

Werk

Titel: Mathematische Annalen

Ort: Berlin

Jahr: 1937

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN235181684_0113

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN235181684_0113|LOG_0004

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Arithmetische Untersuchungen elliptischer Integrale.

Von

Theodor Schneider in Frankfurt a. M.

Im Jahre 1931 zeigte C. L. Siegel¹⁾, daß die Größen $g_2, g_3, \omega_1, \omega_2$ nicht sämtlich algebraisch sind, wobei ω_1 und ω_2 die Perioden der durch g_2 und g_3 bestimmten Weierstraßschen $\wp$ -Funktion seien. Mit einer ähnlichen Methode bewies ich im Februar 1934²⁾, daß auch g_2, g_3, ω, η nicht alle algebraisch sind, wenn ω und η demselben Integrationsweg entsprechen. Im zweiten Teil meiner Dissertation³⁾ führte ich den Beweis des Satzes: Besteht zwischen β und $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ keine lineare Beziehung mit rationalen Koeffizienten, so ist mindestens eine der Größen g_2, g_3, τ, β und $\wp(\omega_1 \beta)$ transzendent. Auf Grund anderer Beweisprinzipien gelangte im Vorjahre G. Pólya⁴⁾ zu der Aussage: Wenn h eine komplexe Zahl vom Absolutbetrage < 1 ist, so sind nicht alle fünf Zahlen

$$\sum_r \frac{r h^{2r}}{1 - h^{2r}}, \quad \sum_r \frac{r^3 h^{2r}}{1 - h^{2r}}, \quad \sum_r \frac{r^5 h^{2r}}{1 - h^{2r}},$$

$$\frac{\sum_r (-1)^r (2r-1) h^{(2r-1)^2}}{\prod_r (1 - h^{8r})(1 - h^{8r-4})^2}, \quad \frac{\sum_r (-1)^r r^2 h^{4r^2}}{\prod_r (1 - h^{8r})(1 - h^{8r-4})^2} \quad (r = 1, 2, 3, \dots)$$

algebraisch. Diese ist wieder enthalten in dem vor einigen Monaten von P. Popken und K. Mahler⁵⁾ bewiesenen Satz, daß auch die drei Größen $\frac{\omega \eta}{\pi^2}, \frac{\omega^6 g_2}{\pi^4}, \frac{\omega^6 g_3}{\pi^6}$ nicht sämtlich algebraisch sind. Alle vorstehenden Einzelergebnisse sind in den in § 1 aufgeführten Resultaten meiner Untersuchungen als Spezialfälle enthalten. In § 2 werden die Beweise der in § 1 gemachten Aussagen mittels ein und derselben Methode durchgeführt.

¹⁾ Über die Perioden elliptischer Funktionen, Journ. f. Math. 167 (1932), S. 62–69.

²⁾ Vorgetragen im mathematischen Kolloquium zu Frankfurt a. M.

³⁾ Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen II, Journ. f. Math. 172 (1934), S. 70–74.

⁴⁾ Sur les séries entières satisfaisant à une équation différentielle algébrique, C. R. 201 (1935), p. 444–445.

⁵⁾ Ein neues Prinzip für Transzendenzbeweise, Proc. Amsterdam 38 (1935), S. 864–871.

§ 1.

Ergebnisse.

Satz I: *Gehören die Weierstraßschen Funktionen $\wp(x)$ und $\zeta(x)$ zu den gleichen Invarianten g_2 und g_3 und hat $\wp(x)$ an der Stelle $x = \beta$ keinen Pol, so sind die sechs Größen*

$$g_2, g_3, a, b, \wp(\beta), a\beta + b\zeta(\beta),$$

wobei $|a| + |b| \neq 0$ ist, nicht sämtlich algebraisch.

Dieser Satz enthält eigentlich eine Aussage über nur fünf Größen; denn führt man für β den Ausdruck $\beta_1 = \lambda\beta$ sinngemäß ein, so ist

$$\wp(\lambda\beta; \lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \frac{1}{\lambda^2} \wp(\beta; \omega_1, \omega_2),$$

$$\zeta(\lambda\beta; \lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \frac{1}{\lambda} \zeta(\beta; \omega_1, \omega_2),$$

$$g_2(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \frac{1}{\lambda^4} g_2(\omega_1, \omega_2),$$

$$g_3(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \frac{1}{\lambda^6} g_3(\omega_1, \omega_2).$$

Die Werte $a, b, J(\tau) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2}, \frac{\wp^2(\beta)}{g_2}$ und $a\beta \cdot \sqrt[4]{g_2} + b \cdot \frac{\zeta(\beta)}{\sqrt[4]{g_2}}$ sind invariant bei der genannten Substitution. (Falls $g_2 = 0$ ist, bilde man ähnliche Invarianten mit $g_2 \neq 0$.) Man wähle nun λ derart, daß $g_2(\beta_1) = 1$ wird; setzt man nun voraus, die fünf obengenannten Zahlen seien algebraisch, so erhält man einen Widerspruch zu Satz I. Da jedoch die Werte dieser Zahlen von λ unabhängig sind, gilt die Satz I verschärfende Aussage:

Mindestens eine der fünf Zahlen $a, b, J(\tau), \frac{\wp^2(\beta)}{g_2}$ und

$$a\beta \sqrt[4]{g_2} + b \frac{\zeta(\beta)}{\sqrt[4]{g_2}}$$

ist transzendent.

Es mag dem Leser überlassen bleiben, sich die entsprechenden Verschärfungen der aus Satz I folgenden Spezialfälle zu überlegen.

Der Einfachheit halber seien von nun an die in Satz I auftretenden Zahlen g_2 und g_3 algebraisch vorausgesetzt. Auf Grund des Additionstheorems der ζ -Funktion (das in § 2 angegeben ist) kann man dann den Satz I in folgender Form aussprechen:

Der Wert eines elliptischen Integrals erster oder zweiter Gattung mit algebraischen Koeffizienten und zwischen algebraischen Grenzen ist transzendent.

Daraus folgt speziell wieder:

Die Länge des Bogens einer jeden Ellipse mit algebraischen Achsen zwischen algebraischen Abszissen- oder Ordinatenwerten ist transzendent.

I'. Setzt man in Satz I für β den Wert $\frac{\omega}{2}$ ein, so ergibt sich aus

Satz I: *Die Zahl $a\omega + b\eta$ ist für alle algebraischen a, b ($|a| + |b| \neq 0$) transzendent; oder in anderer Ausdrucksweise:*

Jede Periode eines elliptischen Integrals erster oder zweiter Gattung mit algebraischen Koeffizienten ist transzendent.

Wendet man diese Aussage speziell wieder auf den Ellipsenbogen an, so erhält man:

Der Umfang einer Ellipse mit algebraischen Achsen ist transzendent.

Ia. Wird in Satz I $a = 1$ und $b = 0$ gewählt, so reduziert sich der Satz auf die Aussage: $\wp(\beta)$ und β sind nicht beide algebraisch. Setzt man noch für β den Wert $\frac{\omega}{2}$ ein, so folgt daraus die *Transzendenz von ω* .

Ib. Man setze umgekehrt $a = 0$ und $b = 1$; dann gewinnt man die Feststellung: *Auch $\wp(\beta)$ und $\zeta(\beta)$ sind nicht beide algebraisch*. Für den Wert $\beta = \frac{\omega}{2}$ folgt hieraus die *Transzendenz von η* .

Mit der Feststellung I' ist sogar die lineare Unabhängigkeit von ω, η und 1 im Körper der algebraischen Zahlen bewiesen.

Ic. Nimmt a den Wert $\frac{\zeta(\beta)}{\beta}$ und b den Wert -1 an, so folgt aus Satz I die Tatsache, daß $\wp(\beta)$ und $\frac{\zeta(\beta)}{\beta}$ nicht beide algebraisch sind. Trägt man für β speziell $\frac{\omega}{2}$ ein, so gewinnt man daraus die *Transzendenz von $\frac{\eta}{\omega}$* .

Ich möchte noch bemerken, daß die zuletzt gemachte Feststellung den in der Einleitung genannten Popken-Mahlerschen Satz enthält. Führt man in meiner obigen Aussage (g_2, g_3 und $\frac{\eta}{\omega}$ sind nicht sämtlich algebraisch) die Substitution $\omega'_1 = \lambda \omega_1$, $\omega'_2 = \lambda \omega_2$ durch, so erhält man aus den bereits angegebenen Beziehungen:

$$g_2(\omega_1, \omega_2) = \lambda^4 g_2(\omega'_1, \omega'_2) \quad \text{und analog} \quad g_3 = \lambda^6 g'_3, \quad \frac{\eta}{\omega} = \lambda^3 \frac{\eta'}{\omega'},$$

und daraus folgt: $\lambda^4 g'_2, \lambda^6 g'_3, \lambda^3 \frac{\eta'}{\omega'}$ haben nicht alle algebraische Werte; wählt man nun speziell für λ die (wie ich in Satz IIIa noch zeigen werde) bei algebraischen g'_2 und g'_3 transzendente Zahl $\frac{\omega'}{\pi}$, so erhält man das Popken-Mahlersche Ergebnis.

Satz II: *Es seien die Weierstraßschen Funktionen $\wp(x)$ und $\wp^*(qx)$ algebraisch unabhängig und keine dieser Funktionen habe an der Stelle $x = \beta$*

einen Pol. Seien ferner g_2, g_3, g_2^*, g_3^* die zugehörigen Invarianten, so wird behauptet:

Mindestens eine der sieben Zahlen $g_2, g_3, g_2^*, g_3^*, \wp(\beta), \wp^*(q\beta), q$ ist transzendent.

Die erste Voraussetzung des vorstehenden Satzes ist gleichbedeutend mit der Forderung: Die beiden Gleichungen $\frac{\omega_1^*}{q} = \kappa \omega_1 + \lambda \omega_2$ und $\frac{\omega_2^*}{q} = \mu \omega_1 + \nu \omega_2$ seien mit rationalen $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ nicht erfüllbar, wobei ω^* eine Periode von $\wp^*(x)$ ist. Sind die beiden Gleichungen in rationalen $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ erfüllt, so ist aus der Theorie der elliptischen Funktionen bekannt, daß die obengenannten Funktionen algebraisch abhängig sind. Seien nun $\wp(x)$ und $\wp^*(qx)$ algebraisch abhängige Funktionen, so sei die Abhängigkeit etwa durch das Polynom $A(\wp(x), \wp^*(qx)) \equiv 0$ ausgedrückt; ordnet man dieses Polynom nach Potenzen von $\wp^*(qx)$ und wird mit $B(\wp(x))$ der Koeffizient der höchsten vorkommenden Potenz von $\wp^*(qx)$ bezeichnet, dann muß $B(\wp(x))$ an allen Stellen

$$\pm \frac{\omega^*}{q}, \pm 2 \frac{\omega^*}{q}, \pm 3 \frac{\omega^*}{q}, \dots$$

verschwinden. Ist aber die Gleichung $\frac{\omega^*}{q} = \kappa' \omega_1 + \lambda' \omega_2$ in rationalen κ', λ' nicht zu erfüllen, so besitzt wegen der Periodizität von $\wp(x)$ das Polynom $B(\wp(x))$ im Periodenparallelogramm unendlich viele voneinander verschiedene Nullstellen, die sich also häufen müssen. Mithin muß das Polynom $B(\wp(x)) \equiv 0$ sein; aus diesem Widerspruch folgt die obige Behauptung.

Auch Satz II läßt sich ähnlich wie Satz I verschärfen und führt zu der Aussage:

Die sechs Zahlen $J(\tau), J(\tau^*), \frac{g_2}{g_2^*}, \frac{\wp^2(\beta)}{g_2}, \frac{\wp(\beta)}{\wp^*(q\beta)}, q$ sind nicht alle algebraisch.

Nun will ich einige Ergebnisse, die durch Spezialisierung oder andere Darstellung aus Satz II gewonnen werden, angeben:

Der einfacheren Darstellung halber seien wieder (außer in dem Ergebnis IIc., auf das ich besonders hinweisen möchte) g_2, g_3, g_2^*, g_3^* algebraisch vorausgesetzt. Die entsprechenden Verschärfungen der Einzelergebnisse mögen auch hier dem Leser überlassen bleiben.

II'. Für die Stelle $\beta = \frac{\omega}{2}$ erhält Satz II das folgende Aussehen: $\wp^*\left(\frac{q\omega}{2}\right)$ und q können nicht beide algebraisch sein.

IIa. Seien β und β^* derart gewählt, daß $\wp(\beta)$ und $\wp^*(\beta^*)$ beide algebraisch sind, so ist nach Satz II $q = \frac{\beta^*}{\beta}$ transzendent.

Dies läßt sich auch wie folgt aussprechen:

Der Quotient von zwei elliptischen Integralen erster Gattung mit algebraischen Koeffizienten, genommen zwischen algebraischen Grenzen auf Riemannschen Flächen, die durch birationale Transformation nicht ineinander überführbar sind, ist transzendent.

Ist speziell $\beta = \frac{\omega}{2}$ und $\beta^* = \frac{\omega^*}{2}$, so folgt die Transzendenz von $\frac{\omega^*}{\omega}$.

II b. Es mögen $\omega_1^* = \omega_1$ und $\omega_2^* = \omega_2$ sein, dann folgt auch $g_2^* = g_2$ und $g_3^* = g_3$. Sind nun die Funktionen $\wp(x)$ und $\wp(qx)$ algebraisch unabhängig, so folgt aus Satz II: $\wp(\beta)$, $\wp(q\beta)$, q sind nicht sämtlich algebraisch. Diese Aussage besagt für die Stelle $\beta = \frac{\omega}{2}$, daß selbst q_1 und $\wp(q_1\omega)$ nicht beide algebraisch sind; oder in Worten: Der Wert eines elliptischen Integrals erster Gattung mit algebraischen Koeffizienten zwischen zwei algebraischen Grenzen ist entweder ein rationaler oder ein transzendenter Teil einer Periode.

II c. Dieser Spezialfall enthält eine Aussage über die Modulfunktion $J(\tau)$. Es werde $\omega_1^* = \omega_2$, $\omega_2^* = \omega_1$ und $q = \tau$ vorausgesetzt; dann ist $q = \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega_1^*}{\omega_1}$ und außerdem $g_2^* = g_2$ und $g_3^* = g_3$, wobei g_2 und g_3 nicht algebraisch vorausgesetzt sein sollen. Sind nun $\wp(x)$ und $\wp^*(\tau x)$ algebraisch abhängig, so muß $\omega_2^* \tau^{-1} = \mu \omega_1 + \nu \omega_2$ sein. Daraus folgt $\omega_2^* \tau^{-1} = \omega_1 \tau^{-1} = \mu \omega_1 + \nu \tau \omega_1$ und mithin ist $\nu \tau^2 + \mu \tau - 1 = 0$. In diesem Falle der komplexen Multiplikation allein sind $\wp(x)$ und $\wp^*(\tau x)$ algebraisch abhängig. Liegt aber dieser Fall nicht vor, so ist bei algebraischen g_2 und g_3 der Quotient $\tau = \frac{\omega_1^*}{\omega_1}$ nach II a transzendent. Verschärft man diese Aussage in der bereits angegebenen Weise, so reduziert sich die doppelte Voraussetzung — g_2 und g_3 algebraisch — auf die einfache — $J(\tau)$ sei algebraisch. Der Satz über die Modulfunktion lautet mithin:

Ist $J(\tau)$ algebraisch, so muß τ entweder imaginärquadratisch oder transzendent sein, und umgekehrt: Ist τ algebraisch, aber nicht imaginärquadratisch, so ist $J(\tau)$ transzendent.

Satz III: *Es seien $\wp(\beta) \neq \infty$, und der einfacheren Darstellung halber g_2 und g_3 beide algebraisch vorausgesetzt. Dann wird behauptet: Die drei Größen $\wp(\beta)$, $q \neq 0$ und e^{β} haben nicht sämtlich algebraische Werte. Auch hierzu will ich noch einige Spezialfälle angeben.*

III a. Wenn β eine Stelle ist, für die $\wp(\beta)$ algebraisch, und $\beta^* \neq 0$ eine solche, daß e^{β^*} algebraisch ist, so ist $q = \frac{\beta^*}{\beta}$ transzendent. Speziell ergibt sich die Transzendenz von $\frac{\pi}{\omega}$.

III b. Ersetzt man β durch $\frac{\omega}{2}$, so erkennt man, daß $q_1 \neq 0$ und $e^{q_1 \omega}$ nicht beide algebraisch sind; wendet man hingegen Satz III für die Stelle $\beta = \frac{2\pi i}{q} = q_1 \pi$ an, so ergibt sich die Transzendenz mindestens einer der Zahlen q_1 und $\wp(q_1 \pi)$.

Ich will die Reihe der Ergebnisse, die sich noch weiterführen läßt, hier abbrechen, möchte jedoch noch darauf hinweisen, daß sich die vorgenannten Sätze auch sinngemäß auf Aussagen über Abelsche Integrale übertragen lassen.

§ 2.

Beweisführung.

Wie ich schon in der Einleitung erwähnte, liegt allen Beweisen die gleiche indirekte Methode zugrunde. Ich will mich daher darauf beschränken, den Beweis von Satz I ausführlich vorzutragen und bei den Beweisen der Sätze II, III die von dem vorgetragenen Beweis abweichenden Teile auszuführen. Allen Beweisen sei ein Hilfssatz über spezielle arithmetische Eigenschaften der $\wp$ -Funktion vorausgeschickt.

Hilfssatz: Es ist $\frac{d^r(\wp(x))}{dx^r} = \wp^{(r)}(x)$ ein Polynom in $\wp(x)$, $\wp'(x)$, $\frac{g_2}{2}$, g_3 vom höchsten Gesamtgrade $\leq \left[\frac{r+2}{2} \right]$ mit ganzen rationalen Koeffizienten, und es gilt

$$|\wp^{(r)}(x)| < \gamma_1^r \cdot r^r,$$

wenn $|\wp(x)| < \gamma_2$ vorausgesetzt wird.

Die Aussage dieses Hilfssatzes läßt sich leicht verschärfen, jedoch ist dies für das Folgende nicht notwendig.

Beweis: Für die Weierstraßsche $\wp$ -Funktion gilt die Differentialgleichung

$$(1) \quad (\wp'(x))^2 = 4\wp^3(x) - g_2\wp(x) - g_3.$$

Durch Differentiation folgt aus dieser die Beziehung

$$(2) \quad \wp''(x) = 6\wp^2(x) - \frac{g_2}{2}.$$

Man denke sich nun die Gleichung (2) $(r-2)$ -mal differenziert und eliminiere die auf der rechten Seite auftretenden höheren als ersten Ableitungen der $\wp$ -Funktion durch jeweilige Benutzung von (2). Man erkennt so, daß $\wp^{(r)}(x)$ sich darstellen läßt als Polynom in $\wp(x)$, $\wp'(x)$, $\frac{g_2}{2}$, g_3 mit ganzrationalen Koeffizienten. Durch vollständige Induktion zeigt man

^{*)} Die natürlichen Zahlen $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ sollen von r unabhängig sein.

sogar, daß in diesem Polynom nur solche Glieder $\wp^{\alpha_1} \wp'^{\alpha_2} \left(\frac{g_2}{2}\right)^{\alpha_3} g_3^{\alpha_4}$ auftreten können, für die $2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 = r + 2$ ist. Damit ist der höchste vorkommende Gesamtgrad $\leq \left[\frac{r+2}{2}\right]$, wie behauptet. Wird mit M_r das Maximum der Absolutbeträge der Koeffizienten von $\wp^{(r)}(x)$ bezeichnet, so ist unter Berücksichtigung von (2) $M_{r+1} \leq 6 \left[\frac{r+2}{2}\right] M_r$; daraus folgt durch vollständige Induktion, daß die Koeffizienten von $\wp^{(r)}(x)$, absolut genommen, kleiner sind als $6^r \cdot r!$. Die Anzahl der in dem Polynom $\wp^{(r)}(x)$ auftretenden Glieder ist kleiner als $(r+2)^4$ und somit ergibt sich die Ungleichung

$$|\wp^{(r)}(x)| < (r+2)^4 6^r \cdot r! (4 + |\wp(x)| + |\wp'(x)| + |g_2| + |g_3|)^{r+2} < \gamma_1^r \cdot r^r.$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Beweis von Satz I: Ich setze voraus, es seien die Zahlen $g_2, g_3, a, b, \wp(\beta), a\beta + b\zeta(\beta)$ sämtlich algebraisch; damit ist nach (1) auch $\wp'(\beta)$ algebraisch. Diese sieben Größen mögen einen Körper $\mathfrak{K}$ vom Grade s bestimmen. Außerdem setze ich $k = 24s + 1$. Dies vorausgeschickt, behaupte ich: Es lassen sich geeignete Koeffizienten $C_{\lambda\mu}$ ($\lambda = 0, \dots, n-1$; $\mu = 0, \dots, n-1$) derart finden, daß die Funktion

$$L(x) = \sum_{\lambda=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{n-1} C_{\lambda\mu} \wp^{\lambda}(x) \cdot (ax + b\zeta(x))^{\mu}$$

an jeder der Stellen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ von der r -ten Ordnung⁷⁾ verschwindet, wobei

$$(3) \quad r = \left[\frac{n^2}{2k} \right]$$

ist, und zwar ergeben sich die Konstanten $C_{\lambda\mu}$ als ganzalgebraische, nicht sämtlich verschwindende Zahlen des Körpers $\mathfrak{K}$, für die

$$(4) \quad \overline{C_{\lambda\mu}} < \gamma_3^r \cdot r^{2r} \quad (\lambda = 0, \dots, n-1; \mu = 0, \dots, n-1)^8)$$

gilt. Hierbei sei $\xi_{\kappa} = \kappa \cdot \beta$ ($\kappa = 1, \dots, k$), falls β mit jeder Periode inkommensurabel ist; sollte β jedoch ein rationaler Teil einer Periode sein, so mögen unter den Vielfachen von β diejenigen übergangen werden, die ganzzahlige Vielfache dieser Periode liefern würden. Die Bedingung des Verschwindens von $L(x)$ an den vorgenannten Stellen liefert kr lineare homogene Gleichungen für die n^2 zu bestimmenden Unbekannten $C_{\lambda\mu}$. Jeder Koeffizient A_{ij} ($i = 1, \dots, kr$; $j = 1, \dots, n^2$) dieser Unbestimmten

⁷⁾ „Eine Funktion verschwindet an einer Stelle von r -ter Ordnung“ soll heißen: Die betreffende Stelle ist für die Funktion mindestens r -fache Nullstelle.

⁸⁾ Unter $\overline{A}$ sei das Maximum der absoluten Beträge aller Konjugierten von A verstanden.

hat die Gestalt $\frac{d^q}{dx^q} (\wp^\lambda(x) \cdot (ax + b\zeta(x))^\mu)|_{x=\xi_\kappa}$ mit festen κ, q, λ, μ .

Auf Grund des Additionstheorems der $\wp$ -Funktion, der Beziehung (2), der Relation $\zeta'(x) = -\wp(x)$ und des aus dem Additionstheorem der ζ -Funktion folgenden Additionstheorem der Funktion $ax + b\zeta(x)$, das lautet:

$$(5) \quad a \cdot (x_1 + x_2) + b\zeta(x_1 + x_2) = ax_1 + b\zeta(x_1) + ax_2 + b\zeta(x_2) + \frac{b}{2} \frac{\wp'(x_1) - \wp'(x_2)}{\wp(x_1) - \wp(x_2)},$$

ergeben sich die Koeffizienten A_{ij} wegen der eingangs dieses Beweises gemachten Voraussetzung als algebraische Zahlen in $\mathfrak{K}$. Differenziert man die Funktion $\wp^{(\lambda)}(x) \cdot (ax + b\zeta(x))^\mu$ q -mal, so erhält man eine Summe von Produkten

$$(6) \quad (\wp^{(e_1)}(x))^{\lambda_1} \dots (\wp^{(e_\nu)}(x))^{\lambda_\nu} \cdot (ax + b\zeta(x))^{\mu_\nu},$$

(jedes noch multipliziert mit einem Zahlkoeffizienten), wobei

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_\nu + \mu_\nu \leq \lambda + \mu$$

und

$$e_1 \lambda_1 + \dots + e_\nu \lambda_\nu \leq q$$

ist. Die Zahlkoeffizienten dieser Produkte sind Polynome in a und b vom höchsten Grade μ . Ferner stellt man fest, daß die Anzahl der auftretenden Produkte (6), jedes mit der Vielfachheit genommen, die der absolute Betrag seines Zahlkoeffizienten (der selbst ein Polynom in a und b ist) angibt, kleiner als $\gamma_4^e (\lambda + \mu)^e$ ist. Aus der Definition von ξ_κ und $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$ folgt, da k nur von s abhängt, $|\wp(\xi_\kappa)| + |\zeta(\xi_\kappa)| < \gamma_5$ ($\kappa = 1, \dots, k$). Nun ist aber nach dem vorangeschickten Hilfssatz der absolute Betrag eines jeden der Produkte (6) an jeder Stelle ξ_κ kleiner als

$$\gamma_6^{e_1 \lambda_1 + \dots + e_\nu \lambda_\nu} \cdot \gamma_1^{e_1 \lambda_1} \dots \gamma_\nu^{e_\nu \lambda_\nu} \cdot \gamma_7^{\mu_\nu} < \gamma_8^{e + \mu} \cdot \gamma^e.$$

Berücksichtigt man, daß $\lambda \leq n-1, \mu \leq n-1, q \leq r-1$ sind, so erhält man also

$$|A_{ij}| < \gamma_4^r \cdot (2n)^r \gamma_8^{r+n} r^r < \gamma_9^r (nr)^r.$$

Da für die Konjugierten von A_{ij} in $\mathfrak{K}$ dieselbe Abschätzung durchzuführen ist wie für A_{ij} selbst, gilt die Ungleichung

$$\overline{|A_{ij}|} < \gamma_{10}^r (nr)^r.$$

Wählt man n so groß, daß

$$(7) \quad n < r$$

ist, so erhält man

$$(8) \quad \overline{|A_{ij}|} < \gamma_{10}^r r^{2r} \quad (i = 1, \dots, kr; j = 1, \dots, n^2).$$

A_{ij} ist, wie schon mitgeteilt, ein Polynom in a und b vom höchsten Grade n ; nach dem vorangestellten Hilfssatz ist A_{ij} aber auch ein Poly-

nom in $\wp(\xi_x)$, $\wp'(\xi_x)$, $\frac{g_2}{2}$, g_3 — höchstens vom Gesamtgrade $\frac{r}{2} + 2n < \frac{5}{2}r$ (nach (7)) — und in $a\xi_x + b\zeta(\xi_x)$ — höchstens vom Grade n mit ganzrationalen Koeffizienten. Ist nun γ_{11} die kleinste natürliche Zahl, die die Bedingung erfüllt, daß die sämtlichen Größen

$$\gamma_{11}a, \gamma_{11}b, \gamma_{11}\frac{g_2}{2}, \gamma_{11}g_3, \gamma_{11}\wp(\xi_x), \gamma_{11}\wp'(\xi_x), \gamma_{11}(a\xi_x + b\zeta(\xi_x)) \quad (x = 1, \dots, k)$$

ganzalgebraisch sind, so ist demnach auch $\gamma_{11}^{\frac{5}{2}r + 3n} A_{ij} < \gamma_{11}^{6r} A_{ij}$ ganzalgebraisch. Multipliziert man also die linearen homogenen Gleichungen, denen $C_{\lambda\mu}$ genügen sollen, mit γ_{11}^{6r} , so sind die Koeffizienten $a_{ij} = \gamma_{11}^{6r} A_{ij}$ ganzalgebraisch in $\mathfrak{K}$ und es gilt nach (8)

$$(9) \quad |a_{ij}| < \gamma_{11}^{6r} \cdot r^{2r}.$$

Da (3) und (9) gelten, sind die Gleichungen lösbar⁹⁾ in nicht sämtlich verschwindenden, in $\mathfrak{K}$ ganzalgebraischen Zahlen $C_{\lambda\mu}$, die die Bedingung (4) befriedigen.

Verschwindet die Funktion $L(x)$ an jeder der Stellen $\xi_1, \dots, \xi_{v-1}$ von der Ordnung $t+1$ und an jeder der Stellen $\xi_v, \dots, \xi_k$ von der Ordnung t , wobei $t \geq r$ und $v = 1, \dots, k$ sind (für $v = 1$ braucht also $L(x)$ an keiner Stelle ξ_x von $(t+1)$ -ter Ordnung zu verschwinden), so behaupte ich: Falls n hinreichend groß ist, verschwindet $L(x)$ auch an der Stelle ξ_v von der Ordnung $t+1$. — Zunächst führe ich einige Bezeichnungen ein: Es sei C eine aus den Mittellinien des Periodennetzes der $\wp$ -Funktion zusammengesetzte Treppenkurve, die ganz innerhalb eines Kreises mit dem Radius $t^{1/6}$ um den Nullpunkt als Mittelpunkt liegt und einen möglichst großen Flächeninhalt einschließt. Die Polstellen der $\wp$ -Funktion innerhalb C bezeichne ich mit x_d . Dann sei

$$P(x) = \prod_{x_d \in C} (x - x_d)^{8n}$$

und

$$Q(x) = (x - \xi_1)^{t+1} \dots (x - \xi_{v-1})^{t+1} \cdot (x - \xi_{v+1})^t \dots (x - \xi_k)^t.$$

Ferner bezeichne ich $\frac{d^t(L(x))}{dx^t} \Big|_{x=\xi_v}$ mit $L^{(t)}(\xi_v)$. Ich wähle nun n so groß, daß alle Punkte ξ_x innerhalb von C liegen; es ist ja $|\xi_x| < 2k|\beta|$ ($x = 1, \dots, k$). Da $L(x)$ voraussetzungsgemäß an den bereits genannten Stellen von den angegebenen Ordnungen verschwindet, gilt auf Grund des Residuensatzes die Beziehung

$$(10) \quad \frac{L^{(t)}(\xi_v) \cdot P(\xi_v)}{Q(\xi_v)} = \frac{t!}{2\pi i} \int_C \frac{L(x) P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{dx}{(x - \xi_v)^{t+1}}.$$

⁹⁾ Siehe z. B. Hilfssatz 1 (S. 67) meiner Arbeit: Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen I; Journ. f. Math. 172 (1934), S. 65—69.

Mittels Gleichung (10) will ich $|L^{(t)}(\xi_v)|$ abschätzen. — Die Kurve C ist so gewählt, daß $\wp(x)$ auf C beschränkt ist; $|ax + b\zeta(x)|$ ist auf C kleiner als $\gamma_{15}t^{1/6}$. Damit gewinnt man unter Berücksichtigung von (4)

$$\max_{x \text{ auf } C} |L(x)| < \gamma_3^r \cdot \gamma_{27}^r \cdot \gamma_{14}^n \cdot t^{\frac{1}{6}n} \cdot n^2$$

und nach (7)

$$< \gamma_{15}^t \cdot t^{\frac{13}{6}t}.$$

Weiter erhält man

$$\max_{x \text{ auf } C} |P(x)| < (\gamma_{16} t^{\frac{1}{6}})^{3n} \gamma_{17} t^{\frac{1}{3}};$$

da aus (3) $n < \sqrt{4rk}$ folgt, ergibt sich

$$\max_{x \text{ auf } C} |P(x)| < (\gamma_{16}^6 t)^{\gamma_{17} k^{\frac{1}{2}} t^{\frac{5}{6}}} < \gamma_{18}^t$$

für hinreichend großes n . Schließlich ist noch

$$|P(\xi_v)| > \gamma_{19}^{-3n} \gamma_{17} t^{\frac{1}{3}} > \gamma_{20}^{-t}$$

und

$$|Q(\xi_v)| < \gamma_{21}^t.$$

Somit erhält man

$$(11) \quad |L^{(t)}(\xi_v)| < \gamma_{20}^t \cdot \gamma_{21}^t \cdot \frac{t^t}{2\pi} \cdot \gamma_{16}^t \cdot t^{\frac{13}{6}t} \cdot \gamma_{18}^t \cdot \left(\gamma_{22}^{-1} t^{\frac{1}{6}}\right)^{-kt} \cdot \gamma_{23} t^{\frac{1}{6}} \\ < \gamma_{24}^t \cdot t^{\left(\frac{19}{6} - \frac{k}{6}\right)t}.$$

Die Zahl $L^{(t)}(\xi_v)$ ist nach der eingangs des Beweises gemachten Voraussetzung algebraisch. Analog zu der Untersuchung der A_{ij} findet man hier, daß die Zahl $\gamma_{11}^{6t} L^{(t)}(\xi_v)$ in $\mathfrak{K}$ ganzalgebraisch ist. — Die Konjugierten von $L^{(t)}(\xi_v)$ in $\mathfrak{K}$ erhält man, indem man auf die Darstellung von $L^{(t)}(\xi_v)$ als Polynom in $a, b, \frac{g_2}{2}, g_3, \wp(\xi_v), \wp'(\xi_v), a\xi_v + b\zeta(\xi_v)$ mit rationalen Koeffizienten zurückgeht und für jede dieser Größen die entsprechenden Konjugierten einführt. Die analog derjenigen von $\overline{A_{ij}}$ geführte Abschätzung ergibt:

$$(12) \quad \overline{|L^{(t)}(\xi_v)|} < \gamma_3^r \cdot \gamma_{27}^r \cdot \gamma_{10}^t \cdot t^{2t} \cdot n^2 < \gamma_{25}^t \cdot t^{4t}.$$

Nun erhält man aber nach (11) und (12) für die Norm der ganzalgebraischen Zahl $\gamma_{11}^{6t} L^{(t)}(\xi_v)$ die Abschätzung:

$$|N(\gamma_{11}^{6t} \cdot L^{(t)}(\xi_v))| < \gamma_{24}^t \cdot t^{\left(\frac{19}{6} - \frac{k}{6}\right)t} \cdot \gamma_{25}^{(s-1)t} \cdot t^{4(s-1)t} \\ < \gamma_{26}^t \cdot t^{\left(4s - \frac{5}{6} - \frac{k}{6}\right)t}.$$

Nun ist aber $k = 24s + 1$ oder $4s - \frac{5}{6} - \frac{k}{6} = -1$ gesetzt, und so wird für hinreichend großes n

$$|N(\gamma_{11}^{6t} \cdot L^{(t)}(\xi_s))| < 1,$$

und damit ist $L^{(t)}(\xi_s) = 0$, wie behauptet.

Folglich hat die Funktion $L(x)$ aber die Eigenschaft, daß sie an jeder der Stellen $\xi_1, \dots, \xi_k$ von beliebig hoher Ordnung verschwindet. Dies ist jedoch nur möglich, wenn $L(x) \equiv 0$ ist. Die Funktionen $\wp(x)$ und $ax + b\zeta(x)$ sind aber algebraisch unabhängig. — Der so entstandene Widerspruch löst sich nur, wenn man die zu Beginn des Beweises gemachte Voraussetzung fallen läßt, womit der Satz bewiesen ist.

Ich möchte noch hinzufügen, daß es durch eine Abänderung des Beweises, durch die allerdings die Durchführung sehr erschwert wird, möglich ist, die gegebenen Abschätzungen zu verschärfen; dasselbe gilt für die noch folgenden Beweise.

Beweis von Satz II: Da der Beweis von Satz II methodisch genau so verläuft wie derjenige von Satz I, bin ich leider an einigen Stellen gezwungen, mich zu wiederholen; ich werde jedoch diesen Beweis in gedrängterer Fassung bringen als den ersten. Die Bezeichnung will ich aus dem ersten Beweis, soweit wie möglich, übernehmen, d. h.: ich will entsprechende Größen mit denselben Buchstaben bezeichnen, in der Hoffnung, daß dies nicht zu Mißverständnissen führt. Außerdem möchte ich noch bemerken, daß der Beweis von Satz III von dem jetzt vorzutragenden kaum abweicht, was ja auch nach dem Inhalt der beiden Sätze verständlich ist. —

Ich setze also voraus, die sieben Größen $g_2, g_3, g_2^*, g_3^*, \wp(\beta), \wp^*(q\beta), q$ seien alle algebraisch. Nach (1) sind dann auch $\wp'(\beta)$ und $\wp^*(q\beta)$ algebraisch. Die neun Größen sollen den Körper $\mathfrak{K}$ vom Grade s bestimmen. Nun suche ich, die n^3 Koeffizienten $C_{\lambda\mu}$ als nicht sämtlich verschwindende, in $\mathfrak{K}$ ganzzahlige Zahlen so festzulegen, daß die Funktion

$$L(x) = \sum_{\lambda=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{n-1} C_{\lambda\mu} \wp^\lambda(x) \wp^{*\mu}(qx)$$

an jeder der Stellen $\xi_1, \dots, \xi_k$ von der r -ten Ordnung verschwindet, wobei r nach der Bedingung (3) von n und k abhängt, und wieder $k = 24s + 1$ sei.

Wiederum sei $\xi_\kappa = \kappa \cdot \beta$ ($\kappa = 1, \dots, k$), falls β mit jeder vorkommenden Periode inkommensurabel ist; und wenn β einen rationalen Teilwert einer Periode annimmt, sollen die ganzzahligen Vielfachen dieser Periode (bzw. Perioden) keine Interpolationsstellen sein. Die Unbekannten $C_{\lambda\mu}$ werden bestimmt durch $k \cdot r$ lineare homogene Gleichungen, deren Koeffizienten

A_{ij} ($i = 1, \dots, kr; j = 1, \dots, n^2$) die Gestalt $\frac{d^q}{dx^q} (\wp^\lambda(x) \wp^{*\mu}(qx))|_{x=\xi_\kappa}$ mit festen κ, q, λ, μ haben. Mit Hilfe des bereits genannten Hilfssatzes erkennt man analog zu Satz I, daß die algebraischen Zahlen A_{ij} Polynome sind in $\frac{g_2}{2}, g_3, \frac{g_2^*}{2}, g_3^*, \wp(\xi_\kappa), \wp'(\xi_\kappa), \wp^*(q\xi_\kappa), \wp^{*'}(q\xi_\kappa)$, höchstens vom Grade $\frac{5}{2}r$, und in q vom höchsten Grade r . Es sei γ_{27} derart bestimmt, daß die Größen $\gamma_{27} \frac{g_2}{2}, \gamma_{27} g_3, \gamma_{27} \frac{g_2^*}{2}, \gamma_{27} g_3^*, \gamma_{27} \wp(\xi_\kappa), \gamma_{27} \wp'(\xi_\kappa), \gamma_{27} \wp^*(q\xi_\kappa), \gamma_{27} \wp^{*'}(q\xi_\kappa), \gamma_{27} q$ für $\kappa = 1, \dots, k$ ganzalgebraisch sind; dann sind die Koeffizienten $\gamma_{27}^r A_{ij} = a_{ij}$ ebenfalls in $\mathfrak{K}$ ganzalgebraisch. In derselben Weise wie bei Satz I zeigt man, daß A_{ij} und damit auch a_{ij} einer Abschätzung der Art

$$\overline{a_{ij}} < \gamma_{28}^r r^{2r}$$

genügen. Damit lassen sich die Koeffizienten $C_{\lambda\mu}$ so bestimmen, daß sie die geforderten Bedingungen erfüllen und daß außerdem

$$(13) \quad \overline{C_{\lambda\mu}} < \gamma_{29}^r \cdot r^{2r}$$

ist.

Nun soll $L(x)$ wieder an den Stellen $\xi_1, \dots, \xi_{\nu-1}$ von der Ordnung $t+1$ und an allen Stellen $\xi_\nu, \dots, \xi_k$ von der Ordnung t verschwinden, wobei $t \geq r$ und $\nu = 1, \dots, k$ sind. Es sei C eine ganz innerhalb eines Kreises mit dem Radius $t^{1/6}$ um den Nullpunkt als Mittelpunkt liegende Kurve von einer Bogenlänge $\gamma_{20} t^{1/6}$, die von jeder Polstelle der Funktionen $\wp(x)$ und $\wp^*(qx)$ einen festen, d. h. von t unabhängigen, positiven Minimalabstand hat und einen möglichst großen Flächeninhalt umschließt. Bezeichne ich die sämtlichen, innerhalb C vorkommenden Polstellen mit x_j , so sei $P(x) = \prod_{x_j \text{ in } C} (x - x_j)^{4n}$, während $Q(x)$ den im vor-

hergehenden Beweis angegebenen Wert beibehalten soll. Nun gilt eine der Gleichung (10) gleichlautende Beziehung, mittels der man $L^{(t)}(\xi_\nu)$ abschätze. Da man jedoch alle Abschätzungen des vorigen Beweises (bis auf die Bedeutung der Konstanten) übernehmen kann, erhält man unter Benutzung von (13) bei hinreichend großem n

$$|L^{(t)}(\xi_\nu)| < \gamma_{31}^t \cdot t^{\left(\frac{19}{6} - \frac{k}{6}\right)t}.$$

Die Zahl $L^{(t)}(\xi_\nu)$ ist in $\mathfrak{K}$ algebraisch; durch Multiplikation mit γ_{27}^{6t} wird sie ganzalgebraisch. — Die Konjugierten von $L^{(t)}(\xi_\nu)$ ergeben sich durch Einsetzen der Konjugierten von $\frac{g_2}{2}, g_3, \frac{g_2^*}{2}, g_3^*, \wp(\xi_\nu), \wp'(\xi_\nu), \wp^*(q\xi_\nu), \wp^{*'}(q\xi_\nu)$,

q in die Darstellung des Ausdruckes $L^{(t)}(\xi_v)$ als Polynom dieser Größen. Die Abschätzung der Konjugierten ergibt auch hier:

$$\overline{L^{(t)}(\xi_v)} < \gamma_{32}^t \cdot t^{4t}.$$

Somit ergibt sich für die Norm der ganzzahlgebraischen Zahl $\gamma_{27}^{6t} \cdot L^{(t)}(\xi_v)$

$$|N(\gamma_{27}^{6t} L^{(t)}(\xi_v))| < \gamma_{33}^t \cdot t^{\left(4s - \frac{5}{6} - \frac{k}{6}\right)t}.$$

Mit der Festlegung von $k = 24s + 1$ (wie vorher) folgt für hinreichend großes n auch $L^{(t)}(\xi_v) = 0$. Durch vollständige Induktion erkennt man, daß $L(x)$ an jeder der k Interpolationsstellen von beliebig hoher Ordnung verschwindet. Mithin ist $L(x) \equiv 0$. Da aber die Funktionen $\wp(x)$ und $\wp^*(qx)$ voraussetzungsgemäß algebraisch unabhängig sind, folgt ein Widerspruch. Die Lösung desselben liefert die Behauptung des Satzes II.

Bemerkung zum Beweise des Satzes III: Der Beweis des Satzes III geht aus demjenigen von Satz II hervor, indem man die Funktion $\wp^*(qx)$ im vorhergehenden Beweise sinngemäß durch die Funktion e^{qx} ersetzt. Die der Untersuchung zu Grunde gelegte Funktion lautet also hier

$$L(x) = \sum_{\lambda=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{n-1} C_{\lambda\mu} \wp^\lambda(x) e^{\mu qx}.$$

Alle Abschätzungen, auch die Integralabschätzung, lassen sich dann analog ausführen wie vorher und liefern die gleichen Ergebnisse. Der Widerspruch besteht also wieder darin, daß man einerseits zeigt, es ist $L(x) \equiv 0$, und andererseits weiß, daß die Funktionen $\wp(x)$ und e^{qx} algebraisch unabhängig sind. Damit wird man auf die Behauptung des Satzes III geführt.

(Eingegangen am 11. 3. 1936.)