

Werk

Titel: Mathematische Annalen

Verlag: Springer

Jahr: 1951

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN235181684_0123

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0123

LOG Id: LOG_0037

LOG Titel: Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung.

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung¹⁾.

Von

ERHARD HEINZ in Göttingen.

Gegenstand der Störungstheorie ist die Untersuchung des Spektrums eines selbstadjungierten Operators in Abhängigkeit von einem Parameter. In verschiedenen Gebieten der mathematischen Physik ist zur numerischen Behandlung von Eigenwertproblemen Störungsrechnung verwendet worden. Diese formalen Ansätze wurden später von F. RELICH einer strengen mathematischen Begründung unterzogen. Dabei stellte sich heraus, daß diejenigen Operatoren $A(\varepsilon)$, die in einem festen Definitionsbereich selbstadjungiert sind und regulär von einem reellen Störungsparameter abhängen, neben den beschränkten Operatoren ausgezeichnete Eigenschaften besitzen. Aus diesem Grunde werden auch in dieser Arbeit ausschließlich solche Operatoren betrachtet.

Da das Spektrum von $A(\varepsilon)$ durch die Spektralschar $E_\lambda(\varepsilon)$ vollständig charakterisiert ist, so liegt es nahe, diese in ihrer Abhängigkeit von ε zu untersuchen. Im allgemeinen braucht $E_{\lambda_0}(\varepsilon)$ nicht regulär von ε abzuhängen, selbst wenn λ_0 in eine Leerstelle des Spektrums von $A(0)$ fällt. Das erkennt man etwa an dem Beispiel

$$A(\varepsilon)u = -u'', \quad u(0) = 0, \quad u(1) - \varepsilon u'(1) = 0.$$

Hier treten für $\varepsilon \leq 0$ nur positive Eigenwerte auf, also ist $E_0(\varepsilon) = 0$ für $\varepsilon \leq 0$. Für $0 < \varepsilon < 1$ gibt es jedoch einen Eigenwert $\mu(\varepsilon) < 0$. $E_0(\varepsilon)$ kann also in diesem Falle nicht regulär-analytisch von ε abhängen, obwohl es sich um ein reguläres Störungsproblem handelt (vgl. RELICH [6]). An diesem Beispiel erkennt man, daß hinsichtlich der Definitionsbereiche der Operatoren $A(\varepsilon)$ gewisse Einschränkungen gemacht werden müssen und jedenfalls Regularität von $A(\varepsilon)$ allein nicht ausreicht.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß die Regularität von $E_{\lambda_0}(\varepsilon)$ jedenfalls dann gesichert ist, wenn λ_0 in eine Leerstelle des Spektrums von $A(0)$ fällt und $A(\varepsilon)$ in einem festen Definitionsbereich selbstadjungiert und regulär ist. Ein Spezialfall dieses Satzes ist von B. v. SZ. NAGY [12] bewiesen worden. Er zeigte, daß $E_{\lambda_0}(\varepsilon) - E_{\mu_0}(\varepsilon)$ einen in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ regulären Operator darstellt, falls λ_0 und μ_0 beide Leerstellen des Spektrums von $A(0)$ sind. Als Grundlage für den Beweis dient ihm die Gleichung

$$E_{\lambda_0}(\varepsilon) - E_{\mu_0}(\varepsilon) = - (2\pi i)^{-1} \oint_C (A(\varepsilon) - z)^{-1} dz,$$

wobei C eine das Intervall $\mu_0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ umschließende Kurve in der komplexen z -Ebene bedeutet. Wenn sich das Spektrum von $A(0)$ bei $\lambda = -\infty$ und $\lambda = +\infty$ häuft, so ist eine Darstellung von $E_{\lambda_0}(\varepsilon)$ in Form eines Integrals über einen endlichen Weg in der komplexen Ebene nicht mehr möglich.

¹⁾ Diese Arbeit wurde von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen als Dissertation angenommen.

Vielmehr wird in der vorliegenden Arbeit die Integraldarstellung

$$E_{\lambda_0}(\varepsilon)f = \frac{1}{2}f - (2\pi i)^{-1} \int_{\lambda_0 - i\infty}^{\lambda_0 + i\infty} (A(\varepsilon) - z)^{-1} f dz$$

verwendet. Entwickelt man den Integranden in eine Reihe nach ε und integriert nach z , so ergibt sich die gesuchte Reihenentwicklung von $E_{\lambda_0}(\varepsilon)$. In entsprechender Weise wird der Operator $A(\varepsilon)^e$ für positiv-definites $A(0)$ und $-1 < \rho < 1$ behandelt.

Die Hauptschwierigkeit des Beweises liegt in der Abschätzung der Entwicklungskoeffizienten. Da die hierfür erforderlichen Ungleichungen auch unabhängig von der Störungstheorie von Interesse sind, so werden diese in § 1 gesondert behandelt. Eine Ungleichung sei herausgegriffen. Aus

$$\|Qx\| \leq \|Bx\| \quad \text{und} \quad \|Q^*x\| \leq \|Ax\|$$

(B, A selbstadjungiert und positiv in Definitionsbereichen $\mathfrak{D}_B$ bzw. $\mathfrak{D}_A$, die ihrerseits enthalten sind im Definitionsbereich von Q bzw. seiner Adjungierten Q^*) folgt die Abschätzung

$$\|(Qx, y)\| \leq \|B^\nu x\| \|A^{1-\nu} y\| (1 + |2\nu - 1|), \quad 0 \leq \nu \leq 1$$

für x aus $\mathfrak{D}_B$ und y aus $\mathfrak{D}_A$. Gleichzeitig wird auch die Gleichung $AS + SB = Q$ behandelt und bewiesen, daß unter geeigneten Voraussetzungen eine eindeutige Lösung S existiert, die sich in der Form

$$S = \int_0^\infty e^{-At} Q e^{-Bt} dt$$

darstellen läßt. Dieser Gegenstand steht in gewissem Zusammenhang mit Sätzen von I. SCHUR [9] über beschränkte Bilinearformen. — Daneben erweist sich auch der Begriff der monotonen Operatorfunktion als vorteilhaft. Funktionen, welche sich hinsichtlich endlicher Hermitescher Matrizen monoton verhalten, sind zuerst von K. LÖWNER [3] untersucht worden. Durch Anwendung eines von G. HERGLOTZ [2] stammenden Satzes wird hier gezeigt, daß die LÖWNERschen Resultate auch für die selbstadjungierten Operatoren im unendlich-dimensionalen HILBERTschen Raume gültig bleiben. Mit diesen Hilfsmitteln wird dann in § 2 die Regularität von $E_{\lambda_0}(\varepsilon)$ und $A(\varepsilon)^e$ nachgewiesen.

In § 3 wird schließlich die stetige, nicht-analytische Abhängigkeit der Spektralschar behandelt. Dabei werden an Stelle von Operatoren, die stetig von einem Parameter abhängen, allgemeiner Folgen $A_1, A_2, \dots$ gesetzt, die gegen A konvergieren. Zunächst wird der Fall der gewöhnlichen Konvergenz untersucht, d. h. $A_n f \rightarrow A f$, $n \rightarrow \infty$ für f aus $\mathfrak{D}$. Von $\mathfrak{D}$ wird dabei verlangt, daß es in den Definitionsbereichen von A_n und A enthalten ist und daß A in $\mathfrak{D}$ wesentlich selbstadjungiert ist. Unter dieser Annahme wird bewiesen, daß die Spektralschar von A_n gegen die von A konvergiert, also $\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\lambda_0}^{(n)} f = E_{\lambda_0} f$,

falls λ_0 kein Punkteigenwert von A ist. Dieser Satz rührt von RELICH [4] her und wurde von ihm durch Zurückführung auf beschränkte Operatoren bewiesen. In der vorliegenden Arbeit wird ein neuer Beweis gegeben, der den Umweg über die Reziproke vermeidet und direkt von der Spektraldarstellung der Operatoren A_n und A ausgeht. Anschließend wird die gleichmäßige Konvergenz der A_n gegen A untersucht. Diese wird wie bei RELICH [4] definiert, also

$$\|(A_n - A)f\| \leq \varepsilon_n (\|f\| + \|Af\|) \quad \text{für } f \text{ aus } \mathfrak{D} \text{ und } \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

Wenn $\{E_\lambda^{(n)}\}$ und $\{E_\lambda\}$ die zu A_n bzw. A gehörigen Spektralscharen bedeuten und λ_0 in eine Leerstelle des Spektrums von A fällt, so wird gezeigt, daß $E_{\lambda_0}^{(n)}$ gleichmäßig gegen E_{λ_0} konvergiert, d. h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|E_{\lambda_0}^{(n)} - E_{\lambda_0}\| = 0 \quad \text{gilt.}$$

Dieser Satz ist ausgesprochen bei RELICH [4], jedoch umfaßt der dort und in [11], S. 473 gegebene Beweis nur den Spezialfall beschränkter Operatoren A_n und A (vgl. hierzu die Bemerkung bei RELICH [7], § 8). Über die Behauptung $\lim_{n \rightarrow \infty} \|E_{\lambda_0}^{(n)} - E_{\lambda_0}\| = 0$ hinaus wird in der vorliegenden Arbeit sogar gezeigt, daß $\|E_{\lambda_0}^{(n)} - E_{\lambda_0}\|$ von derselben Größenordnung ist wie ε_n .

§ 1. Ungleichungen für Operatoren.

Der zugrunde gelegte HILBERTSCHE Raum werde mit $\mathfrak{H}$ bezeichnet. $x, y, z, u, v, \dots$ bedeuten Elemente und $A, B, R, S, \dots$ lineare Operatoren in $\mathfrak{H}$. Das innere Produkt zweier Elemente x und y werde mit (x, y) bezeichnet. Ferner werde, wie üblich, $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$ gesetzt, und $\|A\|$ sei die obere Grenze des Ausdrucks $\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ für $x \neq 0$, falls A beschränkt ist. Ist A in $\mathfrak{D}_A$ selbstadjungiert und $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda$ die Spektraldarstellung, so werde der Operator

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda| dE_\lambda$$

mit $|A|$ bezeichnet. Gilt $(u, Au) \geq a(u, u)$ für alle u aus $\mathfrak{D}_A$ mit einer festen reellen Zahl a , so schreiben wir $A \geq a$. Den Untersuchungen dieses Paragraphen schicken wir einige Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1.

Es sei A in $\mathfrak{D}_A$ selbstadjungiert und $A \geq a > 0$. $\{E_\lambda\}$ sei die zu A gehörige linksstetige Spektralschar. Setzt man dann

$$A^\nu = \int_a^\infty \lambda^\nu dE_\lambda,$$

so gelten für $-1 < \varrho < 1$ die Darstellungen

$$A^\varrho - 1 = \frac{2 \cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \int_0^\infty x^\varrho (A^2 + x^2)^{-1} dx \quad \text{und} \quad A^\varrho - 1 = \frac{\sin \pi \varrho}{\pi \varrho} \int_0^\infty x^\varrho (A + x)^{-2} dx.$$

Beweis.

Aus der Gleichung

$$(A^2 + x^2)^{-1} = \int_a^\infty (\lambda^2 + x^2)^{-1} dE_\lambda$$

folgt

$$\int_{x_1}^{x_2} x^\varrho (A^2 + x^2)^{-1} dx = \int_a^\infty \left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{x^\varrho dx}{\lambda^2 + x^2} \right] dE_\lambda = \int_a^\infty \lambda^{\varrho-1} \left[\int_{x_1/\lambda}^{x_2/\lambda} \frac{t^\varrho dt}{1+t^2} \right] dE_\lambda,$$

wenn $0 < x_1 < x_2 < \infty$ vorausgesetzt wird. Wir erhalten also

$$A^\varrho - 1 = \frac{2 \cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} x^\varrho (A^2 + x^2)^{-1} dx = \int_a^\infty \left(1 - \frac{2 \cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \int_{x_1/\lambda}^{x_2/\lambda} \frac{t^\varrho dt}{1+t^2} \right) \lambda^{\varrho-1} dE_\lambda.$$

Wegen

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{\varrho} dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2 \cos \frac{1}{2} \pi \varrho}$$

folgt dann

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow 0 \\ x_2 \rightarrow \infty}} \left\| A^{e-1} - \frac{2 \cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} x^{\varrho} (A^2 + x^2)^{-1} dx \right\| = 0,$$

was mit dem ersten Teil der Behauptung identisch ist. Analog folgt der zweite Teil der Behauptung aus den Gleichungen

$$A^{e-1} - \frac{\sin \pi \varrho}{\pi \varrho} \int_{x_1}^{x_2} x^{\varrho} (A + x)^{-2} dx = \int_a^{\infty} \left(1 - \frac{\sin \pi \varrho}{\pi \varrho} \int_{x_1/\lambda}^{x_2/\lambda} \frac{t^{\varrho} dt}{(1+t)^2} \right) \lambda^{e-1} dE,$$

und

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{\varrho} dt}{(1+t)^2} = \frac{\pi \varrho}{\sin \pi \varrho}.$$

Bei der Ableitung von Ungleichungen für Operatoren werden Ausdrücke der Form

$$g(Q) = \int_{t_1}^{t_2} A(t) Q B(t) dt$$

eine wichtige Rolle spielen. Diese stehen mit Sätzen in Zusammenhang, die I. SCHUR²⁾ aufgestellt hat, um die Beschränktheit gewisser Bilinearformen nachzuweisen. Wir beweisen zunächst den

Hilfssatz 2.

Es seien A in $\mathfrak{D}_A$ und B in $\mathfrak{D}_B$ zwei selbstadjungierte Operatoren, und es gelte $A \geq a > 0$ und $B \geq b > 0$. Q sei ein beschränkter Operator und ϱ eine Zahl aus dem Intervall $-1 < \varrho < 1$.

Setzt man dann

$$\varphi(Q) = \frac{\cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{\varrho} (A + it)^{-1} Q (B + it)^{-1} dt$$

und

$$\psi(Q) = \frac{\cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{\varrho} (A + it)^{-1} Q (B - it)^{-1} dt,$$

so stellen $\varphi(Q)$ und $\psi(Q)$ zwei beschränkte Operatoren dar, und es gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi(A^{-1}Q - QB^{-1}) &= A^{e-1}QB^{-1} - A^{-1}QB^{e-1} \\ \psi(A^{-1}Q + QB^{-1}) &= A^{e-1}QB^{-1} + A^{-1}QB^{e-1}. \end{aligned}$$

Beweis.

Die Konvergenz der Integrale folgt unmittelbar aus

$$\| |t|^{\varrho} (A + it) Q (B \pm it)^{-1} \| = \begin{cases} O(|t|^{e-2}), & |t| \rightarrow \infty \\ O(|t|^{\varrho}), & |t| \rightarrow 0. \end{cases}$$

²⁾ I. SCHUR: [9], insbes. Satz 6.

Um die Funktionalgleichungen zu beweisen, beachten wir die für alle Punkte z_1, z_2 der Resolventenmenge von A gültige Identität

$$(A - z_2)^{-1} - (A - z_1)^{-1} = (z_2 - z_1) (A - z_2)^{-1} (A - z_1)^{-1}.$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} (A + it)^{-1} (A^{-1} Q - Q B^{-1}) (B + it)^{-1} &= (it)^{-1} (A^{-1} - (A + it)^{-1}) Q (B + it)^{-1} \\ &- (A + it)^{-1} Q (it)^{-1} (B^{-1} - (B + it)^{-1}) \\ &= it^{-1} [(A + it)^{-1} Q B^{-1} - A^{-1} Q (B + it)^{-1}]. \end{aligned}$$

Also wird

$$\begin{aligned} (A + it)^{-1} (A^{-1} Q - Q B^{-1}) (B + it)^{-1} &+ (A - it)^{-1} (A^{-1} Q - Q B^{-1}) (B - it)^{-1} \\ &= 2 (A^2 + t^2)^{-1} Q B^{-1} - 2 A^{-1} Q (B^2 + t^2)^{-1}. \end{aligned}$$

Ersetzt man in der letzten Identität B durch $-B$ und multipliziert sie mit -1 , so entsteht

$$\begin{aligned} (A + it)^{-1} (A^{-1} Q + Q B^{-1}) (B - it)^{-1} &+ (A - it)^{-1} (A^{-1} Q + Q B^{-1}) (B + it)^{-1} \\ &= 2 (A^2 + t^2)^{-1} Q B^{-1} + 2 A^{-1} Q (B^2 + t^2)^{-1}. \end{aligned}$$

Multiplikation dieser beiden Identitäten mit $\frac{\cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \cdot t^e$ und Integration nach t liefert unter Anwendung von Hilfssatz 1 die Gleichungen

$$\varphi (A^{-1} Q - Q B^{-1}) = A^{e-1} Q B^{-1} - A^{-1} Q B^{e-1}$$

und

$$\psi (A^{-1} Q + Q B^{-1}) = A^{e-1} Q B^{-1} + A^{-1} Q B^{e-1}.$$

Hilfssatz 3.

Wenn A, B und Q die in Hilfssatz 2 angegebene Bedeutung haben, dann ist

$$\begin{aligned} \|A^{-\nu} Q B^{-(1-\nu)} + A^{-(1-\nu)} Q B^{-\nu}\| &\leq \|A^{-1} Q + Q B^{-1}\| \\ \|A^{-\nu} Q B^{-(1-\nu)} - A^{-(1-\nu)} Q B^{-\nu}\| &\leq |2\nu - 1| \|A^{-1} Q - Q B^{-1}\| \end{aligned}$$

für $0 \leq \nu \leq 1$.

Beweis.

Für jedes feste Paar x, y aus $\mathfrak{S}$ und $-1 < \varrho < 1$ gilt

$$\begin{aligned} |(\psi(Q)x, y)| &\leq \frac{\cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^e |(Q(B - it)^{-1}x, (A - it)^{-1}y)| dt \\ &\leq \|Q\| \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^e \|(B - it)^{-1}x\| \|(A - it)^{-1}y\| dt \\ &\leq \|Q\| \cdot \frac{2 \cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \left[\int_0^{\infty} t^e ((B^2 + t^2)^{-1}x, x) dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^{\infty} t^e ((A^2 + t^2)^{-1}y, y) dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \|Q\| \cdot \|B^{\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}}x\| \|A^{\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}}y\|. \end{aligned}$$

Ersetzt man darin Q durch $A^{-1}Q + Q B^{-1}$, ferner x durch $B^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e}u$ und y durch $A^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e}v$, so erhält man unter Berücksichtigung von Hilfssatz 2 die Ungleichung

$$\begin{aligned} & |(A^{e-1} Q B^{-1} B^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e} u + A^{-1} Q B^{e-1} B^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e} u, A^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e} v)| \\ & \leq \|A^{-1} Q + Q B^{-1}\| \|u\| \|v\| \quad \text{für alle } u \text{ aus } \mathfrak{D}_{B^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e}} \end{aligned}$$

und alle v aus $\mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e}}$.

Offenbar liegen $A^{e-1} g$ und $A^{-1} h$ in $\mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e}}$, wenn g und h zwei beliebige Elemente in $\mathfrak{H}$ sind. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} & |((A^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e} Q B^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e} + A^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e} Q B^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e}) u, v)| \\ & \leq \|A^{-1} Q + Q B^{-1}\| \|u\| \|v\|. \end{aligned}$$

Beachtet man, daß $\mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e}}$ und $\mathfrak{D}_{B^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e}}$ dicht in $\mathfrak{H}$ liegen und setzt $\nu = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e$, so resultiert die Ungleichung

$$\|A^{-\nu} Q B^{-(1-\nu)} + A^{-(1-\nu)} Q B^{-\nu}\| \leq \|A^{-1} Q + Q B^{-1}\|$$

für $0 < \nu < 1$. Da sie für $\nu = 0$ und $\nu = 1$ trivial ist, so folgt der erste Teil der Behauptung.

Um die zweite Ungleichung herzuleiten, beachten wir, daß nach dem CAUCHYSCHEN Integralsatz für $-1 < \varrho < 1$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^\varrho (A+t)^{-1} Q (B+t)^{-1} dt &= i e^{\frac{1}{2}\pi e i} \int_0^\infty t^\varrho (A+it)^{-1} Q (B+it)^{-1} dt \\ &= -i e^{-\frac{1}{2}\pi e i} \int_0^\infty t^\varrho (A-it)^{-1} Q (B-it)^{-1} dt. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \varphi(Q) &= \frac{\cos \frac{1}{2}\pi \varrho}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^\varrho (A+it)^{-1} Q (B+it)^{-1} dt \\ &= -\frac{\sin \pi \varrho}{\pi} \int_0^\infty t^\varrho (A+t)^{-1} Q (B+t)^{-1} dt. \end{aligned}$$

Man erhält so für x, y aus $\mathfrak{H}$ die Ungleichung

$$|(\varphi(Q)x, y)| \leq \frac{|\sin \pi \varrho|}{\pi} \|Q\| \left[\int_0^\infty t^\varrho ((B+t)^{-2} x, x) dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^\infty t^\varrho ((A+t)^{-2} y, y) dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Diese geht unter Berücksichtigung von Hilfssatz 1 über in

$$|(\varphi(Q)x, y)| \leq |\varrho| \cdot \|Q\| \|B^{\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}} x\| \|A^{\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}} y\|.$$

Ganz analog wie oben folgt hieraus

$$\|A^{-\nu} Q B^{-(1-\nu)} - A^{-(1-\nu)} Q B^{-\nu}\| \leq |2\nu-1| \|A^{-1} Q - Q B^{-1}\|, \text{ w. z. b. w.}$$

Mit diesen Hilfsmitteln gelingt es, das innere Produkt (Qx, y) in geeigneter Weise abzuschätzen. Zunächst haben wir

Satz 1.

Es seien A in $\mathfrak{D}_A$ und B in $\mathfrak{D}_B$ selbstadjungiert und $A \geq 0$, $B \geq 0$. Q sei in $\mathfrak{D}_Q \supseteq \mathfrak{D}_B$ linearer Operator mit $\mathfrak{D}_{Q^*} \supseteq \mathfrak{D}_A$. Außerdem gelte

$$\|Qf\| \leq \|Bf\| \quad \text{für alle } f \text{ aus } \mathfrak{D}_B$$

und

$$\|Q^*f\| \leq \|Af\| \quad \text{für alle } f \text{ aus } \mathfrak{D}_A.$$

Dann besteht die Ungleichung

$$|(Qf, g)| \leq (1 + |2\nu - 1|) \|B^\nu f\| \|A^{1-\nu} g\|$$

für f aus $\mathfrak{D}_B$ und g aus $\mathfrak{D}_A$, falls $0 \leq \nu \leq 1$ ist.

Beweis.

I. Wir setzen zunächst $A \geq c > 0$ und $B \geq c > 0$ voraus. Dann sind A^{-1} und B^{-1} Hermitesch und beschränkt. Für f aus $\mathfrak{D}_Q$ und g aus $\mathfrak{S}$ wird

$$(A^{-1} Qf, g) = (Qf, A^{-1}g) = (f, Q^* A^{-1}g),$$

also

$$|(A^{-1} Qf, g)| \leq \|f\| \|g\|.$$

Setzt man $g = A^{-1} Qf$, so entsteht $\|A^{-1} Qf\| \leq \|f\|$.

Wenn n eine positive Zahl bedeutet und $\int_c^\infty \lambda dF_\lambda = B$ die Spektraldarstellung von B ist, so ist der Operator $Q_n = QF_n$ beschränkt, und es gilt $\|Q_n\| \leq n$. Offenbar wird

$$\|Q_n B^{-1}\| \leq 1 \quad \text{und} \quad \|A^{-1} Q_n\| \leq 1.$$

Nach Hilfssatz 3 folgt

$$\|A^{-\nu} Q_n B^{-(1-\nu)} + A^{-(1-\nu)} Q_n B^{-\nu}\| \leq 2$$

$$\|A^{-\nu} Q_n B^{-(1-\nu)} - A^{-(1-\nu)} Q_n B^{-\nu}\| \leq 2|2\nu - 1|,$$

also

$$\|A^{-(1-\nu)} Q_n B^{-\nu}\| \leq 1 + |2\nu - 1|.$$

Für x, y aus $\mathfrak{S}$ wird

$$|(Q_n B^{-\nu} x, A^{-(1-\nu)} y)| \leq (1 + |2\nu - 1|) \|x\| \|y\|.$$

Setzt man $x = B^\nu f$ und $y = A^{1-\nu} g$, so entsteht

$$|(Q_n f, g)| \leq (1 + |2\nu - 1|) \|B^\nu f\| \|A^{1-\nu} g\|.$$

Nun gilt für jedes f aus $\mathfrak{D}_B$ die Ungleichung

$$\|Qf - Q_n f\| = \|Q(1 - F_n)f\| \leq \|B(1 - F_n)f\| = \|(1 - F_n)Bf\|.$$

Daraus folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n f = Qf \quad \text{und}$$

$$|(Qf, g)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(Q_n f, g)| \leq (1 + |2\nu - 1|) \|B^\nu f\| \|A^{1-\nu} g\|$$

für f aus $\mathfrak{D}_B$ und g aus $\mathfrak{D}_A$.

II. Wir befreien uns von der Annahme $A \geq c > 0$ und $B \geq c > 0$ und setzen nur noch $A \geq 0$ und $B \geq 0$ voraus. Für $c > 0$ gilt

$$\|Qf\| \leq \|(B + c)f\| \quad \text{und} \quad \|Q^*g\| \leq \|(A + c)g\|,$$

wenn f in $\mathfrak{D}_B$ und g in $\mathfrak{D}_A$ liegt. Nach dem oben Bewiesenen wird also

$$|(Qf, g)| \leq (1 + |2\nu - 1|) \|(B + c)^\nu f\| \|(A + c)^{1-\nu} g\|.$$

Offenbar gilt

$$\lim_{\substack{c \rightarrow 0 \\ (c > 0)}} (B + c)^\nu f = B^\nu f \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{c \rightarrow 0 \\ (c > 0)}} (A + c)^{1-\nu} g = A^{1-\nu} g$$

für alle f aus $\mathfrak{D}_B$ und g aus $\mathfrak{D}_A$. Daraus folgt die Behauptung.

Wenn Q Hermitesch ist und $A = B$ gesetzt wird, so kann man Satz 1 verschärfen und einfacher beweisen, was später (S. 426) geschehen wird. Vorher geben wir eine Erweiterung von Sätzen, die K. LÖWNER [3] über monotone Matrixfunktionen aufgestellt hat. Zu diesem Zwecke muß zunächst der Beziehung $A \leq B$ für unbeschränkte Operatoren ein genauer Sinn beigelegt werden. Dies führt zu der

Definition³⁾

Es seien A in $\mathfrak{D}_A$ und B in $\mathfrak{D}_B$ selbstadjungiert und $A \geq 0$, $B \geq 0$. $A^{\frac{1}{2}}$ und $B^{\frac{1}{2}}$ seien die positiven Quadratwurzeln von A und B . Wenn dann $\mathfrak{D}_{B^{\frac{1}{2}}}$ in $\mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}}}$ enthalten ist und

$\|A^{\frac{1}{2}} x\| \leq \|B^{\frac{1}{2}} x\|$ gilt für alle x aus $\mathfrak{D}_{B^{\frac{1}{2}}}$, so schreiben wir

$$A \leq B.$$

Hilfssatz 4⁴⁾.

Es seien A und B selbstadjungiert und $A \geq c > 0$, $B \geq c > 0$. Dann sind die beiden Aussagen

$$A \leq B \quad \text{und} \quad B^{-1} \leq A^{-1}$$

äquivalent.

Beweis.

Aus $A \leq B$ folgt

$$|(A^{\frac{1}{2}} x, y)| = |(x, A^{\frac{1}{2}} y)| \leq \|x\| \|B^{\frac{1}{2}} y\|$$

für x aus $\mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}}}$ und y aus $\mathfrak{D}_{B^{\frac{1}{2}}}$. Setzt man nun $x = A^{-\frac{1}{2}} u$ und $y = B^{-\frac{1}{2}} v$, so wird

$$|(B^{-\frac{1}{2}} u, v)| = |(u, B^{-\frac{1}{2}} v)| \leq \|A^{-\frac{1}{2}} u\| \|v\|.$$

Für $v = B^{-\frac{1}{2}} u$ erhält man schließlich

$$\|B^{-\frac{1}{2}} u\| \leq \|A^{-\frac{1}{2}} u\|, \quad \text{also} \quad B^{-1} \leq A^{-1}.$$

Ist umgekehrt $B^{-1} \leq A^{-1}$, so folgt wieder

$$|(x, B^{-\frac{1}{2}} y)| = |(B^{-\frac{1}{2}} x, y)| \leq \|A^{-\frac{1}{2}} x\| \|y\|.$$

Mit $x = A^{\frac{1}{2}} u$ und $y = B^{\frac{1}{2}} v$ wird

$$|(A^{\frac{1}{2}} u, v)| \leq \|u\| \|B^{\frac{1}{2}} v\| \quad \text{für } u \text{ aus } \mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}}} \text{ und } v \text{ aus } \mathfrak{D}_{B^{\frac{1}{2}}}.$$

$L_v(u) = (v, A^{\frac{1}{2}} u)$ ist also ein für alle u aus $\mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}}}$ erklärtes lineares, beschränktes Funktional. Da $\mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}}}$ in $\mathfrak{H}$ dicht liegt, so läßt sich $L_v(u)$ auf ganz $\mathfrak{H}$ mit derselben Schranke $\|B^{\frac{1}{2}} v\|$ fortsetzen. Also gibt es ein Element v^* aus $\mathfrak{H}$ derart, daß $L_v(u) = (v^*, u)$ wird für alle u aus $\mathfrak{H}$. Insbesondere wird

$$(A^{\frac{1}{2}} u, v) = (u, v^*) \quad \text{für } u \text{ aus } \mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}}}.$$

v liegt also in $\mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}}}$, und es gilt

$$|(u, A^{\frac{1}{2}} v)| \leq \|u\| \|B^{\frac{1}{2}} v\|.$$

³⁾ RELICH [8].

⁴⁾ RELICH [8], Seite 363. Zur Bequemlichkeit des Lesers führen wir den einfachen Beweis noch einmal an.

Da $\mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}}}$ in $\mathfrak{H}$ dicht liegt, so gilt die letzte Ungleichung sogar für alle u aus $\mathfrak{H}$. Setzt man $u = A^{\frac{1}{2}} v$, so erhält man schließlich

$$\|A^{\frac{1}{2}} v\| \leq \|B^{\frac{1}{2}} v\| \quad \text{für alle } v \text{ aus } \mathfrak{D}_{B^{\frac{1}{2}}} \subseteq \mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}}},$$

also $A \leq B$, w. z. b. w.

Durch den letzten Hilfssatz wird die Frage nahegelegt, welche in $0 \leq \lambda < \infty$ stetigen Funktionen $f(\lambda)$ die Eigenschaft besitzen, daß aus $0 \leq A \leq B$ die Beziehung $0 \leq f(A) \leq f(B)$ folgt. Wenn A und B endliche Hermitesche Matrizen beliebig hoher Ordnung sind, so hat LÖWNER [3] bewiesen, daß $f(\lambda)$ ins Komplexe zu einer Funktion $f(z)$ fortgesetzt werden kann, die überall mit Ausnahme der negativ-reellen Achse regulär-analytisch ist und in der oberen Halbebene einen nicht-negativen Imaginärteil besitzt. Wir werden jetzt zeigen, daß durch diese Bedingung die Monotonie sogar hinsichtlich positiver selbstadjungierter Operatoren gesichert ist. Zunächst wird eine geeignete Integraldarstellung benötigt.

Hilfssatz 5.

Es sei $f(z)$ in der längs der negativ-reellen Achse aufgeschnittenen Ebene regulär-analytisch und $\operatorname{Im} f(z) \geq 0$ für $\operatorname{Im} z > 0$. Außerdem sei $f(z)$ reell für positiv-reelle z . Dann gibt es eine in $0 \leq t < \infty$ monoton nicht-abnehmende Funktion $\sigma(t)$ mit $\sigma(\infty) < \infty$ und zwei reelle Zahlen α, β mit $\alpha \geq 0$ derart, daß

$$f(z) = \int_0^{\infty} \frac{tz - 1}{t + z} d\sigma(t) + \alpha z + \beta$$

gilt für alle z aus dem Regularitätsbereich von $f(z)$.

Beweis.

Nach einem funktionentheoretischen Satz⁵⁾ gilt für $\operatorname{Im} z > 0$ die Darstellung

$$f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{tz + 1}{t - z} d\rho(t) + \alpha z + \beta.$$

Dabei sind α und β zwei reelle Zahlen mit $\alpha \geq 0$, und $\rho(t)$ ist eine beschränkte, monoton nicht-abnehmende Funktion. Weiter läßt sich zeigen, daß für alle Stetigkeitsstellen $t = a, t = b$ von $\rho(t)$ die Gleichung

$$\pi \int_a^b (t^2 + 1) d\rho(t) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ (y > 0)}} \int_a^b \operatorname{Im} [f(x + iy)] dx$$

gilt. Daraus folgt, daß $\rho(t)$ für $t > 0$ konstant ist. Setzt man also

$$\sigma(t) = -\rho(-t) \quad \text{für } t > 0 \quad \text{und} \quad \sigma(0) = -\rho(0+0),$$

so wird

$$f(z) = \int_0^{\infty} \frac{tz - 1}{t + z} d\sigma(t) + \alpha z + \beta$$

zunächst für $\operatorname{Im} z > 0$, dann aber wegen $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ für alle z aus dem Regularitätsgebiet von $f(z)$.

Hilfssatz 6.

Die Funktion $f(z)$ erfülle die Voraussetzungen von Hilfssatz 5. Außerdem sei $f(\lambda) \geq 0$ für $a \leq \lambda < \infty$. A sei ein in $\mathfrak{D}_A$ selbstadjungierter Operator mit $A \geq a$

⁵⁾ HERGLOTZ [2], vgl. auch STONE [10], Seite 573.

> 0 , und es werde $f(A) = \int_a^\infty f(\lambda) dE_\lambda$ gesetzt, wobei $\{E_\lambda\}$ die zu A gehörige linksstetige Spektralschar bedeutet.

Dann gibt es eine in $0 \leq t < \infty$ monoton nicht-abnehmende Funktion $\sigma(t)$ mit $\sigma(\infty) < \infty$ und zwei reelle Zahlen α, β mit $\alpha \geq 0$ derart, daß

$$\|f(A)^{\frac{1}{2}} u\|^2 = \int_0^\infty [t(u, u) - (t^2 + 1)(u, (A + t)^{-1} u)] d\sigma(t) \\ + \alpha \|A^{\frac{1}{2}} u\|^2 + \beta(u, u)$$

für alle u aus $\mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}}}$ wird.

Beweis.

Nach Hilfssatz 5 gilt für $\lambda > 0$ die Darstellung

$$f(\lambda) = \int_0^\infty \frac{t\lambda - 1}{t + \lambda} d\sigma(t) + \alpha\lambda + \beta.$$

Für die Funktion $G(t, \lambda) = \frac{t\lambda - 1}{\lambda + t}$ bestehen die Ungleichungen

$$|G(t, \lambda)| \leq \lambda + a^{-1} \quad \text{und} \quad |G(t, \lambda)| \leq t + a^{-1} \quad \text{in} \quad \begin{cases} a \leq \lambda < \infty \\ 0 \leq t < \infty. \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$\int_0^{t_1} G(t, \lambda) d\sigma(t) \rightarrow \int_0^\infty G(t, \lambda) d\sigma(t) \quad \text{für } t_1 \rightarrow \infty \quad \text{gleichmäßig in } a \leq \lambda \leq \lambda_1 \quad \text{und} \\ \left| \int_0^{t_1} G(t, \lambda) d\sigma(t) \right| \leq (\lambda + a^{-1})(\sigma(\infty) - \sigma(0)).$$

Aus der letzten Ungleichung ergibt sich $f(\lambda) = O(\lambda)$, $\lambda \rightarrow \infty$. $\mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}}}$ ist also in $\mathfrak{D}_{f(A)^{\frac{1}{2}}}$ enthalten.

Wenn $\{E_\lambda\}$ die zu A gehörige linksstetige Spektralschar bedeutet, so folgt

$$\int_0^{t_1} \left[\int_a^\infty G(t, \lambda) d(u, E_\lambda u) \right] d\sigma(t) = \int_a^\infty \left[\int_0^{t_1} G(t, \lambda) d\sigma(t) \right] d(u, E_\lambda u).$$

Da u in $\mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}}}$ liegt, also $\int_a^\infty \lambda d(u, E_\lambda u) < \infty$ ist, so folgt durch Grenzübergang ($t_1 \rightarrow \infty$)

$$\int_0^\infty \left[\int_a^\infty G(t, \lambda) d(u, E_\lambda u) \right] d\sigma(t) = \int_a^\infty \left[\int_0^\infty G(t, \lambda) d\sigma(t) \right] d(u, E_\lambda u).$$

Wir erhalten also

$$\int_0^\infty [t(u, u) - (t^2 + 1)(u, (A + t)^{-1} u)] d\sigma(t) + \alpha \|A^{\frac{1}{2}} u\|^2 + \beta(u, u) \\ = \int_0^\infty \left[\int_a^\infty \frac{t\lambda - 1}{t + \lambda} d(u, E_\lambda u) \right] d\sigma(t) + \alpha \int_a^\infty \lambda d(u, E_\lambda u) + \beta \int_a^\infty d(u, E_\lambda u) \\ = \int_a^\infty \left[\int_0^\infty \frac{t\lambda - 1}{t + \lambda} d\sigma(t) + \alpha\lambda + \beta \right] d(u, E_\lambda u) = \int_a^\infty f(\lambda) d(u, E_\lambda u) \\ = \|f(A)^{\frac{1}{2}} u\|^2$$

Satz 2.

Es sei $f(z)$ in der längs der negativ-reellen Achse aufgeschnittenen z -Ebene regulär-analytisch und $\operatorname{Im} f(z) \geq 0$ für $\operatorname{Im} z > 0$. Außerdem sei $f(\lambda)$ stetig und $f(\lambda) \geq 0$ für $0 \leq \lambda < \infty$. Dann folgt aus

$$0 \leq A \leq B \text{ die Beziehung } 0 \leq f(A) \leq f(B).$$

Beweis.

I. Aus $0 \leq A \leq B$ folgt $c + t \leq A + c + t \leq B + c + t$ für $c > 0, t \geq 0$. Wenn u ein Element aus $\mathfrak{D}_{B^{\frac{1}{2}}}$ bedeutet, so wird nach Hilfssatz 6

$$\begin{aligned} \|f(B+c)^{\frac{1}{2}}u\|^2 &= \int_0^\infty [t(u, u) - (t^2+1)(u, (B+c+t)^{-1}u)] d\sigma(t) \\ &\quad + \alpha \|(B+c)^{\frac{1}{2}}u\|^2 + \beta(u, u). \end{aligned}$$

Wegen $A \leq B$ liegt u auch in $\mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}}}$. Also wird

$$\begin{aligned} \|f(A+c)^{\frac{1}{2}}u\|^2 &= \int_0^\infty [t(u, u) - (t^2+1)(u, (A+c+t)^{-1}u)] d\sigma(t) \\ &\quad + \alpha \|(A+c)^{\frac{1}{2}}u\|^2 + \beta(u, u). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich unter Anwendung von Hilfssatz 4 die Ungleichung

$$\begin{aligned} &\|f(B+c)^{\frac{1}{2}}u\|^2 - \|f(A+c)^{\frac{1}{2}}u\|^2 \\ &= \int_0^\infty [(u, (A+c+t)^{-1}u) - (u, (B+c+t)^{-1}u)] (t^2+1) d\sigma(t) \\ &\quad + \alpha [\|(B+c)^{\frac{1}{2}}u\|^2 - \|(A+c)^{\frac{1}{2}}u\|^2] \geq 0. \end{aligned}$$

Aus $\|f(A+c)^{\frac{1}{2}}u\|^2 = \int_0^\infty f(\lambda+c) d(u, E_\lambda u)$ folgt, wenn man bedenkt, daß $f(\lambda)$ für $0 \leq \lambda < \infty$ stetig ist und $f(\lambda) = O(\lambda)$, $\lambda \rightarrow \infty$, gilt,

$$\lim_{\substack{c \rightarrow 0 \\ (c > 0)}} \|f(A+c)^{\frac{1}{2}}u\|^2 = \|f(A)^{\frac{1}{2}}u\|^2$$

und entsprechend

$$\lim_{\substack{c \rightarrow 0 \\ (c > 0)}} \|f(B+c)^{\frac{1}{2}}u\|^2 = \|f(B)^{\frac{1}{2}}u\|^2$$

für alle u aus $\mathfrak{D}_{B^{\frac{1}{2}}} \subseteq \mathfrak{D}_{A^{\frac{1}{2}}}$. Wir erhalten also

$$\|f(A)^{\frac{1}{2}}u\| \leq \|f(B)^{\frac{1}{2}}u\| \quad \text{für } u \text{ aus } \mathfrak{D}_{B^{\frac{1}{2}}}.$$

II. Jetzt sei u beliebig aus $\mathfrak{D}_{f(B)^{\frac{1}{2}}}$. Da $f(B)^{\frac{1}{2}}$ in $\mathfrak{D}_{B^{\frac{1}{2}}}$ wesentlich selbstadjungiert ist, so gibt es eine Folge $\{u_n\}$ aus $\mathfrak{D}_{B^{\frac{1}{2}}}$ mit $u_n \rightarrow u$ und $f(B)u_n \rightarrow f(B)u$, $n \rightarrow \infty$. Aus der Ungleichung

$$\|f(A)^{\frac{1}{2}}(u_n - u_m)\| \leq \|f(B)^{\frac{1}{2}}(u_n - u_m)\| \quad \text{für } m, n = 1, 2, \dots$$

folgt daher $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|f(A)^{\frac{1}{2}}(u_n - u_m)\| = 0$. Da $f(A)^{\frac{1}{2}}$ abgeschlossen ist, so ist u

auch in $\mathfrak{D}_{f(A)^{\frac{1}{2}}}$ enthalten, und es wird $\lim_{n \rightarrow \infty} f(A)^{\frac{1}{2}}u_n = f(A)^{\frac{1}{2}}u$. Lassen wir daher in der Ungleichung

$$\|f(A)^{\frac{1}{2}}u_n\| \leq \|f(B)^{\frac{1}{2}}u_n\|, \quad n = 1, 2, \dots$$

n gegen ∞ streben, so folgt schließlich die Behauptung. Als Anwendung erhält man

Satz 3.

Es sei A in $\mathfrak{D}_A$ und B in $\mathfrak{D}_B$ selbstadjungiert und $A \geq 0, B \geq 0$. Ferner sei $\mathfrak{D}_B$ in $\mathfrak{D}_A$ enthalten, und es gelte $\|Ax\| \leq \|Bx\|$ für alle x aus $\mathfrak{D}_B$ ⁶⁾. Dann ist für $0 \leq \tau \leq 1$ auch $\mathfrak{D}_{B^\tau}$ in $\mathfrak{D}_{A^\tau}$ enthalten, und es ist

$$\|A^\tau x\| \leq \|B^\tau x\| \quad \text{für } 0 \leq \tau \leq 1 \quad \text{und alle } x \text{ aus } \mathfrak{D}_{B^\tau}.$$

Beweis.

Aus den über A und B gemachten Voraussetzungen folgt $A^2 \leq B^2$. Sei nun $f(\lambda) = \lambda^\tau$ ($0 \leq \lambda < \infty$) und $f(z)$ die Funktion, die durch analytische Fortsetzung von $f(\lambda)$ in die längs der negativ-reellen Achse aufgeschnittenen z -Ebene entsteht, so sind die Bedingungen von Satz 2 für $0 \leq \tau \leq 1$ erfüllt, und es wird $0 \leq A^{2\tau} \leq B^{2\tau}$. Dies ist aber wegen $A \geq 0, B \geq 0$ mit der Behauptung äquivalent.

Mit Hilfe dieses Resultates können wir nun Satz 1 sogar ohne den Faktor $1 + |2\nu - 1|$ leicht beweisen, wenn darin Q als Hermitesch vorausgesetzt wird. Es gilt

Satz 4.

Es sei A in $\mathfrak{D}_A$ selbstadjungiert und $A \geq 0$. Außerdem sei Q in $\mathfrak{D}_A$ Hermitesch und $\|Qx\| \leq \|Ax\|$ für x aus $\mathfrak{D}_A$. Dann gilt die Ungleichung

$$\|(Qx, y)\| \leq \|A^\tau x\| \|A^{1-\tau} y\| \quad \text{für } x, y \text{ aus } \mathfrak{D}_A \text{ und } 0 \leq \tau \leq 1.$$

Beweis.

Es sei $\int_0^\infty \lambda dE_\lambda$ die Spektraldarstellung von A . Ist n eine positive ganze Zahl, so ist $Q_n = E_n Q E_n$ Hermitesch und beschränkt. Für x aus $\mathfrak{D}_A$ hat man

$$\|Q_n x\| = \|Q_n x\| \leq \|E_n A x\| \leq \|A x\|.$$

Also gilt nach Satz 3 die Ungleichung

$$\|Q_n^\tau x\| \leq \|A^\tau x\| \quad \text{für } 0 \leq \tau \leq 1 \quad \text{und } x \text{ aus } \mathfrak{D}_{A^\tau}.$$

Weiter wird

$$\|(Q_n x, y)\| \leq \|Q_n^\tau x\| \|Q_n^{1-\tau} y\| \leq \|A^\tau x\| \|A^{1-\tau} y\|$$

und $\lim_{n \rightarrow \infty} (Q_n x, y) = (Qx, y)$ für x, y aus $\mathfrak{D}_A$, woraus sich die Behauptung ergibt.

Zum Schluß dieses Paragraphen soll gezeigt werden, wie man durch den Ansatz $S = \int_{t_1}^{t_2} A(t) Q B(t) dt$ die Gleichung $AS + SB = Q$ in einfacher Weise auflösen kann. Dies wird allerdings im folgenden nicht benutzt werden. Zunächst beweisen wir den

Hilfssatz 7.

Es sei A ein beschränkter Operator und $\frac{1}{2}(A + A^*) \leq a$. Setzt man dann

$$e^A = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k,$$

so gilt

$$\|e^A\| \leq e^a.$$

⁶⁾ Wenn B^{-1} beschränkt ist, so folgt bereits aus $\mathfrak{D}_B \subseteq \mathfrak{D}_A$ eine Ungleichung der Form $\|Ax\| \leq k\|Bx\|$, da dann der Operator $T = A B^{-1}$ in ganz $\mathfrak{H}$ erklärt ist und seine Adjungierte T^* dicht definiert ist, vgl. RELICH [5].

Beweis.

Mit $\frac{1}{2}(A + A^*) = A_1$ und $\frac{1}{2i}(A - A^*) = A_2$ wird $A = A_1 + i A_2$, und A_1, A_2 sind Hermitesche. Dann gilt für ganzes positives n und jedes f aus $\mathfrak{H}$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} \left\| e^{\frac{1}{n}(A_1 + i A_2)} f \right\|^2 &= \left\| f + \frac{1}{n} A_1 f + \frac{i}{n} A_2 f + \dots \right\|^2 \\ &\leq (f, f) + \frac{2}{n} (f, A_1 f) + \frac{m}{n^2} (f, f) \leq \left(1 + \frac{2a}{n} + \frac{m}{n^2}\right) (f, f), \end{aligned}$$

wobei m eine feste positive, von f unabhängige Zahl bedeutet. Für hinreichend großes n erhalten wir also

$$\left\| e^{\frac{1}{n}(A_1 + i A_2)} \right\| \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right) \left(1 + \frac{m}{n^2}\right).$$

Folglich wird

$$\left\| e^{A_1 + i A_2} \right\| = \left\| \left\{ e^{\frac{1}{n}(A_1 + i A_2)} \right\}^n \right\| \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \left(1 + \frac{m}{n^2}\right)^n.$$

Lassen wir n gegen ∞ streben, so folgt

$$\left\| e^A \right\| = \left\| e^{A_1 + i A_2} \right\| \leq e^a.$$

Es gilt nun

Satz 5.

Es seien A, B und Q beschränkte Operatoren. Außerdem sei

$$\frac{1}{2}(A + A^*) \geq a, \quad \frac{1}{2}(B + B^*) \geq b \quad \text{und} \quad a + b > 0.$$

Dann hat die Gleichung $AS + SB = Q$ genau einen beschränkten Operator S als Lösung, und es gilt $\|S\| \leq (a + b)^{-1} \|Q\|$. Die Lösung läßt sich in der Form

$$S = \int_0^\infty e^{-At} Q e^{-Bt} dt \quad \text{darstellen.}$$

Beweis.

Nach Hilfssatz 7 ist

$$\left\| e^{-At} Q e^{-Bt} \right\| \leq \|Q\| e^{-(a+b)t} \quad \text{für } 0 \leq t < \infty.$$

Also ist $\chi(Q) = \int_0^\infty e^{-At} Q e^{-Bt} dt$ sinnvoll und stellt einen beschränkten Operator dar mit $\|\chi(Q)\| \leq (a + b)^{-1} \|Q\|$. Weiter wird

$$\begin{aligned} \chi(AQ + QB) &= A \chi(Q) + \chi(Q) B = \int_0^\infty [A e^{-At} Q e^{-Bt} + e^{-At} Q B e^{-Bt}] dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt} [-e^{-At} Q e^{-Bt}] dt = [-e^{-At} Q e^{-Bt}]_{t=0}^{t=\infty} = Q. \end{aligned}$$

Der Operator $S = \chi(Q)$ ist also eine Lösung von $AS + SB = Q$. Umgekehrt folgt aus der Gleichung $AS + SB = Q$, wenn wir auf beide Seiten die Funktion χ anwenden,

$$\chi(Q) = \chi(AS + SB) = A \chi(S) + \chi(S) B = S.$$

Daraus ergibt sich, daß die Gleichung $AS + SB = Q$ durch $S = \chi(Q)$ eindeutig aufgelöst wird.

Als Spezialfall ergibt sich mit $B = 0$, $Q = 1$ eine Verallgemeinerung eines Satzes von TOEPLITZ⁷⁾, nämlich

Satz 6.

Es sei A beschränkt und $\frac{1}{2}(A + A^*) \geq a > 0$. Dann hat A eine in ganz $\mathfrak{H}$ erklärte Reziproke, es ist $\|A^{-1}\| \leq a^{-1}$, und es gilt die Darstellung $A^{-1} = \int_0^\infty e^{-At} dt$.

Satz 6 wird falsch, wenn man die Ungleichung $\frac{1}{2}(A + A^*) \geq a > 0$ durch die schwächere $\frac{1}{2}|A + A^*| \geq a > 0$ ersetzt. Dies erkennt man etwa an dem Beispiel $A = \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}$.

§ 2 Reguläre, selbstadjungierte Operatoren mit festem Definitionsbereich.

Wir betrachten jetzt Operatoren $A(\varepsilon)$, die in einem festen Definitionsbereich $\mathfrak{A}$ selbstadjungiert sind und regulär von einem reellen Parameter ε abhängen, also $A(\varepsilon)u = A_0 u + \varepsilon A_1 u + \dots$ für u aus $\mathfrak{A}$. Es wird sich herausstellen, daß gewissen Funktionen solcher Operatoren, die in der Spektraltheorie eine Rolle spielen, wie z. B. $E_{\lambda_0}(\varepsilon)$, $|A(\varepsilon)|$ und $A(\varepsilon)^q$ ($-1 < q < 1$), ebenfalls diese Eigenschaft zukommt. Der Grund hierfür liegt darin, daß die Koeffizienten $A_1, A_2, \dots$, den in Hilfssatz 1 angegebenen Ungleichungen unterworfen sind. Da die Reziproke von $A(\varepsilon) - z$ für komplexe z leicht in eine NEUMANNsche Reihe nach Potenzen von ε entwickelt werden kann, so liegt es nahe, die oben erwähnten Funktionen von $A(\varepsilon)$ durch Integration von $(A(\varepsilon) - z)^{-1}$ nach z zu gewinnen. Das hat den Vorteil, daß die Entwicklungskoeffizienten der gesuchten Operatoren in geschlossener Form durch Integrale dargestellt werden können, was bei direktem Potenzreihenansatz z. B. im Falle des Operators $A(\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$ nicht ohne weiteres möglich ist. Bei der Durchführung der Rechnung stellt sich heraus, daß die Abschätzungen für $\|A_\nu u\|$, $\nu = 1, 2, \dots$ in der durch Hilfssatz 1 gelieferten Form nicht direkt verwendbar sind. Vielmehr wird Satz 4 aus § 1 herangezogen. Dies geschieht in Hilfssatz 2, wo für die Entwicklungskoeffizienten von $(A(\varepsilon) + it)^{-1}$ geeignete Abschätzungen hinsichtlich des reellen Parameters t gewonnen werden. Das Hauptergebnis dieses Paragraphen findet sich zusammengefaßt in Satz 1, aus dem durch Spezialisierungen die Regularität der Operatoren $A(\varepsilon)^q$ (Satz 2), bzw. $E_{\lambda_0}(\varepsilon)$ (Satz 3) und $|A(\varepsilon)|$ (Satz 4) gefolgert wird.

Hilfssatz 1.

Es sei $A(\varepsilon)$ eine einparametrische Schar in $\mathfrak{A}$ selbstadjungierter Operatoren, und $A(\varepsilon)u$ sei für jedes feste u aus $\mathfrak{A}$ ein reguläres Element in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$. Dann gibt es in $\mathfrak{A}$ Hermitesche Operatoren $A_1, A_2, \dots$ und feste positive Konstanten a, k , derart, daß

$$\|A_\nu u\| \leq a k^\nu (\|A_0 u\| + \|u\|) \quad \text{für alle } u \text{ aus } \mathfrak{A} \text{ gilt}$$

und $A(\varepsilon)u = A_0 u + \varepsilon A_1 u + \dots$ wird⁸⁾.

⁷⁾ HELLINGER-TOEPLITZ [1], Seite 1430. Zusatz bei der Korrektur am 26. 7. 1951. In der Arbeit von J. v. NEUMANN, Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes, Math. Nachr. 4, 258—281 (1950/51), findet sich Satz 6 auf Seite 275.

⁸⁾ RELICH [6], Seite 476.

Hilfssatz 2.

Es sei A_0 in $\mathfrak{D}_{A_0}$ selbstadjungiert, und das Spektrum sei in einer Umgebung von $\lambda = 0$ leer. Ferner sei $A_1, A_2, \dots$ eine Folge in $\mathfrak{D}_{A_0}$ Hermitescher Operatoren mit $\|A_n f\| \leq a k^n \|A_0 f\|$, $n = 1, 2, \dots$

Dann ist $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1 + \dots$ für $|\varepsilon| < k^{-1}(1+a)^{-1}$ in $\mathfrak{D}_{A_0}$ selbstadjungiert. $(A(\varepsilon) + it)^{-1}$ ist für reelle t beschränkt, und es gilt die Entwicklung

$$(A(\varepsilon) + it)^{-1} = (A_0 + it)^{-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} R_{\nu}(t) \varepsilon^{\nu}.$$

Darin sind $R_{\nu}(t)$ beschränkte Operatoren, die stetig von t abhängen, und es besteht die Ungleichung

$$|(R_{\nu}(t) x, y)| \leq a k^{\nu} (1+a)^{\nu-1} \| |A_0|^{\alpha} (A_0 + it)^{-1} x \| \| |A_0|^{1-\alpha} (A_0 + it)^{-1} y \|$$

für $-\infty < t < \infty$, $0 \leq \alpha \leq 1$ und alle Elemente x, y aus $\mathfrak{H}$.

Beweis.

Nach Voraussetzung existiert $(A_0 + it)^{-1}$ für $-\infty < t < \infty$ und ist beschränkt. Aus

$$\|A_n x\| \leq a k^n \|A_0 x\| = a k^n \| |A_0| x \|$$

folgt nach § 1, Satz 4 die Ungleichung

$$|(A_n x, y)| \leq a k^n \| |A_0|^{\alpha} x \| \| |A_0|^{1-\alpha} y \| \quad \text{für } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Setzt man $x = |A_0|^{-\alpha} u$, $y = |A_0|^{-(1-\alpha)} v$, wobei u, v Elemente aus $\mathfrak{D}_{A_0}$ sind, so liegen auch x und y in $\mathfrak{D}_{A_0}$, und es folgt

$$|(|A_0|^{-(1-\alpha)} A_n |A_0|^{-\alpha} u, v)| \leq a k^n \|u\| \|v\|,$$

also

$$\| |A_0|^{-(1-\alpha)} A_n |A_0|^{-\alpha} u \| \leq a k^n \|u\|$$

und

$$\| |A_0|^{-(1-\alpha)} (A(\varepsilon) - A_0) |A_0|^{-\alpha} u \| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} a k^{\nu} |\varepsilon|^{\nu} \|u\| = \frac{a k |\varepsilon|}{1 - k |\varepsilon|} \|u\|$$

für u aus $\mathfrak{D}_{A_0}$. Die Operatoren $|A_0|^{-(1-\alpha)} A_n |A_0|^{-\alpha}$ und $|A_0|^{-(1-\alpha)} (A(\varepsilon) - A_0) |A_0|^{-\alpha}$ lassen sich also durch Abschließen auf ganz $\mathfrak{H}$ fortsetzen. Ferner gilt

$$\|A_n (A_0 + it)^{-1} f\| \leq a k^n \|A_0 (A_0 + it)^{-1} f\| \leq a k^n \|f\|$$

und

$$\|(A(\varepsilon) - A_0) (A_0 + it)^{-1} f\| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} a k^{\nu} |\varepsilon|^{\nu} \|f\| = \frac{a k |\varepsilon|}{1 - k |\varepsilon|} \|f\|$$

für f aus $\mathfrak{H}$. Aus der Identität

$$A(\varepsilon) + it = [1 + (A(\varepsilon) - A_0) (A_0 + it)^{-1}] (A_0 + it)$$

folgt daher für $|\varepsilon| < k^{-1}(1+a)^{-1}$ die Existenz und Beschränktheit von $(A(\varepsilon) + it)^{-1}$ sowie die Gleichung

$$(A(\varepsilon) + it)^{-1} = (A_0 + it)^{-1} [1 + (A(\varepsilon) - A_0) (A_0 + it)^{-1}]^{-1}.$$

Da $(A(\varepsilon) + it)^{-1} f$ für alle f aus $\mathfrak{H}$ ein Element in $\mathfrak{D}_{A_0}$ darstellt, so ist $A(\varepsilon)$ in $\mathfrak{D}_{A_0}$ selbstadjungiert. Weiter hat man

$$\begin{aligned} (A(\varepsilon) + it)^{-1} &= (A_0 + it)^{-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} (A_0 + it)^{-1} [(A(\varepsilon) - A_0) (A_0 + it)^{-1}]^{\nu} \\ &= (A_0 + it)^{-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} |A_0|^{1-\alpha} (A_0 + it)^{-1} [|A_0|^{-(1-\alpha)} (A(\varepsilon) - A_0) |A_0|^{-\alpha} \times \\ &\quad \times |A_0|^{\alpha} (A_0 + it)^{-1} |A_0|^{1-\alpha}]^{\nu-1} [|A_0|^{-(1-\alpha)} (A(\varepsilon) - A_0) |A_0|^{-\alpha}] |A_0|^{\alpha} (A_0 + it)^{-1} \\ &= (A_0 + it)^{-1} + |A_0|^{1-\alpha} (A_0 + it)^{-1} S(t, \alpha; \varepsilon) |A_0|^{\alpha} (A_0 + it)^{-1} \end{aligned}$$

mit

$$S(t, \alpha; \varepsilon) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} [|A_0|^{-(1-\alpha)} (A(\varepsilon) - A_0) |A_0|^{-\alpha} |A_0|^{\alpha} (A_0 + it)^{-1} |A_0|^{1-\alpha}]^{\nu-1} \times \\ \times [|A_0|^{-(1-\alpha)} (A(\varepsilon) - A_0) |A_0|^{-\alpha}].$$

Die Reihe konvergiert für $|\varepsilon| < k^{-1}(1+a)^{-1}$ und stellt einen beschränkten Operator dar. Entwickelt man jedes Glied nach ε , so wird die durch Umordnung entstehende Potenzreihe durch den Ausdruck

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} a k^n \varepsilon^n \right]^{\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{a k \varepsilon}{1 - k \varepsilon} \right)^{\nu} = \frac{a k \varepsilon}{1 - (1+a) k \varepsilon} = \sum_{\nu=1}^{\infty} a k^{\nu} (1+a)^{\nu-1} \varepsilon^{\nu}$$

majorisiert. Hieraus folgt

$$S(t, \alpha; \varepsilon) = \sum_{\nu=1}^{\infty} S_{\nu}(t, \alpha) \varepsilon^{\nu} \text{ mit } \|S_{\nu}(t, \alpha)\| \leq a k^{\nu} (1+a)^{\nu-1}, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

Setzt man

$$|A_0|^{1-\alpha} (A_0 + it)^{-1} S_{\nu}(t, \alpha) |A_0|^{\alpha} (A_0 + it)^{-1} = R_{\nu}(t),$$

so ist $R_{\nu}(t)$ beschränkt, und es gilt

$$(A(\varepsilon) + it)^{-1} = (A_0 + it)^{-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} R_{\nu}(t) \varepsilon^{\nu}$$

sowie die Abschätzung

$$|(R_{\nu}(t)x, y)| \leq a k^{\nu} (1+a)^{\nu-1} \| |A_0|^{\alpha} (A_0 + it)^{-1} x \| \| |A_0|^{1-\alpha} (A_0 + it)^{-1} y \|$$

für alle Elemente x, y aus $\mathfrak{H}$ und $-\infty < t < \infty$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Für $n \geq 1$ hat man die Relation

$$\|R_n(t) - \varepsilon^{-n} \{ (A(\varepsilon) + it)^{-1} - (A_0 + it)^{-1} - \sum_{\nu=1}^{n-1} R_{\nu}(t) \varepsilon^{\nu} \} \| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

gleichmäßig in $-\infty < t < \infty$ (für $n = 1$ ist die Summe durch Null zu ersetzen). Daraus, sowie aus der Tatsache, daß $(A(\varepsilon) + it)^{-1}$ und $(A_0 + it)^{-1}$ stetig von t abhängen, erschließt man schrittweise die Stetigkeit der Operatoren $R_n(t)$, also $\lim_{t \rightarrow t_0} \|R_n(t) - R_n(t_0)\| = 0$ für alle reellen Werte t_0 . Damit ist

Hilfssatz 2 vollständig bewiesen.

Im folgenden werden wir die Reihenentwicklung von $(A(\varepsilon) + it)^{-1}$ dazu benutzen, um die Regularität der eingangs erwähnten Funktionen von $A(\varepsilon)$ zu beweisen. Zu diesem Zweck wird eine geeignete Integraldarstellung benötigt. Das ist das Ziel des folgenden Hilfssatzes.

Hilfssatz 3.

Es sei A in $\mathfrak{D}_A$ selbstadjungiert, und das Spektrum sei in einer Umgebung von $\lambda = 0$ leer. $\{E_{\lambda}\}$ bedeute die zu A gehörige linksstetige Spektralschar, und es werde

$|A|^{\varrho} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^{\varrho} dE_{\lambda}$ gesetzt. Dann gilt für jedes feste Element f aus $\mathfrak{D}_{|A|^{\varrho}}$ und $-1 < \varrho < 1$ die Gleichung

$$(1 - 2E_0)|A|^{\varrho} f = \frac{\cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^{+l} |t|^{\varrho} (A + it)^{-1} f dt.$$

Beweis.

Aus

$$(A + it)^{-1} + (A - it)^{-1} = \int_{|\lambda| \geq d > 0} \frac{2\lambda}{\lambda^2 + t^2} dE_{\lambda}$$

folgt für $0 < t_1 < t_2 < \infty$ die Gleichung

$$\int_{t_1}^{t_2} t^e [(A + it)^{-1} + (A - it)^{-1}] f dt = \int_{|\lambda| \geq d} \left[\int_{t_1/|\lambda|}^{t_2/|\lambda|} \frac{2s^e ds}{1+s^2} \right] \cdot \frac{\lambda}{|\lambda|} \cdot |\lambda|^e dE_\lambda f.$$

Also wird

$$\begin{aligned} & \left\| (1 - 2E_0) |A|^e f - \frac{\cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} t^e [(A + it)^{-1} + (A - it)^{-1}] f dt \right\|^2 \\ &= \int_{|\lambda| \geq d} \left(1 - \frac{2 \cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \int_{t_1/|\lambda|}^{t_2/|\lambda|} \frac{s^e ds}{1+s^2} \right)^2 |\lambda|^{2e} d(f, E_\lambda f). \end{aligned}$$

Daraus erhält man wegen

$$\int_0^\infty \frac{s^e ds}{1+s^2} = \frac{\pi}{2 \cos \frac{1}{2} \pi \varrho} \quad \text{und} \quad \int_{|\lambda| \geq d} |\lambda|^{2e} d(f, E_\lambda f) < \infty$$

die Gleichung

$$\lim_{\substack{t_1 \rightarrow 0 \\ t_2 \rightarrow \infty}} \left\| (1 - 2E_0) |A|^e f - \frac{\cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} t^e [(A - it)^{-1} + (A + it)^{-1}] f dt \right\| = 0,$$

was mit der Behauptung identisch ist.

Wir sind jetzt in der Lage, das Hauptziel dieses Paragraphen zu beweisen, nämlich den

Satz 1.

Es seien die Voraussetzungen von Hilfssatz 2 erfüllt. Dann ist der Operator $B(\varepsilon) = (1 - 2E_0(\varepsilon)) |A(\varepsilon)|^e$ für $|\varepsilon| < k^{-1}(1+a)^{-1}$ und $-1 < \varrho < 1$ in $\mathfrak{D}_{B(0)}$ selbstadjungiert. Es gibt eine Folge in $\mathfrak{D}_{B(0)}$ erklärter Hermitescher Operatoren $B_1, B_2, \dots$ mit $\|B_n f\| \leq a k^n (1+a)^{n-1} \|B(0) f\|$ (f aus $\mathfrak{D}_{B(0)}$) derart, daß $B(\varepsilon) f = B(0) f + \varepsilon B_1 f + \dots$ für alle f aus $\mathfrak{D}_{B(0)}$ gilt.

Beweis.

Da die Operatoren $|A(\varepsilon)|$ für $|\varepsilon| < k^{-1}(1+a)^{-1}$ den gleichen Definitionsbereich besitzen und die Ungleichungen $\| |A(\varepsilon)| f \| \leq c(\varepsilon) \| |A(0)| f \|$ und $\| |A(0)| f \| \leq c(\varepsilon) \| |A(\varepsilon)| f \|$ für alle f aus $\mathfrak{D}_{|A(0)|} = \mathfrak{D}_{|A(\varepsilon)|}$ erfüllt sind, so ist nach § 1, Satz 3 auch $\mathfrak{D}_{|A(\varepsilon)|^e} = \mathfrak{D}_{|A(0)|^e}$ oder $\mathfrak{D}_{B(\varepsilon)} = \mathfrak{D}_{B(0)}$ für $|\varepsilon| < k^{-1}(1+a)^{-1}$. Bleibt noch die Regularität von $B(\varepsilon)$ zu beweisen. Nach Hilfssatz 2 und 3 gilt für jedes g aus $\mathfrak{H}$ und f aus $\mathfrak{D}_{B(0)}$ die Gleichung

$$\begin{aligned} (g, B(\varepsilon) f) &= \frac{\cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^{+l} |t|^e (g, (A(\varepsilon) + it)^{-1} f) dt \\ &= (g, B(0) f) + \frac{\cos \frac{1}{2} \pi \varrho}{\pi} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^{+l} |t|^e \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu (g, R_\nu(t) f) \right\} dt. \end{aligned}$$

Es sei $0 < t_1 < t_2 < \infty$. Dann hat man nach Hilfssatz 2, wenn darin $\alpha = \frac{1}{2} \varrho + \frac{1}{2}$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned}
& t_1 \leq |t| \leq t_2 \quad |t|^e |(g, R_\nu(t) f)| dt \leq a k^\nu (1+a)^{\nu-1} \times \\
& \times \int_{t_1 \leq |t| \leq t_2} |t|^e ||| A_0 |||^{\frac{1}{2}e + \frac{1}{2}} (A_0 + it)^{-1} f ||| ||| A_0 |||^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e} (A_0 + it)^{-1} g ||| dt \\
& \leq a k^\nu (1+a)^{\nu-1} \cdot \left[\int_{t_1 \leq |t| \leq t_2} |t|^e ||| A_0 |||^{\frac{1}{2}e + \frac{1}{2}} (A_0 + it)^{-1} f |||^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \times \\
& \times \left[\int_{t_1 \leq |t| \leq t_2} |t|^e ||| A_0 |||^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e} (A_0 + it)^{-1} g |||^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \\
& = a k^\nu (1+a)^{\nu-1} \cdot \left[\int_{t_1 \leq |t| \leq t_2} |t|^e \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda|^e + 1}{\lambda^2 + t^2} d(E_\lambda f, f) \right\} dt \right]^{\frac{1}{2}} \times \\
& \cdot \left[\int_{t_1 \leq |t| \leq t_2} |t|^e \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda|^{-e} + 1}{\lambda^2 + t^2} d(E_\lambda g, g) \right\} dt \right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Ferner wird, da $\lambda = 0$ nicht zum Spektrum von $A(0)$ gehört,

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1 \leq |t| \leq t_2} |t|^e \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda|^e + 1}{\lambda^2 + t^2} d(E_\lambda f, f) \right\} dt = \int_{|\lambda| \geq d > 0} |\lambda|^{2e} \left\{ \int_{t_1/|\lambda|}^{t_2/|\lambda|} \frac{2s^e ds}{1+s^2} \right\} d(E_\lambda f, f) \\
& \leq \int_{|\lambda| \geq d} |\lambda|^{2e} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{2s^e ds}{1+s^2} \right\} d(E_\lambda f, f) = \frac{\pi}{\cos \frac{1}{2} \pi e} ||| A_0 |^e f |||^2.
\end{aligned}$$

Durch eine ähnliche Rechnung ergibt sich

$$\int_{t_1 \leq |t| \leq t_2} |t| \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda|^{1-e}}{\lambda^2 + t^2} d(E_\lambda g, g) \right\} dt \leq \frac{\pi}{\cos \frac{1}{2} \pi e} \|g\|^2.$$

Daraus folgt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^e |(g, R_\nu(t) f)| dt \leq a k^\nu (1+a)^{\nu-1} \cdot \frac{\pi}{\cos \frac{1}{2} \pi e} ||| A_0 |^e f ||| \|g\|.$$

Setzt man daher

$$B_\nu(g, f) = \frac{\cos \frac{1}{2} \pi e}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^e \cdot (g, R_\nu(t) f) dt,$$

so ist $B_\nu(g, f)$ eine für alle g aus $\mathfrak{F}$ und f aus $\mathfrak{D}_{B(0)}$ erklärte bilineare Form, und es gilt

$$(g, B(\varepsilon) f) = (g, B(0) f) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^\nu B_\nu(g, f) \quad \text{für } |\varepsilon| < k^{-1} (1+a)^{-1}.$$

Wegen $(g, B(\varepsilon) f) = \overline{(B(\varepsilon) g, f)}$ ist $B_\nu(g, f) = \overline{B_\nu(f, g)}$ für g, f aus $\mathfrak{D}_{B(0)}$.

Daraus, sowie aus der Ungleichung

$$|B_\nu(g, f)| \leq a k^\nu (1+a)^{\nu-1} \|g\| \|B(0) f\|$$

folgt⁹⁾ die Existenz eines in $\mathfrak{D}_{B(0)}$ Hermiteischen Operators B , mit $B_\nu(g, f) = (g, B_\nu f)$ und $\|B_\nu f\| \leq a k^\nu (1+a)^{\nu-1} \|B(0) f\|$.

⁹⁾ STONE [10], Seite 63.

Es ergibt sich schließlich

$$B(\varepsilon)f = B(0)f + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} B_{\nu}f \quad \text{für } |\varepsilon| < k^{-1}(1+a)^{-1} \text{ und } f \text{ aus } \mathfrak{D}_{B(0)}.$$

Durch Spezialisierungen ergeben sich unmittelbar folgende Sätze.

Satz 2.

Es sei A_0 in $\mathfrak{D}_{A_0}$ selbstadjungiert und $A_0 \geq d > 0$. Ferner sei $A_1, A_2, \dots$ eine Folge in $\mathfrak{D}_{A_0}$ Hermitescher Operatoren mit

$$\|A_n x\| \leq a k^n \|A_0 x\| \quad \text{für alle } x \text{ aus } \mathfrak{D}_{A_0}.$$

Dann ist der Operator $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1 + \dots$ für $|\varepsilon| < k^{-1}(1+a)^{-1}$ in

$\mathfrak{D}_{A_0}$ selbstadjungiert und es gilt $A(\varepsilon) \geq d(\varepsilon) > 0$. Setzt man $A(\varepsilon)^e = \int_0^{\infty} \lambda^e dE_{\lambda}(\varepsilon)$,

wo $\{E_{\lambda}(\varepsilon)\}$ die zu $A(\varepsilon)$ gehörige linksstetige Spektralschar bedeutet, so gilt für $-1 < \varrho < 1$, $|\varepsilon| < k^{-1}(1+a)^{-1}$ und f aus $\mathfrak{D}_{A_0^e}$ die Entwicklung

$$A(\varepsilon)^e f = A_0^e f + \varepsilon C_1 f + \varepsilon^2 C_2 f + \dots$$

Dabei sind C_n ($n = 1, 2, \dots$) in $\mathfrak{D}_{A_0^e}$ Hermitesche Operatoren mit

$$\|C_n x\| \leq a k^n (1+a)^{n-1} \|A_0^e x\| \quad \text{für } x \text{ aus } \mathfrak{D}_{A_0^e}.$$

Beweis.

Nach Hilfssatz 2 ist $A(\varepsilon)$ in $\mathfrak{D}_{A_0}$ selbstadjungiert für $|\varepsilon| < k^{-1}(1+a)^{-1}$. Aus $\|A_n x\| \leq a k^n \|A_0 x\|$ folgt nach § 1, Satz 4, wenn man darin $y = x$ und $\tau = \frac{1}{2}$ setzt,

$$|(A_n x, x)| \leq a k^n \|A_0^{\frac{1}{2}} x\|^2 = a k^n (A_0 x, x)$$

für x aus $\mathfrak{D}_{A_0}$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} (A(\varepsilon)x, x) &\geq (A_0 x, x) - \sum_{n=1}^{\infty} |(A_n x, x)| |\varepsilon|^n \geq (1 - \sum_{n=1}^{\infty} a k^n |\varepsilon|^n) (A_0 x, x) \\ &= \frac{1 - (1+a)k|\varepsilon|}{1 - k|\varepsilon|} (A_0 x, x) \geq \frac{(1 - (1+a)k|\varepsilon|)d}{1 - k|\varepsilon|} \cdot (x, x) \end{aligned}$$

für $|\varepsilon| < k^{-1}(1+a)^{-1}$ und alle x aus $\mathfrak{D}_{A_0} = \mathfrak{D}_{A(\varepsilon)}$, also

$$A(\varepsilon) \geq \frac{(1 - (1+a)k|\varepsilon|)d}{1 - k|\varepsilon|} > 0.$$

Hieraus folgt $E_0(\varepsilon) = 0$ und $|A(\varepsilon)| = A(\varepsilon)$, also

$$B(\varepsilon) = (1 - 2E_0(\varepsilon)) |A(\varepsilon)|^e = A(\varepsilon)^e$$

für $|\varepsilon| < k^{-1}(1+a)^{-1}$. Anwendung von Satz 1 liefert schließlich die Behauptung.

Satz 3.

Es sei A_0 in $\mathfrak{D}_{A_0}$ selbstadjungiert, und das Spektrum von A_0 sei im Intervall $\lambda_0 - d < \lambda < \lambda_0 + d$ leer. $A_1, A_2, \dots$ sei eine Folge in $\mathfrak{D}_{A_0}$ Hermitescher Operatoren mit

$$\|A_n x\| \leq a k^n (\|A_0 x\| + \|x\|),$$

und es gelte $A(\varepsilon)u = A_0 u + \varepsilon A_1 u + \dots$ für u aus $\mathfrak{D}_{A_0}$.

Dann ist $A(\varepsilon)$ für $|\varepsilon| < k^{-1}(1+a)^{-1}$ in $\mathfrak{D}_{A_0}$ selbstadjungiert. Setzt man $\alpha = 1 + d^{-1}(1 + |\lambda_0|)$, und bedeutet $\{E_{\lambda}(\varepsilon)\}$ die zu $A(\varepsilon)$ gehörige linksstetige Spektralschar, so gilt für $|\varepsilon| < k^{-1}(1+a\alpha)^{-1}$ die Entwicklung

$$E_{\lambda_0}(\varepsilon) = E_{\lambda_0} + \varepsilon E_{\lambda_0}^{(1)} + \varepsilon^2 E_{\lambda_0}^{(2)} + \dots$$

mit $\|E_{\lambda_0}^{(n)}\| \leq \frac{1}{2} a \alpha (\alpha + 1)^{n-1} k^n$, $n = 1, 2, \dots$

Beweis.

I.¹⁰⁾ Offenbar ist $A(\varepsilon)$ in $\mathfrak{D}_{A_0}$ Hermitesch für $|\varepsilon| < k^{-1}$. Wenn t eine von 0 verschiedene reelle Zahl bedeutet, so ist

$$\begin{aligned} \|(A(\varepsilon) - A_0)(A_0 + it)^{-1}x\| &\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} a k^{\nu} |\varepsilon|^{\nu} [\|(A_0 + it)^{-1}x\| + \|A_0(A_0 + it)^{-1}x\|] \\ &\leq \frac{a k |\varepsilon|}{1 - k |\varepsilon|} (|t|^{-1} + 1) \|x\|. \end{aligned}$$

Für $|\varepsilon| < k^{-1}(1 + a)^{-1}$ und genügend großes $|t|$ ist daher

$$\begin{aligned} S(t) &= (A_0 + it)^{-1} [1 + (A(\varepsilon) - A_0)(A_0 + it)^{-1}]^{-1} \\ &= (A_0 + it)^{-1} \left[1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} [(A(\varepsilon) - A_0)(A_0 + it)^{-1}]^{\nu} \right] \end{aligned}$$

ein in ganz $\mathfrak{S}$ erklärter, beschränkter Operator mit dem Wertebereich $\mathfrak{B}_{S(t)} = \mathfrak{D}_{A_0}$, und es gilt die Gleichung

$$(A(\varepsilon) + it) S(t) f = f \quad \text{für jedes } f \text{ aus } \mathfrak{S}.$$

Daraus folgt aber, daß $A(\varepsilon)$ in $\mathfrak{D}_{A_0}$ selbstadjungiert ist.

II. Man setze $D_0 = A_0 - \lambda_0$ und $D(\varepsilon) = A(\varepsilon) - \lambda_0$. Dann wird $\|D_0 x\| \geq d \|x\|$ und $D(\varepsilon) = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots$ mit

$$\begin{aligned} \|D_n x\| &\leq a k^n (\|A_0 x\| + \|x\|) \\ &\leq a k^n (\|D_0 x\| + (1 + |\lambda_0|) \|x\|) \leq a k^n (1 + d^{-1}(1 + |\lambda_0|)) \|D_0 x\| \\ &\quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

für x aus $\mathfrak{D}_{A_0}$. Anwendung von Satz 1 auf den Operator $D(\varepsilon)$ liefert für $\varrho = 0$ die Behauptung.

Hieraus folgt unmittelbar

Satz 4.

Es sei $A(\varepsilon)$ in einem festen Definitionsbereich $\mathfrak{A}$ selbstadjungiert, und $A(\varepsilon)u$ sei für jedes u aus $\mathfrak{A}$ ein reguläres Element in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$. Außerdem sei $\lambda = 0$ eine Leerstelle des Spektrums von $A(0)$.

Dann ist auch $|A(\varepsilon)|u$ für u aus $\mathfrak{A}$ in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ ein reguläres Element.

Beweis.

Hilfssatz 1 und Satz 3 liefern die Regularität von $E_0(\varepsilon)$. Da $A(\varepsilon)u$ für jedes feste u aus $\mathfrak{A}$ ein reguläres Element in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$ ist, so folgt aus der Gleichung

$$|A(\varepsilon)|u = (1 - 2E_0(\varepsilon))A(\varepsilon)u$$

die Regularität von $|A(\varepsilon)|u$ in einer Umgebung von $\varepsilon = 0$.

§ 3. Stetige Abhängigkeit der Spektralschar von einem Parameter.

Es soll jetzt noch untersucht werden, wie die Spektralschar sich verhält, wenn nur stetige Abhängigkeit von ε vorausgesetzt wird. Dabei treten an Stelle von $A(\varepsilon)$ Folgen von Operatoren. Für den Fall der gewöhnlichen Konvergenz haben wir den

¹⁰⁾ Der Schritt 1 des Beweises findet sich bei B. v. SZ. NAGY [12], S. 353.

Satz 1¹¹⁾.

Es sei A in $\mathfrak{A}$ selbstadjungiert, und λ_* sei kein Punkteigenwert von A . Ferner sei $A^{(n)}$ eine Folge in $\mathfrak{A}^{(n)}$ selbstadjungierter Operatoren und $\mathfrak{D}$ eine in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^{(1)}$, $\mathfrak{A}^{(2)}$, ... enthaltene Linearmanigfaltigkeit. Ist dann A in $\mathfrak{D}$ wesentlich selbstadjungiert und gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^{(n)} f = A f \quad \text{für alle } f \text{ aus } \mathfrak{D},$$

so wird $\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\lambda_*}^{(n)} f = E_{\lambda_*} f$ für f aus $\mathfrak{D}$, wenn $\{E_{\lambda}^{(n)}\}$ und $\{E_{\lambda}\}$ die zu $A^{(n)}$ bzw. A gehörigen linksstetigen Spektralscharen bedeuten.

Beweis.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $\lambda_* = 0$ vorausgesetzt werden. Wegen der Selbstadjungiertheit von $A^{(n)}$ und A gilt

$$A^{(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_{\lambda}^{(n)} \quad \text{und} \quad A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_{\lambda}.$$

Es sei nun m eine positive ganze Zahl und $a \leq \lambda \leq b$ ein den Punkt $\lambda = 0$ nicht enthaltendes Intervall. f sei ein Element aus $\mathfrak{D}$. Wir setzen

$$\alpha = \text{Min}(|a|, |b|), \quad \beta = \text{Max}(|a|, |b|), \quad \lambda_v = a + \frac{b-a}{m} \cdot v,$$

ferner

$$(E_b - E_a) f = g \quad \text{und} \quad (E_{\lambda_v} - E_{\lambda_{v-1}}) f = g_v \quad (v = 1, 2, \dots, m).$$

Da A in $\mathfrak{D}$ wesentlich selbstadjungiert ist, so können wir zu jedem g , ein g'_v aus $\mathfrak{D}$ so bestimmen, daß die Ungleichungen

$$\|A g'_v - A g_v\| \leq \frac{1}{m^2} \quad \text{und} \quad \|g'_v - g_v\| \leq \frac{1}{m^2}$$

erfüllt sind. Dann hat man

$$\begin{aligned} A g'_v &= \int_{\lambda_{v-1}}^{\lambda_v} \lambda dE_{\lambda} g + (A g'_v - A g_v) = \lambda_v g_v + \int_{\lambda_{v-1}}^{\lambda_v} (\lambda - \lambda_v) dE_{\lambda} g_v + (A g'_v - A g_v) \\ &= \lambda_v g'_v + \lambda_v (g_v - g'_v) + (A g'_v - A g_v) + \int_{\lambda_{v-1}}^{\lambda_v} (\lambda - \lambda_v) dE_{\lambda} g_v. \end{aligned}$$

Also wird

$$\|(A^{(n)} - A) g'_v\| \geq \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda - \lambda_v)^2 d(g'_v, E_{\lambda}^{(n)} g'_v) \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1+\beta}{m^2} - \frac{\beta-\alpha}{m} \|g_v\|.$$

Für $\alpha > 0$ folgt hieraus

$$\begin{aligned} \|(A^{(n)} - A) g'_v\| &\geq \left[\int_{-\infty}^0 (\lambda - \lambda_v)^2 d(g'_v, E_{\lambda}^{(n)} g'_v) \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1+\beta}{m^2} - \frac{\beta-\alpha}{m} \|g_v\|. \\ &= \lambda_v \|E_0^{(n)} g_v\| - \frac{1+2\beta}{m^2} - \frac{\beta-\alpha}{m} \|g_v\|. \end{aligned}$$

Entsprechend erhält man für $\alpha < 0$ die Ungleichung

$$\|(A^{(n)} - A) g'_v\| \geq |\lambda_v| \|(1 - E_0^{(n)}) g_v\| - \frac{1+2\beta}{m^2} - \frac{\beta-\alpha}{m} \|g_v\|.$$

Beide Ungleichungen können zu

$$\|(A^{(n)} - A) g'_v\| \geq |\lambda_v| \|(E_0^{(n)} - E_0) g_v\| - \frac{1+2\beta}{m^2} - \frac{\beta-\alpha}{m} \|g_v\|$$

¹¹⁾ RELICH [4]. Wir geben für diesen Satz einen neuen Beweis.

zusammengefaßt werden und liefern

$$\|(E_0^{(n)} - E_0) g_v\| \leq \frac{1}{\alpha} \left\{ \|(A^{(n)} - A) g'_v\| + \frac{1+2\beta}{m^2} + \frac{\beta-\alpha}{m} \|g_v\| \right\}.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \|(E_0^{(n)} - E_0) g\| &\leq \sum_{v=1}^m \|(E_0^{(n)} - E_0) g_v\| \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \left\{ \sum_{v=1}^m \|(A^{(n)} - A) g'_v\| + \frac{1+2\beta}{m} + \frac{\beta-\alpha}{\sqrt{m}} \|g\| \right\}. \end{aligned}$$

Wenn wir m so bestimmen, daß

$$\frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{1+2\beta}{m} + \frac{\beta-\alpha}{\sqrt{m}} \|g\| \right\} \leq \varepsilon$$

ausfällt, und darauf N so wählen, daß

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{v=1}^m \|(A^{(n)} - A) g'_v\| \leq \varepsilon \quad \text{wird für } n \geq N,$$

so folgt

$$\|(E_0^{(n)} - E_0) g\| \leq 2\varepsilon, \quad \text{also } \lim_{n \rightarrow \infty} \|(E_0^{(n)} - E_0) g\| = 0.$$

Wenn f ein beliebiges Element in $\mathfrak{H}$ bedeutet, so setzen wir

$$f_k = \left(E_k - E_{\frac{1}{k}}\right) f + \left(E_{-\frac{1}{k}} - E_{-k}\right) f.$$

Da $\lambda = 0$ nicht Punkteigenwert von A ist, so gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$ und

$$\|(E_0^{(n)} - E_0) f_k\| \leq \|(E_0^{(n)} - E_0) f_k\| + 2\|f - f_k\|.$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(E_0^{(n)} - E_0) f_k\| = 0$ folgt schließlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(E_0^{(n)} - E_0) f\| = 0, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Wenn $A^{(n)}$ gleichmäßig gegen A konvergiert, also

$$\|(A^{(n)} - A) f\| \leq \varepsilon_n (\|f\| + \|A f\|) \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$

gilt, so läßt sich in einem wichtigen Falle die gleichmäßige Konvergenz der $E_{\lambda_0}^{(n)}$ gegen E_{λ_0} beweisen. Es gilt nämlich

Satz 2.

Es seien A und B in $\mathfrak{D}$ Hermitesch, und A sei in $\mathfrak{D}$ wesentlich selbstadjungiert. Außerdem gelte die Ungleichung

$$\|(B - A) x\| \leq k (\|x\| + \|A x\|) \quad \text{für } x \text{ aus } \mathfrak{D}.$$

Dann lassen sich A und B für $k < 1$ zu zwei in $\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{D}$ selbstadjungierten Operatoren fortsetzen. Die zu B und A gehörigen linksstetigen Spektralscharen seien $\{F_\lambda\}$ bzw. $\{E_\lambda\}$. Ist das Spektrum von A im Intervall $\lambda_0 - d < \lambda < \lambda_0 + d$ leer, so hat man

$$\|F_{\lambda_0} - E_{\lambda_0}\| \leq \frac{k(1 + d^{-1}(1 + |\lambda_0|))}{2\sqrt{1 - k(1 + d^{-1}(1 + |\lambda_0|))}},$$

sobald $k(1 + d^{-1}(1 + |\lambda_0|)) < 1$ *ist*¹²⁾.

¹²⁾ Dieser Satz enthält offenbar den Satz 7 aus RELICH [4].

Beweis.

I. Nach Voraussetzung läßt sich A zu einem in $\mathfrak{A}$ selbstadjungierten Operator durch Abschließen fortsetzen. Ist x ein Element aus $\mathfrak{A}$, so gibt es eine Folge $\{x_n\}$ aus $\mathfrak{D}$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|A x_n - A x\| = 0.$$

Also wird

$$\|B(x_n - x_m)\| \leq k \|x_n - x_m\| + (1 + k) \|A x_n - A x_m\| \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty.$$

B läßt sich also durch Abschließen zu einem in $\mathfrak{A}$ Hermiteschen Operator fortsetzen. Die Tatsache, daß B in $\mathfrak{A}$ selbstadjungiert ist für $k < 1$, wird genau so bewiesen wie in § 2, Satz 3.

II. Es seien $\{F_\lambda\}$ und $\{E_\lambda\}$ die zu B bzw. A gehörigen Spektralscharen. Setzt man

$$A' = A - \lambda_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dE'_\lambda \quad \text{und} \quad B' = B - \lambda_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dF'_\lambda,$$

so gilt $E_{\lambda_0} = E'_0$ und $F_{\lambda_0} = F'_0$.

$$\text{Aus} \quad \|(B - A)x\| \leq k (\|Ax\| + \|x\|)$$

folgt

$$\begin{aligned} \|(B' - A')x\| &\leq k (\|A'x\| + (1 + |\lambda_0|)\|x\|) \\ &\leq k (1 + d^{-1}(1 + |\lambda_0|)) \|A'x\| = K \|A'x\|, \end{aligned}$$

wenn man $K = k(1 + d^{-1}(1 + |\lambda_0|))$ setzt.

Daraus ergibt sich

$$\|B'x\| \geq \|A'x\| - \|(A' - B')x\| \geq (1 - K) \|A'x\|,$$

$$\text{also} \quad \|A'x\| \leq (1 - K)^{-1} \|B'x\| \quad \text{und} \quad \|B'x\| \geq (1 - K) d \|x\|$$

für alle x aus $\mathfrak{A}$, sobald $K < 1$ wird. Hieraus folgt, daß die Operatoren

$$(A' + it)^{-1} \quad \text{und} \quad (B' + it)^{-1}$$

für $-\infty < t < \infty$ beschränkt sind.

Aus $\|(B' - A')x\| \leq K \|A'x\|$ folgt nach § 1, Satz 4, wenn darin $\tau = \frac{1}{2}$ gesetzt wird,

$$|((B' - A')x, y)| \leq K \|A'\|^{\frac{1}{2}} x\| \|A'\|^{\frac{1}{2}} y\| \quad \text{für } x, y \text{ aus } \mathfrak{A}.$$

Weiter ergibt sich aus $\|A'y\| \leq (1 - K)^{-1} \|B'y\|$ unter Anwendung von § 1, Satz 3 mit $\tau = \frac{1}{2}$ die Ungleichung

$$\|A'\|^{\frac{1}{2}} y\| \leq (1 - K)^{-\frac{1}{2}} \|B'\|^{\frac{1}{2}} y\|.$$

Wir erhalten also

$$|((B' - A')x, y)| \leq K (1 - K)^{-\frac{1}{2}} \|A'\|^{\frac{1}{2}} x\| \|B'\|^{\frac{1}{2}} y\|$$

für x, y aus $\mathfrak{A}$. Hilfssatz 3, § 2 mit $\varrho = 0$ liefert

$$\begin{aligned} (F'_0 - E'_0) f &= (2\pi)^{-1} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^{+l} [(A' + it)^{-1} - (B' + it)^{-1}] f \, dt \\ &= (2\pi)^{-1} \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-l}^{+l} (B' + it)^{-1} (B' - A') (A' + it)^{-1} f \, dt. \end{aligned}$$

Daraus folgt für f, g aus $\mathfrak{H}$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} |((F'_0 - E'_0)f, g)| &\leq (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} |(B' - A')(A' + it)^{-1}f, (B' - it)^{-1}g| dt \\ &\leq (2\pi)^{-1} K(1-K)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \|A'\|^{\frac{1}{2}} (A' + it)^{-1}f \|B'\|^{\frac{1}{2}} (B' - it)^{-1}g dt \\ &\leq (2\pi)^{-1} K(1-K)^{-\frac{1}{2}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \|A'\|^{\frac{1}{2}} (A' + it)^{-1}f \|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \|B'\|^{\frac{1}{2}} (B' - it)^{-1}g \|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Für $0 < t_1 < \infty$ und $0 < d_1 < d$ erhält man

$$\begin{aligned} \int_{-t_1}^{+t_1} \|A'\|^{\frac{1}{2}} (A' + it)^{-1}f \|^2 dt &= \int_{-t_1}^{+t_1} \left[\int_{|\lambda| \geq d_1} \frac{|\lambda|}{\lambda^2 + t^2} d(E_\lambda f, f) \right] dt \\ &= \int_{|\lambda| \geq d_1} \left[\int_{-t_1/|\lambda|}^{t_1/|\lambda|} \frac{ds}{1+s^2} \right] d(E_\lambda f, f), \\ \text{also } \int_{-\infty}^{+\infty} \|A'\|^{\frac{1}{2}} (A' + it)^{-1}f \|^2 dt &\leq \pi(f, f). \end{aligned}$$

Ebenso wird

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|B'\|^{\frac{1}{2}} (B' - it)^{-1}g \|^2 dt \leq \pi(g, g).$$

Es ergibt sich also

$$|((F'_0 - E'_0)f, g)| \leq \frac{1}{2} K(1-K)^{-\frac{1}{2}} \|f\| \|g\|.$$

Hieraus folgt

$$\|F_{\lambda_0} - E_{\lambda_0}\| \leq \frac{k(1+d^{-1}(1+|\lambda_0|))}{2\sqrt{(1-k(1+d^{-1}(1+|\lambda_0|)))}},$$

sobald

$$k(1+d^{-1}(1+|\lambda_0|)) < 1$$

ist.

Literatur.

[1] HELLINGER-TOEPLITZ: Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, Enzyklopädie der Math. Wiss. II. 3b. — [2] HERGLOTZ, G.: Über Potenzreihen mit positivem, reellem Teil im Einheitskreis, Leipz. Ber. **63** (1911). — [3] LÖWNER, K.: Über monotone Matrixfunktionen, Math. Z. **38**, 177—216 (1934). — [4] RELICH, F.: Störungstheorie der Spektralzerlegung, II. Mitt. Math. Ann. **113**, 677—685 (1937). — [5] RELICH, F.: Störungstheorie der Spektralzerlegung, III. Mitt. Math. Ann. **116**, 555—570 (1939). — [6] RELICH, F.: Störungstheorie der Spektralzerlegung, V. Mitt. Math. Ann. **118**, 462—484 (1941/43). — [7] RELICH, F.: Störungstheorie der Spektralzerlegung, Berichte des Internationalen Mathematikerkongresses in Cambridge (Mass.) 1950. — [8] RELICH, F.: Halbbeschränkte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung, Math. Ann. **122**, 343—368 (1950). — [9] SCHUR, I.: Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen, J. angew. Math. **140**, 1—28 (1911). — [10] STONE, M. H.: Linear Transformations in Hilbert Space, New York 1932. — [11] B. v. SZ. NAGY: Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes, Erg. Math. **5**, 416—496 (1942). — [12] B. v. SZ. NAGY: Perturbations des Transformations Autoadjointes dans l'Espace de Hilbert, Comment. math. helvet. **19**, 347—366 (1946/47).

(Eingegangen am 19. März 1951.)