Zunächst ergibt sich

$$(EF)\,(x)\,\mathfrak{A}_c\,(Fxc, x) \rightarrow (x)\,(EG)\,\mathfrak{A}_c\,(Gc, x)$$

nach den bekannten Regeln des Prädikatenkalküls, da Fxy bei festgehaltenem x ein Prädikat von y ist. Die Umkehrung

$$(x)\,(EG)\,\mathfrak{A}_c\,(Gc, x) \rightarrow (EF)\,(x)\,\mathfrak{A}_c\,(Fxc, x)$$

ist ein besonderer Fall des Auswahlaxioms. Gibt es zu jedem x ein G der obigen Art, so läßt sich jedem x auch eindeutig ein derartiges G zuordnen, das wir mit G^x bezeichnen. Aus $(x)\,\mathfrak{A}_c\,(G^x_c, x)$ ergibt sich dann, da G^x_y ein zweistelliges Prädikat ist, $(EF)\,(x)\,\mathfrak{A}_c\,(Fxc, x)$. Die Anwendung von (VI) auf die Formel (I) formt diese um zu

$$(x)\,(EG)\,[(Ey)\,(Axy \,\&\, Gy) \,\&\, (Ez)\,(Bxz \,\&\, \bar{G}z)].$$

In dem hinter G stehenden Teil der Formel kann x als konstant angesehen werden; wir haben also ein reines Problem des einstelligen Prädikatenkalküls vor uns und finden mit Hilfe der hier gebräuchlichen Methoden[4]) die uns schon bekannte Resultante

$$(x)\,(Ey)\,(Ez)\,(Axy \,\&\, Bxz \,\&\, y \neq z).$$

Aus Formel (II) entsteht durch Anwendung von (VI)

$$(x)\,(EG)\,[(Eu)\,(Axu \,\&\, Gu) \,\&\, (y)\,(Ez)\,Bxy\,(Cyz \,\&\, \bar{G}z)].$$

---

[4]) Vgl. z. B. H. Behmann, Beiträge zur Algebra der Logik und zum Entscheidungsproblem, Math. Annalen 86 (1922).

Hier kann $(E\,u)$ mit $(E\,G)$ seine Stellung vertauschen. Nach einigen weiteren, leicht einzusehenden Umformungen ergibt sich

$$(x)\,(E\,u)\,\{A\,x\,u\;\&\;(E\,G)\,[(y)\,(y\,\neq\,u)\,G\,y\;\&\;(y)\,(E\,z)\,B\,x\,y\,(C\,y\,z\;\&\;\overline{G}\,z)]\}.$$

Hier kann die Elimination von G gemäß Formel (6) auf Seite 394 meiner früheren Arbeit vollzogen werden. Man erhält

$$(x)\,(E\,u)\,[A\,x\,u\;\&\;(y)\,(E\,z)\,B\,x\,y\,(C\,y\,z\;\&\;z\,\neq\,u)].$$

Auf dieselbe Weise findet man für die Formeln (III), (IV), (V) bezüglich die Resultanten

$$(x)\,(E\,u)\,(E\,y)\,(A\,x\,u\;\&\;B\,x\,y\;\&\;C\,y\,u),$$
$$(x)\,(E\,u)\,(y)\,(E\,z)\,[A\,x\,y\,(B\,y\,z\;\&\;D\,u\,z)\;\&\;C\,x\,u],$$
$$(x)\,(E\,u)\,(E\,y)\,(z)\,(A\,x\,u\;\&\;C\,x\,y\;\&\;B\,u\,z\,D\,y\,z).$$

Bemerkenswert bei den obigen Überlegungen ist, daß gerade das Auswahlaxiom (in der speziellen Form, in der wir es benutzten) als wichtiges logisches Hilfsmittel erscheint. Die Formel (VI) läßt sich übrigens zu folgender Formel verallgemeinern:

$$(E\,F)\,(x)\,\mathfrak{A}_{c_1\,\ldots\,c_n}\,(F\,x\,c_1\,\ldots\,c_n,\,x)\;\longleftrightarrow\;(x)\,(E\,G)\,\mathfrak{A}_{c_1\,\ldots\,c_n}\,(G\,c_1\,\ldots,\,c_n,\,x).$$

Hier hat das Prädikat G eine Leerstelle weniger als F.

(Eingegangen am 9. 11. 1934.)