SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Mathematische Annalen
Ort: Berlin
Jahr: 1936
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN235181684_0112
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0112

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN

VON

DAVID HILBERT

IN GÖTTINGEN

UNTER MITWIRKUNG VON

OTTO BLUMENTHAL

IN AACHEN

ERICH HECKE

IN HAMBURG

BARTEL L. VAN DER WAERDEN

IN LEIPZIG

112. BAND

BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1936

EX
BIBLIOTHECA
ACAD. GEORGIAE
AUG.

Z1936.5039

Druck von Friedr. Vieweg & Sohn A.G., Braunschweig
Printed in Germany

Inhalt des einhundertundzwölften Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Seite

Ackermann, W., in Burgsteinfurt. Beiträge zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik 419

Akizuki, Y., in Kyôto (Japan). Eine homomorphe Zuordnung der Elemente der galoisschen Gruppe zu den Elementen einer Untergruppe der Normklassengruppe 566

Baier, O., in München. Zur Theorie der allgemeinen ebenen quadratischen Abbildungen 630

Behnke, H., in Münster (Westf.) und **Peschl, E.,** in Jena. Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Die unbeschrankten Reinhardtschen Körper 433

Boerner, H., in München. Über die Extremalen und geodätischen Felder in der Variationsrechnung der mehrfachen Integrale 187

Bullig, G., in Bonn. Die Berechnung der Grundeinheit in den kubischen Korpern mit negativer Diskriminante 325

Cartwright, M. L., in Cambridge. On the Behaviour of an Analytic Function in the Neighbourhood of its Essential Singularities 161

Doetsch, G., in Freiburg i. B. Integration von Differentialgleichungen vermittels der endlichen Fourier-Transformation 52

Feldheim, E., in Budapest. Sur les probabilités en chaine 775

Finsterwalder, S., in München. Alexander v. Brill. Ein Lebensbild 653

Fitting, H., in Konigsberg i. Pr. Über den Zusammenhang zwischen dem Begriff der Gleichartigkeit zweier Ideale und dem Äquivalenzbegriff der Elementarteilertheorie 572

Friedrichs, K., in Braunschweig. Über die ausgezeichnete Randbedingung in der Spektraltheorie der halbbeschränkten gewöhnlichen Differentialoperatoren zweiter Ordnung 1

Gentzen, G., in Gottingen. Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie . . 493

Haantjes, J., in Delft (Niederlande). Klassifikation der antilinearen Transformationen 98

Haantjes, J., und **Schouten, J. A.,** in Delft (Niederlande). Beiträge zur allgemeinen (gekrümmten) konformen Differentialgeometrie 594

Hecke, E., in Hamburg. Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung 664

Iglisch, R., in Kiel. Die erste Resonanzkurve beim Duffingschen Schwingungsproblem 221

Kaufmann, B., in Leeds (England). Der lokale Dimensionsbegriff 107

Kleene, S. C., in Madison (Wis., U.S.A.). General recursive functions of natural numbers 727

Klein-Barmen, F., in Wuppertal. Über ausgeglichene Verbande 411

Kolmogoroff, A., in Moskau. Zur Theorie der Markoffschen Ketten 155

Seite

Koppenfels, W. v., in Hannover. Beitrag zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten 24

Korselt, A., in Plauen i. V. Vollständige Lösung einer neuen diophantischen Aufgabe 395

Lense, J., in München. Über Kurven mit isotropen Normalen 139

Meijer, C. S., in Groningen (Niederlande). Neue Integraldarstellungen aus der Theorie der Whittakerschen und Hankelschen Funktionen 469

Nagel, H., in Frankfurt (Main). Über die aus quadrierbaren Hermiteschen Matrizen entstehenden Operatoren 247

Nagy, B. v. Sz., in Szeged (Ungarn). Über meßbare Darstellungen Liescher Gruppen 286

Nakayama, T., in Osaka (Japan). Über die Beziehungen zwischen den Faktorensystemen und der Normklassengruppe eines galoisschen Erweiterungskörpers 85

Peschl, E., in Jena und **Behnke, H.,** in Münster (Westf.), Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Die unbeschrankten Reinhardtschen Körper 433

Pylarinos, O., in Saloniki (Griechenland). Sur les systèmes de surfaces triples orthogonaux 767

Reidemeister, K., in Marburg. Automorphismen von Homotopieketten-ringen . . 586

Rellich, F., in Marburg. Zur Konstruktion der Grundlosung für eine gemischte Randwertaufgabe einer partiellen Differentialgleichung hoherer Ordnung . . 490

Richter, H., in Leipzig. Über die Lösbarkeit einiger nicht-Abelscher Einbettungsprobleme 69

Richter, H., in Leipzig. Über die Lösbarkeit des Einbettungsproblems für Abelsche Zahlkorper 700

Scherk, P., in Prag. Über reelle geschlossene Raumkurven vierter Ordnung . . 743

Schilling, F., in Danzig-Oliva. Die Erzeugung der geodätischen Linien und Kreise einer Fläche konstanter Krümmung durch Aufwickeln geradliniger oder kreisförmiger Flächenstreifen 297

Schmidt, H., in Kothen und Leipzig. Bemerkung zur Statik der Kreisplatte . . 322

Schouten, J. A., und **Haantjes, J.,** in Delft (Niederlande). Beiträge zur allgemeinen (gekrümmten) konformen Differentialgeometrie 594

Smid, L. J., in Warffum (Niederlande). Eine absolute Axiomatik der Geometrie in einer begrenzten Ebene 125

Tchounikhin, S., in Moskau. Über einige Sätze der Gruppentheorie 92

Tchounikhin, S., in Moskau. Über einfache Gruppen 95

Tchounikhin, S., in Moskau. Über eine obere Grenze für die Ordnungen der Elemente einer endlichen Gruppe ohne Zentrum 583

Wagner, K., in Koln. Zwei Bemerkungen über Komplexe 316

Internationaler Mathematiker-Kongreß, Oslo, 13. bis 18. Juli 1936 652

Über die ausgezeichnete Randbedingung in der Spektraltheorie der halbbeschränkten gewöhnlichen Differentialoperatoren zweiter Ordnung.

Von

Kurt Friedrichs in Braunschweig.

In der Spektraltheorie von Differentialoperatoren ist es eine Hauptaufgabe, für die Funktionen, auf die der Operator anwendbar sein soll, die zulässigen Randbedingungen richtig zu formulieren. Zulässig ist eine Randbedingung dann, wenn sie den Anwendungsbereich des Operators so einschränkt, daß er genau eine Spektralzerlegung besitzt.

Der Operator L sei auf Funktionen $f(x)$ anwendbar, die in einem Grundgebiet $X^- < x < X^+$ erklärt sind; wo auch $X^+ = \infty$ und $X^- = -\infty$ sein kann. Er werde durch zwei Koeffizienten $p(x) > 0$ und $q(x)$ gegeben und erzeuge aus $f(x)$ die Funktion

$$L f(x) = -\frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} f(x) + q(x) f(x).$$

Die entscheidenden Erkenntnisse über die zulässigen Randbedingungen verdankt man H. Weyl [1], [2], [3]. Weyl zeigt (allerdings nur für den Fall der Grundgebiete $0 < x < \infty$ und $-\infty < x < \infty$), daß man von den Funktionen $f(x)$ vorerst verlangen muß, daß

$$\int_{X^-}^{X^+} f^2(x)\, dx \quad \text{und} \quad \int_{X^-}^{X^+} (L f(x))^2\, dx$$

existieren. Über die zulässigen Randbedingungen gibt alsdann die Alternative Auskunft, die Weyl zunächst für den Fall formuliert, daß X^- regulärer Endpunkt ist, d. h. daß $X^- > -\infty$, p, q bei $x = X^-$ stetig, $p(X^-) \neq 0$ ist. Wird dann bei $x = X^-$ irgendeine Randbedingung aus der linearen Schar $a\, p \frac{df}{dx} + b f = 0$ gestellt, so können je nach dem Verlauf von p und q für $x \to X^+$ zwei Fälle eintreten.

I. Entweder: Der Operator L ist spektralzerlegbar, ohne daß eine zusätzliche Randbedingung bei $x = X^+$ zu stellen ist (Grenzpunktfall).

II. Oder: Es gibt eine lineare Schar von Randbedingungen für die Funktionen $f(x)$ bei $x = X^+$, von denen jede zulässig ist (Grenzkreisfall).

Bevor man die Spektralzerlegung des Operators L untersuchen kann, wird man also zu entscheiden haben, welcher Fall der Alternative vorliegt.

Bei den klassischen Differentialoperatoren von Legendre, Bessel, Laguerre, Schrödinger zeigt sich nun, daß beim „Grundproblem" Fall II, bei den „Oberproblemen" Fall I vorliegt. Beim Grundproblem ist also unter der Schar zulässiger Randbedingungen noch eine auszuzeichnen. Diese Tatsache legt es nahe zu fragen[1]), ob es nicht möglich ist, von vornherein eine Randbedingung anzugeben, die im Falle I von selbst erfüllt ist, im Falle II mit der ausgezeichneten zusammenfällt. Dann könnte man sich die Mühe sparen, die Alternative zu entscheiden.

Das ist in der Tat möglich, wenn der Operator nach unten halbbeschränkt ist. Wir werden in diesem Fall ohne Bezug auf die Alternative eine zulässige Randbedingung angeben, die, wie sich zeigt, im Falle II der Alternative gegen die anderen zulässigen Randbedingungen in mehrfacher Hinsicht ausgezeichnet ist. Diese Randbedingung lautet besonders einfach, wenn der Koeffizient $q(x)$ nach unten beschränkt ist[2]). Dann fordert sie nämlich, daß neben

$$\int_{X^-}^{X^+} f^2\,dx, \qquad \int_{X^-}^{X^+} (Lf)^2\,dx$$

noch das Integral

$$\int_{X^-}^{X^+} \left\{ p\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + q f^2 \right\} dx$$

existiert; überdies soll noch $f(x)$ am Endpunkte X^+ bzw. X^- verschwinden, wenn $\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{p(x)}$ bei $x \to X^+$ bzw. $x \to X^-$ endlich bleibt ($X^- < x_0 < X^+$). In dieser Fassung läßt sich in der Tat auch für die genannten klassischen Differentialoperatoren, da bei ihnen q nach unten beschränkt ist[2]), das Spektralproblem in einheitlicher Weise richtig ansetzen.

Weyl stützt sich bei seiner Untersuchung auf die Hilbertsche Theorie der beschränkten Operatoren und muß zunächst, da L nicht beschränkt ist, explicite den beschränkten Operator $\frac{1}{L+i}$ konstruieren. Dagegen hat M. H. Stone [1] Ch. X den Differentialoperator unmittelbar der Theorie der nicht beschränkten Operatoren eingeordnet, die v. Neumann [1] und er entwickelt haben; zugleich hat er die Alternative von Weyl auf neue und allgemeinere Weise formuliert und bewiesen.

---

[1]) Diesen Hinweis verdanke ich Fr. Hund.

[2]) Oder am Rande nicht zu stark negativ unendlich wird. Vgl. § 5.

Hier schließe ich mich zunächst (§ 1) dem Ansatz von Stone an und untersuche sodann (§§ 2, 3, 5), ohne Bezug auf die Alternative, die ausgezeichnete Randbedingung. Um sie als zulässig zu erweisen (§ 4) und ihre ausgezeichnete Rolle zu klären (§ 6), berufe ich mich auf Begriffe und Sätze über halbbeschränkte Operatoren aus dem 1. Teil einer früheren Arbeit [1]. Wesentlich stütze ich mich noch auf eine Reihe von Integralungleichungen, die im Anhang zusammengestellt sind.

Die Schlußweise, die zur Theorie der ausgezeichneten Randbedingung herangezogen wird, macht keinen wesentlichen Gebrauch davon, daß die Funktionen nur von einer Veränderlichen abhängen; sie ließe sich weitgehend auf partielle Differentialoperatoren übertragen. Für einige Sonderfälle wurde das in Teil II der genannten Arbeit [2] [3] durchgeführt; ihr gegenüber besitzt die vorliegende Arbeit noch einen vereinfachten Aufbau der Beweisführung.

Literatur.

Carleman, T.
[1] Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique (1923).
Friedrichs, K.
Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren. Math. Annalen (1934).
[1] Teil I **109**, S. 466. — [2] Teil II **109**, S. 688. — [3] Berichtigung **110**, S. 777.
v. Neumann
[1] Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren. Math. Annalen **102** (1929), S. 50.
Stone, M. H.
[1] Linear Transformations in Hilbert Space. Am. Math. Soc. Coll. Publ. Vol. XV (1932).
Weyl, H.
Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen. Gött. Nachr.
[1] 1. Note (1909), S. 37. — [2] 2. Note (1910), S. 442.
[3] Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen. Math. Annalen **68** (1910), S. 220.

§ 1.

Der Funktionenraum.

Die auftretenden Funktionen seien stets in einem Grundgebiet $X^- < x < X^+$ erklärt; x_0 sei eine feste Stelle im Innern.

Mit $h(x)$ bezeichnen wir Funktionen, die über jedes innere Intervall[3]) quadratisch nach x L-integrierbar sind; mit $[h]$ ihre Gesamtheit. Mit $\mathfrak{H}$ bezeichnen wir den Raum der über das gesamte Grundgebiet

[3]) Das Intervall (x^-, x^+) heiße ein inneres, wenn $x^- > X^-$, $x^+ < X^+$ ist.

quadratisch L-integrierbaren Funktionen h; bekanntlich bildet $\mathfrak{H}$ einen reellen Hilbertschen Raum (v. Neumann [1]) mit dem inneren Produkt

$$(h_1, h_2) = \int_{X^-}^{X^+} h_1 h_2 \, dx.$$

Es sei $p(x)$ eine positive stetige Funktion; wir verwenden die Abkürzung

$$y = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{p(x')};$$

Werte von y an gekennzeichneten Stellen x kennzeichnen wir entsprechend; z. B.

$$Y^+ = \int_{x_0}^{X^+} \frac{dx}{p}, \qquad Y^- = \int_{x_0}^{X^-} \frac{dx}{p}.$$

Mit $g(x)$ bezeichnen wir stetige Funktionen von x, die eine Derivierte $\frac{dg}{dx}$ besitzen, für welche über jedes innere Intervall (x^-, x^+)

$$\int_{x^-}^{x^+} p \left(\frac{dg}{dx}\right)^2 dx = \int_{y^-}^{y^+} \left(\frac{dg}{dy}\right)^2 dy$$

existiert; die Gesamtheit dieser $g(x)$ heiße $[g]$.

Mit $f(x)$ bezeichnen wir die mit stetigen ersten Ableitungen versehenen Funktionen, die eine zweite Derivierte $\frac{d}{dx} p \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{df}{dy}$ besitzen, die über innere Intervalle quadratisch L-integrierbar ist, also zu $[h]$ gehört; ihre Gesamtheit heiße $[f]$.

Es sei $q(x)$ eine stetige Funktion. Dann definieren wir den Operator L durch

$$L = -\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} + q = -\frac{d}{dx}\frac{d}{dy} + q.$$

Er erzeugt aus der Funktion f von $[f]$ die Funktion

$$Lf = -\frac{d}{dx} p \frac{df}{dx} + qf = -\frac{d}{dx}\frac{df}{dy} + qf$$

aus $[h]$.

Es gilt mit innerem Intervall (x^-, x^+) für f aus $[f]$, g aus $[g]$:

$$\int_{x^-}^{x^+} g L f \, dx = \int_{y^-}^{y^+} \frac{dg}{dy}\frac{df}{dy} \, dy - g \frac{df}{dy}\Big|_{x^-}^{x^+}, \tag{1.1}$$

und für f_1, f_2 aus $[f]$:

$$\int_{x^-}^{x^+} \{f_1 L f_2 - L f_1 \cdot f_2\} \, dx = f_1 \frac{df_2}{dy} - \frac{df_1}{dy} f_2 \Big|_{x^-}^{x^+}. \tag{1.2}$$

Mit $\mathring{\mathfrak{F}}$ bezeichnen wir den Raum aller Funktionen f aus $[f]$, die in $\mathfrak{H}$ liegen und aus denen der Operator L eine Funktion aus $\mathfrak{H}$ erzeugt; für f aus $\mathring{\mathfrak{F}}$ gilt also

$$\Omega \qquad \int_{X^-}^{X^+} f^2\,dx < \infty \quad \text{und} \quad \int_{X^-}^{X^+} (Lf)^2\,dx < \infty.$$

Liegen f_1, f_2 in $\mathring{\mathfrak{F}}$, so existiert in (1.2) der Grenzwert der linken, also auch der rechten Seite für $x^+ \to X^+$ und für $x^- \to X^-$. Die Grenzwerte von $f_1 \frac{df_2}{dy}\Big|^z$ für $x \to X^+$ bzw. X^- und ihre Differenz bezeichnen wir mit $f_1 \frac{df_2}{dy}\Big|^{X^+}$ bzw. $f_1 \frac{df_2}{dy}\Big|_{X^-}$ und $f_1 \frac{df_2}{dy}\Big|_{X^-}^{X^+}$.

Die Aufgabe ist nun, aus $\mathring{\mathfrak{F}}$ solche Teilräume $\mathfrak{F}$ auszuwählen, in denen der Operator L selbstadjungiert (hypermaximal)[4] ist; denn dann ist er nach der Theorie von v. Neumann [1] und Stone [1] Ch. V. spektralzerlegbar. Der Operator L heißt in einem Raume $\mathfrak{F}$ selbstadjungiert (der Deutlichkeit halber auch „überhaupt selbstadjungiert"), wenn er die folgenden zwei Eigenschaften besitzt.

1. Für alle f_1, f_2 aus $\mathfrak{F}$ gilt

$$(1.4) \qquad \int_{X^-}^{X^+} \{f_1 L f_2 - L f_1 \cdot f_2\}\,dx = 0. \qquad \text{(Symmetrie).}$$

1*. Besteht für ein Paar h_0, h_1 aus $\mathfrak{H}$ die Relation

$$(1.4)^* \qquad \int_{X^-}^{X^+} \{f h_1 - L f \cdot h_0\}\,dx = 0$$

mit allen f aus $\mathfrak{F}$, so liegt h_0 in $\mathfrak{F}$ und es ist $L h_0 = h_1$.

Es empfiehlt sich, diese Forderungen zu zerspalten in solche, die sich auf das Innere und solche, die sich auf den Rand des Grundgebietes beziehen.

Wir führen den Raum $\mathring{\mathfrak{F}}$ aller Funktionen f ein, zu denen es ein inneres Intervall gibt, außerhalb dessen sie identisch verschwinden[5]. Dann gilt

Satz 1.1. *Die Relation* (1.4) *ist für* f_1, f_2 *aus* $\mathring{\mathfrak{F}}$ *erfüllt.*

Satz 1.1*. *Besteht für ein Paar* h_0, h_1 *aus* $\mathfrak{H}$ *Relation* $(1.4)^*$ *mit allen* f *aus* $\mathring{\mathfrak{F}}$, *so liegt* h_0 *in* $\mathring{\mathfrak{F}}$ *und es ist* $L h_0 = h_1$.

Die beiden Eigenschaften, die in diesen beiden Sätzen behauptet sind, wollen wir auch mit „selbstadjungiert im Innern" bezeichnen. Satz 1.1 folgt sofort aus (1.2); zum Beweise von Satz 1.1* vgl. Stone[6].

---

[4]) Vgl. v. Neumann [1], Stone [1] Def. 2.11, p. 50.

[5]) Stone führt nicht $\mathring{\mathfrak{F}}$, sondern den $\mathring{\mathfrak{F}}$ enthaltenden Raum $\mathring{\mathfrak{F}}^*$ aller f aus $\mathring{\mathfrak{F}}$ ein, für die $(1.5)^*$ mit allen f_0 aus $\mathring{\mathfrak{F}}$ gilt. [1] Th. 10.11, p. 458.

[6]) [1] Th. 10.11, p. 458. Stone beweist mehr: Der Operator L in $\mathring{\mathfrak{F}}$ ist adjungiert zu L in $\mathring{\mathfrak{F}}^*$. Vgl. [5]).

Damit der Operator L in einem Raume $\mathfrak{F}$, der $\mathring{\mathfrak{F}}$ enthalte, überhaupt selbstadjungiert ist, muß er noch die folgenden beiden Eigenschaften besitzen, die wir auch mit „selbstadjungiert am Rande" bezeichnen.

2. Für f_1, f_2 aus $\mathfrak{F}$ ist

$$f_1 \frac{d f_2}{d y} - \frac{d f_1}{d y} f_2 \Big|_{X^-}^{X^+} = 0. \quad \text{(„Symmetrie am Rande").} \tag{1.5}$$

2*. Gilt für ein f_0 aus $\mathfrak{F}$ Relation

$$f \frac{d f_0}{d y} - \frac{d f}{d y} f_0 \Big|_{X^-}^{X^+} = 0 \tag{1.5*}$$

mit allen f aus $\mathfrak{F}$, so liegt f_0 in $\mathfrak{F}$.

Man prüft sofort nach

Satz 1.2. *Ist der Operator L in $\mathfrak{F}$ selbstadjungiert am Rande, so überhaupt.*

Denn aus (1.5) und (1.2) folgt (1.4). Aus (1.4)* folgt nach Satz 1.1* zunächst, daß h_0 in $\mathring{\mathfrak{F}}$ liegt mit $L h_0 = h_1$; aus (1.2) folgt dann (1.5)* für $f_0 = h_0$, so daß also h_0 auch in $\mathfrak{F}$ liegt.

Von dem Raume $\mathfrak{F}$, den wir im folgenden angeben, werden wir zunächst nachweisen, daß in ihm der Operator L symmetrisch ist; (d. h., daß 2. und also 1. gilt). Sodann werden wir unter Benutzung von Satz 1.1* die Eigenschaft 1* und also die Selbstadjungiertheit von L in $\mathfrak{F}$ unmittelbar nachprüfen können[6a]).

§ 2.

Der Raum $\mathfrak{G}$.

Die ausgezeichnete Randbedingung werden wir zunächst explicite angeben unter der Voraussetzung, daß der Koeffizient q vermöge

$$q(x) \geqq \underline{q} \tag{2.0}$$

durch eine Konstante $\underline{q}$ nach unten beschränkt ist. Wir führen dann vorbereitend einen Raum $\mathfrak{G}$ von Funktionen g ein und stellen seine Eigenschaften zusammen. Es ist bequem, die Eigenschaften, die $\mathfrak{G}$ kennzeichnen, aufzuspalten in solche, die sich auf je einen Endpunkt beziehen. Wir nennen $\mathfrak{G}^+$ die Mannigfaltigkeit der Funktionen $g(x)$ aus $[g]$, die den folgenden beiden Bedingungen genügen.

A^+: Es existieren die Integrale

$$\int_{x_0}^{X^+} p \left(\frac{d g}{d x}\right)^2 d x = \int_{0}^{Y^+} \left(\frac{d g}{d y}\right)^2 d y, \quad \int_{x_0}^{X^+} q g^2 d x, \quad \int_{x_0}^{X^+} g^2 d x.$$

[6a]) Satz 1.2 und Eigenschaft 2* werden also im folgenden nicht ausdrücklich herangezogen; sie dienen hier nur der Klärung des Begriffes selbstadjungiert.

B^+: Wenn $\int_{x_0}^{X^+} \frac{dx}{p(x)} = Y^+ < \infty$ ist, so strebt

$$g(x) \to 0$$

wenigstens auf einer speziellen Folge $x \to X^+$, was wir hier und analog im folgenden durch

$$g(x) \underset{x \to X^+}{\to} 0$$

ausdrücken wollen.

Aus Anhang Satz A 1 entnimmt man, daß dann auch $g(x) \to 0$ strebt für jede Folge $x \to X^+$. Man überzeugt sich alsdann davon, daß $\mathfrak{G}^+$ ein linearer Raum ist.

Entsprechend definieren wir den linearen Raum $\mathfrak{G}^-$ von Funktionen $g(x)$ durch

A^-: $$\int_{Y^-}^{x_0} \left(\frac{dg}{dy}\right)^2 dy < \infty, \quad \int_{X^-}^{x_0} q g^2 dx < \infty, \quad \int_{X^-}^{x_0} g^2 dx < \infty,$$

B^-: $$g(x) \underset{x \to X^-}{\to} 0, \quad \text{wenn} \quad Y^- > -\infty \text{ ist.}$$

Unter $\mathfrak{G}$ wird dann der Raum aller $g(x)$ aus $[g]$ verstanden, die den Forderungen A^+, B^+, A^-, B^- genügen, d. h. der Durchschnitt

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^+ \mathfrak{G}^-;$$

$\mathfrak{G}$ liegt offenbar in $\mathfrak{H}$.

Wir wählen eine Zahl $k \geqq 1 - \underline{q}$, die dann festgehalten wird. Für Funktionen g_1, g_2 aus $\mathfrak{G}$ ist die Form

$$g_1 G g_2 = \int_{Y^-}^{Y^+} \frac{dg_1}{dy} \frac{dg_2}{dy} dy + \int_{X^-}^{X^+} (q + k) g_1 g_2 dx \tag{2.1}$$

erklärt, und es gilt für g aus $\mathfrak{G}$

$$g G g \geqq \int_{Y^-}^{Y^+} \left(\frac{dg}{dy}\right)^2 dy + \int_{X^-}^{X^+} g^2 dx. \tag{2.2}$$

Es seien zunächst zwei Eigenschaften des Raumes $\mathfrak{G}^+$ angegeben, die sich auf $\mathfrak{G}^-$ analog übertragen. Ihre Beweise finden sich im Anhang: Sätze A 1. 2. 3.

Satz 2.1. *Im Raume $\mathfrak{G}^+$ existieren die Integrale*

$$\int_0^{Y^+} \frac{g^2}{(Y^+ - y)^2} dy, \quad \textit{wenn} \quad Y^+ < \infty,$$

$$\int_{y_0'}^{Y^+} \frac{g^2}{y^2} dy, \quad \textit{wenn} \quad Y^+ = \infty \textit{ ist mit } y_0' > 0. \tag{2.3}$$

Satz 2.2. *Im Raume* $\mathfrak{G}^+$ *gilt für* $x \to X^+$

$$\frac{g(x)}{Y^+ - y} \to 0, \quad \textit{wenn} \quad Y^+ < \infty, \tag{2.4}$$

$$\frac{g(x)}{y} \to 0, \quad \textit{wenn} \quad Y^+ = \infty \textit{ ist.}$$

Ferner besteht

Satz 2.3. *Der Raum* $\dot{\mathfrak{G}}$ *aller Funktionen* g *aus* $[g]$, *zu denen es innere Intervalle gibt, außerhalb deren sie verschwinden, liegt* G*-dicht in* $\mathfrak{G}$. *D. h. zu jedem* g *aus* $\mathfrak{G}$ *gibt es ein* $\dot{g}$ *aus* $\dot{\mathfrak{G}}$, *so daß*

$$(g - \dot{g})\, G\, (g - \dot{g}) \tag{2.5}$$

beliebig klein ist.

Beweis[7]): Mit Werten $x_2 > x_1 > x_0$, $x_{-2} < x_{-1} < x_0$ setzen wir

$$\begin{aligned}
\eta(x) &= 0 && \text{in} && x_{-1} \leqq x \leqq x_1,\\
&= \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} && \text{in} && x_1 \leqq x \leqq x_2,\\
&= \frac{y - y_{-1}}{y_{-2} - y_{-1}} && \text{in} && x_{-2} \leqq x \leqq x_{-1},\\
&= 1 && \text{in} && x_2 \leqq x < X^+ \quad \text{und} \quad X^- < x \leqq x_{-2}.
\end{aligned}$$

Dann genügt

$$\dot{g} = (1 - \eta)\, g$$

den Forderungen des Satzes. Es ist nämlich, wie man nachrechnet,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{Y^+} \left(\frac{d\,\eta g}{d\,y}\right)^2 d\,y + \int_{x_0}^{X^+} (q + k)\,\eta^2 g^2\, d\,x\\
&= \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{d\,\eta g}{d\,y}\right)^2 d\,y + \int_{y_2}^{Y^+} \left(\frac{d\,g}{d\,y}\right)^2 d\,y + \int_{x_1}^{X^+} (q + k)\,\eta^2 g^2\, d\,x\\
&= \frac{g^2(x_2)}{y_2 - y_1} + \int_{y_1}^{y_2} \eta^2 \left(\frac{d\,g}{d\,y}\right)^2 d\,y + \int_{y_2}^{Y^+} \left(\frac{d\,g}{d\,y}\right)^2 d\,y + \int_{x_1}^{X^+} (q + k)\,\eta^2 g^2\, d\,x\\
&\leqq \frac{g^2(x_2)}{y_2 - y_1} + \int_{y_1}^{Y^+} \left(\frac{d\,g}{d\,y}\right)^2 d\,y + \int_{x_1}^{X^+} (q + k)\, g^2\, d\,x.
\end{aligned}$$

Man bestimme nun zunächst x_1 so nahe an X^+, daß die beiden Integrale rechts beliebig klein werden. Sodann kann man x_2 so wählen, daß $\frac{g^2(x_2)}{y_2 - y_1}$ beliebig klein wird; ist $Y^+ < \infty$, so lasse man zu dem Zwecke $x_2 \to X^+$ die spezielle Folge durchlaufen, auf der $g(x_2) \to 0$ strebt; ist

[7]) Vgl. Friedrichs [3].

$Y^+ = \infty$, so stütze man sich auf Satz 2. 2. Also läßt sich auch die linke Seite beliebig klein machen; ebenso macht man

$$\int_{Y^-}^{0} \left(\frac{d\,\eta\,g}{d\,y}\right)^2 d\,y + \int_{X^-}^{x_0} (q+k)\,\eta^2\,g^2\,d\,x$$

beliebig klein. Damit ist Satz 2. 3 bewiesen.

Satz 2. 4. *Der Raum* $\mathfrak{G}$ *ist G-abgeschlossen. D. h. zu einer Folge* $g^\nu(x)$ *von Funktionen aus* $\mathfrak{G}$ *für die*

$$(g^\nu - g^\mu)\,G\,(g^\nu - g^\mu) \underset{\nu,\,\mu\to\infty}{\to} 0 \tag{2. 6}$$

strebt, gibt es eine Funktion $g_0(x)$ *aus* $\mathfrak{G}$, *so daß gilt*

$$(g^\nu - g_0)\,G\,(g^\nu - g_0) \underset{\nu\to\infty}{\to} 0\,. \tag{2. 7}$$

Beweis. Wegen der Konvergenz von $\int_{Y^-}^{Y^-} \left(\frac{d\,(g^\nu - g^\mu)}{d\,y}\right)^2 d\,y \underset{\nu,\,\mu\to\infty}{\to} 0$ gibt es, dem Satze von Fischer gemäß, eine Funktion $g_0(x)$, für die $\int_{Y^-}^{Y^-} \left(\frac{d\,g_0}{d\,y}\right)^2 d\,y$ existiert, so daß $\int_{Y^-}^{Y^-} \left(\frac{d\,(g^\nu - g_0)}{d\,y}\right)^2 d\,y \to 0$ strebt; und zwar kann $g_0(x)$ so gewählt werden, daß $g(x)$ in jedem Teilgebiet gleichmäßig gegen $g_0(x)$ konvergiert, wie man aus der Abschätzung

$$|g(x_1) - g(x_2)|^2 \leqq (y_2 - y_1) \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{d\,g}{d\,y}\right)^2 d\,y,$$

auf $g = g^\nu - g^\mu$ angewandt, erschließt. Aus der Konvergenz von $\int_{X^-}^{X^+} (q+k)\,(g^\nu - g^\mu)^2\,d\,x \underset{\nu,\,\mu\to\infty}{\to} 0$ folgt, daß $\int_{X^-}^{X^+} q\,g_0^2\,d\,x$ und $\int_{X^-}^{X^+} g_0^2\,d\,x$ existieren (beachte $q + k \geqq 1$), daß $\int_{X^-}^{X^-} q\,(g^\nu - g_0)^2\,d\,x \underset{\nu\to\infty}{\to} 0$, $\int_{X^-}^{X^+} (g^\nu - g_0)^2\,d\,x \underset{\nu\to\infty}{\to} 0$ streben und daß also (2. 7) besteht. Ist $Y^+ < \infty$, so beachte man, daß die Relation

$$\frac{g^2(x^+)}{Y^+ - y^+} \leqq 2 \int_{y^+}^{Y^+} \left(\frac{d\,g}{d\,y}\right)^2 d\,y, \quad 0 \leqq y^+ < Y^+, \quad Y^+ < \infty,$$

die nach Anhang Satz 1 für alle g aus $\mathfrak{G}$ und also für die g^ν besteht, sich durch Grenzübergang auf $g_0(x)$ überträgt; somit folgt $\frac{g_0(x)}{Y^+ - y} \to 0$,

also erst recht $g_0(x) \to 0$ für $x \to X^+$. Ebenso zeigt man $g_0(x) \underset{x \to X^-}{\to} 0$, wenn $Y^+ > -\infty$ ist. Es liegt also $g_0(x)$ in $\mathfrak{G}$. Damit ist Satz 2.4 bewiesen.

§ 3.

Symmetrie im Raume $\mathring{\mathfrak{F}}\mathfrak{G}$ und Folgerungen.

Die ausgezeichnete Randbedingung besteht nun in der Forderung, daß die Funktion f aus $\mathring{\mathfrak{F}}$ auch noch im Raume $\mathfrak{G}$ liegen soll; wir werden in § 4 zeigen, daß der Operator L im Raume aller solchen Funktionen f, also im Durchschnitt

$$\mathfrak{F} = \mathring{\mathfrak{F}}\mathfrak{G}$$

selbstadjungiert ist. In diesem § 3 beschäftigen wir uns mit der Symmetrie von L in $\mathfrak{F}$ und ziehen aus ihr einige Konsequenzen. Wir zeigen zunächst, daß die Relation

$$(3.0)^+ \quad \int_{x^-}^{X^+} g\,L f\,dx - g\,\frac{df}{dx}\Big|^{X^-} = \int_{y^+}^{Y^+} \frac{dg}{dy}\,\frac{df}{dy}\,dy + \int_{x^+}^{X^-} q\,g\,f\,dx,\ x_0 \leqq x^+ < X^+,$$

für alle Funktionen f aus $\mathring{\mathfrak{F}}\,\mathfrak{G}^+$ und g aus $\mathfrak{G}^+$ besteht. Zu dem Zwecke stützen wir uns auf den

Hilfssatz: Für ein Paar von Funktionen g aus $\mathfrak{G}^+$, f aus $\mathring{\mathfrak{F}}\,\mathfrak{G}^+$ gilt

$$g\,\frac{df}{dy}\Big|^x \underset{x \to X^-}{\to} 0.$$

Beweis: Wir setzen

$$\mu(x) = \frac{1}{y} \qquad \text{für } Y^+ = \infty$$

$$\mu(x) = \frac{1}{Y^+ - y} \quad \text{für } Y^+ < \infty.$$

Da $\int_{y_0'}^{Y^+} \mu\,dy = \infty$ wird, $(y_0' > 0)$, gibt es ein $M > 0$ und zwei Folgen $x' \to X^+$, $x'' \to X^+$ mit $x'' > x'$, so daß $\int_{y'}^{y''} \mu\,dy \geqq M$ bleibt. Nun bilde man den Ausdruck

$$\int_{y'}^{y''} \mu\,g\,\frac{df}{dy}\,dy : \int_{y'}^{y''} \mu\,dy.$$

Er stellt offenbar den Wert $g\,\frac{df}{dy}\Big|^{\bar{x}}$ von $g\,\frac{df}{dy}$ an einer Stelle $\bar{x}$ zwischen x' und x'' dar und läßt sich absolut abschätzen durch

$$\Big|g\,\frac{df}{dy}\Big|^{\bar{x}} \leqq \frac{1}{M}\sqrt{\int_{y'}^{y''} \mu^2 g^2\,dy}\ \sqrt{\int_{y'}^{y''} \Big(\frac{df}{dy}\Big)^2 dy}.$$

Hier strebt nun die rechte Seite gegen Null mit $x', x'' \to X^+$. Denn es existiert $\int_{y_0}^{Y^+} \left(\frac{df}{dy}\right)^2 dy$ und nach Satz 2.1 auch $\int_{y_0}^{Y^+} \mu^2 g^2 dy$. Somit folgt für die spezielle Folge $\bar{x} \to X^+$ die Behauptung des Hilfssatzes: $g \frac{df}{dy}\Big|^{\bar{x}} \to 0$.

Wir ziehen nun zum Beweise der Formel $(3.0)^+$ die Identität

$$\int_{x^-}^{\bar{x}} g L f \, dx + g \frac{df}{dy}\Big|_{x^-}^{\bar{x}} = \int_{y^-}^{\bar{y}} \frac{dg}{dy} \frac{df}{dy} dy + \int_{x^-}^{\bar{x}} q g f \, dx$$

heran, die nach (1.2) sicher für g aus $\mathfrak{G}^-$ und f aus $\mathring{\mathfrak{F}}\mathfrak{G}^+$ besteht. Läßt man hier $\bar{x} \to X^-$ nach dem Hilfssatze eine solche Folge durchlaufen, daß $g \frac{df}{dy}\Big|^{\bar{x}} \to 0$ strebt, und beachtet man, daß alle drei Integrale dieser Identität für $\bar{x} \to X^-$ existieren, so entsteht die zu beweisende Greensche Formel $(3.0)^+$.

Aus dieser Formel folgt nun, daß für jede Folge $x^- \to X^+$ auch $g \frac{df}{dy}\Big|^{x^+} \to 0$ strebt, kurz, daß $g \frac{df}{dy}\Big|^{X^+} = 0$ gilt. Setzt man hier für f und g zwei Funktionen f_1, f_2 aus $\mathring{\mathfrak{F}}\mathfrak{G}^+$, vertauscht und subtrahiert, so folgt

Satz 3.1^+. *Für zwei Funktionen f_1, f_2 aus $\mathfrak{G}^+ \mathring{\mathfrak{F}}$ gilt*

$$(3.1)^+ \qquad f_1 \frac{df_2}{dy} - \frac{df_1}{dy} f_2 \Big|^{X^+} = 0.$$

Entsprechendes ergibt sich im Raume $\mathring{\mathfrak{F}}\mathfrak{G}^-$, und da $\mathfrak{F} = \mathring{\mathfrak{F}}\mathfrak{G}$ der Durchschnitt von $\mathring{\mathfrak{F}}\mathfrak{G}^+$ mit $\mathring{\mathfrak{F}}\mathfrak{G}^-$ ist, entspringt die Formel

$$(3.0) \qquad \int_{X^-}^{X^+} g L f \, dx = \int_{Y^-}^{Y^+} \frac{dg}{dy} \frac{dg}{dy} dy + \int_{X^-}^{X^+} q g f \, dx$$

für g aus $\mathfrak{G}$, f aus $\mathring{\mathfrak{F}}\mathfrak{G}$ und der

Satz 3.1. *Für zwei Funktionen f_1, f_2 aus $\mathfrak{G}\mathring{\mathfrak{F}}$ gilt*

$$(3.1) \qquad f_1 \frac{df_2}{dy} - \frac{df_1}{dy} f_2 \Big|_{X^-}^{X^+} = 0.$$

D. h. der Operator L ist in $\mathring{\mathfrak{F}}\mathfrak{G}$ symmetrisch am Rande und also überhaupt. (Vgl. Satz 1.2 oder (3.0)).

Es ist nun bemerkenswert, daß die Bedingung, in $\mathfrak{G}$ zu liegen, die die Forderung A enthält, daß gewisse Integrale existieren, sich für Funktionen f aus $\mathring{\mathfrak{F}}$ auch durch eine Kennzeichnung des Grenzverhaltens der Funktion f für $x \to X^+$ bzw. X^- ersetzen läßt. Es gilt nämlich

Satz 3.2$^+$. *Der Raum* $\mathring{\mathfrak{H}}\,\mathfrak{G}^+$ *besteht aus allen Funktionen* $f(x)$ *aus* $\mathring{\mathfrak{H}}$, *für die gilt*

$$(3.2)^+ \qquad \begin{aligned} &\frac{f(x)}{y} \underset{x \dashrightarrow X^+}{\to} 0 \quad \textit{wenn} \quad Y^+ = \infty \\ &f(x) \underset{x \dashrightarrow X^+}{\to} 0 \quad \textit{wenn} \quad Y^+ < \infty \ \textit{ist.} \end{aligned}$$

Beweis[8]): Diese Randbedingungen sind im Raume $\mathring{\mathfrak{H}}\,\mathfrak{G}^+$ nach Satz 2.2 (sogar mit $\longrightarrow$ statt $\dashrightarrow$) erfüllt. Wir haben nur die Umkehrung zu zeigen: Genügt f aus $\mathring{\mathfrak{H}}$ diesen Bedingungen, so liegt f in $\mathfrak{G}^-$.

Wir nehmen zunächst den Fall $Y^+ < \infty$. Wir gehen aus von der Formel (vgl. (1.1))

$$(\dagger) \qquad \int_{x_0}^{x^-} f(L+k)\,f\,dx + f\,\frac{df}{dy}\Big|_{x_0}^{x^-} = \int_{y_0}^{y^-} \Big(\frac{df}{dy}\Big)^2 dy + \int_{x_0}^{x^+} (q+k)\,f^2\,dx.$$

Aus der Voraussetzung $f(x) \underset{x \dashrightarrow X^+}{\to} 0$ für die Funktion f folgt, daß es auch eine spezielle Folge von Werten $x^- \to X^+$ gibt, für welche die Ableitung $\frac{df^2}{dy}\Big|^{x^+} = 2f\,\frac{df}{dy}\Big|^{x^+}$ nicht positiv ist. Für diese spezielle Folge bleibt die linke Seite der Formel (†) nach oben beschränkt, denn da f und Lf in $\mathfrak{H}$ liegen, existiert $\int_{x_0}^{X^-} f(L+k)\,f\,dx$. Infolgedessen bleiben für diese Folge auch die Integrale der rechten Seite nach oben beschränkt; damit ist aber (beachte $q + k \geqq 1$) gesichert, daß $\int_0^{Y^+} \Big(\frac{df}{dy}\Big)^2 dy$ und $\int_{x_0}^{X^+} q f^2\,dx$ existieren; $\int_{x_0}^{X^+} f^2\,dx$ existiert, da f in $\mathring{\mathfrak{H}}$ liegt; die Bedingung B^+ (vgl. F. 7.) ist in $(3.2)^+$ vorausgesetzt. Also liegt f in $\mathfrak{G}^+$.

Im Falle $Y^+ = \infty$ würde man durch dieselbe Schlußweise unter der Voraussetzung $f(x) \underset{x \dashrightarrow X^+}{\to} 0$ zum Ziele kommen. Um mit der schwächeren Voraussetzung $\frac{f(x)}{y} \underset{x \dashrightarrow X^+}{\to} 0$ auszukommen, gehen wir von der Identität

$$(\downarrow) \qquad \int_{y_0'}^{y^+} \Big(\frac{df}{dy}\Big)^2 dy = \int_{y_0'}^{y^+} y^2 \Big(\frac{d}{dy}\,\frac{f}{y}\Big)^2 dy + \frac{f^2}{y}\Big|_{y_0'}^{y^+}, \quad (y_0' > 0),$$

[8]) Zur Schlußweise vgl. Carleman [1], S. 177.

aus; in Formel (†) eingesetzt entsteht

$$(\S)\qquad \int_{x'_0}^{x^+} f(L+k)f\,dx + \left(f\frac{df}{dy} - \frac{f^2}{y}\right)\Big|_{x'_0}^{x^+} = \int_{y'_0}^{y^+} y^2\left(\frac{d}{dy}\frac{f}{y}\right)^2 dy + \int_{x'_0}^{y^+} (q+k)f^2\,dx.$$

Aus der Voraussetzung, daß $\frac{f}{y} \to 0$ strebt auf wenigstens einer Folge $x \to X^+$, folgt, daß es eine spezielle Folge $x^+ \to X^+$ gibt, wo

$$\frac{d}{dy}\frac{f^2}{y^2} = \frac{2}{y^2}\left[f\frac{df}{dy} - \frac{f^2}{y}\right],$$

also auch $f\frac{df}{dy} - \frac{f^2}{y}$ nicht positiv ist. Infolgedessen bleibt die linke, also auch die rechte Seite von (§) nach oben beschränkt. Es existiert somit $\int_{x'_0}^{X^+} q f^2\,dx$ und $\int_{y'_0}^{\infty} y^2\left(\frac{d}{dy}\frac{f}{y}\right)^2 dy$. Führen wir hier $y_* = -\frac{1}{y}$ mit $Y_*^+ = 0$ als neue Variable, $\frac{f}{y} = f_*$ als neue Funktion ein, so existiert also $\int_{y'_{*0}}^{0}\left(\frac{df_*}{dy_*}\right)^2 dy_*$ und es gilt $f_* \underset{y_* \to 0}{\longrightarrow} 0$. Daraus folgt nach Anhang Satz A 1: $\frac{f_*}{\sqrt{-y_*}} \underset{x \to X^+}{\to} 0$, das heißt $\frac{f^2}{y} \underset{x \to X^+}{\to} 0$. Infolgedessen bleibt in (†) die rechte Seite beschränkt für $x^+ \to X^+$, also auch die linke. Es existiert somit $\int_{y'_0}^{\infty}\left(\frac{df}{dy}\right)^2 dy$. Damit ist gezeigt, daß f in $\mathfrak{G}^+$ liegt, und also ist Satz 3.2$^+$ auch für $Y^+ = \infty$ bewiesen.

Als Folge von Satz 3.2$^+$ gewinnen wir

Satz 3.3$^+$. *Ist*

$$(3.3)^+\qquad \begin{cases} X^+ = \infty, & \text{wenn} \quad Y^+ < \infty, \\ \int_{x'_0}^{X^+} y^2\,dx = \infty, & \text{wenn} \quad Y^+ = \infty, \end{cases}$$

so sind schon im Raume $\mathring{\mathfrak{F}}$ *selbst die Forderungen* A$^+$, B$^+$ *aus* § 2 *erfüllt; d. h. es liegt* $\mathring{\mathfrak{F}}$ *in* $\mathfrak{G}^+$ *und es ist* $\mathring{\mathfrak{F}}\mathfrak{G}^+ = \mathring{\mathfrak{F}}$.

Man beachte, daß die Bedingungen (3.3)$^+$ nicht vom Verlauf von q abhängen, sondern sich nur auf das Verhalten von x und y bzw. p am rechten Endpunkte beziehen.

Aus Satz 3.3$^+$ und 3.1$^+$ folgt dann der

Zusatz 3.4$^+$. Für f_1, f_2 aus $\mathring{\mathfrak{F}}$ besteht, wenn (3.3)$^+$ gilt, die Symmetrierelation am Endpunkte X^+

$$(3.4)^+\qquad f_1\frac{df_2}{dy} - \frac{df_1}{dy}f_2\Big|^{X^+} = 0.$$

Beweis von Satz 3.3$^+$. Wir brauchen nur zu zeigen, daß unter der Bedingung (3.3)$^+$ jede Funktion $f(x)$ aus $\mathring{\mathfrak{F}}$ den Randbedingungen (3.2)$^\tau$: $\frac{f(x)}{y} \to 0$ bzw. $f(x) \to 0$ für $x \to X^+$ genügt; denn dann folgt $\mathring{\mathfrak{F}}$ in $\mathfrak{G}^+$ aus Satz 3.2.

1. Ist $Y^+ = \infty$ und $\int_{x_0'}^{X^+} y^2\,dx = \infty$, so gibt es zur Funktion f aus $\mathring{\mathfrak{F}}$, da $\int_{x_0'}^{X^+} f^2\,dx = \int_{x_0'}^{X^+} \frac{f^2}{y^2}\,y^2\,dx < \infty$ wird, eine spezielle Folge $x \to X^\tau$, für die $\frac{f^2(x)}{y^2} \to 0$ strebt.

2. Ist $Y^\tau < \infty$ und $X^+ = \infty$, so gibt es zur Funktion f aus $\mathring{\mathfrak{F}}$, da $\int_{x^0}^{\infty} f^2\,dx < \infty$ wird, eine spezielle Folge $x \to X^+$, für die $f^2(x) \to 0$ strebt.

Die Sätze 3.3$^\tau$ und 3.4$^+$ besagen, daß es unnötig war, am Ende X^+ die Randbedingungen A$^+$, B$^+$ oder (3.2)$^+$ zu stellen, vorausgesetzt, daß (3.3)$^+$ gilt. Damit gewinnen wir sofort ein von Weyl[9]) angegebenes Kriterium dafür, daß bei X^τ der Grenzpunktfall I der Alternative vorliegt. Um es zu formulieren, werde angenommen, daß durch eine Randbedingung bei X^-, die so beschaffen ist, daß ihr jedenfalls alle Funktionen f aus $\mathring{\mathfrak{F}}$ genügen, die in Umgebung von X^- verschwinden, der Raum $\mathring{\mathfrak{F}}$ zu einem Raume $\mathfrak{F}$ so eingeschränkt sei, daß folgendes gilt:

3. Für f_1, f_2 aus $\mathfrak{F}$ ist

$$f_1 \frac{df_2}{dy} - \frac{df_1}{dy} f_2 \Big|^{X^-} = 0. \tag{3.5}$$

3*. Besteht für ein f_0 aus $\mathring{\mathfrak{F}}$ die Relation

$$f \frac{df_0}{dy} - \frac{df}{dy} f_0 \Big|^{X^-} = 0 \tag{3.5*}$$

mit allen f aus $\mathfrak{F}$, so liegt f_0 in $\mathfrak{F}$.[9a])

Dann lautet das Kriterium von Weyl[9]): *Der Operator L ist im Raume $\mathfrak{F}$ selbstadjungiert, wenn (3.3)$^+$ gilt.*

Sein Beweis entspringt sofort aus Zusatz 3.4$^+$. Aus (3.5) und (3.4)$^+$ folgt nämlich (1.5) für f_1, f_2 aus $\mathfrak{F}$. Aus (1.5)* für f_0 aus $\mathring{\mathfrak{F}}$, alle f aus $\mathfrak{F}$ und (3.4)$^+$ folgt (3.5)*, also: f_0 liegt in $\mathfrak{F}$. D. h. der Operator L ist im Raume $\mathfrak{F}$ am Rande, also überhaupt, selbstadjungiert.

---

[9]) [3] Satz 5, S. 238. Bei Weyl kommt statt (3.3)$^+$ nur $X^\tau = \infty$ vor.

[9a]) Die Eigenschaft, daß 3. und 3*. gilt, könnten wir auch mit „Selbstadjungiertheit am linken Endpunkte X^-“ bezeichnen.

§ 4.

Selbstadjungiertheit im Raume $\mathring{\mathfrak{F}}\,\mathfrak{G}$.

Wir formulieren nun den Hauptsatz unserer Theorie, nämlich daß der Operator L selbstadjungiert ist im Raume aller Funktionen f, die in $\mathring{\mathfrak{F}}$ und $\mathfrak{G}$ liegen, also den Bedingungen Ω, A, B (vgl. §§ 1 und 2) genügen.

Satz 4.1. *Der Operator L ist im Raume $\mathring{\mathfrak{F}}\,\mathfrak{G}$ selbstadjungiert.*

Beweis. Da die Form G, wie in Satz 2.5 ausgesprochen war, im Raume $\mathfrak{G}$ abgeschlossen ist, gehört zu ihr ein selbstadjungierter Operator. Das folgt aus einem an anderer Stelle[10]) bewiesenen Satze, der für unseren Fall folgendes besagt: Es gibt einen Teilraum $\hat{\mathfrak{F}}$ von Funktionen $\hat{f}$ aus $\mathfrak{G}$ (der G-dicht in $\mathfrak{G}$ liegt), in dem ein selbstadjungierter Operator $\hat{G}$ erklärt ist, so daß die Relation

$$(4.1)\qquad \int_{x^-}^{X^+} g\hat{G}\hat{f}\,dx = \int_{Y^-}^{Y^+} \frac{dg}{dy}\frac{d\hat{f}}{dy}\,dy + \int_{X^-}^{X^+} (q+k)\,g\hat{f}\,dx = gG\hat{f}$$

für g aus $\mathfrak{G}$ und $\hat{f}$ aus $\hat{\mathfrak{F}}$ besteht.

Nun folgt sofort, daß $\hat{\mathfrak{F}}$ in $\mathring{\mathfrak{F}}$ liegt. Denn für alle $\hat{f}$ aus $\hat{\mathfrak{F}}$ und alle f aus $\mathring{\mathfrak{F}}$, die ja auch in $\mathfrak{G}$ liegen, folgt aus (4.1) und aus der Symmetrierelation (3.0), die in § 3 bewiesen wurde,

$$\int_{X^-}^{X^+} \dot{f}\cdot\hat{G}\hat{f}\,dx = \int_{X^-}^{X^+} (L+k)\dot{f}\cdot\hat{f}\,dx.$$

Satz 1.1* lehrt dann, daß $\hat{f}$ zu $\mathring{\mathfrak{F}}$ gehört und daß $\hat{G}\hat{f} = (L+k)\hat{f}$ ist.

Der Raum $\hat{\mathfrak{F}}$ liegt also auch im Durchschnitt $\mathfrak{F} = \mathring{\mathfrak{F}}\,\mathfrak{G}$. Es ist somit der in $\mathfrak{F}$ erklärte Operator $L+k$ Fortsetzung des Operators $\hat{G}$ in $\hat{\mathfrak{F}}$; da dieser selbstadjungiert ist, muß $\hat{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}$ sein. Zugleich mit $\hat{G} = L+k$ ist auch L im Raume $\mathfrak{F}$ selbstadjungiert. So ist Satz 4.1 bewiesen.

§ 5.

Abschwächung der Bedingung für q.

Die Voraussetzung, die seit § 3 gemacht wurde, daß der Koeffizient q bei X^+ nach unten beschränkt ist, läßt sich noch etwas abschwächen, was für manche Anwendungen bequem zu benutzen ist. Wir formulieren die Abschwächung nur für die Umgebung des Endpunktes X^+.

---

[10]) Vgl. Friedrichs [1], Sätze 7, 9, S. 478. 480.

Es sei $\omega(x)$ eine positive Funktion, die mit Ableitungen $\frac{d\omega}{dy}$, $\frac{d}{dx}\frac{d\omega}{dy}$ stetig ist, die für $x \leqq x_0$ identisch 1 ist und von einer Stelle $x_0' > x_0$ an gegeben ist durch

$$\omega(x) = \sqrt{y}, \qquad \text{wenn} \quad Y^+ = \infty$$
$$= \sqrt{Y^+ - y}, \quad \text{wenn} \quad Y^+ < \infty \text{ ist.}$$

Wir setzen dann

$$\varkappa(x) = -\frac{1}{\omega}\frac{d}{dx}\frac{d\omega}{dy},$$

also für

$$x_0' \leqq x < X^+$$
$$\varkappa(x) = \frac{p}{4y^2}, \qquad \text{wenn} \quad Y^+ = \infty$$
$$= \frac{p}{4(Y^+ - y)^2}, \quad \text{wenn} \quad Y^+ < \infty \text{ ist;}$$

es sei $\underline{\varkappa}$ die untere Grenze von $\varkappa(x)$ im Grundgebiet; $\underline{\varkappa} > -\infty$. Die abgeschwächte Bedingung für q lautet dann:

Es gibt zu q eine Zahl $\tau > 0$ und eine Konstante $\underline{q}$, so daß

$$q(x) \geqq \underline{q} - (1 - \tau^2)\,\varkappa(x)$$

im Grundgebiet gilt.

Alsdann werde der Raum $\mathfrak{G}^+$ wie in § 2 durch die Forderungen A^+, B^+ erklärt. Dann gilt:

Es gibt eine Konstante k, so daß die durch (2. 1) definierte Form G der Ungleichung (2. 2) genügt, und es übertragen sich die Sätze 2. 1, 2. 2, 2. 3, 2. 4, 3. 1^+ und 4. 1 wörtlich.

Zum Beweise dieser Behauptungen führe man neue Variable, Koeffizienten und Funktionen ein durch die Transformation

$$d\bar{x} = \omega^2\,dx$$
$$\bar{p} = \omega^4 p, \quad \text{also} \quad \omega^2\,d\bar{y} = dy$$
$$\bar{q} = q + \varkappa \quad \text{und} \quad \overline{L} = -\frac{d}{d\bar{x}}\frac{d}{d\bar{y}} + \bar{q}$$
$$h = \omega\bar{h}.$$

Dabei wird, wie man nachrechnet,

$$Lf = \omega\overline{L}\bar{f}.$$

Wegen $\qquad \bar{q} = q + \varkappa \geqq \underline{q} + \tau^2\varkappa \geqq \underline{q} + \tau^2\underline{\varkappa}$

ist die Theorie von §§ 2. 3. 4 anwendbar.

Sie führt zwangsläufig zu den behaupteten Sätzen, wenn man noch beachtet, daß durch die Transformation die Räume $\mathring{\mathfrak{H}}$, $\mathfrak{G}^-$, $\mathfrak{G}^+$ in die Räume $\overline{\mathring{\mathfrak{H}}}$, $\overline{\mathfrak{G}}^-$, $\overline{\mathfrak{G}}^+$ übergehen, die in bezug auf die neuen Variablen und Funktionen im Sinne von § 1 und § 2 erklärt sind. Für $\mathring{\mathfrak{H}}$ und $\mathfrak{G}^-$ ergibt sich das unmittelbar; für $\mathfrak{G}^+$ stütze man sich auf die Sätze $A\,2$ und 3 im Anhang

Es sei noch erwähnt, daß sich auch die Sätze 3.2^+, 3.3^τ, 3.4^+ übertragen, wenn in ihnen ersetzt werden die Bedingungen

$(3.2)^+$ durch

$$\frac{f(x)}{y^{1+\tau}} \underset{x \to X^+}{\to} 0, \quad \text{wenn } Y^+ = \infty,$$

$$\frac{f(x)}{(Y^+ - y)^{1-\tau}} \underset{x \to X^-}{\to} 0, \quad \text{wenn } Y^+ < \infty \text{ ist,}$$

$(3.3)^+$ durch

$$\int_{x_0}^{X^\tau} y^{1+\tau}\, dx = \infty, \quad \text{wenn } Y^+ = \infty,$$

$$\int_{x_0}^{X^-} (Y^+ - y)^{1-\tau}\, dx = \infty, \quad \text{wenn } Y^+ < \infty \text{ ist.}$$

Zum Beweise wird man in derselben Weise wie oben mit ω, mit der Funktion $\omega^{1+\tau}$, wenn $Y^\tau = \infty$, mit $\omega^{1-\tau}$, wenn $Y^\tau < \infty$ ist, transformieren, wobei, wie man nachrechnet, $\bar{q} = q + (1-\tau^2)\varkappa \geqq \underline{q}$ wird. Unmittelbar gehen die obigen Ersatzbedingungen in die Bedingungen $(3.2)^+$, $(3.3)^+$ für die transformierten Größen über.

§ 6.

Der halbbeschränkte Operator und die ausgezeichnete Rolle der Randbedingung.

Der Operator L heißt halbbeschränkt, wenn es eine „untere Schranke" $\underline{\lambda}$ gibt, so daß für alle f aus $\dot{\mathfrak{F}}$ gilt

$$\int_{X^-}^{X^\tau} f L f\, dx = \int_{Y^-}^{Y^\tau} \left(\frac{df}{dy}\right)^2 dy + \int_{X^-}^{X^+} q f^2\, dx \geqq \underline{\lambda} \int_{X^-}^{X^+} f^2\, dx.$$

Offenbar ist L halbbeschränkt, wenn q nach unten beschränkt ist.

Ein solcher halbbeschränkter Operator L läßt sich nun stets von $\dot{\mathfrak{F}}$ aus auf einen weiteren Raum fortsetzen, in dem er selbstadjungiert wird. Wir wollen nun (unter den möglicherweise verschiedenen) eine selbstadjungierte Fortsetzung aufzeigen, die in mehrfacher Weise grundsätzlich ausgezeichnet ist; sie wird, wenn q nach unten beschränkt ist, gerade durch unsere Randbedingung von § 2, § 3 gekennzeichnet.

Unter selbstadjungierter Fortsetzung von L in $\dot{\mathfrak{F}}$ ist ein selbstadjungierter Operator $\tilde{L}$ zu verstehen, in einem Teilraume $\tilde{\mathfrak{F}}$ von $\mathfrak{H}$, der $\dot{\mathfrak{F}}$ enthält, derart erklärt, daß er in $\dot{\mathfrak{F}}$ mit L übereinstimmt. Man überzeugt sich sofort davon, daß ein solcher Raum $\tilde{\mathfrak{F}}$ in $\mathfrak{F}$ liegt und daß in $\tilde{\mathfrak{F}}$ der Operator $\tilde{L}$ mit L übereinstimmt, so daß man von L in $\tilde{\mathfrak{F}}$ sprechen kann.

Denn für $\tilde{f}$ aus $\tilde{\mathfrak{F}}$, $\dot{f}$ aus $\dot{\mathfrak{F}}$ (das also auch zu $\tilde{\mathfrak{F}}$ gehört) gilt wegen der Symmetrie von L in $\tilde{\mathfrak{F}}$ und wegen $\tilde{L}\dot{f} = L\dot{f}$

$$\int_{X^-}^{X^+} (\dot{f}\tilde{L}\tilde{f} - L\dot{f}\cdot\tilde{f})\,dx = 0;$$

daraus folgt nach Satz 1. 1* in der Tat, daß $\tilde{f}$ zu $\dot{\mathfrak{F}}$ gehört und $\tilde{L}\tilde{f} = L\tilde{f}$.

Es sei L in $\tilde{\mathfrak{F}}$ eine solche selbstadjungierte Fortsetzung von L in $\dot{\mathfrak{F}}$; wir nehmen an, daß sie halbbeschränkt ist mit der unteren Schranke $\tilde{\lambda}$:

$$\int_{X^-}^{X^+} \tilde{f} L\tilde{f}\,dx \geqq \tilde{\lambda}\int_{X^-}^{X^+} \tilde{f}^2\,dx \qquad \text{für } \tilde{f} \text{ aus } \tilde{\mathfrak{F}}.$$

Dann gibt es[11]) genau einen Teilraum $\tilde{\mathfrak{G}}$ aus Elementen $\tilde{g}$ von $\mathfrak{H}$ und in ihm eine bilineare Form $\tilde{g}_1\tilde{G}\tilde{g}_2$ mit folgenden Eigenschaften. 1. Es besteht die Ungleichung

$$\tilde{g}\tilde{G}\tilde{g} \geqq \tilde{\lambda}\int_{X^-}^{X^+} \tilde{g}^2\,dx$$

und $\tilde{G}$ ist in $\tilde{\mathfrak{G}}$ abgeschlossen. 2. $\tilde{\mathfrak{G}}$ enthält den Raum $\dot{\mathfrak{F}}$, und zwar dicht mit $\tilde{G}$ als Maßform. 3. $\tilde{G}$ hängt mit dem Operator L in $\tilde{\mathfrak{F}}$ vermöge

$$\tilde{g}\tilde{G}\tilde{f} = \int_{X^-}^{X^+} \tilde{g}L\tilde{f}\,dx$$

für alle $\tilde{g}$ aus $\tilde{\mathfrak{G}}$, $\tilde{f}$ aus $\tilde{\mathfrak{F}}$ zusammen. Wir nennen $\tilde{\mathfrak{G}}$ den zu L in $\tilde{\mathfrak{F}}$ gehörigen $\mathfrak{G}$ Raum und $\tilde{G}$ die zugehörige Form. Umgekehrt gibt es zu einer abgeschlossenen Form $\tilde{G}$ in $\tilde{\mathfrak{G}}$ auch nur einen zugehörigen Raum $\tilde{\mathfrak{F}}$ mit selbstadjungiertem Operator L in $\tilde{\mathfrak{F}}$.

Es existiert nun ein selbstadjungierter Operator L, in einem Raume $\mathfrak{F}_\infty$ erklärt, der Fortsetzung von L in $\dot{\mathfrak{F}}$ und durch jede der drei folgenden Eigenschaften gekennzeichnet ist; (d. h. er besitzt alle drei Eigenschaften und ist der einzige, der irgendeine dieser Eigenschaften besitzt). Dabei sei $\mathfrak{G}_\infty$ der zu L in $\mathfrak{F}_\infty$ gehörige $\mathfrak{G}$-Raum und G_∞ die zugehörige Form.

1. Der Raum $\dot{\mathfrak{F}}$ liegt dicht in $\mathfrak{G}_\infty$ mit G_∞ als Maßform.

2. Ist L in $\tilde{\mathfrak{F}}$ eine andere halbbeschränkte selbstadjungierte Fortsetzung von L in $\dot{\mathfrak{F}}$, so ist $\mathfrak{G}_\infty$ echter Teilraum des zugehörigen $\mathfrak{G}$-Raumes $\tilde{\mathfrak{G}}$; in $\mathfrak{G}_\infty$ stimmt $\tilde{G}$ mit G_∞ überein.

3. Es ist $\mathfrak{F}_\infty$ genau der Durchschnitt

$$\mathfrak{F}_\infty = \dot{\mathfrak{F}}\,\mathfrak{G}_\infty$$

von $\dot{\mathfrak{F}}$ mit dem zugehörigen $\mathfrak{G}$-Raume $\mathfrak{G}_\infty$.

---

[11]) **Friedrichs [1], Satz 3, S. 473.**

Wir nennen L in $\mathfrak{F}_\infty$ die „ausgezeichnete Fortsetzung" von L in $\dot{\mathfrak{F}}$.

Daß es eine Fortsetzung gibt, die Eigenschaft 1. besitzt, wurde an anderer Stelle bewiesen[12]). Aus 1. aber folgt 2. Denn ist L in $\widetilde{\mathfrak{F}}$ eine andere selbstadjungierte Fortsetzung, so stimmt $\widetilde{G}$ mit $\mathfrak{G}_\infty$ in $\dot{\mathfrak{F}}$ überein; daraus, daß $\dot{\mathfrak{F}}$ in $\mathfrak{G}_\infty$ dicht liegt mit G_∞ als Maßform, folgt, daß $\mathfrak{G}_\infty$ in $\widetilde{\mathfrak{G}}$ liegt und daß $G_\infty = \widetilde{G}$ ist in $\mathfrak{G}_\infty$. Es ist aber $\mathfrak{G}_\infty \neq \widetilde{\mathfrak{G}}$; denn sonst müßten auch die Räume $\mathfrak{F}_\infty$ und $\widetilde{\mathfrak{F}}$ übereinstimmen, da sie den Räumen $\mathfrak{G}_\infty$ und $\widetilde{\mathfrak{G}}$ samt Form G, wie oben bemerkt, eindeutig zugeordnet sind. Offenbar ist L in $\mathfrak{F}_\infty$ die einzige selbstadjungierte Fortsetzung von L in $\mathfrak{F}$, die 2., also auch die einzige, die 1. erfüllt.

Ebenfalls folgt 3. aus 1. Denn für f_0 aus $\mathring{\mathfrak{F}}\,\mathfrak{G}_\infty$ gilt die Relation

$$\dot{f}\,G_\infty f_0 = \int_{X^-}^{X^-} L\dot{f}\cdot f_0\,dx = \int_{X^-}^{X^+} \dot{f}\,L f_0\,dx$$

mit allen $\dot{f}$ aus $\dot{\mathfrak{F}}$; aus ihr folgt, da $\dot{\mathfrak{F}}$ in $\mathfrak{G}_\infty$, also in $\mathfrak{F}_\infty$ ja G_∞-dicht liegt, für alle f aus $\mathfrak{F}_\infty$ die Relation

$$f\,G_\infty f_0 = \int_{X^-}^{X^+} f\,L f_0\,dx,$$

somit

$$\int_{X^-}^{X^+} (Lf\cdot f_0 - f\,Lf_0)\,dx = 0.$$

Da L in $\mathfrak{F}_\infty$ selbstadjungiert ist, folgt, daß f_0 in $\mathfrak{F}_\infty$ liegt und damit Eigenschaft 3. Für jede andere selbstadjungierte Fortsetzung L in $\widetilde{\mathfrak{F}}$ liegt $\mathfrak{G}_\infty$ in $\widetilde{\mathfrak{G}}$ wegen 2., also $\mathfrak{F}_\infty = \mathring{\mathfrak{F}}\,\mathfrak{G}_\infty$ in $\mathring{\mathfrak{F}}\,\widetilde{\mathfrak{G}}$; da aber $\mathfrak{F}_\infty$ nicht in $\widetilde{\mathfrak{F}}$ enthalten ist, ist $\widetilde{\mathfrak{F}} \neq \mathring{\mathfrak{F}}\,\mathfrak{G}$.

In § 2 wurde unter der Voraussetzung, daß q nach unten beschränkt ist (wonach ja L halbbeschränkt wird), ein Raum $\mathfrak{G}$ eingeführt, und in § 3.4 wurde bewiesen, daß L in $\mathfrak{F} = \mathring{\mathfrak{F}}\,\mathfrak{G}$ selbstadjungiert ist. Dieser Raum $\mathfrak{G}$ stimmt mit dem hier abstrakt gekennzeichneten Raume $\mathfrak{G}_\infty$ überein. Das folgt, da die Eigenschaft 1. den Raum $\mathfrak{G}_\infty$ eindeutig kennzeichnet, aus der Tatsache, daß der Raum $\mathring{\mathfrak{F}}$ in $\mathfrak{G}$ dicht liegt mit G als Maßform. Diese Tatsache ergibt sich[13]) aus Satz 2.2. Aus diesem Satze entnimmt man nämlich, daß jede Funktion g aus $\mathfrak{G}$ durch eine Funktion $\dot{g}$ aus $\mathfrak{G}$, die in Umgebung der Enden identisch verschwindet, so angenähert

[12]) Friedrichs [1. 2].

[13]) Vgl. Friedrichs [3].

werden kann, daß $(g - \dot{g})\, G\, (g - \dot{g})$ beliebig klein wird. Die Funktion $\dot{g}$ läßt sich aber samt Ableitungen $\frac{d\dot{g}}{dy}$ gleichmäßig durch Funktionen f aus $\dot{\mathfrak{F}}$ approximieren.

Um die hier eingeführten Begriffe zu erläutern, sei an den regulären Fall erinnert, wo X^+, X^-, Y^+, Y^- endlich sind und $|q|$ beschränkt ist. Der Raum $\mathfrak{G}_\infty$ besteht aus den Funktionen g aus $[g]$ und $\mathfrak{H}$, für welche $\int_{Y^-}^{Y^+} \left(\frac{dg}{dy}\right)^2 dy$ existiert und die an den Endpunkten verschwinden. Der Operator L ist selbstadjungiert im Raume $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_\infty = \dot{\mathfrak{F}}\, \mathfrak{G}_\infty$ aller Funktionen f_0 aus $\dot{\mathfrak{F}}$, die in $\mathfrak{G}_\infty$ liegen (nach Satz 3.2 genügt es zu fordern, daß f_0 an den Enden verschwindet). Es gibt andere selbstadjungierte Fortsetzungen L in $\widetilde{\mathfrak{F}}$ von L in $\dot{\mathfrak{F}}$; man erhält solche Räume $\widetilde{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}_\sigma$ aus $\dot{\mathfrak{F}}$ z. B., indem man die Randbedingungen $\frac{df}{dy} + \sigma^+ f = 0$, bzw. $\frac{df}{dy} + \sigma^- f = 0$ an den Enden X^+ bzw. X^- stellt. Der zugehörige $\mathfrak{G}$-Raum $\mathfrak{G}_\sigma$ besteht aus allen Funktionen g aus $[g]$ und $\mathfrak{H}$, für welche $\int_{Y^-}^{Y^+} \left(\frac{dg}{dy}\right)^2 dy$ existiert; denn jede solche Funktion g läßt sich mit $\int_{Y^-}^{Y^+} \left(\frac{dg}{dy}\right)^2 dy + \sigma g^2 \Big|_{X^-}^{X^+} + \int_{X^-}^{X^+} (q + k) g^2 dx$ (k genügend groß) als Maßform approximieren durch solche Funktionen f aus $\dot{\mathfrak{F}}$, die den obigen Randbedingungen genügen; d. h. durch Funktionen aus $\mathfrak{F}_\sigma$. Der Raum $\mathfrak{G}_\sigma$ enthält, wie in Eigenschaft gefordert, den Raum $\mathfrak{G}_\infty$; er ist von den Parametern σ der Randbedingungen unabhängig und der Raum $\mathfrak{F}_\sigma$ ist nicht mit dem Durchschnitt $\dot{\mathfrak{F}}\, \mathfrak{G}_\sigma$ identisch.

Diese Eigenschaft der Randbedingungen $\frac{df}{dy} + \sigma f = 0$, daß sie noch nicht beim zugehörigen Raume $\mathfrak{G}_\sigma$, sondern erst beim Raume $\mathfrak{F}_\sigma$ zu stellen sind, kennzeichnet sie als natürliche[14]) Randbedingungen, zu denen also die hier behandelte ausgezeichnete Randbedingung im Gegensatz steht.

---

[14]) Diese Bezeichnung wird motiviert durch die folgende aus der Selbstadjungiertheit entspringende Eigenschaft: Genügt eine Funktion g_0 aus $\mathfrak{G}_\sigma$ mit allen g aus $\mathfrak{G}_\sigma$ (die also den Randbedingungen noch nicht zu genügen brauchen) mit einer Funktion h_1 aus $\mathfrak{H}$ der Relation

$$g\, G\, g_0 = (g, h_1),$$

so liegt g_0 in $\mathfrak{F}_\sigma$, erfüllt also neben der Differentialgleichung $L\, g_0 = h_1$ die Randbedingung.

Anhang.

Integralungleichungen.

Wir stellen eine Reihe von Integralungleichungen für Funktionen g aus $[g]$ zusammen, von denen wir Gebrauch gemacht haben.

Mit $\mathfrak{D}^+$ bezeichnen wir den Raum aller Funktionen g aus $[g]$, für die $\int_0^{Y+} \left(\frac{dg}{dy}\right)^2 dy < \infty$ ist.

Satz A.1. *Sei* $Y^+ < \infty$. *Dann besteht für die Funktionen* g *aus* $\mathfrak{D}^+$, *für die* $g(x) \underset{x \to X^+}{\to} 0$ *strebt, die Ungleichung*

$$\frac{g^2(x^+)}{Y^- - y^+} \leqq \int_{y^+}^{Y^-} \left(\frac{dg}{dy}\right)^2 dy \quad \text{für alle } x^+ \geqq x_0,$$

und infolgedessen strebt

$$\frac{g(x)}{\sqrt{Y^+ - y}} \underset{x \to X^+}{\to} 0.$$

Beweis. Man lasse in der Abschätzung

$$|g(x^+) - g(x^*)|^2 \leqq (y^* - y^+) \int_{y^+}^{y^*} \left(\frac{dg}{dy}\right)^2 dy$$

x^* die spezielle Folge durchlaufen, auf der $g(x^*) \to 0$ strebt; dann folgt die Behauptung.

Satz A.2. *Sei* $Y^+ < \infty$.

1. *Dann existieren für jede Funktion* g *aus* $\mathfrak{D}^+$, *für die* $g(x) \underset{x \to X^+}{\to} 0$ *strebt, die Integrale*

$$\int_0^{Y+} Y^+ - y) \left(\frac{d}{dy} \frac{g}{\sqrt{Y^+ - y}}\right)^2 dy < \infty,$$

$$\int_0^{Y+} \frac{g^2}{(Y^+ - y)^2} dy < \infty.$$

2. *Existieren für eine Funktion* g *aus* $[g]$ *diese Integrale, so liegt* g *in* $\mathfrak{D}^+$ *und es strebt* $g(x) \underset{x \to X^+}{\to} 0$.

3. *Es besteht für* g *in* $\mathfrak{D}^+$ *und* $x^+ \geqq x_0$ *die Identität*

$$\int_{y^+}^{Y+} \left(\frac{dg}{dy}\right)^2 dy = \int_{y^-}^{Y+} (Y^+ - y) \left(\frac{d}{dy} \frac{g}{\sqrt{Y^+ - y}}\right)^2 dy + \frac{1}{4} \int_{y^+}^{Y+} \frac{g^2}{(Y^+ - y)^2} dy + \frac{1}{2} \frac{g^2(x^+)}{Y^+ - y^+}.$$

Beweis. Wir gehen aus von der in $[g]$ gültigen Identität

$$(\times)\qquad \int_{y^+}^{\bar{y}} (Y^+ - y)\left(\frac{d}{dy}\frac{g}{\sqrt{Y^+ - y}}\right)^2 dy + \frac{1}{4}\int_{y^+}^{\bar{y}} \frac{g^2}{(Y^+ - y)^2}\,dy + \frac{1}{2}\frac{g^2(x^+)}{Y^+ - y^+} = \int_{y^+}^{\bar{y}} \left(\frac{dg}{dy}\right)^2 dy + \frac{1}{2}\frac{g^2(\bar{x})}{Y^+ - \bar{y}}.$$

1. Liegt g in $\mathfrak{D}^+$ mit $g(x) \to \underset{x \to X^+}{0}$, so folgt $\frac{g^2(\bar{x})}{Y^+ - y}$ nach A. 1; also existieren die Integrale der linken Seite bis Y^+ erstreckt und es gilt die Identität 3.

2. Existieren diese Integrale für ein g aus $[g]$, so bleibt die rechte Seite der Identität beschränkt; es existiert also $\int_0^{Y^+} \left(\frac{dg}{dy}\right)^2 dy$ und g liegt in $\mathfrak{D}^+$; aus der Existenz von $\int_0^{Y^+} \frac{g^2}{Y^+ - y}\frac{dy}{Y^+ - y}$ folgt sodann, daß es eine spezielle Folge $\bar{x} \to X^+$ gibt, für die $\frac{g(\bar{x})}{Y^+ - \bar{y}} \to 0$ strebt; für diese Folge gilt erst recht $g(\bar{x}) \to 0$.

Satz A. 3. *Sei* $Y^+ = \infty$; $y_0' > 0$.

1. *Dann existieren für Funktionen* g *aus* $\mathfrak{D}^+$ *die Integrale*

$$\int_{y_0'}^{Y^+} y\left(\frac{d}{dy}\frac{g}{\sqrt{y}}\right)^2 dy, \qquad \int_{y_0'}^{Y^+} \frac{g^2}{y^2}\,dy.$$

2. *Existieren diese Integrale für eine Funktion* g *aus* $[g]$, *so liegt sie in* $\mathfrak{D}^+$.

3. *Für* g *aus* $\mathfrak{D}^+$ *und* $x^+ \geqq x_0'$ *besteht die Identität*

$$\int_{y^+}^{Y^+} y\left(\frac{d}{dy}\frac{g}{\sqrt{y}}\right)^2 dy + \frac{1}{4}\int_{y^+}^{Y^+} \frac{g^2}{y^2}\,dy = \int_{y^+}^{Y^+} \left(\frac{dg}{dy}\right)^2 dy + \frac{1}{2}\frac{g^2(x^\tau)}{y^+}.$$

Beweis. Wir gehen aus von der in $[g]$ gültigen Identität

$$(\mp)\qquad \int_{y^+}^{\bar{y}} y\left(\frac{d}{dy}\frac{g}{\sqrt{y}}\right)^2 dy + \frac{1}{4}\int_{y^+}^{\bar{y}} \frac{g^2}{y^2}\,dy + \frac{1}{2}\frac{g^2(\bar{x})}{\bar{y}} = \int_{y^+}^{\bar{y}} \left(\frac{dg}{dy}\right)^2 dy + \frac{1}{2}\frac{g^2(x^+)}{y^+}.$$

1. Aus ihr entnimmt man für $\bar{x} \to X^+$, daß für g aus $\mathfrak{D}^+$ die Integrale der linken Seite bis Y^+ erstreckt existieren.

2. Existieren diese Integrale, also insbesondere $\int_{y_0'}^{Y^+} \frac{g^2}{y}\frac{dy}{y}$, so muß es

eine spezielle Folge $\bar{x} \to X^+$ geben, für welche $\frac{g^2(\bar{x})}{\bar{y}} \to 0$ strebt; mit ihr bleibt die linke, also die rechte Seite beschränkt; d. h. es ist

$$\int_{y^\tau}^{Y^+} \left(\frac{d\,g}{d\,y}\right)^2 d\,y < \infty.$$

Zugleich ergibt sich die Identität 3.

Lassen wir in $(\mp)$ $x^+ \to X^+$ die spezielle Folge durchlaufen, auf der $\frac{g^2(x^\tau)}{y^\tau} \to 0$ strebt, so erhalten wir unmittelbar den

Satz A. 4. *Sei* $Y^+ = \infty$. *Dann strebt für Funktionen* g *aus* $\mathfrak{D}^\tau$

$$\frac{g(x)}{\sqrt{y}} \underset{x \to X^+}{\to} 0.$$

(Eingegangen am 23. 6. 1935.)

Beitrag zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten.

Von

Werner v. Koppenfels in Hannover.

Inhalt.

Seite

Einleitung 24

I. Teil: Systematische Gewinnung der Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten.

§ 1. Aufsuchen aller analytischen Funktionen $z = z(w)$, für die $\frac{J(z)}{R(z)} = f(R(w)) \cdot g(J(w))$ 29

A. Bestimmung der Funktionen $f(u)$, $g(v)$.

B. Bestimmung der Funktion $z(w)$.

§ 2. Die Normaltypen der Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten 31

II. Teil: Zusammenhang der Eigenwertprobleme von Differential- und Integralgleichung.

§ 3. Die Abbildung der Eigenwertprobleme 34

§ 4. Die Iterationsprinzipe 37

§ 5. Whittakers Kerne 40

III. Teil: Die Darbouxsche Gleichung.

§ 6. Der Fall ganzzahliger n 43

A. Bestimmung der charakteristischen Exponenten.

B. Diskussion des Eigenwertproblems.

§ 7. Der Fall beliebiger n 49

A. Bestimmung der charakteristischen Exponenten.

B. Bestimmung der zugehörigen Lösungen.

Einleitung.

Das Ziel dieser Arbeit ist, die klassischen linearen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten durch Aufspaltung gewisser partieller Differentialgleichungen systematisch zu erfassen und diese Art der Gewinnung für die Theorie der periodischen Lösungen nutzbar zu machen. In der Tat gewinnt man in dieser Auffassung den natürlichen

Ansatz, um die Brücke zur Eigenwerttheorie der linearen Integralgleichungen zu schlagen.

Zu dem Zweck, diesen Zusammenhang von der Wurzel aus zu verstehen, werden im I. Teil die elliptischen Funktionen Jacobis auf eine neue und für das folgende aufschlußreiche Art eingeführt. Sie lassen sich nämlich durch die Eigenschaft kennzeichnen, daß der Quotient ihres Real- und Imaginärteiles in zwei Faktoren zerfällt: der eine ist eine reine Funktion des Realteiles, der andere eine reine Funktion des Imaginärteiles des Argumentes. Diese Eigenschaft hat zur Folge, daß die mit der Potentialgleichung aufs engste zusammenhängende separierbare Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} - \frac{n(n+1)}{x^2} K = 0, \qquad K = K(x, y)$$

sich bei der durch die Jacobische Funktion $z = z(w)$ mit $z = x + iy$, $w = u + iv$ vermittelten Koordinatentransformation in die wiederum separierbare partielle Differentialgleichung

$$\text{(B)} \qquad \begin{gathered} \frac{\partial^2 K}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial v^2} - n(n+1)[a f^2(u) + b g^2(v)] K = 0, \\ K = K(x(u, v), y(u, v)) \end{gathered}$$

verwandelt. Dabei zeigt sich, daß die (reellwertigen) Funktionen $f(u)$ und $g(v)$ durch Landensche Transformation aus $z(w)$ hervorgehen. Die Aufspaltung der partiellen Differentialgleichung (B) führt somit zu einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} F''(u) - [n(n+1) a f^2(u) + \lambda] F(u) = 0, \\ G''(v) - [n(n+1) b g^2(v) - \lambda] G(v) = 0, \end{cases}$$

deren Koeffizienten doppelt-periodische Funktionen sind.

An dieser Stelle ist darauf hinzuweisen, daß Wangerin[1]) und später wohl unabhängig von ihm Darboux[2]) von der Frage nach den allgemeinsten Separationskoordinaten der partiellen Differentialgleichung (A) ausgehend zu dem gleichen Ergebnis gelangten. Da diese etwas erweiterte Fragestellung gleichwertig ist mit dem von H. A. Schwarz[3]) in seiner berühmten Arbeit von 1873 gelösten Problem der Bestimmung aller ebenen algebraischen Isothermensysteme, so ergeben sich, worauf Häntz-

[1]) Wangerin, Über die Reduktion der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen, Monatsber. d. Kgl. Akad. d. Wiss. Berlin (1878).

[2]) G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces t. II, livre IV, chap. IX, No. 413—414, S. 208—212 (1889).

[3]) H. A. Schwarz, Über ebene algebraische Isothermen, Journ. f. reine u. ang. Math. 77 (1874). Werke II, S. 260.

schel[4]) in seinen allerdings etwas ins Formale abgleitenden Untersuchungen hinwies, außer den Jacobischen Funktionen noch alle unter Anwendung der Transformationstheorie der elliptischen Funktionen daraus hervorgehenden Funktionen. Die aus besonderen Gründen hier anders gewählte Fragestellung führt also zur Basis aller Funktionen, die die Gleichung (A) aufspalten.

Den Kern der vorliegenden Untersuchung bildet die Frage nach periodischen Lösungen der durch die Separation gewonnenen Differentialgleichungen (C). Ich glaube, daß man gerade für die Behandlung dieser Frage neue Gesichtspunkte gewinnt, wenn man sich der Entstehungsart der Gleichungen bewußt ist und in ihren periodischen Lösungen zugleich die Eigenfunktionen gewisser linearer Integralgleichungen sieht. Die enge Verwandtschaft beider Eigenwertprobleme stellt sich in folgendem allgemeinen Sachverhalt dar:

Ist L_u ein linearer selbstadjungierter Differentialoperator, so bildet jede zweimal differenzierbare Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$[L_u - L_{u'}]\,K(u, u') = 0, \tag{D}$$

die bezüglich jeder der beiden Veränderlichen den homogenen Randbedingungen eines Eigenwertproblems der Differentialgleichung

$$L_u[F(u)] - \lambda F(u) = 0 \tag{E}$$

genügt, dieses Eigenwertproblem auf das Eigenwertproblem der linearen Integralgleichung

$$\int K(u, u')\,\overline{F}(u')\,du' - \mu\,\overline{F}(u) = 0 \tag{F}$$

ab. Die Zuordnung ist wechselseitig, und zwar entsprechen mehrfachen Eigenwerten des einen Problems im allgemeinen verschiedene Eigenwerte des anderen Problems. Dabei werden bestimmte Linearkombinationen der zu einem mehrfachen Eigenwert des einen Problems gehörigen Eigenfunktionen wieder Eigenfunktionen des anderen Problems, die nun aber zu verschiedenen Eigenwerten gehören. Das völlige Entsprechen beider Probleme, das auf der Vertauschbarkeit des Differentialoperators beruht, kommt weiterhin darin zum Ausdruck, daß die Iteration sowohl des Integraloperators wie des Differentialoperators neue Kerne liefert, deren es im allgemeinen zwei nicht abbrechende Folgen gibt (§ 4).

Die Klärung des geschilderten Zusammenhanges, der im II. Teil für die Periodizitätsforderung als Randbedingung entwickelt wird, bedeutet zugleich die Bestätigung einer Vermutung Whittakers, der für den Fall, daß die Eigenfunktionen Lamésche Polynome, d. h. (bis auf gewisse Faktoren) Polynome in den elliptischen Funktionen $f(u)$ sind, Integralgleichungen

[4]) Häntzschel, Studien über die Reduktion der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen, Berlin 1893.

der hier behandelten Art angegeben hat[5]) und einen allgemeineren Zusammenhang vermutet[6]). Hinsichtlich dieser ausgearteten Kerne, die bei Whittaker eine Rolle spielen, scheint mir noch die folgende Feststellung von Interesse zu sein: Das Eigenwertproblem der Integralgleichung besitzt in diesem Falle nur endlich viele Eigenwerte, das der zugehörigen Differentialgleichung unter der Forderung der Periodizität dagegen unendlich viele. Die Äquivalenz beider Probleme kommt dadurch zustande, daß die Integralgleichung in diesem Falle den Eigenwert $\mu = 0$ (in der üblichen Schreibweise ist es $\frac{1}{\mu} = \infty$) in unendlicher Vielfachheit besitzt. Diese Sachlage wird im III. Teil anhand eines charakteristischen Beispiels deutlich gemacht. Es sei noch erwähnt, daß die Besonderheit des Kernes $P_n(i f(u) g(v))$, unter P_n das Legendresche Polynom der Ordnung n verstanden, durch die hier zu Anfang gegebene Fragestellung ins Licht gerückt wird (§ 5).

Da die Differentialgleichung

$$(C') \qquad F''(u) - [n(n+1)(\wp u - e_3) + \lambda] F(u) = 0,$$

die sich als Normaltyp der durch die Separation gewonnenen Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten erweist, im Falle ganzzahliger n für alle λ von Hermite[7]) gelöst ist, liegt es nahe, sich bei dieser Gleichung über die Lage der Eigenwerte, die zu periodischen Lösungen Anlaß geben, zu orientieren. Aber selbst angesichts der Lösung Hermites, deren Struktur in wunderbarer Klarheit zu erkennen ist, und deren Erforschung in den tiefgreifenden Untersuchungen Halphens[8]) vollendet erscheint, gelingt dies noch nicht. Zwar kann zu vorgeschriebenem λ *der charakteristische Exponent* k, mittels dessen sich die Lösung in die Form

$$(G) \qquad F(u) = e^{ku}\varphi(u). \quad \varphi(u+\omega) = \varphi(u)$$

---

[5]) Whittaker, On an integral equation whose solutions are the functions of Lamé. Proceedings Royal Soc. Edinb. (1914).

[6]) In „Modern Analysis" (1927) bemerkt Whittaker: It appears (i. d. Aufl. v. 1920: It does not appear to have been proved ...) that every characteristic number associated with the equation

$$f(\alpha) = \lambda \int_{-2K}^{+2K} P_n(k \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}\theta) f(\theta)\, d\theta$$

yields a solution of Lamé's equation (S. 566).

[7]) Hermite, Sur quelques applications des fonctions elliptiques, Oeuvres, t. III, S. 266.

[8]) Halphen, Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications, t. II, S. 495, Paris (1888).

[9]) l. c. [8]), S. 509.

setzen läßt, numerisch in drei Schritten ermittelt und damit die Lösung im Einzelfall vollständig bestimmt werden, aber die Abhängigkeit des charakteristischen Exponenten k vom Parameter λ, die zur Bestimmung der Eigenwerte aus der Beziehung

$$k(\lambda) = \nu\pi \tag{H}$$

nötig wäre, ist schwer zu durchschauen. Nur eins kann auf Grund der Hermite-Halphenschen Theorie festgestellt werden: die einzigen einfachen Eigenwerte sind die Zahlen λ, die dem Laméschen Fall entsprechen[9]), in dem die Differentialgleichung polynomische Lösungen besitzt.

Bei dieser Sachlage ist es erwünscht, den Fall, daß die Gleichung (C') in eine Differentialgleichung mit einfach-periodischen Koeffizienten, die sogenannte Darbouxsche Gleichung

$$F''(u) - \left[\frac{n(n+1)}{\sin^2 u} + \lambda\right] F(u) = 0, \tag{C''}$$

entartet, näher zu untersuchen (III. Teil). Diese Gleichung kann einerseits nach der Hermiteschen Theorie, andererseits in überraschend einfacher Weise rekursiv gelöst werden[10]), und beide Male treten die charakteristischen Exponenten fast unmittelbar zutage. Für die periodischen Lösungen werden sodann auf andere Weise gewonnene explizite Darstellungen gegeben, die erst eine vollständige Diskussion des Eigenwertproblems ermöglichen (§ 6). Es zeigt sich, daß die ganzen Zahlen $\nu \leqq n$ einfache Eigenwerte sind, die ganzen Zahlen $\nu > n$ dagegen zweifache Eigenwerte sind. Die den einfachen Eigenwerten entsprechenden Eigenfunktionen sind zugeordnete Legendresche Polynome in $(i \operatorname{ctg} u)$. Von den paarweise auftretenden Eigenfunktionen hat die eine für $u = 0$ eine $(n+1)$-fache Nullstelle, die andere einen n-fachen Pol. Bezüglich des Zusammenhangs mit der Integralgleichung, deren Kern $P_n(\operatorname{ctg} u \operatorname{ctg} u')$ zerfällt, lassen sich die im II. Teil getroffenen allgemeinen Feststellungen bestätigen, insbesondere die, daß die Integralgleichung den Eigenwert 0 (bzw. ∞) in unendlicher Vielfachheit besitzt.

Nachdem auf diese Weise das Eigenwertproblem im Falle ganzzahliger n völlig geklärt erscheint, halte ich es für wichtig, darüber hinaus zu zeigen, daß auch im allgemeinen Fall beliebiger n die gleichen charakteristischen Exponenten sich ergeben. In diesem Fall ist weder Darbouxs noch Hermites Methode anwendbar. Da jedoch die Differentialgleichung durch die Substitution $z = \sin^2 u$ auf die hypergeometrische zurückgeführt werden kann, erweisen sich die charakteristischen Exponenten als Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung an der Stelle $z = \infty$, und die zugehörigen Lösungen sind mit Hilfe der Monodromiegruppe leicht zu ermitteln.

---

[10]) l. c. [2]), No. 408, insbes. S. 198.

I. Teil:

Systematische Gewinnung der Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten.

§ 1.

Aufsuchen aller analytischen Funktionen $z = z(w)$, für die $\frac{J(z)}{R(z)} = f(R(w)) \cdot g(J(w))$.

A. Bestimmung der Funktionen $f(u)$, $g(v)$.

Ist die Funktion

$$z = z(w) \begin{cases} z = x + iy, \\ w = u + iv \end{cases} \tag{1}$$

eine analytische Funktion der komplexen Veränderlichen $w = u + iv$, so gilt allgemein, daß $\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$ eine Potentialfunktion ist und daher

$$Q(u, v) = \frac{y(u, v)}{x(u, v)} \tag{2}$$

der Differentialgleichung

$$Q_{uu} + Q_{vv} - 2\frac{Q_u^2 + Q_v^2}{1 + Q^2} Q = 0 \tag{3}$$

genügt. Wird jetzt angenommen, die Funktion $z(w)$ habe die in der Überschrift geforderte Eigenschaft, d. h. $Q(u, v)$ besitze die Gestalt

$$Q(u, v) = f(u)\, g(v), \tag{2a}$$

so läßt Gleichung (3) erkennen, daß der Ausdruck

$$\frac{Q_u^2 + Q_v^2}{1 + Q^2} = \frac{x_u^2 + x_v^2}{x^2} \tag{4}$$

die Summe einer reinen Funktion von u und einer reinen Funktion von v ist. Aus (3) folgt nämlich, daß der Ausdruck (4)

$$2\frac{f'^2(u)\, g^2(v) + f^2(u)\, g'^2(v)}{1 + f^2(u)\, g^2(v)} = \frac{f''(u)}{f(u)} + \frac{g''(v)}{g(v)}$$

ist, und hieraus entnimmt man

$$\frac{\frac{f''(u)}{f(u)} + \frac{g''(v)}{g(v)}}{f^2(u)\, g^2(v)} = \frac{2f'^2(u) - f(u)\, f''(u)}{f^4(u)} + \frac{2g'^2(v) - g(v)\, g''(v)}{g^4(v)} \tag{5}$$

$$= \varrho(u) + \sigma(v).$$

Also gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v}\{f^2(u)\, g^2(v)[\varrho(u) + \sigma(v)]\} = 0, \tag{6}$$

und aus dieser Gleichung bestimmen sich die Funktionen $\varrho(u)$ und $\sigma(v)$ zu

$$\varrho(u) = c + \frac{2b}{f^3(u)}, \qquad \sigma(v) = -c + \frac{2a}{g^3(v)} \tag{7}$$

mit beliebigen reellen Konstanten a, b, c. Durch Einsetzen ergibt sich jetzt rückwärts aus (5)

$$\frac{f''(u)}{f(u)} + \frac{g''(v)}{g(v)} = 2af^2(u) + 2bg^2(v) \tag{8}$$

und weiter

$$\frac{f'^2(u)}{f^2(u)} + \frac{g'^2(v)}{g^2(v)} = \left[af^2(u) + \frac{b}{f^2(u)}\right] + \left[bg^2(v) + \frac{a}{g^2(v)}\right], \tag{9}$$

so daß schließlich für die zunächst unbekannten Funktionen $f(u)$ und $g(v)$ die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{cases} f'^2(u) = af^4(u) + 2cf^2(u) + b, \\ g'^2(v) = bg^4(v) - 2cg^2(v) + a \end{cases} \tag{10}$$

mit reellen a, b, c gewonnen werden. Danach erweisen sich $f(u)$ und $g(v)$ als elliptische Funktionen mit den gleichen Perioden $4\,\mathsf{K}$ und $4\,\mathsf{K}'i$.

B. Bestimmung der Funktion $z(w)$.

Durch Quadrieren und Addieren bzw. Subtrahieren der logarithmischen Ableitungen von $Q = \frac{y}{x}$ nach u und v ergibt sich unter Berücksichtigung von (10)

$$\begin{cases} \frac{x_u^2 + x_v^2}{x^2} = af^2(u) + bg^2(v), \\ \frac{x_u^2 - x_v^2}{x^2} + 4\,\frac{xy}{y^2 - x^2}\,\frac{x_u x_v}{x^2} - 4c\,\frac{y^2}{y^2 - x^2} = af^2(u) - bg^2(v). \end{cases} \tag{11}$$

Eliminiert man hieraus $f(u)$ und $g(v)$ unter Berücksichtigung von

$$\frac{y}{x} = f(u)\,g(v),$$

so folgt für $x = x(u, v)$ die partielle Differentialgleichung

$$(x_u^2 + x_v^2)^2 - \left[x_u^2 - x_v^2 + 4\,\frac{xy}{y^2 - x^2}\,x_u x_v - 4c\,\frac{x^2 y^2}{y^2 - x^2}\right]^2 - 4ab\,x^2 y^2 = 0, \tag{12}$$

die den Charakter der komplexen Funktion $z(w)$ vollständig bestimmt. Die Gleichung hängt nur von den Komponenten von

$$z'^2 = \xi + i\eta = x_u^2 - x_v^2 - 2i\,x_u x_v$$

und

$$z^2 = \sigma + i\tau = x^2 - y^2 + 2i\,xy$$

ab und werde in der Form

$$\eta\,[(\sigma^2 - \tau^2)\,\eta - 2\sigma\tau\xi] - 2c\,\tau^2\,[\sigma\xi + \tau\eta] - c^2\tau^4 - ab\,\sigma^2\tau^2 = 0 \tag{12a}$$

geschrieben. Da $f(u)$ und $g(v)$ als reelle, reellwertige Funktionen anzunehmen sind, müssen a, b, c reelle Zahlen sein und (12a) kann auf die noch übersichtlichere Form

$$J(\theta)\,J(\overline{Z}\,\theta) - \frac{c^2 - ab}{4}\,J(Z)\,J(\overline{Z}) = 0 \tag{12b}$$

mit

$$\theta = z'^2 + c z^2,$$
$$Z = z^4$$

gebracht werden. Offenbar wird (12b) durch

$$\theta = \alpha + \beta Z \quad \text{mit} \quad \begin{cases} J(\alpha) = 0, \\ J(\beta) = 0, \end{cases} \quad \alpha\beta = \frac{c^2 - ab}{4} \tag{13}$$

befriedigt. Die gesuchte komplexe Funktion $z(w)$ ist also als Lösung der Differentialgleichung

$$z'^2 = \alpha - c z^2 + \beta z^4 \tag{13a}$$

zu bestimmen. Sie erweist sich danach als elliptische Funktion Jacobis, deren Modul $k_1 = \sqrt{\frac{c - \sqrt{ab}}{c + \sqrt{ab}}}$ durch lineare Transformation

$$k_1 = \frac{1 - k'}{1 + k'} \qquad (k' = \sqrt{1 - k^2}) \tag{14}$$

aus dem Modul $k' = \sqrt{\frac{c - \sqrt{c^2 - ab}}{c + \sqrt{c^2 - ab}}}$ der Funktionen $f(u)$ und $g(v)$ sich bestimmt. Also sind die Funktionen $f(u)$ und $g(v)$ mit $z(w)$ durch eine Landensche Transformation verknüpft. Man überzeugt sich leicht, daß (13a) in der Tat alle möglichen Lösungen von (12b) liefert. Wären nämlich $\theta_1(Z)$ und $\theta_2(Z)$ zwei verschiedene Lösungen, so folgte

$$\frac{J(\theta_1)}{J(\theta_2)} = \frac{J(\bar{Z}\,\theta_1)}{J(\bar{Z}\,\theta_2)} = \frac{R(Z)\,J(\theta_1) - J(Z)\,R(\theta_1)}{R(Z)\,J(\theta_2) - J(Z)\,R(\theta_2)} = \frac{R(\theta_1)}{R(\theta_2)},$$

d. h. $\theta_2 = C\,\theta_1$.

§ 2.

Die Normaltypen der Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten.

Die Fragestellung, aus der in § 1 die elliptischen Funktionen Jacobis auf eine neue Weise gewonnen wurden, steht in engstem Zusammenhang mit einer für das folgende grundlegenden Eigenschaft dieser Funktionen. Sie geben, wie aus der ersten der Gleichungen (11) ersichtlich ist, zu Koordinatentransformationen $(x, y) \to (u, v)$ Anlaß, bei denen

$$\frac{1}{x^2}\,\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = a f^2(u) + b g^2(v)$$

wird, d. h. bei denen die separierbare partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} - \frac{n(n+1)}{x^2} K = 0, \qquad K = K(x, y) \tag{15}$$

in die wiederum separierbare Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 K}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial v^2} - n(n+1)[a f^2(u) + b g^2(v)] K = 0, \quad K = K(x(u, v), y(u, v)) \tag{16}$$

übergeht.[11]) Der Ansatz

$$K = F(u)\,G(v) \tag{17}$$

zerspaltet (16) in das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{cases} F''(u) - [n(n+1)\,a\,f^2(u) + \lambda]\,F(u) = 0, \\ G''(v) - [n(n+1)\,b\,g^2(v) - \lambda]\,G(v) = 0, \end{cases} \tag{18}$$

wobei $f^2(u)$ und $g^2(v)$ als Quadrate der durch (10) bestimmten Jacobischen Funktionen sich rational durch die Weierstraßsche $\wp$-Funktion ausdrücken lassen.

Es ist noch zu bemerken, daß in den Separationsgleichungen (18) die

---

[11]) Im Falle $n = -\frac{1}{2}$ geht (15) durch die Transformation

$$K = \sqrt{x}\,\Phi \tag{a}$$

in die Gleichung

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \frac{1}{x}\,\Phi_x = 0 \tag{b}$$

über, der das Potential $\Phi = \Phi(x, y)$ einer rotationssymmetrischen Massenverteilung in der Meridianebene (x, y) genügt, und die bezogen auf die neuen rechtwinkligen Koordinaten u, v die Gestalt

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(x(u,v)\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(x(u,v)\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) = 0 \tag{c}$$

besitzt. Es scheint mir nicht überflüssig, darauf hinzuweisen, daß (c) auch *nur* dann aus der Potentialgleichung entstanden sein kann, wenn $x = x(u, v)$ der ebenen Potentialgleichung genügt. Dies einzusehen, bedenke man, daß die damit angerührte Frage darauf hinausläuft, festzustellen, wann das Bogenelement eines euklidischen R_3, auf ein dreifach orthogonales Flächensystem bezogen, die Form

$$ds^2 = q^2(u_1, u_2)\,(du_1^2 + du_2^2) + p^2(u_1, u_2)\,du_3^2 \tag{d}$$

haben kann. Das bedeutet, festzustellen, wann das Bogenelement (d) auf konstante Koeffizienten transformierbar ist. Denn ist dies möglich, so wird fur $\frac{\partial \Phi}{\partial u_3} = 0$ („Rotationssymmetrie") in der Tat

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\left(p\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(p\frac{\partial \Phi}{\partial u_2}\right) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2}. \tag{c}$$

Nun ist die Fundamentalform in du_1, du_2, du_3 bekanntlich dann und nur dann auf konstante Koeffizienten transformierbar, wenn der Riemannsche Krümmungstensor verschwindet. Aus

$$K_{1313} = p\left[\frac{\partial^2 p}{\partial u_1^2} - \frac{\frac{\partial p}{\partial u_1}\frac{\partial q}{\partial u_1} - \frac{\partial p}{\partial u_2}\frac{\partial q}{\partial u_2}}{q}\right] = 0,$$

$$K_{2323} = p\left[\frac{\partial^2 p}{\partial u_2^2} + \frac{\frac{\partial p}{\partial u_1}\frac{\partial q}{\partial u_1} - \frac{\partial p}{\partial u_2}\frac{\partial q}{\partial u_2}}{q}\right] = 0 \tag{f}$$

folgt

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial u_2^2} = 0 \tag{g}$$

als notwendige Bedingung für $p(u_1, u_2)$.

unabhängigen Veränderlichen u und v entgegen der anfangs nötigen Beschränkung auf reelle Werte für die weitere Untersuchung als komplexe Größen anzusehen sind, damit der doppelten Periodizität der Koeffizienten Rechnung getragen werden kann.

Die wichtigsten Normaltypen der Gleichungen (18) kann man beispielsweise erhalten, wenn man die Funktion

$$z = \mathrm{cn}\,(w, k) \tag{19}$$

zugrunde legt, d. h.

$$a = b = 1, \quad c = 1 - 2k^2 \tag{20}$$

setzt. Es folgt dann

$$f^2(u) = \frac{\mathrm{sn}^2(u,k)\,\mathrm{dn}^2(u,k)}{\mathrm{cn}^2(u,k)}, \quad g^2(v) = -f^2(iv) = \frac{\mathrm{sn}^2(v,k')\,\mathrm{dn}^2(v,k')}{\mathrm{cn}^2(v,k')}. \tag{20a}$$

Durch Übergang zur Weierstraßschen $\wp$-Funktion ergibt sich hieraus

$$f^2(u) = \frac{1}{\wp\left(u \middle| \frac{\omega+\omega'}{2}, \omega'\right) + 2e_2}, \tag{21}$$

so daß die Differentialgleichung für $F(u)$ die Form

$$F''(u) - \left[\frac{n(n+1)}{\wp\left(u \middle| \frac{\omega+\omega'}{2}, \omega'\right) + 2e_2} + \lambda\right] F(u) = 0 \tag{22}$$

erhält. Vertauscht man in (19) x und y, d. h. geht man von der Funktion

$$z = i\,\mathrm{cn}\,(\overline{w}, k) \tag{23}$$

aus, so ist nach (2) $f(u)$ durch $\frac{1}{f(u)}$ und entsprechend $g(v)$ durch $\frac{1}{g(v)}$ zu ersetzen, so daß die Differentialgleichung die Gestalt

$$F''(u) - \left[n(n+1)\left(\wp\left(u \middle| \frac{\omega+\omega'}{2}, \omega'\right) + 2e_2\right) + \lambda\right] F(u) = 0 \tag{24}$$

erhält. Sie unterscheidet sich von der Gleichung (C') S. 27, die Halphen seinen Untersuchungen zugrunde legt, nur durch die Wahl des Periodenparallelogramms.

Die von Wangerin und Häntzschel durch kunstvolle Rechnungen[12]) festgestellte Reziprozität der Normaltypen (22) und (24) findet in der hier gegebenen Darstellung, die von $\frac{y}{x} = f(u)\,g(v)$ ausgeht, ihre natürliche und sehr einfache Erklärung.

[12]) Vgl. l. c. [4]), S. 8—11.

II. Teil:

Zusammenhang der Eigenwertprobleme von Differential- und Integralgleichung.

§ 3.

Die Abbildung der Eigenwertprobleme.

Im folgenden werde unter L_u ein linearer selbstadjungierter Operator verstanden, der periodisch ist mit der Periode $4\,\mathsf{K}$. Man denke dabei an den Operator

$$L_u \equiv \frac{\partial^2}{\partial u^2} - n(n+1)\,a f^2(u),$$

in dem $f(u)$ durch Gleichung (10) definiert sei. Die Überlegungen dieses Abschnitts sind jedoch von der Gestalt und Ordnung des Operators L_u völlig unabhängig: wesentlich ist nur, daß der Operator linear, selbstadjungiert und — da wir als homogene Randbedingung immer die Periodizitätsforderung stellen wollen — auch periodisch ist.

Das durch die Forderung der Periodizität bestimmte Eigenwertproblem der Differentialgleichung

$$L_u[F(u)] - \lambda F(u) = 0 \tag{25}$$

wird in Verbindung gebracht mit einem Eigenwertproblem

$$J_u[\overline{F}(u)] - \mu\,\overline{F}(u) = 0, \tag{26}$$

wobei unter J_u der lineare Integraloperator

$$J_u \equiv \int_{-2\mathsf{K}}^{+2\mathsf{K}} du'\,K(u,u')\cdot \tag{26a}$$

verstanden werde, dessen Kern $K(u,u')$ irgendeine symmetrische periodische Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung

$$L_u[K(u,u')] - L_{u'}[K(u,u')] = 0 \tag{27}$$

ist. Die beiden Veränderlichen u, u' werden im folgenden reell angenommen, und die Lösung $K(u,u')$ werde überall im Grundgebiet

$$-2\mathsf{K} \leqq \begin{matrix} u \\ u' \end{matrix} \leqq +2\mathsf{K} \tag{28}$$

zweimal differenzierbar vorausgesetzt. Aus dieser Definition des Operators J folgt der für alles weitere grundlegende

Satz I: *Für jede den Randbedingungen des Eigenwertproblems* (25) *genügende Funktionen* $F(u)$ *gilt*

$$L_u J_u[F(u)] = J_u L_u[F(u)]. \tag{29}$$

In der Tat läßt sich

$$L_u J_u[F(u)] = L_u\Big[\int_{-2K}^{+2K} K(u, u') F(u')\, du'\Big]$$

vermöge (27) in

$$L_u J_u[F(u)] = \int_{-2K}^{-2K} L_{u'}[K(u, u')] F(u')\, du'$$

überführen, woraus sich durch zweimalige partielle Intergration (29) ergibt.

Auf Satz I beruht die Abbildung der Eigenwertprobleme (25) und (26) aufeinander, die in den folgenden beiden Sätzen ihren Ausdruck findet.

Satz IIa: *Besitzt die lineare Differentialgleichung*

$$L_u[F(u)] - \lambda F(u) = 0 \tag{25}$$

für einen festen Wert λ die maximale Anzahl k linear unabhängiger periodischer Lösungen

$$F_1^{(\lambda)}(u) \ldots F_k^{(\lambda)}(u),$$

mit deren keiner $J_u[F(u)]$ verschwindet, so lassen sich im allgemeinen aus ihnen k linear unabhängige Linearkombinationen

$$\overline{F}_1^{(\lambda)}(u) \ldots \overline{F}_k^{(\lambda)}(u)$$

bilden, die bezüglich zu k Eigenwerten

$$\mu_1 \ldots \mu_k$$

gehörige Lösungen der Integralgleichung

$$J_u[\overline{F}(u)] - \mu \overline{F}(u) = 0 \tag{26}$$

sind.

Dies einzusehen, bedenke man, daß für jedes $F_\nu^{(\lambda)}(u)$ aus (29)

$$L_u J_u[F_\nu^{(\lambda)}(u)] = \lambda J_u[F_\nu^{(\lambda)}(u)] \tag{30}$$

folgt und somit die periodische Funktion $J_u[F_\nu^{(\lambda)}(u)]$ [13]), da sie nicht identisch verschwindet, sich in der Form

$$J_u[F_\nu^{(\lambda)}(u)] = \sum_{\varrho=1}^{k} a_{\nu\varrho} F_\varrho^{(\lambda)}(u) \tag{31}$$

darstellen läßt. Nun überzeuge man sich davon, daß im allgemeinen auf k verschiedene Arten ein System reeller Zahlen $A_1 \ldots A_k$ angegeben werden kann, so daß

$$\sum_{\sigma=1}^{k} A_\sigma J_u[F_\sigma^{(\lambda)}(u)] = \mu \sum_{\sigma=1}^{k} A_\sigma F_\sigma^{(\lambda)}(u) \tag{32}$$

[13]) Aus der allgemeinen Forderung, daß die symmetrische Funktion $K(u, u')$ den homogenen Randbedingungen des Eigenwertproblems genügt, folgt, daß $J_u[F(u)]$ dieselben Randbedingungen erfüllt.

wird. Diese Beziehung besagt, daß die Gleichung

$$\sum_{\sigma=1}^{k} \sum_{\varrho=1}^{k} A_\sigma a_{\sigma\varrho} F_\varrho^{(\lambda)} u = \mu \sum_{\sigma=1}^{k} A_\sigma F_\sigma^{(\lambda)}(u)$$

identisch in u erfüllt ist, und dies ist der Fall, sofern die A_σ dem Gleichungssystem

$$\sum_{\sigma=1}^{k} a_{\sigma\varrho} A_\sigma = \mu A_\varrho \qquad (\varrho = 1 \ldots k) \tag{33}$$

genügen. Wird für μ eine der notwendig reellen, von Null verschiedenen Wurzeln der Säkulargleichung

$$|a_{\sigma\varrho} - \mu \delta_{\sigma\varrho}| = 0 \tag{34}$$

gewählt, so lassen sich k Zahlen $A_1(\mu) \ldots A_k(\mu)$ der verlangten Eigenschaft bestimmen. Die Linearität des Integraloperators hat zur Folge, daß

$$F^{(\lambda,\,\mu)}(u) = \sum_{\sigma=1}^{k} A_\sigma(\mu) F_\sigma^{(\lambda)}(u) \tag{35}$$

der Integralgleichung (26) genügt. Den r von Null verschiedenen Wurzeln der Säkulargleichung (34) entsprechend gibt es r ($r \leqq k$) solche Linearkombinationen der $F_\nu^{(\lambda)}(u)$, die jeweils der Integralgleichung (26) mit den Eigenwerten $\mu_1, \ldots \mu_r$ genügen.

Da aus dem Vertauschungssatz I ebenso folgt, daß mit $\overline{F}(u)$ auch $L_u[\overline{F}(u)]$ eine Lösung der Integralgleichung (26) ist, so ergibt die Wiederholung der zum Beweis zum Satz IIa angewandten Schlüsse die völlig gleichartige Umkehr dieses Zusammenhanges in

Satz IIb: *Besitzt die lineare Integralgleichung*

$$J_u[\overline{F}(u)] - \mu \overline{F}(u) = 0 \tag{26}$$

für einen festen Wert μ die maximale Anzahl l linear unabhängiger Lösungen

$$\overline{F}_1^{(\mu)}(u) \ldots \overline{F}_l^{(\mu)}(u),$$

mit deren keiner $L_u[\overline{F}(u)]$ verschwindet (wegen der Periodizität des Integraloperators sind sie notwendig periodisch), so lassen sich im allgemeinen aus ihnen l linear unabhängige Linearkombinationen

$$F_1^{(\mu)}(u) \ldots F_l^{(\mu)}(u)$$

bilden, die bezüglich zu den Eigenwerten

$$\lambda_1 \ldots \lambda_l$$

gehörige Lösungen der Differentialgleichung

$$L_u[F(u)] - \lambda F(u) = 0 \tag{25}$$

sind.

Eine unmittelbar sich ergebende Folgerung ist bei beiden Sätzen, daß die Auswahl der Linearkombinationen zu gleichen Eigenwerten gehöriger Eigenfunktionen, die für die wechselseitige Zuordnung beider Eigenwertprobleme entscheidend ist, die Orthogonalisierung dieser Funktionen bewirkt. Die Auswahl erfolgt ja gerade derart, daß die Linearkombinationen der zu *gleichen* Eigenwerten des einen Problems gehörigen Eigenfunktionen wieder Eigenfunktionen des anderen Problems werden, die nun aber — und das ist das Entscheidende — zu *verschiedenen* Eigenwerten des anderen Problems gehören und als solche notwendig orthogonal sind. Die Systeme der orthogonalisierten Eigenfunktionen beider Probleme sind also identisch, nur die Zuordnung zu den Eigenwerten ist verschieden. Die Verhältnisse liegen also wesentlich anders als bei der bisher wohl ausschließlich behandelten vollständigen Äquivalenz der Eigenwertprobleme von Differential- und Integralgleichung für den Fall, daß die Greensche Funktion die Vermittlung übernimmt[14]).

§ 4.

Die Iterationsprinzipe.

Die Gleichwertigkeit der beiden linearen Operatoren L_u und J_u, die in den Sätzen IIa und IIb und ihren Beweisen zutage trat, kommt weiterhin darin zum Ausdruck, daß aus einem Kern $K(u, u')$ in völlig entsprechender Weise sich zwei im allgemeinen nicht abbrechende Folgen „iterierter Kerne" gewinnen lassen. Aus dem Vertauschungssatz I folgt nämlich

$$J_u[(L_u - L_{u'})K(u, u')] = (L_u - L_{u'})[J_u K(u, u')]$$

und wegen $L_u L_{u'} = L_{u'} L_u$ ist ebenso

$$L_u[(L_u - L_{u'})K(u, u')] = (L_u - L_{u'})[L_u K(u, u')].$$

---

[14]) Wie wenig dieser innere Zusammenhang der beiden Eigenwertprobleme beachtet worden ist, geht aus der folgenden Bemerkung in Humberts ausgezeichneter Darstellung der Laméschen und Mathieuschen Funktionen hervor: „M. Whittaker a établi le remarquable résultat suivant: Les fonctions de Lamé, solutions de l'équation

$$y''(x) - [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]\, y(x) = 0$$

sont solutions de diverses équations intégrales, dont la plus simple est

$$y(x) = \lambda \int_0^{4K} (\operatorname{dn} x \operatorname{dn} z + k \operatorname{cn} x \operatorname{cn} z)^n y(z)\, dz.$$

Il est intéressant de remarquer, que le paramètre h ne figure plus dans cette équation intégrale." (!)

Also sind $J_u[K]$ und $L_u[K]$ Lösungen von (27)[15]), und da die Randbedingung der Periodizität auch nach Anwendung der Operatoren auf K erhalten bleibt, ergibt sich

Satz III: *Ist $K(u, u')$ eine den Randbedingungen genügende Lösung von*

$$(L_u - L_{u'})\,K(u, u')] = 0, \tag{27}$$

so gilt das gleiche von den „iterierten Kernen"

$$\begin{cases} K_\nu(u, u') = J_u^\nu[K(u, u')], \\ {}_\nu K(u, u') = L_u^\nu[K(u, u')]. \end{cases} \tag{36}$$

Sie genügen außerdem der Gleichung

$$(J_u - J_{u'})[G(u, u')] = 0. \tag{27a}$$

Die Kerne der ersten Reihe sind die aus der Theorie der linearen Integralgleichungen wohlbekannten iterierten Kerne. Das zweite Iterationsprinzip stimmt überein mit einem Verfahren, das Darboux bei der Behandlung der équations harmoniques entwickelt hat[16]).

Die iterierten Kerne jeder der beiden Reihen reduzieren sich dann und nur dann auf eine endliche Anzahl linear unabhängiger, wenn der Kern $K(u, u')$ ausartet, d. h. sich in der Form

$$K(u, u') = \sum_{\varrho=1}^{n} A_\varrho F_\varrho(u) F_\varrho(u') \tag{37}$$

---

[15]) Ebenso folgt, daß $J_u[K]$ und $L_u[K]$ Lösungen der Gleichung

$$(J_u - J_{u'})[G(u, u')] = 0 \tag{27a}$$

sind, die ausführlich geschrieben die Gestalt

$$\int K(u, t)\,G(t, u')\,dt - \int K(t, u')\,G(u, t)\,dt = 0$$

hat. Sie ist das Gegenstück zur Differentialgleichung (27) und wird vom Kern $K(u, u')$ selbst identisch erfüllt (vgl. die Darstellung der Resolvente in der Integralgleichungstheorie).

[16]) „Étant donnée l'équation harmonique

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = [\varphi(x + y) - \psi(x - y)]\,z.$$

une solution quelconque z de cette équation donne naissance à une solution nouvelle z par l'emploi de la formule

$$z' = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2(\varphi + \psi)\,z."$$

(Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, t. II, livre IV, chap. IX (412), S. 207.)

Setzt man $x + y = u$, $x - y = u'$, so besagt der Satz, daß mit z auch

$$z' = (L_u + M_{u'})[z]$$

eine Lösung von

$$(L_u - M_{u'})[z] = 0$$

ist, wobei $L_u \equiv \frac{\partial^2}{\partial u^2} - \varphi(u)$ und $M_{u'} \equiv \frac{\partial^2}{\partial u'^2} - \psi(u')$ gesetzt ist. Durch Addition folgt $z' = 2L_u[z]$.

darstellen läßt. Bildet man dann mit unbestimmten Koeffizienten

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu K_\nu(u, u') = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu J^\nu[K(u, u')] = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\varrho=1}^{n} a_\nu \mu_\varrho^\nu A_\varrho F_\varrho(u) F_\varrho(u')$$

$$(K_0 = J^0[K] = K),$$

so erkennt man, daß die Kerne K_ν dann und nur dann linear abhängig sind, wenn für alle ϱ

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \mu_\varrho^\nu = 0$$

ist, d. h. wenn alle a_ν als Koeffizienten der Gleichung gewählt werden, deren Wurzeln die Eigenwerte μ_ϱ ($\varrho = 1 \ldots n$) sind. Umgekehrt folgt aus der linearen Abhängigkeit endlich vieler iterierter Kerne K_ν oder $_1K$ der Zerfall des Kernes K. Das Ergebnis, das für beide Reihen völlig gleichartig ist, werde zusammengefaßt in

Satz IV: *Endlich viele der iterierten Kerne jeder Reihe sind dann und nur dann linear abhängig, wenn $K(u, u')$ zerfällt, und zwar bestehen in diesem Fall die Relationen*

$$f(J[K(u, u')]) = 0, \qquad g(L[K(u, u')]) = 0 \tag{38}$$

mit

$$f(\mu) = (\mu - \mu_1) \ldots (\mu - \mu_n), \quad g(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_n). \tag{38a}$$

Die Eigenfunktionen aller durch Iteration der Operatoren J und L entstehenden Operatoren sind für die gleichen homogenen Randbedingungen in ihrer Gesamtheit identisch. Bezüglich der Eigenwerte bestätigt man sofort[17])

Satz V: *Der Operator*

$$h(J, L) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{rs} J^r L^s$$

besitzt die Eigenwerte $h(\mu_\varrho, \lambda_\varrho)$ ($\varrho = 1 \ldots n$), wenn μ_ϱ und λ_ϱ die Eigenwerte der Operatoren J und L sind.

Eine unmittelbare Folge ist, daß die Integralgleichung mit dem Kern

$$\overline{K}(u, u') = J^{-1} h(J, L)[K(u, u')] \tag{39a}$$

die gleichen Eigenwerte besitzt. Es wird nämlich

$$\int_{-2K}^{+2K} \overline{K}(u, u') F_\varrho(u')\, du' = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{rs} J^{r-1} \int_{-2K}^{+2K} L^s[K(u, u')] F_\varrho(u')\, du$$

---

[17]) Vgl. hierzu Courant-Hilbert, Methoden der math. Physik 1, 2. Aufl., Kap. III, § 10, S. 6 (132).

durch partielle Integration übergeführt in

$$\sum_{r=1}^{n} \cdot \sum_{s=1}^{n} a_{rs} J^{r-1} \int_{-2K}^{+2K} K(u,u') L^s[F_\varrho(u')]\, du' = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{rs} J^r L^s[F_\varrho(u)],$$

so daß sich schließlich vermöge Satz V

$$\int_{-2K}^{+2K} \overline{K}(u,u') F_\varrho(u')\, du' = h(\mu_\varrho, \lambda_\varrho) F_\varrho(u) \qquad (\varrho = 1 \ldots n) \tag{39}$$

ergibt.

§ 5.

Whittakers Kerne.

Die hyperbolische Differentialgleichung

$$L_u[K(u,u')] - L_{u'}[K(u,u')] = 0 \tag{27}$$

mit

$$L_u \equiv \frac{\partial^2}{\partial u^2} - n(n+1)\, a f^2(u)$$

läßt sich aus der elliptischen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 K}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial v^2} - n(n+1)[a f^2(u) + b g^2(v)] K = 0 \tag{16}$$

durch die Ersetzung

$$u' = iv$$

gewinnen, denn es liegt in der Natur der Gleichungen (10), daß $f(u)$ und $g(v)$ durch die Beziehung

$$g^2(v) = -\frac{a}{b} f^2(iv) \tag{40}$$

einander zugeordnet werden können. Unter allen in u und $u' = iv$ symmetrischen periodischen Lösungen der partiellen Differentialgleichung (27), deren jede zu einer Integralgleichung Anlaß gibt, ist diejenige Lösung $K_n(u, iv)$ von besonderer Bedeutung, die für beliebiges ganzzahliges n der Lösung (2) in § 1 in dem Sinn entspricht, daß sie nur von dem Produkt der Funktionen $f(u)$ und $g(v)$ abhängt, also nur von dem Quotienten $\frac{y}{x}$. Wie sich aus (15) ergibt, genügt sie der Legendreschen Differentialgleichung

$$\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) + 2\,\frac{y}{x}\,\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - n(n+1)\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = 0, \tag{41}$$

und umgekehrt ist jede in $\frac{y}{x}$ ganze Lösung

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = P_n\left(i\frac{y}{x}\right) \tag{42}$$

von (41) periodisch in u und u'. Unter Berücksichtigung von (40) ergibt sich

$$P_n(i f(u) g(v)) = P_n\left(\sqrt{\frac{a}{b}} f(u) f(u')\right). \tag{43}$$

Diesem Kern können zwei gleichwertige zur Seite gestellt werden, die man erhält, wenn man $a f^2(u)$ gemäß der Faktorzerlegung von $f'^2(u)$ durch

$$\left.\begin{matrix} a_1 f_1^2(u) \\ a_2 f_2^2(u) \end{matrix}\right\} = a\left[f^2(u) + \frac{c \pm \sqrt{c^2 - a b}}{a}\right] \tag{44}$$

ersetzt, wobei die Differentialgleichung sich nicht ändert, und mit den neuen Funktionen $f_1(u)$, $f_2(u)$

$$P_n\left(\sqrt{\frac{a_1}{b_1}} f_1(u) f_1(u')\right), \quad P_n\left(\sqrt{\frac{a_2}{b_2}} f_2(u) f_2(u')\right) \tag{45}$$

bildet.

Um speziell Whittakers Integralgleichungen zu erhalten, hat man

$$a = k^2, \quad b = 1, \quad c = -\frac{1 + k^2}{2} \tag{46}$$

zu setzen, womit sich

$$f(u) = \operatorname{sn}(u, k), \quad g(v) = i k \operatorname{sn}(i v, k) \tag{46a}$$

ergibt. Die Integralgleichung erhält die Gestalt

$$\int_{-2K}^{+2K} P_n(k \operatorname{sn} u \operatorname{sn} u') \overline{F}(u') d u' - \mu \overline{F}(u) = 0. \tag{47}$$

Ihre Eigenwerte sind in der oben angegebenen Weise mit denen der Differentialgleichung

$$F''(u) - [n(n+1) k^2 \operatorname{sn}^2(u, k) + \lambda] F(u) = 0 \tag{48}$$

verknüpft. Das Gleiche gilt wegen

$$\begin{cases} a_1 f_1^2(u) = -k^2 \operatorname{cn}^2 u, & b_1 = k'^2 \\ a_2 f_2^2(u) = -\operatorname{dn}^2 u, & b_2 = -k'^2 \end{cases} \tag{49}$$

für die Integralgleichungen mit den Kernen

$$P_n\left(i \frac{k}{k'} \operatorname{cn} u \operatorname{cn} u'\right), \quad P_n\left(\frac{1}{k'} \operatorname{dn} u \operatorname{dn} u'\right), \tag{50}$$

die derselben partiellen Differentialgleichung genügen.

Diese drei besonderen Kerne, die im ganzen Grundgebiet

$$-2K \leqq \begin{matrix} u \\ u' \end{matrix} \leqq +2K$$

regulär sind, zerfallen für ganzzahlige Werte n, und hierauf beschränkt sich Whittaker. Die Integralgleichungen besitzen dann nur endlich viele Eigenfunktionen, die sämtlich Lamésche Polynome sind. Da andererseits das durch die Periodizitätsforderung implizierte Eigenwertproblem der Differentialgleichung unendlich viele Eigenwerte besitzt, so ist zu schließen,

daß für fast alle periodischen Lösungen $F_{n,\nu}(u)$ der Differentialgleichung (48), die keine Laméschen Polynome sind,

$$\int_{-2K}^{+2K} P_n(k \operatorname{sn} u \operatorname{sn} u') F_{n,\nu}(u') \, du' = 0 \tag{51}$$

gilt, d. h. daß die Integralgleichung (47) (und entsprechend die Integralgleichungen mit den anderen Kernen) den Eigenwert $\mu = 0$ in unendlicher Vielfachheit besitzt[18]).

Die Eigenwerte der Gleichung (48), die zu Laméschen Polynomen gehören, ergeben sich in bekannter Weise als Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2\cdot 1 & & & \\ -n(n+1)k^2 & -\lambda - 4(1+k^2) & 4\cdot 3 & & \\ & [2\cdot 3 - n(n+1)]k^2 & -\lambda - 16(1+k^2) & \cdot & \\ & & [4\cdot 5 - n(n+1)]k^2 & \cdot & n(n-1) \\ & & & \cdot & -\lambda - n^2(1+k^2) \end{vmatrix} = 0, \tag{55}$$

die entsprechenden Eigenwerte der Integralgleichung mit einem Polynomkern, z. B. dem Kern

$$P_n(k \operatorname{sn} u \operatorname{sn} u') = \sum_{\nu=0}^{n/2} a_{2\nu} \operatorname{sn}^{2\nu} u \operatorname{sn}^{2\nu} u', \qquad n \equiv 0 \pmod 2 \tag{56}$$

sind die Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} I_0 - \frac{\mu}{a_0} & I_2 & I_4 & \cdot\ \cdot & I_n \\ I_2 & I_4 - \frac{\mu}{a_2} & I_6 & \cdot\ \cdot & I_{n+2} \\ I_4 & I_6 & I_8 - \frac{\mu}{a_4} & \cdot\ \cdot & I_{n+4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ I_n & I_{n+2} & I_{n+4} & \cdot\ \cdot & I_{2n} - \frac{\mu}{a_n} \end{vmatrix} = 0 \tag{57}$$

mit

$$I_{2\nu} = \int_{-2K}^{+2K} \operatorname{sn}^{2\nu} u \, du = 2 \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu + 1)} F(\tfrac{1}{2}, \nu + \tfrac{1}{2}; \nu + 1 : k^2). \tag{58}$$

[18]) Diese bemerkenswerten Verhältnisse lassen sich für den Grenzfall einfachperiodischer Funktionen im einzelnen nachprüfen, was im III. Teil geschieht. Da allerdings in dem eben behandelten Beispiel der Grenzübergang $k \to 0$ offenbar zu nichts führt und der Grenzübergang $k \to 1$ keine reelle Periode ergibt, so sei noch das in § 2 gegebene Beispiel angeführt. Mit

$$a = b = 1, \quad c = 1 - 2k^2 \tag{52}$$

ergibt sich — vgl. (20a) — die Integralgleichung

$$\int_{-2K}^{+2K} P_n\left(\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} \frac{\operatorname{sn} u' \operatorname{dn} u'}{\operatorname{cn} u'}\right) \overline{F}(u') \, du' - \mu \overline{F}(u) = 0, \tag{53}$$

Die Tatsache, daß die Eigenfunktionen beider Probleme übereinstimmen, ermöglicht nun, zu erkennen, wie entsprechende Eigenwerte λ_i und μ_i miteinander zusammenhängen. Die Koeffizienten eines bestimmten Lamé-schen Polynoms genügen zwei Gleichungssystemen, die man erhält, wenn man mit einem Polynomansatz in die Differential- bzw. Integralgleichung eingeht und für λ und μ entsprechende Wurzeln der Säkulargleichungen (55) und (57) wählt. Also genügen sie auch jedem Gleichungssystem, das durch Auswahl von n Gleichungen aus beiden Systemen entsteht. Die neue Determinante gibt dann — gleich 0 gesetzt — eine rationale Verknüpfung entsprechender Eigenwerte. So läßt sich z. B. μ_i aus λ_i am einfachsten vermöge der Beziehung

$$(59)\qquad \begin{vmatrix} -\lambda_i & 2\cdot 1 & & & \\ -n(n+1)k^2 & -\lambda-4(1+k^2) & 4\cdot 3 & & \\ & [2\cdot 3-n(n+1)]k^2 & -\lambda-16(1+k^2) & \cdot & \\ & & [4\cdot 5-n(n+1)]k^2 & \cdot & n(n-1) \\ I_0-\frac{\mu_i}{a_0} & I_2 & I_4 & \cdot & I_n \end{vmatrix} = 0$$

berechnen.

III. Teil:

Die Darbouxsche Gleichung.

§ 6.

Der Fall ganzzahliger n.

A. Bestimmung der charakteristischen Exponenten.

Die beiden dem Floquetschen Theorem entsprechenden Lösungen der Differentialgleichung

$$(60)\qquad F''(u) - [n(n+1)(\wp u - e_3) + \lambda]F(u) = 0$$

haben die Gestalt

$$(61)\qquad F_n^{(1)}(u) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\sigma(u+a_j)}{\sigma(u)\sigma(a_j)} e^{-u\zeta(a_j)},\quad F_n^{(2)}(u) = F_n^{(1)}(-u),$$

wobei die Konstanten a_j durch ein System algebraischer Gleichungen, das die $2n$ Werte von $\wp(a_j)$ und $\wp'(a_j)$ miteinander verknüpft, fest-

---

die sich übrigens vermöge einer Landenschen Transformation

$$(54)\qquad \frac{\mathrm{sn}(u,k)\,\mathrm{dn}(u,k)}{\mathrm{cn}(u,k)} = (k+ik')\,\mathrm{sn}\left(\frac{u}{k+ik'},\ (k+ik')^2\right)$$

auch auf die Whittakersche zurückführen läßt.

gelegt sind. Ihre Bestimmung, die selbst in den einfachsten Fällen vom rein algebraischen Standpunkt aus kaum zu überwindende Schwierigkeiten bietet, gelingt nach der Hermite-Halphenschen Theorie auf Grund der Überlegung, daß die $\wp(a_j)$ die Nullstellen des Polynoms

$$(62)\quad F_1(u)\,F_2(u) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\sigma(a_j+u)\,\sigma(a_j-u)}{\sigma^2(a_j)\,\sigma^2(u)} = \prod_{i=1}^{n} (\wp(u) - \wp(a_j))$$

sind. Die Koeffizienten des Polynoms sind rekursiv bestimmbar aus der Forderung, daß die Differentialgleichung, der das Produkt $F_1 \cdot F_2$ genügt, eine polynomische Lösung aufweist. Die charakteristischen Exponenten haben nach (61) die Gestalt

$$(63)\quad k = \pm 2 \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} a_j & \zeta(a_j) \\ \omega & \zeta(\omega) \end{vmatrix},$$

unter ω eine der Grundperioden von $\wp u$ verstanden.

Für $e_2 = e_3 = -\frac{1}{3}$ verwandelt sich (60) in die einfach-periodische Darbouxsche Gleichung

$$(64)\quad F''(u) - \left[\frac{n(n+1)}{\sin^2 u} + \lambda\right] F(u) = 0,$$

deren Koeffizient die Periode π besitzt. Wegen

$$\lim_{e_2 = e_3 = -\frac{1}{3}} \zeta(u) = \operatorname{ctg} u + \tfrac{1}{3}, \qquad \lim_{e_2 = e_3 = -\frac{1}{3}} \sigma(u) = \sin u\, e^{\frac{u^2}{6}}$$

erhalten die Lösungen (61) die Gestalt

$$(65)\quad F_n^{(1)}(u) = \prod_{j=1}^{n} (\operatorname{ctg} u + \operatorname{ctg} a_j) e^{-u \operatorname{ctg} a_j}, \quad F_n^{(2)}(u) = F_n^{(1)}(-u),$$

wobei der charakteristische Exponent

$$(66)\quad k = \pm \sum_{j=1}^{n} \operatorname{ctg} a_j$$

in seiner Abhängigkeit vom Parameter λ nicht ohne weiteres bestimmbar ist. Dies gelingt jedoch fast mühelos, wenn man die Lösung auf andere Weise, nämlich unter Zugrundelegung der von Darboux gegebenen Rekursionsformel

$$(67)\quad F_{n+1}(u) = F_n'(u) - (n+1) \operatorname{ctg} u\, F_n(u)$$

ermittelt[19]). Danach ist wegen

$$(68\,a)\quad F_0(u) = e^{\pm \sqrt{\lambda}\, u}$$

[19]) l. c. 2, S. 198.

die Lösung unmittelbar in der Form

$$F_n^{(1)}(u) = e^{\sqrt{\lambda}\,u}\,[c_n \operatorname{ctg}^n u + c_{n-1}\operatorname{ctg}^{n-1} u + \ldots + c_0], \tag{68}$$

$$F_n^{(2)}(u) = F_n^{(1)}(-u)$$

gewonnen, die den charakteristischen Exponenten in Evidenz setzt. Durch vollständige Induktion bestätigt man leicht[20])

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{ctg} a_i = \frac{c_{n-1}}{c_n} = \sqrt{\lambda}. \tag{66}$$

Die Eigenwerte λ, die zu periodischen Lösungen[21]) der Darbouxschen Gleichung (64) Anlaß geben, sind also die Zahlen

$$\lambda = -\nu^2. \tag{69}$$

B. Diskussion des Eigenwertproblems.

Um das Eigenwertproblem, das die Frage nach periodischen Lösungen der Darbouxschen Gleichung

$$F''(u) - \left[\frac{n(n+1)}{\sin^2 u} + \lambda\right] F(u) = 0 \tag{64}$$

impliziert, vollständig diskutieren und den Zusammenhang mit dem Eigenwertproblem der Integralgleichung

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} P_n(\operatorname{ctg} u \operatorname{ctg} u')\,\overline{F}(u')\,du' - \mu\,\overline{F}(u) = 0$$

(sie ergibt sich durch den Grenzübergang $k \to 0$ und Ersatz von u durch $\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$ aus (53), § 5) durchschauen zu können, ist es nötig, die den Eigenwerten

$$\lambda = -\nu^2 \tag{69}$$

---

[20]) Aus der Annahme, die Beziehung (66) sei für alle $F_\nu(u)$ mit $\nu \leqq n$ bewiesen, folgt

$$F_n'(u) = e^{\sqrt{\lambda}\,u}\,[c_n \operatorname{ctg}^n u - \sqrt{\lambda}\,c_n \operatorname{ctg}^{n-1} u + \ldots],$$

$$F_n'(u) = e^{\sqrt{\lambda}\,u}\,[-n\,c_n \operatorname{ctg}^{n+1} u + \sqrt{\lambda}\,n\,c_n \operatorname{ctg}^n u + \ldots]$$

und daraus nach (67)

$$F_{n+1}(u) = e^{\sqrt{\lambda}\,u}\,[-(2n+1)\,c_n \operatorname{ctg}^{n+1} u + \sqrt{\lambda}\,(2n+1)\,c_n \operatorname{ctg}^n u + \ldots],\ \text{q. e. d.}$$

[21]) Unter „periodischen Lösungen" sollen auch die Lösungen verstanden werden, die sich bei Vermehrung des Argumentes um π mit dem Faktor (-1) multiplizieren („halbperiodische Lösungen").

entsprechenden Eigenfunktionen näher zu bestimmen. Die aus der allgemeinen Theorie Hermites fließende Darstellung (65) erweist sich hierfür nicht als geeignet, da zunächst die Bestimmung der Koeffizienten in ihrer Abhängigkeit vom charakteristischen Exponenten $k\ (= i\,\nu)$ erhebliche Schwierigkeiten bietet, und sodann noch die Trennung in Real- und Imaginärteil nötig ist, um die einzelnen periodischen Lösungen zu gewinnen. Dies gilt auch für die rekursive Bestimmung der komplexen Lösung nach Darboux.

Aus diesem Grunde scheint es mir wichtig, auf anderem Wege gewonnene explizite Darstellungen der periodischen Lösungen zu geben. Wir überzeugen uns davon, daß es im allgemeinen auf zwei Arten möglich ist, von einer Lösung der Differentialgleichung (64) mit (69) periodische Faktoren abzuspalten, so daß die verbleibende Funktion einer Differentialgleichung genügt, die polynomische Lösungen in $\sin^2 u$ zuläßt. Es werde zunächst

$$n - \nu \equiv 0 \pmod 2 \tag{71}$$

angenommen.

Wird dann einerseits

$$F(u) = \sin^{-n} u \;\; z(\sin^2 u) \tag{71a}$$

gesetzt, so genügt $z(\zeta)$ der Differentialgleichung

$$\zeta(1-\zeta)\,z''(\zeta) + \left[\frac{1}{2} - n + (n-1)\,\zeta\right] z'(\zeta) + \frac{\nu^2 - n^2}{4}\, z(\zeta) = 0, \tag{72a}$$

die die polynomische Lösung

$$z(\zeta) = G_{\frac{\nu+n}{2}}\left(-n, -n + \frac{1}{2}, \zeta\right) \tag{73a}$$

besitzt, unter $G_l(p, q, \zeta)$ das l-te Jacobi'sche Polynom verstanden[22]).

Wird andererseits

$$F(u) = \sin^{n+1} u \cos u \;\; z(\sin^2 u) \tag{71b}$$

gesetzt, so genügt $z(\zeta)$ der Differentialgleichung

$$\zeta(1-\zeta)\,z''(\zeta) + \left[n + \frac{3}{2} - (n+3)\,\zeta\right] z'(\zeta) + \frac{\nu^2 - (n+2)^2}{4}\, z(\zeta) = 0. \tag{72b}$$

die die polynomische Lösung

$$z(\zeta) = G_{\frac{\nu-n}{2}-1}\left(n+2, n + \frac{3}{2}, \zeta\right) \tag{73b}$$

---

[22]) Vgl. Courant-Hilbert 1, 2. Auflg., S. 77.

besitzt. Da der Index den Grad des Polynoms angibt, sind die folgenden beiden Fälle zu unterscheiden:

$$\text{I. } \nu > n \begin{cases} F^{(1)}_{n,\nu}(u) = \sin^{-n} u \, G_{\frac{\nu+n}{2}}(-n, -n+\frac{1}{2}, \sin^2 u), \\ F^{(2)}_{n,\nu}(u) = \sin^{n+1} u \cos u \, G_{\frac{\nu-n}{2}-1}(n+2, n+\frac{3}{2}, \sin^2 u); \end{cases}$$

(71*)

$$\text{II. } \nu \leqq n \begin{cases} F^{(1)}_{n,\nu}(u) = \sin^{-n} u \, G_{\frac{\nu+n}{2}}(-n, n+\frac{1}{2}, \sin^2 u) \\ \qquad\qquad = \sin^{-\delta} u \, \text{Polyn } (\text{ctg}^2 u)\ ^{23}), \\ F^{(2)}_{n,\nu}(u) \equiv 0. \end{cases}$$

Entsprechend ergibt sich für

$$n - \nu \equiv 1 \pmod 2 \tag{74}$$

die Fallunterscheidung:

$$\text{I. } \nu > n \begin{cases} F^{(1)}_{n,1}(u) = \sin^{-n} u \cos u \, G_{\frac{\nu+n-1}{2}}(-n+1, -n+\frac{1}{2}, \sin^2 u), \\ F^{(2)}_{n,1}(u) = \sin^{n+1} u \, G_{\frac{-n-1}{2}}(n+1, n+\frac{3}{2}, \sin^2 u); \end{cases}$$

(74*)

$$\text{II. } \nu < n \begin{cases} F^{(1)}_{n,1}(u) = \sin^{1-n} u \, \text{ctg}\, u \, G_{\frac{\nu+n-1}{2}}(-n+1, -n+\frac{1}{2}, \sin^2 u) \\ \qquad\qquad = \sin^{-\delta} u \, \text{ctg}\, u \, \text{Polyn.} (\text{ctg}^2 u)\ ^{23}), \\ F^{(2)}_{n,1}(u) \equiv 0. \end{cases}$$

Wie man leicht feststellt, ist beidemal in Fall II. die nicht identisch verschwindende Eigenfunktion bis auf einen beiseite gelassenen Zahlfaktor das ν-te zugeordnete Legendre'sche Polynom, gebildet für das Argument $(i \, \text{ctg}\, u)$, das in der Form

$$F^{(1)}_{n,\nu}(u) = P_{n,\nu}(i \, \text{ctg}\, u) \tag{75}$$

geschrieben werde. Die Differentialgleichung (64) besitzt offenbar für $\nu \leqq n$ keine zweite periodische Lösung, denn die von (75) linear unabhängige zweite Lösung enthält das Glied

$$\lg \frac{i \, \text{ctg}\, u + 1}{i \, \text{ctg}\, u - 1} \sim 2iu.$$

Damit ist festgestellt: Das durch die Frage nach periodischen Lösungen der Differentialgleichung (64) implizierte Eigenwertproblem, bei dem im

[23]) $\delta = \begin{cases} 0, & \nu \equiv 0 \pmod 2 \\ 1, & \nu \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$. Für $\nu \leqq n$ ist $G_{\frac{\nu-n}{2}}(-n, -n+\frac{1}{2}, \sin^2 u)$ ein Polynom vom Grade $(n - \nu)$ in $\sin u$. Entsprechend ist für $\nu < n$

$$G_{\frac{\nu+n-1}{2}}(-n+1, -n+\tfrac{1}{2}, \sin^2 u)$$

ein Polynom vom Grade $(n - \nu - 1)$ in $\sin u$.

Gegensatz zu der im allgemeinen üblichen Auffassung n der feste Parameter und $\lambda = -\nu^2$ der Eigenwert ist, besitzt

die *einfachen* Eigenwerte $\lambda = -\nu^2 (\nu \leqq n)$,
die *zweifachen* Eigenwerte $\lambda = -\nu^2 (\nu > n)$.

Unter Heranziehung der in der Theorie der periodischen Lösungen üblichen Begriffe der *Stabilität* und *Instabilität*[24]), die nur für die diskreten Werte $u = \pm n\pi$ ihren Sinn verlieren, wären die zweifachen Eigenwerte dem stabilen, die einfachen dagegen auf Grund der soeben über die zweite Lösung gemachten Feststellungen dem instabilen Typus zuzuweisen.

Anhand dieser expliziten Darstellungen der periodischen Lösungen läßt sich unschwer bestätigen, was hinsichtlich des Zusammenhangs mit dem Eigenwertproblem der Integralgleichung allgemein festgestellt wurde. Da die Integralgleichung mit dem ausgearteten Kern $P_n(\operatorname{ctg} u \operatorname{ctg} u')$ nur endlich viele Eigenwerte besitzt, und da andererseits nach der im II. Teil entwickelten Theorie beide Eigenwertprobleme aufeinander abbildbar sind, so müssen „fast" alle (d. h. alle bis auf eine endliche Anzahl) periodischen Lösungen zum Eigenwert Null der Integralgleichung gehören. In der Tat ist sofort einzusehen, daß das Produkt des Kernes $P_n(\operatorname{ctg} u \operatorname{ctg} u')$ mit $F^{(2)}_{n,\nu}(u)$ für alle ganzzahligen n und ν eine ungerade Funktion ist, daß also

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} P_n(\operatorname{ctg} u \operatorname{ctg} u') F^{(2)}_{n,\nu}(u')\, du' = 0 \tag{76}$$

wird. Andererseits kann man sich davon überzeugen, daß das Produkt des Kernes mit $F^{(1)}_{n,\nu}(u)$ nach u integriert für $\nu > n$ wieder eine periodische Funktion ergibt, so daß also

$$\int_{-\frac{\pi}{2}+\sigma i}^{+\frac{\pi}{2}+\sigma i} P_n(\operatorname{ctg} u \operatorname{ctg} u') F^{(1)}_{n,\nu}(u')\, du' = 0 \tag{77}$$

gilt. Mit Rücksicht auf den Pol des Integranden bei $u = 0$ ist das Integrationsintervall verschoben, aber dies ist nicht von Bedeutung, da für die Frage der Periodizität der Pol unwesentlich ist.

Lediglich für die geraden $\nu \leqq n$ können sich von Null verschiedene Eigenwerte ergeben. Man bestätigt dies leicht, indem man zuerst durch unbestimmte Integration

$$\int P_n(\operatorname{ctg} u \operatorname{ctg} u') P_{n,0}(i \operatorname{ctg} u')\, du' = \mu_0 P_{n,0}(i \operatorname{ctg} u) u' + H_0(\operatorname{ctg} u, \operatorname{ctg} u') \tag{78}$$

[24]) Vgl. hierzu G. Hamel, Über die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten, Math. Annalen 73 (1912), I. Teil, § 2, S. 380.

und

$$(79)\quad \int P_n(\operatorname{ctg} u \operatorname{ctg} u')\, P_{n,\nu}(i \operatorname{ctg} u')\, du' = H_\nu(\operatorname{ctg} u, \operatorname{ctg} u') \quad \nu > 0$$

gewinnt[25]), wobei H_ν ein Polynom in beiden Veränderlichen bedeutet. Wird als Integrationsintervall die reelle Periode gewählt (zur Vermeidung des Pols bei $u = 0$ in Richtung der imaginären Achse verschoben), so fallen die periodischen Glieder fort, und es ergibt sich nur für $\nu = 0$ ein von Null verschiedener Eigenwert. Wird dagegen als Integrationsintervall die imaginäre Achse gewählt, in die sich beim Grenzübergang die andere Periode verwandelt[26]), so ergeben sich wegen

$$(78a)\quad \lim_{u' = \pm i\infty} H_\nu(\operatorname{ctg} u, \operatorname{ctg} u') = H_\nu(\operatorname{ctg} u, \pm i) = \mu_\nu P_{n,\nu}(i \operatorname{ctg} u)$$

für $\nu > 0$ von Null verschiedene Eigenwerte μ_ν der Integralgleichung. Die Integralgleichung bringt inhaltlich im wesentlichen das *Additionstheorem der Kugelfunktionen* zum Ausdruck, für das man von hier aus ein neues Verständnis gewinnt.

§ 7.

Der Fall beliebiger n.

A. Bestimmung der charakteristischen Exponenten.

In diesem Falle, der den in § 6 A geschilderten Methoden nicht mehr zugänglich ist, gelangt man zum Ziel, indem man die Darbouxsche Gleichung, die jetzt in der allgemeinsten Form

$$(80)\quad F''(u) - \left[\frac{n(n+1)}{\sin^2 u} + \frac{m(m+1)}{\cos^2 u} + \lambda\right] F(u) = 0$$

angenommen werde, durch die Transformation

$$(81a)\quad \zeta = \sin^2 u$$

in eine algebraische Differentialgleichung verwandelt und schließlich wie in § 6 B

$$(81b)\quad F(\zeta) = \zeta^{-n/2}(1-\zeta)^{-m/2} z(\zeta)$$

substituiert. Dann ist $z(\zeta)$ eine Lösung der *hypergeometrischen* Differentialgleichung

$$(81c)\quad \zeta(1-\zeta) z''(\zeta) + [\tfrac{1}{2} - n + (n+m-1)\zeta] z'(\zeta) - \frac{(n+m)^2+\lambda}{4} z(\zeta) = 0,$$

[25]) Weil alle $P_{n,\nu}$ für $\nu \equiv 0 \pmod 2$, $\nu \neq 0$ den Faktor $(1 + \operatorname{ctg}^2 u)$ enthalten und

$$\int (\operatorname{ctg}^\nu u' + \operatorname{ctg}^{\nu-2} u')\, du' = -\frac{\operatorname{ctg}^{\nu-1} u'}{\nu - 1}$$

ist, so ergibt die Integration nur periodische Glieder.

[26]) Bei der Differentialgleichung ist in diesem Fall die Periodizitätsforderung durch die Forderung: „beschränkt bleiben für $u' = \pm i\infty$" zu ersetzen, die ebenfalls die zugeordneten Legendreschen Polynome festlegt.

die allgemein durch das Symbol

$$(81)\qquad P\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ \frac{n+1}{2} & \frac{m+1}{2} & \frac{\sqrt{-\lambda}}{2} & \zeta \\ -\frac{n}{2} & -\frac{m}{2} & -\frac{\sqrt{-\lambda}}{2} & \end{pmatrix}$$

repräsentiert wird. Bei der Transformation (81a) bildet sich der Parallelstreifen (vgl. Fig. 1) der komplexen u-Ebene auf die längs der reellen Achse von 0 bis $-\infty$, sowie von $+1$ bis $+\infty$ geschlitzte ζ-Ebene ab. Einer Vermehrung von u um π entspricht in der ζ-Ebene ein einfacher Umlauf im positiven Sinne um die beiden Verzweigungspunkte 0 und $+1$, d. h. ein einfacher Umlauf um den Verzweigungspunkt ∞. Es ist also ohne Rechnung unmittelbar klar, daß die charakteristischen Exponenten der Differentialgleichung (80) die mit $2i$ multiplizierten Wurzeln der determinierenden Fundamentalgleichung zur Stelle ∞ sind: Also wird

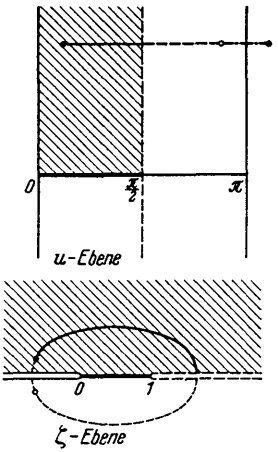


Fig. 1.

$$(82)\qquad k = \pm\sqrt{\lambda},$$

und wir finden somit auch in dem allgemeinen Fall beliebiger n das in § 6, A gewonnene Resultat wieder.

B. Bestimmung der zugehörigen Lösungen.

Um die Lösungen, die zu den charakteristischen Exponenten (82) gehören, zu bestimmen, gehe man etwa von dem Fundamentalsystem

$$(83)\qquad \begin{aligned} z_1(\zeta) &= \int_{(0,\zeta)} t^{\alpha-\gamma}(t-1)^{\gamma-\beta-1}(\zeta-t)^{-\alpha}\,dt \\ z_2(\zeta) &= \int_{(1,\zeta)} t^{\alpha-\gamma}(t-1)^{\gamma-\beta-1}(\zeta-t)^{-\alpha}\,dt \end{aligned} \qquad \left[\begin{aligned} \alpha &= -\frac{n+m}{2}+\frac{\sqrt{-\lambda}}{2} \\ \beta &= -\frac{n+m}{2}-\frac{\sqrt{-\lambda}}{2} \\ \gamma &= -n+\tfrac{1}{2} \end{aligned}\right]$$

aus, wobei die Integrale je längs einer *Doppelschleife* um das bezeichnete Punktepaar in der Ebene der Integrationsveränderlichen zu erstrecken sind. Bei einem Umlauf von ζ um den Verzweigungspunkt 0 erfährt das Fundamentalsystem die Substitution

$$(84)\qquad \begin{cases} \theta_1 z_1 = \varepsilon\varepsilon_1 z_1 \\ \theta_1 z_2 = (\varepsilon_2 - 1)z_1 + z_2 \end{cases} \qquad [\varepsilon = e^{-2\pi i\alpha},\ \varepsilon_1 = e^{2\pi i(\alpha-\gamma)},\ \varepsilon_2 = e^{2\pi i(\gamma-\beta)}],$$

bzw. bei einem Umlauf um den Punkt 1 die Substitution

$$\begin{cases} \theta_2 z_1 = z_1 + \varepsilon(\varepsilon_1 - 1) z_2 \\ \theta_2 z_2 = \qquad\qquad \varepsilon \varepsilon_2 z_2. \end{cases} \tag{85}$$

Für die gesuchten Lösungen

$$z^* = A z_1 + B z_2 \tag{86}$$

muß

$$\theta_2 \theta_1 z^* = \varrho z^* \tag{86a}$$

gelten, so daß sich ϱ aus der Bedingungsgleichung

$$\begin{vmatrix} \varepsilon \varepsilon_1 - \varrho, & \varepsilon_2 - 1 \\ \varepsilon^2 \varepsilon_1 (\varepsilon_1 - 1), & \varepsilon(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 + 1) - \varrho \end{vmatrix} = 0 \tag{87}$$

zu

$$\varrho = \begin{cases} \varepsilon & = e^{-2\pi i \alpha} = e^{[-\sqrt{\lambda} + i(n+m)]\pi} \\ \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 & = e^{-2\pi i \beta} = e^{[\sqrt{\lambda} + i(n+m)]\pi} \end{cases} \tag{87a}$$

berechnet. Auf Grund der Beziehung (81b) bestehen danach für die entsprechenden Lösungen $F^*(\zeta)$ die Beziehungen

$$\theta_2 \theta_1 F^*(\zeta) = e^{\mp \sqrt{\lambda}} F^*(\zeta), \tag{88}$$

und die Lösungen selbst haben die Gestalt

$$\begin{cases} F_1(\zeta) = \zeta^{-n/2} (1-\zeta)^{-m/2} [z_1(\zeta) + \varepsilon \varepsilon_1 z_2(\zeta)] \\ F_2(\zeta) = \zeta^{-n/2} (1-\zeta)^{-m/2} [(1-\varepsilon_2) z_1(\zeta) - \varepsilon(1-\varepsilon_1) z_2(\zeta)]. \end{cases} \tag{89}$$

(Eingegangen am 13. 7. 1935.)

Integration von Differentialgleichungen vermittels der endlichen Fourier-Transformation.

Von

Gustav Doetsch in Freiburg i. B.

§ 1.

Endliche und unendliche Fourier-Transformation.

1. Unter der *Fourier-Transformation* versteht man die lineare Funktionaloperation

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyx} G(x)\, dx \equiv \mathfrak{F}\{G\}, \tag{1, 11}$$

die der „Objektfunktion" $G(x)$ die „Resultatfunktion" $g(y)$ zuordnet. Ihre *Umkehrung* wird unter gewissen Voraussetzungen über G oder g durch

$$G(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} g(y)\, dy \equiv \mathfrak{F}^{-1}\{g\} \tag{1, 12}$$

dargestellt. Die klassische Bedingung (Jordan) lautet, daß $\int_{-\infty}^{+\infty} |G(x)|\, dx$ konvergiert und G von beschränkter Variation ist. Die moderneren Bedingungen werden durch das Plancherelsche Theorem und seine Verallgemeinerungen gegeben. (1, 11) und (1, 12) zusammen sind mit dem *Fourierintegral*

$$G(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy\xi} G(\xi)\, d\xi \tag{1, 13}$$

äquivalent. Diesem entspricht in einem endlichen Intervall $-l \leqq x \leqq l$ die *Fourierreihe*, die wir hier entsprechend in komplexer Form schreiben:

$$G(x) = \frac{1}{2l} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{in\frac{\pi}{l}x} \int_{-l}^{+l} e^{-in\frac{\pi}{l}\xi} G(\xi)\, d\xi. \tag{1, 14}$$

Vom Standpunkt der Funktionalanalysis wird man sie so deuten: Es liegt eine lineare Funktionaloperation, die *„endliche" Fourier-Transformation*

$$g(n) = \int_{-l}^{+l} e^{-in\frac{\pi}{l}x} G(x)\, dx \equiv \mathfrak{f}\{G\} \tag{1, 15}$$

vor, die der Objektfunktion $G(x)$ eine nur für (positive und negative) ganzzahlige Argumente definierte Resultatfunktion $g(n)$, also eine Folge $\ldots g_{-2}, g_{-1}, g_0, g_1, g_2 \ldots$ zuordnet. Unter gewissen Voraussetzungen läßt diese Transformation sich durch die Operation

$$G(x) = \frac{1}{2l} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{i n \frac{\pi}{l} x} g_n \equiv \mathfrak{f}^{-1}\{g\} \tag{1,16}$$

umkehren. — *Gültigkeitsbedingungen* lassen sich sowohl an Hand von $G(x)$ als g_n angeben. Die klassischen Bedingungen lauten hier:

I. a) $G(x)$ ist in $-l \leqq x \leqq +l$ von beschränkter Variation.

b) g_n verhält sich für $n \to \infty$ so, daß die Reihe (1,16) in $-l \leqq x \leqq +l$ gleichmäßig konvergiert.

Die moderneren werden gegeben durch den Riesz-Fischerschen Satz (und seine Verallgemeinerungen):

II. a) $G(x)$ ist quadratisch Lebesgue-integrierbar.

b) Σg_n^2 konvergiert.

Bei II muß allerdings die Gleichung (1,16) nicht im Sinne der gewöhnlichen Konvergenz, sondern im Sinne der Konvergenz im Mittel verstanden werden. II hat aber gegenüber I den Vorzug, daß a) und b) völlig miteinander äquivalent sind.

2. Wie ich in früheren Arbeiten gezeigt habe, bestehen einige der schönsten *Anwendungen* der *„unendlichen" Fourier-Transformation* bzw. der sie enthaltenden (zweiseitigen) *Laplace-Transformation*[1]) darin, daß man mit ihr auf einfache Weise (partielle) *Differentialgleichungen*, bei denen eine Variable in einem unendlichen Intervall variiert, integrieren und *Integralrelationen* (z. B. Integralgleichungen) vom sogenannten Faltungstypus behandeln kann. Das kommt daher, daß die Fourier- bzw. Laplace-Transformation die Fähigkeit hat, gewisse *transzendente* Prozesse in elementare *algebraische* zu „übersetzen": Sie bildet das Faltungsintegral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_1(x-\xi)\, G_2(\xi)\, d\xi$$

---

[1]) Diese hat die Gestalt

$$f(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} F(t)\, dt \equiv \mathfrak{L}\{F\}.$$

Für $s = \varkappa + i\,y$ ($\varkappa$ fest, y variabel) ist

$$f(\varkappa + i\,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iyt}[e^{-\varkappa t} F(t)]\, dt = \mathfrak{F}\{e^{-\varkappa t} F(t)\}.$$

Die in meinen früheren Arbeiten meist vorkommende „einseitige" Laplace-Transformation entspricht dem Fall, daß $F(t) = 0$ für $t < 0$ ist. Sie ist zugeschnitten auf Probleme in einem einseitig unendlichen Intervall.

zweier Objektfunktionen auf das Produkt ihrer Resultatfunktionen $g_1(y)$ und $g_2(y)$ ab[2]), und der Differentiation im Objektbereich entspricht im Resultatbereich im wesentlichen die Multiplikation mit der Variablen[3]).

Wir wollen nun die entsprechenden Eigenschaften für die „*endliche*" *Fourier-Transformation* aufstellen und können dann mit dieser in dem Fall, daß der Definitionsbereich der transformierten Funktionen nur ein *endliches* Intervall ausmacht, ganz analog operieren wie früher mit der Laplace-Transformation, wo die Variable, nach der transformiert wurde (es war meist die Zeit), sich in einem *unendlichen* Intervall bewegte. Unter anderem können wir damit *Integralgleichungen* mit festen endlichen Grenzen (Fredholmscher Typ) angreifen (früher nur die einfacheren vom Volterraschen Typ mit variabler oberer Grenze oder die ausgearteten mit unendlichen Grenzen), ferner lineare partielle *Differentialgleichungen* eines beliebigen Typs, bei denen mindestens eine Variable nur in einem endlichen Intervall variiert (ein unendliches Intervall stellt immer einen viel einfacheren Fall dar). Die letztere Anwendungsmöglichkeit wollen wir in der gegenwärtigen Arbeit zunächst einmal an einer einfachen Gleichung *parabolischen Typs*, der Wärmeleitungsgleichung, zeigen, wobei schon alle wesentlichen Ideen in Erscheinung treten werden, so daß dieses spezielle Beispiel viel plastischer als eine allgemeine Theorie sein dürfte. Anwendungen auf die anderen Typen von Differentialgleichungen behalte ich weiteren Arbeiten vor.

Es sei noch bemerkt, daß unsere Methode eine Begründung des *symbolischen Heaviside-Kalküls im endlichen Intervall* liefert[4]), was noch nirgends durchgeführt worden ist. Ich halte es aber für überflüssig, dies ausführlich darzustellen, da dieser sehr unsichere Kalkül heutzutage als vollständig abgelöst durch die exakte Theorie der Funktionaltransformationen anzusehen ist und höchstens noch einen heuristischen Wert besitzt[5]).

---

[2]) Genaueres in G. Doetsch, Der Faltungssatz in der Theorie der Laplace-Transformation. Annali R. Scuola Norm. Sup. Pisa (2) 4 (1935), S. 71—84. Für die Anwendung auf Integralgleichungen vgl. insbesondere: Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus. Math. Annalen 89 (1923), S. 192—207.

[3]) Für die Anwendung auf Differentialgleichungen siehe z. B. meine Note: Das Eulersche Prinzip. Randwertprobleme der Wärmeleitungstheorie und physikalische Deutung der Integralgleichung der Thetafunktion. Annali R. Scuola Norm. Sup. Pisa (2) 2 (1933), S. 325—342 und meine dort zitierten früheren Arbeiten seit 1923.

[4]) Vgl. meinen Züricher Vortrag: Die Anwendung von Funktionaltransformationen in der Theorie der Differentialgleichungen und die symbolische Methode (Operatorenkalkül). Jahresber. DMV 43 (1934), S. 238—251 [S. 242].

[5]) Siehe den unter [4]) zitierten Vortrag, S. 251.

§ 2.

Eigenschaften der endlichen Fourier-Transformation.

1. Ein- bzw. Vieldeutigkeit der Umkehrung.

Zu jeder integrabeln Objektfunktion $G(x)$ gehört eindeutig eine Resultatfolge g_n, aber natürlich nicht umgekehrt, da z. B. solche G, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden, dieselbe Folge g_n liefern. Damit sind aber auch alle Möglichkeiten erschöpft: Wenn zwei Objektfunktionen dieselbe Resultatfolge haben, so unterscheiden sie sich höchstens auf einer Nullmenge. Sind sie stetig, so sind sie daher identisch. Sind sie bis auf endlich viele Stellen stetig, so unterscheiden sie sich höchstens an einigen ihrer Unstetigkeitsstellen[6]).

2. Transformation der Faltung.

$G_1(x)$ sei in $-2l \leqq x \leqq +2l$, $G_2(x)$ in $-l \leqq x \leqq +l$ beschränkt und eigentlich integrabel — oder nichtbeschränkt, aber quadratisch integrabel (im Riemannschen oder Lebesgueschen Sinn). Dann definieren wir als *Faltung*[7]) der beiden Funktionen das Integral

$$G_1 * G_2 = \int_{-l}^{+l} G_1(x-\xi)\, G_2(\xi)\, d\xi. \tag{2,21}$$

Im allgemeinen kommt es hier, im Gegensatz zu den Faltungen $\int_{-\infty}^{+\infty}$ und $\int_0^x$, auf die *Reihenfolge* der beiden Funktionen an, in dem für uns später wichtigsten Fall jedoch nicht. Es gilt nämlich der

---

[6]) H. Lebesgue, Leçons sur les séries trigonométriques. Paris 1906, S. 37 u. 91.

[7]) Die Faltung ist ein Spezialfall der Volterraschen Komposition zweiter Art $\int_a^b G_1(x,\xi)\, G_2(\xi, y)\, d\xi$, in den diese übergeht, wenn die Funktionen zweier Variabeln nur von der Differenz dieser Variabeln abhängen und $y = \text{const.}$ gesetzt wird. — Es gibt jetzt schon sehr viel verschiedene Arten von Faltungen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty},\ \int_0^{\infty},\ \int_0^{x},\ \int_{-l}^{+l},$$

die übrigens alle als aus $\int_{-\infty}^{+\infty}$ entsprungen gedacht werden können: Bei $\int_0^{\infty}$ ist $G_2(x) = 0$ für $x < 0$, bei $\int_0^{x}$ ist $G_1(x)$ und $G_2(x) = 0$ für $x < 0$, bei $\int_{-l}^{+l}$ ist $G_2(x) = 0$ für $|x| > l$. Um die verschiedenen Arten von Faltung zu unterscheiden, sollte man eigentlich die Integrationsgrenzen an den Faltungsstern setzen, z. B. $G_1 \overset{+l}{*}_{-l} G_2$. Wo aber, wie in der gegenwärtigen Arbeit, nur eine Sorte zur Verwendung kommt, kann diese Kennzeichnung ohne Schaden wegbleiben.

Satz 1. *Sind G_1 und G_2 periodisch mit der Periode $2l$, so ist $G_1 * G_2 = G_2 * G_1$, die Faltung also kommutativ.*

Beweis: Die Substitution $\xi = x - u$ ergibt:

$$\int_{-l}^{+l} G_1(x-\xi)\, G_2(\xi)\, d\xi = \int_{x-l}^{x+l} G_1(u)\, G_2(x-u)\, du.$$

Da $G_1(u)$ und $G_2(x-u)$ die Periode $2l$ haben, so ist $\int_{x-l}^{x+l} = \int_{-l}^{+l}$.

Satz 2 (*Faltungssatz*): *Hat G_1 die Periode $2l$, so ist*[8])

$$\mathfrak{f}\{G_1 * G_2\} = \mathfrak{f}\{G_1\} \cdot \mathfrak{f}\{G_2\}. \tag{2,22}$$

Beweis: Es ist

$$\mathfrak{f}\{G_1\} \cdot \mathfrak{f}\{G_2\} = \int_{-l}^{+l} e^{-in\frac{\pi}{l}u} G_1(u)\, du \cdot \int_{-l}^{+l} e^{-in\frac{\pi}{l}v} G_2(v)\, dv$$

$$= \iint e^{-in\frac{\pi}{l}(u+v)} G_1(u)\, G_2(v)\, du\, dv,$$

erstreckt über das Quadrat $-l \leqq u \leqq +l$, $-l \leqq v \leqq +l$. Durch die Transformation

$$u + v = x, \quad v = \xi$$

geht dies über in

$$\iint e^{-in\frac{\pi}{l}x} G_1(x-\xi)\, G_2(\xi)\, dx\, d\xi,$$

erstreckt über das Parallelogramm $-l \leqq x - \xi \leqq +l$, $-l \leqq \xi \leqq +l$ ($ABCD$ in der Fig. 1). Hat G_1 die Periode $2l$, so kann man beim In-

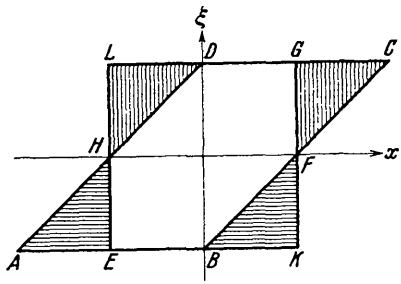


Fig. 1.

tegrieren das Dreieck FCG ersetzen durch HDL, ebenso AEH durch BKF, so daß das Doppelintegral über das Quadrat $EKGL$ zu erstrecken ist. Dann läßt es sich aber durch das iterierte Integral ausdrücken:

$$\int_{-l}^{+l} e^{-in\frac{\pi}{l}x} dx \int_{-l}^{+l} G_1(x-\xi)\, G_2(\xi)\, d\xi = \mathfrak{f}\{G_1 * G_2\}.$$

[8]) Dieser Satz findet sich mit anderem Beweis bereits bei N. Wiener, The Fourier integral and certain of its applications. Cambridge 1933, S. 45.

Bemerkung: Die $\mathfrak{f}$-Transformation läßt im allgemeinen dem kommutativen gewöhnlichen Produkt das nichtkommutative Faltungsprodukt entsprechen; das liegt natürlich an der Unsymmetrie der Voraussetzungen über G_1 und G_2. — Sind G_1 und G_2 beide periodisch, so erhält man durch Satz 2 einen neuen Beweis für Satz 1, da dann zu $\mathfrak{f}\{G_1\}\cdot\mathfrak{f}\{G_2\}$ sowohl $G_1 * G_2$ als $G_2 * G_1$ gehört. Da aber ein Faltungsintegral immer eine *stetige* Funktion darstellt[9]), folgt nach dem Eindeutigkeitssatz, daß $G_1 * G_2 = G_2 * G_1$ ist. — Auf dieselbe Weise erkennt man auch, daß für periodische Funktionen das *assoziative Gesetz* $(G_1 * G_2) * G_3 = G_1 * (G_2 * G_3)$ gilt.

3. Transformation der Ableitungen.

Satz 3. *Ist $G(x)$ in $-l < x < +l$ differenzierbar und an den Stellen $x = \pm l$ stetig, ist ferner $G'(x)$ integrabel, so gilt:*

$$\mathfrak{f}\{G'\} = in\frac{\pi}{l}\,\mathfrak{f}\{G\} + (-1)^n[G(l) - G(-l)]. \tag{2,31}$$

Die tranzendente Operation der *Differentiation* im Objektbereich spiegelt sich also im Resultatbereich im wesentlichen in der elementaren Operation der *Multiplikation mit der Variabeln* (Index) wider.

Beweis: Durch partielle Integration findet man:

$$\int_{-l}^{+l} e^{-in\frac{\pi}{l}x} G'(x)\,dx = e^{-in\frac{\pi}{l}x} G(x)\Big|_{-l}^{+l} + in\frac{\pi}{l}\int_{-l}^{+l} e^{-in\frac{\pi}{l}x} G(x)\,dx$$

$$= in\frac{\pi}{l}\,\mathfrak{f}\{G\} + e^{-in\pi}G(l) - e^{in\pi}G(-l).$$

Satz 4. *Existieren $G(x)$, $G'(x), \ldots, G^{(\nu-1)}(x)$ in $-l \leqq x \leqq +l$ und $G^{(\nu)}(x)$ wenigstens in $-l < x < +l$, ist $G^{(\nu-1)}$ an den Stellen $x = \pm l$ stetig und $G^{(\nu)}(x)$ integrabel, so ist:*

$$\mathfrak{f}\{G^{(\nu)}\} = \left(in\frac{\pi}{l}\right)^{\nu}\mathfrak{f}\{G\} \tag{2,32}$$

$$+ (-1)^n\Big[G^{(\nu-1)}(l) - G^{(\nu-1)}(-l) + in\frac{\pi}{l}\left(G^{(\nu-2)}(l) - G^{(\nu-2)}(-l)\right) + \ldots$$

$$+ \left(in\frac{\pi}{l}\right)^{\nu-1}\left(G(l) - G(-l)\right)\Big].$$

---

[9]) Sind G_1 und G_2 eigentlich oder quadratisch integrabel, so ist

$$D(x,h) = G_1 * G_2(x+h) - G_1 * G_2(x) = \int_{-l}^{+l}[G_1(x+h-\xi) - G_1(x-\xi)]\,G_2(\xi)\,d\xi;$$

also nach der Schwarzschen Ungleichung

$$D^2(x,h) \leqq \int_{-l}^{+l}[G_1(x-\xi+h) - G_1(x-\xi)]^2\,d\xi \int_{-l}^{+l} G_2^2(\xi)\,d\xi.$$

Während das zweite Integral eine Konstante ist, strebt das erste bei festem x bekanntlich mit h gegen 0.

Der ν-maligen Differentiation von G entspricht also im wesentlichen bei $\mathfrak{f}\{G\}$ die Multiplikation mit n^ν, außerdem tritt noch ein Polynom in n auf, dessen Koeffizienten von den „Randwerten" der Objektfunktion abhängen. — Ist speziell

$$G^{(\alpha)}(-l) = G^{(\alpha)}(+l) \quad \text{für} \quad \alpha = 0, 1, \ldots, \nu - 1,$$

so ist einfach

$$\mathfrak{f}\{G^{(\nu)}\} = \left(in\frac{\pi}{l}\right)^\nu \mathfrak{f}\{G\}. \tag{2,33}$$

Der Beweis ergibt sich dadurch, daß man Satz 3 sukzessive auf $G^{(\nu-1)}$, $G^{(\nu-2)}$, usw. anwendet.

§ 3.

Anwendung auf die Wärmeleitungsgleichung.

1. Das zu betrachtende Randwertproblem könnten wir einfacher formulieren, wenn wir nur sog. *reguläre Lösungen* U suchten, d. h. solche, die mit $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ in dem abgeschlossenen Integrationsbereich *zweidimensional* stetig sind („spezielle Problemstellung"). Wir legen aber Wert darauf, das Problem mit Rücksicht auf seine physikalische Anwendung viel allgemeiner anzulegen, indem wir von diesen Größen nur *eindimensionale* Stetigkeit verlangen („allgemeine Problemstellung" [10]). Unsere Methode ist gerade dieser Formulierung des Problems besonders angepaßt, und wir verlangen von einer Lösung daher gerade nur so viel, wie wir für die Anwendung der Methode brauchen.

Es sei in dem Rechteck $\mathfrak{R}$: $0 \leqq x \leqq l$, $0 \leqq t \leqq T$ eine Funktion $U(x, t)$ zu bestimmen, die die Eigenschaften hat:

a) Sie besitzt im Innern von $\mathfrak{R}$ die Ableitungen $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$.

b) Im Innern von $\mathfrak{R}$ ist die lineare Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial t} \tag{3,11}$$

erfüllt.

c) U konvergiert bei linearem, senkrechten Vorgehen gegen den unteren, linken und rechten Rand von $\mathfrak{R}$ gegen vorgeschriebene Randwerte:

$$\lim_{t \to 0} U(x, t) = \Phi(x), \quad \lim_{x \to 0} U(x, t) = 0, \quad \lim_{x \to l} U(x, t) = B(t).$$

$\Phi(x)$ und $B(t)$ seien integrabel (wenn uneigentlich, dann absolut).

[10]) Allgemeine und ausführlichere Erörterung dieses Unterschiedes siehe in meinem Genfer Vortrag: Les équations aux dérivées partielles du type parabolique, Abschnitt II, 1, der in L'Enseignement Mathématique 34 oder 35 erscheinen wird.

d) $\frac{\partial U}{\partial x}$ hat bei linearem, senkrechten Vorgehen gegen den linken und rechten Rand Grenzwerte [11]).

e) $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ hat bei senkrechtem Vorgehen gegen den linken Rand einen Grenzwert [12]).

f) $\frac{\partial U}{\partial t}$ schließt sich bei senkrechtem Vorgehen gegen den linken Rand stetig an den durch die dort definierte Randfunktion $U \equiv 0$ geforderten Wert von $\frac{\partial U}{\partial t}$, d. h. 0, an.

g) $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial U}{\partial t}$ sind für jedes feste t in $0 < t < T$ hinsichtlich x linear integrabel.

Vorab sei bemerkt, daß unter diesen Bedingungen die Differentialgleichung (3, 11) auch auf dem linken Rand erfüllt ist. Denn weil im Innern $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial t}$ ist, so gilt bei senkrechtem Vorgehen gegen den linken Rand wegen e) und f):

$$\lim_{x \to 0} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\partial U}{\partial t},$$

also nach dem unter [11]) und [12]) Gesagten:

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_{x=0} (= 0). \tag{3, 12}$$

2. Das formulierte Randwertproblem wurde früher [13]) dadurch gelöst, daß $U(x, t)$ in der *t-Richtung* der einseitigen *Laplace-Transformation* unterworfen wurde. (Dazu hat man sich die Ränder $x = 0$ und $x = l$ des

---

[11]) Daraus folgt in Verbindung mit c), daß $\frac{\partial U}{\partial x}$ auf diesen beiden Rändern existiert und in x stetig ist, eine Tatsache, die bisher in Untersuchungen über partielle Differentialgleichungen nicht hinreichend beachtet worden zu sein scheint. Sie ergibt sich sofort aus dem einfachen Satz: Ist $h(x)$ für $x_0 < x \leqq x_1$ differenzierbar und $h(x)$ in x_0 nach rechts stetig, ist ferner $\lim_{x \to x_0 + 0} h'(x)$ vorhanden und gleich a, so existiert $h'_+(x_0)$ und ist gleich a; $h'(x)$ ist also überdies in x_0 nach rechts stetig. (Ein entsprechender Satz gilt für Annäherung von links.) Beweis: Nach dem Mittelwertsatz ist $\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = h'(x_0 + \vartheta(x - x_0))$ mit $0 < \vartheta < 1$ für $x_0 < x \leqq x_1$. Also existiert $\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = h'_+(x_0)$ und ist gleich a.

[12]) Daraus folgt wieder in Verbindung mit d), daß $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ auf dem linken Rand existiert.

[13]) Über das Problem der Wärmeleitung. Jahresber. DMV 33 (1925), S. 45—52; Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung, I.—III. Mitteilung. Math. Zeitschr. 22 (1925), S. 285—306; 25 (1926), S. 608—626.

Rechtecks nach oben verlängert und auf den Verlängerungen beliebige Randdaten vorgegeben zu denken. Da bekanntlich die Lösung von (3, 11) für einen Wert t_0 nur von den Randdaten in $t < t_0$ abhängt, so hat das auf die Lösung im Rechteck keinen Einfluß.) Nunmehr wollen wir das Problem dadurch angreifen, daß wir U in der *x-Richtung* der *f-Transformation* unterwerfen. Würden wir aber die Transformation in dem gegebenen Intervall $0 \leqq x \leqq l$ auf die Differentialgleichung anwenden, so würden bei der Transformation von $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ entsprechend zu Satz 4 in § 2 nicht bloß die Randwerte von U, sondern auch die von $\frac{\partial U}{\partial x}$ auftreten, über die wir nicht verfügen. Hier hilft uns aber folgender Kunstgriff, der für alle Anwendungen der Methode auf Differentialgleichungen fundamental ist: Wir setzen $U(x,t)$ und $\Phi(x)$ in das links anstoßende Intervall $-l \leqq x \leqq 0$ als *ungerade Funktionen* fort:

$$U(-x,t) = -U(x,t), \qquad \Phi(-x) = -\Phi(x).$$

Dann ist, $\frac{\partial U}{\partial x} = U_x$ und $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = U_{xx}$ gesetzt,

$$U_x(-x,t) = U_x(x,t), \qquad U_{xx}(-x,t) = -U_{xx}(x,t),$$

und für jedes feste t ist in dem ganzen Intervall $-l \leqq x \leqq +l$ die Funktion U in x stetig (wegen $U(0,t) = 0$) und U_x vorhanden, während U_{xx} wenigstens in $-l < x < +l$ existiert (wegen $U_{xx}(0,t) = 0$); die Differentialgleichung ist wegen (3, 12) in $-l < x < +l$ erfüllt. Unser ursprüngliches Problem ist also gelöst, wenn es gelingt, $U(x,t)$ so zu bestimmen, daß es in dem Rechteck $\mathfrak{R}'$: $-l \leqq x \leqq +l$, $0 \leqq t \leqq T$ folgende Eigenschaften hat:

a') U besitzt im Innern von $\mathfrak{R}'$ die Ableitungen $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$.

b') Im Innern von $\mathfrak{R}'$ ist die Gleichung (3, 11) erfüllt.

c') U hat die vorgeschriebenen Randwerte

(3, 21) $$\lim_{\to 0} U(x,t) = \Phi(x) = \text{ungerade Funktion},$$

(3, 22) $$\lim_{x \to -l} U(x,t) = -B(t), \qquad \lim_{x \to +l} U(x,t) = B(t).$$

(Hieraus ergibt sich, daß U eine in x ungerade Funktion ist.)

d') $\frac{\partial U}{\partial x} = U_x$ hat für $x \to \pm l$ Grenzwerte, existiert also für $x = \pm l$, und es ist $U_x(-l) = U_x(+l)$.

g') $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial U}{\partial t}$ sind für jedes feste t hinsichtlich x linear integrabel.

3. Wenden wir nun auf die Gleichung (3, 11) in $-l \leqq x \leqq +l$ die f-Transformation an (wegen g' ist das möglich), so ergibt sich, wenn wir

$$\mathfrak{f}\{U(x,t)\} = u(n,t)$$

setzen, nach Satz 4 für sie folgendes *Abbild im Resultatbereich*:

$$\left(in\frac{\pi}{l}\right)^2 u(n,t) + (-1)^n in\frac{\pi}{l}\cdot 2B(t) = \mathfrak{f}\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\}.$$

Machen wir jetzt die Voraussetzung, daß die $\mathfrak{f}$-Transformation mit der Ableitung nach t vertauschbar ist:

$$(V_1) \qquad \mathfrak{f}\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = \frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{f}\{U\} = \frac{\partial u}{\partial t},$$

so ergibt sich:

$$(3,31) \qquad -n^2\frac{\pi^2}{l^2}u(n,t) + 2(-1)^n in\frac{\pi}{l}B(t) = \frac{du}{dt}$$

(wir schreiben $\frac{du}{dt}$ statt $\frac{\partial u}{\partial t}$, weil andere Differentiationen nicht mehr vorkommen). Die partielle Differentialgleichung ist also in eine gewöhnliche übergegangen, in die sogar die Randbedingungen (3, 22) eingetreten sind. Die Randbedingung (3, 21) muß in eine solche für u übergeführt werden. Nehmen wir an, daß [14])

$$(V_2) \qquad \mathfrak{f}\{\lim_{t\to 0} U\} = \lim_{t\to 0}\mathfrak{f}\{U\}$$

ist, so bedeutet das:

$$(3,32) \qquad \lim_{t\to 0} u(n,t) = \mathfrak{f}\{\Phi\} = \varphi(n).$$

Hinsichtlich der beiden *Voraussetzungen* (V_1) *und* (V_2) wollen wir gleich hier bemerken, daß unsere Endlösung von ihnen ganz unabhängig sein wird: Wir werden auf jeden Fall eine Funktion bekommen, die die Bedingungen unseres Problems erfüllt. Wenn es Funktionen gibt, die jene Voraussetzungen *nicht* erfüllen, die wir daher mit unserer Methode nicht erfassen, so ist das also nur dann möglich, wenn es außer unserer gefundenen Lösung noch *weitere* gibt. Das ist in der Tat der Fall. Für eine ausführliche Erörterung dieser Verhältnisse muß hier auf die unter [10]) zitierte Arbeit (Abschnitt III) verwiesen werden. Die unter [14]) erwähnte *singuläre Lösung* erfüllt die Bedingung (V_2) *nicht*. Bei ihr ist

$$\mathfrak{f}\{G(x,t)\} = 2i\frac{\pi}{l}ne^{-n^2\frac{\pi^2}{l^2}t},$$

also $\lim_{t\to 0}\mathfrak{f}\{G\} = 2i\frac{\pi}{l}n$, während $\mathfrak{f}\{\lim_{t\to 0} G\} = 0$ ist.

[14]) Ist $\Phi(x)$ und $U(x,t)$ hinsichtlich x quadratisch integrabel, so ist die Voraussetzung (V_2) automatisch erfüllt, wenn $U(x,t)$ für $t\to 0$ im *Mittel* gegen $\Phi(x)$ konvergiert. Denn dann ist nach der Schwarzschen Ungleichung

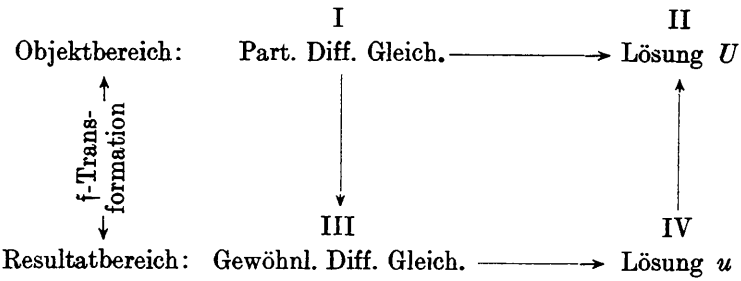
$$[\mathfrak{f}\{U(x,t)\} - \mathfrak{f}\{\Phi(x)\}]^2 = \left\{\int_{-l}^{+l} e^{-in\frac{\pi}{l}x}[U(x,t)-\Phi(x)]\,dx\right\}^2$$

$$\leqq \int_{-l}^{+l}\left|e^{-in\frac{\pi}{l}x}\right|^2 dx \cdot \int_{-l}^{+l}[U(x,t)-\Phi(x)]^2\,dx \to 0 \quad \text{für } t\to 0.$$

[Fortsetzung auf folgender Seite.]

Wir haben nun nichts anderes zu tun, als die Gleichung (3, 31) unter der „Anfangsbedingung“ (3, 32) zu integrieren. Können wir dann zu der Resultatfunktion u die zugehörige Objektfunktion U feststellen, so ist die Lösung des ursprünglichen Problems gefunden.

Schematische Darstellung:



Statt des direkten Weges I → II geht die Methode den Weg I → III → IV → II.

4. Die *Lösung im Resultatbereich* lautet:

$$u(n,t) = u_1(n,t) + u_2(n,t), \tag{3,41}$$

$$u_1(n,t) = \varphi(n)\,k(n,t) \quad \text{mit} \quad k(n,t) = e^{-n^2\frac{\pi^2}{l^2}t}, \tag{3,42}$$

$$u_2(n,t) = 2(-1)^n\, i n \frac{\pi}{l} \int_0 B(\tau)\, e^{-n^2\frac{\pi^2}{l^2}(t-\tau)}\, d\tau. \tag{3,43}$$

(u_1 ist die Lösung der homogenen Gleichung, also für $B(t) \equiv 0$, u_2 die der inhomogenen mit der Anfangsbedingung $u(n,0) = 0$, also für $\Phi(x) \equiv 0$.) Zu $k(n,t)$ gehört die Objektfunktion

$$K(x,t) = \frac{1}{2l} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2\frac{\pi^2}{l^2}t + in\frac{\pi}{l}x}, \tag{3,44}$$

Ich möchte mich aber nicht von vornherein auf diesen engeren Umkreis von Funktionen festlegen, da bei unserer, der physikalischen Deutung des Randwertproblems entnommenen „allgemeinen Problemstellung“ die Konvergenz von U gegen Φ so ungleichmäßig vor sich gehen kann, daß keine Konvergenz im Mittel zustande kommt. So ist es z. B. bei der in vieler Hinsicht sehr interessanten „singulären“ Lösung

$$G(x,t) = -\frac{1}{l}\,\frac{\partial\vartheta_3\left(\frac{x}{2l},\frac{t}{l^2}\right)}{\partial x} = -\frac{i\pi}{l^3} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} m e^{im\frac{\pi}{l}x - m^2\frac{\pi^2}{l^2}t},$$

die überall die Randwerte 0 hat. Bei ihr strebt

$$\int_{-l}^{+l} [G(x,t) - \Phi(x)]^2\, dx$$

sogar gegen ∞. Siehe die unter [13]) zitierte II. Mitteilung, S. 300.

da diese Reihe für $t > 0$ in x gleichmäßig konvergiert (Bedingung Ib, § 1, 1). Übrigens ist wegen

$$\vartheta_3(v,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2ni\pi v - n^2\pi^2\tau}: \tag{3,45}$$

$$K(x,t) = \frac{1}{2l}\vartheta_3\Big(\frac{x}{2l}, \frac{t}{l^2}\Big). \tag{3,46}$$

Da K in x die Periode $2l$ hat, so gehört nach dem Faltungssatz zu u_1 die einzige stetige *Objektfunktion*

$$U_1(x,t) = \int_{-l}^{+l} K(x-\xi,t)\,\Phi(\xi)\,d\xi. \tag{3,47}$$

Diese läßt sich, da Φ eine ungerade Funktion ist, durch leichte Umformungen auf die bekannte Gestalt bringen:

$$U_1(x,t) = \frac{2}{l}\int_0^l \Phi(\xi)\sum_1^\infty e^{-n^2\frac{\pi^2}{l^2}t}\sin n\frac{\pi}{l}x\sin n\frac{\pi}{l}\xi\,d\xi. \tag{3,48}$$

Natürlich hätte man unter Umgehung des Faltungssatzes dem u_1 auch die Objektfunktion

$$U_1(x,t) = \frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\varphi(n)\,k(n,t)\,e^{in\frac{\pi}{l}x}$$

$$= \frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\frac{\pi}{l}x - n^2\frac{\pi^2}{l^2}t}\int_{-l}^{+l} e^{-in\frac{\pi}{l}\xi}\,\Phi(\xi)\,d\xi$$

zuweisen können, denn auch diese Reihe konvergiert gleichmäßig in x, da nach dem Riemann-Lebesgueschen Lemma $\varphi(n) \to 0$ ist.

Zu u_2 gehört die *Objektfunktion*

$$U_2(x,t) = i\frac{\pi}{l^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n n e^{in\frac{\pi}{l}x}\int_0^t B(\tau)\,e^{-n^2\frac{\pi^2}{l^2}(t-\tau)}\,d\tau,$$

da diese Reihe, die man auch in der Gestalt

$$U_2(x,t) = i\frac{\pi}{l^2}\int_0^t B(\tau)\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n n e^{in\frac{\pi}{l}x - n^2\frac{\pi^2}{l^2}(t-\tau)}\,d\tau \tag{3,49}$$

schreiben kann, für festes t in x gleichmäßig konvergiert.

Daß die Funktion $U(x,t) = U_1(x,t) + U_2(x,t)$ tatsächlich eine Lösung unseres Randwertproblems darstellt, ist eine bekannte Tatsache[15]).

Bemerkung. Man sieht unmittelbar, daß, wie schon in § 1, 2 hervorgehoben wurde, die Methode, die Lösung der partiellen Differentialgleichung (3, 11) durch die hinsichtlich der Variablen x ausgeübte f-Transformation auf die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung zu reduzieren, sich auf lineare Differentialgleichungen eines beliebigen Typs anwenden läßt, deren Koeffizienten Konstante oder auch reine Funktionen von t sind — gerade so wie die in § 1, 2 erwähnte Methode, die Gleichung hinsichtlich t der Laplace-Transformation zu unterwerfen, auf beliebige lineare Gleichungen, deren Koeffizienten Konstante oder reine Funktionen von x sind, anwendbar ist.

§ 4.

Ableitung des Additionstheorems der Greenschen Funktion durch das Huygenssche Prinzip und durch die f-Transformation.

1. Wir wenden auf die Lösung U_1 das *Huygenssche Prinzip* an, indem wir U_1 einmal vermittels (3, 47) für ein $t = t_1 + t_2$ direkt, das andere Mal unter Einschaltung einer Zwischenstation bei t_2 sprungweise berechnen: erst wird $U_1(x,t_2)$ bestimmt und dann $U_1(x,t_2+t_1)$ als aus dieser Randfunktion resultierend aufgefaßt. Das ergibt eine Relation für die Greensche Funktion K, die man noch kürzer nach dem „reflexiven Prinzip“[16]) erhalten kann: $K(x,t)$ ist selbst eine Lösung der Gleichung (3, 11) und eine in x gerade Funktion, also $K(-l,t) = K(+l,t)$. Ihre Ableitung

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{i\pi}{2l^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n e^{-n^2 \frac{\pi^2}{l^2} t + in \frac{\pi}{l} x}$$

---

[15]) Vgl. die unter [13]) zitierte II. und III. Mitteilung. — Unsere Theorie zeigt übrigens die bekannte, z. B. von Fourier benutzte und nur auf spezielle Randbedingungen zugeschnittene Integrationsmethode durch Fourierreihen (Methode der Partikularlösungen) in einem neuen Licht und läßt erkennen, warum diese Methode, exakt durchgeführt, so viele Voraussetzungen machen muß und warum es bei ihr so schwer fällt, die Lösung den Randbedingungen anzupassen, was bei der oben entwickelten Theorie gerade besonders einfach ist. — Ganz analog liefert unsere frühere Methode der Laplace-Transformation (vgl. § 1) die Fundierung für die in vielen Untersuchungen seit Cauchy benutzte Integration durch Fourierintegrale, bei der dieselbe Schwierigkeit hinsichtlich der Randbedingungen auftritt. Vgl. den unter [4]) zitierten Vortrag, S. 249—251.

[16]) Wegen dieses und des Huygensschen Prinzips siehe G. Doetsch, Thetarelationen als Konsequenzen des Huygensschen und Eulerschen Prinzips in der Theorie der Wärmeleitung. Math. Zeitschr. 40 (1935), Abschnitt I, 1 und 2.

verschwindet an den Stellen $x = \pm l$. Wendet man auf eine solche Funktion unsere Methode aus § 3 an, so ist wegen

$$U(l,t) - U(-l,t) = 0, \quad U_x(l,t) - U_x(-l,t) = 0$$

die (3, 31) entsprechende Gleichung homogen, und im Objektbereich wird U durch die Formel (3, 47) dargestellt. Wenden wir diese jetzt für $t(=t_1+t_2) > t_2$ statt für $t > 0$ auf K an, so ergibt sich[17]):

$$K(x, t_1+t_2) = \int_{-l}^{+l} K(x-\xi, t_1)\, K(\xi, t_2)\, d\xi. \tag{4, 1}$$

2. Diese Relation läßt sich nun aber auch auf ganz *anderem Weg* ableiten: Die Resultatfunktion k von K genügt dem algebraischen Additionstheorem

$$k(n, t_1+t_2) = k(n, t_1)\cdot k(n, t_2). \tag{4, 2}$$

Diese Relation übersetzt die f-Transformation, da K in x die Periode $2l$ hat, vermittels des Faltungssatzes gerade in das transzendente Additionstheorem (4, 1).

3. Drücken wir K durch ϑ_3 aus, so erhält (4, 1) die Gestalt:

$$\frac{1}{2l}\vartheta_3\Big(\frac{x}{2l}, \frac{t_1+t_2}{l^2}\Big) = \int_{-l}^{+l} \frac{1}{2l}\vartheta_3\Big(\frac{x-\xi}{2l}, \frac{t_1}{l^2}\Big)\frac{1}{2l}\vartheta_3\Big(\frac{\xi}{2l}, \frac{t_2}{l^2}\Big)\, d\xi.$$

Setzt man hierin $\frac{x}{2l} = v$, $\frac{\xi}{2l} = u$, $\frac{t}{l^2} = \tau$, so ergibt sich für $\vartheta_3(v,\tau)$ das *transzendente Additionstheorem* hinsichtlich τ:

$$\vartheta_3(v, \tau_1+\tau_2) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \vartheta_3(v-u, \tau_1)\, \vartheta_3(u, \tau_2)\, du, \tag{4, 31}$$

das trotz seiner Einfachheit noch nicht bemerkt worden zu sein scheint und sich auch leicht direkt verifizieren läßt:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{2mi\pi(v-u) - m^2\pi^2\tau_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2ni\pi u - n^2\pi^2\tau_2}\, du$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty} e^{2mi\pi v} e^{2(n-m)i\pi u} e^{-(m^2\tau_1 + n^2\tau_2)\pi^2}\, du$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2ni\pi v - n^2\pi^2(\tau_1+\tau_2)}$$

[17]) Damit man K mit dem nach (3, 47) erhaltenen Ausdruck gleichsetzen kann, muß natürlich die Eindeutigkeit der Lösung feststehen. Diese läßt sich hier leicht mit dem Satz von Gevrey beweisen; siehe hierzu die unter [16]) zitierte Arbeit, Abschnitt I, 3.

wegen

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{2(n-m)i\pi u}\,du = \begin{cases} 1 \text{ für } m = n, \\ 0 \text{ für } m \neq n. \end{cases}$$

Man sieht hieraus einerseits, daß dasselbe Additionstheorem wie (4, 31) auch für die *allgemeinere Thetafunktion*

$$\Theta_3(v,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2ni\pi v - n^k \pi^2 \tau}$$

mit beliebigem positiv ganzzahligen k gilt, die Hardy und Littlewood in ihren Untersuchungen zum Waringschen Satz verwendet haben und die sich bei der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^k U}{\partial x^k} = \frac{\partial U}{\partial t}$$

als Greensche Funktion einstellen würde; andererseits, daß die *übrigen Thetafunktionen*

$$\vartheta_0(v,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{2ni\pi v - n^2\pi^2\tau},$$

$$\vartheta_1(v,\tau) = \frac{1}{i}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{(2n+1)i\pi v - (n+\frac{1}{2})^2\pi^2\tau},$$

$$\vartheta_2(v,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{(2n+1)i\pi v - (n+\frac{1}{2})^2\pi^2\tau}$$

Additionstheoreme von folgender Gestalt[18]) haben:

$$(4,32)\qquad \vartheta_3(v,\tau_1+\tau_2) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \vartheta_0(v-u,\tau_1)\,\vartheta_0(u,\tau_2)\,du,$$

$$(4,33)\qquad \vartheta_0(v,\tau_1+\tau_2) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \vartheta_0(v-u,\tau_1)\,\vartheta_3(u,\tau_2)\,du,$$

$$(4,34)\qquad \vartheta_2(v,\tau_1+\tau_2) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \vartheta_2(v-u,\tau_1)\,\vartheta_2(u,\tau_2)\,du,$$

$$(4,35)\qquad -\vartheta_2(v,\tau_1+\tau_2) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \vartheta_1(v-u,\tau_1)\,\vartheta_1(u,\tau_2)\,du,$$

---

[18]) Vgl. hiermit die in der unter [16]) zitierten Arbeit sowie in: Transzendente Additionstheoreme der elliptischen Thetafunktionen und andere Thetarelationen vom Faltungstypus. Math. Annalen 90 (1923), S. 19—25 angegebenen Additionstheoreme hinsichtlich v.

$$\vartheta_1(v, \tau_1 + \tau_2) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \vartheta_1(v-u, \tau_1)\,\vartheta_2(u, \tau_2)\,du. \tag{4,36}$$

4. Statt $K(x, t)$ kann man wegen (3,48) auch

$$\Gamma(x, \xi, t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\frac{\pi^2}{l^2}t}\sin n\frac{\pi}{l}x \sin n\frac{\pi}{l}\xi \tag{4,41}$$

als Greensche Funktion des Problems (bei $B(t) \equiv 0$) bezeichnen. Für diese wurde früher[19]) vermittels des Huygensschen bzw. reflexiven Prinzips das *transzendente Additionstheorem*

$$\Gamma(x, y, t) = \int_0^l \Gamma(x, \xi, t_1)\,\Gamma(\xi, y, t_2)\,d\xi \tag{4,42}$$

hergeleitet, und in einer neueren Arbeit[20]) wurde behauptet, daß dieses sich auch durch eine Funktional-Transformation aus einem *algebraischen* Additionstheorem ableiten lasse. In der Tat entsteht es aus

$$e^{-n^2\frac{\pi^2}{l^2}(t_1+t_2)}\sin n\frac{\pi}{l}y = e^{-n^2\frac{\pi^2}{l^2}t_1}\cdot e^{-n^2\frac{\pi^2}{l^2}t_2}\sin n\frac{\pi}{l}y \tag{4,43}$$

durch Umkehrung der $\mathfrak{f}$-Transformation und Anwendung des Faltungssatzes:

$$\frac{1}{2l}\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2\frac{\pi^2}{l^2}(t_1+t_2)}\sin n\frac{\pi}{l}y\, e^{in\frac{\pi}{l}x}$$

$$= \int_{-l}^{+l}\frac{1}{2l}\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2\frac{\pi^2}{l^2}t_1 + in\frac{\pi}{l}(x-\xi)}\frac{1}{2l}\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2\frac{\pi^2}{l^2}t_2}\sin n\frac{\pi}{l}y\, e^{in\frac{\pi}{l}\xi}\,d\xi.$$

Denn wenn man in den Reihen die $+n$ und $-n$ entsprechenden Glieder zusammenfaßt:

$$\frac{i}{l}\sum_{1}^{\infty} e^{-n^2\frac{\pi^2}{l^2}(t_1+t_2)}\sin n\frac{\pi}{l}y \sin n\frac{\pi}{l}x =$$

$$\int_{-l}^{+l}\frac{1}{2l}\left\{1+2\sum_{1}^{\infty} e^{-n^2\frac{\pi^2}{l^2}t_1}\cos n\frac{\pi}{l}(x-\xi)\right\}\frac{i}{l}\sum_{1}^{\infty} e^{-n^2\frac{\pi^2}{l^2}t_2}\sin n\frac{\pi}{l}y \sin n\frac{\pi}{l}\xi\,d\xi$$

und dann $\cos n\frac{\pi}{l}x\cos n\frac{\pi}{l}\xi + \sin n\frac{\pi}{l}x\sin n\frac{\pi}{l}\xi$ für $\cos n\frac{\pi}{l}(x-\xi)$ schreibt, so verschwindet beim Integrieren der Bestandteil, der die geraden Funktionen $\cos n\frac{\pi}{l}\xi$ enthält, weil der zweite Faktor im Integranden ungerade ist, und es bleibt (4,42) übrig.

---

[19]) In den unter [13]) zitierten Arbeiten (DMV und III. Mitteilung).

[20]) In der unter [16]) zitierten Note, Abschnitt III, 3.

Da Γ eigentlich eine Verstümmelung von K (nämlich für den Fall eines in $-l \leqq x \leqq +l$ ungeraden Φ) darstellt, so läßt sich sein Additionstheorem auch aus dem von K ableiten. Schreibt man dieses für $K(x-y,t)$ statt für $K(x,t)$ an:

$$(4,44)\quad K(x-y,t_1+t_2) = \int_{-l}^{+l} K(x-y-\xi,t_1)\,K(\xi,t_2)\,d\xi = \int_{-l}^{+l} K(x-\xi,t_1)\,K(\xi-y,t_2)\,d\xi,$$

setzt für K die reelle Darstellung

$$(4,45)\qquad K(x,t) = \frac{1}{2l}\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\frac{\pi^2}{l^2}t}\cos n\frac{\pi}{l}x\right\}$$

ein und trennt die geraden und ungeraden Bestandteile, so erhält man nicht nur (4,42), sondern auch noch für die Funktion

$$(4,46)\qquad \overline{\Gamma}(x,y,t) = \frac{1}{l}\left\{1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\frac{\pi^2}{l^2}t}\cos n\frac{\pi}{l}x\cos n\frac{\pi}{l}y\right\}$$

die entsprechende Relation:

$$(4,47)\qquad \overline{\Gamma}(x,y,t_1+t_2) = \int_0^l \overline{\Gamma}(x,\xi,t_1)\,\overline{\Gamma}(\xi,y,t_2)\,d\xi.$$

$\overline{\Gamma}$ ist übrigens die Greensche Funktion für in $-l \leqq x \leqq +l$ gerade Lösungen.

(Eingegangen am 30. 7. 1935.)

Über die Lösbarkeit einiger nicht-Abelscher Einbettungsprobleme.

Von

Hans Richter in Leipzig.

Einleitung.

Ist ein Normalkörper K_1 mit der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ über dem algebraischen Zahlkörper K_0 gegeben, $\mathfrak{H}$ eine Gruppe, die einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{H}/\mathfrak{N} = \mathfrak{G}$ enthält, so versteht man unter dem durch K_1, K_0, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{N}$ gegebenen Einbettungsproblem die Aufgabe, einen K_1 umfassenden Normalkörper K_2 mit der Gruppe $\mathfrak{H}$ zu finden, so daß K_1 zu der Untergruppe $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{H}$ gehört. Diese Aufgabe wird hier für einige spezielle Fälle angefaßt. Obgleich sich unter denselben auch einige Abelsche Fälle mit befinden, wird auf diese jedoch kein Gewicht gelegt, da sich die Behandlung des Einbettungsproblems für beliebige Abelsche Gruppen lediglich mit Hilfe der Klassenkörpertheorie durchführen läßt[1]).

Die Betrachtungen dieser Arbeit fußen auf einer Abhandlung von R. Brauer[2]), wo die Einbettbarkeit in gewissen speziellen Fällen auf den Zerfall eines hyperkomplexen Systems zurückgeführt wird, und einer Arbeit von H. Hasse[3]), wo gezeigt wird, daß dieser Zerfall bei algebraischem Grundkörper aus dem an jeder Primstelle geschlossen werden kann. Einer Anregung von Herrn van der Waerden folgend, werden die Ergebnisse dieser Arbeiten im § 1 zum Beweis des Einbettungsmonodromiesatzes für diese speziellen Gruppen herangezogen; d. h. dem Einbettungsproblem im Großen werden Einbettungsprobleme im Kleinen zugeordnet, so daß für die Möglichkeit der Einbettung im Großen die Lösbarkeit der entsprechenden lokalen Einbettungsprobleme notwendig und hinreichend ist. Diese Zuordnung von Einbettungsproblemen wird dabei unabhängig von dem besonderen Charakter der hier behandelten Gruppen definiert.

Im § 2 und § 3 wird der Monodromiesatz angewandt auf das Problem, einen biquadratischen oder einen quadratischen Körper in einen nicht-

[1]) Siehe eine demnächst erscheinende Arbeit des Verfassers.

[2]) R. Brauer, Konstruktion von Schiefkörpern, die von endlichem Rang in bezug auf ein gegebenes Zentrum sind. Journ. f. r. u. ang. Math. 168, S. 44 ff.

[3]) H. Hasse, Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassengruppe über einem algebraischen Zahlkörper. Math. Annalen 107, S. 731 ff.

Abelschen Normalkörper achten Grades einzubetten. Für den Fall der Einbettung in einen Körper mit der Quaternionengruppe als Galoisscher Gruppe über dem rationalen Grundkörper stehen die gefundenen Ergebnisse in Parallele zu den Resultaten einer Arbeit von Herrn E. Rosenblüth[4]), von dem ich daher zweckmäßig einige Bezeichnungen übernahm; auf dem von Herrn Rosenblüth eingeschlagenen Wege konnte jedoch das Hinreichen der von ihm gefundenen Bedingungen für Einbettbarkeit nicht gezeigt werden.

§ 1.

Hyperkomplexe Einbettungstheorie.

Über dem Grundkörper K_0 sei ein einfaches normales hyperkomplexes System A gegeben, das den Körper K_1 über K_0 als regulären[2]) Zerfällungskörper besitzt. Die Galoissche Gruppe von K_1 über K_0 heiße $\mathfrak{G}$, ihre Elemente seien $A, B, C, \ldots$. Das Faktorensystem von A in K_1 sei dabei $c_{A,B,C}$; es bestehe aus n-ten Einheitswurzeln. Durch das Faktorensystem $c_{A,B,C}$ wird eine Erweiterung $\mathfrak{H}$ der zyklischen Gruppe $\mathfrak{N}$ der Ordnung n mit Hilfe von $\mathfrak{G}$ definiert gemäß den Relationen:

$$Z_A \cdot Z_B = Z_{AB} \cdot c_{AB,B,E}^{-1}, \tag{1'}$$

$$\zeta \cdot Z_A = Z_A \cdot \zeta^A; \tag{1''}$$

wenn ζ die Erzeugende von $\mathfrak{N}$ ist, und $Z_A, Z_B, \ldots$ zusammen mit ζ die Gruppe $\mathfrak{H}$ erzeugen sollen. Dabei wird $\mathfrak{N}$ mit der Gruppe der n-ten Einheitswurzeln identifiziert, so daß die $c_{A,B,C}$ Elemente von $\mathfrak{N}$ werden. Umgekehrt definiert jede Erweiterung $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{N}$ mit Hilfe von $\mathfrak{G}$ ein Faktorensystem, sofern die Bedingung (1'') bei Identifizierung von $\mathfrak{N}$ mit der Gruppe der n-ten Einheitswurzeln gilt. Ist nun weiter $\mathfrak{H}$ reduziert, d. h. gibt es keine Untergruppe $\mathfrak{H}'$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{H}' \cdot \mathfrak{N} = \mathfrak{H}$, so heißt der Hauptsatz der zitierten Brauerschen Arbeit:

Genau dann ist $c_{A,B,C}$ dem Einheitssystem assoziiert, wenn sich K_1 in einen Normalkörper K_2 mit der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{H}$ so einbetten läßt, daß K_1 zum Normalteiler $\mathfrak{N}$ gehört.

Es ist nun für unsere Zwecke wichtig zu wissen, daß $c_{A,B,C}$ auch dann dem Einheitssystem assoziiert ist, wenn man bei möglicher Einbettung die Reduziertheit von $\mathfrak{H}$ nicht voraussetzt. Obwohl man diese Behauptung auch aus dem Brauerschen Beweis entnehmen kann, wollen wir den Hauptsatz noch einmal beweisen, wobei wir auf eine etwas übersichtlichere Schreibweise der „direkten Übertragung der Gruppe $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{G}^*$ als erweiternde Gruppe"[3]) kommen werden, als dies bei Brauer mit Hilfe von Gruppen-

[4]) E. Rosenblüth, Monatshefte f. Math. u. Phys. 1934, S. 85.

homomorphismen geschieht. Der Grundgedanke des Beweises ist natürlich noch der gleiche.

Ist K^* ein K_1 umfassender Normalkörper mit der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}^*$, $\mathfrak{N}_1$ die zu K_1 gehörige Untergruppe, so ist das Faktorensystem c_{A^*, B^*, C^*} von A in K^* gegeben durch:

$$c_{A^*, B^*, C^*} = c_{A, B, C};$$

wenn A^* und A einander im Sinne des natürlichen Homomorphismus entsprechen.

$\mathfrak{H}^*$ ist also definiert durch die Relationen:

$$\begin{aligned} Z_{A^*} \cdot Z_{B^*} &= Z_{A^* B^*} c^{-1}_{A^* B^*, B, E}, \\ \zeta \cdot Z_{A^*} &= Z_{A^*} \zeta^A. \end{aligned} \tag{2}$$

Wir bilden nun die Untergruppe $\widetilde{\mathfrak{H}}$ des direkten Produktes von $\mathfrak{G}^*$ mit $\mathfrak{H}$, bei der genau die Elemente miteinander multipliziert erscheinen, die zum selben Element der für $\mathfrak{G}^*$ und $\mathfrak{H}$ gemeinsamen Faktorgruppe $\mathfrak{G}$ gehören; mit anderen Worten: $\widetilde{\mathfrak{H}}$ ist die Galoissche Gruppe des Kompositums von K^* und einem fiktiven Normalkörper K_2 mit der Gruppe $\mathfrak{H}$ über K_0, wobei $(K^* \cap K_2) = K_1$ ist. Wir drücken dies dadurch aus, daß wir $\widetilde{\mathfrak{H}}$ in der Gestalt schreiben:

$$\widetilde{\mathfrak{H}} = (\mathfrak{G}^* \times \mathfrak{H})_{\mathfrak{G}}.$$

Gemäß (1) und (2) sind nun $\mathfrak{H}^*$ und $\widetilde{\mathfrak{H}}$ ersichtlich (1)-isomorph vermöge der Beziehung:

$$Z_{A^*} \cdot \zeta^\varrho \longleftrightarrow (A^* \times Z_A \cdot \zeta^\varrho).$$

Dabei wird der Normalteiler (ζ) auf $(1 \times (\zeta))$ abgebildet. In der Gestalt $\widetilde{\mathfrak{H}}$ haben wir nun $\mathfrak{H}^*$ explizit in der Hand, so daß sich der Beweis des Hauptsatzes sehr einfach gestaltet:

a) Ist $c_{A, B, C} \sim 1$, so gibt es nach Brauer, a. a. O., einen umfassenden Normalkörper K^*, in dem $c_{A, B, C}$ eng assoziiert zu 1 wird. Ist $\mathfrak{G}^*$ die Galoissche Gruppe von K^*, so muß also $\mathfrak{H}^*$ eine Untergruppe $\mathfrak{N}^*$ der Form $(A^* \times h_{A^*})$ enthalten, so daß jedes A^* genau einmal vorkommt und

$$(A^* \times h_{A^*}) \cdot (1 \times \mathfrak{N}) = \mathfrak{H}^* \tag{3}$$

ausfällt. Die h_{A^*} bilden eine Untergruppe $\mathfrak{H}'$ von $\mathfrak{H}$; A^* erscheint durch $A^* \longleftrightarrow (A^* \times h_{A^*}) \to h_{A^*}$ auf $\mathfrak{H}'$ bezogen. Bei diesem Homomorphismus werden genau solche Elemente auf $(\mathfrak{H}' \cap \mathfrak{N})$ abgebildet, die in $\mathfrak{H}^*$ mit Elementen von $\mathfrak{N}$ multipliziert erscheinen; diese bilden aber die zu K_1 in $\mathfrak{G}^*$ gehörige Untergruppe. Es gibt also in K^* einen K_1 umfassenden Normalkörper K' mit der Gruppe $\mathfrak{H}'$, so daß K_1 in K' zur Untergruppe $(\mathfrak{H}' \cap \mathfrak{N})$ gehört. Nun folgt aber aus (3) $\mathfrak{H}' \cdot \mathfrak{N} = \mathfrak{H}$, so daß bei reduziertem $\mathfrak{H}$ tatsächlich $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}$ und $(\mathfrak{H}' \cap \mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$ wird.

b) Ist nun $\mathfrak{H}$ wieder nicht als reduziert vorausgesetzt, so beweisen wir das Hinreichen der Bedingung. Ist nämlich K_1 in ein K^* mit $\mathfrak{G}^* \cong \mathfrak{H}$ einbettbar, so daß K_1 dabei $\mathfrak{N}$ entspricht, so haben wir: $\mathfrak{H}^* = (\mathfrak{H} \times \mathfrak{H})_{\mathfrak{G}}$. Diejenige Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $(\mathfrak{H} \times \mathfrak{H})_{\mathfrak{G}}$, bei der immer gleiche Elemente miteinander multipliziert erscheinen, erfüllt offenbar die Bedingungen: $\mathfrak{U} \cdot (1 \times \mathfrak{N}) = \mathfrak{H}^*$ und $\mathfrak{U}$ ist (1)-isomorph zu $\mathfrak{H}$; womit alles bewiesen ist.

Damit sind gewisse Einbettungsprobleme auf die Untersuchung der zum Faktorensystem gehörigen Algebra zurückgeführt. Für diese letzteren gilt aber nun der folgende von H. Hasse bewiesene Satz[3]):

Eine normale einfache Algebra A über dem algebraischen Zahlkörper K_0 zerfällt genau dann, wenn für jedes $\mathfrak{p}$ — endlich oder unendlich — aus K_0 $\mathsf{A} \cdot \overline{K}_0$ zerfällt, wenn $\overline{K}_0$ den $\mathfrak{p}$-adisch abgeschlossenen Körper von K_0 bedeutet. Dabei kann eine beliebige Primstelle außer Betracht gelassen werden.

Diese letzte Bemerkung folgt nämlich aus dem a. a. O. bewiesenen Satze, daß für die Invarianten $\left(\frac{\mathsf{A}}{\mathfrak{p}}\right)$ gilt: $\sum_{\mathfrak{p}} \left(\frac{\mathsf{A}}{\mathfrak{p}}\right) \equiv 0 \mod 1$.

Es sei nunmehr eine reduzierte Gruppe $\mathfrak{H}$ mit zyklischem Normalteiler $\mathfrak{N} = (\zeta)$ von der Ordnung n, sowie ein Normalkörper K_1 über dem algebraischen Zahlkörper K_0 mit der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{H}/\mathfrak{N}$ vorgelegt, so daß die Relationen (1) erfüllt sind. Denken wir uns K_1 bereits in einem K_2 mit der Gruppe $\mathfrak{H}$ enthalten, sind $\mathfrak{p}_\nu$ einander entsprechende Primideale aus K_ν, so erscheint für die $\mathfrak{p}_\nu$-adischen Erweiterungen $\overline{K}_\nu$ nunmehr $\overline{K}_1$ über $\overline{K}_0$ in $\overline{K}_2$ eingebettet. Die Galoissche Gruppe von $\overline{K}_2$ über $\overline{K}_0$ ist dann die Zerlegungsgruppe $\mathfrak{Z}_2$ von $\mathfrak{p}_2$. $\mathfrak{Z}_2$ ist dadurch charakterisiert, daß sich $\mathfrak{Z}_2 \mathfrak{N}/\mathfrak{N} = \mathfrak{Z}_1$ ergibt, wo $\mathfrak{Z}_1$ die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{p}_1$ in $\mathfrak{G}$ bedeutet; zu $\overline{K}_1$ gehört in $\mathfrak{Z}_2$ dann die Untergruppe $(\mathfrak{Z}_2 \cap \mathfrak{N})$. Wir verstehen nun unter einem dem Einbettungsproblem im Großen zugeordneten Problem im Kleinen die Forderung, $\overline{K}_1$ über $\overline{K}_0$ in ein $\overline{K}_2$ mit einer Gruppe $\mathfrak{Z}_2 \subset \mathfrak{H}$ derart einzubetten, daß $\overline{K}_1$ zur Untergruppe $(\mathfrak{Z}_2 \cap \mathfrak{N})$ gehört. An $\mathfrak{Z}_2$ wird dabei die Bedingung

$$\mathfrak{Z}_2 \mathfrak{N}/\mathfrak{N} = \mathfrak{Z}_1 \tag{4}$$

gestellt. Wir behaupten nun den

Satz 1: *Ist $\mathfrak{H}$ reduziert und genügt den Bedingungen* (1), *so ist K_1 mit der Gruppe $\mathfrak{H}/\mathfrak{N}$ genau dann in ein K_2 mit der Gruppe $\mathfrak{H}$ so einbettbar, daß K_1 zu $\mathfrak{N}$ gehört, wenn für alle $\mathfrak{p}$ aus K_0 wenigstens ein entsprechendes lokales Einbettungsproblem lösbar ist.*

Beweis: Die durch $\mathfrak{H}$ definierte Algebra A hat K_1 als Zerfällungskörper. Ist $\mathfrak{D}$ eine Darstellung von A in K_1 mit den Konjugierten $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_E, \mathfrak{D}_A, \mathfrak{D}_B, \ldots$, dann läßt sich $\mathfrak{D}$ ergänzen zu einer Darstellung

$\overline{\mathfrak{D}}$ von $\overline{\mathsf{A}} = \mathsf{A} \cdot \overline{K}_0$ in $\overline{K}_1$. Die Konjugierten zu $\overline{\mathfrak{D}}$ sind nunmehr $\overline{\mathfrak{D}} = \overline{\mathfrak{D}}_E$, $\overline{\mathfrak{D}}_{Z_1}$, $\overline{\mathfrak{D}}_{Z_2}$, ..., wenn E, Z_1, Z_2, ... die Elemente von $\mathfrak{Z}_1$ bedeuten. Da beim Übergang von $\mathfrak{D}$ zu $\overline{\mathfrak{D}}$ nur Diagonalmatrizen hinzugenommen werden, bleiben die Transformierenden[5])

$$\overline{P}_{Z_1, Z_2} \text{ mit } \overline{P}_{Z_1}^{-1}, {}_{Z_2} \cdot \overline{\mathfrak{D}}_{Z_1} \cdot \overline{P}_{Z_1, Z_2} = \overline{\mathfrak{D}}_{Z_2}$$

gleich den Transformierenden P_{Z_1, Z_2}. Das Faktorensystem von $\overline{\mathsf{A}}$ in $\overline{K}_1$ wird somit c_{Z_1, Z_2, Z_3}. Bildet man nun die Gruppe $\overline{\mathfrak{H}}$ gemäß den Relationen (1), so sieht man, daß $\overline{\mathfrak{H}}$ die durch $\mathfrak{Z}_1 = \overline{\mathfrak{H}}/\mathfrak{N}$ definierte Untergruppe von $\mathfrak{H}$ ist. Wegen (4) ist also $\mathfrak{Z}_2 \cdot \mathfrak{N} = \overline{\mathfrak{H}}$, so daß das durch $\mathfrak{Z}_2$ definierte Faktorensystem eng assoziiert zu dem von $\overline{\mathfrak{H}}$ definierten ist. Ist nun $\overline{K}_1$ über $\overline{K}_0$ in ein $\overline{K}_2$ mit der Gruppe $\mathfrak{Z}_2$ einbettbar, dann folgt somit aus dem Brauerschen Satz in der von uns bewiesenen Verallgemeinerung das Zerfallen von $\overline{\mathsf{A}} = \mathsf{A} \cdot K_0$. Wenn also für alle $\mathfrak{p}$ ein lokales Einbettungsproblem lösbar ist, so zerfällt $\overline{\mathsf{A}}$ überall und damit überhaupt. Aus dem Brauerschen Satz folgt nunmehr die Behauptung.

Aus der weiter oben gemachten Bemerkung über die Invarianten der $\overline{\mathsf{A}}$ ergibt sich

Satz 1a: *Bei Satz* 1 *kann eine endliche oder unendliche Primstelle unberücksichtigt bleiben.*

Die an die Gruppe $\mathfrak{H}$ durch (1) gestellten Bedingungen sind besonders dann sehr einschränkend, wenn $\zeta^A \neq \zeta$ ist, da damit über die Natur des einzubettenden Körpers spezielle Aussagen gemacht werden. Es sind für die Anwendung daher besonders die Fälle wichtig, wo $\mathfrak{N}$ sogar elementweise invariant bleibt. Für solche Gruppen werden wir nun beweisen, daß man von der Reduziertheit von $\mathfrak{H}$ absehen kann und auch von $\mathfrak{N}$ nur zu verlangen braucht, daß es Abelsch ist. Es gilt nämlich

Satz 1b: *Enthält die Gruppe $\mathfrak{H}$ eine elementweise invariante, Abelsche Untergruppe $\mathfrak{N}$ vom Typus $(l_1^{m_1}, l_2^{m_2}, \ldots, l_h^{m_h})$, und liegen in K_0 alle $l_i^{m_i}$-ten Einheitswurzeln, so läßt sich ein Körper K_1 über K_0 mit der Gruppe $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{H}/\mathfrak{N}$ genau dann so in ein K_2 mit der Gruppe $\mathfrak{H}$ einbetten, daß K_1 zu $\mathfrak{N}$ gehört, wenn für alle $\mathfrak{p}$ aus K_0 wenigstens ein zugehöriges lokales Einbettungsproblem lösbar ist.*

Beweis: Es ist nur zu zeigen, daß aus der Einbettbarkeit im Kleinen die im Großen folgt. Sind $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_h$ die Basiselemente von $\mathfrak{N}$, so werde $\mathfrak{H}/(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{i-1}, \tau_{i+1}, \ldots, \tau_h)$ mit $\mathfrak{H}^{(i)}$ bezeichnet. Schreibt man $\mathfrak{H}$ in Restklassen nach $\mathfrak{N}$ mit den Repräsentanten $Z_E, Z_A, \ldots$, so ist ersichtlich $\mathfrak{H} \cong (\mathfrak{H}^{(1)} \times \mathfrak{H}^{(2)} \times \ldots \times \mathfrak{H}^{(h)})_{\mathfrak{G}}$ vermöge des Isomorphismus

$$Z_A \cdot \tau_1^{\varrho_1} \tau_2^{\varrho_2} \ldots \tau_h^{\varrho_h} \longleftrightarrow (Z_A^{(1)} \cdot \tau_1^{\varrho_1})(Z_A^{(2)} \cdot \tau_2^{\varrho_2}) \ldots (Z_A^{(h)} \cdot \tau_h^{\varrho_h}),$$

[5]) R. Brauer, Math. Zeitschr. 28, S. 677.

wo $Z_A^{(i)}$ das Z_A in $\mathfrak{H}^{(i)}$ entsprechende Element ist. $\mathfrak{N}$ erscheint dabei als $(\mathfrak{N}^{(1)} \times \mathfrak{N}^{(2)} \times \ldots \times \mathfrak{N}^{(h)})$, wo $\mathfrak{N}^{(i)}$ zyklisch von der Ordnung $l_i^{m_i}$ ist. Es sind also die den $\mathfrak{H}^{(i)}$ entsprechenden Einbettungsprobleme $E^{(i)}$ $K_0 < K_1 < K_2^{(i)}$ zu lösen, derart daß $K_2^{(i)}$ mit $K_2^{(1)} \ldots K_2^{(i-1)}$ den Durchschnitt K_1 hat.

Eine völlig reduzierte Untergruppe von $\mathfrak{H}^{(i)}$ sei mit $\mathfrak{R}^{(i)}$ bezeichnet; ebenso seien wie im Beweis zu Satz 1 die Gruppen $\overline{\mathfrak{H}} < \mathfrak{H}$, $\overline{\mathfrak{H}}^{(i)} < \mathfrak{H}^{(i)}$ und $\overline{\mathfrak{R}}^{(i)} < \mathfrak{R}^{(i)}$ durch $\overline{\mathfrak{H}}/\mathfrak{N} = \mathfrak{Z}_1$, $\overline{\mathfrak{H}}^{(i)}/\mathfrak{N}^{(i)} = \mathfrak{Z}_1$ und $\overline{\mathfrak{R}}^{(i)}/(\mathfrak{N}^{(i)} \cap \mathfrak{R}^{(i)}) = \mathfrak{Z}_1$ eingeführt, wo $\mathfrak{Z}_1$ die Zerlegungsgruppe einer Primstelle p von K_0 ist, an der die Einbettbarkeit von $\overline{K}_1$ in ein $\overline{K}_2$ mit der Gruppe $\mathfrak{Z}_2$ vorausgesetzt wird: nach (4) ist dabei $\mathfrak{Z}_2$ eine Reduzierte von $\overline{\mathfrak{H}}$. Es gilt nun $\overline{\mathfrak{H}}^{(i)} = \overline{\mathfrak{H}}/(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{i-1}, \tau_{i+1}, \ldots, \tau_h)$; bei diesem Homomorphismus werde $\mathfrak{Z}_2$ abgebildet auf eine Untergruppe $\overline{\mathfrak{Z}}_2^{(i)}$ von $\overline{\mathfrak{H}}^{(i)}$; wegen $\mathfrak{Z}_2 \cdot \mathfrak{N} = \overline{\mathfrak{H}}$ gilt dabei $\overline{\mathfrak{Z}}_2^{(i)} \cdot \mathfrak{N}^{(i)} = \overline{\mathfrak{H}}^{(i)}$. $\overline{\mathfrak{Z}}_2^{(i)}$ ist somit eine Reduzierte von $\overline{\mathfrak{H}}^{(i)}$. Die zu $\overline{K}_1$ in $\mathfrak{Z}_2$ gehörige Untergruppe $(\mathfrak{Z}_2 \cap \mathfrak{N})$ ist dabei Obergruppe des abbildenden Normalteilers von $\mathfrak{Z}_2$ und wird auf $(\overline{\mathfrak{Z}}_2^{(i)} \cap \mathfrak{N}^{(i)})$ abgebildet. $\overline{K}_1$ ist über $\overline{K}_0$ also auch in ein $\overline{K}_2^{(i)}$ mit der Gruppe $\overline{\mathfrak{Z}}_2^{(i)}$ einbettbar, so daß $\overline{K}_1$ zu $(\overline{\mathfrak{Z}}_2^{(i)} \cap \mathfrak{N}^{(i)})$ gehört. Das zu $\overline{\mathfrak{Z}}_2^{(i)}$ gehörige Faktorensystem ist demnach dem Einheitssystem eng assoziiert. Nun sahen wir, daß $\overline{\mathfrak{Z}}_2^{(i)}$ eine Reduzierte von $\mathfrak{H}^{(i)}$ darstellt; ebenso ist $\overline{\mathfrak{R}}^{(i)}$ eine Reduzierte von $\overline{\mathfrak{H}}^{(i)}$, da ja $\mathfrak{R}^{(i)}$ Elemente aus allen Restklassen von $\mathfrak{H}^{(i)}$ nach $\mathfrak{N}^{(i)}$ enthält, was dann natürlich auch für $\overline{\mathfrak{R}}^{(i)}$ gilt. Die zu $\overline{\mathfrak{Z}}_2^{(i)}$, $\overline{\mathfrak{H}}^{(i)}$ und $\overline{\mathfrak{R}}^{(i)}$ gehörigen Faktorensysteme sind also alle untereinander und damit dem Einheitssystem assoziiert. Die durch $\mathfrak{R}^{(i)}$ definierte Algebra zerfällt also an der Primstelle p. Da dies für alle p und i gilt, folgt aus den Sätzen von Hasse und Brauer, daß die den $\mathfrak{R}^{(i)}$ entsprechenden Einbettungsprobleme $F^{(i)}$ alle lösbar sind. Es ist also noch zu zeigen, daß aus der Lösbarkeit von $F^{(i)}$ die von $E^{(i)}$ mit der geforderten Nebenbedingung folgt.

Es sei also K_1 über K_0 in ein $\widetilde{K}_2^{(i)}$ mit der Gruppe $\mathfrak{R}^{(i)}$ eingebettet, so daß K_1 zu $(\mathfrak{R}^{(i)} \cap \mathfrak{N}^{(i)})$ gehört. Ist nun $C^{(i)}$ mit der Galoisschen Gruppe (σ_i) ein zyklischer, zu $\widetilde{K}_2^{(i)}$ fremder Körper über K_0 vom Grade $l_i^{m_i}$, so hat $\widetilde{K}_2^{(i)} C^{(i)}$ die Galoissche Gruppe $(\mathfrak{R}^{(i)} \times (\sigma_i))$. Das erzeugende Element $\tau_i^{l_i^{x_i}}$ von $(\mathfrak{R}^{(i)} \cap \mathfrak{N}^{(i)})$ werde mit ϱ_i bezeichnet. $(\mathfrak{R}^{(i)} \times (\sigma_i))$ wird nun isomorph auf $\mathfrak{H}^{(i)}$ bezogen durch die Abbildung

$$Z_A^{(i)} \cdot \varrho_i^a \cdot \sigma_i^b \to Z_A \cdot \tau_i^{a l_i^{x_i}} + b.$$

Der abbildende Normalteiler ist dabei $(\varrho_i \cdot \sigma_i^{-l_i^{x_i}})$, die zu K_1 gehörige Untergruppe $(\varrho_i) \times (\sigma_i)$ wird auf $\mathfrak{N}^{(i)}$ abgebildet. In $\widetilde{K}_2^{(i)} C^{(i)}$ liegt also ein K_1 umfassender Normalkörper $K_2^{(i)}$ mit der Gruppe $\mathfrak{H}^{(i)}$, so daß K_1 zu $\mathfrak{N}^{(i)}$ gehört.

Wir betrachten jetzt $K_2^{(1)}, K_2^{(2)}, \ldots, K_2^{(i)}, \widetilde{K}_2^{(i)}$ und $K_1 C^{(i)}$ als Körper über K_1 und verlangen, daß $K_2^{(i)}$ zu $K^* = K_2^{(1)} \ldots K_2^{(i-1)}$ fremd wird. Wir unterscheiden nun die Fälle:

a) $x_i > 0$: Ist $K_2^{(i)}$ zu K^* nicht fremd, so liegt der durch $(\varrho_i \cdot \sigma_i^{-l_i^{x_i}}, \sigma_i^{l_i})$ in $\widetilde{K}_2^{(i)} C^{(i)}$ definierte Unterkörper von $K_2^{(i)}$ in K^*. Derselbe ist aber wegen $(\varrho_i \cdot \sigma_i^{-l_i^{x_i}}, \sigma_i^{l_i}) = (\varrho_i, \sigma_i^{l_i})$ Unterkörper von $C^{(i)} K_1$. $C^{(i)} K_1$ wäre also nicht fremd zu K^* über K_1.

b) $x_i = 0$: Es ist $E^{(i)} = F^{(i)}$. Ist $\widetilde{K}_2^{(i)}$ fremd zu K^*, so kann $K_2^{(i)} = \widetilde{K}_2^{(i)}$ gewählt werden. Enthält dagegen K^* den durch $(\varrho_i^{l_i})$ in $\mathfrak{R}^{(i)}$, also durch $(\varrho_i^{l_i}, \sigma_i)$ in $(\mathfrak{R}^{(i)} \times (\sigma_i))$ definierten Unterkörper, und außerdem noch den durch $(\varrho_i \cdot \sigma_i^{-l_i^{x_i}}, \sigma_i^{l_i}) = (\varrho_i \cdot \sigma_i^{-1}, \sigma_i^{l_i})$ definierten Unterkörper von $K_2^{(i)}$, so auch das Kompositum dieser Unterkörper, das durch $(\varrho_i^{l_i}, \sigma_i^{l_i})$ definiert ist. Dann enthält aber K^* erst recht den durch $(\varrho_i, \sigma_i^{l_i})$ definierten Unterkörper von $C^{(i)} K_1$.

Da es nun aber über K_0 beliebig viele $C^{(i)}$ gibt, läßt sich $C^{(i)}$ so wählen, daß $(C^{(i)} K_1 \cap K^*) = K_1$ und damit $(K^* \cap K_2^{(i)}) = K_1$ wird, wie behauptet.

§ 2.

Einbettung normaler biquadratischer Körper in solche achten Grades.

Als Anwendung unserer Betrachtungen wollen wir nunmehr zusehen, unter welchen Bedingungen sich ein Normalkörper K_1 vom Grade 4 in ein K_2 mit $(K_2 : K_1) = 2$ einbetten läßt. Die Abelschen Fälle schließen wir dabei, wie in der Einleitung bemerkt, aus. $\mathfrak{H}$ ist also die Diedergruppe oder die Quaternionengruppe. Wegen $n = 2$ ist die Theorie des § 1 stets anwendbar, sofern $\mathfrak{H}$ reduziert ist.

a) Die Diedergruppe werde erzeugt durch $S_1 = (1234)$ und $S_2 = (12)(34)$. Das erzeugende Element von $\mathfrak{N}$ sei $\tau = S_1^{\varrho} \cdot S_2^{\sigma}$. Dann ist also:

$\tau = S_1 \cdot \tau \cdot S_1^{-1} = S_1^{\varrho} \cdot S_1 \cdot S_2^{\sigma} \cdot S_1^{-1}$, woraus wegen $S_1 \cdot S_2 \cdot S_1^{-1} = S_1^2 \cdot S_2$ folgt: $\tau = S_1^{\varrho}$ und, wegen $\tau^2 = 1$, $\tau = S_1^2$. Im Sinne der Zerlegung von $\mathfrak{H}$ in Nebenklassen nach $\mathfrak{N}$ wird somit:

$$\mathfrak{H} = (1, S_1^2) + (S_1, S_1^3) + (S_2, S_2 S_1^2) + (S_2 S_1, S_2 S_1^3).$$

$\mathfrak{H}/\mathfrak{N}$ ist also Abelsch vom Typus $(2, 2)$. $\mathfrak{H}$ ist offenbar reduziert.

b) Die Quaternionengruppe sei erzeugt durch j, k und l mit den Relationen $j \cdot k = -k \cdot j = l$, $j^2 = k^2 = l^2 = -1$. Das einzige Element der Ordnung 2 ist -1, und dieses erzeugt auch einen Normalteiler $\mathfrak{N}$. Die Zerlegung von $\mathfrak{H}$ nach $\mathfrak{N}$ lautet:

$\mathfrak{H} = (1, -1) + (j, -j) + (k, -k) + (l, -l)$. Offenbar ist $\mathfrak{H}$ wieder reduziert und $\mathfrak{H}/\mathfrak{N}$ ist Abelsch vom Typus $(2, 2)$.

Für die Einbettung in Dieder- oder Quaternionenkörper, d. h. Körper mit der Dieder- oder Quaternionengruppe als Galoisscher Gruppe, kommen also nur Körper K_1 vom Typus $(2, 2)$ in Frage, deren quadratische Unterkörper Q_1, Q_2 und Q_3 heißen mögen. Die beiden für K_2 in Frage kommenden Typen können dann in folgender Weise charakterisiert werden:

Satz 2: a) *Ein K_1 umfassender Normalkörper K_2 achten Grades ist genau dann ein Diederkörper, wenn er nicht Abelsch und in bezug auf genau ein Q_ν zyklisch ist.*

b) *K_2 ist genau dann ein Quaternionenkörper, wenn er nicht Abelsch und in bezug auf alle Q_ν zyklisch ist.*

Der Beweis dieser Tatsachen ergibt sich unmittelbar aus der oben angeführten Zerlegung von $\mathfrak{H}$ nach $\mathfrak{N}$.

a) Lösung im Kleinen. Nach diesen Vorbereitungen behandeln wir das vorliegende Einbettungsproblem zunächst für den Fall, daß K_0 ein Lokalkörper mit der Primstelle $\mathfrak{p} = (\pi)$ ist. Die Lösung geschieht hier mit Hilfe der Klassenkörpertheorie im Kleinen. Die Normklassengruppe eines zyklischen Körpers C vom Primzahlpotenzgrade l^n wird dabei durch einen Charakter χ von der Ordnung l^n definiert, von dem man $\chi(u_i)$ für die Basiselemente der Restklassengruppe nach dem $\mathfrak{p}$-Führer von C und $\chi(\pi)$ anzugeben hat. Zum Trägheitskörper W gehört dann $\chi^{(C:W)} = \chi^e$; nach der Maximaleigenschaft des Trägheitskörpers ist dies die kleinste Potenz, für die χ^e mod $\mathfrak{p}^0$ erklärbar wird. Die Verzweigungsordnung e von $\mathfrak{p}$ in C ist also gleichzeitig die Ordnung von $\chi(\alpha)$ für die zu $\mathfrak{p}$ fremden α. Geht $\mathfrak{p}$ in l nicht auf, so ist der $\mathfrak{p}$-Führer gleich $\mathfrak{p}^0$ oder $\mathfrak{p}^1$, so daß das einzige u als $(N(\mathfrak{p}) - 1)$-te Einheitswurzel gewählt werden kann. Wir zeigen zunächst

Satz 3: *Es gibt für $\mathfrak{p} \nmid 2$ über K_0 genau einen Normalkörper K_1 vom Typus $(2, 2)$.*

Beweis: Bezeichnet η eine primitive $(N(\mathfrak{p}) - 1)$-te Einheitswurzel, also gleichzeitig das erzeugende Element der Restklassengruppe mod $\mathfrak{p}$, so sind die einzigen Charaktere der Ordnung 2:

$$\chi_1(\eta) = +1 \text{ mit } \chi_1(\pi) = -1;\ \chi_2(\eta) = -1 \text{ mit } \chi_2(\pi) = +1;$$
$$\chi_3(\eta) = -1 \text{ mit } \chi_3(\pi) = -1;$$

dabei gilt $\chi_1 \cdot \chi_2 = \chi_3$; q. e. d.

Weiterhin beweisen wir folgenden

Satz 4: *Es sei $\mathfrak{p} \nmid 2$, Q der unverzweigte quadratische Körper über K_0, also $Q = K_0(\zeta_{N(\mathfrak{p}^2)-1}) = K_0(\zeta)$. Dann wird der Automorphismus S von Q über K_0 gegeben durch $\zeta \to \zeta^n$ mit $n \equiv N(\mathfrak{p})$ (mod 4).*

Beweis: Ist Q_1 ein verzweigter quadratischer Körper über K_0, so ist $Q_1 Q$ über Q verzweigt, so daß für die Charaktere χ von Q_1 über K_0 und ψ von $Q_1 Q$ über Q gilt:

$\psi(\zeta) = \chi(\eta) = -1$, wenn ζ und η wie oben definiert sind.

Nach dem Verschiebungssatz ist nun:

$$\psi(\zeta) = \chi(\zeta \cdot \zeta^n) = \chi(\eta^a);$$

also wegen $\psi(\zeta) = -1$:

$$\zeta^{n+1} = \eta^a = \zeta^{a \cdot (N(\mathfrak{p})+1)} \text{ mit ungeradem } a.$$

Also ist:

$$n + 1 \equiv (N(\mathfrak{p}) + 1) \cdot a \pmod{N(\mathfrak{p}^2) - 1}$$

und damit wegen $N(\mathfrak{p})^2 - 1 \equiv 0$ (8) erst recht:

$$n \equiv (N(\mathfrak{p}) + 1) \cdot a - 1 \pmod 4;$$

für $N(\mathfrak{p}) \equiv 1$ (4) folgt $n \equiv 2a - 1 \equiv 1 \pmod 4$,

für $N(\mathfrak{p}) \equiv -1$ (4) folgt $n \equiv -1 \pmod 4$; q. e. d.

Nunmehr können wir die Einbettungsfrage für $\mathfrak{p} \nmid 2$ beantworten durch den folgenden

Satz 5: *Für $\mathfrak{p} \nmid 2$ läßt sich der - einzige - Körper K_1 vom Typus (2, 2) genau dann in einen Dieder- oder Quaternionenkörper K_2 einbetten, wenn $N(\mathfrak{p}) \equiv -1 \pmod 4$ ist. Im Falle der Einbettung in einen Diederkörper ist notwendig der unverzweigte quadratische Teilkörper von K_1 derjenige, über dem K_2 relativ zyklisch ist.*

Beweis: Wir zeigen zunächst den zweiten Teil der Behauptung. K_1 enthält zwei verzweigte quadratische Unterkörper Q_1, Q_3 und den unverzweigten Q_2. Es sei nun K_1 in einen Diederkörper K_2 eingebettet, so daß K_2 über Q_1 relativ zyklisch ist; wir wollen diese Annahme ad absurdum führen. Nach Satz 2a wäre K_2 über Q_2 vom Typus (2, 2), gehörte also notwendigerweise zu den Charakteren $\chi_1(\zeta) = 1$ mit $\chi_1(\pi) = -1$ und $\chi_2(\zeta) = -1$ mit $\chi_2(\pi) = \pm 1$; dabei ist χ_2 der zu K_1 über Q_2 gehörige Charakter, der ja $\chi_2(\zeta) = -1$ haben muß, da K_1 über Q_2 verzweigt ist. Da nun χ_1 zu $Q_2(\zeta_{N^4(\mathfrak{p})-1})$ gehört, wäre K_2 das Kompositum von $K_0(\zeta_{N^4(\mathfrak{p})-1})$ und K_1, also Abelsch, was einen Widerspruch darstellt.

Ist also K_1 überhaupt in ein obiges K_2 einbettbar, so ist K_2 zyklisch über Q_2. Der definierende Charakter von K_2 in Q_2 sei ψ mit $\psi^2 = \chi_2$. Wir sahen schon, daß $\chi_2(\zeta) = -1$ sein muß. Wählt man π aus K_0, so ist weiter $\chi_2(\pi) = +1$ nach dem Verschiebungssatz, da $n(\pi) = \pi^2$ Norm aus Q_1 in K_0 ist. Es gilt also:

$$\psi(\zeta) = i \quad \text{mit} \quad \psi(\pi) = \pm 1.$$

Wir haben also zu sehen, ob diese beiden Charaktere ψ den Bedingungen von Satz 2a oder 2b genügen. Jedenfalls definieren sie Körper K_2' und

K_2'', die in bezug auf K_0 Galoissch sind; bei einer Zahl $\alpha = \zeta^\varrho \cdot \pi^\tau$ mit $\psi(\alpha) = +1$ muß nämlich ζ in einer durch 2 teilbaren Potenz vorkommen, so daß sich bei Anwendung von S ergibt:

$$\psi(\alpha^S) = \psi(\zeta^S)^{2\varrho'} \cdot \psi(\pi^S)^\tau = \chi_2(\zeta^S)^{\varrho'} \cdot \psi(\pi)^\tau = \chi_2(\zeta)^{\varrho'} \cdot \psi(\pi^\tau) = \psi(\alpha) = +1.$$

Notwendig und hinreichend dafür, daß K_2 nun nicht Abelsch wird, ist die Tatsache, daß sich $\psi(\zeta^S) = \psi(\zeta^n) \neq \psi(\zeta)$ ergibt; d. h. $n \equiv -1 \pmod 4$ und damit nach Satz 4 $N(\mathfrak{p}) \equiv -1 \pmod 4$. Wir haben also noch nachzuweisen, daß in diesem Falle der eine der beiden Körper K_2' und K_2'' ein Dieder-, der andere ein Quaternionenkörper ist. Dies ist aber klar: K_2' und K_2'' sind verschiedene Körper; nach Satz 3 können sie also über Q_1 nicht beide vom Typus (2, 2) sein. Sie sind aber auch beide von der Verzweigungsordnung 2 über Q_1 und somit nicht beide über Q_1 zyklisch, da es über Q_1 nur einen zyklischen Körper vierten Grades mit der Verzweigungsordnung 2 gibt; nämlich $\varphi(\eta) = -1$ mit $\varphi(\pi_1) = i$, wo (π_1) die Primstelle von Q_1 ist.

Für $\mathfrak{p}/2$ gelten entsprechende Sätze nicht. Wir können hier nur ein allgemeines Verfahren angeben, das uns erlaubt, die Einbettungsfrage im einzelnen Falle wirklich zu beantworten. Sind χ_1, χ_2, χ_3 die Charaktere von Q_1, Q_2 und Q_3 in K_0, so bestimme man mit Hilfe des Verschiebungssatzes die Charaktere χ_1' und χ_2' von K_1 über Q_1 und Q_2. Es gibt nun in Q_1 nur endlich viele Charaktere ψ der Ordnung 4. Man hat also festzustellen, welche dieser ψ Galoissch, aber nicht Abelsch sind und der Bedingung $\psi^2 = \chi_1'$ genügen. Gibt es kein solches ψ, dann ist die Einbettung in einen Quaternionenkörper unmöglich. Bei der Einbettung in einen Diederkörper hat man noch zuzusehen, ob es zu χ_1' noch ein χ_1^* der Ordnung 2 gibt, so daß der durch χ_1' und χ_1^* zusammen definierte Körper Galoissch und nicht Abelsch ist.

Gibt es dagegen ein obiges ψ, so suche man eine Zahl α in Q_2 mit $\chi_2'(\alpha) = -1$. Notwendig und hinreichend dafür, daß K_2 über Q_2 vom Typus (2, 2) ist, ist dann:

α^2 ist Norm aus K_3 in Q_2; also nach dem Verschiebungssatz: α ist Norm aus K_2 in K_1 und damit ist $\beta = n_{K_0}^{Q_2}(\alpha)$ Norm aus K_2 in Q_1. Ist also $\psi(\beta) = +1$, so handelt es sich um einen Diederkörper, im anderen Falle um einen Quaternionenkörper.

b) Lösung im Großen. Es sei nunmehr K_0 ein algebraischer Zahlkörper; die quadratischen Unterkörper von K_1 seien $Q_\nu = K_0(\sqrt{D_\nu})$ mit den Diskriminanten $\mathfrak{D}_\nu$. In $\mathfrak{D}_\nu$ gehen Primstellen $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p} \nmid 2$ in erster Potenz oder gar nicht auf. Geht ein $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{D}_\nu$ nicht auf, so läßt sich D_ν so wählen, daß auch $D_\nu \not\equiv 0 \ (\mathfrak{p})$ ist. D_ν ist dadurch bis auf ein Quadrat, das quadratische Restsymbol $\left(\frac{D_\nu}{\mathfrak{p}}\right)$ also eindeutig bestimmt; dieses ein-

deutig bestimmte $\left(\frac{D_\nu}{\mathfrak{p}}\right)$ bezeichnen wir mit $\left(\frac{\mathfrak{D}_\nu}{\mathfrak{p}}\right)$. Ist ein $\mathfrak{p}$ in K_1 völlig unverzweigt, so ist $\left(\frac{\mathfrak{D}_1}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{p}}\right)$. Für $\mathfrak{p} \nmid 2$ ist $\left(\frac{\mathfrak{D}_\nu}{\mathfrak{p}}\right) = +1$ äquivalent mit der Aussage, daß $\mathfrak{p}$ in Q_ν voll zerlegt ist, während $\left(\frac{\mathfrak{D}_\nu}{\mathfrak{p}}\right) = -1$ die Unzerlegtheit von $\mathfrak{p}$ in Q_ν ausdrückt. Ist $\mathfrak{p} \nmid 2$, so gilt für wenigstens ein $\mathfrak{D}_\nu : \mathfrak{D}_\nu \not\equiv 0\ (\mathfrak{p})$.

Wir fragen nun, wann K_1 in einen Quaternionen- oder Diederkörper K_2 einbettbar ist, wobei im Falle der Einbettung in einen Diederkörper noch bestimmt sei, daß Q_2 derjenige quadratische Unterkörper von K_1 werden soll, über dem K_2 zyklisch ist. Wir haben nun Satz 1 in Anwendung zu bringen, wobei wir darauf achten, daß in den Bezeichnungen des Beweises zu Satz 1 lediglich $\mathfrak{Z}_2 \cdot \mathfrak{N} = \bar{\mathfrak{H}}$ zu gelten hat.

1. Reelle unendliche Primstellen $\mathfrak{p}_\infty$: Ist bei Einbettung in einen Diederkörper $\mathfrak{p}_\infty$ in K_1 verzweigt, so sei etwa Q_2 der Zerlegungskörper. Das zugehörige $\bar{\mathfrak{H}}$ ist die Untergruppe $(1, S_1^2) + (S_1, S_1^3)$, also zyklisch vom vierten Grade und reduziert. Das lokale Einbettungsproblem ist nicht lösbar. Ist dagegen für $\mathfrak{p}_\infty$ Q_1 der Zerlegungskörper, so ist $\bar{\mathfrak{H}}$ die Untergruppe $(1, S_1^2) + (S_2, S_2 S_1^2)$, wovon $(1, S_2)$ eine Reduzierte darstellt, so daß gar keine Forderungen gestellt werden.

Bei Einbettung in einen Quaternionenkörper muß natürlich $\mathfrak{p}_\infty$ in K_1 unverzweigt sein, da K_1 als der einzige biquadratische Unterkörper von K_2 auf jeden Fall Zerlegungskörper wird. In allen Fällen, wo eine Primstelle in K_1 voll zerlegt ist, werden an sie keine Forderungen gestellt, da das zugehörige $\bar{\mathfrak{H}} = (1, S_1^2)$ ist, was sich zu (1) reduzieren läßt.

2. Endliches $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p} \nmid 2\,\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2$: Es ist $\left(\frac{\mathfrak{D}_1}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{p}}\right) = \left(\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{p}}\right) = +1$ oder ein $\left(\frac{\mathfrak{D}_\nu}{\mathfrak{p}}\right) = +1$, während die anderen $= -1$ sind. Im ersten Falle ist $\mathfrak{p}$ in K_1 voll zerlegt, so daß sich keine Bedingungen ergeben. Im zweiten Falle ist die Reduzierte zu $\bar{\mathfrak{H}}$ entweder zyklisch von der Ordnung 4 oder besteht nur aus der Gruppeneins. Die letzte Möglichkeit liefert keine Bedingungen, während bei der ersten der unverzweigte quadratische Körper über $\bar{K}_0$ in einen zyklischen Körper vierten Grades einzubetten ist, was etwa durch den unverzweigten biquadratischen Körper geleistet wird.

3. Endliches $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p} \nmid 2$ und $\mathfrak{p} / \mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2$: Gemäß den obigen Erörterungen gibt es ein $\mathfrak{D}_\nu$ mit $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{D}_\nu$, während $\mathfrak{p} / \mathfrak{D}_\mu$ für $\mu \neq \nu$.

Es sei $\nu = 2$. Ist nun $\left(\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{p}}\right) = +1$, so ist $\bar{\mathfrak{H}}$ zyklisch von der Ordnung 4 und es ist somit ein verzweigter quadratischer Körper über $\bar{K}_0$ in einen zyklischen vierten Grades einzubetten. Dafür ist notwendig und

hinreichend, daß $N(\mathfrak{p}) \equiv 1 \pmod 4$ ist. Ist dagegen $\left(\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{p}}\right) = -1$, so ist $\bar{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}$ und nach Satz 5 ist das lokale Einbettungsproblem genau dann lösbar, wenn $N(\mathfrak{p}) \equiv -1 \pmod 4$ ist. Zusammengefaßt: Es ist genau $\left(\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{p}}\right) \equiv N(\mathfrak{p}) \pmod 4$ erforderlich.

Es sei dagegen $\nu = 1$ (oder 3). Im Falle der Einbettung in einen Quaternionenkörper bedeutet dies nur eine Umnummerierung. Beim Diederkörper ist für $\left(\frac{\mathfrak{D}_1}{\mathfrak{p}}\right) = +1$ die Reduzierte zu $\bar{\mathfrak{H}}$ die Gruppeneins, so daß keine Bedingung entsteht; für $\left(\frac{\mathfrak{D}_1}{\mathfrak{p}}\right) = -1$ dagegen ist $\bar{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}$ und nach Satz 5 ist das Lokalproblem unlösbar.

Bezeichnet man die in K_1 verzweigten ungeraden Primstellen (d. h. $\mathfrak{p} \nmid 2$) mit $\mathfrak{p}_\nu$, wenn $\mathfrak{p}_\nu \nmid \mathfrak{D}_1$, so können wir nun zusammenfassend sagen:

Satz 6: *Notwendig und hinreichend für die Einbettbarkeit eines Körpers K_1 vom Typus (2, 2) in einen Diederkörper ist bei passender Numerierung der Q_ν:*

α) $\mathfrak{p}_\infty$ *in Q_1 unverzweigt;*

β) $\left(\frac{\mathfrak{D}_1}{\mathfrak{p}_1}\right) = \left(\frac{\mathfrak{D}_3}{\mathfrak{p}_3}\right) = +1, \quad \left(\frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{p}_2}\right) \equiv N(\mathfrak{p}_2) \pmod 4$;

γ) *Lösbarkeit eines zugehörigen Lokalproblems für die* $\mathfrak{p}/2$.

Satz 7: *Notwendig und hinreichend für die Einbettbarkeit eines Körpers K_1 vom Typus (2, 2) in einen Quaternionenkörper ist:*

α) $\mathfrak{p}_\infty$ *in K_1 unverzweigt;*

β) $\left(\frac{\mathfrak{D}_\nu}{\mathfrak{p}_\nu}\right) \equiv N(\mathfrak{p}_\nu) \pmod 4$;

γ) *Lösbarkeit eines zugehörigen Lokalproblems für die* $\mathfrak{p}/2$.

Die etwas unangenehme Bedingung γ) wird sich im allgemeinen Fall nicht vermeiden lassen, so daß man das am Ende des vorigen Abschnitts angegebene Lösungsverfahren anzuwenden hat. In einigen Fällen läßt sie sich jedoch umgehen; es gilt nämlich

Satz 6a und 7a: 1. *Ein* $\mathfrak{p}/2$ *kann unberücksichtigt bleiben; insbesondere ist γ) überflüssig, wenn es nur ein* $\mathfrak{p}/2$ *gibt.*

2. *Ist* $\mathfrak{p}/2$ *in K_1 unverzweigt, so ist das zugehörige Lokalproblem lösbar.*

3. *Ist bei Einbettung in einen Diederkörper* $\mathfrak{p}/2$ *in Q_1 voll zerlegt, so ist das Lokalproblem lösbar.*

4. *Ist* $\mathfrak{p}/2$ *in Q_2 voll zerlegt, so ist das Lokalproblem äquivalent zu der Forderung, daß -1 Norm aus $\bar{K}_1$ in $\bar{Q}_2$ ist.*

Beweis: 1. Siehe Satz 1a.

2. $\mathfrak{p}$ ist nicht unzerlegt, da sonst K_1 über K_0 zyklisch sein müßte; also ist $\mathfrak{p}$ in wenigstens einem Q_ν voll zerlegt. Die Reduzierte zu $\overline{\mathfrak{H}}$ ist zyklich von der Ordnung 4 oder die Gruppeneins. Im letzteren Falle ist nichts zu zeigen, im ersteren ist wegen der Unverzweigtheit von K_1 über Q_ν die Lösbarkeit des Lokalproblems klar.

3. Die Reduzierte zu $\overline{\mathfrak{H}}$ ist die Gruppeneins.

4. Für in K_1 unverzweigte $\mathfrak{p}$ ist die Behauptung klar. Ist dagegen $\mathfrak{p}$ verzweigt, so ist erforderlich, daß sich der Charakter χ von $\overline{K}_1$ über $\overline{Q}_2 = \overline{K}_0$ als $\chi = \psi^2$ schreiben läßt. Dies ist nur eine Forderung für die $\chi(u_i)$, wo u_i Basiselement der Restklassengruppe mod $\mathfrak{p}^\tau$ für genügend hohes τ ist. Aus $\chi = \psi^2$ folgt aber $\chi(-1) = \psi^2(-1) = \psi(1) = 1$. Ist umgekehrt $\chi(-1) = 1$ erfüllt, so wählen wir τ so hoch, daß für jedes $\beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^\tau}$ folgt: $\beta = \gamma^4$. Ist nun u_0 ein Basiselement der Ordnung 2 mod $\mathfrak{p}^\tau$ — für alle anderen Basiselemente ist ja die Erklärbarkeit von ψ klar —, so ist also $u_0^2 = \gamma^4$ oder $u_0 = \pm\gamma^2$. Es gilt somit $\chi(u_0) = \chi(\pm 1) \cdot \chi(\gamma^2) = 1$, so daß sich ψ durch $\psi(u_0) = +1$ erklären läßt.

Es gilt demgemäß speziell für den rationalen Grundkörper R, wo wir $\mathfrak{D}_\nu$ und D_ν als gleich ansehen dürfen:

Satz 6b: *K_1 vom Typus (2, 2) über R ist genau dann in einen Diederkörper einbettbar, wenn bei passender Numerierung gilt:*

$$D_1 > 0 \quad \textit{nebst} \quad \left(\frac{D_1}{p_1}\right) = \left(\frac{D_3}{p_3}\right) = 1 \quad \textit{und} \quad \left(\frac{D_2}{p_2}\right) \equiv p_2 \pmod 4.$$

Satz 7b: *K_1 ist genau dann in einen Quaternionenkörper einbettbar, wenn gilt:*

$$D_\nu > 0 \quad \textit{nebst} \quad \left(\frac{D_\nu}{p_\nu}\right) \equiv p_\nu \pmod 4 \quad \textit{für} \quad \nu = 1, 2, 3.$$

§ 3.

Einbettung quadratischer Körper über R in nicht-Abelsche Normalkörper achten Grades.

Soll Q in einen Diederkörper eingebettet werden, und ist $D = \pm 2^\varrho \cdot p_1 p_2 \ldots$, so wählen wir eine Primzahl q, welche in R $(i, \sqrt{2}, \sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots)$ voll zerlegt ist. Es gilt dann:

$$\left(\frac{p_i}{q}\right) = +1, \quad \left(\frac{2}{q}\right) = +1, \quad \left(\frac{-1}{q}\right) = +1,$$

so daß wir auf Grund des quadratischen Reziprozitätsgesetzes haben:

$$\left(\frac{D}{q}\right) = +1 \equiv q \pmod 4; \quad \left(\frac{q}{p_i}\right) = +1.$$

Setzen wir nun $D = D_2$ oder D_3 und $q = D_1$, so sind die Bedingungen des Satzes 6b erfüllt.

Wir haben also

Satz 8: *Jeder quadratische Körper Q über R läßt sich in einen Diederkörper einbetten, wobei man beliebig vorschreiben kann, welcher Unterkörper Q werden soll.*

Zur Untersuchung der Einbettbarkeit in einen Quaternionenkörper K_2 stellen wir zunächst die möglichen Typen der K_2 auf, wie sie durch die Diskriminanten D_ν gekennzeichnet werden. Enthält nun ein D_ν die Zahl 4 als Faktor, so schreiben wir $D_\nu = 4 \cdot d_\nu$, im anderen Falle $D_\nu = d_\nu$. Der Satz 7b bleibt erhalten bei Ersetzung der D_ν durch die d_ν. Weiterhin führen wir Größen γ_ν durch $\gamma_\nu = \Pi p_\nu$ bei festem ν ein.

α) Sind alle d_ν ungerade, so haben wir $d_\nu = \frac{\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3}{\gamma_\nu}$, so daß Satz 7b ergibt:

$$\left(\frac{\gamma_{\nu-1}}{\gamma_\nu}\right) \cdot \left(\frac{\gamma_{\nu+1}}{\gamma_\nu}\right) \equiv \gamma_\nu \pmod 4, \tag{5}$$

wenn wir ν mod 3 rechnen. Multiplizieren wir die Gleichungen (5) unter Beachtung des quadratischen Reziprozitätsgesetzes, so erhalten wir:

$$(-1)^{\sum\limits_{\nu<u} \frac{\gamma_\nu - 1}{2} \cdot \frac{\gamma_u - 1}{2}} \equiv \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \pmod 4. \tag{6}$$

Die Lösungen von (6) lauten bei passender Numerierung:

$$\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} \equiv \{1, 1, 1\} \text{ oder } \{3, 3, 3\} \pmod 4,$$

woraus sich ergibt, daß

$$d_1 \equiv d_2 \equiv d_3 \equiv 1 \pmod 4$$

ist.

β) Sind nicht alle d_ν ungerade, so ist wenigstens eines von ihnen, etwa d_1 ungerade, so daß wir haben:

$$d_1 = \gamma_2 \cdot \gamma_3; \quad d_2 = 2 \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_3; \quad d_3 = 2 \cdot \gamma_1 \cdot \gamma_2.$$

Analog zu Gleichung (6) erhalten wir:

$$\left(\frac{2}{d_1}\right)(-1)^{\sum\limits_{\nu<u} \frac{\gamma_\nu - 1}{2} \cdot \frac{\gamma_u - 1}{2}} \equiv \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \pmod 4, \tag{7}$$

woraus sich die Lösungen ergeben:

$\left(\frac{2}{d_1}\right) = +1$ nebst $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} \equiv \{1, 1, 1\}$ oder $\{3, 3, 3\} \pmod 4$,

$\left(\frac{2}{d_1}\right) = -1$ nebst $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} \equiv \{1, 1, 3\}, \{3, 1, 1\},$
$\{3, 1, 3\}, \{1, 3, 3\} \pmod 4$.

Die Ergebnisse von α) und β) fassen wir zusammen zu dem

Satz 9: *Es gibt folgende Typen von Quaternionenkörpern, eingeteilt nach dem Kongruenzwert der* $d_\nu \bmod 8$ *in passender Numerierung*:

$$\{d_1, d_2, d_3\} \equiv \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} \pmod 8,$$

wo

$$\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} = \{1, 1, 1\}, \{1, 5, 5\}, \{1, 2, 2\}, \{3, 6, 2\}, \{5, 6, 6\}.$$

Beweis: Es wurde oben gezeigt, daß jeder Quaternionenkörper einem dieser Typen angehört. Man hat nämlich zu beachten, daß stets $\delta_1 \cdot \delta_2 \equiv \delta_3 \pmod 8$ gelten muß, wenn δ_1 ungerade ist. Der Existenzbeweis wird durch den folgenden Satz erbracht werden.

Die genannten 5 Typen seien im folgenden mit $a-e$ bezeichnet.

Satz 10: *Notwendig und hinreichend dafür, daß sich ein quadratischer Körper* Q *mit der Diskriminante* $D = 4 \cdot d$ *oder* $D = d$ *in einen Quaternionenkörper* K_2 *einbetten läßt, ist:* $d > 0$; $d \not\equiv 7 \pmod 8$. *Dabei läßt sich der Typus für* K_2 *beliebig vorschreiben mit der Einschränkung, daß der Kongruenzwert von* d *bei diesem Typus vorhanden ist.*

Beweis: Es sei d und ein dazu passender Typus vorgelegt. Wir numerieren die δ_ν des betreffenden Typus so um, daß $d \equiv \delta_1 \pmod 8$ ist; handelt es sich um die Typen $c-e$ und ist d gerade, dann soll auch δ_2 gerade sein. Wir unterscheiden nun:

α) Typen a und b: $d = p_1 \dots p_r$. Wir suchen eine Primzahl q, die den Bedingungen genügt: $\left(\frac{q}{p_i}\right) \equiv p_i \pmod 4$ nebst $q \equiv \delta_2 \pmod 8$. Dies liefert eine bestimmte Klasse mod $8d$, so daß nach dem allgemeinen Satz von der arithmetischen Progression die Existenz eines derartigen q sichergestellt ist.

Setzt man nun $d_1 = d$, $d_2 = q$, so hat man:

$\left(\frac{d_2}{p_i}\right) = \left(\frac{q}{p_i}\right) \equiv p_i \pmod 4$ nach Konstruktion;

$\left(\frac{d_1}{q}\right) = \left(\frac{q}{d_1}\right) \equiv d_1 \equiv q \pmod 4$ nach dem quadratischen Reziprozitätsgesetz. Satz 7b liefert nun die Behauptung.

β) Typen $c-e$; also $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} = \{1, 2, 2\}, \{3, 2, 6\}, \{5, 6, 6\}$. Es sei $d = p_1 \dots p_r$, wo die p_i ungerade sind. Wir suchen ein primes q, das den Bedingungen genügt:

$$\left(\frac{q}{p_i}\right) \equiv \left(\frac{2}{p_i}\right) \cdot p_i \pmod 4,$$

$2q \equiv \delta_2 \pmod 8$, was wie oben erfüllbar ist.

Setzen wir nun $d_1 = d$, $d_2 = 2q$, so haben wir:

$$\left(\frac{d_2}{p_i}\right) = \left(\frac{2}{p_i}\right)\cdot\left(\frac{q}{p_i}\right) \equiv p_i \pmod 4,$$

$$\left(\frac{d_1}{q}\right) = \left(\frac{q}{d_1}\right)\cdot(-1)^{\frac{\delta_1-1}{2}\cdot\frac{\delta_2-2}{4}} \equiv (-1)^{\frac{\delta_1-1}{2}\cdot\frac{\delta_2-2}{4}}\cdot\delta_1\cdot\left(\frac{2}{\delta_1}\right) \equiv \frac{\delta_2}{2} \pmod 4,$$

wie man durch Einsetzen leicht verifiziert. Aus Satz 7b folgt die Behauptung.

γ) Typen $c-e$ und $d = 2\cdot p_1 \ldots p_r = 2\cdot\gamma$. Wir suchen ein primes q, das den Bedingungen genügt:

$$\left(\frac{q}{p_i}\right) \equiv \left(\frac{2}{p_i}\right)\cdot p_i \pmod 4,$$

$$2\cdot q \equiv \delta_2 \pmod 8,$$

$\left(\frac{2}{q}\right) \equiv (-1)^{\frac{\delta_2-2}{4}\cdot\frac{\gamma-1}{2}}\cdot\gamma\cdot\left(\frac{2}{\gamma}\right)\cdot\frac{\delta_2}{2} \pmod 4$. Die beiden letzten Bedingungen geben zusammen eine Bedingung mod 8, so daß q mod 8γ zu bestimmen ist. Wir setzen nun $d_1 = d$, $d_2 = 2q$ und haben:

$$\left(\frac{d_2}{p_i}\right) \equiv p_i \pmod 4,$$

$$\left(\frac{d_1}{q}\right) = \left(\frac{2}{q}\right)\cdot\left(\frac{\gamma}{q}\right) = \left(\frac{2}{q}\right)\left(\frac{q}{\gamma}\right)(-1)^{\frac{\gamma-1}{2}\frac{q-1}{2}}$$

$$\equiv \left(\frac{2}{q}\right)\left(\frac{2}{\gamma}\right)\cdot\gamma\cdot(-1)^{\frac{\gamma-1}{2}\cdot\frac{\delta_2-2}{4}} \equiv \frac{\delta_2}{2} \equiv q \pmod 4,$$

so daß auch hier alles bewiesen ist.

(Eingegangen am 23. 6. 1935.)

Über die Beziehungen zwischen den Faktorensystemen und der Normklassengruppe eines galoisschen Erweiterungskörpers.

Von

Tadasi Nakayama in Osaka (Japan).

Die Gruppe der Klassen assoziierter Faktorensysteme eines zyklischen Erweiterungskörpers ist bekanntlich, bei Zugrundelegung der Normierung, mit der Normklassengruppe identisch. Ich untersuche in der vorliegenden Arbeit die Beziehungen zwischen den Faktorensystemen und den Normklassen einer allgemeinen galoisschen Erweiterung.

§ 1.

Faktorensysteme und Normklassengruppe.

Es sei K/k eine beliebige separable galoissche Erweiterung vom Grade n und $\mathfrak{G}$ sei ihre galoissche Gruppe. Unter einem Faktorensystem (a) von K/k verstehen wir wie üblich ein System von n^2 von Null verschiedenen Elementen $a_{R,S}$ $(R, S, \ldots \in \mathfrak{G})$ aus K mit den n^3 Relationen

$$a_{R,ST}\, a_{S,T} = a_{RS,T}\, a_{R,S}^{T}. \tag{1}$$

Satz 1. *Für jedes R ist $\prod_{S\in\mathfrak{G}} a_{R,S}$ im Grundkörper k enthalten, wobei S alle Elemente von $\mathfrak{G}$ durchläuft*[1]).

Beweis: Aus (1) folgt

$$\prod_S a_{R,ST} \prod_S a_{S,T} = \prod_S a_{RS,T} \prod_S a_{R,S}^{T}.$$

Da aber ersichtlich $\prod_S a_{S,T} = \prod_S a_{RS,T}$ ist, so gilt $\prod_S a_{R,S} = (\prod_S a_{R,S})^T$. Hieraus folgt $\prod_S a_{R,S} \in k$, wie behauptet.

Diese Funktion des Automorphismus R und des Faktorensystems (a) bezeichnen wir im folgenden mit $F(R;(a))$. $F(R;(a))$ ist also ein Element in k. Die multiplikative Gruppe der von Null verschiedenen Elemente von k bezeichnen wir mit k^*. Es sei dementsprechend $N^*_{K/k}$ die multiplikative Gruppe, die aus den Normen (bezüglich K/k) aller nichtverschwindenden Elemente von K besteht. Dann ist $k^*/N^*_{K/k}$ die sogenannte

[1]) Man bemerke, daß $\prod_{R\in\mathfrak{G}} a_{R,S}$ nicht notwendig in k enthalten zu sein braucht.

Normklassengruppe von K/k. Wir bezeichnen noch die $F(R;(a))$ enthaltende Normklasse mit $\mathfrak{F}(R;(a))$: $\mathfrak{F}(R;(a)) = F(R;(a))N^*_{K/k}$. Dann gilt

Satz 2. *Sind zwei Faktorensysteme* (a) *und* (b) *von* K/k *zueinander assoziiert, so ist* $\mathfrak{F}(R;(a)) = \mathfrak{F}(R;(b))$ *für jeden Automorphismus* R *aus* $\mathfrak{G}$ [2]). *D. h.* $\mathfrak{F}(R;(a))$ *ist eine Funktion von* R *und der Klasse des Faktorensystems* (a).

Beweis: Es seien (a) und (b) assoziiert, d. h. es gebe n Elemente $l_R, l_S, \ldots$ aus K derart, daß

$$b_{R,S} = a_{R,S}\frac{l_R^S l_S}{l_{RS}} \tag{2}$$

für jedes Paar R, S aus $\mathfrak{G}$ gilt. Dann ist

$$\prod_S b_{R,S} = \prod_S a_{R,S} \prod_S l_R^S,$$

denn RS durchläuft mit S alle Elemente von $\mathfrak{G}$. Also ist

$$F(R;(b)) = F(R;(a))N(l_R) \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{F}(R;(b)) = \mathfrak{F}(R;(a)).$$

Insbesondere gilt

Satz 2'. *Ist* (a) *mit dem Einssystem assoziiert, so ist* $F(R;(a)) \in N^*_{K/k}$ *für jedes* R.

Satz 3. *Es ist* $\mathfrak{F}(R;(a))\,\mathfrak{F}(S;(a)) = \mathfrak{F}(RS;(a))$ *für jedes Paar* R, S *aus* $\mathfrak{G}$.

Beweis: Aus (1) folgt

$$\prod_T a_{R,ST} \prod_T a_{S,T} = \prod_T a_{RS,T} \prod_T a^T_{R,S},$$

also ist nach Definition

$$F(R;(a))\,F(S;(a)) = F(RS;(a))\,N(a_{R,S}),$$

oder, was dasselbe ist,

$$\mathfrak{F}(R;(a))\,\mathfrak{F}(S;(a)) = \mathfrak{F}(RS;(a)).$$

Satz 4. *Durch die Abbildung von* R *auf die Klasse* $\mathfrak{F}(R;(a))$ *erhält man einen Homomorphismus der Faktorgruppe* $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ *nach der Kommutatorgruppe* $\mathfrak{G}'$ *von* $\mathfrak{G}$ *auf eine Untergruppe der Normklassengruppe* $k^*/N^*_{K/k}$.

Beweis: Die Abbildung $R \to \mathfrak{F}(R;(a))$ bedeutet nach Satz 3 einen Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf eine Untergruppe von $k^*/N^*_{K/k}$. Es gilt aber dabei

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(RSR^{-1}S^{-1};(a)) &= \mathfrak{F}(R;(a))\,\mathfrak{F}(S;(a))\,\mathfrak{F}(R^{-1};(a))\,\mathfrak{F}(S^{-1};(a)) \\ &= \mathfrak{F}(R;(a))\,\mathfrak{F}(S;(a))\,\mathfrak{F}(R;(a))^{-1}\,\mathfrak{F}(S;(a))^{-1} = N^*_{K/k},\end{aligned}$$

also entspricht jedem Element von $\mathfrak{G}'$ die Hauptklasse $N^*_{K/k}$. Daraus folgt unser Satz unmittelbar.

---

[2]) Die Umkehrung der Sätze 2 und 2' gilt im allgemeinen nicht.

Es sei nun $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, und Ω der zu $\mathfrak{H}$ gehörige Unterkörper.

Satz 5. *Es sei* $R \in \mathfrak{H}$. *Versteht man unter* $F_\Omega(R;(a))$ *das Produkt* $\prod_{S \in \mathfrak{H}} a_{R,S}$, *so ist* $F(R;(a)) = N_{\Omega|k}[F_\Omega(R;(a))]$.

Beweis: Es sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} T_1 + \mathfrak{H} T_2 + \ldots + \mathfrak{H} T_t$. Aus (1) folgt

$$\prod_{S \in \mathfrak{H}} a_{R,ST} \prod_{S \in \mathfrak{H}} a_{S,T} = \prod_{S \in \mathfrak{H}} a_{RS,T} \prod_{S \in \mathfrak{H}} a_{R,S}^{T}.$$

Da aber $\prod_{S \in \mathfrak{H}} a_{S,T} = \prod_{S \in \mathfrak{H}} a_{RS,T}$ ist, so ist $\prod_{S \in \mathfrak{H}} a_{R,ST} = (\prod_{S \in \mathfrak{H}} a_{R,S})^{T}$. Daher gilt

$$F(R;(a)) = \prod_{S \in \mathfrak{G}} a_{R,S} = \prod_{i=1}^{t} (\prod_{S \in \mathfrak{H}} a_{R,ST_i})$$

$$= \prod_{i} (\prod_{S \in \mathfrak{H}} a_{R,S})^{T_i} = N_{\Omega|k}(\prod_{S \in \mathfrak{H}} a_{R,S}) = N_{\Omega|k}[F_\Omega(R;(a))],$$

denn $\prod_{S \in \mathfrak{H}} a_{R,S}$ liegt nach Satz 1 in Ω.

§ 2.

Abelscher Fall.

In diesem Paragraphen beschränken wir uns auf die abelschen Erweiterungen K/k, nämlich auf den Fall $\mathfrak{G}' = \mathfrak{E}$, wo $\mathfrak{E}$ die Einheitsgruppe ist.

Satz 6. *Es sei* K/k *abelsch. Ist der Exponent des verschränkten Produktes* $(a, K, \mathfrak{G})$ *gleich dem Grad* $(K:k) = n$ [3]), *so erhält man durch* $R \to \mathfrak{F}(R;(a))$ *einen Isomorphismus zwischen* $\mathfrak{G}$ *und einer Untergruppe von* $k^*/N_{K|k}^*$.

Zum Beweis benutzen wir den folgenden Chevalleyschen

Hilfssatz [4]). L/k sei eine separable galoissche Erweiterung endlichen Grades, deren galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ ist. Es sei $\mathfrak{G}$ ein direktes Produkt $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \times \mathfrak{H}_2$, und L_1 bzw. L_2 sei der zu $\mathfrak{H}_1$ bzw. $\mathfrak{H}_2$ gehörige Zwischenkörper. Ist (a) ein Faktorensystem von L/k und $(L:L_1) = m$, so ist

$$(a, L, \mathfrak{G})^m \sim (a', L_1, \mathfrak{H}_2),$$

wo (a') ein Faktorensystem von L_1/k bedeutet, das durch

$$a'_{T,T'} = N_{L|L_1}(a_{T,T'}), \qquad T, T' \in \mathfrak{H}_2$$

definiert ist.

Beweis des Satzes 6: Es sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \times \ldots \times \mathfrak{G}_h$, wo die $\mathfrak{G}_i$ zyklische Gruppen sind: $\mathfrak{G}_i = \{S_i\}$. K_i sei der zu

$$\mathfrak{G}_1 \times \ldots \times \mathfrak{G}_{i-1} \times \mathfrak{G}_{i+1} \times \ldots \times \mathfrak{G}_h$$

[3]) Dann muß $(a, K, \mathfrak{G})$ eine Divisionsalgebra sein.

[4]) C. Chevalley: La théorie du symbole de restes normiques, Journal für Math. 169 (1933), S. 141—157, Lemme 5.

zugehörige Unterkörper. Dann ist die galoissche Gruppe von K_i/k die zyklische Gruppe $\mathfrak{G}_i$, und K das direkte Kompositum von $K_1, K_2, \ldots, K_h$. Setzt man $n_i = (K_i:k) = (\mathfrak{G}_i:\mathfrak{E})$, so ist $\prod_i n_i = n$. Es sei noch

$$\bar{K}_i = K_1 \ldots K_{i-1} K_{i+1} \ldots K_h \quad \text{und} \quad m_i = n_1 \ldots n_{i-1} n_{i+1} \ldots n_h.$$

In dem verschränkten Produkt

$$\mathfrak{S} = (a, K, \mathfrak{G}) = u_E K + u_S K + u_{S'} K + \ldots$$

setzen wir für jedes Element S aus $\mathfrak{G}$

$$\bar{u}_S = u_{S_1}^{r_1} u_{S_2}^{r_2} \ldots u_{S_h}^{r_h},$$

wenn

$$S = S_1^{r_1} S_2^{r_2} \ldots S_h^{r_h}; \qquad 0 \leqq r_i \leqq n_i - 1$$

ist. Das zum System von Operatoren $\bar{u}_S$ gehörige Faktorensystem $(\bar{a})$ ist assoziiert mit (a). Nun sei $c_i = \bar{u}_{S_i}^{n_i} = u_{S_i}^{n_i} (i = 1, 2, \ldots, h)$, so ist $F_{\bar{K}_i}(S_i; (\bar{a})) = \prod_{S \in \mathfrak{G}_i} \bar{a}_{S_i, S} = c_i$. c_i liegt also in $\bar{K}_i$ und es gilt nach Satz 5 $F(S_i; (\bar{a})) = N_{\bar{K}_i|k}(c_i)$. Wendet man andererseits den Chevalleyschen Hilfssatz auf $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{G}_1 \times \ldots \times \mathfrak{G}_{i-1} \times \mathfrak{G}_{i+1} \times \ldots \times \mathfrak{G}_h$ und $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{G}_i$ an, so erhält man

$$\mathfrak{S}^{m_i} \sim (N_{K|K_i}(c_i), K_i, S_i) = (N_{\bar{K}_i|k}(c_i), K_i, S_i).$$

Der Exponent von $\mathfrak{S}^{m_i}$ ist n_i, da der Exponent von $\mathfrak{S}$ nach unserer Annahme gleich n ist. Die niederste Potenz von $N_{\bar{K}_i|k}(c_i) = F(S_i; (\bar{a}))$, die in $N^*_{K_i|k}$ liegt, ist also die n_i-te. Da aber nach Satz 2

$$\mathfrak{F}(S_i; (\bar{a})) = \mathfrak{F}(S_i; (a))$$

ist, so liegt $F(S_i; (a))^\nu$ dann und nur dann in $N^*_{K_i|k}$, wenn ν durch n_i teilbar ist. Ferner ist $\mathfrak{F}(S_i; (a)) = N_{\bar{K}_i|k}(c_i) N^*_{K|k}$ ersichtlich in $N^*_{\bar{K}_i|k}$ enthalten.

Ist nun $\mathfrak{F}(S; (a))$ für $S = S_1^{r_1} S_1^{r_2} \ldots S_h^{r_h}$ die Hauptklasse, d. h. ist

$$\mathfrak{F}(S_1; (a))^{r_1} \mathfrak{F}(S_2; (a))^{r_2} \ldots \mathfrak{F}(S_h; (a))^{r_h} = N^*_{K|k},$$

so ist

$$\mathfrak{F}(S_i; (a))^{r_i} \subseteqq N^*_{K_i|k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, h),$$

da $\mathfrak{F}(S_j; (a)) \subseteqq N^*_{\bar{K}_j|k} \subseteqq N^*_{K_i|k}$ für jedes $j \neq i$ ist. Also muß r_i durch n_i teilbar sein. Dann ist aber natürlich $S = E$. Jetzt ist unser Satz eine unmittelbare Folgerung von Satz 4.

Etwas allgemeiner gilt

Satz 7. *K/k sei abelsch. Der Exponent von $\mathfrak{S} = (a, K, \mathfrak{G})$ sei e. Ist $\mathfrak{F}(S; (a)) = N^*_{K|k}$, so ist $S^{\frac{n}{e}}$ das Einselement E.*

Beweis: Wir behalten die Bezeichnungen im Beweis des Satzes 5 bei. Dann ist der Exponent von $\mathfrak{S}^{m_i}$ gleich $\frac{e}{(e, m_i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$. Also ist $\mathfrak{F}(S_i; (a))^\nu$ dann und nur dann in $N^*_{K_i|k}$ enthalten, wenn ν durch $\frac{e}{(e, m_i)}$ teilbar ist. Ist also

$$\mathfrak{F}(S; (a)) = N^*_{K|k}; \qquad S = S_1^{r_1} S_2^{r_2} \ldots S_h^{r_h},$$

so ist r_i durch $\frac{e}{(e, m_i)}$, also $\frac{r_i n}{e}$ durch $\frac{n}{(e, m_i)}$ teilbar. Daher ist $S^{\frac{n}{e}} = E$.

§ 3.

Beziehung zu der Klassenkörpertheorie im Kleinen [5]).

Satz 8. (Eine neue Fassung des Isomorphiesatzes der Klassenkörpertheorie im Kleinen). *Es sei k ein* p*-adischer Zahlkörper und $K|k$ sei abelsch. Ist $(a, K, \mathfrak{S})$ eine Divisionsalgebra* [6]), *so erhält man durch $S \rightleftarrows \mathfrak{F}(S; (a))$ einen Isomorphismus von $\mathfrak{S}$ mit $k^*/N^*_{K|k}$.*

Beweis: Es ist bekanntlich $(k^*: N^*_{K|k}) = (K:k)$ [7]). Unser Satz folgt also unmittelbar aus Satz 6, da der Exponent einer einfachen Algebra über einem p-adischen Zahlkörper gleich ihrem Index ist.

Satz 9. *Es sei k ein* p*-adischer Zahlkörper und $K|k$ abelsch. Ist die Hassesche Invariante der Algebrenklasse von $\mathfrak{S} = (a, K, \mathfrak{S})$ gleich $\frac{-1}{(K:k)} \bmod 1$, so ist*

$$\left(\frac{\beta, K}{\mathfrak{p}}\right) = S \qquad \text{für} \qquad \beta \in \mathfrak{F}(S; (a)),$$

insbesondere

$$\left(\frac{F(S; (a)), K}{\mathfrak{p}}\right) = S,$$

wo p *das Primideal von k bedeutet.*

Beweis: Wir gebrauchen dieselben Bezeichnungen wie im Beweis des Satzes 6. Dann gilt wie dort $(i = 1, 2, \ldots, h)$

$$\mathfrak{S}^{m_i} \sim (N_{\overline{K}_i|k}(c_i), K_i, S_i) = (F(S_i; (\bar{a})), K_i, S_i).$$

---

[5]) Für das Folgende vgl. H. Hasse: Die Struktur der R. Brauerschen Algebrenklassengruppe über einem algebraischen Zahlkörper, Math. Annalen **107** (1933), S. 731—760 (zit. H.) und die in der Anmerkung [4]) zitierte Arbeit von C. Chevalley (zit. C.).

[6]) Es gibt stets ein Faktorensystem (a) von $K|k$ derart, daß $(a, K, \mathfrak{S})$ eine Divisionsalgebra ist. Siehe z. B. C. Théorème 0.

[7]) Für den Beweis unseres Satzes 8 reicht die Teilbehauptung $(k^*: N^*_{K|k}) \leqq (K:k)$ aus.

Andererseits ist die Hassesche Invariante der Klasse von $\mathfrak{S}^{m_i}$ nach H. (5.11) oder C. Lemma 3 gleich $\frac{-1}{n_i}$ mod 1, also gilt

$$\left(\frac{F(S_i;(\bar{a})),K_i}{\mathfrak{p}}\right)=S_i.$$

Da aber $F(S_i;(\bar{a}))=N_{\bar{K}_i/k}(c_i)$ in $N^*_{\bar{K}_i/k}$ liegt, d. h. da

$$\left(\frac{F(S_i;(\bar{a})),\bar{K}_i}{\mathfrak{p}}\right)=E$$

ist, so folgt unmittelbar

$$\left(\frac{F(S_i;(\bar{a})),K}{\mathfrak{p}}\right)=S_i,$$

also

$$\left(\frac{\beta,K}{\mathfrak{p}}\right)=S_i \qquad \text{für} \qquad \beta\in\mathfrak{F}(S_i;(\bar{a}))=\mathfrak{F}(S_i;(a)),$$

und daher ist

$$\left(\frac{\beta,K}{\mathfrak{p}}\right)=S \qquad \text{für} \qquad \beta\in\mathfrak{F}(S;(a))$$

für jedes S aus $\mathfrak{S}$.

Satz 10. *Es sei k ein $\mathfrak{p}$-adischer Zahlkörper und K/k abelsch. Ist die Hassesche Invariante der Algebrenklasse von $(a, K, \mathfrak{S})$ gleich $\frac{-\mu}{(K:k)}$ mod 1, so ist*

$$\left(\frac{\beta,K}{\mathfrak{p}}\right)=S^u \qquad \textit{für} \qquad \beta\in\mathfrak{F}(S;(a)).$$

Beweis: Ist (b) ein Faktorensystem von K/k derart, daß die Hassesche Invariante der Klasse von $(b, K, \mathfrak{S})$ gleich $\frac{-1}{(K:k)}$ mod 1 ist, so ist $\mathfrak{F}(S;(b))^u=\mathfrak{F}(S;(a))$. Daher folgt unser Satz aus Satz 9.

Satz 11. *Es sei k ein algebraischer Zahlkörper endlichen Grades, und K/k sei abelsch. Es sei noch $\mathfrak{p}$ ein Primideal von k und S ein beliebiges Element der Zerlegungsgruppe $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{p}$. Ist die Hassesche Invariante der Algebrenklasse von $(a, K, \mathfrak{S})$ bezüglich $\mathfrak{p}$ gleich $\frac{-\mu}{(K:k)}$ mod 1, so ist*

$$\left(\frac{F(S;(a)),K}{\mathfrak{p}}\right)=S^u.$$

Beweis: Z sei der Zerlegungskörper von $\mathfrak{p}$. $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_g$ seien die verschiedenen Primteiler von $\mathfrak{p}$ in Z, und $\mathfrak{P}_i$ sei der Primteiler von $\mathfrak{q}_i$ in K. Die Hassesche Invariante der Algebrenklasse von $(a, K_{\mathfrak{P}_i}, \mathfrak{Z})$ ist gleich $\frac{-\mu}{(K:k)}=\frac{-\mu}{g\,n_\mathfrak{p}}$ mod 1, wo $n_\mathfrak{p}$ der $\mathfrak{p}$-Grad von K/k ist. Also gilt nach Satz 10

$$\left(\frac{F_Z(S;(a)),K}{\mathfrak{q}_i}\right)=\left(\frac{F_Z(S;(a)),K_{\mathfrak{P}_i}}{\mathfrak{q}_i}\right)=S^{\frac{u}{g}}$$

für jedes $i = 1, 2, \ldots, g$. Da aber nach Satz 5

$$F(S; (a)) = N_{Z|k}[F_Z(S; (a))]$$

ist, so folgt aus C. IX. 5)

$$\left(\frac{F(S; (a)), K}{\mathfrak{p}}\right) = \prod_{i=1}^{g} \left(\frac{F_Z(S; (a)), K}{\mathfrak{q}_i}\right) = S^{\alpha}.$$

[Zusatz bei der Korrektur (28. 9. 1935).] Man kann die oben betrachtete Funktion $F(R; (a))$ als die sogenannte „Verlagerung" $V(u_R)$ von u_R aus $\{u_E K^*, u_R K^*, \ldots, u_T K^*\}$ zu K^* ansehen[8]).

Vor kurzem hat Y. Akizuki Satz 6 folgendermaßen verallgemeinert: Es sei K/k galoissch. Ist der Exponent von $(a, K, \mathfrak{G})$ gleich $(K:k)$, so erhält man durch $R \to \mathfrak{F}(R; (a))$ einen Isomorphismus von $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ auf eine Untergruppe von $k^*/N^*_{K|k}$, wo $\mathfrak{G}'$ die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$ ist[9]).

[8]) S. Iyanaga: Zum Beweis des Hauptidealsatzes, Abh. Math. Sem. Hamburg 10 (1934), S. 349—357.

[9]) Y. Akizuki: Eine homomorphe Zuordnung der Elemente der galoisschen Gruppe zu den Elementen einer Untergruppe der Normklassengruppe, erscheint demnachst in Math. Annalen.

(Eingegangen am 2. 7. 1935.)

Über einige Sätze der Gruppentheorie.

Von

Serge Tchounikhin in Moskau.

In seiner Arbeit „Ein neues Kriterium der Einfachheit einer endlichen Gruppe“ [1]) hat W. K. Turkin den folgenden Satz bewiesen:

„Sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe der Ordnung n und sei $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe der Ordnung g. Sei $n = gm$ (g und m seien teilerfremd). Sei $\mathfrak{K}$ die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{H}$. Ist in $\mathfrak{H}$, aber nicht in $\mathfrak{K}$ ein Element A enthalten, für welches aus jeder Gleichung vom Typus

$$T^{-1} A^{\lambda} T = G$$

(T ist ein Element von $\mathfrak{G}$, und G ein Element von $\mathfrak{H}$) eine Gleichung vom Typus

$$X^{-1} A^{\lambda} X = G$$

(X ist ein Element von $\mathfrak{H}$) folgt, so hat $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler, dessen Ordnung durch m teilbar ist“.

In der vorliegenden Arbeit beweise ich zunächst den folgenden allgemeineren Satz:

Satz I. *Sei $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe vom Index k der Gruppe $\mathfrak{G}$ und sei $\mathfrak{K}$ die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{H}$. Ist in $\mathfrak{H}$, aber nicht in $\mathfrak{K}$ ein Element A von zu k relativ primer Ordnung enthalten mit der Eigenschaft, daß für jedes λ alle Elemente von $\mathfrak{H}$, die mit A^{λ} in $\mathfrak{G}$ konjugiert sind, dem System $\mathfrak{K} A^{\lambda}$ angehören, so ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ nicht einfach* [2]).

Beweis. Sei

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{K} + \mathfrak{K} B_2 + \ldots + \mathfrak{K} B_m$$

eine Zerlegung von $\mathfrak{H}$ nach $\mathfrak{K}$, und sei die Zerlegung von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}$ in folgender Form geschrieben:

$$\begin{aligned}\mathfrak{G} = \underline{\mathfrak{H}} &+ \underbrace{\mathfrak{H} D_2 + \mathfrak{H} D_2 A + \ldots + \mathfrak{H} D_2 A^{a_2 - 1}} \\ &+ \underbrace{\mathfrak{H} D_3 + \mathfrak{H} D_3 A + \ldots + \mathfrak{H} D_3 A^{a_3 - 1}} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \underbrace{\mathfrak{H} D_s + \mathfrak{H} D_s A + \ldots + \mathfrak{H} D_s A^{a_s - 1}}.\end{aligned}$$

Die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_s$ sind offenbar die Teiler der Ordnung von A. Die unterklammerten Glieder dieser Formel gehen bei Multiplikation von rechts mit dem Element A zyklisch ineinander über.

[1]) Math. Annalen 111 (1935), 281—284.

[2]) Der Satz gilt auch, falls $\mathfrak{K}$ eine beliebige Untergruppe von $\mathfrak{H}$ ist, welche die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{H}$ enthält, und wenn A in $\mathfrak{K}$ nicht aufgeht.

Der Kürze wegen führen wir die folgende Bezeichnung ein:

$$T_2 = D_2,\ T_3 = D_2 A,\ \ldots,\ T_k = D_s A^{a_s - 1}.$$

Betrachten wir das System

$$\mathfrak{K},\ \mathfrak{K} T_2,\ \ldots,\ \mathfrak{K} T_k. \tag{1}$$

Multiplizieren wir jedes Element des Systems (1) von rechts mit einem beliebigen Element G von $\mathfrak{G}$. Dann haben wir für jedes T_i

$$T_i G = K B_\alpha T_j,$$

wo K ein Element von $\mathfrak{K}$ ist, und dann folgt

$$\mathfrak{K} T_i G = B_\alpha \mathfrak{K} T_j = B_\alpha \mathfrak{K} \mathfrak{K} T_j.$$

So erfährt das System (1) eine monomiale Substitution, deren Symbole Faktoren vom Typus $B_\alpha \mathfrak{K}$ von links bekommen.

Die Determinante einer solchen monomialen Matrix wird gleich dem Produkt aller dieser auftretenden Faktoren, d. h. wird auch vom Typus $B_\beta \mathfrak{K}$. Aus den Gleichungen:

$$\mathfrak{K} T_i C_1 = B_\gamma \mathfrak{K} T_j$$

und

$$\mathfrak{K} T_j C_2 = B_\delta \mathfrak{K} T_l$$

(C_1 und C_2 sind beliebige Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}$) folgt

$$\mathfrak{K} T_i C_1 C_2 = B_\gamma B_\delta \mathfrak{K} T_l.$$

Daraus bekommen wir

$$|C_1 C_2| = |C_1||C_2|$$

($|C|$ ist die Determinante, die einem Element C der Gruppe $\mathfrak{G}$ entspricht).

So bekommen wir eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ durch die Abelsche Gruppe $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{K}}$. Enthält $\mathfrak{G}$ ein Element, welchem ein von $\mathfrak{K}$ verschiedenes Element der Gruppe $\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{K}}$ entspricht, so ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ nicht einfach.

Beweisen wir jetzt, daß A ein solches Element ist. Die monomiale Substitution, die dem Element A entspricht, enthält nur die Zyklen, deren Ordnungen die Teiler der Ordnung des Elementes A sind. Die Summe der Ordnungen aller dieser ein- und mehrgliedrigen Zyklen ist gleich k. Sei

$$(\mathfrak{K} D \mathfrak{K} D A \ldots \mathfrak{K} D A^{a-1})$$

ein solcher Zyklus der Ordnung a. Bei Multiplikation mit dem Element A von rechts gehen die Elemente $D A^i$ in $D A^{i+1}$ ($i \neq a - 1$) und $D A^{a-1}$ in $B_\varepsilon K_1 D$ über. Wir haben also $D A^a = B_\varepsilon K_1 D$, woraus

$$D A^a D^{-1} = B_\varepsilon K_1.$$

Also erhalten die Elemente unseres Zyklus von links Faktoren, deren Produkt gleich $D A^a D^{-1} \mathfrak{K}$ ist. Daraus bekommen wir für die Determinante $|A|$ des Elementes A die folgende Formel:

$$|A| = A D_2 A^{a_2} D_2^{-1} D_3 A^{a_3} D_3^{-1} \dots D_s A^{a_s} D_s^{-1} \mathfrak{K}.$$

Nach den Bedingungen des Satzes muß das Element $D_i A^{a_i} D_i^{-1}$ in $A^{a_i} \mathfrak{K}$ auftreten und wir erhalten

$$|A| = A^{\Sigma a} \mathfrak{K} = A^k \mathfrak{K} \neq \mathfrak{K}$$

(weil k zu der Ordnung von A relativ prim ist), was den Satz beweist.

Satz II. *Sei $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe vom Index k der Gruppe $\mathfrak{G}$ und sei $\mathfrak{K}$ die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{H}$. Sei in $\mathfrak{H}$, aber nicht in $\mathfrak{K}$ ein Element A von Primzahlpotenzordnung p^ω enthalten (k und p sind teilerfremd), für welches keine Potenz A^λ ($\lambda \neq p^\omega$) in $\mathfrak{K}$ auftritt. Wenn alle Elemente von $\mathfrak{H}$, die mit A in $\mathfrak{G}$ konjugiert sind, dem System $\mathfrak{K} A$ angehören, so ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ nicht einfach.*

Beweis. Die Determinante des Elementes A ist gleich

$$|A| = A D_2 A^{a_2} D_2^{-1} D_3 A^{a_3} D_3^{-1} \dots D_s A^{a_s} D_s^{-1} \mathfrak{K},$$

wo a_i Potenzen von p oder 1 sind und $\Sigma a_i = k$. Also sind ϱ — die Anzahl der eingliedrigen Zyklen der monomialen Substitution, die A entspricht — und p zueinander prim. Nach den Bedingungen des Satzes bekommen wir

$$|A| = A^\varrho D_{\varrho+1} A^{a_{\varrho+1}} D_{\varrho+1}^{-1} \dots D_s A^{a_s} D_s^{-1} \mathfrak{K}.$$

Bezeichnen wir mit σ die kleinste der Zahlen $a_{\varrho+1}, a_{\varrho+2}, \dots, a_s$. Weil

$$A^{\varrho \frac{p^\omega}{\sigma}} D_{\varrho+1} A^{a_{\varrho+1} \frac{p^\omega}{\sigma}} D_{\varrho+1}^{-1} \dots D_s A^{a_s \frac{p^\omega}{\sigma}} D_s^{-1} = A^{\varrho \frac{p^\omega}{\sigma}}$$

nicht in $\mathfrak{K}$ auftritt, so ist $|A|$ von $\mathfrak{K}$ verschieden, was den Satz beweist.

Wenn $\mathfrak{K} = 1$, erhalten wir die folgende Verallgemeinerung des bekannten Satzes von Frobenius[3]):

Satz III. *Enthält eine Abelsche Untergruppe $\mathfrak{H}$ vom Index k der Gruppe $\mathfrak{G}$ ein Element A von Primzahlpotenzordnung p^ω, wo $(p, k) = 1$, wobei kein Element von $\mathfrak{H}$ mit A in $\mathfrak{G}$ konjugiert ist, so ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ nicht einfach.*

Moskau, den 15. April 1935.

---

[3]) „Über auflösbare Gruppen III", Berl. Sitzungsber. 1901. Die Formel für die Determinante des Elementes A zeigt, daß unsere Sätze I und II auch gelten, falls *alle Elemente von $\mathfrak{H}$, die durch Transformation von A^λ* (für Satz II: „von A") *mit beliebigem D_i^{-1} entstehen, dem System $\mathfrak{K} A^\lambda$* (für Satz II: „dem System $\mathfrak{K} A$") *angehören.*

(Eingegangen am 28. 4. 1935.)

Über einfache Gruppen.

Von

Serge Tchounikhin in Moskau.

Sei $\mathfrak{G}$ eine Gruppe der Ordnung $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$, wo $p_1 < p_2 < \dots < p_n$, und sei $\mathfrak{P}$ eine von ihren Sylowschen Untergruppen der Ordnung $p_1^{\alpha_1}$.

Wir beweisen zuerst den folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz I. *Für jedes Element X der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist die Gleichung $X^{-1} A X = A^{\alpha}$, $\alpha \not\equiv 1 \pmod{p_1^m}$, unmöglich, wenn A ein Element der Ordnung p_1^m des Zentrums der Gruppe $\mathfrak{P}$ ist.*

Beweis. Es ist offenbar, daß α und p_1 teilerfremd sind.

1. *X ist ein Element der Ordnung p_1^{ω}.*

Der Normalisator $\mathfrak{B}$ der zyklischen Gruppe $\{A\}$ enthält die ganze Gruppe $\mathfrak{P}$ (da A ein Element des Zentrums $\mathfrak{P}$ ist). Das Element X geht auch in $\mathfrak{B}$ auf. Aber X kann nicht der Gruppe $\mathfrak{P}$ angehören, weil $\alpha \not\equiv 1 \pmod{p_1^m}$ ist; dann muß X in eine andere Sylowgruppe $\mathfrak{P}_1$ von $\mathfrak{B}$ eingehen. Nach dem Sylowschen Satze sind die Gruppen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ in $\mathfrak{B}$ konjugiert: $Y^{-1} \mathfrak{P} Y = \mathfrak{P}_1$, wo Y ein Element von $\mathfrak{B}$ ist. Daraus folgt, daß das Element Y mit $\{A\}$ vertauschbar ist:

$$Y^{-1} \{A\} Y = \{A\}.$$

Sei $\mathfrak{C}$ das Zentrum der Gruppe $\mathfrak{P}$, dann ist $Y^{-1} \mathfrak{C} Y$ das Zentrum von $\mathfrak{P}_1$. Nach den Bedingungen des Hilfssatzes haben wir $\{A\} \subset \mathfrak{C}$, daraus folgt, daß

$$Y^{-1} \{A\} Y = \{A\} \subset Y^{-1} \mathfrak{C} Y,$$

und wir finden, daß $\{A\}$ dem Zentrum von $\mathfrak{P}_1$ angehört. Aber das ist unmöglich, weil $\alpha \not\equiv 1 \pmod{p_1^m}$ ist. Damit ist der Fall 1 bewiesen.

2. *X ist ein Element der Ordnung β, wo β und p_1 teilerfremd sind.*

Aus der Gleichung $X^{-1} A X = A^{\alpha}$, $\alpha \not\equiv 1 \pmod{p_1^m}$, erhalten wir $X^{-\gamma} A X^{\gamma} = A^{\alpha^{\gamma}}$. Ist X^{γ} die kleinste Potenz von X, die mit A vertauschbar ist, so bekommen wir $A = A^{\alpha^{\gamma}}$, oder $A^{\alpha^{\gamma} - 1} = 1$; d. h.

$$\alpha^{\gamma} - 1 \equiv 0 \pmod{p_1^m}.$$

Daraus folgt, daß γ und $\varphi(p_1^m) = p_1^{m-1}(p_1 - 1)$ einen von der Einheit verschiedenen gemeinsamen Teiler haben. Aber das ist unmöglich, weil γ ein Teiler von β ist (β und p_1 teilerfremd sind) und p_1 die kleinste Primzahl ist, die in der Ordnung der Gruppe $\mathfrak{G}$ aufgeht.

3. *X ist ein Element der Ordnung $p_1^\delta \varepsilon$, wo ε nicht durch p_1 teilbar ist.* Aus der Gleichung $X^{-1} A X = A^\alpha$, $\alpha \not\equiv 1 \pmod{p_1^m}$, folgt

$$X^{-p_1^\delta} A X^{p_1^\delta} = A^{\alpha^{p_1^\delta}},$$

wo $X^{p_1^\delta}$ ein Element von der Ordnung ε, und ε relativ prim zu p_1 ist. In diesem Falle ist, wie wir oben gezeigt haben, die Gleichung

$$X^{-p_1^\delta} A X^{p_1^\delta} = A^{\alpha^{p_1^\delta}}$$

nur möglich, wenn $X^{p_1^\delta}$ mit A vertauschbar ist. Auf ähnliche Weise erhalten wir, daß das Element X^ε von der Ordnung p_1^δ mit dem Element A vertauschbar sein muß. Seien r und s die ganzen Zahlen, für welche die Gleichung $r\varepsilon + s p_1^\delta = 1$ gilt, so bekommen wir, daß $X = X^{r\varepsilon} \cdot X^{s p_1^\delta}$, aber X^ε und $X^{p_1^\delta}$ mit A vertauschbar sind, daher das Element X auch mit A vertauschbar ist, was unmöglich ist, weil $\alpha \not\equiv 1 \pmod{p_1^m}$. Damit ist der Hilfssatz I für alle Fälle bewiesen.

Hilfssatz II. *Die Gleichung $X^{-1} A^\alpha X = A^\beta$, wo $\alpha \not\equiv \beta \pmod{p_1^m}$, ist unmöglich, wenn A ein Element von der Ordnung p_1^m des Zentrums der Gruppe $\mathfrak{P}$ ist.*

Beweis. Die Zahlen α und β müssen offenbar von der Form $\alpha = p_1^\eta u$ und $\beta = p_1^\eta v$, $\eta \geqq 0$ sein, wo u und v zu p_1 relativ prim sind. (Dieses folgt aus dem Umstand, daß die Ordnungen A^α und $X^{-1} A^\alpha X = A^\beta$ gleich $p_1^{m-\eta}$ sind.) Sei $u x \equiv v \pmod{p_1^{m-\eta}}$, dann haben wir

$$X^{-1} A^{\alpha x} X = A^{\beta x}, \text{ oder } X^{-1} A^{p_1^\eta u x} X = A^{\beta x}, \text{ oder } X^{-1} A^\beta X = A^{\beta x};$$

aber A^β liegt auch im Zentrum der Gruppe $\mathfrak{P}$ und nach dem Hilfssatz I ist die Gleichung $X^{-1} A^\beta X = A^{\beta x}$ unmöglich, was den Hilfssatz II beweist.

Hiernach beweisen wir den folgenden Satz:

Satz. *Sei $\mathfrak{G}$ eine einfache Gruppe der Ordnung*

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n},\ p_1 < p_2 < \dots < p_n,$$

und sei $\mathfrak{P}$ eine von ihren Sylowschen Untergruppen der Ordnung $p_1^{\alpha_1}$. Dann enthält das Zentrum der Gruppe $\mathfrak{P}$ nur solche Elemente, deren Ordnungen $\sqrt{p_1^{\alpha_1}}$ nicht übertreffen.

Beweis. Wir wollen beweisen, daß die Gruppe $\mathfrak{G}$ nicht einfach ist, wenn das Zentrum von $\mathfrak{P}$ ein Element A enthält, dessen Ordnung p_1^m größer als $\sqrt{p_1^{\alpha_1}}$ ist. Es ist möglich, die Zerlegung der Gruppe $\mathfrak{G}$ nach $\{A\}$ in folgender Form zu schreiben:

$$\begin{aligned}\mathfrak{G} = \{A\} &+ \{A\} D_2 + \{A\} D_2 A + \ldots + \{A\} D_2 A^{a_2-1} \\ &+ \{A\} D_3 + \{A\} D_3 A + \ldots + \{A\} D_3 A^{a_3-1} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \{A\} D_s + \{A\} D_s A + \ldots + \{A\} D_s A^{a_s-1}.\end{aligned}$$

Wie ich in meiner Arbeit „Über einige Sätze der Gruppentheorie“ [1]) gezeigt habe, erhalten wir eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ durch die zyklische Gruppe $\{A\}$, in welcher dem Elemente A ein neues Element

$$|A| = A D_2 A^{a_2} D_2^{-1} D_3 A^{a_3} D_3^{-1} \ldots D_s A^{a_s} D_s^{-1}$$

entspricht. (Alle $D_i A^{a_i} D_i^{-1}$ gehören der Gruppe $\{A\}$ an und die Summe aller Zahlen $a_1 + a_2 + \ldots + a_s = k$ ist gleich dem Index der Gruppe $\{A\}$ in bezug auf $\mathfrak{G}$.) Nach den Hilfssätzen I und II müssen alle $D_i A^{a_i} D_i^{-1}$ gleich A^{a_i} sein und wir bekommen $|A| = A^k$. Weil die Ordnung p_1^m des Elementes A größer als $\sqrt{p_1^{a_1}}$ ist, ist k nicht durch p_1^m teilbar. Dann ist $|A| = A^k$ von dem Einheitselement verschieden, was den Satz beweist [2]).

Auf ähnliche Weise ist es möglich, einen allgemeineren Satz zu beweisen:

Enthält eine Gruppe $\mathfrak{G}$ ein Element A der Ordnung m, von welchem keine Potenzen miteinander in $\mathfrak{G}$ konjugiert sind, und ist die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{G}$ nicht durch m^2 teilbar, so ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ nicht einfach.

Moskau, den 11. Mai 1935.

---

[1]) Dieser Band, S. 92—94.

[2]) Der Satz gilt nicht nur für den Fall, wenn p_1 die kleinste Primzahl ist, die in die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{G}$ aufgeht, sondern auch, wenn $p_1 - 1$ zur Ordnung der Gruppe $\mathfrak{G}$ teilerfremd ist.

(Eingegangen am 27. 5. 1935.)

Klassifikation der antilinearen Transformationen.

Von

J. Haantjes in Delft (Niederlande).

§ 1.

Die invarianten Unterräume.

Eine hermitische Größe $P^{\varkappa}_{\cdot\bar{\lambda}}(\varkappa, \ldots, \tau = 1, \ldots, n;\ \bar{\varkappa}, \ldots, \bar{\tau} = \bar{1}, \ldots, \bar{n})$ bestimmt eine *antilineare Transformation*[1]) in einem n-dimensionalen affinen Raum E_n

$$'x^{\varkappa} = P^{\varkappa}_{\cdot\bar{\lambda}}\,\bar{x}^{\bar{\lambda}}. \tag{1}$$

Neben dieser Größe betrachten wir den gemischten Affinor der Valenz Zwei

$$Q^{\varkappa}_{\cdot\lambda} = P^{\varkappa}_{\cdot\bar{\lambda}}\,\bar{P}^{\bar{\varkappa}}_{\cdot\lambda}, \tag{2}$$

wo die beiden Affinoren $\boldsymbol{P}$ und $\overline{\boldsymbol{P}}$ zueinander konjugiert sind (d. h. die Bestimmungszahlen von $\boldsymbol{P}$ und $\overline{\boldsymbol{P}}$ sind konjugiert komplex).

Im folgenden werden die Indizes unterdrückt. Wir führen die folgende abgekürzte Bezeichnung ein: Mit $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, usw. sind immer Vektoren erster Gattung[2]) gemeint, also $u^{\varkappa}, v^{\varkappa}$. Die konjugierten Vektoren $\bar{u}^{\bar{\varkappa}}$ und $\bar{v}^{\bar{\varkappa}}$ (also Vektoren zweiter Gattung) werden mit $\bar{\mathbf{u}}$ und $\bar{\mathbf{v}}$ angedeutet. Vektoren zweiter Gattung werden immer mit einem überstrichenen Buchstaben angegeben. Die mit $P^{\varkappa}_{\cdot\bar{\lambda}}$ gleichartigen Größen werden mit einem kursiven, die mit $Q^{\varkappa}_{\cdot\lambda}$ gleichartigen Größen mit einem vertikalen Buchstaben angegeben. Mit dem Produkt $\boldsymbol{P}\overline{\boldsymbol{R}}$ ist gemeint $\boldsymbol{P}^{\varkappa}_{\cdot\bar{\mu}}\,\overline{\boldsymbol{R}}^{\bar{\mu}}_{\cdot\lambda}$. Man hat also $\boldsymbol{P}\overline{\boldsymbol{R}} = \mathbf{T}$; $\boldsymbol{P}\boldsymbol{R}$ hat keinen Sinn. Mit $\boldsymbol{P}\bar{\mathbf{u}}$ ist gemeint $P^{\varkappa}_{\cdot\bar{\lambda}}\bar{u}^{\bar{\lambda}}$; dieses Produkt ist also ein Vektor erster Gattung. $\boldsymbol{P}\mathbf{u}$ hat keinen Sinn. Wir können in dieser Arbeit diese abgekürzte Bezeichnung verwenden, weil die Überschiebungen immer recht einfach sind. Für (1) bzw. (2) schreiben wir also

$$'\mathbf{x} = \boldsymbol{P}\bar{\mathbf{x}} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{Q} = \boldsymbol{P}\overline{\boldsymbol{P}}.$$

Die Elementarteilertheorie lehrt nun folgendes[3]):

a) Zu jeder Wurzel der zu $\mathbf{Q}$ gehörigen charakteristischen Gleichung

$$\text{Det}\,(\mathbf{Q}^{\varkappa}_{\cdot\lambda} - \mu\,\mathbf{A}^{\varkappa}_{\lambda}) = 0; \quad \text{kurz: Det}\,(\mathbf{Q} - \mu\,\mathbf{A}) = 0 \tag{3}$$

[1]) Vgl. E. Cartan, Leçons sur la géométrie projective complexe, Paris, Gauthier-Villars (1931), 325 S.

[2]) Vgl. J. A. Schouten und D. J. Struik, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie I, Groningen, Noordhoff (1935), S. 8.

[3]) Vgl. L. E. Dickson, Modern algebraic Theories, Chicago 1926; J. A. Schouten und D. J. Struik, l. c. S. 39.

($\mathbf{A}_\lambda^\varkappa$ ist der Einheitsaffinor), also z. B. der r-fachen Wurzel μ, lassen sich r linear unabhängige Vektoren wählen, von denen $\sigma_1 \geqq 1$ von der *Ordnung* 1, d. h. Eigenvektoren sind, also durch $\mathbf{Q} - \mu\,\mathbf{A}$ zu Null gemacht werden,

$\sigma_2 \leqq \sigma_1$ von der Ordnung 2 sind, d. h. durch $(\mathbf{Q} - \mu\,\mathbf{A})^2$, aber nicht durch $\mathbf{Q} - \mu\,\mathbf{A}$ zu Null gemacht werden, usw.

$\sigma_q \leqq \sigma_{q-1}$ von der Ordnung q sind, d. h durch $(\mathbf{Q} - \mu\,\mathbf{A})^q$, aber nicht durch $(\mathbf{Q} - \mu\,\mathbf{A})^{q-1}$ zu Null gemacht werden.

Die von den Eigenvektoren, sowie die von den Vektoren erster und zweiter Ordnung zusammen, usw. gebildeten Unterräume sind invariante, durch $\mathbf{Q}$ vollständig festgelegte Gebilde.

b) Jeder Vektor des zur Wurzel μ gehörigen Unterraumes wird durch sämtliche Operatoren $(\mathbf{Q} - \lambda\,\mathbf{A})^\nu$ nicht zu Null gemacht, wenn die Wurzeln μ und λ ungleich sind. Die zu den Wurzeln μ und λ gehörigen invarianten Unterräume haben also keine Richtung gemeinsam.

Der Koeffizient von $(-\mu)^{n-r}$ in der charakteristischen Gleichung (3) ist

$$(4)\qquad a_{n-r} = Q^{[\varkappa_1}_{\cdot\,\varkappa_1} \dots Q^{\varkappa_r]}_{\cdot\,\varkappa_r} = P^{[\varkappa_1}_{\cdot\,\bar{\mu}_1} \dots P^{\varkappa_r]}_{\cdot\,\bar{\mu}_r}\, \overline{P}^{\bar{\mu}_1}_{\cdot\,\varkappa_1} \dots \overline{P}^{\bar{\mu}_r}_{\cdot\,\varkappa_r}$$
$$= \overline{P}^{[\bar{\mu}_1}_{\cdot\,\varkappa_1} \dots \overline{P}^{\bar{\mu}_r]}_{\cdot\,\varkappa_r}\, P^{\varkappa_1}_{\cdot\,\bar{\mu}_1} \dots P^{\varkappa_r}_{\cdot\,\bar{\mu}_r} = \bar{a}_{n-r},$$

also reell [vgl. l. c.[2]) S. 39]. Wir haben daher den Satz erhalten:

Die Wurzel der charakteristischen Gleichung (3) *sind entweder reell oder in Paaren konjugiert komplex.*

Es sei $\underset{1}{\mathbf{u}}$ ein zur Wurzel μ gehöriger Vektor q-ter Ordnung. Wir definieren dann

$$\underset{1}{\mathbf{v}} = \boldsymbol{P}\,\underset{1}{\bar{\mathbf{u}}} \quad (v^\varkappa_1 = P^\varkappa_{\cdot\,\bar{\lambda}}\,\bar{u}^{\bar{\lambda}}_1), \qquad \underset{2}{\mathbf{u}} = \boldsymbol{P}\,\underset{1}{\bar{\mathbf{v}}} - \mu\,\underset{1}{\mathbf{u}} = (\mathbf{Q} - \mu\,\mathbf{A})\,\underset{1}{\mathbf{u}};$$
$$\underset{2}{\mathbf{v}} = \boldsymbol{P}\,\underset{2}{\bar{\mathbf{u}}} = (\mathbf{Q} - \bar{\mu}\,\mathbf{A})\,\underset{1}{\mathbf{v}}, \qquad \underset{3}{\mathbf{u}} = \boldsymbol{P}\,\underset{2}{\bar{\mathbf{v}}} - \mu\,\underset{2}{\mathbf{u}} = (\mathbf{Q} - \mu\,\mathbf{A})\,\underset{2}{\mathbf{u}};$$
$$(5)\qquad \text{usw.} \qquad\qquad \text{usw.}$$
$$\underset{q}{\mathbf{v}} = \boldsymbol{P}\,\underset{q}{\bar{\mathbf{u}}} = (\mathbf{Q} - \bar{\mu}\,\mathbf{A})^{q-1}\,\underset{1}{\mathbf{v}}, \qquad \boldsymbol{P}\,\underset{q}{\bar{\mathbf{v}}} - \mu\,\underset{q}{\mathbf{u}} = (\mathbf{Q} - \mu\,\mathbf{A})^q\,\underset{1}{\mathbf{u}} = 0.$$
$$0 = (\mathbf{Q} - \bar{\mu}\,\mathbf{A})^q\,\underset{1}{\mathbf{v}},$$

Hieraus schließt man folgendes:

Die Vektoren $\underset{1}{\mathbf{u}}, \dots, \underset{q}{\mathbf{u}}$ sind zur Wurzel μ gehörige Vektoren q-ter, …, erster Ordnung; die Vektoren $\underset{1}{\mathbf{v}}, \dots, \underset{q}{\mathbf{v}}$ sind, wenn $\mu \neq 0$ ist, zur Wurzel $\bar{\mu}$ gehörige Vektoren q-ter , …, erster Ordnung, denn $\underset{q}{\mathbf{v}} \neq 0$, weil $\mu\,\underset{q}{\mathbf{u}} \neq 0$ ist. Verschwindet μ, so ist die Ordnung von $\underset{q}{\mathbf{v}}$ entweder q oder $q-1$. Auch für Vektoren niedrigerer Ordnung kann man eine derartige Kette bilden und wir haben somit den Satz erhalten:

Ist $\mathbf{w}$ *ein zur Wurzel* μ *gehöriger Vektor* p*-ter Ordnung, so ist* $\boldsymbol{P}\bar{\mathbf{w}}$ *ein zur Wurzel* $\bar{\mu}$ *gehöriger Vektor* p*-ter Ordnung, wenn* $\mu \neq 0$ *ist, während für* $\mu = 0$ *die Ordnung von* $\boldsymbol{P}\bar{\mathbf{w}}$ *entweder* p *oder* $p-1$ *ist.*

§ 2.

Die nicht-positiven nicht-verschwindenden Wurzeln.

Es sei jetzt μ eine nicht-positive nicht-verschwindende r-fache Wurzel der charakteristischen Gleichung von $\mathbf{Q}$. Wir bilden die Kette von Vektoren (5) und beweisen:

Die $2q$ *Vektoren* $\underset{i}{\mathbf{u}}$ *und* $\underset{i}{\mathbf{v}}$ $(i = 1, \ldots, q)$ *sind linear unabhängig.*

Für $\mu \neq \bar{\mu}$ folgt dies aus der Elementarteilertheorie. Für $\mu = \bar{\mu}$ genügt es zu zeigen, daß die beiden Vektoren $\underset{q}{\mathbf{u}}$ und $\underset{q}{\mathbf{v}}$ linear unabhängig sind, denn jede lineare Beziehung zwischen den $2q$ Vektoren geht durch Überschiebung mit einer geeigneten Potenz von $\mathbf{Q} - \mu \mathbf{A}$ in eine lineare Beziehung zwischen $\underset{q}{\mathbf{u}}$ und $\underset{q}{\mathbf{v}}$ über. Aus

$$\alpha \underset{q}{\mathbf{u}} + \beta \underset{q}{\mathbf{v}} = 0 \tag{6}$$

folgt, indem man die konjugierte Gleichung mit $\boldsymbol{P}$ überschiebt, nach (5)

$$\bar{\alpha} \underset{q}{\mathbf{v}} + \mu \bar{\beta} \underset{q}{\mathbf{u}} = 0. \tag{7}$$

Aus (6) und (7) geht hervor

$$\mu \beta \bar{\beta} = \alpha \bar{\alpha}, \tag{8}$$

und dieser Gleichung wird nur genügt von $\alpha = \beta = 0$, da nach der Voraussetzung μ negativ ist.

Man kann nun mit einem von $\underset{1}{\mathbf{u}}$ und $\underset{1}{\mathbf{v}}$ in bezug auf Vektoren niedrigerer Ordnung unabhängigen, zur Wurzel μ gehörigen Vektor q-ter Ordnung $\underset{1}{'\mathbf{u}}$ anfangen und wieder eine Kette von $2q$ Vektoren $'\mathbf{u}$ und $'\mathbf{v}$ bilden. Wir beweisen nun, daß die Systeme von Vektoren $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $'\mathbf{u}$ und $'\mathbf{v}$ linear unabhängig sind. Für negative μ genügt es zu zeigen, daß aus

$$\alpha \underset{q}{\mathbf{u}} + \beta \underset{q}{\mathbf{v}} + \gamma \underset{q}{'\mathbf{u}} + \delta \underset{q}{'\mathbf{v}} = 0 \tag{9}$$

hervorgeht $\delta = 0$. Überschiebung der zu (9) gehörigen konjugierten Gleichung mit $\boldsymbol{P}$ ergibt

$$\bar{\alpha} \underset{q}{\mathbf{v}} + \bar{\beta}\, \mu \underset{q}{\mathbf{u}} + \bar{\gamma} \underset{q}{'\mathbf{v}} + \mu \bar{\delta} \underset{q}{'\mathbf{u}} = 0. \tag{10}$$

Ein Vergleich mit (9) lehrt, daß $\delta = 0$ ist. Ist $\mu \neq \bar{\mu}$, so hat man nur zu zeigen, daß $\underset{q}{\mathbf{v}}$ und $\underset{q}{'\mathbf{v}}$ linear unabhängig sind. Dieser Beweis verläuft wie oben.

Man fährt so fort, bis keine linear unabhängigen Vektoren q-ter Ordnung (in bezug auf Vektoren niedrigerer Ordnung) mehr vorhanden sind, und bildet dann Ketten mit einem Vektor $(q-1)$-ter Ordnung anfangend, usw. Die Unabhängigkeit der Vektoren der gebildeten Ketten wird genau wie oben bewiesen. So bekommt man m linear unabhängige Vektoren im zu der Wurzel μ (μ negativ) oder dem Wurzelpaar $\mu, \bar{\mu}$ gehörigen Gebiet der E_n,

wenn die Dimension dieses Gebietes m ist. Nimmt man diese Vektoren als Maßvektoren

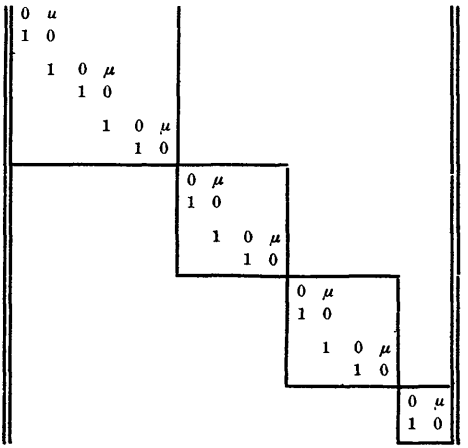
$$\underset{1}{\mathfrak{e}} = \underset{1}{\mathfrak{u}};\ \underset{2}{\mathfrak{e}} = \underset{1}{\mathfrak{v}};\ \underset{3}{\mathfrak{e}} = \underset{2}{\mathfrak{u}};\ \underset{4}{\mathfrak{e}} = \underset{2}{\mathfrak{v}};\ \ldots;\ \underset{2q+1}{\mathfrak{e}} = \underset{1}{'\mathfrak{u}},\ \text{usw.} \tag{11}$$

und werden die $n - m$ übrigen Maßvektoren in dem Gebiete der anderen Wurzeln gewählt, so kann das zur Wurzel μ oder zu dem Wurzelpaar $\mu, \bar{\mu}$ gehörige Quadrat der Matrix der Bestimmungszahlen von $\boldsymbol{P}^{\varkappa}_{\lambda}$ (die so geschrieben wird, daß der *linke* Index die *Zeilen*, der *rechte* die *Spalten* numeriert) mit Hilfe von (5) angegeben werden.

Beispiel: für negative μ: $q = 3$, $\sigma_3 = 2$, $\sigma_2 = 6$, $\sigma_1 = 8$, $r = 16$,
für $\mu \neq \bar{\mu}$: $q = 3$, $\sigma_3 = 1$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_1 = 4$, $r = 8$.

Alle nicht besetzten Stellen sind mit Nullen auszufüllen.

(12)



Bemerkung: Definiert man statt der Vektoren $\mathfrak{v}$ Vektoren $\mathfrak{w}$ mittels

$$\bar{\sigma}\mathfrak{w} = \boldsymbol{P}\bar{\mathfrak{u}};\quad \sigma^2 = \mu \tag{13}$$

und nimmt man die Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ als Maßvektoren, so ist im Quadrat

$$\begin{vmatrix} 0 & \mu \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{durch} \quad \begin{vmatrix} 0 & \sigma \\ \bar{\sigma} & 0 \end{vmatrix} \tag{14}$$

zu ersetzen.

Kollorar. *Ist r die Multiplizität einer negativen Wurzel der charakteristischen Gleichung von $\mathfrak{Q} = \boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{P}}$, so ist r gerade.*

§ 3.

Die positiven nicht-verschwindenden Wurzeln.

Es sei jetzt $\mu = \nu^2$ eine positive nicht-verschwindende Wurzel der charakteristischen Gleichung von $\mathfrak{Q}$, und $\mathfrak{p}$ ein zu dieser Wurzel gehöriger Vektor höchster Ordnung q. Ferner sei

$$\mathfrak{q} = \boldsymbol{P}\bar{\mathfrak{p}}. \tag{15}$$

Wegen des in § 1 bewiesenen Satzes ist $\mathbf{q}$ ein zur Wurzel μ gehöriger Vektor q-ter Ordnung. Nun kann man zwei Fälle unterscheiden.

a) Die Vektoren $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ sind linear abhängig in bezug auf Vektoren niedrigerer Ordnung, d. h. wenn man einen beliebigen Vektor p-ter Ordnung, $p \leqq q-1$, mit $\mathbf{o}_{q-1}$ andeutet,

$$\mathbf{q} = \sigma \mathbf{p} + \mathbf{o}_{q-1}. \tag{16}$$

Aus (15) und (16) folgt

$$\bar{\sigma}\mathbf{q} + \mathbf{o}_{q-1} = \boldsymbol{P}\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}\mathbf{p} = \mu \mathbf{p} + \mathbf{o}_{q-1}. \tag{17}$$

Wird für $\mathbf{q}$ der Ausdruck (16) eingesetzt, so folgt $\mu = \sigma\bar{\sigma}$. Man kann $\mathbf{p}$ mit einem skalaren Faktor $e^{i\varphi}$ multiplizieren, derart daß σ reell, also gleich ν, wird. Nennen wir diesen Vektor $\underset{1}{\mathbf{u}}$, so gilt

$$\boldsymbol{P}\bar{\underset{1}{\mathbf{u}}} - \nu \underset{1}{\mathbf{u}} = \mathbf{o}_{q-1}. \tag{18}$$

b) Die Vektoren $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ sind linear unabhängig in bezug auf Vektoren niedrigerer Ordnung. Aus (15) folgt

$$\boldsymbol{P}\bar{\mathbf{q}} = \mu \mathbf{p} + \mathbf{o}_{q-1}. \tag{19}$$

Setzen wir

$$\underset{1}{\mathbf{u}} = \nu \mathbf{p} + \mathbf{q}; \quad \underset{2}{\mathbf{u}} = i(\nu \mathbf{p} - \mathbf{q}); \quad i = \sqrt{-1}, \tag{20}$$

so sind wegen $\nu \neq 0$ auch die Vektoren $\underset{1}{\mathbf{u}}$ und $\underset{2}{\mathbf{u}}$ linear unabhängig und es gilt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}\bar{\underset{1}{\mathbf{u}}} &= \nu \mathbf{q} + \nu^2 \mathbf{p} + \mathbf{o}_{q-1} = \nu \underset{1}{\mathbf{u}} + \mathbf{o}_{q-1}, \\ \boldsymbol{P}\bar{\underset{2}{\mathbf{u}}} &= -i(\nu \mathbf{q} - \nu^2 \mathbf{p}) + \mathbf{o}_{q-1} = \nu \underset{2}{\mathbf{u}} + \mathbf{o}_{q-1}. \end{aligned} \tag{21}$$

Betrachten wir jetzt einen von den schon eingeführten Vektoren $\mathbf{u}$ in bezug auf Vektoren niedrigerer Ordnung unabhängigen Vektor q-ter Ordnung $\mathbf{r}$. Es sei

$$\boldsymbol{P}\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{s}. \tag{22}$$

In der oben angegebenen Weise kann man aus $\mathbf{r}$ und $\mathbf{s}$ wieder zwei Vektoren konstruieren, welche einer Gleichung wie (18) genügen. Von diesen zwei Vektoren ist wenigstens einer von den schon eingeführten Vektoren $\mathbf{u}$ unabhängig (in bezug auf Vektoren niedrigerer Ordnung). So fortfahrend bekommt man σ_q linear unabhängige Vektoren $\underset{i}{\mathbf{u}}$ $(i = 1, \ldots, \sigma_q)$, für die gilt

$$\boldsymbol{P}\bar{\underset{i}{\mathbf{u}}} = \nu \underset{i}{\mathbf{u}} + \mathbf{o}_{q-1}. \tag{23}$$

Es sei $\mathbf{v}$ ein Vektor q-ter Ordnung und

$$(\mathbf{Q} - \mu \mathbf{A})\mathbf{v} = \underset{1}{\mathbf{v}}; \quad (\mathbf{Q} - \mu \mathbf{A})^2 \mathbf{v} = \underset{2}{\mathbf{v}}; \quad \ldots; \quad (\mathbf{Q} - \mu \mathbf{A})^{q-1} \mathbf{v} = \underset{q-1}{\mathbf{v}}. \tag{24}$$

Wir beweisen jetzt den Satz: Wenn für den Vektor $\mathbf{v}$ gilt

$$\boldsymbol{P}\bar{\mathbf{v}} = \nu \mathbf{v} + \overset{1}{\alpha}\underset{1}{\mathbf{v}} + \ldots + \overset{p}{\alpha}\underset{p}{\mathbf{v}} + \mathbf{z}, \tag{25}$$

wo die α reell sind und die Ordnung von $\mathfrak{z}$ kleiner oder gleich $q-p-1$ ist, so gilt für den Vektor

$$'\mathfrak{v} = \mathfrak{v} + \frac{1}{2\nu}\mathfrak{z}, \tag{26}$$

daß $\boldsymbol{P}'\bar{\mathfrak{v}}$ linear in $'\mathfrak{v}, \underset{1}{'\mathfrak{v}}, \ldots, \underset{p+1}{'\mathfrak{v}}$ ausdrückbar ist mit reellen Koeffizienten bis auf Vektoren der Ordnung $q-p-2$. (Die Vektoren $\underset{1}{'\mathfrak{v}}, \ldots, \underset{q-1}{'\mathfrak{v}}$ werden definiert wie die Vektoren $\underset{1}{\mathfrak{v}}, \ldots, \underset{q-1}{\mathfrak{v}}$).

Beweis. Aus (25) und (26) folgt:

$$\boldsymbol{P}'\bar{\mathfrak{v}} = \nu\left(\mathfrak{v} + \frac{1}{2\nu}\mathfrak{z}\right) + \overset{1}{\alpha}\underset{1}{\mathfrak{v}} + \ldots + \overset{p}{\alpha}\underset{p}{\mathfrak{v}} + \frac{1}{2}\mathfrak{z} + \frac{1}{2\nu}\boldsymbol{P}\bar{\mathfrak{z}}. \tag{27}$$

Da

$$\boldsymbol{P}(\bar{\mathbf{Q}} - \mu\bar{\mathbf{A}})\,\bar{\mathfrak{w}} = (\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{P} - \mu\boldsymbol{P})\,\bar{\mathfrak{w}} = (\mathbf{Q} - \mu\mathbf{A})\,\boldsymbol{P}\bar{\mathfrak{w}} \tag{28}$$

ist, d. h. die Operatoren $\boldsymbol{P}$ und $\mathbf{Q} - \mu\mathbf{A}$ vertauschbar sind, folgt aus (25), indem man die konjugierte Gleichung mit $\boldsymbol{P}$ überschiebt, daß

$$\boldsymbol{P}\bar{\mathfrak{z}} + \nu\mathfrak{z} \tag{29}$$

sich bis auf Vektoren der Ordnung $s\,(s \leqq q-p-2)$ linear in $\underset{1}{\mathfrak{v}}, \ldots, \underset{p+1}{\mathfrak{v}}$ ausdrücken läßt mit reellen Koeffizienten. Beachtet man nun, daß

$$'\underset{a}{\mathfrak{v}} = \underset{a}{\mathfrak{v}} + \mathfrak{o}_{q-p-2} \qquad (a = 1, \ldots, q-1) \tag{30}$$

ist, so geht aus (27) hervor

$$\boldsymbol{P}'\bar{\mathfrak{v}} = \nu'\mathfrak{v} + \overset{1}{\beta}\underset{1}{'\mathfrak{v}} + \ldots + \overset{p+1}{\beta}\underset{p+1}{'\mathfrak{v}} + \mathfrak{o}_{q-p-2}, \tag{31}$$

wo die β reell sind.

Dieser Satz ermöglicht es uns, aus den Vektoren $\underset{i}{\mathfrak{u}}$ (23) durch Addition von Vektoren niedrigerer Ordnung Vektoren $\underset{i}{\mathfrak{w}}$ zu konstruieren, für die gilt, daß $\boldsymbol{P}\bar{\underset{i}{\mathfrak{w}}} - \nu\underset{i}{\mathfrak{w}}$ linear in den Vektoren

$$(\mathbf{Q} - \mu\mathbf{A})\,\underset{i}{\mathfrak{w}};\quad (\mathbf{Q} - \mu\mathbf{A})^2\,\underset{i}{\mathfrak{w}};\ \ldots;\quad (\mathbf{Q} - \mu\mathbf{A})^{q-1}\,\underset{i}{\mathfrak{w}} \tag{32}$$

ausdrückbar ist mit reellen Koeffizienten. Es sei jetzt

$$\begin{aligned}
\underset{1}{\mathfrak{e}} &= \underset{1}{\mathfrak{w}},\\
\underset{2}{\mathfrak{e}} &= \boldsymbol{P}\,\bar{\underset{1}{\mathfrak{e}}} - \nu\,\underset{1}{\mathfrak{e}},\\
\underset{3}{\mathfrak{e}} &= \boldsymbol{P}\,\bar{\underset{2}{\mathfrak{e}}} - \nu\,\underset{2}{\mathfrak{e}},\\
&\text{usw.}\\
\underset{q}{\mathfrak{e}} &= \boldsymbol{P}\,\bar{\underset{q-1}{\mathfrak{e}}} - \nu\,\underset{q-1}{\mathfrak{e}}.
\end{aligned} \tag{33}$$

Wir beweisen:

a) $\boldsymbol{P}\,\bar{\underset{q}{\mathfrak{e}}} - \nu\,\underset{q}{\mathfrak{e}}$ verschwindet.

b) die Vektoren $\underset{1}{\mathfrak{e}}, \ldots, \underset{q}{\mathfrak{e}}$ sind linear unabhängig.

$\underset{2}{\mathbf{e}}$ läßt sich als eine lineare Summe von reellen Vielfachen der $q-1$ Vektoren (32) schreiben. Ersetzt man in der Formel

$$\underset{3}{\mathbf{e}} = \boldsymbol{P}\,\underset{2}{\bar{\mathbf{e}}} - \nu\,\underset{2}{\mathbf{e}} \tag{34}$$

$\underset{2}{\mathbf{e}}$ durch diese Summe und beachtet man, daß die Operatoren $\boldsymbol{P}$ und $\mathbf{Q} - \mu\,\mathbf{A}$ vertauschbar sind (vgl. (28)), so stellt sich heraus, daß $\underset{3}{\mathbf{e}}$ sich linear in den Vektoren

$$(\mathbf{Q} - \mu\,\mathbf{A})^2\,\underset{1}{\mathbf{e}},\ \ldots,\ (\mathbf{Q} - \mu\,\mathbf{A})^{q-1}\,\underset{1}{\mathbf{e}} \tag{35}$$

ausdrücken läßt mit reellen Koeffizienten. In derselben Weise zeigt man, daß $\underset{a}{\mathbf{e}}$ $(a = 1, \ldots, q)$ sich linear mit reellen Koeffizienten in den Vektoren

$$(\mathbf{Q} - \mu\,\mathbf{A})^{a-1}\,\underset{1}{\mathbf{e}},\ \ldots,\ (\mathbf{Q} - \mu\,\mathbf{A})^{q-1}\,\underset{1}{\mathbf{e}} \tag{36}$$

ausdrücken läßt und daß der unter a) genannte Ausdruck verschwindet. Nun sind die Vektoren (32) linear unabhängig und deshalb auch die Vektoren $\underset{1}{\mathbf{e}}, \ldots, \underset{q}{\mathbf{e}}$, denn auch die Vektoren (32) können linear in $\underset{1}{\mathbf{e}}, \ldots, \underset{q}{\mathbf{e}}$ ausgedrückt werden, was aus (33) hervorgeht.

Die q Vektoren, die man in dieser Weise aus $\underset{2}{\mathbf{w}}$ konstruiert, sind von den Vektoren $\underset{1}{\mathbf{e}}, \ldots, \underset{q}{\mathbf{e}}$ unabhängig, da die zwei Systeme von Vektoren

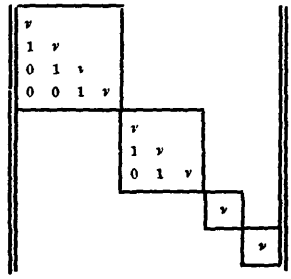
$$\begin{aligned} &\underset{1}{\mathbf{w}},\ (\mathbf{Q} - \mu\,\mathbf{A})\,\underset{1}{\mathbf{w}},\ \ldots,\ (\mathbf{Q} - \mu\,\mathbf{A})^{q-1}\,\underset{1}{\mathbf{w}} \\ &\underset{2}{\mathbf{w}},\ (\mathbf{Q} - \mu\,\mathbf{A})\,\underset{2}{\mathbf{w}},\ \ldots,\ (\mathbf{Q} - \mu\,\mathbf{A})^{q-1}\,\underset{2}{\mathbf{w}} \end{aligned} \tag{37}$$

linear unabhängig sind. Die Vektoren $(q-1)$-ter Ordnung werden in gleicher Weise behandelt. Nimmt man die Vektoren $\mathbf{e}$ als Maßvektoren, so kann das zur Wurzel μ gehörige Quadrat der Matrix der Bestimmungszahlen von $\boldsymbol{P}$ sogleich angegeben werden.

Beispiel: $q = 4$; $\sigma_4 = 1$; $\sigma_3 = 2$; $\sigma_2 = 2$; $\sigma_1 = 4$; $r = 9$.

Alle nicht besetzten Stellen sind mit Nullen auszufüllen.

(38)



§ 4.

Die Wurzel Null.

Es sei jetzt $\mu = 0$ eine Wurzel der charakteristischen Gleichung von $\mathbf{Q}$, und es seien $\underset{i}{\mathbf{u}}$ $(i = 1, \ldots, \sigma_q)$ σ_q zu dieser Wurzel gehörige, in bezug

auf Vektoren niedrigerer Ordnung linear unabhängige Vektoren höchster Ordnung q. In der von diesen Vektoren aufgespannten E_{σ_q} bilden die Vektoren $\mathfrak{v}$, für die gilt, daß $P\bar{\mathfrak{v}}$ ein Vektor $(q-1)$-ter Ordnung ist (vgl. den § 1 bewiesenen Satz), einen invarianten Unterraum E_m $(m \leqq \sigma_q)$. Es sei $\mathfrak{p}$ ein nicht in E_m gelegener Vektor der E_{σ_q}. Wir bilden das System von Vektoren

$$
\begin{aligned}
&\underset{1}{\mathfrak{p}} = P\,\bar{\mathfrak{p}} \\
&\underset{2}{\mathfrak{p}} = P\,\underset{1}{\bar{\mathfrak{p}}} = Q\mathfrak{p} \\
&\qquad \text{usw.} \qquad\qquad (39)\\
&\underset{2q-1}{\mathfrak{p}} = \qquad\quad = Q^{q-1}\underset{1}{\mathfrak{p}} \neq 0 \\
&\underset{2q}{\mathfrak{p}} = P\,\underset{2q-1}{\bar{\mathfrak{p}}} = Q^{q}\quad \mathfrak{p} = 0.
\end{aligned}
$$

Da $\underset{2}{\mathfrak{p}}$ $(q-1)$-ter Ordnung ist, ist $\underset{1}{\mathfrak{p}}$ in E_m gelegen. Bildet man nun eine derartige Kette, ausgehend von einem nicht in E_m gelegenen Vektor $\mathfrak{q}$ der E_{σ_q}, welcher von $\mathfrak{p}$ linear unabhängig ist in bezug auf die Vektoren der E_m, so sind $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\underset{1}{\mathfrak{p}}$ und $\underset{1}{\mathfrak{q}}$ Vektoren q-ter Ordnung, die linear unabhängig sind in bezug auf Vektoren niedrigerer Ordnung. Um dies zu beweisen, braucht man nur die Unabhängigkeit der Vektoren $\underset{2q-1}{\mathfrak{p}}$ und $\underset{2q-1}{\mathfrak{q}}$ nachzuweisen. Aus

$$
\alpha\,\underset{2q-1}{\mathfrak{p}} + \beta\,\underset{2q-1}{\mathfrak{q}} = 0 \qquad (40)
$$

und (39) folgt, daß $\bar{\alpha}\mathfrak{p} + \bar{\beta}\mathfrak{q}$ ein Vektor der E_m ist, was im Widerspruch ist mit der Voraussetzung, daß $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}$ linear unabhängig sind in bezug auf die E_m. Auch die anderen in den Ketten auftretenden Vektoren sind dann linear unabhängig. Man kann so $\sigma_q - m$ Ketten bilden, ausgehend von Vektoren der E_{σ_q}, die linear unabhängig sind in bezug auf die Vektoren der E_m, und die in den Ketten auftretenden Vektoren sind linear unabhängig. Es ist also $m \geqq \sigma_q - m$ oder $2m \geqq \sigma_q$. Wir bilden nun Ketten von Vektoren, ausgehend von $2m - \sigma_q$ Vektoren der E_m, die von den in den vorigen Ketten auftretenden Vektoren q-ter Ordnung linear unabhängig sind in bezug auf Vektoren niedrigerer Ordnung. Die Unabhängigkeit der Vektoren der $\sigma_q - m + 2m - \sigma_q = m$ gebildeten Ketten kann in genau derselben Weise bewiesen werden, wie oben die Unabhängigkeit der aus den Vektoren $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ konstruierten Vektoren gezeigt wurde. Die von den schon eingeführten Vektoren unabhängigen Vektoren $(q-1)$-ter Ordnung werden in derselben Weise behandelt. Wählt man die in den Ketten auftretenden Vektoren als Maßvektoren, so bekommt das zur Wurzel Null gehörige Quadrat der Bestimmungszahlen

von $\boldsymbol{P}$ eine einfache Gestalt. Für $q = 2$; $\sigma_2 = 3$; $\sigma_1 = 6$; $m = 2$ bekommt man das Quadrat (38), wenn man darin ν durch 0 ersetzt.

Die so erhaltenen Formen für $\boldsymbol{P}$ sind die *Normalformen*. Wir haben somit eine *Klassifikation von antilinearen Transformationen* bekommen. Zwei Transformationen gehören zu derselben Klasse, wenn die zwei Normalformen gleich sind.

§ 5.
Hermitisch umkehrbare Größen.

Eine hermitische Größe $\boldsymbol{P}$ vom Range n heißt *hermitisch positiv* bzw. *negativ umkehrbar*[4]), wenn

$$\bar{\boldsymbol{P}}^{-1} = \pm \bar{\boldsymbol{P}} \tag{41}$$

ist, also

$$\mathbf{Q} = \boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{P}} = \pm \boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{P}}^{-1} = \pm \mathbf{A} \tag{42}$$

ist. Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von $\mathbf{Q}$ sind also $+1$ und -1. Daraus folgt (vgl. § 2), daß eine negativ umkehrbare Größe nur existieren kann für gerades n. Die Normalformen sind (z. B. für $n = 4$):

a) für eine hermitisch positiv umkehrbare Größe wegen (38)

$$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{vmatrix}$$

(Alle nicht besetzten Stellen mit Nullen auszufüllen.)

b) für eine hermitisch negativ umkehrbare Größe wegen (12)

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & & \\ +1 & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & +1 & 0 \end{vmatrix}$$

Diese Normalformen für hermitisch umkehrbare Größen hat E. Jacobsthal schon angegeben[5]).

---

[4]) J. A. Schouten und J. Haantjes, Konforme Feldtheorie II, R_6 und Spinraum, Annali R. Scuola Norm. Sup. di Pisa (2) 4 (1935) 175—190.

[5]) E. Jacobsthal, Sitzungsber. Berl. math. Ges. 33 (1934) 15—34.

(Eingegangen am 20. 7. 1935.)

Der lokale Dimensionsbegriff.

Von

B. Kaufmann in Leeds (England).

I. Einige Anschauungswahrnehmungen der Dimension. Die lokalen Definitionen und die Ergebnisse einer neuen Theorie[1]).

1. Betrachtet man die allgemeinsten Raumgebilde im gewöhnlichen euklidischen Raume, wie z. B. die geschlossenen Flächen, so ist es *rein anschaulich* unverkennbar, daß trotz ihrer Homogenität — im Sinne der Brouwer-Menger-Urysohnschen Theorie — die verschiedenen Stellen der Flächen einen verschiedenen dimensionellen Charakter haben können. In der Umgebung einer ihrer Stellen kann eine n-dimensionale Fläche in unendlich viele paarweise nichtzusammenhängende Teile zerfallen, welche gegen eine r-dimensionale ($r < n$) Grenzmenge konvergieren, diese letztere ist je nach dem Wert r anschaulich „r-dimensional" geartet und dieser „r-dimensionale" Anschauungsinhalt geht keineswegs verloren, wenn man sich die ganze Fläche vergegenwärtigt. Auf der anderen Seite, wenn man konvergente Folgen paarweise nichtzusammenhängender Gebilde „einwandfreier", aber für verschiedene Folgen *verschiedener* Dimension betrachtet, so können die Häufungsmengen dieser Folgen dimensionell *gleichen* Anschauungsinhalt vermitteln, obwohl je nach der Folge die Grenzstellen verschiedenen Dimensionsindex (im Menger-Urysohnschen Sinne) haben. Man vergleiche z. B. die gegen eine Strecke im dreidimensionalen Raume

[1]) Diese Arbeit stellt eine vollständige Neubearbeitung eines früher (im Sommer 1934) bei den Annalen (unter dem gleichen Titel) eingereichten vorwiegend programmatischen Artikels dar. — Sie enthält den ersten Teil einer Untersuchung der allgemeinsten n-dimensionalen Flächen, in welchen neue, mit kombinatorischen Invarianten eng zusammenhängende, infinitesimale Eigenschaften der Fläche aufgezeigt werden.

Inzwischen konnte ich die entsprechenden Eigenschaften bei abgeschlossenen Mengen *beliebiger Dimension* nachweisen. Die Flächen stellen aber einen wichtigen Spezialfall dar, insbesondere methodisch, weil man — wohl nur in diesem Falle — mit dem (Brouwerschen) Abbildungsgrad (einer besonderen — harmonisch genannten — Abbildung der Komplexe) allein auskommt. Im allgemeinen Fall von Mengen beliebiger Dimension schließt sich die infinitesimale Theorie methodisch an die Untersuchungen im Großen von Alexandroff, Lefschetz und anderen an, welche auf Dualitätssätzen und Approximationstheorie (durch Zyklen) beruhen. (Vgl. meine Note in Comptes rendus vom 12. August 1935.)

Der ursprüngliche Artikel enthielt eine Reihe von Hypothesen, welche inzwischen bewiesen wurden; ein Teil dieses Artikels ist — in der ursprünglichen Fassung — am Anfang der Einleitung wiedergegeben.

sich häufenden Folgen von dreidimensionalen Zylindern, zweidimensionalen Viereckflächen und eindimensionalen Strecken. Eine jede Stelle P der Grenzstrecke hat in allen drei Fällen einen verschiedenen Dimensionsindex (je nach der Folge 3, 2 und 1), obwohl anschaulich die gleiche, eindimensionale Individualität der P enthaltenden Grenzstrecke in allen drei Fällen unverkennbar ist.

Der obige Sachverhalt ist nur ein Spezialfall der nachstehenden allgemeineren Aussage, welche sich unmittelbar aus den Definitionen der Dimension und der Cantorschen Mannigfaltigkeit ergibt:

Ist Φ^n eine abgeschlossene n-dimensionale Menge in einem kompakten, metrischen Raum, und gibt es in Φ^n eine überall dichtliegende Punktmenge φ so, daß jeder Punkt der Menge φ in einer Cantorschen Mannigfaltigkeit mit einem Durchmesser $> d$ (d eine beliebige positive Zahl) enthalten ist, so ist Φ^n eine homogene n-dimensionale Menge, d. h. in jedem Punkt n-dimensional.

Es ist nun bemerkenswert, daß die Dimension einer Grenzstelle nur dann von der Dimension der Mannigfaltigkeiten einer konvergenten Folge abhängt, wenn diese einen Durchmesser $> d$ haben. Ist dies nicht der Fall, besteht z. B. eine abgeschlossene Menge aus einer Folge paarweise zueinander fremder n-dimensionaler Cantorscher Mannigfaltigkeiten und einem einzigen Häufungspunkt P, so ist der Dimensionsindex dieses letzteren immer Null. Man nehme z. B. je eine Folge konvergenter dreidimensionaler Kugeln, Kreisflächen und Punkte: in allen drei Fällen ist die Dimension der Grenzstelle P Null, unabhängig von der Dimension der sich häufenden Gebilde. Gerade in diesem Fall deckt sich die Dimension an der Grenzstelle mit der Anschauung vollständig.

Diese Anschauungswahrnehmungen veranlaßten mich zu versuchen, neben der für Gebilde im Großen so trefflichen Brouwerschen Definition der Dimension, die Dimension auch im Kleinen zu fassen. Unter diesem Gesichtspunkt erscheint es viel zweckmäßiger, die Dimension einer Menge zuerst im Großen zu definieren — in Abweichung von Menger und Urysohn —, um dann erst zu der Dimension an einer Stelle der Menge zu gelangen. Tatsächlich läßt sich eine mit der Menger-Urysohnschen Fassung des Dimensionsbegriffes übereinstimmende Definition der Dimension einer abgeschlossenen Menge angeben, ohne daß man die Dimension in einer Stelle im voraus festlegen muß. Eine solche ist z. B. die Alexandroffsche Definition auf Grund des bekannten Pflastersatzes. Hat man die Dimension eines (homogenen) Raumgebildes, so gelangt man sofort zu dem Begriff der Cantorschen Mannigfaltigkeit. Mit Hilfe dieses Begriffes kann man, wie ich glaube, zu einem anschaulich einwandfreien, wesentlich tieferen *lokalen* Dimensionsbegriff gelangen.

2. Wir erwähnen zunächst einige bekannte Definitionen und Sätze und fügen einige diesbezügliche Bemerkungen hinzu.

Eine *geschlossene* Fläche F ist eine abgeschlossene Punktmenge, welche den n-dimensionalen euklidischen Raum in nur zwei Teile zerlegt und deren gemeinsame Berandung bildet. Eine *reguläre* Fläche F ist eine abgeschlossene Menge, welche den Raum in eine beliebige Anzahl von Gebieten zerlegt und die gemeinsame Berandung *mindestens* zweier Gebiete bildet. Unter einem *regulären* Schnitt F eines zusammenhängenden Gebietes verstehen wir eine (bezüglich des Gebietes) abgeschlossene Menge, welche das Gebiet zerlegt und die gemeinsame Berandung *mindestens* zweier Teile bildet. Die Erweiterung der Begriffe einer geschlossenen Fläche bzw. eines irreduziblen Schnittes eines Gebietes durch Einführung der Begriffe einer regulären Fläche bzw. eines regulären Schnittes dient insbesondere praktischen Zwecken: während die Topologie der irreduziblen und der regulären Flächen im wesentlichen dieselbe ist, muß man nicht außer acht lassen, daß ein Schnitt eines Gebietes durch einen Teil einer irreduziblen Fläche zwar reguläre, aber nicht notwendig irreduzible Schnittmengen enthält[2]).

Eine *Cantorsche Mannigfaltigkeit* ist eine n-dimensionale Menge, welche nur durch eine mindestens $(n-1)$-dimensionale Menge zerlegt werden kann. Im nachfolgenden wollen wir unter Mannigfaltigkeiten immer Cantorsche Mannigfaltigkeiten verstehen. Die regulären (und insbesondere geschlossenen) Flächen sind Mannigfaltigkeiten (Urysohn, Alexandroff). Der reguläre Schnitt einer n-dimensionalen Vollkugel ist ebenfalls eine Cantorsche Mannigfaltigkeit[3]). Eine jede n-dimensionale abgeschlossene Menge enthält n-dimensionale Cantorsche Mannigfaltigkeiten (Menger-Hurewicz).

Eine abgeschlossene Teilmenge Z einer regulären Fläche F (oder eines regulären Schnittes einer *Kugelumgebung*) nennen wir einen *Schnitt* von F, wenn $F - Z$ nicht zusammenhängend ist. Einen Schnitt Z der Fläche nennen wir irreduzibel, wenn keine Teilmenge von Z die Fläche zerlegt. Ein irreduzibler Schnitt einer n-dimensionalen Fläche kann auch n-dimensional sein. Ein Beispiel einer solchen Fläche erhält man durch Rotation der folgenden (in euklidischen Koordinaten gegebenen) Kurve um die x-Achse:

$$y = 2 + \cos\frac{\pi}{x}, \qquad 0 < |x| < 1,$$
$$0 \leqq y \leqq 1, \qquad x = 1, -1,$$
$$1 \leqq y \leqq 3, \qquad x = 0.$$

---

[2]) Man vgl. hinzu eine im Oxford Quarterly Journal [6, Nr. 21 (1935)] erscheinende Note über irreduzible Zerlegungen von H. D. Ursell und mir.

[3]) Vgl. die unter [7]) zitierten Arbeiten.

Die Spur der Kurvenpunkte für $x = 0$ liefert einen zweidimensionalen irreduziblen Schnitt einer zweidimensionalen Fläche. Nach den obigen Definitionen und Sätzen gibt es natürlich immer $(n-1)$-dimensionale Schnitte von n-dimensionalen Flächen und Cantorschen Mannigfaltigkeiten. Aus der Definition einer Cantorschen Mannigfaltigkeit folgt keineswegs, daß die Punkte eines Schnittes der Mannigfaltigkeit in beliebig kleinen Teilmannigfaltigkeiten enthalten sind. Man kann vielmehr sehr einfache Beispiele von n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten angeben, welche durch eine $(n-1)$-dimensionale Menge Z zerlegt werden, wobei überhaupt keine *kleineren* Teilmannigfaltigkeiten existieren, welche durch Z oder einen Teil von Z zerlegt werden.

3. Einen Punkt P eines kompakten metrischen Raumes Φ nennen wir *an sich n-dimensional* oder einen *n-dimensionalen Mannigfaltigkeitspunkt* (kurz M-Punkt), *wenn n die größte Zahl ist derart, daß beliebig kleine n-dimensionale Cantorsche Mannigfaltigkeiten in Φ existieren, welche P enthalten.*

Mit dieser Definition ist eine natürliche Fallunterscheidung verbunden, je nachdem die betreffenden Mannigfaltigkeiten eine *ineinandergeschachtelte Folge* bilden können oder nicht. Im ersten Fall nennen wir den Punkt P einen *konzentrischen Mannigfaltigkeitspunkt.*

Einen n-dimensionalen Mannigfaltigkeitspunkt P wollen wir auch als einen r-dimensionalen M-Punkt betrachten, insbesondere dann, wenn P nicht nur in beliebig kleinen n-dimensionalen, sondern auch in beliebig kleinen r-dimensionalen Mannigfaltigkeiten enthalten ist. Ist die letztere Bedingung erfüllt, so sagen wir auch: P ist ein r-dimensionaler M-Punkt *an sich*[4]).

Es sei nun F eine homogene n-dimensionale Menge. Z sei eine $(n-1)$-dimensionale Schnittmenge von F, d. h. es ist

$$F - Z = F' + F'',$$

wobei F' und F'' offene Teilmengen von F sind und $F' \neq 0$, $F'' \neq 0$, $F'F'' = 0$.

Ist nun f eine beliebig kleine n-dimensionale Mannigfaltigkeit auf F, so sagen wir, f wird durch Z zerlegt oder „zerrissen", wenn

$$f = f' + z + f'' \; (f' \neq 0, \; z \neq 0, \; f'' \neq 0),$$

---

[4]) Die Frage, inwiefern ein n-dimensionaler M-Punkt auch ein r-dimensionaler M-Punkt an sich ist, lassen wir hier außer acht. Die obige Definition ermöglicht uns von einer „Gesamtheit aller r-dimensionalen M-Punkte" zu sprechen, wo es sich eigentlich um die „Gesamtheit aller *mindestens* r-dimensionalen M-Punkte" handelt.

wobei $f' \subset F'$, $z \subset Z$, $f'' \subset F''$. Ist ein Punkt P von Z ein Durchschnittspunkt einer ineinandergeschachtelten Folge solcher Mannigfaltigkeiten f_1, f_2, ..., f_m, ..., deren Durchmesser für $m \to \infty$ gegen 0 abnehmen, so nennen wir P einen n-dimensionalen *Rißpunkt* der Fläche.

Die Definition der Mannigfaltigkeitspunkte stellt eine wesentliche, gewissermaßen „infinitesimale" Verfeinerung eines sehr naheliegenden Gesichtspunktes dar: Ist Φ ein kompakter metrischer Raum und δ eine gegebene positive Größe, so kann man nach der Gesamtheit von Punkten von Φ fragen, *welche auf r-dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit Durchmessern* $< \delta$ *liegen.* Für ein festes δ und verschiedene r können wir r solche Gesamtheiten definieren.

Eine unmittelbare — und sehr nützliche — Verschärfung der Definitionen der Mannigfaltigkeits- und Rißpunkte erhält man durch Verwendung der, von Alexandroff eingeführten, Kernmengen[5]). Setzen wir also voraus, daß die Folgen von Mannigfaltigkeiten f_1, f_2, ..., f_m, ... *direkte Kernmengen* sind, so nennen wir die durch diese Folgen bestimmten Durchschnittspunkte *K-Mannigfaltigkeitspunkte* bzw. *K-Rißpunkte.*

Die Einführung der neuen Definitionen legt uns sofort die Verpflichtung auf, nach ihrer Rechtfertigung und Tragweite zu fragen. Im günstigen Falle müßten durch die neuen Begriffsbildungen gestaltliche Eigenschaften aller, oder mindestens einer sehr allgemeinen Klasse von Gebilden, welche von den Definitionen betroffen werden, ausgedrückt werden können[6]). Unter diesem Gesichtspunkt habe ich gleichzeitig mit der Einführung der obigen Begriffe eine Reihe von Vermutungen und

---

[5]) Vgl. P. Alexandroff, Dimensionstheorie, Math. Annalen **106**. Die Kernmengen werden von Alexandroff im Sinne seiner Dimensionsdefinitionen mod m eingeführt. Eine r-dimensionale Menge F enthält eine Teilmenge F', welche mit einem $(n-r-1)$-Zyklus relativ einer Kugelumgebung U verschlungen ist. Dabei werden ein Zyklus z und eine Menge F'' als verschlungen betrachtet (bezüglich U), wenn $z \not\sim 0$ in $U - F$ und für jede echte Teilmenge F'' von F $z \sim 0$ in $U - F''$. Der Durchschnitt $F' \cdot U$ ist, wie Alexandroff zeigte, eine Mannigfaltigkeit bzw. eine „direkte Kernmenge".

[6]) Für die Einführung von neuen Definitionen könnten, wie ich glaube, zwei Gesichtspunkte maßgebend sein. Der eine ist der oben erwähnte. Man könnte aber auch — wie es oft geschieht — auf Grund der in einer Definition enthaltenen Bedingungen eine Klasse von Gebilden festlegen: im letzteren Falle würden somit die Objekte der Untersuchung von den Definitionen abhängen. Denn ganz allgemein scheint ja die Tragweite einer Begriffsbildung um so größer zu sein, *je schärfer einerseits* die Begriffsbildung — und *andererseits je allgemeiner* und unabhängiger (von der Begriffsbildung) die Klasse der Gegenstände ist, deren wesentliche Eigenschaften auf Grund der Begriffsbildung erfaßt werden. — Dies sei hier nur deshalb erwähnt, weil gerade die Schärfe der obigen Definitionen (Mannigfaltigkeitspunkte, insbesondere Rißpunkte) eine Gefahr in sich bergen könnte: durch ihre Schärfe könnten diese Begriffe für die allgemeinsten Gebilde bedeutungslos werden.

Hypothesen ausgesprochen, welche *alle* abgeschlossenen Mengen und insbesondere die allgemeinsten regulären Flächen betreffen. Schon rein gedanklich sieht man sich einer ganz verschiedenen Lage gegenübergestellt: in der allgemeinen Dimensionstheorie beruht ja alles auf der Zerlegung eines Raumgebildes durch eine niedrigerdimensionale Schnittmenge, wodurch die üblichen Induktionsschlüsse ermöglicht werden. Die Punkte, welche den Schnitt der Menge bilden, werden zusammengefaßt, ohne daß man sich um ihre individuelle Stellung und den Zusammenhang mit ihrer Umgebung im Gebilde kümmert. Unter dem neuen Gesichtspunkt erscheinen die Punkte der Schnittmenge als „selbständige Individuen", deren Individualität keineswegs aus dem Aufbau der Schnittmenge (im allgemeinen eines niedrigerdimensionalen Gebildes) selbst, sondern aus ihrer Stellung im ganzen gegebenen Raumgebilde abgeleitet werden muß.

Die nachfolgenden Sätze umfassen verschiedene Etappen einer Theorie der n-dimensionalen geschlossenen Flächen. Sie wurden von mir, wie gesagt, zunächst als Vermutungen ausgesprochen und inzwischen durch meine und H. D. Ursells Untersuchungen zu einem wesentlichen Teil bestätigt[7]).

I. *Ist Z eine beliebige Schnittmenge der n-dimensionalen regulären (geschlossenen) Fläche F, so gibt es eine beliebig kleine n-dimensionale Mannigfaltigkeit auf F, welche Punkte von Z enthält.*

II. *Jede Schnittmenge Z der Fläche F enthält mindestens einen n-dimensionalen Mannigfaltigkeitspunkt.* Aus II folgt

III. *Die Gesamtheit aller n-dimensionalen Mannigfaltigkeitspunkte auf einer n dimensionalen Fläche F ist mindestens eindimensional.*

I*. *Ist Z eine $(n-1)$-dimensionale Menge, welche die Fläche F in zwei Teile F', F'' zerlegt, so gibt es eine beliebig kleine Mannigfaltigkeit $f = f' + f''$, $f' \neq 0$, $f'' \neq 0$, wobei $f' \subset F'$, $f'' \subset F''$.*

II*. *Jede $(n-1)$-dimensionale Schnittmenge Z der Fläche F enthält Rißpunkte bezüglich Z, d. h. Durchschnittspunkte (gegen 0 abnehmender) Mannigfaltigkeiten $f_1, f_2, \ldots$ von der in* I* *gegebenen Struktur.* Aus II* folgt

III*. *Die Gesamtheit aller n-dimensionalen Rißpunkte der Fläche F (bezüglich beliebiger $(n-1)$-Schnittmengen) ist mindestens eindimensional.*

---

[7]) B. Kaufmann, Sur les surfaces fermées générales et la dimension locale, Comptes rendus de l'Ac. des Sciences **198** (1934); B. Kaufmann, Cantor Manifolds lying on a closed surface, Proc. Camb. Phil. Soc. **30** (1934); H. D. Ursell, Cantor Manifolds lying on a closed surface Part II, Ibid. **31** (1935), sowie B. Kaufmann und H. D. Ursell, The Dissection of Closed Surfaces and the Phragmén-Brouwer-Alexandroff Theorem, Proc. N. A. S. (U. S. A.) **20** (1934).

Die Konstruktionen, welche zur Lösung der Probleme I und II führten, lieferten einige andere topologischen Ergebnisse, welche im nächsten Paragraphen erwähnt werden.

Aus den Sätzen I* und II* ergibt sich insbesondere ein lokales bzw. eine Art „infinitesimales" Analogon des verallgemeinerten Brouwer-Phragménschen Satzes und verwandter Sätze. Diese lokalen Sätze begleiten den verallgemeinerten Brouwer-Phragménschen Satz und gelten immer dann, wenn der letztere gilt.

Über die obigen Sätze hinaus stellen wir die folgenden Behauptungen auf, deren Beweise in Bälde veröffentlicht werden.

IV. *Die Menge aller r-dimensionalen* ($r \leqq n$) *Mannigfaltigkeitspunkte auf F ist mindestens* $(n - r + 1)$*-dimensional.*

In diesem Satz kommt die *Dualität* zwischen der Dimension r eines M-Punktes und der Dimension der Gesamtheit der r-dimensionalen M-Punkte zum Ausdruck.

V. *Für jede hinreichend feine ε-Überdeckung einer n-dimensionalen Fläche F, so daß je k Teile* $(2 \leqq k \leqq n + 2)$ *einen höchstens* $(n - k + 1)$*-dimensionalen Durchschnitt haben, gibt es eine beliebig kleine n-dimensionale Mannigfaltigkeit auf F, welche mit mindestens* $n + 1$ *Teilen der Überdeckung gemeinsame Punkte hat.* (Erste Verschärfung des Pflastersatzes.)

VI. *Unter den Bedingungen des Satzes* V *gibt es auch* $n + 1$ *Teile der Überdeckung von F, welche einen n-dimensionalen Mannigfaltigkeitspunkt gemeinsam haben.* (Zweite Verschärfung des Pflastersatzes.)

Mit der vorliegenden Veröffentlichung bezwecke ich zunächst die Erklärung der Gründe, welche mich zum Versuch einer Verschärfung der Dimensionsbegriffe veranlaßt haben. Im nachfolgenden wird eine neuere, wesentlich ergänzte Darstellung von meinen und H. D. Ursells Ergebnissen gegeben. Der zweite Teil enthält einen kurzen neuen Beweis (gemeinsam mit Ursell) der Sätze I, II, III, aus welchem sich allerdings verschiedene Spezialergebnisse der früheren Beweise nicht gewinnen lassen [8]). Dieser Teil enthält auch eine schärfere Charakterisierung der n-dimensionalen Mengen in $(n + 1)$-Räumen. Der dritte Teil enthält eine vollständigere Darstellung und eine in einem wesentlichen Punkt neue Lösung von I*, II*, III*, nebst einigen Ergänzungen [9]). Neu insbesondere ist die Konstruktion der beliebig kleinen Teilmannigfaltigkeiten unter Verwendung des Abbildungsgrades. Diese Konstruktion läßt sich insbesondere aus-

[8]) Vgl. die zweite und die dritte der unter [7]) zitierten Arbeiten.

[9]) Vgl. H. D. Ursells und meine unter [7]) zitierte Arbeit in Pr. Nat. Ac. Sc.

bauen und findet ihre Verwendung bei den (noch nicht veröffentlichten) Lösungen der weiteren Probleme[10]).

II. Die dualen Membranen. Die Mannigfaltigkeitspunkte auf Flächenschnitten.

1. Die Sätze I, II und III wurden von mir zunächst im dreidimensionalen Raume und anschließend daran von H. D. Ursell in höherdimensionalen Räumen bewiesen[11]). Wir wollen hier ganz kurz über die Lösungsmethode referieren, deren Stufen — selbst unabhängig von dem eigentlichen Zweck — erwähnenswert zu sein scheinen und deren Verallgemeinerung und Weiterentwicklung zur Lösung der weiteren Probleme führte. Die Lösung beruht auf einer Konstruktion eines endlichen zweidimensionalen Komplexes (in höherdimensionalen Räumen) und eines unendlichen zweidimensionalen Komplexes K^2 (im dreidimensionalen Raume), welcher die $(n-1)$-

[10]) Ursprünglich sprach ich die Vermutung aus [vgl. meine unter[7]) zitierte Note in C. R.], daß die Menge aller n-dimensionalen Mannigfaltigkeitspunkte n-dimensional ist. Diese Vermutung trifft (auch für Rißpunkte) nur unter Verwendung einer geeigneten Definition der Dimension für (im allgemeinen) nicht abgeschlossene Mengen zu. Der tatsächliche Aufbau der Flächen scheint eine solche Definition zu rechtfertigen.

Wir sagen, eine Menge $\mathcal{E}$ ist r-dimensional bezüglich einer n-dimensionalen abgeschlossenen Menge A, falls r die kleinste Zahl ist mit der Eigenschaft, daß je zwei (disjunkte) abgeschlossene Teilmengen A' und A'' von A durch einen höchstens $(n-1)$-dimensionalen Schnitt B getrennt werden können, wobei $\mathcal{E}$ höchstens $(r-1)$-dimensional bezüglich B ist. — Falls $\mathcal{E}A = 0$, so nennen wir $\mathcal{E}$ (-1)-dimensional bezüglich A. Besteht eine Menge A aus einem einzigen Punkt, so ist $\mathcal{E}$ 0- oder (-1)-dimensional bezüglich A, je nachdem der Punkt A in $\mathcal{E}$ enthalten ist oder nicht.

Eine besonders anschauliche Definition der relativen Dimension erhält man im Zusammenhang mit den Pflastersätzen. — Wir betrachten nur solche ε-Überdeckungen von A, welche zu je k Teilen $(2 \leqq k \leqq n+2)$ $(n-k+1)$-dimensionale Durchschnitte haben. Wir nennen $\mathcal{E}$ r-dimensional bezüglich A, falls r die kleinste Zahl ist, so daß für jedes ε eine ε-Überdeckung von A existiert, für welche $r+1$, aber keine $r+2$ Teile einen gemeinsamen Punkt von $\mathcal{E}$ enthalten. — Im Sinne dieser beiden Definitionen gilt der Satz, daß *die Dimension aller n-dimensionalen Mannigfaltigkeitspunkte auf einer Fläche genau n-dimensional ist.*

Der Beweis dieses Satzes wie auch des Satzes VI beruht auf einer weitgehenden Verallgemeinerung der Methoden des § 3. Durch geeignete Teilung der Fläche in $2n$ Teile entsteht eine harmonische Teilung des Raumes und der n-dimensionalen Komplexe in $2n+2$ Teile. Der Grad der (harmonischen) Abbildung dieser Komplexe auf einen n-dimensionalen Würfel ermöglicht die Konstruktion von beliebig kleinen Mannigfaltigkeiten, welche alle $2n$ Teile der Flächen treffen. Diese Konstruktion ermöglicht den Beweis der Sätze, welcher in der Fortsetzung dieser Arbeit dargestellt wird.

[11]) Vgl. die unter[7]) zitierten Arbeiten von H. D. Ursell und mir in Proc. Camb. Phil. Soc.

dimensionale Schnittmenge Z der Fläche F nur *nulldimensional* schneidet und lediglich von einem (in dem zu Z komplementären Raum $R^{n+1} - Z$ liegenden und dort nicht nullhomologen) Polygon Λ berandet ist. Diesen Komplex oder auch — im Falle eines unendlichen Komplexes — seine Grenzfläche nennen wir eine in bezug auf den Schnitt Z *duale Membran*. In einem fünf- oder höherdimensionalen Raume kann man eine zweidimensionale Zelle als duale Membran konstruieren; im vierdimensionalen Raume treten die ersten Knotenschwierigkeiten auf, und man erhält in diesem Falle eine zweidimensionale Zelle mit Singularitäten. Hingegen lassen sich die großen Knotenschwierigkeiten im dreidimensionalen Raume nur durch eine Konstruktion eines unendlichen Komplexes überwinden und die Membran selbst ist die bereits erwähnte Grenzfläche des Komplexes. Im letzteren Falle ist die Membran zusammenhängend im Kleinen und somit — mindestens mengentheoretisch — ein einfaches Gebilde.

Der zweite Schritt besteht in der Bestimmung einer Folge von Teilkomplexen auf der Membran K^2, deren (kombinatorische) Ränder je eine zusammenhängende Kurve enthalten, welche einen *festen* Punkt im Außengebiet der Fläche mit einem *festen* Punkt im Innengebiet verbindet. Die Existenz dieser Kontinua ergibt sich aus der kombinatorischen Struktur der Membran. Auf dem Grenzkontinuum dieser Kurven läßt sich dann *ein einfacher Bogen J bestimmen, welcher die beiden erwähnten Punkte (im Außen- und im Innengebiet) verbindet und die Fläche F nur in der $(n-1)$-dimensionalen Schnittmenge Z und lediglich in einer nulldimensionalen Menge von Punkten trifft.*

Der dritte Schritt besteht schließlich in der Bestimmung einer beliebig kleinen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit f auf F, welche einen auf J liegenden Punkt von Z enthält. Diese Fläche f erhalten wir durch Konstruktion eines regulären Schnittes einer Kugelumgebung. Durch sukzessive Wiederholung der Konstruktion erhält man eine absteigende Folge $f_1 \supset f_2 \supset \ldots \supset f_m \ldots$ von Teilmannigfaltigkeiten, deren Grenzpunkt der gesuchte (konzentrische) Mannigfaltigkeitspunkt auf Z ist.

Ziehen wir hier die in I gegebene Verschlingungsdefinition in Betracht, so folgt sofort, daß jedes f_m mit einem 0-Zyklus verschlungen ist. Die f sind somit Kernmengen auf F und ihr Durchschnittspunkt ein K-Mannigfaltigkeitspunkt. *Die Sätze* I, II, III *behalten ihre Gültigkeit auch für Kernmengen und K-Mannigfaltigkeitspunkte.*

2. Die Sätze I, II, III, welche für reguläre Flächen ausgesprochen wurden, können auf beliebige n-dimensionale Mengen Φ in einem $(n+1)$-dimensionalen Raume R^{n+1} übertragen werden. Man erhält dadurch eine neue Eigenschaft dieser Mengen. Unter den in sich kompakten Mengen

in R^{n+1} sind nach einem Ergebnis von Frankl[12]) (für $n+1>3$) und Frankl-Pontrjagin[12]) (für $n+1=3$) die n-dimensionalen dadurch ausgezeichnet, daß sie Teilmengen enthalten, welche $(n+1)$-dimensionale Umgebungen zerlegen. Darnach gibt es insbesondere eine Kugelumgebung W^{n+1} eines Punktes P einer beliebigen Menge Φ, welche durch eine Teilmenge von Φ zerlegt wird. Diese Schnittmenge enthält insbesondere einen regulären Schnitt Φ^* von W^{n+1}. Die regulären Schnitte einer Kugelumgebung können genau wie Flächen F in Ziffer 1 behandelt werden. Es muß somit jede Schnittmenge Z von Φ^* n-dimensionale Mannigfaltigkeitspunkte enthalten, und wir können den Satz aussprechen:

Es ist unmöglich, ein jedes Punktepaar einer in sich kompakten n-dimensionalen Menge Φ^n in R^{n+1} durch Schnitte der Menge zu trennen, welche nur 0-, 1-, ... *und* $(n-1)$*-dimensionale Mannigfaltigkeitspunkte enthalten. Es gibt mindestens ein Punktepaar in Φ^n mit der Eigenschaft, daß jede Trennungsmenge dieser beiden Punkte n-dimensionale (konzentrische) M-Punkte enthält.*

3. Durch Verwendung *endlicher* singulärer Komplexe wollen wir eine wesentlich allgemeinere Art von Membranen konstruieren, welche insbesondere die Lösung der weiteren Probleme ermöglichen.

Es sei Λ ein in $R^{n+1}-Z$ liegendes und dort nicht berandendes Polygon[13]). E^2 sei eine von Λ berandete (im allgemeinen singuläre) 2-Zelle, welche man durch geradlinige Verbindung eines Punktes 0 mit allen Punkten von Λ erhält. E^2 sei in Dreiecke vom Durchmesser ε_1 unterteilt und der dadurch gegebene 2-Komplex auf E^2 mit K_1^2 bezeichnet. Von K_1^2 ausgehend, bilden wir einen Komplex K_2^2 durch folgende Operationen:

(1) Alle Simplexe von K_1^2, welche keine Punkte von Z enthalten, werden beibehalten.

(2) Jeden Eckpunkt P von K_1^2, welcher auf Z liegt, ersetzen wir durch einen Punkt P' außerhalb Z, dessen Entfernung von $P<\varepsilon_1$ ist.

(3) Jede Kante PQ von K_1^2 ersetzen wir durch einen Polygonzug $P\ldots Q$, welcher Z nicht trifft und dessen Entfernung von PQ ebenfalls $<\varepsilon_1$ ist.

(4) Ein jedes Dreieck Δ, dessen Rand l nach (1) und (2) durch ein geschlossenes Polygon l' ersetzt wurde, ersetzen wir durch eine von l' berandete singuläre 2-Zelle, deren Punkte ebenfalls eine Entfernung $<\varepsilon_1$

---

[12]) Frankl-Pontrjagin, Math. Annalen **102** (1930); Frankl, Math. Annalen **103** (1930).

[13]) Wir setzen voraus, Λ treffe F' und F'' und verlaufe somit teilweise in einem „Außengebiet" G_1 und teilweise in einem „Innengebiet" G_2.

von Δ haben. Diese Zellen Δ' erhalten wir durch Verbindung eines geeigneten Punktes mit allen Punkten von l'.

Diese Konstruktion können wir wiederholen, indem wir K_1^2 in Dreiecke von einem Durchmesser $< \varepsilon_2 < \frac{1}{3}\varepsilon_1$ unterteilen und nach demselben Verfahren durch einen Komplex K_3^2 ersetzen usw. Die Grenzfläche M^2 der Komplexe K_n^2 ist eine singuläre 2-Zelle, welche man sich auch als ein stetiges Bild einer abstrakt gegebenen gewöhnlichen 2-Zelle (Dreiecksfläche) $'\mathcal{E}^2$ denken kann. Dabei denken wir uns auf dieser (abstrakt gegebenen) gewöhnlichen 2-Zelle eine Folge sukzessiver Dreiecksteilungen gegeben, so daß die Durchmesser der Dreiecke für wachsende Unterteilungen gegen 0 abnehmen und für jedes n die Dreiecke einer festen Unterteilung in eindeutiger Weise den 2-Zellen, aus welchen K_n^2 aufgebaut ist, entsprechen. Da die Ränder der 2-Zellen von K_n^2 frei von Z-Punkten sind (nach Konstruktion), können die Dreiecksränder einer Unterteilung der abstrakten Urbildzelle keine Urbildpunkte der Z-Punkte auf M^2 enthalten. Daraus ergibt sich, daß die Urbildmenge von M^2Z auf der abstrakten 2-Zelle nulldimensional ist (obwohl dies für die Menge M^2Z selbst nicht zutrifft).

Auf der abstrakten Urbildzelle $'\mathcal{E}^2$ können wir einen Bogen $'J$ angeben, welcher einen Urbildpunkt des Außengebietes der Fläche F mit einem Urbildpunkt des Innengebietes der Fläche verbindet und die Urbildmenge $'(M^2F)$ von M^2F nur in Punkten der nulldimensionalen Urbildmenge $'(M^2Z)$ von M^2Z trifft. Bezeichnen wir mit J den Bildbogen von $'J$ auf M^2, so läßt sich auf Grund der Eigenschaften von $'J$ die in Ziffer 1 erwähnte Konstruktion der beliebig kleinen Mannigfaltigkeiten f auf F, welche Punkte von Z enthalten, leicht durchführen. Wir erhalten auf diese Weise einen neuen und kürzeren Beweis der Sätze I, II, III.

Es sei ε eine beliebig kleine positive Größe. Aus der Folge der in Ziffer 3 konstruierten Komplexe wählen wir einen Komplex $K_{n_1}^2$, dessen 2-Zellen einen Durchmesser $< \varepsilon$ haben. Wir bilden einen Teilkomplex $K_{n_1}^{2'}$ aller 2-Zellen von $K_{n_1}^2$, welche keine Punkte von Z enthalten. Der Rand des Komplexes $K_{n_1}^2$ besteht offenbar aus Λ und einer endlichen Anzahl von 1-Zyklen $\Lambda_\varepsilon^1, \Lambda_\varepsilon^2, \ldots, \Lambda_\varepsilon^k$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. Der Durchmesser eines jeden Λ_ε^k ist $< 3\varepsilon$.

2. Der Abstand eines jeden Λ_ε^k von Z ist positiv, aber $< \varepsilon$.

3. $\Lambda \sim \Sigma\Lambda_\varepsilon^k$ (auf $K_{n_1}^{2'}$).

Die Berandungen derjenigen 2-Zellen von $K_{n_1}^{2'}$, welche Punkte auf Z enthalten, liefern uns offenbar die 1-Zyklen Λ_ε^k mit den obigen Eigenschaften.

Diese Komplexe $K^2 = K^{2'}_{n_1}$, welche wir ebenfalls als Membranen bezüglich Z bezeichnen, bilden die Grundlage für die weiteren Untersuchungen.

III. Die harmonische Teilung und die Abbildung eines Komplexes auf den Kreis. Der Abbildungsgrad.

1. Gegeben sei ein zweidimensionaler Komplex K^2 und eine Einteilung der Gesamtheit aller Grundzellen von K^2 in vier Klassen A'_2, B'_2, A''_2, B''_2 in der Weise, daß je zwei Zellen, welche den Klassen A'_2 und A''_2 oder B'_2 und B''_2 entnommen sind, keine gemeinsamen Punkte haben. Hingegen können zwei Zellen aus je einer Klasse A und B gemeinsame Punkte haben, und es ist auch zugelassen, daß eine Zelle von K^2 gleichzeitig einer Klasse A und einer Klasse B angehört. Die so definierte Teilung der Gesamtheit aller Zellen von K^2 nennen wir eine *subharmonische Teilung* von K^2. Wird noch vorausgesetzt, daß eine Grundzelle von K^2 nur einer einzigen Klasse angehören soll, d. h., daß die vier Klassen exklusiv sein sollen, so nennen wir die Teilung von K^2 *harmonisch*. In der harmonischen Teilung werden also die Klassen A'_2 und A''_2 durch $B'_2 + B''_2$ und die Klassen B'_2 und B''_2 durch $A'_2 + A''_2$ voneinander getrennt. Aus einer subharmonischen Teilung von K^2 erhält man eine harmonische, wenn man die Grundzellen, welche in zwei verschiedenen Klassen vorkommen, nur zur einen Klasse rechnet.

2. Wir bewerkstelligen jetzt eine stetige Abbildung $f(K^2)$ des subharmonisch zerlegten Komplexes K^2 auf eine Kreislinie $\varkappa$, welche entsprechend in vier Quadranten, $a'_\varkappa$, $b'_\varkappa$, $a''_\varkappa$, $b''_\varkappa$ unterteilt ist. Diese Abbildung ist folgendermaßen definiert. Wir ziehen die Gesamtheit aller Eckpunkte von K^2 in Betracht. Für jeden dieser Eckpunkte berücksichtigen wir *alle* Klassen der subharmonischen Teilung von K^2, in welchen mindestens eine den betreffenden Eckpunkt enthaltende Grundzelle von K^2 vorkommt. Es gibt somit höchstens 8 verschiedene Fälle unter den Eckpunkten von K^2, welchen also höchstens 8 verschiedene Gruppen von Eckpunkten entsprechen. Einer jeden dieser Gruppen von Eckpunkten lassen wir nun *einen und denselben Punkt* auf dem Kreis entsprechen, wobei dieser Bildpunkt nur denjenigen der vier Bogen $a'_\varkappa$, $b'_\varkappa$, $a''_\varkappa$, $b''_\varkappa$ angehören soll, welche den die betreffende Gruppe von Eckpunkten definierenden Klassen der subharmonischen Teilung von K entsprechen. Vier dieser Bildpunkte sind die gemeinsamen Eckpunkte der Bogen a und b, und als vier weitere Bildpunkte wählen wir die Mittelpunkte der vier Bogen. Durch diese Abbildung wird aber der ganze 2-Komplex K^2 in den Kreis überführt.

Wird die Orientierung des Kreises $\varkappa$ etwa in der Richtung $a' \to b'$ festgesetzt, so bildet $f(K^2)$ einen jeden eindimensionalen (orientierten) Zyklus Γ^1 auf K^2 auf den Kreis $\varkappa$ mit einem bestimmten *Abbildungsgrad* $o f(\Gamma^1)$ im Sinne von Brouwer ab. Für eine lineare Kombination $\Gamma^1 = \sum \Gamma_i^1$ von Zyklen gilt offenbar

$$o f(\Gamma^1) = \sum o f(\Gamma_i^1)$$

und da der Abbildungsgrad des Randes einer Grundzelle $= 0$ ist, so gilt

$$o f(\Gamma^1) = 0$$

für $\Gamma^1 \sim 0$ (auf K^2) und im allgemeinen

$$o f(\Gamma_1^1) = o f(\Gamma_2^1)$$

für $\Gamma_1^1 \sim \Gamma_2^1$ auf K^2. Der Abbildungsgrad in bezug auf $f(K^2)$ ist somit invariant für alle untereinander homologen Zyklen auf K^2.

3. Der Abbildungsgrad eines orientierten Zyklus Γ^1 eines harmonisch zerlegten Komplexes K^2 ist von der Abbildung $f(K^2)$ unabhängig und wird durch die subharmonische Teilung von K^2 selbst bestimmt. Diese für die gegebene Teilung von K^2 charakteristische Zahl, welche wir auch die *Charakteristik* von Γ^1 nennen wollen, läßt sich direkt (d. h. unabhängig von der Abbildung) berechnen. Einfachheitshalber beschränken wir uns auf den Fall eines zusammenhängenden einfachen Zyklus Γ^1, welcher in einem bestimmten Sinne orientiert ist. Eine harmonische Teilung von K^2 bewirkt auch eine harmonische Teilung aller 1-Zellen von Γ^1 in vier verschiedene, ebenfalls exklusive Klassen, welche wir mit A_1', B_1', A_1'', B_1'' bezeichnen. Je nach der Klasse bezeichnen wir im allgemeinen die 1-Zellen von Γ^1 mit a', b', a'', b''. Die Orientierung von Γ^1 legt eine Anordnung aller 1-Zellen von Γ^1 in einem Symbol fest, z. B.

$$a'\,a'\,b'\,a'\,a''\,b'\,a''\,b'\,b'' \text{ usw.}$$

Zwischen allen diesen Elementen können wir zwei Grundanordnungen oder Durchlaufsinne festlegen, eine positive

$$a' \to b' \to a'' \to b'' \to a'$$

und eine negative

$$a' \to b'' \to a'' \to b' \to a'.$$

Jeden Übergang von einem Element zum nächsten (in der auf Γ^1 gegebenen Richtung) bezeichnen wir als positiv oder negativ je nach der Grundanordnung, welcher dieser Übergang entspricht. Bezeichnen wir mit P die Anzahl aller positiven und mit N diejenigen aller negativen Übergänge, so läßt sich ohne Schwierigkeiten zeigen, daß

$$^1/_4 (P - N) = o f(\Gamma^1)$$

ist. Die Möglichkeit einer solchen direkten Deutung des Abbildungsgrades der harmonischen Abbildung ist allerdings auf den Fall von 1-Zyklen beschränkt.

4. Wir wenden jetzt die obigen Betrachtungen auf die zum Schnitt Z duale Membran an. Nach dem Verfahren des § II konstruieren wir ein Polygon Λ, welches außerhalb Z nicht ~ 0 ist und eine Membran $M^2 = K^2$, welche von Λ und einer endlichen Anzahl von beliebig kleinen, in beliebiger Nähe von Z gelagerten 1-Zyklen berandet wird. Wenn wir den Durchmesser der Grundsimplexe von K^2 als $< \varepsilon$ annehmen, so werden die 1-Zyklen auf dem Rande von K^2 (von Λ abgesehen) einen Durchmesser $< 3\varepsilon$ haben. Wir können insbesondere die Membran so fein unterteilen, daß keines der Grundsimplexe gleichzeitig Punkte von F' und F'' enthält. Diese Unterteilung ermöglicht eine harmonische Teilung von K^2 in vier Klassen:

die Klasse A_2' aller Punkte von F' enthaltenden Zellen,
„ „ B_2' aller ganz im Gebiet G_1 liegenden Zellen,
„ „ A_2'' aller Punkte von F'' enthaltenden Zellen,
„ „ B_2'' aller ganz im Gebiet G_2 liegenden Grundzellen.[14])

Diese harmonische Teilung von K^2 induziert auch eine harmonische Teilung der auf dem Rand von K^2 gelegenen 1-Zyklen. Nach Ziffer 2 ist der Abbildungsgrad des Randes von K^2 in der harmonischen Abbildung $f(K^2)$ von K^2 auf den Kreis $= 0$. Andererseits liefert $f(K^2)$ für das Polygon Λ einen von 0 verschiedenen Abbildungsgrad, nämlich

$$o f(\Lambda) = \pm 1.$$

Daraus folgt, daß es unter den beliebig kleinen 1-Zyklen auf dem Rande von K^2 mindestens einen einfachen zusammenhängenden Zyklus Λ_ε geben muß, für welchen der Abbildungsgrad ebenfalls $\neq 0$ ist. Λ_ε hat nach Konstruktion einen Durchmesser $< 3\varepsilon$ und kann deshalb in eine n-dimensionale Kugel W^n mit einem Durchmesser $< 6\varepsilon$ eingeschlossen werden. — Im nachfolgenden gehen wir zu der eigentlichen Bestimmung der durch Z zerrissenen beliebig kleinen Mannigfaltigkeit auf F über. Sie erscheint als ein Schnitt der Λ_ε einschließenden Vollkugel W_i^n.

5. Wir schicken noch eine Betrachtung über den Abbildungsgrad in bezug auf die Abbildung der Teilkomplexe von 1-Zyklen auf K^2 voraus. Ist Γ irgendein Teilkomplex eines 1-Zyklus Γ^1 auf K^2, so bezeichnen wir durch Γ^* einen (im allgemeinen singulären) Komplex auf dem Kreis $\varkappa$, welcher unter $f(K^2)$ dem Komplex Γ entspricht. Wenn wir die aus-

[14]) Mit G_1 und G_2 werden zwei von F begrenzte Gebiete bezeichnet, welche (in ihrer Summe) alle Punkte von Λ (außerhalb F) enthalten.

gearteten (d. h. nulldimensionalen) Bilder der 1-Simplexe vernachlässigen, so kann Γ^* als ein eindimensionaler homogener Komplex (mit entsprechender Orientierung) betrachtet werden. Es sei x ein „innerer" Punkt des Kreises $\varkappa$, d. h. ein Punkt, welcher nicht dem „Gerüst" des simplicial in 8 Teile zerlegten Kreises angehört, also weder ein Eck- noch ein Mittelpunkt der vier Quadranten a'_x, b'_x, a''_x, b''_x ist. Die Abbildung $f(K^2)$ liefert eine bestimmte Abbildung $f(\Gamma)$ von Γ auf $\varkappa$ oder einen Teil von $\varkappa$, und diese letztere besitzt offenbar einen ganz bestimmten *Abbildungsgrad in* x oder vielmehr in einer Nachbarschaft von x, da nämlich x nicht Bildpunkt eines Randpunktes von Γ sein kann. Diesen örtlichen Abbildungsgrad bezeichnen wir mit $o f_x(\Gamma)$. Ist ein innerer Punkt x des Kreises $\varkappa$ überhaupt nicht in Γ^* enthalten, so wollen wir ihm immer den Abbildungsgrad 0 in bezug auf $f(\Gamma)$ zuordnen.

Wir setzen jetzt voraus, Γ sei ein Teilkomplex von Γ^1, dessen (kombinatorischer) Rand $\dot{\Gamma}$ der Vereinigung der Simplexe der beiden Klassen A'_2 und A''_2 angehört. Die folgenden Behauptungen lassen sich dann leicht beweisen,

a) Enthält das Bild $\dot{\Gamma}^*$ des Randes von Γ nur Punkte des einen der beiden Quadranten a'_x und a''_x und sind x und y zwei beliebige Punkte auf der Vereinigung $b'_x + b''_x$ der beiden Quadranten, so ist

$$o f_x(\Gamma) = o f_y(\Gamma).$$

b) Insbesondere, wenn Γ^* nicht gleichzeitig Punkte der beiden Quadranten a'_x und a''_x enthält und Γ^* außerdem nicht den ganzen Kreis bedeckt, so ist $o f_x(\Gamma) = 0$ für einen beliebigen Punkt der Quadranten b'_x und b''_x.

Ist also, umgekehrt, $o f_x(\Gamma) \neq 0$ und bedeckt Γ^* nicht den ganzen Kreis, so muß Γ^* gleichzeitig Punkte der beiden Quadranten a'_x und a''_x treffen. Entsprechend muß Γ Simplexe der beiden Klassen B'_1 und B''_1 treffen.

6. Wir bezeichnen jetzt mit W_i^n das Innere der Kugel W^n und mit (G_1^ν) bzw. (G_2^μ) die Gesamtheiten aller Komponenten der Durchschnitte $G_1 W_i^n$ und $G_2 W_i^n$. Mit (A_1^ν) und (A_2^μ) bezeichnen wir die Gesamtheit aller Durchschnitte des 1-Zyklus A_ε mit jeder der Komponenten G_1^ν und G_2^μ. Die 1-Komplexe aller 1-Simplexe auf A_ε, welche in A_1^ν oder A_2^μ (für jedes ν und jedes μ) enthalten sind, bezeichnen wir entsprechend mit Γ_1^ν und Γ_2^μ. Offenbar gibt es je eine endliche Zahl nicht leerer Γ_1^ν- und Γ_2^μ-Komplexe.

Wir wählen jetzt einen beliebigen inneren Punkt x auf dem Bogen b'_x des Kreises $\varkappa$ und betrachten die durch $f(K^2)$ gelieferte Abbildung

$f(\Lambda_\varepsilon)$ und deren Teilabbildungen $f(\Gamma_1^\lambda)$. Wir bezeichnen mit γ den Abbildungsgrad von $f(\Lambda_\varepsilon)$ und setzen

$$\alpha_\lambda = o f_x(\Gamma_1^\lambda).$$

Dann gilt offenbar die Beziehung

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu = \gamma (\neq 0).$$

Daraus folgt die Existenz eines Wertes $\alpha_{\lambda_0} = \alpha' \neq 0$ und eines diesem entsprechenden 1-Komplexes $\Gamma_1^{\lambda_0} = \Gamma'$, der Bogenmenge $\Lambda_1^{\lambda_0} = \Lambda'$ und des Gebietes $G_1^{\lambda_0} = G'$. Da Γ' keine Punkte von G_2 enthält, kann Γ'^* nicht den ganzen Kreis bedecken. Aus b) Ziffer 5 folgt sofort, daß Γ' die Simplexe der beiden Klassen A_1' und A_1'' trifft. *Es muß also auch Λ' die beiden Teile F' und F'' der Fläche F treffen.*

Wir betrachten jetzt alle zusammenhängenden Teile (Komponenten) des Durchschnittes $\Lambda_\varepsilon(W_i^n - \overline{G}')$. Die Gesamtheit aller dieser Bogen bezeichnen wir mit (Λ_3^λ). Mit Γ_3^λ bezeichnen wir für jedes λ den zusammenhängenden Komplex aller in der offenen Menge $W_i^n - G'$ liegenden 1-Simplexe von Λ_3^λ. Die Gesamtheit (Γ_3^λ) ist offenbar nicht leer und endlich.

Wir wollen jetzt zeigen, daß mindestens ein Bogen Γ_3^λ je einen auf der Berandung von G' liegenden Punkt von F' und F'' trifft. Nach b) Ziffer 5 genügt es offenbar zu zeigen, daß 1. mindestens ein $\Gamma_3^{\lambda_0}$ nicht den ganzen Kreis bedeckt, und 2. an einer Stelle y von b_x'' $o f_y(\Gamma_3^{\lambda_0}) \neq 0$ ist.

Bezeichnen wir mit y irgendeine Stelle von b_x'' und mit β_λ den Abbildungsgrad in y von $f(\Gamma_3^\lambda)$ für jedes λ, so gilt wegen $\sum \Gamma_3^\mu \subset \sum \Gamma_3^\lambda$ die Beziehung

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\lambda = \gamma.$$

Somit ist für gewisse Γ_3^λ die Bedingung (2) erfüllt. Wäre nun für alle Werte dieser λ die Bedingung (1) nicht erfüllt, so müßte für jedes λ und ein beliebiges x auf b_x' [nach a) Ziffer 5]

$$o f_x(\Gamma_3^\lambda) = o f_y(\Gamma_3^\lambda)$$

gelten. Der Beitrag zum Abbildungsgrad in x für jedes Γ_3^λ wäre also $= \beta_\lambda$. Daraus würde folgen

$$o f_x(\Lambda_\varepsilon) = (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\lambda) + \alpha' \quad (\alpha' \neq 0),$$

was offenbar unmöglich ist.

Somit ist die Existenz des Bogens $\Gamma_3^{\lambda_0}$ mit den gewünschten Eigenschaften nachgewiesen. Der Rand der $\Lambda_3^{\lambda_0}$ enthaltenden Komponente von $W_i^n - G'$ ist die gesuchte Mannigfaltigkeit $f = f' + f''$.

7. Es ist nun nach dem obigen Beweis evident, wie man eine *absteigende* Folge von Mannigfaltigkeiten

$$f_m' + f_m'',$$

$f'_m \subset F'$, $f''_m \subset F''$ bekommen und somit den Rißpunkt der Fläche bestimmen kann. Wird, wie oben, $f = f_1$, bezüglich einer Kugel W_1 bestimmt, so wiederholen wir die Betrachtung, indem wir F durch f_1 (bezüglich W_1) ersetzen und f_2 als gemeinsamen Rand zweier Gebiete bezüglich einer Kugelumgebung W_2 bestimmen usf.

Demnach ist die Existenz eines Rißpunktes auf jedem $(n-1)$-dimensionalen Schnitt der Fläche nachgewiesen.

Um die 1-Dimensionalität der Menge aller Rißpunkte der Fläche nachzuweisen, müssen wir noch den Fall n-dimensionaler Schnitte in Betracht ziehen. Ist Z n-dimensional, so gibt es einen Punkt P von Z, welcher auf einem regulären Schnitt z einer Kugelumgebung liegt. Auf diesem Schnitt läßt sich ein Rißpunkt (in bezug auf z selbst) bestimmen, welcher gleichzeitig ein Rißpunkt der Fläche F ist: man braucht zu diesem Zweck lediglich einen Punkt auf z von irgendeinem Punkt auf F durch eine $(n-1)$-dimensionale Menge zu trennen, welche gleichzeitig F zerlegt. Auf dieser Schnittmenge läßt sich dann der Rißpunkt wie im allgemeinen Fall bestimmen.

Somit sind die Sätze I*, II*, III* vollständig nachgewiesen.

8. Durch Reduktion des Zyklus Λ_ε auf eine — im nachfolgenden definierte — *Normalform* erhält man ein zweites Verfahren zur Konstruktion der Mannigfaltigkeit f, welches in der unter [9]) zitierten Arbeit verwendet wurde. Dieses Verfahren gibt allerdings keine Möglichkeit einer direkten Verallgemeinerung zur Lösung der wesentlichen Probleme, welche mit der harmonischen Abbildung n-dimensionaler Zyklen auf einen harmonisch zerlegten einfachen n-dimensionalen Zyklus (etwa einen n-dimensionalen Würfel) zusammenhängen. Wir erwähnen dennoch diese Normalform, weil sie einen gewissen Zusammenhang zwischen dem Abbildungsgrad und der Anzahl der durch Z in W_i^n zerlegten Mannigfaltigkeiten f aufzeigt.

Durch die harmonische Teilung von Λ_ε in vier Klassen A'_1, B'_1, A''_1, B''_1 wird Λ_ε in vier entsprechende Gruppen von zusammenhängenden Bogen zerlegt. Wir erhalten dadurch 2 Gruppen von Bogen vom A- und zwei vom B-Typus. Ein jeder B-Bogen hat zwei benachbarte A-Bogen und umgekehrt. Wir sagen nun, Λ_ε hat eine *Normalform*, wenn jedes zu F bezüglich W_i^n komplementäre Gebiet, welches einen B-Bogen enthält, keine Punkte (weder im Innern noch auf dem Rande) der zu ihm *nicht* benachbarten Bogen trifft: d. h. nur die beiden zu dem B-Bogen benachbarten A-Bogen können das den betreffenden B-Bogen enthaltende Gebiet treffen. In der unter [9]) zitierten Arbeit wurde gezeigt, wie der 1-Zyklus Λ_ε auf die Normalform reduziert, d. h. durch einen 1-Zyklus in Normalform ersetzt werden kann, wobei, falls $o f(\Lambda_\varepsilon) \neq 0$, der Abbildungs-

grad des reduzierten Zyklus ebenfalls $\neq 0$ ist. Wir können somit voraussetzen, daß Λ_ε in einer Normalform gegeben ist.

Ist $\gamma = o f(\Lambda_\varepsilon) \neq 0$, so gibt es mindestens zwei B-Bogen in Λ_ε. Ist λ_B ein B-Bogen und sind λ_{A_1} bzw. λ_{A_2} die beiden zu λ_B benachbarten A-Bogen, so bezeichnen wir mit $\bar{\lambda}_B$ den Bogen $(\lambda_{A_1} + \lambda_B + \lambda_{A_2})$ und mit $(\Lambda_\varepsilon - \bar{\lambda}_B)$ den zu λ_B komplementären Bogen (auf Λ_ε). Da Λ_ε in Normalform gegeben ist, so ist der Abstand des λ_B enthaltenden, zu F bezüglich W_i^n komplementären Gebietes g von $\Lambda_\varepsilon - \bar{\lambda}_B$ positiv. Dies ermöglicht sofort die Bestimmung eines λ_B und $\Lambda_\varepsilon - \lambda_B$ trennenden regulären Schnittes von W_i^n auf der Berandung von g, und dieser ist eine Cantorsche Mannigfaltigkeit. Diese letztere enthält insbesondere je einen F-Punkt auf λ_{A_1} und λ_{A_2}.

Wir bemerken jetzt, daß der örtliche Abbildungsgrad eines jeden B-Bogens λ_B (an irgendeiner inneren Stelle des Kreises) lediglich die Werte $0, \pm 1$ annehmen kann. Es sei nun p die Anzahl aller B-Bogen auf Λ_ε, und p^1 die Anzahl aller B-Bogen, für welche der örtliche Abbildungsgrad den Wert ± 1 hat. Diese letzteren in einer Folge geordnet, bezeichnen wir mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{p^1}$. Von jedem dieser Bogen ausgehend, können wir nach dem Obigen eine beliebig kleine Mannigfaltigkeit

$$f = f' + f'' \quad (f' \subset F', f'' \subset F'')$$

konstruieren. Zwei solcher Mannigfaltigkeiten, f_1 und f_2, bezeichnen wir als verschieden, wenn $f_1 f_2 \neq f_1, f_2$. Ist $\gamma \neq \pm 1$, so ist immer $p > 2$. Wir setzen voraus $p > 2$. Es läßt sich dann leicht zeigen, daß *mindestens p^1 verschiedene Mannigfaltigkeiten in W_i^n* konstruiert werden können.

Man berücksichtige lediglich, daß zwei B-Bogen λ_B' und λ_B'' nur dann dieselbe Mannigfaltigkeit ergeben könnten, wenn die beiden anstoßenden Bogen λ_{A_1} und λ_{A_2} in beiden Fällen dieselben wären. Dies ist aber wegen Existenz dreier λ_B-Bogen unmöglich.

Ein besonders interessantes Problem sei hier noch erwähnt: Gibt es immer einen beliebig kleinen außerhalb Z nicht nullhomologen 1-Zyklus, für welchen $o f(\Lambda_\varepsilon) = \pm 1$ ist?

(Eingegangen am 14. 6. 1935.)

Eine absolute Axiomatik der Geometrie in einer begrenzten Ebene.

Von

L. J. Smid in Warffum (Niederlande)[1]).

Einleitung.

Hjelmslev hat bewiesen[2]), daß eine „axiomatische Ebene", in der die Hilbertschen ebenen Axiome[3]) I, II, III gelten, sich als ein echter oder unechter „konvexer" Teil einer projektiven Ebene mit hyperbolischer, parabolischer oder elliptischer Metrik auffassen läßt.

Nach der Auffassung von Hjelmslev[4]) und Schur[5]) ist dieser Weg der natürliche zum Aufbau der vollständigen elliptischen Geometrie.

Im elliptischen Fall muß die axiomatische Ebene sicher ein *echter* Teil der vollständigen Ebene sein, denn in der betrachteten axiomatischen Ebene haben zwei verschiedene Lote auf derselben Geraden keinen gemeinsamen Punkt.

Wegen Axiom III 1, das die unbeschränkte Möglichkeit des Streckenabtragens fordert, ist andererseits klar, daß die axiomatische Ebene kein echter konvexer Teil einer „Archimedischen Ebene"[6]) sein kann.

Bei dem Hjelmslevschen Aufbau ist der archimedisch-elliptische Fall also ganz ausgeschlossen[7]). Um diese Lücke auszufüllen, haben wir das

[1]) Mit dem Wort „absolut" wollen wir andeuten, daß es eine metrische Axiomatik betrifft, wobei nicht von vornherein in den Axiomen festgelegt ist, ob die Geometrie eine hyperbolische, parabolische oder elliptische ist.

[2]) J. Hjelmslev, Neue Begründung der ebenen Geometrie, Math. Annalen 64 (1907), S. 449 — 474.

[3]) D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie. Die Nummern der Axiome und Sätze im folgenden beziehen sich auf die 7. Auflage (Leipzig 1930).

[4]) Hjelmslev, l. c. S. 473.

[5]) F. Schur, Über die Grundlagen der Geometrie, Math. Annalen 55 (1901), S. 274.

[6]) D. h. eine Ebene, in welcher das sogenannte Archimedische Axiom, heute vielleicht besser das „Eudoxische" Axiom genannt, gilt.

[7]) Eine ähnliche Bemerkung gilt für das Axiomensystem ohne Anordnungsaxiome, das Hjelmslev in „Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre", Math.-fys. Meddelelser, Danske Vidensk. Selskab 8, 11 und 10, 1 (1929) studiert. Dieses Axiomensystem (Medd. 8, 11, S. 5 und 6) läßt sich für die „einfache Geometrie" (Medd. 10, 1, S. 11) durch Abschwächung einiger Axiome leicht so abändern, daß es auch in der vollständigen elliptischen Ebene gilt. Weil die Möglichkeit von Bewegungen dadurch nicht eingeschränkt wird (im Gegensatz zur vorliegenden Arbeit) brauchen die Hjelmslevschen Entwicklungen dann nur wenig Änderung.

Axiom III 1 so eingeschränkt, daß *nur gefordert wird, daß von zwei gegebenen Strecken wenigstens eine von einem Endpunkt auf die andere abgetragen werden kann* (Axiom III 1*), damit es auch in einem begrenzten Ebenenstück, z. B. im Inneren eines Dreiecks oder eines Kreises gilt. Unser Ziel ist, zu beweisen, daß der Hjelmslevsche Satz (siehe oben) auch für diese Axiomatik gilt.

§ 1.

Konstruktion der $\mathfrak{G}_n$-Gebiete.

1. a) Wir benutzen die ebenen Hilbertschen Axiome I, II, III, wo III 1 ersetzt wird durch

Axiom III 1*. *Wenn die Strecke AB der Strecke $A'B'$ nicht kongruent ist, und es keinen Punkt C von AB gibt, so daß $A'B' = AC$, so gibt es wenigstens einen Punkt C' von $A'B'$, so daß $AB = A'C'$.*

Mit Hilfe der übrigen Axiome kann man nun leicht beweisen, daß es dann nur einen solchen Punkt C' gibt, und daß auch umgekehrt, wenn C existiert, es keinen Punkt C' mit der verlangten Eigenschaft gibt. Dann kann man für Strecken die Relationen $>$ und $<$ definieren, und die Zusammensetzungsregeln von $>$, $<$, $=$, $+$ und $-$ beweisen.

b) Hilbert leitet aus den Axiomen der Kongruenz und den vorhergehenden Axiomgruppen zuerst die Sätze 11 bis 26 ab. Einige Sätze werden aber in unserer Axiomatik falsch, und von einigen anderen müssen die Beweise eine kleine Änderung erfahren.

Satz 11 (Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck) und sein Beweis bleiben unverändert. Die Beweise der Sätze 12 und 13 (des ersten und zweiten Kongruenzsatzes für Dreiecke) muß man so führen, daß man von zwei Seiten die nicht-größere auf die andere abträgt. Wenn zwei oder mehr Halbstrahlen gegeben sind, so gibt es immer eine so kleine Strecke, daß sie sich auf jeden dieser Halbstrahlen abtragen läßt. Deshalb können die Beweise der Sätze 14 (die Nebenwinkel kongruenter Winkel sind kongruent; Scheitelwinkel sind kongruent; es existiert ein Winkel, der seinem Nebenwinkel kongruent ist) ungeändert bleiben. Satz 17 (über das Drachenviereck), welcher Satz 18 (den dritten Kongruenzsatz für Dreiecke) vorbereitet, und sein Beweis bleiben ungeändert; der Beweis von Satz 18 gilt aber nur unter der Voraussetzung, daß die Hilfspunkte B_0 und B'' existieren; diese Beschränkung hindert die Anwendung beim Beweis des Satzes 19 (Transitivität der Winkelkongruenz) aber nicht, weil man dort die kongruenten Strecken $OA = OA' = OA''$ so klein wählen kann, daß auch die für Satz 18 nötigen Hilfspunkte existieren. Die Sätze 15, 16, 20, welche die Addition, Subtraktion und Größenvergleichung der Winkel begründen, bleiben unverändert, nur muß man beim

Beweis des Satzes 15 eine kleine Änderung anbringen, um die Existenz des Punktes H' zu sichern. Der Beweis des Satzes 21 (alle rechten Winkel sind einander kongruent) bleibt wieder unverändert.

Satz 22 (der Satz vom Außenwinkel) gilt in unserer Geometrie nicht mehr allgemein, und deshalb gilt auch der Beweis des Satzes 23 (in jedem Dreieck liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber) nicht. Auch der Kongruenzsatz 25 gilt in unserer Geometrie nicht allgemein.

Satz 24 (die Umkehrung des Satzes 11) wird von Hilbert aus Satz 23 gefolgert, ist aber auch eine unmittelbare Folge des Satzes 13. Auch Satz 26 (jede Strecke ist halbierbar) bleibt richtig, aber der Hilbertsche Beweis stützt sich auf die Sätze 22 und 25 und kann z. B. in der folgenden Weise geändert werden.

Wir tragen an die gegebene Strecke AB in ihren Endpunkten nach verschiedenen Seiten den gleichen Winkel an (Fig. 1) und tragen auf die freien Schenkel gleiche Strecken $AC = BD$ ab, welche wir so klein wählen, daß A und C auf derselben Seite der Geraden BD und daß B und D auf derselben Seite der Geraden AC liegen. Man beweist nun leicht, daß die Strecken AB und CD sich in einem inneren Punkt E schneiden. Wenn nun AE nicht kongruent mit BE wäre, so gäbe es einen von E verschiedenen Punkt E' von AB, so daß $AE' = BE$, und deshalb auch $BE' = AE$. Nach Axiom III 5 wäre dann $\sphericalangle AE'C = \sphericalangle BED$ und $\sphericalangle AEC = \sphericalangle BE'D$. Nach dem Scheitelwinkelsatz ist $\sphericalangle AEC = \sphericalangle BED$, also wäre nach Satz 19 $\sphericalangle AE'C = \sphericalangle BED$; nach dem Scheitelwinkelsatz und der Eindeutigkeit der Winkelabtragung wäre $CE'D$ dann eine Gerade; dann würde es aber durch C und D zwei verschiedene Geraden CED und $CE'D$ geben, im Widerspruch zu Axiom I 2. Es muß also $AE = BE$ sein.

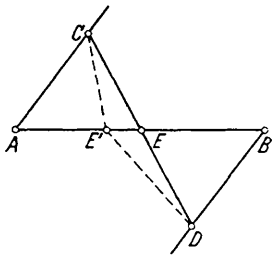


Fig. 1.

Man beweist nun leicht, daß jeder Winkel halbierbar ist.

2. Es ist in unserer Geometrie nicht ausgeschlossen, daß es *doppeltrechtwinklige Dreiecke* gibt. Einen rechten Winkel deuten wir mit dem Buchstaben R an.

a) Ist im Dreieck ABC $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA = R$, so halbiert die Winkelhalbierende CD des $\sphericalangle ACB$ die Seite AB, steht senkrecht auf AB, und ist mit CA und CB kongruent (Fig. 2).

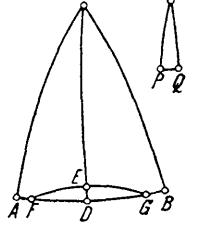


Fig. 2.

Es gibt dann kein doppeltrechtwinkliges Dreieck PQS ($\sphericalangle SPQ = \sphericalangle SQP = R$), wobei $PQ < CD$ und $PS < \frac{1}{2} AB$. Denn dann könnte

man E auf DC, F auf DA, und G auf DB so bestimmen, daß $DE = PQ$ und $DF = DG = PS$. Dann würde es zwei verschiedene Geraden FDG und FEG durch F und G geben.

b) Ist im Dreieck ABC $\measuredangle CAB = \measuredangle CBA = R$, und ist E ein Punkt der Strecke AB, so ist $CE = CA$.

1) CE kann nicht kleiner als CA sein.

Wenn CE senkrecht auf AB steht, ist der Satz trivial. Sonst ist einer der Winkel $\measuredangle CEA$ und $\measuredangle CEB$ kleiner als R; z. B. $\measuredangle CEA < R$ (Fig. 3). Die Winkelhalbierende von $\measuredangle ACE$ schneidet AE in einem Punkt F, wobei $AF < \frac{1}{2}AB$. Wenn nun $CE < CA$, so kann man G auf CA so bestimmen, daß $CG = CE$. Dann ist $\measuredangle CGF = \measuredangle CEF < R$,

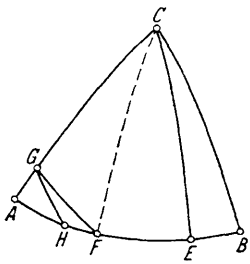


Fig. 3.

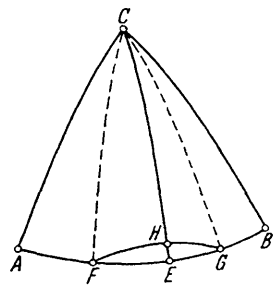


Fig. 4.

und das Lot in G auf AC schneidet also die Strecke AF in einem Punkt H. Die Existenz des Dreiecks GAH ist aber nach a) im Widerspruch zur Existenz des Dreiecks ABC.

2) CE kann nicht größer als CA sein.

Wenn $CE > CA$, so kann man H auf CE so bestimmen, daß $CH = CA$ (Fig. 4). Die Winkelhalbierenden von $\measuredangle ACE$ und $\measuredangle BCE$ schneiden AB bzw. in F und G. Dann ist $\measuredangle CHF = \measuredangle CAF = R$, und $\measuredangle CHG = \measuredangle CBG = R$, und es würde also zwei verschiedene Geraden FEG und FHG durch F und G geben.

CE ist also kongruent mit CA und CB und daher senkrecht auf AB.

c) Hieraus folgert man leicht:

Die Schenkel verschiedener doppeltrechtwinkliger Dreiecke sind einander gleich. Wenn eine Strecke mit einem solchen Schenkel kongruent ist, sagen wir, daß sie $= r$ ist. Es ist klar, daß es keine Strecke $= 2r$ gibt.

3. a) Ist im Dreieck ABC $\measuredangle CAB = \measuredangle CBA = R$, und liegt E auf der Verlängerung von AB, so ist auch $CE = r$.

Wir brauchen diesen Satz nur für die Mitte F von BE zu beweisen. Denn wenn $CF = r$ und daher CF senkrecht auf BE ist, so sind die Dreiecke CFB und CFE kongruent, also $CE = CB$.

1) CF kann nicht kleiner als r sein.

Wenn $\measuredangle CFB = R$, ist die Behauptung trivial.

Wenn $\measuredangle CFB > R$, so würde das Lot in F auf BF die Strecke BC in einem Punkt P schneiden, wobei auch $BP = r$, was unmöglich ist, da $BC = r$.

Wenn $\measuredangle CFB < R$, so kann CF nicht $< r$ sein. Denn dann könnte man G auf CB so bestimmen, daß $CG = CF$ (Fig. 5). Es sei H der Schnittpunkt von BF mit der Winkelhalbierenden von $\measuredangle BCF$,

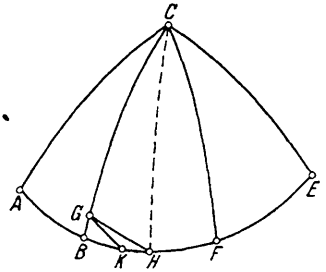


Fig. 5.

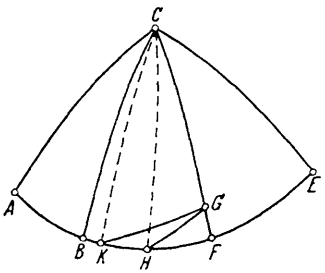


Fig. 6.

so ist $\measuredangle CGH = \measuredangle CFH < R$. Das Lot in G auf BG schneidet dann die Strecke BH in einem Punkt K. Dann wäre $BK = r$, was unmöglich ist, da dann $BE = 2\,BF > 2r$ wäre.

2) CF kann nicht größer als r sein.

Wenn $CF > r$ wäre, so könnte man G auf CF so bestimmen, daß $CG = r$ (Fig. 6). Die Winkelhalbierenden von $\measuredangle BCF$ und $\measuredangle ACF$ schneiden AF bzw. in den verschiedenen Punkten H und K. Dann sind die Dreiecke CGK und CAK kongruent, und ebenso CGH und CBH. Dann ist $\measuredangle CGK = R$, und $\measuredangle CGH = R$, was unmöglich ist.

CF muß also $= r$ sein, daher senkrecht auf AB stehen. Dann gilt dasselbe für CE.

b) Mit Hilfe von 2b und 3a beweist man leicht den Satz:

Wenn eine Seite eines Dreiecks $= r$, und ein anliegender Winkel $= R$ ist, so ist auch die Gegenseite des Winkels $= r$.

4. a) Nimmt man auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels kongruente Strecken $CB = CD < r$ (wenn es überhaupt eine Strecke r, d. h. ein zweirechtwinkliges Dreieck gibt) und bestimmt die Winkelhalbierende von $\measuredangle BCD$, welche BD in A schneidet, so ist auch $AB < r$, und mit Hilfe von 3b beweist man in einfacher Weise, daß jede Strecke auf einer Seite oder im Inneren des Dreiecks ABC kleiner als r ist.

Jedes konvexe Gebiet[8]) in der axiomatischen Ebene $\mathfrak{A}$, in welchem es keine Strecke r gibt, nennen wir „*ein Gebiet* $\mathfrak{G}$“.

b) Der Satz vom Außenwinkel.

1) Wenn beim Dreieck ABC der Außenwinkel $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACB$, so ist die Winkelhalbierende $BF = r$.

Wenn $AB > CB$, so bestimmen wir G auf BA, so daß $BG = BC$ (Fig. 7). Wegen der Kongruenz der Dreiecke BCF und BGF ist dann

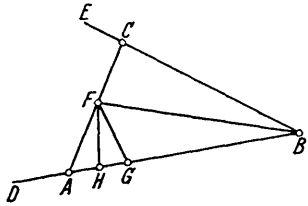


Fig. 7.

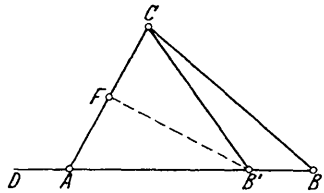


Fig. 8.

$\sphericalangle FGB = \sphericalangle FCB$, also $= \sphericalangle FAD$, daher $\sphericalangle FGA = \sphericalangle FAG$. Die Winkelhalbierende FH von $\sphericalangle AFG$ steht also senkrecht auf AG, aber auch auf FB, denn diese halbiert den Nebenwinkel. Das Dreieck FHB hat also zwei rechte Winkel, also ist $BF = r$.

Wenn $AB < CB$, so kann man BA auf BC abtragen und der Beweis bleibt derselbe. Wenn $AB = CB$, so ist der Satz trivial.

2) Wenn der Außenwinkel $\sphericalangle CAD < \sphericalangle ACB$ ist (Fig. 8), so kann man B' auf AB so bestimmen, daß $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ACB'$, und im Dreieck $AB'C$ ist dann die Winkelhalbierende $B'F = r$.

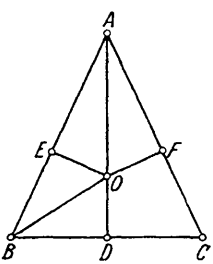


Fig.9.

In einem Gebiet $\mathfrak{G}$ gelten also der Außenwinkelsatz (Satz 22) und seine Folgerungen, wie Satz 23, und seine Umkehrung, Satz 25, und der Satz: die Differenz zweier Dreiecksseiten ist kleiner als die dritte Seite.

c) Nehmen wir einen beliebigen Winkel in $\mathfrak{G}$ und bestimmen in $\mathfrak{G}$ auf den Schenkeln gleiche Strecken AB und AC (Fig. 9). Die Winkelhalbierende von $\sphericalangle BAC$ schneidet BC in D senkrecht. Die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ABD$ schneidet AD in O. Nun ist $BD = CD < BA = CA$. Wir können also E auf BA und F auf CA so bestimmen, daß

[8]) Unter einem konvexen Gebiet $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}$ verstehen wir eine Teilmenge von $\mathfrak{A}$ mit den nachfolgenden Eigenschaften: a) Es gibt wenigstens drei Punkte von $\mathfrak{B}$, welche nicht in einer Geraden liegen. b) Wenn A und B Punkte von $\mathfrak{B}$ sind, so gibt es wenigstens einen Punkt C von $\mathfrak{B}$ derart, daß B zwischen A und C liegt. c) Wenn A und C zwei Punkte von $\mathfrak{B}$ sind, so gehört jeder Punkt von $\mathfrak{A}$, der zwischen A und C liegt, auch $\mathfrak{B}$ an.

$BE = BD$ und $CF = CD$. Dann sind OD, OE und OF kongruent, und bzw. senkrecht auf BC, BA und CA. Die Verbindungsstrecken von O mit den Punkten der Dreiecksseiten sind alle $\geqq OD$. Nehmen wir eine Strecke $\varrho \leqq OD$, so kann man diese in $\mathfrak{G}$ auf jeden Halbstrahl aus O abtragen. Die Punkte P, für die $OP < \varrho$ ist, bilden zusammen mit O ein konvexes Kreisgebiet $\mathfrak{G}_0$.

Die Punkte P, mit $OP < \frac{1}{4}\varrho$, bilden zusammen mit O wieder ein konvexes Kreisgebiet $\mathfrak{G}_1$, mit der Eigenschaft, daß jede Strecke in $\mathfrak{G}_1$ sich aus jedem Punkt von $\mathfrak{G}_1$ auf jeden Halbstrahl aus diesem Punkt abtragen läßt, ohne daß man das Kreisgebiet $\mathfrak{G}_0$ verläßt. Jede Figur in $\mathfrak{G}_1$ läßt sich an jeder Geraden, welche „durch $\mathfrak{G}_1$ geht" (d. h. wenigstens einen Punkt von $\mathfrak{G}_1$ enthält), spiegeln, und man erhält dann eine Figur im Kreisgebiet $\mathfrak{G}_0$. Aus jedem Punkt von $\mathfrak{G}_1$ kann man auf jede Gerade durch $\mathfrak{G}_1$ genau ein Lot ziehen. Für zwei Dreiecke, von denen wenigstens eines in $\mathfrak{G}_1$ liegt, läßt sich der dritte Kongruenzsatz (Satz 18) leicht beweisen.

Aus $\mathfrak{G}_1$ kann man in derselben Weise ein Gebiet $\mathfrak{G}_2$ mit Radius $\frac{1}{16}\varrho$ herleiten, usw.

Man beweist nun leicht, *daß es um jeden Punkt ein Kreisgebiet* $\mathfrak{G}_0$, *und also auch ein „*$\mathfrak{G}_1$*-Gebiet", ein* $\mathfrak{G}_2$*-Gebiet usw. gibt.*

§ 2.

Begründung der projektiven Geometrie.

5. Hessenberg [9]) hat einen „ebenen" Beweis des Satzes von Pappus aus den Kongruenzsätzen gegeben für den elliptischen und den euklidischen Fall, wobei er schon bemerkt, daß der Beweis auch im hyperbolischen Fall anwendbar wäre, wenn man vorher „uneigentliche Punkte" einführen könnte. Diese Einführung uneigentlicher Punkte ist dann Hjelmslev in „absoluter Weise", ohne Zuhilfenahme des Raumes, gelungen. Dabei setzt er voraus, daß jeder eigentliche Punkt an jeder eigentlichen Geraden gespiegelt werden kann. Weil das bei unserer Axiomatik nicht mehr der Fall ist, müssen wir für jeden Satz der Hjelmslevschen Arbeit die dadurch bedingte Einschränkung bestimmen [10]). Es genügt, wenn wir die so eingeschränkten Sätze nennen (die Nummern der ursprünglichen Hjelmslevschen Sätze schreiben wir zwischen Klammern), denn für die Beweise, welche sich fast nicht ändern, können wir auf Hjelmslev verweisen.

---

[9]) G. Hessenberg, Neue Begründung der Sphärik, Sitzungsber. der Berliner Math. Ges. 1905, S. 69—74 (Archiv d. Math. u. Phys. (3) 9).

[10]) Hjelmslev, l. c. Math. Annalen 64. Wir brauchen hier vorläufig nur die Sätze 1—5, 8—11, 23.

Wir denken uns ein Gebiet $\mathfrak{G}_0$, und in diesem die zugehörigen Gebiete $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_5$ bestimmt. Mit Hjelmslev bezeichnen wir mit S_a die Spiegelung an einer Geraden a, und wenn A durch diese Spiegelung nach B geführt wird, schreiben wir $B = S_a A$.

Sind a und b zwei verschiedene Geraden durch $\mathfrak{G}_2$, und ist A ein Punkt von $\mathfrak{G}_2$, aber nicht Schnittpunkt von a und b, so haben die Punkte $S_a S_b A$ und $S_b S_a A$ eine Spiegelungsachse c durch A, von welcher gesagt wird, daß sie dem Paare $(a\,b)$ angehört. Wenn a und b sich schneiden, so geht c durch diesen Schnittpunkt. Wenn man von einem anderen Punkt A_1 von c ausgeht, welcher nicht Schnittpunkt von a und b ist, so erhält man dieselbe Gerade c (Satz 1).

Sind a, b, c drei verschiedene Geraden durch $\mathfrak{G}_3$, und gehört c dem Paar $(a\,b)$ an, so ist für jeden Punkt M von $\mathfrak{G}_3$ $S_a S_b S_c M = S_c S_b S_a M$ (Satz 2). Wendet man diese Gleichheit auf einen Punkt M von a an, so folgt unmittelbar, daß dann auch a dem Paar $(b\,c)$ angehört (Satz 3).

Wenn vier verschiedene Geraden a, b, c, d durch $\mathfrak{G}_3$ gehen, und c und d dem Paar $(a\,b)$ angehören, so muß d auch dem Paar $(b\,c)$ angehören (Satz 8; beim Beweis werden als Hilfssätze 4 und 5 benutzt). Wenn a und b zwei verschiedene nichtschneidende Geraden durch $\mathfrak{G}_3$ sind, so wird die Gesamtheit aller Geraden durch $\mathfrak{G}_3$, welche dem Paar $(a\,b)$ angehören, als ein „uneigentlicher Punkt" bezeichnet, während man sagt, daß jede dieser Geraden diesen uneigentlichen Punkt enthält. Es ist klar, daß zwei verschiedene Geraden durch $\mathfrak{G}_3$ dann immer genau einen (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkt gemein haben (Satz 9), und daß es durch einen Punkt von $\mathfrak{G}_3$ und einen anderen (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkt immer genau eine Gerade gibt (Satz 10).

Wenn a, b, c durch $\mathfrak{G}_5$ gehen und einen (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkt U gemein haben, so kann für alle Punkte von $\mathfrak{G}_3$ die Transformation $S_a S_b S_c$ durch eine einzige Spiegelung ersetzt werden. Die Achse dieser Spiegelung geht durch U und durch $\mathfrak{G}_3$ (Satz 11).

Dann kann der Hessenbergsche Hilfssatz bewiesen werden: Wenn die Seiten eines vollständigen Vierseits durch $\mathfrak{G}_5$ gehen, und die (eigentlichen oder uneigentlichen) Gegeneckenpaare aus einem Punkt P von $\mathfrak{G}_5$ durch die Geradenpaare $a\,a_1$, $b\,b_1$, $c\,c_1$ projiziert werden, so daß (für die Punkte von $\mathfrak{G}_5$) $S_b S_c = S_{c_1} S_{b_1}$ ist, so ist (für diese Punkte) auch $S_c S_a = S_{a_1} S_{c_1}$ und $S_a S_b = S_{b_1} S_{a_1}$.

Schließlich findet man mit Hessenberg durch dreimalige Anwendung dieses Satzes den Satz von Pappus in folgender Form:

Satz (α): *Wenn die Ecken eines Sechsecks abwechselnd auf zwei Geraden liegen, und jedes Paar Gegenseiten sich in einem Punkt schneidet, wenn weiter eine Ecke F und der Schnittpunkt P der nicht durch F gehen-*

den Gegenseiten Punkte von $\mathfrak{G}_5$ sind, und auch die drei nicht durch F oder P gehenden Geraden durch $\mathfrak{G}_5$ gehen, so liegen die drei Schnittpunkte der Gegenseitenpaare auf einer Geraden (Satz 23).

6. Dann können wir in zwei verschiedenen Weisen zu einer projektiven Geometrie gelangen.

a) Wir können auch weiter die Hjelmslevsche Methode anwenden zur Einführung uneigentlicher Geraden mit Hilfe von „Halbdrehungen", usw.[11]). Um die erforderlichen Sätze und Konstruktionen anwenden zu können, muß man sich aber wieder auf ein Teilgebiet beschränken: Wir nehmen um einen Punkt O ein $\mathfrak{G}_5$-Gebiet $\mathfrak{B}$, definieren die Halbdrehungen um O zuerst für die Punkte von $\mathfrak{B}$, und behandeln die eigentlichen Punkte außerhalb $\mathfrak{B}$ genau wie die uneigentlichen. Das Resultat ist dann der nachstehende Satz (β), der auch in der zweiten Weise erreicht wird.

b) In einem $\mathfrak{G}_5$-Gebiet $\mathfrak{B}$ gilt der Satz von Pappus, daher auch der Satz von Desargues[12]), mit dessen Hilfe wir in bekannter Weise „ideale Elemente" einführen können[13]) und so eine vollständige projektive Ebene erhalten, in welcher die idealen Verknüpfungssätze, der Satz von Pappus und die projektiven Anordnungssätze gelten.

Jede eigentliche Gerade durch $\mathfrak{B}$ ist dann Teil einer projektiven Geraden. Die eigentlichen Geraden durch $\mathfrak{B}$ und durch einen eigentlichen Punkt A außerhalb $\mathfrak{B}$ entsprechen so projektiven Geraden durch einen projektiven Punkt A'. Denn nach Satz (α) kann man leicht eine Pappus-Figur konstruieren, welche drei beliebige dieser eigentlichen Geraden und außer A nur noch 8 Punkte von $\mathfrak{B}$ enthält; diese Figur beweist, daß die drei entsprechenden projektiven Geraden durch einen projektiven Punkt gehen. Wir können nun A mit A' identifizieren und erhalten so den

Satz (β): *Die axiomatische Ebene $\mathfrak{A}$, in der ein $\mathfrak{G}_5$-Gebiet $\mathfrak{B}$ gewählt ist, läßt sich erweitern zu einer vollständigen „projektiven $\mathfrak{B}$-Ebene", in welcher der Satz von Pappus allgemein gilt, während die eigentlichen Geraden durch $\mathfrak{B}$ die Durchschnitte von $\mathfrak{A}$ mit den projektiven Geraden durch $\mathfrak{B}$ sind.*

---

[11]) Dabei braucht man dann auch die meisten der bisher noch nicht benutzten Hjelmslevschen Sätze.

[12]) Der Beweis von Hessenberg für den Desarguesschen Satz aus dem Pappusschen (Math. Annalen 61, S. 161 ff.) gilt zwar nicht in einer beschränkten Ebene, läßt sich aber so abändern, daß er auch in diesem Fall gilt.

[13]) Eine Andeutung eines Weges, um in die ebene Geometrie auf Grund des Desarguesschen Satzes ideale Elemente einzuführen, gibt M. Dehn, Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck, Math. Annalen 53 (1900), S. 407. Auch die von R. Moufang gegebene Einführung auf Grund des Vierseitssatzes kann hier angewandt werden, weil der Vierseitssatz auch in einer begrenzten Ebene eine Folge des Desarguesschen Satzes ist. Vgl. R. Moufang, Math. Annalen 105 (1931), S. 759—778 und L. J. Smid, Math. Annalen 111 (1935), S. 285—288.

Wir müssen aber noch beweisen, daß auch die anderen eigentlichen Geraden Durchschnitte von $\mathfrak{A}$ mit projektiven Geraden sind.

7. a) Es sei a eine eigentliche Gerade, welche nicht durch $\mathfrak{B}$ geht, und $\mathfrak{C}$ ein $\mathfrak{G}_5$-Gebiet um einen Punkt von a. Wenn P, Q, R drei verschiedene Punkte von a in $\mathfrak{C}$ sind, so kann man in der folgenden Weise eine Pappus-Figur konstruieren. Man zieht zwei Geraden l und m durch $\mathfrak{C}$, welche nicht durch P, Q oder R gehen, und sich in einem Punkt S von $\mathfrak{B}$ schneiden. Dann kann man auf l in $\mathfrak{B}$ einen Punkt A_1 so wählen, daß auch die Punkte $(PA_1, m) = A_2$, $(QA_2, l) = A_3$, $(RA_3, m) = A_4$, $(PA_4, l) = A_5$, $(QA_5, m) = A_6$ bestehen und in $\mathfrak{B}$ liegen. Alle betrachteten Geraden gehen durch $\mathfrak{C}$. Nach dem in der projektiven $\mathfrak{C}$-Ebene gültigen Satz von Pappus liegen also R, A_6 und A_1 auf einer „projektiven $\mathfrak{C}$-Geraden" durch $\mathfrak{C}$, und daher auf einer eigentlichen Geraden. Alle diese Geraden, außer a, gehen durch $\mathfrak{B}$. Nach dem in der projektiven $\mathfrak{B}$-Ebene gültigen Satz von Pappus liegen dann P, Q, R auf einer „projektiven $\mathfrak{B}$-Geraden". Die in $\mathfrak{C}$ liegenden Punkte der eigentlichen Geraden a liegen also auf einer projektiven Geraden a'.

b) Die Umkehrung dieses Satzes läßt sich nun auch leicht beweisen. Dazu beweisen wir zuerst, daß eine projektive Gerade a' durch einen Punkt P von $\mathfrak{C}$ wenigstens noch einen Punkt Q von $\mathfrak{C}$ enthält.

Wir ziehen eine Gerade durch P und durch einen Punkt D von $\mathfrak{B}$, bestimmen auf dieser Geraden in $\mathfrak{C}$ einen Punkt A zwischen D und P, und B auf der Verlängerung von DP. Dann nehmen wir E in $\mathfrak{B}$, nicht auf der Geraden DP, ziehen EA und ED und bestimmen eine Gerade durch B, welche die Verlängerung von EA in einem Punkt C von $\mathfrak{C}$ und die Verlängerung von ED in einem Punkt F von $\mathfrak{B}$ trifft. Diese vier Geraden gehen alle durch $\mathfrak{B}$, sind also die Durchschnitte von $\mathfrak{A}$ mit projektiven $\mathfrak{B}$-Geraden. In der projektiven $\mathfrak{B}$-Ebene läßt sich eine projektive Anordnung einführen, deren Trennungsrelationen in Einklang sind mit den Zwischenrelationen auf den eigentlichen Geraden durch $\mathfrak{B}$. Wählen wir dann die Gerade EDF als „Unendlichkeitslinie", so ist es klar, daß die projektive Gerade a', welche die Seite AB des Dreiecks ABC in P trifft, wenigstens eine der Strecken AC und BC in einem Punkt Q trifft.

Dann gibt es aber eine eigentliche Gerade a durch P und Q. Alle Punkte von a in $\mathfrak{C}$ müssen a' angehören. Aber auch jeder Punkt R von a' in $\mathfrak{C}$ muß a angehören, was man mit Hilfe einer Pappus-Figur (wie oben), oder auch in der folgenden indirekten Weise, leicht beweist. Wenn R ein Punkt von a' in $\mathfrak{C}$ außerhalb a wäre, so würden auch die in $\mathfrak{C}$ liegenden Punkte von PR und QR zu a' gehören. Durch einen beliebigen Punkt von $\mathfrak{B}$ gibt es dann sicher eine Gerade, welche PQ,

PR und QR in wenigstens zwei verschiedenen Punkten von $\mathfrak{C}$ schneidet. Die entsprechende projektive $\mathfrak{B}$-Gerade würde dann zwei verschiedene Punkte von a' enthalten, daher mit a' zusammenfallen. Jeder Punkt von $\mathfrak{B}$ würde also zu a' gehören, was unmöglich ist.

Die Durchschnitte von $\mathfrak{C}$ mit den eigentlichen Geraden durch $\mathfrak{C}$ sind also identisch mit den Durchschnitten von $\mathfrak{C}$ mit den projektiven $\mathfrak{B}$-Geraden durch $\mathfrak{C}$.

c) Wenn die eigentlichen Geraden a, b, c durch $\mathfrak{C}$ und durch einen eigentlichen Punkt T gehen, so gehen auch die mit diesen Geraden in $\mathfrak{C}$ übereinstimmenden projektiven $\mathfrak{B}$-Geraden a', b', c' durch einen projektiven Punkt T'. Wenn T in $\mathfrak{C}$ liegt, ist das selbstverständlich; doch der Satz gilt allgemein. Denn daß a, b, c ein Büschel bilden, kann verifiziert werden durch eine Pappus-Figur, welche a, b, c enthält und deren übrige acht Punkte in $\mathfrak{C}$ liegen. Aus dieser Figur geht hervor, daß a', b', c' durch einen projektiven Punkt T' gehen. Die projektiven $\mathfrak{B}$-Geraden, welche in $\mathfrak{C}$ übereinstimmen mit den eigentlichen Geraden durch $\mathfrak{C}$ und einen eigentlichen Punkt T, gehen also alle durch denselben projektiven Punkt T'.

Wir müssen aber noch beweisen, daß T mit T' zusammenfällt.

d) Es sei nun $\mathfrak{B}_1$ ein Kreisgebiet innerhalb $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}_1$ ein Kreisgebiet innerhalb $\mathfrak{C}$. Dann gibt es eigentliche Geraden a, b durch T und $\mathfrak{C}_1$; die entsprechenden projektiven $\mathfrak{B}$-Geraden a', b' gehen durch T'. Es gibt nun eine Bewegung[14]) (Rotation um T), welche T fest läßt, keine Gerade durch T in sich selbst transformiert und die Punkte von $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{C}_1$ bzw. in die Punkte eines Gebietes $\mathfrak{B}_2$ in $\mathfrak{B}$ und eines Gebietes $\mathfrak{C}_2$ in $\mathfrak{C}$ transformiert. Die eigentlichen Geraden a, b werden durch diese Bewegung in eigentliche Geraden a^*, b^*, transformiert, welche noch immer durch T und $\mathfrak{C}$ gehen. Die a^* und b^* entsprechenden projektiven $\mathfrak{B}$-Geraden $a^{*\prime}$ und $b^{*\prime}$ gehen also durch T'.

Die Punkte von $\mathfrak{B}_1$ werden in die Punkte von $\mathfrak{B}_2$ transformiert. Diese Bewegung innerhalb $\mathfrak{B}$ läßt sich nun in einfacher Weise erweitern zu einer Kollineation in der projektiven $\mathfrak{B}$-Ebene („Bewegungskollineation"); diese Kollineation stimmt dann natürlich für diejenigen eigentlichen Punkte, welche in eigentliche Punkte transformiert werden, mit der ursprünglichen Bewegung überein. Die Geraden a', b', welche eigentliche Punkte in $\mathfrak{C}_1$ enthalten, werden also in $a^{*\prime}, b^{*\prime}$ transformiert, denn diese enthalten die

[14]) Es ist klar, daß in der axiomatischen Ebene $\mathfrak{A}$ im allgemeinen nicht jeder Punkt durch eine gegebene Bewegung transformiert werden kann. Wenn wir sagen, daß die Gerade a durch die Bewegung in a^* transformiert wird, so meinen wir nur, daß es Punkte von a gibt, welche durch die Bewegung transformiert werden können, und daß die transformierten Punkte dann auf a^* liegen.

transformierten Punkte in $\mathfrak{C}_2$. Der Schnittpunkt von a' und b' wird also in den Schnittpunkt von $a^{*'}$ und $b^{*'}$, d. h. T' wird in sich selbst transformiert. Wenn nun T' von T verschieden wäre, so würde die projektive $\mathfrak{B}$-Gerade $T\,T'$ in sich selbst transformiert werden, und daher auch die mit dieser Geraden in einer $\mathfrak{G}_5$-Umgebung von T zusammenfallende eigentliche Gerade. Das wäre aber im Widerspruch zu unserer Voraussetzung über die Bewegung. T muß also mit T' zusammenfallen und daher auch a' angehören. Die eigentlichen Punkte von a liegen also alle auf einer projektiven Geraden a'.

e) Die Umkehrung dieses Satzes läßt sich nun auch leicht beweisen, und *so erscheinen schließlich die eigentlichen Geraden als die Durchschnitte von $\mathfrak{A}$ mit den projektiven $\mathfrak{B}$-Geraden durch $\mathfrak{A}$.* In dieser projektiven Ebene kann man dann projektive Koordinaten einführen[15]), welche einem geordneten kommutativen Körper angehören. Die projektive Geometrie ist damit begründet.

8. Die Einordnung der metrischen Geometrie kann nun in verschiedenen Weisen ausgeführt werden[16]), von denen wir hier eine skizzieren.

a) Jede Bewegung kann zu einer „Bewegungskollineation" (vgl. 7 d)) ergänzt werden. Für die Spiegelung an einer eigentlichen Geraden g beweist man leicht, daß sie eine involutorische zentrale Kollineation gibt; die Lote auf g enthalten also denselben projektiven Punkt, den Pol von g. Weil jede Bewegung sich aus Spiegelungen zusammensetzen läßt, ist auch jede Bewegungskollineation eine projektive Verwandtschaft. Die Umwendung um einen eigentlichen Punkt P läßt sich zusammensetzen aus den Spiegelungen an zwei senkrechten Geraden durch P und gibt daher auch eine involutorische zentrale Kollineation. Diese hat zur Achse eine projektive Gerade p. Die Pole der Geraden durch P müssen alle auf p liegen, welche daher die Polare von P heißt. Die Drehung um einen rechten Winkel um P gibt eine gleichsinnige Involution für die Geraden durch P. Deshalb ist auch die Zuordnung zwischen den Geraden durch P und ihren Polen eine Projektivität.

Wenn zwei verschiedene eigentliche Punkte P und Q dieselbe Polare f haben, und R ist ein nicht auf der Geraden PQ liegender eigentlicher Punkt, so haben die Geraden $P\,R$ und $Q\,R$ zwei verschiedene Pole auf f.

---

[15]) Mit Einschaltung des projektiven Fundamentalsatzes findet man das bei Schur, Über den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie, Math. Annalen 51 (1899), S. 401 ff. und l. c. Math. Annalen 55, S. 281 ff. Ohne Einschaltung des Fundamentalsatzes bei Hilbert, Grundlagen, §§ 24 bis 27 und 34.

[16]) Vgl. z. B. Schur, l. c. Math. Annalen 55, S. 286 ff., und Pasch-Dehn, Vorlesungen über neuere Geometrie (Berlin 1926), S. 210 ff.

Q hat also auch f zur Polaren. Dasselbe folgt nun unmittelbar auch für die eigentlichen Punkte der Geraden PQ. Es gibt also zwei Fälle:

1. Alle eigentlichen Punkte haben verschiedene Polaren.

2. Alle eigentlichen Punkte haben dieselbe Polare f.

b) Im ersten Fall kann man die Zuordnung zwischen den eigentlichen Geraden und ihren Polen ergänzen zu einer vollständigen Korrelation $x_i' = \Sigma a_{ik} u_k$ $(i, k = 1, 2, 3)$ in der projektiven Ebene. Wenn aber von zwei schneidenden eigentlichen Geraden eine durch den Pol der anderen geht, so sind sie senkrecht, und daher geht auch die andere durch den Pol der ersten. Die Matrix $\|a_{ik}\|$ muß daher symmetrisch oder schiefsymmetrisch sein. Das letzte ist aber ausgeschlossen, weil die Korrelation nicht ausgeartet ist. Die Korrelation ist also eine Polarität, und diese läßt sich durch eine passende Wahl des Koordinatendreiecks und des Einheitspunkes in die Gestalt $x x' + y y' + k z z' = 0$ $(k \neq 0)$ schreiben. Aus der Konstruktion der Polarität geht hervor, daß jede Bewegungskollineation eine „P-Kollineation" ist, d. h. eine Kollineation, welche die Polarität invariant läßt. Daß umgekehrt auch jede P-Kollineation, welche wenigstens einen eigentlichen Punkt in einen eigentlichen Punkt transformiert, eine Bewegungskollineation ist, ergibt sich daraus, daß es genau vier Bewegungskollineationen und auch nicht mehr P-Kollineationen gibt, welche einen gegebenen eigentlichen Punkt mit hindurchgehender Geraden in einen zweiten gegebenen eigentlichen Punkt mit hindurchgehender Geraden transformieren.

Weil diese P-Kollineationen auch wirklich existieren, müssen für jeden eigentlichen Punkt (x, y, z) auch $\sqrt{x^2 + y^2}$ und $\sqrt{k(x^2 + y^2 + k z^2)}$ existieren und der letztere Ausdruck muß $\neq 0$ sein.

Umgekehrt erhält man so alle Geometrieen der betrachteten Art. Man konstruiert einen geordneten Körper, in welchem die Operation $\sqrt{1 + p^2}$ immer ausführbar, k ein von Null verschiedenes Element, und die Operation $\sqrt{1 + \frac{q^2}{k}}$ wenigstens für alle Elemente q einer Null enthaltenden Strecke ausführbar ist. Mit diesem Körper bildet man eine ebene projektive Geometrie, und legt einer Metrik die Polarität $x x' + y y' + k z z' = 0$ zugrunde. Jedes „konvexe" Gebiet, das nur Punkte enthält, für welche $\sqrt{k(x^2 + y^2 + k z^2)}$ existiert und $\neq 0$ ist, kann nun als axiomatische Ebene $\mathfrak{A}$ betrachtet werden.

Die metrische Geometrie läßt sich (wenn man keine neuen Punkte einfügt, um den Körper zu erweitern) im elliptischen Fall $(k > 0)$ nicht immer auf alle projektiven Punkte, und im hyperbolischen Fall $(k < 0)$ nicht immer auf alle „inneren Punkte" (d. h. Punkte, für welche

$x^2 + y^2 + kz^2 < 0$ ist) ausdehnen, denn es kann dabei Punkte geben, für welche $\sqrt{k\,(x^2 + y^2 + kz^2)}$ nicht existiert.

c) Im zweiten Fall enthält f keine eigentlichen Punkte, und sie wird, wie man leicht beweist, von jeder Involution von senkrechten Geraden durch einen eigentlichen Punkt in derselben Punktinvolution geschnitten. Bei einer passenden Wahl von Koordinatendreieck und Einheitspunkt erhält f die Gleichung $z = 0$, und die Involution die Gleichung $xx' + yy' = 0$. Die Kollineationen, welche f invariant lassen, erhalten bei Übergang auf nicht-homogene Koordinaten die Gestalt

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \bar{x} = \alpha x + \beta y + \lambda, \\ \bar{y} = \gamma x + \delta y + \mu. \end{cases}$$

Für eine Spiegelung verifiziert man ohne Mühe, daß die Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$ ist. Jede Bewegungskollineation setzt sich aus Spiegelungen zusammen und ist daher eine „E-Kollineation", d. h. eine Transformation (A), deren homogener Teil die Involution $xx' + yy' = 0$ invariant läßt und die Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ hat. Wie unter b) zeigt man, daß auch umgekehrt jede E-Kollineation, welche wenigstens einen eigentlichen Punkt in einen eigentlichen Punkt transformiert, eine Bewegungskollineation ist.

In diesem (Euklidischen) Fall finden wir für den geordneten Körper der Koordinaten nur die Bedingung, daß $\sqrt{1 + p^2}$ immer existiert. Mit solchen Körpern kann man nun leicht die Geometrieen der betrachteten Art konstruieren. Die metrische Geometrie läßt sich hier immer auf alle affinen Punkte (d. h. Punkte, für welche $z \neq 0$ ist) ausdehnen.

(Eingegangen am 16. 6. 1935.)

Über Kurven mit isotropen Normalen.

Von

J. Lense in München.

Von C. Guichard[1]) wurde gezeigt, daß eine Kurve $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t)$ des euklidischen R_n durch Angabe von $\mathfrak{x}'^2, \mathfrak{x}''^2, \ldots, \mathfrak{x}^{(n)2}$ bis auf ihre Lage bestimmt ist. Der Nachweis dieses Satzes wird durch verschiedene Kunstgriffe auf die Existenz von mehrfach isotropen Kurven zurückgeführt, deren Existenz durch ein Rekursionsverfahren aus jener der einfach isotropen Kurven erschlossen wird. An Stelle von $\mathfrak{x}'^2, \mathfrak{x}''^2, \ldots, \mathfrak{x}^{(n)2}$ kann man auch die sogenannten Gramschen Determinanten

$$G_\nu = \begin{vmatrix} \mathfrak{x}'^2 & \mathfrak{x}'\mathfrak{x}'' & \ldots & \mathfrak{x}'\mathfrak{x}^{(\nu)} \\ \mathfrak{x}''\mathfrak{x}' & \mathfrak{x}''^2 & \ldots & \mathfrak{x}''\mathfrak{x}^{(\nu)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{x}^{(\nu)}\mathfrak{x}' & \mathfrak{x}^{(\nu)}\mathfrak{x}'' & \ldots & \mathfrak{x}^{(\nu)2} \end{vmatrix} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

zur Charakterisierung der Kurve verwenden. Im folgenden soll dieser Satz nach einem anderen Verfahren bewiesen werden, wodurch die Fragestellung direkt auf den Existenzsatz aus der Theorie der Differentialgleichungen zurückgeführt und eine tiefere Einsicht in die bei den Gramschen Determinanten G_ν vorliegenden Verhältnisse vermittelt wird. Wenn man die dabei angestellten Überlegungen geometrisch deutet, wird darüber hinaus noch die Frage nach den isotropen Normalen einer Kurve vollständig beantwortet.

§ 1.

Wir betrachten eine Kurve des euklidischen Raumes R_n in der Umgebung eines ihrer Punkte P. Sie sei gegeben durch die Vektorgleichung in rechtwinkeligen Koordinaten

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t),$$

wobei $\mathfrak{x}(t)$ in der genannten Umgebung als analytische Funktion der komplexen Veränderlichen t vorausgesetzt ist; der Punkt sei durch $t = t_0$ gegeben. $\mathfrak{x}^{(\nu)}$ möge in bekannter Weise die ν-te Ableitung von $\mathfrak{x}$ bedeuten. Ferner führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$a_{\mu\nu} = \mathfrak{x}^{(\mu)}\mathfrak{x}^{(\nu)}, \quad A_\mu = a_{\mu\mu}.$$

[1]) C. Guichard. Les courbes de l'espace à n dimensions, Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 29, Paris, Gauthiers-Villars et Cie, 1928.

Durch fortgesetztes Differenzieren nach t erhalten wir

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}A_k' &= a_{k,\,k+1},\\
\tfrac{1}{2}A_k'' &= a_{k+1,\,k+1} + a_{k,\,k+2},\\
\tfrac{1}{2}A_k''' &= 3\,a_{k+1,\,k+2} + a_{k,\,k+3},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

allgemein für $\nu \geqq 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}A_k^{(2\nu-1)} &= a_{k,\,k+2\nu-1} + \binom{2\nu-1}{1} a_{k+1,\,k+2\nu-2}\\
&\quad + \binom{2\nu-1}{2} a_{k+2,\,k+2\nu-3} + \cdots + \binom{2\nu-1}{\nu} a_{k+\nu-1,\,k+\nu},\\
\frac{1}{2}A_k^{(2\nu)} &= a_{k,\,k+2\nu} + \binom{2\nu}{1} a_{k+1,\,k+2\nu-1} + \binom{2\nu}{2} a_{k+2,\,k+2\nu-2}\\
&\quad + \cdots + \binom{2\nu}{\nu-1} a_{k+\nu-1,\,k+\nu+1} + \binom{2\nu-1}{\nu} a_{k+\nu,\,k+\nu}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Beide Gleichungen ergeben sich durch vollständige Induktion, wenn man die Formel

$$2\binom{2\nu-1}{\nu} + \binom{2\nu}{\nu-1} = \binom{2\nu+1}{\nu}$$

verwendet. Löst man die Gleichungen (1) der Reihe nach auf, so erhält man

$$\begin{aligned}
a_{k,\,k+2\nu-1} &= \beta_{0,\,2\nu-1} A_k^{(2\nu-1)} + \beta_{1,\,2\nu-1} A_{k+1}^{(2\nu-3)}\\
&\quad + \cdots + \beta_{\nu-1,\,2\nu-1} A_{k+\nu-1}',\\
a_{k,\,k+2\nu} &= \beta_{0,\,2\nu} A_k^{(2\nu)} + \beta_{1,\,2\nu} A_{k+1}^{(2\nu-2)} + \cdots + \beta_{\nu,\,2\nu} A_{k+\nu}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Die Koeffizienten $\beta_{\mu\nu}$ sind rationale Zahlen. Einsetzen von (2) in (1) liefert die Rekursionsformel

$$\beta_{\mu\nu} = \beta_{\mu-1,\,\nu-1} + \beta_{\mu,\,\nu+1}. \tag{3}$$

Es ergibt sich z. B.

$$\beta_{0\nu} = \frac{1}{2},\ \beta_{\nu-1,\,2\nu-1} = (-1)^{\nu-1}\frac{2\nu-1}{2},\quad \beta_{\nu,\,2\nu} = (-1)^{\nu}. \tag{4}$$

Ferner erhält man aus (3) und (4): *Die in einer Spalte der Gleichungen* (2) *auftretenden Koeffizienten $\beta_{\mu\nu}$ (μ fest) bilden arithmetische Reihen μ-ter Ordnung, die in einer Zeile auftretenden $\beta_{\mu\nu}$ (ν fest) haben abwechselndes Vorzeichen, das erste ist immer positiv. Keines der $\beta_{\mu\nu}$ ist* 0.

Daraus kann man in Verbindung mit (2) folgendes schließen: Ist

$$A_p \neq 0,\ A_{p+1} = A_{p+2} = \cdots = A_{p+q} = 0,\ A_{p+q+1} \neq 0, \tag{5}$$

so ist

$$\begin{aligned}
a_{\mu\nu} &= 0 \text{ für } \mu,\ \nu \geqq p+1,\ \mu+\nu \leqq 2p+2q+1,\\
a_{\mu\nu} &\neq 0 \text{ für } \mu,\ \nu \geqq p+1,\ \mu+\nu = 2(p+q+1).
\end{aligned}$$

Dabei sind die Gleichheits- und Ungleichheitszeichen bei den Funktionen $a_{\mu\nu}$ und A_μ so zu verstehen, daß immer identisches Verschwinden oder

Nichtverschwinden gemeint ist (siehe § 3). Der Satz gilt auch für $p = 0$ oder $q = 0$.

§ 2.

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\mathfrak{x}^{(\mu)}\mathfrak{x}^{(\nu)} = a_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n;\ a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}) \tag{6}$$

für ein bestimmtes $t = t_0$. Wenn die $a_{\mu\nu}$ gegeben sind, erhält man unter der Voraussetzung Det. $|a_{\mu\nu}| \neq 0$ sämtliche Lösungen von (6), wie man leicht erkennt, in folgender Weise: Man zerlegt die quadratische Form $\sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} z_\mu z_\nu$ in eine Summe von Quadraten $\sum_{\lambda=1}^{n} y_\lambda^2$ mit

$$y_\lambda = \sum_{\nu=1}^{n} x_\lambda^{(\nu)} z_\nu$$

(die y_ν und z_ν bedeuten Unbestimmte) und Det. $|x_\lambda^{(\nu)}| \neq 0$. Dann ist $a_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=1}^{n} x_\lambda^{(\mu)} x_\lambda^{(\nu)}$ und Det. $|x_\lambda^{(\nu)}|^2 = $ Det. $|a_{\mu\nu}|$, d. h. die Vektoren $\mathfrak{x}^{(\nu)}$ mit den Komponenten $x_\lambda^{(\nu)}$ bilden ein Lösungssystem von (6). Aus *einer* solchen Zerlegung bekommt man alle, wenn man auf die $x_\lambda^{(\nu)}$ irgendeine orthogonale Substitution anwendet und eventuell noch die Vorzeichen von $x_\lambda^{(1)}, x_\lambda^{(2)}, \ldots, x_\lambda^{(n)}$ (λ fest) ändert.

Jetzt werde für $t = t_0$ das System

$$\mathfrak{x}^{(\nu)}\mathfrak{x}^{(n)} = a_{\nu n} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ a_{\nu n} = a_{n\nu}) \tag{7}$$

bei gegebenen $a_{\nu n}$ betrachtet. Wir wählen die Vektoren $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \ldots, \mathfrak{x}^{(n-1)}$ beliebig, nur linear unabhängig voneinander. Dann lassen sich $n - 1$ Komponenten des Vektors $\mathfrak{x}^{(n)}$ aus den $n - 1$ ersten Gleichungen (7) als lineare Funktionen der noch übrigen Komponente berechnen. Für diese erhält man durch Einsetzen in die letzte der Gleichungen (7) eine quadratische Gleichung. (7) ist also mit willkürlichen, linear unabhängigen $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \ldots, \mathfrak{x}^{(n-1)}$ lösbar. Mit den Vektoren bilden wir die Produkte $\mathfrak{x}^{(\mu)}\mathfrak{x}^{(\nu)} = a_{\mu\nu}$ und fügen diese Gleichungen zu (7) hinzu. Dadurch entsteht das System (6). Die $a_{\nu n}$ mögen so beschaffen sein, daß sie zusammen mit den eben berechneten $a_{\mu\nu}$ eine nicht verschwindende Determinante ergeben. Gemäß den Überlegungen, die bei der Lösung des Systems (6) angestellt wurden, sind dann die Vektoren $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \ldots, \mathfrak{x}^{(n)}$ linear unabhängig.

Nun betrachten wir das System (7) in einer Umgebung des Punktes $t = t_0$, in der die auftretenden Funktionen von t analytisch sind, wobei aber noch nicht vorausgesetzt sei, daß $\mathfrak{x}^{(\nu)}$ die ν-te Ableitung von $\mathfrak{x}$ ist; der obere Zeiger soll also vorläufig nur die vorkommenden Vektoren numerieren. Aus einem bekannten Satz über die Lösung eines analytischen Gleichungssystems folgt nach den Betrachtungen des vorhergehenden Ab-

satzes, daß durch das System (7) in einer passenden Umgebung von $t = t_0$ der Vektor $\mathfrak{x}^{(n)}$ als analytische Funktion definiert ist, wenn die $a_{\nu n}$ und die linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \ldots, \mathfrak{x}^{(n-1)}$ willkürliche analytische Funktionen sind und die Det. $|a_{\mu\nu}|$ für $t = t_0$ und damit in der ganzen Umgebung von 0 verschieden ist. Man braucht, um das einzusehen, nur zu bedenken, daß die Funktionaldeterminante von (7) gerade Det. $|x_i^{(\nu)}|$ ist.

Nun machen wir einen weiteren Schritt und fassen (7) als System von Differentialgleichungen für den Vektor $\mathfrak{x}(t)$ bei gegebenen Funktionen $a_{\nu n}$ auf. $\mathfrak{x}^{(\nu)}$ soll also wieder die ν-te Ableitung von $\mathfrak{x}$ bedeuten. Nach den Überlegungen des vorhergehenden Absatzes ist $\mathfrak{x}^{(n)}$ eine analytische Funktion von t und $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \ldots, \mathfrak{x}^{(n-1)}$, daher ergibt sich $\mathfrak{x}$ aus (7) nach einem bekannten Satz der Theorie der Differentialgleichungen als analytische Funktion von t, wobei $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \ldots, \mathfrak{x}^{(n-1)}$ für $t = t_0$ willkürlich gewählt werden können bis auf die Einschränkung, daß $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \ldots, \mathfrak{x}^{(n-1)}$ linear unabhängig und samt den $a_{\nu n}$ so beschaffen sind, daß Det. $|a_{\mu\nu}|$ für $t = t_0$ von 0 verschieden ist.

An Stelle der Funktionen $a_{\nu n}$ mögen jetzt die Funktionen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gegeben sein, gesucht werden alle in der Umgebung von $t = t_0$ analytischen Kurven des R_n, die in keinem R_{n-1} liegen und für die

$$\mathfrak{x}^{(\nu)^2} = A_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

ist. Da nach (2) durch die A_ν die $a_{\mu\nu}$ gegeben sind, müssen also die A_ν so beschaffen sein, daß Det. $|a_{\mu\nu}| \neq 0$ ist, und $\mathfrak{x}$ muß auch dem System (6) für alle Werte von t genügen.

Weil (7) ein Teilsystem von (6) ist, haben wir also die Lösungen von (8) unter den Lösungen von (7) zu suchen. Da (6) erfüllt sein soll, müssen somit die Vektoren $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \ldots, \mathfrak{x}^{(n-1)}$ für $t = t_0$ so gewählt werden, daß sie (6) befriedigen. $\mathfrak{x}(t_0)$ bleibt vollkommen willkürlich. Die Kurve ist also bis auf ihre Lage im R_n, d. h. bis auf Parallelverschiebungen, Drehungen und Spiegelungen festgelegt. Wir haben jetzt noch zu zeigen, daß die so bestimmten Lösungen das System (6) für alle zulässigen Werte von t erfüllen. Zu dem Zweck integrieren wir die Gleichungen (7), die ja erfüllt sind, beginnend von der vorletzten, fortwährend von t_0 bis t, verwenden dabei immer die schon erhaltenen Gleichungen und berücksichtigen, daß für $t = t_0$ das System (6) erfüllt ist. Dadurch ergibt sich allmählich aus dem System (7) das System (6) und damit auch (8) als identisch befriedigt.

Man erhält z. B. aus $\mathfrak{x}^{(n-1)}(t)\,\mathfrak{x}^{(n)}(t) = a_{n-1,n}(t)$

$$\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{x}^{(n-1)}(t)^2 - \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{x}^{(n-1)}(t_0)^2 = \int_{t_0}^{t} a_{n-1,n}(t)\,dt$$
$$= \tfrac{1}{2}\,a_{n-1,n-1}(t) - \tfrac{1}{2}\,a_{n-1,n-1}(t_0),$$

daher wegen $\mathfrak{x}^{(n-1)}(t_0)^2 = a_{n-1,\,n-1}(t_0)$

$$\mathfrak{x}^{(n-1)}(t)^2 = a_{n-1,\,n-1}(t);$$

weiter daraus und aus $\mathfrak{x}^{(n-2)}(t)\,\mathfrak{x}^{(n)}(t) = a_{n,\,n-2}(t)$

$$\mathfrak{x}^{(n-2)}(t)\,\mathfrak{x}^{(n-1)}(t) - \mathfrak{x}^{(n-2)}(t_0)\,\mathfrak{x}^{(n-1)}(t_0) - \int_{t_0}^{t} \mathfrak{x}^{(n-1)}(t)^2\,dt = \int_{t_0}^{t} a_{n,\,n-2}(t)\,dt$$

$$= a_{n-2,\,n-1}(t) - a_{n-2,\,n-1}(t_0) - \int_{t_0}^{t} a_{n-1,\,n-1}(t)\,dt,$$

also wegen

$$\mathfrak{x}^{(n-2)}(t_0)\,\mathfrak{x}^{(n-1)}(t_0) = a_{n-2,\,n-1}(t_0)$$

und $\mathfrak{x}^{(n-1)}(t)^2 = a_{n-1,\,n-1}(t)$

$$\mathfrak{x}^{(n-2)}(t)\,\mathfrak{x}^{(n-1)}(t) = a_{n-2,\,n-1}(t) \quad \text{usw.}$$

Wenn man also die analytischen Funktionen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ willkürlich wählt und nur der einzigen Beschränkung unterwirft, daß die durch sie bestimmte Det. $|a_{\mu\nu}| \neq 0$ ist, so ist dadurch die Kurve bis auf ihre Lage im R_n gegeben und sie liegt in keinem R_{n-1}. Die Beschränkung auf Kurven, die in keinem R_{n-1} liegen, ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, weil wir einfach sämtliche Überlegungen für den euklidischen Raum niedrigster Dimension durchführen können, der die Kurve noch enthält.

Man kann die Überlegungen dieses Paragraphen auch auf reelle, n-mal stetig differenzierbare Kurven übertragen. Man muß dann die $a_{\mu\nu}$ als stetige reelle Funktionen des reellen Parameters t voraussetzen und hat außerdem dafür zu sorgen, daß das System (6) überhaupt reelle Lösungen zuläßt. Zu diesem Zweck muß die quadratische Form $\sum_{\mu,\,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} z_\mu z_\nu$ für die in Betracht kommenden Werte von t positiv definit sein.

§ 3.

Neben den Funktionen $a_{\mu\nu}$ betrachten wir die aus ihnen gebildeten Gramschen Determinaten

$$G_\nu = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\nu} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \ldots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots). \tag{9}$$

Da die Kurve im R_n, aber in keinem R_{n-1} liegen soll, ist

$$G_n \neq 0, \quad \text{dagegen} \quad G_{n+1} = G_{n+2} = \ldots = 0\,^{2}).$$

---

[2]) Siehe z. B. A. Duschek-W. Mayer, Lehrbuch der Differentialgeometrie II, S. 76, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1930.

Hier und im folgenden sind derartige Gleichungen für die Funktionen im Sinne von Identitäten zu verstehen, d. h. es ist identisches Verschwinden in der ganzen betrachteten Umgebung gemeint, beziehungsweise $G_n \neq 0$ heißt, G_n ist in der ganzen Umgebung von 0 verschieden, was immer erreicht werden kann, wenn die Umgebung des Punktes P genügend klein gewählt wird. Aus der Definition der $a_{\mu\nu}$ und einem bekannten Determinantensatz ergibt sich für G_ν auch

$$(10) \qquad G_\nu = \sum_{(\gamma)} \begin{vmatrix} x'_{\gamma_1} & x'_{\gamma_2} & \dots & x'_{\gamma_\nu} \\ x''_{\gamma_1} & x''_{\gamma_2} & \dots & x''_{\gamma_\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{(\nu)}_{\gamma_1} & x^{(\nu)}_{\gamma_2} & \dots & x^{(\nu)}_{\gamma_\nu} \end{vmatrix}^2,$$

wobei die Summe über sämtliche Kombinationen $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\nu$ der Zeiger $1, 2, \dots, n$ zur ν-ten Klasse ohne Wiederholung zu erstrecken ist. Während die $a_{\mu\nu}$ nur gegenüber Bewegungen und Spiegelungen invariant bleiben, sind die G_ν auch Relativinvarianten gegenüber Parametertransformationen. Führt man nämlich an Stelle des Parameters t durch die Gleichung $t = t(\tau)$ den Parameter τ ein, so multipliziert sich G_ν mit $\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^\nu$.

Nach den Formeln (2) läßt sich $a_{\mu\nu}$ linear homogen durch $A_1, A_2, \dots, A_{\left[\frac{\mu+\nu}{2}\right]}$ und die Ableitungen dieser Funktionen darstellen. Man kann also G_ν nach (9) auch in der Form

$$(11) \qquad G_\nu = A_\nu G_{\nu-1} + U_{\nu-1}, \quad G_1 = A_1$$

schreiben, wobei die Funktion $U_{\nu-1}$ nur $A_1, A_2, \dots, A_{\nu-1}$ und ihre Ableitungen, aber nicht mehr A_ν und seine Ableitungen enthält. Sind somit $G_1, G_2, \dots, G_n$ sämtlich von 0 verschieden, so lassen sich nach (11) daraus $A_1, A_2, \dots, A_n$ berechnen. Sind also $G_1, G_2, \dots, G_n$ willkürliche analytische Funktionen, die in der betrachteten Umgebung nicht verschwinden, so ist dadurch die Kurve bis auf ihre Lage gegeben.

Um auch etwas aussagen zu können, wenn einige der G_ν verschwinden, überlegen wir folgendermaßen: Es sei $G_p \neq 0$. Dann läßt sich nach (11) A_{p+1} so berechnen, daß $G_{p+1} = 0$ ist. Zur Abkürzung bezeichnen wir im folgenden mit $D^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\nu}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\nu}$ die aus den Zeilen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ und den Spalten $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\nu$ gebildete Unterdeterminante von G_n. Es ist also

$$D^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\nu}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\nu} = D^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\nu}_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_\nu}$$

wegen $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$. Aus (10) ergibt sich, wenn man nach t differenziert,

$$G'_\nu = 2\sum_{(\gamma)} \begin{vmatrix} x'_{\gamma_1} & \dots & x'_{\gamma_\nu} \\ \dots & \dots & \dots \\ x^{(\nu-1)}_{\gamma_1} & \dots & x^{(\nu-1)}_{\gamma_\nu} \\ x^{(1)}_{\gamma_1} & \dots & x^{(1)}_{\gamma_\nu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x'_{\gamma_1} & \dots & x'_{\gamma_\nu} \\ \dots & \dots & \dots \\ x^{(\nu-1)}_{\gamma_1} & \dots & x^{(\nu-1)}_{\gamma_\nu} \\ x^{(\nu+1)}_{\gamma_1} & \dots & x^{(\nu+1)}_{\gamma_\nu} \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} \mathfrak{x}'^2 & \dots & \mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{x}^{(\nu-1)}\,\mathfrak{x}' & \dots & \mathfrak{x}^{(\nu-1)}\,\mathfrak{x}^{(\nu)} \\ \mathfrak{x}^{(\nu+1)}\,\mathfrak{x}' & \dots & \mathfrak{x}^{(\nu+1)}\,\mathfrak{x}^{(1)} \end{vmatrix} = 2\,D^{1,\,2,\,\dots,\,\nu-1,\,\nu}_{1,\,2,\,\dots,\,\nu-1,\,\nu+1}.$$

Aus $G'_{p+1} = 0$ folgt daher $D^{1,\,2,\,\dots\,p,\,p+1}_{1,\,2,\,\dots\,p,\,p+2} = 0$.

Die aus den Zeilen 1, 2, ..., $p+2$ und den Spalten 1, 2, ..., $p+1$ bestehende Matrix hat infolgedessen nach einem bekannten Determinantensatz [3]) den Rang p. Denn die Superdeterminanten von G_p, nämlich G_{p+1} und $D^{1,\,2,\,\dots,\,p,\,p+1}_{1,\,2,\,\dots,\,p,\,p+2}$, sind Null. Wegen der Symmetrieeigenschaft von G_n hat somit auch diejenige Matrix den Rang p, welche aus der genannten hervorgeht, wenn man Zeilen und Spalten vertauscht. Sonach ist auch $G_{p+2} = 0$ (siehe Fig. 1).

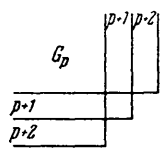


Fig. 1.

Wir betrachten nun die Determinante $D^{1,\,2,\,\dots\,p,\,p+2}_{1,\,2,\,\dots\,p,\,p+2}$. Aus denselben Gründen wie G_1 läßt sie sich in der Form

$$D^{1,\,2,\,\dots\,p,\,p+2}_{1,\,2,\,\dots\,p,\,p+2} = A_{p+2}\,G_p + V$$

schreiben, wobei V nur von $A_1, A_2, \dots, A_{p+1}$ und ihren Ableitungen, aber nicht von A_{p+2} und seinen Ableitungen abhängt. Wir können also A_{p+2} eindeutig so bestimmen, daß $D^{1,\,2,\,\dots\,p,\,p+2}_{1,\,2,\,\dots\,p,\,p+2} = 0$ ist. Damit sind sämtliche $(p+1)$-reihigen Determinanten der aus den ersten $p+2$ Zeilen und Spalten bestehenden Matrix, die G_p umrahmen, also die Superdeterminanten von G_p der erwähnten Matrix, Null, d. h. die Matrix ist vom Rang p. Nun ist

$$D^{1,\,2,\,\dots\,p,\,p+1}_{1,\,2,\,\dots\,p,\,p+2} = \sum_{(\gamma)} \begin{vmatrix} x'_{\gamma_1} & \dots & x'_{\gamma_{p+1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ x^{(p)}_{\gamma_1} & \dots & x^{(p)}_{\gamma_{p+1}} \\ x^{(p+1)}_{\gamma_1} & \dots & x^{(p+1)}_{\gamma_{p+1}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x'_{\gamma_1} & \dots & x'_{\gamma_{p+1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ x^{(p)}_{\gamma_1} & \dots & x^{(p)}_{\gamma_{p+1}} \\ x^{(p+2)}_{\gamma_1} & \dots & x^{(p+2)}_{\gamma_{p+1}} \end{vmatrix} = 0,$$

[3]) Siehe z. B. G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie, S. 53, Leipzig 1909, Veit & Comp.

daher

$$\frac{d}{dt} D^{1,\,2,\,\ldots\,p,\,p+1}_{1,\,2,\,\ldots\,p,\,p+2} = \sum_{(\gamma)} \begin{vmatrix} x'_{\gamma_1} & \ldots & x'_{\gamma_{p+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x^{(p)}_{\gamma_1} & \ldots & x^{(p)}_{\gamma_{p+1}} \\ x^{(p+2)}_{\gamma_1} & \ldots & x^{(p+2)}_{\gamma_{p+1}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x'_{\gamma_1} & \ldots & x'_{\gamma_{p+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x^{(p)}_{\gamma_1} & \ldots & x^{(p)}_{\gamma_{p+1}} \\ x^{(p+2)}_{\gamma_1} & \ldots & x^{(p+2)}_{\gamma_{p+1}} \end{vmatrix}$$

$$+ \sum_{(\gamma)} \begin{vmatrix} x'_{\gamma_1} & \ldots & x'_{\gamma_{p+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x^{(p)}_{\gamma_1} & \ldots & x^{(p)}_{\gamma_{p+1}} \\ x^{(p+1)}_{\gamma_1} & \ldots & x^{(p+1)}_{\gamma_{p+1}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x'_{\gamma_1} & \ldots & x'_{\gamma_{p+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x^{(p-1)}_{\gamma_1} & \ldots & x^{(p-1)}_{\gamma_{p+1}} \\ x^{(p+1)}_{\gamma_1} & \ldots & x^{(p+1)}_{\gamma_{p+1}} \\ x^{(p+2)}_{\gamma_1} & \ldots & x^{(p+2)}_{\gamma_{p+1}} \end{vmatrix} + \sum_{(\gamma)} \begin{vmatrix} x'_{\gamma_1} & \ldots & x'_{\gamma_{p+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x^{(p)}_{\gamma_1} & \ldots & x^{(p)}_{\gamma_{p+1}} \\ x^{(p+1)}_{\gamma_1} & \ldots & x^{(p+1)}_{\gamma_{p+1}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x'_{\gamma_1} & \ldots & x'_{\gamma_{p+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x^{(p)}_{\gamma_1} & \ldots & x^{(p)}_{\gamma_{p+1}} \\ x^{(p+3)}_{\gamma_1} & \ldots & x^{(p+3)}_{\gamma_{p+1}} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathfrak{x}'^2 & \ldots & \mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}^{(p+2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{x}^{(p+2)}\,\mathfrak{x}' & \ldots & \mathfrak{x}^{(p+2)^2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathfrak{x}'^2 & \ldots & \mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}^{(p+1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{x}^{(p-1)}\,\mathfrak{x}' & \ldots & \mathfrak{x}^{(p-1)}\,\mathfrak{x}^{(p+1)} \\ \mathfrak{x}^{(p+1)}\,\mathfrak{x}' & \ldots & \mathfrak{x}^{(p+1)^2} \\ \mathfrak{x}^{(p+2)}\,\mathfrak{x}' & \ldots & \mathfrak{x}^{(p+2)}\,\mathfrak{x}^{(p+1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathfrak{x}'^2 & \ldots & \mathfrak{x}'\,\mathfrak{x}^{(p+1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathfrak{x}^{(p)}\,\mathfrak{x}' & \ldots & \mathfrak{x}^{(p)}\,\mathfrak{x}^{(p+1)} \\ \mathfrak{x}^{(p+3)}\,\mathfrak{x}' & \ldots & \mathfrak{x}^{(p+3)}\,\mathfrak{x}^{(p-1)} \end{vmatrix}$$

$$= D^{1,\,\ldots\,p,\,p+2}_{1,\,\ldots\,p,\,p+2} + D^{1,\,\ldots\,p-1,\,p,\,p+1}_{1,\,\ldots\,p-1,\,p+1,\,p+2} + D^{1,\,\ldots\,p,\,p+1}_{1,\,\ldots\,p,\,p+3} = 0.$$

Infolgedessen muß nach dem eben Bewiesenen auch

$$D^{1,\,2,\,\ldots\,p,\,p+1}_{1,\,2,\,\ldots\,p,\,p+3} = 0$$

sein.

Ähnlich ergibt sich aus $\frac{d}{dt} D^{1,\,\ldots\,p,\,p+2}_{1,\,\ldots\,p,\,p+2} = 0$

$$D^{1,\,\ldots\,p,\,p+2}_{1,\,\ldots\,p,\,p+3} = 0$$

und aus $\frac{d}{dt} D^{1,\,\ldots\,p,\,p+1}_{1,\,\ldots\,p,\,p+3} = 0$

$$D^{1,\,\ldots\,p,\,p+1}_{1,\,\ldots\,p,\,p+4} = 0.$$

Es sind also die $(p+1)$-reihigen Superdeterminanten von G_p in der Fig. 2 Null. Daraus folgt $G_{p+3} = G_{p+4} = 0$. In dieser Weise kann man fortfahren und erhält schließlich nach q Schritten $G_{p+1} = G_{p+2} = \ldots = G_{p+2q} = 0$, wenn man $A_{p+1}, A_{p+2}, \ldots, A_{p+q}$ passend wählt, und zwar sind diese A eindeutig bestimmt. Bei jedem Schritt legen sich zwei neue Schräglinien an, wobei die $(p+1)$-reihigen Superdeterminanten von G_p immer verschwinden. Schließlich ist G_p nach Art der Fig. 2 von q Zeilen und Spalten umgeben, wobei die $(p+1)$-te Zeile bis zur $(p+2q)$-ten Spalte, die $(p+2)$-te Zeile bis zur $(p+2q-1)$-ten Spalte usw., schließlich die $(p+2q)$-te Zeile nur bis zur $(p+1)$-ten Spalte reicht. Alle $(p+1)$-reihigen Superdeterminanten von G_p, die daraus ge-

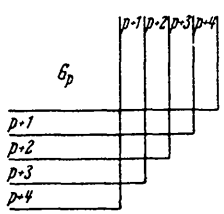


Fig. 2.

bildet werden können, sind 0. Es ist also jede dieser Zeilen eine Linearkombination der ersten p Zeilen oder

$$(12) \qquad a_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=1}^{p} B_{\lambda\mu} a_{\lambda\nu} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} \mu = p+1, p+2, \ldots, p+2q, \\ \nu = 1, 2, \ldots, 2p+2q+1-\mu, \end{matrix}$$

wobei die B analytische Funktionen von t sind, welche die $a_{\mu\nu}$ nicht mehr enthalten. Für $q = 2$ übersieht man die Verhältnisse in der Fig. 2. Für $\mu = p + 2q + 1$ ist (12) selbstverständlich, weil diese Zeile dann nurmehr p Elemente, nämlich die der ersten p Spalten enthält.

Ähnlich wie früher erhalten wir

$$D^{1,2,\ldots p,\,p+q+1}_{1,2,\ldots p,\,p+q+1} = A_{p+q+1} G_p + W,$$

wobei W von A_{p+q+1} und seinen Ableitungen nicht abhängt, sondern nur $A_1, A_2, \ldots, A_{p+q}$ und ihre Ableitungen enthält. Wir wollen nun A_{p+q+1} so wählen, daß

$$D^{1,2,\ldots p,\,p+q+1}_{1,2,\ldots p,\,p+q+1} \neq 0$$

ist. Damit sind auch alle Determinanten

$$D^{1,2,\ldots p,\,u}_{1,2,\ldots p,\,2p+2q+2-\mu} \quad (\mu = p+1,\ p+2,\ \ldots,\ p+2q+1)$$

von 0 verschieden. Denn wäre eine von ihnen 0, so könnte man wie früher durch Differentiation daraus schließen, daß alle identisch verschwinden, also auch $D^{1,2,\ldots p,\,p+q+1}_{1,2,\ldots p,\,p+q+1}$ gegen die Voraussetzung. Gleichung (12) gilt daher nicht mehr für $\nu = 2p + 2q + 2 - \mu$, d. h. wenn man jede der Zeilen $p+1, p+2, \ldots, p+2q$ um eine Spalte weiter fortsetzt, so ist sie keine Linearkombination der entsprechenden ersten p Zeilen mehr. Ebenso ist auch die bis zur $(p+1)$-ten Spalte fortgesetzte $(p+2q+1)$-te Zeile keine Linearkombination der entsprechenden ersten p Zeilen. Man erhält somit allgemein den Satz:

Hat μ irgendeinen festen Wert aus der Reihe $p+1, p+2, \ldots, p+2q+1$, so ist

$$(13) \qquad a_{\mu\nu} = \sum_{\lambda=1}^{p} B_{\lambda\mu} a_{\lambda\nu} \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, 2p+2q+1-\mu,$$

dagegen

$$a_{\mu,\,2p+2q+2-\mu} \neq \sum_{\lambda=1}^{p} B_{\lambda\mu} a_{\lambda,\,2p+2q+2-\mu}.$$

Setzen wir also $b_{\mu\nu} = a_{\mu\nu} - \sum_{\lambda=1}^{p} B_{\lambda\mu} a_{\lambda\nu}$, so ist für die genannten Werte von μ

$$b_{\mu\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 2p+2q+1-\mu),$$

dagegen $b_{\mu,\,2p+2q+2-\mu} \neq 0$.

Wir betrachten nun die Determinante G_{p+2q+1}. Nach (13) können wir sie durch Zeilenkombinationen in der Weise umformen, daß alle

Elemente $b_{\mu\nu}$ in den Zeilen $p+1$, $p+2$, ..., $p+2q$ verschwinden, deren Zeigersumme $2p+2q+1$ nicht übersteigt, die also links oberhalb der durch das Element $a_{p+q+1,\,p+q+1}$ gehenden Schräglinie liegen, während die Elemente $b_{p+1,\,p+2q+1}$, $b_{p+2,\,p+2q}$, ..., $b_{p+2q+1,\,p+1}$ dieser Schräglinie von 0 verschieden sind. Nach ihrer Entstehung enthalten sie A_1, A_2, ..., A_{p+q} und ihre Ableitungen und außerdem linear A_{p+q+1}, aber nicht seine Ableitungen. Entwickelt man die Determinante G_{p+2q+1} nach diesen Elementen, so ergibt sich

$$G_{p+2q+1} = (-1)^q \prod_{\lambda=1}^{2q+1} b_{p+\lambda,\,p+2q+2-\lambda}\, G_p, \tag{14}$$

also $G_{p+2q+1} \neq 0$. Soll G_{p+2q+1} eine bestimmte, von 0 verschiedene Funktion werden, so hat man A_{p+q+1} aus (14) entsprechend zu bestimmen, d. h. aus einer algebraischen Gleichung vom Grad $2q+1$.

Hat man A_{p+q+1} aus dieser Gleichung so bestimmt, daß $G_{p+2q+1} \neq 0$ ist, so ist auch $D^{1,\,2,\,\ldots\,p,\,p+q+1}_{1,\,2,\,\ldots\,p,\,p+q+1} \neq 0$, weil sich im gegenteiligen Fall nach dem früheren Verfahren $G_{p+2q+1} = G_{p+2q+2} = 0$ ergeben hätte. *Die Funktionen A_{p+q+2}, ..., A_{p+2q+1} bleiben vollkommen willkürlich.* Denn will man über die nächste Determinante G_{p+2q+2} verfügen, so hat man nach (11) nur A_{p+2p+2} passend zu wählen, weil $G_{p+2q+1} \neq 0$ ist.

Die G_ν sind also nicht ganz willkürlich, sondern eine Reihe von aufeinanderfolgenden identisch verschwindenden kann nur aus einer geraden Anzahl bestehen. Dann sind aber nicht mehr alle A_ν bestimmt, sondern es bleiben einige willkürlich, so daß auch die Kurve nicht mehr bis auf ihre Lage festgelegt ist.

§ 4.

Das Verschwinden einer solchen Reihe von Determinanten läßt sich an Hand der angestellten Überlegungen in folgender Weise geometrisch deuten: *Wir führen den Begriff der ν-ten Kurvennormalen ein, die durch den Vektor $\mathfrak{h}_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n-1$) gegeben sein möge und in folgender Weise definiert wird:*

$$\mathfrak{h}_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\nu+1} c_{\nu\lambda}\, \mathfrak{x}^{(\lambda)} \quad \text{mit } \mathfrak{h}_\nu\, \mathfrak{x}^{(\mu)} = 0 \text{ für alle } \mu = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{15}$$

d. h. $\mathfrak{h}_\nu$ soll im Schmieg-$R_{\nu+1}$ liegen und auf der Tangente und den Normalen mit kleinerem Zeiger senkrecht stehen. Die $c_{\nu\lambda}$ sind analytische Funktionen von t. Ihre Verhältnisse, d. h. die Richtung des Vektors $\mathfrak{h}_\nu$ wird aus den Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu+1} c_{\nu\lambda}\, \mathfrak{x}^{(\lambda)}\, \mathfrak{x}^{(\mu)} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \nu)$$

oder, was dasselbe ist,

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu+1} c_{\nu\lambda}\, a_{\lambda\mu} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{16}$$

bestimmt.

Es sei nun

$$G_p \neq 0,\ G_{p+1} = G_{p+2} = \ldots = G_{p+2q} = 0,\ G_{p+2q+1} \neq 0.$$

Aus der früher vorgenommenen Umformung der Determinante G_{p+2q+1}, die auf die Rangverhältnisse keinen Einfluß hat, erkennt man: Die Koeffizientenmatrix $a_{\lambda\mu}$ in (16) ist vom Range p für $\nu = p, p+1, \ldots, p+q$. Dagegen erhält man für $\nu = p+q+1,\ p+q+2,\ \ldots,\ p+2q$ die Rangzahlen $p+2,\ p+4,\ \ldots,\ p+2q$. Die Determinanten $G_{p+1}, G_{p+2}, \ldots, G_{p+q}$ sind vom Rang p, die Determinanten $G_{p+q+1}, G_{p+q+2}, \ldots, G_{p+2q}$ der Reihe nach vom Rang $p+1, p+3, \ldots, p+2q-1$.

Das Gleichungssystem zur Berechnung der $c_{\nu\lambda}$ ist für $\nu = p, p+1, \ldots, p+q$ immer das gleiche, nämlich das der ersten p Zeilen, weil die übrigen Linearkombinationen davon sind. Die $c_{1\lambda}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, p)$ sind wegen $G_p \neq 0$ eindeutig bestimmte, linear homogene Funktionen der willkürlich bleibenden $c_{\nu\lambda}$ $(\lambda = p+1, p+2, \ldots, \nu+1)$, d. h. $\mathfrak{h}_\nu$ liegt in einem bestimmten linearen $R_{\nu-p+1}$ und ist in diesem willkürlich. Von diesen linearen $R_1, R_2, \ldots, R_{q+1}$ enthält jeder den vorhergehenden, denn man erhält aus einem von ihnen den vorhergehenden, indem man $c_{\nu,\nu+1} = 0$ setzt. Für $\nu = p+q+1,\ p+q+2,\ \ldots,\ p+2q$ treten zu den p ersten Gleichungen immer noch je zwei weitere Gleichungen hinzu, aus denen sich mit Rücksicht auf (13) ergibt, daß $c_{\nu\lambda} = 0$ $(\lambda = 2p+2q+2-\nu, \ldots, \nu+1)$ ist, d. h. wir erhalten wieder die früheren linearen Räume, aber in umgekehrter Reihenfolge: $R_q, R_{q-1}, \ldots, R_1$.

Wir können die allgemeine Lösung von (16) angeben. Sie muß die Gestalt

$$c_{\nu\lambda} = \sum_{u=p+1}^{\nu+1} C_{\lambda\mu}\, c_{\nu\mu} \qquad \begin{pmatrix}\lambda = 1, 2, \ldots p,\\ \nu = p, p+1, \ldots p+q\end{pmatrix} \tag{17}$$

haben, wobei die $C_{\lambda\mu}$ nach dem eben Erwähnten eindeutig bestimmt sind. Nun ist

$$c_{\nu\lambda} = -\sum_{u=p+1}^{\nu+1} B_{\lambda\mu}\, c_{\nu\mu} \qquad \begin{pmatrix}\lambda = 1, 2, \ldots p,\\ \nu = p, p+1, \ldots p+q\end{pmatrix} \tag{18}$$

gemäß (13) Lösung von (16), also $C_{\lambda\mu} = -B_{\lambda\mu}$. Dasselbe Ergebnis erhält man auch durch direkte Rechnung. Wenn man nämlich (17) in (16) einsetzt, folgt aus der Willkürlichkeit der $c_{\nu u}$ $(\nu = p, p+1, \ldots p+q,$ $\mu = p+1, p+2, \ldots \nu+1)$

$$a_{\mu\nu} = -\sum_{\lambda=1}^{p} C_{\lambda\mu}\, a_{\lambda\nu} \qquad \begin{pmatrix}\mu = p+1, p+2, \ldots, p+2q+1\\ \nu = 1, 2, \ldots, 2p+2q+1-\mu\end{pmatrix},$$

daher aus (13)

$$\sum_{\lambda=1}^{p} (B_{\lambda\mu} + C_{\lambda\mu})\, a_{\lambda\nu} = 0$$

für dieselben Werte von μ und ν, infolgedessen $C_{\lambda\mu} = -B_{\lambda\mu}$ wegen $G_p \neq 0$. (15) und (18) liefert sonach

$$\mathfrak{h}_\nu = \sum_{\mu=p+1}^{\nu+1} c_{\nu\mu}\, \mathfrak{y}_{\mu-p} \quad (\nu = p,\ p+1,\ \ldots,\ p+q)$$

mit

$$\mathfrak{y}_{\mu-p} = \mathfrak{x}^{(\mu)} - \sum_{\lambda=1}^{p} B_{\lambda\mu}\, \mathfrak{x}^{(\lambda)} \quad (\mu = p+1,\ p+2,\ \ldots,\ \nu+1),$$

infolgedessen nach (13)

$$\mathfrak{x}^{(\lambda)}\, \mathfrak{y}_{\mu-p} = 0 \quad \text{für} \quad \lambda = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2p+2q+1-\mu,$$
$$\mathfrak{x}^{(p+q+1)}\, \mathfrak{y}_{q+1} \neq 0,$$

somit $\mathfrak{y}_\varrho\, \mathfrak{y}_\sigma = 0$ für $\varrho,\ \sigma = 1,\ 2,\ \ldots,\ q+1$ mit Ausnahme von $\mathfrak{y}_{q+1}^2$, das von Null verschieden ist. Die Räume R_1, R_2, $\ldots$, R_q sind also vollisotrop, R_{q+1} ist q-fach isotrop[4]). Aus den Rangzahlen der G_ν folgt, daß die Schmieg-R_{p+k} ($k = 1,\ 2,\ \ldots,\ q$) k-fach isotrop, dagegen die Schmieg-R_{p+q+k} $(q-k+1)$-fach isotrop sind.

Nach (15) ist

$$\mathfrak{h}_\nu^2 = c_{\nu,\nu+1}\, \mathfrak{h}_\nu\, \mathfrak{x}^{(\nu+1)}.$$

Soll also $\mathfrak{h}_\nu$ isotrop sein, so muß entweder $c_{\nu,\nu+1} = 0$, d. h. nach (16) $G_\nu = 0$ oder, wenn das nicht der Fall ist, $\mathfrak{h}_\nu\, \mathfrak{x}^{(\nu+1)} = 0$, d. h. nach (15) und (16) $G_{\nu+1} = 0$ sein.

Tritt daher in der Reihe der Gramschen Determinanten keine Null auf, so ist keine der $n-1$ Kurvennormalen isotrop.

Ist dagegen

$$G_p \neq 0,\ G_{p+1} = G_{p+2} = \ldots = G_{p+2q} = 0,\ G_{p+2p+1} \neq 0,$$

so liegen folgende Verhältnisse vor: $\mathfrak{h}_p = R_1$ ist isotrop, $\mathfrak{h}_{p+1}$ liegt willkürlich in einem bestimmten, vollisotropen[4]) linearen R_2, $\mathfrak{h}_{p+2}$ willkürlich in einem ebensolchen R_3 usw., $\mathfrak{h}_{p+q-1}$ willkürlich in einem ebensolchen R_q, $\mathfrak{h}_{p+q}$ willkürlich in einem q-fach isotropen R_{q+1}. Jeder dieser linearen Räume enthält den vorhergehenden und zwar ist R_ν der auf dem Schmieg-R_ν normal stehende Raum höchster Dimension, der gleichzeitig im Schmieg-$R_{\nu+1}$ liegt. $\mathfrak{h}_{p+q+1}$ liegt willkürlich im R_q, $\mathfrak{h}_{p+q+2}$ ebenso im R_{q-1}, $\ldots$, $\mathfrak{h}_{p+2q-1}$ ebenso im R_2, $\mathfrak{h}_{p+2q}$ fällt mit $\mathfrak{h}_p$ zusammen. Die Schmieg-R_p, -R_{p+1}, $\ldots$, -R_{p+q} sind 0-, 1-, $\ldots$, q-fach isotrop, die Schmieg-R_{p+q+1}, -R_{p+q+2}, $\ldots$, -R_{p+2q}, -R_{p+2q+1} sind q-, $(q-1)$-, 1-, 0-fach isotrop. Damit ist die Frage nach den isotropen Kurvennormalen vollständig beantwortet.

---

[4]) Bezüglich dieser Bezeichnungen siehe § 6.

§ 5.

Eine Kurve nennt man *p-fach isotrop*, wenn $A_1 = A_2 = \ldots = A_p = 0$, $A_{p+1} \neq 0$ ist. Nach § 1 und § 3 ist diese Aussage gleichwertig mit $G_1 = G_2 = \ldots = G_{2p} = 0$, $G_{2p+1} = (-1)^p A_{p+1}^{2p+1} \neq 0$. *Solche Kurven können also erst im R_{2p+1} auftreten.* Da A_{p+1}, A_{p+2}, ..., A_n willkürlich bleiben und A_{p+1} zur Normierung des Parameters t verwendet werden kann[5]), *hängt eine p-fach isotrope Kurve nach dem Existenzsatz von § 2 von $n-p-1$ willkürlichen Funktionen ab.* Die einzige Beschränkung ist die, daß man dafür zu sorgen hat, daß $G_n \neq 0$ ist, damit die Kurve in keinem R_{n-1} liege. Über die Normalen gibt der Satz von § 4 Auskunft, wenn man in ihm $p = 0$ und $q = p$ setzt.

Besondere Fälle:

1. $n = 2$. G_1 kann nicht verschwinden, ohne daß auch G_2 ververschwindet, d. h. es gibt keine von einer Geraden verschiedene ebene Kurve, die eine isotrope Normale hat.

2. $n = 3$. Hier ist nur der Fall $G_1 = 0$, $G_2 = 0$, $G_3 \neq 0$ oder $A_1 = 0$, $A_2 \neq 0$ möglich, d. h. die nichtgeradlinigen isotropen Raumkurven sind einfach isotrop, die Hauptnormale liegt willkürlich in der einfach isotropen Schmiegebene, die Binormale fällt mit der Tangente zusammen.

3. $n = 4$. a) $G_1 = 0$, $G_2 = 0$, $G_3 \neq 0$, $G_4 \neq 0$ liefert die nichtgeradlinigen einfach isotropen Kurven des R_4, die in keinem R_3 liegen. Die erste Normale liegt willkürlich in der einfach isotropen Schmiegebene, die zweite Normale fällt mit der Tangente zusammen, die dritte ist ebenso wie der Schmiegraum nicht isotrop.

b) $G_1 \neq 0$, $G_2 = 0$, $G_3 = 0$, $G_4 \neq 0$ liefert nichtisotrope, nichtgeradlinige Kurven des R_4, die in keinem R_3 liegen, mit isotroper erster Normalen. Die zweite Normale liegt willkürlich in derjenigen einfach isotropen Ebene η, die im Schmieg-R_3 enthalten ist und auf der Tangente normal steht, die dritte Normale fällt mit der ersten zusammen. Schmiegebene und Schmiegraum sind einfach isotrop. η ist also die Normalebene der Schmiegebene[6]).

§ 6.

Der lineare R_k möge von den Vektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_k$ aufgespannt, jeder seiner Punkte also durch

$$\mathfrak{z} = \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu \mathfrak{e}_\nu$$

---

[5]) Siehe z. B. M. Pinl, Monatshefte f. Math. 39 (1932), S. 168.

[6]) Diese Kurven wurden von E. Schrenzel, Wien. Sitzungsber. 138 (1929), S. 439—446 untersucht.

gegeben sein. Aus

$$d\mathfrak{z} = \sum_{\nu=1}^{k} \mathfrak{e}_\nu \, d\lambda_\nu$$

folgt

$$d\mathfrak{z}^2 = \sum_{\mu,\,\nu=1}^{k} \mathfrak{e}_\mu \, \mathfrak{e}_\nu \, d\lambda_\mu \, d\lambda_\nu .$$

Falls diese quadratische Form oder die Determinante $|\mathfrak{e}_\mu \mathfrak{e}_\nu|$ *vom Rang* $k - q$ *ist, nennt man den* R_k *q-fach isotrop. Für* $q = 0$ *erhalten wir einen gewöhnlichen euklidischen* R_k, *für* $q = k$ *einen vollisotropen* R_k, *in dem jede Richtung isotrop ist. Der q-fach isotrope* R_k *berührt die absolute* A^2_{n-2}, *welche die euklidische Metrik des* R_n *erzeugt, in einem Doppel-*R_{q-1}. *Die absolute* A^2_{k-2}, *welche die Metrik des* R_k *regelt, ist q-fach singulär.* Normiert man die Vektoren $\mathfrak{e}_\nu$ durch $\mathfrak{e}_1^2 = \mathfrak{e}_2^2 = \ldots = \mathfrak{e}_{k-q}^2 = 1$, $\mathfrak{e}_{k-q+1}^2 = \ldots = \mathfrak{e}_k^2 = 0$, $\mathfrak{e}_\mu \mathfrak{e}_\nu = 0$ $(\mu \neq \nu)$, führt also statt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ andere passende, homogene Parallelkoordinaten $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$ im R_k ein, so erhält man für die A^2_{k-2} die Gleichungen

$$x_0 = 0. \quad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{k-q}^2 = 0, \tag{19}$$

für den Doppel-R_{q-1} die Gleichungen

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \ \ldots, \ x_{k-q} = 0, \tag{20}$$

für das Bogenelement des R_k

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_{k-q}^2 \qquad (x_0 = 1).$$

Deutet man die Gleichungen (19) als Gleichungen der absoluten nichtsingulären A^2_{k-q-2} im R_{k-q-1} mit den Gleichungen $x_0 = x_{k-q+1} = x_{k-q+2} = \ldots = x_k = 0$, so erkennt man, daß die absolute A^2_{k-2} durch Projektion dieser A^2_{k-q-2} aus dem Doppelraum (20) entsteht. *Jeder Vektor* $\mathfrak{x}$ *des* R_k *läßt sich also in der Form* $\bar{\mathfrak{x}} + \mathfrak{x}^*$ *schreiben, wobei* $\bar{\mathfrak{x}} = \sum_{\nu=1}^{k-q} x_\nu \mathfrak{e}_\nu$ *dem* R_{k-q} $x_{k-q+1} = x_{k-q+2} = \ldots = x_k = 0$ *angehört, in dessen uneigentlichem Raum die eben erwähnte* A^2_{k-q-2} *liegt, und* $\mathfrak{x}^* = \sum_{\nu=k-q+1}^{k} x_\nu \mathfrak{e}_\nu$ *dem vollisotropen* R_q, *der den Doppel-*R_{q-1} (20) *aus dem Nullpunkt projiziert. Somit ist* $\mathfrak{x}^* \mathfrak{z} = 0$ *für jeden Vektor* $\mathfrak{z}$ *des* R_k. *Ist infolgedessen* $\mathfrak{y} = \bar{\mathfrak{y}} + \mathfrak{y}^*$ *ein zweiter Vektor des* R_k *in ähnlicher Zerlegung, so gilt* $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y} = \bar{\mathfrak{x}}\,\bar{\mathfrak{y}}$.

Definieren wir ähnlich wie im gewöhnlichen euklidischen Raum als *Drehung* eine Kollineation des R_k, welche $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$ invariant läßt, so muß sie

also die absolute A^2_{k-2} und daher auch ihren Doppelraum in sich überführen und $\bar{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{y}$ invariant lassen. Sie hat daher die Gestalt

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}x_1' + \ldots + a_{1,k-q}x_{k-q}',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{k-q} &= a_{k-q,1}x_1' + \ldots + a_{k-q,k-q}x_{k-q}',\\
x_{k-q+1} &= a_{k-q+1,1}x_1' + \ldots + a_{k-q+1,k-q}x_{k-q}'\\
&\qquad + a_{k-q+1,k-q+1}x_{k-q+1}' + \ldots + a_{k-q+1,k}x_k',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_k &= a_k x_1' + \ldots + a_{k,k-q}x_{k-q}' + a_{k,k-q+1}x_{k-q+1}' + \ldots + a_{kk}x_k',
\end{aligned}$$

wobei

$$\left\|\begin{array}{ccc} a_{11} & \ldots & a_{1,k-q}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{k-1,1} & \ldots & a_{k-q,k-q}\end{array}\right\|$$

die Matrix einer orthogonalen Substitution ist. *Die Drehung hängt also von*

$$\tfrac{1}{2}(k-q)(k-q-1) + kq = \tfrac{1}{2}k(k-1) + \tfrac{1}{2}q(q+1)$$

willkürlichen Konstanten ab. Nimmt man noch die Parallelverschiebungen hinzu, so erhält man für die Bewegungen des q-fach isotropen R_k $\frac{1}{2}k(k+1) + \frac{1}{2}q(q+1)$ *willkürliche Konstante.*

Eine p-fach isotrope Kurve des q-fach isotropen R_k, die in keinem R_{k-1} liegt, ist nach dem Vorhergehenden durch die Gleichungen

$$\dot{\bar{\mathfrak{x}}}'^2 = \bar{\mathfrak{x}}''^2 = \ldots = \bar{\mathfrak{x}}^{(p)2} = 0,\quad \bar{\mathfrak{x}}^{(p+1)2} \neq 0 \tag{21}$$

definiert. Dieses System hat nach § 5 eine Lösung, die von $k-q-p-1$ willkürlichen Funktionen abhängt. Dazu kommen noch die q willkürlichen Komponenten des Vektors $\mathfrak{x}^*$, d. h. *auch hier hängt die allgemeinste p-fach isotrope Kurve von* $k-p-1$ *willkürlichen Funktionen ab. Damit aber* (21) *lösbar sei, muß nach* § 5 $p < \frac{k-q}{2}$ *sein.*

Eine Kurve heißt vollisotrop, wenn $\mathfrak{x}^{(\nu)2} = 0$ *ist für alle* $\nu = 1, 2, 3, \ldots$. Sie möge in einem R_m $(m \leqq n)$ und in keinem R_{m-1} liegen. $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \ldots, \mathfrak{x}^{(m)}$ sind also voneinander linear unabhängig und es gilt $\mathfrak{x}^{(\mu)}\mathfrak{x}^{(\nu)} = 0$ für $\mu, \nu = 1, 2, \ldots, m$, d. h. der R_m ist vollisotrop. *Die vollisotropen Kurven sind also gerade die Kurven vollisotroper linearer Räume.* Wenn der R_m in einem q-fach isotropen R_k liegt, muß daher $m \leqq \left[\frac{k+q}{2}\right]$ sein[7]).

[7]) Siehe J. Lense, Jahresbericht D. M. V. 35 (1926), S. 285.

Es sei von einer Kurve eines q-fach isotropen R_k bekannt, daß $\mathfrak{x}'^2 = \mathfrak{x}''^2 = \ldots = \mathfrak{x}^{(p)2} = 0$ ist mit $p \geqq \frac{k-q}{2}$. Sie ist vollisotrop. Denn R_m sei der lineare Raum niedrigster Dimension, in dem sie liegt. Er ist mindestens $(m-k+q)$-fach isotrop, weil das Bogenelement des R_k vom Rang $k-q$ ist. Wäre die Kurve nicht vollisotrop, so müßte daher $p < \frac{k-q}{2}$ sein. Man hat somit den Satz: *Wenn die ersten p Ableitungen des Vektors einer Kurve eines q-fach isotropen R_k isotrop sind und $p \geqq \frac{k-q}{2}$ ist, so ist die Kurve vollisotrop und liegt in einem vollisotropen R_m des R_k, wobei $m \leqq \left[\frac{k+q}{2}\right]$ ist. Isotrope Kurven, die nicht vollisotrop sind, können somit erst für $q \leqq k-3$ auftreten, in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß die absolute A^3_{k-2} für $q = k-1, k-2$ zerfällt.*

(Eingegangen am 20. 6. 1935.)

Zur Theorie der Markoffschen Ketten.

Von

A. Kolmogoroff in Moskau.

Die nachfolgenden Betrachtungen scheinen mir, trotz ihrer Einfachheit, neu und nicht ohne Interesse für gewisse physikalische Anwendungen zu sein, insbesondere für die Analyse der Umkehrbarkeit der statistischen Naturgesetze, welche Herr Schrödinger im Falle eines speziellen Beispiels durchgeführt hat[1]). In der ganzen weiteren Darstellung ist es gleichgültig, welche der beiden folgenden Voraussetzungen über die in Betracht kommenden Werte der Zeitkoordinate t gemacht wird: entweder durchläuft t alle reellen Werte, oder man beschränkt sich auf die Heranziehung der ganzzahligen Werte von t. Der klassischen Auffassung Markoffscher Ketten entspricht die zweite Möglichkeit.

1. Begriff der Markoffschen Kette.

Wir betrachten ein physikalisches System, welches sich in jedem Zeitmoment t in einem der endlich vielen verschiedenen Zustände E_1, E_2, ..., E_N befinden kann. Wir setzen dabei voraus, daß für je zwei Zustände E_i und E_j und je zwei Zeitmomente t und s, $t \leqq s$, eine bestimmte bedingte Wahrscheinlichkeit $P_{ij}(t, s)$ dafür existiert, daß unter der Voraussetzung des Zustandes E_i im Zeitmoment t der Zustand E_j im Zeitmoment s auftreten wird. Eine wesentliche, nicht immer mit genügender Klarheit hervorgehobene weitere Voraussetzung bildet die Unabhängigkeit der bedingten Wahrscheinlichkeit $P_{ij}(t, s)$ von beliebigen Kenntnissen über die Vorgeschichte des Systems vor dem Zeitmoment t. Auf dieser Voraussetzung beruht wesentlich die Ableitung der fundamentalen Gleichung der Theorie der Markoffschen Ketten:

$$P_{ik}(s, t) = \sum_j P_{ij}(s, u)\, P_{jk}(u, t), \qquad s \leqq u \leqq t. \tag{1}$$

Außer der Fundamentalgleichung (1) erwähnen wir die Formeln

$$P_{ij}(t, s) \geqq 0, \tag{2}$$

$$\sum_j P_{ij}(t, s) = 1, \tag{3}$$

$$P_{ij}(t, t) = \delta_{ij}, \tag{4}$$

wobei δ_{ij} gleich 0 oder 1 ist, je nachdem $i \neq k$, oder $i = k$ ist.

[1]) Berliner Berichte 1931, S. 144.

2. Absolute Wahrscheinlichkeiten.

Bis jetzt betrachteten wir nur die bedingten Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{ij}(t, s)$. Es entsteht die Frage: Ist es möglich, bei den gegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{ij}(t, s)$ auch die absoluten Wahrscheinlichkeiten der Realisierung verschiedener Zustände für jeden Zeitmoment t einzuführen? Setzt man voraus, daß der Prozeß der Änderung unseres Systems in einem bestimmten Zeitmoment t_0 beginnt, so kann man den verschiedenen Zuständen $E_1, E_2, \ldots, E_N$ im Zeitmoment t_0 ganz beliebige Wahrscheinlichkeiten $Q_1(t_0), Q_2(t_0), \ldots, Q_N(t_0)$,

$$Q_k(t_0) \geqq 0, \quad \sum_k Q_k(t_0) = 1,$$

zuschreiben. Für jeden Zeitmoment $t \geqq t_0$ erhält man die Wahrscheinlichkeiten $Q_k(t)$ der Zustände $E_k (k = 1, 2, \ldots, N)$ nach den Formeln

$$Q_k(t) = \sum_i Q_i(t_0)\, P_{ik}(t_0, t).$$

Für $t_0 \leqq t \leqq s$ ist dann automatisch auch die Formel

$$Q_k(s) = \sum_i Q_i(t)\, P_{ik}(t, s) \tag{5}$$

erfüllt.

Nicht so trivial ist die Einführung der absoluten Wahrscheinlichkeiten, wenn man keinen bestimmten Anfang des Prozesses voraussetzt und im Gegenteil die absolute Wahrscheinlichkeiten $Q_k(t)$ für alle Zeitmomente t, $-\infty < t < +\infty$, zu bestimmen versucht. Es gilt jedoch auch hier der folgende Satz: *Bei beliebigen für alle t und s $(t \leqq s)$ bestimmten Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{ik}(t, s)$ lassen sich mindestens in einer Weise mit diesen Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{ik}(t, s)$ verträgliche absolute Wahrscheinlichkeiten $Q_k(t)$ für alle t, $-\infty < t < +\infty$, bestimmen.* Rein analytisch bedeutet der Satz: Bei jeder den Bedingungen (1) bis (4) genügenden Wahl der Größen $P_{ik}(t, s)$ besitzt das System der unendlich vielen Gleichungen (5) mindestens eine Lösung, welche den Zusatzbedingungen

$$Q_k(t) \geqq 0, \quad \sum_k Q_k(t) = 1 \tag{6}$$

genügt.

Zum Beweise des Satzes bemerken wir zunächst, daß zu jedem t_0, wie wir schon gesehen haben, mindestens ein System von Größen $Q_k^{(t_0)}(t)$ existiert, welche für alle $t \geqq t_0$ bestimmt sind und für $s \geqq t \geqq t_0$ den Gleichungen (5) und (6) genügen. Mit Hilfe des Diagonalverfahrens kann man aus der Folge

$$t_0 = -1, -2, -3, \ldots$$

eine Unterfolge

$$t_0 = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$$

mit $\lambda_n \to -\infty$ wählen, so daß bei jedem k und bei jedem ganzzahligen t die Größen $Q_k^{(\lambda_n)}(t)$, welche bei jedem festen t für alle genügend großen Werte von n definiert sind, mit $n \to +\infty$ gegen einen bestimmten Limes $Q_k^*(t)$ konvergieren. Man beweist leicht auf Grund der Formeln (6), daß auch für alle reellen nicht ganzzahligen Werte von t die Grenzwerte $Q_k^*(t)$ existieren. Diese Grenzwerte genügen, wie man durch einen Grenzübergang zeigt, den Gleichungen (5) und (6). Somit ist unser Satz bewiesen.

Besonders interessant ist der Fall, in welchem die absoluten Wahrscheinlichkeiten $Q_k(t)$ durch die Angabe der Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{ik}(t,s)$ eindeutig bestimmt sind. Für solche eindeutige Bestimmtheit der absoluten Wahrscheinlichkeiten ist die folgende Bedingung notwendig und hinreichend: *Bei beliebigen festen k und s konvergieren die Größen $P_{ik}(t,s)$ mit $t \to -\infty$ gegen einen von i unabhängigen Limes $Q_k^*(s)$. Ist diese Bedingung erfüllt, so bilden die genannten Limites $Q_k^*(s)$ genau das gesuchte einzige System der absoluten Wahrscheinlichkeiten.*

Zuerst wollen wir beweisen, daß die Bedingung hinreichend ist. Es seien $Q_k(t)$ irgendwelche, mit den Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{ik}(t,s)$ verträgliche, absolute Wahrscheinlichkeiten. Dann hat man

$$Q_k(s) = \sum_i Q_i(t)\, P_{ik}(t,s); \tag{5}$$

da aber mit $t \to -\infty$ die Größen $P_{ik}(t,s)$ gegen $Q_k^*(s)$ streben, so strebt mit $t \to -\infty$ die rechte Seite der Gleichung (8) gegen

$$\sum_i Q_k^*(s)\, Q_i(t) = Q_k^*(s),$$

woraus

$$Q_k(s) = Q_k^*(s)$$

folgt.

Es sei jetzt unsere Bedingung nicht erfüllt. Dann kann man solche i_1 und i_2 und zwei solche Folgen

$$t_1' > t_2' > \ldots > t_n' > \ldots \to -\infty,$$
$$t_1'' > t_2'' > \ldots > t_n'' > \ldots \to -\infty$$

wählen, daß $P_{i_1 k}(t_n', s)$ bzw. $P_{i_2 k}(t_n'', s)$ mit $n \to +\infty$ gegen bestimmte Limites $Q_k'(s)$ bzw. $Q_k''(s)$ bei beliebigen k und s konvergieren, wobei $Q_k'(s)$ und $Q_k''(s)$ nicht identisch zusammenfallen. Man beweist leicht, daß die $Q_k'(s)$ ebensogut wie die $Q_k''(s)$ als absolute Wahrscheinlichkeiten angenommen werden können, woraus die Notwendigkeit der Bedingung folgt.

3. Umgekehrte Wahrscheinlichkeiten.

Wir setzen jetzt voraus, daß ein festes System von absoluten Wahrscheinlichkeiten $Q_k(s)$ gewählt ist und daß alle $Q_k(s)$ positiv sind. In

diesem Falle lassen sich neben den Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{ik}(t,s)$ noch die umgekehrten bedingten Wahrscheinlichkeiten bestimmen. Wir bezeichnen nämlich mit $\Pi_{ik}(t,s)$ die bedingte Wahrscheinlichkeit des Zustandes E_i für den Zeitmoment t unter der Voraussetzung, daß in einem späteren Moment s, $s \geqq t$, der Zustand E_k beobachtet wurde. Es ist offenbar

$$\Pi_{ik}(t,s) = \frac{Q_i(t)}{Q_k(s)} P_{ik}(t,s). \tag{7}$$

Man berechnet leicht die folgenden Formeln, welche den Formeln (1) bis (5) parallel laufen:

$$\Pi_{ik}(s,t) = \sum_j \Pi_{ij}(s,u)\,\Pi_{jk}(u,t), \quad s \leqq u \leqq t, \tag{1*}$$

$$\Pi_{ik}(s,t) \geqq 0, \tag{2*}$$

$$\sum_i \Pi_{ik}(s,t) = 1, \tag{3*}$$

$$\Pi_{ik}(t,t) = \delta_{ij}, \tag{4*}$$

$$Q_i(s) = \sum_k Q_k(t)\,\Pi_{ik}(s,t), \quad s \leqq t. \tag{5*}$$

Es sei dabei bemerkt, daß man die Formel (1*) auf Grund der früher gegebenen Formeln berechnen und nicht analog zu (1) direkt beweisen muß, wenn man ein neues Prinzip „der Unabhängigkeit von der Nachgeschichte" vermeiden will. Das letzte Prinzip läßt sich nachher auf Grund der Formel (1*) beweisen.

4. Die Umkehrung der Naturgesetze.

Es sei jetzt vorausgesetzt, daß die Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{ik}(s,t)$ nur von der Differenz $t-s$ abhängen:

$$P_{ik}(s,t) = P_{ik}(t-s).$$

In diesem Falle existiert bekanntlich mindestens ein System von von der Zeit t unabhängigen absoluten Wahrscheinlichkeiten

$$Q_k(t) = Q_k.$$

Für ein festes System solcher Wahrscheinlichkeiten Q_k hängen die umgekehrten Wahrscheinlichkeiten $\Pi_{ik}(s,t)$ ebenfalls nur von der Differenz $t-s$ ab:

$$\Pi_{ik}(s,t) = \Pi_{ik}(t-s).$$

Es entsteht jetzt die Frage: *Unter welchen Bedingungen gilt die Gleichung*

$$\Pi_{ik}(\tau) = P_{ki}(\tau)? \tag{8}$$

Da

$$\Pi_{ik} = \frac{Q_i}{Q_k} P_{ik}(\tau)$$

ist, so ist für die Gültigkeit der Gleichung (8) die Bedingung

$$Q_i P_{ik}(r) = Q_k P_{ki}(r) \tag{9}$$

notwendig und hinreichend. Es ist aber bemerkenswert, daß man notwendige und hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit der Umkehrungsgleichungen (8) auch ohne Benutzung der Größen Q_k in reinen Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{ik}(r)$ angeben kann. Es wurde in der Tat von R. v. Mises bewiesen[2]), daß alle Zustände E_k solcherweise in Gruppen eingeteilt werden können, daß folgende Bedingungen erfüllt sind: 1. die $P_{ik}(r)$ können nur dann von Null verschieden sein, wenn E_i und E_k derselben Gruppe angehören; 2. für je zwei E_i und E_k aus derselben Gruppe ist das Verhältnis $Q_i : Q_k$ eindeutig durch die Angabe der Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{ik}(r)$ bestimmt. Aus dieser Tatsache folgt: gehören E_i und E_k zu derselben Gruppe, so ist die Gültigkeit der Gleichung (9) von der Wahl der absoluten Wahrscheinlichkeiten Q_j unabhängig. Sind aber E_i und E_k in verschiedenen Gruppen gewählt, so ist (9) wegen $P_{ik}(r) = P_{ki}(r) = 0$ trivialerweise richtig. Wir sehen also, daß die Gültigkeit der Bedingung (9) von dem gewählten System der Wahrscheinlichkeiten Q_k unabhängig ist.

Man kann eine von den Größen Q_k unabhängige notwendige und hinreichende Bedingung der Umkehrbarkeit (8) folgendermaßen formulieren:

Die Umkehrungsrelationen (8) *sind dann und nur dann erfüllt, wenn bei beliebiger Wahl von* $r, q, k_1, k_2, \ldots, k_q$ *die Gleichung*

$$\begin{aligned} P_{k_1 k_2}(r)\, P_{k_2 k_3}(r) \ldots P_{k_{q-1} k_q}(r)\, P_{k_q k_1}(r) \\ = P_{k_1 k_q}(r)\, P_{k_q k_{q-1}}(r) \ldots P_{k_3 k_2}(r)\, P_{k_2 k_1}(r) \end{aligned} \tag{10}$$

gilt. Im diskreten Falle (wenn t nur ganze Werte durchläuft) genügt es, (10) nur für $r = 1$ zu fordern. Der Beweis ist elementar und kann dem Leser überlassen werden.

Sind insbesondere die Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{ik}(r)$ symmetrisch:

$$P_{ik}(r) = P_{ki}(r), \tag{11}$$

so ist die Bedingung (10) erfüllt. Folglich *ist die Symmetriebedingung* (11) *für die Umkehrbarkeit* (8) *hinreichend.*

Diese fast trivialen Tatsachen gestatten mehrere physikalische Anwendungen. Wir beschränken uns hier auf eine von der ursprünglichen abweichende Darstellung des Schrödingerschen Beispiels. Eine Kreislinie sei in eine sehr große Anzahl M von gleichen Intervallen geteilt. Eine große Anzahl L von beweglichen Teilchen wandern auf dieser Kreislinie, und zwar so, daß jedes Teilchen unabhängig von den anderen bei

[2]) R. v. Mises, Wahrscheinlichkeitsrechnung (1931), § 16.

jedem Schritt entweder in das nächste Intervall rechts, oder in das nächste Intervall links übergeht und diesen beiden Möglichkeiten die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ entspricht. Man hat insgesamt $M^L = N$ verschiedene mögliche Verteilungen von L Teilchen auf M Intervalle. Die absoluten Wahrscheinlichkeiten Q_k, welche diesen N Möglichkeiten entsprechen, betragen alle $\frac{1}{N}$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{ik}(r)$ sind offenbar symmetrisch, folglich gilt die Umkehrungsgleichung (8). Betrachtet man die „makrokosmische" Verteilung der Teilchen auf der Kreislinie, so ist sie mit einer zu Eins sehr nahen Wahrscheinlichkeit angenähert gleichmäßig. Ist aber gegeben (obwohl das a priori sehr unwahrscheinlich ist), daß in einem Zeitmoment t eine große Abweichung von dieser Gleichmäßigkeit stattfindet, so kann man mit einer zu Eins nahen Wahrscheinlichkeit behaupten, daß diese Ungleichmäßigkeit sich für $t > t_0$ angenähert gemäß der Differentialgleichung der Diffusion ausgleichen wird. Die Umkehrungsformel (8) lehrt uns jetzt, daß *mit gleicher Wahrscheinlichkeit die Entstehung der Ungleichmäßigkeit bei $t < t_0$ derselben Differentialgleichung, nur mit umgekehrten Vorzeichen der Zeitkoordinate, folgte.*

Mathematisches Institut der Universität in Moskau.

(Eingegangen am 20. 5. 1935.)

On the Behaviour of an Analytic Function in the Neighbourhood of its Essential Singularities.

Von

M. L. Cartwright in Cambridge (England).

Introduction.

1.1. Suppose that $f(z)$ is a one-valued function, meromorphic in a connected region D, and having an essential singularity at a point [1]) $z = Z$ on the boundary of D. We associate with Z three sets of values:

(1) *The cluster set $C_D(Z)$ of $f(z)$ at Z.* This is the set of values a such that

$$\lim_{n \to \infty} f(z_n) = a,$$

where $z_1, z_2, \ldots$ is a sequence of points tending to Z inside D;

(2) *The range of values $R_D(Z)$ of $f(z)$ at Z.* A value a belongs to $R_D(Z)$ if, and only if, $f(z)$ takes the value a an infinity of times near Z inside D;

(3) *The convergence set $\Gamma_D(Z)$ of $f(z)$ at Z.* This is the set of all values a such that

$$\lim_{z \to Z} f(z) = a,$$

as $z \to Z$ along a Jordan arc lying inside D except for the end point at Z.

If D is the unit circle, we write simply $C(Z)$, $R(Z)$, $\Gamma(Z)$.

The object of this paper is to discuss the sets $C_D(Z)$, $R_D(Z)$, and $\Gamma_D(Z)$ taken over a set of non-isolated essential singularities; in particular we shall consider the measure of the sets $R_D(Z)$ and $\Gamma_D(Z)$, and the relation between $R_D(Z)$ and $\Gamma_D(Z)$. It is obvious that, for both isolated and non-isolated singularities, $C_D(Z)$ includes $R_D(Z)$ and $\Gamma_D(Z)$. For an *isolated* essential singularity there are three classical theorems concerning $C_D(Z)$, $R_D(Z)$, and $\Gamma_D(Z)$.

Theorem Ia (*Weierstrass*). *If Z is an isolated essential singularity of $f(z)$, then $C_D(Z)$ includes all values.*

Theorem IIa (*Picard*). *If Z is an isolated essential singularity of $f(z)$, then $R_D(Z)$ includes all values except perhaps two.*

[1]) The region D is not necessarily simply-connected, and so Z may be an isolated boundary point, entirely surrounded by points of D.

Theorem IIIa (*Iversen*[2]). *If Z is an isolated essential singularity of $f(z)$, and if a does not belong to $R_D(Z)$, then a belongs to $\Gamma_D(Z)$.*

Of course Ia is included in IIa, and is much easier to prove than IIa. From these results we can easily deduce corresponding theorems for functions with an enumerable set of essential singularities; but in the theorem corresponding to IIIa, we can only say that a belongs either to $\Gamma_D(Z)$ or to $\Gamma_D(Z_n)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, where $Z_1, Z_2, \ldots$ is a sequence of essential singularities tending to Z as $n \to \infty$.

1.2. Functions with a non-enumerable set of singularities present serious difficulties. Besicovitch[3]) has shown that *if the set of essential singularities is of linear measure zero, then $C_D(Z)$ includes all values*: and Seidel[4]) has shown that in this case *there may be a non-enumerable set of values a which do not belong to $R_D(Z)$*. If the singularities form a set of positive linear measure there may be quite a different type of singularity near which $|f(z)|$ is bounded. Fatou[5]) has shown that *if $f(z)$ is regular and bounded for $|z| < 1$, then $\Gamma(e^{i\theta})$ contains at least one value for almost all θ*; and it follows from a generalization of Montel's theorem due to Hardy and Littlewood[6]) that *if $f(z)$ is bounded in $|z| < 1$, and $\Gamma(e^{i\theta})$ contains a value $f(e^{i\theta})$, then $f(z) \to f(e^{i\theta})$ uniformly in $|\arg(1 - ze^{-i\theta})| \leqq \beta < \frac{1}{2}\pi$, and $\Gamma(e^{i\theta})$ contains no other value.* Further F. and M. Riesz[7]) have shown that *if $f(z)$ is bounded, and $f(re^{i\theta}) \to 0$ as $r \to 1$ in a set of θ of positive measure, then $f(z) \equiv 0$.*

If $\Gamma(e^{i\theta})$ contains one and only one value, it is known as the boundary value of $f(z)$ at $e^{i\theta}$. Results[8]) which correspond to theorems Ia and IIa have been obtained for functions meromorphic in the unit circle by dividing the points on $|z| = 1$ into three sets, (1) a set which has properties similar to those in Theorem Ia and IIa, (2) a set of points $e^{i\theta}$ such that $f(z) \to f^*(e^{i\theta})$ as $z \to e^{i\theta}$ uniformly in $|\arg(1 - ze^{-i\theta})| \leqq \beta < \frac{1}{2}\pi$, and (3) a set of linear measure zero.

I shall first prove two theorems on the boundary values of functions which are bounded in the unit circle, and then a theorem on the range of values of functions regular in the unit circle. Then follow certain theorems corresponding to theorem IIIa for functions meromorphic in the

[2]) F. Iversen, Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes, Thèse, Helsingfors (1914), p. 13.

[3]) A. S. Besicovitch, Proc. London Math. Soc. (2) **32** (1931), pp. 1—19.

[4]) W. Seidel, Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), pp. 201—226 (218).

[5]) See L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie 2 (1927), p. 146.

[6]) M. L. Cartwright, Proc. Cambridge Phil. Soc. **31** (1935) p. 26.

[7]) F. and M. Riesz, Verhandlungen des 4. skand. Math. Kongresses, Stockholm (1916).

[8]) See § 4.4.

unit circle, and for functions whose essential singularities form a set of linear measure zero. From the latter, I deduce a theorem for functions with a set of singularities of logarithmic measure zero corresponding to IIa. In connection with the results for functions meromorphic in the unit circle, I shall give a short account of the known results corresponding to theorems Ia and IIa, partly for the sake of completeness and partly for comparison with the results for functions with a set of singularities of linear measure zero.

R. Nevanlinna [9]) has obtained some very interesting results, similar to some of those given here, by means of his theory of harmonic measure. In particular he has obtained a theorem similar to theorem IIIc [10]). The main part of this paper was written before I had seen an account of the theory of harmonic measure; and, as I have not yet seen a full account of it, I have not made use of theory, and I include theorem IIIc in order to make this paper complete in itself.

I have discussed the topics of this paper with Prof. Littlewood on several occasions, and I feel that the paper owes much to those discussions. I am also indebted to Mr. A. E. Gwilliam for several valuable criticisms and suggestions.

1.3. In dealing with functions in the unit circle, we shall use the classical notation of Nevanlinna. The *characteristic function* $T(r, f)$ is defined by the relation

$$T(r, f) = m(r, \infty) + N(r, \infty) \qquad (r < 1),$$

where

$$m(r, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \, d\theta,$$

$$N(r, \infty) = \int_0^r \frac{n(t, \infty) - n(0, \infty)}{t} \, dt + n(0, \infty) \log r,$$

[9]) R. Nevanlinna, Compt. Rend. 199 (1934), pp. 512—515 and p. 548. [Added in the proofs.] See also Verhandlungen des 8. skand. Math. Kongresses Stockholm (1934), pp. 116—133. Theorem 1 on page 129 of the latter is false in the form stated. For an analytic function which is not a constant omits a set of values of positive harmonic measure near any pole or regular point. A single point is obviously a set of harmonic measure zero; and so we have a contradiction. The proof holds for the theorem as stated in Comptes Rendus; but I do not see how to modify it for a similar theorem on the neighbourhood of a set of essential singularities. The proof of theorem IIc in § 5.2 of this paper holds if the set E is of harmonic measure zero with respect to *every* region, but not if the set is of absolute harmonic measure zero in the sense of Nevanlinna.

[10]) See § 5.2.

and $n(r, \infty)$ is the number of poles of $f(z)$ for which $|z| \leqq r$. We also write

$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\theta \qquad (a \neq \infty),$$

$$N(r, a) = \int_0^r \frac{n(t, a) - n(0, a)}{t} dt + n(0, a) \log r,$$

where $n(r, a)$ is the number of zeros of $f(z) - a$. Jensen's formula may be written

$$m(r, a) + N(r, a) = m(r, \infty) + N(r, \infty) + \log |c_\lambda|$$
$$= T(r, f) + \log |c_\lambda|, \text{ where } c_\lambda \neq 0 \text{ and } f(z) \sim c_\lambda z^\lambda \text{ as } z \to 0.$$

The *defect* of a value a is

$$\delta(a) = \underline{\lim}_{r \to \infty} \frac{m(r, a)}{T(r, f)} = 1 - \overline{\lim}_{r \to \infty} \frac{N(r, a)}{T(r, f)};$$

and so if $f(z)$ does not take the value a, $\delta(a) = 1$.

We denote by an *S-set* any set of values a having the following property: Suppose that $s(t)$ is a positive, continuous, increasing function for $t > 0$ such that

$$\int_0^k \frac{s(t)}{t} dt \tag{1.3 1}$$

is convergent for some $k > 0$. For each $\varepsilon > 0$ there is a sequence of circles with radii $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ covering the set such that

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} s(\varrho_\nu) < \varepsilon. \tag{1.3 2}$$

A set of α-dimensional measure zero is an S-set for which $s(t) = t^\alpha (0 < \alpha < 1)$. If (1.3 2) holds with $s(\varrho) = [\log^+ (1/t)]^{-1}$, the set is of logarithmic measure zero; but, as (1.3 1) is not now convergent, the set may not be an S-set.

This definition also applies when the set of points is represented on a sphere of unit radius, and we shall usually use it in this way.

1.4. It is known that[11]) if $f(z) \to a$ as $z \to Z$ along two Jordan curves C_1 and C_2, and if $f(z)$ is regular in the region D between C_1 and C_2, then either $f(z) \to a$ uniformly in the region between C_1 and C_2, or $|f(z)|$ is unbounded between C_1 and C_2, and $R_D(z)$ includes all values except perhaps one. It is convenient to reckon the value a as a *repeated value* of $\Gamma_D(Z)$ when $|f(z)|$ is unbounded between two paths on which $f(z) \to a$

[11]) F. Iversen, Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes, Thèse, Helsingfors, 1914, p. 27.

as $z \to Z$. If there is a sequence of paths C_n, $(n = 1, 2 \ldots)$, such that $f(z) \to a$ along C_n and $|f(z)|$ is unbounded between C_n and C_{n+1}, $(n = 1, 2, \ldots)$, we shall say that the value a of $\Gamma_D(e^{i\vartheta})$ is repeated an infinity of times, D being now the region containing the curves $C_1, C_2, \ldots$. Similarly if $|f(z)| \to \infty$ as $z \to Z$ along C_1 and C_2, and if $|f(z)|$ is bounded on some path C_{12} between C_1 and C_2, we shall say that $\Gamma_D(Z)$ contains the value ∞ repeated twice, and so on.

Bounded Functions.

2.1. Suppose first that $f(z)$ is meromorphic for $|z| < 1$. It has been shown that [12]) if $T(r, f)$ is bounded for $r < 1$, then

$$f(z) = g(z)/h(z),$$

where $g(z)$ and $h(z)$ are regular and bounded. It follows that the results stated in § 1.2 for bounded functions hold when $T(r, f)$ is bounded. In particular $\Gamma(e^{i\vartheta})$ contains one and only one finite value for almost all θ, so that we may call it $f(e^{i\vartheta})$ without ambiguity. Further *if* $f(e^{i\vartheta})$ *exists as* $z \to e^{i\vartheta}$ *by any Jordan curve, it is the radial limit.*

R. Nevanlinna [12]) has shown that *if* $T(r, f)$ *is bounded, then the set of values* $\Gamma(e^{i\vartheta})$ *taken over a set of* θ *of positive measure cannot form a set of logarithmic measure zero unless* $f(z)$ *is a constant;* but, *corresponding to every S-set, there is a function regular in the unit circle for which* $T(r, f)$ *is bounded and the values* $\Gamma(e^{i\vartheta})$, $(0 \leqq \theta < 2\pi)$, *belong to the S-set.* That is to say the values $\Gamma(e^{i\vartheta})$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ may form a set of linear measure zero when $T(r, f)$ is bounded. The following theorem shows that there is an essential difference between bounded functions and functions for which $T(r, f)$ is bounded.

Theorem I. *Suppose that* $f(z)$ *is regular and bounded for* $|z| < 1$, *and that* $f(e^{i\vartheta_1})$, $f(e^{i\vartheta_2})$ *exist and are not equal. Then the projection on the straight line joining* $f(e^{i\vartheta_1})$ *and* $f(e^{i\vartheta_2})$ *of the set of values taken by* $f(e^{i\vartheta})$ *for* $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$ *includes all points on the line between* $f(e^{i\vartheta_1})$ *and* $f(e^{i\vartheta_2})$ *and a fortiori this set cannot be of linear measure zero.*

We need the following lemma here and in some of the later theorems.

Lemma 1. *Suppose that* $f(z)$ *is regular in a connected domain* D *and is not a constant. Let* m *be a curve in* D *on which* $w = f(z)$ *takes values on the straight line* M *in the* w *plane. Then as* z *moves along* m *in one direction,* w *moves along* M *monotonically, except perhaps at isolated points where* $f'(z) = 0$; *and* m *has a tangent except at these points. If* $f'(z_0) = 0$, m *has a branch point with an even number of branches, and we can arrange the branches in pairs so that each pair forms a curve on*

[12]) R. Nevanlinna, Commentarii Math. Helvetici 2 (1930), pp. 236—252.

which w moves along M monotonically. Further the end points of m are all on the boundary of D.

Proof. If $f(z)$ is regular at z_0, and not a constant, we have, as $z \to z_0$,

$$f(z) - f(z_0) \sim c_p (z - z_0)^p, \tag{2.11}$$

where $c_p \neq 0$, and p is an integer greater than or equal to 1. If $f'(z_0) \neq 0$, $p = 1$; and it is well known that $f(z)$ takes every value near $f(z_0)$ exactly once in the neighbourhood of z_0. The first part follows easily from these facts.

If $f'(z_0) = 0$, $p > 1$, and $f(z)$ takes every value near $f(z_0)$ exactly p times. Hence the second part holds; and the third also follows from these considerations.

Proof of theorem 1. Choose β so that $0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$, and the lines $\arg(1 - z e^{-i\theta_1}) = -\beta$, $\arg(1 - z e^{-i\theta_2}) = \beta$ bisect the angles between the chord $(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2})$ and the tangents at $e^{i\theta_1}$ and $e^{i\theta_2}$ respectively. Write $w = f(z)$, $w_1 = f(e^{i\theta_1})$, $w_2 = f(e^{i\theta_2})$. Let L be the straight line joining w_1 and w_2, and M any straight line perpendicular to L, intersecting it between w_1 and w_2. Since $f(z) \to w_1$ as $z \to e^{i\theta_1}$ uniformly in $|\arg(1 - z e^{-i\theta_1})| \leqq \beta$, we can choose δ so that in $|\arg(1 - z e^{-i\theta_1})| \leqq \beta$, $|e^{i\theta_1} - z| \leqq \delta$, $f(z)$ takes values on the same side of M as w_1; and similarly so that in $|\arg(1 - z e^{-i\theta_2})| \leqq \beta$, $|e^{i\theta_2} - z| \leqq \delta$, $f(z)$ takes values on the same side of M as w_2. We denote curves bounding the regions $|\arg(1 - z e^{-i\theta_1})| \leqq \beta$, $|e^{i\theta_1} - z| \leqq \delta$ and $|\arg(1 - z e^{-i\theta_2})| \leqq \beta$, $|e^{i\theta_2} - z| \leqq \delta$ by c_1 and c_2 respectively.

Since $f(z)$ is regular for $|z| < 1$, the points at which $f'(z) = 0$ are isolated; and we can find a straight line s joining c_1 and c_2 inside $|z| < 1$ on which $f'(z) \neq 0$. Let d be the domain bounded by s, c_1, c_2, and the arc $\theta_1 \leqq \arg z \leqq \theta_2$, $|z| = 1$; and let S, C_1, C_2 be the curves in the w plane corresponding to s, c_1, c_2.

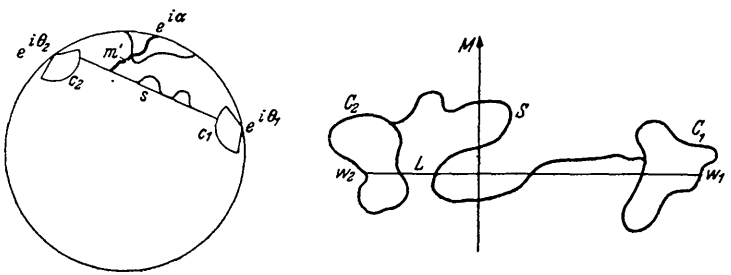


Fig. 1.

Since S joins C_1 to C_2, it must cross M; and, since $f(z)$ is regular on s the number of intersections is finite. Let m be the curve, or curves,

in the z-plane on which $w = f(z)$ takes values on M. It follows that m certainly exists, and meets s in one or more points at which $f'(z) \neq 0$. At these points m has a tangent, and so either m coincides with s, or else m intersects s a finite number of times. A point at which s touches m is counted as an odd or even number of intersections, according as m does, or does not, cross s. The end points of s are on c_1, and c_2; and these cannot correspond to points on M. Hence m does not coincide with s.

Since $f'(z) \neq 0$ on s, there is only one sheet of the Riemann surface of $f(z)$ near each point of intersection of S and M; and these points correspond exactly to intersections of S and M, an odd number corresponding to an odd number, and an even number to an even number. Since S joins C_1 to C_2, the total number of intersections of S and M is odd; and so there is at least one point on S which counts as an odd number of intersections. Near the corresponding point in the z plane there are points of m inside d. Let $m(d)$ denote the part of m in d. Now by lemma I the end points of $m(d)$ must lie, either on s, or on $|z| = 1$. For c_1 and c_2 do not contain points on m. At each branch point of $m(d)$ the number of branches is even; and so the number of end points is even. Hence there is at least one on $|z| = 1$. For those on s correspond to the intersections of S and M, and are therefore odd in number. From each point on s corresponding to an intersection of S and M there starts a branch of $m(d)$ on which w moves monotonically along M. Rejecting those (a finite number at most) with both end points on s, we can find one at least m', say, joining a point z_0 on s to a point $e^{i\alpha}$ on $|z| = 1$. Since $|f(z)|$ is bounded, and w moves monotonically along M, $f(z)$ tends to a finite limit as $z \to e^{i\alpha}$ along m'. The projection of the limit on L is the point of intersection of L and M; and, since M is any line intersecting L at right angles between w_1 and w_2, the projection of the set $f(e^{i\vartheta})$, $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$, includes all points on L, which is the required result.

If the set $f(e^{i\vartheta})$, $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$, is of linear measure zero, then *a fortiori* the projection will be of linear measure zero. Since $w_1 \neq w_2$, this is not the case; and so the result is complete.

2.3. It is known that $f(e^{i\vartheta})$ need not be continuous even if it is bounded, indeed Littlewood[13]) has constructed a function, regular and bounded for $|z| < 1$, such that $|f(z)|$ is discontinuous at almost all points on $|z| = 1$.

---

[13]) J. E. Littlewood, Journal of London Math. Soc. 2 (1927), pp. 172—176.

It is, however, known that $f(e^{i\vartheta})$ has a kind of *average continuity* at the points where it exists. For we have the following result[14]). *If* $f(z)$ *is regular, and* $|f(z)| < M$ *for* $|z| < 1$, *and if* $f(1)$ *exists, then*

$$\lim_{z \to 1} 1 \frac{1}{-z} \int_z^1 f(u)\, du = f(1),$$

uniformly when $z \to 1$ *in* $|z| \leqq 1$. In particular, putting $z = e^{i\vartheta}$, and taking the unit circle as the path of integration, we have

$$\lim_{\theta \to 0} - \frac{i}{1 - e^{i\theta}} \int_0^{\theta} f(e^{i\vartheta})\, e^{i\vartheta}\, d\vartheta = f(1).$$

Hence it is easy to show that

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\Theta} \int_0^{\theta} f(e^{i\vartheta})\, d\vartheta = f(1). \tag{2.3 1}$$

If $|f(1)| = M$, we can deduce more, viz.

Theorem 2. *If* $f(z)$ *is regular, and* $|f(z)| < M$ *for* $|z| < 1$, *and if* $|f(1)| = M$, *then given any* $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, *we can choose* $\theta_0 = \theta_0(\varepsilon, \delta)$ *so that*

$$|f(e^{i\vartheta}) - f(1)| < \varepsilon \tag{2.3 2}$$

for $0 \leqq |\theta| \leqq \Theta < \theta_0$, *except perhaps in a set of* θ *of measure less than* $\delta\Theta$.

That is to say $f(e^{i\vartheta}) \to f(1)$ as $\theta \to 0$ in a set of density 1.

Proof. Since $f(1)$ exists, it follows from (2.3 1) that

$$\left| \int_0^{\theta} f(e^{i\vartheta})\, d\vartheta \right| \geqq |f(1)|\, \Theta\, (1 - \eta_1) \tag{2.3 3}$$

for every $\eta_1 > 0$, and every positive $\Theta < \theta_0(\eta_1)$. Since $|f(e^{i\vartheta})| \leqq M = |f(1)|$, it follows from this that, given any $\varepsilon_1 > 0$, $\delta_1 > 0$, we have $|f(e^{i\vartheta})| > |f(1)|(1 - \varepsilon_1)$ for $0 \leqq |\theta| \leqq \Theta$, except possibly in a set of θ of measure less than $\delta_1\Theta$, provided that $\Theta < \theta_0(\varepsilon_1, \delta_1)$. For if not, it is easy to obtain a contradiction of (2.3 3).

Let $f(1) = M e^{i\alpha}$; then outside the excepted set we may write

$$e^{-i\alpha} f(e^{i\vartheta}) = |f(1)|\, \{e^{i\beta(\vartheta)} + \varphi(\theta)\}, \tag{2.3 4}$$

where $\beta(\theta)$ is real, and $|\varphi| < \varepsilon_1$ for $0 \leqq \theta \leqq \Theta < \theta_0(\varepsilon_1, \delta_1)$. We have to prove that $\beta(\theta)$ is small except in a set of measure $(\delta - \delta_1)\Theta$. Since $|f(e^{i\vartheta})| \leqq M$, we have

$$I = \frac{e^{-i\alpha}}{M} \int_E f(e^{i\vartheta})\, d\vartheta \Big| \leqq \delta_1 \Theta, \tag{2.3 5}$$

---

[14]) See L. S. Bosanquet and M. L. Cartwright, Math. Zeitschr. 37 (1933), p. 188—189, Theorem V.

where E is the excepted set. Also

$$\int_{CE} \frac{\varphi(\theta)}{M} d\theta \Big| \leqq \varepsilon_1 \Theta, \tag{2.36}$$

where CE denotes the set complementary to E in $0 \leqq \theta \leqq \Theta$. Dividing (2.31) by $M e^{i\alpha}$, and taking the real part, we have

$$\int_{CE} [\cos\beta(\theta) + R\{\varphi(\theta)\}] d\theta - I > \Theta(1 - \eta_2)$$

for every $\eta_2 > 0$, and every $\Theta < \theta_0(\eta_2)$. Hence by (2.35) and (2.36), we have

$$\int_{CE} \cos\beta(\theta) d\theta > \Theta(1 - \eta_3)$$

for every $\eta_3 > 0$, provided that $\Theta < \theta_0(\eta_3, \delta_1)$. As before we have $\cos\beta(\theta) > 1 - \varepsilon_2$ for $0 \leqq \theta \leqq \Theta$, except perhaps in a set of θ of measure $\delta_2 \Theta$, provided that $\Theta < \theta_0(\varepsilon_2, \delta_2)$; and ε_2, δ_2 may be made as small as we please by choosing $\delta_1, \varepsilon_1, \eta_1, \eta_2, \eta_3$, sufficiently small. That is to say $|\beta(\theta)| < \varepsilon_2$ outside the excepted set; and so we have

$$|f(e^{i\theta}) - f(1)| < \varepsilon$$

where ε may be made as small as we please by a suitable choice of ε_1 and ε_2, for $0 \leqq \theta \leqq \Theta$, except in a set of measure $\delta\Theta = (\delta_1 + \delta_2)\Theta$, provided that $\Theta < \theta_0(\varepsilon, \delta)$.

The Range of Values of a Function.

3.1. We next prove a result about the range of values of a function $f(z)$ near a singularity; the function need not now be bounded. Seidel[15]) has proved results of a similar character for bounded functions by different methods.

Theorem 3. *Suppose that $f(z)$ is regular for $|z| < 1$, and that $\Gamma(1)$ contains a finite value $f^*(1)$. Suppose that the set $\Gamma(e^{i\theta})$, $0 \leqq |\theta| \leqq \delta$, contains no value w for which*

$$0 < |w - f^*(1)| < \eta. \tag{3.11}$$

Then either $f(z) \equiv f^*(1)$, or else $R(1)$ contains every value in some neighbourhood of $f^*(1)$.

Proof. Suppose that $f(z)$ is not identically equal to $f^*(1)$; and consider the set of points in the z plane for which $|z| < 1$, and

$$|F(z)| = |f(z) - f^*(1)| < \varrho < \eta.$$

---

15) W. Seidel, Trans. Amer. Math. Soc. **34** (1932) p. 18, und **36** (1934) p. 213.

These points form one or more connected regions bounded by parts of $|z| = 1$, and curves on which $|F(z)| = \varrho$. Since $f(z) \to f^*(1)$ as $z \to 1$ along some Jordan curve, there is one of these connected regions $\Delta(\varrho)$ which includes part of that curve near $z = 1$, and has $z = 1$ as a boundary point.

Now $\Delta(\varrho)$ includes $\Delta(\varrho_1)$ for every $\varrho_1 < \varrho$; and so, as $\varrho \to 0$, $\Delta(\varrho)$ shrinks to Δ_0 which may consist only of the point $z = 1$. Suppose that Δ_0 includes a continuous Jordan curve joining $z = 1$ to the arc of $|1 - z| = \delta$ on which $|z| \leqq 1$. Then $F(z) = 0$ at all points on this curve: and so either $F(z) = 0$ at an infinity of points inside $|z| = 1$, or else $F(z)$ tends uniformly to 0 on an arc of $|z| = 1$ of length greater than δ. In both cases it follows that $F(z) \equiv 0$. Hence $f(z) = f^*(1)$ which gives a contradiction. Since this is true for every $\delta > 0$, it follows that $\Delta(\varrho)$ lies entirely inside the region $|1 - z| < \delta$, $|z| < 1$ for every $\varrho < \varrho_0(\delta)$. Hence there are parts of the boundary of $\Delta(\varrho)$ inside $|1 - z| < \delta$, $|z| < 1$.

Consider the parts of the boundary of $\Delta(\varrho)$ for which $|z| < 1$. On these $|F(z)| = \varrho$, and on each separate part $\arg F(z)$ is monotonic. In order to see that the last statement is true, let s be the length of the frontier measured from some fixed point on it. Then $\frac{d \arg F(z)}{ds}$ does not change sign except at points where $F'(z) = 0$. If $F'(z_0) = 0$, $|F(z_0)| = \varrho > 0$, and $F(z) \not\equiv F(z_0)$, we have

$$\log F(z) - \log F(z_0) \sim c_p (z - z_0)^p,$$

where $c_p \neq 0$, and p is an integer greater than 1, as $z \to z_0$. Taking real and imaginary parts, we see that if $\frac{d \arg F(z)}{ds}$ changes sign at z_0, there are points on both sides of the curve at which $|F(z)| > \varrho$. But $|F(z)| < \varrho$ in $\Delta(\varrho)$, and so $\arg F(z)$ is monotonic on the boundary of $\Delta(\varrho)$.

Since $z = 1$ is a boundary point, we can find a piece C of the boundary of $\Delta(\varrho)$ on which $|F(z)| = \varrho$ with end points on $|z| = 1$. Suppose next that $\arg F(z)$ is bounded on C, and that $e^{i\gamma}$ is an end point of C. Since $\arg F(z)$ is monotonic on C, it must tend to a limit β as $z \to e^{i\gamma}$ along C. Hence $F(z) \to \varrho e^{i\beta}$ as $z \to e^{i\gamma}$; and so

$$f(z) \to f(1) + \varrho e^{i\beta}$$

as $z \to e^{i\gamma}$ along some Jordan curve. But this is contrary to our hypothesis, and so $\arg F(z)$ increases, or decreases, indefinitely as $z \to e^{i\gamma}$ along C. Since $|F(z)| = \varrho$ on C, $F(z)$ must take every value W for which $|W| = \varrho$ an infinity of times on C, i. e. near $z = 1$. Since ϱ is any sufficiently small number, we have the required result.

Functions Unbounded in the Unit Circle.

4. 1. The following theorem is a result for functions meromorphic in the unit circle corresponding to theorem III a.

Theorem 4. *Suppose that $f(z)$ is meromorphic and does not take the value a more than a finite number of times in $|z| < 1$. Suppose also that $C(1)$ includes the value a.*

Then either (1) *$\Gamma(1)$ includes the value a,*

or (2) *the set $\Gamma(e^{i\theta})$, $0 \leqq \theta < 2\pi$, includes the value a repeated an infinity of times,*

or (3) *the set $\Gamma(e^{i\theta})$, $0 \leqq \theta < 2\pi$, includes a set A of values with a as limit point such that the projection of A on a certain straight line fills a certain interval of the line.*

Corollary 1. *With the conditions of the theorem if the set $\Gamma(e^{i\theta})$, $0 \leqq \theta < 2\pi$ is a set of linear measure zero, it includes the value a.*

Corollary 2. *If $f(z)$ is meromorphic in $|z| < 1$, and if the set $\Gamma(e^{i\theta})$, $0 \leqq \theta < 2\pi$, is of linear measure zero, then $f(z)$ takes every value an infinity of times, except perhaps for values belonging to $\Gamma(e^{i\theta})$, $0 \leqq \theta < 2\pi$.*

We have not assumed that $T(r, f)$ is bounded; and so $\Gamma(e^{i\theta})$ may contain more than one value for a fixed θ. The theorem says very little about *the set of* θ for which $\Gamma(e^{i\theta})$ has the properties mentioned. This point of view has been developed by Lusin and Privaloff[16]).

Proof of corollary 1. If $\Gamma(e^{i\theta})$, $0 \leqq \theta < 2\pi$, does not include the value a, case (3) holds. Suppose that the set A is of linear measure zero, then *a fortiori* the projection of A is of linear measure zero which gives a contradiction; and so corollary 1 is proved.

Proof of corollary 2. Suppose that $f(z)$ only takes the value a a finite number of times. Then

$$F(z) = (f(z) - a)^{-1}$$

is regular in $|z| < 1$, except perhaps for a finite number of poles. Let D be the region obtained from $|z| < 1$ by cutting out the poles. If $|F(z)|$ is bounded in D, it follows from theorem 1 that the set of boundary values $F(e^{i\theta})$, $0 \leqq \theta < 2\pi$, cannot be of linear measure zero. But this implies that $\Gamma(e^{i\theta})$, $0 \leqq \theta < 2\pi$, cannot be of linear measure zero, and so $|F(z)|$ must be unbounded in D. Hence $|F(z)|$ is unbounded in the neighbourhood of some point $e^{i\theta_0}$ such that $0 \leqq \theta_0 < 2\pi$, and a belongs to $C(e^{i\theta_0})$. It now follows from corollary 1 that $\Gamma(e^{i\theta})$, $0 \leqq \theta < 2\pi$, includes the value a.

---

[16]) N. Lusin and J. Privaloff, Ann. Scientifiques de l'Ecole Normale sup. (3) 42 (1925) pp. 143—191.

Proof of theorem 4. We may suppose that $a = \infty$. Then $f(z)$ is regular in $|z| < 1$ except perhaps for a finite number of poles; and there is a sequence $z_1, z_2, \ldots$ such that $|z_n| < 1$, and

$$\lim_{n \to \infty} |f(z_n)| = \infty, \qquad \lim_{n \to \infty} z_n = 1.$$

Let $|f(z_n)| = \varrho_n$. Then $\varrho_n \to \infty$ as $n \to \infty$. Consider the region $\Delta(\varrho)$ for which $|f(z)| > \varrho$, $|z| < 1$; then z_n lies in $\Delta(\varrho)$ for all $n > N_0(\varrho)$. Suppose first that, given any ϱ, however large, we can find a single connected piece of $\Delta(\varrho)$ containing all the points z_n for which $n > n_0(\varrho)$. Let $m_n = n_0(\varrho_n)$. Then we can join the points $z_{m_1}, z_{m_1+1}, \ldots, z_{m_2}$ by a polygon lying inside $\Delta(\varrho_1)$, and we can join $z_{m_2}, z_{m_2+1}, \ldots, z_{m_3}$ by a polygon lying in $\Delta(\varrho_2)$, and so on. Since $z_n \to 1$ these polygons together form a curve tending to $z = 1$ on which $|f(z)| \to \infty$. Hence $\Gamma(1)$ includes the value a, and we have case (1).

Since we may take as our sequence any subsequence of the original sequence, case (1) holds whenever a single connected piece of $\Delta(\varrho)$ contains an infinite subsequence of the points z_n. If this is not so we can find ϱ_0 as large as we please such that $\Delta(\varrho_0)$ consists of an infinity of separate pieces. Since $f(z)$ has only a finite number of poles, there is an infinite sequence of these regions in which $f(z)$ is regular, and each of which contains one or more of the points z_n for which $n > n_0(\varrho_0)$.

Let $\Delta_n(\varrho_0)$ denote the piece which contains z_n, and let $C_n(\varrho_0)$ denote the part of the boundary of $\Delta_n(\varrho_0)$ for which $|z| < 1$. Then $C_n(\varrho_0)$ consists of one or more continuous curves terminating at points on $|z| = 1$; and $|f(z)| = \varrho_0$ on $C_n(\varrho_0)$. Let $C_n'(\varrho_0)$ be one of these continuous curves, and let Z_1 and Z_2 be any two points on it such that $f(Z_1) = \varrho_0 e^{i\varphi_1}$, $f(Z_2) = \varrho_0 e^{i\varphi_2}$. We may obviously suppose that $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Write $w = f(z)$; let L be the straight line joining $\varrho_0 e^{i\varphi_1}$ to $\varrho_0 e^{i\varphi_2}$ in the w plane, and M any line intersecting L at right angles between $\varrho_0 e^{i\varphi_1}$ and $\varrho_0 e^{i\varphi_2}$.

Consider the set of points in $\Delta_n(\varrho_0)$ for which $f(z)$ takes values on M. Since M intersects the arc of $|w| = \varrho_0$ between $\varrho_0 e^{i\varphi_1}$ and $\varrho_0 e^{i\varphi_2}$, there is at least one point on M corresponding to a point on $C_n'(\varrho_0)$ between Z_1 and Z_2; and so there are some points in $\Delta_n(\varrho_0)$ for which $f(z)$ takes values on M. By lemma 1 these points lie on curves terminating on $|z| = 1$, and also we may select a branch m of one of these curves on which $|f(z)|$ is monotonic. If $|f(z)|$ is unbounded on a curve m corresponding to some line M, then $|f(z)| \to \infty$ along m. If this happens for an infinite sequence of separate regions $\Delta_{n_1}(\varrho_0), \Delta_{n_2}(\varrho_0), \ldots$, we have case (2). If not, $|f(z)|$ is bounded on the curve m obtained from every line M in every region $\Delta_n(\varrho_0)$ such that $n > n_0$. The bound depends on the region $\Delta_n(\varrho_0)$ and on the line M. Since $|f(z)|$ is increasing as

$|z| \to 1$ on m, it follows that $f(z)$ tends to a finite limit on m. The projection of this limit on L is the point of intersection of L and M; and, since the limit exists for every line M, the projections of the limit values of $f(z)$ fill the line L from $\varrho_0 e^{i\varphi_1}$ to $\varrho_0 e^{i\varphi_2}$. Since ϱ_0 may be chosen as large as we please, and every limit value obtained in this way has modulus greater than ϱ_0, we have case (3).

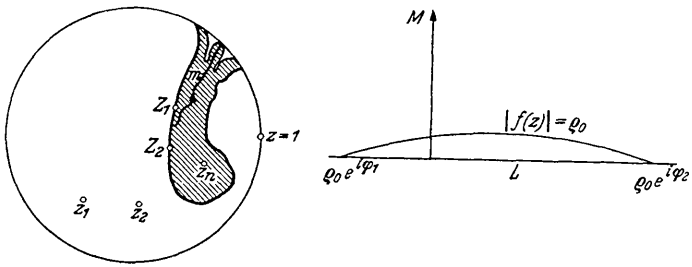


Fig. 2.
$\Delta_n(\varrho_0)$ is the shaded area, and m is the curve corresponding to M.

4.2. We can modify the preceding theorem so as to hold for the neighbourhood of a particular point $z = 1$, say. We find, somewhat surprisingly, that there are cases in which $\Gamma(e^{i\theta})$, $0 < |\theta| \leqq \delta$, *contains no values, finite or infinite.*

Theorem 5. *Suppose that $f(z)$ is meromorphic for $|z| < 1$. Suppose also that $C(1)$ contains the value a, but $R(1)$ does not.*

Then either (1) $\Gamma(e^{i\theta})$, $0 \leqq |\theta| \leqq \delta$, *includes the value a for every $\delta > 0$,*

or (2) $\Gamma(e^{i\theta})$, $0 \leqq \theta \leqq \delta$, *includes a set A of values with a as limit point such that the projection of A on a certain straight line fills a certain interval of the line,*

or (3) *there is a $\delta > 0$ such that for either $-\delta < \theta < 0$, or $0 < \theta < \delta$, $\Gamma(e^{i\theta})$ is void and $R(e^{i\theta})$ includes every value except the value a and perhaps one other. Also $f(z) \to a$ on a sequence of continuous curves tending either to the arc $-\delta < \arg z < 0$ or to the arc $0 < \arg z < \delta$.*

Case (3) can actually occur, as we shall see in § 4.3; it seems probable that $R(1)$ must then include every value except the value a. However I shall leave this for another occasion.

Proof of theorem 5. We proceed as in theorem 4, taking $a = \infty$. Then there is a sequence $\{z_n\}$ such that

$$\lim_{n \to \infty} |f(z_n)| = \infty, \qquad \text{and } \lim_{n \to \infty} z_n = 1,$$
$$|1 - z_n| < \eta, \qquad |z_n| < 1.$$

Let $\Delta(\varrho)$ denote the region in which $|f(z)| > \varrho$, $|1-z| < \eta$, $|z| < 1$. If, for every ϱ however large, there is a connected piece of $\Delta(\varrho)$ containing an infinite subsequence $\{z_{n_i}\}$ of the sequence $\{z_n\}$, we can show, as before, that $|f(z)| \to \infty$ as $z \to 1$ along a Jordan curve.

Suppose that this is not so. Then we can find ϱ_0 as large as we please such that $\Delta(\varrho_0)$ consists of an infinity of separate pieces, and among these is an infinite sequence each of which contains one or more of the points z_n, and in which $f(z)$ is regular. Let $\Delta_n(\varrho_0)$ be the connected piece containing z_n. Then the boundary of $\Delta_n(\varrho_0)$ consists of one or more curves on which $|f(z)| = \varrho$ and $|z| < 1$, $|1-z| < \eta$, and points on $|z| = 1$, $|1-z| < \eta$, and on $|1-z| = \eta$, $|z| < 1$. If no boundary points of $\Delta_n(\varrho_0)$ lie on $|1-z| = \eta$, $|z| < 1$, then the method of theorem 4 gives case (1) or case (2).

Hence we may suppose that either cases (1) or (2) hold, or else some of the points on the boundary of $\Delta_n(\varrho_0)$ lie on $|1-z| = \eta$, $|z| < 1$ for a sequence $n = n_1, n_2, \ldots, n_i \to \infty$.

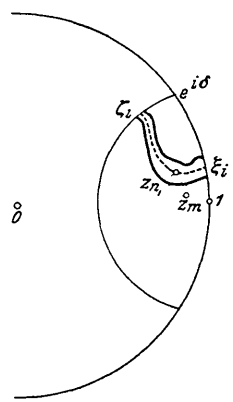


Fig. 3.
The dotted curve is Γ_i.

Consider the points in $\Delta_{n_i}(\varrho_0)$ for which $|f(z)| > |f(z_{n_i})|$. Since $|f(z)|$ cannot attain a maximum at an interior point, these points form connected regions one of which joins the point z_{n_i} to the boundary of $\Delta_{n_i}(\varrho_0)$; and since $|f(z)| = \varrho_0$ on those parts of the boundary for which $|z| < 1$, $|1-z| < \eta$ there is a connected region joining z_{n_i} either to the arc $|1-z| = \eta$, $|z| < 1$, or to the arc $|z| = 1$, $|1-z| < \eta$, or to both. We may suppose that it joins z_{n_i} to the arc $|1-z| = \eta$, $|z| < 1$. For if the new region $\Delta_{n_i}(|f(z_{n_i})|)$ has no frontier points on $|1-z| = \eta$, $|z| < 1$ for an infinite sequence z_{n_i}, we may apply the method of theorem 4 and obtain cases (1) or (2).

Suppose that ζ_i is a frontier point of $\Delta_{n_i}(|f(z_{n_i})|)$ on $|1-z| = \eta$, $|z| < 1$. Then $|f(\zeta_i)| \geqq |f(z_{n_i})| \to \infty$ as $i \to \infty$. Since $f(z)$ is regular on $|1-z| = \eta$, for $|z| < 1$, $|\zeta_i| \to 1$ as $i \to \infty$, i. e. $\zeta_i \to e^{\pm i\delta}$, where $|1-e^{i\delta}| = \eta$. We may suppose without real loss of generality that $\zeta_i \to e^{i\delta}$.

Suppose now that $\Delta_{n_i}(\varrho_0)$ has a frontier point ξ_i on the arc $|z| = 1$, $0 < \arg z < \delta$. Then there is certainly a curve Γ_i connecting ζ_i and ξ_i inside $\Delta_{n_i}(\varrho_0)$ on which $|f(z)| > \varrho_0$. Since $z_m \to 1$ as $m \to \infty$, when i is fixed, z_m lies on the same side of Γ_i as the point $z = 1$ for all large m. Since the regions $\Delta_{n_m}(\varrho_0)$, $m = 1, 2, \ldots$, are all separate, and contain the points z_{n_m}, they all lie on the side of Γ_i nearer $z = 1$

for $m > m_0(i)$. Hence $|\zeta_m| < |\zeta_i| < 1$ for all $m > m_0(i)$. But we have already shown that $|\zeta_m| \to 1$ as $m \to \infty$; and so we have a contradiction. Hence $\Delta_{n_i}(\varrho_0)$ has no frontier point on the arc $|z| = 1$, $0 < \arg z < \delta$, for large values of n_i.

We now have a sequence of regions $\Delta_{n_i}(\varrho_0)$ each containing the corresponding point z_{n_i}, and having no frontier points on $|z| = 1$, $0 < \arg z < \delta$. Each region contains a smaller region $\Delta_{n_i}(|f(z_{n_i})|)$, connecting the point z_{n_i} with the arc $|1 - z| = \eta$, $|z| < 1$, in which region $|f(z)| > |f(z_{n_i})|$. Since $|f(z_{n_i})| \to \infty$ these regions tend uniformly to the arc $|z| = 1$, $0 < \arg z < \delta$ as $i \to \infty$. Hence $\Gamma(e^{i\theta})$, $0 < \theta < \delta$, cannot contain any value except the value ∞. But since the regions $\Delta_{n_i}(\varrho_0)$ are not connected, there is a part B_i of the boundary of $\Delta_{n_i}(\varrho_0)$ between each of these regions; and on B_i we have $|f(z)| = \varrho_0$. Hence $\lim |f(z)| = \varrho_0$ as $z \to e^{i\theta}$, $0 < \theta < \delta$ along every curve; and so $\Gamma(e^{i\theta})$, $0 < \theta < \delta$, cannot contain even the value ∞.

It remains to prove that $R(e^{i\theta})$ includes every value, except the value ∞ and perhaps one other, for $0 < \theta < \delta$. Suppose that $R(e^{i\alpha})$, $0 < \alpha < \delta$, omits the values[17]) a, b, ∞. Then we can choose θ_0 and r_0 so that $f(z)$ omits the values a, b, ∞ in the region D, viz.

$$r_0 < |z| < 1, \quad |\alpha - \arg z| \leqq \theta_0 < \min(\delta - \alpha, \alpha).$$

Let C_i be any curve connecting z_{n_i} and ζ_i inside $\Delta_{n_i}(|f(z_{n_i})|)$. Then, given any H however large and any $R_0 < 1$, we can choose i_0 so that

$$|f(z)| > H, \quad R_0 < |z| < 1 \tag{4.21}$$

on C_i for $i > i_0$. Since $z_{n_i} \to 1$ and $\zeta_i \to e^{i\delta}$ as $i \to \infty$, the curve C_i intersects $|\alpha - \arg z| = \pm\theta_0$, $R_0 < |z| < 1$, for all $i > i_0$; and between any two curves C_i and C_{i+1} there is a curve B_i forming part of the boundary of $\Delta_{n_i}(\varrho_0)$ on which $|f(z)| = \varrho_0$. B_i also joins $\arg z = \alpha - \theta_0$ to $\arg z = \alpha + \theta_0$ inside D. Let D_i be the region bounded by C_i, C_{i+1}, and the lines $\arg z = \alpha \pm \theta_0$. Then D_i contains part of B_i.

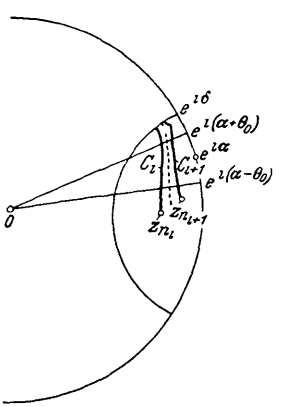


Fig. 4.
The dotted curve is B_i.

[17]) The following argument is an adaptation of Iversen's proof that if $f(z)$ omits three values in a region Δ bounded by curves Γ_1, Γ_2 meeting in a point z_0, and if $f(z)$ tends to 0 as $z \to z_0$ along Γ_1 and Γ_2, then $f(z)$ tends to 0 uniformly in the region D. Here we have an infinity of regions D_i bounded partly by curves C_i and C_{i+1} on which the function tends to a limit. C_i and C_{i+1} do not meet in a point, but the distance between them tends to 0 as $i \to \infty$. See F. Iversen, Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes, Thèse, Helsingfors, (1914) p. 25.

Let

$$\varphi(z) = \left(1 - \frac{b-a}{f(z)-a}\right)^{1/2};$$

then $\varphi(z)$ is regular in D_i, and does not take the values 0, 1, -1, ∞. By (4.2 1), $|f(z)| \to \infty$ on C_i as $i \to \infty$; and so, as $i \to \infty$, $\varphi(z)$ approaches $+1$ or -1 on C_i. Let $\varphi_i(z)$ denote the branch of $\varphi(z)$ which approaches -1 on C_i as $i \to \infty$; and let

$$\Phi_i(z) = \frac{\nu[\varphi_i(z)] - \nu(-1)}{\nu[\varphi_i(z)] - \overline{\nu(-1)}},$$

where $\nu(z)$ is the inverse of the modular function[18]). Then $|\Phi_i| < 1$ in D_i. For each value of i we can choose the determination of ν so that, as $\varphi_i(z) \to -1$ on C_i, $\nu(\varphi_i(z))$ tends to a value $\nu(-1)$ independent of i. Then $\Phi_i(z)$ is regular and one-valued in D_i; and, given any $\varepsilon_1 > 0$, we can choose i_0 so that

$$|\Phi_i(z)| < \varepsilon_1 \text{ on } C_i$$

for $i > i_0$. Let $\nu'(-1)$ be the value which $\nu[\varphi_i(z)]$ approaches on C_{i-1}; then

$$|\Phi_i(z) - 2\Phi_0| < \varepsilon_1, \text{ where } \Phi_0 = \frac{1}{2}\,\frac{\nu'(-1) - \nu(-1)}{\nu'(-1) - \overline{\nu(-1)}}$$

on C_{i+1} for $i > i_0$. Let

$$\psi_i(z) = (\Phi_i(z) - \Phi_0)^2 - \Phi_0^2.$$

Then, given any $\varepsilon_2 > 0$, we have

$$|\psi_i(z)| < \varepsilon_2 \quad \text{on} \quad C_i \quad \text{and} \quad C_{i+1} \tag{4.2 2}$$

for all $i > i_0$; and, since $|\Phi_i(z)| < 1$, $|\Phi_0| < 1$ in D_i, we have

$$|\psi_i(z)| < 5 \tag{4.2 3}$$

in D_i.

Since the modular function itself is one-valued, if $\nu[\varphi_i(z)]$ takes values near $\nu(-1)$, then $\varphi_i(z)$ must take values near -1; and, since $\nu(-1)$ is independent of i, given any $\eta_1 > 0$, we can choose $\eta_2 > 0$, and $\eta_3 > 0$ so that if

$$|\varphi_i(z) + 1| > \eta_1, \tag{4.2 4}$$

we have

$$|\nu[\varphi_i(z)] - \nu(-1)| > \eta_2,$$

and

$$|\psi_i(z)| > \eta_3, \tag{4.2 5}$$

where η_1, η_2, η_3 are independent of i. Since $|f(z)| = \varrho_0$ on B_i, (4.2 4) holds for $\eta_1 = \eta_1(\varrho_0)$ independent of i on B_i; and so (4.2 5) holds with $\eta_3 = \eta_3(\varrho_0)$ on B_i for all i.

---

[18]) See G. Julia, Leçons sur les fonctions uniformes (Paris 1923), Chap. I.

It follows from (4.21) that we can find a sequence of positive numbers $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i \to \infty$, such that

$$\exp(-1/\beta_i) < |z| < 1 \quad \text{on } C_i.$$

Put

$$z = \exp(-i\alpha - s\beta_i), \quad s = \sigma + i\tau.$$

$$\Psi_i(s) = \psi_i(z_i(s));$$

and let $D_i', C_i', C_{i+1}', B_i'$ in the s plane correspond to D_i, C_i, C_{i-1}, B_i in the z plane. Then $0 < \sigma < 1$ in D_i'; and $|\tau| = \theta_0\beta_i$ on the parts of the boundary of D_i' corresponding to $\arg z = \alpha \pm \theta_0$. By (4.22)

$$|\Psi_i(s)| < \varepsilon_2$$

on C_i' and C_{i+1}' for $i > i_0(\varepsilon_2)$. Since $|\psi_i| < 5$ in D_i, and $\beta_i \to \infty$, we can choose i_0 so that

$$\left|\frac{\Psi_i(s)}{s+1}\right| = \frac{\psi_i(z)}{\tau+1} < \frac{5}{\theta_0\beta_i+1} < \varepsilon_2$$

on $|\tau| = \theta_0\beta_i$ for $i > i_0(\varepsilon_2)$. Hence

$$|\Psi_i(\sigma)| < \varepsilon_2(\sigma+1) < 2\varepsilon_2.$$

But B_i intersects $\arg z = \alpha$, and so B_i' intersects $\tau = 0, 0 < \sigma < 1$; and so it follows from (4.25) that

$$|\Psi_i(\sigma_0)| > \eta_3$$

for some σ_0 such that $0 < \sigma_0 < 1$, and all i. Choosing $\varepsilon_2 < \frac{1}{2}\eta_3$ we have a contradiction. Hence $R(e^{i\alpha})$ includes either the value a or the value b, which is the required result.

4.3. The type of singularity involved in case (3) of theorem 5 has no counterpart among isolated singularities, but does actually exist as we now proceed to show.

Theorem 6. *There is a function $f(z)$ which is regular everywhere except on the real axis between 0 and 1, and has the following properties in the upper half plane:*

(1) *the value ∞ belongs to $C(x)$ for $0 \leqq x \leqq 1$,*
(2) *the set $\Gamma(x)$ contains no values for $0 < x < 1$,*
(3) *the set $\Gamma(0)$ contains the value ∞ an infinity of times,*
(4) *$f(z)$ takes every value (except of course ∞) near $z = 0$.*

Suppose that $f(z)$ satisfies the conditions of theorem 6, and put

$$Z = -i\frac{z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i}{z - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}, \quad \varphi(Z) = f(z). \tag{4.30}$$

Then the upper half plane transforms into the interior of the unit circle, the segment $(0, 1)$ of the real axis becomes the arc, $0 \leqq \arg Z \leqq \pi, |Z| = 1$,

and the point $z = 0$ becomes the point $Z = 1$. It is then easily seen that $\varphi(Z)$ satisfies the conditions of theorem 5, but cases (1) and (2) do not hold.

The function $f(z)$ in theorem 6 is constructed by means of Mittag-Leffler's function

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \qquad (\alpha > 0).$$

We need inequalities for $E_\alpha(z)$ which hold uniformly for $\alpha \leqq \frac{1}{2}$, and all finite values of z.

Lemma 1. *If* $\alpha \leqq \frac{1}{2}$, *then*

$$|\alpha E_\alpha(z) - \exp(z^{1/\alpha})| < K, \tag{4.31}$$

where K *is independent of* α *and* z, *for* $|\arg z| \leqq \frac{1}{2}\alpha\pi$; *and*

$$|\alpha E_\alpha(z)| < K \tag{4.311}$$

for $\frac{1}{2}\alpha\pi \leqq |\arg z| \leqq \pi$, *and for* $|z| \leqq 1$.

Proof. It is easy to show from the integral

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1}\, dt \qquad (s > 0),$$

that

$$\Gamma(s) \geqq 1 - e^{-1} \qquad (s > 0).$$

Hence

$$|E_\alpha(z)| \leqq \frac{1}{1 - e^{-1}} \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n \leqq \frac{4}{1 - e^{-1}}$$

for $|z| = \frac{3}{4}$, and *a fortiori* (4.311) holds for $|z| \leqq \frac{3}{4}$.

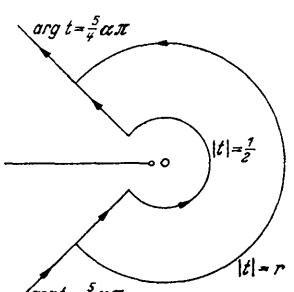


Fig. 5.

It has been shown[19]) that, if $R > |z|$, $\alpha \leqq \frac{1}{2}$, then

$$E_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi\alpha i} \int_{L(R)} \frac{\exp(t^{1/\alpha})\, dt}{t - z}, \tag{4.32}$$

where $L(R)$ is a contour consisting of the straight lines $\arg t = \pm \frac{5}{4}\alpha\pi$ from $t = R$ to ∞, and the arc $|t| = R$, $|\arg t| \leqq \frac{5}{4}\alpha\pi$. Let $L(\frac{1}{2})$ denote a similar contour obtained with an arc of $|t| = \frac{1}{2}$ instead of $|t| = R$, and let $L(R) - L(\frac{1}{2})$ denote the closed contour con-

[19]) See L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, II (1927), p. 266. The restriction $\alpha \leqq \frac{1}{2}$ is only required to make $\frac{5}{4}\alpha\pi < \pi$, so that the contour used in this particular argument does not cross itself.

sisting of the arcs of $|t| = \frac{1}{2}$ and $|t| = R$, and the parts of $\arg t = \pm \frac{5}{4}\alpha\pi$ joining them (described anticlockwise). Then

$$(4.33)\quad \alpha E_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L(R)-L(\frac{1}{2})} \exp(t^{1/\alpha})\frac{dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{L(\frac{1}{2})} \exp(t^{1/\alpha})\frac{dt}{t-z} = \exp(z^{1/\alpha}) + I.$$

Suppose first that $|z| \geqq \frac{3}{4}$, $|\arg z| \leqq \alpha\pi$. Then

$$(4.34)\quad |t-z| \geqq \min\left(\tfrac{1}{4}; \tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{1}{4}\alpha\pi)\right) = \tfrac{1}{4}$$

on $L(\frac{1}{2})$. Putting $t = r\exp(\pm i\frac{5}{4}\alpha\pi)$, and $t = \frac{1}{2}e^{i\theta}$ on $\arg t = \pm\frac{5}{4}\alpha\pi$, and $|t| = \frac{1}{2}$ respectively, we have

$|\exp(t^{1/\alpha})| = \exp(r^{1/\alpha}\cos\frac{5}{4}\pi) = \exp(-r^{1/\alpha}2^{1/2})$, $|\exp(t^{1/\alpha})| \leqq \exp(2^{-1/\alpha})$ on the respective parts of $L(\frac{1}{2})$. Hence

$$(4.35)\quad |I| \leqq \frac{4}{\pi}\int_{1/2}^{\infty}\exp\left(-\frac{r^{1/\alpha}}{2^{1/2}}\right)dr + \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{5}{4}\alpha\pi}^{\frac{5}{4}\alpha\pi}\exp(2^{-1/\alpha})\,d\theta \leqq I_1 + 5\alpha e.$$

Since $\alpha \leqq \frac{1}{2}$, we may replace $2^{1/2}$ by $2^{1/\alpha}$ in I_1; and then, putting $u = (\frac{1}{2}r)^{1/\alpha}$, we have

$$(4.36)\quad I_1 \leqq \frac{8\alpha}{\pi}\int_1^{\infty} e^{-u}u^{\alpha-1}\,du < \frac{8}{\pi}\Gamma(\alpha+1).$$

Since $1 < \alpha+1 \leqq \frac{3}{2}$, $\Gamma(\alpha+1)$ is bounded; and so combining (4.33) with (4.35) and (4.36), we have (4.31) for $|z| \geqq \frac{3}{4}$, $|\arg z| \leqq \alpha\pi$. It follows that (4.31) holds for $|\arg z \pm \frac{5}{4}\alpha\pi| \leqq \frac{1}{4}\alpha\pi$, $|z| \geqq \frac{3}{4}$, and for $|\arg z| \leqq \alpha\pi$, $|z| \leqq 1$.

If $\alpha\pi \leqq |\arg z| \leqq \pi$, we use $\arg t = \pm\frac{3}{4}\alpha\pi$ instead of $\arg t = \pm\frac{5}{4}\alpha\pi$ to form a contour $L'(R)$ similar to $L(R)$. Then (4.32) holds with $L'(\frac{1}{2})$ in place of $L(R)$, and (4.34) holds on $L'(\frac{1}{2})$ for all z in this angle. Hence

$$|\alpha E_\alpha(z)| \leqq \frac{2}{\pi}\int_{L'(1/2)}|\exp(t^{1/\alpha})|\,|dt| \leqq I_1 + 3\alpha e < K,$$

which completes the proof of the inequalities for all finite values of z.

Proof of theorem 6. Consider the function

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n}E_{4^{-n}}\left(\frac{\exp(2^{-n}\pi i)}{z}\right).$$

If $|z| \geqq 1$, we have

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n}\left|E_{4^{-n}}\left(\frac{\exp(2^{-n}\pi i)}{z}\right)\right| \leqq K\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 2K;$$

and so $f(z)$ is certainly regular for $|z| > 1$. This result also holds for all z lying outside the angles

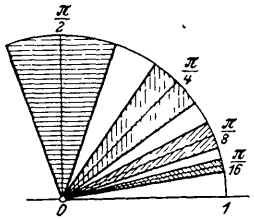


Fig. 6. (4.381) holds in the shaded regions.

$$(4.37) \qquad \left|\frac{\pi}{2^n} - \arg z\right| \leqq \frac{\pi}{2^{2n+1}},$$

where $n = 1, 2, \ldots$, and shows that

$$(4.38) \qquad |f(z)| < 2K$$

except in those angles. Since

$$\frac{\pi}{2^n} - \frac{\pi}{2^{2n+1}} - \left(\frac{\pi}{2^{n+1}} + \frac{\pi}{2^{2n+3}}\right) = \frac{\pi(2^{n+2} - 5)}{2^{2n+3}} > \frac{\pi}{2^{2n+3}},$$

none of these angles overlap, and (4.38) holds for

$$\arg z = \pi(2^{-n} + 2^{-2n-2}), \quad 0 < |z| < \infty.$$

If now, for a fixed n, z satisfies (4.37), then

$$(4.381) \qquad |f(z) - 8^{-n} E_{4^{-n}}(z^{-1} e^{i\pi 2^{-n}})| \leqq 2K;$$

and so, by (4.31), we have

$$(4.39) \qquad |f(r e^{i\pi 2^{-n}}) - 32^{-n} \exp(r^{-4^n})| \leqq 3K.$$

Hence $|f(r e^{i\pi 2^{-n}})| \to \infty$ as $r \to 0$, i. e. to each value of n corresponds a path along which $|f(z)| \to \infty$ as $|z| \to 0$; and these paths are separated from each other by regions in which $|f(z)| < 2K$. Hence $f(z)$ has property (3) of the theorem. It follows immediately from a well known theorem, that $f(z)$ takes every value except perhaps one an infinity of times near $z = 0$. It is not difficult to show from (4.38) and (4.39) that $f(z)$ takes *every* value an infinity of times between $\arg z = \pi 2^{-n}$ and $\arg z = \pi 2^{-n-1}$.

Now let $0 < r < 1$, and make $n \to \infty$ in (4.39). We see that $|f(r e^{i\pi 2^{-n}})| \to \infty$ as $n \to \infty$ by positive integral values, and in fact, given any $r_0 < 1$ and any H however large, we can choose $n_0 = n_0(r_0, H)$ so that

$$(4.391) \qquad |f(r e^{i\pi 2^{-n}})| > H$$

for $r < r_0$, $n > n_0$. Hence $C(x)$ contains the value ∞ for $0 < x < 1$; and so also for $0 \leqq x \leqq 1$. It also follows that $\Gamma(x)$ cannot contain any finite value for $0 < x < 1$. For if $\Gamma(x)$, where $0 < x < 1$ contains the value $a \neq \infty$, we can choose $H > 2|a|$, and then (4.391) holds for $0 < r < \frac{1}{2}(1 + x)$ and all $n > n_0(x, H)$. But the curve on which $f(z) \to a$ as $z \to x$ must intersect the line $0 < |z| < \frac{1}{2}(1 + x)$, $\arg z = 2^{-n}\pi$ for all $n > N_0$, and we obtain a contradiction. Since

$|f(x)| < 2K$ for $\arg z = \pi\,(2^{-n} + 2^{-2n-2})$, $\Gamma(x)$ cannot contain the value ∞ for $0 < x < 1$, and so $f(z)$ has properties (1) and (2) of the theorem.

A Classification of Singularities on the Unit Circle.

4.4. As we have already observed, functions meromorphic in the unit circle have singularities near which the function is bounded, besides those which are similar in some respects to isolated singularities. Before proceeding to discuss functions whose singularities form a set of linear measure zero, I shall classify the types of essential singularity which occur most frequently on the boundary of the unit circle.

Let G denote the set of points $e^{i\theta}$ for which $\lim f(z)$ exists uniformly as $z \to e^{i\theta}$ in $|\arg(e^{i\theta} - z)| \leqq \frac{1}{2}\pi - \delta$ for every $\delta > 0$. Let H denote the set of points $e^{i\theta}$ such that $R(e^{i\theta})$ contains all values except perhaps an S-set. Let I denote the set of points $e^{i\theta}$ such that $f(z)$ takes values everywhere dense, for z in the region $|\arg(e^{i\theta} - z)| \leqq \delta$ for every $\delta > 0$.

Then H does not include I, nor does I include H. G may include points of H but not points of I. The set H is obviously closed; and so, if almost all points belong to H, then all points belong to H.

The following theorems are known. The first is due to Plessner[20]).

Theorem Ib. *If $f(z)$ is meromorphic for $|z| < 1$, then almost all points on $|z| = 1$ belong to either G or I.*

Theorem IIb. *If $f(z)$ is meromorphic for $|z| < 1$, then almost all points on $|z| = 1$ belong to either G or H.*

Although in a sense theorems Ib and IIb correspond to theorems Ia and IIa respectively, there are considerable differences. Isolated essential singularities lying on $|z| = 1$ do not necessarily belong to either H or I, and theorem IIb does not include theorem Ib, whereas IIa includes Ia.

It is not known whether theorem IIb remains true if we replace H by H^*, the set of points $e^{i\theta}$ such that $f(z)$ takes every value except perhaps an S-set in the angle $|\arg(e^{i\theta} - z)| \leqq \delta < \frac{1}{2}\pi$.

As I can give no reference to theorem IIb in the precise form stated, I shall give the proof shown to me by Professor Littlewood. We require a theorem of Ahlfors[21]):

Theorem of Ahlfors. *If $T(r, f)$ is not bounded, the defect $\delta(a)$ vanishes for all values a except perhaps those which, when represented on a sphere, belong to an S-set,* and *a fortiori $f(z)$ takes all values except those belonging to an S-set an infinity of times in $|z| < 1$.*

---

[20]) A. Plessner, Journ. f. Math. 158 (1927), p. 219.

[21]) L. Ahlfors, Soc. Sci. Fen. Commentationes Phys. Math. 5, 16 (1931), pp. 1—19.

Proof of theorem IIb. Suppose that there is a set of points of positive measure on $|z| = 1$ which do not belong to G or H. Then in this set there is a point P at which the set has density 1. Since P does not belong to H, we can draw a small circle with centre P so that $f(z)$ omits a set of values a which cannot be included in an S-set in the region common to this circle and the unit circle. We represent this region on the unit circle by the transformation $z = z(\zeta)$. The boundary is obviously rectifiable; and a set of points of positive measure on it, corresponds to a set of positive measure on $|\zeta| = 1$. The defect in $|\zeta| < 1$ is equal to 1 for the values of a which are omitted; and, since they cannot be included in an S-set, the characteristic function of $\psi(\zeta) = f(z(\zeta))$ must be bounded for $|\zeta| < 1$. Hence[22])

$$\lim_{\zeta \to e^{i\varphi}} \psi(\zeta)$$

exists for almost all φ; and so $\lim f(z)$ exists as z tends to almost all points on $|z| = 1$ near P. But as the points which do not belong to G form a set of density 1 at P, we have a contradiction; and so the theorem is proved.

4. 5. We can deduce various results from theorems 4 and 5; theorem 4 stands in somewhat the same relation to theorem IIIa that Ahlfors' theorem bears to theorem IIa. The most striking results are those for functions which omit three values. For it is well known that if $f(z)$ omits three values a, b, c, say, near $z = 1$, we can reduce certain theorems to the case of a bounded function[23]), in particular the results stated in § 1. 2. That is to say, *if $f(z)$ omits the values a, b, c near $z = 1$, and if $\Gamma(1)$ contains the value α, then $\Gamma(1)$ contains no other value, and $f(z) \to \alpha$ as $z \to 1$ uniformly in $|\arg(1 - z)| \leqq \beta < \frac{1}{2}\pi$. Further if $f(z) \to \alpha$ as $z \to 1$ along two Jordan curves, then $f(z) \to \alpha$ uniformly in the region between them.*

Theorem 7. *If $f(z)$ is meromorphic for $|z| < 1$, and does not take the values a, b and c, then points of G are everywhere dense on $|z| = 1$.*

It follows from theorem Ib or IIb that if any point on $|z| = 1$, say, $z = 1$, is not a point of G, then $C(1)$ includes every value, and, in particular, the values a, b and c. Now apply theorem 5; case 3 is excluded, and so $\Gamma(e^{i\theta})$, $0 \leqq |\theta| \leqq \delta$, contains values near a, b and c for every $\delta > 0$. By the theorem which we have just quoted every point $e^{i\theta}$ at which $\Gamma(e^{i\theta})$ is not void is a point of G. Hence there are points of G arbitrarily near $z = 1$.

---

[22]) See § 2. 1.

[23]) See G. Julia, Leçons sur les fonctions uniformes, Paris (1923) Chap. II.

We may also state the theorem in the form

Theorem IIIb. *Under the hypotheses of theorem 7, almost all points $e^{i\theta}$, either belong to G, or are limit points of points of G, at which $\Gamma(e^{i\theta})$ contains values near a, b and c.*

We also have a result for functions whose set of boundary values is of linear measure zero besides those given in the corollaries of theorem 4.

Theorem 8. *Suppose that $f(z)$ satisfies the hypotheses of theorem 7, and also that the set $\Gamma(e^{i\theta})$, $0 \leqq |\theta| \leqq \delta$, is of linear measure zero. Then $R(1)$ includes all values which do not belong to $\Gamma(e^{i\theta})$, $0 \leqq |\theta| \leqq \delta$, and so $R(1)$ certainly includes all values except a set of linear measure zero.*

Proof. Suppose that $R(1)$ does not contain the value a_0, and let

$$F(z) = (f(z) - a_0)^{-1}.$$

Then $F(z)$ is regular in $|z| < 1$, $|1 - z| < \eta$ for some η; suppose, in addition, that $|F(z)|$ is bounded. Then by theorem 1, the set $\Gamma(e^{i\theta})$, $0 \leqq |\theta| \leqq \delta$, is not of linear measure zero, and we have a contradiction. Hence $|F(z)|$ is unbounded, i. e. a_0 belongs to $C(1)$ for $f(z)$. Now applying theorem 5 we may reject case (3), and we see that $\Gamma(e^{i\theta})$, $0 \leqq |\theta| \leqq \delta$, includes the value a_0.

4.6. The theorems of § 4.5 are very nearly the best possible, as the following results show:

Theorem 9. *There is a function $f(z)$ regular in $|z| < 1$ such that $\Gamma(e^{i\theta})$ is void for $0 < |\theta| < \pi$, but not for $\theta = 0$ and $\theta = \pi$.*

Let $\varphi(z)$ be the function considered in theorem 6, and let Z be defined by (4.30). Then write

$$\psi(Z) = \varphi(z);$$

and we see that

$$f(z) = \psi(z) + \psi(-z)$$

has the required properties. For $\psi(z)$ is bounded except near the arc $0 \leqq \arg z \leqq \pi$, $|z| = 1$, and $\psi(-z)$ except near the arc $-\pi \leqq \arg z \leqq 0$, $|z| = 1$; and it follows as before from the inequalities obtained for $\varphi(z)$ that $f(z)$ cannot tend to a limit finite or infinite as $z \to e^{i\theta}$, where $0 < |\theta| < \pi$.

Theorem 10. *There is a function $Q(z)$ regular for $|z| < 1$ which omits the values 0, $\pm 2n\pi i$, $n = 1, 2, \ldots$, and is such that $\Gamma(e^{i\theta})$ is void except for an enumerable set of θ.*

We write

$$Q(z) = \log k^2(\tau), \quad z = \frac{\tau - \tau_0}{\tau - \tau_0}, \quad \log k^2(\tau_0) = q_0,$$

$$-1 < R(\tau_0) \leqq 1, \quad |\tau_0 - \tfrac{1}{2}| \geqq \tfrac{1}{2}, \quad |\tau_0 + \tfrac{1}{2}| > \tfrac{1}{2},$$

where $k^2(\tau)$ is the elliptic modular function, and the determination of the logarithm is fixed by q_0. Then it is known[24]) that $Q(z)$ does not tend to a limit as $z \to e^{i\theta}$ unless θ is one of an enumerable number of vertices of curvilinear triangles formed by arcs orthogonal to $|z| = 1$, and $Q(z)$ has the other properties required.

A Set of Singularities of Linear Measure Zero.

5.1. Besicovitch[25]) has proved the following theorem:

Theorem Ic. *Suppose that $f(z)$ is meromorphic and one-valued in an open simply-connected domain D except for a set E of essential singularities of linear measure zero. Then $f(z)$ takes values everywhere dense in the neighbourhood of each singularity.*

In other words, for each singularity ζ, $C_D(\zeta)$ includes all values.

The method of theorems 4 and 5 may be applied to such functions in the neighbourhood of an essential singularity; and since $C_D(\zeta)$ includes all values, we do not need to suppose that $C_D(\zeta)$ includes the value a.

Theorem IIIc. *Suppose that the conditions of theorem* Ic *are satisfied, and that $f(z) \neq a$ near one of the essential singularities $z = \zeta_0$.*

Then for every $\delta > 0$ the set $\Gamma_D(\zeta)$ taken over the singularities ζ for which $|\zeta - \zeta_0| < \delta$ has one or other of the following properties:

(1) *the set includes the value a,*

(2) *the set includes a set, A, of values, as near to a as we please, such that the projection of A on a certain straight line fills an interval of the line completely.*

It seems strange that the values $\Gamma_D(\zeta)$ may be of positive measure when the points ζ are of measure zero, but I am quite unable to prove anything more.

Proof. Suppose as before that $a = \infty$. Then we can draw a circle $|z - \zeta_0| = \delta$ inside which $f(z)$ is regular except for points of E, and on which $f(z)$ is regular. Since $C_D(\zeta_0)$ includes the value a, there is a sequence of points $z_1, z_2, \ldots$ such that

$$\lim_{n \to \infty} |f(z_n)| = \infty, \qquad \lim_{\lambda \to \infty} z_n = \zeta_0,$$

and z_n does not belong to E. Now apply the argument of theorem 4. Since $f(z)$ is regular on $|z - \zeta_0| = \delta$, $|f(z)|$ is bounded on the circle. Let $\Delta(\varrho)$ denote the set of points for which $|f(z)| > \varrho$, $|z - \zeta_0| < \delta$. Then $\Delta(\varrho)$ lies entirely inside $|z - \zeta_0| = \delta$ if ϱ is sufficiently large. It follows that $|f(z)| = \varrho$ at all points on the boundary of $\Delta(\varrho)$, except

[24]) A. Hurwitz - R. Courant, Funktionentheorie, Berlin (1929) p. 432. See also J. E. Littlewood, Proc. London Math. Soc. (2) **23** (1924), p. 489.

[25]) A. S. Besicovitch, Proc. London Math. Soc. (2) **32** (1931), pp. 1—19.

perhaps at points ζ which belong to E. Hence everything that we proved in theorem 4 about $\Gamma(e^{i\vartheta})$, $0 \leqq \theta < 2\pi$, holds for $\Gamma_D(\zeta)$, where $|\zeta - \zeta_0| < \delta$, and ζ belongs to E, ζ_0 of course corresponds to $z = 1$. We get the three cases stated, provided that $|\zeta - \zeta_0| < \delta$; but, since δ may be as small as we please, this is the complete result.

5.2. So far no general result of the Picard type has been proved for functions with a set of essential singularities of linear measure zero, and we may expect it to be much more difficult to prove one. It has been shown that such functions may omit a non-enumerable set of values provided that it is of logarithmic measure zero[26]), but it is natural to hope for a result similar to Ahlfors' theorem[27]) for the unit circle involving an exceptional S-set on a sphere. But even this presents great difficulties, and if we observe the difference between theorems Ib and IIb, there seems no very strong reason to suppose that such a result is true. For points of H do not necessarily belong to I. We can however prove a fairly satisfactory theorem[28]) for functions with a set of singularities of *logarithmic measure zero.*

Theorem IIc. *Suppose that $f(z)$ is meromorphic in an open simply-connected domain D, except for a set E of essential singularities of logarithmic measure zero. Then $f(z)$ takes all values, except perhaps a set which can be included in an S-set on a sphere.*

This depends chiefly on a result due to Seidel[29]).

Theorem of Seidel. *Let $f(z)$ be regular and $|f(z)| < 1$ for $|z| < 1$; and suppose that*

$$|f(e^{i\vartheta})| = 1$$

for almost all θ in the interval $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$. If $f(z)$ omits values in the unit circle which cannot be included in an S-set, then $f(z)$ may be continued analytically beyond the arc $\theta_1 \leqq \arg z \leqq \theta_2$, $|z| = 1$, by the relation

$$f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{1}{\overline{f(z)}}.$$

Proof of Theorem IIIc. Suppose that ζ_0 is a point of E such that in $|z - \zeta_0| < \delta_0$, $w = f(z)$ omits a set W of values which cannot be included in an S-set, and $f(z)$ is meromorphic in $|z - \zeta_0| < \delta_0$, except for points of E. It is not difficult to show that there is at least one point w_0 such that every circle $|w - w_0| < \eta$ encloses a part of W

[26]) See W. Seidel, Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934).

[27]) See § 4.4.

[28]) Compare R. Nevanlinna, Comptes Rendus **199** (1934), pp. 512—515 and 548. See footnote [9]).

[29]) W. Seidel, Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), p. 226.

which is not an S-set. Then w_0 belongs to W. For if $f(z) = w_0$, where $f(z)$ is regular at z_0, then $f(z)$ takes all values near w_0 in some neighbourhood of z_0.

Let $F(z) = f(z) - w_0$. Then $1/F(z)$ is regular in $|z - \zeta_0| < \delta_0$, except at points of E; and, since E is of logarithmic measure zero, we can certainly find $\delta < \delta_0$ such that $1/F(z)$ is regular *on* $|z - \zeta_0| = \delta$. It follows that $1/F(z)$ is bounded on $|z - \zeta_0| = \delta$; and so, for some $\varrho > 0$, we have

$$|F(z)| > \varrho$$

on $|z - \zeta_0| = \delta$.

Consider the points for which $|F(z)| < \varrho$, $|z - \zeta_0| < \delta$. Since $C_D(\zeta_0)$ includes w_0, these points form one or more connected sets. Let $\Delta(\varrho)$ be one of them. Since $|F(z)| > \varrho$ on $|z - \zeta_0| < \delta$, $\Delta(\varrho)$ lies entirely inside $|z - \zeta_0| = \delta$, and $|F(z)| = \varrho$ on the boundary of $\Delta(\varrho)$, except perhaps at points of E.

Now map $\Delta(\varrho)$ on $|Z| < 1$ by the transformation $z = z(Z)$, and write

$$\varrho\, \varphi(Z) = f(z(Z)).$$

Then $\varphi(Z)$ is regular, and $|\varphi(Z)| < 1$ for $|Z| < 1$. The points of E on the boundary of $\Delta(\varrho)$ must transform into a set on $|Z| = 1$ of linear measure zero [30]), since they are included in a set of logarithmic measure zero.

At all other points on the boundary of $\Delta(\varrho)$, we have $|F(z)| = \varrho$; and so $|\varphi(Z)| = 1$ at almost all points on $|Z| = 1$. Since $\varphi(Z)$ omits in $|Z| < 1$ the values omitted by $|F(z)|\,\varrho$ in $\Delta(\varrho)$, we see that $\varphi(Z)$ omits a set which is not an S-set, and we can apply Seidel's theorem. It follows that $\varphi(Z)$ is regular on $|Z| = 1$; and since $|\varphi(Z)| = 1$ at almost all points, we have $|\varphi(Z)| = 1$ at all points on $|Z| = 1$. But $|F(z)| < \varrho$ in $\Delta(\varrho)$, and so $|\varphi(Z)| < 1$ in $|Z| < 1$. Since $|F(z)| \neq 0$, we have $\varphi(Z) \neq 0$ in $|Z| < 1$; and so $\varphi(Z)$ attains its minimum, which is less than 1, on $|Z| = 1$. This gives a contradiction; and so $f(z)$ cannot omit a set which is not an S-set near ζ_0.

---

[30]) See the theorem of R. Nevanlinna quoted in § 2. 1.

(Eingegangen am 29. 7. 1935.)

Über die Extremalen und geodätischen Felder in der Variationsrechnung der mehrfachen Integrale.

Von

Hermann Boerner in München.

Einleitung.

Die Variationsrechnung der mehrfachen Integrale — mehrere unabhängige Veränderliche *und* mehrere gesuchte Funktionen — zeigt eigentümliche Schwierigkeiten, sobald man über die Herleitung der Eulerschen Differentialgleichungen hinaus zur Aufstellung von notwendigen oder hinreichenden Bedingungen gelangen will. Es sind deshalb bis in die allerjüngste Zeit hinein nur einige Ansätze zur Aufstellung einer „Legendreschen Bedingung" zu verzeichnen[1]). Die erste umfassende Arbeit hat Carathéodory[2]) geschrieben. Seine Methode in der Variationsrechnung[3]), die den Zusammenhang des Hilbertschen „unabhängigen Integrals" mit der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung konsequent ausnutzt, hat sich gerade auch für diesen Fall, nach Überwindung anfänglicher Schwierigkeiten, als sehr fruchtbar erwiesen. Im Mittelpunkt steht der Begriff des „geodätischen Feldes", das sich zum Extremalenfeld so verhält wie im Spezialfall der Strahlenoptik die Wellenflächen (Eikonal) zu den Strahlen. Carathéodorys „Legendresche Bedingung" und „Weierstraßsche $\mathcal{E}$-Funktion" sehen anders aus als man bis dahin vermutete. Als geeignetes Hilfsmittel zur Beherrschung der geodätischen Felder erwies sich eine Art verallgemeinerter Legendrescher Transformation, die sich im Fall der Kurvenintegrale auf eine von der gewöhnlichen etwas verschiedene reduziert.

Die algebraischen und analytischen Eigenschaften dieser Legendreschen Transformation, die mit der Variationsrechnung nur wenig zu tun haben, nehmen in Carathéodorys Abhandlung den breitesten Raum ein. Daher dürfte eine Darstellung willkommen sein, bei der das Variationsproblem

---

[1]) Clebsch, Crelles Journ. 56 (1859), S. 122—148; Hadamard, Bull. Soc. Math. de France 30 (1902), S. 253—256; 33 (1905), S. 73—80; Mc Shane, Annals of Math. 32 (1931), S. 578. — Prange behandelt in seiner Diss. (Gött. 1915) u. a. den Fall zweier unabhängiger und zweier abhängiger Variablen; er bedient sich einer Legendreschen Transformation als Mittel zur Integration der Eulerschen Differentialgleichungen.

[2]) Carathéodory, Acta Szeged 4 (1929), S. 193—216.

[3]) Carathéodory, Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Leipzig und Berlin 1935.

am Anfang steht und im Vordergrund bleibt; sie wird im ersten Kapitel der vorliegenden Arbeit gegeben, das zugleich zur Vorbereitung für das zweite dient. Es zeigt sich auch, daß man manches, wenn man es einmal hat, viel einfacher herleiten kann. So werde ich gleich zuerst mit sehr wenig Rechnung die $\mathcal{E}$-Funktion und die Legendresche Bedingung herleiten und erst dann das umfangreiche Formelsystem der Legendreschen Transformation hinschreiben, das ich für die späteren Zwecke brauche. Zum Eingang wähle ich den Weg, den Carathéodory in seinem Buch verwendet[4]) und der wohl den elegantesten und zugleich einfachsten Zugang zu allen Grundformeln der Variationsrechnung darstellt. Hier mag man sich überzeugen, wie ungemein rasch und zwingend man gerade auch bei einem schwierigen Problem auf diese Weise zum Ziel kommt.

Diese Theorie ist nun aber noch in einem wesentlichen Punkte unvollständig. Man hat gezeigt, daß jede Fläche, die von einem geodätischen Feld transversal[5]) geschnitten wird, eine Lösung des Variationsproblems ist, wenn noch die Legendresche und die Weierstraßsche Bedingung erfüllt ist; und es hat sich ergeben, daß jede solche Fläche eine „Extremale" ist, d. h. den Eulerschen Differentialgleichungen genügt. Um aber zu beweisen, daß diese drei Bedingungen — die von Euler, Legendre und Weierstraß —, in geeigneter Weise formuliert, *notwendig* bzw. *hinreichend* sind, muß man jedes (genügend kleine) Extremalenstück in ein geodätisches Feld „einbetten" können, d. h. ein geodätisches Feld finden, von dem es transversal geschnitten wird. Dem Beweis dieses Einbettungssatzes ist das zweite Kapitel dieser Arbeit gewidmet.

Im Falle einer einzigen gesuchten Funktion ist nichts zu beweisen: man braucht nur in der Nachbarschaft der gegebenen Extremale weitere Extremalen zu konstruieren; denn hier ist jedes Extremalenfeld ein geodätisches Feld. Auch im Fall einer einzigen unabhängigen Veränderlichen ist der Satz sehr leicht zu beweisen; da ist jedes geodätische Feld ein Extremalenfeld, die Extremalen sind die Charakteristiken der Hamilton-Jacobischen Gleichung.

Anders im allgemeinen Fall. Auch hier gelingt aber der Beweis mit Hilfe der Charakteristikentheorie. Die geodätischen Felder werden nämlich immer noch von einer einzigen partiellen Differentialgleichung beherrscht, so daß man das System von Funktionen, um das es sich hier handelt, bis auf eine einzige Funktion willkürlich wählen kann. Wenn man das in geeigneter Weise tut — so zeigt sich —, dann verläuft jede charakteristische Kurve der partiellen Differentialgleichung, die die Extremalfläche

[4]) S. 197 ff. Zum ersten Mal hat er ihn in einer Vorlesung über geometrische Optik im Sommer 1934 angegeben.

[5]) Für die Definition dieser Begriffe vgl. Abschn. 2 dieser Arbeit.

berührt, ganz auf dieser. Man braucht also nur die Cauchyschen Anfangswerte passend zu wählen, dann werden alle Charakteristiken, die auf der Extremale beginnen, ganz auf ihr liegen, und dann wird sie in der Tat vom geodätischen Feld transversal geschnitten.

Im allgemeinen schneidet das geodätische Feld, das man durch diese Konstruktion erhält, keine weitere Extremale transversal und ist also nicht zugleich ein Extremalenfeld. Aber das ist auch gar nicht nötig; und gerade dieser Umstand rückt den Nutzen des Begriffs „geodätisches Feld" in helles Licht. Um die Weierstraßsche Formel hinschreiben zu können, braucht man in der Tat gerade ein geodätisches Feld und weiter nichts[6]).

Im dritten Kapitel gebe ich den Anfang einer Theorie der diskontinuierlichen Lösungen bei mehrfachen Integralen. Auch hier ist der zuletzt erwähnte Gesichtspunkt von ausschlaggebender Bedeutung, nämlich, daß man nicht nötig hat, ein *Feld* von diskontinuierlichen Lösungen zu konstruieren. Die geodätischen Felder in kanonischen Veränderlichen erweisen sich überdies als der bequemste Weg zur Aufstellung der verallgemeinerten Erdmannschen Gleichungen.

Erstes Kapitel.

Das geodätische Feld und die Legendresche Transformation.

1. n Funktionen

$$x_i(t_\alpha) \tag{1.1}$$

von μ Veränderlichen[7]) definieren eine μ-dimensionale Mannigfaltigkeit im $n+\mu$-dimensionalen Raum der x_i, t_α. Ihre Ableitungen, die wir abkürzend mit

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_\alpha} = p_{i\alpha} \tag{1.2}$$

bezeichnen, sollen stückweise stetig und differenzierbar sein. Ist $\Psi(x_i, t_\alpha)$ irgendeine Funktion im Raum, so können wir darin für x_i speziell die

[6]) Kürzlich hat Weyl [Phys. Review **46** (1934), S. 505; Annals of Math. **36** (1935), S. 607] einen neuen Ansatz gemacht und ebenfalls bis zur Einstellung einer Extremale in ein geodätisches Feld durchgeführt, der sich ebenfalls der Hamilton-Jacobischen Methode bedient und viel einfacher aussieht als der hier vorgetragene. Weyls Formeln sind alle linear wie bei den einfachen Problemen, während bei uns immer Determinanten von linearen Ausdrücken erscheinen. Aber daher kommt es auch, daß die Weylsche Theorie nicht imstande ist, alle Fragen zu beantworten, die man in der Variationsrechnung stellen kann. Die *Transversalität* nämlich kann bei den allgemeinen Problemen nur durch nicht-lineare Formeln definiert werden, und damit hängt es zusammen, daß es in der Weylschen Theorie, kurz gesagt, nicht möglich ist, Flächen zu vergleichen, die nicht denselben Rand besitzen.

[7]) Lateinische Indizes durchlaufen immer die Zahlen von 1 bis n, griechische die von 1 bis μ.

Funktionen (1. 1) einsetzen, d. h. wir betrachten die Funktion speziell auf unserer Fläche. Wir bezeichnen dann ihre Ableitungen auf der Fläche mit eckigem d[8]); es ist also

$$\frac{d\,\Psi}{d\,t_\alpha} = \frac{\partial\,\Psi}{\partial\,t_\alpha} + p_{i\alpha}\frac{\partial\,\Psi}{\partial\,x_i}\text{ [9])}. \tag{1.3}$$

Diesen Differentialoperator werden wir auch anwenden, wenn die $p_{i\alpha}$ nicht von einer Fläche (1. 1) hergeleitet, sondern beispielsweise als Funktionen im Raum gegeben sind. Gehören diese Funktionen dann speziell zu einer Schar von Flächen (1. 1), die ein Stück des Raumes einfach überdeckt, so genügen sie dort überall der Bedingung

$$\frac{d\,p_{i\alpha}}{d\,t_\beta} = \frac{d\,p_{i\beta}}{d\,t_\alpha}. \tag{1.4}$$

Es sei $f(x_i, t_\alpha, p_{i\alpha})$ eine *positive* Funktion, die in ihren $n + \mu + n\,\mu$ Argumenten analytisch ist. Ihre Ableitungen bezeichnen wir durch Indizes und führen die abkürzende Bezeichnung $\pi_{i\alpha} = f_{p_{i\alpha}}$ ein.

Ist G_t ein Gebiet im Raum der μ Veränderlichen t_α, in dem die Funktionen (1. 1) definiert sind, so kann man das Integral[10])

$$\int_{G_t} f(x_i, t_\alpha, p_{i\alpha})\,d\,t \tag{1.5}$$

betrachten. *Das Variationsproblem lautet: wie müssen die Funktionen* (1. 1) *beschaffen sein, damit das Integral* (1. 5) *einen kleineren Wert besitzt als dasselbe Integral, erstreckt über irgendeine andere Fläche* $x_i'(t_\alpha)$? Dabei muß die Klasse der zum Vergleich heranzuziehenden Flächen noch irgendwie präzisiert werden; wir wollen im allgemeinen annehmen, daß der Rand der Fläche vorgegeben ist, d. h. es wird stets über das gleiche Gebiet G_t integriert und die Funktionen $x_i'(t_\alpha)$ sollen am Rand dieses Gebietes mit (1. 1) übereinstimmen.

2. Zur Beantwortung dieser Frage schlagen wir mit Carathéodory[11]) folgenden Weg ein.

Eine Fläche (1. 1) ist ersichtlich eine Lösung des Variationsproblems, wenn folgendes zutrifft: in einem Raumgebiet, das die Fläche enthält, existieren Funktionen $p_{i\alpha}(x_j, t_\beta)$, die auf der Fläche (1. 2) erfüllen — außerhalb der Fläche braucht dagegen (1. 4) gar nicht zu gelten —, und

[8]) Totale Ableitungen nach einer Veränderlichen kommen erst im zweiten Kapitel vor und werden dort mit einem Punkt bezeichnet, so daß Verwechslungen nicht zu befürchten sind.

[9]) Über jeden in einem Term doppelt vorkommenden Index ist zu summieren.

[10]) Wir werden nur μ-fache Integrale betrachten und schreiben daher abkürzend $\int .. d\,t$ statt $\int \ldots \int .. d\,t_1 \ldots d\,t_\mu$.

[11]) Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, S. 197 ff.

für diese Funktionen ist überall $f(x_i, t_\alpha, p_{i\alpha}) = 0$, dagegen $f(x_i, t_\alpha, p'_{i\alpha}) > 0$ für $p'_{i\alpha} \neq p_{i\alpha}$. Diese Eigenschaft besitzt unsere Funktion f nicht — wir haben ja vorausgesetzt, daß sie immer positiv ist —; aber wir können versuchen, ein *äquivalentes* Problem zu konstruieren, das sie besitzt.

Zwei Probleme heißen *äquivalent*, wenn jede Lösung des einen zugleich eine Lösung des andern ist; das ist insbesondere der Fall, wenn die Integrale sich nur um ein „vom Weg unabhängiges" Integral unterscheiden, d. h. um ein solches, das für zwei Flächen, die am Rand übereinstimmen, stets den gleichen Wert besitzt. Zu einem solchen unabhängigen Integral gelangt man folgendermaßen.

Wir führen μ Funktionen $S_\alpha(x_i, t_\beta)$ ein, die stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzen sollen. Die Gleichungen

$$S_\alpha(x_i, t_\beta) = \lambda_\alpha \tag{2.1}$$

stellen eine μ-parametrige Schar von n-dimensionalen Flächen dar. Ersetzt man die x_i durch Funktionen der t_α, so definieren die Gleichungen (2.1) eine eineindeutige Abbildung eines Gebietes G_t auf ein Gebiet G_λ des Raumes der λ_α, falls die Fläche $x_i(t_\alpha)$ die Mannigfaltigkeiten (2.1) durchsetzt, ohne sie zu berühren. In diesem Fall ist die Funktionaldeterminante

$$\Delta = \left| \frac{dS_\alpha}{dt_\beta} \right| = |S_{\alpha\beta} + S_{\alpha i} p_{i\beta}|^{12})$$

von Null verschieden. Falls sie positiv ist, stellt das Integral

$$\int_{G_t} \Delta \, dt = \int_{G_\lambda} d\lambda$$

den Inhalt des Gebietes G_λ dar. Wenn man also irgendwelche anderen Funktionen $x'_i(t_\alpha)$ betrachtet, so gilt

$$\int_{G'_t} \Delta' \, dt = \int_{G_t} \Delta \, dt, \tag{2.2}$$

wenn nur das Gebiet G'_t auf dasselbe Gebiet G_λ abgebildet wird wie G_t. Und das ist insbesondere gewiß der Fall, wenn die Funktionen $x'_i(t_\alpha)$ am Rand von G_t mit $x_i(t_\alpha)$ übereinstimmen und man $G'_t = G_t$ nimmt.

Wir erhalten also ein äquivalentes Problem, wenn wir die Funktion f durch $f - \Delta$ ersetzen; und in der vorhin angedeuteten Weise eine Lösung des Variationsproblems, wenn die Schar (2.1) die folgende Eigenschaft besitzt: in jedem Punkt ist das Minimum der Funktion $f - \Delta$, bei Variieren der $p_{i\alpha}$, gleich Null. Eine Schar (2.1) mit dieser Eigenschaft heißt ein

---

[12]) Hier wie im folgenden haben wir $\frac{\partial S_\alpha}{\partial x_i} = S_{\alpha i}$ und $\frac{\partial S_\alpha}{\partial t_\beta} = S_{\alpha\beta}$ gesetzt.

geodätisches Feld. Zu einem geodätischen Feld gehört also ein System von Funktionen $p_{i\alpha}(x_i, t_\alpha)$, die die Gleichungen

$$\pi_{i\alpha} = \frac{\partial \Delta}{\partial p_{i\alpha}} \tag{2.3}$$

und

$$f = \Delta \tag{2.4}$$

erfüllen. Und man sagt, daß das durch diese $p_{i\alpha}$ in jedem Punkt definierte Flächenelement von der durch diesen Punkt gehenden Fläche der Schar (2.1) *transversal* geschnitten wird.

Erfüllen nun diese Funktionen $p_{i\alpha}$ auf einer Fläche (1.1) die Gleichungen (1.2), so ist diese Fläche in der Tat eine Lösung des Variationsproblems. Denn ist $x_i'(t_\alpha)$ eine Vergleichsfläche mit demselben Rand, so ist wegen (2.4) und (2.2)

$$\int_{G_t} f' \, dt - \int_{G_t} f \, dt = \int_{G_t} (f' - \Delta') \, dt, \tag{2.5}$$

und das ist positiv.

(2.5) ist die Formel von Weierstraß, und die Funktion $f' - \Delta'$, die unser äquivalentes Problem definiert, ist nichts anderes als die Weierstraßsche $\mathcal{E}$-Funktion für unser Problem. Aus (2.4) und (2.3) folgt, daß sie für $p_{i\alpha}' = p_{i\alpha}$ verschwindet und stationär ist; daß es sich wirklich um ein *Minimum* handelt, die $\mathcal{E}$-Funktion also für $p_{i\alpha}' \neq p_{i\alpha}$ *positiv* ist, müssen wir als besondere Bedingung einführen. Ist diese aber erfüllt, so liefert unsere Fläche, die durch das geodätische Feld transversal geschnitten wird, in der Tat ein „starkes" Minimum für das Integral (1.5); von den Vergleichsflächen braucht man weiter nichts vorauszusetzen als daß sie im Felde verlaufen.

Wir wollen jetzt für die $\mathcal{E}$-Funktion einen anderen Ausdruck herleiten; wir werden sehen, daß man diese Funktion ohne Benutzung eines geodätischen Feldes allein durch $p_{i\alpha}$ und $p_{i\alpha}'$ ausdrücken und definieren kann.

3. Zuvor stellen wir einige Formeln aus der Theorie der Determinanten zusammen, die wir im folgenden fortwährend brauchen werden.

Sind $\psi_{\alpha\beta}$ die Elemente einer nicht-singulären Matrix von μ Zeilen und μ Spalten, so bezeichnen wir mit ψ ihre Determinante und mit $\overline{\psi}_{\alpha\beta}$ das algebraische Komplement von $\psi_{\alpha\beta}$ in dieser Determinante. Es ist also $\psi \neq 0$ und

$$\psi_{\alpha\varrho}\,\overline{\psi}_{\beta\varrho} = \psi_{\varrho\alpha}\,\overline{\psi}_{\varrho\beta} = \delta_{\alpha\beta}\,\psi \tag{3.1}$$

und daher nach dem Multiplikationsgesetz der Determinanten

$$|\overline{\psi}_{\alpha\beta}| = \psi^{\mu-1}. \tag{3.2}$$

Sind die Elemente $\psi_{\alpha\beta}$ Funktionen von irgendwelchen Veränderlichen, so ist

$$d\,\psi = \overline{\psi}_{\alpha\beta}\, d\,\psi_{\alpha\beta}. \tag{3.3}$$

Gelegentlich werden wir auch die Ableitungen der $\overline{\varphi}_{\alpha\beta}$ brauchen. Aus (3. 1) und (3. 3) folgt

$$\delta_{\lambda\alpha}\,\overline{\varphi}_{\varrho\sigma}\,d\,\varphi_{\varrho\sigma} = \delta_{\lambda\alpha}\,d\,\varphi = \varphi_{\lambda\mu}\,d\,\overline{\varphi}_{\alpha\mu} + \overline{\varphi}_{\alpha\mu}\,d\,\varphi_{\lambda\mu},$$

und wenn man mit $\overline{\varphi}_{\lambda\beta}$ faltet (d. h. mit $\overline{\varphi}_{\lambda\beta}$ multipliziert und über λ summiert), so erhält man mit leichter Umformung

$$d\,\overline{\varphi}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\varphi}\,(\overline{\varphi}_{\alpha\beta}\,\overline{\varphi}_{\lambda\mu} - \overline{\varphi}_{\alpha\mu}\,\overline{\varphi}_{\lambda\beta})\,d\,\varphi_{\lambda\mu}. \tag{3. 4}$$

Was hier rechts als Koeffizient von $d\,\varphi_{\lambda\mu}$ erscheint, ist natürlich zugleich das algebraische Komplement von $\varphi_{\lambda\mu}$ in der Unterdeterminante $\overline{\varphi}_{\alpha\beta}$.

4. Jetzt wollen wir die Größe Δ' als Funktion von $p_{i\alpha}$ und $p'_{i\alpha}$ berechnen. Zu dem Zweck bezeichnen wir die Elemente der Determinante Δ mit $c_{\alpha\beta}$. Dann berechnen wir aus (2. 3)

$$\pi_{i\beta} = S_{\varrho i}\,\bar{c}_{\varrho\beta}. \tag{4. 1}$$

Weiter folgt aus (2. 4)

$$\delta_{\alpha\beta}\,f = c_{\varrho\alpha}\,\bar{c}_{\varrho\beta} = S_{\varrho\alpha}\,\bar{c}_{\varrho\beta} + S_{\varrho i}\,p_{i\alpha}\,\bar{c}_{\varrho\beta} = S_{\varrho\alpha}\,\bar{c}_{\varrho\beta} + p_{i\alpha}\,\pi_{i\beta}.$$

Wenn wir also neue Größen $a_{\alpha\beta}$ durch

$$a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\,f - p_{i\alpha}\,\pi_{i\beta} \tag{4. 2}$$

erklären, so gilt

$$a_{\alpha\beta} = S_{\varrho\alpha}\,\bar{c}_{\varrho\beta}. \tag{4. 3}$$

Jetzt falten wir die Elemente von Δ' mit $\bar{c}_{\varrho\beta}$; wegen (4. 3) und (4. 1) kommt

$$(S_{\varrho\alpha} + S_{\varrho i}\,p'_{i\alpha})\,\bar{c}_{\varrho\beta} = a_{\alpha\beta} + p'_{i\alpha}\,\pi_{i\beta} = \delta_{\alpha\beta}\,f + (p'_{i\alpha} - p_{i\alpha})\,\pi_{i\beta};$$

für die Determinanten bedeutet das nach (3. 2) und (2. 4)

$$\Delta' = \frac{1}{f^{\mu-1}}\,|\,\delta_{\alpha\beta}\,f + (p'_{i\alpha} - p_{i\alpha})\,\pi_{i\beta}\,|. \tag{4. 4}$$

Die $\mathcal{E}$-Funktion ist, wie wir sahen, die Größe $f' - \Delta'$. Wir haben also

$$\mathcal{E}\,(x_i, t_\alpha, p_{i\alpha}, p'_{i\alpha}) = f' - \frac{1}{f^{\mu-1}}\,|\,\delta_{\alpha\beta}\,f + (p'_{i\alpha} - p_{i\alpha})\,\pi_{i\beta}\,| \tag{4. 5}$$

zu setzen.

5. Wir sind jetzt auch in der Lage, die Legendresche Bedingung für unser Problem anzugeben. Dazu entwickeln wir die $\mathcal{E}$-Funktion nach Potenzen von $p'_{i\alpha} - p_{i\alpha}$. Zu dem Zweck berechnen wir die Ableitungen von Δ' nach $p'_{i\alpha}$ an der Stelle $p_{i\alpha}$ oder, was auf dasselbe herauskommt, die Ableitungen von Δ nach $p_{i\alpha}$ mit *nachträglicher* Benutzung von (2. 3) und (2. 4).

Die erste Ableitung haben wir schon berechnet, es ist

$$\left.\frac{\partial\,\Delta'}{\partial\,p'_{i\alpha}}\right|_{p'_{i\alpha} = p_{i\alpha}} = \pi_{i\alpha}.$$

Um die zweiten Ableitungen zu bekommen, müssen wir $S_{\lambda i}\bar{c}_{\lambda\alpha}$ nach $p_{j\beta}$ differenzieren. Mit Benutzung von (3.4) erhalten wir

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial p_{i\alpha}\,\partial p_{j\beta}} = \frac{S_{\lambda i}S_{\mu j}}{\Delta}(\bar{c}_{\lambda\alpha}\,\bar{c}_{\mu\beta} - \bar{c}_{\lambda\beta}\,\bar{c}_{\mu\alpha})$$

und wegen (4.1) und (2.4)

$$\frac{\partial^2 \Delta'}{\partial p'_{i\alpha}\,\partial p'_{j\beta}}\Big|_{p'_{i\alpha}=p_{i\alpha}} = \frac{1}{f}(\pi_{i\alpha}\pi_{j\beta} - \pi_{i\beta}\,\pi_{j\alpha}).$$

Betrachtet man also die Entwicklung von $\mathcal{E}$, so kommen, wie man sieht, Glieder nullter und erster Ordnung nicht vor; die Glieder zweiter Ordnung bilden eine quadratische Form mit den Koeffizienten

$$q_{i\alpha,j\beta} = f_{p_{i\alpha}p_{j\beta}} - \frac{1}{f}(f_{p_{i\alpha}}f_{p_{j\beta}} - f_{p_{i\beta}}f_{p_{j\alpha}}) \tag{5.1}$$

in den $n\cdot\mu$ Veränderlichen $(p'_{i\alpha} - p_{i\alpha})$. Die *Legendresche Bedingung* besteht in der Forderung, daß diese Form positiv definit sein soll. Flächenelemente, die diese Bedingung erfüllen, heißen *regulär*. Ist sie erfüllt, so ist die $\mathcal{E}$-Funktion gewiß positiv, wenn $p'_{i\alpha}$ wenig von $p_{i\alpha}$ abweicht; es ist also das Bestehen eines „schwachen" Minimums gewährleistet. In der Tat kann man ja

$$\mathcal{E} = \tilde{q}_{i\alpha,j\beta}(p'_{i\alpha} - p_{i\alpha})(p'_{j\beta} - p_{j\beta}) \tag{5.2}$$

setzen, wobei man die Koeffizienten der quadratischen Form für einen Wert $p_{i\alpha} + \vartheta(p'_{i\alpha} - p_{i\alpha})$ auf der Verbindungsstrecke von $p'_{i\alpha}$ und $p_{i\alpha}$ zu bilden hat.

6. Wir haben gesehen, daß man die für das Variationsproblem wichtigen Größen ohne Verwendung der Funktionen S_α. allein durch $p_{i\alpha}$ und f ausdrücken kann. Und in der Tat unterliegt ja die Wahl dieser Funktionen einer gewissen Willkür; zwei geodätische Felder sind bereits als identisch zu betrachten, wenn nur ihre Flächenelemente in jedem Punkt übereinstimmen. Das veranlaßt uns, ein System von Größen einzuführen, das gerade mit diesen Flächenelementen eineindeutig zusammenhängt; und wir werden sehr bald sehen, daß diese Größen die brauchbarsten *kanonischen Veränderlichen* für unser Variationsproblem abgeben.

Wir denken uns die durch einen Punkt gehende n-dimensionale Fläche der Schar (2.1) in der Umgebung dieses Punktes durch Funktionen $t_\alpha(x_i)$ gegeben und setzen

$$\frac{\partial t_\alpha}{\partial x_i} = -P_{i\alpha}.$$

Wir wollen nur noch solche Flächenscharen betrachten, bei denen dies möglich ist; dazu muß, bei gegebenen Funktionen S_α, die Determinante der $S_{\alpha\beta}$ von Null verschieden sein, und dann berechnen sich die Funktionen $P_{i\alpha}$ aus den Gleichungen

$$S_{\alpha i} = P_{i\varrho}S_{\alpha\varrho}. \tag{6.1}$$

Wir führen noch die Größe F durch

$$F \cdot |S_{\alpha\beta}| = 1 \tag{6.2}$$

ein.

Analog zu dem Differentialoperator (1.3) können wir jetzt das Symbol

$$\frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} - P_{i\varrho}\frac{\partial}{\partial t_\varrho} \tag{6.3}$$

einführen; (6.1) lautet dann einfach $\frac{dS_\alpha}{dx_i} = 0$.

Als Differentialquotienten müssen die $P_{i\alpha}$ einem System von differentiellen Bedingungen genügen, nämlich

$$[ij\alpha] = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, n;\ \alpha = 1, \ldots, \mu), \tag{6.4}$$

wobei wir

$$\frac{dP_{i\alpha}}{dx_j} - \frac{dP_{j\alpha}}{dx_i} = [ij\alpha] \tag{6.5}$$

gesetzt haben.

Eine weitere Bedingung soll gleich noch hergeleitet werden. Differenziert man $S_{\alpha\beta}$ total nach x_i, so erhält man mit Benutzung von (6.1)

$$\frac{dS_{\alpha\beta}}{dx_i} = S_{\alpha\varrho}\frac{\partial P_{i\varrho}}{\partial t_\beta}\ ^{13}).$$

Wenn man also nach (3.3) die Determinante $|S_{\alpha\beta}| = \frac{1}{F}$ differenziert, so kommt (vgl. (3.1))

$$\frac{d\frac{1}{F}}{dx_i} = \frac{1}{F}\frac{\partial P_{i\varrho}}{\partial t_\varrho}$$

oder

$$\frac{dF}{dx_i} + F\frac{\partial P_{i\varrho}}{\partial t_\varrho} = 0. \tag{6.6}$$

Aus der Theorie der Systeme von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung folgt, daß (6.4) und (6.6) die einzigen Bedingungen sind, denen man die Funktionen $P_{i\alpha}$ und F unterwerfen muß, damit es Funktionen S_α gibt, die (6.1) und (6.2) befriedigen.

Dies alles gilt für beliebige Scharen von n-dimensionalen Flächen. Jetzt betrachten wir wieder speziell ein geodätisches Feld und suchen die Beziehungen auf, die zwischen dem n-dimensionalen Flächenelement $P_{i\alpha}$ bestehen und dem μ-dimensionalen Flächenelement $p_{i\alpha}$, das von ihm

---

[13]) Man beachte, daß $\frac{\partial S_{\alpha i}}{\partial t_\beta} = \frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial S_{\alpha\varrho}}{\partial t_\beta} = \frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial t_\varrho}$ ist.

transversal geschnitten wird. Unsere Bezeichnungen sind vollkommen symmetrisch: das μ-dimensionale Flächenelement wird von den μ Vektoren

$$(p_{j\beta},\ \delta_{\alpha\beta}),\quad \beta = 1, \ldots, \mu$$

aufgespannt, das zu ihm senkrechte n-dimensionale Element also von den n Vektoren

$$(-\delta_{ij},\ p_{i\alpha}),\quad i = 1, \ldots, n,$$

das zu ihm *transversale* dagegen von den n Vektoren

$$(-\delta_{ij},\ P_{i\alpha}),\quad i = 1, \ldots, n.$$

Bei jenen einfachen Problemen, wo die Begriffe „orthogonal" und „transversal" zusammenfallen, ist also $P_{i\alpha} = p_{i\alpha}$[14]).

Aber auch im allgemeinen Fall ist es ganz leicht, $P_{i\alpha}$ und F aus $p_{i\alpha}$ und f zu berechnen mit Hilfe der Gleichungen (2.3) und (2.4) des geodätischen Feldes. Aus (4.3) folgt mit Benutzung der Formel (3.2)

$$a = |S_{\alpha\beta}|\, f^{\mu-1},$$

also

$$F = \frac{f^{\mu-1}}{a}, \tag{6.7}$$

falls $a \neq 0$ ist, was wir von hier ab voraussetzen wollen. Und wenn man (6.1) in (4.1) einsetzt und (4.3) benutzt, bekommt man

$$\pi_{i\beta} = S_{\varrho\sigma}\, P_{i\sigma}\, \bar{c}_{\varrho\beta} = P_{i\sigma}\, a_{\sigma\beta}; \tag{6.8}$$

faltet man das mit $\frac{\bar{a}_{\alpha\beta}}{a}$, so kommt

$$P_{i\alpha} = \frac{\bar{a}_{\alpha\beta}}{a}\, \pi_{i\beta}. \tag{6.9}$$

In Zukunft definieren wir $P_{i\alpha}$ und F durch die Formeln (6.7) und (6.9); dann sind die Gleichungen (6.1) und (6.2) völlig äquivalent mit (2.3) und (2.4) und dienen an Stelle dieser Gleichungen zur Definition der geodätischen Felder. Unsere „verallgemeinerte Legendresche Transformation" ist aber noch nicht fertig; wir müssen zusehen, ob wir (6.9) nach $p_{i\alpha}$ auflösen können, damit wir F als Funktion von $P_{i\alpha}$ berechnen können, als „Hamiltonsche Funktion".

7. Zuvor entwickeln wir kurz das System der algebraischen Beziehungen zwischen den großen und kleinen Buchstaben. Die Symmetrie unserer Transformation wird dadurch klar hervortreten, und die meisten dieser Formeln werden wir später ohnehin brauchen.

Wir schreiben alle Formeln in der Form an, daß die Determinantenelemente *ohne* Querstrich vorkommen: durch Faltung mit den Komplementen

---

[14]) Beim Problem der kürzesten Bogenlänge oder des kleinsten Flächeninhalts ist sogar auch $F = f$.

kann man aus jeder Formel ihre Auflösung nach den rechts vorkommenden Veränderlichen gewinnen.

Den Ausgangspunkt bilden die vorhin entwickelten Formeln:

$$a_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} f - p_{i\alpha}\pi_{i\beta}, \tag{7.a1}$$

$$\pi_{i\alpha} = P_{i\varrho}\, a_{\varrho\alpha}, \tag{7.a2}$$

$$F = \frac{f^{u-1}}{a}. \tag{7.a3}$$

Wir führen die Matrix

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + P_{i\alpha}\, p_{i\beta} \tag{7.g1}$$

ein, mit deren Verwendung sich vieles besonders einfach schreiben läßt. Man errechnet sofort den einfachen Zusammenhang zwischen $g_{\alpha\beta}$ und $a_{\alpha\beta}$, wenn man (6.9) in (7.g1) einsetzt und beachtet, daß $p_{i\alpha}\pi_{i\beta} = \delta_{\alpha\beta} f - a_{\alpha\beta}$ ist. Man findet

$$g_{\alpha\beta} = \frac{f}{a}\bar{a}_{\alpha\beta},$$

und daraus folgt

$$g_{\alpha\varrho}\, a_{\beta\varrho} = \delta_{\alpha\beta} f \tag{7.g2}$$

und hieraus umgekehrt

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = F\, a_{\alpha\beta};$$

denn für die Determinante ergibt sich aus (7.g2) wegen (7.a3)

$$g = fF. \tag{7.g3}$$

Aus (7.a2) folgt, wenn man mit $g_{\alpha\beta}$ faltet, wegen (7.g2)

$$f P_{i\alpha} = \pi_{i\varrho}\, g_{\alpha\varrho}. \tag{7.g4}$$

Man kann auch[15]) die Rolle der griechischen und lateinischen Indizes vertauschen. Wir führen die Matrix

$$h_{ij} = \delta_{ij} + P_{i\alpha}\, p_{j\alpha} \tag{7.h1}$$

ein. Wenn man in (7.a2) $a_{\varrho\alpha}$ ausführlich hinschreibt, so sieht man sofort, daß

$$f P_{i\alpha} = \pi_{r\alpha}\, h_{ir} \tag{7.h4}$$

gilt. Auf ganz dieselbe Weise folgt umgekehrt aus (7.g4), wenn man noch

$$b_{ij} = \delta_{ij} f - p_{i\alpha}\pi_{j\alpha} \tag{7.b1}$$

einführt,

$$\pi_{i\alpha} = P_{r\alpha}\, b_{ri}. \tag{7.b2}$$

(7.h4) und (7.b2) sind genau so gebaut wie (7.g4) und (7.a2). Es muß also auch

$$h_{ir}\, b_{jr} = \delta_{ij} f \tag{7.h2}$$

[15]) Vgl. C. Carathéodory, Math. Annalen 86 (1922), S. 272.

sein. Jetzt fehlen noch die Determinanten h und b. Man sieht aber sofort, daß $h = g$ ist. Beide sind nämlich gleich der $n + \mu$-reihigen Determinante

$$\begin{vmatrix} \delta_{ij} & -p_{i\beta} \\ P_{j\alpha} & \delta_{\alpha\beta} \end{vmatrix}$$ [16]).

Also ist

(7. h3) $$h = fF,$$

und daher folgt aus (7. h2)

$$fFb = f^n,$$

also

(7. b3) $$F = \frac{f^{n-1}}{b}$$ [17]).

Das Formelsystem ist aber noch unvollständig, solange das Analogon $\Pi_{i\alpha}$ zu $\pi_{i\alpha}$ fehlt. Diese Größen müssen wir so einführen, daß wenn f Funktion von $p_{i\alpha}$ und F Funktion von $P_{i\alpha}$ ist, die Beziehungen $\pi_{i\alpha} = f_{p_{i\alpha}}$ und $\Pi_{i\alpha} = F_{P_{i\alpha}}$ einander bedingen. Zu dem Zweck nehmen wir zunächst einmal an, daß alle unsere Größen von irgendwelchen Parametern abhängen, und bilden das Differential der Gleichung (7. g3): $dg = F\,df + f\,dF$. Nach der Formel (3. 3) erhält man wegen $\bar{g}_{\alpha\beta} = F a_{\alpha\beta}$

$$dg = F a_{\alpha\beta}\, dg_{\alpha\beta} = F a_{\alpha\beta}\,(P_{i\alpha}\, dp_{i\beta} + p_{i\beta}\, dP_{i\alpha})$$

und endlich wegen (7. a2) und (7. a3)

$$F(df - \pi_{i\beta}\, dp_{i\beta}) + f\left(dF - \frac{f^{u-2}}{a} \cdot a_{\alpha\beta}\, p_{i\beta}\, dP_{i\alpha}\right) = 0.$$

Wir müssen also

(7. a4) $$\Pi_{i\alpha} = \frac{f^{u-2}}{a}\, p_{i\varrho}\, a_{\alpha\varrho}$$

setzen, und dann gilt

(7. *) $$F(df - \pi_{i\alpha}\, dp_{i\alpha}) + f(dF - \Pi_{i\alpha}\, dP_{i\alpha}) = 0.$$

Betrachtet man f als Funktion von x_i, t_α und $p_{i\alpha}$ und F als Funktion von x_i, t_α und $P_{i\alpha}$ und ist $\pi_{i\alpha} = f_{p_{i\alpha}}$ und $\Pi_{i\alpha} = F_{P_{i\alpha}}$, dann folgert man aus (7.*) die wichtigen Gleichungen

(7. **) $$F f_{x_i} = -f F_{x_i}, \quad F f_{t_\alpha} = -f F_{t_\alpha}.$$

Wir müssen aber noch das System der algebraischen Formeln vervollständigen. Hätten wir vorhin dh statt dg berechnet, so hätten wir statt (7. a4)

(7. b4) $$\Pi_{i\alpha} = \frac{F^{n-2}}{b}\, p_{r\alpha}\, b_{ir}$$

---

[16]) Vgl. das vorige Zitat. Übrigens folgt aus dem Nichtverschwinden dieser Determinante, daß die im vorigen Abschnitt betrachteten zueinander transversalen Flächenelemente $p_{i\alpha}$ und $P_{i\alpha}$ einander nicht berühren.

[17]) Ist $a \neq 0$, so ist auch $b \neq 0$; es ist ja, wie man auch direkt zeigen kann, $f^n a = f^\mu b$.

gefunden. Aus (7. a 4) und (7. b 4) folgt durch Faltung mit $g_{\alpha\beta}$ bzw. h_{ij}:

(7. g 5) $$F p_{i\alpha} = \Pi_{i\varrho} g_{\varrho\alpha}$$

und

(7. h 5) $$F p_{i\alpha} = \Pi_{r\alpha} h_{ri}.$$

Und jetzt ergibt sich die Auflösung des Formelsystems (7. a 2—4) oder (7. b 2—4) nach den großen Buchstaben ohne Rechnung aus der Bemerkung, daß die Formeln (7. g 3—5) oder (7. h 3—5), aus denen man alle anderen herleiten kann, in den großen und kleinen Buchstaben symmetrisch sind. In der Tat bleiben, wenn man große und kleine Buchstaben vertauscht, (7. g 3) und (7. h 3) unverändert; (7. g 4) und (7. g 5) werden vertauscht, ebenso (7. h 4) und (7. h 5). Wir brauchen also bloß noch die Matrizen

(7. A 1) $$A_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} F - P_{i\alpha} \Pi_{i\beta}$$

und

(7. B 1) $$B_{ij} = \delta_{ij} F - P_{i\alpha} \Pi_{j\alpha}$$

einzuführen, und dann schreiben wir die früheren Formeln einfach ab unter Vertauschung von groß und klein:

(7. A 2) $$\Pi_{i\alpha} = p_{i\varrho} A_{\varrho\alpha},$$ (7. B 2) $$\Pi_{i\alpha} = p_{r\alpha} B_{ri},$$

(7. A 3) $$f = \frac{F^{\mu-1}}{A},$$ (7. B 4) $$f = \frac{F^{n-1}}{B},$$

(7. A 4) $$\pi_{i\alpha} = \frac{F^{\mu-2}}{A} P_{i\varrho} A_{\alpha\varrho},$$ (7. B 4) $$\pi_{i\alpha} = \frac{F^{n-2}}{B} P_{r\alpha} B_{ir}.$$

Aus $\bar{g}_{\alpha\beta} = F a_{\alpha\beta}$ folgt übrigens

(7. ***) $$F a_{\alpha\beta} = f A_{\beta\alpha}.$$

Endlich führen wir noch die Größen φ und Φ ein durch

(7. φ) $$f + \varphi = p_{i\alpha} \Pi_{i\alpha}$$

und

(7. Φ) $$F + \Phi = P_{i\alpha} \Pi_{i\alpha}.$$

Schreibt man (7. ***) ausführlich hin und identifiziert α und β, so erhält man

$$F p_{i\alpha} \pi_{i\alpha} = f P_{i\alpha} \Pi_{i\alpha}$$

oder

$$F(f + \varphi) = f(F + \Phi).$$

Es ist also

(7. ****) $$\frac{\Phi}{\varphi} = \frac{F}{f}.$$

8. Als erste Anwendung schreiben wir die $\mathcal{E}$-Funktion in kanonischen Veränderlichen hin. Setzt man in

$$\Delta' = |S_{\alpha\beta} + S_{\alpha i} p'_{i\beta}|$$

(6. 1) ein und beachtet (6. 2), so erhält man

(8. 1) $$F \Delta' = |\delta_{\alpha\beta} + P_{i\alpha} p'_{i\beta}|.$$

Hier bleibt die rechte Seite invariant, wenn man gleichzeitig gestrichene und ungestrichene, große und kleine Buchstaben vertauscht. Daher kann man statt (4.4) auch schreiben

$$\Delta' = \frac{f'}{F F'^{u-1}} |\delta_{\alpha\beta} F' + (P_{i\alpha} - P'_{i\alpha}) \Pi'_{i\beta}|$$

und erhält für die $\mathcal{E}$-Funktion an Stelle von (4.5)

$$\frac{F}{f'} \mathcal{E} = F - \frac{1}{F'^{u-1}} |\delta_{\alpha\beta} F' + (P_{i\alpha} - P'_{i\alpha}) \Pi'_{i\beta}|. \tag{8.2}$$

Entwickelt man nach Potenzen von $P_{i\alpha} - P'_{i\alpha}$, so erhält man als Glieder 2. Ordnung eine quadratische Form mit dem Koeffizienten

$$Q_{i\alpha, i\beta} = F_{P_{i\alpha} P_{j\beta}} - \frac{1}{F} (\Pi_{i\alpha} \Pi_{j\beta} - \Pi_{i\beta} \Pi_{j\alpha}), \tag{8.3}$$

die hierzu an der Stelle $P'_{i\alpha}$ zu bilden sind.

9. Aber damit haben wir vorgegriffen. Wir wissen ja immer noch nicht, ob man (6.9) wirklich nach $p_{i\alpha}$ auflösen kann und auf diese Weise F als Funktion von $P_{i\alpha}$ berechnen.

Statt von (6.9) gehen wir von der damit inhaltsgleichen Formel (7.a2) aus und bilden allgemein das Differential dieser Gleichung, das wir nachher in einem anderen Zusammenhang noch einmal brauchen werden. Wir erhalten

$$a_{\alpha\varrho} d P_{i\alpha} = d \pi_{i\varrho} - P_{i\beta} d a_{\beta\varrho} = d \pi_{i\varrho} - P_{i\varrho} d f + P_{i\beta} \pi_{j\varrho} d p_{j\beta} + P_{i\beta} p_{k\beta} d \pi_{k\varrho}.$$

Nach (7.h1) und (7.h4) kann man dafür auch schreiben

$$a_{\alpha\varrho} d P_{i\alpha} = h_{ik} \left\{ d \pi_{k\varrho} - \frac{1}{f} (\pi_{k\varrho} d f - \pi_{j\varrho} \pi_{k\beta} d p_{j\beta}) \right\}. \tag{9.1}$$

Wir wollen nach $p_{j\beta}$ differenzieren, also ist $d f = \pi_{j\beta} d p_{j\beta}$. Wir falten noch mit $g_{\alpha\beta}$ und erhalten wegen (7.g2) und (5.1)

$$\frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial p_{j\beta}} = \frac{h_{ik} g_{\alpha\varrho}}{f} q_{k\varrho, j\beta}.$$

Die Determinante dieser $\mu \cdot n$-reihigen Matrix ist

$$\left| \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial p_{j\beta}} \right| = F^{n u} |q_{i\alpha, j\beta}| \text{ [18]}. \tag{9.2}$$

Sie ist gewiß von Null verschieden, wenn die Legendresche Bedingung erfüllt ist; in diesem Falle besteht also stets die Möglichkeit, kanonische Veränderliche einzuführen.

---

[18]) Daß die Determinante der $\mu \cdot n$-reihigen Matrix $h_{ij} g_{\alpha\beta}$ den Wert $h^\mu g^n$ hat, sieht man so: es ist, wie leicht zu sehen, $|h_{ij} \delta_{\alpha\beta}| = h^u$ und $|\delta_{ij} g_{\alpha\beta}| = g^n$; und es ist $h_{ij} g_{\alpha\beta} = h_{ir} \delta_{\alpha\varrho} \delta_{rj} g_{\varrho\beta}$.

Wir hätten statt von (7. a 2) von (7. A 2) ausgehen können; dann hätten wir gefunden

$$\frac{\partial p_{i\alpha}}{\partial P_{j\beta}} = \frac{h_{ki}\, g_{\varrho\alpha}}{F} Q_{k\varrho,\, j\beta}.$$

Die hier auf der rechten Seite stehende Matrix ist also die Reziproke der vorhin angeschriebenen, und für die Determinanten gilt

$$1 = f^{n\mu} F^{n\mu}\, |q_{i\alpha,\, j\beta}| \cdot |Q_{i\alpha,\, j\beta}|.$$

10. Die Methode von Lagrange liefert für die Extremalen unseres Variationsproblems die Eulerschen Gleichungen

$$\frac{d\pi_{i\varrho}}{dt_\varrho} - f_{x_i} = 0. \tag{10.1}$$

Man rechnet leicht nach, daß eine Fläche, die von einem geodätischen Feld transversal geschnitten wird, diesen Gleichungen genügt[19]). Unter allgemeineren Voraussetzungen gilt eine Identität, die den Zusammenhang zwischen Feldern von Extremalen und geodätischen Feldern klar erkennen läßt und die wir jetzt herleiten wollen.

Wir nehmen an, daß uns als Funktionen im Raum die Größen $p_{i\alpha}$, $f(x_i, t_\alpha, p_{i\alpha})$ und $P_{i\alpha}, F(x_i, t_\alpha, P_{i\alpha})$ gegeben sind und daß zwischen ihnen die im 7. Abschnitt aufgeschriebenen Beziehungen bestehen. Dann verwenden wir die Gleichung (9. 1), um eine Beziehung zu erhalten, in der die Größe $\frac{d\pi_{i\varrho}}{dt_\varrho}$ vorkommt:

$$a_{\alpha\varrho} \frac{dP_{i\alpha}}{dt_\varrho} = h_{ik} \left\{ \frac{d\pi_{k\varrho}}{dt_\varrho} - \frac{1}{f} \left(\pi_{k\varrho} \frac{df}{dt_\varrho} - \pi_{j\varrho}\, \pi_{k\beta} \frac{dp_{j\beta}}{dt_\varrho} \right) \right\}.$$

Hier rechnen wir $\frac{df}{dt_\varrho}$ aus, benutzen (7. h 4) und erhalten

$$a_{\alpha\varrho} \frac{dP_{i\alpha}}{dt_\varrho} + P_{i\varrho}(f_{t_\varrho} + p_{k\varrho} f_{x_k}) = h_{ik} \left\{ \frac{d\pi_{k\varrho}}{dt_\varrho} - \frac{1}{f} (\pi_{k\varrho}\, \pi_{j\beta} - \pi_{j\varrho}\, \pi_{k\beta}) \frac{dp_{j\beta}}{dt_\varrho} \right\}.$$

Es ist aber $P_{i\varrho} p_{k\varrho} = h_{ik} - \delta_{ik}$. Also kommt

$$a_{\alpha\varrho} \left(\frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial t_\varrho} + p_{j\varrho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_j} \right) + P_{i\varrho} f_{t_\varrho} - f_{x_i} = h_{ik} \left\{ \frac{d\pi_k}{dt_\varrho} - f_{x_k} + \frac{\pi_{k\varrho}\, \pi_{j\sigma}}{f} \left(\frac{dp_{j\varrho}}{dt_\sigma} - \frac{dp_{j\sigma}}{dt_\varrho} \right) \right\}.$$

---

[19]) Es ist $\frac{d\pi_{i\varrho}}{dt_\varrho} = \frac{d}{dt_\varrho}(S_{\lambda i} \bar{c}_{\lambda\varrho})$; weil $c_{\lambda\varrho} = \frac{dS_\lambda}{dt_\varrho}$ ist, verschwindet die Divergenz $\frac{d\bar{c}_\lambda}{dt_\varrho}$, also hat man $\frac{d\pi_{i\varrho}}{dt_\varrho} = \bar{c}_{\lambda\varrho} \frac{dS_{\lambda i}}{dt_\varrho}$; es ist aber $\frac{dS_{\lambda i}}{dt_\varrho} = \frac{\partial c_\lambda}{\partial x_i} - S_{\lambda j} \frac{\partial p_j}{\partial x_i}$, also $\frac{d\pi_{i\varrho}}{dt_\varrho} = \frac{\partial \Delta}{\partial x_i} - \pi_{j\varrho} \frac{\partial p_{j\varrho}}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \pi_{j\varrho} \frac{\partial p_{j\varrho}}{\partial x_i} = f_{x_i}$.

(Im letzten Term rechts wurde lediglich eine Umbenennung von Summationsindizes vorgenommen.) Nun führen wir links überall die großen Buchstaben ein, indem wir (7.***), (7.a4) mit (7.a3), und (7.**) benutzen. Die linke Seite wird

$$\frac{f}{F}\left\{A_{\varrho\alpha}\frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial t_\varrho}+\Pi_{j\alpha}\frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_j}+F_{x_i}-P_{i\varrho}F_{t_\varrho}\right\}$$
$$=\frac{f}{F}\left\{F\frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial t_\alpha}+\Pi_{j\alpha}\left(\frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_j}-P_{j\varrho}\frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial t_\varrho}\right)+F_{x_i}-P_{i\varrho}F_{t_\varrho}\right\}$$

und mit den Bezeichnungen (6.3) und (6.5)

$$\frac{f}{F}\left\{\frac{dF}{dx_i}+F\frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial t_\alpha}+\Pi_{j\alpha}\left(\frac{dP_{i\alpha}}{dx_j}-\frac{dP_{j\alpha}}{dx_i}\right)\right\}=\frac{f}{F}\left\{\frac{dF}{dx_i}+F\frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial t_\alpha}+\Pi_{j\alpha}[ij\alpha]\right\}$$

Mit

$$[i]=\frac{dF}{dx_i}+F\frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial t_\alpha}+\Pi_{j\alpha}[ij\alpha] \tag{10.2}$$

erhalten wir die gesuchte Identität, wenn wir noch nach (7.h2) mit b_{ij} falten:

$$\left\{\frac{d\pi_{k\varrho}}{dt_\varrho}-f_{x_k}\right\}+\frac{\pi_{k\varrho}\pi_{j\sigma}}{f}\left(\frac{dp_{j\varrho}}{dt_\sigma}-\frac{dp_{j\sigma}}{dt_\varrho}\right)=\frac{b_{ik}}{F}[i]. \tag{10.3}$$

Im geodätischen Feld gilt (6.4) und (6.6), also $[i]=0$. Schneidet das geodätische Feld eine Fläche transversal, so gilt auf der Fläche (1.4), und daher folgt aus (10.3), daß eine solche Fläche die Eulerschen Gleichungen (10.1) erfüllt.

Hat man umgekehrt ein Feld von Extremalen, d.h. von Lösungen der Eulerschen Gleichungen, so folgt aus (10.3) $[i]=0$, aber damit ein geodätisches Feld vorhanden ist, müssen noch alle $[ij\alpha]=0$ sein, woraus dann (6.6) folgt. In diesem Falle hat man, was Carathéodory eine *vollständige Figur* und was die Amerikaner (im Fall der einfachen Integrale) ein *Mayer-Feld* nennen.

Es gibt keine Methode, um eine gegebene Extremale in ein Feld von Extremalen einzubetten, das eine vollständige Figur bildet. Wir haben aber schon gesehen, daß man das gar nicht nötig hat; man braucht gar kein Feld von Extremalen, um die Weierstraßsche Theorie anzuwenden. Es genügt vollständig, ein geodätisches Feld zu konstruieren, das die gegebene Extremale (und eventuell gar keine andere) transversal schneidet. Im nächsten Kapitel werden wir zeigen, wie man das machen kann; damit wird zugleich bewiesen sein, daß die Extremalen die Lösungen des Variationsproblems sind.

11. Noch ein Wort über die Transversalität. Bei den einfachen Problemen der Variationsrechnung tritt die Transversalität gewöhnlich im Zusammenhang mit den Randbedingungen auf, und zwar dann, wenn die

Berandung der gesuchten Kurve oder Fläche nicht fest vorgegeben ist. Auch bei dem vorliegenden allgemeinen Problem gelangt man durch die Theorie des geodätischen Feldes leicht zu solchen Transversalitätsbedingungen. Man braucht nur zu verlangen, daß das Integral $\int \Delta' dt$ für alle „zulässigen" Vergleichsflächen den gleichen Wert besitzt oder, was dasselbe ist, daß alle solchen Flächen das durch ihren Rand bestimmte Gebiet G_t auf dasselbe Gebiet G_λ abbilden[20]). Falls der Rand fest vorgegeben ist, ist das, wie wir gesehen haben, von selbst der Fall. Nehmen wir aber beispielsweise an, daß ein Teil der — sonst fest vorgegebenen — Berandung auf einer ν-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{H}$ ($\nu \geqq \mu$) frei beweglich ist! Durch jeden Randpunkt geht eine Fläche $S_\alpha = \lambda_\alpha$. Damit unsere Bedingung erfüllt ist, müssen notwendig alle Randpunkte aller zulässigen Vergleichsflächen auf diesen selben Flächen $S_\alpha = \lambda_\alpha$ liegen. Es muß also die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{H}$ in der $n + \mu - 1$-dimensionalen Mannigfaltigkeit enthalten sein, die durch diese Flächen gebildet wird.

Man erhält demnach folgende Transversalitätsbedingung: Ist ein Teil der Berandung der gesuchten Fläche auf einer ν-dimensionalen Mannigfaltigkeit frei beweglich ($\nu \geqq \mu$), so muß jede Lösung des Problems von dieser Mannigfaltigkeit transversal geschnitten werden. Dabei heißt ein $m + \mu - 1$-dimensionales Flächenelement ($1 \leqq m \leqq n$), das mit der Extremale $\mu - 1$ Richtungen gemeinsam hat, zu ihr transversal, wenn es genau m linear unabhängige transversale Richtungen enthält (d. h. solche, die im früher definierten n-dimensionalen transversalen Flächenelement enthalten sind).

Insbesondere heißt eine $n + \mu - 1$-dimensionale Mannigfaltigkeit, die durch eine Gleichung $S(x_i, t_\alpha) = \text{const.}$ dargestellt ist, zu einer Extremale transversal, wenn die Gleichungen

$$S_{x_i} = S_{t_\varrho} P_{i\varrho} \tag{11.1}$$

erfüllt sind.

Zweites Kapitel.

Konstruktion eines geodätischen Feldes, das eine gegebene Extremale transversal schneidet.

12. Carathéodory hat bemerkt, daß man, um irgendein geodätisches Feld zu erhalten, eine einzige partielle Differentialgleichung erster Ordnung aufzulösen hat. Die Gleichungen, die man zu erfüllen hat, lauten ja

$$S_{\alpha i} = P_{i\varrho} S_{\alpha\varrho}, \tag{12.1}$$

$$|S_{\alpha\beta}| \cdot F(x_i, t_\alpha, P_{i\alpha}) = 1. \tag{12.2}$$

[20]) Vgl. Abschnitt 2.

Man braucht bloß (12. 1) nach $P_{i\alpha}$ aufzulösen und das Resultat in (12. 2) einzusetzen. Man kann also $\mu - 1$ von den Funktionen S_α willkürlich vorgeben, und dann ist (12. 2) eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die μ-te Funktion.

Um dies näher auszuführen, führen wir einige neue Bezeichnungen ein. Einen Index, der die Zahlen von 2 bis μ durchläuft, bezeichnen wir mit einem gestrichenen griechischen Buchstaben: α', β' usw. Der Index 1, der häufig vorkommen wird, ist stets ein „griechischer": $\alpha = 1$.

Wir geben uns die Funktionen $S_{\alpha'}$ willkürlich vor und bezeichnen die Ableitungen der gesuchten Funktion $S_1 = \sigma(x_i, t_\alpha)$ mit

$$S_{1i} = \sigma_i, \quad S_{1\alpha} = \sigma_\alpha.$$

In der Matrix $S_{\alpha\beta}$ sind jetzt alle Elemente außer denen in der ersten Zeile, also insbesondere auch die Unterdeterminanten $\overline{S}_{1\alpha}$, bekannte Funktionen von x_i und t_α. Da wir (12. 2) erfüllen wollen und da

$$|S_{\alpha\beta}| = \sigma_\alpha \overline{S}_{1\alpha} \tag{12. 3}$$

ist, muß überall wenigstens eine dieser Unterdeterminanten von Null verschieden sein. Wir setzen voraus, daß in dem Gebiet, das wir betrachten,

$$\overline{S}_{11} \neq 0 \tag{12. 4}$$

ist.

Durch Auflösung von (12. 1) nach $P_{i\alpha}$ und Einführung der bekannten Funktionen $S_{\alpha' i}$, $S_{\alpha'\alpha}$ erhält man die $P_{i\alpha}$ als Funktionen von x_i, t_α, σ_i, σ_α, die wir mit

$$(P_{i\alpha}) = P_{i\alpha}(x_i, t_\alpha, \sigma_i, \sigma_\alpha) \tag{12. 5}$$

bezeichnen. Entsprechend sei $(F) = F(x_i, t_\alpha, (P_{i\alpha}))$ und $(\Pi_{i\alpha}) = F_{P_{i\alpha}}(x_i, t_\alpha, (P_{i\alpha}))$.

Endlich setzen wir

$$\sigma_\alpha \overline{S}_{1\alpha} \cdot (F) - 1 = M(x_i, t_\alpha, \sigma_i, \sigma_\alpha), \tag{12. 6}$$

und dann lautet unsere partielle Differentialgleichung (12. 2)

$$M(x_i, t_\alpha, \sigma_i, \sigma_\alpha) = 0. \tag{12. 7}$$

13. Es sei an folgende Tatsachen aus der Charakteristikentheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung erinnert. Man kann sich die Funktion σ auf einer $n + \mu - 1$-dimensionalen Mannigfaltigkeit („Hyperfläche")

$$t_1 = \tau(x_i, t_{\alpha'}) \tag{13 1}$$

willkürlich vorgeben:

$$\sigma(x_i, \tau, t_{\alpha'}) = \Sigma(x_i, t_{\alpha'}). \tag{13. 2}$$

Aus (13. 2) folgt durch Differentiation, wenn wir die Ableitungen von τ und Σ einfach durch die Buchstaben i und α' bezeichnen,

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \Sigma_i - \sigma_1 \tau_i, \\ \sigma_{\alpha'} &= \Sigma_{\alpha'} - \sigma_1 \tau_{\alpha'}. \end{aligned} \tag{13. 3}$$

Wenn man dies in M einsetzt, dann kann (12.7) zur Berechnung von σ_1 dienen, falls die Ableitung nach σ_1 von Null verschieden ist:

$$M_{\sigma_1} - M_{\sigma_{\alpha'}}\tau_{\alpha'} - M_{\sigma_i}\tau_i \neq 0. \tag{13.4}$$

Sodann berechnet man σ_i und $\sigma_{\alpha'}$ aus (13.3). Mit den so erhaltenen Anfangswerten für σ_i und σ_α integriert man die Gleichungen der Charakteristiken:

$$\dot{t}_\alpha = M_{\sigma_\alpha}, \qquad \dot{x}_i = M_{\sigma_i}, \tag{13.5}$$

$$\dot{\sigma}_\alpha = -M_{t_\alpha}, \quad \dot{\sigma}_i = -M_{x_i}\,^{21}). \tag{13.6}$$

Dadurch erhält man σ_i und σ_α als Funktionen im Raum und aus ihnen durch eine Quadratur die gesuchte Funktion $\sigma = S_1$ und damit das geodätische Feld.

Statt (13.4) kann man jetzt auch schreiben

$$\dot{t}_1 - \dot{t}_{\alpha'}\tau_{\alpha'} - \dot{x}_i\tau_i \neq 0,$$

d. h. die charakteristischen Kurven sollen die Fläche (13.1) nicht berühren. Es wird daher ein gewisses Raumgebiet einfach von ihnen überdeckt.

Die Beweise dafür, daß die gefundenen Funktionen σ_i, σ_α die erforderlichen Integrabilitätsbedingungen erfüllen, lese man bei Carathéodory[22]) nach.

14. Unser Ziel ist, zu zeigen, daß diese Methode ein geodätisches Feld liefert, das eine gegebene Extremale transversal schneidet, falls man die Funktionen $S_{\alpha'}$ und die Anfangswerte für S_1 (auf einer Hyperfläche, die die Extremale durchsetzt) in geeigneter Weise vorgibt.

Dazu müssen wir die charakteristischen Gleichungen näher betrachten. Wir beginnen mit (13.5). Diese Gleichungen lauten nach (12.6)

$$\begin{aligned} \dot{t}_\alpha &= (F)\,\overline{S}_{1\alpha} + \sigma_\gamma \overline{S}_{1\gamma}(\Pi_{j\beta})\frac{\partial(P_{j\beta})}{\partial\sigma_\alpha}, \\ \dot{x}_i &= \sigma_\gamma \overline{S}_{1\gamma}(\Pi_{j\beta})\frac{\partial(P_{j\beta})}{\partial\sigma_i}. \end{aligned} \tag{14.1}$$

Die Funktionen $(P_{j\alpha})$ wurden durch Auflösung der Gleichungen

$$\sigma_j = P_{j\varrho}\,\sigma_\varrho, \tag{14.2}$$

$$S_{\alpha' j} = P_{j\varrho}\,S_{\alpha'\varrho} \tag{14.3}$$

nach $P_{j\alpha}$ erhalten. Diese Gleichungen differenzieren wir nach σ_α:

$$-P_{j\alpha} = \frac{\partial(P_{j\varrho})}{\partial\sigma_\alpha}\sigma_\varrho,$$

$$0 = \frac{\partial(P_j\ )}{\partial\sigma_\alpha}S_{\alpha'\varrho},$$

---

[21]) Der Punkt bedeutet Ableitung nach einem Parameter τ, mit dem wir die Charakteristiken darstellen.

[22]) Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, 3. Kapitel.

und erhalten durch Auflösung nach den Differentialquotienten

$$\sigma_\gamma \overline{S}_{1\gamma} \frac{\partial (P_{j\beta})}{\partial \sigma_\alpha} = -(P_{j\alpha}) \overline{S}_{1\beta}. \tag{14.4}$$

Auf dieselbe Weise bekommt man

$$\sigma_\gamma \overline{S}_{1\gamma} \frac{\partial (P_{j\beta})}{\partial \sigma_i} = \delta_{ij} \overline{S}_{1\beta}. \tag{14.5}$$

Wir setzen (14.4) und (14.5) in (14.1) ein und erhalten schließlich

$$\begin{aligned} \dot{t}_\alpha &= (F) \overline{S}_{1\alpha} - (P_{j\alpha}) (\Pi_{j\beta}) \overline{S}_{1\beta} = (A_{\alpha\beta}) \overline{S}_{1\beta}, \\ \dot{x}_i &= (\Pi_{i\beta}) \overline{S}_{1\beta}. \end{aligned} \tag{14.6}$$

15. Für die folgenden Abschnitte geben wir uns σ_i und σ_α als beliebige Funktionen im Raum, zwischen denen die Gleichung (12.7) besteht. Aus (12.5) entstehen dann ebenfalls Funktionen im Raum, die wir mit $P^*_{i\alpha}$ bezeichnen; ebenso F^* usw.

Man kann sich auch zuerst die Funktionen $P^*_{i\alpha}$ geben; sie müssen nur die Gleichungen (14.3) erfüllen:

$$S_{\alpha' i} = P^*_{i\varrho} S_{\alpha' \varrho}. \tag{15.1}$$

Es sind dann noch $\mu - 1$ von den σ ganz willkürlich wählbar, z. B. $\sigma_{\alpha'}$. σ_1 erhält man darauf wegen (12.4) stets eindeutig aus

$$\sigma_\gamma \overline{S}_{1\gamma} \cdot F^* = 1 \tag{15.2}$$

(d. i. (12.7)) und hierauf σ_i aus

$$\sigma_i = P^*_{i\varrho} \sigma_\varrho \tag{15.3}$$

(d. i. (14.2)). Die Beziehung (15.2) erlaubt uns in unseren Rechnungen überall $\sigma_\gamma \overline{S}_{1\gamma}$ durch $\frac{1}{F^*}$ zu ersetzen.

Die Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{t}_\alpha &= A^*_{\alpha\beta} \overline{S}_{1\beta}, \\ \dot{x}_i &= \Pi^*_{i\beta} \overline{S}_{1\beta} \end{aligned} \tag{15.4}$$

(d. i. (14.6)) definieren eine bestimmte Kurvenschar im Raum; es ist bemerkenswert, daß diese Schar, wenn man so vorgeht wie zuletzt geschildert, von der Wahl der Funktionen $\sigma_{\alpha'}$ gar nicht abhängt. Es ist leicht, sich die geometrische Bedeutung der Kurven klarzumachen. Mit Benutzung von (14.3) und (7.A1) rechnet man

$$S_{\alpha' i} \dot{x}_i + S_{\alpha' \alpha} \dot{t}_\alpha = 0 \tag{15.5}$$

aus; und wenn man mit $p^*_{i\alpha}$ das vermöge der Legendreschen Transformation zu $P^*_{i\alpha}$ gehörende μ-dimensionale Flächenelement bezeichnet, findet man wegen (7.A2)

$$\dot{x}_i = p^*_{i\alpha} \dot{t}_\alpha. \tag{15.6}$$

Die betrachteten Kurven liegen also auf den Flächen $S_{\alpha'} = \lambda_{\alpha'}$ und berühren die Flächenelemente $p^*_{i\alpha}$; falls die $p^*_{i\alpha}$ zu einer Schar von μ-di-

mensionalen Flächen gehören, die von den $(n+1)$-dimensionalen Flächen $S_{\alpha'} = \hat{\lambda}_{\alpha'}$ durchsetzt werden, dann sind es einfach die Schnittkurven dieser beiden Flächenscharen.

16. Unter den im letzten Abschnitt eingeführten Voraussetzungen nehmen wir jetzt die andere Hälfte (13.6) der charakteristischen Gleichungen in Angriff. Wegen (14.4) und (14.5) ist

$$\frac{\partial P^*_{j\beta}}{\partial t_\alpha} = \frac{\partial (P_{j\beta})}{\partial t_\alpha} + \frac{\partial (P_{j\beta})}{\partial \sigma_i}\frac{\partial \sigma_i}{\partial t_\alpha} + \frac{\partial (P_{j\beta})}{\partial \sigma_\varrho}\frac{\partial \sigma_\varrho}{\partial t_\alpha}$$
$$= \frac{\partial (P_{j\beta})}{\partial t_\alpha} + F^* \bar{S}_{1\beta}\left(\frac{\partial \sigma_j}{\partial t_\alpha} - P^*_{j\varrho}\frac{\partial \sigma_\varrho}{\partial t_\alpha}\right)$$

(man beachte immer (15.2)!); oder, wenn man noch die nach t_α differenzierte Gleichung (15.3) berücksichtigt,

$$\frac{\partial (P_{j\beta})}{\partial t_\alpha} = \frac{\partial P^*_{j\beta}}{\partial t_\alpha} - F^* \bar{S}_{1\beta}\sigma_\varrho \frac{\partial P^*_{j\varrho}}{\partial t_\alpha}. \tag{16.1}$$

Genau so erhält man

$$\frac{\partial (P_{j\beta})}{\partial x_i} = \frac{\partial P^*_{j\beta}}{\partial x_i} - F^* \bar{S}_{1\beta}\sigma_\varrho \frac{\partial P^*_{j\varrho}}{\partial x_i}$$

und also auch, mit dem Operator (6.3), in dem wir $P_{i\varrho} = P^*_\varrho$ nehmen,

$$\frac{d (P_{j\beta})}{d x_i} = \frac{d P^*_{j\beta}}{d x_i} - F^* \bar{S}_{1\beta}\sigma_\varrho \frac{d P^*_{j\varrho}}{d x_i}. \tag{16.2}$$

Mit Hilfe von (16.1) berechnen wir $M^*_{t_\alpha}$ (d. h. die Ableitung der Funktion (12.6) nach t_α, in der wir dann die gegebenen Funktionen σ_i und σ_α einsetzen) und bekommen

$$M^*_{t_\alpha} = F^*\sigma_\beta \frac{\partial \bar{S}_{1\beta}}{\partial t_\alpha} + \frac{1}{F^*}F^*_{t_\alpha} + \frac{\Pi^*_{j\beta}}{F^*}\left(\frac{\partial P^*_{j\beta}}{\partial t_\alpha} - F^*\bar{S}_{1\beta}\sigma_\varrho \frac{\partial P^*_{j\varrho}}{\partial t_\alpha}\right)$$
$$= F^*\sigma_\beta \frac{\partial \bar{S}_{1\beta}}{\partial t_\alpha} + \frac{1}{F^*}\frac{\partial F^*}{\partial t_\alpha} - \dot{x}_j\sigma_\beta \frac{\partial P^*_{j\beta}}{\partial t_\alpha}; \tag{16.3}$$

hier haben wir noch (15.4) benutzt. In derselben Weise berechnet man mit (16.2)

$$M^*_{x_i} - P^*_{i\varrho}M^*_{t_\varrho} = F^*\sigma_\beta \frac{d \bar{S}_{1\beta}}{d x_i} + \frac{1}{F^*}\frac{d F^*}{d x_i} - \dot{x}_j\sigma_\beta \frac{d P^*_{j\beta}}{d x_i}. \tag{16.4}$$

Jetzt gilt es Differentiationen längs der Kurven (15.4) auszuführen. Ist $\Psi(x_i, t_\alpha)$ irgendeine Funktion im Raum, so ist nach (15.4)

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial \Psi}{\partial t_\alpha}\dot{t}_\alpha = \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}\dot{x}_i + \frac{\partial \Psi}{\partial t_\alpha}F^* S_{1\alpha} - \frac{\partial \Psi}{\partial t_\alpha}P^*_{i\alpha}\dot{x}_i$$

oder

$$\dot{\Psi} = \dot{x}_i \frac{d \Psi}{d x_i} + F^* \bar{S}_{1\alpha}\frac{\partial \Psi}{\partial t_\alpha}. \tag{16.5}$$

Eine weitere Hilfsformel betrifft die Ableitungen von $\overline{S}_{1\beta}$. Mit Hilfe von (15.1) erhält man

$$\frac{d\,S_{\alpha'\varrho}}{d\,x_i} = \frac{\partial\,S_{\alpha'\varrho}}{\partial\,x_i} - P^*_{i\sigma}\frac{\partial\,S_{\alpha'\varrho}}{\partial\,t_\sigma} = \frac{\partial\,S_{\alpha' i}}{\partial\,t_\varrho} - P^*_{i\sigma}\frac{\partial\,S_{\alpha'\sigma}}{\partial\,t_\varrho} = S_{\alpha'\sigma}\frac{\partial\,P^*_{i\sigma}}{\partial\,t_\varrho},$$

und daher gibt uns die Formel (3.4), in der wir wegen $\alpha = 1$ für λ einen gestrichenen Index verwenden dürfen,

$$\frac{d\,\overline{S}_{1\beta}}{d\,x_i} = \overline{S}_{1\beta}\frac{\partial\,P^*_{i\varrho}}{\partial\,t_\varrho} - \overline{S}_{1\varrho}\frac{\partial\,P^*_{i\beta}}{\partial\,t_\varrho}. \tag{16.6}$$

Wir gehen aus von den längs der Kurven (15.4) differenzierten Gleichungen (15.2) und (15.3), die wir so schreiben:

$$\dot{\sigma}_\alpha\overline{S}_{1\alpha} = -\frac{\dot{F}^*}{F^{*2}} - \sigma_\beta\dot{\overline{S}}_{1\beta} \tag{16.7}$$

und

$$\dot{\sigma}_i - P^*_{i\varrho}\,\dot{\sigma}_\varrho = \sigma_\beta\,\dot{P}^*_{i\beta}. \tag{16.8}$$

Aus (16.3) und (16.7) berechnen wir die Größe $\overline{S}_{1\alpha}(\dot{\sigma}_\alpha + \dot{M}^*_{t_\alpha})$ und verwenden dabei die Formel (16.5) zuerst für $\Psi \equiv F^*$ und dann für $\Psi \equiv \overline{S}_{1\beta}$ und die Formel (16.6). Das meiste hebt sich weg und es bleibt

$$\overline{S}_{1\alpha}(\dot{\sigma}_\alpha + M^*_{t_\alpha}) = -\frac{\dot{x}_j}{F^{*2}}\left(\frac{d\,F^*}{d\,x_j} + F^*\frac{\partial\,P^*_{j\alpha}}{\partial\,t_\alpha}\right). \tag{16.9}$$

Ebenso berechnen wir aus (16.4) und (16.8) den Ausdruck $\dot{\sigma}_i + M^*_{x_i} - P^*_{i\varrho}(\dot{\sigma}_\varrho + M^*_{t_\varrho})$, wobei wir wieder (16.6) benutzen und (16.5) für $\Psi = P^*_{i\beta}$. Es kommt

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_i + M^*_{x_i} - P^*_{i\varrho}\,(\dot{\sigma}_\varrho + M^*_{t_\varrho}) &= \frac{1}{F^*}\left(\frac{d\,F^*}{d\,x_i} + F^*\frac{\partial\,P^*_{i\varrho}}{\partial\,t_\varrho}\right) + \dot{x}_j\,\sigma_\beta\left(\frac{d\,P^*_{i\beta}}{d\,x_j} - \frac{d\,P^*_{j\beta}}{d\,x_i}\right)\\ &= \frac{1}{F^*}\left(\frac{d\,F^*}{d\,x_i} + F^*\frac{\partial\,P^*_{i\varrho}}{\partial\,t_\varrho}\right) + \Pi^*_{j\alpha}\,\overline{S}_{1\alpha}\,\sigma_\beta\,[ij\beta]^*.\end{aligned} \tag{16.10}$$

Um dies noch weiter umzuformen, bemerken wir, daß wegen (15.1) ein enger Zusammenhang zwischen $\overline{S}_{1\alpha}$ und $[ij\alpha]^*$ besteht. Aus (15.1) folgt nämlich

$$\frac{d\,S_{\alpha' i}}{d\,x_j} - \frac{d\,S_{\alpha' j}}{d\,x_i} = P^*_{i\varrho}\frac{d\,S_{\alpha'\varrho}}{d\,x_j} - P^*_{j\varrho}\frac{d\,S_{\alpha'\varrho}}{d\,x_i} + [ij\varrho]^*\,S_{\alpha'\varrho}.$$

Man braucht nur die Differentiationen auszuschreiben und die Tatsache zu benutzen, daß $S_{\alpha' i}$ und $S_{\alpha'\varrho}$ die Ableitungen von $S_{\alpha'}$ nach x_i und t_ϱ sind; dann hebt sich alles andere weg und es bleibt

$$[ij\varrho]^*\,S_{\alpha'\varrho} = 0.$$

Diese $\mu - 1$ Gleichungen für $[i\,j\,\varrho]^*$ sind dieselben, denen auch die Größen $\overline{S}_{1\varrho}$ genügen; daraus folgt, daß für jedes Zahlenpaar i, j die μ Zahlen $[i\,j\,\varrho]^*$ mit $\overline{S}_{1\varrho}$ proportional sind, was man so schreiben kann:

$$[i\,j\,\alpha]^*\,\overline{S}_{1\beta} = [i\,j\,\beta]^*\,\overline{S}_{1\alpha}. \tag{16.11}$$

Und daher findet man schließlich aus (16.10) mit Benutzung der Abkürzung (10.2)

$$\dot{\sigma}_i + M^*_{x_i} - P^*_{i\varrho}(\dot{\sigma}_\varrho + M^*_{t_\varrho}) = \frac{[i]^*}{\bar{F}^*}. \tag{16.12}$$

17. Es sei eine Extremale gegeben, d. h. eine Fläche (1.1), die den Eulerschen Differentialgleichungen (10.1) genügt. Aus (1.2) folgen die $p_{i\alpha}$ auf der Fläche. Die Determinante $|q_{i\alpha,j\beta}|$ (vgl. 9.2)) sei von Null verschieden, so daß man aus (6.9) und (6.7) $P_{i\alpha}$ und die Funktion $F(x_i, t_\alpha, P_{i\alpha})$ auf der Fläche berechnen kann. Wir wollen zeigen, daß man die Funktionen $S_{\alpha'}$ und die im 15. Abschnitt eingeführten Funktionen σ_1, σ_α speziell so wählen kann, daß auf der Extremale $P^*_{i\alpha} = P_{i\alpha}$ wird.

Die $S_{\alpha'}$ brauchen offenbar außer der Ungleichheit (12.4) nur noch auf der Extremale die Gleichungen (14.3) zu erfüllen; d. h. die Flächen $S_{\alpha'} = \lambda_{\alpha'}$ müssen die Extremale transversal schneiden. Man kann sich überlegen, daß es stets möglich ist solche Funktionen anzugeben[23]). Um

---

[23]) Wir zeigen es, indem wir solche Funktionen wirklich hinschreiben. Durch jeden Punkt $t^0_\alpha, x^0_i = x_i(t^0_\alpha)$ der Extremale legen wir die zu ihr transversale n-dimensionale Ebene; sie wird durch die Gleichungen

$$t_\alpha = t_\alpha(x_i, t^0_\alpha) = t^0_\alpha - P_{i\alpha}(x_i - x^0_i) \tag{1}$$

gegeben. Durch diese Ebenen wird eine gewisse Umgebung der Extremale einfach überdeckt; denn die Ableitung der Funktionen (1) nach t^0_β ist $\delta_{\alpha\beta} + P_{i\alpha}\,p_{i\beta} = g_{\alpha\beta}$, die Funktionaldeterminante g ist nach Abschnitt 6 von Null verschieden. Man kann deshalb die Gleichungen (1) nach t^0_α auflösen und erhält gewisse Funktionen $t^0_\alpha(x_i, t_\beta)$.

Jetzt wählen wir beliebig $\mu - 1$ Funktionen $s_{\alpha'}(t^0_\alpha)$ und bestimmen die Funktionen $S_{\alpha'}$ so, daß sie auf der Extremale diese Werte haben,

$$S_{\alpha'}(x_i(t^0_\alpha), t^0_\alpha) = s_{\alpha'}(t^0_\alpha), \tag{2}$$

und auf jeder Ebene konstant sind, d. h. wir setzen

$$S_{\alpha'}(x_i, t_\alpha) = s_{\alpha'}(t^0_\alpha(x_i, t_\beta)).$$

Diese Funktionen erfüllen auf der Extremale (14.3); daher erhält man durch Differentiation von (2) mit Benutzung früherer Abkürzungen die Beziehung

$$S_{\alpha'\varrho}\,g_{\varrho\beta} = c_{\alpha'\beta}$$

($c_{\alpha'\beta}$ sind hier die Ableitungen von $s_{\alpha'}$), die es erlaubt, die Ableitungen von S_α auf der Extremale aus denen von $s_{\alpha'}$ zu berechnen. Für $\overline{S}_{11}$ findet man

$$\overline{S}_{11} = \frac{1}{g}\,g_{1\alpha}\,\bar{c}_{1\alpha}.$$

Die $s_{\alpha'}$ müssen also so gewählt werden, daß dies von Null verschieden ist; dann ist auf der Extremale und also in einer Umgebung von ihr (12.4) erfüllt.

nun auch noch passende Funktionen σ zu finden, geben wir uns wieder zuerst die $P^*_{i\alpha}$. Diese Funktionen müssen überall (15. 1) erfüllen und auf der Extremale mit den $P_{i\alpha}$ (die ja derselben Gleichung genügen) übereinstimmen. Die $\sigma_{\alpha'}$ bleiben nach wie vor gänzlich willkürlich, und die übrigen σ werden wie im Abschnitt 15 aus ihnen berechnet.

Nachdem wir alle Funktionen so bestimmt haben, betrachten wir die $\mu-1$-parametrige Schar der Kurven, in denen die Flächen $S_{\alpha'} = \lambda_{\alpha'}$ unsere Extremale durchsetzen. Wegen (15. 5) und (15. 6) gehören diese Kurven zu der Kurvenschar, die wir in den vorigen Abschnitten betrachtet haben, und können also durch Funktionen

$$x_i(\tau, u_1, \ldots, u_{u-1}),\quad t_\alpha(\tau, u_1, \ldots, u_{\mu-1}) \tag{17. 1}$$

dargestellt werden, die den Gleichungen (15. 4) genügen. Jetzt bestimmen wir die $\mu-1$ willkürlich gebliebenen Funktionen $\sigma_{\alpha'}$ so, daß sie längs dieser Kurven den $\mu-1$ Differentialgleichungen

$$\dot\sigma_{\alpha'} + M^\dagger_{t_{\alpha'}} = 0 \tag{17. 2}$$

genügen; hier bedeutet das neue Zeichen, daß man in $M_{t_{\alpha'}}$ mittels (15. 2) und (15. 3) σ_1 und σ_i durch $\sigma_{\alpha'}$ ausdrücken und sodann die Funktionen (17. 1) einsetzen soll. Welche Werte die $\sigma_{\alpha'}$ außerhalb der Extremale bekommen, ist gleichgültig.

Wir schreiben das so gewonnene System von Funktionen σ_i, σ_α ebenfalls in der Form

$$\sigma_i(\tau, u_1, \ldots, u_{u-1}),\quad \sigma_\alpha(\tau, u_1, \ldots, u_{u-1}). \tag{17. 3}$$

Diese Funktionen bilden mit (17. 1) *zusammen eine* $(\mu-1)$*-parametrige Schar von Charakteristiken der Differentialgleichung* $M \equiv 0$.

In der Tat: auf der Extremale ist $(P_{i\alpha}) = P^*_{i\alpha} = P_{i\alpha}$. Daher erfüllen die Funktionen (17. 1) nicht nur (wie gesagt) (15. 4), sondern auch mit (17. 3) zusammen (14. 6), d. h. (13. 5). Weiter ist wegen (17. 2)

$$\dot\sigma_{\alpha'} + M^*_{t_{\alpha'}} = 0. \tag{17. 4}$$

Nun betrachten wir die Identität (16. 9). Wegen (10. 3) sind auf der Extremale (hier benutzen wir, daß es sich um eine Extremale handelt) alle $[j]^* = 0$, was man (vgl. (10. 2)) so schreiben kann:

$$\frac{d\,F^*}{d\,x_j} + F^*\,\frac{\partial\,P^*_{j\alpha}}{\partial\,t_\alpha} = -\Pi^*_{k\beta}\,[j\,k\,\beta]^*.$$

Daher können wir für die rechte Seite von (16. 9)

$$\frac{\dot x_j}{F^{*2}}\,\Pi^*_{k\beta}\,[j\,k\,\beta]^*$$

schreiben oder auch, wegen (16. 11) und weil $\overline{S}_{11} \neq 0$ ist,

$$\frac{\dot x_j}{F^{*2}}\,\frac{\overline{S}_{1\beta}}{\overline{S}_{11}}\,\Pi^*_{k\beta}\,[j\,k\,1]^* = \frac{1}{F^{*2}\,\overline{S}_{11}}\,\dot x_j \dot x_k\,[j\,k\,1]^*.$$

Das ist aber Null, weil der Koeffizient von $[j\,k\,1]^*$ in j und k symmetrisch ist, $[j\,k\,1]^*$ selber aber antisymmetrisch. Es verschwindet also auf der Extremale die linke Seite von (16.9), und daraus folgt wegen (17.4)

$$\dot{\sigma}_1 + M^*_{t_1} = 0. \tag{17.5}$$

Jetzt betrachten wir die Identität (16.12). Auch hier verschwindet auf der Extremale die rechte Seite, und da schon alle $\dot{\sigma}_\alpha + M^*_{t_\alpha} = 0$ sind, muß auch

$$\dot{\sigma}_i + M^*_{x_i} = 0 \tag{17.6}$$

sein.

Wegen $(P_{i\alpha}) = P^*_{i\alpha}$ hätten wir (17.4) bis (17.6) ebensogut ohne Stern schreiben können; mithin sind in der Tat auch alle Gleichungen (13.6) erfüllt, wie zu beweisen war.

18. Eine Charakteristik ist eindeutig bestimmt durch die Werte von σ_i und σ_α in einem ihrer Punkte. Unter der Voraussetzung, daß die $S_{\alpha'}$ auf der Extremale (14.3) erfüllen, haben wir also folgendes bewiesen:

In einem Punkt der Extremale bestimme man die σ so, daß $(P_{i\alpha}) = P_{i\alpha}$ ist[24]), und integriere mit diesen Anfangswerten die charakteristischen Differentialgleichungen. *Dann verläuft die ganze so bestimmte Charakteristik auf der Extremale und es ist längs der ganzen Kurve* $(P_{i\alpha}) = P_{i\alpha}$.

Wir wollen sehen, ob man die im 13. Abschnitt besprochenen Anfangswerte für S_1 so wählen kann, daß alle Charakteristiken, die auf der Extremale beginnen, diese Eigenschaft haben.

Von der Hyperfläche (13.1) — sie heiße $\mathfrak{F}$ — verlangen wir weiter nichts, als daß sie die Extremale und auf ihr die Kurven $S_{\alpha'} = \lambda_{\alpha'}$ (die ja charakteristische Kurven werden sollen) durchsetzt. Der Durchschnitt ist eine $(\mu - 1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit $\tilde{\mathfrak{F}}$:

$$t_1 = \tilde{\tau}(t_{\alpha'}),\quad x_i = \xi_i(t_{\alpha'}). \tag{18.1}$$

Diese Mannigfaltigkeit liegt also auf $\mathfrak{F}$:

$$\tau\left(\xi_i(t_{\alpha'}),\ t_{\beta'}\right) = \tilde{\tau}(t_{\alpha'}), \tag{18.2}$$

und auf der Extremale:

$$x_i\left(\tilde{\tau}(t_{\alpha'}),\ t_{\beta'}\right) = \xi_i(t_{\alpha'}); \tag{18.3}$$

hier stehen links die Funktionen (1.1).

Auf dieser Mannigfaltigkeit $\tilde{\mathfrak{F}}$ müssen wir zugleich mit (13.3) die Gleichungen

$$\sigma_\alpha \bar{S}_{1\alpha} = \frac{1}{F} \tag{18.4}$$

und

$$\sigma_i = P_{i\varrho}\sigma_\varrho \tag{18.5}$$

[24]) Hierbei sind die $\sigma_{\alpha'}$ in diesem Punkt noch völlig willkürlich; wir haben in der Tat bei der Integration von (17.2) über die Anfangswerte noch nicht verfügt.

erfüllen (dann ist natürlich auch (12.7) erfüllt). Aus diesen insgesamt $\mu + 2n$ Gleichungen können wir alle σ eliminieren, wodurch n Beziehungen zwischen den Σ entstehen. Man bildet am einfachsten aus (13.3) die Linearkombinationen $\Sigma_i - P_{i\alpha'}\,\Sigma_{\alpha'}$ und $\Sigma_{\alpha'}\,\bar{S}_{1\alpha'}$; mit Benutzung von (18.4) und (18.5) erhält man

$$\Sigma_i - P_{i\alpha'}\,\Sigma_{\alpha'} = \sigma_i - P_{i\alpha'}\,\sigma_{\alpha'} + \sigma_1\,(\tau_i - P_{i\alpha'}\,\tau_{\alpha'}) = \sigma_1\,(P_{i1} + \tau_i - P_{i\alpha'}\,\tau_{\alpha'}),$$

$$\Sigma_{\alpha'}\,\bar{S}_{1\alpha'} = \sigma_{\alpha'}\,\bar{S}_{1\alpha'} + \sigma_1\,\tau_{\alpha'}\,\bar{S}_{1\alpha'} = \frac{1}{F} - \sigma_1\,(\bar{S}_{11} - \tau_{\alpha'}\,\bar{S}_{1\alpha'}),$$

und indem man hieraus noch σ_1 eliminiert[25]),

$$\left(\frac{1}{F} - \Sigma_{\alpha'}\,\bar{S}_{1\alpha'}\right)(P_{i1} + \tau_i - P_{i\beta'}\,\tau_{\beta'}) - (\Sigma_i - P_{i\alpha'}\,\Sigma_{\alpha'})\,(\bar{S}_{11} - \tau_{\beta'}\,\bar{S}_{1\beta'}) = 0. \tag{18.6}$$

Ich behaupte: wenn die Anfangswerte Σ auf der Mannigfaltigkeit $\tilde{\mathfrak{F}}$ die n Relationen (18.6) befriedigen, dann gibt es immer *ein* Lösungssystem σ_i, σ_α der Gleichungen (13.3), (12.7), das zu $P_{i\alpha}$ gehört, d. h. (18.4) und (18.5) erfüllt.

Es ist dies fast selbstverständlich; da wir uns wegen (18.4) gar nicht um (12.7) zu kümmern brauchen, haben wir es — im Gegensatz zum allgemeinen Fall des 13. Abschnitts — nur mit *linearen* Gleichungen zu tun und brauchen bloß zu verifizieren, daß deren Determinante nicht verschwindet. Wir wollen es etwas anders machen und an Stelle der $(\mu + n)$-reihigen Determinante eine $(\mu - 1)$-reihige betrachten. Wir bemerken nämlich, daß man schon aus den Anfangswerten auf $\tilde{\mathfrak{F}}$:

$$\sigma(\xi_i, \tilde{\tau}, t_{\alpha'}) = \Sigma(\xi_i, t_{\alpha'}) = \tilde{\Sigma}(t_{\alpha'}) \tag{18.7}$$

alle σ_i und σ_α auf dieser Mannigfaltigkeit berechnen kann. In der Tat wissen wir ja, daß dort nur über die $\sigma_{\alpha'}$ noch frei verfügt werden kann. Wir differenzieren (18.7) nach $t_{\alpha'}$:

$$\sigma_i\,\xi_{i\alpha'} + \sigma_1\,\tilde{\tau}_{\alpha'} + \sigma_{\alpha'} = \tilde{\Sigma}_{\alpha'},$$

und setzen in dieser Gleichung für $\xi_{i\alpha'}$ die Werte $p_{i1}\,\tilde{\tau}_{\alpha'} + p_{i\alpha'}$, die aus (18.3) folgen, und für σ_1 und σ_i ihre aus (18.4) und (18.5) berechneten Ausdrücke in $\sigma_{\alpha'}$ ein. Mit Benutzung der Abkürzung (7.g1) erhalten wir nach leichter Umformung

$$\frac{1}{\bar{S}_{11}}\left\{\bar{S}_{11}\,(g_{\beta'\alpha'} + g_{\beta'1}\,\tilde{\tau}_{\alpha'}) - \bar{S}_{1\beta'}\,(g_{1\alpha'} + g_{11}\,\tilde{\tau}_{\alpha'})\right\}\sigma_{\beta'} = \tilde{\Sigma}_{\alpha'} - \frac{1}{F\,\bar{S}_{11}}\,(g_{1\alpha'} + g_{11}\,\tilde{\tau}_{\alpha'}). \tag{18.8}$$

[25]) Man überzeugt sich leicht, welche Relationen an die Stelle von (18.6) treten müssen, wenn $\bar{S}_{11} - \tau_{\alpha'}\,\bar{S}_{1\alpha'}$ oder alle $P_{i1} + \tau_i - P_{i\alpha'}\,\tau_{\alpha'}$ verschwinden. Daß das eine und das andere zugleich eintritt, kann man ausschließen, wie eine geometrische Überlegung zeigt. Vgl. übrigens weiter unten.

Aus diesen $\mu - 1$ Gleichungen kann man $\sigma_{\alpha'}$ berechnen, falls ihre Determinante nicht verschwindet. Um diese auszurechnen, falten wir ihre Matrix mit $S_{\varrho'\beta'}$ und benutzen die Relationen $S_{1\beta} S_{\varrho'\beta} = 0$ und $S_{\varrho'\beta} g_{\beta\alpha'} = c_{\varrho'\alpha'}$, von denen die zweite unmittelbar aus der Definition von $c_{\alpha\beta}$ und $g_{\alpha\beta}$ folgt, wenn man (14.3) benutzt (vgl. auch Anm. [23]). Die Faltung ergibt die Matrix

$$c_{\varrho'\alpha'} + c_{\varrho' 1}\tau_{\alpha'} = \frac{dS_{\varrho'}}{dt_{\alpha'}} + \frac{dS_{\varrho'}}{dt_1}\tau_{\alpha'}.$$

Ihre Determinante ist nichts anderes als die Funktionaldeterminante der $S_{\alpha'}$ nach $t_{\beta'}$ auf der Fläche (18.1), die nach unseren Voraussetzungen von Null verschieden ist. Das gleiche gilt von der Determinante $|S_{\varrho'\beta'}| = \bar{S}_{11}$, und daher kann man aus diesen beiden die gesuchte Determinante berechnen und diese verschwindet ebenfalls nicht.

Man kann die Anfangswerte $\bar{\Sigma}$ auf $\bar{\mathfrak{F}}$ willkürlich wählen. Aus (18.7) folgt

$$\Sigma_i \xi_{i\alpha'} + \Sigma_{\alpha'} = \bar{\Sigma}_{\alpha'},$$

und diese Gleichungen bilden zusammen mit (18.6) ein System von $u + \mu - 1$ Gleichungen für Σ_i und $\Sigma_{\alpha'}$. Diese Gleichungen werden erfüllt von den Werten, die aus (13.3) folgen, nachdem man aus (18.8), (18.4) und (18.5) die σ berechnet hat.

Die geometrische Bedeutung der Gleichungen (18.6) ist die, zu garantieren, daß die Fläche $S_1 = \text{const.}$ in den betreffenden Punkten die Extremale tranversal schneidet. Augenfällig ist dies, wenn man sich $\mathfrak{F}$ als eine solche Fläche $S_1 = \text{const.}$ vorgeben will und fragt, welcher Einschränkung man dann die Orientierung von $\mathfrak{F}$ unterwerfen muß. Man will also $\Sigma = \text{const.}$ wählen, alle Σ_i und $\Sigma_{\alpha'}$ sollen verschwinden, und daher folgt aus (18.6)

$$P_{i1} + \tau_i - P_{i\beta'}\tau_{\beta'} = 0.$$

$\tau_i, -1, \tau_{\beta'}$ sind aber die Komponenten der Normale von $\mathfrak{F}$, diese Gleichung besagt also nichts anderes, als daß diese Hyperfläche, wie zu erwarten, zur Extremale transversal sein muß (vgl. 11.1).

Wir können das Ergebnis, dessen Beweis die Abschnitte 14—18 gewidmet waren, folgendermaßen zusammenfassen:

Um eine gegebene Extremale in ein geodätisches Feld einzubetten, gebe man sich Funktionen $S_{\alpha'}(x_i, t_\alpha)$ so, daß die Flächen $S_{\alpha'} = \lambda_{\alpha'}$ zur Extremale transversal sind. Dann gebe man sich auf einer Hyperfläche, die die Extremale und auf ihr die Kurven $S_{\alpha'} = \lambda_{\alpha'}$ durchsetzt, die Anfangswerte für S_1 so, daß sie auf der Extremale die Gleichungen (18.6) *erfüllen, und integriere mit diesen Anfangswerten die partielle Differentialgleichung* (12.7). *Das so erhaltene geodätische Feld schneidet die Extremale transversal.*

Drittes Kapitel.

Diskontinuierliche Lösungen.

19. Es seien zwei Funktionen $F(x_i, t_\alpha, P_{i\alpha})$ und $F'(x_i, t_\alpha, P'_{i\alpha})$ gegeben. Wir wollen ein geodätisches Feld konstruieren, das auf der einen Seite einer Hyperfläche $\mathfrak{F}$, die durch die $\mu + n - 1$ Parameter $u_i, u_{\alpha'}$ gegeben sei, zu F, auf der anderen Seite zu F' gehört, derart, daß die Funktionen S_α stetig sind. D. h. es sollen auf $\mathfrak{F}$ die Gleichungen

$$S_\alpha = S'_\alpha, \tag{19.1}$$

$$S_{\alpha i} = P_{i\beta} S_{\alpha\beta}, \quad S'_{\alpha i} = P'_{i\beta} S'_{\alpha\beta}, \tag{19.2}$$

$$F\,|\,S_{\alpha\beta}\,| = 1, \quad F'\,|\,S'_{\alpha\beta}\,| = 1 \tag{19.3}$$

bestehen. Aus (19.1) folgt durch Differentiation nach den Parametern

$$S_{\alpha j} \frac{\partial x_j}{\partial u_i} + S_{\alpha\beta} \frac{\partial t_\beta}{\partial u_i} = S'_{\alpha j} \frac{\partial x_j}{\partial u_i} + S'_{\alpha\beta} \frac{\partial t_\beta}{\partial u_i},$$

$$S_{\alpha j} \frac{\partial x_j}{\partial u_{\alpha'}} + S_{\alpha\beta} \frac{\partial t_\beta}{\partial u_{\alpha'}} = S'_{\alpha j} \frac{\partial x_j}{\partial u_{\alpha'}} + S'_{\alpha\beta} \frac{\partial t_\beta}{\partial u_{\alpha'}}.$$

Das bedeutet, daß die μ Vektoren mit den Komponenten

$$S'_{\alpha j} - S_{\alpha j}, \quad S'_{\alpha\beta} - S_{\alpha\beta}$$

alle in der Richtung der Normalen von $\mathfrak{F}$ fallen, deren Komponenten wir mit ν_j, ν_β bezeichnen. D. h. es gibt μ Funktionen ϱ_α auf der Hyperfläche, so daß

$$\begin{aligned} S'_{\alpha j} - S_{\alpha j} &= \varrho_\alpha \nu_j, \\ S'_{\alpha\beta} - S_{\alpha\beta} &= \varrho_\alpha \nu_\beta \end{aligned} \tag{19.4}$$

ist.

20. Jetzt nehmen wir an, es seien uns auf einer $(\mu - 1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit

$$t_1 = \tau(t_{\alpha'}), \quad x_i = \xi_i(t_{\alpha'}) \tag{20.1}$$

die Größen $P_{i\alpha}$ und $P'_{i\alpha}$ vorgegeben. Es soll möglich sein, zu jeder durch (20.1) gehenden Hyperfläche $\mathfrak{F}$ ein geodätisches Feld zu konstruieren, das die Gleichungen (19.1) bis (19.4) erfüllt und dessen Flächenelemente auf (20.1) mit den vorgegebenen übereinstimmen. Welchen Bedingungen müssen diese Größen hierzu genügen?

Aus (19.2) folgt durch Subtraktion

$$S'_{\alpha i} - S_{\alpha i} - P'_{i\beta}(S'_{\alpha\beta} - S_{\alpha\beta}) - (P'_{i\beta} - P_{i\beta}) S_{\alpha\beta} = 0. \tag{20.2}$$

Man wähle nun die Hyperfläche $\mathfrak{F}$ speziell so, daß in einem Punkt von (20.1)

$$\nu_i - P'_{i\beta} \nu_\beta = 0 \tag{20.3}$$

ist[26]). Dann folgt aus (19.4) und (20.2) für diesen Punkt

$$(P'_{i\beta} - P_{i\beta}) S_{\alpha\beta} = 0$$

und daher wegen $|S_{\alpha\beta}| \neq 0$

$$P'_{i\alpha} = P_{i\alpha}. \tag{20.4}$$

Statt (20.2) hat man jetzt in dem betrachteten Punkt

$$S'_{\alpha i} - S_{\alpha i} - P'_{i\beta}(S'_{\alpha\beta} - S_{\alpha\beta}) = 0.$$

Man kann die Hyperfläche aber auch so wählen, daß (20.3) *nicht* gilt. Wegen (19.4) kann man dann die zuletzt hingeschriebene Gleichung nur erfüllen mit $S'_{\alpha i} = S_{\alpha i}$ und $S'_{\alpha\beta} - S_{\alpha\beta}$. Und dann folgt aus (19.3)

$$F' = F. \tag{20.5}$$

Die vorgegebenen Größen müssen also diesen Gleichungen (20.4), (20.5) genügen.

21. Jetzt betrachten wir eine Extremale, die längs einer Mannigfaltigkeit (20.1) einen „Knick" besitzt; ihre Flächenelemente sind auf der einen Seite von (20.1) durch $p_{i\alpha}$, auf der andern durch $p'_{i\alpha}$ dargestellt, so daß auf dem Knick $p'_{i\alpha} \neq p_{i\alpha}$. Es handelt sich um einen Spezialfall des vorhin behandelten Problems, und daher müssen auf dem Knick die Gleichungen (20.4) und (20.5) erfüllt sein.

Aus (20.4) folgt, daß man nicht zu beiden Seiten des Knickes mit einer und derselben Legendreschen Transformation operieren kann (denn sonst würde aus $P'_{i\alpha} = P_{i\alpha}$ folgen $p'_{i\alpha} = p_{i\alpha}$[27])); daher hat man es auch hier mit zwei *verschiedenen* Hamiltonschen Funktionen zu tun, und (20.5) ist keine Folge von (20.4).

Ausführlich geschrieben lauten also die *verallgemeinerten Erdmannschen Eckenbedingungen:*

$$\frac{\bar{a}_{\alpha\beta}}{a} \pi_{i\beta} = \frac{\bar{a}'_{\alpha\beta}}{a'} \pi'_{i\beta}, \tag{21.1}$$

$$\frac{f^{\mu-1}}{a} = \frac{f'^{\mu-1}}{a'}. \tag{21.2}$$

22. Zu einem mit den Erdmannschen Gleichungen äquivalenten Gleichungssystem gelangt man folgendermaßen. Wir betrachten eine

---

[26]) Also — vgl. (11.1) — „transversal zu $p'_{i\alpha}$", falls die „kleinen" Größen definiert sind.

[27]) Wir werden gleich sehen, daß $\mathcal{E}(x_i, t_\alpha, p_{i\alpha}, p'_{i\alpha}) = 0$ ist. Ist nun die $\mathcal{E}$-Funktion sonst positiv und schreibt man sie in der Form (5.2), so sieht man, daß in dem durch den Circumflex bezeichneten Punkt der Verbindungsstrecke von $p_{i\alpha}$ und $p'_{i\alpha}$ die quadratische Form singulär ist und daher die Determinante (9.2) verschwindet.

Extremale und auf ihr ein Gebiet, in dem sie „stark" ist, d. h. wo $\mathcal{E} > 0$ ist für $p'_{i\alpha} \neq p_{i\alpha}$. Fassen wir speziell einen Randpunkt dieses Gebietes ins Auge, so gilt dort offenbar folgendes: Es ist $\mathcal{E} \geqq 0$; aber es gibt wenigstens ein Wertsystem $p'_{i\alpha} \neq p_{i\alpha}$, für das

$$\mathcal{E}(x_i, t_\alpha, p_{i\alpha}, p'_{i\alpha}) = 0 \tag{22.1}$$

ist.

Ein Flächenelement mit dieser Eigenschaft mag „halbstark" heißen. Wir wollen von den halbstarken Flächenelementen noch verlangen, daß es eine Umgebung des Wertsystems $p'_{i\alpha} = p_{i\alpha}$ gibt, in der die $\mathcal{E}$-Funktion für $p'_{i\alpha} \neq p_{i\alpha}$ nicht verschwindet. M. a. W.: halbstarke Flächenelemente sollen *regulär* sein (Abschn. 5). Insbesondere ist dann die Determinante $|q_{i\alpha, j\beta}| \neq 0$.

Ist $p_{i\alpha}$ ein halbstarkes Flächenelement, so gibt es ein Wertsystem $p'_{i\alpha} \neq p_{i\alpha}$, das die Gleichung (22.1) und dazu die μn Gleichungen

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p'_{i\alpha}} = 0 \tag{22.2}$$

erfüllt. Setzen wir

$$q_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{p'_{i\alpha} - p_{i\alpha}}{f} \pi_{i\beta},$$

dann können wir nach (4.5) für (22.1) und (22.2)

$$f' = qf \tag{22.3}$$

und

$$\pi'_{i\alpha} = \bar{q}_{\alpha\varrho} \pi_{i\varrho} \tag{22.4}$$

schreiben.

Wir zeigen, daß aus (22.3), (22.4) die Gleichungen (21.1), (21.2) folgen und umgekehrt; auf halbstarken Flächenelementen besitzen also die Erdmannschen Gleichungen eine Lösung. In der Tat folgt aus (22.4)

$$a'_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} f' - p'_{i\alpha} \pi'_{i\beta} = \delta_{\alpha\beta} f' - p'_{i\alpha} \bar{q}_{\beta\varrho} \pi_{i\varrho},$$

und daraus berechnet man wegen (22.3) und weil

$$f q_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + p'_{i\alpha} \pi_{i\beta}$$

ist,

$$a'_{\alpha\sigma} q_{\sigma\beta} = q_{\alpha\beta} f' - p'_{i\alpha} q \pi_{i\beta} = \frac{f'}{f} a_{\alpha\beta}. \tag{22.5}$$

Bildet man hier die Determinanten, so findet man wegen (22.3)

$$\frac{f'}{f} a' = \frac{f'^{\mu}}{f^{\mu}} a,$$

also (21.2). Faltet man aber (22.5) der Reihe nach mit $\frac{\bar{a}_{\alpha\gamma}}{a}$, $\frac{\bar{q}_{\beta}}{q}$ und $\frac{\bar{a}'_{\sigma\varrho}}{a'}$, so erhält man wegen (22.3)

$$\frac{\bar{a}_{\sigma\gamma}}{a} = \frac{\bar{a}_{\sigma\varrho}}{a'}\bar{q}_{\varrho\gamma},$$

und wenn man mit $\pi_{i\gamma}$ multipliziert und (22.4) beachtet, so kommt (21.1).

Um die Umkehrung zu beweisen, benutzen wir (8.1) und leiten aus dieser Formel

$$\mathcal{E} = f' - \frac{1}{F}\,|\delta_{\alpha\beta} + P_{i\alpha}p'_{i\beta}| \tag{22.6}$$

ab. Wenn (21.1) und (21.2), d. h. (20.4) und (20.5) gilt, dann sind die Elemente der in (22.6) vorkommenden Determinante gleich $g'_{\alpha\beta}$, und dann ist wegen (7.g3)

$$\mathcal{E} = f' - \frac{g'}{F'} = f' - \frac{f'F'}{F'} = 0.$$

Und wenn man (22.6) nach $p'_{i\alpha}$ differenziert und dann $P_{i\alpha} = P'_{i\alpha}$, $F = F'$ setzt, so bekommt man

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p'_{i\alpha}} = \pi'_{i\alpha} - \frac{1}{F'}\bar{g}'_{\varrho\alpha}P'_{i\varrho} = \frac{\bar{g}'_{\varrho\alpha}}{F'f'}(\pi'_{i\beta}g'_{\varrho\beta} - f'P'_{i\varrho}) = 0$$

wegen (7.g4).

23. Zwei Flächenelemente in einem Punkt (x_i^0, t_α^0), $p_{i\alpha}$ und $p'_{i\alpha}$, die miteinander die Erdmannschen Gleichungen befriedigen, erfüllen, wie wir eben sahen, die Gleichungen (22.1) und (22.2). Da die Erdmannschen Gleichungen in den gestrichenen und ungestrichenen Veränderlichen symmetrisch sind, müssen auch die Gleichungen richtig sein, die aus (22.1) und (22.2) durch Vertauschung von gestrichenen und ungestrichenen Veränderlichen hervorgehen. Wir hätten das auch direkt sehen können. Erinnern wir uns nämlich, daß wir im 2. Abschnitt des I. Kapitels als $\mathcal{E}$-Funktion die Größe

$$\tilde{f} - \tilde{A} = \mathcal{E}(x_i^0, t_\alpha^0, p_{i\alpha}, \tilde{p}_{i\alpha})$$

eingeführt haben, die für $\tilde{p}_{i\alpha} = p_{i\alpha}$ jedenfalls ein Extremum mit dem Wert 0 besitzt. Aus (22.1), (22.2) folgt, daß auch für die Stelle $\tilde{p}_{i\alpha} = p'_{i\alpha}$ ein Extremum 0 besteht; und daher zeigen die Betrachtungen des zweiten Abschnitts, daß man auch

$$\tilde{f} - \tilde{A} = \mathcal{E}(x_i^0, t_\alpha^0, p'_{i\alpha}, \tilde{p}_{i\alpha})$$

setzen kann. Also ist für alle $\tilde{p}_{i\alpha}$

$$\mathcal{E}(x_i^0, t_\alpha^0, p_{i\alpha}, \tilde{p}_{i\alpha}) = \mathcal{E}(x_i^0, t_\alpha^0, p'_{i\alpha}, \tilde{p}_{i\alpha}). \tag{23.1}$$

Daraus folgt ohne weiteres: Ist von zwei Flächenelementen in einem Punkt, die miteinander die Erdmannschen Gleichungen erfüllen, eines halbstark, so ist stets auch das andere halbstark.

Eine weitere Folgerung aus (23. 1) betrifft die zweiten Ableitungen der $\mathcal{E}$-Funktion, die wir gleich brauchen werden. Es muß nämlich

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}(x_i^0, t_\alpha^0, p_{i\alpha}, p'_{i\alpha})}{\partial p'_{i\alpha}\, \partial p'_{j\beta}} = q'_{i\alpha, j\beta} \tag{23. 2}$$

sein, d. h. gleich den durch (5. 1) definierten Zahlen, gebildet für die $p'_{i\alpha}$. Insbesondere ist die μn-reihige Determinante dieser Größen von Null verschieden, da wir von den halbstarken Flächenelementen die Regularität vorausgesetzt haben.

24. Wir wollen jetzt die Bedingung dafür aufstellen, daß auf einer Extremale die Mannigfaltigkeiten, wo die Erdmannschen Gleichungen eine Lösung besitzen, isoliert liegen. Wir betrachten also die Erdmannschen Gleichungen auf einer Extremale, d. h. wir drücken darin x_i und $p_{i\alpha}$ durch t_α aus. Dann können wir diese $\mu n + 1$ Gleichungen etwa so schreiben:

$$\Psi(t_\varrho, p'_{i\alpha}) = 0, \quad \Psi_{j\beta}(t_\varrho, p'_{i\alpha}) = 0.$$

Wenn diese Gleichungen in einem Punkt (t_α) eine Lösung $p'_{i\alpha}$ besitzen, dann gehört dieser Punkt offenbar dann und nur dann zu einer genau $\mu - 1$-dimensionalen Mannigfaltigkeit von Punkten mit der gleichen Eigenschaft, wenn die Matrix

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Psi}{\partial p'_{i\alpha}} & \dfrac{\partial \Psi_{j\beta}}{\partial p'_{i\alpha}} \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial t_\varrho} & \dfrac{\partial \Psi_{j\beta}}{\partial t_\varrho} \end{pmatrix} \tag{24. 1}$$

von $\mu n + 1$ Spalten und $\mu n + \mu$ Zeilen den Rang $\mu n + 1$ besitzt.

Diese Bedingung schreibt sich nun besonders einfach, wenn man von der Form (22. 1), (22. 2) der Erdmannschen Gleichungen ausgeht. Dann sieht nämlich in dem betrachteten Punkt die Matrix (24. 1) so aus:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial p'_{i\alpha}\, \partial p'_{j\beta}} \\ \dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t_\varrho} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t_\varrho\, \partial p'_{j\beta}} \end{pmatrix}$$ [28]).

[28]) Die Ableitung von $\mathcal{E}$ nach t_ϱ ist natürlich so zu verstehen, daß man auch die Abhängigkeit der x_i und $p_{i\alpha}$ von t_ϱ berücksichtigt.

Sind die betrachteten Flächenelemente halbstark, so verschwindet nach dem vorigen Abschnitt die Determinante $\left|\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial p'_{i\alpha} \partial p'_{j\beta}}\right|$ nicht; also hat die Matrix (24. 1) dann und nur dann den Rang $\mu n + 1$, wenn die Zahlen $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t_\varrho}$ nicht alle verschwinden, d. h. wenn die $\mathcal{E}$-Funktion in dem betrachteten Punkt einen Gradienten besitzt.

Die Bedingung (24. 1) für ein halbstarkes Flächenelement einer Extremale ist also gleichbedeutend damit, daß dieses Flächenelement zu einer $\mu - 1$-dimensionalen Mannigfaltigkeit von ebensolchen Flächenelementen der Extremale gehört, die auf ihr ein „starkes" Gebiet von einem „schwachen" trennt.

Längs des Randes eines starken Gebietes, er möge in der Form (20. 1) dargestellt werden, läßt sich also eine Lösung der Erdmannschen Gleichungen bestimmen, deren Flächenelemente $p'_{i\alpha}$ halbstark sind. Und doch erhält man auf diesem Wege im allgemeinen keine gebrochene Extremale. Denn damit es überhaupt möglich ist, mit den Anfangswerten $p'_{i\alpha}$ eine Extremale zu konstruieren, müssen diese eine Bedingung erfüllen, die wir jetzt noch aufstellen wollen und die im allgemeinen durchaus nicht erfüllt ist.

25. Sind nämlich $p_{i\alpha}$ und $p'_{i\alpha}$ Funktionen auf (20. 1) und gehören sie je zu einer μ-dimensionalen Fläche, die diese Mannigfaltigkeit enthält, so erfüllen sie die Gleichungen

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t_{\alpha'}} = p_{i1} \frac{\partial \tau}{\partial t_{\alpha'}} + p_{i\alpha'}, \tag{25. 1}$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t_{\alpha'}} = p'_{i1} \frac{\partial \tau}{\partial t_{\alpha'}} + p'_{i\alpha'}; \tag{25. 2}$$

das ist, was man im Falle $\mu = 2$ eine Streifenbedingung nennt. Ist man von einer Extremale ausgegangen, so ist (25. 1) erfüllt, aber (25. 2) im allgemeinen nicht.

Dagegen gibt es immer[29]) „Knickstreifen", d. h. Mannigfaltigkeiten (20. 1) und auf ihnen Funktionen $p_{i\alpha}$ und $p'_{i\alpha}$, die die Erdmannschen Gleichungen und (25. 1) und (25. 2) erfüllen. Gibt man sich (20. 1) vor, so hat man $2\mu n$ Funktionen zu bestimmen, die

$$\mu n + 1 + 2(\mu - 1) = (n + 2)\mu - 1$$

[29]) Vorausgesetzt, daß das Variationsproblem nicht für alle Flächenelemente regulär ist (denn dann gibt es überhaupt nur starke Flächenelemente).

Gleichungen befriedigen. Nur für $\mu = n = 1$ sind das genau so viel Gleichungen wie gesuchte Größen; nur in der Ebene existiert also der für die gewöhnliche Theorie der diskontinuierlichen Extremalen charakteristische Sachverhalt, daß man in der Umgebung einer „Ecke" in eindeutiger Weise ein Feld von Ecken bestimmen kann. Läßt man μ wachsen, so erhält man mehr Gleichungen als Unbekannte; z. B. wird man bei den Flächen im Raum ($\mu = 2, n = 1$) sich die Kurve, längs welcher ein Knick stattfinden soll, nicht willkürlich vorschreiben können. Ist dagegen $n > 1$, so hat man stets mehr Unbekannte als Gleichungen.

26. Hat man eine diskontinuierliche Extremale gefunden, die längs ihres Knickes die Erdmannschen Gleichungen mit der Bedingung (24. 1) erfüllt und beiderseits des Knickes stark ist, so liefert ein genügend kleines Stück dieser Fläche in der Tat ein starkes Minimum. Um ein geodätisches Feld zu erhalten, das die Fläche transversal schneidet, muß man nur die Konstruktion des vorigen Kapitels auf beiden Seiten einer Hyperfläche $\mathfrak{F}$ ausführen, die den Knick enthält. Man wähle die Funktionen $S_{\alpha'}$ so, daß sie auf $\mathfrak{F}$ mit sämtlichen Ableitungen stetig bleiben; dann werden auch die Anfangswerte für σ_i, σ_α beiderseits die gleichen, und somit sind die $P_{i\alpha}$ im ganzen geodätischen Feld stetig.

(Eingegangen am 2. 7. 1935.)

Die erste Resonanzkurve beim Duffingschen Schwingungsproblem.

Von

Rudolf Iglisch in Kiel.

In einer Monographie[1]) macht G. Duffing nachdrücklichst aufmerksam auf die Wichtigkeit der Behandlung der ersten Randwertaufgabe der Gleichung

$$\ddot{x}(t) + \alpha^2 \sin x(t) = -\beta \sin t \tag{1}$$

(Gleichung der erzwungenen Pendelschwingungen mit sinusförmiger erzwingender Kraft) im Intervall $\langle 0, \pi \rangle$, dem halben Periodizitätsintervall der ungeraden rechten Seite (d. h. der erzwingenden Kraft). Ein besonders auffälliges, qualitativ von dem der entsprechenden linearen Gleichung — wo also auf der linken Seite von (1) $\sin x$ durch x zu ersetzen ist — völlig verschiedenes Verhalten zeigt die nichtlineare Gleichung (1) in der Umgebung derjenigen Lösungen $x(t)$, für die die zugehörige Jacobische Differentialgleichung

$$\dot{\varphi}(t) + \alpha^2 \cos x(t)\, \varphi(t) = 0 \tag{2}$$

eine in $t = 0$ und $t = \pi$ verschwindende Lösung besitzt. Solche Lösungen $x(t)$ zählen mehrfach, d. h. es gibt im allgemeinen gewisse Parameterwerte α^2 und β, zu denen es mehr als eine zu diesem $x(t)$ benachbarte Lösung von (1) gibt. Derartige Verzweigungen sind bisher erst für die trivialen Verzweigungslösungen $x(t) \equiv 0$ zu $\beta = 0$, $\alpha^2 = n^2$ untersucht worden[2]). Ganz allgemein wollen wir solche mehrfachen Lösungen hier Resonanzlösungen nennen, weil sie die folgende charakteristische Eigenschaft besitzen — deren Analogon in der Theorie der linearen Schwingungen im Falle der Resonanz bekanntlich allerdings noch viel stärker ausgeprägt ist —: Ändert man, ausgehend von einer mehrfachen Lösung von (1), den Parameter β um einen kleinen Betrag δ, so ändert sich die Ampli-

[1]) Georg Duffing, Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung, Braunschweig (Friedr. Vieweg & Sohn A.-G.) 1918. — Vgl. auch: Georg Hamel, Über erzwungene Schwingungen bei endlichen Amplituden, Math. Annalen 86 (1922), S. 1—13.

[2]) Rudolf Iglisch, Zur Theorie der Schwingungen (2. Mitteilung), Monatsh. f. Math. u. Phys. 39 (1932), S. 173—220. Diese Arbeit wird späterhin stets mit M 2 abkürzend zitiert werden.

tude der Schwingung im allgemeinen von höherer Ordnung, etwa wie $\sqrt{\delta}$, $\sqrt[3]{\delta}$ usw.; der Wurzelexponent hängt von der Art der Verzweigung ab[3]). Für die Technik vor allem wichtig sind natürlich die sich nicht überschlagenden Schwingungen, d. h. diejenigen mit $|x(t)| \leqq \pi$, denen in dieser Arbeit das Hauptinteresse zugewandt ist. Vor allem hat man sich über die niedrigsten Resonanzwerte Rechenschaft abzulegen; bei linearen Schwingungen sind dann die übrigen Resonanzwerte die ganzen Vielfachen dieser ersten Resonanzwerte; d. h. für die lineare Gleichung

$$\ddot{x} + \alpha^2 x = -\beta \sin t$$

sind die kritischen Zahlen α^2 die Zahlen 1, 4, 9, 16, ... Bei der nichtlinearen Gleichung liegen die Verhältnisse wesentlich komplizierter, vor allem sind die Resonanzwerte α^2 Funktionen von β. Die sich stetig zusammenschließenden Wertepaare α^2, β, für die Resonanz eintritt — richtiger: deren zugehörige Resonanzlösungen $x(t)$ stetig auseinander hervorgehen —, wollen wir, in der α^2, β-Ebene aufgetragen, als Resonanzkurven bezeichnen. Um Anschluß an die Verhältnisse bei linearen Gleichungen zu gewinnen, haben wir $x(t)$ eine Lösung erster Resonanz (erste Resonanzlösung) zu nennen, wenn Gleichung (2) eine in $t = 0$ und $t = \pi$, nicht aber dazwischen verschwindende Lösung $\varphi(t)$ besitzt. Die entsprechende erste Resonanzkurve in der α^2, β-Ebene zu untersuchen, ist das Hauptziel dieser Arbeit. Man kann diese Kurve gewissermaßen als die durch das nichtlineare Anziehungsgesetz bewirkte Verzerrung der Vertikalen $\alpha^2 = 1$, die die erste Resonanzkurve beim linearen Problem darstellt, ansehen. Dabei wollen wir gleich das folgende allgemeinere Randwertproblem (allgemeinere Zwingkraft) untersuchen:

$$\ddot{x}(t) + \alpha^2 \sin x(t) = -\beta f(t), \quad x(0) = 0 = x(\pi). \tag{3}$$

Offenbar brauchen nur nichtnegative Werte von β betrachtet zu werden, da mit β auch $x(t)$ das Zeichen wechselt. Über $f(t)$ wollen wir nacheinander folgende Voraussetzungen einführen, die sich hinsichtlich der Ungleichheitszeichen noch mildern ließen:

$$f(t) > 0 \text{ in } (0, \pi)^4), \quad f'(0) \neq 0, \quad f'(\pi) \neq 0, \tag{4}$$

— die beiden letzteren Bedingungen braucht man nur im Falle $f(0) = 0$, bzw. $f(\pi) = 0$ zu fordern —

$$f(t) = f(\pi - t), \tag{5}$$

[3]) Vgl. z. B. Rudolf Iglisch, Zur Theorie der Schwingungen (3. Mitteilung), Monatsh. f. Math. u. Phys. 42 (1935), S. 7—36, insbesondere S. 33.

[4]) $(0, \pi)$ bedeutet im folgenden im Anschluß an Herrn Kowalewski stets das Intervall mit Ausschluß der Enden, $\langle 0, \pi \rangle$ mit Einschluß der Enden.

d. h. $f(t)$ ist symmetrisch zu $\frac{\pi}{2}$,

$$f'(t) > 0 \quad \text{in} \quad \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right). \tag{6}$$

Unter diesen, auch für Gleichung (1) zutreffenden Voraussetzungen gilt der folgende fundamental wichtige Satz für die ersten Resonanzen sich nicht überschlagender Schwingungen: *Die erste* (bei $\alpha^2 = 1$, $\beta = 0$ beginnende) *Resonanzkurve ist verzweigungsfrei; sie besitzt in der α^2, β-Ebene stets positive Tangentenneigung; zu jedem ihrer Punkte gehört eine in* $(0, \pi)$ *durchweg negative Resonanzlösung* $x(t) > -\pi$. Am Schluß der Arbeit wird ein Verfahren angegeben, das diese erste Resonanzkurve punktweise mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen gestattet. Von Wichtigkeit ist, daß aus der Kenntnis einer solchen Resonanzlösung $x(t)$ leicht die Tangentenneigung der Resonanzkurve im zugehörigen Punkt α^2, β angegeben werden kann. Das vorhin ausgesprochene Resultat bezog sich auf die Lösungen mit $|x(t)| \leqq \pi$. Weitere erste Resonanzlösungen, für die z. T. $|x(t)| > \pi$ ist, könnten möglicherweise noch auftreten; sie hängen aber mit den eben betrachteten Resonanzlösungen nicht zusammen, so daß die Resonanzen sich nicht überschlagender Lösungen für sich gesondert betrachtet werden können.

In den ersten Paragraphen werden die Lösungen von (3) für $\alpha^2 < 1$, bzw. $1 \leqq \alpha^2 < 4$ noch genauer untersucht, da sich dort auf einfachere Weise noch weitergehende Feststellungen machen lassen. Daß übrigens die Voraussetzungen (4), (5) und (6) über $f(t)$ nicht ausreichen, um über die weiteren Resonanzkurven von (3) entsprechende Aussagen zu machen, erhellt schon aus den in M 2, §§ 10 und 11 diskutierten Verzweigungsfällen.

§ 1.

Das Intervall $0 \leqq \alpha^2 < 1$.

Das erste Randwertproblem der Gleichung (3) für das Intervall $\langle 0, \pi \rangle$ besitzt in diesem Falle bei beliebiger rechter Seite $f(t)$ und beliebigen Werten von β stets genau eine und nur eine Lösung[5]). Der Beweis für diese Tatsache läßt sich deshalb so einfach erbringen, weil die zu jeder Lösung $x(t)$ von (3) zugehörige Jacobische Differentialgleichung (2) keine in $t = 0$ und $t = \pi$ verschwindende Lösung besitzen kann.

Benutzen wir in diesem Paragraphen *über $f(t)$ noch einzig die Voraussetzung* (4), so können wir über die Lösungen von (3) folgende nützlichen Sätze aussprechen:

---

[5]) Vgl. dazu: Rudolf Iglisch, Zur Theorie der Schwingungen (1. Mitteilung), Monatsh. f. Math. u. Phys. 37 (1930), S. 325—342; insbesondere § 3. Diese Arbeit wird im folgenden stets mit M 1 zitiert.

I. *Für jedes $\beta > 0$ sind die Lösungen von* (3) *im Innern stets positiv; ihre Endtangenten sind nicht horizontal.*

II. *Bei festem α^2 wachsen die Lösungen von* (3) *nebst ihren Endtangenten mit wachsendem β.*

III. *Bei festem β wachsen die Lösungen von* (3) *nebst ihren Endtangenten mit wachsendem α^2, solange sie den Wert π nicht erreichen.*

Der Beweis dieser drei Sätze kann etwa so erbracht werden: Für $\beta = 0$ hat (3) nur die Lösung $x(t) \equiv 0$. Des weiteren kennen wir noch die Lösungen von (3) für alle β am linken Intervallende $\alpha^2 = 0$, und zwar können wir für diese Satz I sofort als richtig nachweisen. Wäre nämlich für ein solches $x(t)$ die Aussage I falsch, so hätte es im Intervall $\langle 0, \pi\rangle$ ein Minimum (besser: einen stationären Wert) mit einer nichtpositiven Ordinate und einer nichtnegativen zweiten Ableitung; dann könnte man aber aus geometrischen Gründen einen Punkt t_0 mit $\ddot{x}(t_0) > 0$ finden, was bei $\alpha^2 = 0$ einen Widerspruch gegen Gleichung (3) liefert. — Wir wollen jetzt ein beliebiges $\beta > 0$ festhalten und α^2 von 0 bis 1 wachsen lassen. Zu zwei benachbarten Werten α^2 und $\alpha^2 + \delta\,(\delta > 0)$ seien $x_1(t)$ bzw. $x_2(t)$ die Lösungen von (3) und es werde $X(t) = x_2(t) - x_1(t)$ gesetzt. Dann erhält man durch Subtraktion der für $x_2(t)$ und $x_1(t)$ bestehenden Gleichungen

$$\ddot{X}(t) + \alpha^2 \cos x_1(t)\, X(t) = -\delta \sin x_1(t) + \frac{\alpha^2}{2} \sin \bar{x}_1(t)\, X^2(t) - \delta \cos \bar{\bar{x}}_1(t)\, X(t), \quad X(0) = 0 = X(\pi), \tag{7}$$

wo $\bar{x}_1(t)$ und $\bar{\bar{x}}_1(t)$ zwischen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ liegen. Nun läßt sich unser Randwertproblem (3) als nichtlineare Integralgleichung schreiben [M 1, § 1] und darauf die Schmidtsche Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen anwenden[6]). Da für $x(t)$ der sogenannte Hauptfall der Schmidtschen Theorie vorliegt, ergibt sich leicht[7])

$$|X(t)| = |x_2(t) - x_1(t)| \leqq \text{Const. } \delta. \tag{8}$$

Daher sind die beiden letzten Summanden von (7) in δ mindestens von zweiter Ordnung; wir schreiben (7) dann in üblicher Symbolik so um:

$$\ddot{X}(t) + \alpha^2 \cos x_1(t)\, X(t) = -\delta \sin x_1(t) + O(\delta^2) \tag{9}$$

und bemerken noch, daß dieser Ausdruck $O(\delta^2)$ an den Intervallenden derart nach Null geht, daß die ganze rechte Seite von (9) in $(0, \pi)$

---

[6]) Erhard Schmidt, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, III. Teil, Math. Annalen **65** (1908), S. 370—399; für das folgende vgl. insbesondere § 5.

[7]) Vgl. dazu etwa auch: Rudolf Iglisch, Reelle Lösungsfelder der elliptischen Differentialgleichung $\Delta u = F(u)$ und nichtlinearer Integralgleichungen. Math. Annalen **101** (1929), S. 98—119; insbesondere § 2 und den Schluß von § 3. — Diese Arbeit wird übrigens im folgenden mit A 1 abgekürzt.

negativ ist und negative Endtangenten besitzt, falls $x_1(t) < \pi$ ausfällt und außerdem die in Satz I genannten Eigenschaften besitzt. Man lasse jetzt α^2 von Null an wachsen. Dann folgt aus (9) leicht, daß $X(t)$ in $(0, \pi)$ nebst Endableitungen positiv ist, solange nur $x_1(t) < \pi$ ausfällt. Denn für $\alpha^2 = 0$ ist dies sofort zu sehen; wäre die Behauptung falsch, so müßte es ein kleinstes α^2 geben derart, daß dazu eine Lösung $X(t)$ von (9) gehört, für die entweder in einem Punkt t_0 im Innern von $(0, \pi)$

$$\ddot{X}(t_0) \geqq 0, \quad X(t_0) = 0, \quad \pi > x_1(t_0) > 0$$

gilt oder in der Umgebung eines der Intervallenden (mit Ausschluß dieses Endes)

$$\ddot{X}(t_0) \geqq 0, \quad X(t_0) \geqq 0, \quad \frac{\pi}{2} > x_1(t_0) > 0, \quad \cos x_1(t_0) > 0;$$

beides würde einen Widerspruch gegen (9) liefern. Daraus ergibt sich unmittelbar der Beweis von Satz III. — Die Einschränkung $x_1(t) < \pi$ ist bei beliebigem α^2 für genügend kleines β erfüllt.

Um nun Satz II zu beweisen, betrachte man bei festgehaltenem α^2 zwei Lösungen $x_2(t)$ und $x_1(t)$ von (3) zu den Werten $\beta + \delta$ und β bei $\delta > 0$. Mit $X(t) = x_2(t) - x_1(t)$ findet man statt (9) jetzt

$$\ddot{X}(t) + \alpha^2 \cos x_1(t)\, X(t) = -\delta f(t) + O(\delta^2), \tag{10}$$

wo die ganze rechte Seite wieder die gleichen Eigenschaften besitzt wie bei Gleichung (9). Genau wie dort folgen nun, wenn man β von genügend kleinen Werten an wachsen läßt (wo Satz I nach dem eben Bewiesenen gilt), für $X(t)$ die Eigenschaften von Satz I, womit Satz II bewiesen ist.

Satz I folgt dann unmittelbar aus den Sätzen II und III.

§ 2.

Bemerkungen für den Fall $1 \leqq \alpha^2 < 4$ unter der Voraussetzung (4).

Ist $\beta = 0$, so besitzt jetzt Gleichung (3) außer der identisch verschwindenden Lösung, die wir mit N abkürzend bezeichnen wollen, noch zwei Lösungen, die sich nur durchs Vorzeichen unterscheiden, mit Hilfe elliptischer Funktionen darstellbar sind und im Innern des Intervalls $(0, \pi)$ nicht verschwinden; die positive sei mit E_{+0} bezeichnet, die negative mit E_{-0}. Für $\alpha^2 = 1$ fallen alle drei Lösungen zusammen. Für genügend kleine β gibt es zu N, E_{+0} und E_{-0} benachbarte Lösungen; ihre Verzweigungen in der Umgebung des Punktes $\alpha^2 = 1$, $\beta = 0$ habe ich in M 2, § 3 untersucht. In diesem Paragraphen sollen auch für endlich große Werte von β qualitative Aussagen über die Lösungen von (3) gemacht werden, und zwar unter der auch im vorigen Paragraphen gemachten Annahme (4) über die rechte Seite $f(t)$.

I. *Die aus E_{+0} und E_{-0} bei $\beta = 0$ mit wachsendem β und festem α^2 stetig hervorgehenden Lösungen von* (3) *wachsen nebst ihren Endtangenten,*

solange sie einfach zählen, d. h. solange für sie die Jacobische Differentialgleichung (2) keine in 0 und π verschwindende Lösung besitzt. — Bei $\beta = 0$ zählen die Lösungen ja in der Tat einfach [8]), falls $\alpha^2 \neq 1$ ist, und bei $\alpha^2 = 1$ gibt es für $\beta \neq 0$ überhaupt stets nur eine Lösung, für die noch die Überlegungen des vorigen Paragraphen Gültigkeit besitzen.

Zum Beweise braucht nur gezeigt zu werden, daß die Lösungen $X(t)$ des ersten Randwertproblems (10) im Innern des Intervalls $(0, \pi)$ stets größer als Null sind. Das kann man so einsehen: Die Greensche Funktion $G(t, \tau)$ — analog wie wir sie früher für die Gleichung (3) benutzt haben (M 1, § 1) — ist in $(0, \pi)$ durchweg positiv [9]), da die Lösung der homogenen Gleichung (10) mit dem Anfangswert 0 und der Anfangstangente 1 erst hinter $t = \pi$ verschwindet, analog die bei $t = \pi$ mit negativer Endtangente verschwindende Lösung erst vor $t = 0$; dies ersieht man für $\beta = 0$ aus M 2, § 5 oder einfacher aus J, und es gilt bei wachsendem β dann mindestens solange, als die zu betrachtenden Lösungen $x(t)$ von (3) einfach zählen. Die Lösung des ersten Randwertproblems von (10) ist dann darstellbar in der Form

$$X(t) = \int_0^\pi G(t, \tau)\,[\delta f(\tau) - O(\delta^2)]\,d\tau > 0.$$

Die Behauptung über das Wachstum der Endtangenten ergibt sich wie in § 1.

II. In gleicher Weise beweist man, ausgehend von Gleichung (9) statt (10), den folgenden Tatbestand: *Geht man aus von einer der eben betrachteten durch Fortsetzung aus E_{+0} erhaltenen* (mithin positiven) *Lösungen $x(t)$, für die also die durch $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 1$ bestimmte Lösung von* (2) *erst hinter π verschwindet, so wächst bei festem β und wachsendem α^2 die Lösung nebst ihren Endtangenten, solange sie einfach zählt und kleiner als π bleibt. Geht man dagegen von einer durch Fortsetzung aus E_{-0} erhaltenen, durchweg negativen derartigen Lösung aus, so nimmt sie nebst Endtangenten bei wachsendem α^2 ab, solange sie einfach zählt.*

III. Für die aus N etwa bei festem α^2 und wachsendem β hervorgehenden Lösungen gilt ohne weitere Voraussetzungen ein ähnlicher Satz

---

[8]) Vgl. neben M 2, § 4 auch: Rudolf Iglisch, Einfacher Beweis, daß beim Duffingschen Schwingungsproblem die freien Pendelschwingungen nicht Verzweigungslösungen sein können. Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. 45, S. *131*. Diese Arbeit wird künftig mit J abgekürzt zitiert.

[9]) Vgl. z. B. Frank-v. Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, 2. Aufl., Braunschweig (Friedr. Vieweg & Sohn A.-G.) 1930, Bd. I, S. 563ff. Dort ist jedoch die Greensche Funktion mit dem umgekehrten Vorzeichen definiert worden.

monotoner Änderung nicht. Man kann nicht einmal behaupten, daß alle Lösungen von (3) gleiches Zeichen besitzen müssen. Zu diesem Zweck wollen wir ein Gegenbeispiel konstruieren: Man wähle t_1 zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ so, daß für ein festes α^2 Gleichung (3) bei geeignetem positiven $\beta f(t)$ mit $f(t_1) = 0$ im Intervall (t_1, π) eine durchweg negative an den Enden verschwindende Lösung $x(t)$ besitzt. Das ist nach I möglich. Jetzt löse man mit beliebigem in $(0, t_1)$ positivem $f_1(t)$ bei $f_1(t_1) = 0$, $\dot{f}_1(t_1) < 0$ im Intervall $(0, t_1)$ die Gleichung

$$\ddot{x}_1(t) + \alpha^2 \sin x_1(t) = -\beta f_1(t), \quad x_1(0) = 0 = x_1(t_1).$$

$x_1(t)$ ist nach § 1, I wegen $t_1 < \frac{\pi}{2}$ im Innern von $(0, t_1)$ positiv, und durch Wahl von β kann man nach § 1, II erreichen, daß $\dot{x}_1(t_1) = \dot{x}(t_1)$ wird, während von selbst $\ddot{x}_1(t_1) = 0 = \ddot{x}(t_1)$ wird; man beachte dazu, daß mit wachsendem β die Endtangenten von $x_1(t)$ von 0 bei $\beta = 0$ an über alle Grenzen wachsen, wie man analog wie in M 1, § 1 schließen kann. Durch Aneinanderfügen von $x_1(t)$ und $x(t)$ entsteht nunmehr eine das Vorzeichen wechselnde Lösung von (3) zu einer nichtpositiven stetigen rechten Seite $-\beta f(t)$, die allerdings noch im Punkte t_1 verschwindet; letzteren Schönheitsfehler kann man aber beseitigen, indem man von $-\beta f(t)$ übergeht zu einer benachbarten rechten Seite $-\beta f(t) - \varepsilon^2 p(t)$ mit passendem positiven $p(t)$ oder, da dieses Verfahren Schwierigkeiten machen könnte, wenn zufällig die zu $-\beta f(t)$ konstruierte Lösung mehrfach zählen würde, indem man die Voraussetzungen $f(t_1) = 0 = f_1(t_1)$ ersetzt durch $\beta f(t_1) = c^2 = \beta f_1(t_1)$, womit bei der völligen sonstigen Willkür von $f_1(t)$ sich die frühere Konstruktion von $x_1(t)$ wiederholen läßt. Selbstverständlich können in gleicher Weise auch Lösungen von (3) angegeben werden, die an beiden Intervallenden positiv sind, in der Mitte negativ. Außer diesen beiden Lösungsformen und den schon in I aufgetretenen durchweg positiven bzw. durchweg negativen Lösungen können weitere infolge des folgenden Satzes nicht auftreten:

Eine Lösung $x(t)$, die an einer Stelle $t = t_0$ negativ ist, ist in einem ganzen t_0 enthaltenden Gebiet von größerer Länge als $\frac{\pi}{\alpha}\left(> \frac{\pi}{2} \text{ für } \alpha^2 < 4\right)$ negativ. Gäbe es nämlich ein Intervall (t_1, t_2) von kleinerer Länge als $\frac{\pi}{\alpha}$ derart, daß darin $x(t) < 0$ wäre, $x(t_1) = 0 = x(t_2)$, so führe man statt t in (3) die unabhängige Variable $s = \pi \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$ ein; die dann eindeutig bestimmte Lösung des ersten Randwertproblems in $\langle 0, \pi \rangle$ müßte für die transformierte Gleichung nach § 1 durchweg positiv sein, was einen Widerspruch liefert.

Aus diesem Satz folgt: *Gleichung* (3) *kann im Falle* $\alpha^2 < 4$ *keine Lösung besitzen, die im Innern von* $(0, \pi)$ *die t-Achse von unten berührt.* Ferner: Eine in $(0, \pi)$ durchweg positive Lösung $x(t)$ von (3) kann nicht durch stetige Fortsetzung in eine auch negative Werte annehmende Lösung übergeführt werden, ohne durch die Lösung N bei $\beta = 0$ durchzugehen.

Über die aus N bei wachsendem β *hervorgehenden Lösungen kann man nur aussagen, daß sie in* $(0, \pi)$ *nicht durchweg positiv sind.* Denn für $\alpha^2 = 1 + \varepsilon^2$ mit genügend kleinem ε folgt das aus der in M 2, § 7 abgeleiteten Ungleichung

$$\lambda_2 = \int_0^\pi \sin t\, x(t)\, dt < 0$$

und gilt mithin nach dem eben aufgestellten Satze allgemein.

IV. Vor kurzem habe ich bewiesen[10]): Hat β bei festem α^2 (welches dabei beliebig groß sein kann) einen genügend großen Wert erreicht, so hat das Problem (3) genau eine, und zwar durchweg positive, Lösung. Dieser Satz läßt sich für unser augenblickliches Problem so ergänzen: *Die aus* E_{+0} *hervorgehenden* (positiven) *Lösungen bleiben einfach, verzweigen sich also nicht, solange* $x(t) \leqq \pi$ *bleibt.* Denn für E_{+0} zu $\beta = 0$ verschwindet, wie früher schon benutzt wurde, die durch $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 1$ bestimmte Lösung $\varphi(t)$ von (2) erst hinter $t = \pi$. Nach den Schlußweisen der Sturm-Liouvilleschen Theorie folgt die gleiche Aussage wegen $x(t) \geqq E_{+0}(t)$ erst recht für $\beta > 0$, solange $x(t) \leqq \pi$ bleibt, da dann in (2) $\cos x(t) < \cos E_{+0}(t)$ ausfällt.

Daß für diesen Satz eine Voraussetzung der Art $x(t) \leqq \pi$ (wo die Zahl π natürlich nicht die äußerste Schranke ist) nicht überflüssig ist, zeigt die Konstruktion eines Gegenbeispiels. Mit einer genügend kleinen positiven Zahl l wähle man im Intervall $\langle l, \pi - l\rangle$, das eine größere Länge als $\frac{\pi}{\alpha}$ besitzen soll, $x(t)$ so, daß mit $X(t) = x(t) - 2\pi$

$$\ddot{X} + \alpha^2 \sin X = -f(t). \quad f(t) > 0, \quad X(l) = 0 = X(\pi - l),$$
$$X(t) \leqq 0$$

ist. Das geht sicher mit $|X(t)| \leqq \varepsilon$ bei beliebig kleinem ε und genügend kleinem $f(t)$; setzt man nämlich etwa $f(t) = \beta \sin t$, so hat man ja in Hinblick auf (10) in

$$-\frac{\beta}{\alpha^2 - 1} \sin t + O(\beta^2)$$

eine zu N benachbarte Lösung von (3) bei beliebig kleinem β, aus der durch Transformation der unabhängigen Variablen das jetzt gesuchte $X(t)$

---

[10]) Rudolf Iglisch, Über die Lösungen des Duffingschen Schwingungsproblems bei großen Parameterwerten, Math. Annalen 111 (1935), S. 568. Diese Arbeit wird künftig mit A 2 zitiert.

und damit $x(t)$ erhalten werden kann. Auch $f(l) \neq 0$ und $f(\pi - l) \neq 0$ könnte man dabei leicht erreichen. In den Intervallen $\langle 0, l\rangle$ und $\langle \pi - l, \pi\rangle$ kann man nun unschwer die rechte Seite von (3) durchweg negativ so ergänzen, daß die Lösung $x(t)$ von 2π auf 0 abfällt. Die zu diesem jetzt in $\langle 0, \pi\rangle$ konstruierten $x(t)$ zugehörige Lösung $\varphi(t)$ von (2) mit $\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = 1$ verschwindet schon vor $t = \pi$, da bei genügend kleinem ε schon die Lösung mit $\varphi(l) = 0$ dies tut. Läßt man jetzt die vorhin konstruierte rechte Seite von (3) durch Multiplikation mit einem Faktor fast nach Null abnehmen, so gelangen wir nach III zu einer durchweg positiven, notwendig zu E_{+0} benachbarten Lösung $\bar{x}(t)$, wenn nicht vorher eine mehrfache Lösung eingetreten ist, über die hinaus eine Fortsetzung der aus $x(t)$ hervorgegangenen Lösung nicht möglich ist. Aber auch wenn die Fortsetzung bis $x(t)$ durchführbar ist, muß man zwischendurch auf eine mehrfache Lösung gestoßen sein, da für $\bar{x}(t)$ die Lösung $\varphi(t)$ des stets betrachteten Anfangswertproblems (2) erst hinter π verschwindet, wie vorhin festgestellt wurde.

§ 3.

Die Wirkung der Zusatzvoraussetzungen (5) und (6) im Intervall $1 \leqq \alpha^2 < 4$.

I. Aus der Voraussetzung (5) folgt ganz allgemein für beliebige Werte von α^2, daß neben $x(t)$ auch $x(\pi - t)$ Lösung von (3) ist; beide sind dann und nur dann identisch, wenn $x(t)$ zu $\frac{\pi}{2}$ symmetrisch ist. *Für* $0 \leqq \alpha^2 < 1$ *sind also sicher alle Lösungen von* (3) *zu* $\frac{\pi}{2}$ *symmetrisch. Das gleiche wollen wir jetzt für* $1 \leqq \alpha^2 < 4$ *zeigen.* Wäre nämlich $x(t)$ eine nicht zu $\frac{\pi}{2}$ symmetrische Lösung von (3), so auch $x(\pi - t)$. Bedeutet $\bar{x}(t)$ eine passende Funktion zwischen $x(t)$ und $x(\pi - t)$, so folgt für $y(t) = x(t) - x(\pi - t)$

$$\ddot{y} + \alpha^2 \cos \bar{x}(t)\, y = 0, \qquad y(0) = 0 = y(\pi), \tag{11}$$

wo y offensichtlich zu $\frac{\pi}{2}$ ungerade ist. Für $\alpha^2 < 4$ ist dieses Randwertproblem aber mit einer im Innern von $(0, \pi)$ verschwindenden Lösung nicht erfüllbar.

Ist bei beliebigem α^2 ein zu $\frac{\pi}{2}$ symmetrisches $x(t)$ eine mehrfache Lösung, d. h. besitzt die zugehörige Gleichung (2) eine in 0 und π verschwindende Lösung $\varphi(t)$, so muß diese, wie aus (2) sofort zu sehen ist, zu $\frac{\pi}{2}$ gerade oder ungerade sein. Nach der eben an (11) angeschlossenen

Bemerkung muß demnach im Falle $1 \leqq \alpha^2 < 4$ jedes solche $\varphi(t)$ notwendig zu $\frac{\pi}{2}$ gerade sein.

II. Die Voraussetzung (6) leistet darüber hinaus das folgende: *Es gibt keine Lösung $x(t)$ von* (3), *die bis $t = \frac{\pi}{2}$ hin zwei horizontale Tangenten besitzt, von denen die zweite tiefer liegt als die erste.* Seien etwa im Gegenteil zwei horizontale Tangenten in t_1 und t_2 $\left(0 \leqq t_1 < t_2 \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ vorhanden und $x(t_2) < x(t_1)$. Dann folgt aus (3) durch Differentiation mit der Abkürzung $y(t) = \dot{x}(t)$

$$\ddot{y} + \alpha^2 \cos x\, y = -\beta \dot{f}(t), \quad y(t_1) = 0 = y(t_2). \tag{12}$$

Da aber im Intervall $\langle t_1, t_2\rangle$ die erste Randwertaufgabe von (2) für $\alpha^2 < 4$ nicht lösbar ist, folgt wegen $\dot{f}(t) > 0$ genau wie in § 2, I, daß die Lösung $y(t)$ von (12) in (t_1, t_2) positiv sein muß, was einen Widerspruch liefert.

III. Wir wollen jetzt mit wachsendem β die aus E_{-0} stetig hervorgehenden Lösungen betrachten. Nach § 2, I wachsen sie, solange sie einfach zählen. Da für genügend große Werte von β nur eine durchweg positive Lösung vorhanden ist (A 2), muß man bei einem endlichen Wert β_1 zum ersten Male zu einer mehrfachen Lösung $x_1(t)$ gelangt sein: denn die durch Fortsetzung aus E_{-0} erhältlichen Lösungen können nie den Wert 0 mit horizontaler Tangente erreichen, an den Enden $t = 0$ und $t = \pi$ nicht wegen II, an einer Stelle t_0 im Innern von $(0, \pi)$ nicht nach § 2, III, da in t_0 die Lösung die t-Achse von unten berühren müßte. Die mehrfache Lösung $x_1(t)$ zu $\beta_1 > 0$ ist mithin in $(0, \pi)$ durchweg negativ. Daraus folgt, daß sie genau zweifachzählende Lösung ist; denn die Schmidtsche Größe L_2 hat nach A 1, § 6 den Wert

$$L_2 = \text{Const.} \int_0^\pi \varphi_1^3(t) \sin x_1(t)\, dt, \tag{13}$$

wo $\varphi_1(t)$ die zu $x_1(t)$ gehörende Lösung der ersten Randwertaufgabe von (2) in $\langle 0, \pi\rangle$ ist und die multiplikative Konstante sicher von Null verschieden ausfällt. Da beide Faktoren des Integranden das Zeichen nicht wechseln, ist also $L_2 \neq 0$, was das Kriterium für eine zweifach zählende Lösung ist. Ich benutze jetzt für die Untersuchung der Nachbarlösungen zu $x_1(t)$ die Ergebnisse von A 1, § 4. Diese gelten für unser Problem aus folgendem Grunde: Die zum Problem (3) zugehörige nichtlineare Integralgleichung lautet ja (vgl. z. B. M 1, § 1)

$$x(t) - \alpha^2 \int_0^\pi G(t, \tau) \sin x(\tau)\, d\tau = \beta \int_0^\pi G(t, \tau) f(\tau)\, d\tau. \tag{14}$$

Der für die Resultate in A 1, § 4 ausschlaggebende Ansatz A 1, (65) ist dann und nur dann möglich, wenn das auf der rechten Seite von (14)

stehende Integral nicht orthogonal ist zu der zu $\varphi_1(t)$ adjungierten Eigenfunktion

$$\psi_1(s) = \text{Const.} \cos x_1(s) \cdot \varphi_1(s), \tag{15}$$

d. h. wenn

$$\int_0^\pi \varphi_1(t) f(t)\, dt \neq 0 \tag{16}$$

ausfällt, was offenbar der Fall ist, da beide Integrandfaktoren in $(0, \pi)$ positiv sind. Aus den Sätzen in A 1, S. 113 folgt nun, daß sich $x_1(t)$ nicht über β_1 hinaus nach größeren β-Werten fortsetzen läßt, daß vielmehr zu jedem dicht vor β_1 liegenden β genau zwei einfach zählende Lösungen von (3) gehören, von denen wir die eine schon vorhin betrachtet haben. Im Nachfolgenden wenden wir unser Augenmerk der zweiten dieser Lösungen zu. Diese zweite Lösung ist übrigens dadurch charakterisiert, daß die zugehörige Lösung $\varphi(t)$ des Anfangswertproblems (2) schon vor π durch 0 geht, während bei der zuerst betrachteten Lösung die erste Nullstelle des zugehörigen $\varphi(t)$ hinter π lag[11]). Sei jetzt β_2 ein zu β_1 benachbarter kleinerer Wert, $x_2(s)$ die zugehörige jetzt zu betrachtende zweite Lösung. Da nach den Gleichungen (62), (61), (65) und (76) von A 1 $x_2(t) - x_1(t)$ in erster Näherung die Gestalt der Funktion $\varphi_1(t)$ besitzt, ist also $x_2(t) - x_1(t)$ in $(0, \pi)$ größer als Null. Ich setze jetzt $x_2(t)$ nach abnehmenden Werten von β fort, solange die Lösung einfach bleibt.

Ich behaupte, ich muß bei diesem Fortsetzungsprozeß bis $\beta = 0$ gelangen, ohne unterwegs auf eine mehrfache Lösung zu stoßen; die bei $\beta = 0$ erreichte Lösung muß dann nach § 2, III notwendig N sein. Wir wollen im Gegenteil annehmen, daß wir bei $\bar{\beta}(\alpha^2) > 0$ zu einer mehrfach zählenden Lösung $\bar{x}(t)$ gelangen würden, die dann notwendig wieder zweifach zählen muß wegen der für sie geltenden zu (13) analogen Formel. Zu dem gleichen α^2 hatten wir vorhin schon eine Größe $\beta_1(\alpha^2) > \bar{\beta}(\alpha^2)$ festgestellt, zu der gleichfalls eine zweifach zählende Lösung gehört. Wir tragen beide Punkte in der α^2, β-Ebene auf. Wandert man in dieser bei festem α^2 mit sich änderndem β, so tritt bei Durchgang durch jeden dieser beiden Punkte eine Änderung der Lösungsanzahl von (3) um ± 2 ein (A 1, § 4). Ich lasse nun α^2 abnehmen. Dann müssen wegen der letztgenannten Eigenschaft sich stetige Kurven (die sog. Resonanzkurven) $\beta_1(\alpha^2)$ und $\bar{\beta}(\alpha^2)$ verfolgen lassen, da in der α^2, β-Ebene isolierte Punkte keine Trennung von Gebieten verschiedener Lösungsanzahlen bewirken

[11]) Vgl. dazu etwa: Rudolf Iglisch, Zur Topologie der Verzweigungslösungen einer nichtlinearen Integralgleichung, Jahresber. der Deutschen Math.-Ver. 41 (1932), S. 245—254, insbesondere den Satz auf S. 253.

können. Nun sind folgende drei Fälle denkbar: a) Beide Kurven lassen sich bis $\alpha^2 = 1$ hin getrennt verfolgen, wo sie dann in den in der α^2, β-Ebene am weitesten links gelegenen Verzweigungspunkt $\alpha^2 = 1$, $\beta = 0$ einmünden. Dies ist nach M 2, § 7 nicht möglich. b) Beide Kurven schneiden sich in einem Punkt $\alpha_0^2 > 1$, $\beta_0 > 0$ in dem Sinne, daß zu beiden Kurven auch die gleiche mehrfache Lösung $x_0(t)$ gehört. (Im anderen Falle wollen wir nicht von einem echten Schneiden beider Kurven sprechen.) Wir wollen zunächst annehmen, daß durch diesen Punkt nicht noch weitere derartige Kurvenäste hindurchgehen. Ob man eine der beiden Kurven oder beide weiter nach links fortsetzen kann, kümmert uns bei dieser Überlegung nicht. Wir wollen nur diejenigen Lösungen von (3) betrachten, die zu $x_0(t)$ genügend benachbart sind. Da auf den Resonanzkurven stets $L_2 \neq 0$ ist, also infolge der geometrischen Konfiguration L_2 stets das gleiche Vorzeichen haben muß, tritt, etwa bei abnehmendem β, in der Nachbarschaft rechts von α_0^2 an jeder Kurve eine Änderung der Lösungsanzahl um den gleichen Betrag ein (vgl. A 1, § 4), also beidemale um $+2$, oder beidemale um -2. Infolgedessen gibt es in der Nähe des Punktes α_0^2, β_0 drei verschiedene Arten von Punkten: 1. solche, für die es keine zu $x_0(t)$ benachbarte Lösung von (3) gibt, 2. solche mit zwei, 3. solche mit vier zu $x_0(t)$ benachbarten Lösungen von (3). Fall 3. verträgt sich aber nicht mit der Eigenschaft von $x_0(t)$, zweifache Lösung zu sein[12]). — Der entsprechende Schluß gilt auch, wenn im Punkt α_0^2, β_0 mehr als zwei Kurvenäste zusammentreffen. c) Bleibt also nur noch die Möglichkeit, daß sich die Kurven $\beta_1(\alpha^2)$ und $\bar{\beta}(\alpha^2)$ nicht treffen. Dann muß aber eine von ihnen rechts von dem Wert $\alpha^2 = 1$ enden, etwa bei α_1^2, β_1 $(\beta_1 > 0)$; wegen der Eigenschaft dieser Resonanzkurven, Gebiete verschiedener Lösungsanzahl zu trennen, muß dann durch α_1^2, β_1 noch ein zweiter Resonanzkurvenast hindurchgehen, so daß wir zum gleichen Widerspruch gelangen wie unter b).

Jetzt haben wir folgenden Sachverhalt: *Die vorhin gefundene Resonanzkurve $\beta_1(\alpha^2)$ ist die einzige, deren zugehörige Lösungen $x_1(t)$ von* (3) *in* $(0, \pi)$ *durchweg zwischen* 0 *und* $-\pi$ *liegen* mit Ausschluß der Grenzen. Daß nämlich eine Lösung von (3) bei $\beta > 0$ nicht in einem Punkte t^* die Horizontale $t = -\pi$ von oben berühren kann, zeigt die Betrachtung von (3) für $t = t^*$.

IV. Auch über die Tangentenneigung dieser Kurve $\beta_1(\alpha^2)$ läßt sich noch eine Aussage machen. Sei in einem ihrer Punkte α^2, β_1 die zu-

[12]) Vgl. dazu neben der in Anm. [6]) zitierten Arbeit von E. Schmidt auch: Rudolf Iglisch, Über die Vielfachheit einer Lösung in der Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen von E. Schmidt, Jahresber. d. Deutschen Math. Ver. 39 (1930), S. 65—72. Die dortigen Beweise lassen sich leicht auf unser Problem übertragen.

gehörige zweifache Lösung wieder $x_1(t)$ genannt. Zur Untersuchung von Nachbarlösungen habe ich neben

$$\ddot{x}_1 + \alpha^2 \sin x_1 = -\beta_1 f$$

noch die Gleichung

$$\ddot{x} + (\alpha^2 + \varepsilon) \sin x = -(\beta_1 + \delta) f$$

zu betrachten. Mit der Abkürzung $y = x - x_1$ folgt durch Subtraktion

(17) $\ddot{y} + \alpha^2 [\cos x_1 \, y - \tfrac{1}{2} \sin x_1 \, y^2 - \ldots] = -\delta f - \varepsilon [\sin x_1 + \cos x_1 \, y - \ldots]$.

Auf diese Gleichung sind die Resultate von A 1, § 4 anwendbar, solange die rechte Seite nicht zu der zu $x_1(t)$ zugeordneten Lösung $\varphi_1(t)$ von (2) orthogonal ist. Daraus ist zu schließen, daß die fragliche Tangentenneigung der Kurve $\beta_1(\alpha^2)$ gegeben ist durch

$$\frac{d\beta_1}{d\alpha^2} = -\frac{\int_0^\pi \varphi_1(t) \sin x_1(t) \, dt}{\int_0^\pi \varphi_1(t) f(t) \, dt}. \tag{18}$$

Denn zieht man in der α^2, β-Ebene durch den Punkt $P_1 = (\alpha^2, \beta_1)$ eine Gerade mit der Neigung $\frac{\delta}{\varepsilon} = \text{const.}$, so liegen auf dieser nach A 1, § 4 auf der einen Seite von P_1 genau zwei einfache kleine Lösungen $z(t)$ der Gleichung

$$\ddot{z} + \alpha^2 [\cos x_1 z - \tfrac{1}{2} \sin x_1 z^2 - \ldots] = -\delta f - \varepsilon \sin x_1,$$

auf der anderen Seite überhaupt keine, falls

$$\int_0^\pi (\delta f(t) + \varepsilon \sin x_1(t)) \varphi_1(t) \, dt \neq 0 \tag{19}$$

ist. Die für die Lösungsanzahl ausschlaggebenden Glieder der Schmidtschen Verzweigungsgleichung für die Variable $\lambda = \int_0^\pi q(t) z(t) \, dt$ können ja nach A 1, (66) auf die Form

$$L_2 (\lambda + \delta)^2 + \delta + \ldots = 0 \tag{20}$$

gebracht werden. Bei der Gleichung (17) treten zu der entsprechenden Verzweigungsgleichung infolge der Änderung der rechten Seite als niedrigste Zusatzglieder solche der Ordnungen δ^2 und $\lambda\delta$ auf, was offenbar für die Anzahl der kleinen Lösungen λ der Gleichung (20) ohne Belang ist. (N. B. Ist $\frac{\delta}{\varepsilon}$ sehr groß, so vertausche man bei dieser Überlegung die Rollen von ε und δ). Dieser Schluß versagt dann und nur dann, wenn das Integral in (19) verschwindet, was für die Tangentenneigung der Kurve $\beta_1(\alpha^2)$ auf die Formel (18) führt.

V. *Die zu einem $\beta \leqq \beta_1(\alpha^2)$ gehörenden beiden negativen Lösungen haben die Eigenschaft, daß die aus N hervorgehende völlig oberhalb der aus*

E_{-0} hervorgehenden liegt. Die Behauptung ist sicher richtig für $\beta = 0$. Wäre sie falsch, so müßte es ein kleinstes $\beta < \beta_1$ geben, derart daß die aus N hervorgegangene Lösung $x_N(t)$ die aus E_{-0} hervorgegangene Lösung $x_E(t)$ an einer Stelle t_1 von oben berührt; daraus würde aber $x_E(t) \equiv x_N(t)$ folgen.

VI. Wir zeigen jetzt: *Außer den eben gefundenen zur Kurve $\beta_1(\alpha^2)$ gehörenden zweifachen Lösungen* (die übrigens für $\alpha^2 = 1$, $\beta = 0$ dreifach zählt nach M 2, § 2) *gibt es keine weitere mehrfache Lösung mit* $|x| \leqq \pi$. Daß es keine weiteren durchweg negativen solchen Lösungen geben kann, folgt aus den in III geschilderten Schlüssen. Eine Lösung mit positiver Anfangstangente, die späterhin auch negative Werte annimmt, ist unter Beachtung von I nach II unmöglich. Eine Lösung mit negativer Anfangstangente und späterhin positiven Werten ist infolge der Symmetrie zu $\frac{\pi}{2}$ nicht möglich, da sonst gemäß § 2, III zwei Intervalle von größerer Länge als $\frac{\pi}{2}$ existieren müßten, in denen die Lösung negativ ist. Es kommen also nur noch durchweg positive Lösungen in Frage. Die mit wachsendem β aus E_{+0} hervorgehenden Lösungen bleiben sicher einfach für $x \leqq \pi$; denn für E_{+0} verschwindet die Lösung $\varphi(t)$ des Anfangswertproblems (2) erst hinter π (M 2, § 5 oder J), daher für die in Rede stehenden Lösungen bei $\beta > 0$ erst recht, weil nach § 2, I diese Lösungen mit β monoton wachsen. Eine durchweg über E_{+0} liegende Lösung von (3), die π nicht überschreitet, kann aus dem gleichen Grunde nicht mehrfach zählen. Gäbe es zu einem Wertepaar α^2, β eine durchweg positive mehrfache Lösung, so müßte diese z. T. unter E_{+0} liegen. Nun gibt es aber keine Lösung $x(t)$ von (3), die E_{+0} in einem Punkt t_1 von unten nach oben durchsetzen kann. Denn mit der Bezeichnung $z(t) = x(t) - E_{+0}(t)$ und einem passenden zwischen $x(t)$ und $E_{+0}(t)$ gelegenen $\bar{x}(t)$ hat man, wenn $t_0 \geqq 0$ den letzten Treffpunkt von $x(t)$ und $E_{+0}(t)$ vor t_1 bedeutet,

$$\ddot{z} + \alpha^2 \cos \bar{x}\, z = -\beta f(t), \quad z(t_0) = 0 = z(t_1), \quad z(t) < 0 \text{ in } (t_0, t_1).$$

Dies ist aber nach § 1, I unmöglich. — Es kommen als positive mehrfache Lösungen $x(t)$ also nur noch solche in Frage, die durchweg unter $E_{+0}(t)$ liegen. Genau wie in III wäre die zu diesem mehrfach zählenden $x(t)$ gehörige Größe $L_2 \neq 0$; genau wie dort kämen wir also, von diesem $x(t)$ ausgehend, zu einer ganzen Resonanzkurve in der α^2, β-Ebene, deren zugehörige mehrfache Lösungen alle kleiner sein müßten als das jeweilige $E_{+0}\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Diese Kurve kann sich nicht bis $\alpha^2 = 1$ hin nach links fortsetzen lassen, und man gelangt zu dem gleichen Widerspruch wie in III mit der Kurve $\bar{\beta}(\alpha^2)$. Damit ist unser Satz bewiesen.

Folgerung: *Wir kennen mithin in den aus E_{-0}, N und E_{+0} mit wachsendem β stetig hervorgehenden Lösungen sämtliche Lösungen von* (3), *die dem Betrage nach durchweg π nicht überschreiten.*

VII. Von den zur Kurve $\beta_1(\alpha^2)$ gehörenden zweifachen Lösungen $x(t)$ läßt sich noch folgendes feststellen: Ist $\alpha_1^3 < \alpha_2^3$, so gilt für die zugehörigen zweifachen Lösungen $x_1(t)$ bzw. $x_2(t)$, daß $x_2(t)$ nicht durchweg über $x_1(t)$ verlaufen kann, da sonst $\cos x_2(t) > \cos x_1(t)$ wäre und somit das erste Randwertproblem von (2) in $\langle 0, \pi\rangle$ nicht gleichzeitig für $x(t) = x_1(t)$, $\alpha = \alpha_1$, und $x(t) = x_2(t)$, $\alpha = \alpha_2 > \alpha_1$, lösbar sein könnte.

§ 4.

Die ersten Resonanzlösungen bei beliebigem α^2.

Unter einer ersten Resonanzlösung $x(t)$ wollen wir wie bisher eine solche mehrfache Lösung von (3) verstehen, für die das erste Randwertproblem (2) eine im Innern von $(0, \pi)$ nicht verschwindende Lösung $\varphi(t)$ besitzt. Es ist nun besonders erfreulich, daß sich ohne große Mühe unter den Voraussetzungen (4), (5) und (6) über $f(t)$ alle wesentlichen Resultate der §§ 2 und 3 über die ersten Resonanzlösungen auf beliebige α^2 übertragen lassen.

I. Daß auch bei beliebigem α^2 die Symmetrievoraussetzung (5) allen Lösungen von (3) die Eigenschaft verleiht, zu $\frac{\pi}{2}$ symmetrisch zu sein, ist natürlich nicht richtig. So sind ja z. B. für $\beta = 0$ alle $E_{\pm(2n+1)}$ zu $\frac{\pi}{2}$ ungerade. Wohl kann man aber Aussagen machen über die zu einer zu $\frac{\pi}{2}$ geraden Lösung benachbarten Lösungen. Für das Folgende genügen hier zwei Feststellungen: a) *In der Nachbarschaft einer zu $\frac{\pi}{2}$ geraden einfachen Lösung von* (3) *sind alle Lösungen zu $\frac{\pi}{2}$ gerade.* Denn aus der Voraussetzung (5) folgt, daß neben $x(t)$ auch $x(\pi - t)$ Lösung derselben Gleichung (3) ist. Beide sind dann und nur dann identisch, wenn $x(t)$ zu $\frac{\pi}{2}$ gerade ist. Sei jetzt $x_1(t)$ einfache zu $\frac{\pi}{2}$ gerade Lösung und $x_2(t)$ dazu benachbart und nicht zu $\frac{\pi}{2}$ gerade. Dann ist auch $x(\pi - t)$ zu $x_1(t)$ benachbart, was einen Widerspruch darstellt gegen die Eigenschaft von $x_1(t)$, einfache Lösung zu sein. — In gleicher Weise beweist sich der Satz: *Ist $x_1(t)$ zu $\frac{\pi}{2}$ gerade zweifache Lösung ($L_2 \neq 0$), etwa für $\beta = \beta_1$, und gibt es zu einem zu β_1 benachbarten β_2 eine zu $\frac{\pi}{2}$ gerade Nachbarlösung von $x_1(t)$, so ist auch die andere zu β_2 gehörende Nachbarlösung von $x_1(t)$*

zu $\frac{\pi}{2}$ *gerade.* Man beachte dazu, daß es zu jedem zu β_1 benachbarten β_2 entweder zwei Nachbarlösungen zu $x_1(t)$ gibt oder keine.

II. Daß keine Lösung $x(t)$ von (3) die Horizontale $t = -\pi$ in einem Punkt t^* von oben berühren kann, zeigt — wie auch schon in § 3, III dargetan wurde — die Betrachtung von (3) für $t = t^*$. Genau wie in § 2, I und II kann man nun feststellen: *Die aus* E_{+0} *und* E_{-0} *bei* $\beta = 0$ *mit wachsendem* β *und festem* α^2 *stetig hervorgehenden Lösungen* $x(t)$ *von* (3) *wachsen nebst ihren Endtangenten, solange sie einfach zählen* — nach § 4, I sind sie übrigens alle zu $\frac{\pi}{2}$ symmetrisch —; *geht man von einer so durch Fortsetzung aus* E_{-0} *(bzw.* E_{+0}*) erhaltenen Lösung* $x(t)$ *aus,* bevor Verzweigung eingetreten ist, *und läßt bei festem* β *jetzt* α^2 *wachsen, so nimmt die Lösung nebst ihren Endtangenten dauernd ab (bzw. zu), solange sie dem Betrage nach kleiner als* π *bleibt.* Damit dieser letzte Satz bezüglich der aus E_{-0} hervorgehenden Lösungen richtig ist, muß noch gezeigt werden, daß von selbst alle bei diesem Fortsetzungsprozeß erhaltenen einfachen Lösungen wie E_{-0} selbst in $(0, \pi)$ durchweg negativ sind. Das wird nach dem bei festem α^2 und wachsendem β festgestellten Ergebnis der Fall sein, wenn wir folgenden Satz als richtig nachweisen:

III. *Eine erste Resonanzlösung, die dem Betrage nach durchweg* π *nicht überschreitet, ist durchweg negativ in* $(0, \pi)$ *mit nicht verschwindenden Endtangenten.* Wir wollen diesen Satz zunächst für die zu $\frac{\pi}{2}$ symmetrischen ersten Resonanzlösungen sicherstellen. Beweis: a) Wie in § 3, II folgt, daß keine erste Resonanzlösung — überhaupt keine zu $\frac{\pi}{2}$ symmetrische Lösung, deren zugehörige für $t = 0$ verschwindende Lösung $\varphi(t)$ von (2) nicht vor $t = \pi$ verschwindet — mit einer nichtnegativen Anfangstangente beginnen und später negative Werte annehmen kann; denn Gleichung (12) kann in keinem Intervall zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ eine durchweg negative an den Enden verschwindende Lösung besitzen.

b) Schwieriger zu beweisen ist, daß auch keine derartige Lösung $x(t)$ mit negativer Anfangstangente beginnen und späterhin positive Werte annehmen kann. Sei im Gegenteil $x(t) \leqq 0$ für $0 \leqq t \leqq t_1 < \frac{\pi}{2}$, bei t_1 wechsele $x(t)$ das Vorzeichen. Wir können zunächst feststellen, daß es keine zwei getrennten Intervalle geben kann, in denen $x(t)$ positive Werte annimmt, da sonst $x(t)$ dem auch in a) benutzten Satz von § 3, II widersprechen würde. Ein Vorzeichenwechsel von $x(t)$ kann in $(0, \pi)$ also nur genau an zwei Stellen t_1 und $t_2 = \pi - t_1$ eintreten. Wegen der Symmetrie zu $\frac{\pi}{2}$ liegt die horizontale Tangente von $x(t)$ bei positivem x an der

Stelle $\frac{\pi}{2}$. Ich definiere jetzt neben $x(t)$ für $0 \leqq t \leqq 2t_1 < \pi$ die Funktion

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & \text{für } t \leqq t_1 \\ -x(2t_1 - t) & \text{für } t \geqq t_1. \end{cases} \tag{21}$$

Ich will zunächst folgenden Hilfssatz beweisen:

Hilfssatz: Die für $t = 0$ verschwindende Lösung $\psi(t)$ von

$$\ddot{\psi} + \alpha^2 \cos y\, \psi = 0 \tag{22}$$

hat ihre erste Nullstelle vor $\frac{3}{2} t_1$.

Nach Definition ist $x(t)$ so beschaffen, daß die in $t = 0$ verschwindende Lösung $\varphi(t)$ von (2) nicht vor oder in t_1 verschwindet; das zu $x(t)$ gehörende $\varphi(t)$ geht also erst hinter t_1 durch Null. Ich behaupte jetzt, $x(t)$ liegt in $(0, t_1)$ ganz oberhalb der zu diesem Intervall gehörenden Freischwingung $E^{t_1}_{-0}$. Zunächst ist die Ungleichung

$$\dot{x}(0) \geqq \dot{E}^{t_1}_{-0}(0)$$

mit Hilfe der fundamentalen Sturm-Liouvilleschen Beziehung

$$(\dot{E}^{t_1}_{-0}\, x - \dot{x}\, E^{t_1}_{-0})\,|^t_0 \tag{23}$$
$$= \beta \int_0^t f(t)\, E^{t_1}_{-0}(t)\, dt - \alpha^2 \int_0^t [\sin E_{-0}(t)\, x(t) - \sin x(t)\, E_{-0}(t)]\, dt$$

abzulesen; denn man erhält bei gegenteiliger Annahme wegen (4) hierzu einen Vorzeichenwiderspruch, wenn man für t die erste positive Stelle $\bar{t} \leqq t_1$ einsetzt, wo sich $E^{t_1}_{-0}(t)$ und $x(t)$ schneiden; dabei beachte man, daß in diesem Intervall der Integrand des ganz rechts stehenden Integrals durchweg positiv ist, da für von 0 bis π (sogar etwas darüber hinaus) wachsendes z die Funktion $\frac{\sin z}{z}$ monoton abnimmt. In gleicher Weise folgt

$$\dot{x}(t_1) \leqq \dot{E}^{t_1}_{-0}(t_1).$$

Liegt nun wirklich in $(0, t_1)$ stets $x(t)$ oberhalb $E^{t_1}_{-0}(t)$, so kann man so schließen: Definiert man in $\langle 0, 2t_1 \rangle$ die Funktion $z(t)$ durch

$$z(t) = \begin{cases} E^{t_1}_{-0}(t) & \text{für } t \leqq t_1 \\ -E^{t_1}_{-0}(2t_1 - t) & \text{„ } t \geqq t_1, \end{cases}$$

so verschwindet nach J die Lösung $\chi(t)$ mit $\chi(0) = 0$ von

$$\ddot{\chi} + \alpha^2 \cos z\, \chi = 0$$

vor $\frac{3}{2} t_1$. Die erste Nullsstelle von $\psi(t)$ liegt aber, wie leicht aus (22) zu sehen ist, noch vor der ersten Nullstelle von $\chi(t)$. — Da in $\langle 0, t_1 \rangle$ $x(t)$ auch $E^{t_1}_{-0}(t)$ wegen der an der Berührungsstelle durch die Differentialgleichungen vorgeschriebenen zweiten Ableitungen nicht von oben berühren kann, bliebe nur noch die Möglichkeit, daß $x(t)$ an den Enden des Intervalles $\langle 0, t_1 \rangle$ zwar oberhalb $E^{t_1}_{-0}$ liegt, dazwischen aber z. T. unter-

halb, etwa in einem Intervall (t_0, t_2) innerhalb $(0, t_1)$. Dann gibt es einen ersten Punkt $t_3 > t_0$, in dem $\dot{x}(t_3) = \dot{E}^{t_1}_{-0}(t_3)$ gilt. Da wir statt $x(t)$ und $E^{t_1}_{-0}(t)$ evtl. $x(t_1 - t)$ und $E^{t_1}_{-0}(t_1 - t)$ betrachten dürfen, können wir annehmen, daß $\dot{x}(t_3) \leqq 0$ ist. Wendet man (23) auf das Intervall $\langle t_0, t_3 \rangle$ an, so gelangt man zu einem Vorzeichenwiderspruch. $x(t)$ muß also stets oberhalb $E^{t_1}_{-0}(t)$ liegen; damit ist unser Hilfssatz bewiesen.

Unter Verwendung des Hilfssatzes läßt sich nun zeigen, daß für eine Lösung $x(t)$ der jetzt unter b) in Rede stehenden Form die Lösung $\varphi(t)$ von (2) mit $\varphi(0) = 0$ gleichfalls vor $\frac{3}{2} t_1$ verschwinden muß, nämlich vor der ersten Nullstelle von $\chi(t)$. Das ist ohne weiteres klar, wenn ich für $t_1 < t \leqq \frac{3}{2} t_1$ die Ungleichung

$$\cos x(t) > \cos z(t) \tag{24}$$

nachweise. Aus der geometrischen Konfiguration folgt dies sofort, wenn ich die Beziehung $x(t) < y(t)$ für diejenigen Werte t beweise, für die $x(t)$ positiv ist, also für $t_1 < t \leqq \mathrm{Min}(\pi - t_1, \frac{3}{2} t_1)$. Nun genügt dort $y(t)$ der Gleichung

$$\ddot{y} + \alpha^2 \sin y = \beta f(2 t_1 - t).$$

Kurz hinter t_1 verläuft $x(t)$ unter $y(t)$, weil $x(t_1) = y(t_1)$ und $\dot{x}(t_1) = \dot{y}(t_1)$ gilt. Daß dann in einem unserem betrachteten Intervall angehörigen Wert t_2 $x(t)$ und $y(t)$ sich nicht zum ersten Male treffen können, ersieht man aus der Sturm-Liouvilleschen Beziehung

$$(\dot{y} x - \dot{x} y)\Big|_{t_1}^{t_2} + \alpha^2 \int_{t_1}^{t_2} \{x \sin y - y \sin x\}\, dt = \beta \int_{t_1}^{t_2} [f(2 t_1 - t)\, x(t) + f(t)\, y(t)]\, dt,$$

da die linker Hand auftretende geschweifte Klammer nach einer oben gemachten Bemerkung negativ ist.

c) Daß keine ersten Resonanzlösungen in $(0, \pi)$ durchweg positiv sein können, folgt genau wie in § 3, VI durch Verfolgung der zugehörigen Resonanzkurve nach fallenden Werten von α^2 zu.

d) Jetzt ist noch zu zeigen, daß etwa vorhandene, nicht zu $\frac{\pi}{2}$ symmetrische Resonanzlösungen gleichfalls in $(0, \pi)$ durchweg negativ sein müßten. Daß eine solche nicht durchweg positiv sein kann, folgt wie unter c), wenn wir noch die Möglichkeit von Lösungen, die das Vorzeichen wechseln, ausscheiden. Die Annahme, daß eine negative Anfangstangente vorhanden ist und später positive Werte angenommen werden, läßt sich genau wie unter b) ad absurdum führen, vorausgesetzt, daß das Intervall $(0, t_1)$, in dem $x(t) < 0$ ist, eine kleinere Länge als $\frac{2}{3} \pi$ besitzt. Nun die Möglichkeit, daß an den Enden 0 und π zwei Intervalle mit positiven Werten von $x(t)$ anstoßen, während zwischendurch auch einmal negative Werte von $x(t)$ angenommen werden. In diesem Falle kommt man aber ent-

weder mit $x(t)$ oder mit $x(\pi - t)$, das ja Lösung derselben Gleichung (3) ist, in Widerspruch zu dem auch unter a) benutzten Satze aus § 3, II. Unter abermaliger Berücksichtigung, daß neben $x(t)$ auch $x(\pi - t)$ Lösung von (3) ist, bleibt demnach für das Vorzeichen wechselnde erste Resonanzlösungen nur noch die Möglichkeit, daß in einem Intervall $(0, t_1)$ mit $t_1 \leqq \frac{\pi}{3}$ $x(t) > 0$ ausfällt, im Intervall (t_1, π) $x(t) < 0$. Daß eine derartige erste Resonanzlösung nicht auftreten kann, ist schwieriger zu beweisen. Etwa so:

Sei $t_0 < t_1$ der größte t-Wert, an dem dieses $x(t)$ eine horizontale Tangente bei positiver Ordinate besitzt; analog sei t_2 die kleinste Stelle, wo $x(t_2) < 0$, gleichzeitig $\dot{x}(t_2) = 0$ ist. Ersichtlich ist $t_2 > \frac{\pi}{2}$, da man sonst mit dem auch unter a) verwandten Satz aus § 3, II in Widerspruch gerät. Genau wie unter b) zeigt man, daß

$$-x(t) > x(2t_1 - t) \quad \text{für} \quad 0 \leqq t < t_1 \tag{25}$$

gilt. Daraus schließt man sofort

$$-x(t_0) > x(t_2).$$

Nun können wir feststellen, daß

$$\pi - t_2 > t_0$$

gelten muß. Im anderen Falle hätte die Funktion $y(t) = -x(\pi - t)$, die der Gleichung

$$\ddot{y} + \alpha^2 \sin y = \beta f(t)$$

genügt, an einer Stelle $t_3 \leqq t_0$ ein positives Maximum, welches größer ist als der Wert $x(t_3)$. Die Sturm-Liouville-Beziehung

$$(\dot{y}\,x - \dot{x}\,y)\Big|_t^{t_3} + \alpha^2 \int_t^{t_3} [x \sin y - y \sin x]\,dt = \beta \int_t^{t_3} f(t)\,[x(t) + y(t)]\,dt$$

liefert dann einen Vorzeichenwiderspruch, wenn für die untere Grenze t der am nächsten vor t_3 gelegene Schnittpunkt t_4 von $x(t)$ und $y(t)$ eingesetzt wird ($0 \leqq t_4 < t_3$). Zu diesem Schluß ist zu beachten, daß $\dot{x}(t)$ vor t_0 nicht negativ sein kann, da man sonst wieder mit dem schon oft benutzten Satz aus § 3, II in Widerspruch gerät.

Im Intervall (t_0, t_2) müßte nun mit der Abkürzung $\dot{x}(t) = z(t)$ die Gleichung

$$\ddot{z} + \alpha^2 \cos x\, z = -\beta \dot{f}(t), \quad z(t_0) = 0 = z(t_2) \tag{26}$$

eine durchweg negative Lösung $z(t)$ besitzen. Um zu zeigen, daß dies nicht möglich ist, sei analog wie in § 2, I mit $G(t, \tau)$ die (positive) Greensche Funktion für das erste Randwertproblem in $\langle t_0, t_2 \rangle$ des Diffe-

rentialausdruckes $\ddot{z} + \alpha^2 \cos x z$ bezeichnet. Wir betrachten insbesondere die Funktion $G\left(t, \frac{\pi}{2}\right) = g(t)$ und behaupten, daß die Ungleichung

$$g(t) < g(\pi - t) \quad \text{für} \quad \frac{\pi}{2} < t \leqq t_2$$

gilt. Setzen wir $g(\pi - t) = h(t)$, so haben wir ja in $\left\langle \frac{\pi}{2}, t_2 \right\rangle$

$$\ddot{g}(t) + \alpha^2 \cos x(t)\, g(t) = 0$$

und

$$\ddot{h}(t) + \alpha^2 \cos x(\pi - t)\, h(t) = 0.$$

Weiter wissen wir noch, daß $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{2}\right)$ gilt und daß in $\left\langle \frac{\pi}{2}, t_2 \right\rangle$ $h(t)$ durchweg positiv ist, während aus der geometrischen Konfiguration unter Beachtung von (25) leicht

$$\cos x(\pi - t) > \cos x(t)$$

folgt. Jetzt ist zu ersehen, daß

$$g(t) \leqq h(t) = g(\pi - t) \quad \text{für} \quad \frac{\pi}{2} \leqq t \leqq t_2 \tag{27}$$

gelten muß, da unter gegenteiliger Annahme die Sturm-Liouville-Beziehung

$$(\dot{g}h - \dot{h}g)\Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + \alpha^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} [\cos x(t) - \cos x(\pi - t)]\, g(t)\, h(t)\, dt = 0$$

zu einem Vorzeichenwiderspruch führt, wenn man für τ_1 und τ_2 zwei benachbarte Schnittpunkte von $g(t)$ und $h(t)$ innerhalb $\left\langle \frac{\pi}{2}, t_2 \right\rangle$ einsetzt, zwischen denen $g(t)$ gemäß der Annahme über $h(t)$ liegt $\left(\frac{\pi}{2} \leqq \tau_1 < \tau_2 < t_2\right)$. Aus (26) folgt nun wegen der Symmetrie der Greenschen Funktion und unter Berücksichtigung von (27)

$$z\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \beta \int_{t_0}^{t_2} G\left(t, \tfrac{\pi}{2}\right) \dot{f}(t)\, dt = \beta \int_{t_0}^{t_2} g(t)\, \dot{f}(t)\, dt$$

$$> \beta \int_{\pi - t_2}^{t_2} g(t)\, \dot{f}(t)\, dt = \beta \int_{\pi/2}^{t_2} \dot{f}(t)\, [g(t) - h(t)]\, dt > 0$$

entgegen der früheren Feststellung, daß $z(t)$ zwischen t_0 und t_2, also auch für den Wert $\frac{\pi}{2}$, negativ sein müßte. Damit ist endlich gezeigt, daß auch die letzte noch denkbare Form einer nicht durchweg negativen ersten Resonanzlösung von (3) nicht eintreten kann.

Jetzt ist unser eingangs III formulierter Satz bewiesen. Gleichzeitig ist ersichtlich, *daß keine erste Resonanzlösung $x(t)$, deren Betrag einmal π überschreitet, durch lauter erste Resonanzlösungen hindurch stetig*

übergehen kann in eine erste Resonanzlösung, deren Betrag durchweg π nicht übertrifft.

IV. Wie in § 3, III folgt jetzt: *Es gibt genau eine erste Resonanzkurve $\beta_1(\alpha^2)$, deren zugehörige Lösungen $x(t)$ dem Betrage nach π nicht überschreiten; alle diese $x(t)$ sind in $(0, \pi)$ negativ. Für die Tangentenneigung dieser Kurve $\beta_1(\alpha^2)$ gilt wieder die Formel* (18), wie genau wie in § 3, IV folgt. Da *die zugehörige Resonanzlösung $x_1(t)$* durch Fortsetzung aus E_{-0} bei wachsendem β und festem α^2 gewonnen werden kann, *ist* sie nach I *zu $\frac{\pi}{2}$ symmetrisch.*

V. Ist wieder $x_1(t)$ erste Resonanzlösung, so folgt aus I, daß bei Fortsetzung von $x_1(t)$ bei festem α^2 und $\beta < \beta_1(\alpha^2)$ auch die zweiten Lösungen $x(t)$, für die die durch $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 1$ bestimmte Lösung von (2) schon vor π verschwindet, zu $\frac{\pi}{2}$ gerade sind, solange sie sich nicht erneut verzweigen; diese neue Verzweigung müßte stattfinden bei einer Lösung $x(t)$ von (3), zu der eine in $t = 0, \frac{\pi}{2}$ und π verschwindende Lösung von (2) gehört.

VI. Ich notiere noch folgenden nützlichen Satz: *Ist $x_0(t; \beta_0)$ Lösung von* (3) *zum Werte $\beta = \beta_0$ und bezeichnet $x_1(t; \beta)$ für $\beta \leqq \beta_1(\alpha^2)$ die durch unmittelbare Fortsetzung aus E_{-0} hervorgegangene Lösung zum Parameterwert β*, die übrigens in $(0, \pi)$ durchweg negativ ist, *so gilt in* $(0, \pi)$

$$x_0(t; \beta_0) > x_1(t; \beta) \quad \text{mit} \quad \beta \leqq \beta_0. \tag{28}$$

Nur im trivialen Fall $x_0(t; \beta_0) \equiv x_1(t; \beta_0)$ kann in (28) *das Ungleichheitszeichen durch das Gleichheitszeichen ersetzt werden, falls rechts $\beta = \beta_0$ eingetragen wird.* Zum Beweise erinnere ich an die bei Gelegenheit des Beweises des Hilfssatzes in III, b) festgestellte Ungleichung

$$x_0(t; \beta_0) > E_{-0}(t) \quad \text{in} \quad (0, \pi). \tag{29}$$

Da die Lösungen $x_1(t; \beta)$ mit β monoton wachsen, muß es, unter der Annahme, daß (28) nicht zu Recht besteht, infolge (29) einen kleinsten Wert β^* geben derart, daß $x_0(t; \beta_0)$ die Funktion $x_1(t; \beta^*)$ in einem Punkte t^* in $\langle 0, \pi \rangle$ von oben berührt. Dann folgt aber aus der Betrachtung der zugehörigen Differentialgleichungen in der Umgebung des Punktes t^*, daß $\beta^* \geqq \beta_0$ sein muß. Hieraus und aus dem monotonen Anwachsen von $x_1(t; \beta)$ mit β folgt die Behauptung (28).

VII. Schließlich noch die Bemerkung: Die in VI aufgetretene Lösung $x_1(t; \beta)$ kann auch so charakterisiert werden: Gibt es zu einem Wert β überhaupt eine in $(0, \pi)$ durchweg negative Lösung, für die die durch $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 1$ bestimmte Lösung von (2) erst hinter π verschwindet, so ist dieses die Lösung $x_1(t; \beta)$. Denn diese Lösung muß sich mit ab-

nehmendem β immer weiter fortsetzen lassen, wobei sie nach II stets abnimmt; daher muß sie, wie ein Blick auf (2) zeigt, immer einfach bleiben bis $\beta = 0$ hin, wo sie dann notwendig in E_{-0} übergehen muß.

§ 5.

Zur praktischen Berechnung der ersten Resonanzkurve.

Aus den bisherigen Ergebnissen lassen sich mehrere Methoden ableiten, die erste Resonanzkurve mit beliebiger Genauigkeit punktweise zu konstruieren. Diese Methoden sind alle sehr langwierig, führen aber bestimmt nach endlich vieler (allerdings mühseliger) Arbeit zum Ziel. Es scheint mir in der Natur der Sache zu liegen, daß man kein einfaches, schnell zum Ziel führendes Rechenverfahren angeben kann. Eines dieser Verfahren beruht auf folgenden Hilfsbetrachtungen:

I. *Sei* $x_1(t)$ *eine in* $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ *durchweg negative Lösung von* (3) *für* $\beta = \beta_1$, *die bestimmt ist durch die Anfangsbedingungen* $x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_1 < 0$, $\dot{x}_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. *Die zugehörige durch* $\dot{\varphi}_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\varphi_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ *bestimmte Lösung von* (2) *verschwinde nicht vor* π. *Dann kann die durch* $x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_2 \leqq c_1$, $\dot{x}_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ *bestimmte Lösung* $x_2(t)$ *von* (3) *für* $\beta = \beta_2 \geqq \beta_1$ *die Kurve* $x_1(t)$ *nicht in einem Punkte* $t_1 \leqq \pi$ *treffen.* Zum Beweise benutze ich noch die durch die Anfangsbedingungen $\dot{x}_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $x_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_1$ festgelegte Lösung von (3) zum Werte $\beta = \beta_2 > \beta_1$ und zeige zunächst, daß $x_3(t)$, das ja in der Nachbarschaft von $\frac{\pi}{2}$ unter $x_1(t)$ verläuft, $x_1(t)$ nicht in einem Punkt $t_0 \leqq \pi$ treffen kann. Sonst wäre mit passendem $\bar{x}(t) \leqq x_1(t)$ die Funktion $y(t) = x_3(t) - x_1(t)$ in $\left(\frac{\pi}{2}, t_0\right)$ negative Lösung von

$$\ddot{y} + \alpha^2 \cos \bar{x}\, y = (\beta_1 - \beta_2) f(t); \tag{30}$$

die zu $\bar{x}(t)$ gehörende Lösung $\bar{\varphi}(t)$ von (2) mit den Anfangswerten $\dot{\bar{\varphi}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\bar{\varphi}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ verschwindet aber wegen der gleichen Eigenschaft von $\varphi_1(t)$ erst hinter π; mithin erst recht bei den Anfangswerten $\bar{\varphi}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\dot{\bar{\varphi}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Da die rechte Seite von (30) negativ ist, müßte demnach die durch $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = y(t_0)$ bestimmte Lösung von (30) durchweg positiv sein (vgl. § 2, I). — Jetzt braucht also nur noch gezeigt zu werden, daß $x_2(t)$ nicht $x_3(t)$ in einem Punkt $t_2 \leqq \pi$ treffen kann. Zur gegenteiligen Annahme konstruiert man einen Widerspruch durch Be-

trachtung von $z(t) = x_3(t) - x_2(t)$ im Intervall $\langle \pi - t_2, t_2 \rangle$. Dort müßte nämlich $z(t)$ Lösung von

$$\ddot{z} + \alpha^2 \cos x^* z = 0 \tag{31}$$

sein, wobei noch $x_1 \geqq x_3 \geqq x^* \geqq x_2$ gilt. Gleichung (31) kann aber keine in $\langle 0, \pi \rangle$ zweimal verschwindende Lösung $z(t)$ besitzen.

II. *Zur Berechnung des Punktes $\beta_1(\alpha^2)$ der ersten Resonanzkurve bei vorgelegtem α^2* kann man jetzt etwa so vorgehen: Man gebe sich einen beliebigen Wert β_0 vor und suche sich dazu die Lösung $x_1(t; \beta_0)$ im Sinne von § 4, VI. Dazu gehe man etwa aus von einem beliebigen negativen Wert $c_1 > E_{-0}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ und löse (nach irgendeinem der bekannten Näherungsverfahren) die Gleichung (3) unter den Anfangsbedingungen $\dot{\bar{x}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\bar{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_1$. a) Ist für $\frac{\pi}{2} < t \leqq \pi$ $\bar{x}(t) < 0$ und verschwindet die zugehörige Lösung $\bar{\varphi}(t)$ von (2) mit $\dot{\bar{\varphi}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\bar{\varphi}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ nicht vor π. so hat man nach I $|c_1|$ zu verkleinern. b) Ist $\bar{x}(\bar{t}) = 0$ für einen Punkt $\bar{t} < \pi$, so hat man $|c_1|$ zu vergrößern; denn mit $c_1 = E_{-0}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ verschwindet nach I $\bar{x}(t)$ erst hinter π, und nach § 4, VI erhält man den Wert $c_1 = x_1\left(\frac{\pi}{2}, \beta_0\right)$ als kleinsten überhaupt möglichen Wert von c_1, für den $\bar{x}(\pi) = 0$ und $\bar{x}(t) \neq 0$ für $\frac{\pi}{2} \leqq t < \pi$ ist. c) Verschwindet $\bar{x}(t)$ zum ersten Male in π, so ist $\bar{x}(t) = x_1(t; \beta_0)$, falls das zugehörige $\bar{\varphi}(t)$ hinter π verschwindet. Verschwindet zufällig $\bar{\varphi}(t)$ zum ersten Male in π, so ist sogar schon $\beta_0 = \beta_1(\alpha^2)$. Verschwindet $\bar{\varphi}(t)$ dagegen schon vor π, so ist nach § 4, VI $|c_1|$ zu vergrößern. d) Als letzter möglicher Fall bleibt der, daß $\bar{x}(t)$ erst hinter π verschwindet, das zugehörige $\bar{\varphi}(t)$ aber in oder vor π. Dies Vorkommnis ist ein Kriterium dafür, daß $|c_1|$ zu vergrößern ist; denn wäre $c_1 < x_1\left(\frac{\pi}{2}; \beta_0\right)$, so würde aus den Überlegungen in I leicht folgen, daß $\bar{\varphi}(t)$ nicht vor π verschwinden könnte.

Wir haben also in allen denkbaren Fällen ein Verfahren, um zu entscheiden, ob wir beim nächsten Schritt $|c_1|$ vergrößern oder verkleinern müssen. Wie kann man nun entscheiden, ob zu dem vorgelegten β_0 eine Lösung $x_1(t; \beta_0)$ existiert oder nicht? Im ersten Falle ist $\beta_0 < \beta_1(\alpha^2)$, im zweiten gilt $\beta_0 > \beta_1(\alpha^2)$. Um zu übersehen, wie unser Verfahren diese Entscheidung treffen kann, müssen wir uns dabei alle denkbaren Möglichkeiten überlegen. 1. *Möglichkeit:* Wir werden fortlaufend darauf geführt, $|c_1|$ zu verkleinern. Gibt es nun mit $c_1 = 0$ eine Lösung $\bar{x}(t)$, die nebst

dem zugehörigen $\bar{\varphi}(t)$ nicht vor π verschwindet, so folgt leicht aus I und § 4, VII die Nichtexistenz von $x_1(t;\beta_0)$. 2. *Möglichkeit:* Unser Verfahren grenzt mit beliebiger Genauigkeit einen negativen Wert $c_1^0 > E_{-0}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ein. Verschwindet die zugehörige Funktion $\bar{x}^0(t)$ in π, so ist $\bar{x}^0(t) \equiv x_1(t;\beta_0)$ und $c_1^0 = x_1\left(\frac{\pi}{2};\beta_0\right)$. Sonst ist nur noch der Fall möglich, daß $\bar{x}^0(t)$ in $\left\langle\frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle$ durchweg negativ ist und $\bar{\varphi}^0(t)$ zum ersten Male in π verschwindet. Dann kann $x_1(t;\beta_0)$ nicht existieren. Welcher dieser beiden Fälle eintritt, wird sich im allgemeinen schon bei c_1-Werten entscheiden lassen, die nicht übermäßig dicht an c_1^0 liegen. — Wir können also jetzt planmäßig den Wert β_0 im richtigen Sinne abändern und bei endlich oftmaliger Wiederholung des eben geschilderten Verfahrens $\beta_1(\alpha^2)$ in beliebig enge Grenzen einschließen.

III. Der Satz in I erlaubt natürlich, bei einigem Geschick beide Größen c_1 und β_0 gleichzeitig zu verändern. Mit Hilfe der Formel (18) kann man dann noch die Tangentenneigung der ersten Resonanzkurve beliebig genau angeben; nur für $\alpha^2 = 1$ ist diese Formel unrichtig, da für $\alpha^2 = 1$ und $\beta = 0$ N eine dreifache Lösung ist.

IV. Über die großen Werte von α^2 läßt sich übrigens mit Hilfe des Satzes M 1, S. 338 noch aussagen, daß die erste Resonanzkurve $\beta_1(\alpha^2)$ mit wachsendem α^2 über alle Grenzen strebt.

V. Das Verhalten der ersten Resonanzkurve in der Nachbarschaft ihres Ursprungs $\alpha^2 = 1$, $\beta = 0$ ist schon in M 2, § 7 studiert worden. Nach den dortigen Formeln (61) und (60) hat man in erster Näherung für α^2-Werte ein wenig größer als 1 unter Berücksichtigung, daß bei uns $\nu = 1$ zu setzen ist,

$$\pm \sqrt{\frac{-L_1'}{3L_3}}\,\frac{2}{3}\,L_1' + \beta = 0. \tag{32}$$

Hierbei ist zu beachten, daß der in M 2, (33) angegebene Wert von $L_1 = 1 + L_1'$ in unserem Falle nur für die spezielle Duffingsche Gleichung (1) zu Recht besteht; denn in M 2, § 7 war für die Schmidtschen Kerntransformationsfunktionen eingesetzt worden

$$q(t) = \sin t,\ p(t) = h(t) = \int_0^{\pi} G(t,\tau)\, f(\tau)\, d\tau \tag{33}$$

(vgl. dazu auch unsere Gleichung (14)); der Wert M 2, (33) für L_1 war aber unter den Annahmen $q(t) = p(t) = \sin t$ (für unseren Fall $\nu = 1$) berechnet worden. Es ist jedoch nicht schwer, den Wert von L_1' für

unseren allgemeinen Fall der Gleichung (3) zu rechnen. Es tritt dann nämlich an die Stelle der Gleichung M 2, (32) die folgende:

$$0 = \sin t + \int_0^\pi E_\varkappa(t, r) \sin r \, dr - p(t) \int_0^\pi \sin^2 r \, dr + \varkappa \int_0^\pi G(t, r) \sin r \, dr,$$

wo der letzte Summand nach M 2, (3) gleich $\varkappa \sin t$ ist und $\varkappa$ die Bedeutung M 2, (28) besitzt, d. h. $\varkappa = \alpha^2 - 1$. Bezeichnet wie in M 2 $\mathsf{E}_\varkappa(t, r)$ den lösenden Kern zu $E_\varkappa(t, r)$, so liefert die Auflösung der letzten Gleichung analog wie M 2, S. 181

$$\sin t = \frac{\pi}{2}\left[p(t) + \int_0^\pi \mathsf{E}_\varkappa(t, r)\, p(r)\, dr\right] - \varkappa\left[\sin t + \int_0^\pi \mathsf{E}_\varkappa(t, r) \sin r \, dr\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} V_0^1 \left(\begin{matrix} t \\ \beta\, h \end{matrix}\right)_\varkappa - \varkappa\, a(t),$$

wenn wir jetzt

$$a(t) = \sin t + \int_0^\pi \mathsf{E}_\varkappa(t, r) \sin r \, dr \tag{34}$$

setzen. Multiplikation mit $q(t) = \sin t$ und Integration liefert

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} L_1 - \varkappa c \tag{35}$$

mit der Abkürzung

$$c = \int_0^\pi \sin t \, a(t) \, dt. \tag{36}$$

Zur Berechnung von c lösen wir (34) auf:

$$a(t) + \int_0^\pi E_\varkappa(t, r)\, a(r)\, dr = \sin t$$

oder unter Benutzung der letzten Formel von M 2, S. 180

$$a(t) - \int_0^\pi G(t, r)\, a(r)\, dr = \sin t + \varkappa \int_0^\pi G(t, r)\, a(r)\, dr - p(t)\, c.$$

Da $\sin t$ Eigenfunktion des symmetrischen Kernes $G(t, r)$ ist, muß die rechte Seite zu $\sin t$ orthogonal sein; das ergibt

$$\frac{\pi}{2} + c\left(\varkappa - \int_0^\pi p(t) \sin t \, dt\right) = 0$$

oder schließlich

$$c = \frac{\frac{\pi}{2}}{A - \varkappa}$$

mit der Abkürzung

$$(37)\quad A = \int_0^{\pi} p(t) \sin t \, dt = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \sin t \, G(t,r) f(r) \, dr \, dt = \int_0^{\pi} f(t) \sin t \, dt,$$

wobei (33) zu beachten ist. Damit wird dann nach (35)

$$(38)\quad L_1 = 1 + \frac{\varkappa}{A - \varkappa} = \frac{A}{A - \varkappa},$$

was für $f(t) = \sin t$ in M 2, (33) übergeht.

In (32) brauchen wir jetzt noch die Größe $-L_3$. Diese wurde in M 2, (34) für allgemeines $p(t)$ und $q(t)$ angeschrieben, wobei noch die Formeln (18) und (20) von M 2 heranzuziehen sind. Man erhält unter Beachtung unserer Formel (37)

$$(39)\quad -L_3 = \frac{1}{6} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3} \frac{1}{A} \cdot \frac{3\pi}{8}.$$

Damit folgt schließlich aus (32) in rohester Näherung für das Verhalten der ersten Resonanzkurve in der Nähe des Punktes $\alpha^2 = 1, \beta = 0$, wenn man zur Berechnung von $L_1' = L_1 - 1$ Formel (38) benutzt und im Nenner noch $\varkappa$ gegen A vernachlässigt:

$$(40)\quad \beta^2 = \frac{8\pi^2}{27 A^2} (\alpha^2 - 1)^3,$$

wo A aus (37) zu entnehmen ist.

(Eingegangen am 19. 8. 1935.)

Über die aus quadrierbaren Hermiteschen Matrizen entstehenden Operatoren.

Von

Heinz Nagel in Frankfurt (Main)*).

Einer quadrierbaren Hermiteschen Matrix $\{a_{pq}\}$, d. h. einer die Symmetrieeigenschaft $a_{pq} = \bar{a}_{qp}$ erfüllenden Matrix mit konvergenten $\sum_{q=1}^{\infty} |a_{pq}|^2$, ist formal eine lineare Transformation $\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} x_q = y_p$ zugeordnet. Ist $\{x_p\}$ eine Stelle des Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$ ($\sum_{p=1}^{\infty} |x_p|^2$ konvergiert), so existiert bekanntlich jedes einzelne y_p; den Bereich der Stellen $\{x_p\}$ aus $\mathfrak{H}$, für welche auch $\sum_{p=1}^{\infty} |y_p|^2$ konvergiert, nennt man den Definitionsbereich $\mathfrak{D}$ der zur Matrix gehörenden linearen Transformation. Bei beschränkten Matrizen ist $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{H}$ identisch, und es gilt für jedes Stellenpaar $\{x_p\}$, $\{y_p\}$ aus $\mathfrak{H}$ die durch die Gleichung[1])

$$\sum_{p=1}^{\infty} \{ \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} x_q \} \bar{y}_p = \sum_{q=1}^{\infty} x_q \{ \sum_{p=1}^{\infty} \overline{a_{qp} y_p} \}$$

ausgedrückte Symmetrieeigenschaft. Im Gegensatz hierzu sind bei unbeschränkten Matrizen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ nicht mehr identisch, und es gibt sogar im allgemeinen Stellenpaare aus $\mathfrak{D}$, welche nicht einmal die erwähnte Symmetrierelation erfüllen[2]). Haupthilfsmittel der folgenden Untersuchung bildet nun die Heraushebung gewisser Teilbereiche $\mathfrak{S}$ (Symmetriebereiche) aus dem Definitionsbereich $\mathfrak{D}$, in denen für jedes Stellenpaar der angedeutete Symmetriecharakter gilt. Hiermit sollen die durch die Matrix definierten Hermiteschen Operatoren im Sinne der Theorie von J. v. Neumann[3]) in

---

*) Vorliegende Arbeit wurde von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Frankfurt a. M. als Dissertation angenommen.

[1]) Sie folgt aus $a_{pq} = \bar{a}_{qp}$ mit Hilfe einer bekannten Eigenschaft beschränkter Formen. Vgl. z. B. Encyklopädie II C 13, Nr. 18.

[2]) Beispiele hierfür sind die von Carleman entdeckten Matrizen der zweiten Klasse, bei welchen die Gleichungen $\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} x_q + \varrho x_p = 0$ $(p = 1, 2, \ldots)$ für komplexe ϱ Lösungen konvergenter Quadratsumme haben. Vgl. hierzu T. Carleman, Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique, Uppsala 1923, S. 185 ff.

[3]) Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren; Math. Ann. 102 (1930), S. 49—131.

konkreter Weise untersucht werden, so daß eine genauere Behandlung von Beispielen möglich ist.

Im ersten Teile wird unter Verwendung der von J. v. Neumann benutzten Grundbegriffe eine Darstellung der erwähnten Symmetriebereiche $\mathfrak{S}$ gegeben, welche eine gewisse Analogie zu den Randbedingungen bei Differentialgleichungen aufweisen. Anschließend werden die maximalen bzw. hypermaximalen Operatoren durch bestimmte Scharen von Symmetriebereichen charakterisiert und für den hypermaximalen Fall die eindeutige Umkehrbarkeit der linearen Transformation in $\mathfrak{S}$, d. h. die Existenz einer Inversen in $\mathfrak{S}$ bewiesen. Die zu diesen Inversen gehörigen Matrizen, die Reziproken von $\{a_{pq}\}$, werden im zweiten Teile abhängig von den Parametern der Mengen $\mathfrak{S}$ dargestellt. Die hierbei benutzte Methode beruht in Fortentwicklung einer von E. Hellinger bei einem spezielleren Problem angewandten[4]) darauf, daß man eine spezielle Lösung eines inhomogenen Gleichungssystems mit der Matrix $\{a_{pq}\}$ aus den Lösungen der homogenen Gleichungen gewisser Matrizen $\{a_{pq}\}_l$ aufbaut, welche man aus $\{a_{pq}\}$ durch Fortlassung von l Zeilen und Kolonnen erhält. Die Durchführbarkeit der Methode ist indessen an das nicht identische Verschwinden gewisser Ausdrücke gebunden. Ist sie durchführbar, so läßt sich die Berechnung der Reziproken auf die eines gewissen Abschnitts von ihr zurückführen. Als Beispiele hierfür werden Matrizen behandelt, welche nur in der Haupt- und den ersten n Nebendiagonalen besetzt sind — verallgemeinerte J-Matrizen — und bei denen in der letzten Nebendiagonalen keine Null steht. Anschließend werden im dritten Teile Aussagen über das Spektrum derartiger J-Formen gewonnen. Zunächst wird auf Grund der oben angedeuteten Analogie zwischen den Mengen $\mathfrak{S}$ und den Randbedingungen ein von H. Weyl[5]) für Differentialgleichungen bewiesener Satz auf Matrizen übertragen und sodann auf J-Formen angewandt, welche hiernach in jedem Symmetriebereich einer gewissen Schar von Mengen $\mathfrak{S}$ ein vollständiges System von Eigenvektoren haben. Darüber hinaus wird eine Methode zur Berechnung der zu $\mathfrak{S}$ gehörigen Eigenwerte und Eigenvektoren angegeben. Im vierten Teile werden für J-Formen die Elemente des im zweiten Teile bei der Darstellung der Reziproken noch unbestimmt gebliebenen Abschnitts abhängig von den Parametern der Mengen $\mathfrak{S}$ als Quotienten gewisser ganzer Funktionen berechnet. Im

[4]) Math. Ann. 86 (1922), S. 18—29. Die hier bei Kettenbrüchen benutzte Methode ist die Übertragung einer von H. Weyl, Math. Ann. 68 (1910), S. 220—269, bei Differentialgleichungen angewandten. Eine vollständige Behandlung der zugehörigen J-Formen findet sich in der Dissertation von R. A. Beth, Untersuchungen über die Spektraldarstellung von J-Formen. Frankfurt a. M., 1935.

[5]) Math. Ann. 68 (1910), S. 231—238.

Anschluß an eine Analogie im Gebiete der endlichen Matrizen wird alsdann im Falle der gewöhnlichen J-Formen ein Approximationsverfahren entwickelt, welches eine matrizentheoretische Deutung des von H. Hamburger[6]) entwickelten unbestimmten Momentenproblemes darstellt.

Die vorliegenden Ergebnisse lassen sich im Anschluß an Untersuchungen von M. H. Stone[7]) auch auf Differentialoperatoren übertragen, wie demnächst näher ausgeführt werden soll.

§ 1.

Der Definitionsbereich und seine Einteilung.

1. Bezeichnungen: Es seien

$$f = \{x_1, x_2, \ldots\}, g = \{y_1, y_2, \ldots\} \qquad (\sum_{p=1}^{\infty} |x_p|^2, \sum_{p=1}^{\infty} |y_p|^2 \text{ konvergent})$$

Elemente des Hilbertschen Koordinatenraumes $\mathfrak{H}$. Das innere Produkt sei $(f, g) = \sum_{p=1}^{\infty} x_p \bar{y}_p$; sein Verschwinden für zwei Elemente aus $\mathfrak{H}$ bedeutet die Orthogonalität dieser Elemente. Begriffe wie Konvergenz, Grenzwert und Abgeschlossenheit werden im Sinne der dem Raum $\mathfrak{H}$ durch den absoluten Betrag $\|f\| = |\sqrt{(f, f)}|$ eines Elements f aufgeprägten Metrik benutzt. $\{a_{pq}\}$ heißt eine *quadrierbare Hermitesche Matrix*, wenn $a_{pq} = \bar{a}_{qp}$ ist und die Summen $\sum_{p=1}^{\infty} |a_{pq}|^2$ konvergieren. $Af = g$ sei Abkürzung für $y_p = \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} x_q$ $(p = 1, 2, \ldots)$. Der Definitionsbereich $\mathfrak{D}$ des „Matrixoperators" $Af = g$ bestehe aus allen Elementen f des Hilbertschen Raumes, für welche auch g dem Hilbertschen Raum angehört, d. h. $\|f\|$ und $\|Af\|$ existieren. Elemente des Hilbertschen Raumes, für welche $(A + z)f = 0$ ist, sollen kurz „Lösungen zum Parameterwert z" genannt werden. Sei ferner $\mathfrak{E}$ eine abgeschlossene lineare Menge von Vektoren in $\mathfrak{H}$, d. h. eine abgeschlossene Menge, welche mit f und g stets auch $f + g$ enthält, dann werde unter $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}$ die Menge aller Elemente von $\mathfrak{H}$ verstanden, die zu allen Elementen von $\mathfrak{E}$ orthogonal sind. Unter der linearen Verbindung $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ abgeschlossene lineare Teilmengen von $\mathfrak{H}$) werde die Menge aller Elemente verstanden, die sich linear aus Elementen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zusammensetzen lassen.

Es liege $\varrho = \lambda + i\varkappa$ stets in der oberen Halbebene, $\bar{\varrho} = \lambda - i\varkappa$ also in der unteren Halbebene. Für ein einmal fest gewähltes ϱ^* möge dann

---

[6]) Math. Ann. 81 (1920), S. 235—319, 82 (1921), S. 120—164 und S. 168—187.

[7]) M. H. Stone, Linear Transformations in Hilbert space, New York (1932).

$(A + \varrho^*) f = 0$ bzw. $(A + \bar{\varrho}^*) f = 0$ endlich viele, nämlich m bzw. n linear unabhängige Lösungen in $\mathfrak{H}$ haben.

2. A ist in $\mathfrak{D}$ „abgeschlossen", d. h. für $f_n \to f$, $A f_n \to g$ (f_n aus $\mathfrak{D}$, g und f aus $\mathfrak{H}$) gilt stets $A f = g$, wie unmittelbar aus der Vollstetigkeit der Linearformen folgt.

3. Der Definitionsbereich[8]) $\mathfrak{D}$ werde eingeteilt in:

I. den Bereich der „zu sich selbst symmetrischen" Elemente g [*Nullklasse* $\mathfrak{O}$], für welche gilt:

$$\{A g, g\} = \{g, A g\}.$$

In $\mathfrak{O}$ läßt sich unterscheiden:

a) der „*symmetrische Grundbereich*" $\mathfrak{A}$: Ein Element g liege in $\mathfrak{A}$, wenn für alle Elemente f aus $\mathfrak{D}$ stets:

$$\{A g, f\} = \{g, A f\} \tag{1}$$

gilt. $\mathfrak{A}$ ist linear, und die Einheitsvektoren $g = \mathfrak{e}_\nu = \{e_{\nu 1}, e_{\nu 2}, \ldots\}$ gehören zu $\mathfrak{A}$; aus $A \mathfrak{e}_\nu = \{a_{\mu\nu};\ (\mu = 1, 2, \ldots)\}$ folgt nämlich:

$$\{A \mathfrak{e}_\nu, f\} = \sum_{u=1}^{\infty} a_{\mu\nu} \bar{x}_\mu = \{\mathfrak{e}_\nu, A f\}; \tag{2}$$

damit gehören auch sämtliche Vektoren mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Komponenten (finite Wertsysteme) zu $\mathfrak{A}$.

b) die *Symmetriebereiche* $\mathfrak{S}$: Je zwei Elemente g, g_1 aus einem $\mathfrak{S}$ sollen in bezug auf A in Symmetrie stehen:

$$\{A g, g_1\} = \{g, A g_1\}; \tag{3}$$

ferner soll $\mathfrak{S}$ eine lineare Menge sein und den symmetrischen Grundbereich enthalten.

c) die *vollständigen Symmetriebereiche* $\mathfrak{S}$: Für je zwei Elemente g und g_1 aus einem $\mathfrak{S}$ soll wieder (3) gelten; ferner soll es kein weiteres Element f aus $\mathfrak{D}$ geben, so daß

$$\{A g, f\} = \{g, A f\}$$

ist für alle g aus $\mathfrak{S}$. $\mathfrak{S}$ ist eine Menge $\mathfrak{S}$.

II. den Bereich der zu sich selbst asymmetrischen Elemente $\mathfrak{U}$, für welche gilt:

$$\{A g, g\} - \{g, A g\} = 2i\, \mathfrak{Im}\, \{A g, g\} \neq 0.$$

$\mathfrak{U}$ zerfällt weiter in:

a) die Menge $\mathfrak{U}^+$ („+" Klasse):

$$\mathfrak{Im}\, \{A g, g\} > 0, \tag{4}$$

b) die Menge $\mathfrak{U}^-$ („−" Klasse):

$$\mathfrak{Im}\, \{A g, g\} < 0. \tag{5}$$

[8]) Vgl. v. Neumann [3]) S. 70 ff. Die Begriffsbildungen und Bezeichnungen weichen etwas von Neumann ab.

Die Lösungen zum Parameter $\bar{\varrho}$ gehören also wegen $\Im\mathfrak{m}\,\{Ag,g\} = +\varkappa\,\{g,g\}$ zu $\mathfrak{U}^+$, analog die zum Parameter ϱ zu $\mathfrak{U}^-$.

4. Der symmetrische Grundbereich ist abgeschlossen, d. h. für $g_n \to g$ (g_n aus $\mathfrak{A}$ und g aus $\mathfrak{D}$) ist g wieder ein Element von $\mathfrak{A}$; für alle f aus $\mathfrak{D}$ gilt nämlich: $\{Af, g_n\} = \{f, Ag_n\}$, also wegen der Vollstetigkeit des inneren Produkts auch $\{Af, g\} = \{f, Ag\}$, wodurch nach (1) auch g zu $\mathfrak{A}$ gehört.

5. Für jedes Elementepaar f, f^* aus $\mathfrak{H}$, das zu allen g aus $\mathfrak{A}$ in der Beziehung steht[8]):

$$\{Ag, f\} = \{g, f^*\}, \tag{6}$$

folgt, indem man $g = \mathfrak{e}_\nu$ setzt:

$$f^* = Af. \tag{7}$$

6. Es durchlaufe f den Bereich $\mathfrak{A}$, dann wird bei festem ϱ $\mathfrak{E}_\varrho$[9]) gebildet von allen Elementen φ:

$$(A + \varrho) f = \varphi \tag{8}$$

und $\mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}$ von allen Elementen ψ:

$$(A + \bar{\varrho}) f = \psi. \tag{9}$$

Es gilt: (f aus $\mathfrak{D}$)

$$\| \{(A + \lambda) \pm i\varkappa\} f \|^2 = \| (A + \lambda) f \|^2 + \varkappa^2 \| f \|^2, \text{ d. h. } \| \varphi \| = \| \psi \|. \tag{10}$$

Hieraus folgt, daß es bei gegebenen φ bzw. ψ aus $\mathfrak{E}_\varrho$ bzw. $\mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}$ nur ein Element f aus $\mathfrak{A}$ geben kann, so daß (8) bzw. (9) erfüllt ist; denn für die Differenz zweier etwa vorhandener Lösungen müßte (10) Null sein, was nur möglich ist, wenn die Differenz selbst identisch Null ist.

Die Mengen $\mathfrak{E}_\varrho$ und $\mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}$ sind ferner abgeschlossen, d. h. für $(A + \varrho) f_n = \varphi_n \to \varphi$ (f_n aus $\mathfrak{A}$) gehört φ wieder zu $\mathfrak{E}_\varrho$. Zum Beweise bilde man $(A + \bar{\varrho}) f_n = \psi_n$; wegen (10) und da die φ_n eine konvergente Folge sind, gilt $\| \varphi_n - \varphi_m \| = \| \psi_n - \psi_m \| < \varepsilon$, d. h. die ψ_n bilden eine konvergente Folge; wegen $2i\varkappa f_n = \varphi_n - \psi_n$ bilden also auch die f_n eine konvergente Folge ($f_n \to f$) und folglich auch die Af_n ($Af_n \to f^*$), wobei wegen der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{D}$ $f^* = Af$ ist und wegen der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{A}$ f zu $\mathfrak{A}$ gehört. Es gilt also: $\varphi = \lim (A + \varrho) f_n = (A + \varrho) f$, d. h. es gehört φ zu $\mathfrak{E}_\varrho$.

7. Es läßt sich nun zeigen, daß $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho$ bzw. $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}$ von solchen f gebildet werden, für die

$$(A + \bar{\varrho}) f = 0 \tag{11}$$

bzw.

$$(A + \varrho) f = 0 \tag{12}$$

---

[9]) Vgl. v. Neumann [3]) S. 80.

ist[10]); sei nämlich $(A+\bar{\varrho})f=0$, so gilt für g aus $\mathfrak{A}$:

$$\{(A+\varrho)g,f\}=\{Ag,f\}-\{g,-\bar{\varrho}f\}=\{Ag,f\}-\{g,Af\}=0,$$

d. h. f in $\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho$. Umgekehrt folgt für f aus $\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho$ und jedes g aus $\mathfrak{A}$:

$$\{(A+\varrho)g,f\}=0=\{Ag,f\}-\{g,-\bar{\varrho}f\},$$

d. h. nach (6) und (7):

$$Af=-\bar{\varrho}f;$$

entsprechend für $\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}$. Die Dimension von $\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho$ sei n_ϱ, die von $\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}$ sei $n_{\bar{\varrho}}$, wobei n_ϱ bzw. $n_{\bar{\varrho}}$ eine der Zahlen $1, 2, \ldots$ oder ∞ ist. Nach Voraussetzung (§ 1, 1) sind $n_{\varrho^*}=n$ und $n_{\bar{\varrho}^*}=m$ endlich. In § 2, 4 wird gezeigt, daß n_ϱ bzw. $n_{\bar{\varrho}}$ von ϱ unabhängig sind.

8. Der symmetrische Grundbereich $\mathfrak{A}$ ist in bezug auf A „koordinatenabgeschlossen“[11]):

(13) Sei f aus $\mathfrak{A}$, dann gibt es eine Folge finiter Stellen $h_N=\{x_1^N,\ldots,x_N^N\}$, so daß mit $h_N\to f$ auch $Ah_N\to Af$ konvergiert.

Zum Beweise bildet man die in bezug auf A abgeschlossene Menge $\mathfrak{A}'$ aus den finiten Wertsystemen h_N. Die gemäß (8) bzw. (9) gebildeten Bildmengen $\mathfrak{E}'_\varrho$ bzw. $\mathfrak{E}'_{\bar{\varrho}}$ von $\mathfrak{A}'$ sind dann wieder abgeschlossen; ferner gilt wieder (6) und (7) und folglich für $\mathfrak{H}-\mathfrak{E}'_\varrho$ bzw. $\mathfrak{H}-\mathfrak{E}'_{\bar{\varrho}}$ (11) bzw. (12), also:

$$\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho=\mathfrak{H}-\mathfrak{E}'_\varrho,\ \mathfrak{H}-\mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}=\mathfrak{H}-\mathfrak{E}'_{\bar{\varrho}}\quad\text{also}\quad\mathfrak{E}_\varrho=\mathfrak{E}'_\varrho,\ \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}=\mathfrak{E}'_{\bar{\varrho}}.$$

Wäre nun $\mathfrak{A}'\subset\mathfrak{A}$, dann müßte es ein φ aus $\mathfrak{E}_\varrho$ bzw. $\mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}$ geben, dem zwei verschiedene f aus $\mathfrak{A}$ entsprächen, was nach (10) nicht möglich ist.

9. Für reelle Matrizen gehört mit $f=f_1+if_2$ auch stets f_1 und f_2, also auch $\bar{f}=f_1-if_2$ zu $\mathfrak{A}$. Sei $h_N=h_N^{(1)}+ih_N^{(2)}\to f=f_1+if_2$, dann folgt aus

$$\|f-h_N\|^2=\|f_1-h_N^{(1)}\|^2+\|f_2-h_N^{(2)}\|^2<\varepsilon,$$

$$\|Af-Ah_N\|^2=\|Af_1-Ah_N^{(1)}\|^2+\|Af_2-Ah_N^{(2)}\|^2<\varepsilon$$

auch

$$\|f_1-h_N^{(1)}\|^2<\varepsilon\quad\text{und}\quad\|Af_1-Ah_N^{(1)}\|^2<\varepsilon,$$

d. h. es gehört f_1 zu $\mathfrak{A}$ und analog f_2.

Satz 1: *Der symmetrische Grundbereich ist koordinatenabgeschlossen; für reelle Matrizen gehört mit h auch stets $\bar{h}$ zum symmetrischen Grundbereich. Für φ aus $\mathfrak{E}_\varrho$ bzw. $\mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}$ haben die Gleichungen $(A+\varrho)f=\varphi$ bzw. $(A+\bar{\varrho})f=\varphi$ genau eine Lösung aus dem symmetrischen Grundbereich. Die Mengen $\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho$ bzw. $\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}$ werden gebildet von den Lösungen von $(A+\bar{\varrho})f=0$ bzw. $(A+\varrho)f=0$.*

---

[10]) Vgl. hierzu den spezielleren Satz 28 bei v. Neumann [3]).

[11]) v. Neumann, Journ. f. Math. 161 (1929), I. Teil.

§ 2.

Die Darstellung des Definitionsbereiches.

1. Der Definitionsbereich $\mathfrak{D}$ läßt sich in einfacher Weise aus $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho$ und $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}$ darstellen. Zu diesem Zwecke werde die Gleichung

$$(A + \varrho) f = \varphi \tag{14}$$

für φ aus $\mathfrak{H}$ betrachtet. Es sei zunächst $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho \neq 0$ und $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}} \neq 0$; dann sind folgende Fälle zu unterscheiden:

a) φ aus $\mathfrak{E}_\varrho$: $f_{\mathfrak{A}}$ sei die nach (10) eindeutige zugehörige Lösung von (14) aus $\mathfrak{A}$; nach (12) lautet dann die allgemeine Lösung von (14) ($f_{\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}}$ allgemeine Lösung von (12)):

$$f = f_{\mathfrak{A}} + f_{\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}}. \tag{15}$$

b) φ aus $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho$: eine spezielle Lösung lautet $\frac{1}{2\varkappa i}\varphi$; wegen (11) ($\varphi$ statt f) ist nämlich $\frac{1}{2\varkappa i}(A + \varrho)\varphi = \frac{1}{2\varkappa i}(\varrho - \bar{\varrho})\varphi = \varphi$. Die allgemeine Lösung ist also:

$$f = \frac{1}{2\varkappa i}\varphi + f_{\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}} \tag{16}$$

c) φ aus $\mathfrak{E}_\varrho + (\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho) = \mathfrak{H}$: es sei $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, φ_1 bzw. φ_2 aus $\mathfrak{E}_\varrho$ bzw. $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho$. Die allgemeine Lösung setzt sich aus den allgemeinen Lösungen von $(A + \varrho) f_1 = \varphi_1$ und $(A + \varrho) f_2 = \varphi_2$ zusammen; nach (15) und (16) ist sie also:

$$f = f_{\mathfrak{A}} + \frac{1}{2\varkappa i}\varphi_2 + f_{\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}}. \tag{17}$$

Für $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}} = 0$, aber $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho \neq 0$ geht (15), (16) und (17) über in:

$$f = f_{\mathfrak{A}}; \tag{18}$$

$$f = \frac{1}{2\varkappa i}\varphi; \tag{19}$$

$$f = f_{\mathfrak{A}} + \frac{1}{2\varkappa i}\varphi_2. \tag{20}$$

Für $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}} \neq 0$, aber $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho = 0$ kommt nur a) in Frage, also $f = f_{\mathfrak{A}} + f_{\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}}$.

Die Gleichung

$$(A + \bar{\varrho}) f = \varphi \tag{14'}$$

wird analog behandelt; Für $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}} \neq 0$ und $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho \neq 0$ wird:

a') φ aus $\mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}$:

$$f = f_{\mathfrak{A}} + f_{\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho}; \tag{15'}$$

b') φ aus $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho^-$:

$$f = -\frac{1}{2\varkappa i}\varphi + f_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho} \tag{16'}$$

c') $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ aus $\mathfrak{E}_\varrho^- + (\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho^-)$ (vgl. c)):

$$f = f_{\mathfrak{A}} - \frac{1}{2\varkappa i}\varphi_2 + f_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho}. \tag{17'}$$

Für $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho^- = 0$, aber $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho \neq 0$ kommt nur a') in Frage, also $f = f_{\mathfrak{A}} + f_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho}$. Für $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho^- \neq 0$, aber $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho = 0$ erhält man die (18), (19), (20) analogen Formeln. Es sei nun f aus $\mathfrak{D}$, dann gehört das nach (14) bzw. (14') zugehörige φ zu $\mathfrak{E}_\varrho$, $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho$ oder $\mathfrak{E}_\varrho + (\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho)$ bzw. zu $\mathfrak{E}_\varrho^-$, $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho^-$ oder $\mathfrak{E}_\varrho^- + (\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho^-)$ und folglich gilt nach a, b, c bzw. a', b', c':

$$f = f_{\mathfrak{A}} + f_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho} + f_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho^-}. \tag{21}$$

2. Auf Grund von (21) läßt sich folgende der Greenschen Formel analoge Formel[12]) beweisen:

$$\{Af, g\} - \{f, Ag\} = 2\varkappa i\,\{(f_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho}, g_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho}) - (f_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho^-}, g_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho^-})\} \tag{22}$$
(f und g in $\mathfrak{D}$);

es ist nämlich nach (21):

$$\begin{aligned}
&\{Af_{\mathfrak{A}} - \bar{\varrho} f_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho} - \varrho f_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho^-},\ g_{\mathfrak{A}} + g_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho} + g_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho^-}\} \\
&\qquad - \{f_{\mathfrak{A}} + f_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho} + f_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho^-},\ Ag_{\mathfrak{A}} - \bar{\varrho} g_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho} - \varrho g_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho^-}\} \\
= 2\varkappa i\,&\{(f_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho}, g_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho}) - (f_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho^-}, g_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho^-})\} \\
&+ \{(Af_{\mathfrak{A}}, g_{\mathfrak{A}} + g_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho} + g_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho^-}) - (f_{\mathfrak{A}}, Ag_{\mathfrak{A}} - \bar{\varrho} g_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho} - \varrho g_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho^-})\} \\
&\qquad - \{(\bar{\varrho} f_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho} + \varrho f_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho^-}, g_{\mathfrak{A}}) + (f_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho} + f_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho^-}, Ag_{\mathfrak{A}})\}.
\end{aligned}$$

Gemäß (1), (11) und (12) sind aber die beiden letzten $\{\ldots\}$ identisch Null. Für $f = g$ wird (22) insbesondere:

$$\{Af, f\} - \{f, Af\} = 2\varkappa i\,\{\|f_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho}\|^2 - \|f_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho^-}\|^2\}. \tag{23}$$

Hieraus läßt sich also gemäß (4), (5) entscheiden, wann ein Element f zu $\mathfrak{U}^+$, $\mathfrak{O}$ oder $\mathfrak{U}^-$ gehört. Nunmehr folgt die lineare Unabhängigkeit der Mengen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho$ und $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho^-$; denn $f_{\mathfrak{A}} + f_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho} = f_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho^-}$ ist unmöglich, da nach (23) links ein Element von $\mathfrak{U}^+$ und rechts ein Element von $\mathfrak{U}^-$ steht. Hieraus folgt dann die Eindeutigkeit der Darstellung (21): aus $f_{\mathfrak{A}} + f_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho} + f_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho^-} = f'_{\mathfrak{A}} + f'_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho} + f'_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho^-}$ würde nämlich $(f_{\mathfrak{A}} - f'_{\mathfrak{A}}) + (f_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho} - f'_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho}) + (f_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho^-} - f'_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho^-}) = 0$, d. h. die lineare Abhängigkeit von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho$ und $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho^-$ folgen.

[12]) Vgl. hierzu die Spezialfälle der Formeln (21) und (22) bei v. Neumann [3]), S. 85.

3. Nach v. Neumann [13]) ist die „Dimension" von $\mathfrak{U}^+$ bzw. von $\mathfrak{U}^-$ definiert als die maximale Zahl der linear unabhängigen Elemente, die samt der aus ihnen gebildeten linearen Menge zu $\mathfrak{U}^+$ bzw. zu $\mathfrak{U}^-$ gehören; sie ist gleich der Dimension von $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho$ bzw. $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}$, also n_ϱ bzw. $n_{\bar{\varrho}}$. $\mathfrak{U}^+$ wird nämlich gebildet von den Elementen (21) mit der Nebenbedingung $\|f_\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho\|^2 + \|f_\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}\|^2 \neq 0$ und $\|f_\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho\|^2 > \|f_\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}\|^2$. Die eben definierte Dimensionszahl ist dann bestimmt $\geqq \mathrm{Dim}\,(\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho) = n_\varrho$, weil $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho$ zu $\mathfrak{U}^+$ gehört. Andererseits gibt es für $n_\varrho + 1$ Elemente von $\mathfrak{U}^+$ stets eine lineare Verbindung, für welche der $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho$ angehörende Bestandteil Null wird, weil es in $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho$ nur n_ϱ linear unabhängige Elemente gibt; diese gehört also zu $\mathfrak{U}^-$ oder $\mathfrak{O}$. Die Dimension ist also $\leqq n_\varrho$ und folglich gleich n_ϱ. Analog für $\mathfrak{U}^-$.

4. Es läßt sich nun auch der angekündigte Beweis dafür führen, daß $n_{\bar{\varrho}}$ und n_ϱ von ϱ unabhängig sind [14]). Zum Beweis hat man nur zu beachten, daß die Dimension von $\mathfrak{U}^+$ bzw. von $\mathfrak{U}^-$ als Konstante der Matrix von ϱ unabhängig ist. Da nach 3. n_ϱ bzw. $n_{\bar{\varrho}}$ die Dimension von $\mathfrak{U}^+$ bzw. von $\mathfrak{U}^-$ angibt, ist also $n_\varrho = n_{\varrho^*} = n$ bzw. $n_{\bar{\varrho}} = n_{\bar{\varrho}^*} = m$ also:

$$\text{(24)} \quad \mathrm{Dim}\,(\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho) = \mathrm{Dim}\,(\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\varrho^*}); \quad \mathrm{Dim}\,(\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}) = \mathrm{Dim}\,(\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}^*}).$$

Satz 2: *Wenn* $(A + \varrho) f = 0$ *bzw.* $(A + \bar{\varrho}) f = 0$ *für ein* $\varrho = \varrho^*$ *m bzw. n linear unabhängige Lösungen besitzt, so gibt es für alle komplexen* ϱ *bzw.* $\bar{\varrho}$ *m bzw. n linear unabhängige Lösungen; insbesondere lassen sich sämtliche Definitionselemente eindeutig in der Gestalt* (21) *durch Elemente von* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho$ *und* $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}$ *darstellen.*

§ 3.

Darstellung der Symmetriebereiche.

1. Es sei $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho$ n-dimensional und $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}$ m-dimensional; es sei ferner $f_1, \ldots, f_n$ in $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho$ und $f'_1, \ldots, f'_m$ in $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}$ vollständig, orthogonal und normiert; ferner sei h ein beliebiges Element aus $\mathfrak{A}$; es sei s eine ganze Zahl sowie $s \leqq n$, $s \leqq m$. Die Menge $\mathfrak{S}^s$ bestehe dann aus den Elementen:

$$\text{(25)} \quad g = h + \sum_{\nu=1}^{s} a_\nu (f_\nu + f'_\nu),$$

wobei a_ν beliebige komplexe Zahlen sind. Für zwei Elemente g und g_1 aus $\mathfrak{S}^s$ gilt dann nach (22) stets:

$$\{A g, g_1\} = \{g, A g_1\},$$

---

[13]) v. Neumann [3]), S. 87.

[14]) Bei Carleman [2]) S. 58 wird ein analoger Satz für Integralgleichungen bewiesen.

$\mathfrak{S}^s$ ist also auf Grund von § 1 ein Symmetriebereich $\widetilde{\mathfrak{S}}$. Die Elemente von $\mathfrak{D}$ außerhalb $\mathfrak{S}^s$ lassen sich nun einteilen in zwei Mengen:

a) in $\mathfrak{M}_1^s$: es gehöre f zu $\mathfrak{M}_1^s$, wenn es zu allen Elementen g von $\mathfrak{S}^s$ in bezug auf A in Symmetrie steht, d. h.

$$\{A f, g\} = \{f, A g\},$$

b) in $\mathfrak{M}_2^s$: es gehöre f zu $\mathfrak{M}_2^s$, wenn es auch nur zu einem g aus $\mathfrak{S}^s$ in Asymmetrie steht, d. h.

$$\{A f, g\} \neq \{f, A g\}.$$

Sämtliche Elemente f von $\mathfrak{D}$, die nicht $\mathfrak{S}^s$ angehören, werden dargestellt durch

$$f = h + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu f_\nu + \sum_{\nu=1}^{m} c'_\nu f'_\nu, \tag{26}$$

es sei denn, daß $c_\nu = c'_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, s)$ und $c_\nu = 0$ $(\nu = s+1, \ldots, n)$, $c'_\nu = 0$ $(\nu = s+1, \ldots, m)$ ist; in diesem Falle gehört nämlich f zu $\mathfrak{S}^s$. Für diese nicht zu $\mathfrak{S}^s$ gehörigen Elemente f von $\mathfrak{D}$ gilt dann entweder

$$f = h + \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu (f_\nu + f'_\nu) + \sum_{\nu=s+1}^{n} c_\nu f_\nu + \sum_{\nu=s+1}^{m} c'_\nu f'_\nu \tag{27}$$

$$\left(\text{außer } \sum_{\nu=s+1}^{n} |c_\nu|^2 = \sum_{\nu=s+1}^{m} |c'_\nu|^2 = 0\right)$$

oder

$$f = h + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu f_\nu + \sum_{\nu=1}^{m} c'_\nu f'_\nu \quad (\text{außer } c_\nu = c'_\nu,\ \nu = 1, \ldots, s). \tag{28}$$

Die Elemente (27) bilden dann gerade die Menge $\mathfrak{M}_1^s$ und (28) die Menge $\mathfrak{M}_2^s$. Die rechte Seite von (22) wird nämlich Null, wenn man dort für f ein Element von (27) und für g ein solches von (25) einsetzt. Wenn man dagegen für f ein Element von (28) einsetzt, erhält man:

$$\{f_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho}, g_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho}\} = \sum_{\mu=1}^{s} c_\mu \bar{a}_\mu \quad \text{bzw.} \quad \{f_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}}, g_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}}\} = \sum_{\mu=1}^{s} c'_\mu \bar{a}_\mu.$$

Die rechte Seite von (22) wird also $2\varkappa i \sum_{\mu=1}^{s} \bar{a}_\mu (c_\mu - c'_\mu)$. Damit das für alle a_μ Null wird, ist notwendig $c_u = c'_u$; also kein Element von (28) steht in Symmetrie zur Menge $\mathfrak{S}^s$, d. h. (28) bildet $\mathfrak{M}_2^s$.

Für $m = n$ und $s = n$ wird nach (25) und (27):

$$\begin{cases} \mathfrak{S}^n = \{\mathfrak{h} + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu (f_\nu + f'_\nu)\}, & \mathfrak{M}_1^n = 0, \\ \mathfrak{M}_2^n = \{h + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu f_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} c'_\nu f'_\nu\} & (\text{außer } c_\nu = c'_\nu,\ \nu = 1, \ldots, n). \end{cases} \tag{29}$$

Für $m > n$ und $s = n$ wird dagegen:

$$(30)\quad \begin{cases} \mathfrak{S}^n = \{h + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu (f_\nu + f'_\nu)\}, \\ \mathfrak{M}_1^n = \{h + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu (f_\nu + f'_\nu) + \sum_{u=n+1}^{m} b_u f'_u\} \qquad (\sum_{\mu=n+1}^{m} |b_u|^2 \neq 0), \\ \mathfrak{M}_2^n = \{h + \sum_{u=1}^{n} c_u f_\mu + \sum_{u=1}^{m} c'_\mu f'_\mu\} \quad \text{(außer } c_\mu = c'_u,\ \mu = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

$\mathfrak{S}^n$ stellt einen vollständigen Symmetriebereich $\mathfrak{S}$ dar; für zwei Elemente von $\mathfrak{S}^n$ gilt nämlich (3), und ferner gibt es, da $\mathfrak{M}_1^n$ leer ist oder nur Elemente von $\mathfrak{U}$ enthält, keine weiteren Elemente f aus $\mathfrak{O}$, die zu $\mathfrak{S}^s$ in Symmetrie stehen.

2. Die Menge $\mathfrak{S}^n$ ist abhängig von dem in $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho$ bzw. $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}$ gewählten Koordinatensystem. Es läßt sich aber beweisen, daß man schon alle Mengen $\mathfrak{S}^n$ erhält, wenn man in $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho$ ein festes Orthogonalsystem zugrunde legt. Es sei zunächst im Falle $m = n$ φ_ν in $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho$ und φ'_ν in $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ vollständig und orthogonal, dann gilt:

$$\varphi_\nu = \sum_{u=1}^{n} u_{u\nu} f_u \quad \text{bzw.} \quad \varphi'_\nu = \sum_{\mu=1}^{n} u'_{u\nu} f'_u.$$

Die $u_{u\nu}$ bzw. $u'_{u\nu}$ bilden je eine unitäre Matrix. In der Menge (a, willkürlich)

$$(31)\quad \mathfrak{S}^n = \{h + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu (\varphi_\nu + \varphi'_\nu)\} = \{h + \sum_{\nu,u=1}^{n} u_{u\nu} a_\nu f_\mu + \sum_{\nu,\mu=1}^{n} u'_{u\nu} a_\nu f'_u\}$$

betrachtet man nun die Teilmengen, welche man erhält, wenn man $a_\nu = \bar{u}_{\sigma\nu} b_\sigma$ setzt (b_σ willkürlich); sie haben die Gestalt:

$$(32)\quad \{h + b_\sigma (f_\sigma + \sum_{u=1}^{n} [\sum_{\nu=1}^{n} u'_{u\nu} \bar{u}_{\sigma\nu}] f'_u)\} \quad (\sigma = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Elemente $\varphi''_\sigma = \sum_{u,\nu=1}^{n} u'_{u\nu} \bar{u}_{\sigma\nu} f'_u$ sind wieder orthogonal und normiert; die Matrix $v_{u\sigma} = \sum_{\nu=1}^{n} u'_{u\nu} \bar{u}_{\sigma\nu}$ ist nämlich wieder unitär. Die Vereinigungsmenge der Mengen (32)

$$\{h + \sum_{\sigma=1}^{n} b_\sigma (f_\sigma + \varphi''_\sigma)\}$$

stellt also nach (25) eine Menge $\mathfrak{S}^n$ dar, welche mit (31) identisch ist.

Es läßt sich weiter zeigen, daß alle mit einem in $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho$ festen und mit in $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}$ verschiedenen Orthogonalsystemen gebildeten Mengen $\mathfrak{S}^n$ voneinander verschieden sind; wäre nämlich

$$\{h + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu (f_\nu + \varphi_\nu^{(1)})\} \equiv \{h + \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu (f_\nu + \varphi_\nu^{(2)})\}.$$

dann gäbe es in $\mathfrak{S}^n$ für $a_\nu = b_\nu$ durch Differenzenbildung auch Elemente aus $\mathfrak{U}$, was der Tatsache widerspricht, daß $\mathfrak{S}^n$ einen Symmetriebereich darstellt.

3. Es soll nun weiter gezeigt werden, daß sich auch jeder vollständige Symmetriebereich $\mathfrak{S}$ als Menge $\mathfrak{S}^n$, allgemeiner jeder Symmetriebereich $\widetilde{\mathfrak{S}}$ als Menge $\mathfrak{S}^s$ darstellen läßt. Wenn $\mathfrak{A} = \widetilde{\mathfrak{S}}$ ist, ist das trivial; wenn dagegen $\widetilde{\mathfrak{S}}$ größer als $\mathfrak{A}$ ist, enthält nach (21), (23) und weil $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{D}$ ist, $\widetilde{\mathfrak{S}}$ nur Elemente der Form

$$h + a(\varphi + \varphi'); \quad \varphi, \varphi', h \quad \text{bzw. aus} \quad \mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho, \mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}, \mathfrak{A}; \|\varphi\| = \|\varphi'\|.$$

Insbesondere möge es in $\widetilde{\mathfrak{S}}$ gerade $s \leqq n$ Elemente $\varphi_\nu + \varphi'_\nu$ mit linear unabhängigen φ_ν geben; man kann die φ_ν orthogonal und normiert annehmen, dann gilt auf Grund von (22), da die Elemente $\varphi_\nu + \varphi'_\nu$ zu $\widetilde{\mathfrak{S}}$ gehören, dasselbe für die φ'_ν.

$\mathfrak{S}^s = \{h + \sum_{\nu=1}^{s} a_\nu(\varphi_\nu + \varphi'_\nu)\}$ ist dann sicher eine Teilmenge von $\widetilde{\mathfrak{S}}$; sei nun $g_1 = h + a(\varphi + \varphi')$ aus $\widetilde{\mathfrak{S}}$, dann ist $\varphi = \sum_{\nu=1}^{s} b_\nu \varphi_\nu$; setzt man dann in $\mathfrak{S}^s$ $a_\nu = a\, b_\nu$, so erhält man dort Elemente der Form $g = h + a(\varphi + \sum_{\nu=1}^{s} b_\nu \varphi'_\nu)$. Da $g_1 - g$ ebenfalls zu $\widetilde{\mathfrak{S}}$ gehört, muß also $\varphi' = \sum_{\nu=1}^{s} b_\nu \varphi'_\nu$ sein, d. h. in $\mathfrak{S}^s$ sind alle Elemente von $\widetilde{\mathfrak{S}}$ enthalten. Insbesondere muß also für $\widetilde{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}$ $s = n$ sein, weil es sonst in $\mathfrak{M}_1^s$ nach (27) noch Elemente von $\mathfrak{D}$ gäbe. Gemäß 2. gibt es also für jeden vollständigen Symmetriebereich $\mathfrak{S}$ und vorgeschriebene Orthogonalsysteme in $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho$ bzw. $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}$ eine n-reihige unitär-orthogonale Matrix $\{u'_{\mu\nu}\}$, so daß

$$\mathfrak{S} = \{h + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu (f_\nu + \sum_{\mu=1}^{n} u'_{\mu\nu} f'_\mu)\} = \mathfrak{S}^n \tag{33}$$

ist.

Der Fall $m > n$ läßt sich analog behandeln; man kann sich ebenfalls in $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho$ auf ein festes Koordinatensystem beschränken; zu jedem vollständigen Symmetriebereich $\mathfrak{S}$ gibt es dann ein System $u'_{1\nu}, \ldots, u'_{m\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$

$$\sum_{\sigma=1}^{n} u'_{\sigma\nu_1} \bar{u}'_{\sigma\nu_2} = e_{\nu_1\nu_2},$$

so daß

$$\mathfrak{S} = \{h + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu (f_\nu + \sum_{\mu=1}^{m} u'_{\mu\nu} f'_\mu)\} = \mathfrak{S}^n \tag{34}$$

ist.

4. Bei reellen Matrizen kann man stets $f_\mu' = f_u'$ annehmen, folglich ist stets $m = n$. Gemäß (33) wird demnach

$$\mathfrak{S}^n = \{h + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu (f_\nu + \sum_{u=1}^{n} u'_{u\nu} \bar{f}_\mu)\}. \tag{35}$$

Man kann nun fragen, wann $\mathfrak{S}^n$ mit g auch $\bar{g}$, also auch $\bar{\mathfrak{S}}^n$ enthält, wo

$$\bar{\mathfrak{S}}^n = \{\bar{h} + \sum_{\nu=1}^{n} \bar{a}_\nu (\bar{f}_\nu + \sum_{\mu=1}^{n} \bar{u}'_{\mu\nu} f_\mu)\}.$$

Da nach § 1 für reelle Matrizen mit h auch $\bar{h}$ zu $\mathfrak{A}$ gehört, hat $\bar{\mathfrak{S}}^n$ auch folgende Gestalt:

$$\bar{\mathfrak{S}}^n = \{h + \sum_{\sigma=1}^{n} b_\sigma (\bar{f}_\sigma + \sum_{u=1}^{n} \bar{u}'_{u\sigma} f_u)\}, \tag{36}$$

stellt also ebenfalls einen vollständigen Symmetriebereich dar. Es fragt sich, wann $\bar{\mathfrak{S}}^n$ mit $\mathfrak{S}^n$ identisch ist; für $a_\nu = b_\sigma \bar{u}'_{\sigma\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ erhält man aus (35) die Teilmengen:

$$\{h + b_\sigma (\sum_{\nu=1}^{n} \bar{u}'_{\sigma\nu} f_\nu + \bar{f}_\sigma)\} \qquad (\sigma = 1, \ldots, n),$$

es ist also auch:

$$\mathfrak{S}^n = \{h + \sum_{\sigma=1}^{n} b_\sigma (\bar{f}_\sigma + \sum_{\nu=1}^{n} \bar{u}'_{\sigma\nu} f_\nu)\}, \tag{37}$$

d. h. $\mathfrak{S}^n$ ist mit $\bar{\mathfrak{S}}^n$ identisch, wenn $u'_{u\sigma} = u'_{\sigma\mu}$ ist. Mengen dieser Art mögen zu sich selbst konjugierte Mengen $\mathfrak{S}$ genannt und mit $\mathfrak{S}_t$ bezeichnet werden.

5. Auf Grund von (33) hat im Falle $m = n$ die Schar der Mengen $\mathfrak{S}$ dieselbe Dimension wie die Schar der n-reihigen unitären Matrizen U. Für diese gilt — mit Ausnahme einer Mannigfaltigkeit geringerer Dimension — die bekannte Cayleysche Darstellung (H eine Hermitesche Matrix):

$$U = (\mathfrak{E} + iH)^{-1}(\mathfrak{E} - iH) = -\mathfrak{E} + 2(\mathfrak{E} + iH)^{-1};$$

die U bilden also eine n^2-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Für die unitär-symmetrischen Matrizen muß speziell H reell sein; sie bilden daher eine $\frac{n(n+1)}{2}$-dimensionale Mannigfaltigkeit. Die Dimension der Mannigfaltigkeit der Mengen $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{S}_t$ ist also n^2 bzw. $\frac{n(n+1)}{2}$. Die vollständigen Symmetriebereiche, welche

$$\mathfrak{S}^s = \{h + \sum_{\nu=1}^{s} a_\nu (f_\nu + \sum_{\mu=1}^{n} u'_{\mu\nu} f'_\mu)\}$$

als Teilmengen enthalten, bilden eine $(n-s)$-dimensionale Mannigfaltigkeit; zu $\sum_{u=1}^{n} u'_{\mu\nu} f'_u$ $(\nu = 1, \ldots, s)$ gibt es nämlich in $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}$ noch eine $(n-s)$-dimensionale Menge von Vektoren, aus welchen man eine $(n-s)^2$-dimensionale Schar orthogonal normierter Elemente bilden kann.

Satz 3: *Sei $m = n$ und $f_1, \ldots, f_n$ bzw. $f'_1, \ldots, f'_n$ in $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho$ bzw. $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}$ orthogonal und normiert, und $u'_{\mu\nu}$ die n^2-parametrige Schar aller unitär-orthogonalen Matrizen, dann stellt* (33) *eine n^2-parametrige Schar voneinander verschiedener, vollständiger Symmetriebereiche dar; insbesondere gibt es für reelle Matrizen eine $\frac{n(n+1)}{2}$-parametrige Schar von Symmetriebereichen, die mit jedem Element auch das konjugiert komplexe Element enthalten.*

§ 4.

Die Inverse in einem Symmetriebereiche.

1. Im folgenden werde die Lösbarkeit der Gleichungen (vgl. § 2)

(14) $(A + \varrho) f = \varphi$ bzw. (14′) $(A + \bar{\varrho}) f = \varphi$

untersucht mit der Nebenbedingung, daß f einem vollständigen Symmetriebereich $\mathfrak{S}$ angehört. Stellt man $\mathfrak{S}$ durch

$$\mathfrak{S}^n = \{h + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu (f_\nu + f'_\nu)\} \quad (f_\nu, f'_\nu \text{ bzw. in } \mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho,\ \mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}})$$

dar, dann bestehen folgende Lösungsverhältnisse:

Für $m = n$ und φ aus $\mathfrak{E}_\varrho$ existiert nach (10) eine und nur eine Lösung f aus $\mathfrak{A}$, d. h. aus $\mathfrak{S}$. Für φ aus $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho$ ist $\varphi = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu f_\nu$; damit $f \in \mathfrak{S}$ angehört, muß also in (16)

$$f_{\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu f'_\nu$$

sein. Analog erledigt sich der Fall φ aus $\mathfrak{E}_\varrho + (\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho)$: Nach (17) hat man, wenn $\varphi_2 = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu f_\nu$ ist, nur $f_{\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu f'_\nu$ zu setzen. Die Gleichung (14′) wird analog behandelt.

Für $m > n$ liegen jedoch für (14) und (14′) wesentlich verschiedene Lösungsverhältnisse vor. Die Gleichung (14) läßt sich analog wie oben behandeln; für jedes φ aus $\mathfrak{H}$ existiert also eine Lösung. Für (14′) gibt es nach (15′) wieder eine Lösung für φ aus $\mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}$. Für φ aus $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}$ gibt es aber schon nicht mehr immer eine Lösung; es ist dann nämlich

$\varphi = \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu f'_\nu$, in $\mathfrak{S}$ gehen aber nur $f'_1, \ldots, f'_n$ ein. In $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}$ sei deshalb $\{f'_{n+1}, \ldots, f'_m\} = \mathfrak{B}$ und $(\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}) - \mathfrak{B} = \{f'_1, \ldots, f'_n\}$; für φ aus $(\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}) - \mathfrak{B}$, also $\varphi = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu f'_\nu$ gibt es dann gemäß (16′) genau eine Lösung, man hat nur in (16′) $f_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho} = -\frac{1}{2\varkappa i} \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu f_\nu$ zu setzen und analog in (17′) für $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ aus $\mathfrak{E}_{\bar{\varrho}} + (\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}) - \mathfrak{B}$ $f_{\mathfrak{H}-\mathfrak{E}_\varrho} = -\frac{1}{2\varkappa i} \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu f_\nu$. Für solche φ, die nicht zu allen Elementen von $\mathfrak{B}$ orthogonal sind, gibt es keine Lösung.

Da man jeden vollständigen Symmetriebereich $\mathfrak{S}$ gemäß (33) und (34) als Menge (34) unter Zugrundelegung der Lösungen von $(A + \varrho) f = 0$ und $(A + \bar{\varrho}) f = 0$ für beliebig gewähltes komplexes ϱ darstellen kann, folgt, daß für jedes nichtreelle ϱ für die Gleichungen (14) bzw. (14′) die angegebenen Lösungsverhältnisse bestehen.

Bezeichnet man den durch die Beschränkung von A auf $\mathfrak{S}$ gewonnenen Operator mit $A_\mathfrak{S}$, so existiert also im Falle $m = n$ für jedes nicht reelle ϱ eine in $\mathfrak{H}$ definierte Inverse von

$$(A_\mathfrak{S} + \varrho) f = \varphi \quad \text{bzw.} \quad (A_\mathfrak{S} + \bar{\varrho}) f = \varphi:$$

$$(38) \qquad (A_\mathfrak{S} + \varrho)^{-1} \varphi = f \quad \text{bzw.} \quad (A_\mathfrak{S} + \bar{\varrho}) \varphi = f.$$

Für $m > n$ existiert in der oberen ϱ-Halbebene eine in $\mathfrak{H}$ definierte Inverse, in der unteren Halbebene nur eine im Raume $\mathfrak{H} - \mathfrak{B}$ definierte Inverse.

2. Im folgenden werde die Inverse für den Fall $m = n$ untersucht. Für f aus einem Symmetriebereich $\mathfrak{S}$ sei[15]):

$$\{(A_\mathfrak{S} + \lambda) + i\varkappa\} f = Tf \quad \text{bzw.} \quad \{(A_\mathfrak{S} + \lambda) - i\varkappa\} f = T^* f.$$

$(T T^*) f = T(T^* f)$ ist dann in einer Teilmenge $\mathfrak{S}_1$ von $\mathfrak{S}$ definiert, nämlich für solche f aus $\mathfrak{S}$, für welche $T^* f$ wieder in $\mathfrak{S}$ liegt. Es ist:

$$T T^* f = (A_\mathfrak{S} + \lambda) \{(A_\mathfrak{S} + \lambda) f\} + \varkappa^2 f = Hf.$$

Für alle f aus $\mathfrak{S}_1$ folgt hieraus $|(Hf, f)| > \varkappa^2 \|f\|^2$; da nämlich für f aus $\mathfrak{S}_1$ $(A_\mathfrak{S} + \lambda) f + i\varkappa f$ zu $\mathfrak{S}$ gehört, ist auch $g = (A_\mathfrak{S} + \lambda) f$ ein Element von $\mathfrak{S}$ und folglich gilt:

$$\{(A_\mathfrak{S} + \lambda) g, f\} = \{g, (A_\mathfrak{S} + \lambda) f\} = \|(A_\mathfrak{S} + \lambda) f\|^2 > 0.$$

---

[15]) Hellinger, Journ. f. Math. 136 (1909), S. 210—261, Kap. III, § 8.

Die Gleichung $T\,T^*f = \varphi$ hat ferner für jedes φ aus $\mathfrak{H}$ eine Lösung f in $\mathfrak{S}_1$: $f = T^{*-1}\,T^{-1}\,\varphi$; es ist also insbesondere:

$$H^{-1}\,\varphi = (T\,T^*)^{-1}\,\varphi = T^{*-1}\,T^{-1}\,\varphi.$$

Hieraus folgt $|(H^{-1}\,\varphi, \varphi)| \leqq \frac{1}{\varkappa^2}\,(\varphi, \varphi)$; sei nämlich $H\,f = \varphi$, $f = H^{-1}\,\varphi$, dann folgt zunächst: $(f, H\,f) = (H^{-1}\,\varphi, \varphi)$, also $|(H^{-1}\,\varphi, \varphi)| > \varkappa^2\,(f, f) = \varkappa^2\,\|H^{-1}\,\varphi\|^2$; andererseits aber ist $|(H^{-1}\,\varphi, \varphi)|^2 \leqq \|H^{-1}\,\varphi\|^2 \cdot \|\varphi\|^2$, also: $|(H^{-1}\,\varphi, \varphi)| \leqq \frac{1}{\varkappa^2}\,\|\varphi\|^2$. Es ist nun weiter ($z$ beliebig, nicht reell):

$$\|(A_{\mathfrak{S}} + z)^{-1}\,\varphi\|^2 = \{T^{-1}\,\varphi, T^{-1}\,\varphi\} = \{T^{*-1}\,T^{-1}\,\varphi, \varphi\} = \{H^{-1}\,\varphi, \varphi\}$$
$$\leqq \frac{1}{\varkappa^2}\,\|\varphi\|^2,$$

also

$$\|(A_{\mathfrak{S}} + z)^{-1}\,\varphi\| \leqq \frac{1}{\varkappa}\,\|\varphi\|, \tag{39}$$

d. h. der inverse Operator (38) ist beschränkt; in bezug auf das zugrundegelegte Koordinatensystem ist also dem inversen Operator eine beschränkte Matrix — die „*Reziproke von* $A_{\mathfrak{S}}$“ — zugeordnet.

3. Im Anschluß hieran läßt sich wie bei beschränkten Matrizen die Analytizität der Reziproken beweisen. Es sei $z_0 = \lambda_0 + i\varkappa_0$, $\varkappa_0 \neq 0$, dann ist $(A_{\mathfrak{S}} + z)\,g = (A + z_0)\,(1 - [z_0 - z]\,[A_{\mathfrak{S}} + z_0]^{-1})\,g = \varphi$ für g in $\mathfrak{S}$, also:

$$(A_{\mathfrak{S}} + z)^{-1}\,\varphi = (1 - [z_0 - z]\,[A_{\mathfrak{S}} + z_0]^{-1})^{-1}\,(A_{\mathfrak{S}} + z_0)^{-1}\,\varphi,$$

und das läßt sich in eine Neumannsche Reihe entwickeln:

$$(A_{\mathfrak{S}} + z)^{-1}\,\varphi = \sum_{\alpha=1}^{\infty} (z_0 - z)^{\alpha}\,(A_{\mathfrak{S}} + z_0)^{-1-\alpha}\,\varphi,$$

welche für $\|(z - z_0)\,(A_{\mathfrak{S}} + z_0)^{-1}\,\varphi\| \leqq \frac{1}{\varkappa_0}\,|z - z_0|\,\|\varphi\| < 1$, d. h. für $|z - z_0|\,\|\varphi\| < \varkappa_0$ konvergiert; insbesondere ist dann:

$$\{(A_{\mathfrak{S}} + z)^{-1}\,\varphi, g\} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} (z_0 - z)^{\alpha}\,\{(A_{\mathfrak{S}} + z_0)^{-1-\alpha}\,\varphi, g\}, \tag{39'}$$

d. h. also die Koeffizienten der Reziproken $(A_{\mathfrak{S}} + z)^{-1}$ sind in der oberen bzw. unteren Halbebene regulär analytische Funktionen.

4. Es gibt n von ϱ bzw. $\bar{\varrho}$ abhängige Lösungen von (11) bzw. (12), die für jedes ϱ bzw. $\bar{\varrho}$ linear unabhängig sind und deren Komponenten außerdem analytisch von ϱ bzw. $\bar{\varrho}$ abhängen. Es sei $(A + \varrho^*)\,\varphi'_\nu = 0$ bzw. $(A + \bar{\varrho}^*)\,\varphi_\nu = 0$ ($\nu = 1, \ldots, n$; φ_ν bzw. φ'_ν orthogonal und normiert); in einer gegebenen Menge $\mathfrak{S}$ sei dann $f'_\nu(\varrho) = (A_{\mathfrak{S}} + \varrho)^{-1}\,\varphi'_\nu$ bzw. $f_\nu(\bar{\varrho}) = (A_{\mathfrak{S}} + \bar{\varrho})^{-1}\,\varphi_\nu$. Nach (39') sind die $f'_\nu(\varrho)$ bzw. die $f_\nu(\bar{\varrho})$ regulär analytisch in ϱ bzw. $\bar{\varrho}$. Sie sind außerdem linear unabhängig für jedes ϱ;

sei nämlich $\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu' f_\nu'(\varrho_1) = 0$ bzw. $\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu f_\nu(\bar{\varrho}_1) = 0$, dann wäre wegen $(A + \varrho) f_\nu'(\varrho) = \varphi_\nu'$ bzw. $(A + \bar{\varrho}) f_\nu(\bar{\varrho}) = \varphi_\nu$ auch $\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu' \varphi_\nu' = 0$ bzw. $\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu = 0$, was der Voraussetzung widerspricht. Aus $(A + \varrho)\varphi_\nu' = (\varrho - \varrho^*)\varphi_\nu'$ und $(\varrho - \varrho^*)(A + \varrho) f_\nu'(\varrho) = (\varrho - \varrho^*)\varphi_\nu'$ folgt nun weiter:

(40) $\{A + \varrho\}\{\varphi_\nu' - (\varrho - \varrho^*) f_\nu'(\varrho)\} = 0, \quad \{A + \bar{\varrho}\}\{\varphi_\nu - (\bar{\varrho} - \bar{\varrho}^*) f_\nu(\bar{\varrho})\} = 0.$

Die Funktionen

(41) $\psi_\nu'(\varrho) = \varphi_\nu' - (\varrho - \varrho^*) f_\nu'(\varrho), \quad \psi_\nu(\bar{\varrho}) = \varphi_\nu - (\bar{\varrho} - \bar{\varrho}^*) f_\nu(\varrho)$

sind also analytisch von ϱ bzw. $\bar{\varrho}$ abhängige Lösungen der homogenen Gleichungen; sie sind ferner linear unabhängig; aus $\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu' \psi_\nu'(\varrho) = 0$ folgt nämlich:

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu' \varphi_\nu' = (\varrho - \varrho^*) \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu' f_\nu'(\varrho).$$

Diese Relation kann aber nicht bestehen, denn sämtliche $f_\nu'(\varrho)$ gehören zu $\mathfrak{S}$, welchem die φ_ν' nicht angehören. Analoges gilt für $\psi_\nu(\bar{\varrho})$.

Für einen reellen Parameterwert λ gehören etwa vorhandene Lösungen der homogenen Gleichungen der Nullklasse und folglich gewissen vollständigen Symmetriebereichen an; insbesondere bildet die Gesamtheit der λ-Werte, zu welchen es einem bestimmten Symmetriebereich $\mathfrak{S}$ angehörige Lösungen gibt, die Eigenwerte, die zugehörigen Lösungen selbst die Eigenvektoren des durch A *in* $\mathfrak{S}$ definierten Operators. Es läßt sich zeigen, daß die homogenen Gleichungen einer jeden Matrix, für welche $m = n \neq 0$ ist und welche außerdem in irgendeinem $\mathfrak{S}$ ein *vollständiges* System von Eigenvektoren mit sich *nirgends* häufenden Eigenwerten haben, Lösungen besitzen, deren Komponenten *ganze* Funktionen sind. Seien nämlich $\varphi_\nu = \{u_{1\nu}, \ldots\}$ die Eigenvektoren von A in $\mathfrak{S}$ zu den Eigenwerten $\lambda_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$, dann hat der durch $A_\mathfrak{S}$ definierte Operator in bezug auf das Koordinatensystem $\{\varphi_\nu\}$ die Gestalt $z_p = \lambda_p y_p \{p = 1, \ldots\}$.

Indem man die Inverse $y_p = \frac{z_p}{\lambda_p + z}$ von $A_\mathfrak{S} + z$ vermöge

$$y_p = \sum_{q=1}^{\infty} u_{qp} y_q' \quad \text{bzw.} \quad z_p = \sum_{q=1}^{\infty} u_{sp} z_s'$$

im alten Koordinatensystem darstellt, erhält man als Koeffizienten der zugehörigen Reziproken:

(42) $$r_{qs}(z) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{u_{qp}\, \bar{u}_{sp}}{\lambda_p + z}.$$

Die Lösungen $\psi_\nu(z)$ bzw. $\psi_\nu'(z)$ haben demnach als Komponenten meromorphe Funktionen mit sich *nirgends* häufenden Polen; es gibt daher

ganze Funktionen $c_1(z)$ bzw. $c_2(z)$, so daß $c_1(z)\,\psi_\nu(z)$ bzw. $c_2(z)\,\psi'_\nu(z)$ linear unabhängige Lösungen mit ganzen Funktionen als Komponenten sind.

Satz 4: *Sei $m = n$; durch die Beschränkung des Definitionsbereiches von A auf einen vollständigen Symmetriebereich $\mathfrak{S}$ sind dann die Gleichungen $(A + z)\,f = \varphi$ für alle φ aus $\mathfrak{H}$ eindeutig lösbar für nichtreelle z; es existiert eine beschränkte Inverse $(A_{\mathfrak{S}} + z)^{-1}\,\varphi = f$, und die Elemente der zugehörigen Matrix — der „Reziproken von A in $\mathfrak{S}$" —, sind für nichtreelle z analytische Funktionen; ferner hat $(A + z)\,f = 0$ n linear unabhängige, für komplexe z analytische Lösungen.*

II. Teil.

Berechnung der Inversen in einem Symmetriebereich.

§ 1.

Hilfssätze.

1. Es sei $m = n$; zu $(A_{\mathfrak{S}} + z)\,f = g$, d. h. zu $\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}\,x_q - z\,x_p = y_p$ ($x_1, x_2, \ldots$ in $\mathfrak{S}$) sei $x_q = \sum_{\nu=1}^{\infty} r_{q\nu}(z)\,y_\nu$ der inverse Operator. Die $r_{q\nu}(z)$ genügen also dann den Gleichungen:

$$\sum_{q=1}^{\infty} \{a_{pq} + z\,e_{pq}\}\,r_{q\nu} = e_{p\nu}; \tag{43}$$

bei konstantem ν stellt (43) ein inhomogenes Gleichungssystem für den Vektor $\{r_{1\nu}, r_{2\nu}, \ldots\}$ dar. Die Vektoren $\{r_{1\nu}, r_{2\nu}, \ldots\}$ gehören zu $\mathfrak{S}$ für jedes komplexe z, d. h. damit ein Lösungssystem $\{r_{q\nu}(z)\}$ von (43) *die Reziproke von A in bezug auf ein $\mathfrak{S}$* darstellt, ist notwendig (bei festem z):

a) $\{r_{1\nu}, r_{2\nu}, \ldots\}$ stehen zueinander in Symmetrie in bezug auf A,

b) $\{r_{1\nu}, r_{2\nu}, \ldots\}$ gehören zu $\mathfrak{D}$.

Wenn umgekehrt für ein festes komplexes z ein Lösungssystem $\{r_{p\nu}(z)\}$ von (43) die Bedingungen a) und b) erfüllt, gehören die Vektoren $\{r_{1\nu}(z), r_{2\nu}(z), \ldots\}$ einer bestimmten Menge $\mathfrak{S}$ an. Da es aber nach I, § 4, 1 keine weiteren, $\mathfrak{S}$ angehörigen Lösungen von (43) gibt, umgekehrt aber die Elemente der zu $\mathfrak{S}$ gehörigen Reziproken von A (43) genügen, stellt das Lösungssystem $\{r_{p\nu}(z)\}$ gerade die Reziproke von A *in bezug auf* $\mathfrak{S}$ dar; d. h. aber die Bedingungen a) und b) sind auch hinreichend. Unter Berücksichtigung von (43) besagen a) und b)[16]:

$$(z - \bar{z}) \sum_{p=1}^{\infty} \overline{r_{pu}(z)}\,r_{p\nu}(z) = \overline{r_{\nu\mu}(z)} - r_{u\nu}(z). \tag{44}$$

[16]) Für beschränkte Matrizen ist diese Formel schon bei Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen S. 140 bewiesen.

2. Es seien nun $\{r_{p\nu}(z_1)\}$ und $\{r_{p\nu}(z_2)\}$ zwei (43) genügende Reziprokensysteme; damit sie Reziproken zum selben Symmetriebereich darstellen, ist notwendig, daß $\{r_{1\nu}(z_1), r_{2\nu}(z_1) \ldots\}$ bzw. $\{r_{1\nu}(z_2), r_{2\nu}(z_2) \ldots\}$ in bezug auf A in Symmetrie stehen, d. h.

$$(45) \qquad (z_1 - \bar{z}_2) \sum_{p=1}^{\infty} \overline{r_{pu}(z_2)}\, r_{p\nu}(z_1) = \overline{r_{\nu\mu}(z_2)} - r_{u\nu}(z_1).$$

Daß (45) auch hinreichend ist, läßt sich folgendermaßen beweisen:

$x_p^{(1)} = \sum_{u=1}^{\infty} r_{pu}(z_1)\, y_u^{(1)}$ bildet $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{S}_1$ und $x_p^{(2)} = \sum_{u=1}^{\infty} r_{pu}(z_2)\, y_u^{(2)}$ $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{S}_2$ ab.

Damit $\mathfrak{S}_1$ mit $\mathfrak{S}_2$ identisch ist, müssen sämtliche Elemente $\{x_p^{(2)}\}$ mit sämtlichen Elementen $\{x_p^{(1)}\}$ in Symmetrie stehen, d. h.

$$\sum_{p=1}^{\infty} \{ \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} x_q^{(1)} \}\, \bar{x}_p^{(2)} = \sum_{q=1}^{\infty} x_q^{(1)} \{ \sum_{p=1}^{\infty} \bar{a}_{qp}\, \overline{x_p^{(2)}} \}.$$

Nach (45) erhält man hieraus:

$$\sum_{u,\nu=1}^{\infty} y_\nu^{(1)}\, y_u^{(2)} \{(z_1 - \bar{z}_2) \sum_{p=1}^{\infty} r_{p\nu}(z_1)\, \overline{r_{pu}(z_2)} + r_{u\nu}(z_1) - \overline{r_{\nu u}(z_2)}\} = 0.$$

3. Nach (39′) sind die $r_{pq}(\varrho)$ bzw. $r_{pq}(\bar{\varrho})$ analytisch; daß sie Zweige *einer* analytischen Funktion bilden, ist nicht notwendig. Zwischen ihnen besteht folgender Zusammenhang: es seien φ_p die Einheitsvektoren, dann gilt:

$$(46) \qquad r_{pq}(z) = \{(A_{\mathfrak{S}} + z)^{-1} \varphi_p, \varphi_q\} = \{\varphi_p, (A_{\mathfrak{S}} + \bar{z})^{-1} \varphi_q\} = \bar{r}_{qp}(\bar{z}),$$

da der $(A_{\mathfrak{S}} + z)^{-1}$ adjungierte Operator bekanntlich gleich $(A_{\mathfrak{S}} + \bar{z})^{-1}$ ist.

Bei reellen Matrizen läßt sich (46) für zu sich selbst konjugierte Symmetriebereiche in bemerkenswerter Weise vereinfachen; $(A_{\mathfrak{S}} + \bar{z})^{-1} \bar{f}$ liegt stets in $\mathfrak{S}$ und folglich $\overline{(A_{\mathfrak{S}} + \bar{z})^{-1} \bar{f}}$ stets in $\bar{\mathfrak{S}}$; auf Grund von

$$(A + \bar{z})(A_{\mathfrak{S}} + \bar{z})^{-1} \bar{f} = \bar{f}$$

folgt sofort

$$(A + z)\overline{(A_{\mathfrak{S}} + \bar{z})^{-1} \bar{f}} = f \quad \text{oder} \quad (A_{\bar{\mathfrak{S}}} + z)^{-1} f = \overline{(A_{\mathfrak{S}} + \bar{z})^{-1} \bar{f}}.$$

Das besagt: die Matrix $\{\bar{r}_{pq}(\bar{z})\}$, nach (46) also die an der Hauptdiagonalen gespiegelte Matrix $\{r_{pq}(z)\}$, ist die Reziproke in $\bar{\mathfrak{S}}$ zum Parameterwert z, d. h. für $\mathfrak{S} = \bar{\mathfrak{S}}$ gilt speziell:

$$(48) \qquad \overline{r_{pq}(\bar{z})} = r_{pq}(z) = r_{qp}(z);$$

also für selbstkonjugierte Symmetriebereiche ist die Reziproke symmetrisch.

4. Definition: *Die l-te „abgeschnittene Matrix“ $\{a_{pq}\}_l$ von $\{a_{pq}\}$ sei die Matrix, die man erhält, wenn man von der „Ausgangsmatrix“ $\{a_{pq}\}$ die ersten l Zeilen und Kolonnen wegläßt.*

Es läßt sich beweisen, daß der $\{a_{\nu\varrho}\}_l$ zugeordnete Operator A^l dieselbe Anzahl von Lösungen zum Parameterwert ϱ bzw. $\bar{\varrho}$ hat wie A. Es sei nämlich $f = \{x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots\}$ aus $\mathfrak{H}$, dann sei $f_0 = \{0, \ldots, 0, x_{l+1}, \ldots\}$ und $\tilde{f} = \{x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots\}$; die Elemente $\tilde{f}$ bilden dann einen Hilbertschen Raum $\mathfrak{H}^l$, welcher bis auf die Numerierung mit $\mathfrak{H}$ identisch ist. $\mathfrak{H}^l$ ist der zu A^l gehörige Hilbertsche Raum, $\mathfrak{D}^l$, $\mathfrak{A}^l$, $\mathfrak{E}_\varrho^l$ und $\mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}^l$ seien die nach § 2 zu A^l gehörigen Mengen. Sei f aus $\mathfrak{D}$, dann gilt wegen $\{A f_0, f_0\} = \{A^l \tilde{f}, \tilde{f}\}$:

$$\mathfrak{Im}\{A f_0, f_0\} = \mathfrak{Im}\{A^l \tilde{f}, \tilde{f}\},$$

d. h. die Klassenzugehörigkeit von $\tilde{f}$ in bezug auf A^l und von f^0 in bezug auf A ist dieselbe, d. h. nach Teil I, § 3: Die Dimension von $\mathfrak{H}^l - \mathfrak{E}_\varrho^l$ bzw. $\mathfrak{H}^l - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}^l$ ist kleiner oder gleich der Dimension von $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho$ bzw. $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}$. Andererseits ist $f_0 = h + f$, wobei h als finites Element dem symmetrischen Grundbereich von A angehört; es ist also:

$$\{A f_0, f_0\} = \{A h + A f, h + f\} = \{A h, h\} + \{A f, f\} + \{A h, f\} + \{A f, h\};$$

wegen $\{A f, h\} = \overline{\{A h, f\}}$ und da $\{A h, h\}$ reell ist, gilt also:

$$\mathfrak{Im}\{A f_0, f_0\} = \mathfrak{Im}\{A f, f\} = \mathfrak{Im}\{A^l \tilde{f}, \tilde{f}\}, \tag{49}$$

d. h. die Klassenzugehörigkeit von f in bezug auf A ist ebenfalls dieselbe wie die von $\tilde{f}$ in bezug auf A^l. Es gehöre f_ν (f_ν linear unabhängig für $\nu = 1, \ldots, n$) zu $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho$, dann gehört also $\tilde{f}_\nu$ zu $\mathfrak{U}^+$ von A^l, also:

$$\tilde{f}_\nu = f_{\mathfrak{A}^l}^{(\nu)} + f_{\mathfrak{H}^l + \mathfrak{E}_\varrho^l}^{(\nu)} + f_{\mathfrak{H}^l - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}^l} \quad \left(\| f_{\mathfrak{H}^l - \mathfrak{E}_\varrho^l}^{(\nu)} \| > \| f_{\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}^l}^{(\nu)} \|\right).$$

Angenommen $\mathfrak{H}^l - \mathfrak{E}_\varrho^l$ habe eine geringere Dimension als $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho$, dann gäbe es eine lineare Verbindung $\tilde{f} = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \tilde{f}_\nu$, so daß $\tilde{f} = f_{\mathfrak{A}^l} + f_{\mathfrak{H}^l + \mathfrak{E}_\varrho^l}$ nicht mehr $\mathfrak{U}^+$ angehört. $f = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu f_\nu$ müßte dann nach (49) ebenfalls ein Element sein, welches nicht mehr $\mathfrak{U}^+$ angehört; das ist aber ein Widerspruch, da mit f_ν auch $\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu f_\nu$ zu $\mathfrak{H} - \mathfrak{E}_\varrho$, also zu $\mathfrak{U}^+$ gehört. Analog beweist man, daß $\mathfrak{H}^l - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}^l$ mindestens die Dimension von m hat. Die Dimension von $\mathfrak{H}^l - \mathfrak{E}_\varrho^l$ bzw. $\mathfrak{H}^l - \mathfrak{E}_{\bar{\varrho}}^l$ ist also n bzw. m.

Satz 5: *Ein* (43) *und* (44), (45) *genügendes System* $\{r_{\nu\varrho}(z)\}$ *stellt die Reziproke in einem Symmetriebereich dar. Für ihre Elemente gilt* (46), *bei reellen Matrizen ist die Reziproke in den selbstkonjugierten Mengen* $\mathfrak{S}_\tau$ *symmetrisch. Die homogenen Gleichungen der abgeschnittenen Matrizen haben dieselbe Zahl der linear unabhängigen Lösungen wie die Ausgangsmatrix.*

§ 2.

Methode zur Berechnung der Reziproken.

1. Im folgenden sollen stets nur *reelle Matrizen* behandelt werden. Es sei $\psi'(\varrho)$ eine nach (40) gebildete Lösung von A^l, also $(A^l + \varrho)\,\psi'(\varrho) = 0$; dann kann man wegen der Realität von A^l eine Lösung $S_l = \{s_{1l}(z), s_{2l}(z), \ldots\}$ von $(A^l + z)\,S_l(z) = 0$ für komplexe z so definieren:

$$(50)\quad S_l(z) = \begin{cases} \psi'(\varrho) & \text{für } \Im z > 0,\ z = \varrho \\ \overline{\psi'(\varrho)} & \text{für } \Im z < 0,\ z = \bar{\varrho} \end{cases} \qquad S_l(z) = \overline{S_l(\bar{z})}\ \ (l = 1, 2, \ldots).$$

Die $s_{ik}(\varrho)$ bzw. $s_{ik}(\bar{\varrho})$ sind *im Komplexen* analytisch. *Eine spezielle Lösung* $(\tilde{r}'_{1\nu}(z), \tilde{r}'_{2\nu}(z), \ldots)$ *von* (43) (ν fest, $p = 1, 2, \ldots$) kann man durch folgenden Ansatz [17]) definieren:

$$(51)\qquad \tilde{r}_{\mu\nu}(z) = \begin{cases} 0 & \mu = 1, \\ \sum\limits_{i=1}^{\mu-1} c_i^{(\nu)}\, s_{\mu-i,i}(z) & \mu = 2, \ldots, \nu, \\ \sum\limits_{i=1}^{\nu} c_i^{(\nu)}\, s_{\mu-i,i}(z) & \mu = \nu+1, \ldots. \end{cases}$$

Ist ein Vektor S'_l durch $x_1 = 0, \ldots, x_l = 0, x_{l+1} = s_{1l}, x_{l+2} = s_{2l}, \ldots$ erklärt, dann gilt $\sum\limits_{q=1}^{\infty} \{a_{pq} + z e_{pq}\}\, x_q = 0$ für $p = l+1, l+2, \ldots$, da S_l Lösung der l-ten abgeschnittenen Matrix ist. Sind also die $c_l^{(\nu)}$ $(l = 1, \ldots, \nu)$ willkürliche Zahlen und $S' = \sum\limits_{l=1}^{\nu} c_l^{(\nu)} S'_l$, dann erfüllen die Koordinaten von S' die Gleichungen $\sum\limits_{q=1}^{\infty} \{a_{pq} + z e_{pq}\}\, x_q = 0$ für $p = \nu+1, \ldots$, d. h. S' befriedigt (43) bei festen ν für $p = \nu+1, \ldots$. Man kann nun versuchen, $c_l^{(\nu)}$ so als Funktionen von z zu bestimmen, daß auch die ersten ν Gleichungen erfüllt sind. Die ersten ν Gleichungen von (43) liefern unter Einsatz von (51) folgendes Gleichungssystem:

$$(52)\qquad \sum_{p=\mu}^{\nu} c_p^{(\nu)} \sum_{q=p+1}^{\infty} a_{\mu q}\, s_{q-p,p} = e_{\mu\nu} \qquad \{\mu = 1, 2, \ldots, \nu\}.$$

Matrizen, für die $\{s_{1l}, s_{2l}, \ldots\}$ so wählbar sind, daß *keiner der in der Diagonale stehenden Koeffizienten* verschwindet:

$$\sum_{q=u+1}^{\infty} a_{\mu q}\, s_{q-\mu,\mu} \neq 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots),$$

d. h. für die alle Gleichungssysteme (52) eindeutig auflösbar sind, sollen „*natürliche Matrizen*“, *kurz N-Matrizen* genannt werden. Für die

[17]) Vgl. Hellinger[4]) S. 20, Formel (4b).

Lösungen $c_\nu^{(\mu)}(z)$ von (52) gilt auf Grund von (50) und der Realität von A $c_\nu^{(u)}(z) = \overline{c_\nu^{(\mu)}(\bar{z})}$ d. h.:

$$\tilde{r}'_{p\nu}(z) = \overline{\tilde{r}'_{p\nu}(\bar{z})}. \tag{53}$$

Wie später gezeigt wird, sind *allgemeine J-Formen* unter einer gewissen Einschränkung N-Matrizen. Matrizen, für welche bei einem bestimmten μ $k_{q-1,q} = 0$ ist für $q = \mu, \ldots,$ sind keine N-Matrizen. Für N-Matrizen gibt es also eine spezielle (53) genügende Lösung der Gestalt (51) für alle komplexen z mit Ausnahme der abzählbar vielen komplexen Nullstellen von $\sum_{q=\mu+1}^{\infty} a_{u\,q}\, s_{q-u,u}$ $(\mu = 1, 2 \ldots)$.

2. Man erhält die allgemeine Lösung, indem man zur speziellen Lösung eine allgemeine Lösung der homogenen Gleichung addiert. Zunächst sollen geeignete Lösungen $\chi_\nu(z)\,(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ der homogenen Gleichungen $(A + z)\,\chi_\nu(z) = 0$ konstruiert werden. Seien $\psi'_\nu(\varrho)$ die nach (40) gebildeten Lösungen von $(A + \varrho)\,f = 0$, dann kann man in Analogie zu (50) $\chi_\nu(z)$ so definieren:

$$\chi_\nu(z) = \begin{cases} \psi'_\nu(\varrho) & \text{für } \mathfrak{Im}\, z > 0,\ z = \varrho \\ \overline{\psi'_\nu(\varrho)} & \text{für } \mathfrak{Im}\, z < 0,\ z = \bar{\varrho} \end{cases} \qquad \chi_\nu(z) = \overline{\chi_\nu(\bar{z})} \tag{54}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Man kann weiter immer annehmen, daß die n-ten Abschnittsvektoren $\varphi_\nu'^{(n)}$ von $\varphi'_\nu (\nu = 1, \ldots, n)$ linear voneinander unabhängig sind; nach Voraussetzung sind nämlich $\varphi'_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \ldots\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ linear unabhängig, man kann also hieraus immer n linear unabhängige n-dimensionale Vektoren $f_i = \{x_{i\mu_1}, x_{i\mu_2}, \ldots x_{i\mu_n}\}$ $(\mu_i \neq \mu_k$ für $i \neq k)$ auswählen und diese durch Zeilen- und Kolonnenvertauschung der Matrix zu Abschnittsvektoren machen. Wegen $\psi'_\nu(\varrho^*) = \varphi'_\nu$ sind dann auch die n-ten Abschnittsvektoren von $\psi'_\nu(\varrho)$ und damit auch von $\chi_\nu(\varrho)$ mit Ausnahme einer nur an der reellen Achse sich häufenden Menge komplexer Zahlen linear unabhängig. Aus den $\chi_\nu(z)$ kann man demnach n linear unabhängige Lösungen $\{\pi_1^{(s)}(z), \pi_2^{(s)}(z), \ldots\}$ kombinieren, für welche $\pi_h^{(s)}(z) = e_{hs}$ $(s, h = 1, \ldots, n)$ gilt und die $\pi_h^{(s)}(z)$ abgesehen von Stellen, die sich *nur an der reellen Achse* häufen, regulär analytisch sind. Es gilt dann wieder, wie man sofort einsieht:

$$\pi_h^{(s)}(z) = \overline{\pi_h^{(s)}(\bar{z})}. \tag{55}$$

Man kann nun die spezielle Lösung (51) vereinfachen, indem man in ihr die ersten n Koordinaten zum Verschwinden bringt durch Subtraktion von $\tilde{r}'_{2\nu}\pi_h^{(1)} + \ldots + \tilde{r}'_{n\nu}\pi_h^{(n)}$ von der h-ten Gleichung von (51) für $h = 1, 2, \ldots$. Die so entstehende spezielle Lösung sei:

$$\tilde{r}_{1\nu} = 0, \ldots, \tilde{r}_{n\nu} = 0,\ \tilde{r}_{n+1\,\nu} \neq 0, \ldots (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{56}$$

Wegen (53) und (55) gilt $\tilde{r}_{\nu u}(z) = \overline{\tilde{r}_{\mu}(\bar{z})}$. *Die allgemeine Lösung* von (43) für z außerhalb der singulären Punkte lautet:

$$(57)\quad r_{q\nu}(z) = r_{1\nu}(z)\,\pi_q^{(1)}(z) + r_{2\nu}(z)\,\pi_q^{(2)}(z) + \ldots + r_{n\nu}(z)\,\pi_q^{(n)}(z) + \tilde{r}_{q\nu}(z).$$

Damit die $r_{q\nu}(z)$ Elemente einer Reziproken sind, ist (46) notwendig, also:

$$(58)\quad r_{u\nu}(z) = \bar{r}_{\nu\mu}(\bar{z}) = \overline{r_{1u}(\bar{z})}\pi_\nu^{(1)}(z) + \overline{r_{2u}(\bar{z})}\pi_\nu^{(2)}(z) + \ldots + \overline{r_{nu}(z)}\pi_\nu^{(n)}(z) + \tilde{r}_{\nu\mu}(z) \qquad (\mu = 1, \ldots, n),$$

für $\nu = 1, 2, 3, \ldots, n$ also speziell:

$$(59)\qquad r_{u1}(z) = \overline{r_{1u}(\bar{z})}, \ldots, r_{un}(z) = \overline{r_{nu}(\bar{z})};$$

hiermit läßt sich (58) auch so schreiben:

$$(60)\quad r_{u\nu}(z) = r_{u1}(z)\,\pi_\nu^{(1)}(z) + r_{u2}(z)\,\pi_\nu^{(2)}(z) + \ldots + r_{un}(z)\,\pi_\nu^{(n)}(z) + \tilde{r}_{\nu\mu}(z) \qquad (\mu = 1, \ldots, n).$$

Durch Einsetzen von (60) in (57) wird:

$$(61)\quad r_{q\nu}(z) = \sum_{i=1}^{n} r_{\nu i}\,\pi_q^{(i)}\,\pi_\nu^{(i)} + \sum_{u=1}^{n=1}\sum_{\sigma=\mu+1}^{n}\{r_{u\sigma}\,\pi_q^{(u)}\,\pi_\nu^{(\sigma)} + r_{\sigma u}\,\pi_\nu^{(\mu)}\,\pi_q^{(\sigma)}\} + \sum_{i=1}^{n}\tilde{r}_{\nu i}\,\pi_q^{(i)} + \tilde{r}_{q\nu}.$$

In (61) *sind demnach sämtliche Reziproken enthalten bei geeigneter Wahl der noch unbestimmten Funktionen* $r_{hs}(z)$ $(s, h = 1, \ldots, n)$; wenn man in (61) $\overline{r_{\nu q}(\bar{z})}$ statt $r_{q\nu}(z)$ bildet, dann gehen wegen (59) die beiden ersten Summen in sich über. Es muß also gelten:

$$(62)\quad \tilde{r}_{\nu 1}\pi_q^{(1)} + \tilde{r}_{\nu 2}\pi_q^{(2)} + \ldots + \tilde{r}_{\nu n}\pi_q^{(n)} + \tilde{r}_{q\nu} = \tilde{r}_{q1}\pi_\nu^{(1)} + \tilde{r}_{q2}\pi_\nu^{(2)} + \ldots + \tilde{r}_{qn}\pi_\nu^{(n)} + \tilde{r}_{\nu q}$$

für eine überall dichte Menge komplexer Zahlen und folglich wegen der Analytizität identisch in z. Unter Verwendung von (62) wird (61) nach (58):

$$(63)\quad r_{q\nu}(z) = \begin{cases} r_{1\nu}(z)\,\pi_q^{(1)}(z) + r_{2\nu}(z)\,\pi_q^{(2)}(z) + \ldots + r_{n\nu}(z)\,\pi_q^{(n)}(z) + \tilde{r}_{q\nu}(z) \\ \qquad (q, \nu = 1, 2, \ldots) \\ \overline{r_{1q}(\bar{z})}\,\pi_\nu^{(1)}(z) + \overline{r_{2q}(\bar{z})}\,\pi_\nu^{(2)}(z) + \ldots + \overline{r_{nq}(\bar{z})}\,\pi_\nu^{(n)}(z) + \tilde{r}_{\nu q}(z) \\ \qquad (q, \nu = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Sei insbesondere $\tilde{r}_{1\nu} = \tilde{r}_{2\nu} = \ldots = \tilde{r}_{\nu+m\,\nu} = 0$, wobei $m \geqq 0$ ist, dann kann man $r_{q\nu}(z)$ auch so schreiben:

$$(64)\quad r_{q\nu}(z) = \begin{cases} r_{1\nu}(z)\,\pi_q^{(1)}(z) + r_{2\nu}(z)\,\pi_q^{(2)}(z) + \ldots + r_{n\nu}(z)\,\pi_q^{(n)}(z) & (q \leqq \nu + m) \\ \overline{r_{1q}(\bar{z})}\,\pi_\nu^{(1)}(z) + \overline{r_{2q}(\bar{z})}\,\pi_\nu^{(2)}(z) + \ldots + \overline{r_{nq}(z)}\,\pi_\nu^{(n)}(z) & (q \geqq \nu + m). \end{cases}$$

3. Zu einem gegebenen vollständigen Symmetriebereich $\mathfrak{S}$ gehört nach (39′) eine im Komplexen analytische Reziproke $\{r'_{q\nu}(z)\}$; indem man die in (60) noch unbestimmten Funktionen $r_{hs} = r'_{hs}$ $(s, h = 1, 2, \ldots, n)$ setzt, sind die analytischen Funktionen (63) in einer im Komplexen überall dichten Punktmenge mit $r'_{q\nu}(z)$ identisch, es gilt also überhaupt $r_{q\nu}(z) = r'_{q\nu}(z)$, d. h. die Reziproke läßt sich überall im Komplexen durch (63) darstellen, oder die Berechnung der Reziproken in einer Menge $\mathfrak{S}$ ist auf die Berechnung ihrer ersten n Spalten bzw. wegen $\overline{r_{1q}(\bar{z})} = r_{q1}(z)$ auf die Berechnung der ersten n Zeilen zurückgeführt, welche ihrerseits wieder nach (60) und (58) durch den n-ten Abschnitt der Reziproken bestimmt sind.

Satz 6: *Die Reziproken natürlicher Matrizen lassen sich in der Gestalt* (63) *durch die Lösungen der abgeschnittenen Matrizen darstellen; insbesondere ist also die Berechnung der Reziproken auf die Berechnung ihres n-ten Abschnitts zurückgeführt*

§ 3.

Berechnung des n-ten Abschnitts der Reziproken bei festem z.

1. Es werde (63) für ein festes komplexes z betrachtet, für welches sämtliche $\pi_u^{(\nu)}$ und $\tilde{r}_{q\nu}$ regulär sind. Unbestimmt sind dann in (63) nach (58) bzw. (60) n^2 komplexe Konstanten, d. h. $2n^2$ reelle Parameter. Damit (63) eine Reziproke darstelle, sind nach (44) notwendig und hinreichend:

$$(44) \qquad (z - z) \sum_p \overline{r_{pu}(z)}\, r_{p\nu}(z) = \overline{r_{\nu u}(z)} - r_{u\nu}(z).$$

Es besagt nämlich (44), daß die ersten n Spalten der Reziproken zu einem Symmetriebereich $\mathfrak{S}$ gehören. Da die Reziproke dieses $\mathfrak{S}$ aber notwendig die Gestalt (63) hat, also durch die ersten n Spalten schon eindeutig bestimmt ist, sind die Gleichungen (44) für $\mu, \nu = 1, \ldots, n$ schon hinreichend, um die Reziproke zu charakterisieren. Das sind also n^2 reelle Gleichungen für die $2n^2$ reellen Konstanten. Diese Gleichungen können sich nicht widersprechen, da N-Matrizen sonst keine Reziproken hätten. Im Raume der $2n^2$ Dimensionen definieren also die Gleichungen (44) eine bestimmte algebraische Mannigfaltigkeit Ω. Zwischen den Punkten P von Ω und den Reziproken der Mengen $\mathfrak{S}$ besteht nach (58) eine eineindeutige Zuordnung und folglich auch zwischen den Punkten P von Ω und den Mengen $\mathfrak{S}$; hieraus folgt, daß zwischen den Punkten P von Ω und den unitären Matrizen ebenfalls eine eineindeutige Zuordnung besteht; da diese nach (32) von n^2 reellen Parametern abhängen, folgt, daß die Reziproken ebenfalls eine n^2-parametrige Schar bilden.

2. Es läßt sich zeigen, in welcher Weise die ersten n die Reziproke bestimmenden Spalten den zugehörigen Symmetriebereich $\mathfrak{S}$ definieren. Nach (21) gilt folgende Darstellung:

$$\{r_{1\nu}, r_{2\nu}, \ldots\} = h_\nu + b_\nu (g_\nu + g'_\nu) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

$$h_\nu \text{ aus } \mathfrak{A}, \quad (A + \bar{z})\, g_\nu = 0, \quad (A + z)\, g'_\nu = 0, \quad \|g_\nu\| = \|g'_\nu\| = 1.$$

Es werde $f_1 = g_1$ und $f'_1 = g'_1$ gesetzt; f_2 sei dann das Perpendikel von g_2 auf f_1, analog f'_2. Die Vereinigungsmenge von $\mathfrak{A}$ mit $\{r_{11}, r_{21}, \ldots\} = h_1 + b_1 (f_1 + f'_1)$ und $\{r_{12}, r_{22}, \ldots\} = h_2 + \tilde{b}_1 (f_1 + f'_1) + \tilde{b}_2 (f_2 + f'_2)$ enthält $f_2 + f'_2$; da es zur Nullklasse gehört, folgt also $\|f_2\| = \|f'_2\|$. f_3 sei weiter das Perpendikel von g_3 auf f_1 und f_2, analog f'_3; es folgt dann wieder $\|f_3\| = \|f'_3\|$ usw. Man erhält je ein Orthogonalsystem $f_1, \ldots, f_\nu, f'_1, \ldots, f'_\nu$ $\nu \leqq n$. Es läßt sich aber zeigen, daß $n = \nu$ sein muß; es sei $\mathfrak{S}' = \{h + \sum_{\mu=1}^{\nu} a_\mu (f_u + f'_\mu)\}$, dann kann $\mathfrak{S}'$ noch jeder Menge $\mathfrak{S}$ einer $(n-\nu)^2$-parametrigen Schar von Mengen $\mathfrak{S}$ angehören; da aber die ersten n Spalten der zu dieser Schar von Mengen $\mathfrak{S}$ gehörigen Reziproken stets der Menge $\mathfrak{S}'$ angehören, also für alle $\mathfrak{S}^\nu$ enthaltenden Mengen $\mathfrak{S}$ fest sind, gibt es, da die Reziproke durch ihre ersten n Spalten bereits bestimmt ist, zu dieser Schar nur eine Reziproke und das ist nur möglich für $\nu = n$, also:

$$\mathfrak{S}^n = \{h + \sum_{\mu=1}^{n} a_\mu (f_u + f'_u)\}. \tag{65}$$

Die Vereinigungsmenge der ersten n Spalten mit $\mathfrak{A}$ definiert also gerade eine Menge $\mathfrak{S}$. Die ersten $\sigma < n$ Spalten der Reziproken definieren demzufolge nach (65) den Symmetriebereich

$$\mathfrak{S}^\sigma = \{h + \sum_{\mu=1}^{\sigma} a_u (f_u + f'_\mu)\}.$$

$\mathfrak{S}^\sigma$ ist nach I § 3 Teilmenge von jedem vollständigen Symmetriebereich einer $(n-\sigma)^2$-parametrigen Schar vollständiger Symmetriebereiche; hält man also in (63) die ersten σ Spalten fest, dann gibt es noch eine $(n-\sigma)^2$-parametrige Schar von Reziproken.

Satz 7: *Bei festem komplexen z läßt sich der n-te Abschnitt der $\mathfrak{S}$ zugehörigen Reziproken einer reellen Matrix abhängig von n^2 reellen Parametern darstellen in Übereinstimmung damit, daß die ersten n Spalten der Reziproken die Menge $\mathfrak{S}$ bereits definieren. Hält man nur σ Spalten fest, dann hängt die zugehörige Teilschar der Reziproken von $(n-\sigma)^2$ Parametern ab, in Übereinstimmung damit, daß die ersten σ Spalten eine Menge $\mathfrak{S}^\sigma$ definieren.*

§ 4.

Anwendung auf J-Formen.

Einer allgemeinen *J-Form mit n Nebendiagonalen:*

$$\sum_{p=n}^{\infty} \{a_p x_p^2 + 2 b_p^{(1)} x_p x_{p+1} + \ldots + 2 b_p^{(n)} x_p x_{p+n}\}$$

ist folgendes Schema von homogenen Gleichungen zugeordnet:

$$\begin{gathered}
(a_1 + z)\,\pi_1 + b_1^{(1)}\,\pi_2 + \ldots + b_1^{(n)}\,\pi_{n-1} = 0; \\
b_1^{(p-1)}\,\pi_1 + \ldots + b_{p-1}^{(1)}\,\pi_{p-1} + (a_p + z)\,\pi_p + b_p^{(1)}\,\pi_{p+1} + \ldots + b_p^{(n)}\,\pi_{p+n} = 0 \\
\text{für } p = 2, \ldots, n+1; \qquad (66) \\
b_{p-n}^{(n)}\,\pi_{p-n} + \ldots + b_{p-1}^{(1)}\,\pi_{p-1} + (a_p + z)\,\pi_p + b_p^{(1)}\,\pi_{p+1} + \ldots + b_p^{(n)}\,\pi_{p+n} = 0 \\
\text{für } p \geqq n+2.
\end{gathered}$$

1. Sämtliche $b_p^{(n)}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ seien von Null verschieden. Dann existieren n linear unabhängige Systeme von Lösungspolynomen von (66); man kann nämlich für $\pi_1(z), \ldots, \pi_n(z)$ willkürliche Konstante wählen, aus der ersten Gleichung von (66) $\pi_{n+1}(z)$ berechnen, aus der zweiten dann $\pi_{n+2}(z)$ usw. Demnach wird:

$$\pi_{n+\nu}(z) = \pi_1\,\pi_{n+\nu-1}^{(1)}(z) + \pi_2\,\pi_{n+\nu-2}^{(2)}(z) + \ldots + \pi_n\,\pi_{n+\nu-n}^{(n)}(z) \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Die $\pi_{n+\nu}^{(\mu)}$ sind Polynome in z. Indem man für $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ die Einheitsvektoren setzt, erhält man die n linear unabhängigen Lösungen:

$$\begin{gathered}
\pi_u^{(\nu)} = e_{\mu\nu}\ (\mu = 1, \ldots, n),\ \pi_{n+1}^{(\nu)}(z),\ \pi_{n+2}^{(\nu)}(z), \ldots \qquad (67) \\
\text{mit } \pi_u^{(\nu)}(z) = \overline{\pi_u^{(\nu)}(\bar{z})} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).
\end{gathered}$$

Dasselbe gilt für die Lösungen der abgeschnittenen Matrizen. Es gibt nun sicher J-Formen, für welche $\sum_{u=1}^{\infty} |\pi_u^{(\nu)}(z)|^2$ für $\nu = 1, \ldots, n$ konvergieren; man braucht nur eine Form zu nehmen, bei welcher nur die n-te Nebendiagonale besetzt ist; diese zerfällt dann in n J-Formen mit einer Nebendiagonale, und diese kann man stets von der zweiten Klasse, d. h. mit konvergenter $\sum_{1}^{\infty} |\pi_p^{(1)}(z)|^2$ annehmen.

2. Von nun an werden nur solche J-Formen betrachtet, für die $\sum_{\mu=1}^{\infty} |\pi_\mu^{(\nu)}(z)|^2$ konvergiert für $\nu = 1, \ldots, n$, dann gilt nach Satz 5 dasselbe für sämtliche Lösungen einer abgeschnittenen Matrix. Unter den Lösungen einer abgeschnittenen Matrix wählt man:

$$s_{1l} = s_{2l} = \ldots = s_{n-1\,l} = 0,\ s_{nl} = 1,\ s_{n+1\,l},\ s_{n+2\,l} \ldots;\ s_{\nu l}(z) = \bar{s}_{\nu l}(\bar{z}).$$

Das Gleichungssystem (52) geht dann über in:

$$(52') \qquad c_u^{(\nu)}\, b_u^{(n)} = e_{\mu\nu} \quad (\mu = 1, \ldots, \nu), \quad c_\nu^{(\nu)} = \frac{1}{b_\nu^{(n)}} \quad (b_u^{(n)} \neq 0).$$

Die spezielle Lösung lautet also:

$$(68) \qquad \tilde{r}_{q,\nu} = \frac{1}{b_\nu^{(n)}}\, s_{q-\nu,\nu} \text{ für } q > \nu; \quad \tilde{r}_{q,\nu} = 0 \text{ für } q \leqq \nu.$$

Die $\tilde{r}_{q,\nu}(z)$ sind ebenso wie $\pi_\mu^{(\nu)}$ ganz rational. Unter Zugrundelegung dieser Lösungen kann man nun (57) bis (64) wiederholen. Insbesondere erhält man für (64), indem man dort wegen (68) $m = n - 1$ setzt:

$$(69) \qquad r_{q,\nu}(z) = \begin{cases} r_{1\nu}(z)\, \pi_q^{(1)}(z) + r_{2\nu}(z)\, \pi_q^{(2)}(z) + \ldots + r_{1\nu}(z)\, \pi_q^{(n)}(z), \\ \qquad\qquad q \leqq \nu + (n-1); \\ \overline{r_{1q}(\bar{z})}\, \pi_\nu^{(1)}(z) + \overline{r_{2q}(\bar{z})}\, \pi_\nu^{(2)}(z) + \ldots + \overline{r_{nq}(\bar{z})}\, \pi_\nu^{(n)}(z), \\ \qquad\qquad q \geqq \nu + (n-1). \end{cases}$$

Die Beziehung (62) nimmt folgende Form an $\left(\frac{1}{b_\nu^{(n)}}\, s_{q-\nu,\nu} = \tilde{s}_{q-\nu,\nu}\right)$:

$$(70) \qquad \begin{aligned} &\tilde{s}_{\nu-11}\, \pi_q^{(1)} + \tilde{s}_{\nu-22}\, \pi_q^{(2)} + \ldots + \tilde{s}_{\nu-nn}\, \pi_q^{(n)} \\ &\quad = \tilde{s}_{q-11}\, \pi_\nu^{(1)} + s_{q-22}\, \pi_\nu^{(2)} + \ldots + \tilde{s}_{q-n}\, \pi_\nu^{(n)} + \tilde{s}_{\nu-q,q}. \end{aligned}$$

Für $n = 1$, d. h. für gewöhnliche nicht zerfallende J-Formen, ergeben sich die bekannten Formeln[18]), wenn man dabei noch beachtet, daß bei gewöhnlichen J-Formen alle Mengen $\mathfrak{S}$ selbstkonjugiert sind und folglich $\bar{r}_{1q}(\bar{z}) = r_{1q}(z)$ gilt, also:

$$(71) \qquad r_{q,\nu} = \begin{cases} r_{1,}\, \pi_q^{(1)} & q \leqq \nu, \qquad r_{1\nu} = r_{11}\, \pi_\nu^{(1)} + s_{\nu+11}, \\ r_{1q}\, \pi_\nu^{(1)} & q \geqq \nu, \qquad \tilde{s}_{\nu-11}\, \pi_q^{(1)} - \tilde{s}_{q-11}\, \pi_\nu^{(1)} = \tilde{s}_{\nu-qq}. \end{cases}$$

III. Teil.

Über die zu einem Symmetriebereich gehörigen Eigenwerte und Eigenvektoren.

§ 1.

Ein Satz über reelle Matrizen.

Satz 8: *Wenn zu $A + i$ in einer bestimmten selbstkonjugierten Menge $\mathfrak{S}_\mathfrak{r}$ eine Reziproke $R(i) = \{r_{pq}\}$ gehört mit konvergenter $\sum_{p,q=1}^{\infty} |r_{pq}|^2$, dann gehört zu diesem $\mathfrak{S}_\mathfrak{r}$ ein vollständiges System von Eigenvektoren*[19]).

[18]) Hellinger [4]) S. 24, Formel (19).

[19]) Vgl. Weyl [5]) S. 220—238.

Beweis: Wenn $f = f^{(1)} + i f^{(2)}$ zu $\mathfrak{S}_\tau$ gehört, dann gehören auch $f^{(1)}$ und $f^{(2)}$ sowie $\bar{f}$ zu diesem $\mathfrak{S}_\tau$. Es sei nun g reell und

$$A(f^{(1)} + i f^{(2)}) + i(f^{(1)} + i f^{(2)}) = g; \tag{72}$$

hieraus folgt

$$A f^{(1)} - f^{(2)} = g, \quad A f^{(2)} + f^{(1)} = 0. \tag{73}$$

Umgekehrt folgt (72) aus (73) für reelle $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ und g. Ferner sei φ_ν ein zu $\mathfrak{S}_\tau$ gehörender Eigenvektor von A, also $A\varphi_\nu = \lambda_\nu \varphi_\nu$; in $\mathfrak{S}_\tau$ kann man die Eigenvektoren stets reell annehmen; setzt man dann $f^{(2)} = \varphi_\nu$, dann kann man g aus (73) berechnen:

$$g = -(1 + \lambda_\nu^2) f^{(2)}. \tag{74}$$

Sei $R(i) = R_1 + i R_2$ (R_1, R_2 und R symmetrisch, $\sum_{p,q=1}^{\infty} |r_{pq}^{(1)}|^2$, $\sum_{p,q=1}^{\infty} |r_{pq}^{(2)}|^2$ existieren) die zu $\varrho = i$ gehörige Reziproke von A in $\mathfrak{S}_\tau$; für reelle g folgt dann aus $f^{(1)} + i f^{(2)} = R_1 g + i R_2 g$:

$$f^{(2)} = R_2 g. \tag{75'}$$

Setzt man also $f^{(2)} = \varphi_\nu$, dann erhält man durch Anwendung von R_2 auf (74):

$$\varphi_\nu = -(1 + \lambda_\nu^2) R_2 \varphi, \quad \text{und daher} \quad \varphi_\nu = (\lambda_\nu + i) R \varphi_\nu, \tag{75}$$

d. h. alle Eigenvektoren φ_ν von A in $\mathfrak{S}_\tau$ sind zugleich auch Eigenvektoren von

$$f = \sigma R_2 f \quad \text{mit} \quad \sigma = -(1 + \lambda_\nu^2). \tag{76}$$

Es sei umgekehrt f ein Eigenvektor von (76); f kann reell angenommen werden. Bildet man $g = \sigma R_1 f$, dann folgt $g + i f = \sigma R f$, d. h. $g + i f$ gehört zu $\mathfrak{S}_\tau$ und folglich auch f und g; ferner folgt:

$$A(g + i f) + i(g + i f) = \sigma f,$$

woraus sich die (73) analogen Formeln ergeben:

$$A g = (\sigma + 1) f, \quad A f = -g; \tag{77}$$

umgekehrt folgt für (77) genügende, $\mathfrak{S}_\tau$ angehörende, reelle f und g: $g + i f = \sigma R f$. Es gehört nun $-g - i\sqrt{1+\sigma}\, f = h$ mit f und g zu $\mathfrak{S}_\tau$, und mit Hilfe von (77) beweist man:

$$A h + i\sqrt{1+\sigma}\, h = -A g - i\sqrt{1+\sigma}\, A f - i\sqrt{1+\sigma}\, g + (1+\sigma) f = 0. \tag{78}$$

Da aber h zu $\mathfrak{S}_\tau$ gehört, muß $i\sqrt{1+\sigma}$ reell sein, d. h. $\sigma \leqq -1$. Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden: $\sigma < -1$ und $\sigma = -1$.

Für $\sigma < -1$ genügen gemäß (77) und (78) die beiden Vektoren

$$h_1 = -g - \sqrt{|\sigma| - 1}\, f \quad \text{und} \quad h_2 = -g + \sqrt{|\sigma| - 1}\, f$$

den beiden Gleichungen

$$A h_1 + \sqrt{|\sigma| - 1}\, h_1 = 0 \quad \text{bzw.} \quad A h_2 - \sqrt{|\sigma| - 1}\, h_2 = 0,$$

d. h. h_1 und h_2 sind Eigenvektoren von A in $\mathfrak{S}_\tau$ und es ist:

$$h_2 - h_1 = 2\sqrt{|\sigma| - 1}\, f;$$

für $\sigma < -1$ läßt sich also jeder Eigenvektor von (76) zusammensetzen aus zwei Eigenvektoren von A *in* $\mathfrak{S}_\tau$.

Für $\sigma = -1$ folgt aus (77):

$$A g = 0, \qquad A f = -g. \tag{79}$$

Wenn A *in* $\mathfrak{S}_\tau$ $\lambda = 0$ nicht zum Eigenwert hat, ist $g \equiv 0$ und folglich auch $f \equiv 0$, d. h. $\sigma = -1$ ist kein Eigenwert. Wenn dagegen $\lambda = 0$ Eigenwert zu den Eigenvektoren k_ν ($\{k_\nu, k_u\} = e_{\mu\nu}$) von A *in* $\mathfrak{S}_\tau$ ist, gilt zunächst nach (79):

$$g = -\sum_\nu c_\nu k_\nu \qquad A f = \sum_\nu c_\nu k_\nu; \tag{79a}$$

aus $(A + i) f = i f + \sum c_\nu k_\nu$ folgt dann wegen $\sum_\nu c_\nu k_\nu = i R\left(\sum_\nu c_\nu k_\nu\right)$, und da f zu $\mathfrak{S}_\tau$ gehört:

$$f = R\left(i f + \sum c_\nu k_\nu\right) = i R f - i \sum c_\nu k_\nu. \tag{80}$$

Indem man mit k_u multipliziert und beachtet, daß wegen der Realität von f und g und der Vertauschbarkeit der Summation bei beschränkten Matrizen

$$\{R f, k_\mu\} = \{R k_u, f\} = -i\{k_\mu, f\} = -i\{f, k_\mu\}$$

ist, erhält man aus (80) durch Multiplikation mit k_μ: $c_u \|k_u\| = 0$, d. h. $c_u = 0$; in (79a) ist $A f = 0$ und folglich $f = \sum b_u k_\mu$.

Alle Eigenlösungen von (76) sind also lineare Verbindungen von Eigenlösungen von A in $\mathfrak{S}_\tau$. Da (76) wegen der Symmetrie und der Vollstetigkeit ein vollständiges Orthogonalsystem zu Eigenvektoren hat, hat also auch A in $\mathfrak{S}_\tau$ ein vollständiges Orthogonalsystem zu Eigenvektoren.

§ 2.

Anwendung auf J-Formen.

Für die Reziproke der in II § 4 behandelten J-Formen gilt (J in $\mathfrak{S}_\tau$):

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} |r_{pq}|^2 = \sum_{q=1}^{\infty} \Big\{ \sum_{p=1}^{q+(n-1)} |r_{1q}\pi_p^{(1)} + \ldots + r_{nq}\pi_p^{(n)}|^2 + \sum_{p=q+n}^{\infty} |r_{1p}\pi_q^{(1)} + \ldots + r_{np}\pi_q^{(n)}|^2 \Big\}$$

$$\leqq 2\sum_{q=1}^{\infty} |r_{1q}|^2 \sum_{p=1}^{\infty} |\pi_p^{(1)}|^2 + \ldots + 2\sum_{q=1}^{\infty} |r_{nq}|^2 \sum_{p=1}^{\infty} |\pi_p^{(n)}|^2 < M$$

für alle komplexen z. In den selbstkonjugierten Mengen haben die J-Formen also nach Satz 8 ein vollständiges System reeller Eigenvektoren.

Die zugehörigen Eigenwerte lassen sich, wie in § 3 gezeigt werden soll, als Nullstellen einer ganzen Funktion darstellen. Zu diesem Zweck soll noch folgender Hilfssatz bewiesen werden:

Hilfssatz: *Sei* $\varphi_\nu = \{\pi_1^{(\nu)}(z), \pi_2^{(\nu)}(z), \ldots\}$, *also* $\{J + z\}\,\varphi_\nu(z) = 0$, *und es existiere* $\| \varphi_\nu(z) \|$ *für nichtreelle* z, *dann existiert auch* $\| \varphi_\nu(\lambda) \|$ *für reelle* λ.

Den Beweis führt man in Fortsetzung eines ähnlichen von Hellinger[20]) so: Es sei $R(z)$ die zu einem bestimmten $\mathfrak{S}_\tau$ gehörige Reziproke; dann betrachte man:

$$\varphi_\sigma(i) = f_\sigma - (i + \lambda)\, R(i)\, f_\sigma \qquad (\sigma = 1, \ldots, n). \tag{81}$$

Nach Sätzen über vollstetige Gleichungssysteme hat jede Gleichung (81) eine eindeutig bestimmte Lösung f_σ von konvergenter Quadratsumme für alle reellen λ bis auf die λ_ν, für welche

$$f - (i + \lambda_\nu)\, R(i)\, f = 0 \tag{82}$$

eine nicht triviale Lösung besitzt, d. h. also bis auf abzählbar viele, sich *nirgends* häufende reelle Zahlen λ_ν. Sei $\lambda \neq \lambda_\nu$. Dann sind diese n Lösungen linear unabhängig und es gilt:

$$(J + i)(\varphi_\sigma - f_\sigma) = -(i + \lambda) f_\sigma, \quad \text{also} \quad (J + \lambda) f_\sigma = 0.$$

Es ist also:

$$f_\sigma(\lambda) = \sum_{\mu=1}^{n} c_\mu^{(\sigma)}(\lambda)\, \varphi_u(\lambda) \qquad (\sigma = 1, \ldots, n).$$

Die Determinante $|c_u^\sigma|$ ist wegen der linearen Unabhängigkeit der f_σ von Null verschieden, woraus unmittelbar die Existenz von $\| \varphi_\mu(\lambda) \|^2 = \sum_{p=1}^{\infty} |\pi_p^{(u)}(\lambda)|^2$ folgt. Man zeigt weiter, daß auch $\sum_{p=1}^{\infty} |\pi_p^{(u)}(\lambda_\nu)|^2$ existiert. Da

$$\Big| \sum_{p=1}^{N} (\pi_p^{(u)}(z))^2 \Big| \leqq \sum_{p=1}^{\infty} |\pi_p^{(u)}(z)|^2, \quad z \neq \lambda_\nu \quad (N = 1, 2, \ldots)$$

ist, sind die Funktionen $\sum_{p=1}^{N} (\pi_p^{(u)}(z))^2$ in jedem die Stellen λ_ν nicht enthaltenden, abgeschlossenen Bereich gleichmäßig beschränkt, konvergieren also in diesem Bereich nach dem Vitalischen Satze gleichmäßig gegen eine analytische Grenzfunktion. Nach einem Satz von Runge[21]) über die gleichmäßige Konvergenz einer Folge analytischer Funktionen folgt dann sofort auch die Konvergenz in den Stellen λ_ν, also von $\sum_{p=1}^{\infty} |\pi_p^{(u)}(\lambda_\nu)|^2$.

---

[20]) Hellinger [4]) S. 24.

[21]) Vgl. etwa Encyklopädie II C 4, Nr. 58.

Satz 9: *Die in* II § 4 *behandelten J-Formen haben in den zu sich selbst konjugierten Mengen* $\mathfrak{S}_\tau$ *ein vollständiges Orthogonalsystem zu Eigenvektoren mit sich nirgends häufenden Eigenwerten. Die Lösungen* $\{\pi_1^{(\nu)}(z), \pi_2^{(\nu)}(z), \ldots\}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ *gehören insbesondere auch für reelle* z *zum Hilbertschen Raume.*

§ 3.

Die Säkulargleichung eines vollständigen Symmetriebereichs.

1. Gemäß (25) sei $\mathfrak{S}^s = \{h + \sum_{\nu=1}^{s} a_\nu (f'_\nu + f_\nu)\}$, $(A + \varrho^*) f_\nu = 0$, $(A + \bar{\varrho}^*) f'_\nu = 0$ (gegenüber I § 3 ist f und f' vertauscht); damit $\varphi(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu(\lambda)\, \varphi_\nu(\lambda)$ (λ reell) zu $\mathfrak{S}^s$ gehört, ist notwendig, daß

1. $\varphi(\lambda)$ in bezug auf A in Symmetrie steht mit $f_\nu + f'_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, s)$,
2. $\varphi(\lambda)$ in bezug auf A in Symmetrie steht mit $f_{s+1}, \ldots, f_n$.

Umgekehrt gehört aber auch jedes die Bedingungen 1. und 2. befriedigende $\varphi(\lambda)$ zu $\mathfrak{S}^s$. Auf Grund von 1. steht nämlich dann $\varphi(\lambda)$ in Symmetrie zu sämtlichen Elementen von $\mathfrak{S}^s$; nach I § 3 gehört es also der Menge

$$\mathfrak{S}^s + \mathfrak{M}_1^s = \{h + \sum_{\nu=1}^{s} a_\nu (f_\nu + f'_\nu) + \sum_{\mu=s+1}^{n} a_\mu f_\mu + \sum_{u=s+1}^{n} a'_\mu f'_\mu\}$$

an. Jedes Element von $\mathfrak{S}^s + \mathfrak{M}_1^s$, das zu $f_{s+1}, \ldots, f_n$ in Symmetrie steht, läßt sich darstellen durch

$$\{h + \sum_{\nu=1}^{s} a_\nu (f_\nu + f'_\nu) + \sum_{u=s+1}^{n} a'_u f'_u\};$$

es darf nämlich kein $f_\sigma (s+1 \leqq \sigma \leqq n)$ enthalten, da nach (22) kein $f_\sigma (s+1 \leqq \sigma \leqq n)$ enthaltendes Element in Symmetrie zu f_σ steht. Nun gehört aber $\varphi(\lambda)$ für reelle λ wegen $\{A\,\varphi(\lambda), \varphi(\lambda)\} = -\lambda \|\varphi\|^2$ stets zur Nullklasse. Damit aber ein Element

$$k = h + \sum_{\nu=1}^{s} a_\nu (f_\nu + f'_\nu) + \sum_{\mu=s+1}^{n} a'_\mu f'_\mu$$

zur Nullklasse gehört, muß notwendig $a'_\mu = 0$ $(\mu = s+1, \ldots, n)$ sein; für $f = k$ wird nämlich die rechte Seite von (23) $+ 2\varkappa i \sum_{u=s+1}^{n} |a'_\mu|^2$, also nur Null für $a'_{s+1} = \ldots = a'_n = 0$. Wenn also für $\varphi(\lambda)$ 1. und 2. erfüllt sind, gehört $\varphi(\lambda)$ der Menge $\mathfrak{S}^s$ an.

2. Die Bedingungen 1. und 2. besagen, wenn man für λ zunächst einen beliebigen komplexen Parameter z einführt:

$$(83)\qquad \begin{aligned} &\{A(f_\nu + f'_\nu),\ \varphi(z)\} - \{(f_\nu + f'_\nu),\ A\varphi(z)\} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, s),\\ &\{A f_\nu,\ \varphi(z)\} - \{f_\nu,\ A\varphi(z)\} = 0 \qquad (\nu = s+1, \ldots, n) \end{aligned}$$

oder

$$(84)\qquad \begin{aligned} &\overline{c_1(z)}\,\{(\bar z - \varrho^*) f_\nu + (\bar z - \bar\varrho^*) f'_\nu,\ \varphi_1(z)\} + \ldots\\ &\quad + \overline{c_n(z)}\,\{(\bar z - \varrho^*) f_\nu + (\bar z - \bar\varrho^*) f'_\nu,\ \varphi_n(z)\} = 0 \quad (\nu = 1, \ldots, s),\\ &\overline{c_1(z)}\,\{(\bar z - \varrho^*) f_\nu,\ \varphi_1(z)\} + \ldots\\ &\quad + \overline{c_n(z)}\,\{(\bar z - \varrho^*) f_\nu,\ \varphi_n(z)\} = 0 \qquad (\nu = s+1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Lösungen $c_\mu(z)$ existieren für die Nullstellen z_ν der Determinante:

$$H^{(s)}(\bar z) = \begin{vmatrix} \{(\bar z-\varrho^*) f_1 + (\bar z-\bar\varrho^*) f'_1,\ \varphi_1(z)\} & \{(\bar z-\varrho^*) f_1 + (\bar z-\bar\varrho^*) f'_1,\ \varphi_2(z)\} & \ldots & \{(\bar z-\varrho^*) f_1 + (\bar z-\bar\varrho^*) f'_1,\ \varphi_n(z)\}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \{(\bar z-\varrho^*) f_s + (\bar z-\bar\varrho^*) f'_s,\ \varphi_1(z)\} & \{(\bar z-\varrho^*) f_s + (\bar z-\bar\varrho^*) f'_s,\ \varphi_2(z)\} & \ldots & \{(\bar z-\varrho^*) f_s + (\bar z-\bar\varrho^*) f'_s,\ \varphi_n(z)\}\\ \{(\bar z-\varrho^*) f_{s+1},\ \varphi_1(z)\} & \{(\bar z-\varrho^*) f_{s+1},\ \varphi_2(z)\} & \ldots & \{(\bar z-\varrho^*) f_{s+1},\ \varphi_n(z)\}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \{(\bar z-\varrho^*) f_n,\ \varphi_1(z)\} & \{(\bar z-\varrho^*) f_n,\ \varphi_2(z)\} & \ldots & \{(\bar z-\varrho^*) f_n,\ \varphi_n(z)\} \end{vmatrix}$$

$H^{(s)}(z)$ ist sicher nicht identisch Null, weil sonst in $\mathfrak{S}^s$, also auch in jedem $\mathfrak{S}^s$ enthaltenden $\mathfrak{S}^n$ jedes reelle λ Eigenwert wäre. Als ganze Funktion hat daher $H^{(s)}(z)$ abzählbar viele Nullstellen z_ν; zu jeder gibt es höchstens n linear unabhängige Lösungen $c_1^{(\mu)}(z), \ldots, c_n^{(\mu)}(z)$ von (84) und folglich ebensoviel linear unabhängige

$$\varphi^{(\mu)}(z_\nu) = \sum_{s=1}^{n} c_s^{(\mu)}(z_\nu)\,\varphi_s(z_\nu),$$

welche für reelles z_ν der Menge $\mathfrak{S}^s$, für komplexes z_ν der Menge $\mathfrak{S}^s + \sum_{\mu=s+1}^{n} b_\mu f'_\mu$ angehören.

Von besonderem Interesse sind die Nullstellen von $H^{(n)}(z)$ und $H^{(0)}(z)$. Die Nullstellen von $H^{(n)}(z)$ liefern $\varphi(z_\nu)$, welche wegen $\mathfrak{M}_1^n = 0$ (siehe I § 3) alle zu $\mathfrak{S}^n$ gehören; diese Nullstellen z_ν sind folglich alle reell. Die reellen Nullstellen von $H^{(0)}(z)$ liefern $\varphi(z_\nu)$, welche zu $\mathfrak{S}^0$, d. h. zu $\mathfrak{A}$ gehören.

Satz 10: *Die Berechnung der Eigenvektoren von J in $\mathfrak{S}$ (J eine den Beschränkungen von* II § 4 *unterworfene Form) läßt sich zurückführen auf die Lösung eines homogenen Gleichungssystems* (84). *Die Nullstellen der Determinante dieses Gleichungssystems sind die zugehörigen Eigenwerte; die Eigenwerte eines vollständigen Symmetriebereichs werden durch die Nullstellen der zugehörigen Säkulargleichung $H^{(n)}(z) = 0$ geliefert.*

IV. Teil.

Über die Berechnung des n-ten Abschnittes der Reziproken von J-Matrizen.

§ 1.

Berechnung der $r_{hs}(z)$ $(h, s = 1, \ldots, n)$.

Man kann jetzt für J-Formen die in (64) bzw. (69) eingehenden Funktionen $r_{hs}(z)$ $(h, s = 1, \ldots, n)$ abhängig von den Parametern der Mengen $\mathfrak{S}$ darstellen als Quotienten zweier ganzer Funktionen. Es werde $(\tilde{r}_{1,}, \tilde{r}_{2,}, \ldots)$ mit $\mathfrak{r}'$ bezeichnet, ferner $\{r_{1\nu}, r_{2\nu}, \ldots\}$ mit $\mathfrak{r}$, und $\{\pi_1^{(\nu)}(z), \pi_2^{(\nu)}(z), \ldots\}$ mit φ_ν; dann wird nach (63):

$$\mathfrak{r}_\nu = r_{1\nu}(z)\,\varphi_1 + r_{2\nu}(z)\,\varphi_2 + \ldots + r_{n\nu}(z)\,\varphi_n + \mathfrak{r}'_\nu = \psi_\nu + \mathfrak{r}'_\nu. \tag{85}$$

Notwendig und hinreichend dafür, daß (63) die Spalten einer Reziproken zu einem $\mathfrak{S}$ bilden, ist nach II, § 3, daß die ersten n Spalten, also $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_n$ zu diesem $\mathfrak{S}$ gehören. Sei also $\mathfrak{S} = \{h + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu (f'_\nu + f_\nu)\}$, dann gehören die $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_n$ zu diesem $\mathfrak{S}$, wenn sie in Symmetrie stehen mit $f_\nu + f'_\nu$ $(\nu = 1 \ldots n)$. Das besagt also:

$$\{A(f_\nu + f'_\nu), \psi_p + \mathfrak{r}'_p\} - \{f_\nu + f'_\nu, A(\psi_p + \mathfrak{r}'_p)\} = 0 \quad (\nu = 1, \ldots, n); \tag{86}$$

wenn man $A\,\psi_p = -z\,\psi_p$ und $A\,\mathfrak{r}'_p = -z\,\mathfrak{r}'_p + \mathfrak{e}_p$ ($\mathfrak{e}_p$ ist p-ter Einheitsvektor) beachtet, erhält man aus (86) bei festem p für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ ein Gleichungssystem für $r_{1p}, r_{2p}, \ldots r_{np}$:

$$\begin{aligned}\{(\bar{z}-\varrho^*)f_\nu + (\bar{z}-\bar{\varrho}^*)f'_\nu, \varphi_1\}\,\overline{r_{1p}(z)} + \ldots + \{(\bar{z}-\varrho^*)f_\nu + (\bar{z}-\bar{\varrho}^*)f'_\nu, \varphi_n\}\,\overline{r_{np}(z)} \\ = \{(\varrho^*-\bar{z})f_\nu + (\bar{\varrho}^*-\bar{z})f'_\nu, \mathfrak{r}'_p\} + \{(f_\nu + f'_\nu), \mathfrak{e}_p\}.\end{aligned} \tag{87}$$

Die Determinante von (87) ist gerade $H^{(n)}(z)$ von (84). Es ist also (87) auflösbar bis auf die Nullstellen von $H^{(n)}(z)$, d. h. bis auf die Eigenwerte von J in $\mathfrak{S}$. Die aus (87) berechneten $r_{1p}, \ldots, r_{np}$ lassen sich also als Quotienten zweier Determinanten, welche je ganze Funktionen von z sind, darstellen. Vermöge der in f_ν eingehenden Parameter der Mengen $\mathfrak{S}$ hängen die $r_{1p}, \ldots, r_{np}$ von n^2 reellen Parametern ab.

2. Wenn $\varphi(z) = \{\pi_1(z), \pi_2(z), \ldots\}$ die Lösungen einer J-Form mit *einer* Nebendiagonale sind, wird nach I § 3

$$\mathfrak{S} = \{h + a\,(\varphi'(\varrho^*) + e^{i\alpha}\,\varphi(\bar{\varrho}^*))\}.$$

Es wird dann:

$$H^{(1)}(\bar{z}) = \sum_{p=1}^{\infty} \{(\bar{z}-\varrho^*)\,\pi_p(\varrho^*) + (\bar{z}-\bar{\varrho}^*)\,\pi_p(\bar{\varrho}^*)\,e^{i\alpha}\}\,\pi_p(\bar{z}) \tag{88}$$

und

$$(89)\quad r_{11}(\bar{z}) = \frac{\sum_{p=1}^{\infty} \{(\varrho^* - \bar{z})\pi_p(\varrho^*) + (\bar{\varrho}^* - \bar{z})e^{i\alpha}\pi_p(\bar{\varrho}^*)\}s_{p-1}(\bar{z}) + \{1 + e^{i\alpha}\}}{\sum_{p=1}^{\infty} \{(\bar{z} - \varrho^*)\pi_p(\varrho^*) + (\bar{z} - \bar{\varrho}^*)\pi_p(\bar{\varrho}^*)e^{i\alpha}\}\pi_p(\bar{z})}.$$

Satz 11: *Die Elemente des bei der Berechnung der Reziproken* II, § 4 *unbestimmt gebliebenen n-ten Abschnitts der Reziproken lassen sich abhängig von den n^2 Parametern der Mengen $\mathfrak{S}$ als Quotienten ganzer Funktionen mit der zu* (84) *gehörigen Determinante $H^{(n)}(z)$ als Nenner darstellen.*

§ 2.

Über eine Analogie in m-dimensionalen.

1. Die Beschränkung des Operators A auf eine Menge

$$\mathfrak{S} = \{h + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(f'_\nu + f_\nu)\}$$

läßt sich folgendermaßen ausdrücken: Man betrachte die Matrix für solche f aus $\mathfrak{D}$, für welche die „Randbedingungen"

$$(90)\qquad \{\varrho^* f_\nu + \bar{\varrho}^* f'_\nu, f\} + \{f_\nu + f'_\nu, Af\} = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

erfüllt sind. Es gibt also eine n^2-parametrige Schar solcher Randbedingungen.

2. Für die Abschnittsmatrizen der J-Formen läßt sich ein unmittelbares Analogon konstruieren. Die ersten $m = l + n$ Gleichungen von $Jg = f$ enthalten $l + 2n$ Variable, wobei die mit den Nummern $l + n + 1, \ldots, l + 2n$ nur in der $(l + 1)$-ten bis $(l + n)$-ten Gleichung vorkommen und zwar bzw. behaftet mit dem Koeffizienten

$$(91)\qquad \begin{matrix} b^{(n)}_{l+1} & & \\ \vdots & \ddots & \\ b^{(1)}_{l+n} & \ldots & b^{(n)}_{l+n} \end{matrix} \qquad (b^{(n)}_{l+1} \neq 0, \ldots, b^{(n)}_{l+n} \neq 0).$$

Zu einem Hermiteschen Operator J_m im m-dimensionalen Raume werden diese Gleichungen unter Hinzunahme von n homogenen Randbedingungen mit komplexen Koeffizienten:

$$(92)\qquad \begin{aligned} &c^{(\sigma)}_{l+1}x_{l+1} + \ldots + c^{(\sigma)}_{l+n}x_{l+n} \\ &\quad = b^{(n-\sigma+1)}_{l+\sigma}x_{l+n+1} + \ldots + b^{(n)}_{l+\varrho}x_{l+n+\sigma} \qquad (\sigma = 1, \ldots, n), \\ &\qquad\qquad \bar{c}^{(\nu)}_{l+\mu} = c^{(u)}_{l+\nu}. \end{aligned}$$

Wegen $b^{(n)}_{l+\lambda} \neq 0$ gibt es immer (92) befriedigende Systeme $(x_{l+1}, \ldots, x_{l+2n})$, J_m hängt also von n^2 reellen Parametern ab. In Analogie zu der $\frac{n(n+1)}{2}$-parametrigen Schar $\mathfrak{S}_t$ sind für reelle $c^{(\nu)}_{l+u}$ $\frac{n(n+1)}{2}$ Parameter willkürlich, die zugehörigen Reziproken symmetrisch.

Es sei $\varphi_\nu(\lambda) = \{\pi_1^{(\nu)}(\lambda), \ldots, \pi_{m+n}^{(\nu)}(\lambda)\}$; die Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren wird zurückgeführt auf die Bestimmung von

$$\varphi(\lambda) = b_1(\lambda)\,\varphi_1(\lambda) + \ldots + b_n(\lambda)\,\varphi_n(\lambda),$$

für welche die Randbedingungen (92) erfüllt sind, d. h.

$$(94)\quad \sum_{h=1}^{n} b_h \{(c_{l+1}^{(\sigma)}\pi_{l+1}^{(h)} + \ldots + c_{l+n}^{(\sigma)}\pi_{l+n}^{(h)}) - (b_{l+\sigma}^{(n-\sigma+1)}\pi_{l+n+1}^{(h)} + \ldots + b_{l+n}^{(\sigma)}\pi_{l+n+\sigma}^{(h)})\} = 0 \quad (\sigma = 1, \ldots, n).$$

Die Nullstellen der Determinante von (94) liefern die Eigenwerte, die zugehörigen Lösungen $b_1, \ldots, b_n$ durch

$$\varphi(\lambda_\nu) = \sum_{\mu=1}^{m+n} b_\mu(\lambda_\nu)\,\varphi_\mu(\lambda_\nu)$$

die Eigenvektoren. Der Sachverhalt steht also in voller Analogie zu dem bei (84) und $H^{(n)}(z) = 0$.

3. Auf Grund der Randbedingungen (92) kann man zu jeder Spalte $r_{1q}^{(m)}, \ldots, r_{mq}^{(m)}$ $(q = 1, \ldots, m)$ der Reziproken eines Operators J_m noch $r_{m+1\,q}^{(m)}, \ldots, r_{m+n\,q}^{(m)}$ berechnen.

Die $r_{pq}^{(m)}$ $(q = 1, \ldots, m;\ p = 1, \ldots, m+n)$ genügen dann den ersten m Reziprokengleichungen (43) von J, sind also nach (63) von der Gestalt:

$$(95)\quad r_{q\nu}^{(m)}(z) = \begin{cases} r_{1\nu}^{(m)}(z)\,\pi_q^{(1)}(z) + \ldots + r_{n\nu}^{(m)}(z)\,\pi_q^{(n)}(z) & q \leqq \nu + n - 1, \\ \bar{r}_{1q}^{(m)}(\bar{z})\,\pi_\nu^{(1)}(z) + \ldots + \bar{r}_{n\nu}^{(m)}(\bar{z})\,\pi_\nu^{(m)}(z) & q \geqq \nu + n - 1. \end{cases}$$

Ferner folgen leicht die (44) und (45) analogen Formeln:

$$(96)\quad (z - \bar{z}) \sum_{\nu=1}^{m} \overline{r_{\nu h}^{(m)}(z)}\, r_{\nu s}^{(m)}(z) = \overline{r_{sh}^{(m)}(z)} - r_{hs}^{(m)}(z),$$

$$(97)\quad (z_1 - z_2) \sum_{\nu=1}^{m} \overline{r_{\nu h}^{(m)}(z_2)}\, r_{\nu s}^{(m)}(z_1) = \overline{r_{sh}^{(m)}(z_2)} - r_{hs}^{(m)}(z_1).$$

Die in (95) unbestimmten Funktionen $r_{ik}^{(m)}$ $(i, k = 1, \ldots, n)$ werden aus der Randbedingung (92) bestimmt, indem man dort $x_\nu = r_{\nu p}^{(m)}$ setzt; wenn man zur Abkürzung die Koeffizienten der σ-ten Gleichung von (94) mit $a_{\sigma 1}, \ldots, a_{\sigma n}$ bezeichnet, erhält man:

$$(98)\quad \sum_{\nu=1}^{n} a_{\sigma\nu}\, r_{\nu p}^{(m)} = -\{c_{l+1}^{(\sigma)} s_{l+1-pp} + \ldots + c_{l+n}^{(\sigma)} s_{l+n-pp}\} + \{b_{l+\sigma}^{(n-\sigma+1)} s_{l+n+1-pp} + \ldots + b_{l+\sigma}^{(n)} s_{l+n+\sigma-pp}\}.$$

Hieraus lassen sich in Analogie zu (87) die $r_{ik}^{(m)}$ $\{i, k = 1, \ldots, n\}$ berechnen.

Satz 12. *Die ersten m Gleichungen von $Jy = f$ werden unter Hinzunahme der Randbedingungen* (92) *zu einer n^2-parametrigen Schar Hermite-*

scher Operatoren im m-dimensionalen Raum; diese Schar steht in Analogie zu der n^2-parametrigen, J zugeordneten Schar Hermitescher Operatoren. Insbesondere gibt es eine $\frac{n(n+1)}{2}$-parametrige Teilschar mit symmetrischer Reziproke in Analogie zu den selbstkonjugierten Mengen.

§ 3.

Beispiel für ein Approximationsverfahren.

1. Es entsteht die Frage, ob man aus (98) durch Grenzübergang die in (69) eingehenden unbestimmten Funktionen $r_{ik}(z)$ $\{i, k = 1, \ldots, n\}$ als n^2-parametrige Schar berechnen kann. Für J-Formen mit *einer* Nebendiagonale ist das möglich; man erhält dabei die teilweise aus der Kettenbruchtheorie schon bekannten Ergebnisse.

2. Für solche J-Formen wird nämlich die Randbedingung nach (92):

$$h\, x_m = b_m\, x_{m+1} \qquad (l+1 = m,\ h \text{ reell}) \tag{99}$$

und demzufolge wird aus (98) nach (71) (s_{m1} werde im folgenden immer mit s_m bezeichnet):

$$r_{11}^{(m)} = -\frac{h\, s_{m-1}(z) - b_m\, s_m(z)}{h\, \pi_m(z) - b_m\, \pi_{m+1}(z)}. \tag{100}$$

Der Wert $h = \infty$ kann mit berücksichtigt werden, indem man dann

$$r_{11}^{(m)}(z) = -\frac{s_{m-1}(z)}{\pi_m(z)}$$

setzt. Gemäß (96) liegen die komplexen Zahlen $r_{11}^{(m)}(z) = v_{11}^{(m)} + i u_{11}^{(m)}$ auf dem Kreise

$$\varkappa \sum_{p=1}^{\infty} |r_{11}^{(m)} \pi_p(z) + s_{p-1}(z)|^2 = u_{11}^{(m)}$$

($z = \lambda + i\varkappa$). In (100) setze man:

$$h = h_m = \frac{b_m\, \pi_{m+1}(\lambda^*)}{\pi_m(\lambda^*)} \qquad (\lambda^* \text{ reell}).$$

h_m ist immer bestimmt, da auf Grund der homogenen Gleichungen π_m und π_{m+1} keine gemeinsamen Nullstellen haben; sonst hätten nämlich alle π_p und also auch $\pi_1 = 1$ für $\lambda = \lambda^*$ eine Nullstelle. Es wird dann:

$$r_{11}^{(m)}(z) = -\frac{\pi_m(\lambda^*)\, s_m(z) - \pi_{m+1}(\lambda^*)\, s_{m-1}(z)}{\pi_m(\lambda^*)\, \pi_{m+1}(z) - \pi_{m+1}(\lambda^*)\, \pi_m(z)}. \tag{100'}$$

Der mit $-b_m$ multiplizierte Zähler bzw. Nenner konvergiert für J-Formen der zweiten Klasse gegen eine *ganze* Funktion.

Durch sukzessive Anwendung der leicht zu beweisenden Rekursionsformel

$$\begin{aligned} &-b_m \{\pi_{m+1}(z)\, \pi_m(\lambda^*) - \pi_{m+1}(\lambda^*)\, \pi_m(z)\} \\ &\quad = (z - \lambda^*)\, \pi_m(z)\, \pi_m(\lambda^*) - b_{m-1} \{\pi_m(z)\, \pi_{m-1}(\lambda^*) - \pi_m(\lambda^*)\, \pi_{m-1}(z)\} \end{aligned}$$

erhält man:

$$-b_m\{\pi_{m+1}(z)\,\pi_m(\lambda^*)-\pi_{m-1}(\lambda^*)\,\pi_m(z)\}=(z-\lambda^*)\sum_{p=1}^{m}\pi_p(\lambda^*)\,\pi_p(z).$$

Wegen der Konvergenz von $\sum_{p=1}^{\infty}|\tau_p(z)|^2$ konvergiert also der mit $-b_m$ multiplizierte Nenner in jedem endlichen Bereich gleichmäßig gegen

$$s(z,\lambda^*)=(z-\lambda^*)\sum_{p=1}^{\infty}\pi_p(\lambda^*)\,\pi_p(z). \tag{101}$$

Für den Zähler folgt in entsprechender Weise:

$$-b_m\{s_m(z)\,\pi_m(\lambda^*)-\pi_{m+1}(\lambda^*)\,s_{m-1}(z)\}=1+(z-\lambda^*)\sum_{p=1}^{m-1}s_p(z)\,\pi_{p+1}(\lambda^*);$$

der mit $-b_m$ multiplizierte Zähler konvergiert also wegen der Konvergenz von $\sum_{p=1}^{\infty}|\pi_p|^2$ und $\sum_{p=1}^{\infty}|s_p|^2$ in jedem endlichen Bereich gegen

$$r(z,\lambda^*)=1+(z-\lambda^*)\sum_{p=1}^{\infty}s_p(z)\,\pi_{p+1}(\lambda^*), \tag{102}$$

also konvergiert $r_{11}^{(m)}(z)$ gegen $r_{11}(z)$:

$$r_{11}(z,\lambda^*)=\frac{r(z,\lambda^*)}{s(z,\lambda^*)}. \tag{103}$$

Für jedes z liegt dann gemäß (96) $r_{11}(z,\lambda^*)$ auf dem Kreise

$$\varkappa\sum_{p=1}^{\infty}|r_{11}(z,\lambda^*)\,\pi_p(z)+s_{p-11}(z)|^2=u_{11}. \tag{104}$$

Von der Problemstellung der Kettenbruchtheorie aus sind ähnliche Formeln im Anschluß an Stieltjes von Hamburger und Hellinger entwickelt worden[22]).

3. Es läßt sich zeigen, daß für die nach (71) mit (103) gebildeten $r_{pq}(z)$ (in (103) λ^* fest) alle Gleichungen (44) und (45) erfüllt sind, d. h. daß die $\{r_{pq}(z,\lambda^*)\}$ die Reziproke einer Menge $\mathfrak{S}$ darstellen; auf Grund der Gestalt (71) der $r_{pq}^{(m)}$ bzw. der r_{pq} kann man nämlich in (96) und (97) zur Grenze übergehen und erhält die (44) und (45) entsprechenden Formeln für die r_{pq}, d. h. aber $\{r_{pq}(z)\}$ stellt die Reziproke in einer Menge $\mathfrak{S}$ dar.

Es läßt sich weiter zeigen, daß in der durch (103) definierten Reziprokenschar (λ^* Scharparameter) *die Reziproke in bezug auf irgendeine Menge* $\mathfrak{S}$ enthalten ist. Sämtliche Mengen $\mathfrak{S}$ einer J-Form mit *einer* Nebendiagonalen sind nämlich zu sich selbst konjugiert. J-Formen mit *einer* Nebendiagonalen haben also in jedem vollständigen Symmetriebereich ein vollständiges Orthogonalsystem zu Eigenvektoren (Satz 9). Auf Grund von (42) folgt also, daß die Pole von $r_{11}(z,\lambda^*)$ gerade die Eigenwerte von J in $\mathfrak{S}$ sind. Insbesondere ist also λ^*, d. h. der Scharparameter

---

[22]) Stieltjes: Mém. prés. par div. sav. à l'Acad. des Sciences Paris 32, No. 2, Hamburger [6]) S. 120–164 und Hellinger [4]) Nr. 2.

ein Eigenwert zu der durch (103) nach (71) definierten Menge $\mathfrak{S}$. Nun kann aber λ^* nicht noch Eigenwert zu einer anderen Menge $\mathfrak{S}$ sein; denn sei $\Pi(z) = \{\pi_1(z), \ldots\}$, dann gilt auf Grund von (21) die eindeutige Darstellung:

$$\Pi(\lambda^*) = h + a(\Pi(\varrho) + e^{i\alpha}\Pi(\bar{\varrho})),$$

wobei a nicht Null sein kann, weil $\Pi(\lambda^*)$ sonst Eigenvektor zu allen Mengen $\mathfrak{S}$ wäre, d. h. als Eigenwerte aller Mengen $\mathfrak{S}$ kämen nur solche λ-Werte, für welche

$$(\lambda - \lambda^*)\{\Pi(\lambda^*), \Pi(\lambda)\} = 0$$

wäre, in Frage, also höchstens abzählbar viele, was zu (103) in Widerspruch steht; $\Pi(\lambda^*)$ gehört also nur *einer* Menge $\mathfrak{S}$ an, λ^* kann also nur Eigenwert zu *einer* Menge $\mathfrak{S}$ sein. Hieraus folgt unmittelbar, daß in der durch (103) definierten einparametrigen Schar von Mengen $\mathfrak{S}$ schon alle Mengen $\mathfrak{S}$ enthalten sind.

4. Den Scharparameter λ^* in (103) kann man durch einen zweckmäßigeren Parameter τ ersetzen auf Grund einer von Hamburger[23]) entwickelten Methode, welche sich unter Verwendung von J-Formen wesentlich einfacher darstellen läßt. In Analogie zu (100′) betrachtet man die $r_{11}^{(m)}$ mit Nullstellen in λ^*:

$$r_{11}^{(m)} = -\frac{s_{m-1}(\lambda^*)s_m(z) - s_{m-1}(z)s_m(\lambda^*)}{s_{m-1}(\lambda^*)\pi_{m+1}(z) - s_m(\lambda^*)\pi_m(z)}. \tag{105}$$

Wenn man im Zähler von (100′) z mit λ^* vertauscht, erhält man den negativen Nenner von (105). Für den Grenzwert $h(z, \lambda^*)$ des mit $-b_m$ multiplizierten Nenners von (105) erhält man also nach (102):

$$h(z, \lambda^*) = -r(\lambda^*, z); \tag{106}$$

für den mit $-b_m$ multiplizierten Zähler erhält man entsprechend (101):

$$g(z, \lambda^*) = (z - \lambda^*)\sum_{\nu=1}^{\infty} s_\nu(z)s_\nu(\lambda^*). \tag{107}$$

Es sei λ' reell, dann betrachtet man:

$$M(z, \tau) = \frac{g(z, \lambda') + \tau r(z, \lambda')}{h(z, \lambda') + \tau s(z, \lambda')}, \tag{108}$$

(108) ist dann der Grenzwert von

$$M^{(m)}(z, \tau) = -\frac{h_m s_{m-1}(z) - b_m s_m(z)}{h_m \pi_m(z) - b_m \pi_{m+1}(z)}$$

für

$$h_m = \frac{b_m\{s_m(\lambda') + \tau\pi_{m+1}(\lambda')\}}{s_{m-1}(\lambda') + \tau\pi_m(\lambda')}. \tag{109}$$

---

[23]) Hamburger [6]), S. 168 — 184.

h_m ist auf jeden Fall bestimmt; nach (71) folgt nämlich für $\nu = m+1$ und $q = m$:

$$b_m \{s_m(z)\,\pi_m(z) - s_{m-1}(z)\,\pi_{m+1}(z)\} = 1,$$

d. h. Zähler und Nenner von h_m können nicht zu gleicher Zeit verschwinden; es ist also:

$$M^{(m)}(z,\tau) = r_{11}^{(m)}(z, h_m),$$

wobei $r_{11}^{(m)}(z\,h_m)$ zu der mit h_m gebildeten Randbedingung (99) gehört. Wegen

$$M^{(m)}(z,\tau) \to M(z,\tau)$$

konvergiert also das zu der Folge h_m gehörige System $\{r_{pq}^{(m)}\}$ gegen die Reziproke in einer Menge $\mathfrak{S}$, d. h. es existiert ein λ^*, so daß

$$M(z,\tau) = r_{11}(z,\lambda^*)$$

gilt. Umgekehrt ist jedes $r_{11}(z,\lambda^*)$ in (108) enthalten. Für

$$h_m = \frac{b_m \pi_{m+1}(\lambda^*)}{\pi_m(\lambda^*)}$$

geht $M^{(m)}(z,\tau_m)$ (τ_m das h_m gemäß (109) entsprechende τ) in (100′) über; gemäß (100′) hat

$$\tau_m = \frac{\pi_m(\lambda^*)\,s_m(\lambda') - \pi_{m+1}(\lambda^*)\,s_{m-1}(\lambda')}{\pi_{m+1}(\lambda^*)\,\pi_m(\lambda') - \pi_m(\lambda^*)\,\pi_{m+1}(\lambda')}$$

einen Grenzwert $\lim \tau_m = \tau^*$; es ist also:

$$r_{11}(z,\lambda^*) = M(z,\tau^*).$$

Entsprechend der einparametrigen Schar von Mengen $\mathfrak{S}$ wird also durch (108) und (71) eine einparametrige Reziprokenschar definiert. Im Anschluß hieran läßt sich entscheiden, ob man durch „direkte abschnittsweise Berechnung", d. h. für $h = 0$ in (99) *die Reziproke in einer Menge* $\mathfrak{S}$ erhält; $h_m = 0$ ($m = 1, 2, \ldots$) entspricht

$$\tau_m = -\frac{s_m(\lambda')}{\pi_{m+1}(\lambda')}.$$

Es kommt also darauf an, ob τ_m einen Grenzwert hat.

(Eingegangen am 13. 8. 1935.)

Über meßbare Darstellungen Liescher Gruppen.

Von

Béla v. Sz. Nagy in Szeged (Ungarn).

Es sei U eine Umgebung der Einheit in einer beliebigen r-gliedrigen Lieschen Gruppe. Es ist bekannt, daß jede Darstellung von U durch Matrizen, sobald die Matrixelemente stetig von den Parametern abhängen, in einer Umgebung der Einheitsmatrix auch analytisch ist. Wir werden in dieser Arbeit statt der Stetigkeit nur fordern, daß die Matrixelemente meßbare Funktionen der Parameter seien, und werden beweisen, daß die Darstellung auch dann analytisch ist. Dieser Satz läßt sich auch auf Darstellungen durch gewisse unendliche Matrizen ausdehnen.

Zunächst beweisen wir ein einfaches Lemma, auf das wir uns im folgenden oft berufen werden. § 2 enthält die Untersuchung der Darstellungen durch endliche, § 3 durch unendliche Matrizen. Der § 3 enthält unter anderem auch einen einfachen Beweis eines bekannten Satzes von M. H. Stone.

§ 1.

Lemma. $h(t)$ sei eine im Intervall $\mathfrak{I} = (-a, a)$[1]) meßbare Funktion, M sei eine im $\mathfrak{I}$ überall dichte Punktmenge, so daß, wenn r in M ist, die Gleichung $h(t+r) = h(t)$ gilt (t ist ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{I}$, vorausgesetzt, daß auch $t+r$ in $\mathfrak{I}$ liegt). Es sei y ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I}_y$ der gemeinsame Teil von $\mathfrak{I}$ und $(-a-y, a-y)$. Es gilt dann für fast alle Punkte t von $\mathfrak{I}_y$[2]): $h(t+y) = h(t)$.

Es ist klar, daß wir uns beim Beweis auf den reellen Teil von $h(t)$, sogar auf dessen positiven Teil: $p(t)$ beschränken können. $g(t) = \frac{1}{p(t)+1}$ ist dann eine meßbare Funktion, die nur zwischen 0 und 1 liegende Werte hat, also integrierbar ist. Aus der Relation

$$\int_0^{x+y} g(t)\,dt = \int_0^x g(t)\,dt + \int_0^y g(x+t)\,dt = \int_0^y g(t)\,dt + \int_0^x g(y+t)\,dt$$

gewinnt man für $x = r$

$$\int_0^r g(y+t)\,dt = \int_0^r g(t)\,dt,$$

[1]) a kann auch gleich ∞ sein, dann soll $h(t)$ in allen endlichen Intervallen meßbar sein.

[2]) D. h. mit einer eventuellen Ausnahme einer Nullmenge.

also ist wegen der Stetigkeit der Integralfunktion

$$\int_0^z g(t+y)\,dt = \int_0^z g(t)\,dt$$

für beliebiges z in $\mathfrak{I}_y$. Dies bedeutet aber bekanntlich, daß in $\mathfrak{I}_y$ fast überall $g(t+y) = g(t)$, also auch $p(t+y) = p(t)$ ist, w. z. b. w

§ 2.

Darstellungen in endlichdimensionalen Räumen.

2a. Wir beschäftigen uns zunächst mit den meßbaren Darstellungen der eingliedrigen Gruppe der Translationen in einer Umgebung der Einheit. Sei also $A(t)$ eine solche im Intervall $\mathfrak{I} = (-a, a)$ definierte Matrizenschar, für welche die $A_{ik}(t)$ $(1 \leqq i \leqq m,\ 1 \leqq k \leqq m)$ meßbare Funktionen von t sind und $A(t) \cdot A(s) = A(t+s)$ gilt (für alle t, s in $\mathfrak{I}$, wofern auch $t+s$ in $\mathfrak{I}$ liegt). Es ist keine wesentliche Beschränkung, wenn wir annehmen, daß $A(0) = 1$ (die m-dimensionale Einheitsmatrix) ist[3]). Die Matrizenschar läßt sich immer auf die Gestalt

$$\begin{pmatrix} A^{(1)}(t) & & & 0 \\ & A^{(2)}(t) & & \\ & & A^{(3)}(t) & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

transformieren, so daß die Matrizen $A^{(i)}(t)$ alle obigen Eigenschaften von $A(t)$ besitzen und außerdem unzerfällbar sind. (Sie können wohl reduzibel, aber nicht vollständig reduzibel sein.) Da wir nur die Analyzitätseigenschaften der $A(t)$ untersuchen, dürfen wir von vornherein die Unzerfällbarkeit der $A(t)$ voraussetzen. Dann hat bekanntlich jede mit allen $A(t)$ vertauschbare Matrix nur eine charakteristische Wurzel.

$A(t)$ ist offenbar mit allen $A(s)$ vertauschbar, sie hat also eine einzige charakteristische Wurzel: $f(t)$. Wegen $f(t) \cdot m = \sum_{k=1}^{m} A_{kk}(t)$ ist sie eine meßbare Funktion in $\mathfrak{I}$. Nach einem Satze von Frobenius[4]) ist eine charakteristische Wurzel des Produktes von zwei vertauschbaren Matrizen immer als ein Produkt von charakteristischen Wurzeln der

---

[3]) Daraus erhält man den allgemeinen Fall (von Äquivalenz abgesehen) durch Ränderung aller Matrizen mit lauter Nullen.

[4]) Vgl. G. Frobenius, Sitzungsber. Preuß. Akad. (1896), S. 601—614. Die folgende Beweisführung schließt sich einigen Gedanken von Herrn I. Schur an, die er bei Untersuchung stetiger Darstellungen angewandt hat; vgl. Sitzungsber. Preuß. Akad. (1928). S. 100—124.

beiden Faktoren darstellbar. Es ist also $f(t) \cdot f(s) = f(t+s)$ (für $s, t, s+t$ in $\mathfrak{I}$). Die einzige meßbare Lösung dieser Funktionalgleichung ist die Exponentialfunktion [5]).

Wir können voraussetzen, daß $t = 1$ in $\mathfrak{I}$ liegt (das läßt sich ja immer erreichen durch Ersetzung von t durch $c \cdot t$, c beliebiger Punkt von $\mathfrak{I}$). Ist $f(1) = e^{\alpha}$ und $g(t) = e^{-\alpha t} \cdot f(t)$, so ist auch $g(t)$ meßbar und genügt der Funktionalgleichung. Da $\left[g\left(\frac{1}{2^\nu}\right)\right]^{2^\nu} = g(1) = 1$ ist, so muß $g\left(\frac{1}{2^\nu}\right)$ gleich $\exp\left(2\pi i \frac{\beta_\nu}{2^\nu}\right)$ sein, wo β_ν eine ganze Zahl, $-2^{\nu-1} < \beta_\nu \leqq 2^{\nu-1}$, ist. Die Funktion $h(t) = \frac{g(t)}{|g(t)|}$ genügt auch der Funktionalgleichung, ist beschränkt und meßbar, so daß wir sie integrieren können. Aus der Relation

$$\int_0^{t+s} h(x)\,dx = \int_0^{t} h(x)\,dx + \int_0^{s} h(t+x)\,dx = \int_0^{s} h(x)\,dx + \int_0^{t} h(s+x)\,dx$$

und der Funktionalgleichung folgt dann für $t = \frac{1}{2^\nu}$

$$\int_0^{\frac{1}{2^\nu}} h(x)\,dx \cdot [1 - h(s)] = \int_0^{s} h(x)\,dx \cdot \left[1 - h\left(\frac{1}{2^\nu}\right)\right].$$

Man kann s in $\mathfrak{I}$ so auswählen, daß

$$\int_0^{s} h(x)\,dx \neq 0$$

ist. Im entgegengesetzten Falle wäre $h(x) = 0$ fast überall in $\mathfrak{I}$, was offenbar nicht zutrifft. Also zeigt die obige Gleichung, daß $h\left(\frac{1}{2^\nu}\right) \to 1$, wenn $\nu \to \infty$. Da aber, wegen $\left[h\left(\frac{1}{2^\nu}\right)\right]^2 = h\left(\frac{1}{2^{\nu-1}}\right)$, β_ν entweder gleich $\beta_{\nu-1}$ oder gleich $\beta_{\nu-1} \pm 2^{\nu-1}$ sein muß, schließt man aus der obigen Konvergenz, daß die β_ν von einem gewissen Index μ an konstant bleiben. Es muß also für eine beliebige dyadisch-rationale Zahl $d = \frac{n}{2^\nu}$ in $\mathfrak{I}$ $g(d) = \exp(2\pi i \beta_\mu d)$ sein. Die Funktion $k(t) = g(t) \cdot \exp(-2\pi i \beta_\mu t)$ ist also meßbar, genügt der Funktionalgleichung, und es ist

$$k(t+d) = k(t) \cdot k(d) = k(t).$$

Es gibt also nach unserem Lemma zu jedem y aus $\mathfrak{I}$ mindestens ein t mit der Eigenschaft $k(t+y) = k(t) \cdot k(y) = k(t)$. Es gilt also tatsächlich,

[5]) $f(t) \neq 0$ wegen $f(-t) \cdot f(t) = f(1) = 1$.

wegen $k(t) = \exp(-2\pi i \beta_\mu t) \cdot g(t) = \exp(-2\pi i \beta_\mu t - \alpha t) \cdot f(t) = 1$, die gewünschte Gleichung $f(t) = \exp(\gamma t)$.

Die Matrizen $B(t) = \exp(-\gamma t) \cdot A(t)$ besitzen dieselben Eigenschaften wie die $A(t)$, aber ihre charakteristischen Wurzeln sind alle gleich 1. Wenn wir $1 - B(t) = C(t)$ setzen, dann lehrt die Cayleysche Relation, daß

$$[C(t)]^m = 0$$

ist. Wir können also den Logarithmus von $B(t)$ als eine endliche Matrizensumme definieren:

$$\log B(t) = \log(1 - C(t)) = -\sum_{n=1}^{m-1} \frac{[C(t)]^n}{n}.$$

Es gilt offenbar die Relation

$$\log B(t+s) = \log(B(t) \cdot B(s)) = \log B(t) + \log B(s).$$

Die Funktion $(\log B(t))_{ik}$ ist also in $\mathfrak{Z}$ meßbar und genügt dort der Funktionalgleichung

$$(s) \qquad \chi(t) + \chi(s) = \chi(t+s).$$

Die Funktion $\psi(t) = \chi(t) - t \cdot \chi(1)$ genügt auch der Funktionalgleichung (s) und verschwindet, wie man leicht einsieht, für jede rationale Zahl r von $\mathfrak{Z}$, es ist also $\psi(t+r) = \psi(t) + \psi(r) = \psi(t)$. Nach unserem Lemma gibt es also zu jedem y von $\mathfrak{Z}$ mindestens ein t so, daß $\psi(t+y) = \psi(t) + \psi(y) = \psi(t)$, also $\psi(y) = 0$, $\chi(y) = y \cdot \chi(1)$ ist[6]). Es gilt so die Gleichung $[\log B(t)]_{ik} = t \cdot [\log B(1)]_{ik}$, also auch die Gleichung

$$\log B(t) = t \cdot \log B(1).$$

Da

$$B(t) = \exp \log B(t) = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(\log B(t))^n}{n!} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\sum_{\nu=1}^{m-1} \frac{[C(t)]^\nu}{\nu} \right)^n$$

ist, was man durch Umordnung dieser endlichen Summe unter Berücksichtigung der Relation $[C(t)]^m = 0$ leicht rechtfertigen kann, so folgt, daß

$$B(t) = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{[\log B(1)]^n}{n!} \cdot t^n,$$

also

$$A(t) = \exp \gamma t \cdot \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(\log B(1))^n}{n!} \cdot t^n$$

ist.

Wir haben also bewiesen, daß aus der vorausgesetzten Meßbarkeit der $A(t)$ auch ihre Analyzität folgt.

---

[6]) Vgl. auch M. Fréchet, L'Enseignement Math. 15 (1913), S. 390—393; W. Sierpiński, Fund. Math. 1 (1920), S. 116—122; St. Banach, ebenda, S. 123—124.

2b. Die Betrachtung des allgemeinen Falles läßt sich, wie im folgenden gezeigt wird, auf die Ergebnisse von **2a** zurückführen. Sei U eine Umgebung der Einheit in einer r-gliedrigen Lieschen Gruppe mit den Gruppenelementen $g(a_1, a_2, \ldots, a_r)$, und sei $D(g(a_1, a_2, \ldots, a_r))$ eine Darstellung vom Grade m von U so, daß $D_{ik}(g(a_1, a_2, \ldots, a_r))$ in U von den Parametern (r-dimensional) meßbar abhängt. Man kann eine Umgebung V der Einheit finden, in der die Gruppenelemente sich eindeutig in der kanonischen Form $e^{t_1 I_1} \cdot e^{t_2 I_2} \cdot e^{t_3 I_3} \ldots e^{t_r I_r}$ (wo $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_r$ kanonische Parameter, $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_r$ infinitesimale Elemente sind) aufschreiben lassen. Es ist bekannt, daß es eine in $U \cdot V$ enthaltene Umgebung der Einheit, $\overline{U}$, gibt, in welcher die Funktionaldeterminante $\left|\frac{\partial a_i}{\partial t_k}\right|$ eine nichtverschwindende kontinuierliche Funktion ist. Damit ist gesichert, daß die Darstellungsmatrizen von $\overline{U}$ auch von den kanonischen Parametern (r-dimensional) meßbar abhängen. Der wohlbekannte Fubinische Satz lehrt nun, daß es ein $\bar{t}_1$ gibt, so daß die Darstellungsmatrizen $D(e^{\bar{t}_1 I_1} \cdot e^{t_2 I_2} \ldots e^{t_r I_r})$ von den übrigen Parametern ($r-1$-dimensional) meßbar abhängen. Wegen

$$D(e^{-\bar{t}_1 I_1}) \cdot D(e^{\bar{t}_1 I_1} \cdot e^{t_2 I_2} \ldots e^{t_r I_r}) = D(e^{-\bar{t}_1 I_1} \cdot e^{\bar{t}_1 I_1} e^{t_2 I_2} \ldots e^{t_r I_r})$$
$$= D(e^{t_2 I_2} \ldots e^{t_r I_r})$$

ist dann auch $D(e^{t_2 I_2} \ldots e^{t_r I_r})$ ($r-1$-dimensional) meßbar. Auf dieselbe Weise beweist man (nach r Schritten), daß die Matrizen $D(e^{t_i I_i})$ linear meßbar von den t_i abhängen. Nun ist

$$D(e^{(t_i + s_i) I_i}) = D(e^{t_i I_i} e^{s_i I_i}) = D(e^{t_i I_i}) \cdot D(e^{s_i I_i}),$$

nach **2a** ist also $D(e^{t_i I_i})$ analytische Funktion von t_i. Wegen der Darstellungseigenschaft soll

$$D(e^{t_1 I_1} e^{t_2 I_2} \ldots e^{t_r I_r}) = D(e^{t_1 I_1}) D(e^{t_2 I_2}) \ldots D(e^{t_r I_r})$$

sein, also ist die Darstellung in einer Umgebung der Einheit tatsächlich *analytisch*.

2c. Herr van der Waerden[7]) hat gezeigt, daß jede Darstellung einer halbeinfachen Lieschen Gruppe, welche in einer Umgebung der Einheit beschränkte Matrixelemente hat, dort auch stetig ist. Durch Zusammenfassung dieses Satzes mit dem Resultat von **2b**, ergibt sich der Satz: *Jede Darstellung einer Umgebung der Einheit einer halbeinfachen Lieschen Gruppe, die nicht analytisch ist, kann weder beschränkt, noch meßbar sein.*

[7]) Vgl. B. L. van der Waerden, Math. Zeitschr. **36** (1933), S. 780—786.

§ 3.

Darstellungen im Hilbertschen Raume.

3a. Wir wollen nun die Ergebnisse des vorigen Abschnittes auf Gruppendarstellungen durch gewisse unendliche Matrizen ausdehnen. Diese Matrizen sollen nämlich zu beschränkten normalen linearen Transformationen des unendlichvieldimensionalen komplexen Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$ gehören. Wir beginnen mit der Untersuchung der Darstellungen der eingliedrigen Gruppe der Translationen in einer Umgebung der Einheit.

Sei also N_t eine in $\mathfrak{I} = (-a, a)$[8]) *definierte Schar von beschränkten normalen Transformationen (d. h. N_t^* ist mit N_t vertauschbar) mit den folgenden Eigenschaften:*

$(N_t f, g)$ ist in $\mathfrak{I}$ meßbar für ein beliebiges Paar von Elementen f, g aus $\mathfrak{H}$,

$N_t N_s = N_{t+s}$, wofern $t, s, t+s$ alle in $\mathfrak{I}$ liegen.

Wir können annehmen, daß $t = 1$ in $\mathfrak{I}$ liegt. Dies ist nämlich immer erreichbar durch Ersetzung von t durch $c \cdot t$ (c ein beliebiger von 0 verschiedener Punkt in $\mathfrak{I}$). Wir nehmen ferner an, daß N_0 die identische Transformation ist[9]).

3b. Seien zunächst die N_t *unitär*, $N_t = U_t$, dann gibt es eine Zerlegung der Einheit F_ϑ, d. h. eine im Intervall $0 \leqq \theta \leqq 1$ definierte Schar von Projektionsoperatoren mit den Eigenschaften: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_\vartheta \cdot F_{\vartheta'} = F_{\min(\vartheta, \vartheta')}$, $F_{\vartheta - 0} = F_\vartheta$ so, daß

$$(U_1 f, g) = \int_0^1 e^{2\pi i \vartheta} d(F_\vartheta f, g)$$

ist. Die durch

$$(U_1^t f, g) = \int_0^1 e^{2\pi i t \vartheta} d(F_\vartheta f, g)$$

definierten unitären Transformationen U_1^t sind offenbar meßbar, mit U_s vertauschbar, und es gilt $U_1^t \cdot U_1^s = U_1^{t+s}$. Die unitären Transformationen $\overline{V}_t = U_t \cdot U_1^{-t}$ besitzen also in $\mathfrak{I}$ dieselben charakteristischen Eigenschaften

---

[8]) a darf auch gleich ∞ sein.

[9]) Dies ist keine wesentliche Beschränkung. Es gehört nämlich (wegen $N_0 N_0 = N_0$) $f - N_0 f$ bzw. $N_0 f$ zu den Eigenwerten 0 bzw. 1 von N_0. Die zugehörigen abgeschlossenen linearen Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{O}$ bzw. $\mathfrak{E}$ sind aufeinander orthogonal und spannen $\mathfrak{H}$ auf. Wegen $N_t = N_0 N_t = N_t N_0$ transformiert N_t beide in sich, und zwar $\mathfrak{O}$ in 0.

wie die U_t[10]). Es gilt aber überdies $\overline{V}_0 = \overline{V}_1 = 1$. $\overline{V}_t$ hat also die Periode 1, wir können es über die ganze t-Gerade periodisch fortsetzen. Die Fortsetzung stimmt in $\mathfrak{H}$ offenbar mit $\overline{V}_t$ überein; wir können sie V_t nennen.

Wegen der Beschränktheit und Meßbarkeit von $(V_t f, g)$ existiert

$$\int_0^1 e^{-2\pi i n t}(V_t f, g)\cdot dt \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

und definiert bei festem f eine beschränkte konjugiert-lineare Funktion von g; es gibt daher nach einem bekannten Satz[11]) zu jedem f ein f^*, so daß das obige Integral gleich (f^*, g) ist. Die Gleichung $P_n f = f^*$ definiert dann eine beschränkte lineare Transformation P_n. Wegen

$$\begin{aligned}(V_s P_n f, g) &= (P_n f, V_{-s} g) = \int_0^1 e^{-2\pi i n t}(V_t f, V_{-s} g)\, dt \\ &= \int_0^1 e^{-2\pi i n t}(V_{t+s} f, g)\, dt = e^{2\pi i n s}\int_s^{s+1} e^{-2\pi i n y}(V_y f, g)\, dy \\ &= e^{2\pi i n s}\cdot(P_n f, g)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(P_n V_s f, g) &= \int_0^1 e^{-2\pi i n t}(V_t V_s f, g)\, dt = \int_0^1 e^{-2\pi i n t}(V_{t-s} f, g)\, dt \\ &= e^{2\pi i n s}(P_n f, g)\end{aligned}$$

ist

$$(e) \qquad V_s P_n = P_n V_s = e^{2\pi i n s}\cdot P_n.$$

Wegen

$$\begin{aligned}(P_n f, g) &= \overline{\int_0^1 e^{2\pi i n t}(V_{-t} g, f)\, dt} = -\overline{\int_0^{-1} e^{-2\pi i n y}(V_y g, f)\, dy} \\ &= \int_{-1}^{0} = \int_0^1 = \overline{(P_n g, f)} = (f, P_n g)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(P_n P_m f, g) &= \int_0^1 e^{-2\pi i n t}(V_t P_m f, g)\, dt \\ &= \int_0^1 e^{-2\pi i n t} e^{2\pi i m t}(P_m f, g)\, dt = \begin{cases}(P_m f, g) & \text{für } m = n \\ 0 & \text{für } m \neq n\end{cases}\end{aligned}$$

sind die P_m paarweise orthogonale Projektionsoperatoren.

---

[10]) Das Produkt von zwei meßbaren Transformationen A_t und B_t ist wegen

$$(A_t B_t f, g) = (B_t f, A_t^* g) = \sum_n (B_t f, \varphi_n)(\varphi_n, A_t^* g) = \sum_n (B_t f, \varphi_n)(A_t \varphi_n, g)$$

($\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ ist ein vollständiges orthogonales System) auch meßbar.

[11]) Vgl. z. B. F. Riesz, Acta Szeged 5 (1930), S. 20—54; 7 (1934), S. 34—38.

Sei $1 - \sum_{-\infty}^{\infty} P_m = S$. Der Projektionsoperator S ist zu jedem P_m orthogonal und es gilt somit

$$(P_m S f, g) = 0 = \int_0^1 e^{-2\pi i m t} (V_t S f, g) \cdot dt.$$

Da alle Fourierkoeffizienten von $(V_t S f, g)$ gleich 0 sind, muß $(V_t S f, g)$ fast überall (in t) verschwinden. Durchläuft g ein vollständiges Orthogonalsystem $g_1, g_2, g_3, \ldots$, so ist $(V_t S f. g_n) = 0$, also $V_t S f = 0$ fast überall (in t). Das heißt aber, daß $V_{-t} V_t S f = S f = 0$, also $S = 0$ ist.

Multiplizieren wir die nun bewiesene Gleichung $1 = \sum_{-\infty}^{\infty} P_m$ mit V_t, so ergibt sich wegen (e)

$$V_t = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi n t} P_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i v t} d\Big(\sum_{n<\nu} P_n\Big).$$

Es gilt also in $\mathfrak{H}$

(u) $\quad U_t = U_1^t \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n t} P_n \quad$ und auch $\quad U_t P_m = e^{2\pi i m t} \cdot U_1^t P_m.$

Wir definieren die Operatorenschar

$$E_\varkappa^U = F_{\varkappa - [\varkappa]} \cdot P_{[\varkappa]} + \sum_{n<[\varkappa]} P_n \qquad (-\infty < \varkappa < \infty).$$

Wenn man beachtet, daß wegen der Vertauschbarkeit von U_t und U_1^t auch U_1^t und V_t und somit auch F_ϑ und P_n vertauschbar sind, so sieht man, daß $E_\varkappa^U$ ein Projektionsoperator ist. Wir behaupten, daß $E_\varkappa^U$ eine Zerlegung der Einheit bildet. Aus $\sum_{-\infty}^{\infty} P_n = 1$ folgt zuerst, daß für $\varkappa \to -\infty$ $E_\varkappa^U \to 0$ und für $\varkappa \to \infty$ $E_\varkappa^U \to 1$. Die Eigenschaften $E_\varkappa^U E_{\varkappa'}^U = E_{\min(\varkappa, \varkappa')}^U$ und $E_{\varkappa - 0}^U = E_\varkappa^U$ folgen aus den entsprechenden Eigenschaften von F_ϑ und aus der Orthogonalität der P_n.

Wir behaupten ferner, daß

$$(U_t f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \varkappa t} d(E_\varkappa^U f, g)$$

ist. Es genügt offenbar, dies nur für die Elemente $P_m f$ zu beweisen. Da aber ersichtlich

$$E_\varkappa^U P_m = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \varkappa < m, \\ F_{\varkappa - m} P_m & \text{„} \quad m \leqq \varkappa < m+1, \\ P_m & \text{„} \quad m+1 \leqq \varkappa \end{cases}$$

ist, so folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x t}\, d(E_x^U P_m f, g) = \int_m^{m+1} e^{2\pi i x t}\, d(F_{x-m} P_m f, g)$$

$$= e^{2\pi i m t} \int_0^1 e^{2\pi i \vartheta t}\, d(F_\vartheta P_m f, g)$$

$$= e^{2\pi i m t} (U_1^t P_m f, g) = (U_t P_m f, g).$$

(Die letzte Gleichung folgt aus (u).)

Wir haben also bewiesen, daß es zu jeder Schar U_t von unitären Transformationen, die die unter **3a** *aufgezählten Eigenschaften hat, eine Zerlegung der Einheit E_x^U gibt, so daß*

$$(U_t f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x t}\, d(E_x^U f, g).$$

Dieser Satz ist unter dem Namen von Stone bekannt [12]).

3c. Als zweiten speziellen Fall nehmen wir nun an, daß die N_t *selbstadjungiert* sind, $N_t = H_t$. Da H_1 und $H_1^{-1} = H_{-1}$ beide beschränkt und (wegen $H_t = (H_{t/2})^2$) positiv-definit sind, so gibt es eine Zerlegung der Einheit G_λ $(0 < m \leqq \lambda \leqq M)$, so daß

$$(H_1 f, g) = \int_m^M \lambda\, d(G_\lambda f, g)$$

ist. Wir definieren H_1^t durch

$$(H_1^t f, g) = \int_m^M \lambda^t\, d(G_\lambda f, g).$$

Die selbstadjungierten Transformationen $H_t \cdot H_1^{-t} = \overline{H}_t$ besitzen alle charakteristischen Eigenschaften von H_t, und es gilt überdies: $\overline{H}_1 = 1$. Wegen der Definitheit folgt daraus für alle dyadisch-rationalen Zahlen d in $\mathfrak{Z}$, daß $\overline{H}_d = 1$ ist. Die Funktion $h(t) = (\overline{H}_t f, g)$ ist in $\mathfrak{Z}$ meßbar, und es ist $h(t+d) = h(t)$. Es gilt somit gemäß unserem Lemma für ein beliebig gegebenes y aus $\mathfrak{Z}$ und für fast alle t in $\mathfrak{Z}_y$ die Gleichung: $h(t+y) = h(t)$. Durchläuft g ein vollständiges Orthogonalsystem $g_1, g_2, g_3, \ldots$, so gilt auch für fast alle t in $\mathfrak{Z}_y$:

$$(\overline{H}_{t+y} f, g_n) = (\overline{H}_t \overline{H}_y f, g_n) = (\overline{H}_t f, g_n),$$

also $\overline{H}_t \overline{H}_y = \overline{H}_t$, d. h. $\overline{H}_y = 1$.

---

[12]) Vgl. M. H. Stone, Proc. Nat. Acad. **16** (1930), S. 172—175; Annals of Math. **33** (1932), S. 643—648; J. v. Neumann, ebenda **33** (1932), S. 567—573; F. Riesz, Acta Szeged **6** (1932/34), S. 184—198.

Wir haben somit gezeigt, daß

$$(H_t f, g) = \int_m^M \lambda^t \, d(G_\lambda f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\mu} \cdot d(E_\mu^H f, g)$$

ist. (Die Zerlegung der Einheit E_μ^H ist gleich 0, G_{e^μ}, bzw. 1, je nachdem $\mu < \log m$, $\log m \leqq \mu \leqq \log M$, bzw. $\mu > \log M$ ist.)

3d. Beschäftigen wir uns nun mit dem allgemeinen Fall, wo die N_t *normal* sind. Es ist bekannt [13]), daß die normale Transformation N_t als Produkt einer positiv-definiten selbstadjungierten Transformation H_t und einer mit ihr vertauschbaren unitären Transformation U_t darstellbar ist, und daß H_t und U_t mit allen Transformationen vertauschbar sind, welche mit N_t vertauschbar sind. Es gilt $H_{2t} = \sqrt{N_{2t} N_{2t}^*} = N_t \cdot N_t^*$, also ist H_t und somit auch U_t meßbar. Man sieht leicht, daß die U_t und H_t beide Gruppendarstellungen sind und daß $U_0 = H_0 = 1$ ist. Die Ergebnisse von **3b** und **3c** lehren nun, daß wir symbolisch

$$N_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\mu} \, d E_\mu^H \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t x} \, d E_x^U$$

schreiben können. *Wenn wir endlich die sogenannte komplexe Zerlegung der Einheit* $K_z = K_{u+2\pi x \cdot i} = E_u^H \cdot E_x^U$ *einführen, dann gilt*

$$(N_t f, g) = \iint e^{zt} \cdot d(K_z f, g).$$

Es gibt also eine infinitesimale normale Transformation N, definiert durch

$$(N f, g) = \iint z \, d(K_z f, g), \qquad \|N f\|^2 = \iint |z|^2 \, d \|K_z f\|^2$$

für alle g und für alle f, für welche das zweite Integral konvergiert, so daß

$$N_t = e^{tN}$$

ist. Die Transformation N ist nicht notwendig im ganzen Hilbertschen Raum definiert, sie ist aber gewiß für alle solchen f definiert, für welche

$$K(Q_n) f = (K_{n+in} - K_{n-in} - K_{-n+in} + K_{-n-in}) f = f$$

ist [14]), denn in diesem Fall ist

$$\|N f\|^2 = \iint |z|^2 \, d \|K_z f\|^2 = \iint_{Q_n} |z|^2 \cdot d \|K_z f\|^2,$$

also $\|N f\|$ endlich. Aus den charakteristischen Eigenschaften der komplexen Zerlegungen der Einheit folgt aber, daß $K(Q_n) f \to f$, wenn $n \to \infty$. N ist also auf einer in $\mathfrak{H}$ überall dichten linearen Mannigfaltigkeit definiert.

---

[13]) Vgl. M. H. Stone, Linear Transformations in Hilbert Space, New York (1932), S. 311—331.

[14]) Q_n bedeutet das Quadrat: $(n+in, n-in, -n-in, -n+in)$.

3e. Es sei nun eine Schar von beschränkten normalen Transformationen $N(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r)$ gegeben, die eine Darstellung eines r-gliedrigen Lieschen Gruppenkeimes bilden. Wenn die Funktionen $(N(a_1, \ldots, a_r) f, g)$ (r-dimensional) meßbar von den Parametern abhängen, dann können wir in genau derselben Weise, wie dies in **2b** für endliche Matrizen geschehen ist, darauf schließen, daß die Darstellung analytisch ist, also von infinitesimalen Transformationen erzeugt wird.

(Eingegangen am 15. 6. 1935.)

Bemerkung. (Zugefügt am 9. 9. 1935.) Es möchte von Interesse sein, daß die Ergebnisse von **3c** auch dann gültig bleiben, wenn man statt der Meßbarkeit von den $(H_t f, f)$ nur fordert, daß sie im Punkte $t = 0$ endliche Schwankungen haben. Dann ist nämlich jede Funktion $l_f(t) = \log(H_t f, f)$ in einer Umgebung von 0 nach oben beschränkt und es gilt wegen der Schwarzschen Ungleichung:

$$2 \cdot l_f\left(\frac{t+s}{2}\right) = \log(H_{\frac{t+s}{2}} f, f)^2 = \log(H_{\frac{t}{2}} f, H_{\frac{s}{2}} f)^2 \leqq \log(\| H_{\frac{t}{2}} f \|^2 \cdot \| H_{\frac{s}{2}} f \|^2)$$
$$= \log(H_t f, f) + \log(H_s f, f) = l_f(t) + l_f(s).$$

$l_f(t)$ ist also eine in einem Intervall nach oben beschränkte konvexe Funktion. Nach einem bekannten Satze[15]) ist sie also dort auch stetig. H_t ist somit in 0 und wegen der Gruppeneigenschaft also auch überall in $\mathfrak{H}$ stetig. Da H_1^t offenbar stetig ist, ist auch $\overline{H_t}$ stetig. Es folgt also aus der für dyadisch-rationale Zahlen geltenden Gleichung $\overline{H_d} = 1$ unmittelbar auch $\overline{H_t} \equiv 1$, also $H_t = H_1^t$, w. z. b. w.

---

[15]) Vgl. J. L. W. V. Jensen, Acta Math. 30 (1906), S. 175—193; W. Sierpiński, Fund. Math. 1 (1920), S. 125—129.

Die Erzeugung der geodätischen Linien und Kreise einer Fläche konstanter Krümmung durch Aufwickeln geradliniger oder kreisförmiger Flächenstreifen.

Von

Friedrich Schilling in Danzig-Oliva.

I. Die Problemstellung und die Gleichungen der Rotationsflächen konstanter Krümmung.

Bereits in meinem Buche: „Die Pseudosphäre und die nichteuklidische Geometrie", 2. Aufl., Leipzig 1935, ist auf S. 157 ff. die Abwicklung eines solchen schmalen Flächenstreifens auf der *Pseudosphäre* in eine Ebene, der eine geodätische Linie oder einen geodätischen Kreis als wesentliche

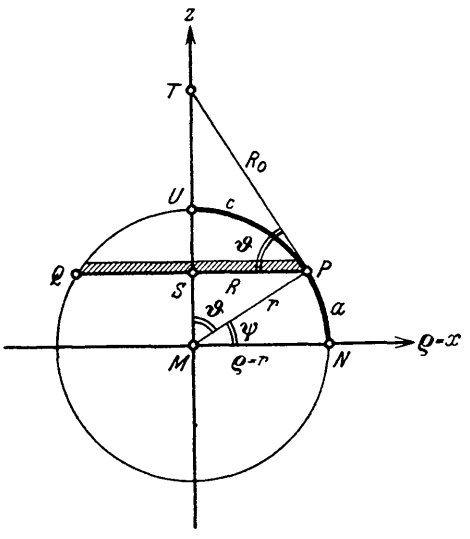


Fig. 1.
Kugel.

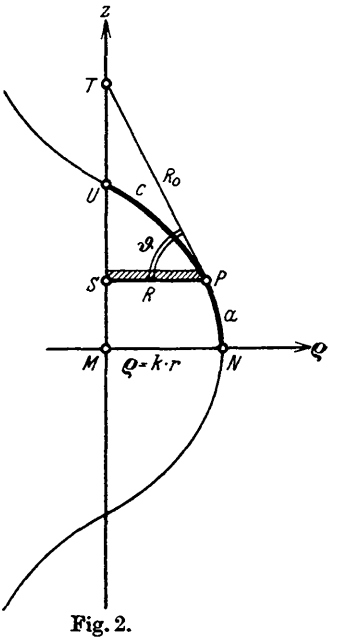


Fig. 2.
Spindeltypus.

Randkurve besitzt, und die umgekehrt daraus folgende Aufwicklung eines geradlinigen oder kreisförmigen ebenen Flächenstreifens eingehend behandelt. Dieses Werk soll fernerhin kurz als „Pseudo" zitiert werden. Die dort gefundenen Resultate wollen wir jetzt, und zwar *für alle Flächen konstanter*

Krümmung, in einer anderen, sehr einfachen Weise ableiten, die jedoch weiterreichende Sätze der allgemeinen Flächentheorie benutzt[1]).

Wir betrachten zunächst die analoge Problemstellung bei den (reellen) *Rotationsflächen konstanter Krümmung.*

Die *Rotationsflächen konstanter positiver Krümmung* $+\frac{1}{r^2}$ sind durch die folgenden Gleichungen ihrer Meridiankurven in den rechtwinkligen Koordinaten ϱ, z mit dem Parameter ψ gegeben, wobei stets noch für das rechtwinklige (x, y, z)-Koordinatensystem $x = \varrho \cdot \cos\varphi$, $y = \varrho \cdot \sin\varphi$ ist, wo φ den Winkel des allgemeinen Meridians gegen den Nullmeridian bedeutet.

1. *Die Kugel* (Fig. 1)

$$\left|\begin{aligned} \varrho &= r \cdot \cos\psi, \\ z &= r \cdot \sin\psi \end{aligned}\right. \tag{1a, b}$$

oder

$$z = \sqrt{r^2 - \varrho^2}. \tag{1*}$$

2. *Die Rotationsfläche vom Spindeltypus* (Fig. 2)

$$\left|\begin{aligned} \varrho &= k\,r \cdot \cos\psi, \\ z &= r \cdot E(k, \psi). \end{aligned}\right. \tag{2a, b}$$

3. *Die Rotationsfläche vom Wulsttypus* (Fig. 3)

$$\left|\begin{aligned} \varrho &= \frac{r}{k} \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}, \\ z &= \frac{r}{k} \cdot E(k, \psi) - r \cdot \frac{1 - k^2}{k} \cdot F(k, \psi). \end{aligned}\right. \tag{3a, b}$$

Hier, wie später, ist der Parameter ψ auf das Intervall $-\frac{\pi}{2} \leqq \psi \leqq \frac{\pi}{2}$ beschränkt. Und es bedeutet k eine den Ungleichungen $0 < k < 1$ genügende Konstante und

$$\left|\begin{aligned} F(k, \psi) &= \int_0^{\psi} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}} \cdot d\psi, \\ E(k, \psi) &= \int_0^{\psi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi} \cdot d\psi \end{aligned}\right. \tag{4a, b}$$

die *elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung*[2]).

---

[1]) Das wesentliche Resultat dieser neuen Betrachtung ist bereits „Pseudo", S. 158, Anm. 1, in einem Satze kurz angegeben worden.

[2]) Wegen der Theorie dieser Funktionen sei z. B. die Darstellung in dem Werke: L. Kiepert, Grundriß der Integralrechnung, 14. Aufl., Hannover 1926, S. 320—339 und wegen der Zahlentabellen und weiterer Literatur: Jahnke und Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, 2. Aufl., Leipzig 1933, S. 124—155 genannt. In beiden Werken ist auch $k = \sin\alpha$ gesetzt.

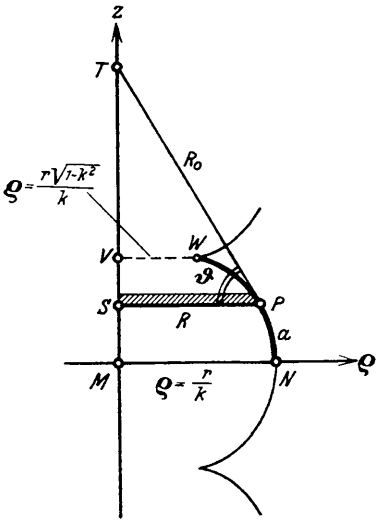


Fig. 3.
Wulsttypus.

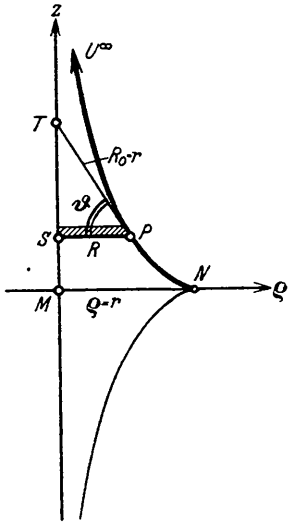


Fig. 4.
Pseudosphäre.

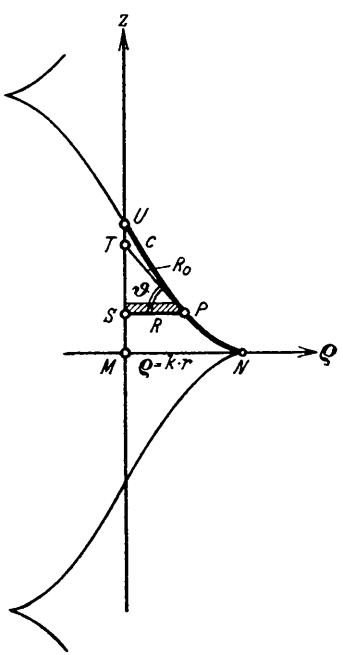


Fig. 5.
Kegeltypus.

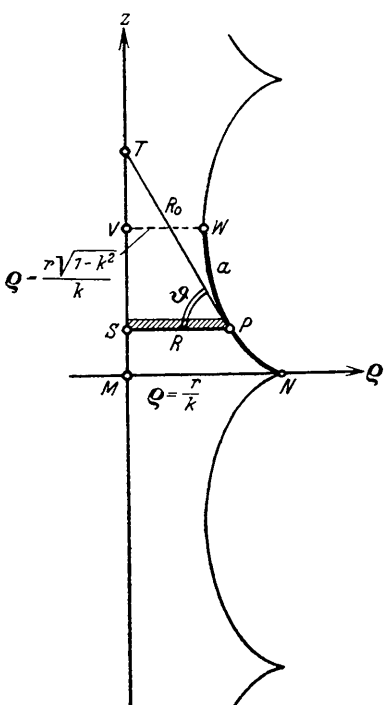


Fig. 6.
Hyperboloidtypus.

Die *Rotationsflächen konstanter negativer Krümmung* $-\frac{1}{r^2}$ sind analog durch die Gleichungen gegeben:

1. *Die Pseudosphäre* (Fig. 4)

$$(5\,a,b)\qquad \left|\begin{aligned} \varrho &= r\cdot\cos\psi,\\ z &= r\cdot\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)-r\cdot\sin\psi,\end{aligned}\right.$$

oder

$$(5^*)\qquad z = r\cdot\log\frac{r+\sqrt{r^2-\varrho^2}}{\varrho}-\sqrt{r^2-\varrho^2}.$$

2. *Die Rotationsfläche vom Kegeltypus* (Fig. 5)

$$(6\,a,b)\qquad \left|\begin{aligned} \varrho &= k\,r\cdot\cos\psi,\\ z &= r\cdot F(k,\psi)-r\cdot E(k,\psi).\end{aligned}\right.$$

3. *Die Rotationsfläche vom Hyperboloidtypus* (Fig. 6)

$$(7\,a,b)\qquad \left|\begin{aligned} \varrho &= \frac{r}{k}\cdot\sqrt{1-k^2\cdot\sin^2\psi},\\ z &= \frac{r}{k}\cdot F(k,\psi)-\frac{r}{k}\cdot E(k,\psi).\end{aligned}\right.$$

1. *Es gibt also für gegebene Werte* $+\frac{1}{r^2}$ *bzw.* $-\frac{1}{r^2}$ *der Krümmung noch den verschiedenen zulässigen Werten* k *entsprechend* ∞^1 *verschiedene allgemeine Rotationsflächen, und die Flächen des gleichen Typus für denselben Wert* k*, aber verschiedene Werte* r *sind zueinander ähnlich.*

In den Fig. 2, 3, 5 und 6 ist stets $k=\frac{\sqrt{3}}{2}=0{,}8660$ gewählt. Für $k=1$ gehen die Gleichungen (2a, b) und (3a, b) in die Gleichungen (1a, b) und die Gleichungen (6a, b) und (7a, b) in die Gleichungen (5a, b), entsprechend also die allgemeinen Rotationsflächen in die Kugel oder die Pseudosphäre über. Die für uns weiterhin in Betracht kommenden Bogen der Meridiane sind in den Fig. 1 bis 6 stark ausgezogen, entsprechend den Werten $0\leqq\psi\leqq\frac{\pi}{2}$. Wenn wir in diesen Figuren die ϱ-Achse mit der x-Achse zusammenfallend denken, so stellen die Meridiankurven speziell die *Nullmeridiane* dar. Nebenbei sei noch bemerkt: Wir wissen ja auch, daß auf den Rotationsflächen konstanter positiver bzw. negativer Krümmung der elliptische bzw. hyperbolische Fall der nichteuklidischen Geometrie veranschaulicht wird [3]).

II. Die Kugel.

Wir betrachten zunächst die einfachen Verhältnisse bei der Kugel näher, weil diese für unsere späteren allgemeineren Untersuchungen von grundlegender Bedeutung sind. Vorweg sei allgemein bemerkt:

[3]) Vgl. deswegen „Pseudo", S. 3 und 4.

2. *Bei allen unseren Flächen sind die Meridiane geodätische Linien* (d. h. kürzeste Linien, vgl. deswegen „Pseudo", S. 17 und 143).

3. *Ein geodätischer Kreis sei für alle Flächen definiert als orthogonale Trajektorie eines Büschels geodätischer Linien.*

Es ist nun bei allen Flächen ein Büschel geodätischer Linien durch die Meridiane gegeben, ein zugehöriger geodätischer Kreis als orthogonale Trajektorie durch einen Breitenkreis.

Bei der Kugel (Fig. 1) gibt also die Strecke PQ die senkrechte Projektion eines geodätischen Kreises auf die Nullmeridianebene wieder. Wir sehen nun weiter in der Figur den *Radius* $r = MP$ der Kugel und, analog in den übrigen Figuren, den *Krümmungsradius* $R = SP$ des geodätischen Kreises, den zugehörigen *geodätischen Radius* $c = \overset{\frown}{UP}$ und den *Radius der geodätischen Krümmung* des geodätischen Kreises $R_0 = PT$ in der Tangente von P und den *Winkel* $\vartheta = \sphericalangle SPT = \sphericalangle P\widehat{M}S$ zwischen der Tangentialebene der Fläche und der Schmiegungsebene des geodätischen Kreises für den Punkt P. (Diese einfache Fig. 1 gibt gewiß ein gutes Beispiel für die Veranschaulichung dieser genannten Begriffe und ihres Zusammenhangs, wie denn diese ganze Arbeit überhaupt noch weiter wertvolle anschauliche Beispiele für die allgemeine Flächentheorie liefert.) Hier ist folgende einfache allgemeine Definition der Flächentheorie zugrunde gelegt:

4. *Der Radius R_0 der geodätischen Krümmung (oder der tangentialen Krümmung) für einen Punkt P einer Kurve auf einer Fläche ist der Krümmungsradius der Kurve, die aus der gegebenen durch ihre senkrechte Projektion auf die Tangentialebene von P hervorgeht.*

In der Tat ist ja hier (Fig. 1), wie später, die auf die Tangentialebene von P durch Projektion aus dem geodätischen Kreis erhaltene Kurve eine Ellipse mit den Halbmessern R und $R \cdot \cos\vartheta$. Es gilt also

$$R_0 = \frac{R}{\cos\vartheta} = PT. \tag{8}$$

Wir erkennen in diesem Beispiel, wie auch in den späteren Beispielen, den allgemeinen Satz der Flächentheorie:

5. *Der Radius R_0 der geodätischen Krümmung einer Flächenkurve wird für einen Kurvenpunkt P durch die Gleichung* (8) *gegeben, wo eben ϑ der Winkel zwischen der Tangentialebene der Fläche und der Schmiegungsebene der Kurve ist*[4]).

Es gelten weiter in der Fig. 1 die Gleichungen

$$c = r \cdot \vartheta \qquad \left(0 < c \leqq r \cdot \frac{\pi}{2}\right) \tag{9}$$

oder

$$\cos\vartheta = \cos\frac{c}{r} = \frac{\sqrt{r^2 - R^2}}{r} \tag{10}$$

[4]) Vgl. wegen der Literatur „Pseudo", S. 167, Anm. 1.

und

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{R}{\sqrt{r^2 - R^2}}, \tag{10a}$$

also

$$R = r \cdot \sin\vartheta = r \cdot \sin\frac{c}{r} \tag{10b}$$

und nach den Gleichungen (8) und (10)

$$R_0 = \frac{R \cdot r}{\sqrt{r^2 - R^2}} \tag{11}$$

oder die wichtige Gleichung

$$\operatorname{tg}\frac{c}{r} = \frac{R_0}{r}. \tag{12}$$

Der geodätische Kreis der Fig. 1 ist jetzt aber zugleich die *geodätische Äquidistante* zu einer geodätischen Linie, nämlich hier zu dem „Äquator", mit dem *geodätischen Abstand* $a = \overset{\frown}{NP}$, für den die Gleichung gilt

$$a = r \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = r \cdot \psi,$$

so daß sich die weitere wichtige Gleichung

$$\operatorname{tg}\frac{a}{r} = \operatorname{ctg}\frac{c}{r} = \frac{r}{R_0} \tag{13}$$

ergibt.

6. *Es folgt also der Radius R_0 der geodätischen Krümmung des geodätischen Kreises auch aus dem geodätischen Radius c durch die Gleichung* (12) *und aus dem geodätischen Abstand a des Kreises von der zugehörigen geodätischen Linie des Kreisbüschels aller Breitenkreise durch die Gleichung* (13).

Überhaupt besteht also zwischen je zwei der Größen R, R_0, ϑ, c, a stets eine einfache Gleichung.

Wir denken nun noch in unserer Fig. 1 den Rotationskegel hinzu, der von den Tangentialebenen in den Punkten des geodätischen Kreises eingehüllt wird. Dieser Kegel hat ja, ebenso wie jede Tangentialebene eines Flächenpunktes angenähert die Umgebung dieses Punktes darstellt, angenähert mit der Kugel einen schmalen Flächenstreifen gemeinsam, den wir von zwei einander sehr nahen Breitenkreisen oder äquidistanten geodätischen Kreisen begrenzt denken können. Dieser Flächenstreifen ist in seiner Projektion auf die Nullmeridianebene in der Fig. 1 angedeutet. Denken wir jetzt diesen Kegel längs seiner Erzeugenden in der Meridianebene $\varphi = \pi$ aufgeschnitten, so können wir ihn in eine Ebene abwickeln. Wir gewinnen den wichtigen Satz:

7. *Der auf diese Weise in eine Ebene abgewickelte Flächenstreifen geht in einen kreisförmigen Flächenstreifen über, dessen wesentliche Randkurve der Kreisbogen mit dem Radius R_0 (und mit dem Zentriwinkel $\omega = 2\pi \cdot \frac{R}{R_0}$)*

ist, wo also R_0 der Radius der geodätischen Krümmung der Flächenkurve, des geodätischen Kreises, ist.

Wir sehen durch unser Beispiel der Kugel, ebenso wie durch die folgenden Beispiele, den Satz der allgemeinen Flächentheorie veranschaulicht:

8. *Ist auf einer abwickelbaren Fläche eine singularitätenfreie Kurve $\varkappa$ mit dem Krümmungsradius R in einem beliebigen Kurvenpunkte P gegeben, so gilt für den Krümmungsradius R_0 im entsprechenden Punkt P_0 der abgewickelten Kurve $\varkappa_0$ die Gleichung $R_0 = \frac{R}{\cos\vartheta}$, wo ϑ den Winkel zwischen der Tangentialebene der Fläche im Punkt P und der Schmiegungsebene der Kurve im Punkt P bedeutet, also R_0 der zugehörige Radius der geodätischen Krümmung ist*[5]).

Wir fügen noch hinzu: Wird der geodätische Kreis der Fig. 1 durch den Äquator ersetzt, so ist also $\measuredangle\, \vartheta = \frac{\pi}{2}$ oder $R_0 = \infty$.

9. *Der Flächenstreifen der Kugel, der den Äquator als wesentliche Begrenzung besitzt, ergibt also bei seiner Abwicklung einen geraden Flächenstreifen.*

Wir haben hier, wie späterhin analog bei den anderen Flächen, den Flächenstreifen so gewählt, daß der Breitenkreis (oder Äquator) die eine Randkurve ist. Natürlich können wir bei gegebenem Breitenkreis den zugehörigen Flächenstreifen auch so wählen, daß der Breitenkreis seine *Mittellinie* ist, abgesehen von den Breitenkreisen des Punktes W in der Fig. 3 und der Punkte N in den Fig. 4 bis 6.

III. Rotationsflächen vom Spindel- und Wulsttypus.

10. *Diese Resultate für einen schmalen Flächenstreifen der Kugel, dessen wesentlicher Rand ein Breitenkreis oder der Äquator ist (während der andere Rand von einem benachbarten Breitenkreis gebildet wird), also die Sätze 5 bis 7 und die Formeln (12) und (13) gelten nun auch analog für einen ebensolchen Flächenstreifen der Rotationsflächen vom Spindel- oder Wulsttypus.*

Denn auch bei diesen Flächen stellen die Meridiane ein Büschel geodätischer Linien dar, die auch zum Äquator, einer geodätischen Linie, senkrecht stehen. Daß der Äquator eine geodätische Linie ist, folgt schon daraus, daß für jeden seiner Punkte die Flächennormale mit der Hauptnormale der Kurve zusammenfällt. Die Breitenkreise sind also wieder geodätische Kreise. Es ist also eine an den Äquator angrenzende Flächenzone der Kugel, die längs des Meridians $\varphi = \pi$ aufgeschnitten ist, in eine entsprechende an den Äquator angrenzende Flächenzone einer der

[5]) Vgl. wegen der Literatur „Pseudo", S. 159, Anm. 1.

Rotationsflächen verbiegbar. Ferner gilt auch der Mindingsche Satz der allgemeinen Flächentheorie:

11. *Bei der Verbiegung einer Fläche bleibt die geodätische Krümmung* $\frac{1}{R_0}$ *einer jeden Kurve auf der Fläche unverändert*[6]).

Der vorhin genannte aufgeschnittene Flächenstreifen der Kugel ist folglich auch in einen solchen entsprechenden Flächenstreifen einer jeden dieser Rotationsflächen verbiegbar, bei dem der Breitenkreis der wesentlichen Begrenzung denselben Radius R_0 der geodätischen Krümmung besitzt. Somit ist der Satz 10 erwiesen. Wir wollen jedoch auch direkt zeigen, daß die Gleichungen (12) und (13) für die Fig. 2 und die Gleichung (13) für die Fig. 3 gelten.

Für die Rotationsfläche vom *Spindeltypus* (Fig. 2) ist ja nach den Gleichungen (2a, b), S. 298,

$$d\varrho = -kr \cdot \sin\psi \cdot d\psi,$$
$$dz = r \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi} \cdot d\psi.$$

Also gilt für das Bogenelement des Meridians

$$d\sigma^2 = d\varrho^2 + dz^2 = r^2 \cdot d\psi^2$$

oder nach der obigen Gleichung für $d\varrho$ und der Gleichung (2a)

$$d\sigma = -r \cdot d\psi = r \cdot \frac{1}{\sqrt{k^2 r^2 - \varrho^2}} \cdot d\varrho,$$

wobei hier wie später $d\sigma$ positiv für positive Werte $d\varrho$ gewählt sei, und folglich gemäß der Gleichung (2a), S. 298, für $\varrho = R$

$$\cos\vartheta = \left(\frac{d\varrho}{d\sigma}\right)_{\varrho = R} = k \cdot \sin\psi = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{k^2 r^2 - R^2}.$$

Für den Radius R_0 der geodätischen Krümmung des Breitenkreises $\varrho = R$ ergibt sich demnach

$$R_0 = \frac{R}{\cos\vartheta} = \frac{Rr}{\sqrt{k^2 r^2 - R^2}}. \tag{14}$$

Ferner ist der geodätische Radius des Breitenkreises

$$c = \int_{\varrho=0}^{\varrho=R} d\sigma = r \cdot \int_0^R \frac{1}{\sqrt{k^2 r^2 - \varrho^2}} \cdot d\varrho = r \cdot \arcsin\frac{R}{kr}$$

oder

$$\sin\frac{c}{r} = \frac{R}{kr}$$

und

$$\operatorname{tg}\frac{c}{r} = \frac{R}{\sqrt{k^2 r^2 - R^2}} = \frac{R_0}{r}. \tag{15}$$

[6]) Vgl. wegen der Literatur „Pseudo", S. 166, Anm. 1.

Ferner ist noch die Länge des Bogens $\widehat{UN}$ des Meridians in der Fig. 2

$$\widehat{UN} = c + a = \int_{\varrho=0}^{\varrho=kr} d\sigma = r \cdot \int_0^{kr} \frac{1}{\sqrt{k^2 r^2 - \varrho^2}}\, d\varrho = r \cdot \frac{\pi}{2},$$

also gleich dem halben Meridian der Kugel. Folglich gilt auch noch für den Bogen $\widehat{PN} = a$

$$\operatorname{tg} \frac{a}{r} = \operatorname{ctg} \frac{c}{r} = \frac{r}{R_0}. \tag{16}$$

Für die Rotationsfläche vom *Wulsttypus* ist analog

$$d\varrho = -kr \cdot \frac{\sin\psi \cdot \cos\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}} \cdot d\psi,$$

$$dz = kr \cdot \frac{\cos^2\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}} \cdot d\psi$$

und

$$d\sigma = -kr \cdot \frac{\cos\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}} \cdot d\psi,$$

also gemäß der Gleichung (3a), S. 298, für $\varrho = R$

$$\cos\vartheta = \frac{d\varrho}{d\sigma} = \sin\psi = \frac{1}{kr} \cdot \sqrt{r^2 - k^2 R^2}.$$

Folglich ist

$$R_0 = \frac{R}{\cos\vartheta} = \frac{kr \cdot R}{\sqrt{r^2 - k^2 R^2}} \tag{17}$$

und

$$a = \widehat{PN} = \int_{\varrho=R}^{\varrho=r/k} d\sigma = r \cdot \int_R^{r/k} \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2}{k^2} - \varrho^2}} \cdot d\varrho = r \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{kR}{r}\right) \tag{18}$$

$$= r \cdot \arccos\frac{kR}{r},$$

oder

$$\cos\frac{a}{r} = \frac{kR}{r},$$

also

$$\operatorname{tg}\frac{a}{r} = \frac{\sqrt{r^2 - k^2 R^2}}{kR} = \frac{r}{R_0}. \tag{19}$$

Wir können noch hinzufügen:

12. *Für die Krümmungsradien R und R_0 für einen Punkt P eines Breitenkreises gelten bei den Rotationsflächen vom Spindeltypus die Ungleichungen*

$$r > kr \geqq R > 0$$

und

$$\infty \geqq R_0 > 0,$$

bei den Rotationsflächen vom Wulsttypus

$$r < \frac{r}{k} \geqq R \geqq r \cdot \frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$$

und

$$\infty \geqq R_0 \geqq r \cdot \frac{\sqrt{1-k^2}}{k}.$$

Wir erkennen jetzt auch in den Fig. 2 und 3 den Kegelabschnitt mit der Seitenlänge R_0, der die Rotationsflächen vom Spindel- oder Wulsttypus längs des Breitenkreises mit dem Radius R berührt. Somit haben wir den allgemeinen Satz gewonnen:

13. *Bei allen Rotationsflächen konstanter positiver Krümmung geht ein schmaler Flächenstreifen mit einem Breitenkreis oder Äquator als wesentlicher Randkurve bei seiner Abwicklung in einen ebenen Flächenstreifen über, dessen wesentliche Randkurve ein Kreisbogen mit dem Radius R_0, dem Radius der geodätischen Krümmung der Flächenkurve, ist.*

Wir wollen schließlich noch folgende Bemerkung anschließen: Bei der Rotationsfläche vom Wulsttypus ist ja, wenn der Punkt P an der Stelle des Punktes W liegt (Fig. 3), der die Fläche längs des Breitenkreises berührende Kegelabschnitt in eine Kreisscheibe übergegangen, so daß der auf der einen Seite des Breitenkreises anliegende Flächenstreifen bereits angenähert in einer Ebene gelegen ist. In diesem Fall ist dann also

$$R_0 = r \cdot \frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$$

und also bei gegebenem Werte R_0 die Größe k bestimmt durch die Gleichung

$$k = \frac{r}{\sqrt{r^2 + R_0^2}} < 1. \tag{20}$$

14. *Für jeden an einem Breitenkreis einer Rotationsfläche konstanter positiver Krümmung anliegenden, schmalen Flächenstreifen, d. h. für jeden zulässigen (d. h. von 0 und $r \cdot \frac{\pi}{2}$ verschiedenen) Wert c oder jeden zulässigen (d. h. von 0 und ∞ verschiedenen) Wert R_0 gibt es also für denselben Wert r stets eine andere, besondere Rotationsfläche vom Wulsttypus, also einen besonderen Wert*

$$k = \cos\frac{c}{r} = \sin\frac{a}{r} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + R_0^2}},$$

so daß der analoge, nämlich durch Verbiegung aus dem ursprünglichen entstehende Flächenstreifen bereits auf der Fläche in einer Ebene liegt und seine wesentliche Begrenzung der Kreis mit dem Radius R_0 ist.

Natürlich müssen wir hierbei dann den Flächenstreifen nicht wie in der Fig. 3, sondern auf der anderen Seite des Breitenkreises von P, also wachsenden Werten von ϱ entsprechend, anliegend denken.

IV. Rotationsflächen vom Kegel- oder Hyperboloidtypus und die Pseudosphäre.

Wir erwähnten bereits: Auf den Flächen konstanter *negativer* Krümmung, insbesondere auf der einfachsten von ihnen, der *Pseudosphäre*, gilt die hyperbolische Geometrie. Es gibt demgemäß (im Gegensatz zu den Flächen

konstanter *positiver* Krümmung) jetzt *drei verschiedene Büschel geodätischer Linien*, Büschel erster, zweiter und dritter Art, je nachdem der Träger ein endlich ferner, ein unendlich ferner oder ein überunendlich ferner Punkt ist[7]). Hierbei kann dieser Punkt, falls er endlich fern ist, doch reell oder imaginär sein. (Letzteres gilt analog ja auch z. B. für die Rotationsflächen konstanter *positiver* Krümmung vom Wulsttypus, wo der Träger ja schon für das Büschel der Meridiane imaginär ist.)

15. *Die Meridiane der drei Rotationsflächen konstanter negativer Krümmung, also der Rotationsflächen vom Kegeltypus, der Pseudosphäre und der Rotationsflächen vom Hyperboloidtypus, stellen gerade bzw. ein Büschel geodätischer Linien dieser drei Arten dar.*

Bei den Rotationsflächen vom Kegeltypus ist eben der endlich ferne, reelle Punkt U der Träger des Büschels der Meridiane (Fig. 5, S. 299). Bei der Pseudosphäre ist der entsprechende Punkt U der unendlich ferne Punkt der z-Achse (Fig. 4, S. 299). Bei den Rotationsflächen vom Hyperboloidtypus endlich ist der gemeinsame Punkt der Meridiane ein überunendlich ferner (imaginärer) Punkt. Dies folgt schon aus folgender Tatsache:

16. *Der Breitenkreis des Punktes W oder der Kehlkreis* (Fig. 6) *ist eine geodätische Linie, weil wieder für jeden Kurvenpunkt die Flächennormale mit der Hauptnormale zusammenfällt. Jeder andere Breitenkreis ist aber die geodätische Äquidistante zu dem Kehlkreis*[8]).

Was nun die Rotationsflächen vom *Kegeltypus* betrifft, so ist in der Fig. 5, S. 299, wieder für den Breitenkreis des Punktes P, den *geodätischen Kreis erster Art*, der Krümmungsradius $R = SP$ und der Radius der geodätischen Krümmung $R_0 = PT$, sowie der Winkel ϑ zwischen der Tangentialebene der Fläche und der Schmiegungsebene der Kurve angegeben. Der geodätische Radius c ferner wird durch den Bogen $\overset{\frown}{UP}$ des Meridians gegeben. Wir wollen zunächst den Winkel ϑ und den Radius R_0 berechnen.

Es ist nach den Gleichungen (6a, b), S. 300,

$$d\varrho = -kr \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi,$$

$$dz = r \cdot \frac{k^2 \cdot \sin^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \cdot d\varphi.$$

Also ergibt sich für das Bogenelement des Meridians

$$d\sigma = -r \cdot \frac{k \cdot \sin\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \cdot d\varphi$$

---

[7]) Vgl. deswegen „Pseudo", § 25, S. 137 ff., insbesondere Satz 21, S. 147, sowie § 10, S. 34 ff.

[8]) Vgl. „Pseudo", S. 41, Satz 10.

oder nach der obigen Gleichung für $d\varrho$ und der Gleichung (6a)

$$d\sigma = \frac{r}{\sqrt{r^2(1-k^2)+\varrho^2}} \cdot d\varrho.$$

Also ist

$$\cos\vartheta = \left(\frac{d\varrho}{d\sigma}\right)_{\varrho=R} = \frac{\sqrt{r^2(1-k^2)+R^2}}{r}$$

und folglich

$$R_0 = \frac{R}{\cos\vartheta} = \frac{Rr}{\sqrt{r^2(1-k^2)+R^2}} < r, \tag{21}$$

(insbesondere $0 < R \leqq kr$ und $0 < R_0 \leqq kr$).

Ferner ist der geodätische Radius

$$c = \widehat{UP} = \int_{\varrho=0}^{\varrho=R} d\sigma = r \cdot \int_0^R \frac{1}{\sqrt{r^2(1-k^2)+\varrho^2}}\, d\varrho = r \cdot \lg \frac{\sqrt{r^2(1-k^2)+R^2}+R}{r\cdot\sqrt{1-k^2}}, \tag{22}$$

$$\left(0 < c \leqq r \cdot \log \sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right).$$

Hieraus folgt

$$e^{\frac{c}{r}} = \frac{\sqrt{r^2(1-k^2)+R^2}+R}{r\cdot\sqrt{1-k^2}},$$

$$e^{-\frac{c}{r}} = \frac{\sqrt{r^2(1-k^2)+R^2}-R}{r\cdot\sqrt{1-k^2}},$$

also

$$\operatorname{tgh}\frac{c}{r} = \frac{e^{\frac{c}{r}} - e^{-\frac{c}{r}}}{e^{\frac{c}{r}} + e^{-\frac{c}{r}}} = \frac{R}{\sqrt{r^2(1-k^2)+R^2}} < 1. \tag{23}$$

Aus den Gleichungen (21) und (23) ergibt sich dann die wichtige, den Gleichungen (12) und (15) analoge Gleichung

$$\operatorname{tgh}\frac{c}{r} = \frac{R_0}{r} < 1. \tag{24}$$

Nunmehr betrachten wir in analoger Weise die Verhältnisse bei den Rotationsflächen vom *Hyperboloidtypus* im Anschluß an die Fig. 6, S. 299. Hier ist $a = \widehat{WP}$ der geodätische Abstand des Breitenkreises, d. h. des *geodätischen Kreises dritter Art.* Er ergibt sich jetzt aus den Gleichungen (7a, b), S. 300,

$$d\varrho = -kr \cdot \frac{\sin\psi\cdot\cos\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} \cdot d\psi,$$

$$dz = \quad kr \cdot \frac{\sin^2\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} \cdot d\psi,$$

also

$$d\sigma = kr \cdot \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \cdot d\varphi = \frac{r}{\sqrt{\varrho^2 - r^2 \cdot \frac{1-k^2}{k^2}}} \cdot d\varrho.$$

Hieraus folgt

$$\cos\vartheta = \left(\frac{d\varrho}{d\sigma}\right)_{\varrho = R} = \frac{\sqrt{R^2 - r^2 \cdot \frac{1-k^2}{k^2}}}{r}$$

und

$$R_0 = \frac{Rr}{\sqrt{R^2 - r^2 \cdot \frac{1-k^2}{k^2}}} > r, \tag{25}$$

$$\left(\text{insbesondere } \frac{r\sqrt{1-k^2}}{k} \leqq R \leqq \frac{r}{k}, \qquad \infty \geqq R_0 \geqq \frac{r}{k}\right).$$

Ferner ist der geodätische Abstand

$$a = \overset{\frown}{WP} = r \cdot \int_{r\cdot\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}}^{R} \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 - r^2 \cdot \frac{1-k^2}{k^2}}}\, d\varrho = r \cdot \log \frac{R + \sqrt{R^2 - r^2 \cdot \frac{1-k^2}{k^2}}}{r \cdot \frac{\sqrt{1-k^2}}{k}}, \tag{26}$$

$$\left(0 < a < r \cdot \log \sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right),$$

oder

$$\operatorname{tgh}\frac{a}{r} = \frac{\sqrt{R^2 - r^2 \cdot \frac{1-k^2}{k^2}}}{R}. \tag{27}$$

Aus den Gleichungen (25) und (27) aber ergibt sich die den Gleichungen (13), (16) und (19) analoge, wichtige Gleichung

$$\operatorname{tgh}\frac{a}{r} = \frac{r}{R_0} < 1. \tag{28}$$

17. *Es sind also für jeden Breitenkreis der Rotationsflächen vom Kegel- bzw. Hyperboloidtypus der Radius R_0 der geodätischen Krümmung und der geodätische Radius c bzw. der geodätische Abstand a von der zugehörigen geodätischen Linie jetzt durch die Gleichung* (24) *bzw.* (28) *miteinander verknüpft.*

Wir wenden uns endlich zu der Betrachtung der *Pseudosphäre* (Fig. 4, S. 299). Hier ist für den Meridian die Länge der Tangente vom Punkte P bis zur z-Achse konstant, nämlich gleich r, da ja die Meridiankurve die Traktrix von Huygens ist[9]). Also ist für irgendeinen Breiten-

[9]) Vgl. „Pseudo", S. 5.

kreis, einen *geodätischen Kreis zweiter Art*, der Radius der geodätischen Krümmung

$$R_0 = r. \tag{29}$$

Auch ist ja hier der geodätische Radius $c = \infty$ (vgl. die Gleichung (24)).

Denken wir nun wieder bei einer Rotationsfläche vom Kegel- oder Hyperboloidtypus oder bei der Pseudosphäre einen schmalen Flächenstreifen gegeben, der von dem Breitenkreis des Punktes P, einem *geodätischen Kreise erster, dritter oder zweiter Art*, als der wesentlichen Randkurve und von einem nahe benachbarten Breitenkreis begrenzt ist, so gilt jetzt also der Satz:

18a. *Ein solcher Flächenstreifen, der längs des Meridians für $\varphi = \pi$ aufgeschnitten ist, ergibt bei der Abwicklung einen ebenen kreisförmigen Flächenstreifen, dessen wesentliche Randkurve der Kreisbogen mit dem Radius R_0 ist, wo R_0 der zugehörige Radius der geodätischen Krümmung des Breitenkreises von P ist.*

18b. *Im Falle der Rotationsflächen vom Kegel- oder Hyperboloidtypus oder der Pseudosphäre ist insbesondere nach den Gleichungen* (21), (25) und (29) *der Radius $R_0 <, > \text{oder} = r$.*

Weiter können wir noch die zum Satze 14 analogen Sätze hinzufügen:

19a. *Für jeden schmalen Flächenstreifen, der an der einen Seite eines Breitenkreises einer Rotationsfläche vom Kegeltypus anliegt, d. h. für jeden zulässigen Wert des geodätischen Radius c für den durch den Breitenkreis gegebenen geodätischen Kreis erster Art, gibt es eine andere besondere Rotationsfläche vom Kegeltypus, also einen bestimmten Wert*

$$k = \frac{e^{\frac{c}{r}} - e^{-\frac{c}{r}}}{e^{\frac{c}{r}} + e^{-\frac{c}{r}}} = \operatorname{tgh} \frac{c}{r} < 1,$$

so daß der analoge Flächenstreifen an dem Breitenkreis der (x, y)-Ebene anliegt und daher von vornherein in dieser Ebene gelegen ist.

19b. *Ebenso gibt es bei einer Rotationsfläche vom Hyperboloidtypus für jeden zulässigen Wert des geodätischen Abstandes a für einen durch einen Breitenkreis gegebenen geodätischen Kreis dritter Art eine bestimmte Rotationsfläche vom Hyperboloidtypus, d. h. einen bestimmten Wert*

$$k = \frac{e^{\frac{a}{r}} - e^{-\frac{a}{r}}}{e^{\frac{a}{r}} + e^{-\frac{a}{r}}} = \operatorname{tgh} \frac{a}{r} < 1,$$

so daß wieder der analoge Flächenstreifen an dem Breitenkreis der (x, y)-Ebene anliegt und daher von vornherein in dieser Ebene gelegen ist.

Endlich gilt analog für die Pseudosphäre:

19c. *Jeden Flächenstreifen der Pseudosphäre, der an irgendeinen Breitenkreis, einen geodätischen Kreis zweiter Art, anliegt, können wir auf der Pseudosphäre so verschieben, daß er an dem Basiskreis in der (x, y)-Ebene anliegt, also von vornherein in dieser Ebene gelegen ist*[10]).

V. Verallgemeinerung der bisherigen Betrachtungen, auch für beliebige Flächen konstanter Krümmung.

Wir können jetzt einen der bisher betrachteten Flächenstreifen auf einer unserer Rotationsflächen oder doch ein Stück von ihm auf der Fläche selbst verschieben oder auch in einen Flächenstreifen auf einer beliebigen anderen Fläche derselben konstanten Krümmung verbiegen. Der neue Flächenstreifen hat dann ja wieder einen geodätischen Kreis bzw. eine geodätische Linie als wesentliche Randkurve, und diese besitzt nach dem Mindingschen Satze 11, S. 304, denselben Radius R_0 der geodätischen Krümmung. Somit gewinnen wir jetzt die allgemeinen Sätze:

20a. *Ein schmaler Flächenstreifen einer Rotationsfläche oder einer allgemeinen Fläche konstanter positiver oder negativer Krümmung, der einen geodätischen Kreis bzw. eine geodätische Linie als wesentliche Begrenzung besitzt, geht durch Abwicklung in einen ebenen Flächenstreifen über, dessen wesentliche Begrenzung ein Kreis mit dem Radius R_0 ist, wo R_0 der konstante Radius der geodätischen Krümmung der Flächenkurve ist, bzw. eine Gerade.*

20b. *Es gelten hierbei vor allem auch unverändert die Gleichungen* (12) *und* (13) *bzw.* (24), (28) *oder* (29).

20c. *Der Radius R_0 ist im Falle einer Fläche konstanter negativer Krümmung $\lessgtr r$, je nachdem es sich um einen geodätischen Kreis erster, zweiter oder dritter Art handelt.*

Diese Abwicklung des Flächenstreifens können wir also nach unseren bisherigen Entwicklungen uns anschaulich einfach so vorstellen, daß wir den Flächenstreifen zunächst überführen in einen an einen Breitenkreis oder Äquator einer entsprechenden Rotationsfläche anstoßenden Flächenstreifen und dann diesen durch Abwicklung des zugehörigen tangierenden Kegels oder Zylinders in einen ebenen Flächenstreifen.

Wir können nun aber auch, wenn wir wollen, in direkter, freilich anschaulich schwierigerer Weise vorzugehen suchen. Zu einem gegebenen geodätischen Kreis mit dem konstanten Radius R_0 der geodätischen Krümmung bzw. einer geodätischen Linie denken wir zunächst die abwickelbare Fläche hinzu, welche von den Tangentialebenen der Fläche in den einzelnen Punkten der Flächenkurve eingehüllt wird. Wir wollen diese geradlinige Fläche kurz als *tangierende Fläche* bezeichnen. Die Er-

[10]) Vgl. „Pseudo", S. 139, Satz 7.

zeugenden dieser Fläche werden ja nach einem bekannten Satze von Darboux durch die zu den Tangentenrichtungen der Flächenkurve konjugierten Richtungen gegeben. Nach dem Satze 8, S. 303, wissen wir wieder: Bei der Abwicklung der tangierenden Fläche geht dann die Flächenkurve in einen Kreis mit dem Radius R_0 bzw. in eine Gerade (mit $R_0 = \infty$) über. Die tangierende Fläche sich völlig anschaulich vorzustellen, ist nun eben im allgemeinen sehr schwierig[11]). Die tangierende Fläche ändert sich ja auch völlig, wenn die zugehörige Flächenkurve mit ihrem anstoßenden Flächenstreifen auf der Fläche selbst verschoben wird. Wir wollen uns die besondere hier auftretende Schwierigkeit zunächst an folgendem einfachen Beispiel klar machen: Wir wollen einmal den Kreissektor der Fig. 7 zu einem Rotationskegel zusammengebogen denken, so daß also die

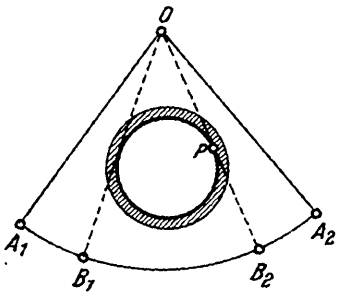


Fig. 7.

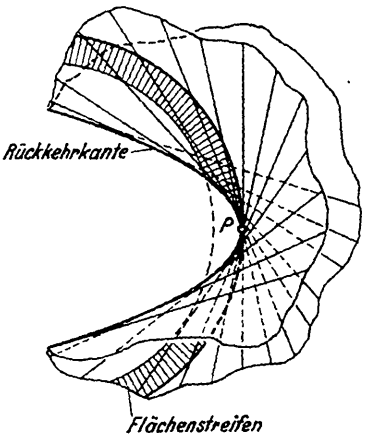


Fig. 8.

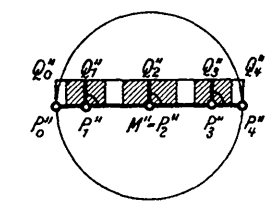
Radien OA_1 und OA_2 zusammenfallen. Der schraffierte Kreisring mit dem stark ausgezogenen Kreis als der wesentlichen Randkurve geht dann in einen Flächenstreifen auf dem Kegel über, dessen wesentliche Randkurve ja auch ein geodätischer Kreis des Kegels ist. Der Kegel gilt uns hier als ein Beispiel einer *Fläche verschwindender Krümmung*. Wir sehen jetzt aber: Wir können gar nicht den ganzen Flächenstreifen völlig auf die zugehörige tangierende Fläche, d. h. in der soeben angegebenen Weise auf die entsprechenden Erzeugenden desjenigen Teils des Kegels übertragen denken, der von den Tangentialebenen des Kegels in den einzelnen Punkten der Flächenkurve eingehüllt wird. Denn dieser Teil umfaßt ja nur den aus dem Sektor OB_1B_2 der Fig. 7 entstehenden Teil des Kegels. Über diesen Teil, die tangierende Fläche, ragt aber der Flächenstreifen

[11]) Vgl. deswegen „Pseudo", S. 176 ff., wo ausführlich die tangierende Fläche eines geodätischen Kreises erster Art der Pseudosphäre behandelt ist.

selbst beiderseits hinaus. Ein analoges Beispiel, wie es bei unseren Flächen konstanter Krümmung vorkommt, wird durch die Fig. 8 veranschaulicht. Hier ist auch gleich für die Umgebung des Punktes P der wesentlichen Randkurve des Flächenstreifens nach der Abwicklung die tangierende Fläche mit ihrer Rückkehrkante und mit deren Tangenten als den Erzeugenden der Fläche, sowie der kreisförmige Flächenstreifen dargestellt. Wir erkennen, daß auch hier der Flächenstreifen über die abgewickelte tangierende Fläche in der Umgebung des Punktes P hinausragt.

In dem Falle der Figuren 7 und 8 werden wir der geschilderten Schwierigkeit jetzt einfach dadurch aus dem Wege gehen, daß wir für die Umgebung des Punktes P die abwickelbare Fläche des stark ausgezogenen Kreisrandes durch die abwickelbare Fläche des schwach ausgezogenen Kreisrandes ersetzen. Dann liegt der Flächenstreifen in der Umgebung des Punktes P wieder auf der abwickelbaren Fläche selbst[12]).

Wir können unser Augenmerk auch darauf richten, zu erkennen, wie der ebene Flächenstreifen bei seiner Aufwicklung auch alle auf ihm liegenden Fortschreitungsrichtungen von einem beliebigen Punkte P seines wesentlichen Randes aus, insbesondere also auch die zum Rande senkrechten Fortschreitungsrichtungen, mit aufwickelt. Der abgewickelte Flächenstreifen stellt gleichsam auch die Abwicklung aller Tangentialebenen in den Punkten P_i der Flächenkurve dar. Dies sei beispielsweise durch die Fig. 9 näher erläutert, wo es sich um den an den Äquator der Kugel anstoßenden Flächenstreifen handelt. Die Fortschreitungsrichtungen von einem Punkte P auf der Fläche können wir uns ja am einfachsten durch die zugehörigen Normalschnitte auf die Tangentialebene von P und damit auf die Fortschreitungsrichtungen des Flächenstreifens und umgekehrt übertragen denken (Fig. 10). In diesem Sinne stellt der aufgewickelte Flächenstreifen, wie die Tangentialebene die Umgebung des einzelnen Flächenpunktes, die Umgebungen aller Punkte P_i der Flächenkurve dar. Mit besonderem Recht verdient daher der aufgewickelte Flächenstreifen die Bezeichnung „*tangierender Flächenstreifen*“ der Flächenkurve (als Abkürzung für „Tangentialebenenstreifen“).



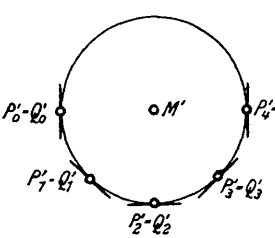


Fig. 9.

[12]) Vgl. wegen der Einzelheiten die Bemerkungen in „Pseudo“, S. 172 ff., insbesondere auch im Anschluß an die Fig. 121 a, S. 184.

VI. Experimentelle Erzeugung der geodätischen Linien und Kreise.

Eine ganz besondere Bedeutung besitzen nun unsere Resultate insofern, als sie uns zur experimentellen Erzeugung der geodätischen Linien und Kreise hinführen.

21. *Wickeln wir nämlich jetzt einen schmalen geradlinigen oder kreisförmigen Flächenstreifen auf ein vorliegendes Modell einer Fläche konstanter positiver oder negativer Krümmung auf, so erzeugt der wesentliche Rand des Flächenstreifens eine geodätische Linie oder einen geodätischen Kreis, und zwar auf den Flächen konstanter negativer Krümmung einen geodätischen Kreis erster, zweiter oder dritter Art, je nachdem der Radius R_0 des wesentlichen Kreisrandes kleiner, gleich oder größer als r ist, wo $-\frac{1}{r^2}$ die Krümmung bedeutet*[13]).

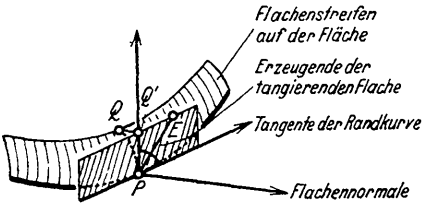


Fig. 10.

Wer einmal solche Versuche ausgeführt hat, ist überrascht von der Einfachheit dieser experimentellen Erzeugung der geodätischen Kurven. Der einzelne Flächenstreifen wickelt sich ohne Zwang leicht in richtiger Weise auf die Fläche auf. Photographische Abbildungen solcher interessanten Versuche sind auf der Tafel wiedergegeben, die dem zweiten Teil meines Buches: „Die Pseudosphäre und die nichteuklidische Geometrie" beigefügt ist. In diesem Werke sind auch mannigfache weitere Einzelheiten ausgeführt.

Zum Schluß sei noch als Verallgemeinerung unserer Betrachtungen der allgemeine Satz der Flächentheorie genannt, ohne daß wir im einzelnen darauf eingehen:

22a. *Wenn wir bei einer gegebenen Kurve $\varkappa$ auf einer (reellen) Fläche* (z. B. etwa bei einer Kurve konstanter geodätischer Entfernung von einem Flächenpunkte oder konstanter geodätischer Entfernung von einer geodäti-

[13]) Ein großes Pseudosphärenmodell für $r = 15$ cm, daß mit schwarzem Tafelanstrich zum leichten Aufzeichnen von Kurven mit Kreide versehen ist, ist ja erst kürzlich von mir bei der Firma Martin Schilling, Verlag von Modellen für den höheren mathematischen Unterricht, in Leipzig herausgegeben. Auch sind dort bereits früher eine größere Zahl von Flächen konstanter positiver oder negativer Krümmung erschienen, die sich für unsere Zwecke auch vorzüglich eignen.

schen Linie oder etwa bei einer Kurve konstanter geodätischer Krümmung[14])) *die Abwicklung der zugehörigen abwickelbaren Fläche ausführen, so gibt die Krümmung* $\frac{1}{R_0}$ *der abgewickelten Kurve* $\varkappa_0$ *in ihren einzelnen Punkten uns einen Überblick über die gleiche geodätische Krümmung* $\frac{1}{R_0}$ *in den entsprechenden Punkten der Kurve* $\varkappa$. *Denken wir dabei* R_0, *oder* R *und* ϑ, *wo* R *der Krümmungsradius der Kurve* $\varkappa$, ϑ *der Winkel zwischen der Tangentialebene der Fläche und der Schmiegungsebene für den einzelnen Punkt* P *der Kurve* $\varkappa$ *ist, als Funktionen der von einem bestimmten Punkte* P_0 *aus gemessenen Bogenlänge* σ *der Kurve* $\varkappa$ *gegeben, so ist die Gleichung* $\frac{1}{R_0} = \frac{\cos\vartheta}{R} = f(\sigma)$ *die „natürliche Gleichung" der abgewickelten Kurve* $\varkappa_0$.

22b. *Ist insbesondere die Kurve* $\varkappa$ *eine Kurve konstanter geodätischer Krümmung* (wie z. B. die gewöhnliche Schraubenlinie auf einer gemeinen Schraubenfläche), *so ist die abgewickelte Kurve* $\varkappa_0$ *ein Kreisbogen.*

22c. *Umgekehrt können wir nun wieder einen ebenen Flächenstreifen benutzen, um durch eine entsprechende Aufwicklung auf ein Modell der Fläche die Kurve* $\varkappa$, *insbesondere also bei Benutzung eines kreisförmigen Flächenstreifens eine Kurve konstanter geodätischer Krümmung, experimentell zu erzeugen.*

Es sei z. B. empfohlen, einen geradlinigen schmalen Flächenstreifen einmal auf einem Ellipsoid aufzuwickeln, um sogleich eine anschauliche Vorstellung von dem eigenartigen Verlauf der geodätischen Linien zu gewinnen.

Alle diese Betrachtungen geben uns interessante Beispiele für eine experimentelle Geometrie.

---

[14]) Vgl. deswegen G. Scheffers, Einfuhrung in die Theorie der Flachen, 2 Aufl., Leipzig 1913, S. 509 und 548, sowie C. F. Gauß, Allgemeine Flächentheorie (Disquisitiones generales circa superficies curvas, 1827), Ostwald's Klassiker Nr. 5, Leipzig 1889, S. 25, 29 und 30; Ges. Werke IV, Göttingen 1873, S. 220—258, insbesondere S. 237, 238, 241.

(Eingegangen am 5. 8. 1935.)

Zwei Bemerkungen über Komplexe.

Von

K. Wagner in Köln.

Kuratowski hat in einer Arbeit[1]) u. a. den Satz bewiesen, daß jeder Komplex[2]) K, der sich *nicht* in die Ebene einbetten läßt, einen Teilkomplex enthält, der einer der beiden Figuren 1a und 1b oder einer Unterteilung[3]) derselben homöomorph ist.

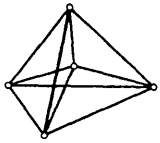


Fig. 1a.

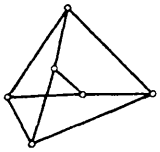


Fig. 1b.

Bezeichnet man die Komplexe, die der Fig. 1a und deren Unterteilungen bzw. der Fig. 1b und deren Unterteilungen homöomorph sind, mit K_a und K_b, so ist leicht zu zeigen, daß anderseits jedes K, das sich in die Ebene einbetten läßt, keinen Teilkomplex K_a oder K_b enthält.

Uns interessiert die Frage, welche Bedeutung *einzeln* die K_a bzw. K_b für die ebenen und nichtebenen Komplexe haben. Die beiden folgenden Bemerkungen A und B zeigen, daß die K_a mit den Dreieckkomplexen (1)

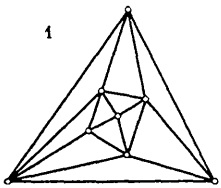


Fig. 2a.

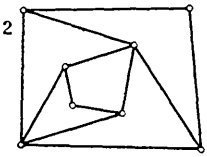


Fig. 2b.

und die K_b mit den Viereckkomplexen (2) in einem Zusammenhang stehen. Ein Dreieckschema ist ein spezieller ebener Streckenkomplex, bei dem

[1]) Sur le problème des courbes gauches en topologie. Fund. Math. 15.

[2]) Ein Komplex K ist ein System endlich vieler Punkte (= Ecken von K) und Jordanbögen (= Kanten von K) im Raum. Jede Kante verbindet zwei verschiedene Ecken (= Endpunkte der Kante), je zwei Ecken sind durch höchstens eine Kante verbunden und je zwei Kanten sind bis auf gemeinsame Endpunkte punktfremd.

[3]) Ein Komplex entsteht durch Unterteilung eines gegebenen Komplexes, indem man einfach auf den Kanten des letzteren neue Ecken einführt.

jedes der Gebiete, in die er die Ebene zerlegt, von einem Dreieck berandet wird. Jeder Komplex, der einem Dreieckschema homöomorph ist, werde als ein Dreieckkomplex K_3 bezeichnet. Analog wird bei einem Viereckschema jedes der Gebiete, in die es die Ebene zerlegt, von einem Viereck berandet. Jeder Komplex, der einem Viereckschema homöomorph ist, werde als Viereckkomplex K_4 bezeichnet.

Den folgenden Satz setzen wir als bekannt voraus:

I. Jeder Komplex ist einem Streckenkomplex, insbesondere ist jeder ebene Komplex einem ebenen Streckenkomplex homöomorph.

Hieraus ergibt sich leicht das folgende: In der Ebene seien endlich viele Punkte (= Ecken) gegeben. Man zeichne in der Ebene einen beliebigen Komplex K mit diesen Ecken, so daß jeder Jordanbogen in der Ebene, der zwei beliebige der Ecken verbindet[4]), außer seinen beiden Endpunkten noch Punkte mit K gemeinsam hat. *Dann ist K ein K_3.* E_1 und E_2 seien zwei endliche, punktfremde Punktmengen in der Ebene. Man zeichne einen beliebigen Komplex K in der Ebene mit den Ecken $E_1 + E_2$. Jede Kante von K verbinde eine Ecke der E_1 mit einer der E_2, und jeder Jordanbogen in der Ebene, der eine Ecke der E_1 mit einer der E_2 verbindet[4]), habe außer seinen Endpunkten noch Punkte mit K gemeinsam. *Dann ist K ein K_4.* Umgekehrt lassen sich die Ecken eines jeden K_4 eindeutig in zwei Mengen E_1 und E_2 teilen, so daß jede Kante von K_4 eine Ecke der E_1 mit einer der E_2 verbindet.

Man sieht also, daß die K_3 und K_4 in bestimmtem Sinne für die Ebene *vollständig* sind[5]). Es soll im folgenden gezeigt werden:

A. *Fügt man in einem Dreieckkomplex K_3 eine weitere Kante hinzu, die zwei beliebige, nicht an derselben Kante von K_3 liegende Ecken verbindet, so enthält dieser neue Komplex einen K_a als Teilkomplex.*

B. *Verbindet man in einem K_4 eine beliebige der Ecken E_1 mit einer beliebigen der Ecken E_2, die nicht durch eine Kante von K_4 bereits verbunden sind, durch eine weitere Kante, so enthält der neue Komplex einen K_b als Teilkomplex.*

---

[4]) Sofern eine Kante von K diese beiden Ecken nicht bereits verbindet.

[5]) Es folgt weiter leicht, daß jedes ebene K keinen K_a oder K_b als Teilkomplex enthält. Wie man sieht, besteht die Fig. 1a aus fünf Ecken, die zu je zwei durch Kanten verbunden sind, und die Fig. 1b aus zwei Tripeln von Ecken, so daß jede Ecke des ersten Tripels mit jeder Ecke des zweiten durch eine Kante verbunden ist. A. Errera hat in einer Arbeit: „Un théorème sur les liaisons", C. R. 177, gezeigt, daß jedes ebene K keinen K_b als Teilkomplex enthält. Der Beweis wird sehr einfach, wenn man K_4 durch Aneinanderlegung seiner Vierecke aufbaut und mittels der Vierecke, die mit 1, 2 bzw. 3 Kanten anliegen, Anzahlformeln ableitet. (Analog K_3).

Beweis von A. Die dem K_3 hinzugefügte Kante sei k. Sie verbinde die Ecken e_1 und e_2 von K_3. Die Gesamtheit der Dreiecke[6]) von K_3, die an einer Ecke e von K_3 liegen, wollen wir einen Stern um e nennen. S_1 sei der Stern um e_1. Wir nehmen einmal an, daß die folgende Behauptung bewiesen sei:

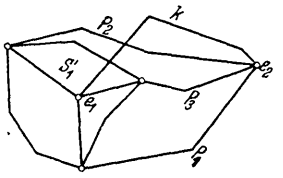


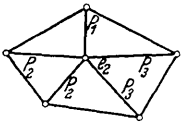
Fig. 3.

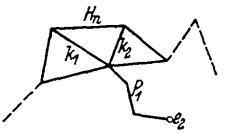
II. Es gibt in $K_3 - S_1$ drei Polygonzüge P_1, P_2 und P_3, die bis auf den gemeinsamen Anfangspunkt e_2 punktfremd sind und in drei Ecken von S_1 enden und sonst mit S_1 punktfremd sind.

S_1' sei der Stern S_1, vermindert um die an e_1 liegenden Kanten, die mit P_1, P_2 oder P_3 keinen Endpunkt gemeinsam haben. Dann folgt:

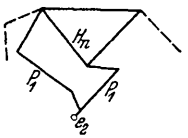
$$S_1' + P_1 + P_2 + P_3 + k = K_3.$$

Wir müssen uns also noch von II überzeugen. Wir betrachten sämtliche Dreiecke von K_3 bis auf die von S_1. Zunächst sieht man leicht, daß man aus diesen Dreiecken die folgende Teilfigur von K_3 aufbauen

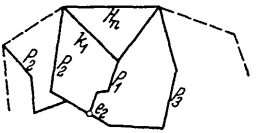




1. Fall.



2. Fall.



3. Fall.

Fig. 4.

kann. Man beginne mit dem Stern S_2 um e_2 und lege Halbsterne[7]) H_n aneinander, von denen ein jeder mit der bereits aufgebauten Figur seinen Schnitt[7]) und sonst keinen Punkt gemeinsam hat. Das Verfahren hat ein Ende, sobald sämtliche Ecken des Polygons, das die Gesamtheit der Dreiecke des S_2 und der H_n berandet, zu S_1 gehören. Wir konstruieren

[6]) Wir können annehmen, daß K_3 ein Dreieckschema [vgl. Fig. 2a] ist. Jedes Dreieck, das aus drei Kanten von K_3 besteht und in dessen Innerem oder Äußerem — offenbar spielt dieses Dreieck keine ausgezeichnete Rolle, wenn man K_3 als Polyeder auf der Kugel deutet — keine Ecke von K_3 liegt, nennen wir ein Dreieck von K_3.

[7]) Ein Stern um e zerfällt in zwei Halbsterne, wenn wir ihn längs zwei Kanten, die an e liegen, (= Schnitt der Halbsterne) durchschneiden.

nun die Polygonzüge P_1, P_2 und P_3. Wir bezeichnen die an e_2 liegenden Kanten von S_2 mit P_1, P_2 und P_3, wie die Fig. 4 zeigt[8]), legen die H_n an und ändern dabei die Gesamtheit der P_1, P_2 und P_3 wie folgt ab:

Im 1. Falle fügen wir die Polygonzüge $P_1 + k_1$, $P_1 + k_2$, ... ($k_1, k_2, \ldots$ = Kanten von H_n, die mit P_1 einen Endpunkt gemeinsam haben und nicht zum Schnitt des H_n gehören) zu der Menge der übrigen P_1 hinzu. Im 2. Fall bleibt die Menge der P_1, P_2 und P_3 dieselbe. Endlich im letzten Fall streichen wir das P_2 (bzw. P_3), welches auf H_n endet, und fügen $P_1 + k_1$ zu der Menge der P_1 hinzu. Mit diesen drei Fällen ist II und somit A bewiesen.

Beweis von B. Die dem K_4 hinzugefügte Kante k verbinde die Ecken e_1 aus E_1 und e_2 aus E_2. S_1 und S_2 seien die Sterne[9]) um e_1 und e_2[10]). Wir wollen zwei Vierecke von K_4 einen Zwickel Z nennen, wenn sie zwei Ecken (= Spitzen von Z), beide entweder aus E_1 oder aus E_2, und nur diese Ecken gemeinsam haben. Wir müssen zwei Fälle unterscheiden.

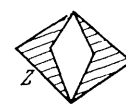


Fig. 5.

1. Fall: Es gibt in K_4 kein Z.

Für diesen Fall nehmen wir einmal die folgende Behauptung als bewiesen an:

III. In $K_4 - S_1$ gibt es zwei bis auf den gemeinsamen Anfangspunkt e_2 punktfremde Polygonzüge P_1 und P_2, die in zwei Ecken der E_1 auf S_1 enden und sonst mit S_1 punktfremd sind.

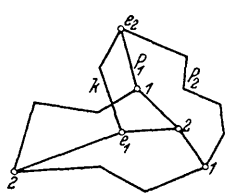


Fig. 6.

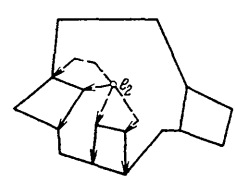


Fig. 7.

S_1, vermindert um die an e_1 liegenden Kanten, ist ein Polygon. S_1' sei die Teilfigur von S_1, die aus diesem Polygon und aus zwei an e_1

[8]) Bei einem Umlauf um e_2 liegen gleich bezeichnete Kanten hintereinander.

[9]) Wir können annehmen, daß K_4 ein Viereckschema ist [vgl. Fig. 2b]. Die Gesamtheit der Vierecke von K_4 mit der gemeinsamen Ecke e nennen wir einen Stern um e. Die Bezeichnung ist der bei K_3 analog [s. Fußnote [6])].

[10]) Wie man leicht sieht, kann man annehmen, daß es kein Viereck aus vier Kanten von K_4 gibt, das sowohl im Inneren wie im Äußeren Ecken von K_4, aber nicht im Inneren und Äußeren je eine der e_1 und e_2 enthält.

liegenden Kanten besteht, deren Endpunkte auf dem Polygon die Endpunkte von P_1 und P_2 trennen (s. Fig. 6). Dann folgt:

$$S_1' + P_1 + P_2 + k = K_b\,^{11}).$$

Es muß also für den 1. Fall noch III bewiesen werden. Wie man leicht sieht, kann man aus dem Stern S_2 und den Vierecken von K_4, vermindert um die von $S_1 + S_2$, durch Aneinanderlegung eine Teilfigur von K_4 aufbauen, so daß alle Ecken des Polygons, das S_2 und die Gesamtheit der aneinandergelegten Vierecke berandet, zu S_1 gehören. Aus Figur 7 folgt dann leicht, daß es in $K_4 - S_1$ zwei bis auf den gemeinsamen Anfangspunkt e_2 punktfremde Polygonzüge P_1' und P_2' gibt, die auf S_1 enden und sonst mit S_1 punktfremd sind. Falls P_1' (desgl. P_2') in einer Ecke e

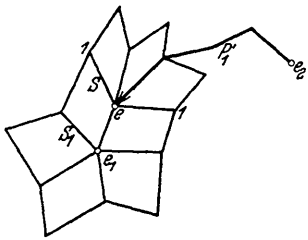


Fig. 8.

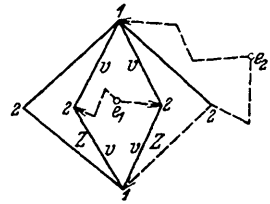


Fig. 9.

der E_2 auf S_1 endet, so betrachte man den Stern S um e. Wie man bei Berücksichtigung der Fußnote [10]) und der Voraussetzung (1. Fall) sieht, läßt sich aus P_1' und den Kanten von S, die weder an e liegen noch zu S_1 gehören, das gesuchte P_1 (desgl. P_2) konstruieren.

2. Fall: Es gibt in K_4 einen Zwickel Z.

Wie man sich leicht überzeugt [10]), können wir annehmen, daß e_1 und e_2 und Z wie in der Figur 9 zueinander liegen [12]). v sei das innere Viereck von Z. Die Menge der Ecken und Kanten von K_4 im Inneren von v wollen wir mit K_4' bezeichnen. Wir wollen weiter annehmen, daß Z in $Z + K_4'$ der einzige Zwickel ist, dessen Spitzen zu E_1 gehören und dessen K_4' e_1 enthält, d. h. mit anderen Worten daß Z der *kleinste* Zwickel mit diesen Eigenschaften ist. Mit Hilfe der Schlüsse des 1. Falles bietet es keine Schwierigkeit, in $K_4 - (K_4' + v)$ zwei bis auf den gemeinsamen Anfangspunkt e_2 punktfremde Polygonzüge P_1' und P_2', die in den

---

[11]) Man sieht, daß das eine Tripel der Ecken von K_b [s. Fußnote [5])] zu E_1, das andere zu E_2 gehört (dasselbe gilt im 2. Fall). Durch Vergleich mit A bemerkt man übrigens, daß $K_3 + k$ ebenfalls einen K_b enthält, falls an e_1 oder e_2 mindestens vier Kanten von K_3 liegen.

[12]) Falls e_1 und e_2 in der Figur 9 miteinander vertauscht sind, spiegele man die Ebene z. B. an dem inneren Viereck von Z.

beiden Spitzen von Z enden, und in K_4' zwei bis auf den gemeinsamen Anfangspunkt e_1 punktfremde Polygonzüge P_1 und P_2 zu konstruieren, die auf v in den beiden Ecken der E_2 enden. Letzteres gelingt, da Z das kleinste ist. Es folgt:

$$v + k + P_1' + P_2' + P_1 + P_2 = K_5\,^{11}).$$

Mit den beiden Fällen ist B bewiesen.

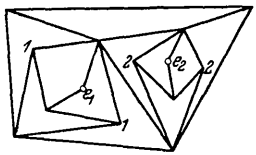


Fig. 10.

Wir schließen mit einem Beispiel eines K_4, das deshalb interessant ist, weil es die Fußnote [10]), jedoch III weder für $K_4 - S_1$ noch analog für $K_4 - S_2$ erfüllt.

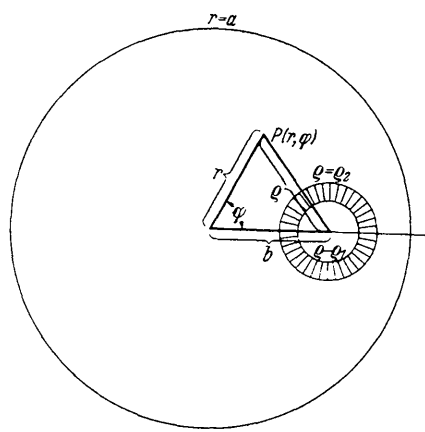
(Eingegangen am 15. 8. 1935.)

Bemerkung zur Statik der Kreisplatte.

Von

Harry Schmidt in Köthen und Leipzig.

In einer kürzlich in dieser Zeitschrift erschienenen Mitteilung hat Herr Erich Reissner[1]) erstmalig die Verbiegung einer Kreisplatte mit gestütztem Rand unter dem Einfluß einer exzentrisch angreifenden Einzellast in geschlossener Form dargestellt. Dieses Resultat läßt sich, wie ich



hier zeigen möchte, auch aus früheren, auf die *eingespannte* Platte bezüglichen Ergebnissen von mir[2]) gewinnen und zugleich auf eine Klasse allgemeinerer Belastungsfälle ausdehnen.

Legen wir unter Voraussetzung einer längs ihres Randes $r = a$ eingespannten Kreisplatte das aus der beigefügten Figur ersichtliche Lastfeld zugrunde, so ergibt sich, wie l. c. mit Benutzung komplexer Kurvenintegrale bewiesen wurde, für den zugehörigen, den Bedingungen

$$(1,1) \qquad [w(r,\varphi)]_{r=a} = 0, \quad \left[\frac{\partial w}{\partial r}\right]_{r=a} = 0$$

---

[1]) Erich Reissner, Math. Annalen 111 (1935), S. 777.

[2]) Harry Schmidt, Ing.-Archiv 1 (1930), S. 147.

genügenden Durchbiegungsverlauf $w = w(r, \varphi)$ der geschlossene Ausdruck

$$(1,11)\qquad w(r,\varphi) = \begin{cases} \frac{p_0}{N}\cdot W_0(r,\varphi) \text{ für } 0 \leqq \varrho \leqq \varrho_1, \\ \frac{p_0}{N}\cdot\{W_0(r,\varphi) + W_1(r,\varphi)\} \text{ für } \varrho_1 \leqq \varrho \leqq \varrho_2, \\ \frac{p_0}{N}\cdot\{W_0(r,\varphi) + W_2(r,\varphi)\} \text{ für } \varrho_2 \leqq \varrho \leqq \varrho_0 \end{cases}$$

mit

$$(1,12)\quad \begin{cases} W_0(r,\varphi) = -\frac{(a^2-r^2)\cdot(a^2-b^2)+a^2\cdot\varrho^2}{16\,a^2}\cdot(\varrho_1^2-\varrho_2^2) \\ +\frac{5}{64}(\varrho_1^4-\varrho_2^4) + \frac{(a^2-r^2)\cdot(b^2r^2-a^4)}{32\,a^2\cdot\{(a^2-r^2)\cdot(a^2-b^2)+a^2\,\varrho^2\}}\cdot(\varrho_1^4-\varrho_2^4) \\ -\frac{\varrho_1^2}{16}\cdot(2\,\varrho^2+\varrho_1^2)\cdot\ln\varrho_1 + \frac{\varrho_2^2}{16}\cdot(2\,\varrho^2+\varrho_2^2)\cdot\ln\varrho_2 \\ +\frac{1}{16}\cdot\{2\,\varrho^2\cdot(\varrho_1^2-\varrho_2^2)+(\varrho_1^4-\varrho_2^4)\}\cdot\ln\frac{\sqrt{(a^2-r^2)\cdot(a^2-b^2)-a^2\,\varrho^2}}{a} \end{cases}$$

sowie mit

$$(1,13)\qquad W_1(r,\varphi) = \frac{1}{64}\varrho^4 + \frac{\varrho_1^2}{16}\varrho^2 - \frac{5\,\varrho_1^4}{64} - \frac{2\,\varrho_1^2\,\varrho^2+\varrho_1^4}{16}\cdot\ln\frac{\varrho}{\varrho_1}$$

und

$$(1,14)\quad \begin{cases} W_2(r,\varphi) = \frac{1}{16}(\varrho_1^2-\varrho_2^2)\,\varrho^2 - \frac{5}{64}(\varrho_1^4-\varrho_2^4) \\ \quad -\frac{2\,\varrho_1^2\,\varrho^2+\varrho_1^4}{16}\ln\frac{\varrho}{\varrho_1} + \frac{2\,\varrho_2^2\,\varrho^2+\varrho_2^4}{16}\ln\frac{\varrho}{\varrho_2}, \end{cases}$$

wobei zur Abkürzung

$$(1,15)\quad \begin{cases} \varrho = \varrho(r,\varphi) = \sqrt{r^2+b^2-2\,br\cdot\cos\varphi}, \\ \varrho_0 = \varrho_0(\varphi) = \sqrt{a^2+b^2-2\,ab\cdot\cos\varphi} \end{cases}$$

gesetzt ist, und wobei p_0 den Betrag der gleichförmigen Ringbelastung pro Flächeneinheit und N die Biegungssteifigkeit der Platte bedeuten. Hieraus lassen sich natürlich als Spezialfälle die entsprechenden Ausdrücke für eine exzentrische Kreislinienlast, für eine exzentrische Kreisflächenlast und für eine exzentrische Einzellast sofort ableiten.

Um jetzt zu zeigen, wie man die Lösung des analogen Problems für andere Randbedingungen erhalten kann, wählen wir als Beispiel die *gelenkig gestützte* Kreisplatte, für die statt (1, 1)

$$(1,2)\quad \begin{cases} [w^*(r,\varphi)]_{r=a} = 0, \\ \left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial r^2} + \nu\left\{\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial w^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w^*}{\partial\varphi^2}\right\}\right]_{r=a} = 0 \end{cases}$$

zu verlangen ist, falls $w^* = w^*(r, \varphi)$ die gesuchte Durchbiegung und ν die Poissonsche Querkontraktionszahl bezeichnen. Unter Beibehaltung von (1, 11) setzen wir mit $u = u(r, \varphi)$ als Potentialfunktion

$$(1,21)\qquad w^*(r,\varphi) = w(r,\varphi) + (a^2-r^2)\cdot u(r,\varphi)$$

an, wodurch sich (1, 2) auf

$$\left[4r\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+2\cdot(1+\nu)\cdot u(r,\varphi)\right]_{r=a}=k(\varphi) \tag{1,22}$$

mit

$$k(\varphi)=\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\nu\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right]_{r=a} \tag{1,23}$$

reduziert. Demnach gilt unter Benutzung des Poissonschen Integrals

$$4r\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+2\cdot(1+\nu)\cdot u(r,\varphi)=J(r) \tag{1,24}$$

mit

$$J(r)=\frac{a^2-r^2}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi}\frac{k(\vartheta)}{a^2+r^2-2ar\cdot\cos(\vartheta-\varphi)}d\vartheta, \tag{1,25}$$

woraus durch Anwendung der Methode der Variation der Konstanten

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{4(\sqrt{r})^{1+\nu}}\cdot\int_0^r J(\varrho^*)\cdot(\sqrt{\varrho^*})^{-1+\nu}d\varrho^* \tag{1,26}$$

folgt.

Im Anschluß hieran sei hervorgehoben, daß W. Lüddecke in seiner von mir angeregten, unmittelbar vor dem Abschluß stehenden Hallenser Dissertation den Nachweis erbracht hat, daß sich die Durchbiegung einer Kreisplatte auch bei gleichförmiger Belastung einer *exzentrischen Sektorfläche* durch elementare Funktionen zur Darstellung bringen läßt. Damit ist alsdann unter Hinweis auf eine einfache, bereits früher von mir mitgeteilte[3]) Überlegung gezeigt, daß gleiches für den Fall einer *beliebigen, von geraden Linien und Teilen des Plattenrands begrenzten Lastfläche* gilt.

[3]) Harry Schmidt, Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. 11 (1931), S. 426.

(Eingegangen am 3. 11. 1935.)

Die Berechnung der Grundeinheit in den kubischen Körpern mit negativer Diskriminante.

Von

Günter Bullig in Bonn*).

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 326

Kapitel 1: Der Äquivalenzsatz 334

Kapitel 2: Minkowskifolgen in den reellen quadratischen und komplexen kubischen Körpern.

§ 1. Minkowskifolgen in den reellen quadratischen Körpern 342
§ 2. Minkowskifolgen in den komplexen kubischen Körpern 345

Kapitel 3: Zwei Algorithmen.

§ 1. Ein Verfahren zur Berechnung der Minkowskifolgen in den reellen quadratischen Körpern 349
§ 2. Zerlegung des im § 1 gegebenen Verfahrens in Elementaroperationen 352

Kapitel 4: Die Auflösung der Ungleichung $0 < |x + y\psi + z\omega| < 1$.

§ 1. Berechnung von Lösungen der Ungleichung $0 < |x + y\psi + z\omega| < 1$ 353
§ 2. Auswahl von Lösungen für den Algorithmus des Kap. 5 359
§ 3. Transformation in normale Tripel 360
§ 4. Transformation in normierte Tripel 364

Kapitel 5: Ein Algorithmus zur Berechnung von Teilfolgen der Minkowskifolgen in den komplexen kubischen Körpern. (Berechnung der Grundeinheit.)

§ 1. Eine vorläufige Formulierung des Algorithmus 365
§ 2. Der Algorithmus liefert eine Teilfolge der zu berechnenden Minkowskifolge 378
§ 3. Endgültige Formulierung des Algorithmus 385
§ 4. Sätze über Äquivalenzeigenschaft und Periodizität des Algorithmus 389

*) Diese Arbeit ist von der philosophischen Fakultät der Universität Bonn als Dissertation angenommen worden.

Einleitung.

Dirichlets Beweis und auch die anschauliche Darstellung, die er in Minkowskis „Diophantischen Approximationen[1])" gefunden hat, sichern in den kubischen Körpern mit negativer Diskriminante (unter deren Konjugierten also zwei imaginär und einer reell ist) lediglich die *Existenz* einer Grundeinheit. Man hat oft versucht, einen *Algorithmus* zu finden, der die Grundeinheit für diese Körper in ähnlich bequemer Weise liefert, wie dies der Kettenbruchalgorithmus für reelle quadratische Körper tut. Besonders bekannt ist der Algorithmus Jacobis[2]) geworden; an vielen Beispielen aus kubischen Körpern mit negativer Diskriminante hat man festgestellt, daß er periodisch wird; daß er in diesen Körpern *stets* periodisch wird, und somit stets eine Einheit liefert, ist bisher nicht bewiesen worden.

Minkowski hat den Jacobischen Algorithmus verlassen und ein anderes Verfahren aufgestellt, das sich weniger eng an das Kettenbruchverfahren anlehnt, dessen Periodizität er aber in allen kubischen Körpern mit negativer Diskriminante zu beweisen vermochte. Man kann das Minkowskische Verfahren sehr gut schildern, wenn man sich der geometrischen Anschauung bedient.

Zunächst sei für die reellen quadratischen Körper dargelegt, wie sich Minkowskis Darstellung des Dirichletschen Existenzbeweises zum Kettenbruchalgorithmus verhält.

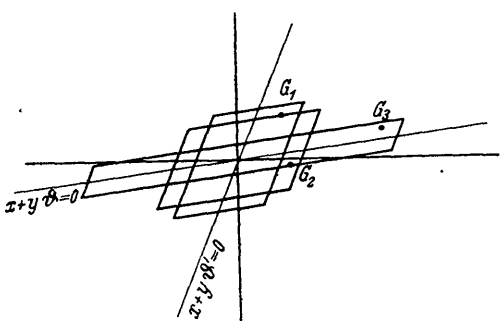


Fig. 1.

Sei $(1, \vartheta) = \left(1, -\frac{D+\sqrt{D}}{2}\right)$ eine Basis für die ganzen Zahlen des reellen quadratischen Körpers mit der Diskriminante D. Der Zahl $x + y\vartheta$ sei der Punkt mit den Koordinaten (x, y) zugeordnet. Die Einheiten sind durch die Gitterpunkte wiedergegeben, für die $(x + y\vartheta)(x + y\vartheta') = \pm 1$ ist, d. h. durch die Punkte zweier Hyperbeln mit den Asymptoten $x + y\vartheta = 0$ und $x + y\vartheta' = 0$, soweit sie Gitterpunkte sind. Minkowski geht von einem Parallelogramm aus, das nach den Asymptoten orientiert ist, mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und mit

[1]) H. Minkowski, Diophantische Approximationen, (1907), S. 136—142.
[2]) C. G. J. Jacobi, Gesammelte Werke, Bd. VI, S. 385.

dem Inhalt 4; die Eckpunkte dieses Parallelogramms liegen auf den Hyperbeln $(x + y\vartheta)(x + y\vartheta') = \pm\sqrt{D}$. Der allgemeine Hilfssatz über konvexe Bereiche, der in Minkowskis Darstellung den Linearformensatz von Dirichlet ersetzt, besagt, daß in einem Parallelogramm vom Inhalt 4 mit 0 als Mittelpunkt mindestens ein von 0 verschiedener Gitterpunkt G_1 gelegen ist. Er betrachtet dann das Parallelogramm vom Inhalt 4, das wieder nach den Asymptoten orientiert ist, und dessen zur Asymptote $x + y\vartheta = 0$ parallele Seite durch G_1 geht. Es enthält außer 0 und G_1 wieder mindestens einen Gitterpunkt G_2, der entweder im Innern des Parallelogramms oder auf einer der beiden zu $x + y\vartheta' = 0$ parallelen Seiten (mit Ausschluß der Eckpunkte) gelegen ist. In derselben Weise fährt man fort. Alle so entstehenden Punkte $G_1, G_2, \ldots$ liegen zwischen den Hyperbeln $(x + y\vartheta)(x + y\vartheta') = \pm\sqrt{D}$ und ihren Asymptoten; die zugehörigen Zahlen $\gamma_i = x_i + y_i\vartheta$ haben also eine Norm, deren Betrag kleiner als $\sqrt{D}$, also beschränkt ist. Aus der Existenz unendlich vieler ganzer Zahlen des Körpers mit beschränkter Norm wird dann leicht die Existenz unendlich vieler Einheiten gefolgert. Die Abstände der Punkte G_i von der Asymptote $x + y\vartheta = 0$, die den Beträgen $g_i = |\gamma_i|$ proportional sind, haben den Limes 0.

An diesen Prozeß haben wir hier erinnert, um angeben zu können, welcher Modifikation er bedarf, um in den Kettenbruchalgorithmus überzugehen. Man kann offenbar ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß sämtliche Punkte G_i in dem durch die Ungleichung $x + y\vartheta' \geqq 0$ gekennzeichneten Teil der Ebene gelegen sind. Bei dem eben geschilderten Verfahren ist es dann denkbar, daß innerhalb des i-ten Parallelogramms nicht nur *ein* solcher Gitterpunkt G_{i+1} gelegen ist, sondern mehrere. Für den Existenzschluß war es gleichgültig, welchen unter ihnen man auswählte. Wählt man stets denjenigen aus, der von der Asymptote $x + y\vartheta' = 0$ den kleinsten Abstand hat (wie leicht zu sehen, ist er eindeutig bestimmt), so erhält man gerade diejenigen Gitterpunkte, deren Koordinaten Nenner und Zähler der Näherungsbrüche des Kettenbruchs von $-\vartheta$ sind, wenigstens von einem gewissen Index ab.

Minkowskis Gedanke[3]) beruht darauf, daß er die eben geschilderte Eigenschaft der Kettenbruchnäherungen auf den kubischen Körper überträgt. Bei kubischen Körpern mit negativer Diskriminante treten an Stelle der beiden Asymptoten eine Asymptotengerade und eine Asymptotenebene durch 0, welche die Asymptotengerade nicht enthält. An Stelle der Parallelogramme treten elliptische Zylinder, die die Asymptotengerade zur Achse haben und von zwei zur Asymptotenebene parallelen Ebenen begrenzt

[3]) H. Minkowski, Über periodische Approximationen algebraischer Zahlen, Werke Bd. I, S. 357—371.

werden. Minkowski beginnt mit irgend einem Zylinder vom Inhalt 8, wählt darin denjenigen Gitterpunkt G_1 aus, der der Asymptotenebene möglichst nahe liegt, dann den Zylinder vom Inhalt 8, auf dessen Mantel G_1 gelegen ist, darin G_2, und fährt so fort. Indem wir hier und fortan unter den drei konjugierten kubischen Körpern stets einen der beiden komplexen auszeichnen, seien $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ diejenigen ganzen Zahlen dieses komplexen kubischen Körpers, die zu den Gitterpunkten $G_1, G_2, \ldots$ gehören. Sei ferner $g_i = |\gamma_i|^2 = \gamma_i \bar{\gamma}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Dann ist g_i proportional dem Flächeninhalt der Ellipsen, die die Parallelebenen zu der Asymptotenebene aus *dem* Zylinder der oben beschriebenen Schar, dessen Mantel durch G_i geht, ausschneiden. Diese Flächeninhalte übernehmen hier also die Rolle, die im Falle des quadratischen Körpers die Abstände der G_i von der Asymptote hatten. Die Existenz einer Einheit folgt hier wiederum aus der Tatsache, daß die γ_i unendlich viele ganze Zahlen des Körpers von beschränkter Norm sind, und zwar ergibt sich dies auch hier, ohne daß man dabei noch von der Normierung Gebrauch macht, durch die wir in jedem Zylinder einen bestimmten Gitterpunkt fixiert haben. Indem Minkowski jetzt aber von dieser Normierung Gebrauch macht, vermag er zu zeigen, daß die zu den normierten Gitterpunkten G_i gehörigen Zahlen γ_i und g_i eine Periodizität aufweisen in dem Sinne, daß $\frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i}$ und $\frac{g_{i+1}}{g_i}$ periodische Folgen sind: Es gibt eine natürliche Zahl p derart, daß $\frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i} = \frac{\gamma_{i+p+1}}{\gamma_{i+p}}$ für alle i von einem bestimmten ab. $\frac{\gamma_{i-p}}{\gamma_i} = \frac{\gamma_{i+1-p}}{\gamma_{i-1}}$ ist dann stets eine Einheit η. Wir sagen, γ_i sei *periodisch mit* η.

Die Verschiedenheit dieses Verfahrens vom Jacobischen Algorithmus ist allein schon daraus ersichtlich, daß die hier betrachtete Folge von Gitterpunkten G_1 sich der Asymptoten*geraden* immer mehr annähert, während die beim Jacobischen Algorithmus auftretenden Folgen sich der Asymptoten*ebene* nähern. Bei näherer Betrachtung erweist sich der Unterschied als noch viel tiefer.

Minkowskis Zielsetzung war, wie schon der Titel seiner Arbeit zeigt, diese Periodizität, sowie der Nachweis, daß ein analoges Verfahren in höheren Körpern in der Regel *nicht* periodisch wird. Im Gegensatz hierzu stellt die vorliegende Arbeit die *Berechnung der Grundeinheit* in den Mittelpunkt. Es ist eine der wichtigsten Eigenschaften des Kettenbruchalgorithmus, daß er für den reellen quadratischen Körper als erste Einheit stets eine *Grund*einheit liefert; Minkowski hat gar nicht erwähnt, daß ähnliches auch für sein Verfahren im kubischen Körper gilt, daß

nämlich die Größen $\frac{\gamma_i \pm p}{\gamma_i}$ bei minimalem p stets die Grundeinheit geben, sofern die Größen 1, ϑ, ϑ^2, die Minkowski als Ausgangspunkt seines Verfahrens wählt, eine Basis des Körpers darstellen.

Die vorliegende Arbeit legt statt solcher spezieller Tripel 1, ϑ, ϑ^2, irgend drei linear unabhängige Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ des Körpers zugrunde; und ebenso geht sie beim quadratischen Körper anstatt von der oben gewählten Basis von irgend zwei linear unabhängigen Zahlen α_1, α_2 des Körpers aus, d. h. sie betrachtet einen beliebigen zweigliedrigen *Modul* des Körpers. Bereits für den reellen quadratischen Körper scheint die Frage nirgends erörtert zu sein, welche Einheit der Kettenbruchalgorithmus liefert, wenn man nicht ϑ, sondern den Quotienten $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ irgend zweier ganzen Zahlen des Körpers in einen Kettenbruch entwickelt. In der vorliegenden Arbeit wird u. a. gezeigt, daß der Kettenbruch stets eine Grundeinheit liefert, wenn der Modul ein Ideal ist[4]) und allgemeiner, daß er bei einem beliebigen Modul eine Grundeinheit der zu dem Modul gehörigen Ordnung liefert (Kap. 2, Hauptsatz 3). Es wird ferner gezeigt, daß das Minkowskische Verfahren auch im kubischen Körper, angewendet auf einen beliebigen dreigliedrigen Modul, stets eine Grundeinheit seiner Ordnung liefert (Kap. 2, Hauptsatz 5). Diese Tatsachen werden aus einem sehr viel allgemeineren Satze gefolgert, den wir Äquivalenzsatz nennen (Kap. 1, Hauptsatz 1), und der zur Folge hat, daß verschiedene Basen desselben Moduls (also äquivalente Tripel) von einem gewissen Index i ab die gleichen Folgen g_i und bis auf gewisse Vorzeichen auch die gleichen γ_i liefern.

Vergegenwärtigen wir uns, wie die numerische Durchführung des Minkowskischen Verfahrens im Einzelfall aussieht: der erste Schritt erfordert die Bestimmung eines Gitterpunktes G_1, der in dem Ausgangszylinder gelegen ist, also einer ganzen Zahl des Körpers, die gewissen Ungleichungen genügt; eine Vorschrift zur Auswahl dieser Zahl ist nicht gegeben. Man hat unter einer endlichen Anzahl von Möglichkeiten auszuwählen. Der zweite Schritt des Verfahrens wiederholt dieses Ausprobieren, nur daß die Auswahl der zugelassenen Gitterpunkte größer wird; und sie wächst bei jedem folgenden Schritt. Der Kettenbruchalgorithmus ist numerisch unvergleichlich einfacher. Er ist es nicht nur durch den geringeren Grad der Rechenmühe, sondern man kann angeben, wodurch er sich prinzipiell von dem Minkowskischen Verfahren unterscheidet. Er gibt eine automatisch zu handhabende Rechenvorschrift, die aus dem Ausgangspaar (α_1, α_2) ein zweites $(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)})$ herstellt, aus diesem, ohne

[4]) Herr Toeplitz hatte mir diese Bemerkung als empirische Tatsache mitgeteilt.

daß man auf den Anfang zurückzugehen braucht, analog ein drittes Paar $(\alpha_1^{(3)}, \alpha_2^{(3)})$ u. s. f.

Die vorliegende Arbeit hat sich nun das Ziel gesetzt, für den kubischen Körper mit negativer Diskriminante ebenfalls einen *Algorithmus* zu finden, d. h. eine Rechenvorschrift, die aus dem ersten Tripel $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ein zweites Tripel $(\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \alpha_3^{(2)})$ und aus jedem Tripel das folgende zu berechnen gestattet. Es zeigte sich, daß dies zwar nicht möglich ist, selbst nicht die Berechnung des n-ten Tripels aus dem $(n-1)$-ten und dem $(n-2)$-ten[5]); dagegen kann man das n-te Tripel aus dem $(n-1)$-ten, $(n-2)$-ten, ..., $(n-k(n))$-ten Tripel nach einem festen Algorithmus herleiten, wo $k(n)$ eine Funktion von n und dem Ausgangstripel $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ist, die unterhalb einer von n und dem Ausgangstripel unabhängigen Schranke liegt. Die minimale Schranke habe ich noch nicht ermittelt.

Abgesehen von diesem prinzipiellen Unterschied unseres Algorithmus gegenüber dem Verfahren von Minkowski[6]), ist die von uns gegebene Rechenvorschrift numerisch außerordentlich viel kürzer und überhaupt in vielen Beispielen bequem und ausführbar, wo das Minkowskische Verfahren gar nicht mehr bewältigt werden kann.

Dieser Algorithmus, der in Kap. 5 genau und zwar rein arithmetisch entwickelt wird, soll hier unter Heranziehung der geometrischen Anschauung ungefähr skizziert werden. Der Kettenbruchalgorithmus beruht auf sukzessive durchgeführten Divisionen. Die erste Division, nämlich die von α_2 durch α_1 $(0 < \alpha_1 < \alpha_2)$, bestimmt eine ganze Zahl q so, daß

$$0 < \alpha_2 - q\alpha_1 < \alpha_1$$

wird. Man kann diesen Schritt, dessen unmittelbare Übertragung auf den kubischen Fall zum Jacobischen Algorithmus geführt hat, auch in etwas anderer Weise auffassen, und zwar in einer solchen, daß die Übertragung auf den kubischen Fall den angekündigten Algorithmus liefert. Man kann nämlich sagen, daß die Division eine Lösung der Ungleichungen

$$0 < |-\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2| < \alpha_1, \quad x_2 > 0$$

in ganzen Zahlen x_1, x_2 liefert. Diese Ungleichungen haben unendlich viele Lösungen, repräsentiert durch die Gitterpunkte der oberen Halbebene, die zwischen die beiden Geraden

$$-\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \pm \alpha_1$$

---

[5]) Auf diese Frage komme ich in einer demnächst erscheinenden Arbeit noch zurück.

[6]) Am Ende der genannten Abhandlung bemerkt Minkowski, daß er sein Verfahren in einen sukzessiven Algorithmus verwandeln könne, ist aber darauf in keiner seiner späteren Abhandlungen zurückgekommen. Die vorliegende Arbeit ist nach langen vergeblichen Versuchen, diese Andeutung auszuführen, einen gänzlich anderen Weg gegangen.

fallen, d. h. die Geraden $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ der nebenstehenden Figur. Der Satz von der Division besagt genauer, daß es unter diesen Lösungen zwei gibt, bei denen $x_2 = 1$ ausfällt, $(q, 1)$ und $(q+1, 1)$, oder, geometrisch ausgedrückt, daß einer der genannten Gitterpunkte bereits auf der ersten Parallelen zur x_1-Axe nach oben zu gelegen ist. Es ist dies auch geometrisch unmittelbar evident: auf dieser Geraden $x_2 = 1$ schneiden $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ eine Strecke von der Länge 2 aus, die, an welche Stelle der Geraden sie auch hintreffen mag, zwei Gitterpunkte enthalten muß. Ebenso enthält jede weitere Horizontale zwei der Gitterpunkte. Es ist für die Übertragung auf den kubischen Fall wichtig, den Gitterpunkt $(q, 1)$ durch eine Eigenschaft zu charakterisieren, die ihn vor allen anderen des schraffierten Gebiets auszeichnet: man sage, der Punkt (a_1, a_2) ist „kleiner" als der Punkt (b_1, b_2), wenn $a_1 \leqq b_1$, $a_2 \leqq b_2$, ohne daß die Punkte zusammenfallen; dann sind zwar nicht je zwei beliebige Punkte in diesem Sinne vergleichbar, aber der Punkt $(q, 1)$ ist dadurch charakterisiert, daß alle anderen Gitterpunkte des schraffierten Bereichs größer sind als er. Die Transformation

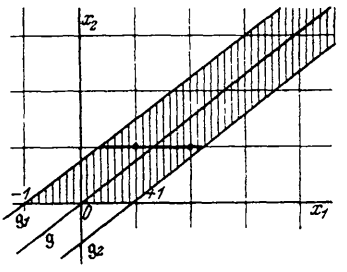


Fig. 2.

$$\alpha_1^{(2)} = -x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = -q\alpha_1 + \alpha_2$$
$$\alpha_2^{(2)} = \alpha_1 \qquad\qquad = \alpha_1$$

ist dann unimodular und führt das Ausgangspaar α_1, α_2 in ein neues Paar $\alpha_1^{(2)}, \alpha_2^{(2)}$ von Zahlen des Körpers über, für die wiederum $0 < \alpha_1^{(2)} < \alpha_2^{(2)}$ gilt. So wird das zweite Paar gewonnen, auf das dann der Divisionsprozeß von neuem angewandt wird.

In dieser Formulierung kann der genannte Prozeß sinngemäß auf den komplexen kubischen Körper übertragen werden: man suche solche Tripel ganzer rationaler Zahlen x_1, x_2, x_3, für die

$$(1) \qquad 0 < |\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3| < |\alpha_1|, \quad x_3 > 0$$

ausfällt. An dieser Stelle setzen nun die Erschwerungen gegenüber dem quadratischen Fall ein. Im quadratischen Fall lag bereits auf der ersten Parallele zur x_1-Achse innerhalb des schraffierten Bereichs (Fig. 2) ein Gitterpunkt, derjenige, den das Kettenbruchverfahren bei seinem ersten Schritt lieferte. Hier kann es, wie man sich an ganz einfachen Beispielen überzeugt, vorkommen, daß der dem Parallelstreifen entsprechende elliptische Halbzylinder in der Ebene $x_3 = +1$ keinen Gitterpunkt enthält. Und zwar sieht man, daß bei hinreichender Schlankheit des elliptischen

Querschnitts auch noch die Ebenen $x_3 = 2, 3$ usw. gitterpunktfrei sein können. Irgendeine Vorschrift über Vorzeichen und Anordnung der $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ nach der Größe ihrer Beträge ändert an diesem Tatbestand nichts[7]). Es gilt aber der Satz: Es gibt stets in dem oberen Halbraum unseres Zylinders vier Gitterpunkte von der Art, daß jeder weitere darin gelegene Gitterpunkt „größer" ist als einer von den vieren. Dabei heißt in genauer Analogie zum quadratischen Fall ein Punkt „kleiner" als ein anderer, wenn seine Koordinaten kleiner oder gleich den entsprechenden des anderen Punktes sind, ohne daß die Punkte identisch sind. Wenigstens gilt das eben ausgesprochene Theorem dann, wenn sämtliche Gitterpunkte, die innerhalb des Halbzylinders gelegen sind, dem ersten Oktanten angehören. In der Annahme, daß dies zutrifft, liegt natürlich eine Voraussetzung über das Ausgangstripel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. *Sie* entspricht der im quadratischen Fall dem Ausgangspaar α_1, α_2 auferlegten Bedingung $0 < \alpha_1 < \alpha_2$. Diese Bedingung bewirkte, daß sämtliche Gitterpunkte der oberen Halbebene, die im Parallelstreifen liegen, dem ersten Quadranten angehören. Hier im kubischen Fall kann sie nicht durch so einfache Ungleichungen formuliert werden; daß sie trotzdem erfüllbar ist, wird in Kap. 4, § 3 bewiesen. Nach einem Gesichtspunkt, dessen Auseinandersetzung hier zu kompliziert wäre, werden zwei Gitterpunkte, (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), bestimmt, die in nahem Zusammenhang mit den eben erwähnten vier Gitterpunkten stehen. Sie sind einerseits durch ein numerisch brauchbares Verfahren bestimmbar und gestatten andererseits in besonders günstiger Weise die Fortsetzung der Operationen zur Auffindung der gesuchten Einheit.

— — —

[7]) Beispiel: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 10\,\varepsilon\,\vartheta$, $\alpha_3 = 10\,\varepsilon^2\,\vartheta^2$, wo $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$, $\vartheta = \sqrt[3]{2}$. Es soll mit ganzen rationalen x_1, x_2, x_3

$$(2)\qquad 0 < |x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3|^2 = (x_1 - x_2 \cdot 5\,\vartheta - x_3 \cdot 5\,\vartheta^2)^2 + 3 \cdot (x_2 \cdot 5\,\vartheta - x_3 \cdot 5\,\vartheta^2)^2 < 1 = |\alpha_1|$$

sein, also insbesondere

$$(3)\qquad |x_1 - x_2 \cdot 5\,\vartheta - x_3 \cdot 5\,\vartheta^2| < 1.$$

$$(4)\qquad |x_2\ 5\,\vartheta - x_3 \cdot 5\,\vartheta^2| < \tfrac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}577\ldots.$$

Aus (2) folgt, daß x_2, x_3, nicht gleichzeitig verschwinden, also aus (4) wegen $\vartheta > 1$

$$x_2 \neq 0, \quad x_3 \neq 0.$$

Wir haben $5\,\vartheta = 6{,}299\ldots$, $5\,\vartheta^2 = 7{,}937\ldots$. Durch Ausprobieren findet man, daß für $x_3 = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ keine ganze rationale Zahl x_2 existiert, die (4) erfüllte. Ebenso gibt es für $x_2 = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ kein x_3, das (4) erfüllt. Für jede Lösung (x_1, x_2, x_3) von (2) gilt also $|x_2| > 4$, $|x_3| > 3$ und wegen (4) sg $x_2 = $ sg x_3. Somit folgt aus (3) noch $|x_1| > 4 \cdot 5\,\vartheta + 3 \cdot 5\,\vartheta^2 - 1 > 34$.

Das eben erwähnte numerische Verfahren besteht in folgendem: Wir approximieren die Projektion der Zylinderachse auf die (x_2, x_3)-Ebene, die durch die Natur der Sache ausgezeichnet ist, durch ein gemeines, in Elementaroperationen zerlegtes Kettenbruchverfahren. Unter den hierbei auftretenden approximierenden Gitterpunkten der (x_2, x_3)-Ebene befinden sich die Projektionen der beiden gesuchten hervorgehobenen Punkte (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3).

Die lineare Transformation, deren Matrix sich aus diesen beiden Tripeln folgendermaßen aufbaut:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

ist wiederum unimodular und führt das Ausgangstripel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ in ein neues $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ über. Im quadratischen Fall erfüllte das an dieser Stelle auftretende Paar von selbst die vom Ausgangspaar geforderten Ungleichungen. Hier braucht die entsprechende Forderung nicht erfüllt zu sein. Jedoch geht das Tripel $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ stets durch eine der vier Elementaroperationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

in ein Tripel über, daß die genannte Voraussetzung wieder erfüllt.

Der Algorithmus enthält in seiner bisher geschilderten Form noch in jedem seiner Schritte eine Zweideutigkeit, nämlich die Reihenfolge, in der die beiden hervorgehobenen Tripel in die Matrix (5) eingehen. Diese Wahl wird normiert, indem bei der Konstruktion des n-ten Tripels aus dem $(n-1)$-ten außerdem noch das $(n-k(n))$-te Tripel herangezogen wird. Nachdem diese Normierung vollzogen ist, kann von unserem Algorithmus folgendes bewiesen werden:

Von einem gewissen Index ab stimmen die Zahlen, die in den aufeinanderfolgenden Tripeln an erster Stelle stehen, mit einer Teilfolge der Zahlen γ_i des Minkowskischen Verfahrens bis auf das Vorzeichen überein. Einzelne der Minkowskischen γ_i können ausfallen (Kap. 5, Satz 20); es wird jedoch gezeigt, daß dadurch die Äquivalenzeigenschaft und Periodizität mit Grundeinheit nicht zerstört werden (Kap. 5, Hauptsätze 7, 8). *Mit Hilfe unseres Verfahrens sind wir zugleich imstande, nicht nur die Grundeinheit der Ordnung eines beliebigen dreigliedrigen Moduls eines komplexen kubischen Körpers zu errechnen, sondern darüber hinaus zu erkennen, ob zwei beliebig vorgegebene dreigliedrige Moduln des Körpers äquivalent sind oder nicht.*

Kapitel 1.

Der Äquivalenzsatz.

Gegeben seien $m\,(m \geqq 2)$ Linearformen

$$\tau_k = \alpha_{1k} x_1 + \ldots + \alpha_{mk} x_m \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

wobei $\mathfrak{A} = (\alpha_{ik})$ eine Matrix komplexer Zahlen ist mit den Eigenschaften:

(6) $\mathfrak{A}$ besitzt eine Reziproke $\mathfrak{A}^{-1} = (A_{ik})$,

(7) alle A_{mk} $(k = 1, \ldots, m)$ sind von Null verschieden.

Im folgenden bedeuten die Größen $\gamma_1(\ ), \gamma_2(\ ), \ldots$ Zahlen, die allein von den in den Klammern ( ) stehenden Dingen abhängen. Kleine lateinische Buchstaben mit und ohne Indizes bedeuten stets ganze rationale Zahlen.

Hilfssatz 1: *Sei δ beliebig, positiv. Erfüllen die Zahlen $x_1, \ldots, x_m$ die $(m-1)$ Ungleichungen*

$$|\tau_k| < \delta \quad (k = 1, 2, \ldots, m-1),$$

so gelten die m Ungleichungen

$$|x_k - \tau_m A_{mk}| < \gamma_1(\mathfrak{A}) \cdot \delta \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Beweis: Wir haben $x_k = A_{1k}\tau_1 + A_{2k}\tau_2 + \ldots + A_{mk}\tau_m$, also

$$\begin{aligned} |x_k - \tau_m A_{mk}| &= |A_{1k}\tau_1 + \ldots + A_{m-1\,k}\tau_{m-1}| \\ &\leqq \{|A_{1k}| + \ldots + |A_{m-1\,k}|\} \cdot \delta < \gamma_1(\mathfrak{A}) \cdot \delta. \end{aligned}$$

Aus Hilfssatz 1 folgt für $i, k = 1, \ldots, m$

$$\left|\frac{x_i}{A_{mi}} - \frac{x_k}{A_{mk}}\right| = \left|\left(\frac{x_i}{A_{mi}} - \tau_m\right) - \left(\frac{x_k}{A_{mk}} - \tau_m\right)\right|$$

$$\leqq \left|\frac{x_i}{A_{mi}} - \tau_m\right| + \left|\frac{x_k}{A_{mk}} - \tau_m\right| \leqq \gamma_1(\mathfrak{A}) \cdot \delta \left(\frac{1}{|A_{mi}|} + \frac{1}{|A_{mk}|}\right) < \gamma_2(\mathfrak{A}) \cdot \delta.$$

Wir haben also den

Hilfssatz 2: *Sei δ beliebig, positiv. Gelten die $(m-1)$ Ungleichungen*

$$|\tau_k| < \delta \quad (k = 1, \ldots, m-1),$$

so ist für $i, k = 1, \ldots, m$

$$\left|\frac{x_i}{A_{mi}} - \frac{x_k}{A_{mk}}\right| < \gamma_2(\mathfrak{A}) \cdot \delta,$$

und, wenn $x_i \neq 0$ (d. h. für jedes i mit $x_i \neq 0$ und jedes k)

$$\left|\frac{x_k}{x_i} - \frac{A_{mk}}{A_{mi}}\right| < \gamma_2(\mathfrak{A}) \cdot |A_{mk}| \cdot \delta.$$

Definition 1: *Die Zahl*

$$\gamma_3(\mathfrak{A}) = \frac{1}{2\gamma_2(\mathfrak{A})} \cdot \min_k \left\{\frac{1}{|A_{mk}|}\right\}$$

heiße die Hauptkonstante der Matrix $\mathfrak{A}$.

Aus der ersten Behauptung des Hilfssatzes 2 folgt

Hilfssatz 3: *Gelten die* $(m-1)$ *Ungleichungen*

$$|\tau_k| < \gamma_3(\mathfrak{A}) \quad (k = 1, \ldots, m-1),$$

so gelten für alle $i, k = 1, \ldots, m$ *die Ungleichungen*

$$\left| x_i \frac{A_{mk}}{A_{mi}} - x_k \right| < \frac{1}{2}. \tag{8}$$

Hilfssatz 4: *Seien* $(x_1, \ldots, x_m)$, $(y_1, \ldots, y_m)$ *zwei Systeme, von denen jedes die* $(m-1)$ *Ungleichungen*

$$|\tau_k| < \gamma_3(\mathfrak{A}) \quad (k = 1, \ldots, m-1) \tag{9}$$

erfüllt. Dann folgt

1. *aus* $x_i = y_i$ *für ein* i: $\quad x_k = y_k$ *für alle* $k = 1, \ldots, m$,
2. *aus* $x_i = 0$ *für ein* i: $\quad x_k = 0$ *für alle* k,
3. *aus* $x_i > y_i$ *für ein* i: $\quad \operatorname{sg}(x_k - y_k) = \operatorname{sg}\left(\frac{A_{mk}}{A_{mi}}\right)$[8] *für alle* k.

Beweis: Für beide Systeme gilt (8), also

$$\left| x_i \frac{A_{mk}}{A_{mi}} - x_k \right| < \frac{1}{2}, \quad \left| y_i \frac{A_{mk}}{A_{mi}} - y_k \right| < \frac{1}{2} \quad (i, k = 1, \ldots, m).$$

Daraus folgt

$$\left| (x_i - y_i) \frac{A_{mk}}{A_{mi}} - (x_k - y_k) \right| < 1 \quad (i, k = 1, \ldots, m). \tag{10}$$

Das gibt die erste Behauptung; die zweite folgt unmittelbar aus (8), durch Anwendung der Ungleichung (10) und der ersten Behauptung die dritte.

Aus Hilfssatz 1, 2, 4 entnehmen wir noch den

Hilfssatz 5: *Sei eine Folge untereinander verschiedener Systeme* $(x_1, \ldots, x_m)$ *gegeben, für die die* $(m-1)$ *Folgen* τ_k $(k = 1, \ldots, m-1)$ *gegen Null streben. Dann gilt:*

$$|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n| \to \infty,$$
$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n \to A_{m1} : A_{m2} : \ldots : A_{mm},$$
$$|\tau_m| \to \infty.$$

Zur Beantwortung der Frage, wann eine Folge von Systemen $(x_1, \ldots, x_m)$ der im Hilfssatz 5 erwähnten Eigenschaft existiert, beweisen wir den

Hilfssatz 6: *Dann und nur dann, wenn die Quotienten*

$$\frac{A_{mi}}{A_{mk}} \quad (i, k = 1, \ldots, m) \text{ reell} \tag{11}$$

sind, existiert eine Folge von Systemen $(x_1, \ldots, x_m) \neq (0, 0. \ldots, 0)$, *für die die* $(m-1)$ *Folgen* τ_k $(k = 1, \ldots, m-1)$ *gegen* 0 *streben.*

[8]) Das Zeichen sg bedeutet signum.

Beweis: 1. Für eine Folge von Systemen $(x_1, \ldots, x_m)$ der verlangten Eigenschaft gilt nach Hilfssatz 5 $\frac{x_i}{x_k} \to \frac{A_{mi}}{A_{mk}}$ $(i, k = 1, \ldots, m)$; da nun alle Quotienten $\frac{x_i}{x_k}$ rational, also reell sind, muß auch $\frac{A_{mi}}{A_{mk}}$ reell sein.

2. Wenn umgekehrt die $\frac{A_{mi}}{A_{mk}}$ reell sind, bestimme ich eine Folge von Systemen $(x_1, \ldots, x_m)$ durch die Vorschrift

$$\left(x_1 \cdot \frac{A_{mk}}{A_{m1}} - x_k\right) \to 0 \quad (k = 1, \ldots, m) \tag{12}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\tau_k &= \alpha_{1k} x_1 + \alpha_{2k} x_2 + \ldots + \alpha_{mk} x_m \\ &= \alpha_{1k}\left(x_1 - \frac{A_{m1}}{A_{m1}} x_1\right) + \alpha_{2k}\left(x_2 - \frac{A_{m2}}{A_{m1}} x_1\right) + \ldots + \alpha_{mk}\left(x_m - \frac{A_{mm}}{A_{m1}} x_1\right) \\ &\quad + \frac{x_1}{A_{m1}}(A_{m1}\alpha_{1k} + A_{m2}\alpha_{2k} + \ldots + A_{mm}\alpha_{mk}).\end{aligned}$$

Es ist aber

$$A_{m1}\alpha_{1k} + A_{m2}\alpha_{2k} + \ldots + A_{mm}\alpha_{mk} = e_{mk} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m-1),$$

weil die Matrix (A_{ik}) die Reziproke von (α_{ik}) ist. Also gilt wegen (12) $\tau_k \to 0$ für $k = 1, 2, \ldots, m-1$.

Definition 2: *Gegeben seien zwei Systeme reeller Zahlen* $\mathfrak{l} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, $\mathfrak{m} = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$. *Wir nennen*

$\mathfrak{l} = \mathfrak{m}$, *wenn* $\lambda_k = \mu_k$ *für alle* k,

$\mathfrak{l} > \mathfrak{m}$, *wenn* $\lambda_k \geqq \mu_k$ *für alle* k, *ohne daß* $\mathfrak{l} = \mathfrak{m}$,

$\mathfrak{l} < \mathfrak{m}$, *wenn* $\lambda_k \leqq \mu_k$ *für alle* k, *ohne daß* $\mathfrak{l} = \mathfrak{m}$,

„$\mathfrak{l}$ *vergleichbar mit* $\mathfrak{m}$“, *wenn entweder* $\mathfrak{l} = \mathfrak{m}$ *oder* $\mathfrak{l} > \mathfrak{m}$ *oder* $\mathfrak{l} < \mathfrak{m}$, sonst „$\mathfrak{l}$ *nicht vergleichbar mit* $\mathfrak{m}$“.

Definition 3: *Gegeben sei ein System reeller Zahlen* $\mathfrak{l} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$; *ist für alle* k

$\lambda_k > 0$, *so heißt* $\mathfrak{l}$ *positiv*,

$\lambda_k < 0$, *so heißt* $\mathfrak{l}$ *negativ*,

$\lambda_k \geqq 0$ *und* $\mathfrak{l} \neq (0, \ldots, 0)$, *so heißt* $\mathfrak{l}$ *nichtnegativ*,

$\lambda_k \leqq 0$ *und* $\mathfrak{l} \neq (0, \ldots, 0)$, *so heißt* $\mathfrak{l}$ *nichtpositiv*.

Gegeben sei eine Matrix (α_{ik}) mit den Eigenschaften (6), (7), (11). Wir wollen annehmen, daß die Quotienten

$$\frac{A_{mk}}{A_{mi}} > 0 \quad (i, k = 1, \ldots, m) \tag{13}$$

sind.

Hilfssatz 7: *Die Matrix* $\mathfrak{A} = (\alpha_{ik})$ *erfülle die Bedingungen* (6), (7), (13). *Sei* δ *eine positive Zahl* $\leqq \gamma_3(\mathfrak{A})$. *Alle Lösungssysteme* $(x_1, \ldots, x_m)$ *der* $(m-1)$ *simultanen Ungleichungen*

$$|\tau_k| < \delta \qquad (k = 1, \ldots, m-1)$$

sind vergleichbar. Es gibt außer $(0, \ldots, 0)$ *nur negative und positive Lösungssysteme. Insbesondere lassen sich alle positiven Lösungssysteme in eine Folge* $\mathfrak{x}^{(l)} = (x_1^{(l)}, \ldots, x_m^{(l)})$ $(l = 1, 2, 3, \ldots)$ *ordnen, für die die Ungleichungen*

$$0 < x_i^{(1)} < x_i^{(2)} < x_i^{(3)} < \ldots \qquad (i = 1, \ldots, m)$$
$$(0, \ldots, 0) < \mathfrak{x}^{(1)} < \mathfrak{x}^{(2)} < \mathfrak{x}^{(3)} < \ldots$$

erfüllt sind.

Beweis: Folgt aus den Hilfssätzen 6 und 4.

Bemerkung: Hätten wir (13) nicht gefordert, so wäre die Folge $x_i^{(l)}$ für einen Index i monoton steigend, für einen andern fallend, für den einen wäre sie durchweg positiv, für den andern negativ. Die Voraussetzung (13) dient also zur Vereinfachung.

Definition 4: *Für jede die Voraussetzungen* (6), (7), (13) *erfüllende Matrix* $\mathfrak{A}$ *und jede den Ungleichungen* $0 < \delta \leqq \gamma_3(\mathfrak{A})$ *genügende Zahl* δ *definieren wir die* m *Zahlenfolgen*

$$\tau_k^{(l)}(\mathfrak{A}, \delta) = \alpha_{1k} x_1^{(l)} + \ldots + \alpha_{mk} x_m^{(l)} \qquad (k = 1, \ldots, m;\ l = 1, 2, 3 \ldots),$$

wo $\mathfrak{x}^{(l)} = (x_1^{(l)}, \ldots, x_m^{(l)})$ *die nach Hilfssatz* 7 *eindeutig bestimmte Folge von Lösungssystemen ist.*

Es gilt nun der fundamentale

Hauptsatz 1 (Äquivalenzsatz): *Gegeben seien zwei quadratische Matrizen mit komplexen Koeffizienten,* $\mathfrak{A} = (\alpha_{ik})$, $\mathfrak{B} = (\beta_{ik})$ $(m \geqq 2,$ $i, k = 1, \ldots, m)$ *mit den Eigenschaften:*

(14) $\qquad \mathfrak{A}^{-1} = (A_{ik}), \quad \mathfrak{B}^{-1} = (B_{ik})$ *existieren.*

(15) $\qquad$ *Alle* A_{mk}, B_{mk} *sind von Null verschieden.*

(16) $\qquad$ *Die Quotienten* $\dfrac{A_{mk}}{A_{mm}}$, $\dfrac{B_{mk}}{B_{mm}}$ *sind positiv.*

$\mathfrak{B}$ *gehe aus* $\mathfrak{A}$ *durch die umkehrbar ganzzahlige Transformation*[9]) $\mathfrak{D} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1}$ *hervor:* $\mathfrak{B} = \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{A}$.

Dann gibt es eine nur von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *abhängende positive Zahl* γ *mit der Eigenschaft: Ist* $0 < \delta < \gamma$, *so gilt*

$$\tau_k^{(l)}(\mathfrak{A}, \delta) = \operatorname{sg} \frac{A_{mm}}{B_{mm}} \cdot \tau_k^{(l)}(\mathfrak{B}, \delta) \quad (k = 1, \ldots, m;\ l = 1, 2, 3, \ldots).$$

Beweis: Die Bedingungen (14) bis (16) entsprechen bzw. den Bedingungen (6), (7), (13); sie garantieren für $0 < \delta < \gamma_3(\mathfrak{A})$, $\delta < \gamma_3(\mathfrak{B})$ die Existenz der $2n$ Folgen $\tau_k^{(l)}(\mathfrak{A}, \delta)$, $\tau_k^{(l)}(\mathfrak{B}, \delta)$.

[9]) Eine Matrix heißt umkehrbar ganzzahlig, wenn ihre Determinante ± 1 ist und ihre Koeffizienten ganze rationale Zahlen sind.

Es sei $\mathfrak{D} = (\delta_{ik})$, $\mathfrak{D}^{-1} = (D_{ik})$. Aus $\mathfrak{B} = \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{A}$ folgt $\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{B}^{-1} \cdot \mathfrak{D}$, mithin

$$(17)\quad A_{mk} = B_{m1}\delta_{1k} + B_{m2}\delta_{2k} + \ldots + B_{mm}\delta_{mk} \quad (k = 1, \ldots, m)$$

$$\frac{A_{mk}}{B_{mi}} = \frac{B_{m1}}{B_{mi}}\delta_{1k} + \ldots + \frac{B_{mm}}{B_{mi}}\delta_{mk} \quad (i, k = 1, \ldots, m).$$

Da nach Voraussetzung alle $\frac{B_{mk}}{B_{mi}}$ und alle δ_{ik} reell sind, folgt, daß auch

$$(18)\qquad \text{alle } \frac{A_{mk}}{B_{mi}} \text{ reell}$$

sind. Wegen (16) gilt demnach

$$(19)\qquad \operatorname{sg}\frac{A_{mk}}{B_{mi}} = \operatorname{sg}\frac{A_{mm}}{B_{mm}} \qquad (i, k = 1, \ldots, m).$$

Sei jetzt γ die kleinste der $(2m + 2)$ positiven Zahlen

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2 \cdot B_{mm} \cdot \gamma_2(\mathfrak{B})} \cdot \dfrac{|A_{mk}|}{|\delta_{1k}B_{m1} + \ldots + \delta_{mk}B_{mm}|}, \\ \dfrac{1}{2 \cdot A_{mm} \cdot \gamma_2(\mathfrak{A})} \cdot \dfrac{|B_{mk}|}{|D_{1k}A_{m1} + \ldots + D_{mk}A_{mm}|}, \\ \gamma_3(\mathfrak{A}),\ \gamma_3(\mathfrak{B}) \qquad (k = 1, \ldots, m). \end{cases}$$

Wir werden zeigen, daß dieses γ die behauptete Eigenschaft besitzt. Sei δ eine positive Zahl $< \gamma$. Wir betrachten die Gesamtheit der Lösungen $(x_1, \ldots, x_m)$ der $(m-1)$ simultanen Ungleichungen

$$(20)\qquad |\alpha_{1k}x_1 + \ldots + \alpha_{mk}x_m| < \delta \qquad (k = 1, \ldots, m-1)$$

und die Gesamtheit der Lösungen $(y_1, \ldots, y_m)$ der $(m-1)$ simultanen Ungleichungen

$$(21)\qquad |\beta_{1k}y_1 + \ldots + \beta_{mk}y_m| < \delta \qquad (k = 1, \ldots, m-1).$$

Wir beweisen unseren Satz in drei Schritten.

1. Die Lösungen von (20) sind eineindeutig den Lösungen von (21) zugeordnet durch die Transformation

$$(22)\qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \operatorname{sg}\frac{A_{mm}}{B_{mm}} \cdot \mathfrak{D}' \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Denn aus der Ganzzahligkeit der $x_1, \ldots, x_m$ folgt die der $y_1, \ldots, y_m$ und umgekehrt, da $\mathfrak{D}'$ umkehrbar ganzzahlig ist; außerdem ist

$$\mathfrak{A}' \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \operatorname{sg}\frac{A_{mm}}{B_{mm}} \cdot \mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{D}' \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \operatorname{sg}\frac{A_{mm}}{B_{mm}} \cdot \mathfrak{B}' \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

also

$$\alpha_{1k}x_1 + \ldots + \alpha_{mk}x_m = \operatorname{sg}\frac{A_{mm}}{B_{mm}} \cdot (\beta_{1k}y_1 + \ldots + \beta_{mk}y_m) \quad (k = 1, \ldots, m).$$

2. Durch die Transformation (22) werden sogar die positiven Lösungen von (20) den positiven Lösungen von (21) eineindeutig zugeordnet:

Sei $(y_1, \ldots, y_m)$ eine positive Lösung von (21). Wir haben wegen (22)

$$x_k = \operatorname{sg} \frac{A_{mm}}{B_{mm}} \cdot (\delta_{1k}\, y_1 + \ldots + \delta_{mk}\, y_m)$$

$$= \operatorname{sg} \frac{A_{mm}}{B_{mm}} \cdot y_m \cdot \left(\delta_{1k} \frac{y_1}{y_m} + \ldots + \delta_{m-1\,k} \frac{y_{m-1}}{y_m} + \delta_{mk}\right)$$

$$x_k = \operatorname{sg} \frac{A_{mm}}{B_{mm}} \cdot y_m \cdot \left\{\delta_{1k} \frac{B_{m1}}{B_{mm}} - \ldots + \delta_{m-1\,k} \frac{B_{m\,m-1}}{B_{mm}} + \delta_{mk} + \sigma_k\right\},$$

wo $\sigma_k = \delta_{1k}\left(\frac{y_1}{y_m} - \frac{B_{m1}}{B_{mm}}\right) + \ldots + \delta_{m-1\,k}\left(\frac{y_{m-1}}{y_m} - \frac{B_{m\,m-1}}{B_{mm}}\right)$.

Aus Hilfssatz 2, angewendet auf $\alpha_{ik} = \beta_{ik}$, $\delta = \gamma$, folgt

$$\left|\frac{y_k}{y_m} - \frac{B_{mk}}{B_{mm}}\right| < \gamma_2(\mathfrak{B}) \cdot |B_{mk}| \cdot \delta, \tag{23}$$

somit

$$\sigma_k < \gamma_2(\mathfrak{B}) \{|\delta_{1k} B_{m1}| + \ldots + |\delta_{m-1\,k} B_{m\,m-1}|\} \cdot \delta \leqq \frac{1}{2} \cdot \frac{A_{mk}}{B_{mm}}.$$

Wir haben also

$$x_k = \operatorname{sg} \frac{A_{mm}}{B_{mm}} \cdot y_m \cdot \left\{\frac{A_{mk}}{B_{mm}} + \sigma_k\right\},$$

wo der in den Klammern stehende Ausdruck wegen der eben getroffenen Abschätzung von σ_k das gleiche Vorzeichen wie $\frac{A_{mk}}{B_{mm}}$, also wegen (19) auch das gleiche Vorzeichen wie $\frac{A_{mm}}{B_{mm}}$ hat; daraus folgt

$$\operatorname{sg} x_k = \operatorname{sg} y_m \qquad (k = 1, \ldots, m),$$
$$x_k > 0 \qquad (k = 1, \ldots, m).$$

Entsprechend ergibt sich auf Grund von (22) bei positivem $(x_1, \ldots, x_m)$

$$y_k > 0 \qquad (k = 1, \ldots, m).$$

Damit ist Punkt 2 bewiesen.

3. Zum Beweise unseres Äquivalenzsatzes fehlt jetzt nur noch der Nachweis, daß durch die Transformation (22) die Folge der nach steigenden Koordinaten geordneten positiven Lösungen $(y_1, \ldots, y_m)$ von (21) in eine Folge von Systemen $(x_1, \ldots, x_m)$ übergeht, die ebenfalls nach steigenden Koordinaten geordnet ist.

Seien $\mathfrak{y}' = (y_1', \ldots, y_m')$, $\mathfrak{y}'' = (y_1'', \ldots, y_m'')$ zwei positive Lösungen von (21) mit $\mathfrak{y}' < \mathfrak{y}''$. Durch die Transformation (22) mögen aus ihnen die Systeme $\mathfrak{x}' = (x_1', \ldots, x_m')$, $\mathfrak{x}'' = (x_1'', \ldots, x_m'')$ hervorgehen. Nach Hilfssatz 2 ist

$$\left|\frac{y_i'}{B_{mi}} - \frac{y_k'}{B_{mk}}\right| < \gamma_2(\mathfrak{B}) \cdot \delta, \qquad \left|\frac{y_i''}{B_{mi}} - \frac{y_k''}{B_{mk}}\right| < \gamma_2(\mathfrak{B}) \cdot \delta,$$

also

$$\left|\frac{y_k''-y_k'}{B_{mk}}-\frac{y_i''-y_i'}{B_{mi}}\right|<2\gamma_2(\mathfrak{B})\cdot\delta,$$

und wegen $y_i''>y_i'$

$$\left|\frac{y_k''-y_k'}{y_i''-y_i'}-\frac{B_{mk}}{B_{mi}}\right|<2\gamma_2(\mathfrak{B})\cdot|B_{mk}|\cdot\delta. \tag{24}$$

Jetzt schätzen wir die m Differenzen $(x_k''-x_k')$

$$x_k''-x_k'=\operatorname{sg}\frac{A_{mm}}{B_{mm}}\cdot\{\delta_{1k}(y_1''-y_1')+\ldots+\delta_{mk}(y_m''-y_m')\}$$

in genau derselben Weise ab, wie im zweiten Schritt die Koordinaten x_k. Es ergibt sich

$$x_k''-x_k'=\operatorname{sg}\frac{A_{mm}}{B_{mm}}\cdot(y_m''-y_m')\cdot\left\{\frac{A_{mk}}{B_{mm}}+\sigma_k\right\},$$

wo

$$\sigma_k=\delta_{1k}\cdot\left(\frac{y_1''-y_1'}{y_m''-y_m}-\frac{B_{m1}}{B_{mm}}\right)+\ldots+\delta_{m-1k}\left(\frac{y_{m-1}''-y_{m-1}'}{y_m''-y_m'}-\frac{B_{mm-1}}{B_{mm}}\right)$$

mit $|\sigma_k|<\left|\frac{A_{mk}}{B_{mm}}\right|$, da die rechten Seiten der Ungleichungen (24) doppelt so groß sind wie die entsprechenden Größen der Ungleichungen (23). Also folgt wegen (19)

$$\operatorname{sg}(x_k''-x_k')=\operatorname{sg}(y_m''-y_m')\qquad(k=1,\ldots,m)$$

und wegen $y_m''>y_m'$

$$x_k''>x_k'\quad(k=1,\ldots,m),\quad\text{d. h.}\quad\mathfrak{x}''>\mathfrak{x}'$$

w. z. b. w.

Wir wollen jetzt die Anwendbarkeit des Äquivalenzsatzes auf algebraische Zahlkörper prüfen. Seien $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ m linear unabhängige Zahlen des algebraischen Zahlkörpers m-ten Grades K, $m\geqq 2$. $(\alpha_1^{(k)},\ldots,\alpha_m^{(k)})$ $(k=1,2,\ldots,m)$ seien die zu $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)=(\alpha_1^{(1)},\ldots,\alpha_m^{(1)})$ konjugierten Systeme, $K^{(k)}$ der durch die Zahlen $\alpha_1^{(k)},\ldots,\alpha_m^{(k)}$ erzeugte, zu K konjugierte Körper und $\mathfrak{A}=(\alpha_i^{(k)})$ $(i,k=1,\ldots,m)$.

Wir wollen prüfen, wann die Bedingungen (6), (7), (13) von $\mathfrak{A}$ erfüllt werden. $\mathfrak{A}$ hat eine Reziproke $\mathfrak{A}^{-1}=(A_{ik})$, da die Diskriminante $\mathfrak{A}|^2$ von $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ wegen der linearen Unabhängigkeit der $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ von Null verschieden ist. Wie leicht einzusehen, besteht die i-te Zeile der Matrix $\mathfrak{A}^{-1}$ aus linear unabhängigen Zahlen des Körpers $K^{(i)}$ $(i=1,\ldots,m)$. Daraus kann man einerseits schließen, daß alle $A_{mk}\neq 0$. Andererseits gilt: Dann und nur dann, wenn $K^{(m)}$ reell ist, sind alle $\frac{A_{mi}}{A_{mk}}$ reell. Ist nämlich $K^{(m)}$ reell, so sind die A_{mk} $(k=1,\ldots,m)$ wegen ihrer Zugehörigkeit zu $K^{(m)}$ reell, also auch alle $\frac{A_{mi}}{A_{mk}}$. Sind umgekehrt

alle $\frac{A_{mi}}{A_{mk}}$ reell, so folgt, daß $K^{(m)}$ reell ist, denn das System reeller Zahlen $\left(\frac{A_{m1}}{A_{mm}}, \ldots, \frac{A_{m\,m-1}}{A_{mm}}, 1\right)$ erzeugt $K^{(m)}$. Zusammenfassend läßt sich also sagen:

Hilfssatz 8: *Sei* $\mathfrak{A}$ *die auf S. 340 eingeführte Matrix. Dann gilt:*

1. $\mathfrak{A}$ *hat eine Reziproke* $\mathfrak{A}^{-1} = (A_{ik})$.
2. *Alle* A_{mk} *sind von Null verschieden.*
3. *Dann und nur dann, wenn* $K^{(m)}$ *reell, sind alle* $\frac{A_{mk}}{A_{mi}}$ *reell.*

Die Bedingung (13) $-\frac{A_{mk}}{A_{mm}} > 0$ — kann durch eine geeignete Transformation der Gestalt

$$\begin{pmatrix} r_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & r_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & r_n \end{pmatrix},$$

wo die $r_i = \pm 1$ sind, erreicht werden.

Kapitel 2.

Minkowskifolgen in den reellen quadratischen und komplexen kubischen Körpern.

Definition 5: *Sei eine Folge von Systemen komplexer Zahlen* $\mathfrak{a}^{(n)} = (\alpha_1^{(n)}, \ldots, \alpha_m^{(n)})$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, *gegeben. Diese Folge* $\mathfrak{a}^{(n)}$ *heiße periodisch mit* ϱ, *wenn es zwei Indizes* $i, k \geqq 1$ $(i \neq k)$ *gibt derart, daß*

$$(\alpha_1^{(i+l)}, \ldots, \alpha_m^{(i+l)}) = \varrho \cdot (\alpha_1^{(k+l)}, \ldots, \alpha_m^{(k+l)}) \quad \textit{für alle} \quad l \geqq 0.$$

Eine Folge von Dingen (Systemen, Transformationen usw.) $D_n (n = 1, 2, \ldots)$ *heiße echtperiodisch, wenn es zwei Indizes* $i, k \geqq 1$ $(i \neq k)$ *gibt derart, daß*

$$D_{i+l} = D_{k+l} \quad \textit{für alle} \quad l \geqq 0.$$

Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ m linear unabhängige Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers K m-ten Grades. Die Gesamtheit aller Zahlen σ aus K, für die $\sigma\alpha_1, \ldots, \sigma\alpha_m$ im Modul $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_m]$ gelegen sind, bildet einen Ring, die Ordnung $\mathfrak{a}^0$ des Moduls in der Ausdrucksweise von Dedekind[10]). Ist $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ insbesondere Basis eines Ideals von K. so ist $\mathfrak{a}^0$ das Hauptideal (1).

[10]) R. Dedekind: Über die Diskriminanten endlicher Körper, Abh. d. Kgl. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen 29 (1882), S. 25.

§ 1.

Minkowskifolgen in den reellen quadratischen Körpern.

K sei ein fester reeller quadratischer Körper. Kleine griechische Buchstaben — ausgenommen die Buchstaben γ, δ — mit und ohne Indizes bedeuten stets Zahlen aus K. Die zu Zahlen aus K konjugierten Zahlen werden durch Akzent bezeichnet. Lateinische Buchstaben mit und ohne Indizes bedeuten ganze rationale Zahlen.

Das Paar (α_1, α_2) habe die Eigenschaften

(25) 1. α_1, α_2 sind linear unabhängig,

(26) 2. $\operatorname{sg}\alpha_1 \neq \operatorname{sg}\alpha_2$.

Wir verstehen unter $\mathfrak{A}$ die Matrix $\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_1' \\ \alpha_2 & \alpha_2'\end{pmatrix}$. Dann ist $\mathfrak{A}^{-1} = (A_{ik}) = \frac{1}{|\mathfrak{A}|}\begin{pmatrix}\alpha_2' & -\alpha_1' \\ -\alpha_2 & \alpha_1\end{pmatrix}$. Wegen $\frac{A_{21}}{A_{22}} > 0$ ist also die Existenz der Folgen $\tau_k^{(l)}(\mathfrak{A}, \delta)$ $(k = 1, 2)$ gesichert.

Wir betrachten jetzt die Menge $\mathfrak{M}$ aller Zahlen μ des Moduls $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2]$ mit folgenden Eigenschaften:

(27) $$|\mu| < \gamma_3(\mathfrak{A}).$$

(28) In der Darstellung $\mu = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$ ist $a_1 > 0$.

(29) Ist $\lambda = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2$, $b_1 > 0$ und $|\lambda| < |\mu|$, so gilt $b_1 > a_1$.

Die Menge $\mathfrak{M}$ enthält höchstens abzählbar unendlich viele Zahlen μ, da sie Teilmenge der abzählbaren Menge $\mathfrak{a}$ ist. Daß sie wirklich unendlich viele Zahlen enthält, wird sich nachher von selbst mitergeben. Keine zwei verschiedenen der Zahlen μ haben den gleichen Betrag, und es gibt stets nur höchstens endlich viele, deren Betrag oberhalb einer beliebig gegebenen positiven Zahl liegt. Daher lassen sich die Zahlen der Menge $\mathfrak{M}$ nach abnehmenden Beträgen in eine Zahlenfolge $\mu_1, \mu_2, \ldots$ ordnen derart, daß

(30) $$|\mu_1| > |\mu_2| > \ldots.$$

Wir schreiben

$$\mu_n = a_1^{(n)}\alpha_1 + a_2^{(n)}\alpha_2 = \mu_n(\alpha_1, \alpha_2).$$

Wegen (28) bis (30) folgt sofort der

Hilfssatz 9: $0 < a_1^{(n)} < a_1^{(n+1)}$.

Um weitere Eigenschaften der Folge μ_n zu gewinnen, vergleichen wir sie mit der für eine beliebige den Ungleichungen $0 < \delta < \gamma_3(\mathfrak{A})$ genügende Zahl δ gebildeten Folge

$$\tau_1^{(l)}(\mathfrak{A}, \delta) = x_1^{(l)}\alpha_1 + x_2^{(l)}\alpha_2$$

aus Definition 4, Kap. 1 (S. 337). Aus ihrer Definition folgt: Alle Zahlen $b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2$ mit $b_1 > 0$, die dem Betrage nach kleiner als $|\tau_1^{(l)}|$ sind,

sind in der Folge $\tau_1^{(l)}(\mathfrak{A}, \delta)$ enthalten, und aus Hilfssatz 7 folgt: Die Koordinaten b_1 dieser Zahlen sind größer als $x_1^{(1)} > 0$. Somit gehört $\tau_1^{(1)}$ der obigen Menge $\mathfrak{M}$ an. Es sei etwa $\tau_1^{(1)} = \mu_{n_1}$.

Aus (28), (30) und $|\mu_{n_1}| = |\tau_1^{(1)}| < \delta$ folgt jetzt, daß alle Zahlen $\mu_{n_1+1}, \mu_{n_1+2}, \ldots$ der Folge $\tau_1^{(l)}(\mathfrak{A}, \delta)$ angehören. Wir setzen etwa

$$\mu_{n_1-r} = \tau_1^{(k_r+1)}(\mathfrak{A}, \delta) \qquad (r = 0, 1, \ldots).$$

Nach Hilfssatz 7 und Hilfssatz 9 ist dann

$$1 = k_1 < k_2 < k_3 < \ldots,$$

d. h. die Folge $\mu_{n_1}, \mu_{n_1+1}, \ldots$ ist Teilfolge der Folge $\tau_1^{(1)}, \tau_1^{(2)}, \ldots$. Ich behaupte, k_{r+1} ist der kleinste Index $> k_r$, für welchen $|\tau_1^{(k_r+1)}| < |\tau_1^{(k_r)}|$ ist $(r = 1, 2, \ldots)$. Um dies zu beweisen, genügt es offenbar zu zeigen: Ist l_{r+1} der kleinste Index $> k_r$, für den $|\tau_1^{(l_r+1)}| < |\tau_1^{(k_r)}|$ gilt, so gehört $\tau_1^{(l_r+1)}$ der Menge $\mathfrak{M}$ an. Dies sieht man durch dieselben Schlüsse wie eben bei $\tau_1^{(1)}$ ein: Nach der Wahl des Index l_{r+1} ist $|\tau_1^{(l)}| > |\tau_1^{(l_r+1)}|$ für $0 < l < l_{r+1}$; daraus schließen wir: Alle Zahlen $b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2$ mit $b_1 > 0$, die dem Betrage nach kleiner als $|\tau_1^{(l_r+1)}|$ sind, sind in der Folge $\tau_1^{(l)}(\mathfrak{A}, \delta)$ $(l = l_{r-1} + 1, \; l_{r+1} + 2, \ldots)$ enthalten, ihre Koordinaten b_1 sind daher nach Hilfssatz 7 $> x_1^{(l_r+1)}$. Folglich gehört $\tau_1^{(l_r+1)}$ der Menge $\mathfrak{M}$ an w. z. b. w. Zugleich wird durch diesen Beweis klar, daß die Menge $\mathfrak{M}$ wirklich unendlich viele verschiedene Elemente enthält. Wir erhalten also den

Satz 1: *Sei δ eine beliebige, positive, feste Zahl $< \gamma_3(\mathfrak{A})$. Dann gilt: Die Folge μ_n ist von einem bestimmten Index ab die Teilfolge der dem Betrage nach sukzessiv kleineren Zahlen der Folge $\tau_1^{(l)}(\mathfrak{A}, \delta)$, d. h., ist μ_{n_1} das erste Glied der Folge μ_n mit $|\mu_{n_1}| < \delta$, so haben wir*

$$\mu_{n_1} = \tau_1^{(1)}(\mathfrak{A}, \delta),$$

und wenn $\mu_{n_1+p} = \tau_1^{(k)}(\mathfrak{A}, \delta)$ $(p \geqq 0)$, so

$$\mu_{n_1+p+1} = \tau_1^{(k')}(\mathfrak{A}, \delta),$$

wo k' der kleinste Index $> k$, für den $|\tau_1^{(k')}| < |\tau_1^{(k)}|$.

In dem Beweis von Satz 1 sowie der folgenden Sätze wird wesentlich von der Anordnung der Folge $\tau_k^{(l)}(\mathfrak{A}, \delta) = x_1^{(l)}\alpha_{1k} + \ldots + x_m^{(l)}\alpha_{mk}$ nach steigenden Koordinaten $x_1^{(l)}$ Gebrauch gemacht. Aus $x_1^{(l)} < x_1^{(q)}$ folgt $l < q$ und umgekehrt. Treffe ich also irgend eine Auswahl von Elementen der Folge $\tau_k^{(l)}$ nach der Größe ihrer Koordinaten $x_1^{(l)}$, so kann ich dieselbe Auswahl nach der Größe ihrer Indizes l treffen, eine Übertragung, die sprachlich formal dadurch erreicht wird, daß ich das Wort „Koordinate"

durch das Wort „Index" ersetze. Z. B.: Ist $\lambda = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2$ Glied von $\tau_1^{(l)}(\mathfrak{A}, \delta)$, $|\lambda| < |\mu|$, so ist die Koordinate b_1 von λ größer als die Koordinate a_1 von $\mu = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$ (vgl. (29)). Statt dessen können wir sagen: Ist $\lambda = \tau_1^{(m)}(\mathfrak{A}, \delta)$, $|\lambda| < |\mu|$, so ist der Index m von λ größer als der Index n von $\mu = \tau_1^{(n)}(\mathfrak{A}, \delta)$, m. a. W.: Alle Zahlen der Folge $\tau_1^{(l)}(\mathfrak{A}, \delta)$, die einen kleineren Index l haben als μ, sollen dem Betrage nach größer als μ sein.

Aus Hauptsatz 1, Satz 1 und den anschließenden Bemerkungen folgt sofort der

Hauptsatz 2: *Das Paar* (α_1, α_2) *erfülle* (25), (26), *das Paar* (β_1, β_2) *die entsprechenden Bedingungen.* (β_1, β_2) *soll durch die umkehrbar ganzzahlige Transformation* $\mathfrak{D}$ *aus* (α_1, α_2) *hervorgehen:*

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix} = \mathfrak{D}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}.$$

Dann gibt es eine allein von $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ *abhängende Zahl* γ *mit der Eigenschaft: Ist* δ *eine beliebige positive Zahl* $< \gamma$ *und* i *der kleinste Index, für den* $|\mu_i(\alpha_1, \alpha_2)| < \delta$, k *der kleinste Index, für den* $|\mu_k(\beta_1, \beta_2)| < \delta$, *so folgt*

$$\mu_{i+p}(\alpha_1, \alpha_2) = \operatorname{sg}\left\{\frac{\alpha_1}{\beta_1}\cdot|\mathfrak{D}|\right\}\mu_{k+p}(\beta_1, \beta_2)$$

für alle $p \geqq 0$.

Da K reell und vom 2-ten Grade, enthält die Ordnung $\mathfrak{a}^0$ von $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2]$ unendlich viele Einheiten, welche alle die positiven und negativen Potenzen einer einzigen, einer Grundeinheit, sind. Ist ε eine solche Grundeinheit, so sind alle anderen Grundeinheiten durch $-\varepsilon$, ε^{-1}, $-\varepsilon^{-1}$ gegeben.

Hauptsatz 3: (α_1, α_2) *erfülle* (25), (26). *Dann gibt es zwei Indizes* $i, k \geqq 1$ $(i \neq k)$ *derart daß*

$$\mu_{i+p}(\alpha_1, \alpha_2) = \varepsilon\,\mu_{k-p}(\alpha_1, \alpha_2)$$

für alle $p \geqq 0$, *wo* ε *eine der vier Grundeinheiten von* $\mathfrak{a}^0$, *d. h. die Folge der* $\mu_n(\alpha_1, \alpha_2)$ *ist periodisch mit einer der vier Grundeinheiten von* $\mathfrak{a}^0$.

Beweis: Ist ϱ eine beliebige von Null verschiedene Zahl aus K, so erfüllt auch $(\varrho\alpha_1, \varrho\alpha_2)$ die (25), (26) entsprechenden Bedingungen; ferner ist aus der Definition der Folge μ_n sofort ersichtlich, daß zwei Indizes r, s existieren, so daß

$$\mu_{r-p}(\varrho\alpha_1, \varrho\alpha_2) = \varrho\,\mu_{s+p}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (p = 0, 1, 2, \ldots). \tag{31}$$

Sei jetzt η eine Einheit aus $\mathfrak{a}^0$. Wir definieren ein Paar (β_1, β_2) durch

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\eta\\ \alpha_2\eta\end{pmatrix} = \mathfrak{D}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}. \tag{32}$$

Nach dem eben Gesagten erfüllt (β_1, β_2) die (25), (26) entsprechenden Bedingungen. Weil η Einheit aus $\mathfrak{a}^0$ ist, ist $\mathfrak{D}$ umkehrbar ganzzahlig.

Wir können also Hauptsatz 2 auf (α_1, α_2), (β_1, β_2) anwenden. Danach existieren zwei Indizes i', k', für die

$$\mu_{i'+p}(\alpha_1, \alpha_2) = \operatorname{sg}\left\{\frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot |\mathfrak{D}|\right\} \cdot \mu_{k'+p}(\beta_1, \beta_2)$$

für alle $p \geqq 0$. Aus (31), (32) folgt dann, daß zwei Indizes i, k existieren mit

$$\mu_{i+p}(\alpha_1, \alpha_2) = |\eta| \operatorname{sg}|\mathfrak{D}| \cdot \mu_{k+p}(\alpha_1, \alpha_2)$$

für alle $p \geqq 0$. Ist η Grundeinheit, so ist $|\eta| \neq 1$, somit $i = k$. Damit ist unsere Behauptung mit $\varepsilon = |\eta| \operatorname{sg}|\mathfrak{D}|$ bewiesen.

Zum Zwecke der Berechnung der Folge $\mu_n(\alpha_1, \alpha_2)$ definieren wir eine „Zusatzfolge" $\lambda_m(\alpha_1, \alpha_2)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ durch $\lambda_n = \mu_{n-1}$. Die Folge (λ_n, μ_n)[11]) steht nun in engstem Zusammenhang mit dem regulären Kettenbruchverfahren, wie wir in Kap. 3 sehen werden.

§ 2.

Minkowskifolgen in den komplexen kubischen Körpern.

In diesem Paragraphen bringen wir eine zu § 1 analoge Theorie für die komplexen kubischen Zahlkörper. Der Aufbau dieses Paragraphen entspricht ganz dem des vorigen, die Beweise sind fast wörtlich dieselben. Wir wollen uns darum auf die notwendigsten Angaben beschränken.

Definition 6: *Sei α irgendeine komplexe Zahl. Der Bereich aller Punkte ζ der komplexen Zahlenebene, für die*

$$\left|\frac{\zeta}{\alpha}\right| < 1, \quad J\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right) > 0,$$

heiße $H_1(\alpha)$, der Bereich aller ζ, für die

$$\left|\frac{\zeta}{\alpha}\right| < 1, \quad J\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right) < 0,$$

$H_2(\alpha)$, der Bereich aller ζ, für die

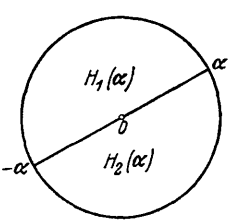
$$\left|\frac{\zeta}{\alpha}\right| < 1, \quad 0 < J\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right) < \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$B_1(\alpha)$, der Bereich aller ζ, für die

$$\left|\frac{\zeta}{\alpha}\right| < 1, \quad 0 > J\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right) > -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$B_2(\alpha)$. Wir setzen

$$B_1(\alpha) + B_2(\alpha) = B(\alpha).$$



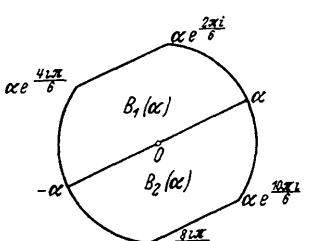


Fig. 3.

[11]) Die Folge (λ_n, μ_n) ist von einem gewissen Index ab mit einer Teilfolge der von Minkowski definierten, zu (α_1, α_2) gehörigen Folge identisch. Minkowski nimmt an Stelle von (α_1, α_2) das Paar $(1, \vartheta)$, wo ϑ beliebig reell, vgl. H. Minkowski, Ein Kriterium für die algebraischen Zahlen, Werke Bd. I., S. 292—315.

K sei ein fester komplexer kubischer Körper. Kleine griechische Buchstaben — ausgenommen die Buchstaben γ, δ — ohne Indizes und mit einfachen Indizes bedeuten stets Zahlen aus K. Mit Akzent bedeuten sie Zahlen des zu K konjugierten komplexen Körpers K', mit zwei Akzenten Zahlen des zu K konjugierten reellen Körpers K''. Lateinische Buchstaben mit und ohne Indizes bedeuten ganze rationale Zahlen.

Das Tripel $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ habe die Eigenschaften:

(33) 1. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sind linear unabhängig.

Wird sodann $\mathfrak{A} = (\alpha_{ik}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1' & \alpha_1'' \\ \alpha_2 & \alpha_2' & \alpha_2'' \\ \alpha_3 & \alpha_3' & \alpha_3'' \end{pmatrix}$, $\mathfrak{A}^{-1} = (A_{ik})$ geschrieben, so gelte:

(34) 2. Die $\frac{A_{3k}}{A_{33}}$ $(k = 1, 2, 3)$ sind positiv.

Dann ist die Existenz der Folgen $\tau_k^{(l)}(\mathfrak{A}, \delta)$ gesichert.

Wir betrachten jetzt die Menge $\mathfrak{M}$ aller Zahlen μ des Moduls $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ mit folgenden Eigenschaften:

(35) $$|\mu| < \gamma_3(\mathfrak{A}).$$

(36) In der Darstellung $\mu = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3$ ist $a_1 > 0$.

(37) Ist $\lambda = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3$, $b_1 > 0$ und $|\lambda| < |\mu|$, so gilt $b_1 > a_1$.

Die Menge $\mathfrak{M}$ enthält als Teilmenge der abzählbaren Menge $\mathfrak{a}$ höchstens abzählbar unendlich viele Zahlen μ. Daß sie wirklich unendlich viele Zahlen enthält, wird sich nachher wieder von selbst mit ergeben.

Keine zwei verschiedenen der Zahlen μ haben den gleichen Betrag. Sind nämlich α, β irgend zwei von Null verschiedene Zahlen aus K von gleichem Betrage, so ist

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)' = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} = 1, \text{ folglich } N\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)' \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)'' = \frac{\alpha''}{\beta''},$$

also $\frac{\alpha''}{\beta''}$ rational, also $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha''}{\beta''}$ und $\frac{\alpha}{\beta} = \pm 1$. Aus der Eindeutigkeit der Darstellung durch die Basis $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und (36) folgt jetzt die Behauptung. Bei dem Beweise wurde wesentlich benutzt, daß $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ einem kubischen Körper angehören. Wollte man die Theorie auf allgemeinere Tripel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ausdehnen, so müßte man noch besondere Voraussetzungen hinzufügen, um die entsprechende Eigenschaft der Zahlen μ zu erzwingen.

Es gibt stets höchstens endlich viele Zahlen μ, deren Betrag oberhalb einer beliebig gegebenen positiven Zahl liegt. Daher lassen sich die Zahlen der Menge $\mathfrak{M}$ nach abnehmenden Beträgen in eine Zahlenfolge $\mu_1, \mu_2, \ldots$ ordnen derart, daß

(38) $$|\mu_1| > |\mu_2| > \ldots.$$

Wir schreiben

$$\mu_n = a_1^{(n)}\alpha_1 + a_2^{(n)}\alpha_2 + a_3^{(n)}\alpha_3 = \mu_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Es folgt wegen (36) bis (39) der

Hilfssatz 10: $\quad 0 < a_1^{(n)} < a_1^{(n+1)} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$

Für die Übertragung der Theorie des § 1 ist jetzt entscheidend, daß die zweite Spalte der Matrix $\mathfrak{A}$ zur ersten konjugiert komplex ist. Ist nämlich δ eine den Ungleichungen $0 < \delta < \gamma_3(\mathfrak{A})$ genügende Zahl, $\lambda = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3$ mit $b_1 > 0$, so folgt aus $|\lambda| < \delta$

$$|b_1\alpha_{11} + b_2\alpha_{21} + b_3\alpha_{31}| < \delta \quad \text{und} \quad |\bar{\lambda}| = |b_1\alpha_{12} + b_2\alpha_{22} + b_3\alpha_{32}| < \delta,$$

d. h. die Zugehörigkeit von λ zu $\tau_1^{(l)}(\mathfrak{A}, \delta)$ aus der Bedingung $|\lambda| < \delta$ *allein*. In total reellen kubischen Körpern kann bei beliebiger Numerierung der Konjugierten natürlich gleichzeitig $|\lambda| < \delta$ und $|\lambda'| > \delta$ sein, weshalb sich die Schlußweisen des § 1 auf diese Körper nicht ohne weiteres übertragen lassen.

Auf Grund der gleichen Überlegungen wie in § 1 erhalten wir nun den

Satz 2: *Die Folge* $\mu_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *ist von einem bestimmten Index ab die Teilfolge der dem Betrage nach sukzessiv kleineren Zahlen der Folge* $\tau_1^{(l)}(\mathfrak{A}, \delta)$, *d. h., ist* μ_{n_1} *das erste Glied der Folge* μ_n, *für welches* $|\mu_{n_1}| < \delta$, *so gilt:*

$$\mu_{n_1} = \tau_1^{(1)}(\mathfrak{A}, \delta),$$

und wenn $\mu_{n_1+p} = \tau_1^{(k)}(\mathfrak{A}, \delta)$ $(p \geqq 0)$, *so*

$$\mu_{n_1-p+1} = \tau_1^{(k')}(\mathfrak{A}, \delta),$$

wo k' *der kleinste Index* $> k$, *für den* $|\tau_1^{(k')}| < |\tau_1^{(k)}|$.

Auf Grund des in Satz 2 ausgesprochenen Zusammenhangs zwischen den Folgen μ_n und $\tau_1^{(l)}(\mathfrak{A}, \delta)$ folgert man mit Hilfe des Äquivalenzsatzes den

Hauptsatz 4: *Das Tripel* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *erfülle die Bedingungen* (33), (34), *das Tripel* $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ *die entsprechenden.* $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ *soll durch die umkehrbar ganzzahlige Transformation* $\mathfrak{D}$ *aus* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *hervorgehen:*

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix} = \mathfrak{D}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}.$$

Dann gibt es eine allein von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ *abhängende Zahl* γ *mit der Eigenschaft: Ist* δ *eine beliebige positive Zahl* $< \gamma$ *und* i *der kleinste Index, für den* $|\mu_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)| < \delta$, k *der kleinste Index, für den* $|\mu_k(\beta_1, \beta_2, \beta_3)| < \delta$, *so gilt*

$$\mu_{i+p}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \operatorname{sg}\left\{\left(\frac{\alpha_1\alpha_2' - \alpha_1'\alpha_2}{\beta_1\beta_2' - \beta_1'\beta_2}\right)\cdot|\mathfrak{D}|\right\}\cdot\mu_{k+p}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

für alle $p \geqq 0$.

Wir wenden uns dem zum Modul $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ gehörigen Ring $\mathfrak{a}^0$ zu. Da K komplex und vom dritten Grad, enthält $\mathfrak{a}^0$ unendlich viele Einheiten,

die alle die positiven und negativen Potenzen einer Grundeinheit sind. Mit ε sind auch $-\varepsilon$, ε^{-1}, $-\varepsilon^{-1}$ Grundeinheiten und nur diese.

Wie in § 1 erhalten wir aus Hauptsatz 4 den Satz von der Periodizität der Folge μ_n:

Hauptsatz 5: $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *erfülle* (33), (34). *Dann gibt es zwei Indizes* $i, k \geqq 1$ $(i \neq k)$ *derart, daß*

$$\mu_{i+p}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \varepsilon\, \mu_{k+p}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

für alle $p \geqq 0$, *wobei* ε *eine der vier Grundeinheiten aus* $\mathfrak{a}^0$ *ist.*

Besitzen wir also ein Verfahren zur Berechnung der $\mu_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, so sind wir in der Lage, alle Einheiten aus $\mathfrak{a}^0$ zu bestimmen. Im quadratischen Körper haben wir, um die Berechnung der μ_n vorzubereiten, eine „Zusatzfolge" λ_n definiert. Im kubischen Körper ist die Definition von zwei „Zusatzfolgen", $\lambda_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und $\nu_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, notwendig, die wir gleich geben werden. Die naturgemäße Definition dieser Folgen bildet das Kernstück des Problems, einen dem Kettenbruchverfahren analogen Algorithmus aufzustellen. Sie sind so gewählt, daß sich eine Teilfolge der Tripelfolge $(\lambda_n, \nu_n, \mu_n)$ durch ein Rechenschema sukzessive bestimmen läßt; damit ist auch die Bestimmungsmöglichkeit einer Teilfolge der Folge der μ_n gewährleistet, die, wie wir im Kap. 5 zeigen werden, alle uns hier interessierenden Eigenschaften der Folge μ_n beibehält[12]). Die Berechnung dieser Teilfolge genügt also.

Definition der Folgen $\lambda_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, und $\nu_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ $(n \geqq 1)$ (vgl. Hauptsatz 6, S. 378, für $(\varrho_0, \sigma_0, \tau_0) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$):

Von allen Zahlen $\lambda = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3$ mit $b_1 > 0$, die in $B(\mu_n)$ liegen, sei ξ_1 die mit kleinster Koordinate b_1. Liege ξ_1 in $B_p(\mu_n)$ $(p = 1$ oder $2)$. Von allen Zahlen $\lambda = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3$ mit $b_1 > 0$, die in $B_q(\mu_n)$ $(q = 1$ oder 2, aber $\neq p)$ liegen, sei ξ_2 die mit kleinster Koordinate b_1.

1. Sei $\min\left\{\left|J\left(\frac{\xi_1}{\mu_n}\right)\right|, \quad J\left(\frac{\xi_2}{\mu_n}\right)\right\} < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Von allen Zahlen $\lambda = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3$ mit $b_1 > 0$, für die $|\lambda| < \frac{1}{2}\sqrt{3}|\mu_n|$, sei ξ_3 die mit kleinster Koordinate b_1. Liege ξ_3 in $B_r(\mu_n)$ $(r = 1$ oder $2)$. Von allen Zahlen $\lambda = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3$ mit $b_1 > 0$, die in $B_s(\mu_n)$ $(s = 1$ oder 2, aber $\neq r)$ liegen, sei ξ_4 die mit kleinster Koordinate b_1.

Dann ist $\lambda_n = \xi_3$, $\nu_n = \xi_4$.

2. Sei $\min\left\{\left|J\left(\frac{\xi_1}{\mu_n}\right)\right|, \left|J\left(\frac{\xi_1}{\mu_n}\right)\right|\right\} > 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

---

[12]) Die bei Minkowski getroffene Wahl der beiden Zusatzfolgen ist eine ganz andere und für die Berechnung der Folge μ_n oder einer Teilfolge ungeeignet.

Von allen Zahlen $\lambda = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3$ mit $b_1 > 0$, für die $|\lambda| < |\mu_n|$, sei ξ_5 die mit kleinster Koordinate b_1. Liege ξ_5 in $H_t(\mu_n)$ $(t = 1$ oder $2)$. Von allen Zahlen $\lambda = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3$ mit $b_1 > 0$, die in $H_u(\mu_n)$ $(u = 1$ oder 2, aber $\neq t)$ liegen, sei ξ_6 die mit kleinster Koordinate b_1.

Dann ist $\lambda_n = \xi_5$, $\nu_n = \xi_6$.

Der Fall $\min\left\{ J\left(\frac{\xi_1}{\mu_n}\right), \left| J\left(\frac{\xi_1}{\mu_n}\right)\right| \right\} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ tritt nicht ein, da wir uns in einem kubischen komplexen Körper befinden (vgl. Kap. 4, Anfang).

Wir notieren

Hauptsatz 4*: *Unter den Voraussetzungen des Hauptsatzes* 4 *gilt auch*

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{i+p}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \operatorname{sg}\left\{\left(\frac{\alpha_1\alpha_2' - \alpha_1'\alpha_2}{\beta_1\beta_2' - \beta_1'\beta_2}\right)\cdot|\mathfrak{D}|\right\}\cdot\lambda_{k+p}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \\ \nu_{i-p}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \operatorname{sg}\left\{\left(\frac{\alpha_1\alpha_2' - \alpha_1'\alpha_2}{\beta_1\beta_2' - \beta_1'\beta_2}\right)\cdot|\mathfrak{D}|\right\}\cdot\nu_{k-p}(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \end{aligned}\right\} \text{ für alle } p \geqq 0.$$

Hauptsatz 5*: *Unter den Voraussetzungen des Hauptsatzes* 5 *gilt auch*

$$\left.\begin{aligned} \lambda_{i+p}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \varepsilon\,\lambda_{k+p}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ \nu_{i+p}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \varepsilon\,\nu_{k-p}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \end{aligned}\right\} \text{ für alle } p \geqq 0.$$

Es muß ausdrücklich betont werden, daß die spezielle Wahl der Bereiche B_i, H_i $(i = 1, 2)$ nur für den *Algorithmus* von Bedeutung ist. Im Beweise der Hauptsätze 4*, 5* wird bei der Anwendung des Äquivalenzsatzes lediglich die Tatsache benutzt, daß in diesen Bereichen jeweils überhaupt ein λ der vorgeschriebenen Art gelegen ist.

Kapitel 3.

Zwei Algorithmen.

§ 1.

Ein Verfahren zur Berechnung der Minkowskifolgen in den reellen quadratischen Körpern.

Für die Bezeichnungen gilt dasselbe wie in Kap. 2, § 1.

Definition 7: *Das Paar* (α_1, α_2) *heiße normiert, wenn es folgende Bedingungen erfüllt*:

1. α_1, α_2 *sind linear unabhängig* (vgl. (25)).

2. $\operatorname{sg}\alpha_1 \neq \operatorname{sg}\alpha_2$ (vgl. (26)) *und* $|\alpha_1| < |\alpha_2|$.

V$_1$. Wir definieren, von dem normierten Paar $\mathfrak{a} = (\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}) = \mathfrak{a}^{(0)}$ ausgehend, eine Folge $\mathfrak{a}^{(n)} = (\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)})$ nach der Vorschrift:

Für $n \geqq 0$ sei

$$\begin{pmatrix}\alpha_1^{(n+1)}\\ \alpha_2^{(n+1)}\end{pmatrix} = \mathfrak{U}_n\begin{pmatrix}\alpha_1^{(n)}\\ \alpha_2^{(n)}\end{pmatrix}, \text{ wo } \mathfrak{U}_n = \begin{pmatrix}u^{(n)} & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \; u^{(n)} = \left[\frac{-\alpha_2^{(n)}}{\alpha_1^{(n)}}\right].$$

Satz 3: *Alle* $\mathfrak{a}^{(n)}$ *sind normiert.*

Beweis: $\mathfrak{a}^{(0)}$ ist normiert nach Voraussetzung. Sei $\mathfrak{a}^{(h)}$ normiert ($h \geqq 0$). Dann ist

$$\left|\frac{\alpha_2^{(h)}}{\alpha_1^{(h)}}\right| - 1 < u^{(h)} < \left|\frac{\alpha_2^{(h)}}{\alpha_1^{(h)}}\right|,$$

also

$$-1 < u^{(h)} + \frac{\alpha_2^{(h)}}{\alpha_1^{(h)}} < 0,$$

mithin wegen $\alpha_2^{(h+1)} = \alpha_1^{(h)}$

$$|\alpha_1^{(h+1)}| = |\alpha_1^{(h)}|\left|u^{(h)} + \frac{\alpha_2^{(h)}}{\alpha_1^{(h)}}\right| < |\alpha_1^{(h)}| = |\alpha_2^{(h+1)}|,$$

$$\operatorname{sg}\alpha_1^{(h+1)} = \operatorname{sg}\alpha_1^{(h)} \cdot \operatorname{sg}\left(u^{(h)} + \frac{\alpha_2^{(h)}}{\alpha_1^{(h)}}\right) = \operatorname{sg}\alpha_2^{(h+1)} \cdot \operatorname{sg}\left(u^{(h)} + \frac{\alpha_2^{(h)}}{\alpha_1^{(h)}}\right),$$

$$\operatorname{sg}\alpha_1^{(h+1)} \neq \operatorname{sg}\alpha_2^{(h+1)}.$$

Da $\mathfrak{U}_h$ umkehrbar ganzzahlig ist, sind auch $\alpha_1^{(h+1)}$, $\alpha_2^{(h+1)}$ linear unabhängig.

Satz 4: $\operatorname{sg}\alpha_1^{(n+1)} \neq \operatorname{sg}\alpha_1^{(n)}$, $|\alpha_1^{(n+1)}| < |\alpha_1^{(n)}|$ *für alle* $n \geqq 0$.

Beweis: Da (1, 0) die zweite Zeile von $\mathfrak{U}_n$, folgt die Behauptung sofort aus Satz 3.

Wir setzen: $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{U}_0$; $\mathfrak{A}_{n+1} = \mathfrak{U}_n \cdot \mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{A}_n = (a_{ik}^{(n)})$ für $n \geqq 1$.

Satz 5: *Die* $\mathfrak{A}_n$ *haben nur nichtnegative Koeffizienten und sind umkehrbar ganzzahlig. Es gilt* $a_{11}^1 \geqq a_{21}^{(1)} > 0$ *und für* $n \geqq 2$ $a_{11}^{(n)} > a_{21}^{(n)} > 0$.

Beweis: Da die $\mathfrak{U}_n (n \geqq 0)$ nur nichtnegative Koeffizienten haben und unimodular sind, folgt dasselbe für die $\mathfrak{A}_n$. Alle $u^{(n)}$ sind $\geqq 1$, da $\alpha_1^{(n)}| < |\alpha_2^{(n)}|$. Also gilt insbesondere $a_{11}^1 = u^{(0)} \geqq 1 = a_{21}^{(1)} > 0$. Sei jetzt $a_{11}^{(h)} \geqq a_{21}^{(h)} > 0$ ($h \geqq 1$). Dann folgt $a_{11}^{(h+1)} = u^{(h)} a_{11}^{(h)} + a_{21}^{(h)} > a_{11}^{(h)} = a_{21}^{(h+1)} = a_{11}^{(h)} > 0$. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 6: $|\alpha_1^{(n+2)}| < \frac{1}{2}|\alpha_1^{(n)}|$ *für* $n \geqq 0$.

Beweis: Nach Satz 4 fällt $|\alpha_1^{(n)}|$ echt monoton. Ist $|\alpha_1^{(n+1)}| < \frac{1}{2}|\alpha_1^{(n)}|$, so sind wir schon fertig. $|\alpha_1^{(n+1)}| = \frac{1}{2}|\alpha_1^{(n)}|$ ist wegen der linearen Unabhängigkeit von $\alpha_1^{(n+1)}$, $\alpha_2^{(n+1)}$ nicht möglich. Bleibt also der Fall $\alpha_1^{(n+1)}| > \frac{1}{2}|\alpha_1^{(n)}|$. Hier ist wegen $\alpha_1^{(n)} = \alpha_2^{(n+1)}$ $1 < \left|\frac{\alpha_2^{(n+1)}}{\alpha_1^{(n+1)}}\right| < 2$, $u^{(n+1)} = 1$, mithin

$$\alpha_1^{(n+2)} = \alpha^{(n+1)} + \alpha_1^{(n+1)} = \alpha_1^{(n)} + \alpha_1^{(n+1)}$$

und wegen Satz 4

$$|\alpha_1^{(n+2)}| = |\alpha_1^{(n)}| - |\alpha_1^{(n+1)}| < \tfrac{1}{2}|\alpha_1^{(n)}|,$$

w. z. b. w.

Nach Satz 6 gibt es einen Index n_0 derart, daß $|\alpha_1^{(n)}|$ für alle $n \geqq n_0$ kleiner ist als die Hauptkonstante $\gamma_3(\mathfrak{A})$ der Matrix $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1' \\ \alpha_2 & \alpha_2' \end{pmatrix}$. Mit diesem Index beweisen wir die Sätze 7, 8.

Satz 7: *Sei* $n > n_0$. *Dann ist* $\alpha_2^{(n)} = \mu_m$, $\alpha_1^{(n)} = \lambda_m$ (*m von n abhängig*).

Beweis: Zunächst ist $|\alpha_2^{(n)}| = |\alpha_1^{(n-1)}| \leqq |\alpha_1^{(n_0)}| < \gamma_3(\mathfrak{A})$, ferner $\alpha_2^{(n)} = a_{21}^{(n)}\alpha_1 + a_{22}^{(n)}\alpha_2$ mit $a_{21}^{(n)} > 0$ nach Satz 5. Sei jetzt $\lambda = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2$ $(b_1 > 0)$ und $|\lambda| < |\alpha_2^{(n)}|$. Da die $\mathfrak{A}_n$ umkehrbar ganzzahlig, gilt $\lambda = c_1\alpha_1^{(n)} + c_2\alpha_2^{(n)}$. Wegen $|\lambda| < |\alpha_2^{(n)}|$ und wegen Satz 3 ist also $c_1 \neq 0$, $\operatorname{sg} c_1 \neq -\operatorname{sg} c_2$. Also folgt wegen $b_1 > 0$ $b_1 = |c_1 a_{11}^{(n)}| + |c_2 a_{21}^{(n)}|$. Da $c_1 \neq 0$, ist $b_1 \geqq a_{11}^{(n)}$, also nach Satz 5 und wegen $|\lambda| < \gamma_3(\mathfrak{A})$ $b_1 > a_{21}^{(n)}$. Damit ist gezeigt, daß $\alpha_2^{(n)}$ ein μ_m ist; Satz 3 und 5 geben mit Rücksicht auf $b_1 = |c_1 a_{11}^{(n)}| + |c_2 a_{21}^{(n)}|$ $\alpha_1^{(n)} = \mu_{m-1} = \lambda_n$.

Wegen $\alpha_2^{(n+1)} = \alpha_1^{(n)}$ folgt sofort der

Satz 8: *Es gibt zwei Zahlen* n_0, m_0 *derart, daß*

$$\alpha_2^{(n_0+p)} = \mu_{m_0+p} \quad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Wir geben jetzt eine andere Interpretation des Verfahrens $\mathbf{V}_1$, deren Verwandtschaft mit dem Kettenbruch der Leser sogleich erkennen wird.

$\mathbf{V}_2$. Wir definieren, von dem normierten Paar $\mathfrak{r}_0 = (\varrho_0, \tau_0)$ ausgehend, eine Folge $\mathfrak{r}_n = (\varrho_n, \tau_n)$ nach der Vorschrift:

Sei $\mathfrak{r}_n$ gegeben $(n \geqq 0)$.

1. Schritt: Wir setzen $\frac{1}{\varrho_n}(\varrho_n, \tau_n) = (1, \chi_n)$.

2. Schritt: Wir bilden $\mathfrak{U}_n = \begin{pmatrix} u^{(n)} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mit $u^{(n)} = [-\chi_n]$.

Wir definieren: $\mathfrak{r}_{n+1} = \mathfrak{U}_n \cdot (1, \chi_n)$.

Bemerkung: $\tau_n = +1$ für $n \geqq 1$. Die Zahlen $u^{(n)}$ sind die Koeffizienten des regulären Kettenbruchs von $-\frac{\tau_0}{\varrho_0}$.

Ist $(\varrho_0, \tau_0) = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\mathfrak{a}^{(n)} = (\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)})$ die in $\mathbf{V}_1$ (S. 349) definierte Folge, so gilt der

Hilfssatz 11: $\left.\begin{aligned} \alpha_1^{(n)} &= \varrho_0 \cdots \varrho_{n-1} \cdot \varrho_n \\ \alpha_2^{(n)} &= \varrho_0 \cdots \varrho_{n-1} \cdot \tau_n \end{aligned}\right\}$ *für alle* $n \geqq 1$,

und der

Satz 9: Sei $n \geqq 0$. *Die Matrizen* $\mathfrak{U}_n$ *von* $\mathbf{V}_1$ *und* $\mathbf{V}_2$ *stimmen überein, desgleichen die Zahlen* $u^{(n)}$. *Die Zahlen* $u^{(n)} = \left[-\frac{\alpha_2^{(n)}}{\alpha_1^{(n)}}\right]$ *sind die Koeffizienten des regulären Kettenbruchs von* $-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$.

Aus Hauptsatz 2, 3, Satz 7, 8, 9 folgt die Periodizität des regulären Kettenbruchverfahrens von $-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, falls $-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ eine reelle algebraische Zahl zweiten Grades, sowie der bekannte Satz von Serret über die regulären Kettenbruchentwicklungen äquivalenter Zahlen (hier mit der Einschränkung, daß diese Zahlen einem reellen quadratischen Körper angehören).

§ 2.

Zerlegung des im § 1 gegebenen Verfahrens in Elementaroperationen.

V_8. Seien β_1, β_2 beliebige, reelle, rational unabhängige Zahlen, $\operatorname{sg}\beta_1 \neq \operatorname{sg}\beta_2$.

Wir definieren, von $\mathfrak{b}_0 = (\beta_1^{(0)}, \beta_2^{(0)}) = (\beta_1, \beta_2)$ ausgehend, eine Folge von Paaren $\mathfrak{b}_n = (\beta_1^{(n)}, \beta_2^{(n)})$ nach der Vorschrift:

Sei $\mathfrak{b}_n$ gegeben $(n \geqq 0)$.

1. Schritt: Wir ordnen $\beta_1^{(n)}$, $\beta_2^{(n)}$ nach der Größe ihrer Beträge und erhalten ein Paar $(\beta_i^{(n)}, \beta_k^{(n)})$ $(i, k = 1, 2;\ i \neq k)$ mit $|\beta_i^{(n)}| < |\beta_k^{(n)}|$.

2. Schritt: Ist $|\beta_i^{(n)}| < |\beta_i^{(n)} + \beta_k^{(n)}|$, so setzen wir

$$\mathfrak{b}_{n+1} = (\beta_i^{(n)}, \beta_i^{(n)} + \beta_k^{(n)}).$$

Ist $|\beta_i^{(n)}| > |\beta_i^{(n)} + \beta_k^{(n)}|$, so setzen wir $\mathfrak{b}_{n+1} = (\beta_i^{(n)} + \beta_k^{(n)}, \beta_k^{(n)})$.

Bemerkung: Der Fall $|\beta_i^{(n)}| = |\beta_i^{(n)} + \beta_k^{(n)}|$ kommt wegen der linearen Unabhängigkeit von β_1, β_2 nicht vor. Der 1. Schritt kommt überhaupt nur für $n = 0$ zur Anwendung, da für $n \geqq 1$ stets sowieso $|\beta_1^{(n)}| < |\beta_2^{(n)}|$.

Definition 8: *Wir bezeichnen die in* V_8 *definierte Folge von Zahlenpaaren* $\mathfrak{b}_n = (\beta_1^{(n)}, \beta_2^{(n)})$ $(n \geqq 0)$ *mit* $\mathfrak{m}(\beta_1, \beta_2)$, *die durch*

$$\begin{pmatrix} \beta_1^{(n)} \\ \beta_2^{(n)} \end{pmatrix} = \mathfrak{D}_n \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \quad (n \geqq 0)$$

definierte Matrizenfolge $\mathfrak{D}_n$ *mit* $\mathfrak{M}(\beta_1, \beta_2)$.

Es gilt der

Satz 10: $\operatorname{sg}\beta_1^{(n)} \neq \operatorname{sg}\beta_2^{(n)}$ *für alle* $n \geqq 0$. *Die Elemente der Folge* $\mathfrak{M}(\beta_1, \beta_2)$ *sind umkehrbar ganzzahlig und haben nur nichtnegative Koeffizienten.*

Kapitel 4.

Die Auflösung der Ungleichung $0 < |x + y\psi + z\omega| < 1$.

In diesem Kapitel treffen wir die Vorbereitungen zur Definition unseres Algorithmus für die komplexen kubischen Körper.

Definition 9: *Sei* α *komplex,* π *positiv,* < 1. *Der Bereich aller Punkte* ζ *der komplexen Zahlenebene, für die* $\left|\frac{\zeta}{\alpha}\right| < 1$, $0 < J\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right) < \pi$, *heiße* $B(\alpha, \pi)$.

Im folgenden sei K ein fester, komplexer kubischer Körper. Kleine lateinische Buchstaben (mit Ausnahme von i in der Bedeutung $\sqrt{-1}$) mit und ohne Indizes bedeuten ganze rationale Zahlen.

Ist α Zahl des Körpers K, so liegen von den Zahlen aus K

auf $|\zeta| = |\alpha|$ nur α und $-\alpha$,

auf $|\zeta| = \varrho|\alpha|$, wo ϱ algebraische Zahl 2. Grades, keine,

auf $R\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right) = \frac{1}{2}$ nur $\frac{\alpha}{2}$,

auf $J\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right) = \sigma$, wo σ algebraische Zahl 2. Grades, keine,

auf $J\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right) = 0$ nur die Zahlen $\tau \cdot \alpha$, wo τ rational.

Von dieser Bemerkung werden wir nur stillschweigend Gebrauch machen.

§ 1.

Berechnung von Lösungen der Ungleichung $0 < |x + y\psi + z\omega| < 1$.

Seien $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ Zahlen aus K; ψ_1, ψ_2, ω_1, ω_2 reell.

Definition 10: *Das Tripel* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *von Zahlen aus* K *heißt normiert, wenn es folgende Bedingungen erfüllt:*

(39) 1. α_1, α_2, α_3 *sind linear unabhängig* (vgl. (33)).

(40) 2. *Alle Tripel* (x_1, x_2, x_3), *für die*

(41) $$0 < |x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3| < |\alpha_1|,$$

sind mit (0, 0, 0) *vergleichbar.*

Bemerkung: Nach Hilfssatz 4 ist (40) in (34) enthalten.

Schon im quadratischen Körper spielten die *normierten* Paare eine wichtige Rolle (vgl. Satz 3 und den Beweis zu Satz 7). Die normierten Tripel haben den Vorzug, daß sie eine besonders bequeme Auflösung der Ungleichung (41) zulassen. Die Lösungen haben außerdem, wie wir sehen werden, bemerkenswerte Eigenschaften (vgl. Einleitung S. 332).

Wir wollen bei der Auflösung von (41) das spezielle Tripel $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, \psi, \omega)$ zugrunde legen, da wir von hier leicht zum allgemeinen Fall zurückkommen können. Also:

(42) $(1, \psi, \omega)$ sei normiert.

Dann gilt

(43) ψ_2, ω_2 sind linear unabhängig;

sonst gäbe es zwei Zahlen r, s derart, daß $\zeta = r\psi + s\omega$ reell, also wegen seiner Zugehörigkeit zu K rational wäre. Dann müßten also 1, ψ, ω linear abhängig sein im Widerspruch zu (39). Weiter ist

(44) $$\operatorname{sg}\psi_2 \neq \operatorname{sg}\omega_2,$$

was sofort aus (40) folgt. Wir wählen jetzt x so, daß $|x + \psi_2 - \omega_2| \leqq \frac{1}{2}$.

Da 1 in K liegt, folgt aus (39), (40) $|x+\psi-\omega|>1$, also

$$1<|x+\psi-\omega|^2=|x+\psi_2-\omega_2|^2+|\psi_2-\omega_2|^2\leqq\tfrac{1}{4}+|\psi_2-\omega_2|^2,$$

$$|\psi_2-\omega_2|>\tfrac{1}{2}\sqrt{3}. \tag{45}$$

$\mathbf{V}_4$. Wir berechnen jetzt nichtnegative Lösungen der Ungleichung

$$0<|x+y\psi+z\omega|<1 \tag{46}$$

nach einer festen Vorschrift:

Wir berechnen die zum Paare $(\psi_2, \omega_2)=(\psi_2^{(0)}, \omega_2^{(0)})$ gehörige Folge $\mathfrak{m}(\psi_2, \omega_2)$ nach $\mathbf{V}_3$ (Kap. 3, § 2). Das ist wegen (43), (44) möglich. Die sukzessiven Paare der Folge nennen wir $(\psi_2^{(n)}, \omega_2^{(n)})$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$. Dann ist

$$\psi_2^{(n)}=p_{11}^{(n)}\psi_2+p_{12}^{(n)}\omega_2,$$
$$\omega_2^{(n)}=p_{21}^{(n)}\psi_2+p_{22}^{(n)}\omega_2,$$

wo $(p_{ik}^{(n)})$ Glied der Matrizenfolge $\mathfrak{M}(\psi_2, \omega_2)$.

Wir gehen in der Berechnung der Folge $\mathfrak{m}(\psi_2, \omega_2)$ bis zu dem ersten Index $h\geqq 0$, für welchen

$$|\psi_2^{(h)}|<\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\quad|\omega_2^{(h)}|<\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

ist. Wenn bereits $|\psi_2^{(0)}|<\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $|\omega_2^{(0)}|<\frac{1}{2}\sqrt{3}$, so erübrigt sich die Entwicklung; dann haben wir $h=0$.

Sei jetzt

$$\varrho_1(x)=x+p_{11}^{(h)}\psi+p_{12}^{(h)}\omega,\quad\varrho_2(x)=x+p_{21}^{(h)}\psi+p_{22}^{(h)}\omega;$$

wir bestimmen von allen Zahlen x diejenige, x_1, für welche

$$|\varrho_1(x_1)|<1 \text{ und } R\{\varrho_1(x_1)\}=x_1+p_{11}^{(h)}\psi_1+p_{12}^{(h)}\omega_1 \text{ möglichst klein} \tag{47}$$

ist, desgleichen von allen Zahlen x diejenige, x_2, für welche

$$|\varrho_2(x_2)|<1 \text{ und } R\{\varrho_2(x_2)\}=x_2+p_{21}^{(h)}\psi_1+p_{22}^{(h)}\omega_1 \text{ möglichst klein} \tag{48}$$

ist. Diese Bestimmung ist stets durchführbar: denn nach Konstruktion von $\psi_2^{(h)}$, $\omega_2^{(h)}$ ist $\sqrt{1-(\psi_2^{(h)})^2}>\frac{1}{2}$, $\sqrt{1-(\omega_2^{(h)})^2}>\frac{1}{2}$ und daher

x_1 die kleinste im Intervall (49)

$$-p_{11}^{(h)}\psi_1-p_{12}^{(h)}\omega_1-\sqrt{1-(\psi_2^{(h)})^2}<x<-p_{11}^{(h)}\psi_1-p_{12}^{(h)}\omega_1+\sqrt{1-(\psi_2^{(h)})^2}$$

gelegene ganze rationale Zahl,

x_2 die kleinste im Intervall (50)

$$-p_{21}^{(h)}\psi_1-p_{22}^{(h)}\omega_1-\sqrt{1-(\omega_2^{(h)})^2}<x<-p_{21}^{(h)}\psi_1-p_{22}^{(h)}\omega_1+\sqrt{1-(\omega_2^{(h)})^2}$$

gelegene ganze rationale Zahl.

Wir setzen

$$(x_1, p_{11}^{(h)}, p_{12}^{(h)})=(u_1, v_1, w_1),\ (x_2, p_{21}^{(h)}, p_{22}^{(h)})=(u_2, v_2, w_2),$$

und diese Tripel stellen, wie aus (40) und Satz 10 ersichtlich, zwei nichtnegative Lösungen von (46) dar. —

Wir setzen jetzt

$$\delta_1 = u_1 + v_1\psi + w_1\omega,\ \delta_2 = u_2 + v_2\psi + w_2\omega.$$

Dann ist wegen (47), (48)

(51.1) $$|\delta_1|, |\delta_2| < 1.$$

(51.2) $$|\delta_1 - 1|, |\delta_2 - 1| > 1.$$

(51.3) $$R(\delta_1),\ R(\delta_2) < \tfrac{1}{2}.$$

(u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2) sind nicht nur Lösungen von (46), es gilt sogar:

(52) δ_1, δ_2 liegen in $B(1)$;

denn es ist

$$0 < |J(u_1 + v_1\psi + w_1\omega)| = |J(\varrho_1(x))| = |p_{11}^{(h)}\psi_2 + p_{12}^{(h)}\omega_2| = |\psi_2^{(h)}| < \tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$
$$0 < |J(u_2 + v_2\psi + w_2\omega)| = |\omega_2^{(h)}| < \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Weiter gilt:

(53) $$\operatorname{sg}\psi_2^{(h)} \neq \operatorname{sg}\omega_2^{(h)},\ \text{d. h. } \operatorname{sg}J(\delta_1) \neq \operatorname{sg}J(\delta_2);$$

das folgt aus Satz 10, da $(\psi_2^{(h)}, \omega_2^{(h)})$ Glied der Folge $m(\psi_2, \omega_2)$;

(54) $|\psi_2^{(h)} - \omega_2^{(h)}| = |\psi_2^{(h)}| + |\omega_2^{(h)}| > \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$, d. h. $|J(\delta_1) - J(\delta_2)| = |J(\delta_1)| + |J(\delta_2)| > \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$;

für $h = 0$ haben wir das schon in (45) bewiesen, für $h \geqq 1$ schließen wir so: Jedenfalls ist nach $\mathfrak{V}_8$

$$\begin{pmatrix}\psi_2^{(h-1)}\\ \omega_2^{(h-1)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\psi_2^{(h)}\\ \omega_2^{(h)}\end{pmatrix} \text{ oder } = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\psi_2^{(h)}\\ \omega_2^{(h)}\end{pmatrix}$$
$$\text{oder } = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\psi_2^{(h)}\\ \omega_2^{(h)}\end{pmatrix} \text{ oder } = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\psi_2^{(h)}\\ \omega_2^{(h)}\end{pmatrix}.$$

Also muß wegen der Minimaleigenschaft von h $|\psi_2^{(h)} - \omega_2^{(h)}| > \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$ sein. Zusammen mit (53) folgt (54). Von Wichtigkeit ist auch die Gleichung

(55) $$v_1 w_2 - v_2 w_1 = \pm 1,$$

die wir Satz 10 entnehmen.

Hilfssatz 12: *Seien* δ_1, δ_2 *komplexe Zahlen mit* $R(\delta_1)$, $R(\delta_2) < \tfrac{1}{2}$; *sei* $\delta = a\delta_1 + b\delta_2 + c$, $-1 < R(\delta) < 1$. *Dann gilt*

im Falle $(a, b) > (0, 0)$, $a + b \equiv 0\ (2)$ $\quad c \geqq -\frac{a+b}{2}$,

$a + b \equiv 1\ (2)$ $\quad c \geqq -\frac{1}{2} - \frac{a+b}{2}$,

im Falle $(a, b) < (0, 0)$, $a + b \equiv 0\ (2)$ $\quad c \leqq -\frac{a+b}{2}$,

$a + b \equiv 1\ (2)$ $\quad c \leqq \frac{1}{2} - \frac{a+b}{2}$.

Beweis: Im Falle $(a, b) > (0, 0)$ ist

$$-1 < R(\delta) = R(a\delta_1 + b\delta_2 + c) = aR(\delta_1) + bR(\delta_2) + c < \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + c,$$

im Falle $(a, b) < (0, 0)$

$$+1 > R(\delta) > \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + c.$$

Satz 11: (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2)$ *sollen die Eigenschaften haben:*

(56) 1. (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) *sind nichtnegativ,*

(57) 2. $y_1 z_2 - y_2 z_1 = \pm 1$;

π sei positiv, < 1, $(1, \psi, \omega)$ sei normiert. Die Zahlen

$$\delta_1 = x_1 + y_1 \psi + z_1 \omega, \quad \delta_2 = x_2 + y_2 \psi + z_2 \omega$$

sollen die Bedingungen erfüllen:

(58) 3. δ_1, δ_2 *liegen in* $B(1, \pi)$,

(59) 4. $\operatorname{sg} J(\delta_1) \neq \operatorname{sg} J(\delta_2)$,

(60) 5. $|J(\delta_1)| + |J(\delta_1)| \geqq \pi$,

(61) 6. $|\delta_1 - 1|, |\delta_2 - 1| > 1$.

Ist dann (x, y, z) *irgend ein nichtnegatives Tripel, für welches* $\delta = x + y\psi + z\omega$ *in* $B(1, \pi)$ *liegt, so gilt entweder* $(x, y, z) \geqq (x_1, y_1, z_1)$ *oder* $(x, y, z) \geqq (x_2, y_2, z_2)$.

Bemerkungen: Zunächst machen wir uns klar, daß für $\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ die durch die Vorschrift $\mathfrak{V}_4$ berechneten Tripel $(x_i, y_i, z_i) = (u_i, v_i, w_i)$ $(i = 1, 2)$ nach (51) bis (55) alle Voraussetzungen des Satzes 11 erfüllen. Es ist auch leicht einzusehen, daß für alle π mit $0 < \pi < \frac{1}{2}\sqrt{3}$ zwei Tripel der im Satz geforderten Eigenschaften existieren. Wir brauchen zur Berechnung solcher Tripel unsere Vorschrift $\mathfrak{V}_4$ nur dahin abzuändern, daß wir die Folge $\mathfrak{m}(\psi_2, \omega_2)$ bis zum ersten Index $h \geqq 0$ entwickeln, für den $|\psi_2^{(h)}|, |\omega_2^{(h)}| < \pi$; im übrigen können wir die Vorschrift ungeändert beibehalten. Sobald aber $\pi > \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist, kann die Vorschrift undurchführbar werden, da die in (49) und (50) angegebenen Intervalle so klein werden, daß sie keine ganze rationale Zahl mehr zu enthalten brauchen. Satz 11 rechtfertigt die Definition:

Definition 11: *Sei* π *positiv,* < 1 *und* $(1, \psi, \omega)$ *normiert. Existieren zwei Tripel* (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2)$ *mit den Eigenschaften* (56) *bis* (61), *so sollen sie von allen nichtnegativen Tripeln* (x, y, z), *für die* $x + y\psi + z\omega$ *in* $B(1, \pi)$ *liegt, die beiden kleinsten Tripel heißen.*

Von Wichtigkeit ist, daß diese beiden kleinsten Tripel — wie aus Beispielen hervorgeht — nicht vergleichbar zu sein brauchen, eine Eigenschaft, in der sich die Lösungen der Ungleichung (46) wesentlich von denen der Ungleichung $0 < |x + y\chi| < 1$ $(\chi < 0)$ unterscheiden.

Nun zum Beweise des Satzes 11. (x, y, z) habe die Eigenschaften:

(62) (x, y, z) nichtnegativ, aber verschieden von (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2);

(63) $\delta = x + y\psi + z\omega$ liegt in $B(1, \pi)$.

Dann ist wegen (57)

$$(64)\qquad \begin{cases} (x, y, z) = a(x_1, y_1, z_1) + b(x_2, y_2, z_2) + c(1, 0, 0) \\ \delta = a \cdot \delta_1 \qquad + b \cdot \delta_2 \qquad + c \end{cases}$$

also

$$(65)\qquad y = a\, y_1 + b\, y_1 \qquad z = a\, z_1 + b\, z_2.$$

Aus (57) folgt (y_1, z_1), $(y_2, z_2) \neq (0, 0)$, also wegen (56) sogar (y_1, z_1), $(y_2, z_2) > (0, 0)$. Da δ in $B(1, \pi)$ liegt, folgt aus (59), (60), daß (a, b) mit $(0, 0)$ vergleichbar ist. Wegen (62), (63) erhalten wir also insgesamt

$$(66)\qquad (y, z) > (0, 0).$$

$$(67)\qquad (a, b) > (0, 0).$$

Wir kommen jetzt zum Vergleich des Tripels (x, y, z) mit (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2). Zunächst stellen wir mit Hilfe von (65) fest:

$$(68)\qquad \begin{cases} \text{Ist} \quad a > 0 \quad b = 0, & \text{so gilt} \quad (y, z) \geqq (y_1, z_1), \\ \qquad a = 0 \quad b > 0, & \text{so gilt} \quad (y, z) \geqq (y_2, z_2), \\ \qquad a > 0 \quad b > 0, & \text{so gilt} \quad (y, z) \geqq (y_1, z_1), (y_2, z_2). \end{cases}$$

Wir vergleichen, indem wir die Darstellung (64) benutzen. Die Anwendungen des Hilfssatzes 12 beziehen sich immer auf $\delta_i = x_i + y_i \psi + z_i \omega$ $(i = 1, 2)$, $\delta = x + y\psi + z\omega$. Die Voraussetzungen dieses Satzes sind wegen (58), (61), (63) erfüllt.

Im Falle $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ ist $(x, y, z) = (c, y, z)$. Wegen (66) ist $(y, z) > (0, 0)$, also wegen (42) $c \geqq 0$.

Ist $a > 0$, so folgt aus (68) $(x, y, z) > (x_1, y_1, z_1)$,

$a = 0$, so folgt aus (67) $b > 0$ und aus (68) $(x, y, z) > (x_2, y_2, z_2)$.

Im Falle $x_1 > 0$, $x_2 = 0$ ist $(x, y, z) = (a x_1 + c, y, z)$.

Ist $a = 0$, so folgt aus (66) und (42) $c \geqq 0$, aus (67) $b > 0$, also $(x, y, z) > (x_2, y_2, z_2)$.

$a = 1$, $b = 0$, so folgt aus (58), (61), (63), (64) $c \geqq 0$, also mit (68) $(x, y, z) > (x_1, y_1, z_1)$.

$a = 1$, $b > 0$, so folgt wegen (66) und (42) $x \geqq 0$, und mit (68) $(x, y, z) > (x_2, y_2, z_2)$.

$a \geqq 2$, $b = 0$, so folgt wegen $x_1 \geqq 1$ und Hilfssatz 12 $x = a x_1 + c \geqq x_1 + (a - 1) + c$, also

im Falle $a \equiv 0\,(2)$ $x \geqq x_1 + a - 1 - \frac{a}{2}$,

im Falle $a \equiv 1\,(2)$ $x \geqq x_1 + a - 1 - \frac{a}{2} - \frac{1}{2}$,

zusammen $x \geqq x_1$ und mit (68) $(x, y, z) > (x_1, y_1, z_1)$.

$a \geqq 2$, $b > 0$, so folgt aus (66) und (42) $x \geqq 0$ und mit (68) $(x, y, z) > (x_2, y_2, z_2)$.

Der Fall $x_1 = 0,\ x_2 > 0$ wird entsprechend erledigt.
Im Falle $x_1 > 0,\ x_2 > 0$ ist $(x, y, z) = (a x_1 + b x_2 + c, y, z)$.

Ist $a = 0,\ b = 1$, so ist wegen (58), (61), (63), (64) $c > 0$, also mit (68)
$(x, y, z) > (x_2, y_2, z_2)$,

$a = 0,\ b \geqq 2$, so wird wegen $x_2 \geqq 1$ und Hilfssatz 12
$x = b x_2 + c \geqq x_2 + b - 1 + c$,
bei $b \equiv 0\,(2) \geqq x_2 + b - 1 - \frac{b}{2}$,
bei $b \equiv 1\,(2) \geqq x_2 + b - 1 - \frac{b}{2} - \frac{1}{2}$,
also $x = b x_2 + c \geqq x_2$, und mit (68)
$(x, y, z) > (x_2, y_2, z_2)$.

$a = 1,\ b = 0$, so wird wegen (58), (61), (63), (64) $c > 0$, also mit (68)
$(x, y, z) > (x_1, y_1, z_1)$.

$a = 1,\ b > 0$, so wird wegen $x_1, x_2 \geqq 1$ und wegen Hilfssatz 12
$x = a x_1 + b x_2 + c \geqq x_1 + (a - 1) + b + c$,
bei $a + b \equiv 0\,(2)\ \ x \geqq x_1 + (a - 1) + b - \frac{a + b}{2}$,
bei $a + b \equiv 1\,(2)\ \ x \geqq x_1 + (a - 1) + b - \frac{1}{2} - \frac{a + b}{2}$,
also $x \geqq x_1$ und mit (68)
$(x, y, z) > (x_1, y_1, z_1)$.

$a \geqq 2,\ b \geqq 0$, so folgt wegen $x_1, x_2 \geqq 1$ und Hilfssatz 12
$x = a x_1 + b x_2 + c \geqq x_1 + (a - 1) + b + c$,
bei $(a + b) \equiv 0\,(2)\ \ x \geqq x_1 + (a - 1) + b - \frac{a + b}{2}$,
bei $(a + b) \equiv 1\,(2)\ \ x \geqq x_1 + (a - 1) + b - \frac{1}{2} - \frac{a + b}{2}$,
$x \geqq x_1$, also mit (68)
$(x, y, z) > (x_1, y_1, z_1)$.

Damit ist unser Satz bewiesen.

Die Berechnung der Folge μ_n (vgl. S. 348) verlangt nun die sukzessive Auflösung von Ungleichungen der Art (46), und zwar müssen die Lösungen möglichst kleine, nichtnegative Tripel darstellen. Um solche Tripel zu erhalten, wird man an Hand der Vorschrift $\mathbf{V}_4$ zunächst unter allen nichtnegativen Tripeln (x, y, z), für die $x + y\psi + z\omega$ in $B(1)$ liegt, die beiden kleinsten, $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, bestimmen. Der Bereich $B(1)$ ist nämlich der größte der Bereiche $B(1, \pi)$, für den die Bestimmung solcher Tripel nach unserem Rechenschema durchführbar ist (vgl. S. 356, Zeile 24). Es ist aber möglich, daß in $H_1(1) + H_2(1) - B(1)$ noch Zahlen $\delta = x + y\psi + z\omega$ liegen mit der Eigenschaft, daß $\mathfrak{x} = (x, y, z)$ nichtnegativ und mit $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ unvergleichbar oder sogar kleiner als $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ ist. Das wird durch Beispiele bestätigt. Man kann beweisen, daß sich solche Tripel $\mathfrak{x}$ immer in der Form

$$\mathfrak{x} = a\mathfrak{x}_1 + b\mathfrak{x}_2 + c, \text{ wo } a, b \neq 0,\ \operatorname{sg} a \neq \operatorname{sg} b,\ \ a \text{ oder } b = \pm 1,$$

darstellen. Trotz weiterer näherer Angaben, die man über die $\mathfrak{x}$ machen kann, ist ihre Bestimmung sehr mühsam, insbesondere dann, wenn einer der Imaginärteile der Zahlen

$$\delta_1 = \mathfrak{x}_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \psi \\ \omega \end{pmatrix}, \quad \delta_2 = \mathfrak{x}_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \psi \\ \omega \end{pmatrix}$$

sehr klein ist. Sie führt notwendigerweise zu einer Wahl zwischen m mit großer Mühe berechneten Zahlen, wobei m je nach Art von δ_1, δ_2 beliebig groß werden kann. Eine solche Wahl kann aber nicht mehr als Rechenschema bezeichnet werden. Wir werden bei der Aufstellung des Algorithmus auf die Ausrechnung der $\mathfrak{x}$ schon verzichten, wenn die genannte Zahl $m \geqq 2$ ist. Freilich erhalten wir die Folge μ_n dann nicht mehr lückenlos, vgl. aber S. 348, Zeile 18. Außerdem hat diese Maßnahme erhebliche Vereinfachungen in der Theorie zur Folge.

An dieser Stelle ist es angebracht, festzulegen, welche Lösungen von (46) wir bei der Definition unseres Algorithmus zugrunde legen wollen, und eine Vorschrift für ihre Berechnung zu geben.

§ 2.

Auswahl von Lösungen für den Algorithmus des Kap. 5.

V_5. Vorschrift zur Auswahl:

Sei $(1, \psi, \omega)$ normiert, $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\omega_1 = \omega_1 + i\omega_2$, $\psi_1, \psi_2, \omega_1, \omega_2$ reell. In der Vorschrift V_4 haben wir zwei Tripel, $(u_1, v_1, w_1) = (x_1, p_{11}^{(h)}, p_{12}^{(h)})$, $(u_2, v_2, w_2) = (x_2, p_{21}^{(h)}, p_{22}^{(h)})$, bestimmt, die die Ungleichung (46) lösen. Wir setzen jetzt unter weiterer Verwendung der Bezeichnungen von V_4

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}_{11} &= (u_{11}, v_{11}, w_{11}) = (x_1, p_{11}^{(h)}, p_{12}^{(h)}), \\ \mathfrak{u}_{21} &= (u_{21}, v_{21}, w_{21}) = (x_2, p_{21}^{(h)}, p_{22}^{(h)}) \end{aligned} \tag{69}$$

und,

$$\begin{cases} \text{wenn } |\varrho_1(x_1+1)| < 1\text{: } \mathfrak{u}_{12} = (u_{12}, v_{12}, w_{12}) = (x_1+1, p_{11}^{(h)}, p_{13}^{(h)}), \\ \text{wenn } |\varrho_2(x_2+1)| < 1\text{: } \mathfrak{u}_{22} = (u_{22}, v_{22}, w_{22}) = (x_2+1, p_{21}^{(h)}, p_{23}^{(h)}). \end{cases} \tag{70}$$

Dann und nur dann ist $|\varrho_1(x_1+1)| < 1$, wenn x_1+1 in dem unter (49) angegebenen Intervall liegt; dann und nur dann ist $|\varrho_2(x_2+1)| < 1$, wenn x_2+1 in dem unter (50) angegebenen Intervall liegt.

Sei weiter $\varrho_0(x) = x + (p_{11}^{(h)} - p_{21}^{(h)})\psi + (p_{12}^{(h)} - p_{22}^{(h)})\omega$. Wir prüfen, ob eine Zahl x_0 existiert mit $|\varrho_0(x_0)| < 1$. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn

(71) das offene Intervall mit den Grenzen

$$(-p_{11}^{(h)} + p_{21}^{(h)})\psi_1 + (-p_{12}^{(h)} + p_{22}^{(h)})\omega_1 \pm \sqrt{1 - (\psi_2^{(h)} - \omega_2^{(h)})^2}$$

existiert und eine ganze rationale Zahl x enthält. Das ist nicht immer möglich, da nach (54) $|\psi_2^{(h)} - \omega_2^{(h)}| > \frac{1}{2}\sqrt{3}$; gibt es aber im Intervall (71)

eine ganze rationale Zahl x_0, so ist $|\varrho_0(x_0)| < 1$ und $|\varrho_0(x)| > 1$ für $x \neq x_0$.

Im Falle der Existenz von x_0 setzen wir nun

$$(72)\quad \begin{cases} \text{wenn } (p_{11}^{(h)} - p_{21}^{(h)},\ p_{12}^{(h)} - p_{22}^{(h)}) > (0,0): \\ \qquad \mathfrak{u}_{01} = (u_{01}, v_{01}, w_{01}) = (x_0,\ p_{11}^{(h)} - p_{21}^{(h)},\ p_{12}^{(h)} - p_{22}^{(h)}), \\ \text{wenn } (p_{11}^{(h)} - p_{21}^{(h)},\ p_{12}^{(h)} - p_{22}^{(h)}) < (0,0): \\ \qquad \mathfrak{u}_{01} = (u_{01}, v_{01}, w_{01}) = (-x_0,\ -p_{11}^{(h)} + p_{21}^{(h)},\ -p_{12}^{(h)} + p_{22}^{(h)}). \end{cases}$$

Weitere Fälle brauchen wegen $|\varrho_0(x_0)| < 1$ und (42) nicht unterschieden werden. Mit den durch (69), (70), (72) definierten Tripeln $\mathfrak{u}_{ik}$ setzen wir $\delta_{ik} = u_{ik} + v_{ik}\psi + w_{ik}\omega$. δ_{ik} ist nur definiert, wenn $\mathfrak{u}_{ik}$ existiert.

Definition 12: *Jedes existierende, in* $\mathfrak{V}_5$ *definierte* $\mathfrak{u}_{ik}$ *heiße ausgezeichnete Lösung von* (46).

Für spätere Überlegungen sind nun folgende Bemerkungen von Wichtigkeit:

(73) Alle ausgezeichneten Lösungen sind nichtnegativ.

(74) Unter den fünf möglichen ausgezeichneten Lösungen befinden sich immer $\mathfrak{u}_{11}, \mathfrak{u}_{21}$.

(75) Es gilt $$v_{11}w_{21} - v_{21}w_{11} = \pm 1.$$

(76.1) δ_{11}, δ_{21} liegen in $B(1)$. Liegt δ_{11} in $B_p(1)$ ($p = 1$ oder 2), so liegt δ_{21} in $B_q(1)$, wo q die von p verschiedene der Zahlen 1, 2.

(76.2) $|J(\delta_{11} - \delta_{21})| > \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

(76.3) $|\delta_{11} - 1|, |\delta_{21} - 1| > 1$; (76.4) $R(\delta_{11}), R(\delta_{21}) < \frac{1}{2}$.

(77.1) Dann und nur dann, wenn $|\delta_{11} + 1| < 1$, existiert δ_{12}; dann und nur dann, wenn $|\delta_{21} + 1| < 1$, existiert δ_{22}.

(77.2) Im Falle der Existenz von δ_{12} ist $\delta_{12} = \delta_{11} + 1$, im Falle der Existenz von δ_{22} ist $\delta_{22} = \delta_{21} + 1$.

Im Falle der Existenz von δ_{01} ist

(78.1) $$|J(\delta_{01})| = |J(\delta_{11}) - J(\delta_{21})|$$

(78.2) $$|J(\delta_{01})| > \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

(78.3) $$|R(\delta_{01})| < \tfrac{1}{2}$$

(78.4) (v_{11}, w_{11}) mit (v_{21}, w_{21}) vergleichbar und $(v_{11}, w_{11}) \neq (v_{21}, w_{21})$.

Die Behauptungen (73) bis (78) folgen teils direkt aus der Definition der $\mathfrak{u}_{ik}$, δ_{ik}, teils aus (51) bis (55).

§ 3.

Transformation in normale Tripel.

Nachdem wir unter der Voraussetzung, daß $(1, \psi, \omega)$ normiert, die Lösungen der Ungleichung

(79) $$0 < |x + y\psi + z\omega| < 1$$

behandelt haben, ist es von Wichtigkeit, zu entscheiden, ob es stets eine umkehrbar ganzzahlige Transformation gibt, die ein beliebiges Tripel in ein normiertes überführt.

Definition 13: *Ein Tripel* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *von Zahlen aus* K *heißt normal, wenn es folgende Bedingungen erfüllt:*

(80) 1. $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *ist normiert.*

(81) 2. *Ist* (x_1, x_2, x_3) *eine Lösung der Ungleichung*

(82) $$0 < |x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3| < |\alpha_1|,$$

so sind x_2, x_3 *vermöge* (82) *durch* x_1 *eindeutig bestimmt.*

Satz 12: *Jedes Tripel* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *linear unabhängiger Zahlen aus* K *läßt sich durch eine umkehrbar ganzzahlige Transformation* $\mathfrak{A}$ *der Gestalt*

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

in ein normales Tripel überführen.

Der Beweis enthält gleichzeitig eine Vorschrift zur Berechnung einer Matrix $\mathfrak{A}$ der verlangten Eigenschaft.

Beweis: Wollen wir $(\alpha_1, \alpha_2\, \alpha_3)$ in ein normales Tripel transformieren, so brauchen wir nur eine Transformation zu bestimmen, die $\left(1, \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)$ in ein normales Tripel überführt, und das so erhaltene Tripel mit α_1 zu multiplizieren. Sei also $(1, \zeta, \eta) = \left(1, \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)$. Nach Voraussetzung sind $1, \zeta, \eta$ linear unabhängig. Sei $\zeta = \zeta_1 + i\,\zeta_2$, $\eta = \eta_1 + i\,\eta_2$, $\zeta_1, \zeta_2, \eta_1, \eta_2$ reell. Zunächst sind $\zeta_1, \zeta_2, \eta_1, \eta_2 \neq 0$: Keine der Zahlen ζ, η kann wegen der linearen Unabhängigkeit von $1, \zeta, \eta$ 1. Grades sein; da K vom 3. Grade, sind es also ζ, η auch, d. h. beide sind Körpererzeugende von K. Da K komplex, müssen also ζ, η einen von Null verschiedenen Imaginärteil haben. Wäre weiter z. B. $R(\zeta) = 0$, so müßte ζ vom $2n$-ten Grade sein, während der Grad von K ungerade ist.

V6. Die Vorschrift, aus $(1, \zeta, \eta)$ durch umkehrbar ganzzahlige Transformation ein normales Tripel herzustellen:

Die Zerlegung der im folgenden eingeführten komplexen Zahlen $\zeta^{(k)}$, $\eta^{(k)}$ $(k = 1, \ldots, 5)$ in Real- und Imaginärteil sei $\zeta^{(k)} = \zeta_1^{(k)} + i\zeta_2^{(k)}$, $\eta^{(k)} = \eta_1^{(k)} + i\,\eta_2^{(k)}$.

1. Schritt: Sei $a_1 = -\operatorname{sg}\left(\frac{\zeta_2}{\eta_2}\right)$. Wir setzen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \zeta^{(1)} \\ \eta^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta \\ \eta \end{pmatrix}.$$

2. Schritt: Sei a_2 die kleinste nichtnegative (g. r.) Zahl, für die $|\zeta_2^{(1)} - a_2 \eta_2^{(1)}| > 2$. Wir setzen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \zeta^{(2)} \\ \eta^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta^{(1)} \\ \eta^{(1)} \end{pmatrix}.$$

3. Schritt: Sei a_3 die kleinste nichtnegative (g. r.) Zahl, für die $|-a_3 \zeta_2^{(2)} + \eta_2^{(2)}| > 2$. Wir setzen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \zeta^{(3)} \\ \eta^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta^{(2)} \\ \eta^{(2)} \end{pmatrix}.$$

4. Schritt: Sei a_4 die kleinste nichtnegative (g. r.) Zahl, für die $-a_4 + \zeta_1^{(3)} < -1$. Wir setzen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \zeta^{(4)} \\ \eta^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta^{(3)} \\ \eta^{(3)} \end{pmatrix}.$$

5. Schritt: Sei a_5 die kleinste nichtnegative (g. r.) Zahl, für die $-a_5 + \eta_1^{(4)} < -1$. Wir setzen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \zeta^{(5)} \\ \eta^{(5)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a_5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta^{(4)} \\ \eta^{(4)} \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a_5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definition 14: *Die in der Vorschrift* $\mathbf{V}_6$ *für das Tripel* $(1, \zeta, \eta) = \left(1, \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)$ *linear unabhängiger Zahlen aus K definierte Transformation* $\mathfrak{A}$ *heiße die zu* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *gehörige A-Transformation.*

$\mathfrak{A}$ ist nach Konstruktion umkehrbar ganzzahlig und hat die in Satz 12 erwähnte Gestalt. Zum Beweise von Satz 12 genügt also der

Satz 13: *Die zu* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *gehörige A-Transformation* $\mathfrak{A}$ *führt* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *in ein normales Tripel* $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ *über.*

Beweis: Wir brauchen nur zu zeigen, daß $(1, \zeta^{(5)}, \eta^{(5)})$ normal ist. Dieses Tripel hat nach Konstruktion die Eigenschaften (83) bis (86):

(83) $1, \zeta^{(5)}, \eta^{(5)}$ sind linear unabhängige Zahlen aus K.

(84) $$\operatorname{sg} \zeta_2^{(5)} \neq \operatorname{sg} \eta_2^{(5)}$$

(85) $$|\zeta_2^{(5)}|, |\eta_2^{(5)}| > 2.$$

(86) $$\zeta_1^{(5)}, \eta_1^{(5)} < -1.$$

Ist (x, y, z) Lösung von

(87) $$0 < |x + y\zeta^{(5)} + \eta^{(5)}| < 1,$$

so folgt

$$(88) \qquad (x + y\,\zeta_1^{(5)} + z\,\eta_1^{(5)})^2 < 1.$$

$$(89) \qquad (y\,\zeta_2^{(5)} + z\,\eta_2^{(5)})^2 < 1.$$

Aus (87) folgt: y, z sind nicht gleichzeitig 0; also folgt aus (85), (89), daß sie sogar *beide* von 0 verschieden sind, und aus (84), (85), (89), daß sie gleiche Vorzeichen haben. Aus (88) folgt weiter

$$-1 - y\,\zeta_1^{(5)} - z\,\eta_1^{(5)} < x < 1 - y\,\zeta_1^{(5)} - z\,\eta_1^{(5)}$$

und mit Rücksicht auf (86)

$$(90) \qquad -1 + y\,|\zeta_1^{(5)}| + z\,|\eta_1^{(5)}| < x < 1 + y\,|\zeta_1^{(5)}| + z\,|\eta_1^{(5)}|.$$

Sind nun $y, z < 0$, so folgt aus (86) und aus der rechten Ungleichung in (90) $x < -1$; sind $y, z > 0$, so folgt aus (86) und der linken Ungleichung in (90) $x > 1$. Insgesamt ergibt sich, daß $(1, \zeta^{(5)}, \eta^{(5)})$ normiert ist.

Wir wollen jetzt zeigen, daß $(1, \zeta^{(5)}, \eta^{(5)})$ sogar normal ist. Seien (x, y, z), (x', y', z') Lösungen von (87). Aus (89) folgt dann

$$|(y' - y)\,\zeta_2^{(5)} + (z' - z)\,\eta_2^{(5)}| < 2,$$

und aus (84), (85), daß

$$(91) \qquad y' < y, z' < z \text{ gleichzeitig oder } y' > y, z' > z \text{ gleichzeitig oder } (y', z') = (y, z).$$

Nun folgt aus (90)

$$(92) \quad -2 + (y-y')\,|\zeta_1^{(5)}| + (z-z')\,|\eta_1^{(5)}| < x - x' < 2 + (y-y')\,|\zeta_1^{(5)}| + (z-z')\,|\eta_1^{(5)}|,$$

also, wenn $y' > y, z' > z$, $x - x' < 0$, d. h. $x' > x$,

wenn $y' < y, z' < z$, $x' < x$.

Wir notieren inzwischen den

Hilfssatz 13: *Sei* $\mathfrak{A}$ *die zu* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *gehörige A-Transformation,*

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \mathfrak{A} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Alle Lösungen (x, y, z) *der Ungleichung*

$$0 < |x\beta_1 + y\beta_2 + z\beta_3| < |\beta_1|$$

sind vergleichbar. Für jede einzelne Lösung gilt $|x| > 1$, $y \neq 0$, $z \neq 0$.

Wir fahren im Beweise des Satzes 13 fort. Seien (x, y, z), (x, y', z') Lösungen von (87). Dann folgt aus (92)

$$-2 < (y - y')\,|\zeta_1^{(5)}| + (z - z')\,|\eta_1^{(5)}| < 2,$$

somit aus (86), (91) $(y, z) = (y', z')$, w. z. b. w.

In dem Algorithmus für die komplexen kubischen Körper wird eine *A*-Transformation auf das Ausgangstripel der zu entwickelnden Folge von Tripeln angewendet, da sie an dieser Stelle für Theorie und Praxis

erhebliche Vereinfachungen herbeiführt. Für die darauffolgenden Tripel erweist es sich jedoch als zweckmäßig, sie nicht in normale Tripel zu überführen, sondern sie nur zu normieren. Wir wollen diese Normierung für die in Frage kommenden Tripel im nächsten Paragraphen zur Vorbereitung durchführen.

§ 4.

Transformation in normierte Tripel.

Seien α, β Zahlen aus K mit den Eigenschaften:

(93)
1. $\alpha, \beta, 1$ sind linear unabhängig, 2. $\operatorname{sg} J(\alpha) \neq \operatorname{sg} J(\beta)$,
3. $|J(\alpha)| + |J(\beta)| > \frac{1}{2}\sqrt{3}$, 4. $|\beta| < 1$,
entweder 5a). $|\alpha| < \frac{1}{2}\sqrt{3}$
oder 5b). $|\alpha| < 1$; $|J(\alpha)|, |J(\beta)| > 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $|\alpha - \beta + z| > 1$ für alle z

$\mathfrak{V}_7$. Vorschrift zur Normierung von $(\alpha, \beta, 1)$:

Ist $R(\alpha) < 0$, $R(\beta) < 0$, so setzen wir $\begin{pmatrix}\varrho\\ \sigma\\ \tau\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ 1\end{pmatrix}$,

$R(\alpha) > 0$, $R(\beta) < 0$, so setzen wir $\begin{pmatrix}\varrho\\ \sigma\\ \tau\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ 1\end{pmatrix}$,

$R(\alpha) < 0$, $R(\beta) > 0$, so setzen wir $\begin{pmatrix}\varrho\\ \sigma\\ \tau\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ 1\end{pmatrix}$,

$R(\alpha) > 0$, $R(\beta) > 0$, so setzen wir $\begin{pmatrix}\varrho\\ \sigma\\ \tau\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ 1\end{pmatrix}$.

Behauptung: (ϱ, σ, τ) ist normiert.

Wir haben $\begin{pmatrix}\varrho\\ \sigma\\ \tau\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & f\\ 0 & 0 & g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ 1\end{pmatrix}$, wo $|g|, |f| = 1$. Setzen wir also $\varrho = \varrho_1 + i\varrho_2$, $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$, so gilt:

(94.1) ϱ, σ, τ sind linear unabhängige Zahlen aus K, $\tau = \pm 1$.

(94.2) $\operatorname{sg}\varrho_2 \neq \operatorname{sg}\sigma_2$. (94.3) $|\varrho_2| + |\sigma_2| > \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

(94.4) $\operatorname{sg}\varrho_1 = \operatorname{sg}\sigma_1$, $\operatorname{sg}\varrho_1 \neq \operatorname{sg}\tau$.

Entweder

(95) $$|\varrho| < \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

oder

(96) $|\varrho| < 1$; $|\varrho_2|, |\sigma_2| > 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $|\varrho - \sigma + z| > 1$ für alle z.

Sei jetzt (x, y, z) eine Lösung der Ungleichung

(97) $$0 < |x\varrho + y\sigma + z\tau| < |\varrho|.$$

(ϱ, σ, τ) habe zunächst die Eigenschaften (96). Dann ist wegen $|\varrho| < 1$

(98) $$(x\varrho_1 + y\sigma_1 + z\tau)^2 < 1.$$

(99) $$(x\varrho_2 + y\sigma_2)^2 < 1.$$

Aus (96), (97) folgt $(x, y) \neq (0, 0)$.

Im Falle $x \neq 0$, $y \neq 0$ folgt aus (94. 2), (94. 3), (99), (96) $\operatorname{sg} x = \operatorname{sg} y$;
(94. 4), (98) ergeben dann, sofern $z \neq 0$, $\operatorname{sg} x = \operatorname{sg} y = \operatorname{sg} z$.

Im Falle $x \neq 0$, $y = 0$, $z \neq 0$ folgt aus (94. 4), (98), $\tau = \pm 1$ $\operatorname{sg} x = \operatorname{sg} z$.

Im Falle $x = 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ folgt aus (94 4), (98), $\tau = \pm 1$ $\operatorname{sg} y = \operatorname{sg} z$.

(ϱ, σ, τ) habe nun die Eigenschaft (95). Für jede Lösung von (97) gilt dann

(100) $$|x\varrho_1 + y\sigma_1 + z\tau| < \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

(101) $$|x\varrho_2 + y\sigma_2| < \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Aus (90), (97) folgt wieder $(x, y) \neq (0, 0)$.

Im Falle $x \neq 0$, $y \neq 0$ folgt aus (94. 2), (94. 3), (101) $\operatorname{sg} x = \operatorname{sg} y$,
(94. 4), (100) ergeben dann, sofern $z \neq 0$, $\operatorname{sg} x = \operatorname{sg} y = \operatorname{sg} z$.

Im Falle $x \neq 0$, $y = 0$, $z \neq 0$ folgt aus (94.4), (100) $\operatorname{sg} x = \operatorname{sg} z$.

Im Falle $x = 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ folgt aus (94. 4), (100) $\operatorname{sg} y = \operatorname{sg} z$.

Damit sind wir fertig.

Definition 15: *Die in der Vorschrift* $\mathbf{V}_7$ *für jedes Tripel* $(\alpha, \beta, 1)$ *der Eigenschaften* (93) *definierte umkehrbar ganzzahlige Transformation heiße die zu* $(\alpha, \beta, 1)$ *gehörige B-Transformation.*

Satz 14: *Die für jedes Tripel* $(\alpha, \beta, 1)$ *der Eigenschaften* (93) *definierte B-Transformation führt* $(\alpha, \beta, 1)$ *in ein normiertes Tripel* (ϱ, σ, τ) *über.*

Kapitel 5.

Ein Algorithmus zur Berechnung von Teilfolgen der Minkowskifolgen in den komplexen kubischen Körpern. (Berechnung der Grundeinheit.)

Der Algorithmus ist der Vorschrift $\mathbf{V}_2$ (S. 351) nachgebildet. Seine endgültige Formulierung findet der Leser auf S. 386. Die im § 1 gegebene Definition gestattet eine bequemere theoretische Behandlung.

Kleine lateinische Buchstaben mit und ohne Indizes bedeuten stets ganze rationale Zahlen.

§ 1.

Eine vorläufige Formulierung des Algorithmus.

$\mathbf{V}_8$. Sei $\mathfrak{a} = (\alpha, \beta, \gamma) = \mathfrak{a}_0 = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ ein beliebig vorgegebenes Tripel linear unabhängiger Zahlen des komplexen kubischen Körpers K, $\mathfrak{A}_0$ die dreireihige quadratische Einheitsmatrix.

Wir definieren, von (α, β, γ) ausgehend, eine Folge von Tripeln $\mathfrak{a}_n = (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ und eine Folge von Matrizen $\mathfrak{A}_n = (a_{ik}^{(n)})$ nach folgender Induktionsvorschrift:

Seien $\mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{A}_n$ bekannt $(n \geqq 0)$.

1. Schritt: Sei

$$\mathfrak{S}_n \begin{cases} \text{für } n = 0 \text{ die zu } \mathfrak{a}_n \text{ gehörige } A\text{-Transformation (Def. 14),} \\ \text{für } n \geqq 1 \text{ die zu } \mathfrak{a}_n \text{ gehörige } B\text{-Transformation (Def. 15).} \end{cases}$$

(Durch die Transformation $\mathfrak{S}_n$ erhalten wir ein normiertes Tripel $(\varrho_n, \sigma_n, \tau_n) = \mathfrak{S}_n \cdot (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$).

2. Schritt: Wir setzen $\left(1, \frac{\sigma_n}{\varrho_n}, \frac{\tau_n}{\varrho_n}\right) = (1, \varphi_n, \chi_n)$.

3. Schritt: Sei $\varphi_n = \psi$, $\chi_n = \omega$. Wir bestimmen die (höchstens 5) ausgezeichneten Lösungen $\mathfrak{u}_{ik}$ (Definition 12) der Ungleichung

$$0 < |x + y\psi + z\omega| < 1$$

und schreiben, indem wir die Abhängigkeit von n zum Ausdruck bringen, $\mathfrak{u}_{ik} = \mathfrak{u}_{ik}^{(n)} = (u_{ik}^{(n)}, v_{ik}^{(n)}, w_{ik}^{(n)})$, $\delta_{ik} = \delta_{ik}^{(n)}$.

4. Schritt: Sei

$$c_{ik}^{(n)} = \mathfrak{C}_n = \begin{cases} \mathfrak{A}_n & \text{im Falle } n = 0 \\ \mathfrak{S}_n \cdot \mathfrak{A}_n & \text{im Falle } n \geqq 1, \end{cases}$$

$$d_{\mathfrak{C}_n}(x, y, z) = x c_{11}^{(n)} + y c_{21}^{(n)} + z c_{31}^{(n)}, \quad d_{ik}^{(n)} = d_{\mathfrak{C}_n}(u_{ik}^{(n)}, v_{ik}^{(n)}, w_{ik}^{(n)}).$$

a) $\min\{|J(\delta_{11}^{(n)})|, |J(\delta_{21}^{(n)})|\} < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Sei $\mathfrak{u}_{pq}^{(n)}$ von den (höchstens 4) ausgezeichneten Lösungen $\mathfrak{u}_{ik}^{(n)}$ mit $|\delta_{ik}^{(n)}| < \frac{1}{2}\sqrt{3}$ diejenige, für welche $d_{\mathfrak{C}_n}(u_{pq}^{(n)}, v_{pq}^{(n)}, w_{pq}^{(n)})$ minimal ist, t die von p verschiedene der Zahlen 1, 2.

b) $\min\{|J(\delta_{11}^{(n)})|, |J(\delta_{21}^{(n)})|\} > 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Sei $\mathfrak{u}_{pq}^{(n)}$ von den (höchstens 5) ausgezeichneten Lösungen $\mathfrak{u}_{ik}^{(n)}$ diejenige, für welche $d_{\mathfrak{C}_n}(u_{pq}^{(n)}, v_{pq}^{(n)}, w_{pq}^{(n)})$ minimal ist. Liege $\delta_{pq}^{(n)}$ in $H_r(1)$ ($r = 1$ oder 2). Sei s die von r verschiedene der beiden Zahlen 1, 2; t von den (höchstens 2) Indizes u, für die $\delta_{u1}^{(n)}$ in $H_s(1)$ liegt, der kleinste.

In Fall a) und b) setzen wir

$$\mathfrak{U}_n = \begin{pmatrix} u_{pq}^{(n)} & v_{pq}^{(n)} & w_{pq}^{(n)} \\ u_{t1}^{(n)} & v_{t1}^{(n)} & w_{t1}^{(n)} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und definieren:

$\mathfrak{A}_{n+1} = \mathfrak{U}_n \cdot \mathfrak{C}_n (n \geqq 0)$, d. h. $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{U}_0$, $\mathfrak{A}_{n+1} = \mathfrak{U}_n \cdot \mathfrak{S}_n \cdot \mathfrak{A}_n$ für $n \geqq 1$;
$\mathfrak{a}_{n+1} = \mathfrak{U}_n \cdot (1, \varphi_n, \chi_n)$ $(n \geqq 0)$.

Unter der Voraussetzung, daß unser Algorithmus $\mathfrak{V}_8$ für die Indizes 0, 1, 2, ... usw. bis zur Bestimmung des Tripels $(1, \varphi_m, \chi_m)$ durchführbar ist, beweisen wir die Hilfssätze 14, 15.

Hilfssatz 14: *Für jedes n im Intervall $0 \leqq n \leqq m$ gilt*

$$\varrho_n \cdot \varrho_{n-1} \dots \varrho_0 (1, \varphi_n, \chi_n) = \mathfrak{C}_n \cdot (\varrho_0, \sigma_0, \tau_0).$$

Beweis: Für $n = 0$ haben wir $\mathfrak{C}_n = \mathfrak{A}_0$, also

$$\mathfrak{C}_0 \cdot (\varrho_0, \sigma_0, \tau_0) = (\varrho_0, \sigma_0, \tau_0) = \varrho_0 \cdot (1, \varphi_0, \chi_0).$$

Gelte der Satz für ein n im Intervall $0 \leqq n < m - 1$; dann ist

$$(1, \varphi_{n+1}, \chi_{n+1}) = \frac{1}{\varrho_{n+1}} \cdot \mathfrak{S}_{n+1}\ \mathfrak{U}_n \cdot (1, \varphi_n, \chi_n)$$

$$= \frac{1}{\varrho_{n+1}} \cdot \frac{1}{\varrho_n \cdots \varrho_0} \cdot \mathfrak{S}_{n+1} \cdot \mathfrak{A}_{n+1} \cdot (\varrho_0, \sigma_0, \tau_0) = \frac{1}{\varrho_{n+1} \cdots \varrho_0} \cdot \mathfrak{C}_{n+1} \cdot (\varrho_0, \sigma_0, \tau_0).$$

Hilfssatz 15: *Für jedes n im Intervall $1 \leqq n \leqq m$ gilt $\gamma_n = +1$, $\varrho_n = \alpha_n$, $\tau_n = \pm 1$* (vgl. Bemerkung zu $\mathfrak{V}_2$).

Beweis: Da die dritte Zeile aller $\mathfrak{U}_{n-1}(1, 0, 0)$ ist, folgt $\gamma_n = +1$ für die genannten n. Da $\mathfrak{S}_n$ für $n \geqq 1$ eine B-Transformation, ist ihre erste Zeile $(1, 0, 0)$, die letzte $(0, 0, \pm 1)$, also $\varrho_n = \alpha_n$, $\tau_n = \pm 1$ für die genannten n.

Zunächst beweisen wir die Durchführbarkeit des Verfahrens bis zur Berechnung von $(1, \varphi_1, \chi_1)$ und treffen Vorbereitungen für die Induktion im Beweise zu Satz 15.

Die A-Transformation ist für jedes Tripel linear unabhängiger Zahlen aus K erklärt, $\mathfrak{S}_0$ ist also definiert und das Tripel $(\varrho_0, \sigma_0, \tau_0)$ normal. Da $(1, \varphi_0, \chi_0)$ aus $(\varrho_0, \sigma_0, \tau_0)$ durch Division mit ϱ_0 hervorgeht, gilt nach Hilfssatz 13, angewendet auf $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha, \beta, \gamma)$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{S}_0$:

(102) Die Lösungen (x, y, z) der Ungleichung

(103) $$0 < |x + y\varphi_0 + z\chi_0| < 1$$

sind vergleichbar; für jede einzelne Lösung gilt

(104) $$|x| > 1, \quad y \neq 0 \quad z \neq 0.$$

Wir behandeln jetzt die ausgezeichneten Lösungen der Ungleichung (103). Wir wissen zunächst nach (74) nur, daß $u_{11}^{(0)}$, $u_{21}^{(0)}$ existieren.

(105) a) $\min\{|J(\delta_{11}^{(0)})|, |J(\delta_{21}^{(0)})|\} < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Zunächst ist $|J(\delta_{i1}^{(0)})| < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (i eine der Zahlen 1, 2). Ist $R(\delta_{i1}^{(0)}) > -\frac{1}{2}$, so folgt wegen (76.4) $|\delta_{i1}^{(0)}| < \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (1 - \frac{1}{2}\sqrt{3})^2} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ (Seite des dem Einheitskreis einbeschriebenen regulären Zwölfecks). Ist aber $-1 < R(\delta_{i1}^{(0)}) < -\frac{1}{2}$, so folgt $0 < R(\delta_{i1}^{(0)} + 1) < +\frac{1}{2}$, also $|\delta_{i1}^{(0)} + 1| < \sqrt{2 - \sqrt{3}}$; dann existieren nach (77.1) $\delta_{i2}^{(0)} = \delta_{i1}^{(0)} + 1$, u_{i2}. Aus der Voraussetzung (105) folgt also auf alle Fälle die Existenz einer ausgezeichneten Lösung $u_{ik}^{(0)}$, für welche $|\delta_{ik}^{(0)}| < \sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Danach gibt es a fortiori von den ausgezeichneten Lösungen $u_{ik}^{(0)}$ eine, für die $|\delta_{ik}^{(0)}| < \frac{1}{2}\sqrt{3}$, wie in der Definition des Verfahrens verlangt wird.

Nun ist $\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{A}_0$, also $d_{pq}^{(0)} = u_{pq}^{(0)}$. Da die $u_{ik}^{(0)}$ Lösungen von (103) sind und $(1, \varphi_0, \chi_0)$ normal ist, folgt, daß alle $u_{ik}^{(0)}$ verschieden sind. Daher ist $u_{pq}^{(0)}$ eindeutig bestimmt. Weiter ist wegen $|\delta_{pq}^{(0)}| < \frac{1}{2}\sqrt{3}$ $p = 1$ oder 2. Die Existenz von u_{t1} folgt aus (74), (78.2).

In Vorbereitung auf Satz 15 schließen wir: Aus (104) folgt $1 < u_{pq}^{(0)}, u_{t1}^{(0)}$; da $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{U}_0$, folgt

$$a_{21}^{(1)}, a_{11}^{(1)} > a_{31}^{(1)} > 0 \tag{106}$$

und, wenn $|\beta_1| = |\delta_{t1}| < \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $a_{21}^{(1)} > a_{11}^{(1)}$,

wenn $|\beta_1 + 1| = |\delta_{t2}| < \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $a_{21}^{(1)} + a_{31}^{(1)} > a_{11}^{(1)}$

(vgl. Satz 5). Da $\alpha_1 = \delta_{pq}^{(0)}$, $\beta_1 = \delta_{t1}^{(0)}$, $t = 1$ oder 2, ist nach Konstruktion und (76.1)

$$|\alpha_1| < \tfrac{1}{2}\sqrt{3},\ |\beta_1| < 1,\ |J(\beta_1)| < \tfrac{1}{2}\sqrt{3}. \tag{107}$$

Wegen (77.2) ist $J(\delta_{pq}^{(0)}) = J(\delta_{p1}^{(0)})$, also wegen (105)

$$\min\{|J(\alpha_1)|,\ |J(\beta_1)|\} < 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \tag{108}$$

wegen (76.1), (76.2) und $p \neq t$

$$\operatorname{sg} J(\alpha_1) \neq \operatorname{sg} J(\beta_1),\ |J(\alpha_1) - J(\beta_1)| > \tfrac{1}{2}\sqrt{3}. \tag{109}$$

Weiter gilt $|\delta_{pq}^{(0)} - 1| > \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Anderenfalls folgte aus (76.3) $q = 2$, also auch $|\delta_{p1}^{(0)}| < \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $u_{p1}^{(0)} < u_{pq}^{(0)}$, im Widerspruch zur Minimaleigenschaft von $u_{pq}^{(0)}$. Zusammen mit (76.3) ergibt sich

$$|\alpha_1 - 1| > \tfrac{1}{2}\sqrt{3},\ |\beta_1 - 1| > 1 \tag{110}$$

und daraus wegen (107)

$$R(\alpha_1) < \tfrac{1}{2},\ R(\beta_1) < \tfrac{1}{2}. \tag{111}$$

Aus (69), (70), (75) folgt

$$\begin{vmatrix} v_{pq}^{(0)} & w_{pq}^{(0)} \\ v_{t1}^{(0)} & w_{t1}^{(0)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_{p1}^{(0)} & w_{p1}^{(0)} \\ v_{t1}^{(0)} & w_{t1}^{(0)} \end{vmatrix} = \pm 1. \tag{112}$$

Insgesamt erhalten wir (vgl. hierzu (93)):

$$(113)\quad \begin{cases} \alpha_1, \beta_1\ 1 \text{ sind linear unabhängig (aus (112))}, \\ \operatorname{sg} J(\alpha_1) \neq \operatorname{sg} J(\beta_1) \text{ (aus (109))},\ |J(\alpha_1) - J(\beta_1)| > \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \text{ (aus (109))}, \\ |\beta_1| < 1,\ |J(\beta_1)| < \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \text{ (aus (107))},\ |\beta_1 - 1| > 1, \\ \qquad\qquad R(\beta_1) < \tfrac{1}{2} \text{ (aus (110), (111))}, \\ \min\{|J(\alpha_1)|, |J(\beta_1)|\} < 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \text{ (aus (108))}, \\ |\alpha_1| < \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \text{ (aus (107))},\ |\alpha_1 - 1| > \tfrac{1}{2}\sqrt{3},\ R(\alpha_1) < \tfrac{1}{2} \text{ (aus (110), (111))}. \end{cases}$$

$$\text{b) } \min\{|J(\delta_{11}^{(0)})|,\ |J(\delta_{21}^{(0)})|\} > 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}. \tag{114}$$

Wie unter (105) folgt, daß $u_{pq}^{(0)}$ eindeutig bestimmt ist und $\delta_{t1}^{(0)}$ existiert. Hier kann aber sehr wohl $p = 0$, oder auch $t = 0$ sein. Wie oben folgt

$$a_{21}^{(1)} > a_{11}^{(1)} > a_{31}^{(1)} > 0 \tag{115}$$

und aus $\alpha_1 = \delta_{pq}^{(0)}$, $\beta_1 = \delta_{t1}^{(0)}$

$$|\alpha_1| < 1, \ |\beta_1| < 1. \tag{116}$$

Aber die (107) bis (112) entsprechenden Beziehungen bedürfen einer besonderen Herleitung. Da u_{p2} im Falle seiner Existenz $> u_{p1}$ nach Definition, folgt wegen der Minimaleigenschaft von u_{pq}

$$q = 1. \tag{117}$$

Daraus folgt wegen (76.3), (76.4), (78.2), (78.3)

$$|\alpha_1 - 1|, \ |\beta_1 - 1| > 1, \quad R(\alpha_1), \ R(\beta_1) < \tfrac{1}{2}. \tag{118}$$

1. Sei zunächst

$$\delta_{pq}^{(0)} = \delta_{01}^{(0)}. \tag{119}$$

Dann ist $t = 1$ oder 2. Nach Konstruktion von p, t ist $\operatorname{sg}\{J(\delta_{pq}^{(0)})\} \neq \operatorname{sg}\{J(\delta_{t1}^{(0)})\}$, also

$$\operatorname{sg} J(\alpha_1) \neq \operatorname{sg} J(\beta_1). \tag{120}$$

Weiter folgt aus (78.2) $|J(\delta_{01}^{(0)})| > \frac{1}{2}\sqrt{3}$, also mit $\beta_1 = \delta_{t1}^{(0)}$ und (114)

$$|J(\alpha_1)| > \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \ |J(\beta_1)| > 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}. \tag{121}$$

Mit (120), (121) ist

$$|J(\alpha_1) - J(\beta_1)| > 1, \tag{122}$$

$$|\alpha_1 - \beta_1 + x| > 1 \text{ für alle } x. \tag{123}$$

Endlich folgt aus (75) und wegen $t = 1$ oder 2

$$\begin{vmatrix} v_{01}^{(0)} & w_{01}^{(0)} \\ v_{t1}^{(0)} & w_{t1}^{(0)} \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} v_{11}^{(0)} - v_{21}^{(0)} & w_{11}^{(0)} - w_{21}^{(0)} \\ v_{t1}^{(0)} & w_{t1}^{(0)} \end{vmatrix} = \pm 1. \tag{124}$$

2. Sei jetzt

$$\delta_{pq}^{(0)} \neq \delta_{01}^{(0)}, \tag{125}$$

also $p = 1$ oder 2. Wir wollen zunächst annehmen, daß

$$2_1. \ \delta_{01}^{(0)} \text{ existiert.} \tag{126}$$

Sei l die von p verschiedene der beiden Zahlen 1, 2. Dann ist wegen der Minimaleigenschaft von $u_{pq}^{(0)}$ $u_{l1}^{(0)} > u_{pq}^{(0)}$. Wegen (117), (102) und (72) folgt jetzt $J(\delta_{01}^{(0)}) = J(\delta_{l1}^{(0)}) - J(\delta_{p1}^{(0)})$, also wegen (76.1) $\operatorname{sg} J(\delta_{01}^{(0)}) = \operatorname{sg} J(\delta_{l1}^{(0)})$, aber $\neq \operatorname{sg} J(\delta_{pq}^{(0)})$; daraus folgt wegen der Minimaleigenschaft von t $t = 0$, also $\beta_1 = \delta_{01}^{(0)} = \delta_{l1}^{(0)}$; daher haben wir

$$\operatorname{sg} J(\alpha_1) \neq \operatorname{sg} J(\beta_1) \tag{127}$$

und wegen $|J(\delta_{01}^{(0)})| > \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (nach (78.2)), $\alpha_1 = \delta_{pq}^{(0)}$ und (114)

$$|J(\alpha_1)| > 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \ |J(\beta_1)| > \tfrac{1}{2}\sqrt{3}. \tag{128}$$

Aus (127), (128) folgt

(129) $$|J(\alpha_1) - J(\beta_1)| > 1$$

und damit

(130) $$|\alpha_1 - \beta_1 + x| > 1 \text{ für alle } x,$$

endlich aus (75) und wegen $p = 1$ oder 2, $t = 0$

(131) $$\begin{vmatrix} v_{pq}^{(0)} & w_{pq}^{(0)} \\ v_{t1}^{(0)} & w_{t1}^{(0)} \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} v_{p1}^{(0)} & w_{p1}^{(0)} \\ v_{11}^{(0)} - v_{21}^{(0)} & w_{11}^{(0)} - w_{21}^{(0)} \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Bleibt noch der Fall:

(132) 2_2. $\delta_{01}^{(0)}$ existiert nicht.

Dann ist t die von p verschiedene der Zahlen 1, 2, also nach (76.1), (76.2)

(133) $$\operatorname{sg} J(\alpha_1) \neq \operatorname{sg} J(\beta_1).$$

(134) $$|J(\alpha_1) - J(\beta_1)| > \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Da $\delta_{01}^{(0)}$ nicht existiert, gibt es nach $\mathfrak{V}_5$ keine Zahl x, für die $|\delta_{11}^{(0)} - \delta_{21}^{(0)} + x| < 1$ wäre, d. h. es ist

(135) $$|\alpha_1 - \beta_1 + x| > 1 \text{ für alle } x.$$

Weiter folgt wegen (114) $|J(\delta_{pq}^{(0)})| = |J(\delta_{p1}^{(0)})| > 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$, $|J(\delta_{t1}^{(0)})| > 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$, also

(136) $$|J(\alpha_1)|,\ |J(\beta_1)| > 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

und wegen (75)

(137) $$\begin{vmatrix} v_{pq}^{(0)} & w_{pq}^{(0)} \\ v_{t1}^{(0)} & w_{t1}^{(0)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_{p1}^{(0)} & w_{p1}^{(0)} \\ v_{t1}^{(0)} & w_{t1}^{(0)} \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Insgesamt erhalten wir (vgl. hierzu (93)):

(138)
- $\alpha_1, \beta_1, 1$ sind linear unabhängig (aus (124), (131), (137)),
- $\operatorname{sg} J(\alpha_1) \neq \operatorname{sg} J(\beta_1)$ (aus (120), (127), (133)), $|J(\alpha_1) - J(\beta_1)| > \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$ (aus (122), (129), (134)),
- $|\beta_1| < 1$ (aus (116)), $|\beta_1 - 1| > 1$, $R(\beta_1) < \tfrac{1}{2}$ (aus (118)),
- $\min\{|J(\alpha_1)|, |J(\beta_1)|\} > 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$ (aus (121), (128), (137)),
- $|\alpha_1| < 1$ (aus (116)), $|\alpha_1 - 1| > 1$, $R(\alpha_1) < \tfrac{1}{2}$ (aus (118)),
- $|\alpha_1 - \beta_1 + x| > 1$ für alle x (aus (123), (130), (135)).

Aus (112), (124), (131), (137) folgt allgemein:

(139) $\mathfrak{U}_0$ ist umkehrbar ganzzahlig,

aus (106), (115)

(140) $$a_{21}^{(1)},\ a_{11}^{(1)} > a_{31}^{(1)} > 0.$$

Wegen (113), (138) wird nach Satz 14 das Tripel $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = (\alpha_1, \beta_1, 1)$ durch die für $(\alpha_1, \beta_1, 1)$ erklärte B-Transformation in ein normiertes Tripel übergeführt: $(\varrho_1, \sigma_1, \tau_1)$ ist normiert,

(141) der Algorithmus ist sicher bis zur Bestimmung von $(1, \varphi_1, \chi_1)$ durchführbar.

Satz 15: *Der Algorithmus ist durchführbar. Für alle* $n \geqq 1$ *gilt:*

A. *Die* $\mathfrak{A}_n$ *und* $\mathfrak{U}_{n-1}$ *haben nur nichtnegative Koeffizienten und sind umkehrbar ganzzahlig.*

B. a) *Im Falle* $\min\{|J(a_n)|, |J(\beta_n)|\} < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ *gilt*

$$a_{21}^{(n)}, a_{11}^{(n)} > a_{31}^{(n)} > 0,$$

ferner bei $|\beta_n| < \frac{1}{2}\sqrt{3}$: $a_{21}^{(n)} > a_{11}^{(n)}$,

bei $|\beta_n + 1| < \frac{1}{2}\sqrt{3}$: $a_{21}^{(n)} + a_{31}^{(n)} > a_{11}^{(n)}$;

b) *im Falle* $\min\{|J(\alpha_n)|, |J(\beta_n)|\} > 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ *gilt*

$$a_{21}^{(n)} > a_{11}^{(n)} > a_{21}^{(n)} > 0.$$

C. *Das Tripel* $(\alpha_n, \beta_n, 1)$ *besitzt die Eigenschaften:*

(142.1) $\alpha_n, \beta_n, 1$ *sind linear unabhängig.*

(142.2) $\operatorname{sg} J(\alpha_n) \neq \operatorname{sg} J(\beta_n)$. (142.3) $|J(\alpha_n) - J(\beta_n)| > \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

(142.4) $|\beta_n| < 1$. (142.5) $|\beta_n - 1| > 1$, $R(\beta_n) < \frac{1}{2}$.

im Falle $\min\{|J(\alpha_n)|, |J(\beta_n)|\} < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

(143.1) $|\alpha_n| < \frac{1}{2}\sqrt{3}$. (143.2) $|\alpha_n - 1| > \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $R(\alpha_n) < \frac{1}{2}$,

(143.3) $|J(\beta_n)| < \frac{1}{2}\sqrt{3}$,

im Falle $\min\{|J(\alpha_n)|, |J(\beta_n)|\} > 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

(144.1) $|\alpha_n| < 1$. (144.2) $|\alpha_n - 1| > 1$, $R(\alpha_n) < \frac{1}{2}$.

(144.3) $|\alpha_n - \beta_n + x| > 1$ *für alle* x.

D. a) *Sei* $\min\{|J(\alpha_n)|, |J(\beta_n)|\} < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Ist (a, b, c) *irgendein Tripel, für welches* $a\alpha_n + b\beta_n + c$ *in* B(1) *liegt, so ist* (a, b) *mit* $(0, 0)$ *vergleichbar.*

b) *Sei* $\min\{|J(\alpha_n)|, |J(\beta_n)|\} > 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Ist (a, b, c) *irgendein Tripel, für welches* $|a\alpha_n + b\beta_n + c| < 1$, *so ist* (a, b) *mit* $(0, 0)$ *vergleichbar.*

E. *Sei* $d_{\mathfrak{A}_n}(x, y, z) = x a_{11}^{(n)} + y a_{21}^{(n)} + z a_{31}^{(n)}$ *und*

a) $\min\{|J(\alpha_n)|, |J(\beta_n)|\} < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Ist (a, b, c) *ein von* $(1, 0, 0)$, $(1, 0, -1)$, $(0, 1, 0)$ *verschiedenes Tripel, für welches* $|a\alpha_n + b\beta_n + c| < 1$, *so gilt*

im Falle $a > 0$ $b = 0$ $\quad d_{\mathfrak{A}_n}(a, b, c) > a_{11}^{(n)} > 0$,

$a = 0$ $b > 0$ $\quad d_{\mathfrak{A}_n}(a, b, c) > a_{21}^{(n)} > 0$,

$a > 0$ $b > 0$ $\quad d_{\mathfrak{A}_n}(a, b, c) > a_{11}^{(n)}, a_{21}^{(n)} > 0$.

Ferner gilt $\quad d_{\mathfrak{A}_n}(1, 0, 0) = a_{11}^{(n)} > 0$.

$d_{\mathfrak{A}_n}(0, 1, 0) = a_{21}^{(n)} > 0$,

$d_{\mathfrak{A}_n}(1, 0, -1) = a_{11}^{(n)} - a_{31}^{(n)} > 0$.

Ist (a, b, c) *ein Tripel mit* $a = 0$, $b > 0$ *und* $|a\alpha_n + b\beta_n + c| < \frac{1}{2}\sqrt{3}$, *so gilt*

$$d_{\mathfrak{A}_n}(a, b, c) > a_{11}^{(n)} > 0.$$

b) $\min\{|J(\alpha_n)|, |J(\beta_n)|\} > 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Ist (a, b, c) *ein von* $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ *verschiedenes Tripel mit* $|a\alpha_n + b\beta_n + c| < 1$, *so gilt*

$$\begin{aligned} &\textit{im Falle} \quad a > 0 \quad b = 0 \qquad d_{\mathfrak{A}_n}(a, b, c) > a_{11}^{(n)} > 0, \\ &\qquad\qquad\quad a = 0 \quad b > 0 \qquad d_{\mathfrak{A}_n}(a, b, c) > a_{21}^{(n)} > 0, \\ &\textit{im Falle} \quad a > 0 \quad b > 0 \qquad d_{\mathfrak{A}_n}(a, b, c) > a_{11}^{(n)},\ a_{21}^{(n)} > 0. \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} d_{\mathfrak{A}_n}(1, 0, 0) &= a_{11}^{(n)} > 0, \\ d_{\mathfrak{A}_n}(0, 1, 0) &= a_{21}^{(n)} > 0. \end{aligned}$$

F. *Sind zwei Tripel* (a_i, b_i, c_i) $(i = 1, 2)$ *gegeben, für die*

$$-1 < R(a_i\alpha_n + b_i\beta_n + c_i) < \tfrac{1}{2} \qquad (i = 1, 2),$$

so folgt aus $(a_1, b_1) > (a_2, b_2) > (0, 0)$

$$d_{\mathfrak{A}_n}(a_1, b_1, c_1) > d_{\mathfrak{A}_n}(a_2, b_2, c_2).$$

Beweis: Die Behauptungen A, B, C sind uns aus (106), (113), (115), (138), (139) für den Index $n = 1$ bereits bekannt. Außerdem wissen wir aus (141), daß der Algorithmus bis zur Bestimmung von $(1, \varphi_1, \chi_1)$ durchführbar ist. Der Beweis läuft nun so:

Unter der Annahme, daß A, B, C für den Index $h \geqq 1$ gelten, beweisen wir die Aussagen D, E, F für den Index h. Unter der weiteren Annahme, daß der Algorithmus bis zur Bestimmung von $(1, \varphi_h, \chi_h)$ durchführbar ist, beweisen wir A, B, C für den Index $h + 1$. Dabei zeigen wir zugleich, daß der Algorithmus bis zur Bestimmung von $(1, \varphi_{h+1}, \chi_{h+1})$ durchführbar ist.

A, B, C sollen für den Index h gelten.

Wir beweisen D a) für den Index h. Wir haben $|J(a\alpha_h + b\beta_h + c)| < \frac{1}{2}\sqrt{3}$, also $|aJ(\alpha_h) + bJ(\beta_h)| < \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Aus (142. 2), (142. 3) folgt die Behauptung.

Wir beweisen D b) für den Index h. Wir haben $|J(a\alpha_h + b\beta_h + c)| < 1$, also

$$|aJ(\alpha_h) + bJ(\beta_h)| < 1. \tag{145}$$

Wäre jetzt (a, b) nicht mit $(0, 0)$ vergleichbar, also $|a|, |b| \geqq 1$, $\operatorname{sg} a \neq \operatorname{sg} b$, so folgte zunächst aus (142. 2) und (145)

$$|aJ(\alpha_h) + bJ(\beta_h)| = |a|\,|J(\alpha_h)| + |b|\,|J(\beta_h)| < 1.$$

Wegen (144. 3) ist nun aber $(a, b) \neq (1, -1)$, $(-1, 1)$, also $|a|$ oder $|b| \geqq 2$. Daraus, aus (142. 3) und $|J(\alpha_n)|, |J(\beta_n)| > 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ schließen wir

$$\begin{aligned} &|aJ(\alpha_h) + bJ(\beta_h)| = |a|\,|J(\alpha_h)| + |b|\,|J(\beta_h)| \\ &\geqq |J(\alpha_h)| + |J(\beta_h)| + \min\{|J(\alpha_h)|, |J|(\beta_h)|\} > \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + (1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}) = 1, \end{aligned}$$

im Widerspruch zu (145).

Wir beweisen E a) für den Index h. Wir wenden den Hilfssatz 12 auf $\delta_1 = \alpha_h$, $\delta_2 = \beta_h$, $\delta = a\alpha_h + b\beta_h + c$ an. Dazu sind wir wegen (142.5), (143.2), $|\delta| = |a\alpha_h + b\beta_h + c| < 1$ berechtigt. Wir haben mit Rücksicht auf B für den Index $n = h$, indem wir $(a, b, c) \neq (1, 0, 0)$, $(1, 0, -1)$, $(0, 1, 0)$ voraussetzen:

Wenn $a + b \equiv 0$ (2) $\quad d_{\mathfrak{A}_h}(a, b, c) \geqq a\,a_{11}^{(h)} + b\,a_{21}^{(h)} - \frac{a+b}{2}\,a_{31}^{(h)}$, also

bei $a > 0$ $b = 0$, mithin $a \geqq 2$, $\quad d_{\mathfrak{A}_h}(a, b, c) > a_{11}^{(h)} + \left(a - 1 - \frac{a}{2}\right) a_{31}^{(h)} \geqq a_{11}^{(h)}$,

bei $a = 0$ $b > 0$, $\quad d_{\mathfrak{A}_h}(a, b, c) > a_{21}^{(h)} + \left(b - 1 - \frac{b}{2}\right) a_{31}^{(h)} \geqq a_{21}^{(h)}$,

bei $a > 0$ $b > 0$, $\quad d_{\mathfrak{A}_h}(a, b, c) > a_{11}^{(h)} + \left(a - 1 + b - \frac{a+b}{2}\right) a_{31}^{(h)} \geqq a_{11}^{(h)}$,

$$d_{\mathfrak{A}_h}(a, b, c) > a_{21}^{(h)} + \left(a + b - 1 - \frac{a+b}{2}\right) a_{31}^{(h)} \geqq a_{21}^{(h)},$$

wenn $a + b \equiv 1$ (2)

bei $a = 1$ $b = 0$, mithin (wegen (143.2)) $c > 0$,

$$d_{\mathfrak{A}_h}(a, b, c) = a_{11}^{(h)} + c\,a_{31}^{(h)} > a_{11}^{(h)},$$

bei $a = 0$ $b = 1$, mithin (wegen (142.5)) $c > 0$,

$$d_{\mathfrak{A}_h}(a, b, c) = a_{21}^{(h)} + c\,a_{31}^{(h)} > a_{21}^{(h)},$$

in den übrigen Fällen unter Benutzung der Ungleichung

$$d_{\mathfrak{A}_h}(a, b, c) \geqq a\,a_{11}^{(h)} + b\,a_{21}^{(h)} - \frac{a+b+1}{2}\,a_{31}^{(h)},$$

bei $a > 1$ $b = 0$, mithin $a \geqq 3$, $d_{\mathfrak{A}_h}(a, b, c) > a_{11}^{(h)} + \left(a - 1 - \frac{a+1}{2}\right) a_{31}^{(h)} \geqq a_{11}^{(h)}$,

bei $a = 0$ $b > 1$, $d_{\mathfrak{A}_h}(a, b, c) > a_{21}^{(h)} + \left(b - 1 - \frac{b+1}{2}\right) a_{31}^{(h)} \geqq a_{21}^{(h)}$,

bei $a > 0$ $b > 0$, $d_{\mathfrak{A}_h}(a, b, c) > a_{11}^{(h)} + \left(a - 1 + b - \frac{a+b+1}{2}\right) a_{31}^{(h)} \geqq a_{11}^{(h)}$,

$$d_{\mathfrak{A}_h}(a, b, c) > a_{21}^{(h)} + \left(a + b - 1 - \frac{a+b+1}{2}\right) a_{31}^{(h)} \geqq a_{21}^{(h)}.$$

Sei jetzt $b \geqq 1$, $|b\beta_h + c| < \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und

1. $|J(\beta_h)| > 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Dann gilt wegen (142.3) $|J(\beta_h)| > \sqrt{3} - 1$, somit $b = 1$ und mit Rücksicht auf (142.4) $c = 0$ oder 1. Mit B a) folgt also

wenn $c = 0$, mithin $|\beta_h| > \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\quad d_{\mathfrak{A}_h}(a, b, c) = a_{21}^{(h)} > a_{11}^{(h)}$;

wenn $c = 1$, mithin $|\beta_h + 1| < \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\quad d_{\mathfrak{A}_h}(a, b, c) = a_{21}^{(h)} + a_{31}^{(h)} > a_{11}^{(h)}$.

2. $|J(\beta_h)| < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Ist $|\beta_h| < \frac{1}{2}\sqrt{3}$, so folgt aus B a) $a_{21}^{(h)} > a_{11}^{(h)}$, somit aus der 2. Behauptung von E a) $d_{\mathfrak{A}_h}(a, b, c) > a_{21}^{(h)} > a_{11}^{(h)}$. Ist $\frac{1}{2}\sqrt{3} < |\beta_h| < 1$, so ist wegen $R(\beta_h) < \frac{1}{2}$, $|J(\beta_h)| < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$: $R(\beta_h) < -\frac{1}{2}$, somit $c > -1 + \frac{b}{2}$, andererseits $|\beta_h + 1| < \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Also folgt aus B a), wenn $b = 1$, mithin (wegen (142.4)) $c > 0$,

$$d_{\mathfrak{A}_h}(0, b, c) \geqq a_{21}^{(h)} + a_{31}^{(h)} > a_{11}^{(h)},$$

wenn $b \geqq 2$,

$$d_{\mathfrak{A}_h}(0, b, c) > a_{21}^{(h)} + a_{31}^{(h)} + (b - 1 + c - 1)\, a_{31}^{(h)},$$
$$> a_{11}^{(h)} + (b - 1 - 1 + \frac{b}{2} - 1)\, a_{31}^{(h)} \geqq a_{11}^{(h)}.$$

Die übrigen Aussagen von E a) folgen direkt aus B für $n = h$.

Wir beweisen E b) für den Index h. Wir verwenden wiederum Hilfssatz 12 ($\delta_1 = \alpha_h$, $\delta_2 = \beta_h$, $\delta = a\,\alpha_h + b\,\beta_h + c$). Das ist wegen (142. 5), (144. 2), $|\delta| < 1$ möglich. Wir machen unter Benutzung von B für den Index $n = h$ dieselben Abschätzungen wie eben. In den Fällen $(a, b) = (0, 1)$, $(1, 0)$ müssen (142. 5) bzw. (144. 2) benutzt werden.

Wir beweisen F für den Index h. Dazu benötigen wir den

Hilfssatz 16: *Seien* δ_1, δ_2 *Zahlen mit* $R(\delta_1)$, $R(\delta_2) < \frac{1}{2}$. *Seien ferner* (a_i, b_i, c_i) $(i = 1, 2)$ *zwei Tripel mit* $(a_1, b_1) > (a_2, b_2) > (0, 0)$ *und* $-1 < R(a_i\,\delta_1 + b_i\,\delta_2 + c_i) < \frac{1}{2}$. *Dann gilt für die Differenz* $(a, b, c) = (a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)$:

im Falle $a + b \equiv 0 \quad (2)$ $\qquad c \geqq -1 - \frac{a+b}{2}$,

im Falle $a + b \equiv 1 \quad (2)$ $\qquad c \geqq -\frac{1}{2} - \frac{a+b}{2}$.

Beweis: Wir haben $-\frac{3}{2} < R(a\,\delta_1 + b\,\delta_2 + c) < \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + c$, $c > -\frac{3}{2} - \frac{a+b}{2}$. Daraus folgt die Behauptung.

Wir wenden Hilfssatz 16 auf $\delta_1 = \alpha_h$, $\delta_2 = \beta_h$ an. Das ist wegen (143. 2), (144. 2), (142. 5) möglich. Mit Rücksicht auf B für den Index $n = h$ folgt im Falle $a + b \equiv 0 \quad (2)$

$$d_{\mathfrak{A}_h}(a_1, b_1, c_1) - d_{\mathfrak{A}_h}(a_2, b_2, c_2) > \left(\frac{a+b}{2} - 1\right) a_{31}^{(h)} \geqq 0,$$

im Falle $a + b \equiv 1 \quad (2)$

$$d_{\mathfrak{A}_h}(a_1, b_1, c_1) - d_{\mathfrak{A}_h}(a_2, b_2, c_2) > \left(\frac{a+b}{2} - \frac{1}{2}\right) a_{31}^{(h)} \geqq 0.$$

Unter der Annahme, daß der Algorithmus bis zur Bestimmung von $(1, \varphi_h, \chi_h)$ durchführbar ist, beweisen wir A B C für den Index $(h + 1)$. Wir bestimmen die ausgezeichneten Lösungen der Ungleichung

$$0 < |x + y\,\varphi_h + z\,\chi_h| < 1. \tag{146}$$

Das ist möglich, da $(1, \varphi_h, \chi_h)$ mit $(\varrho_h, \sigma_h, \tau_h)$ normiert ist. Wir wissen zunächst nur, daß $u_{11}^{(h)}, u_{21}^{(h)}$ existieren. Sei (u, v, w) irgendeine Lösung von (146). Dann gilt nach Hilfssatz 14, angewendet auf $m = h$,

$$\varrho_h \dots \varrho_1 \cdot (u + v\,\varphi_h + w\,\chi_h) = \frac{1}{\varrho_0} \cdot (u, v, w) \cdot \mathfrak{C}_h \cdot (\varrho_0, \sigma_0, \tau_0) \tag{147}$$
$$= \left(d + f\,\frac{\sigma_0}{\varrho_0} + g\,\frac{\tau_0}{\varrho_0}\right) = (d + f\,\varphi_0 + g\,\chi_0)\cdot$$

Nach Hilfssatz 15, angewendet auf $n = 1, 2, \ldots, h$, ist $\varrho_k = \alpha_k$ für alle $k = 1, \ldots, h$, also wegen (143. 1), (144. 1) $|\varrho_1 \ldots \varrho_h| < 1$. (147) besagt somit, daß (d, f, g) eine Lösung von (103); insbesondere sind wegen (147)

(148) die Zeilen von $\mathfrak{A}_{h+1}$ Lösungen von (103).

Da $(1, \varphi_0, \chi_0)$ normal, $|\mathfrak{C}_h|$ mit $|\mathfrak{A}_h|$ und $|\mathfrak{S}_h|$ von Null verschieden, folgt:

(149) für untereinander verschiedene Lösungen (u, v, w), von (146) sind die $d_{\mathfrak{C}_h}(u, v, w)$ untereinander verschieden.

Da $\mathfrak{S}_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & l_2 \end{pmatrix}$, folgt weiter für jede Lösung (u, v, w) von (146) $d_{\mathfrak{C}}(u, v, w) = u a_{11}^{(h)} + v a_{21}^{(h)} + (l_1 v + l_2 w) a_{31}^{(h)}$ und $\varrho_h \cdot (u + v \varphi_h + w \chi_h) = u \alpha_h + v \beta_h + (l_1 v + l_2 w)$. Wegen $|\varrho_h| = |\alpha_h|$ ist also

$$(a, b, c) = (u, v, l_1 v + l_2 w)$$

im Falle a) $\min\{|J(\alpha_h)|, |J(\beta_h)|\} < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ wegen (143. 1) Lösung von

$$0 < |a \alpha_h + b \beta_h + c| < \tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

im Falle b) $\min\{|J(\alpha_h)|, |J(\beta_h)|\} > 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ wegen (144. 1) Lösung von

$$0 < |a \alpha_h + b \beta_h + c| < 1.$$

Also folgt für beide Fälle, daß $(a, b, c) \neq (1, 0, 0)$ und im Falle a) wegen (143. 2), daß $|a, b, c| \neq (1, 0, -1)$. Somit ergeben B, E für $n = h$

(150) $$d_{\mathfrak{C}_h}(u, v, w) > a_{11}^{(h)} > 0$$

für alle nichtnegativen Lösungen (u, v, w) von (146).

a) Sei $\min\{|J(\delta_{11}^{(h)})|, |J(\delta_{21}^{(h)})|\} < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Die Existenz einer ausgezeichneten Lösung $u_{ik}^{(h)}$ von (146), für die $|\delta_{ik}^{(h)}| < \frac{1}{2}\sqrt{3}$, folgt wie unter (105) aus (151):

(151) Es gibt eine ausgezeichnete Lösung $u_{ik}^{(h)}$, für die $|\delta_{ik}^{(h)}| < \sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Da nach (149) alle $d_{ik}^{(h)}$ (Definition im Algorithmus) untereinander verschieden sind, folgt, daß $u_{pq}^{(h)}$ eindeutig bestimmt ist. Die Existenz von u_{t1} folgt aus (74), (78. 2). Aus (150) folgt für $(u, v, w) = u_{pq}^{(h)}$ bzw. $u_{t1}^{(h)}$ $d_{pq}^{(h)} = a_{11}^{(h+1)} > a_{11}^{(h)}$, $d_{t1}^{(h)} = a_{21}^{(h+1)} > a_{11}^{(h)}$. Ist $|\delta_{t1}^{(h)}| < \frac{1}{2}\sqrt{3}$, so folgt wegen der Minimaleigenschaft von $d_{pq}^{(h)}$ $a_{11}^{(h+1)} < a_{21}^{(h+1)}$, ist $|\delta_{t2}^{(h)}| < \frac{1}{2}\sqrt{3}$, ebenso $a_{11}^{(h+1)} < a_{21}^{(h+1)} + a_{31}^{(h+1)}$. Da $a_{11}^{(h)} = a_{31}^{(h+1)}$, folgt die Behauptung B für den Index $(h + 1)$.

Wegen $p \neq t$; $p, t = 1$ oder 2 folgt $\min\{|J(\alpha_{h+1})|, |J(\beta^{h+1})|\} < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

(142. 1) bis (142. 5), (143. 1), (143. 3), sowie $|\mathfrak{U}_{n-1}| = \pm 1$ folgen jetzt für den Index $h + 1$ wie unter (105) für den Index $n = 1$. Nur die erste Ungleichung von (143. 2) bedarf einer besonderen Herleitung.

Angenommen $|\delta_{pq}^{(h)} - 1|$ wäre $< \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Dann folgte wegen (76.3) $q = 2$ und es wäre $|\delta_{p1}^{(h)}|$ neben $|\delta_{p2}^{(h)}| < \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Nach (70) ist

$$d_{p2}^{(h)} = (u_{p1}^{(h)} + 1)\, c_{11}^{(h)} + v_{p1}^{(h)}\, c_{21}^{(h)} + w_{p1}^{(h)}\, c_{31}^{(h)},\quad d_{p2}^{(h)} = c_{11}^{(h)} + d_{p1}^{(h)}.$$

Nun ist aber $c_{11}^{(h)} = a_{11}^{(h)} > 0$, also $d_{p1}^{(h)} < d_{p2}^{(h)}$ im Widerspruch zur Minimaleigenschaft von $d_{p2}^{(h)} = d_{pq}^{(h)}$.

b) Sei $\min\{|J(\delta_{11}^{(h)})|,\ |J(\delta_{21}^{(h)})|\} > 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

In diesem Fall wird sich $\min\{|J(\alpha_{h+1})|, |J(\beta_{h+1})|\} > 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ mitergeben. Da nach (149) alle $d_{ik}^{(h)}$ verschieden sind, folgt, daß $u_{pq}^{(h)}$ eindeutig bestimmt ist. Die Existenz von u_{t1} folgt aus (76.1), (74). Damit sind $\alpha_{h+1} = \delta_{pq}^{(h)}$, $\beta_{h+1} = \delta_{t1}^{(h)}$ eindeutig bestimmt und (142.4), (144.1) gesichert. Ferner gilt die (117) entsprechende Gleichung

$$q = 1. \tag{152}$$

Wäre nämlich $q = 2$, so folgte $p = 1$ oder 2 und damit $d_{pq}^{(h)} = d_{p1}^{(h)} + c_{11}^{(h)} = d_{p1}^{(h)} + a_{11}^{(h)} > d_{p1}^{(h)}$, im Widerspruch zur Minimaleigenschaft von $d_{pq}^{(h)}$. Aus (152), (76.2), (76.3), (78.2), (78.3) folgen also (142.5), (144.2) für den Index $h+1$. Der Nachweis von B für $n = h+1$ erfolgt wie unter a).

Sei jetzt $\delta_{pq}^{(h)} = \delta_{01}^{(h)}$ (vgl. (119)). Dann folgen (142.1) bis (142.3), (144.3), sowie $|\mathfrak{U}_{n-1}| = \pm 1$, $|J(\alpha_n)| > \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $|J(\beta_n)| > 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ für den Index $n = h+1$ wie für den Index $n = 1$, da die Eigenschaften der $d_{ik}^{(0)}$ unter (119) nicht benutzt wurden.

Sei nun $\delta_{pq}^{(h)}$ verschieden von dem existierenden $\delta_{01}^{(h)}$ (vgl. (125), (126)), also $p = 1$ oder 2. Sei l die von p verschiedene der Zahlen 1, 2. Aus (76.4) und $|\delta_{p1}^{(h)}| < 1$ folgt mit Rücksicht auf (152)

$$-1 < R(\delta_{pq}^{(h)}), \qquad R(\delta_{l1}^{(h)}) < \tfrac{1}{2} \tag{153}$$

und aus (78.3)

$$R(\delta_{01}^{(h)}) < \tfrac{1}{2}. \tag{154}$$

Angenommen, es wäre $(v_{l1}^{(h)}, w_{l1}^{(h)}) < (v_{pq}^{(h)}, w_{pq}^{(h)})$. Dann folgte nach (72) $u_{01}^{(h)} = u_{pq}^{(h)} - u_{l1}^{(h)} + (x, 0, 0)$, wo x eine gewisse Zahl, weiter $\delta_{01}^{(h)} = \delta_{pq}^{(h)} - \delta_{l1}^{(h)} + x$, $R(\delta_{01}^{(h)}) = R(\delta_{pq}^{(h)}) - R(\delta_{l1}^{(h)}) + x$, $x = R(\delta_{01}^{(h)}) + R(\delta_{l1}^{(h)}) - R(\delta_{pq}^{(h)})$ und wegen (153), (154) $x < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1$, $x \leqq 1$. Nun haben wir $d_{01}^{(h)} = d_{pq}^{(h)} - d_{l1}^{(h)} + x\, c_{11}^{(h)} = d_{pq}^{(h)} - d_{l1}^{(h)} + x\, a_{11}^{(h)}$. Aus (150) folgt $d_{l1}^{(h)} > a_{11}^{(h)} > 0$, also wegen $x \leqq 1$ $d_{01}^{(h)} \leqq d_{pq}^{(h)} - d_{l1}^{(h)} + a_{11}^{(h)} < d_{pq}^{(h)}$ im Widerspruch zur Minimaleigenschaft von $d_{pq}^{(h)}$. Also muß wegen (78.4) $(v_{l1}^{(h)}, w_{l1}^{(h)}) > (v_{pq}^{(h)}, w_{pq}^{(h)})$ sein.

Auf Grund der eben hergeleiteten Ungleichung können wir dieselben Schlüsse machen wie unter (125), (126): Wegen (152) und (72) ist $J(\delta_{01}^{(h)}) = J(\delta_{l1}^{(h)}) - J(\delta_{pq}^{(h)})$ u. s. f.. Auf diese Weise ergeben sich (142.1) bis (142.3), (144.3), sowie $|\mathfrak{U}_{n-1}| = \pm 1$, $|J(\alpha_n)| > 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $|J(\beta_n)| > \frac{1}{2}\sqrt{3}$ für den Index $n = h+1$.

Letzter Fall: $\delta_{01}^{(h)}$ soll nicht existieren, also insbesondere p von 0 verschieden sein (vgl. (132)). (142.1) bis (142.3), (144.3), sowie $|\mathfrak{U}_{n-1}| = \pm 1$, $|J(\alpha_n)|$, $|J(\beta_n)| > 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ergeben sich für $n = h+1$ wie für $n = 1$, da unter (132) Eigenschaften der $d_{ik}^{(0)}$ nicht benutzt wurden.

Insgesamt sind B C für den Index $n = h+1$ sichergestellt. Gleichzeitig ergibt sich aus unserem Beweis der Hilfssatz 17 (siehe unten). Außerdem wissen wir, daß $|\mathfrak{U}_h| = \pm 1$. Daraus und aus $|\mathfrak{S}_h| = \pm 1$, $|\mathfrak{A}_h| = \pm 1$ folgt $|\mathfrak{A}_{h+1}| = \pm 1$. Da nach (148) die Zeilen von $\mathfrak{A}_{h+1}$ Lösungen von (103) sind, folgt aus der Normalität von $(1, \varphi_0, \chi_0)$ und aus B für den Index $h+1$, daß alle Elemente von $\mathfrak{A}_{h+1}$ positiv sind. Damit ist auch A für $n = h+1$ bewiesen.

Wegen C für $n = h+1$ und Satz 14 wird $(\alpha_{h+1}, \beta_{h+1}, 1)$ durch die zu ihm gehörige B-Transformation in ein normiertes Tripel übergeführt. Damit sind die normierten Tripel $(\varrho_{h+1}, \sigma_{h+1}, \tau_{h+1})$, $(1, \varphi_{h+1}, \chi_{h+1})$ bestimmbar und unser Satz ist bewiesen.

Hilfssatz 17: *Sei* $n \geqq 1$. *Ist* $\min\{|J(\delta_{11}^{n-1})|, |J(\delta_{21}^{n-1})|\} < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$, *so ist* $\min\{|J(\alpha_n)|, |J(\beta_n)|\} < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ *und umgekehrt.*

Satz 16: *Sei* $n \geqq 0$.

A. $\mathfrak{B}_n = \begin{pmatrix} u_{11}^{(n)} & v_{11}^{(n)} & w_{11}^{(n)} \\ u_{21}^{(n)} & v_{21}^{(n)} & w_{21}^{(n)} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *ist umkehrbar ganzzahlig.*

D. *Ist* (a, b, c) *irgend ein Tripel, für welches* $a\,\delta_{11}^{(n)} + b\,\delta_{21}^{(n)} + c$ *in* B(1) *liegt, so ist* (a, b) *mit* $(0, 0)$ *vergleichbar.*

E. *Sei* $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{V}_n \cdot \mathfrak{C}_n = (b_{ik}^{(n)})$, $d_{\mathfrak{B}_n}(x, y, z) = x\,b_{11}^{(n)} + y\,b_{21}^{(n)} + z\,b_{31}^{(n)}$. *Ist* (a, b, c) *irgend ein von* $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ *verschiedenes Tripel, für welches* $|a\,\delta_{11}^{(n)} + b\,\delta_{21}^{(n)} + c| < 1$, *so gilt*

im Falle $a > 0 \quad b = 0 \qquad d_{\mathfrak{B}_n}(a, b, c) > d_{11}^{(n)} > 0$

$a = 0 \quad b > 0 \qquad d_{\mathfrak{B}_n}(a, b, c) > d_{21}^{(n)} > 0$

$a > 0 \quad b > 0 \qquad d_{\mathfrak{B}_n}(a, b, c) > d_{11}^{(n)}, d_{21}^{(n)} > 0.$

F. *Sind zwei Tripel* (a_i, b_i, c_i) $(i = 1, 2)$ *gegeben, für die*

$$-1 < R(a_i\,\delta_{11}^{(n)} + b_i\,\delta_{21}^{(n)} + c) < \tfrac{1}{2},$$

so folgt aus $(a_1, b_1) > (a_2, b_2) > (0, 0)$: $d_{\mathfrak{B}}(a_1, b_1, c_1) > d_{\mathfrak{B}}(a_2, b_2, c_2)$.

Beweis: Die Behauptung A folgt aus (75). Die Behauptung D folgt aus (76.1), (76.2). Für E schließen wir so: Jedenfalls ist nach (76.3), (76.4): $(a, b, c) \neq (1, 0, -1)$, $(0, 1, -1)$ (und erst recht $\neq (1, 0, -a)$, $(0, 1, -a)$ für $a > 1$). Nach (76.4) ist $R(\delta_{11}^{(n)})$, $R(\delta_{21}^{(n)}) < \frac{1}{2}$. Also ist Hilfssatz 12 auf $\delta_1 = \delta_{11}^{(n)}$, $\delta_2 = \delta_{21}^{(n)}$, $\delta = a\,\delta_{11}^{(n)} + b\,\delta_{21}^{(n)} + c$ anwendbar. Schließlich ist $b_{31}^{(n)} = c_{11}^{(n)} = a_{11}^{(n)}$; $d_{11}^{(n)}$, $d_{21}^{(n)} > a_{11}^{(n)} > 0$ für $n \geqq 1$ nach (150), für $n = 0$ wegen $a_{11}^{(0)} = 1$; $d_{ik}^{(0)} = u_{ik}^{(0)}$ nach (104). Damit haben

wir die Mittel, $d_{\mathfrak{B}_n}(a,b,c)$ ebenso abzuschätzen, wie die $d_{\mathfrak{A}_n}(a,b,c)$ auf Seite 373, indem wir das Tripel $(a_{11}^{(h)}, a_{21}^{(h)}, a_{31}^{(h)})$ dem Tripel $(d_{11}^{(h)}, d_{21}^{(h)}, c_{11}^{(h)}) = (b_{11}^{(h)}, b_{21}^{(h)}, b_{31}^{(h)})$ entsprechen lassen. Diese Abschätzungen liefern E.

Um F zu beweisen, wenden wir Hilfssatz 16 auf $\delta_1 = \delta_{11}^{(n)}$, $\delta_2 = \delta_{21}^{(h)}$ an. Das ist wegen (76.4) möglich. Wegen $d_{11}^{(n)}, d_{21}^{(n)} > a_{11}^{(n)} > 0$ für alle $n \geqq 0$ folgt

im Falle $a+b \equiv 0(2)$ $d_{\mathfrak{B}_n}(a_1,b_1,c_1) - d_{\mathfrak{B}_n}(a_2,b_2,c_2) > \left(\frac{a+b}{2} - 1\right) c_{11}^{(n)} \geqq 0$,

im Falle $a+b \equiv 1(2)$ $d_{\mathfrak{B}_n}(a_1,b_1,c_1) - d_{\mathfrak{B}_n}(a_2,b_2,c_2) > \left(\frac{a+b}{2} - \frac{1}{2}\right) c_{11}^{(n)} \geqq 0$.

Damit sind wir fertig.

§ 2.

Der Algorithmus liefert eine Teilfolge der zu berechnenden Minkowskifolge.

Wir setzen für $n \geqq 1$ (vgl. Hilfssatz 11)

$$(155)\quad \begin{cases} \alpha_1^{(n)} = \varrho_0 \cdots \varrho_{n-1}\alpha_n, & \delta_1^{(n)} = \varrho_0 \cdots \varrho_{n-1}\delta_{11}^{(n-1)}, \\ \alpha_2^{(n)} = \varrho_0 \cdots \varrho_{n-1}\beta_n, & \delta_2^{(n)} = \varrho_0 \cdots \varrho_{n-1}\delta_{21}^{(n-1)}, \\ \alpha_3^{(n)} = \varrho_0 \cdots \varrho_{n-1}, & \delta_3^{(n)} = \varrho_0 \cdots \varrho_{n-1}. \end{cases}$$

Die Folgen $\alpha_i^{(n)}$ können wir also mit Hilfe unseres Verfahrens $\mathbf{V}_8$ bestimmen. Sie stehen in engem Zusammenhang mit den in Kap. 2, § 2 eingeführten Folgen λ_n, ν_n, μ_n (vgl. Hauptsatz 6 und die Sätze 20 bis 23). Wir haben nach Hilfssatz 14

$$\varrho_0 \cdots \varrho_{n-1} \cdot \mathfrak{U}_{n-1} \cdot (1, \varphi_{n-1}, \chi_{n-1}) = \mathfrak{U}_{n-1}\mathfrak{C}_{n-1} \cdot (\varrho_0, \sigma_0, \tau_0),$$
$$\varrho_0 \cdots \varrho_{n-1}(\alpha_n, \beta_n, 1) = \mathfrak{A}_n \cdot (\varrho_0, \sigma_0, \tau_0), \text{ d. h.}$$

$$(156.1)\qquad (\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \alpha_3^{(n)}) = \mathfrak{A}_n(\varrho_0, \sigma_0, \tau_0) \qquad (n \geqq 1);$$

entsprechend folgt

$$(156.2)\qquad (\delta_1^{(n)}, \delta_2^{(n)}, \delta_3^{(n)}) = \mathfrak{B}_{n-1} \cdot (\varrho_0, \sigma_0, \tau_0) \qquad (n \geqq 1).$$

Definition 16: *Sei $\lambda = u\varrho_0 + v\sigma_0 + w\tau_0$. Unter dem Zeichen $\overline{|\lambda|}$ wollen wir die eindeutig durch λ bestimmte Zahl u verstehen.*

Bemerkung: Es gilt $\overline{|-\lambda|} = -\overline{|\lambda|}$.

Hauptsatz 6: Sei $n \geqq 1$. *Sei M die Menge aller Zahlen $\lambda = x\varrho_0 + y\sigma_0 + z\tau_0$, für die $x > 0$. Von allen Zahlen λ aus M, die in $B_1(\alpha_3^{(n)})$ liegen, sei ξ_1 die mit minimalem $\overline{|\lambda|}$. Von allen Zahlen λ aus M, die in $B_3(\alpha_3^{(n)})$ liegen, sei ξ_2 die mit minimalem $\overline{|\lambda|}$.*

a) $$\min\left\{ J\left(\frac{\xi_1}{\alpha_3^{(n)}}\right), \left| J\left(\frac{\xi_2}{\alpha_3^{(n)}}\right)\right| \right\} < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Von allen Zahlen λ aus M, für die $|\lambda| < \frac{1}{2}\sqrt{3}\,|\alpha_3^{(n)}|$, sei ξ_3 die mit minimalem $\overline{|\lambda|}$. Liege ξ_3 in B_r $(\alpha_3^{(n)})$ ($r = 1$ oder 2). Von allen Zahlen λ

aus M, die in B_s $(\alpha_3^{(n)})$ ($s = 1$ oder 2, aber $\neq r$) liegen, sei ξ_4 die mit minimalem $|\bar{\lambda}$. Dann ist $\alpha_1^{(n)} = \xi_3$, $\alpha_2^{(n)} = \xi_4$.

b) $$\min\left\{\left|J\left(\frac{\xi_1}{\alpha_3^{(n)}}\right)\right|,\quad J\left(\frac{\xi_2}{\alpha_3^{(n)}}\right)\right\} < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Von allen Zahlen λ aus M, für die $|\lambda| < |\alpha_3^{(n)}|$, sei ξ_5 die mit minimalem $|\bar{\lambda}$. Liege ξ_5 in H_k $(\alpha_3^{(n)})$ ($k = 1$ oder 2). Von allen Zahlen λ aus M, die in $H_l(\alpha_3^{(n)})$ ($l = 1$ oder 2, aber $\neq k$) liegen, sei ξ_6 die mit minimalem $|\bar{\lambda}$. Dann ist $\alpha_1^{(n)} = \xi_5$, $\alpha_2^{(n)} = \xi_6$.

Beweis: Da $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{C}_n$ umkehrbar ganzzahlig, sind die unendlich vielen Tripel $(\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \alpha_3^{(n)})$, $(\delta_1^{(n)}, \delta_2^{(n)}, \delta_3^{(n)})$ Basen desselben Moduls $[\varrho_0, \sigma_0, \tau_0]$. Jede beliebige Zahl $\lambda = x\varrho_0 + y\sigma_0 + z\tau_0$ gestattet also auch eine Darstellung mit ganzen rationalen Koeffizienten durch eine beliebige dieser Basen.

Sei λ Zahl aus M, also $\lambda \neq 0$. Dann ist $\lambda = a\delta_1^{(n)} + b\delta_2^{(n)} + c\delta_3^{(n)}$. λ liege in $B_1(\alpha_3^{(n)})$. Wegen $\delta_3^{(n)} = \alpha_3^{(n)}$ liegt $\dfrac{\lambda}{\alpha_3^{(n)}} = a\delta_{11}^{(n-1)} + b\delta_{21}^{(n-1)} + c$ in $B_1(1)$. Daher ist $(a, b) \neq (0, 0)$ und nach Satz 16, D (a, b) mit $(0, 0)$ vergleichbar. Ist $(a, b) < (0, 0)$, so wenden wir Satz 16, E auf die ebenfalls in $B(1)$ gelegene Zahl $-\dfrac{\lambda}{\alpha_3^{(n)}}$ an. Daraus ergibt sich

$$|\bar{\lambda} = -a d_{11}^{(n-1)} - b d_{21}^{(n-1)} - c_{11}^{(n-1)} > 0, \quad \text{also} \quad |\bar{\lambda} < 0,$$

im Widerspruch zur ersten Voraussetzung über λ. Bleibt also $(a, b) > (0, 0)$. Wegen (76. 1) liegt genau eine der Zahlen $\delta_{11}^{(n-1)}$, $\delta_{21}^{(n-1)}$ in $B_1(1)$. Wir wollen der Einfachheit annehmen, daß $\delta_{21}^{(n-1)}$ in $B_1(1)$ liegt. Wäre jetzt $b = 0$, so läge $\dfrac{\lambda}{\alpha_3^{(n)}} = a\delta_{11}^{n-1} + c$ mit $\delta_{11}^{(n-1)}$ in $B_2(1)$, entgegen der zweiten Voraussetzung über λ. Also ist $b > 0$. Sei $\lambda \neq \delta_2^{(n)}$, also $(a, b, c) \neq (0, 1, 0)$. Dann ergibt Satz 16, E sowohl für $a = 0$, $b > 0$, wie für $a > 0$, $b > 0$, $|\bar{\lambda} > d_{21}^{(n-1)}$. Da $\delta_{21}^{(n-1)}$ in $B_1(1)$, d. h. $\delta_2^{(n)}$ in $B_1(\alpha_3^{(n)})$ liegt und $|\overline{\delta_2^{(n)}} = d_{21}^{(n-1)}$ ist, folgt insgesamt $\xi_1 = \delta_2^{(n)}$. Unter der Annahme, daß $\delta_{11}^{(n-1)}$ in $B_1(1)$ liegt, folgt $a > 0$ und bei entsprechender Anwendung von Satz 16, E $\xi_1 = \delta_1^{(n)}$.

λ liege jetzt in $B_2(\alpha_3^{(n)})$. Dann ergibt sich unter der Annahme, daß $\delta_2^{(n)}$ in $B_1(\alpha_3^{(n)})$, $\delta_1^{(n)}$ in $B_2(\alpha_3^{(n)})$ liegen und $\lambda \neq \delta_1^{(n)}$ ist, entsprechend $|\bar{\lambda} > d_{11}^{(n-1)}$, also $\xi_2 = \delta_1^{(n)}$; und unter der Annahme, daß $\delta_1^{(n)}$ in $B_1(\alpha_3^{(n)})$, $\delta_2^{(n)}$ in $B_2(\alpha_3^{(n)})$ liegen und $\lambda \neq \delta_2^{(n)}$ ist, entsprechend $|\bar{\lambda} > d_{21}^{(n-1)}$, also $\xi_2 = \delta_2^{(n)}$. Insgesamt folgt

(157) $$\xi_1 = \delta_1^{(n)},\ \xi_2 = \delta_2^{(n)} \quad \text{oder} \quad \xi_1 = \delta_2^{(n)},\ \xi_2 = \delta_1^{(n)}$$

und daraus

(158) $$\min\left\{\left|J\left(\frac{\xi_1}{\alpha_3^{(n)}}\right)\right|,\ \left|J\left(\frac{\xi_2}{\alpha_3^{(n)}}\right)\right|\right\} = \min\{|J(\delta_{11}^{(n-1)})|,\ |J(\delta_{21}^{(n-1)})|\}.$$

Im folgenden Teil des Beweises beziehen sich die Buchstaben A bis E auf Satz 15.

a) Sei $\min\{|J(\delta_{11}^{(n-1)})|,\ |J(\delta_{21}^{(n-1)})|\} < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Wegen Hilfssatz 17 können wir D a) E a) anwenden.

λ gehöre wieder zu M. Die Darstellung von λ durch die Basis $(\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \alpha_3^{(n)})$ soll $\lambda = a\alpha_2^{(n)} + b\alpha_2^{(n)} + c\alpha_3^{(n)}$ sein. Dann ist

$$\frac{\lambda}{\alpha_3^{(n)}} = a\alpha_n + b\beta_n + c.$$

Sei $|\lambda| < \frac{1}{2}\sqrt{3}\,|\alpha_3^{(n)}|$. Dann folgt $\left|\frac{\lambda}{\alpha_3^{(n)}}\right| < \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\frac{\lambda}{\alpha_3^{(n)}}$ liegt also bestimmt in $B(1)$. Darum ist $(a, b) \neq (0, 0)$ und nach D a) (a, b) mit $(0, 0)$ vergleichbar; wie oben schließen wir, daß $(a, b) > (0, 0)$ sein muß: Anderenfalls folgte aus E a), angewendet auf $(-a, -b, -c)$: $\overline{|-\lambda} > 0$, was wegen der Zugehörigkeit von λ zu M nicht möglich ist. Wegen (143. 2) ist $(a, b, c) \neq (1, 0, -1)$. Sei $\lambda \neq \alpha_1^{(n)}$, also (a, b, c) auch $\neq (1, 0, 0)$. Dann folgt aus E a) $\overline{|\lambda} > a_{11}^{(n)}$. Ist aber $\lambda = \alpha_1^{(n)}$ — was wegen (143. 1) möglich ist —, so gilt $\overline{|\lambda} = a_{11}^{(n)}$. Folglich ist $\alpha_1^{(n)} = \xi_3$.

ξ_3 liege in $B_r(\alpha_3^{(n)})$, also $\frac{\alpha_1^{(n)}}{\alpha_3^{(n)}} = \alpha_n$ in $B_r(1)$. Dann liegt β_n wegen (142. 2), (142. 4), (143. 3) in $B_s(1)$ ($s \neq r$, $s = 1$ oder 2). Liege λ in $B_s(\alpha_3^{(n)})$. Dann liegt $\frac{\lambda}{\alpha_3^{(n)}} = a\alpha_n + b\beta_n + c$ in $B_s(1)$. Aus D a) folgt, daß (a, b) mit $(0, 0)$ vergleichbar ist. Wir verwenden E a) wie gewohnt zuerst zum Nachweis, daß $(a, b) > (0, 0)$. Wäre nun $b = 0$, so folgte $a > 0$; dann müßte $\frac{\lambda}{\alpha_3^{(n)}}$ in demjenigen der Bereiche $B_i(1)$ $(i = 1, 2)$ liegen, der α_n enthält, d. h. in $B_r(1)$ (Widerspruch). Also folgt $b > 0$, insbesondere $(a, b, c) \neq (1, 0, 0)$, $(1, 0, -1)$. Ist $\lambda \neq \alpha_2^{(n)}$, d. h. (a, b, c) auch $\neq (0, 1, 0)$, so folgt aus E a) $\overline{|\lambda} > a_{21}^{(n)}$. Ist $\lambda = \alpha_2^{(n)}$, so folgt $\overline{|\lambda} = a_{21}^{(n)}$. Daher ist in der Tat $\alpha_2^{(n)} = \xi_4$. Bleibt noch der Fall

b) $\min\{|J(\delta_{11}^{(n-1)})|,\ |J(\delta_{21}^{(n-1)})|\} > 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Nach Hilfssatz 17 können wir D b) und E b) anwenden. λ gehöre zu M, $\lambda = a\alpha_1^{(n)} + b\alpha_2^{(n)} + c\alpha_3^{(n)}$, $\frac{\lambda}{\alpha_3^{(n)}} = a\alpha_n + b\beta_n + c$. Sei $|\lambda| < |\alpha_3^{(n)}|$. Dann ist $\left|\frac{\lambda}{\alpha_3^{(n)}}\right| < 1$, also nach D b) (a, b) mit $(0, 0)$ vergleichbar. Es ist sogar $(a, b) > (0, 0)$ wegen E b) und der Zugehörigkeit von λ zu M. Sei jetzt $\lambda \neq \alpha_1^{(n)}$, also $(a, b, c) \neq (1, 0, 0)$. Dann folgt aus E b) $\overline{|\lambda} > a_{11}^{(n)}$. Ist $\lambda = a_1^{(n)}$, so gilt $\overline{|\lambda} = a_{11}^{(n)}$. Also ist $\alpha_1^{(n)} = \xi_5$.

ξ_5 liege in $H_k(\alpha_3^{(n)})$, also $\frac{\xi_5}{\alpha_3^{(n)}} = \frac{\alpha_1^{(n)}}{\alpha_3^{(n)}} = \alpha_n$ in $H_k(1)$. Dann liegt β_n wegen (142. 2) in $H_l(1)$ ($l \neq k$, $l = 1$ oder 2). Liege λ in $H_l(\alpha_3^{(n)})$. Dann

liegt $\frac{\lambda}{\alpha_3^{(n)}} = a\,\alpha_n + b\,\beta_n + c$ in $H_l(1)$. Wie gewohnt, beweisen wir die Vergleichbarkeit von (a, b) mit $(0, 0)$ aus D b), dann $(a, b) > (0, 0)$, schließlich $b > 0$, also insbesondere $(a, b, c) \neq (1, 0, 0)$. Für $\lambda = \alpha_2^{(n)}$ folgt dann aus E b) $|\overline{\lambda} > a_{21}^{(n)}$, für $\lambda = \alpha_2^{(n)}$ $|\overline{\lambda} = a_{21}^{(n)}$. Also ist $\alpha_2^{(n)} = \xi_6$ w. z. b. w.

Satz 17: *Die Folgen* $|\alpha_1^{(n)}|$, $|\alpha_3^{(n)}|$ *fallen echt monoton.*

Der Beweis folgt mit Rücksicht auf $\alpha_1^{(n)} = \alpha_3^{(n+1)}$ $(n \geqq 1)$ aus $|\alpha_1^{(n+1)}| = |\alpha_{n+1}| \cdot |\alpha_3^{(n+1)}| < |\alpha_3^{(n+1)}|$.

Satz 18 (vgl. Satz 6): *Seien* $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ *irgendwelche positiven reellen Zahlen,* $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \leqq 1$. *Sei* $n \geqq 1$. *Dann gibt es im Kreisring* R: $|\varepsilon_1\,\alpha_1^{(n)}| < |\zeta| < |\varepsilon_2\,\alpha_1^{(n)}|$ *der komplexen* ζ*-Ebene höchstens* $C(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *Elemente der Folge* $\alpha_1^{(n)}$, *wo* $C(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *weder vom Ausgangstripel* $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ *noch vom Index* n *abhängt.*

Beweis: Nach Hauptsatz 6 hat $\alpha_1^{(n)}$ die Eigenschaft:

(159) Gehört λ zu M und ist $|\lambda| < |\alpha_1^{(n)}|$, so gilt $|\overline{\lambda} > a_{11}^{(n)}$.

Wir bedecken den Kreisring R mit $C(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ Kreisen $K_1, K_2, \ldots, K_{C(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}$ vom Radius $\frac{\varepsilon_1}{2}\,|\alpha_1^{(n)}|$ derart, daß jeder Punkt des Innern des Ringes in mindestens einen der Kreise fällt. Gäbe es in R mehr als $C(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ Glieder der Folge $\alpha_1^{(n)}$, so müßten in mindestens einem der Kreise K_i $(i = 1, \ldots, C(\varepsilon_1, \varepsilon_2))$ mindestens zwei Glieder der Folge $\alpha_1^{(n)}$ liegen. Diese zwei Glieder seien $\alpha_1^{(k)}, \alpha_1^{(l)}$. Wir denken sie uns so geordnet, daß $a_{11}^{(k)} > a_{11}^{(l)}$. Das ist wegen Satz 15 B und wegen $a_{11}^{(n)} = a_{31}^{(n+1)}$ für $n \geqq 1$ möglich. Dann gilt für $\lambda = \alpha_1^{(k)} - \alpha_1^{(l)}$: λ gehört zu M, ist dem Betrage nach $\leqq \varepsilon_1\,|\alpha_1^{(n)}|$, also $< |\alpha_1^{(k)}|$, da $|\alpha_1^{(k)}|$ R angehört. Nach (159) muß also $|\overline{\lambda} > a_{11}^{(k)}$ sein. Im Gegensatz dazu folgt aus $a_{11}^{(k)} > a_{11}^{(l)} > 0$ $|\overline{\lambda} = a_{11}^{(k)} - a_{11}^{(l)} < a_{11}^{(k)}$. Also liegen in R nicht mehr als $C(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ Glieder der Folge $\alpha_1^{(n)}$ w. z. b. w.

Aus Satz 18 folgt:

Satz 19: *Die Folgen* $|\alpha_1^{(n)}|$, $|\alpha_3^{(n)}|$ *streben gegen Null.*

Wir setzen

(160) $$(\varrho_0, \sigma_0, \tau_0) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Nach Satz 19 gibt es einen Index n_0 derart, daß $|\alpha_1^{(n)}|$ für alle $n \geqq n_0$ kleiner ist als die Hauptkonstante $\gamma_3(\mathfrak{A})$ der Matrix $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_1' & \alpha_1'' \\ \alpha_2 & \alpha_2' & \alpha_2'' \\ \alpha_3 & \alpha_3' & \alpha_3'' \end{pmatrix}$.

Mit diesem Index n_0 beweisen wir die Sätze 20 bis 23 und die Hilfssätze 19 bis 21. Im folgenden bedeutet μ_n — wenn nicht anders vermerkt — die Folge $\mu_n(\varrho_0, \sigma_0, \tau_0) = \mu_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Satz 20 (vgl. Satz 7): *Sei* $n > n_0$. *Dann ist* $\alpha_3^{(n)}$ *Glied der Folge* μ_n, $\alpha_3^{(n)} = \mu_m$ (*m von n abhängig*) *und*

im Falle a) $\min\{|J(\alpha_n)|, |J(\beta_n)|\} < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\alpha_1^{(n)} (= \alpha_3^{(n+1)}) = \mu_{m+p}$, *wo* p *die kleinste natürliche Zahl ist mit* $|\mu_{m+p}| < \frac{1}{2}\sqrt{3}\,|\mu_m|$,

im Falle b) $\min\{|J(\alpha_n)|, |J(\beta_n)|\} > 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\alpha_1^{(n)} (= \alpha_3^{(n+1)}) = \mu_{m+1}$.

Beweis: Sei also $n > n_0$. Dann gilt nach (159) und nach Definition der Folge μ_n ((35) bis (38)): Jedes $\alpha_1^{(k)}$ ($k \geqq n-1$) ist Glied der Folge μ_n; insbesondere ist also $\alpha_1^{(n-1)} = \mu_m$, wo m eine von n abhängige Zahl. Daraus folgt $\alpha_3^{(n)} = \mu_m$. Da $|\mu_n|$, $|\alpha_1^{(n)}|$ echt monoton fallen, ist nun mit Rücksicht auf (158) und Hilfssatz 17 im Falle a) des Hauptsatzes 6 $\alpha_1^{(n)} = \mu_{m+p}$, wo p die kleinste natürliche Zahl, für die $|\mu_{m+p}| < \frac{1}{2}\sqrt{3}\,|\alpha_3^{(n)}|$, im Falle b) des Hauptsatzes $\alpha_1^{(n)} = \mu_{m+1}$.

Die folgenden Ausführungen haben Satz 21 zum Ziel.

Hilfssatz 18: *Ist* $|\mu_l| < |\mu_r|$ *oder, was auf dasselbe hinauskommt,* $l > r$, *so gilt*

$$|\mu_l - \mu_r| > |\mu_l|, \qquad R\left(\frac{\mu_l}{\mu_r}\right) < \frac{1}{2}.$$

Beweis: Sei $\lambda = \mu_l - \mu_r$. Wir haben nach Hilfssatz 10 $\overline{|\mu_l|} > \overline{|\mu_r|}$, also $0 < \overline{|\lambda|} < \overline{|\mu_l|}$. Daher ist nach (37) $|\lambda| \geqq |\mu_l|$. Da $\overline{|\lambda|} > 0$, $\overline{|-\mu_l|} < 0$, ist $\lambda \neq -\mu_l$. Wegen $\overline{|\lambda|} < \overline{|\mu_l|}$ ist λ auch $\neq +\mu_l$. Zusammen folgt $|\lambda| > |\mu_l|$ w. z. b. w.

Bis zur Formulierung des Satzes 21 sei n ein *fester* Index $> n_0$, $\min\{|J(\delta_{11}^{(n-1)})|, |J(\delta_{21}^{(n-1)})|\} < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Hilfssatz 19: *Unter den Zahlen*

$$\delta_1^{(n)}, \quad \delta_2^{(n)}, \quad \delta_1^{(n)} + \delta_3^{(n)}, \quad \delta_2^{(n)} + \delta_3^{(n)} \tag{161}$$

gibt es genau eine, $\delta^{(n)}$, *mit*

$$\left|R\left(\frac{\delta^{(n)}}{\delta_3^{(n)}}\right)\right| < \frac{1}{2}, \qquad \left|J\left(\frac{\delta^{(n)}}{\delta_3^{(n)}}\right)\right| < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Ist $|J(\delta_{r1}^{(n-1)})| < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ (*r eine der Zahlen* 1, 2), $s = 1$ *oder* 2 *aber* $\neq r$, *so gilt*

$$\left|J\left(\frac{\delta_s^{(n)}}{\delta_3^{(n)}}\right)\right| > \sqrt{3} - 1.$$

Beweis: Da nach (76.2) $|J(\delta_{r1}^{(n-1)}) - J(\delta_{s1}^{(n-1)})| > \frac{1}{2}\sqrt{3}$, folgt $|J(\delta_{s1}^{(n-1)})| > \frac{1}{2}\sqrt{3} - (1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$. Wegen $|J(\delta_{r1}^{(n-1)})| < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist $\frac{\delta^{(n)}}{\delta_3^{(n)}} = \delta_{r1}^{(n-1)}$ oder $= (\delta_{r1}^{(n-1)} + 1)$. Durch $\left|R\left(\frac{\delta^{(n)}}{\delta_3^{(n)}}\right)\right| < \frac{1}{2}$ ist also $\delta^{(n)}$ eindeutig bestimmt (und wegen (76.3) überhaupt bestimmbar).

Hilfssatz 20: *μ sei ein Glied der Folge μ_l und liege in $B(\delta_3^{(n)})$; μ sei aber verschieden von den Zahlen* (161). *Dann gilt $|\overline{\mu} > |\overline{\delta^{(n)}}$, wo $\delta^{(n)}$ die in Hilfssatz* 19 *eingeführte Zahl.*

Beweis: Wir haben $\mu = a\delta_1^{(n)} + b\delta_2^{(n)} + c\delta_3^{(n)}$, $\frac{\mu}{\delta_3^{(n)}} = a\delta_{11}^{(n-1)} + b\delta_{21}^{(n-1)} + c$. Da μ in $B(\delta_3^{(n)})$ liegt, liegt $\frac{\mu}{\delta_3^{(n)}}$ in $B(1)$. Wegen $|\overline{\mu} > 0$ folgt aus Satz 16, E: $(a.\ b) > (0,\ 0)$. Alle Zahlen $\delta_1^{(n)} + z\delta_3^{(n)}$, $\delta_2^{(n)} + z\delta_3^{(n)}$ mit $z \neq 0, 1$ sind wegen $|\delta_1^{(n)}|$, $|\delta_2^{(n)}| < |\delta_3^{(n)}|$ dem Betrage nach größer als $|\delta_3^{(n)}|$. Da μ von den Zahlen (161) verschieden ist, gilt also insbesondere $(a, b) \neq (1, 0), (0, 1)$.

Wir wollen nun der Einfachheit halber annehmen, es sei

$$|J(\delta_{11}^{(n-1)})| < 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

(also der Index r des Hilfssatzes 19: $= 1$). Dann ist nach Hilfssatz 19 $|J(\delta_{21}^{(n-1)})| > \sqrt{3} - 1$; also sind auch alle Zahlen $x\delta_1^{(n)} + y\delta_2^{(n)} + z\delta_3^{(n)}$ mit $x = 0$, $y \geqq 2$ dem Betrage nach größer als $|\delta_3^{(n)}|$. Insgesamt folgt also $(a, b) > (1, 0)$.

Nach Satz 20 ist $\alpha_3^{(n)} = \delta_3^{(n)} = \mu_m$, also wegen der Voraussetzungen über μ nach Hilfssatz 18: $-1 < R\left(\frac{\mu}{\delta_3^{(n)}}\right) < \frac{1}{2}$, ferner nach Hilfssatz 19: $-1 < R\left(\frac{\delta^{(n)}}{\delta_3^{(n)}}\right) < \frac{1}{2}$. Setzen wir

$$\frac{\mu}{\delta_3^{(n)}} = a_1\delta_{11}^{(n-1)} + b_1\delta_{21}^{(n-1)} + c_1, \quad \frac{\delta^{(n)}}{\delta_3^{(n)}} = a_2\delta_{11}^{(n-1)} + b_2\delta_{21}^{(n-1)} + c_2,$$

so folgt aus dem eben Gesagten $(a_1, b_1) > (a_2, b_2) > (0, 0)$, denn es ist nach Hilfssatz 19 $(a_2, b_2) = (1, 0)$. Wir können also Satz 16, F auf (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) anwenden und erhalten

$$|\overline{\mu} = d_{\mathfrak{B}_{n-1}}(a_1, b_1, c_1) > d_{\mathfrak{B}_{n-1}}(a_2, b_2, c_2) = |\overline{\delta^{(n)}}.$$

Es ist zu beachten, daß wir die Annahme $|J(\delta_{11}^{(n-1)})| < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ gemacht haben. Im Falle $|J(\delta_{21}^{(n-1)})| < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ zeigt man wegen $|J(\delta_{11}^{(n-1)})| > \sqrt{3} - 1$ wie oben $(a, b) > (0, 1)$. Unter entsprechender Anwendung von Satz 16, F (in diesem Fall ist in der Darstellung $\frac{\delta^{(n)}}{\delta_3^{(n)}} = a_2\delta_{11}^{(n-1)} + b_2\delta_{21}^{(n-1)} + c_2$ wegen $|J(\delta_{11}^{(n-1)})| > \sqrt{3} - 1$ $(a_2, b_2) = (0, 1)$) folgt dann $|\overline{\mu} > |\overline{\delta^{(n)}}$.

Wir ziehen nun aus Hilfssatz 19 einige spezielle Folgerungen: Zunächst sind $J\left(\frac{\delta_s^{(n)}}{\delta_3^{(n)}}\right)$, $J\left(\frac{\delta_s^{(n)} + \delta_3^{(n)}}{\delta_3^{(n)}}\right) > \sqrt{3} - 1$, also erst recht

$$|\delta_s^{(n)}|,\ |\delta_s^{(n)} + \delta_3^{(n)}| > (\sqrt{3} - 1)\,|\delta_3^{(n)}|.$$

Weiter folgt wegen $\left|J\binom{\delta^{(n)}}{\delta_3^{(n)}}\right| < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$, daß $\delta^{(n)}$ entweder $= \delta_r^{(n)}$ oder $= \delta_r^{(n)} + \delta_3^{(n)}$. Wegen $\left|R\binom{\delta^{(n)}}{\delta_3^{(n)}}\right| < \frac{1}{2}$ ist $\delta^{(n)}$ die dem Betrage nach kleinere dieser Zahlen. Wir haben also:

Hilfssatz 21: *Mit den Bezeichnungen des Hilfssatzes* 19 *gilt:* $\delta^{(n)}$ *hat von allen Zahlen* (161) *den kleinsten Betrag; es gilt* $|\delta^{(n)}| < \sqrt{2-\sqrt{3}}\,|\delta_3^{(n)}|$. *Zwei der Zahlen* (161) *sind dem Betrage nach* $> (\sqrt{3}-1)\,|\delta_3^{(n)}|$.

Aus Hilfssatz 21 entnehmen wir: Ist μ Glied der Folge μ_l und $|\mu| < |\delta^{(n)}|$, so liegt μ einerseits in $B(\delta_3^{(n)})$, andererseits ist μ von den Zahlen (161) verschieden; daher ist nach Hilfssatz 20 $|\mu > |\delta^{(n)}|$, also, weil

$$|\delta^{(n)}| < |\delta_3^{(n)}| = |\alpha_3^{(n)}| = |\alpha_1^{(n-1)}| < \gamma_3(\mathfrak{A}),$$

$\delta^{(n)}$ Glied der Folge μ_l. Setzen wir auf Grund von Satz 20 $\alpha_3^{(n)} = \mu_m$, so gilt also wegen (38) $\delta^{(n)} = \mu_{m+q}$ mit $q > 0$.

Wir können weiter schließen: Nach Hilfssatz 20 liegen

(162) im Ring S: $|\delta^{(n)}| < |\zeta| < \frac{1}{2}\sqrt{3}\,|\delta_3^{(n)}|$

höchstens drei Glieder der Folge μ_l, für die nur die von $\delta^{(n)}$ verschiedenen der Zahlen (161) in Frage kommen.

Sei r die größte Zahl ($r \geqq 0$), für die $|\mu_{m+r}| > \frac{1}{2}\sqrt{3}\,|\mu_m|$ ($\mu_m = \delta_3^{(n)}$). Dann ist nach (162) $r < q \leqq r+4$. Existiert in S gar kein μ_l, so ist $q = r+1$ und wegen $\sqrt{2-\sqrt{3}} < (\frac{1}{2}\sqrt{3})^2$ jedenfalls $|\mu_{m+q}| = |\mu_{m+r+1}| < \frac{1}{2}\sqrt{3}\,|\mu_{m+r}|$. Existiert in S *ein* μ_l, so ist $q = r+2$ und wegen $\sqrt{2-\sqrt{3}} < (\frac{1}{2}\sqrt{3})^3$ jedenfalls $|\mu_{m+r+1}| < \frac{1}{2}\sqrt{3}\,|\mu_{m+r}|$ oder $|\mu_{m+r+2}| < \frac{1}{2}\sqrt{3}\,|\mu_{m+r+2}|$. Existieren in S *zwei* μ_l, so ist $q = r+3$ und wegen $\sqrt{2-\sqrt{3}} < (\frac{1}{2}\sqrt{3})^4$ jedenfalls $|\mu_{m+r+1}| < \frac{1}{2}\sqrt{3}\,|\mu_{m+r}|$ oder $|\mu_{m+r+2}| < \frac{1}{2}\sqrt{3}\,|\mu_{m+r+1}|$ oder $|\mu_{m+r+3}| < \frac{1}{2}\sqrt{3}\,|\mu_{m+r+2}|$. Existieren in S *drei* μ_l, so sind zwei von ihnen wegen Hilfssatz 21 und (162) $> (\sqrt{3}-1)\,|\mu_m|$. Ist s die größte natürliche Zahl, für die $|\mu_{m+s}| > (\sqrt{3}-1)\,|\mu_m|$, so ist also $r+3 \geqq s \geqq r+2$. q ist $= r+4$. Ist $s = r+2$, so folgt wegen $\sqrt{2-\sqrt{3}} < (\frac{1}{2}\sqrt{3})^2(\sqrt{3}-1)$: $|\mu_{m+s+1}| < \frac{1}{2}\sqrt{3}\,|\mu_{m+s}|$ oder $|\mu_{m+q}| = |\mu_{m+s+2}| < \frac{1}{2}\sqrt{3}\,|\mu_{m+s+1}|$. Ist $s = r+3$, so folgt wegen $\sqrt{2-\sqrt{3}} < \frac{1}{2}\sqrt{3}\,(\sqrt{3}-1)$: $|\mu_{m+s+1}| < \frac{1}{2}\sqrt{3}\,|\mu_{m+s}|$. Wir haben also mit Rücksicht auf Satz 20 und Hilfssatz 17 den

Satz 21: *Sei* $n > n_0$, $\alpha_3^{(n)} = \mu_m$, $\alpha_1^{(n)} (= \alpha_3^{(n+1)}) = \mu_{m+p}$ *mit* $p \geqq 2$, r *die größte natürliche Zahl, für die* $|\mu_{m+r}| > \frac{1}{2}\sqrt{3}\,|\mu_m|$. *Dann gibt es*

in dem Abschnitt $\mu_{m+r}, \mu_{m+r+1}, \cdots, \mu_{m+r+4}$ *der Folge* μ_l *zwei aufeinanderfolgende Elemente* μ_{m+i}, μ_{m+i+1}, *für die* $|\mu_{m+i+1}| < \frac{1}{2}\sqrt{3}\,|\mu_{m+i}|$.

Für unsere Anwendungen bequemer ist der

Satz 22: *Sei* $n > n_0$, $\alpha_3^{(n)} = \mu_m$, $\alpha_1^{(n)} (= \alpha_3^{(n+1)}) = \mu_{m+p}$ *mit* $p \geqq 2$. *Dann gibt es eine natürliche Zahl* i, *für die* $|\mu_{m+i+1}| < \frac{1}{2}\sqrt{3}\,|\mu_{m+i}|$.

Satz 23: *Sei* m_0 *derjenige Index, für den* $\mu_{m_0} = \alpha_3^{(n_0+1)}$. *Gibt es in der Folge* $\mu_{m_0+p} (p \geqq 0)$ *zwei aufeinanderfolgende Elemente* $\mu_{m_0+i}, \mu_{m_0+i+1}$, $(i \geqq 0)$, *für die*

$$|\mu_{m_0+i+1}| < \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,|\mu_{m_0+i}|, \tag{163}$$

so ist μ_{m_0+i+1} *Element der Folge* $\alpha_3^{(n)}$.

Beweis: Sei n_1 die kleinste natürliche Zahl, für die $|\alpha_3^{(n_1+1)}| < |\mu_{m_0+i}|$. Da nach Satz 19 $\alpha_3^{(n)}$ gegen Null strebt, existiert n_1. Nach (38) fällt $|\mu_n|$ monoton. Da $i \geqq 0$, folgt also $|\alpha_3^{(n_1+1)}| < |\mu_{m_0+i}| \leqq |\mu_{m_0}| = \alpha_3^{(n_0+1)}$. Nach Satz 17 ist also $n_1 + 1 > n_0 + 1$, $n_1 > n_0$. Demnach ist nach Satz 20 $\alpha_3^{(n_1)}$ Glied der Folge μ_n, $\alpha_3^{(n_1)} = \mu_{m_1}$. Nun folgt:

(164) Ist $m_1 < m_0 + i$, so sind $|\mu_{m_1+1}|, |\mu_{m_1+2}|, \ldots, |\mu_{m_0+i}| > \frac{1}{2}\sqrt{3}\,|\mu_{m_1}|$. Andernfalls wäre nach Satz 20 $\alpha_3^{(n_1+1)} = \mu_{m_1+k}$, $k \leqq i$, also $|\alpha_3^{(n_1+1)}| \geqq |\mu_{m_0+i}|$ im Widerspruch zur Definition von n_1. Also: Ist $m_1 = m_0 + i$, so ist $\alpha_3^{(n_1+1)}$ entweder gleich μ_{m_0+i+1} oder gleich dem ersten Glied der Folge μ_n, welches dem Betrage nach kleiner als $\frac{1}{2}\sqrt{3}\,|\mu_{m_0+i}|$, also wegen (163) wiederum gleich μ_{m_0+i+1}. Ist $m_1 < m_0 + i$, also $\alpha_3^{(n_1+1)}$ wegen (164) $\neq \mu_{m_1+1}$, so ist $\alpha_3^{(n_1+1)}$ gleich dem ersten Glied der Folge μ_n, welches dem Betrage nach $< \frac{1}{2}\sqrt{3}\,|\mu_{m_1}|$. Nach (163), (164) ist also $\alpha_3^{(n_1+1)} = \mu_{m_0+i+1}$. In jedem Fall ergab sich $\mu_{m_0+i+1} = \alpha_3^{(n_1+1)}$, womit der Satz bewiesen ist.

§ 3.

Endgültige Formulierung des Algorithmus.

Wir geben jetzt eine Formulierung unseres Algorithmus, die in praktischer und theoretischer Hinsicht eine Vervollkommnung der Vorschrift $\mathfrak{V}_8$ darstellt. Wir verwenden im vierten Schritt nicht mehr die Transformation $\mathfrak{C}_n$ des Tripels $(\varrho_0, \sigma_0, \tau_0)$ in $\mathfrak{S}_n \cdot (\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \alpha_3^{(n)})$, sondern die Transformation $\mathfrak{B}_n$ eines Tripels $\mathfrak{S}_{h(n)} \cdot (\alpha_1^{h(n)}, \alpha_2^{h(n)}, \alpha_3^{h(n)})$ in $\mathfrak{S}_n \cdot (\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \alpha_3^{(n)})$, wobei $h(n) \leqq n$. (Definition von $h(n)$ siehe unter $\mathfrak{V}_9$). Da $n - h(n)$ unterhalb einer von n und dem Ausgangstripel $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ unabhängigen Schranke bleibt (Satz 25), liegen die Koeffizienten von $\mathfrak{B}_n$ wegen der Periodizität von $(\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \alpha_3^{(n)})$ unterhalb einer vom Ausgangstripel abhängenden Schranke, während die Koeffizienten der Matrix $\mathfrak{C}_n$ mit wachsendem n gegen ∞ streben. Daraus ist der praktische Vorteil der neuen Vorschrift ersichtlich. Theoretisch stellt sie das vollkommenste Analogon

zum Kettenbruchverfahren dar, das sich mit den in dieser Arbeit verwendeten Methoden erreichen läßt: Wenn auch eine Bestimmung des Tripels $\mathfrak{a}_{n+1}$ aus $\mathfrak{a}_n$ allein nicht möglich ist, so reichen für diesen Zweck doch die Tripel $\mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}_{n-1}, \ldots, \mathfrak{a}_{h(n)}$ aus, deren Zahl von n und dem Ausgangstripel unabhängig ist. Die endgültige Formulierung des Verfahrens ist nun:

$\mathbf{V}_9$. Sei $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a} = (\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ ein beliebig vorgegebenes Tripel linear unabhängiger Zahlen des komplexen kubischen Körpers K.

Wir definieren, von (α, β, γ) ausgehend, eine Folge von Tripeln $\mathfrak{a}_n = (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ nach folgender Induktionsvorschrift: Wir nehmen an, wir seien in der Bestimmung der Folge $\mathfrak{a}_n$ bis zum Glied mit dem Index n gelangt. Die Berechnung von $\mathfrak{a}_{n+1}$ vollzieht sich in vier Schritten:

1. Schritt. Sei

$$\mathfrak{S}_n \begin{cases} \text{für } n = 0 \text{ die zu } \mathfrak{a}_n \text{ gehörige } A\text{-Transformation (vgl. Definition 14),} \\ \text{für } n \geqq 1 \text{ die zu } \mathfrak{a}_n \text{ gehörige } B\text{-Transformation (vgl. Definition 15).} \end{cases}$$

Wir setzen $(\varrho_n, \sigma_n, \tau_n) = \mathfrak{S}_n \cdot (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$.

2. Schritt: Wir setzen $\left(1, \frac{\sigma_n}{\varrho_n}, \frac{\tau_n}{\varrho_n}\right) = (1, \varphi_n, \chi_n)$.

3. Schritt: Sei $\varphi_n = \psi$, $\chi_n = \omega$. Wir bestimmen die (höchstens 5) ausgezeichneten Lösungen $\mathfrak{u}_{ik}$ der Ungleichung

$$0 < |x + y\psi + z\omega| < 1 \tag{165}$$

(vgl. Definition 12) und setzen $\mathfrak{u}_{ik} = \mathfrak{u}_{ik}^{(n)}$, $\delta_{ik} = \delta_{ik}^{(n)}$.

4. Schritt: Sei $h = h(n)$ der größte Index $\geqq 0$, für den $|\varrho_h| \cdot |\varrho_{h+1}| \ldots |\varrho_n| < \frac{1}{4}\sqrt{3}$, sofern dieser Index existiert, sonst $h = h(n) = 0$. Sei

$$b_{ik}^{(n)} = \mathfrak{B}_n = \begin{cases} \mathfrak{E} & \text{für } n = h, \\ \mathfrak{S}_n \cdot \mathfrak{U}_{n-1} \ldots \mathfrak{S}_{h+1} \cdot \mathfrak{U}_h & \text{für } n > h. \end{cases}$$

a) $\min\{|J(\delta_{11}^{(n)})|, |J(\delta_{21}^{(n)})|\} < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Sei $\mathfrak{u}_{pq}^{(n)}$ von allen (höchstens 4) ausgezeichneten Lösungen $\mathfrak{u}_{ik}^{(n)}$ mit $|\delta_{ik}^{(n)}| < \frac{1}{2}\sqrt{3}$ diejenige, für welche

$$(e_{pq}^{(n)}, f_{pq}^{(n)}) = (u_{pq}^{(n)} b_{11}^{(n)} + v_{pq}^{(n)} b_{21}^{(n)} + w_{pq}^{(n)} b_{31}^{(n)},\ u_{pq}^{(n)} b_{12}^{(n)} + v_{pq}^{(n)} b_{22}^{(n)} + w_{pq}^{(n)} b_{32}^{(n)})$$

minimal ist, t die von p verschiedene der Zahlen 1, 2.

b) $\min\{|J(\delta_{11}^{(n)})|, |J(\delta_{21}^{(n)})|\} > 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Sei $\mathfrak{u}_{pq}^{(n)}$ von allen (höchstens 5) ausgezeichneten Lösungen $\mathfrak{u}_{ik}^{(n)}$ diejenige, für welche

$$(e_{pq}^{(n)}, f_{pq}^{(n)}) = (u_{pq}^{(n)} b_{11}^{(n)} + v_{pq}^{(n)} b_{21}^{(n)} + w_{pq}^{(n)} b_{31}^{(n)},\ u_{pq}^{(n)} b_{12}^{(n)} + v_{pq}^{(n)} b_{22}^{(n)} + w_{pq}^{(n)} b_{32}^{(n)})$$

minimal ist. Liege $\delta_{pq}^{(n)}$ in $H_r(1)$ ($r = 1$ oder 2). Sei s die von r verschiedene der Zahlen 1, 2, und t von den (höchstens 2) Indizes u, für die $\delta_{u1}^{(n)}$ in $H_s(1)$ liegt, der kleinste.

In Fall a) und b) setzen wir

$$\mathfrak{U}_n = \begin{pmatrix} u_{pq}^{(n)} & v_{pq}^{(n)} & w_{pq}^{(n)} \\ u_{t1}^{(n)} & v_{t1}^{(n)} & w_{t1}^{(n)} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und definieren: $\mathfrak{a}_{n+1} = \mathfrak{U}_n \cdot (1, \varphi_n, \chi_n)$ für alle $n \geqq 0$[13]).

Satz 24: *Das Verfahren* $\mathbf{V}_9$ *berechnet dieselbe Folge* $\mathfrak{a}_n$ *wie das Verfahren* $\mathbf{V}_8$.

Beweis: Wir brauchen nur zu zeigen: Sind (u_i, v_i, w_i) $(i = 1, 2)$ zwei verschiedene nichtnegative Lösungen von (165), ist $(e_i^{(n)}, f_i^{(n)}, g_i^{(n)}) = (u_i, v_i, w_i)\,\mathfrak{B}_n$, $(i = 1, 2)$, so gilt:

(166) $(e_i^{(n)}, f_i^{(n)})$ $(i = 1, 2)$ sind vergleichbar,

(167) $(e_1^{(n)}, f_1^{(n)}) \neq (e_2^{(n)}, f_2^{(n)})$,

(168) aus $(e_1^{(n)}, f_1^{(n)}) \gtrless (e_2^{(n)}, f_2^{(n)})$ folgt bzw. $d_{\mathfrak{C}_n}(u_1, v_1, w_1) \gtrless d_{\mathfrak{C}_n}(u_2, v_2, w_2)$,

wobei $\mathfrak{C}_n$ die in $\mathbf{V}_8$ eingeführte Matrix.

Beweis dieser drei Behauptungen: Aus Hilfssatz 14 folgt für $n \geqq 0$

$$\varrho_n \cdots \varrho_h \cdot \varrho_{h-1} \cdots \varrho_0 \cdot (1, \varphi_n, \chi_n) = \mathfrak{C}_n \cdot (\varrho_0, \sigma_0, \tau_0)$$
$$= \mathfrak{C}_n \cdot \mathfrak{C}_h^{-1} \cdot \mathfrak{C}_h \cdot (\varrho_0, \sigma_0, \tau_0) = \mathfrak{C}_n \cdot \mathfrak{C}_h^{-1} \cdot \varrho_h \cdots \varrho_0 \cdot (1, \varphi_h, \chi_h), \text{ also}$$
$$\varrho_n \cdots \varrho_h \cdot (1, \varphi_n, \chi_n) = \mathfrak{C}_n \cdot \mathfrak{C}_h^{-1} \cdot (\varrho_h, \sigma_h, \tau_h).$$

Nun ist $\mathfrak{C}_n \cdot \mathfrak{C}_h^{-1} = \mathfrak{B}_n$. Daher folgt

$$\varrho_n \cdots \varrho_h \cdot (u_i + v_i \varphi_n + w_i \chi_n) = e_i^{(n)} \varrho_h + f_i^{(n)} \sigma_h + g_i^{(n)} \tau_h \text{ und}$$

(169) $$0 < |e_i^{(n)} \varrho_h + f_i^{(n)} \sigma_h + g_i^{(n)} \tau_h| < \tfrac{1}{4}\sqrt{3} \quad (i = 1, 2).$$

Sei zuerst $h = 0$. Da $\mathfrak{S}_0$ die zu $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ gehörige A-Transformation, folgt aus (169) und Hilfssatz 13, daß $(e_i^{(n)}, f_i^{(n)})$ vergleichbar und, da $(\varrho_0, \sigma_0, \tau_0)$ normal, $|\mathfrak{B}_n| \neq 0$, $(u_1, v_1, w_1) \neq (u_2, v_2, w_2)$, daß $(e_i^{(n)}, f_i^{(n)})$ $(i = 1, 2)$ voneinander verschieden sind. Damit sind (166), (167) für $h = 0$ bewiesen. Da $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{C}_n$, also $e_1^{(n)} = d_{\mathfrak{C}_n}(u_1, v_1, w_1)$, $e_2^{(n)} = d_{\mathfrak{C}_n}(u_2, v_2, w_2)$, und $(\varrho_0, \sigma_0, \tau)$ normal, folgt sofort (168) für $h = 0$.

---

[13]) Ein besonders lehrreiches Beispiel gibt das Tripel $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, \varepsilon\vartheta, \varepsilon^2\vartheta^2)$ ab, wo $\vartheta = \sqrt[3]{26}$, $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$: Die Fälle a) und b) wechseln periodisch.

Sei $h \geqq 1$. Wir haben $\mathfrak{S}_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & l_2 \end{pmatrix}$ mit $|l_1|, |l_2| = 1$: aus (169) folgt also

$$(170) \qquad 0 < |e_i^{(n)} \alpha_h + f_i^{(n)} \beta_h + (l_1 f_i^{(n)} + l_2 g_i^{(n)})| < \tfrac{1}{4}\sqrt{3},$$

daraus

$$(171) \quad |(e_1^{(n)} - e_2^{(n)})\alpha_h + (f_1^{(n)} - f_2^{(n)})\beta_h + (l_1 f_1^{(n)} + l_2 g_1^{(n)}) - (l_1 f_2^{(n)} + l_2 g_2^{(n)})| < \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Aus Satz 15, D, angewendet auf $n = h$,

$$(a, b, c) = (e_1^{(n)} - e_2^{(n)}, f_1^{(n)} - f_2^{(n)}, (l_1 f_1^{(n)} + l_2 g_1^{(n)}) - (l_1 f_2^{(n)} + l_2 g_2^{(n)}))$$

ergibt sich also die Vergleichbarkeit von $(e_1^{(n)} - e_2^{(n)}, f_1^{(n)} - f_2^{(n)})$ mit $(0, 0)$ und damit (166). Wäre nun $(e_1^{(n)}, f_1^{(n)}) = (e_2^{(n)}, f_2^{(n)})$, so müßte wegen $|\mathfrak{B}_n| \neq 0$ und der Verschiedenheit der (u_i, v_i, w_i) $(i = 1, 2)$ $g_1^{(n)} \neq g_2^{(n)}$, also wegen $l_2 \neq 0$ $l_1 f_1^{(n)} + l_2 g_1^{(n)} \neq l_1 f_2^{(n)} + l_2 g_2^{(n)}$ sein. Nach (171) müßte dann eine von Null verschiedene, ganze rationale Zahl existieren, deren Betrag kleiner als $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Damit ist (167) bewiesen. Aus (170) folgt, daß

$$(172) \qquad -\tfrac{1}{2} < R\{e_i^{(n)} \alpha_h + f_i^{(n)} \beta_h + l_1 f_i^{(n)} + l_2 g_i^{(n)}\} < \tfrac{1}{2}.$$

Ferner ist

$$(173) \quad (d_{\mathfrak{C}_n}(u_i, v_i, w_i), *, *) = (u_i, v_i, w_i) \cdot \mathfrak{C}_n$$
$$= (u_i, v_i, w_i)\, \mathfrak{B}_n \cdot \mathfrak{S}_h \cdot \mathfrak{A}_h = (e_i^{(n)}, f_i^{(n)}, l_1 f_i^{(n)} + l_2 g_i^{(n)})\, \mathfrak{A}_h \quad (i = 1, 2).$$

Aus (170), Satz 15, D ergibt sich die Vergleichbarkeit der Paare $(e_i^{(n)}, f_i^{(n)})$ $(i = 1, 2)$ mit $(0, 0)$. Darum brauchen wir nur die Fälle

1. $(e_1^{(n)}, f_1^{(n)}) < 0 < (e_2^{(n)}, f_2^{(n)})$,
2. $(e_1^{(n)}, f_1^{(n)}) > (e_2^{(n)}, f_2^{(n)}) > (0, 0)$,
3. $(e_1^{(n)}, f_1^{(n)}) < (e_2^{(n)}, f_2^{(n)}) < (0, 0)$

zu behandeln. Im Fall 1 ergibt sich aus Satz 15, E, angewendet auf $(a, b, c) \to (-e_1^{(n)}, -f_1^{(n)}, -l_1 f_1^{(n)} - l_2 g_1^{(n)})$, $n \to h$:

$$a a_{11}^{(h)} + b a_{21}^{(h)} + c a_{31}^{(h)} = -d_{\mathfrak{C}_n}(u_1, v_1, w_1) > 0,$$

unter nochmaliger Anwendung von Satz 15, E auf $(a, b, c) = (e_2^{(n)}, f_2^{(n)}, l_1 f_2^{(n)} + l_2 g_2^{(n)})$:

$$d_{\mathfrak{C}_n}(u_2, v_2, w_2) > 0,$$

also im Fall 1. die Behauptung (168). Im Fall 2. schließen wir so: Wegen (172) läßt sich Satz 15, F auf $(a_i, b_i, c_i) = (e_i^{(n)}, f_i^{(n)}, l_1 f_i^{(n)} + l_2 g_i^{(n)})$ $(i = 1, 2)$ anwenden. Aus (172), (173) folgt sofort (168). Fall 3. läßt sich nach Vorzeichenvertauschung wie Fall 2. behandeln[14]).

[14]) Es sei noch beiläufig erwähnt, daß die Fälle 1, 3 nie eintreten.

Satz 25: *Es gibt eine von* $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$, n *unabhängige ganze rationale Zahl* D, *für welche* $0 \leqq n - h(n) \leqq D$.

Beweis: Nach Definition von $h(n)$ ist $h(n) \leqq n$, also $0 \leqq n - h(n)$. Sei $n \geqq 0$. Wir können folgendermaßen unterscheiden:

$$1.\ h(n) = 0,\ h(n) = n,\quad |\varrho_h| \dots |\varrho_n| > \tfrac{1}{4}\sqrt{3}.$$

$$2.\ h(n) = 0,\ h(n) < n,\quad |\varrho_h| \dots |\varrho_n| > \tfrac{1}{4}\sqrt{3},$$

dann ist erst recht $\qquad |\varrho_{h+1}| \dots |\varrho_n| > \tfrac{1}{4}\sqrt{3}.$

$$3.\ h(n) = n,\quad |\varrho_h| \dots |\varrho_n| < \tfrac{1}{4}\sqrt{3}.$$

$$4.\ h(n) < n,\quad |\varrho_h| \dots |\varrho_n| < \tfrac{1}{4}\sqrt{3},$$

dann ist nach Definition von $h(n)$ $|\varrho_{h+1}| \dots |\varrho_n| > \tfrac{1}{4}\sqrt{3}$.

In den Fällen 2., 4. ist nach (155) und Satz 17

$$|\alpha_1^{(h+1)}| > |\alpha_1^{(n+1)}| = |\varrho_{h+1} \dots \varrho_n| \cdot |\alpha_1^{(h-1)}| > \tfrac{1}{4}\sqrt{3} \cdot |\alpha_1^{(h+1)}|,$$

$$|\alpha_1^{(h+1)}| > |\alpha_1^{(n+1)}| > \tfrac{1}{4}\sqrt{3}\,|\alpha_1^{(h+1)}|. \tag{174}$$

Nach Satz 18, angewendet auf $\varepsilon_1 = \frac{1}{4}\sqrt{3}$, $\varepsilon_2 = 1$, kann (174) von nur höchstens D Indizes n erfüllt werden, wobei D von h und dem Ausgangstripel (α, β, γ) unabhängig ist. Lösungen n von (174) können also nach Satz 17 nur die Indizes $(h+1), (h+2) \dots$ bis höchstens $h + D$ sein. Daraus ergibt sich also $n - h(n) \leqq D$. In den Fällen 1., 3. ist $n = h(n)$, also $n - h(n) = 0$. Damit sind wir fertig.

§ 4.

Sätze über Äquivalenzeigenschaft und Periodizität des Algorithmus.

Wir denken uns das Verfahren $\mathbf{V}_9$ an zwei verschiedenen Tripeln (α, β, γ), $(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$ durchgeführt, deren Elemente K angehören: (α, β, γ) sollen linear unabhängig sein, ebenso $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$. Die in der Entwicklung von $(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$ den Transformationen $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{U}_n \dots$ und den Größen $\varrho_n, \sigma_n, \varphi_n, \alpha_1^{(n)}$ usw. entsprechenden Dinge wollen wir mit einem Stern (*) kennzeichnen: $\mathfrak{A}_n^*, \mathfrak{S}_n^*, \mathfrak{U}_n^*, \dots \varrho_n^*, \sigma_n^*, \varphi_n^*, \alpha_1^{*(n)}$ usw. Ferner setzen wir $(\varrho_0, \sigma_0, \tau_0)$ wie gewohnt $= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\varrho_0^*, \sigma_0^*, \tau_0^*) = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*)$.

Wir beweisen den

Satz 26: $(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$ *möge durch umkehrbar ganzzahlige Transformation aus* (α, β, γ) *hervorgehen. Dann gibt es zwei Indizes* i, k *und eine Zahl* $s = \pm 1$ *mit der Eigenschaft:*

$$(\alpha_1^{(i+l)}, \alpha_2^{(i+l)}, \alpha_3^{(i+l)}) = s \cdot (\alpha_1^{*(k-l)}, \alpha_2^{*(k+l)}, \alpha_3^{*(k-l)})$$

für alle $l \geqq 0$.

Beweis: Da $\mathfrak{S}_0$ die zu (α, β, γ) gehörige A-Transformation, $\mathfrak{S}_0^*$ die zu $(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$ gehörige A-Transformation, sind $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*)$ normal, also die Folgen $\lambda_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\nu_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\mu_n(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*)$ usw.

definiert. Mit dem auf S. 381 definierten Index n_0 gilt nach Hauptsatz 6 und Satz 20

$$(175)\quad (\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \alpha_3^{(n)}) = (\lambda_{m(n)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \nu_{m(n)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \mu_{m(n)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3))$$

für alle $n > n_0$, wobei $m(n_0+1) < m(n_0+2) < m(n_0+3) < \ldots$. Wegen der umkehrbaren Ganzzahligkeit von $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{S}_0^*$ gehen die Tripel $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*)$ durch umkehrbare ganzzahlige Transformation auseinander hervor; also gibt es nach Hauptsatz 4 zwei Indizes i, k und eine Zahl $s = \pm 1$ derart, daß

$$(176)\quad \left.\begin{array}{l} \mu_{i+l}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = s \cdot \mu_{k+l}(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*) \\ \nu_{i+l}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = s \cdot \nu_{k+l}(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*) \\ \lambda_{i+l}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = s \cdot \lambda_{k+l}(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*) \end{array}\right\} \text{für alle } l \geqq 0.$$

Sei n_0 der auf S. 381 für die Folge $\alpha_1^{(n)}$ definierte Index, n_0^* der entsprechende Index für die Folge $\alpha_1^{*(n)}$. Dann ist nach (175)

$$(177)\quad \alpha_3^{(n)} = \mu_{m(n)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad \text{für jedes } n > n_0,$$

$$(178)\quad \alpha_3^{*(n)} = \mu_{m^*(n)}(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*) \quad \text{für jedes } n > n_0^*,$$

wo die Folgen $m(n)$ und $m^*(n)$ verschieden sein können. Sei speziell

$$\alpha_3^{(n_0+1)} = \mu_{m_0}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \alpha_3^{*(n_0^*+1)} = \mu_{m_0^*}(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*),$$

sei ferner

$$(179)\quad \begin{array}{l} l_0 \text{ die kleinste nichtnegative Zahl, für die} \\ i_0 = i + l_0 \geqq m_0, \quad k_0 = k + l_0 \geqq m_0^*. \end{array}$$

Dann gilt nach (176)

$$(180)\quad \left.\begin{array}{l} \mu_{i_0+l}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = s \cdot \mu_{k_0+l}(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*) \\ \nu_{i_0+l}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = s \cdot \nu_{k_0+l}(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*) \\ \lambda_{i_0+l}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = s \cdot \lambda_{k_0+l}(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*) \end{array}\right\} \text{für alle } l \geqq 0.$$

Diese Verschiebung der Indizes soll eine spätere Anwendung des Satzes 23 vorbereiten.

Sei n_1 der kleinste Index $> n_0$, für den in der Darstellung (177) $m(n_1) \geqq i_0$, n_1^* der kleinste Index $> n_0^*$, für den in der Darstellung (178) $m^*(n_1^*) \geqq k_0$. Dann ist nach (175), angewendet auf $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*)$,

$$(181)\quad \left\{\begin{array}{l} (\alpha_1^{(n_1+r)}, \alpha_2^{(n_1+r)}, \alpha_3^{(n_1+r)}) \\ \quad = (\lambda_{i_0+l(r)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \nu_{i_0+l(r)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \mu_{i_0+l(r)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)) \\ (\alpha_1^{*(n_1^*+r)}, \alpha_2^{*(n_1^*+r)}, \alpha_3^{*(n_1^*+r)}) \\ \quad = (\lambda_{k_0+l^*(r)}(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*), \nu_{k_0+l^*(r)}(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*), \mu_{k_0+l^*(r)}(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*)) \\ \text{für alle } r \geqq 0, \text{ wo } 0 \leqq l(0) < l(1) < \ldots, 0 \leqq l^*(0) < l^*(1) < \ldots, \end{array}\right.$$

also wegen (180)

$$(182)\quad \text{für alle } r \geqq 0\colon\quad (\alpha_1^{*(n_1^*+r)},\ \alpha_2^{*(n_1^*+r)},\ \alpha_3^{*(n_1^*+r)})$$
$$= \frac{1}{s}\cdot(\lambda_{i_0+l^*(r)}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\ \nu_{i_0+l^*(r)}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\ \mu_{i_0+l^*(r)}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)).$$

Wir schreiben künftig $\mu_n(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\mu_n(\mathfrak{a})$, $\lambda_n(\alpha_1^*,\alpha_2^*,\alpha_3^*)=\lambda_n(\mathfrak{a}^*)$ usw.

1. Wir wollen jetzt annehmen, daß

$$(183)\qquad |\mu_{m+1}(\mathfrak{a})| > \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,|\mu_m(\mathfrak{a})| \quad \text{für alle} \quad m \geqq i_0.$$

Dann ist wegen $n_1 > n_0$ nach dem 20. Satz $\alpha_3^{(n_1+1)} = \mu_{i_0+l(0)+p}(\mathfrak{a})$, wo p eine gewisse Zahl $\geqq 1$. Wäre $p \geqq 2$, so folgte wegen $n_1 > n_0$ aus Satz 22 (angewendet auf $m = i_0 + l(0)$, $p = p$) entgegen unserer Annahme (183) die Existenz eines Index $m > i_0 + l(0)$, für den $|\mu_{m+1}| < \frac{1}{2}\sqrt{3}\,|\mu_m|$. Also ist $\alpha_3^{(n_1+1)} = \mu_{i_0+l(0)+1}$, $l(1) = l(0)+1$. So schließen wir weiter: Nach Satz 20 ist $\alpha_3^{(n_1+2)} = \mu_{i_0+l(1)+p}$, wo p eine gewisse Zahl $\geqq 1$. Wäre $p \geqq 2$, so folgte wegen $n_1 > n_0$ aus Satz 22 entgegen unserer Annahme (183) die Existenz eines Index $m > i_0 + l(1)$, für den $|\mu_{m+1}| < \frac{1}{2}\sqrt{3}\,|\mu_m|$. Also ist $p = 1$ und $\alpha_3^{(n_1+2)} = \mu_{i_0+l(1)+1} = \mu_{i_0+l_0(0)+2}$. So fortfahrend, erhalten wir durch sukzessive Anwendung der Sätze 20, 22 und der Annahme (183)

$$(184)\qquad \alpha_3^{(n_1+r)} = \mu_{i_0+l(0)+r}(\mathfrak{a}) \quad \text{für alle} \quad r \geqq 0,$$

also wegen (181) auch

$$(185)\qquad \left.\begin{array}{l} \alpha_2^{(n_1+r)} = \nu_{i_0+l(0)-r}(\mathfrak{a}) \\ \alpha_1^{(n_1+r)} = \lambda_{i_0+l(0)+r}(\mathfrak{a}) \end{array}\right\} \quad \text{für alle} \quad r \geqq 0.$$

Aus (180), (183) folgt für $m \geqq k_0$

$$(186)\qquad |\mu_{m+1}(\mathfrak{a}^*)| > \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,|\mu_m(\mathfrak{a}^*)|.$$

Wie oben, erhalten wir unter sukzessiver Anwendung der Sätze 20, 22 und der eben bewiesenen Ungleichung (186), daß

$$(\alpha_1^{*(n_1^*+r)},\ \alpha_2^{*(n_1^*+r)},\ \alpha_3^{*(n_1^*+r)})$$
$$= (\lambda_{k_0+l^*(0)+r}(\mathfrak{a}^*),\ \nu_{k_0+l^*(0)+r}(\mathfrak{a}^*),\ \mu_{k_0+l^*(0)+r}(\mathfrak{a}^*)).$$

Indem wir dies mit (181) vergleichen, erhalten wir $l^*(0)+r = l^*(r)$, also aus (182)

$$(187)\qquad (\alpha_1^{*(n_1^*+r)},\ \alpha_2^{*(n_1^*+r)},\ \alpha_3^{*(n_1^*+r)})$$
$$= \frac{1}{s}(\lambda_{i_0+l^*(0)+r}(\mathfrak{a}),\ \nu_{i_0+l^*(0)+r}(\mathfrak{a}),\ \mu_{i_0+l^*(0)+r}(\mathfrak{a})).$$

Setzen wir

$$L = \max\{l^*(0),\ l(0)\},\ J = n_1 - l(0) + L,\ K = n_1^* - l^*(0) + L,$$

so folgt aus (184), (185), (187)

$$\text{für alle } R \geqq l(0) - L \quad \alpha_3^{(J+R)} = \mu_{i_0+L+R}(\mathfrak{a}) \text{ usw.},$$

$$\text{für alle } R \geqq l^*(0) - L \quad \alpha_3^{(K+R)} = \frac{1}{s}\mu_{i_0+L+R}(\mathfrak{a}) \text{ usw.}$$

Da $L \geqq l(0)$, $l^*(0)$, folgt also

$(\alpha_1^{(J-R)}, \alpha_2^{(J+R)}, \alpha_3^{(J+R)}) = s \cdot (\alpha_1^{*(K+R)}, \alpha_2^{*(K+R)}, \alpha_3^{*(K+R)})$ für alle $R \geqq 0$.

Mit $J = i$, $K = k$, $R = l$ ist das die Behauptung des Satzes.

2. Wir müssen unseren Satz noch für den Fall beweisen, daß es einen Index $l_1 \geqq 0$ gibt, für den

$$|\mu_{i_0+l_1-1}(\mathfrak{a})| < \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,|\mu_{i_0-l_1}(\mathfrak{a})|. \tag{188}$$

Dann ist nach (180) auch

$$|\mu_{k_0+l_0+1}(\mathfrak{a}^*)| < \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,|\mu_{k_0+l_1+1}(\mathfrak{a}^*)|. \tag{189}$$

Nach (179) ist $i_0 \geqq m_0$, $k_0 \geqq m_0^*$. Also folgt aus Satz 23 (für die erste Gleichung von (190) angewendet auf $m_0 = m_0$, $m_0 + i = i_0 + l_1$)

$$\mu_{i_0+l_0-1}(\mathfrak{a}) = \alpha_3^{(J)}, \quad \mu_{k_0+l_1+1}(\mathfrak{a}^*) = \alpha_3^{*(K)}, \tag{190}$$

wo nach Konstruktion von n_1, n_1^* J, K gewisse Indizes $\geqq n_1$ resp. n_1^*. Aus (181) folgt somit

$$(\alpha_1^{(J)}, \alpha_2^{(J)}, \alpha_3^{(J)}) = (\lambda_{i_0+l_1+1}(\mathfrak{a}), \nu_{i_0+l_1+1}(\mathfrak{a}), \mu_{i_0+l_1+1}(\mathfrak{a})),$$

$$(\alpha_1^{*(K)}, \alpha_2^{*(K)}, \alpha_3^{*(K)}) = (\lambda_{k_0+l_1+1}(\mathfrak{a}^*), \nu_{k_0+l_1+1}(\mathfrak{a}^*), \mu_{k_0+l_1+1}(\mathfrak{a}^*))$$

und aus (180)

$$(\alpha_1^{(J)}, \alpha_2^{(J)}, \alpha_3^{(J)}) = s \cdot (\alpha_1^{*(K)}, \alpha_1^{*(K)}, \alpha_3^{*(K)}). \tag{191}$$

Damit gilt aber auch

$$(\alpha_1^{(J+R)}, \alpha_2^{(J+R)}, \alpha_3^{(J+R)}) = s \cdot (\alpha_1^{*(K+R)}, \alpha_2^{*(K+R)}, \alpha_3^{*(K+R)}) \quad (R \geqq 0): \tag{192}$$

Angenommen, (192) gelte für ein festes $R \geqq 0$. Dann folgt wegen $\alpha_3^{(J+R-1)} = \alpha_1^{(J+R)}$, $\alpha_3^{*(K+R+1)} = \alpha_1^{*(K+R)}$, daß $\alpha_3^{(J+R+1)} = s \cdot \alpha_3^{*(K+R+1)}$. Die erste Gleichung von (181) ergibt nun zusammen mit (182) das Bestehen der Gleichung (192) für $R \to R+1$. Mit $J = i$, $K = k$, $R = l$ ist (192) unsere Behauptung.

Aus Satz 26 folgt nun sofort der

Hauptsatz 7: *Wird das Verfahren* $\mathbf{V}_9$ *an zwei verschiedenen Tripeln* (α, β, γ) $(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$ *durchgeführt, die in der Beziehung*

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \mathfrak{D} \cdot (\alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$$

stehen, wo $\mathfrak{D}$ *umkehrbar ganzzahlig, im übrigen aber den im Anfang dieses Paragraphen gestellten Bedingungen genügen, so gilt mit den dort eingeführten Bezeichnungen: Es existieren zwei Indizes* i, k *derart, daß*

$$\mathfrak{S}_{i+l} = \mathfrak{S}_{k+l}^*, \quad \mathfrak{U}_{i+l} = \mathfrak{U}_{k+l}^*,$$

$$(\alpha_{i+l}, \beta_{i+l}, \gamma_{i+l}) = (\alpha_{k+l}^*, \beta_{k+l}^*, \gamma_{k+l}^*)$$

für alle $l \geqq 0$.

Satz 27: *$\sigma \neq 0$ sei Zahl aus K, $(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*) = \sigma(\alpha, \beta, \gamma)$, wo α, β, γ die im Anfang dieses Paragraphen gestellten Bedingungen erfüllen. Dann gilt*

$$\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_n^*, \quad \mathfrak{U}_n = \mathfrak{U}_n^* \text{ für } n \geqq 0,$$

$$(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) = (\alpha_n^*, \beta_n^*, \gamma_n^*), \quad \sigma(\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \alpha_3^{(n)}) = (\alpha_1^{*(n)}, \alpha_2^{*(n)}, \alpha_3^{*(n)}) \text{ für } n \geqq 1.$$

Beweis: Folgt unmittelbar aus der Definition des Verfahrens.

Hauptsatz 8: *Das Verfahren $\mathfrak{V}_9$ werde auf (α, β, γ) angewendet, wo α, β, γ den im Anfang dieses Paragraphen gestellten Bedingungen genügen. Dann gilt: Es gibt zwei Indizes i, k $(i \neq k)$ derart, daß*

$$(\alpha_1^{(i+l)}, \alpha_2^{(i+l)}, \alpha_3^{(i+l)}) = \varepsilon(\alpha_1^{(k+l)}, \alpha_2^{(k+l)}, \alpha_3^{(k+l)}) \text{ für alle } l \geqq 0,$$

wo ε eine der vier Grundheiten der Ordnung von $[\alpha, \beta, \gamma]$. Ferner gilt:

$$\mathfrak{S}_{i+l} = \mathfrak{S}_{k+l}, \quad \mathfrak{U}_{i+l} = \mathfrak{U}_{k+l}, \quad \mathfrak{a}_{i+l} = \mathfrak{a}_{k+l}, \text{ m. a. W.:}$$

Die Folge $(\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \alpha_3^{(n)})$ ist periodisch mit ε, die Folgen $\mathfrak{S}_n, \mathfrak{U}_n, \mathfrak{a}_n$ sind echtperiodisch.

Beweis: Sei σ eine der vier Grundeinheiten der Ordnung von $[\alpha, \beta, \gamma]$. Setzen wir $(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*) = \sigma(\alpha, \beta, \gamma)$, so geht $(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$ nach Definition der Ordnung durch umkehrbar ganzzahlige Transformation aus (α, β, γ) hervor. Daher gibt es nach Satz 26 zwei Indizes i, k und eine reelle Zahl s vom Betrage 1 derart, daß

$$(\alpha_1^{(i+l)}, \alpha_2^{(i+l)}, \alpha_3^{(i+l)}) = s(\alpha_1^{*(k+l)}, \alpha_2^{*(k+l)}, \alpha_3^{*(k+l)}) \text{ für alle } l \geqq 0.$$

Aus Satz 27 folgt also

$$(\alpha_1^{(i+l)}, \alpha_2^{(i+l)}, \alpha_3^{(i+l)}) = s \cdot \sigma \cdot (\alpha_1^{(k+l)}, \alpha_2^{(k+l)}, \alpha_3^{(k+l)}) \text{ für alle } l \geqq 0.$$

Mit σ ist auch $s \cdot \sigma = \varepsilon$ Grundeinheit der genannten Ordnung, also wegen $|\varepsilon| \neq 1$: $i \neq k$. Damit ist die erste Behauptung des Satzes bewiesen. Aus ihr folgen nach Definition des Verfahrens die übrigen.

Zum Schluß bringen wir noch den für die Berechnung einer Grundeinheit wichtigen

Satz 28: *Haben zwei Indizes i, k $(0 \leqq i < k)$ die Eigenschaften*

$$(193) \qquad \begin{cases} (1, \varphi_i, \chi_i) = (1, \varphi_k, \chi_k), \\ (1, \varphi_{i-1}, \chi_{i-1}) = (1, \varphi_{k-1}, \chi_{k-1}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (1, \varphi_{h(i)}, \chi_{h(i)}) = (1, \varphi_{h(k)}, \chi_{h(k)}). \end{cases}$$

(194) *i ist der größte Index, für den $(1, \varphi_i, \chi_i) = (1, \varphi_k, \chi_k)$,*

so folgt:

$$\mathfrak{U}_{i+l} = \mathfrak{U}_{k+l}, \quad \mathfrak{a}_{i+1+l} = \mathfrak{a}_{k+1+l}, \quad \mathfrak{S}_{i+1+l} = \mathfrak{S}_{k+1+l},$$

$$(1, \varphi_{i+1+l}, \varphi_{i+1+l}) = (1, \varphi_{k+1+l}, \chi_{k+1+l}) \text{ für alle } l \geqq 0;$$

$\varrho_{i+1} \cdot \varrho_{i+2} \cdots \varrho_k = \varepsilon$ *ist Grundeinheit der Ordnung von $[\alpha, \beta, \gamma]$.*

Es gibt unendlich viele Indexpaare (i, k) *der Eigenschaften* (193), (194).

Beweis: Die letzte Behauptung ist eine unmittelbare Folge von Hauptsatz 8: Aus (193) und der Definition des Verfahrens $\mathbf{V}_9$ folgt zunächst $\mathfrak{U}_i = \mathfrak{U}_k$, daraus nach $\mathbf{V}_9$ $(\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}, 1) = (\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}, 1)$, daraus nach $\mathbf{V}_9$ $\mathfrak{S}_{i+1} = \mathfrak{S}_{k+1}$, daraus nach $\mathbf{V}_9$ $(1, \varphi_{i+1}, \chi_{i+1}) = (1, \varphi_{k+1}, \chi_{k+1})$. Unter Verwendung von (193) schließen wir jetzt wieder $(\alpha_{i+2}, \beta_{i+2}, 1) = (\alpha_{k+2}, \beta_{k+2}, 1)$ u. s. f.. (194) besagt nun, daß die $(k-i)$-gliedrige Periode $(1, \varphi_{i+1}, \chi_{i+1})$, $(1, \varphi_{i+2}, \chi_{i+2})$, $\ldots$, $(1, \varphi_k, \chi_k)$ die *kleinst*mögliche Periode ist. Aus Hilfssatz 14 folgt somit, daß $\varepsilon = \varrho_{i+1} \ldots \varrho_k$ Grundeinheit der Ordnung von $[\alpha, \beta, \gamma]$ ist.

(Eingegangen am 10. 10. 1935.)

Vollständige Lösung einer neuen diophantischen Aufgabe.

Von

A. Korselt in Plauen i. V.

Mordell [1]) hat bewiesen, daß alle Lösungen in rationalen Zahlen u, v einer Gleichung

(a) $$a u^4 + b u^3 + c u^2 + d u + e = f v^2$$

(Gleichung einer Kurve vom Geschlecht Eins) aus einer endlichen Anzahl von Lösungen durch bestimmte rationale Rechnungen hervorgehen, die aus dem Additionstheoreme der elliptischen Funktionen entspringen. Sein Beweis gibt aber kein Mittel an, diese endlich vielen Lösungen aufzustellen, oder auch nur zu entscheiden, ob es überhaupt Lösungen gibt. Darum ist es förderlich, in einzelnen Fällen Methoden anzugeben, die nur mit zahlentheoretischen Mitteln alle Lösungen ausschließlich zu bilden gestatten.

Setzt man in (a)

$$u = \frac{x}{y}, \quad v = \frac{z}{y^2},$$

wo x, y, z ganze Zahlen sind ($y \neq 0$), so erhält man eine diophantische Gleichung der Gestalt

$$a x^4 + b x^3 y + c x^2 y^2 + d x y^3 + e y^4 = f z^2.$$

In der vorliegenden Abhandlung wird daher für den Sonderfall

(b) $$2 x^4 + 3 y^4 = 5 z^2$$

ein elementares Verfahren angegeben, das aus jeder Lösung von (b) mit $|z| > 1$ eine Lösung mit betraglich kleinerem z erzeugt. Umgekehrt kann man aus der kleineren Lösung die größere zurückgewinnen, aber meist nicht eindeutig, sondern in zwei möglichen Weisen durch bestimmte rationale Rechnungen. Da es offenbar nur endlich viele Lösungen mit $|z| = 1$ gibt, kann man aus ihnen durch jene Rechnungen alle Lösungen der Reihe nach gewinnen.

---

[1]) L. J. Mordell, On the rational solution of indeterminate equations of the third and fourth degree, Proc. Cambridge Philos. Soc. 21 (1922), S. 179. Vergleiche auch H. Poincaré, J. Math. pures et appl. (5) 7 (1901), S. 161, sowie A. Weil, Bull. Sci. math. (2) 54 (1930), S. 12. Poincaré, sowie die älteren Verfasser Lucas, Pépin und Häntzschel behandeln zwar auch quadratisch-diophantische Systeme elementar oder mit elliptischen Funktionen, geben aber keine Abschätzung der Lösungen und keinen Beweis der Vollständigkeit.

Mein Verfahren paßt auf alle Gleichungen der Form

$$a\,x^4 + b\,x^2\,y^2 + c\,y^4 = d\,z^2,$$

nur muß ich bisher eine Lösung erraten, falls sich die Unmöglichkeit nicht schon durch quadratische Kongruenzen ergibt. Keine Entscheidung habe ich gefunden für

$$2\,x^4 + 343\,y^4 = z^2.$$

§ 1.

Algebraische Hilfssätze.

Die $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ mit oder ohne Zeiger bedeuten rationale Einheiten, so daß

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \ldots = 1$$

ist. Bisher benutzte man nur das Zeichen $\pm$, das keinen Kalkul ermöglicht. Damit wird ein einfaches und fruchtbares hyperkomplexes System über den endlich vielen Wurzeln einer algebraischen Gleichung ($x^2 = 1$) eingeführt, das ich hier nicht näher behandeln kann.

Es sei $|a|$ der (absolute) Betrag der komplexen Zahl a. Große Abkürzung wird erreicht, wenn man statt $|a| \leqq |b|$, $|a| < |b|$ usw. schreibt $a \,|\leqq|\, b$, $a \,|<|\, b$ usw.

Ist A eine Zahlenmenge, so sei $|A|$ der Inbegriff der Beträge der Elemente von A. Z. B.

$$\max |a_1, \ldots, a_n| = \max (|a_1|, \ldots, |a_n|).$$

Wird ein Inbegriff durch $(a_1, \ldots, a_n)$ gegeben, so nenne ich die a_ν seine Stücke, Koordinaten, und insbesondere Lösungsstücke, wenn $(a_1, \ldots, a_n)$ als Lösung einer Beziehung $L(x_1, \ldots, x_n)$ auftritt. a_ν ist das zu x_ν gehörige Lösungsstück.

Lösung einer Beziehung $L(x)$ ist jeder Gegenstand a derart, daß $L(a)$ „erfüllt", d. h. ein wahrer Satz wird. Vollständige Lösung von $L(x)$ ist die Angabe einer Wahrheit oder einer Vorstellung, die alle und nur Lösungen von $L(a)$ darstellt.

In einem Integritätsbereiche mit eindeutiger (nicht notwendig endlicher) Zerlegung in Primfaktoren, z. B. im Bereiche der von Null verschiedenen ganzen Zahlen, ist die Gleichung

$$x_1\,x_2 \ldots x_m = y_1\,y_2 \ldots y_n \tag{1}$$

gleichgeltend mit

$$x_\mu = \prod_\nu t_{\mu\nu}, \quad y_\nu = \prod_\mu t_{\mu\nu} \tag{1'}$$

in den neuen Größen (Parametern) t, die unabhängig voneinander Werte aus jenem Integritätsbereich annehmen; sind die x, y Veränderliche, so ist (1') eine vollständige Lösung von (1).

Euler kannte und benutzte in seiner „Anleitung zur Algebra“ schon den Fall

$$x_1 x_2 = y_1 y_2,$$

mit der vollständigen Lösung

$$x_1 = pq, \quad x_2 = rs, \quad y_1 = ps, \quad y_2 = qr,$$

der auch in dieser Abhandlung nur gebraucht wird. Den allgemeinen Fall gibt Kronecker in seinen „Vorlesungen über Zahlentheorie“.

§ 2.

Arithmetische Hilfssätze.

Arithmetisch nenne ich die folgenden Hilfssätze, weil die Veränderlichen nur ganzzahlige Werte durchlaufen, und zwar voneinander unabhängig, soweit nichts anderes gesagt wird.

a ist (teiler-) fremd zu $b = a \cup b$.

Durch $a \cup b$ wird schon eine gewisse Abhängigkeit zwischen a und b festgesetzt.

1. $p \equiv q\,(2$ ist gleichgeltend mit $p^2 \equiv q^2\,(4$.
2. $p \equiv 1\,(2$ ist gleichgeltend mit $p^2 \equiv 1\,(8$.
3. $p^2 \equiv q^2\,(8$ ist gleichgeltend mit dem Wechselsatz:

$$1 \equiv p \equiv q\,(2 \text{ oder } p \equiv q\,(4.$$

4. Sind x und y fremd, so haben $x+y$ und $x-y$ höchstens den Gemeinteiler 2. Sie haben genau diesen Gemeinteiler, wenn $x \cup y$ und $xy \equiv 1\,(2$.

5. Aus $xy \equiv 1\,(2$ folgt $x \equiv y \equiv 1\,(2$ und umgekehrt.

Ich verwende die vollständigen Lösungen in ganzen Zahlen einiger jetzt anzugebender diophantischer Gleichungen; die andern sind auch merkwürdig und für andere Fälle nötig.

I. $x^2 + y^2 = z^2$.

$$x = \frac{3+\alpha}{4}(p^2 - q^2)\lambda, \quad y = \frac{3+\alpha}{2} pq\lambda, \quad z = \gamma\frac{3+\alpha}{4}(p^2 + q^2)\lambda,$$

wenn

$$p \cup q, \quad pq = \frac{1-\alpha}{2}\,(2.$$

Ist y gerade, so hat man einfacher

$$x = (p^2 - q^2)\lambda, \quad y = 2pq\lambda, \quad z = \gamma'(p^2 + q^2),$$
$$p \cup q, \quad pq \equiv 0\,(2.$$

Hier wie im folgenden ist

$$\frac{x}{\lambda} \cup \frac{y}{\lambda} \cup \frac{z}{\lambda} \cup \frac{x}{\lambda}.$$

II. $x^2 + 2y^2 = z^2$.

$$x = \alpha'(p^2 - 2q^2)\lambda, \qquad y = 2pq\lambda, \qquad z = \gamma'(p^2 + 2q^2)\lambda,$$
$$p \cup 2q.$$

III. $x^2 + my^2 = z^2$.

m und n seien in diesem Paragraphen verschiedene (positive) ungerade Primzahlen.

$$x = \alpha' \frac{3+\alpha}{4}(p^2 - mq^2)\lambda, \qquad y = \frac{3+\alpha}{2} pq\lambda, \qquad z = \gamma' \frac{3+\alpha}{4}(p^2 + mq^2)\lambda,$$
$$p \cup mq, \qquad pq \equiv \frac{1-\alpha}{2} (2.$$

IV. $x^2 + 2my^2 = z^2$.

$$x = \alpha'\left(\frac{3+\alpha}{2}p^2 - m\frac{3-\alpha}{2}q^2\right)\lambda, \qquad y = 2pq\lambda,$$
$$z = \gamma'\left(\frac{3+\alpha}{2}p^2 + m\frac{3-\alpha}{2}q^2\right)\lambda, \qquad \frac{3+\alpha}{2} \cup m\frac{3+\alpha}{2}q.$$

V. $x^2 + mny^2 = z^2$.

$$x = \alpha' \frac{3+\alpha}{4}\left[\left(\frac{m+1}{2} + \beta\frac{m-1}{2}\right)p^2 - n\left(\frac{m+1}{2} - \beta\frac{m-1}{2}\right)q^2\right]\lambda,$$
$$y = \frac{3+\alpha}{2} pq\lambda,$$
$$z = \gamma' \frac{3+\alpha}{4}\left[\left(\frac{m+1}{2} + \beta\frac{m-1}{2}\right)p^2 + n\left(\frac{m+1}{2} - \beta\frac{m-1}{2}\right)q^2\right]\lambda,$$
$$\left(\frac{m+1}{2} + \beta\frac{m-1}{2}\right)p \cup n\left(\frac{m+1}{2} - \beta\frac{m-1}{2}\right)q, \quad pq \equiv \frac{1-\alpha}{2} (2.$$

VI. $x^2 + y^2 = mz^2$, mit $m = a^2 + b^2$.

$$x = \alpha' \frac{3+\alpha}{4}[a(p^2 - q^2) + 2bpq]\lambda, \qquad y = \beta' \frac{3+\alpha}{4}[b(p^2 - q^2) - 2apq]\lambda,$$
$$z = \gamma' \frac{3+\alpha}{4}(p^2 + q^2)\lambda,$$
$$p \cup q, \quad pq \equiv \frac{1-\alpha}{2} (2, \quad x \equiv a\frac{1+\alpha}{2} + b\frac{1-\alpha}{2} (2, \quad y \equiv b\frac{1+\alpha}{2} + a\frac{1-\alpha}{2} (2.$$

VII. $2x^2 + my^2 = nz^2$, mit $2 + m = n$.

$$x = \alpha'\left(\frac{3+\alpha}{2}p^2 + n\frac{3-\alpha}{2}q^2 + 2npq\right)\lambda, \qquad y = \beta'\left(\frac{3+\alpha}{2}p^2 - n\frac{3-\alpha}{2}q^2\right)\lambda,$$
$$z = \gamma'\left(\frac{3+\alpha}{2}p^2 + n\frac{3-\alpha}{2}q^2 + 4pq\right)\lambda,$$
$$\frac{3+\alpha}{2}p \cup n\frac{3-\alpha}{2}q, \qquad p + \frac{3-\alpha}{2}q \cup m.$$

VIII. $m x^2 + n y^2 = 2 z^2$, mit $m + n = 2 a^2$.

$$x = \alpha' \left(\frac{3+\alpha}{2} p^2 + m \frac{3-\alpha}{2} q^2 + 4 a p q\right) \lambda, \quad y = \beta' \left(\frac{3+\alpha}{2} p^2 - m \frac{3-\alpha}{2} q^2\right) \lambda,$$

$$z = \gamma' \left[a \left(\frac{3+\alpha}{2} p^2 + m \frac{3-\alpha}{2} q^2\right) + 2 m p q\right] \lambda,$$

$$\frac{3+\alpha}{2} p \cup m \frac{3-\alpha}{2} q, \qquad p + a \frac{3-\alpha}{2} q \cup n.$$

Im folgenden werden nur die Fälle $m = 3$, $n = 5$ gebraucht.

IX. $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$.

Ohne Beschränkung setze ich

$$x \equiv u, \quad \text{also} \quad y \equiv v \,(2, \quad x^2 \neq u^2.$$

Dann ist nach § 1, (1) (1')

$$x = p q + r s, \quad u = p q - r s, \quad v = p s + q r, \quad y = p s - q r.$$

Sogar $x^2 = u^2$ ist eingeschlossen, wenn man nimmt $r s = 0$. Immer hat man

$$x^2 + y^2 = (p^2 + r^2)(q^2 + s^2) = u^2 + v^2.$$

Diophantisches System heiße ein Inbegriff von Beziehungen, die in einem zählbaren Unterbereich C' des Körpers der komplexen Zahlen (hier der ganzen rationalen Zahlen) gelöst werden sollen. Diese Beziehungen können Gleichungen oder Ungleichungen irgend einer Art sein. Haben wir Gleichungen zwischen rationalen Funktionen, so mögen diese Koeffizienten aus C' haben.

Besitzt D mehrere Lösungen, so handelt es sich darum (das ist hier die besondere Lösungsart), diese durch eine Menge F von Funktionen mit Koeffizienten aus C' aus einer endlichen Menge von Lösungen eines passenden und bekannten diophantischen Systems D' abzuleiten, indem jeder Lösung von D vermöge F einige Lösungen von D', und jeder Lösung von D' vermöge F einige Lösungen von D entsprechen. D' kann von D verschieden sein oder nicht, abgesehen von den Namen der Veränderlichen. Ist auf diese Art $D = D'$, so werden wir das Eintreten eines der beiden Fälle beweisen:

a) Die Lösungen von D folgen vermöge F so aus den Lösungen von D', daß das betraglich größte Lösungsstück einer jeden Lösung von D größer ist als das betraglich größte Stück einer jeden zugehörigen Lösung von D'; oder

b) es gibt eine Koordinate z in D, die vermöge F immer auf einen betraglich kleineren Wert der entsprechenden Koordinate z' in D' führt, falls nur $|z| > 1$; zu jedem Werte von z gehören nur endlich viele Werte der andern Koordinaten von D, die zusammen mit dem Werte von z eine Lösung von D ergeben.

Für eingeschobene diophantische Systeme, die zwischen D und $D' = D$ erscheinen, braucht diese Vorschrift nicht zu gelten.

Hiermit wird man auf einen kleinsten Wert von $|z|$, also auf endlich viele Lösungen von D zurückgebracht. So führt jede Lösung von D auf eine in gewisser Art „niedrigere" Lösung von D zurück.

Hat man vermöge irgendwelcher Zwischenbeziehungen und einiger Funktionen F die Beziehung D auf die gleichgeltende Beziehung D' zurückgeführt, so sage ich, der Ring habe sich einmal geschlossen. Kommt dies in unserer Betrachtung für einige Beziehungen im ganzen n mal vor, so hat sich der Ring n mal geschlossen und die Lösungen von D sind „n-fach verzweigt". Es kann sein, daß sich bei Benutzung anderer Zwischenbeziehungen eine andere Verzweigung ergibt.

§ 3.

Die Aufgabe.

Es sei

(1) $$2x^4 + 3y^4 = 5z^2$$

in ganzen Zahlen vollständig zu lösen. Da zu jeder Lösung (x, y, z) auch die Lösung $(a\,x, a\,y, a^2 z)$ gehört und umgekehrt, können wir gemeinsame Faktoren von x und y weglassen und schreiben

(2) $$2x \cup 3y,$$

daher

(3) $$2x \cup 3y \cup 5z \cup 2x.$$

Hierin liegt schon

(3′) $$xyz \neq 0.$$

Da $yz \equiv 1\,(2$, haben wir $2x^4 + 3 \equiv 5\,(8$, also

(4) $$x \equiv y \equiv z \equiv 1\,(2.$$

Es ist sogar $5 \equiv 5\,z^2\,(16$, also

(4′) $$z \equiv \beta\,(8.$$

Aus § 2, VII, erhalten wir für $m = 3$, $n = 5$

(5_1) $$\alpha' x^2 = \frac{3+\alpha}{2} p_1^2 + 5\,\frac{3-\alpha}{2} q_1^2 + 10\,p_1 q_1.$$

(5_2) $$\beta' y^2 = \frac{3+\alpha}{2} p_1^2 - 5\,\frac{3-\alpha}{2} q_1^2.$$

(5_3) $$z = \frac{3+\alpha}{2} p_1^2 + 5\,\frac{3-\alpha}{2} q_1^2 + 4\,p_1 q_1.$$

(6_1) $$\frac{3+\alpha}{2} p_1 \cup 5\,\frac{3-\alpha}{2} q_1, \qquad (6_2) \quad p_1 + \frac{3-\alpha}{2} q_1 \cup 3.$$

Aus

$$(5_1) \qquad \alpha'^{\frac{3+\alpha}{2}} x^2 = \left(\frac{3+\alpha}{2} p_1 + 5 q_1\right)^2 - 15 q_1^2$$

und (5_2) haben wir

$$1 \equiv \left(\alpha'^{\frac{3+\alpha}{2}}\right)^2 (5, \qquad 1 \equiv \alpha'^{\frac{3+\alpha}{2}} (3,$$

also

$$(7) \qquad \alpha = -1, \qquad \alpha' = 1.$$

$$(5_1) \qquad x^2 = p_1^2 + 10 q_1^2 + 10 p_1 q_1 = (p_1 + 5 q_1)^2 - 15 q_1^2.$$

$$(5_2) \qquad \beta' y^2 = p_1^2 - 10 q_1^2.$$

$$(5_3) \qquad z = p_1^2 + 10 q_1^2 + 4 p_1 q_1 = (p_1 + 2 q_1)^2 + 6 q_1^2.$$

$$(6_1) \qquad p_1 \smile 10 q_1, \qquad (6_2) \quad p_1 + 2 q_1 \smile 3.$$

Aus (5_3) folgt

$$(8) \qquad p_1 \equiv y \equiv 1, \qquad q_1 \equiv \frac{1-\beta'}{2} (2;$$

$q_1 = 0$ gibt die niedrigste Lösung (Grundlösung) $x^2 = y^2 = z^2 = 1$. Um neue Lösungen zu bekommen, setzen wir daher

$$(9) \qquad q_1 \neq 0.$$

Man ersieht aus (5) unmittelbar die Lösungen:

$$(5_\alpha) \qquad \beta' = -1, \qquad p_1 = (2+\gamma)\delta, \quad q_1 = \gamma\delta,$$
$$x = (4+3\gamma)\varepsilon, \quad y = (2-\gamma)\zeta, \quad z = (19+12\gamma)\eta.$$

Übrigens werden sich diese neuen Lösungen von selbst ergeben, wenn wir zu abgeleiteten Gleichungen kommen, indem sie sich aus deren Grundlösungen ableiten.

Aus (5_1), (5_2) folgt auch

$$(10) \qquad x^2 - y^2 = (1-\beta') p_1^2 + 10 (1+\beta') q_1^2 + 10 p_1 q_1$$
$$= 2 \left[\frac{1-\beta'}{2} p_1 + 5 \frac{1+\beta'}{2} q_1\right] \left[p_1 + \frac{7-3\beta'}{2} q_1\right].$$

Eckige Klammern, die wie hier nebeneinander vorkommen, will ich von links nach rechts lesend mit A, B bezeichnen. Hier ist also

$$(11) \qquad A \equiv \frac{1-\beta'}{2} p_1 + 5 \frac{1+\beta'}{2} q_1, \qquad B \equiv p_1 + (3-2\beta') \frac{3+\beta'}{2} q_1.$$

$x^2 = y^2$ führt nur zur Grundlösung, wir setzen also

$$(12) \qquad x^2 \neq y^2.$$

Nach (4) und § 2, 2 ist die linke Seite von (10), also auch die rechte Seite durch 8 teilbar. Je nachdem $\beta' = 1$ oder $\beta' = -1$ wird, ist A oder B durch 2, also durch 4 teilbar, und B oder A ungerade. Ferner ist $B \equiv p_1 + 2 q_1 (3$, also nach (6_2) $B \neq 0$; $x^2 = y^2$ würde also $A = 0$

und dann $q_1 = 0$ geben, gegen (9). Nach (10) und § 1, (1) (1′) haben wir also zu setzen

$$(13_1) \qquad x + y = 2 p_2 q_2, \qquad x - y = 4 r_2 s_2.$$

$$(13_2) \qquad A = \left(\frac{3+\beta'}{2}\right)^2 p_2 s_2, \qquad B = \left(\frac{3-\beta'}{2}\right)^2 q_2 r_1.$$

Auch ist

$$(14) \qquad \frac{7-3\beta'}{2} A - 5\,\frac{1+\beta'}{2} B = -5\beta' p_1,$$

$$A - \frac{1-\beta'}{2} B = 5\beta' q_1.$$

(13) gibt aufgelöst

$$(15_1) \qquad x = p_2 q_2 + 2 r_2 s_2, \qquad y = p_2 q_2 - 2 r_2 s_2.$$

$$(15_2) \qquad -5\beta' p_1 = (3 - 2\beta') \left(\frac{3+\beta'}{2}\right)^3 p_2 s_2 - 5\,\frac{1+\beta'}{2} q_2 r_2,$$

$$5\beta' q_1 = \left(\frac{3+\beta'}{2}\right)^2 p_2 s_2 - 4\,\frac{1-\beta'}{2} q_2 r_2.$$

Wegen (14), (6) haben A und B höchstens den Faktor 5 gemeinsam. Aus (12), (13), (15_2) und den Sätzen 1 bis 4 von § 2 folgt daher, wenn wir noch abkürzend setzen:

$$(16) \qquad p_n q_n r_n s_n \equiv \pi_n,$$

daß

$$(17_1) \qquad \pi_2 \neq 0, \qquad (17_2) \quad p_2 q_2 \cup 2 r_2 s_2,$$

$$(17_3) \qquad p_2 s_2 \equiv 0\,(3 + 2\beta'), \qquad (17_4) \quad \frac{1}{5}\,\frac{3+\beta'}{2} p_2 s_2 \cup \frac{1}{5}\,\frac{3-\beta'}{2} q_2 r_2.$$

Die Werte (15) setzen wir in (5_2) ein:

$$25\beta' y^2 = (5 p_1)^2 - 10\,(5 q_1)^2,$$

$$25\beta' (p_2 q_2 - 2 r_2 s_2)^2 = \left[(3 - 2\beta') \left(\frac{3+\beta'}{2}\right)^3 p_2 s_2 - 5\,\frac{1+\beta'}{2} q_2 r_2\right]^2$$

$$- 10 \left[\left(\frac{3+\beta'}{2}\right)^2 p_2 s_2 - 4\,\frac{3-\beta'}{2} q_2 r_2\right]^2,$$

$$25\beta' p_2^2 q_2^2 + 100\beta' r_2^2 s_2^2 - 100\beta' \pi_2$$

$$= 3\beta' (3 - 2\beta') \left(\frac{3+\beta'}{2}\right)^5 p_2^2 s_2^2 + 5\beta' (3 + 2\beta') \left(\frac{3-\beta'}{2}\right)^5 q_2^2 r_2^2 - 80\beta' \pi_2,$$

$$5\,(3 + 2\beta') p_2^2 q_2^2 + 20\,(3 + 2\beta') r_2^2 s_2^2 - 20\,(3 + 2\beta') \pi_2$$

$$= -3 \left(\frac{3+\beta'}{2}\right)^5 p_2^2 s_2^2 + (3 + 2\beta')^2 \left(\frac{3-\beta'}{2}\right)^5 q_2^2 r_2^2 - 16\,(3 + 2\beta') \pi_2,$$

$$(18_1) \qquad s_2^2 \left[3 \left(\frac{3+\beta'}{2}\right)^5 p_2^2 + 20\,(3 + 2\beta') r_2^2\right] - 4\,(3 + 2\beta') \pi_2$$

$$= q_2^2 \left[-5\,(3 + 2\beta') p_2^2 + (3 + 2\beta')^2 \left(\frac{3-\beta'}{2}\right)^5 r_2^2\right].$$

$$(18_2)\qquad p_2^2\left[5(3+2\beta')\,q_2^2+3\left(\frac{3+\beta'}{2}\right)^5 s_2^2\right]-4(3+2\beta')\,\pi_2$$

$$=r_2^2\left[(3+2\beta')^2\left(\frac{3-\beta'}{2}\right)^5 q_2^2-20(3+2\beta')\,s_2^2\right],$$

$$\left\{s_2\left[3\left(\frac{3+\beta'}{2}\right)^5 p_2^2+20(3+2\beta')\,r_2^2\right]-2(3+2\beta')\,p_2 r_2 s_2\right\}^2$$

$$=q_2^2\left[-15(3+2\beta')\left(\frac{3+\beta'}{2}\right)^5 p_2^4+20(3+2\beta')^3\left(\frac{3-\beta'}{2}\right)^5 r_2^4\right]$$

$$=5(3+2\beta')\left(\frac{3+\beta'}{2}\right)^2 q_2^2\left[-3\left(\frac{3+\beta'}{2}\right)^3 p_2^4+(3+2\beta')^2\left(\frac{3-\beta'}{2}\right)^7 r_2^4\right],$$

oder

$$(19_1)\quad \left\{s_2\left[3\left(\frac{3+\beta'}{2}\right)^4 p_2^2+10(3+2\beta')\,\frac{3-\beta'}{2}\,r_2^2\right]-\frac{3-\beta'}{2}(3+2\beta')\,p_2 r_2 s_2\right\}^2$$

$$=(3-2\beta')(3+2\beta')^2\,q_2^2\left[-3\left(\frac{3+\beta'}{2}\right)^3 p_2^4+(3+2\beta')^2\left(\frac{3-\beta'}{2}\right)^7 r_2^4\right].$$

Ebenso erhält man aus (18_2):

$$(19_2)\quad \left\{p_2\left[5(3+2\beta')\,q_2^2+3\left(\frac{3+\beta'}{2}\right)^5 s_2^2\right]-2(3+2\beta')\,q_2 s_2 r_2\right\}^2$$

$$=r_2^2\left[5(3+2\beta')^3\left(\frac{3+\beta'}{2}\right)^5 q_2^4-60(3+2\beta')\left(\frac{3+\beta'}{2}\right)^5 s_2^4\right]$$

$$=(3-2\beta')(3+2\beta')^2\left(\frac{3-\beta'}{2}\right)^2 r_2^2\left[(3+2\beta')^2\left(\frac{3-\beta'}{2}\right)^3 q_2^4-3\left(\frac{3+\beta'}{2}\right)^7 s_2^4\right].$$

Daher muß sein

$$(20_1)\qquad -3\left(\frac{3+\beta'}{2}\right)^3 p_2^4+(3+2\beta')^2\left(\frac{3-\beta'}{2}\right)^7 r_2^4=(3-2\beta')\,z_1^2.$$

$$(20_2)\qquad s_2\left[3\left(\frac{3+\beta'}{2}\right)^4 p_2^2+10(3+2\beta')\,\frac{3-\beta'}{2}\,r_2^2\right]$$

$$=(3+2\beta')\,q_2\left[\frac{3-\beta'}{2}\,p_2 r_2+(3-2\beta')\,\theta z_1\right].$$

$$(19_3)\qquad (3+2\beta')^2\left(\frac{3-\beta'}{2}\right)^3 q_2^4-3\left(\frac{3+\beta'}{2}\right)^7 s_2^4=(3-2\beta')\,z_1'^2$$

$$(19_4)\qquad p_2\left[5(3+2\beta')\,q_2^2+3\left(\frac{3+\beta'}{2}\right)^5 s_2^2\right]$$

$$=(3+2\beta')\,\frac{3-\beta'}{2}\,r_2\left[\frac{3+\beta'}{2}\,q_2 s_2+(3-2\beta')\,\theta' z_1'\right].$$

Aus (20_1), (17) folgt

$$(21)\qquad 3\,\frac{3+\beta'}{2}\,p_2\cup\frac{3-\beta'}{2}\,r_2\cup(3-2\beta')\,z_1\cup 3\,\frac{3+\beta'}{2}\,p_2.$$

Unentschieden bleibt noch, ob p_2 oder s_2 durch $3+2\beta'$ teilbar sei; das ergibt sich erst später. Wir müssen also der Einfachheit halber einteilen.

§ 4.

Fall A: $\beta' = -1$.

$(20'_1)$ $$-3p_2^4 + 128 r_2^4 = 5 z_1^2.$$

$(19'_3)$ $$8 q_2^4 - 3 s_2^4 = 5 z_1'^2.$$

$(20'_2)$ $$s_2 (3 p_2^2 + 20 r_2^2) = q_2 (2 p_2 r_2 + 5 \theta z_1).$$

$(19'_4)$ $$p_2 (5 q_2^2 + 3 s_2^2) = 2 r_2 (q_2 s_2 + 5 \theta' z_1').$$

$(21'_1)$ $$3 p_2 \smile 2 r_2 \smile 5 z_1 \smile 3 p_2.$$

$(17'_4)$ $$\frac{p_2 s_2}{5} \smile \frac{2 q_2 r_2}{5}.$$

$(15'_2)$ $$p_1 = p_2 s_2, \qquad 5 q_1 = -p_2 s_2 + 4 q_2 r_2.$$

$(5'_2)$ $$y^2 = 10 q_1^2 - p_1^2.$$

Wir erraten die Grundlösung von $(20'_1)$:

$(20'_\alpha)$ $$p_2 = r_2 = 1, \; z_1 = 5.$$

Das gibt mit Hilfe der Gleichungen $(20'_2)$, $(15'_2)$, (15_1), (5_2)

$$23 s_2 = q_2 (2 + 25\theta) = q_2 \left(27 \frac{1+\theta}{2} - 23 \frac{1-\theta}{2}\right),$$

$$q_2 = 23 \frac{1+\theta}{2} + \frac{1-\theta}{2}, \qquad s_2 = 27 \frac{1+\theta}{2} - \frac{1-\theta}{2},$$

$$z_1' = 35 q \frac{1+\theta}{2} + \frac{1-\theta}{2}.$$

$$p_1 = 27 \frac{1+\theta}{2} - \frac{1-\theta}{2}, \qquad q_1 = 13 \frac{1+\theta}{2} + \frac{1-\theta}{2},$$

$$y = -31 \frac{1+\theta}{2} + 3 \frac{1-\theta}{2}, \qquad x = 77 \frac{1+\theta}{2} - \frac{1-\theta}{2},$$

$$z = 3823 \frac{1+\theta}{2} + 7 \frac{1-\theta}{2}.$$

In der Tat ist

$(1'_\alpha)$ $$2\left(77\frac{1+\theta}{2} - \frac{1-\theta}{2}\right)^4 + 3\left(31\frac{1+\theta}{2} - 3\frac{1-\theta}{2}\right)^4 = 5\left(3823\frac{1+\theta}{2} + 7\frac{1-\theta}{2}\right)^2.$$

Die kleinere dieser beiden Lösungen ist schon in (5_α) enthalten. Aus $(19'_3)$ finden wir

$19'_{3\alpha})$ $$q_2 = s_2 = 1, \quad z_1' = 1,$$

$$8 p_2 = 2 r_2 (1 + 5\theta') = 2 r_2 \left(6 \frac{1+\theta'}{2} - 4 \frac{1-\theta'}{2}\right).$$

$$r_2 = 2 \frac{1+\theta'}{2} + \frac{1-\theta'}{2}, \qquad p_2 = 3 \frac{1+\theta'}{2} - \frac{1-\theta'}{2},$$

$$p_1 = 3 \frac{1+\theta'}{2} - \frac{1-\theta'}{2}, \qquad q_1 = \frac{1+\theta'}{2} + \frac{1-\theta'}{2},$$

$$x = 7 \frac{1+\theta'}{2} + \frac{1-\theta'}{2}, \qquad y = -\frac{1+\theta'}{2} - 3 \frac{1-\theta'}{2},$$

$$z = 31 \frac{1+\theta'}{2} + 7 \frac{1-\theta'}{2}.$$

In der Tat ist

$$(1'_\beta)\quad 2\left(7\frac{1+\theta}{2}+\frac{1-\theta}{2}\right)^4+3\left(\frac{1+\theta'}{2}+3\frac{1-\theta'}{2}\right)^4=5\left(31\frac{1+\theta'}{2}+7\frac{1-\theta'}{2}\right)^2.$$

Das sind die beiden Lösungen 5_α. Wir kehren zu $(20'_1)$ zurück, das sich so schreiben läßt:

$$3p_2^4+5z_1^2=2(8r_2^3)^2.$$

Nach (21′) und § 2, VIII hat diese Gleichung die vollständige Lösung:

$$(22_1)\qquad \alpha' p_2^2=\frac{3+\alpha}{2}p_3^2+3\frac{3-\alpha}{2}+8p_3q_3.$$

$$(22_2)\qquad z_1=\frac{3+\alpha}{2}p_3^2-3\frac{3-\alpha}{2}q_3^2.$$

$$(22_3)\qquad 4r_2^2=\frac{3+\alpha}{2}p_3^2+3\frac{3-\alpha}{2}q_3^2+3p_3q_3.$$

$$(23_1)\qquad \frac{3+\alpha}{2}p_3\smile 3\frac{3-\alpha}{2}q_3 \qquad\qquad (23_2)\qquad p_3+2\frac{3-\alpha}{2}q_3\smile 5.$$

Aus (22_3) folgt $r_2^2\equiv-\alpha p_3^2 (3$, also wegen (21′)

$$\alpha=-1.$$

$$(22_1)\qquad \alpha' p_2^2=p_3^2+6q_3^2-8p_3q_3=(p_3+4q_3)^2-10q_3^2.$$

$$(22_2)\qquad z_1=p_3^2-6q_3^2.$$

$$(22_3)\qquad 4r_2^2=p_3^2+6q_3^2+3p_3q_3.$$

$$(23_1)\quad p_3\smile 6q_3, \qquad\qquad (23_2)\quad p_3-q_3\smile 3.$$

Wegen (22_3), (22_1) ist dann auch

$$(24)\qquad p_3\equiv q_3\equiv 1 (2,\quad \alpha'=-1.$$

Damit wird

$$(22_1)\qquad -p_2^2=p_3^2+6q_3^2+8p_3q_3.$$

$$(25)\qquad 4r_2^3-p_2^2=[p_3+4q_3]\,[2p_3+3q_3].$$

Hier ist von selbst wegen (17_2)

$$(26)\qquad 4r_2^3+p_2^2,$$

also haben wir nach § 1, (1), (1′)

$$(27_1)\qquad 2r_2+p_2=p_4q_4, \qquad 2r_2-p_2=r_4s_4.$$

$$(27_2)\qquad p_3+4q_3=p_4s_4, \qquad 2p_3+3q_3=q_4r_4.$$

$$(27_3)\qquad 2A-B=5q_3, \qquad -3A+4B=5p_3.$$

A und B haben höchstens den Faktor 5 gemein. Aber $B\equiv 2(p_3-q_3)$ (5, so daß nach (23_2) weder B noch A durch 5 teilbar ist. Somit ergibt sich wegen (26) und Sätzen in § 2:

$$(28_1)\quad \pi_4\not\equiv 0, \qquad (28_2)\quad \pi_4\equiv 1 (2, \qquad (28_3)\quad p_4q_4\smile r_4s_4.$$

$$(28_4)\quad p_4s_4\smile q_4r_4, \qquad (28_5)\quad q_4r_4\smile 3.$$

letzteres wegen (23_1), (27_2).

(27) wird aufgelöst:

$$(29_1) \qquad 4r_2 = p_4q_4 + r_4s_4, \qquad 2p_2 = p_4q_4 - r_4s_4.$$

$$(29_2) \qquad 5p_3 = 3p_4s_4 + 4q_4r_4, \qquad 5q_3 = 2p_4s_4 - q_4r_4.$$

In (22_3) eingesetzt:

$$16r_2^2 = (2p_3 + 3q_3)^2 + 15q_3^2.$$

$$25(4r_2)^2 = 25(2p_3 + 3q_3)^2 + 15(5q_3)^2.$$

$$25(p_4q_4 + r_4s_4)^2 = 25q_4^2r_4^2 + 15(2p_4s_4 - q_4r_4)^2.$$

$$(30) \qquad s_4^2(12p_4^2 - 5r_4^2) - 22\pi_4 = q_4^2(5p_4^2 - 8s_4^2).$$

$$(31) \qquad [s_4(12p_4^2 - 5r_4^2) - 11p_4r_4q_4]^2 = 20q_4^2(3p_4^4 + 2r_4^4).$$

$$(32_1) \qquad 2r_4^4 + 3p_4^4 = 5z_2^2.$$

$$(32_2) \qquad s_4(12p_4^2 - 5r_4^2) = q_4(11p_4r_4 + 10\theta z_2).$$

Aus (32_1), (28) folgt

$$(33) \qquad 2r_4 \smile 3p_4 \smile 5z_2 \smile 2r_4.$$

(32_1) ist die Gleichung (1) mit anderen Unbekannten, der Ring hat sich zum ersten Male geschlossen. Man hat z. B.

$$(32_\alpha) \qquad r_4 = p_4 = z_2 = 1,$$

$$7s_4 = q_4(11 + 10\theta) = q_4\left(21\frac{1+\theta}{2} + \frac{1-\theta}{2}\right),$$

$$q_4 = \frac{1+\theta}{2} + 7\frac{1-\theta}{2}, \qquad s_4 = 3\frac{1+\theta}{2} + \frac{1-\theta}{2},$$

$$q_3 = \frac{1+\theta}{2} - \frac{1-\theta}{1}, \qquad p_3 = -\frac{1+\theta}{2} + 5\frac{1-\theta}{2},$$

$$p_2 = -\frac{1+\theta}{2} + 3\frac{1-\theta}{2}, \qquad r_2 = \frac{1+\theta}{2} + 2\frac{1-\theta}{2},$$

$$z_1 = -5\frac{1+\theta}{2} + 19\frac{1-\theta}{2}.$$

In der Tat ist

$$(20'_{1\alpha}) \quad -3\left(\frac{1+\theta}{2} - 3\frac{1-\theta}{2}\right)^4 + 128\left(\frac{1+\theta}{2} + 2\frac{1-\theta}{2}\right)^4 = 5\left(5\frac{1+\theta}{2} - 19\frac{1-\theta}{2}\right)^2.$$

Hieraus kann man nach den schon genannten Sätzen die übrigen Unbekannten bis x, y, z berechnen. Es ergeben sich zum Teil große Zahlen. Es genügt jedoch, wenn für jedes vorliegende diophantische System zwei Lösungen angegeben werden: die Grundlösung und eine nächsthöhere Lösung. Berechnung großer Zahlen wäre hier Sport.

Um aber zu zeigen, daß jede Lösung von (1) gemäß den Bemerkungen am Ende von § 2 auf eine Lösung mit kleinerem $|z|$ zurückgeführt ist, muß ich $|z|$ und $|z_2|$ vergleichen.

Nach (5_3), (15_2) ist

$$25z = (5p_1 + 10q_1)^2 + 6(5q_1)^2,$$

also

$$5z = 3p_2^2 s_2^2 + 32 q_2^2 r_2^2,$$

$$20z = 3s_2^2(2p_2)^2 + 8q_2^2(4r_2)^2 = 3s_2^2(p_4 q_4 - r_4 s_4)^2$$

$$+ 8q_2^2(p_4 q_4 + r_4 s_4)^2 = (p_4^2 q_4^2 + r_4^2 s_4^2)(8q_2^2 + 3s_2^2) + 2\pi_4(8q_2^2 - 3s_2^2).$$

Also

$$\text{I.}\quad 400z^2 = (p_4^4 q_4^4 + r_4^4 s_4^4 + 2\pi_4^2)(8q_2^2 + 3s_2^2)^2 + 4\pi_4^2(8q_2^2 - 3s_2^2)^2$$
$$+ 4\pi_4(p_4^2 q_4^2 + r_4^2 s_4^2)(8q_2^2 + 3s_2^2)(8q_2^2 - 3s_2^2).$$

Nach (32_1):

$$\text{II.}\quad 400z_2^2 = 160r_4^4 + 240p_4^4.$$

Nach $(19'_3)$ ist

$$8q_2^4 > 3s_2^4, \qquad 8q_2^2 > \sqrt{24}\, s_2^3, \qquad 8q_2^2 - 3s_2^2 > (\sqrt{24} - 3)s_2^2 > 1,$$

also positiv.

Ist nun

$$a)\quad q_2^2 \neq s_2^2,$$

so ist $8q_2^2 + 3s_2^2 \geqq 20$, und aus I., II. folgt leicht $400z^2 > 400z_2^2$, also $|z| > |z_2|$.

b) Ist aber $q_2^2 = s_2^2$, so bedarf es einer längeren Betrachtung. Wir haben dann $q^2 = s^2 = 1$, also ohne Beschränkung $q_2 = s_2 = 1$. Dies entspricht dem Falle $(19'_{3\alpha})$, welcher liefert

$$\text{III.}\quad |z| = 31\frac{1+\theta'}{2} + 7\frac{1-\theta'}{2}.$$

$(19'_{3\alpha})$ auf die jetzige Form (32_1) angewandt liefert nach (27_1)

$$7\frac{1+\theta'}{2} + \frac{1-\theta'}{2} = p_4 q_4, \qquad \frac{1+\theta'}{2} + 3\frac{1-\theta'}{2} = r_4 s_4,$$

daher

$$p_4 = (4 + 3\beta)\gamma\frac{1+\theta'}{2} + \delta\frac{1-\theta'}{2}, \qquad q_4 = (4 - 3\beta)\gamma\frac{1+\theta'}{2} + \delta\frac{1-\theta'}{2},$$

$$r_4 = \varepsilon\frac{1+\theta'}{2} + (2 + \zeta)\eta\frac{1-\theta'}{2}, \qquad s_4 = \varepsilon\frac{1+\theta'}{2} + (2 - \zeta)\eta\frac{1-\theta'}{2},$$

$$2r_4^4 + 3p_4^4 = 5z_2^2 = 5\left[\left(1441\frac{1+\beta}{2} + \frac{1-\beta}{2}\right)\frac{1+\theta'}{2} + \left(33\frac{1+\zeta}{2} + \frac{1-\zeta}{2}\right)\frac{1-\theta'}{2}\right].$$

Da die eckige Klammer ein Quadrat sein muß, ist dies nur möglich, wenn

$$\frac{1+\beta}{2}\frac{1+\theta'}{2} + \frac{1+\zeta}{2}\frac{1-\theta'}{2} = 0,$$

also

$$\frac{1+\beta}{2}\frac{1+\theta'}{2} = \frac{1+\zeta}{2}\frac{1-\theta'}{2} = 0,$$

also

$$\text{IV.} \quad |z_2| = 1,$$

infolgedessen

$$z \,|>| \, z_2$$

wird. Das am Ende von § 2 beschriebene Verfahren hat zum Ziele geführt. (1) ist für den Fall A vollständig gelöst, wir gehen also zum andern Fall über.

§ 5.

Fall B: $\beta' = 1$.

(20_1) gibt

$(20_1'')$ $$-24\,p_2^4 + 25\,r_2^4 = z_1^2.$$

$(20_2'')$ $$(48\,p_2^2 + 50\,r_2^2)\,s_2 = 5\,q_2\,(p_2\,r_2 + \theta\,z_1).$$

$(21'')$ $$6\,p_2 \smile r_2 \smile z_1 \smile 6\,p_2.$$

$(15_2'')$ $$5\,p_1 = -8\,p_2\,s_2 + 5\,q_2\,r_2, \quad 5\,q_1 = 4\,p_2\,s_2.$$

$(17_3'')$ $p_2\,s_2 \equiv 0\,(5,$ $(17_4'')$ $\frac{2\,p_2\,s_2}{5} \smile \frac{q_2\,r_2}{5}.$

Wir müssen gemäß $(17_3'')$ wieder einteilen.

Fall B_1: $p_2 \smile 5.$

Daher

$(21_\alpha'')$ $$6\,p_2 \smile 5\,r_2 \smile z_1 \smile 6\,p_2.$$

Eine Lösung von $(20_1'')$ ist

$(20_{1\alpha}'')$ $$p_2 = r_2 = z_2 = 1.$$

Dies gibt

$$98\,s_2 = 5\,q_2\,(1+\theta) = 10\,q_2\,\frac{1+\theta}{2},$$

also

$$\theta = 1, \qquad s_2 = 5, \qquad q_2 = 49.$$

$$q_1 = 4, \qquad p_1 = 41, \qquad y = 39, \qquad x = 59, \qquad z = 2497$$

In der Tat ist

(1_γ) $$2 \cdot 59^4 + 3 \cdot 39^4 = 5 \cdot 2497^2.$$

$(20_1'')$ läßt sich so schreiben:

$$z_1^2 + 6\,(2\,p_2^2)^2 = (5\,r_2^2)^2,$$

und hat gemäß § 2, IV die vollständige Lösung

(34_1) $$z_1 = \frac{3+\alpha}{2}\,p_5^2 - 3\,\frac{3-\alpha}{2}\,q_5^2,$$

(34_2) $$p_2^2 = p_5\,q_5,$$

(34_3) $$5\,r_2^2 = \frac{3+\alpha}{2}\,p_5^2 + 3\,\frac{3-\alpha}{2}\,q_5^2.$$

(35_1) $\frac{3+\alpha}{2}\,p_5 \smile 3\,\frac{3-\alpha}{2}\,q_5,$ (35_2) $p_5\,q_5 \neq 0.$

Letzteres wegen (17_1). Aus (34_3) folgt $-r_2^2 \equiv -\alpha \,(3$, also $\alpha = 1$. Daher

$$(34_1) \qquad z_1 = 2p_5^2 - 3q_5^2,$$

$$(34_3) \qquad 5r_2^2 = 2p_5^2 - 3q_5^2.$$

$$(35_1) \qquad 2p_5 \cup 3q_5.$$

Aus (34_2) folgt

$$(36) \qquad p_5 = p_6^2, \qquad q_5 = q_6^2, \qquad p_2 = p_6 q_6.$$

Daher

$$(37_1) \qquad 2p_6 \cup 3q_6, \qquad (37_2) \quad p_6 q_6 \neq 0.$$

(36) in (34_3) eingesetzt:

$$(38) \qquad 2p_6^4 + 3q_6^4 = 5r_2^2.$$

Das ist System (1), der Ring hat sich zum zweiten Male geschlossen. Auch hat man nach (36) und § 1, (5)

$$(\alpha) \qquad p_6, q_6 \,|\leqq| \, p_2,$$

und nach (13) und § 1, (3_b)

$$(\beta) \qquad p_2 \,| < | \max |x, y|,$$

also nach $(\alpha)(\beta)$

$$(\gamma) \qquad p_6, q_6 \,| < | \max |x, y|,$$

womit nach Art von § 2, a) die Gleichung (1) auf die gleichgeltende Gleichung (38) zurückgeführt ist. Natürlich ist dann auch $r_2 \,| < | z$.

Wir gehen daher zu

$$\text{Fall } B_2\text{:} \quad p_2 \equiv 0 \,(5.$$

Dann ist nach $(20_1'')$

$$(39) \qquad p_2 = 5p_2', \qquad z_1 = 5z_1'.$$

$$(40) \qquad -24 \cdot 25 p_2'^4 + r_2^4 = z_1'^2,$$

und nach (17_2)

$$(41) \qquad r_2 \cup 30p_1' \cup z_1' \cup r_2.$$

$$(17_2'') \qquad 5p_2'q_2 \cup 2r_2 s_2,$$

also

$$z_1'^2 + 6(10p_2'^2)^2 = r_2^4.$$

$$(42_1) \qquad z_1' = \frac{3+\alpha}{2} p_7^2 - 3\frac{3-\alpha}{2} q_7^2.$$

$$(42_2) \qquad 5p_2'^2 = p_7 q_7.$$

$$(42_3) \qquad r_2^2 = \frac{3+\alpha}{2} p_7^2 + 3\frac{3-\alpha}{2} q_7^2.$$

$$(43_1) \quad \frac{3+\alpha}{2} p_7 \cup 3\frac{3-\alpha}{2} q_7, \qquad (43_2) \quad p_7 q_7 \neq 0.$$

Aus (42_3) folgt $r_2^2 \equiv -\alpha p_7^2 (3$, also

$$\alpha = -1. \tag{44}$$

Aus (17_2), (41), (42_2), (42_3) folgt aber auch

$$p_7 \equiv q_7 \equiv 1 (2, \tag{45}$$

$$r_2^2 \equiv \frac{3+\alpha}{2} + 3\,\frac{3-\alpha}{2} \equiv \frac{3+\alpha}{2} - \frac{3-\alpha}{2} \equiv \alpha (4,$$

also

$$\alpha = 1, \tag{46}$$

was ein Widerspruch zu (44) ist. Fall B_2 ist unmöglich, unsere Aufgabe ist vollständig gelöst.

Da die Gleichungen

$$128\, r_2^4 - 3\, p_2^4 = 5\, z_1^2. \tag{$20_1'$}$$

$$25\, r_2^4 - 24\, p_2^4 = z_1^2, \tag{$20_1''$}$$

auf (1) zurückgeführt wurden, sind auch sie vollständig gelöst. Aufgabe (1) ist zweifach verzweigt.

Plauen, den 11. 10. 35.

(Eingegangen am 12. 10. 1935).

Über ausgeglichene Verbände.

Von

Fritz Klein-Barmen in Wuppertal.

Die in der vorliegenden Untersuchung behandelten $\mathfrak{A}$-Verbände gehören zu den *längenendlichen* Verbänden[1]) und sind dadurch bemerkenswert, daß für sie die Einführung einer Art Maßfunktion möglich ist, deren charakteristische Eigenschaften in dem Satz 6 — wir möchten denselben als *Brückensatz* bezeichnen — zum Ausdruck kommen. Für das Folgende wird die Kenntnis von [Verb. 2] vorausgesetzt. Wir bemerken noch, daß wir, um Raum zu sparen, die Durchführung derjenigen Beweise, die keine besonderen Schwierigkeiten bieten, dem Leser überlassen.

§ 1.

Ketten und Brücken.

Erklärung 1. Eine aus m Elementen

$$a_1, \ldots, a_m \qquad (m \geqq 2)$$

eines Verbandes M bestehende Menge heiße eine *Kette*[2]) in M, wenn bei passender Numerierung a_u entweder immer oberer oder immer unterer Nachbar von $a_{\mu+1}$ ist ($\mu = 1, \ldots, m-1$).

Unter Verwendung der in [Verb. 2], Erklärung 9 eingeführten Bezeichnungsweise, die angewendet werden darf, weil die Ketten zu den $\mathfrak{L}$-Verbänden gehören, definieren wir weiter:

---

[1]) Vergl. Grundzüge der Theorie der Verbände. Math. Annalen **111** (1935), S. 596–621. Auf diese Arbeit wird unter der Bezeichnung [Verb. 2] verwiesen. — Das Literaturverzeichnis zur Theorie der Verbände ist ferner durch die folgenden Arbeiten von G. Birkhoff zu ergänzen: [2] Applications of lattice algebra. Proceedings of the Cambr. Phil. Soc. **30** (1934), S. 115 — 122; [3] On the lattice theory of ideals. Bulletin of the Am. Math. Soc. **40** (1934), S. 613 — 619.

Ich benutze die Gelegenheit, um Herrn P. Bernays, der das Manuskript der vorliegenden Arbeit eingesehen und mich auf einige Kürzungsmöglichkeiten aufmerksam gemacht hat, meinen besten Dank auszusprechen.

[2]) Der Begriff der Kette geht auf Dedekind zurück; vergl. Dedekind [W. XXX], S. 253 u. Birkhoff [1], S. 445.

Erklärung 2. Zwei Ketten mit denselben Endgliedern mögen als *gleichendig* bezeichnet werden[3]). Unter der *Länge* einer Kette werde die um 1 verminderte Gliederanzahl verstanden. Eine Kette von der Länge 1 heiße eine *Rotte.*

Satz 1. *Je zwei voneinander abhängige Elemente eines längenendlichen Verbandes M lassen sich durch mindestens eine Kette in M verbinden.*

In der folgenden Erklärung wird der Begriff der Kette verallgemeinert.

Erklärung 3. Eine aus m Elementen

$$a_1, \ldots, a_m \tag{1}$$

eines Verbandes M bestehende Folge[4]) heiße eine *Brücke* in M, wenn je zwei in (1) unmittelbar aufeinander folgende Elemente voneinander abhängig sind. Die Elemente (1) mögen als die *Glieder*, a_1 und a_m insbesondere als die *Endglieder* der Brücke bezeichnet werden. Ein von einem Endglied verschiedenes Glied der Brücke heiße *Pfeiler.* Ein Pfeiler a_μ heiße ein *eigentlicher* Pfeiler, wenn $a_{\mu-1}$ und $a_{\mu+1}$ voneinander unabhängig sind. Andernfalls heiße a_μ ein *uneigentlicher* Pfeiler. Ein eigentlicher Pfeiler a_μ heiße ein *oberer* oder *unterer* Pfeiler, je nachdem

$$a_{\mu-1} \prec a_\mu, a_\mu \succ a_{\mu+1}$$

oder

$$a_{\mu-1} \succ a_\mu, a_\mu \prec a_{\mu+1}$$

zutrifft. Eine Brücke werde als *offen* oder *geschlossen* bezeichnet, je nachdem die Endglieder verschieden sind oder nicht. Daß B eine Brücke mit den Endgliedern a_1 und a_m ist, werde auch durch die Wendung ausgedrückt: Die Brücke B verbindet a_1 mit a_m. Zwei Brücken mit denselben Endgliedern mögen als *gleichendig* bezeichnet werden.

Satz 2. *Je zwei Elemente eines Verbandes M lassen sich durch mindestens eine Brücke in M verbinden. Insbesondere gilt: Sind a und b voneinander abhängige Elemente, so lassen sie sich mindestens einmal durch eine Brücke ohne eigentliche Pfeiler verbinden; sind a und b dagegen voneinander unabhängig, so lassen sie sich mindestens einmal durch eine Brücke mit einem einzigen oberen Pfeiler und mindestens einmal durch eine Brücke mit einem einzigen unteren Pfeiler verbinden.*

Beweis: Sind a und b voneinander abhängig, so stellt das Paar a, b eine geeignete Brücke dar. Sind a und b voneinander unabhängig und setzt man

$$c = a \cup b,\ d = a \cap b,$$

so stellen die Folgen a, c, b und a, d, b Brücken der verlangten Art dar.

[3]) Gleichendige Ketten nennt Dedekind äquivalent.

[4]) Die Elemente (1) brauchen nicht alle voneinander verschieden zu sein.

§ 2.

Ausgeglichene Verbände. Der Brückensatz.

Es sei M ein längenendlicher Verband; er genüge dem folgenden Axiom:

(A) Für je zwei voneinander abhängige Elemente a und b aus M haben alle a mit b verbindenden Ketten in M dieselbe Länge.

Daß der Aussage (A) tatsächlich die Bedeutung eines Axioms zukommt, ergibt sich folgendermaßen. Einerseits ist (A) von der Gesamtheit der einen Verband bestimmenden Axiome *unabhängig*, wie der in Fig. 1 in Netzdarstellung wiedergegebene Verband zeigt. Hier haben die beiden Ketten, die e mit f verbinden, verschiedene Länge. Andererseits ist (A) mit der Gesamtheit der einen Verband bestimmenden Axiome *verträglich*, wie der in Fig. 2 wiedergegebene Verband zeigt. Hier haben die beiden Ketten, die e mit f verbinden, dieselbe Länge 3. Übrigens genügen alle Verbände, deren Ordnung nicht größer als 4 ist, und alle $\mathfrak{L}$-Verbände dem Axiom (A).

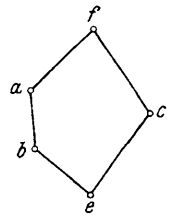


Fig. 1.

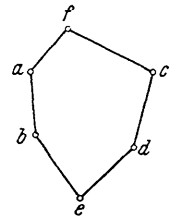


Fig. 2.

Erklärung 4. Ein dem Axiom (A) genügender längenendlicher Verband heiße ein *ausgeglichener* Verband ($\mathfrak{A}$-Verband).

Erklärung 5. Sind a und b zwei voneinander *abhängige* Elemente eines $\mathfrak{A}$-Verbandes M, so bedeute $[a, b]$ die den folgenden Bedingungen genügende Funktion:

I. Für jedes Element a aus M gilt

$$[a, a] = 0. \tag{2}$$

II. Sind a und b Endglieder einer Kette in M und haben die a mit b verbindenden Ketten in M die Länge m, so gilt

$$[a, b] = \pm m, \tag{3}$$

wobei das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem

$$a > b \text{ oder } a < b$$

stattfindet.

Satz 3. *Sind die Elemente a, b und c zu je zweien voneinander abhängig, so gilt*

$$[a, b] + [b, c] = [a, c]; \tag{4}$$

insbesondere findet

(5) $$[a, b] = -[b, a]$$

statt.

Satz 4. *Bilden a und b eine Rotte in M, so gilt*

$$[a, b] = \pm 1.$$

Satz 5. *Stellt die Folge a, b, c eine Brücke in M dar, so gilt*

(6′) $$[a, b] + [b, c] = [a, a \cup c] + [a \cup c, c]$$

und

(6″) $$[a, b] + [b, c] = [a, a \cap c] + [a \cap c, c].$$

Beweis. Ist b ein *uneigentlicher* Pfeiler der Brücke, so ergibt sich die Behauptung nach (4) und (2). Wir können somit annehmen, daß b ein *eigentlicher* Pfeiler ist. Ist b ein *oberer* Pfeiler, so erhält man, wenn (4) auf die Folgen

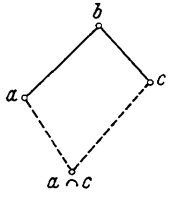


Fig. 3.

$$b,\ a,\ a \cap c$$

und

$$b,\ c,\ a \cap c$$

angewendet wird (vgl. Fig. 3),

$$[b, a] + [a, a \cap c] = [b, c] + [c, a \cap c];$$

nach (5) folgt daraus (6″). Ersetzt man in (6″) das Element b durch $a \cup c$, was offenbar zulässig ist, so ergibt sich

(7) $$[a, a \cup c] + [a \cup c, c] = [a, a \cap c] + [a \cap c, c];$$

aus (6″) und (7) folgt nunmehr (6′).

Ähnlich behandelt man den Fall, daß b ein *unterer* Pfeiler der Brücke ist. Nun läßt sich der in der Einleitung erwähnte Hauptsatz beweisen.

Satz 6 (Brückensatz). *Es sei M ein $\mathfrak{A}$-Verband. Es sei*

(8) $$a_1, \ldots, a_m$$

eine Brücke in M. Dann gilt

(9′) $$\sum_{\mu=1}^{m-1} [a_\mu, a_{\mu+1}] = [a_1, a_1 \cup a_m] + [a_1 \cup a_m, a_m]$$

und

(9″) $$\sum_{\mu=1}^{m-1} [a_\mu, a_{\mu+1}] = [a_1, a_1 \cap a_m] + [a_1 \cap a_m, a_m].$$

Beweis. Nach (2) ist die Behauptung für $m = 2$ und nach Satz 5 für $m = 3$ richtig. Somit darf $m \geqq 4$ angenommen werden. Es seien

(10) $$a_{\varepsilon-1},\ a_\varepsilon,\ a_{\varepsilon+1}$$

drei in (8) unmittelbar aufeinander folgende Elemente.

α) Sind die Elemente (10) zu je zweien voneinander abhängig, so gilt nach (4)

$$[a_{\varepsilon-1}, a_\varepsilon] + [a_\varepsilon, a_{\varepsilon+1}] = [a_{\varepsilon-1}, a_{\varepsilon+1}].$$

Somit kann in (8) ein etwa vorhandener uneigentlicher Pfeiler a_ε unterdrückt werden, ohne daß die über (8) erstreckte Summe

$$\sum_{\mu} [a_\mu, a_{\mu+1}] \tag{11}$$

eine Wertänderung erleidet.

β) Auf Grund der Bemerkung α) dürfen wir annehmen, daß (8) keine uneigentlichen Pfeiler enthält. Es sei wieder $m \geqq 4$. Wir betrachten die Elemente a_1, a_2 und a_3.

Es sei zunächst a_2 ein oberer und somit a_3 ein unterer Pfeiler (vgl. Fig. 4). Dann gilt nach (6″)

$$[a_1, a_2] + [a_2, a_3] = [a_1, a_1 \cap a_3] + [a_1 \cap a_3, a_3],$$

so daß in (8) der Pfeiler a_2 durch $a_1 \cap a_3$ ersetzt werden kann, ohne daß der über (8) erstreckte Ausdruck (11) seinen Wert ändert. In der neuen Brücke

$$a_1, a_1 \cap a_3, a_3, a_4, \ldots, a_m$$

sind die Elemente $a_1 \cap a_3, a_3, a_4$ zu je zweien voneinander abhängig, so daß nach α) das Element a_3 unterdrückt werden kann. Ist also a_2 ein oberer Pfeiler von (8), so kann (8) durch die einen Pfeiler weniger enthaltende Brücke

$$a_1, a_1 \cap a_3, a_4, a_5, \ldots, a_m \tag{12'}$$

ersetzt werden, ohne daß dabei (11) eine Wertänderung erleidet.

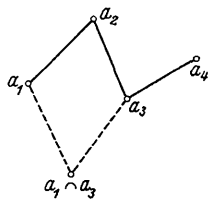


Fig. 4.

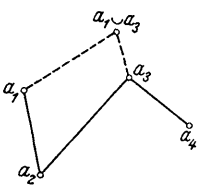


Fig. 5.

Ist zweitens a_2 ein unterer Pfeiler, so ergibt sich ähnlich (vgl. Fig. 5), daß (8) durch die ebenfalls einen Pfeiler weniger enthaltende Brücke

$$a_1, a_1 \cup a_3, a_4, a_5, \ldots, a_m \tag{12″}$$

ersetzt werden kann, ohne daß dabei (11) eine Wertänderung erleidet.

Die Brücken (12′) und (12″) behandle man, falls deren Gliederanzahl noch größer als 3 ist, weiter gemäß α) und β). Nach einer endlichen Anzahl von Schritten ergibt sich schließlich eine aus höchstens drei Gliedern bestehende Brücke, für die, wie bereits gezeigt, die Behauptung des Satzes zutrifft. Damit sind (9′) und (9″) in vollem Umfang bewiesen.

Es werde ausdrücklich bemerkt, daß das geschilderte Reduktionsverfahren auch für den Fall in Kraft bleibt, daß nicht alle Glieder der Brücke (8) bzw. der abgeänderten Brücken voneinander verschieden sind.

Folgerung. Stellt (8) eine geschlossene Brücke dar, so gilt

$$\sum_{u=1}^{m-1} [a_u, a_{u+1}] = 0.$$

Die Sätze 2 und 6 geben uns die Berechtigung, die frühere Festsetzung (Erklärung 5) zu verallgemeinern und dem Symbol $[a, b]$ auch dann einen Sinn beizulegen, wenn a und b voneinander *unabhängige* Elemente sind. Das geschieht in der folgenden Festsetzung.

Erklärung 6. Sind a und b zwei beliebige, nicht notwendigerweise verschiedene Elemente eines $\mathfrak{A}$-Verbandes M, so werde gesetzt

$$[a, b] = \sum_{u=1}^{m-1} [a_u, a_{u+1}], \tag{13}$$

wenn

$$a_1, \ldots, a_m \qquad (a_1 = a,\ a_m = b)$$

eine a mit b verbindende Brücke in M ist.

Nunmehr findet in Verallgemeinerung des Satzes 3 statt:

Satz 7. *Für drei beliebige Elemente a, b und c eines $\mathfrak{A}$-Verbandes gilt*

$$[a, b] + [b, c] = [a, c].$$

Im Hinblick darauf, daß ein $\mathfrak{A}$-Verband in Klassen eingeteilt werden kann, worauf im nächsten Paragraphen eingegangen wird, merken wir noch die im folgenden Satz ausgesprochene Eigenschaft der Funktion $[a, b]$ an.

Satz 8. *Sind a und b Elemente eines $\mathfrak{A}$-Verbandes M und von etwa vorhandenen Spitzen von M verschieden, gilt ferner*

$$[a, b] = m,$$

so gibt es in M Elemente x_1, y_1 derart, daß

$$[x_1, y_1] = m + 1 \tag{14}$$

stattfindet, und Elemente x_2, y_2 derart, daß

$$[x_2, y_2] = m - 1 \tag{15}$$

stattfindet.

Beweis. (14) bzw. (15) wird z. B. erfüllt, wenn $x_1 = a$ bzw. $x_2 = a$ gesetzt wird und für y_1 ein unterer bzw. für y_2 ein oberer Nachbar von b genommen wird.

Folgerung. Gibt es in M zwei Elemente a und b derart, daß

$$[a, b] = m \qquad (m > 0)$$

stattfindet, so gibt es auch für jeden Wert von μ aus der Reihe

$$0, 1, \ldots, m - 1$$

mindestens einmal zwei Elemente x und y derart, daß

$$[x, y] = \mu$$

stattfindet.

§ 3.

Rang. Klasseneinteilung.

Erklärung 7. Sind a und b zwei Elemente eines $\mathfrak{A}$-Verbandes M, so heiße a vom *Rang* μ *in bezug auf* b, wenn

$$[a, b] = \mu$$

stattfindet. Insbesondere heiße a vom *Rang* μ, wenn, falls M ein unterstes Element e besitzt,

$$[a, e] = \mu$$

stattfindet[5]).

Der positive Höchstwert, den $[a, b]$ für zwei Elemente aus M erreichen kann, heiße *Rang* von M.

Der Rang eines $\mathfrak{A}$-Verbandes kann endlich oder unendlich sein. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß M den endlichen Rang m hat, besteht darin, daß M ein oberstes Element f und ein unterstes Element e besitzt und

$$[f, e] = m$$

stattfindet.

Erklärung 8. Ist a ein Element eines $\mathfrak{A}$-Verbandes M, so bezeichne $K(a)$ die Menge derjenigen Elemente x aus M, die vom Rang 0 in bezug auf a sind, für die somit

$$[x, a] = [a, x] = 0$$

gilt.

Satz 9. *Zwei Mengen* $K(a)$ *und* $K(b)$ *sind dann und nur dann identisch, wenn*

$$[a, b] = 0$$

stattfindet.

Beweis. Es sei x ein Element aus $K(a)$ und y ein Element aus $K(b)$. Wegen

$$[b, x] = [b, a] + [a, x] = [b, a]$$

ist x dann und nur dann ein Element von $K(b)$, wenn

$$[b, a] = 0$$

ist. Wegen

$$[a, y] = [a, b] + [b, y] = [a, b]$$

ist y dann und nur dann ein Element von $K(a)$, wenn

$$[a, b] = 0$$

ist.

Satz 10. *Zwei Mengen* $K(a)$ *und* $K(b)$ *sind entweder identisch oder elementfremd.*

[5]) Vgl. Dedekind [W. XXX], S. 265ff.; ferner Birkhoff [1], S. 446 u. [2], S. 115ff. Man beachte, daß, während der relative Rang eine ganze Zahl ist, die insbesondere auch negativ sein kann, der auf e bezogene Rang eine im wesentlichen positive ganze Zahl ist.

Da auf Grund der vorhergehenden Sätze jedes Element von M genau einer Menge $K(a)$ als Element angehört, kann M als die mengentheoretische Vereinigung der verschiedenen in M als Untermengen enthaltenen Mengen

$$K(a),\ K(b),\ \ldots \tag{16}$$

aufgefaßt werden. Die Funktion $[x, y]$ vermittelt somit eine eindeutig bestimmte *Klasseneinteilung* $\mathfrak{K}$ von M, wobei die Anzahl der Klassen (16) entweder endlich oder abzählbar unendlich ist. Ersichtlich ist im ersten Fall die Anzahl der Klassen von $\mathfrak{K}$ um 1 größer als der Rang von M.

Satz 11. *Ist M von dem endlichen Rang m und setzt man*

$$K(a) = K_\lambda,$$

wenn a vom Rang λ ist, besteht demnach $\mathfrak{K}$ aus den Klassen

$$K_0,\ K_1,\ \ldots,\ K_m,$$

ist ferner x_u ein Element von K_μ und x_ν ein Element von K_ν, so gilt

$$[x_\mu, x_\nu] = \mu - \nu.$$

Beweis. Es ist

$$[x_\mu, x_\nu] = [x_\mu, e] + [e, x_\nu] = [x_\mu, e] - [x_\nu, e] = \mu - \nu.$$

Wuppertal-Barmen, im Frühjahr 1935.

(Eingegangen am 8. 7. 1935.)

Beiträge zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik.

Von

Wilhelm Ackermann in Burgsteinfurt.

Bei den Untersuchungen über das Entscheidungsproblem der ersten Stufe braucht man nur die logischen Ausdrücke in Betracht zu ziehen, bei denen die All- und Seinszeichen sämtlich unverneint am Anfang stehen. Die Folge dieser All- und Seinszeichen nennen wir nach Gödel das *Präfix* des Ausdrucks. Es hat sich nun als wichtiges Ergebnis herausgestellt, daß man von der verwirrenden Vielzahl der Präfixe absehen und sich auf bestimmte Präfixklassen beschränken kann, mithin eine gewisse Normierung der logischen Ausdrücke vornehmen kann. Eine erste derartige Normierung wurde von Th. Skolem angegeben. Skolem zeigte[1]), daß man sich beim Erfüllbarkeitsproblem nur mit Präfixen der Form

$$(I) \qquad (x_1)(x_2)\ldots(x_m)(E y_1)\ldots(E y_n)$$

zu befassen braucht. Diese Skolemsche Normalform bildet seither den Ausgangspunkt der meisten Untersuchungen über das Entscheidungsproblem. Eine wesentliche Verschärfung des Skolemschen Resultates wurde von K. Gödel[2]) erreicht, der nachwies, daß man in der Skolemschen Normalform $m = 3$ nehmen kann, daß man sich also auf Präfixe der Form

$$(II) \qquad (x_1)(x_2)(x_3)(E y_1)\ldots(E y_n)$$

beschränken kann. In etwas anderer Richtung bewegen sich Untersuchungen von L. Kalmár. Kalmár zeigte[3]), daß sich die Frage der Erfüllbarkeit eines beliebigen Zählausdrucks auf dieselbe Frage für die Zählausdrücke mit einem Präfix der Form

$$(III) \qquad (E x_1)(E x_2)\ldots(E x_m)(y_1)(y_2)(E z)(u_1)(u_2)\ldots(u_n)$$

zurückführen läßt. Hierbei darf übrigens vorausgesetzt werden, ebenso wie bei der Gödelschen Normalform, daß nur zweistellige Prädikatenvariable vorkommen. Läßt man dreistellige Prädikatenvariable zu, so

---

[1]) Th. Skolem, Logisch-kombinatorische Untersuchungen usw., Vid. Skrifter, Math.-Nat. Klasse 1920, Nr. 4.

[2]) K. Gödel, Zum Entscheidungsproblem des logischen Funktionenkalküls, Monatsh. f. Math. und Phys. 40 (1933).

[3]) L. Kalmár, Ein Beitrag zum Entscheidungsproblem, Acta Scient. Math. Szeged 5 (1932), S. 222—236.

kommt man bei einem Präfix (III) sogar mit einer einzigen derartigen Variablen aus[4]).

Die Reduktion des Entscheidungsproblems auf die Form (II) verläuft in der Richtung, daß die Anzahl der Allzeichen beschränkt wird, bei der Zurückführung auf die Form (III) dagegen so, daß die Seinszeichen zum Teil an den Anfang des Präfixes rücken, während im übrigen nur ein Seinszeichen vorkommt, dem zwei Allzeichen vorangehen. Diese Zurückführungen sind deswegen bemerkenswert, da für die Fälle, daß keine Seinszeichen oder keine Allzeichen vorkommen, oder daß sämtliche Seinszeichen sämtlichen Allzeichen vorangehen, das Entscheidungsproblem sich lösen ließ[5]). Auch für Präfixe der Form (I) mit $m = 2$ gelang es, die Entscheidung durchzuführen [vgl. die Arbeiten von Gödel, Kalmár, Schütte[6])].

Im folgenden werde ich zunächst eine Reduktion des Entscheidungsproblems[7]) vornehmen, die in der durch (III) angedeuteten Richtung der möglichsten Beschränkung der Anzahl der Seinszeichen und ihrer möglichst günstigen Stellung noch weiter geht. Sieht man nämlich ab von den erwähnten Präfixklassen, für die das Problem gelöst ist, so wäre der einfachste Präfixtyp (falls man die Einfachheit in der angegebenen Richtung sucht) derjenige, bei dem nur ein Seinszeichen vorkommt, das hinter dem ersten Allzeichen steht. Es handelt sich also um Präfixe der Form

$$(x)\,(E\,y)\,(z_1)\,(z_2)\ldots(z_n). \tag{IV}$$

Als nächsteinfachsten Präfixtyp würde man den bezeichnen, der aus (IV) dadurch entsteht, daß man noch ein Seinszeichen vorsetzt, also den folgenden Typ

$$(E\,x)\,(y)\,(E\,z)\,(u_1)\ldots(u_n). \tag{V}$$

Im ersten Teile der Arbeit zeige ich nun, daß man zu jeder Formel eine bestimmte andere mit einem Präfix der Form (V) angeben kann, so daß die Formeln hinsichtlich ihrer Erfüllbarkeit (d. h. der Erfüllbarkeit in irgendeinem Bereiche überhaupt) gleichwertig sind. Dadurch gewinnen die Formeln vom Typ (V) und die von dem noch einfacheren Typ (IV) ein besonderes Interesse. Im zweiten Teile stelle ich daher Untersuchungen

---

[4]) Vgl. L. Kalmár, Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, Verh. Int. Math. Kongr. Zürich 1932.

[5]) Vgl. P. Bernays und M. Schönfinkel, Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, Math. Ann. 99 (1928).

[6]) K. Gödel, a. a. O.; L. Kalmár, Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zählausdrücke usw., Math. Ann. 108 (1933); L. Schütte, Untersuchungen zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, Math. Ann. 109 (1934); derselbe, Über die Erfüllbarkeit einer Klasse von logischen Formeln, Math. Ann. 110 (1934).

[7]) Wir meinen immer das Erfüllbarkeitsproblem, wenn wir hier und im folgenden vom Entscheidungsproblem sprechen.

über die Erfüllbarkeit von besonderen Formeln des Typs IV an. Dabei werden zum ersten Male Klassen von Formeln untersucht werden, die je nach ihrer Gestalt schon in einem endlichen oder nur in einem unendlichen Individuenbereiche oder natürlich überhaupt nicht erfüllbar sind.

I.

Im Interesse einer möglichst einfachen Darstellung gehe ich von der Kalmárschen Normalform (III) aus, da diese der Form (V) am nächsten steht. Wesentlich ist dies jedoch für den folgenden Beweis nicht; ich kann ebenso gut von der Form (I) ausgehen, ohne daß dabei die spezifischen Gedanken der Kalmárschen Umformung benutzt würden. Ich werde daher unten kurz angeben, wie der folgende Beweis zu verallgemeinern ist, falls man direkt von (I) ausgeht.

Man habe einen Zählausdruck der Form

(1) $(Ex_1)\ldots(Ex_m)(y_1)(y_2)(Ez)(u_1)\ldots(u_n)\mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_m,y_1,y_2,z,u_1,\ldots,u_n;F_1,\ldots,F_l)$

$F_1, F_2, \ldots, F_l$ bedeuten die vorkommenden Prädikatvariablen. Ist dieser Ausdruck überhaupt erfüllbar, so gibt es einen Individuenbereich J und in J bestimmte Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_m$, Prädikate $\Phi_1, \ldots, \Phi_l$ und eine zweistellige Belegungsfunktion φ (d. h. eine Funktion, deren Argumente und Werte Elemente von J sind), so daß

(2) $\mathfrak{A}(a_1, a_2, \ldots, a_m, y_1, y_2, \varphi(y_1, y_2), u_1, \ldots, u_n; \Phi_1, \ldots, \Phi_l)$

für alle in J gewählten Werte von $y_1, y_2, u_1, \ldots, u_n$ eine richtige Aussage darstellt.

Es bedeute nun $\chi(x, y)$ im Bereiche der positiven ganzen Zahlen, den wir mit Z bezeichnen, die Funktion $(x+y)^2 + x + m$. Wir behaupten dann: Es lassen in Z sich l Prädikate $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_l$, die die entsprechende Anzahl von Leerstellen wie $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_l$ haben, so definieren, daß

(3) $\mathfrak{A}(1, 2, \ldots, m, y_1, y_2, \chi(y_1, y_2)\, u_1, \ldots, u_n; \Psi_1, \ldots, \Psi_l)$

für beliebige in Z genommene Werte der $y_1, y_2, u_1, \ldots, u_n$ eine richtige Behauptung darstellt.

Zum Beweise bemerken wir zunächst, daß $\chi(x, y) > m$, $\chi(x, y) > x$ und $\chi(x, y) > y$. Ferner ist nur dann $\chi(x, y) = \chi(u, v)$, wenn $x = u$ und $y = v$. Ist nämlich $x + y = u + v$, so ist das klar. Ist aber etwa $x + y > u + v$, so kann die Gleichung $\chi(x, y) = \chi(u, v)$ nicht bestehen, da in diesem Falle

$$(x+y)^2 + x \geqq (u+v+1)^2 + x > (u+v)^2 + 2(u+v) > (u+v)^2 + u.$$

Wir ordnen nun jedem Elemente von Z ein Element von J in eindeutiger Weise zu. Den Elementen 1, 2, ..., m von Z soll $a_1, a_2, \ldots, a_m$ aus J entsprechen. Denjenigen Elementen von Z, die sich nicht als $\chi(x, y)$ darstellen lassen und die von 1, 2, ... m verschieden sind, ordnen wir a_1

zu. Sind ferner den Elementen x und y aus Z die Elemente b und c aus J zugeordnet, so wird der Zahl $\chi(x, y)$ das Ding $\varphi(b, c)$ aus J zugeordnet. Wegen der oben angegebenen Eigenschaften von χ ist diese Zuordnung eindeutig und erfaßt auch alle Elemente von Z. Die Definition der Prädikate Ψ_1, Ψ_2, ..., Ψ_l geschieht nun folgendermaßen: Es habe etwa Ψ_k t Argumente. Es seien x_1, x_2, ..., x_t irgendwelche Elemente aus Z, $b_1, b_2, \ldots, b_t$ die zugeordneten Elemente aus J. Dann soll immer sein

$$\Psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_t) \sim \Phi_k(b_1, b_2, \ldots, b_t).$$

Jetzt ist

$$\mathfrak{A}(1, 2, \ldots, m, y_1, y_2, \chi(y_1, y_2), u_1, \ldots, u_n; \Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_l)$$

für beliebige Werte der $y_1, y_2, u_1, \ldots, u_n$ richtig; denn nach Definition der Ψ ist dieser Ausdruck wahrheitsgleich mit

$$\mathfrak{A}(a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \varphi(b_1, b_2), c_1, \ldots, c_n; \Phi_1, \ldots, \Phi_l),$$

wenn $b_1, b_2, c_1, \ldots, c_m$ die den $y_1, y_2, u_1, \ldots, u_n$ zugeordneten Dinge bezeichnen. Unsere obige Behauptung ist somit erwiesen.

Wir führen nun folgende Abkürzungen ein: $\mathfrak{B}(x; F, G$ sei definiert als

$$(y)(z)(u)(v)(w)[\overline{F}(y,z)G(y,x,z) \,\&\, \overline{F}(y,z)\overline{F}(u,v)\overline{G}(w,y,u)G(w,z,v)];$$

$\mathfrak{C}(x; F, G, H)$ sei eine Abkürzung für

$$(y)(z)(u)(v)(w)[H(y,x,y) \,\&\, \overline{F}(y,z)\overline{G}(w,u,v)\overline{H}(w,y,u)H(w,z,v)];$$

endlich $\mathfrak{D}(x; F, G, H, M_1, \ldots, M_l)$ eine solche für

$$(y)(z)(u_1)\ldots(u_m)(v_1)\ldots(v_n)(w)(s)(t)[\overline{F}(x,u_2)\overline{F}(u_2,u_3)\ldots\overline{F}(u_{m-1},u_m)$$
$$\overline{G}(y,z,t)\overline{H}(t,t,s)\overline{G}(s,y,w)\overline{G}(w,u_m,u_1)\mathfrak{A}(x,u_2,\ldots,u_m,y,z,u_1,v_1,\ldots,v_n;M_1,\ldots,M_l)].$$

Hierbei sollen F, G, H, M_1, ..., M_l freie Prädikatenvariable bedeuten.

Wir bilden nun

$$(4)\ (Ex)[(y)(Ez)F(y,z) \,\&\, \mathfrak{B}(x;F,G) \,\&\, \mathfrak{C}(x;F,G,H) \,\&\, \mathfrak{D}(x;F,G,H,M_1,\ldots,M_l)].$$

Diesen Ausdruck (4) kann man so umformen, daß die All- und Seinszeichen zu Beginn der Formel stehen. Bei passender Umformung erhält man dann einen Ausdruck mit einem Präfix der Form (V). Können wir nun zeigen, daß (1) und (4) in bezug auf Erfüllbarkeit gleichwertig sind, so ist bewiesen, daß man die Form (V) als Normalform für die logischen Ausdrücke nehmen kann.

Es sei (1) in irgendeinem Bereiche J erfüllbar. Wie wir vorher gezeigt hatten, lassen sich dann die $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_l$ in Z so wählen, daß (3) richtig ist. Bezeichnen wir nun das Prädikat $y = x + 1$ mit $\Phi(x, y)$, $z = x + y$ mit $\Gamma(x, y, z)$, $z = x \cdot y$ mit $\Theta(x, y, z)$, so genügt zur Erfüllung von (4) im Bereiche Z jedenfalls, daß

$$(y)(Ez)\Phi(y,z) \,\&\, \mathfrak{B}(1;\Phi,\Gamma) \,\&\, \mathfrak{C}(1;\Phi,\Gamma,\Theta) \,\&\, \mathfrak{D}(1;\Phi,\Gamma,\Theta,\Psi_1,\ldots,\Psi_l)$$

richtig ist. $\mathfrak{D}(1; \Phi, \Gamma, \Theta, \Psi_1, \ldots, \Psi_l)$ lautet ausgeschrieben

$(y)(z)(u_1)\ldots(u_m)(v_1)\ldots(v_n)(w)(s)(t)[(u_2 = 1+1)(u_3 = u_2+1)\ldots(u_m = u_{m-1}+1)$
$(t = y+z)(s = t\cdot t)(w = s+y)(u_1 = w+u_m)\mathfrak{A}(1, u_2, \ldots, u_m, y, z, u_1, v_1, \ldots, v_n; \Psi_1, \ldots, \Psi_l)]$.

In diesem Ausdruck kann man die Ungleichheiten gemäß der logischen Identität $(x)[(x = u)\mathfrak{A}(x)] \sim \mathfrak{A}(u)$ eliminieren, und erhält

$(y)(z)(v_1)\ldots(v_n)\mathfrak{A}(1, 2, \ldots, m, y, z, (y+z)^2 + y + m, v_1, \ldots, v_n; \Psi_1, \ldots, \Psi_l)$,

d. h. gerade den richtigen Ausdruck (3). $\mathfrak{C}(1; \Phi, \Gamma, \Theta)$ war eine Abkürzung für

$(y)(z)(u)(v)(w)[y = y\cdot 1 \,\&\, (z = y+1)(v = w+u)(u = w\cdot y)(v = w\cdot z)]$.

Nach Fortschaffung der Ungleichheiten erhält man den äquivalenten Ausdruck

$$(y)(w)(y = y\cdot 1 \,\&\, w + w\cdot y = w(y+1)),$$

also eine Identität. $\mathfrak{B}(1; \Phi, \Gamma)$ schreibt sich ohne Gebrauch von Abkürzungen als

$$(y)(z)(u)(v)(w)[(z = y+1)(z = y+1) \,\&\, (z = y+1)(v = u+1)(u = w+y)(v = w-z)].$$

Dieser Ausdruck läßt sich vereinfachen zu

$$(y)(z)(w)[(z = y+1)(z = y+1) \,\&\, (w+y)+1 = w-(y+1)],$$

stellt also ebenfalls eine Identität dar. Da auch $(y)(Ez)(z = y+1)$ richtig ist, so ist der Ausdruck (4) auf die angegebene Weise in Z erfüllbar.

Es sei nun umgekehrt der Ausdruck (4) in einem Bereiche K erfüllbar. Für diesen Bereich existieren dann Prädikate $\Phi, \Gamma, \Theta, \Psi_1, \ldots, \Psi_l$, eine Belegungsfunktion μ und ein Element a, so daß

(5) $(y)\Phi(y, \mu y) \,\&\, \mathfrak{B}(a; \Phi, \Gamma) \,\&\, \mathfrak{C}(a; \Phi, \Gamma, \Theta) \,\&\, \mathfrak{D}(a; \Phi, \Gamma, \Theta, \Psi_1, \ldots, \Psi_l)$

der Fall ist. Wir können dann auch eine Erfüllung im Bereiche Z der positiven ganzen Zahlen konstruieren, indem wir ähnlich wie früher jeder Zahl aus Z eindeutig ein Element aus K zuordnen. Diese Zuordnung geschieht in der Weise, daß man den Zahlen 1, 2, 3, ... der Reihe nach $a, \mu a, \mu\mu a, \ldots$ entsprechen läßt. Die erfüllenden Prädikate $\Phi', \Gamma', \Theta', \Psi_1', \ldots, \Psi_l'$ werden wie früher definiert, indem z. B. $\Gamma'(x, y, z)$ dann und nur dann richtig sein soll, wenn $\Gamma(a, b, c)$ zutrifft, wobei a, b, c die x, y, z zugeordneten Elemente von K sind. Die zu Z gehörige, μ entsprechende Belegungsfunktion ist μ', wobei $\mu' x = x + 1$. Entsprechen sich x und b, so auch $\mu' x$ und μb. Es ist dann klar, daß

(6) $(y)\Phi'(y, \mu' y) \,\&\, \mathfrak{B}(1; \Phi', \Gamma') \,\&\, \mathfrak{C}(1; \Phi', \Gamma', \Theta') \,\&\, \mathfrak{D}(1; \Phi', \Gamma', \Theta', \Psi_1', \ldots, \Psi_l')$

richtig ist. Wegen $(x)\Phi'(x, x+1)$ gilt $(x)(y)(\Phi''(x, y) \to \Phi'(x, y))$, wenn $\Phi''(x, y)$ das Prädikat $y = x + 1$ bedeutet. Da andererseits in (6), ab-

gesehen vom ersten Konjunktionsgliede, Φ' nur als negierter Grundbestandteil vorkommt, so ist auch

$$\mathfrak{B}(1; \Phi'', \Gamma') \,\&\, \mathfrak{C}(1; \Phi'', \Gamma', \Theta') \,\&\, \mathfrak{D}(1; \Phi'', \Gamma', \Theta', \Psi_1', \ldots, \Psi_l')$$

richtig. $\mathfrak{B}(1; \Phi'', \Gamma')$ läßt sich vereinfachen zu

$$(y)\,(u)\,(w)\,[\Gamma'(y, 1, y+1) \,\&\, \overline{\Gamma}'(w, y, u)\,\Gamma'(w, y+1, u+1).$$

Daraus ergibt sich $(x)\,(y)\,(z)\,\Gamma'(x, y, x+y)$. Bezeichnen wir mit $\Gamma''(x, y, z)$ das Prädikat $z = x + y$, so gilt demnach $(x)\,(y)\,(z)\,(\Gamma''(x, y, z) \to \Gamma'(x, y, z))$. Da Γ' in $\mathfrak{C}(1; \Phi'', \Gamma', \Theta') \,\&\, \mathfrak{D}(1; \Phi'', \Gamma', \Theta', \Psi_1', \ldots, \Psi_l')$ nur negiert vorkommt, hat man weiter $\mathfrak{C}(1; \Phi'', \Gamma'', \Theta') \,\&\, \mathfrak{D}(1; \Phi'', \Gamma'', \Theta', \Psi_1', \ldots, \Psi_l')$. $\mathfrak{C}(1; \Phi'', \Gamma'', \Theta')$ läßt sich schreiben als

$$(y)\,(w)\,(u)\,[\Theta'(y, 1, y) \,\&\, \overline{\Theta}'(w, y, u)\,\Theta'(w, y+1, w+u)].$$

Hiervon ist $(x)(y)(z)\Theta'(x, y, x \cdot y)$ oder $(x)(y)(z)[\Theta''(x, y, z) \to \Theta'(x, y, z)]$ eine Folge, wobei $\Theta''(x, y, z)$ das Prädikat $z = x \cdot y$ bedeutet. Weiter ergibt sich entsprechend wie oben

$$\mathfrak{D}(1; \Phi'', \Gamma'', \Theta'', \Psi_1', \ldots, \Psi_l').$$

Dieser letzte Ausdruck ist gleichwertig mit

$$(y)\,(z)\,(v_1) \ldots (v_n)\,\mathfrak{A}(1, 2, \ldots, m, y, z, (y+z)^2 + y + m, \Psi_1', \ldots, \Psi_l').$$

Eine Folgerung hiervon ist

$$(E x_1) \ldots (E x_m)\,(y)\,(z)\,(E u)\,(v_1) \ldots (v_n)\,\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n, y, z, u, v_1, \ldots, v_n; \Psi_1', \ldots, \Psi_l').$$

Der Ausdruck (1) ist also ebenfalls erfüllbar.

Damit haben wir gezeigt, daß die Ausdrücke (1) und (4) hinsichtlich der Erfüllbarkeit gleichwertig sind. Wir wollen nun kurz andeuten, wie man vorzugehen hat, wenn man statt von der Kalmárschen Normalform (III) von der Skolemschen Normalform ausgeht.

Die Erfüllbarkeit eines Ausdrucks

$$(x_1)\,(x_2) \ldots (x_m)\,(E y_1) \ldots (E y_n)\,\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n; F_1, \ldots, F_l)$$

besagt, daß in einem Individuenbereich J n m-stellige Belegungsfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ und l Prädikate $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_l$ existieren, so daß

$$\mathfrak{A}(x_1, x_2, \ldots, x_m, \varphi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_m); \Phi_1, \ldots, \Phi_l)$$

immer richtig ist. Wir konstruieren nun wieder eine Erfüllung im Bereiche der positiven ganzen Zahlen. An die Stelle der einen früheren Funktion χ treten hier n Funktionen $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$, die definiert sind durch

$$\chi_i(x_1, \ldots, x_m) =$$
$$n\,[(x_1 + \ldots + x_m)^m + (x_1 + \ldots + x_{m-1})^{m-1} + \ldots + (x_1 + x_2)^2 + x_1] + i.$$

Es ist dann $\chi_i(x_1, \ldots, x_m)$ größer als jedes seiner Argumente; ferner gilt nur dann

$$\chi_i(x_1, \ldots, x_m) = \chi_k(y_1, \ldots, y_m),$$

wenn $i = k$ und die Reihe der x mit der Reihe der y übereinstimmt. Es wird dann wieder eine Zuordnung der Elemente von Z zu den Elementen von J hergestellt. Dem Element 1 von Z entspricht dabei ein willkürlich gewähltes Element a_1 von J. Im übrigen ist das Verfahren entsprechend wie früher. Es lassen sich also wieder Prädikate Ψ_1, Ψ_2, ..., Ψ_l definieren, so daß

$$\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_m, \chi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, \chi_n(x_1, \ldots, x_m); \Psi_1, \ldots, \Psi_l)$$

richtig ist. Da die Funktionen χ_i sich durch Ineinanderschachtelung von Summe und Produkt gewinnen lassen, kann man dann wieder einen gleichwertigen Zählausdruck mit einem Präfix der Form (V) konstruieren.

Wir haben damit gezeigt, daß jeder Zählausdruck hinsichtlich seiner Erfüllbarkeit gleichwertig ist mit einem anderen der Form

$$(Ex)(y)(Ez)(u_1) \ldots (u_n)\ \mathfrak{A}(x, y, z, u_1, \ldots, u_n; G_1, \ldots, G_l).$$

Wie sich aus dem Beweise unmittelbar ergibt, brauchen wir in vorstehender Formel nicht die allgemeinsten $\mathfrak{A}(x, y, z, u_1, \ldots, u_n; G_1, \ldots, G_l)$ zu betrachten, sondern können uns auf Zählausdrücke der Form

(7) $\quad (y)(Ez)F(y,z) \;\&\; (Ex)(u_1) \ldots (u_n)\ \mathfrak{A}(x, u_1, \ldots, u_n; F, G_1, \ldots, G_l)$

beschränken. Diese Form (7) ist für die Behandlung der Ausdrücke meist bequemer. Beim Auftreten der Präfixe (IV) ist eine ähnliche Spezialisierung gestattet. Wir haben nur nötig, Ausdrücke der Form

(8) $\quad (x)(Ey)F(x, y) \;\&\; (z_1) \ldots (z_n)\ \mathfrak{A}(z_1, \ldots, z_n; F, G_1, \ldots, G_l)$

in Betracht zu ziehen. Hat man nämlich einen Zählausdruck

(9) $\quad (x)(Ey)(z_1) \ldots (z_n)\ \mathfrak{B}(x, y, z_1, \ldots, z_n; G_1, \ldots, G_l),$

so ist

(10) $(x)(Ey)F(x, y) \;\&\; (x)(y)(z_1) \ldots (z_n)\,\overline{F}(x, y)\,\mathfrak{B}(x, y, z_1, \ldots, z_n; G_1, \ldots, G_l)$

hinsichtlich seiner Erfüllbarkeit mit (9) gleichwertig. Denn es ist zunächst für beliebige $F, G_1, \ldots, G_l$ (9) eine Konsequenz von (10), so daß die Erfüllbarkeit von (10) die von (9) einschließt. Ist andererseits (9) erfüllt, und fassen wir $F(x, y)$ als eine Abkürzung für

$$(z_1)(z_2) \ldots (z_n)\ \mathfrak{B}(x, y, z_1, \ldots, z_n; G_1, \ldots, G_l)$$

auf, so erkennen wir, daß auch (10) erfüllt ist. (10) hat aber die Form (8).

II.

Es sollen jetzt die einfachsten Fälle von Formeln vom Typ (8) auf ihre Erfüllbarkeit untersucht werden. Wir befassen uns bei dieser Untersuchung in erster Linie mit der Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die betreffenden Formeln schon in einem endlichen Individuenbereiche sich erfüllen lassen. Einfache Unter-

fälle von (8) ergeben sich dadurch, daß man annimmt, daß F die einzige vorkommende Prädikatvariable ist. Es handelt sich also um Formeln vom Typ

$$(11) \qquad (x)\,(E\,y)\,F(x,\,y)\ \&\ (z_1)\ldots(z_n)\,\mathfrak{A}(z_1,\ldots,z_n;\,F).$$

Bei (11) interessiert uns nur der Fall $n \geqq 3$. Der Fall $n \leqq 2$ wurde durch die in Anmerkung [6]) genannten Arbeiten mit erledigt. Es zeigte sich dabei, daß nur solche Ausdrücke auftreten, die überhaupt nicht oder schon in einem endlichen Individuenbereiche erfüllbar sind. Für den Fall $n \geqq 3$ liegt dagegen, wie wir schon im voraus bemerken, alles anders.

Wir stellen zunächst einen Hilfssatz auf, dessen Richtigkeit sich zwar unmittelbar ergibt, der aber trotzdem sehr nützlich ist.

Hilfssatz I: *Ist der Ausdruck* (11) *in einem Bereiche durch ein Prädikat* Φ *erfüllt und gibt es eine Teilmenge* M *dieses Bereiches, so daß es zu jedem Element* x *aus* M *ein* y *aus* M *mit* $\Phi(x, y)$ *gibt, so ist* (11) *durch* Φ *auch in* M *erfüllt.*

Für das folgende erweist es sich als zweckmäßig, wenn wir der Formel (11) eine gewisse symmetrische Gestalt geben. Wir bilden zunächst alle möglichen Ausdrücke, die aus $\mathfrak{A}(u_1,\ldots,u_n;\,F)$ dadurch entstehen, daß wir die u in ganz beliebiger Weise durch Variable aus der Reihe $z_1,\ldots,z_n$ ersetzen, wobei die Reihenfolge gleichgültig ist und Wiederholungen vorkommen dürfen. Alle so entstehenden Ausdrücke werden dann durch & verbunden. Wir bezeichnen diese Konjunktion mit $\mathfrak{B}(z_1,\ldots,z_n;\,F)$. Offenbar gilt

$$(z_1)\ldots(z_n)\,\mathfrak{A}(z_1,\ldots,z_n;\,F) \sim (z_1)\ldots(z_n)\,\mathfrak{B}(z_1,\ldots,z_n;\,F).$$

Ferner gilt

$$\mathfrak{B}(z_1,\ldots,z_n;\,F) \to \mathfrak{B}(z_{i_1},\ldots,z_{i_k};\,F),$$

wo die $i_1,\ldots,i_k$ beliebige Werte aus dem Bereich $1, 2, \ldots, n$ bedeuten mögen. Statt (11) wollen wir nun in Zukunft den gleichwertigen Ausdruck

$$(12) \qquad (x)\,(E\,y)\,F(x,\,y)\,\&\,(z_1)\ldots(z_n)\,\mathfrak{B}(z_1,\ldots,z_n;\,F)$$

betrachten.

Die Frage nach den Bedingungen für die Erfüllbarkeit von (12) in einem endlichen Individuenbereiche wird uns nun durch den folgenden Satz beantwortet.

Satz I: *Ein Ausdruck der Form* (12) *ist dann und nur dann in einem endlichen Bereiche erfüllbar, falls er schon in einem Bereiche mit der Individuenzahl* $n+1$ *erfüllbar ist.*

Beweis: Es sei J der kleinste endliche Bereich, in dem (12) erfüllbar ist. Φ sei ein zu J gehöriges erfüllendes Prädikat. Unter einem Φ-Zyklus von Elementen wollen wir eine endliche Anzahl $a_1, a_2, \ldots, a_k$ von Elementen aus J verstehen, so daß immer $\Phi(a_i, a_{i+1})$ und außerdem

$\Phi(a_k, a_1)$ der Fall ist. Ein Zyklus kann auch aus einem einzigen Elemente a_l bestehen, wenn nämlich $\Phi(a_1, a_1)$ der Fall ist. Ein derartiger Φ-Zyklus existiert immer in J. Wir können nämlich, da ja $(x)(Ey)\Phi(x, y)$ der Fall ist, von einem beliebigen Elemente b_1 von J ausgehend, weitere Elemente $b_2, b_3, \ldots$ finden, so daß immer $\Phi(b_i, b_{i+1})$ der Fall ist. Wegen der Endlichkeit des Bereiches J kommen wir dann nach endlich vielen Schritten zu einem Element b_l, so daß ein i mit $\Phi(b_l, b_i)$ existiert $(i \leqq l)$. Die Elemente $b_i, \ldots, b_l$ bilden dann einen Φ-Zyklus.

Es mögen also die Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_k$ einen Φ-Zyklus bilden. Nach Hilfssatz I ist (12) im Bereiche $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ durch Φ erfüllt. Da J der kleinste Bereich ist, in dem Erfüllung möglich ist, so enthält die Reihe $a_1, a_2, \ldots, a_k$ alle Elemente von J und zwar jedes nur einmal. Aus demselben Grunde ist immer $\overline{\Phi}(a_i, a_j)$, außer wenn $j = i + l$ oder $i = k$ und $j = 1$. (Anderenfalls gäbe es ja einen kleineren Φ-Zyklus).

Ist nun $k \leqq n' + 1$, so bedarf unser Satz I keines weiteren Beweises. Wir dürfen also voraussetzen, daß $k > n + 1$. Wir bilden einen neuen Bereich aus den Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. In diesem Bereich wird ein Prädikat Ψ so definiert, daß für alle i $\Psi(a_i, a_{i+1})$ und $\Psi(a_{n+1}, a_1)$ richtig ist, während im übrigen $\overline{\Psi}(a_i, a_j)$ der Fall sein soll. Nun war $\mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_n; \Phi)$ richtig wegen der Erfüllbarkeit von (12) durch Φ im Bereiche $a_1, a_2, \ldots, a_k$. $\mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_n; \Psi)$ ist ebenfalls richtig, da ja, soweit nur $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in Frage kommt, Ψ mit Φ übereinstimmt.

$$\mathfrak{B}(a_{i+1}, \ldots, a_{n+1}, a_1, \ldots, a_{i-1}; \Psi)$$

ist ferner bei beliebig gewähltem i richtig. Dieser Ausdruck ist nämlich wahrheitsgleich mit $\mathfrak{B}(a_1, \ldots, a_n; \Psi)$, da ja für Ψ keines der Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$, die man sich zyklisch angeordnet denken kann, so daß sich a_1 wieder an a_{n+1} anschließt, ausgezeichnet ist. Wegen der auf Seite 426 erwähnten Eigenschaften von $\mathfrak{B}$ ergibt sich weiter, daß überhaupt $(z_1) \ldots (z_n)\, \mathfrak{B}(z_1, \ldots, z_n; \Psi)$ richtig ist. Mit anderen Worten: (12) wäre schon in einem Bereich mit $n + 1$ Elementen erfüllt. Das schließt einen Widerspruch ein, da ja J der kleinste Bereich sein sollte, der noch Erfüllung zuläßt. Der Fall $k > n + 1$ kommt also nicht in Betracht. Damit ist Satz I bewiesen.

Nachdem wir ein Kriterium dafür angegeben haben, wann eine Formel vom Typ (12) sich in einem endlichen Bereiche erfüllen läßt, suchen wir bei den Formeln, die diesem Kriterium nicht genügen, nach der Beantwortung der Frage, ob wenigstens Erfüllbarkeit in einem unendlichen Individuenbereiche besteht.

Wir legen irgendeinen Zählausdruck der Form (12) zugrunde und wollen, von diesem ausgehend, zunächst einen weiteren Zählausdruck kon-

struieren. Wir bezeichnen mit $\prod_{i,k=1}^{n}{}' F(z_i, z_k)$ die Disjunktion aller Aussagen $F(z_i, z_k)$, bei denen $1 \leqq i, k \leqq n$; $k \geqq i+2$. Da $n \geqq 3$, ist die angegebene Disjunktion immer bedeutungsvoll. $\mathfrak{S}(z_1, z_2, \ldots, z_n; F)$ sei eine Abkürzung für die Konjunktion

$$\overline{F}(z_1, z_1) \,\&\, \overline{F}(z_1, z_2)\,\overline{F}(z_2, z_1) \,\&\, \ldots \,\&\, \overline{F}(z_1, z_2)\,\overline{F}(z_2, z_3) \ldots \overline{F}(z_{n-1}, z_n)\,\overline{F}(z_n, z_1).$$

Wir bilden den folgenden Zählausdruck

$$(13)\quad (x)(Ey)\,F(x,y) \,\&\, (z_1) \ldots (z_n)\,[\mathfrak{B}(z_1, \ldots, z_n; F) \,\&\, \mathfrak{S}(z_1, \ldots, z_n; F) \,\&\, \overline{F}(z_1, z_2)\,\overline{F}(z_2, z_3) \ldots \overline{F}(z_{n-1}, z_n) \prod_{i,k=1}^{n}{}' F(z_i, z_k)].$$

Es gilt dann der

Hilfssatz II: *Ist ein Ausdruck der Form* (13) *überhaupt erfüllbar, so nur in einem unendlichen Individuenbereich.*

Beweis: Nehmen wir an, (13) sei in einem endlichen Individuenbereiche erfüllbar. Es existiert dann ein kleinster Bereich dieser Art, den wir J nennen wollen. Das erfüllende Prädikat sei Φ. Die Anzahl der Elemente von J sei l. Nach Satz I ist $l \leqq n+1$. Aus den Überlegungen, die wir beim Beweise von Satz I angestellt haben, ergibt sich, daß wir den Elementen von J eine derartige Anordnung $a_1, a_2, \ldots, a_l$ geben können, so daß $a_1, a_2, \ldots, a_l$ einen Φ-Zyklus darstellt.

a) Es sei $l \leqq n$. Dieser Fall ist nicht möglich. Da nämlich $(z_1)(z_2) \ldots (z_n)\,\mathfrak{S}(z_1, \ldots, z_n; \Phi)$ der Fall ist, so müßte sein

$$\overline{\Phi}(a_1, a_2)\,\overline{\Phi}(a_2, a_3) \ldots \overline{\Phi}(a_{l-1}, a_l)\,\overline{\Phi}(a_l, a_1),$$

was mit dem Bestehen eines Φ-Zyklus für $a_1, a_2, \ldots, a_l$ unvereinbar ist.

b) Es sei $l = n+1$. Da $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ einen Φ-Zyklus bilden, gilt

$$\Phi(a_1, a_2) \,\&\, \Phi(a_2, a_3) \,\&\, \ldots \,\&\, \Phi(a_{n-1}, a_n) \,\&\, \overline{\prod_{i,k=1}^{n}{}' \Phi(a_i, a_k)}.$$

Es könnte also

$$(z_1)(z_2) \ldots (z_n)\,(\overline{\Phi}(z_1, z_2)\,\overline{\Phi}(z_2, z_3) \ldots \overline{\Phi}(z_{n-1}, z_n) \prod_{i,k=1}^{n}{}' \Phi(z_i, z_k))$$

nicht richtig, und damit (13) nicht durch Φ erfüllt sein. Dieser Fall ist also ebenfalls unmöglich.

Hilfssatz III: *Ist ein Ausdruck der Form* (12) *nur in einem unendlichen Individuenbereiche erfüllbar, so ist der zugehörige Ausdruck* (13) *(d. h. derjenige mit demselben* $\mathfrak{B}$*) ebenfalls erfüllbar.*

Beweis: (12) sei in einem unendlichen Individuenbereiche J durch Φ erfüllbar. Da (12) in keinem endlichen Bereiche erfüllbar sein soll, darf es nach Hilfssatz I keine Reihe von Elementen aus J $z_1, z_2, \ldots, z_l$ geben, so daß

$$\Phi(z_1, z_2) \,\&\, \ldots \,\&\, \Phi(z_{l-1}, z_l) \,\&\, \Phi(z_l, z_1)$$

der Fall ist. $(z_1) \ldots (z_n)\, \mathfrak{S}(z_1, \ldots, z_n; \Phi)$ ist also jedenfalls richtig. Gäbe es ferner eine Reihe von Elementen $z_1, z_2, \ldots, z_n$, so daß $\Phi(z_1, z_2) \,\&\, \Phi(z_2, z_3) \,\&\, \ldots \,\&\, \Phi(z_{n-1}, z_n)$ und außerdem $\overline{\prod_{i,k=1}^{n}{}'\, \Phi(z_i, z_k)}$ der Fall ist, so hätte man $\overline{\Phi}(z_i, z_k)$ für $k \geqq i+2$, ferner wegen $\mathfrak{S}(z_1, z_2, \ldots, z_n; \overline{\Phi})$ überhaupt $\overline{\Phi}(z_i, z_k)$ $(1 \leqq i, k \leqq n)$, ausgenommen der Fall $k = i+1$. Man könnte dann genau wie beim Beweise von Satz I ein weiteres Element z_{n+1} hinzufügen und in dem Bereich $(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1})$ ein Prädikat Ψ, wie früher angegeben, definieren, so daß (12) in diesem Bereich erfüllt ist, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Daher ist auch

$$(z_1)(z_3) \ldots (z_n)\; \overline{\Phi}(z_1, z_2) \ldots \overline{\Phi}(z_{n-1}, z_n) \prod_{i,k=1}^{n}{}'\, \Phi(z_i, z_k)$$

der Fall.

Hilfssatz IV: *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß* (12) *nur in einem unendlichen Individuenbereiche erfüllbar ist, ist die Erfüllbarkeit von* (13).

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus Hilfssatz II und III unter Berücksichtigung des Umstandes, daß die Erfüllbarkeit von (13) die des schwächeren Ausdrucks (12) nach sich zieht.

Gemäß Hilfssatz IV können wir uns weiter auf die Untersuchung der Erfüllbarkeit der Formeln vom Typ (13) beschränken.

Die Ausdrücke (13) haben die Form (8), also die Gestalt

$$(x)(Ey)\, F(x, y) \;\&\; (u_1)(u_2) \ldots (u_n)\, \mathfrak{A}(z, u_1, \ldots, u_n; F, G_1, \ldots, G_l).$$

Für diese Ausdrücke (8) gilt folgendes: Lassen sie sich überhaupt erfüllen, so auch im Bereich Z der positiven ganzen Zahlen, und zwar so, daß es in diesem Bereich Prädikate $\Phi, \Psi_1, \ldots, \Psi_l$ gibt, so daß

$$(x)\, \Phi(x, x+1) \;\&\; (u_1) \ldots (u_n)\, \mathfrak{A}(1, u_1, \ldots, u_n; \Phi, \Psi_1, \ldots, \Psi_l)$$

richtig ist. Zum Beweise braucht man nur die Überlegungen, die wir auf Seite 423 für die Ausdrücke der Form (4) aufgestellt hatten, entsprechend zu wiederholen.

Es sei nun (13) in irgendeinem Bereiche erfüllbar. Nach dem vorigen gibt es dann ein in Z definiertes Prädikat, so daß

$$(14)\quad (x)\, \Phi(x, x+1) \;\&\; (z_1) \ldots (z_n)\, [\mathfrak{B}(z_1, \ldots, z_n; \Phi) \;\&\; \mathfrak{S}(z_1, \ldots, z_n; \Phi) \;\&\; \overline{\Phi}(z_1, z_2) \ldots \overline{\Phi}(z_{n-1}, z_n) \prod_{i,k=1}^{n}{}'\, \Phi(z_i, z_k)]$$

in Z eine richtige Behauptung darstellt. Aus $(x)\, \Phi(x, x+1)$ und Hilfssatz I in Verbindung mit der Tatsache, daß (13) in keinem endlichen Bereiche erfüllt sein kann, ergibt sich, daß $\Phi(x, y)$ falsch ist, falls $y \leqq x$.

Es war schon früher gesagt, daß wir uns nur um den Fall $n \geqq 3$ zu kümmern brauchen. Es sei nun gerade $n = 3$. (14) lautet dann

$$(x)\ \Phi(x, x+1)\ \&\ (z_1)(z_2)(z_3)\ [\mathfrak{B}(z_1, z_2, z_3; \Phi)\ \&\ \mathfrak{S}(z_1, z_2, z_3; \Phi)$$
$$\&\ \bar{\Phi}(z_1, z_2)\ \bar{\Phi}(z_2, z_3)\ \Phi(z_1, z_3)].$$

Aus

$$(x)\ \Phi(x, x+1)\ \&\ (z_1)(z_2)(z_3)\ [\bar{\Phi}(z_1, z_2)\ \bar{\Phi}(z_2, z_3)\ \Phi(z_1, z_3)]$$

in Verbindung mit den obengenannten Eigenschaften von Φ ergibt sich, daß $\Phi(x, y)$ mit $x < y$ identisch ist. Da natürlich auch $\mathfrak{S}(z_1, z_2, z_3; <)$ der Fall ist, so ist im Falle $n = 3$ der Ausdruck (13) dann und nur dann erfüllbar, wenn

$$(15) \qquad (z_1)(z_2)(z_3)\ \mathfrak{B}(z_1, z_2, z_3; <)$$

im Bereiche der positiven ganzen Zahlen eine richtige Behauptung darstellt. Die Entscheidbarkeit von (15) stellt aber ein in der Literatur bereits gelöstes Problem dar. Z. B. läßt sich nach Presburger[8]) jeder Ausdruck der ersten Stufe entscheiden, der nur die individuellen Prädikate der Größerkleinerbeziehung, der Addition und Kongruenzen nach einem konkreten Zahlenmodul enthält. Der Fall $n = 3$ ist damit vollständig erledigt.

In ähnlicher, wenn auch nicht so einfacher Weise läßt sich der Fall $n = 4$ behandeln. Es sei $\Phi_1(x, y)$ eine Abkürzung für $x < y$, $\Phi_2(x, y)$ eine solche für $x < y\ \&\ y \equiv x + 1 \pmod 2$. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Erfüllbarkeit von (13) ist dann die Richtigkeit von

$$(16)\ (z_1)(z_2)(z_3)(z_4)\ \mathfrak{B}(z_1, z_2, z_3, z_4; \Phi_1) \vee (z_1)(z_2)(z_3)(z_4)\ \mathfrak{B}(z_1, z_2, z_3, z_4; \Phi_2)$$

im Bereiche der positiven ganzen Zahlen.

Daß die Bedingung hinreichend ist, ergibt sich daraus, daß

$$(z_1)(z_2)(z_3)(z_4)\ [\mathfrak{S}(z_1, z_2, z_3, z_4; \Phi_1)\ \&\ \bar{\Phi}_1(z_1, z_2)\ \bar{\Phi}_1(z_2, z_3)\ \bar{\Phi}_1(z_3, z_4)$$
$$\Phi_1(z_1, z_3)\ \Phi_1(z_1, z_4)\ \Phi_1(z_2, z_4)]$$

und

$$(z_1)(z_2)(z_3)(z_4)\ [\mathfrak{S}(z_1, z_2, z_3, z_4; \Phi_2)\ \&\ \bar{\Phi}_2(z_1, z_2)\ \bar{\Phi}_2(z_2, z_3)\ \bar{\Phi}_2(z_3, z_4)$$
$$\Phi_2(z_1, z_3)\ \Phi_2(z_1, z_4)\ \Phi_2(z_2, z_4)]$$

beide richtig sind. Es bleibt die Notwendigkeit der Bedingung zu zeigen. Sei Φ ein Prädikat, so daß (14) richtig wird. Wir unterscheiden dann drei Fälle:

a) Es gebe vier Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4, so daß $\Phi(a_i, a_k)$ immer richtig ist für $i, k = 1, 2, 3, 4$; $i < k$. Wie sich aus den früheren Bemerkungen über Φ ergibt, ist dann $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Ferner gilt $\bar{\Phi}(a_i, a_k)$ für $i \geqq k$. Nehmen wir nun irgendwelche Zahlen z_1, z_2, z_3, z_4 ($z_1 < z_2 < z_3 < z_4$),

[8]) M. Presburger, Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen usw., Comptes Rendus du premier Congrès des Math. des Pays Slaves, Warschau 1930.

so ist $\mathfrak{B}(z_1, z_2, z_3, z_4; \Phi_1)$ offenbar gleichwertig mit $\mathfrak{B}(a_1, a_2, a_2, a_4; \Phi)$, also richtig. Aus der Seite 426 erwähnten Symmetrieeigenschaft von $\mathfrak{B}$ ergibt sich, daß überhaupt $(z_1)(z_2)(z_3)(z_4)\,\mathfrak{B}(z_1, z_2, z_3, z_4; \Phi_1)$ der Fall ist. Im Falle a) ist also die Behauptung bewiesen.

b) Es gebe vier Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4, so daß

$\Phi(a_1, a_2) \,\&\, \Phi(a_2, a_3) \,\&\, \Phi(a_3, a_4) \,\&\, \bar{\Phi}(a_1, a_3) \,\&\, \Phi(a_1, a_4) \,\&\, \bar{\Phi}(a_2, a_4)$

der Fall ist. Es ist dann wieder $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ und $\bar{\Phi}(a_i, a_k)$ für $i \geqq k$. Wir behaupten dann, daß $(z_1)(z_2)(z_3)(z_4)\,\mathfrak{B}(z_1, z_2, z_3, z_4; \Phi_2)$ richtig ist. Der Beweis braucht wieder nur für solche z geführt zu werden, für die $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$. Es sei irgend eine konkrete derartige Reihe z_1, z_2, z_3, z_4 gegeben. Wir ordnen den z_1, z_2, z_3, z_4 der Reihe nach Dinge aus der Reihe a_1, a_2, a_3, a_4 zu. Dem z_1 wird a_1 zugeordnet. Sei dem z_i schon a_k zugeordnet. Ist $z_{i+1} \equiv z_i + 1 \pmod 2$, so wird $z_{i-1}\, a_{k+1}$ zugeordnet. Ist $z_{i+1} \equiv z_i \pmod 2$, so wird $z_{i+1}\, a_k$ zugeordnet. Die so erhaltene, den z_1, z_2, z_3, z_4 zugeordnete Reihe der a sei $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4}$ $(i_1 \leqq i_2 \leqq i_3 \leqq i_4)$. Aus der Natur des Prädikates Φ_2 ergibt sich, daß $\Phi_2(z_m, z_n) \sim \Phi(a_{i_m}, a_{i_n})$. Daher ist auch

$$\mathfrak{B}(z_1, z_2, z_3, z_4; \Phi_2) \sim \mathfrak{B}(a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_4}; \Phi).$$

Mithin ist $\mathfrak{B}(z_1, z_2, z_3, z_4; \Phi_2)$ richtig.

c) Es sei weder a) noch b) der Fall. Die Ausschließung von a) bedeutet die Richtigkeit von

(17) $(z_1)(z_2)(z_3)(z_4)\,\bar{\Phi}(z_1, z_2)\,\bar{\Phi}(z_2, z_3)\,\bar{\Phi}(z_3, z_4)\,\bar{\Phi}(z_1, z_3)\,\bar{\Phi}(z_1, z_4)\,\bar{\Phi}(z_2, z_4)$,

die Ausschließung von b) die Richtigkeit von

(18) $(z_1)(z_2)(z_3)(z_4)\,\bar{\Phi}(z_1, z_2)\,\bar{\Phi}(z_2, z_3)\,\bar{\Phi}(z_3, z_4)\,\Phi(z_1, z_3)\,\bar{\Phi}(z_1, z_4)\,\Phi(z_2, z_4)$.

Gemäß Formel (14) ist außerdem noch

(19) $(z_1)(z_2)(z_3)(z_4)\,\bar{\Phi}(z_1, z_2)\,\bar{\Phi}(z_2, z_3)\,\bar{\Phi}(z_3, z_4)\,\Phi(z_1, z_3)\,\Phi(z_1, z_4)\,\Phi(z_2, z_4)$

der Fall. Aus (18) und (19) ergibt sich, daß auch

(20) $(z_1)(z_2)(z_3)(z_4)\,\bar{\Phi}(z_1, z_2)\,\bar{\Phi}(z_2, z_3)\,\bar{\Phi}(z_3, z_4)\,\Phi(z_1, z_3)\,\Phi(z_2, z_4)$

besteht. Die Eigenschaften von Φ, die in vorstehenden Formeln zum Ausdruck kommen, lassen sich auch in der folgenden Form aussprechen:

A. Seien a, b, c drei Zahlen, so daß $\Phi(a, b) \,\&\, \Phi(b, c) \,\&\, \bar{\Phi}(a, c)$ richtig ist. Gibt es dann eine weitere Zahl d, so daß $\Phi(c, d)$ richtig ist, so ist auch $\Phi(b, d)$ richtig.

Beweis: A ist eine unmittelbare Folge von (20).

B. Seien a, b, c drei Zahlen, so daß $\Phi(a, b) \,\&\, \Phi(b, c) \,\&\, \bar{\Phi}(a, c)$ richtig ist. Gibt es dann weitere Zahlen d und e, so daß $\Phi(c, d) \,\&\, \Phi(d, e)$ richtig ist, so ist $\Phi(c, e)$ falsch.

Beweis: Gemäß Bedingung A ist $\Phi(b, d)$ richtig. Wäre nun auch $\Phi(c, e)$ richtig, so wieder nach Bedingung A, diesmal angewandt auf a, b, c

und e, auch $\Phi(b, e)$. b, c, d, e würden dann, in (17) für z_1, z_2, z_3, z_4 eingesetzt, diese Formel zu einer falschen machen. Daher kann $\Phi(c, e)$ nicht richtig sein.

C. Seien a, b, c, d vier Zahlen, so daß $\Phi(a, b) \,\&\, \Phi(b, c) \,\&\, \Phi(c, d)$ richtig ist. Dann ist entweder $\Phi(a, c)$ oder $\Phi(b, d)$ oder $\Phi(a, d)$ falsch.

Beweis: C drückt dasselbe aus wie (17).

Es fragt sich nun, ob ein Prädikat Φ, das den vorstehenden Bedingungen A, B, C genügt, und für das (14) richtig ist, überhaupt möglich ist. Von der Bedingung (14) wollen wir dabei nur benutzen, daß $(x)\,\Phi(x, x+1)$ der Fall ist.

Es gibt zunächst Zahlen a, b, c, so daß $\Phi(a, b) \,\&\, \Phi(b, c) \,\&\, \overline{\Phi}(a, c)$ der Fall ist. Wegen $(x)\,\Phi(x, x+1)$ und Bedingung C ist nämlich von den Aussagen $\Phi(1,3), \Phi(1,4), \Phi(2,4)$ mindestens eine falsch. Ist $\Phi(1, 3)$ falsch oder $\Phi(2, 4)$ falsch, so haben wir die drei Zahlen in 1, 2, 3, bzw. 2, 3, 4 gefunden. Ist $\Phi(1,3) \,\&\, \Phi(2,4)$ richtig, so sind $1, 3, 4$ die gesuchten Zahlen. Wir betrachten nun die Reihe $a, b, c, c+1, c+2, c+3, \ldots$. Da $\Phi(a, c)$ falsch ist, so ergibt sich unter Berücksichtigung von $(x)\,\Phi(x, x+1)$ und wiederholter Anwendung von B, daß die Aussagen $\Phi(c, c+2), \Phi(c+2, c+4), \Phi(c+4, c+6), \ldots$ alle falsch sind. Gemäß Bedingung A sind nun die Aussagen $\Phi(b, c+1), \Phi(c+1, c+3), \Phi(c+3, c+5), \ldots$ alle richtig. Wendet man nun B auf $a, b, c, c+1, c+3$ an, so erkennt man, daß $\Phi(c, c+3)$ falsch ist. Ebenso sind $\Phi(c+2, c+5), \Phi(c+4, c+7), \ldots$ falsch. Wenden wir auf $c+4, c+5, c+7, c+9$ die Bedingung A an, so sehen wir, daß $\Phi(c+5, c+9)$ richtig sein muß. Wenden wir andererseits auf $c+2, c+3, c+5, c+7, c+9$ die Bedingung B an, so ergibt sich, daß $\Phi(c+5, c+9)$ falsch sein muß. Das ist ein Widerspruch. Im Falle c) kann es also kein Prädikat Φ geben. Damit ist das Entscheidungskriterium, das wir für $n = 4$ aufgestellt hatten, als zu Recht bestehend erwiesen.

Durch die vorstehenden Überlegungen ist das Entscheidungsproblem für die Ausdrücke (11) *vollständig gelöst, sobald* $n \leqq 4$. Entweder sind nämlich die Ausdrücke (11) schon in einem endlichen Bereiche erfüllbar. Ob das der Fall ist, wird durch Satz I entschieden. Ausdrücke (11), die nicht dem in Satz I angegebenen Kriterium genügen, sind entweder überhaupt nicht oder nur in einem unendlichen Individuenbereiche erfüllbar. Diese Alternative braucht dann nur für die Ausdrücke (13) untersucht zu werden. Für den Fall $n \leqq 4$ ließ sich, wie wir sahen, die Entscheidung zwischen beiden Möglichkeiten treffen. Eine Ausdehnung der Untersuchungen auf den Fall $n > 4$ ist mir auch für $n = 5$ bisher nicht gelungen.

(Eingegangen am 25. 7. 1935.)

Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Die unbeschränkten Reinhardtschen Körper.

Von

H. Behnke in Münster (Westf.) und E. Peschl in Jena.

Bei den Abbildungen von Bereichen im Raume der beiden komplexen Veränderlichen w und z durch Paare von dort regulären Funktionen

$$w' = f(w, z)$$
$$z' = g(w, z)$$

spielen die kreissymmetrischen Körper[1]) eine wichtige Rolle, weil die in ihnen regulären Funktionen stets dort eine Art Potenzreihenentwicklung zulassen. Zwei grundlegende Ergebnisse der Abbildungstheorie liegen für die kreissymmetrischen Körper bisher vor. 1. Henri Cartan[2]) hat ein Kriterium für die Abbildbarkeit irgendwelcher Bereiche auf solche Körper angegeben. 2. Die Automorphismen der Reinhardtschen und Hartogsschen Körper sowie der Kreiskörper — das sind die wichtigsten kreissymmetrischen Körper — sind durch eine größere Reihe von Untersuchungen[3]) verschiedener Autoren bekannt geworden. Doch ist für alle diese Resultate bisher die Voraussetzung wesentlich, daß die Körper beschränkt sind. Nun kommen jedoch schon unter den Konvergenzbereichen der wichtigsten Reihenentwicklungen unbeschränkte kreissymmetrische Körper vor. Da aber der Cartansche Eindeutigkeitssatz[2]) nur für beschränkte Bereiche aufgestellt ist, ließ sich bisher in den Ergebnissen zu 1. und 2. die Voraussetzung der Beschränktheit nicht ausmerzen. Eine Verallgemeinerung des grundlegenden Eindeutigkeitssatzes auf unbeschränkte Bereiche ist auch sicher nicht vorbehaltlos möglich, wie schon das Beispiel des offenen Raumes zeigt.

In der vorliegenden Arbeit haben wir uns nun die Aufgabe gestellt, in den unbeschränkten Reinhardtschen Körpern, den eigentlichen wie den

---

[1]) Siehe H. Behnke und P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, Erg. d. Math. u. i. Grenzgebiete. Berlin (1934). Im folgenden abgekürzt: B.-Th. Bericht.

[2]) H. Cartan, Les fonctions de deux variables complexes etc., J. de Math. (9) 10 (1931).

[3]) Siehe etwa die Zusammenstellung im B.-Th. Bericht, Kap. VII.

uneigentlichen, die Gültigkeit des Cartanschen Eindeutigkeitssatzes zu prüfen und die Automorphismen dieser Körper aufzustellen[4]).

Dabei können wir uns auf die Regularitätsbereiche beschränken, weil jeder Automorphismus eines Bereiches eine Transformation bestimmt, die ihrerseits auch einen Automorphismus seiner Hülle liefert[5]).

Die unbeschränkten Reinhardtschen Körper zerfallen in drei Klassen, die sich funktionentheoretisch — so schon hinsichtlich der Carathéodoryschen Metrik — vollkommen verschieden verhalten.

Klasse M 1: Es gibt kein Monom $w^\alpha z^\beta$, $\alpha, \beta \neq 0, 0$, das im Körper beschränkt ist.

Klasse M 2: Nur die Monome $(w^\alpha z^\beta)^p$ mit festem $\alpha, \beta \neq 0, 0$ und $p = 1, 2 \ldots$ (und unter Umständen $p = -1, -2, \ldots$) sind im Körper beschränkt.

Klasse M 3: Es gibt mindestens 2 Monome $w^\alpha z^\beta$ und $w^\gamma z^\delta$ mit $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, die im Körper beschränkt sind.

Der Cartansche Eindeutigkeitssatz gilt ausnahmslos nur in den Körpern der Klasse M 3. Er gilt in keinem Körper der Klasse M 2. So haben wir z. B. im Körper $|w| < 1$ unter anderem den Automorphismus:

$$A \begin{cases} w' = w \\ z' = e^w z. \end{cases}$$

Entwickeln wir A um den Nullpunkt, so erhalten wir

$$\begin{aligned} w' &= w \\ z' &= z + \ldots. \end{aligned}$$

Der Cartansche Eindeutigkeitssatz sagt aber gerade aus, daß in den Bereichen, in denen er gültig ist, jeder Automorphismus, der diese Entwicklung der linearen Glieder um einen inneren Fixpunkt P aufweist, die identische Abbildung ist.

In der Klasse M 1 gibt es wiederum Körper, für die der Eindeutigkeitssatz gültig ist, so der Bereich $|w z^{\sqrt{2}}| < 1$, daneben aber andere Bereiche — etwa der offene Raum — in denen er versagt. (Genaue Angaben siehe § 5.)

Wir geben nun (§ 4—6, § 8 und § 9) *weiter sämtliche Automorphismen der Körper aller drei Klassen an — ausgenommen in der Klasse* M 1 *der offene Raum und die aus ihm durch Herausnahme der Achsen entstehenden Bereiche.* Dabei erhalten wir das Ergebnis:

---

[4]) Über einen Teil der Resultate dieser Arbeit siehe auch die Mitteilung d. Verf., Sopra le funzioni analitiche di più variabili complesse etc., Mem. Accad. d'Italia 6 (1935). Ferner haben uns Herr Henri Cartan und Herr P. Thullen mitgeteilt, daß sie sich mit diesem Problem in letzter Zeit beschäftigt haben.

[5]) Siehe B.-Th. Bericht, Kap. VI und die Originalarbeiten von H. Cartan und P. Thullen.

Die einzigen, nicht auf beschränkte Bereiche[6]) *abbildbaren Reinhardtschen Regularitätsbereiche, die nichttriviale*[7]) *Automorphismen gestatten, sind:*

1. *Der offene Raum und die aus ihm durch Herausnahme der Achsen entstehenden Bereiche.*

2. *Alle Körper der Klasse* M 2.

3. *Der Körper* $|z| < \gamma \cdot e^{-\delta |w|^2}$, $\gamma, \delta > 0$. (*Eigentlicher Körper der Klasse* M 3.)

4. *Diejenigen uneigentlichen Körper der Klasse* M 3, *welche eine unendliche diskontinuierliche Gruppe, erzeugt von*

$$T_0 \begin{cases} w' = b\,w\,z \\ z' = a\,z \end{cases} \text{ und } S_0 \begin{cases} w' = c^{-\frac{d}{2}}\, w\, z^d \\ z' = \dfrac{c}{z} \end{cases}; \; d \text{ ganz rational}; \; a, b, c > 0; \; a < 1$$

(oder eine Untergruppe hiervon) gestatten. (Angabe der Körper siehe § 9.)

Bei 3 und 4 kommen natürlich die durch Vertauschung der Achsen entstehenden Körper hinzu.

Im Falle 1 und 2 gehen willkürliche Funktionen in die Automorphismengruppe ein. Im Falle 3 hat die Gruppe vier reelle Parameter (siehe § 8). Im Falle 4 ist sie das Produkt der definierenden Drehungsgruppe mit einer eigentlich diskontinuierlichen Gruppe.

Im einzelnen ist die Arbeit folgendermaßen gegliedert: Der § 1 beginnt mit einer *projektiv invarianten Definition der Reinhardtschen Körper im projektiv abgeschlossenen Raume.* Ein Reinhardtscher Körper wird dann in eine solche Lage gebracht, daß seine 3 Achsen $w = 0$, $z = 0$ und die unendlich ferne Ebene sind. Da ein Reinhardtscher Körper, der Regularitätsbereich ist, niemals auf allen drei Achsen Punkte aufweisen kann, es sei denn der abgeschlossene Raum, können wir fernerhin ohne Einschränkung der Voraussetzung annehmen, daß der jeweils betrachtete Reinhardtsche Körper keine inneren Punkte im Unendlichen aufweist. Für den abgeschlossenen Raum hat aber schon Osgood[8]) gezeigt, daß die projektiven Transformationen die einzigen Automorphismen liefern.

Sodann wird ein *Kriterium* aufgestellt, das angibt, *wann ein Reinhardtscher Körper* — beschränkt oder unbeschränkt, eigentlich oder un-

---

[6]) Die Automorphismen der beschränkten, eigentlichen Reinhardtschen Körper sind schon 1930 von P. Thullen untersucht, siehe P. Thullen, Die Invarianz des Mittelpunktes von Kreiskörpern, Math. Annalen 104 (1931).

[7]) Trivial nennen wir hierbei diejenigen Automorphismen, welche linear oder linear gebrochen in beiden oder jeder Variabeln für sich sind (also nicht bloß projektive).

[8]) Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie II, 1 (1929), S. 301.

eigentlich — ein *Regularitätsbereich* ist[9]). Von diesem Kriterium wird in den folgenden Paragraphen immer wieder Gebrauch gemacht.

Im § 2, überschrieben: „Beschränktheitskriterium. Die verschiedenen Arten unbeschränkter Reinhardtscher Körper", wird bewiesen:

Satz 3: *Ein unbeschränkter eigentlicher Reinhardtscher Körper* $\mathfrak{R}$ *ist nie auf einen beschränkten Bereich eineindeutig und analytisch abbildbar.*

Und

Satz 4: *Uneigentliche Reinhardtsche Regularitätsbereiche der Klasse* M 3 *sind dann und nur dann auf beschränkte Reinhardtsche Körper abbildbar, wenn keine Achse bis auf isolierte Punkte ganz in ihnen enthalten ist.*

Der § 3 ist betitelt: „Die Metrik von Carathéodory in den Reinhardtschen Körpern". In allen Reinhardtschen Körpern, die nicht Bilder von beschränkten Bereichen sind, gibt es mindestens zwei von einander verschiedene im Endlichen gelegene Punkte, deren Distanz Null ist. Wir sprechen von einer Entartung der Metrik, die verschieden „stark" sein kann. In den Körpern der Klasse M 1 verschwindet die Distanz für alle Punktepaare; in den Körpern der Klasse M 2 ist $D(P,Q)$ dann und nur dann Null, wenn P und Q auf derselben Fläche einer gewissen durch den Körper ausgezeichneten Schar analytischer Flächen liegen; in den Körpern der Klasse M 3 gibt es höchstens noch verschwindende Distanz für Punktepaare auf einer oder beiden Achsen. Der Schlußsatz lautet:

Die metrische Hülle $\mathfrak{M}(\mathfrak{R})$ eines Reinhardtschen Regularitätsbereiches $\mathfrak{R}$ ist der Bereich, der aus allen inneren Punkten seiner (im Sinne der Punktmengenlehre) abgeschlossenen Hülle besteht, ausgenommen die Bereiche A 2 der Klasse M 1, deren metrische Hülle der abgeschlossene Raum ist.

Da die Distanzfunktion in einem Bereiche und seiner Regularitätshülle übereinstimmt, übersehen wir damit die metrische Hülle aller Reinhardtschen Bereiche.

Im § 4 werden die Automorphismen der einachsig unbeschränkten Zylinderbereiche (aus M 2) vorweg bestimmt.

Zur Aufstellung der Automorphismen Reinhardtscher Körper mit total entarteter Metrik — der offene Raum ist ausgenommen —, mit denen sich der nächste Paragraph beschäftigt, wird zunächst gezeigt, daß alle Automorphismen dieser Körper im Innern achsentreu sind. Dann werden die Automorphismen der achsenfremden Körper bestimmt. Die Automorphismen der übrigen Körper der Klasse M 1 bilden leicht übersehbare Untergruppen.

[9]) Siehe auch P. Thullen, Sur les domaines de méromorphie, Compt. Rend. 199, S. 1016—1018 (Sitzung v. 12. Nov. 1934).

Ganz analog wird in § 6: „Die Automorphismen Reinhardtscher Körper mit partiell entarteter Metrik (Klasse M 2)" vorgegangen.

§ 7 enthält nun den Eindeutigkeitssatz für die Körper der Klasse M 3: *$\mathfrak{B}$ sei ein Bereich, in dem zwei Monome $w^\alpha z^\beta$ und $w^\gamma z^\delta$ beschränkt sind. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ seien nichtnegative ganze Zahlen und $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. T sei eine Transformation, die $\mathfrak{B}$ auf einen in seinem Innern liegenden Bereich abbildet und dabei einen Punkt P aus $\mathfrak{B}$, der auf einer der beiden Achsen liegt, festläßt. In P sei die Funktionalmatrix von T $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist T die identische Transformation.*

Die Automorphismen der eigentlichen Reinhardtschen Körper der Klasse M 3 werden in § 8 bestimmt. Dabei finden wir dann den Körper

$$|z| \leqq a \cdot e^{-b|w|^2}, \; a, b > 0,$$

der auch ganz andere Abbildungen auf sich zuläßt als die übrigen dieser Bereiche.

Die Arbeit schließt in § 9 mit der Bestimmung der Automorphismen der uneigentlichen Reinhardtschen Körper der Klasse M 3. Auch hier gibt es Ausnahmekörper (mit allerdings nur diskontinuierlicher nichtlinearer Zusatzgruppe).

Übersicht.

1. Kriterium für Reinhardtsche Regularitätsbereiche.
2. Beschränktheitskriterium. Die verschiedenen Arten unbeschränkter Reinhardtscher Körper.
3. Die Metrik von Carathéodory in den Reinhardtschen Körpern.
4. Die Automorphismen der einachsig unbeschränkten Zylinderbereiche.
5. Die Automorphismen Reinhardtscher Körper mit total entarteter Metrik (M 1).
6. Die Automorphismen Reinhardtscher Körper mit partiell entarteter Metrik (M 2).
7. Eindeutigkeitssatz in unbeschränkten Reinhardtschen Körpern.
8. Automorphismen der eigentlichen Reinhardtschen Körper der Klasse M 3.
9. Automorphismen der uneigentlichen Reinhardtschen Körper der Klasse M 3.

§ 1.

Einführung der Reinhardtschen Körper. Kriterium für Reinhardtsche Regularitätsbereiche.

Ein Bereich $\mathfrak{B}$ im projektiv abgeschlossenen Raume der beiden komplexen Veränderlichen w und z sei **Kreiskörper oder Hartogsscher Körper im weiteren Sinne** genannt, wenn es zum Bereich eine analytische

Ebene E^* (Symmetrieebene) und einen nicht auf E^* liegenden Punkt O (Symmetriepunkt) gibt, so daß jede analytische Ebene E durch O (ihr Schnittpunkt mit E^* sei $U(E)$ genannt) den Bereich in einem oder mehreren Gebieten trifft, deren Rand nur aus Kreisen des elliptischen Kreisbüschels mit den Grenzpunkten O und $U(E)$ (O und U selbst als solche „Kreise" zugelassen) besteht.

Diese Definition ist offenbar invariant gegenüber projektiven Transformationen in dem Sinne, daß jedes projektive Bild eines solchen Bereiches $\mathfrak{B}$ wieder ein Kreiskörper im soeben definierten Sinne ist.

Der Bereich sei ein **eigentlicher Kreiskörper im weiteren Sinne** genannt, wenn O innerer Punkt ist und ein **eigentlicher Hartogsscher Körper im weiteren Sinne**, wenn E^* innere Punkte aufweist.

Bringen wir durch eine projektive Transformation E^* in die unendlich ferne Ebene, so bekommen wir einen Körper, der üblicherweise bisher in der Literatur schon als Kreiskörper bezeichnet wurde. Bilden wir andererseits etwa E^* auf die Achse $w' = 0$ und O auf $(\infty, 0)$ projektiv ab, so wird das Bild von $\mathfrak{B}$ ein Hartogsscher Körper im bisher üblichen engeren Sinne.

In der Benennung der soeben definierten projektiv invarianten Klasse von Bereichen kommt schon zum Ausdruck, daß alle Hartogsschen Körper im engeren Sinne projektive Bilder von Kreiskörpern im engeren Sinne (und umgekehrt) sind.

Wir definieren jetzt den **Reinhardtschen Körper im weiteren Sinne** als einen Bereich $\mathfrak{B}^*$, dem drei Punkte P_1, P_2, P_3 so zugeordnet sind, daß $\mathfrak{B}^*$ jeweils Kreiskörper im weiteren Sinne ist in bezug auf jeden der drei Punkte und die durch die beiden anderen Punkte bestimmte analytische Ebene. Diese drei Ebenen heißen die Achsen des Körpers.

Bilden wir $\mathfrak{B}^*$ projektiv so ab, daß P_1, P_2, P_3 in $(0, 0)$, $(0, \infty)$ und $(\infty, 0)$ übergehen, so bekommen wir einen Bereich $\tilde{\mathfrak{B}}$, der Kreiskörper im engeren Sinne mit dem Mittelpunkt $(0, 0)$ und zugleich Hartogsscher Körper im engeren Sinne mit der Symmetrieebene $w = 0$ wie auch $z = 0$ ist. Also ist $\tilde{\mathfrak{B}}$ Reinhardtscher Körper im engeren Sinne mit dem Mittelpunkte $(0, 0)$.

Ein Reinhardtscher Körper im weiteren Sinne heißt eigentlich, wenn mindestens einer der Punkte P_i innerer Punkt des Körpers ist.

Fernerhin setzen wir die Reinhardtschen Körper immer so normiert voraus, daß die Achsen gebildet werden von den Ebenen $w = 0$, $z = 0$ und der unendlich fernen Ebene und P_1, P_2, P_3 also die Punkte $(0, 0)$, $(0, \infty)$ und $(\infty, 0)$ sind. Ist der Körper eigentlich, so soll $(0, 0)$ innerer Punkt sein. Weisen eine oder zwei Achsen innere Punkte auf, so sollen dies $w = 0$ bzw. $w = 0$ und $z = 0$ sein.

Besitzt ein Reinhardtscher Körper auf den drei Achsen innere Punkte, so hat er, wie man rasch erkennt, bereits den ganzen abgeschlossenen Raum zur Regularitätshülle. Treffen wir nun unbeschadet der Allgemeingültigkeit die Voraussetzung, daß die jeweils vorgelegten Reinhardtschen Körper Regularitätsbereiche sind und schließen wir außerdem den trivialen Fall des abgeschlossenen Raumes aus, so können nach der obigen Normierung niemals innere Punkte auf der unendlich fernen Achse liegen. Deshalb konnen wir fernerhin auch haufig kurz von den Achsen des Reinhardtschen Korpers sprechen, wenn wir lediglich seine Achsen $w = 0$ und $z = 0$ meinen.

Wir kommen jetzt zu den Kriterien für die Regularitätsbereiche unter den Reinhardtschen Körpern.

Satz 1: *Wenn $f(w,z)$ im Reinhardtschen Körper $\mathfrak{R}$ regulär ist, so konvergiert absolut in $\mathfrak{R}$ überall die Laurententwicklung von $f(w,z)$*

$$f(w,z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{mn}\, w^m z^n. \tag{1}$$

In der Tat! Ist $f(w,z)$ im achsenfremden Punkte P aus $\mathfrak{R}$ regulär, so gibt es einen P enthaltenden ringförmigen Zylinderbereich

$$d_1 < |w| < d_2$$
$$d_3 < |z| < d_4,$$

in dem die Reihe (1) absolut konvergiert und f darstellt. (Analog für Punkte auf der Achse.) $\mathfrak{R}$ ist mit einer Folge solcher übereinandergreifender Zylinderbereiche überdeckbar. Wegen der Eindeutigkeit der Laurententwicklung folgt unmittelbar die Behauptung.

Folgerung: *Ist der Reinhardtsche Körper $\mathfrak{R}$ ein Regularitätsbereich, so ist $\mathfrak{R}$ schlicht.*

Die Reinhardtschen Regularitätsbereiche $\mathfrak{R}$ sind durch eine einfache Art von Konvexität charakterisierbar.

$f(w,z)$ sei eine in $\mathfrak{R}$ und nur in $\mathfrak{R}$ reguläre Funktion. (w_1, z_1) und (w_2, z_2) seien zwei Punkte aus $\mathfrak{R}$ auf der Hyperfläche $\mathfrak{H}$: $|w|^\alpha |z|^\beta = C > 0$; $\alpha, \beta \neq 0$. (w_3, z_3) sei ein weiterer Punkt auf $\mathfrak{H}$ mit $|w_1| < |w_3| < |w_2|$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{m - n\frac{\alpha}{\beta} < 0} |a_{mn}|\, |w_1|^m |z_1|^n &= \sum_{m - n\frac{\alpha}{\beta} < 0} |a_{mn}|\, C^{n/\beta}\, |w_1|^{m - n\frac{\alpha}{\beta}} \\ &> \sum_{m - n\frac{\alpha}{\beta} < 0} |a_{mn}|\, C^{n/\beta}\, |w_3|^{m - n\frac{\alpha}{\beta}} \\ &= \sum_{m - n\frac{\alpha}{\beta} < 0} |a_{mn}|\, |w_3|^m |z_3|^n. \end{aligned} \tag{2}$$

Da entsprechendes für $m - n\frac{\alpha}{\beta} \geqq 0$ gilt, folgt: (w_3, z_3) liegt in $\mathfrak{R}$. Ist α oder $\beta = 0$, so schließen wir analog. So werden wir dazu geführt,

den Begriff der **logarithmischen Konvexität** Reinhardtscher Körper einzuführen. Der Reinhardtsche Körper soll logarithmisch konvex heißen, wenn seine Projektion in der $|w|, |z|$-Ebene konvex ist in bezug auf die Klasse aller Monome $|w|^\alpha |z|^\beta = C$, $\alpha, \beta \gtreqless 0$. Ein logarithmisch konvexer Bereich $\mathfrak{R}$ ist also durch folgende Eigenschaft charakterisiert: Sind P_1 und P_2 in $\mathfrak{R}$ und zugleich auf $|w|^\alpha |z|^\beta = C$ gelegen, so liegen auch in $\mathfrak{R}$ alle Punkte, deren Projektion auf der Projektion von $|w|^\alpha |z|^\beta = C$ zwischen P_1 und P_2 liegen.

Ein logarithmisch konvexer Bereich ist also immer ein Reinhardtscher Bereich, dagegen gilt keineswegs das Umgekehrte. Um das zu übersehen, bilde man den Bereich durch $\zeta = \log |w|$, $\zeta' = \log |z|$ in die ζ, ζ'-Ebene ab. Die logarithmisch konvexen Bereiche und nur diese ergeben Bildbereiche in der ζ, ζ'-Ebene, die konvex im elementargeometrischen Sinne sind. Aus (2) folgt, daß die Reinhardtschen Regularitätsbereiche logarithmisch konvex sind[10]). Zur Aufstellung eines notwendigen und hinreichenden Kriteriums benötigen wir indessen noch den Begriff des **relativ vollkommenen** Reinhardtschen Körpers. Ein Reinhardtscher Körper heißt relativ vollkommen, wenn er in bezug auf die endlichen Achsen, *die ihn schneiden*, ein vollkommener Hartogsscher Körper ist. Ein relativ vollkommener Reinhardtscher Körper $\mathfrak{R}$, der innere Punkte auf $w = 0$ und $z = 0$ hat, ist ein (im bisherigen Sinne) vollkommener Reinhardtscher Körper.

Ein Reinhardtscher Regularitätsbereich ist stets relativ vollkommen.

Hat ein solcher Bereich auf allen drei Achsen innere Punkte, so ist er der abgeschlossene R_4. Ist ein Reinhardtscher Regularitätsbereich nicht mit dem abgeschlossenen R_4 identisch, so können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß er im Unendlichen keine inneren Punkte hat.

Nunmehr können wir den Satz aussprechen:

Satz 2: *Ein Reinhardtscher Körper $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann Regularitätsbereich, wenn er ein (schlichter) logarithmisch konvexer und relativ vollkommener Körper ist.*

Es ist lediglich noch zu beweisen, daß diese Kriterien ausreichend sind.

Dazu zeigen wir, daß $\mathfrak{R}$ unter unseren Voraussetzungen konvex in bezug auf die Monome $w^\alpha z^\beta$ ist (α, β ganz und $\alpha, \beta \gtreqless 0$). $\mathfrak{R}_0$ sei zum Beweise ein beschränkter, ganz im Innern von $\mathfrak{R}$ gelegener Bereich. Gäbe es keinen Bereich $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R} \gg \mathfrak{R}_1 \gg \mathfrak{R}_0$, so daß für jeden Punkt P aus $\mathfrak{R}$, aber außerhalb $\mathfrak{R}_1$ ein Monom existiert, das dort seinem Absolutbetrag nach größer als in $\mathfrak{R}_0$ wird, so würde dies zur Folge haben: Es existiert

[10]) Siehe H. Behnke und E. Peschl, Die Konvexität in der Elementargeometrie und in projektiven Räumen, Semesterber., Münster i. Westf., Heft 5 (1934).

mindestens ein (im Endlichen gelegener!) Randpunkt R von $\mathfrak{R}$ und eine Folge von Punkten P_n aus $\mathfrak{R}$ mit $\lim P_n = R$, so daß für *alle* Monome

$$|M(P_n)| < |M(\mathfrak{R}_0)|, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

ist.

Ein solcher Randpunkt R kann auf den Achsen nicht liegen. Wir beweisen dies für $w = 0$. Entweder hat nämlich $\mathfrak{R}$ innere Punkte auf dieser Achse, dann ist wegen der relativen Vollkommenheit z oder z^{-1} ein gesuchtes Monom, oder $\mathfrak{R}$ hat keine inneren Punkte auf $w = 0$. Dann hat $\mathfrak{R}_0$ einen Minimalabstand $d > 0$ von dieser Achse. Jetzt aber ist w^{-1} ein Monom, das (3) nicht befriedigt.

Andererseits, wenn R nicht auf einer Achse liegt, so gibt es sicher[11]) — wegen der logarithmischen Konvexität von $\mathfrak{R}$ — einen Ausdruck $|w|^a \cdot |z|^b$ mit unter Umständen irrationalem $\frac{b}{a}$, der in R einen größeren Wert hat als in allen Punkten von $\mathfrak{R}_0$. Dann gibt es eben wegen der Beschränktheit von $\mathfrak{R}_0$ auch ein Monom mit dieser Eigenschaft. Wiederum kann dieses Monom der Ungleichung (3) nicht genügen.

Folglich existiert der Reinhardtsche Körper $\mathfrak{R}_1$. $\mathfrak{R}$ ist im Sinne von Cartan-Thullen konvex in bezug auf $w^\alpha z^\beta$, α, β ganz und $\alpha, \beta \geqq 0$ (bzw. $\alpha \geqq 0$, $\beta \gneqq 0$, usw.) und deshalb ein Regularitätsbereich. Diese Art der Konvexität ist notwendig und hinreichend für die Reinhardtschen Regularitätsbereiche.

Aus der logarithmischen Konvexität und der relativen Vollkommenheit eines Körpers können wir sogleich auf seine topologische Struktur schließen. Ein Reinhardtscher Regularitätsbereich, der auf mindestens zwei Achsen innere Punkte hat (Typus T_2), ist vom Zusammenhang der Kugel, der auf genau einer Achse innere Punkte hat (Typus T_1), ist topologisch äquivalent dem Körper $(|w| - 2)^2 + |z|^2 = 1$, ein solcher, der auf keiner Achse innere Punkte hat, (Typus T_0), ist topologisch äquivalent dem Körper $1 < |w| < 2$ und $1 < |z| < 2$.

Wir merken ferner noch fur später an: Da ein eigentlicher Reinhardtscher Regularitätsbereich stets ein vollkommener Reinhardtscher Körper ist, so muß er, wenn er unbeschränkt ist, alle im Endlichen gelegenen Punkte mindestens einer Achse enthalten.

§ 2.

Beschränktheitskriterium. Die verschiedenen Arten unbeschränkter Reinhardtscher Körper.

Satz 3: *Ein unbeschränkter, eigentlicher Reinhardtscher Körper $\mathfrak{R}$ ist nie auf einen beschränkten Bereich eineindeutig und analytisch abbildbar.*

---

[11]) S. 440, Fußnote.

Wäre dies entgegen der Behauptung doch möglich, so wäre damit auch die Hülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{R})$ auf einen beschränkten Bereich $\mathfrak{H}(\mathfrak{B})$ eineindeutig abbildbar.

$$w' = f(w, z),$$
$$z' = g(w, z)$$

sei die Transformation T, welche die Hülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{R})$, die ebenfalls ein eigentlicher, unbeschränkter Reinhardtscher Körper sein muß, auf $\mathfrak{B}$ abbildet. Die endlichen Punkte auf mindestens einer der beiden Achsen — etwa $w = 0$ — liegen aber ganz in $\mathfrak{H}(\mathfrak{R})$, also wäre $f(0, z)$ und $g(0, z)$ konstant. Die Abbildung könnte nicht eineindeutig sein.

Folgerung: *Ein Reinhardtscher Körper, der mindestens einen seiner drei Fixpunkte enthält, ist nur dann auf einen beschränkten Bereich eineindeutig und analytisch abbildbar, wenn er projektiv auf einen beschränkten Bereich abgebildet werden kann.*

Daß solche projektiven Abbildungen möglich sind, zeigt das Beispiel des Körpers

$$\mathfrak{B}_1 \quad |w| < 1, \quad \left|\frac{w}{z}\right| > 1.$$

Außerdem gibt es Reinhardtsche Regularitätsbereiche vom Typus T_0 und T_1, die *nicht* projektiv, wohl aber eineindeutig und analytisch auf schlichte, beschränkte Bereiche abbildbar sind. Der Bereich

$$\mathfrak{B}_2 \quad \begin{matrix} 0 < |w z^2| < 1, \\ 0 < |w^2 z^3| < 1 \end{matrix}$$

vom Typus T_0 läßt sich durch

$$z' = w z^2,$$
$$w' = w^2 z^3$$

auf den Bereich

$$\mathfrak{B}_1^* \quad \begin{matrix} 0 < |z'| < 1, \\ 0 < |w'| < 1, \end{matrix}$$

und der Bereich

$$\mathfrak{B}_2 \quad \begin{matrix} |w^2 z| < 1, \\ 0 < |w| < 1 \end{matrix}$$

vom Typus T_1 läßt sich durch

$$z' = w^2 z,$$
$$w' = w$$

auf

$$\mathfrak{B}_2^* \quad \begin{matrix} |z'| < 1, \\ 0 < |w'| < 1 \end{matrix}$$

abbilden. Dagegen lassen sich $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ nicht projektiv auf einen beschränkten Bereich abbilden, weil in beiden Fällen die Achse $w = 0$ ausschließlich aus Randpunkten besteht.

Um nun alle möglichen unbeschränkten Reinhardtschen Regularitätsbereiche übersehen zu können, sehen wir uns die Bilder in der logarithmischen Ebene $\omega = \log|w|$, $\zeta = \log|z|$ an. Wie unterscheiden sich die Bilder der verschiedenen Klassen? Sicher sind die Bildbereiche, die nach den Überlegungen von § 1 (im elementargeometrischen Sinne) konvex sind, im Endlichen schon zusammenhängend, weil nur die Punkte der drei Achsen

keine im Endlichen liegenden Bilder aufweisen. Im Falle M 1 schneidet jede Gerade $\alpha\omega + \beta\zeta + \eta = 0$ mit ganzen α, β den Bildbereich. Der Bereich ist also entweder die ganze Ebene oder eine Halbebene (bzw. ein Parallelstreifen) mit begrenzender Gerade $a\omega + b\zeta + c = 0$, $\frac{a}{b}$ irrat. Im Falle M 2 schneiden alle „rationalen" Geraden mit Ausnahme von $\alpha\omega + \beta\zeta + \eta = 0$, wo α, β feste ganze rationale Zahlen sind, während η ein Kontinuum $\eta < c_0$ oder $c_1 < \eta < c_2$ oder $c_3 < \eta$ durchläuft. Der Bildbereich ist eine Halbebene oder ein Parallelstreifen. Im Falle M 3 gibt es einen Winkel, in dem der Bildbereich vollständig enthalten ist.

Wir beweisen nun den

Hilfssatz: *Liegt der Bereich $\mathfrak{B}$ in einem Winkel W der ω, ζ-Ebene, so liegt $\mathfrak{B}$ stets auch in einem Winkel, der von zwei Geraden $\alpha'\omega + \beta'\zeta + \lambda' = 0$, $\gamma'\omega + \delta'\zeta + \varkappa' = 0$ gebildet wird, deren Koeffizienten $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ ganz sind und für die $\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = 1$ ist.*

Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\alpha\omega + \beta\zeta + \lambda = 0$, $\gamma\omega + \delta\zeta + \varkappa = 0$ mit ganzen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ sowie $(\alpha, \beta) = 1$, $(\gamma, \delta) = 1$ die den Winkel W begrenzenden Geraden sind. Zum Beweise ist nur zu zeigen, daß es zu diesen vier ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zwei weitere ganze Zahlen γ', δ' gibt, so daß

1. $\frac{\gamma'}{\delta'}$ in einer vorgegebenen Halbumgebung von $\frac{\alpha}{\beta}$ liegt,
2. $\alpha\delta' - \beta\gamma' = 1$

ist. (Wir setzen nämlich dann $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$ und erhalten die Aussage des Hilfssatzes.)

Es gibt ganze n_0, m_0, so daß

$$\alpha m_0 - \beta n_0 = 1.$$

Die Zahlen

$$\frac{n_0 + p\alpha}{m_0 + p\beta}, \quad p = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

konvergieren von beiden Seiten gegen $\frac{\alpha}{\beta}$. Ferner gilt

$$\alpha(m_0 + p\beta) - \beta(n_0 + p\alpha) = 1.$$

Wir setzen nunmehr $\gamma' = n_0 + p_0\alpha$, $\delta' = m_0 + p_0\beta$ bei geeignet gewähltem p_0.

Auf Grund der vorstehenden Überlegungen gibt es also nur folgende *Arten* unbeschränkter Reinhardtscher Regularitätsbereiche:

A 1. Der offene Raum ohne und mit den Nebenbedingungen $w \neq 0$, bzw. $w \neq 0$, $z \neq 0$ (M 1).

A 2a. Die Bereiche $|w^\alpha z^\beta| < C$ ohne und mit den gleichen Nebenbedingungen (M 1 bzw. M 2).

A 2b. Die Bereiche $C_1 < |w^\alpha z^\beta| < C_2$ (M 1 bzw. M 2).

A 3. Die unbeschränkten Reinhardtschen Regularitätsbereiche, in denen 2 Monome $w^\alpha z^\beta$ und $w^\gamma z^\delta$ mit ganzen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ beschränkt sind (M 3).

Satz 4: *Uneigentliche Reinhardtsche Regularitätsbereiche der Klasse* M 3 *sind dann und nur dann auf beschränkte Reinhardtsche Körper abbildbar, wenn keine Achse bis auf isolierte Punkte ganz in ihnen enthalten ist*

Ist ein Reinhardtscher Körper der Klasse M 3 vom Typus T_0, so wird eine solche Abbildung schon durch die Transformation

$$S \qquad \begin{aligned} w' &= w^\alpha z^\beta, \\ z' &= w^\gamma z^\delta \end{aligned} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1)$$

geliefert. Es ist nämlich

$$S^{-1} \qquad \begin{aligned} w &= w'^{\,-\delta} z'^{\,\beta}, \\ z &= w'^{\,\gamma} z'^{\,-\alpha} \end{aligned}$$

auch wiederum eindeutig und regulär im Bildbereich.

Trifft für einen Regularitätsbereich vom Typus T_1 das Kriterium zu — $w = 0$ sei etwa die den Körper schneidende Achse — so ist in ihm z bzw. z^{-1} beschränkt. In diesem Falle können wir als eine dem Satze genügende Abbildung nennen — wie man am besten am Bilde in der ω, ζ-Ebene kontrolliert —

$$\begin{aligned} w' &= w \cdot z^\nu, \\ z' &= z \end{aligned} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{aligned} w' &= w \cdot z^{-\nu}, \\ z' &= \frac{1}{z} \end{aligned}$$

mit genügend großem positivem ν.

Ist dagegen in einem Bereiche eine Achse — etwa $w = 0$ — bis auf solierte Punkte enthalten, so ist jede in ihm beschränkte reguläre Funktion auf dieser Achse konstant, so daß etwaige Abbildungsfunktionen f und g für alle Punkte dieser Achse denselben Bildpunkt liefern würden.

Den letzten Satz können wir noch wesentlich allgemeiner aussprechen.

Satz 4a: *Ein Reinhardtscher Regularitätsbereich* $\mathfrak{R}$ *ist dann und nur dann auf einen beschränkten und dann sogar schlichten Bereich eineindeutig und analytisch abbildbar, wenn weder eine analytische Fläche*

$$w^\alpha z^\beta = c_0; \quad \alpha, \beta \gtrless 0, \quad \frac{\alpha}{\beta} \text{ rat.},$$

noch eine analytische Hyperfläche

$$|w^\alpha z^\beta| = c_0, \quad \alpha, \beta \gtrless 0, \quad c_0 \neq 0, \quad \frac{\alpha}{\beta} \text{ irrat.},$$

bis auf isolierte Punkte ganz in $\mathfrak{R}$ *enthalten ist.*

1. Die Bedingungen sind notwendig.

Ist eine Achse bis auf isolierte Punkte ganz in $\mathfrak{R}$ enthalten, so ist jede in $\mathfrak{R}$ reguläre, eindeutige und beschränkte Funktion auf der Achse konstant.

Ist $w^\alpha z^\beta = c_0$, $c_0 \neq 0$, $\frac{\alpha}{\beta}$ rat., bis auf isolierte Punkte in $\mathfrak{R}$ gelegen und $f(w,z)$ in $\mathfrak{R}$ regulär und beschränkt, so ist $f(t^\beta, \gamma t^{-\alpha})$, $\gamma = c_0^{1/\beta}$ in der ganzen t-Ebene (zunächst bis auf isolierte Punkte) regulär und beschränkt. $f(w,z)$ ist also auf der Fläche konstant.

Liegt schließlich eine Hyperfläche $|w^\alpha z^\beta| = c_0$, $\frac{\alpha}{\beta}$ irrat., $c_0 \neq 0$ in $\mathfrak{R}$, so ist $\varphi(u) = f(e^{\beta u}, \gamma e^{-\alpha u})$, $\gamma = |c_0|^{1/\beta}$, in jedem Kreise $|u| < M$ mit beliebigem M (zunächst bis auf isolierte Stellen) regulär und gleichmäßig beschränkt, folglich ist $\varphi(u)$ eine Konstante. Weil sich aber die Punkte

$$w = e^{\beta u},$$
$$z = \gamma e^{-\alpha u}$$

gegen die ganze Hyperfläche häufen, so ist die stetige Funktion $f(w,z)$ dann auch auf der ganzen Hyperfläche konstant.

In allen diesen Fällen kann $\mathfrak{R}$ keine Abbildung auf einen endlichen Bereich zulassen, weil sonst die Achse bzw. die analytische Fläche bzw. die analytische Hyperfläche auf einen einzigen Punkt abgebildet würden.

2. Die Bedingung ist hinreichend, denn sie ist nur erfüllbar in Bereichen der Klasse M 3, und für diese folgt der Satz aus Satz 8 und der Tatsache, daß unbeschränkte, eigentliche Reinhardtsche Regularitätsbereiche alle endlichen Punkte mindestens einer Achse enthalten.

§ 3.

Die Metrik von Carathéodory in den Reinhardtschen Körpern.

In jedem beschränkten schlichten Bereich ist die Carathéodorysche Distanz zweier verschiedener Punkte stets ungleich Null. Das trifft nicht mehr allgemein zu bei unbeschränkten Bereichen. Wenn jede und nur wenn jede in $\mathfrak{B}$ beschränkte, analytische Funktion konstant ist, ist die Distanz aller Punktepaare aus $\mathfrak{B}$ Null. In diesem Falle sprechen wir von einer **vollkommenen Entartung** der Metrik. **Partiell entartet** heißt die Carathéodorysche Metrik in einem Bereiche $\mathfrak{B}$, wenn es zu jedem Punkte P aus $\mathfrak{B}$ zwei weitere Punkte R und S gibt, so daß

$$D_{\mathfrak{B}}(P,R) \neq 0, \quad D_{\mathfrak{B}}(P,S) = 0.$$

Außerdem sprechen wir von einer **Entartung auf einer Teilmannigfaltigkeit** M aus $\mathfrak{B}$, wenn alle Punktepaare aus M verschwindende Distanz haben.

Wie entartet nun die Metrik in den unbeschränkten Reinhardtschen Körpern? Wiederum brauchen wir nur die Regularitätsbereiche unter ihnen zu untersuchen.

In den Bereichen der Klasse M 1 *entartet die Metrik vollkommen.* Das ist selbstverständlich für den offenen Raum mit wie auch ohne Achsen. Für die übrigen Bereiche der Klasse M 1, das sind die Bereiche $|w^\alpha z^\beta| < C$,

ein oder zwei Achsen enthaltend, sowie die Bereiche $0 \leqq C_1 < |w^\alpha z^\beta| < C_2$, beide Male mit $\frac{\alpha}{\beta}$ irrat., folgt dies aus den Überlegungen am Schlusse des letzten Paragraphen.

In den Bereichen der Klasse M 2 *entartet die Metrik partiell.* In der Tat! Diese Klasse wird gebildet von den Bereichen $|w^\alpha z^\beta| < C$, $C_1 < |w^\alpha z^\beta| < C_2$ mit $\frac{\alpha}{\beta}$ rat. Sicher kann die Metrik nicht ganz entarten, denn $f(w,z) = w^\alpha z^\beta$ ist eine dort beschränkte, nicht konstante Funktion. Sie ergibt aber auch keineswegs für alle Punktepaare P, Q mit $P \neq Q$ eine von Null verschiedene Distanz. Es gilt nämlich

Satz 5: *Jede in einem Reinhardtschen Körper* $\mathfrak{R}$ *der Klasse* M 2 *reguläre, beschränkte Funktion* $f(w,z)$ *ist in* $\mathfrak{R}$ *eine reguläre Funktion von* $u = w^\alpha z^\beta$, α, β *teilerfremd vorausgesetzt.*

Da wir $(\alpha, \beta) = 1$ voraussetzen, gibt es ganze ν und μ, so daß $\alpha\nu + \beta\mu = 1$. Nunmehr setzen wir

$$w = u^\nu s^{-\beta},$$
$$z = u^\mu s^\alpha, \quad \text{also} \quad u = w^\alpha z^\beta;$$

zunächst nehmen wir an, daß $u \neq 0$ sei.

Durchläuft s die komplexen Zahlen, so durchlaufen bei festem $u = u_0$ die Punkte w, z die analytische Fläche $w^\alpha z^\beta = u_0$. Ferner ist $f(w,z) = f(u^\nu s^{-\beta}, u^\mu s^\alpha)$ als Funktion von s analytisch und beschränkt, folglich

$$f(w,z) = \varphi(u),$$

wo $\varphi(u)$ eindeutig analytisch ist für die in $\mathfrak{R}$ vorkommenden u-Werte.

Liegen Punkte $u = 0$ in $\mathfrak{R}$, so läßt sich $\varphi(u)$ in $u = 0$ stetig und regulär ergänzen und es ist $f(w,z) - \varphi(u)$ analytisch in $\mathfrak{R}$ und $\equiv 0$ für $u \neq 0$, verschwindet also überall in $\mathfrak{R}$.

Aus Satz 5 folgt, daß die Distanz zweier Punkte P_1, P_2 für irgendeinen Körper M 2 gleich ist der Distanz von $u(P_1)$, $u(P_2)$ im Gebiet G, in dem $u = w^\alpha z^\beta$ variiert (d. h. in $|u| < c$ bzw. $0 \leqq c_1 < |u| < c_2$).

Satz 6. *Die Carathéodorysche Metrik entartet in einem Reinhardtschen Körper der Klasse* M 3 *höchstens auf einer oder beiden Achsen und zwar dann und nur dann, wenn er nicht auf einen beschränkten Bereich abbildbar ist.*

Die Notwendigkeit des Kriteriums ist evident; es ist also nur der Beweis für das „Hinreichend" zu erbringen.

Ist ein Körper der Klasse M 3 *nicht* auf einen beschränkten Bereich abbildbar, so ist mindestens eine der Achsen bis auf isolierte Punkte im Körper enthalten (siehe Satz 8). Auf einer solchen Achse ist die Distanz zweier Punkte Null. In einem nicht auf der Achse liegenden Punkte ist die Distanz von jedem andern Punkte von Null verschieden, weil er mit

keinem andern Punkte *zugleich* auf einer Fläche $w^\alpha z^\beta = c_1$ *und* $w^\gamma z^\delta = c_2$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, liegt.

Beachten wir noch den einfachen Zusammenhang zwischen den Reinhardtschen Regularitätsbereichen $\mathfrak{R}$ und ihren metrischen Hüllen $\mathfrak{M}(\mathfrak{R})$, den Existenzbereichen ihrer Distanzfunktionen[12])! $\mathfrak{M}(\mathfrak{R})$ ist der Durchschnitt aller Regularitätsbereiche der in $\mathfrak{R}$ regulären und beschränkten Funktionen.

Satz 7: *Die metrische Hülle* $\mathfrak{M}(\mathfrak{R})$ *eines Reinhardtschen Regularitätsbereiches* $\mathfrak{R}$ *ist der Bereich, der aus allen inneren Punkten seiner (im Sinne der Punktmengenlehre) abgeschlossenen Hülle besteht, ausgenommen die Bereiche* A 2 *der Klasse* M 1, *deren metrische Hülle der abgeschlossene Raum ist.*

Zusatz: *Da die Distanzfunktion in einem Bereiche und seiner Regularitätshülle übereinstimmt, übersehen wir damit die metrischen Hüllen aller Reinhardtschen Bereiche.*

Der Satz ist selbstverständlich für die Bereiche der Klasse M 1, denn in ihnen sind alle beschränkten Funktionen konstant, auch ist die abgeschlossene Hülle der Bereiche A 1 der abgeschlossene Raum. Für die Regularitätsbereiche der Klassen M 2 und M 3 ist jeder nicht auf den Achsen gelegene Randpunkt stetig unendlich fern und daher auch Randpunkt der metrischen Hülle. Im Falle M 2 ist nämlich in einem solchen Randpunkt P das Monom $u = c \cdot w^\alpha z^\beta$ $\left(\text{bzw. } \frac{1}{u}\right)$ bei geeignetem c dem Absolutbetrag nach gleich 1, während *im* Bereiche $|u| < 1$ ist.

Gibt es im Falle M 3 für P keine solche Funktion u mit diesen Eigenschaften, so gibt es doch[13]) eine Hyperfläche:

$$\left|\frac{w^A z^B}{w_0^A z_0^B}\right| = 1, \quad A : B \text{ irrational},$$

durch diesen Punkt (w_0, z_0), so daß im Bereich $\left|\frac{w^A z^B}{w_0^A z_0^B}\right| < 1$ ist. Außerdem gibt es zwei in $\mathfrak{B}$ beschränkte Monome $w^\alpha z^\beta$, $w^\gamma w^\delta$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Wir bestimmen a, b so, daß

$$\alpha a + \gamma b = A, \quad \beta a + \delta b = B$$

und wählen ein positives ϱ so, daß $a' = a\varrho$ ganz rational wird; zur Abkürzung sei $b \cdot \varrho = b'$ gesetzt. Dann gilt für die Monome

$$\varphi_\lambda(w, z) = \left(\frac{w^\alpha z^\beta}{w_0^\alpha z_0^\beta}\right)^{a'\lambda} \frac{(w^\gamma z^\delta)^{[\lambda b']}}{(w_0^\gamma z_0^\delta)^{\lambda b'}}, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots,$$

$[\lambda b']$ ganz rational und $\lambda b' < [\lambda b'] \leqq \lambda b' + 1$:

---

[12]) Siehe H. Horstmann, Carathéodorysche Metrik und Regularitätshüllen. Math. Annalen 108 (1933).

[13]) Die folgende Überlegung ist eine Verallgemeinerung einer zuerst von Horstmann angewandten Methode, vgl. H. Horstmann, Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen usw., Diss. Münster 1932.

1. Es ist

$$|\varphi_\lambda(w,z)| = \left|\frac{w^A z^B}{w_0^A z_0^B}\right|^{\lambda\varrho} \cdot |w^\gamma z^\delta|^{[\lambda b'] - \lambda b'}$$

und daher in $\mathfrak{B}$: $|\varphi_\lambda(w,z)| < 1$, $\varphi_\lambda(w,z)$ also regulär in $\mathfrak{B}$.

2. In P_0 ist

$$|\varphi_\lambda(w_0,z_0)| = |w_0^\gamma z_0^\delta|^{[\lambda b'] - \lambda b'};$$

hieraus folgt, da b' irrational ist und wir eine Folge ganzer Zahlen λ_i wählen können, so daß

$$\lim_{j \to \infty} ([\lambda_j b'] - \lambda_j b') = 0$$

ist, daß

$$\lim_{j=\infty} |\varphi_{\lambda_j}(w_0,z_0)| = 1.$$

3. Man kann (auch für beschränkte Bereiche!) von vornherein γ, δ so wählen, daß der Bereich $\mathfrak{B}_0$

$$\left|\frac{w^A z^B}{w_0^A z_0^B}\right| < 1, \quad |w^\gamma z^\delta| < 1$$

auch Punkte der Achsen enthält (was man leicht an dem Bilde in der ω, ζ-Ebene ersieht); jede in $\mathfrak{B}$ konvergente Teilfolge der φ_{λ_j} ist noch in $\mathfrak{B}_0$ normal und alle φ_{λ_j} verschwinden auf den in $\mathfrak{B}_0$ gelegenen Achsen. Hieraus folgt aber, daß keine Teilfolge der φ_{λ_j} in $\mathfrak{B}$ gegen die Konstante 1 konvergiert. Nach einem bekannten Satz von Horstmann[14]) ist dann P_0 stetig unendlich fern und gehört zum Rand der metrischen Hülle.

Schließlich betrachten wir noch einen Randpunkt P^* des Körpers $\mathfrak{B}$ auf einer Achse, für den es eine Vollumgebung U gibt, so daß alle in U gelegenen Randpunkte von $\mathfrak{B}$ nur Achsenpunkte sind. Ist f beschränkt und regulär in $\mathfrak{B}$, so ist nach einem Satz von Osgood über hebbare Unstetigkeiten f auch noch regulär (und beschränkt) in U. P ist also innerer Punkt der metrischen Hülle. Jeder andere Randpunkt des Körpers, der auf einer Achse liegt, ist Häufungspunkt von nicht auf einer Achse gelegenen und daher stetig unendlich fernen Randpunkten, somit ebenfalls wenigstens unendlich fern und Randpunkt der metrischen Hülle. Da bei Bildung der abgeschlossenen Hülle genau die eben bezeichneten Achsenpunkte P^* und keine andern hinzukommen, so ist der Satz bewiesen.

Zugleich haben wir als Teilergebnis dieser Überlegungen den

Satz 7a: *Es sei $\mathfrak{R}$ ein Reinhardtscher Regularitätsbereich, welcher nicht der Klasse* M 1 *angehört. Dann ist jeder nicht auf den Achsen gelegene Randpunkt von $\mathfrak{R}$ stetig unendlich fern.*

---

[14]) Siehe l. c., S. 447.

§ 4.

Die Automorphismen der einachsig unbeschränkten Zylinderbereiche.

Unter den Regularitätsbereichen der Klasse M 2 nehmen diejenigen Reinhardtschen Körper eine besondere Stellung ein, bei denen das in ihnen beschränkte Monom w oder z ist.

Es sind die Bereiche

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{B}_1\\ \mathfrak{B}_1'\end{matrix}\right\} \quad w \text{ in } \mathfrak{G}_1\colon\ c_1 < |w| < c, \qquad \begin{matrix} z \text{ beliebig},\\ z \neq 0,\end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{B}_2\\ \mathfrak{B}_2'\end{matrix}\right\} \quad w \text{ in } \mathfrak{G}_2\colon\ 0 < |w| < c, \qquad \begin{matrix} z \text{ beliebig},\\ z \neq 0,\end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{B}_3\\ \mathfrak{B}_3'\end{matrix}\right\} \quad w \text{ in } \mathfrak{G}_3\colon\ \ |w| < c, \qquad \begin{matrix} z \text{ beliebig},\\ z \neq 0.\end{matrix}$$

Dazu kommen die Bereiche, die aus den vorstehenden durch Vertauschung von w und z hervorgehen, und ihre projektiven Bilder von der Art A 2. Für die folgenden Überlegungen können wir $c = 1$ voraussetzen.

Für jede in einem der Bereiche $\mathfrak{B}_1$ bis $\mathfrak{B}_3'$ reguläre, eindeutige und beschränkte Funktion $f(w, z)$ gilt

$$f(w, z) = f(w).$$

Für einen Automorphismus eines solchen Bereiches gilt also

$$(1) \qquad \begin{aligned} w' &= f(w),\\ z' &= g(w, z).\end{aligned}$$

$w' = f(w)$ bildet dabei $\mathfrak{G}_i$ auf sich ab, und zwar (wegen der Existenz des inversen Automorphismus) eineindeutig. Folglich kann $f(w)$ höchstens folgende Funktionen bedeuten: Im Falle

$$\begin{aligned} &\mathfrak{B}_1 \text{ und } \mathfrak{B}_1'\colon\ f(w) \equiv e^{i\vartheta} w \quad \text{oder} \quad \equiv e^{i\vartheta} \cdot \frac{c_1 c}{w},\\ &\mathfrak{B}_2 \text{ und } \mathfrak{B}_2'\colon\ f(w) \equiv e^{i\vartheta} w,\\ &\mathfrak{B}_3 \text{ und } \mathfrak{B}_3'\colon\ f(w) \equiv e^{i\vartheta} \cdot \frac{w + w_0}{1 + \bar{w}_0 w}, \quad |w_0| < 1.\end{aligned}$$

Die Transformation

$$(2) \qquad \begin{aligned} w' &= f(w),\\ z' &= z\end{aligned}$$

liefert in diesem Falle nun aber auch tatsächlich jedesmal einen Automorphismus. So kann man jeden Automorphismus — er ist ja immer von der Form (1) — mittels eines Automorphismus (2) in die Form überführen:

$$A_1 \qquad \begin{aligned} w' &= w,\\ z' &= g^*(w, z).\end{aligned}$$

Jede Ebene $w = \text{const}$ wird also in sich eineindeutig übergeführt. Also ist im Falle $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$

$$g^*(w, z) = F(w)\, z + G(w),$$

und im Falle $\mathfrak{B}_1'$, $\mathfrak{B}_2'$, $\mathfrak{B}_3'$

$$g^*(w, z) \equiv F(w)\, z$$

oder

$$g^*(w, z) \equiv F(w)\, \frac{1}{z}.$$

$F(w)$ ist regulär und ungleich Null in den Gebieten $\mathfrak{G}_i$. Umgekehrt ist jede Transformation A_1, in der $g^*(w, z)$ von der soeben angegebenen Form ist, ein Automorphismus von $\mathfrak{B}_i$. So haben wir das Resultat gewonnen.

Satz 8: *Die einachsig unbeschränkten Zylinderbereiche unter den Reinhardtschen Körpern lassen allein folgende Automorphismen*

$$w' = f(w),$$
$$z' = g(w, z)$$

zu:

$$f(w) \equiv e^{i\vartheta} w \text{ oder } e^{i\vartheta} \frac{c_1 c}{w} \text{ im Falle } \mathfrak{B}_1 \text{ und } \mathfrak{B}_1',$$
$$\equiv e^{i\vartheta} w \text{ im Falle } \mathfrak{B}_2 \text{ und } \mathfrak{B}_2',$$
$$\equiv e^{i\vartheta} \frac{w + w_0}{1 + \overline{w}_0 w}, \quad |w_0| < 1 \text{ im Falle } \mathfrak{B}_3 \text{ und } \mathfrak{B}_3',$$
$$g(w, z) \equiv F(w)\, z + G(w) \text{ im Falle } \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \text{ und } \mathfrak{B}_3,$$
$$g(w, z) \equiv F(w)\, z \text{ oder } F(w)\, \frac{1}{z} \text{ im Falle } \mathfrak{B}_1', \mathfrak{B}_2', \mathfrak{B}_3'.$$
$$F(w), G(w) \text{ in } \mathfrak{G}_i \text{ reguläre Funktionen, } F(w) \neq 0 \text{ in } \mathfrak{G}_i.$$

§ 5.

Die Automorphismen Reinhardtscher Körper mit total entarteter Metrik.

In diesem Paragraphen werden die Automorphismen der folgenden Körper untersucht:

$$\text{I.} \quad |w^\alpha z^\beta| < c,$$
$$\text{II.} \quad |w^\alpha z^\beta| < c, \quad w \neq 0 \text{ (bzw. } z \neq 0),$$
$$\text{III.} \quad 0 < |w^\alpha z^\beta| < c,$$
$$\text{IV.} \quad c_1 < |w^\alpha z^\beta| < c,$$

wobei $\frac{\alpha}{\beta}$ stets *irrational* sein soll. Wir können ferner annehmen, daß, falls die Achsen den Körper schneiden, dies die Achsen $z = 0$ oder $w = 0$ oder beide sind, daß dagegen die unendlich ferne Gerade nie Punkte im Körper aufweist. Dazu sind wir berechtigt, weil nicht alle drei Achsen einen solchen Körper, der stets Regularitätsbereich ist, schneiden können.

Unter den Reinhardtschen Regularitätsbereichen sind die Körper I bis IV außer dem abgeschlossenen und offenen Raum sowie den aus diesen Räumen durch Fortnahme einer oder mehrerer Achsen entstehenden Bereiche die einzigen Körper mit total entarteter Metrik (siehe § 2).

Wir zeigen zunächst:

Satz 9: *Bei den Körpern* I *und* II *werden die Achsen, soweit sie im Körper verlaufen, nur unter sich abgebildet.*

Geben wir zunächst an, welche Punkte der Achse im Innern der Körper liegen können!

Körper I: $\alpha, \beta > 0$. Die endlichen Punkte von $w = 0$ und $z = 0$.

$\alpha \cdot \beta < 0$. Die Punkte einer der beiden Achsen mit Ausnahme der Fixpunkte.

Hierbei kann immer $\alpha + \beta > 0$ vorausgesetzt werden, weil sonst die unendlich ferne Achse im Innern läge und der Körper dann durch eine projektive Transformation in einen Körper I mit $\alpha^*, \beta^* > 0$ überführbar wäre.

Körper II: $\alpha, \beta > 0$. Die Punkte der Achse mit Ausnahme der Fixpunkte.

$\alpha \cdot \beta < 0$. Kein Punkt.

Körper III: Kein Punkt.

Körper IV: Kein Punkt.

1. Würde nun bei einem Automorphismus

$$A \quad \begin{aligned} w' &= f(w, z), \\ z' &= g(w, z) \end{aligned}$$

eines Körpers, der alle endlichen Punkte einer Achse — etwa von $w = 0$ — enthält, keiner dieser Punkte wieder auf einen Achsenpunkt abgebildet, so wäre $f(0, z)^\alpha g(0, z)^\beta$ eine in der ganzen z-Ebene reguläre und beschränkte, also konstante Funktion.

Ähnlich vermögen wir bei den übrigen Körpern zu schließen, die eine Achse — etwa $w = 0$ — bis auf die Fixpunkte enthalten. Hier wären — wieder unter der Voraussetzung, daß kein Bildpunkt auf die Achsen fiele — $f(0, z)$ und $g(0, z)$ regulär und $\neq 0$ für $z \neq 0$. $f(0, z)^\alpha g(0, z)^\beta$ wäre wenigstens auf der universellen Überlagerung der in 0 und ∞ punktierten z-Ebene regulär und beschränkt und somit konstant.

Also gilt bei den Körpern I wie II unter den obigen Voraussetzungen

$$f(0, z)^\alpha \cdot g(0, z)^\beta \equiv C_1.$$

Das Bild von $w = 0$ kommt auf eine Hyperfläche $|w'^\alpha z'^\beta| = C_1 \neq 0$ zu liegen. Für jede auf dieser Hyperfläche liegende analytische Fläche gilt: Alle Punkte der Hyperfläche sind Punkte oder Randpunkte

dieser Fläche. Also müßte $w = 0$ auf die Hyperfläche eineindeutig und stetig abgebildet werden. Die obige Annahme, daß kein Punkt von $w = 0$ auf eine der im Körper liegenden Achsen abgebildet würde, ist also falsch. Mindestens $f(0, z)$ oder $g(0, z)$ verschwindet für mindestens ein z_0. (Entsprechendes gilt für $f(w, 0)$ und $g(w, 0)$, falls $z = 0$ höchstens bis auf $w = 0$ und $w = \infty$ im Innern liegt.)

2. Der Punkt $(0, z_0)$ sei nun ein Punkt, der beim Automorphismus A wieder auf einen Achsenpunkt abgebildet wird. Sei weder $f(0, z)$ noch $g(0, z)$ identisch Null. Dann ist

$$f(0, z) = (z - z_0)^m f_1(z),$$
$$g(0, z) = (z - z_0)^n g_1(z), \qquad f_1(z_0),\ g_1(z_0) \neq 0.$$

Es ist mindestens n oder m ungleich Null und wegen $|f^\alpha g^\beta| < c$ ist $m\alpha + n\beta > 0$. Aus demselben Grunde verschwindet $|f^\alpha g^\beta|$ überall, wo f oder g Nullstellen haben und diese sind alle isoliert. Sei zunächst $z = 0$ im Körper enthalten. In einem Kreis $|z - z_0| \leqq R$ nimmt

$$\varphi^*(x, y) = \log \left| \frac{f(0, z)^\alpha g(0, z)^\beta}{(z - z_0)^{m\alpha + n\beta}} \right| \tag{1}$$

das Maximum auf dem Rande $|z - z_0| = R$ an, da φ^* in $|z - z_0| \leqq R$, abgesehen von den etwa vorhandenen endlich vielen anderen Nullstellen von $|f^\alpha g^\beta|$ harmonisch ist und bei Annäherung an diese Stellen gleichmäßig gegen $-\infty$ strebt. Deshalb gilt

$$\varphi^*(x, y) \leqq c' - (m\alpha + n\beta) \log R \text{ für } |z - z_0| \leqq R.$$

Da wir R beliebig groß wählen konnten, folgt

$$\varphi^*(x, y) < -N \text{ für alle } z \text{ und noch so große } N,$$
$$f(0, z)^\alpha g(0, z)^\beta \equiv 0,$$
$$f(0, z) \text{ oder } g(0, z) \equiv 0.$$

Liegt $z = 0$ nicht im Körper, so führt dieselbe Überlegung für φ^* nach Übergang in die Ebene $\zeta = \log z$ zum Ziel.

Also können Achsenpunkte nur wieder auf solche Punkte abgebildet werden. Da die inverse Transformation eines Automorphismus wieder ein Automorphismus ist, ergibt sich, daß auch keine achsenfremden Punkte Bilder auf der Achse haben können. Satz 9 ist bewiesen.

Wir kommen jetzt zur Abbildung der übrigen Punkte bei einem Automorphismus der Körper I bis IV.

Die Punkte

$$w = e^{\beta\zeta}$$
$$z = e^{\gamma - \alpha\zeta}, \quad \gamma = \frac{1}{\beta} \log d, \quad 0 < d < c \quad \text{bzw.} \quad c_1 < d < c$$

durchlaufen mit komplexem ζ die Punkte der analytischen Fläche $w^\alpha z^\beta = d$, die mit ihren Randpunkten die Hyperfläche

$$|w^\alpha z^\beta| = d$$

ausfüllt. Es sind also $f(e^{\beta\zeta}, e^{\gamma-\alpha\zeta})$ und $g(e^{\beta\zeta}, e^{\gamma-\alpha\zeta})$ als Funktionen von ζ überall analytisch und ungleich Null, gleiches gilt folglich für

$$F(\zeta) = f(e^{\beta\zeta}, e^{\gamma-\alpha\zeta})^\alpha g(e^{\beta\zeta}, e^{\gamma-\alpha\zeta})^\beta.$$

Da $|f^\alpha g^\beta| < c$ für alle Punkte der Körper, so ist $F(\zeta)$ beschränkt und deshalb konstant. Es gilt also:

Satz 10: *Bei einem Automorphismus der Körper* I bis IV *werden die Hyperflächen* $|w^\alpha z^\beta| = const$ *unter sich abgebildet.*

Untersuchen wir nun näher zuerst die Automorphismen der Körper III und IV! Wir bilden den universellen Überlagerungsbereich dieser Körper ab mittels

$$U = \alpha \log w + \beta \log z,$$
$$Z = \log z$$

auf

$$\mathfrak{A}: \quad \Re U < \varrho = \log c, \quad Z \text{ beliebig},$$

bzw.

$$\mathfrak{B}: \quad \varrho_1 < \Re U < \varrho_2.$$

Jeder Automorphismus der betrachteten Reinhardtschen Körper bestimmt auch einen Automorphismus des Überlagerungsbereiches und damit der Bereiche $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Auf Grund von Satz 10 werden bei den Automorphismen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Hyperflächen $\Re U = \text{const}$ wieder in solche Hyperflächen übergeführt. Für die Automorphismen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$:

$$U' = F(U, Z),$$
$$Z' = G(U, Z)$$

gilt also

in bezug auf $\mathfrak{A}$: $F = a U + (1-a)\varrho + ib$, $a > 0$, b reell,

in bezug auf $\mathfrak{B}$: $F = U + ib$ oder $F = -U + \varrho_1 + \varrho_2 + ib$.

Wegen der eineindeutigen Abbildung der $\Re U = \text{const}$ untereinander ist bei $\mathfrak{A}$ wie $\mathfrak{B}$:

$$G(U, Z) = h_1(U) Z + h_2(U).$$

Darüber hinaus muß

$$z' = e^{Z'} = z^{h_1(U)} e^{h_2(U)} = \Phi(U, z)$$

periodisch in U mit den Perioden $(\alpha k + \beta k') 2i\pi$ sein, d. h.

$$\Phi(U, z) = \Phi(z),$$
$$h_1(U) = h_2(U) = \text{const} \quad \text{und} \quad h_1(U) \text{ ganz}.$$

Somit ergeben sich für die Automorphismen der Körper III und IV

$$w'^\alpha z'^\beta = w^{\alpha a} z^{\beta a} c^{(1-a)} e^{ib},$$
$$z' = q z^p, \quad p \text{ ganz}, \tag{2}$$

und für die Körper IV

$$(3) \qquad \begin{aligned} w'^{\alpha} z'^{\beta} &= w^{-\alpha} z^{-\beta} c_1 c \cdot e^{ib}, \\ z' &= q z^{p}. \end{aligned}$$

Im Falle (2) schließen wir weiter:

$$w'^{\alpha} = q^{-\beta} w^{\alpha a} z^{\beta(a-p)} c^{(1-a)} e^{ib},$$

$$w' = q^{-\frac{\beta}{\alpha}} w^{a} z^{\frac{\beta}{\alpha}(a-p)} c^{\frac{1-a}{\alpha}} e^{i\frac{b}{\alpha}}.$$

Da $w' = f(w, z)$ eindeutig im Körper ist, so muß $a = p$ sein, und da die Funktion umkehrbar ist, folgt weiter $p = a = 1$. Die Automorphismen (2) sind also von der Form

$$(4) \qquad \begin{aligned} w' &= q^{-\frac{\beta}{\alpha}} e^{i\frac{b}{\alpha}} w, \\ z' &= q z. \end{aligned}$$

Diese Transformationen sind andererseits auch stets Automorphismen der Körper I bis IV mit gleichen α, β.

Im Falle (3) ist

$$w'^{\alpha} = c_1 c\, q^{-\beta} w^{-\alpha} z^{-\beta(1+p)} e^{ib}$$

und deshalb $p = -1$,

$$(5) \qquad \begin{aligned} w' &= (c_1 c)^{\frac{1}{\alpha}} q^{-\frac{\beta}{\alpha}} e^{i\frac{b}{\alpha}} w^{-1}, \\ z' &= q z^{-1}. \end{aligned}$$

Somit haben wir bewiesen:

Satz 11: *Die Automorphismen der Reinhardtschen Regularitätsbereiche*

$$\text{I.} \qquad |w^{\alpha} z^{\beta}| < c,$$

$$\text{II.} \qquad |w^{\alpha} z^{\beta}| < c, \quad w \neq 0 \text{ bzw. } z \neq 0,$$

$$\text{III.} \qquad 0 < |w^{\alpha} z^{\beta}| < c$$

sind:

$$w' = q^{-\frac{\beta}{\alpha}} e^{i\vartheta} w,$$

$$z' = q e^{i\varphi} z, \quad q > 0, \quad \vartheta \text{ und } \varphi \text{ reell.}$$

Bei den Körpern IV $c_1 < |w^{\alpha} z^{\beta}| < c$ *treten noch hinzu*

$$w' = (c_1 c)^{\frac{1}{\alpha}} q^{-\frac{\beta}{\alpha}} e^{i\vartheta} w^{-1},$$

$$z' = q e^{i\varphi} z^{-1}, \quad q > 0, \quad \vartheta \text{ und } \varphi \text{ reell.}$$

Die Automorphismengruppe eines Reinhardtschen Körpers der Art A 2 aus M 1 ist somit immer eine (reell) *dreigliedrige lineare Gruppe.*

§ 6.

Die Automorphismen Reinhardtscher Körper mit partiell entarteter Metrik.

Wiederum können wir uns auf Regularitätsbereiche beschränken. Dann handelt es sich um die Untersuchung folgender Bereiche:

$$\begin{aligned} &\text{I.} && |w^\alpha z^\beta| < c, \\ &\text{II.} && |w^\alpha z^\beta| < c, \quad w \neq 0 \text{ (bzw. } z \neq 0), \\ &\text{III.} && 0 < |w^\alpha z^\beta| < c, \\ &\text{IV.} && c_1 < |w^\alpha z^\beta| < c, \end{aligned}$$

α und β ganz. Ferner dürfen wir annehmen, $\alpha \cdot \beta \neq 0$. Ist α oder β gleich Null, so ist der Körper ein einachsig unbeschränkter Zylinderbereich (siehe § 4). α und β seien hinfort *teilerfremd* gewählt.

Grundlegend für die Auffindung der Automorphismen

$$A \qquad \begin{aligned} w' &= f(w, z), \\ z' &= g(w, z) \end{aligned}$$

der übrigen Körper ist Satz 5. Aus ihm folgt

$$u' = w'^{\alpha} z'^{\beta} = \varphi(u) = \varphi(w^\alpha z^\beta),$$

wobei $\varphi(u)$ überall im Körper regulär ist.

$$u' = \varphi(u)$$

bewirkt eine eineindeutige, analytische Abbildung der jeweils durch die Körper I bis IV bestimmten Bereiche der u-Ebene (Kreise, punktierte Kreise, Kreisringe). Im Falle der Körper I stellt $u = 0$ das *Paar* der Ebenen $w = 0$, $z = 0$ dar, während $u = u_0 \neq 0$ stets *eine* analytische Fläche ist. Folglich gilt für die Körper I

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0, \\ \varphi(u) &\equiv e^{i\vartheta} u. \end{aligned}$$

Die Automorphismen der Körper I, *die keine einachsig unbeschränkten Zylinderbereiche sind, sind achsentreu.*

Gleiches gilt für die Körper II mit Ausnahme von

$$(1) \qquad \begin{aligned} |w^\alpha z| &< c, \quad w \neq 0, \\ |w z^\beta| &< c, \quad z \neq 0. \end{aligned}$$

Die Körper (1) sind aber eineindeutig und analytisch auf einachsig unbeschränkte Zylinderbereiche (§ 4) durch

$$\begin{aligned} w' &= w \\ z' &= w^\alpha z \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} w' &= w z^\beta \\ z' &= z \end{aligned}$$

abbildbar. Wir können also im folgenden $|\beta| > 1$ (bzw. $|\alpha| > 1$) voraussetzen. Bei den noch verbleibenden Körpern II können wir in einer vollen Umgebung $\mathfrak{U}(u_0)$ einer im Innern verlaufenden Fläche $w^\alpha z^\beta = u_0 \neq 0$ *ausgezeichnete Parameter* u, t stets so einführen, daß

1. eine eineindeutige und analytische Beziehung zwischen w, z einerseits und u, t andererseits besteht,

2. die Flächen $u = \text{const}$ (t beliebig komplex) unsere ausgezeichneten analytischen Flächen $w^\alpha z^\beta = \text{const}$ sind,

3. $t = 0$ und $t = \infty$ die Randpunkte von $u = \text{const}$ liefern.

Eine solche ausgezeichnete Parameterdarstellung ist

$$w = t^{-\beta},$$
$$z = u^{1/\beta} t^\alpha,$$

worin $u^{1/\beta}$ einen der Zweige des analytischen Gebildes $u^{1/\beta}$ bedeutet und u demgemäß auf eine genügend kleine Umgebung $\mathfrak{U}(u_0)$ und u_0 beschränkt ist.

Jedes andere Paar u^*, t^* ausgezeichneter Parameter für $\mathfrak{U}(u_0)$ hängt mit u, t durch folgende Gleichungen zusammen:

$$u = \varkappa(u^*),$$
$$t = \psi(u^*)\, t^* \quad \text{oder} \quad t = \psi(u^*)\, t^{*-1}.$$

Durch die zu $\varkappa(u^*)$ inverse Funktion $\tilde{\varkappa}(u)$ wird $\mathfrak{U}(u_0)$ eineindeutig auf $\mathfrak{U}^*(u_0^*)$ abgebildet, ferner ist $\psi(u^*) \neq 0$ in $\mathfrak{U}^*(u_0^*)$.

Daraus folgt weiter

$$w = \psi(u^*)^{-\beta} t^{*-\beta} \quad \text{oder} \quad \psi(u^*)^{-\beta} t^{*\beta},$$
$$z = \varkappa(u^*)^{1/\beta}\, \psi(u^*)^\alpha\, t^{*\alpha} \quad \text{oder} \quad \varkappa(u^*)^{1/\beta}\, \psi(u^*)^\alpha\, t^{*-\alpha}$$

im Bereich, in dem u^*, t^* ausgezeichnete Parameter sind.

Würde nun durch den Automorphismus A die Fläche $u = u_0$ auf $u' = 0$ abgebildet, so wäre

$$w' = f(t^{-\beta}, u^{1/\beta} t^\alpha),$$
$$z' = g(t^{-\beta}, u^{1/\beta} t^\alpha)$$

eine ausgezeichnete Parameterdarstellung in einer Umgebung $\mathfrak{U}'(0)$ von $u' = 0$. Folglich wäre für alle t und u aus $\mathfrak{U}(u_0)$, $u \neq u_0$,

$$(2) \qquad \begin{aligned} w' &= f(t^{-\beta}, u^{1/\beta} t^\alpha) \equiv \psi(u)^{-\beta} t^{-\beta}, \\ z' &= g(t^{-\beta}, u^{1/\beta} t^\alpha) \equiv \varkappa(u)^{1/\beta}\, \psi(u)^\alpha\, t^\alpha \end{aligned}$$

(oder den entsprechenden Ausdrücken rechts nach Ersetzung von t durch t^{-1}).

Also ist $\psi(u)^{-\beta}$ im Punkte u_0 regulär. Weiter ist $\psi(u_0) \neq 0$, da $f(t^{-\beta}, u_0^{1/\beta} t^\alpha)$ für $t \neq 0$ regulär und $\neq 0$. Folglich ist auch $\varkappa(u)^{1/\beta}$ in ganz $\mathfrak{U}(u_0)$ regulär und da $g(t^{-\beta}, u_0^{1/\beta} t^\alpha) \equiv 0$, so ist $\varkappa(u_0) = 0$. Da wegen der eineindeutigen Abbildung $u' = \varkappa(u)$, $\varkappa'(u_0) \neq 0$, und ferner $|\beta| > 1$, so haben wir damit einen Widerspruch. *Jeder Automorphismus der Körper* II *mit* $|\beta| > 1$ *ist achsentreu. Also sind alle Automorphismen der Körper* I, $\alpha \cdot \beta \neq 0$, *und der Körper* II, $|\beta| > 1$ (*bzw.* $|\alpha| > 1$) *zugleich Automorphismen der entsprechenden Körper* III.

Für die Körper III und IV liefern nun die Transformationen

$$T: \quad \begin{aligned} w' &= w^\alpha z^\beta, \\ z' &= w^\gamma z^\delta, \end{aligned}$$

wo auch γ, δ ganze Zahlen und $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, eine eineindeutige und analytische Abbildung auf die einachsig unbeschränkten Zylinderbereiche

$$\text{bzw.} \quad \begin{aligned} \mathfrak{B}_2' &: 0 < |w'| < c, \quad z \neq 0, \\ \mathfrak{B}_1' &: c_1 < |w'| < c, \quad z \neq 0. \end{aligned}$$

Aus den Automorphismen S der Zylinderbereiche $\mathfrak{B}_2'$ (bzw. $\mathfrak{B}_1'$) ergeben sich nun die Automorphismen A der Körper III (bzw. IV) als Transformationen $T^{-1}ST$. Diese Transformationen A sind von der Struktur:

$$(3) \qquad \begin{aligned} w' &= e^{i\vartheta} M_1(w, z) F^{-\beta}(u), \\ z' &= e^{i\varphi} M_2(w, z) F^{\alpha}(u). \end{aligned}$$

$u = w^\alpha z^\beta$, $F(u)$ eine beliebige, für $0 < |u| < c$ (bzw. $c_1 < |u| < c_2$) reguläre, nicht verschwindende Funktion.

Bei den Körpern III ist

$$\begin{matrix} M_1 \equiv w \\ M_2 \equiv z \end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{cases} w^{\alpha\delta + \beta\gamma} z^{2\beta\delta}, \\ w^{-2\alpha\gamma} z^{-\beta\gamma - \alpha\delta}. \end{cases}$$

Bei den Körpern IV gilt ähnliches.

Welche dieser Transformationen bilden nun zugleich auch Automorphismen der Körper I und II?

Bei den Automorphismen der Körper I ist der Nullpunkt innerer Fixpunkt. In ihm kann die Funktionaldeterminante nicht verschwinden. So folgt aus (3), daß nur die im folgenden Satze angegebenen Transformationen Automorphismen sein können.

Satz 12: *Die sämtlichen Automorphismen eines Körpers $|w^\alpha z^\beta| < c$ mit $\alpha \cdot \beta \neq 0$ sind*

$$(4) \qquad \begin{aligned} w' &= e^{i\vartheta} w F(u)^{-\beta}, \\ z' &= e^{i\varphi} z \cdot F(u)^{\alpha}, \end{aligned}$$

$F(u)$ eine beliebige, reguläre Funktion, die für $|u| < c$ nicht verschwindet. Im Falle $\alpha = \beta = 1$ sind diese Transformationen noch zusammenzusetzen mit

$$\begin{aligned} w' &= z, \\ z' &= w. \end{aligned}$$

Daß jede dieser Transformationen tatsächlich den Körper I eineindeutig auf sich abbildet, ergibt sich unmittelbar durch Auflösung.

Für die Körper II folgt jetzt ebenso:

Satz 13: *Die Transformationen* (4) *und nur diese sind die achsentreuen Automorphismen der Körper*

$$|w^\alpha z^\beta| < c, \quad w \neq 0 \ (\text{bzw. } z \neq 0).$$

Andere Automorphismen weisen die Körper nicht auf, es sei denn α *oder* $\beta = 0$ *oder* ± 1. *In den Ausnahmefällen sind die Körper eineindeutige Bilder einachsig unbeschränkter Zylinderbereiche.*

Der 2. Teil des Satzes war zu Beginn dieses Abschnittes bewiesen. Der 1. Teil des Satzes folgt aus (3), denn die punktierte Ebene $z = 0$ (bzw. $w = 0$) muß in sich übergeführt werden. Man beachte dabei aber, daß es nicht von vornherein ausgeschlossen war, daß $F(u)$ für $u = 0$ singulär ist.

§ 7.

Eindeutigkeitssatz in unbeschränkten Reinhardtschen Körpern.

Satz 14: $\mathfrak{B}$ *sei ein Bereich, in dem 2 Monome* $w^\alpha z^\beta$ *und* $w^\gamma z^\delta$ *beschränkt sind.* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *seien nichtnegative ganze Zahlen und* $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. T *sei eine Transformation, die* $\mathfrak{B}$ *auf einen in seinem Innern liegenden Bereich abbildet und dabei einen Punkt* P *aus* $\mathfrak{B}$, *der auf einer der beiden Achsen liegt, fest läßt. In* P *sei die Funktionalmatrix von* T $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Dann ist* T *die identische Transformation.*

Falls $\mathfrak{B}$ beschränkt ist, handelt es sich — auch noch ohne die Voraussetzung über die Monome — um einen Spezialfall des Cartanschen Eindeutigkeitssatzes. Satz 14 ist also nur noch für unbeschränkte Körper zu beweisen.

Zum Beweise können wir unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, daß P der Punkt $(1, 0)$ ist. Dann führen wir ein:

$$w^* = w - 1,$$
$$z^* = z.$$

Die beiden T definierenden Funktionen entwickeln wir nach Potenzen von z^*:

$$T \begin{cases} w^{*(1)} = w^* + Q(w^*)\, z^{*a_1} + \ldots, \\ z^{*(1)} = z^* + R(w^*)\, z^{*b_1} + \ldots, \end{cases}$$
$$Q(w^*), \quad R(w^*) \not\equiv 0.$$

Für die Iterierten $T^{(n)}$ von T gilt dann:

$$w^{*(n)} = w^* + n\, Q(w^*)\, z^{*a_1} + \ldots,$$
$$z^{*(n)} = z^* + n\, R(w^*)\, z^{*b_1} + \ldots.$$

Da nach Voraussetzung $|w'^\alpha z'^\beta| = |(w^{*(1)} + 1)^\alpha z^{*(1)\beta}|$ beschränkt ist, gilt gleiches für $|(w^{*(n)} + 1)^\alpha z^{*(n)\beta}|$. Nun ist

$$(w^{*(n)} + 1)^\alpha z^{*(n)\beta} = \{(w^* + 1) + nQ(w^*)\, z^{*a_1} + \ldots\}^\alpha \{z^* + nR(w^*) z^{*b_1} + \ldots\}^\beta$$
$$= \{(w^* + 1)^\alpha + n\alpha (w^* + 1)^{\alpha - 1} Q(w^*)\, z^{*a_1} + \text{ höhere Glieder in } z^*\} \cdot$$
$$\{z^{*\beta} + n\beta R(w^*)\, z^{*b_1 + \beta - 1} + \text{ höhere Glieder in } z^*\}$$
$$= (w^* + 1)^\alpha z^{*\beta} + n\alpha (w^* + 1)^{\alpha - 1} Q(w^*) z^{*a_1 + \beta} + n\beta (w^* + 1)^\alpha R(w^*) z^{*b_1 + \beta - 1}$$

$+$ Glieder, die z^* in höherer als p-ter Ordnung enthalten,

$$p = \text{Min } (a_1,\ b_1 - 1) + \beta.$$

Andererseits ist

$$(w^{*(n)} + 1)^\alpha z^{*(n)\beta} = F_n(w^*, z^*) = (w^* + 1)^\alpha z^{*\beta} + S_1^{(n)}(w^*) z^{*\beta+1} + S_2^{(n)}(w^*) z^{*\beta+2} + \ldots,$$

$$S_l^{(n)}(w^*) z^{*\beta+l} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(\beta+l)\vartheta} F_n(w^*, z^* e^{i\vartheta})\, d\vartheta.$$

Da die $|F_n(w^*, z^*)|$ im Bereiche $\mathfrak{B}$ gleichmäßig beschränkt sind, gilt dies auch für $|S_l^{(n)}(w^*) z^{*\beta+l}|$ und ebenso für $|V_l^{(n)}(w^*) z^{*\delta+l}|$, wo $V_l^{(n)}(w^*)$ der $S_l^{(n)}(w^*)$ entsprechende Ausdruck in bezug auf das Monom $w'^\gamma z'^\delta$ ist.

Wir behaupten

$$Q(w^*) = R(w^*) \equiv 0,$$

woraus dann unmittelbar die Behauptung von Satz 14 folgt.

1. Fall:

$$a_1 < b_1 - 1.$$

Es ist

$$z^{*\beta+a_1} S_{a_1}^{(n)}(w^*) = n\alpha (w^* + 1)^{\alpha-1} Q(w^*) z^{*\beta+a_1};$$

folglich wegen der Beschränktheit $Q(w^*) \equiv 0$ und ebenso $R(w^*) \equiv 0$.

2. Fall:

$$a_1 > b_1 - 1.$$

Hier folgt zuerst $R(w^*) \equiv 0$ und dann $Q(w^*) \equiv 0$.

3. Fall:

$$a_1 = b_1 - 1.$$

Jetzt ist

$$S_{a_1}^{(n)}(w^*) = n(w^* + 1)^{\alpha-1} (\alpha Q(w^*) + \beta (w^* + 1) R(w^*)),$$

$$V_{a_1}^{(n)}(w^*) = n(w^* + 1)^{\gamma-1} (\gamma Q(w^*) + \delta (w^* + 1) R(w^*)).$$

Da $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$, folgt wieder die Behauptung.

§ 8.

Automorphismen der eigentlichen Reinhardtschen Körper der Klasse M 3.

Der folgende Satz gibt uns nun die Möglichkeit. mit Hilfe von Satz 14 die Automorphismen eigentlicher Körper M 3 zu bestimmen.

Satz 15: *Ist $\mathfrak{B}$ ein unbeschränkter, eigentlicher Reinhardtscher Körper* M 3, *so muß bei jedem Automorphismus mindestens $w = 0$ oder $z = 0$ wieder auf eine solche Achse abgebildet werden.*

Es ist nur nötig, den Beweis für den Fall zu erbringen, daß $\mathfrak{B}$ ein Regularitätsbereich ist. Sicher liegen dann die endlichen Punkte einer Achse — etwa $w = 0$ — im Innern von $\mathfrak{B}$. Der Automorphismus A von $\mathfrak{B}$ sei:

$$w^* = f(w, z),$$
$$z^* = g(w, z).$$

Dann ist $f^\alpha g^\beta$ und $f^\gamma g^\delta$ auf der ganzen endlichen Ebene $w = 0$ analytisch und beschränkt, also konstant. Daraus würde folgen, daß f und g dort konstant wären, falls nicht f oder g auf der ganzen Ebene verschwindet. Das letztere ist aber die Aussage des Satzes.

Damit ist zugleich die Verallgemeinerung eines wichtigen Satzes von P. Thullen bewiesen: Existiert im eigentlichen Reinhardtschen Körper $\mathfrak{B}$ mit dem Mittelpunkt $O(0, 0)$ ein $P \neq O$, das sich durch einen Automorphismus in O überführen läßt, so gibt es entweder auf der Ebene $z = 0$ oder $w = 0$ mindestens einen Punkt $Q \neq O$ mit gleicher Eigenschaft. In der Tat! Es ist nur nötig, diese Aussage für Regularitätsbereiche nachzuweisen. In den Bereichen M_1 und M_2 ist sie gültig (siehe § 5 und § 6), in den Bereichen M_3 folgt sie aus dem soeben bewiesenen Satze. Für die übrigen Bereiche — sie sind alle beschränkt — ist es die Aussage von Thullen.

Satz 16: *Die eigentlichen Reinhardtschen Körper* M 3 *lassen keine anderen nullpunktstreuen Automorphismen als Reinhardtsche Drehungen zu.*

Für die Körper M 2 galt dieser Satz noch nicht (siehe § 6), während er für die beschränkten Reinhardtschen Körper, wie bekannt, gültig ist[15]). Ist nun der Körper M 3 unbeschränkt, so enthält seine Hülle alle endlichen Punkte von mindestens einer der beiden Achsen — etwa $w = 0$. Dann kann auf Grund von Satz 15 $w = 0$ nur auf sich selbst oder unter Umständen auf $z = 0$ abgebildet werden. Es werde durch den Automorphismus A $w = 0$ auf sich abgebildet. (Im andern Falle gelten entsprechende Überlegungen.) Dann ist also

$$A \quad \begin{aligned} w' &= aw + \ldots, \\ z' &= bw + cz + \ldots. \end{aligned}$$

Wir können annehmen, daß $\text{ampl}\left(\frac{a}{c}\right) = 0$ ist, weil dies nötigenfalls durch Übergang von A zu $A\,T_z(\vartheta)$ erreichbar ist.

Mit A bilden auch die iterierten Transformationen A^n Automorphismen der Körper. Es gilt für A^n

$$w' = f_n(w, z) = a^n w + \ldots,$$
$$z' = g_n(w, z) = \left\{ b c^n \sum_0^n \left(\frac{a}{c}\right)^p \right\} w + c^n z + \ldots.$$

---

[15]) Siehe P. Thullen, Die Invarianz des Mittelpunktes von Kreiskörpern, Math. Annalen 104 (1931), S. 249.

Da $f_n^\alpha g_n^\beta$ und $f_n^\gamma g_n^\delta$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ (über die ganzen Zahlen α, β, γ, δ siehe Hilfssatz S. 443), im Körper reguläre und beschränkte Funktionen sind, weisen sie konvergente Teilfolgen auf. Andererseits ist

$$f_n^\alpha g_n^\beta = (a^\alpha c^\beta)^n w^\alpha z^\beta + a^{\alpha n} \left\{ b c^n \sum_0^n \left(\frac{a}{c}\right)^\rho \right\}^\beta w^{\alpha+\beta} + \ldots .$$

Hieraus folgt $|a^\alpha c^\beta| \leqq 1$. Da Entsprechendes für A^{-1} gilt, folgt $|a^\alpha c^\beta| = 1$. Ebenso schließen wir aus der Beschränktheit von $f_n^\gamma g_n^\delta$: $|a^\gamma c^\delta| = 1$, also: $|a| = |c| = 1$. Außerdem folgt:

$b \sum_0^n \left(\frac{a}{c}\right)^\rho$ und damit $|n \cdot b|$ beschränkt für alle n, also $b = 0$.

Jetzt ergibt sich aus dem Eindeutigkeitssatz die Behauptung von Satz 16.

Folgerung: *Die einzigen Automorphismen eines eigentlichen Körpers* M 3, *bei dem auf beiden Achsen die inneren Punkte unbeschränkt sind, sind die definierenden Transformationen* $T(\vartheta, \varphi)$ (*eventuell unter Hinzunahme von* $w' = a z$, $z' = a^{-1} w$).

Es bleibt also jetzt noch übrig, die nichtmittelpunktstreuen Automorphismen derjenigen eigentlichen Reinhardtschen Regularitätsbereiche M_s zu bestimmen, bei denen nicht auf *beiden* Achsen zugleich die inneren Punkte unbeschränkt sind. Von einer Achse (im folgenden als $w = 0$ angenommen) müssen alle endlichen Punkte im eigentlichen Reinhardtschen Regularitätsbereich liegen, da er sonst beschränkt wäre. Über diese Körper sagt aus

Satz 17: *Ein eigentlicher Reinhardtscher Körper* M 3, *der die endlichen Punkte von* $w = 0$ *alle enthält, läßt außer den Reinhardtschen Drehungen keine Automorphismen zu, es sei denn ein Körper*

$$|w| \leqq a e^{-b|z|^2}, \quad a, \; b > 0.$$

Ein solcher Körper weist als Automorphismen auf (*nach der Normierung* $a = b = 1$)

$$w' = w \cdot e^{-\bar{\beta}(2z+\beta)} e^{i\varphi}$$
$$z' = e^{i\vartheta}(z + \beta). \quad \beta \text{ } \textit{beliebig komplex, } \vartheta \textit{ und } \varphi \textit{ reell.}$$

Zum Beweise können wir annehmen, daß der Körper ein Regularitätsbereich ist, der auf $z = 0$ nur Punkte mit $|w| < 1$ enthält.

Ist A nun ein Automorphismus des Körpers, so bildet er nach Satz 15 die endlichen Punkte von $w = 0$ unter sich ab. Deshalb ist

$$B = A\, T_w(\vartheta)\, A^{-1}$$

ein Automorphismus, der $w = 0$ punktweise festläßt; also nach Satz 16 $B = T_w(\vartheta_1(\vartheta))$. Daraus folgt, daß die Transformation A die Form hat:

$$w' = w f(z),$$
$$z' = g(z).$$

Weil die endlichen Punkte auf $w = 0$ unter sich abgebildet werden, ist

$$g(z) = \alpha z + \beta.$$

Nunmehr bilden wir die Automorphismen mit beliebigen reellen φ und ϑ

$$B(\vartheta, \varphi) = T_z(-\varphi) A^{-1} T_z(-\vartheta) A T_z(\vartheta) T_z(\varphi).$$

Sie haben die Entwicklung

$$w' = w f^*(z; \vartheta, \varphi),$$
$$z' = z + \frac{\beta}{\alpha}(e^{-i\vartheta} - 1) e^{-i\varphi}.$$

Da zu vorgegebenem komplexen γ, $|\gamma| < 2\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|$, immer ϑ, φ so gefunden werden können, daß

$$\frac{\beta}{\alpha}(e^{-i\vartheta} - 1) e^{-i\varphi} = \gamma,$$

so gibt es (wie man durch Wiederholung dieses Verfahrens feststellt) in der Gruppe der Automorphismen zu vorgegebenem komplexen γ immer Transformationen mit der Entwicklung

$$C \quad \begin{aligned} w' &= w f_0(z), \\ z' &= z + \gamma. \end{aligned}$$

Nun ist unser Reinhardtscher Körper als Regularitätsbereich ein vollkommener Körper. Er läßt sich ausdrücken durch

$$|w| < R(|z|),$$

wo $R(|z|) < 1$ für alle z. Wegen des Automorphismus C muß gelten

$$\begin{aligned} |w f_0(z)| &< R(|g(z)|), \\ |f_0(z)|\, R(|z|) &= R(|z+\gamma|) \\ \Delta \log R(|z|) &= \Delta \log R(|z+\gamma|) \end{aligned} \tag{1}$$

oder wenn

$$Q(|z|) = \Delta \log R(|z|)$$

gesetzt wird,

$$Q(|z|) = Q(|z+\gamma|)$$

für beliebige komplexe γ und damit

$$Q(|\gamma|) = Q(0).$$

Führen wir $\Phi(x) = \log R(x)$ ein, so können wir schreiben:

$$\Phi'' + \frac{1}{x}\Phi' = Q(0).$$

Die allgemeinste Lösung ist

$$R(x) = e^{\Phi(x)} = d_1 e^{d_2 x^2} x^{d_3}.$$

Da $0 < R(x) < 1$ für alle endlichen x, so ist $d_3 = 0$ und $d_2 = -k \leqq 0$. $d_2 = 0$ führt auf den einachsigen Zylinder und ist daher auch auszuschließen. Es verbleibt nur

$$R(x) = d e^{-kx^2}, \quad d, k > 0.$$

Wir haben nur noch die Automorphismen des Körpers

$$|w| < de^{-k|z|^2}$$

zu untersuchen und können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $d = k = 1$. Wir haben oben nachgewiesen, daß ein solcher Automorphismus die Form hat

$$w' = wf_0(z),$$
$$z' = \alpha z + \beta.$$

Wegen (1) gilt

$$\log|f_0(z)| = \log R(|\alpha z + \beta|) - \log R(|z|) = (1 - |\alpha|^2)|z|^2 - 2\Re(\alpha\bar{\beta}z) - |\beta|^2.$$

Die rechte Seite kann nur eine harmonische Funktion sein, wenn $|\alpha| = 1$. Dann ist

$$f_0(z) = e^{-\bar{\beta}'(2z+\beta')}e^{i\varphi} \qquad (\beta' = \beta\bar{\alpha}).$$

Die Transformation

$$w' = we^{-\bar{\beta}(2z+\beta)}e^{i\varphi},$$
$$z' = e^{i\vartheta}(z + \beta)$$

liefern nun tatsächlich Automorphismen des Ausnahmekörpers, w. z. b. w.

§ 9.

Automorphismen der uneigentlichen Reinhardtschen Körper der Klasse M 3.

Es bleibt nun noch übrig, die Automorphismen derjenigen Reinhardtschen Regularitätsbereiche der Klasse M 3 zu bestimmen, die weder eigentlich sind (§ 8), noch überhaupt keine Punkte auf den Achsen aufweisen (Satz 4). Besitzt ein auf einen beschränkten Bereich *nicht* abbildbarer Reinhardtscher Regularitätsbereich der Klasse M 3 Punkte auf $w = 0$, aber auf keiner andern Achse (weil er uneigentlich ist), so enthält er die Achse $w = 0$ bis auf isolierte Punkte (siehe Satz 4). Die isolierten Punkte können aber nur $z = 0$ und $z = \infty$ sein. Da die Carathéodorysche Distanzfunktion eines solchen Körpers dann und nur dann verschwindet, wenn beide Punkte auf dieser Ebene liegen, muß jeder Automorphismus die in $z = 0$ und $z = \infty$ punktierte Ebene $w = 0$ (eineindeutig analytisch) auf sich abbilden.

Wir beweisen zuerst den

Hilfssatz 1: *Besitzt ein Automorphismus A eines uneigentlichen Reinhardtschen Körpers $\mathfrak{R}$ der Klasse* M 3, *der innere Punkte auf $w = 0$ aufweist, diese alle als Fixpunkte, so ist A eine Drehung*

$$w' = we^{i\vartheta}, \quad z' = z.$$

Es gilt sicher für die beiden in $\mathfrak{R}$ beschränkten Monome $w^\alpha z^\beta$ und $w^\gamma z^\delta$, daß $\alpha, \gamma > 0$. Sind nun β und δ beide nicht positiv, so üben wir

die in $\mathfrak{R}$ eineindeutige Transformation $w' = w$, $z' = \frac{1}{z}$ aus. Das Bild von $\mathfrak{R}$ sei $\mathfrak{R}$. $\mathfrak{R}$ ist wieder ein Reinhardtscher Regularitätsbereich der Klasse M 3 mit Punkten auf der Achse $w = 0$. In ihm gibt es ein und damit auch zwei voneinander „unabhängige" Monome mit nur positiven Exponenten, die beschränkt sind.

Wir beweisen jetzt den Hilfssatz für $\mathfrak{R}$ und damit auch für $\mathfrak{R}$. A sei ein Automorphismus von $\mathfrak{R}$, der die in $\mathfrak{R}$ gelegenen Punkte von $w = 0$ festläßt. Dann gilt in bezug auf einen inneren Punkt $(0, z_0)$

$$A \quad \begin{aligned} w' &= f(w, z) \equiv c_1 w + w\,\mathfrak{P}_1(w, z - z_0), \\ z' &= g(w, z) \equiv z + w\,\mathfrak{P}_2(w, z - z_0); \end{aligned}$$

$\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ Potenzreihen nach w und z um $(0, z_0)$.

Mittels der Automorphismen A^n, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ schließen wir wie im Beweise von Satz 16 $|c_1| = 1$. Auf

$$\begin{aligned} w' &\equiv e^{i\vartheta} w + w\,\mathfrak{P}_1(w, z - z_0), \\ z' &\equiv z + w\,\mathfrak{P}_2(w, z - z_0) \end{aligned}$$

wenden wir jetzt den Eindeutigkeitssatz (Satz 14) an; also gilt

$$A \begin{cases} w' \equiv e^{i\vartheta} w, \\ z' \equiv z \end{cases}$$

w. z. b. w.

Wir zeigen jetzt

Satz 18: *Jeder Automorphismus S von $\mathfrak{R}$ hat die Form:*

$$S \quad \begin{aligned} w' &= w \cdot f(z), \\ z' &= g(z) \quad \textit{mit} \quad f(z) = b \cdot z^d, \quad d \textit{ ganzzahlig}, \\ &\qquad\qquad g(z) = a \cdot z \quad \textit{oder} \quad \frac{a}{z}. \end{aligned}$$

Ist $g(z) \equiv z$, so ist S bereits die Identität oder eine triviale Drehung.

Der zweite Teil von Satz 18 ist schon bewiesen. Zum Beweise des ersten Teiles bilden wir mittels

$$T_\vartheta \quad \begin{aligned} w' &= w e^{i\vartheta}, \\ z' &= z \end{aligned}$$

die Transformation:

$$U = T_{-\vartheta} S^{-1} T_\vartheta S;$$

durch sie wird jeder Punkt der Achse $w = 0$ festgehalten, also ist U nach dem Hilfssatze eine Drehung:

$$U = T_{\varphi(\vartheta)}.$$

Nach bekannter Schlußweise[16]) folgt jetzt, daß S von der Form ist:

$$\begin{aligned} w' &= w \cdot f(z), \\ z' &= g(z). \end{aligned}$$

[16]) Siehe H. Behnke, Die Abbildungen der Kreiskörper, Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. 7 (1929) und H. Cartan, l. c. S. 2.

In unserm Falle ist zudem $z' = g(z)$ ein Automorphismus der in $z = 0$ und ∞ punktierten analytischen Ebene $w = 0$, daher $g(z) = a \cdot z$ oder $= \frac{a}{z}$.

Aus dieser Form folgt die Stetigkeit der Abbildung S auf dem Rand für jedes endliche $z \neq 0$.

Ist $|w| = R(|z|)$ der Rand von $\mathfrak{R}$, so folgt für

$$g(z) = a \cdot z: \quad (1) \quad R(|z|) \cdot |f(z)| = R(|a \cdot z|)$$

$$\text{bzw. } g(z) = \frac{a}{z}: \quad (2) \quad R(|z|) \cdot |f(z)| = R\left(\left|\frac{a}{z}\right|\right),$$

in jedem Falle ist also $|f(z)|$ eine Funktion von $|z|$ allein, daher:

$$f(z) \equiv b \cdot z^d,$$

worin d wegen der Eindeutigkeit in $\mathfrak{R}$ ganzzahlig ist.

Mittels Reinhardtscher Drehungen normieren wir jeden Automorphismus

$$S \quad \begin{matrix} w' = b \cdot w \cdot z^d, \\ z' = a \cdot z \quad \text{oder} \quad \frac{a}{z}, \end{matrix}$$

so daß a, b positiv sind. Alle normierten Automorphismen bilden dann wieder eine Gruppe.

Sofort folgt der

Hilfssatz 2: *Die Gruppe der normierten Automorphismen von $\mathfrak{R}$ ist isomorph zur Gruppe der dabei auftretenden Automorphismen*

$$z' = g(z) \quad \textit{der Ebene } w = 0.$$

In der Tat: Für die Automorphismen:

$$T_1 \quad \begin{matrix} w' = w \cdot f_1(z) \\ z' = g(z) \end{matrix}, \qquad T_2 \quad \begin{matrix} w' = w \cdot f_2(z) \\ z' = g(z) \end{matrix},$$

ist

$$T_1 T_2^{-1} \quad \begin{matrix} w' = w \cdot f_3(z), \\ z' = z, \end{matrix}$$

$T_1 T_2^{-1}$ also eine Drehung $w' = w \cdot e^{i\vartheta}$, $z' = z$ und wegen der Normierung die Identität, d. h. $T_1 = T_2$.

Satz 19: *Kein uneigentlicher Reinhardtscher Körper der Klasse* M 3, *der die Achse $w = 0$ ganz bis auf isolierte Punkte enthält, gestattet eine zusammenhängende kontinuierliche Automorphismengruppe, abgesehen von der Gruppe der Reinhardtschen Drehungen, m. a. W.: Die Gruppe der normierten Automorphismen eines solchen Reinhardtschen Körpers ist immer (eigentlich) diskontinuierlich.*

Beweis: Gäbe es nämlich eine eingliedrige kontinuierliche Untergruppe, die nicht nur Reinhardtsche Drehungen enthielte, so wäre auch nach dem eben bewiesenen Hilfssatz 2 die Gruppe der dabei auftretenden normierten Automorphismen der Achse kontinuierlich und (reell) eingliedrig. Also:

$$z' = e^t z, \quad -\infty < t < \infty.$$

Wir haben dann:

$$T(t)\quad \begin{matrix} w' = w\,b(t)\,z^d & d \text{ ganz rational,} \\ z' = e^t z & b \text{ positiv} \end{matrix}$$

und

$$T^n\quad \begin{matrix} w' = w\,b^n e^{\frac{n(n-1)}{2}d\cdot t}\cdot z^{n\,d}, \\ z' = e^{n\,t} z. \end{matrix}$$

Somit gilt:

$$R(|z|)\cdot b^n e^{\frac{n(n-1)}{2}d\cdot t}\cdot |z|^{n\cdot d} = R(e^{n\,t}|z|)$$

oder für $|z| = 1$:

$$R(1)\cdot b^n e^{\frac{n(n-1)}{2}d\cdot t} = R(e^{n\,t}) \quad \text{und} \quad R(1)\,b = R(e^t).$$

Eliminieren wir b und schreiben: $\log R(e^t) = \varphi(t)$, $\log R(1) = \gamma$, so erhalten wir:

$$(1)\qquad \varphi(n\,t) = n\,\varphi(t) + d\frac{n(n-1)}{2}t - (n-1)\gamma, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots.$$

Wir haben unsern Satz bewiesen, wenn wir gezeigt haben, daß diese Funktionalgleichungen keine stetige Lösung $\varphi(t)$ gestatten.

Setzen wir $t = \frac{v}{n}$, so erhalten wir:

$$\varphi\left(\frac{v}{n}\right) = \frac{1}{n}\,\varphi(v) + \frac{d}{2}\left(\frac{1}{n} - 1\right)v - \left(\frac{1}{n} - 1\right)\gamma;$$

$v = m\,t'$ eingesetzt, ergibt schließlich unter Benutzung von (1) die Beziehung:

$$(2)\qquad \varphi\left(\frac{m}{n}\,t'\right) = \frac{m}{n}\,\varphi(t') + n\,\frac{d}{2}\cdot\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n} - 1\right)t' + \gamma\left(1 - \frac{m}{n}\right).$$

Sei t' fest und ungleich Null, μ irrational und $\frac{m_k}{n_k} \to \mu$; bei einer stetigen Lösung $\varphi(t)$ wäre $\varphi\left(\frac{m_k}{n_k}t'\right) \to \varphi(\mu\,t')$, während die rechten Seiten in (2) keinen Grenzwert hätten, solange $d \neq 0$ ist. Für $d = 0$ aber liefert (2) lediglich als stetige Lösung: $\varphi(\mu) = \mu\cdot\varphi(1) + \gamma(1-\mu)$. Sie führt zum Körper $|w| \leqq c\,|z|^k$, der nicht zur Klasse M 3 gehört. Damit ist der Satz bewiesen.

Bestimmen wir jetzt noch die mögliche diskontinuierliche Gruppe! Für einen normierten Automorphismus der Form:

$$w' = b\,w\,z^d,$$
$$z' = \frac{c}{z}$$

ist:

$$S_0^2\quad \begin{matrix} w' = b^2\,w\,c^d \\ z' = z \end{matrix}, \quad \text{und daher} \quad S_0^2 = E,\ b^2 = c^{-d},\ c > 0.$$

Unter Benutzung von Hilfssatz 2 erkennen wir:

Die Gruppe der normierten Automorphismen ist, wenn nicht allein aus der Identität oder aus E, S_0 bestehend:

1. Die unendliche zyklische Gruppe $\mathfrak{G}_\infty$, welche durch

$$T \quad \begin{matrix} w' = b\,w\,z^d, \\ z' = a\,z, \end{matrix} \qquad d \text{ ganz rational, } \neq 0,\ a,\ b \text{ positive Konstanten,}$$

erzeugt wird, oder

2. die durch

$$T \quad \begin{matrix} w' = b\,w\,z^d, \\ z' = a\,z \end{matrix} \quad \text{und} \quad S_0 \quad \begin{matrix} w' = c^{-\frac{d}{2}} \cdot w\,z^d, \\ z' = \frac{c}{z} \end{matrix}$$

erzeugte Gruppe $\mathfrak{G}^*_\infty$.

Weil für

$$T_0 \quad \begin{matrix} w' = b \cdot w \cdot z, \\ z' = a \cdot z \end{matrix} \quad \text{und} \quad T_1 \quad \begin{matrix} w' = B \cdot w\,z^d, \\ z' = A \cdot z \end{matrix}$$

mit $a^d = A$, $b^d a^{\frac{d(d-1)}{2}} = B$ die Beziehung $T_1 = T_0^d$ besteht, so ist $\mathfrak{G}_\infty$ mit einem $d \neq 1$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}_\infty$ mit $d = 1$ bei geeigneter Wahl der Konstanten a und b.

Schließlich muß noch (für $d = 1$, wie auch übrigens für jedes $d > 0$) $a < 1$ sein, da $a = 1$ die Identität ergibt und für $a > 1$, wie man aus

$$T^n \quad \begin{matrix} w' = w \cdot b^n z^n a^{\frac{n(n-1)}{2}}, \\ z' = a^n z \end{matrix}$$

ersieht, bei festem w_0, z_0 die Beziehungen bestehen:

$$\lim_{n \to +\infty} |w'| = \lim_{n \to +\infty} |z'| = \infty, \quad \lim_{n \to -\infty} |w'| = \infty, \quad \lim_{n \to -\infty} |z'| = 0.$$

Dann würde aber, da der Körper die w-Achse nicht enthält, $\mathfrak{K}$ der offene Raum mit $z \neq 0$ sein. Also $a < 1$.

So haben wir bewiesen

Satz 20: *Die Gruppe $\mathfrak{G}$ der normierten Automorphismen eines beliebigen uneigentlichen Reinhardtschen Körpers der Klasse* M 3, *der die Achse $w = 0$ (bis auf isolierte Punkte) ganz enthält, ist eine Untergruppe der (eigentlich) diskontinuierlichen unendlichen Gruppe $\mathfrak{G}^*_\infty$, welche durch*

$$T_0 \quad \begin{matrix} w' = b \cdot w \cdot z, \\ z' = a \cdot z \end{matrix} \quad \textit{und} \quad S_0 \quad \begin{matrix} w' = c^{-\frac{d}{2}} w \cdot z^d, \\ z' = \frac{c}{z} \end{matrix}$$

mit a, b, $c > 0$: $a < 1$, erzeugt wird.

(Die Gruppe aller Automorphismen von $\mathfrak{K}$ wird durch $\mathfrak{G}$ und die Reinhardtschen Drehungen erzeugt.)

Welches sind nun alle Körper, welche die durch T_0 und S_0 erzeugte Gruppe oder eine ihrer Untergruppen gestatten?

Da $S_0^2 = E$ ist, haben die zu S_0 gehörigen Körper lediglich eine gewisse Symmetrie, sind aber sonst gänzlich willkürlich und uninteressant. Gestattet ein Körper die von T_0 erzeugte unendliche zyklische Gruppe $\mathfrak{G}_\infty$ und ist sein Rand überall zweimal differentiierbar, so erhalten wir nach einem von P. Thullen zum ersten Male angewandten Verfahren[17]) für $\log R(e^x) = \varphi(x)$ die Differentialgleichung: $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \gamma$, oder $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, d. h. den Körper:

$$|w| \leqq e^{\alpha(\log|z|)^2} \cdot |z|^\beta \cdot c \equiv e^{\varphi(|z|)}, \text{ dabei } \alpha < 0,\ \beta \text{ reell},\ c > 0.$$

Seine normierte Automorphismengruppe wird erzeugt von:

$$T_0 \quad \begin{matrix} w' = b \cdot w \cdot z, \\ z' = a \cdot z, \end{matrix} \qquad a = e^{\frac{1}{2\alpha}}, \quad b = e^{\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{1}{2}+\beta\right)},$$

und

$$S_0 \quad \begin{matrix} w' = c^{-\frac{1}{2}} \cdot w z, \\ z' = \frac{c}{z}, \end{matrix} \qquad c = e^{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}-\beta\right)}.$$

Um *alle* Reinhardtschen Regularitätsbereiche zu konstruieren, welche die Transformation T_0 oder T_0^d (d ganz rational) und damit auch die von T_0 bzw. T_0^d erzeugte unendliche zyklische Gruppe gestatten, wählen wir in der ω, ζ-Ebene einen beliebigen Punkt P_1 auf der Kurve

$$\omega = \alpha \cdot \zeta^2 + \beta\,\zeta + \gamma \equiv \varphi(\zeta); \qquad \alpha < 0.$$

P_2 sei der durch T_0 (bzw. T_0^d) erzeugte Bildpunkt von P_1. Wir ziehen durch P_1 und P_2 Parallelen $\zeta = \zeta_{P_1}$, $\zeta = \zeta_{P_2}$ und schließen den von ihnen begrenzten Streifen in der Richtung der positiven ω durch eine in dieser Richtung konvexe Kurve $\mathfrak{C}$ ab, welche P_1 und P_2 verbindet und ganz innerhalb des (abgeschlossenen) Dreiecks verbleibt, welches von der Sehne $P_1 P_2$ und den beiden Tangenten in P_1 und P_2 an die Kurve $\omega = \varphi(\zeta)$ gebildet wird. Der von den beiden Parallelen und dieser sonst willkürlichen konvexen Kurve $\mathfrak{C}$ begrenzte konvexe Bereich ist die Projektion eines Reinhardtschen Regularitätsbereiches, den wir auch noch durch Achsenpunkte $w = 0$ soweit als möglich ergänzen wollen. Aus dem so entstehenden Bereich $\mathfrak{D}$ erzeugen nun T_0 (bzw. T_0^d) und deren positive und negative Potenzen durch Aneinanderfügung der Bilder einen gesamten Bereich $\mathfrak{B}$, der

1. ein uneigentlicher Reinhardtscher Regularitätsbereich der Klasse M 3 ist und die Achse $w = 0$ ganz bis auf die isolierten Punkte $z = 0, \infty$ auf ihr enthält,
2. die unendliche zyklische Gruppe normierter Automorphismen, welche von T_0 bzw. T_0^d erzeugt wird, gestattet, und für den
3. $\mathfrak{D}$ Diskontinuitätsbereich dieser Gruppe von zu ihm gehörigen Automorphismen ist.

Aus dem Konstruktionsverfahren ersehen wir zugleich, daß wir so *alle* Körper der verlangten Art gewonnen haben.

---

[17]) P. Thullen, Die Invarianz des Mittelpunktes von Kreiskörpern, Math. Annalen 104 (1931).

(Eingegangen am 2. 6. 1935.)

Neue Integraldarstellungen aus der Theorie der Whittakerschen und Hankelschen Funktionen.

Von

C. S. Meijer in Groningen (Niederlande).

Einleitung.

Es bezeichnen $H_\nu^{(1)}(z)$ und $H_\nu^{(2)}(z)$ die beiden Hankelschen Funktionen. Es sei ferner $W_{k,m}(z)$ die Whittakersche Funktion[1]) und

$$ {}_pF_q(a_1, \ldots, a_p;\ r_1, \ldots, r_q;\ z) $$

die verallgemeinerte hypergeometrische Funktion[2]). Weiter setze ich noch, wie üblich,

$$ K_\nu(z) = \tfrac{1}{2}\pi i e^{\frac{\nu\pi i}{2}} H_\nu^{(1)}(z e^{\frac{\pi i}{2}}). $$

Das Ziel der vorliegenden Abhandlung ist für die Whittakersche Funktion, für gewisse Produkte von Whittakerschen Funktionen und gewisse Produkte von Hankelschen Funktionen neue Integraldarstellungen abzuleiten[3]). Ich werde zunächst (in § 1) die zwei folgenden Sätze beweisen.

---

[1]) Ist $|\arg z| < \pi$ und $\frac{1}{2} + k - m \neq 0, -1, -2, \ldots$, so wird die Funktion $W_{k,m}(z)$ von Herrn Whittaker definiert durch die Integraldarstellung

$$ W_{k,m}(z) = -\frac{1}{2\pi i}\Gamma\left(\frac{1}{2}+k-m\right) e^{-\frac{z}{2}} z^k \int_{\infty}^{(0+)} e^{-t}(-t)^{-\frac{1}{2}-k+m}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{-\frac{1}{2}+k+m} dt $$

(der Punkt $t = -z$ liegt außerhalb des Integrationsweges). Ist $\frac{1}{2} - k - m = 0, -1, -2, \ldots$, so kann $W_{k,m}(z)$ durch Grenzübergang definiert werden. Für $|\arg z| \geqq \pi$ kann man $W_{k,m}(z)$ durch analytische Fortsetzung definieren. Man vgl. Whittaker and Watson, [17], chapter XVI; siehe auch Meijer, [9]. (Die Zahlen zwischen eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der vorliegenden Arbeit).

[2]) Die Bezeichnung bedeutet folgendes: Es ist z. B.

$$ {}_2F_1(a, b; c; z) = 1 + \frac{a\cdot b}{1\cdot c} z + \frac{a(a+1)\cdot b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)} z^2 + \cdots $$

und

$$ {}_1F_2(a; b, c; z) = 1 + \frac{a}{1\cdot b\cdot c} z + \frac{a(a+1)}{1\cdot 2\cdot b(b+1)\cdot c(c+1)} z^2 + \cdots. $$

${}_2F_1(a, b; c; z)$ ist daher die gewöhnliche hypergeometrische Funktion. Man vgl. ferner Bailey, [2].

[3]) Verwandte Integralformeln kommen vor in meinen Arbeiten [9], [10], [11] und [12].

Satz 1. *Es sei*

$$n \text{ ganz} \geqq 2,$$
$$z \neq 0, \quad -\tfrac{1}{2}\pi < \arg z < \tfrac{1}{2}\pi,$$
$$r_j \neq 0, -1, -2, \ldots (j = 1, \ldots, n-2)^4),$$
$$a_j \neq 0, -1, -2, \ldots (j = 1, \ldots, n+1),$$

$a_j - a_h$ *nicht ganz* $(j = 1, \ldots, n+1; h = 1, \ldots, n+1; j \neq h)$.

Behauptung[5]*:*

$$(1) \quad \sum_{h=1}^{n+1} \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq h}}^{n+1} \Gamma(a_j - a_h)}{\Gamma(1-a_h) \prod_{j=1}^{n-2} \Gamma(r_j - a_h)} z^{2a_h} \times {}_{n-1}F_n(a_h, 1+a_h-r_1, \ldots, 1+a_h-r_{n-2}; 1+a_h-a_1, \overset{*}{\ldots}, 1+a_h-a_{n-1}; z^2)$$
$$= -\frac{2 z^{\alpha+\beta} \prod_{j=1}^{n+1} \Gamma(a_j)}{\pi i \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) \prod_{j=1}^{n-2} \Gamma(r_j)} \times \int_{\infty}^{(1+)} v^{\alpha+\beta-1} K_{\alpha-\beta}(2zv)\, {}_{n+1}F_n(a_1, \ldots, a_{n+1}; r_1, \ldots, r_{n-2}, \alpha, \beta; v^2)\, dv.$$

Hierin sind α *und* β *beliebige Zahlen mit* $\alpha \neq 0, -1, -2, \ldots$ *und* $\beta \neq 0, -1, -2, \ldots$.

Ein Spezialfall von Satz 1 ist

Satz 2. *Die Funktionen* $W_{k,m}(z)$, $W_{k,m}(z)\, W_{-k,m}(z)$ *und* $K_u(z)\, K_u(z)$ *besitzen die folgenden Integraldarstellungen*

$$(2) \quad W_{k,m}(z) = -\frac{e^{\frac{z}{2}} z^{\alpha+\beta-k} \Gamma(\frac{1}{2}+k+m)\, \Gamma(\frac{1}{2}+k-m)}{\pi i\, 2^{\alpha+\beta-2}\, \Gamma(\alpha)\, \Gamma(\beta)} \int_{\infty}^{(1+)} v^{\alpha+\beta-1} K_{\alpha-\beta}(zv) \times {}_4F_3(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}k+\tfrac{1}{2}m, \tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}k+\tfrac{1}{2}m, \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}k-\tfrac{1}{2}m, \tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}k-\tfrac{1}{2}m; \tfrac{1}{2}, \alpha, \beta; v^2)\, dv,$$

$$(3) \quad W_{k,m}(z) = -\frac{e^{\frac{z}{2}} z^{\alpha+\beta-k-1} \Gamma(\frac{3}{2}+k+m)\, \Gamma(\frac{3}{2}+k-m)}{\pi i\, 2^{\alpha+\beta-2}\, \Gamma(\alpha)\, \Gamma(\beta)} \int_{\infty}^{(1+)} v^{\alpha+\beta-1} K_{\alpha-\beta}(zv) \times {}_4F_3(\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}k+\tfrac{1}{2}m, \tfrac{5}{4}+\tfrac{1}{2}k+\tfrac{1}{2}m, \tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}k-\tfrac{1}{2}m, \tfrac{5}{4}+\tfrac{1}{2}k-\tfrac{1}{2}m; \tfrac{3}{2}, \alpha, \beta; v^2)\, dv,$$

$$(4) \quad W_{k,m}(z)\, W_{-k,m}(z) = -\frac{z^{\alpha+\beta+2k} \Gamma(\frac{1}{2}-k+m)\, \Gamma(\frac{1}{2}-k-m)}{\pi i\, 2^{\alpha+\beta-1}\, \Gamma(\alpha)\, \Gamma(\beta)} \int_{\infty}^{(1+)} v^{\alpha+\beta-1} K_{\alpha-\beta}(zv) \times {}_4F_3(\tfrac{1}{2}-k+m, \tfrac{1}{2}-k-m, \tfrac{1}{2}-k, 1-k; 1-2k, \alpha, \beta; v^2)\, dv,$$

[4]) Die Zahlen r_j kommen nicht vor, wenn $n = 2$ ist.

[5]) Ein leeres Produkt wird gleich 1 gesetzt. Der Stern bedeutet, daß die Zahl $1 + a_h - a_h$ in der Reihe $1 + a_h - a_1, \ldots, 1 + a_h - a_{n+1}$ nicht vorkommt.

$$(5)\quad K_\nu(z)K_\mu(z) = \frac{\pi i z^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\cos\left(\frac{\nu+\mu}{2}\pi\right)\cos\left(\frac{\nu-\mu}{2}\pi\right)} \int_\infty^{(1+)} v^{\alpha+\beta-1} K_{\alpha-\beta}(2zv)$$
$$\times {}_4F_3\left(\frac{1-\nu+\mu}{2}, \frac{1+\nu-\mu}{2}, \frac{1-\nu+\mu}{2}, \frac{1-\nu-\mu}{2}; \frac{1}{2}, \alpha, \beta; v^2\right) dv,$$

$$(6)\quad K_\nu(z)K_\mu(z) = \frac{\pi i (\nu^2-\mu^2) z^{\alpha+\beta-2}}{2\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\sin\left(\frac{\nu+\mu}{2}\pi\right)\sin\left(\frac{\nu-\mu}{2}\pi\right)} \int_\infty^{(1+)} v^{\alpha+\beta-1} K_{\alpha-\beta}(2zv)$$
$$\times {}_4F_3\left(\frac{2-\nu+\mu}{2}, \frac{2+\nu-\mu}{2}, \frac{2-\nu+\mu}{2}, \frac{2-\nu-\mu}{2}; \frac{3}{2}, \alpha, \beta; v^2\right) dv.$$

In diesen Beziehungen wird $z \neq 0$ *und* $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ *vorausgesetzt. Es wird ferner angenommen*

$$k \pm m \neq -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2}, -\tfrac{5}{2}, \ldots \text{ in (2)},$$
$$k \pm m \neq -\tfrac{3}{2}, -\tfrac{5}{2}, -\tfrac{7}{2}, \ldots \text{ in (3)},$$
$$k \pm m \neq \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}, \ldots\ldots\ldots \text{ in (4)}^6),$$
$$\nu \pm \mu \neq \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \text{ in (5)},$$
$$\nu \pm \mu \neq \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots \text{ in (6)}^7).$$

α *und* β *sind beliebige Zahlen mit* $\alpha \neq 0, -1, -2, \ldots$ *und* $\beta \neq 0, -1, -2, \ldots$.

§ 1.

Beweis der Sätze 1 und 2.

Beweis von Satz 1. Ich betrachte zunächst die Funktion

$$(7)\quad \Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{h=1}^{n+1} \frac{\Gamma(a_h)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq h}}^{n+1}\Gamma(a_j - a_h)}{\prod_{j=1}^{n-2}\Gamma(r_j - a_h)} z^{2a_h}$$
$$\times {}_{n-1}F_n(a_h, 1+a_h-r_1, \ldots, 1+a_h-r_{n-2};$$
$$1+a_h-a_1, \ldots, 1+a_h-a_{n+1}; -z^2).$$

---

[6]) Man erhält noch eine andere Integraldarstellung für $W_{k,m}(z)W_{-k,m}(z)$, wenn man in (4) k durch $-k$ ersetzt.

Die Funktion ${}_4F_3(\frac{1}{2}-k+m, \frac{1}{2}-k-m, \frac{1}{2}-k, 1-k; 1-2k, \alpha, \beta; v^2)$ hat auch einen Sinn, falls $k = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ ist; siehe die Fußnote zu Satz 6 meiner Arbeit [10].

[7]) Formel (6) gilt auch, falls $\mu = \pm\nu$ ist. In diesem Fall aber muß man

$$\frac{\nu^2-\mu^2}{\sin\left(\frac{\nu+\mu}{2}\pi\right)\sin\left(\frac{\nu-\mu}{2}\pi\right)} \text{ durch } \frac{4\nu}{\pi\sin\nu\pi}$$

ersetzen.

Diese Funktion besitzt, wie ich früher[8]) bewiesen habe, für $-\pi < \arg z < \pi$ die Integraldarstellung

$$(8)\quad \Psi(z) = \frac{2\prod_{j=1}^{n+1}\Gamma(a_j)}{\pi i\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\prod_{j=1}^{n-2}\Gamma(r_j)} \int_0^{\infty e^{i\tau}} u^{\alpha+\beta-1} K_{\alpha-\beta}(2u) \times {}_{n+1}F_n\left(a_1, \ldots, a_{n+1}; r_1, \ldots, r_{n-2}, \alpha, \beta; -\frac{u^2}{z^2}\right) du.$$

Hierin ist τ ein Punkt des Intervalles

$$(9)\quad \operatorname{Max}\left(-\tfrac{1}{2}\pi, -\tfrac{1}{2}\pi + \arg z\right) < \tau < \operatorname{Min}\left(\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi + \arg z\right)$$

und α und β sind beliebige Zahlen mit $\Re(\alpha) > 0$, $\Re(\beta) > 0$.

Nun hat man[9]) für große Werte von $|w|$

$$(10)\quad K_\nu(w) = O(e^{-w})$$

und

$$(11)\quad {}_{n+1}F_n(a_1, \ldots, a_{n+1}; r_1, \ldots, r_n; w) = O(|w|^\lambda)$$

(wo λ nicht von w abhängig ist); für kleine Werte von $|w|$ aber gilt[10])

$$(12)\quad K_0(w) = O(\log|w|)$$

und, falls $\nu \neq 0$ ist,

$$(13)\quad K_\nu(w) = O(|w|^{-|\Re(\nu)|}).$$

Ist $-\frac{1}{2}\pi < \mu < \arg z < \nu < \frac{1}{2}\pi$, $\Re(\alpha) > 0$ und $\Re(\beta) > 0$, dann folgt aus (10), (11), (12) und (13) (ich setze $u = zv$)

$$-z^{\alpha+\beta}\int_\infty^{(1+)} v^{\alpha+\beta-1} K_{\alpha-\beta}(2zv) \times {}_{n+1}F_n(a_1, \ldots, a_{n+1}; r_1, \ldots, r_{n-2}, \alpha, \beta; v^2)\, dv$$

$$= -\int_{\infty e^{i\arg z}}^{(z+)} u^{\alpha+\beta-1} K_{\alpha-\beta}(2u) \times {}_{n+1}F_n\left(a_1, \ldots, a_{n+1}; r_1, \ldots, r_{n-2}, \alpha, \beta; \frac{u^2}{z^2}\right) du$$

$$= \left(\int_0^{\infty e^{i\nu}} - \int_0^{\infty e^{i\mu}}\right) u^{\alpha+\beta-1} K_{\alpha-\beta}(2u) \times {}_{n+1}F_n\left(a_1, \ldots, a_{n+1}; r_1, \ldots, r_{n-2}, \alpha, \beta; \frac{u^2}{z^2}\right) du.$$

Hieraus und aus (8) und (9) geht hervor, daß die rechte Seite von (1) gleich $\Psi(ze^{\frac{\pi i}{2}}) - \Psi(ze^{-\frac{\pi i}{2}})$ ist. Aus (7) ergibt sich aber, daß auch die

[8]) Meijer, [10], Satz 1.

[9]) Für (10) vgl. man Watson, [16], S. 202; für (11) Goursat, [7], S. 280.

[10]) Watson, [16], S. 77, Formel (2), S. 78, Formel (6) und S. 80, Formeln (14) und (15).

linke Seite von (1) gleich $\Psi(ze^{\frac{\pi i}{2}}) - \Psi(ze^{-\frac{\pi i}{2}})$ ist, so daß Formel (1) bewiesen ist für den Fall, daß $\Re(\alpha)$ und $\Re(\beta) > 0$ sind. Durch analytische Fortsetzung findet man, daß (1) gilt für alle Werte von α und β mit $\alpha \neq 0, -1, -2, \ldots$ und $\beta \neq 0, -1, -2, \ldots$.

Beweis von Satz 2. Ist $2m$ nicht ganz, so gilt bekanntlich[11])

$$(14)\quad W_{k,m}(z) = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)} e^{-\frac{z}{2}} z^{m+\frac{1}{2}} {}_1F_1(\tfrac{1}{2}-k+m;\, 1+2m;\, z) + \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)} e^{-\frac{z}{2}} z^{-m+\frac{1}{2}} {}_1F_1(\tfrac{1}{2}-k-m;\, 1-2m;\, z).$$

Weiter hat man[12])

$$(15)\quad {}_1F_1(a;\, b;\, z) = e^z\, {}_1F_1(b-a;\, b;\, -z)$$

und

$$(16)\quad {}_1F_1(\alpha;\, \beta;\, -z) = {}_2F_3(\tfrac{1}{2}\alpha,\, \tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2};\, \tfrac{1}{2},\, \tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{1}{2},\, \tfrac{1}{2}\beta;\, \tfrac{1}{4}z^2) - \frac{\alpha z}{\beta}\, {}_2F_3(\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2},\, \tfrac{1}{2}\alpha+1;\, \tfrac{3}{2},\, \tfrac{1}{2}\beta+1,\, \tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{1}{2};\, \tfrac{1}{4}z^2).$$

Aus (14) und (15) ergibt sich

$$(17)\quad W_{-k,m}(z) = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}+k-m)} e^{\frac{z}{2}} z^{m+\frac{1}{2}} {}_1F_1(\tfrac{1}{2}-k+m;\, 1+2m;\, -z) + \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(\frac{1}{2}+k+m)} e^{\frac{z}{2}} z^{-m+\frac{1}{2}} {}_1F_1(\tfrac{1}{2}-k-m;\, 1-2m;\, -z),$$

und aus (14), (15) und (16)

$$(18)\quad W_{k,m}(z) = f_{k,m}(z) + f_{k,-m}(z),$$

worin

$$(19)\quad f_{k,m}(z) = \frac{\Gamma(-2m)\, e^{\frac{z}{2}} z^{m+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)} {}_2F_3(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}k+\tfrac{1}{2}m,\, \tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}k+\tfrac{1}{2}m;\, \tfrac{1}{2},\, 1+m,\, \tfrac{1}{2}+m;\, \tfrac{1}{4}z^2) - \frac{\Gamma(-2m-1)\, e^{\frac{z}{2}} z^{m+\frac{3}{2}}}{\Gamma(-\frac{1}{2}-k-m)} {}_2F_3(\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}k+\tfrac{1}{2}m,\, \tfrac{5}{4}+\tfrac{1}{2}k+\tfrac{1}{2}m;\, \tfrac{3}{2},\, \tfrac{3}{2}+m,\, 1+m;\, \tfrac{1}{4}z^2).$$

Nun ist[13])

$${}_1F_1(a;\, b;\, z) \times {}_1F_1(a;\, b;\, -z) = {}_2F_3(a,\, b-a;\, b,\, \tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2},\, \tfrac{1}{2}b;\, \tfrac{1}{4}z^2)$$

und

$$\begin{aligned} &{}_1F_1(a;\, b;\, z) \times {}_1F_1(a-b+1;\, 2-b;\, -z) \\ &= {}_2F_3(a-\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2},\, \tfrac{1}{2}b-a+\tfrac{1}{2};\, \tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}b,\, \tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2},\, \tfrac{1}{2};\, \tfrac{1}{4}z^2) \\ &+ \frac{(2a-b)(1-b)}{b(2-b)}\, z\, {}_2F_3(a-\tfrac{1}{2}b+1,\, \tfrac{1}{2}b-a+1;\, 2-\tfrac{1}{2}b,\, \tfrac{1}{2}b+1,\, \tfrac{3}{2};\, \tfrac{1}{4}z^2). \end{aligned}$$

---

[11]) Whittaker and Watson, [17], § 16. 41 und § 16. 1.

[12]) Für (15) vgl. man Watson, [16], S. 102; Formel (16) ist evident.

[13]) Bailey, [1], S. 246.

Hieraus und aus (14) und (17) folgt[14])

$$(20)\qquad W_{k,m}(z)\,W_{-k,m}(z)$$

$$= \frac{\Gamma^2(-2m)\,z^{1+2m}}{\Gamma(\frac{1}{2}+k-m)\,\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)}\;{}_2F_3(\tfrac{1}{2}-k+m,\tfrac{1}{2}+k+m;\ 1+2m,1+m,\tfrac{1}{2}+m;\ \tfrac{1}{4}z^2)$$

$$+\frac{\Gamma^2(2m)\,z^{1-2m}}{\Gamma(\frac{1}{2}+k+m)\,\Gamma(\frac{1}{2}-k+m)}\;{}_2F_3(\tfrac{1}{2}-k-m,\tfrac{1}{2}+k-m;\ 1-2m,1-m,\tfrac{1}{2}-m;\ \tfrac{1}{4}z^2)$$

$$+\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(-m)\,z}{2\,\Gamma(\frac{1}{2}+k)\,\Gamma(\frac{1}{2}-k)}\;{}_2F_3(\tfrac{1}{2}-k,\tfrac{1}{2}+k;\quad 1-m,1+m,\tfrac{1}{2};\quad \tfrac{1}{4}z^2)$$

$$-\frac{\Gamma(m-\frac{1}{2})\,\Gamma(-m-\frac{1}{2})\,z^2}{2\,\Gamma(k)\,\Gamma(-k)}\;{}_2F_3(1-k,1+k;\quad \tfrac{3}{2}-m,\tfrac{3}{2}+m,\tfrac{3}{2};\quad \tfrac{1}{4}z^2).$$

Für die Funktion $K_\nu(z)$ gilt bekanntlich[15]), falls ν nicht ganz ist,

$$(21)\qquad K_\nu(z) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\{\mathfrak{I}_{-\nu}(z) - \mathfrak{I}_\nu(z)\}.$$

Ferner hat man[16])

$$(22)\quad \mathfrak{I}_\nu(z)\,\mathfrak{I}_\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)\,\Gamma(1+\mu)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+\mu}$$
$$\times\,{}_2F_3\left(\frac{1+\nu+\mu}{2},\frac{2+\nu+\mu}{2};\ 1+\nu,1+\mu,1+\nu+\mu;\ z^2\right).$$

Aus (21) und (22) geht hervor, falls ν und μ nicht ganz sind,

$$(23)\qquad K_\nu(z)\,K_\mu(z) = g_{\nu,\mu}(z) + g_{\nu,-\mu}(z) + g_{-\nu,\mu}(z) + g_{-\nu,-\mu}(z),$$

wo

$$(24)\qquad g_{\nu,\mu}(z) = \frac{\Gamma(-\nu)\,\Gamma(-\mu)}{4}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+\mu}$$
$$\times\,{}_2F_3\left(\frac{1+\nu+\mu}{2},\frac{2+\nu+\mu}{2};\ 1+\nu,1+\mu,1+\nu+\mu;\ z^2\right).$$

Setzt man nun die linke Seite von (1) zur Abkürzung gleich

$$\Phi_n(a_1,\ldots,a_{n+1};\quad r_1,\ldots,r_{n-2};\quad z),$$

dann ergibt sich aus (18) und (19)

$$W_{k,m}(z) = \frac{e^{\frac{z}{2}}\,z^{-k}\,2^{2k}}{\sqrt{\pi}}$$
$$\times\,\Phi_3(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}k+\tfrac{1}{2}m,\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}k+\tfrac{1}{2}m,\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}k-\tfrac{1}{2}m,\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}k-\tfrac{1}{2}m;\ \tfrac{1}{2};\ \tfrac{1}{2}z)$$

---

[14]) Ich benutze die Beziehungen

$$\Gamma(t)\,\Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin t\pi}\quad\text{und}\quad \sqrt{\pi}\;\Gamma(2t) = 2^{2t-1}\,\Gamma(t)\,\Gamma(t+\tfrac{1}{2}).$$

[15]) Watson, [16], S. 78. [$\mathfrak{I}_\nu(z) = e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}\,J_\nu(z\,e^{\frac{\pi i}{2}})$, wo $J_\nu(z)$ die gewöhnliche Besselsche Funktion bezeichnet].

[16]) Watson, [16], S. 147, Formel (5).

und

$$W_{k,m}(z) = \frac{e^{\frac{z}{2}} z^{-k-1} 2^{2k+1}}{\sqrt{\pi}} \times \Phi_3\left(\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}k+\tfrac{1}{2}m, \tfrac{5}{4}+\tfrac{1}{2}k+\tfrac{1}{2}m, \tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}k-\tfrac{1}{2}m, \tfrac{5}{4}+\tfrac{1}{2}k-\tfrac{1}{2}m;\ \tfrac{3}{2};\ \tfrac{1}{2}z\right);$$

ebenso aus (20)

$$W_{k,m}(z)\ W_{-k,m}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \times \Phi_3\left(\tfrac{1}{2}-k+m, \tfrac{1}{2}-k-m, \tfrac{1}{2}-k, 1-k;\ 1-2k;\ \tfrac{1}{2}z\right)$$

und schließlich aus (23) und (24)

$$K_\nu(z)\ K_\mu(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2z}\,\Phi_3\left(\frac{1+\nu+\mu}{2}, \frac{1+\nu-\mu}{2}, \frac{1-\nu-\mu}{2}, \frac{1-\nu+\mu}{2};\ \frac{1}{2};\ z\right)$$

und

$$K_\nu(z)\ K_\mu(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2z^2}\,\Phi_3\left(\frac{2+\nu+\mu}{2}, \frac{2+\nu-\mu}{2}, \frac{2-\nu+\mu}{2}, \frac{2-\nu-\mu}{2};\ \frac{3}{2};\ z\right),$$

so daß Satz 2 sofort aus Satz 1 folgt[17]).

§ 2.

Über die Funktionen $P_n^m(v)$ und $S_n^m(v)$; Hilfssätze.

Für die zugeordnete Legendresche Funktion erster Art $P_n^m(v)$ gilt bekanntlich, falls $m \neq 1, 2, 3, \ldots$ ist[18]),

$$(26)\quad P_n^m(v) = \frac{1}{\Gamma(1-m)}\left(\frac{v+1}{v-1}\right)^{\frac{m}{2}} F\left(-n,\ 1+n;\ 1-m;\ \frac{1-v}{2}\right),$$

und, falls $m \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ist,

$$(27)\quad P_n^m(v) = \frac{\Gamma(-m)}{\Gamma(1-m+n)\,\Gamma(-m-n)}\left(\frac{v+1}{v-1}\right)^{\frac{m}{2}} F\left(-n, 1+n; 1+m; \frac{1-v}{2}\right) + \frac{e^{\mp m\pi i}\,\Gamma(m)}{\Gamma(-n)\,\Gamma(1+n)}\left(\frac{v-1}{v+1}\right)^{\frac{m}{2}} F\left(-n, 1+n; 1-m; \frac{1+v}{2}\right).$$

In diesen beiden Beziehungen wird $v \neq \pm 1$, $-\pi \leqq \arg(v+1) \leqq \pi$ und $-\pi \leqq \arg(v-1) \leqq \pi$ vorausgesetzt[19]); in (27) gilt das obere oder das untere Zeichen, je nachdem $\Im(v) \geqq 0$ oder $\leqq 0$ ist.

---

[17]) Formel (2) gilt wegen (25) und Satz 1, falls $k \pm m \neq -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \ldots$ und $2m \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ist. Durch Grenzübergang findet man aber, daß (2) auch noch gilt, falls $2m$ ganz ist. Analog bei (3), (4), (5) und (6).

[18]) Siehe Barnes, [4], S. 102—103, und Hobson, [8], S. 451. $F(a, b; c; z) = {}_2F_1(a, b; c; z)$ ist die gewöhnliche hypergeometrische Funktion. Ist $m = 1, 2, 3, \ldots$, so kann $P_n^m(v)$ durch Grenzübergang definiert werden. Man vgl. auch Barnes, [4], S. 111—112, und Hobson, [8], S. 453.

[19]) $\left(\frac{v+1}{v-1}\right)^\lambda = \frac{(v+1)^\lambda}{(v-1)^\lambda}$, worin $(v \pm 1)^\lambda = \exp\{\lambda \log|v \pm 1| + \lambda i \arg(v \pm 1)\}$. $P_n^m(v)$ ist also zweideutig, falls $v < 1$ ist. Barnes und Hobson betrachten nur den Fall, daß $-\pi < \arg(v \pm 1) < \pi$ ist.

Ist $-\pi \leqq \arg(v-1) \leqq \pi$ und zu gleicher Zeit $-\pi \leqq \arg(1-v) \leqq \pi$, so ist $\arg(v-1) = \arg(1-v) + \pi$ in der Halbebene $\Im(v) \geqq 0$, und $\arg(v-1) = \arg(1-v) - \pi$ in der Halbebene $\Im(v) \leqq 0$. Definiert man nun die Funktion $S_n^m(v)$ durch[20])

$$S_n^m(v) = e^{\frac{m\pi i}{2}} P_n^m(v), \text{ falls } \Im(v) \geqq 0 \text{ ist,}$$

und durch

$$S_n^m(v) = e^{-\frac{m\pi i}{2}} P_n^m(v), \text{ falls } \Im(v) \leqq 0 \text{ ist,}$$

dann hat man also wegen (26), falls $m \neq 1, 2, 3, \ldots$ ist,

$$S_n^m(v) = \frac{1}{\Gamma(1-m)} \left(\frac{1+v}{1-v}\right)^{\frac{m}{2}} F\left(-n, 1+n; 1-m; \frac{1-v}{2}\right)$$

und wegen (27), falls $m \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ist,

$$(28)\quad S_n^m(v) = \frac{\Gamma(-m)}{\Gamma(1-m+n)\,\Gamma(-m-n)} \left(\frac{1+v}{1-v}\right)^{\frac{m}{2}} F\left(-n, 1+n; 1+m; \frac{1+v}{2}\right)$$
$$+ \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(-n)\,\Gamma(1+n)} \left(\frac{1+v}{1-v}\right)^{-\frac{m}{2}} F\left(-n, 1+n; 1-m; \frac{1+v}{2}\right),$$

und in diesen beiden Relationen ist $-\pi \leqq \arg(1+v) \leqq \pi$ und $-\pi \leqq \arg(1-v) \leqq \pi$.

Ich gebe jetzt zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Ist* $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$ *und* $\alpha + \beta - \gamma$ *nicht ganz, so ist*

$$(29)\quad F(\alpha,\beta;\gamma;w) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)} G_1(w) + \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} G_2(w),$$

worin

$$(30)\qquad G_1(w) = F(\alpha,\beta;\alpha+\beta-\gamma+1;1-w)$$

und

$$(31)\qquad G_2(w) = (1-w)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma-\alpha-\beta+1;1-w)$$
$$= w^{1-\gamma}(1-w)^{\gamma-\alpha-\beta} F(1-\alpha,1-\beta;\gamma-\alpha-\beta+1;1-w).$$

Beweis. Dieser Hilfssatz ist bekannt[21]).

Hilfssatz 2. *Es sei* $z \neq 0$ *und* $-\frac{1}{2}\pi < \arg z < \frac{1}{2}\pi$. *Ich betrachte die beiden Integrale*[22])

$$(32)\qquad \mathfrak{I} = -\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\pi i \sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{(1+)} v^a K_\tau(zv) F(a,b;\tfrac{1}{2};v^2)\,dv$$

---

[20]) Diese Definition ist zweideutig, falls $\Im(v) = 0$ ist.

[21]) Siehe Barnes, [3], S. 150—152 [besonders S. 152, Formel (IX)].

[22]) Diese Integrale sind konvergent [siehe (10)]; in (32) wird überdies noch angenommen, daß a und $b \neq 0, -1, -2, \ldots$, in (33) aber, daß a und $b \neq -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \ldots$ sind.

und

$$(33)\qquad J = -\frac{2\,\Gamma(a-\frac{1}{2})\,\Gamma(b+\frac{1}{2})}{\pi i\sqrt{\pi}}\int_{\infty}^{(1+)} v^{\sigma+1} K_\tau(zv)\,F(a+\tfrac{1}{2}, b+\tfrac{1}{2};\tfrac{3}{2};v^2)\,dv.$$

Behauptungen:

1. *Ist* $a-b-\frac{1}{2}$ *nicht ganz, so ist*

$$(34)\qquad \mathfrak{I} = J = \frac{i}{2^{a+b-\frac{1}{2}}\cos(a-b)\pi}\int_{\infty}^{(1+)} v^{\sigma} K_\tau(zv)\,(1-v^2)^{-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+\frac{1}{4}} \times S^{a+b-\frac{1}{2}}_{a-b-\frac{1}{2}}(-v)\,dv.$$

2. *Ist* $\Re(a+b) < \frac{3}{2}$, *so ist*

$$(35)\qquad \mathfrak{I} = J = 2^{-a-b+\frac{3}{2}}\int_{1}^{\infty} v^{\sigma} K_\tau(zv)\;(v^2-1)^{-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+\frac{1}{4}}\;P^{a+b-\frac{1}{2}}_{a-b-\frac{1}{2}}(v)\,dv.$$

Beweis. Man hat[23])

$$\int_{\infty}^{(1+)} v^{\lambda} K_\tau(zv)\,F(\alpha,\beta;\,\alpha+\beta-\gamma+1;\,1-v^2)\,dv = 0.$$

Aus (32), (33), (29), (30) und (31) ergibt sich also, falls $a+b-\frac{1}{2}$ nicht ganz ist,

$$(36)\qquad \mathfrak{I} = J = -\frac{\Gamma(a+b-\frac{1}{2})}{\pi i}\int_{\infty}^{(1+)} v^{\sigma} K_\tau(zv)\,(1-v^2)^{-a-b+\frac{1}{2}} \times F(\tfrac{1}{2}-a, \tfrac{1}{2}-b;\,\tfrac{3}{2}-a-b;\,1-v^2)\,dv.$$

Nun ist[24])

$$F(\tfrac{1}{2}-a, \tfrac{1}{2}-b;\,\tfrac{3}{2}-a-b;\,1-v^2) = \left(\frac{1+v}{2}\right)^{a+b-\frac{1}{2}} F\left(b-a+\tfrac{1}{2}, a-b+\tfrac{1}{2};\,\tfrac{3}{2}-a-b;\,\frac{1-v}{2}\right).$$

Wegen (36) gilt daher

$$(37)\qquad \mathfrak{I} = J = -\frac{\Gamma(a+b-\frac{1}{2})}{2^{a+b-\frac{1}{2}}\pi i}\int_{\infty}^{(1+)} v^{\sigma} K_\tau(zv)\,(1-v)^{-a-b+\frac{1}{2}} \times F\left(b-a+\tfrac{1}{2}, a-b+\tfrac{1}{2};\,\tfrac{3}{2}-a-b;\,\frac{1-v}{2}\right) dv.$$

[23]) Denn der Punkt $v=0$ (die einzige im Endlichen liegende singuläre Stelle des Integranden) liegt außerhalb des Integrationsweges.

[24]) Barnes, [4], S. 118.

Aus (28) geht hervor, falls $a+b-\frac{1}{2}$ nicht ganz ist,

$$(38)\quad (1-v^2)^{-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+\frac{1}{4}}\, S^{a+b-\frac{1}{2}}_{a-b-\frac{1}{2}}(-v)$$
$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-a-b)}{\Gamma(1-2b)\,\Gamma(1-2a)}(1-v)^{-a-b-\frac{1}{2}} \times F\Big(b-a+\tfrac{1}{2}, a-b+\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}+a+b; \frac{1-v}{2}\Big)$$
$$+ \frac{\Gamma(a+b-\frac{1}{2})}{\Gamma(b-a+\frac{1}{2})\,\Gamma(a-b+\frac{1}{2})}(1-v)^{-a-b+\frac{1}{2}} \times F\Big(b-a+\tfrac{1}{2}, a-b+\tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2}-a-b; \frac{1-v}{2}\Big).$$

Formel (34) ergibt sich jetzt aus (37) und (38), wegen

$$\int_{\infty}^{(1+)} v^{\sigma} K_{\tau}(zv)(1+v)^{-a-b-\frac{1}{2}} F\Big(b-a+\tfrac{1}{2}, a-b+\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}+a+b; \frac{1-v}{2}\Big)\, dv = 0.$$

Ist $\Re(a+b) < \frac{3}{2}$, so ist Beziehung (37) äquivalent mit[25])

$$\Im = J = \frac{2^{-a-b+\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2}-a-b)} \int_1^{\infty} v^{\sigma} K_{\tau}(zv)(v-1)^{-a-b+\frac{1}{2}} \times F\Big(b-a+\tfrac{1}{2}, a-b+\tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2}-a-b; \frac{1-v}{2}\Big)\, dv.$$

Hieraus und aus (26) folgt (35).

Hiermit sind die zwei Behauptungen des Hilfssatzes bewiesen für den Fall, daß $a+b-\frac{1}{2}$ nicht ganz ist. Durch Grenzübergang findet man, daß (34) und (35) auch noch gelten für ganze Werte von $a+b-\frac{1}{2}$.

§ 3.

Integraldarstellungen für $W_{k,m}(z)$.

In einer vorigen Arbeit[26]) habe ich bewiesen, daß die Funktion $W_{k,m}(z)$ die folgende Integraldarstellung besitzt:

$$(39)\quad W_{k,m}(z) = -\frac{\Gamma(1-\lambda)\, e^{-\frac{z}{2}}\, z^{k+\lambda}}{2\pi i} \int_{\infty}^{(0+)} e^{-zu}(-u)^{\lambda-1} \times F(\tfrac{1}{2}-k-m, \tfrac{1}{2}-k+m; \lambda; -u)\, du.$$

In dieser Beziehung ist $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ und λ eine beliebige, aber nicht ganze rationale Zahl.

---

[25]) Man vgl. Whittaker and Watson, [17], § 12. 22.

[26]) Meijer, [9], S. 36 und S. 40—45.

Ich werde jetzt einen neuen, sehr kurzen Beweis für Formel (39) geben. Ich setze dazu $\alpha = k + \frac{1}{2}\lambda$ und $\beta = k + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}$ in (2), und $\alpha = k + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}$ und $\beta = k + \frac{1}{2}\lambda + 1$ in (3)[27]). Wegen

$$K_{-\frac{1}{2}}(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2w}}\, e^{-w}$$

erhalte ich dann

$$(40)\quad W_{k,m}(z) = -\frac{e^{\frac{z}{2}} z^{k+\lambda}\, \Gamma(\frac{1}{2}+k+m)\, \Gamma(\frac{1}{2}+k-m)}{\pi i\, \Gamma(2k+\lambda)} \int_{\infty}^{(1+)} v^{2k+\lambda-1} e^{-zv} \times {}_4F_3\left(\begin{matrix}\frac{1}{4}+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}m,\ \frac{3}{4}+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}m,\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}m,\ \frac{3}{4}+\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}m;\\ \frac{1}{2},\ k+\frac{1}{2}\lambda,\ k+\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2};\end{matrix}\ v^2\right) dv$$

und

$$(41)\quad W_{k,m}(z) = -\frac{e^{\frac{z}{2}} z^{k+\lambda}\, \Gamma(\frac{3}{2}+k+m)\, \Gamma(\frac{3}{2}+k-m)}{\pi i\, \Gamma(2k+\lambda+1)} \int_{\infty}^{(1+)} v^{2k+\lambda} e^{-zv} \times {}_4F_3\left(\begin{matrix}\frac{3}{4}+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}m,\ \frac{5}{4}+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}m,\ \frac{3}{4}+\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}m,\ \frac{5}{4}+\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}m;\\ \frac{3}{2},\ k+\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2},\ k+\frac{1}{2}\lambda+1;\end{matrix}\ v^2\right) dv.$$

Nun hat man

$$\begin{aligned}&{}_4F_3(a,\ a+\tfrac{1}{2},\ b,\ b+\tfrac{1}{2};\ \tfrac{1}{2},\ c,\ c+\tfrac{1}{2};\ v^2)\\ &\quad + \frac{2abv}{c}\, {}_4F_3(a+\tfrac{1}{2},\ a+1,\ b+\tfrac{1}{2},\ b+1;\ \tfrac{3}{2},\ c+\tfrac{1}{2},\ c+1;\ v^2)\\ &\quad = F(2a,\ 2b;\ 2c;\ v).\end{aligned}$$

Aus (40) und (41) ergibt sich also durch Addition

$$2\, W_{k,m}(z) = -\frac{e^{\frac{z}{2}} z^{k-\lambda}\, \Gamma(\frac{1}{2}+k+m)\, \Gamma(\frac{1}{2}+k-m)}{\pi i\, \Gamma(2k-\lambda)} \int_{\infty}^{(1+)} v^{2k+\lambda-1} e^{-zv} \times F(\tfrac{1}{2}+k+m,\ \tfrac{1}{2}+k-m;\ 2k+\lambda;\ v)\, dv.$$

Wegen Hilfssatz 1 gilt daher[28])

$$W_{k,m}(z) = -\frac{e^{\frac{z}{2}} z^{k+\lambda}\, \Gamma(1-\lambda)}{2\pi i} \int_{\infty}^{(1+)} e^{-zv} (1-v)^{\lambda-1} \times F(\tfrac{1}{2}-k-m,\ \tfrac{1}{2}-k+m;\ \lambda;\ 1-v)\, dv.$$

Ersetzt man nun noch v durch $1+u$, dann findet man Formel (39)[29]).

---

[27]) Ich nehme vorläufig an, daß $k \pm m \neq -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \ldots$ und $2k+\lambda \neq 0, -1, -2, \ldots$ ist.

[28]) Man beachte hierbei, daß

$$\int_{\infty}^{(1+)} v^{2k+\lambda-1} e^{-zv} F(\tfrac{1}{2}+k+m,\ \tfrac{1}{2}+k-m;\ 2-\lambda;\ 1-v)\, dv = 0$$

ist.

[29]) Formel (39) gilt aus Stetigkeitsgründen auch, falls $k \pm m = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \ldots$ und falls $2k+\lambda = 0, -1, -2, \ldots$ ist.

Ein Spezialfall von (39) ist besonders erwähnenswert. Ich werde nämlich zeigen, daß aus (39) mit $\lambda = 1 - k$ folgt:

$$W_{k,m}(z) = \tfrac{1}{2} z \int_1^{\infty} e^{-\frac{zt}{2}} \left(\frac{t+1}{t-1}\right)^{\frac{k}{2}} P^k_{m-\frac{1}{2}}(t)\, dt \tag{42}$$

und

$$W_{k,m}(z) = \frac{z}{4i \cos m\pi} \int_{-\infty}^{(-1+)} e^{\frac{zv}{2}} \left(\frac{v-1}{v+1}\right)^{\frac{k}{2}} P^k_{m-\frac{1}{2}}(v)\, dv \text{ [30]}. \tag{43}$$

In diesen Beziehungen ist $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$; es wird ferner angenommen

$$\Re(k) < 1 \text{ in (42)},$$

$$m - \tfrac{1}{2} \text{ nicht ganz in (43)}.$$

Der Beweis von (42) und (43) geht folgendermaßen:

Aus (26) und

$$F(a, b; c; w) = (1-w)^{c-a-b} F(c-b, c-a; c; w)$$

geht hervor

$$\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^{\frac{k}{2}} P^k_{m-\frac{1}{2}}(t) = \frac{1}{\Gamma(1-k)} \left(\frac{t-1}{2}\right)^{-k} F\left(\tfrac{1}{2} - k - m,\ \tfrac{1}{2} - k + m;\ 1-k;\ \frac{1-t}{2}\right). \tag{44}$$

Weiter hat man [31], falls k nicht ganz ist,

$$\left(\frac{v-1}{v+1}\right)^{\frac{k}{2}} P^k_{m-\frac{1}{2}}(v) = \frac{\Gamma(-k)}{\Gamma(\frac{1}{2} - k - m)\,\Gamma(\frac{1}{2} - k + m)} F\left(\tfrac{1}{2} - m,\ \tfrac{1}{2} + m;\ 1+k;\ \frac{1+v}{2}\right) + \frac{\Gamma(k)\cos m\pi}{\pi} \left(\frac{1+v}{2}\right)^{-k} F\left(\tfrac{1}{2} - k - m,\ \tfrac{1}{2} - k + m;\ 1-k;\ \frac{1-v}{2}\right). \tag{45}$$

Setzt man nun $\lambda = 1 - k$ (k nicht ganz) und $u = \frac{t-1}{2}$ in (39), so erhält man

$$W_{k,m}(z) = -\frac{z\,\Gamma(k)}{4\pi i} \int_{\infty}^{(1+)} e^{-\frac{zt}{2}} \left(\frac{1-t}{2}\right)^{-k} \times F\left(\tfrac{1}{2} - k - m,\ \tfrac{1}{2} - k + m;\ 1-k;\ \frac{1-t}{2}\right) dt. \tag{46}$$

---

[30]) Der Punkt $v = -1$ ist wegen (26) die einzige im Endlichen liegende singuläre Stelle von $\left(\frac{v-1}{v+1}\right)^{\frac{k}{2}} P^k_{m-\frac{1}{2}}(v)$.

[31]) Barnes, [4], S. 111.

Ist $\Re(k) < 1$, dann ergibt sich hieraus [32])

$$(47)\quad W_{k,m}(z) = \frac{z}{2\,\Gamma(1-k)} \int_1^\infty e^{-\frac{zt}{2}} \left(\frac{t-1}{2}\right)^{-k} \times F\left(\tfrac{1}{2} - k - m,\ \tfrac{1}{2} - k + m;\ 1-k;\ \frac{1-t}{2}\right) dt.$$

Formel (42) folgt jetzt aus (47) und (44); ebenso Formel (43) aus (46) (worin $t = -v$ gesetzt wird) und (45), da

$$\int_{-\infty}^{(-1+)} e^{\frac{zv}{2}} F\left(\tfrac{1}{2} - m,\ \tfrac{1}{2} + m;\ 1+k;\ \frac{1+v}{2}\right) dv = 0$$

ist [33]).

Mittels Hilfssatz 2 kann man aus (2) und (3) noch andere merkwürdige Integraldarstellungen für $W_{k,m}(z)$ ableiten. Aus (2) mit $\alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}m$ und $\beta = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}m$ geht nämlich hervor

$$W_{k,m}(z) = -\frac{z^{\frac{3}{2}} e^{\frac{z}{2}} 2^{k-\frac{1}{2}}\, \Gamma(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}m)\, \Gamma(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}m)}{\pi^2 i} \times \int_\infty^{(1+)} v^{k+\frac{1}{2}} K_m(zv)\, F(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}k + \tfrac{1}{2}m,\ \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}k - \tfrac{1}{2}m;\ \tfrac{1}{2};\ v^2)\, dv.$$

Wegen (32) und (34) hat man also, falls $m - \frac{1}{2}$ nicht ganz ist,

$$(48)\quad W_{k,m}(z) = \frac{i\, z^{\frac{3}{2}} e^{\frac{z}{2}}}{\sqrt{2\pi}\cos m\pi} \int_\infty^{(1+)} v^{k+\frac{1}{2}} K_m(zv)\,(1-v^2)^{-\frac{k}{2}} S^k_{m-\frac{1}{2}}(-v)\, dv,$$

und wegen (32) und (35), falls $\Re(k) < 1$ ist,

$$(49)\quad W_{k,m}(z) = \frac{z^{\frac{3}{2}} e^{\frac{z}{2}} \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_1^\infty v^{k+\frac{1}{2}} K_m(zv)\,(v^2-1)^{-\frac{k}{2}} P^k_{m-\frac{1}{2}}(v)\, dv.$$

Man erhält gleichfalls (48) und (49), wenn man in (3)

$$\alpha = \tfrac{5}{4} + \tfrac{1}{2}k + \tfrac{1}{2}m \quad \text{und} \quad \beta = \tfrac{5}{4} + \tfrac{1}{2}k - \tfrac{1}{2}m$$

setzt (siehe (33), (34) und (35)).

Auf analoge Weise findet man, wenn man $\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}m$ und $\beta = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}m$ in (2) (oder $\alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}m$ und $\beta = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}m$ in (3)) setzt,

$$W_{k,m}(z) = \frac{i\, z^{\frac{1}{2}} e^{\frac{z}{2}}}{\sqrt{2\pi}\cos m\pi} \int_\infty^{(1+)} v^{k-\frac{1}{2}} K_m(zv)\,(1-v^2)^{-\frac{k}{2}-\frac{1}{2}} S^{k+1}_{m-\frac{1}{2}}(-v)\, dv$$

---

[32]) Man vergleiche Whittaker and Watson, [17], § 12. 22.

[33]) Die Beziehungen (42) und (43) gelten aus Stetigkeitsgründen auch, falls k ganz ist.

(wo $m - \frac{1}{2}$ nicht ganz ist) und

$$W_{k,m}(z) = \frac{z^{\frac{1}{2}} e^{\frac{z}{2}} \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_1^\infty v^{k-\frac{1}{2}} K_m(zv)(v^2-1)^{-\frac{k}{2}-\frac{1}{2}} P_{m-\frac{1}{2}}^{k+1}(v)\, dv$$

(wo $\Re(k) < 0$ ist); ebenso, wenn man $\alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}m$ und $\beta = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}m$ in (2) (oder $\alpha = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}m$ und $\beta = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}m$ in (3)) setzt,

$$W_{k,m}(z) = \frac{i z e^{\frac{z}{2}}}{\sqrt{2\pi \sin m\pi}} \int_\infty^{(1+)} v^k K_{m+\frac{1}{2}}(zv)(1-v^2)^{-\frac{k}{2}-\frac{1}{4}} S_{m-1}^{k+\frac{1}{2}}(-v)\, dv$$

(wo m nicht ganz ist) und

$$W_{k,m}(z) = \frac{z e^{\frac{z}{2}} \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_1^\infty v^k K_{m+\frac{1}{2}}(zv)(v^2-1)^{-\frac{k}{2}-\frac{1}{4}} P_{m-1}^{k+\frac{1}{2}}(v)\, dv$$

(wo $\Re(k) < \frac{1}{2}$ ist).

§ 4.

Integraldarstellungen für $K_\nu(z)\, K_\mu(z)$.

Ich werde zeigen, daß dieses Produkt die folgenden Integraldarstellungen besitzt[34])

$$(50)\quad K_\nu(z) K_\mu(z) = \frac{i z^{-u}\sqrt{\pi}}{2^{\mu+\frac{1}{2}} \cos \nu\pi} \int_\infty^{(1+)} v^{-\mu} K_\nu(2zv)(1-v^2)^{-\frac{u}{2}-\frac{1}{4}} S_{\nu-\frac{1}{2}}^{\mu+\frac{1}{2}}(-v)\, dv$$

(wo $\nu - \frac{1}{2}$ nicht ganz ist),

$$(51)\quad K_\nu(z) K_\mu(z) = \frac{z^{-u}\sqrt{\pi}}{2^{\mu-\frac{1}{2}}} \int_1^\infty v^{-\mu} K_\nu(2zv)(v^2-1)^{-\frac{u}{2}-\frac{1}{4}} P_{\nu-\frac{1}{2}}^{\mu+\frac{1}{2}}(v)\, dv$$

(wo $\Re(\mu) < \frac{1}{2}$ ist),

$$(52)\quad K_\nu(z) K_\mu(z) = \frac{i\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\cos(\nu-\mu)\pi} \int_\infty^{(1+)} K_{\nu+\mu}(2zv)(1-v^2)^{-\frac{1}{4}} S_{\nu-\mu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(-v)\, dv$$

(wo $\nu - \mu - \frac{1}{2}$ nicht ganz ist) und

$$(53)\quad K_\nu(z) K_\mu(z) = \sqrt{2\pi} \int_1^\infty K_{\nu+u}(2zv)(v^2-1)^{-\frac{1}{4}} P_{\nu-u-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(v)\, dv$$

(wo ν und μ beliebig sind).

---

[34]) Ich nehme an, daß $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ ist.

Zum Beweis dieser Relationen betrachte ich die beiden Spezialfälle mit $\alpha = \frac{1+\nu-\mu}{2}$ und $\beta = \frac{1-\nu-\mu}{2}$, beziehungsweise $\alpha = \frac{1+\nu+\mu}{2}$ und $\beta = \frac{1-\nu-\mu}{2}$ von (5) (oder die beiden Spezialfälle mit $\alpha = \frac{2+\nu-\mu}{2}$ und $\beta = \frac{2-\nu-\mu}{2}$, bzw. $\alpha = \frac{2+\nu+\mu}{2}$ und $\beta = \frac{2-\nu-\mu}{2}$ von (6)). Der erste Spezialfall liefert mittels (32), (33), (34) und (35) die Beziehungen (50) und (51); ebenso der zweite Spezialfall die Relationen (52) und (53) (man vgl. auch den Beweis von (48) und (49)).

Die Funktion $K_\nu(z)\,K_\mu(z)$ besitzt, wie schon öfters bewiesen worden ist[35]), für $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ die Integraldarstellung

$$(54) \qquad K_\nu(z)\,K_\mu(z) = 2\int_0^\infty K_{\nu+u}(2z\cosh w)\cosh(\nu-\mu)w\,dw.$$

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß diese Beziehung äquivalent mit (53) ist. Denn man hat[36])

$$(55) \qquad F\left(\tfrac{1}{2}-\lambda,\ \tfrac{1}{2}+\lambda;\ \tfrac{1}{2};\ -\sinh^2 u\right) = \frac{\cosh 2\lambda u}{\cosh u}.$$

somit wegen (26)

$$(\cosh^2 w - 1)^{-\frac{1}{4}} P^{\frac{1}{2}}_{\lambda-\frac{1}{2}}(\cosh w)$$
$$= \frac{(\cosh w - 1)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\, F\left(\tfrac{1}{2}-\lambda,\ \tfrac{1}{2}+\lambda;\ \tfrac{1}{2};\ \frac{1-\cosh w}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sinh\frac{w}{2}} F\left(\tfrac{1}{2}-\lambda,\ \tfrac{1}{2}+\lambda;\ \tfrac{1}{2};\ -\sinh^2\frac{w}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cosh\lambda w}{\sinh w}.$$

Man findet also (54), wenn man in (53) v durch $\cosh w$ ersetzt.

§ 5.

Integraldarstellungen für $H^{(1)}_\nu(z)\,H^{(2)}_\mu(z)$.

Ich werde die zwei folgenden Relationen beweisen[37]):

$$(56) \quad H^{(1)}_\nu(z)\,H^{(2)}_\mu(z)$$
$$= \frac{e^{\left(\mu-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)\pi i}}{2^{\mu-\frac{5}{2}}\pi^{\frac{3}{2}}z^\mu}\int_0^{\infty e^{i0}} v^{-u}K_\nu(2zv)(1+v^2)^{-\frac{\mu}{2}-\frac{1}{4}}P^{\mu+\frac{1}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}(iv)\,dv,$$

---

[35]) Man vgl.: Nicholson, [13], S. 221; [14], S. 83. Watson, [16], S. 440. Chaundy, [5], S. 147—148. Meijer, [10], S. 16—17. (Formel (54) enthält bei Nicholson, [14], einen Druckfehler).

[36]) Für (55) vgl. man Meijer, [9], S. 49.

[37]) Die Integraldarstellungen (56) und (57) für $H^{(1)}_\nu(z)\,H^{(2)}_\mu(z)$ und $H^{(1)}_\mu(z)\,H^{(2)}_\nu(z)$ entsprechen Relation (51) für $K_\nu(z)\,K_\mu(z)$.

(57) $$H_{\mu}^{(1)}(z)\,H_{\nu}^{(2)}(z) = \frac{e^{-\left(\mu-\frac{\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)\pi i}}{2^{u-\frac{5}{2}}\,\pi^{\frac{3}{2}}\,z^{u}} \int_{0}^{\infty e^{i0}} v^{-\mu}\,K_{\nu}(2zv)\,(1+v^2)^{-\frac{u}{2}-\frac{1}{4}}\,P_{\nu,-\frac{1}{2}}^{u+\frac{1}{2}}(-iv)\,dv,$$

In diesen Beziehungen ist $|\arg z| < \pi$, $\Re(\mu) + |\Re(\nu)| < 1$ und

(58) $$\operatorname{Max}(-\tfrac{1}{2}\pi,\ -\tfrac{1}{2}\pi - \arg z) < \sigma < \operatorname{Min}(\tfrac{1}{2}\pi,\ \tfrac{1}{2}\pi - \arg z).$$

Der Beweis von (56) und (57) geht wie folgt:

Ich betrachte zunächst die beiden Funktionen

(59) $$V_{\nu,\mu}(z) = \frac{1}{2}\left\{e^{(\nu-\mu)\frac{\pi i}{2}}\,H_{\nu}^{(1)}(z)\,H_{\mu}^{(2)}(z) + e^{(\mu-\nu)\frac{\pi i}{2}}\,H_{\mu}^{(1)}(z)\,H_{\nu}^{(2)}(z)\right\}$$

und

(60) $$U_{\nu,\mu}(z) = \frac{1}{2i}\left\{e^{(\nu-\mu)\frac{\pi i}{2}}\,H_{\nu}^{(1)}(z)\,H_{\mu}^{(2)}(z) - e^{(\mu-\nu)\frac{\pi i}{2}}\,H_{\mu}^{(1)}(z)\,H_{\nu}^{(2)}(z)\right\}.$$

Diese Funktionen besitzen für $|\arg z| < \pi$ die Integraldarstellungen[38])

(61) $$V_{\nu,\mu}(z) = \frac{8z^{\alpha+\beta-1}}{\pi\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_{0}^{\infty e^{i0}} v^{\alpha+\beta-1}\,K_{\alpha-\beta}(2zv)$$
$$\times\ {}_4F_3\left(\frac{1+\nu+\mu}{2},\ \frac{1+\nu-\mu}{2},\ \frac{1-\nu+\mu}{2},\ \frac{1-\nu-\mu}{2};\ \frac{1}{2},\ \alpha,\beta;\ -v^2\right)dv$$

und

(62) $$U_{\nu,\mu}(z) = \frac{4(\nu^2-\mu^2)\,z^{\alpha+\beta-2}}{\pi\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_{0}^{\infty e^{i0}} v^{\alpha+\beta-1}\,K_{\alpha-\beta}(2zv)$$
$$\times\ {}_4F_3\left(\frac{2+\nu+\mu}{2},\ \frac{2+\nu-\mu}{2},\ \frac{2-\nu+\mu}{2},\ \frac{2-\nu-\mu}{2};\ \frac{3}{2},\ \alpha,\beta;\ -v^2\right)dv.$$

Hierin ist σ ein Punkt des Intervalles (58) und α und β sind beliebige Zahlen mit $\Re(\alpha) > 0$, $\Re(\beta) > 0$.

Ich setze nun in (61) $\alpha = \frac{1+\nu-\mu}{2}$ und $\beta = \frac{1-\nu-\mu}{2}$, in (62) aber $\alpha = \frac{2+\nu-\mu}{2}$ und $\beta = \frac{2-\nu-\mu}{2}$ (ich nehme also an, daß $\Re(\mu) + |\Re(\nu)| < 1$ ist). Ich erhalte dann

(63) $$V_{\nu,\mu}(z) = \frac{8z^{-u}}{\pi\,\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}\right)} \int_{0}^{\infty e^{i\sigma}} v^{-\mu}\,K_{\nu}(2zv)$$
$$\times\ F\left(\frac{1+\nu+\mu}{2},\ \frac{1-\nu+\mu}{2};\ \frac{1}{2};\ -v^2\right)dv$$

[38]) Siehe Meijer, [10], Satz 3.

und

$$(64)\quad U_{\nu,\mu}(z) = -\frac{16\,z^{-u}}{\pi\,\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\nu+\mu}{2}\right)}\int_0^{\infty e^{i\sigma}} v^{-u+1}K_\nu(2zv)\times F\left(\frac{2+\nu+\mu}{2},\ \frac{2-\nu+\mu}{2};\ \frac{3}{2};\ -v^2\right)dv.$$

Nun folgt aus (59) und (60)

$$H_\nu^{(1)}(z)\,H_\mu^{(2)}(z) = e^{(u-\nu)\frac{\pi i}{2}}\,\{V_{\nu,\mu}(z) + i\,U_{\nu,\mu}(z)\}$$

und

$$H_\mu^{(1)}(z)\,H_\nu^{(2)}(z) = e^{(\nu-u)\frac{\pi i}{2}}\,\{V_{\nu,\mu}(z) - i\,U_{\nu,\mu}(z)\}.$$

Wegen (63) und (64) gilt daher

$$(65)\quad H_\nu^{(1)}(z)\,H_u^{(2)}(z) = \frac{8\,e^{(u-\nu)\frac{\pi i}{2}}\,z^{-u}}{\pi}\int_0^{\infty e^{i\sigma}} v^{-u}K_\nu(2zv)\times\left\{\frac{F\left(\frac{1+\nu+\mu}{2},\ \frac{1-\nu+\mu}{2};\ \frac{1}{2};\ -v^2\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}\right)}\right.$$
$$\left. - 2iv\,\frac{F\left(\frac{2+\nu+\mu}{2},\ \frac{2-\nu+\mu}{2};\ \frac{3}{2};\ -v^2\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\nu+\mu}{2}\right)}\right\}dv$$

und

$$(66)\quad H_\mu^{(1)}(z)\,H_\nu^{(2)}(z) = \frac{8\,e^{(\nu-u)\frac{\pi i}{2}}\,z^{-\mu}}{\pi}\int_0^{\infty e^{i\sigma}} v^{-\mu}K_\nu(2zv)\times\left\{\frac{F\left(\frac{1+\nu+\mu}{2},\ \frac{1-\nu+\mu}{2};\ \frac{1}{2};\ -v^2\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}\right)}\right.$$
$$\left. + 2iv\,\frac{F\left(\frac{2+\nu+\mu}{2},\ \frac{2-\nu+\mu}{2};\ \frac{3}{2};\ -v^2\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\nu+\mu}{2}\right)}\right\}dv.$$

Man hat aber nach Hobson[39]), falls $|\arg v| < \frac{1}{2}\pi$ ist,

$$P_n^m(\pm iv) = e^{\mp\frac{m\pi i}{2}}\,2^m\sqrt{\pi}\,(1+v^2)^{\frac{m}{2}}\left\{\frac{F\left(\frac{1+n+m}{2},\ \frac{m-n}{2};\ \frac{1}{2};\ -v^2\right)}{\Gamma\left(\frac{2+n-m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-n-m}{2}\right)}\right.$$
$$\left. \mp 2iv\,\frac{F\left(\frac{2+n+m}{2},\ \frac{1-n+m}{2};\ \frac{3}{2};\ -v^2\right)}{\Gamma\left(\frac{1+n-m}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{n+m}{2}\right)}\right\}.$$

[39]) Man vgl. Hobson, [8], S. 469, Formel (27).

Die Ausdrücke zwischen geschweiften Klammern in den rechten Seiten von (65) und (66) sind also gleich

$$e^{\left(\frac{\mu}{2}+\frac{1}{4}\right)\pi i}\,2^{-\mu-\frac{1}{2}}\,\pi^{-\frac{1}{2}}(1+v^2)^{-\frac{\mu}{2}-\frac{1}{4}}\,P_{\nu-\frac{1}{2}}^{\mu+\frac{1}{2}}(iv)$$

bzw.

$$e^{-\left(\frac{\mu}{2}+\frac{1}{4}\right)\pi i}\,2^{-\mu-\frac{1}{2}}\,\pi^{-\frac{1}{2}}(1+v^2)^{-\frac{\mu}{2}-\frac{1}{4}}\,P_{\nu-\frac{1}{2}}^{\mu+\frac{1}{2}}(-iv),$$

so daß (56) und (57) sofort aus (65) und (66) folgen.

§ 6.

Integraldarstellungen für $W_{k,m}(iz)\,W_{k,m}(-iz)$ und $H_\nu^{(1)}(z)\,H_\nu^{(2)}(z)$.

Die Funktion $W_{k,m}(iz)\,W_{k,m}(-iz)$ besitzt, wie ich früher[40]) bewiesen habe, für $|\arg z|<\pi$ die Integraldarstellung

$$(67)\quad W_{k,m}(iz)\,W_{k,m}(-iz)=\frac{z^{\alpha+\beta+2k}}{2^{\alpha+\beta-2}\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\int_0^\infty e^{i\sigma}v^{\alpha+\beta-1}K_{\alpha-\beta}(zv)$$

$$\times\,{}_4F_3\left(\tfrac{1}{2}-k+m,\ \tfrac{1}{2}-k-m,\ \tfrac{1}{2}-k,\ 1-k;\ 1-2k,\ \alpha,\ \beta;\ -v^2\right)dv.$$

Hierin genügt σ der Bedingung (58), und α und β sind beliebige Zahlen mit $\Re(\alpha)>0$, $\Re(\beta)>0$.

Ein Spezialfall von (67) ist besonders interessant. Aus (67) mit $\alpha=\beta=1-k$ ergibt sich nämlich[41])

$$(68)\quad W_{k,m}(iz)\,W_{k,m}(-iz)=\frac{2^{2k}z^2}{\Gamma^2(1-k)}\int_0^\infty e^{i\sigma}v^{1-2k}K_0(zv)$$

$$\times\,{}_3F_2\left(\tfrac{1}{2}-k+m,\ \tfrac{1}{2}-k-m,\ \tfrac{1}{2}-k;\ 1-2k,\ 1-k;\ -v^2\right)dv.$$

Es gilt aber[42])

$$(69)\quad {}_3F_2(2a,\,2b,\,a+b;\ 2a+2b,\,a+b+\tfrac{1}{2};\ w)=\{F(a,\,b;\ a+b+\tfrac{1}{2};\ w)\}^2$$

und, falls $\Re(u)>0$ und $s\neq 1,2,3,\ldots$ ist[43]),

$$(70)\quad F\left(\frac{r+1-s}{2},\ \frac{-r-s}{2};\ 1-s;\ 1-u^2\right)=2^{-s}\,\Gamma(1-s)\,(u^2-1)^{\frac{s}{2}}\,P_r^s(u),$$

---

[40]) Meijer, [10], Satz 6.

[41]) Ich nehme an, daß $\Re(k)<1$ ist.

[42]) Formel (69) rührt von Clausen ([6], S. 89—91) her. Siehe auch Goursat, [7], S. 284 und Orr, [15], S. 12.

[43]) Für (70) vgl. man Barnes, [4], S. 120. Aus (26) folgt schon, daß $(u^2-1)^{\frac{s}{2}}\,P_r^s(u)$ analytisch ist für $\Re(u)>0$.

so daß

$$(70a)\quad {}_3F_2\left(\tfrac{1}{2}-k+m,\ \tfrac{1}{2}-k-m,\ \tfrac{1}{2}-k;\ 1-2k,\ 1-k;\ -v^2\right)$$
$$= \left\{F\left(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}k+\tfrac{1}{2}m,\ \tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}k-\tfrac{1}{2}m;\ 1-k;\ -v^2\right)\right\}^2$$
$$= 2^{-2k}\,\Gamma^2(1-k)\,v^{2k}\left\{P^k_{m-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+v^2}\right)\right\}^2$$

ist[43a]). Die Funktion $W_{k,m}(iz)\,W_{k,m}(-iz)$ besitzt also wegen (68), falls $\Re(k)<1$ ist, die folgende merkwürdige Integraldarstellung:

$$(71)\quad W_{k,m}(iz)\,W_{k,m}(-iz) = z^2\int_0^{\infty e^{i\sigma}} K_0(zv)\left\{P^k_{m-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+v^2}\right)\right\}^2 v\,dv.$$

Nun ist[44])

$$H^{(1)}_\nu(z)\,H^{(2)}_\nu(z) = \frac{2}{\pi z}\,W_{0,\nu}(2iz)\,W_{0,\nu}(-2iz).$$

Aus (71) ergibt sich somit

$$(72)\quad H^{(1)}_\nu(z)\,H^{(2)}_\nu(z) = \frac{8z}{\pi}\int_0^{\infty e^{i\sigma}} K_0(2zv)\left\{P^0_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+v^2}\right)\right\}^2 v\,dv.$$

Diese Beziehung ist aber erweiterungsfähig. Denn aus (59) geht hervor

$$H^{(1)}_\nu(z)\,H^{(2)}_\nu(z) = V_{\nu,\nu}(z).$$

Wegen (61) gilt daher, falls $\Re(\alpha)$ und $\Re(\beta)>0$ sind,

$$(73)\quad H^{(1)}_\nu(z)\,H^{(2)}_\nu(z) = \frac{8z^{\alpha+\beta-1}}{\pi\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\int_0^{\infty e^{i\sigma}} v^{\alpha+\beta-1}K_{\alpha-\beta}(2zv)$$
$$\times\,{}_3F_2\left(\tfrac{1}{2}+\nu,\ \tfrac{1}{2}-\nu,\ \tfrac{1}{2};\ \alpha,\ \beta;\ -v^2\right)dv.$$

Nun hat man[45])

$$(74)\quad {}_3F_2\left(\tfrac{1}{2}+a-b,\ \tfrac{1}{2}-a+b,\ \tfrac{1}{2};\ a+b+\tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{2}-a-b;\ w\right)$$
$$= F(a,\ b;\ a+b+\tfrac{1}{2};\ w)\,F\left(\tfrac{1}{2}-b,\ \tfrac{1}{2}-a;\ \tfrac{3}{2}-a-b;\ w\right)$$

und

$$(75)\quad {}_3F_2\left(\tfrac{1}{2}+a-b,\ \tfrac{1}{2}-a+b,\ \tfrac{1}{2};\ a+b-\tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{2}-a-b;\ w\right)$$
$$= (1-w)^{-\frac{1}{2}}\left\{F\left(a-\tfrac{1}{2},\ b-\tfrac{1}{2};\ a+b-\tfrac{1}{2};\ w\right)F\left(\tfrac{1}{2}-b,\ \tfrac{1}{2}-a;\ \tfrac{3}{2}-a-b;\ w\right)\right.$$
$$\left.+\frac{(a-\frac{1}{2})\,(b-\frac{1}{2})\,w}{(a+b-\frac{1}{2})\,(\frac{3}{2}-a-b)}\,F(a,b;a+b+\tfrac{1}{2};w)\,F(1-b,1-a;\tfrac{5}{2}-a-b;w)\right\}.$$

[43a]) Bemerkung bei der Korrektur: Formel (70a) kommt schon bei Barnes ([4], S. 187) vor.

[44]) Man vgl. Meijer, [11], S. 242.

[45]) Man vgl. Orr, [15], S. 12, Formel (55) und S. 13, Formel (60). Gleichung (74) ist schon von Clausen ([6], S. 92—95) bewiesen worden.

Hieraus folgt, mit Rücksicht auf (70), (ich setze $a = \frac{1}{4} + \frac{\lambda+\nu}{2}$ und $b = \frac{1}{4} + \frac{\lambda-\nu}{2}$ in (74), und $a = \frac{1+\lambda+\nu}{2}$ und $b = \frac{1+\lambda-\nu}{2}$ in (75))

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(\tfrac{1}{2}+\nu,\ \tfrac{1}{2}-\nu,\ \tfrac{1}{2};\ 1+\lambda,\ 1-\lambda;\ -v^2\right)\\
&= F\left(\frac{1}{4}+\frac{\lambda+\nu}{2}, \frac{1}{4}+\frac{\lambda-\nu}{2}; 1+\lambda; -v^2\right) F\left(\frac{1}{4}-\frac{\lambda-\nu}{2}, \frac{1}{4}-\frac{\lambda+\nu}{2}; 1-\lambda; -v^2\right)\\
&= \Gamma(1+\lambda)\,\Gamma(1-\lambda)\,P^{-\lambda}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+v^2}\right) P^{\lambda}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+v^2}\right)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(\tfrac{1}{2}+\nu,\ \tfrac{1}{2}-\nu,\ \tfrac{1}{2};\ \tfrac{1}{2}+\lambda,\ \tfrac{1}{2}-\lambda;\ -v^2\right)\\
&= (1+v^2)^{-\frac{1}{2}}\left\{F\left(\frac{\lambda+\nu}{2}, \frac{\lambda-\nu}{2}; \frac{1}{2}+\lambda; -v^2\right) F\left(\frac{\nu-\lambda}{2}, -\frac{\nu+\lambda}{2}; \frac{1}{2}-\lambda; -v^2\right)\right.\\
&\quad + \frac{(\nu^2-\lambda^2)\,v^2}{1-4\lambda^2} F\left(\frac{1+\lambda+\nu}{2}, \frac{1+\lambda-\nu}{2}; \frac{3}{2}+\lambda; -v^2\right)\\
&\qquad\qquad \left.\times F\left(\frac{1+\nu-\lambda}{2}, \frac{1-\nu-\lambda}{2}; \frac{3}{2}-\lambda; -v^2\right)\right\}\\
&= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda)\,\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda)\,v}{2\sqrt{1+v^2}} \left\{P^{-\lambda+\frac{1}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+v^2}\right) P^{\lambda+\frac{1}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+v^2}\right)\right.\\
&\qquad \left. + (\nu^2-\lambda^2)\, P^{-\lambda-\frac{1}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+v^2}\right) P^{\lambda-\frac{1}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+v^2}\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

Nimmt man nun $\alpha = 1+\lambda$ und $\beta = 1-\lambda$, bzw. $\alpha = \frac{1}{2}+\lambda$ und $\beta = \frac{1}{2}-\lambda$ in (73) (λ ist also eine beliebige Zahl mit $|\Re(\lambda)| < 1$, bzw. $\Re(\lambda)| < \frac{1}{2}$), dann findet man somit

$$
(76)\quad H^{(1)}_{\nu}(z)\,H^{(2)}_{\nu}(z) = \frac{8z}{\pi}\int_0^{\infty e^{i\sigma}} K_{2\lambda}(2zv)\, P^{-\lambda}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+v^2}\right) P^{\lambda}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+v^2}\right) v\,dv,
$$

bzw.

$$
\begin{aligned}
H^{(1)}_{\nu}(z)\,H^{(2)}_{\nu}(z) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty e^{i\sigma}} K_{2\lambda}(2zv) &\left\{P^{-\lambda+\frac{1}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+v^2}\right) P^{\lambda+\frac{1}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+v^2}\right)\right.\\
&\left. + (\nu^2-\lambda^2)\, P^{-\lambda-\frac{1}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+v^2}\right) P^{\lambda-\frac{1}{2}}_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+v^2}\right)\right\} \frac{v\,dv}{\sqrt{1+v^2}}.
\end{aligned}
$$

Formel (76) ist eine Erweiterung von (72).

Literaturverzeichnis.

W. N. Bailey.

[1] Products of generalized hypergeometric series, Proc. London Math. Soc. (2) 28 (1928), S. 242—254.

[2] Generalized hypergeometric series (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics 32 (1935)).

E. W. Barnes.
[3] A new development of the theory of the hypergeometric functions, Proc. London Math. Soc. (2) **6** (1908), S. 141—177.
[4] On generalized Legendre functions, Quarterly Journ. of Math. **39** (1908), S. 97—204.
T. W. Chaundy.
[5] Integrals expressing products of Bessel's functions, Quarterly Journ. of Math. (Oxford series) **2** (1931), S. 144—154.
Th. Clausen.
[6] Über die Fälle ...; Beitrag zur Theorie der Reihen, Journ. für Math. **3** (1828), S. 89—95.
E. Goursat.
[7] Mémoire sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur, Ann. de l'école normale (2) **12** (1883), S. 261—286 und 395—430.
E. W. Hobson.
[8] On a type of spherical harmonics of unrestricted degree, order and argument, Phil. Trans. Royal Soc. London (A) **187** (1896), S. 443—531.
C. S. Meijer.
[9] Über die Integraldarstellungen der Whittakerschen Funktion $W_{k,m}(z)$ und der Hankelschen und Besselschen Funktionen, Nieuw Archief voor Wiskunde (2) **18** (2tes Heft, 1934), S. 35—57.
[10] Integraldarstellungen aus der Theorie der Besselschen Funktionen, Proc. London Math. Soc. (2) **40** (1936), S. 1—22.
[11] Einige Integraldarstellungen fur Produkte von Whittakerschen Funktionen, Quarterly Journ. of Math. (Oxford series) **6** (1935), S. 241—248.
[12] Über Whittakersche bzw. Besselsche Funktionen und deren Produkte, Nieuw Archief voor Wiskunde (2) **18** (4tes Heft, 1936), S. 10—29.
J. W. Nicholson.
[13] Notes on Bessel functions, Quarterly Journ. of Math. **42** (1911), S. 216—224.
[14] The products of Bessel functions, Quarterly Journ. of Math. **43** (1912), S. 78—100.
W. McF. Orr.
[15] Theorems relating to the product of two hypergeometric series, Trans. Camb. Phil. Soc. **17** (1899), S. 1—15.
G. N. Watson.
[16] A treatise on the theory of Bessel functions (1922).
E. T. Whittaker and G. N. Watson.
[17] A course of modern analysis (4te Auflage, 1927).

(Eingegangen am 18. 10. 1935.)

Zur Konstruktion der Grundlösung für eine gemischte Randwertaufgabe einer partiellen Differentialgleichung höherer Ordnung.

Von

Franz Rellich in Marburg.

In der Theorie der plastischen Deformationen treten gemischte Randwertaufgaben für partielle Differentialgleichungen von dritter und höherer Ordnung auf, deren einfachster Typus so aussieht: Gesucht wird die Lösung $u(x,t)$ der Differentialgleichung

$$u_{xxt} - a\,u = f(x,t) \qquad [a = \text{const. und } f(x,t) \text{ gegeben}],$$

für die $u(x,0) = \omega(x)$, $u(0,t) = \psi(t)$, $u(1,t) = \varphi(t)$ mit $\omega(0) = \psi(0)$ und $\omega(1) = \varphi(0)$ willkürlich vorgegebene Randwerte sind[1]). Existenz und Eindeutigkeit der Lösung läßt sich leicht nach verschiedenen, wohlbekannten Methoden zeigen; z. B. mit Hilfe der Heavisideschen Operatorenmethode oder nach Zurückführung auf eine Integralgleichung mit Hilfe einer Neumannschen Reihe. Im folgenden wird die *Grundlösung* dieses Problems angegeben. Die Differentialgleichung besitzt nur reelle Charakteristiken, nämlich die Linien $x = \text{const.}$ und $t = \text{const.}$, wobei die Schar $t = \text{const.}$ zweifach zu zählen ist; daher zeigt ihre Grundlösung weitgehende Ähnlichkeit mit der „Riemannschen Funktion" einer hyperbolischen Differentialgleichung höherer Ordnung[2]). Durch Benutzung der Grundlösung läßt sich die gesuchte Lösung der Randwertaufgabe natürlich unmittelbar explicit angeben.

[1]) Für spezielle Randwerte wurde dieses Problem kürzlich behandelt von S. Kienow, Schichtverbiegungen als Folgeerscheinungen plastischer Deformationen von Erdkrustenteilen. Geologische Rundschau 25 (1934).

[2]) Diese habe ich untersucht in der Arbeit „Verallgemeinerung der Riemannschen Integrationsmethode auf hyperbolische Differentialgleichungen n-ter Ordnung", Math. Annalen 103. Leider habe ich erst mehrere Jahre nach dem Erscheinen dieser Arbeit erfahren, daß sich für $n = 3$ die wesentlichen Gedanken und Resultate der Arbeit bereits in folgenden Arbeiten von E. Holmgren finden: „Sur l'extension de la méthode d'intégration de Riemann", Arkiv f. Mat., Astr. och Fys. 1, 317—326 und 5, Nr. 16. In der zweiten Arbeit „Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre", ebenda 6, Nr. 2, wird das entsprechende Resultat für n lineare Differentialgleichungen erster Ordnung abgeleitet. Damit ist zwar auch für die allgemeine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung die Darstellbarkeit durch die Anfangswerte prinzipiell dargetan. Doch ist die explizite Darstellung der Lösung (vgl. insbesondere § 11 meiner Arbeit) damit noch nicht gewonnen.

Konstruktion der Grundlösung.

Wir setzen voraus: $f(x,t)$ stetig in $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t$; $\varphi(t),\ \psi(t)$ stetig in $0 \leqq t$; $\omega(x)$ zweimal stetig differenzierbar in $0 \leqq x \leqq 1$, und verlangen von der Lösung $u(x,t)$ und ihren Ableitungen[3]) $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_{xxt} = \frac{\partial}{\partial t}(u_{xx})$ Stetigkeit in $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t$. Dann bedeutet es keine Einschränkung $\varphi = \psi = \omega = 0$ vorauszusetzen; denn ist $g(x,t) = (1-x)(\psi(t) - \omega(0)) + x(\varphi(t) - \omega(1)) + \omega(x)$ und bezeichnet $u^0(x,t)$ die Lösung von $u^0_{xxt} - a u^0 = f(x,t) - a g(x,t)$ mit verschwindenden Randwerten, so ist $u(x,t) = u^0(x,t) + g(x,t)$ die Lösung des allgemeinen Problems. Im folgenden wird also $u(x,0) = u(0.t) = u(1,t) = 0$ angenommen.

Wir machen den Ansatz

$$(*) \qquad u(x,t) = \int_0^1 d\xi \int_0^t d\tau\, f(\xi,\tau)\, v(x,t;\xi,\tau)$$

und suchen die „Grundlösung" $v(x,t;\xi\tau)$ so zu bestimmen, daß $u(x,t)$ Lösung der gestellten Aufgabe wird; dabei soll v bei festem ξ,τ in $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t$ stetig sein und es sollen v_x, v_{xx}, v_{xxt} sowohl in $0 \leqq x \leqq \xi,\ 0 \leqq t$, als auch in $\xi \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq t$ stetig sein. Dann wird

$$\begin{aligned} u_{xxt} - a u = &\int_0^1 d\xi \int_0^t d\tau\, f(\xi,\tau)\,[v_{xxt}(x,t;\xi,\tau) - a\, v(x,t;\xi,\tau)] \\ &+ \int_0^t d\tau\, \frac{\partial}{\partial t}[v_x(x,t;x+0,\tau) - v_x(x,t;x-0,\tau)] \\ &+ \int_0^1 d\xi\, f(\xi,t)\, v_{xx}(x,t;\xi,t) \\ &+ f(x,t)\cdot[v_x(x,t;x+0,t) - v_x(x,t;x-0,t)]. \end{aligned}$$

Man wird also verlangen

1. $v(0,t;\xi,\tau) = v(1,t;\xi,\tau) = 0$, (wegen $u(0,t) = u(1,t) = 0$);
2. $v_{xxt}(x,t;\xi,\tau) - a\, v(x,t;\xi,\tau) = 0$;
3. $v_x(x,t;x+0,\tau) - v_x(x,t;x-0,\tau) = 1$;
4. $v(x,t;\xi,t) = G(x,\xi) = \begin{cases} (1-\xi)x & \text{für } x \leqq \xi \\ (1-x)\xi & \text{für } x \geqq \xi \end{cases}$.

[3]) Hier und im folgenden ist die Reihenfolge der Differentiationen wesentlich.

Wegen $v_x(x,t;x-0,\tau) = v_x(x+0,t;x,\tau)$ und $v_x(x,t;x+0,\tau) = v_x(x-0,t;x,\tau)$ kann man die dritte Bedingung unter Vertauschung von x mit ξ auch so schreiben:

3a. $v_x(\xi-0,t;\xi,\tau) - v_x(\xi+0,t;\xi,\tau) = 1.$

Und statt 4. nach Ersetzung von t durch τ:

4a. $v(x,\tau;\xi,\tau) = G(x,\xi).$

Bezeichnet man zur Abkürzung $v(x,t;\xi,\tau) = V(x,t)$, so wird zusammenfassend die Grundlösung V bestimmt durch:

I. $V(x,t)$ stetig in $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq \tau$.
V_x, V_{xx}, V_{xxt} stetig in $0 \leqq x \leqq \xi$, $0 \leqq t \leqq \tau$ und $\xi \leqq x \leqq 1, 0 \leqq t \leqq \tau$.

II. $V_{xxt} - a\,V = 0.$

III. $V(x,\tau) = G(x,\xi)$, $V_x(\xi-0,t) - V_x(\xi+0,t) = 1$, $\quad 0 \leqq t \leqq \tau.$

IV. $V(0,t) = V(1,t) = 0.$

Offensichtlich ist $V(x,t)$ durch diese Forderungen eindeutig bestimmt. Die Existenz von V ergibt sich z. B. aus dem Ansatz $V = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x,\xi)(t-\tau)^n$, der sofort $c_n(x,\xi) = \frac{a^n}{n!} G^{(n+1)}(x,\xi)$ mit

$$G^{(n+1)}(x,\xi) = \int_0^1 G(x,x')\,G^{(n)}(x',\xi)\,dx'; \quad G^{(1)}(x,\xi) = G(x,\xi)$$

liefert.

Also

$$V(x,t) = v(x,t;\xi,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} G^{(n+1)}(x,\xi)\,\frac{a^n}{n!}\,(t-\tau)^n.$$

Wegen $|G^{(n+1)}(x,\xi)| \leqq 1$ konvergiert die Reihe rechts absolut und gleichmäßig für jedes feste Gebiet $0 \leqq x,\ \xi \leqq 1,\ 0 \leqq t,\ \tau \leqq T$. Tatsächlich gehorcht das so bestimmte V den Forderungen I bis IV.

Benutzt man

$$G(x,\xi) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(\nu\pi x)\sin(\nu\pi\xi)}{\nu^2\pi^2},$$

$$G^{(n+1)}(x,\xi) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(\nu\pi x)\sin(\nu\pi\xi)}{(\nu^2\pi^2)^{n+1}},$$

so wird

$$V(x,t) = v(x,t;\xi\tau) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{\frac{a(t-\tau)}{\nu^2\pi^2}} \frac{\sin(\nu\pi x)\sin(\nu\pi\xi)}{\nu^2\pi^2}.$$

Mit der Grundlösung $v(x,t;\xi\tau)$ gibt (*) die Lösung der gestellten Randwertaufgabe[4]).

[4]) Über Verallgemeinerungen der hier entwickelten Methode vgl. Djiang Schuo-min, Eine gemischte Randwertaufgabe für partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung. Diss. Marburg 1935.

(Eingegangen am 1. 8. 1935.)

Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie.

Von

Gerhard Gentzen in Göttingen.

Als „*reine Zahlentheorie*“ bezeichne ich die Theorie der natürlichen Zahlen ohne Verwendung von Hilfsmitteln aus der Analysis, wie z. B. von irrationalen Zahlen oder unendlichen Reihen.

Das Ziel der vorliegenden Abhandlung ist, die *Widerspruchsfreiheit* der reinen Zahlentheorie zu beweisen, oder richtiger gesagt, auf gewisse Grundlagen allgemeiner Art zurückzuführen.

Wie ein solcher Widerspruchsfreiheitsbeweis überhaupt möglich ist, und aus welchen Gründen er notwendig oder wenigstens sehr angebracht ist, das wird im I. Abschnitt erörtert.

Die ganze Abhandlung kann ohne besondere Vorkenntnisse gelesen werden.

Einteilung:

Seite

I. Abschnitt (§ 1—2): Betrachtungen über Sinn und Möglichkeit von Widerspruchsfreiheitsbeweisen. 493

II. Abschnitt (§ 3—6): Die Formalisierung der reinen Zahlentheorie 501

III. Abschnitt (§ 7—11): Bedenkliche und unbedenkliche Schlußweisen in der reinen Zahlentheorie 520

IV. Abschnitt (§ 12—15): Der Widerspruchsfreiheitsbeweis. 533

V. Abschnitt (§ 16—17): Betrachtungen zum Widerspruchsfreiheitsbeweis 556

I. Abschnitt.

Betrachtungen über Sinn und Möglichkeit von Widerspruchsfreiheitsbeweisen.

In § 1 behandle ich die Frage, warum Widerspruchsfreiheitsbeweise *notwendig* sind, in § 2, wie solche *möglich* sind[1]). Ich will hierbei die Problemlage, die vielen Lesern bereits bekannt sein wird, besonders im Hinblick auf die für die folgenden Abschnitte wichtigen Gesichtspunkte kurz wiedergeben.

[1]) Ausführlichere und sehr lesenswerte Darlegungen zu diesen Fragen enthält der Aufsatz von D. Hilbert, Über das Unendliche, Math. Annalen 95 (1926), S. 161—190.

§ 1.
Die Antinomien der Mengenlehre und ihre Bedeutung für die gesamte Mathematik[2]).

1.1. Die Mathematik gilt als die sicherste von allen Wissenschaften. Daß sie zu Ergebnissen führen könne, die einander widersprechen, erscheint unmöglich. Dieser Glaube an die unbedingte Sicherheit der mathematischen Beweise erlitt einen starken Stoß durch die etwa um 1900 entdeckten „*Antinomien* (oder „Paradoxien") der Mengenlehre". Es zeigte sich nämlich, daß in diesem Randgebiet der Mathematik Widersprüche auftreten, ohne daß ein eindeutig feststellbarer Fehler in den dahinführenden Schlüssen zu erkennen wäre.

Besonders lehrreich ist die „*Russellsche Antinomie*", auf die ich im folgenden etwas näher eingehen will.

1.2. Eine Menge ist die Gesamtheit irgendwelcher Gegenstände („Elemente der Menge"). Auch eine „leere Menge", die überhaupt keine Elemente hat, wird zugelassen. Wir teilen nun die Mengen ein in „Mengen 1. Art", das sind solche Mengen, die *sich selbst* als Element enthalten, und „Mengen 2. Art", das sind solche, die sich selbst *nicht* als Element enthalten.

Nun betrachten wir die Menge $\mathfrak{M}$, welche als Elemente die sämtlichen Mengen 2. Art hat. Gehört diese Menge $\mathfrak{M}$ nun selber zur 1. oder zur 2. Art? Beides erweist sich als widersinnig: Gehörte sie nämlich zur 1. Art, d. h. enthielte sie sich selbst als Element, so widerspräche das ihrer Definition, wonach ihre Elemente sämtlich Mengen 2. Art sein sollten. Nehmen wir nun an, die Menge $\mathfrak{M}$ gehöre zur 2. Art, d. h. sie enthalte sich selbst nicht als Element. Da sie jedoch nach ihrer Definition sämtliche Mengen 2. Art als Elemente hat, so müßte sie in diesem Falle doch auch sich selbst als Element enthalten, und damit sind wir abermals zu einem Widerspruch gelangt.

1.3. Das ist die *Russellsche Antinomie*, welche zeigt, wie sich bereits durch ganz wenige, freilich etwas verzwickte Schlüsse ein offenkundiger Widerspruch ergeben kann.

Welche *Bedeutung* hat nun diese Tatsache für die *gesamte Mathematik?* Man wird zunächst geneigt sein, den angeführten Gedankengang überhaupt nicht der *Mathematik* zuzurechnen, mit der Begründung, daß der Begriff „Menge von irgendwelchen Gegenständen" zu unbestimmt sei, um als mathematischer Begriff gelten zu können.

---

[2]) Vgl. hierzu auch: H. Weyl, Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik, Math. Zeitschr. 10 (1921), S. 39—79; und A. Fraenkel, Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre (oder auch die entsprechenden Abschnitte in Fraenkels Lehrbuch der Mengenlehre).

Um diesem Einwand zu begegnen, können wir uns auf ganz spezielle, rein *mathematische* Gegenstände beschränken, indem wir etwa folgende Festsetzung treffen:

Als Elemente einer „Menge" werden nur zugelassen 1. beliebige natürliche Zahlen (1, 2, 3, 4 usw.); 2. beliebige Mengen, welche aus zugelassenen Elementen bestehen.

Beispiel: Folgende drei Elemente bilden eine zulässige Menge: 1. die Zahl 4; 2. die Menge aller natürlichen Zahlen; 3. die Menge, deren zwei Elemente die Zahl 3 und die Menge aller natürlichen Zahlen sind.

Unter Benutzung dieses rein *mathematischen* Mengenbegriffs können wir nun wie oben (1.2) schließen und erhalten *denselben Widerspruch.*

1.4. Daß wir als Ausgangsgegenstände gerade die *natürlichen Zahlen* genommen haben, spielt offenbar für das Zustandekommen der Antinomie gar keine Rolle. Wir werden also nicht etwa sagen können, daß sich damit ein Widerspruch im Bereich der *natürlichen Zahlen* offenbart, sondern wir werden richtiger die verwendeten *logischen Schlüsse* als fehlerhaft ansehen müssen.

1.5. Als nächstes wird man darum versuchen, in dem Gedankengang der Antinomie einen *bestimmten Fehler* ausfindig zu machen. Man wird etwa so sagen: Die Menge $\mathfrak{M}$ wurde definiert unter Bezugnahme auf die Gesamtheit *aller* Mengen (diese wurden ja eingeteilt in Mengen 1. und 2. Art, und $\mathfrak{M}$ aus den Mengen 2. Art gebildet). Danach wurde sie selbst dieser Gesamtheit zugerechnet, nämlich die Frage aufgeworfen, ob sie der 1. oder 2. Art angehört. Dieses Verfahren ist aber *zirkelhaft*; man darf nicht einen Gegenstand mittels einer Gesamtheit definieren und ihn dann selbst dieser Gesamtheit zurechnen, so daß er gewissermaßen an seiner eigenen Definition mitbeteiligt wäre („circulus vitiosus").

Die *richtige* Auffassung der Menge $\mathfrak{M}$ wäre vielmehr diese:

Wenn eine *bestimmte Gesamtheit* von Mengen gegeben ist, so kann man diese einteilen in Mengen 1. und 2. Art. Wenn man nun aber die Mengen 2. Art (oder auch 1. Art) zu einer Menge $\mathfrak{M}$ zusammenfaßt, so ist diese Menge etwas *vollkommen neues*, was nicht wieder jener Gesamtheit zugerechnet werden kann.

1.6. Daß zunächst die zur Antinomie führenden Schlußweisen richtig erscheinen, beruht auf der Vorstellung, daß der Begriff „Menge" etwas *„an sich"* bestimmtes sei (und somit die Gesamtheit aller Mengen eine von vornherein bestimmte, abgeschlossene Gesamtheit darstelle); die eben durchgeführte Kritik stellt dem die Vorstellung gegenüber, daß Mengen nur *„konstruktiv"*, aufeinander aufbauend, immer wieder neu gebildet werden können.

1.7. Könnte man somit glauben, mit der Antinomie einigermaßen fertig geworden zu sein, so ergibt sich nun eine neue Schwierigkeit:

Das eben als unzulässig erklärte Schlußverfahren (der circulus vitiosus) wird in ganz ähnlicher Form bereits *in der Analysis* angewandt, sogar schon bei den üblichen Beweisen von einigen ganz einfachen Sätzen, z. B. des Satzes: „Eine in einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion, die an beiden Endpunkten verschiedenes Vorzeichen hat, besitzt in dem Intervall eine Nullstelle."

Die für diese Feststellung wesentlichen Schlüsse im Beweise des Satzes sind folgende:

Man teilt die Gesamtheit der Punkte in dem Intervall in Punkte 1. und 2. Art ein, und zwar wird ein Punkt zur 1. Art gerechnet, wenn die Funktion rechts von ihm bis zum Ende des Intervalls überall gleiches Vorzeichen hat, zur 2. Art, wenn dies nicht der Fall ist. Der durch diese Einteilung definierte Grenzpunkt ist dann die Nullstelle. Diese gehört selbst zu den Punkten des Intervalls. Damit haben wir den „circulus vitiosus": Die betreffende reelle Zahl wird definiert unter Bezugnahme auf die *Gesamtheit* der reellen Zahlen (in einem Intervall), und wird dann selbst dieser *Gesamtheit zugerechnet.*

Trotzdem wird man diese Schlußweise in der Analysis für *richtig* halten, und das etwa so begründen: Die betreffende Zahl wird ja nicht *neu geschaffen* durch ihre angegebene Definition, sie ist vielmehr *an sich* schon vorhanden innerhalb der Gesamtheit von reellen Zahlen und wird nur durch eine allerdings auf die Gesamtheit bezogene Erklärung aus dieser *herausgegriffen.*

Aber genau dasselbe kann man doch auch bei der oben angeführten Antinomie sagen: Die Menge $\mathfrak{M}$ sei *an sich* von vornherein in der (durch die Definition unter 1.3 erklärten) Gesamtheit aller Mengen schon vorhanden, und werde eben durch die (unter 1.2 gegebene) Erklärung aus dieser Gesamtheit herausgegriffen!

Gewiß bestehen trotzdem beträchtliche *Unterschiede* zwischen den bei der Antinomie und den bei dem Beweise aus der Analysis benutzten Schlußweisen. Es fragt sich nur, ob man diese für ausreichend halten darf, um die letzteren als sicher anzusehen — schließlich sind ja bisher in der Analysis noch keine Widersprüche aufgetreten — oder ob man die Ähnlichkeit mit der Antinomie für hinreichend ansehen soll, um den entsprechenden Schluß in der Analysis als unzulässig zu erklären. Hierin gehen die *Meinungen* der Mathematiker, die sich mit diesen Fragen beschäftigt haben, *auseinander.*

1.8. Man kann noch *andere* in der Mathematik gebräuchliche Schlußweisen auf Grund gewisser entfernterer Analogien zu den bei den Anti-

nomien auftretenden Schlüssen *anfechten*. Besonders weit gehen hierin die „*Intuitionisten*" (Brouwer), die sogar gegen Schlußweisen, die in der *Zahlentheorie* vorkommen, Einwendungen machen, nicht nur weil diese vielleicht zu *Widersprüchen* führen könnten, sondern weil die mit ihrer Hilfe erhaltenen Sätze keinen sachlichen *Sinn* mehr hätten, also wertlos wären. Ich werde hierauf ausführlich zurückkommen (§ 9—11 und 17. 3).

Weniger weit gehen die „*Logizisten*" (Russell). Sie ziehen eine Grenze zwischen erlaubten und unerlaubten Schlußweisen, wobei die Antinomien herausfallen, indem dabei ein unerlaubter circulus vitiosus verwendet wird. Der oben angegebene ähnliche Schluß in der Analysis wurde ursprünglich ebenfalls verboten („verzweigte Typentheorie"), später aber wieder zugelassen.

1. 9. Insgesamt ergibt sich also folgendes Bild:

Die in der Mengenlehre, einem Randgebiet der Mathematik, auftretenden Widersprüche (Antinomien) gaben Anlaß, die Richtigkeit gewisser auch in der sonstigen Mathematik gebräuchlicher Schlußweisen anzuzweifeln. Verschiedene Versuche, eine Abgrenzung zwischen erlaubten und unerlaubten Schlußweisen vorzunehmen, haben zu verschiedenen Grenzziehungen geführt.

Um diesem unbefriedigenden Zustand ein Ende zu machen, stellte Hilbert folgendes *Programm* auf:

Die *Widerspruchsfreiheit* der gesamten Mathematik, soweit sich diese als widerspruchsfrei herausstellt, soll auf exakt mathematischem Wege *bewiesen* werden. Dieser Beweis soll unter Verwendung von solchen Schlußweisen geführt werden, die von jeglicher Anfechtbarkeit frei sind („finite" Schlußweisen).

Wie ein solcher Widerspruchsfreiheitsbeweis überhaupt denkbar ist, werde ich in § 2 näher auseinandersetzen.

Im weiteren Verlauf der Arbeit führe ich dann einen derartigen Widerspruchsfreiheitsbeweis für die *reine Zahlentheorie* durch. Diese enthält durchaus schon Schlußweisen, die bei scharfer Kritik zu Bedenken Anlaß geben. Näheres hierüber im III. Abschnitt. Auf eines will ich schon hier hinweisen: *Die* Schlußweisen, die sich als allenfalls bedenklich herausstellen, kommen in den wirklichen zahlentheoretischen Beweisen *kaum vor* (11. 4); man darf also nicht auf Grund der großen *Evidenz dieser Beweise* einen Widerspruchsfreiheitsnachweis für überflüssig halten.

§ 2.

Wie sind Widerspruchsfreiheitsbeweise möglich?

2. 1. *Allgemeines über Widerspruchsfreiheitsbeweise.*

2. 11. Die Widerspruchsfreiheit von *Geometrien* pflegt man durch Zurückführung auf ein *arithmetisches* Modell zu beweisen. Die Widerspruchsfreiheit der *Arithmetik* wird also hierbei *vorausgesetzt*. In ähnlicher

Weise lassen sich einige Teile der Arithmetik auf andere abbilden, z. B. die Theorie der komplexen Zahlen auf die der reellen Zahlen.

Es bleibt letztlich die Widerspruchsfreiheit der Theorie der *natürlichen* Zahlen (reine Zahlentheorie) und der Theorie der *reellen* Zahlen (Analysis), die jene als Teil enthält, zu beweisen; sowie schließlich der Mengenlehre, soweit diese widerspruchsfrei ist.

2.12. Diese Aufgabe ist eine *grundsätzlich andere* und schwierigere als die erwähnten Zurückführungen durch Abbildung der Gegenstände einer Theorie auf die Gegenstände einer anderen Theorie. Betrachten wir die Verhältnisse bei den *natürlichen* Zahlen etwas näher:

Diese lassen sich offenbar auf keinen *einfacheren Gegenstandsbereich* mehr abbilden. Es handelt sich aber auch gar nicht um die Widerspruchsfreiheit des *Zahlenbereiches* selbst, d. h. der durch die „Axiome" (z. B. die „Peanoschen Axiome" der Zahlentheorie) festgelegten Grundbeziehungen zwischen den Zahlen. Die Widerspruchsfreiheit dieser Axiome zu beweisen, ohne dabei etwas ihnen gleichwertiges schon vorauszusetzen, erscheint undenkbar. Es handelt sich vielmehr um die Widerspruchsfreiheit des *logischen Schließens* in seiner Anwendung auf die natürlichen Zahlen (*ausgehend* von deren *Axiomen*), wie es in den *Beweisen* der Zahlentheorie stattfindet. Denn gerade das logische Schließen führte ja in seiner weitestgehenden Anwendung zur Antinomie (1.4). So allgemeine Begriffsbildungen wie die der beliebigen Mengen von Mengen (1.3) rechnen wir freilich nicht zur *Zahlentheorie*. Zur reinen Zahlentheorie gehören lediglich *endliche* Mengen (von natürlichen Zahlen etwa). Nimmt man *unendliche* Mengen von natürlichen Zahlen hinzu, so gelangt man bereits zu den reellen Zahlen und damit zur *Analysis*. Das ist die grundsätzliche *Abgrenzung zwischen reiner Zahlentheorie und Analysis*.

Von hier aus gelangt man dann zur *Mengenlehre*, indem man den Begriff „Menge" noch weiter ausdehnt.

Wie kann man nun die *Widerspruchsfreiheit* der *Arithmetik beweisen?*

2.2. *„Beweistheorie"*.

2.21. Die Behauptung, daß eine mathematische Theorie *widerspruchsfrei* sei, stellt eine Aussage über die in der Theorie möglichen *Beweise* dar. Sie besagt ja, daß keiner dieser Beweise auf einen Widerspruch führt. Will man also Widerspruchsfreiheit beweisen, so muß man die in einer Theorie möglichen Beweise selbst zu *Gegenständen* einer neuen „Meta-Theorie" machen. Die Theorie beliebiger mathematischer Beweise als Gegenstände wird *„Beweistheorie"*, oder „Metamathematik", genannt.

2.22. Ein *Beispiel eines Lehrsatzes der Beweistheorie* ist das *„Dualitätsprinzip"* in der projektiven Geometrie:

Dieses besagt (in der Ebene) ungefähr, daß man aus einem Satz über Punkte und Geraden wieder einen richtigen Satz erhält, wenn man in ihm das Wort „Punkt" durch „Gerade" und das Wort „Gerade" durch „Punkt" ersetzt. Beispielsweise ergibt der Satz: „Zu zwei voneinander verschiedenen Geraden gibt es genau einen Punkt, der mit beiden Geraden inzidiert (d. h. auf ihnen liegt)" als duales Gegenstück den Satz: „Zu zwei voneinander verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, die mit beiden Punkten inzidiert (d. h. durch sie geht)".

Das Dualitätsprinzip wird so *begründet*: Die Axiome der projektiven Geometrie der Ebene sind so beschaffen, daß die duale Umformung eines Axioms jeweils wieder ein Axiom ergibt. Wenn nun irgendein Satz aus diesen Axiomen abgeleitet worden ist, so kann man in dem ganzen Beweis das Wort „Punkt" durch „Gerade", das Wort „Gerade" durch „Punkt" ersetzen, und erhält damit einen *Beweis* für den *dualen* Satz.

Diese Begründung ist offenbar der *Beweistheorie* zuzurechnen, sie hat ja den „Beweis eines Satzes" zum Gegenstand.

(Dieses Beispiel zeigt auch, daß die Beweistheorie die eigentliche Mathematik zu fördern vermag.)

2. 2 3. *Die „Formalisierung" der mathematischen Beweise.*

Gegenstände der Beweistheorie sollen die in der eigentlichen Mathematik geführten *Beweise* sein. Nun pflegt man diese Beweise mit *Worten* der *Sprache* auszudrücken. Diese haben den Nachteil, daß es viele verschiedene Redewendungen für *dieselbe* Aussage gibt, daß Willkür in der Anordnung der Worte besteht, manchmal auch *Zweideutigkeit*. Daher empfiehlt es sich, um eine exakte Behandlung der Beweise zu ermöglichen, diesen zunächst eine einheitliche, eindeutig festgelegte Form zu geben. Das geschieht durch die „Formalisierung" der Beweise: Die Worte der Sprache werden durch bestimmte *Zeichen* ersetzt, die logischen Schlußweisen durch formale Regeln zur Bildung von neuen formal dargestellten Aussagen aus schon bewiesenen.

Im II. Abschnitt werde ich eine solche *Formalisierung* für die *reine Zahlentheorie* durchführen.

Das Beispiel des Dualitätsprinzips (2. 2 2) zeigte deutlich die Schwierigkeiten, die sich für die Beweistheorie ohne Formalisierung ergeben: Der sprachliche Ausdruck des Satzes „zu zwei voneinander verschiedenen Geraden gibt es genau einen Punkt, der mit beiden Geraden inzidiert" mußte künstlich so gewählt werden, daß die Ersetzung von „Punkt" durch „Gerade" und umgekehrt wieder einen verständlichen Satz ergibt. Man hat auch bei dem Beweise des Dualitätsprinzips das Gefühl, daß dieser kein richtig strenger Beweis sei. Um ihn dazu zu machen, wäre eben

die exakte Formalisierung der Aussagen und Beweise (für den Bereich der projektiven Geometrie) notwendig.

2.3. *Die beim Widerspruchsfreiheitsbeweis zu benutzenden Schlußweisen; der Satz von Gödel.*

2.31. Wie ist nun ein Widerspruchsfreiheitsbeweis, etwa für die reine Zahlentheorie, mit Hilfe der Beweistheorie zu führen?

Man wird zunächst genau angeben müssen, was unter einem formalisierten „zahlentheoretischen Beweis" zu verstehen ist. Alsdann hat man *nachzuweisen*, daß es unter allen möglichen solchen „Beweisen" keinen geben kann, der auf einen „Widerspruch" führt. (Dies ist eine einfache, an jedem vorgelegten „Beweis" sofort nachprüfbare Eigenschaft von „Beweisen".)

Ein solcher Widerspruchsfreiheitsbeweis wäre nun wieder ein *mathematischer Beweis*, in dem gewisse Schlüsse und Begriffsbildungen verwendet würden. Diese müssen als sicher (insbesondere als widerspruchsfrei) bereits *vorausgesetzt* werden. Ein *„absoluter Widerspruchsfreiheitsbeweis"* ist also *nicht möglich*. Ein Widerspruchsfreiheitsbeweis kann lediglich die Richtigkeit gewisser Schlußweisen auf die Richtigkeit anderer Schlußweisen *zurückführen*.

Man wird also verlangen müssen, daß in einem Widerspruchsfreiheitsbeweis nur solche Schlußweisen benutzt werden, die im Vergleich zu den Schlußweisen der Theorie, deren Widerspruchsfreiheit man beweist, als erheblich *sicherer* gelten können.

2.32. Von größter Bedeutung für diesen Punkt ist der folgende, von K. Gödel bewiesene beweistheoretische *Satz*[3]: „Es ist nicht möglich, die Widerspruchsfreiheit einer formal gegebenen (abgegrenzten) Theorie, welche die reine Zahlentheorie in sich enthält (und bereits dieser selbst), mit den gesamten Hilfsmitteln der betreffenden Theorie selbst nachzuweisen (vorausgesetzt, daß diese Theorie wirklich widerspruchsfrei ist)".

Daraus folgt also, daß man, um die Widerspruchsfreiheit etwa der reinen Zahlentheorie zu beweisen, für diesen Beweis keineswegs mit einem *Teil* der in der reinen Zahlentheorie verwendbaren Beweismittel auskommt, ja nicht einmal mit *allen* diesen Beweismitteln. Ist dann aber überhaupt noch eine wirkliche *Zurückführung* möglich?

Nun, es bleibt ja durchaus denkbar, daß man die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie nachweisen kann mit Hilfsmitteln, die zum Teil nicht mehr der reinen Zahlentheorie angehören, aber trotzdem als *sicherer* gelten können als die bedenklichen Bestandteile der reinen Zahlentheorie selbst.

[3]) K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, Monatsh. f. Math. u. Phys. 38 (1931), S. 173—198.

2.4. Im folgenden (II.—IV. Abschnitt) werde ich einen Widerspruchsfreiheitsbeweis für die reine Zahlentheorie durchführen. Dabei werden in der Tat Hilfsmittel Anwendung finden, die nicht der reinen Zahlentheorie angehören (16.2). Es gibt in der Literatur[4]) bereits verschiedene Widerspruchsfreiheitsbeweise, die alle im wesentlichen bis zu dem gleichen Punkte führen, nämlich zur Erledigung der reinen Zahlentheorie mit Ausnahme der Schlußweise der „vollständigen Induktion", die bekanntlich eine in der Zahlentheorie sehr wichtige, häufig angewandte Schlußweise ist. Die durch meinen Beweis geleistete Einbeziehung der vollständigen Induktion macht bestimmte Schwierigkeiten (16.2).

II. Abschnitt.

Die Formalisierung der reinen Zahlentheorie.

Wie ich unter 2.23 auseinandergesetzt habe, empfiehlt es sich für die beweistheoretische Behandlung einer mathematischen Theorie, dieser eine genau formal festgelegte Gestalt zu geben. Um also die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie zu beweisen, führe ich zunächst eine solche *Formalisierung der reinen Zahlentheorie* durch[5]).

Diese Aufgabe zerfällt in zwei Teile:

1. Die Formalisierung der in der reinen Zahlentheorie vorkommenden *Aussagen* (§ 3).

2. Die Formalisierung der in der reinen Zahlentheorie verwendeten *Beweismittel*, d. h. Schlußweisen und Begriffsbildungen (§ 4—6).

§ 3.

Die Formalisierung der in der reinen Zahlentheorie vorkommenden Aussagen.

3.1. *Vorbereitende Erläuterungen.*

3.11. Eine Formalisierung der mathematischen Aussagen ist auch außerhalb der Beweistheorie nichts grundsätzlich Neues. Vielmehr findet schon von jeher in der Mathematik eine fortschreitende Formalisierung,

[4]) W. Ackermann, Begründung des „tertium non datur" mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit, Math. Ann. 93 (1925), S. 1—36; J. von Neumann, Zur Hilbertschen Beweistheorie, Math. Zeitschr. 26 (1927), S. 1—46; J. Herbrand, Sur la non-contradiction de l'Arithmétique, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 166 (1932), S. 1—8; G. Gentzen, Untersuchungen über das logische Schließen, Math. Zeitschr. 39 (1935), S. 176—210, 405—431.

[5]) Es gibt schon verschiedene solche Formalisierungen, an die sich die hier vorgeführte mehr oder weniger anschließt.

d. h. Ersetzung der Sprache durch mathematische Symbole, statt. So gibt es Aussagen, die man ganz in Zeichen schreibt, z. B. $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$, in Worten etwa: „Das Produkt aus der Summe und der Differenz der Zahlen a und b ist gleich der Differenz der Quadrate beider Zahlen". Dagegen wird die Aussage „Wenn $a = b$ ist, so ist $b = a$" im allgemeinen noch unter Benutzung von Worten dargestellt. Völlig formalisiert, wird sie geschrieben: $a = b \supset b = a$.

3.12. Die Wortverbindung „wenn $\mathfrak{A}$ gilt, so gilt $\mathfrak{B}$", formal geschrieben: $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, ist ein Beispiel einer *Verknüpfung von Aussagen* zur Bildung einer neuen Aussage. Weitere *Aussagenverknüpfungen* werden dargestellt durch die Zeichen &, $\vee$, $\neg$, $\forall$ und $\exists$ mit folgenden Bedeutungen: $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{B}$ bedeutet „$\mathfrak{A}$ gilt *und* $\mathfrak{B}$ gilt", $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$: „$\mathfrak{A}$ gilt *oder* $\mathfrak{B}$ gilt" (d. h. *mindestens eine* der beiden Aussagen ist gültig), $\neg \mathfrak{A}$: „$\mathfrak{A}$ gilt *nicht*", $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$: „$\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ gilt für *alle* $\mathfrak{x}$", $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$: „*es gibt* ein $\mathfrak{x}$, sodaß $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ gilt".

3.13. Als *Beispiel* gebe ich den „Goldbachschen Satz" („jede gerade natürliche Zahl ist als Summe von zwei Primzahlen darstellbar") in formaler Gestalt an:

$$\forall x \{2 \mid x \supset \exists y \exists z [y + z = x \,\&\, (\mathrm{Prim}\ y \,\&\, \mathrm{Prim}\ z)]\}.$$

Dabei bedeute Prim a „a ist eine Primzahl"; $a \mid b$, wie üblich, „a ist ein Teiler von b". Alle *Variablen* sollen sich nur auf natürliche (= positive ganze) Zahlen beziehen.

3.14. Die Zeichen $=$, Prim und $\mid$ sind „*Prädikatzeichen*"; ein solches Zeichen stellt, nach Einsetzen von Zahlen in seine „Argumentstellen" eine *Aussage* dar. Das Zeichen $+$ ist ein „*Funktionszeichen*"; ein solches stellt, nach Einsetzen von Zahlen in seine Argumentstellen, wieder eine *Zahl* dar.

Das formale Abbild einer *Aussage* nennen wir allgemein eine „*Formel*". (Wie man ja auch in der Mathematik z. B. $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ eine „Formel", freilich in speziellerem Sinne, nennt.)

Nach diesen Erläuterungen gebe ich nun eine genaue Kennzeichnung derjenigen formalen Ausdrücke, die in der formalisierten Zahlentheorie zur Darstellung von Aussagen zugelassen sein sollen.

3.2. *Genaue Abgrenzung des Begriffs „Formel"* [6]).

3.21. Zur Bildung von Formeln dienen folgende Arten von *Zeichen*:

---

[6]) Da die Bezeichnung „Formel" ganz allgemein für formalisierte Aussagen gelten soll, wäre der hier erklärte Sonderfall richtiger etwa als „zahlentheoretische Formel" zu bezeichnen. Da in der vorliegenden Arbeit keine anderen „Formeln" auftreten, kann dieser Zusatz unterbleiben. Entsprechendes gilt für die Begriffe „Term", „Funktionszeichen" usw.

3.2 1 1. Zeichen für *bestimmte natürliche Zahlen*: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ..., kurz „Zahlzeichen" genannt. (Zeichen für *andere* Zahlen brauchen wir nicht.)

3.2 1 2. *Variable* für *natürliche Zahlen*: Diese teile ich ein in *freie* und *gebundene* Variable (s. u.). Als Variable können beliebige noch nicht anders verwendete Zeichen dienen; es ist nur jeweils anzugeben, ob ein solches Zeichen eine freie oder gebundene Variable sein soll.

3.2 1 3. Zeichen für *bestimmte Funktionen*, kurz „Funktionszeichen" genannt: $+$, $\cdot$ und weitere nach Bedarf (siehe 6. 1).

3.2 1 4. Zeichen für *bestimmte Prädikate*, kurz „Prädikatzeichen" genannt: $=$, $<$, Prim, $|$ und weitere nach Bedarf (siehe 6. 1).

3.2 1 5. Zeichen zur *Verknüpfung* von *Aussagen*: $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\forall$, $\exists$.

3.2 2. Abgrenzung des Begriffs *Term* (formaler Ausdruck für eine — bestimmte oder unbestimmte — *Zahl*):

3.2 2 1. *Zahlzeichen* (3.2 1 1) und *freie Variable* (3.2 1 2) sind Terme.

3.2 2 2. Sind $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ Terme, so sind auch $\mathfrak{s}+\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{t}$ Terme; entsprechend lassen sich auch mit etwaigen weiterhin eingeführten *Funktionszeichen* (3.2 1 3) weitere Terme bilden.

3.2 2 3. *Keine weiteren* Ausdrücke, als solche, die gemäß 3.2 2 1 und 3.2 2 2 gebildet sind, sind Terme.

3.2 2 4. *Beispiel eines Terms*: $[(a+2)^3 \cdot b]+4$; a und b seien freie Variable.

Klammern dienen in bekannter Weise zur Vermeidung von Mehrdeutigkeiten bezüglich der Zusammenfassung der einzelnen Zeichen.

3.2 3. Nunmehr grenze ich den Begriff *Formel* (formales Abbild einer zahlentheoretischen *Aussage*) ab:

3.2 3 1. Ein *Prädikatzeichen* (3.2 1 4), dessen „Argumentstellen" durch irgendwelche *Terme* (3.2 2) ausgefüllt sind, ergibt eine Formel.

Beispiel: $(2+a)\cdot 4 < b$.

3.2 3 2. Ist $\mathfrak{A}$ eine Formel, so ist auch $\neg\,\mathfrak{A}$ eine Formel. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Formeln, so sind auch $\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ Formeln.

3.2 3 3. Aus einer Formel entsteht wieder eine Formel, wenn man eine darin vorkommende freie Variable durchgängig durch eine noch nicht vorkommende gebundene Variable $\mathfrak{x}$ ersetzt und zugleich $\forall\mathfrak{x}$ oder $\exists\mathfrak{x}$ vor die ganze Formel schreibt.

3.2 3 4. *Keine weiteren* Ausdrücke, als solche, die gemäß 3.2 3 1, 3.2 3 2 und 3.2 3 3 gebildet sind, sind *Formeln*.

3.2 4. Durch *Klammern* ist, genau wie bei den Termen, dafür zu sorgen, daß der Aufbau der Formel gemäß 3.2 3 2, 3.2 3 3 eindeutig ersichtlich ist.

Beispiele von Formeln: Siehe 3.1 3, 3.1 1, 3.2 3 1.

Der *inhaltliche Sinn* einer Formel ergibt sich aus den Erläuterungen unter 3.1. Es sei noch hinzugefügt, daß eine Formel mit *freien Variablen* eine „*unbestimmte*" Aussage darstellt, welche erst zu einer „*bestimmten*" wird, wenn man für die freien Variablen Terme ohne freie Variable, z. B. Zahlzeichen, einsetzt[7]).

Minimalterm heißt ein Term, der aus *einem* Funktionszeichen mit *Zahlzeichen* in den Argumentstellen besteht, z. B.: $1 + 3$.

Minimalformel heißt eine Formel, die aus *einem* Prädikatzeichen mit *Zahlzeichen* in den Argumentstellen besteht, z. B.: $4 = 12$.

Transfinit heißt eine Formel, in der mindestens ein $\forall$- oder $\exists$-Zeichen vorkommt.

3.25. *Deutsche* und *griechische* Buchstaben verwende ich als „Mitteilungszeichen", d. h. als Variable der beweistheoretischen Betrachtungen über die Zahlentheorie.

3.3. *Reicht nun unser Formelbegriff zur Darstellung aller in der reinen Zahlentheorie vorkommenden Aussagen aus?*

Streng genommen, ist diese Frage zu verneinen. Es kommen in der reinen Zahlentheorie durchaus Aussagen vor (Beispiele folgen), die mit den formulierten Mitteln nicht unmittelbar formal dargestellt werden können. Wir dürfen diese jedoch ruhig unberücksichtigt lassen, wenn es nur jeweils *gleichwertige* Aussagen gibt, die in unserem Formalismus darstellbar sind.

Hierfür ein paar wichtige *Beispiele*:

3.31. Ich habe als *Gegenstände* der Zahlentheorie nur die *natürlichen Zahlen* berücksichtigt. Nun spielen aber auch die übrigen *ganzen Zahlen*, sowie gelegentlich die *Brüche*, in der Zahlentheorie eine Rolle. Es ist aber nicht schwer, nach irgendeinem Schema alle Aussagen, die von ganzen Zahlen oder auch von Brüchen handeln, in Aussagen über natürliche Zahlen *umzudeuten*, indem man davon ausgeht, daß sich die negativen Zahlen den positiven, die Brüche den Paaren von ganzen Zahlen *zuordnen* lassen. (Ein Beispiel: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ deutet man als $a \cdot d = c \cdot b$.) Nimmt man zu den Gegenständen der Zahlentheorie ferner *endliche Mengen* von natürlichen Zahlen, ganzen Zahlen oder Brüchen hinzu (z. B. die „vollständigen Restsysteme"), so kann man ebenfalls durch geeignete, in diesem Falle

---

[7]) Ich will nicht, wie es sonst in der formalen Logik üblich ist, eine solche Formel als „für beliebige eingesetzte Zahlen gültig" deuten, da in mathematischen Beweisen die freien Variablen in allgemeinerem Sinne benutzt werden; siehe etwa 4.53. Man sollte hier, wie auch bei gebundenen $\exists$-Variablen, sinngemäßer von „Unbestimmten" als von „Variablen" sprechen, doch ist die Bezeichnung „Variable" nun einmal allgemein üblich geworden.

freilich kompliziertere, Umdeutungen alle Aussagen auf Aussagen über natürliche Zahlen zurückführen. Das gleiche gilt für Aussagen über diophantische Gleichungen u. dgl. als Gegenstände.

Ich will diese Umdeutungsmethoden hier nicht näher auseinandersetzen; es liegen keine grundsätzlichen Schwierigkeiten (insbesondere für den Widerspruchsfreiheitsbeweis) darin, und ihre Durchführbarkeit ist von jedem, der sich etwas eingehender mit diesen Dingen beschäftigt hat, leicht einzusehen (siehe auch 17. 2).

Läßt man *unendliche Mengen* von natürlichen, ganzen oder gebrochenen Zahlen zu, so ist eine solche Umdeutung i. allg. nicht mehr möglich; diese sind eben schon Gegenstände der *Analysis* (vgl. 2. 1 2). So pflegt man ja die reellen Zahlen selbst als gewisse unendliche Mengen von rationalen Zahlen zu definieren.

3. 3 2. *Funktionen* und *Prädikate* kommen in der Zahlentheorie in mannigfacher Form vor. Dem habe ich bei der Formeldefinition Rechnung getragen, indem ich unter 3. 2 1 3 und 3. 2 1 4 „weitere Zeichen nach Bedarf" zuließ. Näheres über die Einführung von beliebigen Funktionen und Prädikaten folgt in § 6.

3. 3 3. Was schließlich die *Aussagenverknüpfungen* anbetrifft, so gibt es da beispielsweise folgende gebräuchliche Redewendungen:

„Die Aussage $\mathfrak{A}$ gilt *dann und nur dann*, wenn die Aussage $\mathfrak{B}$ gilt." Diese Verknüpfung stellen wir natürlich so dar: $(\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}) \,\&\, (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$.

„Es gibt *genau eine* Zahl $\mathfrak{x}$, auf welche die Aussage $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ zutrifft." Dafür schreiben wir: $\exists \mathfrak{x}\,[\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \,\&\, \forall \mathfrak{y}\,(\mathfrak{A}(\mathfrak{y}) \supset \mathfrak{y} = \mathfrak{x})]$, was offenbar dasselbe besagt. (Für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ sind geeignete gebundene Variable zu wählen; $\mathfrak{A}(\mathfrak{y})$ sei der aus $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ bei Ersetzung von $\mathfrak{x}$ durch $\mathfrak{y}$ entstehende Ausdruck.)

„Es gibt *unendlich viele* Zahlen $\mathfrak{x}$, auf welche die Aussage $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ zutrifft." Das bedeutet nichts anderes als: „Zu jeder Zahl gibt es eine Zahl, die größer als sie ist, und auf die $\mathfrak{A}$ zutrifft"; und in dieser Gestalt ist die Aussage in unserem Formalismus darstellbar.

„Die *Anzahl* der Zahlen $\mathfrak{x}$, auf welche die Aussage $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ zutrifft, *ist n*." Diese Aussage — mit unbestimmt gelassenem n — läßt sich in unserem Formalismus nur erheblich umschrieben darstellen, etwa so: Man nimmt die *endlichen Mengen* von natürlichen Zahlen als Gegenstände hinzu, und sagt statt der genannten Aussage: „Es gibt eine Menge von natürlichen Zahlen, deren Elementezahl n ist, und für die weiter gilt: Auf jedes ihrer Elemente trifft die Aussage $\mathfrak{A}$ zu, und jede Zahl, auf die $\mathfrak{A}$ zutrifft, gehört zu der Menge." Dabei ist „Elementezahl" eine *Funktion*, „zugehören" ein *Prädikat*, beide sind zuvor zu definieren. Der Be-

griff der *endlichen Menge* kann schließlich wieder gemäß 3.31 *umschrieben* werden.

So gibt es noch vielerlei sprachliche Redewendungen, die sich alle auf unmittelbar formalisierbare Ausdrucksweisen zurückführen lassen.

3.34. Ich komme auf die Frage der Vollständigkeit des Formalismus in ganz allgemeinem Sinne im Anschluß an den Widerspruchsfreiheitsbeweis zurück (17.1).

§ 4.

Beispiel eines Beweises aus der reinen Zahlentheorie.

4.1. Ich schreite jetzt zur Formalisierung der in der reinen Zahlentheorie verwendeten *Beweismittel*. D. h.: Ich habe möglichst vollständig alle in den Beweisen der reinen Zahlentheorie verwendeten *Schlußweisen* und *Begriffsbildungsmethoden* anzugeben, und zugleich für diese eine *formal* festgelegte Gestalt vorzuschreiben, die alle Verschiedenheiten der sprachlichen Darstellung vermeidet.

Erst wenn sich daraufhin eine genaue formale Definition dafür geben läßt, was unter einem rein-zahlentheoretischen „*Beweis*" zu verstehen ist, können wir mit der *Beweistheorie* der reinen Zahlentheorie beginnen.

Ich werde zunächst in diesem § ein *Beispiel* eines zahlentheoretischen *Beweises* angeben und die einzelnen *Schlußweisen* an Hand von Beispielen aus dem Beweis nach bestimmten Gesichtspunkten *einteilen*. In § 5 werde ich dieselben dann allgemein genau formulieren.

In § 6 behandle ich schließlich die *Methoden der Begriffsbildung* und die damit zusammenhängenden zahlentheoretischen „*Axiome*".

4.2. Als Beispiel eines Beweises aus der reinen Zahlentheorie wähle ich den allbekannten *Euklidschen Beweis* für den Satz: „Es gibt *unendlich viele Primzahlen*."

Ich gebe den Beweis zunächst kurz *in Worten* an, in einer etwas für den vorliegenden Zweck zugeschnittenen Fassung.

Im folgenden (im ganzen § 4) verwende ich die Buchstaben a, b_1, b_2, c, d, l, m, n als *freie Variable*, die Buchstaben z, y als *gebundene Variable* (für natürliche Zahlen).

Der zu beweisende Satz lautet genauer: „Zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine größere, welche Primzahl ist."

Sei nun a eine beliebige natürliche Zahl. Dann ist zu zeigen, daß es eine Primzahl gibt, die größer als a ist. Wir betrachten die Zahl $a! + 1$. Ist sie eine *Primzahl*, so erfüllt sie bereits die Behauptung. Ist sie *keine* Primzahl, so hat sie einen Teiler b_1 (außer 1 und sich selbst). Dieser ist größer als a, denn die Zahlen von 2 bis a können in $a! + 1$ nicht aufgehen, da die Division stets den Rest 1 ergibt. Ist b_1 eine

Primzahl, so erfüllt *sie* die Behauptung. Ist sie keine Primzahl, so hat sie ebenfalls einen Teiler b_2 außer 1 und sich selbst. Dieser geht auch in $a! + 1$ auf, da b_1 darin aufgeht. Also ist b_2 ebenfalls größer als a. Durch dauernde Wiederholung dieses Gedankengangs erhalten wir eine Reihe von Zahlen: $a! + 1, b_1, b_2, \ldots$, die immer kleiner werden. Die Reihe muß also irgendwann ein Ende nehmen, d. h. die letzte Zahl ist dann eine *Primzahl*, die Teiler von $a! + 1$ und größer als a ist. Damit ist die Existenz einer Primzahl, die größer als a ist, nachgewiesen. Da a eine ganz *beliebige* natürliche Zahl war, so folgt: Zu *jeder* natürlichen Zahl gibt es eine größere, welche Primzahl ist. Das war zu zeigen.

4. 3. Ich habe bei dem Beweis verschiedene einfache Sätze als bereits *bekannt* vorausgesetzt. Diese könnte man durch weitere Beweise auf noch einfachere Tatsachen *zurückführen*, doch kommt es mir darauf jetzt nicht an, sondern vor allem auf *die Schlüsse*, die in dem gezeigten Beweisgang selbst auftreten.

Dabei ist zu berücksichtigen, daß wir durch Übung gewohnt sind, *ganze Schlußreihen auf einmal* durchzuführen, ohne daß wir uns noch jedes *einzelnen* darin enthaltenen Schlusses bewußt sind. Um also die eigentlichen *Elementarschlüsse* herauszufinden, will ich den Euklidschen Beweis jetzt noch einmal durchgehen und bei einigen Teilen des Beweises *alle darin enthaltenen Einzelschlüsse* ans Licht bringen. Zugleich werde ich die einzelnen nacheinander vorkommenden *Aussagen* gemäß § 3 *formalisieren*.

4. 4. *Ausführliche Zergliederung des Euklidschen Beweises.*

Der Beweis enthält, etwas versteckt, eine „vollständige Induktion" (siehe die Stelle: „durch dauernde Wiederholung dieses Gedankengangs ..."). Die übliche *Normalform* der Schlußweise durch vollständige Induktion ist diese: Man beweist die Gültigkeit einer Aussage für die Zahl 1; man zeigt ferner, daß die Aussage, wenn sie für eine beliebige natürliche Zahl n gilt, auch für $n + 1$ gültig ist; alsdann gilt diese Aussage für jede beliebige natürliche Zahl.

Ich will auch die hier auftretende verkappte vollständige Induktion auf diese Normalform bringen; dazu wähle ich folgende Aussage als „Induktionsaussage", für eine Zahl m ausgesprochen: „Entweder gibt es unter den Zahlen von 1 bis m eine Primzahl, die größer als a ist, oder alle diese Zahlen, außer 1, gehen nicht in $a! + 1$ auf." Formal:
$\{\exists z[z \leqq m \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)]\} \vee \forall y[(y > 1 \,\&\, y \leqq m) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)]$.

Der Beweis verläuft nun so:

4. 41. Zunächst ist die Induktionsaussage für $m = 1$ zu beweisen. Hier ist ihr zweiter Teil ganz von selbst erfüllt, da es überhaupt keine Zahlen, die größer als 1 und kleiner oder gleich 1 sind, gibt. Ausführlich: Für beliebiges c gilt $\neg\,(c > 1 \,\&\, c \leqq 1)$; dies setzen wir als bekannt voraus.

Dann gilt auch $(c > 1 \,\&\, c \leqq 1) \supset \neg\, c \mid (a! + 1)$, sowie, da c *beliebig* war, $\forall y [(y > 1 \,\&\, y \leqq 1) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)]$. Daraus folgt ferner, gemäß der Bedeutung des $\vee$ (3. 1 2), die gesamte Induktionsaussage für $m = 1$, nämlich:

$$\{\exists z [z \leqq 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)]\} \vee \forall y [(y > 1 \,\&\, y \leqq 1) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)].$$

4. 4 2. Nun kommt der „*Induktionsschritt*" an die Reihe, d. h.: Wir nehmen an, die Induktionsaussage sei für eine beliebige Zahl n bereits bewiesen, es gelte also

$$\{\exists z [z \leqq n \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)]\} \vee \forall y [(y > 1 \,\&\, y \leqq n) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)];$$

alsdann ist sie für $n + 1$ als gültig zu erweisen. Das geschieht folgendermaßen:

Auf Grund der Induktionsannahme sind *zwei Fälle* möglich:

1. $\exists z [z \leqq n \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)]$,
2. $\forall y [(y > 1 \,\&\, y \leqq n) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)]$.

Im ersten Falle ergibt sich ohne weiteres, was ich nicht näher ausführe, $\exists z [z \leqq n + 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)]$. Damit ist in diesem Falle bereits die Induktionsaussage für $n + 1$, nämlich

$$\{\exists z [z \leqq n + 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)]\}$$
$$\vee \forall y [(y > 1 \,\&\, y \leqq n + 1) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)],$$

bewiesen.

Behandeln wir nun den *zweiten* Fall:

$$\forall y [(y > 1 \,\&\, y \leqq n) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)].$$

Es gilt $(n + 1) \mid (a! + 1) \vee \neg\, (n + 1) \mid (a! + 1)$. Demgemäß können wir *zwei Unterfälle* unterscheiden:

1. *Unterfall:* $(n + 1) \mid (a! + 1)$. Alsdann ergibt sich $\mathrm{Prim}\, (n + 1) \,\&\, (n + 1) > a$, was ich nur kurz zeige, da hierbei nur solche Schlußweisen Anwendung finden, für die wir schon Beispiele in den übrigen Teilen des Beweises haben:

$n + 1$ ist eine *Primzahl*; denn hätte sie einen Teiler außer 1 und sich selbst, so wäre dieser kleiner als $n + 1$ und teilte auch $a! + 1$, das widerspräche aber unserer Annahme $\forall y [(y > 1 \,\&\, y \leqq n) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)]$. $n + 1$ ist ferner *größer als* a; denn die Zahlen von 2 bis a gehen in $a! + 1$ nicht auf, da die Division stets den Rest 1 ergibt. Also gilt in der Tat $\mathrm{Prim}\, (n + 1) \,\&\, (n + 1) > a$; ferner ist $n + 1 \leqq n + 1$, also gilt $n + 1 \leqq n + 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, n + 1 \,\&\, n + 1 > a)$, folglich auch

$$\exists z [z \leqq n + 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)],$$

und damit

$$\{\exists z [z \leqq n + 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)]\}$$
$$\vee \forall y [(y > 1 \,\&\, y \leqq n + 1) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)].$$

2. *Unterfall:* $\neg\, (n + 1) \mid (a! + 1)$. d sei eine beliebige Zahl, und zwar sei $d > 1 \,\&\, d \leqq n + 1$. Aus $d \leqq n + 1$ folgt, was als bekannt angenommen werde, $d \leqq n \vee d = n + 1$.

Sei zunächst $d \leqq n$; nun gilt $\forall y\,[(y > 1 \,\&\, y \leqq n) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)]$, also insbesondere $(d > 1 \,\&\, d \leqq n) \supset \neg\, d \mid (a! + 1)$. Aus $d > 1$ zusammen mit $d \leqq n$ ergibt sich $d > 1 \,\&\, d \leqq n$, mit dem vorigen zusammen also $\neg\, d \mid (a! + 1)$.

Ist dagegen $d = n + 1$, so folgt wegen $\neg\,(n + 1) \mid (a! + 1)$ ebenfalls $\neg\, d \mid (a! + 1)$.

Somit gilt überhaupt $\neg\, d \mid (a! + 1)$, als Folgerung aus der Annahme $d > 1 \,\&\, d \leqq n + 1$. Also können wir schreiben: $(d > 1 \,\&\, d \leqq n + 1) \supset \neg\, d \mid (a! + 1)$, und weiter, da d eine beliebige Zahl war,

$$\forall y\,[(y > 1 \,\&\, y \leqq n + 1) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)],$$

somit wiederum

$$\{\exists z\,[z \leqq n + 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)]\}$$
$$\vee\ \forall y\,[(y > 1 \,\&\, y \leqq n + 1) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)].$$

Damit haben wir in allen Fällen die Induktionsaussage für $n + 1$ erhalten, womit der *Induktionsschritt beendet* ist.

4. 4 3. Nunmehr läßt sich der Beweis rasch *zu Ende führen:*

Mittels vollständiger Induktion ergibt sich die Gültigkeit der Induktionsaussage für *beliebige* Zahlen. Wir benötigen sie nur für die Zahl $a! + 1$:

$$\{\exists z\,[z \leqq a! + 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)]\}$$
$$\vee\ \forall y\,[(y > 1 \,\&\, y \leqq a! + 1) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)].$$

Der *zweite* Fall ergibt insbesondere

$$(a! + 1 > 1 \,\&\, a! + 1 \leqq a! + 1) \supset \neg\,(a! + 1) \mid (a! + 1).$$

Nun gilt $a! + 1 > 1 \,\&\, a! + 1 \leqq a! + 1$, was wir als bekannt annehmen; also ergibt sich $\neg\,(a! + 1) \mid (a! + 1)$. Andrerseits gilt natürlich $(a! + 1) \mid (a! + 1)$, wir erhalten also einen *Widerspruch*, d. h. der zweite Fall kann unmöglich eintreten; formal:

$$\neg\ \forall y\,[(y > 1 \,\&\, y \leqq a! + 1) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)].$$

Es bleibt nur der *erste* Fall übrig, d. h.: $\exists z\,[z \leqq a! + 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)]$. Sei l eine solche Zahl, gelte also $l \leqq a! + 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, l \,\&\, l > a)$. Insbesondere gilt dann $\mathrm{Prim}\, l \,\&\, l > a$, daraus folgt $\exists z\,(\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)$. Nun war a eine ganz *beliebige* natürliche Zahl, daher gilt dies für *alle* natürlichen Zahlen, d. h. $\forall y \exists z\,(\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > y)$. Das ist das *Endergebnis* des Euklidschen Beweises.

4. 5. *Einteilung der einzelnen Schlußweisen an Hand von Beispielen aus dem Euklidschen Beweis.*

Wir wollen jetzt unser Augenmerk auf die einzelnen Schlüsse lenken, die in dem vorgeführten Beweisgang vorkommen. Da ergibt sich fast von selbst die folgende *Einteilung* derselben:

Zu jeder der Aussagenverknüpfungen $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\forall$ und $\exists$ gibt es gewisse ihr *zugehörige* Schlußweisen. Diese lassen sich weiterhin einteilen

in Schlußweisen, durch welche die betreffende Verknüpfung *eingeführt* wird, und solche Schlußweisen, durch welche dieselbe Verknüpfung aus einer Aussage *beseitigt* wird. Ich gebe als *Beispiele* für jeden einzelnen Fall einen Schluß aus dem Euklidschen Beweis an:

4.51. Eine $\forall$-*Einführung* liegt vor am Ende des Beweises, nämlich: Nachdem für eine beliebige Zahl a bewiesen war $\exists z(\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)$, wurde gefolgert $\forall y \exists z(\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > y)$.

Eine $\forall$-*Beseitigung* fand statt unter 4.42, 2. Unterfall, indem aus $\forall y[(y > 1 \,\&\, y \leqq n) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)]$ auf $(d > 1 \,\&\, d \leqq n) \supset \neg\, d \mid a! + 1)$ geschlossen wurde.

4.52. Eine &-*Einführung* (aus 4.42, 2. Unterfall): Die beiden Aussagen $d > 1$ und $d \leqq n$ ergaben zusammen die Aussage $d > 1 \,\&\, d \leqq n$.

Eine &-*Beseitigung* (aus 4.43): Von $l \leqq a! + 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, l \,\&\, l > a)$ wurde auf $\mathrm{Prim}\, l \,\&\, l > a$ geschlossen.

4.53. Eine $\exists$-*Einführung* (aus 4.43): Aus $\mathrm{Prim}\, l \,\&\, l > a$ wurde gefolgert $\exists z(\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)$.

Eine $\exists$-*Beseitigung* (aus 4.43): Es galt die Aussage

$$\exists z[z \leqq a! + 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)].$$

Daraus wurde geschlossen $l \leqq a! + 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, l \,\&\, l > a)$, worin l irgendeine der Zahlen, die es auf Grund der vorigen Aussage *gibt*, bedeuten sollte.

4.54. Eine $\vee$-*Einführung* (aus 4.41): Von

$$\forall y[(y > 1 \,\&\, y \leqq 1) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)]$$

wurde auf

$$\{\exists z[z \leqq 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)]\} \vee \forall y[(y > 1 \,\&\, y \leqq 1) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)]$$

geschlossen.

Eine $\vee$-*Beseitigung* (aus 4.42): Es galt

$$\{\exists z[z \leqq n \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)]\}$$
$$\vee\ \forall y[(y > 1 \,\&\, y \leqq n) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)].$$

Hieraus ergab sich die *Fallunterscheidung*: Erster Fall:

$$\exists z[z \leqq n \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)],$$

zweiter Fall:

$$\forall y[(y > 1 \,\&\, y \leqq n) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)].$$

Die Fallunterscheidung wurde dadurch beendet, daß in beiden Fällen schließlich dieselbe Aussage

$$\{\exists z[z \leqq n + 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)]\}$$
$$\vee\ \forall y[(y > 1 \,\&\, y \leqq n + 1) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)]$$

gefolgert werden konnte.

4.55. Eine $\supset$-*Einführung* (aus 4.42, 2. Unterfall): Ausgehend von der Annahme $d > 1 \,\&\, d \leqq n + 1$ waren wir zu dem Ergebnis gelangt: $\neg\, d \mid (a! + 1)$. Also galt: $(d > 1 \,\&\, d \leqq n + 1) \supset \neg\, d \mid (a! + 1)$.

Eine $\supset$-*Beseitigung* (aus 4.4 2, 2. Unterfall): Aus $d > 1 \,\&\, d \leqq n$ und $(d > 1 \,\&\, d \leqq n) \supset \neg\, d \mid (a! + 1)$ wurde auf $\neg\, d \mid (a! + 1)$ geschlossen.

4.5 6. Für die *Negation* ($\neg$) liegen die Verhältnisse nicht so einfach; es gibt hier nämlich eine Reihe von verschiedenen Schlußweisen, die sich nicht klar in $\neg$-Einführungen und $\neg$-Beseitigungen scheiden. Ich komme darauf noch zurück (5. 2 6). Nur ein wichtiges Beispiel aus dem Euklidschen Beweis sei hier angeführt, nämlich ein „*Widerlegungs*"-Schluß (aus 4.4 3): $\neg\, \forall y [(y > 1 \,\&\, y \leqq a! + 1) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)]$ wurde daraus geschlossen, daß die *Annahme* $\forall y [(y > 1 \,\&\, y \leqq a! + 1) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)]$ auf einen *Widerspruch* führte, nämlich auf die Aussage $\neg\, (a! + 1) \mid (a! + 1)$, während andererseits $(a! + 1) \mid (a! + 1)$ beweisbar ist.

§ 5.

Die Formalisierung der in der reinen Zahlentheorie vorkommenden Schlußweisen.

5. 1. *Vorbemerkungen.*

Meine nächste Aufgabe ist nun, die an Beispielen aufgezeigten verschiedenen Arten von Schlußweisen in ihrer *allgemeinen Fassung* zu formulieren.

Die Feststellung der Einzelschlußweisen ist nicht ganz *eindeutig*. Doch scheint mir die von mir gewählte, auf die Einteilung in *Einführungen* und *Beseitigungen* der einzelnen *Aussagenverknüpfungen* gegründete Festsetzung derselben besonders naheliegend und natürlich zu sein.

Wie sieht nun die *allgemeine Fassung* einer Schlußweise aus?

Z. B. als allgemeine Form der &-*Beseitigung* wird man geneigt sein, einfach die folgende festzusetzen: Wenn eine Aussage der Form $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ bewiesen ist ($\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien beliebige Formeln), so ist auch $\mathfrak{A}$ (bzw. $\mathfrak{B}$) gültig.

Da ist aber noch etwas zu beachten: Ein mathematischer Beweis ist im allgemeinen nicht so einfach gebaut, daß er von *gültigen* Aussagen zu immer neuen *gültigen* Aussagen, durch Anwendung der Schlüsse, fortschreitet. Es kommt vielmehr auch vor, daß eine Aussage als gültig *angenommen* wird und weitere Aussagen daraus *gefolgert* werden, deren Gültigkeit also von der Gültigkeit dieser Annahme *abhängt*. Beispiele aus dem Euklidschen Beweis: Die „Widerlegung" (4. 5 6), die $\supset$-Einführung (4. 5 5), der Induktionsschritt bei der vollständigen Induktion (4. 4 2).

Um die *Bedeutung* irgendeiner in einem Beweis vorkommenden *Aussage vollständig* zu bezeichnen, muß man also jeweils angeben, von welchen etwa gemachten *Annahmen* sie *abhängig* ist.

Dazu setze ich fest, daß im formalisierten Beweis zu jeder (formalisierten) Aussage $\mathfrak{B}$ die (formalisierten) *Annahmen* $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu$, von denen sie abhängt, *hinzugeschrieben* werden sollen, und zwar in folgender Form:

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B};$$

zu lesen: Unter den Annahmen $\mathfrak{A}_1, \ldots \mathfrak{A}_\mu$ gilt $\mathfrak{B}$. Einen solchen Ausdruck nenne ich eine „Sequenz“[8]). Wenn *keine* Annahmen vorliegen, schreibe man $\to \mathfrak{B}$.

Ein Beispiel aus dem Euklidschen Beweis: Die Aussage $\neg\, d \mid (a! + 1)$ aus 4.4 2, 2. Unterfall, ist in ihrer Abhängigkeit von Annahmen durch folgende *Sequenz* darzustellen:

$$\forall y\,[(y > 1 \,\&\, y \leqq n) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)],\ \neg\, (n+1) \mid (a! + 1),$$
$$d > 1 \,\&\, d \leqq n + 1 \ \to\ \neg\, d \mid (a! + 1).$$

Da nun im formalisierten Beweis *jede Aussage* des ursprünglichen Beweises durch eine *Sequenz* dargestellt wird, können die *Schlußweisen* auch gleich für *Sequenzen* formuliert werden.

Unser obiges Beispiel, die &-Beseitigung, wäre jetzt so zu fassen: „Wenn die Sequenz $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_\mu \to \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ bewiesen ist ($\mu \geqq 0$), so ist auch $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_\mu \to \mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{G}_1, \ldots \mathfrak{G}_\mu \to \mathfrak{B}$ gültig.“

Im folgenden werde ich in gleicher Weise auch für die übrigen Schlußweisen allgemeine Schemata angeben.

5. 2. *Genaue allgemeine Formulierung der einzelnen Schlußweisen.*

5.2 1. Abgrenzung des Begriffs *Sequenz*[9]) (formaler Ausdruck für die Bedeutung einer *Aussage in einem Beweis* in ihrer Abhängigkeit von etwaigen Annahmen):

Eine *Sequenz* ist ein Ausdruck von der Form

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B},$$

wobei für $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_\mu$ und $\mathfrak{B}$ beliebige *Formeln* (3.2 3) stehen dürfen. Die Formeln $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu$ nenne ich *Vorderformeln*, $\mathfrak{B}$ die *Hinterformel* der

---

[8]) Man könnte hierfür eine einzige Formel von der Gestalt

$$(\ldots((\mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2) \,\&\, \ldots) \,\&\, \mathfrak{A}_\mu) \supset \mathfrak{B}$$

schreiben. Dadurch würde aber die ursprüngliche Struktur des mathematischen Beweises verwischt; in dem Beweis trat ja die durch diese Formel dargestellte Aussage „wenn $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2 \ldots$ und $\mathfrak{A}_\mu$ gelten, so gilt $\mathfrak{B}$“, gar nicht ausdrücklich auf, sondern nur die einzelnen Aussagen $\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_\mu$ als Annahmen, die Aussage $\mathfrak{B}$ als eine Folgerung aus diesen Annahmen.

[9]) In meiner Arbeit „Untersuchungen über das logische Schließen“ brauchte ich das Wort „Sequenz“ in einer allgemeineren Bedeutung, die ich aber hier nicht benötige. Für Leser jener Arbeit sei ferner erwähnt, daß der hier entwickelte Schlußweisenformalismus im wesentlichen dem dortigen „Kalkül *NK*“ entspricht. Auch der „Kalkül *LK*“ eignet sich für den Widerspruchsfreiheitsbeweis. Dieser wird dann sogar teilweise einfacher, doch weniger „natürlich“.

Sequenz. Es ist zulässig, daß überhaupt keine *Vorderformeln* da sind, dann hat die Sequenz die Gestalt: $\rightarrow \mathfrak{B}$. Eine *Hinterformel* soll aber immer vorhanden sein.

5.22. Abgrenzung des Begriffs *Herleitung* (formales Abbild eines *Beweises*):

Eine Herleitung besteht aus einer Anzahl von aufeinanderfolgenden Sequenzen, von denen jede entweder eine „Grundsequenz" ist oder aus irgendwelchen vorangehenden Sequenzen durch eine „*Strukturänderung*" oder durch Anwendung einer „*Schlußregel*" hervorgeht. Die Erklärung der einzelnen Begriffe folgt gleich.

Die *letzte Sequenz* einer Herleitung enthält keine Vorderformeln, ihre Hinterformel heißt die *Endformel* der Herleitung. (Diese stellt die durch den Beweis *bewiesene Aussage* dar.)

5.23. Erklärung des Begriffs *Grundsequenz*:

Ich unterscheide „logische" und „mathematische" Grundsequenzen.

Eine *logische Grundsequenz* ist eine Sequenz von der Form $\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$, wobei $\mathfrak{D}$ eine beliebige Formel sein kann. (Eine solche tritt bei der Formalisierung eines Beweises *dann* auf, wenn in dem Beweis eine *Annahme* $\mathfrak{D}$ *gemacht* wird.)

Eine *mathematische Grundsequenz* ist eine Sequenz von der Form $\rightarrow \mathfrak{E}$, wobei die Formel $\mathfrak{E}$ ein „mathematisches Axiom" darstellt. Was insbesondere unter einem *zahlentheoretischen „Axiom"* zu verstehen ist, werde ich in § 6 erläutern.

5.24. Erklärung des Begriffs *Strukturänderung*:

Folgende Arten von Umformungen einer Sequenz heißen *Strukturänderungen* (weil sie nur die Struktur der Sequenz, unabhängig von der Bedeutung der einzelnen Formeln, betreffen):

5.241. *Vertauschen* zweier Vorderformeln;

5.242. *Weglassen* einer Vorderformel, die gleich einer anderen Vorderformel ist;

5.243. *Zufügen* einer beliebigen Formel zu den Vorderformeln;

5.244. Ersetzung einer *gebundenen Variablen* innerhalb einer Formel im ganzen Wirkungsbereich eines $\forall$- oder $\exists$-Zeichens durch eine andere, in der Formel noch nicht vorkommende gebundene Variable. —

Durch Änderungen gemäß 5.241, 5.242 und 5.244 wird offenbar die Bedeutung der betreffenden Sequenz nicht geändert; denn für diese macht es nichts aus, in welcher Reihenfolge man die Annahmen nennt und ob man ein und dieselbe Annahme mehrfach anführt, sowie schließlich, was für Zeichen man als gebundene Variable verwendet. Alle diese Änderungsmöglichkeiten sind also rein *formaler Natur* und inhaltlich be-

langlos; nur wegen der Besonderheiten der Formalisierung müssen sie ausdrücklich erwähnt werden.

Eine Strukturänderung gemäß 5.243 bedeutet, daß man zu einer Aussage eine beliebige *Annahme hinzufügen* darf, von der sie, neben etwaigen anderen Annahmen, abhängen soll. Dies scheint zunächst etwas sonderbar; doch wird man z. B., wenn eine Aussage *richtig* ist, nicht umhin können, zuzugeben, daß sie dann auch unter der Voraussetzung einer *beliebigen Annahme* gültig ist. (Wollte man etwa verlangen, daß dies nur im Falle einer „tatsächlichen Abhängigkeit" behauptet werden dürfe, so würden sich erhebliche Schwierigkeiten durch die Möglichkeit von Beweisen, in denen eine Annahme nur *scheinbar* benutzt wird, ergeben.)

5.25. Erklärung des Begriffs *Schlußregel* (formales Gegenstück einer *Schlußweise*):

Wir brauchen insgesamt dreizehn Schlußregeln.

5.250. Die dabei verwendeten deutschen und griechischen *Buchstaben* haben folgende *Bedeutungen*:

Für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ dürfen beliebige Formeln stehen; für $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ bzw. $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ eine beliebige Formel von dieser Gestalt, alsdann bedeutet $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ bzw. $\mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ diejenige Formel, die aus $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ entsteht, wenn man die gebundene Variable $\mathfrak{x}$ durch eine beliebige freie Variable $\mathfrak{a}$ bzw. einen beliebigen Term $\mathfrak{t}$ ersetzt; für Γ, Δ, Θ dürfen beliebige, evtl. leere Reihen von Formeln, durch Kommata getrennt, stehen (als Vorderformeln der betreffenden Sequenz).

Nun *die einzelnen Schlußregeln*:

5.251. Schlußregel der &-*Einführung*: Aus den Sequenzen $\Gamma \to \mathfrak{A}$ und $\Delta \to \mathfrak{B}$ ergibt sich die Sequenz $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$.

&-*Beseitigung*: Aus $\Gamma \to \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ ergibt sich $\Gamma \to \mathfrak{A}$ bzw. $\Gamma \to \mathfrak{B}$.

$\vee$-*Einführung*: Aus $\Gamma \to \mathfrak{A}$ ergibt sich $\Gamma \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ bzw. $\Gamma \to \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}$.

$\vee$-*Beseitigung*: Aus $\Gamma \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}, \Delta \to \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}, \Theta \to \mathfrak{C}$ ergibt sich $\Gamma, \Delta, \Theta \to \mathfrak{C}$.

$\forall$-*Einführung*: Aus $\Gamma \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ ergibt sich $\Gamma \to \forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$, vorausgesetzt, daß die freie Variable $\mathfrak{a}$ in Γ und $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ *nicht vorkommt*.

$\forall$-*Beseitigung*: Aus $\Gamma \to \forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ ergibt sich $\Gamma \to \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$.

$\exists$-*Einführung*: Aus $\Gamma \to \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ ergibt sich $\Gamma \to \exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$.

$\exists$-*Beseitigung*: Aus $\Gamma \to \exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ und $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}), \Delta \to \mathfrak{C}$ ergibt sich $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{C}$, vorausgesetzt, daß die freie Variable $\mathfrak{a}$ in Γ, Δ, $\mathfrak{C}$ und $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ nicht vorkommt.

$\supset$-*Einführung*: Aus $\mathfrak{A}, \Gamma \to \mathfrak{B}$ ergibt sich $\Gamma \to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$.

$\supset$-*Beseitigung*: Aus $\Gamma \to \mathfrak{A}$ und $\Delta \to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ ergibt sich $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{B}$.

5.252. Schlußregel der „*Widerlegung*": Aus $\mathfrak{A}, \Gamma \to \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}, \Delta \to \neg \mathfrak{B}$ ergibt sich $\Gamma, \Delta \to \neg \mathfrak{A}$.

„*Beseitigung der doppelten Verneinung*": Aus $\Gamma \to \neg\neg \mathfrak{A}$ ergibt sich $\Gamma \to \mathfrak{A}$.

5.253. Schlußregel der „*vollständigen Induktion*": Aus $\Gamma \to \mathfrak{F}(1)$ und $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}), \Delta \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a}+1)$ ergibt sich $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$, vorausgesetzt, daß die freie Variable $\mathfrak{a}$ in Γ, Δ, $\mathfrak{F}(1)$ und $\mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ nicht vorkommt.

5.26. Einige *Erläuterungen zu den Schlußregeln.*

Die Formulierung der einzelnen Schlußregeln dürfte im allgemeinen an Hand der zugehörigen Beispiele von Schlüssen (4.5) verständlich sein. Einige Punkte seien noch erläutert:

Die Γ, Δ und Θ sind erforderlich, weil man im allgemeinsten Falle mit *beliebig vielen Annahmen* rechnen muß.

Die Formulierung mit *zugehörigen Annahmen*, die bei $\supset$-Einführung, „Widerlegung" und vollständiger Induktion ohne weiteres naheliegt, erscheint vielleicht bei $\vee$- und $\exists$-Beseitigung etwas künstlich, wenn man diese mit den entsprechenden Schlußbeispielen (4.5) vergleicht. Es ist jedoch für die Formulierung am bequemsten, bei der *Fallunterscheidung* ($\vee$-Beseitigung) die beiden unterschiedenen Möglichkeiten einfach als *Annahmen* aufzufassen, die dann, wenn man aus beiden dasselbe Ergebnis ($\mathfrak{C}$) erhalten hat, erledigt sind; und bei der $\exists$-Beseitigung ist es ähnlich: Die aus $\exists x \mathfrak{F}(x)$ gefolgerte Aussage $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ ist insofern nur eine *Annahme*, als von der in ihr vorkommenden Variablen $\mathfrak{a}$ *angenommen* wird, daß sie irgendeine der gemäß $\exists x \mathfrak{F}(x)$ vorhandenen Zahlen mit der Eigenschaft $\mathfrak{F}$ darstelle. Diese Annahme ist dann *erledigt*, sobald man aus ihr eine Folgerung ($\mathfrak{C}$) gezogen hat, in der diese Variable $\mathfrak{a}$ nicht mehr vorkommt.

Damit komme ich zugleich auf einen weiteren Punkt, der einer kurzen Erläuterung bedarf: Das sind die *Bedingungen für die freien Variablen*, wie sie bei den Schlußregeln der $\forall$-Einführung, $\exists$-Beseitigung und der vollständigen Induktion gestellt sind. Die Bedingung besagt jeweils, daß die zur Schlußregel gehörige freie Variable $\mathfrak{a}$ unter allen zur Schlußregel gehörigen Formeln (die Annahmeformeln eingeschlossen) lediglich in der Formel $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ bzw. $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}+1)$ vorkommen darf. Man kann sich leicht an Beispielen klarmachen, daß diese Forderung i. allg. notwendig und eigentlich selbstverständlich ist; bei mathematischen Beweisen erfüllt man sie ganz von selbst. (In den übrigen Formeln hat eben die Variable $\mathfrak{a}$ auf Grund ihres Verwendungszweckes gar nichts zu suchen.)

Zu den *Schlußregeln für die Negation* ist zu sagen: Wie schon unter 4.56 erwähnt, ist hier die Auswahl der Elementarschlußweisen *willkürlicher* als für die anderen Aussagenverknüpfungen. Ich möchte noch folgende dafür in Betracht kommende einfache *Schlußregeln erwähnen*:

Aus $\mathfrak{A}, \Gamma \to \mathfrak{B}$ und $\neg \mathfrak{A}, \Delta \to \mathfrak{B}$ ergibt sich $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{B}$.

Aus $\Gamma \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ und $\Delta \to \neg \mathfrak{B}$ ergibt sich $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{A}$ (Beispiel unter 4.4 3).

Aus $\Gamma \to \neg \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}, \Delta \to \mathfrak{B}$ ergibt sich $\Gamma, \Delta \to \neg \mathfrak{A}$.

Aus $\Gamma \to \neg \mathfrak{A}$ ergibt sich $\Gamma \to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ (Beispiel unter 4.4 1).

Aus $\Gamma \to \mathfrak{A}$ und $\Delta \to \neg \mathfrak{A}$ ergibt sich $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{B}$.

Ferner könnte man als *logische Grundsequenzen* für die $\neg$-Verknüpfung nehmen:

$$\to \mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A},$$ „Satz vom ausgeschlossenen Dritten"

(Beispiel unter 4.4 2);

$$\to \neg (\mathfrak{A} \,\&\, \neg \mathfrak{A}),$$ „Satz vom Widerspruch".

Die beiden von mir gewählten Schlußregeln (5.2 5 2) sind aber *ausreichend*; die übrigen hier angegebenen Schlußregeln und Grundsequenzen sind in ihnen (mit Hinzunahme der Schlußregeln für die übrigen Aussagenverknüpfungen) schon enthalten, wie sich ohne wesentliche Schwierigkeiten nachweisen läßt.

5.3. *Reichen nun unsere Schlußregeln zur Darstellung aller in der reinen Zahlentheorie vorkommenden Schlüsse aus?*

5.3 1. Die Vollständigkeit der rein *logischen*, d. h. der den *Aussagenverknüpfungen* $\&, \vee, \supset, \neg, \forall, \exists$ *zugehörigen* Schlußregeln, in dem Sinne, daß alle richtigen Schlüsse von gleicher Art bereits durch die angegebenen Schlußregeln darstellbar sind, ist durch besondere Untersuchungen bewiesen worden [10]).

Zu diesen Schlußweisen kommt nun, für die *reine Zahlentheorie*, die „vollständige Induktion" hinzu. Hier wird die Frage nach der Vollständigkeit der Schlußregeln zu einem recht schwierigen Problem; ich werde im Anschluß an den Widerspruchsfreiheitsbeweis (17.1) darauf zurückkommen. An dieser Stelle sei nur folgendes gesagt:

Es ist als ziemlich sicher anzunehmen, daß alle in den üblichen zahlentheoretischen Beweisen, soweit diese nicht Hilfsmittel aus der Analysis benutzen, auftretenden Schlüsse in unserem System darstellbar sind. Das gilt auch von den vielfach gebrauchten „anschaulichen" Schlüssen, auch wenn man es ihnen nicht unmittelbar ansieht.

Um dies allgemein nachzuweisen, müßte man freilich alle Beweise einzeln durchgehen, was natürlich höchst langwierig wäre.

---

[10]) Siehe für die „Aussagenlogik" ($\&, \vee, \supset, \neg$): Hilbert-Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, S. 33; für die „Prädikatenlogik" ($\forall, \exists$ dazu): K. Gödel, Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, Monatsh. f. Math. u. Phys. 37 (1930), S. 349—360. Die dort benutzten Formalisierungen der Schlußweisen lassen sich ohne besondere Schwierigkeiten als äquivalent mit der von mir gewählten erweisen. (Vgl. die Äquivalenzbeweise im V. Abschnitt meiner Arbeit „Untersuchungen über das logische Schließen".)

5.3 2. Ich begnüge mich mit einigen besonders wichtigen *Beispielen*:

Die *vollständige Induktion* tritt häufig in gewissen abgewandelten Formen auf, die folgendermaßen auf unsere Normalform zurückführbar sind:

5.3 2 1. Zunächst die „absteigende" vollständige Induktion, diese lautet formal:

Aus $\Gamma \to \mathfrak{F}(t)$ und $\mathfrak{F}(a+1), \Delta \to \mathfrak{F}(a)$ ergibt sich $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{F}(1)$. a soll wieder in $\Gamma, \Delta, \mathfrak{F}(1)$ und $\mathfrak{F}(t)$ nicht vorkommen.

Sie wird so umgeformt: $\neg \mathfrak{F}(a) \to \neg \mathfrak{F}(a)$ ist Grundsequenz. Daraus folgt (5.2 4 3) $\mathfrak{F}(a+1), \neg \mathfrak{F}(a) \to \neg \mathfrak{F}(a)$, zusammen mit $\mathfrak{F}(a+1), \Delta \to \mathfrak{F}(a)$ ergibt sich durch „Widerlegung" (5.2 5 2) $\Delta, \neg \mathfrak{F}(a) \to \neg \mathfrak{F}(a+1)$ gleich (5.2 4 1) $\neg \mathfrak{F}(a), \Delta \to \neg \mathfrak{F}(a+1)$. Nimmt man die Grundsequenz $\neg \mathfrak{F}(1) \to \neg \mathfrak{F}(1)$ hinzu, so läßt sich nun die Schlußregel der vollständigen Induktion in der vorgeschriebenen Form (5.2 5 3), mit $\neg \mathfrak{F}$ als Induktionsaussage, anwenden und ergibt: $\neg \mathfrak{F}(1), \Delta \to \neg \mathfrak{F}(t)$. Mit Hinzunahme von $\Gamma \to \mathfrak{F}(t)$, womit auch (5.2 4 3) $\neg \mathfrak{F}(1), \Gamma \to \mathfrak{F}(t)$ gilt, ergibt sich durch „Widerlegung" $\Gamma, \Delta \to \neg \neg \mathfrak{F}(1)$, und daraus durch „Beseitigung der doppelten Verneinung" (5.2 5 2): $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{F}(1)$.

5.3 2 2. Ein weiteres Beispiel bildet folgende abgewandelte vollständige Induktion:

Aus $\Gamma \to \mathfrak{F}(1)$ und $\forall \mathfrak{x}[\mathfrak{x} \leqq a \supset \mathfrak{F}(\mathfrak{x})], \Delta \to \mathfrak{F}(a+1)$ ergibt sich $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{F}(t)$. a soll wieder in $\Gamma, \Delta, \mathfrak{F}(1)$ und $\mathfrak{F}(t)$ nicht vorkommen; $\mathfrak{x}$ sei eine in $\mathfrak{F}(1)$ nicht vorkommende gebundene Variable.

Hieraus macht man leicht eine normale vollständige Induktion (5.2 5 3) mit der Induktionsaussage (für eine beliebige Zahl m geschrieben): $\forall \mathfrak{x}[\mathfrak{x} \leqq m \supset \mathfrak{F}(\mathfrak{x})]$, in Worten etwa: „für alle Zahlen von 1 bis m gilt $\mathfrak{F}$".

5.3 2 3. Die entsprechende „absteigende" Form lautet: Aus $\Gamma \to \mathfrak{F}(t)$ und $\mathfrak{F}(a+1), \Delta \to \exists \mathfrak{x}[\mathfrak{x} \leqq a \,\&\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})]$ ergibt sich $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{F}(1)$. Sie läßt sich entsprechend den beiden vorigen Beispielen auf die Normalform der vollständigen Induktion zurückführen.

Der Induktionsschluß in dem Euklidschen Beweis war ursprünglich von *dieser* Art (4. 2) und wurde dann (4. 4) auf die Normalform gebracht.

§ 6.

Begriffsbildungen und Axiome in der reinen Zahlentheorie.

6.1. In einem Beweis können außer den eigentlichen *Schlüssen* auch „*Begriffsbildungen*" vorkommen; das sind Einführungen von neuen Gegenständen, Funktionen oder Prädikaten.

Welcher Art sind nun die in der Zahlentheorie gebräuchlichen Begriffsbildungen?

Die Einführung von neuen *Gegenständen*, wie negativen Zahlen usw., wurde schon unter 3.31 besprochen, und es wurde darauf hingewiesen, daß diese grundsätzlich entbehrt werden können.

Die Einführung einer neuen *Funktion* oder eines *Prädikats* pflegt so zu geschehen, daß man mit Worten eine „Definition" desselben gibt.

Beispiele:

Die Funktion a^b wird definiert als „die Zahl a, b mal als Faktor genommen".

Die Funktion $a!$ wird definiert als „das Produkt der Zahlen von 1 bis a".

Die Funktion (a, b) wird definiert als „der größte gemeinsame Teiler von a und b".

Das Prädikat „a ist eine vollkommene Zahl" bedeutet dasselbe wie „die Zahl a ist gleich der Summe ihrer echten Teiler".

Das Prädikat $a \neq b$ bedeutet dasselbe wie $\neg (a = b)$.

Das Prädikat $a \mid b$ bedeutet dasselbe wie $\exists z (a \cdot z = b)$.

Die Funktion $\left(\frac{a}{b}\right)$, das „Legendresche Symbol". wird definiert nur für den Fall, daß b eine ungerade Primzahl ist, und zwar so: $\left(\frac{a}{b}\right) = 0$, falls $b \mid a$ gilt; gilt $\neg\, b \mid a$, so ist $\left(\frac{a}{b}\right) = 1$, wenn die Zahl a quadratischer Rest mod b ist, $\left(\frac{a}{b}\right) = -1$, wenn a quadratischer Nichtrest mod b ist.

Die Funktion $ak(a, b, c)$, „Ackermannsche Funktion", eine für gewisse Fragen der Beweistheorie bedeutsame Funktion, läßt sich so definieren[11] („rekursiv"):

$$ak(a, b, 0) = a + b, \quad ak(a, b, 1) = a \cdot b, \quad ak(a, b, 2) = a^b,$$

und weiter für $c \geqq 2$:

$$ak(a, 0, c + 1) = a, \quad ak(a, b + 1, c + 1) = ak[a, ak(a, b, c + 1), c].$$

Ich will *keine allgemeinen formalen Schemata* für diese und weitere Begriffsbildungsmethoden aufstellen. Es wird sich zeigen, daß sie sich auch ohnedies in summarischer Weise in den Widerspruchsfreiheitsbeweis einbeziehen lassen. Das gleiche gilt von den „Axiomen", über die ich jetzt einiges sagen will.

6.2. Bei zahlentheoretischen Beweisen geht man aus von gewissen einfachen, unmittelbar einsichtigen Aussagen, die nicht weiter bewiesen werden. Das sind die „*Axiome*". Sie stehen in naher Beziehung zu den *Begriffsbildungen*, insofern als die Axiome Grundtatsachen über die in ihnen vorkommenden Prädikate und Funktionen angeben. Man kann geradezu

[11] Siehe W. Ackermann, Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen, Math. Annalen 99 (1928), S. 118—133.

einen neuen Begriff formal dadurch einführen, daß man einige Axiome über ihn aufstellt („implizite Definition"). Ein Beispiel: Die Funktion (a, b) läßt sich vollständig charakterisieren durch die Axiome:

$$\forall x\, \forall y\, [(x, y) \mid x \,\&\, (x, y) \mid y] \quad \text{und} \quad \forall x\, \forall y\, \neg\, \exists z\, [(z \mid x \,\&\, z \mid y) \,\&\, z > (x, y)].$$

Die Wahl der Axiome ist *nicht eindeutig bestimmt.* Man kann das Ziel verfolgen, mit möglichst wenigen, einfachen Axiomen auszukommen [12]). Für die *Praxis* der zahlentheoretischen Beweisführungen legt man meist eine größere Anzahl von Axiomen zugrunde, ohne sich um weitere Zurückführbarkeit, gegenseitige Abhängigkeit und dergl. zu bekümmern. Für meinen *Widerspruchsfreiheitsbeweis* ist es ziemlich gleichgültig, was man als *Axiome* nimmt. Ich begnüge mich vorläufig, wie bei den Begriffsbildungen, mit der Angabe einiger *Beispiele,* aus denen zu ersehen ist, was für Aussagen etwa als Axiome in Frage kommen:

Einige Axiome für das Prädikat $=$ und die Funktion $+$, formalisiert:

$$\begin{aligned}
&\forall x\, (x = x),\\
&\forall x\, \forall y\, (x = y \supset y = x),\\
&\forall x\, \forall y\, \forall z\, [(x = y \,\&\, y = z) \supset x = z],\\
&\forall x\, \neg\, (x + 1 = 1),\\
&\forall x\, \forall y\, (x + y = y + x),\\
&\forall x\, \forall y\, \forall z\, [(x + y) + z = x + (y + z)].
\end{aligned}$$

6. 3. *Der Begriff „derjenige, welcher".*

Erwähnenswert ist noch folgende besondere Art von Begriffsbildung:

Wenn eine Aussage der Form

$$\forall \mathfrak{x}_1\, \forall \mathfrak{x}_2 \ldots \forall \mathfrak{x}_\nu\, \exists \mathfrak{y}\, \{\mathfrak{F}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_\nu, \mathfrak{y}) \,\&\, \forall \mathfrak{z}\, [\mathfrak{F}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_\nu, \mathfrak{z}) \supset \mathfrak{z} = \mathfrak{y}]\},$$

in Worten etwa: „zu jeder Zahlenkombination $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\nu$ *gibt es* eine und nur eine Zahl $\mathfrak{y}$, so daß $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\nu, \mathfrak{y})$ zutrifft", *bewiesen ist,* so darf man eine *Funktion einführen,* welche eben diesen Wert $(\mathfrak{y})$ in seiner Abhängigkeit von der Zahlenkombination $(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\nu)$ *darstellt* („derjenige, welcher"). Formal: Für die Funktion benutzt man etwa den Ausdruck (für die Argumente $a_1, \ldots, a_\nu$ aufgeschrieben): $\iota_\mathfrak{y}\, \mathfrak{F}(a_1, \ldots, a_\nu, \mathfrak{y})$; für diesen gilt dann: $\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_\nu\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\nu, \iota_\mathfrak{y}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\nu, \mathfrak{y}))$. Die $\mathfrak{x}$ dürfen auch *leer* sein, dann stellt das ι-Zeichen eine einzelne *Zahl* dar.

Derartige Begriffsbildungen, die man in der praktischen reinen Zahlentheorie i. allg. *nicht benötigt,* bzw. durch „Definitionen" in der obigen

---

[12]) Aus solchem Bestreben entstanden die „*Peanoschen Axiome*" der natürlichen Zahlen. (Siehe etwa E. Landau. Grundlagen der Analysis, 1930.) Diese enthalten auch die vollständige Induktion, die ich zu den Schlußweisen genommen habe. Ein grundsätzlicher Unterschied zwischen Schlußweisen und Axiomen besteht nicht, man kann auch logische Schlußweisen als „logische Axiome" formulieren, etwa $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ für die &-Beseitigung, usw.

Art (6. 1) ersetzen kann, sind für die Frage der *Widerspruchsfreiheit* belanglos, da sie aus einer Herleitung stets *eliminiert* werden können[13]).

III. Abschnitt.

Bedenkliche und unbedenkliche Schlußweisen in der reinen Zahlentheorie[14]).

Die Aufgabe des Widerspruchsfreiheitsbeweises soll sein (2. 3 1), *bedenkliche* Schlußweisen (Begriffsbildungen und Axiome eingeschlossen) unter Benutzung von *unbedenklichen* Schlüssen zu begründen. Zum richtigen Verständnis meines im IV. Abschnitt folgenden Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie ist es daher erforderlich, daß man sich klarmacht, welche Schlußweisen und sonstigen Beweismittel aus der reinen Zahlentheorie überhaupt *bedenklich* sind und welche dagegen als sicher richtig gelten können. Eine *eindeutige Abgrenzung* ist nicht möglich (vgl. 1. 8); immerhin lassen sich Überlegungen anstellen, welche die Zulässigkeit einiger Beweismittel sehr *einleuchtend* ergeben, während für andere eine entsprechende Begründung nicht gelingt und eine entfernte Analogie zu den bei den *Antinomien* der Mengenlehre auftretenden Trugschlüssen besteht, wodurch sie *bedenklich* erscheinen können.

Solche Überlegungen will ich jetzt durchführen; dazu gehe ich aus von der Betrachtung der mathematischen Theorie eines *endlichen* Gegenstandsbereiches (§ 7) und bespreche dann die durch die Verallgemeinerung auf einen *unendlichen* Gegenstandsbereich entstehenden Besonderheiten und Schwierigkeiten (§ 8—11).

§ 7.

Die Mathematik endlicher Gegenstandsbereiche.

7. 1. Die mathematische Behandlung eines *endlichen* Gegenstandsbereichs kann etwa so erfolgen:

Die *Gegenstände* des Bereichs werden *aufgezählt*; dabei erhält jeder eine bestimmte, ihm allein zukommende *Bezeichnung*.

Eine *Funktion* oder ein *Prädikat* wird so definiert: Die Anzahl der Argumentstellen sei ν. Für jede mögliche Aneinanderreihung von ν Gegenständen aus dem Gegenstandsbereich wird festgesetzt, welcher Gegenstand der zugehörige Funktionswert ist, bzw. für Prädikate: ob das Prädikat für diese Zusammenstellung von Gegenständen gilt oder nicht gilt.

---

[13]) Ein Beweis für dieses „ε-Eliminierbarkeitstheorem“ findet sich in dem Buche: Hilbert-Bernays, Grundlagen der Mathematik 1 (1934), S. 422—457.

[14]) Vgl. die in Anm. [1]) und [2]) zitierten Arbeiten von Hilbert und Weyl.

(Man könnte auch zulassen, daß Funktionen und Prädikate für einige Gegenstandskombinationen gar nicht definiert werden, das bedeutet eine unwesentliche Komplikation.)

Da es immer nur *endlich viele* Aneinanderreihungen von v Gegenständen gibt, so läßt sich jede Funktion und jedes Prädikat durch eine solche „Definitionstabelle" *vollständig* erklären.

7. 2. Weiterhin läßt sich von jeder beliebigen *bestimmten Aussage* (3. 2 4), die gemäß 3. 2 2, 3. 2 3 aus den gegebenen Gegenständen, Funktionen und Prädikaten mitsamt den Aussagenverknüpfungen aufgebaut ist, nach der folgenden formalen Vorschrift *„ausrechnen"*, ob sie *richtig* oder *falsch* ist:

Die Aussage wird durch eine Formel, ohne freie Variable, dargestellt. Kommt darin ein Zeichen $\forall$ vor, so ersetzt man den betreffenden Formelteil $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ durch $[\ldots[\mathfrak{F}(\mathfrak{g}_1)\ \&\ \mathfrak{F}(\mathfrak{g}_2)]\ \&\ \mathfrak{F}(\mathfrak{g}_3)]\ \&\ \ldots]\ \&\ \mathfrak{F}(\mathfrak{g}_\varrho)]$, wobei $\mathfrak{g}_1 \ldots \mathfrak{g}_\varrho$ die sämtlichen Gegenstände des Gegenstandsbereichs darstellen. Dies geschieht in gleicher Weise mit *jedem* vorkommenden $\forall$, und jedes $\exists$ wird durch einen entsprechenden Ausdruck mit $\vee$ statt & ersetzt.

Alsdann wird jeder vorkommende *Term* auf Grund der Definitionstabellen der in ihm auftretenden Funktionen „ausgerechnet", d. h. durch das Gegenstandszeichen ersetzt, das seinen „Wert" darstellt. Wo mehrere Funktionszeichen übereinandergeschachtelt sind, geschieht dies schrittweise von innen her.

Danach stellt man von jeder vorkommenden *Minimalformel* (3. 2 4) auf Grund der Definitionstabelle des betreffenden Prädikates fest, ob sie eine richtige oder eine falsche Aussage darstellt. *Weiterhin* erfolgt die Feststellung der Richtigkeit oder Falschheit der durch beliebige Aussagenverknüpfungszeichen zusammengesetzten Formelteile schrittweise von innen her nach den Anweisungen:

$\mathfrak{A}\ \&\ \mathfrak{B}$ ist richtig, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beide richtig sind, andernfalls falsch. $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ ist richtig, wenn $\mathfrak{A}$ richtig ist, ferner auch, wenn $\mathfrak{B}$ richtig ist; falsch nur dann, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beide falsch sind. $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ ist falsch, wenn $\mathfrak{A}$ richtig und $\mathfrak{B}$ falsch ist; in jedem anderen Falle ist $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ richtig. $\neg\, \mathfrak{A}$ ist richtig, wenn $\mathfrak{A}$ falsch ist, dagegen falsch, wenn $\mathfrak{A}$ richtig ist.

Das ganze Verfahren ergibt sich ohne weiteres aus dem tatsächlichen *Sinn*, den wir mit den formalen Zeichen verbinden. Wesentlich ist daran für uns nur die Grundeinsicht, daß in einer Theorie mit *endlichem* Gegenstandsbereich jede einschlägige Aussage *entscheidbar* ist, d. h. daß durch ein bestimmtes Verfahren mit endlich vielen Schritten festgestellt werden kann, ob sie richtig ist oder falsch.

7. 3. Es läßt sich leicht beweisen, daß die *logischen Schlußregeln* (5. 2), auf diese Theorie angewandt, *richtig* sind in dem Sinne, daß jede mit

ihrer Hilfe, ausgehend von „richtigen" mathematischen Grundsequenzen herleitbare Sequenz „richtig" ist. Dabei ist der Begriff der *„Richtigkeit" einer Sequenz* wie folgt in Übereinstimmung mit ihrem inhaltlichen Sinn formal festzusetzen: Eine Sequenz ohne freie Variable ist *falsch*, wenn alle Vorderformeln richtig sind und die Hinterformel falsch ist; in jedem anderen Falle ist sie *richtig*. Eine Sequenz mit *freien Variablen* ist *richtig*, wenn sie bei *jeder beliebigen* Einsetzung von Gegenstandszeichen richtig ist.

Ein solcher Nachweis würde nichts weiter bedeuten als eine *Bestätigung*, daß wir unsere formalen Schlußregeln wirklich so gewählt haben, daß sie mit dem inhaltlichen Sinn der Aussagenverknüpfungen im *Einklang* sind.

7.4. Es sei noch bemerkt, daß man in der *Praxis* bei mathematischen Theorien *endlicher* Gegenstandsbereiche meist nicht nach obiger Methode der Einführung von Gegenständen, Funktionen und Prädikaten, und der „Ausrechnung" der Aussagen, vorgeht; dies würde nämlich bei einer großen Zahl von Gegenständen zu langwierig sein. Man verfährt dann vielmehr nach ähnlichen Methoden, wie sie beim *unendlichen* Gegenstandsbereich Anwendung finden und im folgenden besprochen werden.

§ 8.

Entscheidbare Begriffsbildungen und Aussagen im unendlichen Gegenstandsbereich.

8.1. Was ändert sich nun, wenn man die Theorie eines *unendlichen* Gegenstandsbereichs, wie etwa der *natürlichen Zahlen*, entwickeln will?

8.11. Eine *Aufzählung der Gegenstände*, um diese zu *bezeichnen*, ist jetzt nicht mehr möglich, da es *unendlich viele* sind.

An deren Stelle tritt eine *Konstruktionsvorschrift* folgender Art: 1 bezeichnet eine natürliche Zahl. Weiter $1 + 1$, $1 + 1 + 1$, allgemein: aus einem Ausdruck, der eine natürliche Zahl darstellt, erhält man einen Ausdruck für eine weitere natürliche Zahl, indem man $+ 1$ anfügt. (Die Zeichen 2, 3, 4 usw. kann man nachträglich als Abkürzungen für $1 + 1$, $1 + 1 + 1$, $1 + 1 + 1 + 1$ usw. einführen; das ist nebensächlich.)

Diese mit *endlich* vielen Worten auszusprechende Vorschrift erzeugt die *unendliche* Zahlenreihe dadurch, daß sie die *Möglichkeit* immer neuer Weiterbildung nach einem gleichartigen *Verfahren* in sich schließt. („Potentielle Unendlichkeit".)

8.12. Die Definition von *Funktionen* und *Prädikaten* kann ebenfalls nicht wie beim endlichen Bereich durch Aufzählung aller einzelnen Werte erfolgen. Wollte man eine Definitionstabelle etwa für eine zahlentheoretische Funktion mit einem Argument geben, so müßte man der Reihe nach ihren Wert für das Argument 1, 2, 3, 4 usw., also *unendlich viele* Werte, angeben. Das ist unmöglich. Statt dessen gibt man eine *Berechnungs-*

vorschrift; z. B. für die Funktion $2 \cdot a$: $2 \cdot 1$ ist 2; $2 \cdot (b + 1)$ ist gleich $(2 \cdot b) + 2$. Diese Vorschrift ergibt die *Möglichkeit, der Reihe nach* für jede natürliche Zahl den zugehörigen Funktionswert eindeutig auszurechnen.

Allgemein gilt eine Funktion oder ein Prädikat als *entscheidbar definiert*, wenn eine *Entscheidungsvorschrift* dafür vorliegt, d. h.: Für jede vorgelegte Aneinanderreihung von natürlichen Zahlen muß der zugehörige *Funktionswert* auf Grund der Vorschrift eindeutig zu *berechnen* sein, bzw. muß eindeutig zu *entscheiden* sein, ob das *Prädikat* für diese Zusammenstellung von Zahlen *zutrifft* oder *nicht zutrifft*.

Für alle unter 6. 1 angegebenen Beispiele von Funktions- und Prädikatdefinitionen lassen sich solche Entscheidungsvorschriften angeben. Für Begriffsbildungen gemäß 6. 3 trifft das unter Umständen nicht mehr zu. Durch deren *Eliminierung* verschiebt sich die damit verbundene *Bedenklichkeit* auf die *logischen Schlußweisen*; diese behandle ich weiter unten (§ 9 – 11).

8. 2. Betrachten wir jetzt die *Aussagen* in der Theorie des unendlichen Gegenstandsbereiches der natürlichen Zahlen.

Von jeder vorgelegten bestimmten Aussage, in der die Verknüpfungen „*alle*" und „*es gibt*" *nicht* vorkommen, kann man wie im endlichen Bereich *entscheiden*, ob sie richtig oder falsch ist. Das Verfahren ist das gleiche wie unter 7. 2. Die Feststellung der Termwerte sowie der Richtigkeit oder Falschheit der Minimalformeln erfolgt jetzt statt nach einer *Definitionstabelle* nach der *Entscheidungsvorschrift* für die betreffenden Funktionen bzw. das betreffende Prädikat.

Auch die Anwendung der *logischen Schlußregeln* auf derartige Aussagen läßt sich wie im endlichen Bereich als zulässig nachweisen.

Es sei noch erwähnt, daß Entsprechendes auch für solche Aussagen gilt, in denen die Verknüpfungen „alle" und „es gibt". *nur auf endlich viele Zahlen bezogen* vorkommen; diese lassen sich in derselben Weise entscheiden, wobei die $\forall$ und $\exists$ wie unter 7. 2 durch & und $\vee$ zu ersetzen sind, und es lassen sich auch die zugehörigen Schlußweisen, das sind die $\forall$- und $\exists$-Schlußweisen (5. 2 5 1), sowie die vollständige Induktion (5. 2 5 3), in derselben Weise als zulässig nachweisen, sofern eben nur der Variabilitätsbereich der dabei vorkommenden — freien und gebundenen — Variablen etwa auf die Zahlen von 1 bis zu einer festen Zahl n eingeschränkt wird.

§ 9.

Die „an-sich"-Auffassung der transfiniten Aussagen[15]).

9. 1. Wenden wir uns nun den wesentlich *transfiniten Aussagen* zu, d. h. solchen Aussagen, in denen die Verknüpfung „alle" oder „es gibt"

[15]) Vgl. D. Hilbert, Über das Unendliche, Math. Annalen 95 (1926), S. 161—190.

auf die Gesamtheit aller natürlichen Zahlen bezogen vorkommt. Hier stehen wir vor einer *grundsätzlich neuen Sachlage.*

Zunächst ist festzustellen, daß sich das im endlichen Bereich anwendbare *Entscheidungsverfahren* (7. 2, 8. 2) auf solche transfiniten Aussagen nicht mehr übernehmen läßt; man müßte ja z. B. bei einer Aussage über *alle* natürlichen Zahlen *unendlich viele* Einzelfälle nachprüfen, das ist unmöglich. Auch sonst ist uns kein Entscheidungsverfahren für beliebige transfinite Aussagen bekannt, und es ist zweifelhaft, ob man jemals ein solches wird angeben können. Hätte man dieses, so könnte man z. B. von dem bisher unbewiesenen großen Fermatschen Satz (sowie dem Goldbachschen Satz usw.) nach bestimmtem Verfahren *ausrechnen*, ob er richtig oder falsch ist.

Was für einen *Sinn* sollen wir nun mit einer Aussage verbinden, deren Richtigkeit wir nicht *nachzuprüfen* vermögen?

9. 2. Die herkömmliche Auffassung ist diese: Es sei „*an sich*" bestimmt, ob eine transfinite Aussage, wie z. B. der Fermatsche Satz, „richtig" sei oder „falsch", unabhängig davon, ob wir wissen oder jemals erfahren werden, welches von beiden der Fall ist. Jede transfinite Aussage habe einen bestimmten *Sinn an sich*; insbesondere sei der Sinn einer $\forall$-Aussage dieser: „Für *jede* einzelne der unendlich vielen natürlichen Zahlen gilt die betreffende Aussage", der Sinn einer $\exists$-Aussage sei: „In der unendlichen Gesamtheit der natürlichen Zahlen gibt es *irgendwo* eine Zahl, für welche die betreffende Aussage gilt."

Aus dieser Auffassung wird weiterhin gefolgert, daß für *transfinite* Aussagen dieselben *logischen Schlußweisen* gültig seien wie im Endlichen, da ja der „an-sich"-Sinn der Aussagenverknüpfungen im Transfiniten vollständig dem im Endlichen entspricht.

9. 3. An dieser Stelle besteht nun hinreichender Anlaß zu einer *Kritik*, sofern man sich einmal entschlossen hat, die *äußersten Konsequenzen* aus den durch die Betrachtung der *Antinomien* der Mengenlehre gewonnenen Einsichten zu ziehen. Das will ich jetzt tun, und zwar will ich als Ergebnis der kritischen Betrachtung der Russellschen Antinomie (1. 6) den folgenden *Grundsatz* aufstellen:

Man darf eine unendliche Gesamtheit nicht als eine an sich vorhandene, abgeschlossene, betrachten (aktuale Unendlichkeit), sondern nur als etwas Werdendes, das vom Endlichen her konstruktiv immer weiter aufgebaut werden kann (potentielle Unendlichkeit).

9. 4. Die in § 8 angegebenen konstruktiven Methoden zur *Einführung von Gegenständen, Funktionen und Prädikaten* entsprechen diesem Grundsatz. Dort wurde ja ausdrücklich der Gedanke des allmählichen *Fortschreitens* in der Zahlenreihe, vom Anfang ausgehend, zugrundegelegt,

nicht die Vorstellung einer *vollendeten* Gesamtheit aller natürlichen Zahlen. Dasselbe gilt von den unter 8.2 behandelten Aussagen; diese sagen ja nur etwas über *endlich* viele Gegenstände aus, noch nicht über eine *unendliche* Gesamtheit.

9.5. Dagegen kann die unter 9.2 wiedergegebene „an-sich"-Auffassung der *transfiniten Aussagen* vor diesem Grundsatz *nicht bestehen*. Denn ihr liegt die Vorstellung der abgeschlossenen unendlichen Zahlenreihe zugrunde.

Zugleich muß die Auffassung, daß die logischen *Schlußweisen* ohne weiteres von endlichen auf unendliche Gegenstandsbereiche übernommen werden dürfen, *abgelehnt* werden.

Ich erinnere an einen *ähnlichen*, freilich trivialeren *Fall* einer unzulässigen Verallgemeinerung vom Endlichen aufs Unendliche, nämlich den bekannten Trugschluß: „Jede (endliche) Menge von natürlichen Zahlen enthält eine größte Zahl; also enthält auch die (unendliche) Menge *aller* natürlichen Zahlen eine größte Zahl." Hieraus ergeben sich Widersprüche, da dies eben nicht zutrifft.

9.6. Nach dieser Ablehnung der an-sich-Auffassung der transfiniten Aussagen bleibt uns nun aber die Möglichkeit, ihnen einen *„finiten" Sinn beizulegen*, d. h. eine derartige Aussage jeweils als Ausdruck für einen bestimmten *endlich* darstellbaren Sachverhalt zu *deuten*.

Alsdann haben wir jeweils die zugehörigen *logischen Schlußweisen* daraufhin zu prüfen, ob sie mit dieser Deutung der *Aussagen* im Einklang sind.

Das soll im folgenden § 10 für einen beträchtlichen Teil der transfiniten Aussagen und der zugehörigen Schlußweisen durchgeführt werden. In § 11 behandle ich dann die restlichen Aussageformen und Schlußweisen; dabei stößt die Methode auf Schwierigkeiten, und es zeigt sich die Bedeutung der *intuitionistischen* (1.8) *Grenzziehung* zwischen erlaubten und unerlaubten Schlußweisen innerhalb der Zahlentheorie; ferner ergibt sich eine andere, noch *engere Grenzziehung* als ebenfalls verfechtbar.

§ 10.

Finite Deutung der Verknüpfungszeichen $\forall$, &, $\exists$ und $\vee$ in transfiniten Aussagen.

Ich denke mir zunächst eine Zahlentheorie, die nur Aussagen über *endlich* viele Zahlen macht. Nun will ich schrittweise gewisse Typen von *transfiniten* Aussagen hinzunehmen.

10.1. *Die $\forall$-Verknüpfung.*

10.11. Beginnen wir mit der einfachsten Form einer transfiniten Aussage: $\forall x\, \mathfrak{F}(x)$, wobei $\mathfrak{F}$ noch kein $\forall$ oder $\exists$ enthalte, so daß die

Richtigkeit von $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ für jede *bestimmte* für $\mathfrak{x}$ eingesetzte Zahl *nachprüfbar* ist (8. 2).

Richtige Aussagen von dieser Gestalt sind z. B.:

$$\forall x\,(2\,|\,x \vee \neg\, 2\,|\,x); \qquad \forall x\,(x = x).$$

Man wird solche Aussagen als unbezweifelbar sinnvoll und richtig ansehen. Man braucht eben mit diesem $\forall$ gar nicht die Vorstellung einer *abgeschlossenen* unendlichen Anzahl von Einzelaussagen zu verbinden, sondern man kann dessen Sinn wie folgt *„finit" auffassen*: „Wenn man, mit 1 beginnend, der Reihe nach immer weitere Zahlen für $\mathfrak{x}$ einsetzt, so entsteht, wie weit man auch in der Bildung von Zahlen fortschreitet, jeweils eine richtige Aussage."

10. 1 2. Diese Auffassung läßt sich verallgemeinern auf den Fall, daß $\mathfrak{F}$ eine beliebige Aussage ist, die nur bereits mit finitem Sinn versehen sein muß: $\forall\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ kann dann sinnvoll ausgesagt werden, wenn $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ für beliebige für $\mathfrak{x}$ der Reihe nach eingesetzte Zahlen stets eine sinnvolle und richtige Aussage darstellt.

10. 1 3. Die der $\forall$-Verknüpfung zugehörigen *Schlußweisen*, $\forall$-Einführung und $\forall$-Beseitigung (5. 2 5 1), sind mit dieser Auffassung im Einklang: Bei der $\forall$-*Einführung* liegt ein Beweis dafür vor, daß, unter der Voraussetzung gewisser Annahmen (Γ) — *transfinite* Annahmen sind zunächst völlig sinnlos und kommen vorläufig nicht in Frage — $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ richtig ist, und es wird daraus gefolgert, daß unter den gleichen Annahmen $\forall\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ gilt. Das ist in Ordnung, denn wenn eine beliebige Zahl $\mathfrak{n}$ gegeben ist, so kann man diese — im ganzen Beweis — für $\mathfrak{a}$ einsetzen und hat einen Beweis für $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ (unter denselben Annahmen Γ, die ja, auf Grund der Variablen-Bedingung für die $\forall$-Einführung, $\mathfrak{a}$ nicht enthalten, also durch die Einsetzung nicht etwa geändert werden). Bei der $\forall$-Beseitigung wird von $\Gamma \to \forall\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ auf $\Gamma \to \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ geschlossen. Der Term $\mathfrak{t}$ stellt, nach Einsetzen irgendwelcher Zahlen für etwaige darin vorkommende freie Variable, eine bestimmte Zahl $\mathfrak{n}$ dar; die Aussage $\forall\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ schließt ihrem finiten Sinn gemäß in sich, daß auch $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ gilt; also ist auch diese Schlußweise in Ordnung.

10. 1 4. Die üblichen *zahlentheoretischen Axiome* lassen sich so formulieren, daß sie aus Aussagen, die kein $\forall$ oder $\exists$ enthalten, durch mehrere über die ganze Aussage erstreckte $\forall$-Verknüpfungen hervorgehen (vgl. 6. 2). Die Einsicht, daß diese Axiome im Sinne der finiten Auffassung des $\forall$ und auf Grund der entscheidbaren Definitionen der in ihnen vorkommenden Funktionen und Prädikate *richtig* sind, ist von solcher *Evidenz*, daß sie keiner weiteren Untersuchung bedarf. Es dürfte auch kaum möglich sein, diese Einsicht auf etwas grundsätzlich einfacheres zurückzuführen.

10.2. *Die &-Verknüpfung.*

Eine transfinite Aussage der Form $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ ist sinnvoll und darf behauptet werden, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bereits als sinnvoll und gültig erkannte Aussagen sind. Mit dieser Auffassung sind die Schlußregeln der &-Einführung und &-Beseitigung offenkundig im Einklang, wobei vorläufig, wie oben, transfinite Annahmen (Γ, Δ) ausgeschlossen sein sollen.

10.3. *Die $\exists$-Verknüpfung.*

Der Leser wird bisher den Eindruck haben, daß die „finite Deutung" den transfiniten Aussagen eigentlich nur *denselben* Sinn beilegt, den man auch sonst damit verbindet. Daß dies doch nicht ganz der Fall ist, wird sich bei der jetzt folgenden Behandlung des $\exists$ und $\vee$ zeigen (siehe 10.6).

Welchen Sinn wollen wir einer Aussage der Form $\exists\, x\, \mathfrak{F}(x)$ zuerkennen? Die *an-sich*-Auffassung: „es gibt *irgendwo* in der unendlichen Zahlenreihe eine Zahl mit der Eigenschaft $\mathfrak{F}$" gilt uns als *sinnlos*. Wenn aber die Aussage $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$, mit einer *bestimmten* Zahl $\mathfrak{n}$, sinnvoll und als gültig erkannt ist, so wollen wir daraus schließen dürfen ($\exists$-Einführung): $\exists\, x\, \mathfrak{F}(x)$. Dagegen ist nichts einzuwenden; die Aussage $\exists\, x\, \mathfrak{F}(x)$ stellt jetzt nur eine *Abschwächung* der Aussage $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ dar („Partialaussage" bei Hilbert, „Urteilsabstrakt" bei Weyl), indem sie nämlich nur noch bezeugt, daß wir eine Zahl $\mathfrak{n}$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{F}$ gefunden hatten, diese Zahl selbst jedoch nicht mehr angibt. Damit hat $\exists\, x\, \mathfrak{F}(x)$ einen finiten Sinn.

Wenn bei der $\exists$-Einführung statt $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ eine Aussage $\mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ mit einem *beliebigen Term* $\mathfrak{t}$ steht, so ändert sich nichts Wesentliches. Setzt man nämlich für die darin vorkommenden freien Variablen bestimmte Zahlen ein (für solche stehen ja die freien Variablen), so wird $\mathfrak{t}$, auf Grund der entscheidbaren Funktionsdefinitionen, zu einer bestimmten ausrechenbaren Zahl $\mathfrak{n}$. Auch das Vorkommen von nicht transfiniten Annahmen (Γ) bei einer $\exists$-Einführung bedeutet keine wesentliche Änderung der Sachlage.

Wie kann man nun aus einer bewiesenen Aussage der Form $\exists\, x\, \mathfrak{F}(x)$, auf Grund ihres *finiten Sinnes*, mit *Beseitigung des* $\exists$ weitere Aussagen schließen? Es ist, anders als bei $\forall$ und &, offenbar nicht möglich, aus $\exists\, x\, \mathfrak{F}(x)$ die Aussage $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$, welche die Berechtigung zur Behauptung von $\exists\, x\, \mathfrak{F}(x)$ gegeben hatte, *zurückzugewinnen*, weil eben aus $\exists\, x\, \mathfrak{F}(x)$ der Wert von $\mathfrak{n}$ gar nicht mehr ersichtlich ist. Wohl aber kann man so vorgehen: Man schließt auf $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$, wobei $\mathfrak{a}$ eine freie Variable ist, welche die Zahl $\mathfrak{n}$, ohne daß deren Wert im Augenblick bekannt zu sein braucht, vertritt. Gelingt es dann, hieraus irgendeine Aussage $\mathfrak{C}$, die $\mathfrak{a}$ nicht mehr enthält, zu folgern, so ist diese Aussage gültig. Damit haben wir die $\exists$-Beseitigung gemäß 5.251.

Bei dieser Schlußregel tritt erstmalig eine *zugehörige Annahme*, nämlich $\mathfrak{F}(a)$, auf. Diese kann *transfinit* sein. Während wir bisher transfiniten Aussagen als *Annahmen* keinen Sinn beigelegt haben, sondern nur als *bewiesenen* Aussagen, können wir hier sagen: Indem $\exists x \mathfrak{F}(x)$ bewiesen und sinnvoll ist, muß eine Zahl n bekannt gewesen und auf Grund des Beweises von $\exists x \mathfrak{F}(x)$ rekonstruierbar sein, derart daß $\mathfrak{F}(n)$ ebenfalls eine sinnvolle, richtige Aussage darstellt. Nun *betrachten* wir die Annahme $\mathfrak{F}(a)$ gar nicht als eine willkürliche Annahme, sondern als *die* richtige Aussage $\mathfrak{F}(n)$, a bedeute nichts anderes als die Zahl n. Alsdann erscheint der Beweis von $\mathfrak{C}$ aus der Annahme $\mathfrak{F}(a)$ nicht mehr als *hypothetisch*, sondern als ein gewöhnlicher *direkter* Beweis; und genau dies ist sein *Sinn*.

10.4. Die $\vee$-Verknüpfung läßt sich leicht analog zu $\exists$, wie & analog zu $\forall$, behandeln: Eine transfinite Aussage der Form $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ ist sinnvoll und darf behauptet werden, wenn eine der beiden Aussagen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bereits als sinnvoll und gültig *erkannt ist*. Die Schlußregel der *$\vee$-Einführung* entspricht vollkommen dieser Auffassung. Eine *$\vee$-Beseitigung* geschieht so: Man hat $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, und folgert sowohl aus der Annahme $\mathfrak{A}$ als auch aus der Annahme $\mathfrak{B}$ dieselbe Aussage $\mathfrak{C}$, dann gilt $\mathfrak{C}$. Dies ist in Ordnung, denn $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ schließt in sich, daß entweder $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ irgendwann als gültig erkannt worden ist. Damit läßt sich dann, wie bei der $\exists$-Beseitigung, entweder der Beweis für $\mathfrak{C}$ aus $\mathfrak{A}$ oder der Beweis für $\mathfrak{C}$ aus $\mathfrak{B}$ von der Annahme $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ frei machen und wird zu einem *direkten* Beweis, während der andere der beiden Beweise jeweils überflüssig wird und als sinnlos gelten kann.

10.5. An dieser Stelle sei kurz dargetan, wie sich die Schlußregel der *vollständigen Induktion* ohne weiteres als der finiten Auffassung angemessen erweist: $\mathfrak{F}(1)$ sei eine sinnvolle, gültige Aussage. Der Term t in dem Endergebnis $\mathfrak{F}(t)$ stellt, nach Einsetzen von Zahlen für etwaige freie Variable, eine bestimmte Zahl n dar. Alsdann kann man in dem Beweis von $\mathfrak{F}(a+1)$ aus $\mathfrak{F}(a)$ für a der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3 bis $n-1$ einsetzen und bildet daraus einen *direkten* Beweis, ausgehend von der gültigen Aussage $\mathfrak{F}(1)$ über $\mathfrak{F}(2)$, $\mathfrak{F}(3)$ usw. bis schließlich zu $\mathfrak{F}(n)$, so daß nun auch $\mathfrak{F}(n)$ eine gültige, sinnvolle Aussage ist.

Dies klingt trivial; wesentlich ist daran, daß die *zunächst sinnlose* (sofern sie transfinit ist) Annahme $\mathfrak{F}(a)$ durch die Möglichkeit der Umwandlung des betreffenden Beweisteils in einen *direkten*, worin sie *nicht mehr als Annahme* fungiert, einen *Sinn erhält*.

10.6. Die angegebene finite Deutung der Verknüpfungszeichen $\exists$ und $\vee$ ist von deren an-sich-Auffassung nicht nur *begrifflich*, sondern auch *in der praktischen Auswirkung verschieden*, wie folgende *Beispiele* zeigen:

Die Aussage „der große Fermatsche Satz ist entweder richtig oder nicht richtig" ist nach der an-sich-Auffassung *richtig*. Nach der finiten Auffassung des $\vee$ kann sie jedoch *nicht* behauptet werden. Denn hierzu würde verlangt, daß *eine* der beiden Aussagen bereits als gültig erkannt sei. Das ist aber bisher nicht der Fall.

Ein entsprechendes Beispiel mit $\exists$ ist die Aussage

$$\exists x \{[\forall y \forall z \forall u \forall v (v > 2 \supset y^v + z^v \neq u^v)] \vee [\exists y \exists z \exists u (x > 2 \,\&\, y^x + z^x = u^x)]\},$$

in Worten etwa: „es gibt eine Zahl x, so daß entweder der Fermatsche Satz richtig ist oder ein Gegenbeispiel mit dem Exponenten x existiert". Diese Aussage ist nach der an-sich-Auffassung richtig, kann aber nach der finiten Auffassung des $\exists$ nicht behauptet werden, da man eine solche Zahl x zur Zeit nicht kennt.

Diese beiden Aussagen lassen sich auch nicht mit den *bisher* besprochenen *Schlußweisen*, die wir ja als übereinstimmend mit der finiten Sinngebung erkannt haben, *beweisen*, sondern man braucht dazu außerdem die zu $\neg$ gehörigen Schlußweisen (vgl. 11.2).

10.7. Die in diesem Paragraphen versuchte finite Deutung von transfiniten Aussagen mit den Verknüpfungszeichen $\forall$, &, $\exists$ und $\vee$ und die damit verbundene Begründung der zugehörigen Schlußweisen ist in mancher Beziehung *unvollständig*; insbesondere müßte man auf die Bedeutung von Aussagen, in denen eine Reihe von solchen Verknüpfungen *übereinandergeschachtelt* vorkommt, noch näher eingehen. Ich tue dies nicht, da es mir hier nur auf die *Grundgedanken* ankommt.

Man könnte dann, von diesen Überlegungen ausgehend, einen rein formalen *Widerspruchsfreiheitsbeweis* für diesen Teil der Zahlentheorie entwickeln. Ein solcher hätte aber nicht viel Wert, denn man müßte in dem Beweis selbst transfinite Aussagen und dieselben zugehörigen Schlußweisen *benutzen*, die man durch ihn *„begründen"* will. Der Beweis würde also keine eigentliche *Zurückführung* bedeuten, wohl aber immerhin eine *Bestätigung* des *finiten* Charakters der formalisierten Schlußregeln. *Was* aber *finit* ist, darüber müßte man sich *zuvor* im klaren sein (um dann den Widerspruchsfreiheitsbeweis selbst mit finiten Beweismitteln führen zu können).

§ 11.

Die Verknüpfungszeichen $\supset$ und $\neg$ in transfiniten Aussagen; die intuitionistische Grenzziehung.

11.1. *Die $\supset$-Verknüpfung.*

Wir wollen jetzt transfinite Aussagen mit der $\supset$-Verknüpfung hinzunehmen.

Was bedeutet $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$? Es liege etwa ein *Beweis* vor, in dem, unter Verwendung von schon als zulässig erkannten Schlüssen, von der Annahme $\mathfrak{A}$ ausgehend die Aussage $\mathfrak{B}$ bewiesen wird. Hieraus schließt man durch $\supset$-Einführung: $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$. Diese Aussage soll nichts anderes besagen, als daß wir einen *Beweis* zur Verfügung *haben*, welcher gestattet, wenn einmal die Aussage $\mathfrak{A}$ bewiesen ist, daraus weiterhin die Aussage $\mathfrak{B}$ zu beweisen. Im Einklang mit dieser Auffassung ist die Schlußweise der $\supset$-*Beseitigung*: Bei dieser schließt man aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}$, das ist in Ordnung, denn $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ besagt ja gerade das Vorhandensein eines Beweises für $\mathfrak{B}$, sofern $\mathfrak{A}$ bereits bewiesen ist.

Bei dieser Deutung von $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ habe ich vorausgesetzt, daß der vorliegende Beweis von $\mathfrak{B}$ aus der Annahme $\mathfrak{A}$ nur *schon als zulässig erkannte* Schlüsse enthält. Nun könnte aber ein solcher Beweis auch wieder $\supset$-*Schlüsse* enthalten, und dann *versagt* unsere Deutung. Denn es wäre *zirkelhaft*, die $\supset$-Schlußweisen auf Grund einer $\supset$-Deutung zu begründen, in welche die Voraussetzung der Zulässigkeit *derselben* Schlußweisen bereits eingeht. Man müßte denn schon die *in dem Beweis vorkommenden* $\supset$-Schlüsse *zuvor* begründen; dies hat aber seine Schwierigkeiten, vor allem wenn die Annahme $\mathfrak{A}$ selbst die Form $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ hat; dann liegt ja gar kein Beweis für $\mathfrak{D}$ aus $\mathfrak{C}$ vor, auf Grund dessen $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ einen *Sinn* erhalten könnte.

Um dieser Schwierigkeit Herr zu werden, müßte man schon eine kompliziertere Deutungsvorschrift aufstellen. Hierin liegt eine *Hauptaufgabe* des im IV. Abschnitt folgenden *Widerspruchsfreiheitsbeweises*.

11.2. *Die* $\neg$-*Verknüpfung* stellt einer finiten Deutung noch mehr Hindernisse in den Weg als $\supset$. Die finite Deutung geschah ja immer in der Weise, daß eine transfinite Aussage jeweils als neuer Ausdruck für etwas zuvor als gültig Erkanntes ausgesprochen werden durfte. $\neg \mathfrak{A}$ besagt nun nach der an-sich-Auffassung nicht, daß irgendetwas *gilt*, sondern rein negativ, daß etwas, nämlich die Aussage $\mathfrak{A}$, *nicht gilt*.

Immerhin erscheint folgende *positive* Deutung möglich: $\neg \mathfrak{A}$ soll dann sinnvoll und richtig sein, wenn ein Beweis dafür vorliegt, daß aus der Annahme der Gültigkeit von $\mathfrak{A}$ etwas, was sicher falsch ist, folgt. Durch diese Deutung wäre die $\neg$-Verknüpfung auf die $\supset$-Verknüpfung *zurückgeführt*, man kann geradezu $\neg \mathfrak{A}$ als gleichbedeutend etwa mit $\mathfrak{A} \supset 1 = 2$ erklären. Mit dieser Auffassung ist die Schlußweise der „*Widerlegung*" im *Einklang*, wie sich ganz formal zeigen läßt: Aus $\mathfrak{A}, \Gamma \to \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}, \Delta \to \mathfrak{B} \supset 1 = 2$ ist $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{A} \supset 1 = 2$ abzuleiten. Das geschieht so: Durch $\supset$-Beseitigung erhält man $\mathfrak{A}, \Gamma, \mathfrak{A}, \Delta \to 1 = 2$, also (5. 2 4 2) $\mathfrak{A}, \Gamma, \Delta \to 1 = 2$, und daraus durch $\supset$-Einführung $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{A} \supset 1 = 2$. Damit wäre die „Widerlegung" auf die $\supset$-Schlußweisen zurückgeführt.

Es bleibt zu beachten, daß bei dieser Zurückführung von $\neg$ auf $\supset$ natürlich die bei $\supset$ bestehenden *Bedenken* sich auf die $\neg$-Verknüpfung in entsprechender Weise übertragen.

Nun kommt aber als weitere Schwierigkeit hinzu: Die „*Beseitigung der doppelten Verneinung*" läßt sich durchaus *nicht* als übereinstimmend mit der angegebenen $\neg$-Deutung nachweisen. Es ist gar nicht einzusehen, wieso aus der Gültigkeit von $(\mathfrak{A} \supset 1 = 2) \supset 1 = 2$ die Gültigkeit von $\mathfrak{A}$ hervorgehen soll.

Überhaupt fällt diese Schlußweise erheblich aus dem Rahmen der übrigen Schlußweisen *heraus*. Bei den Aussagenverknüpfungszeichen $\forall$, &, $\exists$, $\vee$ und $\supset$ hatten wir stets eine *Einführungs-* und eine *Beseitigungs-*Schlußweise, die einander in gewisser Weise entsprachen. (Siehe die Behandlung in § 10 und 11. 1.) Für die $\neg$-Verknüpfung kann die „Widerlegungs"-Schlußweise als Einführung (des $\neg$ in $\neg\, \mathfrak{A}$) und Beseitigung (des $\neg$ in $\neg\, \mathfrak{B}$) zugleich angesehen werden; dagegen stellt die Schlußweise der „Beseitigung der doppelten Verneinung" eine *zusätzliche* $\neg$-Beseitigung dar, die nicht der $\neg$-Einführung durch „Widerlegung" entspricht. Sie ermöglicht *positive Aussagen* ($\mathfrak{A}$) durch Widerlegung des Gegenteils *indirekt zu beweisen*, wobei es sein kann, daß ein positiver Beweis derselben Aussage gar nicht zu erhalten ist. Auf diese Art lassen sich beispielsweise die beiden unter 10. 6 als Beispiele genannten Aussagen mit $\vee$ und $\exists$ beweisen, die nach der finiten Deutung von $\vee$ und $\exists$ gar nicht behauptet werden dürfen.

Daraus geht hervor, daß sich die Schlußweise der „Beseitigung der doppelten Verneinung" in eine solche finite Deutung, wie wir sie für $\vee$ und $\exists$ gewählt haben, überhaupt auf keine Weise einbeziehen läßt.

11. 3. *Die intuitionistische Grenzziehung in der Zahlentheorie* besteht in dem Verbot der Schlußweise „Beseitigung der doppelten Verneinung" für *transfinite* Aussagen $\mathfrak{A}$. Sie wird oft auch als Verbot des „Satzes vom ausgeschlossenen Dritten", $\mathfrak{A} \vee \neg\, \mathfrak{A}$, für transfinite $\mathfrak{A}$, ausgesprochen, was auf dasselbe hinauskommt [16]).

Die in § 10 dargestellte „*finite* Auffassung" der Aussagenverknüpfungszeichen $\forall$, &, $\exists$ und $\vee$ in transfiniten Aussagen stimmt im wesentlichen mit der Auffassung der *Intuitionisten* überein. Die $\supset$-Verknüpfung jedoch wird von diesen in *allgemeinster* Verwendung zugelassen; die $\neg$-Verknüpfung wird wie unter 11. 2 angegeben durch Zurückführung auf $\supset$ gedeutet, dem entspricht die Ausdrucksweise „$\mathfrak{A}$ ist *absurd*" statt „$\mathfrak{A}$ gilt nicht" für $\neg\, \mathfrak{A}$.

Die „Beseitigung der doppelten Verneinung" hebt sich zweifellos ganz besonders von den übrigen Schlußweisen ab, und zwar in einer Weise, die

[16]) Vgl. A. Heyting, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, Sitzungsberichte d. Preuß. Akad. d. Wiss., phys.-math. Kl. (1930), S. 42—56.

ihre Ablehnung nahelegt. Ich halte jedoch noch *weiter gehende Bedenken*, die sich insbesondere gegen die allgemeine Verwendung des $\supset$ richten können (11. 1), für mit nicht geringerem Rechte verfechtbar.

Ein Satz von Gödel über die Gleichwertigkeit der intuitionistischen mit der gesamten reinen Zahlentheorie.

Wie zuerst von K. Gödel bewiesen wurde [17]), kann man durch eine besondere Deutung der transfiniten Aussagen erreichen, daß die Schlußweise „*Beseitigung der doppelten Verneinung*" *mit transfinitem* $\mathfrak{A}$ aus jedem beliebigen rein zahlentheoretischen Beweis *eliminiert* werden kann, so daß jeder derartige Beweis zu einem intuitionistisch zulässigen wird.

Dadurch ist die *gesamte* an-sich-Zahlentheorie auf die *intuitionistische* Zahlentheorie zurückgeführt. Insbesondere ist jene *widerspruchsfrei*, wenn diese es ist.

Die *betreffende Deutung* erfolgt so: Die Verknüpfungszeichen &, $\forall$, $\supset$ und $\neg$ erhalten ihren *intuitionistischen* Sinn. Anders mit $\vee$ und $\exists$; $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ wird gedeutet als $\neg\,[(\neg\,\mathfrak{A}) \,\&\, \neg\,\mathfrak{B}]$, $\exists\,x\,\mathfrak{F}(x)$ als $\neg\,\forall x \neg\,\mathfrak{F}(x)$. $\vee$ und $\exists$ können ja nicht ihre intuitionistische Bedeutung erhalten, da die unter 10. 6 genannten Aussagenbeispiele in der an-sich-Zahlentheorie beweisbar sind, in der intuitionistischen Zahlentheorie jedoch nicht. Ersetzt man in diesen Beispielen $\vee$ und $\exists$ in der angegebenen Weise durch &, $\forall$ und $\neg$, so entstehen Aussagen, die auch *intuitionistisch* beweisbar sind.

Bei *meinem Widerspruchsfreiheitsbeweis* macht die „Beseitigung der doppelten Verneinung" auch keine wesentlichen Schwierigkeiten (13. 9 3).

11. 4. In den *in der praktischen Zahlentheorie stattfindenden Beweisen* kommen die Schlußweisen, die wir bisher durch finite Deutung nicht zu begründen vermochten und die daher zunächst bedenklich sind, so gut wie *gar nicht vor*. Es sind dies, gemäß unseren Betrachtungen, vor allem die „Beseitigung der doppelten Verneinung" (und der „Satz vom ausgeschlossenen Dritten"), auf transfinite Aussagen angewandt, sowie die Verwendung von transfiniten Aussagen mit übereinandergeschachtelten $\supset$- und $\neg$-Verknüpfungen.

Transfinite Aussagen komplizierter Bauart kommen überhaupt praktisch kaum vor. In dem in § 4 vorgeführten *Euklidschen Beweis* z. B. sind die einzigen wesentlich transfiniten Aussagen die beiden am Schluß auftretenden: $\exists z\ (\mathrm{Prim}\ z \,\&\, z > a)$ und $\forall y \exists z\ (\mathrm{Prim}\ z \,\&\, z > y)$. Der ganze Beweis ist völlig *finit*. Die sonst darin vorkommenden transfiniten, d. h.

---

[17]) K. Gödel, Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie, Ergebnisse eines math. Koll., Heft 4 (1933), S. 34—38. — Das im Text genannte Ergebnis wurde etwas später, unabhängig von Gödel, auch von P. Bernays und mir gefunden. — Gödel ersetzt noch $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ durch $\neg\,(\mathfrak{A} \,\&\, \neg\,\mathfrak{B})$, dies ist bei meinem Schlußregelnsystem nicht notwendig, weil ich keine Aussagenvariablen verwende.

$\forall$ oder $\exists$ enthaltenden Aussagen, sind alle so beschaffen, daß die gebundenen Variablen auf einen *endlichen* Teil der Zahlenreihe beschränkt sind.

Als Beispiel eines schwierigeren Beweises habe ich den Beweis von Pfarrer Zeller für das „quadratische Reziprozitätsgesetz“ [18]) durchgesehen und auch hierin keinen „bedenklichen Schluß“ vorgefunden.

Es ist durchaus berechtigt, wenn man bei diesen und ähnlichen Beweisen den *Eindruck unanzweifelbarer Richtigkeit* hat. Man hat bei ihnen auch ganz von selbst mehr eine *finite* als eine *an-sich*-Auffassung der transfiniten Aussagen im Auge.

Die Aufgabe des *Widerspruchsfreiheitsbeweises* für die *reine Zahlentheorie* ist also mehr eine Begründung von *an sich möglichen*, als von wirklich *vorkommenden* Schlüssen.

IV. Abschnitt.

Der Widerspruchsfreiheitsbeweis.

Ich will nun die Widerspruchsfreiheit der gesamten, im II. Abschnitt formal angegebenen, reinen Zahlentheorie *beweisen*.

Gemäß 2. 3 1 ist darauf zu achten, daß die beim Widerspruchsfreiheitsbeweis *selbst* benutzten Schlüsse und Begriffsbildungen *unbedenklich* sind oder doch wenigstens wesentlich sicherer als die bedenklichen Schlußweisen der reinen Zahlentheorie. Nach den im III. Abschnitt angestellten Erwägungen kann diese Forderung als erfüllt gelten, wenn die benutzten Beweismittel „*finit*“ (im Sinne von § 9—11) sind. Wieweit dies zutrifft, soll im V. Abschnitt noch näher untersucht werden (16. 1).

§ 13—15 enthält das *Kernstück* des Widerspruchsfreiheitsbeweises, während § 12 einer verhältnismäßig einfachen *Vorbereitung* gewidmet ist.

§ 12.

Wegschaffung der Zeichen $\vee$, $\exists$ und $\supset$ aus einer vorgelegten Herleitung.

Es liege irgendeine zahlentheoretische Herleitung (5. 2 2) vor. Es ist zu zeigen, daß sie widerspruchsfrei ist, d. h., daß ihre Endformel nicht die Gestalt $\mathfrak{A} \,\&\, \neg\, \mathfrak{A}$ haben kann.

Ich beginne mit einer Vorschrift zu einer *Umformung der vorgelegten Herleitung*. Durch die Umformung wird erreicht, daß die Aussagenverknüpfungszeichen $\vee$, $\exists$ und $\supset$ in der Herleitung *nicht mehr vorkommen*.

12. 1. In der an-sich-Logik, mit der wir es ja in der uneingeschränkten Zahlentheorie zu tun haben, können die einzelnen *Aussagenverknüpfungen* auf verschiedene Weise *durch andere dargestellt* werden. Man kann mit

[18]) Siehe etwa P. Bachmann, Die Elemente der Zahlentheorie, III, 10.

Hilfe von *drei* Verknüpfungszeichen, nämlich $\neg$, einem beliebigen der drei Verknüpfungszeichen &, $\vee$, $\supset$, sowie einem beliebigen der beiden Verknüpfungszeichen $\forall$ und $\exists$, alle übrigen ausdrücken. Davon will ich zur Erleichterung des Widerspruchsfreiheitsbeweises Gebrauch machen, und zwar will ich die Zeichen &, $\forall$ und $\neg$ *beibehalten* und $\vee$, $\exists$ und $\supset$ durch diese *ersetzen*.

Die dem $\supset$ anhaftenden *Bedenklichkeiten* (11.1) werden dadurch nicht etwa weggezaubert, sondern bleiben in dem $\neg$ in gleichwertiger Weise bestehen.

Die Ersetzung erfolgt so:

Für $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ tritt $\neg (\neg \mathfrak{A}) \& \neg \mathfrak{B})$;

für $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ tritt $\neg (\mathfrak{A} \& \neg \mathfrak{B})$;

für $\exists x \mathfrak{F}(x)$ tritt $\neg \forall x \neg \mathfrak{F}(x)$.

Alle in der Herleitung vorkommenden $\vee$-, $\exists$- und $\supset$-Zeichen werden in dieser Weise ersetzt. In welcher *Reihenfolge* das geschieht, ist offenbar belanglos.

12.2. Jetzt haben wir zu untersuchen, wieweit die vorgelegte *Herleitung* bei diesen Ersetzungen *korrekt geblieben* ist, und wo das nicht der Fall ist, sie entsprechend *umzuwandeln*. Daß dies möglich ist, ist sehr plausibel, da ja die für $\vee$, $\exists$ und $\supset$ getretenen anderen Schreibweisen bei der an-sich-Auffassung mit den ursprünglichen *gleichwertig* sind. Der genaue formale Nachweis ist daher auch nicht schwierig:

Logische Grundsequenzen (5.23) sind in ebensolche übergegangen.

Für *mathematische Grundsequenzen* gilt das gleiche, sofern wir voraussetzen, daß ein mathematisches Axiom, in dem $\vee$-, $\exists$- und $\supset$-Verknüpfungen vorkommen, bei der Ersetzung dieser durch $\neg$-, &- und $\forall$-Verknüpfungen wieder in ein mathematisches Axiom übergeht. Das ist leicht zu erfüllen; das einfachste ist, man formuliert alle Axiome von vornherein ohne Verwendung von $\vee$, $\exists$ und $\supset$.

Strukturänderungen (5.24) und Anwendungsstellen der *Schlußregeln* (5.25) sind offenbar korrekt geblieben, soweit es sich nicht um eine der den Verknüpfungszeichen $\vee$, $\exists$ und $\supset$ *zugehörigen Schlußregeln* handelte. Diese sind durch Anwendungen *anderer* Schlußregeln zu ersetzen, nach folgenden Vorschriften:

Eine $\vee$-*Einführung* „aus $\Gamma \to \mathfrak{A}$ ergibt sich $\Gamma \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$“ lautet nach der Ersetzung: „Aus $\Gamma^* \to \mathfrak{A}^*$ ergibt sich $\Gamma^* \to \neg (\neg \mathfrak{A}^*) \& \neg \mathfrak{B}^*)$“. $\mathfrak{A}^*$ sei die aus $\mathfrak{A}$ durch die Ersetzung entstandene Formel; entsprechend sind $\mathfrak{B}^*$ und Γ^* aufzufassen.

In Worten lautet die neue Fassung mittels der Schlußweisen für & und $\neg$ wie folgt: Unter den Annahmen Γ^* gilt $\mathfrak{A}^*$. Würde nun $(\neg \mathfrak{A}^*) \& \neg \mathfrak{B}^*$ gelten, so insbesondere $\neg \mathfrak{A}^*$, das widerspräche $\mathfrak{A}^*$, kann also nicht stimmen, d. h. es gilt $\neg ((\neg \mathfrak{A}^*) \& \neg \mathfrak{B}^*)$, unter den Annahmen Γ^*.

Dem entspricht folgende *formale* Vorschrift: Die Herleitungsstelle wird so abgeändert: $(\neg \mathfrak{A}^*) \,\&\, \neg \mathfrak{B}^* \to (\neg \mathfrak{A}^*) \,\&\, \neg \mathfrak{B}^*$ ist Grundsequenz; durch &-Beseitigung entsteht $(\neg \mathfrak{A}^*) \,\&\, \neg \mathfrak{B}^* \to \neg \mathfrak{A}^*$, dies ergibt zusammen mit der aus $\Gamma^* \to \mathfrak{A}^*$ gemäß 5. 2 4 3 erhaltenen Sequenz $(\neg \mathfrak{A}^*) \,\&\, \neg \mathfrak{B}^*, \Gamma^* \to \mathfrak{A}^*$ durch „Widerlegung" $\Gamma^* \to \neg ((\neg \mathfrak{A}^*) \,\&\, \neg \mathfrak{B}^*)$.

Mit der anderen Form von $\vee$-Einführung verfährt man ganz entsprechend.

Eine $\vee$-*Beseitigung* lautet nach der Ersetzung: „Aus $\Gamma^* \to \neg ((\neg \mathfrak{A}^*) \,\&\, \neg \mathfrak{B}^*)$ und $\mathfrak{A}^*, \Delta^* \to \mathfrak{C}^*$ und $\mathfrak{B}^*, \Theta^* \to \mathfrak{C}^*$ ergibt sich $\Gamma^*, \Delta^*, \Theta^* \to \mathfrak{C}^*$." Man ändert dies so ab: $\neg \mathfrak{C}^* \to \neg \mathfrak{C}^*$ ergibt $\mathfrak{A}^*, \neg \mathfrak{C}^* \to \neg \mathfrak{C}^*$, dies gibt zusammen mit $\mathfrak{A}^*, \Delta^* \to \mathfrak{C}^*$ durch „Widerlegung" $\Delta^*, \neg \mathfrak{C}^* \to \neg \mathfrak{A}^*$; ebenso ergibt $\mathfrak{B}^*, \neg \mathfrak{C}^* \to \neg \mathfrak{C}^*$ zusammen mit $\mathfrak{B}^*, \Theta^* \to \mathfrak{C}^*$ die Sequenz $\Theta^*, \neg \mathfrak{C}^* \to \neg \mathfrak{B}^*$; aus beiden Ergebnissen zusammen erhält man durch &-Einführung $\Delta^*, \neg \mathfrak{C}^*, \Theta^*, \neg \mathfrak{C}^* \to (\neg \mathfrak{A}^*) \,\&\, \neg \mathfrak{B}^*$, also (5. 2 4 2, 5. 2 4 1) $\neg \mathfrak{C}^*, \Delta^*, \Theta^* \to (\neg \mathfrak{A}^*) \,\&\, \neg \mathfrak{B}^*$; aus $\Gamma^* \to \neg ((\neg \mathfrak{A}^*) \,\&\, \neg \mathfrak{B}^*)$ ergibt sich $\neg \mathfrak{C}^*, \Gamma^* \to \neg ((\neg \mathfrak{A}^*) \,\&\, \neg \mathfrak{B}^*)$, somit erhält man durch „Widerlegung" $\Delta^*, \Theta^*, \Gamma^* \to \neg \neg \mathfrak{C}^*$, durch „Beseitigung der doppelten Verneinung" endlich $\Delta^*, \Theta^*, \Gamma^* \to \mathfrak{C}^*$, also (5. 2 4 1) $\Gamma^*, \Delta^*, \Theta^* \to \mathfrak{C}^*$.

Eine $\exists$-*Einführung* oder $\exists$-*Beseitigung* wird ganz entsprechend der $\vee$-Einführung bzw. $\vee$-Beseitigung behandelt; es tritt dann bei der Abänderung der Herleitungsstelle eine $\forall$-Beseitigung statt einer &-Beseitigung bzw. eine $\forall$-Einführung statt einer &-Einführung auf. Dies ist leicht durchzuführen.

Eine $\supset$-*Einführung* lautet nach der Ersetzung: „Aus $\mathfrak{A}^*, \Gamma^* \to \mathfrak{B}^*$ ergibt sich $\Gamma^* \to \neg (\mathfrak{A}^* \,\&\, \neg \mathfrak{B}^*)$." Man ändert dies so ab: $\mathfrak{A}^* \,\&\, \neg \mathfrak{B}^* \to \mathfrak{A}^* \,\&\, \neg \mathfrak{B}^*$ ergibt $\mathfrak{A}^* \,\&\, \neg \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}^*$ sowie $\mathfrak{A}^* \,\&\, \neg \mathfrak{B}^* \to \neg \mathfrak{B}^*$, also auch $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{A}^* \,\&\, \neg \mathfrak{B}^* \to \neg \mathfrak{B}^*$; dies mit $\mathfrak{A}^*, \Gamma^* \to \mathfrak{B}^*$ zusammen ergibt $\Gamma^*, \mathfrak{A}^* \,\&\, \neg \mathfrak{B}^* \to \neg \mathfrak{A}^*$, also $\mathfrak{A}^* \,\&\, \neg \mathfrak{B}^*, \Gamma^* \to \neg \mathfrak{A}^*$. Mit $\mathfrak{A}^* \,\&\, \neg \mathfrak{B}^* \to \mathfrak{A}^*$ dazu entsteht $\Gamma^* \to \neg (\mathfrak{A}^* \,\&\, \neg \mathfrak{B}^*)$.

Eine $\supset$-*Beseitigung* lautet nach der Ersetzung: „Aus $\Gamma^* \to \mathfrak{A}^*$ und $\Delta^* \to \neg (\mathfrak{A}^* \,\&\, \neg \mathfrak{B}^*)$ ergibt sich $\Gamma^*, \Delta^* \to \mathfrak{B}^*$". Man ändert dies so ab: $\Gamma^* \to \mathfrak{A}^*$ und $\neg \mathfrak{B}^* \to \neg \mathfrak{B}^*$ ergibt $\Gamma^*, \neg \mathfrak{B}^* \to \mathfrak{A}^* \,\&\, \neg \mathfrak{B}^*$, also $\neg \mathfrak{B}^*, \Gamma^* \to \mathfrak{A}^* \,\&\, \neg \mathfrak{B}^*$; mit $\neg \mathfrak{B}^*, \Delta^* \to \neg (\mathfrak{A}^* \,\&\, \neg \mathfrak{B}^*)$ dazu entsteht $\Gamma^*, \Delta^* \to \neg \neg \mathfrak{B}^*$, daraus $\Gamma^*, \Delta^* \to \mathfrak{B}^*$.

12. 3. Somit ist es gelungen, die vorgelegte Herleitung in eine Herleitung umzuwandeln, in der die Zeichen $\vee$, $\exists$ und $\supset$ *nicht mehr vorkommen*. Man beachte, daß die *Endformel* der Herleitung nur dann geändert worden ist, wenn sie ein $\vee$, $\exists$ oder $\supset$ enthielt.

12. 4. Bemerkenswert ist, daß nach dem unter 11. 3 erwähnten Satze die vorgelegte Herleitung nunmehr bereits im wesentlichen eine *intuitio-*

nistisch zulässige zahlentheoretische Herleitung ist; die „Beseitigung der doppelten Verneinung" ließe sich nämlich, wo sie noch benutzt wird, durch andere Schlußregeln ersetzen.

§ 13.

Das Reduzieren von Sequenzen.

Der im folgenden zu erklärende Begriff der „Angebbarkeit einer *Reduziervorschrift*" für eine Sequenz dient uns als formaler Ersatz des inhaltlichen *Richtigkeitsbegriffs;* er gibt eine *besondere finite Deutung* der Aussagen, die an Stelle der *an-sich-Auffassung* derselben tritt, an (vgl. § 9 — 11).

Ein einzelner *Reduktionsschritt* an einer Sequenz, in der die Verknüpfungszeichen $\vee$, $\exists$ und $\supset$ nicht mehr vorkommen, kann auf folgende Arten ausgeführt werden (13. 1 1 bis 13. 5 3):

13. 1 1. Die Sequenz enthalte mindestens eine *freie Variable.* Dann ersetzt man eine freie Variable, überall wo sie in der Sequenz vorkommt, durch ein und dasselbe, beliebig zu wählende *Zahlzeichen.*

13. 1 2. Die Sequenz enthalte keine freien Variablen. In irgendeiner ihrer Formeln komme an einer Stelle ein *Minimalterm* (3. 2 4) vor (z. B. als Teil eines längeren Terms). Dann setzt man den *zugehörigen „Funktionswert"* dafür ein, d. h. dasjenige Zahlzeichen, das auf Grund der Definition der betreffenden Funktion (siehe 8. 1 2) deren Wert für die vorliegenden Zahlen als Argumente darstellt.

An dieser Stelle setze ich also von den *Funktionen* voraus, daß sie im Sinne von 8. 1 2 *entscheidbar definiert* seien.

13. 2 1. Die Sequenz enthalte keine freien Variablen und keine Minimalterme; ihre *Hinterformel* (5. 2 1) habe die Gestalt $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$. Dann ersetzt man diese durch eine Formel $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$, d. h. durch eine Formel, die aus $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ durch Einsetzen eines *beliebig zu wählenden Zahlzeichens* $\mathfrak{n}$ für die Variable $\mathfrak{x}$ hervorgeht.

13. 2 2. Die Sequenz enthalte keine freien Variablen und keine Minimalterme; ihre Hinterformel habe die Gestalt $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$. Dann ersetzt man diese, *nach Wahl,* durch die Formel $\mathfrak{A}$ oder durch die Formel $\mathfrak{B}$.

13. 2 3. Die Sequenz enthalte keine freien Variablen und keine Minimalterme; ihre Hinterformel habe die Gestalt $\neg \mathfrak{A}$. Dann ersetzt man diese durch die Formel $1 = 2$[19]), und fügt zugleich zu den Vorderformeln der Sequenz die Formel $\mathfrak{A}$ (als letzte) hinzu (vgl. 11. 2).

13. 3. Wenn keiner der bisher genannten Fälle vorliegt, so muß die *Hinterformel* der Sequenz eine *Minimalformel* (3. 2 4) sein.

Ich setze nunmehr von den *Prädikaten,* wie oben von den Funktionen, voraus, daß sie im Sinne von 8. 1 2 *entscheidbar definiert* seien.

[19]) Ich könnte hier auch eine beliebige andere falsche Minimalformel verwenden.

Demnach kann man von einer vorliegenden Minimalformel auf Grund der Definition des zugehörigen Prädikates feststellen, ob sie eine *richtige oder falsche* Aussage darstellt.

13. 4. Die Sequenz enthalte keine freien Variablen und keine Minimalterme. Ihre Hinterformel sei eine *richtige Minimalformel*; oder: die Hinterformel sei eine *falsche Minimalformel* (z. B. $1 = 2$), und eine der *Vorderformeln* sei ebenfalls eine *falsche Minimalformel.*

Für eine solche offenbar *richtige* Sequenz (vgl. 7. 3) wird *kein Reduktionsschritt definiert.*

13. 5. Die Sequenz enthalte keine freien Variablen und keine Minimalterme; ihre Hinterformel sei eine falsche Minimalformel; keine der Vorderformeln sei eine falsche Minimalformel. Alsdann sind folgende drei verschiedenen Arten von Reduktionsschritten zulässig (Gegenstücke zu 13. 2):

13. 5 1. Eine *Vorderformel* habe die Gestalt $\forall\, \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$. Man fügt hinter dieser eine Vorderformel $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ hinzu, d. h. eine Formel, die aus $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ durch Einsetzung eines Zahlzeichens $\mathfrak{n}$ für die Variable $\mathfrak{x}$ hervorgeht. Dabei darf man die Formel $\forall\, \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ weglassen oder auch stehen lassen.

13. 5 2. Eine Vorderformel habe die Gestalt $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$. Man fügt hinter ihr entweder die Formel $\mathfrak{A}$ oder die Formel $\mathfrak{B}$ hinzu. Dabei darf man die Formel $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ weglassen oder auch stehenlassen.

13. 5 3. Eine Vorderformel habe die Gestalt $\neg\, \mathfrak{A}$. Man ersetzt die Hinterformel durch $\mathfrak{A}$. Dabei darf man die Formel $\neg\, \mathfrak{A}$ weglassen oder auch stehenlassen. —

13. 6. Eine *Reduziervorschrift* für eine Sequenz, in der die Verknüpfungszeichen $\vee$, $\exists$ und $\supset$ nicht vorkommen, ist eine Vorschrift, auf Grund deren die Sequenz stets durch *endlich viele einzelne Reduktionsschritte* (gemäß 13. 1 1 bis 13. 5 3) auf eine der richtigen *Endformen* (13. 4) „reduziert" werden kann, wie man auch immer, so oft ein Reduktionsschritt mit „Wahlfreiheit" stattfindet, d. h. einer der unter 13. 1 1, 13. 2 1 und 13. 2 2 beschriebenen Schritte, das dabei zu verwendende Zahlzeichen $\mathfrak{n}$ *wählen* mag, bzw. welche der beiden Formeln $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ (im Falle 13. 2 2) man auch *wählen* mag.

13. 7. Wo bei *sonstigen* Reduktionsschritten mehrere Möglichkeiten zur Verfügung stehen (z. B. im Falle 13. 5), da besteht keine *Wahlfreiheit*, sondern da soll durch die Vorschrift *bestimmt* sein, welche Art von Reduktionsschritt stattzufinden hat. Auch z. B., *welches* Zahlzeichen $\mathfrak{n}$ bei der Zufügung einer Vorderformel $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ zu verwenden ist, und ob man dabei die Formel $\forall\, \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ weglassen soll oder nicht.

13. 8. *Erläuterungen zum Begriff des Reduzierens.*

13. 8 1. *Das Reduzieren von richtigen Sequenzen, die keine Variablen enthalten.*

Zur Erläuterung des Reduzierbegriffs zeige ich zunächst, daß für Sequenzen ohne Variable, und ohne die Zeichen $\vee$, $\exists$ und $\supset$, der Begriff der Angebbarkeit einer *Reduziervorschrift* mit dem Begriff der Richtigkeit gemäß dem *Ausrechnungsverfahren* (7.2, 7.3) übereinstimmt:

Eine solche „richtige" Sequenz ist nach folgender *Vorschrift* zur Endform zu reduzieren: Man ersetze zunächst die etwa vorkommenden *Terme* durch ihre „Zahlenwerte" (13.12). Alsdann führe man, sofern nicht schon Endform (13.4) vorliegt, einen Reduktionsschritt aus, durch den die Sequenz in eine ebenfalls „richtige" Sequenz übergeht, in der jedoch *weniger Aussagenverknüpfungszeichen* auftreten als zuvor. Das ist stets möglich. Nämlich bei Reduktionen gemäß 13.22 und 13.23 ist die Forderung jedenfalls erfüllt. Liegt der Fall 13.5 vor, so wendet man von den verschiedenen in Frage kommenden Reduktionsschritten den folgenden an:

Wenn eine falsche Vorderformel der Form $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ vorhanden ist, so muß entweder $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ falsch sein; man ersetzt alsdann die Formel durch $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$. Ist eine falsche Vorderformel der Form $\neg\, \mathfrak{A}$ vorhanden, so läßt man sie weg und ersetzt die Hinterformel durch $\mathfrak{A}$.

Bei jedem der angegebenen Reduktionsschritte entsteht offenbar wieder eine *richtige* Sequenz, und zwar mit *weniger Aussagenverknüpfungszeichen* als zuvor. Folglich gelangt man durch Fortsetzung dieses Verfahrens stets in endlich vielen Schritten zur Endform.

Daß umgekehrt jede variablenfreie Sequenz, für die eine *Reduziervorschrift* vorliegt, *richtig* ist, geht daraus hervor, daß eine *falsche* Sequenz, wie leicht festzustellen, durch jeden zulässigen Reduktionsschritt immer wieder in eine falsche Sequenz übergehen würde, bzw. daß im Falle eines Reduktionsschrittes gemäß 13.22 die *Wahl* von $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ so getroffen werden könnte, daß dies einträte.

13.82. Diese Überlegungen lassen sich ohne weiteres auf den Fall ausdehnen, daß die betrachteten Sequenzen $\forall$-Zeichen, die sich nur auf *endlich* viele Zahlen beziehen, enthalten. Dann wird das $\forall$ entsprechend dem & behandelt.

13.83. Geht man zum *unendlichen* Gegenstandsbereich aller natürlichen Zahlen über, so ist die Angabe einer Reduziervorschrift für irgendeine herleitbare Sequenz im allgemeinen nicht mehr so einfach. Dadurch, daß hier nicht mehr alle Formeln *entscheidbar* sind, ist man z. B. unter Umständen genötigt, bei Reduktionsschritten gemäß 13.51 bis 13.53 von der Erlaubnis, die geänderte Vorderformel *stehenzulassen*, Gebrauch zu machen, während im endlichen Bereich (13.81, 13.82) in solchem Falle diese Formel stets *weggelassen* werden konnte.

Als Beispiel gebe ich eine Reduziervorschrift für die unter 10.6 genannte, nach der damaligen finiten Deutung nicht richtige Aussage „der

große Fermatsche Satz ist entweder richtig oder nicht richtig" an: Diese lautet, nach Ersetzung des $\vee$, und als Sequenz geschrieben, formal:

$$\rightarrow \neg \{[\neg \forall x \forall y \forall z \forall u \neg (u > 2 \,\&\, x^u + y^u = z^u)] \\ \& [\neg \neg \forall x \forall y \forall z \forall u \neg (u > 2 \,\&\, x^u + y^u = z^u)]\}.$$

Man reduziere wie folgt: Zunächst entsteht (13. 2 3):

$$[\neg \forall x \forall y \forall z \forall u \neg (u > 2 \,\&\, x^u + y^u = z^u)] \\ \& [\neg \neg \forall x \forall y \forall z \forall u \neg (u > 2 \,\&\, x^u + y^u = z^u)] \rightarrow 1 = 2.$$

Durch zwei Reduktionen gemäß 13. 5 2 erhält man

$$\neg \forall x \forall y \forall z \forall u \neg (u > 2 \,\&\, x^u + y^u = z^u), \\ \neg \neg \forall x \forall y \forall z \forall u \neg (u > 2 \,\&\, x^u + y^u = z^u) \rightarrow 1 = 2;$$

weiter (13. 5 3):

$$\neg \forall x \forall y \forall z \forall u \neg (u > 2 \,\&\, x^u + y^u = z^u) \\ \rightarrow \neg \forall x \forall y \forall z \forall u \neg (u > 2 \,\&\, x^u + y^u = z^u).$$

Diese *logische Grundsequenz* ist nun, wie unter 13. 9 2 *allgemein* beschrieben, zu Ende zu reduzieren.

13. 9 0. Im folgenden will ich beweisen, daß sich zu einer beliebig vorgelegten, gemäß § 12 umgeformten Herleitung für alle darin vorkommenden Sequenzen *Reduziervorschriften* angeben lassen.

Daraus folgt dann ohne weiteres die *Widerspruchsfreiheit*:

Wäre nämlich eine Sequenz der Form $\rightarrow \mathfrak{A} \,\&\, \neg \mathfrak{A}$ herleitbar, so wäre auch z. B. $\rightarrow 1 = 2$ herleitbar. Denn aus $\rightarrow \mathfrak{A} \,\&\, \neg \mathfrak{A}$ ergibt sich durch &-Beseitigung $\rightarrow \mathfrak{A}$ sowie $\rightarrow \neg \mathfrak{A}$, also auch (5. 2 4 3) $\neg 1 = 2 \rightarrow \mathfrak{A}$ und $\neg 1 = 2 \rightarrow \neg \mathfrak{A}$; durch „Widerlegung" entsteht $\rightarrow \neg \neg 1 = 2$, durch „Beseitigung der doppelten Verneinung" $\rightarrow 1 = 2$. (Auf dieselbe Weise kann man aus einem Widerspruch *jede beliebige Aussage* ableiten.) Für die Sequenz $\rightarrow 1 = 2$ kann es aber keine Reduziervorschrift geben, es gibt ja gar keinen Reduktionsschritt, der auf sie anwendbar wäre, und die Endform (13. 4) hat sie auch nicht, denn $1 = 2$ ist ja falsch.

13. 9 1. Von den *mathematischen Grundsequenzen* setze ich voraus, daß Reduziervorschriften für dieselben *gegeben* seien, und zwar insbesondere solche, die von der bei Reduktionsschritten gemäß 13. 5 bestehenden Erlaubnis, die geänderte Vorderformel *stehen* zu lassen, keinen Gebrauch machen.

Für alle üblichen zahlentheoretischen Axiome sind solche leicht anzugeben. Betrachten wir etwa die unter 6. 2 genannten Beispiele; diese wären als Sequenzen zu schreiben, das $\supset$ durch & und $\neg$ zu ersetzen; alsdann lassen sie sich *reduzieren*, indem man zunächst gemäß 13. 2 1 die $\forall$-Zeichen wegschafft und die zugehörigen Variablen durch beliebige Zahlzeichen ersetzt, und dann wie unter 13. 8 1 beschrieben fortfährt. Denn die entstehenden Formeln sind ja „richtig".

13.92. *Logische Grundsequenzen* sind nach folgender einfachen Vorschrift zu reduzieren:

Eine Sequenz $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ liege vor. Man ersetze zunächst die freien Variablen durch beliebige Zahlzeichen (13.11), alsdann die Minimalterme durch *die* Zahlzeichen, die deren Werte darstellen (13.12). Letzteres ist solange zu wiederholen — es können ja beim Ausrechnen Minimalterme neu entstehen — bis kein Minimalterm mehr vorkommt. Die Sequenz laute danach $\mathfrak{A}^* \to \mathfrak{A}^*$.

Nun führe man an der Hinterformel $\mathfrak{A}^*$ Reduktionsschritte gemäß 13.21, 13.22 und, falls nötig, 13.12 solange aus, bis die Hinterformel die Gestalt $\neg\, \mathfrak{C}$ hat oder eine Minimalformel ist. Bei Reduktionen gemäß 13.21 bzw. 13.22 darf man das einzusetzende Zahlzeichen bzw. die Formel *beliebig wählen*.

Ist nun aus der Hinterformel eine *richtige Minimalformel* geworden, so ist das Reduktionsverfahren bereits beendet (13.4).

Ist es eine *falsche Minimalformel*, so führt man nun gemäß 13.51, 13.52 und 13.12 solche Reduktionsschritte aus, bei denen die *Vorderformel* $\mathfrak{A}^*$ *genau die gleichen* Veränderungen erleidet, wie sie zuvor an der *Hinterformel* $\mathfrak{A}^*$, in gleicher Reihenfolge, stattfanden. Beispielsweise hat man, wenn die Vorderformel die Gestalt $\forall x\, \mathfrak{F}(x)$ angenommen hat, sie durch eine Formel $\mathfrak{F}(n)$ zu ersetzen und dabei das einzusetzende Zahlzeichen n als *dasselbe* zu *bestimmen*, welches man bei der entsprechenden Reduktion der Hinterformel *gewählt* hatte. Entsprechend verfährt man bei Reduktionsschritten gemäß 13.52. So wird schließlich die Vorderformel gleich der Hinterformel, und das Verfahren ist wiederum *beendet*, indem die Endform (13.4) erreicht ist.

Hatte jedoch die Hinterformel die Gestalt $\neg\, \mathfrak{C}$ angenommen, so muß man zunächst gemäß 13.23 reduzieren. Dann lautet die Sequenz: $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{C} \to 1 = 2$. Diese reduziert man nun, genau wie im vorigen Falle, derart, daß die Vorderformel $\mathfrak{A}^*$ *ebenso* geändert wird wie zuvor die Hinterformel $\mathfrak{A}^*$, so daß schließlich an ihrer Stelle auch $\neg\, \mathfrak{C}$ steht. Nun lautet die Sequenz $\neg\, \mathfrak{C}, \mathfrak{C} \to 1 = 2$. Man reduziert sie gemäß 13.53 zu $\mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$. Dies ist wieder eine *logische Grundsequenz*; die Formel $\mathfrak{C}$ enthält mindestens ein Aussagenverknüpfungszeichen *weniger* als $\mathfrak{A}^*$, folglich kommt man bei Fortsetzung dieses Verfahrens in endlich vielen Schritten zum Ende. Damit ist eine Reduziervorschrift für beliebige logische Grundsequenzen gegeben.

13.93. In ähnlicher Weise lassen sich auch beliebige Sequenzen der Form $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ oder $\forall x\, \mathfrak{F}(x) \to \mathfrak{F}(t)$ oder $\mathfrak{A}, \neg\, \mathfrak{A} \to 1 = 2$ oder $\neg\, \neg\, \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ reduzieren, wovon ich nachher Gebrauch machen werde:

Man ersetze nämlich zunächst wiederum die freien Variablen und Minimalterme gemäß 13.11 und 13.12. Alsdann hat die Sequenz $\mathfrak{A}^* \,\&\, \mathfrak{B}^* \to \mathfrak{A}^*$ eine Gestalt, die beim Reduzieren der logischen *Grundsequenz* $\mathfrak{A}^* \,\&\, \mathfrak{B}^* \to \mathfrak{A}^* \,\&\, \mathfrak{B}^*$ nach 13.92 ebenfalls auftrat; sie kann also weiterhin genau wie dort zu Ende reduziert werden. Das Gleiche gilt für $\mathfrak{A}^* \,\&\, \mathfrak{B}^* \to \mathfrak{B}^*$ und entsprechend für $(\forall x\, \mathfrak{F}(x))^* \to (\mathfrak{F}(t))^*$, hier ist die Grundsequenz $(\forall x\, \mathfrak{F}(x))^* \to (\forall x\, \mathfrak{F}(x))^*$ heranzuziehen. Bei $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^* \to \mathfrak{A}^* \,\&\, \mathfrak{B}^*$ ist ein Reduktionsschritt gemäß 13.22 durchzuführen; man erhält, nach Wahl, $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^* \to \mathfrak{A}^*$ oder $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^* \to \mathfrak{B}^*$. Die weitere Reduktion erfolgt nun genau wie die der Grundsequenz $\mathfrak{A}^* \to \mathfrak{A}^*$ bzw. $\mathfrak{B}^* \to \mathfrak{B}^*$; die zusätzliche Vorderformel bleibt unbeachtet und stört nirgends. Bei $\mathfrak{A}^*, \neg\, \mathfrak{A}^* \to 1 = 2$ ergibt ein Reduktionsschritt gemäß 13.53 $\mathfrak{A}^* \to \mathfrak{A}^*$, also wiederum eine Grundsequenz.

Bei $\neg\neg\, \mathfrak{A}^* \to \mathfrak{A}^*$ führe man an der Hinterformel Reduktionsschritte gemäß 13.21, 13.22 und 13.12 solange aus, bis sie die Gestalt $\neg\, \mathfrak{C}$ hat oder eine Minimalformel ist. Ist sie eine richtige Minimalformel geworden, so ist die Reduktion beendet. Hat sie die Gestalt $\neg\, \mathfrak{C}$ angenommen, so reduziert man gemäß 13.23 zu $\neg\neg\, \mathfrak{A}^*, \mathfrak{C} \to 1 = 2$, weiter (13.53) zu $\mathfrak{C} \to \neg\, \mathfrak{A}^*$, dann (13.23) zu $\mathfrak{C}, \mathfrak{A}^* \to 1 = 2$. Ebenso verfährt man in dem Falle, wo die Hinterformel zu einer falschen Minimalformel geworden ist; man erhält dann erst $\to \neg\, \mathfrak{A}^*$, danach $\mathfrak{A}^* \to 1 = 2$.

Nun haben wir in beiden Fällen eine Sequenz erhalten, die bei der Reduktion der *logischen Grundsequenz* $\mathfrak{A}^* \to \mathfrak{A}^*$ nach dem unter 13.92 angegebenen Verfahren *ebenfalls* auftritt (bzw. eine nicht *wesentlich* verschiedene). Man braucht also wiederum nur das *dort* angegebene Verfahren zu befolgen, um die Sequenz zu Ende zu reduzieren.

Man beachte, daß bei allen Reduktionsverfahren unter 13.92 und 13.93 niemals bei Reduktionsschritten gemäß 13.5 die betroffene Vorderformel *stehengelassen* wird.

§ 14.

Reduktionsschritte an Herleitungen[20]).

Um beliebige hergeleitete Sequenzen zu reduzieren, soll ein Verfahren angegeben werden, wobei an der gesamten *Herleitung* für die betreffende Sequenz gewisse Reduktionsschritte ausgeführt werden. Zu diesem Zwecke werde ich den Herleitungsbegriff gegenüber dem bisherigen etwas *abändern* (14.1) und dann erklären, wie ein einzelner *Reduktionsschritt* an einer solchen *Herleitung* auszuführen ist (14.2).

---

[20]) Anmerkung bei der Korrektur: Die Nummern 14.1 bis 16.11 sind im Februar 1936 an Stelle eines früheren Textes eingefügt worden.

14.1. *Abänderung des Herleitungsbegriffs.*

Der neue Herleitungsbegriff ergibt sich aus dem alten (5.2) wie folgt:

5.22 bleibt gültig, doch darf die „Endsequenz" der Herleitung jetzt auch *Vorderformeln* enthalten (damit von der „Herleitung für eine Sequenz" gesprochen werden kann). Die Zeichen $\vee$, $\exists$ und $\supset$ sollen in der Herleitung nicht vorkommen. Jede Herleitungssequenz soll zur Gewinnung von höchstens *einer* weiteren Sequenz (durch Anwendung einer Schlußregel) benutzt werden.

Man sieht leicht, daß eine Herleitung im alten Sinne in eine Herleitung mit derselben Endsequenz, die dieser Bedingung genügt, umgewandelt werden kann. Man braucht nur, von hinten nach vorne fortschreitend, mehrfach benutzte Sequenzen jeweils entsprechend oft aufzuschreiben, mitsamt den zu ihrer Herleitung benutzten Sequenzen.

Mathematische Grundsequenzen müssen die Forderung 13.91 erfüllen; mit ihnen zugleich sind auch alle ihre „Reduzierten", d. h. alle Sequenzen, die bei Durchführung des gegebenen Reduzierverfahrens auftreten können, als mathematische Grundsequenzen zugelassen.

Als *logische Grundsequenzen* gelten beliebige Sequenzen der Form $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ oder $\forall x\, \mathfrak{F}(x) \to \mathfrak{F}(t)$ oder $\mathfrak{A}, \neg\, \mathfrak{A} \to 1 = 2$ oder $\neg\neg\, \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, sowie alle Sequenzen, die beim Reduzieren einer solchen gemäß 13.92, 13.93 auftreten können.

Strukturänderungen in der alten Form sind nicht mehr zugelassen.

Von den *Schlußregeln* bleiben bestehen die Regel der $\forall$-Einführung und der „vollständigen Induktion", und zwar mit dem Zusatz: Eine zulässige $\forall$-Einführung oder „vollständige Induktion", wobei in den zugehörigen Sequenzen keine andere freie Variable als a vorkommt, bleibt zulässig, wenn man in den zugehörigen Sequenzen außer der die Variable a enthaltenden Sequenz die vorkommenden Minimalterme durch ihre „Zahlenwerte" ersetzt, solange, bis keine Minimalterme mehr vorkommen (Zweck s. 14.22).

Neu hinzu kommt folgende „Schlußregel der $\neg$-Einführung": Aus $\Gamma, \mathfrak{A} \to 1 = 2$ ergibt sich $\Gamma \to \neg\, \mathfrak{A}$.

Ferner wird noch folgende Schlußregel — *„Kettenschluß"* — hinzugefügt: Aus einer Reihe von Sequenzen (mindestens einer) beliebiger Gestalt ergibt sich eine Sequenz folgender Form: Als *Hinterformel* erhält sie die Hinterformel irgendeiner Sequenz der Reihe, wobei, wenn es sich um eine falsche Minimalformel handelt, irgendeine andere falsche Minimalformel genommen werden darf. Als *Vorderformeln* schreibe man die sämtlichen Vorderformeln derselben Sequenz und der ihr in der Reihe *vorangehenden* Sequenzen in beliebiger Reihenfolge hin; jedoch dürfen dabei

solche Formeln *weggelassen* werden, für die folgendes gilt: Die gleiche Formel *kommt* schon unter den hingeschriebenen (nicht weggelassenen) *vor*; oder: Die Formel ist gleich der *Hinterformel* irgendeiner der Sequenzen, die innerhalb der Reihe derjenigen Sequenz, aus deren Vorderformeln sie entnommen ist, *vorangehen*. Ferner dürfen noch beliebige weitere Vorderformeln, auch zwischen den anderen, neu *hinzugefügt* werden; und schließlich darf die fertige Sequenz noch so abgeändert werden, daß man ein oder mehrere Male irgendeine *gebundene Variable* gemäß 5.244 durch eine andere *ersetzt*.

Der „Kettenschluß" ist hiermit so *weit* gefaßt worden, daß er alles in sich enthält, was noch nötig ist, damit eine Herleitung im alten Sinne, die bereits gemäß § 12 von den Zeichen $\vee$, $\exists$ und $\supset$ befreit sei (und die Bedingungen für Funktionen, Prädikate und Axiome, 13.12, 13.3, 13.91, erfülle), nunmehr ohne Änderung ihrer Endsequenz in eine Herleitung im neuen Sinne *umgewandelt* werden kann.

Nämlich: Alle *Strukturänderungen* sind Spezialfälle des „Kettenschlusses". Die fortgefallenen *Schlußregeln* lassen sich durch die an ihre Stelle tretenden neuen *Grundsequenzen*, mit Hinzunahme des „*Kettenschlusses*", ersetzen. Z. B. die &-Einführung: $\Gamma \to \mathfrak{A}$ und $\Delta \to \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ ergibt durch „Kettenschluß" $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$. Die $\forall$-Beseitigung: $\Gamma \to \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ und $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x} \to \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ ergibt durch „Kettenschluß" $\Gamma \to \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$. Entsprechend ersetzt man &-Beseitigung und „Beseitigung der doppelten Verneinung". Schließlich die „Widerlegung": Aus $\mathfrak{A}, \Gamma \to \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}, \Delta \to \neg\, \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}, \neg\, \mathfrak{B} \to 1 = 2$ erhält man durch „Kettenschluß" $\Gamma, \Delta, \mathfrak{A} \to 1 = 2$, durch $\neg$-Einführung nunmehr $\Gamma, \Delta \to \neg\, \mathfrak{A}$.

Somit ist der *neue* Herleitungsbegriff nicht enger als der *alte*, und wir können für die Angabe von Reduziervorschriften für irgendwelche in einer Herleitung vorkommende Sequenzen ohne Beschränkung eine Herleitung im *neuen* Sinne für die betreffende Sequenz als gegeben annehmen.

Ich bezeichne im folgenden bei einer Schlußregelanwendung als „*Prämissen*" diejenigen Sequenzen, aus denen die neue Sequenz, das „*Ergebnis*", sich ergibt.

Daß der „Kettenschluss" seiner inhaltlichen Bedeutung nach einen „*richtigen*" Schluß darstellt, überlegt man sich leicht. Es läßt sich auch zeigen, daß er durch die alten Schlußregeln und Strukturänderungen ersetzt werden könnte.

Beim „Kettenschluß" wurde zugelassen, daß einige Prämissen gar nicht wirklich gebraucht werden; dies erweist sich für das Reduzierverfahren als praktisch. Die weitgehende Ersetzung von Schlußregeln durch Kom-

binationen aus Grundsequenzen und „Kettenschluß" ist gleichfalls hierfür bequem; sie wandelt gleichsam das ursprüngliche *Nacheinander* der Schlüsse in ein *Nebeneinander* um.

Ich will noch voraussetzen, daß bei jeder Sequenz einer gegebenen Herleitung *angegeben* ist, ob sie *Grundsequenz* ist, und von welcher *Art*, oder aus *welchen* vorangehenden Sequenzen und nach *welcher* Schlußregel sie sich ergibt; überhaupt allgemein, *wie* die einzelnen Sequenzen, Formeln, usw. bei der Anwendung einer Schlußregel den in dem zugehörigen allgemeinen Schema verwendeten Bezeichnungen *entsprechen*; damit man nicht auf etwaige *Mehrdeutigkeiten* eingehen muß.

14.2. *Reduktionsschritte an Herleitungen.*

Ich will jetzt den Begriff des Reduktionsschrittes an einer Herleitung (14.1) definieren und gleichzeitig beweisen: Durch einen solchen Schritt wird die betreffende Herleitung wieder in eine *Herleitung* umgewandelt, und ihre *Endsequenz* wird dabei in folgender Weise geändert:

Die etwa vorkommenden freien Variablen werden durch beliebig wählbare Zahlzeichen ersetzt; die danach etwa vorhandenen Minimalterme werden durch ihre „Zahlenwerte" ersetzt, solange, bis keine Minimalterme mehr vorkommen; und weiterhin findet *höchstens ein* Reduktionsschritt gemäß 13.2 bzw. 13.5 an der Sequenz statt. (Eine Endsequenz ohne freie Variable und Terme *kann* also auch ganz ungeändert bleiben.)

Der Herleitungs-Reduktionsschritt ist *eindeutig*, außer in den Fällen, wo die Endsequenz eine oder mehrere Veränderungen gemäß einem mit *Wahlfreiheit* verbundenen Sequenzen-Reduktionsschritt erleidet (13.11, 13.21, 13.22), alsdann kann man die Wahlen *beliebig* treffen; ist dies jedoch geschehen, so ist auch *dann* der Reduktionsschritt eindeutig bestimmt.

Hat die Endsequenz der Herleitung *Endform* gemäß 13.4, so wird *kein* Reduktionsschritt für die Herleitung definiert. In allen anderen Fällen jedoch gibt es einen Reduktionsschritt; die Definition desselben folgt jetzt (rekursiv). Es soll also im folgenden die Endsequenz *nicht* Endform haben.

14.21. Ist die Endsequenz der Herleitung eine *Grundsequenz*, so erfolgt der Reduktionsschritt an dieser gemäß den Reduziervorschriften 13.91 — 13.93, die ja alle Grundsequenzen im jetzigen Sinne mit erfassen; und zwar ist die Ersetzung der etwaigen freien Variablen und Terme durchzuführen, weiterhin jedoch nur genau *ein* Schritt gemäß 13.2 bzw. 13.5 (bzw. gar nichts, wenn schon Endform erreicht ist). Die oben aufgestellten Behauptungen über den Herleitungs-Reduktionsschritt sind dann offenbar erfüllt.

14.22. Nunmehr sei die Endsequenz das Ergebnis einer *Schlußregel*-Anwendung, und ich darf voraussetzen, daß für die Herleitungen der Prämissen bereits der Begriff des Reduktionsschrittes definiert und die Gültigkeit der zugehörigen Behauptungen nachgewiesen sei.

Der Reduktionsschritt für die Gesamtherleitung beginnt mit folgender *Vorbereitung* (Ersetzung von freien Variablen und Minimaltermen):

Man ersetzt zunächst die in der Endsequenz etwa vorkommenden freien Variablen durch beliebig wählbare Zahlzeichen. Alsdann ersetzt man in der gesamten Herleitung *dieselben* Variablen (nämlich: die in der Endsequenz ersetzt wurden) durch dieselben Zahlzeichen und die *übrigen* vorkommenden freien Variablen durch 1; jedoch mit der wichtigen Ausnahme: Die bei einer $\forall$-Einführung bzw. „vollständigen Induktion" auftretende, unter 5.25 mit $\mathfrak{a}$ bezeichnete freie Variable darf in der betreffenden Prämisse $\Gamma \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ bzw. $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$, $\Delta \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a}+1)$, sowie ferner in *allen* zur *Herleitung* dieser Sequenz gehörigen Sequenzen *nicht* ersetzt werden.

Anschließend werden ferner sämtliche in der Herleitung vorkommenden *Minimalterme* der Reihe nach, bis keine mehr vorkommen, durch ihre „Zahlenwerte" ersetzt; jedoch mit der wichtigen Ausnahme: In der $\mathfrak{a}$ enthaltenden Prämisse einer $\forall$-Einführung oder „vollständigen Induktion", sowie in allen zur Herleitung dieser Sequenz gehörigen Sequenzen finden *keine* Ersetzungen statt.

Man überlege sich, daß bei diesen beiden Ersetzungsverfahren die Herleitung korrekt bleibt. Wesentlich dafür ist bei der Ersetzung der freien Variablen zunächst die unter 5.25 formulierte besondere Bedingung für die Variable $\mathfrak{a}$ bei $\forall$-Einführung und „vollständiger Induktion", ferner die Forderung (14.1), daß jede Herleitungssequenz als Prämisse von höchstens *einer* Schlußregel-Anwendung dient. Diese beiden Tatsachen ermöglichen es nämlich, die zu ersetzenden Variablen von den übrig bleibenden vollständig zu trennen, so daß durch diese Unterscheidung kein Fehler in irgendeine Schlußregel-Anwendung hineinkommt.

Bei der Term-Ersetzung ist die unter 14.1 formulierte Sonderbestimmung für $\forall$-Einführung und „vollständige Induktion" wichtig (und darum wurde sie eingeführt); denn durch die Ersetzung kann deren ursprüngliche Normalform (5.25) zerstört werden.

Nach dieser „Vorbereitung" folgt der eigentliche Reduktionsschritt gemäß den nachfolgenden Vorschriften. Hat jedoch die Endsequenz nunmehr *Endform*, so ist der Reduktionsschritt bereits beendet.

14.23. Die Endsequenz sei das Ergebnis einer *$\forall$-Einführung* oder *$\neg$-Einführung*. Dann läßt man sie fort und nimmt die *Prämisse* als neue Endsequenz, wobei im ersten Falle noch in der ganzen Herleitung

dieser Prämisse, jedoch mit denselben Beschränkungen wie unter 14.22, für die freie Variable a ein beliebig zu wählendes Zahlzeichen und für Minimalterme deren „Zahlenwerte" einzusetzen sind; *nicht ersetzt* werden jedoch auch solche Terme, in denen zuvor die Variable a vorkam.

Die Herleitung ist offenbar korrekt geblieben, und die Endsequenz ist in eine gemäß 13.21 bzw. 13.23 reduzierte übergegangen.

14.24. Die Endsequenz sei das Ergebnis einer „*vollständigen Induktion*". Der Zahlenwert des Terms t werde durch das Zahlzeichen n angegeben; m sei das Zahlzeichen für die um 1 kleinere Zahl (falls nicht n gleich 1 ist). Man ersetze nun in der Herleitung der Prämisse $\mathfrak{F}(a)$, $\Delta \to \mathfrak{F}(a+1)$ die freie Variable a, wieder mit der gleichen Beschränkung wie unter 14.22, der Reihe nach durch die Zahlzeichen 1, 2, 3 usw. bis m, und ersetze ferner jeweils anschließend alle entstehenden *Minimalterme*, ebenfalls mit der gleichen Beschränkung wie unter 14.22, durch ihre „Zahlenwerte". Nunmehr schließt man die Gesamtherleitung durch einen „*Kettenschluß*" ab, der aus $\Gamma \to (\mathfrak{F}(1))^*$ und den eben hergeleiteten Sequenzen $(\mathfrak{F}(1))^*$, $\Delta \to (\mathfrak{F}(2))^*$ und $(\mathfrak{F}(2))^*$, $\Delta \to (\mathfrak{F}(3))^*$ usw. bis zu $(\mathfrak{F}(m))^*$, $\Delta \to (\mathfrak{F}(n))^*$ wieder die Endsequenz $\Gamma, \Delta \to (\mathfrak{F}(n))^*$ zu gewinnen gestattet. Der Stern soll jeweils die durch die Ersetzungen von Minimaltermen eingetretenen Änderungen bezeichnen. Auf Grund der vorbereitenden Term-Ersetzungen (14.22) und der jetzt erfolgten sind schließlich überall *sämtliche* Minimalterme weggeschafft worden, so daß die zusammengehörigen $\mathfrak{F}^*$-Ausdrücke wirklich stets einander *gleich* geworden sind, selbst wenn sie es zuvor nicht waren. Ist n gleich 1, so setze man für a nur 1 ein, und erhält aus $\Gamma \to (\mathfrak{F}(1))^*$ und $(\mathfrak{F}(1))^*$, $\Delta \to (\mathfrak{F}(2))^*$ durch „Kettenschluß" die Endsequenz $\Gamma, \Delta \to (\mathfrak{F}(1))^*$.

14.25. Als letzter Fall bleibt jetzt der zu behandeln, daß die Endsequenz das Ergebnis eines „*Kettenschlusses*" ist. Dies ist der schwierigste Fall der Herleitungsreduktionen, weil nämlich der Kettenschluß gleichsam die Schwierigkeiten sämtlicher Schlüsse in sich zusammenfaßt.

Diejenige Prämisse, deren Hinterformel die Hinterformel der Endsequenz liefert, nenne ich die „*Hauptprämisse*". Ist die Hinterformel der Endsequenz eine falsche Minimalformel, so machen wir die *erste* Prämisse (in deren gegebener Reihenfolge), deren Hinterformel *ebenfalls* eine falsche Minimalformel ist, zur Hauptprämisse. Das ändert, auch wenn zuvor eine spätere Prämisse Hauptprämisse war, an der Korrektheit des „Kettenschlusses" nichts; es sind nur u. U. gewisse Vorderformeln der Endsequenz nun nicht mehr als den *Prämissen* entnommen, sondern als neu *hinzugefügt* anzusehen.

Nach dieser Vorbereitung ergibt sich, daß die Hauptprämisse keinesfalls *Endform* (13.4) haben kann; denn sonst müßte auch die Endsequenz

offenbar Endform haben, was ausgeschlossen war. Folglich läßt sich an der Herleitung der Hauptprämisse ein *Reduktionsschritt* ausführen. Im Hinblick auf diesen unterscheide ich vier Fälle, die gesondert behandelt werden (14.2 5 1 — 14.2 5 4).

14.2 5 1. Die Hauptprämisse erleide beim Reduktionsschritt an ihrer Herleitung eine Änderung gemäß 13.2. — In diesem Falle führe man an der Endsequenz den für sie in Frage kommenden Sequenzen-Reduktionsschritt gemäß 13.2 aus, wobei die etwaige *Wahl* beliebig zu treffen ist. Ferner führe man an der Herleitung der Hauptprämisse den Herleitungs-Reduktionsschritt aus und treffe dabei bei Wahlfreiheit die *gleiche* Wahl. Nun sind die Hinterformeln beider Sequenzen wieder gleich (bis auf Umbenennungen von gebundenen Variablen allenfalls), und der „Kettenschluß" ist wieder korrekt. Damit ist in diesem Falle der Reduktionsschritt für die Gesamtherleitung beendet.

14.2 5 2. Die Hauptprämisse erleide beim Reduktionsschritt an ihrer Herleitung eine Änderung gemäß 13.5, und die betroffene Vorderformel sei eine solche, die unter die Vorderformeln der Endsequenz (bei deren Bildung nach der Regel des „Kettenschlusses") *aufgenommen* wurde, *oder* aber auf Grund des Umstandes, daß eine gleiche Formel schon unter diesen *vorkam*, weggelassen wurde. — Alsdann führe man den Reduktionsschritt an der Herleitung der Hauptprämisse aus, und ändere, damit der „Kettenschluß" wieder korrekt wird, die Endsequenz gemäß dem *entsprechenden* Sequenzen-Reduktionsschritt (13.5) ab. D. h., wenn die betroffene Vorderformel *selbst* in die Endsequenz aufgenommen war, so führe man an *dieser* hier den gleichen Reduktionsschritt aus; wenn sie aber wegen Übereinstimmung mit einer schon *vorhandenen* weggelassen war, so führe man an *dieser* den Reduktionsschritt aus und lasse sie dabei *stehen*, ganz gleich ob bei der Reduktion der *Prämisse* die entsprechende Formel weggelassen wird oder stehen bleibt.

14.2 5 3. (*Hauptfall.*) Die Hauptprämisse, sie laute $\mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$, erleide beim Reduktionsschritt an ihrer Herleitung eine Änderung gemäß 13.5, und die betroffene Vorderformel ($\mathfrak{B}$) sei eine solche, die unter die Vorderformeln der Endsequenz auf Grund ihrer Übereinstimmung mit der Hinterformel einer vorangehenden Prämisse nicht aufgenommen wurde; *diese* Prämisse, sie laute $\Gamma \to \mathfrak{B}$, erleide beim Reduktionsschritt an ihrer Herleitung eine *Änderung*, die dann notwendigerweise gemäß 13.2 erfolgen muß. ($\mathfrak{B}$ kann ja keine Minimalformel sein.) — Die Endsequenz der Gesamtherleitung laute $\Theta \to \mathfrak{D}$. Ich unterscheide nun *drei Einzelfälle*, je nachdem nämlich ob $\mathfrak{B}$ die Gestalt $\forall x \mathfrak{F}(x)$, $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ oder $\neg \mathfrak{A}$ hat. Die Behandlung der drei Fälle ist nicht wesentlich verschieden.

Habe zunächst $\mathfrak{B}$ die Gestalt $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$. Dann wird bei dem Reduktionsschritt an $\Delta \to \mathfrak{C}$, gemäß 13.5 1, eine Vorderformel $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ hinzugefügt, und $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ bleibt stehen oder wird weggelassen; bei dem Reduktionsschritt an $\Gamma \to \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$, der gemäß 13.2 1 erfolgen muß, kann man für das einzusetzende Zahlzeichen das *gleiche* Zeichen $\mathfrak{n}$ wählen, so daß $\Gamma \to \mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ entsteht. Nun bilde man drei „Kettenschlüsse": Der erste erhält als Prämissen die des ursprünglichen „Kettenschlusses", jedoch mit $\Gamma \to \mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ an Stelle von $\Gamma \to \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$, als Ergebnis: $\Theta \to \mathfrak{F}(\mathfrak{n})$. Dies ist korrekt. Der zweite „Kettenschluß" erhält als Prämissen die des ursprünglichen „Kettenschlusses", jedoch mit der gemäß 13.5 1 reduzierten Sequenz an Stelle von $\Delta \to \mathfrak{C}$, als Ergebnis: $\Theta, \mathfrak{F}(\mathfrak{n}) \to \mathfrak{D}$. Auch dies ist ein *korrekter* „Kettenschluß". Der dritte „Kettenschluß" ergibt aus $\Theta \to \mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ und $\Theta, \mathfrak{F}(\mathfrak{n}) \to \mathfrak{D}$ wieder die Endsequenz $\Theta \to \mathfrak{D}$. — Zu jeder der benutzten Sequenzen soll natürlich deren gesamte *Herleitung* hinzugeschrieben werden, so daß insgesamt nun wieder eine korrekte Herleitung vorliegt.

Wenn $\mathfrak{B}$ die Gestalt $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ hat, so wird bei dem Reduktionsschritt an $\Delta \to \mathfrak{C}$, gemäß 13.5 2, eine Vorderformel $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ hinzugefügt. $\Gamma \to \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ wird nach Wahl zu $\Gamma \to \mathfrak{A}$ oder $\Gamma \to \mathfrak{B}$; man treffe die Wahl so, daß die *gleiche* Formel auftritt wie bei $\Delta \to \mathfrak{C}$. Nun verfahre man weiter genau wie im vorigen Fall.

Hat $\mathfrak{B}$ die Gestalt $\neg \mathfrak{A}$, so wird $\Delta \to \mathfrak{C}$ reduziert zu $\Delta^{(*)} \to \mathfrak{A}$, und $\Gamma \to \neg \mathfrak{A}$ zu $\Gamma, \mathfrak{A} \to 1 = 2$. Nun bildet man, wie bisher, zwei „Kettenschlüsse" mit den Ergebnissen $\Theta, \mathfrak{A} \to 1 = 2$ und $\Theta \to \mathfrak{A}$. Diese beiden ergeben, in der Reihenfolge vertauscht, durch einen dritten „Kettenschluß" wieder $\Theta \to \mathfrak{D}$. Denn $\mathfrak{D}$ ist ja, wie $\mathfrak{C}$ und $1 = 2$, eine falsche Minimalformel.

14.2 5 4. Es bleiben noch folgende Möglichkeiten übrig: Die Hauptprämisse bleibt beim Reduktionsschritt an ihrer Herleitung *unverändert*; oder: ihre Änderung ist von der unter 14.2 5 3 angenommenen Art und die Prämisse $\Gamma \to \mathfrak{B}$ bleibt beim Reduktionsschritt an ihrer Herleitung *unverändert*. — In beiden Fällen führe man den Reduktionsschritt an der Herleitung der unverändert bleibenden Prämisse durch und ist damit fertig. Ist jedoch dieser Reduktionsschritt *an der Prämissen-Herleitung* insbesondere ein Reduktionsschritt gemäß 14.2 5 3 (wobei ja die Endsequenz, d. h. die Prämisse, *unverändert* bleibt), dann ist etwas *anders* zu verfahren, nämlich: Man führe diesen Reduktionsschritt aus, jedoch *ohne* den dafür vorgeschriebenen „dritten Kettenschluß" zu bilden; statt dessen setze man vielmehr die beiden Prämissen dieses „Kettenschlusses" an Stelle von dessen Ergebnis in die Reihe der Prämissen *des* „Kettenschlusses", der die *Gesamt*herleitung abschließt, ein. Man

sieht leicht ein, daß dieser hierbei korrekt bleibt. Die Endsequenz wird nicht geändert.

Damit ist die Definition *eines Reduktionsschrittes an einer Herleitung* beendet.

§ 15.

Ordnungszahlen und Endlichkeitsbeweis.

Es bleibt jetzt noch zu zeigen, daß man, wenn man an einer vorgelegten Herleitung immer von neuem einen *Reduktionsschritt* ausführt, stets, d. h. wie man auch die Wahlen bei Wahlfreiheiten treffen mag, *in endlich vielen Schritten zur Endform* (der Endsequenz) gelangt. Damit ist dann auch für beliebige hergeleitete *Sequenzen* eine Reduziervorschrift (13. 6) gegeben; man braucht ja nur die *Herleitung* der Sequenz (gemäß § 14) zu reduzieren, und die *Sequenz* reduziert sich dabei (gemäß § 13) automatisch mit.

Um die Endlichkeit des Verfahrens nachzuweisen, wird man zeigen müssen, daß jeder Reduktionsschritt eine Herleitung in einem bestimmten Sinne „*vereinfacht*". Zu diesem Zwecke ordne ich jeder Herleitung eine „*Ordnungszahl*" zu, welche ein *Maß* für die „*Kompliziertheit*" der Herleitung darstellt (15. 1, 15. 2). Es läßt sich dann nämlich zeigen, daß bei jedem Reduktionsschritt an einer Herleitung deren Ordnungszahl (i. allg.) *kleiner* wird (15. 3). Hierdurch ist aber die *Endlichkeit* des Reduzierverfahrens noch nicht ohne weiteres gesichert; die Anordnung der Herleitungen (entsprechend der Größenanordnung ihrer Ordnungszahlen) ist nämlich insofern von besonderer Art, als es sein kann, daß eine Herleitung an Kompliziertheit *über unendlich vielen* anderen sich einreiht. Z. B. eine Herleitung, an deren Ende durch „vollständige Induktion", nebst $\forall$-Einführung, eine Endsequenz der Form $\to \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ gewonnen wird, ist als komplizierter anzusehen als ihre sämtlichen unendlich vielen durch Einsetzen bestimmter Zahlzeichen für $\mathfrak{x}$ und Auflösung der „vollständigen Induktion" (14. 2 3, 14. 2 4) entstehenden Spezialfälle. Dies kann nun noch in vielfach geschachtelter Weise eintreten. Infolgedessen haben die „Ordnungszahlen" den Charakter von „transfiniten Ordnungszahlen" (Anm. [21]), und die induktive Erfassung ihrer Gesamtheit ist nicht durch eine gewöhnliche vollständige Induktion möglich, sondern erst durch eine „*transfinite Induktion*", deren Gültigkeit eines besonderen Nachweises (15. 4) bedarf.

15. 1. *Definition der Ordnungszahlen* (rekursiv). Als „Ordnungszahlen" benutze ich gewisse positive *endliche Dezimalbrüche*, die nach folgender Vorschrift gebildet sind:

Ordnungszahlen mit dem Numerus 0 sind genau die folgenden Zahlen: 0,1, 0,11, 0,111, 0,1111, ..., d. h. allgemein: jede Zahl mit dem

Numerus 0, deren Mantisse aus endlich vielen Einsen besteht; sowie die Zahl 0,2.

Das Anhängen von Nullen am Ende sei, auch im folgenden, nicht gestattet; die Schreibweise soll eindeutig sein. — Ich nenne eine Mantisse *kleiner* als eine andere Mantisse, wenn diese Beziehung zwischen den durch Vorsetzen von „0," entstehenden *Zahlen* besteht.

Die Mantisse einer Ordnungszahl mit dem Numerus $\varrho + 1$ ($\varrho \geqq 0$) erhält man, indem man eine Anzahl voneinander verschiedener Ordnungszahlen (mindestens eine) mit dem Numerus ϱ nimmt, deren Mantissen der Größe nach ordnet, so daß die größte zuerst kommt, die kleinste zuletzt, und sie in dieser Reihenfolge hintereinanderschreibt, wobei jeweils zwischen zwei aufeinanderfolgende Mantissen $\varrho + 1$ Nullen einzufügen sind. *Alle* auf diese Weise aus Ordnungszahlen mit dem Numerus ϱ zu erhaltenden Zahlen, und keine anderen, sind Ordnungszahlen mit dem Numerus $\varrho + 1$.

Beispiele von Ordnungszahlen:

0,1111, 1,1101, 1,2, 2,111, 2,2010011010011, 3,2010020001.

Man kann aus einer gegebenen Zahl mit dem Numerus $\varrho + 1$ eindeutig ersehen, aus *welchen* Zahlen mit dem Numerus ϱ sie nach obiger Vorschrift erzeugt ist. Denn eine Zahl mit dem Numerus σ kann offenbar nicht mehr als σ aufeinanderfolgende Nullen an irgendeiner Stelle enthalten.

Näheres über die *Anordnung* der Ordnungszahlen folgt unter 15.4.

15.2. *Die Zuordnung von Ordnungszahlen zu Herleitungen.*

Zu jeder gegebenen Herleitung (im Sinne von 14.1) läßt sich nach folgender rekursiven Vorschrift eindeutig eine zugehörige Ordnungszahl berechnen:

Dabei gilt stets, worauf zu achten ist: Die Höchstanzahl (ν) aufeinanderfolgender Nullen in der Mantisse ist größer als 1, und alle durch Folgen von ν Nullen getrennten *Teile*, außer dem letzten, beginnen mit der Ziffer 2, der *letzte* Teil besteht nur aus Einsen.

Ist die Endsequenz der Herleitung eine *Grundsequenz*, so erhält die Herleitung eine Ordnungszahl der Form 2,2001 .. 1, wobei die Anzahl der Einsen um 1 größer als die Anzahl der in der Sequenz vorkommenden *Aussagenverknüpfungszeichen* zu wählen ist.

Nunmehr sei die Endsequenz das Ergebnis einer *Schlußregel*-Anwendung, und für die Herleitungen der Prämissen seien bereits die zugehörigen Ordnungszahlen bekannt. Aus diesen berechnet sich die Ordnungszahl der Gesamtherleitung wie folgt:

Ist die Endsequenz das Ergebnis einer $\forall$- oder $\neg$-Einführung, so füge man der Ordnungszahl für die Herleitung der Prämisse eine Ziffer 1

hinten an. Auf Grund der angegebenen Eigenschaften beliebiger Herleitungs-Ordnungszahlen ist dies offenbar wieder eine korrekte Ordnungszahl gemäß 15.1.

Ist die Endsequenz das Ergebnis eines „*Kettenschlusses*", so betrachte man die Mantissen der Ordnungszahlen der Herleitungen für die Prämissen; v sei die Höchstanzahl aufeinanderfolgender Nullen in allen diesen. Kommen *gleiche* Mantissen darunter vor, so *unterscheide* man diese, indem man jeweils *einer* $v+1$ Nullen und eine 1, einer weiteren $v+1$ Nullen und *zwei* Einsen, usf., anhängt; dies führe man in gleicher Weise bei *jedem* Vorkommen von gleichen Mantissen durch. Die nunmehr erhaltenen Mantissen sind sämtlich *verschieden*; man schreibe sie der Größe nach hintereinander (die größte voran), mit jeweils $v+2$ Nullen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Mantissen; ferner hänge man am Schluß noch $v+2$ Nullen und eine 1 an. Hiermit hat man die Mantisse der Ordnungszahl für die Gesamtherleitung. Als *Numerus* dazu nehme man die kleinste natürliche Zahl, deren *Überschuß* über die Höchstanzahl aufeinanderfolgender Nullen in der Mantisse $\geqq 0$ und *erstens* nicht um mehr als 2 kleiner ist als der entsprechende Überschuß in irgendeiner der Ordnungszahlen für die Herleitungen der Prämissen, und *zweitens* nicht kleiner als die zweimal genommene Anzahl der *Aussagenverknüpfungszeichen* in der Hinterformel irgendeiner der Hauptprämisse (14.2 5) vorangehenden Prämisse.

Ist die Endsequenz das Ergebnis einer „*vollständigen Induktion*", so erhält die Ordnungszahl der Gesamtherleitung eine Mantisse der Form 201 .. 10 .. 01; dabei ist die Anzahl der aufeinanderfolgenden *Einsen* um 1 größer zu wählen als die Anzahl aufeinanderfolgender Einsen an entsprechender Stelle in der *größeren* der Mantissen der Ordnungszahlen für die Herleitungen der beiden *Prämissen* (bzw. *irgendeiner*, wenn beide *gleich* sind); d. h.: beginnt diese mit 200, so ist *eine* 1 zu nehmen; andernfalls muß sie mit 201 .. 10 beginnen, dann nimmt man eine 1 mehr als hier. Die Anzahl der aufeinanderfolgenden *Nullen* soll $v+2$ sein, wobei v die Höchstanzahl aufeinanderfolgender Nullen in den beiden genannten Mantissen sei. Als *Numerus* dazu nehme man die kleinste natürliche Zahl, deren *Überschuß* über die Höchstanzahl aufeinanderfolgender Nullen in der Mantisse $\geqq 0$ und *erstens* nicht um mehr als 2 kleiner ist als der entsprechende Überschuß in irgendeiner der beiden benutzten Ordnungszahlen, und *zweitens* nicht kleiner als die zweimal genommene Anzahl der Aussagenverknüpfungszeichen in der Formel $\mathfrak{F}(1)$.

Man überlege sich immer, daß die neu gebildete Zahl wieder eine korrekte Ordnungszahl (15.1) ist, und überdies die oben angegebenen besonderen Eigenschaften besitzt.

15.3. *Die Verkleinerung der Ordnungszahl bei Durchführung eines Reduktionsschrittes.*

Jetzt ist zu beweisen, daß bei jedem Herleitungs-Reduktionsschritt gemäß 14.2 im allgemeinen die Ordnungszahl der neu entstehenden Herleitung *kleiner* ist als die der alten. Ich werde zeigen: Der *Numerus* wird nicht größer; die *Mantisse* wird kleiner, außer in den Fällen, wo die Endsequenz nach Ersetzung der freien Variablen und Terme bereits *Endform* annimmt (14.21, 14.22); ferner bleibt die Höchstanzahl aufeinanderfolgender Nullen in der Mantisse *ungeändert, außer* im Falle einer Reduktion gemäß 14.253; und in diesem Falle wird sie genau um 2 größer.

Ich verfahre wieder rekursiv, d. h. ich beweise die Behauptung durch vollständige Induktion.

Für Herleitungen, deren Endsequenz eine *Grundsequenz* ist, folgt alles aus der Festsetzung der Ordnungszahl für eine solche Herleitung, zusammen mit der Tatsache, daß beim Reduktionsschritt eine Änderung der Sequenz gemäß 13.2 bzw. 13.5 erfolgt, wobei die Anzahl der vorkommenden Aussagenverknüpfungszeichen sich *verringert.* (Entsteht zuvor schon *Endform*, so bleibt die Ordnungszahl ungeändert.) Wichtig ist hierfür, daß bei Änderungen gemäß 13.5 die geänderte Vorderformel stets *weggelassen* wird, siehe 13.91—13.93.

Sei nun die Endsequenz das Ergebnis einer *Schlußregel*-Anwendung und die Behauptung für die Herleitungen der *Prämissen* als schon bewiesen angenommen.

Der *Vorbereitungsschritt* (14.22) hat auf die Ordnungszahl der Herleitung sichtlich keinen Einfluß. Wenn dabei die Endsequenz bereits *Endform* annimmt, bleibt also die Ordnungszahl ungeändert. Ist das nicht der Fall, so gilt:

Ist die Endsequenz das Ergebnis einer $\forall$- oder $\neg$-Einführung, so folgt die Behauptung ohne weiteres aus der Festsetzung der Ordnungszahl für eine solche Herleitung.

Auch wenn die Endsequenz das Ergebnis einer *„vollständigen Induktion"* ist, ergibt sich die Richtigkeit der Behauptung leicht. Die „vollständige Induktion" wird ja in einen „Kettenschluß" verwandelt; der Numerus der Ordnungszahl wird dabei nicht größer; die Mantisse kann zwar viel *länger* werden, doch wird sie trotzdem *kleiner*, da ja am *Anfang* stets die Mantisse der Ordnungszahl einer der beiden ursprünglichen Prämissenherleitungen zu stehen kommt. Die Höchstanzahl aufeinanderfolgender Nullen $(\nu + 2)$ bleibt bestehen.

Sei schließlich die Endsequenz das Ergebnis eines *„Kettenschlusses"*. Eine Vorverlegung der Hauptprämisse (14.25) ändert die Mantisse der

Ordnungszahl nicht; doch kann der *Numerus* dabei kleiner werden, dadurch, daß gewisse Prämissen-Hinterformeln von der Mitbestimmung bei seiner Berechnung ausscheiden.

Der Reduktionsschritt erfolge nun etwa gemäß 14.2 5 1 oder 14.2 5 2. Hierbei wird eine der Mantissen der Ordnungszahlen für die *Prämissen*herleitungen, ohne Änderung der höchsten in ihr vorkommenden *Nullenzahl*, verkleinert. Dies wirkt sich auf die Mantisse für die Ordnungszahl der Gesamtherleitung offenbar gleichfalls *verkleinernd* aus. Die Nullenzahl $\nu + 2$ bleibt ja erhalten; die kleiner gewordene Mantisse rückt unter Umständen an einen *späteren* Platz in der nach Größe geordneten Reihe; war sie eine von mehreren *gleichen*, so erhalten die übrigen jetzt je eine 1 *weniger* angehängt; *auf jeden Fall* muß die erste nicht gleich gebliebene Mantisse in der Reihe der durch je $\nu + 2$ Nullen getrennten Mantissen eine *kleinere* sein als zuvor; damit ist auch die Gesamtmantisse sicher verkleinert. Der *Numerus* wird nicht vergrößert.

Bei einem Reduktionsschritt gemäß 14.2 5 3 wird die Ordnungszahl der Herleitung wie folgt geändert: Betrachten wir zunächst die Ordnungszahlen für die beiden Herleitungen, die mit dem neu gebildeten ersten bzw. zweiten „Kettenschluß" abschließen. Für diese beiden besteht der *gleiche* Sachverhalt wie in dem *vorigen* Falle, d. h.: Die beiden Mantissen sind *kleiner* als die Mantisse der Ordnungszahl der ursprünglichen Herleitung; die Höchstzahl aufeinanderfolgender Nullen ($\nu + 2$) ist die *gleiche* geblieben; die Numeri sind nicht größer geworden. Nun fügen wir den *dritten* „Kettenschluß" an und bilden die Ordnungszahl der neuen Gesamtherleitung: Die *Mantisse* beginnt mit einer der beiden Mantissen, und nachfolgenden $\nu + 3$ (im allgemeinen $\nu + 4$) Nullen; folglich ist sie gleichfalls kleiner als die der ursprünglichen Ordnungszahl; die Höchstzahl aufeinanderfolgender Nullen ist $\nu + 4$, also um 2 größer als zuvor; der *Numerus* schließlich kann *nicht größer* geworden sein, denn: Die Anzahl der Aussagenverknüpfungszeichen in der Hinterformel $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$, bzw. $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$, bzw. $\mathfrak{A}$, ist *geringer* als in der Formel $\mathfrak{B}$, d. h. in $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$, bzw. $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$, bzw. $\neg\, \mathfrak{A}$; folglich ist die Summe der zweimal genommenen *ersteren* mit $\nu + 4$, die den neuen Numerus mitbestimmt, nicht größer als die Summe der zweimal genommenen *letzteren* mit $\nu + 2$; und kleiner als diese konnte der Numerus der *ursprünglichen* Herleitung nicht sein, da ja $\mathfrak{B}$ zu den bei seiner Berechnung mitbestimmenden Hinterformeln gehörte.

Bei einem Reduktionsschritt gemäß 14.2 5 4 ist die Lage, wenn nicht der *Sonderfall* vorliegt, dieselbe wie bei 14.2 5 1 und 14.2 5 2. Doch auch der Sonderfall erledigt sich nach den vorangehenden Betrachtungen ohne Mühe; es wird dabei eine der Mantissen der Ordnungszahlen für die Prämissenherleitungen nicht mehr wie oben durch *eine*, sondern

durch *zwei* kleinere Mantissen ersetzt; die Wirkung ist aber in jeder erforderlichen Hinsicht die gleiche. Der Numerus wird nicht vergrößert; sein „Überschuß" durfte vor der Reduktion nicht um mehr als 2 kleiner sein als die zweimal genommene Anzahl der Aussagenverknüpfungszeichen in $\mathfrak{B}$, so daß durch die Mitbestimmung von $\mathfrak{F}(n)$, bzw. $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$, bzw. $\mathfrak{A}$ *nach* der Reduktion keine Vergrößerung eintreten kann.

Damit ist die (im allgemeinen eintretende) Verkleinerung der Ordnungszahl bei Reduktionsschritten *bewiesen*. Der *wichtigste Punkt* war die *Numerus*betrachtung bei der Behandlung der Reduktionsschritte 14.2 5 3 und 14.2 5 4; dies ist der Gedanke, durch den es gelingt, bei einem derartigen Reduktionsschritt eine *Vereinfachung* der Herleitung zu erkennen, trotz der scheinbaren Zunahme an Kompliziertheit. Die Vereinfachung besteht eben darin, daß die Prämissen des „dritten Kettenschlusses" *in geringerem Maße miteinander „verflochten"* sind (nämlich entsprechend der Anzahl der Aussagenverknüpfungszeichen in der Hinterformel der ersten Prämisse, die zugleich Vorderformel der zweiten ist), als es die Prämissen des ersten und zweiten, und die des ursprünglichen „Kettenschlusses" waren. An diesen Gesichtspunkt schließt sich die Art der Zuteilung der Ordnungszahl beim „Kettenschluß" (15.2) an; alles übrige ergibt sich dann mehr oder weniger von selbst.

15.4. *Nachweis der Endlichkeit des Reduzierverfahrens.* Einige — nachfolgend gebrauchte — Tatsachen über die *Größenanordnung* der Ordnungszahlen:

Ich ordne jeder Zahl α mit dem Numerus ϱ ($\varrho \geqq 0$) das System $\mathfrak{S}(\alpha)$ derjenigen Zahlen mit dem Numerus $\varrho + 1$ zu, bei deren Bildung gemäß 15.1 die größte der benutzten Ordnungszahlen mit dem Numerus ϱ die Zahl α ist. Jede Ordnungszahl mit dem Numerus $\varrho + 1$ gehört eindeutig einem solchen System $\mathfrak{S}(\alpha)$ zu. Ist α_1 kleiner als α_2, so ist auch jede Zahl von $\mathfrak{S}(\alpha_1)$ kleiner als jede Zahl von $\mathfrak{S}(\alpha_2)$. Die Anordnung der Systeme $\mathfrak{S}(\alpha)$ entspricht also der Anordnung der Zahlen α. Für die Anordnung der Zahlen (mit dem Numerus $\varrho + 1$) *innerhalb* eines Systems $\mathfrak{S}(\alpha)$ gilt folgendes: Die *kleinste* Zahl innerhalb $\mathfrak{S}(\alpha)$ ist die Zahl $\alpha + 1$. Die *übrigen* Zahlen von $\mathfrak{S}(\alpha)$ entsprechen Anordnungs-isomorph der Gesamtheit der Zahlen mit dem Numerus $\varrho + 1$, die *kleiner* als $\alpha + 1$ sind, in folgender Weise: Jede Zahl von $\mathfrak{S}(\alpha)$, außer $\alpha + 1$, entsteht aus $\alpha + 1$, indem man $\varrho + 1$ Nullen und dahinter die Mantisse irgendeiner der Zahlen mit dem Numerus $\varrho + 1$, die kleiner als $\alpha + 1$ sind, anfügt. Deren *Anordnung* überträgt sich dabei.

Die Richtigkeit all dieser Behauptungen ist an Hand der Definition der Ordnungszahlen leicht einzusehen. Es ist nützlich, sich mit ihrer

Hilfe die Anordnung der Ordnungszahlen mit dem Numerus 1, sowie 2 und 3 beispielsweise, anschaulich zu machen[21]).

Ich behaupte nun *(Satz der „transfiniten Induktion")*:

Alle Ordnungszahlen (15. 1) sind bei Durchlaufung derselben nach wachsender Größe in folgendem Sinne *„erreichbar"*: Die erste Zahl 0,1 gilt als „erreichbar"; wenn ferner alle Zahlen, die kleiner als eine Zahl β sind, bereits als „erreichbar" erkannt sind, so gilt auch β als „erreichbar".

Beweis. Erreichbar ist zunächst 0,1, also auch 0,11, also auch 0,111, usw., allgemein ergibt sich durch vollständige Induktion: jede Zahl, die kleiner als 0,2 ist, ist erreichbar. Folglich ist auch 0,2 erreichbar, und damit sämtliche Zahlen mit dem Numerus 0. Nun wende ich *vollständige Induktion* an, d. h. ich nehme an, die Erreichbarkeit aller Zahlen bis zu denen mit dem Numerus ϱ ($\varrho \geqq 0$) einschließlich sei bereits bewiesen, und sie ist nun für die Zahlen mit dem Numerus $\varrho + 1$ zu beweisen. Die *erste* dieser Zahlen, d. h. die Zahl mit der Mantisse 1, ist erreichbar. Nun beachte man: Die Durchlaufung der Zahlen mit dem Numerus ϱ ist bereits geleistet. Jeder solchen Zahl α entspricht ein System $\mathfrak{S}(\alpha)$ von Zahlen mit dem Numerus $\varrho + 1$; dieses System besteht aus der Zahl $\alpha + 1$ und einem *den* Zahlen mit dem Numerus $\varrho + 1$, die *kleiner* als $\alpha + 1$ sind, Anordnungs-isomorphen System. Eine Durchlaufung der Zahlen mit dem Numerus $\varrho + 1$ ist nun nichts anderes als eine Durchlaufung der *Systeme* $\mathfrak{S}(\alpha)$ in derselben Weise, wie die *Zahlen* α

---

[21]) Für Kenner der Mengenlehre sei bemerkt: Das System der von mir benutzten „Ordnungszahlen" ist durch die $<$-Beziehung *wohlgeordnet*, und zwar entsprechen den Zahlen mit dem Numerus 0, 1, 2, 3, 4, 5 usw. bezüglich die transfiniten Ordnungszahlen $\omega + 1$, $2^{\omega+1} = \omega + \omega$, $2^{\omega+\omega} = \omega \cdot \omega$, $2^{\omega \cdot \omega} = \omega^{\omega}$, $2^{(\omega^{\omega})} = \omega^{(\omega^{\omega})}$, $2^{[\omega\,(\omega^{\omega})]} = \omega^{[\omega\,(\omega^{\omega})]}$, usw.; dem Gesamtsystem entspricht die „erste ε-Zahl". (Zum Beweise bedenke man, daß der im Text beschriebene Übergang von den Zahlen mit dem Numerus ϱ zu den Zahlen mit dem Numerus $\varrho + 1$ dem Definitionsgesetz der Potenz von 2 entspricht, und berücksichtige weiterhin die Rechenregeln für transfinite Ordnungszahlen.) Der „Satz der transfiniten Induktion" besagt nichts anderes als die Gültigkeit der transfiniten Induktion für diesen Abschnitt der II. Zahlklasse. Die Bedenklichkeiten der allgemeinen Mengenlehre gehen in den Widerspruchsfreiheitsbeweis natürlich nicht ein. da in diesem die entsprechenden Begriffe und Sätze ganz unabhängig in viel elementarerer Weise als in der Mengenlehre, wo sie dafür eine weit größere Allgemeinheit besitzen, entwickelt werden. — Ähnliche Inbezugsetzungen zwischen mathematischen Beweisen bzw. Sätzen und der Theorie der Wohlordnung, insbesondere der Zahlen der II. Zahlklasse, finden sich bei: A. Church, A proof of freedom from contradiction, Proc. Nat. Acad. of Sc. 21 (1935), S. 275—281; und: E. Zermelo, Grundlagen einer allgemeinen Theorie der mathematischen Satzsysteme I, Fund. Math. 25 (1935), S. 136—146.

mit dem Numerus ϱ durchlaufen wurden; hat man nämlich eine Zahl $\alpha + 1$ als erreichbar erkannt, so sind zugleich alle übrigen Zahlen des Systems $\mathfrak{S}(\alpha)$ offenbar erreichbar; man hat ja nur dieses System *in genau derselben Weise* zu durchlaufen wie das bereits durchlaufene *isomorphe* System der Zahlen (mit dem Numerus $\varrho + 1$) *kleiner* als $\alpha + 1$. So lassen sich sämtliche Zahlen mit dem Numerus $\varrho + 1$ durchlaufen, auf Grund der schon geleisteten Durchlaufung der Zahlen mit dem Numerus ϱ. Der Gesamtheit der Zahlen α (mit dem Numerus ϱ), die kleiner als eine Zahl α_0 sind, entspricht bei der Zahl $\alpha_0 + 1$ (mit dem Numerus $\varrho + 1$) die Gesamtheit der zu den *Systemen* $\mathfrak{S}(\alpha)$ *gehörigen* Zahlen (mit $\alpha < \alpha_0$).

Abschluß. Mit Hilfe des „Satzes der transfiniten Induktion" ergibt sich nun ohne weiteres die *Endlichkeit des Reduzierverfahrens* für beliebige Herleitungen. Ist nämlich die Endlichkeit des Reduzierverfahrens bereits bewiesen für alle Herleitungen, deren Ordnungszahl kleiner als eine Zahl β ist, so gilt sie auch für jede Herleitung mit der Ordnungszahl β; denn diese geht ja durch *einen* Reduktionsschritt in eine Herleitung mit *kleinerer* Ordnungszahl, oder mit Endform, über. (Hatte die Herleitung jedoch Endform, so ist überhaupt nichts mehr zu beweisen.) Somit überträgt sich die Tatsache der Endlichkeit des Reduzierverfahrens von der Gesamtheit der Herleitungen mit Ordnungszahlen *kleiner* als β auf die Herleitungen mit der Ordnungszahl β; nach dem Satz der transfiniten Induktion gilt sie also für *alle* Herleitungen, mit *beliebigen* Ordnungszahlen. Damit ist der Widerspruchsfreiheitsbeweis *beendet*.

V. Abschnitt.

Betrachtungen zum Widerspruchsfreiheitsbeweis.

§ 16.

Die beim Widerspruchsfreiheitsbeweis benutzten Schlußweisen.

Die Schlüsse und Begriffsbildungen, die ich beim Widerspruchsfreiheitsbeweis angewandt habe, will ich im folgenden nach *zwei Gesichtspunkten* begutachten: Erstens ist zu untersuchen, wieweit sie als *unbedenklich* gelten können (16. 1), zweitens, im Zusammenhang mit dem *Satz von Gödel* (2. 3 2), wieweit sie den in der formalisierten reinen Zahlentheorie enthaltenen Beweismitteln entsprechen und in welcher Weise sie über diese *hinausgehen* (16. 2).

16. 1. In der Frage der *Unbedenklichkeit* der benutzten Beweismittel ist der kritische Punkt der *Endlichkeitsbeweis* (15. 4). Stellen wir diesen vorerst zurück. Die sonst im Widerspruchsfreiheitsbeweis benutzten Beweis-

mittel können mit Bestimmtheit als „*finit*", in dem im III. Abschnitt ausführlich erörterten Sinne, bezeichnet werden. Dies läßt sich nicht „beweisen", schon allein, weil der Begriff „finit" nicht eindeutig formal abgegrenzt ist und auch kaum abgegrenzt werden kann. Man muß sich eben jeden einzelnen Schluß daraufhin ansehen und sich darüber klar zu werden versuchen, ob er mit dem finiten Sinn der vorkommenden Begriffe im Einklang steht und nicht etwa auf einer unzulässigen „an-sich"-Auffassung dieser Begriffe beruht. Ich will die hierfür wichtigsten Stellen des Widerspruchsfreiheitsbeweises kurz besprechen:

Die *Gegenstände* des Widerspruchsfreiheitsbeweises, wie der Beweistheorie überhaupt, sind gewisse *Zeichen* und *Ausdrücke*, wie z. B. Terme, Formeln, Sequenzen, Herleitungen, Ordnungszahlen, außerdem übrigens auch natürliche Zahlen. Die Definitionen aller dieser Gegenstände erfolgten (3. 2, 5. 2, 14. 1, 15. 1) durch *Konstruktionsvorschriften*, entsprechend der Definition der natürlichen Zahlen (8. 1 1); eine solche Vorschrift gibt jeweils an, wie man sich schrittweise immer mehr derartige Gegenstände herstellen kann. — Vorauszusetzen ist dabei, daß in der formalisierten reinen Zahlentheorie *bestimmte* „Funktionen", „Prädikate" und „Axiome" festgesetzt sind, welche die an diese gestellten Bedingungen erfüllen (13. 1 2, 13. 3, 13. 9 1). Durch diese Voraussetzung kommt eigentlich ein transfinit verwendetes „wenn — so" in den Widerspruchsfreiheitsbeweis hinein; dies ist aber offenbar harmlos, da man den Beweis überhaupt erst als sinnvoll anzusehen braucht, wenn jene wirklich festgesetzt und die Bedingungen als erfüllt erwiesen sind. —

Für diese Gegenstände wurden ferner eine Reihe von *Funktionen* und *Prädikaten* verwandt, die im Sinne von 8. 1 2 *entscheidbar definiert* wurden. Z. B. die *Funktion* „die Endformel einer Herleitung", das *Prädikat* „mindestens ein $\forall$- oder $\exists$-Zeichen enthalten" und viele andere. Entscheidbar definiert wurden vor allem auch, wie unschwer nachzuprüfen, die Funktionen: „die aus einer Herleitung durch die *Umformung* gemäß § 12 entstehende Herleitung", „die aus einer Herleitung durch einen *Reduktionsschritt*, unter bestimmter Festsetzung der etwaigen wahlfreien Bestimmungen, entstehende Herleitung" (14. 2), „die *Ordnungszahl* einer Herleitung" (15. 2).

Ferner wurden durch *vollständige Induktion* Aussagen „für *alle* Sequenzen", „für *alle* Herleitungen" u. dgl. bewiesen, deren Gültigkeit für jede *einzelne* Sequenz oder Herleitung *entscheidbar* ist. Z. B.: „Die aus einer Herleitung durch einen Reduktionsschritt entstehende Figur ist wieder eine Herleitung, und die Änderung der Endsequenz erfüllt gewisse Bedingungen" (14. 2); „bei Durchführung eines Reduktionsschrittes wird die Ordnungszahl verkleinert" (15. 3).

Bei der Anwendung des Begriffes „alle" im Widerspruchsfreiheitsbeweis habe ich nicht die umständliche finite Ausdrucksweise dafür gemäß 10.11 gebraucht; hier ist ja der Unterschied zwischen an-sich-Auffassung und finiter Auffassung ohnehin für das Schließen belanglos.

Die *Verneinung* einer transfiniten Aussage kommt in dem ganzen Beweis nur unter 13.90 vor, und nur in harmloser Form, indem nämlich die betreffende Aussage auf einen ganz elementaren Widerspruch führt. Sie läßt sich überdies ganz *vermeiden*, wenn man für „Widerspruchsfreiheit" den positiveren Ausdruck gebraucht: „Jede Herleitung hat eine Endformel, die nicht die Gestalt $\mathfrak{A} \,\&\, \neg\, \mathfrak{A}$ hat." Dieses „nicht" ist nun nicht mehr transfinit.

16.11. Wie steht es nun schließlich mit dem *Endlichkeitsbeweis* (15.4)? Der Begriff „*erreichbar*" beim „Satz der transfiniten Induktion" ist von ganz besonderer Art. Sein Zutreffen auf irgendeine vorgelegte Zahl ist keineswegs von vornherein *entscheidbar*; er ist daher von dem in § 9 erklärten Standpunkt aus nicht von vornherein *sinnvoll*, da ja ein „Sinn an sich" abgelehnt wird. Er gewinnt vielmehr erst einen *Sinn*, für eine bestimmte Zahl ausgesprochen, gleichzeitig mit dem *Beweise seiner Gültigkeit* für diese Zahl. Das ist auch durchaus zulässig; der gleiche Sachverhalt besteht ja bei *allen transfiniten Aussagen*, wenn man ihnen einen finiten Sinn beilegen will, vgl. § 10. Die Definition des Begriffs „erreichbar" ist mit der Erklärung „wenn alle Zahlen kleiner als β bereits als erreichbar *erkannt* sind, so ist auch β erreichbar" bereits dieser Auffassung entsprechend gefaßt. In dieser Formulierung liegt natürlich nicht etwa ein *Zirkel*, sondern die Definition ist durchaus *konstruktiv*; es wird ja β erst *dann* als erreichbar erklärt, wenn *zuvor* schon alle Zahlen kleiner als β als erreichbar erkannt sind. Das dabei vorkommende „*alle*" ist natürlich *finit* aufzufassen (10.11); es handelt sich ja stets um eine Gesamtheit mit einer *konstruktiven* Erzeugungsvorschrift für alle Elemente.

Zu dem *Beweis* des Satzes der transfiniten Induktion ist zu sagen: Aus der Art der Definition des Begriffs „erreichbar" ergibt sich, daß beim Beweis eine „Durchlaufung" sämtlicher Ordnungszahlen nach wachsender Größe stattfinden muß. Bei der Behandlung der Zahlen mit dem Numerus 0 ist zu beachten: Die *unendliche* Gesamtheit der Zahlen kleiner als 0,2 wird überwunden durch den *einen* Gedanken: Man *kann* den Beweis *beliebig* weit in diese Gesamtheit hinein fortführen; *also* darf man die *ganze* Gesamtheit als erledigt betrachten. Diese „potentielle" Auffassung der „Durchlaufung" einer unendlichen Gesamtheit ist bei dem *ganzen Beweis* beizubehalten.

Das Auftreten einer *transfiniten Induktionsannahme* bei der vollständigen Induktion nach ϱ ist im Sinne von 10.5 aufzufassen und daher

unbedenklich. Bei dem Schluß: „wenn die Zahl $\alpha + 1$ als erreichbar erkannt ist, so sind auch alle übrigen Zahlen des Systems $\mathfrak{S}(\alpha)$ erreichbar", tritt ein *transfinites* „wenn — so" auf. Gegen diesen Begriff wurden unter 11. 1 Bedenken erhoben; diese treffen aber den vorliegenden Fall schon darum nicht, weil die Annahme hier nicht als *hypothetisch* aufzufassen ist, vielmehr gemeint ist: wenn die Erreichung von $\alpha + 1$ bereits *vollzogen* ist, *dann* gelingt auch die Durchlaufung der Zahlen von $\mathfrak{S}(\alpha)$ (nämlich genau entsprechend der vollzogenen Durchlaufung der Zahlen vor $\alpha + 1$).

Betrachten wir nun den *gesamten* Induktionsschritt, d. h. die Zurückführung der Durchlaufung des $\varrho + 1$-Systems auf die Durchlaufung des ϱ-Systems. Dies ist wohl der kritischste Punkt des ganzen. Doch glaube ich, daß man dem hierbei benutzten Gedankengang, wenn man sich recht anschaulich hineindenkt, eine beträchtliche Evidenz nicht absprechen kann. Man überlege sich etwa die Anfangsfälle mit dem Numerus 1, 2, 3 ausführlich. Es kommt mit wachsendem Numerus dann ja niemals etwas *grundsätzlich* neues hinzu; die Art des Fortschreitens bleibt immer die gleiche. Freilich findet ein starkes Anwachsen der Kompliziertheit der vielfach übereinandergeschachtelten Unendlichkeiten, die jeweils zu „durchlaufen" sind, statt; die Durchlaufung muß stets als eine „potentielle", wie schon beim Numerus 0, aufgefaßt werden. Die Schwierigkeit liegt darin, daß der *genaue finite Sinn* der „Durchlaufung" der ϱ-Zahlen zwar in den Anfangsfällen einigermaßen übersehbar, jedoch im allgemeinen Falle von so großer *Kompliziertheit* ist, daß man sich nur noch eine unbestimmte Vorstellung davon machen kann; diese muß nun als ausreichend angesehen werden, um die Möglichkeit der Durchlaufung der $\varrho + 1$-Zahlen darauf in einsichtiger Weise zu begründen.

Der „Abschluss" endlich bringt nichts wesentlich neues mehr hinzu. Die Aussage, daß das Reduzierverfahren für eine Herleitung *endlich* sei, wie man auch die etwaigen *Wahlen* treffen möge, enthält ein transfinites „es gibt", in bezug auf die *Anzahl* der Reduktionsschritte nämlich. Diese Aussage ist von gleicher Art wie die Aussage der „Erreichbarkeit"; sie erhält gleichfalls ihren bestimmten *Sinn* in jedem Spezialfall erst, indem ihre Gültigkeit für diesen Fall *bewiesen* wird; das entspricht der finiten Auffassung (10. 3). Für den Beweis der *Widerspruchsfreiheit* allein ist übrigens der Begriff der „Wahlfreiheit" entbehrlich; da handelt es sich ja nur um die Reduktion einer Herleitung mit der Endsequenz $\rightarrow 1 = 2$ und alle Reduktionsschritte sind *eindeutig*, nicht von Wahlen abhängig. Die Anzahl der Schritte wird nun nicht von vornherein angegeben; es lassen sich nur gewisse Aussagen über sie machen, die immer *unbestimmter* werden, je größer die Ordnungszahl der Herleitung ist. (An

die Stelle einer direkten Angabe tritt eine „Möglichkeit der Angabe".) Dies muß durchaus noch als mit der finiten Auffassung im Einklang stehend angesehen werden.

Im ganzen meine ich, daß auch der *Endlichkeitsbeweis* (15.4) innerhalb der grundsätzlichen Unterscheidung von bedenklichen und unbedenklichen Beweismitteln (§ 9) durchaus noch dem *Unbedenklichen* zugerechnet werden kann, so daß der Widerspruchsfreiheitsbeweis eine wirkliche *Sicherung* der bedenklichen Teile der reinen Zahlentheorie darstellt.

16.2. Um den Widerspruchsfreiheitsbeweis auf seine *Übereinstimmung mit dem Satz von Gödel* (2.32) zu prüfen, hätte man zunächst in entsprechender Weise, wie es Gödel in seiner in Anm. [3]) zitierten Arbeit durchführt, den Gegenständen der Beweistheorie (Formeln, Herleitungen usw.) *natürliche Zahlen zuzuordnen*, sowie die benötigten Funktionen und Prädikate für diese Gegenstände als Funktionen und Prädikate für die entsprechenden natürlichen Zahlen einzuführen. Damit wird der Widerspruchsfreiheitsbeweis zu einem Beweis mit natürlichen Zahlen als Gegenständen. Die von mir offen gelassenen Definitionsmöglichkeiten für Prädikate und Funktionen wären, um einen abgegrenzten Formalismus zu haben, auf bestimmte Schemen zu beschränken, die man leicht allgemein genug wählen kann, um die Definition auch aller in der Beweistheorie benötigten Funktionen und Prädikate zu ermöglichen; siehe etwa Gödels Fassung.

Die Schlußweisen beim Widerspruchsfreiheitsbeweis sind alsdann auch *keine anderen* als die in der formalisierten Zahlentheorie angegebenen; *nur* der Endlichkeitsbeweis (15.4) nimmt wiederum eine Sonderstellung ein. Es ist nicht ersichtlich, wie dieser mit den Hilfsmitteln der reinen Zahlentheorie sollte dargestellt werden können. Dadurch ist der Widerspruchsfreiheitsbeweis mit dem Gödelschen Satz im Einklang.

Im Zusammenhang hiermit sind folgende zwei Tatsachen von Interesse, auf deren Beweis ich nicht eingehe, da er zu weit führen würde:

1. Läßt man aus der formalisierten reinen Zahlentheorie die Schlußregel der *vollständigen Induktion* weg, so kann der Widerspruchsfreiheitsbeweis ohne wesentliche Änderung so gefaßt werden, daß er — nach Durchführung der genannten Umdeutung in einen Beweis über natürliche Zahlen — völlig mit Hilfsmitteln der reinen Zahlentheorie (*einschließlich* der vollständigen Induktion) auskommt.

2. Der Widerspruchsfreiheitsbeweis für die *gesamte* reine Zahlentheorie läßt sich, auf natürliche Zahlen als Gegenstände umgedeutet, mit Hilfsmitteln der *Analysis* darstellen [22]).

[22]) Siehe auch K. Gödel, Über Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit, Ergebnisse eines math. Koll., Heft 3 (1932), S. 12—13.

Die Sonderstellung der Schlußregel der *vollständigen Induktion* liegt in folgendem Umstand begründet: Wenn man diese *wegläßt*, kann man für die *Anzahl der Reduktionsschritte*, die zum Reduzieren einer bestimmten Sequenz erforderlich sind, eine *bestimmte obere Schranke* angeben. Nimmt man jedoch die Schlußregel der vollständigen Induktion hinzu, so kann diese Anzahl, in Abhängigkeit von *Wahlen*, *beliebig groß* werden. Bei der Behandlung dieser Schlußregel (14. 2 4) ist nämlich die Anzahl der erforderlichen Reduktionsschritte für die Sequenz $\Gamma, \Delta \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ offenbar von der Zahl $\mathfrak{n}$ (dem Wert von $\mathfrak{t}$) abhängig, und diese kann unter Umständen von einer *Wahl abhängen*, etwa indem $\mathfrak{t}$ eine *freie Variable*, also zunächst durch ein beliebig zu *wählendes* Zahlzeichen $\mathfrak{n}$ zu ersetzen ist. In diesem Falle gibt es für die Anzahl der Reduktionsschritte beim Reduzieren der Sequenz $\Gamma, \Delta \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ u. U. *keine* allgemeine Schranke.

Mit diesem Umstand dürfte es zusammenhängen, daß in die *früheren* Widerspruchsfreiheitsbeweise die Schlußregel der vollständigen Induktion sich nicht einbeziehen ließ (2. 4).

§ 17.

Die Tragweite des Widerspruchsfreiheitsbeweises.

Ich behandle zunächst die Frage, wieweit der Widerspruchsfreiheitsbeweis anwendbar bleibt, wenn man die im II. Abschnitt formulierte „reine Zahlentheorie" durch Hinzufügen neuer Begriffe und Methoden *erweitert* (17. 1), weise dann auf seine *Übertragbarkeit* auf weitere Teilgebiete der Mathematik hin (17. 2), und gehe schließlich auf gewisse *Einwendungen* der „Intuitionisten" gegen die *Bedeutung* von Widerspruchsfreiheitsbeweisen überhaupt ein (17. 3).

17. 1. Für den Wert eines Widerspruchsfreiheitsbeweises ist es sehr wesentlich, ob der zugrunde gelegte Formalismus die betreffende mathematische Theorie, in unserem Falle die reine Zahlentheorie. wirklich *vollständig* umfaßt (vgl. 3. 3, 5. 3). Nun braucht sich aber die praktische reine Zahlentheorie an keine formalen Begrenzungen gebunden zu halten; sie kann immer wieder durch neuartige Begriffsbildungen, vielleicht auch durch Anwendung neuartiger Schlußweisen *erweitert* werden. Wie steht es dann mit der Widerspruchsfreiheit? Nun, *man muß eben bei jedem Fortschreiten über den bisherigen Rahmen hinaus zugleich den Widerspruchsfreiheitsbeweis auf das neu hinzukommende ausdehnen.* Der Widerspruchsfreiheitsbeweis ist bereits so angelegt, daß dies in weitestem Maße ohne Schwierigkeiten möglich ist.

Führt man etwa neue *Funktionen* oder *Prädikate* für natürliche Zahlen ein, so hat man dafür *Entscheidungsvorschriften* gemäß 8. 1 2 anzugeben; führt man zugehörige mathematische *Axiome* ein, so hat man *Reduzier-*

vorschriften für diese gemäß 13. 9 1 anzugeben (vgl. § 6 und 10. 1 4). *Nicht entscheidbare* Begriffsbildungen gemäß 6. 3 machen auch keine Schwierigkeiten, da sie nach der dort erwähnten Methode *eliminierbar* sind. Alle diese Forderungen sind mit Leichtigkeit zu erfüllen, wenn nur die Einführungen im landläufigen Sinne „korrekt", die Axiome „richtig" sind.

Es können auch neuartige *Schlüsse* stattfinden, die in dem bisherigen Formalismus nicht darstellbar sind. Ja es ist sogar *jedes* die reine Zahlentheorie enthaltende *formal abgegrenzte* System *zwangsläufig* in dem Sinne *unvollständig*, daß es zahlentheoretische Sätze von elementarem Charakter gibt, deren Richtigkeit durch einleuchtende finite Schlüsse bewiesen werden kann, aber nicht durch die dem System selbst zugehörigen Beweismittel[23]). Dieser Umstand wurde als Argument gegen den Wert von Widerspruchsfreiheitsbeweisen geltend gemacht[24]). Für meinen Widerspruchsfreiheitsbeweis spielt er jedoch keine Rolle; ganz allgemein läßt sich hier sagen: Wenn man einen rein zahlentheoretischen Satz mit Hilfe von Schlüssen zu beweisen vermag, die meinem Formalismus nicht angehören, so gebe man für diesen Satz eine *Reduziervorschrift* gemäß 13. 9 1 an und er ist dadurch in den Widerspruchsfreiheitsbeweis einbezogen. Der von Gödel als Beispiel angegebene Satz hat die ganz elementare Gestalt $\forall x \mathfrak{P}(x)$, wobei $\mathfrak{P}$ ein *entscheidbares Prädikat* für natürliche Zahlen darstellt; die Erkenntnis der finiten Richtigkeit dieses Satzes ergibt also, daß $\mathfrak{P}(n)$ für *jedes bestimmte* n richtig ist, und daraus folgt ohne weiteres die *Reduzierbarkeit* der Sequenz $\rightarrow \forall x \mathfrak{P}(x)$ gemäß 13. 2 1, 13. 4.

Der Begriff der *Reduziervorschrift* ist eben schon so *allgemein* gehalten, daß er nicht an einen bestimmten Schlußregeln-Formalismus gebunden ist, sondern dem allgemeinen Begriff der „Richtigkeit", jedenfalls soweit dieser überhaupt einen klaren Sinn hat, entspricht (vgl. 13. 8.).

Wenn man eine neue *Schlußweise* als solche der bisherigen reinen Zahlentheorie zufügen will, so muß man sie in das Reduzierverfahren einzubeziehen suchen. (In Frage käme etwa eine „transfinite Induktion" bis zu einer festen „Zahl der II. Zahlklasse".)

Wenn man freilich zur reinen Zahlentheorie Begriffsbildungen und Schlußweisen der *Analysis*, die ja auch zum Beweis zahlentheoretischer Sätze benutzt werden, hinzufügen will, so läßt sich der Widerspruchsfreiheitsbeweis im allgemeinen nicht mehr ohne weiteres auf diese ausdehnen; da liegen noch Schwierigkeiten vor, die erst der Lösung bedürfen.

17. 2. Wohl aber läßt sich der *Widerspruchsfreiheitsbeweis für die reine Zahlentheorie* auf eine Reihe von *weiteren Teilgebieten der Mathematik*

[23]) Siehe P. Finsler, Formale Beweise und die Entscheidbarkeit, Math. Zeitschr. 25 (1926), S. 676—682, und die in Anm. [3]) genannte Arbeit von K. Gödel.

[24]) Siehe die in der vorigen Anmerkung genannte Arbeit von P. Finsler.

ohne Schwierigkeit *übertragen*. Dies gilt ganz allgemein für solche mathematischen Theorien, deren *Gegenstände* durch eine *Konstruktionsvorschrift*, entsprechend der für die natürlichen Zahlen (8. 1 1), gegeben sind. Eine besonders einfache und in allen Fällen anwendbare Art einer solchen Vorschrift ist diese: Man gibt zunächst eine bestimmte Anzahl von Grundzeichen an, und erklärt dann: Jedes dieser Zeichen bezeichnet einen Gegenstand; wenn man an die Bezeichnung eines Gegenstandes ein Grundzeichen anfügt, so ergibt dies wieder die Bezeichnung eines Gegenstandes. (Kurz gesagt: „Jede endliche Reihe von Grundzeichen bezeichnet einen Gegenstand der Theorie".)

Bei solchen Theorien führt man dann *Funktionen* und *Prädikate* durch entscheidbare Definitionen (8. 1 2) ein, und wendet auch die gleichen logischen *Schlußweisen* an wie in der reinen Zahlentheorie. Der *Widerspruchsfreiheitsbeweis* ist ohne weiteres übernehmbar, es treten lediglich an die Stelle der „Zahlzeichen" die „Gegenstandszeichen" der Theorie, wodurch sich am *Wesentlichen* nichts ändert.

Derartige Teilgebiete der Mathematik sind z. B. wesentliche Teile der *Algebra* (die *Polynome* als Gegenstände sind ja endliche Zeichenkombinationen); aus dem Bereich der Geometrie z. B. die *kombinatorische Topologie*; auch große *Teile der Analysis* lassen sich so darstellen, indem man den Begriff der reellen Zahl nicht in seiner *allgemeinsten* Form gebraucht. Schließlich gehören auch wesentliche Teile der *Beweistheorie* hierher (vgl. 16. 1).

Die Hinzunahme von negativen Zahlen, gebrochenen Zahlen, diophantischen Gleichungen usw. zu den natürlichen Zahlen als Gegenständen in der reinen Zahlentheorie selbst (3. 3 1) läßt sich *in gleicher Weise* in den Widerspruchsfreiheitsbeweis einbeziehen. Man *kann* freilich auch alle Aussagen über diese Gegenstände, wie unter 3. 3 1 erwähnt, in Aussagen über natürliche Zahlen *umdeuten*, indem man die neuen Gegenstände in geeigneter Weise den natürlichen Zahlen zuordnet. Das Gleiche geht auch bei allen übrigen Theorien der genannten Art; man kann ja die „endlichen Zeichenkombinationen" stets in eine eineindeutige Zuordnung zu den natürlichen Zahlen bringen („Abzählbarkeit"). Doch ist dies für die Erfordernisse des Widerspruchsfreiheitsbeweises unnötig umständlich und unnatürlich.

17. 3. (Vgl. § 9.) Von seiten der *Intuitionisten* wird gegen die *Bedeutung* von Widerspruchsfreiheitsbeweisen folgender *Einwand* erhoben[25]:

[25]) Siehe etwa: L. E. J. Brouwer, Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss., phys.-math. Kl. (1928), S. 48—52; und A. Heyting, Mathematische Grundlagenforschung — Intuitionismus — Beweistheorie, Ergebnisse d. Math. und ihrer Grenzgebiete **3** (1935), Heft 4.

Wenn auch damit nachgewiesen sei, daß die bedenklichen Schlußweisen nicht zu einander widersprechenden Ergebnissen führen können, so wären doch diese Ergebnisse *sinnlose* Aussagen, die Beschäftigung hiermit eine Spielerei; wirkliche *Erkenntnisse* könnten nur durch die unbedenklichen, intuitionistischen (bzw. finiten, wenn man will) Schlußweisen gewonnen werden.

Betrachten wir als Beispiel die unter 10.6 angegebene Existenzaussage, bei der eine *Angabe* der Zahl, deren Existenz behauptet wird, nicht möglich ist. Diese Aussage wäre also nach der intuitionistischen Auffassung *sinnlos*; denn eine Existenzaussage könne sinnvoll eben nur dann ausgesprochen werden, wenn sich ein Zahlenbeispiel *angeben* läßt.

Was läßt sich nun dazu sagen?

Hat eine solche Aussage irgendeinen *Erkenntniswert?* Nun, zunächst einmal liegt in folgenden Anwendungsmöglichkeiten, die von Gegnern der intuitionistischen Auffassung angeführt werden, ein gewisser *praktischer Wert* derartiger Aussagen:

Sie können eventuell als Hilfsmittel dienen, um aus ihnen einfache, etwa durch Minimalformeln (3.24) darstellbare Aussagen abzuleiten, die nun wieder finit und intuitionistisch sinnvoll sind und auf Grund des Widerspruchsfreiheitsbeweises *richtig* sein müssen.

Ferner hat z. B. eine Existenzaussage $\exists\, \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ ohne Beispielsangabe immerhin den Nutzen, daß man nicht mehr nach einem Beweis für die Aussage $\forall\, \mathfrak{x} \neg \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ zu suchen braucht; denn einen solchen kann es nicht geben, da sonst ein Widerspruch entstände.

Dies wären immerhin Gründe, die das Beweisen von Sätzen mittels „an-sich"-Schlußweisen als *nicht ganz zwecklos* erscheinen lassen, abgesehen noch von dem „ästhetischen Wert" mathematischer Forschungen überhaupt.

Somit hätten die Aussagen der an-sich-Mathematik zwar einen gewissen *Wert*, aber noch immer keinen *Sinn*. Nun besteht aber doch der wesentlichste Teil meines Widerspruchsfreiheitsbeweises gerade darin, daß den an-sich-Aussagen ein *finiter Sinn beigelegt* wird, nämlich: Es *läßt sich* für jede beliebige Aussage, sofern sie bewiesen ist, eine *Reduziervorschrift* gemäß 13.6 *angeben*, und diese Tatsache stellt eben den durch den Widerspruchsfreiheitsbeweis gewonnenen finiten Sinn der betreffenden Aussage dar.

Freilich kann dieser „finite Sinn" bereits bei einfach geformten Aussagen recht *kompliziert* sein, und steht im allgemeinen in einer loseren Beziehung zu der (durch die an-sich-Auffassung bestimmten) *Form* der Aussage, als es im Bereich des finiten Schließens der Fall ist.

Die oben angeführte Existenzaussage z. B. erhält damit auch einen finiten Sinn, doch ist dieser *schwächer* als bei finit bewiesenen Existenzaussagen, denn er besagt *nicht*, daß sich ein Beispiel angeben läßt.

Eine andere Frage ist es, welche *Bedeutung* nun noch dem *an-sich-Sinn* der Aussagen zukommt. Jedenfalls ergibt der Beweis, daß man widerspruchsfrei so schließen kann, „als ob" im unendlichen Gegenstandsbereich alles ebenso an-sich-bestimmt wäre wie in endlichen Bereichen (vgl. § 9). Ob und wieweit jedoch dem an-sich-Sinn einer transfiniten Aussage etwas „Wirkliches" entspricht — außer dem, was ihr eingeschränkter *finiter* Sinn aussagt — das ist eine Frage, die der *Widerspruchsfreiheitsbeweis nicht* beantwortet.

(Eingegangen am 11. 8. 1935.)

Eine homomorphe Zuordnung der Elemente der galoisschen Gruppe zu den Elementen einer Untergruppe der Normklassengruppe.

Von

Yasuo Akizuki in Kyôto (Japan).

Es sei K ein separabler galoisscher Erweiterungskörper von endlichem Grad über einem Körper k, $\mathfrak{G}$ seine galoissche Gruppe und $\mathfrak{A} = ((a), K)$ ein verschränktes Produkt von K mit $\mathfrak{G}$.

Herr T. Nakayama[1]) hat das Symbol $F(R, (a))$ so definiert, daß

$$F(R, (a)) = \prod_{S}^{\mathfrak{G}} a_{R,S}$$

ist, und aus dem assoziativen Gesetz für die Faktorensysteme folgendes deduziert:

(I) $F(R, (a)) \in k$.

(II) Wenn $(a) \sim (a')$ ist, dann ist $F(R, (a)) \equiv F(R, (a'))$ mod $N^*_{K|k}$.

(III) $F(R, (a))\, F(S, (a)) \equiv F(RS, (a))$ mod $N^*_{K|k}$,

wobei $N^*_{K|k}$ die Gruppe bedeutet, die durch die Normen der Elemente $(\neq 0)$ aus K erzeugt ist.

Er hat ferner mit $\mathfrak{F}(R, (a))$ die Klasse bezeichnet, zu der $F(R, (a))$ nach $N^*_{K|k}$ gehört, und für *abelsche* Körper K bewiesen, daß der durch die Symbole $\mathfrak{F}(R, (a))$ mit festem (a) vermittelte Homomorphismus einer Untergruppe der Normklassengruppe $k^*/N^*_{K|k}$ mit der galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ ein Isomorphismus ist, falls $\mathfrak{A}$ einen dem Grad von K gleichen Exponenten besitzt. Falls k ein p-adischer Zahlkörper ist, so existiert sicher ein solches $\mathfrak{A}$. In diesem Falle kann man also durch die Symbole $\mathfrak{F}(R, (a))$ für ein solches $\mathfrak{A}$ den Elementen der Gruppe $k^*/N^*_{K|k}$ die Elemente der galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ isomorph zuordnen.

In meiner Arbeit wird gezeigt, daß man, auch wenn $\mathfrak{G}$ *nicht abelsch* ist, durch die Symbole $\mathfrak{F}(R, (a))$ für ein $\mathfrak{A}$ den Elementen einer Untergruppe von $k^*/N^*_{K|k}$ die Elemente der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ isomorph zuordnen kann, falls $\mathfrak{A}$ einen dem Grad von K gleichen Exponenten besitzt, wobei $\mathfrak{G}'$ die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$ bedeutet. Wenn daher k ein p-adischer

[1]) T. Nakayama, Über die Beziehungen zwischen den Faktorensystemen und der Normklassengruppe eines galoisschen Erweiterungskörpers, Math. Annalen 112 (1935), S. 85—91.

Zahlkörper ist, kann man durch die Symbole die Elemente von $k^*/N^*_{K/k}$ denen von $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ isomorph zuordnen.

Ich danke Herrn Nakayama für seine freundlichen Bemerkungen, die eine Vereinfachung des Beweises ermöglicht haben.

§ 1[1a]).

1. Es sei K ein galoisscher separabler Erweiterungskörper vom g-ten Grad über einem Körper k, $\mathfrak{G}$ seine galoissche Gruppe und $\mathfrak{A}$ ein verschränktes Produkt von K mit $\mathfrak{G}$, d. h.

$$\mathfrak{A} = u_E K + u_{G_1} K + \ldots + u_{G_{g-1}} K,$$

wo $$z u_G = u_G z^G \qquad \text{(für jedes } z \text{ aus } K\text{)}$$

und $$u_{G_\mu} u_{G_\nu} = u_{G_\mu G_\nu} a_{G_\mu, G_\nu}$$

ist. Das assoziative Gesetz lautet:

$$(1) \qquad a_{G_\lambda, G_\mu G_\nu} a_{G_\mu, G_\nu} = a_{G_\lambda G_\mu, G_\nu} a^{G_\nu}_{G_\lambda, G_\mu}.$$

Es sei nun $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$, n die Ordnung von $\mathfrak{N}$, und $\bar{K}$ der zu $\mathfrak{N}$ zugeordnete normale Teilkörper von K. Ferner sei

$$(2) \qquad \mathfrak{G} = \mathfrak{N} + H_1 \mathfrak{N} + \ldots + H_{\bar{g}-1} \mathfrak{N}, \qquad (g = n\bar{g}),$$

und wir bezeichnen die Repräsentanten der Nebenkomplexe nach $\mathfrak{N}$ im weiteren Verlaufe der Arbeit stets mit

$$(3) \qquad E, H_1, \ldots, H_{\bar{g}-1}.$$

Läßt man G_λ in (1) die Untergruppe $\mathfrak{N}$ durchlaufen und multipliziert die so erhaltenen Gleichungen, so erhält man

$$\{\prod_N^{\mathfrak{N}} a_{N, G_\mu G_\nu}\} \cdot a^n_{G_\mu, G_\nu} = \{\prod_N^{\mathfrak{N}} a_{N G_\mu, G_\nu}\} \{\prod_N^{\mathfrak{N}} a^{G_\nu}_{N, G_\mu}\}.$$

Setzt man $b_G = \prod_N^{\mathfrak{N}} a_{N, G}$ und

$$(4) \qquad \varphi(G_\mu, G_\nu) = \prod_N^{\mathfrak{N}} \frac{a_{N G_\mu, G_\nu}}{a_{N, G_\nu}} = \prod_N^{\mathfrak{N}} \frac{a_{G_\mu N, G_\nu}}{a_{N, G_\nu}},$$

so folgt aus der obigen Gleichung

$$(5) \qquad a^n_{G_\mu, G_\nu} = \frac{b^{G_\nu}_{G_\mu} b_{G_\nu}}{b_{G_\mu G_\nu}} \varphi(G_\mu, G_\nu),$$

mithin

$$(6) \qquad \mathfrak{A}^n = ((\varphi), K).$$

Nach der Definition von φ ist ersichtlich für jedes $N \in \mathfrak{N}$

$$(7) \qquad \varphi(HN, G) = \varphi(H, G), \qquad \varphi(N, G) = 1.$$

[1a]) [Zusatz bei der Korrektur.] Inzwischen erschien eine Arbeit von E. Witt, Zwei Regeln über verschränkte Produkte, Crelles Journal 173 (1935). Dort finden sich die im vorliegenden Paragraphen erhaltenen Resultate (13. 11. 1935).

Setzt man ferner

$$\psi(G_\mu, G_\nu) = \prod_N^{\mathfrak{N}} a_{G_\mu, G_\nu N}, \tag{8}$$

dann ist für jedes $N_i \in \mathfrak{N}$

$$\varphi(G_u, N_i) = \{\psi(G_\mu, E)\}^{1-N}, \tag{9}$$

da $\dfrac{a_{G_u N, N_i}}{a_{N, N_i}} = \dfrac{a_{G_\mu, N N_i}}{a_{G_u, N}^{N_i}}$ ist. Folglich ist nach (7)

$$c_{H_\mu, N_j} = \frac{\psi(H_\mu, E)}{\psi(H_\mu N_j, E)} \in \overline{K}. \tag{10}$$

Setzt man weiter

$$d_{H_\mu \mathfrak{N}} = \psi(H_\mu, E) = c_{H_\mu, N_j}\, \psi(H_u N_j, E), \tag{11}$$

so ist

$$d_{H_\lambda \mathfrak{N}}^{H_\nu}\, \varphi(H_\lambda, H_\nu) = d_{H_\lambda \mathfrak{N}}^{N H_\nu}\, \varphi(H_\lambda, N H_\nu); \tag{12}$$

denn

$$\varphi(H_\lambda, N H_\nu)\, \varphi(N, H_\nu) = \varphi(H_\lambda N, H_\nu)\, \varphi^{H_\nu}(H_\lambda, N),$$

mithin nach (7), (9) und (11)

$$\varphi(H_\lambda, N H_\nu) = \varphi(H_\lambda, H_\nu)\, \{\psi(H_\lambda, E)\}^{(1-N) H_\nu} = \varphi(H_\lambda, H_\nu)\, d_{H_\lambda \mathfrak{N}}^{(1-N) H_\nu}.$$

Konstruiert man also das zu (φ) assoziierte Faktorensystem (χ) dergestalt, daß

$$\chi(G_\mu, G_\nu) = \frac{d_{G_u \mathfrak{N}}^{G_\nu} d_{G_\nu \mathfrak{N}}}{d_{G_\mu G_\nu \mathfrak{N}}}\, \varphi(G_\mu, G_\nu) \tag{13}$$

ist, so folgt aus (7) und (12) für jedes N und $N' \in \mathfrak{N}$

$$\chi(H_\mu N, H_\nu N') = \chi(H_\mu, H_\nu). \tag{14}$$

Damit wird $\chi(G_\mu, G_\nu)$ durch die Klasse, der G_μ bzw. G_ν nach $\mathfrak{N}$ angehört, fest bestimmt und man kann $\chi(G_\mu, G_\nu)$ mit $\chi_0(H_\mu \mathfrak{N}, H_\nu \mathfrak{N})$ bezeichnen.

Somit ist nach Hasse[2]) $\chi_0(H_\mu \mathfrak{N}, H_\nu \mathfrak{N}) \in \overline{K}$ und

$$\mathfrak{N}^n \sim ((\varphi), K) \sim ((\chi_0), K). \tag{15}$$

Zwecks Anwendung schreiben wir die Funktion $\chi(G_\mu, G_\nu)$ in anderer Form. Setzt man (4), (8), (11) in (13) ein, so ergibt sich nach (14)

$$\chi(G_\mu, G_\nu) = \prod_N^{\mathfrak{N}} \frac{a_{H_\mu, N}^{H_\nu}\, a_{H_\nu, N}}{a_{H_\sigma, N}}\, \frac{a_{H_\mu N, H_\nu}}{a_{N, H_\nu}}, \tag{16}$$

wenn

$$G_\mu \equiv H_\mu, \quad G_\nu \equiv H_\nu, \quad G_\mu G_\nu \equiv H_\sigma \pmod{\mathfrak{N}}$$

---

[2]) M. Deuring, Algebren, S. 62–63. Für einen einfacheren Beweis von (15) vgl. K. Shoda, Bemerkungen über die Faktorensysteme einfacher hyperkomplexer Systeme, Japanese Journ. of Math. 10, S. 58.

ist. Da aber nach (1)

$$\frac{a_{H_\mu, N}^{H_\nu} a_{H_\mu N, H_\nu}}{a_{N, H_\nu}} = a_{H_\mu, N H_\nu}$$

ist, wird

$$\chi(G_\mu, G_\nu) = \prod_N^{\mathfrak{N}} \frac{a_{H_\mu, N H_\nu} a_{H_\nu, N}}{a_{H_\sigma, N}} = \frac{\psi(H_\mu, H_\nu)\, \psi(H_\nu, E)}{\psi(H_\sigma, E)}. \tag{17}$$

Ferner folgt aus (16) wieder nach (1), daß

$$\chi(G_\mu, G_\nu) = \prod_N^{\mathfrak{N}} \frac{a_{H_\mu, N}^{H_\nu} a_{H_\nu, N}}{a_{H_\sigma, N}} \frac{a_{H_\mu, N H_\nu}}{a_{H_\mu, N}^{H_\nu}}$$

$$= \prod_N^{\mathfrak{N}} \frac{a_{H_\nu, N} a_{H, H_\nu N}}{a_{H_\sigma, N}} = \prod_N^{\mathfrak{N}} \frac{a_{H_\mu H_\nu, N}}{a_{H_\sigma, N}} a_{H_\mu, H_\nu}^{N},$$

also

$$\chi(G_\mu, G_\nu) = N_{K|\bar{K}}(a_{H_\mu, H_\nu}) \prod_N^{\mathfrak{N}} \frac{a_{H_\mu H_\nu, N}}{a_{H_\sigma, N}}, \tag{18}$$

wo

$$G_\mu \equiv H_\mu, \quad G_\nu \equiv H_\nu, \quad G_\mu G_\nu \equiv H_\sigma \pmod{\mathfrak{N}}$$

ist.

2. Wir normieren nun das Faktorensystem (a) so in (a'), daß die $a'_{H_\mu, N} = 1$ werden, oder mit anderen Worten, wir nehmen die Transformatoren u'_G so, daß für jedes H_μ in (3) und jedes $N \in \mathfrak{N}$

$$u'_{H_\mu} = u_{H_\mu}, \quad u'_N = u_N, \quad u'_{H_\mu N} = u_{H_\mu} u_N$$

sind. Dann ist für jeden Nebenkomplex $H_\mu \mathfrak{N}$

$$d'_{H_\mu \mathfrak{N}} = \psi'(H_\mu, E) = \prod_N^{\mathfrak{N}} a'_{H_\mu, N} = 1,$$

mithin nach (10)

$$\psi'(H_\mu N_\jmath, E) = \frac{1}{c'_{H_\mu, N_\jmath}} \in \bar{K}. \tag{10'}$$

Es seien $G_\mu \equiv H_\mu$, $G_\nu \equiv H_\nu$ nach $\mathfrak{N}$. Dann folgt aus (13)

$$\chi'(G_\mu, G_\nu) = \varphi'(G_\mu, G_\nu) = \prod_N^{\mathfrak{N}} \frac{a'_{G_\mu N, G_\nu}}{a'_{N, G_\nu}} \tag{13'}$$

bzw. aus (17)

$$\chi'(G_\mu, G_\nu) = \psi'(H_\mu, H_\nu) = \prod_N^{\mathfrak{N}} a'_{H_\mu, H_\nu N} \tag{17'}$$

und auch aus (13')

$$\chi'(G_\mu, G_\nu) = \prod_N^{\mathfrak{N}} \frac{a_{G_\mu, N G_\nu}}{a'^{G_\nu}_{G_\mu, N}} = \frac{\psi'(G_\mu, H_\nu)}{\psi'^{G_\nu}(G_\mu, E)}. \tag{17''}$$

Ferner ergibt sich aus (18), wenn $H_\mu H_\nu = H_\sigma N_{\mu,\nu}$ ist,

$$\chi'(G_\mu, G_\nu) = N_{K|\bar{K}}(a'_{H_\mu, H_\nu})\, \psi'(N_{\mu,\nu}, E). \tag{18'}$$

§ 2.

1. Es sei $\mathfrak{G}'$ die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{N}$ ein $\mathfrak{G}'$ umfassender Normalteiler von $\mathfrak{G}$, d. h. *die Faktorgruppe* $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ *sei abelsch.* Ferner wird vorausgesetzt, daß *der Exponent von* $\mathfrak{A} = ((a), K)$ *dem Grad* g *von* K *gleich ist.* Die anderen Bezeichnungen haben die gleiche Bedeutung wie im vorigen Paragraphen.

Dann ist das Nakayamasche Symbol[3]) für das verschränkte Produkt $((\chi_0'), \bar{K})$

$$\bar{F}(H_\mu \mathfrak{N}, (\chi_0')) = \prod_{H_\nu}^{\mathfrak{G}/\mathfrak{N}} \chi_0'(H_\mu \mathfrak{N}, H_\nu \mathfrak{N}) \tag{19}$$

ein Element von k. Ordnet man $H_\mu \mathfrak{N}$ die Klasse $\bar{\mathfrak{F}}(H_\mu \mathfrak{N}, (\chi_0'))$ zu, zu der $\bar{F}(H_\mu \mathfrak{N}, (\chi_0'))$ mod. $N^*_{\bar{K}|k}$ gehört, so sieht man nach dem Nakayamaschen Satz[4]) für den abelschen Körper, daß die Klassen $\bar{\mathfrak{F}}(H_\mu \mathfrak{N}, (\chi_0'))$ eine mit der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ isomorphe Untergruppe der Normklassengruppe $k^*/N^*_{\bar{K}|k}$ bilden; denn $\bar{K}$ ist über k abelsch und der Exponent von $((\chi_0'), \bar{K})$ gleich dem Grad $\bar{g}$ von $\bar{K}$, weil $\mathfrak{A}^n \sim ((\chi_0'), \bar{K})$ ist. Dabei bezeichnet $N^*_{\bar{K}|k}$ die Gruppe, die durch die Normen der Elemente $(\neq 0)$ aus $\bar{K}$ erzeugt ist. Also ist für $\mu \neq \nu$

$$\bar{F}(H_\mu \mathfrak{N}, (\chi_0')) \not\equiv \bar{F}(H_\nu \mathfrak{N}, (\chi_0')) \mod N^*_{\bar{K}|k}. \tag{20}$$

Da aber nach (10') $\psi'(G, E) \in \bar{K}$ ist, so ist nach (17''), (19)

$$\bar{F}(H_\mu \mathfrak{N}, (\chi_0')) = \prod_{H_\nu}^{\mathfrak{G}/\mathfrak{N}} \frac{\psi'(G_\mu, H_\nu)}{\psi'^{H_\nu}(G_\mu, E)} = \frac{\prod_{H_\nu}^{\mathfrak{G}/\mathfrak{N}} \prod_{N}^{\mathfrak{N}} a'^{G_\mu, H_\nu N}}{N_{\bar{K}|k}(\psi'(G_\mu, E))} = \frac{F(G_\mu, (a'))}{N_{\bar{K}|k}(\psi'(G_\mu, E))}, \tag{21}$$

wenn $G_\mu \equiv H_\mu \mod \mathfrak{N}$ ist, wobei $F(G_\mu, (a'))$ das Nakayamasche Symbol bezeichnet. Daher ist für G_μ, G_ν mit $G_\mu \not\equiv G_\nu \pmod{\mathfrak{N}}$

$$F(G_\mu, (a')) \not\equiv F(G_\nu, (a')) \mod N^*_{\bar{K}|k}. \tag{22}$$

Da aber $N^*_{\bar{K}|k} \subseteq N^*_{\bar{K}|k}$ und für $(a) \sim (a')$

$$F(G, (a)) \equiv F(G, (a')) \mod N^*_{\bar{K}|k}$$

ist, so ist auch für das nicht normierte Faktorensystem (a) von $\mathfrak{A}$

$$F(G_\mu, (a)) \not\equiv F(G_\nu, (a)) \mod N^*_{\bar{K}|k}, \tag{22'}$$

wenn $G_\mu \not\equiv G_\nu \mod \mathfrak{N}$ ist. Ferner ist nach (21) für G_μ, G_μ' mit $G_\mu \equiv G_\mu' \pmod{\mathfrak{N}}$

$$F(G_\mu, (a)) \equiv F(G_\mu', (a)) \mod N^*_{\bar{K}|k}.$$

Weiter ist

$$F(G_\mu, (a)) F(G_\nu, (a)) \equiv F(G_\mu G_\nu, (a)) \mod N^*_{\bar{K}|k}.$$

---

[3]), [4]) Siehe Anm. [1]).

Bezeichnet man mit $\mathfrak{F}_{\bar{K}}(G,(a))$ die Klasse, zu der $F(G,(a))$ nach $N^*_{\bar{K}|k}$ gehört, so liefern daher die Klassen $\mathfrak{F}_{\bar{K}}(G,(a))$ unter den am Anfang dieses Paragraphen erwähnten Annahmen eine isomorphe Zuordnung zwischen den Elementen von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ und einer Untergruppe von $k^*/N^*_{\bar{K}|k}$.

Es sei jetzt k ein p-adischer Zahlkörper. Dann existiert ein Schiefkörper vom Index g über k, und K ist sein Zerfällungskörper[5]). Also existiert ein verschränktes Produkt $((a),K)$ mit dem Exponenten g. Nimmt man nun an, daß $\mathfrak{N}$ die Kommutatorgruppe $\mathfrak{G}'$ ist, so ist $N^*_{K|k} = N^*_{\bar{K}|k}$[6]), mithin $\mathfrak{F}(G,(a)) = \mathfrak{F}_{\bar{K}}(G,(a))$.

Daher erhält man den

Satz: *Es sei k ein p-adischer Zahlkörper, K ein beliebig gegebener galoisscher Erweiterungskörper vom g-ten Grad über k, $\mathfrak{G}$ seine galoissche Gruppe und $\mathfrak{G}'$ die Kommutatorgruppe von $\mathfrak{G}$. Dann liefern die Symbole $\mathfrak{F}(R,(a))$ für ein $((a),K)$ mit dem Index g eine isomorphe Zuordnung zwischen den Elementen der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$ und der Normklassengruppe $k^*/N^*_{K|k}$.*

2. Zum Schlusse bemerke ich noch, daß die Formeln (18), (18′) einen *Chevalleyschen Hilfssatz*[7]) zu verallgemeinern scheinen[8]).

Es sei $\mathfrak{G} = \mathfrak{N} \times \mathfrak{H}$, $\bar{K}$ der zu $\mathfrak{N}$ gehörige Normalkörper über k. Wählt man jeden Repräsentanten der Nebenkomplexe in (3) aus den Elementen der Gruppe $\mathfrak{H}$, so ist in $\mathfrak{G}$ $H_u H_v = H_\sigma$. Mithin wird (18)

$$\chi(H_u, H_v) = N_{K|\bar{K}}(a_{H_u, H_v}). \tag{18''}$$

Da aber $\mathfrak{A}^n \sim ((\chi_0), \bar{K})$ ist, so erhält man den Chevalleyschen Hilfsatz, d. h.

$$\mathfrak{A}^n \sim ((\bar{a}), \bar{K}), \tag{23}$$

wo

$$\bar{a}_{H_u, H_v} = N_{K|\bar{K}}(a_{H_u, H_v})$$

ist.

Die Formel (23) gilt, wie leicht ersichtlich, auch dann, wenn $\mathfrak{G}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{N}$ durch $\mathfrak{H}$ mit den Bedingungen $N_{\mu,\nu} = E$ für jedes H_u, H_v ist, z. B. wenn $\mathfrak{G}$ das Holomorph von $\mathfrak{N}$ ist.

---

[5]) G. Köthe, Erweiterung des Zentrums einfacher Algebren, Math. Annalen **107**, oder C. Chevalley, La théorie du symbole de restes normiques, Crelles Journ. **169**.

[6]) C. Chevalley, Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux, Journ. of the Faculty of Science, Imperial Univ. of Tokyo, **2**, Part 9, S. 461.

[7]) C. Chevalley, La théorie du symbole de restes normiques, § IV, Crelles Journ. **169**.

[8]) Diese Bemerkung findet sich auch bei E. Witt, l. c.

(Eingegangen am 3. 8. 1935.)

Über den Zusammenhang zwischen dem Begriff der Gleichartigkeit zweier Ideale und dem Äquivalenzbegriff der Elementarteilertheorie.

Von

Hans Fitting in Königsberg i. Pr.

Einleitung.

Neuere Untersuchungen der Idealtheorie haben ergeben, daß zwar die meisten Zerlegungen der Ideale kommutativer Ringe auch im Nichtkommutativen ein Analogon besitzen, daß aber Zerlegungen, die im Kommutativen nur auf eine einzige Weise möglich sind, im Nichtkommutativen nicht mehr absolut, sondern nur noch bis auf Komponenten von der „gleichen Art" eindeutig bestimmt sind, wobei „Gleichartigkeit" zweier Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ des Ringes $\mathfrak{o}$ Isomorphie der zugehörigen Restklassenmoduln $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}, \mathfrak{o}/\mathfrak{b}$ bedeutet. Ein erstes Beispiel hierfür ist die eindeutige Primfaktorenzerlegung in kommutativen (nullteilerfreien) Hauptidealringen, die auch in nichtkommutativen (nullteilerfreien) Ringen, in denen jedes Links- und Rechtsideal Hauptideal ist, möglich, diesmal aber nur bis auf solche Primfaktoren eindeutig ist, die gleichartige Links- oder Rechtsideale erzeugen[1]). Ein zweites Beispiel ist die Primärkomponentenzerlegung derjenigen Ideale eines kommutativen Ringes, modulo denen der Doppelkettensatz gilt, zu der in nichtkommutativen Ringen ebenfalls Analoga existieren, bei denen aber die Primärkomponenten i. a. wieder nur bis auf gleichartige eindeutig sind[2]). Diese Beispiele weisen darauf hin, daß der Gleichartigkeitsbegriff für den weiteren Ausbau der nichtkommutativen Idealtheorie von besonderer Bedeutung sein wird. Es liegt daher nahe, diesen Begriff genauer zu untersuchen, zumal er auch in anderen Zweigen

[1]) Unter der Voraussetzung der Möglichkeit eines beiderseitigen Euklidischen Algorithmus findet sich der Satz bewiesen in den Arbeiten von J. H. M. Wedderburn: Non-commutative domains of integrity. Crelle J. f. Math. 167 (1932), S. 129—141. Ö. Ore: Formale Theorie der linearen Differentialgleichungen 1. Teil. Crelle J. f. Math. 167 (1932), S. 221—234; 2. Teil. Crelle J. f. Math. 168 (1932), S. 232—255. Der allgemeine Fall wird in der demnächst erscheinenden Dissertation von Ludwig Schwarz behandelt.

[2]) H. Fitting: Primärkomponentenzerlegung in nichtkommutativen Ringen, Math. Annalen 111 (1935), S. 19—41.

der Mathematik, z. B. seit H. Poincaré und A. Loewy[3]) in der Theorie der linearen Differentialgleichungen, eine Rolle spielt.

In der vorliegenden Arbeit werde ich zeigen, *daß der Gleichartigkeitsbegriff als natürliche Verallgemeinerung des Äquivalenzbegriffs der Elementarteilertheorie angesehen werden kann. Gilt in dem zugrundegelegten Ring der Teilerkettensatz, was bei den praktisch vorkommenden Anwendungen immer der Fall sein wird, so sind beide Begriffe sogar im wesentlichen identisch.*

Als Nebenresultat wird sich u. a. auch der folgende Satz ergeben:

Zwei Nichtnullteiler a und b eines Ringes $\mathfrak{o}$ mit Einselement erzeugen stets dann und nur dann gleichartige Links- bzw. Rechtsideale ($\mathfrak{o}\,a, \mathfrak{o}\,b$ bzw. $a\,\mathfrak{o}, b\,\mathfrak{o}$), wenn die beiden Matrizen $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ im Sinne der Elementarteilertheorie äquivalent sind, d. h. durch links- und rechtsseitige Multiplikation mit *invertierbaren*, 2-reihigen, quadratischen Matrizen mit Koeffizienten aus $\mathfrak{o}$ ineinander übergehen. Erzeugen Nichtnullteiler gleichartige Linksideale, so auch gleichartige Rechtsideale und umgekehrt.

Als Spezialfall ist hierin enthalten:

Zwei Differentialgleichungen:

$$f\left(\frac{d}{dx}\right)\cdot y \equiv a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + a_0(x)\cdot y = 0,$$

$$g\left(\frac{d}{dx}\right)\cdot y \equiv b_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + b_0(x)\cdot y = 0$$

mit Koeffizienten aus einem festen Funktionenkörper K sind dann und nur dann von gleicher Art im Sinne von H. Poincaré, wenn die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} f\left(\frac{d}{dx}\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} g\left(\frac{d}{dx}\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

im Sinne der Elementarteilertheorie äquivalent sind; f, g und die Koeffizienten der invertierbaren Matrizen, welche A und B ineinander überführen, sind dabei als Elemente des Polynombereichs $K\left[\frac{d}{dx}\right]$ mit der Multiplikationsregel $\frac{d}{dx}\cdot a = a\frac{d}{dx} + a'$ $(a \in K)$ anzusehen. a' bedeutet die Ableitung der Funktion $a \equiv a(x)$.

§ 1.

$\mathfrak{O}$ sei ein kommutativer oder nichtkommutativer Ring mit dem Einselement 1; im übrigen wird über $\mathfrak{O}$ nichts vorausgesetzt.

---

[3]) A. Loewy: Über vollständig reduzibele lineare homogene Differentialgleichungen, Math. Annalen 62 (1906), S. 94. H. Poincaré: Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes, Acta math. 5 (1884), S. 212.

Neben $\mathfrak{O}$ werde ich noch alle vollständigen Matrizenringe bzw. vom Grade 1, 2, 3, ... über $\mathfrak{O}$ betrachten, die ich in Übereinstimmung mit der üblichen Schreibweise mit

$$\mathfrak{O}_1 = \mathfrak{O}, \mathfrak{O}_2, \mathfrak{O}_3, \ldots, \mathfrak{O}_r, \ldots$$

bezeichne. $\mathfrak{O}_r$ ist also der Ring aller r-reihigen, quadratischen Matrizen mit Koeffizienten aus $\mathfrak{O}$.

§ 2.

Die Gesamtheit $|\mathfrak{A}_r)$ aller r-reihigen, quadratischen Matrizen $(a_{\mu\nu})$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{O}$, die eine Basis (=Erzeugendensystem): $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ eines von endlich vielen Elementen erzeugbaren $\mathfrak{O}$-Rechtsmoduls[4]) „annullieren", d. h. der Bedingung $\sum_{\mu=1}^{r} \alpha_\mu \cdot a_{\mu\nu} = 0$ $(\nu = 1, \ldots, r)$ genügen, ist offenbar ein Rechtsideal des Ringes $\mathfrak{O}_r$; ich nenne es das *„annullierende Ideal"* der Basis $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_r)$[5]).

Hilfssatz 1: Zu jedem Rechtsideal $|\mathfrak{A}_r)$ des Ringes $\mathfrak{O}_r$ gibt es stets mindestens einen $\mathfrak{O}$-Rechtsmodul mit einer Basis $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, deren annullierendes Ideal mit dem vorgegebenen Ideal $|\mathfrak{A}_r)$ übereinstimmt. Dieser Modul ist sogar bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. r ist in diesem Satze eine beliebige, natürliche Zahl.

Beweis: Mit $|\mathfrak{A}_r)'$ werde die Menge aller r-zeiligen und *einspaltigen* Matrizen bezeichnet, die in den zu $|\mathfrak{A}_r)$ gehörigen Matrizen als Spalten vorkommen. $\mathfrak{O}_r'$ sei die Menge aller r-zeiligen, *einspaltigen* Matrizen, die sich überhaupt mit Koeffizienten aus $\mathfrak{O}$ bilden lassen. $|\mathfrak{A}_r)'$ und $\mathfrak{O}_r'$ sind natürlich $\mathfrak{O}$-Rechtsmoduln; außerdem ist $\mathfrak{O}_r' \supseteq |\mathfrak{A}_r)'$. Der Restklassenmodul $\mathfrak{O}_r'/|\mathfrak{A}_r)'$ ist ein Modul von der verlangten Art: Ist nämlich E_{ir} die spezielle r-zeilige, einspaltige Matrix, in welcher in der i-ten Zeile das Einselement, sonst überall das Nullelement von $\mathfrak{O}$ steht, und $\overline{E}_{ir}$ die von E_{ir} modulo $|\mathfrak{A}_r)'$ erzeugte Restklasse, so ist $(\overline{E}_{1r}, \overline{E}_{2r}, \ldots, \overline{E}_{rr})$ offensichtlich eine Basis von $\mathfrak{O}_r'/|\mathfrak{A}_r)'$, und zwar eine Basis mit dem annullierenden Ideal $|\mathfrak{A}_r)$.

Haben zwei Moduln $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ je eine Basis $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ und $(\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_r')$ mit demselben annullierenden Ideal $|\mathfrak{A}_r)$, so sind sie isomorph, da man durch die Zuordnung $\alpha_1 c_1 + \ldots + \alpha_r c_r \rightleftarrows \alpha_1' c_1 + \ldots + \alpha_r' c_r$,

---

[4]) Bei den in dieser Arbeit vorkommenden $\mathfrak{O}$-Moduln soll das Einselement von $\mathfrak{O}$ immer Einheitsoperator sein.

[5]) Für die Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ einer Basis eines $\mathfrak{O}$-Moduls wird lineare Unabhängigkeit, die nach der allgemein eingebürgerten Definition besagt, daß aus $\sum_{\mu=1}^{r} \alpha_\mu c_\mu = 0$ immer $\alpha_\mu c_\mu = 0$ folgt, natürlich nicht verlangt.

in der $c_1, c_2, \ldots, c_r$ unabhängig voneinander alle Elemente des Ringes $\mathfrak{O}$ durchlaufen, eine isomorphe (umkehrbar eindeutige, relationstreue) Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}'$ erhält.

§ 3.

Definition 1: *Ein Rechtsideal* $|\mathfrak{A}_r)$ *des Ringes* $\mathfrak{O}_r$ *heißt mit einem Rechtsideal* $|\mathfrak{B}_s)$ *des Ringes* $\mathfrak{O}_s$ *„von gleicher Art"*, wenn die den Idealen $|\mathfrak{A}_r)$ und $|\mathfrak{B}_s)$ im Sinne des Hilfssatzes 1 eindeutig entsprechenden $\mathfrak{O}$-Rechtsmoduln: $\mathfrak{O}'_r/|\mathfrak{A}_r)'$ und $\mathfrak{O}'_s/|\mathfrak{B}_s)'$ isomorph sind, *wenn* also — was auf dasselbe hinausläuft — $|\mathfrak{A}_r)$ *und* $|\mathfrak{B}_s)$ *die annullierenden Ideale zweier Basen desselben* $\mathfrak{O}$*-Rechtsmoduls sind.*

Zwei Rechtsideale $|\mathfrak{A}_r)$ *und* $|\mathfrak{B}_r)$ *desselben Ringes* $\mathfrak{O}_r$ *(Fall* $r = s$*) sind stets dann und nur dann von gleicher Art, wenn die gewöhnlichen Restklassenmoduln* $\mathfrak{O}_r/|\mathfrak{A}_r)$ *und* $\mathfrak{O}_r/|\mathfrak{B}_r)$ *– als Moduln in bezug auf den Matrizenring* $\mathfrak{O}_r$ *aufgefaßt — isomorph sind.* In diesem Spezialfall stimmt also die obige Gleichartigkeitsdefinition mit der üblichen[6]) überein.

Beweis: $\mathfrak{M}$ sei zunächst irgendein $\mathfrak{O}$-Rechtsmodul. Mit $\mathfrak{M}_r$ werde dann die Menge aller *einzeiligen*, r-spaltigen Matrizen $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ mit $\alpha_\iota \in \mathfrak{M}$ bezeichnet. $\mathfrak{M}_r$ wird zu einem Rechtsmodul in bezug auf $\mathfrak{O}_r$, wenn man für die Matrizen aus $\mathfrak{M}_r$ eine Addition und eine rechtsseitige Multiplikation mit Matrizen aus $\mathfrak{O}_r$ nach den üblichen Regeln des Matrizenkalküls definiert. *Ist* $\mathfrak{M}$ *der Modul, der dem Ideal* $|\mathfrak{A}_r)$ *bzw.* $|\mathfrak{B}_r)$ *im Sinne des Hilfssatzes* 1 *entspricht, so ist* $\mathfrak{M}_r$ *mit* $\mathfrak{O}_r/|\mathfrak{A}_r)$ *bzw.* $\mathfrak{O}_r/|\mathfrak{B}_r)$ *isomorph*, da ja dann $\mathfrak{M}$ — und damit auch $\mathfrak{M}_r$ — eine Basis $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r)$ mit dem annullierenden Ideal $|\mathfrak{A}_r)$ bzw. $|\mathfrak{B}_r)$ besitzt. Dieser Feststellung entsprechend läuft der Beweis des Satzes 1 offenbar darauf hinaus, zu zeigen, *daß die aus zwei* $\mathfrak{O}$*-Rechtsmoduln* $\mathfrak{M}$ *und* $\mathfrak{M}'$ *abgeleiteten* $\mathfrak{O}_r$*-Rechtsmoduln* $\mathfrak{M}_r$ *und* $\mathfrak{M}'_r$ *dann und nur dann isomorph sind, wenn das gleiche schon von* $\mathfrak{M}$ *und* $\mathfrak{M}'$ *gilt.* Dies ist aber unmittelbar klar: Ist nämlich $\alpha \rightleftarrows \alpha'$ eine isomorphe Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}'$, so $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \rightleftarrows (\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_r)$ eine isomorphe Abbildung von $\mathfrak{M}_r$ auf $\mathfrak{M}'_r$. Umgekehrt erhält man aus jeder isomorphen Abbildung

$$(2) \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \rightleftarrows (\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_r),$$

von $\mathfrak{M}_r$ auf $\mathfrak{M}'_r$ stets eine isomorphe Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}'$, indem man immer dem ersten Element α_1 einer zu $\mathfrak{M}_r$ gehörigen Matrix $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ das erste Element α'_1 der ihr bei der Zuordnung (2) entsprechenden Matrix $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_r) \in \mathfrak{M}'_r$ zuweist. Die Relationstreue der so konstruierten Zuordnung $\alpha_1 \rightleftarrows \alpha'_1$ ist ohne weiteres zu übersehen, die Einein-

[6]) Vgl. z. B. E. Noether und W. Schmeidler: Moduln in nichtkommutativen Bereichen. Math. Zeitschr. 8 (1920), S. 20 ff.

deutigkeit folgt daraus, daß in (2) der Matrix $(\alpha_1, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{r-1 \text{ Nullen}})$ die Matrix $(\alpha_1', \overbrace{0, 0, 0, \ldots, 0}^{r-1 \text{ Nullen}})$ entsprechen muß, wovon man sich sofort überzeugt, wenn $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ und $(\alpha_1', \ldots, \alpha_r')$ rechtsseitig mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ | \\ \downarrow \end{matrix} r \text{ Zeilen}$$

$$\leftarrow \quad - \quad \rightarrow$$

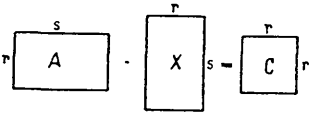
r Spalten

multipliziert werden.

§ 4.

A sei eine rechteckige, r-reihige und s-spaltige Matrix mit Koeffizienten aus $\mathfrak{O}$.

Unter dem „von A erzeugten Rechtsideal" $|A)$ werde dasjenige Rechtsideal des Ringes $\mathfrak{O}_r$ verstanden, das aus allen Matrizenprodukten



besteht, in denen der rechte Faktor X sämtliche s-reihigen und r-spaltigen Matrizen mit Koeffizienten aus $\mathfrak{O}$ durchläuft.

I. a. brauchen natürlich nicht alle Rechtsideale der Ringe $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2, \ldots$ im eben beschriebenen Sinne von einer Matrix erzeugbar zu sein; dies ist stets dann und nur dann der Fall, *wenn in $\mathfrak{O}$ die Teilerketten-(Maximal)-Bedingung für Rechtsideale erfüllt ist.* Um dies zu beweisen, greifen wir auf die beim Beweise des Hilfssatzes 1 eingeführte Bezeichnung zurück; dementsprechend sollen die Symbole $|\mathfrak{A}_r)$, $|\mathfrak{A}_r)'$, $\mathfrak{O}_r'$, E_{ir} die a. a. O. definierte Bedeutung haben. Offenbar bilden die Matrizen $E_{1r}, E_{2r}, \ldots, E_{rr}$ eine Basis des $\mathfrak{O}$-Rechtsmoduls $\mathfrak{O}_r'$. Ist in $\mathfrak{O}$ die Teilerketten-Bedingung erfüllt, so hat mit $\mathfrak{O}_r'$ auch $|\mathfrak{A}_r)'$ eine endliche Basis $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$, da ja $|\mathfrak{A}_r)'$ in $\mathfrak{O}_r'$ als Untermodul enthalten ist. In diesem Falle erzeugt die aus den Spalten $A_1, \ldots, A_k$ zusammengesetzte Matrix $(A_1 A_2 \ldots A_k)$ das Ideal $|\mathfrak{A}_r)$. Wird jedes Ideal der Ringe $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2, \ldots$, insbesondere auch jedes Ideal des Ringes $\mathfrak{O}_1 = \mathfrak{O}$ von einer Matrix erzeugt, so gilt in $\mathfrak{O}$ der Basis- und damit auch der Teilerkettensatz.

§ 5.

Definition 2: *Zwei Matrizen A und B mit Koeffizienten aus $\mathfrak{O}$ heißen rechtsseitig von gleicher Art, wenn die von ihnen erzeugten Rechtsideale $|A)$ und $|B)$ im Sinne der Definition* 1 *gleichartig sind.*

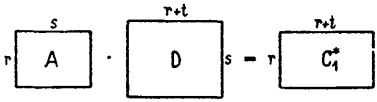
Satz 1a: *Zwei Matrizen A und B, die im Sinne der Elementarteilertheorie äquivalent sind,* zu denen also zwei quadratische, invertierbare Matrizen P und Q existieren, die der Gleichung $PAQ = B$ genügen, *sind immer rechtsseitig von gleicher Art*[7]).

Beweis: Mit $\mathfrak{M}$ werde der $\mathfrak{O}$-Rechtsmodul bezeichnet, der im Sinne des Hilfssatzes 1 zum Rechtsideal $|A)$ gehört. $\mathfrak{M}$ hat also eine Basis $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ mit dem annullierenden Ideal $|A)$. Wegen der Invertierbarkeit der Matrix P ist mit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ auch $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \cdot P^{-1} = (\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_r')$ Basis von $\mathfrak{M}$ und $|P \cdot A)$ das annullierende Ideal von $(\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_r')$. Da zu Q ebenfalls eine inverse Matrix Q^{-1} existiert, ist $|PA) = |PAQ) = |B)$. Hieraus folgt die behauptete Gleichartigkeit von $|A)$ und $|B)$; denn $|A)$ und $|B)$ sind die annullierenden Ideale zweier Basen *desselben* Rechtsmoduls.

Hilfssatz 2: Ist N eine aus lauter Nullen gebildete rechteckige Matrix (rechteckige Nullmatrix) und hat N ebensoviele Zeilen wie eine zweite Matrix A mit beliebigen Koeffizienten aus $\mathfrak{O}$, so sind A und $A' = (A\,N)$ rechtsgleichartig; denn A und A' erzeugen dasselbe Rechtsideal.

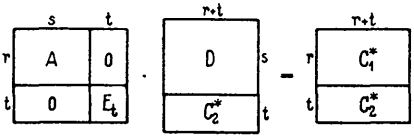
Hilfssatz 3: Bedeutet E_t die t-reihige Einheitsmatrix, so sind die beiden Matrizen A und $A^* = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E_t \end{pmatrix}$ für jedes $t = 1, 2, 3, \ldots$ rechtsseitig von der gleichen Art.

Beweis: $\mathfrak{M}$ sei der dem Rechtsideal $|A)$ im Sinne des Hilfssatzes 1 entsprechende $\mathfrak{O}$-Rechtsmodul, $\mathfrak{M}$ enthält also eine Basis $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ mit dem annullierenden Ideal $|A)$. Ich beweise Hilfssatz 3, indem ich zeige, daß in $\mathfrak{M}$ auch eine Basis mit dem annullierenden Ideal $|A^*)$ existiert: Eine Basis dieser Art ist z. B. $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+t})$, wenn $\alpha_{r+1} = \ldots = \alpha_{r+t} = 0$ gesetzt wird. Um dies zu beweisen, werde das annullierende Ideal der neuen Basis für den Augenblick mit $|\mathfrak{A}^*)$ bezeichnet. Jedenfalls ist $|A^*) \subseteq |\mathfrak{A}^*)$. C^* sei jetzt irgendeine Matrix aus $|\mathfrak{A}^*)$. Mit C_1^* werde die von den r ersten, mit C_2^* die von den t letzten Zeilen gebildete Matrix bezeichnet. Für jede Spalte $\begin{pmatrix} c_{1\nu} \\ c_{2\nu} \\ \vdots \\ c_{r\nu} \end{pmatrix}$ der Matrix C_1^* gilt $\sum_{\mu=1}^{r} \alpha_\mu c_{\mu\nu} = 0$; jede Spalte von C_1^* läßt sich daher als Linearkombination der Spalten von A darstellen. Es gibt also eine Matrix D, die der Bedingung



[7]) Die Koeffizienten der in dieser Arbeit vorkommenden Matrizen gehören, solange nicht ausdrücklich etwas anderes vermerkt wird, immer dem festen Ring $\mathfrak{O}$ an.

genügt. Für die Matrix $\begin{pmatrix} D \\ C_2^* \end{pmatrix} = D^*$ gilt dann



Es ist also $C^* \in |A^*)$, $|\mathfrak{A}^*) \subseteq |A^*)$, was mit $|A^*) \subseteq |\mathfrak{A}^*)$ zusammen $|\mathfrak{A}^*) = |A^*)$ ergibt.

Hilfssatz 4: *$\mathfrak{M}$ sei ein von endlich vielen Elementen erzeugbarer $\mathfrak{O}$-Rechtsmodul. Bildet man aus den beiden Basen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, $(\beta_1, \ldots, \beta_p)$ von $\mathfrak{M}$ zwei neue Basen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+p})$, $(\beta_1, \ldots, \beta_p, \beta_{p+1}, \ldots, \beta_{p+r})$, indem man zu den Elementen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ p-mal das Nullelement $\alpha_{r+1} = \ldots = \alpha_{r+p} = 0$ und entsprechend zu $\beta_1, \ldots, \beta_p$ r-mal das Nullelement $\beta_{p+1} = \ldots = \beta_{p+r} = 0$ hinzufügt, so gibt es eine invertierbare, $(p+r)$-reihige, quadratische Matrix mit Koeffizienten aus $\mathfrak{O}$, die der Bedingung*

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+p}) \cdot P = (\beta_1, \ldots, \beta_{r+p})$$

genügt.

Beweis: E_r sei die r-reihige, E_p die p-reihige Einheitsmatrix, U eine Übergangsmatrix von $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ zu $(\beta_1, \ldots, \beta_p)$ und V eine Übergangsmatrix von $(\beta_1, \ldots, \beta_p)$ zu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$. Dann ist

$$P_1 = \begin{pmatrix} E_r & +U \\ 0 & E_p \end{pmatrix}$$

eine Übergangsmatrix von $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+p})$ zu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_p)$,

$$P_2 = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ -V & E_p \end{pmatrix}$$

eine Übergangsmatrix von

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_p) \quad \text{zu} \quad (\beta_{p+1}, \ldots, \beta_{p+r}, \beta_1, \ldots, \beta_p)$$

und schließlich

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & E_r \\ E_p & 0 \end{pmatrix}$$

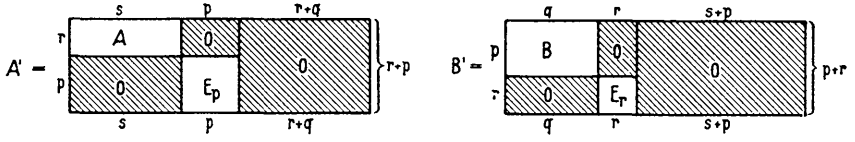
eine Übergangsmatrix von $(\beta_{p+1}, \ldots, \beta_{p+r}, \beta_1, \ldots, \beta_p)$ zu $(\beta_1, \ldots, \beta_{p+r})$. Das Produkt $P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3$ genügt daher der Bedingung

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+p}) \cdot P = (\beta_1, \ldots, \beta_{r+p}).$$

P ist überdies invertierbar; denn es ist

$$P^{-1} = \underset{P_3^{-1}}{\begin{pmatrix} 0 & E_p \\ E_r & 0 \end{pmatrix}} \cdot \underset{P_2^{-1}}{\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ +V & E_p \end{pmatrix}} \cdot \underset{P_1^{-1}}{\begin{pmatrix} E_r & -U \\ 0 & E_p \end{pmatrix}}.$$

Satz 2a: *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die rechtsseitige Gleichartigkeit der beiden Matrizen A und B mit Koeffizienten aus $\mathfrak{O}$ ist die Äquivalenz der beiden Matrizen:*



(E_r bzw. E_p ist die r- bzw. p-reihige Einheitsmatrix, die schraffierten Rechtecke in A' und B' sind Nullmatrizen.)

Beweis: Daß die Bedingung hinreicht, d. h. daß A und B unter der Voraussetzung der Äquivalenz von A' und B' rechtsseitig gleichartig sind, ergibt sich unmittelbar aus Satz 1a und den Hilfssätzen 2 und 3. Es genügt daher, die Notwendigkeit der Bedingung zu beweisen, daß also umgekehrt aus der rechtsseitigen Gleichartigkeit von A und B die Äquivalenz von A' und B' folgt.

$\mathfrak{M}$ sei der zu den Rechtsidealen $|A)$ und $|B)$ im Sinne des Hilfssatzes 1 gehörige Rechtsmodul, $\mathfrak{M}$ besitzt also eine erste Basis $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ mit dem annullierenden Ideal $|A)$ und eine zweite $(\beta_1, \ldots, \beta_p)$ mit dem annullierenden Ideal $|B)$. Von den erzeugenden Systemen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ und $(\beta_1, \ldots, \beta_p)$ gehe ich zu neuen Basen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+p})$, $(\beta_1, \ldots, \beta_{r+p})$ über, in denen $\alpha_{r+1} = \alpha_{r+2} = \ldots = \alpha_{r+p} = \beta_{p+1} = \ldots = \beta_{p+r} = 0$ sein soll. Aus dem Beweis des Hilfssatzes 3 geht hervor, daß die Matrix $A^* = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E_p \end{pmatrix}$ das annullierende Ideal von $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+p})$ und $B^* = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & E_r \end{pmatrix}$ das annullierende Ideal von $(\beta_1, \ldots, \beta_{r+p})$ erzeugt. Nach Hilfssatz 4 gibt es unter den Übergangsmatrizen von $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+p})$ zu $(\beta_1, \ldots, \beta_{r+p})$ mindestens eine invertierbare P. Für eine solche wird $|P \cdot B^*) = |A^*)$, da wegen der Invertierbarkeit von P offenbar auch $P \cdot B^*$ das annullierende Ideal von $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r+p})$ erzeugt. $P \cdot B^*$ und A^* sind daher erzeugende Matrizen desselben Ideals; in dem $\mathfrak{O}$-Rechtsmodul, der aus der Menge aller $(r+p)$-reihigen und einspaltigen Matrizen besteht, die in den zu $|A^*) = |P \cdot B^*)$ gehörigen Matrizen als Spalten vorkommen, bilden daher sowohl die Spalten der Matrix A^* wie die Spalten der Matrix $P \cdot B^*$ je eine Basis, woraus nach Hilfssatz 4 die Existenz einer der Bedingung $(P \cdot B') \cdot Q = A'$ genügenden, invertierbaren Matrix Q unmittelbar folgt.

Ich nenne zwei Matrizen A und B von gleicher Gestalt, wenn B ebensoviele Zeilen und ebensoviele Spalten wie A hat.

Satz 3a. *Haben die zu zwei gleichgestalteten Matrizen A und B gehörigen linearen Gleichungssysteme*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1s}x_s &= 0, \\ &\vdots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rs}x_s &= 0, \\ (a_{\mu\nu}) &= A, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b_{11}y_1 + \ldots + b_{1s}y_s &= 0, \\ &\vdots \\ b_{r1}y_1 + \ldots + b_{rs}y_s &= 0, \\ (b_{\mu\nu}) &= B \end{aligned}$$

nur die triviale Lösung $x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = \ldots = x_s = y_s = 0$, so sind A und B dann und nur dann rechts-gleichartig, wenn

$$A^* = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E_r \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B^* = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & E_r \end{pmatrix}$$

äquivalent sind, E_r bedeutet die r-reihige Einheitsmatrix und r die Anzahl der Zeilen von A und B.

Beweis: Nach Satz 2a gilt es zu zeigen, daß A^* und B^* unter den speziellen Voraussetzungen des Satzes 3a dann und nur dann äquivalent sind, wenn das gleiche von den Matrizen $A' = (A^*N)$, $B' = (B^*N)$ zutrifft, wobei unter N die $2r$-reihige, $(r+s)$-spaltige Nullmatrix zn verstehen ist.

Daß die Äquivalenz von A' und B' aus der Äquivalenz von A^* und B^* folgt, ist unmittelbar klar. Es kommt daher nur noch darauf an, das Umgekehrte zu beweisen: P und Q seien die invertierbaren Matrizen, die der Bedingung $PA'Q = B'$ genügen. Mit Q_1 bzw. Q_2 werde die Matrix bezeichnet, die entsteht, wenn in Q bzw. Q^{-1} die $(r+s)$ letzten Zeilen und Spalten gelöscht werden. Q_1 und Q_2 genügen dann den Gleichungen

$$B^* = PA^*Q_1, \quad B^*Q_2 = PA^*, \quad B^* = B^*Q_2Q_1 = PA^*.$$

Es ist also $B^*(Q_2Q_1 - E_{r+s}) = 0$, wenn E_{r+s} die $(r+s)$-reihige Einheitsmatrix bedeutet. Auf Grund der letzten Gleichung ist jede Spalte der Matrix $Q_2Q_1 - E_{r+s}$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{\nu=1}^{r+s} b^*_{\mu\nu}y_\nu = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, 2r), \tag{3}$$

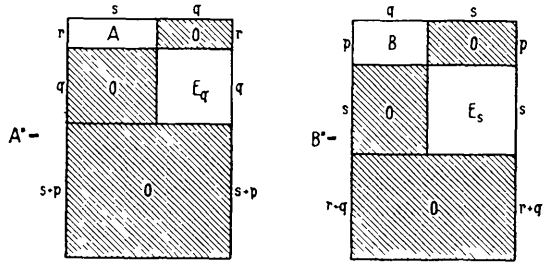
falls $b^*_{\mu\nu}$ die Koeffizienten der Matrix B^* bezeichnen. Aus den r letzten Gleichungen des Systems (3) folgt $y_{s+1} = y_{s+2} = \ldots = y_{s+r} = 0$ und aus den r ersten laut Voraussetzung $y_1 = y_2 = \ldots = y_s = 0$. Es ist also $Q_2Q_1 - E_{r+s} = 0$, d. h. $Q_2 \cdot Q_1 = E_{r+s}$. In entsprechender Weise läßt sich die Gleichung $Q_1Q_2 = E_{r+s}$ beweisen. Es folgt, daß Q_1 invertierbar und Q_2 die zu Q_1 inverse Matrix ist. Nun ist $B^* = PA^*Q_1$ und daher B^* mit A^* äquivalent.

§ 6.

Die bisherige Bevorzugung der rechten vor der linken Seite ist in keiner Weise in der Natur der Sache begründet und geschah nur zur Vereinfachung der Ausdrucksweise. Alles, was bis jetzt über Rechtsmoduln und Rechtsideale gesagt wurde, läßt sich natürlich ohne weiteres sinngemäß auf linksseitige Moduln und Ideale übertragen. Es ergibt sich dann:

Satz 1b: *Äquivalente Matrizen sind nicht nur rechts-, sondern auch linksseitig von gleicher Art.*

Satz 2b: *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die linksseitige Gleichartigkeit zweier Matrizen A und B ist die Äquivalenz der beiden Matrizen:*



wo E_s bzw. E_q die s- bzw. q-reihige Einheitsmatrix und die schraffierten Rechtecke in A'' und B'' Nullmatrizen bedeuten.

Satz 3b: *Sind A und B von gleicher Gestalt und haben die beiden linearen Gleichungssysteme*

$$\sum_{\mu=1}^{r} x_\mu a_{\mu\nu} = 0, \qquad \sum_{\mu=1}^{r} y_\mu b_{\mu\nu} = 0,$$
$$(a_{\mu\nu}) = A, \qquad (b_{\mu\nu}) = B$$

nur die triviale Lösung $x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = \ldots = x_r = y_r = 0$, so sind A und B dann und nur dann links-gleichartig, wenn die beiden Matrizen

$$A^* = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix}, \quad B^* = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix}$$

äquivalent sind. E_s ist die s-reihige Einheitsmatrix und s die Anzahl der Spalten von A und B.

§ 7.

Als Spezialfall erhält man aus den Sätzen 2 und 3

Satz 4: *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die links- bzw. rechtsseitige Gleichartigkeit der Elemente a und b des Ringes $\mathfrak{O}$*

(aufgefaßt als einreihige quadratische Matrizen) ist die Äquivalenz der Matrizen:

$$A' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B' = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$A'' = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B'' = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sind a und b weder rechte noch linke Nullteiler von $\mathfrak{O}$, so sind a und b dann und nur dann gleichartig, wenn die Matrizen

$$A^* = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B^* = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

äquivalent sind; in diesem Fall sind a und b immer gleichzeitig links und rechts von gleicher Art.

§ 8.

Ist in $\mathfrak{O}$ die Teilerketten-(Maximal-)bedingung erfüllt, so läßt sich auf Grund der Sätze 2a und b die Frage nach der Gleichartigkeit zweier Ideale grundsätzlich immer auf die Frage nach der Äquivalenz zweier Matrizen zurückführen, da nach der am Schluß des § 4 gemachten Bemerkung alle Ideale der Ringe $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2, \mathfrak{O}_3, \ldots$ von einer Matrix erzeugt werden. *Unter Voraussetzung des Teilerkettensatzes ist daher der für Ideale definierte Gleichartigkeitsbegriff im Wesentlichen mit dem Äquivalenzbegriff der Elementarteilertheorie identisch*; im allgemeinen Fall ist der Gleichartigkeitsbegriff etwas umfassender.

(Eingegangen am 2. 11. 1935.)

Über eine obere Grenze für die Ordnungen der Elemente einer endlichen Gruppe ohne Zentrum.

Von

Serge Tchounikhin in Moskau.

Sei $\mathfrak{G}$ eine endliche einfache Gruppe und sei $p_1^{\alpha_1}$ die höchste Potenz der kleinsten Primzahl, die die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{G}$ teilt.

Wie aus einem Satz von G. Frobenius und W. Burnside folgt[1]), kann die zu $p_1^{\alpha_1}$ gehörige Sylowsche Untergruppe $\mathfrak{P}$ nicht zyklisch sein. Ferner habe ich in meiner Arbeit „Über einfache Gruppen“[2]) einen noch allgemeineren Satz bewiesen, daß die Ordnungen der Elemente des Zentrums der Gruppe $\mathfrak{P}$ nicht größer sind als $\sqrt{p_1^{\alpha_1}}$.

In der vorliegenden Arbeit finde ich eine andere Abschätzung für die Ordnung eines *beliebigen* Elements einer endlichen Gruppe, deren Zentrum nur das Einheitselement enthält („Gruppe ohne Zentrum“), und folglich, als Spezialfall, für die Elemente einer einfachen Gruppe. Ich benutze dabei eine abstrakte Methode, deren Grundidee ich in meinen früheren Arbeiten entwickelt habe[3]).

Sei $\mathfrak{G}$ eine endliche Gruppe *ohne Zentrum*, und sei $p_1^{\alpha_1}\, p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, wo $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$, die Ordnung der Gruppe $\mathfrak{G}$.

Seien

$$h_1, h_2, h_3, \ldots, h_s \tag{1}$$

die Ordnungen der sämtlichen Klassen von konjugierten Elementen der Gruppe $\mathfrak{G}$. (Die Ordnung einer Klasse ist die Anzahl ihrer Elemente.) Ist $p_i^{\beta_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ die höchste der Potenzen der Primzahl p_i, die die Zahlen (1) teilen, so wird offenbar $p_1^{\beta_1}\, p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k}$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $h_1, h_2, \ldots, h_s$.

Beweisen wir jetzt den folgenden Satz:

Satz: *Die Ordnung eines beliebigen Elements der Gruppe $\mathfrak{G}$ ohne Zentrum ist ein Teiler des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Ordnungen sämtlicher Klassen von konjugierten Elementen von $\mathfrak{G}$.*

---

[1]) W. Burnside, Theory of groups, 2nd ed., p. 327, Corollary II; G. Frobenius, Sitz.-Ber. Preuß. Akad. Wiss. Berlin 1901, S. 857.

[2]) Math. Annalen 112, S. 95—97.

[3]) Compt. Rend. de l'Acad. de Paris 191, p. 397—399, und Compt. Rend. de l'Acad de Paris 198, p. 531—532.

Beweis. Wir wollen beweisen, daß die Gruppe $\mathfrak{G}$ ein vom Einheitselement verschiedenes Zentrum besitzt, wenn $\mathfrak{G}$ ein Element enthält, dessen Ordnung das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen $h_1, h_2, \ldots, h_s$ nicht teilt.

Es ist offenbar für den Beweis des Satzes hinreichend, nur die Elemente zu betrachten, deren Ordnungen Primzahlpotenzen sind.

Sei A ein solches Element von Primzahlpotenzordnung $p_i^{\gamma_i}$, und sei $\gamma_i > \beta_i$.

Im folgenden nennen wir, der Kürze wegen, die Klassen von konjugierten Elementen der Gruppe $\mathfrak{G}$ „die Klassen der Gruppe $\mathfrak{G}$".

Wir betrachten zuerst die Klassen, deren Ordnungen durch p_i *teilbar* sind.

Sei B_1 ein Element einer solchen Klasse und sei $\mathfrak{B}_1$ der Normalisator des Elements B_1. Nach den Bedingungen des Satzes enthält die Gruppe $\mathfrak{B}_1$ eine Untergruppe $\overline{\mathfrak{P}}_i$ der Ordnung $p_i^{\alpha_i-\beta_i}$. Nach dem Sylowschen Satz ist die Gruppe $\{A\}$ in einer Sylowgruppe $\mathfrak{P}_i$ der Ordnung $p_i^{\alpha_i}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$, und $\overline{\mathfrak{P}}_i$ in einer anderen Sylowgruppe $\mathfrak{P}_i'$ enthalten. Aber $\mathfrak{P}_i$ und $\mathfrak{P}_i'$ sind in $\mathfrak{G}$ konjugiert: $C^{-1}\mathfrak{P}_i' C = \mathfrak{P}_i$ (C ist ein Element von $\mathfrak{G}$). Daraus folgt, daß die Gruppe $C^{-1}\overline{\mathfrak{P}}_i C$, *die in* $C^{-1}\mathfrak{B}_1 C$ *auftritt*, auch in der Gruppe $\mathfrak{P}_i$ enthalten ist.

Die Anzahl der verschiedenen Elemente des Systems $C^{-1}\overline{\mathfrak{P}}_i C\,\{A\}$ ist gleich $\frac{p_i^{\alpha_i-\beta_i}\cdot p_i^{\gamma_i}}{d_i}$, wo d_i die Ordnung des Durchschnitts der beiden Gruppen $C^{-1}\overline{\mathfrak{P}}_i C$ und $\{A\}$ ist. Weil diese Gruppen beide der Gruppe $\mathfrak{P}_i$ angehören, so ist $\frac{p_i^{\alpha_i+\gamma_i-\beta_i}}{d_i} \leqq p_i^{\alpha_i}$. Daraus folgt, daß $d_i > 1$ ist (weil $\gamma_i > \beta_i$), und wir bekommen, daß der größte gemeinsame Teiler $\mathfrak{A}_i$ der Gruppen $\{A\}$ und $C^{-1}\overline{\mathfrak{P}}_i C$ von der Einheit verschieden ist. Die Gruppe $\mathfrak{A}_i$ ist offenbar zyklisch.

In ähnlicher Weise betrachten wir auch alle anderen Klassen, deren Ordnungen durch p_i teilbar sind. Dann erhalten wir eine Menge von zyklischen von der Einheit verschiedenen Gruppen

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_\varrho,$$

die sämtlich in $\{A\}$ enthalten sind.

Daraus folgt, daß eine von diesen Gruppen $\mathfrak{A}_j$, welche die kleinste Ordnung besitzt, der größte gemeinsame Teiler dieser Gruppen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_\varrho$ sein muß.

Damit ist dieser Durchschnitt $\mathfrak{A}_j$ von der Einheit verschieden und auch zyklisch: $\mathfrak{A}_j = \{A^\sigma\}$. Betrachten wir nun den Normalisator $\mathfrak{B}$ des Elements A^σ in der Gruppe $\mathfrak{G}$. Wenn A^σ in allen Gruppen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_\varrho$

auftritt, so enthält $\mathfrak{B}$ mindestens ein Element aus *jeder* Klasse, deren Ordnung durch p_i *teilbar ist.* Wir zeigen nun jetzt, daß $\mathfrak{B}$ *auch* mindestens ein Element aus *jeder* Klasse enthält, deren Ordnung *nicht* durch p_i *teilbar ist.*

Wir transformieren dazu alle Elemente einer Klasse der letzten Art durch das Element A^σ und bekommen eine Substitution, deren mehrgliedrige Zyklen Potenzen von p_i als Ordnungen besitzen.

Weil die Ordnung unserer Klasse nicht durch p_i teilbar ist, so enthält offenbar die genannte Substitution *mindestens* einen eingliedrigen Zyklus, d. h. eines der Elemente unserer Klasse ist mit dem Element A^σ vertauschbar.

Wir haben also bewiesen, daß der Normalisator $\mathfrak{B}$ des Elements A^σ *mindestens* ein Element enthält aus *jeder* Klasse der Gruppe $\mathfrak{G}$. In diesem Falle enthält die Gesamtheit aller mit $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{G}$ konjugierten Untergruppen (mit $\mathfrak{B}$ selbst) offenbar alle Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}$, was aber nur möglich[4]) ist für den Fall $\mathfrak{B} = \mathfrak{G}$. Im letzten Falle tritt $A^\sigma \neq 1$ in das Zentrum der Gruppe $\mathfrak{G}$ ein, was den Satz beweist.

Moskau, den 10. Oktober 1935.

---

[4]) Siehe Speiser, Gruppentheorie, 2. Aufl., Satz 63.

(Eingegangen am 4. 11. 1935.)

Automorphismen von Homotopiekettenringen.

Von

Kurt Reidemeister in Marburg.

Die Abbildungen eines Homologiekettenringes eines Komplexes auf sich lassen sich bekanntlich nach Wahl je einer Basis für die Ketten jeder Dimension durch eine Reihe von Matrizen darstellen und nach Hopf[1]) läßt sich aus den Spuren dieser Matrizen eine Invariante der Abbildung zusammensetzen. Ähnlich soll hier eine algebraische Darstellung für Abbildungen eines Homotopiekettenringes eines Komplexes abgeleitet und das Analogon für die Spureninvariante aufgestellt werden. — Die Bedeutung dieser Invariante für stetige Abbildungen des Komplexes auf sich ist unschwer zu erraten: Lieferte die Hopfsche Spureninvariante die algebraische Anzahl der Fixpunkte schlechthin, so liefert die neue Invariante die algebraische Anzahl der Fixpunkte jeder Fixpunktklasse[2]). Jedoch soll im folgenden nur die algebraisch-kombinatorische Seite der Frage behandelt werden.

1. Zunächst möge der *Homotopiekettenring*[3]) eingeführt werden. Unter

$$\mathfrak{a}_i^k \quad (i = 1, 2, \ldots, \alpha_k)$$

verstehen wir die k-dimensionalen Zellen ($k = 0, 1, \ldots, n$) eines Fundamentalbereichs eines n-dimensionalen universellen Überlagerungskomplexes, unter γ, γ_ι, γ die Elemente der zugehörigen Fundamentalgruppe, unter

$$x = \sum_\iota n_\iota \gamma_\iota \qquad (n_\iota \text{ ganz rational})$$

die Elemente des Gruppenringes der Fundamentalgruppe. Die Ketten der Dimension k werden alsdann durch

$$\mathfrak{x}^k = \sum_{i=1}^{\alpha_k} x_i \mathfrak{a}_i^k$$

mit beliebigen x_i geliefert. Diese Ketten bilden eine freie Abelsche Gruppe mit den Operatoren γ. Jede Kette besitzt eine Randkette

$$R(\mathfrak{x}^k) = \sum_\iota x_\iota R(\mathfrak{a}_i^k),$$

---

[1]) Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel, Göttinger Nachr. 1928, S. 127.

[2]) Zum Begriff der Fixpunktklasse bei Flächenabbildungen vgl. J. Nielsen, Untersuchungen der Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen, Acta Math. 50 (1927), S. 189.

[3]) Vgl. K. Reidemeister, Homotopiegruppen von Komplexen, Hamb. Abhdl. 10 (1934), S. 211.

die sich aus den Berandungsmatrizen

$$R(\mathfrak{a}_i^k) = \sum_{j=1}^{\alpha_{k-1}} r_{ij}^k \mathfrak{a}_j^{k-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \alpha_k;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

berechnen läßt; $R(R(\mathfrak{x}))$ ist die Nullkette. Die Kettengruppe mit den aufgeprägten Berandungsrelationen wird der Homotopiekettenring des Komplexes genannt.

Unter einer Basis der Ketten k-ter Dimension verstehen wir ein System

$$\mathfrak{b}_i^k \qquad (i = 1, 2, \ldots, \alpha_k)$$

von Ketten, das aus der Grundbasis $\mathfrak{a}_i^k$ durch unimodulare Transformation mit ganzen rationalen Koeffizienten oder durch Matrizen, deren Hauptdiagonalelemente gleich Gruppenelementen γ_i und deren übrige Elemente gleich Null sind, oder durch eine Folge derartiger Abänderungen hervorgeht. Die $\mathfrak{b}_i^k$ bilden tatsächlich in dem weiteren Sinne eine Basis, daß sich alle Ketten $\mathfrak{x}^k$ auf eine und nur eine Weise aus den $\mathfrak{b}_i^k$ linear kombinieren lassen.

Unter einer k-dimensionalen Erweiterung eines Homotopiekettenringes verstehen wir die Hinzunahme von zwei Basiselementen $\mathfrak{b}_{\alpha_k+1}^k$, $\mathfrak{b}_{\alpha_{k-1}+1}^{k-1}$ mit den Berandungsrelationen

$$R(\mathfrak{b}_{\alpha_k+1}^k) = \mathfrak{b}_{\alpha_{k-1}+1}^{k-1}, \quad R(\mathfrak{b}_{\alpha_{k-1}+1}^{k-1}) = 0;$$

unter Reduktion eines Homotopiekettenringes verstehen wir den inversen Prozeß.

2. Wir wenden uns jetzt den *automorphen Abbildungen von Homotopiekettenringen* zu. Damit

$$T(\mathfrak{x}^k) = \bar{\mathfrak{x}}^k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

ein Automorphismus ist, muß

(1) $$T(\mathfrak{x}_1^k + \mathfrak{x}_2^k) = T(\mathfrak{x}_1^k) + T(\mathfrak{x}_2^k),$$

(2) $$T(\gamma\, \mathfrak{x}^k) = \bar{\gamma}\, T(\mathfrak{x}^k)$$

und schließlich

(3) $$T(R(\mathfrak{x}^k)) = R(T(\mathfrak{x}^k))$$

sein; die Eindeutigkeit von T wird nicht gefordert.

Aus (1) und (2) folgt insbesondere, daß T eine Abbildung des Gruppenringes und der Fundamentalgruppe auf sich induziert, die wir ebenfalls mit T bezeichnen wollen. Nach (1) ist

$$T(\sum_i n_i \gamma_i) = \sum_i n_i\, T(\gamma_i)$$

und durch zweimalige Anwendung von (2) folgt

$$T(\gamma_1 \gamma_2) = T(\gamma_1)\, T(\gamma_2).$$

Die im Gruppenring induzierte Abbildung ist also ein Automorphismus desselben.

Aus (1) und (2) folgt ferner, daß

$$T(\mathfrak{x}^k) = T(\sum_i x_i \mathfrak{a}_i^k) = \sum_i T(x_i)\, T(\mathfrak{a}_i^k)$$

ist. Indem wir

$$T(\mathfrak{a}_i^k) = \sum_j t_{ij}^k \mathfrak{a}_j^l$$

setzen, können wir also die Abbildung T durch den Gruppenautomorphismus $T(\gamma) = \bar{\gamma}$ einerseits und die Matrizen t_{ij}^k andererseits festlegen, und es ist

$$T(\sum_i x_i \mathfrak{a}_i^k) = \sum_{ij} T(x_i)\, t_{ij}^k \mathfrak{a}_j^l.$$

Schließlich wenden wir uns der Bedingung (3) zu. Es ist einerseits

$$T(R(\sum_i x_i \mathfrak{a}_i^k)) = T(\sum_i x_i R(\mathfrak{a}_i^k)) = \sum_i T(x_i)\, T(R(\mathfrak{a}_i^k))$$

und andererseits

$$R(T(\sum_i x_i \mathfrak{a}_i^k)) = R(\sum_i T(x_i)\, T(\mathfrak{a}_i^k)) = \sum_i T(x_i)\, R(T\mathfrak{a}_i^k)).$$

Die Bedingung (3) ist also allgemein erfüllt, wenn sie für die Grundbasis erfüllt ist. Für die Grundbasis aber erhalten wir einerseits

$$T(R(\mathfrak{a}_i^k)) = T(\sum_j r_{ij}^k \mathfrak{a}_j^{k-1}) = \sum_{jl} T(r_{ij}^k)\, t_{jl}^{k-1}\, \mathfrak{a}_l^{k-1}$$

und andererseits

$$R(T(\mathfrak{a}_i^k)) = R(\sum_j t_{ij}^k \mathfrak{a}_j^k) = \sum_{jl} t_{ij}^k\, r_{jl}^k\, \mathfrak{a}_l^{k-1}.$$

Notwendig und hinreichend für (3) ist also die Bedingung

$$\sum_j t_{ij}^k r_{jl}^k = \sum_j T(r_{ij}^k)\, t_{jl}^{k-1}. \tag{4}$$

3. Eine entsprechende Matrizendarstellung der Abbildung erhält man unter Zugrundelegung irgend einer anderen Basis $\mathfrak{b}_i^k$. Wie hängen diese Matrizen miteinander zusammen?

Geht $\mathfrak{b}_i^k$ aus $\mathfrak{a}_i^k$ durch eine ganzzahlige unimodulare Transformation

$$\mathfrak{b}_i^k = \sum_j n_{ij} \mathfrak{a}_j^k$$

hervor, so ist $T(n_{ij}) = n_{ij}$ und daher $T(\mathfrak{b}_i^k) = \sum_j n_{ij}\, T(\mathfrak{a}_j^k)$. Hieraus folgert man leicht, daß die zur Basis $\mathfrak{b}_i^k$ gehörige Abbildungsmatrix t_{ij}^{*k} aus t_{ij}^k durch Transformation mit der Matrix n_{ij} hervorgeht.

Fassen wir den zweiten Fall

$$\mathfrak{b}_i^k = \gamma_{ik} \mathfrak{a}_i^k$$

ins Auge. Hier ist

$$T(\mathfrak{b}_i^k) = T(\gamma_{ik}) \sum_j t_{ij}^k \mathfrak{a}_j^k = T(\gamma_{ik})\, (\sum_j t_{ij}^k)\, \gamma_{jk}^{-1}\, \mathfrak{b}_j^k,$$

also die zugehörige Abbildungsmatrix

$$t'^{k}_{ij} = T(\gamma_{ik})\, t^{k}_{ij} \gamma_{jk}^{-1}.$$

Für das weitere ist die Einwirkung dieser Abänderungen auf die Spur

$$s^k = \sum_i t^k_{ii}$$

von Bedeutung. Beim Übergang von t^k_{ij} zu t^{*k}_{ij} ändert sich die Spur nicht. Denn die n_{ij} sind mit allen Elementen t^k_{ij} vertauschbar, man kann die gewöhnliche Schlußweise über das Verhalten der Spur bei Multiplikation anwenden.

Beim Übergang von t^k_{ij} zu t'^k_{ij}, geht die Spur s^k in

$$s'^k = \sum_i T(\gamma_{ik})\, t^k_{ii} \gamma_{ik}^{-1}$$

über. Das gibt Anlaß zu der folgenden Definition: Zwei Gruppenelemente γ und γ' mögen *bezüglich T konjugiert heißen*, wenn es ein Gruppenelement $\varkappa$ mit

$$\gamma' = T(\varkappa)\, \gamma\, \varkappa^{-1}$$

gibt. Die nach T konjugierten Elemente bilden eine Klasse, weil die angegebene Beziehung transitiv ist. Ist nun x irgend ein Gruppenringelement,

$$x = \sum_i n_i \gamma_i,$$

so möge unter $|x|$ die Summe von Klassen nach T konjugierter Elemente

$$|x| = \sum_i n_i\, T(\varkappa_i)\, \gamma_i \varkappa_i^{-1}$$

mit beliebigen Variablen $\varkappa_i$ verstanden werden. Alsdann können wir das Verhalten der Spur s^k bei Basiswechsel einfach so ausdrücken:

$|s^k|$ *bleibt bei Basiswechsel unverändert.*

4. Wir wollen jetzt das Verhalten einer Abbildung in einem reduzierbaren Homotopiekettenring feststellen. Es sei

$$R(\mathfrak{b}^q_{\alpha_q}) = \mathfrak{b}^{q-1}_{\alpha_{q-1}},\quad R(\mathfrak{b}^{q-1}_{\alpha_{q-1}}) = 0, \tag{5}$$

und weder $b^q_{\alpha_q}$ noch $b^{q-1}_{\alpha_{q-1}}$ trete sonst in den Berandungsrelationen der $q+1$- bzw. q-dimensionalen Basiselemente auf. Es ist also

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad r^{q+1}_{i\,\alpha_q} = 0 && (i = 1, 2, \ldots, \alpha_{q+1}),\\
&\text{b)}\quad r^{q}_{i,\,\alpha_{q-1}} = 0 \quad (i \neq \alpha_{q-1}), && r^q_{\alpha_q,\,j} = 0 \quad (j \neq \alpha_q),\\
&\text{c)}\quad r^{q}_{\alpha_q,\,\alpha_{q-1}} = 1,\\
&\text{d)}\quad r^{q-1}_{\alpha_{q-1},\,i} = 0 && (i = 1, 2, \ldots, \alpha_{q-1}).
\end{aligned} \tag{6}$$

Wir betrachten nun neben T die Abbildung T', welche in dem durch Fortnahme von $\mathfrak{b}^q_{\alpha_q}$ und $\mathfrak{b}^{q-1}_{\alpha_{q-1}}$ reduzierten Homotopiekettenring durch die folgende Festsetzung erklärt wird: Es sei $T'(x) = T(x)$ für alle

Elemente x des Gruppenringes, die Matrizen t'^{k}_{ij} von T' seien mit denen von T für alle Dimensionen $k \neq q, q-1$ identisch und für $k = q, q-1$ mögen sie durch Streichung der letzten Zeile und Kolonne aus den Matrizen von T entstehen. Diese Abbildung hat offenbar die Eigenschaften (1) und (2). Die Eigenschaft (3) prüfen wir mittels der Gleichungen (4), die ohne weiteres für $k \neq q+1, q, q-1$ erfüllt sind. Für $k = q+1$ ist nach (6 a)

$$\sum_j T(r^{q+1}_{ij})\, t^q_{jl} = \sum_{j<\alpha_q} T(r^{q+1}_{ij})\, t^q_{jl},$$

und für $l < \alpha_q$ ergeben sich daher gerade die Bedingungen

$$\sum_j t'^{q+1}_{ij}\, r^{q+1}_{jl} = \sum_j T'(r^{q+1}_{ij})\, t'^{q}_{jl}.$$

Für $k = q-1$ ist nach (6 d)

$$\sum_j t^{q-1}_{ij}\, r^{q-1}_{jl} = \sum_{j<\alpha_{q-1}} t^{q-1}_{ij}\, r^{q-1}_{jl},$$

und für $i < \alpha_{q-1}$ ergeben sich daher die Bedingungen

$$\sum_j t'^{q-1}_{ij}\, r^{q-1}_{jl} = \sum_j T'(r^{q-1}_{ij})\, t'^{q-2}_{jl}.$$

Für $k = q$ und $i < \alpha_q$, $l < \alpha_{q-1}$ ist nach (6 b) sowohl

$$\sum_j t^q_{ij}\, r^q_{jl} = \sum_{j<\alpha_q} t^q_{ij}\, r^q_{jl},$$

als wie

$$\sum_j T(r^q_{ij})\, t^{q-1}_{jl} = \sum_{j<\alpha_q} T(r^q_{ij})\, t^{q-1}_{jl};$$

es ergibt sich also auch

$$\sum_j t'^{q}_{ij}\, r^q_{jl} = \sum_j T'(r^q_{ij})\, t'^{q-1}_{jl},$$

und damit ist die Abbildung T' als eine automorphe des reduzierten Ringes erkannt. Der Übergang von T zu T' möge eine *Reduktion von T* genannt werden.

Wir beachten schließlich die für $k = q$, $i = \alpha_q$, $l = \alpha_{q-1}$ nach (6 b) resultierende Gleichung

$$t^q_{\alpha_q \alpha_q}\, r^q_{\alpha_q \alpha_{q-1}} = T(r^q_{\alpha_q \alpha_{q-1}})\, t^{q-1}_{\alpha_{q-1} \alpha_{q-1}},$$

die nach (6 c) besagt, daß

$$t^q_{\alpha_q \alpha_q} = t^{q-1}_{\alpha_{q-1} \alpha_{q-1}} \tag{7}$$

ist. Mithin gilt für die Spuren von T'

$$s'^q - s'^{q-1} = s^q - s^{q-1}.$$

Und in Analogie zur Spurenformel ergibt sich, wenn wir

$$s = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, s^k$$

setzen, $|s|$ *als eine Invariante der Abbildung sowohl bei Basiswechsel als wie bei Reduktion.*

Unter der *Erweiterung einer Abbildung* wollen wir den Übergang von einer Transformation T' eines Homotopieketten ringes zu einer Abbildung T eines durch Hinzunahme zweier Basiselemente (5) erweiterten Ringes verstehen, aus der umgekehrt durch Reduktion sich wieder T' ergibt. Um das zu erreichen, sind die Elemente

$$t^q_{i\,\alpha_q},\ t^q_{\alpha_q\,i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \alpha_q),$$

$$t^{q-1}_{j\,\alpha_{q-1}},\ t^{q-1}_{\alpha_{q-1},j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \alpha_{q-1})$$

der Bedingung (4) gemäß zu bestimmen.

Für $k = q + 1$ und $l = \alpha_q$ ergibt sich nach (6a)

$$0 = \sum_{j<\alpha_q} T(r^{q+1}_{ij})\, t^q_{j\,\alpha_q}.$$

Für $k = q - 1$ und $i = \alpha_{q-1}$ ergibt sich nach (6d)

$$\sum_{j<\alpha_{q-1}} t^{q-1}_{\alpha_{q-1}\,j}\, r^{q-1}_{jl} = 0,$$

und für $k = q$ und $i = \alpha_q$, $l < \alpha_{q-1}$, sowie für $k = q$ und $i < \alpha_q$, $l = \alpha_{q-1}$ ergibt sich nach (6b)

$$\sum_{j<\alpha_q} t^q_{\alpha_q\,j}\, r^q_{jl} = T(r^q_{\alpha_q\,\alpha_q})\, t^{q-1}_{\alpha_q\,l},$$

$$t^q_{i\,\alpha_q}\, r^q_{\alpha_q\,\alpha_{q-1}} = \sum_{j<\alpha_{q-1}} T(r^q_{ij})\, t^{q-1}_{j\,\alpha_{q-1}}.$$

Diese Gleichungen sind erfüllt, wenn

$$t^q_{i\,\alpha_q} = t^q_{\alpha_q\,i} = 0 \qquad (i < \alpha_q),$$

$$t^{q-1}_{j\,\alpha_{q-1}} = t^q_{\alpha_{q-1}\,j} = 0 \qquad (j < \alpha_{q-1})$$

gesetzt wird. Schließlich ist noch (7) zu berücksichtigen. Man kann also stets eine Abbildung in den erweiterten Ring erweitern, und zwar auf verschiedene Weise, aber *bei allen Erweiterungen bleibt* $|s|$ *invariant.*

5. Ein triviales Beispiel für eine Abbildung T ist die Zuordnung

$$T_\gamma(\mathfrak{x}^k) = \gamma\, \mathfrak{x}^k.$$

Die Matrizen t^k_{ij} ergeben sich zu $\gamma\,\delta_{i,}$, wo δ_i, gleich 0 oder 1 ist, je nachdem $i \neq j$ oder $i = j$ ist. Die zugehörige Abbildung des Gruppenrings ist

$$T_\gamma(x) = \gamma\, x\, \gamma^{-1}.$$

Ist T eine beliebige Abbildung, so ist das Produkt $T\,T_\gamma$ wieder eine automorphe Abbildung. Dieselbe Transformation erhält man in $T_{\bar\gamma}\,T$ mit $\bar\gamma = T(\gamma)$. In der Tat ist

$$T\,T_\gamma(\mathfrak{x}^k) = T(\gamma\,\mathfrak{x}^k) = T(\gamma)\,T\,\mathfrak{x}^k = T_{\bar\gamma}\,T(\mathfrak{x}^k).$$

Dabei gilt für den im Gruppenring induzierten Automorphismus

$$T T_\gamma(x) = T(\gamma x \gamma^{-1}) = \overline{\gamma} T(x) \overline{\gamma}^{-1} = T_{\overline{\gamma}} T(x).$$

Die Matrizen von $T T_\gamma$ ergeben sich zu $\overline{\gamma} t_{ij}^k$, wenn t_{ij}^k die von T sind, und entsprechend die Spuren zu $\overline{\gamma} s^k$, wenn s^k die von T sind. Unter $|x|'$ verstehen wir die aus x entstehende Summe von Klassen nach $T T_\gamma$ konjugierter Elemente. Alsdann ist die Spureninvariante von $T T_\gamma$ gleich $|\overline{\gamma} s|'$. Dieselbe ist durch γ und $|s|$ festgelegt. Die zu $\overline{\gamma} \gamma_i$ nach $T T_\gamma$ konjugierten Elemente sind nämlich

$$T T_\gamma(\varkappa_i) \cdot \overline{\gamma} \gamma_i \cdot \varkappa_i^{-1} = \overline{\gamma} T(\varkappa_i) \gamma_i \varkappa_i^{-1},$$

d. h. jede Klasse nach T konjugierter Elemente geht durch Multiplikation der Elemente mit $\overline{\gamma}$ von links in eine Klasse nach $T T_\gamma$ konjugierter Elemente über, und um $|\overline{\gamma} s|'$ aus $|s|$ zu bilden ist nur jede Restklasse aus $|s|$ durch die entsprechende Restklasse nach $T T_\gamma$ zu ersetzen. — Dies Verhalten ist von Wichtigkeit, wenn man die Abbildungen des Homotopiekettenringes mit den Abbildungen des Komplexes selbst in Beziehung setzen will. Denn einer Komplexabbildung ist eindeutig eine Klasse von Abbildungen $T T_\gamma$ mit beliebigem γ zugeordnet.

6. Wir wollen der Abbildung T bezüglich der Grundbasis a_i^k, die jetzt Simplizes bedeuten mögen, die Beschränkung auferlegen, daß t_{ij}^k gleich $\pm \gamma_{k,ij}$ oder 0 sein möge, wo $\gamma_{k,ij}$ ein Gruppenelement sei. Solche Abbildungen wollen wir „einfach" nennen. Wir fragen bei einfachen Abbildungen nach denjenigen Simplizes ξa_i^k, die von ihrem Bild $T(\xi a_i^k)$ positiv oder negativ überdeckt werden. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn

$$T(\xi) t_{ij}^k \xi^{-1} = \pm 1$$

ist, wenn also $\pm t_{ij}^k$ der durch 1 repräsentierten Restklasse konjugierter Elemente angehört. Wählen wir in diesem Fall ξa_i^k an Stelle von a_i^k als Basiselement, so erkennt man, daß ein weiteres Simplex $\xi' \xi a_i^k$ dann und nur dann von seinem Bild (und zwar in demselben Sinne, wie ξa_i^k von seinem Bild) überlagert wird, wenn ξ' ein Fixelement bei dem Automorphismus T

$$T(\xi') = \xi'$$

ist.

Kommt in $|s^k|$ die durch 1 repräsentierte Klasse s_1^k mal vor, so ist s_1^k also die algebraische Anzahl der Basiselemente a_i^k, zu denen es ein ξa_i^k gibt, das von seinem Bilde positiv oder negativ überdeckt wird. Falls $T(\xi) = \xi$ keine Lösung hat außer der Eins, so ist also $\Sigma(-1) s_1^k$ die Hopfsche Spur der Abbildung T.

Um für eine Abbildung $T\,T_\gamma$ die Simplizes zu bestimmen, die von ihren Bildern überdeckt werden, ist die Gleichung

$$T\,T_\gamma(\xi)\,\bar{\gamma}\,t^k_{i\,i}\,\xi^{-1} = \bar{\gamma}\,T(\xi)\,\bar{\gamma}^{-1}\,\bar{\gamma}\,t^k_{i\,i}\,\xi^{-1} = \pm 1$$

aufzulösen. Dieselbe ist gleichwertig mit

$$T(\xi)\,t^k_{i\,i}\,\xi^{-1} = \pm\,\bar{\gamma}^{-1}.$$

Soll diese Gleichung für dasselbe Indexpaar i,k wie bei der Abbildung T auflösbar sein, so ist dafür notwendig und hinreichend, daß $\bar{\gamma}^{-1}$ derselben Klasse nach T konjugierter Elemente angehört wie $t^k_{i\,i}$, daß also $\bar{\gamma}^{-1}$ zu der durch 1 repräsentierten Klasse gehört und daher

$$\bar{\gamma} = \varkappa\,T(\varkappa^{-1})$$

gesetzt werden kann.

Allgemein sieht man, daß es zu jedem $\pm t_{i\,i}$, welches in dieselbe Klasse wie $\bar{\gamma}^{-1}$ gehört, ein Element $\xi\,\mathfrak{a}^k_i$ gibt, welches von seinem Bilde $T\,T_\gamma(\xi\,\mathfrak{a}^k_i)$ positiv oder negativ überdeckt wird. Hat die durch $\bar{\gamma}^{-1}$ repräsentierte Restklasse in $|s|$ den Koeffizienten s_2 und die durch 1 repräsentierte Restklasse in $|\bar{\gamma}\,s|'$ den Koeffizienten s'_1, so ist also $s'_1 = s_2$.

(Eingegangen am 23. 10. 1935.)

Beiträge zur allgemeinen (gekrümmten) konformen Differentialgeometrie.

Von

J. A. Schouten und J. Haantjes in Delft (Niederlande).

Einleitung.

1. Konforme Geometrie und Kugelgeometrie in projektiver Behandlung.

Die Gleichung einer Hyperkugel in R_n [1]) lautet in bezug auf orthogonale kartesische Koordinaten ξ^h, $(h, i, j, k, l, m = 1, \ldots, n)$,

$$g_{ih}(\xi^i - a^i)(\xi^h - a^h) - R^2 \stackrel{*}{=} 0 \quad [2]). \tag{1}$$

Die a^h sind die Koordinaten des Mittelpunktes, R ist der Radius. Die $n+1$ Zahlen a^h, R, die man als Koordinaten der Kugel auffassen kann, lassen sich durch $n+2$ homogene Koordinaten [3])

$$\mathfrak{X}^1 : \mathfrak{X}^2 : \ldots : \mathfrak{X}^n : \mathfrak{X}^0 : \mathfrak{X}^\infty \stackrel{*}{=} a^1 : a^2 : \ldots : a^n : (g_{ih} a^i a^h - R^2) : (1 + g_{ih} a^i a^h - R^2) \tag{2}$$

ersetzen, die der quadratischen Gleichung

$$g_{ih} \mathfrak{X}^i \mathfrak{X}^h + \mathfrak{X}^0 \mathfrak{X}^0 - \mathfrak{X}^0 \mathfrak{X}^\infty \stackrel{*}{=} 0 \tag{3}$$

genügen, wenn die Hyperkugel in einen Punkt ausartet. In der P_{n-1} [4]) mit den projektiven Koordinaten $\mathfrak{X}^a$, $(a, b, c, d, e, f, g = 0, 1, \ldots, n, \infty)$, stellt also jetzt jeder Punkt eine *Hyperkugel* der R_n dar, während die *Punkte* der R_n, als entartete Kugel aufgefaßt, insbesondere mit den Punkten der P_{n+1} auf der X_n [5]) mit der Gleichung (3) korrespondieren. Diese X_n ist also eine Quadrik in P_{n+1}. Die Umkehrung von (2) lautet:

$$a^i \stackrel{*}{=} \frac{\mathfrak{X}^i}{\mathfrak{X}^\infty - \mathfrak{X}^0}; \qquad R^2 \stackrel{*}{=} \frac{g_{ih} \mathfrak{X}^i \mathfrak{X}^h + \mathfrak{X}^0 \mathfrak{X}^0 - \mathfrak{X}^0 \mathfrak{X}^\infty}{(\mathfrak{X}^\infty - \mathfrak{X}^0)(\mathfrak{X}^\infty - \mathfrak{X}^0)}. \tag{4}$$

---

[1]) R_n = n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer euklidisch-metrischen Geometrie.

[2]) Das Zeichen $\stackrel{*}{=}$ bedeutet stets, daß nur behauptet wird, daß die Gleichung in bezug auf das in der Gleichung verwendete Koordinatensystem richtig ist.

[3]) Man nennt diese Koordinaten polysphärische Koordinaten. Vgl. F. Klein, Liniengeometrie und metrische Geometrie, Math. Annalen 5 (1872), S. 257—277.

[4]) P_n = n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer gewöhnlichen projektiven Geometrie.

[5]) X_n = gewöhnliche n-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Die Abbildung ist also für allgemeine Punkte der P_{n+1} auf Hyperkugeln und Punkte der R_n eineindeutig. Nur der Punkt $\mathfrak{X}^a = c^a$:

$$c^h = 0, \quad c^0 = c^\infty \tag{5}$$

auf der X_n, den wir den Diametralpunkt nennen wollen, entspricht allen Punkten der uneigentlichen Hyperebene der R_n. Diese Ausnahme läßt sich beseitigen, indem man die R_n nicht mit einer uneigentlichen Hyperebene abschließt, sondern mit einem uneigentlichen Punkt, in derselben Weise, wie es in der komplexen Ebene üblich ist. Die Hyperebenen R_{n-1} der R_n entsprechen als Hyperkugeln mit unendlich großem Radius den Punkten der Hyperebene $\mathfrak{X}^0 = \mathfrak{X}^\infty$, die die X_n in c^a tangiert. Als geometrischer Ort von Punkten entspricht aber eine beliebige Hyperebene der R_n

$$u_h \xi^h \doteq 1 \tag{6}$$

dem Schnitt der X_n mit der Hyperebene

$$u_i \mathfrak{X}^i + \mathfrak{X}^0 - \mathfrak{X}^\infty \doteq 0, \tag{7}$$

der stets durch den Diametralpunkt geht.

Man erhält nun bekanntlich die Transformationen der konformen Gruppe in R_n, $n > 2$, d. i. die Gruppe der Punkttransformationen, die sich aus den Bewegungen, Spiegelungen und Transformationen durch reziproke Radien zusammensetzt, indem man in P_{n+1} alle projektiven Transformationen betrachtet, die die X_n in sich überführen. In der Tat geht bei einer solchen Transformation jede Hyperkugel der R_n in eine Hyperkugel, jeder Punkt der R_n aber in einen Punkt über.

Die Abbildung der R_n auf die Quadrik ist durch Einführung eines uneigentlichen Punktes in der R_n eineindeutig geworden. Auf der Quadrik herrscht eine *konformmetrische Geometrie*. In der Tat schneidet in jedem Punkte die tangierende Hyperebene die Quadrik in einem quadratischen Kegel, der auf der Quadrik bis auf einen beliebigen Zahlenfaktor einen Fundamentaltensor festlegt. Diese konforme Metrik ist aber nicht die allgemeinste denkbare. Wie die Abbildung auf die R_n lehrt, läßt sich der Zahlenfaktor so wählen, daß eine *euklidisch-metrische* Geometrie entsteht. Eine solche konformmetrische Geometrie heißt *konform*-euklidisch. Wir haben also den (bekannten) Satz erhalten:

Die Geometrie der Punkte der R_n, als entartete Hyperkugeln aufgefaßt, ist identisch mit der projektiven Geometrie auf einer Quadrik in P_{n+1} und letztere ist nichts anderes als die konformeuklidische konformmetrische Geometrie in n Dimensionen.

Die Geometrie der Hyperkugeln der R_n ist identisch mit der projektiven Geometrie einer P_{n+1} mit einer ausgezeichneten Quadrik, die die in Punkte entarteten Hyperkugeln darstellt.

Die P_{n+1} ist ein Hilfsraum, der bis jetzt nicht in irgendeine feste Lage zur R_n gebracht ist. Wir erhalten eine günstige Lage, wenn wir in P_{n+1} nichthomogene Koordinaten

$$\Xi^h \triangleq \frac{x^h}{x^\infty}; \quad \Xi^0 \triangleq \frac{x^0}{x^\infty} \tag{8}$$

einführen, sodann Ξ^h mit ξ^h identifizieren und für Ξ^0 bequemlichkeitshalber ξ^0 schreiben. Für die festen Indizes $0, 1, \ldots, n$ (also *ohne* ∞) verwenden wir von jetzt an die laufenden Indizes $a, \ldots, g$. Die Gleichung der X_n geht dann über in die Gleichung

$$g_{ih}\,\xi^i\,\xi^h + \xi^0\,\xi^0 - \xi^0 \triangleq 0. \tag{9}$$

Fassen wir jetzt ξ^a als orthogonale kartesische Koordinaten auf, so wird die P_{n+1} zur R_{n+1}, und in dieser R_{n+1} ist (9) die Gleichung einer Hyperkugel mit Durchmesser $+1$, die die jetzt in der R_{n+1} eingebettete $R_n\,(\xi^0 = 0)$ in $\xi^a = 0$ tangiert. Der Diametralpunkt bekommt dann die Koordinaten

$$c^h = 0, \quad c^0 = 1 \tag{10}$$

und liegt also dem Berührungspunkt der Hyperkugel und der R_n diametral gegenüber.

Einem beliebigen Punkte v^h in R_n entspricht der Punkt

$$w^h \triangleq \frac{v^h}{1+(v)^2}; \quad w^0 \triangleq \frac{(v)^2}{1+(v)^2}; \quad (v)^2 = g_{ih}\,v^i\,v^h \tag{11}$$

auf der Hyperkugel. Aus (10) und (11) folgt

$$-(v)^2\,c^a + (1+(v)^2)\,w^a - v^a \triangleq 0. \tag{12}$$

Da die Summe der in (12) auftretenden Koeffizienten verschwindet, liegen c^a, w^a und v^a auf einer Geraden, d. h.:

Die Abbildung eines Punktes der R_n auf die Hyperkugel in der R_{n+1} wird erzeugt durch Projektion aus dem Diametralpunkt.

Die Hyperkugel in R_n (Dimension $n-1$) mit dem Mittelpunkt a^h und dem Radius R bildet sich ab auf den Punkt

$$p^h \triangleq \frac{a^h}{1+(a)^2-(R)^2}; \quad p^0 \triangleq \frac{(a)^2-(R)^2}{1+(a)^2-(R)^2}; \quad (a)^2 = g_{ih}\,a^i\,a^h. \tag{13}$$

Es ist eine elementare geometrische Aufgabe, zu beweisen, daß die Polarhyperebene dieses Punktes in bezug auf die Hyperkugel (Dimension n) in R_{n+1} diese Hyperkugel schneidet in einer Hyperkugel der Dimension $n-1$, die zusammen mit der gegebenen Hyperkugel in R_n auf einem Kegel (Dimension n) liegt, dessen Spitze der Diametralpunkt ist. Es gilt also der (bekannte) Satz:

Die Abbildung einer Hyperkugel der R_n auf die R_{n+1} ist der Pol der Projektion dieser Hyperkugel aus dem Diametralpunkt auf die Hyperkugel der R_{n+1}.

Diese Verknüpfung der P_{n+1} und der R_n, die wir durch besondere Wahl der Ξ^a erreichten, ergibt eine elegante Konstruktion für die Abbildung der Punkte und Kugeln der R_n auf die Punkte der P_{n+1}. Für die eigentliche konforme Geometrie ist daran aber nur wesentlich, *daß eine X_n mit einer konformen Geometrie, sofern diese konformeuklidisch ist, sich auffassen läßt als eine in einer P_{n+1} eingebettete Quadrik.*

Besonders hervorzuheben ist, daß diese Einbettung *eindeutig* ist: jede in einer P_{n+1} eingebettete Quadrik führt zu derselben konformen Geometrie, nämlich zur konformeuklidischen.

2. Konforme Geometrie einer V_n[6]).

In einer V_n, $n > 2$, mit Koordinaten $\xi^\varkappa$, ($\varkappa, \lambda, \mu, \nu, \varrho, \sigma, \tau = 1, 2, \ldots, n$), seien konforme Transformationen des Fundamentaltensors $a_{\lambda\varkappa}$ zugelassen. $K_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}$ sei der Krümmungsaffinor. Es können dann zwei Fälle eintreten. Entweder ist der sogenannte (bei diesen konformen Transformationen invariante) Konformkrümmungsaffinor (vgl. Der Ricci-Kalkül, S. 170)

$$C_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} = K_{\nu\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa} - \frac{4}{n-2} a_{[\nu[\lambda} L_{\mu]\varrho]} a^{\varrho\varkappa}, \tag{14}$$

wo

$$L_{\mu\varrho} = -K_{\mu\varrho} + \frac{1}{2(n-1)} K a_{\mu\varrho},$$

$$K_{\mu\varrho} = K_{\varkappa\mu\varrho}^{\cdot\cdot\cdot\varkappa}, \tag{15}$$

$$K = K_{\lambda\varkappa} a^{\lambda\varkappa}$$

ist, gleich Null, oder dieser Affinor verschwindet nicht.

Im ersten Falle (der für $n = 3$ immer eintritt) ist die V_n für $n \neq 3$ *konformeuklidisch*, d. h. sie läßt sich durch eine konforme Transformation des Fundamentaltensors in eine R_n überführen. In dieser R_n gelten dann alle oben ausgeführten Betrachtungen, d. h. die konforme Geometrie läßt sich auf die projektive Geometrie einer Quadrik in P_{n-1} zurückführen.

Im zweiten Falle ist es Cartan[7]) 1923 gelungen, jedem Punkte der X_n eine lokale P_{n+1} mit einer darin enthaltenen Quadrik zuzuordnen und eine eineindeutige Zuordnung zu konstruieren zwischen der konformen Geometrie der V_n und einer bestimmten Punktübertragung, die benachbarte P_{n-1} aufeinander so projektiv abbildet, daß die Quadrik invariant ist. Für die projektiven Größen der lokalen P_{n+1} ergibt sich dabei eine *kovariante Ableitung*, aber nur eine entlang der V_n. Von einer Einbettung der V_n in einen $(n+1)$-dimensionalen Raum mit irgendeiner

---

[6]) V_n = n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer Riemannschen Geometrie.

[7]) E. Cartan: Les espaces à connexion conforme. Ann. de la Soc. polon. de math. 2 (1923), S. 171—221. Vgl. auch J. A. Schouten: On the place of conformal and projective geometry in the theory of linear displacements, Kon. Akad. v. Wetenschappen, Amsterdam, Proceedings 27 (1924), S. 407—424.

Art von projektiver Geometrie, wie es für $n \neq 3$ im Falle $C_{\nu\mu i}^{\ \ \ \varkappa} = 0$ möglich ist, ist hierbei noch keine Rede. Sodann ist es T. Y. Thomas[8]) 1932 gelungen, für ungerades n diese kovariante Ableitung so zu ergänzen, daß auch der Differentiationsindex $n+2$ statt n Werte durchläuft. Aber auch diese Untersuchung führt noch nicht zu einer Einbettung.

Wir stellen nun die Frage, ob es möglich ist, eine X_n mit einem bis auf einen Zahlenfaktor gegebenen Fundamentaltensor irgendwie in einen $(n+1)$-dimensionalen Raum mit *irgendeiner* projektiven Geometrie (nicht notwendig der gewöhnlichen projektiven Geometrie) derart einzubetten, daß die konforme Maßbestimmung von selbst aus der Einbettung hervorgeht, in derselben Weise wie dies bei einer in P_{n+1} eingebetteten Quadrik der Fall ist. Selbstverständlich müssen wir verlangen, daß durch die Einbettung nicht noch irgendwelche der konformen Geometrie fremde Eigenschaften in die X_n hineininduziert werden.

Wir werden diese Frage folgendermaßen beantworten:

1. Für *ungerades* $n > 1$ gibt es eine Einbettung, Konvergenz der in Betracht kommenden Reihenentwicklungen vorausgesetzt. Diese ist eindeutig, wenn verlangt wird, daß der größere Raum eine symmetrische spezielle Punktübertragung (vgl. S. 602) trägt, deren Krümmungsprojektor eine verschwindende Komitante der Valenz 2 besitzt und die eine symmetrische Projektordichte $a_{\beta\alpha}$ vom Gewicht $\frac{-2}{n+2}$ (vgl. S. 599) invariant läßt, die auf der X_n gerade die konforme Maßbestimmung induziert.

2. Ist der Konformkrümmungsaffinor der X_n Null, so reduziert sich diese Einbettung für $n > 3$ auf die oben besprochene einer Quadrik in P_{n+1}.

3. Ist n gerade, so ist das Problem noch nicht ganz aufgeklärt. Es steht nur fest, daß es für *verschwindenden* Konformkrümmungsaffinor eine eindeutige Einbettung als Quadrik in P_{n+1} gibt.

I. Gewinnung einer konformen Geometrie durch Einbettung einer H_n in H_{n+1}[9]).

1. Die H_{n+1}.

Unter einer H_{n+1} verstehen wir eine $(n+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit $n+2$ homogenen Koordinaten X^α, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \theta, \iota = 0, 1, \ldots, n, \Delta = n+1$ und mit folgenden Gruppen:

[8]) T. Y. Thomas: Conformal tensors, Proc. Nat. Acad. of Sci. 18 (1932), S. 103—112 und 189—193.

[9]) Die Begriffsbestimmungen dieses Abschnittes sind unserer Arbeit „Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie", Comp. Math. 3 (1936) entnommen, auf die wir für weitere Ausführungen verweisen (zitiert als A. P. D.).

Koordinatentransformationen:

$$\mathfrak{H}_{n+2}: \quad X^{\alpha'} = X^{\alpha'}(X^0, \ldots, X^d), \tag{I. 1}$$

wo die $X^{\alpha'}$ homogen vom Grade 1 in X^α sind.

Transformationen analytischer Punkte:

$$\mathfrak{F}: \quad X^\alpha \to \varrho X^\alpha, \tag{I. 2}$$

wo ϱ homogen 0-ten Grades in X^α ist.

Wir nennen X^α einen *analytischen* Punkt der H_{n+1}, $\lfloor X^\alpha \rfloor$ ($= X^\alpha$ bis auf beliebigen skalaren Faktor) einen *Punkt* der H_{n+1}. Wir betrachten nur *homogene* Funktionen der X^α. Homogene Funktionen 0-ten Grades der X^α heißen auch *Ortsfunktionen.*

Die lokale P_{n+1}.

Jedem Punkte der H_{n+1}, z. B. $\lfloor \underset{0}{X^\alpha} \rfloor$, ordnen wir einen gewöhnlichen ebenen projektiven $(n+1)$-dimensionalen Raum P_{n+1} zu mit den gewöhnlichen homogenen Koordinaten Ξ^α, deren Transformation folgendermaßen mit der Transformation der X^α verknüpft ist:

$$\Xi^{\alpha'} = (\mathcal{A}^{\alpha'}_\alpha)_{X^\alpha = \underset{0}{X^\alpha}} \Xi^\alpha; \quad \mathcal{A}^{\alpha'}_\alpha = \partial_\alpha X^{\alpha'}; \quad \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial X^\alpha}. \tag{I. 3}$$

Diese P_{n+1} heißt die zu $\lfloor \underset{0}{X^\alpha} \rfloor$ gehörige *lokale* P_{n+1}. $\mathcal{A}^{\alpha'}_\alpha$ hat den Grad Null, was für diese Betrachtungen wesentlich ist.

Geometrische Objekte.

Alle geometrischen Objekte der H_{n+1} werden in bezug auf die zwei Gruppen $\mathfrak{H}_{n+2}$ und $\mathfrak{F}$ definiert. Wir geben die folgenden Beispiele:

Projektive Vektoren r-ten Grades:

	kontravariant:	*kovariant:*
$\mathfrak{H}_{n+2}$:	$v^{\alpha'} = \mathcal{A}^{\alpha'}_\alpha v^\alpha$,	$w_{\beta'} = \mathcal{A}^\beta_{\beta'} w_\beta$,
$\mathfrak{F}$:	$v^\alpha \to \varrho^{\mathfrak{r}} v^\alpha$,	$w_\beta \to \varrho^{\mathfrak{r}} w_\beta$.

(I. 4)

In der lokalen P_{n+1} bestimmt $\lfloor v^\alpha \rfloor$ einen Punkt, $\lfloor w_\beta \rfloor$ eine Hyperebene.

Projektoren r-ten Grades: z. B.

$$\mathfrak{H}_{n+2}: \quad P^{\alpha'}_{.\beta'\gamma'} = \mathcal{A}^{\alpha'}_\alpha \mathcal{A}^{\beta}_{\beta'} \mathcal{A}^{\gamma}_{\gamma'} P^\alpha_{.\beta\gamma}, \qquad \mathfrak{F}: \quad P^\alpha_{\beta\gamma} \to \varrho^{\mathfrak{r}} P^\alpha_{.\beta\gamma}. \tag{I. 5}$$

Projektordichten r-ten Grades vom Gewicht $\mathfrak{k}$: z. B.

$$\mathfrak{H}_{n+2}: \quad Q^{\alpha'}_{.\beta'\gamma'} = \Delta^{-\mathfrak{k}} \mathcal{A}^{\alpha'}_\alpha \mathcal{A}^{\beta}_{\beta'} \mathcal{A}^{\gamma}_{\gamma'} Q^\alpha_{.\beta\gamma}; \quad \Delta = \mathrm{Det}\,(\mathcal{A}^{\alpha'}_\alpha), \qquad \mathfrak{F}: \quad Q^\alpha_{.\beta\gamma} \to \varrho^{\mathfrak{r}} Q^\alpha_{.\beta\gamma}. \tag{I. 6}$$

Es ist das Folgende zu beachten:

a) Die X^α selbst transformieren sich wie die Bestimmungszahlen eines kontravarianten projektiven Vektors ersten Grades:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_{n+2}: &\quad X^{\alpha'} = \mathcal{A}^{\alpha'}_{\alpha} X^\alpha \text{ (Euler)}, \\ \mathfrak{F}: &\quad X^\alpha \to \varrho X^\alpha. \end{aligned} \tag{I. 7}$$

Der mit X^α korrespondierende Punkt $\lfloor X^\alpha \rfloor$ der lokalen P_{n-1} heißt der *Kontaktpunkt*. Er wird mit dem Punkt $\lfloor X^\alpha \rfloor$ der H_{n+1} identifiziert. Der Kontaktpunkt ist der einzige gemeinschaftliche Punkt der H_{n+1} und der lokalen P_{n+1}.

b) Die dX^α transformieren sich *nicht* wie die Bestimmungszahlen eines projektiven Vektors:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_{n+2}: &\quad dX^{\alpha'} = \mathcal{A}^{\alpha'}_{\alpha} dX^\alpha, \qquad \text{(richtig!)} \\ \mathfrak{F}: &\quad dX^\alpha \to \varrho\, dX^\alpha + X^\alpha d\varrho. \qquad \text{(falsch!)} \end{aligned} \tag{I. 8}$$

c) der Projektor

$$\mathcal{A}^\alpha_\beta = \partial_\beta X^\alpha \tag{I. 9}$$

heißt *Einheitsprojektor*. $\mathcal{A}^{\alpha'}_{\beta}$ und $\mathcal{A}^{\alpha}_{\beta'}$ sind intermediäre Bestimmungszahlen [10]) des Einheitsprojektors.

Schreiben wir $\mathfrak{d}$ für die Valenzendifferenz = kovariante Valenz − kontravariante Valenz, so heißt

$$\varepsilon = \mathfrak{r} + (n+2)\,\mathfrak{k} + \mathfrak{d} \tag{I. 10}$$

der *Exzeß* einer Projektordichte. Der Exzeß eines Produktes oder einer Überschiebung ist gleich der Summe der Exzesse der Faktoren. Der Exzeß ist invariant bei Differentiation. Die Größen vom Exzeß *Null* bilden in bezug auf Addition, Multiplikation, Überschiebung und Differentiation ein geschlossenes System. Wir betrachten im folgenden fast ausschließlich Größen vom Exzeß Null.

Der Zusammenhang.

Wir definieren einen Zusammenhang für Projektoren und Projektordichten vom Exzeß Null durch folgende Gleichungen:

$$\nabla_\gamma v^\alpha = \partial_\gamma v^\alpha + \Pi^\alpha_{\gamma\beta} v^\beta, \tag{I. 11}$$

$$\nabla_\gamma w_\beta = \partial_\gamma w_\beta - \Pi^\alpha_{\gamma\beta} w_\alpha, \tag{I. 12}$$

aus welchen hervorgeht, daß die Parameter $\Pi^\alpha_{\gamma\beta}$ sich folgendermaßen transformieren

$$\mathfrak{H}_{n+2}: \quad \Pi^{\alpha'}_{\gamma'\beta'} = \mathcal{A}^{\alpha'\ \gamma\ \beta}_{\alpha\ \gamma'\ \beta'} \Pi^\alpha_{\gamma\beta} + \mathcal{A}^{\alpha'}_{\delta}\, \partial_{\gamma'} \mathcal{A}^{\delta}_{\beta'}, \tag{I. 13}$$

$$\mathfrak{F}: \quad \Pi^\alpha_{\gamma\beta} \to \varrho^{-1} \Pi^\alpha_{\gamma\beta}. \tag{I. 14}$$

---

[10]) J. A. Schouten und D. J. Struik, Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie I, Groningen 1935, S. 22. Weiterhin zitiert als „Einführung".

Ist die H_{n-1} eine P_{n+1}, so verschwinden die $\Pi^{\alpha}_{\gamma\beta}$ in bezug auf ein System von gewöhnlichen projektiven Koordinaten.

Zu einem Zusammenhang gehören verschiedene Projektoren. Erstens, wie in der affinen Geometrie,

$$S_{\gamma\,\dot{\beta}}^{\;\;\dot{\alpha}} \overset{h}{=} \Pi^{\alpha}_{[\gamma\beta]} \tag{I. 15}$$

($\overset{h}{=}$ bedeutet: nur gültig für holonome Bezugssysteme). Ist $S_{\gamma\,\dot{\beta}}^{\;\;\dot{\alpha}} = 0$, so heißt der Zusammenhang *symmetrisch*. Zweitens und drittens

$$P^{\alpha}_{\;.\,\beta} \overset{h}{=} \mathcal{R}^{\alpha}_{\beta} + X^{\gamma}\,\Pi^{\alpha}_{\gamma\beta}, \tag{I. 16}$$

$$Q^{\alpha}_{\;.\,\gamma} \overset{h}{=} \mathcal{R}^{\alpha}_{\gamma} + \Pi^{\alpha}_{\gamma\beta}\,X^{\beta}, \tag{I. 17}$$

welche Projektoren in der affinen Geometrie keine Analoga besitzen. Bei einem symmetrischen Zusammenhang ist $P^{\alpha}_{\;.\,\beta} = Q^{\alpha}_{\;.\,\beta}$. Viertens der *Krümmungsprojektor:*

$$N_{\delta\,\dot{\gamma}\,\dot{\beta}}^{\;\;\;\dot{\alpha}} \overset{h}{=} 2\,\partial_{[\delta}\Pi^{\alpha}_{\gamma]\,\beta} + 2\,\Pi^{\alpha}_{[\delta\,|\varepsilon|}\,\Pi^{\varepsilon}_{\gamma]\,\beta}. \tag{I. 18}$$

Fünftens der nach δ, α gefaltete Krümmungsprojektor

$$N_{\gamma\,\beta} = N_{\alpha\,\dot{\gamma}\,\dot{\beta}}^{\;\;\;\dot{\alpha}}. \tag{I. 19}$$

Sechstens der über α, β gefaltete Krümmungsprojektor

$$N_{\delta\,\dot{\gamma}\,\dot{\alpha}}^{\;\;\;\dot{\alpha}} = 2\,\partial_{[\delta}\Pi^{\alpha}_{\gamma]\,\alpha}. \tag{I. 20}$$

Ein Zusammenhang heißt *lokal normalisierbar*, wenn

$$P^{\alpha}_{\;.\,\beta} + Q^{\alpha}_{\;.\,\beta} = 2\,\mathcal{R}^{\alpha}_{\beta} \tag{I. 21}$$

ist. Dann und nur dann, wenn diese Bedingung erfüllt ist, gibt es zu jedem Punkt der H_{n+1} holonome Koordinatensysteme, in bezug auf welche $\Pi^{\alpha}_{(\gamma\beta)}$, $\partial_{(\delta}\Pi^{\alpha}_{\gamma\beta)}$, usw. in diesem Punkte alle verschwinden (projektive Normalkoordinaten [11]). In einer P_{n+1} ist diese Bedingung selbstverständlich überall erfüllt, da in diesem Falle $P^{\alpha}_{\;.\,\beta} = Q^{\alpha}_{\;.\,\beta} = \mathcal{R}^{\alpha}_{\beta}$ ist; die gewöhnlichen projektiven Koordinaten sind hier in bezug auf jeden Punkt Normalkoordinaten.

Die Punktübertragungen.

Ist v^{α} ein projektiver Vektor in X^{α} vom Exzeß 0 und ordnet man dem analytischen Punkte $X^{\alpha} + d\,X^{\alpha}$ die $n+2$ Zahlen

$$v^{\alpha} - d\,X^{\gamma}\,\Pi^{\alpha}_{\gamma\beta}\,v^{\beta} \tag{I. 22}$$

zu, so gehen diese Zahlen bei $\mathfrak{F}$ über in

$$(\varrho + d\,\varrho)\,(v^{\alpha} - d\,X^{\gamma}\,\Pi^{\alpha}_{\gamma\beta}\,v^{\beta}) - P^{\alpha}_{\;.\,\beta}\,v^{\beta}\,d\,\varrho. \tag{I. 23}$$

[11]) A. P. D., S. [20].

Daraus folgt:

1. Die $n+2$ Zahlen (I. 22) sind dann und nur dann Bestimmungszahlen eines projektiven Vektors, wenn $P^{\alpha}_{.\beta}$ verschwindet. Dann und nur dann erzeugt der Zusammenhang also eine *Übertragung von projektiven Vektoren.*

2. Dann und nur dann, wenn $P^{\alpha}_{.\beta} = p\,\mathcal{A}^{\alpha}_{\beta}$ ist, wo p ein beliebiger Koeffizient ist, bestimmen die $n+2$ Zahlen (I. 22) in der benachbarten P_{n+1} wenigstens einen bei $\mathfrak{F}$ invarianten *Punkt.* Der Zusammenhang erzeugt also dann und nur dann eine *Punktübertragung*, wenn $P^{\alpha}_{.\beta} = p\,\mathcal{A}^{\alpha}_{\beta}$ ist.

Es folgt der Satz:

Jeder symmetrische lokal normalisierbare Zusammenhang ist eine Punktübertragung.

Eine Punktübertragung heißt *speziell*, wenn der übertragene Kontaktpunkt $[X^{\alpha}]$

$$[X^{\alpha} - d\,X^{\beta}(Q^{\alpha}_{.\beta} - \mathcal{A}^{\alpha}_{\beta})] \tag{I. 24}$$

gleich $[X^{\alpha}]$ ist. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist also, daß $Q^{\alpha}_{.\beta}$ sich in der Form

$$Q^{\alpha}_{.\beta} = \mathcal{A}^{\alpha}_{\beta} + X^{\alpha} q_{\beta} \tag{I. 25}$$

schreiben läßt. Hieraus geht hervor:

Jeder symmetrische lokal normalisierbare Zusammenhang ist eine spezielle Punktübertragung.

Zu jeder Punktübertragung gehören mehrere Zusammenhänge, die auseinander hervorgehen vermöge einer Transformation von der Form

$$'\Pi^{\alpha}_{\gamma\beta} = \Pi^{\alpha}_{\gamma\beta} + s_{\gamma}\,\mathcal{A}^{\alpha}_{\beta}. \tag{I. 26}$$

Eine Punktübertragung heißt *symmetrisch*, wenn irgend einer der zugehörigen Zusammenhänge symmetrisch ist. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist also, daß die Übertragung *halbsymmetrisch* ist, d. h. daß sich $S_{\gamma\,\beta}^{\ \ \alpha}$ in der Form $S_{\gamma\,\beta}^{\ \ \alpha} = S_{[\gamma}\,\mathcal{A}^{\alpha}_{\beta]}$ schreiben läßt. Man kann nun beweisen [12]):

a) *Zu jeder symmetrischen speziellen Punktübertragung gehört ein und nur ein symmetrischer lokal normalisierbarer Zusammenhang*, also mit

$$\begin{aligned} P^{\alpha}_{.\beta} &= \mathcal{A}^{\alpha}_{\beta}, \quad \text{d. h.} \quad X^{\gamma}\,\Pi^{\alpha}_{\gamma\beta} \overset{h}{=} 0, \\ Q^{\alpha}_{.\beta} &= \mathcal{A}^{\alpha}_{\beta}, \quad \text{d. h.} \quad X^{\beta}\,\Pi^{\alpha}_{\gamma\beta} \overset{h}{=} 0, \\ S_{\gamma\,\beta}^{\ \ \alpha} &= 0, \quad \text{d. h.} \quad \Pi^{\alpha}_{[\gamma\,\beta]} \overset{h}{=} 0. \end{aligned} \tag{I. 27}$$

Wenn wir künftig von einer symmetrischen speziellen Punktübertragung sprechen, wollen wir stets voraussetzen, daß die $\Pi^{\alpha}_{\gamma\beta}$ gerade zu diesem einzigen symmetrischen lokal normalisierbaren Zusammenhang gehören.

---

[12]) A. P. D., S. [25].

b) Ist für eine symmetrische spezielle Punktübertragung $N_{\delta\dot{\gamma}\dot{\beta}}{}^{\alpha} = 0$, so gibt es ein Koordinatensystem, in bezug auf welches die $\Pi^{\alpha}_{\gamma\beta}$ in jedem Punkt verschwinden[13]). Dies hat zur Folge:

Eine H_{n+1} mit einer symmetrischen speziellen Punktübertragung mit $N_{\delta\dot{\gamma}\dot{\beta}}{}^{\alpha} = 0$ ist eine P_{n+1}.

c) Bei einer speziellen Punktübertragung gibt es durch jeden Punkt der H_{n+1} in jeder Richtung eine und nur eine geodätische Linie[14]).

Für den Krümmungsprojektor einer symmetrischen speziellen Punktübertragung gelten die Identitäten

(I. 28) $$N_{[\delta\dot{\gamma}\dot{\beta}]}{}^{\alpha} = 0 \quad \text{(Zweite Identität).}$$

(I. 29) $$\nabla_{[\varepsilon} N_{\dot{\delta}\dot{\gamma}]\dot{\beta}}{}^{\alpha} = 0 \quad \text{(Bianchische Identität).}$$

(I. 30) $$X^{\delta} N_{\dot{\delta}\dot{\gamma}\dot{\beta}}{}^{\alpha} = 0;\ X^{\beta} N_{\dot{\delta}\dot{\gamma}\dot{\beta}}{}^{\alpha} = 0.$$

2. Einbettung einer H_n in einer H_{n+1}.

Eine H_n mit den homogenen Koordinaten $x^{\varkappa}$, ($\varkappa, \lambda, \mu, \nu, \pi, \varrho, \sigma, \tau = 0, 1, \ldots, n$) sei in einer H_{n+1} mit einer symmetrischen speziellen Punktübertragung eingebettet mittels der Gleichungen

(I. 31) $$X^{\alpha} = X^{\alpha}(x^0, \ldots, x^n),$$

wo die $X^{\alpha}(x^0, \ldots, x^n)$ homogene Funktionen ersten Grades von $x^{\varkappa}$ sind. Infolgedessen ist

(I. 32) $$\mathscr{B}^{\alpha}_{\lambda} = \partial_{\lambda} X^{\alpha};\ \partial_{\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}$$

eine in jedem Punkte der H_n bekannte Verbindungsgröße.

In der H_n legen wir außerdem noch ein System von gewöhnlichen Koordinaten ξ^h, ($h, i, j, k, l, m = 1, \ldots, n$), die als homogene Funktionen 0-ten Grades der $x^{\varkappa}$ definiert sind:

(I. 33) $$\xi^h = \xi^h(x^0, \ldots, x^n).$$

Die ξ^h bilden eine X_n, deren Punkte eineindeutig auf die Punkte der H_n bezogen sind. Jetzt ist auch

(I. 34) $$E^h_{\lambda} = \partial_{\lambda} \xi^h$$

eine in jedem Punkte der H_n bekannte Verbindungsgröße.

Alle geometrischen Objekte werden definiert in bezug auf die folgenden fünf Gruppen: $\mathfrak{H}_{n+2}$ und $\mathfrak{F}$ in H_{n+1}, $\mathfrak{H}_{n+1}$ und $\mathfrak{F}'$ ($x^{\varkappa} \to \varrho' x^{\varkappa}$) in H_n, $\mathfrak{G}_n$ (Gruppe der kontinuierlichen Transformationen der ξ^h) in X_n. Dementsprechend gibt es jetzt einen Außengrad $\mathfrak{r}$ (in bezug auf $\mathfrak{F}$), einen Innengrad $\mathfrak{r}_i$ (in bezug auf $\mathfrak{F}'$), ein Außengewicht $\mathfrak{k}$ (in bezug auf $\mathfrak{H}_{n+2}$),

[13]) A. P. D., S. [20].
[14]) A. P. D., S. [31].

ein Innengewicht $\mathfrak{k}_i$ (in bezug auf $\mathfrak{H}_{n+1}$) und ein (h)-Gewicht $\mathfrak{k}'$ (in bezug auf $\mathfrak{G}_n$). Die Zusammenstellung

(I. 35) $$\{\mathfrak{r}, \mathfrak{k}; \mathfrak{r}_i, \mathfrak{k}_i; \mathfrak{k}'\}$$

nennen wir den *Index* einer Größe. Es gibt folgende Größen:

1. Größen der H_{n+1} mit Indizes α, β, γ, δ, ε, θ, ι, definiert wie oben. Ist eine Größe nur über H_n definiert, so sind die Bestimmungszahlen Funktionen der $x^\varkappa$. Da die Funktionen (I. 31) bei $\mathfrak{F}'$ einen Faktor ϱ' bekommen, so gilt für eine derartige Größe $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_i$. Es ist z. B.

(I. 36) $$\text{Index } X^\alpha\text{: } \{1, 0; 1, 0; 0\}$$

2. Größen der H_n mit Indizes $\varkappa$, λ, μ, ν, π, ϱ, σ, τ, definiert in bezug auf $\mathfrak{H}_{n+1}$ und $\mathfrak{F}'$, in derselben Weise wie die Größen von H_{n+1} in bezug auf $\mathfrak{H}_{n+2}$ und $\mathfrak{F}$. In bezug auf $\mathfrak{F}$ dagegen folgendermaßen[15]):

Skalar der H_n vom Außengrade $\mathfrak{r}$:

(I. 37) $$p \to \varrho^{\mathfrak{r}} p.$$

Kontravarianter projektiver Vektor der H_n vom Außengrade $\mathfrak{r}$:

(I. 38) $$v^\varkappa \to \varrho^{\mathfrak{r}} v^\lambda (\mathscr{B}^\varkappa_\lambda - x^\varkappa \partial_\lambda \log \varrho);\ \mathscr{B}^\varkappa_\lambda \overset{*}{=} \delta^\varkappa_\lambda.$$

Kovarianter projektiver Vektor der H_n vom Außengrade $\mathfrak{r}$:

(I. 39) $$w_\varkappa \to \varrho^{\mathfrak{r}} w_\varkappa (\mathscr{B}^\varkappa_\lambda + x^\varkappa \partial_\lambda \log \varrho).$$

Projektoren der H_n transformieren sich wie Produkte von projektiven Vektoren.

Offenbar ist:

(I. 40) $$\text{Index } x^\varkappa\text{: } \{0, 0; 1, 0; 0\}.$$

3. *Größen* der X_n mit Indizes h, i, j, k, l, m, definiert in bezug auf $\mathfrak{G}_n$ in üblicher Weise.

4. *Verbindungsgrößen* mit Indizes aus verschiedenen Reihen, die sich bei $\mathfrak{H}_{n+2}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}_{n+1}$, $\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{G}_n$ transformieren wie Produkte von Größen der H_{n+1}, der H_n und der X_n, z. B.:

(I. 41) $$\begin{cases} \mathscr{B}^\alpha_\lambda = \partial_\lambda X^\alpha;\ \{1, 0; 0, 0; 0\} \\ E^h_\lambda = \partial_\lambda \xi^h;\ \{0, 0; -1, 0; 0\}. \end{cases}$$

Außer dem auf S. 600 definierten Exzeß ε, den wir jetzt *äußeren* Exzeß nennen, gibt es noch einen *inneren* Exzeß ε_i, definiert durch

(I. 42) $$\varepsilon_i = \mathfrak{r}_i + \mathfrak{d}_i + (n+1)\,\mathfrak{k}_i + \mathfrak{d} + (n+2)\,\mathfrak{k},$$

wo $\mathfrak{d}_i$ steht für die innere Valenzendifferenz = kovariante innere Valenz — kontravariante innere Valenz. Auch ε_i ist im folgenden fast für alle betrachteten Größen Null.

---

[15]) A. P. D., S. [38].

Wir nehmen an, daß in H_{n+1} eine symmetrische spezielle Punktübertragung gegeben ist, und leiten nacheinander folgende Größen ab[16]):

I. Die Verbindungsgröße

$$\mathfrak{B}_\lambda^\alpha = \partial_\lambda X^\alpha;\ \{1, 0;\ 0, 0;\ 0\}. \tag{I. 43}$$

Eigenschaften: Der Rang von $\mathfrak{B}_\lambda^\alpha$ ist $n+1$.

$$x^\lambda \mathfrak{B}_\lambda^\alpha = X^\alpha. \tag{I. 44}$$

II. Die Verbindungsgröße

$$E_\lambda^h = \partial_\lambda \xi^h;\ \{0, 0;\ -1, 0;\ 0\}. \tag{I. 45}$$

Eigenschaften: Der Rang von E_λ^h ist n.

$$x^\lambda E_\lambda^h = 0. \tag{I. 46}$$

Die Umkehrung $\overset{-1}{E}{}_i^\varkappa$ von E_λ^h, definiert durch die Gleichung

$$\overset{-1}{E}{}_i^\varkappa E_\varkappa^h = A_i^h, \tag{I. 47}$$

wo A_i^h der Einheitsaffinor ist, ist wegen (I. 46) nur mod. $x^\varkappa$ bestimmt.

III. Die kovariante projektive Vektordichte, definiert durch die Gleichung

$$T_\beta = \mathfrak{B}_{[0}^0 \dots \mathfrak{B}_{n]}^n \mathfrak{A}_\beta^{\varrho]};\ \{n+1, -1;\ 0, 1;\ 0\}. \tag{I. 48}$$

Eigenschaften:

$$\mathfrak{B}_\lambda^\beta T_\beta = 0 \quad \text{(durch diese Gleichung ist } \lfloor T_\beta \rfloor \text{ festgelegt).} \tag{I. 49}$$

$$X^\beta T_\beta = 0 \quad \text{(folgt aus der vorigen Gleichung und (I. 44)).} \tag{I. 50}$$

$\lfloor T_\beta \rfloor$ ist also die tangierende Hyperebene der H_n in der lokalen P_{n+1}, woraus hervorgeht, daß

$$\mathfrak{B}_{u\lambda}^{\gamma\beta} \partial_{[\gamma} T_{\beta]} = 0 \tag{I. 51}$$

ist.

IV. Die projektive Tensordichte $h_{\mu\lambda}$, definiert durch die Gleichung

$$h_{\mu\lambda} = \mathfrak{B}_{u\lambda}^{\gamma\beta} \nabla_\gamma T_\beta;\ \{n+2, -1;\ -1, 1;\ 0\}. \tag{I. 52}$$

Wir betrachten nur die Punkte der H_n, wo der Rang von $h_{\mu\lambda}$ gleich n ist.

Eigenschaften:

$$h_{[\mu\lambda]} = 0. \tag{I. 53}$$

$$x^u h_{u\lambda} = X^\gamma \mathfrak{B}_\lambda^\beta \nabla_\gamma T_\beta = (n+1)\, \mathfrak{B}_\lambda^\beta T_\beta = 0. \tag{I. 54}$$

V. Die projektive Tensordichte

$$H^{\varkappa\lambda} = \mathfrak{E}^{\varkappa\varkappa_1 \dots \varkappa_n} \mathfrak{E}^{\lambda\lambda_1 \dots \lambda_n} h_{\varkappa_1\lambda_1} \dots h_{\varkappa_n\lambda_n};\ \{n^2+2n, -n;\ -n, n+2;\ 0\}, \tag{I. 55}$$

[16]) A. P. D., S. [42].

wo $\mathfrak{E}^{x_1 \cdots x_{n+1}}$ die kontravariante projektive $(n+1)$-Vektordichte vom Gewicht $+1$ ist[16a]).

Eigenschaften: Da $h_{\mu\lambda}$ den Rang n hat, ist der Rang von $H^{\varkappa\lambda}$ gleich 1. Wegen (I. 54) gilt also

$$\lfloor H^{\varkappa\lambda} \rfloor = \lfloor x^{\varkappa} x^{\lambda} \rfloor. \tag{I. 56}$$

VI. Die projektive Dichte

$$h = \frac{H^{\varkappa\lambda}}{x^{\varkappa} x^{\lambda}}; \quad \{n^2 + 2n, \; -n; \; -n-2, \; n+2; \; 0\}. \tag{I. 57}$$

VII. Die projektive Tensordichte

$$q_{\lambda\varkappa} = |h|^{\frac{-1}{n+2}} h_{\lambda\varkappa}; \quad \left\{2, \frac{-2}{n+2}; \; 0, 0; \; 0\right\}. \tag{I. 58}$$

VIII. Die projektive Vektordichte

$$t_\beta = |h|^{\frac{-1}{n+2}} T_\beta; \quad \left\{1, \frac{-2}{n+2}; \; 1, 0; \; 0\right\}. \tag{I. 59}$$

IX. Die Verbindungsgröße

$$b_{\lambda\alpha} = \mathfrak{B}_\lambda^\beta \nabla_\beta t_\alpha; \quad \left\{1, \frac{-2}{n+2}; \; 0, 0; \; 0\right\}, \tag{I. 60}$$

Eigenschaften:

$$q_{\lambda\varkappa} = \mathfrak{B}_\lambda^\alpha b_{\varkappa\alpha}, \tag{I. 61}$$

$$x^\lambda b_{\lambda\alpha} = X^\beta \nabla_\beta t_\alpha = X^\beta \partial_\beta t_\alpha = t_\alpha. \tag{I. 62}$$

X. Die symmetrische Projektordichte $a_{\beta\alpha}$, definiert durch die Gleichung

$$a_{\beta\alpha} \mathfrak{B}_\lambda^\alpha = b_{\lambda\beta}; \text{ Index } a_{\beta\alpha}: \left\{0, \frac{-2}{n+2}; \; 0, 0; \; 0\right\}. \tag{I. 63}$$

Diese Gleichung und die Symmetrieeigenschaft legen $a_{\beta\alpha}$ fest bis auf einen additiven Term von der Form $\alpha t_\beta t_\alpha$.

Eigenschaften: $a_{\beta\alpha}$ hat den Rang $n+2$.

$$a_{\beta\alpha} X^\alpha = x^\lambda b_{\lambda\beta} = t_\beta, \tag{I. 64}$$

$$a_{\beta\alpha} X^\beta X^\alpha = 0. \tag{I. 65}$$

$a_{\beta\alpha}$ stellt also ∞^1 Quadriken in der lokalen P_{n+1} dar, die die Hyperebene $\lfloor t_\beta \rfloor$ tangieren. In dem besonderen Fall, wo die H_{n+1} eine P_{n+1} ist, sind dies die Quadriken von Darboux.

XI. Die Größe

$$q_{\mu\lambda\alpha} = \mathfrak{B}_\mu^{\gamma\beta}{}_\lambda \nabla_\gamma a_{\beta\alpha}. \tag{I. 66}$$

Eigenschaften[17]): $q_{\mu\lambda\alpha}$ hängt von der näheren Wahl von $a_{\beta\alpha}$ ab. Man kann eine invariante Bedingung für $q_{\mu\lambda\alpha}$ aufstellen. derart, daß $a_{\beta\alpha}$ *vollständig* bestimmt wird. (Diese Bedingung ist *stets* erfüllt, wenn das

16a) Einführung I, S. 29.

17) A. P. D., S. [47].

ausgezeichnete $a_{\beta\alpha}$ der Gleichung $\mathcal{B}^{\gamma\,\beta}_{\mu\,\lambda} \nabla_\gamma a_{\beta\alpha} = 0$ genügt, was aber nur *in ganz speziellen Fällen* möglich ist.) Dies ausgezeichnete $a_{\beta\alpha}$ stellt, wenn die H_{n+1} eine P_{n+1} ist, die *Quadrik von Lie-Čech* dar.

XII. Die Tensordichte $\mathfrak{g}_{ih}$, definiert durch die Gleichungen

$$(\text{I. } 67) \qquad [\mathcal{B}^{\beta\,\alpha}_{\lambda\,\varkappa} a_{\beta\alpha}] = [E^{ih}_{\lambda\varkappa} \mathfrak{g}_{ih}]; \quad \mathrm{Det}(\mathfrak{g}_{ih}) = +1.$$

Der Index von $\mathfrak{g}_{ih}$ ist $\left\{0, 0; 0, 0; -\frac{2}{n}\right\}$, während der Rang von $\mathfrak{g}_{ih}$ gleich n ist.

Die Tensordichte $\mathfrak{g}_{ih}$ bestimmt in der X_n eine konforme Geometrie. Der Nullkegel in der lokalen E_n korrespondiert mit dem Schnitt der Quadrik $[a_{\beta\alpha}]$ mit der tangierenden Hyperebene $[t_\beta]$. Damit ist gezeigt, daß in einer X_n, die in einer H_{n+1} mit einer speziellen symmetrischen Punktübertragung eingebettet ist, eine konforme Metrik induziert wird. Im allgemeinen wird aber viel mehr induziert, nämlich eine Anzahl von Invarianten und Komitanten (geometrisch z. B. die Polare der Projektivnormalen[18])), die zwar der Übertragung in H_{n+1} angehören, aber nicht der konformen Geometrie als solcher. Bei der Einbettung einer X_n mit konformeuklidischer Geometrie in eine P_{n+1} haben wir aber gesehen, daß die projektive Geometrie der X_n in P_{n+1} sich genau deckt mit der konformen Geometrie in X_n und solche Beiinvarianten nicht auftreten.

Es ergibt sich also jetzt die Aufgabe, ausgehend von der X_n mit einer konformen aber nicht konformeuklidischen Geometrie, eine H_{n+1} zu konstruieren mit einer symmetrischen speziellen Punktübertragung, in der sich die X_n dermaßen einbetten läßt, daß nur die konforme Geometrie induziert wird und keine Beiinvarianten. Wir bemerken vorweg, daß bei gegebenem $\mathfrak{g}_{ih}$ aus (I. 67) folgt, daß für jedes $a_{\beta\alpha}$, das dieser Gleichung genügt, gilt

$$(\text{I. } 68) \qquad 0 = x^\varkappa \mathcal{B}^{\beta\,\alpha}_{\lambda\,\varkappa} a_{\beta\alpha} = X^\alpha a_{\beta\alpha} \mathcal{B}^\beta_\lambda$$

und infolgedessen

$$(\text{I. } 69) \qquad [X^\alpha a_{\beta\alpha}] = [t_\beta].$$

(I. 67) drückt also aus, daß die Quadrik $[a_{\beta\alpha}]$ die Hyperebene $[t_\beta]$ tangiert.

II. Aufbau der konformen Differentialgeometrie mit $n+2$ homogenen Koordinaten, von welchen zwei überzählig sind.

1. Wahl des holonomen Bezugssystems in H_{n+1}.

Wir stellen nun umgekehrt die Aufgabe, eine X_n mit konformer Geometrie, also mit einer Tensordichte $\mathfrak{g}_{ih}$ vom Gewicht $-\frac{2}{n}$, mit Determinante $+1$ und vom Trägheitsindex n, einzubetten in eine H_{n+1} und

[18]) A. P. D., S. [48].

in dieser H_{n+1} eine spezielle symmetrische Punktübertragung $\Pi^{\alpha}_{\gamma\beta}$ und eine projektive Tensordichte $a_{\beta\alpha}$ vom Gewicht $-\frac{2}{n+2}$, mit Determinante -1 und Trägheitsindex $n+1$ und vom Grade Null derart festzulegen, daß:

1. auf X_n gilt

(II. 1) $$\lfloor E^{ih}_{iz}\, g_{ih}\rfloor = \lfloor \mathscr{B}^{\beta\alpha}_{iz}\, a_{\beta\alpha}\rfloor$$

und infolgedessen

(II. 2) $$\lfloor X^{\alpha} a_{\beta\alpha}\rfloor = \lfloor t_{\beta}\rfloor; \quad a_{\beta\alpha} X^{\beta} X^{\alpha} = 0,$$

2. in H_{n+1} gilt

(II. 3) $$\nabla_{\gamma} a_{\beta\alpha} = 0$$

(II. 4) $$N^{\cdot\cdot\cdot\alpha}_{\alpha\gamma\beta} = 0$$

und infolgedessen wegen der zweiten Identität (I. 28)

(II. 5) $$0 = N^{\cdot\cdot\cdot\alpha}_{\delta\gamma\alpha} \overset{h}{=} 2\,\partial_{[\delta}\Pi^{\alpha}_{\gamma]\alpha}.$$

Außerdem wollen wir die Frage erörtern, inwiefern die so erhaltene Einbettung *eindeutig* bestimmt ist. Wir beweisen den Hilfssatz:

Ist eine X_n mit gegebenem g_{ih} in einer H_{n+1} eingebettet, und ist auf X_n eine symmetrische Projektordichte $a_{\beta\alpha}$ vom Gewicht $\frac{-2}{n+2}$, mit Determinante -1 und vom Grade Null gegeben, die der Bedingung (II. 1) *genügt, und in H_{n+1} eine symmetrische spezielle Punktübertragung $\Pi^{\alpha}_{\gamma\beta}$ mit $N^{\cdot\cdot\cdot\alpha}_{\alpha\gamma\beta} = 0$, so gibt es stets ein Koordinatensystem (α) in H_{n+1} derart, daß*

1. *auf X_n gilt*

(II. 6) $$X^{\varkappa} \overset{*}{=} x^{\varkappa}; \quad X^{\lambda} = 0,$$

(II. 7) $$a_{\lambda\lambda} = 0,$$

2. *in H_{n+1} gilt*

(II. 8) $$\Pi^{\varkappa}_{\lambda\lambda} \overset{*}{=} 0,$$

(II. 9) $$\Pi^{\alpha}_{\gamma\alpha} \overset{*}{=} 0.$$

Zum Beweise wählen wir das Koordinatensystem (α) zunächst so, daß $X^{\varkappa} \overset{*}{=} x^{\varkappa}$ und $X^{\lambda} = 0$ ist auf X_n und daß die Parameterlinien von X^{λ} in H_{n+1} geodätisch sind (vgl. S. 603). Die projektiven Maßvektoren von (α) seien $\overset{\alpha}{e}_{\beta}$, $\overset{\alpha}{e}_{\beta}$. Ihr Index ist $\{0,0;\ 0,0;\ 0\}$[19]), $\lfloor \overset{\lambda}{e}_{\beta}\rfloor$ ist dann also auf X_n die die X_n tangierende Hyperebene $\lfloor t_{\beta}\rfloor$. Aus (II. 2) folgt dann auf X_n

(II. 10) $$a_{\alpha\beta} X^{\alpha} = \sigma \overset{\lambda}{e}_{\beta},$$

[19]) Der Exzeß eines Maßvektors verschwindet also nicht.

wo σ ein Koeffizient mit dem Index $\left\{1, \frac{-2}{n+2}; 1, 0; 0\right\}$ ist, und infolgedessen auf X_n

$$a^{\alpha\lambda} \overset{*}{=} a^{\alpha\beta} \overset{\lambda}{e}_{\beta} \overset{*}{=} \sigma^{-1} X^{\alpha}. \tag{II. 11}$$

Bei der Übertragung entlang einer der geodätischen Parameterlinien von X^{λ} ist $dX^{\alpha} = \overset{\alpha}{e}_{\lambda} dX^{\lambda}$ und der Punkt $\lfloor \overset{\alpha}{e}_{\lambda} \rfloor$ gelangt also nach $\lfloor \overset{\alpha}{e}_{\lambda} - \Pi^{\alpha}_{\lambda\lambda} dX^{\lambda} \rfloor$. Dieser Punkt muß nun auf der Geraden durch $\lfloor X^{\alpha} \rfloor$ und $\lfloor X^{\alpha} + \overset{\alpha}{e}_{\lambda} dX^{\lambda} \rfloor$ liegen[20]) und dies ist dann und nur dann der Fall, wenn in H_{n+1}

$$\Pi^{\varkappa}_{\lambda\lambda} \overset{*}{=} 0 \pmod{X^{\varkappa}} \tag{II. 12}$$

ist. Wir gehen jetzt zu einem anderen Bezugssystem (α') über.

$$\begin{aligned} &X^{\varkappa'} = \delta^{\varkappa'}_{\varkappa}\, \chi(X^{\alpha})\, X^{\varkappa}; \quad \chi(X^{\alpha}) = 1 \text{ auf } X_n, \\ &X^{\lambda'} = X^{\lambda}, \end{aligned} \tag{II. 13}$$

wo $\chi(X^{\alpha})$ eine Funktion 0-ten Grades in H_{n+1} ist. In bezug auf dieses neue System bleibt (II. 6) gültig; wir fordern, daß dazu in H_{n+1} gilt $\Pi'^{\varkappa'}_{\lambda'\lambda'} \overset{*}{=} 0$ und auf X_n außerdem $a_{\lambda'\lambda'} = 0$ ist. Aus (II. 13) folgt

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}^{\varkappa'}_{\varkappa} = \chi\, \delta^{\varkappa'}_{\varkappa} + X^{\varkappa'}\, \partial_{\varkappa} \log \chi; \\ &\mathcal{A}^{\varkappa'}_{\lambda} = X^{\varkappa'}\, \partial_{\lambda} \log \chi; \qquad \mathcal{A}^{\varkappa}_{\lambda'} = -X^{\varkappa}\, \partial_{\lambda} \log \chi; \\ &\mathcal{A}^{\lambda'}_{\varkappa} = 0; \qquad \mathcal{A}^{\lambda}_{\varkappa'} = 0; \\ &\mathcal{A}^{\lambda'}_{\lambda} = 1; \qquad \mathcal{A}^{\lambda}_{\lambda'} = 1; \end{aligned} \tag{II. 14}$$

so daß in H_{n+1}

$$\begin{aligned} \Pi'^{\varkappa'}_{\lambda'\lambda'} \overset{*}{=} (1 + X^{\lambda}\partial_{\lambda} \log \chi)^2 [&\chi\, \delta^{\varkappa'}_{\varkappa} \Pi^{\varkappa}_{\lambda\lambda} + X^{\varkappa'} \Pi^{\lambda}_{\lambda\lambda} \partial_{\lambda} \log \chi \\ &+ X^{\varkappa'} \Pi^{\varkappa}_{\lambda\lambda} \partial_{\varkappa} \log \chi - X^{\varkappa'} \partial_{\lambda}\partial_{\lambda} \log \chi - X^{\varkappa'} (\partial_{\lambda} \log \chi)^2] \end{aligned} \tag{II. 15}$$

ist und auf X_n außerdem

$$a_{\lambda'\lambda'} \overset{*}{=} \{\mathrm{Det}\,(\mathcal{A}^{\alpha'}_{\alpha})\}^{\frac{2}{n-2}} (a_{\lambda\lambda} - 2\, X^{\varkappa} a_{\varkappa\lambda}\, \partial_{\lambda} \log \chi), \tag{II. 16}$$

denn aus (II. 10) folgt $a_{\lambda\varkappa} X^{\varkappa} \overset{*}{=} 0$. Aus (II. 16) folgt für $a_{\lambda'\lambda'} = 0$ auf X_n

$$\partial_{\lambda} \log \chi = \frac{a_{\lambda\lambda}}{2 X^{\varkappa} a_{\varkappa\lambda}}. \tag{II. 17}$$

Der Nenner ist ungleich Null, da $a_{\beta\alpha}$ den Rang $n+2$ hat. Aus (II. 15) ergibt sich unter Berücksichtigung von (II. 17) eine in H_{n+1} gültige Differentialgleichung für χ, aus welcher sich eine eindeutig bestimmte Reihenentwicklung für χ nach X^{λ} ableiten läßt.

Wir gehen jetzt zu einem dritten Bezugssystem (α'') über vermöge

$$\begin{aligned} &X^{\varkappa''} = X^{\varkappa'}, \\ &X^{\lambda''} = \varphi(X^{\alpha'})\, X^{\lambda'} \end{aligned} \tag{II. 18}$$

[20]) A. P. D., S. [30].

und fordern, daß in bezug auf dieses System in H_{n+1} *sowohl* $\Pi^{\varkappa''}_{\lambda''\,\lambda''} \overset{*}{=} 0$ *als* $\Pi^{\alpha''}_{\gamma''\,\alpha''} \overset{*}{=} 0$ ist und auf X_n außerdem $a_{\lambda''\,\lambda''} = 0$ ist. Wiederum bleibt (II. 6) erfüllt. Aus (II. 18) folgt

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A}^{\varkappa'}_{\varkappa''} = \delta^{\varkappa'}_{\varkappa''}; \qquad \mathcal{A}^{\varkappa'}_{\lambda''} = \delta^{\varkappa'}_{\lambda''};\\
&\mathcal{A}^{\lambda''}_{\varkappa'} = 0; \qquad \mathcal{A}^{\lambda''}_{\lambda'} = 0;\\
&\mathcal{A}^{\lambda''}_{\varkappa''} = X^{\lambda'}\partial_{\varkappa'}\varphi; \quad \mathcal{A}^{\lambda''}_{\lambda''} = -X^{\lambda'}\delta^{\varkappa'}_{\varkappa''}(\partial_{\varkappa'}\varphi)(\varphi + X^{\lambda'}\partial_{\lambda'}\varphi)^{-1};\\
&\mathcal{A}^{\lambda''}_{\lambda'} = \varphi + X^{\lambda'}\partial\cdot\varphi;\\
&\operatorname{Det}(\mathcal{A}^{\alpha''}_{\alpha'}) = \varphi + X^{\lambda'}\partial_{\lambda'}\varphi,
\end{aligned}
\tag{II. 19}
$$

so daß auf X_n

$$
a_{\lambda''\,\lambda''} = \{\operatorname{Det}(\mathcal{A}^{\alpha''}_{\alpha'})\}^{\frac{2}{n+2}}\mathcal{A}^{\lambda'\,\lambda'}_{\lambda''\,\lambda''}a_{\lambda'\lambda'} \overset{*}{=} 0 \tag{II. 20}
$$

ist und in H_{n+1}

$$
\Pi^{\varkappa''}_{\lambda''\,\lambda''} \overset{*}{=} \mathcal{A}^{\lambda'\,\lambda'\,\varkappa'}_{\lambda''\,\lambda''\,\varkappa'}\Pi^{\varkappa'}_{\lambda'\,\lambda'} + \mathcal{A}^{\varkappa''}_{\lambda'}\partial_{\lambda''}\mathcal{A}^{\lambda'}_{\lambda''} \overset{*}{=} \mathcal{A}^{\lambda'\,\lambda'\,\varkappa'}_{\lambda''\,\lambda''\,\varkappa'}\Pi^{\varkappa'}_{\lambda'\,\lambda'} \overset{*}{=} 0, \tag{II. 21}
$$

$$
\Pi^{\alpha''}_{\gamma''\,\alpha''} = \mathcal{A}^{\gamma'}_{\gamma''}(\Pi^{\alpha'}_{\gamma'\,\alpha'} - \partial_{\gamma'}\log(\varphi + X^{\lambda'}\partial_{\lambda'}\varphi)). \tag{II. 22}
$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt, daß die neue Transformation tatsächlich $\Pi^{\varkappa''}_{\lambda''\,\lambda''} \overset{*}{=} 0$ liefert in H_{n-1} und $a_{\lambda''\,\lambda''} = 0$ auf X_n. Die Forderung $\Pi^{\alpha''}_{\gamma''\,\alpha''} \overset{*}{\neq} 0$ lautet umgeschrieben

$$
\partial_{\gamma'}\varphi + \partial_{\gamma'}(X^{\lambda'}\partial_{\lambda'}\varphi) = \Pi^{\alpha'}_{\gamma'\,\alpha'}(\varphi + X^{\lambda'}\partial_{\lambda'}\varphi) \tag{II. 23}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
&\partial_{\mu'}\varphi + X^{\lambda'}\partial_{\mu'}\partial_{\lambda'}\varphi = \Pi^{\alpha'}_{\mu'\,\alpha'}(\varphi + X^{\lambda'}\partial_{\lambda'}\varphi),\\
&2\,\partial_{\lambda'}\varphi + X^{\lambda'}\partial_{\lambda'}\partial_{\lambda'}\varphi = \Pi^{\alpha'}_{\lambda'\,\alpha'}(\varphi + X^{\lambda'}\partial_{\lambda'}\varphi)
\end{aligned}
\tag{II. 24}
$$

und die Integrabilitätsbedingungen dieser Gleichungen lauten

$$
\begin{aligned}
&\partial_{\lambda'}\partial_{\mu'}\varphi + \partial_{\mu'}\partial_{\lambda'}\varphi + X^{\lambda'}\partial_{\lambda'}\partial_{\mu'}\partial_{\lambda'}\varphi - 2\,\partial_{\mu'}\partial_{\lambda'}\varphi - X^{\lambda'}\partial_{\mu'}\partial_{\lambda'}\partial_{\lambda'}\varphi\\
&\quad = 2(\partial_{[\lambda'}\Pi^{\alpha'}_{\mu']\,\alpha'})(\varphi + X^{\lambda'}\partial_{\lambda'}\varphi) + \Pi^{\alpha'}_{\mu'\,\alpha'}(\partial_{\lambda'}\varphi + \partial_{\lambda'}\varphi + X^{\lambda'}\partial_{\lambda'}\partial_{\lambda'}\varphi)\\
&\quad\quad - \Pi^{\alpha'}_{\lambda'\,\alpha'}(\partial_{\mu'}\varphi + X^{\lambda'}\partial_{\mu'}\partial_{\lambda'}\varphi) = 0.
\end{aligned}
\tag{II. 25}
$$

Da aber $2\,\partial_{[\lambda'}\Pi^{\alpha'}_{\mu']\,\alpha'} = 0$ ist (II. 5), ist diese Bedingung infolge (II. 24) gleichbedeutend mit

$$
\Pi^{\alpha'}_{\mu'\,\alpha'}\Pi^{\beta'}_{\lambda'\,\beta'} - \Pi^{\alpha'}_{\lambda'\,\alpha'}\Pi^{\beta'}_{\mu'\,\beta'} = 0 \tag{II. 26}
$$

und diese Gleichung ist identisch erfüllt. Es ist also möglich, φ so zu bestimmen, daß $\Pi^{\alpha''}_{\gamma''\,\alpha''}$ in H_{n+1} verschwindet. Für dieses neue bevorzugte Koordinatensystem (α'') schreiben wir jetzt wieder (α). Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wir gehen jetzt aus von der X_n mit gegebenem g_{ik}, betten sie irgendwie in eine H_{n+1} ein, legen das Bezugssystem in H_{n+1} so, daß $X^\varkappa \overset{*}{=} x^\varkappa$ und $X^\lambda = 0$ ist auf X_n und legen die Parameterlinien von X^λ *ganz beliebig.* Auf X_n wählen wir eine symmetrische Projektordichte $a_{\beta\alpha}$ vom richtigen Grad und Gewicht $\left(\text{Index}\left\{0, \frac{n+2}{-2}; 0, 0; 0\right\}\right)$, mit Deter-

minante -1, die der Gleichung (II. 1) genügt, und in bezug auf das gewählte Bezugssystem auch der Gleichung $a_{\lambda\lambda} = 0$, die im übrigen aber beliebig ist. Die Aufgabe ist nun:

a) Ausgehend von diesen Voraussetzungen das Feld $a_{\beta\alpha}$ über H_{n+1} fortzusetzen und in H_{n+1} ein Feld $\Pi^{\alpha}_{\gamma\beta}$ (zu einer symmetrischen speziellen Punktübertragung gehörend; vgl. (I. 27)) zu konstruieren, derart, daß in bezug auf das eben gewählte Bezugssystem in H_{n+1} gilt:

(II. 27) $$\Pi^{\varkappa}_{\lambda\lambda} \overset{*}{=} 0,$$

(II. 28) $$\Pi^{\alpha}_{\gamma\alpha} \overset{*}{=} 0,$$

(II. 29) $$\nabla_{\gamma} a_{\beta\alpha} = 0,$$

(II. 30) $$N_{\alpha\gamma\beta}^{\ \ \ \ \alpha} = 0.$$

Aus (II. 27) geht hervor, daß die Parameterlinien von X^{λ} geodätisch sind.

b) Zu beweisen, daß sich bei Änderung der Kongruenz der Parameterlinien von X^{λ} und der Wahl von $a_{\beta\alpha}$ über X_n die Einbettung nicht *wesentlich* ändert (Eindeutigkeitsbeweis).

$a_{\beta\alpha}$ ist eine Dichte vom Gewicht $\frac{-2}{n+2}$. Die zu dieser Dichte gehörigen Parameter des Zusammenhanges sind bekanntlich

(II. 31) $$A^{\alpha}_{\gamma\beta} = \Pi^{\alpha}_{\gamma\beta} - \frac{1}{n+2} \Pi^{\delta}_{\gamma\delta} A^{\alpha}_{\beta},$$

welche sich aber auf $\Pi^{\alpha}_{\gamma\beta}$ reduzieren wegen (II. 28). Ist das Feld $a_{\beta\alpha}$ über H_{n+1} fortgesetzt, so bestimmt $\nabla_{\gamma} a_{\beta\alpha} = 0$ die Parameter vollständig. Für den Krümmungsprojektor kann man dann, wie in der Riemannschen Geometrie, noch die folgende Identität ableiten:

(II. 32) $$N_{\delta\gamma\beta\alpha} = N_{\beta\alpha\delta\gamma}.$$

Wir verwenden $a_{\beta\alpha}$ für das Herauf- und Hinunterziehen von Indizes in H_{n+1}.

2. Festlegung der $\Pi^{\alpha}_{\gamma\beta}$ auf X_n.

Wir legen zunächst die $\Pi^{\alpha}_{\gamma\beta}$ auf X_n fest. Ausgangspunkt ist das Bekanntsein von $a_{\beta\alpha}$ auf X_n und die in H_{n+1} gültigen Gleichungen (II. 27) bis (II. 30). Die Gleichung (II. 29) lautet ausgeschrieben

(II. 33) $$0 = \partial_{\gamma} a_{\beta\alpha} - \Pi^{\delta}_{\gamma\beta} a_{\delta\alpha} - \Pi^{\delta}_{\gamma\alpha} a_{\beta\delta}.$$

Da $a_{\beta\alpha}$ auf X_n bekannt ist, folgt, daß auch $\partial_{\mu} a_{\beta\alpha}$ auf X_n bekannt ist und es fehlt also dort noch $\partial_{\lambda} a_{\beta\alpha}$. Schreiben wir nun

(II. 34) $$\partial_{\gamma} a_{\beta\alpha} \overset{*}{=} 2 \overset{0}{R}_{\gamma\beta\alpha},$$

so ist $\overset{0}{R}_{\mu\beta\alpha}$ schon bekannt. Die Gleichung (II. 33) kann wegen der Symmetrie von $\Pi^{\alpha}_{\gamma\beta}$ nach $\Pi^{\alpha}_{\gamma\beta}$ gelöst werden. Es ist nämlich in H_{n+1}

(II. 35) $$\Pi^{\delta}_{\gamma\alpha} a_{\delta\beta} \overset{*}{=} \overset{0}{R}_{\gamma\alpha\beta} + \overset{0}{R}_{\alpha\gamma\beta} - \overset{0}{R}_{\beta\gamma\alpha}.$$

Aus dem Verschwinden von $\Pi^{\varkappa}_{\lambda\lambda}$ und $\Pi^{\alpha}_{\gamma\alpha}$ in H_{n+1} folgt deshalb

(II. 36) $$2\overset{0}{R}_{\lambda\lambda\beta}a^{\beta\varkappa} - \overset{0}{R}_{\beta\lambda\lambda}a^{\beta\varkappa} \overset{*}{=} 0.$$

(II. 37) $$\overset{0}{R}_{\gamma\alpha\beta}a^{\alpha\beta} \overset{*}{=} 0.$$

Überschiebung von (II. 35) mit $a^{\beta\varepsilon}$ ergibt für $\gamma = \mu$, $\alpha = \lambda$ auf X_n:

(II. 38) $$\Pi^{\varepsilon}_{u\lambda} \overset{*}{=} -a^{\lambda\varepsilon}\overset{0}{R}_{\lambda u\lambda} + B,$$

wenn wir B verwenden als ein Symbol für alles was auf X_n bekannt ist. *Infolge* (II. 11) *ist* $\Pi^{\alpha}_{\mu\lambda}$ *also auf* X_n *bekannt mod* X^{α}.

Da $a^{\lambda\lambda}$ auf X_n verschwindet, ist $\Pi^{\lambda}_{u\lambda}$ auf X_n bekannt. In der Tat ergibt kovariante Differentiation von (II. 10) auf X_n

(II. 39) $$(\nabla_u a_{\beta\alpha})X^{\alpha} + a_{\beta\alpha}\mathscr{B}^{\alpha}_{u} \overset{*}{=} (\partial_\mu \sigma)\overset{\lambda}{e}_{\beta} + \sigma\nabla_u \overset{\lambda}{e}_{\beta},$$

also auf X_n

(II. 40) $$a_{\beta\mu} \overset{*}{=} (\partial_\mu\sigma)\overset{\lambda}{e}_{\beta} - \sigma\Pi^{\lambda}_{u\beta}.$$

Es ist also nicht nur $\Pi^{\lambda}_{\mu\lambda}$, sondern auch $\Pi^{\lambda}_{u\lambda}$ auf X_n bekannt.

Differentiation von (II. 33) nach X^{λ} ergibt in H_{n+1}

(II. 41) $$(\partial_\lambda \Pi^{\delta}_{\gamma\beta})a_{\delta\alpha} + (\partial_\lambda\Pi^{\delta}_{\gamma\alpha})a_{\delta\beta} = \partial_\lambda\partial_\gamma a_{\beta\alpha} - 2\Pi^{\delta}_{\gamma\beta}\overset{0}{R}_{\lambda\delta\alpha} - 2\Pi^{\delta}_{\gamma\alpha}\overset{0}{R}_{\lambda\delta\beta}.$$

Schreiben wir für die rechte Seite $2\overset{1}{R}_{\gamma\beta\alpha}$

(II. 42) $$2\overset{1}{R}_{\gamma\beta\alpha} \overset{*}{=} \partial_\lambda\partial_\gamma a_{\beta\alpha} - \Pi^{\delta}_{\gamma\beta}\partial_\lambda a_{\delta\alpha} - \Pi^{\delta}_{\gamma\alpha}\partial_\lambda a_{\delta\beta},$$

so folgt in H_{n+1}

(II. 43) $$\partial_\lambda\Pi^{\alpha}_{\gamma\beta} \overset{*}{=} a^{\alpha\delta}(\overset{1}{R}_{\gamma\beta\delta} + \overset{1}{R}_{\beta\gamma\delta} - \overset{1}{R}_{\delta\gamma\beta}).$$

Aus (II. 42) geht hervor (der Grad von $\partial_\lambda a_{\beta\alpha}$ ist -1), daß in H_{n+1}

(II. 44) $$2X^{\gamma}\overset{1}{R}_{\gamma\lambda\varkappa} \overset{*}{=} -\partial_\lambda a_{\lambda\varkappa} \overset{*}{=} -2\overset{0}{R}_{\lambda\lambda\varkappa}$$

ist. Aus (II. 42) folgt ferner unter Berücksichtigung von (I. 27), (II. 10), (II. 33) und (II. 40) auf X_n

(II. 45) $$\begin{aligned} 2X^{\alpha}\overset{1}{R}_{u\lambda\alpha} &\overset{*}{=} X^{\alpha}\partial_\lambda\partial_\mu a_{\lambda\alpha} - \Pi^{\delta}_{u\lambda}(\partial_\lambda a_{\delta\alpha})X^{\alpha} \\ &\overset{*}{=} \partial_u(\sigma\Pi^{\lambda}_{\lambda\lambda}) - \partial_\lambda a_{\lambda u} - \sigma\Pi^{\delta}_{u\lambda}\Pi^{\lambda}_{\lambda\delta} \\ &\overset{*}{=} -\partial_\lambda a_{\lambda u} + a_{u\lambda}\Pi^{\lambda}_{\lambda\lambda} + B. \end{aligned}$$

(II. 44) und (II. 45), angewandt auf (II. 43) für $\alpha = \lambda$, $\gamma = \mu$, $\beta = \lambda$, ergeben auf X_n

(II. 46) $$\begin{aligned} \partial_\lambda\Pi^{\lambda}_{u\lambda} &\overset{*}{=} \sigma^{-1}X^{\alpha}(\overset{1}{R}_{u\lambda\alpha} + \overset{1}{R}_{\lambda u\alpha} - \overset{1}{R}_{\alpha\mu\lambda}) \\ &\overset{*}{=} -\sigma^{-1}\partial_\lambda a_{\lambda\mu} + \sigma^{-1}a_{u\lambda}\Pi^{\lambda}_{\lambda\lambda} + \tfrac{1}{2}\sigma^{-1}\partial_\lambda a_{\lambda u} + B \\ &\overset{*}{=} -\sigma^{-1}\overset{0}{R}_{\lambda u\lambda} + \sigma^{-1}a_{\mu\lambda}\Pi^{\lambda}_{\lambda\lambda} + B. \end{aligned}$$

Es gibt nun noch einen anderen Weg, der zu einem Ausdruck für $\partial_\Delta \Pi^\Delta_{u\lambda}$ führt. Aus dem Verschwinden von $N^{\cdots\alpha}_{\alpha\gamma\beta}$ folgt für $\beta = \lambda$, $\gamma = \mu$ wegen (II. 28), (II. 38) und (II. 40) auf X_n

$$\begin{aligned}(\text{II. 47}) \qquad \partial_\Delta \Pi^\Delta_{u\lambda} \overset{*}{=} & -\partial_\varkappa \Pi^\varkappa_{u\lambda} + \Pi^\varkappa_{\mu\varrho}\Pi^\varrho_{\varkappa\lambda} + \Pi^\Delta_{u\varrho}\Pi^\varrho_{\Delta\lambda} + \Pi^\alpha_{u\Delta}\Pi^\Delta_{\alpha\lambda} \\ \overset{*}{=} & \tfrac{1}{2}\partial_\varkappa(\sigma^{-1}X^\varkappa \partial_\Delta a_{\lambda u}) + \Pi^\varkappa_{u\varrho}\Pi^\varrho_{\varkappa\lambda} - \sigma^{-1}a_{u\varrho}\Pi^\varrho_{\Delta\lambda} \\ & - \sigma^{-1}a_{\lambda\varrho}\Pi^\varrho_{u\Delta} + B.\end{aligned}$$

Nun ist $\Pi^\varkappa_{u\varrho}\Pi^\varrho_{\varkappa\lambda}$ auf X_n bekannt, da $\Pi^\alpha_{u\lambda}$ auf X_n mod X^α bekannt ist, so daß auf X_n

$$\begin{aligned}(\text{II. 48}) \qquad \partial_\Delta \Pi^\Delta_{u\lambda} &\overset{*}{=} \tfrac{1}{2}\sigma^{-1}\{(n+1)\partial_\Delta a_{\lambda u} - 2\partial_\Delta a_{\lambda u}\} - 2\sigma^{-1}\overset{0}{R}_{\Delta\mu\lambda} + B \\ &\overset{*}{=} (n-3)\sigma^{-1}\overset{0}{R}_{\Delta\mu\lambda} + B\end{aligned}$$

ist. Ein Vergleich von (II. 46) und (II. 48) lehrt, daß auf X_n

$$(\text{II. 49}) \qquad (n-2)\overset{0}{R}_{\Delta u\lambda} \overset{*}{=} a_{u\lambda}\Pi^\Delta_{\Delta\Delta} + B$$

ist. Aus (II. 35) folgt aber auf X_n

$$(\text{II. 50}) \qquad \Pi^\Delta_{\Delta\Delta} \overset{*}{=} 2a^{\Delta\alpha}\overset{0}{R}_{\Delta\Delta\alpha} - a^{\Delta\alpha}\overset{0}{R}_{\alpha\Delta\Delta} \overset{*}{=} 2a^{\Delta\alpha}\overset{0}{R}_{\Delta\Delta\alpha},$$

so daß auf X_n

$$(\text{II. 51}) \qquad (n-2)\overset{0}{R}_{\Delta\mu\nu} \overset{*}{=} 2a_{u\lambda}a^{\Delta\alpha}\overset{0}{R}_{\Delta\Delta\alpha} + B$$

ist. Nun ist laut (II. 11) $a^{\Delta\Delta} = 0$ auf X_n und aus (II. 37) folgt also auf X_n

$$(\text{II. 52}) \qquad \overset{0}{R}_{\Delta\mu\lambda}a^{u\lambda} + 2\overset{0}{R}_{\Delta\Delta\alpha}a^{\Delta\alpha} \overset{*}{=} 0,$$

so daß aus (II. 51) bei Überschiebung mit $a^{u\lambda}$ folgt auf X_n

$$(\text{II. 53}) \qquad -4(n-1)\overset{0}{R}_{\Delta\Delta\alpha}a^{\Delta\alpha} \overset{*}{=} B.$$

Für $n \neq 1$ ist wegen (II. 53) und (II. 36) also jetzt $\overset{0}{R}_{\Delta\Delta\alpha}$ bekannt, so daß nur noch $\overset{0}{R}_{\Delta u\lambda}$ fehlt. Aus (II. 51) folgt aber jetzt auf X_n

$$(\text{II. 54}) \qquad \boxed{\overset{0}{R}_{\Delta u\lambda} \overset{*}{=} \frac{1}{n-2}B,}$$

welche Gleichung für $n \neq 2$ $\overset{0}{R}_{\Delta\mu\lambda}$ auf X_n bestimmt. Damit sind jetzt $\partial_\gamma a_{\beta\alpha}$ und also auch $\Pi^\alpha_{\gamma\beta}$ auf X_n bekannt für $n > 2$.

3. Fortsetzung der Felder $a_{\beta\alpha}$ und $\Pi^\alpha_{\gamma\beta}$ über H_{n+1}.

Außer $a_{\beta\alpha}$ und $\Pi^\alpha_{\gamma\beta}$ sind auf X_n auch $\partial_\mu a_{\beta\alpha}$ und $\partial_u \Pi^\alpha_{\gamma\beta}$ bekannt. Dies gilt allgemein, schreiben wir wie oben stets B für irgendeinen Ausdruck, der auf X_n bekannt ist, so sind auch $\partial_u B$, $\partial_\nu \partial_\mu B$, usw. auf X_n

bekannt, aber $\partial_\Delta B$ und alle Ableitungen von $\partial_\Delta B$ brauchen nicht bekannt zu sein. Aus

(II. 55) $$\partial_\gamma a_{\beta\alpha} = \Pi^\delta_{\gamma\beta} a_{\delta\alpha} + \Pi^\delta_{\gamma\alpha} a_{\beta\delta}$$

folgt, daß auch $\partial_\Delta a_{\beta\alpha}$ auf X_n bekannt ist. $\partial_\Delta \Pi^\alpha_{\gamma\beta}$ und $\partial_\Delta \partial_\Delta a_{\beta\alpha}$ sind aber noch unbekannt. Differenziert man (II. 55) für $\gamma = \Delta$ einmal nach X^Δ, so folgt auf X_n

(II. 56) $$\partial_\Delta \partial_\Delta a_{\beta\alpha} \overset{*}{=} (\partial_\Delta \Pi^\delta_{\Delta\beta}) a_{\delta\alpha} + (\partial_\Delta \Pi^\delta_{\Delta\alpha}) a_{\beta\delta} + B$$

und $\partial_\Delta \partial_\Delta a_{\beta\alpha}$ ist also auf X_n bekannt, wenn $\partial_\Delta \Pi^\alpha_{\Delta\beta}$ dort bekannt ist. Umgekehrt läßt sich die Gleichung auf X_n

(II. 57) $$\partial_\Delta \partial_\gamma a_{\beta\alpha} \overset{*}{=} (\partial_\Delta \Pi^\delta_{\gamma\beta}) a_{\delta\alpha} + (\partial_\Delta \Pi^\delta_{\gamma\alpha}) a_{\beta\delta} + B$$

wegen der Symmetrie von $\partial_\Delta \Pi^\alpha_{\gamma\beta}$ in γ, β nach $\partial_\Delta \Pi^\alpha_{\gamma\beta}$ lösen. Da aber auf X_n

(II. 58) $$\partial_\Delta \partial_\mu a_{\beta\alpha} \overset{*}{=} \partial_\mu \partial_\Delta a_{\beta\alpha} \overset{*}{=} B$$

ist, folgt, daß $\partial_\Delta \Pi^\alpha_{\gamma\beta}$ auf X_n bekannt ist, wenn $\partial_\Delta \partial_\Delta a_{\beta\alpha}$ dort bekannt ist. Allgemein gilt, daß $\partial_{(p-2)} \Pi^\alpha_{\gamma\beta}$ (wir schreiben kurz $\partial_{(q)}$ für q-fache Differentiation nach X^Δ) auf X_n bekannt ist, wenn alle Ableitungen von $a_{\beta\alpha}$ bis einschließlich $\partial_{(p-1)} a_{\beta\alpha}$ auf X_n bekannt sind. Wir wollen nun annehmen, es sei gelungen, $\partial_{(p-1)} a_{\beta\alpha}$ und alle vorigen Ableitungen auf X_n zu bestimmen. Dann ist auch $\partial_{(p-2)} \Pi^\alpha_{\gamma\beta}$ auf X_n bekannt und es gilt $\partial_{(p)} a_{\beta\alpha}$ dort zu bestimmen.

Wir differenzieren (II. 55) $(p-1)$-mal nach X^Δ. Dann ergibt sich auf X_n

(II. 59) $$\partial_{(p-1)} \partial_\gamma a_{\beta\alpha} \overset{*}{=} (\partial_{(p-1)} \Pi^\delta_{\gamma\beta}) a_{\delta\alpha} + (\partial_{(p-1)} \Pi^\delta_{\gamma\alpha}) a_{\beta\delta} + B.$$

Schreiben wir kurz

(II. 60) $$2 \overset{p-1}{R}_{\gamma\beta\alpha} \overset{*}{=} 2 \overset{p-1}{R}_{\gamma\alpha\beta} \overset{*}{=} (\partial_{(p-1)} \Pi^\delta_{\gamma\beta}) a_{\delta\alpha} + (\partial_{(p-1)} \Pi^\delta_{\gamma\alpha}) a_{\beta\delta},$$

so ist auf X_n

(II. 61) $$2 \overset{p-1}{R}_{\gamma\beta\alpha} \overset{*}{=} \partial_{(p-1)} \partial_\gamma a_{\beta\alpha} + B,$$

woraus hervorgeht, daß auf X_n

(II. 62) $$\boxed{\overset{p-1}{R}_{\mu\beta\alpha} \overset{*}{=} B}$$

ist, und es bleibt nur $\overset{p-1}{R}_{\Delta\beta\alpha}$ auf X_n zu bestimmen. Der Grad von $\overset{p-1}{R}_{\gamma\beta\alpha}$ ist $-p$. Lösung von (II. 60) ergibt wegen der Symmetrie von $\Pi^\alpha_{\gamma\beta}$ in γ, β

(II. 63) $$\partial_{(p-1)} \Pi^\alpha_{\gamma\beta} \overset{*}{=} a^{\alpha\delta} (\overset{p-1}{R}_{\gamma\beta\delta} + \overset{p-1}{R}_{\beta\gamma\delta} - \overset{p-1}{R}_{\delta\beta\gamma}),$$

also auf X_n

(II. 64) $$\partial_{(p-1)} \Pi^\alpha_{\mu\lambda} \overset{*}{=} - a^{\alpha\Delta} \overset{p-1}{R}_{\Delta\mu\lambda} + B.$$

Anwendung von (II. 11) auf diese Gleichung ergibt auf X_n

$$\partial_{(p-1)} \Pi^{\alpha}_{\mu\lambda} \overset{*}{=} -\sigma^{-1} X^{\alpha} \overset{p-1}{R}_{\Delta\mu\lambda} + B \tag{II. 65}$$

und $\partial_{(p-1)} \Pi^{\alpha}_{\mu\lambda}$ ist also auf X_n bekannt mod X^{α}.

Da $N_{\alpha\Delta\Delta}{}^{\alpha} = 0$ ist in H_{n+1}, folgt auf X_n

$$\partial_{(p-1)} \Pi^{\Delta}_{\Delta\Delta} \overset{*}{=} \partial_{(p-2)} \partial_{\Delta} \Pi^{\Delta}_{\Delta\Delta} \overset{*}{=} B. \tag{II. 66}$$

Da aber $\Pi^{\varkappa}_{\Delta\Delta}$ in H_{n+1} verschwindet, folgt auf X_n

$$\partial_{(p-1)} \Pi^{\alpha}_{\Delta\Delta} \overset{*}{=} B, \tag{II. 67}$$

also wegen (II. 63) auf X_n

$$\boxed{\overset{p-1}{R}_{\Delta\Delta\beta} \overset{*}{=} \overset{p-1}{R}_{\Delta\beta\Delta} \overset{*}{=} B.} \tag{II. 68}$$

Es folgt aus (II. 33) nach Überschiebung mit X^{α}

$$(\partial_{[\gamma} a_{\beta]\alpha}) X^{\alpha} = 0. \tag{II. 69}$$

Setzen wir nun $\gamma = \Delta$, $\beta = \lambda$ in (II. 69) und differenzieren wir $(p-1)$-mal nach X^{Δ}, so ergibt sich

$$X^{\alpha} \partial_{(p)} a_{\lambda\alpha} \overset{*}{} B. \tag{II. 70}$$

Es bleibt noch $\overset{p-1}{R}_{\Delta\lambda\varkappa}$ auf X_n zu bestimmen. (N. B.: $\overset{p-1}{R}_{\Delta\lambda\varkappa} X^{\varkappa}$ ist auf X_n schon bekannt wegen (II. 70).) Differenzieren wir jetzt (II. 55) p-mal, so ergibt sich auf X_n

$$\begin{aligned} 2 \overset{p}{R}_{\gamma\beta\alpha} \overset{*}{=} \partial_{(p)} \partial_{\gamma} a_{\beta\alpha} - \binom{p}{1} (\partial_{(p-1)} \Pi^{\delta}_{\gamma\beta}) \partial_{\Delta} a_{\delta\alpha} \\ - \binom{p}{1} (\partial_{(p-1)} \Pi^{\delta}_{\gamma\alpha}) \partial_{\Delta} a_{\delta\beta} - \Pi^{\delta}_{\gamma\beta} \partial_{(p)} a_{\delta\alpha} - \Pi^{\delta}_{\gamma\alpha} \partial_{(p)} a_{\delta\beta} + B, \end{aligned} \tag{II. 71}$$

und daraus folgt auf X_n

$$2 X^{\gamma} \overset{p}{R}_{\gamma\lambda\varkappa} \overset{*}{=} X^{\gamma} \partial_{\gamma} \partial_{(p)} a_{\lambda\varkappa} + B \overset{*}{=} -p \partial_{(p)} a_{\lambda\varkappa} + B. \tag{II. 72}$$

Überschiebung von (II. 71) mit X^{α} ergibt wegen (II. 70)

$$2 X^{\alpha} \overset{p}{R}_{u\lambda\alpha} \overset{*}{=} (\partial_{(p)} \partial_{u} a_{\lambda\alpha}) X^{\alpha} - \binom{p}{1} (\partial_{(p-1)} \Pi^{\delta}_{u\lambda}) X^{\alpha} \partial_{\Delta} a_{\delta\alpha} + B. \tag{II. 73}$$

Nun ist infolge (II. 55) und (II. 11) auf X_n

$$X^{\alpha} \partial_{\Delta} a_{\delta\alpha} \overset{*}{=} \Pi^{\gamma}_{\Delta\delta} a_{\gamma\alpha} X^{\alpha} \overset{*}{=} \sigma \Pi^{\Delta}_{\Delta\delta}. \tag{II. 74}$$

und wir fanden oben, daß $\partial_{(p-1)} \Pi^{\delta}_{\mu\lambda}$ auf X_n mod X^{δ} bekannt ist. Dieser unbekannte Rest hat aber in (II. 73) keinen Einfluß, da $X^{\delta} \Pi^{\alpha}_{\Delta\delta} = 0$ ist, und der zweite Term im rechten Glied von (II. 73) ist also bekannt, so daß auf X_n gilt

$$2 X^{\alpha} \overset{p}{R}_{\mu\lambda\alpha} \overset{*}{=} (\partial_{(p)} \partial_{\mu} a_{\lambda\alpha}) X^{\alpha} + B. \tag{II. 75}$$

Ähnlich wie (II. 63) gilt auf einer um Eins höheren Stufe die Gleichung

$$\partial_{(p)} \Pi^{\alpha}_{\gamma\beta} \overset{*}{=} a^{\alpha\delta} (\overset{p}{R}_{\gamma\beta\delta} + \overset{p}{R}_{\beta\gamma\delta} - \overset{p}{R}_{\delta\gamma\beta}) \tag{II. 76}$$

und also auf X_n

$$\partial_{(p)} \Pi^{\lambda}_{\mu\lambda} \overset{*}{=} \sigma^{-1} X^{\alpha} (\overset{p}{R}_{\mu\lambda\alpha} + \overset{p}{R}_{\lambda\mu\alpha} - \overset{p}{R}_{\alpha\mu\lambda}). \tag{II. 77}$$

Setzen wir hier die Werte aus (II. 72) und (II. 75) ein, so folgt unter Berücksichtigung von (II. 70) auf X_n

$$\begin{aligned} \partial_{(p)} \Pi^{\lambda}_{\mu\lambda} &\overset{*}{=} \sigma^{-1} X^{\alpha} \partial_{(p)} \partial_{(\mu} a_{\lambda)\alpha} + \tfrac{1}{2} p \sigma^{-1} \partial_{(p)} a_{\mu\lambda} + B \\ &\overset{*}{=} \sigma^{-1} \partial_{(\mu} X^{\alpha} \partial_{(p)} a_{\lambda)\alpha} - \sigma^{-1} \partial_{(p)} a_{\mu\lambda} + \tfrac{1}{2} p \sigma^{-1} \partial_{(p)} a_{\mu\lambda} + B \\ &\overset{*}{=} \tfrac{1}{2} (p-2) \sigma^{-1} \partial_{(p)} a_{\mu\lambda} + B, \end{aligned} \tag{II. 78}$$

also auf X_n

$$\partial_{(p)} \Pi^{\lambda}_{\mu\lambda} \overset{*}{=} (p-2) \sigma^{-1} \overset{p-1}{R}_{\lambda\mu\lambda} + B. \tag{II. 79}$$

Wir bekommen einen anderen Ausdruck für $\partial_{(p)} \Pi^{\lambda}_{\mu\lambda}$ aus dem Verschwinden von $N^{\alpha \ldots}_{\alpha u \lambda}$:

$$0 \overset{*}{=} \partial_{(p-1)} (\partial_{\lambda} \Pi^{\lambda}_{u\lambda} + \partial_{\nu} \Pi^{\nu}_{u\lambda} - \Pi^{\alpha}_{u\delta} \Pi^{\delta}_{\alpha\lambda}), \tag{II. 80}$$

denn aus dieser Gleichung folgt unter Berücksichtigung von (II. 65) und (II. 63) auf X_n

$$\begin{aligned} \partial_{(p)} \Pi^{\lambda}_{u\lambda} &\overset{*}{=} - \partial_{\nu} \partial_{(p-1)} \Pi^{\nu}_{u\lambda} + (\partial_{(p-1)} \Pi^{\alpha}_{u\delta}) \Pi^{\delta}_{\alpha\lambda} + \Pi^{\alpha}_{u\delta} (\partial_{(p-1)} \Pi^{\delta}_{\alpha\lambda}) \\ &\overset{*}{=} \partial_{\lambda} (\sigma^{-1} X^{\nu} \overset{p-1}{R}_{\lambda u\lambda}) + 2 a^{\alpha\gamma} (\overset{p-1}{R}_{\lambda(u|\gamma|} - \overset{p-1}{R}_{\gamma\lambda(u)}) \Pi^{\lambda}_{\lambda)\alpha} + B. \end{aligned} \tag{II. 81}$$

Schreibt man nun die auf X_n gültige Gleichung (II. 40) in der Form

$$\Pi^{\lambda}_{u\beta} \overset{*}{=} \sigma^{-1} \{(\partial_u \sigma) \overset{\lambda}{e}_{\beta} - a_{\mu\beta}\}, \tag{II. 82}$$

so gibt dies, eingesetzt in (II. 81), unter Berücksichtigung von (II. 70), da X^{λ} auf X_n verschwindet, auf X_n

$$\begin{aligned} \partial_{(p)} \Pi^{\lambda}_{u\lambda} &\overset{*}{=} \partial_{\nu} (\sigma^{-1} X^{\nu} \overset{p-1}{R}_{\lambda u\lambda}) + 2 \sigma^{-2} \overset{p-1}{R}_{\lambda(u|\gamma|} X^{\gamma} \partial_{\lambda} \sigma \\ &\quad - 2 \sigma^{-2} \overset{p-1}{R}_{\gamma\lambda(u} X^{\gamma} \partial_{\lambda)} \sigma - 2 \sigma^{-1} \overset{p-1}{R}_{\lambda u\lambda} + 2 \sigma^{-1} \overset{p-1}{R}_{(u\lambda)\lambda} + B \\ &\overset{*}{=} \partial_{\nu} (\sigma^{-1} X^{\nu} \overset{p-1}{R}_{\lambda\mu\lambda}) - 2 \sigma^{-1} \overset{p-1}{R}_{\lambda\mu\lambda} + B \\ &\overset{*}{=} (n-p-2) \sigma^{-1} \overset{p-1}{R}_{\lambda\mu\lambda} + B. \end{aligned} \tag{II. 83}$$

Vergleich von (II. 79) und (II. 83) lehrt schließlich auf X_n

$$\boxed{(n-2p) \overset{p-1}{R}_{\lambda\mu\lambda} \overset{*}{=} B,} \tag{II. 84}$$

aus welcher Gleichung sich $\overset{p-1}{R}_{\lambda\mu\lambda}$ für $n \neq 2p$ bestimmen läßt. Bevor wir aber weitere Schlüsse ziehen, muß noch bemerkt werden, daß wir beim ersten Schritt (Bestimmung von $\overset{0}{R}_{\lambda\beta\alpha}$) zwar $N_{\beta\alpha} = 0$ voraussetzten,

aber von dieser Voraussetzung in (II. 47) nur $N_{\mu\lambda} = 0$ gebrauchten und beim zweiten Schritt ($p = 2$) nur $N_{\lambda\lambda} = 0$ (II. 66) und $\partial_\lambda N_{\mu\lambda} = 0$ (II. 80). Allgemein verwendeten wir $\partial_{(p-1)} N_{\mu\lambda} = 0$ beim p-ten Schritt (Bestimmung von $\overset{p-1}{R}_{\gamma\beta\alpha}$) und $\partial_{(p-1)} N_{\lambda\lambda} = 0$ beim $(p+1)$-ten Schritt (Bestimmung von $\overset{p}{R}_{\gamma\beta\alpha}$). Es ist also noch fraglich, ob $N_{\lambda\lambda}$, $\partial_\lambda N_{\lambda\lambda}$ usw. alle verschwinden und wir also tatsächlich eine H_{n+1} mit einem überall verschwindenden $N_{\beta\alpha}$ bekommen. Um dies sicherzustellen, beweisen wir, daß aus den auf X gültigen Gleichungen

$$\text{(II. 85)} \qquad \partial_{(q)} N_{\beta\alpha} \overset{*}{=} 0,\ q \leqq p-2;\ \partial_{(p-1)} N_{\mu\lambda} \overset{*}{=} 0$$

auf X_n folgt

$$\text{(II. 86)} \qquad (n-2p)\, \partial_{(p-1)} N_{\lambda\lambda} \overset{*}{=} 0.$$

Beweis: Wegen (II. 85) und $N_{\alpha\beta} X^\beta = 0$ ergibt sich auf X_n

$$\text{(II. 87)} \qquad \begin{aligned} &\nabla_{(q)} N_{\beta\alpha} \overset{*}{=} 0,\ q \leqq p-2;\ \nabla_{(p-1)} N_{\mu\lambda} \overset{*}{=} 0, \\ &\nabla_{(p-1)} N \overset{*}{=} a^{\mu\lambda} \nabla_{(p-1)} N_{\mu\lambda} + 2\sigma^{-1} X^\alpha \nabla_{(p-1)} N_{\lambda\alpha} \overset{*}{=} 0, \end{aligned}$$

wo $\nabla_{(q)}$ für $\nabla_\lambda \ldots \nabla_\lambda$ (q-mal) steht. Aus der Bianchischen Identität (I. 29) folgt, wie in einer V_{n+2}, daß in H_{n-1}

$$\text{(II. 88)} \qquad \nabla_\alpha G_\beta^{\ \alpha} = 0;\ G_\beta^{\ \alpha} = N_\beta^{\ \alpha} - \tfrac{1}{2} N \mathcal{R}_\beta^\alpha;\ N = N_\alpha^{\ \alpha}$$

ist. Durch $(p-1)$-fache kovariante Differentiation erhält man auf X_n

$$\text{(II. 89)} \quad a^{\sigma\varrho} \nabla_{(p-1)} \nabla_\sigma G_{\lambda\varrho} + \sigma^{-1} X^\alpha \nabla_{(p-1)} \nabla_\alpha G_{\lambda\lambda} + \sigma^{-1} X^\alpha \nabla_{(p)} G_{\alpha\lambda} \overset{*}{=} 0.$$

Wegen (II. 87) ist nun

$$\text{(II. 90)} \qquad \nabla_{(q)} G_{\beta\alpha} \overset{*}{=} 0,\ q \leqq p-2;\ \nabla_{(p-1)} G_{\lambda\varrho} \overset{*}{=} 0,$$

woraus sich ergibt, daß auf X_n

$$\text{(II. 91)} \qquad \nabla_{(p-1)} \nabla_\alpha G_{\beta\gamma} \overset{*}{=} \nabla_\alpha \nabla_{(p-1)} G_{\beta\gamma}$$

ist. Für (II. 89) kann man dann schreiben

$$\begin{aligned} &a^{\sigma\varrho} [\partial_\sigma \nabla_{(p-1)} G_{\lambda\varrho} - \Pi_{\sigma\lambda}^{\lambda} \nabla_\gamma \nabla_{(p-2)} G_{\lambda\varrho} - \ldots - \Pi_{\sigma\lambda}^{\gamma} \nabla_{(p-2)} \nabla_\gamma G_{\lambda\varrho} - \\ &\text{(II. 92)} \quad - \Pi_{\sigma\lambda}^{\varrho} \nabla_{(p-1)} G_{\varrho\varrho} - \Pi_{\sigma\lambda}^{\lambda} \nabla_{(p-1)} G_{\lambda\varrho} - \Pi_{\sigma\varrho}^{\lambda} \nabla_{(p-1)} G_{\lambda\varrho} - \Pi_{\sigma\varrho}^{\lambda} \nabla_{(p-1)} G_{\lambda\lambda}] - \\ &\quad - \sigma^{-1} (p+1) \nabla_{(p-1)} G_{\lambda\lambda} - \tfrac{1}{2} \sigma^{-1} \nabla_{(p)} N X^\alpha a_{\alpha\lambda} - \sigma^{-1} p \nabla_{(p-1)} G_{\lambda\lambda} \overset{*}{=} 0, \end{aligned}$$

was unter Berücksichtigung von (II. 40) und (II. 90) übergeht in

$$\text{(II. 93)} \quad \sigma^{-1} \nabla_{(p-1)} G_{\lambda\lambda} [1 + n - (p+1) - p] - \tfrac{1}{2} p\, a_{\lambda\lambda} \nabla_{(p-1)} N \overset{*}{=} 0$$

oder auf X_n, wegen (II. 87),

$$\text{(II. 93a)} \qquad (n-2p) \nabla_{(p-1)} G_{\lambda\lambda} \overset{*}{=} (n-2p)\, \partial_{(p-1)} N_{\lambda\lambda} \overset{*}{=} 0.$$

Aus dem bewiesenen Satze geht hervor, daß nach dem ersten Schritt schon feststeht, daß auch $N_{\lambda\lambda} \overset{*}{=} 0$ ist (auf X_n), denn für $n = 2$ läßt sich dieser Schritt ja gar nicht vollziehen, ebenso nach dem zweiten, daß auch $\partial_\lambda N_{\lambda\lambda} \overset{*}{=}$ ist, usw.

Gesetzt nun, es wäre $n > 2$ und der erste Schritt wäre vollzogen, dann sind (S. 613) auf X_n die $a_{\beta\alpha}$, $\Pi^{\alpha}_{\gamma\beta}$ und $\partial_\lambda a_{\beta\alpha}$ bekannt. Ist nun $n \neq 4$, so ergeben (II. 62) (II. 68) und (II. 84) $\overset{1}{R}_{\gamma\beta\alpha}$ und somit $\partial_\lambda \partial_\lambda a_{\beta\alpha}$ und $\partial_\lambda \Pi^{\alpha}_{\gamma\beta}$ auf X_n. Ist $n \neq 6$, so lassen sich aus denselben Gleichungen $\overset{2}{R}_{\gamma\beta\alpha}$ und somit $\partial_\lambda \partial_\lambda \partial_\lambda a_{\beta\alpha}$ und $\partial_\lambda \partial_\lambda \Pi^{\alpha}_{\gamma\beta}$ auf X_n bestimmen, usw. Für ungerades n lassen sich also alle Ableitungen auf X_n bestimmen und damit ist für $a_{\beta\alpha}$ und $\Pi^{\alpha}_{\gamma\beta}$ eine Reihenentwicklung über H_{n+1} festgelegt. Ist die Übertragung in der H_{n+1} in dieser Weise festgelegt, so muß sich natürlich später herausstellen, daß sie keine Größen in der X_n induziert, die keine Differentialkomitanten von g_{ih} wären. Schreibt man

$$g_{ih} = \sigma^{-2} \overset{-1}{E}{}^{\lambda\varkappa}_{i\,h} \mathcal{B}^{\beta\alpha}_{\lambda\varkappa} a_{\beta\alpha}, \tag{II. 94}$$

so hat diese Größe den Index $\left\{0, \frac{+2}{n+2}; 0, 0; 0\right\}$ und ist proportional zu g_{ih}. Man kann sie also verwenden zur Bildung des Konformkrümmungsaffinors $C^{\cdot\cdot\cdot h}_{kji}$, der ja durch einen skalaren Faktor in g_{ih} nicht beeinflußt wird. Sodann lehrt eine nicht komplizierte Rechnung, daß tatsächlich

$$N_{\delta\gamma\beta}{}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}\, \mathcal{B}^{\delta\gamma\beta\varkappa}_{\mu\lambda\alpha}\, \overset{-1}{E}{}^{\mu\lambda}_{ji}\, E^{h}_{\varkappa} = C^{\cdot\cdot\cdot h}_{kji} \tag{II. 95}$$

ist. Man beachte, daß der Ausdruck links, trotz der Unbestimmtheit von $\mathcal{B}^{\varkappa}_{\alpha}$ und $\overset{-1}{E}{}^{\varkappa}_{h}$, vollständig bestimmt ist, da sowohl $N_{\delta\gamma\beta}{}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}\, t_\alpha$ als $N_{\delta\gamma\beta\alpha} X^\alpha$ verschwindet.

Für gerades $n = 2p$ kommt man stets zu einer Ableitung, die sich nicht bestimmen läßt. Es entsteht statt dessen aus (II. 54) bzw. (II. 84) eine Gleichung von der Form

$$0 = B \tag{II. 96}$$

und diese ist entweder identisch erfüllt, oder sie stellt eine Bedingung dar, die erfüllt sein muß, wenn überhaupt eine Einbettung der verlangten Art möglich sein soll. Aber auch wenn diese Bedingung erfüllt ist, kann man die eine Ableitung oder $\overset{p-1}{R}_{\lambda\lambda\varkappa}$ nicht beliebig wählen. Aus der Forderung $\partial_{(p-1)} N_{\lambda\lambda} = 0$ (vgl. (II. 86)) ergibt sich noch eine Differentialgleichung für $\overset{p-1}{R}_{\lambda\lambda\varkappa}$:

$$a^{\varkappa\sigma} \partial \overset{p-1}{R}_{\lambda\lambda\sigma} - \Pi^{\varrho}_{\varkappa\lambda} a^{\varkappa\sigma} \overset{p-1}{R}_{\lambda\varrho\sigma} - \Pi^{\varrho}_{\alpha\gamma} a^{\alpha\gamma} \overset{p-1}{R}_{\lambda\lambda\varrho} - p\, \Pi^{\lambda}_{\lambda\varepsilon} a^{\varepsilon\varkappa} \overset{p-1}{R}_{\lambda\lambda\varkappa} \overset{*}{=} B^{21}), \tag{II. 97}$$

die aber $\overset{p-1}{R}_{\lambda\lambda\varkappa}$ nicht eindeutig festlegt.

---

21) Für $n = 2$ beweist man leicht, daß die Bedingung (II. 96) identisch erfüllt ist und (II. 97) unbeschränkt integrabel. Außerdem stellt sich heraus, daß $N_{\delta\gamma\beta}{}^{\cdot\cdot\cdot\alpha}$ stets in H_{n+1} verschwindet, so daß man bei jeder Wahl von $\partial_\lambda a_{\lambda\varkappa}$ auf die bekannte Einbettung einer Quadrik in P_3 zurückkommt.

Wir wollen den Fall, wo n gerade ist, hier nicht weiter untersuchen und bringen jetzt zunächst noch eine andere Methode zur Bestimmung der $\Pi^{\alpha}_{\gamma\beta}$ auf X_n.

4. Festlegung der $\Pi^{\alpha}_{\beta\gamma}$ auf X_n mit Hilfe eines anholonomen Bezugssystems.

Die in II. 2 verwendete Methode zur Festlegung der $\Pi^{\alpha}_{\gamma\beta}$ auf X_n macht keinen Gebrauch von nichtholonomen Bezugssystemen.

Da wir in II. 3 zur Festlegung der Felder $a_{\beta\alpha}$ und $\Pi^{\alpha}_{\gamma\beta}$ in H_{n-1} am besten mit holonomen Bezugssysteme auskommen konnten, lag es nahe, auch in II. 2 zur Festlegung der $\Pi^{\alpha}_{\gamma\beta}$ über X_n nur solche Bezugssysteme zu verwenden. Diese Festlegung läßt sich nun aber auch mit einem anholonomen Bezugssystem durchführen. Obwohl diese Rechnung etwas komplizierter ist, wollen wir sie hier doch als Anhang bringen, da sie an die Cartansche Methode von 1923[22]) anschließt.

In H_{n+1} definieren wir, *nur über* X_n, ein anholonomes Bezugssystem (a) mit den projektiven Maßvektoren

$$e^{\alpha},\ \overset{\mathfrak{b}}{e}_{\beta};\quad \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g} = 0, 1, \ldots, n, \infty,$$

und zwar folgendermaßen. Zunächst wird $\lfloor \overset{0}{e}{}^{\alpha} \rfloor$ im Kontaktpunkt gewählt:

(II. 98) $$e^{\alpha} = \varepsilon X^{\alpha};\quad \text{also}\quad e^{\lambda} = \varepsilon X^{\lambda} = 0.$$

ε ist eine beliebig auf X_n gewählte Dichte mit Index $\left\{-1, \frac{1}{n+2}; -1, 0; 0\right\}$, $\overset{0}{e}{}^{\alpha}$ also eine projektive Vektordichte mit Index $\left\{0, \frac{1}{n+2}; 0, 0; 0\right\}$. Sodann wählen wir

(II. 99) $$\overset{\infty}{e}_{\beta} = a_{\beta\alpha}\overset{0}{e}{}^{\alpha};\quad \left\{0, -\frac{1}{n+2}; 0, 0; 0\right\}.$$

$\lfloor \overset{\infty}{e}_{\beta} \rfloor$ ist also die lokale Tangentialhyperebene der X_n:

(II. 100) $$\overset{\infty}{e}_{\lambda} \stackrel{*}{=} 0;\quad \overset{\infty}{e}_{\lambda} \stackrel{*}{=} \varepsilon\, a_{\lambda\lambda} X^{\lambda}.$$

Der Übergang von $\Pi^{\alpha}_{\gamma\beta}$ zu $\Pi^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}$ lautet

(II. 101) $$\Pi^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c}\mathfrak{b}} = \mathcal{A}^{\mathfrak{a}}_{\alpha}\mathcal{A}^{\gamma}_{\mathfrak{c}}\mathcal{A}^{\beta}_{\mathfrak{b}}\Pi^{\alpha}_{\gamma\beta} + \mathcal{A}^{\mathfrak{a}}_{\delta}\partial_{\mathfrak{c}}\mathcal{A}^{\delta}_{\mathfrak{b}};\quad \partial_{\mathfrak{c}} = \mathcal{A}^{\gamma}_{\mathfrak{c}}\partial_{\gamma},$$

woraus u. a. folgt

(II. 102) $$\Pi^{\mathfrak{a}}_{0\mathfrak{b}} \stackrel{*}{=} \varepsilon X^{\mathfrak{c}}\Pi^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c}\mathfrak{b}} \stackrel{*}{=} 0 + \varepsilon\mathcal{A}^{\mathfrak{a}}_{\delta}X^{\mathfrak{c}}\mathcal{A}^{\alpha}_{\mathfrak{c}}\partial_{\alpha}\mathcal{A}^{\delta}_{\mathfrak{b}} \stackrel{*}{=} 0,$$

da $\mathcal{A}^{\alpha}_{\mathfrak{b}}$ den Grad Null hat, und

(II. 103) $$\Pi^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c}a} \stackrel{*}{=} 0 + \partial_{\mathfrak{c}}\log \mathrm{Det}\,(\mathcal{A}^{\alpha}_{\mathfrak{b}})$$

---

[22]) L. c. [Fußn. [7])].

(N. B. Π^a_{cb} braucht nicht symmetrisch in c b zu sein, obwohl $\Pi^\alpha_{\gamma\beta}$ symmetrisch in $\gamma\beta$ ist).

Wir machen nun $\Pi^a_{ca} \overset{*}{=} 0$ durch die Forderung

(II. 104) $$\text{Det}\,(\mathcal{A}^\alpha_\mathfrak{b}) = +1.$$

Außerdem soll noch $\Pi^0_{u0} = \mathcal{B}^c_\mu \Pi^0_{c0}$ zum Verschwinden gebracht werden. Da

(II. 105) $$\Pi^0_{u0} \overset{*}{=} \mathcal{A}^{\beta 0}_{0\alpha} \Pi^\alpha_{u\beta} + \mathcal{A}^0_\delta \partial_\mu \mathcal{A}^\delta_0$$

ist und

(II. 106) $$\mathcal{A}^\beta_0 \Pi^\alpha_{\gamma\beta} \overset{*}{=} \underset{0}{e}{}^\beta \Pi^\alpha_{\gamma\beta} = \varepsilon X^\beta \Pi^\alpha_{\gamma\beta} = 0$$

ist, folgt

(II. 107) $$0 \overset{*}{=} \mathcal{A}^0_\delta \partial_u \mathcal{A}^\delta_0$$

(diese Gleichung ist unabhängig von der Wahl der Übertragung $\Pi^\alpha_{\gamma\beta}$) oder

(II. 108) $$0 \overset{*}{=} \mathcal{A}^0_\delta \partial_u \varepsilon X^\delta = \partial_\mu \log \varepsilon + \varepsilon \overset{0}{e}_\mu$$

oder

(II. 109) $$\overset{0}{e}_\mu = \partial_\mu \varepsilon^{-1}; \quad \left\{0, -\frac{1}{n+2}; 0, 0; 0\right\}.$$

$\overset{0}{e}_\lambda$ wird bestimmt durch die Forderung, daß $[\overset{0}{e}_\beta]$ die lokale Quadrik tangiert:

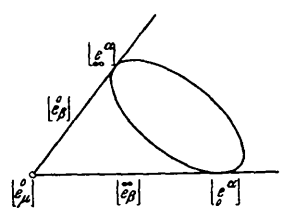
(II. 110) $$\overset{0}{e}_\beta \overset{0}{e}_\alpha a^{\beta\alpha} = \overset{0}{e}_\lambda \overset{0}{e}_\varkappa a^{\lambda\varkappa} + 2\,\overset{0}{e}_\lambda \overset{0}{e}_\lambda a^{\lambda\lambda} = 0.$$

Jetzt setzen wir noch:

(II. 111) $$\underset{\infty}{e}{}^\alpha = a^{\alpha\beta} \overset{0}{e}_\beta; \quad \left\{0, \frac{1}{n+2}; 0, 0; 0\right\}.$$

Geometrisch bedeutet dies folgendes:

$[\underset{\infty}{e}{}^\alpha]$ ist ein Punkt der lokalen Quadrik. $[\overset{0}{e}_\beta]$ ist die zugehörige tangierende Hyperebene, diese schneidet die tangierende Hyperebene $[\overset{\infty}{e}_\beta]$ der X_n in der P_{n-1} $[\overset{0}{e}_u]$, und ist so gewählt, *daß* $\overset{0}{e}_\mu$ *Gradient sein kann.*



Die übrigen Maßvektoren $\overset{\mathfrak{h}}{e}_\beta$, $\underset{\mathfrak{h}}{e}{}^\beta$; $(\mathfrak{h}, \ldots, \mathfrak{m} = 1, 2, \ldots, \mathfrak{n})$ werden so gewählt, daß die Quadrik die Form

(II. 112) $$a_{\beta\alpha} = \sum \overset{\mathfrak{h}}{e}_\beta \overset{\mathfrak{h}}{e}_\alpha + \overset{0}{e}_\beta \overset{\infty}{e}_\alpha + \overset{\infty}{e}_\beta \overset{0}{e}_\alpha$$

bekommt. Dabei kann gleichzeitig die Forderung $\text{Det}\,\mathcal{A}^\alpha_\mathfrak{b}) = 1$ erfüllt werden, da sowohl $\text{Det}\,(a_{\beta\alpha}) = -1$ als $\text{Det}\,(a_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}}) = -1$ ist. Diese

n weiteren Maßvektoren sind dadurch bis auf *orthogonale* Transformationen festgelegt.

Wir wollen nun die Übertragungsparameter $\Pi^{\mathfrak{a}}_{\mu\mathfrak{b}} = \mathcal{B}^{\mathfrak{c}}_{\mu}\Pi^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}$ in bezug auf dieses System auf X_n festlegen. Da

$$\Pi^{\mathfrak{a}}_{u0} \overset{*}{=} \nabla_u \overset{\mathfrak{a}}{e}_0 \overset{*}{=} \nabla_u \varepsilon X^{\mathfrak{a}} \overset{*}{=} (\partial_u \varepsilon) X^{\mathfrak{a}} + \varepsilon \mathcal{A}^{\mathfrak{a}}_u \tag{II. 113}$$

ist, gilt

$$\boxed{\Pi^{\mathfrak{b}}_{\mu 0} \overset{*}{=} \varepsilon \overset{\mathfrak{b}}{e}_{\mu}.} \tag{II. 114}$$

Bekannt sind schon $\Pi^{\mathfrak{a}}_{\mu\mathfrak{a}} \overset{*}{=} 0$ und $\Pi^{0}_{\mu 0} \overset{*}{=} 0$. Infolge der ersten Gleichung verschwindet der Unterschied zwischen den Übertragungsparametern für Vektoren und Vektordichten. Da

$$\begin{aligned} a_{\mathfrak{b}\mathfrak{i}} &\overset{*}{=} \delta^{\mathfrak{b}}_{\mathfrak{i}}, \\ a_{0\infty} &= a_{\infty 0} = 1, \\ a_{00} &= a_{\infty\infty} = 0 \end{aligned} \tag{II. 115}$$

ist, gilt

$$0 = \nabla_\mu a_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}} \overset{*}{=} -\Pi^{\mathfrak{c}}_{u\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{c}\mathfrak{a}} - \Pi^{\mathfrak{c}}_{\mu\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}, \tag{II. 116}$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ \Pi^{\mathfrak{b}}_{\mu\mathfrak{i}} \overset{*}{=} -\Pi^{\mathfrak{i}}_{\mu\mathfrak{b}}, \\ &\text{b)}\ \Pi^{0}_{\mu\mathfrak{i}} \overset{*}{=} -\Pi^{\mathfrak{i}}_{u\infty};\quad \Pi^{\infty}_{\mu\mathfrak{i}} \overset{*}{=} -\Pi^{\mathfrak{i}}_{\mu 0}, \\ &\text{c)}\ \Pi^{0}_{\mu 0} \overset{*}{=} -\Pi^{\infty}_{\mu\infty} \overset{*}{=} 0, \\ &\text{d)}\ \Pi^{\infty}_{\mu 0} \overset{*}{=} -\Pi^{\infty}_{\mu 0} \overset{*}{=} 0;\quad \Pi^{0}_{\mu\infty} \overset{*}{=} -\Pi^{0}_{\mu\infty} \overset{*}{=} 0. \end{aligned} \tag{II. 117}$$

Aus (II. 112) folgt

$$a_{\lambda\varkappa} \overset{*}{=} \mathcal{A}^{\beta\alpha}_{\lambda\varkappa} a_{\beta\alpha} \overset{*}{=} \sum \overset{\mathfrak{b}}{e}_{\lambda} \overset{\mathfrak{b}}{e}_{\varkappa}. \tag{II. 118}$$

Nun ist die Umkehrung $\overset{-1}{E}{}^{\varkappa}_{i}$ von E^{h}_{λ} mod $x^{\varkappa}$ bestimmt (S. 605). Da aber $X^{\lambda} = 0$ ist auf X_n, ist auf X_n

$$a_{\lambda\varkappa} x^{\varkappa} \overset{*}{=} a_{\lambda\alpha} X^{\alpha} \overset{*}{=} \varepsilon^{-1} \overset{\infty}{e}_{\lambda} \overset{*}{=} 0 \tag{II. 119}$$

und infolgedessen ist

$$g_{ih} \overset{*}{=} \varepsilon^2 \overset{-1}{E}{}^{\lambda\varkappa}_{ih} a_{\lambda\varkappa} \overset{*}{=} \varepsilon^2 \overset{-1}{E}{}^{\lambda\varkappa}_{ih} \sum \overset{\mathfrak{b}}{e}_{\lambda} \overset{\mathfrak{b}}{e}_{\varkappa} \tag{II. 120}$$

ein Tensor vom Grad Null und vom Range n, dessen Bestimmungszahlen den Bestimmungszahlen der Dichte $\mathfrak{g}_{ih}$ proportional sind. Aus demselben Grunde ist

$$\overset{\mathfrak{b}}{i}_i \overset{*}{=} \varepsilon \overset{-1}{E}{}^{\lambda}_{i} \overset{\mathfrak{b}}{e}_{\lambda} \tag{II. 121}$$

ein Vektor vom Grade Null und es ist

$$g_{ih} = \sum \overset{\mathfrak{b}}{i}_i \overset{\mathfrak{b}}{i}_h. \tag{II. 122}$$

Die n Vektoren $\overset{\mathfrak{h}}{i}_i$ sind also gegenseitig orthogonale Einheitsvektoren in bezug auf g_{ih}. Sie bestimmen in X_n ein *anholonomes* Koordinatensystem ($\mathfrak{h}$).

In bezug auf den Hilfstensor g_{ih} bilden wir in gewöhnlicher Weise die Übertragungsparameter

$$\text{(II. 123)} \qquad \Gamma^{\mathfrak{h}}_{\mathfrak{j}\mathfrak{i}} \overset{*}{=} -{}'\Omega^{\mathfrak{h}}_{\mathfrak{j}\mathfrak{i}} + g_{\mathfrak{i}m}\, g^{\mathfrak{h}\mathfrak{k}}\, {}'\Omega^{\mathfrak{m}}_{\mathfrak{j}\mathfrak{k}} + g_{\mathfrak{j}m}\, g^{\mathfrak{h}\mathfrak{k}}\, {}'\Omega^{\mathfrak{m}}_{\mathfrak{i}\mathfrak{k}}$$ [23])

(${}'\Omega^{\mathfrak{h}}_{\mathfrak{j}\mathfrak{i}}$ sind die Bestimmungszahlen des Anholonomitätsobjekts der X_n [24]) und bemerken, daß die Gleichung (II. 123) folgt aus:

$$\text{(II. 124)} \qquad \begin{aligned} \Gamma^{\mathfrak{h}}_{\mathfrak{j}\mathfrak{i}} &\overset{*}{=} -\Gamma^{\mathfrak{i}}_{\mathfrak{j}\mathfrak{h}} \\ \Gamma^{\mathfrak{h}}_{[\mathfrak{j}\mathfrak{i}]} &\overset{*}{=} -{}'\Omega^{\mathfrak{h}}_{\mathfrak{j}\mathfrak{i}}. \end{aligned}$$

Wir beweisen jetzt, daß aus $\nabla_\mu a_{\beta\alpha} = 0$ folgt:

$$\text{(II. 125)} \qquad \Pi^{\mathfrak{h}}_{\mathfrak{j}\mathfrak{i}} \overset{*}{=} \varepsilon\, \Gamma^{\mathfrak{h}}_{\mathfrak{j}\mathfrak{i}}.$$

Zum Beweise haben wir nur zu zeigen, daß

$$\text{(II. 126)} \qquad \begin{aligned} &\text{a)}\quad \Pi^{\mathfrak{h}}_{\mathfrak{j}\mathfrak{i}} \overset{*}{=} -\Pi^{\mathfrak{i}}_{\mathfrak{j}\mathfrak{h}}, \\ &\text{b)}\quad \Pi^{\mathfrak{h}}_{[\mathfrak{j}\mathfrak{i}]} \overset{*}{=} -\varepsilon\, {}'\Omega^{\mathfrak{h}}_{\mathfrak{j}\mathfrak{i}} \end{aligned}$$

ist. Die erste dieser Gleichungen folgt schon aus (II. 117). Um die zweite abzuleiten, differenzieren und alternieren wir die Umkehrung der Gleichung (II. 121)

$$\text{(II. 127)} \qquad E^{\lambda}_{\mu}\, \overset{\mathfrak{h}}{i}_i \overset{*}{=} \varepsilon\, \overset{\mathfrak{h}}{e}_{\mu}$$

und beachten dabei, daß (α) und (h) holonome Systeme sind, ($\mathfrak{a}$) und ($\mathfrak{h}$) dagegen anholonome Systeme:

$$\text{(II. 128)} \qquad \begin{aligned} \partial_{[\nu}\big(E^{\lambda}_{\mu]}\, \overset{\mathfrak{h}}{i}_i\big) &\overset{*}{=} \partial_{[\nu}\big(\varepsilon\, \overset{\mathfrak{h}}{e}_{\mu]}\big), \\ E^{\mathfrak{j}\mathfrak{i}}_{\nu\mu}\, \partial_{[\mathfrak{j}}\, \overset{\mathfrak{h}}{i}_{\mathfrak{i}]} &\overset{*}{=} \big(\partial_{[\nu}\varepsilon\big)\, \overset{\mathfrak{h}}{e}_{\mu]} + \varepsilon\, \partial_{[\nu}\, \overset{\mathfrak{h}}{e}_{\mu]}, \\ E^{\mathfrak{l}\mathfrak{i}}_{\nu\mu}\, {}'\Omega^{\mathfrak{h}}_{\mathfrak{j}\mathfrak{i}} &\overset{*}{=} \big(\partial_{[\nu}\varepsilon\big)\, \overset{\mathfrak{h}}{e}_{\mu]} + \varepsilon\, \mathcal{B}^{\gamma}_{[\nu}\, \partial_{|\gamma|}\, \mathcal{B}^{\beta}_{\mu]}\, \overset{\mathfrak{h}}{e}_{\beta}, \\ E^{\mathfrak{l}\mathfrak{i}}_{\nu\mu}\, {}'\Omega^{\mathfrak{h}}_{\mathfrak{j}\mathfrak{i}} &\overset{*}{=} \big(\partial_{[\nu}\varepsilon\big)\, \overset{\mathfrak{h}}{e}_{\mu]} + \varepsilon\, \mathcal{B}^{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}_{\nu\mu}\, \Omega^{\mathfrak{h}}_{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}, \end{aligned}$$

wo $\Omega^{\alpha}_{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}$ das Anholonomitätsobjekt der H_{n+1} ist. Nun ist $\mathcal{B}^{\infty}_{\lambda} \overset{*}{=} \overset{\infty}{e}_{\lambda} \overset{*}{=} 0$, so daß

$$\text{(II. 129)} \qquad \varepsilon\, \mathcal{B}^{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}_{\nu\mu}\, \Omega^{\mathfrak{h}}_{\mathfrak{c}\mathfrak{b}} \overset{*}{=} \varepsilon\, \mathcal{B}^{\mathfrak{l}\mathfrak{i}}_{\nu\mu}\, \Omega^{\mathfrak{h}}_{\mathfrak{j}\mathfrak{i}} + 2\,\varepsilon\, \mathcal{B}^{\mathfrak{0}\mathfrak{i}}_{[\nu\mu]}\, \Omega^{\mathfrak{h}}_{\mathfrak{0}\mathfrak{i}}$$

ist. Ferner ist

$$\text{(II. 130)} \qquad \Omega^{\mathfrak{h}}_{\mathfrak{0}\mathfrak{i}} \overset{*}{=} \mathcal{A}^{\gamma}_{\mathfrak{0}\mathfrak{i}}\, \mathcal{B}^{\beta}_{[\gamma}\, \partial_{[\gamma}\, \mathcal{A}^{\mathfrak{h}}_{\beta]} \overset{*}{=} \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\, X^{\gamma}\, \overset{\beta}{e}_{\mathfrak{i}}\, (\partial_{\gamma}\, \overset{\mathfrak{h}}{e}_{\beta} - \partial_{\beta}\, \overset{\mathfrak{h}}{e}_{\gamma}) \overset{*}{=} \tfrac{1}{2}\,\varepsilon\, \delta^{\mathfrak{h}}_{\mathfrak{i}},$$

---

[23]) Vgl. Einführung S. 85.

[24]) Vgl. Einführung S. 68.

so daß infolge (II. 109)

(II. 131) $$E^{\dot{1}\dot{1}}_{\nu\mu}\,{}'\Omega^{\mathfrak{h}}_{\dot{1}\dot{1}} \overset{*}{=} \varepsilon\,\mathcal{B}^{\dot{1}\dot{1}}_{\nu\mu}\,\Omega^{\mathfrak{h}}_{\dot{1}\dot{1}} + (\partial_{[\nu}\,\varepsilon)\,\overset{\mathfrak{h}}{e}_{\mu]} + \varepsilon^{2}\,\overset{0}{e}_{[\nu}\,\overset{\mathfrak{h}}{e}_{\mu]} \overset{*}{=} \varepsilon\,\mathcal{B}^{\dot{1}\dot{1}}_{\nu\mu}\,\Omega^{\mathfrak{h}}_{\dot{1}\dot{1}}$$

ist. Nun folgt aus (II. 127)

(II. 132) $$E^{\mathfrak{h}}_{u} \overset{*}{=} \varepsilon\,\mathcal{B}^{\mathfrak{h}}_{u},$$

und (II. 131) ist also gleichbedeutend mit

(II. 133) $$'\Omega^{\mathfrak{h}}_{\dot{1}\dot{1}} \overset{*}{=} \varepsilon^{-1}\,\Omega^{\mathfrak{h}}_{\dot{1}\dot{1}}.$$

Aus der Symmetrie von $\Pi^{\alpha}_{\gamma\beta}$ in $\gamma\,\beta$ folgt in üblicher Weise

(II. 134) $$\Pi^{\mathfrak{a}}_{[\mathfrak{c}\mathfrak{b}]} = -\,\Omega^{\mathfrak{a}}_{[\mathfrak{c}\mathfrak{b}]},$$

so daß

(II. 135) $$\Pi^{\mathfrak{h}}_{[\dot{1}\dot{1}]} = -\,\Omega^{\mathfrak{h}}_{\dot{1}\dot{1}} \overset{*}{=} -\,\varepsilon\,{}'\Omega^{\mathfrak{h}}_{\dot{1}\dot{1}}$$

ist, womit die Gleichung (II. 126 b) bewiesen ist.

Es gilt jetzt noch $\Pi^{0}_{\dot{1}\dot{1}}$ abzuleiten. Forderung ist, daß $N^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}\dot{\beta}\alpha}_{\dot{\lambda}\dot{u}\dot{\lambda}}$ verschwinden soll. Es genügt schon zu fordern, daß $N^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}\dot{\beta}\alpha}_{\dot{\lambda}\dot{u}\dot{\lambda}} = 0$ ist auf X_n. Da auf X_n

(II. 136) $$N^{\dot{\delta}\dot{\gamma}\dot{\beta}\delta}_{\dot{\lambda}\dot{u}\dot{\lambda}} \overset{*}{=} a^{\delta\varkappa}\,N_{\dot{\lambda}\dot{u}\dot{\lambda}\varkappa} \overset{*}{=} \varepsilon\,\sigma^{-1}\,X^{\varkappa}\,N_{\dot{\lambda}\dot{u}\dot{\lambda}\varkappa} \overset{*}{=} 0$$

ist (I. 30), ist dies gleichbedeutend mit der Forderung, daß auf X_n

(II. 137) $$N^{\dot{\gamma}\dot{\beta}\dot{\gamma}\varkappa}_{\dot{\lambda}\dot{u}\dot{\lambda}} = 0$$

ist. Da $X^{\delta}\,N^{\dot{\delta}\dot{\gamma}\dot{\alpha}\dot{\beta}}_{\dot{\delta}\dot{\gamma}\dot{\beta}} = 0$ und $X^{\beta}\,N^{\dot{\delta}\dot{\gamma}\dot{\beta}\alpha}_{\dot{\delta}\dot{\gamma}\dot{\beta}} = 0$ ist, ist $N^{\dot{0}\dot{\mathfrak{c}}\dot{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}}_{\dot{0}\dot{\mathfrak{c}}\dot{\mathfrak{b}}} = 0$ und $N^{\dot{\mathfrak{b}}\dot{\mathfrak{c}}\dot{0}\mathfrak{a}}_{\dot{\mathfrak{b}}\dot{\mathfrak{c}}\dot{0}} = 0$, so daß aus (II. 137) folgt

(II. 138) $$N^{\dot{\mathfrak{h}}\dot{1}\dot{1}\mathfrak{h}}_{\dot{\mathfrak{h}}\dot{1}\dot{1}} = 0.$$

Nun ist (erste zwei Indizes holonom, letzte zwei anholonom)

(II. 139) $$N^{\dot{k}\dot{j}\dot{1}\mathfrak{h}}_{\dot{k}\dot{j}\dot{1}} = 2\,\partial_{[k}\Pi^{\mathfrak{h}}_{j]\dot{1}} + 2\Pi^{\mathfrak{h}}_{[k|0|}\Pi^{0}_{j]\dot{1}} + 2\Pi^{\mathfrak{h}}_{[k|\mathfrak{m}|}\Pi^{\mathfrak{m}}_{j]\dot{1}} + 2\Pi^{\mathfrak{h}}_{[k|\infty|}\Pi^{\infty}_{j]\dot{1}},$$

in welcher Formel auf X_n

(II. 140) $$\Pi^{\mathfrak{a}}_{j\mathfrak{b}} = \overset{-1}{E}{}^{u}_{j}\,\mathcal{B}^{\mathfrak{c}}_{u}\,\Pi^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}, \quad \text{(N. B. } x^{u}\,\mathcal{B}^{\mathfrak{c}}_{\mu} = x^{u}\,\mathcal{B}^{\alpha}_{\mu}\,\mathcal{A}^{\mathfrak{c}}_{\alpha} = X^{\mathfrak{c}}\text{)},$$

ist. Da

(II. 141) $$\Gamma^{\mathfrak{h}}_{j\dot{1}} = A^{\dot{1}}_{j}\,\Gamma^{\mathfrak{h}}_{\dot{1}\dot{1}}$$

ist, folgt aus (II. 125) und (II. 132)

(II. 142) $$\boxed{\Pi^{\mathfrak{h}}_{j\dot{1}} \overset{*}{=} \Gamma^{\mathfrak{h}}_{j\dot{1}},}$$

und da ferner wegen (II. 114, 121)

(II. 143) $$\Pi^{\mathfrak{h}}_{j0} \overset{*}{=} \overset{-1}{E}{}^{u}_{j}\,\Pi^{\mathfrak{h}}_{u0} \overset{*}{=} \varepsilon\,\overset{-1}{E}{}^{u}_{j}\,\overset{\mathfrak{h}}{e}_{\mu} \overset{*}{=} \overset{\mathfrak{h}}{i}_{j}$$

ist, geht (II. 139) unter Berücksichtigung von (II. 141) und (II. 143) über in

(II. 144) $$N^{\dot{k}\dot{j}\dot{i}\mathfrak{h}}_{\dot{k}\dot{j}\dot{i}} \overset{*}{=} 2\,\partial_{[k}\Gamma^{\mathfrak{h}}_{j]i} + 2\,\Gamma^{\mathfrak{h}}_{[k|\mathfrak{l}|}\Gamma^{\mathfrak{l}}_{j]i} + 2\,\overset{\mathfrak{h}}{i}_{[k}\Pi^{0}_{j]i} + 2\Pi^{0}_{[k|\mathfrak{h}|}\overset{i}{i}_{j]}$$

$$\overset{*}{=} K^{\dot{k}\dot{j}\dot{i}\mathfrak{h}}_{\dot{k}\dot{j}\dot{i}} + 2\,\overset{\mathfrak{h}}{i}_{[k}\Pi^{0}_{j]i} + 2\,\overset{i}{i}_{[j}\Pi^{0}_{k]\mathfrak{h}}.$$

Gehen wir jetzt für alle Indizes zu dem anholonomen System (ɫ) über, so folgt

$$\varepsilon^{-2} N_{\mathfrak{k}\mathfrak{j}\mathfrak{i}}{}^{\mathfrak{h}} \overset{*}{=} K_{\mathfrak{k}\mathfrak{j}\mathfrak{i}}{}^{\mathfrak{h}} + 2\varepsilon^{-1} A^{\mathfrak{h}}_{[\mathfrak{k}} \Pi^{0}_{\mathfrak{j}]\mathfrak{i}} + 2\varepsilon^{-1} A^{\mathfrak{i}}_{[\mathfrak{j}} \Pi^{0}_{\mathfrak{i}]\mathfrak{h}} \tag{II. 145}$$

und

$$0 \overset{*}{=} \varepsilon^{-1} N_{\mathfrak{h}\mathfrak{j}\mathfrak{i}}{}^{\mathfrak{h}} \overset{*}{=} \varepsilon K_{\mathfrak{j}\mathfrak{i}} + (n-2)\Pi^{0}_{\mathfrak{j}\mathfrak{i}} + \Pi^{0}_{\mathfrak{t}\mathfrak{h}} g^{\mathfrak{t}\mathfrak{h}} g_{\mathfrak{j}\mathfrak{i}}, \tag{II. 146}$$

und daraus folgt für $n \neq 2$:

$$\boxed{\Pi^{0}_{\mathfrak{j}\mathfrak{i}} \overset{*}{=} \frac{\varepsilon}{n-2} L_{\mathfrak{j}\mathfrak{i}},} \tag{II. 147}$$

wo

$$L_{\mathfrak{j}\mathfrak{i}} = -K_{\mathfrak{j}\mathfrak{i}} + \frac{1}{2(n-1)} K g_{\mathfrak{j}\mathfrak{i}} \tag{II. 148}$$

ein aus der Theorie der konformen Transformation einer V_n bekannter Tensor ist (vgl. Der Ricci-Kalkül, S. 170). Damit sind nun für $n > 2$ alle Bestimmungszahlen $\Pi^{\alpha}_{\mu\mathfrak{h}}$ auf X_n bekannt:

$$\begin{aligned}
&\Pi^{\mathfrak{h}}_{\mu 0} \overset{*}{=} -\Pi^{\infty}_{\mu\mathfrak{h}} \overset{*}{=} \varepsilon e^{\mathfrak{h}}_{\mu}, \\
&\Pi^{\mathfrak{h}}_{\mu\mathfrak{i}} \overset{*}{=} E^{j}_{u} \Gamma^{\mathfrak{h}}_{j\mathfrak{i}}, \\
&\Pi^{0}_{\mu\mathfrak{i}} \overset{*}{=} -\Pi^{\mathfrak{i}}_{\mu\infty} \overset{*}{=} \frac{1}{n-2} E^{\mathfrak{l}}_{\mu} L_{\mathfrak{l}\mathfrak{i}}, \\
&\Pi^{0}_{\mu\infty} \overset{*}{=} 0; \quad \Pi^{\infty}_{\mu 0} \overset{*}{=} 0, \\
&\Pi^{0}_{\mu 0} \overset{*}{=} 0; \quad \Pi^{\infty}_{\mu\infty} \overset{*}{=} 0.
\end{aligned} \tag{II. 149}$$

Kehren wir jetzt wieder zu dem holonomen System (α) zurück, so sind auch die $\Pi^{\alpha}_{\mu\beta}$ auf X_n bekannt, und da außerdem schon festliegt, daß $\Pi^{\varkappa}_{\lambda\lambda} \overset{*}{=} 0$ ist, fehlt wegen der Symmetrie nur noch $\Pi^{\lambda}_{\lambda\lambda}$. Da aber auch $\Pi^{\alpha}_{\lambda\alpha} \overset{*}{=} 0$ ist, folgt

$$\Pi^{\lambda}_{\lambda\lambda} \overset{*}{=} -\Pi^{\varkappa}_{\lambda\varkappa} \tag{II. 150}$$

und somit sind jetzt die $\Pi^{\alpha}_{\gamma\beta}$ auf X_n alle bekannt.

III. Eindeutigkeitsbeweis.

1. Die Mehrdeutigkeit der Einbettung.

Wir haben im vorigen $a_{\beta\alpha}$ auf der X_n gemäß (II. 1), im übrigen aber beliebig, angenommen und außerdem angenommen, es wäre uns in der H_{n+1} ein Koordinatensystem bekannt, derart, daß auf X_n $a_{\lambda\lambda} = 0$ wäre und über H_{n+1} $\Pi^{\varkappa}_{\lambda\lambda} \overset{*}{=} 0$ und $\Pi^{\alpha}_{\gamma\alpha} \overset{*}{=} 0$. Waren diese Voraussetzungen einmal gemacht, so war die Einbettung, wie sich herausstellte, für ungerades $n > 1$ *eindeutig* bestimmt.

Scheinbar gibt es also unendlich viele mögliche Einbettungen, da man $a_{\beta\alpha}$ noch variieren kann und sich auch die Kongruenz der Parameterlinien von X^{λ} anders wählen läßt.

Wir wollen nun zwei beliebige solche Einbettungen vergleichen. Dazu nehmen wir also an:

Eine X_n (n ungerade und > 2) mit den gewöhnlichen Koordinaten ξ^h und homogenen Koordinaten $x^\varkappa$ lasse sich einbetten in eine H_{n+1} mit homogenen Koordinaten X^α:

$$\text{(III. 1)} \qquad \begin{aligned} X^\alpha &= X^\alpha(x^\varkappa);\ \text{Grad } 1;\ B^\alpha_\mu = \partial_\mu X^\alpha \\ \xi^h &= \xi^h(x^\varkappa);\ \text{Grad } 0;\ E^h_\mu = \partial_\mu \xi^h. \end{aligned}$$

In der X_n sei eine Tensordichte $\mathfrak{g}_{ih}$ vom Gewicht $-\frac{2}{n}$ mit Determinante $+1$ gegeben, in H_{n+1} eine projektive Tensordichte $a_{\beta\alpha}$ vom Grade 0, vom Gewicht $-\frac{2}{n+2}$ und Determinante -1, sowie eine symmetrische spezielle Punktübertragung $\Pi^\alpha_{\gamma\beta}$, so daß folgende Gleichungen erfüllt sind

$$\text{(III. 2)} \qquad B^{\beta\alpha}_{\lambda\varkappa}\, a_{\beta\alpha} :: E^{ih}_{\lambda\varkappa}\, \mathfrak{g}_{ih} \ \text{(auf } X_n), \qquad (:: = \text{proportional zu})$$

$$\text{(III. 3)} \qquad \nabla_\gamma a_{\beta\alpha} = 0,$$

$$\text{(III. 4)} \qquad N^{\cdot\cdot\alpha}_{\dot\alpha\dot\gamma\dot\beta} = 0;\ \text{infolgedessen auch } \partial_{[\delta} \Pi^\alpha_{\gamma]\alpha} = \tfrac{1}{2} N^{\cdot\cdot\alpha}_{\dot\delta\dot\gamma\dot\alpha} = 0.$$

Dieselbe X_n lasse sich ebenfalls einbetten in eine andere H_{n+1}, $\widetilde{H}_{n+1}$ genannt, mit den homogenen Koordinaten $\widetilde{X}^{\alpha'}$:

$$\text{(III. 5)} \qquad \widetilde{X}^{\alpha'} = \widetilde{X}^{\alpha'}(x^\varkappa);\ \text{Grad } 1;\ \widetilde{B}^{\alpha'}_\mu = \partial_\mu \widetilde{X}^{\alpha'}$$

in welcher $\widetilde{H}_{n+1}$ eine projektive Tensordichte $\tilde{a}_{\beta'\alpha'}$ vom Grade 0, vom Gewicht $-\frac{2}{n+2}$ und Determinante -1, sowie eine symmetrische spezielle Punktübertragung $\widetilde{\Pi}^{\alpha'}_{\gamma'\beta'}$ gegeben sind, die folgende Bedingungen erfüllen

$$\text{(III. 6)} \qquad \widetilde{B}^{\beta'\alpha'}_{\lambda\varkappa}\, \tilde{a}_{\beta'\alpha'} :: E^{ih}_{\lambda\varkappa}\, \mathfrak{g}_{ih} \ \text{(auf } X_n),$$

$$\text{(III. 7)} \qquad \widetilde{\nabla}_{\gamma'} \tilde{a}_{\beta'\alpha'} = 0,$$

$$\text{(III. 8)} \qquad \widetilde{N}^{\cdot\cdot\alpha'}_{\dot\alpha'\dot\gamma'\dot\beta'} = 0;\ \text{infolgedessen auch } \partial_{[\delta'} \widetilde{\Pi}^{\alpha'}_{\gamma']\alpha'} = 0.$$

Dies angenommen, beweisen wir im folgenden Paragraphen den Satz:

Es gibt eine Punkttransformation (Transformation *analytischer* Punkte), *die die* $\widetilde{H}_{n+1}$ *auf die* H_{n+1} *abbildet, derart daß*

1. *jeder Punkt* (System von ∞^1 analytischen Punkten) *der* $\widetilde{H}_{n+1}$ *übergeht in einen Punkt der* H_{n+1},
2. *jeder Punkt der* X_n *invariant bleibt*,
3. *die Felder* $\tilde{a}$ *und* $\widetilde{\Pi}$ *übergehen in die Felder* a *bzw.* Π.

2. Die Abbildung von $\widetilde{H}_{n+1}$ auf die H_{n+1}.

In der H_{n+1} wählen wir das Koordinatensystem (α) so, daß

1. $X^4 = 0$ die X_n darstellt,
2. $X^\varkappa \stackrel{*}{=} x^\varkappa$ ist auf X_n,
3. $\Pi^\varkappa_{44} \stackrel{*}{=} 0$ ist, woraus folgt, daß die Parameterlinien von X^4 eine Kongruenz von geodätischen Linien bilden,

4. $\Pi^{\alpha}_{\gamma\alpha}$ überall Null ist und

5. $a_{\lambda\lambda} = 0$ ist auf X_n.

Daß dies stets möglich ist, würde früher bewiesen (Hilfssatz auf S. 608).

In der $\widetilde{H}_{n+1}$ wählen wir das Koordinatensystem (α') so, daß erstens

$$\widetilde{X}^{\varkappa'} \overset{*}{=} x^{\varkappa'} \overset{*}{=} \Theta\, \delta^{\varkappa'}_{\varkappa}\, x^{\varkappa} \tag{III. 9}$$

ist, wo Θ eine beliebig aber fest gewählte Funktion 0-ten Grades der $x^{\varkappa}$ ist, und zweitens

$$\widetilde{X}^{\lambda'} = 0, \tag{III. 10}$$

die X_n darstellt.

Nun kann eine Abbildung der gesuchten Art der $\widetilde{H}_{n+1}$ auf die H_{n+1} einfach zustande kommen, indem man in $\widetilde{H}_{n+1}$ vermöge einer Transformation der Gruppe $\mathfrak{H}_{n+2}$ neue *Koordinaten* einführt und diese dann mit den X^{α} von H_{n+1} identifiziert. Man kann aber außerdem noch die analytischen Punkte von $\widetilde{H}_{n+1}$ einer *Punkttransformation* (analytischer Punkte) aus der Gruppe $\mathfrak{H}$ unterwerfen, die jeden einzelnen *Punkt* invariant läßt. Wir machen den Übergang in *vier* Schritten und führen zunächst in $\widetilde{H}_{n+1}$ neue Koordinaten $\widetilde{X}^{\alpha''}$ ein. Die Koordinatentransformation von $\widetilde{X}^{\alpha'}$ auf $\widetilde{X}^{\alpha''}$ in $\widetilde{H}_{n+1}$ wählen wir so, daß $\widetilde{X}^{\lambda''} = 0$ ist auf X_n und daselbst $\widetilde{X}^{\varkappa''}$ proportional zu $x^{\varkappa}$ bleibt. Die allgemeinste Transformation, die diesen Bedingungen genügt, hat die Form

$$\begin{aligned} \widetilde{X}^{\varkappa'} &= \delta^{\varkappa'}_{\varkappa''}\, \tau\,(\widetilde{X}^{\lambda'})\, \widetilde{X}^{\varkappa''} + \psi^{\varkappa'}\,(\widetilde{X}^{\alpha'})\, \widetilde{X}^{\lambda''} \\ \widetilde{X}^{\lambda'} &= \omega\,(\widetilde{X}^{\alpha'})\, \widetilde{X}^{\lambda''}, \end{aligned} \tag{III. 11}$$

wo τ, $\psi^{\varkappa'}$ und ω näher zu bestimmende homogene Funktionen 0-ten Grades der in der Formel angegebenen Argumente sind. Die Funktionen τ und ω dürfen nicht verschwinden. Aus (III. 11) folgt, daß auf X_n

$$\widetilde{X}^{\alpha''} = \delta^{\alpha''}_{\alpha'}\, \tau^{-1}\, \widetilde{X}^{\alpha'} \tag{III. 12}$$

ist. Zunächst wollen wir nun dafür sorgen, daß wenigstens auf X_n die Gleichungen $\tilde{a}_{\beta''\alpha''} \overset{*}{=} \delta^{\beta}_{\beta''}\, \delta^{\alpha}_{\alpha''}\, a_{\beta\alpha}$ und $\widetilde{\Pi}^{\alpha''}_{\mu''\alpha''} \overset{*}{=} 0$ gelten. Aus (III. 11) folgt, daß auf X_n:

$$\begin{aligned} &\widetilde{\mathcal{A}}^{\varkappa'}_{\varkappa''} = \tau\, \delta^{\varkappa'}_{\varkappa''} + \widetilde{X}^{\varkappa'}\, \partial_{\varkappa''} \log \tau; \quad \widetilde{\mathcal{A}}^{\lambda'}_{\varkappa''} = 0 \\ &\widetilde{\mathcal{A}}^{\varkappa'}_{\lambda''} = \psi^{\varkappa'}; \qquad\qquad \widetilde{\mathcal{A}}^{\lambda'}_{\lambda''} = \omega \\ &\qquad \operatorname{Det}\,(\widetilde{\mathcal{A}}^{\alpha'}_{\alpha''}) = \tau^{n+1}\,\omega \end{aligned} \tag{III. 13}$$

ist, also, da $\tilde{a}_{\beta'\alpha'}$ vom Gewicht $-\frac{2}{n+2}$ ist und $\widetilde{X}^{\lambda'}\, \tilde{a}_{\lambda'\varkappa'}$ auf X_n verschwindet,

$$\delta^{\lambda}_{\lambda''}\, \delta^{\varkappa}_{\varkappa''}\, a_{\lambda\varkappa} \overset{*}{=} \tilde{a}_{\lambda''\varkappa''} = \left(\frac{\tau}{\omega}\right)^{\frac{2}{n+2}} \delta^{\lambda'}_{\lambda''}\, \delta^{\varkappa'}_{\varkappa''}\, \tilde{a}_{\lambda'\varkappa'}. \tag{III. 14}$$

$$\text{(III. 15)} \qquad \delta^{\varkappa}_{\varkappa''} a_{\lambda\lambda} \overset{*}{=} \tilde{a}_{\lambda''\varkappa''} = \left(\frac{\tau}{\omega}\right)^{\frac{2}{n+2}} \Big\{\tau^{-1}\,\psi^{\lambda'}\,\delta^{\varkappa'}_{\varkappa''}\,\tilde{a}_{\lambda'\varkappa'} + \frac{\omega}{\tau}\,\delta^{\varkappa'}_{\varkappa''}\,\tilde{a}_{\lambda'\lambda'} + \frac{\omega}{\tau}\,\delta^{\lambda'}_{\varkappa''}\,(\partial_{\lambda'}\log\tau)\,\tilde{X}^{\varkappa'}\,\tilde{a}_{\lambda'\varkappa'}\Big\}.$$

$$\text{(III. 16)} \qquad 0 = a_{\lambda\lambda} = \tilde{a}_{\lambda''\lambda''} = \left(\frac{\tau}{\omega}\right)^{\frac{2}{n+2}} \{\tau^{-2}\,\psi^{\lambda'}\,\psi^{\varkappa'}\,\tilde{a}_{\lambda'\varkappa'} + 2\,\tau^{-2}\,\omega\,\psi^{\lambda'}\,\tilde{a}_{\lambda'\lambda'} + \omega^2\,\tau^{-2}\,\tilde{a}_{\lambda'\lambda'}\}.$$

$$\text{(III. 17)} \quad 0 \overset{*}{=} \delta^{\mu}_{u''}\,\Pi^{\alpha}_{\mu\alpha} \overset{*}{=} \tilde{\Pi}^{\alpha'}_{u''\alpha''} = \tau\,\delta^{u'}_{u''}\,\{\tilde{\Pi}^{\alpha'}_{\mu'\alpha'} + \partial_{\mu'}\log(\tau^{n+1}\omega)\},$$

welche Gleichungen nur auf X_n gültig sind.

Aus (III. 15) folgt bei Überschiebung mit $\delta^{\varkappa''}_{\lambda'}\,\tilde{X}^{\lambda'}$

$$\text{(III. 18)} \qquad \delta^{\varkappa}_{\lambda'}\,\tilde{X}^{\lambda'}\,a_{\lambda\varkappa} = \left(\frac{\tau}{\omega}\right)^{-\frac{n}{n+2}} \tilde{X}^{\varkappa'}\,a_{\lambda'\varkappa'},$$

durch welche Gleichung $\frac{\tau}{\omega}$ auf X_n bestimmt ist.

Da $\tilde{\Pi}^{\alpha'}_{u'\alpha'}$ Gradient ist, folgt aus (III. 17) $\omega\,\tau^{n+1}$ auf X_n bis auf einen konstanten Faktor.

Die zwei Funktionen τ und ω sind also jetzt auf X_n eine jede bis auf einen auf X_n *konstanten* Faktor bestimmt. Da $\frac{\tau}{\omega}$ auf X_n vollständig bestimmt ist, ist in (III. 15) und (III. 16) jetzt alles bekannt, außer $\tau^{-1}\,\psi^{\varkappa'}$; (III. 15) bestimmt diesen Ausdruck bis auf einen additiven Term proportional mit $\tilde{X}^{\varkappa'}$, (III. 16) legt auch diesen Term fest. Die Gleichung (III. 14) ist von (III. 15) und (III. 16) abhängig, da die Determinanten von $a_{\beta\alpha}$ und $\tilde{a}_{\beta''\alpha''}$ beide gleich -1 sind.

Die Werte von $\tilde{\mathfrak{R}}^{\alpha'}_{\alpha''}$ auf X_n bestimmen die Richtung vom Punkte $\tilde{X}^{\alpha'}$ zum Maßpunkte $\tilde{e}^{\alpha'}_{\lambda''} \overset{*}{=} \tilde{\mathfrak{R}}^{\alpha'}_{\lambda''}$. Da $\tau^{-1}\,\psi^{\varkappa'}$ und $\tau^{-1}\,\omega$ festliegen, liegt auch diese Richtung fest. Nun wählen wir für die Parameterlinien von $\tilde{X}^{\lambda''}$ geodätische Linien in $\tilde{H}_{n+1}$. Damit ist dann verbürgt, daß $\tilde{\Pi}^{\varkappa''}_{\lambda''\lambda''}$ mod $\tilde{X}^{\varkappa''}$ in $\tilde{H}_{n+1}$ verschwindet. Die Festlegung der Parameterlinien geschieht durch geeignete Verfügung auf ω und $\psi^{\varkappa'}$ *außerhalb* der X_n, natürlich unter Beibehaltung der schon auf X_n berechneten Werte. Jetzt machen wir den *zweiten* Schritt und gehen zu einem System $\tilde{X}^{\alpha*}$ über vermöge einer Transformation von der Form

$$\text{(III. 19)} \qquad \begin{aligned} \tilde{X}^{\varkappa*} &= \delta^{\varkappa*}_{\varkappa''}\,\alpha\,(\tilde{X}^{\alpha''})\,\tilde{X}^{\varkappa''}; \\ \tilde{X}^{\lambda*} &= \tilde{X}^{\lambda''}, \end{aligned}$$

wo α eine Funktion 0-ten Grades ist, die auf X_n den Wert 1 hat. Auf X_n ist also wegen (III. 12)

$$\text{(III. 20)} \qquad \tilde{X}^{\alpha*} = \delta^{\alpha*}_{\alpha'}\,\tau^{-1}\,\tilde{X}^{\alpha'}.$$

Ferner ist in H_{n+1}

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{H}}^{x^*}_{x''} = \alpha\,\delta^{x^*}_{x''} + \widetilde{X}^{x^*}\,\partial_{x''}\log\alpha;\\
&\widetilde{\mathcal{H}}^{x^*}_{\lambda''} = \widetilde{X}^{x^*}\,\partial_{\lambda''}\log\alpha; \quad \widetilde{\mathcal{H}}^{\varkappa''}_{\lambda^*} = -X^{\varkappa''}\,\partial_{\lambda''}\log\alpha,\\
&\widetilde{\mathcal{H}}^{\lambda^*}_{x''} = 0; \qquad \widetilde{\mathcal{H}}^{\lambda''}_{x^*} = 0,\\
&\widetilde{\mathcal{H}}^{\lambda^*}_{\lambda''} = 1; \qquad \widetilde{\mathcal{H}}^{\lambda''}_{\lambda^*} = 1,
\end{aligned} \tag{III. 21}$$

und wir wählen $\partial_{\lambda''}\log\alpha = 0$ auf X_n, damit

$$\tilde{a}_{\beta^*\alpha^*} \overset{*}{=} \delta^{\beta''\alpha''}_{\beta^*\alpha^*}\,\tilde{a}_{\beta''\alpha''} \overset{*}{=} \delta^{\beta}_{\beta^*}{}^{\alpha}_{\alpha^*}\,a_{\beta\alpha} \tag{III. 22}$$

ist. Auf X_n gilt auch $\operatorname{Det}(\widetilde{\mathcal{H}}^{\alpha^*}_{\alpha''}) = 1$, und da

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Pi}^{\alpha^*}_{\mu^*\alpha^*} &\overset{*}{=} \widetilde{\mathcal{H}}^{\mu''}_{\mu^*}\,\widetilde{\Pi}^{\alpha''}_{\mu''\alpha''} + \widetilde{\mathcal{H}}^{\alpha^*}_{\alpha''}\,\partial_{\mu^*}\widetilde{\mathcal{H}}^{\alpha''}_{\alpha^*}\\
&\overset{*}{=} \widetilde{\mathcal{H}}^{\mu''}_{\mu^*}\{\widetilde{\Pi}^{\alpha''}_{\mu''\alpha''} - \partial_{\mu''}\log\operatorname{Det}(\widetilde{\mathcal{H}}^{\alpha^*}_{\alpha''})\}
\end{aligned} \tag{III. 23}$$

ist, gilt also auf X_n die folgende Gleichung

$$\widetilde{\Pi}^{\alpha^*}_{\mu^*\alpha^*} \overset{*}{=} \delta^{\mu''}_{\mu^*}\,\widetilde{\Pi}^{\alpha''}_{\mu''\alpha''} \overset{*}{=} 0. \tag{III. 24}$$

Die Forderung, daß $\widetilde{\Pi}^{\varkappa^*}_{\lambda^*\lambda^*}$ überall verschwinden soll, führt zu einer Differentialgleichung für α in derselben Weise, wie auf S. 609 (für χ).

Sodann machen wir den *dritten* Schritt und gehen zu einem Koordinatensystem (α) über vermöge einer Transformation von der Form

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}^{\varkappa} &= \widetilde{X}^{x^*}\\
\widetilde{X}^{\lambda} &= \beta\,(\widetilde{X}^{\alpha^*})\,\widetilde{X}^{\lambda^*},
\end{aligned} \tag{III. 25}$$

wo β eine Funktion 0-ten Grades ist. Dann ist auf X_n wegen (III. 20):

$$\widetilde{X}^{\alpha} = \delta^{\alpha}_{\alpha'}\,\tau^{-1}\,\widetilde{X}^{\alpha'} \tag{III. 26}$$

und in $\widetilde{H}_{n+1}$

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{H}}^{\varkappa}_{x^*} = \delta^{\varkappa}_{x^*}; \qquad \widetilde{\mathcal{H}}^{x^*}_{\varkappa} = \delta^{x^*}_{\varkappa},\\
&\widetilde{\mathcal{H}}^{\varkappa}_{\lambda^*} = 0; \qquad \widetilde{\mathcal{H}}^{x^*}_{\lambda} = 0,\\
&\widetilde{\mathcal{H}}^{\lambda}_{x^*} = \widetilde{X}^{\lambda^*}\,\partial_{x^*}\beta; \quad \widetilde{\mathcal{H}}^{\lambda^*}_{\varkappa} = -\widetilde{X}^{\lambda^*}\,\delta^{x^*}_{\varkappa}\,(\partial_{x^*}\beta)\,(\beta + \widetilde{X}^{\lambda^*}\,\partial_{\lambda^*}\beta)^{-1},\\
&\widetilde{\mathcal{H}}^{\lambda}_{\lambda^*} = \beta + \widetilde{X}^{\lambda^*}\,\partial_{\lambda^*}\beta; \quad \operatorname{Det}(\widetilde{\mathcal{H}}^{\alpha}_{\alpha^*}) = \beta + \widetilde{X}^{\lambda^*}\,\partial_{\lambda^*}\beta.
\end{aligned} \tag{III. 27}$$

Wir wählen $\beta = 1$ auf X_n. Dann ist auf X_n $\widetilde{\mathcal{H}}^{\alpha}_{\alpha^*} = \delta^{\alpha}_{\alpha^*}$ und daher

$$\tilde{a}_{\beta\alpha} \overset{*}{=} \delta^{\beta^*\alpha^*}_{\beta\ \alpha}\,\tilde{a}_{\beta^*\alpha^*} \overset{*}{=} a_{\beta\alpha}, \tag{III. 28}$$

$$\widetilde{\Pi}^{\alpha}_{u\alpha} \overset{*}{=} \widetilde{\mathcal{H}}^{\mu^*}_{\mu}\,\widetilde{\Pi}^{\alpha^*}_{\mu^*\alpha^*} + \widetilde{\mathcal{H}}^{\alpha}_{\beta^*}\,\partial_{\mu}\widetilde{\mathcal{H}}^{\beta^*}_{\alpha} \overset{*}{=} 0. \tag{III. 29}$$

In $\widetilde{H}_{n+1}$ ist

$$\widetilde{\Pi}^{\varkappa}_{\lambda\lambda} \overset{*}{=} \widetilde{\mathcal{H}}^{\lambda^*}_{\lambda}\,\widetilde{\mathcal{H}}^{x^*}_{\lambda^*}\,\widetilde{\Pi}^{\varkappa^*}_{\lambda^*\lambda^*} + \widetilde{\mathcal{H}}^{\varkappa}_{\lambda^*}\,\partial_{\lambda}\widetilde{\mathcal{H}}^{\lambda^*}_{\lambda} \overset{*}{=} 0, \tag{III. 30}$$

$$\widetilde{\Pi}^{\alpha}_{\gamma\alpha} = \widetilde{\mathcal{H}}^{\alpha^*}_{\gamma}\,\widetilde{\Pi}^{\alpha^*}_{\gamma^*\alpha^*} + \partial_{\gamma}\log\operatorname{Det}(\widetilde{\mathcal{H}}^{\alpha^*}_{\alpha}). \tag{III. 31}$$

Soll also $\widetilde{\Pi}^{\alpha}_{\gamma\alpha}$ verschwinden, so muß

$$\partial_{\gamma^*}\log(\beta + \widetilde{X}^{\lambda^*}\,\partial_{\lambda^*}\beta) = \widetilde{\Pi}^{\alpha^*}_{\gamma^*\alpha^*} \tag{III. 32}$$

sein. Wie auf S. 610 wird bewiesen, daß die Integrabilitätsbedingungen dieser Gleichung erfüllt sind. Man darf $\beta = 1$ auf X_n wählen, da $\widetilde{\Pi}^{\alpha^*}_{\mu^*\alpha^*} = 0$ ist auf X_n.

Endlich machen wir jetzt den *vierten* Schritt. Wir üben in $\widetilde{H}_{n+1}$ eine Transformation analytischer Punkte $\widetilde{X}^\alpha \to \varrho\,\widetilde{X}^\alpha$ der Gruppe $\mathfrak{H}$ aus und stellen die Forderung, daß $\widetilde{X}^\alpha$ gleich X^α wird auf X_n. Da aber auf X_n gilt:

$$\begin{aligned} X^\varkappa &\stackrel{*}{=} x^\varkappa, & X^\lambda &= 0, \\ \widetilde{X}^\varkappa &\stackrel{*}{=} \Theta\,\tau^{-1}\,x^\varkappa, & \widetilde{X}^\lambda &= 0 \end{aligned} \tag{III. 33}$$

müssen wir für ϱ nehmen

$$\varrho = \Theta\,\tau^{-1} \tag{III. 34}$$

auf X_n. Da $\tilde{a}_{\beta\alpha}$ vom Grade Null ist, ändert sich $\tilde{a}_{\beta\alpha}$ nicht, so daß auf X_n nach der Punkttransformation

$$\tilde{a}_{\beta\alpha} = a_{\beta\alpha} \tag{III. 35}$$

ist und weil $\widetilde{\Pi}^\alpha_{\gamma\beta}$ vom Grade -1 ist, werden in $\widetilde{H}_{n+1}$ sowohl $\widetilde{\Pi}^\alpha_{\mu\alpha}$ als $\widetilde{\Pi}^\varkappa_{\lambda\lambda}$, die nur einen Faktor ϱ^{-1} bekommen, Null bleiben.

Jetzt haben wir also folgendes erreicht: H_{n+1} und $\widetilde{H}_{n+1}$ besitzen jetzt je ein Koordinatensystem X^α bzw. $\widetilde{X}^\alpha$. Die Parameterlinien von X^λ und $\widetilde{X}^\lambda$ sind geodätische Linien und es ist $\Pi^\alpha_{\gamma\alpha} \stackrel{*}{=} 0$, $\Pi^\varkappa_{\lambda\lambda} \stackrel{*}{=} 0$ überall in H_{n+1} und $\widetilde{\Pi}^\alpha_{\gamma\alpha} \stackrel{*}{=} 0$, $\widetilde{\Pi}^\varkappa_{\lambda\lambda} \stackrel{*}{=} 0$ überall in $\widetilde{H}_{n+1}$. Die Gleichung der X_n ist $X^\lambda = 0$ in H_{n+1} und $\widetilde{X}^\lambda = 0$ in $\widetilde{H}_{n+1}$. Auf der X_n ist $X^\varkappa \stackrel{*}{=} \widetilde{X}^\varkappa \stackrel{*}{=} x^\varkappa$. In analytischen Punkten X^α bzw. $\widetilde{X}^\alpha$, die zu demselben *Punkt* der X_n gehören, ist $a_{\beta\alpha} = \tilde{a}_{\beta\alpha}$. Auf der X_n ist außerdem $a_{\lambda\lambda} = \tilde{a}_{\lambda\lambda} = 0$.

Da wir nun schon bewiesen haben, daß es für ungerades n unter den Umständen, die jetzt sowohl in H_{n+1} als $\widetilde{H}_{n+1}$ in bezug auf die Koordinatensysteme X^α bzw. $\widetilde{X}^\alpha$ herrschen, eine und nur eine Fortsetzung der Felder $a_{\beta\alpha}$ bzw. $\tilde{a}_{\beta\alpha}$ gibt und nur eine spezielle symmetrische Punktübertragung $\Pi^\alpha_{\gamma\beta}$ bzw. $\widetilde{\Pi}^\alpha_{\gamma\beta}$, die den auf S. 608 explizit aufgestellten Bedingungen genügt, folgt, daß sich die beiden Einbettungen nicht wesentlich unterscheiden und es somit *nur eine Einbettung* der X_n in H_{n+1} gibt, die alle aufgestellten Forderungen befriedigt.

(Eingegangen am 29. 10. 1935.)

Zur Theorie der allgemeinen ebenen quadratischen Abbildungen.

Von

Othmar Baier in München.

Einleitung.

Die in den birationalen (Cremonaschen) Transformationen enthaltenen quadratischen Abbildungen sind in einer großen Zahl von Arbeiten sehr eingehend behandelt worden. Hingegen wurden die „allgemeinen quadratischen Abbildungen" vorwiegend im Rahmen der $(1, n)$- und der (n_1, n_2)-Korrespondenzen[1]) untersucht[2]). Speziell mit den allgemeinen quadratischen Abbildungen befassen sich Th. Reye[3]), J. R. Conner[4]) und R. Sauer[5]).

In einer Arbeit von R. Sauer und dem Verfasser[6]) ist eine räumliche Konstruktion von Kreisdreiecksnetzen eines speziellen Typs aus geradlinigen Dreiecksnetzen angegeben. Diese Konstruktion ist eine *räumliche Konstruktion* von ebenen *quadratischen Abbildungen* eines speziellen Typs. Ferner haben G. Darboux[7]) und andere für die in den allgemeinen quadratischen Abbildungen als Sonderfall enthaltenen birationalen (Cremonaschen) Abbildungen und wohl zuerst R. de Paolis[8]) für die in den (1, 2)-Korrespondenzen enthaltenen quadratischen Abbildungen räumliche Konstruktionen angegeben.

Im Anschluß hieran stellt sich die vorliegende Arbeit die Aufgabe, eine *räumliche Konstruktion* zu finden, welche die *allgemeinen quadratischen Abbildungen* zweier Ebenen erzeugt und die oben erwähnten Konstruktionen

---

[1]) R. Baldus, Zur Theorie der gegenseitig mehrdeutigen algebraischen Ebenentransformationen. Math. Annalen 72 (1912), S. 1—36.

[2]) Ausführlicher Literaturnachweis in Berzolari: Algebraische Transformationen und Korrespondenzen. Enz. III. 2, 2. Bd.

[3]) Th. Reye, Über quadratische Transformationen und rationale Flächen mit Kegelschnittscharen. Math. Annalen 48 (1897), S. 113—141.

[4]) J. R. Conner, Correspondences Determined by the Bitangents of a Quartic. Amer. Journ. of math. 38 (1916), S. 155—176.

[5]) R. Sauer, Die allgemeinen quadratischen Abbildungen, dargestellt durch geradlinige Dreiecksnetze. Math. Annalen 106 (1932), S. 722—754.

[6]) R. Sauer und O. Baier, Über besondere Dreiecksnetze aus Kegelschnitten. Jahresber. d. D. M. V. 43 (1933), S. 146—153.

[7]) Ann. Ec. Norm. (1) 6 (1869), S. 61.

[8]) R. de Paolis, Le trasformazione piane doppie. Roma Mem. Acc. Linc. (3) 1 (1877), S. 31.

als Sonderfälle umfaßt. Den Betrachtungen ist der komplexe projektive Raum zugrunde gelegt. Zur Konstruktion werden verwendet das Schneiden von Ebenen mit Flächen 2. Ordnung und die Schnittpunkte von Kurven 2. Ordnung.

Ausgehend von einer *geometrischen Definition* der allgemeinen quadratischen Abbildungen in § 1 werden ihre bekannten, für das folgende wichtigen Eigenschaften zusammengestellt und in § 2 *räumliche Konstruktionen* dieser Abbildungen hergeleitet, die *durch eine Fläche 2. Ordnung* vermittelt werden. In § 3 wird ferner gezeigt, daß die Fläche 2. Ordnung, welche die Abbildung vermittelt, speziell als *Kegel* gewählt werden kann. Der Nachweis hierfür macht die Untersuchung der in einem Kegelschnittnetz auftretenden Typen von Kegelschnittbüscheln notwendig.

§ 1.

Definition und Haupteigenschaften der allgemeinen quadratischen Abbildungen.

A. Analytische Definition[9]).

1. Die allgemeine quadratische Abbildung einer Ebene ε^* auf eine Ebene ε wird definiert durch die *Gleichungen*

$$\varrho\, x_i^* = K_i(x_1, x_2, x_3) \qquad i = 1, 2, 3;\ \varrho \neq 0. \tag{1}$$

Dabei bedeuten die x_i^* und x_k homogene Punktkoordinaten (ϱ Proportionalitätsfaktor) in beliebig wählbaren projektiven Koordinatensystemen und die K_i drei linear unabhängige Formen zweiten Grades in den x_k, die keinen Linearfaktor gemeinsam haben. Da die projektiven Koordinatensysteme in ε^* und ε noch beliebig gewählt werden können, ist die quadratische Abbildung durch (1) nur bis auf eine willkürliche Kollineation in ε^* und in ε bestimmt.

2. Den *Geraden* in der Ebene ε^*

$$u_1^* x_1^* + u_2^* x_2^* + u_3^* x_3^* = 0 \tag{2}$$

entsprechen in der Ebene ε eindeutig umkehrbar die *Kegelschnitte*

$$u_1^* K_1(x_1, x_2, x_3) + u_2^* K_2(x_1, x_2, x_3) + u_3^* K_3(x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{3}$$

deren zweiparametrige Gesamtheit *Kegelschnittnetz*[10]) genannt wird. Ein *Geradenbüschel* mit dem Scheitel P^* in ε^* wird abgebildet in ein projektives *Kegelschnittbüschel* in ε mit den Grundpunkten P_1, P_2, P_3, P_4; einem Punkt P^* entsprechen also die vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, von denen einige oder alle zusammenfallen können. Außerdem kann es in ε^* noch besondere Strahlenbüschel geben, deren entsprechende Kegelschnittbüschel

[9]) Vgl. [5]).

[10]) Eine Verwechslung dieses Begriffes mit „Dreiecksnetzen aus Kegelschnitten" kann im folgenden nicht eintreten, da von diesen nicht die Rede sein wird.

in ε aus lauter Geradenpaaren bestehen. Solche Kegelschnittbüschel mögen fortan kurz *singuläre Büschel* genannt werden. Haben alle Geradenpaare eines solchen singulären Büschels eine feste Gerade g gemeinsam und ist P^* Scheitel des entsprechenden Strahlenbüschels in ε^*, so sind außer P noch alle Punkte von g Bildpunkte von P^*, der dann ein Ausnahmepunkt der Ebene ε^* genannt werden möge. Die Annahme, daß jeder Punkt von ε^* Ausnahmepunkt sei, führt auf den ausgeschlossenen Fall, daß die K_i einen Linearfaktor gemeinsam haben.

B. Geometrische Definition.

1. Um eine allgemeine quadratische Abbildung geometrisch zu definieren, wählen wir in ε^* drei nicht in einer Geraden liegende Punkte A^*, B^*, C^*. Ihre Verbindungsgeraden (B^*C^*, C^*A^*, A^*B^*) seien mit a^*, b^*, c^* bezeichnet. In ε wählen wir drei (nicht notwendig irreduzible) Kegel-

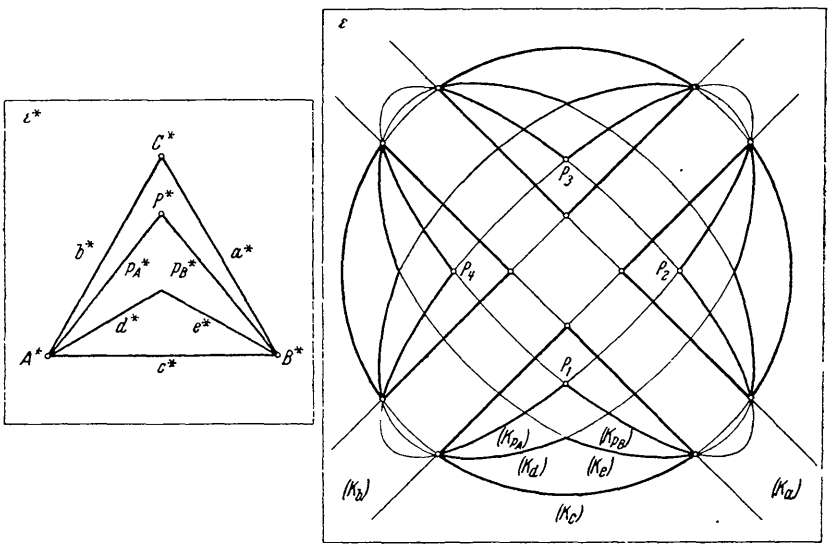


Fig. 1.

schnitte (K_a), (K_b), (K_c), die weder zum gleichen Büschel gehören noch eine Gerade gemeinsam haben sollen. (K_a), (K_b), (K_c) bestimmen ein *Kegelschnittnetz* Σ. Durch A^* legen wir eine von b^* und c^* verschiedene Gerade d^*, durch B^* eine von a^* und c^* verschiedene Gerade e^*. Aus dem Büschel $\mathfrak{A}$, das durch die Kegelschnitte (K_b), (K_c) bestimmt ist, greifen wir einen von (K_b) und (K_c) verschiedenen Kegelschnitt (K_d) und aus dem Büschel $\mathfrak{B}$, das durch die Kegelschnitte (K_a), (K_c) bestimmt ist, einen von (K_a) und (K_c) verschiedenen Kegelschnitt (K_e) heraus.

Um nun einen nicht auf $A^* B^*$ gelegenen Punkt P^* der Ebene ε^* abzubilden, verbinden wir ihn mit A^* ($A^* P^* = p_A^*$), desgleichen mit B^* ($B^* P^* = p_B^*$). Im Büschel $\mathfrak{A}$ bestimmen wir den Kegelschnitt (K_{p_A}) so, daß das Doppelverhältnis $((K_b), (K_c), (K_{p_A}), (K_d))$[11]) gleich dem Doppelverhältnis (b^*, c^*, p_A^*, d^*) ist, desgleichen bestimmen wir im Büschel $\mathfrak{B}$ den Kegelschnitt (K_{p_B}) so, daß $((K_a), (K_c), (K_{p_B}), (K_e)) = (a^*, c^*, p_B^*, e^*)$ ist. Dem Punkt P^* ordnen wir als Bildpunkte die Schnittpunkte von (K_{p_A}) mit (K_{p_B}), P_1, P_2, P_3, P_4 zu, die ganz oder teilweise zusammenfallen können. Die Punkte P_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ sollen fortan *assoziiert* genannt werden.

Um einen Punkt Q^* der Geraden $A^* B^*$ abzubilden, konstruieren wir die Bildpunkte C_i von C^*. Sie sind die Grundpunkte des durch (K_a) und (K_b) bestimmten Büschels $\mathfrak{C}$. d^* und e^* schneiden sich im Punkt D^*. Die Geraden $C^* D^*$, $C^* Q^*$ seien mit f, g bezeichnet. (K_f) sei ein Kegelschnitt des Büschels $\mathfrak{C}$, der durch einen der Bildpunkte D_i von D^* geht[12]). Bestimmt man im Büschel $\mathfrak{C}$ den Kegelschnitt (K_g) so, daß das Doppelverhältnis (a^*, b^*, f^*, g^*) gleich dem Doppelverhältnis $((K_a), (K_b), (K_f), (K_g))$ ist, so sollen dem Punkt Q^* die Schnittpunkte Q_i von (K_g) mit (K_c) zugeordnet werden. Speziell sind den Punkten A^* (B^*) die Grundpunkte des Büschels $\mathfrak{A}$ $(\mathfrak{B})$ zugeordnet.

Satz I: *Die hier vorliegende Abbildung ist mit einer unter* A. 1. *definierten allgemeinen quadratischen Abbildung identisch*, wenn man noch zuläßt, daß die Ebenen ε^* und ε je einer beliebigen Kollineation unterworfen werden können.

Das erkennt man durch Einführung geeigneter Koordinatensysteme in ε^* und ε: Das Koordinatensystem in ε^* sei so gewählt, daß die Gleichungen der Geraden a^*, b^*, c^*, d^*, e^* entsprechend $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0$, $x_2^* - x_3^* = 0$, $x_1^* - x_3^* = 0$ sind. In einem beliebig gewählten Koordinatensystem der Ebene ε seien die Gleichungen der Kegelschnitte (K_a), (K_b), (K_c) entsprechend $K_a = 0$, $K_b = 0$, $K_c = 0$. Die Gleichungen von (K_d), (K_e) sind $\mu K_b - K_c = 0$, $\lambda K_a - K_c = 0$. Setzt man nun $\lambda K_a \equiv K_1$, $\mu K_b \equiv K_2$, $K_c \equiv K_3$, so ist

$$\varrho x_i^* = K_i \qquad i = 1, 2, 3;\ \varrho \neq 0$$

eine der unter A. 1. definierten allgemeinen quadratischen Abbildungen. Aus A. 2. folgt, daß diese Abbildung mit der eben geometrisch definierten Abbildung identisch ist.

---

[11]) Das Doppelverhältnis von vier Kegelschnitten eines Büschels ist das Doppelverhältnis ihrer vier Polaren bezüglich eines beliebigen Punktes, der nicht mehrfach zählender Grundpunkt ist.

[12]) Aus C. I. wird folgen, daß (K_f) durch alle Punkte D_i geht.

Umgekehrt folgt leicht der

Satz II: *Jede der in* A. 1. *definierten allgemeinen quadratischen Abbildungen ist unter den geometrisch definierten allgemeinen quadratischen Abbildungen enthalten.*

Zum Beweis braucht man bloß $K_1 \equiv K_a$, $K_2 \equiv K_b$, $K_3 \equiv K_c$, $K_2 - K_3 \equiv K_d$, $K_1 - K_3 \equiv K_e$ zu setzen.

Durch die Sätze I und II ist die *Äquivalenz* der beiden Definitionen erwiesen.

2. Wenn (K_a), (K_b), (K_c) gemeinsame Punkte besitzen, so sind diese allen Kegelschnitten von Σ gemeinsam und sollen „*Fixpunkte*" genannt werden. Nach der algebraischen Anzahl der Fixpunkte teilen wir die allgemeinen quadratischen Abbildungen in vier *Hauptklassen* ein, nämlich in solche mit 0, 1, 2 oder 3 Fixpunkten. Weil (K_a), (K_b), (K_c) nicht zum gleichen Büschel gehören, können mehr als drei Fixpunkte nicht auftreten.

3. In einem Fixpunkt von ε schneiden sich (K_a), (K_b), (K_c); ein zugehöriger Punkt in ε^* ist daher nicht vorhanden. Jeder Punkt P, der nicht Fixpunkt ist, wird in einen einzigen Punkt P^* in ε^* abgebildet. Mit Ausnahme der Fixpunkte ist die Abbildung $P \to P^*$ durchwegs *eindeutig* und die Abbildung $P^* \to P$, von den Ausnahmepunkten abgesehen, bei algebraischer Zählung der Vielfachheit der Grundpunkte *vier-*, *drei-*, *zwei-* bzw. *eindeutig*, je nachdem 0, 1, 2 bzw. 3 Fixpunkte vorliegen. Die letzteren sind mit den birationalen Cremonaschen quadratischen Abbildungen identisch.

C. Haupteigenschaften der allgemeinen quadratischen Abbildungen.

Die folgenden Eigenschaften der allgemeinen quadratischen Abbildungen *mit Ausnahme von* 6, die sich aus der analytischen Definition leicht ergeben, mögen hier *ohne* Zurückgreifen auf *die analytische Definition* bewiesen werden.

1. Durchläuft P^* eine *Gerade* p^*, so durchlaufen die Punkte P_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ einen *Kegelschnitt* (K_p). — Die Kurve (K_p) wird durch zwei projektive Kegelschnittbüschel, die (K_c) entsprechend gemeinsam haben, erzeugt und ist daher ein Kegelschnitt.

2. Ein *Geradenbüschel* mit dem Scheitel P^* wird in ein *Kegelschnittbüschel* mit den Grundpunkten P_i abgebildet und (K_p) gehört daher dem durch (K_a), (K_b), (K_c) bestimmten *Netz* Σ an.

3. Ordnet man jedem *Kegelschnitt* (K) des Netzes Σ seine *Polare* p bezüglich eines festen Punktes P, der nicht mehrfach zählender Grundpunkt eines Büschels des Netzes ist, zu, so entspricht auch umgekehrt

jeder Geraden p ein Kegelschnitt (K) von Σ, dessen Polare bezüglich P die Gerade p ist, und diese *Abbildung* ist eine *quadratische.*

Beweis: Das Netz sei durch die Büschel $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ vorgegeben. Die Polaren des Punktes P bezüglich der Kegelschnitte eines Büschels gehen durch einen Punkt $\overline{P}$, der der zu P total konjugierte Punkt des Büschels genannt werde. Die zu P total konjugierten Punkte bezüglich der Büschel $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien $\overline{P}_{\mathfrak{A}}$, $\overline{P}_{\mathfrak{B}}$ ($\overline{P}_{\mathfrak{A}}$ ist verschieden von $\overline{P}_{\mathfrak{B}}$). Das Strahlenbüschel $\overline{P}_{\mathfrak{A}}$ werde durch eine (von der Geraden $\overline{P}_{\mathfrak{A}}\,\overline{P}_{\mathfrak{B}}$ verschiedene) Perspektivitätsachse p auf das Strahlenbüschel $\overline{P}_{\mathfrak{B}}$ perspektiv bezogen. Nun ist jedem Strahl durch $\overline{P}_{\mathfrak{A}}$ ($\overline{P}_{\mathfrak{B}}$) derjenige Kegelschnitt des Büschels $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$) zugeordnet, dessen Polare bezüglich P der betreffende Strahl ist. Mit den Polarenbüscheln sind nach Definition auch die beiden Büschel $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ projektiv aufeinander bezogen und der gemeinsame Kegelschnitt ist sich selbst zugeordnet. Die Büschel $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erzeugen daher einen Kegelschnitt (K), dessen Polare bezüglich P die Gerade p ist. Diese Abbildung ist nach Definition eine quadratische. Bildet man die Geraden der Ebene ε auf eine Ebene ε^* kollinear ab, so erkennt man, daß sich jede quadratische Abbildung von ε^* auf ε so erzeugen läßt. Weiterhin folgt:

4. Die *Geraden* der Ebene ε^* sind *umkehrbar eindeutig* den *Kegelschnitten* von Σ der Ebene ε zugeordnet.

5. An Stelle der Kegelschnitte (K_a), (K_b), (K_c), (K_d), (K_e) können wegen 3. *beliebige Kegelschnitte* aus Σ treten, falls sie und die ihnen in ε^* entsprechenden Geraden die zu Beginn von B. 1. geforderten Voraussetzungen erfüllen.

6. Jede *Gerade* g in ε, die nicht einem zerfallenden Kegelschnitt von Σ angehört, wird in einen *Kegelschnitt* der Ebene ε^* abgebildet. — Die Gerade g schneidet jeden Kegelschnitt von Σ in je zwei Punkten, die weder assoziiert sind, noch alle zusammenfallen können. Diese Punkte werden daher in verschiedene Punkte von ε^* abgebildet. Nach 4. schneiden die Geraden von ε^* das Bild von g in je zwei Punkten, die nicht alle zusammenfallen können. Das Bild von g ist daher ein Kegelschnitt, da nach A. 1. die Abbildung algebraisch ist.

§ 2.

Räumliche Konstruktion der allgemeinen quadratischen Abbildung.

A. Abbildung einer irreduziblen Fläche 2. Ordnung auf eine Ebene.

Eine irreduzible Fläche 2. Ordnung $[F]$ werde wie folgt auf eine Ebene ε abgebildet (verallgemeinerte stereographische Projektion):

Auf $[F]$ sei ein regulärer Punkt S' gewählt, der nicht in ε liegt. Jedem von S' verschiedenen Punkt P' der Fläche $[F]$ sei als Bild der Schnittpunkt P der Geraden $S'P'$ mit ε zugeordnet. Diese Abbildung ist punktweise umkehrbar eindeutig mit folgenden Ausnahmen: Ist $[F]$ kein Kegel, dann werden die von S' verschiedenen Punkte der Erzeugenden $S'G_1$ und $S'G_2$ der Fläche in die Punkte G_1 bzw. G_2 abgebildet. Aus Stetigkeitsgründen sei ferner dem Punkt S' die Gerade G_1G_2 zugeordnet. Ist $[F]$ ein Kegel, so fallen die beiden Erzeugenden $S'G_1$ und $S'G_2$ in eine Erzeugende $S'G$ zusammen, deren von S' verschiedene Punkte dem Punkt G zugeordnet sind. Dem Punkt S' wird dann die in ε liegende Tangente des Kegels in G zugeordnet.

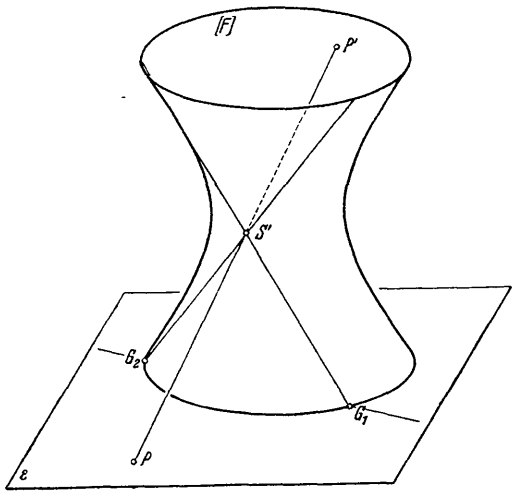


Fig. 2.

Satz III: *Die Achse a eines Ebenenbüschels, die nicht durch S' gehen möge, treffe $[F]$ in den Punkten G_3', G_4', die auch zusammenfallen können. Die Ebenen des Büschels schneiden $[F]$ in Kegelschnitten, welchen vermöge der obigen Abbildung in ε wieder Kegelschnitte entsprechen. Die Kegelschnitte in ε bilden ein Büschel mit den Grundpunkten G_1, G_2, G_3, G_4. Das Doppelverhältnis von vier Kegelschnitten des Büschels ist gleich dem Doppelverhältnis der vier Ebenen, welche die entsprechenden Kegelschnitte auf $[F]$ ausschneiden.*

Es gilt auch die Umkehrung von Satz III:

Satz IV: *Die Kegelschnitte eines regulären*[13]) *Büschels der Ebene ε können durch Projektion der Schnitte eines Ebenenbüschels mit einer nicht zerfallenden Fläche 2. Ordnung $[F]$ von einem ihrer regulären Punkte S', der nicht in ε liegt, auf ε erhalten werden.* — Der Beweis hierfür kann durch folgende Überlegung geführt werden:

[13]) Das Büschel enthalte nicht lauter zerfallende Kegelschnitte. Die Behauptung gilt — wie nicht weiter ausgeführt werden soll — auch für singuläre Kegelschnittbüschel.

In der Ebene ε sei ein reguläres Kegelschnittbüschel vorgegeben. Es gehört bekanntlich einem der fünf Typen an[14]):

1. Sämtliche Kurven des Büschels gehen durch vier verschiedene Grundpunkte G_1, G_2, G_3, G_4.

2. Das Büschel hat drei Grundpunkte G_1, G_2, G_3; in G_1 berühren sich die irreduziblen Büschelkurven.

3. Das Büschel hat zwei Grundpunkte G_1, G_2, in jedem berühren sich die irreduziblen Büschelkurven.

4. Das Büschel hat zwei Grundpunkte G_1, G_2, in G_1 berühren sich die irreduziblen Büschelkurven dreipunktig.

5. Das Büschel hat einen Grundpunkt G_1, in G_1 berühren sich die irreduziblen Büschelkurven vierpunktig.

Wir suchen nun für die fünf den fünf Büscheltypen entsprechenden Fälle die gesuchten Abbildungen herzustellen. S' darf dabei weder in ε liegen, noch, falls zur Abbildung ein Kegel benützt wird, mit dessen Spitze zusammenfallen. Eine kurze Überlegung zeigt, daß in jedem der fünf Fälle die geforderte Abbildung vermittelt wird.

a) Die Fläche $[F]$ gehe durch eine nicht zerfallende Büschelkurve. Vgl. die schematische Tabelle von Fig. 3.

1. Wir wählen $[F]$ so, daß $S'G_1$, $S'G_2$ zwei ihrer Erzeugenden sind[15]) Die Achse a des Ebenenbüschels sei G_3G_4.

2. Wir wählen $[F]$ so, daß $S'G_2$, $S'G_3$ oder $S'G_1$, $S'G_3$ Erzeugende von $[F]$ sind. a sei dann entsprechend die gemeinsame Tangente der Büschelkurven in G_1 oder G_1G_2.

3. und 4. Wir wählen $[F]$ so, daß $S'G_1$ und $S'G_2$ Erzeugende von $[F]$ sind. a sei G_1G_2 bzw. die gemeinsame Tangente der Büschelkurven in G_1.

Beim zweiten bis vierten Büscheltyp kann $[F]$ auch als *Kegel* gewählt werden. S' wähle man dann auf der Erzeugenden durch G_1. a sei dann im zweiten Fall G_2G_3, im dritten Fall die gemeinsame Tangente der Büschelkurven in G_2, im vierten Fall G_1G_2.

5. Wir wählen $[F]$ als Kegel und S' auf der Erzeugenden durch G_1. Die Achse a sei die gemeinsame Tangente in G_1.

b) Die Fläche gehe durch eine zerfallende Kurve des Büschels. Die Abbildung läßt sich bei den Typen 1 bis 3 wie unter a) angeben. Dabei darf die Achse a nicht Teil der zerfallenden Büschelkurve sein. Man kann sich die Abbildungen b) aus den Abbildungen a) dadurch entstanden

[14]) Vgl. z. B. R. Baldus: „Zur Theorie der Büschel von Flächen 2. Ordnung". Münchener Akad. Ber. 1931, S. 94—102.

[15]) Die Fläche $[F]$ ist hier und weiterhin außer den genannten Bedingungen noch willkürlich wählbar.

denken, daß im einzelnen Fall an Stelle der Ebene ε eine Ebene des Ebenenbüschels mit der Achse a tritt, die die Fläche in einem zerfallenden Kegelschnitt schneidet, der den Punkt S' nicht enthält.

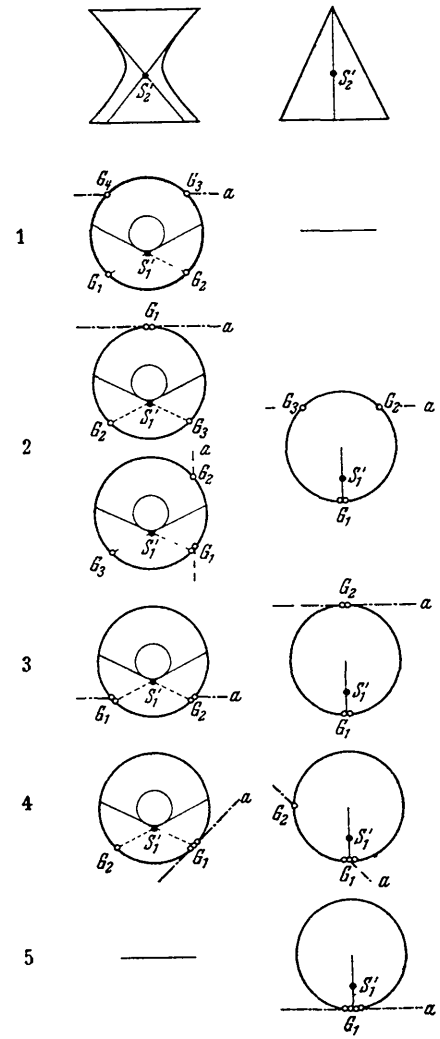


Fig. 3.

B. Prinzip der Konstruktion an einem Spezialfall erläutert.

In ε^* seien die Geraden a^*, b^*, c^*, d^*, e^*, in ε die Kegelschnitte (K_a), (K_b), (K_c), (K_d), (K_e) vorgegeben mit der in § 1. B. angegebenen Anordnung. Das Büschel der Geraden b^*, c^*, d^* werde Büschel $\mathfrak{A}^*$, das Büschel der Geraden a^*, c^*, e^* Büschel $\mathfrak{B}^*$ genannt. Dadurch ist nach § 1. B. eine quadratische Abbildung festgelegt. Das Konstruktionsprinzip soll an einem einfachen Fall erläutert werden.

Wir setzen voraus, (K_a), (K_b), (K_c) haben *keine Fixpunkte*. Ferner seien die Büschel $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ *beide* vom *1. Typ*. Dann können wir nach § 2. A. Büschel $\mathfrak{A}$ auf eine Fläche $[F_{\mathfrak{A}}]$ und Büschel $\mathfrak{B}$ auf eine Fläche $[F_{\mathfrak{B}}]$ abbilden. Die Projektionszentra der zugehörigen Abbildungen seien mit $S'_{\mathfrak{A}}$, $S'_{\mathfrak{B}}$ bezeichnet. Die Bilder der Kegelschnitte (K_b), (K_d), (K_c) auf $[F_{\mathfrak{A}}]$ seien $(K_b)'$, $(K_d)'$, $(K_c)'$, die Bilder der Kegelschnitte (K_a), (K_e), (K_c) auf $[F_{\mathfrak{B}}]$ seien $(K_a)'$, $(K_e)'$, $(K_c)'$. $[F_{\mathfrak{A}}]$ und $[F_{\mathfrak{B}}]$ sollen ferner den Kegelschnitt $(K_c) \equiv (K_c)'$ gemeinsam haben. Nach § 2. A. gehören die Ebenen der Kegelschnitte $(K_b)'$, $(K_d)'$, $(K_c)'$ einem Ebenenbüschel mit der Achse a (durch zwei Grundpunkte des Büschels $\mathfrak{A}$), und die Ebenen der Kegelschnitte $(K_a)'$, $(K_e)'$, $(K_c)'$ einem Ebenenbüschel mit der Achse b (durch zwei Grundpunkte des Büschels $\mathfrak{B}$) an. a schneidet b in einem Punkt Q der Ebene ε,

der auf keiner der Flächen $[F_{\mathfrak{A}}]$, $[F_{\mathfrak{B}}]$ liegt. Schneidet man die Ebenen von $(K_a)'$, ..., $(K_e)'$ mit einer beliebigen nicht durch Q gehenden Ebene $\bar{\varepsilon}$, so entsteht in $\bar{\varepsilon}$ eine zur Konfiguration der Punkte A^*, B^*, C^* und der Geraden a^*, ..., e^* in ε^* kollineare Konfiguration. Da die allgemeine quadratische Abbildung bis auf Kollineationen in ε^* und ε be-

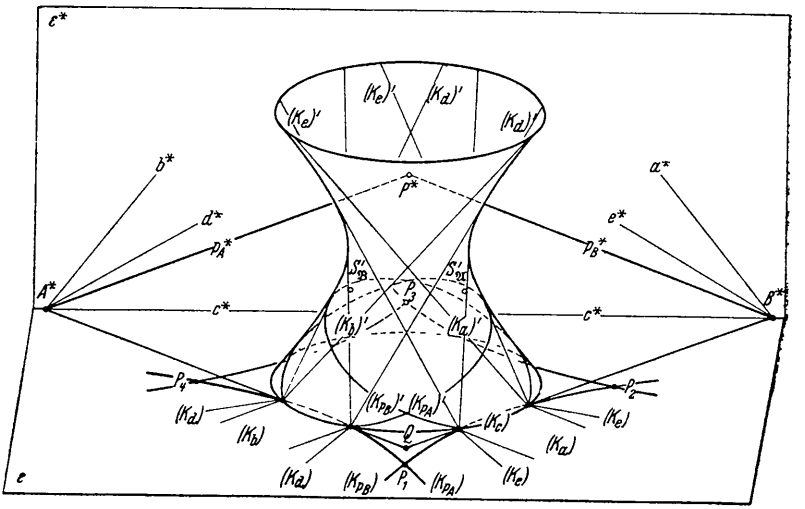


Fig. 4.

stimmt ist, kann $\bar{\varepsilon} \equiv \varepsilon^*$ angenommen werden. Daraus läßt sich die folgende *räumliche Konstruktion* der quadratischen Abbildung des vorliegenden speziellen Typs ableiten (vgl. Fig. 4):

Um in ε die Bildpunkte P_i eines Punktes P^* von ε^* zu konstruieren, ziehe man durch A^* die Gerade $A^* P^* = p_A^*$, durch B^* die Gerade $B^* P^* = p_B^*$. Dann projiziere man p_A^* bzw. p_B^* von Q aus auf $[F_{\mathfrak{A}}]$ bzw. $[F_{\mathfrak{B}}]$ (in der Fig. 4 ist $[F_{\mathfrak{A}}] \equiv [F_{\mathfrak{B}}]$; Punkte sind ferner durch Nullkreise bezeichnet, die, falls die Punkte nicht verdeckt sind, ausgefüllt sind) *und erhält $(K_{pA})'$ bzw. $(K_{pB})'$. $(K_{pA})'$ projiziere man von $S'_{\mathfrak{A}}$, $(K_{pB})'$ von $S'_{\mathfrak{B}}$ auf ε. Die Schnittpunkte P_i der beiden so erhaltenen Kurven (K_{pA}), (K_{pB}), in ε sind dann die Bildpunkte des Punktes P^*.* Denn die Kurven (K_{pA}), (K_{pB}) sind wegen der Gleichheit der Doppelverhältnisse der Büschel $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{B}$ nach § 1. B. und § 2. A. die Bilder der Geraden p_A^* und p_B^*.

C. Vereinfachte Darstellung der räumlichen Konstruktion im allgemeinen Fall.

I. Die obige Konstruktion läßt wesentliche Vereinfachungen zu. *Es kann nämlich stets $[F_{\mathfrak{A}}] \equiv [F_{\mathfrak{B}}] \equiv [F]$ gewählt werden. Die vier Haupt-*

klassen (§ 1, B. 2.) *lassen sich ferner durch einfache Lagenbeziehungen der Punkte* $S'_{\mathfrak{A}}$, $S'_{\mathfrak{B}}$, Q *zu* $[F]$ *kennzeichnen.* Das soll jetzt gezeigt werden.

Das Netz Σ enthält stets mindestens einen nicht zerfallenden Kegelschnitt. Ein solcher Kegelschnitt werde als Kurve (K_c) (Trägerkurve) gewählt. Die Büschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ können dann nicht singulär sein. Die möglichen Fälle seien durch die Symbole (l, m, n) bezeichnet. l bedeutet die Nummer des Büscheltyps (§ 2. A.) von $\mathfrak{A}$, m die von $\mathfrak{B}$, n die Zahl der auftretenden Fixpunkte. Man kann sich auf $l \leqq m$ beschränken. Die Fälle $(1, 5, 2)$; $(1, m, 3)$, $m = 3, 4, 5$; $(2, 5, 3)$; $(3, 3, n)$, $(3, 5, n)$, $n = 1, 3$; $(4, 5, 2)$; $(5, 5, n)$, $n = 1, 2, 3$ sind nicht möglich. Die Grundpunkte des Büschels $\mathfrak{A}$ seien mit G_i, die des Büschels $\mathfrak{B}$ mit H_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ bezeichnet.

1. $(l, m, 0)$.

Im Fall $(1, 1, 0)$ wählen wir die reguläre Fläche $[F]$ so, daß $S'_{\mathfrak{A}} G_1$, $S'_{\mathfrak{A}} G_2$ Erzeugende auf $[F]$ sind. $S'_{\mathfrak{B}}$ ist dann der eine oder der andere der Schnittpunkte der Erzeugenden durch H_1, H_2. In den Fällen $l, m \leqq 4$ gibt es die vier verschiedenen Grundpunkte G_1, G_2, H_1, H_2. Daher kann in diesen Fällen $[F]$ wie bei $(1, 1, 0)$ gewählt werden. Der Schnittpunkt Q liegt dabei stets nicht auf $[F]$.

In den Fällen $(l, 5, 0)$, $l = 2, 3, 4, 5$ wählen wir einen *Kegel* mit der Erzeugenden $S'_{\mathfrak{A}}$ G_1 und nehmen $S'_{\mathfrak{B}}$ auf der durch H_1 gehenden Erzeugenden an. Das ist auch bei $(l, m, 0)$, $l, m \neq 1$ möglich.

Im Fall $(1, 5, 0)$ scheint es zunächst unmöglich, $[F_{\mathfrak{A}}] \equiv [F_{\mathfrak{B}}]$ zu erreichen. Da es jedoch nach § 1, C. freisteht, irgend drei den dortigen Voraussetzungen genügende Kegelschnitte aus Σ als Ausgangskurven (K_a), (K_b), (K_c) zu wählen, trete an Stelle von (K_c) eine von (K_c) verschiedene, irreduzible Kurve $(K_{c'})$ des Büschels $\mathfrak{A}$. Wir erhalten — wenn z. B. (K_b) die Doppelgerade des Büschels $\mathfrak{B}$ ist — dann den Fall $(1, 3, 0)$, der oben schon erledigt wurde.

2. $(l, m, 1)$. $(l, m) \neq (3, 3), (3, 5), (5, 5)$.

Ist $l, m \leqq 4$, so kann, wie in 1., immer eine nicht singuläre Fläche $[F]$ an Stelle von $[F_{\mathfrak{A}}]$ und $[F_{\mathfrak{B}}]$ treten. Dabei ist es stets möglich, a und b so zu legen, daß ihr Schnittpunkt mit dem Fixpunkt F zusammenfällt.

Bei $(2, 5, 1)$ und $(4, 5, 1)$, sowie den schon angeführten Fällen $(2, n, 1)$, $n = 2, 3, 4$; $(3, 4, 1)$; $(4, 4, 1)$ kann $[F]$ als *Kegel* gewählt werden. Q fällt dann stets mit F zusammen.

In dem noch ausstehenden Fall $(1, 5, 1)$ ersetzen wir wieder (K_c) durch eine andere irreduzible Kurve des Büschels $\mathfrak{A}$. Dieser Fall ist damit auf $(1, 3, 1)$ zurückgeführt, wenn (K_b) wieder die Doppelgerade von $\mathfrak{B}$ ist.

3. $(l.m,2)$. $(l,m) \neq (1,5), (4,5), (5,5)$.

Die beiden Fixpunkte F_1, F_2 können auch in einem Punkt F zusammenfallen. Sämtliche irreduziblen Kurven von Σ haben dann in F eine gemeinsame Tangente t. a, b dürfen nicht beide durch F_1 und F_2 gehen, noch beide mit t zusammenfallen. Bei $(1,m,2)$, $m = 1,2,3,4$; $(4,4,2)$ müssen, bei $(2,m,2)$, $m = 2,3,4$ können zwei getrennte Fixpunkte auftreten. In diesen Fällen können wir $[F]$ so wählen, daß $S'F_1$, $S'F_2$ Erzeugende von $[F]$ sind und somit $S'_{\mathfrak{A}} \equiv S'_{\mathfrak{B}} \equiv S'$ ist.

Bei $(2,5,2)$; $(3,m,2)$, $m = 3,4,5$ muß, bei $(2,m,2)$, $m = 2,3,4$ kann ein doppeltzählender Fixpunkt auftreten. In diesen Fällen kann stets ein *Kegel* so gewählt werden, daß $S'F$ Erzeugende ist und somit $S'_{\mathfrak{A}} \equiv S'_{\mathfrak{B}} \equiv S'$ angenommen werden kann.

In allen Fällen $(1,m,2)$ liegt der Schnittpunkt Q von a und b nicht auf $[F]$.

4. $(l,m,3)$. $(l,m) \neq (1,3), (1,4), (3,3), (a,5)$; $a = 1,2,3,5$.

Wir unterscheiden drei Fälle:

a) Drei getrennte Fixpunkte F_1, F_2, F_3.

Dies tritt bei $(1,1,3)$; $(1,2,3)$ stets, bei $(2,2,3)$ möglicherweise ein. Man wähle $[F]$ so, daß $S'F_1$, $S'F_2$ Erzeugende auf $[F]$ sind. F_3 ist dann der Schnittpunkt Q der Achsen a und b und liegt auf $[F]$.

b) Zwei Fixpunkte F_1, F_2. In F berühren sich alle irreduziblen Systemkurven.

Dies tritt bei $(2,3,3)$; $(2,4,3)$; $(3,4,3)$ stets, bei $(2,2,3)$ möglicherweise ein. Man wähle $[F]$ als Kegel so, daß $S'F_1$ Erzeugende des Kegels ist. a und b schneiden sich in F_2, also auf dem Kegel.

c) Ein Fixpunkt F.

Sämtliche irreduziblen Systemkurven berühren sich in F dreipunktig. Dies muß bei $(4,5,3)$; $(5,5,3)$ eintreten. Man wähle $[F]$ als Kegel so, daß $S'F$ eine Erzeugende des Kegels ist. a, b schneiden sich in F, also auf dem Kegel.

Es ergibt sich somit:

Satz V: *Die allgemeine quadratische Abbildung kann stets durch eine irreduzible Fläche 2. Ordnung vermittelt werden. Die Abbildung* (§ 2, B.) *kann dabei so eingerichtet werden, daß beim Vorhandensein* 1. *eines Fixpunktes F, Q mit F zusammenfällt,* 2. *zweier Fixpunkte $S'_{\mathfrak{A}}$ mit $S'_{\mathfrak{B}}$ in S' zusammenfällt,* 3. *dreier Fixpunkte $S'_{\mathfrak{A}}$ mit $S_{\mathfrak{B}}$ in S' und Q mit einem der drei Fixpunkte zusammenfällt.*

II. Sind mindestens *zwei Fixpunkte* vorhanden, so läßt sich die Konstruktion der Abbildung noch weiter vereinfachen. Um in ε die Bildpunkte P_i eines Punktes P^* von ε^* zu konstruieren, wird durch A^* die Gerade $A^*P^* = p^*_A$, durch B^* die Gerade $B^*P^* = p^*_B$ gezogen. Dann

projiziert man p_A^* bzw. p_B^* auf $[F]$ und erhält $(K_{pA})'$ und $(K_{pB})'$. $(K_{pA})'$ und $(K_{pB})'$ werden von S' auf ε projiziert. Die Schnittpunkte der so erhaltenen Kurven (K_{pA}) und (K_{pB}) sind dann die Bildpunkte P_i von P^*. Von den Punkten P_i fallen stets zwei nach F_1, F_2 bzw. nach F, da (K_{pA}) und (K_{pB}) sich stets in F_1 und F_2 schneiden oder in F, falls sie irreduzibel sind, eine gemeinsame Tangente besitzen. Die beiden anderen Schnittpunkte sind die Projektionen der Schnittpunkte von $(K_{pA})'$ und $(K_{pB})'$ von S' auf ε. Diese Schnittpunkte liegen auf $[F]$ und auf der Schnittlinie der beiden Ebenen $(K_{pA})'$ und $(K_{pB})'$ und sind somit die Schnittpunkte der Geraden P^*Q mit $[F]$. Die Konstruktion läßt sich daher so formulieren:

Satz VI: *Um in ε die Bildpunkte P_i eines Punktes P^* von ε^* zu finden, schneide man P^*Q mit $[F]$ und projiziere die Schnittpunkte von S' auf ε. Diese Punkte sind dann die gesuchten Bildpunkte P_i des Punktes P^**[16]).

§ 3.

Darstellung der räumlichen Konstruktion mittels Kegeln im Zusammenhang mit der Sauerschen Klassifikation der allgemeinen quadratischen Abbildungen.

A. Vorbereitende Bemerkungen und Sätze.

Es liegt die Frage nahe, bei welchen Abbildungen kann die Fläche $[F]$ als *Kegel* gewählt werden und welches sind dabei die Typen der Büschel $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$? Diese Frage steht in engem Zusammenhang mit den möglichen *Typen* von *Kegelschnittnetzen.*

Nach bekannten Sätzen umhüllen die *zerfallenden* Kegelschnitte eines Kegelschnittnetzes eine *Kurve 3. Klasse* (H) und die *Doppelpunkte* dieser Kegelschnitte liegen auf einer *Kurve 3. Ordnung* (D)[17]).

Ist P einer von vier getrennten Grundpunkten eines Büschels von Kegelschnitten aus Σ, so werden die drei durch P gehenden zerfallenden Kegelschnitte nach § 1, C. in drei durch P^* gehende Gerade abgebildet. Zwei oder drei dieser Geraden fallen zusammen, wenn zwei oder drei der übrigen Grundpunkte zusammenrücken. Die Geraden in ε^*, in welche die *zerfallenden Kegelschnitte* von Σ abgebildet werden, umhüllen somit, da die Abbildung algebraisch ist, eine *Kurve 3. Klasse* (H^*). Ausgehend von

---

[16]) Für den Spezialfall dreier Fixpunkte (Q auf $[F]$) wurde die obige Konstruktion von Reye, Battaglini und Darboux angegeben. Vgl. Fußnote [2]) S. 2013. Zum Fall zweier Fixpunkte vgl. Fußnote [6]) und [8]). Aus dem Obigen geht hervor, daß an Stelle der in [6]) verwendeten Kugel eine beliebige reelle $[F]$ treten kann, bei der ε Kreisschnittebene und S' Nabelpunkt ist.

[17]) Enz. d. math. Wiss. III. 2., S. 135—139. (D) heißt „Hessesche", (H) „Cayleysche" Kurve.

einer Klassifikation der Hüllkurven (H) in ε hat R. Sauer[5]) durch Untersuchung der möglichen Zuordnungen der Kurven (H) und (H^*) in ε bzw. ε^* die allgemeinen quadratischen Abbildungen klassifiziert, die einzelnen Typen analytisch beschrieben und in metrischer Normierung gestaltlich diskutiert.

Es sollen einige bekannte Sätze, die für später von Wichtigkeit sind, vorausgeschickt werden. Die Beweise werden aus der geometrischen Definition erbracht.

1. *Die Kurve (D) ist der Ort der Punkte, in welchen sich Kegelschnitte von Σ zwei- oder mehrpunktig berühren*[18]). — Q sei Doppelpunkt eines in g_1 und g_2 zerfallenden Kegelschnittes (G) von Σ. Die Büschel $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien so projektiv aufeinander bezogen, daß sie (G) erzeugen. Legt man durch Q den Kegelschnitt $(K_{\mathfrak{A}})$ von $\mathfrak{A}$ und den Kegelschnitt $(K_{\mathfrak{B}})$ von $\mathfrak{B}$ — falls Q Grundpunkt der Büschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ ist, jeweils irgend einen Kegelschnitt — so müssen die Kegelschnitte (G), $(K_{\mathfrak{A}})$, $(K_{\mathfrak{B}})$ einem Büschel, dessen Grundpunkte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sind, angehören, d. h. $(K_{\mathfrak{A}})$, $(K_{\mathfrak{B}})$ müssen sich in $Q\,(\equiv Q_3 \equiv Q_4)$ berühren. Die gemeinsame Tangente in Q ist die dritte durch Q gehende Tangente an (H). Fällt g_1 mit g_2 in g zusammen, so ist g Bestandteil von (D) und die g erzeugenden Kegelschnitte müssen sich jeweils in zwei Punkten von g berühren. — In den Punkten von (D) ist somit die Abbildung nicht mehr „im Unendlichkleinen" projektiv.

2. *Die Punkte von (H) und (D) werden auf die Punkte von (H^*) abgebildet*[19]).

Wir nehmen zunächst an, daß die Grundpunkte Q_1, Q_2, Q $(\equiv Q_3 \equiv Q_4)$ des Büschels $(K_{\mathfrak{A}})$, $(K_{\mathfrak{B}})$, (G) nicht zusammenfallen. Dann fallen zwei der durch Q_1 bzw. Q_2 gehenden Tangenten in $Q_1 Q$ bzw. $Q_2 Q$ zusammen. Q_1, Q_2 sind daher Punkte von (H). Da Q_1, Q_2 nicht auf (D) liegen, ist die Abbildung in ihrer Umgebung „im Unendlichkleinen" projektiv und die assoziierten Punkte Q $(\equiv Q_3 \equiv Q_4)$, Q_1, Q_2 sind Bildpunkte eines Punktes Q^* auf (H^*).

Es sei $QQ_1 = g_1$, $QQ_2 = g_2$. Fällt Q_2 mit Q zusammen, so ist Q gemeinsamer Punkt von (D) und (H) und g_2 gemeinsame Tangente von (D) und (H) in Q. Q_1 ist im allgemeinen Rückkehrpunkt von (H) und wird mit dem dreifach zählenden Punkt Q in einen Rückkehrpunkt Q^* von (H^*) abgebildet. Fällt schließlich noch Q_1 mit Q zusammen, so ist g $(\equiv g_1 \equiv g_2)$ Wendetangente oder Bestandteil von (D).

3. *Jede einem zerfallenden Kegelschnitt von Σ angehörende Gerade g schneidet die übrigen Kegelschnitte von Σ in den Punktepaaren ein und derselben Involution.*

---

[18]) Siehe [5]) und Reye, „Geometrie der Lage" 1, 4. Aufl. (1899), S. 268—293.

[19]) Dieser Satz ist in [5]) analytisch bewiesen.

g schneidet die erzeugenden Büschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ nach den Punkten ein und derselben Involution $[\mathfrak{I}]$. (K) sei ein beliebiger Kegelschnitt von Σ. Einer seiner Schnittpunkte mit g sei Q. (K) muß auch durch die zu Q assoziierten Punkte gehen. Einer dieser Punkte ist der Q auf g durch die Involution $[\mathfrak{I}]$ zugeordnete Punkt. — Die Schnittpunkte von g mit (D) sind nach 1. der Doppelpunkt von (G) und die beiden Doppelpunkte von $[\mathfrak{I}]$.

B. Die in den (Sauerschen) Typen auftretenden Büscheltypen und die Konstruktion der allgemeinen quadratischen Abbildungen mittels Kegeln.

Im folgenden soll der Nachweis erbracht werden für den

Satz VII: *Jede quadratische Abbildung kann durch Kegel vermittelt werden.*

Dabei wird die Sauersche Einteilung[5]) der quadratischen Abbildungen zugrunde gelegt. Dazu ist es nach § 2, C. notwendig, die einzelnen Fälle auf die bei ihnen auftretenden *Büscheltypen* hin zu untersuchen[20]).

Damit die Abbildung durch Kegel vermittelt werden kann, ist hinreichend, daß in jedem Fall eine irreduzible Kurve (K_c) in ε angegeben werden kann, die zwei Büschel (Grundpunkte G_1, H_1) vom Typ (l, m, n) $l, m \neq 1$ trägt, mit Ausnahme von $(4, 4, 2)$ und, falls getrennte Fixpunkte vorliegen, von $(2, 2, 2)$ und $(2, 4, 2)$.

I. Abbildungen ohne Fixpunkte.

a) (H) *nicht rational*[21]).

Singuläre Büschel können hier nicht auftreten, da sonst (H) zerfallen müßte. Auch können Büschel vom 3. und 5. Typ nicht vorkommen, sonst hätte (H) eine Doppeltangente und wäre damit rational.

(K_c) sei eine irreduzible Kurve eines zu (H) gehörigen Netzes. G_1 sei ein Punkt auf (K_c). Es können folgende Fälle eintreten:

	Die zu G_1 assoziierten Punkte sind Grundpunkte eines Büschels vom
G_1 weder auf (D) noch auf (H)	1. Büscheltyp.
G_1 einfacher Schnittpunkt von (D) und (K_c)	2. „
G_1 Berührpunkt von (D) und (K_c)	4. „

Im letzteren Fall geht (K_c) durch einen Rückkehrpunkt von (H). Zur Abbildung mittels Kegeln können auf (K_c) die folgenden Büschel verwendet werden:

---

[20]) Eine Untersuchung der Zuordnung der Gebiete bei den allgemeinen quadratischen Abbildungen mit reellen Koeffizienten findet sich in [5]).

[21]) Eine vorgegebene nicht rationale (C^3) kann als Cayleysche Kurve von drei verschiedenen Netzen aufgefaßt werden. Vgl. [5]).

(2, 2, 0) G_1, H_1 einfache Schnittpunkte von (K_c) und (D).

(2, 4, 0) G_1 einfacher Schnittpunkt von (K_c) mit (D), H_1 Spitze von (H).

(4, 4, 0) G_1, H_1 Spitzen von (H). G_1, H_1 sind nicht assoziiert, und (K_c) ist auch in diesem Fall irreduzibel, wie leicht gezeigt werden kann.

b) (H) *rational* und

1. *nicht zerfallend mit Doppeltangente d.* Singuläre Büschel können auch hier nicht auftreten. Da durch die Punkte der Doppeltangente (mit Ausnahme der Berührungspunkte) außer der Doppeltangente nur eine einzige Tangente an (H) geht, so müssen sich die Kegelschnitte des Netzes büschelweise in d berühren. (D) zerfällt daher in d und einen Kegelschnitt (D_2). Die Doppelpunkte der Involution auf d sind die Schnittpunkte von (D_2) mit d. Außer den unter a) genannten Fällen — (D) ist dabei mit Ausnahme des ersten Falles durch (D_2) zu ersetzen — können noch die folgenden Fälle eintreten:

G_1 auf d, jedoch nicht Berührpunkt	3. Büscheltyp.
G_1 Berührpunkt von d	5. „

Zur Abbildung mittels Kegeln können auf irreduziblen Kegelschnitten die Büschel $(l, m, 0)$, $l, m \geqq 2$ und $(l, m) \neq (3, 3), (3, 5), (5, 5)$ verwendet werden. Denn die assoziierten Punkte der Büschel vom 3. und 5. Typ liegen auf d.

Mit Wendetangente w. w werde durch zwei projektive Kegelschnittbüschel erzeugt. Die Involution auf w muß zu einer parabolischen ausarten, sonst würden auf der Wendetangente zwei Berührpunkte mit (H) liegen. Die Annahme, daß die Involution auf d parabolisch ist, führt jedoch auf den ausgeschlossenen Fall, daß sämtliche Kegelschnitte von Σ durch einen festen Punkt gehen. (H) kann also *keine Wendetangente* besitzen.

2. *Zerfallend.* Von (H) spaltet sich ein Strahlenbüschel (Scheitel S) ab. Wir legen durch S die Kurven $(K_{\mathfrak{A}})$ und $(K_{\mathfrak{B}})$ der beiden erzeugenden Büschel $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Wäre das Büschel $(K_{\mathfrak{A}})$, $(K_{\mathfrak{B}})$ regulär, so könnten durch S höchstens drei Tangenten an (H) gehen. Das Büschel ist daher singulär und $(K_{\mathfrak{A}})$ und $(K_{\mathfrak{B}})$ sind durch S gehende Geradenpaare, welche einer nicht singulären Strahleninvolution angehören (Doppelstrahlen d_1, d_2).

α) (H) *zerfällt in S und* (H^2).

Man zeigt leicht: (D) zerfällt in d_1, d_2 und die Polare a von S bezüglich (H^2). d_1, d_2 sind die Tangenten von S an (H^2). Daraus folgt:

G_1 weder auf (D) noch auf (H)	1. Büscheltyp.
G_1 auf d_1 oder d_2	3. „
G_1 auf s	2. „
G_1 Schnittpunkt von s mit d_1 oder d_2	5. „

Zur Abbildung mittels Kegeln können auf irreduziblen Kegelschnitten die Büschel (2, 2, 0), (2, 3, 0), (2, 5, 0), (3, 5, 0), (5, 5, 0) herangezogen werden.

β) (H) *zerfällt in* S_1, S_2, S_3.

(D) zerfällt in S_1S_2, S_2S_3, S_3S_1. Es treten drei singuläre Büschel auf, deren Doppelstrahlen diese Geraden sind.

G_1 nicht auf (D)	1. Büscheltyp.
G_1 auf (D)	3. „

Zur Abbildung durch einen Kegel können auf einem irreduziblen Kegelschnitt nur die Büschel (3, 3, 0) verwendet werden.

II. Abbildungen mit Fixpunkten.

a) *Ein Fixpunkt* F. (H) zerfällt in F und (H^2).

1. F *nicht auf* (H^2). P, Q seien die Berührungspunkte der Tangenten von F an (H^2). FP kann nicht eine Doppelgerade von Σ sein, denn sonst ginge durch jeden Punkt von FP eine von FP verschiedene Tangente an (H^2), während doch durch P nur eine Tangente an (H^2) geht. Das gleiche gilt für FQ. Die Büschel mit den Grundpunkten F, P bzw. F, Q sind daher vom 4. Typ. (D) hat damit in F einen Doppelpunkt und ist daher rational. Es kann überdies gezeigt werden, daß (D) sich als Erzeugnis der beiden projektiv aufeinander bezogenen Strahlenbüschel F und (H^2) auffassen läßt. (D) berührt (H^2) in drei Punkten. (Vgl. Enz. d. math. Wiss. III. 2., S. 504—506.) Büschel vom 3. oder 5. Typ können nicht auftreten. Denn die Doppelgerade würde mit dem Geradenpaar FQ, FP ein singuläres Büschel bilden, das eine zweite Doppelgerade hat. Ein irreduzibler Kegelschnitt (K) würde mit den beiden Doppelgeraden Σ bestimmen und alle irreduziblen Kurven von Σ hätten in F eine feste Tangente, während F doch einfacher Fixpunkt sein sollte.

G_1 weder auf (D), FP, FQ noch auf (H^2)	1. Büscheltyp.
G_1 auf (D) oder FP, FQ jedoch $\neq P, Q$	2. „
G_1 Berührungspunkt von (D) mit (H^2) oder P, Q	4. „

Zur Abbildung durch Kegel können auf einem irreduziblen Kegelschnitt die folgenden Büschel verwendet werden: (2, 2, 1), (2, 4, 1), (4, 4, 1).

2. F *auf* (H^2). Die beiden Tangenten von F an (H^2) fallen in eine Doppelgerade d zusammen, die sich von (D) abspaltet. (D) zerfällt somit in d und (D_2). (D_2) und (H^2) haben in F die gemeinsame Tangente d.

G_1 weder auf (D) noch auf (H^2)	1. Büscheltyp.
G_1 auf (D_2)	2. „
G_1 auf d	3. „
G_1 gemeinsamer Punkt (= Berührpunkt B von (D_2) und (H^2), $\neq F$	4. „
Büschel durch F mit d als Doppeltangente	5. „

Zur Abbildung durch Kegel können auf einem irreduziblen Kegelschnitt die folgenden Büschel herangezogen werden:

(2, 2, 1) G_1, H_1 auf (D_2).
(2, 3, 1) G_1 auf (D_2), H_1 auf d.
(2, 4, 1) G_1 auf (D_2), $H_1 = B$.
(2, 5, 1) G_1 auf (D_2), Trägerkegelschnitt berührt d.
(3, 4, 1) Trägerkegelschnitt durch B, der d nicht berührt.
(4, 5, 1) Trägerkegelschnitt durch B, der d berührt.

Bei den Typen (3, 3, 1) und (3, 5, 1) ist der Trägerkegelschnitt die Doppelgerade d, also reduzibel.

b) *Zwei Fixpunkte* F_1, F_2.

1. *Getrennte Fixpunkte.* (H) muß in drei Strahlenbüschel zerfallen. Wir betrachten die Involution auf einer nicht durch F_1, F_2 gehenden Geraden g, die Teil eines zerfallenden Kegelschnittes ist. Es sei Q der Schnittpunkt von g mit F_1F_2.

α) Q sei nicht Doppelpunkt der Involution.

Die Schnittpunkte der Verbindungslinien von F_1, F_2 mit entsprechenden Punkten der Involution auf g sind Punkte eines Kegelschnitts (D_2), der mit F_1F_2 die Kurve (D) bildet. (H) zerfällt in drei Strahlenbüschel mit den Scheiteln F_1, F_2, und $\bar{Q}$, wobei $\bar{Q}$ der Q auf g durch die Involution zugeordnete Punkt ist. $\bar{Q}$ ist Pol von F_1F_2 in bezug auf (D_2).

Das Büschel der Netzkurven durch $\bar{Q}$ ist singulär. (Sämtliche Kurven des Büschels haben die Gerade F_1F_2 gemeinsam.)

G_1 nicht auf (D), $F_1\bar{Q}, F_2\bar{Q}$ und $\neq Q$	1. Büscheltyp.
G_1 auf (D_2), $F_1\bar{Q}$, $F_2\bar{Q}$ jedoch $\neq \bar{Q}$	2. „
Das Geradenpaar $\bar{Q}F_1$, F_1F_2 und ein Kegelschnitt, der $\bar{Q}F_1$ berührt	4. „
Das Geradenpaar $\bar{Q}F_2$, F_1F_2 und ein Kegelschnitt, der $\bar{Q}F_2$ berührt	4. „
G_1 auf F_1F_2	Singuläres Büschel.

Zur Abbildung durch einen Kegel können auf einem irreduziblen Kegelschnitt die folgenden Büschel benutzt werden:

(2, 2, 2) Der Trägerkegelschnitt schneidet
$\alpha\alpha$) (D_2) in G_1, $F_1\bar{Q}$ oder $F_2\bar{Q}$ in H_1;
$\beta\beta$) $F_1\bar{Q}$ in G_1, $F_2\bar{Q}$ in H_1.

2, 4, 2) Der Trägerkegelschnitt berührt (D_2) in F_1 oder F_2. G_1 ist sein Schnittpunkt mit $F_2\bar{Q}$ oder $F_1\bar{Q}$.

Dieser Fall zeigt, daß bei Verwendung von Kegeln zur Vermittlung der Abbildung nicht mehr allgemein $S'_{\mathfrak{A}} = S'_{\mathfrak{B}}$ im Fall zweier Fixpunkte erreicht werden kann.

β) Q sei Doppelpunkt der Involution.

(D) zerfällt in die doppelt zählende Gerade F_1F_2 und eine Gerade h. Q ist Scheitel eines singulären Büschels. (H) zerfällt in die drei Strahlenbüschel mit den Scheiteln F_1, F_2, Q.

G_1 nicht auf h, F_1F_2	1. Büscheltyp.
G_1 auf h, jedoch nicht auf F_1F_2	2. „
Kegelschnitte, die sich in F_1 oder F_2 je zweipunktig berühren	3. „

Zur Abbildung mittels Kegeln können auf irreduziblen Kegelschnitten die folgenden Büschel verwendet werden: (2, 3, 2) mit G_1 auf h.

2. *Zusammenfallende Fixpunkte.*

Die irreduziblen Kegelschnitte des Netzes haben eine gemeinsame Tangente f in F. Wir betrachten die Involution auf einer von f verschiedenen Geraden g, die Teil eines zerfallenden Kegelschnittes ist. Q sei der Schnittpunkt von g mit f.

α) Q sei nicht Doppelpunkt der Involution.

(D) zerfällt in f und in die Verbindungsgeraden d_1, d_2 der Doppelpunkte der Involution mit F. (H) zerfällt in das singuläre Büschel mit dem Scheitel F (Doppelstrahlen d_1, d_2) und in das singuläre Büschel mit dem Scheitel $\overline{Q}$. $\overline{Q}$ ist der Q auf g durch die Involution zugeordnete Punkt. (Die Geradenpaare durch $\overline{Q}$ haben die Gerade f gemeinsam.)

G_1 nicht auf (D), $F\overline{Q}$	2. Büscheltyp.
G_1 auf d_1, d_2	3. „ .
G_1 auf $F\overline{Q}$	4. „ .

Typ 5 kann nicht auftreten, da die Doppeltangenten von f verschieden sind.

Zur Abbildung mittels Kegeln können auf irreduziblen Kegelschnitten die folgenden Büschel verwendet werden:

(2, 2, 2)	G_1, H_1 nicht auf (D), $F\overline{Q}$.
(2, 3, 2)	G_1 nicht auf (D), $F\overline{Q}$; H_1 auf d_1 oder d_2.
(2, 4, 2)	G_1 nicht auf (D), $F\overline{Q}$; H_1 auf $F\overline{Q}$.
(3, 3, 2)	G_1 auf d_1 oder d_2, H_1 auf d_2 oder d_1.
(3, 4, 2)	G_1 auf d_1 oder d_2, H_1 auf $F\overline{Q}$.

β) Q sei Doppelpunkt der Involution.

(D) zerfällt in die doppelt zählende Gerade FQ und in $FQ_0 (= d)$. Q_0 ist der zweite Doppelpunkt der Involution auf g. (H) zerfällt in die beiden singulären Büschel mit den Scheiteln F (Doppelstrahlen FQ und FQ_0)

und Q. (Die durch Q gehenden zerfallenden Kegelschnitte haben die Gerade FQ gemeinsam.)

G_1 nicht auf (D)	2. Büscheltyp.
G_1 auf d	3. „
Kegelschnitt mit FQ	5. „

Zur Abbildung mittels Kegeln können auf irreduziblen Kegelschnitten die folgenden Büschel verwendet werden:

(2, 2, 2)	G_1, H_1 nicht auf (D).
(2, 3, 2)	G_1 nicht auf (D), H_1 auf d.
(2, 5, 2)	G_1 nicht auf (D), die Punkte H_i fallen mit F zusammen.
(3, 5, 2)	G_1 auf d, die Punkte H_i fallen mit F zusammen.

(3, 3, 2) hat die reduzible Trägerkurve d.

c) *Drei Fixpunkte* F_1, F_2, F_3.

1. Drei getrennte Fixpunkte F_1, F_2, F_3. (H) zerfällt in die Strahlenbüschel mit den Scheiteln F_1, F_2, F_3. (D) zerfällt in die drei Geraden F_1F_2, F_2F_3, F_3F_1. Die durch F_i gehenden zerfallenden Kegelschnitte bilden ein singuläres Büschel; sie haben jeweils die Gerade F_kF_l gemeinsam.

G_1 nicht auf (D)	1. Büscheltyp.
G_1 auf (D)	singuläres Büschel.
Kegelschnitt mit F_iF_k, F_kF_l	2. Büscheltyp.

Zur Abbildung mittels Kegeln können auf irreduziblen Kegelschnitten nur Büschel vom Typ (2, 2, 3) verwendet werden.

2. F_2, F_3 fallen zusammen. Die irreduziblen Kegelschnitte haben eine gemeinsame Tangente f. (D) zerfällt in f und die doppelt zählende Gerade F_1F_2. (H) zerfällt in die singulären Büschel mit den Scheiteln F_1 und F_2. Die durch F_1 gehenden Geradenpaare haben f gemeinsam; die durch F_2 gehenden Geradenpaare haben F_1F_2 gemeinsam.

G_1 nicht auf (D)	2. Büscheltyp.
Kegelschnitte, die in F_1 eine gemeinsame Tangente haben	3. „
Kegelschnitte, die sich in F_2 dreipunktig berühren	4. „

Zur Abbildung mittels Kegeln können auf irreduziblen Kegelschnitten die folgenden Büschel verwendet werden: (2, 2, 3), (2, 3, 3), (2, 4, 3), (3, 4, 3).

3. Dreipunktiger Fixpunkt F. Die irreduziblen Kegelschnitte haben in F die Tangente f gemeinsam. (D) zerfällt in die dreifach zählende Gerade f, (H) zerfällt in das singuläre Büschel mit dem Scheitel F.

G_1 nicht auf (D)	4. Büscheltyp.
Kegelschnitt mit f	5. „

Zur Abbildung mittels Kegeln können auf irreduziblen Kegelschnitten die Büschel (4, 4, 3), (4, 5, 3) verwendet werden.

Bemerkung: In den Fällen mit mindestens zwei Fixpunkten läßt sich die Abbildung wegen der einfachen Darstellung (§ 2, C. 2.) bequem überblicken.

Die Geraden durch S^* werden in Geradenpaare abgebildet. Eine Gerade ist stets $F_1 F_2$, die andere geht durch Q.

Die übrigen Geraden in ε^*, die in Geradenpaare der Ebene ε abgebildet werden, umhüllen den Umrißkegelschnitt (U^*), der durch Projektion der Fläche $[F]$ von Q auf ε^* entsteht. Die entsprechenden Geradenpaare in ε bilden Strahlenbüschel durch F_1, F_2. (H^*) zerfällt in (U^*) und das Strahlenbüschel S^*. (H) zerfällt in die drei Strahlenbüschel mit den Scheiteln Q, F_1, F_2. (D) zerfällt in $F_1 F_2$ und (U).

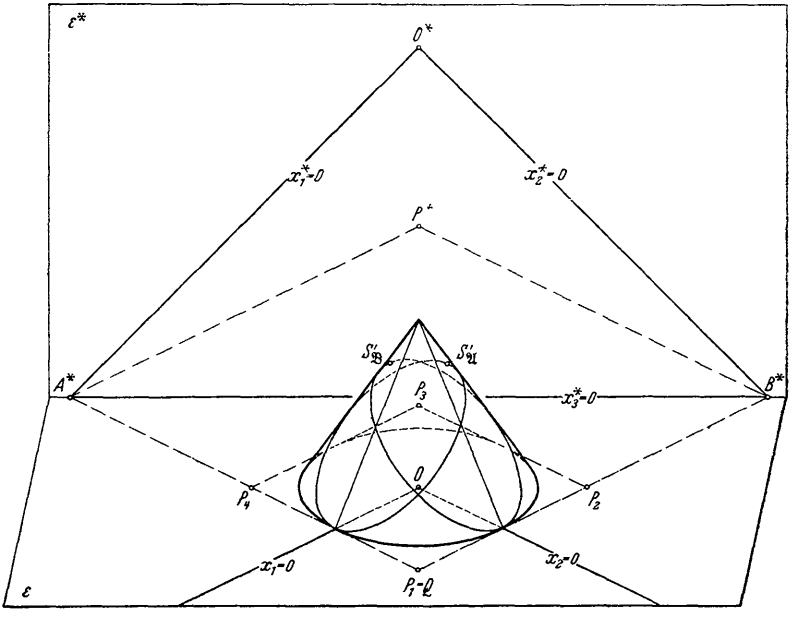


Fig. 5.

Ein Beispiel zur Abbildung durch Kegel. Die Abbildung

$$\varrho\, x_1^* = x_1^2,$$
$$\varrho\, x_2^* = x_2^2,$$
$$\varrho\, x_3^* = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$

vermittelt durch einen Kegel wird durch Fig. 5 veranschaulicht.

Die Gerade $A^* B^*$ in ε^* wird abgebildet in den Grundkreis des Kegels. Die Ebenen $Q A^* O^*$ und $Q B^* O^*$ berühren den Kegel. Die Bilder der Geraden $O^* A^*$ bzw. $O^* B^*$ sind daher $x_1^2 = 0$ bzw. $x_2^2 = 0$. Ferner sind die Bilder P_i des Punktes P^* konstruiert: Die Ebenen $Q A^* P^*$ und $Q B^* P^*$ — in der Figur geht die Ebene $Q A^* P^*$ durch den Punkt S'_{31}, $Q B^* P^*$ durch S'_{32} — schneiden den Kegel in zwei Ellipsen, die in die Geradenpaare $P_1 P_4$, $P_2 P_3$ und $P_1 P_2$, $P_3 P_4$ abgebildet werden[22]). Ist $x_3 = 0$ die Gleichung der uneigentlichen Geraden von ε und sind P^* bzw. P_1 die Einheitspunkte der Koordinatensysteme in ε^* bzw. ε, dann wird nach § 1, B. die gegebene Abbildung durch die Konstruktion von § 2, B. und Satz V vermittelt.

[22]) Wegen § 2, A.

(Eingegangen am 22. 10. 1935.)

Internationaler Mathematiker-Kongreß
Oslo, 13. bis 18. Juli 1936.

Für die allgemeinen Sitzungen sind vorgesehen Vorträge der Herren L. Ahlfors, S. Banach, G. D. Birkhoff, V. Bjerknes, E. Cartan, J. G. van der Corput, M. Fréchet, R. Fueter, A. Gelfond, H. Hasse, E. Hecke, A. Khintchine, E. Landau, O. Neugebauer, J. Nielsen, Ö. Ore, C W. Oseen, F. Severi, C. L. Siegel, C. Störmer, O. Veblen, N. Wiener.

Es werden folgende Sektionen gebildet: I. Algebra und Zahlentheorie. II. Analysis. III. Geometrie und Topologie. IV. Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik, Versicherungsmathematik und Ökonometrie. V. Mathematische Physik, Astronomie und Geophysik. VI. Mechanik und Ingenieurwissenschaften. VII. Logik, Philosophie und Geschichte. VIII. Pädagogik. Die Dauer eines Vortrags ist auf 15 Minuten beschränkt. Die genauen Titel müssen bis zum 15. April bei dem Sekretariat angemeldet werden. Zusammenfassungen (etwa 800 Silben) werden in den Kongreßakten erscheinen. Manuskript muß vor dem Schlusse des Kongresses (18. Juli) abgeliefert werden.

Preis der Kongreßkarte 40 Norwegerkronen, Karten für Familienangehörige 20 Norwegerkronen. Der Betrag ist vor dem 1. Mai an

Christiania Bank- u. Kreditkasse Oslo

zugunsten

Den Internationale Matematikerkongress,
Kontingentkonto 601

einzuzahlen.

Vor oder nach dem Kongreß können Reisen in Norwegen zu ermäßigten Preisen ausgeführt werden.

Alle Auskunft erteilt das Sekretariat. Adresse: Internationaler Matematikerkongress, Universitetet, Blindern, Oslo.

Alexander v. Brill.

Ein Lebensbild.

Von

Sebastian Finsterwalder in München.

Mit Alexander v. Brill ist eine hochragende Persönlichkeit aus dem Kreise der deutschen Mathematik dahingegangen, die einer Reihe von Geschlechtern Wegweiser, Vorbild und Gegenstand der Verehrung gewesen war und dadurch einen Einfluß auf die Wertschätzung dieser Wissenschaft, auf die Gestaltung des Unterrichts an Hochschulen und höheren Schulen und mittelbar auch auf die Stellung der Wissenschaft als solcher zu Land und Volk ausübte, der weit über die Leistungen im eigenen Fach hinausragte, wie sehr auch diese selbst Achtung verdienen und bleibende Werte schufen. Diesem letzten überlebenden bedeutenden Schüler ihres großen Gründers Clebsch wollen auch die Mathematischen Annalen Worte des Gedächtnisses widmen. Die Bedeutung Brills als Mitbegründers der algebraischen Geometrie, insbesondere als Begründers der Theorie der Korrespondenzen zwischen algebraischen Kurven, ist von F. Severi im 31. Jahresbericht der D. Math. Ver. (1922) so sachkundig geschildert worden, daß darauf bei dieser Gelegenheit nicht noch einmal eingegangen zu werden braucht. In diesem Nachruf sollen vorwiegend andere, bisher vielleicht weniger beachtete Züge von Brills vielseitiger Persönlichkeit hervorgehoben werden.

Sein Dasein verlief im ganzen einfach und sehr harmonisch, vom Glück begünstigt und von schwerem Leid verschont, in vorbildlichem Familienleben, das in warmem Sonnenschein sein hohes Alter verschönte. Körperliche Rüstigkeit, gepaart mit geistiger Beweglichkeit ermöglichten ihm einen reichen, mit Klugheit und Zurückhaltung genossenen Anteil an den Freuden und Ehren eines langen und erfolgreichen Lebens. Über dreiviertel Jahrhundert bewegten sein Herz die wechselvollen Schicksale des deutschen Volkes und befestigten in ihm die Überzeugung, daß der gegenwärtige Aufstieg dieses Volkes als Ausdruck seiner unverwüstlichen Tüchtigkeit volle Dauer verspricht.

Alexander Wilhelm Brill entsproß am 20. September 1842 als ältester von fünf Geschwistern der Ehe des Darmstädter Buchdruckereibesitzers Heinrich Brill und dessen Frau Julie, geb. Wiener. Diese war die Tochter

des Kriminalrichters Wiener aus Darmstadt und Schwester des bekannten Vertreters der darstellenden Geometrie am Polytechnikum zu Karlsruhe Christian Wiener; ihre ursprünglich bäuerliche Familie stammt aus dem Odenwald. Brills Jugend verfloß in sehr einfachen, aber glücklichen Verhältnissen. Der Einfluß seines gelehrten und freisinnigen Onkels Christian machte sich schon auf den Darmstädter Gymnasiasten geltend, der von seiner Schule die vom Direktor Bossler genährte Begeisterung für Horaz sowie einen regen Sinn für Musik mitbrachte, die ihn sein ganzes Leben lang begleiteten. Als Ausfluß der Nebenfächer des Gymnasiums beschäftigten Projektionszeichnen und neuere Sprachen den jugendlichen Geist, während die Mathematik des Gymnasiums ihm wenig bot und erst durch Nachhilfe seines Onkels für den Besuch des Karlsruher Polytechnikums ausreichend gemacht werden mußte. Dort begann der Achtzehnjährige das Studium der Architektur und blieb dabei auch dem studentischen Leben nicht fremd. Neben den Vorträgen und Übungen seines Onkels Ch. Wiener sprachen ihn am meisten die Mechanikvorlesungen von A. Clebsch an, aus denen ihm erst die Vertrautheit mit der Infinitesimalrechnung erwuchs.

Im Herbst 1862 siedelte Brill an die Universität Gießen über, um sich dort für die Ablegung des staatlichen Architekturexamens vorzubereiten. Unterwegs traf er A. Clebsch, der eben einen Ruf als Professor der Mathematik nach Gießen erhalten hatte, und diese Begegnung war für sein Leben entscheidend. A. Clebsch führte den angehenden Architekten in die Geometrie als Wissenschaft ein und zwang ihn in dem Maße in seinen Bann, in dem Brill Clebschs Bedeutung als Forscher erkannte und zu würdigen verstand. Im Winter 1863/64 bestand Brill das Architekturexamen und gleichzeitig jenes für das Lehramt der Mathematik. A. Clebsch, der damals auf dem Gipfel seiner Schaffenskraft stand, hatte Brill anderthalb Jahre vorher die Aufgabe gestellt, zu 8 Basispunkten eines Büschels von ebenen Kurven 3. Ordnung den 9. zu finden. Die Lösung gelang Brill, und diese Leistung machte auf Clebsch einen solchen Eindruck, daß er, obwohl er bald fand, daß Chasles schon eine ähnliche Lösung veröffentlicht hatte, die Promotion Brills auf Grund derselben und des guten Mathematikexamens durchsetzte. So wurde Brill ohne eigenes Examen und ohne gedruckte Dissertation Doktor.

Vom Militärdienst wegen Kurzsichtigkeit befreit, diente Brill als Lehramtsanwärter sein Akzessisten-Semester am Gymnasium in Darmstadt ab und bearbeitete gleichzeitig ein ihm von Clebsch vorgeschlagenes Thema über die Anwendung der hyperelliptischen Funktionen in der Geometrie, dessen Abschluß er Clebsch im Herbst 1865 vorlegen konnte. Über die damaligen Gießener Verhältnisse finde ich in Brills Aufzeichnungen folgende

Stelle, die ich hier wiedergebe: „Bald erkannte Clebsch, daß die mathematische Ausbildung einer Zuhörermasse von ihm allein nicht geleistet werden konnte. Er sah sich nach einer Hilfskraft um und schon im Sommer 1863 zog Paul Gordan in Gießen ein, äußerlich damals von der Kultur noch unbeleckt, der völlige Gegensatz zu Clebsch in Gestalt und Benehmen. Bald beschäftigte die Lacher in Gießen das fremdartige Bild von zwei in wissenschaftlichen Austausch vertieften Mathematikern, für die — auf der Promenade spazierend oder im Café auf der Speisekarte schreibend — die übrige Welt nicht zu existieren schien. Sie erledigten einen großen Teil ihrer Arbeit im mündlichen Verkehr, der sich oft in grotesken Formen bewegte und, von Gedanken und Witzen sprühend, lustig anzuhören war. Der scharfsinnige, kritisch unerbittliche Fachgenosse reizte Clebsch zum Aufgebot seiner ganzen reichen Erfindungskraft und Gordan nahm von jeder Unterredung Probleme mit nach Hause, mit deren Bearbeitung und Wälzung er am andern Tage aufwartete." Brills Eltern hatten die Kosten für sein Hochschulstudium in Gießen nur mit Mühe aufgebracht, so daß es für ihn kein leichter Entschluß war, auf Clebschs Anraten in Berlin weiterzustudieren, was nur unter Ausnützung der Verdienstmöglichkeiten, die die Großstadt bot, erfolgen konnte. Als Einführung bei den Berliner Mathematikern, insbesondere bei Kronecker, diente Brill seine Arbeit über die hyperelliptischen Funktionen, die von Borchardt für sein Journal angenommen worden war. Der dreisemestrige Aufenthalt in Berlin brachte Brill eine mächtige Erweiterung seines Horizontes, namentlich durch die Berührung mit der tüchtigen und betriebsamen norddeutschen Art, die den bedächtigen schwerfälligen Süddeutschen mächtig aufrüttelte. Seine durch Clebsch vermittelte mathematische Auffassung wurde durch Weierstraß, Kronecker und Kummer erheblich verschärft, und der Kreis um Weingarten, Fuchs, Königsberger, G. Cantor, Pasch, H. A. Schwarz und Rosanes bestärkte ihn in dieser Richtung. Bei Kronecker, Quincke und E. Du Bois-Reymond verkehrte er im Hause, bei letzterem wirkte er als Hauslehrer.

Brill trug sich schon in Berlin mit Habilitationsgedanken, er fand aber keine bezahlte Beschäftigung, die ihm die dazu nötige Freizeit gewährt hätte, und war froh, als ihm Clebsch in Gießen die Habilitation antrug und erleichterte. Sie erfolgte im Sommersemester 1867. In der vorangehenden Disputation verfocht Brill unter andern die These: „Die Mathematik ist eine Experimentalwissenschaft." Die nun folgende Lehrtätigkeit in Gießen umfaßte allerlei Nebenfächer, wie Elastizitätslehre für Architekten, Euklidische Geometrie für Forstleute, Mechanik, Feldmeßkunst und Optik. Inzwischen war A. Clebsch einem Rufe nach Göttingen gefolgt und Brill schloß sich enger an P. Gordan an, der mit Clebschs

Nachfolger R. Baltzer nicht gut harmonierte. Gordan weihte Brill in die Geheimnisse des symbolischen Rechenverfahrens der Invariantentheorie ein und schärfte dessen mathematisches Gewissen in bezug auf Strenge der Schlüsse und der Beweise. Damals tauchte auch am Gießener Dozententisch im „Rappen" der stud. math. Max Nöther auf, der Brill mächtig beeindrukte und ihm später ein treuer Freund und Weggenosse auf wissenschaftlichem Gebiete wurde. Wir wollen hier um des sachlichen Zusammenhanges willen zeitlich etwas vorgreifen. In regem Briefwechsel und persönlichem Verkehr entstand einige Jahre später, 1872 bis 1873, als Noether in Heidelberg und Brill in Darmstadt war, die berühmte klassische Arbeit von Brill und Noether über die Theorie der algebraischen Funktionen in Math. Annalen 7 (1874), S. 269—310, welche für die ganze spätere Entwicklung der algebraischen Geometrie in Deutschland und Italien entscheidend wurde. Während das Hauptergebnis des ersten Teiles dieser Arbeit, der Beweis des Riemann-Rochschen Satzes, von beiden Autoren gleichzeitig gefunden wurde, stammt der zweite Teil der gemeinsamen Arbeit von Brill allein.

Wir kehren zu der Gießener Zeit zurück. Das unerfreuliche Verhältnis zu R. Baltzer bewirkte mit, daß Brill trotz der guten Aussicht auf ein bezahltes Extraordinariat in Gießen mit Freuden 1869 einen Ruf als ordentlicher Lehrer der Mathematik mit dem Titel Professor an das neugegründete Polytechnikum in Darmstadt annahm. Er verdankte ihn wohl der Vielseitigkeit seiner Gießener Lehrtätigkeit und der Geschicklichkeit, mit der er die ihm übertragenen Aufgaben bewältigte. Den deutsch-französischen Krieg machte Brill als Sanitäter mit, zu welchem Dienst er sich als kriegsuntauglich freiwillig gemeldet hatte. Die Darmstädter Verhältnisse waren nicht eben erfreulich. Die Mittel der neuen Hochschule waren sehr knapp; sie hatte außerdem aus der alten polytechnischen Schule eine Reihe rückständiger Lehrer übernehmen müssen und fand bei der Bevölkerung und der Beamtenschaft wenig Achtung und Entgegenkommen. Das änderte sich allerdings, als 1872 der Ministerialrat August Schleiermacher zum Kurator der neuen Anstalt ernannt wurde und alsbald Neuberufungen, wie die des Physikers F. Kohlrausch und des Geometers R. Sturm durchsetzte. An diese beiden fand Brill, der bis dahin „wie ein Fremdling in der eigenen Heimat" gelebt hatte, familiären Anschluß. Immerhin blieben die Gehaltsverhältnisse noch unbefriedigend und so war die Aussicht auf Veränderung nach sechsjähriger Tätigkeit in Darmstadt wohl zu begrüßen. Für diese hatte Brill in rastloser und erfolgreicher wissenschaftlicher Arbeit (als wichtigste Erfolge seien die beiden Beweise des Cayley-Brillschen Korrespondenzprinzips aus den Jahren 1873 und 1874 hervorgehoben) und durch gewissenhafte Lehrtätigkeit die

Vorbedingung geschaffen. Sie trat ein, als Felix Klein von der Universität Erlangen an das Polytechnikum in München als Nachfolger Otto Hesses berufen wurde und es dabei durchgesetzt hatte, daß ein dortiges Extraordinariat zu einer zweiten ordentlichen Professur für Mathematik erhoben wurde. Dieses zweite Ordinariat benötigte Klein zur Durchführung seiner geplanten Reform des mathematischen Hochschulunterrichts. Brill, der bereits 1873 Kleins Bekanntschaft auf einer Mathematikerversammlung in Göttingen gemacht hatte, erhielt, wohl auch auf Befürwortung Gordans, der Kleins Nachfolger in Erlangen wurde, 1875 den Ruf auf die neue Professur. Es gelang ihm dabei, die volle äußere Gleichstellung mit F. Klein durchzusetzen, was bei Kleins Feuergeist, Genialität und Unternehmungslust gewiß nicht leicht war.

Die Berufung nach München führte noch insofern eine entscheidende Wendung in Brills Lebenshaltung herbei, als sie ihm die Möglichkeit eröffnete, einen eigenen Hausstand zu gründen. Er vermählte sich 1875 mit Anna Schleiermacher, der Tochter seines früheren Kurators, und hat damit eine überaus glückliche Wahl getroffen. Sie entstammte einem hessischen Beamtengeschlechte, das dem Lande nicht nur tüchtige Verwaltungsbeamte lieferte, sondern auch solche, die sich um Wissenschaft und Kunst verdient gemacht und damit die Ehrfurcht vor dem Geistesadel in ihren Reihen großgezogen hatten. Frau Brill schenkte ihrem Gatten vier wohlgeratene Kinder (drei Söhne und eine Tochter); sie umgab ihn außerdem mit einer wohltuenden Häuslichkeit, in der alles die wissenschaftliche Arbeit Störende ferngehalten wurde. Sie leitete mit einfachen Mitteln und in unaufdringlicher Art eine schlichte Geselligkeit, die anregend und geruhsam zugleich war und eine dauernde Quelle geistiger Erfrischung für den stets sich erweiternden Kreis von Schülern und Bekannten abgab. F. Kleins Reformpläne wirkten sich in der Einrichtung einer zusammenfassenden durch vier Semester sich erstreckenden Vorlesung über höhere Mathematik aus, die die früher getrennten, ganz verschieden gearteten Einzelvorlesungen über analytische und synthetische Geometrie, algebraische Analysis, Differential- und Integralrechnung ersetzen sollte. Klein war es dabei — den Forderungen des Erlanger Programms entsprechend — in erster Linie um die gegenseitige fruchtbare Durchdringung der Einzelwissenschaften und einen einheitlichen Aufbau des mathematischen Wissens nach großen Gesichtspunkten zu tun, während Brill die bescheidenere, aber praktisch nicht weniger wichtige Rolle zufiel, den für die technische Anwendung wichtigen Teil der Mathematik mit dem grundlegenden zu einem möglichst anschaulichen und faßbaren Lehrgebäude zu vereinigen, das Jedem Verwertbares bot und den Weiterstrebenden den Zugang zu höheren Disziplinen erschloß. Der Umstand, daß jeder der beiden Parallel-

professoren die Studenten der Technik eines Jahrgangs durch vier Semester in einer vierstündigen Vorlesung behielt, entlastete Lehrer und Studenten und gab ersteren die Möglichkeit, nebenher höhere Sondervorlesungen abzuhalten und einen Seminarbetrieb für Mathematikstudierende einzurichten. F. Klein wurde durch Berufung nach Leipzig schon bald der Durchführung seines Planes in München enthoben, und es blieb Brill vorbehalten, ihn den Forderungen der Praxis entsprechend auszubauen, was ihm auch in zehnjähriger Arbeit wohl gelang.

Zu den wertvollen persönlichen Bekanntschaften, die Brill schon vorher in dem Göttinger Clebschschüler J. Lüroth und dem Dänen H. G. Zeuthen gewonnen hatte, gesellten sich nunmehr die Mathematiker der Münchener Universität, neben dem fast erblindeten L. Ph. Seidel Gustav Bauer, der jugendliche A. Pringsheim und der früh dahingegangene L. Scheeffer. Auch an die damals an die Universität Neuberufenen verwandter Fächer wie den Astronomen H. Seeliger und den Mineralogen P. Groth fand Brill nahen Anschluß, desgleichen auch an den Thermodynamiker Carl Linde vom Polytechnikum. Brills Verdienste um die Hebung des mathematischen Unterrichts wurden allgemein anerkannt, ebenso die Schaffung einer Sammlung mathematischer Modelle für diesen Unterricht, auf welche er und seine Schüler viel Zeit und Mühe verwandten. Diese Modelle sollten nicht wie bis dahin einzelne Kuriosa, sondern richtige Unterrichtsmittel sein, für deren Verbreitung an andere Lehranstalten Brill durch den Verlag seines Bruders Ludwig, der das väterliche Geschäft in Darmstadt übernommen hatte, Sorge trug. Die bayerischen Lehramtsanwärter für Mathematik und Physik konnten schon damals sowohl an der Universität, wie auch am Polytechnikum studieren und machten von letzterer Möglichkeit in steigendem Maße Gebrauch. Zu Brills Schülern aus dieser Zeit zählten P. Vogel, nachmals Lehrer an der Artillerieschule, A. v. Braunmühl, der spätere Historiker der Mathematik, G. Kerschensteiner, der bedeutende Pädagog, und die Professoren der Mathematik H. Wiener, L. Schleiermacher und E. Hess (Bamberg). Brill beeinflußte auch die ersten Arbeiten von W. Dyck, Fr. Meyer, K. Rohn und J. Bacharach und lieh dem aufstrebenden F. Lindemann selbstlos seine Hilfe bei Abfassung der geometrischen Vorlesungen von A. Clebsch. Es gewährte ihm immer eine besondere Genugtuung, mathematische Talente bayerischen oder doch süddeutschen Stammes zu fördern, wozu ihm die bayerische Lehramtsprüfungsordnung mit der Einrichtung der freiwilligen Spezialprüfung eine willkommene Möglichkeit bot. Das hat man Brill nicht vergessen, und so wirkte er auch nach seinem Abgang von München im Kreise der bayerischen höheren Schulen weiter. Auch seine Gründung zweier örtlicher Fachvereinigungen, der einen am Polytechnikum und der anderen

unter den Mathematikern Münchens, trugen dazu bei, Brills Andenken in München noch lange wach zu erhalten. Trotz dieser Erfolge und obwohl Brills Stellung in München durch seine Aufnahme in die bayerische Akademie 1882 befestigt schien, folgte er im Herbst 1884 einem Ruf an die Universität Tübingen, die ihn dann noch fast ein halbes Jahrhundert zu den Ihrigen zählen konnte.

Die ausschlaggebenden Gründe für diesen Entschluß waren neben der Unzufriedenheit mit der damals autokratischen Verfassung des Polytechnikums die zunehmende Unruhe und Verstrickung in alle möglichen Interessenkreise der Hauptstadt eines großen Staatswesens, sowie die Hoffnung, seiner heranwachsenden Familie günstigere äußere Lebensbedingungen in einfacheren Verhältnissen und größerer Naturnähe zu schaffen. Darin hatte er sich nicht getäuscht. In Tübingen wohnte er am Rande der kleineren Stadt, später sogar in einem Einfamilienhaus. Er konnte sich dort mit Frau und Kindern der Pflege eines eigenen Gartens widmen, der ihm dauernd Freude und Gesundheit gewährte. Auch folgte ihm eine kleine Schar von Münchener Schülern, darunter der Verfasser, in den neuen Wirkungskreis und half ihm den Kern einer neuen Zuhörerschaft bilden. Da es hauptsächlich Lehramtsanwärter waren, die er nun auszubilden hatte, galt seine Hauptsorge der Einführung einer neuen, der bayerischen nachgebildeten Prüfungsordnung mit einer freiwilligen Sonderprüfung auf Grund einer selbständigen wissenschaftlichen Arbeit. Die württembergische Lehramtsprüfung vom Jahre 1864 war allzusehr auf die Bedürfnisse der Schulverwaltung, d. h. auf möglichst vielseitige Verwendbarkeit der Lehrkräfte zugeschnitten und umfaßte gleichzeitig Mathematik, Physik, Chemie und beschreibende Naturwissenschaften. Sie war mit Nebenfächern so überladen, daß für gründliches Studium der Kernfächer keine Zeit verblieb. Aber sie kam den Neigungen und Fähigkeiten des schwäbischen Stammes entgegen, dem ein allgemeiner Überblick manchmal näher liegt als Fachstudium. Eine weitere Eigentümlichkeit Württembergs, daß sich die Prüfungskommission aus Vertretern der Tübinger und Stuttgarter Hochschulen zusammensetzte, hatte Brill schon aus bayerischer Erfahrung kennen und schätzen gelernt, weil dort sogar vier Hochschulen an der Zusammensetzung der Prüfungskommission beteiligt waren. Die Anregungen, die sich aus dem Zusammenarbeiten verschiedener Kreise ergaben, wobei es an Reibungsflächen nicht fehlte, und die gegenseitige Anpassungsnotwendigkeit standen ihm höher als die Durchsetzung der eigenen Individualität. Es kostete Brill einen zehnjährigen Kampf, bis seine Idee bei der Unterrichtsverwaltung durchdrang. Beim Antritt der Tübinger Professur hatte Brill eine Art Ausbildungsprogramm aufgestellt, das dem doppelten Ziel dienen sollte,

einmal dem Lande einen Stamm von gut ausgebildeten Lehrern der höheren Schulen zu liefern, dann aber auch der Mathematik schöpferische Kräfte des Volkes zuzuführen, um dessen Anteil am Aufbau der Wissenschaft zu steigern. Mit seinem Kollegen H. Stahl ging er frisch ans Werk, das ihnen durch den Weggang P. Du Bois-Reymonds von Tübingen erleichtert wurde. Aber nur in der ersten Hälfte ließ sich das angestrebte Ziel im gewünschten Umfang erreichen, während es im zweiten Teil bei einem bescheidenen Erfolg blieb, da nur fünf seiner Tübinger Schüler ordentliche Professoren an Hochschulen wurden (J. Sommer, P. Zenneck, K. Kommerell, Brills Nachfolger in Tübingen, W. Grammel u. R. Furch). Die schöpferische mathematische Arbeit Brills, die auch auf das Gebiet der Differentialgeometrie übergegriffen hatte, wurde nun durch eine Jahre währende historische Unternehmung abgelöst, welche in dem mit Max Nöther gemeinsam verfaßten großen Referat über die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit ihren literarischen Ausdruck fand (Jahresbericht der D. Math. Ver. 1894). Brill fiel dabei in der Hauptsache die Zeit von Newton bis Riemann zu. Im Jahre 1892 ernannte ihn die Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften zum korrespondierenden Mitglied. In dem Maße, wie der Stachel zu produktiver Leistung schwächer wurde, verdichtete sich Brills ungebrochene Energie auf den Betrieb des Unterrichts. Er erweiterte seine Vorlesungen auf das Gebiet der Mechanik, wobei ihn Heinrich Hertz' 1894 erschienene Prinzipien besonders anzogen. Hertz' großangelegter Versuch, die Kräfte auf Trägheitswirkungen vorborgener Massen, die mit den sichtbaren in gesetzmäßiger Verbindung stehen, zurückzuführen, führte zwar, wie Brill bald erkannte, allgemein nicht zum Ziel, aber er veranlaßte diesen, nach Beispielen solcher Kraftwirkung zu fahnden und die Hertzsche Grundidee beim Aufbau einer Mechanik der kontinuierlichen Massensysteme zu verwerten. Einen gleichstarken Anstoß erfuhr Brills Vorlesungstätigkeit durch die Relativitätstheorie von H. A. Lorentz-Einstein, für deren Ausprägung im Sinne H. Minkowskis und ihre Erweiterung durch A. Einstein er durch frühe Beschäftigung mit der Krümmung mehrdimensionaler Räume wohl vorbereitet war. Er legte dieser Theorie von Anfang an größte Bedeutung bei und bemühte sich um ihre Verbreitung im Kreise seiner Schüler. Für die älteren stand ihm dabei die Einrichtung der Ferienkurse zu Gebote.

Das wissenschaftliche Vereinswesen lag Brill von jeher am Herzen, kaum weniger das gesellige, das er ernsten Sinnes zur Erhöhung der Wertschätzung der Wissenschaft in weiteren Kreisen ausnutzte. Mit der ihm eigenen Gründlichkeit widmete er sich den repräsentativen Amtspflichten, sei es bei der Leitung der deutschen Mathematikervereinigung,

beim Weierstraßjubiläum 1895 oder bei Führung des Rektorats 1897[1]) oder bei der Vorbereitung des internationalen Mathematikerkongresses in Heidelberg 1904. Bei solchen Gelegenheiten führte er der Öffentlichkeit kennzeichnende Gestalten des schwäbischen Volkes, wie den Geodäten J. G. F. Bohnenberger oder den Heros der deutschen Himmelskunde J. Kepler vor, oder er unternahm es, Gegenstände mathematischen Belanges dem Verständnis weiterer Kreise zu erschließen. Gelegentliche Mißerfolge wurden durch bedeutsame Anregungen, die von andern Vorträgen ausgingen, reichlich wettgemacht. So ist die deutsche Bearbeitung von Keplers Mysterium Cosmographicum und der Astronomia Nova durch Brills Schüler M. Caspar solchen Vorträgen entsprossen.

Schon trug sich Brill, dessen Kinder wohl versorgt waren und Familien zum Teil im Ausland gegründet hatten, mit Rücktrittsgedanken, als der Weltkrieg ausbrach und seine drei Söhne und den Schwiegersohn zu den Fahnen rief. Die verwaisten Familien bevölkerten abwechselnd das väterliche Haus und trotz aller damals auftretenden Schwierigkeiten vertraute er stets auf einen für Deutschland glücklichen Ausgang des Völkerringens. Er hatte wenigstens die Genugtuung, daß alle vier heil und mit hohen Auszeichnungen aus dem Felde heimkehrten. Brill hatte schon früh die tiefere Ursache der deutschen Niederlage erkannt und trat kräftig für Bodenreform, Auflockerung der Großstädte und Seßhaftmachung des Proletariats ein. Auf Wunsch von Universität und Regierung verschob er wiederholt seinen Rücktritt, so daß er erst im März 1919 seine Vorlesungen schloß. Zahlreiche und aus tiefem Herzen kommende Kundgebungen seiner Schüler anläßlich der verschiedenen Jubiläen, die sich im Laufe der Zeit einstellten, bezeugten ihre Verbundenheit mit dem Lehrer; zu ihnen gesellten sich allerlei Ehrungen aus wissenschaftlichen Kreisen, darunter die Mitgliedschaft der Accademia dei Lincei in Rom 1914, das Ehrendoktorat der Technischen Hochschule München 1914.

Nach dem endgültigen Rücktritt vom Lehramt widmete sich Brill einer neuen Aufgabe, die für seine Stellung bezeichnend ist. Schon vor dem Kriege war in juristischen Kreisen der Universität Tübingen die Gründung einer Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in die Wege geleitet worden. Diesen Gedanken griff Brill nun wieder auf, und zwar in der bestimmten Absicht, den Naturwissenschaften den gebührenden Anteil an der Gründung zu sichern. Auch trat er für die Beiziehung der Technischen Hochschule in Stuttgart ein und bemühte sich um die Beschaffung von Mitteln aus den Kreisen der Industrie, die er richtiger

[1]) Im Anschluß an welches ihm der König den Kronenorden mit dem persönlichen Adel verlieh.

zu schätzen verstand als die meisten seiner akademischen Kollegen. Die Notwendigkeit eines Publikationsorganes stand ihm von vornherein fest, und so gründete er die Tübinger naturwissenschaftlichen Abhandlungen, die Aufsätze von allgemeiner Verständlichkeit enthalten und dem Nebenzwecke dienen sollten, die Universitätsbibliothek im Austauschverkehr zu bereichern. Bei der zunehmenden Geldentwertung war das keine leichte Sache, und die Kosten für die ersten sechs Hefte mußten förmlich zusammengebettelt werden. Eine zweite Sorge, die den Lebensabend Brills erfüllte, war die Herausgabe seiner Vorlesungen, auf deren Ausfeilung er zeitlebens viel Sorgfalt verwandt hatte. Zwei davon waren schon vor dem Kriege (die Einführung in die Mechanik raumerfüllender Massen, Teubner 1909, und jene über das Relativitätsprinzip, ebenda in vier Auflagen 1912—20) erschienen, aber die geldlichen Schwierigkeiten verzögerten den Druck der Vorlesungen über algebraische Kurven und Funktionen bis 1925, und die Vorlesungen über allgemeine Mechanik erschienen erst dank dem Eingreifen der Notgemeinschaft Deutscher Wissenschaft 1928, erstere bei Vieweg, letztere bei Oldenbourg.

Brills Freude und Sorge im Greisenalter galt zwar in erster Linie seiner zahlreichen Großfamilie, für die er ein Gegenstand der Verehrung und des Stolzes war, aber er behielt seine lebendige Anteilnahme an den Fortschritten der Wissenschaft, insbesondere auch der Physik. Die „Mathematischen Annalen", welche seine bedeutendsten Veröffentlichungen enthalten, bezog er vom Gründungsjahr 1868 bis zu seinem Tode. Noch als Neunzigjähriger griff er, als er in einer dort erschienenen Arbeit[2]) eine versteckte Lücke im Beweis seines „Restsatzes" aufgezeigt fand, zur Feder, um die Tragweite seiner Methoden zu verteidigen, und nichts bezeichnet mehr die Klarheit seines Denkens und den Adel und die Freiheit seiner Gesinnung, als daß er die geplante Veröffentlichung alsbald zurückzog, als ihn ein von van der Waerden angegebenes und ihm durch Emmy Noether, die Tochter seines alten Freundes, übermitteltes Gegenbeispiel von der Berechtigung des Einwandes überzeugte. Wenige Monate vor seinem Ableben beschäftigte ihn eine selbst gestellte Aufgabe der Bildmeßkunst, die er auf ein Eliminationsproblem zurückführte, zu dem er die Gleichungen ausführlich niederschrieb. Brill pflegte über einen Großteil seines langen Lebens eine Chronik zu führen, in die er alle möglichen Dinge eintrug. Einen immer noch über 1000 Seiten umfassenden zweibändigen Auszug aus diesen Eintragungen hat er 1887 begonnen und 1927 für seine Kinder als Lebenserinnerungen zu Ende geführt. Eine

---

[2]) van der Waerden, Zur Begründung des Restsatzes mit dem Noetherschen Fundamentalsatz. Math. Annalen 104 (1931).

Abschrift hiervon hinterließ er dem Verfasser dieser Zeilen, mit dem er über 50 Jahre in Briefwechsel gestanden hat und der sie als Hauptquelle für diesen Nachruf benutzt hat. Der letzte Eintrag vom 9. Juni 1935 in die Chronik enthält die bedeutsamen Worte: „Aber ich möchte meiner Überzeugung doch einmal Ausdruck geben, daß mir das Vaterland in der Hand von Hitler die schönste Lösung der Schwierigkeiten aller Art scheint, die Deutschland bis dahin bedroht haben. Möchte der Mann dem Volke noch lange, lange erhalten bleiben".

Brill hatte das seltene Glück, das 70jährige Doktorjubiläum und die diamantene Hochzeit im Genusse voller geistiger Kraft zu erleben. Bald darauf, am 18. Juni 1935, segnete er nach kurzer Krankheit das Zeitliche.

Die wissenschaftliche Arbeit fiel Brill nicht leicht. Von Einzelbeispielen ausgehend, drang er zu Sätzen allgemeiner Geltung vor, deren Begründung viel Mühe kostete. Von der eigenen Leistung selten vollbefriedigt, folgte er gerne dem Rat kundiger Freunde, kam wiederholt auf das gleiche Thema zurück und veränderte und verbesserte die Beweise. Sein mathematisches Werk, namentlich das auf die algebraische Geometrie bezügliche, ist anläßlich verschiedener Jubiläen geschildert worden, am sachkundigsten und anteilnahmevollsten wohl von F. Severi bei dem 80. Geburtstage in der in der Einleitung zitierten Schrift. Da Brills Werk mit dem von Max Nöther vielfach verknüpft ist, darf man auch die Auseinandersetzung über den beiderseitigen Anteil, die Brill in dem Nachruf auf seinen langjährigen Freund im 32. Jahresbericht der D. M. V. (1923) gegeben hat, nicht übersehen. Sie ist zudem ein beredtes Zeugnis von der Beherrschung des umfangreichen und schwierigen Stoffes seitens des Achtzigjährigen. Die gedruckten Vorlesungen Brills sind durch eine unglückliche Verkettung äußerer Umstände zu spät erschienen, um ihre volle Wirksamkeit zu entfalten; sie sind auch manchmal zu zeitgebunden für eine Dauerwirkung auf große Massen. Brill selbst hat sie, wie sein ganzes mathematisches Werk, wohl geschätzt, aber nicht überschätzt. Höher stand ihm die Liebe seines großen Schülerkreises und das Denkmal, das er sich in ihren Herzen gesetzt hat.

München, 18. Februar 1936.

(Eingegangen am 19. 2. 1936.)

Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung.

Von

E. Hecke in Hamburg.

§ 1.

Problemstellung und Übersicht über die Resultate.

Man weiß durch die Untersuchungen von Herrn Hamburger[1]), daß die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s)$ durch ihre Funktionalgleichung

$$G(s) = G(1-s)$$

mit

$$G(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

eindeutig bis auf konstanten Faktor bestimmt ist, wenn man außer gewissen Regularitätsforderungen für $\zeta(s)$ die Entwickelbarkeit in eine spezielle Dirichletsche Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

verlangt. Im folgenden untersuche ich eine allgemeinere Klasse von Funktionalgleichungen, wie sie bei vielen Dirichletschen Reihen aus der Arithmetik bestehen, und gewinne damit gleichzeitig ein neues Resultat für das Riemannsche $\zeta(s)$, welches in einem wesentlichen Punkte über das bekannte hinausgeht; nur die Regularitätsforderung wird etwas verschärft.

Es seien λ, k, γ konstante, von der komplexen Variabeln s unabhängige Größen, und

$$\lambda > 0, \quad k > 0.$$

Man bilde mit einer analytischen Funktion $\varphi(s)$ den Ausdruck

$$R(s) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s}\Gamma(s)\,\varphi(s) \tag{1}$$

und suche alle $\varphi(s)$ mit folgenden Eigenschaften:

---

[1]) Hans Hamburger, Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion I., II., III., Math. Zeitschr. **10** (1921); **11** (1922); **13** (1922).

I. $(s-k)\,\varphi(s)$ ist eine ganze Funktion von s von endlichem Geschlecht. Eine solche Funktion $\varphi(s)$ heiße

„vom Typus k".

II. Es ist

$$R(s) = \gamma\, R(k-s). \tag{2}$$

Da nach I. $R(s)\,(s-k)\,s$ regulär für $\Re(s) \geqq 0$ ist, so ist es auch überhaupt im Endlichen regulär. Überdies muß offenbar

$$\gamma = \pm 1$$

sein.

III. $\varphi(s)$ soll in eine spezielle Dirichletreihe

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

entwickelbar sein, die irgendwo konvergiert.

Von einer Funktion $\varphi(s)$ mit den Eigenschaften I., II., III. wollen wir sagen, sie habe die

„Signatur $\{\lambda, k, \gamma\}$",

und das Zahlentripel überhaupt als Signatur bezeichnen. In § 2 bis 5 wird die Frage behandelt, die Funktionen mit gegebener Signatur aufzustellen bzw. die Anzahl der linear unabhängigen zu ermitteln.

Dieses Problem wird in § 2 nun auf elementare Weise (durch das Γ-Integral und seine Umkehrung, das Mellinsche Integral) in ein Problem aus der Theorie der automorphen Funktionen übergeführt. Es ist dazu nichts weiter nötig, als konsequent die klassische Methode zu verfolgen, welche den Übergang von $\zeta(2s)$ zur Thetafunktion vermittelt. Die Gruppe linearer Substitutionen, welche hier zugrunde liegt, wird erzeugt durch die beiden Substitutionen

$$\tau' = \tau + \lambda, \quad \tau' = -\frac{1}{\tau} \qquad (\text{Gruppe } \mathfrak{G}(\lambda))$$

und jede Funktion $\varphi(s)$ mit der Signatur $\{\lambda, k, \gamma\}$ entspricht genau einer Funktion $f(\tau)$, die sich bei der Gruppe $\mathfrak{G}(\lambda)$ etwa so verhält, wie eine Modulform von der „Dimension $-k$" und dem Multiplikator γ bei Modulsubstitutionen. Die Aussage über das Verhalten von $f(\tau)$ bei $\tau' = \tau + \lambda$ ist das Äquivalent für die Forderung „spezielle Dirichletreihe" für $\varphi(s)$, und die Aussage über $f\left(-\frac{1}{\tau}\right)$ ist das Äquivalent für die Funktionalgleichung von $\varphi(s)$. Von hier aus sieht man deutlich die Tragweite dieser gleichzeitigen Forderungen; sie bedeuten soviel wie eine Aussage über das Verhalten von $f(\tau)$ bei der unendlichen Gruppe $\mathfrak{G}(\lambda)$.

Die Resultate sind nach dem Typus der Gruppe $\mathfrak{G}(\lambda)$ wesentlich verschieden und auch von verschiedener Wichtigkeit für die Arithmetik:

Für $\lambda > 2$ ist $\mathfrak{G}(\lambda)$ vom Schottky-Typus, und bei $\lambda \leqq 2$ vom Typus der Modulgruppe, die ja mit $\mathfrak{G}(1)$ identisch ist.

Es wird gezeigt werden:

Satz 1: *Wenn $\lambda > 2$, so gibt es unendlich viele linear-unabhängige Funktionen der Signatur $\{\lambda, k, \gamma\}$.* (§ 3).

Satz 2: ($\lambda = 2$). *Die Anzahl linear unabhängiger Funktionen der Signatur $\{2, k, \gamma\}$ ist endlich: für $\gamma = 1$ gleich $\left[\frac{k}{4}\right] + 1$ und für $\gamma = -1$, wenn $k \geqq 2$, gleich $\left[\frac{k-2}{4}\right] + 1$, sonst Null.*

Insbesondere hat man für $\{2, \frac{1}{2}, 1\}$ als einzige Lösung $\zeta(2s) = \varphi(s)$ und bei $\{2, 1, 1\}$ als einzige Lösung die Zetafunktion des Körpers $K(\sqrt{-1})$. (§ 4).

Zu diesen Reihen gehören weiter auch alle Reihen, wo a_n = Anzahl der Darstellungen von n als Summe von r Quadraten ganzer Zahlen. Sie haben die Signatur $\left\{2, \frac{r}{2}, 1\right\}$.

Satz 3, 5, 6 in § 5: *Bei $0 < \lambda < 2$ existieren Funktionen der Signatur $\{\lambda, k, \gamma\}$ nur dann, wenn λ, k von der Gestalt sind*

$$\lambda = 2\cos\frac{\pi}{q}, \quad k = \frac{4K}{q-2} + 1 - \gamma$$

mit positiven ganzzahligen q, K ($q \geqq 3$). Die Anzahl der $\varphi(s)$ ist dann $\leqq \left[\frac{K + \frac{\gamma-1}{2}}{q}\right] + 1$, und speziell ist die Anzahl der bei $s = k$ regulären Lösungen $\varphi(s)$ genau $= \left[\frac{K + \frac{\gamma-1}{2}}{q}\right]$.

Für $0 < \lambda < 1$ gibt es demnach überhaupt keine Funktionen der Signatur $\{\lambda, k, \gamma\}$.

Speziell ist die Zetafunktion des Körpers $K(\sqrt{-3})$ (auch noch die mit dem einfachsten Größencharakter gebildete) durch ihre Signatur $\{\sqrt{3}, 1, 1\}$ bis auf einen konstanten Faktor bestimmt.

Für $\lambda = 1$ ist $q = 3$ und $\mathfrak{G}(\lambda)$ die Modulgruppe. Zur Signatur $\{1, k, \gamma\}$ gibt es keine Lösungen, außer, wenn k grade und $\gamma = (-1)^{\frac{k}{2}}$. Die Anzahl der unabhängigen Lösungen ist dann

$$\left[\frac{k}{12}\right], \quad \text{wenn } k \equiv 2 \pmod{12}$$

$$1 + \left[\frac{k}{12}\right], \quad \text{wenn } k \not\equiv 2 \pmod{12}.$$

In diesen Formeln bedeutet $[a]$ für $a \geqq 0$ die größte ganze Zahl $\leqq a$.

Unter den aus der Arithmetik stammenden Dirichletreihen sind nun solche der Signatur $\{\lambda, k, \gamma\}$ vor allem in folgenden Fällen:

a) Die Riemannsche Funktion $\zeta(2s)$ mit $\{2, \frac{1}{2}, 1\}$ und die rationalen L-Reihen gebildet mit Restcharakteren mod m (bzw. passende Linearkombinationen) mit $\{2m, \frac{1}{2}, \pm 1\}$, $\{2m, \frac{3}{2}, \pm 1\}$.

Die Bezeichnung der Variablen s ist dabei aber so, daß $\zeta(2s)$ bzw. $L(2s, \chi)$ als Dirichletreihen in s betrachtet werden. Nach Satz 1 und Satz 2 ist dann zwar $\zeta(2s)$ durch die Signatur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, dagegen gibt es für $m > 2$ unendlich viele linear-unabhängige Dirichletreihen, die sich ebenso wie $L(2s, \chi)$ verhalten. Herr Hamburger hat durch die in der Natur seines Ansatzes liegende scharfe Zusatzforderung, daß nicht nur $\varphi(s)$, sondern auch noch $\varphi\left(\frac{s}{2}\right)$ eine spezielle Dirichletreihe in s sein soll, wieder die im wesentlichen eindeutige Bestimmtheit des Systems der L-Reihen mit festem Modul m durch die Funktionalgleichung bewiesen. Ich finde durch meine Methode zu der Signatur eine naturgemäße andere Forderung, welche die Endlichkeit der Lösungszahl außerdem noch für die weiteren Fälle erzwingt.

b) Die Zetafunktion des imaginär-quadratischen Körpers mit der Diskriminante D, sowie die Zetareihen für die einzelnen Idealklassen dieser Körper gehören zur Signatur $\{|\sqrt{D}|, 1, 1\}$. Desgleichen gehören die Zetafunktionen mit Größencharakteren[2]) aus diesen Körpern zur Signatur $\{|\sqrt{D}|, k, \pm 1\}$ mit ganzen rationalen k, wenn man sie mit dem Argument $s +$ const. an Stelle des üblichen schreibt. Ähnliches gilt für die ganzzahligen Multipla $m|\sqrt{D}| = \lambda$, welche bei Verfeinerung der Klasseneinteilung der Ideale durch Hinzunahme eines Moduls auftreten. Für $|D| > 4$ sind nach Satz 1 stets unendlich viele linear-unabhängige Lösungen des Problems vorhanden. Um einen Endlichkeitssatz beweisen zu können, hat man dann folgenden Ansatz zu machen:

Es sei eine quadratische Matrix $\mathfrak{C} = (c_{rl})$ des Grades N gegeben. Gesucht werden N spezielle Dirichletsche Reihen vom Typus k, $\varphi_l(s)$ $(l = 1, 2, \ldots, N)$, welche die Eigenschaft haben:

$$R_l(k - s) = \sum_{r=1}^{N} c_{lr} R_r(s) \qquad (l = 1, \ldots, N) \tag{3}$$

wobei

$$R_l(s) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s)\, \varphi_l(s).$$

Überdies soll aber

---

[2]) E. Hecke, Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. Math. Zeitschr. **1** (1919); **6** (1920).

IV. für eine gewisse feste natürliche Zahl q zu jeder der N Reihen $\varphi_l(s)$ eine Restklasse

$$b_l \bmod q$$

existieren, derart, daß in der Reihe

$$\varphi_l(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{(l)}}{n^s} \tag{4}$$

nur die Zahlen n der Restklasse $n \equiv b_l \pmod q$ auftreten.

Setzt man die N Funktionen $\varphi_l(s)$ noch als linear unabhängig voraus, so muß die Substitution (3) die Periode 2 haben (was der Bedingung $\gamma^2 = 1$ entspricht). Dazu tritt dann diejenige Gruppe linearer Substitutionen in N Variabeln auf, welche erzeugt wird durch $\mathfrak{C}$ und durch die Substitution von der Periode q

$$u_l' = e^{\frac{2\pi i}{q} b_l} u_l \qquad (l = 1, \ldots, N).$$

Diese Gruppe heiße $\mathfrak{M}$. Durch denselben Ansatz wie oben wird dann das Problem übergeführt in ein solches aus der Theorie der automorphen Funktionen einer komplexen Variabeln τ. Es handelt sich um die Gruppe $\mathfrak{G}\left(\frac{\lambda}{q}\right)$ in der früheren Bezeichnung und um die Frage, ob diese einen Normalteiler hat, dessen Faktorgruppe mit $\mathfrak{M}$ isomorph ist (§ 6).

Bei den L-Funktionen für den Modul q und den Zetafunktionen aus $K(\sqrt{-q})$ ist $\lambda = 2q$ oder q und die Gruppe $\mathfrak{M}$ eine endliche Gruppe, isomorph mit der binären Modulargruppe mod $2q$ oder mod q. Es gilt wieder der Endlichkeitssatz (Satz 9, § 6) und man kann angeben, ob z. B. außer den Zetareihen für die einzelnen Idealklassen aus $K(\sqrt{-q})$ (die hier noch mod. $\sqrt{-q}$ aufgespalten werden!) weitere Lösungen des Systems von Funktionalgleichungen (3) existieren. Von besonderer Einfachheit ist das Ergebnis für ganzzahliges $k \geqq 2$, wo in der Anzahl der linearunabhängigen Lösungssysteme explizite die Klassenzahl von $K(\sqrt{-q})$ auftritt (§ 7).

Insbesondere erscheint die Zetareihe aus $K(\sqrt{D})$, erstreckt über die einzelne Idealklasse, und die Teilsummen dieser mod $\sqrt{D}$ aufgespaltenen Reihe als ein System von Dirichletreihen, das zusammen einem System derartiger Funktionalgleichungen genügt. Ein solches System hat nur endlich viel linear unabhängige Lösungssysteme. Durch Hinzunahme einer Funktionalgleichung, welcher das der Restklasse 0 mod. $\sqrt{D}$ entsprechende Element $\varphi_0(s)$ nach Multiplikation mit $|D|^s$ genügt (Signatur $\{|\sqrt{D}|, k, 1\}$) wird aus der genannten Schar eine Teilschar ausgesondert, unter der sich für $k = 1$ die Zetafunktion des Körpers und für $k = 2, 3, \ldots$ die Zetafunktionen mit „Größencharakteren“ $\lambda^{k-1}(\mu)$ befinden. Mit Hilfe

meiner neuen Sätze über elliptische Modulformen[3]) lassen sich dann — wenigstens für Primzahlen D, wo ich die Rechnung schon durchgeführt habe — diese Zetafunktionen eindeutig als charakteristische Wurzeln einer durch die Daten des Problems gegebenen Matrix festlegen (§ 7).

Die offenbar notwendige Hinzunahme dieser mod $\sqrt{D}$ aufgespaltenen Zetareihen zur Zetafunktion des Körpers ergibt auch für die Riemannsche Zetafunktion einen neuen Gesichtspunkt, wo durch Hinzunahme der L-Reihen eine analoge Möglichkeit besteht.

Bei den folgenden Beweisen wird die allgemeine Theorie der automorphen Funktionen nicht benutzt; die Existenzbeweise in § 3 und 5 erfordern nur den Fundamentalsatz der konformen Abbildung und einige elementare Sätze über analytische Fortsetzung durch das Spiegelungsprinzip aus der Theorie der Dreiecksfunktionen.

§ 2.

Übergang zur Theorie der automorphen Funktionen.

Es sei $\varphi(s)$ nun eine Funktion mit der Signatur $\{\lambda, k, \gamma\}$. Da sie als absolut konvergente Dirichletreihe in einer gewissen Halbebene $\Re(s) \geqq \sigma_1$ beschränkt ist, andererseits vom Typus I. sein soll, so ist sie wegen der Funktionalgleichung auf Grund der bekannten Schlußweise von Phragmén-Lindelöf in jedem festen Streifen $\beta_1 \leqq \Re(s) = \sigma \leqq \beta_2$ von endlicher Größenordnung in bezug auf die Ordinate, d. h. es gibt zu β_1, β_2 eine positive Zahl A, so daß

$$\varphi(\sigma + it) = O(|t|^A) \quad \text{für} \quad |t| \to \infty, \quad \beta_1 \leqq \sigma \leqq \beta_2 \tag{5}$$

gleichmäßig in σ.

Nun betrachte man die, offenbar in der Halbebene $\Re(x) > 0$ reguläre, Funktion

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{2\pi}{\lambda} n x}, \tag{6}$$

welche durch die Koeffizienten a_n von $\varphi(s)$ eindeutig bestimmt ist. Sie läßt sich unter Benutzung des Mellinschen Integrals

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_0)} \frac{\Gamma(s)}{x^s} ds$$

[3]) Eine kurze Skizze der Theorie habe ich veröffentlicht: Die Primzahlen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Danske Videnskab. Selsk. Matematisk-fysiske Meddelelser **13** (1935), 10.

(die Integration ist dabei längs der vertikalen Geraden $\Re(s) = \sigma_0$ mit $\sigma_0 > 0$ im Sinne wachsender Ordinaten zu erstrecken) durch einen Integrationsprozeß aus $\varphi(s)$ gewinnen:

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{(\sigma_1)} \frac{\Gamma(s)}{\left(\frac{2\pi}{\lambda} n x\right)^s} ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_1)} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \frac{\Gamma(s)\,\varphi(s)}{x^s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_1)} \frac{R(s)}{x^s} ds.$$

Dabei soll die Gerade $\Re(s) = \sigma_1$ im Innern der absoluten Konvergenzhalbebene von $\varphi(s)$ liegen, wo wegen des bekannten asymptotischen Verhaltens der Γ-Funktion die Vertauschung von Summation und Integration erlaubt ist. Hier kann nun der Integrationsweg unter Berücksichtigung der einzigen Pole $s = 0, k$ des Integranden auf eine beliebige Vertikale der s-Ebene verschoben werden. Denn für festes x mit

$$x = |x| \cdot e^{i\varphi}, \qquad -\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} - \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)$$

ist nach (5) für $|t| \to \infty$

$$\left|\frac{R(s)}{x^s}\right| = O\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{2}|t|}}{x^\sigma} |t|^{\beta_2 - \frac{1}{2} + A}\right) = O\left(e^{-\varepsilon|t|} |t|^{\beta_2 - \frac{1}{2} + A}\right)$$

gleichmäßig für $\beta_1 \leqq \sigma \leqq \beta_2$. Mithin ist

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(k-\sigma_1)} \frac{R(k-s)}{x^{k-s}} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{(k-\sigma_1)} \frac{\gamma R(s)}{x^{k-s}} ds$$

(7)

$$= \frac{\gamma}{2\pi i\, x^k} \int_{(k-\sigma_1)} \frac{R(s)}{x^{-s}} ds = \frac{\gamma}{2\pi i \cdot x^k} \int_{(\sigma_1)} \frac{R(s)}{x^{-s}} ds - \frac{\gamma}{x^k}(A_0 + A_k)$$

wo A_0, A_k die Residuen von $\frac{R(s)}{x^{-s}}$ bei $s = 0, k$ bedeuten. Wegen $R(s) = \gamma R(k-s)$ ist aber das Residuum von $R(s)$ bei $s = 0$ gleich dem Residuum bei $s = k$, mit dem Faktor $-\gamma$. Setzt man also

$$\alpha = \text{Residuum von } \varphi(s) \text{ bei } s = k$$

(8)

$$C_k = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-k} \Gamma(k)\,\alpha,$$

so ist

$$A_k = C_k x^k$$

$$A_0 = -\gamma C_k$$

und aus (7) ergibt sich

$$\gamma C_k + F(x) = \gamma \cdot \frac{\gamma C_k + F\left(\frac{1}{x}\right)}{x^k}.$$

Die Potenz x^k ist dabei der in der rechten Halbebene eindeutige Zweig, welcher für positive x positiv ist. Setzt man daher

$$x = -i\tau,$$

wo dann τ in der Halbebene mit positiv-imaginärem Teil variieren darf, und führt ein

(9) $$f(\tau) = \gamma C_k + F(-i\tau),$$

so ist

(10) $$f(\tau+\lambda) = f(\tau); \qquad \frac{f\left(-\frac{1}{\tau}\right)}{(-i\tau)^k} = \gamma f(\tau).$$

Die Forderung, daß $\varphi(s)$ eine Konvergenzhalbebene hat, bedeutet, daß a_n nicht stärker als eine Potenz von n wächst und ist gleichwertig mit:

(11) $f(\tau)$ ist für $\Re\left(\frac{\tau}{i}\right) > 0$ regulär

$f(\tau)$ ist auch bei $i\infty$ regulär, gemessen in $e^{\frac{2\pi i\tau}{\lambda}}$.

(12) Für reelle u, v ist $f(u+iv) = O(v^{-K})$ für $v \to 0$

gleichmäßig in u mit irgendeinem festen K, das wir gleich noch $> k$ annehmen.

Hat umgekehrt die in der oberen τ-Halbebene reguläre Funktion $f(\tau)$ die Eigenschaften (10), (11), (12), so besteht eine konvergente Entwicklung

$$f(\tau) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i \frac{n\tau}{\lambda}},$$

in der keine negativen Exponenten auftreten, und die Dirichletsche Reihe

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

ist von der Signatur $\{\lambda, k, \gamma\}$. Denn das Γ-Integral liefert für dieses $\varphi(s)$ die Darstellung (bei $\Re(s) > K+2$)

$$R(s) = \int_0^{\infty} F(x)\, x^{s-1}\, dx, \text{ wo bei } x > 0$$

$$F(x) = f(ix) - b_0$$

und nach (8), (10) mit $b_0 = \gamma C_k$

$$F(x) = \gamma \frac{F\left(\frac{1}{x}\right)}{x^k} - b_0 + \frac{b_0\gamma}{x^k}$$

$$R(s) = \int_0^{\infty} F(x)\, x^{s-1}\, dx = \int_1^{\infty} \left(F(x)\, x^s + F\left(\frac{1}{x}\right) x^{-s}\right) \frac{dx}{x}$$

$$= \int_1^{\infty} F(x)\,(x^s + \gamma\, x^{k-s})\, \frac{dx}{x} - \frac{\gamma b_0}{k-s} - \frac{b_0}{s}.$$

Also ist $\varphi(s)$ vom Typus k und

$$R(s) = \gamma R(k-s).$$

Mithin gilt der

Hauptsatz: *Die Anzahl der linear unabhängigen Dirichletreihen der Signatur* $\{\lambda, k, \gamma\}$ *ist genau gleich der Anzahl der linear unabhängigen Funktionen* $f(\tau)$, *welche die Eigenschaften* (10), (11), (12) *besitzen.*

Zur Bestimmung dieser $f(\tau)$ betrachte man diejenige Gruppe $\mathfrak{G}(\lambda)$ linear-gebrochener Substitutionen von τ, welche erzeugt wird aus:

$$U\colon\ \tau' = \tau + \lambda; \quad V\colon\ \tau' = -\frac{1}{\tau}.$$

Die obere und die untere Halbebene gehen durch $\mathfrak{G}(\lambda)$ je in sich über. Es ist zu vermuten, daß ein Fundamentalbereich von $\mathfrak{G}(\lambda)$ enthalten ist in dem Teil des Vertikalstreifens $-\frac{\lambda}{2} \leqq \Re(\tau) \leqq \frac{\lambda}{2}$, der außerhalb des Einheitskreises liegt. Dieser Bereich B ist ein zusammenhängendes Stück, das aus der oberen in die untere Halbebene reicht, wenn $\lambda > 2$.

§ 3.

Der Fall $\lambda > 2$.

Sei also zunächst $\lambda > 2$. Dann kann man sich automorphe Funktionen von der Art der $f(\tau)$ durch das Prinzip der konformen Abbildung auf folgende Weise konstruieren. Man bilde die linke Hälfte des Bereiches B, nämlich den Bereich

$$-\frac{\lambda}{2} < \Re(\tau) < 0, \quad |\tau| > 1 \quad \text{(Bereich } B_1\text{)}$$

auf das Innere der oberen Halbebene von z durch

$$z = h(\tau)$$

eineindeutig und konform ab, was bekanntlich möglich ist. $h(\tau)$ ist nach dem Spiegelungsprinzip über den Rand von B_1 fortsetzbar und erweist sich als eindeutig in τ in der ganzen Ebene und invariant bei $\mathfrak{G}(\lambda)$. Normiert man $h(\tau)$ noch so, daß

$$h(\tau) = 1, 0, \infty$$
$$\text{bei } \tau = +i\infty, i, -i$$

(durch eine linear gebrochene Substitution mit reellen Koeffizienten), so nimmt $h(\tau)$ in B jeden Wert genau einmal an, gemessen in den richtigen Ortsvariabeln von $\mathfrak{G}(\lambda)$, insbesondere hat es im Punkte $-i$ einen Pol erster Ordnung, ist also im Innern der oberen Halbebene regulär und für $\Re\left(\frac{\tau}{i}\right) > 0$ auch beschränkt. Es existiert also eine Fourierentwicklung

$$h(\tau) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i \frac{n\tau}{\lambda}}$$

mit beschränkten Koeffizienten, überdies $a_1 \neq 0$, weil der Wert 1 in erster Ordnung angenommen wird. Die Funktion $H(\tau) = \sqrt{h(\tau)}$ ist ferner offenbar noch in der oberen Halbebene (nicht auch noch in der unteren) eindeutig und regulär, da sie sich in der Umgebung jeder Stelle so verhält, und es ist

$$H(\tau + \lambda) = H(\tau), \quad H\left(-\frac{1}{\tau}\right) = -H(\tau). \tag{13}$$

Die Ableitung $h'(\tau)$ verändert sich bei den Substitutionen von $\mathfrak{G}(\lambda)$ bekanntlich so:

$$h'\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^2 h'(\tau)$$

und hat als einzige Nullstellen also in der oberen Halbebene die Punkte $+i\infty$ und i, derart, daß

$$g(\tau) = \frac{h'(\tau)}{H(\tau)\,(h(\tau) - 1)}$$

im Innern der oberen Halbebene und bei $i\infty$ regulär und von Null verschieden ist. Daher ist hier $\log g(\tau)$ eindeutig und mithin für jedes positive β

$$g(\tau)^\beta = f_0(\tau)$$

auch eindeutig und verändert sich bei U, V so:

$$f_0(\tau + \lambda) = f_0(\tau), \quad \frac{f_0\left(-\frac{1}{\tau}\right)}{(-i\tau)^{2\beta}} = \varrho f_0(\tau),$$

woraus für $\tau = i$ und $f_0(i) \neq 0$ noch $\varrho = 1$ folgt, da ϱ von τ unabhängig ist. Hieraus stellen wir uns eine Funktion $f(\tau)$ her, die auch noch die Koeffizienteneigenschaft (12) hat, wie sie im Hauptsatz gefordert wird: Wir bedenken, daß für eine reelle Substitution L mit Determinante 1

$$L(\tau) - L(\bar{\tau}) = \frac{\tau - \bar{\tau}}{|c\tau + d|^2}.$$

($\bar{\alpha}$ ist die konjugiert imaginäre Größe zu α.)

Also ist

$$|h'(\tau)\,(\tau - \bar{\tau})| \text{ und auch } \left|\frac{h'(\tau)}{H(\tau)}(\tau - \bar{\tau})\right|$$

bei $\mathfrak{G}(\lambda)$ invariant, überdies in B beschränkt, in dem Teil, wo $\Re\left(\frac{\tau}{i}\right) \geqq 0$, weil es in jedem Punkte definiert und stetig ist, auch bei $\tau = i\infty$, wo es den Wert Null hat, da $h'(\tau)$ dort exponentiell verschwindet. Also gibt es eine Konstante C, so daß für alle $\tau = u + iv$ (mit $v > 0$)

$$\left|\frac{h'(\tau)}{H(\tau)}\right| < \frac{C}{v}$$

und daher, wenn n eine ganze Zahl $\geqq \beta$ ist:

$$|g(\tau)^\beta|\,|h(\tau) - 1|^n < \frac{C_1}{v^\beta} \qquad (n \geqq \beta).$$

Für

$$f(\tau) = f_0(\tau)\,(h(\tau) - 1)^n$$

ist dann

$$f(\tau + \lambda) = f(\tau), \quad \frac{f\left(\frac{-1}{\tau}\right)}{(-i\tau)^{2\beta}} = f(\tau),$$

$$f(\tau) = O\left(\frac{1}{v^\beta}\right)$$

gleichmäßig in u.

Die zu $f(\tau)$ gehörige Dirichletreihe hat dann nach dem Hauptsatz die Signatur $\{\lambda, 2\beta, 1\}$ und die zu $H(\tau) f(\tau)$ gehörige die Signatur $\{\lambda, 2\beta, -1\}$, und durch Wahl von n kann man beliebig viele linearunabhängige $f(\tau)$ erhalten, womit Satz 1 bewiesen ist.

§ 4.

Der Fall $\lambda = 2$.

Nun sei $\lambda = 2$. Die Gruppe $\mathfrak{G}(2)$, erzeugt durch $\tau + 2$ und $-\frac{1}{\tau}$, ist aus der Theorie der elliptischen Modulfunktionen wohlbekannt; sie hat innerhalb der vollen (inhomogenen) Modulgruppe den Index 3 und besteht aus denjenigen Substitutionen, deren Koeffizientenschema

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \bmod 2$$

ist. Ihr Fundamentalbereich ist der Teil des Vertikalstreifens $-1 \leqq \Re(\tau) \leqq +1$ der oberen Halbebene, in welchem $|\tau| \geqq 1$ ist. Es gibt genau zwei nach $\mathfrak{G}(2)$ nicht-äquivalente rationale Punkte, etwa $\tau = \infty$ und $\tau = 1$. Eine fundamentale Bedeutung für diese Gruppe hat die Thetareihe

$$\vartheta(\tau) = \vartheta_{00}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i \tau n^2}.$$

Es gilt bekanntlich

$$\vartheta(\tau + 2) = \vartheta(\tau), \quad \frac{\vartheta\left(-\frac{1}{\tau}\right)}{\sqrt{-i\tau}} = \vartheta(\tau).$$

Hierbei ist, wie auch später, die Potenz $(-i\tau)^\beta$ in der oberen Halbebene so zu wählen, daß sie auf der imaginären Achse positiv ist. Die Funktion $\vartheta(\tau)$ ist im Sinne des Hauptsatzes eine Funktion $f(\tau)$ mit $k = \frac{1}{2}$ und führt zu einer Dirichletreihe der Signatur $\{2, \frac{1}{2}, 1\}$, welche offenbar $2\zeta(2s)$ ist. Die eindeutige Bestimmtheit von $\varphi(s)$ durch die Signatur $\{2, \frac{1}{2}, 1\}$ ist leicht durch Abzählung der Nullstellen zu beweisen. Wir wollen gleich den allgemeinen Fall $\{2, k, \gamma\}$ behandeln.

Hierzu müssen wir noch das Verhalten der Funktionen $f(\tau)$ in dem rationalen Punkte $\tau = 1$ kennen. Zunächst ist

$$\frac{\vartheta_{00}\left(\frac{\tau}{\tau+1}\right)}{\sqrt{-i(\tau+1)}} = \varepsilon\,\vartheta_{10}(\tau) = \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\pi i \tau \frac{(2n+1)^2}{4}}$$

(ε eine 8-te Einheitswurzel), also

$$\frac{\vartheta_{00}\left(\frac{\tau}{\tau+1}\right)}{\sqrt{-i(\tau+1)}} = e^{\frac{\pi i \tau}{4}}\,\mathfrak{P}(e^{2\pi i \tau}), \tag{14}$$

wo $\mathfrak{P}(z)$ eine bei $z = 0$ reguläre Potenzreihe mit $\mathfrak{P}(0) \neq 0$ bedeutet. Da $\vartheta(\tau)$ im Innern der oberen Halbebene regulär und $\neq 0$, ist auch für jedes reelle positive β die Potenz $\vartheta^\beta(\tau)$ noch eindeutig und regulär mit den Eigenschaften:

$$\vartheta^\beta(\tau+2) = \vartheta^\beta(\tau); \qquad \frac{\vartheta^\beta\left(-\frac{1}{\tau}\right)}{(-i\tau)^{\frac{\beta}{2}}} = \vartheta^\beta(\tau).$$

Außerdem hat ϑ^β auch die O-Eigenschaft (12), da sie ja für ϑ gilt. Mithin ist jedes ϑ^β eine Funktion $f(\tau)$ im Sinne des Hauptsatzes und definiert eine Dirichletreihe der Signatur $\left\{2, \frac{\beta}{2}, 1\right\}$. In der Gruppe $\mathfrak{G}(2)$ gemessen, erhält $\vartheta(\tau)$ die Nullstellenzahl $\frac{1}{8}$, entsprechend der Nullstelle bei $\tau = 1$, die sich aus (14) ergibt (oder auch aus der Tatsache, daß ϑ^2 eine ganze Modulform zu $\mathfrak{G}(2)$ von der Dimension -1 ist, Nullstellenzahl = Index der Gruppe $\times$ Betrag der Dimension $\times \frac{1}{12}$). Also hat $\vartheta^\beta(\tau)$, in der Gruppe $\mathfrak{G}(2)$ gemessen, die Nullstellenzahl $\frac{\beta}{8}$, und wir wollen zeigen, daß für $\gamma = 1$ jede Funktion $f(\tau)$ mit den im Hauptsatz geforderten Eigenschaften die Nullstellenzahl $\frac{k}{4}$ besitzt. Hierzu müssen wir feststellen, daß $f(\tau)$ in dem rationalen Punkte $\tau = 1$ auch vom Charakter einer „ganzen Modulform" ist. Der Quotient

$$h(\tau) = \frac{f(\tau)}{\vartheta^{2k}(\tau)} \tag{15}$$

ist absolut invariant bei $\mathfrak{G}(2)$, weil er bei den Erzeugenden der Gruppe sich nicht ändert. Setzen wir

$$S(\tau) = \frac{\tau}{\tau+1},$$

so bleibt $h(S\tau)$ bei $P(\tau) = \tau + 1$ invariant, weil

$$SPS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ zu } \mathfrak{G}(2).$$

Also ist nach (14), (15)

$$\frac{f(S\tau)}{(-i(\tau+1))^k} = h(S\tau)\frac{\vartheta^{2k}(S\tau)}{(-i(\tau+1))^k} = h(S\tau)\,e^{\frac{\pi i k\tau}{2}}\,\mathfrak{P}(e^{2\pi i\tau})^{2k} = e^{\frac{\pi i k\tau}{2}}h_1(\tau),$$

wo $h_1(\tau)$ eine periodische Funktion von τ mit der Periode 1 und in der oberen Halbebene regulär ist. Hiernach existiert eine Entwicklung

$$h_1(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{2\pi i\tau n},$$

$$(16)\qquad g(\tau) = \frac{f(S\tau)}{(-i(\tau+1))^k} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi i\tau\left(n+\frac{k}{4}\right)}$$

und in dieser letzten Entwicklung — das ist das Ziel dieser Überlegung — können nun wegen der O-Eigenschaft (12) keine negativen Exponenten auftreten. Denn es ist

$$c_n = \int_{\tau_0}^{\tau_0+1} g(\tau)\, e^{-2\pi i\tau\left(n+\frac{k}{4}\right)}\, d\tau,$$

wo $\tau_0 = u_0 + i v_0$ ein beliebiger Punkt im Innern der oberen Halbebene, etwa $\tau_0 = i v_0$. Für $l = n + \frac{k}{4}$ ist also

$$c_n = \int_0^1 g(i v_0 + x)\, e^{-2\pi i(i v_0 + x)l}\, dx = e^{2\pi l v_0}\int_0^1 g(i v_0 + x)\, e^{-2\pi i l x}\, dx$$

von v_0 unabhängig. Dieser Ausdruck konvergiert aber bei $l < 0$ für $v_0 \to +\infty$ gegen Null, weil g nur wie eine Potenz von v_0 wachsen kann: Es ist gleichmäßig bei $0 \leqq x \leqq 2$ für $v_0 \to +\infty$ nach (12)

$$|g(x+iv_0)| = \frac{|f(S(x+iv_0))|}{((x+1)^2+v_0^2)^{\frac{k}{2}}} \leqq \left|f\left(\frac{x+iv_0}{x+iv_0+1}\right)\right|$$

$$= \left|f\left(u + i\frac{v_0}{(x+1)^2+v_0^2}\right)\right| < C\left(\frac{(x+1)^2+v_0^2}{v_0}\right)^K = O(v_0^{2K}).$$

Daraus folgt: $h(S\tau)$ hat bei $\tau = \infty$, also $h(\tau)$ bei $\tau = 1$ den Charakter einer rationalen Funktion der Gruppe $\mathfrak{G}(2)$, also ist $h(\tau)$ eine rationale Funktion der Gruppe und hat ebensoviel Nullstellen wie Pole im Fundamentalbereich. Also hat $f(\tau)$ ebenfalls die Nullstellenzahl $\frac{k}{4}$.

Unter diesen Nullstellen muß aber nach (16) $\tau = 1$ in einer gewissen, durch k allein bestimmten Mindestordnung auftreten, nämlich in der Ordnung $\frac{k}{4} - \left[\frac{k}{4}\right]$, wo $[x]$ die größte ganze Zahl $\leqq x$.

Folglich ist die Anzahl der linear-unabhängigen $f(\tau)$ der „Dimension $-k$" mit $\gamma = 1$ so groß, wie die Anzahl der rationalen Funktionen der Gruppe $\mathfrak{G}(2)$, welche höchstens in den Nullstellen von ϑ^{2k} Pole besitzen,

d. h. nur bei $\tau = 1$ einen Pol, und zwar von einer Ordnung $\leqq \left[\frac{k}{4}\right]$. Da $\mathfrak{G}(2)$ das Geschlecht 0 hat, so ist diese Anzahl gleich $\left[\frac{k}{4}\right] + 1$. Jede dieser Funktionen hat aber auch die O-Eigenschaft (12) und führt also wirklich zu einer konvergenten Dirichletreihe. Bei zwei zpeziellen Funktionen kann man nämlich die O-Eigenschaft unmittelbar konstatieren, nämlich bei

$$\vartheta_{0\,0}^{2\,k}$$

und für ganze $\frac{k}{4}$ auch bei $(\vartheta_{00}^8 + \vartheta_{10}^8 + \vartheta_{01}^8)^{\frac{k}{4}}$; (hier ist die Klammer das Weierstraßsche g_2). Offenbar kann man nun zu jedem $f(\tau)$ eine solche Linearkombination dieser beiden oder nur der ersten addieren, daß die Summe auch die Dimension $-k$ und $\gamma = 1$ hat und in beiden rationalen Spitzen $\tau = \infty$ und $\tau = 1$ verschwindet. Eine solche Funktion hat aber, wie ich früher gezeigt habe[4]), die O-Eigenschaft (12). Einfacher zeigt man das durch die Betrachtung der absolut invarianten Funktion

$$|\tau - \bar{\tau}|^{\frac{k}{2}} |f(\tau)|,$$

wie es in § 5 zum Beweis von Satz 4 ausgeführt ist. Damit ist endlich bewiesen:

Satz 2a. *Die Anzahl der linear unabhängigen Dirichletreihen der Signatur* $\{2, k, 1\}$ *ist* $\left[\frac{k}{4}\right] + 1$, *also insbesondere* $= 1$ *für* $0 < k < 4$.

Die Funktion $\zeta(2s)$ und die Zetafunktion des Körpers $K(\sqrt{-1})$ (wo $k = 1$) sind also durch ihre Funktionalgleichung bis auf einen konstanten Faktor bestimmt.

Der Vollständigkeit halber sei auch noch der Fall $\{2, k, -1\}$ erledigt. Wenn

$$f(\tau + 2) = f(\tau), \quad \frac{f\left(\frac{-1}{\tau}\right)}{(-i\tau)^k} = -f(\tau), \tag{17}$$

so muß $f(i) = 0$ sein, d. h. f hat bei $\tau = i$ eine Nullstelle von einer Ordnung $\geqq \frac{1}{2}$ gemessen in $\mathfrak{G}(2)$, da als Ortsvariable hier $(\tau - i)^2$ zu nehmen ist. Aber $f^2(\tau)$ hat die Dimension $-2k$ und $\gamma = +1$ und besitzt die Nullstellenzahl $\frac{2k}{4} = \frac{k}{2}$, also muß $k \geqq 2$ sein. Für $k = 2$ hat aber in der Tat

$$f_2(\tau) = \vartheta_{10}^4(\tau) - \vartheta_{01}^4(\tau)$$

---

[4]) E. Hecke, Theorie der Eisensteinschen Reihen höherer Stufe..., Abh. Math. Sem. Hamburg 5 (1927), § 4.

die Eigenschaften (17). Hier ist als einzige Nullstelle der Punkt $\tau = i$ mit der Ordnung $\frac{1}{2}$ vorhanden. Hat man nun in $f(\tau)$ für $k > 2$ eine Lösung von (17), so ist offenbar der Quotient

$$f^*(\tau) = \frac{f(\tau)}{f_2(\tau)}$$

noch eine ganze Form der Dimension $-(k-2)$, welche $\gamma = 1$ hat, und umgekehrt erhält man auch alle $f(\tau)$ in der Gestalt $f^*(\tau) \cdot f_2(\tau)$. Also gilt auch

Satz 2b. *Die Anzahl der linear unabhängigen Dirichletreihen der Signatur* $\{2, k, -1\}$ *ist Null für* $k < 2$, *dagegen* $\left[\frac{k-2}{4}\right] + 1$ *für* $k \geqq 2$.

Ich stelle hier zunächst für die ganzzahligen Werte k einige Dirichletreihen der Signatur $\{2, k, \gamma\}$ zusammen. Sie lassen sich aus $\zeta(s)$ und $L(s)$ aufbauen. Dabei ist

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-4}{n}\right) n^{-s}$$

die L-Reihe mit dem Restcharakter mod 4, und bekanntlich bleibt

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) L(s) = \eta(s)$$

beim Übergang von s zu $1-s$ invariant; d. h. $L(2s-1)$ hat die Signatur $\{8, \frac{s}{2}, 1\}$. Unter Benutzung von

$$\Gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{s-1} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right),$$

$$\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \xi(1-s)$$

bilde man nun für ganze $n \geqq 0$

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \pi^{-s} \Gamma(s)\, \zeta(s)\, L(s-2n), \\ G_2(s) &= \pi^{-s} \Gamma(s)\, \zeta(s-2n)\, L(s). \end{aligned} \tag{18}$$

Es wird

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \pi^{-n} 2^{2n-s}\, \xi(s)\, \eta(s-2n) \frac{\Gamma(s)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+1}{2} - n\right)}, \\ &= \pi^{-n-\frac{1}{2}} 2^{2n-1}\, \xi(s)\, \eta(s-2n) \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2} - n\right)}, \\ &= \pi^{-\frac{1}{2}-n} 2^{2n-1}\, \xi(s)\, \eta(s-2n) \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{s+1}{2} - i\right), \\ G_2(s) &= \pi^{-\frac{1}{2}-n} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \xi(s-2n)\, \eta(s) \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{s}{2} - i\right). \end{aligned}$$

Also

$$G_1(2n+1-s) = (-1)^n 2^{2n} G_2(s),$$
$$2^{2n} G_2(2n+1-s) = (-1)^n G_1(s).$$

Daher ist

$$\zeta(s)L(s-2n) + \gamma(-4)^n \zeta(s-2n)L(s) \tag{19}$$

eine Reihe der Signatur $\{2, 2n+1, \gamma\}$, außer für $n=0$, $\gamma=-1$, wo (19) im Einklang mit Satz 2 b identisch Null ist.

Ebenso findet man für

$$\begin{aligned} G(s) &= 2^{-s}\zeta(s)\zeta(s-2n+1)\Gamma(s)\pi^{-s}, \\ &= \pi^{-n}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\xi(s)\xi(s-2n+1)\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{s+1}{2}-i\right), \end{aligned} \tag{20}$$

$$G(2n-s) = (-1)^n G(s).$$

Da $2^s \pm 2^{2n-s}$ beim Übergang von s zu $2n-s$ den Faktor ± 1 erhält, so gehört die Signatur

$$\begin{aligned} &\{2, 2n, (-1)^n\} \quad \text{zu } 2^{-s}\zeta(s)\zeta(s-2n+1) \text{ für } n \geqq 2 \\ &\{2, 2n, (-1)^n\} \quad \text{zu } 2^{-s}\zeta(s)\zeta(s-2n+1)\left(2^{\frac{s}{2}} - 2^{\frac{2n-s}{2}}\right) \text{ für } n \geqq 1 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\{2, 2n, (-1)^{n+1}\} \text{ zu } 2^{-s}\zeta(s)\zeta(s-2n+1)(2^s - 2^{2n-s}) \text{ für } n \geqq 1. \tag{22}$$

Die Reihe (19) für $\gamma=1$, $n=0$ ist $\zeta(s)L(s)$, also die Zetafunktion des Körpers $K(\sqrt{-1})$. Die Zetafunktionen mit Größencharakter aus diesem Körper liefern weitere Reihen zur Signatur $\{2, k, 1\}$, nämlich

$$\zeta(s-2n, \lambda^{4n}) = \sum_{\mu}\frac{\mu^{4n}}{N(\mu)^s} = \sum_{\mu}\left(\frac{\mu}{|\mu|}\right)^{4n}\frac{1}{N(\mu)^{s-2n}}. \tag{23}$$

Hier durchläuft μ alle ganzen Zahlen des Körpers $K(\sqrt{-1})$ außer Null, und $N(\mu)$ ist $|\mu|^2$.

Diese Funktionen haben die Signatur $\{2, 4n+1, 1\}$. Für die ganzzahligen Werte $0 < k \leqq 5$ sind damit nach Satz 2a, 2b alle Reihen der Signaturen $\{2, k, \gamma\}$ gefunden[5]).

Bemerkenswert ist, daß sie alle eine Eulersche Produktentwicklung besitzen. Eine nähere Untersuchung hat nun ergeben, daß diese Eigenschaft in passender Verallgemeinerung sich für alle Reihen der Signaturen $\{2, k, \gamma\}$ mit ganzen k vorfindet. Das Eulerprodukt ist das Äquivalent für eine Eigenschaft der zugehörigen Potenzreihen $f(\tau)$, die sich als

---

[5]) Die zugehörigen Potenzreihen sind alle bekannt. Eine Zusammenstellung für alle ganzen $k \leqq 9$ findet sich bei W. L. Glaisher, On the number of representations of a number as a sum of $2r$ squares ..., Proc. London Math. Soc. (2) 5 (1907), p. 479.

algebraische Eigenschaft des zugehörigen Körpers der Modulformen zur Gruppe $\mathfrak{G}(2)$ formulieren läßt[3]).

Andererseits kann man nun versuchen, für allgemeine Werte k die Dirichletreihen von den Potenzreihen aus zu studieren. Wegen des Eindeutigkeitssatzes ist für alle reellen k zwischen 0 und 4 nur je eine Potenzreihe vorhanden, nämlich

$$\vartheta^{2k}(\tau) \qquad 0 < k < 4.$$

Die Koeffizienten dieser Reihen erscheinen als stetige Funktionen des Parameters k. Die Dirichletreihen variieren stetig

$$\text{von } \zeta(2s)\,(k = \tfrac{1}{2}) \text{ bis } \zeta(s)\,\zeta(s-1)(1-2^{2-2s}) \qquad (k = 2)$$

und diese beiden haben offenbar gleichwertige Nullstellenprobleme.

Zum Studium von $\vartheta^{2k}(\tau)$ bieten sich dann zwei Wege: Aus der Produktdarstellung von ϑ

$$\vartheta_{00}(\tau) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - e^{2\pi i n\tau})(1 + e^{\pi i\tau(2n-1)})^2$$

ergibt sich durch logarithmische Differentiation für

$$y = y(\tau) = \vartheta^{2k}(\tau):$$

$$(24)\quad \frac{y'}{y}\cdot\frac{1}{4\pi i k} = -\sum_{n,\,m\geq 1}\{e^{2\pi i n m\tau}m + (-1)^m(2n-1)\,e^{\pi i\tau m(2n-1)}\}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}(d(n)\,e^{2\pi i n\tau} + (-1)^n d_1(n)\,e^{\pi i n\tau}).$$

Hier ist $d(n)$ die Summe aller positiven Teiler von n, $d_1(n)$ die Summe aller positiven ungeraden Teiler von n. Daraus erhält man eine Rekursionsformel für die Koeffizienten der Reihe y in ihrer Abhängigkeit von k.

Für die zweite Methode ziehe man den von den Herren Hardy[6]) und Mordell[7]) mit so großem Erfolg für halbzahlige Werte k benutzten Gedanken heran, daß sich auch Eisensteinsche Reihen von nichtganzzahliger Dimension definieren lassen. Durchläuft L ein volles System $\mathfrak{S}$ von Substitutionen aus $\mathfrak{G}(2)$, dabei aber von Substitutionen mit derselben zweiten Zeile c, d nur je ein Individuum, so hängt die

---

[6]) G. H. Hardy, On the representation of a number as the sum of any number of squares, and in particular of five or seven. Proc. National Acad. of Science 4 (1918), p. 189—193.

[7]) L. J. Mordell, On the representations of numbers as a sum of $2r$ squares, Quarterly Journal of Math. 48 (1920), p. 93—104 und vom selben Autor: Cambridge Philos. Transactions 22 (1919).

Menge der Werte $\vartheta^{2k}(L\tau)$ von der Wahl der L nicht ab, und die Reihe

$$\sum_{L \text{ in } \mathfrak{S}} \frac{\vartheta^{2k}(\tau)}{\vartheta^{2k}(L\tau)} = F(\tau) \tag{25}$$

hat zunächst formal die Eigenschaft, sich bei $\mathfrak{G}(2)$ ebenso zu verhalten wie $\vartheta^{2k}(\tau)$, so daß der Quotient absolut invariant ist. Da aber

$$\frac{\vartheta^{2k}(\tau)}{\vartheta^{2k}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)} = \frac{\varepsilon_k(c,d)}{(c\tau+d)^k}, \tag{26}$$

wo ε_k, von τ unabhängig, den Betrag 1 hat, so ist die Reihe (25) für $k > 2$ absolut konvergent und definiert eine analytische Funktion von τ, welche die im Hauptsatz geforderten Eigenschaften hat — aber vielleicht identisch verschwindet. Da nun nach Satz 2a für $k < 4$ nur eine Funktion dieser Art existiert, so ist $F(\tau)$ bis auf einen Faktor mit $\vartheta^{2k}(\tau)$ identisch:

$$\sum_{c,\,d} \frac{\varepsilon_k(c,d)}{(c\tau+d)^k} = A(k)\cdot\vartheta^{2k}(\tau) \quad \text{für} \quad 2 < k < 4.$$

$A(k)$ ist von τ unabhängig. Die Reihe links läßt sich unter Benutzung einer elementaren Eigenschaft von ε_k vermöge einer bekannten Formel in eine Potenzreihe nach $e^{\pi i \tau}$ umschreiben. Die Koeffizienten erscheinen dann in der Gestalt unendlicher Reihen

$$\sum_{0 \leqq d < 2c}{}' \frac{\varepsilon_k(c,d)}{c^k} e^{\pi i n \frac{d}{c}}.$$

c, d sind teilerfremd, aber nicht beide ungerade, die Reihe für $k > 2$ offenbar absolut konvergent.

Daß $A(k) \neq 0$ für $2 < k < 4$, erkennt man aus dem Verhalten der Reihe bei $\tau = i\infty$. Wegen absoluter Konvergenz ist leicht festzustellen, daß die Teilsumme der Glieder mit $c \neq 0$ gegen Null konvergiert, während das Glied mit $c = 0$ den Wert 1 hat.

Bei ganz- und halbzahligen Werten $k \geqq \frac{3}{2}$ sind diese Reihen untersucht worden [6] [7]). Sie hängen bekanntlich mit der Darstellung von n als Summe von $2k$ Quadraten zusammen. In der vorliegenden Arbeit tritt k als stetige Variable [8]) auf, und es ist zunächst noch ε_k zu ermitteln. Nach (26) ist für beliebig reelles k dazu erforderlich, festzustellen, wie sich $\log\vartheta_{00}(\tau)$ bei den Substitutionen von $\mathfrak{G}(2)$ verhält;

[8]) Der Begriff der allgemeinen automorphen Form beliebiger reeller Dimension ist zuerst von H. Petersson aufgestellt und systematisch untersucht worden: Theorie der automorphen Formen beliebiger reeller Dimension ... Math. Ann. 103 (1930), S. 369—436.

das ist im Prinzip möglich aus der Reihe (24), durch Untersuchung ihres asymptotischen Verhaltens in den rationalen Randpunkten. Ähnliche Fragen sind in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen schon behandelt worden und haben u. a. auf merkwürdige Beziehungen zu Klassenzahlen höherer algebraischer Zahlkörper geführt. Die asymptotische Formel, welche ich bewiesen habe[9]), ergibt gerade den hier gesuchten Wert ε_k. Ich habe die weitere Untersuchung nicht durchgeführt.

§ 5.

Der Fall $0 < \lambda < 2$.

Endlich sei $0 < \lambda < 2$. Mit der Gruppe $\mathfrak{G}(\lambda)$ ist verknüpft der Bereich der oberen Halbebene

$$\Re\left(\frac{\tau}{i}\right) > 0, \quad -\frac{\lambda}{2} \leqq \Re(\tau) \leqq \frac{\lambda}{2}, \quad |\tau| \geqq 1, \qquad \text{(Bereich } B\text{)}$$

der in manchen Fällen ein Fundamentalbereich von $\mathfrak{G}(\lambda)$ ist. Es sei τ_0 der Eckpunkt dieses Bereiches, in welchem die Grade $\Re(\tau) = -\frac{\lambda}{2}$ den Einheitskreis trifft. Ferner sei $\alpha\pi$ (wo $0 < \alpha < \frac{1}{2}$) der Winkel des Kreisbogendreiecks B in dieser Ecke τ_0, also

$$\cos \alpha\pi = \frac{\lambda}{2}.$$

Der Punkt τ_0 ist Fixpunkt der zu $\mathfrak{G}(\lambda)$ gehörenden Substitution

$$L(\tau) = \frac{-1}{\tau + \lambda}; \quad \tau_0^2 + \lambda\tau_0 + 1 = 0, \; L(\tau_0) = \tau_0. \tag{27}$$

In der Variabeln

$$t = t(\tau) = \frac{\tau - \tau_0}{\tau - \bar{\tau}_0}$$

hat L die Normalform

$$t' = t(L\tau) = \frac{\bar{\tau}_0 + \lambda}{\tau_0 + \lambda} t(\tau) = \frac{1}{(\tau_0 + \lambda)^2} t(\tau) = \frac{-t(\tau)}{(-i(\tau_0 + \lambda))^2}.$$

Wir definieren wieder für beliebiges reelles β die in der oberen Halbebene eindeutige reguläre Funktion $(-i\tau)^k$ durch die Festsetzung, daß sie auf der imaginären Achse positiv sein soll. Dann ist insbesondere

$$(-i(\tau_0 + \lambda))^k = e^{-\pi i k\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)}$$

und

$$t' = t(L(\tau)) = e^{-2\pi i\alpha} t(\tau).$$

Um die Mannigfaltigkeit der Funktionen $f(\tau)$, wie sie im Hauptsatz zu $\mathfrak{G}(\lambda)$ definiert sind, zu untersuchen, stellen wir zunächst fest:

---

[9]) E. Hecke, Bestimmung der Klassenzahl einer neuen Reihe von algebraischen Zahlkörpern. Gött. Nachr. 1921 (§ 4).

Hilfssatz: Eine nicht identisch verschwindende Funktion $f(\tau)$, welche in der oberen Halbebene regulär ist, die Eigenschaften

$$f(\tau+\lambda)=f(\tau), \qquad \frac{f\left(-\frac{1}{\tau}\right)}{(-i\tau)^k}=\gamma f(\tau)$$

hat, und in eine Potenzreihe nach nicht-negativen Potenzen von $e^{2\pi i\frac{\tau}{\lambda}}$ entwickelbar ist, kann es nur dann geben, wenn

$$\alpha=\frac{1}{\pi}\arccos\frac{\lambda}{2}$$

rational und k rational mit einem nur von α abhängigen Nenner.

Wir zeigen, daß α und k rational sein müssen, aus dem Verhalten von $f(\tau)$ in der Nähe von τ_0. Mit Hilfe des Fixpunktes $\bar{\tau}_0$ von L in der unteren Halbebene bilden wir die in der oberen Halbebene reguläre Funktion

$$G(\tau)=(\tau-\bar{\tau}_0)^k.$$

Für sie gilt

$$G(L\tau)=\frac{G(\tau)}{(-i(\tau+\lambda))^k}\cdot c,$$

wo $|c|=1$, also von τ unabhängig, und wegen $g(\tau_0)=g(L\tau_0)\neq 0$

$$c=(-i(\tau_0+\lambda))^k=e^{-\pi i k\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}.$$

Mithin ist für

$$\begin{aligned} h(\tau)&=f(\tau)\cdot G(\tau),\\ h(L\tau)&=\gamma e^{-\pi i k\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}h(\tau). \end{aligned} \tag{28}$$

Da $h(\tau)$ auch in der Variabeln t bei $t=0$ regulär ist, so gibt es eine Potenzreihe

$$h(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n t^n$$

mit

$$\sum_n c_n t^n e^{-2\pi i n\alpha}=\gamma e^{-\pi i k\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)}\sum_n c_n t^n. \tag{29}$$

Die Potenzreihe muß unendlich viele Glieder $\neq 0$ enthalten, weil $f(\tau)$ periodisch ist. Daher ist zunächst α rational,

$$\alpha=\frac{p}{q}, \quad p,q \text{ ganz}, >0, \quad (p,q)=1.$$

Ist dann n_0 die Ordnung der Nullstelle τ_0 von $f(\tau)$, gemessen in τ oder t, so ist nach (29)

$$-n_0\frac{p}{q}=-\frac{k}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{p}{q}\right)+N_0+\frac{g}{2} \qquad (\gamma=(-1)^g)$$

mit ganzem rationalen N_0. Also

$$gq+k\cdot\frac{q-2p}{2} \text{ eine gerade Zahl.} \tag{30}$$

Im speziellen Falle $\lambda = 1$, wo $\mathfrak{G}(1)$ die Modulgruppe $\alpha = \frac{1}{3}$, $p = 1$, $q = 3$, kommt das bekannte Resultat heraus, daß k eine gerade Zahl und $\gamma = (-1)^{\frac{k}{2}}$ sein muß. Diese Bedingung ist noch nicht hinreichend, da bekanntlich auch noch $k \geqq 4$ sein muß.

Weitere Bedingungen und auch der Endlichkeitssatz kommen durch die Berechnung der Nullstellenzahl von f heraus. Wir müssen hier diese Nullstellenzahl direkt für f ermitteln, da wir zunächst nicht wissen, ob es absolut invariante Funktionen zu $\mathfrak{G}(\lambda)$ mit B als Fundamentalbereich gibt, wie es in der Theorie der automorphen Funktionen vorausgesetzt wird.

Hierzu werten wir

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'}{f}\,d\tau,$$

erstreckt über den passend modifizierten Rand von B, aus. Durch logarithmische Differentiation finden wir zunächst für

$$F(\tau) = \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}$$

$$F(\tau+\lambda) = F(\tau), \quad \frac{F\left(-\frac{1}{\tau}\right)}{\tau^2} = F(\tau) + \frac{k}{\tau}. \tag{31}$$

Es seien n_∞, n_0, n_i die Ordnungen der Nullstellen von f in den Ecken $i\infty$, τ_0, i, gemessen in $e^{2\pi i \frac{\tau}{\lambda}}$ bzw. τ, endlich N die Anzahl der übrigen Nullstellen von f in B, gemessen in τ, dabei soll aber von den auf dem Rande liegenden Paaren von Nullstellen, welche durch $-\frac{1}{\tau}$ oder $\tau \pm \lambda$ einander zugeordnet sind, nur je ein Exemplar gezählt werden. Wir berücksichtigen dann, daß in der Umgebung etwa von τ_0, indem wir

$$t = \frac{\tau - \tau_0}{\tau - \bar{\tau}_0}$$

einführen, eine Entwicklung

$$\frac{1}{f}\frac{df}{dt} = \frac{n_0}{t} + c_0 + c_1 t + \dots$$

besteht; und wenn wir in der t-Ebene das Integral

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{1}{f}\frac{df}{dt}\,dt$$

über einen Kreisbogen $|t| = r$ von der Winkelöffnung $\alpha\pi$ erstrecken, ist dann offenbar

$$J = n_0\frac{\alpha}{2} + \varepsilon(r),$$

wo $\varepsilon(r)$ mit r gegen Null konvergiert. In der bekannten Art ergibt sich dann aus (31)

$$N = -n_\infty - n_0\alpha - \frac{n_i}{2} - \frac{k}{2\pi i}\int_{\tau_0}^{i}\frac{d\tau}{\tau},$$

d. h.

$$N + n_\infty + n_0\frac{p}{q} + \frac{1}{2}n_i = \frac{k}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{p}{q}\right). \tag{32}$$

Hieraus folgt, da die $N, n \geqq 0$, aber nicht alle $= 0$ sind und $\frac{p}{q} = \alpha < \frac{1}{2}$, daß die linke Seite $\geqq \frac{p}{q}$ ist, und damit eine untere Schranke für k

$$k \geqq \frac{2\alpha}{\frac{1}{2} - \alpha}, \qquad \alpha \leqq \frac{k}{4 + 2k}, \tag{33}$$

was für $\lambda = 1$, $\alpha = \frac{1}{3}$ die oben erwähnte Bedingung $k \geqq 4$ liefert.

Ist nun $m = \left[\frac{k}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{p}{q}\right)\right]$ die größte ganze Zahl, welche nicht größer als die rechte Seite von (32) ist, so kann es nicht mehr als $m + 1$ linear unabhängige Funktionen $f(\tau)$ geben zu $\{\lambda, k, \gamma\}$. Denn nach (32) ist der Punkt $i\infty$ für keine $f(\tau)$ Nullstelle von höherer als m-ter Ordnung, es sei denn, daß $f(\tau) \equiv 0$. Aus $m + 2$ Funktionen $f_i(\tau)$ kann man aber offenbar stets eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{m+2} c_i f_i(\tau)$ bilden, wo nicht alle c_i Null sind, die bei ∞ eine Nullstelle $(m + 1)$-ter Ordnung hat; diese Funktion muß also identisch verschwinden, also sind $m + 2$ Funktionen $f(\tau)$ immer linear abhängig. Damit ist bewiesen:

Satz 3. *Für $0 < \lambda < 2$ gibt es Funktionen $\varphi(s)$ zur Signatur $\{\lambda, k, \gamma\}$ höchstens dann, wenn die Signatur von der Gestalt*

$$\{\lambda, k, \gamma\} = \left\{2\cos\frac{p}{q}\pi,\ \frac{2N}{q - 2p},\ \gamma\right\}$$

ist, wobei p, q, N ganze rationale Zahlen > 0 sind, und p, q teilerfremd. Bei gegebenen p, q, N ist die Anzahl der linear-unabhängigen Funktionen $\varphi(s)$ endlich und zwar $\leqq \left[\frac{N}{2q}\right] + 1$.

Nach diesem Satze ist speziell für die Signatur

$$\{\sqrt{3},\ 1, 1\},$$

wo

$$p = 1,\ q = 6,\quad N = 2,$$

die Zetafunktion des Körpers $K(\sqrt{-3})$ durch ihre Signatur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt.

Zur Bestimmung der genauen Anzahl der Lösungen ist hier zuerst die Frage zu erledigen, welche von den Funktionen $f(\tau)$ aus dem Hilfs-

satz zur Bildung der Dirichletreihen brauchbar sind, d. h. auch noch die O-Eigenschaft (12) besitzen. Die auch noch bei $s = k$ regulären Lösungen $\varphi(s)$ entstehen aus solchen $f(\tau)$, die im Punkte ∞ verschwinden. Andererseits ist bei jedem λ die O-Eigenschaft für $f(\tau)$ vorhanden, wenn nur $f(\tau)$ bei ∞ verschwindet. Denn es gilt

Satz 4: *Wenn $f(\tau)$ in der oberen Halbebene regulär ist, ferner mit einem gewissen λ, wo $0 < \lambda < 2$,*

$$f(\tau+\lambda) = f(\tau), \quad \frac{f\left(-\frac{1}{\tau}\right)}{(-i\tau)^k} = \gamma f(\tau) \tag{34}$$

und $f(\infty) = 0$ ist, schließlich B einen Fundamentalbereich von $\mathfrak{G}(\lambda)$ enthält, dann ist gleichmäßig für alle reellen u

$$f(u+iv) = O\left(v^{-\frac{k}{2}}\right) \quad \text{für } v \to 0.$$

Beweis: Man betrachte die im Innern der oberen Halbebene durchweg stetige Funktion

$$g(\tau) = |\tau - \bar{\tau}|^{\frac{k}{2}} |f(\tau)|.$$

Sie ist offenbar absolut invariant bei $\mathfrak{G}(\lambda)$, nimmt also ihren ganzen Wertevorrat bereits in B an. Hier ist sie aber beschränkt, weil sie bei Annäherung an ∞ wegen $f(\infty) = 0$ auch noch beschränkt ist, also ist

$$|f(\tau)| < C|\tau - \bar{\tau}|^{-\frac{k}{2}} = Cv^{-\frac{k}{2}}.$$

Beschränken wir uns weiterhin also nur auf die Funktionen $\varphi(s)$ der Signatur $\{\lambda, k, \gamma\}$, welche *ganze* transzendente Funktionen sind, so brauchen wir nur die $f(\tau)$ mit $f(\infty) = 0$ zu untersuchen; diese haben von selbst auch die O-Eigenschaft.

Um jetzt den positiven Existenzsatz über die $\varphi(s)$ zu erhalten, wird zunächst Satz 3 verschärft:

Satz 5: *Damit Funktionen $\varphi(s)$ mit der Signatur $\{\lambda, k, \gamma\}$ existieren, ist notwendig, daß die in Satz 3 auftretende Zahl $p = 1$ ist.*

Der auch in der Theorie der Dreiecksfunktionen ausgezeichnete Fall $p = 1$ muß nämlich bei unserem Problem deshalb vorliegen, weil sich zeigt, daß die Gruppe $\mathfrak{G}\left(2\cos\frac{p\pi}{q}\right)$ elliptische infinitesimale Substitutionen enthält, sobald $p \geqq 2$.

Man bestätigt zunächst leicht, daß für $n = 1, 2, \ldots$ mit $L(\tau)$ aus (27) und $U(\tau) = \tau + \lambda$

$$L^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{P}(\zeta^{p(1-n)} - \zeta^{-p(1-n)}), & -\frac{1}{P}(\zeta^{pn} - \zeta^{-pn}) \\ \frac{1}{P}(\zeta^{pn} - \zeta^{-pn}), & \frac{1}{P}(\zeta^{p(1+n)} - \zeta^{-p(1+n)}) \end{pmatrix}$$

wo

$$\zeta = e^{\frac{\pi i}{q}}, \qquad P = \zeta^{p} - \zeta^{-p}.$$

Damit wird UL^n eine reelle Substitution der Determinante 1, deren charakteristische Gleichung

$$x^2 - sx + 1 = 0, \tag{35}$$

wo s, die Spur von UL^n, den Wert hat

$$s = 2\frac{\sin\frac{p(n+1)\pi}{q}}{\sin\frac{p\pi}{q}}.$$

Nimmt man n so, daß

$$p(n+1) \equiv 1 \pmod{q},$$

so ist für $2 \leqq p < \frac{q}{2}$ sicher $0 < |s| < 2$, während unter den algebraischen Konjugierten von s solche vom Betrage > 2 sind. Also hat (35) Wurzeln vom Betrage 1, die keine Einheitswurzeln sind. Folglich besitzt UL^n einen nicht-reellen Fixpunkt τ_1, ist elliptisch mit einem Multiplikator, der keine Einheitswurzel ist. Unter den Potenzen von UL^n befinden sich also infinitesimale Substitutionen, und ebenso wie oben für den Hilfssatz bei Gleichung (29) schließt man, daß keine Funktionen $f(\tau)$ mit der Eigenschaft (34) existieren können, wenn $p \geqq 2$.

Für $p = 1$ wollen wir die Existenz solcher Funktionen jetzt nachweisen. Man bilde dazu das Kreisbogendreieck mit den Winkeln $\left(\frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{2}, 0\right)$, die linke Hälfte von B, durch eine Funktion $z = h(\tau)$ eineindeutig und konform auf die obere z-Halbebene ab, derart, daß den Ecken τ_0, i, ∞ die Werte $z = 0$, 1, ∞ entsprechen. In der Theorie dieser Dreiecksfunktionen wird gezeigt, daß durch das Spiegelungsprinzip die Funktion $h(\tau)$ in die obere Halbebene unbeschränkt fortsetzbar und eindeutig ist, und daß sie eine bei $\mathfrak{G}(\lambda)$ invariante Funktion ist, welche in B jeden Wert genau einmal annimmt, gemessen in den Ortsvariabeln von $\mathfrak{G}(\lambda)$. Der Bereich B ist der Fundamentalbereich von $\mathfrak{G}(\lambda) = \mathfrak{G}\left(2\cos\frac{\pi}{q}\right)$. Hiernach sieht man leicht, daß

$$\frac{h'(\tau)^2}{h \cdot (h-1)} = f_4(\tau)$$

eine Funktion ist, welche (34) mit $k = 4$, $\gamma = 1$ erfüllt, und welche als einzige Nullstelle den Punkt τ_0 mit der Ordnungszahl $n_0 = q - 2$ (gemessen in τ) hat. Daher ist die $(q-2)$-te Wurzel aus $f_4(\tau)$ auch noch regulär und eindeutig in der oberen Halbebene und

$$g(\tau) = \sqrt[q-2]{f_4(\tau)} \tag{36}$$

erfüllt (34) mit $k = \frac{4}{q-2}$, $\gamma = 1$ (weil $g(i) \neq 0$). Dieser Wert k ist nach (33) der kleinst-mögliche, für den zugehörige Funktionen $f(\tau)$ existieren können. Jedes k hat die Gestalt

$$k = \frac{2N}{q-2}$$

mit ganzen rationalen N. Nach (30) ist nun

$$\frac{N}{2} + \frac{gq}{2} \text{ ganz}, \quad \text{wo } \gamma = (-1)^g.$$

Wählen wir $\gamma = 1$, $g = 0$, so ist also N gerade, und alle möglichen Dimensionen $-k$ sind daher Multipla der kleinsten Dimension, zu welcher $g(\tau)$ gehört. Das kleinste k, wofür es $f(\tau)$ mit $f(\infty) = 0$ geben kann, hat nach (33)

$$\frac{k}{4q}(q-2) = 1, \quad N = 2q, \quad k = \frac{4q}{q-2},$$

und wirklich besitzt

$$\Delta(\tau) = \sqrt[q-2]{\frac{h'^{2q}}{h^{2q-2}(h-1)^q}} \tag{37}$$

als einzige Nullstelle, und zwar von 1. Ordnung, den Punkt ∞. Offenbar ist jedes $f(\tau)$ als Polynom in Δ und g darstellbar. und zwar, wenn f von der Dimension $-k$ mit

$$k = \frac{4K}{q-2}, \quad K = 1, 2, 3, \ldots,$$

so ist

$$f(\tau) = \sum_{0 \leqq r \leqq \frac{K}{q}} c_r \cdot \Delta^r \cdot g^{K-qr} \tag{38}$$

mit konstanten c_r. Die $f(\tau)$ mit $f(\infty) = 0$ haben also $c_0 = 0$. Ihre Anzahl ist $\left[\frac{K}{q}\right]$.

Gilt endlich für ein $f(\tau)$ (34) mit $\gamma = -1$, so muß offenbar $f(i) = 0$, also in (32) $n_i \geqq 1$ sein. Daher ist bei $\gamma = -1$

$$k\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) \geqq 1, \quad k \geqq \frac{2q}{q-2}.$$

Für den kleinsten Wert $k_0 = \frac{2q}{q-2}$ existiert aber wirklich eine (und offenbar nur eine) zugehörige Funktion, nämlich

$$F(\tau) = \sqrt[q-2]{\frac{h'^q}{h^{q-1}(h-1)}}.$$

Denn $F(\tau)$ ist eindeutig und regulär in der oberen Halbebene, und da sie wegen $g(i) \neq 0$ nicht in der Gestalt (38) darstellbar ist, muß sie

$\gamma = -1$ haben. Sie besitzt außer $\tau = i$ mit $n_i = 1$ keine weitere Nullstelle in B. Daher ist der Quotient

$$f^*(\tau) = \frac{f(\tau)}{F(\tau)}$$

regulär und gehört zu $k^* = k - \frac{2q}{q-2}$, $\gamma = +1$, ist also für $k^* > 0$ nach (38) darstellbar, und umgekehrt ist $F(\tau) \cdot f^*(\tau)$ immer ein $f(\tau)$ mit $\gamma = -1$, wenn $f^*(\tau)$ die Gestalt (38) hat. Es muß mithin bei $\gamma = -1$

$$k = \frac{2q}{q-2} + \frac{4(K-1)}{q-2} = 2 + \frac{4K}{q-2} \text{ mit } K = 1, 2, 3, \ldots$$

sein. Die beiden Fälle $\gamma = \pm 1$ können wir dann zusammenfassen:

Satz 6: *Die Anzahl der bei $s = k$ regulären linear unabhängigen Funktionen $\varphi(s)$ mit der Signatur $\left\{2\cos\frac{\pi}{q}, k, \gamma\right\}$ ist Null, wenn*

(Fall I) $$k \neq \frac{4K}{q-2} + 1 - \gamma \text{ mit } K = 1, 2, 3, \ldots$$

und gleich

(Fall II) $$\left[\frac{K + \frac{\gamma - 1}{2}}{q}\right], \text{ wenn } k = \frac{4K}{q-2} + 1 - \gamma.$$

Im Falle I *gibt es auch keine Lösung mit einem Pol* 1. *Ordnung bei $s = k$. Im Fall* II *gibt es entweder für jedes k oder für kein k noch eine Lösung $\varphi(s)$ mit Pol bei $s = k$.*

§ 6.

Systeme von Funktionalgleichungen für N Dirichlet-Reihen.

Wir übertragen jetzt den ganzen Ansatz auf Systeme von Funktionalgleichungen. Es sei, wie in IV. der Einleitung auseinandergesetzt, ein System von N Funktionen $\varphi_l(s)$ $(l = 1, \ldots, N)$ unter folgenden Bedingungen zu bestimmen:

Gegeben

zwei positive Größen λ, $k > 0$,

eine quadratische Matrix N-ten Grades mit komplexen Koeffizienten

$$\mathfrak{C} = (c_{rl}),$$

eine natürliche Zahl q,

N ganze rationale Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_N$.

Gesucht werden N Funktionen $\varphi_l(s)$, die

I. vom Typus k sind,

II. dem System von Gleichungen

(39) $$R_l(k-s) = \sum_{p=1}^{N} c_{lp} R_p(s)$$

genügen, wobei

$$R_l(s) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s)\, \varphi_l(s),$$

IV. in Dirichletsche Reihen der Gestalt

$$\varphi_l(s) = \sum_{n \equiv b_l \pmod q} a_n^{(l)} n^{-s} \tag{40}$$

entwickelbar sind, in denen nur die positiven Zahlen n der Restklasse $b_l \bmod q$ vorkommen. Die Reihen sollen irgendwo konvergieren.

Gibt es linear unabhängige Funktionen $\varphi_l(s)$ als Lösungen, so muß offenbar die Substitution $\mathfrak{C}$ die Periode 2 haben. Da auf diesen Fall sich das Interesse konzentriert, nehmen wir noch als

Voraussetzung:

$$\mathfrak{C}^2 = \text{Einheitsmatrix } \mathfrak{E}.$$

Genau wie in § 2 wird wieder geschlossen: Man ordne den Funktionen $\varphi_l(s)$ die eindeutig dazu definierten Potenzreihen

$$f_l(\tau) = M \cdot \varrho_l + \sum_{n \equiv b_l (q)} a_n^{(l)} e^{2\pi i \frac{n\tau}{\lambda}} \tag{41}$$

zu, wobei

$$M = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-k} \Gamma(k), \qquad \varrho_l = \sum_r c_{lr}\, \alpha_r,$$

$$\alpha_l = \text{Residuum von } \varphi_l(s) \text{ bei } s = k. \tag{42}$$

Diese Funktionen sind

$$\begin{gathered} \text{regulär im Innern der oberen Halbebene,} \\ \text{regulär bei } \tau = i\infty, \text{ gemessen in } e^{\frac{2\pi i \tau}{\lambda}}. \end{gathered} \tag{43}$$

Für sie gilt ferner

$$\frac{f_l\left(-\frac{1}{\tau}\right)}{(-i\tau)^k} = \sum_{p=1}^{N} c_{lp} f_p(\tau). \tag{44}$$

Neben der bereits in (41) ausgedrückten Periodizität, Periode λ, haben sie aber noch nach (40) die weitere Eigenschaft, sich bei der Substitution

$$\tau' = \tau + \frac{\lambda}{q}$$

nur so zu verändern: Mit $\varepsilon_l = e^{2\pi i \frac{b_l}{q}}$ ist für $l = 1, \ldots, N$

$$f_l\left(\tau + \frac{\lambda}{q}\right) = \varepsilon_l f_l(\tau) + M \cdot \varrho_l (1 - \varepsilon_l). \tag{45}$$

Außerdem ist wieder bei Annäherung von τ an die reelle Achse mit einem gewissen konstanten K

$$f_l(u + iv) = O(v^{-K}) \quad \text{für } v \to 0 \tag{46}$$

gleichmäßig für alle reellen u, mit $v > 0$.

Hat umgekehrt das System der N Funktionen $f_l(\tau)$, welches durch (41) definiert ist, die Eigenschaften (43), (44), (45), (46), so sind die mit den Koeffizienten $a_n^{(l)}$ gebildeten Dirichletreihen $\varphi_l(s)$ Lösungen des ursprünglichen Problems.

Beispiele für solche Systeme werden wir gleich unter den Modulfunktionen höherer Stufe kennen lernen.

Durch (44), (45) entsteht eine Aussage über das Verhalten der $f_l(\tau)$ bei den Substitutionen der unendlichen Gruppe $\mathfrak{G}\left(\frac{\lambda}{q}\right)$.

Ich behandle in dieser Arbeit nur den Fall

$$\lambda = q,$$

wo $\mathfrak{G}\left(\frac{\lambda}{q}\right)$ die Modulgruppe ist. Die Fälle $\lambda \leqq 2q$ sind mit Rücksicht auf § 4, 5 in ähnlicher Weise zugänglich; ein besonderes Interesse beansprucht noch der Fall $\lambda = 2q$, wo als System $\varphi_l(s)$ die L-Reihen des rationalen Zahlkörpers auftreten.

Sei also weiterhin $\lambda = q$. Wir führen noch folgende Zeichen ein: Die Matrix, welche dem homogenen Bestandteil der Substitution (45) entspricht: in der Diagonale $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_N$, sonst lauter Nullen, heiße $\mathfrak{U}$:

$$\mathfrak{U} = (\varepsilon_l \delta_{rl}) \qquad (\delta_{rl} = 1 \text{ für } r = l, \text{ sonst } 0).$$

Unter einem Zeichen wie $\{P\}$ oder $\{f\}$ wollen wir vorübergehend einen Vektor mit N Komponenten $P_1, \ldots, P_N$ bzw. $f_1, \ldots, f_N$ verstehen, und wenn $\mathfrak{A} = (a_{rl})$ eine Matrix N-ten Grades ist, soll

$$\mathfrak{A}\{P\}$$

den Vektor mit dem Komponenten $\sum_l a_{rl} P_l$, $r = 1, \ldots, N$, bedeuten.

Satz 7. *Für jede Lösung ist*

$$\varrho_l(1 - \varepsilon_l) = 0, \quad l = 1, \ldots, N, \tag{47}$$

d. h. die Residuen α_l der Funktionen $\varphi_l(s)$ bei $s = k$ genügen den Bedingungen

$$\sum_{n=1}^{N} c_{ln} \alpha_n = 0, \qquad \text{wenn } \varepsilon_l \neq 1.$$

Die Substition (45) *ist also homogen, und identisch mit* $\mathfrak{U}$.

In (44) ersetzen wir τ durch $\tau + 1$; nach (45) ist dann

$$\left\{f\left(-\frac{1}{\tau+1}\right)\right\} = (-i(\tau+1))^k \cdot \mathfrak{C}\,\mathfrak{U}\{f(\tau)\} + (-i(\tau+1))^k \{Q\}. \tag{48}$$

Dabei ist die Komponente Q_l von Q

$$Q_l = M \sum_{r=1}^{N} c_{lr} \varrho_r (1 - \varepsilon_r).$$

Q verschwindet also dann und nur dann, wenn (47) gilt. Nun hat die Substitution $-\frac{1}{\tau+1}$ die Periode 3. Wenden wir (48) dreimal hintereinander an, so kommt

$$\{f(\tau)\} - a_1 (\mathfrak{C}\,\mathfrak{U})^3 \{f(\tau)\} = a_2 (\mathfrak{C}\,\mathfrak{U})^2 \{Q\} + a_3 \frac{(\mathfrak{C}\,\mathfrak{U})\{Q\}}{(\tau+1)^k} + \frac{a_4 \{Q\}}{\tau^k}.$$

Hierbei sind $a_1, \ldots, a_4$ Zahlen vom Betrage 1. Die linke Seite ist periodisch in τ, also muß die rechte Seite konstant sein, also insbesondere das letzte Glied rechts verschwinden, d. h.

$$\{Q\} = 0,$$

und damit folgt auch Satz 7.

Jetzt können wir durch Heranziehung der Diskriminante

$$\Delta(\tau) = e^{2\pi i \tau} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n \tau})^{24}$$

ein sehr übersichtliches Resultat erhalten. Bekanntlich ist $\Delta(\tau)$ eine ganze Modulform zu $\mathfrak{G}(1)$ von der Dimension -12, deren Logarithmus noch eindeutig ist. Daher hat die irgendwie bei $\tau = \infty$ fixierte eindeutige Funktion

$$g(\tau) = \Delta(\tau)^{\frac{k}{12}}$$

die Invarianzeigenschaften:

$$g(\tau+1) = e^{\frac{2\pi i k}{12}} g(\tau), \qquad \frac{g\left(-\frac{1}{\tau}\right)}{(-i\tau)^k} = g(\tau).$$

Mithin fällt in dem Quotienten

$$F_l(\tau) = \frac{f_l(\tau)}{g(\tau)}$$

die Potenz τ^k heraus und es folgt:

$$(49) \qquad \begin{aligned} F_l(\tau+1) &= \varepsilon_l e^{-\frac{\pi i k}{6}} F_l(\tau) \\ F_l\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \sum_{r=1}^{N} c_{lr} F_r(\tau). \end{aligned}$$

Hiernach erfahren also die Funktionen $F_l(\tau)$ bei Modulsubstitutionen selbst lineare homogene Substitutionen, und damit haben wir das eine Hauptresultat:

Satz 8: *Die aus* $\mathfrak{C}$ *und der Matrix*

$$\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U} \cdot e^{-\frac{\pi i k}{6}}$$

erzeugte multiplikative Gruppe von Matrizen ist eine Darstellung der unendlichen inhomogenen Modulgruppe. Insbesondere ist also notwendig für die Existenz von Lösungen unseres Problems das Bestehen der Gleichung

$$(50)\qquad \begin{aligned}(\mathfrak{C}\,\mathfrak{U}_1)^3 &= \mathfrak{E}\\ (\mathfrak{C}\,\mathfrak{U})^3 &= e^{\frac{\pi i k}{2}}\,\mathfrak{E}.\end{aligned}$$

Das Funktionensystem $F(\tau)$, betrachtet als Funktion der absoluten Invariante $J = J(\tau)$, bildet also das vollständige System von Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung N-ter Ordnung in der Variabeln J, deren Koeffizienten offenbar absolute Invarianten der Modulgruppe sind, und zwar rationale Funktionen der Gruppe $\mathfrak{G}(1)$.

Wir greifen nun die einfachsten Arten der Darstellungen von $\mathfrak{G}(1)$ heraus. Zunächst die unitär-orthogonalen Darstellungen. Hier lassen sich die Regularitätsbedingungen der $F(\tau)$, soweit sie Lösungen $\varphi(s)$ ohne Pole definieren, wieder einfach formulieren: Es kommen hierfür alle und nur die Lösungen $F_l(\tau)$ von (49) in Frage, welche im Innern der oberen Halbebene regulär sind und im Punkte ∞ eine Unendlichkeitsstelle von kleinerer Ordnung als $\frac{k}{12}$ besitzen.

Denn zunächst ist darnach

$$f_l(\tau) = F_l(\tau)\cdot \Delta^{\frac{k}{12}}(\tau)$$

regulär in der oberen Halbebene, regulär bei $i\,\infty$ und verschwindet hier.

Andererseits ist wegen der Orthogonalität der Darstellung

$$\sum_{l=1}^{N} |F_l(\tau)|^2$$

absolut invariant bei Modulsubstitutionen, ebenso

$$|\tau - \bar{\tau}|^6\,|\Delta(\tau)|,$$

also ist auch

$$H(\tau) = |\tau - \bar{\tau}|^k \sum_{l=1}^{N} |f_l(\tau)|^2$$

absolut invariant, überdies aber beschränkt im Fundamentalbereich, weil $f_l(\infty) = 0$; folglich ist $H(\tau)$ überhaupt in der oberen Halbebene beschränkt, daher

$$|f_l(\tau)| < \frac{C}{|\tau - \bar{\tau}|^{\frac{k}{2}}},$$

und das ist die O-Bedingung.

Die Lösungen von (49), deren $f_l(\infty)$ nicht gleich 0 für alle l, sind vielleicht zur Bildung der Dirichletreihen nicht brauchbar, aber wenn sie brauchbar sind, geben sie Lösungen $\varphi_l(s)$ mit Pol bei $s = k$. Offenbar

kann es höchstens noch N weitere linear-unabhängige Lösungssysteme f_l über die oben genannten hinaus geben.

Das Hauptinteresse nehmen nun weiter die Darstellungen in Anspruch, welche nur endlich viele verschiedene Matrizen enthalten. Es sei $\mathfrak{M}$ die durch $\mathfrak{C}, \mathfrak{U}_1$ erzeugte endliche Gruppe. Die Gesamtheit der Elemente der Modulgruppe, welcher bei dieser Darstellung die Identität innerhalb $\mathfrak{M}$ entspricht, bildet offenbar einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}(1)$, und die Faktorgruppe $\mathfrak{G}(1)/\mathfrak{N}$ ist isomorph mit der endlichen Gruppe $\mathfrak{M}$. Hier gilt dann der Endlichkeitssatz:

Satz 9. *Ist die durch $\mathfrak{C}, \mathfrak{U}_1$ erzeugte Gruppe eine endliche Gruppe der Ordnung μ (was nur bei rationalem k vorkommen kann), so gibt es einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ der Modulgruppe vom Index μ, dessen Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ einstufig isomorph mit $\mathfrak{M}$ ist. Für solche Matrizen $\mathfrak{C}$ hat das Problem der Dirichletreihen nur endlich viele linear unabhängige Lösungssysteme.*

Offenbar sind die Funktionen $F_l(\tau)$ absolut invariant bei $\mathfrak{N}$, regulär im Innern der oberen Halbebene und haben auch in allen rationalen Punkten den Charakter rationaler Funktionen, weil sie alle im Punkte ∞ in der Ortsvariabeln rationalen Charakter haben. Die Gesamtheit aller zu $\mathfrak{N}$ gehörigen Funktionen bildet aber einen algebraischen Funktionenkörper vom Grade μ über den Modulfunktionen von $\mathfrak{G}(1)$, und nach dem Riemann-Rochschen Satz gibt es nur endlich viel linear-unabhängige Funktionen, deren Pole vorgeschriebene Lage und beschränkte Ordnung haben. Die $F_1(\tau), \ldots, F_N(\tau)$ gehören also alle einer bestimmten linearen Schar mit endlich vielen Erzeugenden an, die bei beliebigen Modulsubstitutionen in sich übergeht. Ist g die Anzahl dieser Erzeugenden, so kann man offenbar $N \cdot g$ linear-unabhängige n-tupel oder Vektoren $\{f\}$ aus diesen Elementen bilden. Unter diesen finden sich die Lösungssysteme $(F_1, \ldots, F_N)$. Mittels der Theorie der Darstellung der endlichen Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ durch lineare homogene Substitutionen läßt sich dann die fragliche Anzahl genau bestimmen, durch Zurückführung auf die einfachen Gruppencharaktere dieser Gruppe.

§ 7.

Die Modulfunktionen der Stufe q und die Bestimmung der Zetafunktionen imaginär-quadratischer Körper durch Funktionalgleichungen.

Diese Zurückführung ist geleistet für den Fall, daß der Normalteiler $\mathfrak{N}$ die Hauptkongruenzgruppe der Stufe q ist (Modulsubstitutionen, welche kongruent der Identität mod q sind). Diese Gruppen stehen mit den Zetafunktionen der imaginär-quadratischen Körper im Zusammenhang, und die obige Theorie ergibt hierfür einige Tatsachen, welche die ein-

deutige Bestimmung dieser Funktionen durch Funktionaleigenschaften ermöglichen, und die auch für die Riemannsche $\zeta(s)$ einen neuen Gesichtspunkt erkennen lassen.

Zur Darlegung dieser Zusammenhänge nehmen wir jetzt an, daß in dem Problem des vorigen § 6 k eine ganze rationale Zahl sei. Dann läßt sich durch Einführung homogener Variablen die Einführung von $\Delta(\tau)$ vermeiden und die durch $\mathfrak{C}, \mathfrak{U}_1$ erzeugte Gruppe einfacher beschreiben.

Setzt man nämlich $\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2}$, und betrachtet die homogene Modulgruppe in ω_1, ω_2 in ihrer Wirkung auf das System der homogenen Funktionen

$$f_l(\omega_1, \omega_2) = \omega_2^{-k} f_l\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right),$$

so folgt aus den Gleichungen (49) für die Substitutionen

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} f_l(U(\omega_1\, \omega_2)) &= \varepsilon_l f_l(\omega_1, \omega_2) \\ f_l(S(\omega_1\, \omega_2)) &= (-i)^k \sum_{r=1}^{N} c_{lr} f_r(\omega_1, \omega_2). \end{aligned} \tag{52}$$

Wir haben also hier die Gruppe linearer homogener Substitutionen zu betrachten, welche erzeugt wird durch

$$\mathfrak{U} = (\varepsilon_l \delta_{lr}) \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = e^{-\frac{\pi i}{2} k} \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{A}^3 = (-1)^k \mathfrak{E}. \tag{53}$$

Ist diese Gruppe die endliche Gruppe $\mathfrak{M}(q)$ der binären ganzzahligen Matrizen mod q mit Determinante $\equiv 1 \pmod q$, wobei die Elemente $\mathfrak{U}, \mathfrak{A}$ den Elementen U, S mod q in $\mathfrak{M}(q)$ entsprechen sollen, so sind die $f_l(\omega_1, \omega_2)$ ganze Modulformen der Stufe q und Dimension $-k$. Die oben erwähnte Schwierigkeit bei den Funktionen, welche im Punkte ∞ nicht verschwinden, ist hier erledigt durch meine Theorie der Eisenstein-Reihen[4]) der Stufe q, mit dem Ergebnis, daß auch alle $f_l(\tau)$, welche bei ∞ nicht verschwinden, zur Erzeugung von Dirichletreihen $\varphi_l(s)$ brauchbar sind.

Wir gehen jetzt aus von speziellen Matrizen $\mathfrak{U}, \mathfrak{A}$, welche auftreten, wenn man für $f_l(\tau)$ bestimmte Thetareihen nimmt. Die entsprechenden Dirichletreihen sind gerade Zetafunktionen imaginär-quadratischer Körper. Wir wollen dann sehen, wieweit die $f_l(\tau)$ und damit auch die $\varphi_l(s)$ durch die Matrizen $\mathfrak{U}, \mathfrak{A}$ bestimmt sind.

Im imaginär-quadratischen Zahlkörper $K(\sqrt{D})$ mit Diskriminante D sei $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal, ϱ eine Zahl aus $\mathfrak{a}$, $A = |N(\mathfrak{a})|$. In den folgenden Summen durchlaufen die Summationszeichen $\mu, \nu, \ldots$ alle ganzen Zahlen

von $K(\sqrt{D})$ mit den angegebenen Nebenbedingungen. Für jede natürliche Zahl k bilden wir dann folgende binäre Thetareihe in der komplexen Variabeln τ

$$\vartheta_k(\tau;\, \varrho,\, \mathfrak{a},\, \sqrt{D}) = \sum_{u \equiv \varrho\ (\mathfrak{a}\sqrt{D})} \mu^{k-1}\, e^{2\pi i \tau \frac{u\mu'}{A\,|D|}}.$$

Hier kommt offenbar ϱ nur mod $\mathfrak{a}\sqrt{D}$ in Betracht, ferner ist

$$\vartheta_k(\tau;\, -\varrho,\, \mathfrak{a},\, \sqrt{D}) = (-1)^{k-1}\, \vartheta_k(\tau;\, \varrho,\, \mathfrak{a},\, \sqrt{D}). \tag{54}$$

Das Verhalten bei Modulsubstitutionen in τ wird durch die Gleichungen beschrieben

$$\vartheta_k(\tau+1;\, \varrho,\, \mathfrak{a},\, \sqrt{D}) = e^{2\pi i \frac{\varrho\varrho'}{A\,|D|}}\, \vartheta_k(\tau;\, \varrho,\, \mathfrak{a},\, \sqrt{D}),$$

$$\frac{\vartheta_k\left(-\frac{1}{\tau};\, \varrho,\, \mathfrak{a},\, \sqrt{D}\right)}{(-i\tau)^k} = \frac{i^k}{\sqrt{D}} \sum_{\substack{\alpha \bmod \mathfrak{a}\sqrt{D} \\ \alpha \equiv 0 \pmod{\mathfrak{a}}}} e^{2\pi i S\left(\frac{\varrho\alpha'}{A\,D}\right)}\, \vartheta_k(\tau;\, \alpha,\, \mathfrak{a},\, \sqrt{D}). \tag{55}$$

Aus diesen Gleichungen wird nun in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen gezeigt[10]), daß die ϑ_k (ganze) Modulformen der Stufe $|D|$ und der Dimension $-k$ sind. Um das hiermit nach § 6 verknüpfte Problem der Dirichletreihen diskutieren zu können, hat man noch die für festes $\mathfrak{a}$, k zwischen den ϑ_k bestehenden linearen Abhängigkeiten zu untersuchen. Sind etwa genau N unabhängige Funktionen $f_1(\tau), \ldots, f_N(\tau)$ unter diesen ϑ_k, so definiert (55), geschrieben in $f_1, \ldots, f_N$, im Sinne von (52) ein Paar Matrizen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{A}$, welche eine Darstellung der homogenen (k ungerade) bzw. inhomogenen (k gerade) binären Modulargruppe $\mathfrak{M}(|D|)$ in N Variabeln erzeugen. Nach dem Vorangehenden gibt es für (55) nur endlich viele linear unabhängige Lösungssysteme $(f_1, \ldots, f_N)$, und das gleiche gilt nach dem Satz 9 für das zugehörige Problem der Dirichletreihen. Nun sind die den ϑ_k zugeordneten Dirichlet-Reihen folgende:

$$\zeta(s,\, k,\, \varrho,\, \mathfrak{a},\, \sqrt{D}) = \sum_{\mu \equiv \varrho\ (\mathfrak{a}\sqrt{D})}{}' \frac{\mu^{k-1}}{N(\mu)^s\, N(\mathfrak{a})^{-s}} = \sum_{A\,n \equiv N(\varrho) \pmod{D}}{}' \frac{a_n^{(\varrho)}}{n^s}. \tag{56}$$

Die Zahlen λ, q des allgemeinen Ansatzes aus § 6 sind hier gleich $|D|$; der Index l, der hier passender durch ϱ ersetzt wird, durchläuft ein System von Repräsentanten der Restklassen mod $\sqrt{D}$, die Zahlen b_l sind hier $\equiv A^{-1}\varrho\varrho'$ (mod D). Die linearen Relationen zwischen den ζ mit

---

[10]) Eine Zusammenstellung und direkte Herleitung der hier nötigen Formeln findet sich in meiner Arbeit: Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Math. Annalen 97 (1926), S. 210.

festem $\mathfrak{a}$, k lassen sich, wie unter Heranziehung der Primideale in den Klassen mod $\sqrt{D}$ leicht folgt, wenn $D < -4$, zurückführen auf

$$\zeta(s, k, -\varrho, \mathfrak{a}, \sqrt{D}) = (-1)^{k-1}\zeta(s, k, \varrho, \mathfrak{a}, \sqrt{D}). \tag{57}$$

Diese ζ sind überdies aus der Arithmetik bekannte Zetafunktionen mit „Größencharakteren“ $\lambda^{k-1}(\mu) = \frac{\mu^{k-1}}{|\mu|^{k-1}}$, in der dort üblichen Terminologie als

$$\zeta\left(s - \frac{k-1}{2}, \lambda^{k-1}, \varrho, \mathfrak{a}\right)$$

zu bezeichnen. Für $k = 1$ sind es die $\sum_{\mathfrak{m}} N(\mathfrak{m})^{-s}$, zu erstrecken über die ganzen Ideale $\mathfrak{m}$ einer Klasse mod $\sqrt{D}$. Somit ergibt sich schließlich folgender Endlichkeitssatz:

Für festes $\sqrt{D}$, $\mathfrak{a}$, k genügen die Funktionen

$$\varphi_\varrho(s) = \zeta(s, k, \varrho, \mathfrak{a}\sqrt{D}) = \sum_{A\,n \equiv \varrho\,\varrho' \pmod{D}} \frac{a_n^{(\varrho)}}{n^s} \tag{58}$$

einem System von Funktionalgleichungen

$$R_\varrho(k-s) = \sum_\alpha c_{\varrho\alpha} R_\alpha(s) \tag{59}$$

wo

$$R_\varrho(s) = \left(\frac{2\pi}{|D|}\right)^{-s} \Gamma(s)\, \varphi_\varrho(s), \tag{60}$$

$$c_{\varrho\alpha} = \frac{i^k}{\sqrt{D}}\, e^{2\pi i S\left(\frac{\varrho\ \alpha'}{A\ D}\right)}, \quad (\varrho, \alpha \bmod \mathfrak{a}\sqrt{D}). \tag{61}$$

Überdies ist

$$R_{-\varrho}(s) = (-1)^{k-1} R_\varrho(s), \tag{62}$$

$$R_\alpha(s) = R_\beta(s), \quad \text{wenn } \alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{a}\sqrt{D}}. \tag{63}$$

Das Gleichungssystem hat nur endlich viel linear unabhängige Lösungssysteme $(\varphi_\varrho(s))$, wo jedes $\varphi_\varrho(s)$ vom Typus k und eine Dirichlet-Reihe mit Kongruenzbedingungen $n \equiv b_\varrho \pmod{D}$ ist.

Für $\varrho = 0$ ergibt insbesondere (59)

$$R_0(k-s) = \frac{i^{k-1}}{|\sqrt{D}|} \sum_{\alpha \bmod \sqrt{D}} R_\alpha(s). \tag{64}$$

Bei ungeradem $k = 1, 3, 5, \ldots$ finden sich nun unter den Lösungen auch solche, wo

$$\varphi_0(s) = \frac{i^{k-1}}{|D|^{s-\frac{k-1}{2}}} \sum_{\alpha \bmod \sqrt{D}} \varphi_\alpha(s), \tag{65}$$

eben die, welche aus den ϑ_k entspringen. Im allgemeinen (jedenfalls für alle großen $|D|$) haben nicht alle Lösungen diese Eigenschaft. Aus (64), (65) folgt aber für diese besonderen Lösungen

$$R_0(s) = i^{k-1}|D|^{-s+\frac{k-1}{2}} \sum_{\alpha} R_\alpha(s),$$

$$R_0(s) = |D|^{\frac{k}{2}-s} R_0(k-s). \tag{66}$$

Wegen $b_0 \equiv 0 \pmod{D}$ ist aber auch noch

$$\varphi(s) = \varphi_0(s)\,|D|^s \tag{67}$$

eine spezielle Dirichletreihe, und für sie ist nach (66) mit

$$G(s) = \left(\frac{2\pi}{|\sqrt{D}|}\right)^{-s} \Gamma(s)\,\varphi(s) = |D|^{\frac{s}{2}} R_0(s)$$

$$G(s) = G(k-s). \tag{68}$$

Das ist die Funktionalgleichung der Zetafunktionen des Körpers, welche mit „Größencharakteren mod 1" gebildet sind, speziell für $k = 1$ die der Dedekindschen Zetafunktion von $K(\sqrt{D})$. Ihre Lösungen haben im Sinne von § 1 die Signatur $\{\sqrt{D}, k, 1\}$.

Die Menge der Funktionen mit der Signatur $\{\sqrt{D}, k, 1\}$ bildet also erst dann eine Schar mit nur endlich vielen linear unabhängigen Elementen, wenn man noch die Bedingungen hinzunimmt, daß diese $\varphi(s)$ zu einem System $(\varphi_\varrho(s))$ ergänzt werden können, welches das System von Funktionalgleichungen (59) bis (63) erfüllt.

Die hier erforderlichen genauen Anzahlbestimmungen aus der Theorie der elliptischen Modulfunktionen sind nun in den letzten Jahren in den wichtigsten Teilen durchgeführt worden[11][12][13][14], so daß nur noch verhältnismäßig einfache Rechnungen zu erledigen sind. Von den fertig vorliegenden Ergebnissen nenne ich die für Primzahlstufe: $D = -q$, wo q eine Primzahl $\equiv 3 \pmod 4$. Hier ist die Gruppe, welche durch $\mathfrak{U}, \mathfrak{C}$ in (55) erzeugt wird, eine irreduzible Darstellung der Modulargruppe $\mathfrak{M}(q)$. Ihr Grad ist

$$\frac{q+1}{2}, \text{ wenn } k \text{ ungerade},$$

$$\frac{q-1}{2}, \text{ wenn } k \text{ gerade}.$$

---

[11]) E. Hecke, Über ein Fundamentalproblem aus der Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Abh. Math. Sem. Hamburg **6** (1928), und: Über das Verhalten der Integrale erster Gattung bei Abbildungen ..., Abh. Math. Sem. Hamburg **8** (1930).

[12]) C. Chevalley und A. Weil, Über das Verhalten der Integrale erster Gattung bei Automorphismen des Funktionenkörpers, Abh. Math. Sem. Hamburg **10** (1934).

[13]) H. Feldmann, Über das Verhalten der Modulfunktionen von Primzahlstufe bei beliebigen Modulsubstitutionen, Abh. Math. Sem. Hamburg **8** (1931).

[14]) H. Spies, Die Darstellung der inhomogenen Modulargruppe mod. q^n durch die ganzen Modulformen gerader Dimension, Math. Annalen **111** (1935).

Die Anzahl der Systeme von ganzen Modulformen q-ter Stufe, welche sich bei beliebigen Modulsubstitutionen nach einer dieser Gruppen linear umsetzen, ist in einer Reihe von Hamburger Arbeiten bestimmt worden. Besonders hervorzuheben[11]) ist $k = 2$. Hier ist die Anzahl der Lösungssysteme von (55) gleich

$$\frac{1}{2}\left(p_0(q) + \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{2}{q}\right)\right) + h\right), \tag{69}$$

worin h die Klassenzahl von $K(\sqrt{-q})$, $p_0(q)$ das Geschlecht der Untergruppe $\Gamma_0(q)$:

$$p_0(q) = \frac{q-3}{12} + \left(\frac{3}{q}\right)\frac{1}{3}.$$

Eine genauere Theorie zeigt, daß man neben der durch $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{C}$ erzeugten Darstellung auch die konjugiert komplexe Darstellung $\overline{\mathfrak{U}}$, $\overline{\mathfrak{C}}$ in Betracht zu ziehen hat, wo die entsprechende Lösungszahl aus (69) durch Ersetzen von h durch $-h$ entsteht. Man kann nun durch einen bestimmten linearen Prozeß aus jeder Lösung $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{C}$ eine Lösung von $\overline{\mathfrak{U}}$, $\overline{\mathfrak{C}}$ erzeugen und umgekehrt. Da nun zu $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{C}$ genau h Lösungen mehr existieren als zu $\overline{\mathfrak{U}}$, $\overline{\mathfrak{C}}$, so wird durch den erwähnten Prozeß eine gewisse Teilschar aller Lösungen zu $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{C}$ in Null übergeführt, das sind genau jene h Lösungen, welche wir durch die Thetareihen ϑ_k erhalten, die also zu den Zetafunktionen führen.

Es gelingt aber auch für alle k, die betreffenden Zetafunktionen aus der Menge aller Lösungen völlig eindeutig in ihrer Gesamtheit zu charakterisieren, wenn man die Tatsache der Eulerschen Produktentwicklung heranzieht. Überträgt man nämlich die von mir für die Stufe 1 entwickelte Theorie des Operators T_n auf höhere Stufen[3]), was ich für Primzahlstufen bereits durchgeführt habe, so zeigt sich, daß die Menge aller r unabhängigen Lösungssysteme von Dirichletschen Reihen $\varphi_\varrho(s)$ des Funktionalproblems zu einer, allein durch die in (59) bis (63) vorkommenden Daten bestimmten Matrix des Grades r vereinigt werden kann, welche ein Euler-Produkt ist. Und unter den r charakteristischen Wurzeln dieser Matrix finden sich alle Zetafunktionen des betreffenden k für den Modul $\sqrt{D}$, welche eine Eulersche Produktentwicklung besitzen. Speziell gilt für $k = 1$: Die Zetafunktion des Körpers $K(\sqrt{D})$ ist die einzige der charakteristischen Wurzeln dieser Matrix, welche im Punkte $s = 1$ einen Pol besitzt.

Hamburg, 10. März 1936.

(Eingegangen am 10. 3. 1936).

Über die Lösbarkeit des Einbettungsproblems für Abelsche Zahlkörper.

Von

Hans Richter in Leipzig*).

Seite

Einleitung 700
§ 1. Erklärung einer Idealgruppe durch Charaktere 702
§ 2. Das Entsprechen der Charaktere im Großen und im Kleinen . . 704
§ 3. Die exakte Problemstellung, speziell im zyklischen Fall 706
§ 4. Einbettungen im Kleinen 708
§ 5. Weitere Umformung der Bedingungen. Der Fall des rationalen Grundkörpers 711
§ 6. Die hinreichenden Bedingungen (für Einbettbarkeit) im Großen 712
§ 7. Der allgemeine Abelsche Fall 720
a) die relativ-zyklische Einbettung 720
b) die beliebig Abelsche Einbettung 724
§ 8. Schlußbemerkung 726

Einleitung.

Durch die Galoissche Theorie werden die Unterkörper K_1 eines Normalkörpers K_2 über einem festen Grundkörper K_0 eineindeutig auf die Untergruppen der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}_2$ bezogen, wobei insbesondere den normalen Unterkörpern die Normalteiler $\mathfrak{N}$ der Gruppe $\mathfrak{G}_2$ entsprechen. Die Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}_1$ eines normalen Unterkörpers erscheint dann als Faktorgruppe von $\mathfrak{G}_2$ nach $\mathfrak{N}$. Ist hierdurch eine allgemeine Übersicht über die Unterkörper eines Normalkörpers gewonnen, so soll in der vorliegenden Arbeit das umgekehrte Problem angefaßt werden: Es ist $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{N}$, K_0 und K_1 gegeben, und es wird gefragt, ob es einen Oberkörper K_2 von K_1 mit der Gruppe $\mathfrak{G}_2$ gibt, derart daß K_1 zu der Untergruppe $\mathfrak{N}$ gehört. In den hier behandelten Fällen wird dabei K_0 durchweg als algebraischer Zahlkörper oder als p-adische Erweiterung eines solchen und $\mathfrak{G}_2$ als Abelsch vorausgesetzt.

Die Behandlung des Problems wird dabei sowohl im Großen als auch im Kleinen, d. h. für die p-adischen Körper, mit Hilfe der Klassenkörper-

*) Diese Arbeit wurde von der Philosophischen Fakultät der Universität Leipzig als Dissertation angenommen.

theorie geschehen. Diese Anwendung der Klassenkörpertheorie findet man bereits in einer Lösung von Herrn Hasse der von Herrn van der Waerden im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung gestellten Aufgabe[1]), einen quadratischen Körper über dem rationalen Grundkörper in einen zyklischen Körper vierten Grades einzubetten. Die dort angewandte Methode wird hier verallgemeinert auf den Fall der Einbettung von zyklischen Körpern, deren Grade Potenzen einer Primzahl l sind[2]), wobei man jedoch auf kompliziertere Existenzsätze geführt wird, deren Behandlung einen wesentlichen Teil der vorliegenden Arbeit ausmacht.

Es ist weiterhin ein Gedanke von Herrn van der Waerden, zu untersuchen, wieweit sich das Programm des algebraischen Monodromiesatzes für Einbettungsprobleme verwirklichen läßt; d. h. ob von einer Einbettung im Kleinen auf die im Großen geschlossen werden kann. Dies erweist sich insofern als fruchtbar, als bei sinngemäßer Zuordnung von Einbettungsproblemen im Kleinen zu denen im Großen nicht nur, von einigen Ausnahmefällen bei $l = 2$ abgesehen, der Monodromiesatz tatsächlich gilt, sondern auch eine bei den l-Teilern aufgetauchte Schwierigkeit der Formulierung[3]) behoben wird.

Für die vorliegenden Zwecke ist es nun praktisch, Strahlklasseneinteilungen im Großen und im Kleinen nicht wie üblich durch Kongruenzen, sondern durch Charaktere zu definieren, was im § 1 näher ausgeführt wird; es zeigt sich nämlich im § 2, daß zwischen entsprechenden Charakteren im Großen und im Kleinen ein unmittelbarer Zusammenhang besteht. Im § 3 wird die oben erwähnte Zuordnung von Einbettungsproblemen im Kleinen zu denen im Großen auseinandergesetzt; das gegebene Problem wird auf lokale Einbettungsprobleme und einen Existenzsatz zurückgeführt. Im § 4 wird das zyklische Lokalproblem gelöst, und die sich ergebenden Bedingungen werden dann im § 5 im Großen formuliert. Weiterhin wird im § 5 der Fall des rationalen Grundkörpers gleich vorweg völlig erledigt werden. Im § 6 wird die im § 3 aufgestellte Existenzforderung behandelt und dann zuletzt der Monodromiesatz für zyklische Einbettungen aufgestellt. Es wird gezeigt, wie weit er gilt, und für alle anderen Fälle ein Gegenbeispiel[4]) angegeben. Im § 7 schließlich wird der allgemeine Abelsche Fall auf den zyklischen zurückgeführt und auch hier mit denselben Einschränkungen der Monodromiesatz bewiesen.

---

[1]) Jahresbericht d. D. M. V. **43**, S. *61* nebst **44**, S. *60*.

[2]) Siehe auch eine Aufgabe von H. Hasse im Jahresbericht d. D. M. V. **44**, S. *41*.

[3]) Vgl. den Lösungsansatz von A. Scholz im Jahresbericht d. D. M. V. **45**, S. *35*.

[4]) Ein einfaches Gegenbeispiel gab ich bereits im Anschluß an den in [3]) zitierten Lösungsansatz von A. Scholz im Jahresbericht d. D. M. V. **45**, S. *113*.

§ 1.

Erklärung einer Idealgruppe durch Charaktere.

Ist K ein zyklischer Körper vom Primzahlpotenzgrade l^n über dem algebraischen Zahlkörper K_0, so ist K nach dem Umkehrsatz der Klassenkörpertheorie Klassenkörper zu einer Idealgruppe $\mathfrak{H}$, die nach dem Führer $\mathfrak{f}$ von K erklärbar ist. Nach dem Isomorphiesatz ist $\mathfrak{a}/\mathfrak{H}$ zyklisch von der Ordnung l^n, wenn $\mathfrak{a}$ die Gesamtheit aller zu $\mathfrak{f}$ primen Ideale bedeutet. Als Untergruppe der vollen Strahlklassengruppe mod $\mathfrak{f}$ mit zyklischer Restklassengruppe ist $\mathfrak{H}$ erklärbar als die Gesamtheit aller Ideale, für die ein Strahlklassencharakter χ von der Ordnung l^n gleich 1 ausfällt. Es sei dabei:

$$\mathfrak{f} = \prod_i \mathfrak{l}_i^{\varrho_i} \cdot \prod_k \mathfrak{q}_k^{\tau_k} \cdot \prod \mathfrak{p}_\infty ,$$

wo die $\mathfrak{l}_i/l$ und die $\mathfrak{q}_k/q_k \neq l$. Wäre hierbei nun ein τ_k, etwa $\tau_1 > 1$, so ist für ein Ideal $\mathfrak{r}$ aus dem Strahl $\mathfrak{f}\mathfrak{q}_1^{-1}\,\mathfrak{r}^{q_1^{\mu}}$ für genügend hohes μ im Strahl mod $\mathfrak{f}$ und damit in $\mathfrak{H}$ enthalten; andererseits ist die Ordnung von $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{a}/\mathfrak{H}$ ein Teiler von l^n, woraus folgt, daß der Strahl mod $\mathfrak{f}\mathfrak{q}_1^{-1}$ ganz in $\mathfrak{H}$ liegt, so daß $\mathfrak{f}$ nicht der Führer sein kann. Aus dem gleichen Grunde fallen für $l \neq 2$ die unendlichen Primstellen aus dem Führer fort.

Die Basiselemente der absoluten Idealklasseneinteilung seien zu $\mathfrak{f}$ und l prime Ideale $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_h$ mit den Ordnungen $b_1, \ldots, b_h$, so daß also gilt:

$$\mathfrak{b}_i^{b_i} = (\beta_i),$$

wo β_i eine zu $\mathfrak{f}$ fremde Zahl ist.

Die Restklassengruppe mod $\mathfrak{l}_i^{\varrho_i}$ sei repräsentiert durch die Basiselemente $u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, \ldots$ mit den Ordnungen $l^{k_1^{(i)}}, l^{k_2^{(i)}}, \ldots$ nebst Basiselementen z_i mit zu l primen Ordnungen. Die Basiselemente mod $\mathfrak{q}_k$ seien v_k von der Ordnung l^{m_k} und z_k mit zu l primer Ordnung. Im Falle $l = 2$ seien noch Basiselemente w_∞ für die unendlichen Primstellen erklärt.

Der zunächst für Ideale definierte Charakter χ überträgt sich für die zu $\mathfrak{f}$ primen Zahlen α auf einen Zahlcharakter χ' durch:

$$\chi'(\alpha) = \chi[(\alpha)].$$

Umgekehrt ist dafür, daß ein Zahlcharakter χ' und Charaktere $\chi(\mathfrak{b}_i)$ zusammen einen Strahlklassencharakter mod $\mathfrak{f}$ ergeben, notwendig und hinreichend, daß aus

$$(1) \qquad \begin{cases} \Pi\, \mathfrak{b}_i^{\varrho_i}(\alpha) \equiv (1) \mod \mathfrak{f} \text{ folgt:} \\ \Pi\, \chi^{\varrho_i}(\mathfrak{b}_i) \cdot \chi'(\alpha) = 1. \end{cases}$$

Insbesondere muß

$$\chi^{b_i}(\mathfrak{b}_i) = \chi'(\beta_i) \quad \text{und} \quad \chi'(\varepsilon) = 1 \tag{2}$$

sein, wenn ε eine Einheit ist. Da nach Definition der $\mathfrak{b}_i$ in (1) $\varrho_i = b_i \cdot \varrho_i'$ gelten muß, folgt aus (2) auch umgekehrt (1), so daß wir haben:

Hilfssatz 1: *Ein Zahlcharakter χ' mod $\mathfrak{f}$ und die Charaktere $\chi(\mathfrak{b}_i)$ ergeben genau dann einen Strahlklassencharakter mod $\mathfrak{f}$, wenn die Bedingungen erfüllt sind:*

(a) $\chi^{b_i}(\mathfrak{b}_i) = \chi'(\beta_i)$,
(b) $\chi'(\varepsilon) = 1$, *wenn ε eine Einheit ist.*

Ist also umgekehrt ein Zahlcharakter χ' mod $\mathfrak{f}$ gegeben, der der Bedingung $\chi'(\varepsilon) = 1$ genügt, so läßt sich χ' immer zu einem Strahlklassencharakter mod $\mathfrak{f}$ ergänzen.

Sei nun im obigen zyklischen Fall eine Zahl $s < n$ gegeben, so wird durch χ^{l^s} eine Idealgruppe $\mathfrak{H}^*$ definiert, die $\mathfrak{H}$ umfaßt; dabei wird $\mathfrak{a}/\mathfrak{H}^*$ zyklisch von der Ordnung l^{n-s}. Der zu $\mathfrak{H}^*$ gehörige Körper ist der — einzige — Unterkörper K^* von K vom Grade l^{n-s}.

Schreiben wir $\mathfrak{f}$ als $\mathfrak{f} = \Pi \mathfrak{p}_i^{\varrho_i}$, wo das Produkt über alle endlichen und unendlichen Primstellen zu erstrecken ist, so wird: $\chi' = \Pi \chi'_{\mathfrak{p}_i}$, wo $\chi'_{\mathfrak{p}_i}$ ein Zahlcharakter mod $\mathfrak{p}_i^{\varrho_i}$ ist. Ist nun l^s die Ordnung eines $\chi'_{\mathfrak{p}}$, so definiert χ^{l^s} die zum Trägheitskörper K_T von $\mathfrak{p}$ gehörige Idealgruppe als die engste $\mathfrak{H}$ umfassende Gruppe mit zu $\mathfrak{p}$ primem Führer. Es ist also die Verzweigungsordnung von $\mathfrak{p}$ gegeben durch

$$e = [K : K_T] = l^s.$$

Auf die $\mathfrak{p} \nmid l$ angewendet, heißt dies, daß die den χ^t zugeordneten Führer $\mathfrak{p}$ genau dann, und zwar in erster Potenz enthalten, wenn $t \not\equiv 0 \pmod{e}$. Nach der Führer-Diskriminantenformel[5]) ist der Beitrag von $\mathfrak{p}$ zur Diskriminante von K somit:

$$\mathfrak{d}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{l^n\left(1-\frac{1}{e}\right)}.$$

Wir definieren nun für Nichtdiskriminantenteiler $\chi'_\mathfrak{p}$ als identisch 1, und formulieren

Satz 1: *Ist K ein zyklischer Körper vom Grade l^n über K_0, so ist der Diskriminantenbeitrag eines endlichen $\mathfrak{p} \nmid l$: $\mathfrak{d}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{l^n\left(1-\frac{1}{e_\mathfrak{p}}\right)}$, wo $e_\mathfrak{p}$ die Verzweigungsordnung von $\mathfrak{p}$ ist. Für alle $\mathfrak{p}$ ist $e_\mathfrak{p}$ gleichzeitig die Ordnung von $\chi'_\mathfrak{p}$.*

[5]) H. Hasse, Klassentheorie. Vorlesungsausarbeitung Sommersemester 1932.

Wir untersuchen nunmehr die entsprechenden Verhältnisse im Kleinen. Es sei demgemäß $\overline{K}$ ein zyklischer Körper über dem Lokalkörper $\overline{K}_0$ vom Grade $l^n = \bar{f} \cdot \bar{e}$, wo $\bar{f}$ und $\bar{e}$ Grad und Verzweigungsordnung der Primstelle $\mathfrak{p} = (\pi)$ von $\overline{K}_0$ in $\overline{K}$ sind. $\overline{K}$ ist Klassenkörper zur Normklassengruppe $\overline{\mathfrak{H}}$, die mod $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}$, dem $\mathfrak{p}$-Führer von $\overline{K}$, erklärbar ist. Wie oben ist für $\mathfrak{p} \nmid l$ $\mathfrak{f}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^0$, oder $\mathfrak{p}^1 \cdot \overline{\mathfrak{H}}$ ist eine Untergruppe mit zyklischer Restklassengruppe der durch die Basiselemente mod $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}$ und π erzeugten Abelschen Gruppe, wenn man die Basiselemente mod $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}$ rechnet. Also ist auch $\overline{\mathfrak{H}}$ durch einen Charakter $\bar{\chi}$ erklärbar, der analog zu den Verhältnissen im Großen als aus $\bar{\chi}'(\alpha)$ für die zu $\mathfrak{p}$ primen α und $\bar{\chi}(\pi)$ bestehend zu denken ist. Der Existenzsatz der Klassenkörpertheorie im Kleinen sagt aus, daß $\bar{\chi}'(\alpha)$ und $\bar{\chi}(\pi)$ keinen Bedingungen außer der Erklärbarkeit unterliegen. Zum Trägheitskörper $\overline{W}$ von $\mathfrak{p}$ in $\overline{K}$ gehört die kleinste $\overline{\mathfrak{H}}$ umfassende Zahlgruppe mit dem Führer $\mathfrak{p}^0$, deren Charakter wegen $[\overline{K} : \overline{W}] = \bar{e}$ gerade $\overline{\chi'}$ sein muß. $\bar{e}$ erweist sich somit als die Ordnung von $\bar{\chi}'$.

Sei nun x die kleinste Zahl, so daß sich ein zu $\mathfrak{p}$ fremdes α finden läßt mit

$$\bar{\chi}(\pi^x) = \bar{\chi}'(\alpha);$$

dann folgt nach dem Obigem

$$\bar{\chi}^{\bar{e}}(\pi^x) = 1; \tag{3}$$

jedoch auch umgekehrt folgt aus (3) die Gleichung $\bar{\chi}(\pi^x) = \zeta$, wo ζ eine $\bar{e}$-te Einheitswurzel bedeutet. Da aber $\bar{\chi}'$ die Ordnung $\bar{e}$ hatte, gibt es ein α mit $\bar{\chi}'(\alpha) = \zeta$; also $\bar{\chi}(\pi^x) = \bar{\chi}'(\alpha)$. Da sich x somit als Ordnung von $\overline{\chi'}$, dem Charakter $\overline{W}$, erwiesen hat, folgt: $x = (\overline{W} : \overline{K}_0) = \bar{f}$. Wir fassen zusammen zu

Satz 2: *Hat* $\mathfrak{p}$ *in* $\overline{K}$ *über* $\overline{K}_0$ *den Grad* $\bar{f}$ *und die Verzweigungsordnung* $\bar{e}$, *so ist* $\bar{e}$ *die Ordnung von* $\bar{\chi}'$ *und* $\bar{f}$ *die kleinste Zahl mit* $\bar{\chi}(\pi^{\bar{f}}) = \bar{\chi}'(\alpha)$ *mit zu* $\mathfrak{p}$ *fremden* α.

§ 2.

Das Entsprechen der Charaktere im Großen und im Kleinen.

Es mögen nunmehr K über K_0 und $\overline{K}$ über $\overline{K}_0$ in der Beziehung zueinander stehen, daß $\overline{K}$ aus K und $\overline{K}_0$ aus K_0 durch entsprechende p-adische Erweiterungen entstanden sind. Da bei diesem Übergang die absoluten Idealklassen verloren gehen und umgekehrt der Zahl π im Großen kein Charakter zuzukommen braucht, ist ein Entsprechen der Charaktere nur für $\chi'_\mathfrak{p}$ und $\bar{\chi}'$ zu erwarten. Für diese gilt nun der

Satz 3: (*Übertragungssatz*). *Ist* K *zyklisch über* K_0 *zum Führer* $\mathfrak{f} = \Pi\, \mathfrak{p}_i^{\varrho_i}$, *erklärt durch einen Charakter* χ, *der als* $\Pi \chi'_{\mathfrak{p}_i}$ *und* $\chi(\mathfrak{b}_i)$ *gegeben ist, dann ist für eine Primstelle* $\mathfrak{p}$ *der Lokalcharakter* $\bar{\chi}' = \chi'_\mathfrak{p}$.

Beweis: Bekanntlich[6]) gilt $p^{\varrho}/\mathfrak{f}_p$, so daß χ'_p auch mod $\mathfrak{f}_p$ erklärbar ist. Ist nun α eine Zahl mit $\bar{\chi}'(\alpha) = 1$, so bestimmen wir eine Zahl α' so, daß

$$\alpha' \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{f}_p} \text{ und } \alpha' \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f} \cdot p^{-\varrho}}$$

wird.

Dann ist wegen $\bar{\chi}'(\alpha') = \bar{\chi}'(\alpha) = 1$ α' Norm aus $\overline{K}$ über $\overline{K}_0$; also nach einem bekannten Satze[6]) auch Normrest aus K über K_0 mod $\mathfrak{f}_p$, also erst recht mod p^{ϱ}. Da nun $\alpha' \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f} \cdot p^{-\varrho}}$ ist, wird α' Normrest mod $\mathfrak{f}$, liegt demnach in $\mathfrak{H}$. Also ist $\chi'(\alpha') = 1$; da aber wegen $\alpha' \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f} \cdot p^{-\varrho}}$ alle $\chi'_{\mathfrak{p}_i}(\alpha') = 1$ für $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}$ sind, folgt, daß mit $\bar{\chi}'(\alpha) = 1$ auch $\chi'_{\mathfrak{p}}(\alpha) = 1$ ist. Nach den Sätzen 1 und 2 sind aber die Ordnungen von $\bar{\chi}'$ und $\chi'_{\mathfrak{p}}$ beide gleich der Verzweigungsordnung von $\mathfrak{p}$, also folgt auch umgekehrt aus $\chi'_{\mathfrak{p}}(\alpha) = 1$, daß $\bar{\chi}'(\alpha) = 1$ wird; q. e. d.

Da $\mathfrak{f}_p$ und p^{ϱ} gerade so hoch gewählt werden müssen, daß $\bar{\chi}'$ und $\chi'_{\mathfrak{p}}$ erklärbar werden, folgt aus Satz 3 insbesondere $\mathfrak{f}_p = p^{\varrho}$, eine Tatsache, die man im allgemeinen mit Hilfe der Normresttheorie herzuleiten pflegt.

Ein beliebiger Abelscher Körper wird durch endlich viele Charaktere $\chi^{(i)}$ definiert, die jeder zu zyklischen Unterkörpern gehören, also dem Satz 3 genügen. Daraus folgt:

Satz 3a: *Satz 3 ist richtig für beliebige Abelsche Körper, wenn man an Stelle von χ endlich viele $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \ldots$ betrachtet. Ebenso gilt $\mathfrak{f}_p = p^{\varrho}$ allgemein, denn sowohl $\mathfrak{f}_p$ als auch p^{ϱ} sind als K. G. V. der zu den $\chi^{(i)}$ gehörigen Führer gewonnen.*

Eine unmittelbare Folge von Satz 3a und dem Normensatz ist der

Satz 4: *Die durch Normbildung aus einem zyklischen K gewonnene Untergruppe $\{\varepsilon^*\}$ der Einheitsgruppe $\{\varepsilon\}$ in K_0 ist charakterisiert durch $\chi'_{\mathfrak{p}}(\varepsilon^*) = 1$ für alle $\mathfrak{p}$.*

Beweis: Ist ε^* Norm aus K, so erst recht Normrest mod $\mathfrak{f}_p$, also auch p-adischer Normrest und damit ist $\chi'_{\mathfrak{p}}(\varepsilon^*) = \bar{\chi}'(\varepsilon^*) = 1$.

Ist $\chi'_{\mathfrak{p}}(\varepsilon^*) = \bar{\chi}'(\varepsilon^*) = 1$ für alle $\mathfrak{p}$, so ist ε^* Normrest, also Norm nach dem Normensatz. Wegen der für Einheiten ε gültigen Produktrelation $\prod \chi'_{\mathfrak{p}_i}(\varepsilon) = 1$ kann aus der Bedingung von Satz 4 natürlich ein $\chi'_{\mathfrak{p}_i}$ weggelassen werden. Insbesondere gilt der

Satz 4a: *Ist ein zyklischer Körper K von beliebigem Grade über K_0 an keiner oder nur an einer Stelle verzweigt, so sind alle Einheiten aus K_0 Normen von Einheiten aus K.*

---

[6]) Siehe unter [5]), Satz 123.

§ 3.

Die exakte Problemstellung, speziell im zyklischen Fall.

Es seien K_1 und K_2 zwei Normalkörper über K_0, die der Relation $K_0 \subset K_1 \subset K_2$ genügen. In jedem K_ν sei eine Primstelle $\mathfrak{p}_\nu$ markiert, so daß $\mathfrak{p}_2/\mathfrak{p}_1/\mathfrak{p}_0$. Es mögen nun heißen: $\mathfrak{G}_\nu$ die Galoissche Gruppe von K_ν über K_0, $\mathfrak{Z}_\nu$ die Zerlegungsgruppe von $\mathfrak{p}_\nu$ über K_0, Z_ν die zugehörigen Zerlegungskörper. Dann ist $\mathfrak{G}_2$ auf $\mathfrak{G}_1$ abgebildet, wobei der Einheit von $\mathfrak{G}_1$ ein Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}_2$ entspricht. Wegen $Z_1 = (Z_2 \cap K_1)$[7]) wird dabei gerade $\mathfrak{N}\mathfrak{Z}_2$ auf $\mathfrak{Z}_1$ abgebildet, so daß $\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{Z}_2/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{Z}_1$ gilt.

Durch $\mathfrak{p}_\nu$-adische Erweiterungen geht K_ν über in $\overline{K}_\nu$ mit $\mathfrak{Z}_\nu$ als Galoisscher Gruppe über $\overline{K}_0$. $\overline{K}_1$ mit der Gruppe $\mathfrak{Z}_1$ erscheint so über $\overline{K}_0$ in $\overline{K}_2$ mit der Gruppe $\mathfrak{Z}_2$ eingebettet, wobei $\overline{K}_1$ im Sinne der Galoisschen Theorie zu der Untergruppe $(\mathfrak{Z}_2 \cap \mathfrak{N})$ gehört.

Ist jedoch nur $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, und K_1 gegeben, K_2 aber erst zu finden, so wissen wir von $\mathfrak{Z}_2$ nur, daß $\mathfrak{Z}_2 \cdot \mathfrak{N}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{Z}_1$ zu gelten hat. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist das Problem, $\overline{K}_1$ über $\overline{K}_0$ in ein $\overline{K}_2$ mit $\mathfrak{Z}_2$ als Galoisscher Gruppe einzubetten, wobei $\overline{K}_1$ zu der Untergruppe $(\mathfrak{Z}_2 \cap \mathfrak{N})$ gehören soll, sinnvoll, da dann auf Grund des Isomorphiesatzes der Gruppentheorie tatsächlich die Galoissche Gruppe von $\overline{K}_1$ über $\overline{K}_0$ $\mathfrak{Z}_2/\mathfrak{Z}_2 \cap \mathfrak{N} \cong \mathfrak{Z}_2\mathfrak{N}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{Z}_1$ wird. Für die unendlichen Primstellen wissen wir außerdem noch, daß $\mathfrak{Z}_2$ von der Ordnung 2 oder 1 bei reellen, von der Ordnung 1 bei komplexen Primstellen sein muß, und kommen somit zu

Definition 1: Ist K_1 über K_0 mit der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}_1$ in ein K_2 mit der Gruppe $\mathfrak{G}_2$ so einzubetten, daß K_1 zu der Untergruppe $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}_2$ gehört; ist weiter $\mathfrak{p}_1$ eine Primstelle von K_1 mit der Zerlegungsgruppe $\mathfrak{Z}_1$ und ist $\mathfrak{Z}_2$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}_2$, die der Relation genügt $\mathfrak{Z}_2\mathfrak{N}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{Z}_1$, so heißt das folgende lokale Einbettungsproblem dem Problem im Großen zugeordnet: $\overline{K}_1$ ist über $\overline{K}_0$ in ein $\overline{K}_2$ mit $\mathfrak{Z}_2$ als Galoisscher Gruppe so einzubetten, daß $\overline{K}_1$ zu $(\mathfrak{Z}_2 \cap \mathfrak{N})$ gehört. Für unendliche reelle Primstellen soll außerdem $\mathfrak{Z}_2$ von der Ordnung 2 oder 1, für komplexe von der Ordnung 1 sein.

Aus den obigen Erörterungen folgt nunmehr unmittelbar

Satz 5: *Notwendig für die Lösbarkeit eines Einbettungsproblems ist, daß an jeder Stelle wenigstens ein entsprechendes lokales Einbettungsproblem lösbar ist.*

Das Einbettungsproblem heiße dann im Kleinen lösbar.

---

[7]) $(Z_2 \cap K_1)$ ist der Durchschnitt von Z_2 und K_1.

Betrachten wir nun diese Verhältnisse für den Fall, daß $\mathfrak{G}_\nu$ zyklisch von der Ordnung l^{n_ν} ist mit $n_2 - n_1 = m > 0$. Ist K_1 gegeben, so bestehen die folgenden Möglichkeiten:

a) $\mathfrak{p}_1$ ist endlich und $\mathfrak{Z}_1$ ist von der Ordnung $l^{\bar{n}_1}$ mit $\bar{n}_1 > 0$. Z_1 ist dann notwendig auch Zerlegungskörper in K_2, so daß es genau ein lokales Einbettungsproblem gibt; nämlich: $\overline{K}_1$ vom Grad $l^{\bar{n}_1}$ ist in ein $\overline{K}_2$ vom Grade $l^{\bar{n}_1+m}$ einzubetten. (Fig. 1.)

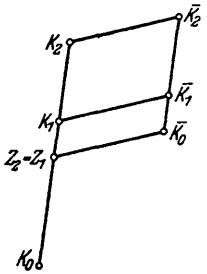


Fig. 1.

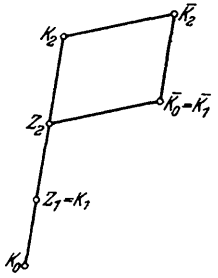


Fig. 2.

b) $\mathfrak{p}_1$ ist endlich und $Z_1 = K_1$. Z_2 kann dann ein beliebiger Körper zwischen K_1 und K_2 sein, so daß das lokale Einbettungsproblem wegen $\overline{K}_0 = \overline{K}_1$ lautet: Über $\overline{K}_0$ ist ein zyklischer Körper vom Grade $l^{\bar{m}}$ zu finden, wo $\bar{m} \leqq m$ ist. Da es aber über $\overline{K}_0$ sogar unverzweigte zyklische Körper beliebig vorgegebenen Grades gibt, sind hier alle lokalen Einbettungsprobleme lösbar. (Fig. 2.)

c) $\mathfrak{p}_1$ ist unendlich. Für $l \neq 2$ ist $\overline{K}_0 = \overline{K}_1$; das Gleiche gilt in allen Fällen für komplexes $\mathfrak{p}_1$. Da auch $\mathfrak{Z}_2$ von der Ordnung 1 sein muß, lautet also das Problem: $\overline{K}_2 = \overline{K}_0$. Für $l = 2$ und reelles $\mathfrak{p}_1$ ist jedenfalls $\mathfrak{Z}_2 \subset \mathfrak{N}$. Da nun $\mathfrak{Z}_1 \cong \mathfrak{Z}_2 \mathfrak{N}/\mathfrak{N} = \mathfrak{N}/\mathfrak{N} \cong 1$ sein muß, ist $\mathfrak{Z}_1 = 1$ zu fordern, damit es lokale Einbettungsprobleme gibt. Ist $\mathfrak{Z}_1 = 1$, so sind die lokalen Probleme $[\overline{K}_2 : \overline{K}_0] = 1$ oder 2, also beide stets lösbar. Da für $[\overline{K}_1 : \overline{K}_0] = 2$ der Körper $\overline{K}_1$ sicher nicht in ein $\overline{K}_2$ vom Grade 2^{m+1} einbettbar ist, können wir zusammenfassen zu

Satz 5a: *Ist $\mathfrak{G}_2$ zyklisch von Primzahlpotenzordnung, so ist das Einbettungsproblem im Kleinen genau dann lösbar, wenn für alle $\mathfrak{p}$ mit $\overline{K}_0 \neq \overline{K}_1$ sich $\overline{K}_1$ in ein $\overline{K}_2$ von der Ordnung $l^{\bar{n}+m}$ einbetten läßt, wo $l^{\bar{n}}$ die Ordnung von $\mathfrak{Z}_1$ bedeutet. Ist diese Bedingung erfüllt, so sind an jeder Stelle alle zugeordneten Einbettungsprobleme lösbar.*

Es sei nun K_1 durch einen Charakter χ von der Ordnung l^{n_1} in K_0 definiert, der aus $\Pi \chi'_{\mathfrak{p}}$ und $\chi(\mathfrak{b}_i)$ bestehen möge, dann lautet das Einbettungsproblem:

Unter welchen Bedingungen ist ein Idealcharakter ψ auffindbar, so daß $\psi^m = \chi$ wird?

Schreiben wir auch ψ in der Form $\Pi\,\psi'_\mathfrak{p}$ und $\psi(\mathfrak{b}_i)$, so wird im Einzelnen gefordert:

$$(4)\qquad \begin{array}{l}(\alpha)\ \ \psi'^{l^m}_\mathfrak{p} = \chi'_\mathfrak{p};\quad (\beta)\ \ \psi^{l^m}(\mathfrak{b}_i) = \chi(\mathfrak{b}_i);\\ (\gamma)\ \ \Pi\,\psi'_\mathfrak{p}\ \ \text{und}\ \ \psi(\mathfrak{b}_i)\end{array}$$

bilden einen Strahlklassencharakter gemäß Hilfssatz 1.

Im Kleinen sei analog $\overline{K}_1$ gegeben durch $\bar{\chi}'_\mathfrak{p}$ und $\bar{\chi}_\mathfrak{p}(\pi)$, so daß das Problem lautet: Wann existiert ein $\overline{\psi}'_\mathfrak{p}$ und $\overline{\psi}(\pi)$, so daß $\overline{\psi}'^{l_m}_\mathfrak{p} = \bar{\chi}'_\mathfrak{p}$ und $\overline{\psi}_\mathfrak{p}(\pi)^{l^m} = \bar{\chi}_\mathfrak{p}(\pi)$ wird? Die zweite Bedingung läßt sich stets erfüllen, so daß wegen der Unabhängigkeit von $\overline{\psi}'_\mathfrak{p}$ und $\overline{\psi}_\mathfrak{p}(\pi)$ nur bleibt:

$$\overline{(4)}\qquad \overline{\psi}'^{l^m}_\mathfrak{p} = \bar{\chi}'_\mathfrak{p}.$$

Nunmehr können wir Satz 5a umformen in

Satz 5b: *Das zyklische Problem ist im Kleinen genau dann lösbar wenn es für alle* $\mathfrak{p}$ *ein* $\psi'_\mathfrak{p}$ *mit* $\psi'^{l^m}_\mathfrak{p} = \chi_\mathfrak{p}$ *gibt.*

Beweis: Die Einbettung im Kleinen sei lösbar. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $\chi'_\mathfrak{p} \neq 1$, so ist $\mathfrak{p}$ in K_1 verzweigt und damit $\overline{K}_0 \neq \overline{K}_1$; also gibt es nach Satz 5a ein $\overline{\psi}'_\mathfrak{p}$ mit $\overline{\psi}'^{l^m}_\mathfrak{p} = \bar{\chi}'_\mathfrak{p}$. Nach dem Übertragungssatz ist aber $\bar{\chi}'_\mathfrak{p} = \chi'_\mathfrak{p}$, so daß $\overline{\psi}'^{l^m}_\mathfrak{p} = \chi'_\mathfrak{p}$ wird.

Gibt es umgekehrt zu $\mathfrak{p}$ ein $\psi_\mathfrak{p}$ mit $\psi'^{l^m}_\mathfrak{p} = \chi'_\mathfrak{p}$, so definiert $\psi'_\mathfrak{p}$ mit $\overline{\psi}(\pi) = \sqrt[l^m]{\bar{\chi}_\mathfrak{p}(\pi)}$ wegen $\bar{\chi}'_\mathfrak{p} = \chi'_\mathfrak{p}$ ein zyklisches $\overline{K}_2$ vom Relativgrade l^m über $\overline{K}_1$, wenn man die obige Wurzel primitiv wählt.

Da zwei verschiedene $\psi'_\mathfrak{p}$, die (4α) erfüllen, sich nur durch einen Charakter $\varphi'_\mathfrak{p}$ unterscheiden, für den $\varphi'^{l^m}_\mathfrak{p} = 1$ gilt, lautet das Einbettungsproblem nunmehr:

1. Wann ist eine Einbettung im Kleinen möglich?

2. Wann gibt es zu vorgegebenem ψ' mit $\psi'^{l^m} = \chi'$ ein φ' mit $\varphi'^{l^m} = 1$ und Charaktere $\psi(\mathfrak{b}_i)$, die (4β) erfüllen, so daß $\psi' \cdot \varphi'$ mit $\psi(\mathfrak{b}_i)$ ein Strahlklassencharakter wird?

§ 4.

Einbettungen im Kleinen.

Wir behandeln zunächst die erste Frage des § 3 und lassen dabei der Bequemlichkeit halber außer bei den $\overline{K}_\nu$ die das Lokale kennzeichnenden Querstriche über den Symbolen weg. Es sei also $\overline{K}_1$ über $\overline{K}_0$ vom Grad l^n in ein zyklisches $\overline{K}_2$ vom Grade l^{n+m} einzubetten, d. h. die Bedingung $\overline{(4)}$ zu erfüllen.

1. Fall: $\mathfrak{p}$ ist unendlich. Aus $\overline{(4)}$ folgt: Für reelles $\mathfrak{p}$ und $l = 2$ ist lösbar $\overline{K}_0 = \overline{K}_1$, $[\overline{K}_2 : \overline{K}_1] = 1$ oder 2, im übrigen nur $\overline{K}_0 = \overline{K}_1 = \overline{K}_2$.

2. Fall: $\mathfrak{p}$ ist endlich und unverzweigt; also $\chi' = 1$. Bedeutet künftig allgemein ζ_x eine primitive x-te Einheitswurzel, so ist nach Satz 2 $\chi(\pi) = \zeta_{l^m}$, so daß $\psi' = 1$ mit $\psi(\pi) = \zeta_{l^{n+m}}$ eine Lösung des Problems darstellt.

3. Fall: $\mathfrak{p}$ ist endlich, verzweigt und $\mathfrak{p} \nmid l$. Nach Satz 2 ist mit den eingeführten Bezeichnungen wegen $\mathfrak{f}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^1$: $\chi'(v) = \zeta_e$. Da der Führer des zu definierenden Körpers K_2 ebenfalls $\mathfrak{p}^1$ sein muß, bedeutet $(\bar{4})$, daß $\psi'(v) = \zeta_{e \cdot l^m}$ erklärbar ist; d. h. daß

$$N(\mathfrak{p}) \equiv 1 \pmod{e \cdot l^m}$$

ausfällt. Dies kann man auch so ausdrücken, daß in $\bar{K}_0$ die $e \cdot l^m$-ten Einheitswurzeln enthalten sein sollen.

4. Fall: $\mathfrak{p}$ ist verzweigt und $\mathfrak{p}/l$. Es sei $\mathfrak{f}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^\sigma$. Gemäß $(\bar{4})$ muß ein ψ' mod $\mathfrak{p}^\tau$ bei genügend hohem τ erklärbar sein, so daß $\psi'^{l^m} = \chi'$ wird.

Über das Repräsentantensystem mod $\mathfrak{p}^\tau$ gilt nun der folgende

Hilfssatz 2: *Sind in $\bar{K}_0$ die l^ν-ten, aber nicht die $l^{\nu+1}$-ten Einheitswurzeln enthalten, und ist z eine beliebig vorgegebene Zahl, so gibt es eine nur von z abhängige Zahl τ_0, so daß für $\tau \geqq \tau_0$ die Ordnungen c_i der Basiselemente u_i*[8]*) mod $\mathfrak{p}^\tau$ alle der Bedingung $c_i \equiv 0$ (l^z) genügen, außer einem — auch wirklich auftretenden — Basiselement u_0, welches als $u_0 = \zeta_{l^\nu}$ gewählt werden kann.*

Nehmen wir diesen Hilfssatz zunächst als bewiesen an, so wählen wir $z = n + m$ und erhalten im Falle $\nu = 0$ oder $\nu \geqq n + m$ somit ein Repräsentantensystem mod $\mathfrak{p}^\tau$ mit lauter $c_i \equiv 0 \pmod{l^{n+m}}$, für welches χ' erklärbar ist, falls wir $\tau \geqq \sigma$ annehmen. Da dann die $\chi'(u_i)$ höchstens l^n-te Einheitswurzeln sind, ist die Erfüllbarkeit von $(\bar{4})$ und damit die Einbettbarkeit gesichert. Im Falle $0 < \nu < n + m$ haben wir jedoch für das Ausnahmebasiselement ζ_{l^ν} zu fordern, daß gilt: $\chi'(\zeta_{l^\nu}) = 1$ für $\nu \leqq m$ oder $\chi'(\zeta_{l^\nu})^{l^{\nu-m}} = 1$ für $\nu > m$; zusammengefaßt: $\chi'(\zeta_{l^{\min(\nu,m)}}) = 1$ für $0 < \nu < n + m$.

Wir können somit vorbehaltlich der Gültigkeit des Hilfssatzes 2 formulieren:

Satz 6: *Sind in $\bar{K}_0$ mit endlicher Primstelle $\mathfrak{p}$ die l^ν-ten, aber nicht die $l^{\nu+1}$-ten Einheitswurzeln enthalten, so ist ein zyklischer Körper $\bar{K}_1$ über $\bar{K}_0$ mit $(\bar{K}_1 : \bar{K}_0) = l^n$ genau dann in einen solchen vom Grade l^{n+m} einbettbar, wenn:*

(α) $\mathfrak{p}$ *in $\bar{K}_1$ unverzweigt ist*

oder (β) *für $\mathfrak{p} \nmid l$ gilt: $\nu \geqq m + s$, wo l^s die Verzweigungsordnung von $\mathfrak{p}$ in $\bar{K}_1$ bedeutet;*

für $\mathfrak{p}/l$ gilt: $\nu = 0$ oder $\nu \geqq n + m$; oder $0 < \nu < n + m$ und $\zeta_{l^{\min(\nu,m)}}$ ist Norm aus $\bar{K}_1$.

[8]) Siehe § 1.

Wir kommen nunmehr zum

Beweis von Hilfssatz 2: Es genügt, den Satz für $z \geqq \nu + 1$ zu zeigen, da dann für $z \leqq \nu$ die für $z \geqq \nu + 1$ gültige Schranke τ_0 ebenfalls alle Bedingungen erfüllt. Bedeutet e^* die absolute Verzweigungsordnung von $\mathfrak{p}$, so folgt bekanntlich[5]) für $\tau > \frac{e^*}{l-1} + e^* \cdot z$ aus

$$\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^\tau} \text{ die Existenz eines } \beta \text{ mit } \alpha = \beta^{l^z}.$$

Ist nun u_0 ein Basiselement mod $\mathfrak{p}^\tau$ von der Ordnung l^k mit $k < z$, so wird:

$u_0^{l^k} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^\tau}$; also $u_0^{l^k} = \beta^{l^z}$, woraus folgt, daß $u_0 \cdot \beta^{-l^{z-k}}$ eine in K_0 liegende l^k-te Einheitswurzel ist. Dieselbe ist primitiv; denn sonst wäre $u_0^{l^{k-1}} \equiv \beta^{l^{z-1}} \pmod{\mathfrak{p}^\tau}$, was wegen $k < z$ mit der Eindeutigkeit der Basisdarstellung unvereinbar wäre. Aus der Primitivität folgt aber $k \leqq \nu$. Es ist somit:

$$u_0 \equiv \zeta_{l^k} \cdot \beta^{l^{z-k}} \ (\mathfrak{p}^\tau); \tag{5}$$

da aber $z - k \geqq \nu + 1 - k \geqq 1$ ist, ist der Exponent x von u_0 in der Basisdarstellung von ζ_{l^k}: $x \equiv 1\,(l)$ und u_0 kann daher gegen ζ_{l^k} ausgetauscht werden. Da die Ordnung von ζ_{l^k} höchstens gleich l^k, also der Ordnung von u_0, sein kann, ist diese neue Basis wieder unabhängig. Dann muß aber $k = \nu$ sein, da sonst ζ_{l^ν} durch diese Basis nicht ausdrückbar wäre. Gleichzeitig ist klar, daß höchstens ein solches u_0 auftreten kann; ein jedes müßte nämlich gegen ζ_{l^ν} austauschbar sein, während aus (5) folgt, daß alle Basiselemente außer einem u_0 in der Darstellung von ζ_{l^ν} durch l teilbare Exponenten haben. Damit ist der erste Teil der Aussage bewiesen.

Für $\nu \geqq 1$ haben wir nur noch zu zeigen, daß u_0 wirklich auftritt. Wäre nämlich $c_i \equiv 0\ (l^z) \equiv 0\ (l^{\nu+1})$ für alle i, so wäre $\zeta_{l^\nu} \equiv \gamma^l \pmod{\mathfrak{p}^\tau}$ und damit $\zeta_{l^\nu} \cdot \gamma^{-l} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^\tau}$, woraus folgte, $\zeta_{l^\nu} \cdot \gamma^{-l} = \delta^l$, also $\zeta_{l^\nu} = (\gamma\,\delta)^l$, was der Definition von ν widerspricht.

Im praktischen Falle läßt sich ν nach oben abschätzen durch $l^{\nu-1}(l-1)/e^*$, so daß es dann durch Aufstellung einer Basis mod $\mathfrak{p}^\tau$ mit $\tau > \frac{e^*}{l-1} + e^*(\nu+1)$ genau bestimmt werden kann.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß ζ_{l^ν} in $\overline{K}_0$ auch dann liegen kann, wenn es in K_0 nicht vorkommt. Beispiel: Ist R der rationale Zahlkörper, so ist 2 in $R(\sqrt{-7})$ voll zerlegt, also $\sqrt{-7}$ in $\overline{R}$ enthalten. Ist nun $\mathfrak{l}$ Teiler von 2 in $K_0 = R(\sqrt{+7})$, so enthält $\overline{K}_0$ obiges $\overline{R}$ und damit $\sqrt{-7}$. In $\overline{K}_0$ ist also auch $\sqrt{-1}$ enthalten.

§ 5.

Weitere Umformung der Bedingungen. Der Fall des rationalen Grundkörpers.

Wir wollen jetzt die Bedingungen des Satzes 6 im Großen formulieren. Wir sahen zunächst im § 3, daß die unendlichen Primstellen in K_1 voll zerlegt sein müssen. Für endliche p erhalten wir nach Satz 5a nur dann Bedingungen, wenn $\overline{K}_0 \neq \overline{K}_1$ ist und nach Satz 6 sogar nur dann, wenn p in K_1 verzweigt erscheint, also in der Diskriminante aufgeht.

Es sei nun $\mathfrak{l}_i/l$ ein Diskriminantenteiler, der im Führer von K_1 in der Potenz $\mathfrak{l}_i^{\sigma_i}$ aufgeht. Gemäß Hilfssatz 2 stellen wir eine Basis mod $\mathfrak{l}_i^{\tau_i}$ auf, so daß alle Basiselemente bis auf die eventuellen $u_0^{(i)}$ durch l^{n+m} teilbare Ordnungen haben. Wir bestimmen nun Zahlen α_i in folgender Weise:

a) wenn $u_0^{(i)}$ mod $\mathfrak{l}_i^{\tau_i}$ nicht auftaucht, d. h. $v_i = 0$ oder $v_i \geqq n+m$ ist, sei $\alpha_i = 1$.

b) wenn $0 < v_i < n+m$ ist, so sei $\alpha_i \equiv {u_0^{(i)}}^{l^{\max(0,\, v_i - m)}} \pmod{\mathfrak{l}_i^{\sigma_i}}$; weiter gelte $\alpha_i \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{l}_i^{-\sigma_i}}$, und sei (α_i) ein Primideal vom Absolutgrade 1.

Es ist also in einer Restklasse mod $\mathfrak{f}$ eine Zahl zu suchen, deren Absolutnorm eine Primzahl ist. Diese Bedingungen sind nach dem allgemeinen Dichtigkeitssatz erfüllbar. (α_i) heiße das $\mathfrak{l}_i$ — durch das Einbettungsproblem — zugeordnete Primideal.

Da in $\overline{K}_0$ $\alpha_i \equiv \zeta_l^{\min(v_i,\, m)} \pmod{\mathfrak{l}_i^{\sigma_i}}$ wird, ist gemäß Satz 6 und dem Übertragungssatz zu verlangen, daß $\chi'_{\mathfrak{l}_i}(\alpha_i) = \overline{\chi}'_{\mathfrak{l}_i}(\alpha_i) = 1$ ist; da alle $\chi'_{\mathfrak{p}}(\alpha) = 1$ für $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{l}_i$ sind, folgt: (α_i) ist in K_1 voll zerlegt. Die Bedingung des Satzes 6 für die $\mathfrak{q}_k$ kann wörtlich übernommen werden, so daß wir haben

Satz 5c: *Ist K_1 vom Grade l^n in ein K_2 vom Grade l^{n+m} zyklisch einzubetten, so ist diese Einbettung im Kleinen genau dann lösbar, wenn*

a) *die unendlichen Primstellen und die den $\mathfrak{l}_i$ zugeordneten (α_i) in K_1 voll zerlegt sind;*

b) *für die $\mathfrak{q}_k$ gilt: $N(\mathfrak{q}_k) \equiv 1 \pmod{e_k . l^m}$, wo $e_k > 1$ die Verzweigungsordnung von $\mathfrak{q}_k$ in K_1 bedeutet.*

Gemäß Satz 1 ergibt sich (b) aus der Diskriminante, während sich (a) bekanntlich an der irreduziblen Gleichung für K_1 in K_0 ablesen läßt. Damit sind die Bedingungen völlig auf die Struktur von K_0, die Diskriminante und die irreduzible Gleichung für K_1 in K_0 zurückgeführt.

Wir beweisen noch den folgenden

Satz 5d: *Liegt ζ_{l^m} in K_0, so kann bei den in Satz 5c genannten Bedingungen eine endliche oder unendliche Primstelle unberücksichtigt bleiben.*

Beweis: Gemäß Satz 6 lautet die Bedingung an der Stelle l_i wegen $\nu \geqq m : \chi'_{l_i}(\zeta_{l^m}) = 1$; ebenso wegen $\chi'_{q_k}(v_k^{e_k}) = 1$ an der Stelle $q_k : \chi'_{q_k}(\zeta_{l^m}) = 1$. Reelle unendliche Primstellen können nur für $l = 2$ und $m = 1$ in K_0 vorkommen; also nimmt wegen $\zeta_{l^m} = -1$ die genannte Bedingung auch hier die Gestalt $\chi'_\infty(\zeta_{l^m}) = 1$ an. Aus der Produktrelation

$$\Pi \chi'_{l_i}(\zeta_{l^m}) \cdot \chi'_{\mathfrak{p}_k}(\zeta_{l^m}) \cdot \chi'_{\mathfrak{p}_\infty}(\zeta_{l^m}) = 1$$

folgt die Behauptung.

Ist K_0 speziell der rationale Zahlkörper R, so wird die Bedingung der lokalen Einbettbarkeit besonders einfach. Für $l \neq 2$ ist nämlich $\nu = 0$, so daß wir nur die q_k zu betrachten haben. Für $l = 2$ ist dagegen $\nu = 1$, $u_0 \equiv -1 \bmod 2^\tau$, so daß wir aus $\chi'(-1) = 1$ erhalten:

$$\chi'(u_0) = \prod_k \chi'_{q_k}(v^{\frac{q_k - 1}{2}}),$$

was $= 1$ wird, wenn $q_k \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, e_k \cdot 2^m)$ erfüllt ist. Es gibt somit nach den Sätzen 6 und 5b ein ψ' mit $\psi'^{l^m} = \chi'$. Im Fall $l \neq 2$ ist wegen $\psi'^2(-1) = +1$ auch $\psi'(-1) = +1$. Ist für $l = 2$ $\psi'(-1) = -1$, so führe man noch die unendliche Primstelle im Führer ein, so daß also in beiden Fällen die Bedingung (b) von Hilfssatz 1 erfüllt ist, während (a) trivialerweise gilt. Damit ist aber die geforderte Einbettung vollzogen, und wir haben somit den

Satz 7: *Ist K_1 ein zyklischer Körper vom Grad l^n über R, so läßt er sich genau dann in einen zyklischen Körper vom Grade l^{n+m} einbetten, wenn er reell ist und für die in K_1 verzweigten Primstellen $q_k \neq l$ gilt:*

$$q_k \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, e_k \cdot l^m),$$

wo e_k die im Diskriminantenbeitrage $q_k^{l^n\left(1-\frac{1}{e_k}\right)}$ von q_k vorkommende Zahl bedeutet.

§ 6.

Die hinreichenden Bedingungen (für Einbettbarkeit) im Großen.

Wir schicken zunächst einige Definitionen und Hilfssätze voraus.

Definition 2: Ist χ Charakter einer von endlich vielen Zahlen $\eta_1, \eta_2, \ldots$ erzeugten Abelschen Gruppe, $k \geqq 0$ eine ganze Zahl, so heißt χ als l^k-te Potenz realisierbar, wenn es einen Modul $\mathfrak{m}$ gibt, nach dem ein Zahlcharakter ψ erklärt ist, so daß $\psi^{l^k}(\eta_i) = \chi(\eta_i)$ gilt und ψ^{l^k} als Zahlcharakter die gleiche Ordnung wie χ hat.

Hilfssatz 3: *Seien $\eta_1, \eta_2, \ldots$ endlich viele in K_0 liegende Zahlen derart, daß $\eta_1^{\varrho_1}\eta_2^{\varrho_2}\ldots$ nur dann l-te Potenz einer Zahl aus K_0 ist, wenn alle $\varrho_i \equiv 0\,(l)$ sind. Sei weiterhin χ ein Charakter der durch $\eta_1, \eta_2, \ldots$ erzeugten Abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$, der nur aus l-ten Einheitswurzeln besteht.*

Jedes in K_0 liegende ζ_{l^μ} möge auch in $\mathfrak{G}$ enthalten sein. Ist nun $K_0(\zeta_{l^{k+1}})$ zyklisch über K_0, so ist χ genau dann als l^k-te Potenz realisierbar, wenn für alle ζ_{l^μ} mit $\mu \leqq k$ gilt: $\chi(\zeta_{l^\mu}) = 1$.

Beweis: Die Reduktion von den endlich vielen Zahlen η_i auf nur eine geschieht mit Hilfe eines Gedankenganges von Herrn van der Waerden. Der Charakter χ ist ebenfalls Charakter der von den η_i und den Relationen $\eta_i^l = 1$ erzeugten Abelschen Gruppe $\mathfrak{G}^*$. Heißt ein Charakter von $\mathfrak{G}^*$ dann als l^k-te Potenz realisierbar, wenn er dies als Charakter von $\mathfrak{G}$ ist, so bilden die als l^k-te Potenz realisierbaren Charaktere von $\mathfrak{G}^*$ eine Untergruppe der vollen Charakterengruppe, die durch die Untergruppe $\mathfrak{G}' \subset \mathfrak{G}^*$ charakterisiert werden kann, deren Elemente α bei sämtlichen als l^k-te Potenz realisierbaren Charakteren den Charakter Eins haben. Es kommt somit darauf an, diese α zu bestimmen.

Ist α ein Element von $\mathfrak{G}^*$, dann suchen wir ein Primideal $\mathfrak{r}$, das den Bedingungen genügt:

$$N(\mathfrak{r}) \equiv 1 \,(l^{k+1}), \tag{6'}$$

$$\alpha \text{ kein } l\text{-ter Potenzrest mod } \mathfrak{r}. \tag{6''}$$

Gibt es ein solches $\mathfrak{r}$, so sei v das erzeugende Element der Restklassengruppe mod $\mathfrak{r}$. Wir setzen $\psi(v) = \zeta_{l^{k+1}}$; dann ist ψ^{l^k} ein als l^k-te Potenz realisierbarer Charakter von $\mathfrak{G}^*$ mit $\psi^{l^k}(\alpha) \neq 1$. Um $\mathfrak{G}'$ zu finden, haben wir also α so zu suchen, daß (6) nicht erfüllbar ist.

1. Fall: ζ_l ist in K_0 enthalten. α sei nicht die Gruppeneins, also keine l-te Potenz. $x^l - \alpha = 0$ ist also irreduzibel und definiert einen zyklischen Körper über K_0, dessen Strahlklassengruppe $\mathfrak{R}$ genannt werde. (6'') bedeutet, daß $\mathfrak{r}$ nicht in $\mathfrak{R}$ liegt, während (6') aussagt, daß $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{S}$ enthalten ist, wo $\mathfrak{S}$ die Strahlklassengruppe von $K_0(\zeta_{l^{k+1}})$ bedeutet. Beides ist nur dann nicht gleichzeitig erfüllbar, wenn $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}$; d. h. wenn

$$\sqrt[l]{\alpha} \subset K_0(\zeta_{l^{k+1}}). \tag{7}$$

Ist nun h definiert durch $K_0(\zeta_{l^h}) = K_0 \neq K_0(\zeta_{l^{h+1}})$, so ist für $h \geqq k+1$ (7) unmöglich, für $h \leqq k$ definiert $x^l = \zeta_{l^h}$ den einzigen zyklischen Unterkörper vom Grade l von $K_0(\zeta_{l^{k+1}})$, so daß gilt:

$$\sqrt[l]{\alpha} = a_0 + a_1 \zeta_{l^{h+1}} + \ldots + a_{l-1} \zeta_{l^{h+1}}^{l-1},$$

wo $a_i \subset K_0$.

Bei dem primitiven Automorphismus S von $K_0(\zeta_{l^{h+1}})$:

$\zeta_{l^{h+1}}^S = \zeta_{l^{h+1}} \cdot \zeta_l$, geht somit $\sqrt[l]{\alpha}$ über in

$$\Sigma a_\nu \zeta_l^\nu \cdot \zeta_{l^{h+1}}^\nu = \sqrt[l]{\alpha}^S = \sqrt[l]{\alpha} \cdot \zeta_l^\varrho = \Sigma a_\nu \zeta_{l^{h+1}}^\nu \cdot \zeta_l^\varrho.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert $\sqrt[l]{\alpha} = a_\varrho \cdot \zeta_l^{\varrho}{}_{h+1}$ und somit: $\alpha = a_\varrho^{\,l} \zeta_{lh}^{\varrho}$. In $\mathfrak{G}^*$ wird also $\alpha = \zeta_{lh}^{\varrho}$. Andererseits liegen aber die in der Behauptung genannten $\zeta_{l\mu}$ sicher in $\mathfrak{G}'$, da für jedes ψ gilt: $\psi^{lk}(\zeta_{l\mu}) = \psi(\zeta_{l\mu}^{lk}) = \psi(1) = 1$.

2. Fall: $[K_0(\zeta_l) : K_0] = t$ mit $t > 1$ und $t \not\equiv 0\,(l)$ Zunächst ist sicher $x^l - \alpha = 0$ in K_0 irreduzibel; der von x freie Koeffizient des irreduziblen Faktors hätte nämlich sonst die Gestalt

$$\sqrt[l]{\alpha}^{s} \cdot \zeta_l^{\varrho} = b,\ b \text{ in } K_0;$$

woraus folgt: $\alpha^s = b^l$ und nach Voraussetzung also $s \equiv 0\,(l)$, was die Irreduzibilität von $x^l = \alpha$ demonstriert, oder α ist l-te Potenz und damit die Gruppeneins. $\sqrt[l]{\alpha}$ erzeugt demnach einen Körper vom Grad l und kann nicht in $K_0(\zeta_l)$ liegen. Es ist somit $x^l = \alpha$ auch in $K_0(\zeta_l)$ irreduzibel. Wir wenden nunmehr die Betrachtungen von Fall 1 mit $K_0' = K_0(\zeta_l)$ als Grundkörper an. Der Ausnahmefall

$$\alpha = \zeta_{lh'} \cdot b'^{\,l}, \quad \zeta_{lh'} \text{ und } b' \text{ aus } K_0',$$

ist hier unmöglich, weil sonst durch Relativnormbildung von K_0' in K_0 wegen $\alpha \subset K_0$ folgen würde:

$$\alpha^t = n(\zeta_{lh'}) \cdot (n(b'))^l; \quad n \text{ die Relativnorm.}$$

$n(\zeta_{lh'})$ ist aber eine $l^{h'}$-te in K_0 liegende Einheitswurzel, und somit $= 1$. Wegen $t \not\equiv 0\,(l)$ wäre also α die Gruppeneins. Es gibt somit ein $\mathfrak{r}'$ in K_0', das den Bedingungen genügt:

$$(6^*) \qquad \begin{array}{l} N(\mathfrak{r}') \equiv 1\ (l^{k+1}), \\ \alpha \text{ kein } l\text{-ter Potenzrest mod } \mathfrak{r}'. \end{array}$$

Da die Ideale $\mathfrak{r}'$ vom Absolutgrade > 1 die Dirichlet-Dichte 0 haben, kann dabei $\mathfrak{r}'$ vom Absolutgrade 1 gewählt werden. Ist nun $\mathfrak{r}$ das $\mathfrak{r}'$ in K_0 zugeordnete Ideal, so folgt aus (6*) sofort (6), da die Lösbarkeit von $x^l \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{r}}$ sofort die von $x^l \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{r}'}$ nach sich ziehen würde. Es ist also (6) stets erfüllbar, womit die Behauptung gezeigt ist.

Es sei nun $K_0(\zeta_{l^{k+1}})$ nicht zyklisch über K_0, also insbesondere $l = 2$, $k \geqq 2$, $K_0(i) \neq K_0$, so stellen wir wieder die Frage nach den als 2^k-te Potenz realisierbaren Charakteren der obigen Gruppe $\mathfrak{G}^*$. Gemäß Fall 1 des Beweises zu Hilfssatz 3 muß für die α aus $\mathfrak{G}'$ auch hier

$$(7) \qquad \sqrt{\alpha} \subset K_0(\zeta_{2^{k+1}})$$

erfüllt sein. Sind nun $K_0(\sqrt{-1})$, $K_0(\sqrt{d})$, $K_0(\sqrt{-d})$ die quadratischen Unterkörper von $K_0(\zeta_{2^{k+1}})$, so hat α also die Form

$$\alpha = -b^2 \quad \text{oder} \quad \alpha = d \cdot b^2 \quad \text{oder} \quad \alpha = -d \cdot b^2, \quad b \text{ in } K_0.$$

Da -1 in $\mathfrak{G}'$ liegt, gehört im erstgenannten Fall α sicher zu $\mathfrak{G}'$, während von den beiden anderen nur einer behandelt zu werden braucht.

Es sei also ein $\alpha = d \cdot b^2$ in $\mathfrak{G}^*$ enthalten. Sehen wir, wann für alle Charaktere ψ der Ordnung 2^{k+1} mod $\mathfrak{p}^\varrho$ für jedes $\mathfrak{p}^\varrho$ $\psi^{2^k}(\alpha) = 1$ ausfällt:

1. $\mathfrak{p}$ ist unendlich; dann ist ψ von der Ordnung $\leqq 2 < 2^{k+1}$.

2. $\mathfrak{p}$ ist endlich und $\mathfrak{p} \nmid 2$. Nach § 1 ist $\mathfrak{p}^\varrho = \mathfrak{p}^1$. Wegen der Ordnung von ψ muß sein $N(\mathfrak{p}) \equiv 1 \,(2^{k+1})$ und α darf nicht Quadratrest mod $\mathfrak{p}$ sein. Es ist also (6) zu erfüllen, was aber (7) widerspricht.

3. $\mathfrak{p} = \mathfrak{l}/2$, wozu wir annehmen, daß $\mathfrak{G}$ zu 2 fremd sei. Wir betrachten ψ als Charakter in $\overline{K}_0$. ν sei definiert wie in Hilfssatz 2. Ist ψ mod $\mathfrak{l}^n$ definierbar, so können wir n als so hoch annehmen, daß die Ordnungen aller Basiselemente u_i außer der Ordnung des wegen $\nu \geqq 1$ sicher auftretenden $u_0 = \zeta_{2^\nu}$ durch 2^{k+1} teilbar werden. Es sei nun $\alpha \equiv \zeta_{2^\nu}^{r_0} u_1^{r_1} u_2^{r_2} \ldots$ (mod $\mathfrak{l}^n$). Da bei $\nu \leqq k$ $\psi^{2^k}(\zeta_{2^\nu}) = 1$ ausfällt, ist $\psi^{2^k}(\alpha) = 1$ für alle ψ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} &\text{bei } \nu \geqq k+1 \quad r_0 \equiv r_1 \equiv r_2 \equiv \ldots \equiv 0 \pmod 2, \\ &\text{bei } \nu \leqq k \qquad\quad r_1 \equiv r_2 \equiv \ldots \equiv 0 \pmod 2 \end{aligned} \tag{8}$$

wird. Für $\nu \geqq k+1$ liegt nun $\sqrt{d}$ und damit $\sqrt{\alpha}$ in $\overline{K}_0$. Für $2 \leqq \nu \leqq k$ ist entweder $\sqrt{d} \subset \overline{K}_0$, oder $\sqrt{d}$ und $\sqrt{\zeta_{2^\nu}}$ erzeugen denselben Körper, da $\overline{K}_0(\zeta_{2^{k+1}})$ über $\overline{K}_0$ zyklisch ist, so daß also $\sqrt{d \cdot \zeta_{2^\nu}}$ und damit $\sqrt{\alpha \cdot \zeta_{2^\nu}}$ in $\overline{K}_0$ liegt. Somit ist für $\nu \geqq 2$, d. h. $\sqrt{-1}$ in $\overline{K}_0$, (8) stets erfüllt.

Für $\nu = 1$ besagt (8), daß es Zahlen x_n gibt, so daß $\alpha \equiv \pm x_n^2 \,(\mathfrak{l}^n)$ ist. Dabei gilt für alle n das gleiche Vorzeichen, da aus der Kongruenz mod $\mathfrak{l}^n$ die mod $\mathfrak{l}^{n-1}$ folgt. Also ist

$$x_n^2 - x_{n-1}^2 \equiv 0 \,(\mathfrak{l}^{n-1}),$$

woraus folgt, indem man nötigenfalls x_n durch $-x_n$ ersetzt:

$$x_n - x_{n-1} \equiv 0 \left(\mathfrak{l}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\right).$$

Die x_n bilden also eine konvergente Folge, die gegen $\sqrt{\pm\alpha}$ strebt. Liegt umgekehrt $\sqrt{d}$ oder $\sqrt{-d}$ in $\overline{K}_0$, so ist (8) erfüllt. (8) ist somit äquivalent mit

$$[\overline{K}_0(\sqrt{d}, i) : \overline{K}_0] < 4; \tag{9}$$

dabei ist $K^* = K_0(\sqrt{d}, i)$ als der einzige Unterkörper von $K_0(\zeta_{2^{k+1}})$ vom Typus (2, 2) charakterisiert. α liegt in $\mathfrak{G}'$ genau dann, wenn (9) für alle $\mathfrak{l}/2$ erfüllt ist.

Wir verwenden demgemäß im folgenden die

Definition 3: Für K_0 heiße die Bedingung $B(l^m)$ genau dann erfüllt, wenn $K_0(\zeta_{l^m})$ über K_0 zyklisch ist, oder wenn für den Unterkörper K^* vom Typus (2, 2) in $K_0(\zeta_{2m})$ an wenigstens einer Stelle $\mathfrak{l}/2$ $[\overline{K^*} : \overline{K_0}] = 4$ gilt.

Dann haben wir also bewiesen:

Hilfssatz 3a: *Die Behauptung des Hilfssatzes* 3 *gilt für zum Hauptideal* (2) *fremde* η_i *ungeändert, wenn* $B(l^{k+1})$ *erfüllt ist.*

Hilfssatz 3b: *Ist* $B(2^{k+1})$ *nicht erfüllt, und liegt in* $\mathfrak{G}^*$ *eine Zahl* α, *für die* $K_0(i) \neq K_0(\sqrt{\alpha})$ *und* $K_0(\sqrt{\alpha}) \subset K_0(\zeta_{2^{k+1}})$ *gilt, so ist* χ *genau dann als* l^k*-te Potenz realisierbar, wenn gilt:* $\chi(-1) = 1$ *und* $\chi(\alpha) = 1$.

Beweis: Alle Zahlen aus $\mathfrak{G}'$ haben die Gestalt $-b^2$, db^2 oder $-db^2$, liegen also in der durch -1 und α erzeugten Untergruppe von $\mathfrak{G}^*$. Die Notwendigkeit der behaupteten Bedingungen wurde oben gezeigt.

Hilfssatz 4: a) *Die Einheitenbasiselemente* ε_i *und die im* § 1 *eingeführten* β_i *erfüllen die in Hilfssatz* 3 *an die* η_i *gestellte Bedingung.*

b) *Ist* $B(2^{k+1})$ *für irgendein* k *nicht erfüllt, so gibt es in der durch die* ε_i *und* β_i *erzeugten Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ein* α *der in Hilfssatz* 3b *erläuterten Art.*

c) *Ist dabei* $\alpha = \varepsilon \cdot \Pi \beta_i^{\varrho_i}$, *so ist* $(\beta_i)^{\varrho_i} = \mathfrak{b}_i^{2a_i}$.

Beweis: a) Es sei $\prod \varepsilon_i^{\varrho_i} \cdot \beta_k^{\varrho_k} = \gamma^l$. Da (γ) Hauptideal und $\mathfrak{b}_k$ Basiselement der absoluten Idealklasseneinteilung und ein Primideal ist, kann $\mathfrak{b}_k$ in (γ) nur als Potenz von (β_k) aufgehen, woraus $\varrho_k \equiv 0\,(l)$ folgt. Also ist $\prod \varepsilon_i^{\varrho_i} = \delta^l$ und damit auch $\varrho_i \equiv 0\,(l)$.

b) und c): Ist $\mathfrak{l}_i/2$, so folgt nach dem Obigen aus $[\overline{K^*} \cdot \overline{K_0}] < 4$, daß $\sqrt{d}$ oder $\sqrt{d \cdot \zeta_{2^{\nu_i}}}$ in $\overline{K_0}$ liegt. Sei τ_i so hoch, daß in $\overline{K_0}$ aus $\gamma \equiv 1\,(\mathfrak{l}_i^{\tau_i})$ folgt, daß γ ein Quadrat ist; dann bestimmen wir eine Zahl β in der Weise, daß

$$\beta \equiv 1\,(\mathfrak{l}_i^{\tau_i}), \quad \text{falls} \quad \sqrt{d} \subset \overline{K_0},$$
$$\beta \equiv \zeta_{2^{\nu_i}}\,(\mathfrak{l}_i^{\tau_i}), \quad \text{falls} \quad \sqrt{d \cdot \zeta_{2^{\nu_i}}} \subset \overline{K_0},$$

und (β) ein Primideal in K_0 ist.

Dann liegt $\sqrt{\beta \cdot d}$ in $\overline{K_0}$ für alle $\mathfrak{l}_i/2$; $\sqrt{\beta \cdot d}$ liegt jedoch nicht in K_0, da $\beta \cdot d$ die Primstelle (β) in genau erster Potenz enthält. Die Relativdiskriminante von $K_0(\sqrt{\beta \cdot d})$ hat nun die Gestalt $\mathfrak{D} = (\beta)(d)\mathfrak{a}^2$. Die $\mathfrak{l}_i$ sind in $K_0(\sqrt{\beta \cdot d})$ voll zerlegt, gehen also in $\mathfrak{D}$ nicht auf. Es kommen

also in $\mathfrak{D}$ nur zu 2 fremde Primideale und diese nach Satz 1 dann genau in erster Potenz vor. Nun enthält (d) bis auf Quadrate nur Primstellen $\mathfrak{l}_i$, die Primideale von $\mathfrak{a}^2$ erscheinen in zweiter Potenz, also ist

$$\mathfrak{D} = (\beta)(d)\,\mathfrak{a}^2 = (\beta); \quad \text{d. h.} \quad (d) = \mathfrak{q}^2.$$

In der Basisdarstellung durch die $\mathfrak{b}_i$ sei nun

$$(b)\cdot\mathfrak{q} = \Pi\,\mathfrak{b}_i^{\sigma_i},$$

wo b eine Zahl aus K_0 ist.

Also:

$$(b^2)(d) = \Pi\,\mathfrak{b}_i^{2\sigma_i}.$$

Gemäß Definition der $\mathfrak{b}_i$ geht dies nur, wenn $\mathfrak{b}_i^{2\sigma_i} = (\beta_i)^{\varrho_i}$ ist; also

$$(d\,b^2) = \Pi\,(\beta_i)^{\varrho_i}; \qquad d\,b^2 = \Pi\,\varepsilon\cdot\beta_i^{\varrho_i}.$$

Hilfssatz 5: *Ist $B(2^k)$ für irgendein k nicht erfüllt, so gibt es zu jedem $x \geqq 1$ einen Zahlcharakter Φ_x der Ordnung 2^{x+1}, so daß $\Phi_x^{2^x}(\varepsilon_i) = \Phi_x^{2^x}(\beta_i) = 1$ ist, während $\Phi_x^{2^{x-1}}(\alpha) = -1$ wird, wo $\alpha = d\,b^2$ die nach Hilfssatz 4 existierende Zahl in $\mathfrak{G}$ ist.*

Beweis: $\sqrt{\alpha}$ liegt nicht in $K_0(i)$, daher ist $K' = K_0(i, \sqrt[4]{\alpha})$ zyklisch über $K_0(i)$ vom Grade 4, also $[K' : K_0] = 8$. $\sqrt[4]{\alpha}$ ist nicht in $K'' = K_0(\zeta_{2^{x+1}}, \sqrt{\varepsilon_1}, \sqrt{\varepsilon_2}, \ldots, \sqrt{\beta_1}, \sqrt{\beta_2}, \ldots)$ enthalten, da sonst $K_0(\sqrt[4]{\alpha})$ Galoissch über K_0 wäre, so daß sich $[K_0(i, \sqrt[4]{\alpha}) : K_0] = [K_0(\sqrt[4]{\alpha}) : K_0] = 4$ ergäbe. Es gibt also in $K_0(i)$ ein zum Hauptideal (2) fremdes Primideal $\mathfrak{r}'$ vom Absolutgrade 1, das in der zugeordneten Idealgruppe von K'', aber nicht in der von K' liegt. $\mathfrak{r}'$ genügt somit den Bedingungen:

$$N(\mathfrak{r}') \equiv 1 \pmod{2^{x+1}},$$
$\mathfrak{r}'$ ist voll zerlegt in $K_0(i, \sqrt{\varepsilon_i})$ und $K_0(i, \sqrt{\beta_i})$;
$x^4 \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{r}'}$ ist unlösbar in $K_0(i)$.

Für das $\mathfrak{r}'$ in K_0 entsprechende $\mathfrak{r}$ gilt dann also:

$$N(\mathfrak{r}) \equiv 1 \pmod{2^{x+1}},$$
$\mathfrak{r}$ ist voll zerlegt in $K_0(i, \sqrt{\varepsilon_i})$ und $K_0(i, \sqrt{\beta_i})$,

so daß alle ε_i und β_i Quadratreste mod $\mathfrak{r}$ sind.

$$x^4 \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{r}} \text{ ist unlösbar in } K_0.$$

Das Basiselement mod $\mathfrak{r}$ sei v. Setzen wir $\Phi_x(v) = \zeta_{2^{x+1}}$, so hat Φ_x die verlangten Eigenschaften.

Die zweite am Schluß von § 3 gestellte Frage können wir nun beantworten durch den folgenden

Satz 8: *Es sei ψ' ein Zahlcharakter, so daß $\chi' = \psi'^{l^m}$ zusammen mit $\chi(\mathfrak{b}_i)$ einen Strahlklassencharakter χ ergibt.*

Ist nun $B(l^m)$ erfüllt, so gibt es einen Zahlcharakter ψ'_m, so daß $\varphi'_m = \psi' \cdot \psi'_m$ zusammen mit geeigneten $\varphi_m(\mathfrak{b}_i)$ einen Strahlklassencharakter φ_m ergibt, für den $\varphi_m^{l^m} = \chi$ wird.

Ist dagegen $B(2^m)$ nicht erfüllt, so gibt es ein solches ψ'_m genau dann, wenn ein ψ'_1 existiert, für welches $\varphi'_1 = (\psi' \cdot \psi'_1)^{l^{m-1}}$ zusammen mit geeigneten $\varphi_1(\mathfrak{b}_i)$ einen Strahlklassencharakter φ_1 ergibt, für welchen $\varphi_1^l = \chi$ wird.

Beweis: Wir bezeichnen allgemein für $0 \leqq \nu \leqq m$ mit ψ'_ν einen Zahlcharakter, für den $\varphi'_\nu = (\psi' \cdot \psi'_\nu)^{l^{m-\nu}}$ mit geeigneten $\varphi_\nu(\mathfrak{b}_k)$ einen Idealcharakter φ_ν mit $\varphi_\nu^{l^\nu} = \chi$ ergibt; insbesondere sei ψ'_0 der Einheitscharakter. Es möge nun bei $0 \leqq \nu \leqq m-1$ noch ein ψ'_ν geben, so zeigen wir die Existenz eines $\psi'_{\nu+1}$. Wir wählen zunächst $\varphi_{\nu+1}(\mathfrak{b}_k)$ so, daß $\varphi_{\nu+1}^l(\mathfrak{b}_k) = \varphi_\nu(\mathfrak{b}_k)$ wird. Dann definieren wir ein φ^* durch:

$$\varphi^*(\varepsilon_i) = \left(\psi'(\varepsilon_i^{-1}) \cdot \psi'_\nu(\varepsilon_i^{-1})\right)^{l^{m-\nu-1}},$$

$$\varphi^*(\beta_i) = \left(\psi'(\beta_i^{-1}) \cdot \psi'_\nu(\beta_i^{-1})\right)^{l^{m-\nu-1}} \cdot \varphi_{\nu+1}(\mathfrak{b}_i)^{b_i},$$

wo b_i wie in § 1 definiert sei. Dann gilt:

1. φ^* besteht nur aus l-ten Einheitswurzeln, da φ_ν Strahlklassencharakter ist.

2. φ^* ist Charakter der durch die ε_i und β_i erzeugte Gruppe $\mathfrak{G}$. Eine jede Relation $\prod \varepsilon_i^{\varrho_i} \cdot \beta_k^{\varrho_k} = 1$ reduziert sich nämlich auf $\prod \varepsilon_i^{\varrho_i}$, da die β_k Potenzen von verschiedenen Primidealen sind. Für die ε ist aber φ^* ein Charakter.

3. Liegt ζ_{l^μ} mit $\mu \leqq m-\nu-1$ in K_0, so ist $\varphi^*(\zeta_{l^\mu}) = 1$.

4. $\mathfrak{G}$ ist fremd zu l nach Wahl der $\mathfrak{b}_k$.

Ist nun $B(l^{m-\nu})$ erfüllt, was sicher der Fall ist, wenn $B(l^m)$ gilt, so folgt aus den Hilfssätzen 3a und 4 die Existenz eines $\psi''_{\nu+1}$ der Ordnung $l^{m-\nu}$, für welches $\psi''^{l^{m-\nu-1}}_{\nu+1}(\varepsilon_i) = \varphi^*(\varepsilon_i)$ und $\psi''^{l^{m-\nu-1}}_{\nu+1}(\beta_i) = \varphi^*(\beta_i)$ wird. $\psi'_{\nu+1} = \psi'_\nu \cdot \psi''_{\nu+1}$ erfüllt dann alle verlangten Bedingungen.

Ist dagegen $B(2^{m-\nu})$ nicht erfüllt, so gibt es nach Hilfssatz 4 ein α in $\mathfrak{G}$, das die Gestalt $d b^2$ hat. Wir unterscheiden:

a) $\varphi^*(\alpha) = 1$. Die obige Betrachtung bleibt anwendbar unter Heranziehung von Hilfssatz 3b.

b) $\varphi^*(\alpha) = -1$. Da auch $B(2^m)$ nicht erfüllt ist, ist nach Voraussetzung die Existenz von ψ'_1 sicher, d. h. $\nu \geqq 1$. Wir ersetzen nun ψ'_ν durch $\tilde{\psi}'_\nu = \psi'_\nu \cdot \Phi_{m-\nu}$, wo $\Phi_{m-\nu}$ der in Hilfssatz 5 aufgestellte Charakter ist; $\tilde{\psi}'_\nu$ erfüllt nämlich ebenfalls die an ein ψ'_ν gestellten Bedingungen.

Der Charakter φ^* geht bei dieser Ersetzung über in $\widetilde{\varphi}^* = \varphi^* \cdot \Phi_{m-\nu}^{-2^{m-\nu-1}}$. Dann wird aber wegen der Eigenschaft von $\Phi_{m-\nu}$: $\widetilde{\varphi}^*(\alpha) = +1$, so daß wir wieder auf Fall a) gekommen sind.

Aus den Sätzen 5, 5b und 8 ergibt sich nunmehr unmittelbar

Satz 9: *Ist $B(l^m)$ erfüllt, so ist ein zyklisches K_1 vom Grade l^n über K_0 genau dann in ein zyklisches K_2 vom Grade l^{n+m} einbettbar, wenn dies an jeder Primstelle von K_0 möglich ist.*

Satz 10: *Ist $B(2^m)$ nicht erfüllt, so ist ein zyklisches K_1 vom Grade 2^n genau dann in ein zyklisches K_2 vom Grade 2^{n+m} einbettbar, wenn es einen zyklischen K_1 enthaltenden Körper K_1' vom Grade 2^{n+1} gibt, für den die Einbettung in ein zyklisches K_2 vom Grade 2^{n+m} an jeder Stelle möglich ist.*

Die Tatsache, daß die in Satz 10 aufgestellte Bedingung nicht etwa für alle lokal einbettbaren K_1 erfüllt ist, zeigt

Satz 11: *Ist $B(2^m)$ nicht erfüllt, so gibt es für jedes $n \geqq 1$ über K_0 einen zyklischen Körper K_1 des Grades 2^n, für den die Einbettung in ein zyklisches K_2 vom Grade 2^{n+m} wohl an jeder Stelle, aber nicht im Großen möglich ist.*

Beweis: Es gibt in K_0 beliebig viele Primideale $\mathfrak{r}$, die der Bedingung $N(\mathfrak{r}) \equiv 1\ (2^{n+m})$ genügen. Ist v das erzeugende Element der Restklassengruppe mod $\mathfrak{r}$, so erhalten wir durch $\chi'(v) = \zeta_{2^{n+m}}$ beliebig viele Charaktere der von den ε_i, β_i nebst Relationen $\varepsilon_i^{2^{n+m}} = \beta_i^{2^{n+m}} = 1$ erzeugten endlichen Abelschen Gruppe, unter denen es also zwei verschiedene, χ_1' und χ_2', gibt, für die gilt:

$$\chi_1'(\varepsilon_i) = \chi_2'(\varepsilon_i) \quad \text{und} \quad \chi_1'(\beta_i) = \chi_2'(\beta_i).$$

Sei weiterhin Φ_m ein Zahlcharakter gemäß Hilfssatz 5, so ist

$$\chi' = (\chi_1' \cdot \chi_2'^{-1} \cdot \Phi_m)^{2^m} \text{ mit } \chi(\mathfrak{b}_k) = 1$$

ein Strahlklassencharakter χ der Ordnung 2^n, definiert also einen zyklischen Körper K_1 vom Grade 2^n, der nach Satz 5b an jeder Stelle in verlangter Weise einbettbar ist. Wäre nun K_1 auch im Großen einbettbar, so gäbe es nach Satz 8 ein ψ_1', so daß $\varphi_1' = (\chi_1' \cdot \chi_2'^{-1} \cdot \Phi_m \cdot \psi_1')^{2^{m-1}}$ mit geeigneten $\varphi_1(\mathfrak{b}_k)$ einen Strahlklassencharakter φ mit $\varphi^2 = \chi$ ergibt. Nach Hilfssatz 3b ist nun $\psi_1'^{2^{m-1}}(\alpha) = +1$, so daß sich ergibt:

$$\varphi_1'(\alpha) = (\chi_1'(\alpha) \cdot \chi_2'(\alpha^{-1}))^{2^{m-1}} \cdot \Phi_m^{2^{m-1}}(\alpha) \cdot \psi_1'^{2^{m-1}}(\alpha) = -1.$$

Andererseits ist aber

$$\varphi_1'(\alpha) = \varphi_1'(\varepsilon \cdot \Pi \beta_i^{\varrho_i}) = \Pi \varphi_1'(\beta_i^{\varrho_i}).$$

Nach Hilfssatz 4 ist nun $(\beta_i)^{\varrho_i} = \mathfrak{b}_i^{2\sigma_i}$, so daß sich wegen $\varphi^2(\mathfrak{b}_i) = \chi(\mathfrak{b}_i) = 1$ ergibt: $\varphi_1'(\alpha) = +1$, womit wir zu einem Widerspruch gelangt sind. K_1 ist also im Großen nicht einbettbar.

Wir haben uns noch davon zu überzeugen, daß es wirklich Fälle gibt, für die $B(2^m)$ nicht erfüllt ist. Es genügt, dies für $m = 3$ zu zeigen.

Es sei K über R fremd zu $R(\zeta_8) = R(i, \sqrt{2})$, wo R den rationalen Zahlkörper bedeutet. Weiterhin sei D so gewählt, daß die Primzahl 2 in $R(\sqrt{D})$ voll zerlegt ist und $\sqrt{D}$ nicht in K liegt. Wir setzen nun $K' = K(\sqrt{-D})$ und unterscheiden die Fälle:

a) $[K'(\zeta_8) : K'] < 4$. Nach Voraussetzung ist $[K(\zeta_8) : K] = 4$, so daß $K' = K(\sqrt{-1})$ oder $K' = K(\sqrt{\pm 2})$ gelten muß. Da $\sqrt{D}$ nicht in K liegt, ist das erstere ausgeschlossen. Es folgt also $K(\sqrt{-D}) = K(\sqrt{\pm 2})$ und damit

$$K(\sqrt{D}) = K(\sqrt{\mp 2}).$$

Nun sind in $K(\sqrt{D})$ alle $1/2$ aus K voll zerlegt, also auch in $K(\sqrt{\mp 2})$, so daß sich für alle $1/2$ $[\overline{K(\zeta_8)} : \overline{K}] < 4$ ergibt. $B(8)$ ist für K nicht erfüllt.

b) $[K'(\zeta_8) : K'] = 4$. Alle $1'/2$ aus K' sind in $K'(\sqrt{D})$ voll zerlegt; also $\sqrt{D}$ und damit $\sqrt{-1}$ in K' enthalten. $B(8)$ ist für K' nicht erfüllt.

§ 7.

Der allgemeine Abelsche Fall.

a) *$K_2 \supset K_1$ zyklisch vom Primzahlpotenzgrade l^m.*

Gegeben sei ein Körper K_1 über dem beliebigen Grundkörper K_0 der Charakteristik 0. K_1 sei Abelsch mit der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}_1$. Weiter sei ein Abelsches $\mathfrak{G}_2$ gegeben, so daß es eine zyklische Untergruppe $\mathfrak{N}$ der Ordnung l^m gibt mit $\mathfrak{G}_2/\mathfrak{N} \simeq \mathfrak{G}_1$. Es ist zu untersuchen, wann sich K_1 in ein K_2 mit der Gruppe $\mathfrak{G}_2$ so einbetten läßt, daß K_1 im Sinne der Galoisschen Theorie zu $\mathfrak{N}$ gehört.

Wir beweisen zunächst den

Hilfssatz 6: *Sind K' und K'' zwei Normalkörper über K_0; K''' ihr Durchschnitt; dann ist die Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ von $K'K''$ diejenige Untergruppe $\tilde{\mathfrak{G}}$ des direkten Produktes der Galoisschen Gruppen $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}''$ von K' und K'', bei der gerade alle Produkte $g' \cdot g''$ auftreten, für die $g'(K''') = g''(K''')$ gilt.*

Beweis: Jedem Element g aus $\mathfrak{G}$ ist im Sinne des natürlichen Homomorphismus[5]) je ein Automorphismus g' und g'' zugeordnet: $g \to (g', g'')$. g' und g'' genügen dabei der Bedingung $g'(K''') = g''(K''') = g(K''')$. Auf das Elementepaar $(1', 1'')$ ist dabei nur die 1 aus $\mathfrak{G}$ bezogen. $\mathfrak{G}$ ist somit (1)-isomorph einer Untergruppe der in der Behauptung genannten Gruppe $\tilde{\mathfrak{G}}$. Aus dem Übereinstimmen der Ordnungen von $\mathfrak{G}$ und $\tilde{\mathfrak{G}}$ ergibt sich die Behauptung.

Nennen wir die Galoissche Gruppe von K''' über K_0 $\mathfrak{G}'''$, so wollen wir in Zukunft kurz schreiben:

$$\mathfrak{G} = (\mathfrak{G}' \times \mathfrak{G}'')_{\mathfrak{G}'''}.$$

Die Gleichheit im Gegensatz zur gewöhnlichen Isomorphie soll dabei den natürlichen Isomorphismus bedeuten:

$$g(\sum a' \cdot a'') = \sum g'(a') \cdot g''(a''),$$

wenn a' aus K' und a'' aus K'' ist.

Wir gehen nun aus von einem Körper K_2' mit der Gruppe $\mathfrak{G}_2$ über einem geeigneten K_0'. Wählt man etwa $K_0' = R$, so ist die Existenz eines derartigen K_2' sichergestellt. Das erzeugende Element von $\mathfrak{N}$ heiße τ und werde durch die unabhängige Basis $a_1, \ldots, a_h$ von $\mathfrak{G}_2$ in der Form $\tau = \Pi a_i^{x_i}$ dargestellt. Wenigstens einer der Faktoren $a_i^{x_i}$ hat dann die gleiche Ordnung wie τ, also l^m; es sei dies gerade $a_1^{x_1}$. Die Ordnung von a_1 sei l^{n+m}. Der zur Untergruppe (τ) gehörige Körper heiße K_1', er hat die Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}_1$. Wir betrachten nun in K_2' die folgenden Unterkörper, die durch ihre Gruppen in $\mathfrak{G}_2$ charakterisiert seien:

a) Zu $(\tau, a_2, \ldots, a_h) = (a_1^{x_1}, a_2, \ldots a_h)$ gehöre C_1'. C_1' liegt in K_1' und ist über K_0' zyklisch vom Grade l^n; seine Galoissche Gruppe heiße $\mathfrak{Z}_1$.

b) Zu $(a_2, \ldots, a_h)$ gehöre C_2'. C_2' umfaßt C_1' und ist über K_0' zyklisch vom Grade l^{n+m}; seine Galoissche Gruppe heiße $\mathfrak{Z}_2$.

Zum Kompositum $C_2' K_1'$ gehört der Durchschnitt von $(a_2, \ldots, a_h)$ mit $(\tau) = (\Pi a_i^{x_i})$. Ein gemeinsames Element dieser beiden Untergruppen müßte aber eine so hohe Potenz von τ sein, daß a_1 nicht mehr im Produkte vorkommt. Da aber die Ordnung von $a_1^{x_1}$ gleich der von τ ist, ist somit das gemeinsame Element die Gruppeneins, also $C_2' K_1' = K_2'$.

Zum Durchschnitt $(C_2' \cap K_1')$ gehört das Kompositum von $(a_2, \ldots, a_h)$ mit (τ); also $(C_2' \cap K_1') = C_1'$. Es treten also gerade die in Hilfssatz 6 geschilderten Verhältnisse ein, so daß wir haben:

$$\mathfrak{G}_2 = (\mathfrak{Z}_2 \times \mathfrak{G}_1)_{\mathfrak{Z}_1}.$$

Bei dieser Schreibweise für $\mathfrak{G}_2$ wird $\mathfrak{N}$ die Untergruppe von $\mathfrak{G}_2$, die K_1' festläßt; nennen wir das erzeugende Element von $\mathfrak{Z}_2$ σ, so haben wir also $\mathfrak{N} = ((\sigma^{l^m}) \times 1)$. Diese Ergebnisse sind aber nun wieder rein gruppentheoretischer Natur. Es gilt also

Satz 12: *Durch $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{N}$ ist eine — nicht eindeutige — Untergruppe $\mathfrak{G}_1'$ von $\mathfrak{G}_1$ mit zyklischer Faktorgruppe $\mathfrak{Z}_1$ der Ordnung l^n bestimmt. Schreibt man $\mathfrak{Z}_1$ in der Form $\mathfrak{Z}_1 = (\sigma)/(\sigma^{l^m})$, wo (σ) eine zyklische Gruppe der Ordnung l^{n+m} bedeutet, so gilt der Automorphismus: $\mathfrak{G}_2 \cong ((\sigma) \times \mathfrak{G}_1)_{\mathfrak{Z}_1}$. Dabei wird $\mathfrak{N}$ auf die Untergruppe $((\sigma^{l^m}) \times 1)$ abgebildet.*

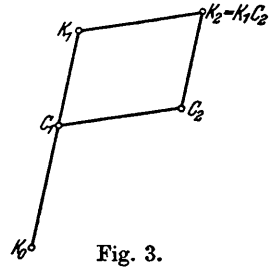


Fig. 3.

Ist nun das oben genannte Einbettungsproblem zu lösen, so bestimme man nach Satz 12 den zu $\mathfrak{G}_1'$ gehörigen Unterkörper C_1 von K_1. C_1 ist

dann zyklisch über K_0 von der Ordnung l^n mit $n \geqq 0$. Notwendig und hinreichend für die Einbettbarkeit ist dann, daß sich C_1 so in ein zyklisches C_2 von der Ordnung l^{n+m} einbetten läßt, daß $(C_2 \cap K_1) = C_1$ wird. In diesem Falle wird nämlich die Galoissche Gruppe von $C_2 K_1$ gerade $\mathfrak{G}_2$, und die zu K_1 gehörige Untergruppe in $\mathfrak{G}_2$ ist gerade $\mathfrak{N}$.

Wir kehren nun zu dem Fall zurück, daß K_0 ein algebraischer Zahlkörper ist, und beweisen die folgenden naheliegenden Hilfssätze.

Hilfssatz 7: *Es gibt über K_0 zyklische Körper des Grades l^m.*

Beweis: Ist für ein Primideal $\mathfrak{r}_1$ aus K_0 $N(\mathfrak{r}_1) \equiv 1 \,(l^m)$ und setzt man in der früheren Bezeichnungsweise $\chi_1'(v_1) = \zeta_{l^m}$, so liefert $\chi_1'(\varepsilon)$ für die Einheitengruppe $\{\varepsilon\}$ einen nur aus l^m-ten Einheitswurzeln bestehenden Charakter. Da es nur endlich viele solche Charaktere, aber unendlich viele $\mathfrak{r}_\nu$ mit $N(\mathfrak{r}_\nu) \equiv 1 \,(l^m)$ gibt, lassen sich $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ mit $N(\mathfrak{r}_\nu) \equiv 1 \,(l^m)$ so finden, daß bei $\chi_1'(v_1) = \chi_2'(v_2^{-1}) = \zeta_{l^m}$ gilt: $\chi_1'(\varepsilon) \cdot \chi_2'(\varepsilon) = 1$ für alle ε. Ergänzt man gemäß Hilfssatz 1 $\chi' = \chi_1' \cdot \chi_2'$ durch geeignete $\chi(\mathfrak{b}_i)$, so gehört zu χ ein zyklischer Körper des Grades l^{m+x} mit $x \geqq 0$. Ein Unterkörper desselben ist der verlangte Körper.

Hilfssatz 8: *Ist K_1 über K_0 in ein über K_0 zyklisches K_2 mit $[K_2 : K_1] = l^m$ einbettbar, K_1^* ein beliebiger Zahlkörper über K_1, dann läßt sich K_1 auch in ein zyklisches K_2' mit $[K_2' : K_1] = l^m$ einbetten, so daß $(K_2' \cap K_1^*) = K_1$ wird.*

Beweis: Genau wie im Beweis zu Hilfssatz 7 zeigt man, daß es zwei Primideale $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ mit $N(\mathfrak{r}_\nu) \equiv 1 \,(l^m)$ gibt, so daß bei $\chi_1'(v_1) = \chi_2'(v_2^{-1}) = \zeta_{l^m}$ gilt: $\chi_1' \chi_2'(\varepsilon_i) = \chi_1' \cdot \chi_2'(\beta_i) = 1$, wo die β_i die in § 1 eingeführten Zahlen sind. Außerdem lassen sich $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ so wählen, daß sie in K_1^* nicht verzweigt sind. War nun ψ' und $\psi(\mathfrak{b}_i)$ der Charakter von K_2 in K_0, so erfüllt $\psi' \chi_1' \chi_2'$ und $\psi(\mathfrak{b}_i)$ alle Bedingungen von Hilfssatz 1 und definiert damit einen zyklischen Körper K_2'. Wegen $(\chi' \chi_1' \psi_2')^{l^m} = \psi'^{l^m}$ ist K_1 in K_2' enthalten, und es ist $[K_2' : K_1] = l^m$. Hätte nun K_2' mit K_1^* über K_1 einen nicht leeren Durchschnitt, so läge der durch $(\psi' \chi_1' \chi_2')^{l^{m-1}}$ mit $\psi(\mathfrak{b}_i)^{l^{m-1}}$ definierte Unterkörper K_2'' von K_2' in K_1^*. Im Führer von K_2'' kommen aber nach Konstruktion die $\mathfrak{r}_i$ noch vor; d. h. die $\mathfrak{r}_i$ sind in K_2'' verzweigt, während sie es in K_1^* nicht sind; dies ist aber ein Widerspruch, wenn $K_2'' \subset K_1^*$.

Greift man aus K_1 einen zyklischen Unterkörper C_1 beliebigen Grades heraus, der sich in ein zyklisches C_2 mit $[C_2 : C_1] = l^m$ einbetten läßt, so kann man C_2 demnach so wählen, daß $(C_2 \cap K_1) = C_1$ wird. Die Einbettung von K_1 in $K_2 = K_1 C_2$ ist von der in diesem Abschnitt behandelten Art. C_1 erscheint in dieser Darstellung gleichsam als der Stamm, von dem sich die Körper C_2 und K_1 abzweigen. Wir wollen aus diesem Grunde C_1 einen zu dem betreffenden Einbettungsproblem gehörigen „Stammkörper" nennen.

Wir haben somit gesehen:

Satz 13: *Zu jedem Einbettungsproblem* $K_0 \subset K_1 \subset K_2$ *mit* $[K_2 : K_1] = l^m$ *gibt es wenigstens einen — rein gruppentheoretisch bestimmbaren — Stammkörper* C_1. *Notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit des Problems ist, daß sich* C_1 *in ein zyklisches* C_2 *so einbetten läßt, daß* $[C_2 : C_1] = l^m$ *wird.* C_1 *läßt sich selbst zyklisch vom Grade* l^n *wählen mit* $n \geqq 0$.

Wir haben oben die Existenz von nur einem Stammkörper bewiesen, da wir sahen, daß es genügt, einen solchen zu kennen, um die Frage der Einbettbarkeit beantworten zu können. Wir wollen die so entstandene Lücke schließen, indem wir die Frage nach allen zu einem gegebenen Einbettungsproblem gehörigen Stammkörpern aufwerfen.

Seien nun in der Tat C_1 und C_1' zwei Stammkörper zum gleichen Einbettungsproblem, insbesondere also zyklisch; dann folgt: Läßt sich C_1 in ein zyklisches C_2 mit $[C_2 : C_1] = l^m$ so einbetten, daß $(C_2 \cap K_1) = C_1$ wird, dann gibt es in $C_2 K_1$ einen zyklischen Körper C_2', so daß $C_1' \subset C_2'$ und $[C_2' : C_1'] = l^m$ ist; das gleiche gilt bei Vertauschung von C_1 mit C_1'. Ist K_1 gegeben durch die den zyklischen Kompositionsfaktoren entsprechenden Charaktere $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_h$ und entsprechen C_1 und C_1' dabei den Charakteren ψ_1 und ψ_1', dann sei also C_1 in ein C_2 eingebettet, so daß gilt:

$$\psi_1 = \psi_2^{l^m}, \tag{10}$$

wenn ψ_2 den definierenden Charakter von C_2 bedeutet; zunächst ist nämlich $\psi_1 = (\psi_2^{l^m})^\sigma$ mit zu $[C_1 : K_0]$ fremdem σ. Sollte nun bei zu l fremdem $[C_1 : K_0]$ σ nicht fremd zu $[C_2 : K_0]$ sein, so ersetze man es durch $\sigma + [C_1 : K_0]$. C_2 kann also auch durch ψ_2^{ϱ} definiert werden. Zu $C_2 K_1$ gehören dann die Charaktere $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_h, \psi_2$. Soll nun ein C_2' in $C_2 K_1$ existieren, das die obige Bedingung erfüllt, so muß sein:

$$(\chi_1^{\varrho_1} \cdot \chi_2^{\varrho_2} \ldots \chi_h^{\varrho_h} \cdot \psi_2^{\varrho_0})^{l^m} = \psi_1';$$

oder wegen (10):

$$\psi_1' = \psi_1^{\varrho_0} \chi^{*l^m},$$

wo χ^* aus der Charaktergruppe $(\chi_1, \ldots, \chi_h)$ genommen wird. Gilt umgekehrt diese Beziehung, dann gibt es auch in $C_2 K_1$ ein gefordertes C_2'. In Übertragung einer sonst für Zahlen geläufigen Schreibweise auf Charaktere einer fest gegebenen Charakterengruppe können wir also schreiben:

$$\psi_1' \underset{(l^m)}{=} \psi_1^{\varrho_0} \quad \text{in} \quad (\chi_1, \ldots, \chi_h).$$

Da aber auch umgekehrt $\psi_1 \underset{(l^m)}{=} \psi_1'^{\varrho_0'}$ sein soll, muß $\psi_1 \underset{(l^m)}{=} \psi_1' \underset{(l^m)}{=} 1$ oder ϱ_0 zu l prim sein. Dann stellt aber auch $\psi_1^{\varrho_0 + k l^m}$ bei passendem k einen definierenden Charakter von C_1 dar, so daß wir haben:

Satz 14: *Gehören in K_1 zwei zyklische Unterkörper C_1 und C_1' zu den Charakteren ψ_1 und ψ_1', so sind C_1 und C_1' genau dann Stammkörper zum gleichen Einbettungsproblem mit $(K_2 : K_1) = l^m$, wenn die Relation gilt:*

$\psi_1 \underset{(l^m)}{=} \psi_1'$ *bei passender Wahl der definierenden Charaktere.*

Das Hinreichen folgt ja daraus, daß bei $\psi_1' = \psi_1 \cdot \chi^{*l^m}$ auch $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_h, \psi_2 \chi^* \quad C_2 K_1$ definieren.

Ist insbesondere K_0 selbst ein Stammkörper, so ist für $C_1 : \psi_1 \underset{(l^m)}{=} 1$ das bedeutet aber, daß C_1 schon in K_1 in einen zyklischen Körper C_2 mit $[C_2 : C_1] = l^m$ eingebettet erscheint, so daß nach Hilfssatz 8 an C_1 tatsächlich keine Bedingungen gestellt werden; oder daß $[C_1 : K_0]$ zu l prim ist, wo sich trivialerweise keine Bedingung ergibt.

Aus Satz 14 können wir leicht die Anzahl der gruppentheoretisch verschiedenen Einbettungsmöglichkeiten für K_1 bei gegebenem $[K_2 : K_1] = l^m$ bestimmen. Beachtet man nämlich, daß die Charakterengruppe die gleiche Struktur wie $\mathfrak{G}_1$ hat, so folgt:

Bedeutet (a^{l^m}) die Untergruppe der l^m-ten Potenzen in $\mathfrak{G}_1$, so ist die obige Anzahl gleich dem Index von (a^{l^m}) in $\mathfrak{G}_1$.

b) $K_2 \supset K_1$ *beliebig Abelsch.*

Es sei nunmehr $\mathfrak{N}$, die Galoissche Gruppe von K_2 über K_1, das direkte Produkt von zyklischen Gruppen $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots$. K_2 erscheint über K_1 als das Kompositum von Körpern $K^{(i)}$ mit der Eigenschaft: $[K^{(i)} : K_1] = l_i^{m_i}$; $(K^{(1)} K^{(2)} \ldots K^{(i-1)} \cap K^{(i)}) = K_1$. Das bedeutet aber, daß wir schreiben können:

$$\mathfrak{G}_2 = (\mathfrak{G}^{(1)} \times \mathfrak{G}^{(2)} \times \ldots)_{\mathfrak{G}_1},$$

wobei jedes $\mathfrak{G}^{(i)}$ einen Normalteiler $\mathfrak{N}^{(i)}$ vom Grade $l_i^{m_i}$ enthält, so daß $\mathfrak{G}^{(i)}/\mathfrak{N}^{(i)} \simeq \mathfrak{G}_1$. Bei dieser Schreibweise erscheint $\mathfrak{N}$ als $(\mathfrak{N}^{(1)} \times \mathfrak{N}^{(2)} \times \ldots)$. Für die geforderte Einbettbarkeit ist also notwendig, daß alle den $\mathfrak{G}^{(i)}$ entsprechenden Einbettungsprobleme lösbar sind. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend. Ist nämlich für alle i K_1 in ein $K^{(i)}$ in der $\mathfrak{G}^{(i)}$ entsprechenden Weise einbettbar, $C_1^{(i)}$ ein zugehöriger Stammkörper, $C_2^{(i)}$ dessen zyklische Erweiterung mit $[C_2^{(i)} : C_1^{(i)}] = l_i^{m_i}$, dann läßt sich nach Hilfssatz 8 $C_2^{(i)}$ so wählen, daß $(C_2^{(i)} \cap K^{(1)} K^{(2)} \ldots K^{(i-1)} = C_1^{(i)}$ wird. Es ist demgemäß:

$$\begin{aligned}[C_2^{(i)} K^{(1)} \ldots K^{(i-1)} : C_1^{(i)}] &= [K^{(1)} \ldots K^{(i-1)} : C_1^{(i)}] \cdot [C_2^{(i)} : C_1^{(i)}] \\ &= [K^{(1)} \ldots K^{(i-1)} : K_1] \cdot [K_1 : C_1^{(i)}] \cdot l_i^{m_i},\end{aligned}$$

also ist wegen $K^{(i)} = K_1 C_2^{(i)}$:

$$\begin{aligned}[K^{(i)} K^{(1)} \ldots K^{(i-1)} : K_1] &= [C_2^{(i)} K^{(1)} \ldots K^{(i-1)} : C_1^{(i)}] : [K_1 : C_1^{(i)}] \\ &= [K^{(1)} \ldots K^{(i-1)} : K_1] \cdot [K^{(i)} : K_1];\end{aligned}$$

d. h. aber, daß $K^{(i)}$ zu $K^{(1)} \ldots K^{(i-1)}$ über K_1 fremd ist, und damit die Galoissche Gruppe von $K^{(1)} \ldots K^{(i)}$ gerade $(\mathfrak{G}^{(1)} \times \mathfrak{G}^{(2)} \times \ldots \times \mathfrak{G}^{(i)})_{\mathfrak{G}_1}$

wird. Damit ist auch das allgemeinste Abelsche Einbettungsproblem auf zyklische Einbettungen zurückgeführt. Es gilt somit

Satz 15: *Soll bei einem Einbettungsproblem* $K_0 \subset K_1 \subset K_2$ *die Galoissche Gruppe von* K_2 *über* K_1 *vom Typus* $(l_1^{m_1}, l_2^{m_2}, \ldots)$ *werden, so gibt es in* K_0 *zyklische Körper* $C_1^{(1)}, C_1^{(2)}$, *so daß das Problem genau dann lösbar ist, wenn sich jedes* $C_1^{(i)}$ *in ein zyklisches* $C_2^{(i)}$ *so einbetten läßt, daß* $[C_2^{(i)} : C_1^{(i)}] = l_i^{m_i}$ *wird.* $C_1^{(i)}$ *läßt sich selbst zyklisch vom Grad* $l_i^{n_i}$ *wählen mit* $n_i \geqq 0$.

Weiterhin wollen wir Satz 9 unter Beachtung von Definition 1 verallgemeinern zu

Satz 16: *Ist ein Abelsches* K_1 *über* K_0 *in ein Abelsches* K_2 *mit vorgegebener Gruppe* $\mathfrak{G}_2$ *einzubetten, so daß* K_1 *zum Normalteiler* $\mathfrak{N}$ *gehört, der vom Typus* $(l_1^{m_1}, l_2^{m_2}, \ldots)$ *ist, sind weiter in* K_0 *alle* $B(l_i^{m_i})$ *erfüllt, dann ist die Einbettung genau dann möglich, wenn an jeder Stelle* $\mathfrak{p}$ *von* K_0 *wenigstens ein zugehöriges lokales Einbettungsproblem lösbar ist.*

Beweis: Die Notwendigkeit der Bedingungen ist klar; es bleibt also ihr Hinreichen zu zeigen. Wir schreiben $\mathfrak{G}_2$ wie oben in der Gestalt: $\mathfrak{G}_2 = (\mathfrak{G}^{(1)} \times \mathfrak{G}^{(2)} \times \ldots)_{\mathfrak{G}_1}$ und betrachten das durch $\mathfrak{G}^{(1)}$ gegebene Einbettungsproblem, zu dem $C_1^{(1)}$ ein Stammkörper vom Grade $l_1^{n_1}$ sei. Es sei nun $\mathfrak{p}$ aus K_0 in $C_1^{(1)}$ nicht voll zerlegt. Nach Voraussetzung ist an der Stelle $\mathfrak{p}$ ein lokales Einbettungsproblem lösbar; dieses sei durch $\overline{\mathfrak{G}}_2$ gegeben. Wir nehmen nun wie oben wieder einen Hilfskörper K_2' über K_0 mit der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}_2$ in Anspruch. Die den Unterkörpern $C_1^{(1)}$ und K_1 gruppentheoretisch-Galoissch entsprechenden Unterkörper mögen C_1' und K_1' heißen. Zu $\overline{\mathfrak{G}}_2$ möge K_0' gehören. Als Stammkörper erscheint C_1' in K_2' über K_0 in einen zyklischen Körper C_2' vom Grade $l_1^{n_1+m_1}$ eingebettet. C_1' liegt nach Voraussetzung nicht in K_0'; $C_1' K_0'$ ist also über K_0' in $C_2' K_0'$ eingebettet mit $[C_2' K_0' : C_1' K_0'] = l_1^{m_1}$. Nun gehört aber $C_1' K_0'$ in $\mathfrak{G}_2$ zur selben Untergruppe wie $\overline{C}_1^{(1)}$ in $\overline{K}_2$. Es erscheint also auch $\overline{C}_1^{(1)}$ über $\overline{K}_0$ in einen zyklischen Körper $\overline{C}_2^{(1)}$ mit $[\overline{C}_2^{(1)} : \overline{C}_1^{(1)}] = l_1^{m_1}$ eingebettet. Damit ist aber für C_1 ein lokales Einbettungsproblem lösbar, das zur Einbettung $K_0 \subset C_1 \subset C_2$ mit $[C_2 : C_1] = l_1^{m_1}$ gehört. Ist dagegen $\mathfrak{p}$ in $C_1^{(1)}$ voll zerlegt, so wissen wir von früher, daß dann wenigstens ein lokales Einbettungsproblem lösbar ist, das dem obengenannten entspricht. Aus den Sätzen 9 und 15 folgt nunmehr unmittelbar die Behauptung.

In ganz entsprechender Weise läßt sich natürlich auch Satz 10 verallgemeinern; dagegen sei darauf hingewiesen, daß eine Verallgemeinerung von Satz 11 auf den allgemeinen Abelschen Fall nicht gilt, schon weil ja K_0 selbst ein Stammkörper sein kann. Jedoch auch dann, wenn für die definierenden Charaktere $\psi^{(i)}$ der Stammkörper $C_1^{(i)}$ gilt: $\psi^{(i)} \underset{(2^{m_i'})}{\equiv} 1$ im Bereich aller Strahlklassencharaktere, wo $m_i' < m_i$ und ebenfalls $B(2^{m_i'})$

nicht erfüllt ist, folgt aus der lokalen Einbettbarkeit bereits die im Großen. Ist nämlich $\psi^{(i)} = \chi_i^{2^{m_i'}}$, insbesondere $\psi'^{(i)} = \chi_i'^{2^{m_i'}}$, und ist $C_1^{(i)}$ an jeder Stelle in einen zyklischen Körper vom Grade 2^{m_i} einbettbar, also $\psi'^{(i)} = \varphi_i'^{2^{m_i}}$, so gilt:

$$\chi_i'^{2^{m_i'-1}} = \varphi_i'^{2^{m_i-1}} \cdot (\chi_i' \cdot \varphi_i'^{-2^{m_i-m_i'}})^{2^{m_i'-1}} = \varphi_i'^{2^{m_i-1}} \cdot \varphi_i^*.$$

φ_i^* ist dann ein aus zweiten Potenzen bestehender und als $2^{m_i'-1}$-te Potenz realisierbarer Charakter der von den ε_i und β_i erzeugten Gruppe, für den also nach Hilfssatz 3b gilt: $\varphi_i^*(-1) = \varphi_i^*(\alpha) = 1$. Dann ist aber φ_i^* auch als 2^{m_i-1}-te Potenz realisierbar, so daß aus Satz 8 die Behauptung folgt, da $\varphi_i'^{2^{m_i-1}} \cdot \varphi_i^*$ mit $\chi_i(\mathfrak{b}_i)^{2^{m_i'-1}}$ einen Strahlklassencharakter $\varphi_1^{(i)}$ mit $\varphi_1^{(i)2} = \psi^{(i)}$ ergibt.

§ 8.

Schlußbemerkung.

Satz 11 belehrte uns darüber, daß es Ausnahmefälle gibt, wo von der Einbettbarkeit im Kleinen nicht auf die im Großen geschlossen werden kann. Man könnte nun diese Ausnahmefälle als dadurch bedingt ansehen, daß wir für die lokale Einbettbarkeit ja nur die Lösbarkeit von wenigstens einem zugeordneten lokalen Einbettungsproblem an jeder Stelle verlangt hatten; und man könnte demzufolge meinen, daß sich diese Ausnahmefälle dadurch beheben ließen, daß man an den einzelnen Primstellen eben die Lösbarkeit von mehr als einem zugeordneten Problem verlangt, sofern es deren mehrere gibt. Demgegenüber sagt nun der Schlußsatz von Satz 5a aus, daß bei unserer Definition der lokalen Einbettbarkeit im zyklischen Fall bereits die Lösbarkeit von allen zugeordneten Einbettungsproblemen folgt, so daß ein Beheben des Ausnahmefalles auf diese Weise nicht möglich ist.

Literaturverzeichnis.

C. Chevalley.
Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux.

H. Hasse.
Klassenkörpertheorie. Ausarbeitung einer Vorlesung vom Sommersemester 1932. Marburg.

B. L. van der Waerden.
Moderne Algebra I.
Jahresbericht der D. M. V. **43**, S. *61*; **44**, S. *41* und S. *60*; **45**, S. *35* und S. *113*.

(Eingegangen am 7. 1. 1936.)

General recursive functions of natural numbers[1]).

Von

S. C. Kleene in Madison (Wis., U.S.A.).

The substitution

1) $$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \theta(\chi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \chi_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

and the ordinary recursion with respect to one variable

(2) $$\varphi(0, x_2, \ldots, x_n) = \psi(x_2, \ldots, x_n)$$
$$\varphi(y+1, x_2, \ldots, x_n) = \chi(y, \varphi(y, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n),$$

where $\theta, \chi_1, \ldots, \chi_m, \psi, \chi$ are given functions of natural numbers, are examples of the definition of a function φ by equations which provide a step by step process for computing the value $\varphi(k_1, \ldots, k_n)$ for any given set $k_1, \ldots, k_n$ of natural numbers. It is known that there are other definitions of this sort, e. g. certain recursions with respect to two or more variables simultaneously, which cannot be reduced to a succession of substitutions and ordinary recursions[2]). Hence, a characterization of the notion of recursive definition in general, which would include all these cases, is desirable. A definition of general recursive function of natural numbers was suggested by Herbrand to Gödel, and was used by Gödel with an important modification in a series of lectures at Princeton in 1934. In this paper we offer several observations on general recursive functions, using essentially Gödel's form of the definition.

The definition will be stated in § 1. It consists in specifying the form of the equations and the nature of the steps admissible in the computation of the values, and in requiring that for each given set of arguments the computation yield a unique number as value. The operations on symbols which occur in the computation have a similarity to ordinary recursive operations on numbers. This similarity will be utilized, by the Gödel method of representing formulas by numbers, to prove that every (general) recursive function is expressible in the form $\psi(\varepsilon y[\varrho(x_1, \ldots, x_n, y) = 0])$ where ψ and ϱ are ordinary or „primitive"

[1]) Presented to the American Mathematical Society, September 1935.

[2]) W. Ackermann, Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen, Math. Annalen 99 (1928), S. 118—133; Rózsa Péter, Konstruktion nichtrekursiver Funktionen, Math. Annalen 111 (1935), S. 42—60.

recursive functions and $(x_1, \ldots, x_n)\ (E\,y)\ [\varrho\,(x_1, \ldots, x_n, y) = 0]$[3]). Also, it is seen directly that, for any recursive function $\varrho\,(x_1, \ldots, x_n, y)$, $\varepsilon\,y\ [\varrho\,(x_1, \ldots, x_n, y) = 0]$ is a recursive function, provided $(x_1, \ldots, x_n)\ (E\,y)\ [\varrho\,(x_1, \ldots, x_n, y) = 0]$.

In § 2, the problem is raised, which systems of equations define recursive functions under the general definition. The systems which do cannot be recursively enumerated, if by a recursive enumeration is understood one such that the numbers ordered by the Gödel method to the systems of equations in the enumeration are a recursive sequence (i. e. the successive values of a recursive function of one variable), since from any recursive sequence of such numbers we can obtain the recursive definition of a new function by the familiar process of diagonalizing and adding 1. For the same reason, a recursive process of deciding which systems define recursive functions is unattainable, if by a recursive process is meant one such that there is a recursive function of the corresponding numbers whose value is 0 or 1 according to the result obtained. Since the condition under which a recursive function of n variables is defined can be expressed in the form $(x_1, \ldots, x_n)\ (E\,y)\ [\varrho\,(x_1, \ldots, x_n, y) = 0]$, we are afforded an approach (somewhat different than Gödel's[4])) to the existence of undecidable number-theoretic propositions in formal logics satisfying certain general conditions. Roughly speaking, every such formal logic must contain undecidable propositions of the form $(x)\ (E\,y)\ [\varrho\,(x, y) = 0]$, where $\varrho\,(x, y)$ is a primitive recursive function, because otherwise the logic could be used to decide recursively which systems of equations define recursive functions, which we know in advance to be impossible. Every problem of the form, whether or not $(x)\ (E\,y)\ [\sigma\,(x, y) = 0]$, where $\sigma\,(x, y)$ is a recursive function, is included in the problem, which systems of equations define recursive functions of one variable.

Also, there are non-recursive functions definable using only one quantifier, thus: $\tau\,(x) = 0$ if $(y)\,[\varrho\,(x, y) = 0]$, $\tau\,(x) = 1$ otherwise, where $\varrho\,(x, y)$ is primitive recursive.

---

[3]) In the "functions" which we consider, the arguments are understood to range over the natural numbers (i. e. non-negative integers) and the values to be natural numbers. Also, for abbreviation, we use propositional functions of natural numbers, calling them „relations" (alternatively "classes", when there is only one variable) and employing the following notations: $(x)\,A\,(x)$ [for all natural numbers, $A\,(x)$], $(E\,x)\,A\,(x)$ [there is a natural number x such that $A\,(x)$], $\varepsilon\,x\,[A\,(x)]$ [the least natural number x such that $A\,(x)$, or 0 if there is no such number], $-$ [not], $\vee$ [or], & [and], $\rightarrow$ [implies], $\equiv$ [is equivalent to].

[4]) Kurt Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, Monatsh. für Math. u. Physik 38 (1931), S. 173—198.

§ 1.

The relation between primitive and general recursive functions.

A recursive function (relation) in the sense of Gödel[4]) (S. 179—180) will now be called a *primitive recursive* function (relation). By using

$$
\begin{aligned}
&S(x) = x + 1 && \text{(the successor function),}\\
(3)\qquad &C(x) = 0 && \text{(the constant function 0),}\\
&U_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i && \text{(identity functions)}
\end{aligned}
$$

as initial functions, the definition of primitive recursive function can be phrased thus:

Definition 1. A function is *primitive recursive* if it can be defined from the functions (3) by (zero or more) successive applications of schemas (1) and (2) ($m, n = 1, 2, \ldots; i = 1, \ldots, n$)[5]).

In the study of general recursive functions, we treat the defining equations formally, as sequences of symbols. For abbreviation, we may omit to distinguish between the functions and numbers, and the symbols or sets of symbols which stand for them.

Now consider *expressions* consisting of finite sequences of the following symbols: 0 (the numeral 0), S (the successor function), $w_0, w_1, \ldots$ (numerical variables), $\varrho_0, \varrho_1, \ldots$ (variables for functions of $r_0, r_1, \ldots$ arguments, where $r_0, r_1, \ldots$ is a sequence of positive integers in which each occurs infinitely many times, say 1, 1, 2, 1, 2, 3, ...), (,), ' , = (parentheses, comma, equality symbol). We define *term* thus: $0, w_0, w_1, \ldots$ are terms; if $a_1, a_2, \ldots$ are terms, $S(a_1)$, $\varrho_0(a_1, \ldots, a_{r_0})$, $\varrho_1(a_1, \ldots, a_{r_1})$, ... are terms. By *numeral* is meant one of the expressions 0, $S(0)$, $S(S(0)), \ldots$. If a and b are terms (and if $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ are functional variables[6]) such that a least one of $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ occurs in a or b, but no functional variables other than $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ occur in a or b), $a = b$ will be called an *equation* (*in* $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$). By a *system* of equations we mean a finite sequence of equations. $\mathrm{S}_{b_1 \ldots b_n}^{a_1 \ldots a_n} A\Big|$ shall denote the result of substituting b_i for a_i ($i = 1, \ldots, n$) throughout A (A itself, if $a_1, \ldots, a_n$

[5]) This form of the definition was introduced by Gödel to avoid the necessity of providing for omissions of arguments on the right in schemas (1) and (2). The operations in the construction of primitive recursive functions can be further restricted. See Rózsa Péter, Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktionen, Math. Annalen **110** (1934), S. 612—632.

[6]) That is, if $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ stand for $\varrho_{\alpha_1}, \ldots, \varrho_{\alpha_n}$ for some set of distinct numbers $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (then we use s_i for r_{α_i}). Similarly, in R_1 below it is meant that $x_1, \ldots, x_n$ stand for $w_{\beta_1}, \ldots, w_{\beta_n}$ for some set of distinct numbers $\beta_1, \ldots, \beta_n$.

do not occur in A). $E \vdash_{\nu_1 \nu_2 \ldots} F$ shall denote that the expression F is derivable from the expressions E by (zero or more) applications of the operations $R_{\nu_1}, R_{\nu_2}, \ldots$.

We list the operations on expressions[7]):

R_1: *to replace* A *by* $S^{x_1 \ldots x_n}_{k_1 \ldots k_n} A$, *where* $x_1, \ldots, x_n$ *are the numerical variables which occur in* A, *and* $k_1, \ldots, k_n$ *are numerals.*

R_2: *to pass from* A *and* $\sigma(k_1, \ldots, k_s) = k$ *to the result of substituting* k *for a particular occurrence of* $\sigma(k_1, \ldots, k_s)$ *in* A, *where* $k_1, \ldots, k_s$, k *are numerals.*

R_3: *to pass from* A *and* $B = C$ *to the result of substituting* C *for a particular occurrence of* B *in* A.

The Herbrand-Gödel definition of general recursive function of natural numbers can be formulated thus[8]):

Definition 2a. Given functional variables $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, let E_j^* denote the set of equations $\sigma_j(k_1, \ldots, k_{s_j}) = k$ where k is the "value" of $\sigma_j(k_1, \ldots, k_{s_j})$ as presently defined. The functions $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ are *defined recursively* by the system of equations $(E_1 \ldots E_n)$ if, for each i $(i=1, \ldots, n)$, E_i is a system of equations in $\sigma_1, \ldots, \sigma_i$, each of the form $\sigma_i(a_1, \ldots, a_{s_i}) = b$ where σ_i does not occur in $a_1, \ldots, a_{s_i}$, such that for each set of numerals $k_1, \ldots, k_{s_i}$ there is exactly one numeral k (called the *value* of $\sigma_i(k_1, \ldots, k_{s_i})$) for which $E_1^*, \ldots, E_{i-1}^*$, $E_i \vdash_{1,2} \sigma_i(k_1, \ldots, k_{s_i}) = k$. A function σ_n is *recursive* if there is an $(E_1 \ldots E_n)$ of this description.

We understand a function $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ to be recursive under this definition, if it is possible to define it by recursion equations of the type described, whether or not originally the function is so defined. More explicitly, a given function $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ is recursive under Def. 2a, if there exists an $(E_1 \ldots E_n)$ as described in Def. 2a in which σ_n may be regarded as representing φ. σ_n may be regarded as representing φ, if $s_n = m$ and whenever $k_1, \ldots, k_{s_n}$ are the numerals $S(\ldots x_1 \text{ times } \ldots S(0)\ldots)$, $\ldots, S(\ldots x_m \text{ times } \ldots S(0)\ldots)$, resp., the "value of $\sigma_n(k_1, \ldots, k_{s_n})$" under Def. 2a is the numeral $S(\ldots \varphi(x_1, \ldots, x_m) \text{ times } \ldots S(0)\ldots)$. A similar remark applies to Def. 2b below.

---

[7]) In these operations we do not require that A and $B = C$ be equations and that σ be a functional variable, since $R_1 - R_3$ as stated when applied to equations generate equations. Thereby, our proof of IV is simplified.

[8]) In what follows, the word "recursive" (when not qualified by the adjective "primitive") will mean recursive under any one of the definitions 2a, 2b and 2c, except when the definition involved is mentioned explicitly (as is necessary in the course of establishing the theorems VI and IX on their equivalence).

We now show that Def. 2a is not more general than the following (which will later be proved equivalent to it):

Definition 2b. The functions $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ are *defined recursively* by E, if E is a system of equations in $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ such that for each i ($i = 1, \ldots, n$) and each set of numerals $k_1, \ldots, k_{s_i}$ there is exactly one numeral k (called the *value* of $\sigma_i(k_1, \ldots, k_{s_i})$) for which $E \vdash_{1,3} \sigma_i(k_1, \ldots, k_{s_i}) = k$. A function σ_n is *recursive* if there is an E of this description[9]).

For the system of equations $(E_1 \ldots E_n)$ of Def. 2a can be proved to be a system E for Def. 2b thus: Clearly, $(E_1 \ldots E_n)$ is a system of equations in $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, and for each i and set of numerals $k_1, \ldots, k_{s_i}$, $(E_1 \ldots E_n) \vdash_{1,3} \sigma_i(k_1, \ldots, k_{s_i}) = k$ where k is the value of $\sigma_i(k_1, \ldots, k_{s_i})$ under Def. 2a. It remains to be shown that $(E_1 \ldots E_n) \vdash_{1,3} \sigma_i(k_1, \ldots, k_{s_i}) = l$ for l a numeral only when $l = k$. Now each equation of $(E_1 \ldots E_n)$ is verifiable (for each replacement of its numerical variables by numerals) by use of the values under Def. 2a, since, on examination, the supposition of the contrary is found to conflict with the hypothesis that for given i and numerals $k_1, \ldots, k_{s_i}$ there is only one numeral k such that $E_1^*, \ldots, E_{i-1}^*, E_i \vdash_{1,2} \sigma_i(k_1, \ldots, k_{s_i}) = k$[9a]). Moreover, R_1 and R_3 applied to verifiable equations yield verifiable equations. Hence, if $(E_1 \ldots E_n) \vdash_{1,3} \sigma_i(k_1, \ldots, k_{s_i}) = l$ where $k_1, \ldots, k_{s_i}$, l are numerals, the values of $\sigma_i(k_1, \ldots, k_{s_i})$ and l must be the same, i. e. l must be the value k of $\sigma_i(k_1, \ldots, k_{s_i})$ under Def. 2a.

The set of operations R_1, R_3 may be replaced in Def. 2b by a set R_i' ($i = 0, 1, 2, \ldots$) of single-valued binary operations, defined over all pairs of equations as follows:

R_{3i}' : *to pass from* A *and* B *to* $S^{w_i}_{S(w_i)} A\Big|$.

R_{3i+1}': *to pass from* A *and* B *to* $S^{w_i}_{0} A\Big|$.

R_{3i+2}': *to pass from* A *and* $B = C$ *to the result of replacing the occurrence of* B *in* A *beginning with the* $i+1^{st}$ *symbol by* C, *if there is such an occurrence; otherwise, to* A *itself.*

For, under the conditions of Def. 2b, $E \vdash'_{0,1,2,\ldots} \sigma_i(k_1, \ldots, k_{s_i}) = l$ (l a numeral) when l is the value of $\sigma_i(k_1, \ldots, k_{s_i})$ under Def. 2b and only then (as is easily shown).

---

[9]) A more general definition would not be obtained by allowing under R_3 also the substitution of B for C, since E may be chosen to include $b = a$ whenever $a = b$ is included.

[9a]) Similarly, the equations of the system E of Def. 2b are verifiable by use of the values under Def. 2b, if they are of the form $\sigma(a_1, \ldots, a_s) = b$.

We now assign numbers to symbols, expressions, finite sequences of expressions, etc., by the Gödel method [*loc. cit.*[4]) S. 179—182], letting numbers correspond to symbols thus:

$$\text{“0”} \ldots 1,\ \text{“}S\text{”} \ldots 3,\ \text{“=”} \ldots 5,\ \text{“,”} \ldots 7,\ \text{“(”} \ldots 11,\ \text{“)”} \ldots 13,$$

$$\text{“}w_i\text{”} \ldots p_{i+7},\ \text{“}\varrho_i\text{”} \ldots p_{i+7}^2,$$

where p_i denotes the i^{th} prime number. Then if the numbers corresponding to $N_1, \ldots, N_k$ are $n_1, \ldots, n_k$, resp., the number corresponding to the sequence $N_1, \ldots, N_k$ is $p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k}$. Employing Gödel's notations (including the use of italics to indicate the correspondent for numbers of a given notion relating to expressions) and his methods of exhibiting the primitive recursiveness of functions and relations[9b]), we adopt 1—10 of his list, modifying 6, and define further primitive recursive functions and relations, as follows:

6. $n\,Gl\,x = \varepsilon\, y\,[y \leqq x \;\&\; x\,|\,(Pr(n))^y \;\&\; \overline{x\,|\,(Pr(n))^{y+1}}]$.

The finite sequence $n_1, \ldots, n_k$ of positive integers is represented by $p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k}$. Also, we may use the positive integer x to represent any sequence $n_1, \ldots, n_k$ of natural numbers such that $x = p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k}$. The modification in the definition of $n\,Gl\,x$ secures that $n\,Gl\,x$ always be the n^{th} member. The significances ascribed to $l(x)$, $x * y$, etc., refer only to the case $n_1, \ldots, n_k > 0$[10]).

11. $x \dot{-} y = \varepsilon\, z\,[z \leqq x \;\&\; x = y + z]$.

If $x \geqq y$, $x \dot{-} y = x - y$; if $x \leqq y$, $x \dot{-} y = 0$.

12. $\left[\frac{x}{y}\right] = \varepsilon\, z\,[z \leqq x \;\&\; (z+1)\, y > x]$.

13. $\text{Rem}\,(x, y) = x \dot{-} \left(\left[\frac{x}{y}\right]\right) y$.

14. $\text{Dy}\,(0) = 1$,

$$\text{Dy}\,(k+1) = \varepsilon\, z\,\Big[z \leqq 3^k \;\&\; \{[1\,Gl\,\text{Dy}\,(k) < 2\,Gl\,\text{Dy}\,(k) \;\&\; z = 2^{[1\,Gl\,\text{Dy}\,(k)]+1}\, 3^{2\,Gl\,\text{Dy}\,(k)}]$$
$$\vee\ [1\,Gl\,\text{Dy}\,(k) \geqq 2\,Gl\,\text{Dy}\,(k) > 0 \;\&\; z = 2^{1\,Gl\,\text{Dy}\,(k)}\, 3^{[2\,Gl\,\text{Dy}\,(k)] \dot{-} 1}]$$
$$\vee\ [2\,Gl\,\text{Dy}\,(k) = 0 \;\&\; z = 3^{[1\,Gl\,\text{Dy}\,(k)]+1}]\}\Big].$$

9b) Also see Th. Skolem, Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich, Videnskapsselskapets Skrifter 1923. I. Mat.-naturv. Kl., Nr. 6, S. 1—38.

10) Note that $l(1) = 0$ and $x * 1 = 1 * x = x\,[l(x) > 0]$.

Dy (k) represents the $k+1^{\text{st}}$ pair of numbers in the following order:

$$0\,0;\ 0\,1,\ 1\,1,\ 1\,0;\ 0\,2,\ 1\,2,\ 2\,2,\ 2\,1,\ 2\,0;\ldots.$$

15. $v \operatorname{Occ} x \equiv (En)\,[0 < n \leqq l(x) \,\&\, v = n\,Gl\,x]$.

The *symbol* v occurs in the *expression* x.

16. $$Su\,x\binom{n}{y} = \varepsilon z\,\{z \leqq [Pr(l(x)+l(y))]^{x+y} \,\&\, (Eu, v)\,[u, v \leqq x \,\&\, x = u * R(nGl\,x) * v \,\&\, z = u * y * v \,\&\, n = l(u)+1]\}.$$

„$Su\,x\binom{n}{y}$ entsteht aus x, wenn man an Stelle des n-ten Gliedes von x y einsetzt (vorausgesetzt, daß $0 < n \leqq l(x)$)“ (Gödel, S. 184, Nr. 27).

17. $$\operatorname{Sb}(0, x, v, y) = x,$$

$$\operatorname{Sb}(k+1, x, v, y) = \varepsilon z\Big[z \leqq \operatorname{Sb}(k, x, v, y) + Su\operatorname{Sb}(k, x, v, y)\binom{k+1}{y} \,\&\, \Big\{[k+1\,Gl\,x \neq v \,\&\, z = \operatorname{Sb}(k, x, v, y)] \vee \Big[k+1\,Gl\,x = v \,\&\, z = Su\operatorname{Sb}(k, x, v, y)\binom{k+1}{y}\Big]\Big\}\Big].$$

$\operatorname{Sb}(k, x, v, y)$ is the result of substituting the *expression* y for the *symbol* v throughout the first k *symbols* of the *expression* x (if $k \leqq l(x)$).

18. $S(x, v, y) = \operatorname{Sb}(l(x), x, v, y)$.

$S(x, v, y)$ corresponds to the operation $\mathfrak{S}_y^v x$ (if v is *a symbol* and x and y are *expressions*).

19. $$\operatorname{St}(x, n, a, y) = \varepsilon z\Big[z \leqq \big[Pr\,(l(x)+l(y))\big]^{x+y} \,\&\, \{(Ep, q)\,[p, q \leqq x \,\&\, x = p * a * q \,\&\, l(p) = n \,\&\, z = p * y * q] \vee [(p, q)\,[p, q \leqq x \,\&\, x = p * a * q \to l(p) \neq n] \,\&\, z = x]\}\Big].$$

$\operatorname{St}(x, n, a, y)$ is the result of substituting the *expression* y for the occurrence of the *expression* a in the *expression* x beginning with the $n+1^{\text{st}}$ *symbol*, if there is such an occurrence; otherwise, x itself.

20. $$R_0''(i, x, y) = S\big(x, Pr(i+7), R(3) * E(Pr(i+7))\big)$$

$$R_1''(i, x, y) = S(x, Pr(i+7), R(1)).$$

$$R_2''(i, x, y) = St\,(x, i, \varepsilon p\,[p \leqq y \,\&\, (Eq)\,[q \leqq y \,\&\, y = p * R(5) * q]], \varepsilon q\,[q \leqq y \,\&\, (Ep)\,[p \leqq y \,\&\, y = p * R(5) * q]]).$$

$R_0''(i,x,y)$, $R_1''(i,x,y)$, $R_2''(i,x,y)$ correspond to the operations R'_{3i}, R'_{3i+1}, R'_{3i+2}, resp.

21. $$R'(n,x,y) = \varepsilon z\Big[z \leqq R_0''\Big(\Big[\frac{n}{3}\Big],x,y\Big) + R_1''\Big(\Big[\frac{n \dot{-} 1}{3}\Big],x,y\Big) + R_2''\Big(\Big[\frac{n \dot{-} 2}{3}\Big],x,y\Big) \,\&\, \Big\{\Big[n\Big|3 \,\&\, z = R_0''\Big(\Big[\frac{n}{3}\Big],x,y\Big)\Big] \vee \Big[n+2\Big|3 \,\&\, z = R_1''\Big(\Big[\frac{n \dot{-} 1}{3}\Big],x,y\Big)\Big] \vee \Big[n+1\Big|3 \,\&\, z = R_2''\Big(\Big[\frac{n \dot{-} 2}{3}\Big],x,y\Big)\Big]\Big\}\Big].$$

$R'(n,x,y)$ corresponds to the operation R'_n.

22. $$Z(0) = R(1),$$
$$Z(n+1) = R(3) * E(Z(n)).$$

$Z(n)$ corresponds to the numeral $S(\ldots n \text{ times } \ldots S(0))$.

23. $$\mathrm{Eval}_p(n,y,x_1,\ldots,x_p) \equiv (Ex)\{x \leqq y \,\&\, y = R([Pr(n+7)]^2) * E(Z(x_1) * R(7) * \ldots * R(7) * Z(x_p)) * R(5) * Z(x)\}$$ (for a fixed number p).

y corresponds to an expression of the form $\varrho_n(x_1,\ldots,x_p) = x$, where x is a numeral.

24. $$\mathrm{Val}(y) = \varepsilon x\{x \leqq y \,\&\, (Em)[m \leqq y \,\&\, y = m * Z(x)]\}.$$

If y corresponds to an expression of the form $a = x$ where x is a numeral, then $\mathrm{Val}(y) = x$.

Supposing the function $\varphi(n,x,y)$ given, we define a series of functions as follows:

$$\psi(0,x,y) = x,$$
$$\psi(n+1,x,y) = \varphi(n,x,y).$$
$$\lambda(0,z) = l(z),$$
$$\lambda(k+1,z) = [k+1] \cdot \lambda(k,z)^2.$$
$$\tau(0,z) = z,$$
$$\tau(k+1,z) = \prod_{n=0}^{\lambda(k+1,z) \dot{-} 1} [Pr(n+1)] \exp\Big\{\psi\Big(\Big[\frac{n}{\lambda(k,z)^2}\Big], \Big[\Big[1\, Gl\, \mathrm{Dy}\,(\mathrm{Rem}\,(n, \lambda(k,z)^2))\Big] + 1\Big] Gl\,\tau(k,z), \Big[\Big[2\, Gl\, \mathrm{Dy}\,(\mathrm{Rem}\,(n,\lambda(k,z)^2))\Big] + 1\Big] Gl\,\tau(k,z)\Big)\Big\}.$$

$$\mu(n,z) = \varepsilon t\Big[t \leqq n \,\&\, n < \sum_{i=0}^{t} \lambda(i,z)\Big]$$
$$\nu(n,z) = \Big[\sum_{i=0}^{\mu(n,z)} \lambda(i,z)\Big] \dot{-} n.$$
$$\theta(z,m) = \nu(m,z)\, Gl\,\tau(\mu(m,z),z).$$

Then if z or $\tau(0,z)$ is the Gödel number for the sequence S_0 of the $\lambda(0,z)$ numbers $z_1,\ldots,z_l$ ($z_1,\ldots,z_l > 0$), $\tau(k+1,z)$ is the Gödel number

for the sequence S_{k+1} of the $\lambda(k+1, z)$ numbers $\psi(n, x, y)$, for $n = 0, \ldots, k$ and x and y ranging over S_k, in a certain order. Since $\psi(0, x, y) = x$, S_k includes all numbers in S_j for $0 \leqq j \leqq k$. When $l(z) > 0$, $\mu(n, z)$ and $\nu(n, z)$ as $n = 0, 1, 2, \ldots$ take successively the pairs of values $0\,\lambda(0, z), 0\,\lambda(0, z) - 1, \ldots, 0\,1$; $1\,\lambda(1, z), 1\,\lambda(1, z) - 1, \ldots, 1\,1; \ldots$. Hence $\theta(z, m)$ for $m = 0, 1, 2 \ldots$ are the members of $S_k (k = 0, 1, 2, \ldots)$. But these are (with repetitions) the numbers obtainable from $z_1, \ldots, z_l$ by zero or more applications of the operations $\varphi(0, x, y)$, $\varphi(1, x, y), \ldots$. Since $\theta(z, m)$ was defined in a manner which shows that it can be obtained from $\varphi(n, x, y)$ and known primitive recursive functions by substitutions and primitive recursions, we have proved:

I. *Given a function $\varphi(n, x, y)$, there is a function $\theta(z, m)$, primitive recursive in $\varphi(n, x, y)$*[11]*, such that, whenever $z = p_1^{z_1} \ldots p_l^{z_l} (z_1, \ldots, z_l > 0)$, then $\theta(z, 0), \theta(z, 1), \ldots$ is an enumeration (with repetitions) of the least class $C(x)$ such that $C(z_1), \ldots, C(z_l)$ and $(n, x, y)\,[C(x) \,\&\, C(y) \to C(\varphi(n, x, y))]$.*

We note here the following two theorems for later use:

II. *Given a class $A(x)$, a relation $x, y\,B\,z$, and a number k which belongs to the least class $C(x)$ such that $(x)\,[A(x) \to C(x)]$ and $(x, y, z)\,[C(x) \,\&\, C(y) \,\&\, x, y\,B\,z \to C(z)]$, there is a function $\eta(m)$, primitive recursive in $A(x)$ and $x, y\,B\,z$, such that $\eta(0), \eta(1), \ldots$ is an enumeration (with repetitions) of $C(x)$.*

$\eta(m)$ is the function $\theta(R(k), m)$ when $\theta(z, m)$ is chosen as in I taking for $\varphi(n, x, y)$ the function $\varepsilon z \Big[z \leqq n + k \,\&\, \Big\{\Big\{n \,\Big|\, 2 \,\&\, \Big[\Big(A\Big[\Big(\frac{n}{2}\Big)\Big] \,\&\, z = \Big[\frac{n}{2}\Big]\Big) \vee \Big(\overline{A\Big(\Big[\frac{n}{2}\Big]\Big)} \,\&\, z = k\Big)\Big]\Big\} \vee \Big\{n + 1 \,\Big|\, 2 \,\&\, \Big[\Big(x, y\,B\Big[\frac{n \dot{-} 1}{2}\Big] \,\&\, z = \Big[\frac{n \dot{-} 1}{2}\Big]\Big) \vee \Big(\overline{x, y\,B\Big[\frac{n \dot{-} 1}{2}\Big]} \,\&\, z = k\Big)\Big]\Big\}\Big]$[12]).

If a member k of a class $R(x)$ is given, the class is enumerated (allowing repetitions) by the function $\varepsilon y \big[y \leqq m + k \,\&\, \{(R(m) \,\&\, y = m) \vee (\overline{R(m)} \,\&\, y = k)\}\big]$, which is primitive recursive in the class. Similarly:

---

[11]) We call a function φ primitive recursive in other functions ψ_i, if φ becomes primitive recursive under the supposition that ψ_i are primitive recursive. $\prod_{n=0}^{\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})} \chi(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}, n)$ and $\sum_{n=0}^{\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})} \chi(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}, n)$ are primitive recursive in $\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ and $\chi(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}, n)$. Here we use $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ as abbreviations for $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_m$, $z_1, \ldots, z_l$, resp., and we shall continue to do so when convenient.

[12]) If $k = 0$, replace "$\lambda(0, z) = l(z)$" by "$\lambda(0, z) = 1$" in the definition of $\theta(z, m)$.

III. *Given a relation* $R(x, y)$ *and a number* k *such that* $(Ey)R(k, y)$, *there is a function* $\gamma(m)$, *primitive recursive in* $R(x, y)$, *such that* $\gamma(0), \gamma(1), \ldots$ *is an enumeration (allowing repetitions) of the class* $(Ey)R(x, y)$.

$$\gamma(m) = \varepsilon y\big[y \leqq [1\,Gl\,m] + k \;\&\; \{(R(1\,Gl\,m, 2\,Gl\,m) \;\&\; y = 1\,Gl\,m) \vee \overline{(R(1\,Gl\,m, 2\,Gl\,m)}\;\&\; y = k)\}\big].$$

By applying I, taking for $\varphi(n, x, y)$ the function $R'(n, x, y)$ (21), we obtain a primitive recursive function:

25. $H(z, m)$.

If z corresponds to a system of equations Z, $H(z, 0)$, $H(z, 1)$, ... is an enumeration (with repetitions) of the numbers corresponding to equations Y such that $Z \vdash'_{0, 1, 2, \ldots} Y$.

Now let $\varphi(\mathfrak{x})$ be a recursive function in the sense of Def. 2a or Def. 2b. Then there is a system E of equations defining φ recursively under Def. 2b; suppose that ϱ_a stands for φ in E. The system E has a Gödel number e. Using 23 and 25, if $R(\mathfrak{x}, y) \equiv \mathrm{Eval}_{r_a}(a, H(e, y), \mathfrak{x})$, then, by Def. 2b, $(\mathfrak{x})(Ey)R(\mathfrak{x}, y)$. Furthermore, using 24, if $\psi(y) = \mathrm{Val}(H(e, y))$, then $\varphi(\mathfrak{x}) = \psi(\varepsilon y[R(\mathfrak{x}, y)])$. We have now proved:

IV. *Every function recursive in the sense of Def.* 2a *(or Def.* 2b*) is expressible in the form* $\psi(\varepsilon y[R(\mathfrak{x}, y)])$, *where* $\psi(y)$ *is a primitive recursive function and* $R(\mathfrak{x}, y)$ *a primitive recursive relation and* $(\mathfrak{x})(Ey)R(\mathfrak{x}, y)$.

Thus the extension of general over primitive recursive functions consists only in that to substitutions and primitive recursions is added the operation of seeking indefinitely through the series of natural numbers for one satisfying a primitive recursive relation.

By Gödel S. 180 IV, $\varepsilon y[R(\mathfrak{x}, y)]$ is primitive recursive in $R(\mathfrak{x}, y)$ and any function $\chi(\mathfrak{x})$ which bounds y. Hence, in a certain sense, the length of the computation algorithm of a recursive function which is not also primitive recursive grows faster with the arguments than the value of any primitive recursive function[13]).

Given a relation $R(\mathfrak{x})$, the function $\varrho(\mathfrak{x})$ which is 0 or 1, according as $R(\mathfrak{x})$ holds or not, may be called the representing function of $R(\mathfrak{x})$. As with primitive recursions, we say that $R(\mathfrak{x})$ is recursive, if its representing function is recursive (under Def. 2a)[14]).

[13]) Besides the method, for demonstrating that a function is not primitive recursive (or not definable by given additional means, such as recursions with respect to n variables simultaneously), which consists in finding a lower bound for the values, we have the method, for demonstrating relationships of the opposite kind, which consists in finding an upper bound for the number of steps in the computation algorithm.

[14]) This is equivalent to saying that there is a recursive function $\varrho'(\mathfrak{x})$ such that $R(\mathfrak{x}) \sim [\varrho'(\mathfrak{x}) = 0]$, since then $\varrho(\mathfrak{x}) = 1 \dot{-} (1 \dot{-} \varrho'(\mathfrak{x}))$.

Let $R(\mathfrak{x}, y)$ be a recursive relation such that $(\mathfrak{x})(Ey)R(\mathfrak{x}, y)$. Then the function $\pi(\mathfrak{x}, y) = \prod_{i=0}^{y} \varrho(\mathfrak{x}, i)$, where $\varrho(\mathfrak{x}, y)$ is the representing function of $R(\mathfrak{x}, y)$, is recursive (under Def. 2a); and the function $\mu(\mathfrak{x}) = \varepsilon y[R(\mathfrak{x}, y)]$ satisfies the following relations in terms of $\pi(\mathfrak{x}, y)$:

$$\begin{aligned} &\sigma(0, \mathfrak{x}, y) = y, \\ (4)\qquad &\sigma(S(z), \mathfrak{x}, y) = \sigma\big(\pi(\mathfrak{x}, S(y)), \mathfrak{x}, S(y)\big), \\ &\mu(\mathfrak{x}) = \sigma\big(\pi(\mathfrak{x}, 0), \mathfrak{x}, 0\big). \end{aligned}$$

These equations (supplemented by the equations defining $\pi(\mathfrak{x}, y)$ recursively under Def. 2a) form a system E defining $\mu(\mathfrak{x})$ recursively under Def. 2a. Hence:

V. *If $R(\mathfrak{x}, y)$ is a recursive relation, and $(\mathfrak{x})(Ey)R(\mathfrak{x}, y)$, then $\varepsilon y[R(\mathfrak{x}, y)]$ is recursive (under Def. 2a).*

This shows that the converse of IV is true, and gives us as an operation of recursive definition the formation of $\varepsilon y[R(\mathfrak{x}, y)]$ from a recursive relation $R(\mathfrak{x}, y)$ such that $(\mathfrak{x})(Ey)R(\mathfrak{x}, y)$[15]). Also, the equivalence of Def. 2a and Def. 2b is now established:

VI. *The class of recursive functions under Def. 2b is identical with that under Def. 2a.*

For, as noted earlier, Def. 2b is not less general than Def. 2a, and now we have by IV and V that any function recursive under Def. 2b is expressible in the form $\psi(\mu(\mathfrak{x}))$ where $\psi(y)$ and $\mu(\mathfrak{x})$ are recursive under Def. 2a.

VII. *Let $R(\mathfrak{x}, y)$ be a relation such that for every $\mathfrak{x}$ $R(\mathfrak{x}, y)$ holds for infinitely many y's, and let $\nu(\mathfrak{x}, n)$ denote the n^{th} y such that $R(\mathfrak{x}, y)$ in order of magnitude. If $R(\mathfrak{x}, y)$ is recursive, then $\nu(\mathfrak{x}, n)$ is recursive.*

For $\nu(\mathfrak{x}, n)$ satisfies the relations $\nu(\mathfrak{x}, 0) = \varepsilon y[R(\mathfrak{x}, y)]$ and $\nu(\mathfrak{x}, S(n)) = \xi(\mathfrak{x}, \nu(\mathfrak{x}, n))$ where $\xi(\mathfrak{x}, z) = \varepsilon y[R(\mathfrak{x}, y) \,\&\, y > z]$, from which its recursiveness follows by use of V.

The converse of VII holds, since $R(\mathfrak{x}, y) \equiv (En)[n \leqq y \,\&\, \nu(\mathfrak{x}, n) = y]$, which is primitive recursive in $\nu(\mathfrak{x}, n)$.

---

[15]) By IV, the use of this operation repeatedly and with $R(\mathfrak{x}, y)$ a general recursive relation gives no extension of the class of functions obtainable by a single application of it with $R(\mathfrak{x}, y)$ primitive recursive.

We had already as an operation of recursive definition the formation of $\varepsilon y[R(\mathfrak{x}, y)]$ from a recursive relation $R(\mathfrak{x}, y)$ such that there is a recursive function $\chi(\mathfrak{x})$ for which $R(\mathfrak{x}, y) \to y \leqq \chi(\mathfrak{x})$ (by Gödel, S. 180, IV). This and the present result correspond to different methods of expressing $\varepsilon y[R(\mathfrak{x}, y)]$ recursively in terms of $\varrho(\mathfrak{x}, y)$.

Thus, omitting the parameters $\mathfrak{x}$, an infinite class is recursively enumerable without repetitions in order of magnitude if and only if it is recursive.

VIII. *If the function $\zeta(x)$ is recursive and takes infinitely many values, and $\eta(n)$ denotes the n^{th} in order of first occurrence in $\zeta(0), \zeta(1), \ldots$, then $\eta(n)$ is recursive.*

For $\eta(n) = \zeta(\nu(n))$ when $\nu(n)$ is chosen by VII for

$$R(y) \equiv (x)[x < y \to \zeta(x) \neq \zeta(y)].$$

Thus the recursive enumerability with repetitions of an infinite class implies its recursive enumerability without repetitions[16]).

§ 2.

The undecidability, in general, which systems of equations define recursive functions.

The definition of general recursive function offers no constructive process for determining when a recursive function is defined. This must be the case, if the definition is to be adequate, since otherwise still more general "recursive" functions could be obtained by the diagonal process.

In order to analyze the situation in detail, we utilize the correspondence of systems of equations E to numbers e, under which the problem, which systems E define functions recursively, becomes a number-theoretic one. We introduce for each particular value of n the following primitive recursive relation, where α_n denotes the least i for which $r_i = n$:

26. $$T_n(z, x_1, \ldots, x_n, y) \equiv \mathrm{Eval}_n(\alpha_n, H(z, y), x_1, \ldots, x_n).$$

The relation between the numbers and the recursive functions is simplified under the following definition:

Def. 2c. The number e *defines* (*recursively*) the function $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{Val}\big(H(e, \varepsilon y[T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y)])\big)$ if $(x_1, \ldots, x_n)(Ey)\, T_n(e, x_1, \ldots, x_n, y)$. A function $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ is *recursive* if there is an e of this description.

IX. *The class of recursive functions under Def.* 2c *is identical with that under Def.* 2a (2b).

For if $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ is recursive under Def. 2a (2b), the system of equations which defines φ recursively under Def. 2a (2b) has, after changing the notation if necessary so that φ is represented in it by ϱ_{α_n}, a Gödel number e which defines φ recursively under Def. 2c (cf. the proof of IV); and conversely, every function recursive under Def. 2c is recursive under Def. 2a (2b) by V (V and VI).

---

[16]) In XV below is given an example $(Ey)\, T_1(x, x, y)$ of a non-recursive class which by III is recursively enumerable.

If a number e defines a function $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ recursively under Def. 2c and is the Gödel number of a system E of equations, E is in general a system determining a multiple-valued function[17]), not necessarily a system defining a function recursively under Def. 2a or 2b.

What follows is stated for $n = 1$, and would hold similarly for any other fixed n[18]).

X. *If $\theta(x)$ is a recursive function, and $(x)(Ey)T_1(\theta(x), x, y)$, there is a number f such that $(x)(Ey)T_1(f, x, y)$ and $\overline{(Eq)[\theta(q) = f]}$.*

For then $\eta(x) = \mathrm{Val}\big(H(\theta(x), \varepsilon y[T_1(\theta(x), x, y)])\big) + 1$ is a recursive function (by V) such that, for every x for which $\theta(x)$ defines a function φ_x of one variable recursively, $\eta(x) = \varphi_x(x) + 1$ (by Def. 2c). Let f be a number defining $\eta(x)$ recursively. By Def. 2c, $(x)(Ey)T_1(f, x, y)$. Also, if there were a q such that $\theta(q)$ is f, we would have $\eta(x) = \varphi_q(x)$, which contradicts the preceding equality when x takes the value q.

In the case that for every x $\theta(x)$ is the Gödel number of a system E_x of equations defining a function φ_x of one variable recursively (φ_x being represented in E_x by ϱ_0), we have that the function $\varphi_x(x) + 1$ is recursive. Thus the diagonal procedure, applied to a sequence of recursive functions which are defined by systems of equations of which the Gödel numbers form a recursive sequence, does not lead outside the class of recursive functions.

XI. *The numbers which define functions $\varphi(x)$ recursively are not recursively enumerable, i. e. there is no recursive function $\theta(m)$ such that $(m, x)(Ey)T_1(\theta(m), x, y)$ and $(z)\{(x)(Ey)T_1(z, x, y) \to (Em)[\theta(m) = z]\}$.*

For, given any recursive function $\theta(m)$ such that $(m, x)(Ey)T_1(\theta(m), x, y)$, then a fortiori $(x)(Ey)T_1(\theta(x), x, y)$, and by X there is a number f such that $(x)(Ey)T_1(f, x, y)$ but $\overline{(Em)[\theta(m) = f]}$.

XII. *The class $(x)(Ey)T_1(z, x, y)$ of the numbers z which define functions $\varphi(x)$ recursively is not recursive.*

For if it were recursive, it would be enumerated by a recursive function, contradicting XI.

Indeed, given any recursive class $R(z)$ such that $(z)\{R(z) \to (x)(Ey)T_1(z, x, y)\}$, a number f such that $(x)(Ey)T_1(f, x, y)$ but $\overline{R(f)}$ is obtained by X, when $\theta(x) = \varepsilon y\big[(R(x) \,\&\, y = x) \vee (\overline{R(x)} \,\&\, y = k)\big]$, where k is any number such that $(x)(Ey)T_1(k, x, y)$.

---

[17]) Then $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ is that one of the values x determined by E for which the Gödel number of $\varrho_{a_n}(x_1, \ldots, x_n) = x$ occurs earliest in the list $H(e, 0), H(e, 1), \ldots$.

[18]) Since the means given for passing from definitions under Def. 2a (2b) to definitions under Def. 2c, and vice versa, are effective, the problem which we now study (which numbers define functions recursively) is equivalent to the one first proposed (which systems of equations define functions recursively).

The definability of a non-recursive class by use of quantifiers applied to a recursive relation gives the existence of undecidable number-theoretic propositions in certain formal logics from the consideration (somewhat different from that employed by Gödel) that otherwise the logics could be used to construct recursive definitions of the class.

XIII. *Given a formal logic S, suppose that the propositions $(x)(Ey)T_1(z,x,y)$ $(z = 0, 1, 2, \ldots)$ can be expressed in S by formulas A_z, and that numbers can be assigned to the formulas of S, in such a fashion that* (1) *to distinct formulas are assigned distinct numbers,* (2) *the class $A(x)$ of the numbers assigned to axioms, and the relation $x, y\,B\,z$ between numbers of being assigned to formulas in the relation of immediate consequence, are recursive,* (3) *z is a recursive function $\beta(a_z)$ of the number a_z of A_z,* (4) *the class $C(n)$ of the numbers a_z is recursive,* (5) *if A_z is provable, then $(x)(Ey)T_1(z,x,y)$ is true. Then there are z's for which A_z is not provable although $(x)(Ey)T_1(z,x,y)$ is true*[19]).

For suppose that there is a number k such that A_k is provable. Then, by (2) and II, given a_k, there is a recursive function $H(m)$ which enumerates the numbers assigned to provable formulas of S; and, by (1), (3) and (4), the recursive function $\theta(y) = \beta\big(\varepsilon m\,[\{C(H(y)) \,\&\, m = H(y)\} \vee \{\overline{C(H(y))} \,\&\, m = a_k\}]\big)$ enumerates the z's for which A_z is provable. By (5), $(x)(Ey)T_1(\theta(x),x,y)$.

Hence, by X, there is a number f such that $\overline{(Eq)[\theta(q) = f]}$ (which implies that A_f is not provable in S) and $(x)(Ey)T_1(f,x,y)$[20]).

---

[19]) The relation of "immediate consequence" we suppose to be a given relation between a formula and a pair of formulas, and the class of "provable formulas" to be the least class which contains the given class of "axioms" and has the property that Z is provable whenever X and Y are provable and Z is an immediate consequence of X and Y.

If more details of the structure of S were suitably specified, condition (5) could be given a more metamathematical appearance, such as the following (analogous to Gödel's condition of ω-Widerspruchsfreiheit, S. 187): for no relation $F(x,y)$ and natural number k are all of the formulas $F(k,0), F(k,1), \ldots, \overline{(Ex)(y)F(x,y)}$ provable. On the further assumption that for no relation $F(x,y)$ and sequence of natural numbers $k_0, k_1, \ldots$ are all of the formulas $F(0,k_0), F(1,k_1), \ldots, \overline{(x)(Ey)F(x,y)}$ provable, the conclusion could be given the form, that there are z's for which A_z is formally undecidable, i. e. for which neither A_z nor $\bar{A}_z$ is provable. (The conditions need to be assumed merely for certain relations $F(x,y)$.)

[20]) The undecidable proposition A_f can be effectively constructed for a given logic, whenever the number a_k, recursive definitions of $A(x)$; $x, y\,B\,z$; $\beta(y)$ and $C(n)$, and effective means of constructing A_f from f, are given.

Whenever the supposition in this proof, that there is a k such that A_k is provable, is not realized, the theorem holds trivially.

XIV. *The function* $\varepsilon y[T_1(x, x, y)]$ *is non-recursive*[21]).

For, if $\varrho(x)$ is any recursive function, the function $\eta(x) = \mathrm{Val}\left(H(x, \varrho(x))\right) + 1$ is recursive, and $\eta(x) = \mathrm{Val}\left(H(f, \varepsilon y[T_1(f, x, y)])\right)$ holds for any number f defining $\eta(x)$ recursively. Now if $\varrho(f) = \varepsilon y[T_1(f, f, y)]$, two different values are obtained for $\eta(f)$. Hence $\varrho(f) \neq \varepsilon y[T_1(f, f, y)]$. Thus $\varepsilon y[T_1(x, x, y)]$ differs from each recursive function for some value of x. Note also that $(Ey)\, T_1(f, f, y)$.

XV. *The class* $(Ey)\, T_1(x, x, y)$ *is non-recursive.*

Thus non-recursive functions can be defined by the schema

$$\tau(x) = \begin{cases} 0 \text{ if } (Ey)\, R(x, y) \\ 1 \text{ if } \overline{(Ey)\, R(x, y)} \end{cases},$$

where $R(x, y)$ is primitive recursive. This follows from XIV, since, if $(Ey)\, R(k, y)$ and $\lambda(x) = [1 \dot{-} \tau(x)] \cdot x + \tau(x) \cdot k$, then $\varepsilon y[R(x, y)] = [1 \dot{-} \tau(x)] \cdot \varepsilon y\left[R(\lambda(x), y)\right]$, which is recursive if $\tau(x)$ is recursive.

To analyze the situation more fully, let $S(x)$ be any recursive class such that $(x)\{S(x) \to (Ey)\, T_1(x, x, y)\}$, and $\sigma(x)$ the representing function of $S(x)$. If k is any number which defines a function recursively, then $(Ey)\, T_1(k, k, y)$, and we set $\mu(x) = [1 \dot{-} \sigma(x)] \cdot x + \sigma(x) \cdot k$ and $\varrho(x) = [1 \dot{-} \sigma(x)] \cdot \varepsilon y\left[T_1(\mu(x), \mu(x), y)\right]$. $\varrho(x)$ is recursive, and as in the proof of XIV, there is an f such that $\varrho(f) \neq \varepsilon y[T_1(f, f, y)]$ and $(Ey)\, T_1(f, f, y)$. If $S(f)$, then $\sigma(f) = 0$ and $\varrho(f) = \varepsilon y[T_1(f, f, y)]$. Hence $\overline{S(f)}$.

XVI. *The class* $\overline{(Ey)\, T_1(x, x, y)}$ *is not recursively enumerable*[22]).

For by III, the complementary class $(Ey)\, T_1(x, x, y)$ is enumerated by a recursive function $\gamma(m)$. Now if $\overline{(Ey)\, T_1(x, x, y)}$ is enumerated by $\varkappa(m)$ and we set $\xi(m) = \varepsilon n\left\{\left[m \,\middle|\, 2 \,\&\, n = \gamma\left(\left[\frac{m}{2}\right]\right)\right] \vee \left[m \dot{+} 1 \,\middle|\, 2 \,\&\, n = \varkappa\left(\left[\frac{m \dot{-} 1}{2}\right]\right)\right]\right\}$, we have $(Ey)\, T_1(x, x, y) \equiv \varepsilon m[\xi(m) = x] \,|\, 2$, which would contradict XV if $\varkappa(m)$ were recursive.

XVII. *Given a recursive relation* $R(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, *there is a number* e *such that* $(\mathfrak{x})(E\mathfrak{y})\, R(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \equiv (x)(Ey)\, T_1(e, x, y)$. *Given a recursive relation* $R(\mathfrak{y})$, *there is a number* e *such that* $(E\mathfrak{y})\, R(\mathfrak{y}) \equiv (Ey)\, T_1(e, e, y)$[23]).

---

[21]) We recall that $\varepsilon y[R(x, y)] = 0$ when $\overline{(Ey)\, R(x, y)}$.

[22]) The proof given here is non-constructive. The writer has a constructive proof that for certain recursive relations $R(x, y)$ the class $\overline{(Ey)\, R(x, y)}$ is not recursively enumerable. From that proof, the existence in certain formal logics of undecidable propositions involving only one quantifier (which can be concluded non-constructively from present results) is obtainable in the same manner as XIII.

[23]) From the great generality of the problems, which e's define recursively functions of one variable, and which e's "determine recursively" the e^{th} value of a function of one variable, as displayed by this theorem, the result, that they are not "effectively" soluble, could have been anticipated.

For, to every proposition of the form $(\mathfrak{x})(E\mathfrak{y})R(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$, there is an equivalent proposition of the form $(x)(Ey)R(x,y)$ obtained by utilizing the recursive enumerability of n-tuples of natural numbers, or introducing fictive variables[24]); and the Gödel number e of the system E of equations which defines $\varepsilon y[R(x,y)]$ in the proof of V on the supposition that $(x)(Ey)R(x,y)$ satisfies the present theorem. Similarly, $(E\mathfrak{y})R(\mathfrak{y})$ has an equivalent $(Ey)R(y)$, and for e we may take the Gödel number of the equations defining $\varepsilon y[R(y)\,\&\,x=x]$ on the supposition that $(Ey)R(y)$[25]).

My thanks are due to Prof. Paul Bernays for the suggestion of improvements in the presentation.

---

[24]) E. g. $(x_1,x_2,x_3)R(x_1,x_2,x_3) \equiv (x)(Ey)[R(1Gl\,x, 2Gl\,x, 3Gl\,x)\,\&\,y=y]$.

[25]) XV, XVI, and XVII are similar, respectively, to results obtained in a different connection by Prof. Alonzo Church (An unsolvable problem of elementary number theory, see Bull. Amer. Math. Soc. Abstract 41—5—205), Dr. J. B. Rosser (unpublished), and the present writer (A theory of positive integers in formal logic, Part II, Amer. Jour. Math. 57 No. 2, pp. 230 ff.).

(Eingegangen am 7. 7. 1935.)

Über reelle geschlossene Raumkurven vierter Ordnung.

Von

Peter Scherk in Prag*).

Einleitung.

Es hat sich in den letzten Jahrzehnten herausgestellt, daß zahlreiche Sätze über reelle Gebilde der algebraischen Geometrie gültig bleiben, wenn diese Gebilde nicht mehr als algebraisch, ja nicht einmal als analytisch vorausgesetzt werden, wenn nur gewisse Begriffe, wie Ordnung, Klasse, Rang usw. in passender Weise übertragen werden. Im Mittelpunkte dieser „metaalgebraischen" Geometrie, deren schönste Ergebnisse C. Juel zu verdanken sind, steht der Ordnungsbegriff [1]). Man versteht unter der Ordnung eines Bogens oder einer Kurve im projektiven Raum die Maximalzahl ihrer Schnittpunkte mit einer Ebene. Im folgenden sollen geschlossene Raumkurven vierter Ordnung untersucht werden, also Kurven, die mit keiner Ebene mehr als vier, mit wenigstens einer Ebene aber genau vier Punkte gemeinsam haben. Es zeigt sich, und das ist das Hauptresultat der Arbeit, daß diese Kurven unter später anzugebenden Stetigkeitsannahmen in vier Typen zerfallen, die sich kurz so beschreiben lassen:

Zum ersten Typ I gehören diejenigen Kurven, die von jeder Ebene geschnitten werden, die also durch keine Kollineation ganz ins Endliche gebracht werden können. Sie sind überall im selben Sinn gewunden, haben also keinen Wendepunkt; hierunter soll (vorbehaltlich einer späteren genauen Definition) ein Kurvenpunkt verstanden werden, dessen Schmiegebene von der Kurve nicht durchsetzt wird, in dem also die Windung das Vorzeichen ändert. Die übrigen Kurven, die also von wenigstens einer Ebene nicht getroffen werden und sich demnach durch eine Kollineation ganz ins Endliche bringen lassen, zerfallen ihrerseits in drei Typen. Betrachtet man die konvexe Hülle einer solchen Kurve, so er-

*) Diese Arbeit ist von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen als Dissertation angenommen worden.

[1]) Eine Übersicht über die Juelschen Arbeiten und seine wichtigsten Ergebnisse, sowie eine Einführung in seine Gedankengänge, findet sich in der Abhandlung von Montel, Sur la géométrie finie et les travaux de M. C. Juel, Bull. des sc. math. (2) 48 (1924), S. 109.

geben sich folgende Möglichkeiten: II. 1. die Kurve verläuft ganz auf dem Rande ihrer konvexen Hülle; II. 2. ein Teilbogen verläuft im Innern; II. 3. zwei getrennte Teilbogen verlaufen im Innern der konvexen Hülle. Im Falle II. 1. hat die Kurve vier Wendepunkte und keine Trisekante; in den Fällen II. 2. und II. 3. hat sie zwei bzw. keine Wendepunkte, und durch jeden innerhalb der kleinsten konvexen Hülle gelegenen Kurvenpunkt geht genau eine Trisekante. Hierbei verstehen wir unter einer Trisekanten eine Gerade, welche die Kurve in drei Punkten trifft.

Diese Einteilung enthält die der nicht-ausgearteten rationalen Raumkurven der vierten algebraischen Ordnung als Spezialfall[2]*; es zeigt sich also, daß die Zulassung nicht-algebraischer und sogar nicht-analytischer Kurven vierter Ordnung zu keinen wesentlich neuen Kurventypen führt.*

Es sind mehrere Einzelheiten des obigen Resultats bereits bekannt. Bei Juel[3]) findet sich — allerdings unter teilweise etwas engeren Voraussetzungen — eine Reihe von Sätzen über Raumkurven vierter Ordnung. Diese Sätze beziehen sich wieder hauptsächlich auf zwei speziellere Klassen dieser Kurven, nämlich einerseits auf die Schnittkurven von zwei konvexen Kegeln, andererseits auf Kurven, die auf einem einschaligen Hyperboloid verlaufen. Die Kurven vom obigen Typ I gehören zu einer Klasse von Kurven beliebiger Ordnung n, die von Mohrmann[4]) eingehend untersucht worden ist. Ferner hat Haupt[5]) sehr allgemeine Untersuchungen über Raumkurven vierter Ordnung angestellt. Für die hier betrachteten Kurven läßt sich aus einem seiner Ergebnisse entnehmen, daß die Anzahl der Wendepunkte höchstens vier ist[6]), was sich hier auf anderem Wege ergeben wird.

Haupthilfsmittel der vorliegenden Untersuchung ist diejenige stetige Abbildung einer Kurve vierter Ordnung auf sich, die entsteht, wenn jedem Kurvenpunkt P der eindeutig bestimmte Punkt zugeordnet wird, in dem die Schmiegebene in P die Kurve noch einmal schneidet. Die vier genannten Typen unterscheiden sich durch den Verlauf dieser Abbildung, der in allen Fällen genau beschrieben werden kann. Die Ab-

---

[2]) Rohn, Die Raumkurven vierter Ordnung zweiter Spezies II, Ber. Verh. d. Sächs. Akad. Leipzig 43 (1891), S. 4 ff.

[3]) Juel, Om ikke-analytiske Kurver, Danske Vid. Selsk. Skr. (7) 1 (1906), S. 324 ff.

[4]) Mohrmann, Gewundene Kurven vom Maximalindex, Gött. Nachrichten 1916, S. 194 f.; Gewundene reelle Kurvenzüge beliebig hoher Ordnung ohne reelle Singularitäten, Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss. 1916, S. 201 ff.; Über algebraische und nichtalgebraische gewundene Kurven n-ter Ordnung vom Maximalindex, Math. Annalen 78 (1917), S. 171 ff.

[5]) Haupt, Ein Satz über die reellen Raumkurven vierter Ordnung und seine Verallgemeinerung, Math. Annalen 108 (1933), S. 126 ff.

[6]) a. a. O. [5]) S. 139.

bildung ist bereits von Juel, jedoch nur zur Untersuchung der Kurven vierter Ordnung auf einem Hyperboloid, herangezogen worden.

An dieser Stelle möchte ich noch Herrn Dr. Fenchel für seine Anregungen und Verbesserungsvorschläge bei der Abfassung der Arbeit danken.

§ 1.

Definitionen, Voraussetzungen und Hilfssätze.

Unter einer Kurve bzw. einem Bogen soll hier ein eineindeutiges und stetiges Bild der Kreisperipherie bzw. der offenen Strecke verstanden werden. Die einer Kurve oder einem Bogen angehörenden Punkte werden gleichmäßig als Kurvenpunkte bezeichnet.

Die Punkte eines Bogens seien eineindeutig und stetig auf einen Parameter s bezogen. Sind keine Irrtümer möglich, so bezeichnen wir den betreffenden Kurvenpunkt einfach mit s. Bei einer Kurve soll die Parameterdarstellung periodisch und im kleinen eineindeutig und stetig sein.

Die Ordnung einer Kurve oder eines Bogens war schon oben definiert. Da durch irgend drei Kurvenpunkte wenigstens eine Ebene hindurchgeht, ist sie mindestens drei.

In jedem Punkt einer Kurve endlicher Ordnung existieren die vordere und die hintere Tangente und, von höchstens abzählbar vielen Punkten abgesehen, sogar die Tangente[7]). Wir schränken nun die zu betrachtende Kurvenklasse dadurch ein, daß wir voraussetzen: *Die Tangente existiert in allen Kurvenpunkten, und die Gerade durch zwei beliebige Kurvenpunkte, welche gegen einen dritten konvergieren, konvergiert gegen die Tangente im Grenzpunkt.* Hierin ist die Stetigkeit der Tangente enthalten[8]), und durch die zweite Forderung werden Spitzen der Kurve ausgeschlossen. Wie man sich leicht überzeugt, kann eine Kurve vierter Ordnung höchstens

---

[7]) Vgl. z. B. A. Rosenthal, Über Kontinua von endlicher Ordnung, Journ. reine angew. Math. **167** (1932), S. 270—273, insbes. S. 273; ferner A. Marchaud, Sur les continus d'ordre borné, Acta math. **55** (1930), S. 67—115, insbes. S. 83—84; O. Haupt, Ein Satz über die reellen Raumkurven vierter Ordnung und seine Verallgemeinerung, Math. Annalen **108** (1933), S. 126—142, insbes. S. 131.

[8]) Für Kurven und Bögen, die aus endlich vielen Bögen dritter Ordnung zusammengesetzt sind, also [nach Haupt l. c. [1])] für Kurven vierter Ordnung läßt sich aus der Existenz der Tangente allein ihre Stetigkeit folgern. Entsprechendes gilt für die Schmiegebene. Vgl. hierzu z. B. Marchaud l. c. [1]), sowie I. Sauter, Über die Stetigkeit der Tangentialschmieghalbräume eines Bogens n-ter (Realitäts-) Ordnung im projektiven R_n [S.-B. physik.-med. Soz. Erlangen **65** (1934), S. 189—190].

eine Spitze besitzen, und die C_4 mit Spitze sind eingehend von Juel[9]) untersucht worden.

Es sei s_0 ein Kurvenpunkt und t^+ die vordere Tangente in s_0. Ist dann s ein von s_0 verschiedener Kurvenpunkt vor s_0 und ε die Ebene durch s und t^+, und strebt ε, wenn s von vorn gegen s_0 strebt, gegen eine Grenzebene, so heißt diese die vordere Schmiegebene. Entsprechend definiert man die hintere Schmiegebene. Nun gilt für eine beliebige Kurve endlicher Ordnung, daß sie in jedem Punkt eine vordere und eine hintere Schmiegebene und, von höchstens abzählbar vielen Punkten abgesehen, sogar eine Schmiegebene schlechthin besitzt[10]). Wir setzen voraus: *Die Schmiegebene existiert in allen Kurvenpunkten, und eine Ebene durch drei beliebige gegen einen Punkt konvergierende Kurvenpunkte konvergiert gegen die Schmiegebene im Grenzpunkt.* Hierin ist die Stetigkeit der Schmiegebene enthalten[11]), und es folgt, daß auch die Ebene durch die Tangente in einem Punkt und einen weiteren Punkt, wenn diese beiden Punkte gegen einen dritten rücken, gegen die Schmiegebene im Grenzpunkt konvergiert; ferner werden, wie wir jetzt zeigen wollen, durch die zweite Forderung gewisse Singularitäten ausgeschlossen.

Eine von der Schmiegebene verschiedene, durch die Tangente eines Kurvenpunktes gehende Ebene werde kurz als *Tangentialebene* in diesem Punkt bezeichnet. Wir wollen zunächst beweisen: *Jede Tangentialebene in einem Kurvenpunkt ist Stützebene für eine Umgebung des Punktes*, d. h. ein genügend kleiner, den Punkt im Inneren enthaltender Teilbogen liegt ganz auf einer Seite der Tangentialebene. Es sei s_0 der Kurvenpunkt, ε die Tangentialebene. Wir projizieren die Kurve auf die Schmiegebene in s_0, und zwar in Richtung der in ε liegenden Kurvennormalen. Die Projektion berührt dann die Tangente und liegt in der Umgebung von s_0 ganz auf einer Seite der Tangente. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so gäbe es eine Folge (gegen die Tangente konvergierender) Geraden, von denen jede die Projektion in der Nähe von s_0 dreimal träfe. Diejenigen durch diese Geraden gehenden Ebenen, die der genannten Kurvennormalen parallel sind, müßten auf Grund der obigen Voraussetzung gegen die Schmiegebene und andererseits auf Grund ihrer Konstruktion gegen die Tangentialebene ε konvergieren.

Die Schmiegebene eines Kurvenpunktes ist also die einzige Tangentialebene, die von der Kurve in dem betreffenden Punkt durchsetzt werden kann. Wird die Schmiegebene durchsetzt, so nennen wir den

---

[9]) C. Juel, Beispiele von Elementarkurven und Elementarflächen. Atti Congr. internaz. Matem. Bologna 4 (1928), S. 195—215.

[10]) Vgl. die in Fußnote [1]) angegebenen Arbeiten von Marchaud und Haupt.

[11]) Vgl. Fußnote [2]).

Kurvenpunkt einen *gewöhnlichen Punkt*; ist auch die Schmiegebene Stützebene für eine Umgebung, so heiße der Punkt ein *Wendepunkt*. Die einzigen „Singularitäten", die unter unseren Annahmen auftreten können, sind somit Wendepunkte.

Aus der eben bewiesenen Eigenschaft der Tangentialebenen folgt insbesondere, daß die rektifizierende Ebene (d. h. die zur Schmiegebene senkrechte Tangentialebene) für eine Umgebung des Berührungspunktes Stützebene ist.

Wir betrachten nun bis auf weiteres Bögen vierter Ordnung im euklidischen Raum. Ist s ein beliebiger Punkt eines solchen Bogens, so kann man, wie eben gezeigt, von demjenigen durch die rektifizierende Ebene bestimmten Halbraum sprechen, in dem die Umgebung des Kurvenpunktes verläuft. Dieser Halbraum heiße kurz der positive *Halbraum*, die in ihm gelegene Halbebene der Schmiegebene die *positive Schmieghalbebene*, die andere die *negative*. Es ist nun unmittelbar zu sehen, daß die positive Schmieghalbebene unter den obigen Annahmen stetig vom Kurvenpunkt abhängt. Denn in einem Punkt, in dem sie auf die andere Seite der rektifizierenden Ebene hinüberwechselte, könnte die rektifizierende Ebene nicht Stützebene sein.

Wird auf der Kurve und damit auch auf jeder Tangente ein Durchlaufungssinn (etwa der Sinn wachsender Parameterwerte) gewählt, so läßt sich jedem gewöhnlichen Kurvenpunkt ein Schraubungssinn (oder Windungsvorzeichen) in folgender Weise zuschreiben: Durch die positive Schmieghalbebene wird der positive Halbraum in zwei Viertelräume zerlegt. Beim Passieren des gewöhnlichen Kurvenpunktes im gewählten Durchlaufungssinn geht die Kurve von einem dieser Viertelräume in den anderen über und bestimmt dadurch einen Drehsinn um die Tangente (nämlich den Sinn der kürzeren Drehung des ersten Viertelraums in den zweiten). Der Schraubungssinn soll nun als positiv oder negativ bezeichnet werden, je nachdem ob dieser Drehsinn zusammen mit der positiven Tangentenrichtung eine Rechts- oder Linksschraubung bestimmt. Eine einfache Stetigkeitsbetrachtung lehrt, daß sich dieses Vorzeichen beim Durchlaufen der Kurve in den Wendepunkten und nur in diesen ändert.

Ein Kurvenpunkt werde nach Haupt[12]) als *Punkt n-ter Ordnung* bezeichnet, wenn alle genügend kleinen Umgebungen des Punktes Bögen von genau n-ter Ordnung sind. Die Punkte einer Kurve vierter Ordnung sind offenbar von dritter oder vierter Ordnung, *und zwar sind die Punkte dritter Ordnung gewöhnliche Punkte und die von vierter Ordnung Wende-*

[12]) Vgl. z. B. O. Haupt, Über die Struktur reeller Kurven, Journ. reine angew. Math. **164** (1931), S. 50—60, insbes. S. 51.

punkte. Um dies einzusehen, bemerke man folgendes: Es sei s_0 ein Punkt dritter Ordnung und B ein s_0 im Innern enthaltender (abgeschlossener) Teilbogen dritter Ordnung, der so klein ist, daß er von der Schmiegebene des Punktes s_0 nur in s_0 getroffen wird. Durch drei beliebige innere Punkte von B lege man die Ebene ε. Diese wird in allen drei Punkten von B geschnitten (d. h. durchsetzt, nicht gestützt)[13]). Die Endpunkte von B liegen also auf verschiedenen Seiten von ε. Wenn nun die drei Schnittpunkte gegen den Punkt s_0 des Bogens zusammenrücken, so konvergiert ε gegen die Schmiegebene ε_0 im Grenzpunkt s_0. Die Endpunkte von B müssen dann auch auf verschiedenen Seiten der Schmiegebene liegen, da ε beim Grenzübergang keinen Endpunkt passieren kann. Jeder Punkt eines Bogens dritter Ordnung, also jeder Punkt dritter Ordnung ist somit gewöhnlicher Punkt. Ferner haben wir zu zeigen, daß unter unseren Annahmen jeder Punkt vierter Ordnung ein Wendepunkt ist. Sei also s_0 ein Punkt vierter Ordnung und B_ν eine Folge von Teilbögen vierter Ordnung, die s_0 im Inneren enthalten und sich auf s_0 zusammenziehen. Zu jedem Bogen B_ν gibt es eine Ebene ε_ν, die B_ν in vier Punkten schneidet[14]). Die Endpunkte von B_ν liegen also auf derselben Seite von ε_ν. Die Ebenen ε_ν konvergieren gegen die Schmiegebene ε_0 in s_0. Da ε_0 nur endlich viele Punkte mit der Kurve gemein hat, wird B_ν für genügend großes ν von ε_0 nur in s_0 getroffen. Wäre nun ε_0 nicht Stützebene eines solchen B_ν, so lägen die Endpunkte von B_ν auf verschiedenen Seiten von ε_0, also auch von allen zu ε_0 genügend benachbarten Ebenen ε_ν, im Widerspruch zum oben festgestellten.

Nach Haupt[15]) setzt sich jede Kurve vierter Ordnung aus einer beschränkten Anzahl von Bögen dritter Ordnung zusammen. Da höchstens die Endpunkte der zusammensetzenden Bögen dritter Ordnung Punkte von vierter Ordnung, also Wendepunkte sein können, *ist die Zahl der Wendepunkte beschränkt und,* wie aus den obigen Betrachtungen über den Schraubungssinn folgt, *notwendig gerade.* Ferner ist in dem genannten Satz von Haupt enthalten, daß es keine „einseitigen" Punkte vierter Ordnung geben kann, d. h., daß an einen Punkt vierter Ordnung nach jeder Seite ein Bogen dritter Ordnung grenzt. Noch anders ausgedrückt: *Wird eine genügend kleine Umgebung eines Punktes s_0 der Ordnung 4 von einer Ebene in vier Punkten getroffen, so liegen nicht alle vier Punkte auf derselben Seite von s_0.*

---

[13]) Vgl. z. B. O. Haupt, Über Kontinua von beschränkter Ordnung, Sitz.-Ber. Bayer. Akad. Wiss. 1931, S. 49—61, insbes. S. 54.

[14]) Marchaud, l. c. [1]) S. 79; Haupt, l. c. S. 129.

[15]) Haupt, l. c. [1]).

Schließlich wollen wir die Treffpunkte einer Kurve vierter Ordnung mit einer Ebene in folgender Weise mit *Multiplizitäten* versehen: Es sei ε eine Ebene, die mit der Kurve den Punkt s gemein haben möge. Wir zählen dann s *einfach*, wenn ε die Tangente in s nicht enthält, *zweifach*, wenn ε Tangentialebene in s ist, *dreifach* bzw. *vierfach*, wenn ε Schmiegebene in s, und s gewöhnlicher bzw. Wendepunkt ist. Wie aus dem obigen hervorgeht, gibt es zu einer Ebene, die in s in diesem Sinne ν-fach trifft, beliebig benachbarte Ebenen, die in der Umgebung von s in genau ν Punkten schneiden. Wir nehmen nun noch eine letzte Einschränkung der zu betrachtenden Kurven C_4 vor, indem wir verlangen, *daß die Kurven im Sinne der eben eingeführten Vielfachheiten von vierter Ordnung sind.* Hierdurch werden gewisse Fälle von Kurven vierter Ordnung im alten Sinne ausgeschlossen. Es sind dies Kurven mit einer Doppelschmiegebene, d. h. einer Ebene, die Schmiegebene für zwei verschiedene Kurvenpunkte ist, und Kurven, bei denen die Schmiegebene eines Wendepunktes noch in einem weiteren Punkt berührt bzw. zugleich Schmiegebene eines zweiten Wendepunktes ist. Im Sinne der Vielfachheitszählung sind diese Kurven von der Ordnung 6 oder 8. Es ist aber nicht möglich, die beiden Treffpunkte von der Vielfachheitssumme 6 oder 8 durch Variieren der Ebene in mehr als vier Treffpunkte aufzulösen. Auch diese Kurven lassen sich mit den im folgenden entwickelten Hilfsmitteln untersuchen. Dies erfordert jedoch einige weniger übersichtliche Fallunterscheidungen, und es soll daher von einer Untersuchung dieser Grenzfälle abgesehen werden [15a]).

Es sei bemerkt, daß Kurven und offene Bögen dritter Ordnung auch im Sinne der Vielfachheitszählung stets von dritter Ordnung sind. Hiervon werden wir jedoch keinen Gebrauch machen.

Wir heben noch zwei einfache Hilfssätze hervor:

Eine Kurve vierter Ordnung (im oben präzisierten engeren Sinne) *wird von jeder Ebene in Punkten getroffen, deren Gesamtvielfachheit gerade* (eventuell 0) *ist.* Gehen wir nämlich von einer Ebene aus, die insgesamt vierfach trifft und variieren sie kontinuierlich. Dann kann eine Änderung der Gesamtvielfachheit nur in solchen Lagen der Ebene eintreten, in denen sie Tangentialebene oder Schmiegebene ist. Beim Passieren einer solchen Lage kann sich aber die Schnittvielfachheit nur um eine gerade Zahl ändern.

Ist s ein Punkt vierter Ordnung, so läßt sich zu jeder Umgebung V von s eine darin enthaltene Umgebung U so finden, daß jede Ebene, die U dreifach trifft, V insgesamt vierfach trifft. Da die Schmiegebene ε in s

15a) Man kann aber zeigen, daß die Angaben der Einleitung für sie gültig bleiben.

vierfach trifft, muß sie Stützebene von V sein. Alle zu ε genügend benachbarten Ebenen treffen daher V mit gerader Vielfachheit. Nun läßt sich aber eine Umgebung U von s so finden, daß alle Ebenen, die U dreifach treffen, wenig von der Schmiegebene verschieden sind. Eine solche Umgebung U leistet daher das gewünschte.

§ 2.

Die projektive Kurve vierter Ordnung.

Um uns in den späteren Paragraphen auf die euklidischen Kurven vierter Ordnung beschränken zu können, betrachten wir in diesem diejenigen C_4 im projektiven Raum, die sich im euklidischen nicht geschlossen verwirklichen lassen. Diese Kurven erscheinen als Sonderfälle einer von Mohrmann[16]) und Juel[17]) untersuchten Kurvenklasse; wir fassen uns daher kurz.

Unter dem Index einer Kurve versteht man die kleinste Anzahl von Punkten, in denen sie eine Ebene trifft. Der Index der C_4 ist jedenfalls eine gerade Zahl; eine Tangentialebene der C_4 kann so gedreht werden, daß höchstens zwei Schnittpunkte bleiben; daher ist der Index einer Kurve vierter Ordnung gleich 0 oder 2. Die C_4 hat also den Index 0, wenn es Ebenen gibt, die sie nicht treffen: der Index 0 kennzeichnet die in euklidische Typen transformierbaren C_4. Die C_4 vom Maximalindex 2, die also jede Ebene in mindestens zwei Punkten trifft, ist in einem euklidischen Raum nicht geschlossen; sie zerfällt dort in mindestens zwei Bögen.

Die C_4 vom Index 2 wird von jeder Ebene geschnitten; denn eine Ebene, mit der sie nur Stützpunkte gemein hätte, könnte so gedreht werden, daß sie keinen Punkt mit der Kurve gemein hätte; hieraus folgt insbesondere, daß die Tangente eines Kurvenpunktes die C_4 nicht mehr trifft[18]). Ebenso könnte die Schmiegebene eines Wendepunktes durch eine passende Drehung in eine Ebene übergeführt werden, die die Kurve nicht mehr träfe; daher hat die C_4 vom Index 2 keinen Wendepunkt[19]).

[16]) a) Mohrmann, Gewundene reelle Kurvenzüge beliebig hoher Ordnung ohne reelle Singularitäten. Sitz.-Ber. Bayer. Akad. Wiss. 1916, S. 201 ff.; b) Mohrmann, Über algebraische und nichtalgebraische gewundene Kurven n-ter Ordnung vom Maximalindex. Math. Annalen 78 (1918), S. 171 ff.

[17]) Juel, Die gewundenen Kurven vom Maximalindex auf einer Regelfläche zweiter Ordnung (§ 1); Danske Vid. Selsk. Skr. (8) 2, 5 (1917), S. 279 ff.

[18]) Vgl. § 4 dritter Fall.

[19]) Die angegebenen Sätze gelten auch unter schwächeren Voraussetzungen als denen des § 1. Weitere Sätze finden sich in der Fußnote [16]) a) und insbesondere in der Fußnote [17]) genannten Arbeit (Sonderfall $n = 4$).

§ 3.

Die Schmiegebenenabbildung.

Die Schmiegebene eines gewöhnlichen Punktes s (vgl. § 1) der C_4 zerschneidet die Kurve in s. Da die C_4 im euklidischen Raum geschlossen sein soll, hat sie wenigstens noch einen Punkt mit der Schmiegebene von s gemein. Andererseits trifft die Schmiegebene nach § 1 die Kurve in höchstens noch einem Punkt; daher schneidet sie die C_4 in genau einem weiteren Punkt $\sigma = \sigma(s)$. Ist s Wendepunkt, so setzen wir $\sigma(s) = s$. Hiermit ist die Schmiegebenenabbildung $\sigma(s)$ für alle Punkte der C_4 definiert. Der Punkt s heißt das Urbild, $\sigma(s)$ der Bildpunkt der Abbildung.

Diese Schmiegebenenabbildung ist stetig.

Dies folgt für einen gewöhnlichen Punkt unmittelbar aus der stetigen Abhängigkeit der Schmiegebene vom Kurvenpunkt. *Konvergiert aber ein Kurvenpunkt gegen einen Wendepunkt, so rückt nach einem Satz des* § 1 *sein Bildpunkt ebenfalls gegen den Wendepunkt und zwar gegenläufig.*

Man kann einer stetigen Abbildung einer Kurve auf sich bekanntlich eine ganze Zahl zuordnen, die *Umlaufszahl* der Abbildung[20]). Sie gibt im wesentlichen an, wie oft bei einem positiven Umlauf des Urbildes s der Bildpunkt σ die Kurve im positiven Sinn durchläuft. Da die Abbildung $\sigma(s)$ in der Umgebung eines Stützpunktes stets rückläufig ist, besteht zwischen der Umlaufszahl M und der Anzahl F der Fixpunkte der Schmiegebenenabbildung die Beziehung

$$M = 1 - F.$$

Die Anzahl der Wendepunkte ist nach § 1 endlich, gerade und trivialerweise nicht negativ; M ist daher ungerade und höchstens $= 1$. Die im folgenden durchgeführte Klassifikation der euklidischen C_4 geschieht nach der Umlaufszahl. Es wird sich zeigen, daß M im vorliegenden Falle nur die Werte $+1$, -1 und -3 annehmen kann; diesen entsprechen gemäß der obigen Formel drei verschiedene Klassen von Kurven vierter Ordnung mit null, zwei und vier Wendepunkten. Wir werden sehen, daß diese Kurven sich auch durch ihre Lage in bezug auf ihre konvexe Hülle (vgl. den folgenden Paragraphen) kennzeichnen lassen.

Der Verlauf der Schmiegebenenabbildung in der Umgebung eines gewöhnlichen Punktes hängt auf das engste mit der Lage des Bildpunktes in der Schmiegebene des Urbildes zusammen. Wir werden in § 5, IV zeigen, daß die Abbildung gleich- oder rückläufig ist, je nachdem der

[20]) Vgl. etwa W. Fenchel: Elementare Beweise und Anwendungen einiger Fixpunktsätze; Matematisk Tidskrift B (1932), S. 66 ff.

Bildpunkt in der negativen oder positiven Schmieghalbebene des Urbildes liegt, und in § 6, daß die Abbildung in einem Punkt, dessen Bildpunkt auf seiner Tangente liegt, ihre Richtung umkehrt.

§ 4.

Über die konvexe Hülle der C_4.

Die letzten Bemerkungen des vorigen Paragraphen legen es nahe, die Lage des Bildpunktes der Schmiegebenenabbildung in der Schmiegebene des Urbildes zu betrachten. In diesem Paragraphen soll sie auf die Lage des Urbildes in der konvexen Hülle der C_4 bezogen werden. Sein Hauptergebnis lautet: *Ein Kurvenpunkt liegt dann und nur dann im Innern der konvexen Hülle, wenn der Bildpunkt der Schmiegebenenabbildung in der negativen Schmieghalbebene liegt.*

Unter der konvexen Hülle einer (euklidischen) C_4 versteht man den Durchschnitt aller abgeschlossenen konvexen Punktmengen, die die C_4 enthalten; sie ist insbesondere schon der Durchschnitt aller abgeschlossenen Halbräume, die die Kurve enthalten. Während es durch die außerhalb der konvexen Hülle gelegenen Punkte Ebenen gibt, die die Kurve überhaupt nicht treffen, trifft jede Ebene durch einen inneren Punkt der konvexen Hülle die C_4; die Randpunkte sind dadurch gekennzeichnet, daß es durch sie Stützebenen gibt, d. h. Ebenen, auf denen wenigstens ein Kurvenpunkt liegt, und die die Eigenschaft haben, daß einer der beiden von ihnen begrenzten Halbräume punktfremd zur Kurve ist. Eine solche Stützebene enthält jedenfalls die Tangente eines auf ihr gelegenen Kurvenpunktes. Die Schmiegebene eines Wendepunktes und die Doppeltangentialebenen, die nicht Schmiegebenen sind, sind Stützebenen, und zwar die extremen Stützebenen im Sinne von Minkowski[21]); sie unterscheiden sich von allen anderen Stützebenen dadurch, daß sie durch jede im passenden Sinne ausgeführte beliebig kleine Drehung um die Tangente eines Berührungspunktes in Nichtstützebenen übergeführt werden.

Erster Fall: Der Bildpunkt σ liege in der negativen Schmieghalbebene des Urbildes s; dann läßt sich keine Stützebene der ganzen Kurve durch s legen.

s ist sicher kein Wendepunkt; eine Stützebene enthielte die Kurventangente in s, fiele aber nicht mit der Schmiegebene zusammen; denn diese zerschneidet die Kurve. Eine von der Schmiegebene verschiedene Tangentialebene zerlegt den Raum in zwei Halbräume; der eine enthält

[21]) Vgl. etwa: Bonnesen-Fenchel, Theorie der konvexen Körper (Ergebnisse d. Math. 3, Heft 1), S. 15.

die negative Schmieghalbebene, also insbesondere den Punkt σ, der andere die positive, also auch die Kurvenpunkte, die dem Punkte s genügend benachbart sind.

Zweiter Fall: Der Punkt σ liege in der positiven Schmieghalbebene von s.

Die negative Schmieghalbebene enthält in diesem Falle keinen Kurvenpunkt. Man denke sich die positive Schmieghalbebene, auf der nach Voraussetzung ein weiterer Kurvenpunkt, nämlich σ, liegt, kontinuierlich und monoton um die Tangente gedreht. Der Winkel gegen die positive Schmieghalbebene sei mit λ, die entstehende Halbebene mit $E(\lambda)$ bezeichnet.

$E(\pi)$ ist die negative Schmieghalbebene; auf ihr liegen keine Kurvenpunkte. Für genügend kleine λ existiert gewiß ein Schnittpunkt der Kurve mit $E(\lambda)$, da die positive Schmieghalbebene in σ von der Kurve geschnitten wird. Wir betrachten nun die obere Grenze λ_0 der λ mit $0 < \lambda < \pi$, für die $E(\lambda)$ noch Kurvenpunkte enthält. Strebt λ gegen λ_0, so haben die Schnittpunkte der Halbebene $E(\lambda)$ mit der Kurve wenigstens einen Häufungspunkt σ_0. Dieser liegt nicht auf dem Rande der Halbebene, d. h. auf der Tangente durch s. Das wäre nur möglich, wenn $\sigma_0 = s$ ist; denn nach Voraussetzung enthält die Tangente keinen von s verschiedenen Kurvenpunkt; fiele σ_0 aber mit s zusammen, so wäre $E(\lambda_0)$ die positive Schmieghalbebene. λ_0 liegt daher im Innern der Halbebene $E(\lambda_0)$; $E(\lambda_0)$ berührt die Kurve in λ_0 und die $E(\lambda_0)$ enthaltende Ebene berührt die Kurve in zwei Punkten, ist also, da sie nicht Schmiegebene ist, Stützebene.

Dritter Fall: Der Punkt σ liege auf der Tangente von s, ohne mit s zusammenzufallen; s ist also kein Wendepunkt. Dann muß eine Stützebene die beiden Tangenten von s und σ enthalten; sie ist also eindeutig bestimmt; denn nach unserer Vielfachheitszählung hat die C_4 keine Doppeltangenten. Andererseits ist diese Ebene durch die beiden Tangenten auch Stützebene.

Vierter Fall: In den Wendepunkten ist die Schmiegebene schon Stützebene. Es gibt noch eine zweite extreme Stützebene; diese hat noch einen weiteren Punkt mit der Kurve gemein.

Wir haben folgendes gefunden: Ein Kurvenpunkt liegt genau dann im Innern der kleinsten konvexen Hülle, wenn sein Bildpunkt in der negativen Schmieghalbebene liegt. Durch die Tangente der Wendepunkte und der Punkte, deren Bildpunkte in der positiven Schmieghalbebene liegen, gehen zwei extreme Stützebenen. Liegt der Bildpunkt eines gewöhnlichen Punktes auf der Tangente, so gibt es eine einzige Stützebene, nämlich die Ebene durch die beiden Tangenten.

§ 5.

Schmiegebenenabbildung und Trisekanten.

Geraden, die drei Punkte mit der C_4 gemein haben, mögen als Trisekanten bezeichnet werden; ihnen seien auch die berührenden Trisekanten zugerechnet, d. h. diejenigen Tangenten an die C_4, die sie noch in einem zweiten Punkt treffen. Durch einen Punkt geht höchstens eine Trisekante; denn eine Ebene durch zwei koplanare Trisekanten träfe die Kurve vierter Ordnung mindestens fünffach.

Gegeben ein Kurvenpunkt der C_4, der weder auf einer berührenden Trisekante liegt noch Wendepunkt ist. Wir behaupten folgendes: *Es gehen noch eine oder noch drei Schmiegebenen durch ihn (außer der eigenen), je nachdem er auf einer Trisekante liegt oder nicht*[22]).

Um dies zu beweisen, betrachten wir wieder eine Abbildung der Kurve auf sich. Der Punkt r genüge den obigen Voraussetzungen. s durchlaufe die C_4. Die Ebene $E(s)$ durch r und die Tangente von s schneidet die Kurve in einem vierten Punkt $t = t(s)$. Die Fixpunkte der Abbildung $t(s)$ sind genau die Punkte, deren Schmiegebenen durch r gehen. Die Abbildung ist stetig und in den Fixpunkten rückläufig; s ist genau dann Umkehrpunkt der Abbildung, wenn r, s und $t(s)$ auf einer Geraden liegen und voneinander verschieden sind. Da durch r höchstens eine Trisekante geht, hat die Abbildung also höchstens zwei Umkehrpunkte.

Bevor wir zum Beweis dieser Behauptung die Abbildung $t(s)$ im Kleinen untersuchen, wollen wir hieraus den obigen Satz ableiten. Es ist also zu zeigen, daß die Abbildung $t(s)$ einen oder drei Fixpunkte hat, je nachdem r auf einer Trisekante liegt oder nicht.

Ist $t(s) = r$, so ist $E(s)$ die Doppeltangentialebene durch s und r und Stützebene an die C_4; es gibt zwei oder keine solcher extremen Stützebenen durch r, je nachdem r auf dem Rande oder im Innern der konvexen Hülle der C_4 liegt (vgl. § 4).

Durch r gehe eine Trisekante, die die C_4 in s_1 und s_2 treffe. Dann sind s_1 und s_2 also Umkehrpunkte der Abbildung und jeder von ihnen

---

[22]) Dieser Satz kann auch Ergebnissen von Juel [Om ikke analytiske Kurver, Danske Vid. Selsk. Skr. (7) 1, S. 324 ff. (1906)] folgendermaßen entnommen werden: Projiziert man die Kurve vierter Ordnung von einem ihrer Punkte aus auf eine Ebene, die nicht durch diesen Punkt geht, so entsteht eine ebene Kurve dritter Ordnung. Einem Wende- oder Doppelpunkt der ebenen Kurve entspricht eine Schmiegebene oder Trisekante der Kurve vierter Ordnung durch das Projektionszentrum. Juel hat bewiesen, daß eine doppelpunktfreie Kurve dritter Ordnung genau drei, eine Kurve dritter Ordnung mit Doppelpunkt genau einen Wendepunkt besitzt; hieraus folgt die obige Behauptung.

ist Bildpunkt des anderen. s_1 ist das einzige Urbild von s_2; denn eine Ebene $E(s)$ durch s_2 enthält mit r und s_2 auch die Trisekante und den Punkt s_1. s_1 und s_2 teilen die C_4 in zwei Teilbögen B_1 und B_2; r liege etwa in B_2.

Erster Fall: r liege im Innern der konvexen Hülle; dann ist stets $t(s) \neq r$; daher hat die Abbildung die Umlaufszahl 0 und zwei Umkehrpunkte s_1 und s_2. Hier ergibt sich der *Satz, daß durch einen im Innern der konvexen Hülle gelegenen Kurvenpunkt stets eine Trisekante geht;* wir werden in § 7 auf ihn zurückkommen.

Von hier ab diskutieren wir den ersten Fall gleichzeitig mit dem zweiten, daß r auf einer Trisekante und auf dem Rande der konvexen Hülle liegt, also genau zweimal Bildpunkt ist. Durchläuft s monoton einen der beiden Bögen B_i von s_1 nach s_2, so durchläuft $t(s)$ monoton einen der Bögen B_i von s_2 nach s_1 und zwar den Bogen B_1 im ersten, B_2 im zweiten Fall; denn jedes s_i hatte ja das andere zum einzigen Urbild und r war ja kein bzw. zweimal Bildpunkt. Die Abbildung hat also genau einen und zwar in B_1 bzw. B_2 gelegenen Fixpunkt.

Dritter Fall: r liege auf dem Rande der konvexen Hülle; es gehe keine Trisekante durch r; dann ist die Abbildung monoton. Da r genau zweimal Bildpunkt ist, hat sie die Umlaufszahl ± 2; da aber die Abbildung in den Fixpunkten rückläufig ist, muß sie die Umlaufszahl -2. also drei Fixpunkte haben.

Im Abschnitt IV bringen wir im Anschluß an die vorangehenden Betrachtungen den Beweis der am Schluß des § 3 erwähnten Bemerkung.

Die Abbildung $t(s)$ ist stetig:

$E(s)$ hängt stetig von s ab. Hieraus folgt: Konvergieren die Punkte s gegen einen Punkt s_0, so häufen sich die Punkte $t(s)$ gegen Kurvenpunkte, die auf $E(s_0)$ liegen, also gegen s_0, r oder $t(s_0)$. Ist das erste der Fall, so konvergieren die $E(s)$ gegen die Schmiegebene von s_0, und es ist $t(s_0) = s_0$. Gilt das zweite, so häufen sich die in den Ebenen $E(s)$ gelegenen Sehnen rt gegen die Tangente durch r und die Ebene $E(s_0)$ enthält die Tangenten von s_0 und r, ohne die Schmiegebene von s_0 zu sein; es ist also $t(s_0) = r$.

I. Die drei Punkte r, s_0 und $t(s_0)$ seien verschieden; die Abbildung kehre ihre Richtung in s_0 um. Dann liegen r, s_0 und $t(s_0)$ auf einer Geraden.

Beweis: Wegen der Stetigkeit der Abbildung kann eine Umgebung um s_0 abgegrenzt werden, so daß für alle s der Umgebung die Punkte r, s und $t(s)$ verschieden sind. Es gibt nach Voraussetzung eine Folge von Kurvenpunkten t, die gegen $t(s_0)$ konvergieren, mit je zwei Urbildern

s und s', die von verschiedenen Seiten gegen s_0 rücken, also verschieden sind; $t = t(s) = t(s')$. Wir können voraussetzen, daß alle s und s' in der Umgebung von s_0 liegen.

Die Ebenen $E(s)$ und $E(s')$ schneiden sich längs der Geraden rt. Die Gerade $rt(s_0)$ teilt die Ebene $E(s_0)$ in eine positive und eine negative Hälfte. Wandere ich von s_0 nach s und s', so geht die positive Halbebene von $E(s_0)$ stetig in gewisse von der Geraden rt begrenzten Halbebenen von $E(s)$ und $E(s')$ über, die wir wieder als positiv bezeichnen. s liegt entweder stets in der positiven oder stets in der negativen Hälfte von $E(s)$; denn s läuft stetig auf $E(s)$; und läge s einmal auf der Geraden rt, so würde die Ebene $E(s')$ die C_4 in s' berühren und in r, s und t treffen. Wir wollen zeigen, daß s und s' in verschiedenen Halbebenen liegen; denn da s und s' gegen s_0 konvergieren, folgt hieraus schon, daß s_0 dann auf der Geraden $rt(s_0)$ liegen muß.

Jede Ebene $E(s)$ bestimmt einen positiven Halbraum, nämlich den, der die Umgebung von s enthält. Rückt s gegen s_0, so geht der positive Halbraum bezüglich $E(s)$ stetig in den bezüglich $E(s_0)$ über; das gleiche gilt für s'. Ein und dieselbe kleine Drehung führt daher die positiven Halbebenen und die positiven Halbräume von bzw. bezüglich $E(s)$ und $E(s')$ ineinander über. Hieraus und aus der Tatsache, daß s' und s in den positiven Halbräumen bezüglich $E(s)$ und $E(s')$ liegen, folgt schon die Behauptung.

II. Die drei Punkte r, s_0 und $t(s_0)$ seien auf einer Geraden gelegen und voneinander verschieden; dann wechselt die Abbildung $t(s)$ in s_0 ihre Richtung.

Zum Beweis grenzen wir einen abgeschlossenen Teilbogen U um s_0 ab, der r nicht enthält, und der so klein ist, daß für kein s aus U der Punkt $t(s)$ in U liegt oder gleich r ist; dies ist möglich, da $t(s)$ eine stetige Funktion von s ist und die drei Punkte r, s_0 und $t(s_0)$ nicht zusammenfallen.

s durchlaufe nur die inneren Punkte von U. $E(s)$ ist Stützebene an U. Der positive Halbraum bezüglich $E(s)$ sei der Halbraum, der U (außer dem Punkte s selbst) enthält. Dieser Halbraum ändert sich stetig mit s: er ist nämlich dadurch gekennzeichnet, daß er an $E(s)$ grenzt und die Endpunkte von U enthält; die Ebene $E(s)$ hängt aber stetig von s ab und geht nie durch die Endpunkte von U, da sie die C_4 außer in s nur in den außerhalb von U gelegenen Punkten r und $t(s)$ trifft.

Ist s von s_0 verschieden, so liegt also s_0 stets im positiven Halbraum bezüglich $E(s)$. $E(s)$ geht durch r; der Punkt $t(s_0)$ liegt auf der Geraden rs_0, also für alle $s \neq s_0$ entweder stets im positiven oder stets im negativen Halbraum bezüglich $E(s)$ (nämlich, je nachdem er auf der-

selben Seite von r wie s_0 liegt oder nicht). Hiermit sind wir schon fertig, denn $E(s_0)$ zerschneidet die C_4 in $t(s_0)$.

Wir haben jetzt die Fälle zu untersuchen, daß die drei Punkte r, s_0 und $t(s_0)$ nicht alle verschieden sind. r ist nicht Wendepunkt; es fallen daher nicht alle drei Punkte zusammen.

III. Es sei $s_0 = t(s_0)$. s_0 ist also Fixpunkt der Abbildung $t(s)$ und r liegt in der Schmiegebene $E(s_0)$ des Punktes s_0. Wir hatten die Rückläufigkeit der Abbildung in s_0 behauptet.

Wir zeigen zunächst folgendes (vgl. § 1): Jede genügend kleine Umgebung von s_0 läßt sich in eine größere einbetten, die mit ihr gegen s_0 zusammenschrumpft, so daß jede Ebene durch r, die die kleinere Umgebung zweifach trifft, noch einen dritten Punkt mit der größeren gemein hat. Andernfalls gäbe es nämlich eine Folge von Ebenen durch r und zwei gegen s_0 konvergierende Kurvenpunkte, die einen festen Bogen um s_0 genau je zweifach treffen. Diese Ebenen konvergieren nach § 1 gegen die Ebene durch r und die Tangente von s_0, also gegen die Schmiegebene von s_0; andererseits würde jede Häufungsebene der Folge den festen Bogen in s_0 stützen, könnte also nicht die Schmiegebene des gewöhnlichen Punktes s_0 sein.

Diesem Hilfssatze können wir unsere Behauptung leicht entnehmen: Die Gerade $s_0 r$ ist nicht die Tangente; aus § 1 schließt man leicht, daß eine Ebene, die aus der Schmiegebene von s_0 durch eine hinreichend kleine passende Drehung um die Gerade $s_0 r$ hervorgeht, die kleinere Umgebung, also auch die größere noch zweifach trifft, derart, daß die beiden Treffpunkte auf verschiedenen Seiten von s_0 liegen; der eine der beiden Treffpunkte heiße s_1. Jede Ebene durch s_1, r und einen von s_0 nach s_1 laufenden Punkt s trifft die größere Umgebung in einem weiteren Punkt, der sich stetig mit s ändert. Da er nicht durch s_0 hindurch kann — die betrachtete Ebene wäre nämlich Tangentialebene von s_0 und ginge durch r und s_1, wäre somit die Schmiegebene von s_0 und ginge durch noch zwei Punkte der Kurve vierter Ordnung —, bleibt er stets auf dem s_1 abgewandten Ast der größeren Umgebung.

IV. Wir betrachten jetzt den Fall, daß s durch r hindurchläuft. Der Punkt $r' = t(r)$ liegt in der Schmiegebene von r, ist also sein Bildpunkt bei der im § 3 untersuchten Schmiegebenenabbildung: $r' = \sigma(r)$. Wir wollen folgendes zeigen: Die Abbildungen $t(s)$ und $\sigma(s)$ sind rück- oder gleichläufig in r, je nachdem r' in der positiven oder negativen Schmieghalbebene liegt.

Wie zum Punkte r die Abbildung $t(s)$ gehört, so bestimmt der Punkt r' eine Abbildung $t'(s)$, die dem Punkte s den vierten Schnittpunkt $t'(s)$ seiner Tangentialebene durch r' zuordnet. Es ist $t'(r) = r$;

wir haben in III bewiesen, daß die Abbildung $t'(s)$ in der Umgebung von r rückläufig ist.

Liegt s nahe genug bei r, so liegen $t'(s)$ und r' auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Tangente von s, je nachdem r' in der positiven oder negativen Schmieghalbebene von r liegt. Das kann etwa so eingesehen werden: die rektifizierende Ebene von s teilt den Raum in eine positive Hälfte, in der die Umgebung von s liegt, und eine negative; der positive Halbraum ändert sich nach § 1 stetig mit s. Da der Punkt r' in der Schmiegebene, aber nicht auf der Tangente von r liegt, hat er einen endlichen Abstand von der rektifizierenden Ebene von r. Liegt s nahe genug bei r, so liegt daher r' in gleichnamigen Halbräumen bezüglich r und s. Dann liegt auch $t'(s)$ im positiven Halbraum bezüglich s; denn andernfalls hätte die rektifizierende Ebene von s einen zwischen s und $t'(s)$ gelegenen Schnittpunkt mit der Kurve gemein; mit s würde $t'(s)$ und dieser Schnittpunkt gegen r rücken; die rektifizierende Ebene konvergierte gegen die Schmiegebene von r.

Wir grenzen um r eine Umgebung U von dritter Ordnung ab, die so klein ist, daß für ihre Punkte die obige Bemerkung gilt, und daß die Tangente eines jeden ihrer Punkte die C_4 nicht mehr trifft. s liege in U und so nahe bei r, daß auch $t'(s)$ in U liegt. Die Ebene durch die Tangente von s und einen Punkt s, der von $t'(s)$ durch U über r nach s läuft, schneidet die C_4 in einem vierten Punkt s'', der jedenfalls außerhalb von U gelegen ist und sich stetig mit s' ändert. Für $s' = t'(s)$ ist $s'' = r'$. Daher liegen s' und s'' stets auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Tangente von s, je nachdem r' in der positiven oder negativen Schmieghalbebene von r liegt.

Lasse ich s' monoton von $t'(s)$ durch U nach r bzw. s laufen, so dreht sich die Tangentialebene von s durch s' monoton und s'' ist monoton rück- oder gleichläufig, je nachdem es auf derselben Seite der Tangente von s liegt wie s' oder nicht; denn die Tangentialebene wird in s' und s'' in entgegengesetztem Sinne durchstoßen. s'' kann nicht durch den Bogen dritter Ordnung U hindurch und läuft von $r' = t(r) = \sigma(r)$ bis $t(s)$ bzw. $\sigma(s)$. Daher sind die Abbildungen $t(s)$ und $\sigma(s)$ rück- oder gleichläufig in r, je nachdem r' in der positiven oder negativen Schmieghalbebene liegt.

V. Der letzte Fall, daß der Bildpunkt von s durch r hindurchläuft, tritt höchstens zweimal ein.

Es sei $t(s_0) = r$. Dann beweist man wörtlich wie in I: Würde die Abbildung ihre Richtung in s_0 umkehren, so läge s_0 auf der Tangente von r, r also auf einer berührenden Trisekante; nur hat man zu Anfang die Umgebung um s_0 so abzugrenzen, daß für alle von s_0 verschiedenen

s der Umgebung die Punkte r, s und $t(s)$ verschieden sind, und zu beachten, daß die t gegen r konvergieren; und zum Schluß folgt aus der Tatsache, daß die s und s' in verschiedennamigen Halbebenen der $E(s)$ und $E(s')$ liegen, daß s_0 auf der Geraden liegt, gegen die die Gerade rt konvergiert, also auf der Tangente von r.

§ 6.

Die Umkehrpunkte der Schmiegebenenabbildung.

Der Kurvenpunkt r liege auf der Tangente des Punktes r', also r' nicht in der Schmiegebene von r (Vielfachheitszählung!). Zu r gehört eine Abbildung, die dem Kurvenpunkt s den vierten Treffpunkt $t(s)$ seiner Tangentialebene durch r mit der Kurve zuordnet. Wir wollen zeigen, daß die Abbildung $t(s)$ auf der ganzen Kurve vierter Ordnung stetig ist, und daß sie zwei Fixpunkte hat, deren einer der Punkt r' ist. Es schicken also genau zwei von r verschiedene Kurvenpunkte ihre Schmiegebenen durch r. Die Schmiegebenenabbildung kehrt in dem von r' verschiedenen Urbild von r ihre Richtung sicher nicht um; denn sonst ginge nach § 5, IV dessen Tangente durch r. Änderte die Schmiegebenenabbildung ihre Richtung auch in r' nicht, so wäre ihre Umlaufzahl $= 0$ oder ± 2; denn r ist ja Bildpunkt zweier Kurvenpunkte. Nach § 3 ist ihre Umlaufszahl aber ungerade. Daher haben wir (bei Berücksichtigung von § 5, IV): *Die Umkehrpunkte der Schmiegebenenabbildung sind diejenigen Punkte, deren Tangenten die Kurve noch einmal treffen.* Dem § 4 zufolge tritt in einem solchen Punkte die Kurve vom Rande ins Innere der konvexen Hülle ein.

Lassen wir den Punkt r' weg, so entsteht aus der C_4 die punktierte Kurve (genauer der Bogen) C_4'. Für die Abbildung $t(s)$ der punktierten Kurve auf die volle Kurve vierter Ordnung bleiben die Betrachtungen des § 5 bestehen. $t(s)$ ist auf der ganzen C_4' definiert, stetig und, da keine Trisekante der punktierten Kurve durch r geht, monoton. Die Tangente von r ist keine Trisekante und r liegt auf dem Rande der konvexen Hülle; folglich gibt es nach § 4 zwei extreme Stützebenen durch r, und sein Bildpunkt fällt mit ihm zusammen oder liegt in seiner positiven Schmieghalbebene, je nachdem r Wendepunkt ist oder nicht; in jedem Fall ist die Abbildung nach § 1 oder § 5, IV in r, also auf der ganzen punktierten Kurve rückläufig. r hat genau ein Urbild in der C_4'. Die Abbildung $t(s)$ ist somit in der ganzen punktierten Kurve stetig, beschränkt und monoton rückläufig. Daher existieren $t(r'+0)$ und $t(r'-0)$.

r' hat kein Urbild in der C_4'; denn da die Doppeltangentialebene durch r und r' nicht Schmiegebene von r ist, ist r nicht Urbild von r'.

Ginge aber die Tangentialebene eines von r und r' verschiedenen Punktes durch r und r', so enthielte sie die Tangente von r' und träfe die Kurve vierter Ordnung mindestens fünffach. Wären $t(r'+0)$ und $t(r'-0)$ nicht beide $= r'$, so gäbe es daher Punkte t der C_4', die dort keine Urbilder hätten.

Ein solcher Punkt t wäre jedenfalls von r verschieden; keiner der beiden Punkte t und r läge in der Schmiegebene des anderen, und die Gerade rt wäre auch nicht die Tangente eines der beiden Punkte.

Die Ebene durch r, t und r' stützt die C_4 in r'. Sie wird durch eine passende hinreichend kleine Drehung um die Gerade rt in eine Ebene übergeführt, die die Umgebung von r' zweifach, die ganze C_4 mithin vierfach trifft. Jede hinreichend kleine Drehung in der anderen Richtung führt sie aber in eine Ebene über, die die Kurve nur in r und t trifft; es gibt also Ebenen durch die Gerade rt, die die Kurve nur zweifach treffen. Daher gibt es wenigstens noch eine extreme Ebene durch diese Gerade, die bei jeder hinreichend kleinen Drehung um sie im einen oder anderen Sinne jeweils in eine vier- oder zweifach treffende Ebene übergeht. Diese extreme Ebene ist den vorangehenden Bemerkungen und dem § 1 zufolge nicht Tangentialebene von r oder r'. Sie muß die Tangentialebene eines von r und r' verschiedenen, also in der C_4' gelegenen Punktes s sein; es ist entgegen unserer Annahme $t = t(s)$.

Damit ist nachgewiesen, daß $t(r'+0) = t(r'-0) = r'$ ist. Definieren wir $t(r') = r'$, so ist die Abbildung $t(s)$ auf der ganzen Kurve vierter Ordnung definiert und stetig und monoton rückläufig. Da r nur ein Urbild hat, ist ihre Umlaufszahl -1, und sie hat zwei Fixpunkte[23]).

§ 7.

Über die Trisekanten der C_4.

Wir hatten im § 5 gefunden, daß durch jeden im Innern der konvexen Hülle der C_4 gelegenen Kurvenpunkt eine nichtberührende Trisekante geht. Jeder Kurvenpunkt, der im Innern der konvexen Hülle liegt, ist natürlich mittlerer der drei Treffpunkte einer Trisekante; denn ein äußerer Treffpunkt der Trisekante liegt auf dem Rande der konvexen Hülle. Betrachtet man nämlich die Ebene durch die Tangente des Punktes und die Trisekante, so liegen die beiden anderen Treffpunkte der Ebene auf derselben Seite der Tangente; hieraus kann man leicht schließen, daß

[23]) Der Sehne rt ist die Tangente des Punktes s ($s \neq r$, $s \neq t$) dann und nur dann koplanar, wenn t Bildpunkt der zu r gehörigen Abbildung $t(s)$ ist: $t = t(s)$. Hieraus und aus den Betrachtungen der §§ 13 und 14 ergibt sich u. a., daß *einer Sehne höchstens vier Tangenten koplanar* sind; denn t hat höchstens zwei Urbilder.

seine negative Schmieghalbebene die Kurve nicht trifft. (Vgl. § 4). Umgekehrt liegt der mittlere Treffpunkt einer Trisekante stets im Innern der konvexen Hülle; denn eine Stützebene enthielte seine Tangente und die Trisekante, folglich auch die Tangenten der beiden anderen Treffpunkte der Trisekante, träfe also die Kurve vierter Ordnung mindestens sechsfach.

Wir wollen jetzt die Gesamtheit der Trisekanten durch einen im Innern der konvexen Hülle der Kurve gelegenen Teilbogen betrachten.

Durch jeden Punkt geht höchstens eine Trisekante (§ 5); daher ändert sich die Trisekante stetig mit dem Kurvenpunkt; eine Folge von Kurvenpunkten konvergiere gegen den Punkt s; durch jeden Punkt der Folge gehe eine Trisekante. Dann häufen sich diese Trisekanten gegen Geraden, die durch s gehen und die Kurve dreifach treffen. Es geht also eine Trisekante durch s, gegen die die Trisekanten der Folge konvergieren.

Aus dieser Bemerkung folgt auch, daß jeder im Innern der konvexen Hülle gelegene Kurvenpunkt s eindeutig zwei Kurvenpunkte u und v bestimmt, die auf einer Geraden mit s liegen. Mit den Trisekanten hängen auch u und v stetig von s ab; daß u und v sich monoton mit s ändern, folgt wieder daraus, daß durch jeden Kurvenpunkt höchstens eine Trisekante geht.

Die Kurve sei mit einem gewissen Durchlaufungssinn versehen. Dann verstehen wir unter dem Bogen $\overset{\frown}{s_1 s_2}$ den Bogen, dessen unterer Endpunkt s_1 und dessen oberer s_2 ist.

Der Bogen $\overset{\frown}{s_1 s_2}$ liege im Innern der konvexen Hülle der Kurve, s_1 und s_2 selbst aber auf deren Rand. s_1 und s_2 fallen nicht zusammen, da sonst die ganze C_4 im Innern ihrer konvexen Hülle läge. Nach § 6 liegt der Punkt $\sigma_1 = \sigma(s_1)$ bzw. $\sigma_2 = \sigma(s_2)$ auf der Tangente des Punktes s_1 bzw. s_2 und ist von ihm verschieden. Da je zwei Trisekanten windschief sind, sind also alle vier Punkte $s_1, s_2, \sigma_1, \sigma_2$ voneinander verschieden.

Die Tangenten von s_1 und s_2 sind Trisekanten. Rückt s gegen s_1, so läuft etwa u gleichfalls nach s_1, v daher nach σ_1; wegen seiner Monotonie ist u überall gegenläufig zu s. Jetzt rücke s gegen s_2: ginge u nach s_2, so durchliefe u den ganzen Bogen $\overset{\frown}{s_2 s_1}$; auf ihm läuft aber auch v; es gäbe Punkte dieses Bogens, durch die zwei Trisekanten gingen. Daher rückt v mit s gegen s_2, und u geht nach σ_2, und v ist wie u rückläufig. Durchläuft s den Bogen $\overset{\frown}{s_1 s_2}$, so durchwandern u und v also rückläufig die Bögen $\overset{\frown}{\sigma_2 s_1}$ und $\overset{\frown}{s_2 \sigma_1}$. Diese Bögen sind punktfremd und

liegen auf dem Rande der konvexen Hülle. Der Bogen $\overset{\frown}{\sigma_2 \sigma_1}$ ist dadurch gekennzeichnet, daß jeder seiner Punkte eine Trisekante durch den Bogen $\overset{\frown}{s_1 s_2}$ schickt; zwei solcher Bögen $\overset{\frown}{\sigma_2 \sigma_1}$ und $\overset{\frown}{\sigma_2' \sigma_1'}$ sind daher identisch oder punktfremd.

§ 8.

Diskussion der C_4.

Die Umlaufszahl der Schmiegebenenabbildung ist nach § 3 ungerade und höchstens gleich 1. Aus den §§ 5 und 6 geht hervor, daß jeder Kurvenpunkt höchstens drei Urbilder hat, daß die Umlaufszahl der Abbildung also zwischen -3 und $+3$ liegt. Es kommen somit nur die Zahlen -3, -1 und $+1$ als Umlaufszahlen in Frage. Ihnen entsprechen nach § 3 Kurven vierter Ordnung mit vier, zwei und null Wendepunkten. Wir wollen sie, ausgehend von der Lage der Kurve auf ihrer konvexen Hülle, diskutieren.

Erster Fall: Die ganze Kurve liege auf dem Rande ihrer konvexen Hülle. Dann besitzt sie folgende Eigenschaften:

1). Es gibt keine Trisekanten;

2). Die Schmiegebenenabbildung ist monoton rückläufig;

3). Die Umlaufszahl ist -3, die Zahl der Wendepunkte also 4.

Nach § 7 liegt ja der mittlere Treffpunkt einer nichtberührenden Trisekante im Innern der konvexen Hülle und nach § 6 gehen berührende Trisekanten stets durch Umkehrpunkte der Schmiegebenenabbildung und an diese grenzen Bögen, die im Innern der konvexen Hülle liegen; hieraus und aus § 5, IV folgt auch 2). Da jeder Kurvenpunkt nach § 5 genau drei Urbilder hat, und da in diesen die Abbildung rückläufig ist, ist die Umlaufszahl -3.

Bevor wir weitergehen, betrachten wir das Bild eines im Innern der konvexen Hülle gelegenen Bogens; dabei knüpfen wir an die Bezeichnungen und Überlegungen des Schlusses des vorigen Paragraphen an. Es sei also s_1 der untere, s_2 der obere Endpunkt eines im Innern der kleinsten konvexen Hülle gelegenen Bogens $\overset{\frown}{s_1 s_2}$; s_1 und s_2 selbst mögen aber auf ihrem Rande liegen; es war $\sigma(s_1) = \sigma_1$, $\sigma(s_2) = \sigma_2$ gesetzt. Der Bogen $\overset{\frown}{s_1 s_2}$ liegt im Innern des Bogens $\overset{\frown}{\sigma_2 \sigma_1}$. Durchläuft s monoton wachsend den Bogen $\overset{\frown}{s_1 s_2}$, so läuft nach § 5, IV $\sigma(s)$ im gleichen Sinne von σ_1 nach σ_2, ohne durch den Bogen $\overset{\frown}{s_1 s_2}$ hindurchzugehen, da dieser keine Fixpunkte der Schmiegebenenabbildung enthält. Das Bild des im positiven

Sinne durchlaufenen Bogens $\overset{\frown}{s_1 s_2}$ ist also der im positiven Sinne durchlaufene Bogen $\overset{\frown}{\sigma_1 \sigma_2}$.

Zweiter Fall: Genau ein Bogen, dessen Endpunkte auf dem Rande der konvexen Hülle liegen, verläuft in ihrem Innern.

1). Die Kurve besitzt nach § 7 eine einzige zusammenhängende Schar von Trisekanten, die von zwei berührenden begrenzt wird.

2). Die Schmiegebenenabbildung ist in diesem einen Bogen gleich-, sonst rückläufig.

3). Die Umlaufszahl ist -1; die Kurve hat also zwei Wendepunkte.

Die letzte Behauptung ergibt sich so: Ein Punkt des Bogens $\overset{\frown}{s_1 s_2}$ hat nach § 5 ein einziges Urbild; dieses liegt im Bogen $\overset{\frown}{s_2 s_1}$, also auf dem Rande der konvexen Hülle; daher ist die Abbildung im Urbilde rückläufig.

Dritter Fall: Genau zwei Bögen, deren Endpunkte auf dem Rande der konvexen Hülle liegen, verlaufen in deren Innern.

1. Die Kurve besitzt gemäß § 7 zwei getrennte Scharen von Trisekanten, die von je zwei Berührenden begrenzt werden.

2. Die Schmiegebenenabbildung ist in diesen beiden Bögen gleich-, sonst rückläufig.

3. Die Umlaufszahl ist $+1$; die Kurve ist wendepunktfrei[24]).

Die beiden Bogen seien $\overset{\frown}{s_1 s_2}$ und $\overset{\frown}{s_1' s_2'}$; dann sind nach § 7 die beiden Bogen $\overset{\frown}{\sigma_2 \sigma_1}$ und $\overset{\frown}{\sigma_2' \sigma_1'}$ punktfremd. Das Bild des im positiven Sinn durchlaufenen Bogens $\overset{\frown}{s_1 s_2}$ ist der im positiven Sinn durchlaufene Bogen $\overset{\frown}{\sigma_1 \sigma_2}$, in dessen Innern der Bogen $\overset{\frown}{\sigma_2' \sigma_1'}$ liegt. Ein Punkt dieses Bogens hat keine weiteren Urbilder. Die Umlaufszahl der Abbildung ist daher $+1$.

Gäbe es Kurven vierter Ordnung mit mehr als zwei im Innern der konvexen Hülle gelegenen Bögen, so hätte der eine von ihnen je einen Teilbogen eines jeden anderen zum Urbild, obwohl er nach § 5 nur ein Urbild haben kann.

Vergleicht man die drei Fälle, so ergibt sich, daß jeder Typ durch jede seiner angegebenen Eigenschaften gekennzeichnet ist.

---

[24]) W. Blaschke hat nach der niedrigsten Ordnung einer stets gleichsinnig gewundenen geschlossenen Kurve gefragt (Vorlesungen über Diff. Geom. Bd. II, 1.—2. Auflage 1923, S. 101). Sie kann den kleinstmöglichen Wert, nämlich 4, annehmen, und es gibt sogar algebraische Beispiele (vgl. die in der Einleitung dieser Arbeit, Fußnote [2]), genannte Abhandlung von Rohn).

§ 9.

Ein Satz über die konvexe Hülle der C_4.

In diesem Paragraphen soll ein Satz über die konvexe Hülle der euklidischen Kurven vierter Ordnung bewiesen werden. Jeder Punkt der konvexen Hülle einer zusammenhängenden räumlichen Punktmenge, also insbesondere jeder Punkt der konvexen Hülle einer Raumkurve kann als Schwerpunkt von höchstens drei mit geeigneten nichtnegativen Massen versehenen Punkten der Kurve aufgefaßt werden[25]). Diese Zahl 3 kann im allgemeinen nicht durch eine kleinere ersetzt werden. Für die Kurven vierter Ordnung gilt dieser Satz aber mit der Zahl 2; anders ausgedrückt: *Durch jeden Punkt der konvexen Hülle der Kurve vierter Ordnung geht wenigstens eine Sehne;* hierbei versteht man unter einer Sehne die Verbindungsstrecke zweier Kurvenpunkte.

Wir betrachten zunächst einen Punkt, der auf dem Rande der konvexen Hülle liegt. Durch ihn geht eine Stützebene, und er ist Schwerpunkt von höchstens drei auf der Stützebene gelegenen Kurvenpunkten. Da eine Stützebene höchstens zwei Kurvenpunkte enthält, liegt der Punkt auf einer Randsehne, auf der Verbindungsstrecke der Berührungspunkte koplanarer Tangenten. Liegt er nicht auf der Kurve, so geht auch nur eine Randsehne durch ihn hindurch. Der Rand der konvexen Hülle der C_4 enthält also keine ebenen Stücke.

Der Punkt P liege im Innern der konvexen Hülle und nicht auf der Kurve (vgl. § 7). Die Gerade von einem Kurvenpunkt r nach P schneidet die konvexe Hülle noch einmal jenseits von P; durch diesen Schnittpunkt geht wenigstens eine Randsehne; ihre Endpunkte seien s und t. P liegt im Innern des Dreiecks $r\,s\,t$.

Erster Fall: Die Kurve enthält einen Bogen, der im Innern der konvexen Hülle liegt (Fall 2 und 3 von § 8). Da der Schnittpunkt Q der Geraden $s\,t$ mit der Geraden $r\,P$, von r aus gesehen, hinter P liegt, sind s und t stets von r verschieden. Wir nehmen an, P liege auf keiner Sehne. Dann liegen s und t stets auf verschiedenen Seiten der Geraden $r\,P$ und durch den Punkt Q geht stets genau eine Randsehne. Daher ändert sich die Randsehne st stetig mit r; bei geeigneter Wahl der Bezeichnungen hängen also auch s und t stetig von r ab, wenn nur r die Kurve zweimal durchläuft. (Denn nach einmaligem Umlauf können ja s und t vertauscht sein.) Sie sind stets von r verschieden; durchläuft r zweimal die ganze Kurve, so müssen s und t ebenfalls die ganze Kurve zweimal durchlaufen. Dies ist nicht möglich; denn die Kurve enthält Punkte, die im Innern der

[25]) Vgl. W. Fenchel, Über Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven; Math. Annalen 101 (1929), S. 241 ff.

konvexen Hülle liegen, während s und t stets auf ihrem Rande gelegen sind.

Zweiter Fall: Die Kurve enthalte Wendepunkte. (Fall 1 und 2 des § 8)[26]). Es gehe keine Sehne durch P. Ich halte r fest; solange die Tangente von s nicht in der Ebene durch r, t und P liegt, ändert s sich stetig mit t. Wäre dies nie der Fall, so könnte ich t gegen r rücken lassen und P läge stets im Innern des Dreiecks $r\,s\,t$, das gegen eine Sehne konvergiert.

Die Tangente von s liegt ein erstes Mal in der Ebene durch r, t und P. Für dieses s liegt P noch im Innern des Dreiecks $r\,s\,t$, und diese Tangentialebene trifft die Kurve außer in s nur in den beiden Schnittpunkten r und t.

Jetzt ändere ich s und betrachte die Tangentialebenen von s durch P. r und t ändern sich stetig mit s; r liegt nur dann in der Schmiegebene von s, wenn r auf der Tangente von s liegt; denn da P stets im Innern des Dreiecks $r\,s\,t$ und nie auf einer Sehne liegt, müssen die Punkte r, s und t stets voneinander verschieden sein.

Die Kurve enthält nach Voraussetzung einen Bogen B, der von zwei aufeinander folgenden Wendepunkten begrenzt ist und auf dem Rande der konvexen Hülle liegt. Läuft s auf B, so durchläuft der Bildpunkt $\sigma(s)$ der Schmiegebenenabbildung den Bogen $C_4 - B$ im entgegengesetzten Sinne; denn die Endpunkte von B sind Fixpunkte und in B selbst ist die Abbildung monoton rückläufig und fixpunktfrei; gleichzeitig bewegt sich r stetig auf der C_4, ohne jemals mit s oder $\sigma(s)$ zusammenzufallen. Das ist nicht möglich.

Zur Ergänzung sei noch folgendes bemerkt: P sei kein Kurvenpunkt. Liegt P auf einer Trisekante, so geht überhaupt keine weitere Sekante

[26]) Es sei noch ein zweiter Beweis angedeutet (erster Fall des § 8). Aus dem Ende des § 1 schließt man, daß es zwischen zwei aufeinanderfolgenden Wendepunkten wenigstens einen Kurvenpunkt gibt, dessen Schmiegebene durch P geht; es schicken also mindestens vier Kurvenpunkte ihre Schmiegebenen durch P. Die Tangentialebene des Punktes s durch P trifft die Kurve in zwei weiteren Punkten t und t', die sich stetig mit s ändern. Nach dem Muster des § 5, III (es war unwesentlich, daß der feste Punkt r auf der Kurve lag!) überzeugt man sich davon, daß, wenn diese Tangentialebene die Schmiegebene von s ist, der eine der beiden Punkte t und t' rückläufig durch s hindurchgeht. Daraus schließt man, daß zwischen je zwei Kurvenpunkten mit gleichem Schraubungssinn, deren Schmiegebenen durch P gehen, die Sekanten durch s und t oder t' die ganze Tangentialebene überstrichen haben, daß also mindestens zwei Sekanten durch P gehen. Da die ganze Kurve auf dem Rande ihrer konvexen Hülle liegt, folgt hieraus, daß P auf mindestens zwei Sehnen liegt.

durch ihn; liegt P auf einer Randsehne, so geht keine weitere Sehne durch ihn; liegt der Punkt P im Innern der konvexen Hülle, aber auf keiner Trisekante, so ist er Schnittpunkt zweier Sehnen.

Die beiden ersten Behauptungen sind evident; ein Beweis der letzten kann folgendermaßen geführt werden: Die Gerade $s_1 s_2$ sei nicht Trisekante, die Sehne $s_1 s_2$ im Innern der konvexen Hülle gelegen. Die Ebene $E(s)$ durch s_1, s_2 und s trifft die C_4 in genau noch einem Punkte $t = t(s)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei entweder $t(s_1) = s_1$ oder $t(s_1)$ im Innern des Bogens $\overset{\frown}{s_2 s_1}$ gelegen. Liegt dann s auf dem Bogen $\overset{\frown}{s_1 s_2}$ und hinreichend nahe bei s_1, so werden s und t auf $E(s)$ durch die Gerade $s_1 s_2$ getrennt und der Schnittpunkt P der Sehne $s\,t$ mit der Geraden $s_1 s_2$ liegt beliebig nahe bei s_1. Jetzt lasse ich s den Bogen $\overset{\frown}{s_1 s_2}$ durchlaufen. t ändert sich stetig mit s. Solange t nicht durch s_2 hindurchgeht, werden s und t auf $E(s)$ durch die Gerade $s_1 s_2$ getrennt. Mag s oder t zuerst in den Punkt s_2 hineinrücken, in beiden Fällen konvergiert P gegen s_2, und P hat die ganze Sehne $s_1 s_2$ überstrichen, wenn s von s_1 bis in diese Endlage gelaufen ist.

(Eingegangen am 19. 11. 1935.)

Sur les systèmes de surfaces triples orthogonaux.

Von

O. Pylarinos in Saloniki (Griechenland).

On doit à M. R. Rothe[1]) le théorème suivant:

„S'il existe sur les surfaces d'une famille dépendant d'un seul paramètre deux congruences de courbes respectivement normales à deux familles de surfaces, dont les tangentes en chaque point d'une quelconque des surfaces de la première famille sont symétriques par rapport à l'une des directions principales de la surface en ce point, les surfaces de cette famille font partie d'un système triple orthogonal."

Cette proposition comporte une généralisation remarquable au théorème suivant dû à E. Keraval[2]):

„Si les deux séries des lignes asymptotiques d'une famille de surfaces, dépendant d'un seul paramètre, forment deux congruences de courbes respectivement normales à deux familles de surfaces, les surfaces de cette famille font partie d'un système triple orthogonal."

Nous nous proposons, dans ce qui suit, de donner quelques théorèmes, établissant des conditions suffisantes pour que les surfaces d'une famille, dépendant d'un seul paramètre, fassent partie d'un système triple orthogonal, qui peuvent être considérés comme des généralisations des deux théorèmes que nous venons de citer, ainsi que quelques propriétés des familles de surfaces dont les lignes asymptotiques forment deux congruences de courbes respectivement normales à deux familles de surfaces.

A cette fin nous allons, d'abord, établir une condition suffisante pour que les produits scalaires de quatre vecteurs, coplanaires et définis dans le même champ, avec leurs rotationnels, soient liés par une relation linéaire et homogène, dont les théorèmes déjà mentionnés sont des simples conséquences.

I. Soient

(1) $$\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \bar{a}_3,\ \bar{a}_4$$

[1]) R. Rothe, Über dreifach-orthogonale Flächensysteme. Mathem. Ann. **101** (1929), p. 273—283, p. 276, No. 3.

[2]) E. Keraval, Sur une famille de systèmes triplement orthogonaux. C. R. **157** (1913), p. 905—908.

quatre vecteurs coplanaires et définis dans le même champ. On peut poser, dans ce cas,

$$\bar{a}_1 = \alpha_1 \bar{a}_3 + \beta_1 \bar{a}_4, \qquad \bar{a}_2 = \alpha_2 \bar{a}_3 + \beta_2 \bar{a}_4,$$

où $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ sont des fonctions scalaires du point définies dans ce même champ; les rotationnels de ces deux vecteurs sont, alors, d'après une identité connue,

$$\operatorname{rot} \bar{a}_1 = \alpha_1 \operatorname{rot} \bar{a}_3 + \beta_1 \operatorname{rot} \bar{a}_4 + [\operatorname{grad} \alpha_1 \cdot \bar{a}_3] + [\operatorname{grad} \beta_1 \cdot \bar{a}_4],$$
$$\operatorname{rot} \bar{a}_2 = \alpha_2 \operatorname{rot} \bar{a}_3 + \beta_2 \operatorname{rot} \bar{a}_4 + [\operatorname{grad} \alpha_2 \cdot \bar{a}_3] + [\operatorname{grad} \beta_2 \cdot \bar{a}_4].$$

En tenant compte de ces deux relations on trouve pour les produits scalaires $\bar{a}_1 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_1$, $\bar{a}_2 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_2$ les expressions suivantes:

$$\bar{a}_1 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_1 = \alpha_1^2 \bar{a}_3 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_3 + \beta_1^2 \bar{a}_4 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_4 + \alpha_1 \beta_1 [\bar{a}_3 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_4 + \bar{a}_4 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_3] - \{\alpha_1 \operatorname{grad} \beta_1 - \beta_1 \operatorname{grad} \alpha_1\} \cdot [\bar{a}_3 \cdot \bar{a}_4],$$
$$\bar{a}_2 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_2 = \alpha_2^2 \bar{a}_3 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_3 + \beta_2^2 \bar{a}_4 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_4 + \alpha_2 \beta_2 [\bar{a}_3 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_4 + \bar{a}_4 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_3] - \{\alpha_2 \operatorname{grad} \beta_2 - \beta_2 \operatorname{grad} \alpha_2\} \cdot [\bar{a}_3 \cdot \bar{a}_4],$$

et en éliminant $\bar{a}_3 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_4 + \bar{a}_4 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_3$ entre ces deux équations on obtient:

$$(2) \qquad \frac{\bar{a}_1 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_1}{\alpha_1 \beta_1} - \frac{\bar{a}_2 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_2}{\alpha_2 \beta_2} = \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} - \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right) \bar{a}_3 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_3 + \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} - \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) \bar{a}_4 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_4 + \frac{1}{\lambda} \operatorname{grad} \lambda \cdot [\bar{a}_3 \cdot \bar{a}_4],$$

où λ désigne le rapport anharmonique $\frac{\beta_2}{\alpha_2} : \frac{\beta_1}{\alpha_1}$ des directions des deux vecteurs $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ par rapport à celles des $\bar{a}_3, \bar{a}_4$.

Or, si le rapport anharmonique λ est une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$(3) \qquad \operatorname{grad} \lambda \cdot [\bar{a}_3 \cdot \bar{a}_4] = 0,$$

la relation (2) se réduit à

$$(4) \qquad \frac{\bar{a}_1 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_1}{\alpha_1 \beta_1} - \frac{\bar{a}_2 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_2}{\alpha_2 \beta_2} = \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} - \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right) \bar{a}_3 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_3 + \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} - \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) \bar{a}_4 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_4.$$

On peut, donc, énoncer le theorème suivant:

Si le rapport anharmonique des directions des quatre vecteurs (1), *coplanaires et définis dans le même champ, est une solution de l'équation aux dérivées partielles* (3), *les produits scalaires de ces vecteurs avec leurs rotationnels sont liés par une relation linéaire et homogène de la forme* (4).

En vue des applications ultérieures nous mentionnons le cas particulier où les directions des deux vecteurs $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ sont conjuguées harmoniques par rapport à celles des $\bar{a}_3, \bar{a}_4$; le rapport anharmonique λ étant, dans ce cas, égal à -1, la relation (4) prend la forme

$$(5) \qquad \frac{\bar{a}_1 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_1}{\alpha_1 \beta_1} - \frac{\bar{a}_2 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_2}{\alpha_2 \beta_2} = 2 \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} \bar{a}_3 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_3 + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \bar{a}_4 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_4\right).$$

II. Considérons, maintenant, une famille de surfaces définie, par rapport à un système de coordonnées, par l'équation

$$f(x, y, z) = \text{const}, \tag{6}$$

et supposons que les vecteurs $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ définissent deux congruences de courbes situées sur les surfaces de cette famille, tandis que les vecteurs $\bar{a}_3, \bar{a}_4$ définissent en chaque point d'une quelconque de ces surfaces, les directions des bissectrices des angles des courbes de ces deux congruences qui passent par ce point; les directions des deux vecteurs $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ étant, dans ce cas, conjuguées harmoniques par rapport à celles des $\bar{a}_3, \bar{a}_4$, les produits scalaires de ces quatre vecteurs avec leurs rotationnels sont liés par une relation de la forme (5).

Donc, si trois de ces produits sont nuls, il en sera de même pour le quatrième; en d'autres termes, si trois des congruences définies par ces vecteurs sont formées par les trajectoires orthogonales des trois familles de surfaces, il en sera de même pour la quatrième et, comme les deux vecteurs $\bar{a}_3, \bar{a}_4$ sont orthogonaux, les surfaces de la famille considérée font partie d'un système triple orthogonal.

Soient, maintenant,

$$f_1(x, y, z) = \text{const}, \qquad f_2(x, y, z) = \text{const} \tag{7}$$

les équations des deux familles de surfaces qui sont respectivement normales aux courbes des congruences définies par les deux vecteurs $\bar{a}_1, \bar{a}_2$.

On peut poser, alors,

$$\bar{a}_1 = \frac{\operatorname{grad} f_1}{|\operatorname{grad} f_1|}, \qquad \bar{a}_2 = \frac{\operatorname{grad} f_2}{|\operatorname{grad} f_2|}.$$

Les directions des bissectrices des angles de ces vecteurs sont définies par les vecteurs

$$\bar{a}_1 \pm \bar{a}_2 = \frac{\operatorname{grad} f_1}{|\operatorname{grad} f_1|} \pm \frac{\operatorname{grad} f_2}{|\operatorname{grad} f_2|}$$

et, pour que les courbes de la congruence définie par l'un de ces vecteurs, p. e. $\bar{a}_1 + \bar{a}_2$, soient normales à une famille de surfaces, il faut et il suffit que l'on ait

$$(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) \cdot \operatorname{rot}(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) = \left(\frac{\operatorname{grad} f_1}{|\operatorname{grad} f_1|} + \frac{\operatorname{grad} f_2}{|\operatorname{grad} f_2|}\right) \cdot \operatorname{rot}\left(\frac{\operatorname{grad} f_1}{|\operatorname{grad} f_1|} + \frac{\operatorname{grad} f_2}{|\operatorname{grad} f_2|}\right) = 0\,^{3}),$$

ou

$$[\operatorname{grad} f_1 \cdot \operatorname{grad} f_2] \cdot \left\{\frac{1}{|\operatorname{grad} f_1|} \cdot \operatorname{grad}\left(\frac{1}{|\operatorname{grad} f_1|}\right) - \frac{1}{|\operatorname{grad} f_2|} \cdot \operatorname{grad}\left(\frac{1}{|\operatorname{grad} f_2|}\right)\right\} = 0,$$

ou, finalement,

$$[\operatorname{grad} f_1 \cdot \operatorname{grad} f_2] \cdot \operatorname{grad}\left\{\frac{(\operatorname{grad} f_1)^2}{(\operatorname{grad} f_2)^2}\right\} = 0;$$

---

[3]) G. Bouligand, Leçons de Géométrie vectorielle, p. 288. J. Spielrein, Lehrbuch der Vektorrechnung (1926), p. 170.

en d'autres termes, il faut et il suffit que le rapport $\frac{(\operatorname{grad} f_1)^2}{(\operatorname{grad} f_2)^2}$ soit une fonction des f_1, f_2 seulement.

Nous obtenons ainsi le théorème suivant:

Si les surfaces des deux familles définies par les équations (7) *sont, en même temps que les surfaces de la famille définie par l'équation* $\frac{(\operatorname{grad} f_1)^2}{(\operatorname{grad} f_2)^2} = \text{const}$, *normales aux surfaces d'une même famille, les surfaces de cette famille font partie d'un système triple orthogonal.*

En particulier, si les surfaces des deux familles définies par les équations

$$(\operatorname{grad} f_1)^2 = \text{const}, \qquad (\operatorname{grad} f_2)^2 = \text{const}$$

sont, en même temps que les surfaces des deux familles définies par les équations (7), normales aux surfaces d'une même famille, les surfaces de cette famille font partie, d'aprés le théorème que nous venons de démontrer, d'un système orthogonal; mais, dans ce cas, les trajectoires orthogonales des deux familles de surfaces définies par les équations (7) sont les lignes asymptotiques des surfaces de cette famille.

En effet, pour que les trajectoires orthogonales des surfaces de la famille définie p. e. par l'équation $f_1(x, y, z) = \text{const}$ soient des lignes asymptotiques des surfaces de la famille (6), il faut et il suffit que la fonction $f_1(x, y, z)$ satisfasse aux deux équations aux dérivées partielles

$$(8) \qquad \begin{cases} \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} f_1 = 0, \\ \operatorname{grad} f \cdot (\operatorname{grad} f_1 \cdot \nabla) \operatorname{grad} f_1 = 0, \end{cases}$$

vu que les deux vecteurs

$$\operatorname{grad} f_1, \quad (\operatorname{grad} f_1 \cdot \nabla) \operatorname{grad} f_1$$

définissent le plan osculateur en chaque point d'une quelconque de ces courbes, et comme on a, d'aprés une identité connue,

$$2(\operatorname{grad} f_1 \cdot \nabla) \operatorname{grad} f_1 = \operatorname{grad} (\operatorname{grad} f_1)^2,$$

la fonction $f_1(x, y, z)$ doit aussi satisfaire à l'équation

$$(9) \qquad \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} (\operatorname{grad} f_1)^2 = 0,$$

et réciproquement, si f_1 satisfait à (9), elle doit aussi satisfaire à la seconde équation (8); par conséquent:

Pour que les trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces définie par l'équation $f_1 = \text{const}$ soient des lignes asymptotiques d'une autre famille de surfaces, engendrées par ces courbes, il faut et il suffit que les surfaces de la famille définie par l'équation $(\operatorname{grad} f_1)^2 = \text{const}$ soient normales aux surfaces de cette famille.

On peut déduire aisément de ce résultat, si l'on tient compte aussi du théorème précédent, le théorème de Keraval.

III. Supposons maintenant que les deux vecteurs $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$ soient unitaires et définissent les directions principales en chaque point d'une quelconque des surfaces de la famille (6); si l'on désigne par ω_1 et ω_2 les angles des deux vecteurs $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, supposés aussi unitaires, avec $\bar{a}_3$, on a

$$\bar{a}_1 = \cos\omega_1 \cdot \bar{a}_3 + \sin\omega_1 \cdot \bar{a}_4, \quad \bar{a}_2 = \cos\omega_2 \cdot \bar{a}_3 + \sin\omega_2 \cdot \bar{a}_4$$

et $\lambda = \dfrac{\operatorname{tg}\omega_2}{\operatorname{tg}\omega_1}$.

Or, si le rapport $\dfrac{\operatorname{tg}\omega_2}{\operatorname{tg}\omega_1}$ satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$[\bar{a}_3 \cdot \bar{a}_4] \cdot \operatorname{grad}\left(\frac{\operatorname{tg}\omega_2}{\operatorname{tg}\omega_1}\right) = 0. \tag{10}$$

ces quatre vecteurs sont liés par la relation

$$\frac{\bar{a}_1 \cdot \operatorname{rot}\bar{a}_1}{\cos\omega_1 \cdot \sin\omega_1} - \frac{\bar{a}_2 \cdot \operatorname{rot}\bar{a}_2}{\cos\omega_2 \cdot \sin\omega_2} = (\cot\omega_1 - \cot\omega_2)\,\bar{a}_3 \cdot \operatorname{rot}\bar{a}_3 + (\operatorname{tg}\omega_1 - \operatorname{tg}\omega_2)\,\bar{a}_4 \cdot \operatorname{rot}\bar{a}_4, \tag{11}$$

et comme on a aussi

$$\bar{a}_3 \cdot \operatorname{rot}\bar{a}_3 = \bar{a}_4 \cdot \operatorname{rot}\bar{a}_4, \tag{12}$$

vu que les deux vecteurs $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$ définissent les directions principales en chaque point d'une quelconque de ces surfaces[4]), en éliminant $\bar{a}_4 \cdot \operatorname{rot}\bar{a}_4$ entre ces deux équations, on obtient

$$\sin 2\omega_2\, \bar{a}_1 \cdot \operatorname{rot}\bar{a}_1 - \sin 2\omega_1\, \bar{a}_2 \cdot \operatorname{rot} a_2 = (\sin 2\omega_2 - \sin 2\omega_1)\, \bar{a}_3 \cdot \operatorname{rot}\bar{a}_3. \tag{13}$$

Les directions des vecteurs $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ étant supposées distinctes, le coefficient $\sin 2\omega_2 - \sin 2\omega_1$ est nul seulement dans le cas où $\omega_1 + \omega_2 = \dfrac{2n+1}{2}\pi$; en d'autres termes, seulement dans le cas où les directions de ces deux vecteurs sont symétriques par rapport à l'une des bissectrices des angles des directions principales; la relation (13) se réduit, dans ce cas, à

$$\bar{a}_1 \cdot \operatorname{rot}\bar{a}_1 - \bar{a}_2 \cdot \operatorname{rot}\bar{a}_2 = 0.$$

Donc, si les deux produits scalaires $\bar{a}_1 \cdot \operatorname{rot}\bar{a}_1$, $\bar{a}_2 \cdot \operatorname{rot}\bar{a}_2$ sont nuls et, en même temps, le rapport des tangentes des angles des $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ avec $\bar{a}_3$ satisfait à l'équation (4), tandis que la somme de ces angles est différente de $\dfrac{2n+1}{2}\pi$, le produit $\bar{a}_3 \cdot \operatorname{rot}\bar{a}_3$ est aussi nul et, d'après (12), il en sera de même pour $\bar{a}_4 \cdot \operatorname{rot} a_4$.

On peut donc énoncer le théorème suivant:

S'il existe sur les surfaces d'une famille deux congruences de courbes respectivement normales à deux familles de surfaces, dont les angles en chaque point d'une quelconque des surfaces de cette famille avec l'une des directions principales de la surface en ce point satisfont à l'équation (10),

[4]) R. Rothe, Mathem. Annalen, loc. cit. p. 281, No. 8.

tandis que leur somme est différente de $\frac{2n+1}{2}\pi$, *les surfaces de cette famille font partie d'un système triple orthogonal.*

On peut aisément déduire de ce théorème le théorème de M. Rothe.

En effet: Si les tangentes aux courbes des deux congruences situées sur les surfaces d'une même famille sont symétriques par rapport à l'une des directions principales en chaque point d'une quelconque de ces surfaces, on a $\frac{\operatorname{tg}\omega_1}{\operatorname{tg}\omega_2} = -1$, et $\omega_1 + \omega_2 = n\pi$ et par conséquent, si les courbes de ces congruences sont respectivement normales à deux familles de surfaces, les surfaces de cette famille font partie, d'aprés le théorème que nous venons de démontrer, d'un système triple orthogonal.

En particulier, si les deux angles ω_1, ω_2 sont deux solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$[\bar{a}_3 \cdot \bar{a}_4] \cdot \operatorname{grad} \operatorname{tg}\omega = 0, \tag{14}$$

le rapport $\frac{\operatorname{tg}\omega_1}{\operatorname{tg}\omega_2}$ satisfait évidemment à l'équation (10) et, par conséquent:

S'il existe sur les surfaces d'une famille deux congruences de courbes respectivement normales à deux familles de surfaces dont les angles avec l'une des directions principales en chaque point d'une quelconque des surfaces de cette famille sont deux solutions de l'équation aux dérivées partielles (14), *tandis que leur somme est différente de* $\frac{2n+1}{2}\pi$, *les surfaces de cette famille font partie d'un système triple orthogonal.*

IV. Supposons enfin, que les deux vecteurs $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$ définissent les directions asymptotiques en chaque point d'une quelconque des surfaces de la famille (6), tandis que les deux vecteurs $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ définissent deux directions conjuguées de la surface en ce point. Les directions des $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ sont alors conjuguées harmoniques par rapport à celles des $\bar{a}_3$, $\bar{a}_4$ et, par conséquent, les produits scalaires de ces quatre vecteurs avec leurs rotationnels sont liés par une relation de la forme (5).

Si l'on admet maintenant que les lignes asymptotiques de ces surfaces forment deux congruences de courbes respectivement normales à deux familles de surfaces, les deux produits scalaires $\bar{a}_3 \cdot \operatorname{rot}\bar{a}_3$, $\bar{a}_4 \cdot \operatorname{rot}\bar{a}_4$ sont nuls et la relation (5) se réduit à

$$\frac{\bar{a}_1 \cdot \operatorname{rot} a_1}{\alpha_1 \beta_1} - \frac{\bar{a}_2 \cdot \operatorname{rot}\bar{a}_2}{\alpha_2 \beta_2} = 0. \tag{15}$$

Il en résulte que si les courbes de l'une des congruences définies par les deux vecteurs $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ sont normales à une famille de surfaces, il en sera de même pour les courbes de l'autre; par conséquent:

Si les lignes asymptotiques d'une famille de surfaces forment deux congruences de courbes respectivement normales à deux familles de surfaces

et les courbes de l'une des deux congruences formées par un réseau des lignes conjuguées sur ces surfaces sont aussi normales à une famille de surfaces il en sera de même pour les courbes de l'autre.

Soient, maintenant, $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ et $\bar{a}'_1, \bar{a}'_2$ quatre vecteurs définissant deux couples distinctes de directions conjuguées en chaque point d'une quelconque des surfaces d'une famille. Si $\bar{a}_3, \bar{a}_4$ définissent les directions asymptotiques de la surface, on a

$$\bar{a}_1 = \alpha_1 \bar{a}_3 + \beta_1 \bar{a}_4, \quad \bar{a}_2 = \alpha_2 \bar{a}_3 + \beta_2 \bar{a}_4,$$

$$\bar{a}'_1 = \alpha'_1 \bar{a}_3 + \beta'_1 \bar{a}_4, \quad \bar{a}'_2 = \alpha_2 \bar{a}_3 + \beta'_2 \bar{a}_4, \text{ où } \frac{\beta_2}{\alpha_2} : \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta'_2}{\alpha'_2} : \frac{\beta'_1}{\alpha'_1} = -1,$$

et

$$(16) \quad \begin{cases} \dfrac{\bar{a}_1 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_1}{\alpha_1 \beta_1} - \dfrac{\bar{a}_2 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_2}{\alpha_2 \beta_2} = 2 \left\{ \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} \bar{a}_3 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_3 + \dfrac{\beta_1}{\alpha_1} \bar{a}_4 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_4 \right\}, \\ \dfrac{\bar{a}'_1 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}'_1}{\alpha'_1 \beta'_1} - \dfrac{\bar{a}'_2 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}'_2}{\alpha'_2 \beta'_2} = 2 \left\{ \dfrac{\alpha'_1}{\beta'_1} \cdot \bar{a}_3 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_3 + \dfrac{\beta'_1}{\alpha'_1} \bar{a}_4 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_4 \right\}. \end{cases}$$

Si l'on admet maintenant que les courbes des congruences définies par ces quatre vecteurs soient respectivement normales à quatre familles de surfaces, on a

$$\bar{a}_1 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_1 = \bar{a}_2 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_2 = \bar{a}'_1 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}'_1 = \bar{a}'_2 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}'_2 = 0;$$

les deux équations (16) deviennent alors

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} \bar{a}_3 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_3 + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \bar{a}_4 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_4 = 0,$$

$$\frac{\alpha'_1}{\beta'_1} \bar{a}_3 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_3 + \frac{\beta'_1}{\alpha_1} \bar{a}_4 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_4 = 0$$

et comme on a

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} & \dfrac{\beta_1}{\alpha_1} \\ \dfrac{\alpha'_1}{\beta'_1} & \dfrac{\beta'_1}{\alpha'_1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

les deux couples des directions considérées étant supposées distinctes, les deux produits scalaires $\bar{a}_3 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_3, \bar{a}_4 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_4$ seront nécessairement nuls; en d'autres termes, les lignes asymptotiques de ces surfaces forment, dans ce cas, deux congruences de courbes respectivement normales à deux familles de surfaces.

On peut donc, en tenant compte de la proposition précédente, énoncer le théorème suivant:

Pour que les lignes asymptotiques d'une famille de surfaces forment deux congruences de courbes respectivement normales à deux familles de surfaces, il faut et il suffit que les courbes de quatre congruences formées par deux réseaux de lignes conjuguées sur les surfaces de cette famille, soient respectivement normales à quatre familles de surfaces.

On peut aisément démontrer à l'aide de la relation (16) le théorème de Keraval, si l'on tient compte du fait que, dans le cas où les deux vecteurs $\bar{a}_1, \bar{a}_2$, supposés unitaires, définissent les directions principales de la surface, ils sont liés aussi par la relation

$$\bar{a}_1 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_1 = \bar{a}_2 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_2 .$$

V. Si les deux vecteurs unitaires $\bar{a}_3, \bar{a}_4$ définissent les directions asymptotiques en chaque point d'une quelconque des surfaces d'une famille, les deux vecteurs $(\bar{a}_3 \nabla)\, \bar{a}_3$ et $(\bar{a}_4 \nabla)\, \bar{a}_4$ sont parallèles au plan tangent de la surface en ce point; par conséquent, les deux vecteurs $\bar{a}_3, \bar{a}_4$ sont liés, dans ce cas, par les relations

$$[\bar{a}_3 \cdot \bar{a}_4] \cdot (\bar{a}_3 \nabla)\, \bar{a}_3 = 0,$$
$$[\bar{a}_3 \cdot \bar{a}_4] \cdot (\bar{a}_4 \nabla)\, \bar{a}_4 = 0,$$

et, comme on a, d'après une identité connue,

$$(\bar{a}_3 \nabla)\, \bar{a}_3 = -[\bar{a}_3 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_3],$$
$$(\bar{a}_4 \nabla)\, \bar{a}_4 = -[\bar{a}_4 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_4],$$

vu que $\bar{a}_3^2 = \bar{a}_4^2 = 1$, ces deux vecteurs doivent aussi vérifier les relations:

$$[\bar{a}_3 \cdot \bar{a}_4] \cdot [\bar{a}_3 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_3] = \bar{a}_4 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_3 - (\bar{a}_3 \cdot \bar{a}_4) \cdot (\bar{a}_3 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_3) = 0,$$
$$[\bar{a}_3 \cdot \bar{a}_4] \cdot [\bar{a}_4 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_4] = (\bar{a}_3 \cdot \bar{a}_4)\, (\bar{a}_4 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_4) - \bar{a}_3 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_4 = 0.$$

Donc, si les deux produits scalaires $\bar{a}_3 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_3, \bar{a}_4 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_4$ sont nuls, il en sera de même pour les produits $\bar{a}_3 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_4$ et $\bar{a}_4 \cdot \operatorname{rot} \bar{a}_3$; en d'autres termes:

Si les lignes asymptotiques d'une famille de surfaces forment deux congruences de courbes respectivement normales à deux familles de surfaces, les rotationnels de deux vecteurs unitaires, définissant les directions asymptotiques en chaque point d'une quelconque de ces surfaces, sont parallèles à la normale de la surface en ce point.

(Eingegangen am 1. 12. 1935.)

Sur les probabilités en chaîne.

Von

E. Feldheim in Budapest.

§ 1.

Considérons un système S dépendant d'un paramètre x, qui représente l'état du système à un instant t_1. Désignons par $P(t_1, x, t_2, E_y)$ la probabilité pour qu'à un instant ultérieur t_2 le système se trouve dans l'un des états de l'ensemble E_y, tel que $x \leqq y$. On fera

$$F(t_1, x, t_2, y) = P(t_1, x, t_2, E_y). \tag{1}$$

Nous nous placerons dans le cas d'un schéma stochastique continu, dans lequel le paramètre peut prendre toute valeur possible de $-\infty$ à $+\infty$. Faisons encore l'hypothèse de la loi normale, c'est-à-dire que $F(t_1, x, t_2, y)$ est monotone par rapport à la variable y, et que l'on a

$$F(t_1, x, t_2, -\infty) = 0, \quad F(t_1, x, t_2, +\infty) = 1. \tag{2}$$

Dans le cas où la fonction des probabilités totales est absolument continue par rapport à y, on aura

$$F(t_1, x, t_2, y) = \int_{-\infty}^{y} f(t_1, x, t_2, y)\, dy. \tag{3}$$

La condition (2) s'exprime alors par la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, x, t_2, y)\, dy = 1. \tag{4}$$

La fonction $f(t_1, x, t_2, y)$ est supposée non-négative, et mesurable au sens de Borel. Elle satisfait enfin à l'équation fonctionnelle de Chapman[1])

$$f(t_1, x, t_2, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, x, t', z)\, f(t', z, t_2, y)\, dz \tag{5}$$

avec la condition $t_1 < t' < t_2$.

Sans développer plus longuement la théorie avancée de ce domaine du calcul des probabilités, nous reproduirons encore le système des

[1]) Chapman a obtenu cette équation, sous une forme un peu différente, dans ses travaux sur la diffusion.

équations aux dérivées partielles relatives à la densité de probabilité $f(s, x, t, y)$, où $t > s$:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = -A(s, x)\frac{\partial f}{\partial x} - B^2(s, x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}[A(t, y) f(s, x, t, y)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}[B^2(t, y) f(s, x, t, y)]. \tag{7}$$

La signification des coefficients est la suivante:

$$A(s, x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - x) f(s, x, s + \Delta, y)\, dy, \tag{8}$$

$$B^2(s, x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{2\Delta} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - x)^2 f(s, x, s + \Delta, y)\, dy \tag{9}$$

sous la condition que le rapport entre le moment d'ordre trois de la fonction $f(s, x, t, y)$ et le moment d'ordre deux tende vers zéro pour $\lim t = 0$.

Ces équations aux dérivées partielles, qui sont dues à M. Kolmogoroff[2]), serviront de base à nos recherches. Pour leur démonstration, et leurs conditions de validité, nous renverrons à l'ouvrage cité sous[2]). Nous ne tenons compte, dans ce qui va suivre, que des conditions nécessaires pour les études entreprises.

Nous nous proposons de résoudre ici deux questions. Dans le § 2 nous chercherons les équations aux dérivées partielles relatives à la fonction caractéristique de ces lois, et dans le § 3 nous définirons tous les procédés de changements qui conduisent à la loi de Laplace, prise sous une forme générale.

§ 2.

Introduisons maintenant la notion connue de fonction caractéristique, définie par la relation

$$\varphi(s, x, t, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, x, t, y)\, e^{ipy}\, dy. \tag{10}$$

L'emploi de la fonction caractéristique est très avantageux dans un grand nombre de questions du calcul des probabilités. Il nous paraît assez vraisemblable que, dans les cas où les équations (6) et (7) permettent de résoudre des problèmes, on pourra retrouver les résultats, par des moyens peut-être plus immédiats, si l'on possède les analogues de ces équations relatives à la fonction caractéristique.

[2]) A. Kolmogoroff: Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Annalen 104 (1931), p. 415.

L'analogue de l'équation (6) s'obtient immédiatement, soit par un calcul direct, soit par la substitution dans la relation (10),

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = - A(s, x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - B^2(s, x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \tag{11}$$

Il n'en est plus de même de celui de l'équation (7). On arrive au résultat en développant les fonctions $A(t, y)$ et $B^2(t, y)$ en séries entières, ordonnées suivant les puissances de y. Cette opération, par suite de la définition de ces fonctions, et des hypothèses faites sur la densité de probabilité $f(s, x, t, y)$ est complètement légitime.

Faisons donc

$$A(t, y) = A_0(t) + y A_1(t) + y^2 A_2(t) + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} y^k A_k(t), \tag{12}$$

$$B^2(t, y) = B_0^2(t) + y B_1^2(t) + y^2 B_2^2(t) + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} y^k B_k^2(t). \tag{13}$$

On déduit alors de (7), en tenant compte de (10), l'équation aux dérivées partielles comprenant une infinité de termes:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} [ip A_k(t) - p^2 B_k^2(t)] \frac{1}{i^k} \frac{\partial^k \varphi}{\partial p^k} \text{ [3]}. \tag{14}$$

§ 3.

Le grand avantage de l'emploi des équations aux dérivées partielles consiste dans le fait qu'on obtient ainsi des solutions rigoureuses et uniques, satisfaisant aux conditions initiales imposées, tandis que dans la théorie habituelle on ne trouve que des expressions asymptotiques.

---

[3]) Les développements (12) et (13) ne peuvent pas contenir de puissances négatives, car par hypothèse $A(t, y)$ et $B^2(t, y)$ admettent des dérivées partielles continues du premier et du second ordre, pour toutes les valeurs de t et de y. L'emploi de notre méthode ne cesse pas avec cette hypothèse, parce qu'on peut évaluer les termes correspondant aux puissances négatives de y au moyen des intégrales multiples de la fonction caractéristique.

Considérons, en effet, l'intégrale

$$G(s, x, t, p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{y^k} f(s, x, t, y) e^{ipy} dy. \tag{15}$$

Dérivons k fois par rapport à p:

$$\frac{\partial^k}{\partial p^k} G(s, x, t, p) = i^k \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, x, t, y) e^{ipy} dy = i^k \varphi(s, x, t, p) \tag{16}$$

et on sera conduit à une équation intégro-différentielle.

La loi-limite la plus fréquente, et de plus grand intérêt, étant la loi de Laplace, nous nous proposons de rechercher tous les types possibles des fonctions $A(t, y)$ et $B^2(t, y)$ qui conduisent pour toutes valeurs de $s, x, t,$ à cette solution.

On pourra partir de l'équation différentielle, appelée équation de la chaleur, à laquelle satisfait cette loi, mais il nous semble plus immédiat de considérer l'expression de la densité de cette loi. Prenons-la dans sa forme générale:

$$f(s, x, t, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\sigma}} e^{-\frac{(y-\lambda)^2}{4\sigma}}, \tag{17}$$

où λ et σ sont fonctions de $s, x, t,$ mais ne dépendent pas de y.

La fonction caractéristique,

$$\varphi(s, x, t, p) = e^{-\sigma p^2 + i\lambda p}, \tag{18}$$

ayant une expression analytique semblable à celle de la densité, on peut opérer soit sur les équations aux dérivées partielles (6) et (7), soit sur (11) et (14). Nous prendrons, à cause de la simplicité des calculs, ces deux dernières.

Considérons le logarithme de la fonction caractéristique:

$$\text{Log}\,\varphi(s, x, t, p) = \psi(s, x, t, p) = -p^2\sigma(s, x, t) + ip\lambda(s, x, t), \tag{19}$$

ce qui change l'équation (11) en

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = -A(s, x)\frac{\partial\psi}{\partial x} - B^2(s, x)\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right]. \tag{20}$$

Remplaçons ψ par sa valeur (19); l'identification par rapport à p donne les conditions

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} = 0, \tag{21}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial s} + B^2(s, x)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 = 0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial s} + A(s, x)\frac{\partial\lambda}{\partial x} + B^2(s, x)\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} = 0. \tag{23}$$

Les relations (8) et (9) deviennent

$$A(s, x) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{\lambda(s, x, s+\Delta) - x}{\Delta}, \tag{24}$$

$$B^2(s, x) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{\sigma(s, x, s+\Delta)}{\Delta} + \lim_{\Delta\to 0}\frac{[\lambda(s, x, s+\Delta) - x]^2}{2\Delta}. \tag{25}$$

Le second terme du second membre de (25) tend vers zéro avec Δ; le premier, d'après (21), ne dépend pas de x, donc $B^2(s, x)$ est indépendant de x. Le développement (13) se réduit ainsi à son premier terme.

(22) montre alors que

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} = 0,$$

donc $A(s, x)$ est linéaire par rapport à x. Faisons

$$A(s, x) = A_0(s) + x A_1(s), \tag{26}$$

$$B^2(s, x) = B_0^2(s). \tag{27}$$

L'équation aux dérivées partielles (14) donne

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = [ip A_0(t) - p^2 B_0^2(t)]\varphi + p A_1(t) \frac{\partial \varphi}{\partial p}, \tag{28}$$

ou

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = ip A_0(t) - p^2 B_0^2(t) + p A_1(t) \frac{\partial \psi}{\partial p}. \tag{29}$$

La substitution de (19) dans (29) donne les deux conditions

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = B_0^2(t) + 2 A_1(t) \cdot \sigma(s, t), \tag{30}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = A_0(t) + A_1(t) \cdot \lambda(s, x, t). \tag{31}$$

Il faut encore adjoindre la condition

$$\lim_{t \to s} \int_{-\infty}^{+\infty} (y - x)^2 f(s, x, t, y)\, dy = 0 \qquad \text{(pour } t > s\text{)},$$

qui s'exprime par

$$\sigma(s, s) = 0. \tag{32}$$

La résolution du système d'équations (21), (22), (23), (30), (31), (32) se fait très facilement, et on obtient les expressions

$$\lambda(s, x, t) = \Big[x + \int_s^t A_0(u)\, e^{-\int_s^u A_1(v)\, dv}\, du\Big] \cdot e^{\int_s^t A_1(u)\, du}, \tag{33}$$

$$\sigma(s, t) = \int_s^t B_0^2(u)\, e^{2\int_u^t A_1(v)\, dv}\, du. \tag{34}$$

En résumé, *à la loi de Laplace* (17) *ne peuvent conduire que des procédés de changement où la vitesse moyenne* $A(s, x)$ *de la variation du paramètre* x *au cours de l'intervalle très petit* $(s, s + \Delta)$ *varie linéairement avec* x, *et où la dispersion* $B(s, x)$ *du procédé est indépendante de la valeur du paramètre.*

Inversement, les fonctions $A_0(u)$, $A_1(u)$, et $B_0^2(u)$ caractérisent dans ce cas particulier notre procédé stochastique, et définissent complètement la solution satisfaisant aux conditions, sous la seule forme (17) avec les expressions (33) et (34) des coefficients λ et σ.

Mentionnons encore quelques cas particuliers. Si la densité $f(s, x, t, y)$ est fonction seulement de $y - x$ et de s, t, $A(s, x)$ se réduit aussi à $A_0(s)$, et l'on aura

$$\lambda(s, x, t) = x + \int_s^t A_0(u)\,du, \tag{35}$$

$$\sigma(s, t) = \int_s^t B_0^2(u)\,du. \tag{36}$$

Ce cas a été considéré déjà par Bachelier[4]).

L'homogénéité peut avoir lieu aussi par rapport aux paramètres du temps s et t: $f(s, x, t, y)$ ne dépend alors que de x, y, et de $t - s$. L'équation fonctionnelle (5) correspondante a été employée par Smoluchowski[5]), dans ses recherches relatives au mouvement brownien. Pour avoir encore la solution (17), il faut que $A_0(u)$, $A_1(u)$, $B_0^2(u)$ soient des constantes a_0, a_1, b_0^2. (33) et (34) deviennent dans ce cas

$$\lambda(x, t - s) = x e^{a_1(t-s)} + \frac{a_0}{a_1}[e^{a_1(t-s)} - 1], \tag{37}$$

$$\sigma(t - s) = \frac{b_0^2}{2a_1}[e^{2a_1(t-s)} - 1]. \tag{38}$$

La combinaison des cas de Bachelier et de Smoluchowski donne lieu enfin à la loi de Laplace proprement dite, parce qu'un choix convenable de l'origine et des unités donne la densité

$$f(s, x, t, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-s)}}\, e^{-\frac{(y-x)^2}{4(t-s)}}. \tag{39}$$

Budapest, 11 janvier 1936.

---

[4]) Calcul des probabilités. Paris. 1912.

[5]) Oeuvres de Smoluchowski t. II., ou Hostinský: Méthodes générales du calcul des probabilités. Mémorial des Sc. Math. Fasc. 52.

(Eingegangen am 13. 1. 1936.)