

Werk

Titel: Mathematische Annalen

Ort: Berlin

Jahr: 1947/1949

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN235181684_0120

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0120

LOG Id: LOG_0025

LOG Titel: Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen.

Von

HEINRICH BEHNKE und KARL STEIN in Münster (Westf.).

Constantin Carathéodory zum 70. Geburtstag
in Verehrung gewidmet.

Während die klassische Funktionentheorie eine Fülle von Aussagen kennt, nach denen Funktionen, die in einem vorgegebenen schlichten Gebiet regulär sind, gleichmäßig durch Funktionen approximiert werden können, die in vorgegebenen größeren Gebieten regulär bzw. meromorph sind [Potenzreihenentwicklungen, Approximation durch Polynome und rationale Funktionen (Rungescher Satz), Weierstraßsche Produktentwicklung für beliebige schlichte Gebiete, usw.]¹⁾, sind entsprechende Aussagen bei vorgegebenen nichtschlichten Gebieten bisher nur in wenigen Spezialfällen aufgestellt worden²⁾. Damit soll sich nun die vorliegende Arbeit beschäftigen. Vorgegeben sei eine Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}$ über der z -Ebene und eine $\mathfrak{R}$ als Teilgebiet enthaltende Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}^*$. Gefragt ist: Wann lassen sich die in $\mathfrak{R}$ regulären und eindeutigen Funktionen gleichmäßig im Innern von $\mathfrak{R}$ approximieren durch Funktionen, die in $\mathfrak{R}^*$ definiert sind? Im ersten Teil der Arbeit verlangen wir von den approximierenden Funktionen, daß sie in $\mathfrak{R}^*$ regulär sein sollen, während wir im zweiten Teil für sie Pole in $\mathfrak{R}^*$ zulassen. Als Hauptresultat des ersten Teils beweisen wir (siehe Satz 6; wobei wir hier, um uns prägnanter ausdrücken zu können, das Ergebnis spezialisiert wiedergeben):

Ist die Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}$ Teilgebiet der nichtgeschlossenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}^$, so lassen sich die in $\mathfrak{R}$ regulären und eindeutigen Funktionen dann und nur dann stets durch in $\mathfrak{R}^*$ reguläre und eindeutige Funktionen gleichmäßig im Innern von $\mathfrak{R}$ approximieren, wenn $\mathfrak{R}$ relativ zu $\mathfrak{R}^*$ einfach zusammenhängend ist.*

Hierzu ist die Definition des relativ einfachen Zusammenhangs zu geben. Der Bereich³⁾ $\mathfrak{B}$ heißt zu dem $\mathfrak{B}$ als Teilbereich enthaltenden, auf der Riemann-

¹⁾ Die Approximation regulärer Funktionen in schlichten Gebieten ist ausführlich untersucht. Siehe die umfangreiche Darstellung bei WALSH, J. L.: *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*, New York 1935.

²⁾ Hier ist die schöne Arbeit von OSCAR PERRON zu nennen: *Über transzendente Funktionen auf Riemannschen Flächen*, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Math.-Nat. Klasse, Abt. A, 1922/23.

³⁾ Die Definition von *Bereich*, *Gebiet* usw. auf Riemannschen Flächen siehe in § 1.

schen Fläche $\mathfrak{R}$ gelegenen Bereich $\mathfrak{B}^*$ relativ einfach zusammenhängend, wenn jedes endliche System geschlossener Jordankurven in $\mathfrak{B}$, das in $\mathfrak{B}^*$ berandet, schon in $\mathfrak{B}$ berandet.

Zum Beweise des Hauptsatzes (§ 3) gehen wir von einem geeignet gewählten, ganz im Innern der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ gelegenen Polygonebiet $\mathfrak{G}$ aus. Ist dann $f(z)$ eine zu approximierende, in $\mathfrak{R}$ reguläre und eindeutige Funktion, so gestattet $f(z)$ in $\mathfrak{G}$ eine Darstellung durch ein Cauchysches Integral:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Rd\mathfrak{G}} f(\zeta) A(\zeta, z) d\zeta.$$

Hierin ist $A(\zeta, z)$ eine im abgeschlossenen Gebiet $\mathfrak{Z} = \mathfrak{G}_\zeta \times \mathfrak{G}_z$ der zwei Veränderlichen $p_1(\zeta)$ und $p_2(z)$ eindeutige meromorphe Funktion – eine „Elementarfunktion“ in $\mathfrak{G}$ – mit der Eigenschaft, daß das Differential $A(\zeta, z) d\zeta$ in $\mathfrak{G}$ für $p_1(\zeta) \neq p_2(z)$ endlich bleibt und für $p_1(\zeta) = p_2(z)$ einen einfachen Pol mit dem Residuum 1 aufweist. Im algebraischen Fall hat zuerst WEIERSTRASS (in seiner Vorlesung über Abelsche Transzendenten, Werke Bd. 4) Elementarfunktionen mit zusätzlichen festen Polen eingeführt⁴⁾. Wir können nun den Nachweis der Existenz von $A(\zeta, z)$ im Gebiete $\mathfrak{Z}$ auf den algebraischen Fall zurückführen, indem wir zeigen (§ 1), daß $\mathfrak{G}$ stets in eine geschlossene Riemannsche Fläche $\mathfrak{A}$ als Teilgebiet einbettbar ist. Eine Elementarfunktion in $\mathfrak{G}$ wird in einfacher Weise dadurch gewonnen (§ 2), daß ein analytisch vom Parameter ζ abhängendes Abelsches Integral 2. Gattung auf $\mathfrak{A}$ durch Addition geeigneter spezieller Integrale 2. Gattung, deren Pole außerhalb $\mathfrak{G}$ liegen, eindeutig gemacht wird.

Die Integraldarstellung von $f(z)$ wird nun approximativ durch eine Riemannsche Summe ersetzt. Damit ist $f(z)$ im Innern von $\mathfrak{G}$ approximiert durch eine Funktion, die in einem $\mathfrak{G}$ ganz umfassenden Polygonebiet $\mathfrak{G}^*$ eindeutig und meromorph ist und die höchstens endlich viele Pole auf dem Rande von $\mathfrak{G}$ hat. Diese Pole werden in Analogie zu der im üblichen Beweise des Rungeschen Satzes⁵⁾ benutzten Polverschiebung bis zum Rande von $\mathfrak{G}^*$ ausgekehrt. Hierbei wird wesentlich die Tatsache benutzt, daß Gebiete auf Riemannschen Flächen stets regulär-konvex (im Sinne der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen) sind. Das Verfahren wird sodann für die approximierende Funktion wiederholt. Da $\mathfrak{R}$ relativ zu $\mathfrak{R}^*$ als einfach zusammenhängend vorausgesetzt ist, gelingt die Auskehrung der Pole bis in eine beliebige Nachbarschaft des Randes von $\mathfrak{R}^*$. Daraus ergibt sich der eine Teil des Hauptsatzes. Der Beweis des zweiten Teiles ist kurz.

⁴⁾ Siehe auch KÖNIG, R. und M. KRAFFT: Elliptische Funktionen, Berlin und Leipzig 1928, S. 10 und S. 84ff., sowie die weitere dort angegebene Literatur.

⁵⁾ Vergleiche etwa BIBERBACH, L.: Lehrbuch der Funktionentheorie I.

Die Bedingung des relativ einfachen Zusammenhanges von $\mathfrak{R}$ in bezug auf $\mathfrak{R}^*$ kann im wesentlichen durch die Forderung ersetzt werden, daß $\mathfrak{R}$ halbstetig auf $\mathfrak{R}^*$ ausdehnbar sein soll. Unter halbstetiger Ausdehnung eines Bereiches $\mathfrak{B}$ verstehen wir den Prozeß einer besonderen Vergrößerung von $\mathfrak{B}$, bei dem neben stetigen Übergängen bestimmte Sprünge zugelassen sind. (Näheres siehe § 4.) Der Begriff der halbstetigen Ausdehnung und seine Verallgemeinerungen lassen sich, wie in einer späteren Arbeit gezeigt werden soll, in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen mit Nutzen verwenden.

§ 5 ist der Übertragung des Hauptsatzes auf Funktionen von n komplexen Veränderlichen in nichtschlichten Zylinderbereichen gewidmet. Der hier bewiesene Satz 9 stellt ein wichtiges Hilfsmittel für die folgenden Überlegungen dar.

In den Abschnitten 6 und 7 behandeln wir die zweite Hauptfrage der Arbeit: Welche Eigenschaften muß eine die Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}$ umfassende, nicht-geschlossene Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}^*$ haben, damit jede in $\mathfrak{R}$ eindeutige reguläre Funktion durch in $\mathfrak{R}^*$ eindeutige meromorphe Funktionen im Innern von $\mathfrak{R}$ gleichmäßig approximierbar ist? Es stellt sich heraus, daß $\mathfrak{R}^*$ keiner Einschränkung unterliegt (außer selbstverständlich der, daß $\mathfrak{R}^*$ die Fläche $\mathfrak{R}$ als Teilgebiet enthält). Wir beweisen den 2. Approximationssatz (Satz 13), den wir hier wiederum nur spezialisiert wiedergeben:

Jede in $\mathfrak{R}$ eindeutige reguläre Funktion ist im Innern von $\mathfrak{R}$ durch in $\mathfrak{R}^$ eindeutige meromorphe Funktionen gleichmäßig approximierbar, die jeweils nur endlich viele Pole und diese nur auf dem Rande von $\mathfrak{R}$ aufweisen.*

Zum Beweise benötigen wir eine Elementarfunktion $A(\zeta, z)$ für die ganze Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}^*$ (und nicht nur für ganz in $\mathfrak{R}^*$ liegende Teilgebiete). Die Konstruktion eines solchen $A(\zeta, z)$ wird in § 6 durchgeführt. Auf $\mathfrak{R}^*$ konstruieren wir zunächst ein geeignetes Integral 3. Gattung $N(\zeta, z)$ mit speziellen Periodizitätsmoduln, das analytisch von beiden Veränderlichen abhängt. Dabei benutzen wir die Aussage, daß es auf einer nichtgeschlossenen Riemannschen Fläche zu beliebig vorgegebenen Periodizitätsmoduln stets ein Integral 1. Gattung mit diesen Periodizitätsmoduln gibt. (Präzisierung der benutzten Begriffe in § 6.) Aus $N(\zeta, z)$ wird sodann durch Differentiation eine gesuchte Funktion $A(\zeta, z)$ gewonnen.

Der Beweis des zweiten Approximationssatzes, den wir in § 7 erbringen, verläuft dann ähnlich wie der des Hauptsatzes im ersten Teil der Arbeit.

§ 1. Begriffe und vorbereitende Sätze.

§ 2. Die Cauchysche Integralformel für Bereiche auf Riemannschen Flächen.

§ 3. Reguläre Approximation von Funktionen in vorgegebenen Bereichen.

§ 4. Reguläre Approximation und halbstetige Ausdehnung.

- § 5. Der Approximationssatz in Zylinderbereichen von n komplexen Veränderlichen.
 § 6. Die Konstruktion der Elementarfunktion auf der Gesamtfläche.
 § 7. Meromorphe Approximation regulärer Funktionen.

§ 1. Begriffe und vorbereitende Sätze.

Der Ausgangspunkt für unsere Überlegungen ist der Begriff der konkreten Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$, wo jedem Punkte eine z -Koordinate von vornherein zugeordnet ist. Eine solche Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}$ ist eine über der z -Ebene liegende triangulierbare, aus lauter inneren Punkten bestehende Fläche, die in isolierten Punkten verzweigt sein kann. Von den Verzweigungspunkten werden die Verzweigungspunkte endlicher Ordnung zur Fläche gerechnet. Ist $p(z_0)$ bzw. $p(\infty)$ ein endlicher bzw. ein über dem unendlich fernen Punkt gelegener Punkt von $\mathfrak{R}$ und $v-1$ seine Verzweigungsordnung, so ist seine Umgebung von p durch

$$z - z_0 = t^v \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{z} = t^v$$

auf eine schlichte Umgebung des Nullpunktes der t -Ebene umkehrbar eindeutig abbildbar; t heißt der p zugeordnete ortsuniformisierende Parameter.

Zur Triangulierung einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ können immer Dreiecke gewählt werden, deren Seiten Strecken, Halbgeraden oder Kreisbogen im metrischen Sinne sind (Elementardreiecke). Wir nennen $\mathfrak{R}$ geschlossen, wenn $\mathfrak{R}$ eine aus endlich vielen Dreiecken bestehende Triangulierung (und damit nur endliche Triangulierungen) aufweist. Im anderen Falle sprechen wir von einer nichtgeschlossenen Riemannschen Fläche.

Unter einem Bereich $\mathfrak{B}$ verstehen wir eine offene Punktmenge einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$. (In Zeichen: $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{R}$, und entsprechend, wenn $\mathfrak{B}_1$ ein Teilbereich von $\mathfrak{B}$ ist: $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}$.) Ist ein Bereich insbesondere zusammenhängend, so heißt er ein Gebiet $\mathfrak{G}$. Die maximalen Gebiete, aus denen ein Bereich $\mathfrak{B}$ besteht, heißen die Komponenten von $\mathfrak{B}$, ihre Anzahl ist endlich oder höchstens abzählbar. Ein Bereich $\mathfrak{B}_1$ heißt ganz im Inneren des Bereiches $\mathfrak{B}$ gelegen, falls $\mathfrak{B}_1$ Teilbereich von $\mathfrak{B}$ und jede unendliche Punktmenge aus $\mathfrak{B}_1$ einen Häufungspunkt in $\mathfrak{B}$ besitzt, d. h. wenn $\mathfrak{B}_1$ in $\mathfrak{B}$ kompakt ist. (In Zeichen $\mathfrak{B}_1 \subset\subset \mathfrak{B}$.) Liegt ein Bereich ganz im Innern von $\mathfrak{R}$, so liegt er bei jeder Triangulierung von $\mathfrak{R}$ in höchstens endlich vielen Dreiecken. – Ein ganz im Innern von $\mathfrak{R}$ liegender Bereich mit endlich vielen Komponenten heißt ein Polygonbereich, wenn sein Rand aus endlich vielen punktfremden, doppelpunktfreien, geschlossenen Kurven besteht, die ihrerseits aus endlich vielen Strecken, Halbgeraden oder Kreisbogen zusammengesetzt sind, wenn ferner jeder Randpunkt auch Häufungspunkt äußerer Punkte ist. (In den Polygon-

bereich hinreichende „Stachel“ sind also ausgeschlossen.) Ein Polygonbereich heißt ein ausgezeichneter Polygonbereich, wenn auf seinem Rande kein Verzweigungspunkt und kein unendlich ferner Punkt liegt. Unter einem Polygonegebiet verstehen wir einen zusammenhängenden Polygonbereich.

Wir sagen: Die unendliche Folge von Bereichen $\mathfrak{B}_n$, $n = 1, 2, \dots$, schöpft den Bereich $\mathfrak{B}$ aus, wenn stets $\mathfrak{B}_n \subset \mathfrak{B}_{n+1} \subset \mathfrak{B}$ gilt und wenn es zu jedem ganz im Inneren von $\mathfrak{B}$ gelegenen Teilbereich $\mathfrak{B}^*$ einen Index n_0 gibt, so daß für $n > n_0$ gilt $\mathfrak{B}^* \subset \mathfrak{B}_n$. Wir sprechen auch von einer Ausschöpfungsfolge; insbesondere von einer zulässigen Ausschöpfungsfolge, wenn die $\mathfrak{B}_n$ Polygonbereiche sind.

Jeder Bereich $\mathfrak{B}$ besitzt zulässige Ausschöpfungsfolgen. Man kann etwa eine vorgegebene Triangulierung von $\mathfrak{B}$ fortgesetzt verfeinern und hieraus in naheliegender Weise eine zulässige Ausschöpfungsfolge von $\mathfrak{B}$ gewinnen. Ist $\mathfrak{B}$ speziell ein Gebiet $\mathfrak{G}$ (insbesondere die Gesamtfläche $\mathfrak{B}$), so ist $\mathfrak{G}$ durch Polygonegebiete zulässig ausschöpfbar.

Ein Bereich $\mathfrak{B}$ heißt beschränkt, wenn die z -Koordinaten der Punkte von $\mathfrak{B}$ beschränkt sind.

Wir sprechen schließlich von einem Zylinderbereich $\mathfrak{Z}$ über dem (ζ, z) -Raum, wenn es einen Bereich $\mathfrak{B}_\zeta$ über der ζ -Ebene und einen Bereich $\mathfrak{B}_z$ über der z -Ebene gibt, so daß die Punktpaare $\{p(\zeta), p(z)\}$ mit $p(\zeta)$ aus $\mathfrak{B}_\zeta$ und $p(z)$ aus $\mathfrak{B}_z$ den 4-dimensionalen Bereich $\mathfrak{Z}$ ausmachen. $\mathfrak{B}_\zeta$ und $\mathfrak{B}_z$ heißen die Projektionen von $\mathfrak{Z}$; wir schreiben $\mathfrak{Z} = \mathfrak{B}_\zeta \times \mathfrak{B}_z$. Sind $\mathfrak{B}_\zeta$ und $\mathfrak{B}_z$ Gebiete, so heißt $\mathfrak{Z}$ ein Zylindergebiet. Entsprechend werden Zylinderbereiche und Zylindergebiete über dem Raum der n komplexen Veränderlichen $z_1, \dots, z_n$ erklärt.

Eine Funktion $f(z)$ (bzw. $f(z_1, \dots, z_n)$) heißt in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ (in einem Zylindergebiet $\mathfrak{Z}$) regulär, wenn sie in einer Umgebung jedes Punktes von $\mathfrak{G}(\mathfrak{Z})$ durch eine Potenzreihe im ortsuniformisierenden Parameter (in den zu den Projektionen von $\mathfrak{Z}$ gehörigen ortsuniformisierenden Parametern) darstellbar ist.

Die Funktion $f(z)$ (bzw. $f(z_1, \dots, z_n)$) heißt in $\mathfrak{G}(\mathfrak{Z})$ meromorph, wenn sie in einer Nachbarschaft jedes Punktes von $\mathfrak{G}(\mathfrak{Z})$ eine Darstellung als Quotient dort regulärer Funktionen gestattet. Ist ein aus verschiedenen Komponenten $\mathfrak{G}_j$ bestehender Bereich $\mathfrak{B}$ vorgegeben und in jedem $\mathfrak{G}_j$ eine reguläre (meromorphe) Funktion $f_j(z)$, so sprechen wir von einer in $\mathfrak{B}$ definierten regulären (meromorphen) Funktion $f(z)$; und zwar ist es für die folgenden Überlegungen bequem, diese Sprechweise auch dann einzuführen, wenn die $f_j(z)$ nicht durch analytische Fortsetzung miteinander zusammenhängen. Eine entsprechende Festsetzung treffen wir für reguläre (meromorphe) Funktionen $f(z_1, \dots, z_n)$ in Zylinderbereichen.

Wir sagen, die Folge der Funktionen $f_n(z)$ approximiere die Funktion $f(z)$ gleichmäßig im Innern des Bereiches $\mathfrak{B}$, wenn wir zu jedem Bereich $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{B}^* \subset \mathfrak{B}$, und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0 finden können, so daß

$$|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon \text{ in } \mathfrak{B}^* \text{ für } n > n_0.$$

Durch die Menge $\mathfrak{K}$ von Funktionen $f(z)$ läßt sich $F(z)$ im Innern von $\mathfrak{B}$ gleichmäßig approximieren, heißt, daß es zu jedem $\mathfrak{B}^* \subset \mathfrak{B}$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $f(z)$ aus $\mathfrak{K}$ gibt, so daß

$$|F(z) - f(z)| < \varepsilon$$

in $\mathfrak{B}^*$. Entsprechend wird die gleichmäßige Approximation von Funktionen im Innern von Zylinderbereichen erklärt.

Über Bereiche, die ganz im Innern ihrer Riemannschen Fläche liegen, beweisen wir

Satz 1 (Einbettungssatz): Zu jedem Bereich $\mathfrak{B}$, der ganz im Innern einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{K}$ liegt, gibt es eine geschlossene Riemannsche Fläche $\mathfrak{A}$, die $\mathfrak{B}$ als Teilbereich so enthält, daß $\mathfrak{B}$ ein zweidimensionales Stück von $\mathfrak{A}$ nicht bedeckt.

Wir sagen, $\mathfrak{B}$ sei in $\mathfrak{A}$ eingebettet.

Beweis: Wegen $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{K}$ liegt $\mathfrak{B}$ in endlich vielen Dreiecken einer Triangulierung von $\mathfrak{K}$. Wir können noch so viele weitere Dreiecke hinzunehmen, daß die so ausgewählten Dreiecke eine abgeschlossenes Polygonebiet bilden. Diese Dreiecke $\mathfrak{G}_v$, $v = 1, \dots, n$, denken wir uns so durchnumeriert, daß $\mathfrak{G}_{v+1}$ jeweils längs mindestens einer Seite mit dem Komplex $\mathfrak{G}_v = \mathfrak{G}_1 + \dots + \mathfrak{G}_v$ zusammenhängt. Wir zeigen die Gültigkeit des Satzes für $\mathfrak{G}_n$, und damit für den in $\mathfrak{G}_n$ liegenden Bereich $\mathfrak{B}$, durch Induktion nach v . $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_1$ ist offenbar wie verlangt einbettbar, nämlich in die ganze Ebene. Angenommen nun, $\mathfrak{G}_v$ sei in eine geschlossene Riemannsche Fläche $\mathfrak{A}_v$ einbettbar. Wir weisen nach, daß $\mathfrak{G}_{v+1} = \mathfrak{G}_v + \mathfrak{G}_{v+1}$ einbettbar ist. Der $\mathfrak{G}_v$ und $\mathfrak{G}_{v+1}$ gemeinsame Rand heiße $\mathfrak{S}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. $\mathfrak{S}$ besteht aus 1, 2 oder 3 Seiten von $\mathfrak{G}_{v+1}$.
2. $\mathfrak{S}$ besteht aus einer Seite und der gegenüberliegenden Ecke von $\mathfrak{G}_{v+1}$.

1. Fall: Wir legen $\mathfrak{G}_{v+1}$ in eine Ebene $\mathfrak{E}$, schneiden $\mathfrak{A}_v$ und $\mathfrak{E}$ längs $\mathfrak{S}$ auf und verheften die Schnittufer kreuzweise. So entsteht eine gesuchte Fläche $\mathfrak{A}_{v+1}$. Zerfällt die durch die Heftung entstehende Mannigfaltigkeit, so wird als $\mathfrak{A}_{v+1}$ der Teil gewählt, in dem $\mathfrak{G}_{v+1}$ liegt.

2. Fall: $\mathfrak{S}$ zerfalle in die Seite $\mathfrak{s}_1$ und den Punkt P . Durch P läuft die Randseite $\mathfrak{s}_2$ von $\mathfrak{G}_v$. Wir ergänzen $\mathfrak{A}_v$ durch ein weiteres Blatt zu einer Fläche $\mathfrak{A}_v^*$, indem wir eine Ebene $\mathfrak{E}_0$ und die Fläche $\mathfrak{A}_v$ längs $\mathfrak{s}_2$ aufschneiden und wieder die Ufer kreuzweise verheften. $\mathfrak{G}_{v+1}$ wird sodann in eine Ebene $\mathfrak{E}_0^*$

gelegt. $\mathfrak{U}_v^*$ und $\mathfrak{G}_0^*$ werden längs $\mathfrak{s}_1$ und einer weiteren Strecke $\mathfrak{s}_3$ aufgeschnitten, die folgende Eigenschaften hat: $\mathfrak{s}_3$ läuft durch P , hat aber auf $\mathfrak{G}_0^*$ keinen weiteren Punkt mit $\mathfrak{G}_{v+1}$ gemein; auf $\mathfrak{U}_v^*$ verläuft $\mathfrak{s}_3$ auf dem ergänzten, von $\mathfrak{G}_v$ freien Blatt und hat mit $\mathfrak{s}_2$ nur P gemein. $\mathfrak{G}_0^*$ wird nun längs der Schnitte $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_3$ mit $\mathfrak{U}_v^*$ verheftet. Es entsteht $\mathfrak{U}_{v+1}$.

Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{G}_n$ und damit auch $\mathfrak{B}$ in eine geschlossene Riemannsche Fläche $\mathfrak{A}$ einbettbar ist. Hat $\mathfrak{A}$ noch nicht die Eigenschaft, daß $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{A}$ ein volles zweidimensionales Stück freiläßt, so wird $\mathfrak{A}$ längs einer Randseite von $\mathfrak{G}_n$ aufgeschnitten und ein weiteres Blatt angeheftet.

Wir erweitern noch die Aussage von Satz 1.

Satz 2: *Seien $\mathfrak{R}_v, v = 1, 2, \dots$, endlich oder abzählbar unendlich viele nichtgeschlossene Riemannsche Flächen. Auf jedem $\mathfrak{R}_v$ sei ein ganz im Innern liegender Bereich $\mathfrak{B}_v$ vorgegeben. Dann gibt es eine Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}$, in die die $\mathfrak{B}_v$ punktfremd einbettbar sind und in der ein volles zweidimensionales Stück von den $\mathfrak{B}_v$ unbedeckt bleibt. Sind nur endlich viele $\mathfrak{R}_v$ und $\mathfrak{B}_v$ vorgegeben, so kann $\mathfrak{R}$ als geschlossene Riemannsche Fläche gewählt werden.*

Beweis: Nach Satz 1 ist jedes $\mathfrak{B}_v$ in eine geschlossene Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}_v^*$ einbettbar. Die $\mathfrak{R}_v^*$ können so gewählt werden, daß je ein volles Blatt von $\mathfrak{B}_v$ frei ist. Hat nämlich ein $\mathfrak{R}_v^*$ noch nicht diese Eigenschaft, so wird es durch geeignetes Anheften eines weiteren Blattes ergänzt. Nunmehr werden die $\mathfrak{R}_v^*$ sukzessiv miteinander verheftet, wobei die Verheftung von $\mathfrak{R}_1^* + \dots + \mathfrak{R}_v^*$ mit $\mathfrak{R}_{v+1}$ jeweils längs eines Schnittes auf den freien Blättern von $\mathfrak{R}_v^*$ und $\mathfrak{R}_{v+1}^*$ erfolgt.

So entsteht die gesuchte Fläche $\mathfrak{R}$, die für den Fall endlich vieler $\mathfrak{R}_v$ und $\mathfrak{B}_v$ geschlossen ist.

§ 2. Die Cauchysche Integralformel für Bereiche auf Riemannschen Flächen.

Für die Überlegungen der folgenden Abschnitte ist die Aussage wichtig, daß eine in einem nichtschlichten Bereiche reguläre Funktion dort – wie in schlichten Bereichen – durch ein Cauchysches Integral über ihre Randwerte darstellbar ist. Zur Bildung eines solchen Integrals wird eine von zwei Veränderlichen abhängende analytische Funktion $A(\zeta, z)$ benötigt, die an die Stelle von $\frac{1}{\zeta - z}$ in der Cauchyschen Integralformel für schlichte Gebiete treten kann. Es gilt

Satz 3: *Das Gebiet $\mathfrak{G}$ liege ganz im Innern der nichtgeschlossenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$. Dann existiert im Zylindergebiet $\mathfrak{Z} = \mathfrak{G}_\zeta \times \mathfrak{G}_z$ eine Funktion $A(\zeta, z)$ der zwei komplexen Veränderlichen ζ, z mit folgenden Eigenschaften:*

1. $A(\zeta, z)$ verhält sich in $\mathfrak{Z}$ meromorph und ist dort eindeutig.

2. Sind τ, t die den Punkten $p_1(\zeta_0), p_2(z_0)$ von $\mathfrak{G}$ zugeordneten ortsuniformisierenden Parameter, so ist in einer Umgebung von $p(\zeta_0, z_0) = p_1(\zeta_0) \times p_2(z_0)$:

$$A(\zeta, z) \frac{d\zeta}{d\tau} \equiv \frac{1}{\tau - t} + R(\tau, t), \text{ falls } p_1(\zeta_0) = p_2(z_0);$$

$$A(\zeta, z) \frac{d\zeta}{d\tau} \equiv S(\tau, t), \text{ falls } p_1(\zeta_0) \neq p_2(z_0);$$

dabei bedeuten $R(\tau, t), S(\tau, t)$ in einer Umgebung von $(\tau, t) = (0, 0)$ reguläre Funktionen.

$A(\zeta, z)$ heiße eine Elementarfunktion 1. Ordnung in $\mathfrak{G}$.

Die Eigenschaft 2) besagt, daß das Differential

$$dN(\zeta, z) = A(\zeta, z) d\zeta$$

[wo $p_2(z)$ als Parameter aufzufassen ist] für $p_1(\zeta) \neq p_2(z)$ endlich bleibt und für $p_1(\zeta) = p_2(z)$ einen einfachen Pol mit dem Residuum 1 besitzt.

Zum Beweise betten wir das Gebiet $\mathfrak{G}$ in eine geschlossene Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$ ein. Auf $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$ gibt es nach WEIERSTRASS Elementarfunktionen, doch weisen diese noch feste Polstellen auf. Verlegen wir die festen Pole in Punkte außerhalb $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$, so erhalten wir Funktionen $A(\zeta, z)$ der gesuchten Art.

Ohne Benutzung der Weierstraßschen Konstruktion läßt sich die Existenz von $A(\zeta, z)$ auf folgendem Wege nachweisen:

Wir gehen aus von einem Abelschen Normalintegral 3. Gattung auf $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$

$$(1) \quad \prod (z, z_1; \zeta, \zeta_1) = \int_{z_1}^z \frac{\partial \Pi(z; \zeta, \zeta_1)}{\partial z} dz.$$

Dabei sind z und z_1 die eigentlichen Veränderlichen, ζ und ζ_1 Parameter, die die Stelle der logarithmischen Singularitäten auf $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$ bezeichnen. Alle 4 Gren laufen unabhängig auf $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$. Der analytische Charakter der Abhängigkeit von den Parametern ζ und ζ_1 ergibt sich aus der bekannten Beziehung

$$\Pi(z, z_1; \zeta, \zeta_1) = \Pi(\zeta, \zeta_1; z, z_1)$$

(Vertauschbarkeit von Parameter und Argument)⁶⁾.

In der Umgebung eines endlichen Punktes $p(\zeta) = p(\zeta_1) = p(z) = p(z_1)$ mit den Ortsuniformisierenden τ, τ_1, t, t_1 gilt

$$\prod (z, z_1; \zeta, \zeta_1) \equiv \log \frac{(\tau - t)(\tau_1 - t_1)}{(\tau - t_1)(\tau_1 - t)} + G(t, t_1; \tau, \tau_1),$$

wo $G(t, t_1; \tau, \tau_1)$ dort regulär ist.

⁶⁾ Vgl. etwa W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie II, 2, S. 398ff.

Die Periodizitätsmoduln von $\Pi(z, z_1; \zeta, \zeta_1)$ in bezug auf die Veränderliche z sind gegeben durch

$$(2) \quad P_\mu(\zeta, \zeta_1) = \int_{L_\mu} \frac{\partial \Pi(z; \zeta, \zeta_1)}{\partial z} dz, \quad \mu = 1, \dots, 2p.$$

Dabei sei $(L_1, \dots, L_{2p})$ ein vollständiges System von paarweise konjugierten Rückkehrschnitten⁷⁾ auf $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$. $P_\mu(\zeta, \zeta_1)$ hängt von z und z_1 nicht mehr ab. Als Funktion von ζ und ζ_1 ist $P_\mu(\zeta, \zeta_1)$ ein Abelsches Integral, und zwar ein Integral 1. Gattung, da die logarithmischen Singularitäten herausfallen.

Wir gehen nun von $\Pi(z, z_1; \zeta, \zeta_1)$ durch Differentiation nach ζ über zu einem Normalintegral 2. Gattung in z und z_1 :

$$(3) \quad \frac{\partial \Pi(z, z_1; \zeta, \zeta_1)}{\partial \zeta} = \Omega(z, z_1; \zeta, \zeta_1).$$

$p_2(z_1)$ wird als Konstante außerhalb von $\mathfrak{G}$ fest gewählt; die Abhängigkeit von ζ_1 fällt durch die Differentiation fort. Dann sei

$$A^*(\zeta, z) = \Omega(z, z_1; \zeta, \zeta_1).$$

$A^*(\zeta, z)$ weist in $\mathfrak{G}_\zeta \times \mathfrak{G}_z$ alle in Satz 3 angegebenen Eigenschaften auf mit Ausnahme der Eindeutigkeit in z . Als Funktion von z ist $A^*(\zeta, z)$ ein Abelsches Integral mit dem einen einfachen Pol $p_2(z) = p_1(\zeta)$, falls $p_1(\zeta)$ ungleich $p_2(z_1)$ und nicht als Verzweigungspunkt gewählt wird. Die Periodizitätsmoduln sind nach (1), (2) und (3):

$$P_\mu^*(\zeta) = \frac{\partial P_\mu(\zeta, \zeta_1)}{\partial \zeta}, \quad \mu = 1, \dots, 2p.$$

Dies sind auf $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$ eindeutige Funktionen; und die Differentiale $P_\mu^*(\zeta) d\zeta$ sind überall endlich, da die $P_\mu(\zeta, \zeta_1)$ Abelsche Integrale 1. Gattung in ζ sind.

Wir betrachten nun die Matrix

$$\mathfrak{P} = (P_\mu^*(\zeta_\nu^*)), \mu = 1, \dots, 2p, \nu = 1, \dots, k.$$

Dabei seien $p(\zeta_1^*), \dots, p(\zeta_k^*)$ Punkte auf $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$, jedoch keine Verzweigungspunkte. Ferner sei k der Maximalrang von $\mathfrak{P}$ in bezug auf nichtidentisches Verschwinden der Unterdeterminanten der Matrix⁸⁾. Da $\mathfrak{G}$ ein zweidimensionales Stück von $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$ freiläßt, können die $p(\zeta_\nu^*)$ so außerhalb $\mathfrak{G}$ festgelegt werden, daß der Rang der Matrix gleich k ist. Für die Funktionen $P_\mu^*(\zeta)$ gilt die Darstellung

$$P_\mu^*(\zeta) = \sum_{\nu=1}^k c_\nu(\zeta) P_\mu^*(\zeta_\nu^*); \quad \mu = 1, \dots, 2p.$$

⁷⁾ Unter *Rückkehrschnitt* wird wie üblich eine geschlossene, doppelunktfreie, die Riemannsche Fläche nicht zerlegende Kurve verstanden.

⁸⁾ Bekanntlich ist $k = p$.

Hierin sind die $c_\nu(\zeta)$ lineare Ausdrücke in den $P_\mu^*(\zeta)$ mit Koeffizienten, die konstant sind, weil die $p(\zeta_\nu^*)$ fest gewählt waren. Daher sind auch die Differentiale $c_\nu(\zeta) d\zeta$ überall endlich. Die Funktion

$$A(\zeta, z) = A^*(\zeta, z) - \sum_{\nu=1}^k c_\nu(\zeta) A^*(\zeta_\nu^*, z)$$

ist nun laut Konstruktion als Funktion von ζ in $\mathfrak{R}_\mathfrak{G}$ eindeutig und meromorph. Als Funktion von z ist sie ein Abelsches Integral 2. Gattung mit den Periodizitätsmoduln

$$P_\mu^*(\zeta) - \sum_{\nu=1}^k c_\nu(\zeta) P_\mu^*(\zeta_\nu^*) = 0;$$

also eine eindeutige meromorphe Funktion auf $\mathfrak{R}_\mathfrak{G}$. In $\mathfrak{G}_\zeta \times \mathfrak{G}_z$ hat $A(\zeta, z)$ die in Satz 3 angegebenen Eigenschaften. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Nunmehr können wir die von uns benötigte Aussage über die Gültigkeit der Cauchyschen Integralformel in nichtschlichten Bereichen formulieren:

Satz 4: *Sei $\mathfrak{G}$ ein Polygonegebiet ganz im Innern der Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$. $\mathfrak{G}^*$ sei ein $\mathfrak{G}$ ganz umfassendes Polygonegebiet, das seinerseits noch ganz im Innern von $\mathfrak{R}$ liegt. $A(\zeta, z)$ sei eine $\mathfrak{G}^*$ gemäß Satz 3 zugeordnete Elementarfunktion. Dann gilt für jede in $\mathfrak{G}$ reguläre und eindeutige Funktion $f(z)$, die auf dem Rande $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{G}$ noch stetig ist:*

$$(4) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{G}} f(\zeta) \cdot A(\zeta, z) d\zeta.$$

Zum Beweise wird $\mathfrak{G}$ trianguliert. Für jedes Elementardreieck gilt (4), also auch für $\mathfrak{G}$.

Zusatz: (4) bleibt auch richtig, wenn $\mathfrak{G}$ ersetzt wird durch einen aus mehreren punktfremden Komponenten bestehenden Polygonbereich $\mathfrak{B}$ und $f(z)$ in jeder Komponente von $\mathfrak{B}$ eine reguläre Funktion mit stetigen Randwerten darstellt. (Die in den verschiedenen Komponenten von $\mathfrak{B}$ erklärten regulären Funktionen können dabei nach der Festsetzung von § 1 völlig voneinander unabhängig sein.)

§ 3. Reguläre Approximation von Funktionen in vorgegebenen Bereichen.

Wir können nun den Rungeschen Approximationssatz der Ebene auf beliebige nichtschlichte, nichtgeschlossene Bereiche übertragen. Zur Vorbereitung des Hauptsatzes beweisen wir zunächst

Satz 5: *Es seien $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ Polygonbereiche auf der nichtgeschlossenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$, und es gelte $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2 \subset \mathfrak{R}$. Jeder Randpunkt von $\mathfrak{B}_1$ sei inner-*

halb $\mathfrak{B}_2$ mit dem Rande von $\mathfrak{B}_2$ derart verbindbar, daß die Verbindungskurve⁹⁾ nur Rand- und äußere Punkte von $\mathfrak{B}_1$ enthält. Dann ist jede in $\mathfrak{B}_1$ reguläre eindeutige Funktion $f(z)$ gleichmäßig im Innern von $\mathfrak{B}_1$ durch in $\mathfrak{B}_2$ reguläre eindeutige Funktionen approximierbar.

Wir haben zu zeigen, daß es zu jedem ganz im Innern von $\mathfrak{B}_1$ gelegenen Bereich $\mathfrak{B}_0$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine in $\mathfrak{B}_2$ reguläre Funktion $g(z)$ gibt, so daß in $\mathfrak{B}_0$ gilt

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon.$$

Wir wählen einen ausgezeichneten Polygonbereich $\mathfrak{B}_0^*$, $\mathfrak{B}_0 \subset \mathfrak{B}_0^* \subset \mathfrak{B}_1$, mit dem Rande $\mathfrak{G}_0^*$, der sich hinsichtlich der Verbindbarkeit seines Randes mit dem Rande von $\mathfrak{B}_2$ ebenso wie $\mathfrak{B}_1$ verhält. Ferner sei $A(\zeta, z)$ eine gemäß Satz 3 einem $\mathfrak{B}_2$ noch ganz umfassenden auf $\Re$ liegenden Gebiete zugeordnete Elementarfunktion. In $\mathfrak{B}_0^*$ gilt dann:

$$(1) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\mathfrak{G}_0^*} f(\zeta) A(\zeta, z) d\zeta.$$

Wir approximieren das Integral rechts in (1) durch eine Riemannsche Summe, die in $\mathfrak{B}_0$ um weniger als $\frac{\varepsilon}{2}$ von $f(z)$ abweicht, was möglich ist, da der Integrand gleichmäßig stetig ist für $p(\zeta)$ auf $\mathfrak{G}_0^*$ und $p(z)$ in $\mathfrak{B}_0$. Es gilt also

$$(2) \quad \left| f(z) - \frac{1}{2\pi i} \cdot \sum_{r=1}^n f(\zeta_r) A(\zeta_r, z) (\zeta_{r+1} - \zeta_r) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

wobei die $p(\zeta_r)$ Punkte auf $\mathfrak{G}_0^*$ sind. Die Funktionen

$$(3) \quad \frac{1}{2\pi i} f(\zeta_r) A(\zeta_r, z) (\zeta_{r+1} - \zeta_r), \quad r = 1, \dots, n$$

sind in $\mathfrak{B}_2$ meromorph und besitzen als einzige Singularitäten jeweils in $p(z) = p(\zeta_r)$ einen Pol 1. Ordnung. Nach einem der Rungeschen Polverschiebung entsprechenden Verfahren werden nun die Ausdrücke (3) durch Funktionen approximiert, die in $\mathfrak{B}_2$ regulär sind. Hierzu ziehen wir heran den

Hilfssatz 1: Es seien $\mathfrak{b}_0$ und $\mathfrak{b}_1$ zwei Bereiche mit $\mathfrak{b}_0 \subset \mathfrak{b}_1$ und $H(z)$ eine in $\mathfrak{b}_1$ meromorphe und eindeutige Funktion, die nur in dem außerhalb von $\mathfrak{b}_0$ gelegenen Punkt $p(z) = p(\zeta)$ einen Pol besitzen möge. Ferner sei $h(z)$ eine weitere in $\mathfrak{b}_1$ meromorphe und eindeutige Funktion, die in $p(z) = p(\zeta)$ regulär ist und für die gilt

$$(4) \quad |h(\zeta)| > \text{Max } |h(\mathfrak{b}_0)|.$$

⁹⁾ Unter *Kurve* verstehen wir hier und im folgenden einen (geschlossenen oder nichtgeschlossenen) Polygonzug, bestehend aus endlichvielen Strecken, Halbgeraden und Kreisbogen.

Dann ist $H(z)$ in $\mathfrak{b}_0$ gleichmäßig durch in $\mathfrak{b}_1$ meromorphe und eindeutige Funktionen approximierbar, die nur dort Pole besitzen, wo $h(z)$ Pole aufweist.

Zum Beweis des Hilfssatzes bilden wir:

$$H(z) = \frac{H(z) (h(\zeta) - h(z))^\kappa}{(h(\zeta) - h(z))^\kappa} = \frac{H_1(z)}{(h(\zeta) - h(z))^\kappa}.$$

Dabei wird die ganze Zahl κ so gewählt, daß $H(z) \cdot (h(\zeta) - h(z))^\kappa$ für $p(z) = p(\zeta)$ regulär ist. Nun ist

$$\frac{1}{(h(\zeta) - h(z))^\kappa} = \frac{1}{[h(\zeta)]^\kappa} \cdot \frac{1}{\left[1 - \frac{h(z)}{h(\zeta)}\right]^\kappa} = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu h^\mu(z),$$

und die Reihe konvergiert wegen

$$\left| \frac{h(z)}{h(\zeta)} \right| < 1 - \delta$$

gleichmäßig in $\mathfrak{b}_0$. Also ist

$$(5) \quad H(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} H_1(z) \cdot \sum_{\mu=0}^k a_\mu h^\mu(z), \quad \text{w. z. b. w.}$$

Nun zurück zum Beweise von Satz 5!

Wir verbinden den Punkt $p(\zeta_1)$ von $\mathfrak{G}_0^*$ mit einem Randpunkt $p(\zeta_1^*)$ von $\mathfrak{B}_2$ durch ein Kurvenstück $\mathfrak{R}$, das außerhalb $\mathfrak{B}_1^*$, aber innerhalb $\mathfrak{B}_2$ verläuft und weder einen Verzweigungspunkt noch einen unendlich fernen Punkt enthält. Auf $\mathfrak{R}$ werden $m+1$ verschiedene Punkte $p(\tilde{\zeta}_1) = p(\zeta_1)$, $p(\tilde{\zeta}_2)$, ..., $p(\tilde{\zeta}_{m+1}) = p(\zeta_1^*)$ gewählt, so daß für alle $p(z)$ aus $\mathfrak{B}_0$ gilt:

$$(6) \quad |A(\tilde{\zeta}_{j+1}, \tilde{\zeta}_j)| > |A(\tilde{\zeta}_{j+1}, z)|, \quad j = 1, \dots, m.$$

Das ist, da $A(\zeta, z)$ für $p(\zeta)$ auf $\mathfrak{R}$ und $p(z)$ in $\mathfrak{B}_0$ beschränkt ist und die Mannigfaltigkeit $p(\zeta) = p(z)$ als Polfläche aufweist, stets möglich. Es braucht nur $p(\tilde{\zeta}_{j+1})$ nahe genug bei $p(\tilde{\zeta}_j)$ gewählt zu werden. Sicher ist auch $A(\tilde{\zeta}_{j+1}, \tilde{\zeta}_j)$ endlich, da $\mathfrak{R}$ durch keinen Verzweigungspunkt läuft. Ferner hat $A(\tilde{\zeta}_{j+1}, z)$ in $\mathfrak{B}_2$ nur den einen Pol $p(z) = p(\tilde{\zeta}_{j+1})$. Auf Grund des Hilfssatzes und von (6) können wir nun die Funktion

$$\frac{1}{2\pi i} f(\zeta_1) A(\zeta_1, z) (\zeta_2 - \zeta_1)$$

in $\mathfrak{B}_0$ durch eine Funktion $g_1(z)$ approximieren, die nur für $p(z) = p(\tilde{\zeta}_2)$ einen Pol aufweist und sonst im abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{B}_2$ regulär und eindeutig ist. Wir wählen $g_1(z)$ so, daß in $\mathfrak{B}_0$

$$(7) \quad \left| \frac{1}{2\pi i} f(\zeta_1) A(\zeta_1, z) (\zeta_2 - \zeta_1) - g_1(z) \right| < \frac{\varepsilon}{2mn}$$

ist. Ebenso läßt sich eine im abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{B}_2$ meromorphe eindeutige Funktion $g_2(z)$ mit der einzigen Polstelle $p(z) = p(\zeta_3)$ wählen, so daß in $\mathfrak{B}_0$

$$(8) \quad |g_1(z) - g_2(z)| < \frac{\varepsilon}{2mn}.$$

Allgemein gibt es Funktionen $g_j(z)$, $j = 1, \dots, m$, so daß in $\mathfrak{B}_0$

$$(9) \quad |g_{j-1}(z) - g_j(z)| < \frac{\varepsilon}{2mn}, \quad j = 2, \dots, m,$$

wobei $g_j(z)$ im abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{B}_2$ meromorph und eindeutig ist und nur für $p(z) = p(\zeta_{j+1})$ eine Polstelle hat. Aus (7), (8), (9) folgt

$$\left| \frac{1}{2\pi i} f(\zeta_1) A(\zeta_1, z) (\zeta_2 - \zeta_1) - g_m(z) \right| < \frac{\varepsilon}{2n}$$

für $p(z)$ in $\mathfrak{B}_0$. $g_m(z)$ ist im Innern von $\mathfrak{B}_2$ regulär und weist auf dem Rande von $\mathfrak{B}_2$ nur einen Pol in $p(\zeta_1^*)$ auf.

Entsprechend gibt es zu jedem v , $v = 1, \dots, n$, eine im Innern von $\mathfrak{B}_2$ reguläre eindeutige Funktion $g^{(v)}(z)$ (wir setzen $g^{(1)}(z) = g_m(z)$), so daß in $\mathfrak{B}_2$ gilt:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} f(\zeta_v) A(\zeta_v, z) (\zeta_{v+1} - \zeta_v) - g^{(v)}(z) \right| < \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Also gilt in $\mathfrak{B}_0$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \cdot \sum_{v=1}^n f(\zeta_v) A(\zeta_v, z) (\zeta_{v+1} - \zeta_v) - \sum_{v=1}^n g^{(v)}(z) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und wegen (2)

$$(10) \quad \left| f(z) - \sum_{v=1}^n g^{(v)}(z) \right| < \varepsilon,$$

wo $\sum_{v=1}^n g^{(v)}(z)$ in $\mathfrak{B}_2$ regulär und eindeutig ist. Setzen wir $\sum_{v=1}^n g^{(v)}(z) = g(z)$, so haben wir

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon \text{ in } \mathfrak{B}_0, \text{ w. z. b. w.}$$

Die in Satz 5 enthaltene Bedingung für die Approximierbarkeit einer in einem Polygonbereich regulären Funktion nach Funktionen eines umfassenden Bereiches – die Verbindbarkeit der Bereichsränder in der angegebenen Weise – ist für allgemeinere Bereiche wenig brauchbar. Wir wollen sie ersetzen durch eine andere Bedingung, die nur von inneren Eigenschaften der Bereiche abhängt.

Hierzu benötigen wir besondere zulässige Ausschöpfungsfolgen der vorgegebenen Bereiche. Wir nennen eine zulässige Ausschöpfung eines Bereiches

$\mathfrak{B}$ durch Polygonbereiche $\mathfrak{B}_\nu$ normal, wenn für alle ν jeder Randpunkt von $\mathfrak{B}_\nu$ innerhalb $\mathfrak{B}_{\nu+1} - \mathfrak{B}_\nu$ mit dem Rande von $\mathfrak{B}_{\nu+1}$ verbindbar ist. Zunächst gilt dann:

Eine zulässige Ausschöpfung eines Bereiches $\mathfrak{B}$ durch Polygonbereiche $\mathfrak{B}_\nu$ ist dann und nur dann normal, wenn kein $\mathfrak{B}_\nu$ Randkontinua aufweist, die in $\mathfrak{B}_{\nu+1} - \mathfrak{B}_\nu$ beranden¹⁰⁾.

Ist nämlich $\mathfrak{C}_\nu^{(1)}$ ein Randkontinuum von $\mathfrak{B}_\nu$, so bildet die Menge der Punkte von $\mathfrak{B}_{\nu+1} - \mathfrak{B}_\nu$ mit denen $\mathfrak{C}_\nu^{(1)}$ innerhalb von $\mathfrak{B}_{\nu+1} - \mathfrak{B}_\nu$ verbindbar ist, ein Gebiet $\mathfrak{G}_\nu$. Entweder gehören zum Rande von $\mathfrak{G}_\nu$ nur Randkontinua von $\mathfrak{B}_\nu$, dann ist $\mathfrak{C}_\nu^{(1)}$ nicht innerhalb $\mathfrak{B}_{\nu+1} - \mathfrak{B}_\nu$ mit dem Rande von $\mathfrak{B}_{\nu+1}$ verbindbar. Oder der Rand von $\mathfrak{G}_\nu$ enthält Randkontinua von $\mathfrak{B}_{\nu+1}$, dann ist $\mathfrak{C}_\nu^{(1)}$ innerhalb von $\mathfrak{B}_{\nu+1} - \mathfrak{B}_\nu$ mit dem Rande von $\mathfrak{B}_{\nu+1}$ verbindbar. Daraus folgt die Behauptung.

Nun läßt sich leicht zeigen:

Jeder Bereich $\mathfrak{B}$ ist normal ausschöpfbar.

Zum Beweise gehen wir aus von einer zulässigen Ausschöpfungsfolge $\mathfrak{B}_\nu$ von $\mathfrak{B}$ und konstruieren aus ihr eine Folge $\tilde{\mathfrak{B}}_\nu$, die $\mathfrak{B}$ normal ausschöpft. — Entweder weist $\mathfrak{B}_1$ keine Randkontinua auf, die innerhalb $\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_1$ beranden, dann sei $\tilde{\mathfrak{B}}_1 = \mathfrak{B}_1$. Oder es gibt solche Randkontinua, dann sei $\mathfrak{C}_1$ ein maximales System dieser Randkontinua. Wir fügen die von $\mathfrak{C}_1$ in $\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_1$ berandeten Gebiete zu $\mathfrak{B}_1$ hinzu. Der durch Ergänzung aus $\mathfrak{B}_1$ entstehende Bereich heiße $\tilde{\mathfrak{B}}_1$. Er ist gleichfalls ein Polygonbereich und besitzt keine Randkontinua mehr, die in $\mathfrak{B} - \tilde{\mathfrak{B}}_1$ beranden. Sei weiter ν_1 so groß gewählt, daß $\mathfrak{B}_{\nu_1}$ den Bereich $\tilde{\mathfrak{B}}_1$ ganz umfaßt. Wir verfahren mit $\mathfrak{B}_{\nu_1}$ wie soeben mit $\mathfrak{B}_1$ und erhalten den Polygonbereich $\tilde{\mathfrak{B}}_2$. So fahren wir fort und erhalten eine Folge $\tilde{\mathfrak{B}}_\nu$ von Polygonbereichen, die gleichfalls eine zulässige Ausschöpfungsfolge von $\mathfrak{B}$ darstellen, und die nach Konstruktion die Eigenschaft haben, daß kein $\tilde{\mathfrak{B}}_\nu$ Randkontinua hat, die in $\mathfrak{B} - \tilde{\mathfrak{B}}_\nu$ beranden. Also besitzt auch kein $\tilde{\mathfrak{B}}_\nu$ Randkontinua, die in $\tilde{\mathfrak{B}}_{\nu+1} - \tilde{\mathfrak{B}}_\nu$ beranden. Jeder Randpunkt von $\tilde{\mathfrak{B}}_\nu$ läßt sich also innerhalb $\tilde{\mathfrak{B}}_{\nu+1} - \tilde{\mathfrak{B}}_\nu$ mit dem Rande von $\tilde{\mathfrak{B}}_{\nu+1}$ verbinden. Die $\tilde{\mathfrak{B}}_\nu$ bilden eine normale Ausschöpfungsfolge.

Zusätzlich gilt:

Jedes Gebiet $\mathfrak{G}$ ist durch Polygonegebiete normal ausschöpfbar.

Denn $\mathfrak{G}$ ist als zusammenhängende Punktmenge durch Polygonegebiete in zulässiger Weise ausschöpfbar, und aus diesen gewinnt man, wie in der soeben angegebenen Konstruktion, Polygonegebiete, die $\mathfrak{G}$ normal ausschöpfen.

¹⁰⁾ *Beranden* ist hier und im folgenden ohne Berücksichtigung von Orientierungen gemeint (Beranden mod 2). Zur topologischen Terminologie vgl. das Lehrbuch der Topologie von SEIFERT-THRELFALL.

Sind nun zwei Bereiche $\mathfrak{B}$ und $\tilde{\mathfrak{B}}$ vorgegeben und gilt $\mathfrak{B} \subset \tilde{\mathfrak{B}}$, so können wir zu einem Kriterium für die Approximierbarkeit der in $\mathfrak{B}$ regulären und eindeutigen Funktionen $f(z)$ durch in $\tilde{\mathfrak{B}}$ reguläre und eindeutige Funktionen auf folgende Weise gelangen: Wir geben in $\mathfrak{B}$ und $\tilde{\mathfrak{B}}$ normale Ausschöpfungsfolgen $\mathfrak{B}_\nu$ bzw. $\tilde{\mathfrak{B}}_\mu$ vor und verlangen, daß stets der Rand von $\mathfrak{B}_\nu$ mit dem Rande von $\tilde{\mathfrak{B}}_\mu$ innerhalb von $\tilde{\mathfrak{B}}_\mu - \mathfrak{B}_\nu$ verbindbar sein soll, sobald nur $\mathfrak{B}_\nu \subset \tilde{\mathfrak{B}}_\mu$ gilt. Ist diese Bedingung für jedes Paar von Bereichen $\mathfrak{B}_\nu, \tilde{\mathfrak{B}}_\mu$ mit $\mathfrak{B}_\nu \subset \tilde{\mathfrak{B}}_\mu$ erfüllt, so ergibt sich die Möglichkeit der geforderten Approximation von $f(z)$ leicht aus Satz 5. Die Verbindbarkeitsbedingung ist ihrerseits äquivalent mit einer besonderen Eigenschaft der Bereiche $\mathfrak{B}$ und $\tilde{\mathfrak{B}}$: Der Bereich $\mathfrak{B}$ muß relativ zu $\tilde{\mathfrak{B}}$ einfach zusammenhängend sein.

Wir sagen, der Bereich $\mathfrak{B}$ sei relativ zum Bereich $\tilde{\mathfrak{B}}$ einfach zusammenhängend, falls $\mathfrak{B}$ Teilbereich von $\tilde{\mathfrak{B}}$ ist und jedes endliche System geschlossener Kurven in $\mathfrak{B}$, das innerhalb $\tilde{\mathfrak{B}}$ berandet, schon in $\mathfrak{B}$ berandet. Dann gilt:

Ist der Bereich $\mathfrak{B}$ relativ zum Bereiche $\tilde{\mathfrak{B}}$ einfach zusammenhängend und sind $\mathfrak{B}_\nu$ bzw. $\tilde{\mathfrak{B}}_\mu$ normale Ausschöpfungsfolgen von $\mathfrak{B}$ bzw. $\tilde{\mathfrak{B}}$, so ist der Rand eines $\mathfrak{B}_\nu$ stets mit dem Rande jedes Bereiches $\tilde{\mathfrak{B}}_\mu$, der $\mathfrak{B}_\nu$ ganz umfaßt, innerhalb von $\tilde{\mathfrak{B}}_\mu - \mathfrak{B}_\nu$ verbindbar.

Beweis: Gäbe es eine Randkurve $\mathcal{C}_r^{(1)}$ von $\mathfrak{B}_\nu$, die nicht innerhalb $\tilde{\mathfrak{B}}_\mu - \mathfrak{B}_\nu$ mit dem Rande von $\tilde{\mathfrak{B}}_\mu$ verbindbar ist, so bildet die Menge der Punkte, die innerhalb $\tilde{\mathfrak{B}}_\mu - \mathfrak{B}_\nu$ mit $\mathcal{C}_r^{(1)}$ verbindbar sind, ein ganz in $\tilde{\mathfrak{B}}_\mu$ liegendes Gebiet $\mathcal{G}_\nu$. Der Rand $\mathcal{C}_\nu^*$ von $\mathcal{G}_\nu$ besteht nur aus Randkurven von $\mathfrak{B}_\nu$ (zu denen $\mathcal{C}_r^{(1)}$ gehört). Doch kann $\mathcal{C}_\nu^*$ nicht mit dem gesamten Rande von $\mathfrak{B}_\nu$ zusammenfallen, sonst wäre $\mathfrak{B}_\nu + \mathcal{G}_\nu$ eine geschlossene Fläche, was unmöglich ist. $\mathcal{G}_\nu$ muß wenigstens einen Randpunkt von $\mathfrak{B}$ enthalten. Andernfalls läge $\mathcal{G}_\nu$ ganz in $\mathfrak{B}$, also auch in einem geeigneten $\mathfrak{B}_{\nu_1}$ ($\nu_1 > \nu$). Dann aber könnte $\mathcal{C}_\nu^*$ nicht innerhalb $\mathfrak{B}_{\nu_1} - \mathfrak{B}_\nu$ mit dem Rande von $\mathfrak{B}_{\nu_1}$ verbunden werden, was der Normalität der Folge $\mathfrak{B}_\nu$ widerspricht. Mithin stellt $\mathcal{C}_\nu^*$ ein System von endlich vielen geschlossenen Kurven in $\mathfrak{B}$ dar, das in $\tilde{\mathfrak{B}}$, nicht aber in $\mathfrak{B}$ berandet. Damit haben wir einen Widerspruch zur Voraussetzung des relativ einfachen Zusammenhanges von $\mathfrak{B}$ in bezug auf $\tilde{\mathfrak{B}}$, und unsere Behauptung ist bewiesen.

Es gilt auch die Umkehrung der soeben bewiesenen Aussage; doch benötigen wir sie im folgenden nicht. Statt dessen beweisen wir noch:

Wird ein Bereich $\mathfrak{B}$ durch eine Folge von Polygonbereichen normal ausgeschöpft, so ist jedes $\mathfrak{B}_{\nu_0}$ relativ zu allen $\mathfrak{B}_\nu$ mit $\nu > \nu_0$ und zu $\mathfrak{B}$ einfach zusammenhängend.

Wäre die Behauptung falsch, so gäbe es in $\mathfrak{B}_{\nu_0}$ ein System geschlossener Kurven $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_\sigma$, das innerhalb eines $\mathfrak{B}_{\nu_1}$, $\nu_1 > \nu_0$, einen Bereich $\mathfrak{B}^*$ berandet, derart, daß in $\mathfrak{B}^*$ wenigstens ein Randpunkt von $\mathfrak{B}_{\nu_0}$ läge. Dieser Randpunkt könnte dann aber nicht innerhalb $\mathfrak{B}_{\nu_1} - \mathfrak{B}_{\nu_0}$ mit dem Rande von $\mathfrak{B}_{\nu_1}$

verbunden werden im Widerspruch dazu, daß die $\mathfrak{B}_\nu$ den Bereich $\mathfrak{B}$ normal ausschöpfen.

Nunmehr können wir beweisen:

Satz 6 (1. Approximationssatz): $\mathfrak{B}$ und $\tilde{\mathfrak{B}}$ seien Bereiche in der nicht-geschlossenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$, und es gelte $\mathfrak{B} \subset \tilde{\mathfrak{B}}$. (Dabei ist zugelassen, daß $\tilde{\mathfrak{B}} = \mathfrak{R}$ ist.) Damit jede in $\mathfrak{B}$ reguläre eindeutige Funktion $f(z)$ im Innern von $\mathfrak{B}$ eine gleichmäßige Approximation durch in $\tilde{\mathfrak{B}}$ reguläre, eindeutige Funktionen gestattet, ist notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{B}$ relativ zu $\tilde{\mathfrak{B}}$ einfach zusammenhängend ist.

Beweis: 1) Die Bedingung ist hinreichend.

Sei $\mathfrak{B}^*$ ein ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegener Bereich. Wir haben zu zeigen, daß es zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ eine in $\tilde{\mathfrak{B}}$ reguläre eindeutige Funktion $g(z)$ gibt, so daß in $\mathfrak{B}^*$ gilt

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon.$$

Wir schöpfen $\mathfrak{B}$ und $\tilde{\mathfrak{B}}$ durch je eine Folge von Polygonbereichen $\mathfrak{B}_\nu$ bzw. $\tilde{\mathfrak{B}}_\mu$ normal aus. Es gibt dann ein ν_0 , so daß $\mathfrak{B}_{\nu_0}$ den Bereich $\mathfrak{B}^*$ ganz umfaßt, und ebenso ein μ_0 , so daß $\tilde{\mathfrak{B}}_{\mu_0}$ ganz im Innern aller $\tilde{\mathfrak{B}}_\mu$, $\mu \geq \mu_0$, liegt. Jeder Randpunkt von $\mathfrak{B}_{\nu_0}$ ist dann innerhalb $\tilde{\mathfrak{B}}_{\mu_0} - \mathfrak{B}_{\nu_0}$ mit dem Rande von $\tilde{\mathfrak{B}}_{\mu_0}$ verbindbar, und jeder Randpunkt von $\tilde{\mathfrak{B}}_\mu$ ist innerhalb von $\tilde{\mathfrak{B}}_{\mu+1} - \tilde{\mathfrak{B}}_\mu$ mit dem Rande von $\tilde{\mathfrak{B}}_{\mu+1}$ verbindbar. Wir wählen eine Folge positiver ε_σ , $\sigma = 1, 2, \dots$, so daß $\sum_{\sigma=1}^{\infty} \varepsilon_\sigma < \varepsilon$ ist. Dann gibt es nach Satz 5 eine in $\tilde{\mathfrak{B}}_{\mu_0+1}$ reguläre eindeutige Funktion $g_1(z)$, so daß in $\mathfrak{B}_{\nu_0}$ gilt

$$|f(z) - g_1(z)| < \varepsilon_1.$$

Entsprechend läßt sich eine in $\tilde{\mathfrak{B}}_{\mu_0+2}$ reguläre eindeutige Funktion $g_2(z)$ so wählen, daß in $\tilde{\mathfrak{B}}_{\mu_0}$

$$|g_1(z) - g_2(z)| < \varepsilon_2$$

st. Allgemein gibt es jeweils in $\tilde{\mathfrak{B}}_{\mu_0+\sigma}$, $\sigma = 2, 3, \dots$, eine dort reguläre eindeutige Funktion $g_\sigma(z)$, so daß in $\tilde{\mathfrak{B}}_{\mu_0+\sigma-2}$ gilt:

$$|g_{\sigma-1}(z) - g_\sigma(z)| < \varepsilon_\sigma.$$

Die Folge der $g_\sigma(z)$ konvergiert im Innern von $\tilde{\mathfrak{B}}$ gleichmäßig gegen eine dort reguläre eindeutige Funktion $g(z)$. Diese ist eine gesuchte Funktion, denn es ist in $\mathfrak{B}_{\nu_0}$ und damit in $\mathfrak{B}^*$:

$$\begin{aligned} |f(z) - g(z)| &= |\{f(z) - g_1(z)\} + \{g_1(z) - g_2(z)\} + \dots| \\ &\leq |f(z) - g_1(z)| + |g_1(z) - g_2(z)| + \dots < \sum_{\sigma=1}^{\infty} \varepsilon_\sigma < \varepsilon. \end{aligned}$$

2) Die Bedingung ist notwendig. – Ist $\mathfrak{B}$ relativ zu $\tilde{\mathfrak{B}}$ nicht einfach zusammenhängend, so gibt es in $\mathfrak{B}$ ein System geschlossener Kurven $\mathfrak{C}_1, \dots, \mathfrak{C}_\sigma$, das innerhalb $\tilde{\mathfrak{B}}$ einen Bereich $\mathfrak{B}'$ berandet, derart, daß $\mathfrak{B}'$ wenigstens einen Randpunkt P von $\mathfrak{B}$ enthält. Wir wählen eine Funktion $\varphi(z)$, die in P eine isolierte Singularität besitzt und sonst in $\tilde{\mathfrak{B}}$ regulär und eindeutig ist; daß solche Funktionen existieren, wird weiter unten nachgewiesen. Wäre $\varphi(z)$ im Innern von $\mathfrak{B}$ als Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge $\psi_n(z)$ von in $\tilde{\mathfrak{B}}$ regulären eindeutigen Funktionen darstellbar, so würde diese Folge auch in $\mathfrak{B}'$ gleichmäßig konvergieren, da auf dem Rande $\mathfrak{C}_1, \dots, \mathfrak{C}_\sigma$ gleichmäßige Konvergenz herrscht und alle $\psi_n(z)$ in $\mathfrak{B}'$ regulär sind. Die Grenzfunktion $\varphi(z)$ müßte also auch in $\mathfrak{B}'$ überall regulär sein, im Widerspruch zu ihrer Einführung.

Es bleibt die Existenz eines $\varphi(z)$ nachzuweisen. Wir umgeben den Punkt P , der als $(k-1)$ -facher Verzweigungspunkt vorausgesetzt sei ($k \geq 1$), mit einer k -fachen Kreisscheibe $\mathfrak{R}$ mit P als Mittelpunkt und wählen in $\mathfrak{R}$ eine Lokalfunktion $l(z)$, die in P einen Pol besitzt und sonst in $\mathfrak{R}$ regulär ist. Die in P punktierte Kreisscheibe $\mathfrak{R}$ ist relativ zu dem in P punktierten Bereich $\tilde{\mathfrak{B}}$ einfach zusammenhängend. Daher gibt es nach Teil 1 unseres Beweises eine Folge $\varphi_\mu(z)$ von in $\tilde{\mathfrak{B}}$ regulären eindeutigen Funktionen, die $l(z)$ in $\mathfrak{R}$ gleichmäßig approximieren. Für $\mu \geq \mu_0$ mit geeignetem μ_0 muß jedes $\varphi_\mu(z)$ in P eine isolierte Singularität aufweisen; anderenfalls würde eine Teilfolge $\tilde{\varphi}_\mu(z)$ aus in $\tilde{\mathfrak{B}}$ regulären Funktionen bestehen und im gesamten Innern von $\mathfrak{R}$ gleichmäßig konvergieren, und die Grenzfunktion $l(z)$ müßte auch in P regulär sein. Also haben alle $\varphi_\mu(z)$ mit $\mu \geq \mu_0$ die für $\varphi(z)$ geforderte Eigenschaft. Damit ist Satz 6 bewiesen.

§ 4. Reguläre Approximation und halbstetige Ausdehnung.

Wir wollen in diesem Abschnitt eine weitere Bedingung dafür angeben, daß die in einem Bereich regulären und eindeutigen Funktionen $f(z)$ durch Funktionen eines umfassenden Bereiches gleichmäßig approximierbar sind. Hierzu führen wir den Begriff der halbstetigen Ausdehnung ein.

$\mathfrak{B}$ und $\tilde{\mathfrak{B}}$ seien Bereiche in der nichtgeschlossenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$. Wir sagen, $\mathfrak{B}$ sei halbstetig auf $\tilde{\mathfrak{B}}$ ausdehnbar, wenn es eine Schar von Bereichen $\mathfrak{B}(s)$, $0 \leq s \leq 1$, in $\mathfrak{R}$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

- 1) $\mathfrak{B}(0) = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}(1) = \tilde{\mathfrak{B}}$.
- 2) Für $s_1 \leq s_2$ gilt $\mathfrak{B}(s_1) \subset \mathfrak{B}(s_2)$.
- 3) Jede Randpunktfolge $p_\nu(s_\nu)$ ¹¹⁾ von Bereichen $\mathfrak{B}(s_\nu)$ mit $s_\nu \leq s_0$ und $\lim s_\nu = s_0$ besitzt nur Häufungspunkte auf dem Rande von $\mathfrak{B}(s_0)$.

¹¹⁾ Es werden nur Randpunkte betrachtet, die innere Punkte von $\mathfrak{R}$ sind.

- 4) Jeder Randpunkt von $\mathfrak{B}(s_0)$, $s_0 < 1$, ist Häufungspunkt von Punktfolgen $p_n(s_n)$, wo $p_n(s_n)$ auf dem Rande von $\mathfrak{B}(s_n)$ liegt sowie $s_n > s_0$ und $\lim s_n = s_0$ ist.

Offenbar ist jede stetige Ausdehnung auch eine halbstetige Ausdehnung. Doch gilt nicht das Umgekehrte (siehe Beispiel 2).

Bei halbstetiger Ausdehnung gilt: Ist $\mathfrak{B}^*$ ein Bereich, der ganz in $\mathfrak{B}(s_0)$ liegt, so gibt es ein $\delta > 0$, so daß $\mathfrak{B}^*$ auch noch ganz in allen Bereichen $\mathfrak{B}(s)$ mit $s > s_0 - \delta$ liegt. Wäre das nämlich nicht der Fall, so gäbe es entgegen der Eigenschaft 3 eine Folge $s_\nu < s_0$ mit $\lim s_\nu = s_0$, so daß für eine geeignete Punktfolge $p_\nu(s_\nu)$ vom Rande der $\mathfrak{B}(s_\nu)$ ein Häufungspunkt im abgeschlossenen Bereich $\mathfrak{B}^*$ läge.

Beispiele für halbstetige Ausdehnung:

- 1) Das Gebiet $1/2 < |z| < 1$ ist auf das Gebiet $0 < |z| < 1$, nicht aber auf den Einheitskreis halbstetig ausdehnbar.
- 2) Das Gebiet $|z| < 1/2$ ist auf den Bereich, der aus den beiden Komponenten $|z| < 1/2$ und $1 < |z| < 2$ besteht, halbstetig ausdehnbar.
- 3) Auf jeder geschlossenen Riemannschen Fläche ist ein schlichter Kreis auf die einmal punktierte Riemannsche Fläche halbstetig ausdehnbar.

Es gilt:

Der Bereich $\mathfrak{B}$ sei auf den Bereich $\tilde{\mathfrak{B}}$ halbstetig ausdehnbar. Dann ist $\mathfrak{B}$ relativ zu $\tilde{\mathfrak{B}}$ einfach zusammenhängend.

Beweis: Wäre $\mathfrak{B}$ nicht relativ zu $\tilde{\mathfrak{B}}$ einfach zusammenhängend, so gäbe es in $\mathfrak{B}$ ein System geschlossener Kurven $\mathfrak{C}_1, \dots, \mathfrak{C}_\sigma$, das innerhalb $\tilde{\mathfrak{B}}$ einen Bereich $\mathfrak{B}^*$ berandet, jedoch so, daß in $\mathfrak{B}^*$ wenigstens ein Randpunkt P von $\mathfrak{B}$ liegt. Sei nun $\mathfrak{B}(s)$, $0 \leq s \leq 1$, eine Schar von Bereichen, über die $\mathfrak{B}$ auf $\tilde{\mathfrak{B}}$ halbstetig ausgedehnt wird. Es sei s_0 die obere Grenze derjenigen s , für die $\mathfrak{B}(s)$ noch einen Randpunkt in $\mathfrak{B}^*$ hat. Dann muß wegen Eigenschaft 3 der halbstetigen Ausdehnung der Bereich $\mathfrak{B}(s_0)$ noch einen Randpunkt in $\mathfrak{B}^*$ haben. (Auf dem Rande von $\mathfrak{B}^*$ kann ja kein Randpunkt liegen.) Also ist $s_0 < 1$. Nach Eigenschaft 4 muß es dann aber auch $\mathfrak{B}(s)$ mit $s > s_0$ geben, bei denen in $\mathfrak{B}^*$ noch Randpunkte liegen, was der Definition von s_0 widerspricht. Damit folgt unmittelbar

Satz 7: $\mathfrak{B}$ und $\tilde{\mathfrak{B}}$ seien Teilbereiche der nichtgeschlossenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$, und es sei $\mathfrak{B}$ halbstetig auf $\tilde{\mathfrak{B}}$ ausdehnbar. Dann ist jede in $\mathfrak{B}$ eindeutige reguläre Funktion gleichmäßig im Innern von $\mathfrak{B}$ durch in $\tilde{\mathfrak{B}}$ eindeutige reguläre Funktionen approximierbar.

Wir können weiter eine Aussage beweisen, die eine Art Umkehrung des Sachverhaltes von Satz 7 darstellt.

Satz 8: Der Bereich $\mathfrak{B}$ sei Teilbereich des Bereiches $\tilde{\mathfrak{B}}$, und $\tilde{\mathfrak{B}}$ liege in der nichtgeschlossenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$. Jede in $\mathfrak{B}$ eindeutige reguläre Funktion $f(z)$ sei gleichmäßig im Innern von $\mathfrak{B}$ durch Funktionen approximierbar, die in $\tilde{\mathfrak{B}}$ eindeutig und regulär sind. Dann ist $\mathfrak{B}$ durch eine Folge von Bereichen $\mathfrak{B}_\mu$ ausschöpfbar, die sämtlich halbstetig auf $\tilde{\mathfrak{B}}$ ausdehnbar sind.

Beweis: Wir schöpfen $\mathfrak{B}$ durch eine Folge von Polygonbereichen $\mathfrak{B}_\mu^*$ normal aus. Bezeichnen wir die einem $\mathfrak{B}_\mu^*$ ganz umfassenden Bereich nach Satz 3 zugeordnete Elementarfunktion mit $A^{(\mu)}(\zeta, z)$, so gibt es zu jedem Randpunkt $p(\zeta)$ von $\mathfrak{B}_\mu^*$, $\mu \geq 2$, eine Umgebung $\mathfrak{U}(\zeta)$, so daß

$$(1) \quad \min_{z \text{ in } \mathfrak{U}(\zeta)} |A^{(\mu)}(\zeta, z)| > M^{(\mu)} > \max_{z \text{ in } \mathfrak{B}_{\mu-1}^*} |A^{(\mu)}(\zeta, z)|$$

ist. Wir können den Rand von $\mathfrak{B}_\mu^*$ mit den Umgebungen endlich vieler Punkte $p(\zeta_1), \dots, p(\zeta_k)$ auf dem Rande von $\mathfrak{B}_\mu^*$ überdecken, und die $\mathfrak{U}(\zeta_1), \dots, \mathfrak{U}(\zeta_k)$ überdecken dann auch noch eine volle zweidimensionale Umgebung $\mathfrak{U}(Rd \mathfrak{B}_\mu^*)$ des Randes von $\mathfrak{B}_\mu^*$. Für jedes $\mathfrak{U}(\zeta_i)$, $i = 1, \dots, k$, gilt eine Ungleichung

$$(2) \quad \min_{z \text{ in } \mathfrak{U}(\zeta_i)} |A^{(\mu)}(\zeta_i, z)| > M_i^{(\mu)} > \max_{z \text{ in } \mathfrak{B}_{\mu-1}^*} |A^{(\mu)}(\zeta_i, z)|,$$

und darüber hinaus

$$(3) \quad \min_{z \text{ in } \mathfrak{U}(\zeta_i)} |A^{(\mu)}(\zeta_i, z)| > M_i^{(\mu)} + \delta^{(\mu)} > M_i^{(\mu)} - \delta^{(\mu)} > \max_{z \text{ in } \mathfrak{B}_{\mu-1}^*} |A^{(\mu)}(\zeta_i, z)|$$

mit geeignetem $\delta^{(\mu)} > 0$. Jede in $\mathfrak{B}_\mu^*$ eindeutige reguläre Funktion läßt sich nun im Innern von $\mathfrak{B}_\mu^*$ gleichmäßig durch Funktionen approximieren, die in $\mathfrak{B}$ eindeutig und regulär sind (Satz 6). Wir approximieren jede Funktion $A^{(\mu)}(\zeta_i, z)$, $i = 1, \dots, k$, durch je eine in $\mathfrak{B}$ eindeutige und reguläre Funktion $f_i^{(\mu)}(z)$. Hierzu wählen wir einen $\mathfrak{B}_{\mu-1}^*$ ganz umfassenden, aber noch ganz in $\mathfrak{B}_\mu^*$ liegenden Bereich $\mathfrak{B}_{\mu}^{**}$, dessen Rand ganz in $\mathfrak{U}(Rd \mathfrak{B}_\mu^*)$ liegt; dann soll in $\mathfrak{B}_{\mu}^{**}$

$$(4) \quad |A^{(\mu)}(\zeta_i, z) - f_i^{(\mu)}(z)| < \frac{\delta^{(\mu)}}{4}, \quad i = 1, \dots, k,$$

sein. Nach der Voraussetzung unseres Satzes gibt es weiter k in $\mathfrak{B}$ eindeutige und reguläre Funktionen $\tilde{f}_i^{(\mu)}(z)$, $i = 1, \dots, k$, so daß in $\mathfrak{B}_\mu^*$ gilt:

$$(5) \quad |f_i^{(\mu)}(z) - \tilde{f}_i^{(\mu)}(z)| < \frac{\delta^{(\mu)}}{4}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Der Bereich

$$\mathfrak{B}^{(\mu)}: \{ | \tilde{f}_i^{(\mu)}(z) | < M_i^{(\mu)}; z \text{ in } \tilde{\mathfrak{B}}; i = 1, \dots, k \}$$

enthält dann eine Komponente $\mathfrak{G}_0^{(\mu)}$, die ganz in $\mathfrak{B}_\mu^{**}$ liegt und $\mathfrak{B}_{\mu-1}^*$ ganz umfaßt. Wir bilden die Bereiche

$$\mathfrak{B}^{(\mu)}(r): \left\{ \frac{|\tilde{f}_i^{(\mu)}(z)|}{M_i^{(\mu)}} < r, \quad r > 1; \quad z \text{ in } \tilde{\mathfrak{B}}; \quad i = 1, \dots, k \right\}.$$

Setzen wir nun $r = \frac{1}{1-s}$ und $\mathfrak{B}_\mu(s) = \mathfrak{B}^{(\mu)}\left(\frac{1}{1-s}\right)$, wobei noch $\mathfrak{B}_\mu = \mathfrak{B}_\mu(0) = \mathfrak{G}_0^{(\mu)}$ und $\mathfrak{B}_\mu(1) = \tilde{\mathfrak{B}}$ sei, so stellen die $\mathfrak{B}_\mu(s)$, $0 \leq s \leq 1$, eine Schar von Bereichen dar, über die $\mathfrak{B}_\mu = \mathfrak{B}_\mu(0) = \mathfrak{G}_0^{(\mu)}$ auf $\tilde{\mathfrak{B}}$ halbstetig ausgedehnt ist. Die $\mathfrak{B}_\mu(0)$ haben also die in unserem Satz angegebene Eigenschaft.

§ 5. Der Approximationssatz in Zylinderbereichen von n komplexen Veränderlichen.

Wir benötigen später einen Satz 6 entsprechenden Approximationssatz für Funktionen von n komplexen Veränderlichen. Eine solche Übertragung gelingt ohne Schwierigkeit.

Satz 9: *Der Zylinderbereich $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}^{(1)} \times \dots \times \mathfrak{Z}^{(n)}$ über dem Raume der n komplexen Veränderlichen $z_1, \dots, z_n$ sei Teilbereich eines Zylinderbereiches $\tilde{\mathfrak{Z}} = \tilde{\mathfrak{Z}}^{(1)} \times \dots \times \tilde{\mathfrak{Z}}^{(n)}$, dessen z_j -Projektionen $\tilde{\mathfrak{Z}}^{(j)}$, $j = 1, \dots, n$, Teilbereiche nichtgeschlossener Riemannscher Flächen $\mathfrak{R}^{(j)}$ seien. Jede Projektion $\mathfrak{Z}^{(j)}$ sei relativ zu $\tilde{\mathfrak{Z}}^{(j)}$ einfach zusammenhängend. Dann ist jede in $\mathfrak{Z}$ eindeutige reguläre Funktion $f(z_1, \dots, z_n)$ im Innern von $\mathfrak{Z}$ gleichmäßig durch in $\tilde{\mathfrak{Z}}$ eindeutige reguläre Funktionen approximierbar.*

Beweis: Es ist zu zeigen, daß es zu jedem ganz im Innern von $\mathfrak{Z}$ gelegenen Zylinderbereich $\mathfrak{Z}^*$ und einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ eine in $\tilde{\mathfrak{Z}}$ eindeutige reguläre Funktion $g(z_1, \dots, z_n)$ gibt, so daß in $\mathfrak{Z}^*$ gilt

$$|f(z_1, \dots, z_n) - g(z_1, \dots, z_n)| < \varepsilon.$$

Wir wählen jeweils ganz im Innern von $\mathfrak{Z}^{(j)}$ einen ausgezeichneten Polygonbereich $\mathfrak{Z}_0^{(j)}$, $j = 1, \dots, n$, so daß $\mathfrak{Z}_0 = \mathfrak{Z}_0^{(1)} \times \dots \times \mathfrak{Z}_0^{(n)}$ den Bereich $\mathfrak{Z}^*$ ganz umfaßt und $\mathfrak{Z}_0^{(j)}$ relativ zu $\mathfrak{Z}^{(j)}$ einfach zusammenhängend ist. Dann ist $\mathfrak{Z}_0^{(j)}$ auch relativ zu $\tilde{\mathfrak{Z}}^{(j)}$ einfach zusammenhängend.

In $\mathfrak{Z}_0$ gilt nun

$$f(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{Rd \mathfrak{Z}_0^{(1)}} \dots \int_{Rd \mathfrak{Z}_0^{(n)}} f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) A^{(1)}(\zeta_1, z_1) \dots A^{(n)}(\zeta_n, z_n) d\zeta_1 \dots d\zeta_n.$$

Hierin sei $A^{(j)}(\zeta_j, z_j)$, $j = 1, \dots, n$, jeweils die einem $\mathfrak{Z}_0^{(j)}$ ganz umfassenden Bereich nach Satz 3 zugeordnete Elementarfunktion. Wir approximieren das Integral so durch eine Riemannsche Summe, daß in $\mathfrak{Z}^*$ gilt:

$$(1) \quad \left| f(z_1, \dots, z_n) - \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{\sigma_j} f(\zeta_1^{(\sigma_1)}, \dots, \zeta_n^{(\sigma_n)}) A^{(1)}(\zeta_1^{(\sigma_1)}, z_1) \dots \right. \\ \left. \dots A^{(n)}(\zeta_n^{(\sigma_n)}, z_n) \cdot (\zeta_1^{(\sigma_{1+1})} - \zeta_1^{(\sigma_1)}) \dots (\zeta_n^{(\sigma_{n+1})} - \zeta_n^{(\sigma_n)}) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir setzen $A^{(j)}(\zeta_j^{(\sigma_j)}, z_j) = A_{j\sigma_j}(z_j)$.

Dann ist $A_{j\sigma_j}(z_j)$ nach Satz 6 im Innern von $\mathfrak{B}_0^{(j)}$ gleichmäßig approximierbar durch Funktionen, die in $\tilde{\mathfrak{B}}^{(j)}$ regulär und eindeutig sind. Wir können also die $A_{j\sigma_j}(z_j)$ so durch in $\tilde{\mathfrak{B}}^{(j)}$ reguläre Funktionen $g_{j\sigma_j}(z_j)$ ersetzen, daß in $\mathfrak{B}^*$ gilt:

$$(2) \quad \left| -\frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{\sigma_j} f(\zeta_1^{(\sigma_1)}, \dots, \zeta_n^{(\sigma_n)}) A_{1\sigma_1}(z_1) \dots A_{n\sigma_n}(z_n) (\zeta_1^{(\sigma_{1+1})} - \zeta_1^{(\sigma_1)}) \dots \right. \\ \left. \dots (\zeta_n^{(\sigma_{n+1})} - \zeta_n^{(\sigma_n)}) - \sum_{\sigma_j} g_{1\sigma_1}(z_1) \cdot \dots \cdot g_{n\sigma_n}(z_n) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die Funktion

$$g(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\sigma_K} \prod_{K=1}^n g_{K\sigma_K}(z_K)$$

ist in $\tilde{\mathfrak{B}}$ regulär und eindeutig, und nach (1) und (2) ist in $\mathfrak{B}^*$, wie bewiesen werden sollte:

$$|f(z_1, \dots, z_n) - g(z_1, \dots, z_n)| < \varepsilon.$$

Daß die Bedingung des relativ einfachen Zusammenhanges der $\mathfrak{B}^{(j)}$ in bezug auf die $\tilde{\mathfrak{B}}^{(j)}$ auch notwendig ist, damit alle in $\mathfrak{B}$ regulären eindeutigen Funktionen durch in $\tilde{\mathfrak{B}}$ reguläre eindeutige Funktionen im Innern von $\mathfrak{B}$ gleichmäßig approximierbar sind, folgt unmittelbar aus Satz 6.

§ 6. Die Konstruktion der Elementarfunktion auf der Gesamtfläche.

Zur Ausdehnung der Resultate über die Approximation regulärer Funktionen in vorgegebenen Bereichen benötigen wir eine Elementarfunktion $A(\zeta, z)$ mit den in Satz 3 angegebenen Eigenschaften, die auf der Gesamtfläche $\mathfrak{R}$ und nicht nur in einem approximierenden Polygonebiet definiert ist. Hierzu konstruieren wir ein geeignetes Integral 3. Gattung auf $\mathfrak{R}$ mit speziellen Periodizitätsmoduln, aus dem sich die gesuchte Funktion durch Differentiation ergibt.

Für die folgenden Überlegungen sind noch Aussagen über Homologieeigenschaften von Bereichen auf nichtgeschlossenen Riemannschen Flächen wichtig. Wir stellen zunächst einige solcher Aussagen zusammen.

Die Homologiegruppen eines Bereiches $\mathfrak{B}$ in der nichtgeschlossenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ besitzen je eine höchstens abzählbare Basis. Hier interessiert insbesondere die eindimensionale Homologiegruppe $\mathfrak{H}^1$ mit dem Ring

der ganzen Zahlen als Koeffizientenbereich. Zu einer Homologiebasis können wir auf folgendem Wege gelangen: Wir geben eine normale Ausschöpfung von $\mathfrak{B}$ durch eine Folge von Polygonbereichen $\mathfrak{B}_\nu$ vor. Jedes $\mathfrak{B}_\nu$ besteht aus endlich vielen orientierbaren, berandeten Flächen; seine Homologiegruppe $\mathfrak{H}_1^1$ besitzt also eine endliche Basis, die durch Zykel $\mathfrak{C}_1, \dots, \mathfrak{C}_k$ repräsentiert werde. Alle $\mathfrak{C}_\rho$ können als einfach geschlossene Jordankurven in $\mathfrak{B}_\nu$ angenommen werden. Eine entsprechende Homologiebasis in $\mathfrak{B}_{\nu+1}$ kann aus der Basis in $\mathfrak{B}_\nu$ dadurch gewonnen werden, daß zu den Elementen der Basis in $\mathfrak{B}_\nu$ gewisse weitere Zykel aus $\mathfrak{B}_{\nu+1}$ hinzugenommen werden. Wir denken uns die Basen in den $\mathfrak{B}_\nu$ auf diese Weise festgelegt. Die Vereinigungsmenge der Elemente aller dieser Basen bildet eine Homologiebasis in $\mathfrak{B}$. Für jeden Zykel $\mathfrak{Z}^1$ in $\mathfrak{B}$ besteht also eine eindeutig bestimmte Beziehung

$$\mathfrak{Z}^1 \sim \alpha_1 \mathfrak{C}_1 + \dots + \alpha_k \mathfrak{C}_k, (\alpha_i \text{ ganze Zahlen}),$$

wobei rechts jeweils endlich viele Basiselemente $\mathfrak{C}_i$ auftreten.

Wir können nun zunächst die Existenz von Integralen 1. Gattung mit beliebig vorgegebenen Periodizitätsmoduln auf $\mathfrak{R}$ nachweisen.

Satz 10: *Sei $\mathfrak{R}$ eine nichtgeschlossene Riemannsche Fläche und $\mathfrak{C}_1, \dots, \mathfrak{C}_n, \dots$ eine eindimensionale Homologiebasis in $\mathfrak{R}$. Den $\mathfrak{C}_i, i = 1, 2, \dots$, die als einfach geschlossene Jordankurven gewählt sein mögen, seien beliebige komplexe Zahlen α_i zugeordnet. Dann gibt es eine auf $\mathfrak{R}$ unbeschränkt regulär fortsetzbare Funktion $J(z)$, die sich bei Fortsetzung längs eines $\mathfrak{C}_i$ oder einer zu $\mathfrak{C}_i$ homologen geschlossenen Kurve um die Konstante α_i vermehrt.*

$J(z)$ heißt ein Integral 1. Gattung auf $\mathfrak{R}$ mit den Periodizitätsmoduln α_i .

Beweis¹²⁾: Wir schöpfen $\mathfrak{R}$ durch eine Folge von Polygonebenen $\mathfrak{G}_\nu$ normal aus und weisen zunächst die Existenz von Integralen 1. Gattung mit willkürlich vorgeschriebenen Periodizitätsmoduln in einem beliebigen $\mathfrak{G}_\nu$ nach. Hierzu wählen wir in $\mathfrak{G}_\nu$ eine besondere eindimensionale Homologiebasis, deren Elemente wir mit $\mathfrak{C}_1^{(\nu)}, \dots, \mathfrak{C}_{k_\nu}^{(\nu)}$ bezeichnen: Es seien $\mathfrak{C}_{2\sigma-1}^{(\nu)}, \mathfrak{C}_{2\sigma}^{(\nu)}$ ($\sigma \leq p_\nu; 0 \leq 2p_\nu \leq k_\nu$) jeweils konjugierte, doppeltpunktfreie Rückkehrschnitte in $\mathfrak{G}_\nu$. Die übrigen Basiselemente $\mathfrak{C}_{2p_\nu+1}^{(\nu)} \dots \mathfrak{C}_{k_\nu}^{(\nu)}$ (falls $2p_\nu < k_\nu$) seien ebenfalls als doppeltpunktfreie geschlossene Jordankurven gewählt und so, daß jede dieser Kurven zu einer bestimmten Randkurve von $\mathfrak{G}_\nu$ isotop ist¹³⁾. (Um dies zu erreichen, können die $\mathfrak{C}_\rho^{(\nu)}, 2p_\nu + 1 \leq \rho \leq k_\nu$, etwa

¹²⁾ Wir betrachten nur den nichttrivialen Fall, daß $\mathfrak{H}^1$ nicht nur aus dem Nullelement besteht, daß also wirklich Basiskurven $\mathfrak{C}_1 \dots$ auftreten. Sonst ist schon $J(z) \equiv 0$ ein Integral 1. Gattung auf $\mathfrak{R}$ mit den allgemeinsten Periodizitätsmoduln.

¹³⁾ Falls $p_\nu = 0$ oder $2p_\nu = k_\nu$, fallen die $\mathfrak{C}_{2\sigma-1}, \mathfrak{C}_{2\sigma}$ oder die $\mathfrak{C}_\rho, 2p_\nu + 1 \leq \rho \leq k_\nu$, oder beide Klassen von Kurven fort. Im Falle $k_\nu = 0$ kann das im folgenden zu konstruierende $J^{(\nu)}(z) \equiv 0$ gewählt werden.

als Parallelkurven von Randkurven gewählt werden.) Die $\mathfrak{G}_\lambda^{(v)}$ seien ferner so festgelegt, daß $\mathfrak{G}_\rho^{(v)}$, $2p_v + 1 \leq \rho \leq k_v$, zu allen anderen $\mathfrak{G}_\lambda^{(v)}$ punktfremd ist, während jedes $\mathfrak{G}_\mu^{(v)}$, $1 \leq \mu \leq 2p_v$, nur jeweils den konjugierten Rückkehrschnitt schneidet. Jedem $\mathfrak{G}_\rho^{(v)}$, $2p_v + 1 \leq \rho \leq k_v$, ordnen wir noch ein doppeltpunktfreies Kurvenstück $\mathfrak{G}_\rho^{*(v)}$ zu, das in $\mathfrak{G}_v$ zwei bestimmte Randkontinua miteinander verbindet, ferner $\mathfrak{G}_\rho^{(v)}$ in genau einem Punkte und die übrigen $\mathfrak{G}_\lambda^{(v)}$ nicht schneidet; solche $\mathfrak{G}_\rho^{*(v)}$ können ebenfalls als zueinander punktfremd gewählt werden.

Nunmehr konstruieren wir spezielle Integrale 1. Gattung $J_\lambda^{(v)}(z)$ in $\mathfrak{G}_v$, die jeweils bei Fortsetzung längs $\mathfrak{G}_\lambda^{(v)}$ den Periodizitätsmodul 1 besitzen und bei Fortsetzung längs eines anderen $\mathfrak{G}_\tau^{(v)}$ eindeutig bleiben. Sei zunächst $\mathfrak{G}_\lambda^{(v)}$ ein Rückkehrschnitt und $\mathfrak{G}_\lambda^{(v)}$ der konjugierte. Ferner sei $A_v(\zeta, z)$ eine im abgeschlossenen Gebiet $\mathfrak{G}_v$ erklärte Elementarfunktion mit den in Satz 3 angegebenen Eigenschaften. Wir setzen

$$J_\lambda^{(v)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\pm \mathfrak{G}_\lambda^{(v)}} A_v(\zeta, z) d\zeta.$$

$J_\lambda^{(v)}(z)$ erleidet bei Fortsetzung über den Integrationsweg $\mathfrak{G}_\lambda^{(v)}$ hinaus den Sprung ± 1 und bleibt in $\mathfrak{G}_v$ sonst eindeutig und regulär. Wird das Vorzeichen von $\mathfrak{G}_\lambda^{(v)}$ so gewählt, daß sich $J_\lambda^{(v)}(z)$ bei Fortsetzung längs $\mathfrak{G}_\lambda^{(v)}$ um $+1$ vermehrt, so ist $J_\lambda^{(v)}(z)$ ein Integral 1. Gattung mit der geforderten Eigenschaft. Ist $\mathfrak{G}_\lambda^{(v)}$ kein Rückkehrschnitt (also $2p_v + 1 \leq \lambda \leq k_v$), so ist

$$J_\lambda^{(v)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{G}_\lambda^{(v)}} A_v(\zeta, z) d\zeta$$

ein gesuchtes spezielles Integral: $J_\lambda^{(v)}(z)$ besitzt in bezug auf $\mathfrak{G}_\lambda^{(v)}$ den Periodizitätsmodul $+1$ (bei geeigneter Orientierung von $\mathfrak{G}_\lambda^{*(v)}$) und sonst lauter verschwindende Periodizitätsmoduln.

Sind nun in bezug auf die Kurven $\mathfrak{G}_\lambda^{(v)}$ beliebige komplexe Zahlen $\beta_\lambda^{(v)}$ als Periodizitätsmoduln vorgegeben, so stellt

$$J^{(v)}(z) = \sum_{\lambda=1}^{K_v} \beta_\lambda^{(v)} \cdot J_\lambda^{(v)}(z)$$

in $\mathfrak{G}_v$ ein Integral 1. Gattung mit diesen Periodizitätsmoduln dar.

Um nunmehr zu einem Integral 1. Gattung mit den Periodizitätsmoduln α_i in bezug auf die Basiskurven $\mathfrak{G}_i$ der Gesamtfläche $\mathfrak{R}$ zu gelangen, verfahren wir folgendermaßen: In jedem $\mathfrak{G}_v$ sind durch die α_i bestimmte Periodizitätsmoduln in bezug auf eine Basis von $\mathfrak{S}_v^1$ vorgeschrieben. Wir bilden

in $\mathfrak{G}_\nu$, wie oben ein Integral 1. Gattung $J^{(\nu)}(z)$ mit diesen Periodizitätsmoduln. Sodann bilden wir formal die Reihe

$$J^{(1)}(z) + [J^{(2)}(z) - J^{(1)}(z)] + \cdots + [J^{(\nu+1)}(z) - J^{(\nu)}(z)] + \cdots$$

Dabei sind für die $J^{(\nu)}(z)$ jeweils solche Zweige einzusetzen, die aus einem festen System von „Anfangszweigen“ durch gleichzeitige Fortsetzung hervorgehen.

Jedes Reihenglied

$$D^{(\nu)}(z) = J^{(\nu+1)}(z) - J^{(\nu)}(z)$$

ist dann eine in $\mathfrak{G}_\nu$ reguläre und eindeutige Funktion. Die Reihe braucht jedoch noch nicht zu konvergieren; aber wir können durch Hinzufügen geeigneter Summanden erreichen, daß sie in jedem $\mathfrak{G}_\nu$ nach Abtrennung von jeweils endlich vielen Gliedern gleichmäßig konvergiert: Nach Satz 6 läßt sich $D^{(\nu)}(z)$ im Innern von $\mathfrak{G}_\nu$ gleichmäßig durch auf $\mathfrak{R}$ reguläre und eindeutige Funktionen approximieren. Wir wählen eine Folge positiver ε_r mit konvergenter Summe und approximieren jedes $D^{(\nu)}(z)$ durch eine auf $\mathfrak{R}$ reguläre und eindeutige Funktion $g^{(\nu)}(z)$, so daß in $\mathfrak{G}_{r-1}$ gilt

$$|D^{(\nu)}(z) - g^{(\nu)}(z)| < \varepsilon_r.$$

Die Reihe

$$J^{(1)}(z) + \{[J^{(2)}(z) - J^{(1)}(z)] - g^{(1)}(z)\} + \cdots + \{[J^{(\nu+1)}(z) - J^{(\nu)}(z)] - g^{(\nu)}(z)\} + \cdots$$

konvergiert dann in jedem ganz im Innern von $\mathfrak{R}$ gelegenen Gebiet nach Abtrennung von je endlich vielen Gliedern absolut und gleichmäßig, sie stellt also eine auf $\mathfrak{R}$ unbeschränkt regulär fortsetzbare Funktion $J(z)$ dar. Diese Funktion ist gemäß ihrer Konstruktion ein gesuchtes Integral 1. Gattung mit den vorgeschriebenen Periodizitätsmoduln auf $\mathfrak{R}$. Damit ist Satz 10 bewiesen.

Wir beweisen nun:

Satz 11: Sei $\mathfrak{R}$ eine nichtgeschlossene Riemannsche Fläche. $p_1(\zeta)$, $p_2(z)$ mögen unabhängig veränderliche Punkte, $p_3(\zeta_0)$ einen festen Punkt auf $\mathfrak{R}$ bezeichnen. Dann gibt es eine analytische Funktion $N(\zeta, z) = N(\zeta, z; \zeta_0)$ der zwei komplexen Veränderlichen ζ, z mit folgenden Eigenschaften:

1) $N(\zeta, z)$ ist innerhalb $\mathfrak{R}_\zeta \times \mathfrak{R}_z$, außer in die Punkte $p(\zeta, z) = p_1(\zeta) \times p_2(z)$ mit $p_1(\zeta) = p_2(z)$ oder $p_2(z) = p_3(\zeta_0)$, unbegrenzt regulär fortsetzbar.

2) In der Nachbarschaft eines Punktes $p(\zeta', z') = p_1(\zeta') \times p_2(z')$ der Ausnahmемannigfaltigkeit $p_1(\zeta) = p_2(z)$ bzw. $p_2(z) = p_3(\zeta_0)$ gilt für einen beliebigen Zweig von $N(\zeta, z)$:

- a) $N(\zeta, z) \equiv \log(\tau - t) + G_1(\tau, t)$, falls $p_1(\zeta') = p_2(z') \neq p_3(\zeta_0)$,
 b) $N(\zeta, z) \equiv -\log t + G_2(\tau, t)$, falls $p_1(\zeta') \neq p_2(z') = p_3(\zeta_0)$,
 c) $N(\zeta, z) \equiv \log \frac{\tau-t}{t} + G_3(\tau, t)$, falls $p_1(\zeta') = p_2(z') = p_3(\zeta_0)$.

(τ, t die $p_1(\zeta')$, $p_2(z')$ zugeordneten ortsuniformisierenden Parameter.) Dabei ist jeweils $G_K(\tau, t)$, $k = 1, 2, 3$, in der Nachbarschaft von $(\tau, t) = (0, 0)$ regulär.

3) Wird $p_1(\zeta)$ festgehalten und durchläuft $p_2(z)$ auf $\Re_z$ eine geschlossene Kurve, die die Punkte $p_2(z) = p_1(\zeta)$ und $p_2(z) = p_3(\zeta_0)$ vermeidet, so verändert sich $N(\zeta, z)$ additiv um ein ganzes Vielfaches von $2\pi i$.

4) Wird $p_2(z) \neq p_3(\zeta_0)$ festgehalten und durchläuft $p_1(\zeta)$ auf $\Re_\zeta$ eine geschlossene Kurve, die $p_1(\zeta) = p_2(z)$ vermeidet, so verändert sich $N(\zeta, z)$ additiv um ein Integral 1. Gattung in z auf $\Re_z$.

Wir nennen $N(\zeta, z)$ ein Integral 3. Gattung auf $\Re$.

Beweis: Es seien $\mathfrak{G}_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots$, Polygonebiete, die $\Re$ normal ausschöpfen und sämtlich den Punkt $p_3(\zeta_0)$ enthalten. Wir wählen in $\Re$ ein System doppelpunktfreier, geschlossener Kurven $\mathfrak{G}_\rho$, $\rho = 1, 2, \dots$, als eindimensionale Homologiebasis in $\Re$, derart, daß $\mathfrak{G}_1, \dots, \mathfrak{G}_{k_\nu}$, $k_\nu \leq k_{\nu+1}$, jeweils eine eind. Homologiebasis in $\mathfrak{G}_\nu$ darstellen. Ferner mögen alle $\mathfrak{G}_\rho$ den Punkt $p_3(\zeta_0)$ enthalten. Sei nun $A_\nu(\zeta, z)$ eine dem Gebiet $\mathfrak{G}_\nu$ gemäß Satz 3 zugeordnete Elementarfunktion. Wir bilden

$$N_\nu(\zeta, z) = \int_{p_3(\zeta_0)}^{p_1(\zeta)} A_\nu(\xi, z) d\xi.$$

$N_\nu(\zeta, z)$ hat in $\mathfrak{G}_\nu \times \mathfrak{G}_z$ die Eigenschaften 1) bis 4) unseres Satzes. Die Periodizitätsmoduln in bezug auf die Variable ζ sind durch

$$P_\rho^{(\nu)}(z) = \int_{\mathfrak{G}_\rho} A_\nu(\xi, z) d\xi$$

gegeben.

Dies sind Integrale 1. Gattung in $\mathfrak{G}_\nu$ mit ganzzahligen Vielfachen von $2\pi i$ als Periodizitätsmoduln.

Die Differenz

$$D_\nu(\zeta, z) = N_{\nu+1}(\zeta, z) - N_\nu(\zeta, z) = \int_{p_3(\zeta_0)}^{p_1(\zeta)} \{A_{\nu+1}(\xi, z) - A_\nu(\xi, z)\} d\xi$$

stellt eine in $\mathfrak{G}_\nu \times \mathfrak{G}_z$ uneingeschränkt regulär fortsetzbare Funktion dar. In bezug auf z ist $D_\nu(\zeta, z)$ eindeutig und in bezug auf ζ ein Integral 1. Gattung mit den Periodizitätsmoduln

$$Q_\rho^{(\nu)}(z) = \int_{\mathfrak{G}_\rho} \{A_{\nu+1}(\xi, z) - A_\nu(\xi, z)\} d\xi = P_\rho^{(\nu+1)}(z) - P_\rho^{(\nu)}(z).$$

$P_\varrho^{(\nu)}(z)$ ist eine in $\mathfrak{G}_\nu$ reguläre eindeutige Funktion. Daher besitzen $P_\varrho^{(\nu+1)}(z)$ und $P_\varrho^{(\nu)}(z)$ in $\mathfrak{G}_\nu$ die gleichen Periodizitätsmoduln. Wir bilden nun auf der Gesamtfläche $\Re$ Integrale 1. Gattung $S_\varrho(z)$, deren Periodizitätsmoduln α_σ wir folgendermaßen festlegen: In $\mathfrak{G}_1$ mögen die α_σ mit den Periodizitätsmoduln von $P_\varrho^{(1)}(z)$ übereinstimmen, allgemein in $\mathfrak{G}_\nu$ mit denen von $P_\varrho^{(\nu)}(z)$. Solche Integrale existieren nach Satz 10. Nach dem gleichen Satze gibt es auf $\Re$ zu jedem ρ ein spezielles Integral 1. Gattung $J_\varrho(\zeta)$, derart, daß der Periodizitätsmodul in bezug auf $\mathfrak{G}_\varrho$ gleich 1 ist und alle anderen Periodizitätsmoduln verschwinden.

Wir setzen

$$\tilde{N}_\nu(\zeta, z) = N_\nu(\zeta, z) - \sum_{\varrho=1}^{h_\nu} J_\varrho(\zeta) \{P_\varrho^{(\nu)}(z) - S_\varrho(z)\}.$$

Da die $P_\varrho^{(\nu)}(z) - S_\varrho(z)$ in $\mathfrak{G}_\nu$ eindeutig sind, stellt $\tilde{N}_\nu(\zeta, z)$ in $\mathfrak{G}_{\nu\zeta} \times \mathfrak{G}_{\nu z}$ ebenfalls eine Funktion mit den Eigenschaften 1) bis 4) unseres Satzes dar; ihr Periodizitätsmodul in bezug auf $\mathfrak{G}_\kappa$ ist identisch mit $S_\kappa(z)$. Die Differenz

$$\begin{aligned} \tilde{D}_\nu(\zeta, z) = \tilde{N}_{\nu+1}(\zeta, z) - \tilde{N}_\nu(\zeta, z) &= D_\nu(\zeta, z) - \sum_{\varrho=1}^{h_\nu} J_\varrho(\zeta) Q_\varrho^{(\nu)}(z) - \\ &- \sum_{\varrho=h_\nu+1}^{h_{\nu+1}} J_\varrho(\zeta) \{P_\varrho^{(\nu+1)}(z) - S_\varrho(z)\} \end{aligned}$$

ist in $\mathfrak{G}_{\nu\zeta} \times \mathfrak{G}_{\nu z}$ regulär und eindeutig. (Es mögen jeweils bestimmte Zweige der rechts vorkommenden mehrdeutigen Funktionen zugrunde gelegt sein.)

Wir wählen eine Folge positiver Zahlen ε_ν mit konvergenter Summe. Nach Satz 9 läßt sich jede Funktion $\tilde{D}_\nu(\zeta, z)$ im Innern von $\mathfrak{G}_{\nu\zeta} \times \mathfrak{G}_{\nu z}$ gleichmäßig durch Funktionen approximieren, die in $\Re_\zeta \times \Re_z$ regulär und eindeutig sind. Wir bestimmen zu $\tilde{D}_\nu(\zeta, z)$ jeweils eine in $\Re_\zeta \times \Re_z$ reguläre und eindeutige Funktion $h_\nu(\zeta, z)$, so daß in $\mathfrak{G}_{\nu-1\zeta} \times \mathfrak{G}_{\nu-1z}$ gilt

$$|\tilde{D}_\nu(\zeta, z) - h_\nu(\zeta, z)| < \varepsilon_\nu, \quad \nu \geq 1.$$

(Es sei noch speziell $\mathfrak{G}_0$ ein ganz im Innern von $\mathfrak{G}_1$ gelegenes Gebiet.) Sodann betrachten wir die Reihe

$$\tilde{N}_1(\zeta, z) + \{\tilde{D}_1(\zeta, z) - h_1(\zeta, z)\} + \cdots + \{\tilde{D}_\nu(\zeta, z) - h_\nu(\zeta, z)\} + \cdots$$

Diese Reihe konvergiert in jedem $\mathfrak{G}_{\nu\zeta} \times \mathfrak{G}_{\nu z}$ nach Abtrennung von jeweils endlich vielen Gliedern absolut und gleichmäßig. Sie stellt also in $\Re_\zeta = \Re_z$ eine analytische Funktion $N(\zeta, z)$ dar, die dort gemäß ihrer Konstruktion die in unserem Satz angegebenen Eigenschaften hat. Damit ist Satz 11 bewiesen.

Die Verallgemeinerung von Satz 2 ergibt sich nun unmittelbar:

Satz 12: Sei $\mathfrak{R}$ eine nichtgeschlossene Riemannsche Fläche. Dann existiert in $\mathfrak{R}_\zeta \times \mathfrak{R}_z$ eine Elementarfunktion 1. Ordnung $A(\zeta, z)$ mit folgenden Eigenschaften:

1) $A(\zeta, z)$ ist in $\mathfrak{R}_\zeta \times \mathfrak{R}_z$ meromorph und eindeutig.

2) Sind τ, t die den Punkten $p_1(\zeta')$, $p_2(z')$ von $\mathfrak{R}$ zugeordneten ortsuniformisierenden Parameter, so ist in einer Umgebung von $p(\zeta', z') = p_1(\zeta') \times p_2(z')$:

$$A(\zeta, z) \frac{d\zeta}{d\tau} \equiv \frac{1}{\tau - t} + R(\tau, t), \text{ falls } p_1(\zeta') = p_2(z');$$

$$A(\zeta, z) \frac{d\zeta}{d\tau} \equiv S(\tau, t), \text{ falls } p_1(\zeta') \neq p_2(z').$$

Dabei bedeuten jeweils $R(\tau, t)$, $S(\tau, t)$ in einer Umgebung von $(\tau, t) = (0, 0)$ reguläre Funktionen.

Beweis: Wir gehen von einem Integral 3. Gattung $N(\zeta, z)$ auf $\mathfrak{R}$ mit den in Satz 13 angegebenen Eigenschaften aus und bilden

$$A(\zeta, z) = \frac{\partial}{\partial \zeta} N(\zeta, z).$$

$A(\zeta, z)$ hat die geforderten Eigenschaften.

§ 7. Meromorphe Approximation regulärer Funktionen.

Wir können nun die Ergebnisse über Approximierbarkeit von Funktionen in vorgegebenen Bereichen durch Funktionen umfassender Bereiche erweitern, und zwar wollen wir zulassen, daß die approximierenden Funktionen Pole aufweisen.

Dann gilt:

Satz 13 (2. Approximationssatz): Sei $\mathfrak{B}$ Teilbereich des in der nichtgeschlossenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{R}$ gelegenen Bereichs $\mathfrak{B}: \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{R}$. Dann ist jede in $\mathfrak{B}$ reguläre und eindeutige Funktion $f(z)$ im Innern von $\mathfrak{B}$ gleichmäßig durch in $\mathfrak{B}$ meromorphe und eindeutige Funktionen approximierbar, die jeweils höchstens endlich viele Pole auf dem Rande von $\mathfrak{B}$ aufweisen.

Beweis: Wir schöpfen $\mathfrak{B}$ durch eine Folge von ausgezeichneten Polygonbereichen $\mathfrak{B}_\nu$ normal aus. Der Satz ist bewiesen, wenn gezeigt ist, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ stets eine in $\mathfrak{B}$ meromorphe und eindeutige Funktion $g_\nu(z)$ mit höchstens endlich vielen Polstellen auf dem Rande von $\mathfrak{B}$ gibt, so daß in $\mathfrak{B}_{\nu-1}$ gilt

$$|f(z) - g_\nu(z)| < \varepsilon.$$

In $\mathfrak{B}_\nu$ gilt nun

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathfrak{B}_\nu} f(\zeta) A(\zeta, z) d\zeta.$$

Dabei ist $A(\zeta, z)$ eine auf $\mathfrak{R}$ erklärte Elementarfunktion mit den in Satz 12 angegebenen Eigenschaften. Wir approximieren das Integral durch eine Riemannsche Summe, so daß in $\mathfrak{B}_{\nu-1}$ gilt:

$$\left| f(z) - \frac{1}{2\pi i} \sum f(\zeta_\mu) A(\zeta_\mu, z) (\zeta_{\mu+1} - \zeta_\mu) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

hierin sind $p(\zeta_\mu)$ Punkte auf dem Rande von $\mathfrak{B}_\nu$. Die Funktionen

$$\varphi_\mu(z) = \frac{1}{2\pi i} f(\zeta_\mu) A(\zeta_\mu, z) (\zeta_{\mu+1} - \zeta_\mu)$$

werden sodann durch in $\tilde{\mathfrak{B}}$ meromorphe und eindeutige Funktionen approximiert. Dies erfolgt auf verschiedene Weise, je nachdem auf welchem Randkontinuum von $\mathfrak{B}_\nu$ der Punkt $p(\zeta_\mu)$ liegt.

$\mathfrak{B}_\nu$ besitzt möglicherweise Randkontinua, die in $\tilde{\mathfrak{B}} - \mathfrak{B}_\nu$ beranden. Es sei $\mathfrak{C}_1, \dots, \mathfrak{C}_{l_\nu}$ ein maximales System solcher Randkurven, und $\mathfrak{G}_1, \dots, \mathfrak{G}_{r_\nu}$ seien die von ihnen berandeten Gebiete (die also Teilgebiete von $\tilde{\mathfrak{B}} - \mathfrak{B}_\nu$ sind). Die übrigen Randkurven von $\mathfrak{B}_\nu$ seien mit $\mathfrak{C}_1^*, \dots, \mathfrak{C}_{m_\nu}^*$ bezeichnet. Schließlich sei $\tilde{\mathfrak{B}}_\nu$ der Polygonbereich, der aus $\mathfrak{B}_\nu$ dadurch entsteht, daß die Gebiete $\mathfrak{G}_1, \dots, \mathfrak{G}_{r_\nu}$ nebst Rändern zu $\mathfrak{B}_\nu$ hinzugefügt werden. Liegt nun $p(\zeta_\mu)$ auf einem $\mathfrak{C}_\sigma^*$, so ist

$$\varphi_\mu(z) = \frac{1}{2\pi i} f(\zeta_\mu) A(\zeta_\mu, z) (\zeta_{\mu+1} - \zeta_\mu)$$

eine in $\tilde{\mathfrak{B}}_\nu$ reguläre Funktion. $\tilde{\mathfrak{B}}_\nu$ ist relativ zu $\tilde{\mathfrak{B}}$ einfach zusammenhängend, also kann $\varphi_\mu(z)$ durch in $\tilde{\mathfrak{B}}$ reguläre und eindeutige Funktionen gleichmäßig im Innern von $\tilde{\mathfrak{B}}_\nu$ approximiert werden. Wir setzen noch

$$\varphi(z) = \sum' \varphi_\mu(z),$$

dabei ist summiert über alle μ , für die $p(\zeta_\mu)$ auf einem $\mathfrak{C}_\sigma^*$ liegt. Dann können wir also eine in $\tilde{\mathfrak{B}}$ reguläre und eindeutige Funktion $h(z)$ wählen, so daß in $\mathfrak{B}_{\nu-1}$ gilt:

$$|\varphi(z) - h(z)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Liegt $p(\zeta_\mu)$ auf einem $\mathfrak{C}_\lambda$, so wird $\varphi_\mu(z)$ ähnlich wie im Beweise von Satz 5 nach Art der Rungeschen Polverschiebung approximiert durch eine in $\tilde{\mathfrak{B}}$ meromorphe und eindeutige Funktion, die eine einzige Polstelle auf dem Rande von $\mathfrak{B}$ hat: $\mathfrak{C}_\lambda$ gehöre zum Rand von $\mathfrak{G}_\kappa$. Im Innern von $\mathfrak{G}_\kappa$ liegt mindestens ein Randpunkt von $\mathfrak{B}$, denn sonst besäße $\mathfrak{B}_\nu$ Randkontinua, die schon in $\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_\nu$ berandeten, was der Eigenschaft von $\mathfrak{B}_\nu$ als Element einer $\mathfrak{B}$ normal ausschöpfenden Bereichsfolge widerspräche. Wir greifen einen solchen Randpunkt $\tilde{p}$ von $\mathfrak{B}$ heraus und verbinden ihn mit $\tilde{p}(\zeta_\mu)$ innerhalb $\mathfrak{G}_\kappa$ durch ein Kurvenstück $\mathfrak{J}_\mu$, das, bis eventuell auf $\tilde{p}$, keine Verzweigungspunkte und unendlich

fernen Punkte enthält. Ist nun $\tilde{p}$ selbst nicht Verzweigungspunkt oder unendlich ferner Punkt, so kann $\varphi_\mu(z)$ genau wie im Beweise von Satz 5 approximiert werden durch eine Funktion $h_\mu(z)$, die in $\tilde{p}$ eine Polstelle aufweist und sonst in $\mathfrak{B}$ regulär und eindeutig ist; wir wählen $h_\mu(z)$ so, daß in $\mathfrak{B}_{v-1}$ gilt

$$|\varphi_\mu(z) - h_\mu(z)| < \frac{\varepsilon}{4n}.$$

dabei sei n die Anzahl der $p(\zeta_\mu)$, die auf einem $\mathfrak{C}_\lambda$ liegen. Eine solche Funktion $h_\mu(z)$ existiert auch dann, wenn $\tilde{p}$ ein unendlich ferner Nichtverzweigungspunkt ist, da wir diesen Fall durch eine lineare Transformation, die $\tilde{p}$ ins Endliche und keinen Punkt von $\mathfrak{F}_\mu$ ins Unendliche abbildet, auf den soeben behandelten zurückführen können. Ist schließlich $\tilde{p}$ Verzweigungspunkt, so wird $\varphi_\mu(z)$ zunächst wieder genau wie im Beweise von Satz 5 nach Art der Runge'schen Polverschiebung approximiert durch eine Funktion $h_\mu^*(z)$, die eine einzige Polstelle p^* in der Nachbarschaft von $\tilde{p}$ besitzt und sonst in $\mathfrak{B}$ regulär und eindeutig ist. Es sei in $\mathfrak{B}_{v-1}$:

$$|\varphi_\mu(z) - h_\mu^*(z)| < \frac{\varepsilon}{8n}.$$

Sodann bilden wir die Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}$ auf eine weitere Riemannsche Fläche so ab, daß $\tilde{z}$ in einen gewöhnlichen endlichen Punkt übergeht. (Die Möglichkeit einer solchen Abbildung wird weiter unten nachgewiesen.) Wir denken uns p^* so dicht bei $\tilde{p}$ gewählt, daß bei dieser Abbildung auch p^* und alle Punkte auf J_μ zwischen p^* und $\tilde{p}$ in gewöhnliche endliche Punkte übergehen. Nach der Abbildung kann wiederum das Polverschiebungsverfahren aus dem Beweis zu Satz 5 angewandt werden: Wir ersetzen $h_\mu^*(z)$ durch eine Funktion $h_\mu(z)$, die allein in $\tilde{p}$ eine Polstelle hat und sonst in $\mathfrak{B}$ eindeutig und regulär ist, so daß in $\mathfrak{B}_{v-1}$ gilt:

$$|h_\mu^*(z) - h_\mu(z)| < \frac{\varepsilon}{8n}.$$

In jedem Falle gilt also in $\mathfrak{B}_{v-1}$:

$$|\varphi_\mu(z) - h_\mu(z)| < \frac{\varepsilon}{4n}.$$

Setzen wir nun:

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum'' f(\zeta_\mu) A(\zeta_\mu, z) (\zeta_{\mu+1} - \zeta_\mu)$$

und

$$H(z) = \sum'' h_\mu(z),$$

wo über alle μ summiert ist, für die $p(\zeta_\mu)$ auf einem $\mathfrak{C}_\lambda$ liegt, so haben wir in $\mathfrak{B}_{v-1}$:

$$|\psi(z) - H(z)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Da

$$\varphi(z) + \psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \sum f(\zeta_\mu) A(\zeta_\mu, z) (\zeta_{\mu+1} - \zeta_\mu)$$

und in $\mathfrak{B}_{v-1}$ gilt:

$$|f(z) - (\varphi(z) + \psi(z))| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|(\varphi(z) + \psi(z)) - (h(z) + H(z))| < \frac{\varepsilon}{2},$$

so gilt in $\mathfrak{B}_{v-1}$:

$$|f(z) - (h(z) + H(z))| < \varepsilon.$$

Wir setzen:

$$g_v(z) = h(z) + H(z).$$

$g_v(z)$ ist in $\mathfrak{B}$ meromorph und eindeutig und besitzt lediglich höchstens endlich viele Pole auf dem Rande von $\mathfrak{B}$. $g_v(z)$ ist also eine gesuchte Funktion.

Es bleibt noch die Möglichkeit der im Beweise benutzten Abbildung nachzuweisen.

Hilfssatz 2: *Eine nichtgeschlossene Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}$ kann so auf eine Riemannsche Fläche $\mathfrak{R}'$ analytisch abgebildet werden, daß ein vorgegebener Verzweigungspunkt p in einen gewöhnlichen endlichen Punkt übergeht.*

Beweis: p kann als Punkt im Endlichen angenommen werden, eventuell ist noch eine lineare Transformation auszuführen. Die Verzweigungsordnung von $\mathfrak{R}$ in p sei $v-1 > 0$. Wir konstruieren zunächst eine in $\mathfrak{R}$ eindeutige und meromorphe Funktion, die in p genau in $(v-1)$. Ordnung verzweigt ist und dort endlich bleibt. Eine solche Funktion $f(z)$ gewinnen wir auf folgende Weise: Wir legen in einer Umgebung von p eine v -fach gewundene Kreisscheibe $\mathfrak{R}$ mit p als Mittelpunkt fest. In $\mathfrak{R}$ wählen wir v schlichte Kreisscheiben $\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_v$, die alle der gleichen Kreisscheibe $\mathfrak{R}^*$ in der schlichten Ebene überlagert sind. Im Innern jedes $\mathfrak{R}_\varrho$ wird weiter je ein Punkt $\tilde{p}(z) = \tilde{p}(\zeta_\varrho)$ festgelegt, jedoch so, daß nicht zwei dieser Punkte einander überlagert sind. Wir bilden dann

$$f(z) = A(\zeta_1, z) + A(\zeta_2, z) + \dots + A(\zeta_v, z),$$

wobei $A(\zeta, z)$ eine $\mathfrak{R}$ zugeordnete Elementarfunktion ist. $f(z)$ hat die gewünschte Eigenschaft. In einer Umgebung von p ist

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \left[(z - z_0)^{\frac{1}{v}} \right]^j$$

(p sei dem Punkt $z = z_0$ der schlichten Ebene überlagert).

Sei nun j_0 der kleinste Index $\not\equiv 0 \pmod{\nu}$ in der angegebenen Entwicklung von $f(z)$, für den $C_{j_0} \not\equiv 0$ ist, ein solches j_0 existiert, da $f(z)$ in $\mathfrak{p}$ die Verzweigungsordnung $\nu - 1$ hat. Es sei etwa

$$j_0 = k \cdot \nu + \mu, \quad 0 < \mu < \nu.$$

Wir bilden

$$\frac{d^h}{dz^h} f(z) = f^{(h)}(z).$$

In einer Umgebung von $\mathfrak{p}$ ist

$$f^{(h)}(z) = d_0 + d_1 (z - z_0)^{\frac{\mu}{\nu}} + \dots, \quad d_1 \not\equiv 0.$$

Wir betrachten die durch $f^{(h)}(z)$ vermittelte Abbildung. $\Re$ gehe in eine Riemannsche Fläche $\Re^*$ über und $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{p}^*$. Der Bildpunkt $\mathfrak{p}^*$ ist auf $\Re^*$ endlicher Punkt und besitzt die Verzweigungsordnung $\mu - 1 < \nu - 1$. Ist noch $\mu > 1$, so wird das beschriebene Verfahren wiederholt. Nach endlich vielen Schritten kommt man schließlich zu einer Bildfläche $\Re'$, auf der der Bildpunkt von $\mathfrak{p}$ gewöhnlicher endlicher Punkt ist. Damit ist der Hilfssatz und Satz 13 völlig bewiesen.

Aus dem Beweise von Satz 13 ergibt sich, daß diejenigen Punkte auf dem Rande von $\mathfrak{B}$, in denen die Funktionen einer Approximationsfolge Pole aufweisen können, nicht abhängen von der approximierten Funktion. Vielmehr gilt folgender

Zusatz zu Satz 13: Auf dem Rande von $\mathfrak{B}$ lassen sich stets höchstens abzählbar viele Punkte so festlegen, daß jede in $\mathfrak{B}$ vorgegebene reguläre eindeutige Funktion im Innern von $\mathfrak{B}$ durch solche in $\mathfrak{B}$ meromorphen eindeutigen Funktionen gleichmäßig approximierbar ist, die höchstens in jeweils endlich vielen dieser Punkte Pole aufweisen.

Satz 13 enthält eine Aussage über die Möglichkeit, verschiedene analytische Funktionen gleichzeitig zu approximieren. Wir betrachten eine höchstens abzählbare Menge nichtkonstanter analytischer Funktionen $f_n(z)$. Die Regularitätsbereiche der $f_n(z)$ sind wohlbestimmte nichtgeschlossene Riemannsche Flächen $\Re_n$. Sind nun die $\Re_n$ zugleich in eine einzige Riemannsche Fläche $\Re$ punktfremd einbettbar, so besagt Satz 13: Es gibt eine Folge von in $\Re$ eindeutigen meromorphen Funktionen $g_\nu(z)$, die jede Funktion $f_n(z)$ im Innern ihres Regularitätsbereiches $\Re_n$ gleichmäßig approximieren.

Aber auch wenn die $\Re_n$ nicht zugleich in eine umfassende Riemannsche Fläche $\Re$ einbettbar sind, gilt eine entsprechende Aussage. Wir denken uns jedes $\Re_n$ normal ausgeschöpft durch je eine Folge $\mathfrak{G}_\mu^{(n)}$ von Polygonebieten. Sodann betten wir für jedes k die Polygonebiete $\mathfrak{G}_k^{(1)}, \mathfrak{G}_k^{(2)}, \dots, \mathfrak{G}_k^{(h)}$ in

eine nichtgeschlossene Riemannsche Fläche $\tilde{\mathfrak{R}}_k$ punktfremd ein; $\tilde{\mathfrak{R}}_k$ kann als punktierte algebraische Fläche gewählt werden. Nach Satz 13 gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon_k > 0$ eine in $\tilde{\mathfrak{R}}_k$ eindeutige und meromorphe Funktion $g_k(z)$, derart, daß

$$|f_n(z) - g_k(z)| < \varepsilon_k \text{ in } \mathfrak{G}_{k-1}^{(n)}, \quad n = 1, 2, \dots, k.$$

Wir wählen eine Folge positiver ε_k mit $\lim \varepsilon_k = 0$ und bestimmen zu jedem k wie angegeben eine Funktion $g_k(z)$. Die Funktionen $g_k(z)$ haben wiederum die Eigenschaft, daß sie jede Funktion $f_n(z)$ im Innern ihres Regularitätsbereiches $\mathfrak{R}_n$ gleichmäßig approximieren. Nur kann i. a. nicht ein gemeinsames Existenzgebiet für die $g_k(z)$ angegeben werden.

Wir fassen dieses Ergebnis zusammen zu

Satz 14: *Gegeben sei eine abzählbare Menge analytischer Funktionen $f_n(z)$. Dann gibt es eine Folge analytischer Funktionen $g_k(z)$, derart, daß jede Funktion $f_n(z)$ im Innern ihres Regularitätsgebietes durch die $g_k(z)$ gleichmäßig meromorph approximiert wird, wobei jeweils ein bestimmter Zweig jeder Funktion $g_k(z)$ auszuwählen ist.*

(Eingegangen am 10. August 1943.)