SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Mathematische Annalen
Verlag: Springer
Jahr: 1966
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN235181684_0163
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0163

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Mathematische Annalen

Begründet 1868 durch Alfred Clebsch · Carl Neumann

Fortgeführt durch Felix Klein · David Hilbert
Otto Blumenthal · Erich Hecke

Herausgegeben von **Heinrich Behnke,** Münster i. W.
Richard Courant, New York
Hans Grauert, Göttingen
Friedrich Hirzebruch, Bonn
Heinz Hopf, Zürich
Gottfried Köthe, Frankfurt/M.
Bartel L. van der Waerden, Zürich

Band 163 · 1966

Springer-Verlag · Berlin · Heidelberg · New York

Alle Rechte, einschließlich das der Übersetzung in fremde Sprachen und das der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung, vorbehalten. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0,30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Springer-Verlag/Berlin · Heidelberg · New York

Printed in Germany

Druck der Brühlschen Universitätsdruckerei Gießen

NIEDERSÄCHS.
STAATS- U. UNIV.-
BIBLIOTHEK
GÖTTINGEN

Z 1966.5039

Inhalt des 163. Bandes

Seite

ARENS, R., Weierstrass Products for Inverse Limits of Banach Algebras 155
(Anschrift: Department of Mathematics, University of California, Los Angeles, California/USA)

ARONSZAJN, N., and P. SZEPTYCKI, On general integral transformations 127
(Anschrift: State University of Kansas, Lawrence, Kansas/USA)

BERENS, H., u. P. L. BUTZER, Über die Stetigkeit von Halbgruppen von Operatoren in intermediären Räumen 204
(Anschrift: Technische Hochschule, Lehrstuhl für Analysis, 5100 Aachen)

BESSAGA, C., and V. KLEE, Every Non-normable Frechet Space is Homeomorphic with all of its Closed Convex Bodies 161
(Anschrift: Department of Mathematics, University of Washington, Seattle 5, Washington/USA)

BOS, W., Ein Beitrag zur Theorie der stabilen Mannigfaltigkeiten 268
(Anschrift: Institut für angew. Mathematik, 6900 Heidelberg, Zeppelinstraße 151)

BUTZER, P. L., s. BERENS, H. 204

CORDES, H. O., Über eine nichtalgebraische Charakterisierung von I-Fredholm-Operatoren 212
(Anschrift: Department of Mathematics, University of California, Berkeley, California/USA)

CREMER, H., u. R. KAERKES, Eine Verallgemeinerung der Stabilitätskriterien von L. CREMER und A. LEONHARD 259
(Anschrift: Technische Hochschule, Institut für Mathematik und Großrechenanlagen, 5100 Aachen)

DIEUDONNÉ, J., Sur la Séparation des Ensembles Convexes 1
(Anschrift: Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 5 Rond-Point Bugeaud, Paris 16^{e}, Frankreich)

DOUGLIS, A., On Weak Solutions of Non-Linear Partial Differential Equations with Real Characteristics 351
(Anschrift: Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, Maryland/USA)

ELLIGER, S., Über galoissche Körpererweiterungen von unendlichem Rang 359
(Anschrift: 6901 Heidelberg-Eppelheim, Wasserturmstr. 36)

FAN, K., Applications of a Theorem Concerning Sets with Convex Sections 189
(Anschrift: Department of Mathematics, University of California, Santa Barbara, Calif. 93106/USA)

FISCHER, B., Frobeniusautomorphismen endlicher Gruppen 273
(Anschrift: Dept. of Mathematics, Yale University, Box 2155, Yale Station, New Haven, Conn./USA)

GARNIR, H. G., Dual d'un espace d'opérateurs linéaires 4
(Anschrift: 14, rue Joiret, Angleur (Liège), Belgien)

GRUNSKY, H., Über die Reduktion eines linearen Differentialoperators zweiter Ordnung im Komplexen 312
(Anschrift: Mathematisches Institut der Univ., 87 Würzburg, Klinikstr. 6)

HILDEBRANDT, S., Über den numerischen Wertebereich eines Operators 230
(Anschrift: Mathematisches Institut der Universität, 6500 Mainz, Saarstraße 21)

KAERKES, R., s. CREMER, H. 259

KEGEL, O. H., Über den Normalisator von subnormalen und erreichbaren Untergruppen 248
(Anschrift: Mathematisches Seminar der Universität, 6000 Frankfurt/Main)

Seite

KELLEY, J. L., Decomposition and Representation Theorems in Measure Theory . . . 89
(Anschrift: Department of Mathematics, University of California, Berkeley, California/USA)

KLEE, V., s. BESSAGA, C. 161

KÖNIG, H., Zur abstrakten Theorie der analytischen Funktionen, II 9
(Anschrift: Mathematisches Institut der Univ., 66 Saarbrücken, Danziger Straße 1)

KOMURA, Y., and S. KOSHI, Nuclear Vector Lattices 105
(Anschriften: Institut für angew. Mathematik, 6900 Heidelberg, Tiergartenstraße; Hokkaido University, Department of Mathematics, Sapporo/Japan)

KOSHI, S., s. KOMURA, Y. 105

KULTZE, R., Über die Poincaré-Dualität in der Bordismentheorie 305
(Anschrift: 69 Heidelberg, Zur Forstquelle 3)

KUNZ, E., Gruppenringe und Differentiale 346
(Anschrift: Mathematisches Institut der Univ., 69 Heidelberg, Tiergartenstr.)

LANDSBERG, M., u. TH. RIEDRICH, Über positive Eigenwerte kompakter Abbildungen in topologischen Vektorräumen 50
(Anschriften: Radebeul 1, Lößnitzgrundstr. 2; Dresden-A 19, Heubnerstr. 6)

LEPTIN, H., Faltungen von Borelschen Maßen mit L^p-Funktionen auf lokal kompakten Gruppen 111
(Anschrift: Institut für angew. Mathematik, 6900 Heidelberg, Tiergartenstraße)

MARTINEAU, A., Sur la topologie des espaces de fonctions holomorphes 62
(Anschrift: Université de Montpellier, Faculté des Sciences Mathématiques, Montpellier/France, Chemin des Brusses)

MICHLER, G., Der Satz von Artin-Wedderburn und der Satz von Goldie 299
(Anschrift: Mathematisches Seminar der Univ., 6 Frankfurt/M., Robert-Mayer-Straße 6)

PTÁK, V., Some Metric Aspects of the Open Mapping and Closed Graph Theorems . . 95
(Anschrift: Ceskoslovenská akademie ved, Mathmatický Üstav, Zitná 25, Praha 1—Nové Mêsto/CSSR)

REITER, H., Zwei Anwendungen der Bruhatschen Funktion 118
(Anschrift: Mathematisch Instituut der Rijksuniversiteit, Boothstraat 17, Utrecht, Holland)

RIEDRICH, TH., s. LANDSBERG, M. 50

STUMMEL, F., Über die Differenzenapproximation des Dirichletproblems für eine lineare elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung 321
(Anschrift: Mathematisches Seminar der Univ., 6 Frankfurt/M., Robert Mayer-Straße 8)

SZEPTYCKI, P., s. ARONSZAJN, N. 127

TAYLOR, A. E., Theorems on Ascent, Descent, Nullity and Defect of Linear Operators . 18
(Anschrift: Dept. of Mathematics, University of California, Los Angeles 23 Calif./USA)

WAELBROECK, L., Duality and the Injective Tensor Product. 122
(Anschrift: Université: Institut de Mathématique, Avenue F.-D. Roosevelt, 50, Bruxelles 5/Belgium)

WEIDMANN, J., Integraloperatoren der Spurklasse 340
(Anschrift: Institut für angew. Mathematik, 69 Heidelberg, Tiergartenstr.)

WLOKA, J., Reproduzierende Kerne und nukleare Räume. I. 167
(Anschrift: Institut für angew. Mathematik, 6900 Heidelberg, Tiergartenstraße)

Mathematische Annalen

Begründet 1868 durch Alfred Clebsch · Carl Neumann

Fortgeführt durch Felix Klein · David Hilbert
Otto Blumenthal · Erich Hecke

Herausgegeben von **Heinrich Behnke,** Münster i. W.
Richard Courant, New York
Hans Grauert, Göttingen
Friedrich Hirzebruch, Bonn
Heinz Hopf, Zürich
Gottfried Köthe, Frankfurt/M.
Bartel L. van der Waerden, Zürich

Band 163 · Heft 1 · 1966

Springer-Verlag · Berlin · Heidelberg · New York

Math. Ann. · Abgeschlossen am 4. Februar 1966 · A 21 265 D

Mathematische Annalen

Begründet 1868 durch *Alfred Clebsch* und *Carl Neumann*, früher herausgegeben von *Alfred Clebsch* (1869—1872), *Carl Neumann* (1869—1876), *Felix Klein* (1876—1924), *Adolph Mayer* (1876—1901), *Walther v. Dyck* (1888—1921), *David Hilbert* (1902—1939), *Otto Blumenthal* (1906—1938), *Albert Einstein* (1920—1928), *Constantin Carathéodory* (1925—1928), *Erich Hecke* (1929—1947), *Franz Rellich* (1947—1955), *Kurt Reidemeister* (1947—1963).

Band 1—80 Leipzig, B. G. Teubner, ab Band 81 (1920) Berlin, Springer.

An unsere Mitarbeiter!

Die Korrekturkosten sind bei den „Mathematischen Annalen" sehr hoch. Für ihre Verminderung muß unbedingt Sorge getragen werden. Wir richten deshalb an alle unsere Mitarbeiter die freundliche dringende Bitte, zu diesem Ziele an ihrem Teile mit beitragen zu wollen. Dazu ist nötig:

1. Das Manuskript muß *völlig druckfertig* und *gut leserlich* sein und für den Setzer *gemäß den „Hinweise für die Autoren"* (herausgegeben von Redaktion und Verlag) vorbereitet sein. — Diese Hinweise können von der Redaktion angefordert werden.

2. Veränderungen des Textes in der Korrektur sind auf die Fälle zu beschränken, wo sich nachträglich *wirkliche Irrtümer* herausstellen. Insbesondere sind rein stilistische Verbesserungen zu unterlassen. Sollte ein Irrtum bemerkt werden, noch bevor Korrektur eingetroffen ist, dann ist ein verbesserter Text sofort an die Redaktion zu schicken, die dafür Sorge tragen wird, daß das Manuskript noch vor dem Satz berichtigt wird.

Jede Änderung des schon gesetzten Textes muß zu Lasten der Autoren gehen.

Die Reihenfolge der Veröffentlichungen behält sich die Redaktion vor.

Die Redaktion der Mathematischen Annalen

Mathematische Annalen

Erscheinen zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung zwanglos in Heften, die zu Bänden vereinigt werden. Sie sind durch jede Buchhandlung zu beziehen. Der Preis des Bandes beträgt DM 96,—.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskripts und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0,30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Mathematischen Annalen bestimmte Manuskripte können bei jedem der unten verzeichneten Redaktionsmitglieder eingereicht werden:

Professor Dr. Dr. h. c. H. Behnke, 44 Münster/Westf., Rottendorffweg 17,

Professor Dr. R. Courant, 142 Calton Road, New Rochelle, N. Y. USA,

Professor Dr. H. Grauert, Mathematisches Institut der Universität, 34 Göttingen, Bunsenstr. 3—5,

Professor Dr. F. Hirzebruch, Mathematisches Institut der Universität, 53 Bonn (Rhein), Wegelerstr. 10

Professor Dr. Dr. h. c. H. Hopf, Zollikon bei Zürich, Alte Landstraße 37,

Professor Dr. Dr. h. c. G. Köthe, 6 Frankfurt/Main, Parkstraße 14[1],

Professor Dr. Dr. h. c. B. L. van der Waerden, Mathematisches Institut der Universität Zürich, 8006 Zürich/Schweiz

Inhaltsverzeichnis des Heftes auf Seite 4

DIEUDONNÉ, J.
Math. Annalen 163, 1—3 (1966)

Sur la Séparation des Ensembles Convexes

A Monsieur G. KÖTHE, à l'occasion de son soixantième anniversaire

Par

JEAN DIEUDONNÉ à Nice

1. On s'est assez souvent occupé, dans ces dernières années, des ensembles convexes *localement compacts* ([1], [2], [3]). Je me propose dans cette note de montrer que les méthodes utilisées dans l'étude de ces ensembles donnent un théorème de séparation qui ne paraît pas avoir été formulé, et qui est, en un certain sens, le „meilleur possible" dans cette direction.

2. Soient E un espace vectoriel topologique séparé, A un ensemble convexe fermé non vide dans E. On sait que pour tout $a \in A$, l'ensemble intersection des ensembles $\lambda(A - a)$, où λ parcourt l'ensemble des nombres réels > 0, est un cône convexe fermé C_A de sommet 0 dans E, indépendant du point a choisi, qu'on appelle le *cône asymptote* de A; pour tout $a \in A$, $a + C_A$ est la réunion de $\{a\}$ et des demi-droites ouvertes d'origine a contenues dans A. Il est facile de donner des exemples d'ensembles convexes fermés non bornés dans un espace de Banach pour lesquels C_A est réduit à 0. Mais cela ne peut se produire pour un ensemble convexe fermé *localement compact* et *non compact* A. De façon plus précise, on a le lemme suivant, qui va nous servir plus loin:

Lemme. — *Soient E un espace vectoriel topologique séparé, A un ensemble convexe fermé dans E, localement compact et non compact; soient a un point de A, W un voisinage fermé, équilibré et absorbant de 0 dans E, tel que $A \cap (a + W)$ soit compact. Soit $\mathfrak{S}$ la base de filtre sur A formée des ensembles $A \cap \complement(a + nW)$, où n parcourt l'ensemble des entiers > 0, et soit $\mathfrak{F}$ un filtre plus fin que le filtre de base $\mathfrak{S}$. Pour tout ensemble $N \in \mathfrak{F}$, soit $C(N)$ le cône de sommet a engendré par N; alors il existe une demi-droite d'origine a, contenue dans $a + C_A$, et contenue dans l'adhérence de chacun des cônes $C(N)$.*

On peut se borner pour simplifier au cas où $a = 0$. Puisque A est convexe et W équilibré, on a $A \cap nW \subset n(W \cap A)$, donc $A \cap nW$ est relativement compact, et l'hypothèse que A est non compact entraîne bien que $\mathfrak{S}$ est une base de filtre. Soit d'autre part K l'intersection de $A \cap W$ et du complémentaire de l'intérieur de $\frac{1}{2}W$; K est évidemment compact; toute demi-droite d'origine 0 contenant un point de $A \cap \complement(nW)$ contient un point de K, donc les ensembles $C(N) \cap K$ forment une base de filtre sur K, qui a par suite un point adhérent $x_0 \in K$, donc $x_0 \neq 0$. Pour tout nombre réel $\lambda > 0$, λx_0 est adhérent à tous les $C(N) \cap nW$, où $n > \lambda$ et $N \subset A \cap \complement(nW)$; comme $C(N) \cap nW$ est contenu dans A, on a $\lambda x_0 \in A$, et la demi-droite d'origine 0 passant par x_0 répond à la question.

3. Proposition 1. — *Soient E un espace vectoriel topologique séparé, A, B deux ensembles convexes fermés non vides dans E. On suppose que A est localement compact et que $C_A \cap C_B = \{0\}$. Dans ces conditions $B - A$ est fermé dans E.*

La proposition est classique lorsque A est compact; on peut donc supposer A non compact, et garder alors les notations du lemme. Soit c un point adhérent à $B - A$; pour tout voisinage équilibré V de 0 dans E, l'ensemble M_V des $x \in A$ tels que $c + x + V$ rencontre B n'est pas vide, et il est clair que les M_V forment la base d'un filtre $\mathfrak{F}$ sur A. Si l'un au moins des M_V est relativement compact, $\mathfrak{F}$ admet un point adhérent $x_0 \in A$ et on a $c + x_0 \in B + 2V$ pour tout voisinage V de 0, donc $c \in B - A$. Supposons donc qu'aucun des M_V ne soit relativement compact, de sorte que pour tout V et tout entier $n > 0$, $M_V \cap A \cap \complement (a + nW) = P_{V,n}$ n'est pas vide. Les $P_{V,n}$ forment la base d'un filtre $\mathfrak{G}$ auquel on peut appliquer le lemme; il y a donc une demi-droite $D \subset A$, d'origine a, contenue dans l'adhérence de chacun des cônes $C(P_{V,n})$. Nous allons voir que pour $b \in B$, la demi-droite $D' = (b - a) + D$ d'origine b est contenue dans B, ce qui contredira l'hypothèse $C_A \cap C_B = \{0\}$, et achèvera la démonstration. Soit donc z tel que $a + z \in D$, et prouvons que $b + z \in B$. Soit n_0 un entier tel que $a + z$ soit intérieur à $a + n_0 W$. Pour tout voisinage V de 0 et tout entier n, il existe $\lambda > 0$ et $v \in V$ tels que $x = a + \lambda(z + v) \in P_{V,n}$ et que $a + z + v$ soit contenu dans $a + n_0 W$; on a donc par définition $\lambda \geqq n/n_0$. D'autre part, par hypothèse on peut écrire $x = y - c + v'$ avec $y \in B$ et $v' \in V$; par suite, on a

$$b + z = b + \lambda^{-1}(y - b) + \lambda^{-1}(b - a - c) + \lambda^{-1}v' - v\,.$$

Or, on a, pour $n > n_0$, $b + \lambda^{-1}(y - b) \in B$; on peut d'autre part prendre n assez grand pour que $\lambda^{-1}(b - a - c) \in V$; comme $\lambda^{-1}v' \in V$, on a finalement $b + z \in B + 3V$; comme V est arbitraire et que B est fermé, cela entraîne bien $b + z \in B$. CQFD.

Corollaire. — *Soient E un espace localement convexe séparé, A et B deux ensembles convexes fermés non vides dans E. On suppose que A est localement compact, que $A \cap B = \emptyset$ et que $C_A \cap C_B = \{0\}$. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B.*

En effet, $B - A$ est fermé d'après la prop. 1 et $0 \notin B - A$; il existe donc une forme linéaire continue f non identiquement nulle sur E, telle que $f(x) \geqq 0$ pour $x \in B - A$. On en tire aussitôt qu'il existe un nombre γ tel que $f(y) \geqq \gamma \geqq f(z)$ pour $y \in B$ et $z \in A$, d'où le corollaire.

4. Montrons maintenant que dans le corollaire précédent, on ne peut supprimer l'hypothèse $C_A \cap C_B = \{0\}$ même lorsqu'on suppose que A et B sont *tous deux* localement compacts. Partons d'un exemple d'ensemble convexe compact dont un point frontière est tel que par ce point ne passe aucun hyperplan d'appui (exemple dû à N. BOURBAKI): pour construire un tel ensemble, considérons un espace hilbertien réel E de dimension infinie, canoniquement identifié à son dual, et soit B la boule unité $\|x\| \leqq 1$ dans E. Si F est un sous-espace vectoriel partout dense dans E, distinct de E, la topologie $\sigma(E, F)$ sur E est séparée, et comme B est compacte pour la topologie faible $\sigma(E, E)$

elle l'est aussi pour la topologie moins fine $\sigma(E, F)$ (qui induit sur B la même topologie que $\sigma(E, E)$). D'autre part, si $b \in B$ est un point tel que $\|b\| = 1$ et $b \notin F$, il n'existe aucun hyperplan d'appui de B passant par b et fermé pour $\sigma(E, F)$. Considérons maintenant l'espace produit $G = E \times \mathbf{R}$, E étant muni de $\sigma(E, F)$; soit A l'ensemble des couples (x, ζ) de G tels que $\|x\| < 1$, $\zeta \geqq \geqq \|x\|/(1 - \|x\|)$. Il est clair que A est convexe et fermé dans G, la fonction $\|x\|/(1 - \|x\|)$ étant semi-continue inférieurement pour la topologie $\sigma(E, F)$ sur E. En outre, pour tout $\zeta_0 > 0$, l'ensemble des points (x, ζ) de A tels que $\zeta \leqq \zeta_0$ est contenu dans l'ensemble produit de B et du segment $0 \leqq \zeta \leqq \zeta_0$ dans $\mathbf{R}$, donc est compact, ce qui montre que A est localement compact. Considérons d'autre part la droite $D = \{b\} \times \mathbf{R}$ dans G. Il est clair que $A \cap D = \emptyset$, mais un hyperplan séparant A et D devrait être de la forme $H \times \mathbf{R}$, où H est un hyperplan d'appui de B dans E, au point b; comme il n'existe pas de tel hyperplan fermé, A et D ne peuvent être séparés par un hyperplan fermé.

Bibliographie

[1] Choquet, G.: Ensembles et cônes convexes faiblement complets. C. R. Acad. Sci. **254**, 1908 et 2123 (1962).
[2] Klee, V.: Separation properties of convex cones. Proc. Am. Math. Soc. **6**, 313 (1955).
[3] Gale, D., and V. Klee: Continuous convex sets. Math. Scand. **7**, 379 (1959).

(Reçu le 12 juillet 1965)

GARNIR, H. G.
Math. Annalen 163, 4—8 (1966)

Dual d'un espace d'opérateurs linéaires

A Monsieur G. KÖTHE pour son 60ème anniversaire

Par

H. G. GARNIR à Liège

Sommaire. On établit d'une manière très élémentaire la nature du dual de l'espace $\mathscr{L}_{pc}(E, F)$ des opérateurs linéaires bornés (= continus) T de l'espace E muni des semi-normes dénombrables $\{p\}$ dans l'espace F muni des semi-normes $\{q\}$* séparable par semi-norme*[1]), cet espace $\mathscr{L}_{pc}$ étant semi-normé par les

$$\sup_{f \in K} q(Tf),$$

où K désigne un précompact arbitraire de E.

1. Nous utilisons le vocabulaire et les notations de [1][2]). Soit E un espace linéaire de semi-normes $\{p\}$, F un espace linéaire de semi-normes $\{q\}$. Ces semi-normes sont supposées filtrantes et séparantes.

Un opérateur linéaire de E dans F est borné (= continu) si à tout q on peut associer p tel que

$$q(Tf) \leqq C_q p(f).$$

Les opérateurs T bornés de E dans F constituent l'espace linéaire $\mathscr{L}(E, F)$.

L'espace $\mathscr{L}(E, F)$, semi-normé par

$$\sup_{f \in K} q(Tf),$$

K désignant un précompact quelconque de E, détermine un espace linéaire à semi-normes $\mathscr{L}_{pc}(E, F)$.

Nous nous proposons de montrer que *toute fonctionnelle linéaire* $\mathfrak{T}(T)$, *définie sur* $\mathscr{L}_{pc}(E, F)$ *et bornée* (= continue), *c'est-à-dire telle que*

$$|\mathfrak{T}(T)| \leqq C \sup_{x \in K} q(Tf),$$

a la forme

$$\mathfrak{T}(T) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \mathfrak{L}_m(Tf_m),$$

où

$$\lambda_m \geqq 0, \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \leqq 1,$$

$$|\mathfrak{L}_m(f)| \leqq C q(f), \forall f \in F,$$

$$f_m \to 0, \quad \text{dans} \quad E,$$

[1]) Les considérations entre * sont inutiles si on admet l'axiome de M. ZORN.

[2]) Les nombres entre crochets renvoient à la Bibliographie, en fin d'article.

*pour autant que E soit à semi-normes dénombrables *et F séparable par semi-norme**. (Voyez [5], exposé n° 14, pour la démonstration transcendante du cas particulier de K compact absolument convexe).

Notons immédiatement que la forme proposée pour $\mathfrak{T}(T)$ caractérise bien une fonctionnelle linéaire définie dans $\mathscr{L}_{pc}(E, F)$ et bornée (= continue).

En effet, la série converge, car

$$|\lambda_m \mathfrak{L}_m(Tf_m)| \leqq C \cdot \lambda_m q(Tf_m) \leqq C \cdot \lambda_m \sup_{m=1,2,\ldots} q(Tf_m) ,$$

et on a

$$|\mathfrak{T}(T)| \leqq C \cdot \sup_{m=1,2,\ldots} q(Tf_m) = C \cdot \sup_{f \in K} q(Tf) ,$$

en prenant pour K le précompact formé par la suite $\{f_1, f_2, \ldots\}$ convergente vers 0 dans E.

2. Commençons par étudier un espace linéaire $c_0(E)$ associé à un espace donné E, linéaire et muni des semi-normes $\{p\}$, (cf. [3] pour des considérations analogues).

Appelons $c_0(E)$ l'espace des suites $(x_1, x_2, \ldots)$ d'éléments de E qui tendent vers 0 dans E.

C'est un espace linéaire si nous convenons de combiner linéairement ces vecteurs d'éléments de E, éléments à éléments.

Semi-normons cet espace par les semi-normes

$$\mathscr{P}[(x_1, x_2, \ldots)] = \sup_{m=1,2,\ldots} p(x_m) ,$$

associées à chaque semi-norme p de E.

Ces expressions sont définies, puisque $x_m \to 0$ dans E. Ce sont bien des semi-normes, car

$$\sup_{m=1,2,\ldots} p(\lambda x_m) = |\lambda| \sup_{m=1,2,\ldots} p(x_m) ,$$

$$\sup_{m=1,2,\ldots} p(x_m + y_m) \leqq \sup_{m=1,2,\ldots} p(x_m) + \sup_{m=1,2,\ldots} p(y_m) .$$

Ces semi-normes sont filtrantes, puisque les semi-normes p le sont, par hypothèse, et elles séparent $c_0(E)$, car

$$\sup_{m=1,2,\ldots} p(x_m) = 0, \forall p ,$$

on a

$$p(x_m) = 0, \quad \forall p, \qquad (m = 1, 2, \ldots) ,$$

et

$$x_m = 0 , \qquad (m = 1, 2, \ldots) .$$

**L'espace $c_0(E)$ est séparable par semi-norme[3]) avec E.*

De fait, dans $c_0(E)$, les suites finies sont denses, car

$$\mathscr{P}[(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots) - (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots)] = \sup_{m \geqq r} p(x_m) \to 0 ,$$

[3]) Un espace est *separable par semi-norme* si toute semi-boule de semi-norme p contient un élément d'un ensemble dénombrable, variable avec p. Cette notion s'identifie à la séparabilité, si les semi-normes sont dénombrables. La séparabilité par semi-norme de l'espace permet d'y établir le théorème de HAHN-BANACH sans recourir à l'axiome de M. ZORN.

si $r \to \infty$. En outre, les suites finies d'éléments y denses dans E pour p sont denses pour $\mathscr{P}$ parmi les suites finies quelconques, car si

$$p(x_m - y_m) < \varepsilon\,, \qquad (m = 1, \ldots, r)\,,$$

$$\mathscr{P}[(x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots) - (y_1, \ldots, y_r, 0, \ldots)] = \sup_{m=1,\ldots,r} p(x_m - y_m) < \varepsilon\,.$$

Elles sont donc denses dans $c_0(E)$ pour $\mathscr{P}$.*

La nature des fonctionnelles bornées (= continues) sur $c_0(E)$ est déterminée par le théorème suivant: *toute fonctionnelle linéaire $\mathfrak{T}$ définie sur $c_0(E)$ et bornée (= continue), c'est-à-dire telle que*

$$|\mathfrak{T}[(x_1, x_2, \ldots)]| \leqq C \sup_{m=1,2,\ldots} p(x_m)\,,$$

s'écrit

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \mathscr{T}_m(x_m)\,,$$

avec

$$\lambda_m \geqq 0\,, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \leqq 1\,,$$

$$|\mathscr{T}_m(x)| \leqq C p(x), \quad \forall x \in E\,,$$

$$x_m \to 0, \quad \textit{dans} \quad E\,.$$

Notons d'abord que

$$\mathfrak{T}[(x_1, x_2, \ldots)] = \mathfrak{T}[(x_1, 0, \ldots)] + \mathfrak{T}[(0, x_2, \ldots)] + \cdots.$$

En effet, le reste

$$\mathfrak{T}[(0, \ldots, 0, x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots)]$$

de cette série a son module majoré par

$$C \cdot \sup_{m \geqq r} p(x_m)$$

et tend vers 0 quand $r \to \infty$. Comme

$$|\mathfrak{T}[(0, \ldots, 0, x_m, 0, \ldots)]| \leqq C p(x_m), \quad \forall x_m \in E\,,$$

on peut écrire

$$\mathfrak{T}[(0, \ldots, 0, x_m, 0, \ldots)] = \mathscr{T}_m(x_m)\,,$$

les $\mathscr{T}_m$ étant des fonctionnelles linéaires, définies dans E, telles que

$$|\mathscr{T}_m(x)| \leqq C p(x)\,,$$

et ainsi

$$\mathfrak{T}[(x_1, x_2, \ldots)] = \sum_{m=1}^{\infty} \mathscr{T}_m(x_m)\,.$$

Notons que si $x_m \to 0$ dans E, on a

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\mathscr{T}_m(x_m)| = \sum_{m=1}^{\infty} \mathscr{T}_m(x_m e^{-i \arg \mathscr{T}(x_m)}) = \mathfrak{T}[(x_1 e^{-i \arg \mathscr{T}(x_1)}, x_2 e^{-i \arg \mathscr{T}(x_2)}, \ldots)]\,.$$

Cette série est donc convergente et telle que

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\mathscr{T}_m(x_m)| \leqq C \sup_{m=1,2,\ldots} p(x_m)\,.$$

De là, pour des suites finies de la forme

$$(x_1, \ldots, x_N, 0, \ldots)$$

avec

$$p(x_m) \leqq 1 , \qquad (m = 1, \ldots, N) ,$$

il vient

$$\sum_{m=1}^{N} |\mathscr{T}_m(x_m)| \leqq C ,$$

donc

$$\sum_{m=1}^{N} \sup_{p(x_m)\leqq 1} |\mathscr{T}_m(x_m)| \leqq C$$

et, finalement,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sup_{p(x_m)\leqq 1} |\mathscr{T}_m(x_m)| \leqq C .$$

On peut donc écrire

$$\mathfrak{T}[(x_1, x_2, \ldots)] = \sum_{m=1}^{\infty} \mathscr{T}_m(x_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{C} \sup_{p(x_m)\leqq 1} |\mathscr{T}_m(x_m)| \cdot \frac{C\mathscr{T}_m(x_m)}{\sup\limits_{p(x_m)\leqq 1} |\mathscr{T}(x)|}$$
$$= \sum \lambda_m \mathscr{T}_m^*(x_m) ,$$

expression qui a la forme requise, puisque

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m = \frac{1}{C} \sum_{m=1}^{\infty} \sup_{p(x_m)\leqq 1} |\mathscr{T}_m(x_m)| \leqq 1 ,$$

$$|\mathscr{T}_m^*(x)| = C \frac{\left|\mathscr{T}_m\left(\frac{x}{p(x)}\right)\right|}{\sup\limits_{p(x)\leqq 1} |\mathscr{T}_m(x)|} p(x) \leqq C p(x) .$$

3. Passons enfin à la démonstration du théorème annoncé dans le § 1.

Invoquons le théorème disant que tout élément d'un précompact d'un espace E à semi-normes dénombrables s'écrit

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m f_m ,$$

avec

$$\lambda_m \geqq 0 , \quad \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \leqq 1 ,$$

$$f_m \to 0 \quad \text{dans} \quad E$$

([4] p. 133, lemme 2).

De ce fait, on a visiblement

$$|\mathfrak{T}(T)| \leqq C \cdot \sup_{f\in K} q(Tf) \leqq C \cdot \sup_{m=1,2,\ldots} q(Tf_m) .$$

Dès lors, la valeur de $\mathfrak{T}(T)$ ne dépend que de $(Tf_1, Tf_2, \ldots)$, car si

$$T_1 f_m = T_2 f_m , \qquad (m = 1, 2, \ldots) ,$$

on a

$$|\mathfrak{T}(T_1 - T_2)| \leqq C \sup_{m=1,2,\ldots} q[(T_1 - T_2)f_m] = 0 .$$

Ainsi,

$$\mathfrak{T}(T) = \mathfrak{T}[(Tf_1, Tf_2, \ldots)]$$

apparaît comme une fonctionnelle linéaire bornée (= continue) sur le sous-espace linéaire

$$\{(Tf_1, Tf_2, \ldots) : T \in \mathscr{L}(E, F)\}$$

de $c_0(F)$.

L'espace F étant séparable par semi-norme, $c_0(F)$ l'est aussi et nous pouvons appliquer le théorème de HAHN-BANACH et étendre $\mathfrak{T}$ par $\mathfrak{T}^*$ linéaire, bornée (= continue) sur $c_0(F)$, donc de la forme

$$\mathfrak{T}^*[(x_1, x_2, \ldots)] = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \mathscr{Q}_m(x_m) ,$$

avec

$$\lambda_m \geqq 0, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \leqq 1 ,$$

$$|\mathscr{Q}_i(f)| \leqq C q(f), \quad \forall f \in F ,$$

$$x_m \to 0, \quad \text{dans} \quad F .$$

En particulier,

$$\mathfrak{T}(T) = \mathfrak{T}^*(Tf_1, Tf_2, \ldots) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \mathscr{Q}_m(Tf_m) ,$$

conformément au résultat annoncé.

Bibliographie

[1] GARNIR, H. G., M. DE WILDE et J. SCHMETS: Espaces linéaires à semi-normes I, II, III. Séminaire d'analyse mathématique et d'algèbre, Université de Liège, 1962—65.

[2] KÖTHE, G.: Topologische lineare Räume, I. (cf. p. 274 et sq.). Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.

[3] PIETSCH, A.: Verallgemeinerte vollkommene Folgenräume. Schriftenreihe des Instituts für Math. Deutsche Ak. Wiss. 12 (1962).

[4] ROBERTSON, A. et W.: Topological vector space. Cambridge Univ. Press 1964.

[5] SCHWARTZ, L.: Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques. (Séminaire 1952—53), Secrétariat math. de l'Institut Poincaré. Paris 1954.

(Reçu le 24 juin 1965)

König, H.
Math. Annalen 163, 9—17 (1966)

Zur abstrakten Theorie der analytischen Funktionen II

Herrn Gottfried Köthe zum 60. Geburtstag gewidmet

Von

Heinz König in Köln

In dieser Note knüpfen wir an die Arbeit [4] an, die wir als I zitieren werden. Es sei X ein kompakter Hausdorffraum und A eine abgeschlossene Teilalgebra der komplexen Banachalgebra $C(X)$ mit $1 \in A$. Ferner sei $M(A)$ die Gesamtheit der multiplikativen linearen Funktionale $\neq 0$ auf A. In I handelte es sich um ein festes $\varphi \in M(A)$ und um alle die repräsentierenden Maße m zu φ, für welche die übliche Theorie der Funktionenräume $H^p(dm)$ besteht. Das sind die hyperextremalen repräsentierenden Maße zu φ.

Wenn man in diesem Rahmen nun $\varphi \in M(A)$ variabel annimmt, dann ist zuerst die von Gleason [2] definierte Relation $\|\varphi - \psi\| < 2$ wesentlich, die nach Gleason eine Äquivalenzrelation auf $M(A)$ ist. Diese Relation läßt sich nach Bishop [1] durch die repräsentierenden Maße zu φ und ψ charakterisieren. Wir stellen einleitend in Abschnitt 1 eine einheitliche Methode zum Beweis dieser Sätze von Gleason und Bishop dar, die beim Satz von Bishop eine quantitative Version mit im klassischen Falle scharfen Schranken liefert.

In der Hauptsache handelt es sich dann um den von Wermer [6] im Falle einer Dirichletalgebra A bewiesenen Satz, daß die Äquivalenzklasse $G(\varphi)$ eines $\varphi \in M(A)$ entweder nur aus φ besteht oder mit der Struktur eines "analytic disc" versehen werden kann. Wir dehnen diesen Satz, der schon in Hoffman [3] und Lumer [5] erweitert wurde, in Abschnitt 3 auf unseren Rahmen aus: Es sei m ein hyperextremales repräsentierendes Maß zu φ, und es bestehe $G(\varphi, dm)$ aus allen $\psi \in M(A)$, die ein hinsichtlich m absolut stetiges repräsentierendes Maß besitzen (hierunter fallen, wie man aus I Lemma 4.4 sofort erkennt, die von Hoffman [3] betrachteten in der $L^2(dm)$-Norm beschränkten $\psi \in M(A)$). Dann besteht $G(\varphi, dm)$ entweder nur aus φ oder kann mit der Struktur eines "analytic disc" versehen werden. Zum Beweis benutzen wir den in Abschnitt 2 etablierten Satz von den invarianten Teilräumen in $L^\infty(dm)$.

Das Problem der "analytic discs" kann man letztlich in einen sehr einfachen und umfassenden Sachverhalt einordnen, auf den wir in einer weiteren Arbeit zurückkommen werden.

1. Die Äquivalenzrelation von Gleason

Es sei A eine kommutative komplexe Banachalgebra mit Einselement 1. Ferner sei $M(A)$ die Gesamtheit der multiplikativen linearen Funktionale $\neq 0$

auf A. Dann ist $M(A) \subset \{\varphi \in A^* : \|\varphi\| = 1\}$ nichtleer und ein kompakter Hausdorffraum in der Gelfandtopologie. Der Gelfandhomomorphismus $A \to C(M(A))$ ordnet dem Element $u \in A$ die Funktion

$$\hat{u} \in C(M(A)) : \hat{u}(\varphi) = \varphi(u) \quad \text{für alle } \varphi \in M(A)$$

zu. Nach der Theorie von GELFAND besitzt $u \in A$ das Spektrum

$$\sigma(u) = \{\varphi(u) : \varphi \in M(A)\} = \{\hat{u}(\varphi) : \varphi \in M(A)\}$$

und den Spektralradius

$$\nu(u) = \lim_{n \to \infty} \|u^n\|^{\frac{1}{n}} = \max\{|\varphi(u)| : \varphi \in M(A)\} = \|\hat{u}\| .$$

1.1 Definition: *Es seien $\varphi, \psi \in M(A)$. Wir setzen*

$$\sigma(\varphi, \psi) = \sup\{|\psi(u)| : u \in A \quad mit \quad \nu(u) \leqq 1 \ und \ \varphi(u) = 0\}.$$

Dann ist $0 \leqq \sigma(\varphi, \psi) \leqq 1$. Ferner ist $\sigma(\varphi, \psi) = 0$ äquivalent mit $\varphi = \psi$.

1.2 Lemma: *Es sei $u \in A$ mit $\nu(u) \leqq 1$. Für $\varphi, \psi \in M(A)$ ist dann*

$$|\varphi(u) - \psi(u)| \leqq \sigma(\varphi, \psi)|1 - \overline{\varphi(u)}\, \psi(u)| .$$

Beweis: Wir können $\nu(u) < 1$ annehmen, so daß $|\varphi(u)| < 1$ ist. Dann existiert $v = (\varphi(u) - u)(1 - \overline{\varphi(u)}u)^{-1} \in A$, und es ist

$$\vartheta(v) = (\varphi(u) - \vartheta(u))(1 - \overline{\varphi(u)}\, \vartheta(u))^{-1} \quad \text{für } \vartheta \in M(A) .$$

Hiernach ist $|\vartheta(v)| < 1$, also $\nu(v) < 1$. Da insbesondere $\varphi(v) = 0$ ist, haben wir $|\psi(v)| \leqq \sigma(\varphi, \psi)$ und damit die Behauptung.

1.3 Korollar: *Für $\varphi, \psi \in M(A)$ ist $\sigma(\varphi, \psi) = \sigma(\psi, \varphi)$.*

1.4 Satz: *Es sei $u \in A$ mit $\nu(u) \leqq 1$. Für $\varphi, \psi \in M(A)$ ist dann*

$$|\psi(u)| \leqq \frac{\sigma(\varphi, \psi) + |\varphi(u)|}{1 + \sigma(\varphi, \psi)\,|\varphi(u)|} .$$

Beweis: Wir können $\nu(u) < 1$ und daher $|\varphi(u)| < 1$ annehmen. Wir brauchen dann nur die bekannte einfache Relation

$$\left|\frac{\alpha - \beta}{1 - \bar{\alpha}\beta}\right| \leqq \frac{|\alpha| + |\beta|}{1 + |\alpha|\,|\beta|} \text{ für } |\alpha| < 1 \text{ und } |\beta| \leqq 1$$

anzuwenden auf $\alpha = \varphi(u)$ und $\beta = (\varphi(u) - \psi(u))(1 - \overline{\varphi(u)}\, \psi(u))^{-1}$. Dann folgt aus Lemma 1.2 sofort die Behauptung.

1.5 Spezialfall: *Es sei $u \in A$ mit $\operatorname{Re}\vartheta(u) \geqq 0$ für alle $\vartheta \in M(A)$. Für $\varphi, \psi \in M(A)$ ist dann*

$$\operatorname{Re}\psi(u) \geqq \frac{1 - \sigma(\varphi, \psi)}{1 + \sigma(\varphi, \psi)} \operatorname{Re}\varphi(u) .$$

Beweis: Wir bilden $v = e^{-tu} \in A$ für $t > 0$. Dann ist $|\vartheta(v)| = e^{-t \operatorname{Re}\vartheta(u)} \leqq 1$ für $\vartheta \in M(A)$, also $\nu(v) \leqq 1$. Nach Satz 1.4 haben wir

$$1 - |\psi(v)| \geqq \frac{1 - \sigma(\varphi, \psi)}{1 + \sigma(\varphi, \psi)\,|\varphi(v)|}(1 - |\varphi(v)|) ,$$

$$\frac{1}{t}(1 - e^{-t \operatorname{Re}\psi(u)}) \geqq \frac{1 - \sigma(\varphi, \psi)}{1 + \sigma(\varphi, \psi)\, e^{-t \operatorname{Re}\varphi(u)}} \frac{1}{t}(1 - e^{-t \operatorname{Re}\varphi(u)}) .$$

Bei $t \to 0$ erhalten wir die Behauptung.

1.6 Korollar: *Für $\vartheta, \varphi, \psi \in M(A)$ ist*

$$\sigma(\vartheta, \psi) \leqq \frac{\sigma(\vartheta, \varphi) + \sigma(\varphi, \psi)}{1 + \sigma(\vartheta, \varphi)\,\sigma(\varphi, \psi)} .$$

Die Relation $\sigma(\varphi, \psi) < 1$ ist daher eine Äquivalenzrelation auf $M(A)$. Es bezeichne $G(\varphi)$ die Äquivalenzklasse von $\varphi \in M(A)$.

1.7 Definition: *Es seien $\varphi, \psi \in M(A)$. Wir setzen*

$$\tau(\varphi, \psi) = \sup\{|\varphi(u) - \psi(u)| : u \in A \quad \text{mit } \nu(u) \leqq 1\} .$$

Dann ist $0 \leqq \tau(\varphi, \psi) = \tau(\psi, \varphi) \leqq 2$. Ferner ist $\tau(\varphi, \psi) = 0$ äquivalent mit $\varphi = \psi$.

1.8 Satz: *Für $\varphi, \psi \in M(A)$ ist*

$$\frac{4\tau(\varphi, \psi)}{4 + (\tau(\varphi, \psi))^2} = \sigma(\varphi, \psi) .$$

Insbesondere ist $\sigma(\varphi, \psi) < 1$ äquivalent mit $\tau(\varphi, \psi) < 2$.

Beweis: 1) Für komplexe α, β mit $|\alpha| \leqq 1$ ist

$$\begin{aligned} 4|1 - \bar{\alpha}\beta| &= 4|1 - |\alpha|^2 + \bar{\alpha}(\alpha - \beta)| \leqq 4(1 - |\alpha|^2) + 2(2|\alpha|)\,|\alpha - \beta| \\ &\leqq 4(1 - |\alpha|^2) + 4|\alpha|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 4 + |\alpha - \beta|^2 . \end{aligned}$$

Für $u \in A$ mit $\nu(u) \leqq 1$ haben wir nach Lemma 1.2 also

$$4|\varphi(u) - \psi(u)| \leqq 4\sigma(\varphi, \psi)\,|1 - \overline{\varphi(u)}\,\psi(u)| \leqq \sigma(\varphi, \psi)\,(4 + |\varphi(u) - \psi(u)|^2) .$$

Hieraus folgt die Relation $\leqq$ in der Behauptung. 2) Wir ordnen der komplexen Zahl α mit $|\alpha| < 1$ die Zahl

$$\lambda = \frac{\alpha}{1 + \sqrt{1 - |\alpha|^2}}$$

zu. Dann ist $|\lambda| < 1$, und man verifiziert sofort

$$\alpha = \frac{2\lambda}{1 + |\lambda|^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\lambda - \alpha}{1 - \bar{\lambda}\alpha} = -\lambda .$$

Es sei nun $u \in A$ mit $\nu(u) < 1$ und $\varphi(u) = 0$. Wir setzen $\alpha = \psi(u)$. Mit dem zugehörenden λ bilden wir $v = (\lambda - u)\,(1 - \bar{\lambda}u)^{-1} \in A$. Dann ist

$$\vartheta(v) = (\lambda - \vartheta(u))\,(1 - \bar{\lambda}\vartheta(u))^{-1} \quad \text{für } \vartheta \in M(A) ,$$

also $|\vartheta(v)| < 1$ für $\vartheta \in M(A)$ und damit $\nu(v) < 1$. Insbesondere ist $\varphi(v) = \lambda$ und $\psi(v) = -\lambda$. Hiernach haben wir

$$|\psi(u)| = |\alpha| = \frac{2|\lambda|}{1 + |\lambda|^2} = \frac{4|\varphi(v) - \psi(v)|}{4 + |\varphi(v) - \psi(v)|^2} \leqq \frac{4\tau(\varphi, \psi)}{4 + (\tau(\varphi, \psi))^2} ,$$

und es folgt die Relation $\geqq$ in der Behauptung.

Für den Rest des Abschnittes sei X ein kompakter Hausdorffraum und A eine abgeschlossene komplexe Teilalgebra von $C(X)$ mit $1 \in A$. Dann ist $\|u^n\| = \|u\|^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und daher $\nu(u) = \|u\|$ für alle $u \in A$.

1.9 Satz: *Es seien $\varphi, \psi \in M(A)$ mit $\sigma(\varphi, \psi) = 1$. Ferner sei μ ein repräsentierendes Maß zu φ und ν ein repräsentierendes Maß zu ψ. Dann sind μ und ν zueinander singulär.*

Beweis: Es sei $d\nu = H d\mu + d\lambda$ mit nichtnegativem $H \in L^1(d\mu)$ und positivem und zu μ singulärem Maß λ. Für $u \in A$ mit $\|u\| \leqq 1$ haben wir dann

$$\psi(u) - \varphi(u) = \int u d\nu - \int u d\mu = \int u(H-1)\, d\mu + \int u d\lambda\,,$$

$$|\psi(u) - \varphi(u)| \leqq \int |H-1|\, d\mu + \int d\lambda = \int |H-1|\, d\mu + 1 - \int H d\mu\,.$$

Nach Satz 1.8 folgt hieraus

$$\int (H + 1 - |H-1|)\, d\mu \leqq 0 \quad \text{oder} \quad \int \frac{4H}{H+1+|H-1|}\, d\mu \leqq 0\,.$$

Es ist also $H = 0$ und daher $\nu = \lambda$ zu μ singulär.

1.10 Satz: *Es seien $\varphi, \psi \in M(A)$ mit $\sigma(\varphi, \psi) < 1$. Dann existieren ein repräsentierendes Maß μ zu φ und ein repräsentierendes Maß ν zu ψ mit*

$$\nu \geqq \frac{1 - \sigma(\varphi,\psi)}{1 + \sigma(\varphi,\psi)}\,\mu \text{ und } \mu \geqq \frac{1 - \sigma(\varphi,\psi)}{1 + \sigma(\varphi,\psi)}\,\nu\,.$$

Beweis: Es sei $u \in A$ mit $\mathrm{Re}\, u \geqq 0$. Dann ist bekanntlich $\mathrm{Re}\,\vartheta(u) \geqq 0$ für alle $\vartheta \in M(A)$. Nach dem Spezialfall 1.5 ist also

$$\mathrm{Re}(\psi(u) - c\varphi(u)) \geqq 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{Re}(\varphi(u) - c\psi(u)) \geqq 0$$

$$\text{mit } c = \frac{1 - \sigma(\varphi,\psi)}{1 + \sigma(\varphi,\psi)}\,.$$

Wir wenden den Satz von HAHN-BANACH an und bedenken $1 \in \mathrm{Re}\, A$. Hiernach existieren positive Maße α, β mit

$$\psi(u) - c\varphi(u) = \int u d\alpha \quad \text{und} \quad \varphi(u) - c\psi(u) = \int u d\beta \quad \text{für } u \in A\,.$$

Daher leisten $\mu = (1-c^2)^{-1}(\beta + c\alpha)$ und $\nu = (1-c^2)^{-1}(\alpha + c\beta)$ das Verlangte.

1.11 Beispiel: Es sei X die Kreislinie $|z| = 1$ in der komplexen Zahlenebene und A die klassische Algebra $\subset C(X)$. A ist eine Dirichletalgebra. Die Elemente von $M(A)$ und ihre eindeutig bestimmten repräsentierenden Maße sind wohlbekannt. Man verifiziert leicht, daß die in Satz 1.10 auftretenden Schranken in diesem Falle scharf sind.

1.12 Korollar: *Zu $\varphi \in M(A)$ existiere genau ein repräsentierendes Maß m. Dann existiert zu jedem $\psi \in G(\varphi)$ genau ein repräsentierendes Maß ν, und es ist*

$$\frac{1 - \sigma(\varphi,\psi)}{1 + \sigma(\varphi,\psi)}\, m \leqq \nu \leqq \frac{1 + \sigma(\varphi,\psi)}{1 - \sigma(\varphi,\psi)}\, m\,.$$

Beweis: Wir können $\psi \neq \varphi$ und daher

$$0 < c = \frac{1 - \sigma(\varphi,\psi)}{1 + \sigma(\varphi,\psi)} < 1$$

annehmen. Nach Satz 1.10 existiert ein repräsentierendes Maß ν zu ψ mit $cm \leqq \nu$ und $c\nu \leqq m$. Es sei nun λ ein repräsentierendes Maß zu ψ. Dann ist $m' = c\lambda + (m - c\nu)$ ein repräsentierendes Maß zu φ und daher $= m$. Es folgt $\lambda = \nu$ und damit die Behauptung.

1.13 Definition: *Es sei $\varphi \in M(A)$ und m ein repräsentierendes Maß zu φ. Es bestehe $G(\varphi, dm)$ aus allen $\psi \in M(A)$, welche mindestens ein m-stetiges repräsentierendes Maß besitzen.* Es ist also

$$G(\varphi) = \bigcup_m G(\varphi, dm)$$

nach Satz 1.9 und Satz 1.10. Wenn insbesondere zu φ genau ein repräsentierendes Maß m existiert, dann ist $G(\varphi) = G(\varphi, dm)$.

1.14 Satz: *Es sei $\varphi \in M(A)$ und m ein hyperextremales repräsentierendes Maß zu φ. Dann besitzt jedes $\psi \in G(\varphi, dm)$ genau ein m-stetiges repräsentierendes Maß ν. Ferner ist ν hyperextremales repräsentierendes Maß zu ψ.*

Beweis: Es seien $\alpha : d\alpha = f dm$ und $\beta : d\beta = g dm$ mit nichtnegativen $f, g \in L^1(dm)$ repräsentierende Maße zu ψ. Dann ist

$$\int u(f-g)\, dm = \psi(u) - \psi(u) = 0 \quad \text{für alle } u \in A,$$

also $f - g \in K(dm)$ mit $\int (f-g)\, dm = 0$. Nach I Satz 5.20 erhalten wir $f = g$ und daher $\alpha = \beta$. Die weitere Behauptung des Satzes ist dann klar.

2. Invariante Teilräume in $L^\infty(dm)$

Es sei X ein kompakter Hausdorffraum und A eine abgeschlossene komplexe Teilalgebra von $C(X)$ mit $1 \in A$. Ferner sei $\varphi \in M(A)$ und m ein hyperextremales repräsentierendes Maß zu φ.

Unter einem invarianten Teilraum in $L^\infty(dm)$ verstehen wir einen in der schwachen Topologie des Dualraumes $L^\infty(dm) = (L^1(dm))^*$ abgeschlossenen linearen Teilraum S von $L^\infty(dm)$ mit $AS \subset S$. Zu einem invarianten Teilraum S in $L^\infty(dm)$ bilden wir

$$U = \{f \in L^1(dm) : \int fh\, dm = 0 \quad \text{für alle } h \in S\},$$

$$V = \{f \in L^1(dm) : fh \in K(dm) \quad \text{für alle } h \in S\}.$$

Dann sind U und V, wie man sofort verifiziert, invariante Teilräume in $L^1(dm)$ im Sinne von I Abschnitt 10. Ferner ist $V^0 \subset U \subset V$.

2.1 Satz: *Es sei S ein invarianter Teilraum in $L^\infty(dm)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

i) *Es ist $U \neq V$;*

ii) *es ist $S = QH^\infty(dm)$ für ein $Q \in S$ mit $|Q| = 1$.*

Dann ist die Funktion Q bis auf einen konstanten Faktor vom Betrage 1 eindeutig bestimmt.

Beweis zu i) $\Rightarrow$ ii): Aus $U \neq V$ folgt $V^0 \neq V$. Nach I Satz 10.3 und Korollar 10.2 existiert also ein $P \in V$ mit $|P| = 1$, derart daß

$$V = PK(dm) \quad \text{und} \quad V^0 = \{Ph : h \in K(dm) \quad \text{mit} \quad \int h\, dm = 0\}.$$

Da mithin jedes $f \in V$ in der Form $f = cP + h$ mit konstantem c und $h \in V^0 \subset U$ darstellbar ist, und da andererseits $P \notin U$ ist, haben wir weiter $U \subset V^0$ und also $U = V^0$. Wir bilden nun $Q = \frac{1}{P} \in L^\infty(dm)$ mit $|Q| = 1$. Aus $P \in V$ folgt dann $PS \subset K(dm)$ und daher $PS \subset H^\infty(dm)$ oder $S \subset QH^\infty(dm)$. Wir haben hierin die Gleichheit zu beweisen, was insbesondere $Q \in S$ implizieren wird. Hierzu sei h in der Polaren U von S. Auf Grund von $U = V^0$ haben wir dann $Qh \in K(dm)$ mit $\int Qh\, dm = 0$, also $\int fh\, dm = 0$ für alle $f \in QH^\infty(\mathrm{d}m)$. Da nun S schwach $*$-abgeschlossen ist, liefert der Bipolarensatz $S = QH^\infty(dm)$.

Die Aussage ii) $\Rightarrow$ i) ist klar. Denn wir haben $\frac{1}{Q} \in V$, und aus $Q \in S$ und $\int Q \frac{1}{Q} dm = 1 \neq 0$ folgt $\frac{1}{Q} \notin U$. Die Eindeutigkeitsaussage endlich folgt sofort aus I Abschnitt 5. Damit ist der Satz bewiesen.

2.2 Satz: *Es sei* $\psi \in M(A)$ *und* $\psi \neq \varphi$. *Ferner sei* S *die Hülle von* $\{u \in A : \psi(u) = 0\}$ *in der schwachen Topologie des Dualraumes* $L^\infty(dm) = (L^1(dm))^*$. *Dann ist* $S = QH^\infty(dm)$ *für ein* $Q \in I(dm)$. *Die Funktion* Q *ist bis auf einen konstanten Faktor vom Betrage* 1 *eindeutig bestimmt.*

Beweis: Wir beweisen zuerst, daß S invarianter Teilraum in $L^\infty(dm)$ ist. Hierzu sei $h \in S$ und $u \in A$. Zu $f_1, \ldots, f_r \in L^1(dm)$ und $\varepsilon < 0$ existiert nun ein $v \in A$ mit $\psi(v) = 0$, derart daß

$$|\int f_k u(h - v)\, dm| < \varepsilon \quad \text{oder} \quad |\int f_k (uh - uv)\, dm| < \varepsilon \quad (k = 1, \ldots, r)\,.$$

Hiernach und nach $\psi(uv) = \psi(u)\,\psi(v) = 0$ ist $uh \in S$. Wir haben weiter $1 \in V$ und $1 \notin U$, also $U \neq V$. Denn $1 \in U$ würde bedeuten $\int h dm = 0$ für alle $h \in S$, also $\varphi(u) = 0$ für alle $u \in A$ mit $\psi(u) = 0$, was der Annahme $\psi = \varphi$ widerspricht. Damit liefert Satz 2.1 sofort die Behauptung.

2.3 Definition: *Es sei* $\psi \in M(A)$ *und* $\psi \neq \varphi$. *Wir setzen*

$$\sigma(\varphi, dm, \psi) = |\int Q dm|\,,$$

worin $Q \in I(dm)$ *nach Satz* 2.2 *bestimmt ist. Ferner sei* $\sigma(\varphi, dm, \varphi) = 0$.

2.4 Korollar: *Für* $\psi \in M(A)$ *ist* $0 \leqq \sigma(\varphi, \psi) \leqq \sigma(\varphi, dm, \psi) \leqq 1$.

Beweis: Es sei $\psi \neq \varphi$ und $Q \in I(dm)$ nach Satz 2.2 bestimmt. Für $u \in A$ mit $\psi(u) = 0$ ist dann $u = Qh$ mit $h \in H^\infty(dm)$. Wir haben

$$|\int h dm| \leqq \|h\|_{L^\infty(dm)} = \|u\|_{L^\infty(dm)} \leqq \|u\|\,,$$

im Falle $\|u\| \leqq 1$ also $|\varphi(u)| \leqq |\int Q dm| = \sigma(\varphi, dm, \psi)$ und daher nach Korollar 1.3 die Behauptung.

3. Die modifizierte Äquivalenzrelation für hyperextremale repräsentierende Maße

Es sei X ein kompakter Hausdorffraum und A eine abgeschlossene komplexe Teilalgebra von $C(X)$ mit $1 \in A$. Ferner sei $\varphi \in M(A)$ und m ein hyperextremales repräsentierendes Maß zu φ.

3.1 Satz: *Es sei* $\psi \in M(A)$. *Es ist* $\psi \in G(\varphi, dm)$ *genau dann, wenn* $\sigma(\varphi, dm, \psi) < 1$ *ist.*

3.2 Satz: *Es sei* $G(\varphi, dm) \neq \{\varphi\}$. *Dann existiert ein* $P \in I(dm)$ *mit*

$$PK(dm) = \{h \in K(dm) : \int h dm = 0\}\,.$$

Die Funktion P *ist bis auf einen konstanten Faktor vom Betrage* 1 *eindeutig bestimmt.*

3.3 Satz: *Es sei* $\psi \in G(\varphi, dm)$ *und* $\psi \neq \varphi$, *und es sei* ν *das eindeutig bestimmte m-stetige repräsentierende Maß zu* ψ.

i) *Es sei* $P \in I(dm)$ *nach Satz* 3.2 *bestimmt. Dann ist* $d\nu = \frac{1 - |z|^2}{|P - z|^2}\, dm$ *für ein* z *mit* $|z| = \sigma(\varphi, dm, \psi) < 1$.

ii) *Es ist*

$$\frac{1-\sigma(\varphi, dm, \psi)}{1+\sigma(\varphi, dm, \psi)}\, m \leqq \nu \leqq \frac{1+\sigma(\varphi, dm, \psi)}{1-\sigma(\varphi, dm, \psi)}\, m\,.$$

iii) *Es ist* $\varphi \in \mathrm{G}(\psi, d\nu)$, *und* m *ist das eindeutig bestimmte* ν*-stetige repräsentierende Maß zu* φ.

iv) *Es ist* $\sigma(\varphi, dm, \psi) = \sigma(\psi, d\nu, \varphi)$.

v) *Bei der natürlichen Korrespondenz* $\mathrm{L}^p(d\nu) = \mathrm{L}^p(dm)$ *für* $1 \leqq p \leqq \infty$ *haben wir* $H^p(d\nu) = H^p(dm)$ *und* $K(d\nu) = K(dm)$ *sowie* $E(d\nu) = E(dm)$ *und* $I(d\nu) = I(dm)$.

Beweis: Es sei $\psi \in M(A)$ und $\psi \neq \varphi$. Ferner sei $Q \in I(dm)$ nach Satz 2.2 bestimmt und $\zeta = \int Q dm$. Wir beweisen die vorstehenden Behauptungen in mehreren Schritten.

1) Wir setzen zuerst $\psi \in \mathrm{G}(\varphi, dm)$ voraus und beweisen $|\zeta| = \sigma(\varphi, dm, \psi) < 1$. Hierzu sei $\nu : d\nu = H dm$ mit nichtnegativem $H \in \mathrm{L}^1(dm)$ das eindeutig bestimmte m-stetige repräsentierende Maß zu ψ. Im Falle $|\zeta| = 1$ wäre nun Q konstant und daher der in Satz 2.2 betrachtete Raum $S = H^\infty(dm)$, also insbesondere $1 \in S$. Alsdann existierte ein $u \in A$ mit $\psi(u) = 0$, derart daß

$$1 = |1 - \psi(u)| = |\int (1-u)\, H dm| < 1\,,$$

so daß wir einen Widerspruch erhalten. Es muß also $\sigma(\varphi, dm, \psi) < 1$ sein.

2) Wir setzen nun $|\zeta| = \sigma(\varphi, dm, \psi) < 1$ voraus. Wir bilden die Funktion

$$F = \frac{|Q-\zeta|^2}{1-|\zeta|^2} \in \mathrm{L}^\infty(dm)\,,$$

woraus wir sofort ablesen

$$\frac{1-|\zeta|}{1+|\zeta|} \leqq F \leqq \frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}\,.$$

Nun ist erstens

$$\int F dm = \frac{1}{1-|\zeta|^2} \int (1 - \zeta\bar{Q} - \bar{\zeta}Q + |\zeta|^2)\, dm = 1\,.$$

Zweitens haben wir für $u \in A$ mit $\psi(u) = 0$ die Relation $u = Qh$ mit $h \in H^\infty(dm)$ und daher

$$\int u F dm = \frac{1}{1-|\zeta|^2} \int h(Q - \zeta - \bar{\zeta}Q^2 + |\zeta|^2 Q)\, dm = 0\,.$$

Zusammen erhalten wir $\psi(u) = \int u F dm$ für alle $u \in A$. Daher ist $\psi \in \mathrm{G}(\varphi, dm)$. Und zwar ist $\nu : d\nu = F dm$ das eindeutig bestimmte m-stetige repräsentierende Maß zu ψ.

Damit sind Satz 3.1 und die Aussagen ii) und iii) in Satz 3.3 bewiesen. Die Aussage v) folgt dann sofort aus I Satz 7.3 und Satz 5.12.

3) Wir wenden nun Satz 2.2 und das bisher Bewiesene auf $\varphi \in \mathrm{G}(\psi, d\nu)$ mit dem ν-stetigen repräsentierenden Maß m an. Zunächst stimmt die schwach $*$-Hülle von $\{u \in A : \varphi(u) = 0\}$ in $\mathrm{L}^\infty(d\nu) = \mathrm{L}^\infty(dm)$ nach dem Bipolarensatz mit $\{h \in H^\infty(dm) : \int h dm = 0\}$ überein. Nach Satz 2.2 haben wir also

$$PH^\infty(dm) = \{h \in H^\infty(dm) : \int h dm = 0\}$$

für ein $P \in I(d\nu) = I(dm)$. Für $z = \int P d\nu$ ist weiter $|z| = \sigma(\psi, d\nu, \varphi) < 1$. Und wir haben

$$dm = \frac{|P - z|^2}{1 - |z|^2}\, d\nu \quad \text{oder} \quad d\nu = \frac{1 - |z|^2}{|P - z|^2}\, dm\,.$$

Wir beweisen nun Satz 3.2. Aus $\int P dm = 0$ folgt zunächst

$$PK(dm) \subset \{h \in K(dm) : \int h dm = 0\}\,.$$

Wenn nun $f \in \mathrm{L}^\infty(dm)$ und $\int fh dm = 0$ für alle $h \in PK(dm)$, dann bedeutet das $fP \in H^\infty(dm)$ mit $\int fP dm = 0$, nach dem Vorstehenden also $f \in H^\infty(dm)$, und wir erhalten $\int fh dm = \int f dm \int h dm = 0$ für alle $h \in K(dm)$ mit $\int h dm = 0$. Das liefert

$$PK(dm) = \{h \in K(dm) : \int h dm = 0\}\,.$$

Damit ist Satz 3.2 klar.

4) Es bleibt die Aussage iv) in Satz 3.3 zu beweisen. Zunächst ist nach dem Bipolarensatz wieder $QH^\infty(dm) = S = \{h \in H^\infty(dm) : \int h d\nu = 0\}$. Insbesondere ist $\int Q d\nu = 0$. Nun ist

$$\frac{\zeta - Q}{1 - \bar{\zeta} Q} \in I(dm) \quad \text{mit} \quad \int \frac{\zeta - Q}{1 - \bar{\zeta} Q}\, dm = 0\,,$$

nach 3) also

$$\frac{\zeta - Q}{1 - \bar{\zeta} Q} = Ph \quad \text{mit} \quad h \in I(dm)\,.$$

Integration nach ν liefert $\zeta = z \int h dm$ und mithin $|\zeta| \leqq |z|$. Ebenso weist man $|z| \leqq |\zeta|$ nach. Damit ist alles bewiesen.

3.4 Definition: *Wir nennen m einfach, wenn der invariante Teilraum*

$$S = \{h \in K(dm) : \int h dm = 0\} \subset \mathrm{L}^1(dm)$$

einfach ist. Nach I Satz 10.3 und Zusatz 10.4 bedeutet das

$$\{h \in K(dm) : \int h dm = 0\} = PK(dm)$$

für ein $P \in I(dm)$, worin die Funktion P bis auf einen konstanten Faktor vom Betrage 1 eindeutig bestimmt ist. *Wir nennen jede solche Funktion $P \in I(dm)$ eine primitive Funktion zu m.*

Es sei m einfach und $P \in I(dm)$ eine primitive Funktion zu m. Wir ordnen jeder Funktion $f \in K(dm)$ die Taylorkoeffizienten

$$a_n = \int f \bar{P}^n dm \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

zu. Man erkennt dann sofort induktiv

$$f = \sum_{k=0}^{n} a_k P^k + f_n P^{n+1} \quad \text{für ein } f_n \in K(dm) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Und hieraus schließt man für $f, g \in K(dm)$ mit $h = fg \in \mathrm{L}^1(dm)$ und daher nach I Satz 5.16 mit $h = fg \in K(dm)$ die Relation

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,,$$

worin die a_n, b_n und c_n die Taylorkoeffizienten zu f, g und h sind.

3.5 Lemma: *Es sei m einfach und $P \in I(dm)$ eine primitive Funktion zu m. Wir ordnen jeder Funktion $f \in K(dm)$ die holomorphe Funktion*

$$\Theta f : \Theta f(z) = \int f \frac{1-|z|^2}{|P-z|^2}\, dm = \int f \frac{P}{P-z}\, dm = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \text{ in } |z| < 1$$

zu. Dann ist $\Theta 1(z) = 1$ und $\Theta P(z) = z$ in $|z| < 1$. Im Falle $f, g \in K(dm)$ mit $h = fg \in L^1(dm)$ und daher mit $h = fg \in K(dm)$ ist $\Theta h(z) = \Theta f(z)\, \Theta g(z)$ in $|z| < 1$.

Beweis: Die Behauptungen folgen sofort aus dem Vorstehenden und aus der Identität

$$\frac{1-|z|^2}{|P-z|^2} = \frac{P}{P-z} + \frac{\bar{z}P}{1-\bar{z}P} \quad \text{in} \quad |z| < 1\,.$$

3.6 Satz: *Es ist $G(\varphi, dm) \neq \{\varphi\}$ genau dann, wenn m einfach ist.*

3.7 Satz: *Es sei m einfach und $P \in I(dm)$ eine primitive Funktion zu m. Für jedes komplexe z mit $|z| < 1$ ist dann*

$$\langle z \rangle : \langle z \rangle(u) = \Theta u(z) = \int u \frac{1-|z|^2}{|P-z|^2}\, dm \quad \text{für } u \in A$$

ein Element $\langle z \rangle \in G(\varphi, dm)$. Die Korrespondenz $z \to \langle z \rangle$ bildet $\{z : |z| < 1\}$ injektiv und stetig auf $G(\varphi, dm)$ ab.

Beweis: Nach dem Vorstehenden haben wir nur noch zu beweisen, daß zu $\alpha \neq \beta$ mit $|\alpha|, |\beta| < 1$ verschiedene $\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle \in G(\varphi, dm)$ gehören. Nun ist

$$|\Theta f(z)| \leqq \frac{1}{1-|z|} \|f\|_{L^1(dm)} \quad \text{in } |z| < 1 \text{ für } f \in K(dm)\,.$$

Wenn also $\langle \alpha \rangle(u) = \langle \beta \rangle(u)$ oder $\Theta u(\alpha) = \Theta u(\beta)$ für alle $u \in A$, dann erhalten wir aus der Dichtheit von A in $K(dm)$ in der $L^1(dm)$-Norm auch $\alpha = \Theta P(\alpha) = \Theta P(\beta) = \beta$. Damit ist alles bewiesen.

Literatur

[1] Bishop, E.: Representing measures for points in a uniform algebra. Bull. Am. Math. Soc. **70**, 121—122 (1964).

[2] Gleason, A.: Function algebras. Seminars on analytic functions. Inst. for Advanced Study, Princeton NJ. 1957, vol. 2.

[3] Hoffman, K.: Analytic functions and logmodular Banach algebras. Acta Math. **108**, 271—317 (1962).

[4] König, H.: Zur abstrakten Theorie der analytischen Funktionen. Math. Z. **88**, 136—165 (1965).

[5] Lumer, G.: Analytic functions and Dirichlet problem. Bull. Am. Math. Soc. **70**, 706—709 (1963).

[6] Wermer, J.: Dirichlet algebras. Duke J. Math. **27**, 373—382 (1960).

(Eingegangen am 5. Juli 1965)

TAYLOR, A. E.
Math. Annalen 163, 18—49 (1966)

Theorems on Ascent, Descent, Nullity and Defect of Linear Operators

This paper is presented to honor Professor GOTTFRIED KÖTHE on his 60th birthday, December 25, 1965

By

ANGUS E. TAYLOR* in Los Angeles

1. Introduction

Before I undertake to explain the nature of this paper I shall define the terms which occur in the title.

Let X and Y be linear spaces over the field of complex numbers. (For many of the results the field could just as well be the field of real numbers. In dealing with spectral theory, however, we shall need the complex numbers.) Let T be a linear mapping with domain $\mathscr{D}(T)$ in X and range $\mathscr{R}(T)$ in Y. The null manifold of T, denoted by $\mathscr{N}(T)$, is the set $\{x : x \in \mathscr{D}(T) \text{ and } Tx = 0\}$. The dimension of $\mathscr{N}(T)$ is denoted by $n(T)$; we call this *the nullity* of T. The dimension of the quotient space $Y/\mathscr{R}(T)$ is called *the defect* of T; it is denoted by $d(T)$. In general, the dimension of a linear manifold M is denoted by $\dim M$; it is 0 if $M = (0)$, a positive integer p if M contains p, but not more than p, linearly independent elements. Otherwise, M is not finite-dimensional and we write $\dim M = \infty$.

To define ascent and descent we consider the case in which $\mathscr{D}(T)$ and $\mathscr{R}(T)$ are in the same linear space X. We can then define the iterates $T^2, T^3, \ldots$ of T. If $n > 1$, $\mathscr{D}(T^n)$ is the set $\{x : x, Tx, \ldots, T^{n-1}x \in \mathscr{D}(T)\}$, and $T^n x = T(T^{n-1}x)$. We can then consider $\mathscr{N}(T^n)$ and $\mathscr{R}(T^n)$. It is well known (see TAYLOR [7], Theorems 5.41 A, B) that

$$\mathscr{N}(T^n) \subset \mathscr{N}(T^{n+1}) \quad \text{and} \quad \mathscr{R}(T^{n+1}) \subset \mathscr{R}(T^n) \tag{1-1}$$

if $n \geqq 0$. We follow the convention that $T^0 = I$ (the identity operator on X, with $\mathscr{D}(I) = X$). Thus $\mathscr{N}(T^0) = (0)$ and $\mathscr{R}(T^0) = X$. It is also well known that if $\mathscr{N}(T^k) = \mathscr{N}(T^{k+1})$, then $\mathscr{N}(T^n) = \mathscr{N}(T^k)$ when $n \geqq k$. In this case the smallest nonnegative integer k such that $\mathscr{N}(T^k) = \mathscr{N}(T^{k+1})$ is called *the ascent* of T; it is denoted by $\alpha(T)$. If no such k exists we define $\alpha(T) = \infty$. Similarly, if $\mathscr{R}(T^{k+1}) = \mathscr{R}(T^k)$, then $\mathscr{R}(T^n) = \mathscr{R}(T^k)$ when $n \geqq k$. If there is such a k, the smallest such k is called *the descent* of T, and denoted by $\delta(T)$. We write $\delta(T) = \infty$ if $\mathscr{R}(T^{n+1})$ is always a proper subset of $\mathscr{R}(T^n)$.

* This work was supported in part by the National Science Foundation under grant GP-1846.

In recent years quite a bit of attention has been given to the study of linear operators for which the nullity or the defect is finite. The case in which both are finite and they are equal is of particular interest. The ascent and descent of a linear operator play a significant part in F. Riesz's theory of compact (= completely continuous) linear operators. There has been some recognition that there are close relationships between ascent and descent on one hand, and nullity and defect on the other. In his inaugural dissertation in 1956, H. HEUSER (see [4]) presented an extensive study of these relationships for the case in which $\mathscr{D}(T)$ is all of X. He then made use of his study for purposes of spectral theory in his examination of a particular class of bounded linear operators on a Banach space, namely, the class of operators T such that $n(\lambda - T) = d(\lambda - T) < \infty$ for each $\lambda \neq 0$ and $\alpha(\lambda - T) = \delta(\lambda - T) < \infty$ for each $\lambda \neq 0$. HEUSER calls such an operator *vollfinit*.

These ideas are known to be related to the situation of an operator $\lambda_0 - T$ when λ_0 is a point in the spectrum of T such that the resolvent $R_\lambda(T)$ has a pole at λ_0. For the case of bounded operators T defined on all of a complex Banach space, S. CARADUS (see [1]) wrote his dissertation (under my supervision) on the general subject of operators T such that all the nonzero points of $\sigma(T)$ are poles of $R_\lambda(T)$. The work of CARADUS is closely related to the work of HEUSER and to a paper by A. F. RUSTON (see [6]) dealing with what RUSTON calls Riesz operators. In fact, CARADUS shows that a Riesz operator in the sense of RUSTON is the same as a *vollfinit* operator in the sense of HEUSER.

The purpose of the present paper is to extend and clarify the theory relating to $n(T)$, $d(T)$, $\alpha(T)$, and $\delta(T)$, especially for the cases in which all four quantities are finite. Unlike HEUSER and CARADUS, I am concerned with the case in which $\mathscr{D}(T) \neq X$, for I wish to apply the theory to the case of closed operators which need not be bounded.

Sections 1—7 are entirely algebraic. Many of the arguments follow the pattern set in the first half of Heuser's dissertation. There are some significant differences, however, resulting from the more general situation; see, for example, many of the propositions in section 4. These general algebraic arguments have apparently never before been systematically arranged for publication.

In section 9 I have related the notions of ascent, descent, nullity, and defect to the occurrence of poles of the resolvent of a closed linear operator in a Banach space. This section extends some of the results obtained by CARADUS in his dissertation. The general methods are those of sections 5.7 and 5.8 in my book on functional analysis. Of crucial importance, also, are some of the theorems of perturbation theory for Fredholm operators from the work of KATO [5] and of GOHBERG and KREIN [3].

2. Complementary subspaces. Quotient spaces

Let X be a linear space. Two linear manifolds M_1, M_2 in X are called *complementary* if $M_1 \cap M_2 = (0)$ and if the linear manifold generated by $M_1 \cup M_2$ is X. In this case every element x in X has a unique representation

$x = x_1 + x_2$, where $x_i \in M_i$; the uniqueness comes from the fact that $M_1 \cap M_2 = (0)$. We write $X = M_1 \oplus M_2$ and call X the direct sum of M_1 and M_2. If we define operators P_i by setting $P_i x = x_i$ (where $x = x_1 + x_2$ as above), then P_i is a linear operator which is a projection ($P_i^2 = P_i$). We call P_1 the projection of X on M_1 along M_2, and P_2 the projection of X on M_2 along M_1.

Observe that $M_1 = \mathscr{R}(P_1)$, $M_2 = \mathscr{N}(P_1)$.

If P is any linear operator which is a projection, $\mathscr{R}(P)$ and $\mathscr{N}(P)$ are complementary subspaces. If M is any subspace (= linear manifold) in X, it can be shown that there exists a projection P such that $\mathscr{R}(P) = M$. Hence there exists a subspace, namely $\mathscr{N}(P)$, which is complementary to M (see Theorem 4.8-A in TAYLOR [7]).

If M is a subspace of X, the quotient space X/M is defined in a well known manner (see § 3.14 in TAYLOR [7]). The quotient space is also a linear space. Its elements are certain equivalence classes in X. If $x \in X$, the equivalence class which contains x is denoted by $[x]$. The mapping $\varphi : X \to X/M$ defined by $\varphi(x) = [x]$ is called the canonical mapping of X onto the quotient space.

If M and N are complementary subspaces, it is easily seen that N and X/M are isomorphic as linear spaces. For, let P be the projection of X onto M along N. If f is the restriction of φ to N, we can prove that f maps N isomorphically onto X/M. The mapping is *onto*, because if $[x]$ is any element of X/M, $x - Px \in N$ and $f(x - Px) = [x]$. To verify this we observe that $x - (x - Px) = Px \in M$, and hence $[x - Px] = [x]$. But then $f(x - Px) = [x - Px] = [x]$. The mapping is one-to-one, because if $x \in N$ and $f(x) = 0$, this means $[x] = 0$, or $x \in M$, whence $x = 0$, because $M \cap N = (0)$.

Observe that X/M is isomorphic to X if $M = (0)$ and to (0) if $M = X$.

Lemma 2.1. *Suppose X_1 and X_2 are subspaces of X such that $X_1 \subset X_2$. Then*

$$\dim X/X_1 = \dim X/X_2 + \dim X_2/X_1 . \tag{2-1}$$

(The understanding, in the case a dimension is infinite, is that $\infty + p = p + \infty = \infty$ if p is a nonnegative integer or ∞.)

Proof. Let Y_1 be a complement to X_1 in X_2, so that $X_2 = X_1 \oplus Y_1$. Let Y_2 be a complement to X_2 in X, so that $X = X_2 \oplus Y_2$. Then it is easy to see that $Y_1 \oplus Y_2$ is a complement to X_1 in X. Therefore X/X_1 is isomorphic to $Y_1 \oplus Y_2$, X/X_2 is isomorphic to Y_2, and X_2/X_1 is isomorphic to Y_1. Clearly $\dim(Y_1 \oplus Y_2) = \dim Y_1 + \dim Y_2$, with the indicated understanding in case any of the dimensions is infinite. This gives what is required.

Lemma 2.2. *Suppose that Y and Z are subspaces of X such that $Y \cap Z = (0)$ and $\dim X/Z \leqq \dim Y < \infty$. Then $X = Y \oplus Z$.*

Proof. Let $W = Y \oplus Z$. Then $Z \subset W \subset X$, so that, by Lemma 2.1,

$$\dim X/Z = \dim X/W + \dim W/Z . \tag{2-2}$$

Also, $\dim Y = \dim W/Z$, and from (2-2) it appears that $\dim W/Z \leqq \dim X/Z$. We see then that $\dim X/Z = \dim Y = \dim W/Z$, whence $\dim X/W = 0$, and therefore $X = W$.

3. Ascent and descent

Throughout this section X denotes a linear space and T denotes a linear operator with domain and range in T. Except where we explicitly assume that $\mathscr{D}(T) = X$ it is possible that $\mathscr{D}(T) \neq X$. There is no topology; all considerations are algebraic.

Lemma 3.1. *Suppose there exists a nonnegative integer N such that $n(T^k) \leqq N$ when $k = 0, 1, 2, \ldots$. Then $\alpha(T) \leqq N$.*

Proof. The conclusion is obvious if $\alpha(T) = 0$, so we can suppose $\alpha(T) > 0$. Suppose, for some k, that $\mathscr{N}(T^k) \neq \mathscr{N}(T^{k+1})$. Then

$$0 = n(T^0) < n(T) < \cdots < n(T^{k+1}) .$$

Then $1 + k \leqq n(T^{k+1}) \leqq N$; it follows from this that $\alpha(T) \leqq N$.

Lemma 3.2. *Suppose there exists a nonnegative integer N such that $d(T^k) \leqq N$ when $k = 0, 1, 2, \ldots$. Then $\delta(T) \leqq N$.*

Proof. We can assume that $\delta(T) > 0$. Suppose, for some k, that $\mathscr{R}(T^k) \neq \mathscr{R}(T^{k+1})$. Then we see from Lemma 2.1 that

$$0 = d(T^0) < d(T) < \cdots < d(T^{k+1}) ,$$

and hence $1 + k \leqq d(T^{k+1}) \leqq N$. This implies that $\delta(T) \leqq N$.

Lemma 3.3. (a) *If $n(T) < \infty$, then $n(T^k) \leqq kn(T)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.*

(b) *If $d(T) < \infty$, then $d(T^k) \leqq kd(T)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.*

Proof of (a). Since $\mathscr{N}(T^k) \subset \mathscr{N}(T^{k+1})$, there is a subspace Y which is complementary to $\mathscr{N}(T^k)$ in $\mathscr{N}(T^{k+1})$, so that $\mathscr{N}(T^{k+1}) = \mathscr{N}(T^k) \oplus Y$ and $n(T^{k+1}) = n(T^k) + \dim Y$. We shall prove that $\dim Y \leqq n(T)$. From this we obtain the desired conclusion by induction.

Now let $x_1, \ldots, x_p$ be linearly independent elements of Y. Since $Y \subset \mathscr{N}(T^{k+1})$, the elements $T^k x_1, \ldots, T^k x_p$ are in $\mathscr{N}(T)$. They are linearly independent. For, suppose that

$$\sum_{i=1}^{p} c_i T^k x_i = 0 .$$

Then $\sum_{i=1}^{p} c_i x_i \in Y \cap \mathscr{N}(T^k) = (0)$, so that $\sum_{i=1}^{p} c_i x_i = 0$. But then $c_1 = \cdots = c_p = 0$. This proves that $p \leqq n(T)$, and hence that $\dim Y \leqq n(T)$.

Proof of (b). Let $X = \mathscr{R}(T) \oplus N$, so that $d(T) = \dim N$. For given k let

$$\mathscr{D}(T^k) = [\mathscr{D}(T^k) \cap \mathscr{R}(T)] \oplus M_k .$$

We shall prove that $\dim M_k \leqq \dim N$. Suppose, to the contrary, that $m = \dim M_k > \dim N$. Let $x_1, \ldots, x_m$ be linearly independent elements of M_k. Write $x_i = u_i + v_i$, where $u_i \in \mathscr{R}(T)$, $v_i \in N$. Then $v_1, \ldots, v_m$ are linearly dependent, so that there exist constants $a_1, \ldots, a_m$ (not all zero) such that $\sum_{i=1}^{m} a_i v_i = 0$. Hence $\sum_{i=1}^{m} a_i x_i = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \in M_k \cap \mathscr{R}(T)$. But $M_k \cap \mathscr{R}(T) = (0)$, from the definition of M_k as a complement to $\mathscr{D}(T^k) \cap \mathscr{R}(T)$ in $\mathscr{D}(T^k)$. Therefore $\sum_{i=1}^{m} a_i x_i = 0$, in contradiction to the choice of the x_i's.

Now let Y_k be a subspace complementary to $\mathscr{R}(T^{k+1})$ in $\mathscr{R}(T^k)$. It follows from Lemma 2.1 that $d(T^{k+1}) = d(T^k) + \dim Y_k$. If we prove that $\dim Y_k \leqq d(T)$, we can use induction to conclude that $d(T^j) \leqq jd(T)$ for every j. Let $y_1, \ldots, y_p$ be linearly independent elements in Y_k. We can write $y_i = T^k w_i$, because $Y_k \subset \mathscr{R}(T^k)$. Then, since $w_i \in \mathscr{D}(T^k)$, we can write $w_i = Tr_i + s_i$, where $Tr_i \in \mathscr{D}(T^k) \cap \mathscr{R}(T)$ and $s_i \in M_k$. Thus $y_i = T^{k+1}r_i + T^k s_i$. We see from this that $[y_i]$ and $[T^k s_i]$ are the same element of $\mathscr{R}(T^k)/\mathscr{R}(T^{k+1})$. These elements (for $i = 1, 2, \ldots, p$) are linearly independent, as a consequence of the fact that $y_1, \ldots, y_p$ are linearly independent elements of Y_k. Now, the elements $[T^k s_1], \ldots, [T^k s_p]$ are obtained by applying a linear mapping to the elements $s_1, \ldots, s_p$ of M_k. Hence $s_1, \ldots, s_p$ are linearly independent, and $p \leqq \dim M_k$. It follows that $\dim Y_k \leqq \dim M_k \leqq d(T)$, and our proof is complete.

Lemma 3.4. (a) *If $\mathscr{N}(T) \cap \mathscr{R}(T^p) = (0)$ for a certain nonnegative integer p, then $\alpha(T) \leqq p$.*

(b) *If $\alpha(T) \leqq p$, then $\mathscr{N}(T^k) \cap \mathscr{R}(T^p) = (0)$ when $k = 1, 2, \ldots$.*

Proof. Assuming $\mathscr{N}(T) \cap \mathscr{R}(T^p) = (0)$, we shall show that $\mathscr{N}(T^{p+1}) \subset \mathscr{N}(T^p)$; this will imply that $\alpha(T) \leqq p$. If $x \in \mathscr{N}(T^{p+1})$, then $T^{p+1}x = T(T^p x) = 0$, so that $T^p x \in \mathscr{N}(T) \cap \mathscr{R}(T^p)$, and hence $T^p x = 0$, or $x \in \mathscr{N}(T^p)$.

Now suppose that $\alpha(T) \leqq p$, and let x be an element of $\mathscr{N}(T^k) \cap \mathscr{R}(T^p)$, where k is a positive integer. Then $x = T^p u$ for some u, and $T^k x = 0$, so that $u \in \mathscr{N}(T^{p+k})$. But $\mathscr{N}(T^{p+k}) = \mathscr{N}(T^p)$, and therefore $T^p u = 0$. This proves that $\mathscr{N}(T^k) \cap \mathscr{R}(T^p) = (0)$.

Lemma 3.5. (a) *Suppose that, for some $q \geqq 0$ and some $k \geqq 1$, there exists a subspace M_k such that $M_k \subset \mathscr{N}(T^q)$, $M_k \cap \mathscr{R}(T^k) = (0)$, and $\mathscr{D}(T^q) = [\mathscr{D}(T^q) \cap \mathscr{R}(T^k)] \oplus M_k$. Then $\delta(T) \leqq q$.*

(b) *If $\delta(T) \leqq q$, then to each $k \geqq 1$ corresponds a subspace M_k such that $M_k \subset \mathscr{N}(T^q)$, $M_k \cap \mathscr{R}(T^k) = (0)$, and $\mathscr{D}(T^q) = [\mathscr{D}(T^q) \cap \mathscr{R}(T^k)] \oplus M_k$.*

Proof of (a). It will suffice to prove that $\mathscr{R}(T^q) \subset \mathscr{R}(T^{q+k})$, for this implies that $\mathscr{R}(T^{q+1}) = \mathscr{R}(T^q)$. An element of $\mathscr{R}(T^q)$ has the form $T^q x$, where $x \in \mathscr{D}(T^q)$. By hypothesis we can write $x = T^k u + v$, where $T^k u \in \mathscr{D}(T^q)$ and $v \in M_k$. Since $M_k \subset \mathscr{N}(T^q)$, it follows that $T^q x = T^{q+k} u \in \mathscr{R}(T^{q+k})$.

Proof of (b). Let N_k be a complement to $\mathscr{D}(T^q) \cap \mathscr{R}(T^k)$ in $\mathscr{D}(T^q)$, so that $\mathscr{D}(T^q) = [\mathscr{D}(T^q) \cap \mathscr{R}(T^k)] \oplus N_k$. Let H be a Hamel basis for N_k. Now, $N_k \subset \mathscr{D}(T^q)$; hence, if $v \in H$, $T^q v \in \mathscr{R}(T^q)$. But $\mathscr{R}(T^q) = \mathscr{R}(T^{q+k})$, and so $T^q v = T^{q+k} w$ for some w. It follows that $v - T^k w \in \mathscr{N}(T^q)$. For each v in H let one corresponding w be chosen in the manner just indicated, and let M_k be the linear manifold generated by the set of all the elements $v - T^k w$. Observe that $M_k \subset \mathscr{N}(T^q)$. To verify that $M_k \cap \mathscr{R}(T^k) = (0)$, suppose $y \in M_k \cap \mathscr{R}(T^k)$. Then y can be expressed as $T^k z$ and also as a finite linear combination $\sum_i c_i(v_i - T^k w_i)$. Thus $\sum_i c_i v_i = T^k \left(\sum_i c_i w_i + z\right) \in N_k \cap \mathscr{R}(T^k)$, whence $\sum_i c_i v_i = 0$. But the v_i's are from H, and hence the c_i's are all 0, and it follows that $y = 0$.

We have now to show that $\mathscr{D}(T^q) = [\mathscr{D}(T^q) \cap \mathscr{R}(T^k)] \oplus M_k$. Suppose $x \in \mathscr{D}(T^q)$. We can write $x = T^k u + v$, where $T^k u \in \mathscr{D}(T^q)$ and $v \in N_k$. We can

express v as a finite linear combination $\sum_i a_i v_i$, where each v_i is in H. Let w_i correspond to v_i in the manner indicated earlier. Then

$$x = T^k u + \sum_i a_i (v_i - T^k w_i) + \sum_i a_i T^k w_i ,$$

$$x = T^k (u + \sum_i a_i w_i) + \sum_i a_i (v_i - T^k w_i) .$$

This representation has the proper form to show that

$$\mathscr{D}(T^q) \subset [\mathscr{D}(T^q) \cap \mathscr{R}(T^k)] \oplus M_k .$$

Since the inclusion relation the other way is evident, the proof is complete.

Theorem 3.6. *If $\alpha(T)$ and $\delta(T)$ are finite, then $\alpha(T) \leqq \delta(T)$. If also $\mathscr{D}(T) = X$, then $\alpha(T) = \delta(T)$.*

Proof. Suppose $\alpha(T) = p$, $\delta(T) = q$. If $q = 0$, then $\mathscr{R}(T^k) = X$ when $k \geqq 0$. From Lemma 3.4 (b) we see that $(0) = \mathscr{N}(T^k) \cap \mathscr{R}(T^p) = \mathscr{N}(T^k)$ if $k \geqq 1$, and therefore $\alpha(T) = 0$.

Now suppose that $q > 0$. (Actually, the following argument is valid even when $q = 0$, but the preceding argument gives a simpler proof in that case.) We shall show that $p \leqq q$ by assuming $q < p$ and obtaining a contradiction. If $q < p$, then $\mathscr{N}(T^p) - \mathscr{N}(T^q) \neq \emptyset$. Suppose $x \in \mathscr{N}(T^p) - \mathscr{N}(T^q)$. Using Lemma 3.5 (b) we write $x = x_1 + x_2$, where $x_1 \in \mathscr{D}(T^q) \cap \mathscr{R}(T^p)$, $x_2 \in M_p$; we can do this because $\mathscr{N}(T^p) \subset \mathscr{D}(T^p) \subset \mathscr{D}(T^q)$. Now observe that $x_1 = x - x_2 \in \mathscr{N}(T^p) \cap \mathscr{R}(T^p)$; this is because $x_2 \in M_p \subset \mathscr{N}(T^q) \subset \mathscr{N}(T^p)$. But $\mathscr{N}(T^p) \cap \mathscr{R}(T^p) = (0)$, by Lemma 3.4 (b), because $p \geqq 1$. Hence $x - x_2 = 0$ and $x = x_2$. This contradicts the fact that $x \notin \mathscr{N}(T^q)$.

It remains to prove that the case in which $0 < q$ and $p < q$ is impossible if $\mathscr{D}(T) = X$. From $p < q$ we infer that $\mathscr{R}(T^p) - \mathscr{R}(T^q) \neq \emptyset$. Suppose $x \in \mathscr{R}(T^p) - \mathscr{R}(T^q)$. Now $\mathscr{D}(T^k) = X$ for each value of k, because $\mathscr{D}(T) = X$. Hence, from Lemma 3.5 (b), we can write $X = \mathscr{R}(T^q) \oplus M_q$, $M_q \subset \mathscr{N}(T^q)$. Then we can write $x = x_1 + x_2$, where $x_1 \in \mathscr{R}(T^q)$, $x_2 \in M_q$. Then $x_2 = x - x_1 \in \mathscr{N}(T^q) \cap \mathscr{R}(T^p)$, because $\mathscr{R}(T^q) \subset \mathscr{R}(T^p)$. But we know that $\mathscr{N}(T^q) \cap \mathscr{R}(T^p) = (0)$, by Lemma 3.4 (b). Hence $x - x_1 = 0$, or $x = x_1 \in \mathscr{R}(T^q)$, which contradicts $x \notin \mathscr{R}(T^q)$.

I offer the comment that Theorem 3.6 is a combination of Theorems 5.41-D and 5.41-E in my book on functional analysis (see [7]); the proofs given here are different, however.

It is not difficult to construct examples of operators T, with $\mathscr{D}(T) = X$, such that either $\alpha(T)$ is finite and $\delta(T)$ is infinite, or vice-versa. It is also easy to construct examples, with $\mathscr{D}(T) \neq X$, in which $\alpha(T)$ and $\delta(T)$ are both finite and $\alpha(T) < \delta(T)$.

Theorem 3.7. (a) *Suppose, for the positive integer r, that $\mathscr{N}(T^r) \cap \mathscr{R}(T^r) = (0)$ and that $\mathscr{D}(T^r) = [\mathscr{D}(T^r) \cap \mathscr{R}(T^r)] \oplus \mathscr{N}(T^r)$. Then $\alpha(T) \leqq r$ and $\delta(T) \leqq r$.*

(b) *Suppose that $\alpha(T)$ and $\delta(T)$ are finite. Let $\delta(T) = q$. Then $\mathscr{N}(T^q) \cap \mathscr{R}(T^q) = (0)$, and*

(3-1) $$\mathscr{D}(T^q) = [\mathscr{D}(T^q) \cap \mathscr{R}(T^q)] \oplus \mathscr{N}(T^q) .$$

Let T_1 be the operator in $\mathscr{R}(T^q)$ defined by $\mathscr{D}(T_1) = \mathscr{D}(T) \cap \mathscr{R}(T^q)$, $T_1 x = Tx$ if $x \in \mathscr{D}(T_1)$. Then T_1 maps $\mathscr{D}(T_1)$ in a one-to-one manner onto all of $\mathscr{R}(T^q)$.

Proof of (a). Since $\mathscr{N}(T) \subset \mathscr{N}(T^r)$, the hypothesis implies that $\alpha(T) \leqq r$, because of Lemma 3.4 (a). To prove that $\delta(T) \leqq r$ it will suffice to show that $\mathscr{R}(T^r) \subset \mathscr{R}(T^{2r})$. Consider $T^r x \in \mathscr{R}(T^r)$, where $x \in \mathscr{D}(T^r)$. Write $x = x_1 + x_2$, where $x_1 \in \mathscr{D}(T^r) \cap \mathscr{R}(T^r)$, $x_2 \in \mathscr{N}(T^r)$. Then $x_1 = T^r u$ for some u, and $T^r x = T^{2r} u \in \mathscr{R}(T^{2r})$.

Proof of (b). Let $p = \alpha(T)$. We know that $p \leqq q$ (Theorem 3.6), and hence $\mathscr{N}(T^q) \cap \mathscr{R}(T^q) \subset \mathscr{N}(T^q) \cap \mathscr{R}(T^p)$. Lemma 3.4 (b) then shows that $\mathscr{N}(T^q) \cap \cap \mathscr{R}(T^q) = (0)$. To prove (3-1) it now suffices to show that $\mathscr{D}(T^q) \subset [\mathscr{D}(T^q) \cap \cap \mathscr{R}(T^q)] \oplus \mathscr{N}(T^q)$. This is clear if $q = 0$; if $q \geqq 1$ it follows from Lemma 3.5 (b) with $k = q$.

Now consider T_1. To see that T_1^{-1} exists, suppose $y = T^q x \in \mathscr{D}(T) \cap \mathscr{R}(T^q)$ and $T_1 y = Ty = 0$. Then $T^{q+1} x = 0$, so $x \in \mathscr{N}(T^{q+1})$. But $\alpha(T) \leqq q$, so $\mathscr{N}(T^{q+1}) = \mathscr{N}(T^q)$, and thus $y = T^q x = 0$. Hence the mapping by T_1 is one-to-one.

To see that $\mathscr{R}(T_1) = \mathscr{R}(T^q)$, suppose $y = T^q x$ is any element of $\mathscr{R}(T^q)$. Since $\mathscr{R}(T^q) = \mathscr{R}(T^{q+1})$, we can write $y = T^{q+1} u$, or $y = T(T^q u)$, where $T^q u \in \mathscr{D}(T) \cap \mathscr{R}(T^q)$. Hence $y = T_1(T^q u) \in \mathscr{R}(T_1)$.

As a special case of Theorem 3.7 (b) we observe that if $\mathscr{D}(T) = X$, and if both $\alpha(T)$ and $\delta(T) = q$ are finite, they are equal, and (3-1) becomes

$$X = \mathscr{R}(T^q) \oplus \mathscr{N}(T^q) . \tag{3-2}$$

In this case T, when restricted to $\mathscr{R}(T^q)$, is a one-to-one mapping of $\mathscr{R}(T^q)$ onto all of itself.

The substance of Theorem 3.7 (b) is contained in the discussions of Theorems 5.41-D and 5.41-F in my book (see [7]). The arguments there are somewhat different.

In the next two lemmas we consider powers of the operator $\lambda I - T$, where λ is a complex number and I is the identity operator. For simplicity we shall write $\lambda - T$ in place of $\lambda I - T$. It is understood that $\mathscr{D}(\lambda - T) = \mathscr{D}(T)$.

Lemma 3.8. *Suppose $\lambda_1 \neq \lambda_2$, and let j, k be positive integers. Then*

$$\mathscr{N}[(\lambda_1 - T)^j] \cap \mathscr{N}[(\lambda_2 - T)^k] = (0) .$$

Proof. We observe first of all that if $(\lambda_1 - T)^j x = 0$, then $x \in \mathscr{D}(T^n)$ for all $n \geqq 1$. This is evident if $\lambda_1 = 0$. If $\lambda_1 \neq 0$, we observe that $x \in \mathscr{D}(T^j)$ and

$$\lambda_1^j x - j\lambda_1^{j-1} Tx + \cdots + (-1)^j T^j x = 0 , \tag{3-3}$$

so that $T^j x$ is a linear combination of $x, Tx, \ldots, T^{j-1}x$. Hence $T^j x \in \mathscr{D}(T)$. By applying T to (3-3) we see that T^{j+1} is a linear combination of $Tx, \ldots, T^j x$, and hence that $T^{j+1} x \in \mathscr{D}(T)$. In this way we see by induction that $x \in \mathscr{D}(T^n)$ for all $n \geqq 1$.

Now let $p_1(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^j$, $p_2(\lambda) = (\lambda_2 - \lambda)^k$. Since $\lambda_1 \neq \lambda_2$, the polynomials p_1, p_2 are relatively prime, and hence there exist polynomials $q_1(\lambda), q_2(\lambda)$ such that

$$q_1(\lambda)\, p_1(\lambda) + q_2(\lambda)\, p_2(\lambda) \equiv 1 . \tag{3-4}$$

We deduce that if $x \in \mathscr{D}(T^n)$ for sufficiently large n, then

$$q_1(T)\, p_1(T)x + q_2(T)\, p_2(T)x = x\,. \tag{3-5}$$

In particular, if $x \in \mathscr{N}[(\lambda_1 - T)^j] \cap \mathscr{N}[(\lambda_2 - T)^k]$, we see that $p_1(T)x = p_2(T)x = 0$, and hence, from (3-5), $x = 0$. This completes the proof.

Lemma 3.9. *Suppose that, for some λ_0, $\alpha(\lambda_0 - T)$ and $\delta(\lambda_0 - T)$ are finite. Let $q = \delta(\lambda_0 - T)$. Then $\mathscr{N}[(\lambda - T)^k] \subset \mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^q]$ for $k = 0, 1, 2, \ldots$ if $\lambda \neq \lambda_0$.*

Proof. We can assume $k \geqq 1$ and $q \geqq 1$, for the result is obvious if $k = 0$ or $q = 0$. By Theorem 3.7 (b) we can write

$$\mathscr{D}[(\lambda_0 - T)^q] = \{\mathscr{D}[(\lambda_0 - T^q] \cap \mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^q]\} \oplus \mathscr{N}[(\lambda_0 - T)^q]\,.$$

Suppose that $x \in \mathscr{N}[(\lambda - T)^k]$. Then $x \in \mathscr{D}(T^n)$ for all $n \geqq 1$, and hence $x \in \mathscr{D}[(\lambda_0 - T)^q]$, by an argument given in the proof of Lemma 3.8. We can write $x = (\lambda_0 - T)^q u + v$, where $(\lambda_0 - T)^q u \in \mathscr{D}(\lambda_0 - T)^q$ and $v \in \mathscr{N}[(\lambda_0 - T)^q]$. Then v, and hence also $(\lambda_0 - T)^q u$, belongs to $\mathscr{D}(T^n)$ for all $n \geqq 1$. Applying $(\lambda - T)^k$ to x, we see that

$$(\lambda - T)^k\,(\lambda_0 - T)^q u = -(\lambda - T)^k v\,. \tag{3-6}$$

Now, we can express $(\lambda - T)^k$ in the form

$$(\lambda - T)^k = \sum_{i=0}^{k} c_i (\lambda_0 - T)^i\,.$$

From this and the fact that $\delta(\lambda_0 - T) = q$ we see that

$$(\lambda - T)^k (\lambda_0 - T)^q u = \sum_{i=0}^{k} c_i (\lambda_0 - T)^{i+q} u \in \mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^q]\,.$$

It is clear also that $(\lambda_0 - T)^k v \in \mathscr{N}[(\lambda_0 - T)^q]$. Hence, since $\mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^q] \cap \cap \mathscr{N}[(\lambda_0 - T)^q] = (0)$, we see from (3-6) that $(\lambda - T)^k v = 0$. But then $v \in \mathscr{N}[(\lambda - T)^k] \cap \mathscr{N}[(\lambda_0 - T)^q]$, and hence $v = 0$, by Lemma 3.8. It now follows that $x = (\lambda_0 - T)^q u \in \mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^q]$, as was to be proved.

4. Nullity and defect, as related to ascent and descent

In this section the general assumptions about X and T are the same as in §3. All considerations are algebraic.

A subspace M of X is called invariant under T if $T[M \cap \mathscr{D}(T)] \subset M$. By the restriction of T to M we then mean the operator T_1 in the space M, defined as follows: $\mathscr{D}(T_1) = M \cap \mathscr{D}(T)$, $T_1 x = Tx$ if $x \in \mathscr{D}(T_1)$. If M is invariant under T and if $T[M \cap \mathscr{D}(T)] = M$, we say that M is *exactly invariant* under T.

Theorem 4.1. *Suppose $n(T)$ is finite. Then $\alpha(T)$ is finite if and only if, for each subspace M which is exactly invariant under T, the restriction T_1 of T to M is such that $\alpha(T_1) = \delta(T_1) = 0$.*

Proof. Suppose that $\alpha(T)$ is finite. Let M be exactly invariant under T, and let T_1 be the restriction of T to M. It is easily verified that $\mathscr{D}(T_1^n) = M \cap \cap \mathscr{D}(T^n)$ and $\mathscr{N}(T_1^n) = M \cap \mathscr{N}(T^n)$. We see then that $\alpha(T_1) \leqq \alpha(T)$. Now $\mathscr{R}(T_1) = M$, and hence $\delta(T_1) = 0$. But then $\alpha(T_1) = 0$, by Lemma 3.6.

Suppose, conversely, that $\alpha(T_1) = \delta(T_1) = 0$ for each T_1 associated in the indicated manner with an exactly invariant subspace. Consider the sequence $\{\mathscr{N}(T) \cap \mathscr{R}(T^n)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Since $\mathscr{R}(T^{n+1}) \subset \mathscr{R}(T^n)$ and $n(T) < \infty$, there is some nonnegative integer r such that $\mathscr{N}(T) \cap \mathscr{R}(T^r) = \mathscr{N}(T) \cap \mathscr{R}(T^n)$ if $n \geqq r$. Let $M = \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathscr{R}(T^{r+i})$. Observe that $M = \bigcap_{i=j}^{\infty} \mathscr{R}(T^{r+i})$ if $j \geqq 0$, and therefore that M is invariant under T. Observe also that $\mathscr{N}(T) \cap M = \mathscr{N}(T) \cap \mathscr{R}(T^r)$. We shall show that M is *exactly* invariant under T. Suppose $y \in M$. Then there exists $x_i \in \mathscr{D}(T^{r+i})$ such that $y = T^{r+i}x_i$, $i \geqq 0$. Let

$$u_i = T^r x_1 - T^{r+i-1}x_i = T^r(x_1 - T^{i-1}x_i), \qquad i \geqq 1 .$$

Then

$$0 = T^{r+1}x_1 - T^{r+i}x_i = T(T^r x_1 - T^{r+i-1}x_i) = Tu_i .$$

Clearly $u_i \in \mathscr{N}(T) \cap \mathscr{R}(T^r)$. We shall see that $T^r x_1 \in M$. In fact, $T^r x_1 = u_i + T^{r+i-1}x_i$. Since $T^{r+i-1}x_i \in \mathscr{R}(T^{r+i-1})$ and $\mathscr{N}(T) \cap \mathscr{R}(T^r) = \mathscr{N}(T) \cap \mathscr{R}(T^{r+i-1})$, we see that $T^r x_1 \in \mathscr{R}(T^{r+i-1})$ when $i \geqq 1$, and hence $T^r x_1 \in M$. Since $T(T^r x_1) = y$, it follows that $T[M \cap \mathscr{D}(T)] = M$.

By hypothesis, if T_1 is the restriction of T to M, $\alpha(T_1) = 0$; that is, if $x \in M \cap \mathscr{D}(T)$ and $Tx = 0$, then $x = 0$. But this means that $\mathscr{N}(T) \cap M = (0)$, and hence $\mathscr{N}(T) \cap \mathscr{R}(T^r) = (0)$. This implies $\alpha(T) \leqq r$, by Lemma 3.4 (a).

Theorem 4.2. *Suppose that either $n(T)$ or $d(T)$ is finite, and that $\alpha(T)$ is finite. Then $n(T) \leqq d(T)$.*

Proof. Let $\alpha(T) = p$; then $\mathscr{N}(T) \cap \mathscr{R}(T^p) = (0)$, by Lemma 3.4 (b). From this we can conclude that $n(T) \leqq d(T^p)$. In fact, suppose $x_1, \ldots, x_k$ are linearly independent elements in $\mathscr{N}(T)$, and let $[x_1], \ldots, [x_k]$ be the elements (cosets) in $X/\mathscr{R}(T^p)$ which contain $x_1, \ldots, x_k$, respectively. Then these are linearly independent, for $c_1[x_1] + \cdots + c_k[x_k] = 0$ implies $c_1x_1 + \cdots + c_kx_k \in \mathscr{R}(T^p)$, whence $c_1x_1 + \cdots + c_kx_k = 0$ (because $\mathscr{N}(T) \cap \mathscr{R}(T^p) = (0)$), and therefore $c_1 = \cdots = c_k = 0$. Hence $n(T) \leqq d(T^p)$. It now follows from Lemma 3.3 (b) that $n(T) \leqq pd(T)$ if $d(T) < \infty$.

We now see that the assumptions of the theorem imply that $n(T) < \infty$. We still have to prove that $n(T) \leqq d(T)$. This is certainly true if $d(T) = \infty$, and it is true as a consequence of the relation $n(T) \leqq pd(T)$ if $d(T) < \infty$ and $p = 0$ or $p = 1$. Hence we can assume $d(T) < \infty$ and $p \geqq 2$.

Let $\mathscr{M}_k = \mathscr{N}(T) \cap \mathscr{R}(T^k)$, $k = 0, 1, \ldots, p$. Observe that $\mathscr{M}_k \subset \mathscr{M}_{k-1}$, that $\mathscr{M}_0 = \mathscr{N}(T)$, and that $\mathscr{M}_p = (0)$. We apply Lemma 2.1, observing that $\mathscr{M}_k/\mathscr{M}_p = \mathscr{M}_k$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$. Thus

$$\dim \mathscr{M}_{k-1} = \dim \mathscr{M}_{k-1}/\mathscr{M}_k + \dim \mathscr{M}_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, p . \tag{4-1}$$

Let us write

$$m_k = \dim \mathscr{M}_{k-1}/\mathscr{M}_k . \tag{4-2}$$

Then, on combining the equations which result from (4-1) for $k = 1, 2, \ldots, p-1$, we obtain the result

$$n(T) = m_0 + m_1 + \cdots + m_{p-1} . \tag{4-3}$$

Now, if $0 \leqq k \leqq p-1$, let $y_1^{(k)}, \ldots, y_{m_k}^{(k)}$ be elements of $\mathscr{M}_k$ such that the corresponding cosets $[y_1^{(k)}], \ldots, [y_{m_k}^{(k)}]$ belonging to $\mathscr{M}_k/\mathscr{M}_{k+1}$ are linearly independent as elements of the quotient space. Then $y_j^{(k)} = T^k x_j^{(k)}$, where $x_j^{(k)} \in \mathscr{D}(T^k)$. Consider the elements

$$x_1^{(0)}, \ldots, x_{m_0}^{(0)}, x_1^{(1)}, \ldots, x_{m_1}^{(1)}, \ldots, x_1^{(p-1)}, \ldots, x_{m_{p-1}}^{(p-1)}$$

(there are $n(T)$ of them) and the corresponding elements $[x_j^{(k)}]$ of the quotient space $X/\mathscr{R}(T)$. If we show that these latter elements of the quotient space are linearly independent, we shall have proved that $n(T) \leqq d(T)$, as required. To put the matter in another way, we shall suppose that c_{ij} are constants such that

$$\sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} x_j^{(i)} = Tu \quad \text{(an element of } \mathscr{R}(T)) \,, \tag{4-4}$$

and from this we shall deduce that $c_{ij} = 0$ for each relevant i and j. Let

$$w_i = \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} x_j^{(i)} \,.$$

Then $w_i \in \mathscr{D}(T^i)$ and

$$T^i w_i = \sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} y_j^{(i)} \in \mathscr{M}_i \subset \mathscr{N}(T) \,. \tag{4-5}$$

Observe that $x_j^{(0)} = y_j^{(0)} \in \mathscr{N}(T)$, so that $w_0 \in \mathscr{N}(T) \subset \mathscr{D}(T)$. We rewrite (4-4) as

$$\sum_{i=0}^{p-1} w_i = Tu \,. \tag{4-6}$$

We see that each w_i (and hence Tu) belongs to $\mathscr{D}(T)$, and

$$\sum_{i=1}^{p-1} T w_i = T^2 u \,.$$

Since $T^i w_i \in \mathscr{N}(T)$, we can continue until we obtain

$$T^{p-1} w_{p-1} = T^p u \in \mathscr{N}(T) \cap \mathscr{R}(T^p) = (0) \,,$$

whence $T^{p-1} w_{p-1} = 0$. Referring now to (4-5) and recalling the original requirements placed on the elements $y_j^{(p-1)}$, we see that $c_{p-1,j} = 0$ if $j = 1, \ldots, m_{p-1}$. Therefore $w_{p-1} = 0$. Going back to (4-6), we now have

$$\sum_{i=0}^{p-2} w_i = Tu \,,$$

from which we conclude

$$T^{p-2} w_{p-2} = T^{p-1} u \in \mathscr{M}_{p-1} \,. \tag{4-7}$$

But the elements $[y_1^{(p-2)}], \ldots, [y_{m_{p-2}}^{(p-2)}]$ of $\mathscr{M}_{p-2}/\mathscr{M}_{p-1}$ are linearly independent; from this fact, along with (4-5) and (4-7), we conclude that $c_{p-2,j} = 0$, $j = 1, \ldots, m_{p-2}$, and hence $w_{p-2} = 0$. Continuing in this way, we are able to prove that $c_{ij} = 0$ for every i and j. Thus the proof is complete.

Theorem 4.3. *Suppose that either $n(T)$ or $d(T)$ is finite, and that $\delta(T) = q$ is finite. Then*

$$d(T) \leqq n(T) + \dim X/\mathscr{D}(T^q)\,. \tag{4-8}$$

In particular, $d(T) \leqq n(T)$ if $\mathscr{D}(T) = X$.

Proof. We can assume $q \geqq 1$, for $d(T) = 0$ if $q = 0$, and then (4-8) is certainly true. Let

$$Q_i = \mathscr{N}(T^i) + \mathscr{R}(T), \qquad i = 0, 1, \ldots, q-1\,.$$

Observe that $Q_i \subset Q_{i+1}$. We shall show that

$$p_i = \dim \frac{\mathscr{N}(T^{i+1})}{Q_i \cap \mathscr{N}(T^{i+1})} < \infty\,. \tag{4-9}$$

Let $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_{n_i}^{(i)}$ be a finite set of elements of $\mathscr{N}(T^{i+1})$ such that the corresponding cosets in the quotient space $\mathscr{N}(T^{i+1})/[Q_i \cap \mathscr{N}(T^{i+1})]$ are linearly independent. We claim that the elements of $X/\mathscr{R}(T)$ corresponding to the elements $x_j^{(i)}$ $(j = 1, \ldots, n_i,\ i = 0, \ldots, q-1)$ are linearly independent, so that

$$n_0 + n_1 + \cdots + n_{q-1} \leqq d(T)\,. \tag{4-10}$$

In fact, suppose that

$$\sum_{i=0}^{q-1} \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij} x_j^{(i)} \in \mathscr{R}(T)\,.$$

Then

$$\sum_{j=1}^{n_{q-1}} c_{q-1,j}\, x_j^{(q-1)} \in \mathscr{N}(T^{q-1}) + \mathscr{R}(T) = Q_{q-1}\,,$$

and hence $c_{q-1,j} = 0$ if $j = 1, \ldots, n_{q-1}$. We then have

$$\sum_{i=0}^{q-2} \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij}\, x_j^{(i)} \in \mathscr{R}(T)\,,$$

$$\sum_{j=1}^{n_{q-2}} c_{q-2,j}\, x_j^{(q-2)} \in \mathscr{N}(T^{q-2}) + \mathscr{R}(T) = Q_{q-2}\,,$$

and we can continue the argument to show that all the c_{ij}'s are 0. This proves (4-10).

Now let $y_j^{(i)} = T^i x_j^{(i)}$, and note that $y_j^{(i)} \in \mathscr{N}(T)$. We shall prove that the elements $y_j^{(i)}$ are linearly independent, so that

$$n_0 + n_1 + \cdots + n_{q-1} \leqq n(T)\,. \tag{4-11}$$

In fact we shall prove somewhat more, namely

$$n_0 + n_1 + \cdots + n_{q-1} \leqq \dim \frac{\mathscr{N}(T)}{\mathscr{N}(T) \cap \mathscr{R}(T^q)}\,. \tag{4-12}$$

For this purpose we observe first of all that $y_j^{(0)} = x_j^{(0)}$, and that $x_1^{(0)}, \ldots, x_{n_0}^{(0)}$ are elements of $\mathscr{N}(T)$ which were chosen so that if

$$a_1 x_1^{(0)} + \cdots + a_{n_0} x_{n_0}^{(0)} \in Q_0 = \mathscr{R}(T)\,,$$

then $a_1 = \cdots = a_{n_0} = 0$. Consider the following proposition P_m:

If

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij}\, y_j^{(i)} \in \mathscr{R}(T^m)$$

for a fixed m (where $1 \leqq m \leqq q$), then each a_{ij} appearing here is 0. We know this is true if $m = 1$. We shall deduce that P_{m+1} is true if P_m is true and $m \leqq q-1$, and thus prove that P_q is true. We therefore suppose P_m true and assume

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij}\, y_j^{(i)} = T^{m+1} u\,.$$

Then

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij}\, y_j^{(i)} = T^{m+1}\, u - \sum_{j=1}^{n_m} a_{mj}\, T^m x_j^{(m)} \in \mathscr{R}(T^m)\,;$$

therefore $a_{ij} = 0$ if $0 \leqq i \leqq m-1$. But then

$$\sum_{j=1}^{n_m} a_{mj}\, T^m x_j^{(m)} = T^{m+1} u\,.$$

Let

$$x = \sum_{j=1}^{n_m} a_{mj} x_j^{(m)} - Tu\,.$$

Note that $T^m x = 0$. Then

$$\sum_{j=1}^{n_m} a_{mj} x_j^{(m)} = x + Tu \in \mathscr{N}(T^m) + \mathscr{R}(T) = Q_m\,.$$

By the way in which the elements $x_j^{(m)}$ were chosen, it follows $a_{mj} = 0$ for each j. Thus the proposition P_q is true; this implies the truth of (4-12) and also that of (4-11).

Our assumption is that either $n(T)$ or $d(T)$ is finite. Hence, from either (4-10) or (4-11) we see that (4-9) is true for each i. Now let the numbers n_i be chosen maximally (i.e. $n_i = p_i$, where p_i is given by (4-9)). Then we see that

$$p_0 + p_1 + \cdots + p_{q-1} \leqq \min[n(T), d(T)]\,, \tag{4-13}$$

and also

$$p_0 + \cdots + p_{q-1} \leqq \dim \frac{\mathscr{N}(T)}{\mathscr{N}(T) \cap \mathscr{R}(T^q)}\,. \tag{4-14}$$

Next we shall prove that

$$p_0 + \cdots + p_{q-1} = \dim \frac{\mathscr{N}(T^q)}{\mathscr{R}(T) \cap \mathscr{N}(T^q)}\,. \tag{4-15}$$

The elements $x_j^{(i)}$ all belong to $\mathscr{N}(T^q)$. Therefore the argument which proved (4-10) also proves that

$$p_0 + \cdots + p_{q-1} \leqq \dim \frac{\mathscr{N}(T^q)}{\mathscr{R}(T) \cap \mathscr{N}(T^q)}\,.$$

To prove the inequality in the opposite direction, observe that any element of $\mathscr{N}(T^{i+1})$ is expressible as a linear combination of $x_1^{(i)}, \ldots, x_{p_i}^{(i)}$ plus an element of Q_i. When we recall that $Q_i = \mathscr{N}(T^i) + \mathscr{R}(T)$ and apply this observation repeatedly, with $i = q-1, q-2, \ldots, 0$, we see that an element x of $\mathscr{N}(T^q)$

is expressible in the form

$$x = \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{j=1}^{p_i} a_{ij} x_j^{(i)} + w ,$$

where $w \in \mathscr{R}(T)$. This shows that

$$\dim \frac{\mathscr{N}(T^q)}{\mathscr{R}(T) \cap \mathscr{N}(T^q)} \leqq p_0 + \cdots + p_{q-1} .$$

We have now proved (4-15).

We now proceed to prove (4-8). Since $\mathscr{R}(T) \cap \mathscr{D}(T^q) \subset \mathscr{D}(T^q) \subset X$, we see by Lemma 2.1 that

$$\dim \frac{X}{\mathscr{R}(T) \cap \mathscr{D}(T^q)} = \dim \frac{X}{\mathscr{D}(T^q)} + \dim \frac{\mathscr{D}(T^q)}{\mathscr{R}(T) \cap \mathscr{D}(T^q)} .$$

In the same way we see that

$$\dim \frac{X}{\mathscr{R}(T) \cap \mathscr{D}(T^q)} = \dim \frac{X}{\mathscr{R}(T)} + \dim \frac{\mathscr{R}(T)}{\mathscr{R}(T) \cap \mathscr{D}(T^q)} ,$$

and therefore

$$\dim \frac{X}{\mathscr{R}(T)} + \dim \frac{\mathscr{R}(T)}{\mathscr{R}(T) \cap \mathscr{D}(T^q)} = \dim \frac{X}{\mathscr{D}(T^q)} + \dim \frac{\mathscr{D}(T^q)}{\mathscr{R}(T) \cap \mathscr{D}(T^q)} . \tag{4-16}$$

By Lemma 3.5 (b) we know that

$$\mathscr{D}(T^q) = [\mathscr{R}(T) \cap \mathscr{D}(T^q)] \oplus M_1 ,$$

where

$$M_1 \subset \mathscr{N}(T^q) \quad \text{and} \quad M_1 \cap \mathscr{R}(T) = (0) . \tag{4-17}$$

Thus

$$\dim \frac{\mathscr{D}(T^q)}{\mathscr{R}(T) \cap \mathscr{D}(T^q)} = \dim M_1 . \tag{4-18}$$

From (4-17) we see that

$$\dim M_1 \leqq \dim \frac{\mathscr{N}(T^q)}{\mathscr{R}(T) \cap \mathscr{N}(T^q)} . \tag{4-19}$$

Therefore, by (4-16), (4-18), (4-19), (4-15) and (4-13) we see that

$$\dim \frac{X}{\mathscr{R}(T)} = d(T) \leqq \dim \frac{X}{\mathscr{D}(T^q)} + n(T) .$$

This proves (4-8).

Equality can occur in (4-8) with $n(T) < d(T)$ and $\dim X/\mathscr{D}(T^q) > 0$. Thus the conclusion $d(T) \leqq n(T)$, which is valid in Theorem 4.3 when $\mathscr{D}(T) = X$, can be false when $\mathscr{D}(T) \neq X$. To see this, suppose $\mathscr{D}(T) \neq (0)$, $M \neq (0)$, $X = \mathscr{D}(T) \oplus M$, and let $Tx = x$ when $x \in \mathscr{D}(T)$. Then $q = \delta(T) = 1$, $n(T) = 0$, and $d(T) = \dim M = \dim X/\mathscr{D}(T)$.

Corollary 4.4. *If $\alpha(T)$ and $\delta(T)$ are both finite, and if either $n(T)$ or $d(T)$ is finite, then*

$$n(T) \leqq d(T) \leqq n(T) + \dim \frac{X}{\mathscr{D}(T^q)} , \tag{4-20}$$

where $q = \delta(T)$. Hence, if $X = \mathscr{D}(T)$, we have $n(T) = d(T)$ under these circumstances.

This is merely a combination of Theorems 4.2 and 4.3.

Theorem 4.5. (a) *Suppose $n(T)$ and $p = \alpha(T)$ are finite. Suppose also that*

$$\dim \frac{\mathscr{D}(T^p)}{\mathscr{R}(T) \cap \mathscr{D}(T^p)} \leqq n(T) . \tag{4-21}$$

Then $\delta(T) = \alpha(T)$. Furthermore, we actually have equality, rather than inequality, in (4-21). *As a consequence, it follows that $n(T) = d(T)$ if $\mathscr{D}(T) = X$.*

(b) *Suppose $n(T)$ and $q = \delta(T)$ are finite. Suppose also that*

$$n(T) \leqq \dim \frac{\mathscr{N}(T^q)}{\mathscr{R}(T) \cap \mathscr{N}(T^q)} . \tag{4-22}$$

Then $\alpha(T) \leqq q$. Furthermore, we actually have equality, rather than inequality, in (4-22). *Also,*

$$\dim \frac{\mathscr{D}(T^q)}{\mathscr{R}(T) \cap \mathscr{D}(T^q)} \leqq n(T) . \tag{4-23}$$

In case $\mathscr{D}(T) = X$ we can conclude that $n(T) = d(T)$.

(c) *Suppose that $\alpha(T)$ is finite and that $n(T) = d(T) < \infty$. Then $\delta(T) = \alpha(T)$.*

(d) *Suppose that $\mathscr{D}(T) = X$, that $\delta(T)$ is finite, and that $n(T) = d(T) < \infty$. Then $\alpha(T) = \delta(T)$.*

Proof of (a). We see that the hypotheses of Theorem 4.2 are satisfied. Consider the elements $x_j^{(i)}$ $(i = 0, \ldots, p-1, j = 1, \ldots, m_i)$ introduced in the proof of Theorem 4.2; there are $n(T)$ of these elements (see (4-3)). These elements all belong to $\mathscr{N}(T^p)$, and the corresponding elements $[x_j^{(i)}]$ of the quotient space $X/\mathscr{R}(T)$ are linearly independent. Let M be the subspace of X generated by this set of $n(T)$ elements. Then $M \cap \mathscr{R}(T) = (0)$ and $\dim M = n(T)$. Thus we conclude from (4-21) and Lemma 2.2 that $\mathscr{D}(T^p) = [\mathscr{R}(T) \cap \mathscr{D}(T^p)] \oplus M$. Since $M \subset \mathscr{N}(T^p)$, we can appeal to Lemma 3.5 (a) to conclude that $\delta(T) \leqq p$. But then $\alpha(T)$ and $\delta(T)$ are both finite, and hence $\alpha(T) \leqq \delta(T)$ (Theorem 3.6). Hence $\alpha(T) = \delta(T)$.

The proof shows that $\dim M = \dim \frac{\mathscr{D}(T^p)}{\mathscr{R}(T) \cap \mathscr{D}(T^p)}$. Hence we actually have equality, rather than inequality, in (4-21). We also observe that, in case $\mathscr{D}(T) = X$, $\dim \frac{\mathscr{D}(T^p)}{\mathscr{R}(T) \cap \mathscr{D}(T^p)} = \dim \frac{X}{\mathscr{R}(T)} = d(T)$. Hence $n(T) = d(T)$ in this case.

Proof of (b). We see that the hypotheses of Theorem 4.3 are satisfied. Consider the elements $y_j^{(i)}$ $(i = 0, \ldots, q-1, j = 1, \ldots, p_i)$ introduced in the proof of Theorem 4.3. There are $p_0 + \cdots + p_{q-1}$ of these elements. They belong to $\mathscr{N}(T)$, and if a linear combination of them lies in $\mathscr{R}(T^q)$, all the coefficients in this linear combination are 0 (by proposition P_q, which was established in the course of the proof of Theorem 4.3). In view of (4-15) and the hypothesis (4-22), it then follows that the linear manifold generated by the elements $y_j^{(i)}$ is $\mathscr{N}(T)$, and therefore $\mathscr{N}(T) \cap \mathscr{R}(T^q) = (0)$. This implies that $\alpha(T) \leqq q$ (see Lemma 3.4 (a)). Moreover, $p_0 + \cdots + p_{q-1} = n(T)$, so that the inequality in (4-22) becomes an equality. We now obtain (4-23) from (4-18) and (4-19). In case $\mathscr{D}(T) = X$, (4-23) implies that $d(T) \leqq n(T)$. But then $d(T) = n(T)$, by Corollary 4.4.

Proof of (c). We observe to begin with that if $p = \alpha(T)$, then

$$\dim \frac{\mathscr{D}(T^p)}{\mathscr{R}(T) \cap \mathscr{D}(T^p)} \leqq \dim \frac{X}{\mathscr{R}(T)} = d(T)\,,$$

merely because $\mathscr{D}(T^p) \subset X$. As a consequence of the hypothesis in (c) it then follows that (4-21) is valid, and hence we can apply Theorem 4.5 (a) to conclude that $\alpha(T) = \delta(T)$.

Proof of (d). Let $q = \delta(T)$. Since $\mathscr{D}(T) = X$, $\mathscr{D}(T^q) = X$ also, and we can use Lemma 3.5 (b) to write $X = \mathscr{R}(T) \oplus M$, where M is a subspace such that $M \cap \mathscr{R}(T) = (0)$ and $M \subset \mathscr{N}(T^q)$. We see from this situation that

$$d(T) = \dim M \leqq \dim \frac{\mathscr{N}(T^q)}{\mathscr{R}(T) \cap \mathscr{N}(T^q)}\,. \tag{4-24}$$

Now, the hypotheses of (d) enable us to use the results of Theorem 4.3 and its proof. From (4-24), (4-13) and (4-15) we conclude that

$$d(T) = \dim \frac{\mathscr{N}(T^q)}{\mathscr{R}(T) \cap \mathscr{N}(T^q)}\,.$$

Since $d(T) = n(T)$, it follows that Theorem 4.5 (b) is applicable, and we conclude that $\alpha(T) \leqq \delta(T)$. But then $\alpha(T) = \delta(T)$, by Theorem 3.6.

Comment on Theorem 4.5 (d): The conclusion in this proposition is false if we omit the assumption that $\mathscr{D}(T) = X$. It is possible, with $\mathscr{D}(T) \neq X$, to have $n(T) = d(T) < \infty$ and $\delta(T) < \infty$, but $\alpha(T) = \infty$. We give an example in the following paragraph.

Let $X = l^1$ and write $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$. Let $\mathscr{D}(T) = \{x : \xi_1 = 0\}$, and define $Tx = y$ for $x \in \mathscr{D}(T)$ by

$$\eta_1 = 0,\ \eta_{2k} = \xi_{2k+2} \quad \text{and} \quad \eta_{2k+1} = \xi_{2k+1}, \qquad k = 1, 2, \ldots\,. \tag{4-25}$$

It is easy to verify that $\mathscr{R}(T^n) = \mathscr{D}(T)$ if $n \geqq 1$, so that $\delta(T) = 1$. It is easily verified, also, that $n(T) = d(T) = 1$. But $\alpha(T) = \infty$, for it may readily be calculated that $n(T^k) = k$ if $k \geqq 1$.

It is possible to modify the foregoing example in such a way as to demonstrate that we can have $\mathscr{D}(T) = X$ and $n(T), d(T), \delta(T)$ all finite, but $\alpha(T) = \infty$. In this case we must have $n(T) \neq d(T)$, of course, because of Theorem 4.5 (d). For this example, we take $X = l^1$, $\mathscr{D}(T) = X$, and define $Tx = y$ by (4-25). In this case $d(T) = \delta(T) = 1$, $n(T) = 2$, and $\alpha(T) = \infty$.

Lemma 4.6. *Suppose $\mathscr{D}(T) = X$ and $\lambda \neq 0$. Let $X_1 = \mathscr{R}(T)$, and let T_1 be the restriction of T to X_1. (Observe that $\mathscr{R}(T_1) \subset X_1$.) Then*:

(a) *$\alpha(\lambda - T) = \alpha(\lambda - T_1)$ and $n(\lambda - T) = n(\lambda - T_1)$.*

(b) *If M is a subspace of X_1 which is a complement to $\mathscr{R}(\lambda - T_1)$ in X_1, it is also a complement to $\mathscr{R}(\lambda - T)$ in X. Therefore $d(\lambda - T) = d(\lambda - T_1)$.*

(c) *If $n(\lambda - T_1) = d(\lambda - T_1) < \infty$, and if either $\alpha(\lambda - T_1)$ or $\delta(\lambda - T_1)$ is finite, then $\alpha(\lambda - T) = \delta(\lambda - T) < \infty$.*

Proof of (a). We shall prove that $\mathscr{N}[(\lambda - T_1)^m] = \mathscr{N}[(\lambda - T)^m]$ if $m = 0, 1, 2, \ldots$. This is clearly true if $m = 0$. It is also evident that $\mathscr{N}[(\lambda - T_1)^m] \subset \mathscr{N}[(\lambda - T)^m]$ if $m \geqq 1$. Suppose $m \geqq 1$ and $x \in \mathscr{N}[(\lambda - T)^m]$ (m fixed). Then $0 = (\lambda - T)^m x = \lambda^m x - m\lambda^{m-1} Tx + \cdots + (-1)^m T^m x$.

Since $\lambda \neq 0$, we see that $x \in \mathscr{R}(T) = X_1$, and therefore $0 = (\lambda - T)^m x = (\lambda - T_1)^m x$, so that $\mathscr{N}[(\lambda - T)^m] \subset \mathscr{N}[(\lambda - T_1)^m]$. The truth of (a) follows at once.

Proof of (b). We begin by observing that $\mathscr{R}(\lambda - T_1) = \mathscr{R}(\lambda - T) \cap X_1$. For this it suffices to show that $\mathscr{R}(\lambda - T) \cap X_1 \subset \mathscr{R}(\lambda - T_1)$, the inclusion in the other direction being evident. Suppose $y = (\lambda - T)x \in X_1$. Then $y = Tu$ for some u, and $\lambda x = Tx + Tu$, whence $x \in X_1$ and hence $y \in \mathscr{R}(\lambda - T_1)$. Next, we see that $M \cap \mathscr{R}(\lambda - T) = (0)$. This is because $M \cap \mathscr{R}(\lambda - T_1) = (0)$ and $M \cap \mathscr{R}(\lambda - T) = M \cap X_1 \cap \mathscr{R}(\lambda - T) = M \cap \mathscr{R}(\lambda - T_1)$. To complete the proof of (b) it will now suffice to prove that $X \subset \mathscr{R}(\lambda - T) \oplus M$. Given x, let $y = (\lambda - T)x$. Since $Tx \in X_1$ and $X_1 = \mathscr{R}(\lambda - T_1) \oplus M$, we can write $Tx = (\lambda - T_1)u + v$, where $u \in X_1$ and $v \in M$. Then

$$x = \frac{1}{\lambda}(Tx + y) = \frac{1}{\lambda}[(\lambda - T_1)u + v + (\lambda - T)x],$$

$$x = (\lambda - T)\left(\frac{u + x}{\lambda}\right) + \frac{v}{\lambda} \in \mathscr{R}(\lambda - T) \oplus M.$$

Proof of (c). If $\delta(\lambda - T_1)$ is finite, it follows by applying Theorem 4.5 (d) to $\lambda - T_1$ that $\alpha(\lambda - T_1) = \delta(\lambda - T_1)$. Then $\alpha(\lambda - T) < \infty$ by part (a) of the present lemma. Moreover, $n(\lambda - T) = d(\lambda - T) < \infty$ as a consequence of parts (a) and (b) of the present lemma. We now use Theorem 4.5 (c) to conclude that $\delta(\lambda - T) = \alpha(\lambda - T)$.

If $\alpha(\lambda - T_1)$ is finite, then we see that $\delta(\lambda - T_1) = \alpha(\lambda - T_1)$, by an application of Theorem 4.5 (c) to $\lambda - T_1$. The preceding argument then shows that $\alpha(\lambda - T) = \delta(\lambda - T) < \infty$.

Theorem 4.7. *Suppose* $\mathscr{D}(T) = X$, $\lambda \neq 0$, *and* $\dim \mathscr{R}(T) < \infty$. *Then* $n(\lambda - T) = d(\lambda - T) < \infty$ *and* $\alpha(\lambda - T) = \delta(\lambda - T) < \infty$.

Proof. Let X_1 and T_1 be as in Lemma 4.6. Here $\dim X_1 < \infty$, and therefore, necessarily, $n(\lambda - T_1)$ and $d(\lambda - T_1)$ are finite. Also, $\alpha(\lambda - T_1)$ and $\delta(\lambda - T_1)$ are finite. Then $n(\lambda - T_1) = d(\lambda - T_1)$, by Corollary 4.4. It now follows from Lemma 4.6 that $n(\lambda - T) = d(\lambda - T) < \infty$ and $\alpha(\lambda - T) = \delta(\lambda - T) < \infty$.

5. Decomposition theorems

In this section we consider theorems dealing with expression of the operator T in the form $T = A + B$, where A and B are linear operators such that $\mathscr{D}(A) = \mathscr{D}(T)$, $\mathscr{D}(B) = X$, and A, B have properties which are related to properties of T. The general aim is to be able to study T more effectively by means of the structure revealed by the properties of A and B. As in sections 3 and 4, T is a linear operator in a linear space X. Our considerations here are entirely algebraic. We do not assume $\mathscr{D}(T) = X$ except where explicitly stated.

Theorem 5.1. (a) *Suppose* $n(T) \leqq d(T)$ *and* $n(T) < \infty$. *Then there exists a linear operator* B *with* $\mathscr{D}(B) = X$, $\mathscr{R}(B) \subset X$, *and* $\dim \mathscr{R}(B) \leqq n(T)$ *such that, if* $Ax = Tx - Bx$, *with* $\mathscr{D}(A) = \mathscr{D}(T)$, *then* A^{-1} *exists (i.e.* $Ax = 0$ *implies* $x = 0$*).*

(b) *If* $d(T) \leqq n(T)$ *and* $d(T) < \infty$, *there exists a linear operator* B *with* $\mathscr{D}(B) = X$, $\mathscr{R}(B) \subset X$, $\dim \mathscr{R}(B) \leqq d(T)$ *such that, if* $Ax = Tx - Bx$, *with* $\mathscr{D}(A) = \mathscr{D}(T)$, *then* $\mathscr{R}(A) = X$.

(c) *If* $n(T) = d(T) < \infty$, *the assertions about* A *and* B *in* (a) *and* (b) *can be made with simultaneous validity; in this case, therefore,* A *is a one-to-one mapping of* $\mathscr{D}(T)$ *onto all of* X.

Proof of (a). If $n(T) = 0$, we take $B = 0$, $A = T$. If $1 \leqq p = n(T) < \infty$, let $x_1, \ldots, x_p$ be a basis for $\mathscr{N}(T)$. Choose linear functionals $x_1', \ldots, x_p'$ such that $x_i'(x_j) = \delta_{ij}$ (the Kronecker delta) $i, j = 1, \ldots, p$. Choose elements $u_1, \ldots, u_p$ in X such that the corresponding elements $[u_1], \ldots, [u_p]$ of $X/\mathscr{R}(T)$ are linearly independent. This is possible because of the assumption that $p \leqq d(T)$. Now define B on X by

$$Bx = \sum_{i=1}^{p} x_i'(x) u_i ,$$

and let $Ax = Tx - Bx$ if $x \in \mathscr{D}(T)$. Clearly $\dim \mathscr{R}(B) \leqq p$. If $x \in \mathscr{D}(T)$ and $Ax = 0$, we see that $Bx = Tx \in \mathscr{R}(T)$. From the nature of the u_i's we then infer that $x_i'(x) = 0$ for each i, whence $Bx = 0$, and so $Tx = 0$, i.e. $x \in \mathscr{N}(T)$. But then x is a linear combination of $x_1, \ldots, x_p$, say

$$x = \sum_{i=1}^{p} a_i x_i .$$

Since $0 = x_j'(x) = a_j$, we see that $x = 0$. Hence A^{-1} exists.

Proof of (b). If $d(T) = 0$, we take $B = 0$, $A = T$. If $1 \leqq q = d(T) < \infty$, let $x_1, \ldots, x_q$ be a set of q linearly independent elements of $\mathscr{N}(T)$ (such elements exist, because $q \leqq n(T)$). Let $x_1', \ldots, x_q'$ be linear functionals such that $x_i'(x_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, q$. Choose $u_1, \ldots, u_q$ in X so that $[u_1], \ldots, [u_q]$ is a basis for $X/\mathscr{R}(T)$. Define B by

$$Bx = \sum_{i=1}^{q} x_i'(x) u_i ,$$

and let $Ax = Tx - Bx$ if $x \in \mathscr{D}(T)$. Clearly $\dim \mathscr{R}(B) \leqq d(T)$. To show that $\mathscr{R}(A) = X$, suppose that $y \in X$. The linear manifold generated by $u_1, \ldots, u_q$ is a complement to $\mathscr{R}(T)$ in X, so that we can write y in the form $y = \sum_{i=1}^{q} a_i u_i + Tx$, where $x \in \mathscr{D}(T)$. Now let

$$z = x - \sum_{i=1}^{q} [a_i + x_i'(x)] x_i .$$

We see that $z \in \mathscr{D}(T)$. Since $Bx_j = u_j$, we find by a direct calculation that $Az = y$. Thus $\mathscr{R}(A) = X$.

If $n(T) = d(T) < \infty$, we observe that the constructions of B and A in parts (a) and (b) are identical. This justifies the assertion in part (c).

Theorem 5.2. *Suppose* T *is given, and suppose there exists a linear operator* B *in* X, *with* $\mathscr{D}(B) = X$ *and* $\dim \mathscr{R}(B) < \infty$, *such that, if we define* A *by* $Ax = Tx - Bx$, $x \in \mathscr{D}(T)$, *then* $n(A) = d(A) = 0$ *(which means that* A *is a one-to-one mapping of* $\mathscr{D}(T)$ *onto all of* X*). Let the operator* S *be defined by* $S = I +$

$+ A^{-1}B$ *(with* $\mathscr{D}(S) = X$*). Then* $n(T) = n(S) = d(S) = d(T) < \infty$, *and* $\alpha(S) = \delta(S) < \infty$.

Proof. We observe that $A^{-1}B$ maps X into $\mathscr{D}(A)$ $(= \mathscr{D}(T))$ and that $AA^{-1}B = B$. Note also that $S[\mathscr{D}(A)] \subset \mathscr{D}(A)$. We can write

$$Tx = Ax + AA^{-1}Bx = ASx, \; x \in \mathscr{D}(T) . \tag{5-1}$$

Observe that $\dim \mathscr{R}(A^{-1}B) \leqq \dim \mathscr{R}(B) < \infty$. It follows from Theorem 4.7 and the definition of S that $n(S) = d(S) < \infty$ and $\alpha(S) = \delta(S) < \infty$.

We shall prove that $\mathscr{N}(T) = \mathscr{N}(S)$, and thus that $n(T) = n(S)$. The fact that $\mathscr{N}(T) \subset \mathscr{N}(S)$ follows from (5-1) and the fact that A^{-1} exists. We see that $\mathscr{N}(S) \subset \mathscr{D}(T)$, because, if $0 = Sx = x + A^{-1}Bx$, we have $x = -A^{-1}Bx \in$ $\in \mathscr{D}(T)$. It is then clear from (5-1) that $\mathscr{N}(S) \subset \mathscr{N}(T)$. Hence $\mathscr{N}(S) = \mathscr{N}(T)$.

Next we prove that $d(T) \leqq d(S)$. We can assume $1 \leqq d(T)$. Let N be a subspace complementary to $\mathscr{R}(T)$ in X, and let $x_1, \ldots, x_n$ be linearly independent elements of N. Since $\mathscr{R}(A) = X$, we can write $x_i = Au_i$, where $u_i \in \mathscr{D}(T)$. We are going to prove that the elements $[u_1], \ldots, [u_n]$ of $X/\mathscr{R}(S)$ are linearly independent, and therefore that $n \leqq d(S)$, whence $d(T) = \dim N \leqq$ $\leqq d(S)$. If we suppose that $\sum_{i=1}^{n} a_i [u_i] = 0$, this means that $\sum_{i=1}^{n} a_i u_i$ is some element Sv in $\mathscr{R}(S)$. Hence

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_i = v + A^{-1}Bv ,$$

and from this it is clear that $v \in \mathscr{D}(T)$. Then

$$A\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = Av + Bv = Tv \in \mathscr{R}(T) ;$$

since $N \cap \mathscr{R}(T) = (0)$, it follows that $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, and hence that all the a_i's are 0. This completes the argument.

Finally, we prove that $d(S) \leqq d(T)$. Let $q = d(S)$, $m = \delta(S)$. There exists a subspace M such that $M \cap \mathscr{R}(S) = (0)$, $M \subset \mathscr{N}(S^m)$, and $X = \mathscr{R}(S) \oplus M$ (by Lemma 3.5 (b)). Let $u_1, \ldots, u_q$ be a basis for M. Since

$$0 = S^m u_i = (I + V)^m u_i = u_i + mVu_i + \cdots + V^m u_i ,$$

where $V = A^{-1}B$, we see that $u_i \in \mathscr{R}(V) \subset \mathscr{D}(T)$. Let $x_i = Au_i$. We shall show that the elements $[x_1], \ldots, [x_q]$ of $X/\mathscr{R}(T)$ are linearly independent, so that $d(T) \geqq d(S)$. In fact, suppose that $\sum_{i=1}^{q} c_i x_i$ is some element Tu of $\mathscr{R}(T)$. Then $\sum_{i=1}^{q} c_i Au_i = Tu$, and so (see (5-1))

$$\sum_{i=1}^{q} c_i u_i = A^{-1}Tu = Su \in \mathscr{R}(S) \cap M ,$$

whence $\sum_{i=1}^{q} c_i u_i = 0$, and the c_i's are all 0. This completes the proof of Theorem 5.2.

The next theorem relates a certain type of splitting of the operator T in the form $T = A + B$ to a direct-sum decomposition of the space in the form $X = M \oplus N$, related in a suitable way to T.

Theorem 5.3. *Suppose M and N are linear manifolds in X such that $M \cap N = (0)$, $N \subset \mathscr{D}(T)$, $T(N) \subset N$, $\dim N < \infty$, $X = M \oplus N$, and such that T maps $M \cap \mathscr{D}(T)$ in a one-to-one manner onto all of M. Let P and Q be the projections of X onto M along N, and onto N along M, respectively. Suppose $\lambda \neq 0$, and define*

$$Ax = TPx - \lambda Qx, \quad x \in \mathscr{D}(T), \tag{5-2}$$

$$Bx = TQx + \lambda Qx, \quad x \in X. \tag{5-3}$$

Then $Tx = Ax + Bx$ and $ABx = BAx$ if $x \in \mathscr{D}(T)$; $\mathscr{R}(B) \subset N$, and hence $\dim \mathscr{R}(B) < \infty$. Also

$$Tx = \frac{1}{\lambda}(\lambda - B)Ax \quad \text{if} \quad x \in \mathscr{D}(T), \tag{5-4}$$

$$\mathscr{R}(\lambda - B) = \mathscr{R}(T), \tag{5-5}$$

and A is a one-to-one mapping of $\mathscr{D}(T)$ onto all of X.

Proof. Note that $I = P + Q$, $\mathscr{R}(P) = \mathscr{N}(Q) = M$, $\mathscr{N}(P) = \mathscr{R}(Q) = N$, $P^2 = P$, $Q^2 = Q$, $PQ = QP = 0$. Observe that $\mathscr{R}(Q) \subset \mathscr{D}(T)$; it follows from this that $P[\mathscr{D}(T)] \subset \mathscr{D}(T)$. We see from these remarks that A and B are well-defined by (5-2) and (5-3), with $\mathscr{D}(A) = \mathscr{D}(T)$, $\mathscr{D}(B) = X$. It is clear that $Ax + Bx = T(Px + Qx) = Tx$ if $x \in \mathscr{D}(T)$. The relation $\mathscr{R}(B) \subset N$ is a consequence of $\mathscr{R}(Q) = N$ and $T(N) \subset N$.

The assumptions on T guarantee that if $x \in \mathscr{D}(T)$, then $TPx \in M$ and hence $QTPx = 0$. It follows that

$$BAx = (TQ + \lambda Q)(TPx - \lambda Qx) = -\lambda TQx - \lambda^2 Qx.$$

Likewise $TQx \in N$, so $PTQx = 0$ and $QTQx = TQx$, whence

$$ABx = (TP - \lambda Q)(TQx + \lambda Qx) = -\lambda TQx - \lambda^2 Qx,$$

and so $ABx = BAx$.

Next we prove that, if $y \in X$, there is a unique $x \in \mathscr{D}(T)$ such that $Ax = y$. Supposing that we have one such x, the equation $Ax = y$ is equivalent to

$$(TP - \lambda Q)(Px + Qx) = Py + Qy,$$

or (in view of $PQ = QP = 0$) to

$$TPx - \lambda Qx = Py + Qy. \tag{5-6}$$

In view of the uniqueness implied in $X = M \oplus N$, (5-6) is equivalent to the two equations

$$TPx = Py, \quad -\lambda Qx = Qy. \tag{5-7}$$

Since $\lambda \neq 0$ and T maps $M \cap \mathscr{D}(T)$ in one-to-one manner onto M, we see that Px and Qx are uniquely determined, and hence $x = Px + Qx$ is uniquely determined. The unique solution x of $Ax = y$ is

$$x = A^{-1}y = u - \frac{1}{\lambda}Qy, \tag{5-8}$$

where u is the unique element of $M \cap \mathscr{D}(T)$ such that $Tu = Py$.

Finally, we prove (5-4) and (5-5). If $x \in \mathscr{D}(T)$, we can verify (5-4) by direct use of (5-2) and (5-3), noting that $QTPx = 0$. From (5-4) we see that $\mathscr{R}(T) \subset \subset \mathscr{R}(\lambda - B)$. On the other hand, if $y = (\lambda - B)x$; we can write $\lambda x = Au$ for some $u \in \mathscr{D}(T)$. Then $y = (\lambda - B)\left(\frac{1}{\lambda} Au\right) = Tu$, by (5-4), and so $\mathscr{R}(\lambda - B) \subset \subset \mathscr{R}(T)$.

The next theorem continues the investigation, using the conclusions of Theorem 5.3 as hypotheses.

Theorem 5.4. *Suppose, given T, there exist linear operators A, B in X, with $\mathscr{D}(A) = \mathscr{D}(T)$, $\mathscr{D}(B) = X$, $\dim \mathscr{R}(B) < \infty$, $\mathscr{R}(B) \subset \mathscr{D}(T)$, $Tx = Ax + Bx$ and $ABx = BAx$ if $x \in \mathscr{D}(T)$, and such that A maps $\mathscr{D}(T)$ in a one-to-one manner onto all of X. Then $n(T) = d(T) < \infty$ and $\alpha(T) = \delta(T) < \infty$.*

Proof. Theorem 5.2 implies that $n(T) = d(T) < \infty$. We shall prove that $\mathscr{N}(T^k) \subset \mathscr{R}(B)$ and hence $n(T^k) \leqq \dim \mathscr{R}(B) < \infty$ when $k \geqq 0$; it will then follow from Lemma 3.1 that $\alpha(T) < \infty$, and thereafter from Theorem 4.5 (c) that $\alpha(T) = \delta(T)$.

We begin by proving that $A^{-1}Bx = BA^{-1}x$ for each x in X. Given x, choose $u \in \mathscr{D}(T)$ so that $Au = x$; then $u = A^{-1}x$. Now, $ABu = BAu = Bx$, and therefore $Bu = A^{-1}Bx$, or $BA^{-1}x = A^{-1}Bx$.

We now prove that $\mathscr{N}(T^k) \subset \mathscr{R}(B)$ if $k \geqq 0$. This is certainly true if $k = 0$. We proceed by induction, assuming $\mathscr{N}(T^k) \subset \mathscr{R}(B)$ for a certain k. If $x \in \in \mathscr{N}(T^{k+1})$ we see that $Tx \in \mathscr{N}(T^k)$, so that $Ax + Bx \in \mathscr{R}(B)$. Let $Ax + + Bx = Bv$. Then $Ax + B(x - v) = 0$, or $A[x + A^{-1}B(x - v)] = 0$, whence (since A^{-1} exists) $x = -A^{-1}B(x - v) = -BA^{-1}(x - v) \in \mathscr{R}(B)$. This proves that $\mathscr{N}(T^{k+1}) \subset \mathscr{R}(B)$ and completes the induction.

Theorem 5.5. *Suppose that $n(T) = d(T) < \infty$, that $\alpha(T) = \delta(T) < \infty$, and that $\mathscr{D}(T) = X$. Let $p = \alpha(T)$. Then $\mathscr{R}(T^p) \cap \mathscr{N}(T^p) = (0)$ and*

$$X = \mathscr{R}(T^p) \oplus \mathscr{N}(T^p) . \tag{5-9}$$

This conclusion is also valid when $\mathscr{D}(T) \neq X$ if $p = 1$.

Proof. The conclusion, in case $\mathscr{D}(T) = X$, is included in Theorem 3.7 (b). If $\mathscr{D}(T) \neq X$, we can at least conclude from Theorem 3.7 (b) that $\mathscr{R}(T^p) \cap \cap \mathscr{N}(T^p) = (0)$. Suppose now, in the case $\mathscr{D}(T) \neq X$, $p = 1$, that $\mathscr{R}(T) \oplus \mathscr{N}(T)$ were a proper subset of X. Then $\mathscr{R}(T) \oplus \mathscr{N}(T)$ would have an algebraic complement M in X with $\dim M > 0$. But then $\mathscr{N}(T) \oplus M$ would be an algebraic complement of $\mathscr{R}(T)$, so that we would have

$$d(T) = \dim \mathscr{N}(T) + \dim M > n(T) ,$$

in contradiction to $d(T) = n(T)$. Hence (5-9) must be true when $p = 1$, even if $\mathscr{D}(T) \neq X$.

Comment: The truth of (5-9) in general when $p > 1$ and $\mathscr{D}(T) \neq X$ remains uncertain. If (5-9) is not true, we can use an argument like the foregoing one to show that $d(T^p) > n(T^p)$. Hence, to prove (5-9) it will suffice to show that $d(T^p) \leqq n(T^p)$. I have not succeeded in doing this, or in giving a counter-example. It is known, however, that there are many situations when (5-9) is true with $p > 1$ and $\mathscr{D}(T) \neq X$. The next theorem furnishes an instance.

Other examples are known from the theory of closed linear operators in Banach spaces. See for instance Theorem 5.8-A in TAYLOR [7], and Theorem 9.1 in the present paper.

Theorem 5.6. *Let T, M and N satisfy the hypotheses of Theorem* 5.3. *Then $n(T) = d(T) < \infty$ and $\alpha(T) = \delta(T) < \infty$. Moreover, if $\alpha(T) = p$, we have $\mathscr{R}(T^p) \cap \mathscr{N}(T^p) = (0)$ and $X = \mathscr{R}(T^p) \oplus \mathscr{N}(T^p)$.*

Proof. The conclusions about $n(T)$, $d(T)$, $\alpha(T)$, and $\delta(T)$ follow from Theorem 5.3 and 5.4. We know from Theorem 3.7 (b) that $\mathscr{R}(T^p) \cap \mathscr{N}(T^p) = (0)$ and

$$\mathscr{D}(T^p) = [\mathscr{D}(T^p) \cap \mathscr{R}(T^p)] \oplus \mathscr{N}(T^p) . \tag{5-10}$$

Let A and B be the operators mentioned in Theorem 5.3. We shall prove that

$$\mathscr{R}(A^p) \subset \mathscr{R}(T^p) + \mathscr{R}(B) . \tag{5-11}$$

Since $\mathscr{R}(B) \subset \mathscr{D}(T^p)$, we shall then know (see (5-10)) that $\mathscr{R}(A^p) \subset \mathscr{R}(T^p) \oplus \oplus \mathscr{N}(T^p)$. The proof of the theorem is then completed by noting that $\mathscr{R}(A^p) = X$. This is true because $\mathscr{R}(A) = X$.

To prove (5-11) we begin by observing that $Tx = Ax + Bx$ if $x \in \mathscr{D}(T)$; hence $Ax = Tx - Bx$. We assert that

$$A^n x = T^n x + B \sum_{j=1}^{n} (-1)^j C_{n,j} T^{n-j} B^{j-1} x \tag{5-12}$$

if $n \geqq 1$ and $x \in \mathscr{D}(T^n)$. We have just seen that this is true if $n = 1$. We establish (5-12) in general by induction. We have $TBx = BTx$ if $x \in \mathscr{D}(T)$, because then $ABx = BAx$. Since $\mathscr{R}(B) \subset N$ and $T(N) \subset N$, we see that $\mathscr{R}(B) \subset \mathscr{D}(T^k)$ if $k \geqq 1$. We then assume (5-12) is true for a given n, assume $x \in \mathscr{D}(T^{n+1})$ and write $A^{n+1}x = (T - B)A^n x = TA^n x - BA^n x$. A direct calculation then gives us the formula corresponding to (5-12) with $n + 1$ in place of n. Thus (5-12) is true, in particular, when $n = p$, and (5-11) follows at once.

6. Reducibility

Suppose M_1 and M_2 are subspaces of X such that $M_1 \cap M_2 = (0)$ and $X = M_1 \oplus M_2$. Let P_1 and P_2 be the projections of X on M_1 along M_2 and on M_2 along M_1, respectively. A linear operator T in X is said to be completely reduced by the pair (M_1, M_2) if $P_i[\mathscr{D}(T)] \subset \mathscr{D}(T)$ for $i = 1, 2$. A set of necessary and sufficient conditions that this be so is that $P_1[\mathscr{D}(T)] \subset \mathscr{D}(T)$ and $P_1 Tx = TP_1 x$ if $x \in \mathscr{D}(T)$. The corresponding conditions are then satisfied by P_2. If T is completely reduced by (M_1, M_2), so is T^{-1}, if it exists.

Assuming that T is completely reduced by (M_1, M_2), let T_i be the restriction of T to M_i (with $\mathscr{D}(T_i) = M_i \cap \mathscr{D}(T)$). The following facts may be noted (we omit the proofs):

$$\mathscr{D}(T) = \mathscr{D}(T_1) \oplus \mathscr{D}(T_2) \tag{6-1}$$

$$\mathscr{N}(T) = \mathscr{N}(T_1) \oplus \mathscr{N}(T_2) \tag{6-2}$$

$$\mathscr{R}(T) = \mathscr{R}(T_1) \oplus \mathscr{R}(T_2) . \tag{6-3}$$

One sees that T^{-1} exists if and only if T_1^{-1} and T_2^{-1} both exist. Also, $\mathscr{R}(T) = X$ if and only if $\mathscr{R}(T_i) = M_i$ for $i = 1, 2$.

Theorem 6.1. *Let T be a linear operator in X which is completely reduced by (M_1, M_2), and let T_i be the restriction of T to M_i $(i = 1, 2)$. Then:*

(a) *$n(T) < \infty$ if and only if both $n(T_1)$ and $n(T_2)$ are finite, and in that case $n(T) = n(T_1) + n(T_2)$.*

(b) *$d(T) < \infty$ if and only if both $d(T_1)$ and $d(T_2)$ are finite, and in that case $d(T) = d(T_1) + d(T_2)$.*

(c) *If $\alpha(T) = p < \infty$, then $\alpha(T_i) \leqq p$ when $i = 1, 2$. If $\alpha(T_i) = p_i < \infty$ when $i = 1, 2$, then $\alpha(T) = \max(p_1, p_2)$.*

(d) *If $\delta(T) = q < \infty$, then $\delta(T_i) \leqq q$ when $i = 1, 2$. If $\delta(T_i) = q_i < \infty$ when $i = 1, 2$, then $\delta(T) = \max(q_1, q_2)$.*

(e) *If $n(T) = d(T) < \infty$ and $\alpha(T) < \infty$, then $n(T_i) = d(T_i) < \infty$ and $\alpha(T_i) = \delta(T_i) < \infty$ when $i = 1, 2$.*

(f) *If $\mathscr{D}(T) = X$, if $n(T) = d(T) < \infty$, and if $\delta(T) < \infty$, then $n(T_i) = d(T_i) < \infty$ and $\alpha(T_i) = \delta(T_i) < \infty$ when $i = 1, 2$.*

(g) *If $n(T_i) = d(T_i) < \infty$ and $\alpha(T_i) < \infty$ for $i = 1, 2$, then $n(T) = d(T) < \infty$ and $\alpha(T) = \delta(T) < \infty$.*

Proof of (a). This follows from (6-2).

Proof of (b). Let M be a complement of $\mathscr{R}(T)$ in X, and let A_1 be a complement of $\mathscr{R}(T_i)$ in M_i $(i = 1, 2)$. In view of (6-3) and the fact that $X = M_1 \oplus M_2$, we have

$$\mathscr{R}(T_1) \oplus \mathscr{R}(T_2) \oplus M = \mathscr{R}(T_1) \oplus \mathscr{R}(T_2) \oplus A_1 \oplus A_2 .$$

Hence $A_1 \oplus A_2$ is also a complement of $\mathscr{R}(T)$ in X; (b) is now evident.

Proof of (c). It is easy to see that T^n is completely reduced by (M_1, M_2), and that the restriction of T^n to M_i is $(T_i)^n$. Hence we can apply (6-2) and (6-3) with T^n in place of T. Suppose now that $\alpha(T) = p < \infty$. If $x \in \mathscr{N}(T_1^{p+1})$, we see that

$$x \in \mathscr{N}(T^{p+1}) = \mathscr{N}(T^p) = \mathscr{N}(T_1^p) \oplus \mathscr{N}(T_2^p) .$$

We can write $x = x_1 + x_2$, where $x_i \in \mathscr{N}(T_i^p)$. Then $x - x_1 = x_2$. Here $x - x_1 \in \mathscr{N}(T_1^{p+1})$ and $x_2 \in \mathscr{N}(T_2^p) \subset \mathscr{N}(T_2^{p+1})$. But then $x - x_1 = x_2 = 0$, and so $x = x_1 \in \mathscr{N}(T_1^p)$. Thus $\alpha(T_1) \leqq p$. By symmetry we see that $\alpha(T_2) \leqq p$.

Conversely, suppose $\alpha(T_1) = p_1 < \infty$, $\alpha(T_2) = p_2 < \infty$, and let $p = \max(p_1, p_2)$. Then

$$\begin{aligned} \mathscr{N}(T^{p+1}) &= \mathscr{N}(T_1^{p+1}) \oplus \mathscr{N}(T_2^{p+1}) \\ &= \mathscr{N}(T_1^p) \oplus \mathscr{N}(T_2^p) = \mathscr{N}(T^p) , \end{aligned}$$

so that $\alpha(T) \leqq p = \max(p_1, p_2)$. The first part of (c) now shows that $\max(p_1, p_2) \leqq \alpha(T)$. Hence $\alpha(T) = \max(p_1, p_2)$.

Proof of (d). This is similar to the proof of (c) and we omit the argument.

Proof of (e). Theorem 4.5 (c) shows that $\delta(T) = \alpha(T)$. Then $n(T_i)$, $d(T_i)$, $\alpha(T_i)$ and $\delta(T_i)$ are all finite $(i = 1, 2)$, by parts (a)—(d) of the present theorem. By Theorem 4.2 we infer that $n(T_i) \leqq d(T_i)$. Now

$$n(T_1) + n(T_2) = n(T) = d(T) = d(T_1) + d(T_2) ,$$

so

$$n(T_1) - d(T_1) = d(T_2) - n(T_2) .$$

The left side here is not positive, and the right side is not negative. Hence both sides are equal to zero. We can now apply Theorem 4.5 (c) to conclude that $\alpha(T_i) = \delta(T_i)$ $(i = 1, 2)$. This completes the proof.

Proof of (f). The argument is like that in proving (e), except that we use Theorem 4.5 (d).

Proof of (g). We use Theorem 4.5 (c) to conclude that $\delta(T_1)$ and $\delta(T_2)$ are finite. We then finish the proof by appealing to (a), (b), (c), (d) of the present theorem.

7. Products of operators. Polynomials in an operator

In this section we deal with linear operators in X which have all of X as their domain. No topology is required.

Theorem 7.1. *Suppose T_1 and T_2 are linear operators in X, each defined on all of X. Suppose $n(T_i) = d(T_i) < \infty$, $i = 1, 2$.*

(a) *Then $n(T_1 T_2) = d(T_1 T_2) < \infty$.*

(b) *If we also assume that $T_1 T_2 = T_2 T_1$ and that $\alpha(T_i)$ and $\delta(T_i)$ are finite for $i = 1, 2$, then $\alpha(T_1 T_2)$ and $\delta(T_1 T_2)$ are finite.*

Proof of (a). By Theorem 5.1 (c) we can write $T_i = A_i + B_i$, where A_i and B_i are linear, defined on all of X, $\dim \mathscr{R}(B_i) \leqq n(T_i)$, and A_i is a one-to-one mapping of X onto X. Write

$$T_1 T_2 = A_1 A_2 + (A_1 B_2 + B_1 A_2 + B_1 B_2) .$$

We see that $A_1 A_2$ is a one-to-one mapping of X onto X, and $A_1 B_2 + B_1 A_2 + B_1 B_2$ has finite-dimensional range. Hence $n(T_1 T_2) = d(T_1 T_2) < \infty$, by Theorem 5.2.

Proof of (b). Observe that $(T_1 T_2)^n = T_1^n T_2^n$. We see inductively from (a) that $n(T^k) = d(T^k) < \infty$, $k = 2, 3, \ldots$, and that $n[(T_1 T_2)^k] = d[(T_1 T_2)^k] < \infty$, $k = 1, 2, \ldots$. Let $\alpha(T_i) = p_i$. Then $\mathscr{N}(T_i^k) \subset \mathscr{N}(T_i^{p_i})$ if $k = 0, 1, 2, \ldots$, and hence $n(T_i^k) \leqq n(T_i^{p_i})$.

Now,

$$\mathscr{N}(T_1^k T_2^k) = \{x : T_2^k x \in \mathscr{N}(T_1^k)\} ;$$

that is, $\mathscr{N}(T_1^k T_2^k) = (T_2^k)^{-1} \mathscr{N}(T_1^k)$, and so $T_2^k\{\mathscr{N}(T_1^k T_2^k)\} \subset \mathscr{N}(T_1^k)$. Also, $\mathscr{N}(T_1^k) \subset \mathscr{N}(T_1^k T_2^k)$, because $T_1^k T_2^k = T_2^k T_1^k$. Hence $T_2^k\{\mathscr{N}(T_1^k T_2^k)\} \subset \mathscr{N}(T_1^k T_2^k)$. If we let T be the restriction of T_2^k to $\mathscr{N}(T_1^k T_2^k)$, we know from algebra that

$$\dim \mathscr{R}(T) + n(T) = n(T_1^k T_2^k) .$$

Clearly $\dim \mathscr{R}(T) \leqq n(T_1^k)$ and $n(T) \leqq n(T_2^k)$. Therefore

$$n(T_1^k T_2^k) \leqq n(T_1^k) + n(T_2^k) ,$$

and hence

$$n(T_1^k T_2^k) \leqq n(T_1^{p_1}) + n(T_2^{p_2}) .$$

It now follows from Lemma 3.1 that

$$\alpha(T_1 T_2) \leqq n(T_1^{p_1}) + n(T_2^{p_2}) < \infty .$$

It then follows from Theorem 4.5 (c) that $\delta(T_1 T_2) = \alpha(T_1 T_2)$.

The next theorem is a sort of converse.

Theorem 7.2. *Suppose T_1 and T_2 are linear operators in X, each defined on all of X. Suppose that $T_1 T_2 = T_2 T_1$, $n(T_1 T_2) = d(T_1 T_2) < \infty$, and that $\alpha(T_1 T_2) < \infty$. Then $n(T_i) = d(T_i) < \infty$ and $\alpha(T_i) = \delta(T_i)$ $(i = 1, 2)$.*

Proof. Let $p = \alpha(T_1 T_2) = \delta(T_1 T_2)$ (see Theorem 4.5 (c)). Since $(T_1 T_2)^k = T_1^k T_2^k$, it follows from Theorem 7.1 (a) that $n(T_1^p T_2^p) = d(T_1^p T_2^p) < \infty$. Now,

$$\mathcal{N}(T_1^k) \subset \mathcal{N}(T_2^k T_1^k) = \mathcal{N}(T_1^k T_2^k) \subset \mathcal{N}(T_1^p T_2^p)$$

if $k \geqq 0$, and hence $n(T_1^k) \leqq n(T_1^p T_2^p) < \infty$. Also,

$$\mathcal{R}(T_1^k) \supset \mathcal{R}(T_1^k T_2^k) \supset \mathcal{R}(T_1^p T_2^p)$$

if $k \geqq 0$, so that $d(T_1^k) \leqq d(T_1^p T_2^p) < \infty$. It follows from Lemma 3.1 and 3.2 that $\alpha(T_1)$ and $\delta(T_1)$ are finite (and therefore equal). It follows by Corollary 4.4 that $n(T_1) = d(T_1) < \infty$. The same considerations apply to T_2, because $T_1 T_2 = T_2 T_1$.

8. Closed linear operators in normed linear spaces

In this section we deal with closed linear mappings from one normed linear space to another. In some cases we need completeness of one or more spaces. In connection with Lemmas 8.1, 8.2 see Théorème 3 in DIEUDONNÉ [2] and Lemma 3.1 in YOOD [8]. In connection with Lemma 8.4 see Theorem 3.4 in YOOD [8].

Lemma 8.1. *Let T be a closed linear mapping with domain in X and range in Y, where X and Y are normed linear spaces. Suppose that, for each conditionally compact set S in Y, the bounded subsets of $T^{-1}(S)$ are conditionally compact. Then $n(T) < \infty$, and $\mathcal{R}(T)$ is closed.*

Proof. It is clear that $n(T) < \infty$, for $\mathcal{N}(T) = T^{-1}((0))$ and (0) is compact in Y, so that the bounded subsets of $\mathcal{N}(T)$ are conditionally compact.

In proving that $\mathcal{R}(T)$ is closed, we observe, first of all, that if $\{x_n\}$ is a sequence in $\mathcal{D}(T)$ such that $Tx_n \to y$ and $y \notin \mathcal{R}(T)$, then $\{x_n\}$ is not bounded. For, the set consisting of the Tx_n's is conditionally compact, and so if $\{x_n\}$ were bounded it would contain a convergent subsequence, say $\lim_{i \to \infty} x_{n_i} = x$, because the set of x_n's would be conditionally compact. But then, from $x_{n_i} \to x$, $Tx_{n_i} \to y$ and the fact that T is closed, we could conclude that $x \in \mathcal{D}(T)$ and $Tx = y$, contradicting $y \notin \mathcal{R}(T)$.

We now suppose that $\mathcal{R}(T)$ is not closed. Then there is a sequence $\{x_n\}$ in $\mathcal{D}(T)$ such that $Tx_n \to y$, where $y \notin \mathcal{R}(T)$. The fact that T is closed implies that $\mathcal{N}(T)$ is closed. Certainly $y \neq 0$, and hence $Tx_n \neq 0$, i.e. $x_n \notin \mathcal{N}(T)$, if n is sufficiently large. We can assume that $x_n \notin \mathcal{N}(T)$ for every n. Then the distance d_n from x_n to $\mathcal{N}(T)$ is positive. Let $\{\varepsilon_n\}$ be a sequence of positive numbers such that $\varepsilon_n \to 0$. Choose $u_n \in \mathcal{N}(T)$ in such a way that $\|x_n - u_n\| < (1 + \varepsilon_n) d_n$. We observe that $T(x_n - u_n) = Tx_n \to y$, so that $\{x_n - u_n\}$ is not a bounded sequence. Choose $n_1, n_2, \ldots$ so that $\lim_{i \to \infty} \|x_{n_i} - u_{n_i}\| = \infty$. Let

$w_i = \dfrac{x_{n_i} - u_{n_i}}{\|x_{n_i} - u_{n_i}\|}$. Then $\|w_i\| = 1$ and $Tw_i = \dfrac{Tx_{n_i}}{\|x_{n_i} - u_{n_i}\|} \to 0$. The Tw_i's form a conditionally compact set and the w_i's form a bounded set; therefore the w_i's form a conditionally compact set. Let $i_1, i_2, \ldots$ be a subsequence such that $w_{i_k} \to w$ as $k \to \infty$. Since T is closed and $Tw_{i_k} \to 0$, we infer that $w \in \mathscr{D}(T)$ and $Tw = 0$, i.e. $w \in \mathscr{N}(T)$. Then $u_{n_i} + \|x_{n_i} - u_{n_i}\| w \in \mathscr{N}(T)$, and so

$$d_{n_i} \leqq \|x_{n_i} - u_{n_i} - \|x_{n_i} - u_{n_i}\| w\| = \|x_{n_i} - u_{n_i}\| \, \|w_i - w\| ,$$

$$d_{n_i} \leqq (1 + \varepsilon_{n_i}) d_{n_i} \|w_i - w\| , \quad \text{and} \quad 1 \leqq (1 + \varepsilon_{n_i}) \|w_i - w\| .$$

This contradicts the fact that $w_{i_k} \to w$. Thus $\mathscr{R}(T)$ must be closed.

For the converse we need complete spaces.

Lemma 8.2. *Let X and Y be Banach spaces. Let T be a closed linear operator with domain in X and range in Y. Suppose that $n(T) < \infty$ and that $\mathscr{R}(T)$ is closed. Then, if S is a conditionally compact set in Y, each bounded subset of $T^{-1}(S)$ is conditionally compact.*

Proof. Since $n(T) < \infty$, there exists a continuous projection P of X onto $\mathscr{N}(T)$. We can then write $X = \mathscr{R}(P) \oplus \mathscr{N}(P)$, where $\mathscr{R}(P) = \mathscr{N}(T)$. Suppose $x \in \mathscr{D}(T)$. Then $Px \in \mathscr{N}(T) \subset \mathscr{D}(T)$, and hence $x - Px \in \mathscr{D}(T)$. Note also that $x - Px \in \mathscr{N}(P)$. We see that $Tx = T(x - Px)$, and hence $\mathscr{R}(T) = T[\mathscr{D}(T) \cap \cap \mathscr{N}(P)]$. If $x \in \mathscr{D}(T) \cap \mathscr{N}(P)$ and $Tx = 0$, then $x \in \mathscr{N}(T) = \mathscr{R}(P)$, so $x = 0$. Hence, if we define T_1 as follows: $\mathscr{D}(T_1) = \mathscr{D}(T) \cap \mathscr{N}(P)$, $T_1 x = Tx$ when $x \in \mathscr{D}(T_1)$, we see that T_1 is a one-to-one mapping of $\mathscr{D}(T_1)$ onto $\mathscr{R}(T)$. The fact that T is closed implies that T_1 is closed, and thus also that T_1^{-1} is closed. Since X and Y are complete, the closed subspaces $\mathscr{N}(P)$, $\mathscr{R}(T)$ can be regarded as complete spaces in themselves. But then, T_1^{-1} is continuous, for it is a closed linear mapping of all of $\mathscr{R}(T)$ into $\mathscr{N}(P)$.

Now let S be a conditionally compact set in Y, and let Q be a bounded subset of $T^{-1}(S)$. Suppose $\{x_n\}$ is a sequence in Q. Then $\{Px_n\}$ is a bounded sequence in $\mathscr{N}(T)$. Hence, because $\dim \mathscr{N} < \infty$, there is a subsequence $\{v_n\}$ of $\{x_n\}$ such that $\{Pv_n\}$ is convergent. Now, $Tv_n \in S$, and therefore there is a subsequence $\{w_n\}$ of $\{v_n\}$ such that $\{Tw_n\}$ is convergent. But $Tw_n = TPw_n + + T(w_n - Pw_n) = T(w_n - Pw_n) = T_1(w_n - Pw_n)$, or $w_n - Pw_n = T_1^{-1}(Tw_n)$. From this we see that $\{w_n\}$ is convergent. Since $\{w_n\}$ is a subsequence of $\{x_n\}$, we have proved that Q is conditionally compact.

Remark: The only use of completeness of X and Y was in establishing that $\mathscr{N}(P)$ and $\mathscr{R}(T)$ are complete spaces.

The next lemma deals with a reformulation of the property which occurs in Lemmas 8.1 and 8.2.

Lemma 8.3. *Let X and Y be normed linear spaces, and let T be a closed linear mapping with domain in X and range in Y. Then, if T has either of the following two properties* (a), (b), *it has the other property.*

Property (a): *If S is a conditionally compact set in Y and Q is a bounded subset of $T^{-1}(S)$, Q is conditionally compact.*

Property (b): *If G is a compact set in Y and F is a closed and bounded subset of $T^{-1}(G)$, then F is compact.*

Furthermore, if T has property (a) *and if F is a closed and bounded subset of $\mathscr{D}(T)$, then $T(F)$ is a closed set.*

We leave the proofs to the reader.

Lemma 8.4. *Let X, Y, Z be normed linear spaces. Let A and B be closed linear mappings, with $\mathscr{D}(A) \subset X$, $\mathscr{R}(A) \subset Y$, $\mathscr{D}(B) \subset Y$, $\mathscr{R}(B) \subset Z$. Let C be defined as follows:*

$$\mathscr{D}(C) = \{x : x \in \mathscr{D}(A), Ax \in \mathscr{D}(B)\}, Cx = BAx .$$

Suppose that A and B have property (b) *as in Lemma* 8.3, *and suppose that C is closed. Then C has property* (b).

Proof. Let G be a compact set in Z and let F be a closed and bounded subset of $C^{-1}(G)$. We wish to prove that F is compact. Observe that $A(F) \subset B^{-1}(G)$, because $x \in F$ implies $Cx = BAx \in G$, and so $Ax \in B^{-1}(G)$. We know that $A(F)$ is closed (see Lemma 8.3). If we can show that $A(F)$ is bounded, it will be compact, because B has property (b). But $F \subset A^{-1}(A(F))$, and it will then follow that F is compact, by the property (b) of A.

Proof that $A(F)$ is bounded: Suppose the contrary. Then there is a sequence $\{x_n\}$ in F such that $\|Ax_n\| \to \infty$. We can assume that $Ax_n \neq 0$. Now, $C(F) \subset G$, so $BAx_n \in G$, and G is a bounded set (being compact). Let $y_n = Ax_n/\|Ax_n\|$. Then $By_n = BAx_n/\|Ax_n\| \to 0$, because $\{BAx_n\}$ is bounded. Now, $\|y_n\| = 1$, so the y_n's form a bounded set which is mapped by B into a conditionally compact set. Hence there is a convergent subsequence $\{y_{n_i}\}$ with limit y. Observe now that $x_{n_i}/\|Ax_{n_i}\| \to 0$ as $i \to \infty$ (because $x_{n_i} \in F$ and F is bounded), and

$$A\left(\frac{x_{n_i}}{\|Ax_{n_i}\|}\right) = y_{n_i} \to y .$$

Since A is closed, it follows that $0 = A(0) = y$. This contradicts $\|y\| = 1$, and the proof is finished.

Theorem 8.5. *Let X be a Banach space, and let T be a closed linear operator with domain and range in X. Suppose also that all powers $T^2, T^3, \ldots$ are closed. (This assumption is automatically fulfilled as a consequence of the fact that T is closed if the resolvent set of T is not void; see* [7], *problem* 4, *p.* 297.*) Then, if $n(T) < \infty$ and $\mathscr{R}(T)$ is closed, it follows that $n(T^k) < \infty$ and $\mathscr{R}(T^k)$ is closed, $k = 2, 3, \ldots$.*

Proof. We appeal to Lemmas 8.2, 8.3, 8.4, 8.1, and use induction.

9. Spectral theory for closed linear operators in a Banach space

Throughout this section X denotes a complex Banach space and T denotes a closed linear operator with domain and range in X. The resolvent set $\varrho(T)$ is the set of all complex numbers λ such that $\lambda - T$ has a continuous inverse and $\mathscr{R}(\lambda - T)$ is dense in X. Since T is closed and X is complete, $\lambda \in \varrho(T)$ if and only if $\lambda - T$ is a one-to-one mapping of $\mathscr{D}(T)$ onto all of X; the inverse $(\lambda - T)^{-1}$ is then closed, and necessarily continuous. We write $(\lambda - T)^{-1} = R_\lambda(T)$ (the resolvent of T) when $\lambda \in \varrho(T)$. The points not in $\varrho(T)$ form the spectrum $\sigma(T)$.

We shall be particularly interested in isolated points of $\sigma(T)$. Suppose λ_0 is such a point. Then the set (λ_0) consisting of the single point λ_0 is a spectral set of T, and there is a corresponding spectral projection operator E_0 (see TAYLOR [7], p. 299). This gives rise to a direct sum decomposition of X,

$$X = \mathscr{N}(E_0) \oplus \mathscr{R}(E_0)\,, \tag{9-1}$$

and T is completely reduced by the pair of closed subspaces $\mathscr{N}(E_0)$, $\mathscr{R}(E_0)$. Let T_1 and T_2 be the restrictions of T to $\mathscr{N}(E_0)$ and $\mathscr{R}(E_0)$, respectively. It turns out that $\mathscr{R}(E_0) \subset \mathscr{D}(T^n)$ for $n = 1, 2, \ldots$, and that T_2 is a continuous operator in $\mathscr{R}(E_0)$, with $\mathscr{D}(T_2) = \mathscr{R}(E_0)$. The operator T_1 is a closed operator in $\mathscr{N}(E_0)$, with $\mathscr{D}(T_1) = \mathscr{D}(T) \cap \mathscr{N}(E_0)$. It also turns out that $\sigma(T_2) = (\lambda_0)$ and that $\sigma(T_1) = \sigma(T) - (\lambda_0)$. Hence $\lambda_0 \in \varrho(T_1)$, so that $\mathscr{R}(\lambda_0 - T_1) = \mathscr{N}(E_0)$ and $(\lambda_0 - T_1)^{-1}$ is continuous on $\mathscr{N}(E_0)$. For these facts see TAYLOR [7], p. 299, especially Theorem 5.7-B. A further fact of importance is that

$$\mathscr{R}(E_0) = \{x : \|(T - \lambda_0)^n x\|^{1/n} \to 0\} \tag{9-2}$$

(see TAYLOR [7], Lemma 5.8-C).

The first theorem of this section is an extension of Theorem 5.8-A in TAYLOR [7]. What is new here is the part of the theorem which states sufficient conditions for λ_0 to be a pole of order m of $R_\lambda(T)$. The argument for this is essentially due to my former student SELWYN CARADUS, who gave the result in his dissertation [1], for the case of a bounded operator defined on all of X.

Theorem 9.1. *Suppose λ_0 is an isolated point of $\sigma(T)$, and let m be a positive integer. Then λ_0 is a pole of order m of $R_\lambda(T)$ if and only if $\alpha(\lambda_0 - T) = \delta(\lambda_0 - T) = m$ and $\mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^m]$ is closed.*

Under these conditions λ_0 is an eigenvalue of T, and

$$\mathscr{R}(E_0) = \mathscr{N}[(\lambda_0 - T)^m]\,, \tag{9-3}$$

$$\mathscr{N}(E_0) = \mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^m]\,, \tag{9-4}$$

where E_0 is the spectral projection corresponding to the spectral set (λ_0). Therefore (see (9-1)) it also follows that

$$X = \mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^m] \oplus \mathscr{N}[(\lambda_0 - T)^m]\,. \tag{9-5}$$

Proof. The conditions for λ_0 to be a pole of order m are that

$$(T - \lambda_0)^{m-1} E_0 \neq 0 \tag{9-6}$$

and

$$(T - \lambda_0)^n E_0 = 0 \quad \text{if} \quad n \geqq m \tag{9-7}$$

(see TAYLOR [7], p. 306).

Now suppose that λ_0 is a pole of order m. We see that $\mathscr{R}(E_0) \subset \mathscr{N}[(\lambda_0 - T)^m]$, by (9-7), and (9-2) implies that $\mathscr{N}[(\lambda_0 - T)^m] \subset \mathscr{R}(E_0)$. Thus we obtain (9-3). From (9-2) it is clear that $\mathscr{N}[(\lambda_0 - T)^n] \subset \mathscr{R}(E_0)$ if $n \geqq 1$. Therefore $\alpha(\lambda_0 - T) \leqq m$. On the other hand, it is evident from (9-3) and (9-6) that

$$\mathscr{N}[(\lambda_0 - T)^m] - \mathscr{N}[(\lambda_0 - T)^{m-1}] \neq \emptyset\,,$$

so that $\alpha(\lambda_0 - T) \geqq m$. Therefore $\alpha(\lambda_0 - T) = m$. Since $m > 0$, λ_0 must be an eigenvalue of T.

Next we shall prove (9-4) and that $\delta(\lambda_0 - T) = m$. The fact that $\mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^m]$ is closed will follow from (9-4), and our proof will be complete. Consider the restriction T_1 of T to $\mathscr{N}(E_0)$; as was noted in connection with (9-1), $\lambda_0 \in \varrho(T_1)$, so that $\delta(\lambda_0 - T_1) = 0$ and $\mathscr{R}[(\lambda_0 - T_1)^n] = \mathscr{N}(E_0)$ if $n \geqq 1$. Since $\mathscr{R}[(\lambda_0 - T_1)^n] \subset \mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^n]$, it follows that $\mathscr{N}(E_0) \subset \mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^n]$ if $n \geqq 1$. Since $TE_0x = E_0Tx$ if $x \in \mathscr{D}(T)$, it follows from (9-7) that $\mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^m] \subset \subset \mathscr{N}(E_0)$. It now follows that $\mathscr{R}[(\lambda_0 - T^n] = \mathscr{N}(E_0)$ if $n \geqq m$. This proves (9-4) and also shows that $\delta(\lambda_0 - T) \leqq m$. By Theorem 3.6 we can now assert that $\delta(\lambda_0 - T) \geqq \alpha(\lambda_0 - T)$. But $\alpha(\lambda_0 - T) = m$, and therefore $\delta(\lambda_0 - T) = m$.

It is of interest to observe that we can dispense with the appeal to Theorem 3.6, by the following argument. Suppose $\delta(\lambda_0 - T) < m$. Then

$$\mathscr{N}(E_0) = \mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^m] = \mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^{m-1}],$$

whence $E_0(\lambda_0 - T)^{m-1}x = 0$ if $x \in \mathscr{D}(T^{m-1})$. But, by (9-6), there is some vector u such that $(\lambda_0 - T)^{m-1}E_0u \neq 0$. Let $x = E_0u$. Then $E_0x = x \in \mathscr{D}(T^{m-1})$ and

$$0 \neq (\lambda_0 - T)^{m-1}E_0x = E_0(\lambda_0 - T)^{m-1}x,$$

which is a contradiction. We must then conclude that $\delta(\lambda_0 - T) = m$.

Now suppose, conversely, that $\alpha(\lambda_0 - T) = \delta(\lambda_0 - T) = m$ and that $\mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^m]$ is closed. We make use of Theorem 3.7 (b). In particular, $\mathscr{D}(T^m) = \mathscr{D}[(\lambda_0 - T)^m]$, and we have

$$\mathscr{D}(T^m) = [\mathscr{D}(T^m) \cap \mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^m]] \oplus \mathscr{N}[(\lambda_0 - T)^m]. \tag{9-8}$$

We see from (9-2) that $\mathscr{N}[(\lambda_0 - T)^n \subset \mathscr{R}(E_0)$ if $n \geqq 1$. We wish to prove that (9-3) holds. It suffices to show that $\mathscr{R}(E_0) \subset \mathscr{N}[(\lambda_0 - T)^m]$. Suppose, to the contrary, that $x \in \mathscr{R}(E_0) - \mathscr{N}[(\lambda_0 - T)^m]$. Using (9-8) and the fact that $\mathscr{R}(E_0) \subset \mathscr{D}(T^m)$, write $x = x_1 + x_2$, where

$$x_1 \in \mathscr{D}(T^m) \cap \mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^m], \quad x_2 \in \mathscr{N}[(\lambda_0 - T)^m].$$

Then $x_1 \neq 0$. Since $x_2 \in \mathscr{R}(E_0)$, we see that $x_1 \in \mathscr{R}(E_0)$. Let T_0 be the restriction of T to $\mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^m]$; we know from Theorem 3.7 (b) that $\lambda_0 - T_0$ maps $\mathscr{D}(T_0) = \mathscr{D}(T) \cap \mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^m]$ in a one-to-one manner onto all of $\mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^m]$. The facts that T is closed and $\mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^m]$ is closed imply that T_0 is a closed operator in the Banach space $\mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^m]$. Therefore $\lambda_0 \in \varrho(T_0)$. Now

$$\|x_1\|^{1/n} = \|\{R_{\lambda_0}(T_0)\}^n(\lambda_0 - T)^n x_1\|^{1/n} \leqq \|\{R_{\lambda_0}(T_0)\}^n\|^{1/n} \|(\lambda_0 - T)^n x_1\|^{1/n}.$$

It follows from this that $\|x_1\|^{1/n} \to 0$, because $\|\{R_{\lambda_0}(T_0)\}^n\|^{1/n} \to r_\sigma\{R_{\lambda_0}(T_0)\}$ (the spectral radius), and $\|(\lambda_0 - T)^n x_1\|^{1/n} \to 0$, by (9-2). The conclusion is that $x_1 = 0$, because $x_1 \neq 0$ would imply $\|x_1\|^{1/n} \to 1$. We have now reached a contradiction, and we have finished the proof of (9-3). It follows from (9-3) that $(T - \lambda_0)^{n-1}E_0 = 0$ if $n \geqq m + 1$. This in turn guarantees that λ_0 is a pole of $R_\lambda(T)$ of order not exceeding m. The order of the pole must be exactly m, for we know from the earlier proof that $\alpha(\lambda_0 - T)$ is equal to the order of the pole.

Theorem 9.2. *Suppose that λ_0 is an isolated point of $\sigma(T)$. Let E_0 be the spectral projection corresponding to the spectral set (λ_0), and suppose that*

$\dim \mathscr{R}(E_0) < \infty$. *Then*

$$\alpha(\lambda_0 - T) = \delta(\lambda_0 - T) < \infty \tag{9-9}$$

and

$$n(\lambda_0 - T) = d(\lambda_0 - T) < \infty\,. \tag{9-10}$$

Also, $\mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^k]$ is closed for $k = 1, 2, \ldots$. It then follows that λ_0 is a pole of $R_\lambda(T)$.

Proof. Let T_1 and T_2 be the restrictions of T to $\mathscr{N}(E_0)$ and $\mathscr{R}(E_0)$, respectively. We know that $\lambda_0 \in \varrho(T_1)$. Hence $n(\lambda_0 - T_1) = d(\lambda_0 - T_1) = 0$ and $\alpha(\lambda_0 - T_1) = \delta(\lambda_0 - T_1) = 0$. The operator T_2 acts in the finite-dimensional space, and $\sigma(T_2) = (\lambda_0)$. Hence $\alpha(\lambda_0 - T_2) = \delta(\lambda_0 - T_2) < \infty$. Also, since

$$n(\lambda_0 - T_2) + \dim \mathscr{R}(\lambda_0 - T_2) = \dim \mathscr{R}(E_0)$$

and

$$d(\lambda_0 - T_2) + \dim \mathscr{R}(\lambda_0 - T_2) = \dim \mathscr{R}(E_0)\,,$$

we see that $n(\lambda_0 - T_2) = d(\lambda_0 - T_2) < \infty$. We now use Theorem 6.1 (a) and (b) to conclude that $n(\lambda_0 - T) = d(\lambda_0 - T) < \infty$. By Theorem 6.1 (c) we see that

$$\alpha(\lambda_0 - T) = \max\{\alpha(\lambda_0 - T_1), \alpha(\lambda_0 - T_2)\} = \alpha(\lambda_0 - T_2).$$

Likewise, by Theorem 6.1 (d), $\delta(\lambda_0 - T) = \delta(\lambda_0 - T_2)$. Therefore (9-9) is true.

It remains to prove that $\mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^k]$ is closed if $k = 1, 2, \ldots$. Let us write $M = \mathscr{N}(E_0)$, $N = \mathscr{R}(E_0)$. We shall make use of Theorem 5.3, taking the T of Theorem 5.3 to be $(\lambda_0 - T)^k$ in our present notation, and taking λ in Theorem 5.3 to be 1. The fact that $\lambda_0 \in \varrho(T_1)$ guarantees that $(\lambda_0 - T)^k$ maps $M \cap \mathscr{D}(T^k)$ in a one-to-one manner onto all of M. The B of Theorem 5.3 becomes $B = (\lambda_0 - T)^k Q + Q$ in the present case. We observe that the projection Q of X onto N along M is continuous and that $(\lambda_0 - T)^k$ is a closed operator; the latter fact follows from the facts that T is closed and $\varrho(T) \neq \emptyset$ (see TAYLOR [7], problem 4, p. 297). Hence B is continuous, for it is closed and its domain is the complete space X. Among the consequences from Theorem 5.3 are that $\mathscr{R}(B) \subset N$ and $\mathscr{R}(I - B) = \mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^k]$. From the fact that $\dim \mathscr{R}(B) \leqq \leqq \dim N < \infty$ we can now conclude that $\mathscr{R}(I - B)$ is closed. This can be deduced with the aid of Lemma 8.1; the argument is essentially like that used in the classical F. Riesz theory, depending on the fact that B is a compact operator. Thus $\mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^k]$ is closed. Theorem 9.1 now assures us that λ_0 is a pole of $R_\lambda(T)$.

Corollary 9.3. *In the situation of Theorem* 9.1, *if* $n(\lambda_0 - T) < \infty$, *then* $\dim \mathscr{R}(E_0) < \infty$ *and this in turn implies that* $d(\lambda_0 - T) = n(\lambda_0 - T)$. *Conversely, if* $\dim \mathscr{R}(E_0) < \infty$ *in the situation of Theorem* 9.1, *then* $n(\lambda_0 - T) = d(\lambda_0 - T) < \infty$.

Proof. If $n(\lambda_0 - T) < \infty$, then $\dim \mathscr{N}[(\lambda_0 - T)^m] \leqq mn(\lambda_0 - T)$, by Lemma 3.3 (a). Hence, by (9-3), $\dim \mathscr{R}(E_0) \leqq mn(\lambda_0 - T)$. The rest of the first conclusion now follows from Theorem 9.2. The converse assertion also follows from Theorem 9.2.

Thus far in this section we have assumed that λ_0 is an isolated point of $\sigma(T)$. Now we drop this assumption. We shall see that we recover the fact that λ_0 is isolated in $\sigma(T)$ if we make certain other assumptions.

Theorem 9.4. *Let λ_0 be a point of $\sigma(T)$ such that $\alpha(\lambda_0 - T) < \infty$ and $\delta(\lambda_0 - T) = m$, where m is a positive integer. Suppose also that $\mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^m]$ is closed.* (a) *Then there is a number $\varepsilon > 0$ such that $\alpha(\lambda - T) = 0$ if $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$.* (b) *Suppose further that $n(\lambda_0 - T) = d(\lambda_0 - T) < \infty$. Then λ_0 is an isolated point of $\sigma(T)$ and a pole of order m of $R_\lambda(T)$.*

Proof of (a). Suppose, contrary to the assertion, that $\alpha(\lambda_n - T) > 0$, where $\lambda_n \neq \lambda_0$ and $\lambda_n \to \lambda_0$. Then there exists a sequence $\{x_n\}$ such $\|x_n\| = 1$ and $Tx_n = \lambda_n x_n$. By Lemma 3.9 we see that $\mathscr{N}[(\lambda_n - T)] \subset \mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^m]$. Consequently $x_n \in \mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^m]$. Now, $(\lambda_0 - T)x_n = (\lambda_0 - \lambda_n)x_n$, and therefore $\|(\lambda_0 - T)x_n\| \to 0$. We know from Theorem 3.7 that the restriction of $\lambda_0 - T$ to $\mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^m]$ is a one-to-one mapping of $\mathscr{D}(T) \cap \mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^m]$ onto all of $\mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^m]$. Since $\lambda_0 - T$ is a closed operator and $\mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^m]$ is closed (and hence complete, as a space) the inverse of this one-to-one mapping must be continuous. But this is contradicted by the facts that $\|(\lambda_0 - T)x_n\| \to 0$, $\|x_n\| = 1$, and $x_n \in \mathscr{R}[(\lambda_0 - T)^m]$.

Proof of (b). Under the added hypothesis it follows from known results in perturbation theory that there is some number $\varepsilon_1 > 0$ such that, if $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_1$, $\mathscr{R}(\lambda - T)$ is closed and $n(\lambda - T) = d(\lambda - T) < \infty$ (see, for instance, KATO [5], p. 281). It then follows from Theorem 4.5 (c) that $\alpha(\lambda - T) = \delta(\lambda - T)$ when $|\lambda - \lambda_0| < \min(\varepsilon, \varepsilon_1)$. Hence, since $\alpha(\lambda - T) = 0$ when $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, we see that $\lambda \in \varrho(T)$ if $0 < |\lambda - \lambda_0| < \min(\varepsilon, \varepsilon_1)$. Theorem 9.1 now shows that λ_0 is a pole of order m of $R_\lambda(T)$.

It is of interest to know when all of the points of $\sigma(T)$ in a given open set are poles of $R_\lambda(T)$. The following theorem gives precise criteria. It generalizes a result of CARADUS.

Theorem 9.5. *If G is an open set in the complex plane, each point of $\sigma(T) \cap G$ is a pole of $R_\lambda(T)$ if and only if, for each $\lambda \in G$, $\alpha(\lambda - T) = \delta(\lambda - T) < \infty$ and $\mathscr{R}[(\lambda - T)^{\delta(\lambda - T)}]$ is closed.*

Proof. The necessity of the conditions follows from Theorem 9.1 for the case of a pole in G; the conditions are obviously necessary if $\lambda \in G \cap \varrho(T)$. Suppose, conversely, that the conditions are satisfied, and let λ_0 be a point of $\sigma(T) \cap G$. Then $\alpha(\lambda_0 - T) = \delta(\lambda_0 - T) = m$, where m is a positive integer. It follows from Theorem 9.4 (a) that λ_0 is an isolated point of $\sigma(T)$, and then it follows from Theorem 9.1 that λ_0 is a pole of $R_\lambda(T)$.

As examples we cite the following: If T is a compact operator (with $\mathscr{D}(T) = X$), each nonzero point of $\sigma(T)$ is a pole of $R_\lambda(T)$ (see TAYLOR [7], Theorem 5.8-E). If X is a Hilbert space and if T is a symmetric linear operator such that $0 \in \varrho(T)$ and T^{-1} is compact, then each point of $\sigma(T)$ is a pole of $R_\lambda(T)$ (see TAYLOR [7], Theorem 6.41-A).

Returning now to the general theory, let us suppose that λ_0 is a pole of order m of $R_\lambda(T)$, and let E_0 be the spectral projection corresponding to the spectral set (λ_0). We shall call $\dim \mathscr{R}(E_0)$ the *rank* of the pole λ_0. We know

that λ_0 is an eigenvalue of T; the *multiplicity* of this eigenvalue is, by definition, $n(\lambda_0 - T) = \dim \mathcal{N}(\lambda_0 - T)$. We know from (9-3) that the rank of λ_0 is equal to $\dim \mathcal{N}[(\lambda_0 - T)^m]$. Hence, if the pole is of the first order, the rank of λ_0 as a pole is equal to the multiplicity of λ_0 as an eigenvalue. In general, if the multiplicity of λ_0 is finite, so is the rank, and the rank does not exceed m times the multiplicity (by Lemma 3.3 (a)). On the other hand, if the rank is finite, so is the multiplicity (see Corollary 9.3).

The following theorem is analogous to Theorem 9.5 for the case of poles of finite rank. It generalizes a result of CARADUS.

Theorem 9.6. *Let G be a connected open set in the complex plane, such that $\varrho(T) \cap G \neq \emptyset$. Then each point of $\sigma(T) \cap G$ is a pole of finite rank of $R_\lambda(T)$ if and only if $n(\lambda - T) = d(\lambda - T) < \infty$ at each point λ of G.*

Proof. We recall that $\lambda \in \varrho(T)$ if and only if $n(\lambda - T) = d(\lambda - T) = 0$. The necessity of the conditions $n(\lambda - T) = d(\lambda - T) < \infty$ in G follows from Corollary 9.3.

Suppose, conversely, that these conditions are satisfied at each point λ in G. A possible method of proof that each point λ_0 of $\sigma(T) \cap G$ is a pole of finite rank might be conceived as follows: Since $d(\lambda_0 - T) < \infty$, it follows by a theorem of KATO ([5], Lemma 332, p. 275) that $\mathcal{R}(\lambda_0 - T)$ is closed. Then $\mathcal{R}[(\lambda_0 - T)^k]$ is closed and $n[(\lambda_0 - T)^k] < \infty$ if $k = 1, 2, \ldots$, by Theorem 8.5. If we can prove that $\alpha(\lambda_0 - T) < \infty$, it will follow by Theorem 4.5 (c) that $\alpha(\lambda_0 - T) = \delta(\lambda_0 - T)$, and then λ_0 will be a pole, by Theorem 9.4. The rank will be finite, by Corollary 9.3. For lack of a direct proof that $\alpha(\lambda_0 - T) < \infty$, we approach the proof in a different way, using results given in the well known paper [3] by GOHBERG and KREIN. According to Theorem 3.3 in this paper there is a number N_G such that $n(\lambda - T) = N_G$ at each point λ in G with the exception of certain isolated points at which $n(\lambda - T) > N_G$. Since $\varrho(T) \cap G \neq \emptyset$, N_G must be 0, and hence the isolated exceptional points must be eigenvalues.

Let λ_0 be such an eigenvalue, and let E_0 be the spectral projection corresponding to the spectral set (λ_0). Let T_1 and T_2 be the restrictions of T to $\mathcal{N}(E_0)$ and $\mathcal{R}(E_0)$, respectively. We know from general spectral theory that T is completely reduced by $(\mathcal{N}(E_0), \mathcal{R}(E_0))$, that $\lambda_0 \in \varrho(T_1)$, that $\sigma(T_2) = (\lambda_0)$, and that T_2 is a continuous operator defined on all of $\mathcal{R}(E_0)$. We shall prove that $d(\lambda - T_2) = d(\lambda_0 - T)$. We note first that $X = \mathcal{N}(E_0) \oplus \mathcal{R}(E_0)$ and that $\lambda_0 - T_1$ is a one-to-one mapping of $\mathcal{N}(E_0) \cap \mathcal{D}(T)$ onto all of $\mathcal{N}(E_0)$. From these facts, it is easy to see that

$$\mathcal{R}(\lambda_0 - T) = \mathcal{N}(E_0) \oplus \mathcal{R}(\lambda_0 - T_2) .$$

Hence, if M is an algebraic complement of $\mathcal{R}(\lambda_0 - T_2)$ in $\mathcal{R}(E_0)$, so that

$$\mathcal{R}(\lambda_0 - T_2) \oplus M = \mathcal{R}(E_0) ,$$

we see that

$$\mathcal{R}(\lambda_0 - T) \oplus M = X .$$

This proves that $d(\lambda_0 - T_2) = d(\lambda_0 - T) < \infty$. We also have $\mathcal{N}(\lambda_0 - T_2) \subset \mathcal{N}(\lambda_0 - T)$, so that $n(\lambda_0 - T_2) < \infty$. The fact that $\sigma(T_2) = (\lambda_0)$ implies that $n(\lambda - T_2) = d(\lambda - T_2) = 0$ if $\lambda \neq \lambda_0$. Hence $\lambda - T_2$ is a Fredholm operator on

$\mathscr{R}(E_0)$ for every complex λ. Theorem 3.2 in the paper of GOHBERG and KREIN then implies that $\mathscr{R}(E_0)$ is a finite-dimensional space. It follows (see TAYLOR [7], Theorem 5.9-C) that λ_0 is a pole of $R_\lambda(T_2)$. But then λ_0 is also a pole of $R_\lambda(T)$. (This follows by an argument indicated in TAYLOR [7], end of proof of Theorem 5.8-D and problem 2, p. 313.) This completes the proof.

References

[1] CARADUS, S. R.: Contributions to the theory of operators with meromorphic resolvents. Doctoral dissertation, University of California, Los Angeles, January, 1965.

[2] DIEUDONNÉ, J.: Sur les homomorphismes d'espaces normés. Bull. sci. math. (2), **67**, 72—84 (1943).

[3] GOHBERG, I. C., and M. G. KREIN: The basic propositions on defect numbers, root numbers, and indices of linear operators. Am. Math. Soc. Translations, Series 2, **13**, 185—264 (1960). (The original paper, in Russian, appeared in Uspehi Mat. Nauk (N.S.) **12** (1957), no. 2 (74), 43—118.

[4] HEUSER, HARRO: Über Operatoren mit endlichen Defekten. Inaugural-Dissertation, Tübingen, 1956.

[5] KATO, TOSIO: Perturbation theory for nullity, deficiency, and other quantities of linear operators. J. Analyse Math. **11**, 261—322 (1958).

[6] RUSTON, A. F.: Operators with a Fredholm theory. J. London Math. Soc. **29**, 318—326 (1954).

[7] TAYLOR, ANGUS E.: Introduction to functional analysis. New York: Wiley and Sons, 1958.

[8] YOOD, BERTRAM: Properties of linear transformations preserved under addition of a completely continuous transformation. Duke Math. J. **18**, 599—612 (1951).

(Received June 29, 1965)

LANDSBERG, M. und T. RIEDRICH
Math. Annalen 163, 50—61 (1966)

Über positive Eigenwerte kompakter Abbildungen in topologischen Vektorräumen

Herrn GOTTFRIED KÖTHE zum 60. Geburtstag am 25. 12. 1965 gewidmet

Von

MAX LANDSBERG und THOMAS RIEDRICH in Dresden

1. Im folgenden richtet sich die Terminologie der topologischen Begriffe vor allem nach BOURBAKI. Ist A eine Teilmenge eines topologischen Raumes, so soll mit ∂A der Rand von A und mit $\operatorname{int} A$ das Innere von A bezeichnet werden. Mit o bezeichnen wir durchweg das Nullelement eines Vektorraumes. Eine nichtleere konvexe Teilmenge $K \neq \{o\}$ eines Vektorraumes F nennen wir einen Kegel, wenn K mit $x \neq o$ das Element $tx (t \geqq 0)$, aber nicht das Element $(-x)$ enthält.

Ein topologischer Vektorraum soll stets als reell und separiert angenommen werden; bezüglich der Theorie der topologischen Vektorräume verweisen wir auf N. BOURBAKI [1] und G. KÖTHE [9]. Eine Abbildung $f: A \to B$ eines topologischen Raumes A in den topologischen Raum B heißt bekanntlich kompakt, wenn f stetig ist und außerdem $f(A)$ eine relativ kompakte Teilmenge von B ist. Eine kompakte Abbildung $g: A \to E$ des topologischen Raumes A in den topologischen Vektorraum E heiße finit, wenn $g(A)$ in einem endlichdimensionalen Teilraum von E liegt.

Als Eigenwert einer (linearen oder nichtlinearen) Abbildung $T: G \to F$ einer Teilmenge G des Vektorraumes F in F bezeichnen wir jede reelle Zahl λ, zu welcher ein vom Nullvektor verschiedener Vektor $x \in G$ (ein zugehöriger Eigenvektor) existiert mit $Tx = \lambda x$.

Auf die Frage nach der Existenz speziell positiver Eigenwerte führen zahlreiche Untersuchungen u. a. in der mathematischen Physik, in der Theorie der stochastischen Prozesse und in der mathematischen Ökonomie.

Die klassischen Resultate von O. PERRON [13], [14] und G. FROBENIUS [2], [3], [4] über die Existenz positiver Eigenwerte von Matrizen mit positiven Elementen bzw. von nichtsingulären Matrizen mit nichtnegativen Elementen sowie der Satz von R. JENTZSCH über lineare Integraloperatoren mit positivem Kern lieferten die Grundlage für die Untersuchung von Abbildungen, die einen Kegel in einem topologischen Vektorraum (insbesondere normierten Raum) in sich abbilden. Aus der Reihe der zahlreichen Beiträge zum letztgenannten Problemkreis heben wir die grundlegende Arbeit von M. G. KREIN und M. A. RUTMAN [11] hervor, in welcher die Existenz positiver Eigenwerte von linearen Abbildungen, die einen Kegel eines Banach-Raumes invariant lassen, unter diversen zusätzlichen Voraussetzungen bewiesen wird. Die Untersuchungen

von KREIN und RUTMAN wurden u. a. von S. KARLIN [6] fortgesetzt. Wegen weiterer Ergebnisse und Anwendungen verweisen wir auf die in [6] und [11] angegebene Literatur.

Nichtlineare Abbildungen (genauer gesagt: Abbildungen, die nicht notwendig linear zu sein brauchen), die einen Teil eines Kegels in einem topologischen Vektorraum in diesen Kegel abbilden, wurden u. a. in normierten Räumen von M. A. KRASNOSELSKI [10], E. ROTHE [17], M. M. VAINBERG [21] und allgemeiner in lokalkonvexen Räumen von H. SCHAEFER [20] auf die Existenz positiver Eigenwerte hin untersucht. KRASNOSELSKI bewies insbesondere den folgenden bemerkenswerten Sachverhalt ([10], S. 243, Theorem 1.1):

Es sei F ein normierter Raum, L ein abgeschlossener Kegel in F und U eine abgeschlossene beschränkte Nullumgebung von F. Ist S eine kompakte Abbildung von $\partial U \cap L$ in L mit $o \notin \overline{S(\partial U \cap L)}$, so gibt es ein $x_0 \in \partial U \cap L$ und ein $\lambda > 0$ mit $Sx_0 = \lambda x_0$. Dieser Satz wird in [10] mit kombinatorisch-topologischen Hilfsmitteln zunächst für Abbildungen in einem endlichdimensionalen normierten Raum F bewiesen. Die allgemeine Aussage des zitierten Satzes wird dann auf diesen Spezialfall zurückgeführt, indem man die gegebene kompakte Abbildung in geeigneter Weise durch finite Abbildungen gleichmäßig approximiert.

In der vorliegenden Note wird die Existenz positiver Eigenwerte kompakter, nicht notwendig linearer Abbildungen in (beliebigen) topologischen Vektorräumen unter verschiedenen Voraussetzungen über den Definitions- und Wertebereich bewiesen.

Es sei z. B. G eine abgeschlossene Teilmenge eines topologischen Vektorraumes E mit $o \notin G$ und $T : G \to E$ eine kompakte Abbildung. Dann ergibt sich (Satz 1), daß die Abbildung T einen positiven Eigenwert besitzt, wenn T gleichmäßig durch Abbildungen approximiert werden kann, welche positive Eigenwerte besitzen, die sämtlich in einem Intervall I_0 der Form $I_0 = [A_1, A_2]$ $(0 < A_1 \leqq A_2)$ gelegen sind.

Ausgehend von diesem einfachen Approximationssatz gelangt man zu weiteren neuen Existenzaussagen für positive Eigenwerte, die bekannte Resultate, z. B. den oben zitierten Satz von KRASNOSELSKI, als Spezialfälle enthalten. Ein verwandter Approximationssatz wurde bereits von M. LANDSBERG [12] zur Gewinnung allgemeiner Fixpunktsätze benutzt.

Mittels des genannten Approximationssatzes (Satz 1) erhalten wir im Abschnitt 3 einige Aussagen über die Existenz positiver Eigenwerte kompakter Abbildungen, die sich durch Abbildungen, welche nichtnegative Eigenwerte besitzen, gleichmäßig approximieren lassen. Wir benötigen dort und in den übrigen Abschnitten den von V. KLEE [7] eingeführten grundlegenden Begriff der einfachberandeten Nullumgebung. Eine Nullumgebung U eines topologischen Vektorraumes E heißt einfachberandet ("shrinkable" bei KLEE [7], wegen unserer Bezeichnung siehe auch LANDSBERG [12]), wenn für $x \in \overline{U}$ und $t \in (0, 1)$ das Element tx stets ein innerer Punkt von U ist. Das Minkowski-Funktional jeder einfachberandeten Nullumgebung ist in ganz E stetig, außer-

dem enthält jede Nullumgebung eine einfachberandete Nullumgebung. Weiter ist jede abgeschlossene und einfachberandete Nullumgebung U des topologischen Vektorraumes E ein Retrakt von E, wobei die durch die Vorschrift (es bezeichne p das Minkowski-Funktional von U) $r(x) = x$ für $x \in U$ und $r(x) = \frac{x}{p(x)}$ für $x \in E \setminus U$ erklärte Abbildung $r : E \to U$ eine zugehörige Retraktion (von E auf U) vermittelt (vgl. [7], S. 283). Der Abschnitt 4 bringt das Hauptergebnis dieser Note, eine Verallgemeinerung des oben zitierten Satzes von KRASNOSELSKI auf beliebige topologische Vektorräume (Satz 4).

Der Beweis dieser Verallgemeinerung stützt sich auf den allgemeinen Approximationssatz (Satz 1), dessen Anwendbarkeit durch die Forderung der Zulässigkeit (vgl. Abschnitt 4) des in Satz 4 zugrundeliegenden Kegels gesichert wird. Der Satz 4 lautet:

Es sei E ein topologischer Vektorraum mit dem zulässigen abgeschlossenen Kegel K_0 und V_0 eine abgeschlossene Nullumgebung mit beschränktem $V_0 \cap K_0$. Ist $G = \partial V_0 \cap K_0$, so besitzt jede kompakte Abbildung $T : G \to E$ mit $T(G) \subset K_0$ und $o \notin \overline{T(G)}$ einen positiven Eigenwert.

Da jeder abgeschlossene Kegel eines lokalkonvexen Raumes zulässig ist, ergibt sich für lokalkonvexe Räume eine einfache Formulierung der Satz 4 entsprechenden Aussage (Satz 5). Zulässige Kegel in nicht lokalkonvexen Räumen werden z. B. geliefert durch B-abschnittsvollständige Kegel (s. Abschnitt 4, Definition 4) in (nicht lokalkonvexen) ultratonnelierten topologischen Vektorräumen mit Schauder-Basis (Bemerkung 3). Im Abschnitt 5 beweisen wir zunächst (auf sehr einfache Weise) einen von LANDSBERG [12] für beliebige topologische Vektorräume angegebenen Sachverhalt (in Verallgemeinerung eines Satzes von SCHAEFER [18]) über die Existenz positiver Eigenwerte kompakter Abbildungen, die eine einfachberandete Nullumgebung eines topologischen Vektorraumes in diesen Raum abbilden (Satz 7). Daran anschließend erhalten wir zwei auch für sich interessante Folgerungen aus dem genannten Sachverhalt (Korollar 4, Satz 8).

Zwei einfache Anwendungen (Abschnitt 6, Folgerungen 1 und 2) auf Gleichungen zweiter Art für nichtlineare Integraloperatoren im (nicht lokalkonvexen) Raum $L^p(0, 1)$ $(0 < p < 1)$ dienen der Veranschaulichung der Resultate von Abschnitt 4 und 5.

2. Wir beginnen mit einigen Vorbetrachtungen zur Approximation von Abbildungen in topologischen Vektorräumen.

Definition 1. *Es sei E ein topologischer Vektorraum, G eine Teilmenge von E, Σ ein System von Abbildungen von G in E. Die Abbildung $T : G \to E$ heiße gleichmäßig Σ-approximierbar, wenn es zu jeder Nullumgebung V ein $h \in \Sigma$ mit $Tx - hx \in V$ $(x \in G)$ gibt. Ist B eine Teilmenge von E, so soll die Abbildung $T : G \to E$ gleichmäßig Σ-approximierbar in B genannt werden, wenn es zu jeder Nullumgebung V ein $h \in \Sigma$ mit $Tx - hx \in V$ $(x \in G)$ gibt und $h(G) \subset B$ gilt.*

Bemerkung 1. *Es sei E ein topologischer Vektorraum, G eine Teilmenge von E, Σ ein System von Abbildungen von G in E. Ist B eine weitere Teilmenge von E und $T : G \to E$ gleichmäßig Σ-approximierbar in B, so muß $T(G) \subset \overline{B}$ gelten.*

Beweis. Es sei doch ein $y_0 \in T(G)\backslash\overline{B}$ vorhanden, wo $y_0 = Tx_0$, $x_0 \in G$. Es gibt dann eine symmetrische Nullumgebung W mit $(y_0 + W) \cap \overline{B} = \emptyset$. Nach Voraussetzung existiert ein $h \in \Sigma$ mit $Tx - hx \in W$ $(x \in G)$ und $h(G) \subset B$. Mit $z = Tx_0 - hx_0$ folgt hieraus $hx_0 = y_0 - z \in y_0 + W$, also $hx_0 \notin \overline{B}$, was im Widerspruch zu den vorliegenden Voraussetzungen steht. Q. e. d.

Hilfssatz 1. *Es sei E ein topologischer Vektorraum, G eine Teilmenge von E, T eine Abbildung von G in E mit relativ kompaktem $T(G)$, Σ ein System von Abbildungen von G in E. Ist T gleichmäßig Σ-approximierbar, so ist T auch gleichmäßig Σ-approximierbar in jeder Umgebung von $\overline{T(G)}$.*

Beweis. Ω sei eine offene Teilmenge von E, die $\overline{T(G)}$ enthält. Zu jedem $z \in \overline{T(G)}$ gibt es eine symmetrische Nullumgebung V_z mit $z + V_z + V_z \subset \Omega$. Für gewisse Elemente $z_1, \ldots, z_m$ aus $\overline{T(G)}$ gilt dann $\overline{T(G)} \subset \bigcup_{\mu=1}^{m} (z_\mu + V_{z_\mu}) \subset \Omega$. Setzt man $V^* = \bigcap_{\mu=1}^{m} V_{z_\mu}$ und ist W eine beliebige Nullumgebung, so gibt es nach Voraussetzung ein $h \in \Sigma$ mit $Tx - hx \in W \cap V^*$ $(x \in G)$. Für ein $x \in G$ gilt mit einem $x' \in V^*$ die Beziehung $hx = Tx + x'$ und somit $hx = z_\mu + Tx - z_\mu + x' \in z + V_{z_\mu} + V_{z_\mu} \subset \Omega$ für ein gewisses $\mu \in \{1, \ldots, m\}$. Q. e. d.

Hilfssatz 2. *Es sei E ein topologischer Vektorraum, G eine abgeschlossene Teilmenge von E und T eine kompakte Abbildung von G in E. Mit I_0 werde das Intervall $[A_1, A_2]$ bezeichnet, wo $0 < A_1 \leqq A_2$ sein soll. Dann ist die Menge M aller $z \in E$ der Gestalt $z = Tx - \lambda x$ $(x \in G, \lambda \in I_0)$ abgeschlossen.*

Beweis. Es sei $w \in E$ ein Berührungspunkt von M. Wir zeigen, daß $w \in M$ gilt. Es gibt eine Moore-Smith-Folge $(x_j)_{j \in J}$ bzw. $(\lambda_j)_{j \in J}$ von Elementen aus G bzw. aus I_0, so daß $Tx_j - \lambda_j x_j \to w$ gilt. Im kompakten Produkt $\overline{T(G)} \times I_0$ hat die Moore-Smith-Folge der (Tx_j, λ_j) einen Berührungspunkt (w^*, λ^*). Im System Δ aller Paare $\xi = (j, W)$ ($j \in J$, W Umgebung von (w^*, λ^*) in $\overline{T(G)} \times I_0$), für die $(Tx_j, \lambda_j) \in W$ gilt, bedeute $(j_1, W_1) \ll (j_2, W_2)$ die Relation „$j_1 \leqq j_2$ und $W_2 \subset W_1$“ („$\leqq$“ möge die Ordnungsbeziehung in J sein). Δ ist durch „$\ll$“ gerichtet. Für $\xi = (j, W) \in \Delta$ setzen wir $\varphi(\xi) = j$. Aus $(Tx_{\varphi(\xi)}, \lambda_{\varphi(\xi)}) \to (w^*, \lambda^*)$ folgt $Tx_{\varphi(\xi)} \to w^*$, $\lambda_{\varphi(\xi)} \to \lambda^*$ und $Tx_{\varphi(\xi)} - \lambda_{\varphi(\xi)} x_{\varphi(\xi)} \to w$. Hieraus ergibt sich $x_{\varphi(\xi)} = \frac{1}{\lambda_{\varphi(\xi)}} (\lambda_{\varphi(\xi)} x_{\varphi(\xi)} - Tx_{\varphi(\xi)} + Tx_{\varphi(\xi)}) \to \frac{1}{\lambda^*} (-w + w^*) = x^*$ mit $x^* \in G$. Wegen der Stetigkeit von T gilt daher $Tx_{\varphi(\xi)} \to Tx^* = w^* = \lambda^* x^* + w$. Somit gehört $w = Tx^* - \lambda^* x^*$ zu M. Q. e. d.

Damit wir von Aussagen über die Existenz positiver Eigenwerte spezieller (z. B. finiter) Abbildungen zu entsprechenden Aussagen für allgemeinere Abbildungen gelangen können, verwenden wir den folgenden Approximationssatz.

Satz 1. *Es sei E ein topologischer Vektorraum, G eine abgeschlossene Teilmenge von E, T eine kompakte Abbildung von G in E und $I_0 = [A_1, A_2]$ $(0 < A_1 \leqq A_2)$. Es existiere weiter zu jeder Nullumgebung V eine Abbildung $h : G \to E$, ein $y \in G$ und ein $\lambda \in I_0$, so daß $Tx - hx \in V$ $(x \in G)$ und $hy = \lambda y$ gilt. Es gibt dann ein $x_0 \in G$ und ein $\lambda_0 \in I_0$ mit $Tx_0 = \lambda_0 x_0$.*

Beweis. Wir nehmen an, daß doch für $x \in G$, $\lambda \in I_0$ stets $Tx - \lambda x \neq o$ sei. Nach Hilfssatz 2 existiert eine Nullumgebung W mit $Tx - \lambda x \notin W$ $(x \in G,$

$\lambda \in I_0$). Nach Voraussetzung gibt es eine Abbildung $h' : G \to E$, ein $y' \in G$ und ein $\lambda' \in I_0$, so daß $Tx - h'x \in W$ $(x \in G)$ und $h'y' = \lambda' y'$ gilt. Damit hätte man aber die Beziehung $Ty' - \lambda' y' = Ty' - h'y' + h'y' - \lambda' y' \in W$ im Gegensatz zu $Tx - \lambda x \notin W$ $(x \in G, \lambda \in I_0)$. Q. e. d.

3. Wenn sich eine kompakte Abbildung T einer Teilmenge G eines topologischen Vektorraumes E in E durch Abbildungen mit nicht-negativen Eigenwerten gleichmäßig approximieren läßt, dann sichern die Ergebnisse des vorigen Abschnittes die Existenz positiver Eigenwerte von T, falls der Definitionsbereich G und auch die Bildmenge $T(G)$ gewissen einfachen Lagebeziehungen genügen (man vergleiche z. B. Satz 2 weiter unten).

Definition 2. *Es sei E ein topologischer Vektorraum und G eine Teilmenge von E. Die Abbildung $T : G \to E$ heiße gleichmäßig P-approximierbar, wenn es zu jeder Nullumgebung V eine Abbildung $h : G \to E$, ein $y \in G$ und ein $\lambda \geqq 0$ gibt, so daß $Tx - hx \in V$ $(x \in G)$ und $hy = \lambda y$ gilt.*

Satz 2. *Es sei E ein topologischer Vektorraum, V_0 eine abgeschlossene einfachberandete Nullumgebung mit dem zugehörigen Minkowski-Funktional p_0 und G eine abgeschlossene Teilmenge von E, die das Innere von V_0 nicht trifft und auf der p_0 nach oben beschränkt ist. Jede kompakte und gleichmäßig P-approximierbare Abbildung T von G in E mit $\operatorname{int} V_0 \cap T(G) = \emptyset$ besitzt dann einen positiven Eigenwert.*

Beweis. Da p_0 nach Voraussetzung auf G nach oben beschränkt ist und wegen der Beschränktheit von $\overline{T(G)}$ existiert ein $k > 1$, so daß $1 \leqq p_0(z) < k$ für jedes $z \in G$ und für jedes $z \in \overline{T(G)}$ gilt. Wegen der Stetigkeit von p_0 ist dann $\Omega = \left\{x \in E : \frac{1}{2} < p_0(x) < k\right\}$ eine offene Teilmenge von E mit $\overline{T(G)} \subset \Omega$. Da T gleichmäßig P-approximierbar ist, existiert wegen Hilfssatz 1 zu jeder Nullumgebung W eine Abbildung $h : G \to \Omega$, ein $y \in G$ und ein $\lambda \geqq 0$, so daß $Tx - hx \in W$ $(x \in G)$ und $hy = \lambda y$ gilt. Dann gilt aber wegen $p_0(hy) = \lambda p_0(y)$ sogar $\frac{1}{2k} \leqq \lambda \leqq k$. Nach Satz 1 ist damit alles gezeigt. Q. e. d.

Aus Satz 2 liest man die folgenden Korollare ab.

Korollar 1. *Es sei E ein topologischer Vektorraum, V_0 eine einfachberandete abgeschlossene Nullumgebung mit dem Minkowski-Funktional p_0 und G eine abgeschlossene Teilmenge des Randes von V_0. Jede kompakte und gleichmäßig P-approximierbare Abbildung T von G in E mit $\operatorname{int} V_0 \cap T(G) = \emptyset$ besitzt dann einen positiven Eigenwert λ mit $\inf\limits_{z \in \overline{T(G)}} p_0(z) \leqq \lambda \leqq \sup\limits_{z \in \overline{T(G)}} p_0(z)$.*

Korollar 2. *Es sei E ein topologischer Vektorraum, V_0 eine einfachberandete abgeschlossene Nullumgebung mit dem Minkowski-Funktional p_0 und G eine abgeschlossene Teilmenge des Randes von V_0. Jede kompakte und gleichmäßig P-approximierbare Abbildung von G in ∂V_0 besitzt dann einen Fixpunkt.*

Im nächsten Abschnitt benötigen wir noch eine weitere Folgerung aus Satz 2.

Satz 3. *Es sei E ein topologischer Vektorraum und G eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von E mit $o \notin G$. Jede kompakte und gleichmäßig P-approximierbare Abbildung T von G in E mit $o \notin \overline{T(G)}$ besitzt dann einen positiven Eigenwert.*

Beweis. Ersichtlich existiert eine einfachberandete abgeschlossene Nullumgebung V_0 mit $G \cap V_0 = \overline{T(G)} \cap V_0 = \emptyset$. Da das Minkowski-Funktional von V_0 wegen der Beschränktheit von G auf G nach oben beschränkt ist, ergibt sich die Behauptung unmittelbar aus Satz 2. Q. e. d.

4. Da sich die Topologie jedes endlichdimensionalen topologischen Vektorraumes durch eine Norm erzeugen läßt, ist der eingangs zitierte Satz von KRASNOSELSKI in allen endlichdimensionalen topologischen Vektorräumen gültig. Von dieser Tatsache machen wir beim Beweis unserer Verallgemeinerung dieses Satzes Gebrauch. Es ist dabei erforderlich, durch gewisse Voraussetzungen sicherzustellen, daß sich die gegebene kompakte Abbildung, für welche die Existenz eines positiven Eigenwertes gezeigt werden soll, gleichmäßig durch finite Abbildungen approximieren läßt.

Definition 3. *Es sei E ein topologischer Vektorraum und G eine Teilmenge von E. Die Abbildung $T: G \to E$ heiße gleichmäßig finit-approximierbar, wenn es zu jeder Nullumgebung V eine kompakte Abbildung $h: G \to E$ gibt, so daß $h(G)$ in einem endlichdimensionalen Teilraum von E liegt und außerdem $Tx - hx \in V$ $(x \in G)$ gilt. Ist B eine Teilmenge von E, so erklärt man entsprechend Definition 1 den Sachverhalt, daß eine Abbildung $T: G \to E$ gleichmäßig finit-approximierbar in B ist.*

Ein topologischer Vektorraum F heiße zulässig ("admissible" bei KLEE [8], S. 293), wenn für jede kompakte Teilmenge B von F die Abbildung $I_F | B$ (I_F sei die identische Abbildung von F) gleichmäßig finit-approximierbar ist. Bisher ist noch kein topologischer Vektorraum bekannt, der nicht zulässig ist (s. KLEE [8], S. 294). In Anlehnung an diese Bezeichnung nennen wir einen Kegel K in einem topologischen Vektorraum F zulässig, wenn für jede kompakte Teilmenge B' von K die Abbildung $I_F | B'$ gleichmäßig finit-approximierbar in K ist. Jede kompakte Abbildung mit in einem zulässigen topologischen Vektorraum gelegenen (Definitions- und) Wertebereich ist gleichmäßig finit-approximierbar. Jede auf einer Teilmenge eines topologischen Vektorraumes E erklärte kompakte Abbildung mit Werten in einem abgeschlossenen zulässigen Kegel K_0 in E ist gleichmäßig finit-approximierbar in K_0.

Satz 4. *Es sei E ein topologischer Vektorraum mit dem zulässigen abgeschlossenen Kegel K_0 und V_0 eine abgeschlossene Nullumgebung mit beschränktem $V_0 \cap K_0$. Ist $G = \partial V_0 \cap K_0$, so besitzt jede kompakte Abbildung $T: G \to E$ mit $T(G) \subset K_0$ und $o \notin \overline{T(G)}$ einen positiven Eigenwert.*

Beweis. Die Behauptung ist nach Satz 3 bewiesen, wenn man zeigen kann, daß die Abbildung T gleichmäßig P-approximierbar ist. Ist nun V eine beliebige Nullumgebung, so gibt es nach Voraussetzung eine stetige Abbildung h von $G = \partial V_0 \cap K_0$ in K_0, wobei $h(G)$ in einem endlichdimensionalen Teilraum E_0 von E liegt und $Tx - hx \in V$ $(x \in G)$ gilt. Es ist nachzuweisen, daß ein $y \in G$ und ein $\lambda \geqq 0$ vorhanden sind mit $hy = \lambda y$.

Man kann wegen Hilfssatz 1 annehmen, daß $o \notin \overline{h(G)}$ gilt. In E_0 gibt es eine abgeschlossene und beschränkte Nullumgebung W, so daß $V_0 \cap K_0 \cap E_0$ ganz in $\mathrm{int}_0 W$ (Inneres von W bezüglich E_0) enthalten ist. Dann ist

$W_0 = W \cap V_0$ eine beschränkte abgeschlossene Nullumgebung in E_0 mit $\partial_0 W_0 \cap K_0 \subset G \cap E_0$, wo $\partial_0 W_0$ der Rand von W_0 bezüglich E_0 sein soll.

Wendet man den in der Einleitung zitierten Satz von KRASNOSELSKI auf E_0, den in E_0 liegenden abgeschlossenen Kegel $K_0 \cap E_0$, auf W_0 und auf $h \mid \partial_0 W_0 \cap K_0$ an, so sieht man, daß ein $\lambda > 0$ und ein $y \in G$ existieren mit $hy = \lambda y$. Q. e. d.

Aus Satz 4 ergibt sich leicht eine Aussage über die Existenz von Lösungen gewisser Gleichungen zweiter Art (wegen dieser Bezeichnung vgl. L. W. KANTOROWITSCH, G. P. AKILOW [5], S. 396 und S. 409).

Korollar 3. *Es sei E ein topologischer Vektorraum mit dem abgeschlossenen zulässigen Kegel K_0 und V_0 eine abgeschlossene Nullumgebung mit beschränktem $V_0 \cap K_0$. Ist $G = \partial V_0 \cap K_0$ und $T : G \to E$ eine kompakte Abbildung mit $T(G) \subset K_0$ sowie y ein Element von $K_0 \setminus \{o\}$, dann gibt es ein $\mu > 0$ und ein $x_0 \in G$ mit $\mu x_0 - T x_0 = y$.*

Beweis. Die durch die Vorschrift $Sx = y + Tx$ $(x \in G)$ erklärte Abbildung $S : G \to E$ ist kompakt und es gilt $\overline{S(G)} \subset K_0$. Das Element $(-y)$ gehört nicht zu K_0 und folglich auch nicht zu $\overline{T(G)}$. Demzufolge gilt $o \notin \overline{S(G)}$. Nach Satz 4 gibt es ein $\mu > 0$ und ein $x_0 \in G$ mit $Sx_0 = \mu x_0$, woraus die Behauptung folgt. Q. e. d.

Hinreichende Bedingungen für die Zulässigkeit von Kegeln in topologischen Vektorräumen werden in den folgenden Bemerkungen angegeben.

Bemerkung 2. *In einem lokalkonvexen Vektorraum ist jeder Kegel K_0 zulässig.*

Beweis. Es gibt zu jeder kompakten Menge $B \subset K_0$ und zu jeder Nullumgebung V nach einem bekannten Satz (vgl. z. B. LANDSBERG [12], S. 430) einen endlichdimensionalen Teilraum L von E und eine stetige Abbildung $h : B \to L \cap K_0$, so daß $x - hx \in V$ $(x \in B)$ gilt. Das bedeutet aber die Zulässigkeit des Kegels K_0. Q. e. d.

Ist E ein topologischer Vektorraum, so heißt eine Folge $B = (b_n)$ von Elementen b_n aus E eine Banach-Basis, wenn es zu jedem $x \in E$ genau eine Folge $(a_n(x))$ reeller Zahlen gibt, so daß $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n$ (im Sinne der Topologie von E) gilt. Die Banach-Basis $B = (b_n)$ wird eine Schauder-Basis genannt, wenn für jede natürliche Zahl n die durch die Zuordnung $x \to a_n(x)$ $(x \in E)$ gegebene Linearform stetig ist.

Definition 4. *Ist $B = (b_n)$ eine Banach-Basis des topologischen Vektorraumes E, so heiße ein Kegel K_0 aus E B-abschnittsvollständig, wenn für jedes $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n$ aus K_0 und für jedes natürliche m auch jeder „B-Abschnitt“ $\sum_{n=1}^{m} a_n(x) b_n$ von x zu K_0 gehört.*

Ein topologischer Vektorraum $E[T]$ heißt ultratonneliert (W. ROBERTSON [16], s. auch KLEE [8], S. 294), wenn seine Topologie T feiner ist als jede Topologie T', die E zu einem topologischen Vektorraum macht und ein Fundamentalsystem von T-abgeschlossenen Nullumgebungen besitzt. Mit diesen Begriffen ergibt sich nun die folgende Bemerkung.

Bemerkung 3. *In einem ultratonnelierten topologischen Vektorraum E mit einer Schauder-Basis $B = (b_n)$ ist jeder B-abschnittsvollständige Kegel K_0 zulässig.*

Beweis. Es sei C eine kompakte Teilmenge des Kegels K_0. Die durch $x \to h_m(x) = \sum_{n=1}^{m} a_n(x) b_n$ $(x \in C)$ definierten Funktionen h_m konvergieren unter unseren Voraussetzungen auf C gleichmäßig gegen die Einschränkung $I_E | C$ der identischen Abbildung I_E von E auf C (vgl. KLEE [8], S. 294, Prop. 2.2). Da K_0 ein B-abschnittsvollständiger Kegel ist, ergibt sich somit die Zulässigkeit dieses Kegels. Q. e. d.

Aus den letzten zwei Bemerkungen und aus Satz 4 ergeben sich unmittelbar die folgenden Sätze.

Satz 5. *Es sei E ein lokalkonvexer Vektorraum mit dem abgeschlossenen Kegel K_0 und V_0 eine abgeschlossene Nullumgebung mit beschränktem $V_0 \cap K_0$. Jede kompakte Abbildung T von $G = \partial V_0 \cap K_0$ in E mit $T(G) \subset K_0$ und $o \notin \overline{T(G)}$ besitzt einen positiven Eigenwert.*

Satz 6. *Es sei E ein ultratonnelierter topologischer Vektorraum mit einer Schauder-Basis $B = (b_n)$, K_0 ein abgeschlossener B-abschnittsvollständiger Kegel in E und V_0 eine abgeschlossene Nullumgebung mit beschränktem $V_0 \cap K_0$. Jede kompakte Abbildung T von $G = \partial V_0 \cap K_0$ in E mit $T(G) \subset K_0$ und $o \notin \overline{T(G)}$ besitzt einen positiven Eigenwert.*

5. Wir beginnen diesen Abschnitt mit einer Verallgemeinerung eines von SCHAEFER [18] für lokalkonvexe Räume bewiesenen Sachverhaltes, die von LANDSBERG [12] für beliebige topologische Vektorräume angegeben wurde und für die hier ein sehr einfacher Beweis angeführt werden soll.

Satz 7. *Es sei E ein topologischer Vektorraum und W eine einfachberandete und abgeschlossene Nullumgebung. Ist T eine kompakte und gleichmäßig-finit approximierbare Abbildung von W in E, die keinen Fixpunkt besitzt, so existiert ein $\lambda \in (0, 1)$ und auf dem Rand ∂W von W ein x_0, so daß die Beziehung $x_0 = \lambda T x_0$ gilt.*

Beweis. Es sei p das Minkowski-Funktional von W und r die durch die Vorschrift $r(x) = x$ für $x \in W$ und $r(x) = \frac{x}{p(x)}$ für $x \in E \backslash W$ erklärte Retraktion von E auf W (s. KLEE [7], S. 283). Die Abbildung $T' = T \circ r$ ist ersichtlich eine kompakte und gleichmäßig finit-approximierbare Selbstabbildung des Raumes E und besitzt daher (vgl. LANDSBERG [12], S. 429, Bemerkung) einen Fixpunkt $z_0 \in E$. Das Element z_0 liegt in $E \backslash W$, da sonst z_0 ein Fixpunkt von T wäre. Aus $T' z_0 = z_0$ erhalten wir für $\lambda = \frac{1}{p(z_0)}$ und $x_0 = \lambda z_0$ die Beziehung $x_0 = \lambda T x_0$ mit $\lambda \in (0, 1)$ und $x_0 \in \partial W$. Q. e. d.

Für die weiteren Betrachtungen ziehen wir die folgende Definition heran.

Definition 5 (vgl. SCHAEFER [19], S. 415). *Es seien E und F topologische Vektorräume sowie G eine Teilmenge von E. Eine (lineare oder nichtlineare) stetige Abbildung $T : G \to F$ nennen wir vollstetig, wenn es eine Nullumgebung V von E gibt, für welche die Mengen $T(G \cap (n V))$ für $n = 1, 2, \ldots$ relativ kompakt sind.*

Aus Satz 7 erhalten wir eine Aussage über die Lösbarkeit von Gleichungen zweiter Art (vgl. KANTOROWITSCH und AKILOW [5], S. 396).

Korollar 4. *Es sei E ein zulässiger topologischer Vektorraum und T eine vollstetige Selbstabbildung von E. Dann gibt es zu jedem $y \in E$ mit $Ty \neq o$ ein $\lambda \in (0, 1)$, so daß die Gleichung zweiter Art $x - \lambda Tx = y$ eine Lösung $x_0 \neq o$ besitzt.*

Beweis. Es sei $y \in E$ mit $Ty \neq o$ gegeben. Wir erklären die Abbildung $S: E \to E$ durch die Vorschrift $Sx = T(x + y)$ $(x \in E)$ und betrachten zunächst den Fall, daß $y \neq o$ gilt. Da die Abbildung T vollstetig ist, gibt es eine Nullumgebung V von E mit $y \in \operatorname{int} V$, so daß die Menge $T(V)$ relativ kompakt ist. Wir finden dann weiter eine Nullumgebung U von E mit $y + U \subset V$ und $(-y) \notin U$. Die Einschränkung $S|U$ der Abbildung S auf die Menge U ist zufolge der Relation $S(U) \subset T(V)$ eine kompakte Abbildung. Wegen $So = Ty \neq o$ ist der Nullvektor o kein Element der (abgeschlossenen) Menge aller Fixpunkte von S. Es gibt daher eine abgeschlossene und einfachberandete Nullumgebung $W \subset U$, die keinen Fixpunkt der Abbildung S enthält. Da der Raum E zulässig ist, ist die kompakte Abbildung $S|U$ gleichmäßig finit-approximierbar. Das gleiche gilt daher auch für die kompakte Abbildung $S|W$. Nach Satz 7 (angewandt auf die Abbildung $S|W$) existiert ein $z_0 \in \partial W$ und ein $\lambda \in (0, 1)$ mit $\lambda S z_0 = z_0$. Wir setzen $x_0 = z_0 + y$. Dann gilt $x_0 - \lambda T x_0 = y$. Wäre $x_0 = o$, so folgte $z_0 = -y \in \partial W$ und damit $(-y) \in U$, was einen Widerspruch ergibt. Für den Fall, daß $y \neq o$ gilt, ist damit alles gezeigt.

Es sei jetzt $y = o$, dann gilt $S = T$ und daher die Beziehung $So \neq o$. Wie im soeben betrachteten Fall finden wir ein $z_0 \neq o$ und ein $\lambda' \in (0, 1)$ mit $\lambda' S z_0 = z_0$. Wir setzen $x_0' = z_0$. Dann gilt $x_0' - \lambda' T x_0' = o$ mit $x_0' \neq o$ und $\lambda' \in (0, 1)$, was die Behauptung auch für den jetzt vorliegenden Fall ergibt. Q. e. d.

Für lokalkonvexe Räume bewies SCHAEFER [19] ohne Benutzung der Leray-Schauder-Theorie ein für diverse Anwendungen in der mathematischen Physik benötigtes Ergebnis dieser Theorie. Wir übertragen dieses Ergebnis auf beliebige topologische Vektorräume.

Satz 8. *Es sei E ein zulässiger topologischer Vektorraum und T eine vollstetige Selbstabbildung von E. Die Menge M aller $z \in E$, für die es ein $\lambda \in (0, 1)$ gibt mit $\lambda T z = z$, sei beschränkt. Dann existiert zu jedem $\lambda \in [0, 1]$ ein $x \in E$ mit $\lambda T x = x$.*

Beweis. Es gibt eine abgeschlossene, einfachberandete Nullumgebung V derart, daß die Einschränkung $T|nV$ der Abbildung T auf die Menge nV eine kompakte Abbildung ist für $n = 1, 2, \ldots$. Nach Voraussetzung über M existiert ein n_0 mit $M \subset n_0 V$. Der Rand ∂W der abgeschlossenen einfachberandeten Nullumgebung $W = (n_0 + 1) V$ ist disjunkt zu M. Durch die Vorschrift $S_\lambda x = \lambda T x$ $(x \in W)$ ist für jedes $\lambda \in [0, 1]$ eine kompakte Abbildung $S_\lambda: W \to E$ erklärt. Besäße die (wegen der Zulässigkeit von E gleichmäßig finit-approximierbare) Abbildung S für ein gewisses $\lambda \in (0, 1]$ keinen Fixpunkt, so müßte nach Satz 7 ein $\lambda_0 \in (0, 1)$ und ein $x_0 \in \partial W$ existieren mit $\lambda_0 S_\lambda x_0 = x_0$. Das Element x_0 gehörte somit zu $M \cap \partial W$, was einen Widerspruch zur Dis-

junktheit von M und ∂W ergibt. Die Abbildung S_λ besitzt daher für jedes $\lambda \in (0, 1]$ (und damit auch für jedes $\lambda \in [0, 1]$) einen Fixpunkt, woraus die Behauptung unmittelbar folgt. Q. e. d.

6. Abschließend behandeln wir zwei Beispiele für Gleichungen zweiter Art mit nichtlinearen Integraloperatoren im nicht lokalkonvexen Raum $L^p = L^p(0, 1)$ $(0 < p < 1)$ der Klassen aller (meßbaren) zur p-ten Potenz über $[0, 1]$ absolut integrierbaren reellen Funktionen. Die Topologie des Raumes L^p sei wie üblich mittels der p-Norm $|||x||| = \int_0^1 |x(t)|^p dt$ $(x \in L^p)$ erklärt (wir arbeiten stets mit geeignet gewählten Repräsentanten). Ein Element aus L^p heiße nichtnegativ, wenn es einen nichtnegativen Repräsentanten besitzt. Als Anwendung des Korollars 3 bzw. des Korollars 4 erhalten wir die Folgerung 1 bzw. die Folgerung 2.

Folgerung 1. *Es sei* $0 < p < 1$ *und* $K(s, t)$ *nichtnegativ und stetig für* $0 \leqq s, t \leqq 1$. *Zu jedem* $\varrho > 0$ *und zu jedem nichtnegativen* $y \in L^p(0, 1)$ *mit* $y \neq o$ *gibt es dann ein* $\mu > 0$, *so daß die Gleichung zweiter Art*

$$\mu x(s) - \int_0^1 K(s, t)\, |x(t)|^p dt = y(s)$$

eine Lösung $x \in L^p(0, 1)$ *mit* $\int_0^1 |x(t)|^p dt = \varrho$ *besitzt.*

Beweis. Die Menge K_0 aller nichtnegativen Elemente von L^p ist ein abgeschlossener Kegel in L^p. Mit G bezeichnen wir den Durchschnitt von K_0 mit dem Rand ∂V_0 der beschränkten Nullumgebung $V_0 = \{x \in L^p : |||x||| \leqq \varrho\}$. Die Abbildung $T : G \to L^p$ werde durch die Vorschrift

$$(Tx)(s) = \int_0^1 K(s, t)\, |x(t)|^p dt \quad (x \in G)$$

erklärt. Wir zeigen, daß T eine kompakte Abbildung ist. Es bezeichne m eine obere Schranke für den Betrag des Kernes $K(s, t)$ $(0 \leqq s, t \leqq 1)$. Dann gilt die (leicht nachzuweisende) Ungleichung

$$\int_0^1 \left| \int_0^1 K(s, t)\, (|x(t)|^p - |y(t)|^p) dt \right|^p ds \leqq m^p |||x - y|||^p \quad (x, y \in L^p),$$

woraus die Stetigkeit von T sofort folgt. Aus den Abschätzungen

$$\left| \int_0^1 K(s, t)\, |x(t)|^p dt \right| \leqq m\varrho \quad (x \in G, 0 \leqq s \leqq 1)$$

und

$$\left| \int_0^1 (K(s', t) - K(s, t))\, |x(t)|^p dt \right| \leqq$$

$$\leqq \varrho \max_{0 \leqq t \leqq 1} |K(s', t) - K(s, t)| \quad (x \in G, 0 \leqq s, s' \leqq 1)$$

kann unter Benutzung der gleichmäßigen Stetigkeit des Kernes $K(s, t)$ gefolgert werden, daß die Menge $T(G)$ eine relativ kompakte Teilmenge des Raumes $C(0, 1)$ (versehen mit der üblichen Normtopologie, $\|x\| = \sup_{0 \leqq t \leqq 1} |x(t)|$,

$x \in C(0,1)$) ist. Daher ist die Menge $T(G)$ auch eine relativ kompakte Teilmenge des Raumes $L^p(0,1)$. Faßt man nämlich den Raum $C(0,1)$ als Teilmenge von $L^p(0,1)$ auf und ist (x_n) eine Folge aus $C(0,1)$ und $x \in C(0,1)$, so folgt ersichtlich aus $\|x_n - x\| \to 0$ stets $|||x_n - x||| \to 0$. Somit ist jede bezüglich $\|\cdot\|$ relativ kompakte Teilmenge von $C(0,1)$ auch eine bezüglich $|||\cdot|||$ relativ kompakte Teilmenge von $L^p(0,1)$. Die Abbildung T ist also eine kompakte Abbildung, die überdies, weil $K(s,t) \geqq 0$ $(0 \leqq s,t \leqq 1)$ gilt, die Menge $G = \partial V_0 \cap K_0$ in den Kegel K_0 abbildet. Der Beweis unserer Behauptung folgt somit unmittelbar aus dem Korollar 2, wenn wir den Nachweis der Zulässigkeit des Kegels K_0 erbracht haben. Im Zusammenhang mit dem Zulässigkeitsbeweis für die Räume $L^p(0,1)$ $(0 < p < 1)$ wird in [15] gezeigt, daß es eine Folge (M_n) von endlichdimensionalen Teilräumen von $L^p(0,1)$ und eine Folge (p_n) von Abbildungen $p_n : L^p \to M_n$ gibt, die auf jeder kompakten Teilmenge B von L^p gleichmäßig gegen die Einschränkung der identischen Abbildung von L^p auf B konvergiert. Die Abbildungen p_n $(n = 1, 2, \ldots)$ haben (s. [15], S. 1150) die zusätzliche Eigenschaft, daß mit $x \in L^p$ auch $p_n(x)$ nichtnegativ ist. Daraus ergibt sich die Zulässigkeit des Kegels K_0. Q. e. d.

Folgerung 2. *Es sei* $0 < p < 1$ *und* $K(s,t)$ *stetig für* $0 \leqq s,t \leqq 1$. *Für jedes* $y \in L^p(0,1)$ *mit* $\int_0^1 K(s,t)\,|y(t)|^p dt \neq o$ *gibt es dann ein* $\lambda \in (0,1)$, *so daß die Gleichung zweiter Art*

$$x(s) - \lambda \int_0^1 K(s,t)\,|x(t)|^p dt = y(s)$$

eine Lösung $x_0 \in L^p(0,1)$ *mit* $x_0 \neq o$ *besitzt.*

Beweis. Es sei B die Einheitskugel des p-normierten Raumes $L^p(0,1)$ und $T : L^p \to L^p$ die durch die Vorschrift $(Tx)(s) = \int_0^1 K(s,t)\,|x(t)|^p dt$ $(x \in L^p)$ erklärte Abbildung. Analog zu den Betrachtungen im Beweis der Folgerung 1 ergibt sich die Stetigkeit von T und die Tatsache, daß die Einschränkung der Abbildung T auf die Menge nB $(n = 1, 2, \ldots)$ eine kompakte Abbildung ist. Also ist T vollstetig. Weil der Raum L^p zulässig ist (s. [15]), erfüllen der Raum L^p, die Abbildung T und das Element $y \in L^p$ alle Voraussetzungen des Korollars 4, woraus unsere Behauptung folgt. Q. e. d.

Literatur

[1] BOURBAKI, N.: Espaces vectoriels topologiques. Chap. I—II. Act. Sci. Ind. 1189. Paris: Hermann 1953.

[2] FROBENIUS, G.: Über Matrizen aus positiven Elementen. Sitzber. preuß. Akad. Wiss. 1908, 471—476.

[3] — Über Matrizen aus positiven Elementen II. Sitzber. preuß. Akad. Wiss. 1909, 514—518.

[4] — Über Matrizen aus nicht negativen Elementen. Sitzber. preuß. Akad. Wiss. 1912, 456—477.

[5] KANTOROWITSCH, L. W., u. G. P. AKILOW: Funktionalanalysis in normierten Räumen. Berlin: Akademie-Verlag 1964.

[6] KARLIN, S.: Positive operators. J. Math. Mech. 8, 907—937 (1959).

[7] KLEE, V.: Shrinkable neighborhoods in Hausdorff linear spaces. Math. Ann. **141**, 281—285 (1960).
[8] — Leray-Schauder theory without local convexity. Math. Ann. **141**, 286—296 (1960).
[9] KÖTHE, G.: Topologische lineare Räume I. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.
[10] KRASNOSELSKI, M. A.: Topological methods in the theory of nonlinear integral equations. Oxford-London-New York-Paris: Pergamon Press 1964.
[11] KREIN, M. G., u. M. A. RUTMAN: Lineare Operatoren, die einen Kegel im Banach-Raum invariant lassen (russisch). Uspechi mat. Nauk **3**, 3—95 (1948).
[12] LANDSBERG, M.: Über die Fixpunkte kompakter Abbildungen. Math. Ann. **154**, 427—431 (1964).
[13] PERRON, O.: Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchlogarithmus. Math. Ann. **64**, 1—76 (1907).
[14] — Zur Theorie der Matrices. Math. Ann. **64**, 248—263 (1907).
[15] RIEDRICH, T.: Die Räume $L^p(0, 1)$ $(0 < p < 1)$ sind zulässig. Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden **12**, 1149—1152 (1963).
[16] ROBERTSON, W.: Completions of topological vector spaces. Proc. London Math. Soc. (3) **8**, 242—257 (1958).
[17] ROTHE, E.: On non-negative functional transformations. Am. J. Math. **66**, 245—254 (1944).
[18] SCHAEFER, H.: Neue Existenzsätze in der Theorie nichtlinearer Integralgleichungen. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig (Math.-Nat. Kl.) **101**, 40 S. (1955).
[19] — Über die Methode der a priori-Schranken. Math. Ann. **129**, 415—416 (1955).
[20] — On nonlinear positive operators. Pacific J. Math. **9**, 847—860 (1959).
[21] VAINBERG, M. M.: Topologische Methoden zur Behandlung eines Problems über Eigenfunktionen nichtlinearer Integralgleichungen (russisch). Mosk. Obl. Ped. Inst. Uč. Zap. Trudy Kafedr. Mat. **20**, 37—57 (1954).

(Eingegangen am 2. Juli 1965)

MARTINEAU A.
Math. Annalen 163, 62—88 (1966)

Sur la topologie des espaces de fonctions holomorphes

A Monsieur G. KÖTHE pour son 60e anniversaire

Par

A. MARTINEAU à Montpellier

Table des matières

Introduction 62
Chapitre I: Les topologies inductives et projectives. Comparaison 63
§ 1. Le cas ouvert ou compact 63
§ 2. Parties quelconques 64
§ 3. Comparaison de H_I et de H_P 64
Chapitre II: Une extension à n-variables du théorème de dualité de J. S. SILVA . . . 73
§ 1. Notions géométriques 73
§ 2. Représentation du dual de $H_A(\mathbb{C}^n)$ par des cocycles 74
§ 3. Le dual d'un espace de fonctions holomorphes est encore un espace de fonctions holomorphes 77
§ 4. Quelques exemples 83
Bibliographie 88

Dans ce travail nous nous intéressons au problème de la définition d'une topologie localement convexe ayant de bonnes propriétés sur un espace vectoriel de fonctions holomorphes. C'est un problème que nous avons rencontré dans l'étude de la transformation de Fourier complexe cf. [15]. Une partie des résultats du chapitre I a été exposée dans une conférence à l'Ober-Wolfach en octobre 1962, et dans une version encore plus primitive aux journées Poitou-Aquitaine de POITIERS en 1961. Malheureusement nos résultats n'ont pas encore acquis une forme définitive.

Nous supposons que le lecteur est familier avec la notion de variété analytique complexe que dans la suite nous supposerons toujours dénombrable à l'infini et que nous noterons uniformément V. Nous écartons la notion d'espace analytique quoique nos problèmes gardent leur sens dans ce cas plus général ainsi que plusieurs théorèmes.

Nous noterons par $\mathcal{O}(V)$ le faisceau [4] des germes de fonctions holomorphes sur V. Alors on appelle d'habitude fonction holomorphe sur une partie A quelconque de V une section sur A de ce faisceau, et on note l'ensemble de ces sections par $\Gamma(A; \mathcal{O}/A)$. Pour mieux situer la question, revenons à une description plus classique et plus élémentaire.

Si Ω est une partie *ouverte* de V la notion de fonction holomorphe sur Ω est acquise et on note par $H(\Omega)$ l'espace vectoriel de toutes ces fonctions. Alors, quand A est une partie quelconque de V on prendra comme définition de l'espace $H_A(V)$ des fonctions holomorphes sur A, la limite inductive des espaces $H(\Omega)$, Ω parcourant la famille des ouverts contenant A. Car, en effet, si on désigne quand $\Omega \supset \Omega'$ par $i_{\Omega,\Omega'}$, l'homomorphisme de restriction de $H(\Omega)$ à $H(\Omega')$ on obtient un système inductif.

Si au lieu de prendre tous les voisinages de A, on prend une base de filtre de tels voisinages on obtiendra une autre notion de fonctions holomorphes sur A: nous en donnerons des exemples au chapitre II. Il résulte du moins du théorème 3.3.1 de [4] que $H_A(V)$ est naturellement isomorphe à $\Gamma(A; \mathcal{O}/A)$.

Voici une autre façon d'introduire les fonctions holomorphes sur A. Si K est une partie de V, on vient de définir $H_K(V)$. Et si $K' \supset K$ on voit immédiatement qu'on peut définir un homomorphisme de restriction $i_{K',K}$ de $H_{K'}(V)$ dans $H_K(V)$. Si ϕ est une famille filtrante croissante de parties de A les $H_K(V)$ où $K \in \phi$ forment un système projectif. Donc on peut aussi considérer les éléments de cette limite projective, qu'on notera $H_{\phi,A}(V)$.

On a aisément le

Lemme. *Soit ϕ un système projectif de parties de A contenant toutes les suites convergentes compactes de A. Alors $H_{\phi,A}(V)$ est naturellement isomorphe à $H_A(V)$.*

Démonstration. C'est une généralisation immédiate du lemme 1 page 51 de [5] (cf. proposition 1.2 infra).

Aussi, *nous supposerons toujours dans la suite que les suites convergentes compactes de A appartiennent à ϕ.*

Ainsi, nous avons deux types de moyens conduisant aux fonctions holomorphes sur A. Nos constructions s'étendent aux espaces de fonctions holomorphes à valeurs vectorielles mais nous ne pousserons pas notre étude dans cette direction.

Chapitre I: Les topologies inductives et projectives. Comparaison

Dans les questions relatives aux espaces vectoriels topologiques nous suivons la terminologie de [1] ou [9] et aussi, quand nécessaire [6] et [7].

§ 1. Le cas ouvert ou compact

Si Ω est un ouvert de V, on munit $H(\Omega)$ de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Il est classique que cet espace devient un Fréchet nucléaire pour cette topologie, [7] chapitre II, p. 56. A cause du théorème du graphe fermé, [7] préliminaires, c'est la seule topologie du type $\mathscr{L} - \mathscr{F}$ plus fine que la topologie de la convergence simple dont puisse être muni l'espace $H(\Omega)$. Dans la suite, sans spécification du contraire, nous noterons donc cet espace vectoriel topologique comme il précède.

Maintenant, si K est un compact de V, il admet un système fondamental dénombrable de voisinages Ω_j. Donc on peut prendre comme espace vectoriel topologique l'espace $\varinjlim_{\Omega_j} H(\Omega_j)$, le symbole $\varinjlim$ désignant la limite inductive

dans la catégorie des espaces localement convexes c'est à dire l'espace $H_K(V)$ muni de la topologie localement convexe la plus fine rendant continues les applications de restriction: $H(\Omega_j) \to H_K(V)$.

Il est encore classique [6] que $H_K(V)$ devient ainsi un espace *complet* du type $\mathscr{D} - \mathscr{F}$, nucléaire, donc du type $(\mathscr{L} - \mathscr{F})$ ([7] chapitre II, p. 57). Vu le théorème du graphe fermé cette topologie est donc assez naturelle et l'espace vectoriel topologique ainsi obtenu sera noté $H_K(V)$. Précisons pour la suite que son dual fort $H'_K(V)$ est un Fréchet nucléaire.

§ 2. Parties quelconques

Si A est une partie quelconque de V nous allons définir deux types de topologies sur A.

Définition 1.1. *On désigne par topologie inductive sur* $H_A(V)$ *la topologie* $\varinjlim_{\Omega \supset A} H(\Omega)$, Ω *parcourant la famille des voisinages ouverts de* A. *On désigne par topologie projective sur* A, *relativement à un système projectif* ϕ *de compacts de* A *contenant toutes les suites convergentes compactes la topologie* $\varprojlim_{K \in \phi} H_K(V)$, *le symbole* $\varprojlim$ *désignant la limite projective dans la catégorie des espaces localement convexes.*

Rappelons que cette dernière topologie est la topologie localement convexe la moins fine rendant continues les applications de restriction $H_A(V) \to H_K(V)$ quand K parcourt ϕ.

Nous noterons le premier espace vectoriel topologique par $H_{I,A}(V)$ et les seconds par $H_{P,\phi,A}(V)$. Lorsque ϕ sera la famille de tous les compacts de V nous noterons l'espace obtenu par $H_{P,A}(V)$.

§ 3. Comparaison de H_I et de H_P

Nous entrons maintenant dans le vif du sujet, à savoir la comparaison des topologies inductives et projectives définies sur $H_A(V)$.

Proposition 1.1. *L'espace* $H_{I,A}(V)$ *est un espace ultrabornologique, les espaces* $H_{P,\phi,A}(V)$ *sont des espaces nucléaires complets.*

Démonstration. Une limite inductive d'espaces ultrabornologiques est ultrabornologique (espaces dits du type (β) dans l'introduction de [7]). Donc $H_{I,A}(V)$ est ultrabornologique chaque espace $H(\Omega)$ l'étant. Maintenant, nous avons rappelé qu'un espace $H_K(V)$ est complet, donc $H_{P,\phi}(V)$ est complet comme limite projective d'espaces complets (i.e. sous-espace fermé d'un produit d'espaces complets); en outre, une limite projective d'espaces nucléaires est un espace nucléaire, [7] chapitre II, p. 47. C.Q.F.D.

Proposition 1.2. *Si* $\phi_1 \subset \phi_2$ *l'application identique de* $H_A(V)$ *est continue de* $H_{P,\phi_2,A}(V)$ *en* $H_{P,\phi_1,A}(V)$, *et pour tout* ϕ *de* $H_{I,A}(V)$ *en* $H_{P,\phi,A}(V)$. *Tous ces espaces vectoriels topologiques admettent les mêmes parties bornées.*

Démonstration. Commençons par les propriétés de continuité. La première est claire. Ensuite, on sait [1], que pour vérifier qu'une application linéaire u d'un espace $\varinjlim_{i \in I} E_i$ dans un espace F est continue, notant par j_i l'application

canonique de E_i dans $\varinjlim_{i \in I} E_i$, il suffit de vérifier que chacune des applications $u \circ j_i$ est continue. Mais, tout voisinage ouvert Ω de A est un voisinage ouvert de tout compact de A, et alors l'application en question devient l'application canonique de $H(\Omega)$ dans $H_K(V) = \varinjlim_{\Omega' \supset K} H(\Omega')$ donc est continue.

Il reste à identifier les parties bornées. On a le

Lemme. *Soit B une partie de $H_A(V)$ telle que son image B_K dans chaque $H_K(V)$ soit bornée, K parcourant la famille des suites convergentes de A. Alors pour tout x, $x \in A$, il existe un voisinage $\omega(x)$ de x tel que tout élément ϕ_x où $\phi \in B$ se prolonge analytiquement en une fonction ϕ^x, $\sup_{\substack{\phi \in B \\ z \in \omega(x)}} |\phi^x(z)| \leqq M_x$, et tel que, pour tout y, $y \in \omega(x) \cap A$ on ait $\phi_y = (\phi^x)_y$.*

Démonstration. ϕ_z désigne l'image de ϕ dans $H_{\{z\}}(V)$. On reprend le raisonnement de [15] p. 15.

S'il n'en est pas ainsi, il existe une suite de points x_n tendant vers x, de ϕ^n, $\phi^n \in B$, tels que:

$$\phi^n_{x_n} \neq (\phi^{n,x})_{x_n}$$

Posons:

$$L = \{x\} \cup \left(\bigcup_n \{x_n\}\right).$$

C'est une suite convergente compacte de A, donc B_L est bornée dans $H_L(V)$ et les fonctions de B_L sont prolongeables simultanément à un voisinage ω_L de L ([15] p. 14), qui est en particulier un voisinage du point x, donc qui contient un voisinage ω_x simplement connexe de ce point. Pour n assez grand, on a $x_n \in \Omega_x$, d'où: $(\phi^n)_{x_n} = (\phi^{n,x})_{x_n}$ en contradiction avec l'hypothèse. C.Q.F.D.

De ce lemme, par des arguments purement topologiques, on déduit aisément le fait suivant:

Il existe un voisinage ouvert ω de A tel que:

1) *ω est réunion d'ouverts du type $\omega(x)$*
2) *les ϕ^x sont, dans ω, prolongement analytique les uns des autres*

(cf. [15] p. 15 ou adapter [4] p. 150).

Alors, si K est une partie compacte de ω, on a: $K \subset \bigcup_{x \in A} \omega(x)$. On peut extraire de ce recouvrement un recouvrement fini $\omega(x_1), \ldots, \omega(x_N)$ et alors, il vient: $\sup_{\phi \in B, z \in K} |\phi(z)| \leqq \sup_{j=1,2,\ldots,N} M(x_j) < +\infty$.

Corollaire. *L'espace $H_{I,A}(V)$ est un espace de Montel.*

Démonstration. En effet, si B est une partie bornée de cet espace, elle est bornée dans un espace $H(\omega)$. Donc l'adhérence de cette partie dans $H(\omega)$ est compacte et a en conséquence une image compacte dans $H_{I,A}(V)$ c'est à dire que B est relativement compacte.

Comme $H_{I,A}(V)$ est une limite inductive d'espaces tonnelés il est tonnelé. D'après la définition de BOURBAKI [1] c'est un Montel. C.Q.F.D.

Nous noterons par $H'_{P,\phi,A}(V)$, ou $H'_{I,A}(V)$ le dual fort de l'espace $H_{P,\phi,A}(V)$ (respectivement $H_{I,A}(V)$).

Proposition 1.3. *L'espace $H'_{P,\phi,A}(V)$ est un sous-espace topologique dense de $H'_{I,A}(V)$. Ce dernier est un Montel complet.*

Démonstration. L'application naturelle de $H'_{P,\phi,A}(V)$ dans $H'_{I,A}(V)$ est l'application transposée de l'application identique de $H_{I,A}(V)$ dans $H_{P,\phi,A}(V)$. Le fait que $H'_{P,\phi}$ est un sous-espace topologique résulte de ce que $H_{P,\phi}$ et H_I ont mêmes parties bornées d'après la proposition 1.2.

Pour voir qu'il est fortement dense, puisqu'il l'est faiblement il suffit de remarquer que, d'après la proposition précédente $H_{I,A}$ étant un Montel, il résulte que $H'_{I,A}(V)$ est lui aussi un Montel d'après un théorème de N. BOURBAKI [1] chapitre IV § 3 proposition 7, donc est réflexif. En conséquence les notions de fermeture forte et faible coïncident pour les convexes de H'_I. C.Q.F.D.

Proposition 1.4. *On a $H'_{P,\phi,A}(V) = \varinjlim_{K\in\phi} H'_K(V)$, en particulier $H'_{P,\phi,A}(V)$ est un espace ultrabornologique.*

Démonstration. Les applications linéaires de définition de la limite inductive sont les applications transposées de celles du système projectif des $H_K(V)$ pour $K \in \phi$. Alors, plongeant $H_{P,\phi,A}(V)$ dans l'espace $\prod_{K\in\phi} H_{P,K}(V)$, $H'_{P,\phi,A}(V)$ apparait du moins algébriquement, comme le quotient de l'espace $\sum_{K\in\phi} H'_{P,K}(V)$ par le noyau M^0, polaire de $H_{P,\phi,A}(V)$. Mais nos espaces sont semi-réflexifs, et leurs parties bornées sont compactes, donc en application de [1] chapitre IV § 3 exercice 12 b) ou c) il en résulte que la topologie forte de $H'_{P,\phi,A}(V)$ est le quotient de celle de $\sum_{K\in\phi} H'_{P,K}(V)$ par M^0. C'est bien l'égalité annoncée. L'espace $H'_{P,\phi,A}(V)$ est donc ultrabornologique ce qui résulte d'ailleurs aussi d'un théorème de L. SCHWARTZ [17] en utilisant la proposition 1.1 (Théorème 2 des préliminaires de [15]).

Proposition 1.5. *Si $H_{P,\phi,A}(V)$ est tonnelé et si $H'_{P,\phi,A}(V) = H'_I(V)$ alors $H_{P,\phi,A}(V) = H_{I,A}(V)$.*

Démonstration. En effet dans ces hypothèses les parties bornées de $H'_{P,\phi,A}(V) = H'_I(V)$ sont équicontinues relativement à chacun des deux couples (H_P, H'_P), (H_I, H'_I). C.Q.F.D.

Proposition 1.6. *$H'_{I,A}(V)$ est un espace nucléaire complet tonnelé complété de l'espace nucléaire ultrabornologique $H'_{P,\phi,A}(V)$.*

Démonstration. Par transposition il suffit de montrer qu'étant donné une partie bornée B de $H_{I,A}(V)$ il existe une partie bornée C telle que B soit nucléaire dans l'espace vectoriel nommé E_C engendré par C, [7], ou encore telle que l'application naturelle de E_B dans E_C soit nucléaire.

Mais, d'après la proposition 1.2, B provient d'une partie bornée β d'un espace $H(\omega)$ et $H(\omega)$ est nucléaire. Donc, dans $H(\omega)$ on trouvera une partie bornée γ répondant à la question relativement à β et l'image C de γ dans $H_A(V)$ sera la partie cherchée.

En outre nous savons que H'_I est un Montel. C.Q.F.D. Nous voyons que les relations entre les espaces $H_{P,\phi,A}(V)$, $H_{I,A}(V)$ et les relations entre les espaces $H'_{P,\phi,A}(V)$ et $H'_{I,A}(V)$ sont presque symétriques. Résumons ce que nous savons.

Proposition 1.7. *Soit A une partie quelconque de V et ϕ un système projectif de compacts de A (contenant les suites convergentes!). Considérons les propriétés suivantes*:

1) $H_{P,\phi,A}(V) = H_{I,A}(V)$

2) $H_{P,\phi,A}(V)$ *est bornologique*

2') $H_{P,\phi,A}(V)$ *est ultrabornologique*

3) $H'_{P,\phi,A}(V)$ *est complet*

4) $H'_{P,\phi,A}(V) = H'_{I,A}(V)$ *algébriquement*

4') $H'_{P,\phi,A}(V) = H'_{I,A}(V)$ *est un espace nucléaire complet et ultrabornologique.*

On a les implications suivantes: 1, 2, 2' *sont équivalents*, 3, 4, 4' *sont équivalents et sont entrainés par* 1, 2, 2'.

Démonstration. Par la proposition 1.1, $H_{I,A}(V)$ est ultrabornologique, donc $1 \Rightarrow 2$ et $1 \Rightarrow 2'$. Par la proposition 1.2, $2 \Rightarrow 1$ donc aussi $2' \Rightarrow 1$. Grâce à la conjonction des propositions 1.3, 1.4, 1.6 on obtient l'équivalence de 3), 4) et 4'). Et maintenant il est connu que 2) implique 3) [9] C.Q.F.D.

Notons encore, si $H'_{P,\phi,A}(V)$ *est complet* $H_{I,A}(V)$ *est complet.* En effet l'hypothèse entraine que $H'_{I,A}(V)$ est ultrabornologique, donc son dual fort, à savoir $H_{I,A}(V)$, est complet.

Théorème 1.1. *Soit A une partie localement fermée de V alors, pour le couple $(H_{P,A}(V), H_{I,A}(V))$ les assertions* 3, 4, 4' *de la proposition* 1.7 *sont équivalentes aux assertions* 1, 2, 2' *et quand l'une quelconque d'entre elles est satisfaite, $H'_{P,A}(V) = H'_{I,A}(V)$ est un $\mathscr{L} - \mathscr{F}$ nucléaire et complet.*

Démonstration. Les parties équicontinues de $H'_{P,A}(V)$ sont connues dans le case général. En effet, en application de [1] chapitre IV § 3 exercice 12a) elles proviennent d'une partie équicontinue de l'espace $\sum_{K \in \phi} H'_{P,K}(V)$, donc finalement d'une partie équicontinue d'un espace $H'_{P,K}(V)$, c'est à dire d'une partie bornée d'un des espaces $H'_{P,K}(V)$.

Alors, si $H'_{P,A}(V) = H'_{I,A}(V)$ notre espace, V étant dénombrable à l'infini, est un $\mathscr{L} - \mathscr{F}$ complet, donc toute partie équicontinue de $H'_{I,A}(V)$ (donc bornée) est comme il est connu ([7] préliminaires), incluse dans l'un des espaces $H'_{P,K}(V)$. Donc les parties équicontinues coïncident. C.Q.F.D.

Tirons maintenant certaines conséquences.

Proposition 1.8. *Si A est ouvert dans V, $H_{P,A}(V) = H(A)$.*

Proposition 1.9. *Si V est de dimension* 1, *quelque soit A, $H_{P,A}(V) = H_{I,A}(V)$.*

Théorème 1.2. *$H_{P,A}(V) = H_{I,A}(V)$ est un espace nucléaire limite projective dénombrable ultrabornologique (et complète) de $(\mathscr{D} - \mathscr{F})$ nucléaires et son dual est un espace nucléaire limite inductive dénombrable complète de $\mathscr{F}$-nucléaires sous l'une des hypothèses suivantes*:

a) *A est une partie quelconque d'une variété analytique réelle W de complexifié V.*

b) *A est un sous ensemble analytique complexe de V variété de Stein.*

c) *$V = \mathbb{C}^n$ et A est convexe admettant un point intérieur, localement fermé dans $\mathbb{C}^n$, satisfaisant à la condition suivante: pour tout ξ hyperplan complexe de $\mathbb{C}^n$, $\xi \cap A$ est compact si ξ est variété d'appui de A.*

Démonstration: Proposition 1.8. Il suffit de voir algébriquement que $H'_{P,A}(V) = H'_{I,A}(V)$. C'est une conséquence de Hahn-Banach (cf. [15] proposition 1.2 chapitre I)[1]).

De la proposition 1.9. Elle a déjà été démontrée par A. GROTHENDIECK (proposition 14 p. 92 de [5]) dans le cas où A est une partie de la sphère de Riemann. Montrons rapidement comment il est possible d'étendre ce résultat. D'abord on voit aisément qu'on peut se ramener au cas où V est connexe.

Si $A \subset V$ n'admet pas de voisinage ouvert non compact on a $H(A) = \mathbb{C}$ donc le problème est trivial. Dans l'autre situation on est ramené à V non compact. Alors (théorème de Stein [11] chapitre III), V est une variété de Stein et isomorphe à une surface de Riemann ouverte définie au-dessus de $\mathbb{C}$. On peut parler de distance à la frontière pour tout point de V et $X \subset V$ est relativement compact dans V si sa distance à la frontière est strictement positive.

Examinons d'abord le cas de A compact dans V. On peut alors adopter les raisonnements de [13] p. 9—11. On désigne par $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur V et par Ω celui des 1-formes différentielles holomorphes sur V, c'est à dire qui, au voisinage de chaque point de V, sur une carte régulière, s'écrivent $f(z)\,dz$ où $f(z)$ est holomorphe.

On a la suite exacte de cohomologie à support compact:

$$0 \to H^0(A; \mathcal{O}) \to H^1_*(V - A; \mathcal{O}) \to H^1_*(V; \mathcal{O}) \to 0$$

les applications étant des homomorphismes topologiques. Le dual de $H^1_*(V; \mathcal{O})$ où V est un ouvert de V s'identifie à $H^0(V; \Omega)$ l'espace des 1-formes holomorphes sur V.

Alors la transposée de l'application de $H^1_*(V - A; \mathcal{O})$ dans $H^1(V; \mathcal{O})$ devient l'application de restriction de $H^0(V; \mathcal{O})$ à $H^0(V - A; \mathcal{O})$. Il s'ensuit que le dual de $H^0(A; \mathcal{O}) = H_A(V)$ s'identifie au Fréchet quotient de $H^0(V - A; \Omega)$ par son sous-espace fermé $H^0(V; \Omega)$. On obtient la représentation suivante d'une partie équicontinue B du dual de $H_A(V)$; il existe *une famille* β *de 1-formes holomorphes définies sur le complémentaire de* A *et bornées sur tout compact de* $V - A$ *dont l'image est* B.

Ceci étant, supposons maintenant que A soit quelconque et considérons T un élément de $H'_{I,A}(V)$. Si ω est un voisinage ouvert de A, la restriction de T à $H(\omega)$ définissant un élément de $H'(\omega)$, on peut trouver une 1-forme différentielle holomorphe f_T définie dans le complémentaire d'un compact K de ω et qui représente T. Soit ω' un autre voisinage et f'_T un autre représentant. Si g_T représente la restriction de T à $H(\omega \cup \omega')$, $g_T - f_T$ est une 1-forme holomorphe définie sur V ainsi que $g_T - f'_T$. Ceci montre qu'on peut effectuer le prolongement analytique de f_T définie au voisinage de l'infini en f'_T et réciproquement (avec évidemment ambiguité pour les parties connexes disjointes). Il s'en suit donc que, vu la caractérisation des compacts de V que nous avons rappelé, la forme f_T peut-être prolongée analytiquement au complémentaire d'un compact de A et donnera ainsi un représentant de T. Plus précisément on

[1]) Ceci montre que $H(\Omega)$ se plonge dans un produit dénombrable de $\mathcal{D}$ — $\mathcal{F}$ nucléaires. C'est, suivant notre terminologie, un Fréchet s-nucléaire.

pourra montrer ceci; pour toute partie équicontinue β de formes linéaires sur $H_{I,A}(V)$ il existe un compact K inclus dans A et une famille β de 1-formes différentielles holomorphes définies sur $\complement K$ et bornées uniformément sur tout compact de ce complémentaire, qui représente B. Donc, grâce aux raisonnements du théorème 1.1, ce sera une partie équicontinue de $H'_{P,A}(V)$ ce qui achève la démonstration.

Démonstration du théorème 1.2. a) Si ω est un ouvert de W variété analytique réelle dénombrable à l'infini, et si V est un complexifié de W nous avons montré ([15] corollaire 1 du théorème 4.1 chapitre I), que $H'_{P,\omega}(V) = H'_{I,\omega}(V)$ donc en vertu du théorème 1.1, $H_{P,\omega}(V) = H_{I,\omega}(V)$ c'est à dire que si $T \in H'_{I,\omega}(V)$ il existe K compact inclus dans V tel que T provienne de $H'_K(V)$. Mais on peut reprendre les démonstrations en remplaçant partout T par, une *partie équicontinue* B de fonctionnelles analytiques locales et on obtiendra: *Il existe un plus petit compact K, le support réel de B, tel que B soit l'image d'une partie équicontinue B_K de $H'_K(V)$.*

Alors si $\omega_2 \subset \omega_1$ on a $K_2 = K_1$ et $B_{K_2} = B_{K_1}$ donc $K = \bigcap_{\omega \supset A} K_\omega = K_\omega$ est un compact de A et B provient de B_K. Ceci montre que $H'_{I,A}(V)$ et $H'_{P,A}(V)$ ont mêmes parties équicontinues. C.Q.F.D.

Ce théorème a aussi été démontré en [12] à l'aide d'une indicatrice harmonique:

b) On a $H'_{I,A}(V) = H'_{P,A}(V)$ d'après le corollaire 1 de la proposition 2.7 chapitre I de [15].

c) Désignons si x est un point de $\mathbb{C}^n$ par chapeau de x, soit $\mathscr{C}(x)$, l'ensemble des hyperplans complexes d'appui en x, c'est à dire des hyperplans complexes passant par x et qui ne divisent pas l'intérieur de A (c'est à dire non tels que $\xi \cap \overset{\circ}{\hat{A}}$ et $\complement\xi \cap \overset{\circ}{\hat{A}}$ soient simultanément non vides). Nous compactifions $\mathbb{C}^n$ par ses points à l'infini dans l'espace projectif complexe. Si y est un point de A nous désignons par $\delta(y; x)$ la distance de y à $\mathscr{C}(x)$. Soit $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset \cdots$ un système fondamental de compacts de A. Puisque l'enveloppe convexe d'un compact est compacte on peut les supposer tous convexes; on peut aussi supposer $K_n \subset \overset{\circ}{\hat{K}}{}^{A}_{n+1}$ où le symbole $\overset{\circ}{\hat{\ }}_A$ désigne l'intérieur *relativement à A*.

Lemme 1. *Pour tout entier n, il existe $m(n)$, $m(n) > n$, et $\varepsilon_n > 0$ tels que* $\inf_{y \in K_n, x \notin K_{m(n)}, x \in A} \delta(y; x) \geqq \varepsilon_n > 0$.

Démonstration. Supposons que cette borne inférieure soit nulle, n étant donné, quel que soit $m(n) > n$. Alors on peut trouver une suite (y_p, x_p, ξ_p) telle que, $\xi_p \in \mathscr{C}(x_p)$, $d(y_p, \xi_p) \to 0$, $x_p \notin K_p$, $p \to \infty$. Des p on extrait une sous-suite p' telle que les $y_{p'}$ convergent vers un point y_0 de K_n, puis des p' une sous-suite p'' telle que les $x_{p''}$ convergent vers x_0 point à l'infini de A, si nous convenons d'appeler points à l'infini de A les limites dans $P(\mathbb{C}^n)$ des suites de Cauchy z_n où $z_n \in K_{n+1}$, $z_n \notin K_n$, puis des p'' une sous-suite p''' telle que les $\xi_{p'''}$ convergent vers ξ_0. L'hyperplan ξ_0 passe par y_0 et x_0 et est limite d'hyperplans d'appui, donc y_0 est un point frontière et tout point du segment ouvert $]x_0 y_0[$ est manifestement dans A puisque cet ensemble est localement fermé, donc

le segment $]x_0y_0[$ de $A \cap \xi_0$ n'est pas compact ce qui contredit l'hypothèse. C.Q.F.D.

Soit M un point de l'intérieur de A. Si $P \in \overline{A} - \overset{\circ}{A}$ où $\overline{A}$ désigne la fermeture de A dans $\mathbb{C}^n$, nous considérons la demi-droite d'origine M et passant par P. Si Ω est un voisinage ouvert de A la demi-droite MP est rencontrée par $\complement\Omega$ suivant un fermé dont le point le plus proche de P sera noté par Q. On posera $\lambda_\Omega(P) = \frac{MQ}{MP}$ et on a clairement $\lambda_\Omega(P) > 1$ pour tout P de $A - \overset{\circ}{A}$.

Lemme 2. *Lorsque P parcourt un compact K de A on a:*

$$\inf_{P \in K} \lambda_\Omega(P) > 1 .$$

Démonstration. claire. Pour la commodité nous supposerons que la fonction $m(n)$ du lemme 1 est la fonction $(n+1)$ ce qui est possible après suppression de termes. Nous poserons alors: $\varepsilon_n = \inf_{\substack{y \in K_n - \overset{\circ}{K}{}^A_{n-1} \\ x \notin K_{n+1}, x \in A}} \delta(y; x)$.

Soit Ω un voisinage ouvert de A; on posera $\lambda_n = \inf_{p \in K_n - \overset{\circ}{K}{}^A_{n-1}} \lambda_\Omega(p)$

Si P appartient à A^∞, l'infini de A, on pose $\lambda_\infty = 1$. L'ensemble des R tels que $\frac{MR}{MP} < \lambda_n$ pour $P \in K_n - \overset{\circ}{K}{}^A_{n-1}$ et tels que $\frac{MR}{MP} < \lambda_\infty$ si $P \in A^\infty$ est un voisinage Ω' de A. Le but du lemme qui vient est de montrer qu'il existe Ω'' inclus dans Ω et dont le complémentaire soit réunion d'hyperplans complexes.

Lemme 3. *Il existe un système fondamental de voisinages ouverts de A qui sont étoilés et dont les complémentaires sont réunions d'hyperplans complexes.*

Démonstration. Nous pouvons supposer $\Omega = \Omega'$. Si $P \in \overline{A} - \overset{\circ}{A}$ posons:

$$H(P) = \bigcup_{\mu \geq \lambda_\Omega(P)} \mu \cdot \mathscr{C}(P)$$

l'homothétie de rapport μ étant évidemment effectuée à partir du point M. L'ensemble $H(P)$ contient tous les points sur la demi-droite OP au delà de Q (et $Q \in H(P)$).

Posons maintenant $\Sigma = \bigcup_{P \in \overline{A} - \overset{\circ}{A}} H(P)$. Je dis que l'ensemble Σ est fermé. En effet, soit z_0 point d'accumulation de points de Σ. Alors il existe une suite u_n de point, ξ_n, $u_n \in \xi_n$, P_n, $P_n \in \overline{A} - \overset{\circ}{A}$, Q_n tels que $u_n \to z_0$. De la suite des entiers on peut extraire une sous-suite n' telle que les $P_{n'}$ convergent vers un point P_0, des n' une sous-suite n'' telle que les $Q_{n''}$ convergent vers Q_0, des n'' une sous-suite n''' telle que les $\xi_{n'''}$ convergent vers ξ_0. Alors, ξ_0 appartient à $\mathscr{C}(P_0)$ et $\lambda(P_0)$. ξ_0 passe par z_0 et appartient à $H(P_0)$. Maintenant si $P \in A$, $P \notin \Sigma$ car en effet si $P \in \Sigma$ cela veut dire qu'il existe P_1, Q_1, $\xi_1 \in \mathscr{C}(P_1)$ tel que ξ_1 soit d'appui en P_1 et tel que $\lambda(P_1)$. ξ_1 passe par P. Ceci ne peut avoir lieu que si $\lambda(P_1) = 1$ mais alors $P_1 \in A$ et on trouve une contradiction avec l'hypothèse sur A.

En conséquence, $\complement\Sigma = \Omega''$ est un voisinage ouvert de A inclus dans Ω'. En outre c'est un ensemble étoilé par rapport à M comme intersection d'en-

sembles étoilés par rapport à ce point. D'après le corollaire 2 du lemme 3.1 chapitre I de [15] il s'en suit que c'est un ensemble polynomialement convexe.

Si $x \notin A$, désignons par horizon de x, soit $\mathscr{H}(x)$ (relativement à A) l'ensemble des y de A tels que $x \in \mathscr{C}(y)$. Il est clair que $\mathscr{H}(x)$ est localement fermé.

Lemme 4. *Pour tout $x \in A - \mathring{A}$ il existe $\lambda > 1$ tel que pour tout λ', $1 \leqq \lambda' \leqq \lambda$ l'horizon $\mathscr{H}(\lambda' x)$ de $\lambda' x$ soit compact.*

Démonstration. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi; il existe donc $\lambda_n > 1$, et $y_n \in A - \mathring{A}$, $\lambda_n \to 1$, tels que $\lambda_n \cdot x \in \mathscr{C}(y_n)$; si ξ_n est l'hyperplan en question, par extraction de suites on trouvera y_0, $y_0 \in \overline{A}$ et ξ_0 passant par x et y_0, limite d'une suite extraite des ξ_n.

Puisque A est localement fermé on verra donc que tout point de l'intervalle ouvert $]y_0 x[$ appartient à A, et comme $\varepsilon_n > 0$ pour tout n, $y_0 \notin A$, ce qui contredit l'hypothèse puisque ξ_0 appartient à $\mathscr{C}(x)$. C.Q.F.D.

Lemme 5. *Tout voisinage ouvert Ω de A contient un voisinage ouvert Ω' satisfaisant à la propriété: quel que soit le compact K inclus dans Ω' si on désigne par $\Sigma(K; A)$ la réunion des hyperplans complexes ne rencontrant pas $K \cup A$, $\complement(\Sigma(K; A))$ est un ensemble de la forme $A \cup L$ où L est un compact de Ω', étoilé par rapport à M et dont le complémentaire est réunion d'hyperplans complexes.*

Démonstration. Grâce au lemme 4 on voit qu'on peut prendre Ω' du type décrit dans le lemme 3, et tel que pour tout $p \in A - \mathring{A}\,\mathscr{H}(Q)$ soit compact si $Q = \lambda \cdot P$ et $Q \in \Omega'$.

Soit Ω'' inclus dans Ω' tel que pour tout compact L, $L \subset A - \mathring{A}$, on ait $\lambda_{\Omega''}(P) < \alpha_L \lambda_{\Omega'}(P)$ $\alpha_L < 1$ uniformément lorsque p parcourt L.

Remplaçons K qu'on peut supposer inclus dans un Ω'' par un compact de Ω' qui sera étoilé par rapport à M et que nous notons encore K. Ensuite, il existe $\lambda > 1$ tel que $K' = \lambda K \subset \Omega'$. Maintenant si $x \in K'$ et $(x/\lambda) \notin A$, nous pouvons considérer l'ensemble $\mathscr{L}(x)$ des ξ qui ne rencontrent pas $\mathring{A}$ et passent par x. C'est un ensemble fermé et $\mathscr{L}(x) \cap A = \mathscr{H}(x)$. Les ouverts $\complement\mathscr{L}(x)$ sont la réunion de deux cônes ouverts. Nous noterons par $\wedge(x)$ pour la réunion des segments $]y, x[$ y parcourant $\mathring{A}$. Les ouverts $\wedge(x)$ recouvrent K, donc on peut en extraire un recouvrement fini associé aux points $x_1, \ldots, x_N$.

L'ensemble $\complement\Sigma$ est inclus dans $\left(\bigcup_{j=1}^{N} \wedge(x_j)\right) \cap \overline{\Omega''}$ donc est de la forme $A \cup L$ où L est un compact de Ω', étoilé, et dont le complémentaire est réunion d'hyperplans complexes. C.Q.F.D.

Lemme 6. *$A \cup L$ admet un système fondamental de voisinages ouverts étoilés et dont les complémentaires sont réunions d'hyperplans complexes.*

Démonstration. Soit K_n un système fondamental de compacts de A. Si L_k est donné, et n_0, on a:

$$(K_{n_0} \cup L_k) = \bigcap_{W \supset K_{n_0} \cup L} W$$

où W parcourt la famille des voisinages compacts de $K_{n_0} \cup L_k$. Donc Ω' étant donné, et $L_k \subset \Omega'$, grâce au lemme 5 on va pouvoir trouver W tel que

$\mathcal{C}(\Sigma(W;A))$ soit de la forme $A \cup L_{k+1}$ où L_{k+1} est un compact de Ω', L_{k+1} inclus dans le voisinage Ω' donné de $L_k \cup A$.

Nous opérons alors par récurrence, choisissant W_n voisinage compact de $K_n \cup L_{n-1}$ en sorte que $\mathcal{C}(\Sigma(W_n;A))$ soit de la forme $A \cup L_n$ où $A \cup L_n$ est inclus dans le voisinage donné de $L_0 \cup A$. L'ensemble $\bigcup_n \mathring{W}_n$ répond à la question. C.Q.F.D.

Terminons la démonstration. Soit $T_1 \in H'_{I,A}(V)$. Elle définit, de façon unique, car les polynômes sont denses dans tous nos espaces, [15], un élément T_2 de $H'_K(V)$ où K est un compact d'un voisinage du type décrit dans le lemme 5. On remplace K par L ce qui est loisible.

Considérons l'application $(f_1, f_2) \to (f_1 - f_2)$ définie de $H_{I,A}(V) \times H_L(V) \to \to H_{A \cap L}(V)$. Si ω est un voisinage de $A \cap L$ il contient un ouvert de la forme $\omega_1 \cap \omega_2$ où ω_1 et ω_2 sont des voisinages ouverts respectifs de A et L, étoilés et à complémentaires réunion d'hyperplans complexes, $\omega_1 \cap \omega_2$ jouissant de la même propriété (pour la construction on fera un raisonnement analogue à celui de [15] p. 48).

Alors on en déduit que toute fonction holomorphe dans ω est différence d'une fonction holomorphe dans ω_1 et d'une fonction holomorphe dans ω_2, donc l'application précédente est surjective et comme $H_{I,A}(V)$ est ultrabornologique et que $H_L(V)$ et $H_{A \cap L}(V)$ sont des $\mathscr{L} - \mathscr{F}$ c'est un homomorphisme d'après le théorème de l'homomorphisme de [7]. Alors, si $f \in H_{A \cap L}(V)$ on pose $T(f) = T_1(f_1) - T_2(f_2)$. Cette forme linéaire est bien définie car, si $f_1 - f_2 = 0$, f_1 et f_2 définissent une fonction holomorphe au voisinage de $A \cup L$, limite uniforme de polynômes p_n dans un voisinage de cet ensemble, donc $T_1(f_1) = \lim_{n\to\infty} T_1(p_n) = \lim_{n\to\infty} T_2(p_n) = T_2(f_2)$, et elle est continue vu la propriété de l'homomorphisme. La forme linéaire T appartient à $H'_{L \cap A}(V)$ et engendre T_1, ce qui montre bien que $H'_{I,A}(V) = H'_{P,A}(V)$. C.Q.F.D.

Notons que ce résultat s'applique par exemple aux convexes fermés de $\mathbb{C}^n$ qui sont strictement convexes par exemple au fermé $y_2 \geqq x_1^2 + x_2^2 + y_1^2$.

D'après les théorèmes 4-1 et seq. chapitre II de [15] les éléments de $H'_{P,A}(\mathbb{C}^n)$ où A est un convexe localement fermé s'identifient par la transformation de Fourier-Borel aux fonctions entières de type exponentiel dont un diagramme de croissance (porteur de la fonctionnelle analytique associée) est inclus dans A. Un tel espace de fonctions entières admet une seule topologie du type $\mathscr{L} - \mathscr{F}$ plus fine que la topologie de la convergence simple à savoir celle obtenue à partir de la topologie de $H'_{P,A}(\mathbb{C}^n)$ par l'isomorphisme de Fourier-Borel. Nous venons de voir que sous certaines hypothèses géométriques cette topologie est complète. L'introduction au chapitre suivant d'une représentation simple du dual de certains espaces de fonctions holomorphes permettra aisément de constater qu'on peut avoir $H'_{P,A}(V) \neq H'_{I,A}(V)$ même dans le cas des convexes fermés, ce qui montrera que la topologie naturelle du type $\mathscr{L} - \mathscr{F}$ introduite sur l'espace correspondant de fonctions entières n'est pas complète.

Chapitre II: Une extension à n-variables du théorème de dualité de J. S. Silva

On sait [16], [8], [5], que si A est une partie de $\mathbb{C}$ la droite complexe, $H'_{I,A}(\mathbb{C})$ s'identifie à l'espace des fonctions holomorphes sur le complémentaire $\complement A$ de A dans la sphère de Riemann (la droite projective complexe) P^1, par l'accouplement suivant, à condition que $0 \in A$:

$$\text{Si} \quad f \in H_A(C)\,, \phi \in H_{\complement A}(P^1)\ \langle f, \phi\rangle = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\cdot\phi(z)\cdot\frac{dz}{z} \quad \text{où} \quad \gamma$$

est un contour convenablement choisi, entourant A dans le domaine d'existence commun d'un représentant de f et d'un représentant de ϕ. En fait les auteurs cités suppriment d'habitude le facteur en $\frac{1}{z}$ et imposent à ϕ de s'annuler à l'infini.

Dans le cas de $\mathbb{C}^n$ il n'est pas question de généraliser ce résultat sans conditions. Nous avons esquissé ailleurs [13], [14] des généralisations possible. Le résultat démontré ici a donc déjà été annoncé, mais nous allons compléter cette étude par le cas des parties qui ne sont pas compactes ou ouvertes.

§ 1. Notions géométriques

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie, $P(E)$ l'espace projectif complexe obtenu en ajoutant à E ses points à l'infini, c'est à dire l'ensemble des droites complexes de E issues de l'origine; $^\infty E$ désigne l'hyperplan de l'infini. Nous désignons par E^*, $P(E^*)$ respectivement l'espace vectoriel dual et l'espace projectif associés à cet espace vectoriel.

Il existe une dualité entre $P(E)$ et $P(E^*)$ obtenue comme suit: $P(E^*)$ s'identifie aux hyperplans de $P(E)$ et $P(E)$ à ceux de $P(E^*)$. De façon plus précise on associe à $^\infty E$, l'origine de E^*, puis si $\langle x, \xi\rangle = 1$ est l'équation d'un hyperplan ne passant pas par l'origine on lui associe ξ, si $\langle x, \xi\rangle = 0$ est l'équation d'un hyperplan passant par l'origine on lui associe la droite complexe définie par ξ c'est à dire un point de $^\infty E^*$. Ces notions sont empruntées à M. Jean Leray [10].

Définition 2.1. *Si A est une partie d'un espace projectif (complexe) P nous désignons par $\overset{*}{\complement} A$ son complémentaire projectif, à savoir l'ensemble des hyperplans complexes qui ne rencontrent pas A.*

Dans le cas où on a établi une dualité entre deux espaces projectifs P et P^*, $\overset{*}{\complement} A$ s'identifie à une partie de P^*. Par exemple, si $A \subset P(E)$, $\overset{*}{\complement} A \subset P(E^*)$ et si $A \subset E$, avec $0 \in A$, $\overset{*}{\complement} A \subset E^*$ avec $0 \in \overset{*}{\complement} A$. On a les propriétés suivantes: $\overset{*}{\complement}(\overset{*}{\complement} A) \supset A$; si A est compact $\overset{*}{\complement} A$ est ouvert, de même si A est ouvert $\overset{*}{\complement} A$ est compact; $\overset{*}{\complement}\overset{*}{\complement}\overset{*}{\complement} A = \overset{*}{\complement} A$. Nous dirons que A est *linéellement* convexe s'il est de la forme $A = \overset{*}{\complement} B$, donc ce qui revient au même si $A = \overset{*}{\complement}\overset{*}{\complement} A$, ou encore, si son complémentaire est réunion d'hyperplans (complexes). Remarquons que si A est une partie de la sphère de Riemann, $\overset{*}{\complement} A$ est exactement son complémentaire au sens habituel. Notons encore la

Proposition 2.1. *Soit A une partie ouverte ou compacte de $\mathbb{C}^n$:*

a) *On suppose que A est de Reinhard c'est à dire que $(z = (z_1, \ldots, z_n)) \in A$ entraine $(z_1 \cdot e^{i\theta_1}, \ldots, z_n \cdot e^{i\theta_n}) \in A$ quels que soient $(\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$; l'ensemble $\overset{*}{\complement} A$ est aussi de Reinhardt.*

b) *L'ensemble A (non nécessairement de Reinhardt) dans E, espace vectoriel complexe est dit disqué si toute droite complexe issue de l'origine rencontre A suivant un disque centré en 0. Alors si A est disqué, $\overset{*}{\complement} A$ est disqué. A est linéellement convexe si et seulement si il est convexe.*

Démonstration. a) Notons $T(\theta) = T(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ la transformation $z \to e^{i\theta} \cdot z = (e^{i\theta_1} \cdot z_1, \ldots, e^{i\theta_n} \cdot z_n)$. Elle opère de façon évidente sur les hyperplans complexes, et si $\mathbb{C}^n$ est identifié à son dual, elle induit sur les hyperplans la transformation $T(-\theta)$. Maintenant:

$$A \cap \xi = \emptyset \quad \text{entraine}$$

$A \cap T(\theta) \cdot \xi = \emptyset$ car $A \cap T(\theta) \cdot \xi \subset T(\theta) \cdot A \cap T(\theta) \cdot \xi$ car $A \subset T(\theta) \cdot A$ et $T(\theta) \cdot A \cap T(\theta) \cdot \xi = T(\theta) \cdot (A \cap \xi) = \emptyset$.

b) Si A est disqué il est stable par toutes les transformations $h(\lambda) : z \to h(\lambda) \cdot z = (\lambda \cdot z_1, \ldots, \lambda \cdot z_n)$ où $|\lambda| < 1$.

Ces transformations opèrent de façon naturelle sur les hyperplans et l'ensemble des hyperplans de $P(E)$ étant identifiés à des points de $P(E^*)$ la transformation associée à $h(\lambda)$ est $h(1/\lambda)$.

Alors, il est clair que $\xi \cap A = \emptyset$ entraine $h(\lambda) \cdot \xi \cap A = \emptyset$ pour tout λ tel que $|\lambda| > 1$, ce qui signifie que $\overset{*}{\complement} A$ est disqué.

L'ensemble A est la réunion des disques D qu'il contient. Donc: $\overset{*}{\complement} A = \bigcap_{D \subset A} \overset{*}{\complement} D$.

Il suffit de voir que $\overset{*}{\complement} D$ est convexe. Pour cela il suffit de considérer le disque défini dans $\mathbb{C}^n$ par $z_2 = z_3 = \cdots = z_n = 0$ et $|z_1| < 1$, ou $|z_1| \leqq 1$. Son $*$-complémentaire est constitué des hyperplans $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ tels que $|\xi_1| \leqq 1$ (ou $|\xi_1| < 1$) ensemble manifestement convexe.

Donc $\overset{*}{\complement} A$ est convexe, ainsi que $\overset{**}{\complement\complement} A$. C.Q.F.D.

§ 2. Représentation du dual de $H_A(\mathbb{C}^n)$ par des cocycles

Nous avons donné une telle représentation dans un cas assez général [14]. Nous nous proposons ici de donner une variante détaillée de ces résultats, dans le cas où A est un compact linéellement convexe inclus dans $\mathbb{C}^n$.

En [13] p. 214-09 nous avons dit qu'un compact K est presque convexe si $H^i(K, \mathcal{O}) = 0$ pour tout $i > 0$ les H^i désignant les groupes de cohomologie de K à valeurs dans le faisceau $\mathcal{O}$, et si K admet un voisinage de Stein.

Il faut donc vérifier que A est presque convexe pour pouvoir appliquer les résultats. Si $l_1, \ldots, l_m$ sont des fonctions linéaires (non homogènes) sur $\mathbb{C}^n$ dont n sont en position générale, il nous suffira de vérifier que le compact L défini par les inégalités $a_1 \leqq |l_1(z)| \leqq b_1, \ldots, a_m \leqq |l_m(z)| \leqq b_m$ est presque convexe car A est une intersection filtrante décroissante de tels compacts et parce

que la cohomologie d'une intersection filtrante décroissante de compacts est la limite inductive des cohomologies de ces compacts [4].

Mais, retranchant de $\mathbb{C}^n$ les m-sous variétés $l_m(z) = 0$ on obtient une variété de Stein V, [3], et dans V le compact L est défini par les $2m$ inégalités $|l_j(z)| \leqq b_j$, $|l_j^{-1}(z)| \leqq a_j^{-1}$, donc par des résultats bien connus sa cohomologie est nulle pour tout $i > 0$.

En conséquence, $H'_A(\mathbb{C}^n)$ *est naturellement isomorphe à* $H^{n-1}(\complement A; \Omega^n)$ [13], Ω^n désignant le faisceau des germes de n-formes holomorphes sur $\mathbb{C}^n$, ceci pour $n \geqq 2$.

Soit ξ un hyperplan. Nous considérons le fermé $K_\xi = \bigcup_{\substack{a \\ \{\xi+a\} \cap A \neq \emptyset}} \{\xi + a\}$ et Ω_ξ l'ouvert complémentaire.

L'hypothèse faite sur A se reformule en:

les Ω_ξ forment un recouvrement du complémentaire de A .

Donc tout élément de $H^{n-1}(\complement A; \Omega^n)$ est représentable par un $(n-1)$- cocycle du recouvrement du complémentaire de A à valeurs dans le faisceau des germes de n-formes holomorphes [4], c'est à dire par la donnée d'une fonction $\phi_{\xi_{i_0} \ldots \xi_{i_{n-1}}}(z)$ holomorphe dans chaque $\Omega_{\xi_{i_0} \ldots \xi_{i_{n-1}}} = \Omega_{\xi_{i_0}} \cap \cdots \cap \Omega_{\xi_{i_{n-1}}}$ une forme $dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ étant choisie, et si $z \in \Omega_{\xi_{i_0} \ldots \xi_{i_n}}$, l'identité $\sum_{h=0}^{n} (-1)^h \phi_{\xi_{i_0} \ldots \hat{\xi}_{i_h} \ldots \xi_{i_n}}(z) = 0$ étant satisfaite.

Je vais montrer qu'on choisir ce cocycle en sorte que $\phi_{\xi_{i_0} \ldots \xi_{i_{n-1}}}(z)$ tende vers zéro à l'infini, c'est à dire que si $|z| = |z_1| + \cdots + |z_n|$ tend vers l'infini dans chaque $\Omega'_{\xi_{i_0} \ldots \xi_{i_{n-1}}}$ $\phi_{\xi_{i_0} \ldots \xi_{i_{n-1}}}(z) \to 0$. [1a])

Quand $\xi_{i_0}, \ldots, \xi_{i_{n-1}}$ sont en position générale, un changement de variable ramène au cas où ξ_{i_h} est la variété $z_{h+1} = 0$, alors $\phi_{\xi_{i_0} \ldots \xi_{i_{n-1}}}$ tend vers zéro dans l'ouvert $|z_1| > R, \ldots, |z_n| > R$, quand $|z_1| + \cdots + |z_n| \to \infty$; si les $\xi_{i_0} \ldots \xi_{i_{n-1}}$ ne sont pas en position générale on a par le principe du module maximum $\phi_{\xi_{i_0} \ldots \xi_{i_{n-1}}}(z) \equiv 0$.

Lemme 1. *Si un* $(n-1)$*-cocycle du recouvrement de* $\complement A$ *par les* Ω_ξ *est un cobord et s'il est nul à l'infini il est identiquement nul.*

Démonstration. Nous nous ramenons donc à la situation où $\Omega_{\xi_0} = \{z \,|\, z_1 \notin K_1\}$, $\ldots, \Omega_{\xi_{n-1}} = \{z \,|\, z_n \notin K_n\}$ $K_1, \ldots, K_n$ étant des compacts de $\mathbb{C}$.

On peut, comme ϕ tend vers zéro à l'infini, quel que soit le voisinage $\omega = \omega_1 \times \cdots \times \omega_n$ de $K = K_1 \times \cdots \times K_n$ dans $\mathbb{C}^n$ trouver des contours orientés $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, $\gamma_j \subset \omega_j$, frontières orientées de voisinages π_j de K_j tels que:

$$\phi_{\xi_0 \ldots \xi_{n-1}}(z) = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \int_{\gamma_1 \times \ldots \times \gamma_n} \cdots \int \phi_{\xi_0 \ldots \xi_{n-1}}(\zeta) \cdot \frac{d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n}{(z_1 - \zeta_1) \ldots (z_n - \zeta_n)}$$

pour tout $z \in \complement \pi_1 \times \cdots \times \complement \pi_n$.

[1a]) pour la définition de $\Omega'_{\xi_{i_0} \ldots \xi_{i_{n-1}}}$ c. f. page 76

Mais on a $\phi_{\xi_0 \ldots \xi_{n-1}}(\zeta) = \sum_{h=0}^{n-1} (-1)^h \phi_h$ où $\phi_h(z)$ est holomorphe pour $z_1 \notin K_1, \ldots, \widehat{z_{h+1} \notin K_{h+1}}, \ldots, z_n \notin K_n$ ce qui entraîne, intégrant d'abord en ζ_{h+1}:

$$\int \cdots \int_{\gamma_1 \times \cdots \times \gamma_n} \frac{\phi_h \cdot d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n}{(z_1 - \zeta_1) \ldots (z_n - \zeta_n)} = 0 \qquad \text{C.Q.F.D}$$

Nous avons donc montré que dans la classe de cohomologie de Čech d'un cocycle il y a *au plus* un cocycle nul à l'infini.

Lemme 2. *Dans toute $(n-1)$-classe de cohomologie de cocycles relativement au recouvrement de $\complement A$ par les Ω_ξ il y a un cocycle tendant vers zéro à l'infini, donné par la formule (A) ci-dessous.*

Démonstration. Pour montrer cela il nous suffira de considérer la situation où Ω_{ξ_h} est l'ouvert θ_{h+1} défini par $z_{h+1} \notin K_{h+1}$ où K_{h+1} est la projection de A sur la $(h+1)$-ième droite de coordonnées.

Alors si T est une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions holomorphes au voisinage du compact $K = K_1 \times \cdots \times K_n$, il lui correspond:

$$\phi(z) = \frac{1}{(2i\pi)^n} T_\zeta \left(\zeta \to \frac{1}{(\zeta_1 - z_1) \ldots (\zeta_n - z_n)} \right)$$

fonction holomorphe dans $\Omega_{\xi_0 \ldots \xi_{n-1}}$ et tendant vers zéro à l'infini [18]. Il s'agit pour $n \geqq 2$ de montrer que $\phi \cdot dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ est une composante relativement à $\Omega_{\xi_0 \ldots \xi_{n-1}}$ associée à T par la construction rappelée plus haut.

Nous considérons un voisinage compact K'_h de K_h à frontière de courbe régulière γ'_h, $K' = \prod_h K'_h$ et nous considérons T comme élément de $H'_{K'}(\mathbb{C}^n)$ alors on lui associe ϕ, mais qui est définie dans $\Omega'_{\xi_0 \ldots \xi_{n-1}}$ et continue jusqu'au bord.

Soit ψ la distribution égale à ϕ dans $\Omega'_{\xi_0 \ldots \xi_{n-1}} = \Omega'_{1,\ldots,n}$ et 0 en dehors. Nous posons $(-1)^{n-1}\, \psi_{1,\ldots,n-1} = \psi$, $\psi_{1,\ldots,\hat{n},\ldots,n} = 0$ si $h \neq n$ et formons:

$$d''(\psi_{1,\ldots,n-1}) = (-1)^{n-1} \psi \cdot d'' l(\Omega_{1,\ldots,n}) \quad \text{où} \quad l(X)^2)$$

désigne la fonction caractéristique d'un ensemble X, qu'on considère comme une distribution après choix de la mesure de Lebesgue $dx_1\, dy_1 \ldots dx_n\, dy_n$.

On pose alors $(-1)^{n-2} \psi_{1,\ldots,n-2} = (-1)^{n-1}\, \phi \cdot d'' l(\Omega'_{1,\ldots,n})$ dans $\Omega'_{1,\ldots,n-2}$, et 0 ailleurs, etc ...

On obtiendra en dernière analyse $\phi\, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d'' \theta'_2 \wedge \cdots \wedge d'' \theta'_n$. Si la fonction f est holomorphe au voisinage du compact K' on calcule $d'' f(l(K')) = f d'' l(K')$ puis, selon la définition que nous avons adoptée en [13] p. 214-11 pour l'accouplement entre $H^{n-1}(\complement K; \Omega^n)$ et $H'_K(C^n)$ nous calculons:

$$\int \cdots \int_{\mathbb{C}^n} d'' l(K) \wedge \phi\, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d'' \theta'_2 \wedge \cdots \wedge d'' \theta'_n$$
$$= \left(\frac{1}{2i\pi} \right)^n \int \cdots \int_{\gamma'_1 \times \cdots \times \gamma'_n} f(z) \cdot \phi(z)\, dz\,.$$

[2]) Ω', θ' etc. désignent les analogues des Ω, θ relativement à K quand on remplace K par K'.

Donc la forme $\phi\, dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d''\theta'_2 \wedge \cdots \wedge d''\theta'_n$ définit bien T et $\phi_{\xi_0 \ldots \xi_{n-1}} = \phi$ est un cocycle qui lui est naturellement rattaché par le processus reliant la cohomologie de Čech à la d''-cohomologie. En outre ceci nous montre que le cocycle tendant vers zéro à l'infini associé à T est donné par la formule suivante:

(A) *Si $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$ sont n fonctions linéaires (non homogènes) telles que $\xi_h = \{z \mid \zeta_h(z) = 0\}$ dans $\Omega_{\xi_0 \ldots \xi_{n-1}}$ la forme $\phi_{\xi_0 \ldots \xi_{n-1}} dz$ est donnée par:*

$$\phi \cdot dz = \frac{1}{(2i\pi)^n} d\zeta_0 \wedge \cdots \wedge d\zeta_{n-1} \cdot T_u \left(u \to \frac{1}{(\zeta_0(u) - \zeta_0(z)) \ldots (\zeta_{n-1}(u) - \zeta_{n-1}(z))} \right).$$

Puisque c'est le cocycle associé à T nous savons à priori que c'est un cocycle, mais il est aisé de faire un calcul élémentaire de déterminants montrant que si $z \in \Omega_{\xi_0 \ldots \xi_n}$ on a $\sum_h (-1)^h \phi_{\xi_0 \ldots \hat{\xi}_h \ldots \xi_n}(z) \cdot dz = 0$.

Maintenant il est aisé de mettre une topologie sur les cocycles qui tendent vers zéro à l'infini. On considère l'espace produit $\prod_{(\xi_0 \ldots \xi_{n-1})} H_0(\Omega_{\xi_0 \ldots \xi_{n-1}})$ où $H_0(\Omega_{\xi_0 \ldots \xi_{n-1}})$ désigne l'espace des fonctions holomorphes dans cet ouvert et nulles à l'infini, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, et on prend son sous-espace manifestement fermé défini par les relations:

$\sum_h (-1)^h \phi_{i_0 \ldots i_h \ldots i_n} = 0$ sur chaque $\Omega_{\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_n}}$. En outre, comme du recouvrement de $\complement A$ par les Ω_{ξ_n} on peut extraire un sous-recouvrement dénombrable, on en déduit aisément que sur les cocycles du recouvrement de $\complement A$ par les Ω_ξ et tendant vers zéro à l'infini, on a ainsi mis une topologie d'espace de Fréchet (nucléaire). De l'expression explicite du cocycle résulte bien que l'application de $H'_A(\mathbb{C}^n)$ dans cet espace est continue, en conséquence est un isomorphisme, d'où le

Théorème 2.1. *Soit A linéellement convexe compact dans $\mathbb{C}^n$. Pour tout ξ, hyperplan de $\mathbb{C}^n$ passant par l'origine on pose:*

$$\Omega_\xi = \{z \mid \{z + \xi\} \cap A = \emptyset\}.$$

Le dual de $H'_A(\mathbb{C}^n)$ est naturellement isomorphe à l'ensemble des $(n-1)$-cocycles du recouvrement de $\complement A$ par les Ω_ξ à valeurs dans le faisceau des germes de n-formes holomorphes et tendant vers zéro à l'infini.

Ce théorème est une généralisation exacte du cas de $n = 1$. On peut en donner une variante quand A est ouvert relativement compact et linéellement convexe.

§ 3. Le dual d'un espace de fonctions holomorphes est encore un espace de fonctions holomorphes

Désignant toujours par E un espace vectoriel complexe de dimension finie, nous allons par commodité choisir une fois pour toutes des coordonnées. Nous nous plaçons donc dans $P(\mathbb{C}^n)$. Si $(z_1, \ldots, z_n)$ sont les coordonnées d'un point de $\mathbb{C}^n$, ses coordonnées homogènes seront notées $(\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n)$.

Un hyperplan aura des coordonnées homogènes $(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ et s'il est différent de ${}^{\infty}E$, il sera défini par l'équation $\xi_0 + \xi_1 \cdot z_1 + \cdots + \xi_n \cdot z_n = 0$. Dans E nous considérons la forme différentielle:

$\omega = \frac{1}{\zeta_0^n} \sum_j (-1)^j \zeta_j \, d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\zeta_j} \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$. Sa restriction à chaque hyperplan ne passant pas par l'origine définit une $(n-1)$-forme fondamentale. En effet, si P est l'hyperplan $\xi_0 + \xi_1 \cdot z_1 + \cdots + \xi_n \cdot z_n = 0$ il vient: $\sum_{j=1}^{n} \xi_j \cdot dz_j = 0$ et $z_n = \frac{-(\xi_0 + \xi_1 \cdot z_1 + \cdots + \xi_{n-1} \cdot z_{n-1})}{\xi_n}$ si $\xi_n \neq 0$ ce que je peux supposer sans altérer la généralité.

$$D'\text{où: } \omega = \sum_{h=1}^{n-1} (-1)^h \, z_h \cdot dz_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dz_h} \wedge \cdots \wedge \left(-\frac{1}{\xi_n} \left(\sum_{h=1}^{n-1} \xi_h \cdot dz_h \right) \right) +$$
$$+ (-1)^n \frac{(-(\xi_0 + \xi_1 \cdot z_1 + \cdots + \xi_n \cdot z_n))}{\xi_n} \cdot dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_{n-1}$$
$$= (-1)^{n+1} \frac{\xi_0}{\xi_n} dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_{n-1} \, .$$

Si A est un compact convexe de E, nous notons encore Ω_ξ le prolongement projectif de l'ouvert $\Omega_{\hat{\xi}}$. Précisons ce point. $K_{\hat{\xi}}$ se prolongera en prenant son adhérence dans $P(\mathbb{C}^n)$ et le prolongement de $\Omega_{\hat{\xi}}$ est l'ouvert complémentaire de ce compact.

Soit $\phi = \phi_{i_0 \ldots i_{n-1}}(z) \cdot dz$ un $(n-1)$-cocycle du recouvrement de $\complement A$ dans E, par les $\Omega_{\hat{\xi}}$, et tendant vers zéro à l'infini. Nous considérons la forme différentielle ω et le cocycle $\phi_{i_0 \ldots i_{n-1}}(z) \cdot \omega$. Il existe un prolongement naturel de $\phi \cdot \omega$ au recouvrement de $\complement A$ dans $P(E)$ par les Ω_ξ (les prolongements projectifs), prolongement qui est une $(n-1)$-forme holomorphe. Un changement de coordonnées nous ramènera à la situation: $\Omega_{\xi_{i_0} \ldots \xi_{i_{n-1}}}$ est l'ouvert $|z_1| > R, \ldots, |z_n| > R$.

Effectuons le changement de carte $(t_1, \ldots, t_n)$, $t_j = \zeta_{j-1}/\zeta_n$ soit:

$$z_n = \frac{1}{t_1}, \ldots, z_j = \frac{t_{j+1}}{t_1} \, ; j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

La forme $\omega = \sum_{h=1}^{n} (-1)^h z_h \cdot dz_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dz_h} \wedge \cdots dz_n$ devient

$$\Omega = (-1)^{(n+1)} \frac{dt_2 \wedge \ldots \wedge dt_n}{t_1^n}$$

On a:

$$\phi_{i_0 \ldots i_{n-1}}(z) = \sum_{\substack{i_1 \geqq 1 \\ \cdots\cdots \\ i_n \geqq 1}} a_{i_1, \ldots, i_n} \cdot z_1^{-i_1} \ldots z_n^{-i_n}$$

puisque ϕ tend vers zéro à l'infini.

En substituant il vient, si on note $\psi(t)$ la fonction obtenue à partir de ϕ par le changement de variables indiqué

$$\psi(t) \cdot \Omega = \sum_{\substack{i_1 \geqq 1 \\ \cdots\cdots \\ i_n \geqq 1}} (-1)^n \frac{a_{i_1 \ldots i_n}}{t_2 \ldots t_n} t_1^{i_1} \cdot \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^{-(i_2 - 1)} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{t_n}{t_1} \right)^{-(i_n - 1)} \cdot dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_n$$

forme différentielle dont le coefficient est holomorphe si $\left|\frac{t_j}{t_1}\right| > R$, $|t_1| < \frac{1}{R}$, et $t_2 \dots t_n \neq 0$. Le prolongement de $\phi \cdot \omega$ sera fait par la série, pour $t_1 = 0$, $t_2 \dots t_n \neq 0$, c'est ce que nous appellerons le prolongement naturel $\bar{\phi}$.

Soit alors η un hyperplan. Considérons la restriction du recouvrement Ω_ξ à η, c'est-à-dire le recouvrement de η par les $\Omega'_\xi = \Omega_\xi \cap \eta$, si $\eta \cap A = \emptyset$; et la restriction de $\bar{\phi}_{\xi_{i_0} \dots \xi_{i_{n-1}}}$ à $\Omega'_{\xi_{i_0} \dots \xi_{i_{n-1}}}$.

La fonction ϕ sur $\Omega_{\xi_{i_0} \dots \xi_{i_{n-1}}} \cap \eta$ est connue comme on l'a vu par $\bar{\phi}$ pourvu que η ne passe par par l'origine.

Nous supposons donc à partir de maintenant que $0 \in A$.

Le cocycle $\bar{\phi}_{\xi_{i_0} \dots \xi_{i_{n-1}}}$ définit donc, par restriction à η, si $\eta \cap A = \emptyset$ un $(n-1)$-cocycle du recouvrement de η par les Ω'_ξ. Mais $H^{n-1}(P^{n-1}; \Omega^{n-1})$ est le dual de $H^0(P^{n-1}; \mathcal{O}) = \mathbb{C}$, donc à cette restriction est associé un nombre $f(\eta)$.

Montrons maintenant que la fonction $\eta \to f(\eta)$ définie ainsi très naturellement dans $\overset{*}{\mathbb{C}} A$ est une fonction holomorphe de η, et que réciproquement, la donnée d'une fonction holomorphe f de η dans $\overset{*}{\mathbb{C}} A$ définit de façon univoque un $(n-1)$-cocycle holomorphe ϕ du recouvrement de $\mathbb{C} A$ par les Ω_ξ, tendant vers zéro à l'infini, qui engendre cette fonction.

Calculons $\eta \to f(\eta)$ dans la situation: $\phi_{j_0 \dots j_{n-1}}(z)$ est définie pour $|z_1| > R$, $\dots$, $|z_n| > R$

$$\phi_{j_0 \dots j_{n-1}}(z) = \sum_{\substack{i_1 \geqq 1 \\ \dots\dots \\ i_n \geqq 1}} a_{i_1 \dots i_n} \cdot z_1^{-(i_1+1)} \dots z_n^{-(i_n+1)} .$$

Si P est l'hyperplan $\xi_0 + \xi_1 \cdot z_1 + \dots + \xi_n \cdot z_n = 0$ la valeur $f(P)$, sous réserve de convergence, est alors égale à:

$$\frac{1}{(2i\pi)^{n-1}} \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1 \dots i_n} \cdot \int_{\gamma_1 \times \dots \times \gamma_{n-1}} \dots \int (-1)^{(n+1)} \times$$

$$\times \frac{\xi_0}{\xi_n} \frac{(-\xi_n)^{(i_n+1)} \cdot dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{n-1}}{(\xi_0 + \xi_1 z_1 + \dots + \xi_{n-1} z_{n-1})^{(i_n+1)} \cdot z_1^{(i_1+1)} \dots z_{i_{n-1}}^{(i_{n-1}+1)}}$$

supposant $\xi_0 \cdot \xi_n \neq 0$, $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ des petits cercles entourant l'origine dans le sens positif.

La valeurs de l'intégrale:

$$\frac{1}{(2i\pi)^{n-1}} \int \dots \int \frac{dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{n-1}}{z_1^{(i_1+1)} \dots z_{n-1}^{(i_{n-1}+1)}} \cdot (\xi_0 + \xi_1 z_1 + \dots + \xi_{n-1} z_{n-1})^{-(i_n+1)}$$

est égale à:

$$\frac{1}{i_1!} \dots \frac{1}{i_{n-1}!} \frac{\partial^{i_1}}{\partial u_1^{i_1}} \dots \frac{\partial^{i_{n-1}}}{\partial u_{n-1}^{i_{n-1}}} (\xi_0 + \xi_1 u_1 + \dots + \xi_{n-1} \cdot u_{n-1})^{-(i_n+1)} \Big|_{u_1 = u_2 = \dots = u_{n-1} = 0}$$

soit:

$$(-1)^{(i_1+\cdots+i_{n-1})}\cdot\xi_1^{i_1}\ldots\xi_{n-1}^{i_{n-1}}\cdot\frac{(i_n+1)(i_n+2)\ldots(i_n+i_{n-1}+\cdots+i_1)}{i_1!\ldots(i_{n-1})!}$$

$$(\xi_0+\xi_1u_1+\cdots+\xi_{n-1}u_{n-1})^{-(i_1+\ldots+i_n+1)}|_{u_1=u_2=\cdots=u_{n-1}=0}$$

$$=(-1)^{(i_1+\cdots+i_{n-1})}\frac{(i_1+\cdots+i_n)!}{i_1!\ldots i_n!}\cdot\frac{\xi_1^{i_1}\cdot\xi_2^{i_2}\ldots\xi_{n-1}^{i_{n-1}}}{\xi_0^{(i_1+i_2+\ldots+i_n+1)}}$$

On obtient donc la série:

$$(2)\qquad (-1)^n\sum_{\substack{i_1\geqq 0\\ \cdots\cdots\\ i_n\geqq 0}}a_{i_1\ldots i_n}\cdot\frac{(i_1+\cdots+i_n)!}{i_1!\ldots i_n!}\left(\frac{-\xi_1}{\xi_0}\right)^{i_1}\ldots\left(\frac{-\xi_n}{\xi_0}\right)^{i_n}$$

Or, si $(|\xi_1/\xi_0|+\cdots+|\xi_n/\xi_0|)<R^{-1}$, cette série converge et réciproquement la donnée d'une série

$$\sum_{\substack{i_1\geqq 0\\ \cdots\cdots\\ i_n\geqq 0}}B_{i_1\ldots i_n}\frac{(-\xi_1)^{i_1}\ldots(-\xi_n)^{i_n}}{\xi_0^{(i_1+\ldots+i_n)}}$$

convergente pour

$$(|\xi_1/\xi_0|+\cdots+|\xi_n/\xi_0|)<R^{-1}$$

induit une série

$$(-1)^n\sum_{\substack{i_1\geqq 0\\ \cdots\cdots\\ i_n\geqq 0}}\frac{i_1!\ldots i_n!}{(i_1+\cdots+i_n)!}B_{i_1\ldots i_n}\cdot z_1^{-(i_1+1)}\ldots z_n^{-(i_n+1)}$$

convergente pour $|z_1|>R,\ldots,|z_n|>R$ et tendant vers zéro à l'infini. Le résultat est acquis quand A est le polydisque $|z_1|\leqq R,\ldots,|z_n|\leqq R$. Pour voir que la fonction $\eta\to f(\eta)$ est holomorphe au voisinage de tout $\eta\in\overset{*}{\complement}A$ et définit le cocycle il suffit d'appliquer le résultat précédent en envoyant par une transformation affine η au voisinage de $^\infty E$, si $0\notin\eta$.

Examinons le cas de $0\in\eta$. Il revient au même de considérer le cocycle: $\sum a_{i_1\ldots i_n}\cdot z_1^{-(i_1+1)}\ldots z_n^{-(i_n+1)}\cdot\omega'$ où la série converge pour $|z_j|>R$, $j=1,2,\ldots,n$, et où ω' est la forme $\sum_{h=1}^{n-1}(-1)^h z_h\,dz_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dz_h}\wedge\cdots\wedge dz_n+$ $+(-1)^n(z_n-a)\,dz_1\wedge\cdots\wedge dz_{n-1}=\omega-(-1)^n a\,dz_1\wedge\cdots\wedge dz_{n-1}$. La forme ω' sur l'hyperplan $\xi_0+\xi_1z_1+\cdots+\xi_nz_n=0$ avec $\xi_n\neq 0$ devient donc $(-1)^{n+1}\left(\frac{\xi_0}{\xi_n}+a\right)\times dz_1\wedge\cdots\wedge dz_{n-1}$ d'après la formule (1). Donc, dans les intégrales, il faut remplacer $\frac{\xi_0}{\xi_n}$ par $\frac{\xi_0}{\xi_n}+a$ et la formule (2) devient:

$$(-1)^n\left(1+\frac{\xi_0}{\xi_n}a\right)\sum_{\substack{i_1\geqq 0\\ \cdots\cdots\\ i_n\geqq 0}}a_{i_1\ldots i_n}\frac{(i_1+\ldots+i_n)!}{i_1!\ldots i_n!}\left(\frac{-\xi_1}{\xi_0}\right)^{i_1}\ldots\left(\frac{-\xi_n}{\xi_0}\right)^{i_n}$$

or $\xi_0+a\xi_n=0$ est le lieu des hyperplans passant par le point $(0,0,\ldots,a)$. Donc nous voyons que $f(\eta)$ s'annule sur ce lieu. Et réciproquement toute fonction s'annulant sur ce lieu engendre un cocycle.

Finalement, si $T \in H'_A(\mathbb{C}^n)$ où A est un compact convexe de $\mathbb{C}^n$, notant ϕ_T le cocycle associé tendant vers zéro à l'infini, et f_T la fonction des hyperplans éléments de $\overset{*}{\complement} A$ qui lui est associée et que nous appelerons indicatrice projective de T nous obtenons

Théorème 2.2. *Soit A un compact convexe de $\mathbb{C}^n$; l'application qui à $T \in H'_A(\mathbb{C}^n)$ associe f_T son indicatrice projective, fonction holomorphe sur $\overset{*}{\complement} A$ et nulle à l'infini (les hyperplans de $\overset{*}{\complement} A$ passant par 0), établit un isomorphisme vectoriel topologique entre $H_A(\mathbb{C}^n)$ et $P^*_{\complement A}(\mathbb{C}^n)$.*

$P^*_{\complement A}(\mathbb{C}^n)$ désignant les fonctions holomorphes sur $\overset{*}{\complement} A$ et nulles à l'infini comme en [8]. Mais le choix de l'infini dépend du choix de la dualité, ou ce qui revient au même de celui de la forme ω, aussi nous préférerons mettre le théorème 2.2 sous la forme: *Soit A un compact convexe de $\mathbb{C}^n$ et contenant l'origine. L'application qui à $T \in H'_A(\mathbb{C}^n)$ associe f_T son indicatrice projective établit un isomorphisme vectoriel topologique entre $H_A(\mathbb{C}^n)$ et $H^*_{\complement A}(\mathbb{C}^n)$.*

Et nous ne prendrons plus la peine de mettre $\mathbb{C}^{n*}$, identifiant $\mathbb{C}^n$ à son dual.

Par symétrie cette représentation s'étend au cas de A ouvert et convexe. Notons que ce résultat généralise exactement le cas du plan complexe. En effet à la forme $\phi(z) \cdot dz$ où ϕ tend vers zéro à l'infini, on associe $-z \cdot \phi(z)$. Si η est l'hyperplan $\xi_0 + z \cdot \xi_1 = 0$ la valeur de la restriction de $-z \cdot \phi(z)$ à cet hyperplan est $\frac{\xi_0}{\xi_1} \cdot \phi\left(-\frac{\xi_0}{\xi_1}\right)$ fonction holomorphe sur $\overset{*}{\complement} A$ et nulle à l'infini. $\left(\text{On a effectué le changement de variable } u \to \frac{1}{u}\right)$. Et si $0 \in A$ l'application $T \to z \cdot \phi(z)$ établit bien un isomorphisme entre $H'_A(\mathbb{C})$ et $H^*_{\complement A}(\mathbb{C})$.

Dans le cas de A convexe nous avons décrit par l'intégrale de Leray l'accouplement entre $H_A(\mathbb{C}^n)$ et $H^*_{\complement A}(\mathbb{C}^n)$, [10], [14]. Nous reviendrons ailleurs sur cette question.

Définition 2.2. *Une partie compacte (ouverte) A de $P(\mathbb{C}^n)$ est dite fortement linéellement convexe, si elle est linéellement convexe et si elle satisfait aux conclusions du théorème 2.2.*

Nous nous proposons maintenant d'étudier dans quelle mesure ces résultats s'étendent à des parties quelconques A de $\mathbb{C}^n$. Nous supposerons toujours que $0 \in A$, et puisque $A \subset \mathbb{C}^n$ on aura aussi $0 \in \overset{*}{\complement} A$. En outre on supposera que A *admet un système fondamental de compacts fortement linéellement convexes.* Dans la suite l'ensemble de ces deux hypothèses sur A sera noté (γ).

Si X est une partie de $\mathbb{C}^n$, on désignera par $\mathscr{L}(X)$ la famille des voisinages ouverts et fortement linéellement convexes de X et par $H^{\mathscr{L}}_X(\mathbb{C}^n)$ l'espace: $\varinjlim_{\omega \in \mathscr{L}(X)} H(\omega)$

Proposition 2.2. *Si $A \subset \mathbb{C}^n$ satisfait à (γ), le dual de $H_{P,A}(\mathbb{C}^n)$ est naturellement isomorphe à $H^{*\mathscr{L}}_{\complement A}(\mathbb{C}^n)$*

Démonstration. Tout compact de A est inclus dans un compact fortement linéellement convexe de A. Si ϕ désigne la famille de ces compacts, il vient alors:

$$H_{P,A}(\mathbb{C}^n) = H_{P,\phi,A}(\mathbb{C}^n)$$

donc $H'_{P,A}(\mathbb{C}^n) = \varinjlim_{\phi} H'_{P,\phi,A}(\mathbb{C}^n)$ d'après la proposition 1.4 et par hypothèse cet espace est isomorphe à

$$\varinjlim_{\omega \in \mathscr{L}(\overset{*}{\complement} A)} H(\omega) = H^{\mathscr{L}}_{\overset{*}{\complement} A}(\mathbb{C}^n) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

N'oublions pas que quand A est compact ou ouvert $H^{\mathscr{L}}_A = H_{I,A} = H_{P,A}$

Proposition 2.3. *Supposons que A satisfasse à la condition (γ) $\overset{*}{\complement} A$ étant localement fermé. Si $H^{\mathscr{L}}_A(\mathbb{C}^n) = H_A(\mathbb{C}^n)$ algébriquement, on a $H_{I,A}(\mathbb{C}^n) = H_{P,A}(\mathbb{C}^n)$ si et seulement si $H^{\mathscr{L}}_{\overset{*}{\complement} A}(\mathbb{C}^n)$ est algébriquement égal à $H^{*}_{\complement A}(\mathbb{C}^n)$. Dans ce cas on a les égalités algébriques et topologiques:*

$$H'_{P,A} = H'_{I,A} = H_{I,\overset{*}{\complement} A} = H_{P,\overset{*}{\complement} A} = H^{\mathscr{L}}_{\overset{*}{\complement} A}\ ;^{3})$$

$$H_{P,A} = H_{I,A} = H'_{I,\overset{*}{\complement} A} = H'_{P,\overset{*}{\complement} A} = H^{\mathscr{L}}_A .$$

Démonstration. L'hypothèse que $\overset{*}{\complement} A$ est localement fermé entraine que $\mathscr{L}(A)$ admet une base dénombrable. Soit ω un voisinage ouvert de A. L'image de $H(\omega)$ dans l'espace $H^{\mathscr{L}}_A(\mathbb{C}^n)$ qui est du type $\mathscr{L} - \mathscr{F}$ est donc incluse dans un des espaces de définition. Ceci montre que $\varinjlim_{\omega \supset A} H(\omega) = H^{\mathscr{L}}_A(\mathbb{C}^n)$. Donc le dual de $H_{I,A}(\mathbb{C}^n) = H^{\mathscr{L}}_A(\mathbb{C}^n)$ est par la proposition précédente, isomorphe algébriquement tout du moins à $H_{P,\overset{*}{\complement} A}(\mathbb{C}^n)$ car ce dernier espace est semi-réflexif ses parties bornées étant relativement compactes.

Il est donc nécessaire que $H^{\mathscr{L}}_{\overset{*}{\complement} A}(\mathbb{C}^n) = H_{P,\overset{*}{\complement} A}(\mathbb{C}^n)$ algébriquement d'après toujours la proposition 2.2, puis le théorème 1.1, pour que $H_{P,A} = H_{I,A}$. Mais dans ce cas, $H^{\mathscr{L}}_{\overset{*}{\complement} A}(\mathbb{C}^n) = H_{I,\overset{*}{\complement} A}(\mathbb{C}^n)$ topologiquement car en effet $H^{\mathscr{L}}_{\overset{*}{\complement} A}$ dual topologique de $H_{P,A}$ est ultrabornologique et muni d'une topologie intermédiaire entre celle de $H_{P,\overset{*}{\complement} A}$ et celle de $H_{I,\overset{*}{\complement} A}$ donc est identique à $H_{I,\overset{*}{\complement} A}$. Donc le dual de $H_{I,\overset{*}{\complement} A}$ est algébriquement égal à $H_{P,A}$ égal lui-même à $H^{\mathscr{L}}_A$ dual de $H_{P,\overset{*}{\complement} A}$, d'où $(H_{I,\overset{*}{\complement} A})' = (H_{P,\overset{*}{\complement} A})'$ et comme $\overset{*}{\complement} A$ est localement fermé on peut appliquer le théorème 1.1. C.Q.F.D.

Proposition 2.4. *A satisfait à la condition (γ) mais on ne suppose pas que $\overset{*}{\complement} A$ est localement fermé; on suppose que $\mathscr{L}(A)$ est un système fondamental de voisinages de A et que $H_{P,A} = H_{I,A}$. Alors on a les égalités algébriques et topologiques:*

$$H'_{P,A} = H'_{I,A} = H_{I,\overset{*}{\complement} A} = H_{P,\overset{*}{\complement} A} = H^{\mathscr{L}}_{\overset{*}{\complement} A}\ ;$$

$$H_{P,A} = H_{I,A} = H'_{I,\overset{*}{\complement} A} = H'_{P,\overset{*}{\complement} A} = H^{\mathscr{L}}_A .$$

Démonstration. D'après la proposition 2.2 le dual de $H^{\mathscr{L}}_A$ est au moins algébriquement égal à $H_{P,\overset{*}{\complement} A}$. Mais une partie bornée de $H^{\mathscr{L}}_A$ provient d'une

[3]) Nous prendrons l'habitude de ne pas préciser l'espace ambiant quand le contexte permettra d'éviter toute confusion.

partie bornée d'un espace $H(\omega)$ où $\omega \in \mathscr{L}(A)$ donc qui est équicontinue dans $H'_{P,\overset{*}{\mathbb{C}}A}$ (c.f. démonstration du théorème 1.1).

Ceci montre que le dual de $H_A^{\mathscr{L}}$ est $H_{P,\overset{*}{\mathbb{C}}A}$ dans ces hypothèses. D'autre part, puisque $H_{P,A} = H_{I,A}$ il s'en suit que le dual de $H_{I,A}$ est ultrabornologique, donc $H_{P,\overset{*}{\mathbb{C}}A}$ est ultrabornologique et en conséquence égal à $H_{I,\overset{*}{\mathbb{C}}A}$. En outre le dual de $H_{P,A}$ étant $H^{\mathscr{L}}_{\overset{*}{\mathbb{C}}A}$ il s'en suit qu'on a:

$$H_{P,\overset{*}{\mathbb{C}}A} = H_{I,\overset{*}{\mathbb{C}}A} = H^{\mathscr{L}}_{\overset{*}{\mathbb{C}}A}$$

et l'espace $H_{I,A}$ étant un Montel il vient:

$$H'_{I,\overset{*}{\mathbb{C}}A} = H'_{P,\overset{*}{\mathbb{C}}A} = H_A^{\mathscr{L}} = H_{I,A} = H_{P,A}. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

En corollaire de cette proposition nous pouvons énoncer le

Théorème 2.3. *Si A est une partie localement fermée de $\mathbb{C}^n$, convexe, admettant un point intérieur, à frontière strictement convexe, et contenant l'origine, on a les relations algébriques et topologiques*

$$H_{P,A} = H_{I,A} = H_A^{\mathscr{L}} = H'_{P,\overset{*}{\mathbb{C}}A} = H'_{I,\overset{*}{\mathbb{C}}A} ;$$

$$H'_{P,A} = H'_{I,A} = H^{\mathscr{L}}_{\overset{*}{\mathbb{C}}A} = H_{P,\overset{*}{\mathbb{C}}A} = H_{I,\overset{*}{\mathbb{C}}A} .$$

Démonstration. On vérifie que A satisfait dans ces hypothèses aux conditions de la proposition 2.4. C.Q.F.D.

Proposition 2.5. *Si $\mathscr{L}(A)$ et $\mathscr{L}(\overset{*}{\mathbb{C}}A)$ sont des systèmes fondamentaux de voisinages de A et de $\overset{*}{\mathbb{C}}A$ alors on a:*

$$H_{P,A} = H_{I,A} = H_A^{\mathscr{L}} = H'_{P,\overset{*}{\mathbb{C}}A} = H'_{I,\overset{*}{\mathbb{C}}A} ;$$

$$H'_{P,A} = H'_{I,A} = H^{\mathscr{L}}_{\overset{*}{\mathbb{C}}A} = H_{P,\overset{*}{\mathbb{C}}A} = H_{I,\overset{*}{\mathbb{C}}A} .$$

Démonstration. De $H_{I,A} = H_A^{\mathscr{L}}$ on en déduit comme en proposition 2.4 que le dual de $H_{I,A}$ est $H_{P,\overset{*}{\mathbb{C}}A}$. Comme on l'a vu le dual de $H_{P,A}$ est $H^{\mathscr{L}}_{\overset{*}{\mathbb{C}}A}$ qui est égal à $H_{I,\overset{*}{\mathbb{C}}A}$.

Donc on a $H_{I,\overset{*}{\mathbb{C}}A} = H_{P,\overset{*}{\mathbb{C}}A}$ et de même dans l'autre sens. C.Q.F.D. Notons que cette proposition contient le cas de la sphère de Riemann.

§ 4. Quelques exemples

Il est aisé de multiplier les exemples. Nous allons nous contenter de cas simples et naturels.

Premier exemple. Dans $\mathbb{C}^2$ nous prenons pour A l'ensemble de Reinhard défini par les inégalités $|z_1| \leqq 1$, $|z_2| < 1$. Alors $\overset{*}{\mathbb{C}}A = B$, l'ensemble des hyperplans d'équation $\xi_1 \cdot z_1 + \xi_2 \cdot z_2 = 1$ (y compris l'hyperplan à l'infini $0z_1 + 0z_2 = 1$) qui ne rencontrent pas A est formé de l'ensemble des points (ξ_1, ξ_2) tels que $|\xi_1| + |\xi_2| \leqq 1$, $|\xi_1| < 1$; il est de Reinhard et convexe comme prévu (proposition 2.1). Soit ω un voisinage ouvert de A: il contient le polydisque $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ et un polydisque $|z_1| < 1 + \varepsilon$, $|z_2| < \varepsilon$. Donc, toute fonction

holomorphe dans ω se prolonge à l'enveloppe d'holomorphie π de ces deux polydisques, soit l'ensemble des (z_1, z_2) tels que $(\log|z_1|, \log|z_2|)$ appartienne à l'enveloppe convexe de la réunion des ensembles

$$U = \{(x, y) \mid \log x < 0,\ \log y < 0\} \quad \text{et} \quad V = \left\{(x, y) \mid \begin{matrix} \log x < \log(1+\varepsilon), \\ \log y < \log \varepsilon \end{matrix}\right\}$$

$[(-\infty, -\infty)$ est admis comme $(-\infty, y)$ et $(x, -\infty).]$

Il est clair que π contient un voisinage de Reinhardt ouvert et convexe de A, donc appartenant à $\mathscr{L}(A)$. Notons que $\mathscr{L}(A)$ admettant un système fondamental d'éléments qui sont de Reinhardt et disqués, par la proposition 2.1 il s'en suit que les voisinages ouverts convexes de A forment une base de filtre de $\mathscr{L}(A)$. On en déduit immédiatement que $H_{I,A}(\mathbb{C}^2) = H_A^{\mathscr{L}}(\mathbb{C}^2)$. D'après la proposition 2.3 pour montrer que $H_{P,A} \neq H_{I,A}$ il faut montrer que $H^{\mathscr{L}}_{\overset{*}{\complement} A} \neq H^*_{\overset{*}{\complement} A}$. Puisque $B = \overset{*}{\complement} A$ est convexe de Reinhardt, cerclé, il admet un système fondamental de voisinages de Reinhardt cerclés dont l'enveloppe linéelle est donc convexe. L'espace $H_B^{\mathscr{L}}$ est donc formé des fonctions holomorphes dans les voisinages convexes de B. Dans le plan $\mathbb{R}^2$ des (x, y) nous considérons la courbe Γ définie par $x = \log t$, $y = \log(1-t)$ $0 \leqq t \leqq 1$, qui est convexe et admet une asymptote verticale l'axe des y. Nous noterons ${}^{\partial}\Gamma$ l'ensemble des points au-dessous de Γ. Si Γ_α est la courbe définie par $x = \log t$

$$y = \log(1-t) + \alpha \quad \text{et si} \quad \Omega_\alpha = \{(z_1, z_2) \mid (\log|z_1|, \log|z_2|) \in {}^{\partial}\Gamma_\alpha\}$$

les Ω_α forment une base du filtre $\mathscr{L}(B)$.

Il est clairement possible de trouver une courbe γ telle que γ soit strictement au-dessus de Γ, que γ soit convexe, telle que pour tout α γ soit au-dessous de Γ_α dès que t est suffisamment voisin de 1; alors $\Omega = \{(z_1, z_2) \mid (\log|z_1|, \log|z_2|) \in {}^{\partial}\gamma\}$ est un voisinage pseudoconvexe de B qui ne contient aucun élément de $\mathscr{L}(B)$. C'est-à-dire que toute fonction holomorphe dans Ω et non prolongeable hors de cet ouvert n'appartient pas à $H_B^{\mathscr{L}}$, donc $H_B^{\mathscr{L}} \neq H_B$ d'où $H_{P,A} \neq H_{I,A}$. C.Q.F.D.

On voit aisément en outre par ce procédé que B admet un système fondamental de voisinages pseudo-convexes puisqu'on peut les prendre cerclés de Reinhardt. Si on considère le voisinage de B défini par $\log|z_1| < 0$ et si on considère un compact K de B, prenant l'image de K, $\log|K|$, à savoir l'ensemble des $(\log|z_1|, \log|z_2|)$ où $(z_1, z_2] \in K$, l'enveloppe convexe de K et de ${}^{\partial}\Gamma$ admet aussi manifestement au système fondamental de voisinages pseudo-convexes. Par un raisonnement déjà vu il s'en suit que $H'_{P,B} = H'_{I,B}$. En outre B est est localement fermé donc $H_{P,B} = H_{I,B}$. Ceci montre que $H_{I,A}$ le dual de $H_{P,B}$ est un $\mathscr{L} - \mathscr{F}$ complet et que $H_{P,B} = H_{I,B}$ est le complété de $H_B^{\mathscr{L}}$ espace $\mathscr{L} - \mathscr{F}$ non complet.

Deuxième exemple. Nous prenons pour A l'ensemble de $\mathbb{C}^2$ défini par $z_1 = 0$. L'ensemble des hyperplans $\xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 = \xi_0$ qui ne rencontrent pas A est formé de l'ensemble $\xi_2 = 0$, $\xi_0 \neq 0$. Il s'agit donc de la variété $\xi_2/\xi_0 = 0$ dans $\mathbb{C}^2$.

Nous savons, théorème 1.2 b) que $H_{P,A} = H_{I,A}$ et $H_{P,B} = H_{I,B}$. Si ω est un voisinage, qu'on peut supposer de Reinhardt et cerclé de l'ensemble A,

son enveloppe linéelle est son enveloppe convexe donc $\mathscr{L}(A)$ est formé des voisinages ouverts convexes de A, donc de la forme $z_1 \in \Gamma$ où Γ est un voisinage ouvert convexe de zéro dans la sous-variété $z_2 = 0$. Il en est de même pour $\mathscr{L}(B)$.

Maintenant, soit Γ une courbe dans $\mathbb{R}^2$ qui, lorsque $y \to +\infty$ est telle que $x \to -\infty$, et qui soit convexe. On peut prendre par exemple la seconde bissectrice. Alors $\Omega = \{(z_1, z_2) \mid (\log|z_1|, \log|z_2|) \in {}^{\vee}\Gamma\}$ est un voisinage pseudo-convexe de Reinhardt de A qui ne contient aucun voisinage convexe de A, donc $H_A^{\mathscr{L}} \neq H_A$. Mais, ce qui est remarquable c'est que, puisque $H_A^{\mathscr{L}}$ est le dual de $H_{P,B} = H_{I,B}$ cet espace est complet, c'est-à-dire que $H_A^{\mathscr{L}}$ est un espace $\mathscr{L}-\mathscr{F}$ nucléaire et complet. Notons que ceci est en contraste avec les hypothèses de la proposition 2.5.

Les éléments du dual de $H_A^{\mathscr{L}}$ sont manifestement des fonctionnelles analytiques semi-portables par la sous-variété $z_1 = 0$, [15] définition 3.1 chapitre I, et leurs indicatrices projectives sont, nous venons de le voir, les fonctions holomorphes au voisinage de la variété $\xi_2 = 0$. D'après la proposition 1.13 chapitre II de [15] les fonctions entières de type exponentiel zéro par rapport à la variable z_1, z_2 étant fixé, sont les transformées de Fourier-Borel des fonctionnelles analytiques semi-portables par la sous-variété $z_1 = 0$; un calcul simple montre que, dire qu'une fonction entière de type exponentiel est de type exponentiel zéro par rapport à z_1, z_2 fixé, équivaut à dire que l'indicatrice projective associée à la fonctionnelle qu'elle définit est holomorphe au voisinage de $\xi_2 = 0$. Ceci montre *qu'il y a identité entre les éléments du dual de* $H_A^{\mathscr{L}}$ *et les fonctionnelles analytiques semi-portables par* A, résultat qui s'étend à un nombre quelconque fini de variables.

Remarquons enfin que cet exemple montre que dans la proposition 2.3 l'hypothèse $H_A^{\mathscr{L}} = H_A$ est indispensable.

Troisième exemple. A est l'ensemble de $\mathbb{C}^2$ défini par $|z_1| \leqq 1$. L'ensemble des hyperplans qui ne rencontrent pas A, soit $B = \overset{*}{\complement} A$ est le disque $|\xi_1| < 1$ dans la sous-variété $\xi_2 = 0$. Un voisinage pseudo-convexe disqué de A est convexe, donc $H_A^{\mathscr{L}} = H_{I,A}$.

On peut considérer que B est la sous-variété $\xi_2 = 0$ dans l'ouvert d'holomorphie $|\xi_1| < 1$, donc on a: $H_{P,B} = H_{I,B}$ et on vérifie aisément comme dans l'exemple un qu'il existe un voisinage pseudo-convexe cerclé et de Reinhardt de B qui n'est pas convexe, donc $H_{P,A} \neq H_{I,A}$ et $H_B^{\mathscr{L}}$ admet pour complété $H_{I,B}$.

Quatrième exemple. $A = \mathbb{R}^n$, $n \geqq 2$, dans $\mathbb{C}^n$. L'ensemble des hyperplans qui ne rencontrent pas A est formé de l'hyperplan de l'infini et des hyperplans $\xi_1 \cdot z_1 + \cdots + \xi_n \cdot z_n = 1$ où ξ_j est de la forme $\xi_j = a_j \cdot \lambda$ avec $a_j \in R$ et $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. C'est-à-dire qu'on peut écrire en résumé:

$$\overset{*}{\complement} A = B = (\mathbb{C} - \mathbb{R}) \cdot \mathbb{R}^n \cup \{0\}.$$

Montrons que $H_A^{\mathscr{L}} \neq H_A$. En effet, [2], on peut prendre un système fondamental de voisinages de A définis par une équation $(y_1^2 + \cdots + y_n^2) \leqq \leqq \phi(x_1^2 + \cdots + x_n^2)$, où ϕ est régulière et $\mathscr{L}(A)$ devra admettre une base

formée de tels voisinages (par le raisonnement de [2]). Si on considère l'hyperplan réel tangent en un point $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ son équation est donnée par:

$$\sum_j \phi'\left(\sum_h x_h^2\right) \cdot x_j \cdot (X_j - x_j) - \sum_l y_l \cdot (Y_l - y_l) = 0$$

et l'hyperplan complexe qu'il contient par

$$\sum_j \left(\phi'\left(\sum_h x_h^2\right) \cdot x_j + i y_j\right) \cdot (Z_j - z_j) = 0 \quad z_j = x_j + i y_j .$$

Les x_j variant en sorte que $\sum x_j^2 =$ constante, il n'appartient à $\overset{*}{\mathcal{C}} A$ que si $\phi' \equiv 0$, donc ϕ est une fonction constante. Nous montrons ainsi que $\mathscr{L}(A)$ admet une base formée de voisinages de $A = \mathbb{R}^n$ qui sont des tubes.

Avec les modifications indiquées dans la démonstration du théorème 1.2 a) le lemme page 68 de [15] peut s'énoncer:

Si H est une partie équicontinue de fonctionnelles analytiques définies sur $\mathbb{C}^n$ uniformément semi-portable par $\mathbb{R}^n$ elle provient d'une famille équicontinue de fonctionnelles analytiques réelles.

Comme une partie équicontinue de $H_A^{\mathscr{L}'}$ est manifestement une partie H, il s'en suit qu'elle provient d'une famille équicontinue de fonctionnelles analytiques réelles. Et comme la réciproque est claire on voit que $H_A^{\mathscr{L}'} = H'_{I,A}$ algébriquement avec les mêmes parties équicontinues. En d'autres termes l'espace $H_{I,A}$ induit sur $H_A^{\mathscr{L}}$ sa propre topologie, et est en conséquence inclus dans son complété puisque les fonctions entières qui appartiennent aux deux espaces sont déjà denses dans $H_{I,A}$.

L'espace $H_{I,A}$ est complet, étant égal à $H_{P,A}$, donc le complété de $H_A^{\mathscr{L}}$, qui est le dual de $H_{I,B}$, est égal à $H_{I,A}$. Donc on a $H'_{I,B} \neq H'_{P,B}$ ce qui montre que $H_{I,B} \neq H_{P,B}$. Par contre on a encore $H_B^{\mathscr{L}} = H_{I,B}$.

Remarquons que pour $n = 1$ $H_A^{\mathscr{L}} = H_{I,A}$, mais les raisonnements précédents peuvent être partiellement repris avec l'espace $H_{\hat{A}}$, limite inductive des espaces de fonctions holomorphes dans des bandes entourant $\mathbb{R}$. On voit que c'est un espace $\mathscr{L} - \mathscr{F}$ non complet dont le complété est l'espace des fonctions analytiques réelles.

Montrons finalement que $H_A^{\mathscr{L}'} = H'_{I,A}$ topologiquement. Soit B une partie bornée de $H_{I,A}$. Elle provient d'une partie bornée B de fonctions holomorphes dans un voisinage ω de $\mathbb{R}^n$ qu'on peut, suivant [2], supposer polynomialement convexe. Il résulte d'une propriété bien connue des Fréchets séparables [5] qu'il existe une partie γ bornée dans $H(\omega)$, formée de polynômes et telle que $\gamma \supset \beta$. Donc comme $\gamma \subset H_A^{\mathscr{L}}$ et que $H_{I,A}$ induit la topologie de $H_A^{\mathscr{L}}$ sur ce sous-espace, on a ainsi montré que toute partie bornée de $H_{I,A}$ est incluse dans l'adhérence d'une partie bornée de $H_A^{\mathscr{L}}$, c'est-à-dire suivant la terminologie de L. SCHWARTZ [17] que $H_A^{\mathscr{L}}$ est strictement dense dans $H_{I,A}$. Et ceci achève la démonstration de l'identité de $H'_{I.A}$ avec $H_A^{\mathscr{L}'}$.

Les résultats des exemples 1 et 3 pourraient être complétés de façon analogue.

Pour résumer la situation, j'énoncerai le

Théorème 2.4. a) *Soit A dans $\mathbb{C}^2$ défini par $|z_1| \leqq 1$, $z_2| < 1$, alors $\overset{*}{\complement} A$ dans $\mathbb{C}^2$ est défini par $|\xi_1| < 1$, $|\xi_1| + |\xi_2| \leqq 1$.*

$$H_{P,A} \neq H_{I,A} = H_A^{\mathscr{L}} = H'_{I,\overset{*}{\complement}A} = H'_{P,\overset{*}{\complement}A} ;$$

$$H_{P,\overset{*}{\complement}A} = H_{I,\overset{*}{\complement}A} = H'_{I,A} ; \quad H'_{P,A} = H^{\mathscr{L}}_{\overset{*}{\complement}A} ;$$

$H^{\mathscr{L}}_{\overset{*}{\complement}A}$ n'est pas algébriquement égal à $H^*_{\complement A}$ et a pour complété $H_{I,\overset{*}{\complement}A}$.

b) *Soit A dans $\mathbb{C}^2$ défini par $z_1 = 0$, alors $\overset{*}{\complement} A$ dans $\mathbb{C}^2$ est défini par $\xi_2 = 0$. On peut intervertir les rôles de A et de $\overset{*}{\complement} A$.*

$$H_{P,A} = H_{I,A} \neq H_A^{\mathscr{L}} ; \quad H_A^{\mathscr{L}} = H'_{I,\overset{*}{\complement}A} = H'_{P,\overset{*}{\complement}A} .$$

L'espace $H_A^{\mathscr{L}}$ est algébriquement différent de $H_{I,A}$ et est complet.

c) *Soit $A = \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}^n$, $n \geqq 2$. Alors $\overset{*}{\complement} A$ est dans $\mathbb{C}^n$ l'ensemble $(\{0\} \cup \cup (\mathbb{C} - \mathbb{R}) \cdot \mathbb{R}^n$. On a:*

$$H_{P,A} = H_{I,A} \neq H_A^{\mathscr{L}} = H'_{P,\overset{*}{\complement}A} ; \quad H'_{I,\overset{*}{\complement}A} = H_{I,A}$$

L'espace $H_A^{\mathscr{L}}$ admet $H_{I,A}$ comme complété:

$$H'_{P,A} = H'_{I,A} = H_{I,\overset{*}{\complement}A} = H^{\mathscr{L}}_{\overset{*}{\complement}A} \neq H_{P,\overset{*}{\complement}A} .$$

d) *Soit A dans $\mathbb{C}^2$ défini par $|z_1|^2 + |z_2|^2 \leqq 1$, $|z_1| < 1$. $\overset{*}{\complement} A$ dans $\mathbb{C}^2$ est défini par $|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 < 1$, ou ($\xi_2 = 0$ $|\xi_1| = 1$). On a:*

$$H_{P,A} = H_{I,A} = H_A^{\mathscr{L}} = H'_{I,\overset{*}{\complement}A} = H'_{P,\overset{*}{\complement}A}$$

$$H'_{P,A} = H'_{I,A} = H_{I,\overset{*}{\complement}A} = H_{P,\overset{*}{\complement}A} = H^{\mathscr{L}}_{\overset{*}{\complement}A} .$$

Le point d) est bien sûr un cas particulier du théorème 2.4.

On peut combiner A et $\overset{*}{\complement} A$ de a) pour obtenir un cas où $H_{P,A} \neq H_{I,A}$ et $H_{P,\overset{*}{\complement}A} \neq H_{I,\overset{*}{\complement}A}$.

Les assertions $H_{P,A} \neq H_{I,A}$ dans le point a) du théorème 2.4 et dans l'exemple 3) se trouvent déjà implicitement dans GROTHENDIECK [7]. En effet cet auteur étudiant le produit tensoriel projectif $E \hat{\otimes} F$ où E est un Fréchet, F un dual de Fréchet a noté, posant D pour le disque ouvert, $\bar{D}$ le disque fermé dans le plan complexe, que $H(D) \hat{\otimes} H(\bar{D})$ est non bornologique alors que $H(D) \hat{\otimes} H(\{0\})$ est bornologique. Or, on a la

Proposition 2.6. *Soit K un compact de $\mathbb{C}^p$, Ω un ouvert de $\mathbb{C}^q$. On a l'isomorphisme vectoriel topologique*

$$H_{P,K\times\Omega}(\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q) = H_K(\mathbb{C}^p) \hat{\otimes} H_\Omega(\mathbb{C}^q) .$$

Démonstration. On a $H_\Omega(\mathbb{C}^q) = \varprojlim_{L \subset \Omega} H_L(\mathbb{C}^q)$ comme nous l'avons vu. Il résulte des propriétés du produit tensoriel $\hat{\otimes}$, qu'on a:

$$H_K(\mathbb{C}^p) \hat{\otimes} H_\Omega(\mathbb{C}^q) = \varprojlim_{L} H_K(\mathbb{C}^p) \hat{\otimes} H_L(\mathbb{C}^q) .$$

Il résulte de même aisément de [7] qu'on a:

$$H_K(\mathbb{C}^p) \hat{\otimes} H_L(\mathbb{C}^q) = \varinjlim_{\substack{\omega \supset K \\ \omega' \supset L}} H(\omega) \hat{\otimes} H(\omega')$$

ω et ω' parcourant la famille des voisinages ouverts de K respectivement L.

D'où, de l'isomorphisme $H(\omega) \hat{\otimes} H(\omega') = H(\omega \times \omega')$, montré dans [7], résulte que:

$$H_K(\mathbb{C}^p) \hat{\otimes} H_L(\mathbb{C}^q) = H_{K \times L}(\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q) .$$

Donc, $H_K(\mathbb{C}^p) \hat{\otimes} H_\Omega(\mathbb{C}^q) = \varinjlim_{K \times L} H_{K \times L}(\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q) = H_{P, K \times \Omega}(\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q)$

C.Q.F.D.

Bibliographie

[1] BOURBAKI, N.: Espaces vectoriels topologiques. Act. Scient. Ind. 1229. Paris: Hermann 1955.

[2] CARTAN, H.: Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes. Bull. Soc. Math. France **85**, 77—99 (1957).

[3] — Séminaire 4 (1951—1952). Fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. Paris: Ecole Normale Supérieure.

[4] GODEMENT, R.: Topologie algébrique et théorie des Faisceaux. Paris: Hermann 1958. Act. Scient. Ind. 1252. Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg 13.

[5] GROTHENDIECK, A.: Sur certains espaces de fonctions holomorphes. J. reine angew. Math. **192**, Part 1, p. 35—64, Part 2, p. 77—95 (1953).

[6] — Sur les espaces ($\mathscr{F}$) et ($\mathscr{DF}$). Summa Brasil-Math. **3**, 57—123 (1954).

[7] — Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Providence Am. Math. Soc. 1955 (Mem. Am. Math. Soc. **16**).

[8] KÖTHE, G.: Dualität in der Funktionentheorie. J. reine angew. Math. **191**, 30—49 (1953).

[9] — Topologische lineare Räume. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.

[10] LERAY, J.: Probléme de Cauchy (III). Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe. Bull. Soc. Math. France **87**, 81—180 (1959).

[11] MALGRANGE, B.: Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution. Ann. Inst. Fourier Grenoble **6**, 271—355 (1955—56).

[12] MANTOVANI, F., e S. SPAGNOLO: Funzionali anelitici reali e funzioni armoniche. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa. Série III XVIII — fasc. IV, p. 475—513 (1964).

[13] MARTINEAU, A.: Les hyperfonctions de M. SATO. In Séminaire Bourbaki 13e année. p. 214—01 à 214—13 (1960—61).

[14] — Indicatrices des fonctionnelles analytiques et inversion de la transformation de Fourier-Borel par la transformation de Laplace. C. R. Acad. Sci. **255**, 1845—1847 et 2888—2890 (1962).

[15] — Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel. J. d'anal. Math. Jérusalem IX, 1—164 (1963).

[15a] SPAGNOLO, S., et F. MANTOVANI: Cf. F. MANTOVANI et S. SPAGNOLO.

[16] SILVA, J. S.: As Funçoes Analiticas e Analise Functional. Port. Math. **9**, 1—130 (1950).

[17] SCHWARTZ, L.: Théorie des distributions à valeurs vectorielles. Ann. Inst. Fourier Grenoble **7**, 1—141 (1957).

[18] TILLMANN, H. G.: Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen. Math. Z. **59**, 61—83 (1953).

(Reçu le 15 juillet 1965)

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · HEIDELBERG · NEW YORK

Lecture Notes in Mathematics

An informal series of special lectures, seminars and reports on mathematical topics

Edited by
A. Dold, Heidelberg, and B. Eckmann, Zürich

Volume 8

Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems

By Gaetano Fichera
University of Rome and
The Johns Hopkins University

IV, 176 pages DIN A 4. 1965
Stiff paper bound DM 13,50

Contents: "Well posed" boundary value problems. Existence principle. The function spaces $\mathring{H}_m$ and H_m. The trace operator. Sobolev and Ehrling lemmas. Elliptic linear systems. Interior regularity. Existence of local solutions for elliptic systems. Semi-weak solutions of BVP for elliptic systems. Regularity at the boundary: preliminary lemmas; tangential derivatives; final results. The classical elliptic BVP of Mathematical Physics: 2nd order linear PDE; Linear Elastostatics; Equilibrium of thin plates. Strongly elliptic operators. Garding inequality. Eigenvalue problems. The Rayleigh-Ritz method. The Weinstein-Aronszajn method. Construction of the intermediate operators. Orthogonal invariants of positive compact operators. Upper approximation of the eigenvalues of a PCO. Representation of orthogonal invariants. Explicit construction of the Green's matrix for an elliptic system. Bibliography of Lectures 1—20.

163. Band

Inhalt

1. Heft

Seite

DIEUDONNÉ, J., Sur la Séparation des Ensembles Convexes 1
(Anschrift: Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 5 Rond-Point Bugeaud, Paris 16e, Frankreich)

GARNIR, H. G., Dual d'un espace d'opérateurs linéaires 4
(Anschrift: 14, rue Joiret, Angleur (Liège), Belgien)

KÖNIG, H., Zur abstrakten Theorie der analytischen Funktionen, II 9
(Anschrift: Mathematisches Institut der Univ., 66 Saarbrücken, Danziger Straße 1)

TAYLOR, A. E., Theorems on Ascent, Descent, Nullity and Defect of Linear Operators . 18
(Anschrift: Dept. of Mathematics, University of California, Los Angeles 23 Calif./USA)

LANDSBERG, M., u. TH. RIEDRICH, Über positive Eigenwerte kompakter Abbildungen in topologischen Vektorräumen 50
(Anschriften: Radebeul 1, Lößnitzgrundstr. 2; Dresden-A 19, Heubnerstr. 6)

MARTINEAU, A., Sur la topologie des espaces de fonctions holomorphes 62
(Anschrift: Université de Montpellier, Faculté des Sciences Mathématiques, Montpellier/France, Chemin des Brusses)

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Edgar Seidler, 1 Berlin 31 (Wilmersdorf), Heidelberger Platz 3.
Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York — Druck der Brühlschen Universitätsdruckerei Gießen
Printed in Germany

Mathematische Annalen

Begründet 1868 durch Alfred Clebsch · Carl Neumann

Fortgeführt durch Felix Klein · David Hilbert
Otto Blumenthal · Erich Hecke

Herausgegeben von **Heinrich Behnke,** Münster i. W.
Richard Courant, New York
Hans Grauert, Göttingen
Friedrich Hirzebruch, Bonn
Heinz Hopf, Zürich
Gottfried Köthe, Frankfurt/M.
Bartel L. van der Waerden, Zürich

Band 163 · Heft 2 · 1966

Springer-Verlag · Berlin · Heidelberg · New York

Math. Ann. · Abgeschlossen am 28. Februar 1966 · A 21 265 D

5039

Mathematische Annalen

Begründet 1868 durch *Alfred Clebsch* und *Carl Neumann*, früher herausgegeben von *Alfred Clebsch* (1869—1872), *Carl Neumann* (1869—1876), *Felix Klein* (1876—1924), *Adolph Mayer* (1876—1901), *Walther v. Dyck* (1888—1921), *David Hilbert* (1902—1939), *Otto Blumenthal* (1906—1938), *Albert Einstein* (1920—1928), *Constantin Carathéodory* (1925—1928), *Erich Hecke* (1929—1947), *Franz Rellich* (1947—1955), *Kurt Reidemeister* (1947—1963).

Band 1—80 Leipzig, B. G. Teubner, ab Band 81 (1920) Berlin, Springer.

An unsere Mitarbeiter!

Die Korrekturkosten sind bei den „Mathematischen Annalen" sehr hoch. Für ihre Verminderung muß unbedingt Sorge getragen werden. Wir richten deshalb an alle unsere Mitarbeiter die freundliche dringende Bitte, zu diesem Ziele an ihrem Teile mit beitragen zu wollen. Dazu ist nötig:

1. Das Manuskript muß *völlig druckfertig* und *gut leserlich* sein und für den Setzer *gemäß den „Hinweise für die Autoren"* (herausgegeben von Redaktion und Verlag) vorbereitet sein. — Diese Hinweise können von der Redaktion angefordert werden.

2. Veränderungen des Textes in der Korrektur sind auf die Fälle zu beschränken, wo sich nachträglich *wirkliche Irrtümer* herausstellen. Insbesondere sind rein stilistische Verbesserungen zu unterlassen. Sollte ein Irrtum bemerkt werden, noch bevor Korrektur eingetroffen ist, dann ist ein verbesserter Text sofort an die Redaktion zu schicken, die dafür Sorge tragen wird, daß das Manuskript noch vor dem Satz berichtigt wird.

Jede Änderung des schon gesetzten Textes muß zu Lasten der Autoren gehen.

Die Reihenfolge der Veröffentlichungen behält sich die Redaktion vor.

Die Redaktion der Mathematischen Annalen

Mathematische Annalen

Erscheinen zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung zwanglos in Heften, die zu Bänden vereinigt werden. Sie sind durch jede Buchhandlung zu beziehen. Der Preis des Bandes beträgt DM 96,—.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskripts und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0,30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Mathematischen Annalen bestimmte Manuskripte können bei jedem der unten verzeichneten Redaktionsmitglieder eingereicht werden:

Professor Dr. Dr. h. c. H. Behnke, 44 Münster/Westf., Rottendorffweg 17,

Professor Dr. R. Courant, 142 Calton Road, New Rochelle, N. Y. USA,

Professor Dr. H. Grauert, Mathematisches Institut der Universität, 34 Göttingen, Bunsenstr. 3—5,

Professor Dr. F. Hirzebruch, Mathematisches Institut der Universität, 53 Bonn (Rhein), Wegelerstr. 10

Professor Dr. Dr. h. c. H. Hopf, Zollikon bei Zürich, Alte Landstraße 37,

Professor Dr. Dr. h. c. G. Köthe, 6 Frankfurt/Main, Parkstraße 14[1],

Professor Dr. Dr. h. c. B. L. van der Waerden, Mathematisches Institut der Universität Zürich, 8006 Zürich/Schweiz

Inhaltsverzeichnis des Heftes auf Seite 6

KELLEY, J. L.
Math. Annalen 163, 89—94 (1966)

Decomposition and Representation Theorems in Measure Theory

Dedicated to Professor GOTTFRIED KÖTHE on the occasion of his sixtieth birthday, December 25, 1965

By

J. L. KELLEY* in Berkeley (Cal.)

This paper is devoted to some ideas of I. E. SEGAL. We prove five theorems: (1) Dedekind completeness of a measure ring relative to its natural order implies a Lebesgue decomposition theorem for each σ-ideal; (2) the Lebesgue decomposition theorem implies a form of a Hahn decomposition of a space into sets which are positive and negative relative to a signed measure; (3) this Hahn decomposition theorem implies the Radon-Nikodym theorem on the representation of signed measures as indefinite integrals; (4) the Radon-Nikodym theorem implies the Riesz representation theorem for bounded linear functionals on L_1; and (5) the Riesz representation theorem implies Dedekind completeness of the measure ring. The only new link in this circle is the Hahn theorem; the equivalence of versions of all of the others was established by SEGAL in [S]. However, the line of argument given here is new and extremely simple — only very elementary propositions of measure theory are used — and there are some technical improvements.

We assume throughout that m is a countably additive function on a ring $\mathscr{A}$ of subsets of a set X to the set of non-negative finite real numbers, that $X = \bigcup\{A : A \in \mathscr{A}\}$, and that if $\{A_k\}_k$ is a sequence of members of $\mathscr{A}$ such that $\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) < \infty$ then $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$. This amounts to restricting our attention to the class of sets of finite measure and, as far as integration theory is concerned, this is no real restriction. A subfamily $\mathscr{U}$ of $\mathscr{A}$ is a *σ-ideal* in $\mathscr{A}$ iff $\mathscr{U}$ is a ring of sets, the intersection of each member of $\mathscr{U}$ with a member of $\mathscr{A}$ is a member of $\mathscr{U}$ and each member of $\mathscr{A}$ which is the countable union of members of $\mathscr{U}$ itself belongs to $\mathscr{U}$.

A subset E of X is called *measurable* iff $A \cap E \in \mathscr{A}$ for each A in $\mathscr{A}$. (Some authors call such sets locally measurable). The class of measurable sets is a σ-algebra of subsets of X. If E and F are measurable subsets of X then we agree that $E \geqq_m F$ iff $F \sim E$ contains no set of positive measure. If E and F are members of $\mathscr{A}$ then $E \geqq_m F$ iff $m(F \sim E) = 0$. Clearly $\geqq_m$ is a partial ordering of the class of measurable sets. We further agree that E is *m-equivalent* to F,

* This work was supported in part by a National Science Foundation Grant.

and write $E =_m F$, if $E \geqq_m F$ and $F \geqq_m E$. If E and F are members of $\mathscr{A}$ then E is *m-equivalent* to F iff $m(E \sim F) = m(F \sim E) = 0$. A set which is m-equivalent to the null set is *m-trivial*. In these terms, $E \geqq_m F$ iff E contains all of F except an m-trivial set, and $E =_m F$ iff $E \sim F$ and $F \sim E$ are m-trivial.

Finally, m is *Dedekind complete* if and only if each subfamily $\mathscr{U}$ of $\mathscr{A}$ has a supremum in the class of measurable sets; that is, there is a measurable set S such that $S \geqq_m U$ for all U in $\mathscr{U}$, and if T is any measurable set with $T \geqq_m U$ for U in $\mathscr{U}$, then $T \geqq_m S$.

Theorem 1. *If m is Dedekind complete then m has the Lebesgue decomposition property: If $\mathscr{U}$ is a σ-ideal in $\mathscr{A}$ then there is a measurable subset V of X such that $V \geqq_m U$ for each U in $\mathscr{U}$, and each member of $\mathscr{A}$ which is a subset of V is m-equivalent to a member of $\mathscr{U}$.*

Proof. Let V be a supremum of $\mathscr{U}$. Then $V \geqq_m U$ for each member U of $\mathscr{U}$. Let A be a member of $\mathscr{A}$ with positive measure, and suppose that $A \subset V$. Then $V \sim A$ is not an upper bound for $\mathscr{U}$, and hence there is U in $\mathscr{U}$, such that it is not the case that $V \sim A \geqq_m U$. Hence $U \sim (V \sim A) = (U \sim V) \cup (U \cap A)$ contains a set of positive measure, whence $m(U \cap A) > 0$. Consequently we see that each member A of $\mathscr{A}$ which is of positive measure and is a subset of V contains a member of $\mathscr{U}$ which is of positive measure. Let $\{U_k\}_k$ be a sequence of members of $\mathscr{U}$ such that $U_k \subset A$ and $\sup_k m(U_k) = \sup\{m(U) : U \in \mathscr{U} \text{ and } U \subset A\}$. Then $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k \in \mathscr{U}$, and since $A \sim U$ can contain no member of $\mathscr{U}$ which is of positive measure, $m(A \sim U) = 0$. |||

The preceding theorem implies the Lebesgue theorem on the decomposition of a measure into singular and absolutely continuous parts. If m and n are measures on $\mathscr{A}$ then m is *absolutely continuous* with respect to n, $m \prec n$, iff $m(A)$ is zero whenever $n(A)$ is zero, and m and n are *mutually singular*, $m \perp n$, if and only if X is the union of two disjoint measurable sets, say $X = Y \cup Z$, such that for A in $\mathscr{A}$, if $A \subset Y$ then $n(A) = 0$ and if $A \subset Z$ then $m(A) = 0$.

Corollary. *If m and n are measures on $\mathscr{A}$ such that $m + n$ is Dedekind complete then $m = m_s + m_c$, where m_c is absolutely continuous with respect to n and m_s is singular with respect to n.*

Proof. Let $\mathscr{U} = \{A : A \in \mathscr{A} \text{ and } n(A) = 0\}$. Then $\mathscr{U}$ is a σ-ideal and consequently, by the preceding theorem, there is a measurable set V with the properties: if $n(U) = 0$ then $V \geqq_{m+n} U$, whence if $U \subset X \sim V$ and $n(U) = 0$ then $(m + n)(U) = m(U) = 0$; and, if $A \subset V$ and $A \in \mathscr{A}$ then A is $(m + n)$-equivalent to a member U of $\mathscr{U}$, whence $n(A) = 0$. Letting $m_s(A) = m(A \cap V)$ and $m_c(A) = m(A \sim V)$ then yields the required decomposition. |||

A *signed measure* n is a countably additive function on $\mathscr{B}$ to the set of finite real numbers, where $\mathscr{B}$ is a ring of sets with the property: if $\{E_k\}_k$ is a disjoint sueqence of members of $\mathscr{B}$ whose union is contained in some member of $\mathscr{B}$ then $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathscr{B}$. A measurable set P is called *n-positive (n-negative)* iff for each member A of $\mathscr{B}$ which is a subset of P we have $n(A) \geqq 0$ (respectively, $n(A) \leqq 0$). It is always true that if $n(A) > 0$ then A contains a positive set

P with $n(P) > 0$ (in fact, if $\mathscr{U}$ is a maximal disjoint family of subsets U of A with $n(U) < 0$, then $\mathscr{U}$ is countable and we may set $P = A \sim \bigcup\{U : U \in \mathscr{U}\}$). By using standard techniques one then sees that each member A of $\mathscr{B}$ is the disjoint union of a positive set and a negative set, and the Jordan decomposition theorem for n follows: $n = n^+ - n^-$, where $n^+(A) = \sup\{n(B) : B \in \mathscr{B}$ and $B \subset A\}$, $n^-(A) = -\inf\{n(B) : B \in \mathscr{B}$ and $B \subset A\}$, and n^+ and n^- are measures. The total variation $|n|$ of n is $n^+ + n^-$.

The Hahn decomposition theorem states that under certain circumstances there is a global decomposition into positive and negative sets; that is, that the underlying space X is the disjoint union of a positive set and a negative set. The following theorem shows that a sufficient condition for such a decomposition is that $\mathscr{B}$ be $|n|$-complete.

Theorem 2. *If a measure m has the Lebesgue decomposition property then m has the Hahn decomposition property: If n is a signed measure on an ideal of $\mathscr{A}$ and n is absolutely continuous with respect to m then X is the disjoint union of an n-positive set and an n-negative set.*

Proof. It is easy to see that the family of n-positive sets is a σ-ideal in $\mathscr{A}$ and hence there is a measurable set P such that $P \geqq_m A$ if A is n-positive, and every member of $\mathscr{A}$ which is contained in P is m-equivalent to an n-positive set. But a set which is m-equivalent to an n-positive set is n-positive, because n is absolutely continuous with respect to m, and consequently P is a positive set. We assert that $X \sim P$ is n-negative because: if $A \subset X \sim P$ and $n(A) > 0$ then A contains an n-positive set with $n(B) > 0$, hence $m(B) > 0$ because n is absolutely continuous with respect to m, and this contradicts the fact that $P \geqq_m B$. |||

A function f on X to the set of finite real numbers is measurable iff for each number r the set $\{x : f(x) < r\}$ is measurable. For each such function f *the indefinite integral of* f with respect to m is the set function $f \cdot m$ defined by $f \cdot m(E) = \int f K_E \, dm$, where K_E is the characteristic function of E, and $f \cdot m(E)$ is defined for all measurables sets E such that $f K_E$ is integrable. Each member A of $\mathscr{A}$ which is of positive measure contains a set E of positive measure such that $f \cdot K_E$ is integrable, as we may see as follows: for each integer k, let $A_k = \{x : x \in A$ and $k \leqq f(x) < k + 1\}$, observe that $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, consequently $m(A_k) > 0$ for some k, and f is integrable over A_k. An *m-dense ideal* of sets in $\mathscr{A}$ is an ideal $\mathscr{U}$ such that each member A of $\mathscr{A}$ with $m(A) > 0$ contains a member U of $\mathscr{U}$ with $m(U) > 0$. A signed measure n is *an indefinite integral* of m provided that $n(E) = f \cdot m(E)$ for some measurable function f and for all E in some m-dense ideal in $\mathscr{A}$. If $\mathscr{U}$ is an m-dense ideal then every member of A is m-equivalent to a countable disjoint union of members of $\mathscr{U}$. It follows that if n is a signed measure which is absolutely continuous with respect to m and if n and $f \cdot m$ agree on a dense ideal then $n(A) = f \cdot m(A)$ for all $A \in \mathscr{A}$ for which both are defined.

Theorem 3. *If a measure m has the Hahn decomposition property then m has the Radon-Nikodym property: If n is a signed measure defined on a dense ideal*

in $\mathscr{A}$, and if n is absolutely continuous with respect to m, then n is an indefinite integral.

Proof. The idea of the proof is simple. If r is any number then $n - rm$ is a signed measure which is absolutely continuous with respect to m, hence the underlying space X can be decomposed into a $(n - rm)$-negative set A_r and a $(n - rm)$-positive set, and A_r should be just the set where the function f which we seek is less than r, at least to a set of $(n - rm)$ measure 0. The sets A_r should give enough information to construct f.

With this in mind we agree that a function N on the set of rational numbers to the family of measurable sets is a splitting for n iff for each rational number r the set N_r is $(n - rm)$-negative and $X \sim N_r$ is $(n - rm)$-positive, and if $N_r \subset N_s$ whenever $r < s$. Given such a splitting N for n we see that for each member A of $\mathscr{A}$ the m-measure of the set $B = \bigcap\{A \cap N_r : r \text{ rational}\}$ must be 0, for this set must be $(n - rm)$-negative for every rational r, whence $n(B) \leqq rm(B)$ for all rational r, and therefore $m(B) = 0$. Thus the intersection of the sets N_r is m-equivalent to the null set $\emptyset$. On the other hand, the union of the sets N_r covers all of a member A of $\mathscr{A}$ except a set of m measure zero, because $C = A \sim \bigcup\{N_r : r \text{ rational}\} = \bigcap\{A \sim N_r : r \text{ rational}\}$ and is hence $(n - rm)$-positive for every r, hence $n(C) \geqq rm(C)$ for all r, and consequently $m(C) = 0$.

We now show that a splitting N for n determines n entirely. Let e be any positive rational number, let A be any member of the domain of n, and let $D(k, e) = A \cap (N_{(k+1)e} \sim N_{ke})$. Then $\{D(k, e)\}_k$ is a disjoint family of sets covering all of A save a set of m-measure zero, and hence $n(A) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} n(D(k, e))$. We also have $kem(D(k, e)) \leqq n(D(k, e)) \leqq (k + 1)\, em(D(k, e))$ because $D(k, e)$ is $(n - (k + 1)em)$-negative and $(n - kem)$-positive. Summing on k we then find that

$$0 \leqq n(A) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} kem(D(k, e)) \leqq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} em(D(k, e)) = em(A)\,,$$

whence $n(A)$ can be computed by means of a limiting process involving N and m. (As a matter of fact, it is easy to get $n(A)$ as a Stieltjes integral of t with respect to $\Phi(t) = m(A_n N_t)$.

It follows from the preceding that if N is a splitting for n and is also a splitting for a signed measure p which is absolutely continuous with respect to m, and is defined on a dense ideal in $\mathscr{A}$, then $n = p$ on those members of $\mathscr{A}$ which belong to the domain of both n and p, and this is a dense ideal in $\mathscr{A}$.

We now construct a splitting N for the signed measure n. For each rational number t choose M_t to be a $(n - tm)$-negative set such that $X \sim M_t$ is $(n - tm)$-positive. The function M may fail to be a splitting, but only in a trivial way: if $r < s$ then $M_r \sim M_s$ is $(n - rm)$-negative and $(n - sm)$-positive, whence for $A \subset M_r \sim M_s$ we have $sm(A) \leqq n(A) \leqq rm(A)$ and therefore $m(A) = 0$. Thus $M_r \sim M_s =_m \Phi$. If we define $N_r = \bigcup\{M_t : t \text{ rational and } t < r\}$ then it is easy to see that N is a splitting for m and that $N_r = \bigcup\{N_t : t \text{ rational and } t < r\}$.

Finally, we define a function f by letting $f(x) = \inf(t : x \in N_t\}$. Because N is a splitting we see that f is defined except on a measurable set which is m-equivalent to $\emptyset$, and we may define f to be 0 on this measurable set. For each rational number r the set $\{x : f(x) < r\} = \{x : \inf\{t : x \in N_t\} < r\} = \{x :$ for some $t < r, x \in N_t\} = \bigcup\{N_t : t < r\} = N_r$. It follows that f is measurable and that N is a splitting for the signed measure $f \cdot m$. Consequently $n = f \cdot m$ on their common domain, and n is therefore an indefinite integral. |||

Recall that a linear functional F on $L_1(m)$ is bounded iff there is a constant k such that $|F(f)| \leqq k\|f\|_1$ for all f in $L_1(m)$, that $\|F\| = \inf\{k : |F(f)| \leqq k\|f\|_1$ for all f in $L_1(m)\}$ and that $|F(f)| \leqq \|F\| \cdot \|f\|_1$. If g is a bounded measurable function and $F(f) = \int fg\, dm$ then F is a bounded linear functional on $L_1(m)$ and it is easy to see that $\|F\| = \operatorname{ess\,sup}|g| = \inf\{k : |g| \leqq k$ save on a set which is m-equivalent to $\emptyset\}$. We say that a bounded linear functional F on $L_1(m)$ is *represented by a function* on X iff $F(f) = \int fg\, dm$ for some measurable g and all f in $L_1(m)$.

Theorem 4. *If m has the Radon-Nikodym property then m has the Riesz representation property: each bounded linear functional F on $L_1(m)$ is represented by a function on X.*

Proof. If F is a bounded linear functional on $L_1(m)$ we define n by $n(A) = F(K_A)$, where K_A is the characteristic function of a member A of $\mathscr{A}$. Then n is a signed measure on $\mathscr{A}$, for if A is the union of a disjoint sequence $\{A_k\}_k$ of members of $\mathscr{A}$, K is the characteristic function of A and K_k the characteristic function of A_k, then $\|K - \sum_{k=1}^{p} K_k\|_1$ converges to 0 as p goes to infinity, whence $F(K - \sum_{k=1}^{p} K_k) = n(A) - \sum_{k=1}^{p} n(A_k)$ converges to 0 because F is a bounded linear functional, and n is therefore countably additive. From the Radon-Nikodym property we then see that there is a measurable function g on X such that n and $g \cdot m$ agree on a dense ideal in $\mathscr{A}$, and hence they agree on $\mathscr{A}$. If K_A is the characteristic function of a member A of $\mathscr{A}$ then $|\int_A g\, dm| = |g \cdot m(A)| = |F(K_A)| \leqq \|F\| \cdot \|K_A\|_1 = \|F\| \cdot m(A)$, and it follows that the m-essential supremum of $|g|$ is finite — in fact at most $\|F\|$. Finally: The linear function F agrees with the linear functional $f \to \int fg\, dm$ on characteristic functions of members of $\mathscr{A}$, hence on finite linear combinations of these, and since these are dense in $L_1(m)$ and both functionals are continuous, $F(f) = \int fg\, dm$ for all f in $L_1(m)$. |||

Theorem 5. *If m has the Riesz representation property then m is Dedekind complete.*

Proof. The proof is accomplished by using the natural order in the adjoint of the Banach space $L_1(m)$. Suppose $\mathscr{U}$ is a subfamily of $\mathscr{A}$ and that we wish to show the existence of a supremum. We may suppose that $\mathscr{U}$ is non-void and closed under finite union and hence that $\mathscr{U}$ is directed by $\supset$. For each U in $\mathscr{U}$ let F_U be the linear functional on $L_1(m)$ which is defined by $F_U(f) = \int_U f\, dm$.

Then $\|F_U\| \leqq 1$. For each non-negative member f of $L_1(m)$ the numbers $F_U(f)$ are increasing (that is, if $V \supset U$ then $F_V(f) \geqq F_U(f)$, and since $|F_U(f)| \leqq \leqq \|F_U\| \cdot \|f\|_1$, we have a bounded increasing net of numbers which therefore converges. Each member of $L_1(m)$ is the difference of non-negative members, therefore $F_U(f) \xrightarrow[U]{} F(f) = \lim F_U(f)$ for each f in $L_1(m)$, and $\|F\| \leqq 1$. The Riesz representation property then yields the existence of a measurable function g such that $F(f) = \int fg\,dm = \lim_U \int\limits_U f\,dm$. We show that g is essentially the characteristic function of a supremum of $\mathscr{U}$. Because F is non-negative for non-negative f we see that $g \geqq 0$ save on a set which is m-trivial. If f is a non-negative member of $L_1(m)$ and K_U is the characteristic function of $U \in \mathscr{U}$ then $\int f(g - K_U)\,dm \geqq 0$, from which it follows that $g - K_U \geqq 0$ save on a set which is m-trivial. Finally, suppose that W is a measurable set and that $W \geqq_m U$ for each U in $\mathscr{U}$. Then for f non-negative we have $\int fK_W \geqq \geqq \lim_U \int fK_U\,dm = \int fg\,dm$, whence $\int f(K_W - g)\,dm \geqq 0$ and therefore $K_W \geqq g$ save on a set which is m-trivial. From these facts it follows that $\{x : g(x) = 1\}$ is a supremum for $\mathscr{U}$. |||

Reference

[S] SEGAL, I. E.: Equivalence of measure spaces. Amer. J. Math. **73**, 275—313 (1951).

(Received May 24, 1965)

Pták, V.
Math. Annalen 163, 95—104 (1966)

Some Metric Aspects of the Open Mapping and Closed Graph Theorems

Herrn Gottfried Köthe zum 60. Geburtstag am 25. 12. 1965 gewidmet

By

Vlastimil Pták in Praha

In applications of functional analysis we are frequently confronted with the following situation: We are given a Banach space E and two (closed) linear mappings A_1 and A_2 from E into F_1 and F_2. If $D(A_2) \subset D(A_1)$, it follows from the closed graph theorem that there exist two constants $\alpha > 0$ and $\beta > 0$ such that $|A_1 x| \leqq \alpha|x| + \beta|A_2 x|$. In a particular problem concerning the spaces of distributions not only the existence of the constants α and β but their mutual relation as well is of importance. It has turned out during the study of that problem that the phenomena which occur in this situation may be classified in a simple manner. It is to be noted that any question concerning the relation between α and β is essentially metric in its character since all norms $\alpha|x| + \beta|A_2 x|$ are equivalent topologically as long as α and β stay positive. The present remark is devoted to the systematic study of such metric questions and its purpose is twofold: First, it is intended as a basis for applications to distribution spaces (these applications will form the subject of a forthcoming communication). On the other hand, a full classification of the possibilities for the pairs $[\alpha, \beta]$ is not without interest on its own.

Let us mention another instance of metric problems, this time in connection with the open mapping theorem. The classical open mapping theorem may be formulated as follows:

Let P and Q two metric spaces and f a continuous mapping of P into Q. Suppose that, for each $r > 0$, there exists a $q(r) > 0$ such that, for each $x_0 \in P$ and each $r > 0$ the closure of $f(K(x_0, r))$ contains $K(f(x_0), q(r))$. If P is complete then $f(P) = Q$ and f is open.

If the spaces P and Q have a linear structure as well, the function $q(r)$ becomes quite simple (if it exists) and this enables us to state the open mapping and closed graph theorems in a slightly different form which does not involve the topological notion of almost openness.

Indeed, it is easy to prove the following theorem:

(1,1) *Let E and F be two normed linear spaces, T a continuous linear mapping of E into F. Let U and V be the unit cells of E and F respectively. Suppose that, for some $\alpha > 0$ the set $T(U) + \alpha V$ contains a translate of βV for some $\beta > \alpha$.*

If E is complete then $T(E) = F$ and T is open; in particular $(\beta - \alpha) V \subset T(U)$.

Clearly the assumption $T(U) + \alpha V \supset \beta V$ does not contain any information at all if $\alpha \geqq \beta$. The assumption $T(U) + \alpha V \supset \beta V$ does not (explicitly) contain the topological notion of closure but does contain the metric condition $\alpha < \beta$. The present remark will be concerned with similar questions; this is what we mean by saying that we shall concentrate ourselves on questions of metric character as opposed to the topological study of almost open mappings.

It is a well-known and obvious fact that open mappings may also be characterized by the following implication: if $Tx_n \to 0$ then $\varrho(x_n, T^{-1}(0)) \to 0$. The metric investigations of the closed graph theorem in the form described above enable us to study this implication with the restriction that $|x_n| \leqq 1$. Indeed, a simple corollary of one of the results on the closed graph theorem yields the following proposition:

Suppose that there exists a positive number $\alpha < 1$ *such that the following implication holds: if* $|x_n| \leqq 1$ *and* $Tx_n \to 0$ *then* $\limsup \varrho(x_n, T^{-1}(0)) \leqq \alpha$. *Then* T *is already open.*

We see thus that this formally weaker condition is equivalent to the openness of T. On the other hand, the systematic classification of all the cases possible for the general situation shows that there exists another type of openness which is, in fact, weaker than ordinary openness. It can be characterized by the following implication: if $|x_n| \leqq 1$ and $Tx_n \to 0$ then x_n converges weakly to zero in $E/T^{-1}(0)$.

The present remark is divided into three sections.

The first section deals with metric properties of closed subspaces of $E \times F$. Several years ago, the present author has been able to formulate a result which includes both the open mapping and closed graph theorems, the "closed relation theorem" [5]. Since that time the importance of the study of relations has also been recognised by other authors, see e.g. the interesting paper of R. ARENS [2]. It is not difficult to see that even the closed relation theorem admits a "metric" formulation, theorem (1,3) of the present remark.

The second section is devoted to the study of pairs of mappings $[A_1, A_2]$ as described above. In special cases, similar situations occur (explicitly or implicitly) quite frequently in the literature, especially that on differential operators [3]. To the author's knowledge, a systematic study of the pairs $[A, T]$ has not been undertaken. Some of the ideas treated in the present remark occured to the author during the work on a joint paper with W. ORLICZ [4]. Some of the results of the second section contain as special cases statements about "two-norm spaces". For a bibliography on these, see [1].

The third section deals with some special cases; we show that the classes of pairs $[A, T]$ defined in section two are indeed different from each other. Also, we examine the special case when A is compact or weakly compact.

All the proofs are quite straightforward and it is only the systematization of the matter which may be of some interest.

1. The first section is devoted to the formulation of the open mapping theorem, its dual form and the "closed relation theorem".

(1,1) *Let E and F be two normed linear spaces, T a continuous linear mapping of E into F. Let U and V be the unit cells of E and F respectively. Suppose that, for some $\alpha > 0$ the set $T(U) + \alpha V$ contains a translate of βV for some $\beta > \alpha$.*

If E is complete then $T(E) = F$ and T is open; in particular $(\beta - \alpha)\, V \subset T(U)$.

Proof. An elementary convexity argument shows that $\beta V \subset TU + \alpha V$. If $\varepsilon = \frac{\alpha}{\beta}$, we have $0 < \varepsilon < 1$ and $V \subset \frac{1}{\beta} TU + \varepsilon V$. Now let $y_0 \in V$ be given. There exist points $x_0 \in U$ and $v_0 \in V$ such that $y_0 = \frac{1}{\beta} Tx_0 + \varepsilon v_0$. Since $v_0 \in V$, it may be written, in its turn, in the form $v_0 = \frac{1}{\beta} Tx_1 + \varepsilon v_1$ for some $x_1 \in U$ and $v_1 \in V$. Repeating this procedure, we obtain two sequences $x_n \in U$ and $v_n \in V$ with $v_n = \frac{1}{\beta} Tx_{n+1} + \varepsilon v_{n+1}$. Clearly

$$y_0 = \frac{1}{\beta} T(x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots + \varepsilon^n x_n) + \varepsilon^{n+1} v_n$$

for each n. The space E being complete the series $x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots$ is convergent; if we denote by z_0 its sum, we have $|z_0| \leqq \frac{1}{1-\varepsilon}$. Hence $y_0 = \frac{1}{\beta} Tz_0$ so that $V \subset \frac{1}{\beta(1-\varepsilon)} TU$ or $\beta(1-\varepsilon)\, V \subset TU$. Since $\varepsilon = \frac{\alpha}{\beta}$, we have $(\beta - \alpha)\, V \subset TU$ and the proof is complete.

If E and F are normed linear spaces and if T is a continuous linear mapping of E into F then T almost open implies that $T'F' \cap U^0$ is $\sigma(E', E)$ compact. The corresponding result in the present case is the following.

(1,2) *Let E and F be two normed linear spaces and T a continuous linear mapping of E into F. Let $0 < \alpha < \beta$ and suppose that $TU + \alpha V \supset \beta V \cap TE$. Then $T'F' \cap U^0 \subset \frac{1}{\beta - \alpha} T'V^0$.*

Proof. Let $x' \in T'F' \cap U^0$. It follows that $x' = T'y'$ for some y'. There exists a y_0' such that $T'y_0' = x'$ and $|y_0'| \leqq |y'|$ for each y' with $T'y' = x'$. Choose a number η in the interval $0 < \eta < 1$ so as to have $\alpha |y_0'| = \frac{1-\eta}{\eta}$. Let us show now that $x' \in \frac{1}{\beta\eta} T'V^0$. Since $T'V^0 = (T^{-1}V)^0$, it suffices to prove $\langle \beta\eta T^{-1}V, x' \rangle \leqq 1$. If $x \in \beta\eta T^{-1}V$, we have $\frac{1}{\eta} Tx \in \beta V \cap TE$ so that, by our assumption $\frac{1}{\eta} Tx = Tu + \alpha v$ for some $u \in U$ and $v \in V$. Hence

$$\begin{aligned} \langle x, x' \rangle &= \langle Tx, y_0' \rangle = \eta \langle Tu, y_0' \rangle + \alpha\eta \langle v, y_0' \rangle \\ &= \eta \langle u, x' \rangle + \alpha\eta \langle v, y_0' \rangle \leqq \eta + \alpha\eta |y_0'| = 1 \end{aligned}$$

which proves $x' \in \frac{1}{\beta\eta} T'V^0$. To complete the proof, it suffices to show that $\frac{1}{\beta\eta} \leqq \frac{1}{\beta - \alpha}$. Since $x \in \frac{1}{\beta\eta} T'V^0$, we have $x' = T'y'$ for some $|y'| \leqq \frac{1}{\beta\eta}$. According to the minimality of $|y_0'|$, we have $\frac{1}{\beta\eta} \geqq |y'| \geqq |y_0'| = \frac{1-\eta}{\eta} \frac{1}{\alpha}$, whence $\frac{\alpha}{\beta} \geqq 1 - \eta$, $\eta \geqq 1 - \frac{\alpha}{\beta}$, $\beta\eta \geqq \beta - \alpha$. The proof is complete.

Before we state the main result of this section, the closed relation theorem, let us explain the notation. Let R be a subspace of $E \times F$; if $A \subset E$, we shall denote by RA the set of all $y \in F$ for which there exists an $a \in A$ such that $[a, y] \in R$. If R happens to be the graph of a mapping f from E into F, then RA is the same as $f(A)$. If R is the graph of a mapping g from F into E, then RA is the same as $g^{-1}(A)$.

(1,3) *The closed relation theorem. Let E and F be two normed linear spaces, R a closed subspace of $E \times F$. Let U and V be the unit cells of E and F respectively and let $0 < \alpha < \beta$. Suppose that the set $RU + \alpha V$ contains a translate of βV.*

If E is complete then $RE = F$ and $(\beta - \alpha)\, V \subset RU$.

Proof. It is easy to see that $\beta V \subset RU + \alpha V$. If $\varepsilon = \frac{\alpha}{\beta}$, we have $0 < \varepsilon < 1$ and $V \subset \frac{1}{\beta} RU + \varepsilon V$. Now let $y_0 \in V$ be given. There exist points $x_0 \in U$, $z_0 \in F$ and $v_0 \in V$ such that $x_0 R z_0$ and $y_0 = \frac{1}{\beta} z_0 + \varepsilon v_0$. Since $v_0 \in V$, it may be written, in its turn, in the form $v_0 = \frac{1}{\beta} z_1 + \varepsilon v_1$ for some $v_1 \in V$ and $x_1 R z_1$ with $x_1 \in U$. Repeating this procedure, we obtain three sequences $x_n \in U$, $z_n \in F$ and $v_n \in V$ with $v_n = \frac{1}{\beta} z_{n+1} + \varepsilon v_{n+1}$ and $x_n R z_n$. Clearly

$$y_0 = \frac{1}{\beta}(z_0 + \varepsilon z_1 + \cdots + \varepsilon^n z_n) + \varepsilon^{n+1} v_n$$

for each n. Put $u_n = x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots + \varepsilon^n x_n$ and $w_n = z_0 + \varepsilon z_1 + \cdots + \varepsilon^n z_n$ so that $u_n R w_n$. The space E being complete, the sequence u_n has a limit u and $|u| \leqq \frac{1}{1-\varepsilon}$. We have thus $u_n \to u$ and $w_n \to \beta y_0$. It follows that $\beta y_0 \in \frac{1}{1-\varepsilon} RU$ whence $(\beta - \alpha)\, V = \beta(1 - \varepsilon)\, V \subset RU$.

2. The second part will be concerned with the closed graph theorem. Let us begin by stating two obvious results.

(2,1) *Let E, G, F be three Banach spaces. Let A be a linear mapping of $D(A) \subset E$ into G and T a linear mapping of $D(T) \subset E$ into F. Suppose that*

1° $D(T) \subset D(A)$

2° *the graph of $A \times T$, i.e. the subset of $E \times G \times F$ consisting of the points $[x, Ax, Tx]$ with $x \in D(T)$ is closed in $E \times G \times F$*

3° *the graph of T is closed in $E \times F$.*

Then there exists an $\omega > 0$ such that

$$|Ax| \leqq \omega |x| + \omega |Tx|$$

for each $x \in D(T)$.

Proof. Let us denote by H the graph of T. Define a mapping f of H into G by the relation $f(h) = Ax$ if $h = [x, Tx]$. Since H is closed in $E \times F$, the closed graph theorem applies and f is continuous.

The assumption 2^0 of the preceding proposition is clearly satisfied if both A and T are closed mappings. We shall assume this henceforward.

(2,2) *Let E, G, F be three Banach spaces, A a closed linear mapping from E into G and T a closed linear mapping from E into F. Suppose that*

1° $D(T) \subset D(A)$

2° $T^{-1}(0) \subset A^{-1}(0)$

3° *T is open.*

Then there exists an $\omega > 0$ such that $|Ax| \leqq \omega |Tx|$.

Proof. It follows from assumptions 2° and 1° that there exists a linear mapping g of $R(T)$ into G such that $g(Tx) = Ax$. Further, it follows from assumption 3° that $R(T)$ is closed in F. The conclusion of the proposition will follow from the closed graph theorem if we prove that the graph of g is closed in $F \times G$. To prove that, suppose that $x_n \in D(T)$, $Tx_n \to y_0$ and $Ax_n \to z_0$. Since T is open, there exists a sequence $\tilde{x}_n \in D(T)$ and an $x_0 \in D(T)$ such that $\tilde{x}_n - x_n \in T^{-1}(0)$, $\tilde{x}_n \to x_0$ and $Tx_0 = y_0$. Further, since $T^{-1}(0) \subset A^{-1}(0)$, we have $A\tilde{x}_n = Ax_n \to z_0$. Since A is closed, it follows that $z_0 = Ax_0$ so that $[y_0, z_0]$ belongs to the graph of g. This completes the proof.

The situation described in the preceding theorem could be characterized briefly by saying that T is open with respect to A. Indeed, if A happens to be the canonical quotient mapping modulo $T^{-1}(0)$ then the inequality $|Ax| \leqq \omega |Tx|$ reduces to $\varrho(x, T^{-1}(0)) \leqq \omega |Tx|$ which says that T is open.

In the sequel we shall investigate a situation which is, in a certain sense, intermediate between those described by (2,1) and (2,2). In the applications that we have in mind both A and T are continuous. Accordingly, we shall restrict ourselves to A and T in $L(E, F)$ although the majority of the results may be proved for closed mappings as well.

(2,3) *Let E, F and G be three Banach spaces and $A \in L(E, G)$, $T \in L(E, F)$. Let $\omega > 0$, $\alpha \geqq 0$; the following conditions are equivalent:*

1° $|Ax| \leqq \alpha |x| + \omega |Tx|$ *for each* $x \in E$

2° $A'(U_G^0) \subset T'(\omega U_F^0) + \alpha U_E^0$

3° *if* $x' \in A'(U_G^0)$, *then* $\varrho(x', T'(\omega U_F^0)) \leqq \alpha$.

Proof. To show that 1° implies 2°, let $x' \in A'(U_G^0)$ so that $x' = A'z'$ for some $z' \in G'$, $|z'| \leqq 1$. For each $x \in E$ $\langle x, x' \rangle = \langle x, A'z' \rangle = \langle Ax, z' \rangle \leqq$ $\leqq |Ax| \leqq \alpha |x| + \omega |Tx|$ whence $\langle x, x' \rangle - \alpha |x| \leqq \omega |Tx|$.

Let $x_i \in E$ and $\lambda_i \geqq 0$ be given. Then

$$\Sigma \lambda_i (\langle x_i, x' \rangle - \alpha |x_i|) = \langle \Sigma \lambda_i x_i, x' \rangle - \alpha \Sigma \lambda_i |x_i| \leqq$$
$$\leqq \langle \Sigma \lambda_i x_i, x' \rangle - \alpha |\Sigma \lambda_i x_i| \leqq \omega |T(\Sigma \lambda_i x_i)| .$$

It follows [6] that there exists a $y' \in F'$ such that $|y'| \leqq \omega$ and $\langle Tx, y' \rangle \geqq$ $\geqq \langle x, x' \rangle - \alpha |x|$. Taking $-x$ instead of x, we obtain

$$|\langle Tx, y' \rangle - \langle x, x' \rangle| \leqq \alpha |x|$$

or, in other words, $|T'y' - x'| \leqq \alpha$.

The implication 2° $\to$ 3° being obvious, assume 3° and let us prove 1°. Let $z' \in U_G^0$ be given and take an $\varepsilon > 0$. Then $A'z' \in A'(U_G^0)$ and, according to 3°, $A'z'$ may be written in the form $A'z' = T'y' + v'$ for some $y' \in F'$, $|y'| \leqq \omega$ and some $v' \in E'$ with $|v'| \leqq \alpha + \varepsilon$. Hence

$$\langle Ax, z' \rangle = \langle x, A'z' \rangle = \langle x, T'y' \rangle + \langle x, v' \rangle \leqq \omega |Tx| + (\alpha + \varepsilon) |x| .$$

Since z' was an arbitrary element of U_G^0, it follows that $|Ax| \leqq \omega|Tx| + (\alpha + \varepsilon)|x|$ for each $x \in E$ and each $\varepsilon > 0$ and this proves 1°.

(2,4) *For the sake of brevity we shall say that the pair* $[A, T]$ *is of type* (ω, α) *if one (and hence all) of the conditions of the preceding proposition is satisfied.*

(2,5) *Let* E, F *and* G *be three Banach spaces and* $T \in L(E, F)$, $A \in L(E, G)$. *Let* $\alpha \geqq 0$. *Then the following two conditions are equivalent*

4° *for each* $\beta > \alpha$ *the pair* $[A, T]$ *is of type* $(\omega(\beta), \beta)$ *for some* $\omega(\beta)$.

5° *if* $|x_n| \leqq 1$ *and* $Tx_n \to 0$ *then* $\limsup |Ax_n| \leqq \alpha$.

Proof. 4° → 5°. Let $\varepsilon > 0$ be given. Take a β such that $\alpha < \beta < \alpha + \frac{1}{2}\varepsilon$. Since $|Tx_n| \to 0$, there exists an n_0 such that $|Tx_n| \leqq \frac{\varepsilon}{2\omega(\beta)}$ for $n \geqq n_0$. Since $[A, T]$ is of type $(\omega(\beta), \beta)$, we have, for $n \geqq n_0$, $|Ax_n| \leqq \omega(\beta)|Tx_n| + \beta|x_n| \leqq \alpha + \varepsilon$.

5° → 4°. Let $\beta > \alpha$ be given. Suppose that $[A, T]$ is not of type (ω, β) for any ω. It follows that there exist $x_n \in E$ such that $|Ax_n| > n|Tx_n| + \beta|x_n|$. It follows that $x_n \neq 0$ so that we may assume $|x_n| = 1$. It follows that $|A| > n|Tx_n| + \beta$ whence $Tx_n \to 0$. We have thus $|x_n| = 1$ and $Tx_n \to 0$. By our assumption this implies $\limsup |Ax_n| \leqq \alpha$. We have, however, $|Ax_n| > \beta$ for each n. This is a contradiction which proves 4°.

At this point it is natural to ask the following question: suppose a pair $[A, T]$ is given such that, for each $\beta > \alpha$, there exists an $\omega(\beta)$ for which $[A, T]$ is of type $(\omega(\beta), \beta)$. Does it follow that $[A, T]$ is also of type $(\omega(\alpha), \alpha)$ for a suitable $\omega(\alpha)$? In this generality the question has to be answered in the negative. However, if we impose additional restrictions on A, we have the following result.

(2,6) *Suppose that the mapping* A *is open,*

$$\varrho(x, A^{-1}(0)) \leqq \sigma|Ax| .$$

Further, suppose that $A^{-1}(0) \subset T^{-1}(0)$. *Let* α *be such that* $0 \leqq \alpha$ *and* $\sigma\alpha < 1$. *Then the following conditions are equivalent.*

6° *for each* $\beta > \alpha$ *the pair* $[A, T]$ *is of type* $(\omega(\beta), \beta)$ *for some* $\omega(\beta)$

7° $[A, T]$ *is of type* $(\omega(\alpha), \alpha)$ *for some* $\omega(\alpha)$

8° $[A, T]$ *is of type* $(\omega(0), 0)$ *for some* $\omega(0)$

9° *if* $|x_n| \leqq 1$ *and* $Tx_n \to 0$ *then* $Ax_n \to 0$

10° *if* $|x_n| \leqq 1$ *and* $Tx_n \to 0$ *then* $\limsup |Ax_n| \leqq \alpha$.

Each of the conditions above implies $A^{-1}(0) = T^{-1}(0)$.

Proof. Let us show first that 6° implies 8°. Since $\alpha\sigma < 1$, there exists a $\beta > \alpha$ and a $\tau > \sigma$ so that $\beta\tau < 1$. Let $x \in E$ be given. Since A is open there exist an $\tilde{x} \in E$ such that $\tilde{x} - x \in A^{-1}(0)$ and $|\tilde{x}| \leqq \tau|Ax|$. Since $\tilde{x} - x \in A^{-1}(0) \subset T^{-1}(0)$, we have $A\tilde{x} = Ax$ and $T\tilde{x} = Tx$. It follows that

$$|Ax| = |A\tilde{x}| \leqq \omega(\beta)\,|T\tilde{x}| + \beta|\tilde{x}| \leqq \omega(\beta)\,|Tx| + \beta\tau|Ax|$$

whence $|Ax| \leqq \frac{\omega(\beta)}{1 - \beta\tau}\,|Tx|$.

The proof will be complete if we prove the following two chains of implications. 9° → 10° → 6° → 8° → 9° and 8° → 7° → 6°. The implication 10° → 6° is contained in (2,5) and we have just proved 6° → 8°. The remaining implications

are formal. If $Tx = 0$, it follows from 8° that $Ax = 0$. Hence $A^{-1}(0) = T^{-1}(0)$ and the proof is complete.

Further, it is easy to see that the assumptions of the preceding result imply that there exists a constant ϱ such that $|Tx| \leqq \varrho |Ax|$. This is immediate if T is continuous; if T is assumed closed only theorem (2,2) applies. Together with the preceding result this yields that $|Ax|$ and $|Tx|$ are equivalent.

The following result is, in a certain sense, the "limit case" of (2,3).

(2,7) *The following conditions are equivalent*

11° $T''^{-1}(0) \subset A''^{-1}(0)$

12° $A'G'$ *is contained in the norm closure of* $T'F'$

13° *if* $|x_n| \leqq 1$ *and* $Tx_n \to 0$ *then* $Ax_n \to 0$ *weakly.*

Each of the conditions above implies $T^{-1}(0) \subset A^{-1}(0)$.

Proof. The equivalence of 11° and 12° is immediate.

12° → 13°. Let $x_n \in E$ satisfy $|x_n| \leqq 1$ and $Tx_n \to 0$. Let $z' \in G'$ and an $\varepsilon > 0$ be given. According to 12°, there exists a $y' \in F'$ and a $v' \in E'$ such that $A'z' = T'y' + v'$ and $|v'| \leqq \frac{1}{2}\varepsilon$. follows that

$$\langle Ax_n, z' \rangle = \langle x_n, A'z' \rangle = \langle x_n, T'y' \rangle + \langle x_n, v' \rangle = \langle Tx_n, y' \rangle + \langle x_n, v' \rangle$$

whence $|\langle Ax_n, z' \rangle| \leqq |Tx_n|\,|y'| + \frac{1}{2}\varepsilon$ which proves 13°.

13° → 12°. Suppose that 13° is satisfied, let $z' \in G'$ and let $\varepsilon > 0$ be given. Suppose that $A'z'$ does not belong to $T'F' + \varepsilon U^0$. It follows that, for each natural n, the compact set $T'(nU_F^0) + \varepsilon U_E^0 + A'z'$ does not contain zero so that there exists an $x_n \in E$, $x_n \neq 0$ with

$$\langle x_n, T'(nU_F^0) + \varepsilon\, U_E^0 + A'z' \rangle \geqq 0\,.$$

We may clearly assume $|x_n| = 1$. It is not difficult to see that the inequality above implies

$$-n|Tx_n| - \varepsilon|x_n| + \langle x_n, A'z' \rangle \geqq 0$$

whence

$$|A|\,|z'| \geqq \langle Ax_n, z' \rangle = \langle x_n, A'z' \rangle \geqq n|Tx_n| + \varepsilon|x_n|\,.$$

We have thus $|x_n| = 1$ and $|Tx_n| \leqq \frac{1}{n}|A|\,|z'|$ so that, by our assumption, Ax_n converges weakly to zero. This is, however, a contradiction since

$$\langle Ax_n, z' \rangle \geqq \varepsilon|x_n| = \varepsilon\,.$$

Suppose that $Tx = 0$ and let $z' \in G'$ be given. Let ε be an arbitrary positive number. According to 12°, $A'z'$ may be written in the form $A'z' = T'y' + v'$ for some $v' \in E'$ with $|v'| \leqq \varepsilon$. Hence

$$\begin{aligned}\langle Ax, z' \rangle &= \langle x, A'z' \rangle = \langle x, T'y' \rangle + \langle x, v' \rangle \\ &= \langle Tx, y' \rangle + \langle x, v' \rangle = \langle x, v' \rangle \leqq |x|\,|v'| \leqq \varepsilon|x|\,.\end{aligned}$$

Since ε was arbitrary, it follows that $Ax = 0$. This proves the inclusion $T^{-1}(0) \subset A^{-1}(0)$.

(2,8) *We shall say that the pair* $[A, T]$ *is of type* $(\infty, 0)$ *if one (and hence all) of the conditions of the preceding proposition is satisfied.*

It is interesting to compare (2,7) and (2,2).

Let us consider now an important special case where A is the canonical quotient mapping modulo $T^{-1}(0)$. We have thus $A^{-1}(0) = T^{-1}(0)$ and clearly

$A'G' = T^{-1}(0)^0$. At the same time, we have $\sigma = 1$ in (2,6). Let us restate (2,6) and (2,7) for this particular case

(2,9) *Let E and F be two Banach spaces, $T \in L(E, F)$. Let $0 \leqq \alpha < 1$. Then the following conditions are equivalent.*

14° $\varrho(x, T^{-1}(0)) \leqq \alpha|x| + \omega|Tx|$ *for some* $\omega > 0$.

15° *T is open*

16° *if* $|x_n| \leqq 1$ *and* $Tx_n \to 0$ *then* $\varrho(x_n, T^{-1}(0)) \to 0$.

17° *if* $|x_n| \leqq 1$ *and* $Tx_n \to 0$ *then* $\limsup \varrho(x, T^{-1}(0)) \leqq \alpha$.

(2,10) *The following conditions are equivalent*

18° $T''^{-1}(0) \subset \sigma(E'', E')$*-closure of* $T^{-1}(0)$

19° $T^{-1}(0)^0$ *is contained (or equal to) the norm closure of* $T'F'$

20° *if* $|x_n| \leqq 1$ *and* $Tx_n \to 0$ *then* x_n *converges weakly to zero in* $E/T^{-1}(0)$.

We shall say that T is of type $(\infty, 0)$ if $[A, T]$ is of type $(\infty, 0)$, A being the canonical quotient mapping modulo $T^{-1}(0)$.

3. The results of the present remark have been obtained in the course of a study of some properties of distributions. The applications of these results will be collected in another communication.

In this section we intend to describe some particular cases as an illustration. First of all, we give examples to show that the types $(\omega(0), 0)$, $(\omega(\varepsilon), \varepsilon)$ and $(\infty, 0)$ are distinct. Another particular case which is of some interest is the case where A is compact or weakly compact.

(3,1) *An example of a pair $[A, T]$ which is of type $(\omega(\varepsilon), \varepsilon)$ for each $\varepsilon > 0$ but is not of type $(\omega(0), 0)$.*

Let p and u, v be three real numbers such that $p > u > v \geqq 1$. Let T be the closed segment $\langle 0, 1\rangle$. Put $E = L_p(T)$, $G = L_u(T)$, $F = L_v(T)$ and let A be the canonical embedding of E in G and T the canonical embedding of E in F. It is a well-known fact that the following implication holds: if $x_n \in E$, $|x_n| \leqq 1$ and $Tx_n \to 0$ then $Ax_n \to 0$. This fact is an easy consequence of the Hölder inequality. It follows from (2,5) that the pair $[A, T]$ is of type $(\omega(\varepsilon), \varepsilon)$ for each $\varepsilon > 0$. Suppose that $[A, T]$ is of type $(\omega(0), 0)$ for some $\omega(0)$. It follows that $|Ax| \leqq \omega(0)|Tx|$ for $x \in E$. Hence $|x|_u \leqq \omega(0)|x|_v$ for all $x \in L_p$ which is impossible since $u > v$.

(3,2) *An example of a pair $[A, T]$ which is of type $(\infty, 0)$ but not of type $(\omega(\varepsilon), \varepsilon)$ for any $\varepsilon < 1$.*

Let $E = G = F$ be the space c_0 of all sequences $x = \{x_n\}$ such that $\lim x_n = 0$ and $|x| = \max|x_n|$. Let A be the identity and let T be the operator of Cesaro summation: the relation $Tx = y$ is defined by $y_n = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$.

Let us show that the pair $[A, T]$ is of type $(\infty, 0)$ but not of type $(\omega(\varepsilon), \varepsilon)$ for any $0 < \varepsilon < 1$. Let $u \in F'$ and put $T'u = v$. It is not difficult to see that $v_i = \frac{1}{i} u_i + \frac{1}{i+1} u_{i+1} + \frac{1}{i+2} u_{i+2} + \cdots$ and $u_i = i(v_i - v_{i+1})$. It follows from this that every $v \in E'$ which has a finite number of nonzero coordinates only may be obtained in the form $T'u$ where $u \in F'$ is of the same type. It follows that $T'F'$ is norm-dense in $E' = A'G'$ so

that condition 12° of (2,7) is satisfied. Hence $[A, T]$ is of type $(\infty, 0)$. On the other hand, A is open with $\sigma = 1$. Suppose that $[A, T]$ is of type $(\omega(\varepsilon), \varepsilon)$ for some $0 < \varepsilon < 1$. According to (2,6), condition 8°, the mapping T satisfies $|x| \leqq \omega(0)\,|Tx|$ so that T is open, which is clearly impossible.

Since $[A, T]$ is of type $(\infty, 0)$ it follows from (2,7) and (2,6) that $|x_n| \leqq 1$ and $Tx_n \to 0$ implies the weak convergence of x_n to zero. On the other hand, since $[A, T]$ is not of type $(\omega(\varepsilon), \varepsilon)$ for any $\varepsilon < 1$, the facts $|x_n| \leqq 1$ and $Tx_n \to 0$ do not imply $\limsup |x_n| \leqq \varepsilon$ for any $\varepsilon < 1$. This can be illustrated best by the sequence of unit vectors e_n. (The vector e_n is defined by $e_{nk} = \delta_{nk}$). We have $|e_n| = 1$, $|Te_n| \leqq \frac{1}{n}$ and e_n tends to zero in the weak topology.

Since $[A, T]$ is of type $(\infty, 0)$, the space $T'F'$ is norm dense in E' by (2,7). Take an ε such that $0 < \varepsilon < 1$. It follows that $U^0 \subset T'F' + \varepsilon U^0$, U being the unit cell of E so that U^0 is contained in the union of $T'(k V^0) + \varepsilon U^0$. However, the inclusion $U^0 \subset T'(\omega V^0) + \varepsilon U^0$ does not hold for any ω. Indeed, by (2,3), this inclusion would imply that $[A, T]$ is of type (ω, ε) and we know already that this is not true. To illustrate this, consider the sequence f_n of unit vectors in E' (defined by the postulate $\langle e_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$). Clearly $f_n \in U^0$.

Suppose that $f_n \in T'(\omega V^0) + \varepsilon U^0$ for some $\omega > 0$. It follows that $f_n = T'u_n + z_n$ where $|u_n| \leqq \omega$ and $|z_n| \leqq \varepsilon$. If $v_n = f_n - z_n$, we have $v_n = T'u_n$ whence $u_{n,n} = n(v_{n,n} - v_{n,n+1}) = n(1 - z_{n,n} - z_{n,n+1}) \geqq n(1 - \varepsilon)$. Hence $\omega \geqq |u_n| \geqq |u_{n,n}| \geqq n(1 - \varepsilon)$ which is impossible if n is large enough.

(3,3) *Let E, F, G be three Banach spaces, $A \in L(E, G)$ and $T \in L(E, F)$. Suppose that*

1° *A is compact*

2° *The set of all pairs $[Tx, Ax]$ for $x \in E$ is the graph of a closable mapping in $F \times G$. Then $[A, T]$ is of type $(\omega(\varepsilon), \varepsilon)$ for each $\varepsilon > 0$.*

Proof. According to theorem (2,5) it suffices to prove the following implication: if $|x_n| \leqq 1$ and $Tx_n \to 0$ then $Ax_n \to 0$. Suppose, on the contrary, that $|Ax_n| \geqq \alpha > 0$ for $n \in R$ where R is an infinite set of indices. Since $|x_n| \leqq 1$ and the mapping A is compact, there exists an infinite subset $S \subset R$ such that the sequence Ax_n, $n \in S$ converges to some $z \in G$. We have thus, for $n \in S$, the following two relations: $Tx_n \to 0$ and $Ax_n \to z$. It follows from assumption 2° that $z = 0$. This, however, is a contradiction since all $|Ax_n| \geqq \alpha > 0$ for $n \in R \supset S$.

(3,4) *Let E, F, G be three Banach spaces, $A \in L(E, G)$ and $T \in L(E, F)$. Suppose that*

1° *A is weakly compact*

2° *the set of all pairs $[Tx, Ax]$ for $x \in E$ is the graph of a closable mapping in $F \times G$. Then $[A, T]$ is of type $(\infty, 0)$.*

Proof. Suppose that $|x_n| \leqq 1$ and $Tx_n \to 0$. Let R be an infinite set of natural numbers. Since $|x_n| \leqq 1$ and since A is weakly compact, there exists a weak cluster point z_0 of the sequence Ax_n, $n \in R$.

Now $Tx_n \to 0$ for $n \in R$ so that, by assumption 2°, the point z_0 has to be 0. Since R was an arbitrary subsequence of the sequence of natural numbers, it follows that Ax_n converges weakly to zero.

The assumption that A is weakly compact is automatically satisfied if A is the canonical quotient mapping modulo $T^{-1}(0)$ and E is reflexive. Hence, if E is reflexive, then every continuous mapping T of E into F is of type $(\infty, 0)$. It is not difficult to show that this property is characteristic for reflexivity. Indeed, we have the following (rather superficial) characterization of reflexivity.

(3,5) *Let E be a Banach space. Then the following statements are equivalent.*

1° *E is reflexive*

2° *if T is a continuous linear mapping of E into a Banach space F, then T is of type* $(\infty, 0)$

3° *if T is a continuous linear injection of E into a Banach space F, then T is of type* $(\infty, 0)$.

Proof. The implication $1° \to 2°$ is contained in the preceding proposition (3,4) and $2° \to 3°$ is immediate. To complete the proof, it suffices to produce, for a nonreflexive E, a continuous injection T into a suitable Banach space F such that T is not of type $(\infty, 0)$.

Let E be a nonreflexive Banach space and let V be the canonical injection of E into E''. Take an $r \in E''$ which is not in VE. Let R be the one dimensional subspace of E'' spanned by r and let Q be the canonical quotient mapping of E'' onto E''/R. Put $T = Q \circ V$. Clearly $T^{-1}(0) = 0$. On the other hand $T''r = 0$ so that condition 18° of (2,10) is violated. The proof is complete. See also theorem 3,3 of [1].

It is interesting to compare the preceding results, especially theorem (3,3), with different types of interpolation theorems. As an example, let us mention the following result which may be obtained as a consequence of (3,3) but which may also be deduced from the three circles theorem.

(3,6) *Let $0 < a < b < 1$. Then there exists, for each $\varepsilon > 0$, a number $\omega(\varepsilon) > 0$ with the following property: if x is a function continuous on the disk $|z| \leqq 1$ and holomorphic for $|z| < 1$ then*

$$|x|_b \leqq \varepsilon |x|_1 + \omega(\varepsilon)\, |x|_a$$

where $|x|_r$ is defined by the formula

$$|x|_r = \max_{|z| = r} |x(z)| \,.$$

References

[1] ALEXIEWICZ, A., and Z. SEMADENI: Some properties of two-norm spaces and a characterization of reflexivity of Banach spaces. Studia Math. **19**, 115—132 (1960).

[2] ARENS, R.: Operational calculus of linear relations. Pacific J. Math. **11**, 9—23 (1961).

[3] HÖRMANDER, L.: On the theory of general partial differential operators. Acta Math. **94**, 161—248 (1955).

[4] ORLICZ, W., and V. PTÁK: Some remarks on Saks spaces. Studia Math. **16**, 56—68 (1957).

[5] PTÁK, V.: On the closed graph theorem. Czech. Math. J. **84**, 523—527 (1959).

[6] — On a theorem of Mazur and Orlicz. Studia Math. **15**, 365—366 (1956).

(Received July 11, 1965)

KŌMURA, Y. and S. KOSHI
Math. Annalen 163, 105—110 (1966)

Nuclear Vector Lattices*

Dedicated to Professor GOTTFRIED KÖTHE on his sixtieth birthday at 25. 12. 1965

By

YUKIO KŌMURA and SHOZO KOSHI in Heidelberg

In this note, we study the structure of nuclear vector lattices. Our main result is the following: *every nuclear vector lattice is discrete as a vector lattice.* So every nuclear vector lattice is densely imbedded in a nuclear perfect (vollkommen in German) sequence space with countable or uncountable coordinates. Since the criterion of GROTHENDIECK-PIETSCH for the nuclearity of perfect spaces with countable coordinates is also suitable for the case of uncountable coordinates, we obtain a necessary and sufficient condition in order that a locally convex vector lattice is nuclear.

1. Locally convex vector lattices

Let E be a vector lattice. If an element a of E has the following property: $a = b + c$ and $|b| \cap |c| = 0$ imply always $b = 0$ or $c = 0$, then we call a an atomic element.

Lemma 1. *Let E be a finite dimensional vector lattice. Then E is generated by atomic elements.*

Proof. Let E be n-dimensional. For every element $a \in E$ with $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$, $|a_j| \cap |a_{j'}| = 0$, $a_j \neq 0$, we must have $n \geqq i$, because $\{a_j\}_{1 \leqq j \leqq i}$ is linearly independent system. Hence every element can be written as sum of atomic elements. Q. E. D.

A linear functional f on E is said to be *bounded*, if $\sup_{|y| \leqq x} |f(y)| < +\infty$ for every positive element $x \in E$, i.e. f is bounded on every interval $I_x = \{y; x \geqq y \geqq 0\}$ for a positive element $x \in E$. The totality of bounded linear functionals on E is denoted by E^*. E^* is considered as a complete vector lattice, if the order $f \geqq g$, $f, g \in E^*$ is defined by $f(x) \geqq g(x)$ for every positive element $x \in E$ [c.f. § 4]. A linear functional f on E is positive, when $f(x) \geqq 0$ for every positive element $x \in E$.

A semi-norm $p(x)$, which is defined on E, is said to be *V-semi-norm*, if

(a) $|x| \leqq |y|$ implies $p(x) \leqq p(y)$.

When a separative locally convex topology τ is given on E, which is generated by V-semi-norms, E is called a *locally convex vector lattice* and denoted by

* This work was supported by Stipendium of Alexander von Humboldt-Stiftung.

$E[\tau]$. $E'[\tau]$ denotes the dual space of $E[\tau]$, then $E'[\tau]$ is also a complete vector lattice and by (a) we have

$$E'[\tau] \subset E^* .$$

2. Nuclear vector lattices and the topology $o(E, E')$

Let $p(x)$ be a continuous semi-norm on $E[\tau]$. When we write $N_p = \{x; p(x) = 0\}$, then $p(x)$ is considered as a norm on $E/N_p = E_p$. For two continuous semi-norms $p(x)$ and $q(x)$, $p(x) \leqq q(x)$, there is defined a canonical mapping $E_q \to E_p$ which is continuous. We can extend this mapping to the mapping from $\widetilde{E}_q$ (completion of E_q with respect to $q(x)$) to $\widetilde{E}_p$ (completion of E_p with respect to $p(x)$).

A locally convex space is said to be *nuclear* if for every continuous semi-norm p, there exists a continuous semi-norm q with $p(x) \leqq q(x)$ for $x \in E$ such that $\widetilde{E}_q \to \widetilde{E}_p$ is nuclear [3]. We call a locally convex vector lattice $E[\tau]$ a *nuclear vector lattice* if the linear topology τ of E is nuclear at the same time.

A. PIETSCH [8] has shown that a locally convex vector space is nuclear if and only if every continuous semi-norm $p(x)$ is pre-nuclear, i.e. for some continuous semi-norm $q(x)$,

$$p(x) \leqq \int_{U_q^\circ} |\langle x, x' \rangle| \, d\mu ,$$

where U_q° is the polar set of $U_q = \{x; q(x) \leqq 1\}$ and μ is a Radon-measure on the weakly compact set U_q°. In a locally convex vector lattice E, the semi-norm $p_f(x) = f(|x|)$ is a V-semi-norm, where f is a positive linear functional on E being contained in $E'[\tau]$. The topology $o(E, E')$ is a locally convex topology generated by all $p_f(x)$ for positive linear functionals $f \in E'$.

Theorem 1. *The topology τ of nuclear vector lattice E is $o(E, E')$.*

Proof. For every continuous V-semi-norm $p(x)$, there exist a continuous V-semi-norm $q(x)$ and a positive Radon measure μ on U_q° with $p(x) \leqq \leqq \int_{U_q^\circ} |\langle x, x' \rangle| \, d\mu$, by the above criterion of PIETSCH.

Since U_q° is compact by $o(E', E)$, and since $\langle x, |x'| \rangle$ is a continuous function of x' by $o(E', E)$, $\langle x, |x'| \rangle$ is continuous on U_q° by the weak topology $\sigma(E)$ also. Hence

$$g(x) = \int_{U_q^\circ} \langle x, |x'| \rangle \, d\mu$$

exists, and is a positive linear functional. We have then

$$p(x) \leqq p_g(x) = g(|x|) \leqq \|\mu\| \, q(x) .$$

Hence $\tau \leqq o(E, E')$. But $\tau \geqq o(E, E')$ is clear.

This theorem is proved by PIETSCH under some additional condition in [7].

Corollary. *Every equi-continuous set of a nuclear vector lattice is contained in an interval $I = \{g; f \geqq g \geqq -f\}$ for some positive continuous linear functional f on $E[\tau]$.*

Proof. Every equi-continuous set of E is contained in some U_f°, a polar set of $U_f = \{x; f(|x|) \leqq 1\}$, where $0 \leqq f \in E'$, by above theorem. If $f(x) \leqq 1$ for positive element x, then $|g(x)| \leqq 1$ for $g \in U_f^\circ$, i.e. $U_f^\circ \subset \{g; f \geqq g \geqq -f\}$.

3. Completion of nuclear vector lattices

By virtue of Grothendieck's theorem, the completion $\tilde{E}$ of a locally convex vector space $E[\tau]$ is the totality of linear functionals on $E'[\tau]$, which are weakly continuous on every equi-continuous set of $E'[\tau]$.

Theorem 2. *Let E be a nuclear vector lattice. The completion $\tilde{E}$ of $E[\tau]$ coincides with E'^* i.e. the totality of linear functionals on $E'[\tau]$ which are bounded on every interval $I_f = \{g; f \geqq g \geqq 0\}$ of $E'[\tau]$.*

Proof. For every equi-continuous set $A = \{x; p(x) \leqq 1\}^\circ = U_p^\circ =$ the polar set of U_p, there exists an equi-continuous set $B = \{x; q(x) \leqq 1\}^\circ \supset A$ such that the canonical mapping from E'_A (a Banach space which is the linear subspace of E' generated by A, where the norm is induced by A) to E'_B is compact. Hence the bounded set A of E'_A is compact for the norm topology of E'_B.

Let f^* be an element of E'^*. Then f^* is bounded on all intervals $I = \{g; f \geqq g \geqq -f\}$ and by the Corollary of Theorem 1, f^* is always bounded on every equi-continuous set. Hence f^* is bounded on B and so continuous on E'_B for the norm topology induced by B. f^* is also continuous on $A \subset E'_B$. Since A is compact for the norm topology of E'_B, and since the weak topology $\sigma(E)$ on E'_B by E is separative and weaker than the norm topology, these two topologies coincide on A. Hence f^* is continuous on A with respect to $\sigma(E)$, i.e. $f^* \in \tilde{E}$. Conversely, if $f^* \in \tilde{E}$, then f^* is bounded on every equi-continuous set in $E'[\tau]$ and by Theorem 1, f^* is also bounded on every interval $[g; f \geqq g \geqq -f]$ i.e. $f^* \in E'^*$.

When $E[\tau]$ is nuclear, the completion $\tilde{E}$ of $E[\tau]$ is also nuclear. Since E'^* is a complete vector lattice (c.f. [6]), we have

Corollary. *Every nuclear vector lattice is imbedded in a complete vector lattice which is also nuclear and complete in the sense of linear topology.*

4. Complete vector lattices

Let E be a complete vector lattice; i.e. for every system of positive elements $x_\lambda \in E (\lambda \in \Lambda)$, there exists always the infimum $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$ of the system $\{x_\lambda\}$. A linear subspace N of E is called a *normal linear lattice* if

(1) $x \in N$, $|x| \geqq |y|$ implies $y \in N$,

(2) If $x_\lambda \in N$, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = x$ exists in E, then $x \in N$.

For a normal linear lattice N, we can decompose E into $E = N \oplus N^\perp$, where $N^\perp$ is the set of elements orthogonal to N, i.e. $N^\perp = \{x; |x| \cap |y| = 0$ for every $y \in N\}$. $N^\perp$ is also a normal linear lattice. We can decompose E into $E = A \oplus A^\perp$, where A is the normal linear lattice generated by all atomic elements of E and $A^\perp$ is the normal linear lattice orthogonal to A, i.e. $A^\perp = \{x; |x| \cap |y| = 0$ for every $y \in A\}$.

If $E = A$ or $A^\perp = \{0\}$, then we call E *discrete*. A semi-norm $p(x)$ on E, is said to be *C-semi-norm*, if

(a) $|x| \leqq |y|$ implies $p(x) \leqq p(y)$,

(b) $x_\lambda \downarrow_{\lambda \in \Lambda} 0$ (it means a directed system of positive elements x_λ in respect to the order with $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = 0$) implies $\inf_{\lambda \in \Lambda} p(x_\lambda) = 0$.

We write $N_p = \{x; p(x) = 0\}$ for a C-semi-norm $p(x)$. Then N_p is a normal linear lattice. Since $E = N_p \oplus N_p^\perp$, $E/N_p = E_p$ is isomorphic to $N_p^\perp$ as a locally convex vector lattice and $p(x)$ is considered as a norm on $N_p^\perp$.

Lemma 2. *A continuous V-semi-norm in a nuclear vector lattice is always a C-semi-norm.*

Proof. Let p be a continuous V-semi-norm on a nuclear vector lattice E. Then the completion $\tilde{E}$ of E is also a nuclear vector lattice and the continuous extension $\tilde{p}$ of p on $\tilde{E}$ is a continuous V-semi-norm. Since an interval $\{x; x_{\lambda_0} \geqq x \geqq 0\}$ in $\tilde{E}$ is bounded and closed, and since a complete nuclear space is a Montel space, the interval is compact. When $x_\lambda \downarrow_{\lambda \in \Lambda} 0$ in E, we have $x_\lambda \downarrow_{\lambda \in \Lambda} 0$ in $\tilde{E} = E'^*$. In fact, if for a positive element $0 < x_0 \in E'^*$ the relation $x_\lambda \geqq x_0 (\lambda \in \Lambda)$ holds good, we have $\varepsilon x \geqq x_0$ for any positive number $\varepsilon > 0$ and $x > 0, \in E$, because $x = x \cup \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (x \cup x_\lambda) \geqq x_0$ holds for $x > 0, \in E$. On the other hand, we have $f(x_0) > 0$ for some positive $f \in E'$, since $x_0 \in E'^*$ and $x_0 > 0$. This contradicts the relation $\varepsilon x \geqq x_0$, for every positive number $\varepsilon > 0$ and positive elements $x \in E$. Since each interval $I_\lambda = \{x \mid 0 \leqq x \leqq x_\lambda, x \in \tilde{E}\}$, $\lambda \in \Lambda$, is compact, the filter generated by I_λ has at least one cluster point. Let a be a cluster point of the filter. Then a belongs to every interval I_λ, since I_λ is closed; so $0 \leqq a \leqq x_\lambda$ for every $\lambda \in \Lambda$ i.e. $a = 0$. If a filter in a compact set has only one cluster point, the filter must converge to the cluster point. Hence $x_\lambda \to 0$ in the sense of topology, if $x_\lambda \downarrow_{\lambda \in \Lambda} 0$ in the sense of order. This implies $\tilde{p}(x_\lambda) \to 0$, that is, $p(x_\lambda) \to 0$.

Corollary. *Let E be a nuclear vector lattice. Then every continuous linear functional f on E is order-continuous, i.e. $f(x_\lambda) \to 0$ for $x_\lambda \downarrow_{\lambda \in \Lambda} 0$, $x_\lambda \in E$.*

5. Main theorem

Theorem 3. *Every nuclear complete vector lattice $E[\tau]$ is discrete.*

Proof. Let $E = A \oplus A^\perp$, where A is the atomic part and $A^\perp$ is the non-atomic part. It is only necessary to show that $A^\perp = \{0\}$. If $A^\perp \neq \{0\}$, then every normal linear lattice in $A^\perp$ different from $\{0\}$ is not finite-dimensional by Lemma 1. For simplicity, we can put $A^\perp = E$, because $A^\perp$ is a closed normal linear lattice and so $A^\perp$ is a nuclear complete vector lattice. By Lemma 2, there exist continuous C-semi-norms $p(x)$, $q(x)$ with $E_p \neq \{0\}$ and $p(x) \leqq \leqq q(x)$ such that $\widetilde{E_q} \to \widetilde{E_p}$ is nuclear. By Theorem 1, we can suppose $p(x) = f(|x|)$ and $q(x) = g(|x|)$, where $g \geqq f \geqq 0, f, g \in E'$ and $f \neq 0$. By the discussion in § 4, $E_q(E_p)$ is isomorphic to $N_q^\perp (N_p^\perp)$ and $N_q^\perp \supset N_p^\perp$. $g(|x|) = 0$, $x \in N_q^\perp$ implies $x = 0$. Since $f > 0$, there exists a positive number λ with $h = (\lambda f - g) \cup 0 > 0$. If we set $M = \{x; h(|x|) = 0\}$, then $M^\perp$ is not $\{0\}$ and

$M^{\perp} \subset N_p^{\perp}$, i.e. $\lambda f(|x|) \geqq g(|x|) > 0$ for non-zero $x \in M^{\perp}$. Since $\widetilde{E}_q \to \widetilde{E}_p$ is nuclear, the unit sphere of $M^{\perp}$ by $q(x) = g(|x|)$ is relative compact in $\widetilde{E}_p$, and so in $\widetilde{E}_q$ also. Hence the normed space $M^{\perp}$ is finite-dimensional. This is a contradiction. Q. E. D.

By this theorem, using Zorn's lemma, every nuclear vector lattice can be considered as a generalized sequence space. (The density of basis of this space is not necessarily countable.)

6. Perfect spaces with countable or uncountable coordinates

Let A be an arbitrary set of indices. We denote by $\omega(A)$ the totality of generalized sequences $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ of real numbers. For a subset Λ of $\omega(A)$, we define the dual $\Lambda^{\times}$ in the sense of KÖTHE (c.f. [4, § 30]) as follows:

$$\Lambda^{\times} = \{(x_\alpha) \in \omega(A); \sum_{\alpha} |x_\alpha y_\alpha| < \infty \quad \text{for every} \quad (y_\alpha) \in \Lambda\} .$$

We call Λ *perfect* if $\Lambda = \Lambda^{\times\times}$. Our perfect space has similar properties as a perfect space with countable coordinates, for instance: a perfect space Λ is complete with respect to the Mackey topology $\tau(\Lambda^{\times})$ and sequentially complete with respect to the weak topology $\sigma(\Lambda^{\times})$. A sequence space Λ is called *normal*, if $|x_\alpha| \leqq |a_\alpha|$ for some $(a_\alpha) \in \Lambda$ implies $(x_\alpha) \in \Lambda$. A perfect space is evidently normal.

We give a generalization of the criterion of GROTHENDIECK-PIETSCH (c.f. [3, Chap. II, Prop. 8], [9, Th. 3]), in order that a perfect space is nuclear, as follows:

Lemma 3. *A perfect space Λ is nuclear with respect to the topology $o(\Lambda, \Lambda')$, where Λ' is a normal subspace of $\Lambda^{\times}$, if and only if for any $(a_\alpha) \in \Lambda'$ there exists an element $(b_\alpha) \in \Lambda'$ such that $\sum_{\alpha} \left|\frac{a_\alpha}{b_\alpha}\right| < \infty$.* (Here $\left|\frac{a_\alpha}{b_\alpha}\right|$ means 0 if $a_\alpha = b_\alpha = 0$, and ∞ if $a_\alpha \neq 0$, $b_\alpha = 0$.)

Proof. Let Λ be nuclear. Then a closed equi-continuous set in Λ' is metrizable compact. Hence for an element $(a_\alpha) \in \Lambda'$, the set $A_0 = \{\alpha; a_\alpha \neq 0\}$ is countable, since the subset $\{(x_\alpha); |x_\alpha| \leqq |a_\alpha|\}$ is equi-continuous. We denote by $\Lambda(A_0)$ (or $\Lambda'(A_0)$) the image of Λ (or Λ') by the projection: $\omega(A) \to \omega(A_0)$. Then $\Lambda(A_0)$ is isomorphic to a closed subspace of Λ, and so it is also nuclear. By the criterion of GROTHENDIECK-PIETSCH, there exists an element $(\tilde{b}_\alpha)_{\alpha \in A_0} \in \Lambda'(A_0)$ such that $\sum_{\alpha \in A_0} \left|\frac{a_\alpha}{\tilde{b}_\alpha}\right| < \infty$. Let (b_α) be an element of $\omega(A)$ such that $b_\alpha = \tilde{b}_\alpha$ for $\alpha \in A_0$, $= 0$ for $\alpha \notin A_0$. Then (b_α) is contained in Λ' and satisfies our requirement. The converse is quite similar as in the case of countable coordinates. Q. E. D.

Let E be a nuclear vector lattice. Then the completion $\tilde{E}$ of E is isomorphic to a sequence space $\Lambda(\subset \omega(A))$ with a suitable topology τ by Theorem 3, and E' is isomorphic to a normal subspace of $\Lambda^{\times}$, i.e. $\Lambda[\tau]' \subset \Lambda^{\times}$ by Corollary of Lemma 2. Since $\tilde{E} = E'^{*}$ by Theorem 2, we have

$$\Lambda = \Lambda'^{*} \supset \Lambda'^{*} \cap \omega(A) = \Lambda'^{\times} .$$

On the other hand, the relation $\Lambda \subset \Lambda'^{\times}$ is trivial. In conclusion, $\Lambda = \Lambda'^{\times}$ i.e. Λ is perfect. Morevoer the topology of E is $o(E, E')$ by Theorem 1, so the topology τ of Λ is $o(\Lambda, \Lambda')$. Thus we have

Theorem 4. *A locally convex lattice E is nuclear if and only if there exist a perfect space Λ and a total normal subspace Λ' of $\Lambda^{\times}$ satisfying the following three conditions:*

1. $\Lambda = \Lambda'^{\times}$.
2. *For any element $(a_\alpha) \in \Lambda'$, there exists an element $(b_\alpha) \in \Lambda'$ such that* $\sum_\alpha \left|\frac{a_\alpha}{b_\alpha}\right| < \infty$.
3. *The completion $\tilde{E}$ of E is isomorphic to Λ with the topology $o(\Lambda, \Lambda')$.*

References

[1] AMEMIYA, I., and T. MORI: Topological structure in ordered linear spaces. J. Math. Soc. Jap. **9**, 131—142 (1957).
[2] BIRKHOFF, G.: Lattice theory. New York 1948.
[3] GROTHENDIECK, A.: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Am. Math. Soc. **16** (1955).
[4] KÖTHE, G.: Topologische Lineare Räume I. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.
[5] MITYAGIN, B. S.: Approximate dimension and bases in nuclear spaces. Uspechi Math. Nauk **16**: 4, 69—132 (1961).
[6] NAKANO, H.: Linear topologies on semi-ordered linear space. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I **12**, 87—104 (1953).
[7] PIETSCH, A.: Absolute Summierbarkeit in Vektorverbänden. Math. Nachr. **26**, 15—23 (1963).
[8] — Eine neue Charakterisierung der nuklearen lokalkonvexen Räume I, II. Math. Nachr. **25**, 31—36, 49—58 (1963).
[9] — Zur Theorie der topologischen Tensorprodukte, Math. Nachr. **25**, 19—30 (1963).

(Received June 12, 1965)

LEPTIN, H.
Math. Annalen 163, 111—117 (1966)

Faltungen von Borelschen Maßen mit L^p-Funktionen auf lokal kompakten Gruppen

Herrn G. KÖTHE zum 60. Geburtstag am 25. 12. 1965 gewidmet

Von

HORST LEPTIN in Heidelberg

Sei G eine lokal kompakte Gruppe mit linksinvariantem Haarschen Maß dx und $\mathfrak{L}^p(G)$ der Banachsche Raum der Klassen p-integrierbarer komplexwertiger Borelscher Funktionen auf G. Ist μ ein beschränktes reguläres Borelsches Maß auf G, so ist durch die Faltung

$$(\mu * f)(x) = \int_G f(y^{-1}x)\, d\mu(y) \tag{1}$$

für jedes $f \in \mathfrak{L}^p = \mathfrak{L}^p(G)$ eine Funktion $\mu * f$ aus $\mathfrak{L}^p$ definiert, und es gilt für die p-Normen die Ungleichung $|\mu * f|_p \leqq |\mu| \cdot |f|_p$, wenn $|\mu|$ die Norm von μ ist, siehe [1], Theorem 20.12, p. 292. Durch $f \to \mu * f$ ist also ein beschränkter Endomorphismus T_μ von $\mathfrak{L}^p$ definiert, der überdies mit den Rechtstranslationen $f \to f_a$, $f_a(x) = f(xa^{-1})$, vertauschbar ist.

Nun sei μ ein beliebiges reguläres positives, jedoch nicht notwendig endliches Maß. Die Formel (1) definiert dann ebenfalls für gewisse Funktionen f Borelsche Funktionen $\mu * f$. Ist f eine dx-Nullfunktion, so auch $\mu * f$. Wir definieren nun:

Das positive reguläre Borelsche Maß μ heißt p-zulässig, wenn aus $f \in \mathfrak{L}^p$ stets $\mu * f \in \mathfrak{L}^p$ folgt.

Jedes beschränkte Maß ist p-zulässig für beliebiges $p \geqq 1$. Wir werden gleich sehen, daß umgekehrt jedes 1-zulässige Maß auch beschränkt ist. Dagegen scheint es ein offenes Problem zu sein, ob lokal kompakte Gruppen existieren, welche für ein $p > 1$ nicht beschränkte p-zulässige Borelsche Maße besitzen. Wir definieren deshalb:

G heißt K_p-Gruppe, wenn jedes p-zulässige positive Maß auf G beschränkt ist, und K-Gruppe, wenn es K_p-Gruppe für jedes $p \geqq 1$ ist.

Jede lokal kompakte Gruppe ist eine K_1-Gruppe und jede kompakte Gruppe trivialerweise eine K-Gruppe. Wir werden zeigen, daß z. B. jedes abelsche G eine K-Gruppe ist, ferner jedes diskrete lokal endliche G. Es ist also nicht unsinnig zu vermuten, daß jede lokal kompakte Gruppe eine K-Gruppe ist. Unser Problem hängt eng zusammen mit den in [2], [3], [4] untersuchten Fragen:

G heiße L_p-Gruppe, wenn $\mathfrak{L}^p$ bezüglich der Faltung abgeschlossen ist, wenn also für $f, g \in \mathfrak{L}^p(G)$ die Faltung $f * g$ definiert ist und wieder in $\mathfrak{L}^p$ liegt. Ist G sowohl eine K_p-Gruppe als auch eine L_p-Gruppe, $p > 1$, so ist G kompakt.

Sei nämlich $f \in \mathfrak{L}^p$ und $f > 0$. Das Maß $\mu_f = f dx$ ist dann p-zulässig, also beschränkt, d. h. $f \in \mathfrak{L}^1$. Folglich liegt $\mathfrak{L}^p$ in $\mathfrak{L}^1$, und hieraus folgt sofort die Kompaktheit von G, siehe [2].

Wie in [4] gezeigt wurde, ist jede L_p-Gruppe unimodular und jede L_p-Gruppe mit $p > 2$ kompakt.

Wir wollen nun zunächst zeigen, daß der durch ein p-zulässiges Maß μ definierte Endomorphismus T_μ von $\mathfrak{L}^p$ beschränkt ist. Das kann man genauso beweisen wie Lemma 4 aus [4], wir geben aber einen anderen Beweis, und zwar zeigen wir, daß T_μ einen adjungierten Operator $T_\mu^* : (\mathfrak{L}^p)' = \mathfrak{L}^q \to \mathfrak{L}^q$ besitzt, $q = \frac{p}{p-1}$. Daraus folgt nach bekannten Sätzen dann die Beschränktheit von T_μ und T_μ^*.

(2) **Lemma.** *Sei X ein lokal kompakter Raum mit einem positiven regulären Borelmaß σ. Sei $p > 1$ und $q = \frac{p}{p-1}$, also $\mathfrak{L}^q(X, \sigma) = \mathfrak{L}^p(X, \sigma)'$ der zu $\mathfrak{L}^p(X, \sigma)$ duale Raum.*

Ist g eine nicht negative Borelsche Funktion auf X und

$$(f \mid g) = \int_X f(x)\, g(x)\, d\sigma(x) < \infty$$

für jedes $f \geqq 0$ aus $\mathfrak{L}^p(X, \sigma)$, so gilt $g \in \mathfrak{L}^q(X, \sigma)$.

Beweis: Wäre $g \notin \mathfrak{L}^q$, so wäre $\int_X g^q\, d\sigma = \infty$, und es gäbe eine Folge $\{K_i\}_{i=1,2,\ldots}$ paarweise disjunkter kompakter Teilmengen mit

$$1 < \int_{K_i} g(x)^q\, d\sigma(x) < \infty\,.$$

Ist σ_i die Einschränkung von σ auf K_i, so ist $\mathfrak{L}^q(K_i, \sigma_i)' = \mathfrak{L}^p(K_i, \sigma_i)$ und folglich können wir ein $f_i \geqq 0$ in $\mathfrak{L}^p(K_i, \sigma_i)$ finden mit

$$\int_{K_i} f_i(x)^p\, d\sigma_i(x) \leqq 1\,, \quad \int_{K_i} f_i(x)\, g(x)\, d\sigma_i(x) = 1\,.$$

Wir erweitern f_i auf x, indem wir $f_i(x) = 0$ für $x \notin K_i$ setzen. Setzen wir nun $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} f_i(x)$, so ist $f \geqq 0$ Borelsch und liegt wegen

$$\int_X f(x)^p\, d\sigma = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p} \int_{K_i} f_i^p\, d\sigma_i \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p} < \infty$$

in $\mathfrak{L}^p(X, \sigma)$. Schließlich ist

$$(f \mid g) = \int_X f(x)\, g(x)\, d\sigma(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{K_i} f_i(x)\, g(x)\, d\sigma_i(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty\,.$$

Man kann auch dieses Lemma wie Lemma 4 in [4] beweisen. Übrigens gilt es auch für $p = 1$, $q = \infty$:

Ist $\int f(x)\, g(x)\, d\sigma(x) < \infty$ für jedes $f \geqq 0$ aus $\mathfrak{L}^1$, so ist g aus $\mathfrak{L}^\infty(X, \sigma)$. Den Beweis überlassen wir dem Leser.

(3) **Folgerung:** *Sei* $1 \leqq p_1, p_2 < \infty$ *und* μ *ein positives reguläres Borelsches Maß auf* G. *Liegt für jedes* $f \geqq 0$ *aus* $\mathfrak{L}^{p_1}(G)$ *die Faltung* $\mu * f$ *in* $\mathfrak{L}^{p_2}(G)$, *so ist* $T_\mu : f \to \mu * f$ *eine beschränkte lineare Abbildung von* $\mathfrak{L}^{p_1}$ *in* $\mathfrak{L}^{p_2}$.

Beweis: Für $g \geqq 0$ aus $\mathfrak{L}^{q_2}(G)$, $q_2 = \dfrac{p_2}{p_2 - 1}$, bzw. $q_2 = \infty$ für $p_2 = 1$, gilt für positives f aus $\mathfrak{L}^{p_1}$:

$$\begin{aligned}(\mu * f \mid g) &= \int\int f(y^{-1}x)\, g(x)\, d\mu(y)\, dx \\ &= \int\int f(x)\, g(yx)\, d\mu(y)\, dx = (f \mid \mu^* * g) < \infty\end{aligned}$$

mit $\mu^*(y) = \mu(y^{-1})$. Es folgt $\mu^* * g \in \mathfrak{L}^{q_1}$, also definiert μ^* eine adjungierte Abbildung $T_{\mu^*} = T_\mu^*$ von $\mathfrak{L}^{q_2}$ in $\mathfrak{L}^{q_1}$. Daraus folgt die Behauptung.

Für $p_1 = p_2$:

(4) *Ist* $\mu \geqq 0$ p*-zulässig, so ist* T_μ *ein beschränkter Endomorphismus von* $\mathfrak{L}^p$.

Wir geben nun drei Bedingungen an, die alle gewährleisten, daß G eine K_p-Gruppe ist. Mit $|X|$ bezeichnen wir das Haarsche Maß der Borelschen Menge X. Eine integrierbare Menge in G ist eine Borelsche Menge endlichen Haarschen Maßes.

(A_p) *Es existiert eine Zahl* $A > 0$, *so daß zu jedem kompakten* K *aus* G *integrierbare Mengen* U *und* V *existieren mit* $|U| > 0$, $|V| > 0$ *und*

$$\frac{|U|^{\frac{1}{p}} \cdot |V|^{\frac{1}{q}}}{|yU \cap V|} \leqq A \quad \text{für} \quad y \in K, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

(B) *Es existiert eine Zahl* $B > 0$, *so daß zu jedem kompakten* K *aus* G *eine integrierbare Menge* U *existiert mit* $|U| > 0$ *und*

$$\frac{|U|}{|yU \cap U|} \leqq B \quad \text{für} \quad y \in K\,.$$

(C) *Es existiert eine Zahl* $C > 0$, *so daß zu jedem kompakten* K *aus* G *eine integrierbare Menge* U *mit* $|U| > 0$ *und*

$$\frac{|KU|}{|U|} < C$$

existiert.

Offensichtlich folgt (A_p) für jedes $p > 1$ aus (B). Ist U wie in (C) und setzen wir $V = KU$, so folgt für $y \in K$:

$$\frac{|U|^{\frac{1}{p}} |V|^{\frac{1}{q}}}{|yU \cap V|} = \frac{|U|^{\frac{1}{p}} |V|^{\frac{1}{q}}}{|yU|} = |U|^{\frac{1}{p} - 1} |V|^{\frac{1}{q}} = \left(\frac{|KU|}{|U|}\right)^{\frac{1}{q}},$$

gilt also (C) mit der Schranke C, so folgt (A_p) mit $A = C^{\frac{1}{q}}$.

Für $p = 1$ ist $\dfrac{1}{q} = 0$, und wir erhalten die Bedingung (A_1): $|U|\,|yU \cap V|^{-1} \leqq$ $\leqq A_1$ für $y \in K$, die mit $A_1 = 1$ und $V = KU$, U beliebig mit $|U| > 0$ für jede lokal kompakte Gruppe erfüllt ist. Der folgende Beweis gilt auch in diesem Fall, jede lokal kompakte Gruppe ist also eine K_1-Gruppe.

(5) *Genügt* G *der Bedingung* (A_p), *so ist* G *eine* K_p*-Gruppe.*

Beweis: Sei μ p-zulässig und etwa $|T_\mu| \leqq 1$. Mit χ_X bezeichnen wir die charakteristische Funktion einer Menge X. Sei $K \subset G$ kompakt und U und V

wie in (A_p). Für $f = |U|^{-\frac{1}{p}} \chi_U$ und $g = |V|^{-\frac{1}{q}} \chi_V$ gilt dann $|f|_p = 1$, $|g|_q = 1$, also

$$\mu(K) \inf_{y \in K} |yU \cap V| \leqq \int_K |yU \cap V| \, d\mu(y) \leqq$$

$$\leqq |U|^{\frac{1}{p}} |V|^{\frac{1}{q}} \int_G \frac{|yU \cap V|}{|U|^{\frac{1}{p}} |V|^{\frac{1}{q}}} \, d\mu(y)$$

$$= |U|^{\frac{1}{p}} |V|^{\frac{1}{q}} \int \int f(y^{-1}x) \, g(x) \, dx \, d\mu(y)$$

$$= |U|^{\frac{1}{p}} |V|^{\frac{1}{q}} \int (\mu * f)(x) \, g(x) \, dx = |U|^{\frac{1}{p}} |V|^{\frac{1}{q}} (\mu * f | g) \leqq$$

$$\leqq |U|^{\frac{1}{p}} |V|^{\frac{1}{q}} |T_\mu| \, |f|_p \, |g|_q \leqq |U|^{\frac{1}{p}} |V|^{\frac{1}{q}},$$

also

$$\mu(K) \leqq \frac{|U|^{\frac{1}{p}} |V|^{\frac{1}{q}}}{\inf_K |yU \cap V|} \leqq A_p \,,$$

d. h. $|\mu| \leqq A_p$.

(6) **Folgerung:** *Genügt G der Bedingung (B) oder der Bedingung (C), so ist G eine K-Gruppe.*

Welche Gruppen genügen nun den Bedingungen (B) und (C)? Eine einfache Rechnung zeigt:

(7) *Die Gruppe* $\mathbf{R}$ *der reellen Zahlen und die Gruppe* $\mathbf{Z}$ *der ganzen Zahlen genügt den Bedingungen (B) und (C). Für die Konstanten B und C kann man beliebige Zahlen > 1 wählen.*

Ebenso einfach:

(8) *Erzeugt jeder kompakte Teil von G eine kompakte Untergruppe, so genügt G den Bedingungen (B) und (C).*

Ist nämlich $K \subset G$ kompakt, so liegt K in einer kompakten Untergruppe U mit $|U| > 0$.

Es folgt für $y \in K$

$$\frac{|U|}{|yU \cap U|} = \frac{|U|}{|U|} = 1, \quad \frac{|KU|}{|U|} = \frac{|U|}{|U|} = 1 \,.$$

Zu den in (8) genannten Gruppen gehören insbesondere die lokal endlichen diskreten Gruppen.

(9) *Genügen die Gruppen G und H der Bedingung (B), bzw. der Bedingung (C), so auch ihr direktes Produkt $G \times H$.*

Beweis: Genügen G und H der Bedingung (B), etwa mit den Schranken B_1 und B_2, so gilt (B) in $G \times H$ mit $B = B_1 \cdot B_2$. Sei nämlich K kompakt in $G \times H$. Es existieren kompakte Mengen $L \subset G$, $M \subset H$ mit $K \subset L \times M$. Ist

$U \subset G$ und $V \subset H$ mit $\frac{|U|}{|yU \cap U|} \leqq B_1$ für $y \in L$, $\frac{|V|}{|zV \cap V|} \leqq B_2$ für $z \in M$, so folgt für $x = (y, z) \subset L \times M = K'$:

$$\frac{|U \times V|}{|x(U \times V) \cap U \times V|} = \frac{|U \times V|}{|(yU \cap U) \times (zV \cap V)|} = \frac{|U| \cdot |V|}{|yU \cap U| \cdot |zV \cap V|} \leqq B_1 \cdot B_2 = B.$$

Der Fall der Bedingung (C) geht ähnlich.

(10) *Ist H ein kompakter Normalteiler in G und genügt $\overline{G} = G/H$ der Bedingung (B), bzw. (C), so auch G.*

Wir können das Maß so normieren, daß eine Borelsche Menge $B \subset G$ mit $BH = B$ in G dasselbe Maß hat wie ihr Bild $\overline{B} = B/H$ in $\overline{G}$. Sei K_0 kompakt in G und $K = K_0 H$. Dann ist $\overline{K} = K/H$ kompakt in $\overline{G}$, und es gibt, falls $\overline{G}$ der Bedingung (C) genügt, eine Borelmenge $\overline{U} = U/H$ mit $\frac{|\overline{K}\,\overline{U}|}{|\overline{U}|} = \frac{|\overline{KU}|}{|\overline{U}|} < C$. Da $|U| = |\overline{U}|$ usw. und $K_0 U \subset KU$, folgt $\frac{|K_0 U|}{|U|} < C$.

Ähnlich behandelt man den Fall der Bedingung (B). Aus (7), (9) und (10) folgt

(11) *Jede abelsche lokal kompakte Gruppe G genügt den Bedingungen (B) und (C), ist also eine K-Gruppe.*

Beweis: Nach bekannten Sätzen ist G direktes Produkt endlich vieler zu $\mathbf{R}$ isomorpher Gruppen und einer Gruppe H mit kompakter offener Untergruppe K. Wegen (7), (9) und (10) brauchen wir also nur zu zeigen, daß die diskrete abelsche Gruppe $D = H/K$ den fraglichen Bedingungen genügt. Sei M in D kompakt, d. h. endlich. Die von M erzeugte Untergruppe L ist dann eine endliche direkte Summe zyklischer Gruppen, genügt nach (7), (8) und (9) also den Bedingungen (B) und (C), und zwar mit Konstanten B und C, die von L unabhängig sind, etwa $B = C = 2$. Folglich kann man in (B) und (C) die Mengen U zu M geeignet in L wählen.

Als Beispiel einer nicht abelschen K-Gruppe behandeln wir die Gruppe G der linearen Transformationen der reellen Achse mit positiver Determinante. Wir können G topologisch mit der offenen oberen Halbebene identifizieren. Das Produkt ist definiert durch

$$(x, y)\,(u, v) = (xu, xv + y)\,,$$

das linksinvariante Haarsche Maß ist $x^{-2}\,dx\,dy = d(x, y)$. Die Teilmengen

$$K_n = \left\{(x, y) \,\middle|\, \frac{1}{n} \leqq x \leqq n,\ |y| \leqq n\right\}$$

sind kompakt, und jede kompakte Teilmenge liegt in einem K_n mit genügend großem n. Sei

$$U(\mathsf{A}, \alpha, \mu) = \{(x, y) \,|\, \alpha \leqq x \leqq \mathsf{A},\ \mu x \geqq |y|\}$$

für $0 < \alpha < \mathsf{A}$, $0 < \mu$. Für das Maß erhält man

$$|U(\mathsf{A}, \alpha, \mu)| = 2\mu \log \frac{\mathsf{A}}{\alpha}\,.$$

Sei $(x, y) \in K_n$, $(u, v) \in U(\mathsf{A}, \alpha, \mu)$. Für $(p, q) = (x, y)\,(u, v)$ gilt dann

$$\frac{\alpha}{n} \leqq xu = p \leqq n\,\mathsf{A}, \quad \mu p = x \cdot \mu u \geqq x|v| \geqq |q| - |y| \geqq |q| - n,$$

d. h.

$$K_n U(A, \alpha, \mu) \subset \left\{(x, y) \,\middle|\, \frac{\alpha}{n} \leqq x \leqq n A,\ \mu x \geqq |y| - n\right\}.$$

Das Maß der Menge auf der rechten Seite ist gleich

$$\int_{\frac{\alpha}{n}}^{nA} 2(\mu x + n)\, x^{-2}\, dx = 2\mu \log \frac{A}{\alpha} + 2\mu \log n^2 + 2n\left(\frac{n}{\alpha} - \frac{1}{nA}\right),$$

folglich

$$\frac{|K_n U(A, \alpha, \mu)|}{|U(A, \alpha, \mu)|} \leqq 1 + \frac{\log n^2}{\log \frac{A}{\alpha}} + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{n^2}{\alpha \log \frac{A}{\alpha}} \leqq 1 + \varepsilon$$

falls etwa $\alpha = 1$, $A = e^{\varepsilon^{-1} 2 \log n^2}$, $\mu = \frac{n^2}{\log n^2}$.

Folglich

(12) *Die Gruppe G genügt der Bedingung (C) für jedes $C > 1$, ist also insbesondere eine K-Gruppe.*

Die zu G antiisomorphe Gruppe G' der Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$ mit $x > 0$ genügt ebenfalls der Bedingung (C) mit jedem $C > 1$. Das folgt aus dem nächsten Satz.

A und B seien lokal kompakte Gruppen und für jedes $a \in A$ sei $x \to x^a$ ein Automorphismus von B, so daß die Abbildung $(a, x) \to x^a$ stetig von $A \times B$ auf B ist. Definieren wir im cartesischen Produkt $A \times B$ das Produkt der Elemente (a, b) und (x, y) durch

$$(a, b)\,(x, y) = (ax, b^x y)\,,$$

so wird $A \times B$ mit der Produkttopologie zur lokal kompakten topologischen Gruppe und das Produktmaß der linksinvarianten Haarschen Maße ist linksinvariant. Die so definierte Gruppe $A\ (\times)\ B$ heißt das semidirekte Produkt von A und B.

(13) *Genügen A und B der Bedingung (C) mit den Konstanten C_1 und C_2, so genügt $A\ (\times)\ B$ der Bedingung (C) mit den Konstanten $C_1 \cdot C_2$.*

Beweis: Jedes Kompaktum in $A\ (\times)\ B$ liegt in einem Kompaktum der Form LK mit $L \subset A$, $K \subset B$. Ist K in B und L_1 in A kompakt, so ist KL_1 kompakt, also auch die Projektion K_1 von KL_1 auf den Faktor B, d. h.

$$K_1 = \{z \in B \,|\, (x, z) \in KL_1 \quad \text{für ein gewisses} \quad x \in A\}\,.$$

Die Projektion von KL_1 auf A ist gleich L_1, wir haben also $KL_1 \subset L_1 K_1$ mit kompaktem $K_1 \subset B$.

Weiter bemerken wir, daß die integrierbare Menge U in der Bedingung (C) sogar kompakt gewählt werden kann. Wegen der Regularität des Maßes existiert zu U nämlich eine aufsteigende Folge kompakter Teilmengen S_i mit $|\cup S_i| = |U|$, also

$$\lim_{i \to \infty} \frac{|KS_i|}{|S_i|} = \frac{|K(\cup S_i)|}{|U|} \leqq \frac{|KU|}{|U|} < C\,,$$

d. h.

$$\frac{|KS_i|}{|S_i|} < C \quad \text{für genügend großes } i\,.$$

Sei nun L in A und K in B kompakt. Wir wählen zunächst ein kompaktes L_1 in A mit $\frac{|LL_1|}{|L_1|} < C_1$. Sei K_1 in B kompakt, so daß $KL_1 \subset L_1K_1$ und U in B integrierbar mit $\frac{|K_1U|}{|U|} < C_2$ in B. Wir haben dann

$$LK \cdot L_1U \subset LL_1 \cdot K_1U\,,$$

also

$$\frac{|LK \cdot L_1U|}{|L_1U|} \leqq \frac{|LL_1 \cdot K_1U|}{|L_1U|} = \frac{|LL_1|}{|L_1|} \cdot \frac{|K_1U|}{|U|} < C_1C_2\,,$$

wobei wohl klar ist, welche Haarschen Maße jeweils gemeint sind.

Das Beispiel der diskreten freien Gruppe F mit unendlich vielen freien Erzeugenden $x_1, x_2, \ldots$ zeigt, daß nicht jede lokal kompakte Gruppe einer Bedingung (C) genügt:

Ist $K = \{e, x_1, \ldots, x_n\}$, e das Einselement aus F, und V eine beliebige endliche Teilmenge aus F, so gilt $\frac{|KV|}{|V|} \geqq n$.

Literatur

[1] Hewitt, E., and K. Ross: Abstract harmonic analysis I. Berlin 1963.
[2] Rajagopalan, M.: On the L^p-space of a locally compact group. Coll. Math. **10**, 49—52 (1963).
[3] Zelazko, W.: On the algebras L_p of locally compact groups. Coll. Math. 8, 115—120 (1961).
[4] — A note on L^p-algebras. Coll. Math. **10**, 53—56 (1963).

(Eingegangen am 14. September 1965)

Reiter, H.
Math. Annalen 163, 118—121 (1966)

Zwei Anwendungen der Bruhatschen Funktion

Herrn G. Köthe zum 60. Geburtstag am 25. 12. 1965 gewidmet

Von

H. Reiter in Utrecht

1. Einleitung und Ergebnisse

Die nachstehenden Ausführungen gehören einerseits der Gruppentheorie, andererseits der Funktionalanalysis an.

Sei G eine lokalkompakte Gruppe, H eine abgeschlossene Untergruppe. Bruhat [2, S. 102—103] hat bewiesen, daß es eine reelle, nichtnegative Funktion $x \to \beta(x)$ auf G gibt, die folgende Eigenschaften besitzt:

1. Für jede kompakte Menge $K \subset G$ gilt: Auf dem „Streifen" $K.H$ fällt β mit einer Funktion in $\mathscr{K}_+(G)$ zusammen[1]).

2. $\int_H \beta(x\xi)\, d\xi = 1$ für jedes $x \in G$ ($d\xi$ ist das linke Haarsche Maß auf H).

Wir nennen β eine *Bruhatsche Funktion* für H. Die Existenz einer solchen Funktion wurde später, aber unabhängig von Bruhat, auch von Macbeath-Świerczkowski bewiesen [5, § 5]. Man vergleiche auch die Darstellung bei Bourbaki [1, S. 51, Prop. 8].

Die Funktion β ist insbesondere auf G stetig. Das Integral in 2. ist wohldefiniert, denn für jedes feste $x \in G$ ist $\xi \to \beta(x\xi)$, $\xi \in H$, eine stetige Funktion auf H mit kompaktem Träger.

Bemerkung. Auf Grund der Eigenschaft 1. können wir auf „Streifen" der Form $K.H$ ($K \subset G$ kompakt) — und auf Teilmengen von solchen Streifen — mit der Funktion β so verfahren, als ob β selbst in $\mathscr{K}_+(G)$ wäre. Dies ist ein nützliches Prinzip für die Anwendungen.

Die Bruhatsche Funktion ist grundlegend für die Theorie der quasi-invarianten Maße auf homogenen Räumen (vgl. die oben angegebene Literatur), doch gibt es auch eine andere Anwendung [6a, b]. Hier sollen zwei weitere Anwendungen gezeigt werden.

Satz 1. *Sei $\mathscr{M}^1(G)$ der Banachsche Raum der komplexen beschränkten Radonschen Maße auf G, $\mathscr{M}^1(G/H)$ der entsprechende Raum auf G/H[2]). Dann ist $\mathscr{M}^1(G/H)$ ein homomorphes Bild von $\mathscr{M}^1(G)$, genauer: $\mathscr{M}^1(G/H)$ ist algebraisch*

[1]) Man bezeichnet mit $\mathscr{K}(G)$ den Raum der komplexwertigen, stetigen Funktionen auf G, die kompakten Träger haben, und mit $\mathscr{K}_+(G)$ die Menge der reellen, nichtnegativen Funktionen in $\mathscr{K}(G)$.

[2]) G/H ist der homogene Raum der linken Restklassen $x.H$. Ist H Normalteiler, so daß G/H selbst eine lokalkompakte Gruppe ist, so ist auch $\mathscr{M}^1(G/H)$ eine Banachsche Algebra (mit der Faltung als Multiplikation). Die Norm in $\mathscr{M}^1(G)$ und $\mathscr{M}^1(G/H)$ bezeichnen wir mit $\|.\|_G$ bzw. $\|.\|_{G/H}$.

und isometrisch isomorph zu einem Quotientenraum von $\mathscr{M}^1(G)$. *Ist insbesondere* H *Normalteiler von* G, *so gilt dies auch für* $\mathscr{M}^1(G/H)$ *und* $\mathscr{M}^1(G)$ *als Banachsche Algebren.*

Für lokalkompakte Abelsche Gruppen ist dies im Buch von RUDIN [7, Th. 2.7.2] bewiesen, und zwar mit Hilfe der Strukturtheorie dieser Gruppen.

Die zweite Anwendung der Bruhatschen Funktion, die wir hier geben wollen, bezieht sich auf die Theorie der unitären Gruppendarstellungen. In dieser Theorie wird zu jeder lokalkompakten Gruppe G ein duales Objekt $\hat{G}$ sowie ein reduziertes duales Objekt $\hat{G}_r$ definiert; für Einzelheiten sei auf das Buch von DIXMIER [3a, § 18] verwiesen. Die Frage, wann $\hat{G} = \hat{G}_r$ gilt, ist von gruppentheoretischer Bedeutung.

Satz 2. *Gilt* $\hat{G} = \hat{G}_r$, *so gilt auch* $\hat{H} = \hat{H}_r$ *für jede abgeschlossene Untergruppe* H *von* G.

Für offene Untergruppen ist dies bereits bekannt [3a, 18.9.10].

2. Beweis von Satz 1

Sei π die kanonische Abbildung (Projektion) $G \to G/H$. Für jedes $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$ definieren wir ein Maß $\dot{\mu} \in \mathscr{M}^1(G/H)$ durch

$$\int_{G/H} f'(\dot{x})\, d\dot{\mu}(\dot{x}) = \int_G f'(\pi(x))\, d\mu(x), \quad f' \in \mathscr{K}(G/H)\,. \tag{1}$$

Dadurch ist offenbar eine lineare Abbildung T_H,

$$\mu \to T_H \mu = \dot{\mu}\,,$$

von $\mathscr{M}^1(G)$ *in* $\mathscr{M}^1(G/H)$ definiert, die wegen

$$\|T_H \mu\|_{G/H} \leqq \|\mu\|_G \tag{2}$$

auch stetig ist. Daß sie $\mathscr{M}^1(G)$ *auf* $\mathscr{M}^1(G/H)$ abbildet, kann man folgendermaßen zeigen.

Sei β eine Bruhatsche Funktion für H auf G. Dann betrachte man die Abbildung

$$k \to T_{H,\beta} k : (T_{H,\beta} k)(\dot{x}) = \int_H k(x\xi)\, \beta(x\xi)\, d\xi, \quad k \in \mathscr{K}(G)\,. \tag{3}$$

Hier ist $\dot{x} = \pi(x) \in G/H$; das Integral hängt ja in der Tat nur von der Restklasse von H ab, in der x liegt. Durch (3) wird eine lineare, stetige Abbildung $T_{H,\beta}$ von $\mathscr{K}(G)$ in $\mathscr{K}(G/H)$ definiert (in Wirklichkeit ist es sogar eine Abbildung *auf* $\mathscr{K}(G/H)$, wie leicht zu zeigen ist). Es ist

$$\|T_{H,\beta} k\|_\infty \leqq \|k\|_\infty, \quad k \in \mathscr{K}(G)\,, \tag{4}$$

wo $\|\cdot\|_\infty$ die gewöhnliche Norm („sup"-Norm) in $\mathscr{K}(G)$ bzw. $\mathscr{K}(G/H)$ ist.

Sei nun $\mu' \in \mathscr{M}^1(G/H)$ gegeben. Dann definieren wir ein Maß $\mu \in \mathscr{M}^1(G)$ durch

$$\int_G k(x)\, d\mu(x) = \int_{G/H} (T_{H,\beta} k)(\dot{x})\, d\mu'(\dot{x}), \quad k \in \mathscr{K}(G)\,. \tag{5}$$

Daß μ ein *beschränktes* Maß ist, folgt aus (4).

Wendet man jetzt umgekehrt (1) auf μ an, so erhält man gerade μ' zurück. Denn (5) läßt sich natürlich erweitern, insbesondere auf alle stetigen, beschränkten Funktionen auf G, und wenn wir in (5) k durch $f' \circ \pi$ ersetzen ($f' \in \mathscr{K}(G/H)$), so geht (5) gerade in (1) über.

Aus (5) folgt $\|\mu\|_G \leqq \|\mu'\|_{G/H}$. Da umgekehrt $\mu' = T_H \mu$ ist, folgt wegen (2) $\|\mu\|_G = \|\mu'\|_{G/H}$, d. h. (5) liefert eine *isometrische* Einbettung von $\mathscr{M}^1(G/H)$ in $\mathscr{M}^1(G)$. Daraus und aus (2) ergibt sich dann sofort, daß $\mathscr{M}^1(G/H)$ algebraisch und isometrisch isomorph ist zu einem Quotientenraum von $\mathscr{M}^1(G)$.

Ist weiter H normal in G, so gilt $T_H(\mu_1 * \mu_2) = T_H \mu_1 * T_H \mu_2$, wo links die Faltung auf G, rechts die auf G/H steht; dies ergibt sich sofort aus der Definition der Faltung (vgl. etwa [4, S. 8]). Auf dieselbe Art folgt auch für die Involution: $T_H(\mu^*) = (T_H \mu)^*$.

Bemerkungen: 1. Die durch (5) definierte Einbettung ist dual zur Abbildung (3)[3]).

2. Wenn man T_H auf Maße der Form $f(x)\,dx$ einschränkt, wo dx das linke Haarsche Maß auf G und $f \in L^1(G)$ ist, so erhält man eine Abbildung von $L^1(G)$ auf $L^1(G/H)$, wo $L^1(G/H)$ der zum „quasi-invarianten Maß" auf G/H gehörige L^1-Raum ist. Doch wollen wir hier nicht weiter auf Einzelheiten eingehen.

3. Beweis von Satz 2

Wir beweisen zuerst einen Hilfssatz für invariante Mittelwerte.

Eine topologische Gruppe heiße eine (M)-Gruppe, wenn es auf $\mathscr{C}^\infty(G)$, dem Raum der komplexwertigen, stetigen, beschränkten Funktionen auf G, einen linksinvarianten Mittelwert $\mathscr{M}$ gibt, d. h. ein lineares Funktional $\varphi \to \mathscr{M}\{\varphi\}$, $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(G)$, das folgenden Bedingungen genügt:

(i) Ist φ reell und $\varphi \geqq 0$, so ist $\mathscr{M}\{\varphi\} \geqq 0$;

(ii) $\mathscr{M}\{1\} = 1$;

(iii) $\mathscr{M}\{L_a \varphi\} = \mathscr{M}\{\varphi\}$ für alle $a \in G$[4]).

Für topologische (M)-Gruppen vergleiche man die Arbeit von DIXMIER [3b].

Hilfssatz. *Ist G eine lokalkompakte (M)-Gruppe, so ist auch jede abgeschlossene Untergruppe H von G eine (M)-Gruppe.*

Unter gewissen Voraussetzungen über H ist dies bereits von DIXMIER [a. a. O., Th. 3, β)] bewiesen worden.

Zum Beweis des Hilfssatzes sei β eine Bruhatsche Funktion für H auf G. Wir definieren dann eine Abbildung $\tau_{H,\beta}$ von $\mathscr{C}^\infty(H)$ in $\mathscr{C}^\infty(G)$ durch

$$(\tau_{H,\beta}\varphi)(x) = \int_H \varphi(\xi)\,\beta(x^{-1}\xi)\,d\xi,\ \varphi \in \mathscr{C}^\infty(H)\,.$$

Daß $\tau_{H,\beta}\varphi$ in $\mathscr{C}^\infty(G)$ liegt, folgt aus den Eigenschaften der Bruhatschen Funktion; vgl. die Bemerkung in § 1 sowie [6c, S. 479, (ii)]. Weiter gilt für $\eta \in H$: $\tau_{H,\beta} L_\eta \varphi = L_\eta \tau_{H,\beta}\varphi$. Sei nun $\mathscr{M}$ ein linksinvarianter Mittelwert auf

[3]) Wir betrachten dabei (3) auf $\mathscr{K}(G)$, dem Banachschen Raum aller komplexwertigen stetigen Funktionen auf G, die im Unendlichen verschwinden. Übrigens läßt sich mittels der Abbildung $T_{H,\beta}$ auch leicht zeigen: der entsprechende Raum $\mathscr{K}(G/H)$ *ist* (algebraisch und isometrisch) *isomorph mit einem Quotientenraum von* $\mathscr{K}(G)$.

[4]) L_a ist der linke Verschiebungsoperator: $(L_a\varphi)(x) = \varphi(a^{-1}x)$.

$\mathscr{C}^\infty(G)$. Dann ist $\varphi \to \mathscr{M}\{\tau_{H,\beta}\varphi\}$, $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(H)$, ein linksinvarianter Mittelwert auf $\mathscr{C}^\infty(H)$ und der Hilfssatz ist bewiesen.

Aus diesem Hilfssatz ergibt sich nun Satz 2. Denn die lokalkompakten (M)-Gruppen sind genau diejenigen, für die das duale Objekt mit dem reduzierten dualen Objekt zusammenfällt. Diese Tatsache ergibt sich durch Kombination des Ergebnisses von [6b] mit dem von [6d] und Proposition 18.3.6 im Buche von DIXMIER [3a].

Anmerkung bei der Korrektur. Wie der Verfasser nachträglich bemerkt hat, ist ein allgemeineres Ergebnis als Satz 1 schon von C. S. HERZ [The Spectral Theory of Bounded Functions, Trans. Am. Math. Soc. **94**, 181—232 (1960), Th. 5.1] bewiesen worden — ein Vergleich der Beweismethoden ist lehrreich — und Satz 2 ist bereits in einer derzeit unveröffentlichten Arbeit von A. HULANICKI [Amenable Topological Groups, Prop. 7.4] enthalten, der ihn mittels eines Satzes von GODEMENT [4, Th. 17] beweist.

Literatur

[1] BOURBAKI, N.: Intégration, Ch. 7—8. Paris 1963.

[2] BRUHAT, F.: Sur les représentations induites des groupes de Lie. Bull. Soc. Math. France **84**, 97—205 (1956).

[3] DIXMIER, J.: (a) Les C^*-algèbres et leurs représentations. Paris 1964. (b) Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications. Acta Sci. Math. Szeged **12** (A), 213—227 (1950).

[4] GODEMENT, R.: Les fonctions de type positif et la théorie des groupes. Trans. Am. Math. Soc. **63**, 1—84 (1948).

[5] MACBEATH, A. M., and S. ŚWIERCZKOWSKI: Measures in homogeneous spaces. Fundamenta Math. **49**, 15—24 (1960).

[6] REITER, H.: (a) Une propriété analytique d'une certaine classe de groupes localement compacts. C. R. Acad. Sci. Paris **254**, 3627—3629 (1962).

— (b) Sur la propriété (P_1) et les fonctions de type positif. C. R. Acad. Sci. Paris **258**, 5134—5135 (1964).

— (c) Contributions to harmonic analysis (III). J. London Math. Soc. **32**, 477—483 (1957).

— (d) On some properties of locally compact groups. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **68** (= Indag. Math. **27**), 697—701 (1965).

[7] RUDIN, W.: Fourier analysis on groups. New York 1962.

(Eingegangen am 21. Juni 1965)

WAELBROECK, L.
Math. Annalen 163, 122—126 (1966)

Duality and the Injective Tensor Product

Professor Dr. GOTTFRIED KÖTHE zum sechzigsten Geburtstag gewidmet

By

L. WAELBROECK in Brüssel

Let A and B be two Banach spaces. We define a third space, $A \varphi B$, which depends functorially on A and B. The (covariant) functor φ is related to the injective tensor product. $A \hat{\otimes} B$ is a closed subspace of $A \varphi B$ with the induced norm. The spaces $A \hat{\otimes} B$ and $A \varphi B$ coincide if A or B has the approximation property. And conversely A has the approximation property if $A \hat{\otimes} B = A \varphi B$ for all closed subspaces B of c_0.

Furthermore, the dual $(A \varphi B)^*$ has a universal property involving compact convex symmetric subsets of locally convex spaces.

1. **Proposition 1.** a) *Let E be a vector space, let X be a convex, balanced, absorbant subset of E, and $\mathcal{T}$ be a compact topology on X which can be induced*[1]*) by a separated locally convex topology of E. The space E can then be identified with the dual of a Banach space A, in such a way that X corresponds to the unit ball of A^*, bicontinuously for $\mathcal{T}$ and the weak* topology of the unit ball of A^*.*

b) *A is unique up to isometric isomorphism, and isomorphic with the space of linear forms on E whose restriction to X is continuous for $\mathcal{T}$, with respect to the supremum norm on X.*

c) *Conversely, a Banach space A is isometrically isomorphic with the space of linear forms on A^* whose restriction to the unit ball of A^* is weak* continuous, with respect to the supremum norm on the unit ball of A^*.*

This duality theorem will be applied in the following way. Let E be a locally convex space, let X be a compact convex balanced subset of E, and E_X be the space generated by X. We can speak of "the" Banach space A_X with dual E_X. This will be the space of linear forms on E_X with continuous restrictions to X, normed by the supremum on X.

The theorem itself is fairly standard, and is in fact a special case of the Mackey-Arens theorem and of the Grothendieck completion theorem. We shall recall its proof for the sake of completeness.

Consider first $(E, X, \mathcal{T})$. Let A be the space of linear forms on E whose restrictions to X are continuous for $\mathcal{T}$, with the supremum norm on X. Then A is a Banach space, and a separating space of linear functionals on E. The

[1]) This will be the case (cf. [3]) if the mapping $(x, y) \to (x + y)/2$ is a continuous mapping of $X \times X$ into X, the origin in X having a fundamental set of convex balanced neighbourhoods for $\mathcal{T}$.

topology induced on X by $\sigma(E, A)$ is Hausdorff, and weaker than $\mathscr{T}$, which is compact; therefore it coincides with $\mathscr{T}$. Identifying E with a subspace of A^*, the unit ball of A^* is the bipolar of X, but X is weakly compact. We prove statement a in this way, and show that the space described in statement b is a solution of the problem.

Conversely, let A be a Banach space, let E be its dual, let X be the unit ball of $E = A^*$, and $\mathscr{T}$ the weak* topology of X. Then X is convex, absorbant, balanced, while $\mathscr{T}$ is compact and induced by a locally convex topology of E. Let A_1 be the space of linear forms on E whose restriction to X is continuous for $\mathscr{T}$, with the supremum norm on X. We know E can be identified with A_1^*, in such a way that X is mapped onto the unit ball of E, bicontinuously for $\mathscr{T}$ and the weak* topology of the unit ball. Besides, A is (or rather can be identified with) a space of linear forms on E, weakly continuous on X, i.e. A is a subspace of A_1. The identification is isometric, the image is therefore closed. The image is dense, otherwise $A_1^* = E$ would have a non-zero element which would vanish identically on A, but this cannot happen since $E = A^*$. This proves statement c.

As for statement b, we must still show that the Banach space described is the only solution of the problem. But this follows clearly from c.

2. **Proposition 2.** *Let A and B be two Banach spaces. The three Banach spaces below, each with the obvious norm, are isometrically isomorphic in a natural way:*

a) *The space of linear mappings of A^* into B whose restriction to the unit ball of A^* are weak* continuous.*

b) *The space of linear mappings of B^* into A whose restriction to the unit ball of B^* are weak* continuous.*

c) *The space of bilinear forms on $A^* \times B^*$ whose restriction to the product of the unit balls is weak* continuous.*

Definition. $A \varphi B$ will be any one of the three isomorphic Banach spaces of proposition 2.

Proposition 2 contains a transposition theorem. A linear map $u: A^* \to B$ is continuous for $\sigma(A^*, A)$ and $\sigma(B, B^*)$ if its restriction to the unit ball of A^* is continuous for $\sigma(A^*, A)$ and the norm topology of B.

We must mention the fact that $A \varphi B$ is separable if A and B both are. Let X, Y be the weak* unit balls of A^*, B^*, then X, Y are metrisable, $A \varphi B$ is a closed subspace of $\mathscr{C}(X \times Y)$ and is therefore separable[2]).

To prove proposition 2, it is clearly sufficient to prove the isomorphism of the spaces a and c. Let X, Y be the weak* unit balls of A^*, B^*, respectively. A and B are identified with the spaces of linear forms on A^*, B^* having continuous restrictions to X, Y.

Identifying a function of two variables with a function of one variable taking its values in a space of functions of the other variable, $\mathscr{C}(X \times Y)$ is identified with $\mathscr{C}(X, \mathscr{C}(Y))$. A bilinear form on $A^* \times B^*$ is identified with a

[2]) If X is a compact space, $\mathscr{C}(X)$ is the Banach space of continuous functions on X.

linear mapping of A^* into the space of linear forms on B^*. The space a is the space of continuous linear mappings of X into the space of continuous linear forms on Y. The space c is the space of continuous bilinear forms on $X \times Y$. These two spaces are effectively identified.

3. Consider now $A \varphi B$ as a space of bilinear forms on $A^* \times B^*$. Assigning to $x \in A^*$, $y \in B^*$ the linear form

$$\tau(x, y) : d \to d(x, y)$$

on $A \varphi B$, we define a mapping $\tau : A^* \times B^* \to (A \varphi B)^*$.

τ is clearly bilinear, maps $X \times Y$ into T if T is the unit ball of $(A \varphi B)^*$, X and Y being, as before, the unit balls of A^*, B^*. And τ is a continuous mapping of $X \times Y$ into T for the respective weak* topologies, because $\langle \tau(x, y), d \rangle = d(x, y)$ is a continuous scalar function of (x, y) on $X \times Y$ for all $d \in A \varphi B$.

Proposition 3. *Let C be a third Banach space, and Z be the unit ball of C^*, equipped with its weak* topology. Let $u : A^* \times B^* \to C^*$ be a bilinear mapping such that $u(X, Y) \subseteq Z$, the mapping $u : X \times Y \to Z$ being continuous for the respective topologies. One and only one mapping $u_0 : (A \varphi B)^* \to C^*$ can then be found which is linear, maps T into Z continuously for the weak* topologies of these sets, and is such that $u = u_0 \circ \tau$.*

In the statement of proposition 3, Z is the weak* unit ball of the dual of a Banach space. Proposition 1, however, shows that any compact convex balanced subset of a locally convex space will do.

Let G be a locally convex space, and $u : A^* \times B^* \to G$ be a bilinear mapping whose restriction to $X \times Y$ is continuous. A compact Z will exist if G is complete, or more generally whenever the convex span of $u(X, Y)$ is relatively compact. This will happen, for instance, if E and F are separable and G is semi-complete.

To prove proposition 3, we consider C as a space of linear forms on C^*. The mapping $(x, y) \to \langle u(x, y), c \rangle$ is a bilinear form on $A^* \times B^*$ whose restriction to $X \times Y$ is continuous, i.e. this mapping belongs to $A \varphi B$. Let $u_1(c)$ be this element of $A \varphi B$.

$$\langle u(x, y), c \rangle = u_1(c)\,(x, y) = \langle \tau(x, y), u_1(c) \rangle$$

u_1 is a mapping of C into $A \varphi B$, which is linear, and whose norm is at most equal to one.

Transposing u_1, we obtain a mapping $u_0 : (A \varphi B)^* \to C^*$, with the same norm as u, such that

$$\langle u_1(c), t \rangle = \langle c, u_0(t) \rangle$$

for $t \in (A \varphi B)^*$, $c \in C$. And

$$\langle u(x, y), c \rangle = \langle \tau(x, y), u_1(c) \rangle = \langle u_0(\tau(x, y)), c \rangle$$

for all $c \in C$, and this shows that $u = u_0 \circ \tau$.

We have proved the existence, the linearity of u_0, the fact that u_0 maps T into Z. Being defined by transposition, u_0 is weakly continuous, and has therefore a weakly continuous restriction to T.

We must still prove that u_0 is the only mapping of $(A \varphi B)^*$ into C^* which has the required properties. Let u_0' be a new mapping, having these properties. T being mapped continuously, and linearly into Z, we can obtain u_0' by transposition from a bounded mapping u_1' of C in to $A \varphi B$. This is obvious, considering C as a space of linear forms on C^*, and $A \varphi B$ as a space of linear forms on $(A \varphi B)^*$. u_1' maps the linear form c onto $c \circ u_0'$.

So we see that

$$\langle u(x, y), c\rangle = \langle u_0'(\tau(x, y)), c\rangle = \langle \tau(x, y), u_1'(c)\rangle$$
$$= u_1'(c)\,(x, y)\,,$$

so that $u_1'(c)\,(x, y) = u_1(c)\,(x, y)$, i.e. $u_1' = u_1$ and by transposition $u_0' = u_0$.

4. Let us now investigate the relation between $A \hat{\otimes} B$, $A \varphi B$, and the approximation property.

We map $A \otimes B$ into $A \varphi B$ by associating with $(a, b) \in A \times B$ the bilinear form $(x, y) \to \langle a, x\rangle \langle b, y\rangle$ on $A^* \times B^*$, or better the linear mapping $y \to \to \langle b, y\rangle a$, since it will be preferable to consider $A \varphi B$ as a space of linear mappings of B^* into A. It is clear that this mapping is one-to-one, and induces on $A \otimes B$ the norm of biequicontinuous convergence. Identifying $A \otimes B$ with its image, the closure of the image is identified with the completed injective tensor product $A \hat{\otimes} B$.

Proposition 4. *The spaces $A \hat{\otimes} B$ and $A \varphi B$ coincide if A, or B has the approximation property. Conversely A has the approximation property if $A \hat{\otimes} B = A \varphi B$ for all closed subspaces B of c_0.*

The well known fact that to prove the approximation conjecture, it is sufficient to consider the closed subspaces of c_0, follows from this proposition. Recall (cf. [1]) that A has the approximation property if the identity mapping of A into itself is in the closure of the space of mappings of finite rank for the topology of compact convergence.

Assume first that A has the approximation property. Let $u : B^* \to A$ belong to $A \varphi B$. Then $u\,Y$ is a compact subset of A if Y is the unit ball of B^*. Let v be a mapping of finite rank, of A into itself, approximating the identity mapping uniformly on $u\,Y$, $v \circ u$ is then an element of finite rank of $A \varphi B$, and approximates u uniformly on Y, $A \otimes B$ is then dense in $A \varphi B$.

Conversely, assume $A \hat{\otimes} B = A \varphi B$ for all Banach spaces B. Let Y be a compact subset of A, which we may assume convex, balanced without any loss in generality. Let A_Y be the subspace of A generated by Y, and B the space of linear forms on A_Y whose restrictions to Y are continuous. B is then a Banach space, whose dual is A_Y, Y being the unit ball of B^*, the weak* topology of this unit ball being the topology defined on Y by the norm of A.

The identity mapping of A_Y into A belongs to $A \varphi B$. We can approximate this mapping by mappings of finite rank, since $A \otimes B$ is dense in $A \varphi B$. Let $\sum u_r \otimes v_r$ be such an approximation.

The restriction of an element of A^* to A_Y is continuous on Y, and belongs therefore to B. The set of these restrictions is dense in B since it separates

$B^* = A_Y$. For each v_r, let $v_r' \in A^*$ approximate v_r uniformly on Y. Then $\sum u_r \otimes v_r' \in A \otimes A^*$ and this element defines a mapping of A into itself which approximates the identity mapping uniformly on Y.

This shows that A has the approximation property if $A \otimes B$ is dense in $A \varphi B$ for all Banach spaces B. We must still show that it is sufficient to consider the closed subspaces B of c_0. But A will have the approximation property if we can approximate the identity map uniformly on all elements of a fundamental set of compact subsets of A, and each compact subset of A is contained in the closed convex span of a sequence tending to zero.

Let $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ be a sequence tending to zero in A, let Y be its closed convex span, let B be the Banach space of linear forms on A_Y whose restriction to Y is continuous. We map B into c_0, assigning to $b \in B$ the sequence $\{b_k\}$ where $b_k = \langle b, y_k \rangle$. Then $b_k \to 0$ because y_k is a sequence of elements of Y which tends to zero, and b has a continuous restriction to Y, so B is effectively mapped into c_0. Furthermore

$$\|b\| = \sup_{y \in Y} |\langle b, y \rangle| = \sup |b_k|$$

because $b_k = \langle b, y_k \rangle$ and Y is the closed convex span of $\{y_k\}$. The mapping $B \to c_0$ is isometric, i.e., B is isomorphic with a closed subspace of c_0.

So A will have the approximation property if $A \otimes B$ is dense in $A \varphi B$ whenever B is a closed subspace of c_0.

Bibliography

[1] GROTHENDIECK, A.: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Amer. Math. Soc. 1955.

[2] KOETHE, G.: Topologische Lineare Räume I. Springer. 1960.

[3] WAELBROECK, L.: Le complété et le dual d'un espace localement convexe. Bull. Soc. Math. Belgique. 1964.

(Received July 15, 1965)

ARONSZAJN, N. and P. SZEPTYCKI
Math. Annalen 163, 127—154 (1966)

On General Integral Transformations

Dedicated to Prof. Dr. G. KÖTHE on his sixtieth birthday

By

N. ARONSZAJN and P. SZEPTYCKI* in Lawrence, Kansas

The purpose of this paper is to study certain aspects of the theory of integral transformations in the following setting. For two σ-finite measure spaces (X, μ) and (Y, ν) denote by $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ the linear spaces of all complex valued functions on X and Y respectively, which are maesurable and finite a.e. $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ provided with suitable topologies of convergence in measure are linear metric spaces. For a function $K(x, y)$ measurable on the product space $(X \times Y, \mu \times \nu)$ we define the corresponding integral transformation

$$Ku(y) = \int K(x, y)\, u(x)\, d\mu(x), \quad u \in \mathfrak{M}\,.$$

Ku is a well defined function in $\mathfrak{N}$ if u is such that the integral on the right exists and is finite for a.e. $y \in Y$. The linear subspace of $\mathfrak{M}$ of all functions satisfying the latter condition is denoted by $\mathfrak{D}_K$.

The material in this paper is centered around the following two questions:

Question 1. What is the nature of the space $\mathfrak{D}_K$ and what can be said about the continuity properties of the transformation $K : \mathfrak{D}_K \to \mathfrak{N}$?

Question 2. Under what conditions can the integral transformation K, considered as a mapping from $\mathfrak{M}$ to $\mathfrak{N}$, be extended to a continuous linear transformation of a subspace of $\mathfrak{M}$, different from $\mathfrak{D}_K$, into $\mathfrak{N}$? In particular, under what conditions are two such extensions of a given integral transformation compatible; i.e., assign to a function, on which they are simultaneously defined, identical images?

Clearly questions 1 and 2 are of interest only if $\mathfrak{D}_K \neq \{0\}$.

In this paper we study integral transformations within the framework of complete metric linear spaces continuously contained in $\mathfrak{M}$; such spaces are referred to as (F) subspaces of $\mathfrak{M}$. This framework seems natural because the space $\mathfrak{M}$ itself is of the indicated type.

The answer to question 1 is given in § 4; it turns out that the domain $\mathfrak{D}_K$ of an integral transformation K is an (F) subspace of $\mathfrak{M}$ and the mapping $K : \mathfrak{D}_K \to \mathfrak{N}$ is continuous. As a corollary to this result we get (§ 6) an extension of a theorem of Banach, asserting that for any (F) subspace of $\mathfrak{M}$ such that $A \subset \mathfrak{D}_K$ the transformation $K : A \to \mathfrak{N}$ is continuous.

* Research for this paper was sponsored by the Office of Naval Research Contract Nonr 583(13) and by the National Science Foundation Grant G-17057.

The second question is more involved. If K, considered as a transformation from $\mathfrak{M}$ into $\mathfrak{N}$, is closable (or continuous) K can be extended to the closure of $\mathfrak{D}_K$ in the graph topology (or the topology of $\mathfrak{M}$ respectively). In § 5 we give necessary and sufficient conditions on the kernel $K(x, y)$ in order that K be closable or continuous. The conditions are rather severe; in particular, K is continuous only if $\mathfrak{D}_K = \mathfrak{M}$. In § 7 we study the compatibility problem for continuous extensions of an integral transformation. The latter arises in the following familiar situation. Suppose that A is an (F) subspace of $\mathfrak{M}$ such that $A \cap \mathfrak{D}_K$ is dense in A and $K : \mathfrak{D}_K \cap A \to \mathfrak{N}$ is continuous (with the topology of A on $A \cap \mathfrak{D}_K$). In such a case K is said to be A-semiregular and its continuous extension to A is denoted by K_A. If $\mathfrak{A}$ is a class of (F) subspaces of $\mathfrak{M}$ then K satisfies the $\mathfrak{A}$-compatibility condition if, for any $A, B \in \mathfrak{A}$ such that K_A and K_B, as defined above, exist, we have $K_A u = K_B u$ for every $u \in A \cap B$. In particular, if $\mathfrak{A}$ is the class of all (F)-subspaces of $\mathfrak{M}$ the condition is referred to as the total compatibility condition.

It is shown in § 7 that K satisfies the total compatibility condition if and only if it is closable. §§ 8, 9, 10 are devoted to the study of the case when $\mathfrak{A}$ consists of all (FL) subspaces A of $\mathfrak{M}$. These are (F)-subspaces A of $\mathfrak{M}$ subject to the condition $(L) : u \in A$, $v \in \mathfrak{M}$, $|v(x)| \leqq |u(x)|$ a.e. imply $v \in A$. In §§ 8, 9 we define and study a metric (but not vector) topology on $\mathfrak{M}$, in which the closure $\tilde{\mathfrak{D}}_K$ of $\mathfrak{D}_K$ is an (FL)-subspace of $\mathfrak{M}$, $K : \tilde{\mathfrak{D}}_K \to \mathfrak{N}$ is continuous, and, for every (FL) subspace A of $\mathfrak{M}$ such that K is A-semiregular, $A \subset \tilde{\mathfrak{D}}_K$ and $K_A = \tilde{K}$ on A, where $\tilde{K}$ denotes the continuous extension of K to $\tilde{\mathfrak{D}}_K$. In this manner the problem of (FL)-compatibility is solved completely: every integral transformation satisfies the (FL)-compatibility condition. At the end of § 9 we investigate the cases when $\mathfrak{D}_K$ and $\tilde{\mathfrak{D}}_K$ coincide. In § 10 we give some necessary conditions in order that a given $u \in \mathfrak{M}$ be in $\tilde{\mathfrak{D}}_K$. These conditions yield in some particular cases explicit descriptions of the extended domains $\tilde{\mathfrak{D}}_K$.

§§ 1, 2, 3 are of auxiliary character; apart from some new results (Prop. 1.5, 1.6, 2.4) they contain standard material arranged in a form suitable for reference. The measure theoretic terminology follows that of [3].

The definition of integral transformations and their proper domains is an extension to general measure spaces of the basic concepts considered by G. KÖTHE and O. TOEPLITZ [4] in the case of purely atomic measures (i.e. in the case of infinite matrices). In view of this connection it seems appropriate to publish this paper in the volume dedicated to Prof. Dr. G. KÖTHE on the occasion of his 60th birthday.

I. Preliminaries

§ 1. Some results about linear topological spaces

This § contains certain propositions and definitions concerning metric groups and vector spaces which are useful in the sequel. By a *metric group* we always mean an abelian group V provided with a translation invariant metric ϱ, i.e., $\varrho(u, v) = \varrho(u - v, 0) \equiv \varrho(u - v)$ inducing a group topology on V. By a

linear metric space we mean a vector space V (over the complex numbers) with a translation invariant metric which induces on V a vector topology. If V with a metric ϱ is a linear metric space we often say that ϱ is a vector metric on V. Two vector metrics on a vector space V are called equivalent if they induce on V the same topology.

If V with a vector metric ϱ is complete we say that V is an (F) space and that ϱ is a complete metric on V. In the terminology of this paper an (F) space is not required to be locally convex (this is the terminology of BANACH, see [1]).

If E is an arbitrary topological space and A is a subset of E provided with its own topology, then A is called a topological subspace of E if the topology of A is finer than the induced topology on A, or, equivalently, if the injection mapping of A into E is continuous.

In case the topology of A is of a particular type; e.g., if A is a Banach space, ((F) space, etc.) we say that A is a Banach subspace of E ((F) subspace of E, etc.).

If ϱ is any vector metric on a linear space V then (see [1]) there is on V an equivalent metric ϱ' satisfying

$$\varrho'(\alpha u) \leqq \varrho'(u) \quad \textit{for all} \quad \alpha, |\alpha| \leqq 1 . \tag{1.1}$$

In §§ 8, 9 we shall need the notion of a *semi-vector metric* on a linear space V. It is a metric on the additive group V which satisfies (1.1).

If ϱ is a semi-vector metric on V, α is a scalar, and N is the smallest integer $\geqq |\alpha|$, then

$$\varrho(\alpha u) \leqq N\varrho\left(\frac{\alpha}{N} u\right) \leqq N\varrho(u) \tag{1.2}$$

for every $u \in V$.

The following propositions are easy consequences of the last remark.

Proposition 1.1. *Let ϱ be a semi-vector metric on V and α be a scalar. If $\{u_n\} \subset V$ is a Cauchy sequence then so is $\{\alpha u_n\}$. If $\varrho(u_n - u) \to 0$ as $n \to \infty$ then $\varrho(\alpha u_n - \alpha u) \to 0$ as $n \to \infty$.*

Proposition 1.2. *Let ϱ be a semi-vector complete metric on V and A be a linear subspace of V such that for every $u \in A$, $\varrho(\alpha u) \to 0$ as $\alpha \to 0$. Then the closure $\overline{A}$ of A in V (with metric ϱ) is an (F) subspace of V.*

Proof. Since $\overline{A}$ is complete it is enough (see [2], p. 53) to check that $\varrho(\alpha u) \to 0$ as $\alpha \to 0$ for every $u \in \overline{A}$. For $u \in \overline{A}$, $\varepsilon > 0$ there exists $v \in A$ such that $\varrho(u - v) < \varepsilon$. For $|\alpha| \leqq 1$ we have $\varrho(\alpha u) < \varepsilon + \varrho(\alpha v)$ and the result follows.

Propositions 1.3 and 1.4 below are easy consequences of the closed graph theorem.

Proposition 1.3. *Let V be a linear topological space and let V_1, V_2 be (F)-subspaces of V such that $V_1 \subset V_2$. Then V_1 is an (F) subspace of V_2.*

Corollary. *If V is a topological vector space and V_1 is a vector subspace of V then there is at most one metric vector topology on V_1 with which V_1 is an (F) subspace of V.*

Proposition 1.4. *Let V, W be two linear topological spaces, V_1, W_1 be (F) subspaces of V and W respectively and T be a continuous linear mapping of V*

into W such that $T(V_1) \subset W_1$. Then T considered as a mapping of V_1 into W_1 (with their own topologies) is continuous.

Let V and W be (F) spaces and $K: V \to W$ be a linear transformation defined on a linear subspace $\mathfrak{D}_K$ of V. If A is an (F) subspace of V such that i) $A \cap \mathfrak{D}_K$ is dense in A ii) $K: A \cap \mathfrak{D}_K \to W$ is continuous (from the topology of A on $A \cap \mathfrak{D}_K$) then K is called *A-semiregular*. The restriction to $A \cap \mathfrak{D}_K$ of an A-semiregular transformation K can be extended to a unique continuous linear transformation K_A of A into W.

We say that a transformation $K: V \to W$ satisfies *the condition of total compatibility* if for every two (F) subspaces $A, B \subset V$ such that K is simultaneously A and B semiregular and for every $v \in A \cap B$ we have $K_A v = K_B v$.

We have the following

Proposition 1.5. *If K is closable then K satisfies the condition of total compatibility. Moreover if K' is the closure of K then for every A such that K is A-semiregular K_A is the restriction of K' to A (which is a subspace of $\mathfrak{D}_{K'}$).*

Proof. If $\{u_n\} \subset \mathfrak{D}_K \cap A$ is such that $u_n \to u$ in A then $u_n \to u$ in V, $Ku_n \to K_A u$ in W, but also $Ku_n \to K'u$ and the result follows.

Proposition 1.6. *Let V, W be F spaces $K: V \to W$ be a linear transformation defined on an (F) subspace $\mathfrak{D}_K$ of V and such that $K: \mathfrak{D}_K \to W$ is continuous. Suppose that there exists a sequence $\{v_n\} \subset \mathfrak{D}_K$ such that*

i) *$v_n \to 0$ in V, $Kv_n \to w$ in W, $w \neq 0$,*

ii) *for every formal series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$ and for every sequence $s_{n_k} = \sum_{n=1}^{n_k} a_n v_n$ of its partial sums the condition $s_{n_k} \to v$ in V, $v \in \mathfrak{D}_K$, implies $s_{n_k} \to v$ in $\mathfrak{D}_K$.*

Then there exist two (F) subspaces $A, B \subset V$ such that K is simultaneously A and B semiregular and an element $v \in A \cap B$ such that $K_A v \neq K_B v$.

We can assume that the metrics ϱ_V, ϱ_W of V and W satisfy (1.1). The proof of Proposition 1.6 depends on the following:

Lemma. *Let $u_1, \ldots, u_n \in V$ be linearly independent. There exists a constant $C > 0$ depending only on $u_1, \ldots, u_n$ such that*

$$C\left(1 + \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|\right)^{-1} \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| \leqq \varrho_V\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k u_k\right) \tag{1.2}$$

for all n-tuples of scalars $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Proof. If there were no such constant we could find sequences $\{\xi_k^i\}$, $k = 1, \ldots, n$ such that

$$\lim_{i \to \infty} \varrho_V\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^i u_k\right)\left(1 + \sum_{k=1}^{n} |\xi_k^i|\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k^i|\right)^{-1} = 0\,. \tag{1.3}$$

It follows that $\varrho\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^i u_k\right) \to 0$ and the equivalence of all vector topologies on a finite dimensional space implies that $\sum_{k=1}^{n} |\xi_k^i| \to 0$ as $i \to \infty$. In particular there is an index i_0 such that

$$\varrho_V\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^i u_k\right) \leqq \frac{1}{2}\,, \quad \sum_{k=1}^{n} |\xi_k^i| \leqq \frac{1}{2} \quad \text{for} \quad i \geqq i_0\,. \tag{1.4}$$

Let L^i denote the integral part of the quantity $\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k^i|\right)^{-1}$. We have by (1.4)

$$\frac{1}{2} \leqq \sum_{k=1}^{n} |L^i \xi_k^i| \leqq 1 ,$$

and there exists a constant $C > 0$ such that

$$C \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} |L^i \xi_k^i|\right)^{-1} \varrho_V\left(L^i \sum_{k=1}^{n} \xi_k^i u_k\right) \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k^i|\right)^{-1} \varrho_V\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k^i u_k\right),$$

contrary to (1.3).

Proof of the Proposition 1.6. Observe first that assumptions of the proposition still hold if the sequence $\{v_n\}$ is replaced by an arbitrary subsequence thereof; in particular we may assume that $\{v_n\}$ is linearly independent[1]. Define now the sequence $\{u_n\}$ in the following manner. Set $u_1 = v_1$ and suppose that $u_1, \ldots, u_n$ are already chosen. Let c_n be the largest constant C for which (1.2) holds, and define u_{n+1} as the first v_m for which

$$\text{(1.5)} \qquad \text{i)} \quad \varrho_V(v_m) \leqq \frac{c_n 2^{-n-1}}{n+1} \qquad \text{ii)} \quad \varrho_W(Kv_m - w) \leqq \frac{2^{-n-1}}{n+1} .$$

Observe that the sequence $\{c_n\}$ is decreasing. Let now H be the Hilbert space of all sequences $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ of scalars, such that

$$\text{(1.6)} \qquad \|\{\xi_k\}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} |\xi_k|^2 < \infty ,$$

and define formally for all $\xi = \{\xi_k\} \in H$

$$\text{(1.7)} \qquad T_1\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(u_{2k} - u_{2k-1}), \quad T_2\xi = \xi_1 u_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \xi_k(u_{2k-1} - u_{2k-2}) .$$

For any $\xi \in H$ there exists an index $k_0 > 1$ such that for $k \geqq k_0$, $|\xi_k| \leqq k$ and consequently $\varrho_V(\xi_k(u_{2k} - u_{2k-1})) \leqq k\varrho_V(u_{2k} - u_{2k-1})$. The definition of $\{u_m\}$ yields

$$\text{(1.8)} \qquad \varrho_V(\xi_k(u_{2k} - u_{2k-1})) \leqq 2^{-2k+2} c_{2k-2} \leqq 2^{-2k+2} c_1 ,$$

which proves that the series defining $T_1\xi$ converges in V for every $\xi \in H$. By a similar argument the same is true for the series defining $T_2\xi$. Thus T_1, T_2 are well defined continuous linear transformations of H into V. Suppose now that for some $\xi \in H$, $T_1\xi = 0$. Then for every N

$$-\sum_{k=1}^{N} \xi_k(u_{2k} - u_{2k-1}) = \sum_{k=N+1}^{\infty} \xi_k(u_{2k} - u_{2k-1}) ,$$

and an application of (1.8) and the definition of the sequence $\{c_n\}$ yields for $N \geqq k_0$, k_0 being the index such that $|\xi_k| \leqq k$ for $k \geqq k_0$,

$$c_{2N} \frac{2\sum_{k=1}^{N} |\xi_k|}{1 + 2\sum_{k=1}^{N} |\xi_k|} \leqq \varrho_V\left(-\sum_{k=1}^{N} \xi_k(u_{2k} - u_{2k-1})\right)$$

$$= \varrho_V\left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \xi_k(u_{2k} - u_{2k-1})\right) \leqq c_{2N} \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-2k+2}.$$

[1] By i) $\{v_n\}$ must contain an infinite linearly independent set.

The last inequality implies $\xi = 0$, which shows that T_1 is $1-1$. Similar argument shows that also T_2 is $1-1$. Let now H_1 and H_2 be Hilbert subspaces of V, $H_1 = T_1 H$, $H_2 = T_2 H$, with norms defined by $\|T_i \xi\|_{H_i} = \|\xi\|$, $i = 1, 2$.

Following the lines of the argument used to establish convergence of the series (1.7) it can be checked that the series defined by

$$
\begin{aligned}
K_{H_1}(T_1\xi) &= \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k K(u_{2k} - u_{2k-1}), \\
K_{H_2}(T_2\xi) &= \xi_1 K u_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \xi_k K(u_{2k-1} - u_{2k-2})
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

converge in W for every $T_1\xi \in H_1$, $T_2\xi \in H_2$, and consequently define continuous linear transformations K_{H_1}, K_{H_2} of H_1 and H_2 into W. We shall prove now that K is H_i-semiregular and K_{H_i} is its semiregular extension for $i = 1, 2$.

It is clear that the vectors $\{u_{2k} - u_{2k-1}\}_1^\infty$ and u_1, $\{u_{2k-1} - u_{2k-2}\}_2^\infty$ form (orthogonal) bases in H_1 and H_2 respectively, consequently $\mathfrak{D}_k \cap H_i$ is dense in H_i for $i = 1, 2$. It remains to check that for $v \in \mathfrak{D}_K \cap H_i$, $K_{H_i} v = Kv$. Consider the case $i = 1$, $i = 2$ being completely analogous. Let $T_1\xi \in \mathfrak{D}_K$, $\xi \in H$. We can write

$$
T_1\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k u_{2k} - \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k u_{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k u_k, \; \eta_{2l} = \xi_l, \; \eta_{2l-1} = -\xi_l, \; l = 1, 2, \ldots,
$$

both series in the middle being convergent in V (the same proof as that of the convergence of $T_1\xi$), the series on the right converges in V. The hypothesis ii) implies that $\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k u_k$ converges in $\mathfrak{D}_K$ and K being continuous on $\mathfrak{D}_K$ it follows $K(T_1\xi) = K_{H_1}(T_1\xi)$. Now $\xi = \{1, 1, \ldots\} \in H$ and

$$
T_1\xi + T_2\xi = \sum_{k=1}^{\infty} (u_{2k} - u_{2k-1}) + \sum_{k=2}^{\infty} (u_{2k-1} - u_{2k-2}) + u_1 = \lim_{k\to\infty} u_{2k} = 0\,,
$$

in other words $v = T_1(\xi) = T_2(-\xi) \in H_1 \cap H_2$. On the other hand

$$
K_{H_1} v - K_{H_2} v = \lim_{k\to\infty} K u_{2k} = w \neq 0
$$

which completes the proof.

Remark. Proposition 1.6 is a conditional converse to Proposition 1.5. Under the additional assumptions that $\mathfrak{D}_K$ is an (F) subspace of V, that $K : \mathfrak{D}_K \to W$ is continuous and that there exists a sequence $\{v_n\} \subset \mathfrak{D}_K$ satisfying i), ii) (in particular i) means that K is not closable) K cannot satisfy the total compatibility condition.

§ 2. Some results from measure theory

By a measure space (X, μ) we shall always mean a totally σ-finite measure space. To simplify notations the σ-ring of μ measurable sets will not be indicated explicitely; by subsets of X we shall always mean measurable subsets.

Denote by $\mathfrak{M}(X, \mu)$ (or, briefly, $\mathfrak{M}$) the vector space of all complex valued μ-measurable and finite a.e. functions on X. With the topology of *convergence in measure* (on every subset of X of finite measure), or more precisely, with the

topology with the local base consisting of sets of the form

$$U_{\varepsilon, X_1} = \{u \in \mathfrak{M} : \mu(\{x : |u(x)| \geqq \varepsilon\} \cap X_1) \leqq \varepsilon\},$$

where X_1 varies over subsets of X with $\mu(X_1) < \infty$ and ε over all positive numbers, $\mathfrak{M}$ becomes a linear topological space. Moreover, since (X, μ) is totally σ-finite, the vector topology introduced above is metrizable. It will be convenient to introduce an equivalent definition of the topology of convergence in measure and explicit formulas for metrics inducing this topology on $\mathfrak{M}$. With this goal in view we remark that

(2.1) *There exists at least one function φ, μ integrable on X and positive a.e. on X.*

Existence of such φ follows immediately from the total σ-finiteness of (X, μ). Define for any function φ with properties as in (2.1)

$$\mu_\varphi(A) = \int_A \varphi \, d\mu \quad A \subset X . \tag{2.2}$$

Then $\mu_\varphi(X) < \infty$, $\mu_\varphi(A) = 0$ if and only if $\mu(A) = 0$ and the following proposition holds:

Proposition 2.1. *The topologies of convergence in measure μ and convergence in measure μ_φ are equivalent.*

The proof is well known and may be omitted.

Define now for all $u \in \mathfrak{M}$

$$\varrho(u) = \int_X \frac{|u(x)|}{1 + |u(x)|} \varphi(x) \, d\mu(x) = \int_X \frac{|u(x)|}{1 + |u(x)|} \, d\mu_\varphi(x) , \tag{2.3}$$

where φ is a function with properties as in (2.1). It is easily checked that $\varrho(u)$ is (or more precisely defines by $\varrho(u, v) = \varrho(u - v)$) an invariant metric on $\mathfrak{M}$.

It is easily seen that convergence in the metric ϱ implies convergence in measure μ_φ and conversely. Hence, by Proposition 2.1, the topology induced by ϱ is equivalent to the topology of $\mathfrak{M}$ (of convergence in measure on subsets of X of finite measure μ). This establishes the first part of the following

Proposition 2.2. 1°. *The metrics defined by* (2.3) *are equivalent for all functions φ which are integrable μ and positive a.e.*

2°. *$\mathfrak{M}$ with metric ϱ is an (F) space.*

The proof of 2° is well known and can be omitted.

From now on, when dealing with a measure space (X, μ), we shall fix once and for all an integrable, positive a.e. function φ such that

$$\mu_\varphi(X) = \int_X \varphi(x) \, d\mu(x) = 1 , \tag{2.4}$$

and denote by $\varrho_X(u)$ the corresponding metric (2.3). Hence we will have for $u \in \mathfrak{M}$, $\varrho(u) < 1$ and also, by an easy calculation,

$$\varrho(u) \leqq \varepsilon^2 < 1 \Rightarrow \mu_\varphi([x : |u(x)| \geqq \varepsilon]) \leqq 2\varepsilon . \tag{2.5}$$

We shall need later (§ 5) the following:

Proposition 2.3. *Let (X, μ), (Y, ν) be measure spaces, and $f(x, y)$ be an integrable function on $(X \times Y, \mu \times \nu)$ not equal to 0 a.e. Then there exist (measurable) subsets $X_1 \subset X$, $Y_1 \subset Y$, $\mu(X_1) < \infty$, $\mu(Y_1) < \infty$ such that*

$$\left| \int_{X_1 \times Y_1} f(x, y) \, d(\mu \times \nu) \right| > 0 .$$

Proof. By σ-finiteness of $(X \times Y, \mu \times \nu)$ there is a measurable set $C \subset X \times Y$ such that $(\mu \times \nu)(C) < \infty$ and $\int_C f\, d(\mu \times \nu) \neq 0$. For every $\varepsilon > 0$ there is a $C' = \bigcup_1^n A_k \times B_k$, $A_k \subset X$, $B_k \subset Y$ such that $(\mu \times \nu)((C - C') \cup (C' - C)) < \varepsilon$; thus $\int_C f\, d(\mu \times \nu)$ can be approximated by $\int_{C'} f\, d(\mu \times \nu)$ as closely as desired. This could not happen if all $\int_{A_k \times B_k} f\, d(\mu \times \nu)$ were 0.

The next proposition is an extension of a result which has been known for spaces of type (FL) (for definition see § 8).

Proposition 2.4. *Let A be a linear subspace of $\mathfrak{M}$.*

1°. There exists a maximal, unique up to a set of measure 0, subset $X_0 \subset X$ on which all functions of A are 0 a.e.

2°. If A is an (F) subspace of $\mathfrak{M}$ then there is a function $u \in A$ such that $u \neq 0$ a.e. on $X - X_0$.

We begin the proof with the following:

Lemma. *Let $u, v \in \mathfrak{M}$, $E = \{x : |u(x)| + |v(x)| > 0\}$. Then $\mu_\varphi(E \cap \{x : v(x) + \xi u(x) = 0\}) = 0$ except for an at most countable set of scalars ξ.*

Since the sets $E \cap \{x : v(x) + \xi u(x) = 0\}$ and $E \cap \{x : v(x) + \xi' u(x) = 0\}$ are disjoint for $\xi \neq \xi'$, the lemma follows from the finiteness of μ_φ.

Proof of Proposition 2.4. Let $\alpha = \sup_{u \in A} \mu_\varphi(\{x : u(x) \neq 0\})$ and $\{u_n\} \in A$ be such that $\alpha = \lim_{n \to \infty} \mu_\varphi(\{x : u_n(x) \neq 0\})$. Define now a sequence $\{v_n\} \in A$ by

$$v_n = v_{n-1} + \xi_n u_n, \quad n > 1, \quad v_1 = u_1, \tag{2.6}$$

with ξ_m so chosen that $\mu_\varphi(X_n \cap \{x : v_{n-1}(x) + \xi_n u_n(x) = 0\}) = 0$, where $X_n = \{x : |v_{n-1}(x)| + |u_n(x)| > 0\}$. Such a choice is possible by the lemma. Then $v_n \in A$ and

$$\mu_\varphi(\{x : v_n(x) \neq 0\}) = \mu_\varphi(X_n) = \mu_\varphi\left(\bigcup_{m=1}^n \{x : u_m(x) \neq 0\}\right) \nearrow \alpha\,. \tag{2.7}$$

Let $X_0' = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$ and $X_0 = X - X_0'$. We shall prove that X_0 satisfies the requirements of 1°. Suppose that there is an $f \in A$ such that $\mu_\varphi(X_0 \cap \{x : f(x) \neq 0\}) = \varepsilon > 0$. By definition of α and $\{v_n\}$ we can find n such that $\mu_\varphi(X_n) > \alpha - \frac{\varepsilon}{2}$, and according to the lemma there exists ξ such that $\mu_\varphi(\{x : v_n(x) + \xi f(x) \neq 0\}) > \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$ — a contradiction to the definition of α. Thus every $f \in A$ is 0 a.e. in X_0.

To prove the maximality of X_0 suppose that $\tilde{X}_0 \supset X_0$ and all functions of A are 0 a.e. on $\tilde{X}_0$. Then $\tilde{X}_0 - X_0 \subset X_0' = \bigcup_{n=1}^\infty \{x : u_n(x) \neq 0\}$, and $\mu_\varphi(\tilde{X}_0 - X_0) \leqq \leqq \sum_{n=1}^\infty \mu_\varphi((\tilde{X}_0 - X_0) \cap \{x : u_n(x) \neq 0\}) = 0$ because all u_n are 0 a.e. on $\tilde{X}_0$. This completes the proof of 1°. Proof of 2° will be obtained by a suitable choice of scalars ξ_m in (2.6) to insure convergence of $\{v_m\}$ to a function with desired

properties. Let $M_m > 0$ be such that

$$\mu_\varphi(x : |u_m(x)| \geqq M_m) \leqq 2^{-m}\,, \tag{2.8}$$

and define $\{\xi_m\}$ and the sequences, $\{\varepsilon_m\}$, $\{\eta_m\}$, $\{\delta_m\}$ of positive numbers as follows: Suppose that ξ_l and δ_l are already chosen for $1 \leqq l \leqq m$, $\xi_1 = 1$, $\delta_1 = 1$ and that ε_l, η_l are chosen for $1 \leqq l \leqq m-1$. Functions $v_l \in A$ are then defined by (2.6) for $1 \leqq l \leqq m$. We know that

$$\alpha_m = \mu_\varphi\{x : |v_m(x)| > 0\} \nearrow \alpha \quad as \quad m \to \infty\,. \tag{2.9}$$

We choose now $\eta_m > 0$, $\varepsilon_m > 0$ subject to the condition

$$\mu_\varphi(\{x : |v_m(x)| > \eta_m\}) \geqq \alpha_m - \varepsilon_m,\ \varepsilon_m \leqq 2^{-m},\ \eta_m \leqq \frac{1}{2}\eta_{m-1};\ \eta_1 \leqq 1\,. \tag{2.10}$$

Let ϱ_A be the metric of A; define δ_{m+1} as the largest δ satisfying conditions $\delta \leqq \eta_m(2^{m+2}M_{m+1})^{-1}$ and $\varrho_A(\xi u_{m+1}) \leqq 2^{-m-1}$ for $|\xi| \leqq \delta$, and let ξ_{m+1} be any number in $[-\delta_{m+1}, \delta_{m+1}]$ for which the statement of the lemma holds with $v = v_m$, $u = u_{m+1}$. We get

$$\text{i)}\quad |\xi_{m+1}| \leqq \delta_{m+1} \leqq \frac{\eta_m}{2^{m+1}M_{m+1}}, \qquad \text{ii)}\quad \varrho_A(\xi_m u_m) \leqq 2^{-m},\ m \geqq 2\,, \tag{2.11}$$

and consequently the series $u_1 + \sum_2^\infty \xi_l u_l$ converges in A, and hence in measure, to a function $v \in A$. It follows from (2.8), (2.11), i) that

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} |\xi_k u_k(x)| \leqq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\eta_{k-1}}{2^k} \leqq \frac{\eta_m}{2^m}$$

outside of a set of μ_φ measure $\leqq 2^{-m}$, thus the series $u_1 + \sum_2^\infty \xi_l u_l(x)$ converges absolutely a.e. to $v(x)$. On the other hand, by virtue of (2.10)

$$|v(x)| \geqq |v_m(x)| - \sum_{k=m+1}^{\infty} |\xi_k u_k(x)| \geqq \eta_m - \frac{\eta_m}{2^{m+1}} > 0$$

outside of a set of μ_φ-measure $\leqq 1 - \alpha_m + \varepsilon_m + 2^{-m}$. In other words $\mu_\varphi(\{x : |v(x)| > 0\}) \geqq \alpha_m - \varepsilon_m - 2^{-m}$ for all m, so $\mu_\varphi(\{x : |v(x)| > 0\}) \geqq \alpha$. This concludes the proof.

§ 3. Rademacher functions

Rademacher functions on the interval $[0, 1]$ are defined as follows

$$r_k(t) = \operatorname{sgn}\sin(2^k \pi t), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{3.1}$$

We recall that $\{r_k\}_{k=0}^\infty$ form an orthonormal system in $L^2([0, 1])$, which together with all functions defined by

$$r_{k_1, k_2, \ldots, k_n}(t) = r_{k_1}(t) \ldots r_{k_n}(t),\ 1 \leqq k_1 < k_2 < \cdots < k_n,\ n = 2, 3, \ldots \tag{3.2}$$

is orthonormal and complete in $L^2([0, 1])$.

Let now (Y, ν) be a finite nonatomic measure space and assume that $\nu(Y) = 1$. Since Y is nonatomic, for every subset $Y_1 \subset Y$ and a number α, $0 \leqq \alpha \leqq \nu(Y_1)$, there exists a subset $Y_2 \subset Y_1$ such that $\nu(Y_2) = \alpha$.

We recall that a (finite) partition of Y is a finite family $Y_1, \ldots, Y_k$ of subsets of Y such that $Y_m \cap Y_l = 0$ for $m \neq l$ and $\bigcup_{l=1}^{k} Y_l = Y$.

For every positive integer n we denote by $(i)_n$ the n-indices $(i)_n = (i_1, \ldots, i_n)$ where the i_k take values 0 or 1. In view of the remark above it is possible to find a sequence of partitions of Y, $E_{(i)_n}$ denoting the subsets of the n-th partition, such that

$$\text{(3.3)} \qquad \nu(E_{(i)_n}) = 2^{-n} \quad \textit{and} \quad E_{i_1,\ldots,i_n,0} \cup E_{i_1,\ldots,i_n,1} = E_{i_1,\ldots,i_n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Denote by $I_{(i)_n}$ the intervals of the n-th binary partition of the interval $[0, 1]$, more precisely

$$\text{(3.4)} \qquad \begin{cases} I_0 = \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad I_1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right), \\ I_{i_1,\ldots,i_n,0} = \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right), \\ I_{i_1,\ldots,i_n,1} = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right) \quad \textit{if} \quad I_{i_1,\ldots,i_n} = (\alpha, \beta), \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

If $\{E_{(i)_n}\}$ is a fixed sequence of partitions of Y satisfying (3.3) then

$$\text{(3.5)} \qquad E_{(i)_n} \leftrightarrow I_{(i)_n}$$

defines a $1-1$ measure preserving correspondence between sets $E_{(i)_n}$ and intervals of the n-th binary partition of $[0, 1]$.

The generalized Rademacher functions on Y are defined by the corresponding transfer to Y of functions $r_n(t)$ which are constant on intervals $I_{(i)_n}$. More precisely

$$\text{(3.6)} \qquad \textit{for} \quad y \in E_{(i)_n}, \; r_n(y) = r_n(t), \quad \textit{where} \quad t \in I_{(i)_n} .$$

$r_n(y)$ being defined, we can construct $r_{k_1,\ldots,k_n}(y)$, $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$, by formula (3.2). The system of Rademacher functions and their products $r_{k_1,\ldots,k_n}(y)$, $n = 2, 3, \ldots$, is orthonormal on Y but in general it is not any more complete.

We have the following:

Proposition 3.1. *Let* $f(y) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k r_k(y)$ *be a Rademacher polynomial,* E *be any subset of* Y *with* $\nu(E) > 0$. *Then*

$$\text{(3.7)} \qquad \begin{aligned} &[\nu(E) - \left(2(\nu(E) - \nu(E)^2)\right)^{1/2}] \sum_{n=1}^{N} |\alpha_k|^2 \leqq \int_E |f(y)|^2 \, d\nu(y) \leqq \\ &\leqq [\nu(E) + \left(2(\nu(E) - \nu(E)^2)\right)^{1/2}] \sum_{k=1}^{N} |\alpha_k|^2 . \end{aligned}$$

The proof is obtained by an argument similar to that of lemma (8.3) in [6], Vol. I and may be omitted.

Note that the first inequality in (3.7) is nontrivial only if $\nu(E) > \frac{2}{3}$.

Corollary. *Let* (Y, ν) *be nonatomic,* $\nu(Y) = 1$, $\{E_{(i)_n}\}$ *be a sequence of partitions of* Y *satisfying* (3.3) *and* $\{r_n(y)\}$ *be the corresponding generalized Rademacher functions on* Y. *Then on the closed linear extension in* $\mathfrak{M}(Y, \nu)$ *of the sequence* $\{r_n(y)\}_1^\infty$ *the topology of* $\mathfrak{M}(Y, \nu)$ *is equivalent to the topology of* $L^2(Y, \nu)$.

Proof. It suffices to check that convergence in measure of a sequence of Rademacher polynomials implies convergence in L^2. By Proposition 2.2 we may assume that the function φ defining the metric ϱ_Y in $\mathfrak{M}(Y, \nu)$ is 1. By (2.5) for every $\eta > 0$, and $f \in \mathfrak{M}(Y, \nu)$

$$\varrho_Y(f) \leqq \eta^2 \Rightarrow \nu(y : |f(y)| \geqq \eta) \leqq 2\eta ,$$

and for $\eta < \frac{1}{8}$, $\nu(\{y : |f(y)| < \eta\}) \geqq \frac{3}{4}$.

Now if $f = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k r_k$ is a Rademacher polynomial $\varrho_Y(f) \leqq \eta^2$, $\eta \leqq \frac{1}{8}$ then by (3.7)

$$\left(\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{3}{8}}\right) \sum |\alpha_k|^2 \leqq \int_{|f| < \eta} |f(y)|^2 \, d\nu(y) \leqq \eta^2$$

which yields the desired conclusion.

II. Integral Transformations; Closability and Continuity

§ 4. Integral transformations, proper domain and general classification

Let (X, μ), (Y, ν) be two measure spaces (σ-finite), denote $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(X, \mu)$ and $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}(Y, \nu)$, and let φ, ψ be integrable positive a.e. functions on X and Y respectively such that $\int_X \varphi \, d\mu = \int_Y \psi \, d\nu = 1$. By (2.2) and (2.3) φ and ψ define measures μ_φ and ν_φ on X and Y, and metrics ϱ_X, ϱ_Y on $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$. A *kernel* is any measurable function $K(x, y)$ on the product space $(X \times Y, \mu \times \nu)$.

For a kernel K and $u \in \mathfrak{M}$ we define formally

$$(Ku)(y) = \int_X K(x, y) \, u(x) \, d\mu(x) . \tag{4.1}$$

The proper domain of K is defined as

$$\mathfrak{D}_K = \{u \in \mathfrak{M} : \int_X |K(x, y)| \, |u(x)| \, d\mu(x) < \infty \quad \text{a.e.} \quad \nu\} . \tag{4.2}$$

The transformation $K : \mathfrak{D}_K \to \mathfrak{N}$ defined by (3.1) is called the integral transformation corresponding to the kernel K. Obvious properties of $\mathfrak{D}_K$ and K are stated in the following:

Proposition 4.1. *The proper domain $\mathfrak{D}_K$ of K is a linear subspace of $\mathfrak{M}$ with the property that for every $u \in \mathfrak{D}_K$ and $v \in \mathfrak{M}$, $|v(x)| \leqq |u(x)|$ a.e. implies $v \in \mathfrak{D}_K$. K is a linear transformation of $\mathfrak{D}_K$ into $\mathfrak{N}$.*

If $|K|$ denotes the transformation corresponding to the kernel $|K(x, y)|$ we also have

$$\mathfrak{D}_K = \mathfrak{D}_{|K|} . \tag{4.3}$$

The proper domain $\mathfrak{D}_K$ can be provided with a vector metric topology described in the following:

Theorem 4.1. *For all $u \in \mathfrak{D}_K$, put $|u|(x) = |u(x)|$ and define*

$$\varrho_K(u) = \varrho_X(u) + \varrho_Y(|K| \, |u|) . \tag{4.4}$$

Then $\mathfrak{D}_K$ with the metric ϱ_K is an (F)-subspace of $\mathfrak{M}$ and the integral transformation K of $\mathfrak{D}_K$ with metric ϱ_K into $\mathfrak{N}$ is continuous.

Proof. It is obvious that ϱ_K is a vector metric on $\mathfrak{D}_K$ and, since $\varrho_K(u) \geqq \geqq \varrho_X(u) + \varrho_Y(Ku)$, the injection mapping $\mathfrak{D}_K \to \mathfrak{M}$ and the mapping $K: \mathfrak{D}_K \to \mathfrak{N}$ are both continuous. It remains to check that the metric ϱ_K is complete. If $\{u_n\} \subset \mathfrak{D}_K$ is Cauchy in the metric ϱ_K then $u_n \to u$ in $\mathfrak{M}$ (i.e., in measure μ) for some $u \in \mathfrak{M}$. We have to prove that $u \in \mathfrak{D}_K$ and $\varrho_K(u - u_n) \to 0$. Choosing if necessary a subsequence of $\{u_n\}$ we can assume that $\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_K(u_{n+1} - u_n) < \infty$. It follows that $\sum |K|\,|u_{n+1} - u_n|$ converges in $\mathfrak{N}$ and $\sum |u_{n+1} - u_n|$ converges in $\mathfrak{M}$; let $f = |K|\,|u_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |K|\,|u_{n+1} - u_n|$ and $v = |u_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |u_{n+1} - u_n|$. By the dominated convergence theorem $|K|v = f \in \mathfrak{N}$; in particular, $|K|\,v(y) < \infty$ a.e. ν. Thus $v \in \mathfrak{D}_K$ and, since $|u| = |u_1 + \sum_{1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)| \leqq |v|$, it follows that $u \in \mathfrak{D}_K$. Also $|u - u_n| \leqq \leqq \sum_{l=n}^{\infty} |u_{l+1} - u_l|$ and $|K|\,|u - u_n| \leqq \sum_{l=n}^{\infty} |K|\,|u_{l+1} - u_l|$, which concludes the proof.

Let K be a kernel. It follows from Proposition 2.4 that there exists a unique (up to a set of measure zero) maximal set $X_0 \subset X$ such that $u = 0$ a.e. on X_0 for every $u \in \mathfrak{D}_K$.

K will be called:

a) *singular* if $X_0 = X$

b) *nonsingular* if $X_0 = 0$

c) *partly singular* if $0 < \mu_\varphi(X_0) < \mu_\varphi(X) = 1$.

The study of partly singular transformations can be reduced to that of nonsingular and singular transformations by restriction of the kernels to the sets X_0 and $X - X_0$.

As an example of a singular kernel we mention the Hilbert transform $\left(K(x, y) = \frac{1}{x - y},\ X = Y = R^1\right)$ or, more generally, the kernels of Calderon-Zygmund type.

This paper will deal only with nonsingular transformations.

If $K(x, y)$ is a kernel then its adjoint kernel $K^*(y, x)$ is defined by

$$K^*(y, x) = \overline{K(x, y)}\,. \tag{4.5}$$

The corresponding transformation K^* with proper domain $\mathfrak{D}_{K^*} \subset \mathfrak{N}$ is called the adjoint transformation.

We have:

Proposition 4.2. *$K(x, y)$ is nonsingular if and only if $K^*(y, x)$ is nonsingular.*

Proof. It is sufficient to prove that K^* is nonsingular if K is. We may assume that $K \geqq 0$. In view of theorem 4.1, Proposition 2.4 and Proposition 4.1 there is a function $u \in \mathfrak{D}_K$ such that $u > 0$ a.e. Let $w(y) = \int_X K(x, y)\, u(x)\, d\mu(x)$; then $w \in \mathfrak{N}$, and $w(y_0) = 0$ if and only if $K(x, y_0) = 0$ for a.e. x. Define

$$v(y) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(y)}{w(y)} & \text{if} \quad w(y) \neq 0 \\ 1 & \text{if} \quad w(y) = 0\,. \end{cases} \tag{4.6}$$

Then $v \in \mathfrak{N}$, $v > 0$ a.e., and

$$\int_Y v(y) \left(\int_X K(x, y)\, u(x)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) \leqq \int \psi(y)\, d\nu(y) = 1 .$$

By the Fubini-Tonelli theorem

$$\int_X u(x) \left(\int_Y K(x, y)\, v(y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) \leqq 1$$

and since $u > 0$ a.e. it follows that $v \in \mathfrak{D}_{K^*}$.

§ 5. *Necessary and sufficient conditions for closability and continuity of integral transformations*

In this section we shall investigate some relations between certain properties of a kernel $K(x, y)$ and the closability and continuity of the corresponding integral transformation K, considered as a mapping from $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(X, \mu)$ into $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}(Y, \nu)$, $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ being provided with topologies of convergence in measure.

Since the measure space (X, μ) is σ-finite it can contain at most a countable set of atoms. Let $X = X' \cup \{a_n\}$ where (X', μ) is nonatomic and $\{a_n\}$ are atoms. We shall be interested in the following conditions on a nonsingular kernel $K(x, y)$.

(A) $K(x, y) = 0$ *a.e. on* $X' \times Y$.

(B) *Let* $\{a_n\}$ *be all the atoms of* X, *and* $A_m = \{y : K(a_m, y) \neq 0\}$ *then* $\nu(\limsup A_n) = \nu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \right) = 0$.

(C) *Let* B_m *be the closed linear extension in* $\mathfrak{N}$ *of the set* $\{K(a_n, y);\ n \geqq m\}$. *Then* $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_m = \{0\}$.

Theorem 5.1. *In order that* $K : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ *be closable it is necessary and sufficient that its kernel satisfy* (A) *and* (C).

Proof. Necessity: Suppose that K does not satisfy (A) and let

$$X_1 = \{x : \nu(\{y : K(x, y) \neq 0\}) > 0\} \cap X' . \tag{5.1}$$

Then by the Fubini Tonelli theorem $\mu(X_1) > 0$ and, since there exists a $v \in \mathfrak{D}_K$, $v(x) > 0$ a.e., we can find a subset $X_2 \subset X_1$, $0 < \mu(X_2) < \infty$, such that its characteristic function $\chi_{X_2} \in \mathfrak{D}_K$. Also there exists a subset $Y_1 \subset Y$, $\nu(Y_1) > 0$, such that

$$0 < \int_{Y_1} \int_{X_2} |K(x, y)|\, d\mu(x)\, d\nu(y) < \infty .$$

By Proposition 2.3 there exist subsets $E \subset X_2$, $F \subset Y_1$ such that

$$0 < \left| \int_F \int_E K(x, y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \right| < \infty . \tag{5.2}$$

We may assume without loss of generality that $\mu(E) = 1$ and since (E, μ) is nonatomic it is possible, as indicated in § 3, to construct a sequence $\{E_{(i)_n}\}$ of partitions of E satisfying conditions (3.3). Denote by $\chi_{(i)_n}$ the characteristic

functions of the sets $E_{(i)_n}$ and by $\{I_{(i)_n}\}$ the corresponding sequence of binary partitions of $[0, 1]$. Since $\chi_E \in \mathfrak{D}_K$ we have $\chi_{E_{(i)_n}} \in \mathfrak{D}_K$ and consequently for every y in the set $Y' \subset Y$, $\nu(Y - Y') = 0$, where $|K|\chi_E$ is defined and finite everywhere, the formula

$$\Phi_y(I_{(i)_n}) = \int_{E_{(i)_n}} K(x, y)\, d\mu(x) \tag{5.3}$$

defines an additive function on intervals of the binary partitions of $[0, 1]$. By a familiar argument Φ_y can be extended to an additive absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure set function on $[0, 1]$. If I' is the complement in I of the set of all the end points of the intervals $I_{(i)_n}$, $n = 1, 2, \ldots$, then for every $t \in I'$ there is for each n a unique interval $I^{(t)}_{(i)_n}$ in the n-th binary partition of $[0, 1]$ such that $t \in I^{(t)}_{(i)_n}$ for all n. By Lebesgue's theorem, for every $y \in Y'$ the limit

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \Phi_y(I^{(t)}_{(i)_n}) = v_t(y) \tag{5.5}$$

exists and is finite for a.e. $t \in I'$. It follows that for a.e. $t \in I'$ the limit (5.5) exists and is finite for a.e. $y \in Y'$. Hence for a.e. $t \in I'$ (5.5) defines a function $v_t \in \mathfrak{N}$. Observe now that for some $t_0 \in I'$, $v_{t_0}(y) \not\equiv 0$ a.e.; in fact, if for every $t \in I'$, $v_t(y)$ was 0 for a.e. $y \in Y'$ then we would get for a.e. $y \in Y'$, $v_t(y) = 0$ for a.e. $t \in I'$, and it would follow that $\Phi_y(I_{(i)_n}) = 0$ for all n, and $(i)_n$, consequently $\Phi_y(I) = \int_E K(x, y)\, d\mu(x) = 0$ for almost all $y \in F$ contradicting (5.2).

For t_0 so chosen denote by $(i)^0_n$ the unique n-index of $I^{(t_0)}_{(i)_n}$; it is clear that the sequence $\{2^n \chi_{(i)^0_n}\}$ belongs to $\mathfrak{D}_K$, converges to 0 in $\mathfrak{M}$, $\{2^n K \chi_{(i)^0_n}\}$ converges in $\mathfrak{N}$ to an element $\neq 0$ and consequently K cannot be closable.

Suppose now that (C) is not satisfied. Then there exists $v \in \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$, $v \neq 0$. For every $\varepsilon > 0$ and m there is a linear combination $\sum_{n=m}^{N} \lambda_n K(a_n, y)$ such that $\varrho_Y\left(v - \sum_{n=m}^{N} \lambda_n K(a_n, y)\right) < \varepsilon$ and consequently we can find a sequence $\left\{\sum_{n=m}^{N_m} \lambda^{(m)}_n K(a_n, y)\right\}_{m=1}^{\infty}$ converging to v in $\mathfrak{M}$. This sequence is the image under K of a sequence $\{u_m\}$ converging in $\mathfrak{M}$ to 0 where $u_m(x) = \dfrac{\lambda^{(m)}_n}{\mu(a_n)}$ for $x = a_n$, $m \leqq n \leqq N_m$ and $u_m(x) = 0$ otherwise. Thus also in this case K is not closable.

Sufficiency: In view of (A) it is sufficient to consider functions vanishing outside the atomic part $\{a_n\}$ of X. Let $\{u^l\} \subset \mathfrak{D}_K$ be a sequence of such functions, $u^l(a_n) = u^l_n$, such that $u^l \to 0$ in $\mathfrak{M}$ and $Ku^l \to v$ in $\mathfrak{N}$.

$u^l \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$ in $\mathfrak{M}$ implies $u^l_n \to 0$ for every n, and consequently for every fixed N, $\sum_{n=N}^{\infty} u^l_n \mu(a_n) K(a_n, y) \to v(y)$ in $\mathfrak{N}$ as $l \to \infty$. This shows that $v \in \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$ and by (C), $v = 0$. The proof is complete.

As concerns the continuity of an integral transformation $K : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ we have the following:

Theorem 5.2. *In order that an integral transformation $K: \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ be continuous it is necessary and sufficient that its kernel satisfy* (A) *and* (B). *If* (A) *and* (B) *are satisfied then* $\mathfrak{D}_K = \mathfrak{M}$.

Proof. Necessity: By theorem 5.1 (A) is necessary. To prove the necessity of (B) we use an argument similar to that in the proof of Proposition 2.4. Suppose that $K(x, y)$ does not satisfy (B), i.e., there exists a set $F \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$, where $A_m = \{y : K(a_m, y) \neq 0\}$, such that $0 < \nu(F) < \infty$. (The second inequality can always be assumed in view of the σ-finiteness of (Y, ν).) For $N \geqq m$ let $A'_{m,N} = F \cap \bigcup_{l=m}^{N} A_l$ and define for each m a sequence

$$v_{m,N}(y) = K(a_m, y) + \sum_{l=m+1}^{N} \xi_{m,l} K(a_l, y)$$

such that $\nu(F \cap \{y : v_{m,N}(y) \neq 0\}) = \nu(A'_{m,n})$. The choice of numbers $\xi_{m,l}$ such that the last condition is satisfied is possible by the lemma in the proof of Proposition 2.4. By the choice of F we can find for each m an N_m so that $\nu(F - \{y : v_{m,N_m}(y) \neq 0\}) \leqq 2^{-m-1} \nu(F)$ and also for each m we can find $\varepsilon_m > 0$ such that $\nu(F - \{y : |v_{m,N_m}(y)| \geqq \varepsilon_m\}) \leqq 2^{-m} \nu(F)$. Then the sequence $v_m = \frac{v_{m,N_m}}{\varepsilon_m}$ has the property $\nu(F \cap \{y : |v_m(y)| \geqq 1\}) \geqq \nu(F)(1 - 2^{-m})$ and cannot converge to 0 in $\mathfrak{N}$. On the other hand the sequence $\{v_m\}$ is the image under K of a sequence convergent to 0. Thus K cannot be continuous.

Sufficiency: If (A) is satisfied, then for every $u \in \mathfrak{M}$ we have

$$Ku(y) = \sum_{n=1}^{\infty} K(a_n, y)\, u(a_n)\, \mu(a_n)\,, \tag{5.6}$$

and the sum is finite for almost every y outside the set $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{y : K(a_m, y) \neq 0\}$, which by (B) is of ν-measure 0. Therefore $\mathfrak{D}_K = \mathfrak{M}$. Moreover, for $y \in F_m$, where $\bigcap_{n=m}^{\infty} \{y : K(a_n, y) = 0\} = F_m$, we have

$$Ku(y) = \sum_{n=1}^{m-1} K(a_n, y)\, u(a_n)\, \mu(a_n)\,. \tag{5.7}$$

Thus for every sequence $\{u_\nu\} \in \mathfrak{M}$, if $u_\nu \to 0$, then $Ku_\nu(y) \to 0$ for all $y \in F_m$. Since $\nu\left(Y - \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m\right) = 0$ the proof is complete.

It follows from theorems 5.1 and 5.2 that conditions (A) and (B) imply (A) and (C). As concerns the opposite inclusion we have the following:

Proposition 5.1. i) *Let $Y = Y' \cup \{b_n\}$ where $\{b_n\}$ are atoms of Y and Y' is nonatomic, and suppose that $K(x, y) = 0$ a.e. on $X \times Y'$. If K satisfies* (A) *and* (C) *then it satisfies* (B).

ii) *If X contains infinitely many atoms and $\nu(Y') > 0$ then there exists a kernel satisfying* (A) *and* (C) *but not* (B).

Proof. i) By our assumptions it is sufficient to consider the case when X and Y are atomic. Then $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ are spaces of sequences of scalars provided

with the topology of componentwise convergence; we can thus assume $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$. Letting $K(a_m, b_n)\,\mu(a_m) = K_{m,n}$, we can write

$$(Ku)_n = \sum_{m=1}^{\infty} u_m K_{mn} \quad \text{for} \quad \{u_m\} = u \in \mathfrak{M}\,. \tag{5.8}$$

Denote by P_N the (continuous) projection of $\mathfrak{M}$ onto the subspace of sequences $\{\{u_l\} : u_l = 0,\ l \geqq N+1\}$. Let B_m denote the closed linear extension in $\mathfrak{M}$ of the sequences $\{K(a_l, b_n\}_{l \geqq m}$. By (C), $\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m = \{0\}$ and sequence $\{B_m\}$ being decreasing it follows that for every fixed N, $P_N(B_m)$ is constant from some index $m = m_N$ on, (P_N being finite dimensional). We thus have for some index $m = m_N$, $\bigcap_{m=1}^{\infty} P_N(B_m) = P_N(B_{m_N})$; it can be assumed $m_{N+1} > m_N$. Moreover, we shall prove that

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} P_N(B_m) = \{0\}, \qquad N = 1, 2, \ldots. \tag{5.9}$$

We notice first that

$$\bigcap_m P_N(B_m) = P_N(B_{m_N}) = P_N(B_{m_{N+1}}) = P_N P_{N+1}(B_{m_{N+1}}) = P_N \bigcap_m P_{N+1}(B_m)\,.$$

Hence for every $v \in \bigcap_m P_{N_0}(B_m)$ we can find successively elements $u^N \in B_N$, $N \geqq N_0$, such that $P_N u^{N+1} = P_N u^N$ and $P_{N_0} u^{N_0} = v$. It follows that $u^N \to u$ in $\mathfrak{M}$ (i.e. componentwise). Since $u^N \in B_m$ for $N \geqq m$ and B_m are closed, $u \in \bigcap_m B_m = \{0\}$ and $v = P_{N_0} u = 0$.

To show that (B) is satisfied we have to prove that every atom b_n of Y is in at least one of the sets $F_m = \bigcap_{n=m}^{\infty} \{b_l : K(a_n, b_l) = 0\}$. By (5.9) $P_N(B_{m_N}) = P_N(B_m) = \{0\}$ for every N and $m \geqq m_N$ in other words, for $l \geqq m_N$, $K(a_l, b_1) = \cdots = K(a_l, b_N) = 0$, i.e., $b_1, \ldots, b_N \in F_{m_N}$ which ends the proof of i).

ii) Without loss of generality we may assume that $\nu(Y') = 1$. Let $r_n(y)$ be the Rademacher functions on Y' and denote by the same symbol the functions obtained by extending them by 0 to the whole of Y. Define $K(x, y)$ to be 0 for x in the non-atomic part of X and

$$K(a_m, y) = \mu(a_m)^{-1} r_m(y), \qquad m = 1, 2, \ldots, \tag{5.10}$$

where $\{a_m\}$ are the atoms of X. K clearly satisfies (A). Since $|K(a_m, y)| = \mu(a_m)^{-1}$ for all $y \in Y'$, and $\nu(Y') = 1$, K cannot satisfy (B).

On the other hand, by the Corollary to Proposition 3.1, if B_m is the closed linear extension in $\mathfrak{N}$ of the set $\{r_n(y)\}_{n \geqq m}$, B_m is the closed linear extension of this set in $L^2(Y, \nu)$. Since the $r_n(y)$ are orthonormal, it follows $\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m = \{0\}$. Hence K satisfies (C).

Remark. The transformation K constructed in the proof of ii) is not closed: its proper domain $\mathfrak{D}_K$ is l^1 whereas the domain of its closure is l^2.

It is an open question to find, for a closable transformation K, a direct description of the domain of its closure. Another open question is to charac-

terize by properties of $K(x, y)$ the *closed* transformations K. A closed transformation K need not be continuous. An example to this effect is given by $X =$ set of natural numbers, $Y = (0 \leqq t \leqq 1) \times (0 \leqq \tau < 1)$ and $K(n, t, \tau) = \tau^n r_n(t)$, $Ku = \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n r_n(t)\, u(n)$. By using properties of Rademacher functions (see § 3) it is easy to prove that K is closed; its domain $\mathfrak{D}_K$ is described by $\limsup |u(n)|^{1/n} \leqq 1$. Another example of this kind is given by lacunary Taylor series.

III. $(A - B)$ Regularity and Semiregularity. The Compatibility Problem

§ 6. Regular and semiregular integral transformations

Let A and B be (F) subspaces of $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$. An integral operator K is called $(A - B)$ *regular* if

(6.1) i) $A \subset \mathfrak{D}_K$, $K(A) \subset B$,

ii) *the mapping* $K : A \to B$ *is continuous.*

We shall now specialize the definition of semiregularity given in § 1. If A and B are (F) subspaces of $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ then an (integral) transformation K is $(A - B)$ semiregular if

(6.2) i) $\mathfrak{D}_K \cap A$ *is dense in* A *and* $K(A \cap \mathfrak{D}_K) \subset B$,

ii) *the mapping* $K : \mathfrak{D}_K \cap A \to B$ *is continuous* ($A \cap \mathfrak{D}_K$ *being provided with the topology of* A).

As concerns $(A - B)$ regular transformations, theorem 4.1 and Proposition 1.4 yield easily the following extension of a classical result of Banach (see [1]).

Theorem 6.1. *In order that* K *be* $(A - B)$ *regular it is necessary and sufficient that* $A \subset \mathfrak{D}_K$ *and* $K(A) \subset B$.

In other words condition i) in (6.1) implies ii).

If K is $(A - B)$ semiregular then $K : \mathfrak{D}_K \cap A \to B$ can be extended by continuity to a continuous transformation $K_{A,B} : A \to B$ defined on the whole of A. It is easy to see that the extension $K_{A,B}$ of K so obtained depends only superficially on B. In fact, B being an (F) subspace of $\mathfrak{N}$, it follows that $(A - B)$ semiregularity of K implies its $(A - \mathfrak{N})$ semiregularity, and for any $u \in A$ the values of the extensions $K_{A,B}u$ and $K_{A,\mathfrak{N}}u$ are the same. In agreement with the terminology introduced in § 1, we shall refer to $(A - \mathfrak{N})$ semiregularity of K as to A-semiregularity and denote the corresponding extension of K by K_A.

§ 7. Total compatibility of extensions of semiregular transformations

We recall (see § 1) that a transformation K is said to satisfy the *condition of total compability* if

for any two (F) *subspaces* $A, B \subset \mathfrak{M}$ *such that* K *is* $(A - \mathfrak{N})$ *and* $(B - \mathfrak{N})$ *semiregular and for every* $u \in A \cap B$

$$K_A u = K_B u\,. \tag{7.1}$$

In view of concluding remarks in § 6 the condition of total compatibility is equivalent to the following seemingly more general condition:

for any two pairs (A, B) *and* (A', B') *of* (F) *subspaces* $A, B \subset \mathfrak{M}$ $A', B' \subset \mathfrak{N}$ *such that* K *is simultaneously* $(A - A')$ *and* $(B - B')$ *semiregular and for every* $u \in A \cap B$, $K_{AA'}u = K_{BB'}u$.

We have the following:

Theorem 7.1. *In order that an integral transformation* K *satisfy the condition of total compatibility it is necessary and sufficient that* K *be closable. If* K *is closable and* K' *is its closure then all semiregular extensions* K_A *of* K *are restrictions of* K' *to* A.

Proof. The sufficiency of closability and the last statement of the theorem follow from Proposition 1.5. To establish the necessity we apply Proposition 1.6. By theorem 4.1 $\mathfrak{D}_K$ is an (F) subspace of $\mathfrak{M}$, $K : \mathfrak{D}_K \to \mathfrak{N}$ is continuous and it suffices to show that if K is not closable then there exists a sequence $\{v_n\} \subset \mathfrak{D}_K$ satisfying conditions i) and ii) of Proposition 1.6. Remark first that if $\{v_n\} \subset \mathfrak{D}_K$ is a sequence such that $v_n \to 0$ in $\mathfrak{M}$, $Kv_n \to w \neq 0$ in $\mathfrak{N}$ with supports of v_n, v_m disjoint for $n \neq m$ and there exists a subsequence of partial sums $s_{n_k} = \sum_{n=1}^{n_k} \alpha_n v_n$ convergent in $\mathfrak{M}$ to an element $v \in \mathfrak{D}_K$ then, by the dominated convergence theorem, s_{n_k} converges to v in $\mathfrak{D}_K$ (see Thm. 4.1, in fact, the series itself converges to v in $\mathfrak{D}_K$). In particular every sequence of functions in $\mathfrak{D}_K$ with mutually disjoint supports satisfies the condition ii) Proposition 1.6.

If K is not closable then K fails to satisfy one of the conditions (A), (C). If (A) fails, proceeding as in the proof of theorem 5.1, we construct a sequence of functions of the form

$$f_n = \frac{\chi_{(i)_n}}{\mu(E_{(i)_n})}, \quad (i)_n = (i_1, \ldots, i_n), \quad \chi_{(i)_n} = \chi_{E_{(i)_n}}, \tag{7.2}$$

where $E_{(i)_n}$ is a well determined decreasing sequence of subsets of the nonatomic part of X, $\mu(E_{(i)_n}) \to 0$ as $n \to \infty$, $\{f_n\} \subset \mathfrak{D}_K$ and $Kf_n \to w \in \mathfrak{N}$ in $\mathfrak{N}$ for some $w \neq 0$. Let now, for $m > n$,

$$v_{n,m} = \frac{\chi_{(i)_n} - \chi_{(i)_m}}{\mu(E_{(i)_n})}. \tag{7.3}$$

By the dominated convergence theorem we get from (7.2) and (7.3)

$$\varrho_K(f_n - v_{n,m}) \to 0 \quad as \quad m \to \infty.$$

Define now $\{v_n\}$ as follows: choose an increasing sequence $\{n_k\}$ of indices such that $n_0 = 1$, $\varrho_K(f_{n_k} - v_{n_k, n_{k+1}}) \leqq 2^{-k}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ and let $v_k = v_{n_k, n_{k+1}}$. The functions v_k have mutually disjoint supports, $\varrho_X(v_k) \to 0$ and $\varrho_Y(Kv_k - w) \to 0$ as $k \to \infty$.

If K does not satisfy (C) then there exists $w \neq 0$, $w \in \bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$, where B_m denotes the closed linear extension in $\mathfrak{N}$ of $\{K(a_l, y)_m^\infty\}$. There exists therefore an increasing sequence of indices $\{n_k\}$ and sequences $\{\xi_l^{(k)}\}$ of scalars such that the functions

$$w_k(y) = \sum_{l=n_k+1}^{n_{k+1}} \xi_l^{(k)} K(a_l, y)\, \mu(a_l)$$

satisfy $\varrho_Y(w_k - w) \to 0$ as $k \to \infty$. On the other hand $w_k = Kv_k$, where $v_k(a_l) = \xi_l^{(k)}$, for $n_k + 1 \leqq l \leqq n_{k+1}$ and 0 elsewhere. Clearly, $v_k \to 0$ in $\mathfrak{M}$ and the functions v_k have mutually disjoint supports. The proof is complete.

IV. Compatibility of Semiregular Extensions in Classes (FL)

§ 8. Partial compatibility. Classes (FL)

The results of § 7 and the characterization of integral transformations which are closable show that the condition of complete compatibility may hold only for integral transformations with kernels subjected to very restrictive conditions. Therefore it is natural to introduce more specialized compatibility conditions.

If $\mathfrak{A}$ is a class of (F) subspaces of $\mathfrak{M}$ we say that K satisfies the $\mathfrak{A}$-compatibility condition if for any two members A, B of $\mathfrak{A}$ such that K is both A and B semiregular the extensions K_A and K_B are compatible; i.e., for every $u \in A \cap B$, $K_A u = K_B u$.

We shall be interested in the case when $\mathfrak{A}$ consists of all (F)-subspaces A of $\mathfrak{M}$ satisfying the following condition:

(8.1) *If $u \in A$, $v \in \mathfrak{M}$ and $|v(x)| \leqq |u(x)|$ a.e. then $v \in A$.*

These spaces will be referred to as (FL) spaces. Linear spaces of measurable functions subjected to (8.1) have been studied by LORENTZ, LUXEMBURG, and others (see [5] for references).

It follows from Proposition 4.1 and Theorem 4.1 that for every integral transformation K, $\mathfrak{D}_K$ is an (FL) space.

If $u, v \in \mathfrak{M}$ we shall write $u \gg v$ if and only if $|u(x)| \geqq |v(x)|$ a.e. It will be convenient to introduce on (FL) spaces metrics satisfying the condition $\varrho(u) \geqq \geqq \varrho(v)$ whenever $u \gg v$. The existence of such metrics is given by the following:

Proposition 8.1. *Let A be an (FL) space with metric ϱ_A. There exists on A a metric ϱ'_A equivalent to ϱ_A such that*

(8.2) $$\varrho'_A(u) \geqq \varrho'_A(v) \quad \text{whenever} \quad u \gg v\,.$$

Proof. For $u \in A$ define

(8.3) $$\varrho'_A(u) = \inf\{\varrho_A(v) : v \in A,\ v \geqq 0,\ v \gg u\}\,.$$

It is clear that ϱ'_A satisfies (8.2) and is a metric. We shall prove now that the metric ϱ'_A on A is complete. Let $\{u_n\} \subset A$ be a Cauchy sequence in the metric ϱ'_A. We can assume that

$$u_0 = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varrho'_A(u_{n+1} - u_n) < \infty\,.$$

We can find then $\{v_n\} \subset A$, $v_n \geqq 0$, $v_n \gg u_{n+1} - u_n$ such that $\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_A(v_n) < \infty$. Then $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ converges in A, hence in measure and consequently (since $v_n \geqq 0$) pointwise a.e. to a function $v \in A$. Also $\sum_{n=0}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$ converges absolutely a.e.

to a function $u \in \mathfrak{M}$ satisfying $u \ll v$, hence $u \in A$. From the pointwise inequality $|u - u_m| \leqq \sum_{n=m+1}^{\infty} |u_{n+1} - u_n|$ and the property (8.2) we deduce $\varrho'_A(u - u_m) \to 0$ as $m \to \infty$. It also follows from the above that A with the metric ϱ'_A is a metric subspace of $\mathfrak{M}$. ϱ'_A is clearly a semivector metric on A; also, in view of the inequality $\varrho'_A(u) \leqq \varrho_A(|u|)$, $\alpha \to 0$ implies $\varrho'_A(\alpha u) \to 0$ for every $u \in A$. By Proposition 1.2 A with the metric ϱ'_A is an (F) space, consequently an (FL) subspace of $\mathfrak{M}$. By the Corollary to Proposition 1.3, ϱ_A and ϱ'_A are equivalent and the proof is complete.

Remark. If $\varrho_A(u)$ is a norm (i.e. A is a Banach space) then clearly $\varrho'_A(u)$ is also a norm.

§ 9. The extended domain of an integral transformation

In this section we define an extension of an integral transformation K which contains all semiregular extensions K_A where A belongs to the class of (FL) spaces. This in particular implies that every nonsingular integral transformation K satisfies the (FL)-compatibility condition.

Proposition 9.1. *Define for every* $u \in \mathfrak{M}$

$$\tilde{\varrho}_K(u) = \varrho_X(u) + \sup\{\varrho_Y(Kf) : f \in \mathfrak{D}_K, f \ll u\}\,. \tag{9.1}$$

Then $\tilde{\varrho}_K$ *is a complete semivector metric on* $\mathfrak{M}$ *and* $K : \mathfrak{D}_K \to \mathfrak{N}$ *is continuous if* $\mathfrak{D}_K$ *is provided with the metric* $\tilde{\varrho}_K$. *The closure* $\tilde{\mathfrak{D}}_K$ *of* $\mathfrak{D}_K$ *in* $\mathfrak{M}$ *with the metric* $\tilde{\varrho}_K$ *is an* (FL) *subspace of* $\mathfrak{M}$.

Proof. To show that $\tilde{\varrho}_K$ is a metric it is sufficient to verify the triangle inequality. For every $u, v \in \mathfrak{M}$, $f \in \mathfrak{D}_K$, $f \ll u + v$, denote

$$h(x) = \frac{|u(x)|\, f(x)}{|u(x)| + |v(x)|}\,, \quad g(x) = \frac{|v(x)|\, f(x)}{|u(x)| + |v(x)|}\,, \quad \text{for} \quad |u(x)| + |v(x)| > 0$$

and $h(x) = 0 = g(x)$ if $|u(x)| + |v(x)| = 0$. Then $g, h \in \mathfrak{D}_K$, $g + h = f$, $h \ll u$, $g \ll v$. We have

$$\varrho_Y(Kf) \leqq \varrho_Y(Kg) + \varrho_Y(Kh)$$

and

$$\sup_{f \ll u+v} \varrho_Y(Kf) \leqq \sup_{h \ll u} \varrho_Y(Kh) + \sup_{g \ll v} \varrho_Y(Kg)\,,$$

which establishes the triangle inequality for $\tilde{\varrho}_K$. It follows immediately from the definition that $\tilde{\varrho}_K$ is a semivector metric. We shall now prove that $\tilde{\varrho}_K$ is complete. If $\{u_n\} \subset \mathfrak{M}$ is Cauchy in $\tilde{\varrho}_K$ then $u_n \to u$ in $\mathfrak{M}$ for some u and it remains to show that $\tilde{\varrho}_K(u_n - u) \to 0$ as $n \to \infty$. Possibly choosing a subsequence, letting $u_0 = 0$ we may assume that $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\varrho}_K(u_{n+1} - u_n) < \infty$. Then $\sum_{n=0}^{\infty} |u_{n+1} - u_n|$ converges a.e. to a function in $\mathfrak{M}$. Let now $\varepsilon > 0$ and choose $f_m \in \mathfrak{D}_K$ such that $f_m \ll \sum_{n=m}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$ and

$$\varrho_Y(Kf_m) > \sup\left\{\varrho_Y(Kf) : f \in \mathfrak{D}_K, f \ll \sum_{n=m}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)\right\} - \varepsilon$$

and define for $n \geqq m$

$$f_{m,n} = \frac{f_m |u_{n+1} - u_n|}{\sum_{n=m}^{\infty} |u_{n+1} - u_n|} \quad \text{for} \quad \sum_{n=m}^{\infty} |u_{n+1} - u_n| \neq 0 \quad \text{and } 0 \text{ otherwise}.$$

Then $f_m(x) = \sum_{n=m}^{\infty} f_{m,n}$ and $|f_m| = \sum_{n=m}^{\infty} |f_{m,n}|$ belong to $\mathfrak{D}_K$, and by the dominated convergence theorem we get

$$Kf_m = \sum_{n=m}^{\infty} Kf_{m,n}.$$

We also notice that $f_{m,n} \in \mathfrak{D}_K$ and $f_{m,n} \ll (u_{n+1} - u_n)$ for $n \geqq m$. Consequently

$$\sup\{\varrho_Y(Kf) : f \in \mathfrak{D}_K, f \ll u - u_m\} < \varepsilon + \varrho_Y(Kf_m) \leqq \varepsilon + \sum_{n=m}^{\infty} \varrho_Y(Kf_{m,n}) < 2\varepsilon$$

for m sufficiently large. Thus $\tilde{\varrho}_K$ is complete. The continuity of K is immediate because $\varrho_X(u) + \varrho_Y(Ku) \leqq \tilde{\varrho}_K(u)$ for $u \in \mathfrak{D}_K$.

Observe now that for $u \in \mathfrak{D}_K$ we have $|K|\,|u| \geqq |K|\,|v|$ whenever $v \ll u$ and consequently (see (4.4))

$$\tilde{\varrho}_K(u) \leqq \varrho_K(u) \quad \text{for} \quad u \in \mathfrak{D}_K. \tag{9.2}$$

Hence $\tilde{\varrho}_K(\alpha u) \to 0$ as $\alpha \to 0$ for $u \in \mathfrak{D}_K$ and by Proposition 1.2. $\tilde{\mathfrak{D}}_K$ is an (F) space; since $\varrho_X(u) \leqq \tilde{\varrho}_K(u)$ for all $u \in \mathfrak{M}$, $\tilde{\mathfrak{D}}_K$ is an (F)-subspace of $\mathfrak{M}$.

It follows immediately from definition (9.1) that the metric $\tilde{\varrho}_K$ has the property similar to (8.2),

$$\text{if} \quad u, v \in \mathfrak{M} \quad \text{and} \quad u \gg v, \quad \text{then} \quad \tilde{\varrho}_K(u) \geqq \tilde{\varrho}_K(v). \tag{9.3}$$

Suppose now that $u \in \tilde{\mathfrak{D}}_K, v \in \mathfrak{M}$, and $v \ll u$. We have to prove that $v \in \tilde{\mathfrak{D}}_K$. Let $\{u_n\} \subset \mathfrak{D}_K$ be such that

$$\tilde{\varrho}_K(u_n - u) \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

and define

$$v_n(x) = \frac{u_n(x)\, v(x)}{u(x)} \quad \text{for} \quad u(x) \neq 0 \quad \text{and } 0 \text{ otherwise}.$$

Then $v_n \in \mathfrak{D}_K$ and

$$\tilde{\varrho}_K(v_n - v) = \tilde{\varrho}_K\left(\frac{(u_n - u)v}{u}\right) \leqq \tilde{\varrho}_K(u_n - u)$$

by (9.3) since $\left|\frac{v}{u}\right| \leqq 1$. Hence $v \in \tilde{\mathfrak{D}}_K$ and the proof is complete.

Observe that in general $\tilde{\varrho}_K$ is not a vector metric on $\mathfrak{M}$. We know that $\tilde{\varrho}_K$ is stronger than ϱ_X; if $\tilde{\varrho}_K$ were a vector metric on $\mathfrak{M}$ it would follow that $\tilde{\varrho}_K$ and ϱ_X are equivalent. The latter is impossible unless $\mathfrak{D}_K = \mathfrak{M}$.

By Proposition 9.1 the integral transformation K can be extended to a unique continuous linear transformation $\tilde{K} : \tilde{\mathfrak{D}}_K \to \mathfrak{N}$.

We state now the main result of this section.

Theorem 9.1. *Let K be an integral transformation and A be an (FL) subspace of $\mathfrak{M}$ such that K is A— semiregular. Then A is an (FL) subspace of $\tilde{\mathfrak{D}}_K$ and consequently $K_A \subset \tilde{K}$. In particular, every integral transformation K satisfies the (FL) compatibility condition.*

Proof. We can assume that the metric ϱ_A of A satisfies (8.2). Since A and $\mathfrak{D}_K$ are (F)-subspaces of $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{D}_K \cap A \subset \tilde{\mathfrak{D}}_K$ is dense in A it is sufficient to show that the topology of A on $\mathfrak{D}_K \cap A$ is stronger than the topology induced by $\tilde{\varrho}_K$. If $\{u_n\} \subset \mathfrak{D}_K \cap A$ converges to 0 in A then for every sequence $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$ there is a sequence $\{v_n\} \subset \mathfrak{D}_K$, $v_n \ll u_n$ such that

$$\tilde{\varrho}_K(u_n) \leqq \varrho_X(u_n) + \varrho_Y(Kv_n) + \varepsilon_n .$$

By (8.1) $\{v_n\} \subset A$ and by (8.2) $\varrho_A(v_n) \to 0$; by A-semiregularity of K, $\varrho_Y(Kv_n) \to 0$. Hence $\tilde{\varrho}_K(u_n) \to 0$ and the topology of A is stronger on $\mathfrak{D}_K \cap A$ than the topology of $\tilde{\mathfrak{D}}_K$. The remaining statements of the theorem are immediate consequences of the result just proved.

In general the explicit description of the space $\tilde{\mathfrak{D}}_K$ for a given kernel K is not easy. Certain partial results in this direction will be given in § 10. In the remainder of this section we will establish several cases when $\tilde{\mathfrak{D}}_K = \mathfrak{D}_K$.

Proposition 9.2. *If* $\operatorname{Re} K(x, y) \geqq 0$, $\operatorname{Im} K(x, y) \geqq 0$ *a.e. then* $\tilde{\mathfrak{D}}_K = \mathfrak{D}_K$.

Proof. If $\operatorname{Re} K(x, y) \geqq 0$, $\operatorname{Im} K(x, y) \geqq 0$ and $u \in \mathfrak{D}_K$ then $\frac{1}{\sqrt{2}} |K| |u| \leqq |K|u|| |$ a.e. and

$$\tilde{\varrho}_K(u) = \tilde{\varrho}_K(|u|) \geqq \varrho_X(u) + \varrho_Y(K|u|) \geqq \frac{1}{\sqrt{2}} \varrho_K(u) .$$

On the other hand, by (9.2) $\tilde{\varrho}_K(u) \leqq \varrho_K(u)$ and since ϱ_K is complete on $\mathfrak{D}_K$ it follows that $\mathfrak{D}_K = \tilde{\mathfrak{D}}_K$.

Proposition 9.3. *If* $\theta \in \mathfrak{N}$, $\theta(y) \neq 0$ *a.e. and* $K'(x, y) = \theta(y) K(x, y)$, *then* $\mathfrak{D}_{K'} = \mathfrak{D}_K$ *and* $\tilde{\mathfrak{D}}_{K'} = \tilde{\mathfrak{D}}_K$.

Proof. The first part, $\mathfrak{D}_{K'} = \mathfrak{D}_K$, is trivial. To prove that $\tilde{\mathfrak{D}}_{K'} = \tilde{\mathfrak{D}}_K$ it is enough to notice that $v \to \theta v$ is a continuous automorphism of $\mathfrak{N}$; hence the metrics $\tilde{\varrho}_K$ and $\tilde{\varrho}_{K'}$ on $\mathfrak{M}$ are equivalent.

Theorem 9.2. *Suppose that for a.e.* $y \in Y$ *the set of values* $\{K(x, y) : x \in X\}$ *lies in a closed angle of the complex plane with vertex at* 0 *and opening* $\leqq \pi/2$. *Then* $\mathfrak{D}_K = \tilde{\mathfrak{D}}_K$.

Proof. Let the smallest closed angle containing the set $\{K(x, y) : x \in X\}$ be formed by the directions of the vectors $e^{i\alpha(y)}$ and $e^{i\beta(y)}$, $0 \leqq \beta(y) - \alpha(y) \leqq \pi/2$. Obviously $e^{i\alpha(y)}$ and $e^{i\beta(y)}$ are measurable functions. Then the kernel $e^{-i\alpha(y)} K(x, y)$ satisfies the conditions of Proposition 9.2 and thus, by Proposition 9.3 we get our statement.

We will need some additional notations for the next proposition. If $E \subset X$, $\mu(E) > 0$, we will consider on E the restriction of μ and use for E the function

$$\varphi_E(x) = \frac{\varphi(x)}{\mu_\varphi(E)} , \quad x \in E . \tag{9.4}$$

We define accordingly $\varrho_E(u)$ for $u \in \mathfrak{M}[E, \mu]$. For $u \in \mathfrak{M}$, $u\big|_E$ denotes the restriction of u to E. Accordingly for $A \subset \mathfrak{M}$, $A\big|_E = \{u\big|_E : u \in A\}$.

Let $X = \bigcup X_m$ be a partition of X (at most enumerable) with $\mu(X_m) > 0$. If $A_m \subset \mathfrak{M}(X_m, \mu)$ we consider the total direct sum $\sum \circ A_m$ as the set of all sequences $\{u_m\}$ with $u_m \in A_m$. Such a sequence will be written also $\sum u_m$ and

identified with $u \in \mathfrak{M}(X, \mu)$ such that $u\big|_{X_m} = u_m$ for all m. Thus $\sum \circ A_m$ is identified with a subspace of $\mathfrak{M}$. Clearly

$$\mathfrak{M} = \sum \circ \mathfrak{M}(X_m, \mu), \quad \varrho_X(u) = \sum_m \mu_\varphi(X_m)\, \varrho_{X_m}\big(u\big|_{X_m}\big). \tag{9.5}$$

For $A \subset \mathfrak{M}$, $A \subset \sum_m \circ A\big|_{X_m}$, but in general the last inclusion is not an equality. However, if the partition is *finite* and A is an (L)-class (i.e. (8.1) holds) then $A = \sum \circ A\big|_{X_m}$.

Proposition 9.4. a) *Let $X_0 \subset X$, $\mu(X_0) > 0$. Denote by K_0 the kernel K restricted to $X_0 \times Y$. Then*

$$\mathfrak{D}_{K_0} = \mathfrak{D}_K\big|_{X_0}, \quad \mathfrak{F}_{K_0} = \mathfrak{F}_K\big|_{X_0}.$$

b) *Let $Y_0 \subset Y$, $\nu(Y_0) > 0$. Denote by K^0 the kernel K restricted to $X \times Y_0$. Then*

$$\mathfrak{D}_{K^0} \supset \mathfrak{D}_K, \quad \mathfrak{F}_{K^0} \supset \mathfrak{F}_K.$$

Proof. a) The first equality is obvious. To prove the second equality we notice that by definition of ϱ_{X_0} and $\tilde{\varrho}_{K_0}$ we have

$$\tilde{\varrho}_{K_0}\big(u\big|_{X_0}\big) \leqq \frac{1}{\mu_\varphi(X_0)}\, \tilde{\varrho}_K(u) \quad \textit{for} \quad u \in \mathfrak{M}, \tag{9.6}$$

$$\tilde{\varrho}_K(\tilde{u}_0) \leqq \tilde{\varrho}_{K_0}(u_0), \textit{ for } u_0 \in \mathfrak{M}(X_0, \mu), \ \tilde{u}_0 \textit{ being the extension of } u_0 \textit{ to } X \textit{ such that } \tilde{u}_0(x) = 0 \textit{ for } x \in X - X_0. \tag{9.7}$$

By (9.6) $u \in \mathfrak{F}_K$ implies $u\big|_{X_0} \in \mathfrak{F}_{K_0}$ and by (9.7) $u_0 \in \mathfrak{F}_{K_0}$ implies $\tilde{u}_0 \in \mathfrak{F}_K$.

b) The first inclusion is obvious. The second follows by noticing that every function $f \in \mathfrak{D}_{K^0}$ can be approximated in the metric ϱ_{K^0} by functions $f_n \in \mathfrak{D}_K$, $f_n \ll f$ [2]) and that consequently

$$\tilde{\varrho}_{K^0}(u) \leqq \frac{1}{\nu_\psi(Y_0)}\, \tilde{\varrho}_K(u) \quad \textit{for} \quad u \in \mathfrak{M}. \tag{9.8}$$

Proposition 9.5. a) *Let $X = \bigcup_1^N X_m$ be a finite partition with $\mu(X_m) > 0$. Denote by K_m the restriction of K to $X_m \times Y$. Then*

$$\mathfrak{D}_K = \sum_1^N \circ \mathfrak{D}_{K_m}, \quad \mathfrak{F}_K = \sum_1^N \circ \mathfrak{F}_{K_m}.$$

b) *Let $Y = \bigcup Y_n$ be an enumerable partition with $\nu(Y_n) > 0$. Denote by K^n the restriction of K to $X \times Y_n$. Then*

$$\mathfrak{D}_K = \bigcap_n \mathfrak{D}_{K^n}, \quad \mathfrak{F}_K = \bigcap_n \mathfrak{F}_{K^n}.$$

Proof. a) follows immediately from Proposition 9.4, a). In part b) the first equality is obvious. As concerns the second equality, the inclusion $\subset$ follows from Proposition 9.4, b). It remains to prove $\mathfrak{F}_K \supset \bigcap_n \mathfrak{F}_{K^n}$. To start with, we

[2]) This follows from the general, easily proved statement that a) *for every $f \in \mathfrak{M}$ there exist $f_n \in \mathfrak{D}_K$ such that $f_n \ll f$ and $|f(x) - f_n(x)| \searrow 0$ for all x and that* b) *if $f \in \tilde{\mathfrak{F}}_K$ then $\tilde{\varrho}_K(f - f_n) \to 0$ for every such sequence $\{f_n\}$.*

notice that by the definition of the metrics ϱ_{Y_n}, $\tilde{\varrho}_K$ and $\tilde{\varrho}_{K^n}$

$$\tilde{\varrho}_K(u) \leqq \sum_n \nu_\psi(Y_n)\, \tilde{\varrho}_{K^n}(u) \,. \tag{9.9}$$

Suppose now that $u \in \bigcap \mathfrak{S}_{K^n}$. Clearly we can assume that u is positive. Then, since u is approximated in metric $\tilde{\varrho}_{K^n}$ by $v \in \mathfrak{D}_{K^n}$, the approximation is even better by $|v| \in \mathfrak{D}_{K^n}$ and $w = \min(|v|, u) \in \mathfrak{D}_{K^n}$, $w \ll u$ (use (9.3)). Since by a remark already made before (see footnote [2]), w can be approximated in metric ϱ_{K^n} by positive functions $f \in \mathfrak{D}_K \subset \mathfrak{D}_{K^n}$ with $f \ll w$, we deduce, by using (9.2), that u can be approximated in the metric $\tilde{\varrho}_{K^n}$ by positive $f \in \mathfrak{D}_K$ with $f \ll u$. For arbitrary $\varepsilon > 0$ choose n_0 such that

$$\sum_{n > n_0} \nu_\psi(Y_n) < \frac{\varepsilon}{3}$$

and then choose positive functions $f_1, \ldots, f_{n_0}$ in $\mathfrak{D}_K$ with $f_l \ll u$ so that

$$\varrho_{K^l}(u - f_l) < \frac{\varepsilon}{3}\,, \quad l = 1, 2, \ldots, n_0 \,.$$

Consider then $f_\varepsilon = \max(f_1, f_2, \ldots, f_{n_0})$. Clearly $f_\varepsilon \in \mathfrak{D}_K$, $f_\varepsilon \ll u$ and $u - f_\varepsilon \ll u - f_l$ for $l = 1, 2, \ldots, n_0$. Hence, by (9.3) and (9.9)

$$\tilde{\varrho}_K(u - f_\varepsilon) \leqq \sum_1^{n_0} \nu_\psi(Y_n)\, \tilde{\varrho}_{K^n}(u - f_\varepsilon) + \sum_{n > n_0} \nu_\psi(Y_n)\, \tilde{\varrho}_{K^n}(u - f_\varepsilon) \leqq$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{3} \sum_1^{n_0} \nu_\psi(Y_n) + 2 \sum_{n > n_0} \nu_\psi(Y_n) < \varepsilon \,,$$

which finishes the proof.

Remark. In propositions 9.4 and 9.5 we supposed that the subsets X_0, Y_0 or X_m, Y_n were of positive measure. It is trivial to notice that even if some of these sets are of measure 0 our statements remain valid.

Proposition 9.6. *Let $Y = \bigcup Y_n$ be an enumerable partition and for each n let there be a finite partition $X = \bigcup_m X_m^n$ such that for the restriction K_m^n of K to $X_m^n \times Y_n$ we have $\mathfrak{D}_{K_m^n} = \mathfrak{S}_{K_m^n}$. Then*

$$\mathfrak{D}_K = \mathfrak{S}_K \,.$$

Proof. We use Proposition 9.5

$$\mathfrak{D}_K = \bigcap_n \mathfrak{D}_{K^n} = \bigcap_n \left(\sum_m \circ\, \mathfrak{D}_{K_m^n} \right) = \bigcap_n \left(\sum_m \circ\, \mathfrak{S}_{K_m^n} \right) = \bigcap_n \mathfrak{S}_{K^n} = \mathfrak{S}_K \,.$$

We consider next topological measure spaces. Only Hausdorff topologies are considered and all Borel sets are assumed measurable. We will consider the Lindelöf property of a topological space: *from each covering of the space by open sets one can pick out an enumerable one.* Clearly all spaces with enumerable basis (separable) and all enumerable unions of compact sets have this property.

Theorem 9.3. *Let X and Y be topological measure spaces, X compact, Y with the Lindelöf property. Let further $K(x, y) \neq 0$ for all x, y and continuous on $X \times Y$* [3]*. Then $\mathfrak{D}_K = \mathfrak{S}_K$.*

[3]) The continuity condition can be greatly weakened. For instance it is enough to assume that the oscillation of $\operatorname{Arg} K(x, y)$ at each point of $X \times Y$ is $< \pi/2$.

Proof. For each x, y choose open sets $\mathscr{U}^{x,y} \subset X$ and $\mathscr{V}^{x,y} \subset Y$ such that $x \in \mathscr{U}^{x,y}$, $y \in \mathscr{V}^{x,y}$ and

$$(9.10) \quad \text{For } (x', y') \in \mathscr{U}^{x,y} \times \mathscr{V}^{x,y}, \ |K(x,y) - K(x',y')| \leqq \frac{|K(x,y)|}{\sqrt{2}}.$$

For fixed y, $\{\mathscr{U}^{x,y}\}$ form an open covering of the compact X. Hence there exists a finite covering

$$X = \bigcup_m \mathscr{U}^{x_m(y),y}.$$

Put $W^y = \bigcap_m \mathscr{V}^{x_m(y),y}$. It is an open set containing y. By the Lindelöf property there exists a sequence $\{y_n\}$ such that

$$Y = \bigcup_n W^{y_n}.$$

Define $Y_n = W^{y_n} - \bigcup_{l<n} W^{y_l}$, $X_m^n = \mathscr{U}^{x_m(y_n),y_n} - \bigcup_{l<m} \mathscr{U}^{x_l(y_n),y_n}$. Then $Y = \bigcup_n Y_n$ is an enumerable partition, $X = \bigcup_m X_m^n$ is a finite partition. Since $X_m^n \subset \mathscr{U}^{x_m(y_n),y_n}$ and $Y_n \subset \mathscr{V}^{x_m(y_n),y_n}$ by (9.10) the values of $K(x, y)$ for $(x, y) \in \mathscr{U}^{x_m(y_n),y_n} \times \mathscr{V}^{x_m(y_n),y_n}$ lie in the angle of opening $\pi/2$ with direction of $K(x_m(y_n), y_n)$ as a bisector. Hence Theorem 9.2 and Proposition 9.6 give our statement.

Corollary. *If we maintain all the hypotheses of Theorem* 9.3 *except for the compactness of X which we replace by local compactness, we get the statement that* $\mathfrak{S}_K \subset \mathfrak{D}_{K_{\text{loc}}}$[4]).

Proof. For any point $x \in X$ take a compact neighborhood X_0 and apply Proposition 9.4, a) and Theorem 9.3.

We turn now to another kind of case when $\mathfrak{D}_K = \mathfrak{S}_K$.

Proposition 9.7. a) *Let* $\tau \in \mathfrak{M}$, $\tau(x) \neq 0$ *a.e. and* $K'(x,y) = \tau(x) K(x,y)$. *Then* $\mathfrak{D}_{K'} = \tau^{-1}\mathfrak{D}_K$, $\mathfrak{S}_{K'} = \tau^{-1}\mathfrak{S}_K$.

b) *If, in addition,* $|\tau(x)| = 1$ *a.e. then* $\mathfrak{D}_{K'} = \mathfrak{D}_K$ *and* $\mathfrak{S}_{K'} = \mathfrak{S}_K$.

Proof. a) follows immediately from the remark that multiplication by τ is a continuous automorphism of $\mathfrak{M}$, that $K'u = K(\tau u)$ (whenever $u \in \mathfrak{D}_{K'}$, or $\tau u \in \mathfrak{D}_K$) and that $(u \ll v) \Leftrightarrow (\tau u \ll \tau v)$.

b) Since $\mathfrak{D}_K$ and $\mathfrak{S}_K$ are of type (L), for $|\tau(x)| = 1$ a.e. we have $\tau^{-1}\mathfrak{D}_K = \mathfrak{D}_K$ and $\tau^{-1}\mathfrak{S}_K = \mathfrak{S}_K$.

Corollary. *If Y is purely atomic with atoms* b_n, $n = 1, 2, \ldots$, *then* $\mathfrak{D}_K = \mathfrak{S}_K = \left\{u : \int_X |K(x, b_n)|\,|u(x)|\,d\mu < \infty \text{ for all } n\right\}$.

Proof. Consider first the restriction K^n of K to $X \times (b_n)$. Define

$$\tau_n(x) = \frac{\overline{K(x,b_n)}}{|K(x,b_n)|}$$

when $K(x, b_n) \neq 0$ and $\tau_n(x) = 1$ when $K(x, b_n) = 0$. The kernel $\tau_n(x) K(x, b_n)$ is non-negative; hence by Proposition 9.2 and Proposition 9.7, b) we get $\mathfrak{D}_{K^n} = \mathfrak{S}_{K^n}$ and clearly

$$\mathfrak{D}_{K^n} = \left\{u : \int_X |K(x,b_n)|\,|u(x)|\,d\mu < \infty\right\}.$$

Consider then the partition $Y = \bigcup_n (b_n)$ and apply Proposition 9.5, b).

[4]) For any class of functions A defined on a topological space, A_{loc} is the class of functions u such that each point has a neighborhood where u is equal to a function belonging to A.

§ 10. *Partial description of functions in* $\mathfrak{S}_K$

We shall discuss here some properties of functions belonging to the extended domain $\mathfrak{S}_K$ of an integral transformation, which, at least in some cases, lead to a complete description of $\mathfrak{S}_K$.

Let $\varphi \in \mathfrak{M}$, $\psi \in \mathfrak{N}$, μ_φ and ν_φ be as in § 4 and K be a (nonsingular) integral transformation.

Proposition 10.1. *If $u \in \mathfrak{S}_K$ then for every $\varepsilon > 0$ there exists a subset $X_0 \subset X$ with the following properties:*

i) $\mu_\varphi(X - X_0) \leqq \varepsilon$, $\chi_{X_0} u \in \mathfrak{D}_K$, *where χ_{X_0} denotes the characteristic function of X_0.*

ii) *For any partition $X - X_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ and any sequence $\{u_n\} \subset \mathfrak{D}_K$ such that $u_n \ll \chi_{X_n} u$, $n = 1, 2, \ldots$, there exists $Y_0 \subset Y$ such that $\nu_\psi(Y - Y_0) \leqq \varepsilon$ and*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(Ku_n)(y)|^2 \leqq \varepsilon \quad \text{for all} \quad y \in Y_0 . \tag{10.1}$$

Proof. We may assume that $u \geqq 0$. By Proposition 2.4 and Theorem 4.1 there is a function $\varphi_1 \in \mathfrak{D}_K$ such that $\varphi_1 > 0$ a.e.

Let $0 < \eta < \frac{1}{8}$, η to be fixed more precisely later. By the definition of $\mathfrak{S}_K$ there exists a function $v \in \mathfrak{D}_K$, $v \geqq 0$, such that

$$\varrho_Y(Kw) \leqq \eta \quad \text{for every} \quad w \in \mathfrak{D}_K \quad \text{such that} \quad w \ll u - v . \tag{10.2}$$

Let now

$$A_n = \left\{x : \frac{u(x)}{\varphi_1(x)} < n\right\} . \tag{10.3}$$

Then $A_n \nearrow X$, $(1 - \chi_{A_n})\, v \to 0$ a.e. and by the dominated convergence theorem $|K|((1 - \chi_{A_n})v) \to 0$ in $\mathfrak{N}$. There is an index n_0 such that

$$\mu_\varphi(X - A_{n_0}) \leqq \varepsilon, \quad \varrho_Y(|K|(1 - \chi_{A_{n_0}})v) \leqq \eta . \tag{10.4}$$

Let $X_0 = A_{n_0}$, it is clear that X_0 satisfies i). If $\chi' = 1 - \chi_{X_0}$ then for every $w \in \mathfrak{D}_K$, $w \ll \chi' u$, we have

$$\varrho_Y(Kw) \leqq 2\eta . \tag{10.5}$$

In fact, if

$$w_1 = \frac{u - v}{u} w, \; w_2 = \frac{v}{u} w \quad \text{for} \quad u \neq 0 \quad \text{and} \quad w_1 = w_2 = 0 \quad \text{for} \quad u = 0$$

then $w_1 + w_2 = w$, $w_1 \ll \chi'(u - v)$, $w_2 \ll \chi' v$ and (10.5) follows from (10.2) and the second inequality in (10.4).

Suppose that $X - X_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ is a partition of $X - X_0$ and $\{u_n\} \subset \mathfrak{D}_K$ is a sequence satisfying $u_n \ll \chi_{X_n} u$. Define for any index N and $t \in [0, 1]$

$$w_N(t, x) = \sum_{n=1}^{N} r_n(t)\, u_n(x) = w_{N,t}(x) \tag{10.6}$$

where $r_n(t)$ are the Rademacher functions on $[0, 1]$.

For every fixed t we have

$$|w_N(t, x)| \leqq \chi'(x)\, u(x)$$

and consequently, by (10.5)

$$\varrho_Y(Kw_{N,t}) \leqq 2\eta\,. \tag{10.7}$$

For a fixed $t \in [0, 1]$, let

$$B(t) = \{y : |(Kw_{N,t}(y)| \leqq \sqrt{2\eta}\}$$

then by (2.5) and (10.7)

$$\nu_\psi(B(t)) \geqq 1 - 2\sqrt{2\eta}\,. \tag{10.8}$$

Let λ denote the product measure $d\lambda = dt \times d\nu_\psi$ on the space $[0, 1] \times Y$. If

$$E = \{(t, y) \in [0, 1] \times Y : y \in B(t)\}$$

then by (10.8)

$$\lambda(E) \geqq 1 - 2\sqrt{2\eta}\,. \tag{10.9}$$

Let now

$$E_y = \{t \in [0, 1] : (t, y) \in E\}, \quad Y_0 = \left\{y : |E_y| > \frac{3}{4}\right\}. \tag{10.10}$$

It follows from (10.9) and the Fubini theorem that

$$\nu_\psi(Y - Y_0) \leqq 8\sqrt{2\eta}\,.$$

On the other hand we get for $y \in Y_0$ from the first inequality in (3.7).

$$\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{N} |Ku_n(y)|^2 \leqq \frac{3-\sqrt{6}}{4}\sum_{n=1}^{N} |Ku_n(y)|^2 \leqq \int_{E_y} 2\eta\, dt \leqq 2\eta$$

and a suitable choice of η completes the proof.

Corollary 1. *Let $u \in \mathfrak{S}_K$. Then for every partition $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ and every sequence $\{u_n\} \subset \mathfrak{S}_K$ such that $u_n \ll \chi_{X_n} u$ we have*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |Ku_n(y)|^2 < \infty \quad \text{a.e. in } Y\,. \tag{10.11}$$

Proof. Let $\varepsilon > 0$, by Proposition 10.1 there is an X_0 such that $\mu_\varphi(X - X_0) < \varepsilon$ and $\chi_{X_0} u \in \mathfrak{S}_K$. If $X_n' = X_n \cap X_0$; $X_n'' = (X - X_0) \cap X_n$ then $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{X_n'} |u_n| \in \mathfrak{S}_K$ and $\sum_{n=1}^{\infty} |K|\, \chi_{X_n'} |u_n|\,(y) < \infty$ for a.e. $y \in Y$. On the other hand, by the second part of Proposition 10.1 we have $\sum_{n=1}^{\infty} |K(\chi_{X_n''} u_n)\,(y)|^2 \leqq \varepsilon$ for y outside of a set of ν_ψ-measure $\leqq \varepsilon$. This proves the corollary.

As an immediate consequence of Corollary 1 we get

Corollary 2. *If (X, μ) is atomic, $X = \{a_n\}$, then for every $u \in \mathfrak{S}_K$*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |K(a_k, y)\, u(a_k)\, \mu(a_k)|^2 < \infty \quad \text{for a.e.} \quad y \in Y\,.$$

§ 11. Examples

1. *Fourier Series.* In this case $X = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, $\mu(\{n\}) = 1$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, $Y = [0, 2\pi]$ with the Lebesgue measure, $K(n, y) = e^{inv}$. We have $\mathfrak{D}_K = l^1$ and, since K is l^2-semiregular, Theorem 9.1 tells us that $l^2 \subset \tilde{\mathfrak{D}}_K$. On the other hand by Corollary 2, above, we have $\tilde{\mathfrak{D}}_K \subset l^2$ and thus $\tilde{\mathfrak{D}}_K = l^2$.

As concerns the adjoint kernel we have $\mathfrak{D}_{K^*} = L^1(0, 2\pi)$ and since now $Y = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ is purely atomic, we get by Corollary to Prop. 9.7 $\tilde{\mathfrak{D}}_{K^*} = \mathfrak{D}_{K^*} = L^1(0, 2\pi)$.

2. *Fourier transformation.* In this case $X = Y = R^1$, $\mu = \nu$ is the Lebesgue measure, $K(x, y) = \frac{e^{-ixy}}{\sqrt{2\pi}}$, and $\mathfrak{D}_K = L^1(R^1)$. Since K is L^2-semiregular we have

$$L^2(R^1) + L^1(R^1) \subset \tilde{\mathfrak{D}}_K \,. \tag{10.12}$$

Since here all the hypotheses of the Corollary to Theorem 9.3 are fulfilled, we obtain

$$\tilde{\mathfrak{D}}_K \subset \mathfrak{D}_{K\,\mathrm{loc}} = L^1_{\mathrm{loc}}(R^1) \,. \tag{10.13}$$

By Corollary 1 if $u \in \tilde{\mathfrak{D}}_K$ and $\{[a_n, a_{n+1}]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ is any partition of R^1 into intervalls then

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \int_{a_n}^{a_{n+1}} e^{-ixy} u(x)\, dx \right|^2 < \infty \quad \text{for a.e.} \quad y \in R^1 \,. \tag{10.14}$$

In particular we may choose $a_n = n$. We get then by an elementary argument

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \int_{n}^{n+1} u(x)\, dx \right|^2 < \infty \,. \tag{10.15}$$

However, this condition does not imply $u \in L^1 + L^2$ and the plausible conjecture that the extended domain for Fourier Transform is $L^1 + L^2$ is still unsettled.

Bibliography

[1] BANACH, S.: Théorie des opérations linéaires. Warsaw, 1932.
[2] DUNFORD, N., and J. T. SCHWARTZ: Linear Operators. Part I. New York: Interscience, 1958.
[3] HALMOS, P. R.: Measure Theory. Princeton: Van Nostrand 1950.
[4] KÖTHE, G., u O. TOEPLITZ: Lineare Räume mit unendlich vielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen. J. reine angew. Math. 171, 193—226 (1934).
[5] LUXEMBURG, W. A. J., and A. C. ZAANEN: Notes on Banach function spaces I—V. Proc. Koninkl. Nederl. Akad. van Wetensch., Series A, 66, No. 2, 3, 4, pp. 135—153, 239—263, 496—504 (1963).
[6] ZYGMUND, A.: Trigonometric Series. Cambridge University Press, 1959.

(Received July 28, 1965)

Arens, R.
Math. Annalen 163, 155—160 (1966)

Weierstrass Products for Inverse Limits of Banach Algebras

Herrn Gottfried Köthe zum 60. Geburtstag am 25. 12. 1965 gewidmet

By

Richard Arens in Los Angeles

The Weierstrass product construction is here regarded as a way of making a sequence of partial products, b_1, b_2b_1, $b_3b_2b_1$, ... converge in a topological algebra B by the prefixation of invertible elements $e_1, e_2, \ldots$; so that $\lim_{n\to\infty} e_n b_n \ldots b_1$ exists. A generalization of Weierstrass product theorem is proved when B is a dense inverse limit of Banach algebras $B_1, B_2, \ldots$ wherein (1) the invertible group of B_{n+1} is mapped densely into that of B_n, and (2) b_{n+1} is non-singular relative to B_k, $k \leqq n$. This result is applied to holomorphic functions of several variables.

1. Introduction

The Weierstrass product (or factorization) theorem usually asserts the existence of elements of a ring (the ring of entire functions) with suitably prescribed zeros. In an abstract ring, especially a non-commutative ring, it is difficult to speak of zeros. However, suppose $ab = c$ where a is invertible (or, has an inverse) in a ring A with unit. Then the relation of b and c is surely one which in the function-theoretic case reduces to b and c having the same zeros. Thus the specification of zeros can be replaced by the specification of elements whose zeros the desired element is supposed to share in some sense suggested by this relation.

Of course, the problem is not simply to find an element c with the same zeros as b. One desires an element b which has the zeros of $b_1, b_2b_1, b_3b_2b_1, \ldots$ and no others.

This latter idea involves further complications. We make it precise by equipping B with a sequence of homomorphisms β_n into Banach algebras $B_1, B_2, \ldots$ and requiring that for each n, ultimately (that is, for sufficiently large i) $\beta_n(b_i b_{i-1} \ldots b_2 b_1)$ has the same zeros as $\beta_n(b)$ relative to B_n, in the sense suggested above. These Banach algebras have norms which correspond to the maximum modulus on the various discs $\{|z| \leqq n\}$ in which the given zeros ultimately do not lie. Of course, the given $b_1, b_2, \ldots$ have to satisfy a condition that „their zeros tend to infinity". We capture this by requiring that ultimately, $\beta_n(b_i)$ has an inverse in B_n. This is not absurd because B_n is usually bigger than $\beta_n(B)$.

For convenience and without loss of applicability, we arrange the notation so that $i = n$ is big enough for the first condition, and $i = n+1$ suffices for the second.

The relation of B to the $B_1, B_2, \ldots$ has still to be made precise, and we refer to [2] and [3] for greater details on the ideas which we now call up.

2. Theorems and proofs

Let $B_1, B_2, \ldots$ be a sequence of Banach algebras each having a unit element; and let $(\beta^2, \beta^3, \ldots)$ be a sequence of mappings, $\beta^n : B_n \to B_{n-1}$

2.1 *each β^n is a homomorphism, $\beta^n(1) = 1$, and $\|\beta^n(x)\|_{n-1} \leqq \|x\|_n$,* where $\|x\|_k$ is the norm of a generic element x of B_k.

These homomorphisms generate an inverse mapping system with which is associated an inverse limit B. This limit B has defined on it mappings $\beta_1, \beta_2, \ldots$ into $B_1, B_2, \ldots$ such that if $b \in B$, then $(\beta_1(b), \beta_2(b), \ldots)$ is nothing else but b itself. B can be given a topological-algebra structure in which it is complete and the β_n become continuous homomorphisms (see [2] and [3]).

In the present paper we will simply call B a *limit algebra of type* 2.1.

We present now the basic generalization of Weierstrass' product theorem. In its formulation, we use the convention that if A is a ring with unit, then A^{-1} is the subset of A consisting of the invertible elements. A^{-1} is always a group, and if A is a Banach algebra, then A^{-1} is a topological group which is complete.

2.2 Theorem: *Let $B_1, B_2, \ldots$ be a sequence of Banach algebras with unit, and let $\beta^2, \beta^3, \ldots$ be as in* 2.1, *and suppose moreover that*

$$\beta^n(B_n^{-1}) \quad \text{is dense in} \quad B_{n-1}^{-1} \qquad (n = 2, 3, \ldots). \tag{2.21}$$

Suppose $b_1, b_2, \ldots$ be a sequence of elements from the inverse limit algebra[1]) *B, satisfying the condition $\|\beta_1(b_1)\| \geqq 1$ and*

$$\beta_n(b_{n+1}) \quad \text{belongs to} \quad B_n^{-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.22}$$

Then there is a sequence $e_1, e_2, \ldots$ of elements of B^{-1} such that

$$e_n b_n b_{n-1} \ldots b_1 \tag{2.23}$$

has a limit b, for which $\beta_n(b)$ is of the form $(n = 1, 2, \ldots)$

$$f_n \beta_n(b_n b_{n-1} \ldots b_1) \text{ where } f_n \in B_n^{-1} \text{ and also } f_n \in \beta_n(B). \tag{2.24}$$

The part of the conclusion here involving the invertible element f_n is the analogue of that part of Weierstrass product theorem which says that the product has exactly the right sort of zeros on the disc of radius n, namely those of $b_n b_{n-1} \ldots b_1$.

It is convenient to break the proof of 2.2 into several lemmas.

2.3 Lemma: *There exist invertible elements $x_1, x_2, \ldots$ in B such that $x_1 = 1$ and*[2])

$$2^n \|b_1\|_n \ldots \|b_n\|_n \|x_1\|_n \ldots \|x_n\|_n \|x_{n+1} b_{n+1} - 1\|_n \leqq 1$$

and

$$2^n \|\beta_1(b_2)^{-1}\|_1' \|\beta_2(b_3)^{-1}\|_2' \ldots \|\beta_{n-1}(b_n)^{-1}\|_{n-1}' \times \\ \times \|x_2^{-1}\|_1' \ldots \|x_n^{-1}\|_{n-1}' \|\beta_n(b_{n+1})^{-1} \beta_n(x_{n+1})^{-1} - 1\|_n \leqq 1 .$$

Here $\|b_j\|_k$ means $\|\beta_k(b_j)\|_k$ and $\|y\|_k'$ means the greater of 1 and $\|y\|_k$.

Proof: We proceed by induction, supposing $x_1, \ldots, x_n$ have already been found. Now $\beta_n(b_{n+1})$ is supposed to lie in B_n^{-1} (2.22), so there is a $y_{n+1} \in B_n$ such that y_{n+1} is the inverse of $\beta_n(b_{n+1})$. By virtue of 2.21, and the fact that B_n^{-1} is complete in some metric (determining the same topology as the norm

[1]) We repeat, b_n is an element of B, not of B_n.

[2]) Note that for $b \in B$, $\|b\|_n$ and $\|\beta_n(b)\|_n$ are the same number, by the notation of [2] and [3].

does) we can apply [3, 2.4] and conclude that $\beta_n(B^{-1})$ is dense in each B_n^{-1}. It follows that we can pick x_{n+1} in B^{-1} so that $\beta_n(x_{n+1})$ comes as close to y_{n+1} as we please. Thus the conclusion of 2.3 is assured.

2.4 Lemma: $\lim_{p\to\infty} x_n x_{n+1} \dots x_{n+p} b_{n+p} b_{n+p-1} \dots b_{n+1} b_n$ *exists in* B.

Proof: Let $h_p = x_n \dots x_{n+p} b_{n+p} \dots b_n$. Then

$$h_{p+1} - h_p = x_n \dots x_{n+p}(x_{n+p+1} b_{n+p+1} - 1)\, b_{n+p} \dots b_n .$$

By 2.3 we conclude $\|b_{p+1} - b_p\|_{n+p} \leqq 1/2^{n+p}$, whence $\|h_{p+1} - h_p\|_q \leqq 1/2^{n+p}$ for each q as soon as $p > q - n$. Thus $\{h_p\}$ converges in the sense of each $\| \dots \|_q$ and thus converges.

Let us denote the limit by g_n.

2.5 Lemma: $\beta_n(g_{n+1})$ *belongs to* B_n^{-1}.

Proof: Let us abbreviate $\beta_n(x_k)$ by X_k and $\beta_k(b_k)$ by Y_k, the n being fixed in the discussion. Then

$$\beta_n(x_{n+1} \dots x_{n+p} b_{n+p} \dots b_{n+1}) = X_{n+1} \dots X_{n+p}\, Y_{n+p} \dots Y_{n+1}$$

so it has an inverse. The only thing to do is to show that these inverses converge as $p \to \infty$. Let Z_p be the inverse of the element $X_{n+1} \dots Y_{n+1}$ just written down. Then

$$Z_{p+1} - Z_p = Y_{n+1}^{-1} \dots Y_{n+p}^{-1} (Y_{n+p+1}^{-1} X_{n+p+1}^{-1} - 1)\, X_{n+p}^{-1} \dots X_n^{-1} .$$

We shall prove that, by virtue of the second inequality of 2.3, $\|Z_{p+1} - Z_p\|_n \leqq 2^{-n-p}$. We write down this second inequality, but replacing n by $n + p$. Thus,

$$\|\beta_{n+p}(b_{n+p+1})^{-1} \beta_{n+p}(x_{n+p+1})^{-1} - 1\|_{n+p} \, \|x_2^{-1}\|_1' \dots \|x_{n+p}\|_{n+p-1}' \times$$
$$\times \, \|\beta_1(b_2)^{-1}\|_1' \dots \|\beta_{n+p-1}(b_{n+p})^{-1}\|_{n+p-1}' \leqq 2^{-n-p} .$$

We now omit some factors which are not less than one, and make repeated use of the fact (2.1) that $\| \dots \|_n \leqq \| \dots \|_q$ when $q \geqq n$, and obtain

$$\|Y_{n+p+1}^{-1} X_{n+p+1}^{-1} - 1\|_n \, \|x_{n+1}^{-1}\|_n \dots \|x_{n+p}^{-1}\|_n \, \|Y_{n+1}^{-1}\|_n \dots \|Y_{n+p}^{-1}\|_n \leqq 2^{-n-p} .$$

As in the proof of 2.4, we conclude that Z_p converges in B_n, so that we can assert that $\beta_n(g_{n+1})$ has an inverse in B_n.

We cannot assert that $\beta_n(g_n)$ has an inverse in B_n because $\beta_n(b_n)$ need not have an inverse.

We are now ready to prove 2.23 and 2.24 which are the only parts of 2.2 not already proved. Let $e_n = x_1 \dots x_n$. Then the limit of 2.23 is just g_1, which shall be our b. Thus

$$\beta_n(b) = \beta_n(x_1 x_2 \dots x_n g_{n+1})\, \beta_n(b_n \dots b_1)$$

and the first factor on the right is invertible, by 2.5.

Thus the theorem is proved.

It now seems advisable to show that the Weierstrass product theorem (cf. [6, Th. 8.7.3]) is indeed a corollary of 2.2. However, we shall prove a generalization which will, we hope, illuminate the significance of condition 2.21.

2.6 Theorem: *Let Ω be an open subset of the complex plane $\mathbb{C}$. Suppose $K_1, K_2, \dots$ is an increasing sequence of compact subsets of Ω whose interiors have a union which is Ω such that*

(2.61) *for each n, each bounded component of $\mathbb{C} - K_n$ contains a point*[3]) *of $\mathbb{C} - \Omega$. Let $b_1, b_2, \ldots$ be a sequence of polynomials such that*

(2.62) *b_{n+1} has no zeros on K_n $(n = 1, 2, \ldots)$.*

Then there is a sequence of functions $e_1, e_2, \ldots$ holomorphic and invertible on Ω such that $\lim (e_n b_1 \ldots b_n)$ converges uniformly on each K_n, is holomorphic on Ω and has on each K_n just the zeros, multiplicities counted, of $b_1 b_2 \ldots b_n$.

Proof: Let B be the algebra of functions holomorphic on Ω. For each $b \in B$ let $\|b\|_n = \max_{z \in k} |b(z)|$. Thus semi-normed, B is representable as the inverse limit of algebras B_n, where B_n is the Banach algebra of uniform limits on K_n of restrictions to K_n of functions holomorphic on Ω.

We will now show that 2.61 insures 2.21. Acutally, we will show directly that $\beta_n(B^{-1})$ is dense in B_n^{-1}. Let $\varphi \in B_n^{-1}$. For $\varepsilon > 0$ there is an f in B having no zeros on K_n, such that $\|\varphi - f\|_n < \varepsilon$. Now we construct a domain D with polygonal boundary such that $D \supset K_n$. We can cover K_n by a finite set of closed squares (contained in Ω) on which f does not vanish. Let δ be the union of these squares. Let $T_0, \ldots, T_m$ be the components of $\mathbb{C} - S$ where T_0 is the unbounded one. Let $U_0, \ldots, U_m$ be components of $\mathbb{C} - K_n$ such that $T_i \subset U_i$. According to 2.61 there is a $z_i \in \mathbb{C} - \Omega$ in U_i, for $i = 1, 2, \ldots, m$. We construct a polygonal channel in U_i containing z_i and meeting T_i, and subtract these channels from S, obtaining a set E, which is the closure of its interior, D. Let $F_0, \ldots, F_m$ be the components of $\mathbb{C} - E$, where now $z_i \in F_i$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Let Γ_j be the boundary of F_j. Let (Cf. [1, p. 93])

$$2\pi i N_j = \int_{\Gamma_j} f(z)^{-1} f'(z)\, dz\,.$$

Let $p = (z - z_1)^{N_1} \ldots (z - z_m)^{N_m}$. Then f/p has a continuous logarithm on E, that is, $f = pe^{\psi}$ where ψ is continuous on E. Evidently ψ is holomorphic on D. By [6, Th. 16.6.3][4]) we can find a rational function g whose only poles are at $z_1, \ldots, z_m$ such that $\|\psi - g\|_n < \varepsilon$. The result of these efforts is that we can make $\|\varphi - pe^g\|_n$ arbitrarily small. But pe^g has an inverse, e^{-g}/p, in B.

Now we will show that 2.62 implies 2.22. For this we can pretend that b_{n+1} is $z - a$, where $a \notin K_n$. We repeat the earlier construction, using $f = z - a$. We obtain thus elements of B (such as e^{-g}/p) arbitrarily close on K_n, to $(z - a)^{-1}$. Since B_n is complete, they converge to an inverse for b_{n+1} in B_n.

Thus the hypotheses of 2.2 are verified, and the conclusion of 2.6 follows.

We now return to the abstract condition 2.21. Can it be replaced by the weaker condition

(2.7) $$\beta^n(B_n) \quad \textit{is dense in} \quad B_{n-1}$$

which sufficed for several ideal-theoretic results of [3]? We shall show that it does not. Select a sequence $r_1, r_2, \ldots$ of positive numbers such $r_n + r_{n+1} < (2n)^{-1} - (2n+2)^{-1}$ and let G_n be the disc of radius r_n, center $1/2n$. Remove this disc from the plane and replace it by the curved surface of a right circular cone whose base is G_n, and whose height is $2n$, plus the vertex of the

[3]) Thus $\Omega = \mathbb{C}$ would require that K_n does not separate $\mathbb{C}$.

[4]) HILLE [loc. cit.] uses a finite z_0 in F_0. But if $|z_0|$ is large enough, its contribution can be approximated by polynomials on K_n.

cone. We obtain thus a landscape with a sequence of ever taller volcanic peaks converging toward the x_3 axis in $\mathbb{R}^3$ (cartesian coordinates (x_1, x_2, x_3)). This surface, plus the positive x_3 axis, forms a set which we will call Ω. K_n shall be the (compact) part of Ω which satisfies $x_1^2 + x_2^2 \leqq n^2$, $0 \leqq x_3 \leqq 2n + 1$. B_n shall be the algebra $\mathscr{C}(K_n, \mathbb{C})$ of continuous complex functions on K_n. The map $B_{n+1} \to B_n$ is obvious, and not only satisfies 2.7 but is *onto*. The inverse limit algebra is $\mathscr{C}(\Omega, \mathbb{C})$ itself.

Now define $b_n \in B$ as follows: $b_n(x_1, x_2, x_3) = x_1 + ix_2 - 1/2n$. Thus b_n has its zero at the peak of the n-th cone, from which it follows that 2.22 holds.

Now we shall see that the conclusion does not hold. The limiting $b \in \mathscr{C}(\Omega, \mathbb{C})$ evidently would vanish only at the peaks of our cones, and not, for example at $(0, 0, 0)$. Let $b(0, 0, 0) = \delta \neq 0$. Then there is a neighborhood U of $(0, 0, 0)$ in which b would be of the form e^{φ}. Some disc G_n lies in U, although the cone based on G_n does not. On the n-th cone, every $b_m (m \neq n)$ and of course every e_m is an exponential, so that $e_N b_N \ldots b_n \ldots b_1$ is of the form $b_n e^{\varphi_N}$ for every $N > n$. But this means that b_n would be of the form e^{φ} on the boundary of G_n, which is not true.

We will now illustrate the application of 2.2 to a case in which B is not commutative. We explain first the notation we will use.

For a point p of complex m space $\mathbb{C}^m$, and an $m \times m$ complex matrix M we will write pM for the point of $\mathbb{C}^m$ whose coordinates are the entries of the matrix pM

$$pM = (p_1 \ldots p_m) \begin{pmatrix} M_{11} \ldots M_{1m} \\ \vdots \\ M_{m1} \ldots M_{mm} \end{pmatrix}.$$

The class of $m \times m$ complex matrices shall be denoted by $\mathbb{C}_m$, and the group of invertible elements of $\mathbb{C}_m$, by $(\mathbb{C}_m)^{-1}$.

A $\mathbb{C}^m$ valued functon is just a system $(f_1 \ldots f_m)$ of complex-valued functions. $\mathbb{C}_m$ and $(\mathbb{C}_m)^{-1}$ valued functions are similarly defined.

By a function (either $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^m$, ... valued) *holomorphic* on a set $E \subset \mathbb{C}^n$ we mean one capable of being extended to a neighborhood U of E, the extension being holomorphic on U (cf. [5, p. 79]).

2.8 Theorem: *Let m and n be integers. Let Ω be an open set in $\mathbb{C}^n$ which is the union of connected compact sets $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ where*

(2.81) *each K_i is convex.*

Now suppose for each i there is given a $\mathbb{C}^m$ valued function f_i holomorphic on K_i with the following consistency relation: for each i there is a $\mathbb{C}_m$ valued function b_{i+1} holomorphic on Ω such that

(2.82) *b_{i+1} is invertible on K_i and $f_{i+1} = f_i b_{i+1}$.*

Then there is a $\mathbb{C}^m$ valued function f holomorphic on Ω such that for each i, there is a $\mathbb{C}_m$ valued function h_i holomorphic on Ω such that h_i is invertible on K_i, and $f = f_i h_i$.

Proof: Let G_i be the group of $(\mathbb{C}_m)^{-1}$ valued functions holomorphic on K_i. We begin by remarking that

(2.83) *G_i is connected.*

To see this, we select a point of K_i. For simplicity, we assume this is the origin. For $\varphi \in G_i$, let $\varphi_t(p) = \varphi(tp)$, $0 \leqq t \leqq 1$. Evidently $\varphi_t \in G_i$ and φ_0 is a constant. Since $(\mathbb{C}_m)^{-1}$ itself is connected, we can conclude that G_i is connected.

Now G_i is contained in the algebra B_i which is (now being defined as) the uniform limits on K_i of $\mathbb{C}_m$ valued functions holomorphic on K_i. B_i is evidently a Banach algebra.

We now turn to 2.21.

Let a be any element of B_i^{-1}. From 2.83 one deduces readily that B_i^{-1} is connected. The elements of the form $\exp b$, $b \in B_i$, fill out a neighborhood of 1 in the topological group B_i^{-1}. Since the group is connected, we can apply Schreier's theorem and obtain $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in B_i$ such that $a = \exp \varphi_k$.

We now remark that

(2.84) *Every function in B_i can be uniformly approximatedon K_i by functions whose matrix elements are holomorphic on Ω.*

We choose $f_1, \ldots, f_k$ holomorphic on K_i and approximating $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ uniformly on K_i. These f_i may now be approximated uniformly on K_i by polynomials $P_1, \ldots, P_k$ [5, p. 42], because the f_i are holomorphic on a neighborhood of K_i, and this neighborhood may be chosen as convex, so it is surely „polynomially convex". We then form $b = \exp P_1 \ldots \exp P_k$. This $b \in B^{-1}$ where B is now defined as the algebra of $\mathbb{C}_m$ valued functions holomorphic on Ω. In particular, $b \in B_{i+1}$, so that 2.21 is verified.

The inverse limit of the B_i is, pretty clearly, B. The validity of 2.22 is also evident. We may therefore apply 2.2. We write the products in the reverse order, but otherwise we use the notation of 2.2. We define f as $f_1 b$. According to 2.24, we can say that

$$b = b_1 \ldots b_i h_i \quad \text{on} \quad K_i$$

where „on K_i" is our justification for omitting β_i; the h_i being the element of B of which the f_i of 2.24 is the value of β_i. Applying 2.82 repeatedly to $f = f_1 b$ we see that $f = f_i h_i$ where h_i has the property claimed in 2.8. This proves 2.8.

2.9 Remark: Evidently a generalization of 2.8 is possible whenever 2.83 and 2.84 are true. We have already mentioned that 2.84 follows from „polynomial convexity". On the other hand, it was proved in [4] that if K_i is a simply connected *polycylinder* (which, when compact, is also polynomially convex) then 2.83 is true. Thus far-reaching generalizations of 2.8 are obviously possible.

Acknowledgement. This research was supported in part by NSF Grant GP-3594.

Bibliography

[1] AHLFORS, L. V.: Complex analysis. New York: McGraw-Hill Book Company Inc. 1953.
[2] ARENS, R.: A generalization of normed rings. Pacific. J. Math. **2**, 455—471 (1952).
[3] — Dense inverse limit rings. Michigan Math. J. **5**, 169—182 (1958).
[4] CARTAN, H.: Sur les matrices holomorphiques des n variables complexes. J. math. pures appl. **9**, 1—26 (1940).
[5] GUNNING, R. C., and H. ROSSI: Analytic functions of several complex variables. Englewood: Prentice Hall Inc. 1965.
[6] HILLE, EINAR: Analytic function theory. New York: Blaisdell Publishing Co. 1959.

(Received June 28, 1965)

BESSAGA, C. and V. KLEE
Math. Annalen 163, 161—166 (1966)

Every Non-normable Frechet Space is Homeomorphic with all of its Closed Convex Bodies*

To GOTTFRIED KÖTHE on his sixtieth birthday

By

CZESLAW BESSAGA and VICTOR KLEE in Warsaw, Poland, and Seattle, Wash.

Introduction

A metric linear space E is called a *Frechet space* provided it is complete and locally convex. A *convex body* in E is a convex set which has nonempty interior. It is easy to see that E is homeomorphic with all of its open convex bodies, and that if E is finite-dimensional it is not homeomorphic with any of its closed convex bodies other than E itself. On the other hand, we believe that every infinite-dimensional metric linear space is homeomorphic with all of its closed convex bodies. This conjecture was first proved [6] for Hilbert space, and later [8, 4] for a large class of normed linear spaces which includes all $\aleph_0$-dimensional normed linear spaces and is *believed* to include all infinite-dimensional Banach spaces. However, the conjecture for Banach spaces (that is, for normable Frechet spaces) is not fully settled, and thus it is rather surprising that the following result can be proved.

Theorem 1. *Every non-normable Frechet space is homeomorphic with all of its closed convex bodies.* (See note added at end of paper.)

The proof of Theorem 1 is based on some special properties of the Frechet space s, consisting of all sequences of real numbers in the topology of pointwise convergence (that is, $s = \mathfrak{R}^{\aleph_0}$). One of these amounts to the assertion that

$$]0, 1[^{\aleph_0} \times [0, 1] \approx]0, 1[^{\aleph_0} \approx]0, 1[^{\aleph_0} \times [0, 1[\ ,$$

where $\approx$ indicates topological equivalence. This fact is used also in a proof of our second main result, which is a complete topological classification of spaces of the form $[0, 1]^\alpha \times [0, 1[^\beta \times]0, 1[^\gamma$ for arbitrary cardinal numbers α, β and γ.

Theorem 2. *Let T denote the class of all ordered triples (α, β, γ) of cardinal numbers, and for each $(\alpha, \beta, \gamma) \in T$ let $P(\alpha, \beta, \gamma)$ denote the product space $[0, 1]^\alpha \times [0, 1[^\beta \times]0, 1[^\gamma$. For each $(\alpha, \beta, \gamma) \in T$, let the triple $\varrho(\alpha, \beta, \gamma)$ be defined as follows:*

$$\varrho(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} (0, 0, \beta + \gamma) & \text{if } \aleph_0 \leqq \beta + \gamma \geqq \alpha \quad (1) \\ (\alpha, 0, \beta + \gamma) & \text{if } \aleph_0 \leqq \beta + \gamma < \alpha \quad (2) \\ (\alpha, 0, \gamma) & \text{if } \aleph_0 > \beta + \gamma \text{ and } \beta = 0 \quad (3) \\ (\alpha + \beta + \gamma - 1, 1, 0) & \text{if } \aleph_0 > \beta + \gamma \text{ and } \beta \neq 0\,. \quad (4) \end{cases}$$

* The research was conducted at the University of Washington in 1963 when the first author was visiting there. The work of both authors was supported in part by the National Science Foundation, U.S.A. (NSF-GP-378).

Then ϱ is a retraction of T onto its subclass ϱT consisting of all triples (α, β, γ) which have one of the following four forms:

(5) $(0, 0, \gamma)$ *for* $\aleph_0 \leqq \gamma$;

(6) $(\alpha, 0, \gamma)$ *for* $\aleph_0 \leqq \gamma < \alpha$;

(7) $(\alpha, 0, \gamma)$ *for* $\aleph_0 > \gamma$, *arbitrary* α;

(8) $(\alpha, 1, 0)$ *for arbitrary* α.

For arbitrary $(\alpha, \beta, \gamma) \in T$ and $(\alpha', \beta', \gamma') \in T$, the spaces $P(\alpha, \beta, \gamma)$ and $P(\alpha', \beta', \gamma')$ are homeomorphic if and only if $\varrho(\alpha, \beta, \gamma) = \varrho(\alpha', \beta', \gamma')$. Thus the class $\{P(\alpha, \beta, \gamma) : (\alpha, \beta, \gamma) \in \varrho T\}$ is a minimal class of topological representatives for the class $\{P(\alpha, \beta, \gamma) : (\alpha, \beta, \gamma) \in T\}$.

(The generalized continuum hypothesis is used in showing that a space $P(\alpha, \beta, \gamma)$ corresponding to a triple in (6) cannot be homeomorphic with one corresponding to a triple in (5), and that spaces corresponding to different triples in (6) cannot be homeomorphic.)

In less detail, we may say that each space $P(\alpha, \beta, \gamma)$ is homeomorphic with one obtained from a triple in ϱT, and that different triples from ϱT give rise to topologically different product spaces. (By methods which are different from ours, ANDERSON [0] has recently proved that the product of a denumerable infinity of intervals is homeomorphic with $]0, 1[^{\aleph_0}$ if and only if infinitely many of the factors fail to be compact. This is a corollary of our Theorem 2, but ANDERSON obtains it as a corollary of a result on products of "near-cells" which does not appear to be amenable to our methods.)

§ 1. Proof of theorem 1

The proof of Theorem 1 is based on four preliminary results.

1.1 Proposition. *Suppose that E is an infinite-dimensional locally convex metric linear space, J is an open strip bounded by two parallel closed hyperplanes H and H' in E, and q is a point of H'. Then*

$$H \cup J \cup \{q\} \approx H \cup J$$

by means of a transformation which is the identity on H.

Proof. For the general normed case, a stronger result follows from the reasoning on pp. 12—28 of [6] (see especially (3,3) on p. 27). A similar argument applies whenever E contains a linearly bounded convex body, so that case will not be considered in detail here. Instead, we assume that every convex body in E contains a line. This covers the case $E = s$, which suffices for the proofs of Theorems 1 and 2. We assume without loss of generality that $0 \in H$, whence $J = H +]0, 1[q$.

Let $V_0, V_1, \ldots$ be a basis of (relatively) closed convex neighborhoods of q in $H \cup J \cup \{q\}$ such that $V_0 = H \cup J \cup \{q\}$ and the interior of each V_n contains the (relative) closure of its successor. For each $h \in H$ and for $n = 0, 1, \ldots$, let $h_n' = 2^{-n}h + (1 - 2^{-n})q$ and let h_n be the (unique) point at which the boundary ∂V_n is intersected by the segment $[h, q[$. Let ξ denote the homeomorphism of

$H \cup J$ onto itself which, for each h and n, carries h_n onto h'_n and carries the segment $[h_n, h_{n+1}]$ affinely onto the segment $[h'_n, h'_{n+1}]$. Then $\xi V_n = H + [1 - 2^{-n}, 1[q$. Let η be an (easily constructed) homeomorphism of $H \cup J$ onto $H + [0, \infty[q$ such that η is the identity on H and always

$$\eta(H + [1 - 2^{-n}, 1[q) = H + [n, \infty[q.$$

By (2.1) of [2], there exists a basis $W_0, W_1, \ldots$ of closed convex neighborhoods of q in E such that $W_0 = H + [0, \infty[q$, each W_n contains a uniform neighborhood of its sucessor, and each W_n is of type Q in the sense of [2] (meaning that its characteristic cone is not a linear subspace of E). By (1.6) of [2], there is a homeomorphism ζ of $H + [0, \infty[q$ onto $(H + [0, \infty[q) \sim \{q\}$ such that ζ is the identity on H and always $\zeta(H + [n, \infty[q) = W_n \sim \{q\}$.

Now let ψ be the transformation of $J \cup H \cup \{q\}$ onto $J + [0, \infty[q$ such that $\psi(q) = q$ and $\psi(x) = \zeta\eta\xi(x)$ for each $x \in J \cup H$. Then the restriction of ψ to $J \cup H$ is surely a homeomorphism, for it is a composition of homeomorphisms. And since $\psi V_n = W_n$ for all n, it is evident that both ψ and ψ^{-1} are continuous at q. Thus ψ is a homeomorphism and $\eta^{-1}\psi$ is the homeomorphism which completes the proof of Proposition 1.1.

Note that 1.1 expresses a topological property of all infinite-dimensional locally convex metric linear spaces H, for it implies that $(H \times [0, 1[) \cup \cdot \cup \{(h, 1)\} \approx H \times [0, 1[$ for each point h of H. Our next result involves the notion of compressibility, which is defined here more restrictively than it was in [8]. A topological linear space E will be called *compressible* provided there is a closed linear subspace L of infinite deficiency in E such that

$$E \times [0, 1] \approx (E \times [0, 1[) \cup (L \times \{1\}) \tag{9}$$

by means of a transformation which carries $E \times \{0\}$ onto itself.

1.2 Proposition. *If E is a compressible Frechet space, then*

$$E \times [0, 1] \approx E \times [0, 1[\approx E \times]0, 1[.$$

Proof. Let L be as in (9), let F denote the quotient space E/L, and let μ denote the natural homomorphism of E onto F. From MICHAEL's Frechet-space version [10] of a theorem of BARTLE and GRAVES [1], it follows that the carrier μ^{-1} admits a continuous selection and hence that $E \approx L \times F$. (Cf. $(B - G)$ on p. 266 of [3].) Using (9) and 1.1, we see that

$$E \times [0, 1] \approx L \times (F \times [0, 1[\cup \{(0, 1)\}) \approx L \times (F \times [0, 1[) \approx E \times [0, 1[.$$

In a similar manner, using the fact that (9)'s homeomorphism carries $E \times \{0\}$ onto itself and hence the homeomorphisms just constructed can be "reflected" across $E \times \{0\}$, we conclude that

$$E \times [-1, 1] \approx L \times (F \times]-1, 1[\cup \{(0, -1), (0, 1)\}) \approx$$
$$\approx L \times (F \times]-1, 1[) \approx E \times]-1, 1[.$$

1.3 Proposition. *The space s is compressible.*

Proof. For each point $x = (x_1, x_2, \ldots) \in s$, let the point $\xi(x) \in s$ be defined by the condition that

$$(\xi(x))_{2n-1} = 0, \quad (\xi(x))_{2n} = x_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) .$$

Then ξ is a homeomorphism of s onto a closed linear subspace L of infinite deficiency in s. For each point $(x, \lambda) \in s \times [0, 1]$, let

$$\eta(x, \lambda) = ((1 - \lambda)x + \lambda\xi(x), \lambda) .$$

Then η is a homeomorphism of $s \times [0, 1]$ onto $(s \times [0, 1]) \cup (L \times \{1\})$, and η is the identity on $s \times \{0\}$.

1.4 Proposition. *Every non-normable Frechet space E is homeomorphic with a product space $F \times s$ for some Frechet space F.*

Proof. From a theorem of EIDELHEIT (Satz 2 of [5]) it follows that s is the image of E under a continuous linear transformation τ. Let F be the kernel of τ. Then $E \approx F \times s$ by the selection theorem employed in 1.2. Alternatively, we may use KOLMOGOROFF's characterization [9] of normability to produce a separable non-normable closed linear subspace E_1 of E, the selection theorem to see that $E \approx (E/E_1) \times E_1$, and Corollary 2 of [3] to see that $E_1 \approx l$ or E_1 is isomorphic with a product space $E_2 \times s$ for some Banach space E_2. But $l \approx l^{\aleph_0}$ by Proposition 2 of [3], and evidently $l^{\aleph_0} \approx l^{\aleph_0} \times s$, so again the desired conclusion is obtained.

Finally, we prove Theorem 1 in the following slightly strengthened form.

1.5 Theorem. *Suppose that M is a closed linear subspace of finite deficiency m in a non-normable Frechet space E, and that C is a closed convex body in M. Then C is homeomorphic with E.*

Proof. By Theorem B of [2], C is homeomorphic with a closed halfspace in M or (for some finite n) with the product of an n-cell by a closed linear subspace G_n of deficiency n in M. That is, $C \approx G_1 \times [0, 1[$ or $C \approx G_n \times [0, 1]^n$. By 1.4 there is an F-space F_n such that $G_n \approx F_n \times s$. Thus we have

$$C \approx F_n \times s \times [0, 1[^n \quad \text{or} \quad C \approx F_n \times s \times [0, 1]^n ,$$

and of course

$$E \approx G_n \times \mathfrak{R}^{m+n} \approx F_n \times]0, 1[^{m+n} .$$

From 1.2 and 1.3 it follows that

$$s \times [0, 1] \approx s \times [0, 1[\approx s \times]0, 1[\approx s ,$$

and then by mathematical induction that

$$s \times [0, 1]^j \times [0, 1[^k \times]0, 1[^l \approx s$$

for all finite j, k and l. Consequently,

$$C \approx F_n \times s \approx E$$

and the proof is complete.

§ 2. Proof of theorem 2

For notational convenience, let us set $I = [0, 1]$, $J = [0, 1[$ and $K =]0, 1[$. The following facts are useful.

2.1. $I \times J \approx J \times J \approx K \times J$.

2.2. $I^\alpha \times J^\beta \times K^\gamma \approx K^\gamma$ *if* $\aleph_0 \leqq \gamma \geqq \alpha + \beta$.

2.3. $J^\beta \approx K^\beta$ *if* $\aleph_0 \leqq \beta$.

Proofs. The assertion 2.1 is evident. For 2.2, use elementary properties of infinite cardinals in conjunction with 1.2 and 1.3 to verify that

$$I^\alpha \times J^\beta \times K^\gamma \approx I^\alpha \times K^{\aleph_0 \alpha} \times J^\beta \times K^{\aleph_0 \beta} \times K^\gamma \approx$$
$$\approx (I \times K^{\aleph_0})^\alpha \times (J \times K^{\aleph_0})^\beta \times K^\gamma \approx K^{\aleph_0 \alpha} \times K^{\aleph_0 \beta} \times K^\gamma \approx K^\gamma .$$

For 2.3, note that

$$J^\beta \approx (J \times J)^\beta \approx (J \times K)^\beta \approx J^\beta \times K^{\aleph_0 \beta} \approx (J \times K^{\aleph_0})^\beta \approx K^{\aleph_0 \beta} \approx K^\beta .$$

Now in verifying that $P(\alpha, \beta, \gamma) \approx P\varrho(\alpha, \beta, \gamma)$ for all $(\alpha, \beta, \gamma) \in T$, use 2.2 and 2.3 to handle the cases listed under (1) and (2) in the statement of Theorem 2. Case (3) is trivial, and (4) follows from 2.3 together with mathematical induction.

To complete the proof of Theorem 2, we must show that different triples in ϱT give rise to topologically different product spaces. In 5.8 of [7], this was accomplished for the finite-dimensional case with the aid of 2.4—2.7 below; for the general case, two more invariants must be considered.

2.4. *$P(\alpha, \beta, \gamma)$ is compact if and only if $\beta = \gamma = 0$.*

2.5. *$P(\alpha, \beta, \gamma)$ is locally compact if and only if $\beta + \gamma < \aleph_0$.*

2.6. *$P(\alpha, \beta, \gamma)$ is finite-dimensional if and only if $\alpha + \beta + \gamma < \aleph_0$; its dimension is then equal to $\alpha + \beta + \gamma$.*

2.7. *Suppose that $0 < \beta + \gamma < \aleph_0$ and that $P^*(\alpha, \beta, \gamma)$ is the one-point compactification of $P(\alpha, \beta, \gamma)$. Then $P^*(\alpha, \beta, \gamma)$ is contractible if and only if $\gamma = 0$. If $\gamma > 0$, then γ is equal to the largest integer n such that an n-sphere admits an essential mapping into $P^*(\alpha, \beta, \gamma)$.*

2.8. *If $\alpha + \beta + \gamma \geqq \aleph_0$, then $\alpha + \beta + \gamma$ is the smallest cardinality of a basis for the open subsets of $P(\alpha, \beta, \gamma)$.*

2.9. *If $\beta + \gamma \geqq \aleph_0$, then the space $P(\alpha, \beta, \gamma)$ can be covered by $2^{\beta+\gamma}$ compact subsets but not by $\beta + \gamma$ compact subsets.*

Now let us consider the various forms (5), (6), (7) and (8) of triples appearing in the statement of Theorem 2. From 2.5 we see that no space corresponding to (5) or (6) can be homeomorphic with one corresponding to (7) or (8), for the latter are locally compact but the former are not. The only compact spaces are those corresponding to (7) with $\gamma = 0$, and these are differentiated by their dimensions and cardinalities of bases (2.6 and 2.8). Among the noncompact spaces corresponding to (7) or (8), the latter are differentiated from the former by means of 2.7, which also serves in conjunction with 2.6 and 2.8 to distinguish among the different spaces corresponding to (7). Lemmas 2.6 and 2.8 suffice for the interdistinctions in (8), and 2.8 for those in (5).

If a space corresponding to (6) is homeomorphic with one corresponding to (5), we have $I^\alpha \times K^\gamma \approx K^{\gamma'}$ with $\alpha > \gamma \geqq \aleph_0 \leqq \gamma'$. It follows from 2.8 that $\alpha = \gamma'$, whence $I^\alpha \times K^\gamma \approx K^\alpha$. By 2.9, these spaces can be covered by 2^γ compact subsets but not by α compact subsets, whence $\gamma < \alpha < 2^\gamma$ and the generalized continuum hypothesis is contradicted.

Suppose, finally, that two different spaces corresponding to (6) are homeomorphic. Then we have $I^\alpha \times K^\gamma \approx I^{\alpha'} \times K^{\gamma'}$ with $\alpha > \gamma \geqq \aleph_0 \leqq \gamma' < \alpha'$.

Since $\alpha = \alpha'$ by 2.8, we must have $\gamma \neq \gamma'$ and may assume that $\gamma < \gamma'$. By 2.9, the spaces in question can be covered by 2^γ compact subsets but not by γ' of them, whence $\gamma < \gamma' < 2^\gamma$ and the generalized continuum hypothesis is again contradicted. The proof of Theorem 2 is complete.

References

[0] ANDERSON, R. D.: Topological properties of the Hilbert cube and the infinite product of open intervals. Trans. Am. Math. Soc., to appear.

[1] BARTLE, R. G., and L. M. GRAVES: Mappings between function spaces. Trans. Am. Math. Soc. **72**, 400—413 (1952).

[2] BESSAGA, C., and V. KLEE: Two topological properties of topological linear spaces. Israel J. Math. **2**, 211—220 (1964).

[3] —, and A. PEŁCZYŃSKI: Some remarks on homeomorphisms of F-spaces. Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math. astr. et phys. **10**, 265—270 (1962).

[4] CORSON, H., and V. KLEE: Topological classification of convex sets. Proc. Symp. Pure Math. **7**. — Convexity. Am. Math. Soc., Providence, R.I., 1963, 37—51.

[5] EIDELHEIT, M.: Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen. Studia Math. **6**, 139—148 (1936).

[6] KLEE, V.: Convex bodies and periodic homeomorphisms in Hilbert space. Trans. Am. Math. Soc. **74**, 10—43 (1953).

[7] — Some topological properties of convex sets. Trans. Am. Math. Soc. **78**, 30—45 (1955).

[8] — Topological equivalence of a Banach space with its unit cell. Bull. Am. Math. Soc. **67**, 286—290 (1961).

[9] KOLMOGOROFF, A.: Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen Raumes. Studia Math. **5**, 29—33 (1934).

[10] MICHAEL, E.: Convex structures and continuous selections. Canad. J. Math. **11**, 556—575 (1959).

Note and references added in proof: Since this paper was submitted ANDERSON [11] has proved that the space s is homeomorphic with Hilbert space and KADEC [12] has proved that all infinite-dimensional separable Banach spaces are homeomorphic. From these results, in conjuction with results of [4, 2] and Theorem 1 of the present paper, it follows that every infinite-dimensional Frechet space is homeomorphic with all of its closed convex bodies.

[11] ANDERSON, R. D.: Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines. Bull. Am. Math. Soc. **72**, to appear (1966).

[12] KADEC, M. I.: Topological equivalence of all separable Banach spaces. (Russian.) Dokl. Akad. Nauk SSSR, to appear.

(Received August 31, 1965)

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · HEIDELBERG · NEW YORK

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete

Herausgegeben von J. L. Doob, E. Heinz, F. Hirzebruch, E. Hopf, H. Hopf, W. Maak, S. MacLane, W. Magnus, F. K. Schmidt, K. Stein
Geschäftsführende Herausgeber: B. Eckmann und B. L. van der Waerden, Zürich

77. Band

Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen

Von Dr. Dr. h. c. Heinrich Behnke
o. Professor an der Universität Münster und

Dr. Friedrich Sommer
o. Professor an der Universität Bochum

Dritte Auflage
Mit 59 Abbildungen
XII, 603 Seiten Gr.-8°. 1965
Ganzleinen DM 79,—

Inhaltsübersicht:

Analysis der komplexen Zahlen. Die Fundamentalsätze über holomorphe Funktionen. Die analytischen Funktionen, ihre singulären Stellen und ihre Entwicklungen. Konforme Abbildungen. Der Gesamtverlauf der analytischen Funktionen und ihre Riemannschen Flächen. Funktionen auf Riemannschen Flächen. Namen- und Sachverzeichnis.

Aus den Besprechungen:

„Dieses Lehrbuch — und ein solches ist es in des Wortes bestem Sinn — vermittelt den Studierenden in methodisch ausgezeichneter Weise stufenweise immer wieder eine in gewissem Sinn abgeschlossene Darstellung der Funktionentheorie unter gleichmäßiger Berücksichtigung der verschiedenen Gesichtspunkte beim Aufbau der Theorie." *Monatshefte für Mathematik*

„Die Neuauflage dieses bewährten Lehrbuches hat mehrere Änderungen und Erweiterungen erfahren, vor allem in den Kapiteln über die Analysis der komplexen Zahlen, die Theorie der normalen Familien und der Riemannschen Flächen. Die bekannt klare und übersichtliche Darstellung hat hierdurch weiter an Geschlossenheit und Vollständigkeit gewonnen. Das Buch ist für Mathematiker und Physiker als Lehrbuch vorzüglich geeignet und dürfte den an Hochschulen gestellten Anforderungen hinsichtlich der Darstellung und Stoffauswahl voll genügen. Sehr nützlich sind die eingestreuten Beispiele und Literaturhinweise."
Zeitschrift für angewandte Physik

■ Bitte Gesamtübersicht anfordern!

Seite

KELLEY, J. L., Decomposition and Representation Theorems in Measure Theory . . 89
(Anschrift: Department of Mathematics, University of California, Berkeley, California/USA)

PTÁK, V., Some Metric Aspects of the Open Mapping and Closed Graph Theorems . 95
(Anschrift: Ceskoslovenská akademie ved, Mathmatický Üstav, Zitná 25, Praha 1 — Nové Mêsto/CSSR)

KŌMURA, Y., and S. KOSHI, Nuclear Vector Lattices 105
(Anschriften: Institut für angew. Mathematik, 6900 Heidelberg, Tiergartenstraße; Hokkaido University, Department of Mathematics, Sapporo/Japan)

LEPTIN, H., Faltungen von Borelschen Maßen mit L^p-Funktionen auf lokal kompakten Gruppen 111
(Anschrift: Institut für angew. Mathematik, 6900 Heidelberg, Tiergartenstraße)

REITER, H., Zwei Anwendungen der Bruhatschen Funktion 118
(Anschrift: Mathematisch Instituut der Rijksuniversiteit, Boothstraat 17, Utrecht, Holland)

WAELBROECK, L., Duality and the Injective Tensor Product 122
(Anschrift: Université: Institute de Mathématiques, Avenue F.-D. Roosevelt, 50, Bruxelles 5/Belgium)

ARONSZAJN, N., and P. SZEPTYCKI, On general integral transformations 127
(Anschrift: State University of Kansas, Lawrence, Kansas/USA)

ARENS, R., Weierstrass Products for Inverse Limits of Banach Algebras 155
(Anschrift: Department of Mathematics, University of California, Los Angeles, California/USA)

BESSAGA, C., and V. KLEE, Every Non-normable Frechet Space is Homeomorphic with all of its Closed Convex Bodies 161
(Anschrift: Department of Mathematics, University of Washington, Seattle 5, Washington/USA)

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Edgar Seidler, 1 Berlin 31 (Wilmersdorf), Heidelberger Platz 3. Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York — Druck der Brühlschen Universitätsdruckerei, Gießen
Printed in Germany

I, 83

Mathematische Annalen

Begründet 1868 durch Alfred Clebsch · Carl Neumann

Fortgeführt durch Felix Klein · David Hilbert
Otto Blumenthal · Erich Hecke

Herausgegeben von **Heinrich Behnke,** Münster i. W.
Richard Courant, New York
Hans Grauert, Göttingen
Friedrich Hirzebruch, Bonn
Heinz Hopf, Zürich
Gottfried Köthe, Frankfurt/M.
Bartel L. van der Waerden, Zürich

Band 163 · Heft 3 · 1966

Springer-Verlag · Berlin · Heidelberg · New York

Math. Ann. · Abgeschlossen am 1. März 1966 · A 21 265 D

5039

Mathematische Annalen

Begründet 1868 durch *Alfred Clebsch* und *Carl Neumann*, früher herausgegeben von *Alfred Clebsch* (1869—1872), *Carl Neumann* (1869—1876), *Felix Klein* (1876—1924), *Adolph Mayer* (1876—1901), *Walther v. Dyck* (1888—1921), *David Hilbert* (1902—1939), *Otto Blumenthal* (1906—1938), *Albert Einstein* (1920—1928), *Constantin Carathéodory* (1925—1928), *Erich Hecke* (1929—1947), *Franz Rellich* (1947—1955), *Kurt Reidemeister* (1947—1963).

Band 1—80 Leipzig, B. G. Teubner, ab Band 81 (1920) Berlin, Springer.

An unsere Mitarbeiter!

Die Korrekturkosten sind bei den „Mathematischen Annalen" sehr hoch. Für ihre Verminderung muß unbedingt Sorge getragen werden. Wir richten deshalb an alle unsere Mitarbeiter die freundliche dringende Bitte, zu diesem Ziele an ihrem Teile mit beitragen zu wollen. Dazu ist nötig:

1. Das Manuskript muß *völlig druckfertig* und *gut leserlich* sein und für den Setzer *gemäß den „Hinweise für die Autoren"* (herausgegeben von Redaktion und Verlag) vorbereitet sein. — Diese Hinweise können von der Redaktion angefordert werden.

2. Veränderungen des Textes in der Korrektur sind auf die Fälle zu beschränken, wo sich nachträglich *wirkliche Irrtümer* herausstellen. Insbesondere sind rein stilistische Verbesserungen zu unterlassen. Sollte ein Irrtum bemerkt werden, noch bevor Korrektur eingetroffen ist, dann ist ein verbesserter Text sofort an die Redaktion zu schicken, die dafür Sorge tragen wird, daß das Manuskript noch vor dem Satz berichtigt wird.

Jede Änderung des schon gesetzten Textes muß zu Lasten der Autoren gehen.

Die Reihenfolge der Veröffentlichungen behält sich die Redaktion vor.

Die Redaktion der Mathematischen Annalen

Mathematische Annalen

Erscheinen zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung zwanglos in Heften, die zu Bänden vereinigt werden. Sie sind durch jede Buchhandlung zu beziehen. Der Preis des Bandes beträgt DM 96,—.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskripts und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0,30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Mathematischen Annalen bestimmte Manuskripte können bei jedem der unten verzeichneten Redaktionsmitglieder eingereicht werden:

Professor Dr. Dr. h. c. H. Behnke, 44 Münster/Westf., Rottendorffweg 17,

Professor Dr. R. Courant, 142 Calton Road, New Rochelle, N. Y. USA,

Professor Dr. H. Grauert, Mathematisches Institut der Universität, 34 Göttingen, Bunsenstr. 3—5,

Professor Dr. F. Hirzebruch, Mathematisches Institut der Universität, 53 Bonn (Rhein), Wegelerstr. 10

Professor Dr. Dr. h. c. H. Hopf, Zollikon bei Zürich, Alte Landstraße 37,

Professor Dr. Dr. h. c. G. Köthe, 6 Frankfurt/Main, Parkstraße 14[1],

Professor Dr. Dr. h. c. B. L. van der Waerden, Mathematisches Institut der Universität Zürich, 8006 Zürich/Schweiz

Inhaltsverzeichnis des Heftes auf Seite 4

WLOKA, J.
Math. Annalen 163, 167—188 (1966)

Reproduzierende Kerne und nukleare Räume I.

Herrn Prof. Dr. G. KÖTHE zum 60. Geburtstag gewidmet

Von

JOSEPH WLOKA in Heidelberg

In dieser Arbeit benutzen wir den Zusammenhang, der zwischen reproduzierenden Kernen und nuklearen Räumen besteht, zum Beweis der Nuklearität einer weiten Klasse von Räumen. Die Sätze 5 und 5a, die ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Nuklearität zweier Raumklassen angeben, sind formuliert mittels reproduzierender Kerne — diese Sätze bilden den Knotenpunkt unserer Betrachtungen. Die Abschätzung in Satz 7 für die Kernfunktion macht es möglich, die Sätze 5 und 5a auf Räume, deren Elemente holomorphe Funktionen sind, anzuwenden, und wir erhalten eine hinreichende Bedingung für die Nuklearität dieser Räume, ausgedrückt durch die in den Normen vorkommenden Gewichtsfunktionen (Sätze 9, 9a, 10 und 10a).

Wir schlagen in unserer Arbeit einen direkten Weg ein. Wir geben Bedingungen an, unter welchen die induktiven Einbettungen von

$$E = \operatorname*{ind}_{\to n} E_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

nuklear sind — derartige Räume nennen wir (LN)-Räume — nach einem allgemeinen Satz (Satz 1) ist E dann nuklear im Sinne von GROTHENDIECK [6]. Setzen wir die Regularität von $E = \operatorname*{ind}_{\to n} E_n$ voraus, so gilt auch der umgekehrte Satz (Satz 1a). Dual dazu geben wir Bedingungen an, unter denen die projektiven „Ausbettungen" von

$$F = \operatorname*{proj}_{\leftarrow \alpha} F_\alpha, \quad \alpha \in A, \ A \text{ eine gerichtete Indexmenge,}$$

nuklear sind. F ist dann nuklear nach Definition.

Auf diese Weise erhalten wir einen neuen, direkten Beweis für die Nuklearität der von GROTHENDIECK [7], KÖTHE [8], [9] u. a. betrachteten Räume $H(G)$ (Anwendung 1), sowie für die Gelfand-Schylowschen Distributionsraumklassen W und E (Anwendung 3). Unsere Methoden lassen sich auch auf die Grundräume für die Randverteilungen von KÖTHE [9] und TILLMANN [21] sowie auf die Ultradistributionsräume von SEBASTIÃO E SILVA [20] anwenden, und wir sehen, daß sie alle nukleare Räume sind (Anwendung 2 und 4).

Zur Nuklearität der von GELFAND-SCHYLOW betrachteten Raumklassen S[1]) (oder W; in [22] haben wir nachgewiesen, daß jeder W-Raum ein S-Raum ist) bemerken wir, daß MITJAGIN in [12] allgemein ihre Nuklearität bewiesen

[1]) Die Gelfandschen S-Räume sind nicht zu verwechseln mit den Schwartzschen $\mathcal{S}$-Räumen, wir benutzen in dieser Arbeit nur Gelfandsche S-Räume.

hat. Sein Beweis geht über die Einbettung der S-Räume in Tensorprodukte von $\mathfrak{S}$ und K, wobei $\mathfrak{S}$ der bekannte Schwartzsche (nukleare) Raum ist und K ein entsprechender Kötheraum, für welchen ein Nuklearitätskriterium in [13] bewiesen wurde. Dieser Beweis erfaßt aber nicht die Raumklassen E (Definition der Raumklassen E, siehe PALAMODOW [14]).

Die Nuklearitätsbeweise für die W-Räume in [3] und [4] sind lückenhaft, ein anderer von WILENKIN angegebener Beweis in der englischen und deutschen Übersetzung von [4] (siehe [5], S. 79ff.) geht auch den Weg über ein Tensorprodukt (dort Stufenraum genannt), nämlich $\mathfrak{D}_{\langle -a,a\rangle} \otimes K$, wobei $\mathfrak{D}_{\langle -a,a\rangle}$ der bekannte Schwartzsche Testraum ist und K ein nuklearer Kötheraum, und WILENKIN beweist z. B. die Nuklearität von $W_{M,Apn}$ nur für den Fall, daß $M = |x|^n$, $n = 2, 3, \ldots$. Sein Beweis ist z. B. für den Fall $M(x) = |x|^{3/2}$ nicht mehr durchführbar.

I. Nukleare Räume

Bekanntlich läßt sich jeder vollständige lokalkonvexe Raum E als projektiver Limes von Banachräumen E_α darstellen (KÖTHE [8], S. 234)

$$E = \operatorname*{proj}_{\leftarrow \alpha \in A} E_\alpha ,$$

wobei A eine gerichtete Indexmenge ist. Falls nun für jedes α ein β existiert, derart, daß $\alpha < \beta$ und die Abbildung $\operatorname*{proj}_{\alpha,\beta} : E_\beta \to E_\alpha$ nuklear ist, wollen wir E einen nuklearen Raum nennen. Diese Definition stimmt für vollständige Räume mit der Grothendieckschen überein (siehe GROTHENDIECK [6] II, S. 37 im Beweis). Jeder vollständige nukleare Raum ist schon als projektiver Limes von Hilberträumen H_α

$$E = \operatorname*{proj}_{\leftarrow \alpha} H_\alpha ,$$

darstellbar (GROTHENDIECK [6] II, S. 37), also kann man in der Definition eines nuklearen Raumes statt, daß die Abbildung $\operatorname*{proj}_{\alpha,\beta} : H_\beta \to H_\alpha$ nuklear ist, fordern, daß sie Hilbert-Schmidtsch ist (MAURIN [10], GELFAND, WILENKIN [4], S. 85). Jede nukleare Abbildung ist nämlich Hilbert-Schmidtsch, und zwei Hilbert-Schmidtsche Abbildungen ergeben zusammengesetzt eine nukleare Abbildung. Hier wollen wir zwei — für die Anwendungen besonders wichtige — Klassen von nuklearen Räumen behandeln: nukleare (F)-Räume (kurz (FN)-Räume) und nukleare induktive Limites von Banachräumen, (kurz (LN)-Räume). Sie sind, wie wir sehen werden, dual zueinander.

Die Definition eines (FN)-Raumes E ergibt sich aus der allgemeinen Definition:

$$E = \operatorname*{proj}_{\leftarrow n} E_n , \quad n = 1, 2, \ldots, E_n\text{-Banachräume},$$

oder

$$E = \operatorname*{proj}_{\leftarrow n} H_n , \quad n = 1, 2, \ldots, H_n\text{-Hilberträume},$$

wobei gefordert wird, daß die projektiven Abbildungen entweder nuklear oder Hilbert-Schmidtsch sind.

Definition. *Wir bezeichnen E als* (LN)*-Raum, falls gilt:*

1. $E = \operatorname{ind}_{\to n} E_n$, $n = 1, 2, \ldots$; E_n-Banachräume *(hier setzen wir stillschweigend voraus, daß die Definitionsbedingungen für einen induktiven Limes erfüllt sind, vgl.* Köthe [8], S. 223 *oder* Raĭkow [15], S. 419*)*;

2. *zu jedem n gibt es ein m, $n < m$, derart daß die induktive Abbildung: $E_n \to E_m$ (Einbettung) nuklear ist.*

Satz 1. *Jeder* (LN)*-Raum ist ein nuklearer Raum im Sinne von* Grothendieck *(siehe oben).*

Beweis. Der einfacheren Schreibweise halber sei

$$E = \operatorname{ind}_{\to n} E_n ,$$

mit den nuklearen Abbildungen

$$\varphi_n : E_n \to E_{n+1} .$$

Da jede nukleare Abbildung auch kompakt ist (Grothendieck [6] II, S. 38), ist E ein vollstetiger, induktiver Limes im Sinne von Sebastião e Silva [17] (siehe auch Raĭkow [15]) und für den dualen Raum E_b' (starker Topologie) gilt (siehe Raĭkow [15], S. 432, oder Sebastião e Silva [17], S. 17)

$$E_b' = \operatorname{proj}_{\leftarrow n} E_n' , \qquad E_n' \text{ dual zu } E_n,$$

wobei die projektiven Abbildungen gleich ${}^t\varphi_n : E_{n+1}' \to E_n'$ sind (${}^t\varphi$ ist die zu φ adjungierte Abbildung). Die Abbildung ${}^t\varphi_n$ ist wieder nuklear (Grothendieck [6] I, S. 85), E_b' ist damit ein (FN)-Raum. Der (stark) duale Raum zu E_b' ist wegen der Reflexivität von E (Raĭkow [15], Sebastião e Silva [17] S. 15) wieder gleich E

$$(E_b')_b' = E = \operatorname{ind}_{\to n} E_n .$$

Nun ist aber nach Grothendieck [6] II, S. 40 der stark duale Raum eines (FN)-Raumes nuklear, womit wir bewiesen haben, daß E nuklear ist. Im Beweis haben wir die folgenden Tatsachen benutzt:

Satz 2. *Jeder* (LN)*-Raum E ist ein vollstetiger, induktiver Limes im Sinne von* Sebastião e Silva [17], *E ist somit separiert, vollständig und regulär (= jede beschränkte Menge von E ist schon in einem E_n enthalten und dort beschränkt).*

Jeder (LN)*-Raum ist stark dual zu einem* (FN)*-Raum und umgekehrt.*

Satz 3. *Jeder* (LN)*-Raum E kann schon durch Hilberträume H_n dargestellt werden*

$$E = \operatorname{ind}_{\to n} H_n , \tag{1}$$

wobei die induktiven Abbildungen nuklear, oder Hilbert-Schmidtsch sind. Umgekehrt, falls für E die Darstellnng (1) *gilt mit Hilbert-Schmidtschen induktiven Abbildungen, so ist E ein* (LN)*-Raum.*

Beweis. Der zweite Teil unseres Satzes folgt einfach aus der schon erwähnten Tatsache, daß die Zusammensetzung zweier Hilbert-Schmidtschen Abbildungen eine nukleare Abbildung ist (Maurin [10], S. 363).

Zum Beweis des ersten Teils bemerken wir, daß nach GROTHENDIECK [6], Teil II S. 38 jede nukleare Abbildung

$$\varphi : E_1 \to E_2$$

faktorisiert werden kann:

$$\varphi : E_1 \to H \to E_2 ,$$

wobei H ein Hilbertraum ist, was angewandt auf die induktiven Abbildungen ergibt

$$(2) \qquad E_n \longrightarrow H_n \xrightarrow[v_n]{} E_{n+1} \xrightarrow[\varphi_{n+1}]{} E_{n+2} \xrightarrow[u_{n+2}]{} H_{n+2} \longrightarrow E_{n+s} ,$$

wobei H_n, $n = 1, 2, \ldots$, Hilberträume sind.

Aus dem Schema (2) ersehen wir erstens, daß

$$E = \operatorname*{ind}_{\to n} H_n ,$$

gilt, und zweitens, daß die induktive Abbildung $H_n \to H_{n+2}$ gleich

$$v_n \circ \varphi_{n+1} \circ u_{n+2} ,$$

ist. Da die Zusammensetzung von stetigen und nuklearen Abbildungen wieder nuklear ist, ist somit die Abbildung: $H_n \to H_{n+2}$ nuklear (und damit auch Hilbert-Schmidtsch).

Der Vollständigkeit halber bringen wir hier eine Umkehrung von Satz 1.

Satz 1a. *Sei der Raum*

$$(*) \qquad E = \operatorname*{ind}_{\to n} E_n , \quad E_n\text{-Banachräume} , \qquad n = 1, 2, \ldots ,$$

regulär und nuklear, dann ist E ein (LN)*-Raum.*

Beweis. Bekanntlich gilt mengentheoretisch [KÖTHE [8], S. 291)

$$E' = \operatorname*{proj}_{\leftarrow n} E'_n .$$

Die starke Topologie auf E' wird erzeugt durch die absolutpolaren Mengen zu $A \subset E$, wobei A beschränkt in E ist, die projektive Topologie $\operatorname*{proj}_{\leftarrow n} E'_n$ wird erzeugt durch die absolutpolaren Mengen zu $A_n \subset E_n$, $n = 1, 2, \ldots$, wobei A_n beschränkt in E_n ist. Der vorausgesetzten Regularität wegen ist aber schon jede Menge A ein A_n und wir haben deshalb

$$(**) \qquad E'_b \cong \operatorname*{proj}_{\leftarrow n} E'_n .$$

Aus der Voraussetzung, daß die E_n-Banachräume sind, folgt, daß $E = \operatorname*{ind}_{\to n} E_n$ tonneliert ist, E regulär ergibt damit, daß E ein (DF)-Raum ist (siehe KÖTHE [8], S. 400). Nun ist aber nach GROTHENDIECK [6] II, S. 40 der stark duale Raum eines nuklearen (DF)-Raumes nuklear, d. h. wegen (**) ist der Raum

$$(***) \qquad \operatorname*{proj}_{\leftarrow n} E'_n ,$$

nuklear, das bedeutet aber, daß die projektiven Abbildungen von (***) nuklear sind. Die projektiven Abbildungen von (***) sind adjungiert zu den induktiven Abbildungen von (*), die induktiven Abbildungen sind also nuklear nach einem Satz von GROTHENDIECK [6] I, S. 85. q. e. d.

II. Allgemeine Hilberträume mit einem reproduzierenden Kern

Wir wollen hier Hilberträume mit einem reproduzierenden Kern in der von ARONSZAJN [1] angegebenen Form benutzen (siehe auch MESCHKOWSKI [11]).

Es sei H eine auf einer Punktmenge G definierte Klasse von Funktionen, die einen Hilbertraum bilden. Die Funktion $K(x, y)$ $(x \in G, y \in G)$ heißt reproduzierender Kern, wenn

1. $K(x, y)$ für jedes y als Funktion von x zu H gehört,
2. $K(x, y)$ die reproduzierende Eigenschaft

$$f(y) = (f(x), K(x, y))_x \quad \text{für alle} \quad f \in H \tag{3}$$

hat. $((\ , \ )_x$ ist das Skalarprodukt in $H)$.

Der folgende Satz 4 stellt ein wichtiges Kriterium dar, den Beweis findet man z. B. bei MESCHKOWSKI [11], S. 44.

Satz 4. *Dann und nur dann hat ein Hilbertraum H von Funktionen $f(y)$, $y \in G$, einen reproduzierenden Kern $K(x, y)$, $(x, y) \in G \times G$, wenn $f(y)$ für jedes feste $y \in G$ ein beschränktes lineares Funktional des Hilbertraumes H ist.*

Wir wollen nun einen Satz angeben, der es erlaubt, auf eine einfache Weise nukleare Räume, ausgehend von Hilberträumen mit reproduzierendem Kern, zu konstruieren.

Satz 5. *Sei H_n, $n = 1, 2, \ldots$, eine Folge von separablen Hilberträumen mit reproduzierendem Kern $K_n(x, y)$, das Skalarprodukt von H_n sei gegeben durch*

$$(\varphi, \psi)_n = \int \varphi(x) \cdot \overline{\psi(x)} \, d\sigma_n(x) \,, \tag{4}$$

wobei alle Maße σ_n innerhalb einer festen Menge G konzentriert seien (support $\sigma_n \subset G$) *und es gelte*

$$(\varphi, \varphi)_n \geqq (\varphi, \varphi)_{n+1} \quad \text{für} \quad \varphi \in H_n, \quad \text{d. h.} \quad H_n \subset H_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{5}$$

Falls es zu jedem m ein $n > m$ gibt, derart, daß die Kernfunktionen $K_n(x, y)$ die Bedingung

$$\int K_m(x, x) \, d\sigma_n(x) < \infty \,, \qquad m < n \,, \tag{6 K}$$

erfüllen, ist

$$E = \operatorname*{ind}_{\to n} H_n$$

ein (LN)*-Raum, wegen Satz* 1 *ist E damit auch ein nuklearer Raum. Die Bedingung* (6) *K ist auch notwendig für die Nuklearität von E.*

Satz 5a. *Sei*

$$E = \operatorname*{proj}_{\to \alpha \in A} H_\alpha \,, \quad A \text{ eine gerichtete Indexmenge,}$$

wobei die Hilberträume H_α die Bedingungen von Satz 5 *erfüllen, nur wegen des projektiven Limes in umgekehrter Richtung. Falls es zu jedem α ein $\beta > \alpha$ gibt, derart, daß die Bedingung*

$$\int K_\alpha(x, x) \, d\sigma_\beta(x) < \infty \,, \qquad \alpha < \beta \,, \tag{6)' K}$$

erfüllt ist, ist E ein nuklearer Raum. Die Bedingung (6)′ *K ist auch notwendig für die Nuklearität von E.*

Wir beweisen nur Satz 5, der Beweis von Satz 5a ist vollkommen analog.

Sei φ_k ein vollständiges orthonormales Funktionensystem in H_m und φ_j ein orthonormales Funktionensystem in H_n. Wir müssen wegen Satz 3 nur zeigen, daß die durch (5) definierte identische Einbettung $A : H_m \vec{\subset} H_n$, $m < n$ Hilbert-Schmidtsch ist, d. h. (MAURIN [10] S. 360) daß gilt

$$\sum_{k,j}^{\infty} |(A\varphi_k, \varphi_j)_n|^2 < \infty .$$

Wir haben (Besselsche Gleichung in H_n)

$$\sum_{j}^{\infty} |(A\varphi_k, \varphi_j)_n|^2 = (A\varphi_k, A\varphi_k)_n ,$$

und die spezielle Form (4) des Skalarproduktes ergibt

$$\sum_{k}^{\infty} (A\varphi_k, A\varphi_k)_n = \int \sum_{k}^{\infty} |(\varphi_k(x), K_m(x, y))_m|^2 \, d\sigma_n(y) , \tag{7}$$

da wegen der Existenz der Kernfunktionen K_m die Einbettung $A : H_m \to H_n$ durch

$$\varphi(y) = (\varphi(x), K_m(x, y))_m = A\varphi$$

gegeben ist. Weil alle in (7) vorkommenden Glieder positiv sind, ist nach maßtheoretischen Sätzen (siehe HALMOS [7a]) die Vertauschung von $\int$ und $\sum$ erlaubt. Die Besselsche Gleichung in H_m ergibt

$$\sum_{k}^{\infty} |(\varphi_k(x), K_m(x, y))_m|^2 = (K_m(x, y), K_m(x, y))_m = K_m(y, y) . \tag{8}$$

Aus (7) und (8) folgt

$$\sum_{k,j}^{\infty} |(A\varphi_k, \varphi_j)_n|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (A\varphi_k, A\varphi_k)_n = \int K_m(y, y) \, d\sigma_n(y) ,$$

d. h. die Bedingung (6) K ist notwendig und hinreichend für die Nuklearität von E. q. e. d.

III. Spezielle Hilberträume mit reproduzierendem Kern.

Wir wollen nun eine weite Klasse von Hilberträumen mit Kernfunktionen angeben. Diese Klasse ist eine Verallgemeinerung der Hilberträume mit einer Bergmanschen Kernfunktion (siehe MESCHKOWSKI [11], S. 65 u. w.).

Sei G eine offene zusammenhängende Menge der komplexen Zahlenebene C (oder C^n, unsere Ergebnisse sind auch für C^n richtig, wir beschränken uns nur der einfacheren Schreibweise wegen auf C), und es sei $g(x, y)$, $z = x + iy$ eine auf G von Null verschiedene stetige Funktion.

Wir haben den

Satz 6. *Sei H_g der Raum aller auf G holomorphen Funktionen $\varphi(z)$, für die das verallgemeinerte Dirichletintegral*

$$\iint_G |\varphi(z)|^2 \, |g(x, y)|^2 \, dx \cdot dy , \quad z = x + iy ,$$

endlich ist, kurz $\iint\limits_G |\varphi|^2\,|g|^2\,dz < \infty$. *$H$ ist ein (separabler) Hilbertraum mit einem reproduzierenden Kern, für welchen das Skalarprodukt durch das Integral*

$$(\varphi, \psi) = \iint\limits_G \varphi \cdot \bar{\psi}\,|g|^2\,dz = \int \varphi \cdot \bar{\psi}\,d\sigma_g\,,$$

gegeben ist.

Beweis. Wir zeigen die Vollständigkeit, die anderen Hilbertraumeigenschaften sind einfach nachzuprüfen.

Sei G_d eine Folge von kompakten Teilbereichen, $G_d \subset G$, die G ausschöpfen. Dabei sei der Abstand von G nach CG gleich $d > 0$. Zu jedem $t \in G_d$ gibt es einen Kreis $K\left(t, \frac{d}{2}\right)$ vom Radius $\frac{d}{2}$ um t, der ganz zum Innern von G gehört. Sei φ_n eine Cauchyfolge in H_g. Für die Differenz $\varphi_n(t) - \varphi_m(t)$ ergibt sich durch eine Umformung der Cauchyschen Integralformel, für jedes $t \in G_d$

$$|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| = \frac{1}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2}\left|\iint\limits_{K\left(t,\frac{d}{2}\right)} (\varphi_n(z) - \varphi_m(z))\,dx \cdot dy\right|,$$

(siehe MESCHKOWSKI [11], S. 65). Nach der Schwarzschen Ungleichung folgt daraus

$$|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| \leqq \frac{4}{\pi d^2}\left[\iint\limits_{K\left(t,\frac{d}{2}\right)} |\varphi_n(z) - \varphi_m(z)|^2\,|g|^2\,dz\right]^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \left[\iint\limits_{K\left(t,\frac{d}{2}\right)} |g(x,y)|^{-2}\,dz\right]^{1/2} \leqq \frac{4}{\pi d^2}\,\|\varphi_n - \varphi_m\|_G \cdot \left[\iint\limits_{G_{\frac{d}{2}}} |g(x,y)^{-2}\,dz\right]^{1/2}. \tag{9}$$

Da nach Voraussetzung $G_{\frac{d}{2}}$ kompakt ist und $g(x, y)$ stetig und verschieden von Null in G, ist das Integral

$$J\left(G_{\frac{d}{2}}\right) = \iint\limits_{G_{\frac{d}{2}}} |g(x,y)|^{-2}\,dz < \infty$$

endlich. (9) können wir kurz schreiben

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leqq \frac{4}{\pi d^2}\,J^{1/2}\left(G_{\frac{d}{2}}\right) \cdot \|\varphi_n - \varphi_m\|_G \tag{10}$$

(10) bedeutet, daß $\varphi_n(t)$ gleichmäßig in jedem G_d konvergiert, oder φ_n konvergiert fast gleichmäßig in G. Nach einem Satz von WEIERSTRASS gibt es eine überall in G erklärte holomorphe Funktion $\varphi(z)$, für die

$$\varphi(z) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(z)$$

gilt im Sinne der fast gleichmäßigen Konvergenz in G. Es ist deshalb möglich, n so groß zu wählen, daß gilt

$$|\varphi(z) - \varphi_n(z)| \leqq \left[\iint\limits_{G_d} |g(x,y)|^2\,dz\right]^{-1/2} \tag{11}$$

für alle $z \in G_d$. Wir wollen nun zeigen, daß φ auch zu H_g gehört, also eine endliche H_g-Norm hat. Dazu beachten wir zunächst, daß die Folge $\|\varphi_n\|_G$ konvergiert (folgt aus der Dreiecksungleichung), also gilt

$$\|\varphi_n\|_G < \lambda \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Für das Integral

$$\|\varphi\|^2_{G_d} = \iint\limits_{G_d} |\varphi|^2 \, |g|^2 \, dz$$

gilt nun nach der Dreiecksungleichung

$$\|\varphi\|_{G_d} \leqq \|\varphi - \varphi_n\|_{G_d} + \|\varphi_n\|_{G_d} ,$$

und daraus folgt wegen (11)

$$\|\varphi\|_{G_d} \leqq \max_{z \in G_d} |\varphi(z) - \varphi_n(z)| \cdot \left[\iint\limits_{G_d} |g|^2 \, dz\right]^{1/2} + \|\varphi_n\|_G \leqq 1 + \lambda ,$$

$\|\varphi\|_{G_d}$ ist also beschränkt für alle d, und daraus folgt nach einem bekannten Integralsatz die Abschätzung

$$\|\varphi\|^2_G = \iint\limits_G |\varphi(z)|^2 \, |g(x, y)|^2 \, dz \leqq (1 + \lambda)^2 .$$

Die Grenzfunktion $\varphi(z)$ gehört damit zu H_g.

Nach Satz 4 besitzt H_g eine Kernfunktion falls $\varphi(z) \in H_g$ für alle festen $z \in G$ ein beschränktes lineares Funktional ist, dies folgt aber sofort aus der Abschätzung (10), wenn wir d so wählen, daß z zu G_d gehört:

$$|\varphi(z)| \leqq \frac{4}{\pi d^2} J^{1/2}\left(G_{\frac{d}{2}}\right) \cdot \|\varphi\|_G . \tag{12}$$

Für später benötigen wir den wichtigen

Satz 7. *Die Kernfunktion $K_g(z, u)$ von H_g ist stetig und erfüllt die Ungleichung*

$$K_g(z, z) \leqq \frac{1}{(\pi r^2)^2} \iint\limits_{K(z,r)} |g(x', y')|^{-2} \, dz' , \tag{13} (U)$$

falls der Kreis $K(z, r)$ vollständig in G liegt, $K \subset G$.

Beweis. $K_g(z, u)$ ist analytisch in z und antianalytisch in u (Symmetrieeigenschaft der Kernfunktion, siehe MESCHKOWSKI [11] S. 43), die Funktion $\tilde{K}(z, u) = K_g(z, \bar{u})$ ist damit analytisch in beiden Variablen, also nach dem Satz von HARTOGS (FUKS [1a] S. 21) stetig. Die Variablentransformation $z \to z$, $u \to \bar{u}$ ändert aber nicht die Stetigkeit, womit wir die Stetigkeit von $K_g(z, u)$ bewiesen haben. Nun der Beweis von (13). Aus der Schwarzschen Ungleichung erhalten wir

$$|f(z)|^2 = \frac{1}{(\pi r^2)^2} \left|\iint\limits_K f(t) \, dt\right|^2 \leqq \frac{1}{(\pi r^2)^2} \left[\iint\limits_K |f(t)| \, dt\right]^2 \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{(\pi r^2)^2} \iint\limits_K |f|^2 \, |g|^2 \, dt \cdot \iint\limits_K |g|^{-2} \, dt ,$$

oder

$$\iint\limits_{K(z,r)} |f(t)|^2 \, |g|^2 \, dt \geqq \frac{|f(z)|^2 (\pi r^2)^2}{\iint\limits_{K(z,r)} |g|^{-2} \, dt} . \tag{14}$$

Bekanntlich besitzt H_g immer ein vollständiges System von orthonormalen, holomorphen Funktionen φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, siehe MESCHKOWSKI [11], S. 48ff. und für den Kern $K_g(z, u)$ haben wir die Darstellung

$$K_g(z, u) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)\, \overline{\varphi_n(u)}\,,$$

d. h.

$$K_g(z, z) = \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(z)|^2\,. \tag{15}$$

Wegen der Orthonormalität der Funktionen φ_n, $n = 1, 2, \ldots$, in H_g erhalten wir nach Anwendung von (14) (wir setzen in (14) $f(t) = \sum_{n=1}^{p} \varphi_n(t) \cdot \overline{\varphi_n(z)}$)

$$\sum_{n=1}^{p} |\varphi_n(z)|^2 = \iint_G |\sum_{n=1}^{p} \varphi_n(t)\, \overline{\varphi_n(z)}|^2\, |g|^2\, dt \geqq$$

$$\geqq \iint_{K(z,r)} |\sum_{n=1}^{p} \varphi_n(t)\, \overline{\varphi_n(z)}|^2 |g|^2 dt \geqq \frac{|\sum_{n=1}^{p} \varphi_n(z)\, \overline{\varphi_n(z)}|^2 \cdot (\pi r^2)^2}{\iint_{K(z,r)} |g|^{-2}\, dt,}\,,$$

d. h. wir haben

$$\sum_{n=1}^{p} |\varphi_n(z)|^2 \leqq \frac{1}{(\pi r^2)^2} \cdot \iint_{K(z,r)} |g|^{-2}\, dt\,,$$

was nach dem Grenzübergang $p \to \infty$ wegen (15) die Ungleichung (13) (U) ergibt.

Wir wollen nun induktive und projektive Limesräume aus holomorphen Funktionen bilden. Es ist allgemein üblich diese Räume mit einem System von Maximumnormen zu versehen (GELFAND-SCHYLOW [2], GROTHENDIECK [6], [7], KÖTHE [9], SEBASTIÃO E SILVA [18], [19], [20], TILLMANN [21] u. a.), und die erste Aufgabe, die wir uns stellen, ist, Bedingungen anzugeben, unter denen dieses Maximumsnormensystem einem System von Hilbertnormen äquivalent ist.

Sei G_n, $G_n \supset G_{n+1}$ eine Folge von beliebigen offenen, zusammenhängenden[2] Mengen (beschränkt oder unbeschränkt) in der komplexen Zahlenebene C. Wir setzen im folgenden immer voraus, daß der Abstand von G_{n+1} zu CG_n positiv ist:

$$d(G_{n+1}, CG_n) > 0\,. \tag{16) (D}$$

(16) (D) gelte auch — vereinbarungsgemäß — falls $CG_n = \varnothing$.

Wir betrachten nun zwei Folgen von stetigen und von Null verschiedenen Gewichtsfunktionen g_n und g_n' definiert über G_1 (Gewichtsfunktionen sind hier eigentlich $|g_n|^2$ und $g_n'|^2$). Mit g_n bilden wir die Hilberträume (siehe Satz 6)

$$H_n = \{\varphi \mid \varphi(z) \quad \text{holomorph in } G_n, \quad \|\varphi\|_{H_n}^2 = \iint_{G_n} |\varphi|^2\, |g_n|^2\, dz < \infty\}\,, \tag{17}$$

[2]) Falls G nicht zusammenhängend ist, definiert man H_g als direkte Summe über den einzelnen Komponenten von G.

wobei wir voraussetzen, daß

$$H_n \vec{\subset} H_{n+1}\,.$$

Mit g_n' bilden wir die Maximumnormräume (es sind, wie man sich leicht überzeugt, Banachräume)

$$(18)\quad M_n = \{\varphi \mid \varphi(z) \text{ holomorph in } G_n,\ \|\varphi\|_{M_n} = \sup_{z\in G_n} |\varphi(z)\, g_n'(x,y)| < \infty\}\,,$$

wobei wir wieder voraussetzen

$$M_n \vec{\subset} M_{n+1}\,.$$

Falls die Gewichtsfunktionen g_n' holomorph sind (über G_1) hat man des Maximumprinzips für analytische Funktionen wegen

$$\sup_{z\in G_n} |\varphi(z)\, g_n'(z)| = \max_{z\in \overline{G}_n} |\varphi(z)\, g_n'(z)| = \max_{z\in \partial G_n} \varphi(z)\, g_n'(z)|\,.$$

Hier bezeichneten wir mit $\overline{G}_n$ die abgeschlossene Hülle von G_n und mit ∂G_n den Rand von G_n.

Die beiden Gewichtsfunktionenfolgen g_n und g_n' seien durch die folgenden Bedingungen miteinander verknüpft:

zu jedem n gibt es ein $m(n)$ derart, daß gilt

N_1 1. $m(n) \to \infty$ für $n \to \infty$, $m < n$,

2. $\iint\limits_{G_m} \left|\frac{g_n}{g_m'}\right|^2 dz < \infty$,

zu jedem n gibt es ein $m(n)$ mit

N_2 1. $m(n) \to \infty$ für $n \to \infty$, $m < n$,

2. $d_t > 0$ kann man in Abhängigkeit von $t \in G_n$ so wählen, daß

a) $K(t, d_t) \subset G_m$ und

b) $\frac{|g_n'(t)|}{\pi d_t^2} \left[\iint\limits_{K(t,d_t)} |g_m|^{-2}\, dz\right]^{1/2} \leqq B < \infty$

für alle $t \in G_n$ gilt (B unabhängig von t).

Für holomorphe Funktionen $g_n'(z)$ kann man die Bedingung N_2 2. b) auch anders hinschreiben:

$\widetilde{\mathrm{N}}_2$ 2. b) $\frac{1}{\pi d_t^2} \left[\iint\limits_{K(t,d_t)} \left|\frac{g_n'(z)}{g_m(z)}\right|^2 dz\right]^{1/2} \leqq B < \infty$

für alle $t \in G_n$.

Wir können nun den folgenden Satz aussprechen.

Satz 8. *Es sei*

$$E = \operatorname*{ind}_{\to n} H_n \quad \text{und} \quad \tilde{E} = \operatorname*{ind}_{\to n} M_n\,,$$

(siehe (17) *und* (18)*). Wenn die Bedingungen* N_1 und N_2 *(oder* $\widetilde{\mathrm{N}}_2$*) erfüllt sind, haben wir*

$$\operatorname*{ind}_{\to n} H_n = E \cong \tilde{E} = \operatorname*{ind}_{\to n} M_n\,,$$

wobei die Äquivalenzabbildung die Identität ist.

Beweis. Wir beweisen die Ungleichungen

$$(19)\qquad \text{a) } \|\varphi\|_{H_n} \leqq A\,\|\varphi\|_{M_{m(n)}} \quad \text{und} \quad \text{b) } \|\varphi\|_{M_n} \leqq B\,\|\varphi\|_{H_{m(n)}}\,,$$

d. h. $M_{m(n)} \vec{\subset} H_n$ und $H_{m(n)} \vec{\subset} M_n$,

woraus wegen $m(n) \to \infty$ (siehe N_1, N_2, 1.) schon folgt

$$\operatorname*{ind}_{\to n} M_n \cong \operatorname*{ind}_{\to n} H_n .$$

Nun der Beweis von (19) a). Wir haben

$$\|\varphi\|^2_{H_n} = \iint\limits_{G_n} |\varphi(z)|^2 \, |g_n(x,y)|^2 \, dz \leqq \iint\limits_{G_m} |\varphi|^2 \, |g_n|^2 \, dz \leqq$$

$$\leqq \left[\sup_{z \in G_m} |\varphi(z) g'_m|\right]^2 \cdot \iint\limits_{G_m} \left|\frac{g_n}{g'_m}\right|^2 dz = A^2 \|\varphi\|^2_{M_m} ,$$

wobei wegen Bedingung N_1 2. das Integral $A^2 = \iint\limits_{G_m} \left|\frac{g_n}{g'_m}\right|^2 dz$ endlich ist.

Zum Beweis von (19) b) benutzen wir wieder die Darstellungsformel

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi d^2} \iint\limits_{K(t,d_t)} \varphi(z) \, dz . \tag{20}$$

Wir erhalten aus (20) für $t \in G_n$ und $K(t,d_t) \subset G_m$ (Bedingung N_2 2. a)) nach Anwendung der Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} |\varphi(t) \, g'_n(t)| &= \frac{|g'_n(t)|}{\pi d_t^2} \left| \iint\limits_{K(t,d_t)} \varphi(z) \, dz \right| \leqq \\ &\leqq \frac{|g'_n(t)|}{\pi d_t^2} \left[\iint\limits_{K(t,d_t)} |g_m|^{-2} \, dz\right]^{1/2} \left[\iint\limits_{K(t,d_t)} |\varphi|^2 \, |g_m|^2 \, dz\right]^{1/2} . \end{aligned} \tag{21}$$

Die Bedingung N_2 2. a) ergibt

$$\left[\iint\limits_{K(t,d_t)} |\varphi|^2 \, |g_m|^2 \, dz\right]^{1/2} \leqq \|\varphi\|_{H_m} , \tag{22}$$

während die Bedingung N_2 2. b) liefert

$$\frac{|g'_n(t)|}{\pi d_t^2} \left[\iint\limits_{K(t,d_t)} |g_m|^{-2} \, dz\right]^{1/2} \leqq B < \infty . \tag{23}$$

(22) und (23) auf (21) angewandt und das Supremum gebildet, ergibt

$$\|\varphi\|_{M_n} \leqq B \|\varphi\|_{H_m} .$$

Der Beweis für den Fall, daß wir statt N_2 2. b) die Bedingung $\tilde{N}_2$ 2. b) voraussetzen, verläuft ebenso, man muß nur die Abschätzung (21) abändern in

$$\begin{aligned} |\varphi(t) \, g'_n(t)| &= \frac{1}{\pi d_t^2} \left| \iint\limits_{K(t,d_t)} \varphi(z) \, g'_n(z) \, dz \right| \leqq \\ &\leqq \frac{1}{\pi d_t^2} \left[\iint\limits_{K(t,d_t)} \left|\frac{g'_n(z)}{g_m(z)}\right|^2 dz\right]^{1/2} \left[\iint\limits_{K(t,d_t)} |\varphi|^2 \, |g_m|^2 \, dz\right]^{1/2} . \end{aligned} \tag{21 a}$$

Unter denselben Voraussetzungen wie zu Satz 8, nur in umgekehrter Richtung, also

$$G_\alpha \subset G_\beta , \quad H_\beta \vec{\subset} H_\alpha , \quad M_\beta \vec{\subset} M_\alpha , \quad \text{für} \quad \alpha < \beta ,$$

(H_α und M_α sind wie H_n und M_n definiert) wobei α, β zu der gerichteten Indexmenge A gehören, und

zu jedem α gibt es ein β, $\alpha < \beta$, derart, daß

N_1' $$\iint\limits_{G_\beta} \left|\frac{g_\alpha}{g_\beta'}\right|^2 dz < \infty ,$$

sowie

für jedes $t \in G_\alpha$ ist $d_t > 0$ derart wählbar, daß

N_2' 1. $K(t, d_t) \subset G_\beta$

2. $$\frac{|g_\alpha'(t)|}{\pi d_t^2} \left[\iint\limits_{K(t,d_t)} |g_\beta|^{-2}\, dz\right]^{1/2} \leqq B < \infty ,$$

gilt, ist der Satz 8 analoge Satz für den projektiven Limes gültig (der Beweis ist derselbe wie für Satz 8).

Satz 8a. *Es sei*

$$E = \operatorname*{proj}_{\leftarrow \alpha} H_\alpha \quad \text{und} \quad \tilde{E} = \operatorname*{proj}_{\leftarrow \alpha} M_\alpha .$$

Unter den Bedingungen N_1' *und* N_2' *(oder* $\tilde{N}_2'$*) gilt*

$$E = \operatorname*{proj}_{\leftarrow \alpha} H_\alpha \cong \operatorname*{proj}_{\leftarrow \alpha} M_\alpha .$$

Wir benutzen die Bezeichnungen und Voraussetzungen von Satz 8, bzw. Satz 8a. Wir haben

Satz 9. *Unter den Bedingungen* N_1 *und* N_2 *ist der Raum*

$$E = \operatorname*{ind}_{\rightarrow n} H_n \cong \operatorname*{ind}_{\rightarrow n} M_n ,$$

nuklear, genau gesagt — er ist ein (LN)*-Raum. (Die Nuklearität im Sinne von* GROTHENDIECK *folgt aus Satz* 1*).*

Satz 9a. *Unter den Bedingungen* N_1' *und* N_2' *ist der Raum*

$$E = \operatorname*{proj}_{\leftarrow \alpha} H_\alpha \cong \operatorname*{proj}_{\leftarrow \alpha} M_\alpha ,$$

nuklear.

Wir beweisen hier den Satz 9, der Beweis von Satz 9a ist vollkommen analog.

Wegen Satz 6 besitzen alle Hilberträume H_n einen reproduzierenden $K_n(z, u)$, und wir können die Ungleichung (U) aus Satz 7 benutzen. (U) in Verbindung mit N_2 ergibt

$$K_m(t, t) \cdot |g_n'(t)|^2 \leqq \frac{|g_n'(t)|^2}{(\pi d_t^2)^2} \iint\limits_{K(t,d_t)} |g_m|^{-2}\, dz \leqq B^2 < \infty$$

für alle $t \in G_n$, d. h.

(24) $$\sup_{t \in G_n} |K_m^{1/2}(t, t)\, g_n'(t)| = \|K_m^{1/2}\|_{M_n} \leqq B .$$

Nun gilt aber die Ungleichung (19) a nicht nur für holomorphe Funktionen, sondern z. B. auch für stetige Funktionen, und wir erhalten aus (24)

(25) $$\|K_m^{1/2}\|_{H_{m+q}} \leqq A \|K_m^{1/2}\|_{M_n} \leqq A \cdot B < \infty ,$$

da nach Satz 7 der Kern $K_m(t, t)$ stetig in $G_m \supset G_n$ ist. (Die Konstante A erhielten wir aus der Bedingung N_1!) (25) bedeutet aber nichts anderes, als daß

die Bedingung (K) aus Satz 5 erfüllt ist:

$$\text{K} \qquad \int K_m(t,t)\, d\sigma_{m+q}(t) = \int_{G_{m+q}} \int K_m(t,t)\, |g_{m+q}|^2\, dt \leqq A \cdot B < \infty\,.$$

Damit ist der Raum

$$E = \operatorname*{ind}_{\to n} H_{m(n)} = \operatorname*{ind}_{\to n} H_n$$

ein (LN)-Raum. (Die letztere Gleichheit folgt aus $m(n) \to \infty$ (N_1 1., N_2 1.)).

Für den Fall, daß beide Gewichtsfunktionenfolgen gleich sind und holomorph $g_n(z) = g_n'(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, erhalten wir die Nuklearität von $E = \operatorname*{ind}_{\to n} H_n$ $\left(\text{bzw. } E = \operatorname*{proj}_{\leftarrow \alpha} H_\alpha\right)$ schon unter der Bedingung N_1.

Satz 10. *Es sei $g_n'(z) = g_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, holomorph auf G_1, und es sei die Bedingung N_1 erfüllt. Der Raum*

$$E = \operatorname*{ind}_{\to n} H_n \cong \operatorname*{ind}_{\to n} M_n \tag{26}$$

ist dann nuklear (genau ein (LN)*-Raum).*

Satz 10a. *Es sei $g_\alpha(z) = g_\alpha'(z)$, holomorph auf $\bigcup_\alpha G_\alpha$, und es sei die Bedingung N_1' erfüllt. Der Raum*

$$E = \operatorname*{proj}_{\leftarrow \alpha} H_\alpha \cong \operatorname*{proj}_{\leftarrow \alpha} M_\alpha$$

ist dann nuklear. (Für die Bezeichnungen und Voraussetzungen siehe Satz 8 und Satz 8a.)

Wir bringen wieder nur den Beweis von Satz 10. Die Gleichwertigkeit der Darstellungen in (26) ergibt sich aus der Implikation $\text{N}_1 > \widetilde{\text{N}}_2$ (man erhält sie im Falle $g_n = g_n'$ einfach, indem man setzt $d_t = \frac{1}{2}\, d(G_n, \mathbb{C}G_m)$, d ist nach Voraussetzung (16) (D) immer positiv) und Satz 8. Daß $E = \operatorname*{ind}_{\to n} H_n$ nuklear ist, wollen wir sogar unter der Voraussetzung

$$\int\int_{G_n} \left|\frac{g_n(z)}{g_m(z)}\right|^2 dz = A^2 < \infty \quad (\text{es ist } G_n \subset G_m \text{ für } n > m!) \tag{27}$$

beweisen. Sei $\tilde{K}_m(z, u)$ die Bergmansche Kernfunktion für G_m (d. h. die Kernfunktion für den Hilbertraum

$$H = \{\varphi \mid \varphi(z) \text{ holomorph in } G_m,\ \|\varphi\| = \int\int_{G_m} |\varphi(z)|^2\, dz < \infty\})\,.$$

Für die Kernfunktion $K_m(z, u)$ von H_m gilt (siehe Meschkowski [11], S. 167)

$$K_m(z, u) = \frac{\tilde{K}(z, u)}{g_m(z) \cdot \overline{g_m(u)}}\,. \tag{28}$$

Aus (*U*) Satz 7 erhalten wir, falls wir $r = \frac{1}{2}\, d(G_n, \mathbb{C}G_m)$ ($> 0!$) setzen, daß $K_m(z, z)$ in G_n beschränkt ist,

$$\tilde{K}_m(z, z) \leqq \frac{4}{\pi d^2} < \infty, \quad z \in G_n\,.$$

Damit erhalten wir wegen N_1 (bzw. (27))

$$\iint\limits_{G_n} K_m(z,z)\,|g_n(z)|^2\,dz = \iint\limits_{G_n} \tilde{K}_m(z,z)\left|\frac{g_n(z)}{g_m(z)}\right|\,dz \leqq$$

$$\leqq \frac{4}{\pi d^2}\iint\limits_{G_n}\left|\frac{g_n(z)}{g_m(z)}\right|^2 dz = \frac{4A^2}{\pi d^2} < \infty\,,$$

d. h. die Bedingung K von Satz 5 ist erfüllt und der Raum

$$E = \operatorname*{ind}_{\to n} H_{m(n)} \cong \operatorname*{ind}_{\to n} H_n$$

ist ein (LN)-Raum (die letzte Äquivalenz gilt wieder wegen $m(n) \to \infty$, siehe N_1 1.).

Bemerkung. Aus dem Beweis von Satz 10 *ersehen wir, daß die Bedingung*

$$\iint\limits_{G_n} \tilde{K}_m(z,z)\left|\frac{g_n(z)}{g_m(z)}\right|^2 dz < \infty$$

wobei $\tilde{K}_m(z,u)$ *die Bergmansche Kernfunktion von* G_m *ist, notwendig und hinreichend für die Nuklearität von* E *ist. Dasselbe bezieht sich auch auf den Satz* 10a.

IV. Anwendungen

1. Wir betrachten zuerst den Fall, daß die offenen Mengen G_n beschränkt sind. Als Gewichtsfunktionen nehmen wir $g_n(z) = g_n'(z) \equiv 1$. Für die Räume H_n und M_n haben wir damit

(29) $$H_n = \{\varphi \mid \varphi \text{ holomorph auf } G_n,\ \|\varphi\|_{H_n}^2 = \iint\limits_{G_n} |\varphi(z)|^2\,dz < \infty\}\,,$$

(30) $$M_n = \{\varphi \mid \varphi \text{ holomorph auf } G_n,\ \|\varphi\|_{M_n} = \sup_{z\in G_n} |\varphi(z)| < \infty\}\,.$$

a) Falls $G_n \supset G_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, gilt, können wir den induktiven Limes $E = \operatorname*{ind}_{\to n} M_n$ bilden, und nach Satz 10 ist der Raum

$$E = \operatorname*{ind}_{\to n} M_n \cong \operatorname*{ind}_{\to n} H_n$$

nuklear, d. h. genau gesagt ein (LN)-Raum. (Die Bedingung N_1 hat hier die Form

(31) $$\iint\limits_{G_m} \frac{1}{1}\,dz = \mu(G_m) < \infty$$

und ist wegen der vorausgesetzten Beschränktheit von G_m immer erfüllt.) Definieren wir den Banachraum $\tilde{M}_n$ als

(32) $$\tilde{M}_n = \left\{\varphi \,\middle|\, \begin{matrix}\varphi \text{ holomorph auf } G_n,\\ \varphi \text{ stetig auf } \partial G_n,\end{matrix}\ \|\varphi\|_{\tilde{M}_n} = \max_{z\in\bar{G}_n} |\varphi(z)| = \max_{z\in\partial G_n} |\varphi(z)| < \infty\right\},$$

so folgt aus dem Maximumprinzip für analytische Funktionen und aus der Abstandsvoraussetzung (16) (D)

$$E = \operatorname*{ind}_{\to n} M_n \cong \operatorname*{ind}_{\to n} \tilde{M}_n\,.$$

Zu der hier betrachteten Raumklasse gehören u. a.: die Kötheschen Grundräume für die Randverteilung [9] (Kurve ohne den Punkt ∞) und der Raum $\mathcal{B}(G)$ von GELFAND-SCHYLOW [2], S. 189, er spielt eine wichtige Rolle bei der Verallgemeinerung des Paley-Wienerschen Satzes.

b) Sei $G_{n+1} \supset G_n$ für $n = 1, 2, \ldots$, und F der Raum aller auf $\bigcup_n G_n = G$ holomorphen Funktionen. Wieder ist N_1 erfüllt (d. h. (31)) und wir können den Satz 10a anwenden und erhalten, daß der Raum

$$F = \operatorname*{proj}_{\to n} H_n \cong \operatorname*{proj}_{\to n} M_n \cong \operatorname*{proj}_{\to n} \tilde{M}_n$$

nuklear ist, d. h. genau gesagt ein (FN)-Raum.

Zu der durch 1 b) erfaßten Raumklasse gehören u. a. der Raum $\mathfrak{A}$ aller ganzen Funktionen auf C (G_n ist hier gleich $K(0, n)$), die von KÖTHE [9] und TILLMANN [21] betrachteten Randverteilungsräume $\mathcal{O}(G)$ sowie der Raum $H(G)$ (siehe KÖTHE [8] S. 375 und GROTHENDIECK [7]).

Die Nuklearität der in 1 a) und 1 b) betrachteten Räume kann man auch mit Hilfe der Grothendieckschen Methoden gewinnen (siehe GROTHENDIECK [6] II, S. 57), d. h. durch Einbettungen in den Schwartzschen Raum E.

2. Wir betrachten nun den Fall, daß die offenen Mengen G eine Umgebung des Punktes ∞ enthalten (unter einer Umgebung von ∞ verstehen wir die Menge $CK(0, r)$). Wir setzen $G_n \supset G_{n+1}$ für $n = 1, 2, \ldots$, und wollen den Raum $E = \operatorname*{ind}_{\to n} M_n$ aller auf $\bigcap_n G_n$ lokalanalytischen Funktionen untersuchen. (M_n ist durch (30) definiert, holomorph auf G_n bedeutet hier, daß φ auch holomorph und endlich in ∞ ist). Wir definieren H_n durch

$$H_n = \left\{ \varphi \,\middle|\, \begin{array}{l} \varphi \text{ holomorph auf } G_n \\ \varphi \text{ holomorph und endlich in } \infty \end{array}, \ \|\varphi\|^2_{H_n} = \int\int_{G_n} \frac{|\varphi(z)|^2}{1+|z|^2}\, dz < \infty \right\}$$

und wollen zeigen, daß der Raum

$$E = \operatorname*{ind}_{\to n} M_n \cong \operatorname*{ind}_{\to n} \tilde{M}_n \cong \operatorname*{ind}_{\to n} H_n \tag{33}$$

nuklear ist, d. h. genau gesagt ein (LN)-Raum ist.

(Die erste Äquivalenz erhalten wir durch dieselbe Schlußweise wie in 1 a), $\tilde{M}_n$ ist durch (32) definiert). Die zweite Äquivalenz erhalten wir aus Satz 8, während wir die (LN)-Eigenschaft aus Satz 9 erhalten, gesetzt, daß die Bedingung N_1 und N_2 erfüllt sind. Wir müssen also die Bedingungen N_1 und N_2 nachprüfen. Wir haben hier $g_n' \equiv 1$ und $g_n = (1 + |z|^2)^{1/2}$, und wenn wir in N_1 $m = n - 1$ setzen, so sehen wir, daß für $n = 2, 3, \ldots$

$$\int\int_{G_{n-1}} \frac{1}{1+|z|^2}\, dz < \infty$$

gilt, womit N_1 erfüllt ist. Um N_2 nachzuprüfen, setzen wir wieder $m = n - 1$ und wählen r so groß, daß die Mengen CG_{n-1} und CG_n innerhalb von $K\left(0, \frac{r}{2}\right)$ liegen, dies ist wegen der Voraussetzung, daß alle G_n eine Umgebung von ∞ enthalten, immer möglich. Wir setzen für

$$t \in K(0, r) \cap G_n, \quad d_t = \frac{1}{2}\, d(G_n, CG_{n-1}) = d_0\,,$$

($d_t = d_0$ ist wegen (16) (D) immer positiv!) und für

$$t \in \complement K(0,r) \cap G_n, \quad d_t = \frac{|t|}{2}.$$

Leicht sieht man, daß gilt

N_2, 2 a) $$K(t, d_t) \subset G_{n-1} \quad \text{für} \quad t \in G_n,$$

und wir wollen nun N_2, 2 b) nachprüfen, d. h. das Integral abschätzen

$$J_t = \frac{1}{\pi d_t^2} \left[\iint_{K(t,d_t)} (1 + |z|^2) dz \right]^{1/2} \quad \text{für} \quad t \in G_n.$$

Für $t \in K(0,r) \cap G_n$ haben wir

$$J_t \leqq \frac{1}{\pi d_0^2} [\pi d_0^2 (1 + [r + d_0]^2)]^{1/2} = B_1,$$

während wir für $t \in \complement K(0,r) \cap G_n$ haben

$$J_t \leqq \frac{1}{\pi \left(\frac{|t|}{2}\right)^2} \sqrt{\pi} \frac{|t|}{2} \left[1 + \left(\frac{3}{2}|t|\right)^2\right]^{1/2} \leqq \sqrt{\frac{4 + 9r^2}{\pi r^2}} = B_2.$$

Wir sehen, daß N_2 erfüllt ist, falls wir für die Schranke B nehmen $B = \max(B_1, B_2)$.

Den Grundraum $\mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{M}})$ (hier ist $\overline{\mathfrak{M}} = \bigcap_n G_n$) für die Tillmannschen Randverteilungen [21] erhalten wir als Unterraum E_∞ von E (33), es ist der Unterraum E_∞ aller lokalanalytischen Funktionen $\varphi(z)$ aus E, die die Bedingung

$$\varphi(\infty) = 0,$$

erfüllen. Da E nuklear ist, ist nach einem Satz von GROTHENDIECK [6] II, S. 47 auch E_∞ ein nuklearer Raum. Auch sieht man leicht, daß die Räume

$$E_\infty \cap \tilde{M}_n$$

abgeschlossen in $\tilde{M}_n$ sind. Nach einem Satz von SEBASTIÃO E SILVA [17], S. 12, ist damit E_∞ abgeschlossen in E, und da E vollständig ist, ist auch E_∞ ein vollständiger, lokalkonvexer Raum.

Die Nuklearität der Gelfand-Schylowschen Grundräume (GELFAND-SCHYLOW [2], [3], [4]) kann man auch auf diesem Wege erhalten, wir zeigen dies in Anwendung 3. Da die Gelfand-Schylowschen Distributionsräume dual zu den Grundräumen sind, erhält man ihre Nuklearität nach Sätzen von GROTHENDIECK.

3. Wir bezeichnen mit M, N positive, wachsende, stetige Funktionen, die die Bedingungen

$$M(0) = 0, \quad M(|x|) = M(x), \quad M(\infty) = \infty,$$

(34) $$M(x_1) + M(x_2) \leqq M(x_1 + x_2) \quad \text{für} \quad x_1, x_2 \geqq 0$$

und

(35) $$M(x) \geqq A|x| \quad \text{für große} \quad x,$$

erfüllen. Beispiele: $M(x) = |x|^p$, $p \geqq 1$, oder $M(x)$ — schnell wachsend, z. B. $M(x) = e^{|x|} - |x|$ (siehe GELFAND-SCHYLOW [2], [3] oder WLOKA [22], S. 322).

Lemma 1. *Wir haben für* $0 \leqq A < B$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{M(Ax)-M(Bx)}\,dx \leqq D < \infty\,, \tag{36}$$

sowie

$$\iint \frac{1+|z|^n}{1+|z|^{n+2}}\,dz \leqq D_1 < \infty \quad \textit{für} \quad n \geqq 0\,. \tag{37}$$

Der Beweis von (37) ist offensichtlich, und der Beweis von (36) folgt aus (34) und (35).

Lemma 2. *Wir haben für* $A \geqq 0$, $d > 0$ *und* $n = 1, 2, \ldots$

$$\left.\begin{aligned} &\text{(38) a} \quad J(t) = \int_{t-d}^{t+d} e^{M\left(\frac{n}{n+1}At\right)-M(Ax)}\,dx \leqq B_1 < \infty \\ &\text{(38) b} \quad \int_{t-d}^{t+d} e^{M\left(\frac{n}{n+1}Ax\right)-M(At)}\,dx \leqq B_2 < \infty \end{aligned}\right\} \textit{für alle} \quad t \in (-\infty, \infty)\,,$$

$$\iint_{K(\xi,d)} \frac{1+|\zeta|^n}{1+|z|^{n+2}}\,dz \leqq b < \infty\,, \quad \textit{für alle} \quad \zeta \in C\,, \tag{39}$$

wobei die Schranken B_1, B_2, b *unabhängig von* t *bzw.* ζ *sind.*

Wieder ist der Beweis von (39) offensichtlich. Zu (38) a bemerken wir, daß es genügt, den Beweis für $t \geqq 0$ und $d = 1$ zu führen. $J(t)$ ist eine stetige Funktion von t, für $0 \leqq t \leqq n+1$ ist also $J(t)$ beschränkt,

$$J(t) \leqq b_1 < \infty\,,$$

während wir für $t > n+1$ haben

$$J(t) \leqq 2e^{M\left(\frac{n}{n+1}At\right)-M(A(t-1))} \leqq 2\,,$$

da für $t > n+1$, $\frac{n}{n+1} \cdot At \leqq A(t-1)$ ist und die Funktion M wächst. Nehmen wir $B_1 = \max(b_1, 2)$ so haben wir (38) a bewiesen. Der Beweis von (38) b verläuft analog.

Sei $G_n = C$ für $n = 1, 2, \ldots$ und sei $\mathfrak{A}$ die Klasse aller auf C ganzen analytischen Funktionen. Wir betrachten die folgenden Banachräume (siehe Wloka [22] oder Palamodow [14]).

$$W_n^{N,B} = \{\varphi \mid \varphi \in \mathfrak{A}, \|\varphi\| = \sup_z |\varphi(z)\,(1+|x|)^n e^{-N(By)}| < \infty\}\,,$$

$$E_n^{N,B} = \{\varphi \mid \varphi \in \mathfrak{A}, \|\varphi\| = \sup_z |\varphi(z)\,(1+|x|)^{-n}\, e^{-N(By)}| < \infty\}\,,$$

$$W_{M,A}^{N,B} = \{\varphi \mid \varphi \in \mathfrak{A}, \|\varphi\| = \sup_z |\varphi(z)\, e^{M\left(\frac{1}{A}x\right)-N(By)}| < \infty\}\,,$$

$$E_{M,A}^{N,B} = \{\varphi \mid \varphi \in \mathfrak{A}, \|\varphi\| = \sup_z |\varphi(z)\, e^{-M\left(\frac{1}{A}x\right)-N(By)}| < \infty\}\,,$$

wobei $z = x + iy$. Die Hilberträume $\tilde{W}_n^{N,B}$, $\tilde{E}_n^{N,B}$, $\tilde{W}_{M,A}^{N,B}$, und $\tilde{E}_{M,A}^{N,B}$ definieren wir wie die obigen Räume, nur daß wir statt der Norm $\sup_z |\varphi(z)\,g(x,y)|$ die Norm $\left[\iint_C |\varphi(z)|^2\,|g(x,y)|^2\,dz\right]^{1/2}$ nehmen. Daß es tatsächlich Hilberträume

sind, folgt aus Satz 6. Aus diesen Räumen kann man gewisse induktive oder projektive Limesräume gewinnen (für die bestehenden Einbettungsrelationen siehe WLOKA [22] oder PALAMODOW [14]), so z. B.

$$W_{M,A^{\mathrm{pr}}}^{N,B^{\mathrm{pr}}} = \operatorname*{proj}_{\frac{n}{n+1}\to 1} W_{M,A\left(\frac{n+1}{n}\right)}^{N,B\left(\frac{n+1}{n}\right)},$$

$$W^{N,B^{\mathrm{pr}}} = \operatorname*{proj}_{\frac{p+1}{p}\to 1} \operatorname*{proj}_{n\to\infty} W_{n}^{N,B\left(\frac{p+1}{p}\right)}$$

(40)
$$W_M^N = \operatorname*{ind}_{B\to\infty} \operatorname*{ind}_{A\to\infty} W_{M,A}^{N,B} = \operatorname*{ind}_{n\to\infty} W_{M,n}^{N,n} \cong \operatorname*{ind}_{\to\infty} W_{M,n^{\mathrm{pr}}}^{N,n^{\mathrm{pr}}},$$

$$E_M^N = \operatorname*{ind}_{A\to 0} \operatorname*{ind}_{B\to\infty} E_{M,A}^{N,B} = \operatorname*{ind}_{n\to\infty} E_{M,\frac{1}{n}}^{N,n} \quad \text{und}$$

$$E_{M,n^{\mathrm{pr}}}^{N,n^{\mathrm{pr}}} = \operatorname*{proj}_{A\to\infty} \operatorname*{proj}_{B\to 0} E_{M,A}^{N,B} = \operatorname*{proj}_{n\to\infty} E_{M,n}^{N,\frac{1}{n}}.$$

Alle diese Räume lassen sich durch Hilberträume darstellen, dies ergibt sich aus Satz 8 und Satz 8a, die Darstellung erhält man einfach aus (40), wenn man in (40) $\tilde{W}$ statt W und $\tilde{E}$ statt E setzt; sie sind nuklear, dies folgt aus den Sätzen 9 und 9a.

Für die Anwendbarkeit der Sätze 8 bis 9a sind die Bedingungen N_1 und N_2 entscheidend, alles was man also zu tun hat, ist die Gültigkeit dieser Bedingungen nachzuprüfen. Wir wollen dies für die Räume $W_{M,A^{\mathrm{pr}}}^{N,B^{\mathrm{pr}}}$, E_M^N und $W^{N,B^{\mathrm{pr}}}$ durchführen.

Wir werden sehen, daß N_1 immer aus Lemma 1 folgt, während man N_2 aus Lemma 2 erhält.

Den W- und E-Räumen und ihren Anwendungen sind unter anderen Arbeiten die beiden Bücher von GELFAND-SCHYLOW [2], [3] gewidmet, die anderen dort vorkommenden Raumklassen erhält man aus unseren durch Äquivalenzabbildungen, wie z. B. durch Fouriertransformation, alle diese Räume sind damit nuklear.

Wir zeigen, daß $W_{M,A^{\mathrm{pr}}}^{N,B^{\mathrm{pr}}}$ ein (FN)-Raum ist. Dazu haben wir nach oben Gesagtem nur N_1 und N_2 nachzuprüfen.

Hier ist

$$g_\alpha = g'_\alpha = e^{M\left(\frac{nx}{(n+1)A}\right) - N\left(\frac{By(1+n)}{n}\right)}, \quad \alpha = \frac{1+n}{n}.$$

Wir setzen $\beta = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2$ und haben $\beta > \alpha$ sowie $\beta \to 1$ für $\alpha \to 1$. Außerdem ist

$$\iint \left|\frac{g_\alpha}{g'_\beta}\right|^2 dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2M\left(\frac{n^2x}{(n+1)^2A}\right) - 2\left(\frac{nx}{(n+1)A}\right)} dx \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{2N\left(\frac{(n+1)By}{n}\right) - 2N\left(\frac{(n+1)^2By}{n^2}\right)} dy < \infty$$

wegen Lemma 1. Damit ist die Bedingung N_1 erfüllt.

Um N_2 nachzuprüfen, setzen wir $d = 1$ (α, β wie oben) und haben

$$|g'_\beta(\zeta)|^2 \iint\limits_{K(\zeta,1)} |g_\alpha(z)|^{-2}\, dz \leqq \int\limits_{t-1}^{t+1} e^{2M\left(\frac{n^2 t}{(n+1)^2 A}\right) - 2M\left(\frac{nx}{(n+1)A}\right)} \cdot dx \times$$

$$\times \int\limits_{u-1}^{u+1} e^{2N\left(\frac{n+1}{n} By\right) - 2N\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 Bn\right)} \cdot dy < \infty\,,$$

nach Lemma 2, wobei $z = x + iy$ und $\zeta = t + iu$ gesetzt war.

Der Beweis, daß E_M^N ein (LN)-Raum ist, verlangt dieselben Anwendungen von Lemma 1 und 2 $\left(\text{man setzt in (36) } B = n,\ A = \frac{n}{2} = m \text{ und in (38) } n = 2\right)$.

Wir beweisen, daß $W^{N,B\,\mathrm{pr}}$ ein (FN)-Raum ist. Wir haben hier

$$g_\alpha = g'_\alpha = (1 + |x|)^n\, e^{-N\left(B\left(\frac{p+1}{p}\right)^2 y\right)},\quad \alpha = \left(n, \left(\frac{p}{p+1}\right)^2\right).$$

Um die Bedingungen N_1 und N_2 nachzuprüfen, nehmen wir $\beta = \left(n+1, \frac{p}{p+1}\right)$, $d_t = 1$, und haben nach Lemma 1 und 2

$$\int\int \left|\frac{g_\alpha}{g'_\beta}\right|^2 dz = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+|x|)^{2n}}{(1+|x|)^{2n+2}}\, dx \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2N\left(By\frac{(p+1)}{p}\right) - 2N\left(By\left(\frac{p+1}{p}\right)^2\right)} dy < \infty\,,$$

$$\iint\limits_{K(\zeta,1)} \left|\frac{g'_\alpha(\zeta)}{g_\beta(z)}\right|^2 dz \leqq \int\limits_{t-1}^{t+1} \frac{(1+|t|)^{2n}}{(1+|x|)^{2n+2}}\, dx \times$$

$$\times \int\limits_{u-1}^{u+1} e^{2N\left(\left(\frac{p+1}{p}\right)By\right) - 2N\left(\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 Bu\right)} dy < \infty\,, \qquad \text{q. e. d.}$$

4. *Die Sebastião e Silvaschen Ultradistributionsräume.* Man vergleiche zum folgenden Sebastião e Silva [18], [19] und [20]. Wir unterscheiden hier drei Typen von Grundräumen, nämlich die $\mathfrak{A}$-, $\mathfrak{E}$-, und $\mathfrak{Z}$-Räume und wir werden zeigen, daß sie (LN)-Räume sind. Alle anderen bei Sebastião e Silva [20] vorkommenden Räume erhalten wir durch die folgenden Operationen, ausgehend von den Grundräumen: Dualraumbildung, Äquivalenzabbildungen wie Fouriertransformation und Laplacetransformation usw., Unterraumbildung, Quotientenraumbildung nach einem abgeschlossenen Unterraum (dazu gehört auch die induktive Limesbildung), direkte Produktbildung und Bildung des Raumes aller stetigen linearen Endomorphismen. Nach Grothendieck [6] II, S. 47 bleibt die Nuklearität unter diesen Operationen erhalten. Damit sind alle in [20] vorkommende Räume nuklear, falls nur die Grundräume nuklear sind. Um die Nuklearität der Grundräume aufzuzeigen und ihre Darstellung durch Hilberträume anzugeben, benutzen wir abermals die Sätze 8 und 9 (d. h. wir prüfen N_1 und N_2 nach).

a) Die $\mathfrak{A}$-Räume:

$$A = \operatorname*{ind}_{\to n} A_n\,,$$

wobei

$$A_n = \{\varphi \mid \varphi \text{ holomorph in } G_n,\ \|\varphi\| = \sup_{z \in G_n} |\varphi(z)\,(1 + |z|)^{-n}| < \infty\}\,,$$

und für die offenen Mengen G_n, $G_n \supset G_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, gilt. Die Gewichtsfunktionen sind hier

$$g_n = g_n' = \frac{1}{(1 + |z|)^n}\,,$$

und nach Lemma 1 (37) und 2 (39) ist N_1 und N_2 erfüllt, falls man setzt $m = n - 1$, $d_0 = d_t = \frac{1}{2}\,d(G_n, \mathbb{C}G_{n-1})$ (wegen (16) D ist d immer positiv). Falls der Nullpunkt nicht zu G_n gehört, kann man als Gewichtsfunktion die holomorphe Funktion

$$\frac{1}{z^n} = g_n = g_n'\,,$$

nehmen, und man erhält mittels Satz 10 einen einfacheren Beweis für die (LN)-Eigenschaft.

b) Die $\mathfrak{E}$-Räume:

$$E = \operatorname*{ind}_{\to n} E_n\,,$$

wobei man für die offenen Mengen G_n, $G_n \supset G_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ hat und

$$E_n = \{\varphi \mid \varphi \text{ holomorph in } \mathrm{G}_n,\ \|\varphi\| = \sup_{z \in G_n} |\varphi(z)\,(1 + |z|)^{-n}\, e^{-n|x|}| < \infty\}.\quad z = x + iy$$

Hier sind die Gewichtsfunktionen gleich

$$g_n = g_n' = (1 + |z|)^{-n}\, e^{-n|x|}\,,$$

und N_1 hat die Form ($m = n - 1$, $z = x + iy$)

$$\iint\limits_{G_{n-1}} \frac{(1 + |z|)^{2n-2}}{(1 + |z|)^{2n}}\, e^{2(n-1)|x| - 2n|x|}\, dz \leqq \iint\limits_{C} \frac{e^{-2|x|}}{(1 + |z|)^2}\, dz < \infty\,,$$

während N_2 die Form hat (d_0 wie in a) gewählt)

$$J(\zeta) = \iint\limits_{K(\zeta, d_0)} \frac{(1 + |z|)^{2n-2}}{(1 + |\zeta|)^{2n}}\, e^{2(n-1)|x| - 2n|t|}\, dz,\quad z = x + iy,\quad \zeta = t + iu\,,$$

Da $J(\zeta) = J(t, u)$ stetig in (u, t) ist und wir für $|t| \geqq (n-1)d$ und $|t| - d \leqq$ $\leqq |x| \leqq |t| + d$ die Abschätzung haben

$$2(n-1)\,|x| - 2n\,|t| \leqq 2(n-1)\,(|t| + d) - 2n\,|t| \leqq 0\,,$$

also

$$e^{2(n-1)|x| - 2n|t|} \leqq M < \infty$$

für alle $t \in (-\infty, +\infty)$, $|t| - d \leqq |x| \leqq |t| + d$, folgt die Beschränktheit von

$$J(\zeta) \leqq B < \infty$$

wieder aus Lemma 2 (39).

Falls die G_n in der rechten Halbebene ($\mathrm{Re}\, z \geqq 0$) liegen, kann man als Gewichtsfunktion

$$\frac{e^{-z}}{z^n} = g_n = g_n'$$

nehmen und Satz 10 anwenden, was einen einfachen Beweis für die (LN)-Eigenschaft dieser Räume ergibt.

c) Die $\mathfrak{Z}$-Räume:

$$Z = \operatorname*{ind}_{\to n} Z_n, \quad G_n \supset G_{n+1},$$

$$Z_n = \left\{ \varphi \,|\, \varphi \text{ holomorph in } G_n, \ \|\varphi\| = \sup_{z \in G_n} |\varphi(z)\, e^{-n|z|}| < \infty \right\}.$$

Für die Gewichtsfunktionen haben wir

$$g_n = g_n' = e^{-n|z|},$$

und für N_1 $(m = n - 1)$

$$\iint\limits_{G_{n-1}} e^{2(n-1)|z| - 2n|z|}\, dz \leqq \iint\limits_{C} e^{-2|z|}\, dz < \infty$$

während N_2 die Form hat (d_0 wie in a))

$$J(\zeta) = \iint\limits_{K(\zeta, d_0)} e^{2(n-1)|z| - 2n|\zeta|}\, dz < \infty,$$

was wieder aus der Stetigkeit von $J(\zeta)$ und der Abschätzung

$$2(n-1)\,|z| - 2n|\zeta| \leqq 2(n-1)\,(|\zeta| + d) - 2n|\zeta| \leqq 0, \quad \text{für} \quad |\zeta| \geqq (n-1)\mathrm{d}$$

folgt. $\mathfrak{Z}$ ist damit ein (LN)-Raum.

5. Als letzte Anwendung wollen wir einen Raum von Roumieu [16], S. 72 behandeln. Sei

$$\mathfrak{H} = \operatorname*{ind}_{\longrightarrow} M_n,$$

wobei

$$M_n = \left\{ \varphi \,|\, \varphi(z) \text{ holomorph in } G_n, \ \|\varphi\| = \sup_{|y| < \frac{1}{n}} |\varphi(z)\, e^{M\left(\frac{x}{n}\right)}| < \infty \right\} \quad z = x + iy.$$

Die Mengen G_n sind durch die Streifen

$$G_n = \left\{ z \,|\, z = x + iy, |y| < \frac{1}{n} \right\},$$

gegeben und die Gewichtsfunktionen durch

$$g_n(x, y) = g_n'(x, y) = e^{M\left(\frac{x}{n}\right)},$$

(Definition von M siehe 3.)

Auch hier ergeben Lemma 1 und 2 die Bedingungen N_1 und N_2, und damit ist nach Satz 9 $\mathfrak{H}$ ein (LN)-Raum.

Literatur

[1] Aronszajn, N.: Theory of reproducing kernels. Trans. Am. Math. Soc. **68**, 337—404 (1950).

[1a] Fuks, B. A.: Analytic functions of several complex variables. Amer. Math. Soc. (translations) Providence 1963.

[2] Gelfand, I. M., u. G. E. Schylow: Verallgemeinerte Funktionen Bd. 2. Berlin: Deutsch. Verl. Wiss. 1962.

[3] — — Verallgemeinerte Funktionen Bd. 3. Berlin: Deutsch. Verl. Wiss. 1964.

[4] —, u. N. J. Wilenkin: Verallgemeinerte Funktionen Bd. 4. (russ.). Moskau 1962.

[5] — — Generalized Functions, Bd. 4. engl. Übersetzung. New York 1964.
[6] GROTHENDIECK, A.: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Am. Math. Soc. **16** (1955).
[7] — Sur certains espaces de fonctions holomorphes I, II. J. reine angew. Math. **192**, 35—64, 77—95 (1953).
[7a] HALMOS, P. R.: Measure theory. New York 1950
[8] KÖTHE, G.: Topologische lineare Räume. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.
[9] — Die Randverteilung analytischer Funktionen. Math. Z. **57**, 13—33 (1952).
[10] MAURIN, K.: Abbildungen vom Hilbert-Schmidtschen Typus und ihre Anwendungen. Math. Scand. **9**, 359—371 (1961).
[11] MESCHKOWSKI, H.: Hilbertsche Räume mit Kernfunktion. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1962.
[12] MITJAGIN, B. S.: Die Nuklearität und andere Eigenschaften der Räume vom Typus S (russ.). Trud. Mosk. Mat. Ob-wa, **9**, 317—328 (1960).
[13] — Approximative Dimension und Basen in nuklearen Räumen (russ.). U. M. N 14, 4 (100), 63—132 (1962).
[14] PALAMODOW, W. D.: Die Fouriertransformation von schnell wachsenden unendlich oft differenzierbaren Funktionen (russ.). Trud. Mosk. Mat. Ob-wa, **11**, 309—350 (1962).
[15] RAĬKOW, D. A.: Vollstetige Spektren von lokalkonvexen Räumen. Trud. Mosk. Mat. Ob-wa, **7**, 413—438 (1958).
[16] ROUMIEU, C.: Sur quelques extensions de la notion de distribution. Ann. sci. école norm. super. **77**, 41—121 (1960).
[17] SEBASTIÃO E SILVA, J.: Su certi classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni. Rend. Mat. **14**, 388—410 (1955).
[18] — Le calcul opérationnel au point de vue des distributions. Portugaliae Math. **14**, 105—132 (1955).
[19] — Sur l'espace des fonctions holomorphes à croissance lente à droite. Portugaliae Math. **17**, 1—17 (1958).
[20] — Les fonctions analytiques comme ultra-distributions dans le calcul operationnel. Math. Ann. **136**, 58—96 (1958).
[21] TILLMANN, H. G.: Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen. Math. Z. **59**, 61—83 (1953).
[22] WLOKA, J.: Über die Hurewič-Hörmanderschen Distributionsräume. Math. Ann. **160**, 321—362 (1965).

(Eingegangen am 22. April 1965)

FAN, K.
Math. Annalen 163, 189—203 (1966)

Applications of a Theorem Concerning Sets with Convex Sections*

Herrn GOTTFRIED KÖTHE zum 60. Geburtstag am 25. 12. 1965 gewidmet

By

KY FAN in Santa Barbara, California

1. Introduction. In our recent note [8], a geometric theorem concerning sets with convex sections was presented. It is our objective in the present paper to illustrate the usefulness of this result by giving various applications. Several theorems, some known and some new, will be proved as direct consequences of the result on sets with convex sections.

2. Sets with convex sections. The result proved in [8] on sets with convex sections is the following.

Theorem 1. *Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be n ($\geqq 2$) non-empty compact convex sets each in a real separated topological vector space. Let $E_1, E_2, \ldots, E_n$ be n subsets of $\prod_{i=1}^{n} X_i$ having the following two properties:*

(a) *For each i and for every point $x_i \in X_i$, the section $E_i(x_i)$ formed by all points $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ of $\prod_{j \neq i} X_j$ such that $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in E_i$ is open in $\prod_{j \neq i} X_j$.*

(b) *For each i and for every point $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ of $\prod_{j \neq i} X_j$, the section $E_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ formed by all points $x_i \in X_i$ such that $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in E_i$ is non-empty and convex.*

Then the intersection $\bigcap_{i=1}^{n} E_i$ is non-empty.

For applications, the case $n = 2$ of the above result is most useful. For this reason, this case will be stated explicitly below as Theorem 1', together with a proof which is different from that given in [8].

Theorem 1'. *Let X, Y be two non-empty compact convex sets each in a real separated topological vector space. Let E, F be two subsets of $X \times Y$ having the following properties:*

(a) *For each point $x \in X$, the section $E(x) = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$ is open in Y, and the section $F(x) = \{y \in Y : (x, y) \in F\}$ is non-empty and convex.*

(b) *For each point $y \in Y$, the section $F(y) = \{x \in X : (x, y) \in F\}$ is open in X, and the section $E(y) = \{x \in X : (x, y) \in E\}$ is non-empty and convex.*

* This work was supported in part by the Army Research Office, Durham, through Grant DA-ARO (D)-31-124-G388 at the University of Texas; and by the National Science Foundation through Grant GP-3893 at Northwestern University.

Then $E \cap F$ is non-empty.

Proof. Put $Z = X \times Y$. For each point $z = (x, y) \in X \times Y$, let $A(z)$ or $A(x, y)$ denote the complement of $F(y) \times E(x)$ in Z. $A(z)$ is a closed subset of the compact set Z. For each $(x_0, y_0) \in X \times Y$, $E(y_0) \times F(x_0)$ is non-empty. If $(x, y) \in E(y_0) \times F(x_0)$, then we have $(x_0, y_0) \in F(y) \times E(x)$ and $(x_0, y_0) \notin A(x, y)$. Thus

$$\bigcap_{z \in Z} A(z) = \emptyset , \tag{1}$$

where $\emptyset$ denotes the empty set.

We claim that there exists a finite subset W of Z such that the convex hull of W is not entirely contained in $\bigcup_{z \in W} A(z)$. Suppose this is false, i.e. suppose that for every finite subset W of Z, the convex hull of W is contained in $\bigcup_{z \in W} A(z)$. Consider an arbitrary finite subset $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ of Z and its convex hull K. Then z_i would be in $A(z_i)$, so $K \cap A(z_i) \neq \emptyset$. For each $i = 1, 2, \ldots, n$, we can define a real-valued, non-negative continuous function f_i on K such that $K \cap A(z_i) = \{z \in K : f_i(z) = 0\}$. For any point $z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i$ of K, where $\alpha_i \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, there would be an index i for which $\alpha_i > 0$ and $z \in A(z_i)$. Then, for every point $z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i$ of K (where $\alpha_i \geqq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$), the system of conditions

$$f_i(z) = 0 \qquad (1 \leqq i \leqq n) \tag{2}$$

would be equivalent to the system of conditions

$$\alpha_i \sum_{j=1}^{n} f_j(z) = f_i(z) \qquad (1 \leqq i \leqq n) . \tag{3}$$

Let S denote the set of all ordered n-tuples $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ with $\alpha_i \geqq 0$ and $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. By adopting an idea used by NASH [14] in the proof of his theorem on equilibrium points (see Section 5 below), we consider the continuous mapping $f : S \to S$ defined by $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n')$ with

$$\alpha_i' = \frac{\alpha_i + f_i\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j z_j\right)}{1 + \sum_{k=1}^{n} f_k\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j z_j\right)} \qquad (1 \leqq i \leqq n) .$$

Let $(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots, \hat{\alpha}_n) \in S$ be a fixed point of f. Then the point $\hat{z} = \sum_{i=1}^{n} \hat{\alpha}_i z_i$ in K would satisfy (3) and therefore (2), which means $\hat{z} \in \bigcap_{i=1}^{n} A(z_i) \neq \emptyset$. This argument could apply to any finite subset $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ of Z. As each $A(z)$ $(z \in Z)$ is a closed subset of the compact set Z, we would have $\bigcap_{z \in Z} A(z) \neq \emptyset$, which contradicts (1).

We have thus proved the existence of a finite number of points $(x_i, y_i) \in X \times Y$ $(1 \leqq i \leqq n)$ and real numbers $\alpha_i \geqq 0$ with $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ such that $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (x_j, y_j) \notin \bigcup_{i=1}^{n} A(x_i, y_i)$. We have then

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j \right) \in \bigcap_{i=1}^{n} F(y_i) \times E(x_i) ,$$

which means

$$(x_i, y_i) \in E\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j \right) \times F\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \right) , \qquad (1 \leqq i \leqq n) .$$

By hypothesis, $E\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j \right) \times F\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \right)$ is convex, it follows therefore that

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i, y_i) \in E\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j \right) \times F\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \right) ,$$

i.e.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \right) \in E \cap F .$$

The theorem is thus proved.

3. A theorem of VON NEUMANN. Theorem 1′ should be compared with the following theorem of VON NEUMANN [15]:

Theorem 2′ (VON NEUMANN). *Let X, Y be two non-empty compact convex sets each in a finite dimensional Euclidean space. Let E, F be two closed subsets of $X \times Y$. If for each $y \in Y$, $E(y) = \{x \in X : (x, y) \in E\}$ is non-empty and convex, and for each $x \in X$, $F(x) = \{y \in Y : (x, y) \in F\}$ is non-empty and convex, then $E \cap F \neq \emptyset$.*

This has been extended in our paper [5] to the following result:

Theorem 2. *Let $\{X_\nu\}_{\nu \in I}$ be a family (finite or infinite) of non-empty compact convex sets each in a real separated locally convex topological vector space. Let $X = \prod_{\nu \in I} X_\nu$ and $Y_\nu = \prod_{\substack{\mu \in I \\ \mu \neq \nu}} X_\mu$ for each $\nu \in I$. Let $\{E_\nu\}_{\nu \in I}$ be a family (indexed with the same set I) of closed subsets of X. If for each point $x \in X$ and for any $\nu \in I$, the set*

$$\mathrm{pr}_{X_\nu}[E_\nu \cap (X_\nu \times \mathrm{pr}_{Y_\nu} x)]$$

in X_ν is non-empty and convex, then $\bigcap_{\nu \in I} E_\nu \neq \emptyset$. Here pr_{X_ν} and pr_{Y_ν} denote the projections on X_ν and Y_ν respectively.

The essential difference between Theorems 1′ and 2′ lies in the topological conditions concerning E and F. Between Theorems 1 and 2, there are two additional differences: the topological vector spaces in Theorem 1 are not required to be locally convex, the family $\{X_\nu\}_{\nu \in I}$ in Theorem 2 need not be finite.

4. An analytical formulation of Theorem 1. A real-valued function f defined on a convex set X in a real vector space is said to be *quasi-concave* on X, if for every real number t, the set $\{x \in X : f(x) > t\}$ is convex. f is said to be *quasi-convex* on X, if $-f$ is quasi-concave on X.

As was pointed out in [8], Theorem 1 can be given the following formulation. Theorems 1 and 3 are so related that each can be immediately derived from the other.

Theorem 3. *Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be n ($\geqq 2$) non-empty compact convex sets each in a real separated topological vector space. Let $f_1, f_2, \ldots, f_n$ be n real-valued functions defined on $\prod_{i=1}^{n} X_i$ and having the following two properties:*

(a) *For each i and for every fixed point $x_i \in X_i$, $f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ is a lower semi-continuous function on $\prod_{j \neq i} X_j$.*

(b) *For each i and for every fixed point $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ of $\prod_{j \neq i} X_j$, $f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ is a quasi-concave function on X_i.*

Let $t_1, t_2, \ldots, t_n$ be n real numbers. If for every i and for each point $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ of $\prod_{j \neq i} X_j$, there exists a point $y_i \in X_i$ such that $f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) > t_i$, then there is a point $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i$ such that $f_i(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n) > t_i$ for $1 \leqq i \leqq n$.

Clearly the conclusion in this theorem may be restated as follows. If

$$(4) \quad \operatorname*{Min}_{\{x_j\}_{j \neq i}} \left(\operatorname*{Sup}_{x_i} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right) > t_i \quad (1 \leqq i \leqq n),$$

then there exists a point $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i$ satisfying $f_i(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n) > t_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$. (Observe that the function to be minimized in (4) is lower semi-continuous on $\prod_{j \neq i} X_j$, since it is the supremum of a family of lower semi-continuous functions.)

In the applications given in the following sections, both formulations, Theorems 1 and 3, will be used.

5. Equilibrium point and minimax. The hypothesis in the following theorem is stronger than that in Theorem 3, as the functions are required to be continuous on $\prod_{i=1}^{n} X_i$.

Theorem 4 (NASH [14]). *Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be n ($\geqq 2$) non-empty compact convex sets each in a real separated topological vector space. Let $f_1, f_2, \ldots, f_n$ be n real-valued continuous functions defined on $\prod_{i=1}^{n} X_i$. If for each $i = 1, 2, \ldots, n$ and for any fixed point $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \prod_{j \neq i} X_j$, $f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ is a quasi-concave function on X_i, then there exists a point $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i$ such that*

$$(5) \quad f_i(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n) = \operatorname*{Max}_{y_i \in X_i} f_i(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{i-1}, y_i, \hat{x}_{i+1}, \ldots, \hat{x}_n), \quad (1 \leqq i \leqq n).$$

Proof. For any $\varepsilon > 0$ and $i = 1, 2, \ldots, n$, let $E_{\varepsilon, i}$ denote the set of all $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \prod_{j=1}^{n} X_j$ satisfying the inequality

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) > \operatorname*{Max}_{y_i \in X_i} f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - \varepsilon .$$

From the uniform continuity of f_i on $\prod_{j=1}^{n} X_j$, it is easily seen that $\operatorname*{Max}_{y_i \in X_i} f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ is a continuous function on $\prod_{j \neq i} X_j$. Therefore, for each i and for any fixed $x_i \in X_i$, the section $E_{\varepsilon, i}(x_i)$ formed by all $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \prod_{j \neq i} X_j$ such that $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in E_{\varepsilon, i}$ is open in $\prod_{j \neq i} X_j$. Because f_i is a quasi-concave function of x_i on X_i, the section $E_{\varepsilon, i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ formed by all $x_i \in X_i$ such that $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in E_{\varepsilon, i}$ is convex and clearly non-empty. By Theorem 1, we have $\bigcap_{i=1}^{n} E_{\varepsilon, i} \neq \emptyset$ for every $\varepsilon > 0$. Then, in view of compactness of $\prod_{i=1}^{n} X_i$, there exists a point $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ which is in $\bigcap_{i=1}^{n} \overline{E}_{\varepsilon, i}$ for every $\varepsilon > 0$. This point $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n)$ satisfies (5).

In [8] we have shown that the following minimax theorem can be easily derived from Theorem 3.

Theorem 5 (SION [16]). *Let X, Y be two non-empty compact convex sets each in a real separated topological vector space. Let f be a real-valued function defined on $X \times Y$. If for each fixed $x \in X$, $f(x, y)$ is a lower semi-continuous, quasi-convex function on Y, and for every fixed $y \in Y$, $f(x, y)$ is an upper semi-continuous, quasi-concave function on X, then*

$$\operatorname*{Min}_{y \in Y} \operatorname*{Max}_{x \in X} f(x, y) = \operatorname*{Max}_{x \in X} \operatorname*{Min}_{y \in Y} f(x, y) .$$

6. Systems of convex inequalities. The following result concerning systems of convex inequalities was given in [6]. It will be proved here as a direct application of Theorem 3.

Theorem 6. *Let X be a compact convex set in a real separated topological vector space. Let $f_1, f_2, \ldots, f_n$ be n real-valued lower semi-continuous convex functions defined on X. Then there exists a point $x \in X$ satisfying*

$$f_i(x) \leqq 0 \qquad (1 \leqq i \leqq n) , \tag{6}$$

if and only if, for any n non-negative numbers α_i with $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, there is a point $x \in X$ such that $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) \leqq 0$.

Proof. We need only prove the "if" part. Let A be the set of all ordered n-tuples $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ of non-negative numbers α_i with sum 1. Define functions g, h on $X \times A$ by

$$g(x, \alpha) = -h(x, \alpha) = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)$$

for $x \in X$ and $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in A$. g is lower semi-continuous in α and concave in x, h is lower semi-continuous in x and concave in α. The condition stated in the theorem implies that for any $\varepsilon > 0$ and for every $\alpha \in A$, there is an $x \in X$ satisfying $g(x, \alpha) > -\varepsilon$. But the two inequalities $g(x, \alpha) > -\varepsilon$ and $h(x, \alpha) > \varepsilon$ cannot be simultaneously satisfied. By Theorem 3, there exists for every $\varepsilon > 0$, an $x_\varepsilon \in X$ such that $h(x_\varepsilon, \alpha) \leqq \varepsilon$ for all $\alpha \in A$. In particular we have $f_i(x_\varepsilon) \leqq \varepsilon$ for $1 \leqq i \leqq n$. Thus for each $\varepsilon > 0$, the set $L_\varepsilon = \{x \in X : f_i(x) \leqq \varepsilon$ for $1 \leqq i \leqq n\}$ is non-empty. By lower semi-continuity of f_i, L_ε is closed and therefore compact. As $L_\varepsilon \supset L_{\varepsilon'}$ for $\varepsilon > \varepsilon' > 0$, it follows that $\bigcap_{\varepsilon > 0} L_\varepsilon \neq \emptyset$. Hence there exists an $x \in X$ satisfying (6).

7. Extremum problems for matrices. As an application of Theorem 6, we prove the following result.

Theorem 7. *For any real $n \times n$ matrix (a_{ij}), the maximum of $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij}$, when the $n \times n$ matrix (x_{ij}) varies under the condition*

$$x_{ij} \geqq 0 \quad \text{for all } i, j; \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqq 1 \quad \text{for} \quad 1 \leqq i \leqq n; \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leqq 1 \quad \text{for} \quad 1 \leqq j \leqq n;$$

is equal to the minimum of $\sum_{i=1}^{n} (y_i + z_i)$ under the condition

$$y_i \geqq 0, \quad z_j \geqq 0, \quad y_i + z_j \geqq a_{ij} \quad \text{for} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Proof. Denote by μ the maximum of $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij}$ under condition (7). Let $\mathcal{M}$ denote the set of all real $n \times n$ matrices $M = (x_{ij})$ such that $0 \leqq x_{ij} \leqq 1$ for all i, j. For $M = (x_{ij}) \in \mathcal{M}$, define

$$f_i(M) = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - 1 \qquad (1 \leqq i \leqq n),$$

$$g_j(M) = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} - 1 \qquad (1 \leqq j \leqq n).$$

Fix an arbitrary $\varepsilon > 0$, and define

$$h(M) = \mu + \varepsilon - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij}$$

for $M = (x_{ij}) \in \mathcal{M}$. Then no $M \in \mathcal{M}$ can satisfy all the $2n + 1$ relations

$$h(M) \leqq 0, \quad f_i(M) \leqq 0 \ (1 \leqq i \leqq n), \quad g_j(M) \leqq 0 \ (1 \leqq j \leqq n).$$

By Theorem 6, we can find $2n + 1$ non-negative numbers $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$ with $\sum_{k=0}^{2n} \alpha_k = 1$ such that

$$\alpha_0 h(M) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(M) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{n+j} g_j(M) > 0 \tag{9}$$

for all $M \in \mathcal{M}$. For the particular $M = (x_{ij})$ with all $x_{ij} = \frac{1}{n}$, we have $h(M) \geqq \varepsilon$ and inequality (9) reduces to $\alpha_0 h(M) > 0$. Hence $\alpha_0 > 0$. If we take $y_i = \alpha_i / \alpha_0$

$(1 \leqq i \leqq n)$ and $z_j = \alpha_{n+j}/\alpha_0$ $(1 \leqq j \leqq n)$, then (9) becomes

$$h(M) + \sum_{i=1}^{n} y_i f_i(M) + \sum_{j=1}^{n} z_j g_j(M) > 0 ,$$

which holds for all $M \in \mathcal{M}$. In other words,

$$\mu + \varepsilon > \operatorname*{Max}_{0 \leqq x_{ij} \leqq 1} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - y_i - z_j) x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} (y_i + z_i) \right\} . \tag{10}$$

We have thus proved that for every $\varepsilon > 0$ there exist non-negative numbers $y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2, \ldots, z_n$ satisfying (10). Hence

$$\mu \geqq \operatorname*{Inf}_{\substack{y_i \geqq 0 \\ z_j \geqq 0}} \operatorname*{Max}_{0 \leqq x_{ij} \leqq 1} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - y_i - z_j) x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} (y_i + z_i) \right\} . \tag{11}$$

Let $\Phi(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n)$ denote the maximum on the right side of (10). Clearly

$$\Phi(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - y_i - z_j)^+ + \sum_{i=1}^{n} (y_i + z_i) , \tag{12}$$

where $(a_{ij} - y_i - z_j)^+ = \operatorname{Max}(0, a_{ij} - y_i - z_j)$. Consider now any $2n$ non-negative numbers $y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n$ such that $a_{pq} - y_p - z_q > 0$ for some pair of indices p, q (not necessarily distinct). We can choose y_p', z_q' such that

$$y_p' > y_p, \quad z_q' > z_q, \quad a_{pq} - y_p' - z_q' = 0 .$$

Let $y_i' = y_i$ for $i \neq p$, and $z_j' = z_j$ for $j \neq q$. Then $y_1', \ldots, y_n', z_1', \ldots, z_n'$ remain non-negative, and

$$a_{ij} - y_i - z_j \geqq a_{ij} - y_i' - z_j' \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) .$$

By (12) we have

$$\begin{aligned} &\Phi(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n) - \Phi(y_1', \ldots, y_n', z_1', \ldots, z_n') \geqq \\ &\geqq (a_{pq} - y_p - z_q)^+ - (a_{pq} - y_p' - z_q')^+ + (y_p - y_p') + (z_q - z_q') \\ &= a_{pq} - y_p' - z_q' = 0 , \end{aligned}$$

i.e.

$$\Phi(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n) \geqq \Phi(y_1', \ldots, y_n', z_1', \ldots, z_n') .$$

This shows that the infimum of $\Phi(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n)$ under the condition $y_i \geqq 0$, $z_j \geqq 0$ is same as the infimum of $\Phi(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n)$ under condition (8). But under condition (8), we have by (12)

$$\Phi(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} (y_i + z_i) .$$

Hence (11) becomes

$$\mu \geqq \operatorname{Inf} \sum_{i=1}^{n} (y_i + z_i) , \tag{13}$$

where the infimum is taken under condition (8). Obviously this infimum is attained as a minimum. To see that actually the equality holds in (13), it remains to observe that (7) and (8) together imply

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \leqq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (y_i + z_j) x_{ij} \leqq \sum_{i=1}^{n} y_i + \sum_{j=1}^{n} z_j .$$

An $n \times n$ matrix (x_{ij}) is called a *doubly stochastic matrix*, if all its elements x_{ij} are non-negative real numbers, $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$ for all i, and $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$ for all j. A doubly stochastic matrix (x_{ij}) is called a *permutation matrix*, if each x_{ij} is 0 or 1. The set of all $n \times n$ doubly stochastic matrices is clearly a compact convex set in the vector space of all real $n \times n$ matrices. A well known theorem of G. BIRKHOFF [1] states that the extreme points of this convex set are precisely the $n \times n$ permutation matrices. Using this fact, a simple modification of the above proof of Theorem 7 will yield the following known result.

Theorem 8 (EGERVÁRY [4]). *For any real $n \times n$ matrix (a_{ij}), we have*

$$\max_{\sigma} \sum_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} = \min_{y_i + z_j \geqq a_{ij}} \sum_{i=1}^{n} (y_i + z_i) ,$$

where the maximum is taken over all permutations σ of $\{1, 2, \ldots, n\}$, and the minimum is taken over all real numbers $y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n$ satisfying $y_i + z_j \geqq a_{ij}$ for all i, j.

8. A theorem of Hardy-Littlewood-Pólya. An interesting and useful result concerning doubly stochastic matrices is the following theorem due to HARDY-LITTLEWOOD-PÓLYA [10, p. 49]. The proof given here is based on Theorem 3 and is simpler than the original proof in [10][1]).

Theorem 9 (HARDY-LITTLEWOOD-PÓLYA). *If the real numbers a_i, b_i $(1 \leqq i \leqq n)$ satisfy the conditions*

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n , \quad b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n , \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \leqq \sum_{i=1}^{k} b_i \qquad (1 \leqq k \leqq n) , \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i , \tag{16}$$

then there is an $n \times n$ doubly stochastic matrix (p_{ij}) such that

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} b_j \qquad (1 \leqq i \leqq n) . \tag{17}$$

Proof. Clearly it suffices to consider the case where a_i, b_i are all non-negative, which will be assumed.

Let us first prove this statement: For any n real numbers c_i $(1 \leqq i \leqq n)$, there exists an $n \times n$ doubly stochastic matrix (p_{ij}) such that

$$\sum_{i=1}^{n} c_i a_i \leqq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i p_{ij} b_j . \tag{18}$$

To prove this, it suffices to consider the case where all $c_i \geqq 0$. In fact we can always introduce a number d such that $c_i' = c_i + d \geqq 0$ for all i. If a doubly stochastic matrix (p_{ij}) satisfies

$$\sum_{i=1}^{n} c_i' a_i \leqq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i' p_{ij} b_j ,$$

[1]) Another simple proof of Theorem 9 was given by RYFF in Trans. Am. Math. Soc. 117, 94 (1965). (Footnote added after the paper was submitted for publication.)

then by virtue of (16) and $\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$ for all j, the same matrix (p_{ij}) will satisfy (18). Consider now any n numbers $c_i \geqq 0$. Let σ be a permutation of $\{1, 2, \ldots, n\}$ such that $c_{\sigma(1)} \geqq c_{\sigma(2)} \geqq \cdots \geqq c_{\sigma(n)}$. Then the doubly stochastic matrix (p_{ij}) defined by $p_{ij} = 1$ if $i = \sigma(j)$, and $p_{ij} = 0$ if $i \neq \sigma(j)$, will satisfy (18). Indeed, from (14), (15) and $a_i \geqq 0$, $b_i \geqq 0$, we have

$$\sum_{i=1}^{n} c_i a_i \leqq \sum_{i=1}^{n} c_{\sigma(i)} a_i \leqq \sum_{i=1}^{n} c_{\sigma(i)} b_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i p_{ij} b_j .$$

Now denote by $\mathscr{P}$ the set of all $n \times n$ doubly stochastic matrices. $\mathscr{P}$ is a compact convex set in the vector space of all real $n \times n$ matrices. Let $\mathscr{A}$ denote the set of all ordered $2n$-tuples $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n})$ of real numbers such that $\alpha_i \geqq 0$ $(1 \leqq i \leqq 2n)$ and $\sum_{i=1}^{2n} \alpha_i = 1$. Define functions f, g on $\mathscr{P} \times \mathscr{A}$ by

$$f(P, \alpha) = -g(P, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_{n+i}) \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} b_j - a_i \right)$$

for $P = (p_{ij}) \in \mathscr{P}$ and $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}) \in \mathscr{A}$. According to the statement just proved, for any $\varepsilon > 0$ and any $\alpha \in \mathscr{A}$, there is a $P \in \mathscr{P}$ such that $f(P, \alpha) > -\varepsilon$. But the two inequalities $f(P, \alpha) > -\varepsilon$ and $g(P, \alpha) > \varepsilon$ cannot be verified simultaneously. By Theorem 3, there is a $\hat{P} = (\hat{p}_{ij}) \in \mathscr{P}$ such that $g(\hat{P}, \alpha) \leqq \varepsilon$ for all $\alpha \in \mathscr{A}$. Then $\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_{n+i}) \left(a_i - \sum_{j=1}^{n} \hat{p}_{ij} b_j \right) \leqq \varepsilon$ for all $\alpha \in \mathscr{A}$. In particular

$$|a_i - \sum_{j=1}^{n} \hat{p}_{ij} b_j| \leqq \varepsilon \qquad (1 \leqq i \leqq n) . \tag{19}$$

Thus for every $\varepsilon > 0$, there is a $\hat{P} = (\hat{p}_{ij}) \in \mathscr{P}$ satisfying (19). By compactness of $\mathscr{P}$, the existence of a doubly stochastic matrix (p_{ij}) satisfying (17) follows.

9. Fixed points. The following interesting result has been recently obtained by IOHVIDOV [11].

Theorem 10′ (IOHVIDOV). *Let X be a non-empty compact convex set in a real separated locally convex topological vector space E. Let $g : X \times X \to E$ be a continuous mapping such that*

$$g(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 g(x, y_1) + \alpha_2 g(x, y_2)$$

holds for all x, y_1, y_2 in X and $\alpha_1 \geqq 0$, $\alpha_2 \geqq 0$ with $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. If for every $x \in X$, there is a $y \in X$ with $g(x, y) = 0$, then there exists an $\hat{x} \in X$ such that $g(\hat{x}, \hat{x}) = 0$.

In case $g : X \times X \to E$ is defined by $g(x, y) = f(x) - y$ with a continuous mapping $f : X \to X$, Theorem 10′ reduces to the classical Tychonoff's fixed point theorem. As an application of Theorem 1′, we shall extend Theorem 10′ to the following result.

Theorem 10. *In a real separated locally convex topological vector space E, let X be a non-empty compact convex set and K a non-empty closed convex set. Let $g : X \times X \to E$ be a continuous mapping such that for every $x \in X$ and any*

convex set C in E, the set $\{y \in X : g(x, y) \in C\}$ is convex. If for every $x \in X$, there is a $y \in X$ with $g(x, y) \in K$, then there exists an $\hat{x} \in X$ such that $g(\hat{x}, \hat{x}) \in K$.

Proof. Consider an arbitrary open convex neighborhood V of o in E. Let

$$A = \{(x, y) \in X \times X : x - y \in V\},$$
$$B = \{(x, y) \in X \times X : g(x, y) \in K + V\}.$$

For each $x \in X$, the section $A(x) = \{y \in X : (x, y) \in A\} = X \cap (x - V)$ is open in X. Since $K + V$ is convex, our hypothesis on g implies that for each $x \in X$, the section $B(x) = \{y \in X : g(x, y) \in K + V\}$ is convex and non-empty. As $K + V$ is open and g is continuous, the section $B(y)$ is open in X for every $y \in X$. Also, for every $y \in X$, the section $A(y) = X \cap (y + V)$ is convex and non-empty. Hence by Theorem 1', $A \cap B \neq \emptyset$.

Now let $\mathscr{V}$ denote the family of all open convex neighborhoods of o in E. For each $V \in \mathscr{V}$, let C_V denote the set of all $(x, y) \in X \times X$ satisfying $x - y \in \overline{V}$ and $g(x, y) \in \overline{K + V}$. Then C_V is a non-empty closed subset of the compact set $X \times X$. Since we have

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_{V_i} \supset C_{V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_n} \neq \emptyset$$

for any finite number of $V_i \in \mathscr{V}$, there exists a point $(\hat{x}, \hat{y})$ in $\bigcap_{V \in \mathscr{V}} C_V$. Then $\hat{x} = \hat{y}$ and

$$g(\hat{x}, \hat{x}) \in \bigcap_{V \in \mathscr{V}} \overline{K + V} = \overline{K} = K.$$

Corollary. *In a real separated locally convex topological vector space, let X be a non-empty compact convex set and K a non-empty closed convex set. Then for every continuous mapping $f : X \to X + K$, there exists a point $\hat{x} \in X$ such that $f(\hat{x}) \in \hat{x} + K$.*

Proof. Apply Theorem 10 to $g : X \times X \to E$ defined by $g(x, y) = f(x) - y$.

10. Extension of monotone sets. Let E, F be two real vector spaces, and let a bilinear form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ be given on $E \times F$. Following DEBRUNNER-FLOR [3], a set M in $E \times F$ will be called a *monotone set* (with respect to the given bilinear form), if $\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle$ is non-negative for any two points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) of M. DEBRUNNER and FLOR [3] have recently proved a theorem on extension of monotone sets. It generalizes earlier results of MINTY [13] and GRÜNBAUM [9], which have interesting applications to non-linear elliptic boundary value problems (see BROWDER [2]). Theorem 12 in this section is a variant of the theorem of Debrunner-Flor, and will be derived from the following result, another application of Theorem 1'.

Theorem 11. *Let E, F be two real separated topological vector spaces, of which F is locally convex. Let ϕ be a real-valued continuous function defined on $E \times F$ such that for each fixed $y \in F$, $\phi(x, y)$ is a quasi-concave function of x on E. Let X, Y be non-empty compact convex sets in E and F respectively, and $f : X \to Y$ a continuous mapping. Let $M \subset E \times F$. If for every $y \in Y$, there is an $x \in X$ such that $\phi(u - x, v - y) \geqq 0$ for every $(u, v) \in M$, then there exists an $\hat{x} \in X$ such that $\phi(u - \hat{x}, v - f(\hat{x})) \geqq 0$ for all $(u, v) \in M$.*

Proof. Fix an arbitrary finite subset N of M, any $\varepsilon > 0$ and any open convex neighborhood V of o in F. Let A be the set of all $(x, y) \in X \times Y$ such that $\phi(u - x, v - y) > -\varepsilon$ for $(u, v) \in N$. Let B be the set of all $(x, y) \in X \times Y$ such that $y - f(x) \in V$. For every $x \in X$, the section $A(x) = \{y \in Y : \phi(u - x, v - y) > -\varepsilon$ for $(u, v) \in N\}$ is open in Y, the section $B(x) = (f(x) + V) \cap Y$ is convex and non-empty. For every $y \in Y$, the section $B(y) = f^{-1}(y - V)$ is open in X, and the section $A(y)$ is convex non-empty, by hypothesis. Hence $A \cap B \neq \emptyset$ by Theorem 1'.

For a finite subset N of M, an $\varepsilon > 0$ and an open convex neighborhood V of o in F, let $C(N, \varepsilon, V)$ denote the set of all $(x, y) \in X \times Y$ such that $\phi(u - x, v - y) \geqq -\varepsilon$ for $(u, v) \in N$ and $y - f(x) \in \overline{V}$. We have just seen that $C(N, \varepsilon, V)$ is always non-empty. Since $C(N, \varepsilon, V)$ is a closed subset of the compact set $X \times Y$, there exists a point $(\hat{x}, \hat{y})$ such that $(\hat{x}, \hat{y}) \in C(N, \varepsilon, V)$ for every choice of N, ε and V. We have necessarily $\hat{y} = f(\hat{x})$ and $\phi(u - \hat{x}, v - f(\hat{x})) \geqq 0$ for all $(u, v) \in M$.

Theorem 12. *Let E, F be two real separated topological vector spaces, of which F is locally convex and quasi-complete. Let $\langle \cdot, \cdot \rangle$ be a continuous bilinear form on $E \times F$. Let X be a non-empty compact convex set in E, and $f : X \to F$ a continuous mapping. If M is a monotone set contained in $X \times F$, then there exists a point $\hat{x} \in X$ such that the set obtained by adjoining $(\hat{x}, f(\hat{x}))$ to M remains monotone.*

Proof. Denote by Y the closed convex hull of $f(X)$. Since $f(X)$ is compact and F is quasi-complete, Y is compact by a theorem of KREIN (see [12, p. 328]).

Applying Theorem 11, we need only to show that for every $y \in Y$, there is an $x \in X$ such that $\langle u - x, v - y \rangle$ is non-negative for all $(u, v) \in M$. By compactness of X, it suffices to prove that for any finite number of points $(u_i, v_i) \in M$ $(1 \leqq i \leqq n)$ and for any given $y \in Y$, there is an $x \in X$ such that

$$\langle u_i - x, v_i - y \rangle \geqq 0 \quad \text{for} \quad 1 \leqq i \leqq n\,. \tag{20}$$

Let $(u_i, v_i) \in M$ $(1 \leqq i \leqq n)$ and $y \in Y$ be given. Denote by A the set of all ordered n-tuples $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ such that $\alpha_i \geqq 0$ and $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Define functions $g_j (1 \leqq j \leqq n)$ on A by

$$g_j(\alpha) = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i - u_j, v_j - y \right\rangle$$

for $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in A$. For any n non-negative numbers $\beta_j \geqq 0$ with $\sum_{j=1}^{n} \beta_j = 1$, we have

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} \beta_j \left\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i - u_j, v_j - y \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_j \beta_i \langle u_i - u_j, v_j \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \beta_j \beta_i \langle u_i - u_j, v_j - v_i \rangle \leqq 0\,, \end{aligned}$$

since (u_i, v_i) are in the monotone set M. In other words, for any n non-negative numbers $\beta_j \geqq 0$ with $\sum_{j=1}^{n} \beta_j = 1$, the relation $\sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j(\alpha) \leqq 0$ is satisfied by $\alpha = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. By Theorem 6, it follows that the system of inequalities

$$g_j(\alpha) \leqq 0 \qquad (1 \leqq j \leqq n) \tag{21}$$

has a solution $\alpha \in A$. For every solution $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in A$ of (21), the corresponding point $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ will satisfy (20). Since $(u_i, v_i) \in M \subset X \times F$ and X is convex, this point x is in X. This completes the proof.

The difference between DEBRUNNER-FLOR's theorem [3] and Theorem 12 lies in the hypothesis concerning the topological vector spaces E, F. In Theorem 12, E is not required to be locally convex, while F is locally convex and quasi-complete. In Debrunner-Flor's theorem, E is required to be locally convex, but F is an arbitrary real topological vector space. Observe also that in Theorem 12, the quasi-completeness of F is used only to ensure the compactness of the closed convex hull of $f(X)$.

11. Invariant vector subspaces. We discuss now an existence theorem for invariant vector subspaces of certain linear transformations. It is concerned with invariant vector subspaces of a preassigned dimension and contained in a given set. The result was proved in [7], but here we give another proof which is more direct and makes essential use of Theorem 1'.

Theorem 13. *Let E be a real separated locally convex topological vector space. Let n be a positive integer, and X a set in E having the following properties:*

(a) *There exists a closed vector subspace H in E of codimension n such that $X \cap (x + H)$ is compact and convex for every $x \in E$.*

(b) *X contains an n-dimensional vector subspace of E.*

Let ϕ be a continuous linear transformation from E into itself and satisfying the following two conditions:

(c) $\phi(X) \subset X$.

(d) *No 1-dimensional vector subspace of E is contained in $X \cap \operatorname{Ker}\phi$.*

Then there exists an n-dimensional vector subspace L of E such that $L \subset X$ and $\phi(L) = L$.

Proof. Denote by F the quotient vector space E/H. Consider the topological vector space E^F of all functions (continuity not required) from F into E, with the topology of pointwise convergence. This topological vector space E^F may be identified with the product space $\prod_{y \in F} E_y$, where each E_y is a copy of E. Since E is separated locally convex, E^F is also separated and locally convex.

Let $\varrho : E \to F$ be the canonical mapping from E onto the quotient space $F = E/H$. Hypothesis (a) means that $\dim F = n$ and $X \cap \varrho^{-1}(y)$ is compact convex for every $y \in F$.

Let Γ denote the set of all $\xi \in E^F$ such that ξ is linear, $\xi(F) \subset X$ and $\varrho \circ \xi$ is the identity mapping on F. In other words, Γ is the set of all linear $\xi \in E^F$ such that $\xi(y) \in X \cap \varrho^{-1}(y)$ for all $y \in F$. For every $\xi \in \Gamma$, $\xi(F)$ is an n-dimen-

sional vector subspace of E contained in X. Conversely, for any n-dimensional vector subspace L contained in X, hypothesis (a) implies $L \cap \mathrm{Ker}\,\varrho = L \cap H = \{o\}$, so there is a unique $\xi \in \Gamma$ such that $\xi(F) = L$. Hence $\{\xi(F) : \xi \in \Gamma\}$ is the set of all n-dimensional vector subspaces of E contained in X, and this set is in one-to-one correspondence with Γ. In particular, hypothesis (b) means that Γ is non-empty.

Let $\xi_1 \in \Gamma$, $\xi_2 \in \Gamma$ and let $\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$, where $c_1 \geqq 0$, $c_2 \geqq 0$ and $c_1 + c_2 = 1$. For each $y \in F$, both $\xi_1(y)$ and $\xi_2(y)$ are in the convex set $X \cap \varrho^{-1}(y)$, so $\xi(y) \in X \cap \varrho^{-1}(y)$. As ξ is clearly linear, we have $\xi \in \Gamma$. Thus Γ is a convex set in E^F.

Consider now a basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ of the n-dimensional vector space F and an arbitrary symmetric convex neighborhood V of o in E. As $X \cap \varrho^{-1}(e_i)$ is compact, there is a $r > 0$ such that $r(X \cap \varrho^{-1}(e_i)) \subset V$ for $1 \leqq i \leqq n$. Then $\xi(e_i) \in X \cap \varrho^{-1}(e_i) \subset \frac{1}{r} V$ for all $\xi \in \Gamma$ and for $1 \leqq i \leqq n$. Consequently $\xi(y) = \sum_{i=1}^{n} c_i \xi(e_i) \in V$ for all $\xi \in \Gamma$ and for all $y = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$ satisfying $\sum_{i=1}^{n} |c_i| \leqq r$. This shows that Γ is an equicontinuous set of linear transformations from F into E.

For each $y \in F$, $\{\xi(y) : \xi \in \Gamma\}$ is contained in the compact set $X \cap \varrho^{-1}(y)$. Since Γ is equicontinuous, it follows that Γ is relatively compact in E^F. We claim that Γ is compact. Let $\xi_0 \in E^F$ be in the closure of Γ. Then ξ_0 is necessarily linear. As $\xi(y)$ is in the compact set $X \cap \varrho^{-1}(y)$ for every $\xi \in \Gamma$ and $y \in F$, we must have $\xi_0(y) \in X \cap \varrho^{-1}(y)$ for all $y \in F$, i.e. $\xi_0 \in \Gamma$. Hence Γ is closed in E^F and therefore is compact.

Hypotheses (c), (d) imply that for every n-dimensional vector subspace L of E contained in X, $\phi(L)$ is again an n-dimensional vector subspace contained in X. Thus for any $\xi \in \Gamma$ and $L = \xi(F)$, there is an $\eta \in \Gamma$ such that $\eta(F) = \phi(L) = (\phi \circ \xi)(F)$. Then, for each $y \in F$, there is a $z \in F$ such that $(\phi \circ \xi)(y) = \eta(z)$. Since $\varrho \circ \eta$ is the identity mapping on F, we have $(\phi \circ \xi)(y) = \eta(z) = (\eta \circ \varrho \circ \eta)(z) = (\eta \circ \varrho \circ \phi \circ \xi)(y)$. Hence, for each $\xi \in \Gamma$, there is an $\eta \in \Gamma$ such that

$$\phi \circ \xi = \eta \circ \varrho \circ \phi \circ \xi \,. \tag{22}$$

In particular, if for a $\xi \in \Gamma$ and $L = \xi(F)$, we have $\phi(L) = L$, then

$$\phi \circ \xi = \xi \circ \varrho \circ \phi \circ \xi \,. \tag{23}$$

Conversely, if $\xi \in \Gamma$ satisfies (23), then for $L = \xi(F)$ we have $\phi(L) = (\phi \circ \xi)(F) = (\xi \circ \varrho \circ \phi \circ \xi)(F) \subset \xi(F) = L$ and therefore $\phi(L) = L$, since $\dim \phi(L) = \dim L = n$. Hence the conclusion of the theorem amounts to say that there exists a $\xi \in \Gamma$ satisfying (23).

We shall need the fact that the function $(\xi, \eta) \to \phi \circ \xi - \eta \circ \varrho \circ \phi \circ \xi$ from $\Gamma \times \Gamma$ into E^F is continuous on $\Gamma \times \Gamma$. This can be verified, but we omit the detail.

Next, consider any open convex neighborhood U of o in E^F. Let

$$\Delta_1 = \{(\xi, \eta) \in \Gamma \times \Gamma : \xi - \eta \in U\},$$

$$\Delta_2 = \{(\xi, \eta) \in \Gamma \times \Gamma : \phi \circ \xi - \eta \circ \varrho \circ \phi \circ \xi \in U\}.$$

For each fixed $\xi \in \Gamma$, the section $\Delta_1(\xi) = \{\eta \in \Gamma : (\xi, \eta) \in \Delta_1\} = (\xi - U) \cap \Gamma$ is open in Γ. We have seen above that for every $\xi \in \Gamma$ there is an $\eta \in \Gamma$ satisfying (22). Thus, for each $\xi \in \Gamma$, $\Delta_2(\xi) = \{\eta \in \Gamma : (\xi, \eta) \in \Delta_2\}$ is non-empty. $\Delta_2(\xi)$ is clearly convex. For every fixed $\eta \in \Gamma$, $\phi \circ \xi - \eta \circ \varrho \circ \phi \circ \xi$ is a continuous function of ξ on Γ, so $\Delta_2(\eta) = \{\xi \in \Gamma : (\xi, \eta) \in \Delta_2\}$ is open in Γ. Also, $\Delta_1(\eta) = \{\xi \in \Gamma : (\xi, \eta) \in \Delta_1\} = (\eta + U) \cap \Gamma$ is convex, non-empty for every $\eta \in \Gamma$. By Theorem 1', it follows that $\Delta_1 \cap \Delta_2 \neq \emptyset$.

For an open convex neighborhood U of o in E^F, let Δ_U be the set of all $(\xi, \eta) \in \Gamma \times \Gamma$ satisfying both relations $\xi - \eta \in \overline{U}$ and $\phi \circ \xi - \eta \circ \varrho \circ \phi \circ \xi \in \overline{U}$, where $\overline{U}$ denotes the closure of U in E^F. According to what we have just proved, Δ_U is non-empty. Then

$$\bigcap_{i=1}^{n} \Delta_{U_i} \supset \Delta_{U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n} \neq \emptyset$$

for any finite number of open convex neighborhoods $U_1, U_2, \ldots, U_n$ of o in E^F. By continuity of the function $(\xi, \eta) \to \phi \circ \xi - \eta \circ \varrho \circ \phi \circ \xi$ on $\Gamma \times \Gamma$, each Δ_U is a closed subset of the compact set $\Gamma \times \Gamma$. It follows that there exists an $(\hat{\xi}, \hat{\eta})$ such that $(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \in \Delta_U$ for every open convex neighborhood U of o in E^F. Then $\hat{\xi} = \hat{\eta}$ and $\phi \circ \hat{\xi} = \hat{\xi} \circ \varrho \circ \phi \circ \hat{\xi}$. This proves the existence of an $\xi \in \Gamma$ satisfying (23), and thereby completes the proof.

12. An analog of Helly's theorem. In this last section, an analog of Helly's intersection theorem for convex sets will be presented. This result is not an application of Theorem 1 or 3. It is included here, because its proof borrows ideas from the above proof of Theorem 13.

Theorem 14. *Let H be an m-dimensional vector subspace of a $(m+n)$-dimensional Euclidean space R^{m+n}, where $m > 0$, $n > 0$. Let $\{X_\nu\}_{\nu \in I}$ be a family of sets (not necessarily convex) in R^{m+n} satisfying the following conditions:*

(a) *For each $\nu \in I$ and every point $x \in R^{m+n}$, $X_\nu \cap (x + H)$ is compact convex.*

(b) *The intersection of any $mn + 1$ of the sets X_ν contains an n-dimensional vector subspace of R^{m+n}.*

Then $\bigcap_{\nu \in I} X_\nu$ contains an n-dimensional vector subspace of R^{m+n}.

Proof. Let $E = R^{m+n}$ and let F denote the quotient vector space E/H. Denote by $\mathscr{L}(F, E)$ the vector space of all linear transformations from F into E (with the unique natural topology for a finite dimensional vector space). Let $\varrho : E \to F$ be the canonical mapping from E onto the quotient space $F = E/H$. Denote by $\mathscr{M}$ the set of all those $\xi \in \mathscr{L}(F, E)$ such that $\varrho \circ \xi$ is the identity mapping on F. As $\dim F = n$, $\dim E = m + n$, it is easy to see (by considering matrix representations of the linear transformations in $\mathscr{M}$) that there is a vector subspace $\mathscr{N}$ of $\mathscr{L}(F, E)$ such that $\dim \mathscr{N} = mn$ and $\mathscr{M} = \xi + \mathscr{N}$ for every $\xi \in \mathscr{M}$.

For each $\nu \in I$, let Γ_ν be the set of all $\xi \in \mathcal{M}$ such that $\xi(F) \subset X_\nu$. As we have seen in the proof of Theorem 13, Γ_ν is a compact convex set in $\mathcal{M}$, and Γ_ν is in one-to-one correspondence with the set of n-dimensional vector subspaces of E contained in X_ν. By hypothesis (b), the intersection of any $mn+1$ of these compact convex sets Γ_ν is non-empty. Since $\mathcal{M}$ is a translate of the mn-dimensional vector subspace $\mathcal{N}$, Helly's theorem gives us $\bigcap_{\nu \in I} \Gamma_\nu \neq \emptyset$, which means that $\bigcap_{\nu \in I} X_\nu$ contains an n-dimensional vector subspace of E.

References

[1] Birkhoff, G.: Three observations on linear algebra (Spanish). Revista Univ. Nac. Tucumán. A **5**, 147—151 (1946).

[2] Browder, F. E.: The solvability of non-linear functional equations. Duke Math. J. **30**, 557—566 (1963).

[3] Debrunner, H., u. P. Flor: Ein Erweiterungssatz für monotone Mengen. Arch. Math. **15**, 445—447 (1964).

[4] Egerváry, E.: Combinatorial properties of matrices (Hungarian). Matem. Fiz. Lapok **38**, 16—28 (1931).

[5] Fan, K.: Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **38**, 121—126 (1952).

[6] — Existence theorems and extreme solutions for inequalities concerning convex functions or linear transformations. Math. Z. **68**, 205—216 (1957).

[7] — Invariant cross-sections and invariant linear subspaces. Israel J. Math. **2**, 19—26 (1964).

[8] — Sur un théorème minimax. C. R. Acad. Sci. (Paris) **259**, 3925—3928 (1964).

[9] Grünbaum, B.: A generalization of theorems by Kirszbraun and Minty. Proc. Am. Math. Soc. **13**, 812—814 (1962).

[10] Hardy, G. H., J. E. Littlewood, and G. Pólya: Inequalities. Cambridge: University Press 1934.

[11] Iohvidov, I. S.: On a lemma of Ky Fan generalizing the fixed-point principle of A. N. Tihonov (Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR **159**, 501—504 (1964). English transl.: Soviet Math. **5**, 1523—1526 (1964).

[12] Köthe, G.: Topologische lineare Räume I. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.

[13] Minty, G. J.: On the simultaneous solution of a certain system of linear inequalities. Proc. Am. Math. Soc. **13**, 11—12 (1962).

[14] Nash, J.: Non-cooperative games. Ann. Math. **54**, 286—295 (1951).

[15] von Neumann, J.: Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes. Ergebn. eines Math. Kolloqu. **8**, 73—83 (1937).

[16] Sion, M.: On general minimax theorems. Pacific J. Math. **8**, 171—176 (1958).

(Received July 6, 1965)

Berens, H. und P. L. Butzer
Math. Annalen 163, 204—211 (1966)

Über die Stetigkeit von Halbgruppen von Operatoren in intermediären Räumen

Gottfried Köthe zum 60. Geburtstag gewidmet

Von

Hubert Berens und P. L. Butzer in Aachen

1. Im Jahre 1929 hat A. Plessner [16] das folgende Problem untersucht, welches als Ausgangspunkt unserer Überlegungen dienen möge: Wir betrachten die Menge der reell- oder komplexwertigen 2π-periodischen Funktionen $f(x)$ auf der reellen Zahlengeraden von beschränkter Variation auf $[0, 2\pi]$. Sie bilden einen Banachraum $BV_{2\pi}$ mit der totalen Variation $V(f; [0, 2\pi])$ von f als Norm. (Die totale Variation definiert in Wirklichkeit nur eine Halbnorm auf $BV_{2\pi}$, jedoch ist diese Unterscheidung für das Folgende nicht von Bedeutung.) Bekanntlich bildet die Familie der Translationen $\{T_t; -\infty < t < \infty\}$ — $T_t f$ ist definiert durch $[T_t f](x) = f(x + t)$ — eine einparametrige Gruppe von Isometrien auf $BV_{2\pi}$, welche jedoch nicht stetig ist in der starken Operatortopologie. A. Plessner bewies dagegen in seiner oben zitierten Arbeit, daß die Abbildung $t \to T(t)f$ genau dann stetig in der Norm ist, wenn f absolut stetig ist. Dieses Ergebnis wurde zehn Jahre später von S. Bochner [4] für Funktionen auf beliebigen kompakten Gruppen verallgemeinert.

Neuerdings hat neben anderen H. Mirkil [12] die Arbeiten von A. Plessner und S. Bochner aufgegriffen und Fragen dieser Art für sogenannte Translationsräume F, die in $L^1_{2\pi}$ enthalten sind, behandelt. H. Mirkil untersuchte insbesondere das Verhalten der Translationen in den Lipschitzräumen von F.

Ziel dieser Arbeit ist es, ein dem klassischen Problem von A. Plessner entsprechendes in der Theorie der Halbgruppen von Operatoren auf Banachräumen zu definieren und die Stetigkeit der Halbgruppe in bestimmten invarianten Teilräumen, den intermediären Räumen, zu untersuchen.

2. Im folgenden sei X ein reeller oder komplexer Banachraum mit den Elementen $\{f, g, \ldots\}$ unter der Norm $\|\cdot\|$.

Bezeichnen wir mit $E(X)$ die Banachalgebra der Endomorphismen von X, dann heißt eine einparametrige Schar von Operatoren $\{T(t); 0 \leqq t < \infty\}$ in $E(X)$ eine *gleichmäßig beschränkte Halbgruppe der Klasse* (C_0), wenn sie den folgenden Bedingungen genügt:

(i) $T(t) \in E(X)$ *für jedes* $t \in [0, \infty)$ *und* $T(0) = I$ *(Identität)*;

(ii) $T(t + s) = T(t)\,T(s)$ *für alle* $t, s \in [0, \infty)$;

(iii) $\|T(t)f\| \leqq M\|f\|$ *für alle* $f \in X$, $0 \leqq t < \infty$;

(iv) $\lim_{t \to 0+} \|T(t)f - f\| = 0$ *für alle* $f \in X$ *((C_0)-Eigenschaft).*

Aus diesen Bedingungen folgert man leicht, daß die Abbildung $t \to T(t)f$ von $[0, \infty)$ in X stetig ist in der Normtopologie des Raumes für jedes $f \in X$. Man nennt daher auch $\{T(t);\ 0 \leqq t < \infty\}$ eine gleichmäßig beschränkte, stark stetige Halbgruppe in $E(X)$.

Der erzeugende Operator A der Halbgruppe ist definiert durch den starken Limes für $t \to 0+$ von

$$A_t f \equiv t^{-1}[T(t) - I]f\,, \qquad (t > 0, f \in X)\,,$$

wenn immer er existiert. Unter den gemachten Voraussetzungen ist A ein abgeschlossener (im allgemeinen unbeschränkter) linearer Operator mit Definitionsbereich $D(A)$ dicht in X. Folglich wird $D(A)$ selbst ein Banachraum unter der Graphennorm

$$\|f\|_{D(A)} = \|f\| + \|Af\|\,.$$

Allgemein sagen wir, ein Element $f \in X$ gehört zum Definitionsbereich von $A^r (r > 0$, ganzzahlig), wenn $f \in D(A)$, $Af \in D(A), \ldots, A^{r-1}f \in D(A)$. $D(A^r)$ wird ein Banachraum unter der Norm

$$\|f\|_{D(A^r)} = \|f\| + \|Af\| + \cdots + \|A^r f\|\,.$$

Weiter folgt aus $f \in D(A^r)$ auch $T(t)f \in D(A^r)$ für jedes $t \geqq 0$,

$$\frac{d^r}{dt^r}\, T(t)f = A^r T(t)f = T(t)A^r f$$

und damit die verallgemeinerte Taylorformel

$$T(t)f - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{t^k}{k!}\, A^k f = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{r-1} T(\tau) A^r f\, d\tau\,.$$

Hieraus beweist man leicht, daß $\|f\| + \|A^r f\|$ eine äquivalente Norm für $D(A^r)$ ist.

Für die Beweise dieser Aussagen siehe z. B. E. Hille und R. S. Phillips [9, Ch. X], K. Yosida [18, Ch. IX].

Die Theorie der intermediären Räume in Zusammenhang mit der Theorie der Halbgruppen von Operatoren wurde wohl zuerst von J.-L. Lions [10] untersucht.

Wir bezeichnen mit $X_p^{\alpha,1}$, $0 < \alpha < 1$ und $1 \leqq p \leqq \infty$, die Menge aller $f \in X$, für die das Integral

$$\int_0^\infty u^{-\alpha p} \|[T(u) - I]f\|^p \frac{du}{u}$$

existiert. (Der Integralbegriff ist im Sinne von Bochner zu verstehen.) Die Modifikation für $p = \infty$ ist

$$\sup_{0 < u < \infty} \{u^{-\alpha} \|[T(u) - I]f\|\}\,.$$

$X_p^{\alpha,1}$ wird ein Banachraum unter der Norm

$$\|f\|_{\alpha,1;p} = \|f\| + \left\{ \int_0^\infty u^{-\alpha p} \|[T(u) - I]f\|^p \frac{du}{u} \right\}^{1/p}\,.$$

Im Falle $p = \infty$ bildet $X_\infty^{1,1}$, definiert durch die Menge aller $f \in X$ mit

$$\sup_{0<u<\infty} \{u^{-1}\|[T(u) - I]f\|\} < \infty ,$$

einen weiteren Banachraum unter der Norm

$$\|f\|_{1,1;\infty} = \|f\| + \sup_{0<u<\infty} \{u^{-1}\|[T(u) - I]f\|\} .$$

Die so gebildeten Räume $X_p^{\alpha,1}$ heißen *intermediäre Räume* von $D(A)$ und X, denn sie bilden nach Definition Banachräume mit der Eigenschaft

$$D(A) \subset X_p^{\alpha,1} \subset X .$$

J.-L. LIONS [10] hat die Räume $X_p^{\alpha,1}$, $0 < \alpha < 1$ und $1 \leqq p \leqq \infty$, im Zusammenhang mit Spuren- und Interpolationssätzen definiert, während der Raum $X_\infty^{1,1}$ wohl zuerst von einem der Autoren [5] in Verbindung mit Saturationsproblemen aus der Approximationstheorie behandelt wurde. In der letztgenannten Arbeit wurde unter anderem gezeigt, daß $D(A)$ und $X_\infty^{1,1}$ für reflexive Banachräume X identisch sind. Im allgemeinen jedoch ist $X_\infty^{1,1}$ ein echter Zwischenraum von $D(A)$ und X.

Allgemein bilden die Räume $X_p^{\alpha,r}$ ($r > 0$, ganzzahlig), definiert durch die Elemente $f \in X$ mit

$$\int_0^\infty u^{-\alpha p}\|[T(u) - I]^r f\|^p \frac{du}{u} < \infty \quad (0 < \alpha < r;\ 1 \leqq p < \infty)$$

und

$$\sup_{0<u<\infty} \{u^{-\alpha}\|[T(u) - I]^r f\|\} < \infty \quad (0 < \alpha \leqq r;\ p = \infty) ,$$

intermediäre Räume von $D(A^r)$ und X unter der Norm

$$\|f\|_{\alpha,r;p} = \|f\| + \left\{\int_0^\infty u^{-\alpha p}\|[T(u) - I]^r f\|^p \frac{du}{u}\right\}^{1/p} .$$

Die Räume $X_p^{\alpha,r}$ ($0 < \alpha < r$, $1 \leqq p \leqq \infty$) wurden unter allgemeinen Gesichtspunkten in einer umfassenden Arbeit über Interpolationsräume von J.-L. LIONS und J. PEETRE [11, Ch. VII, § 2] behandelt. Als eine weitere umfassende Arbeit zu diesem Thema sei die von A. P. CALDERÒN [8] erwähnt, während in [2] einer der Autoren Approximationsfragen für $X_\infty^{r,r}$ untersucht hat. Für weitere Charakterisierungen der Räume $X_p^{\alpha,r}$ seien noch die Arbeiten von J. PEETRE [14, 15] und der Autoren [1, 3] erwähnt.

Die Räume $X_p^{\alpha,r}$ sind invariant unter der Halbgruppe, d. h. $T(t)\ [X_p^{\alpha,r}] \subset X_p^{\alpha,r}$ für jedes $t \geqq 0$. Weiter zeigt man leicht

$$\|T(t)f\|_{\alpha,r;p} \leqq M\|f\|_{\alpha,r;p} \quad (t \geqq 0;\ f \in X_p^{\alpha,r}) .$$

Es soll nun die Menge von $X_p^{\alpha,r}$ charakterisiert werden, für die die Abbildung $t \to T(t)f$ von $[0, \infty)$ in $X_p^{\alpha,r}$ stark stetig ist. Anders gesagt: Die Operatoren $\{T(t);\ 0 \leqq t < \infty\}$ bilden nach oben eine gleichmäßig beschränkte Halbgruppe in $E(X_p^{\alpha,r})$, zu bestimmen ist der Unterraum von $X_p^{\alpha,r}$, für den die Halbgruppe die (C_0)-Eigenschaft besitzt.

3. Wir bezeichnen mit ${}^0X_p^{\alpha,r}(0 < \alpha < r$ für $1 \leqq p < \infty$ und $0 < \alpha \leqq r$ für $p = \infty$; $r = 1, 2, \ldots)$ die Menge aller $f \in X_p^{\alpha,r}$, für die die (C_0)-Eigenschaft:

$$\lim_{t \to 0+} \|T(t)f - f\|_{\alpha,r;p} = 0$$

erfüllt ist.

Satz 1. *Die Menge ${}^0X_p^{\alpha,r}$ aus X bildet eine abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit in $X_p^{\alpha,r}$, und sie wird gegeben durch die abgeschlossene Hülle von $D(A^r)$ in $X_p^{\alpha,r}$.*

Beweis. Die Linearität von ${}^0X_p^{\alpha,r}$ ist klar. Sei nun $\{f_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ eine Folge in ${}^0X_p^{\alpha,r}$, die gegen ein Element g der abgeschlossenen Hülle von ${}^0X_p^{\alpha,r}$ konvergiert. Dann existieren zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein n und ein $\delta > 0$, so daß $\|f_n - g\|_{\alpha,r;p} < \varepsilon/2(M+1)$ und $\|T(t)f_n - f_n\|_{\alpha,r;p} < \varepsilon/2$ für $0 < t < \delta$. Aus der Dreiecksungleichung folgt damit für das Grenzelement g

$$\|T(t)g - g\|_{\alpha,r;p} \leqq \|T(t)g - T(t)f_n\|_{\alpha,r;p} + \|T(t)f_n - f_n\|_{\alpha,r;p} + \|f_n - g\|_{\alpha,r;p} \leqq$$
$$\leqq (M+1)\|f_n - g\|_{\alpha,r;p} + \|T(t)f_n - f_n\|_{\alpha,r;p} < \varepsilon$$

für $0 < t < \delta$, d. h. $g \in {}^0X_p^{\alpha,r}$, und folglich ist dieser Teilraum abgeschlossen.

Nach Konstruktion ist $D(A^r)$ in jedem $X_p^{\alpha,r}$ enthalten. Es soll nun gezeigt werden, daß $D(A^r)$ darüber hinaus in ${}^0X_p^{\alpha,r}$ enthalten ist, und zwar als dichte Teilmenge. Sei nun $f \in D(A^r)$, dann erhält man aus

$$[T(u) - I]^r f = \int_0^u \int_0^u \cdots \int_0^u T(\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_r) A^r f \, d\tau_1 \, d\tau_2 \ldots d\tau_r$$

für jedes $u > 0$ die Abschätzungen

$$\|[T(t) - I]f\|_{\alpha,r;p} \leqq \|[T(t) - I]f\| + \left\{\int_0^1 u^{-\alpha p} \|[T(u) - I]^r [T(t) - I]f\|^p \frac{du}{u}\right\}^{1/p} +$$
$$+ \left\{\int_1^\infty u^{-\alpha p} \|[T(u) - I]^r [T(t) - I]f\|^p \frac{du}{u}\right\}^{1/p} \leqq$$
$$\leqq \|[T(t) - I]f\| + \frac{M}{\{(r-\alpha)p\}^{1/p}} \|[T(t) - I]A^r f\| +$$
$$+ \frac{(M+1)^r}{\{\alpha p\}^{1/p}} \|[T(t) - I]f\| \qquad (0 < \alpha < r \quad \text{und} \quad 1 \leqq p < \infty)$$

und

$$\|[T(t) - I]f\|_{\alpha,r;\infty} \leqq \|[T(t) - I]f\| + M\|[T(t) - I]A^r f\| + (M+1)^r \|[T(t) - I]f\|$$
$$(0 < \alpha \leqq r \quad \text{und} \quad p = \infty),$$

woraus der erste Teil der Behauptung folgt. Jetzt sei f ein beliebiges Element aus ${}^0X_p^{\alpha,r}$. Wegen der starken Stetigkeit der Funktion $T(t)f$ von $[0, \infty)$ in $X_p^{\alpha,r}$ existiert das Integral

$$(1/\delta)^r \int_0^\delta \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta T(\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_r) f \, d\tau_1 \, d\tau_2 \ldots d\tau_r \ (\delta > 0)$$

im Bochnerschen Sinne und

$$\left\| \frac{1}{\delta^r} \int_0^\delta \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta T(\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_r) f d\tau_1 d\tau_2 \ldots d\tau_r - f \right\|_{\alpha,r;p} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\delta^r} \int_0^\delta \int_0^\delta \cdots \int_0^\delta \| T(\tau_1 + \tau_2 + \cdots + \tau_r) f - f \|_{\alpha,r;p} \, d\tau_1 \, d\tau_2 \ldots d\tau_r < \varepsilon$$

für δ genügend klein. Nun bildet aber der Wert des Integrals ein Element in $D(A^r)$, womit der Satz bewiesen ist.

Folgerung. *Die Räume $D(A^r)$ und ${}^0X^{r,r}_\infty$ sind gleich.*

Beweis. Im voranstehenden Satz wurde gezeigt, daß $D(A^r)$ in ${}^0X^{r,r}_\infty$ als dichte Teilmenge enthalten ist. Andererseits bildet $D(A^r)$ selbst einen Banachraum unter der Norm $\|f\| + \|A^r f\|$. Man verifiziert nun leicht für ein $f \in D(A^r)$ die Ungleichung

$$\|f\| + \|A^r f\| \leqq \|f\|_{r,r;\infty} \leqq M\{\|f\| + \|A^r f\|\},$$

welche besagt, daß die Norm von $X^{r,r}_\infty$ eine weitere äquivalente Norm für $D(A^r)$ ist, d. h. aber $D(A^r)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $X^{r,r}_\infty$ und somit nach oben gleich ${}^0X^{r,r}_\infty$.

Betrachten wir zunächst die intermediären Räume $X^{\alpha,r}_p$ ($0 < \alpha < r$ und $1 \leqq p \leqq \infty$; $r = 1, 2, \ldots$) weiter. Für diese Räume haben J.-L. LIONS und J. PEETRE in der schon zitierten Arbeit [11, Ch. VII, § 2] die folgenden Iterationsaussagen bewiesen: Setzen wir $\alpha = k + \beta$, k ganzzahlig und $0 < \beta \leqq 1$, dann gilt für ein $f \in X^{\alpha,r}_p$, f ist einmal in $D(A^k)$ enthalten und weiter ist $A^k f \in X^{\beta,1}_p$ ($0 < \beta < 1$) bzw. $A^k f \in X^{1,2}_p$ ($\beta = 1$). Diese Aussagen wurden als Folgerungen aus allgemeinen Iterationssätzen für Interpolationsräume gewonnen. Zusammenfassend erhalten wir hiermit und mit Satz 1

Satz 2. (a) *Der Raum $X^{\alpha,r}_p$ ($0 < \alpha < r$ und $1 \leqq p \leqq \infty$) ist in $D(A^k)$ enthalten, wobei k durch $\alpha = k + \beta$ mit $0 < \beta \leqq 1$ festgelegt ist, weiter sind für ihn die folgenden Normen äquivalent:*

(i) $\|f\|_{\alpha,r;p}$;

(ii)
$$\begin{cases} \|f\|_{D(A^k)} + \left\{ \int_0^\infty u^{-\beta p} \| [T(u) - I] A^k f \|^p \frac{du}{u} \right\}^{1/p} & (0 < \beta < 1) \\ \|f\|_{D(A^k)} + \left\{ \int_0^\infty u^{-p} \| [T(u) - I]^2 A^k f \|^p \frac{du}{u} \right\}^{1/p} & (\beta = 1). \end{cases}$$

(b) *Die Menge aller $f \in X^{\alpha,r}_p$, für die die Abbildung $t \to T(t)f$ stark stetig ist, also der Raum ${}^0X^{\alpha,r}_p$, wird gegeben durch die abgeschlossene Hülle von $D(A^{k+1})$ für $0 < \beta < 1$ und von $D(A^{k+2})$ für $\beta = 1$.*

Bemerkung. Für $0 < \alpha < 1$ und $p = \infty$ hat H. MIRKIL [12] gezeigt, daß die Räume ${}^0X^{\alpha,1}_\infty$ weiter charakterisiert werden durch die Menge aller $f \in X$, für die $\|[T(u) - I]f\| = o(u^\alpha)$ ($u \to 0+$) ist. (H. MIRKIL hat dieses Ergebnis nur für die Gruppe der Translationen auf den sogenannten Translationsräumen in $L^1_{2\pi}$ bewiesen, doch ist der Beweis unmittelbar übertragbar.) Mit dieser

Aussage und Satz 2 wird ein $f \in {}^0X_\infty^{\alpha,r}$ außerdem durch die Beziehung

$$\|[T(u)-I]A^k f\| = o(u^\beta)\ (\alpha = k+\beta;\ u \to 0+) \quad \text{für} \quad 0 < \beta < 1$$

bestimmt. Im Falle $\beta = 1$ ist bisher nur bekannt, daß $f \in {}^0X_\infty^{k+1,r}$ die Abschätzung $\|[T(u)-I]^2 A^k f\| = o(u)\ (u \to 0+)$ impliziert. Weiter haben J.-L. Lions und J. Peetre [11, Ch. III] für die Fälle $0 < \alpha < r$ und $1 \leqq p < \infty$ gezeigt, daß $D(A^r)$ dicht in $X_p^{\alpha,r}$ liegt; damit gilt hier ${}^0X_p^{\alpha,r} = X_p^{\alpha,r}$.

Nach diesen Ausführungen werden wir für die Saturationsräume $X_\infty^{r,r}$ $(r = 1, 2, \ldots)$ einen entsprechenden Satz wie Satz 2 beweisen.

Satz 3. (a) *Der Raum $X_\infty^{r,r}$ ist in $D(A^{r-1})$ enthalten, für ihn sind die folgenden zwei Normen äquivalent:*

(i) $\|f\|_{r,r;\infty}$;

(ii) $\|f\|_{D(A^{r-1})} + \sup\limits_{0<u<\infty} \{u^{-1}\|[T(u)-I]A^{r-1}f\|\}$.

(b) *Ein Element $f \in X$ gehört genau dann zum $D(A^r)$, wenn die Abbildung $t \to T(t)f$ von $[0, \infty)$ in $X_\infty^{r,r}$ stark stetig ist.*

Bemerkung. Wie schon oben erwähnt, wurde in [5] bewiesen, daß für reflexives X die Räume $X_\infty^{1,1}$ und $D(A)$ gleich sind. Hiermit und mit Teil (a) dieses Satzes folgt nun allgemein die Gleichheit von $D(A^r)$ und $X_\infty^{r,r}$ für alle $r = 1, 2, \ldots$, falls der Ausgangsraum X reflexiv ist.

Beweis. Teil (b) wurde bereits in der Folgerung von Satz 1 bewiesen. Nun zu Teil (a). Sei f ein Element aus $X_\infty^{r,r}$. Aus der Identität

$$\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\cdots\int_0^{t_r} T(\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_r)\,[T(u)-I]^r f\,d\tau_1\,d\tau_2\ldots d\tau_r$$

$$= \int_0^{u}\int_0^{u}\cdots\int_0^{u} T(\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_r)\,[T(t_1)-I]\,[T(t_2)-I]\ldots[T(t_r)-I]f\,d\tau_1 d\tau_2\ldots d\tau_r$$

für beliebige $t_i, u > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ und alle $f \in X$ (für einen Beweis siehe [2]) erhalten wir mit $t_1 = t$ und $t_2 = t_3 = \cdots = t_r = s$ wegen der gleichmäßigen Beschränktheit und der starken Stetigkeit der Halbgruppe

$$(*) \quad \|[T(t)-I]\,[T(s)-I]^{r-1}f\|$$

$$= \lim_{u\to 0+}\left\|\frac{1}{u^r}\int_0^{u}\int_0^{u}\cdots\int_0^{u} T(\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_r)\,[T(t)-I]\times\right.$$

$$\left.\times\,[T(s)-I]^{r-1}f\,d\tau_1\,d\tau_2\ldots d\tau_r\right\|$$

$$= \lim_{u\to 0+}\left\|\int_0^{t}\int_0^{s}\cdots\int_0^{s} T(\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_r)\times\right.$$

$$\left.\times\,\{u^{-r}[T(u)-I]^r f\}\,d\tau_1\,d\tau_2\ldots d\tau_r\right\|$$

$$\leqq M \sup_{0<u<\infty}\{u^{-r}\|[T(u)-I]^r f\|\}\,t s^{r-1}.$$

für alle $t, s > 0$. Hieraus folgert man leicht, daß f in $X_\infty^{r-1,r-1}$ enthalten ist und weiter

$$\sup_{0<s<\infty}\{s^{-(r-1)}\|[T(s)-I]^{r-1}[T(t)-I]f\|\} \leqq M \sup_{0<u<\infty}\{u^{-r}\|[T(u)-I]^r f\|\}\,t.$$

Das heißt aber, $t \to T(t)f$ ist stetig in der $X_\infty^{r-1,r-1}$-Norm, und damit ist nach Teil (b) $f \in D(A^{r-1})$. Wir erhalten hiermit weiter aus der Abschätzung (*)

$$\begin{aligned}\|[T(t)-I]A^{r-1}f\| &= \lim_{s\to 0+}\left\|\frac{1}{s^{r-1}}\int_0^s\int_0^s\cdots\int_0^s T(\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_{r-1})\times\right.\\ &\quad\left.\times\,[T(t)-I]A^{r-1}f\,d\tau_1\,d\tau_2\ldots d\tau_{r-1}\right\|\\ &= \lim_{s\to 0+}\|s^{-(r-1)}[T(s)-I]^{r-1}[T(t)-I]f\| \leqq\\ &\leqq M\sup_{0<u<\infty}\{u^{-r}\|[T(u)-I]^r f\|\}t\end{aligned}$$

und folglich

$$\sup_{0<t<\infty}\{t^{-1}\|[T(t)-I]A^{r-1}f\|\} \leqq M\sup_{0<u<\infty}\{u^{-r}\|[T(u)-I]^r f\|\}\,.$$

X_∞^r ist also in dem intermediären Raum von $D(A^{r-1})$ und $D(A^r)$ enthalten, der gebildet wird durch die Menge aller $f \in D(A^{k-1})$ mit $A^{r-1}f \in X_\infty^{1,1}$. Die Umkehrung dieser Aussage ist nach den obigen Ausführungen unschwer zu zeigen, womit der Satz bewiesen ist.

Die Sätze ermöglichen neue und interessante Anwendungen in der Analysis. In der Theorie der reellen oder komplexen Funktionen bilden zum Beispiel für die Halbgruppe der Linkstranslationen auf den Räumen $C_{2\pi}$ und $L_{2\pi}^q$, $1 \leqq q < \infty$, die intermediären Räume die klassischen ($p = \infty$) sowie die verallgemeinerten ($1 \leqq p < \infty$) Lipschitzräume (siehe hierzu J.-L. LIONS und J. PEETRE [11], H. MIRKIL [12], die Autoren [1, 6], u. a.). Weiter sind Anwendungen in der Theorie der singulären Integrale im Zusammenhang mit Approximationsfragen möglich, wie z. B. für die singulären Integrale von Cauchy-Poisson und Gauß-Weierstraß auf den Räumen $L^q(E_n)$, $1 \leqq q < \infty$. Es ist schwerlich möglich, zu diesem Gebiet eine umfassende Literaturangabe zu machen. Deshalb sei auf einige neuere Arbeiten hingewiesen, an denen sich der Leser weiter orientieren kann: R. J. NESSEL [13], J. PEETRE [14], M. H. TAIBLESON [17], die Autoren [1, 7].

Literatur

[1] BERENS, H.: Approximationssätze für Halbgruppenoperatoren in intermediären Räumen. Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster **32**, 1—59 (1964).

[2] — Equivalent representations for the infinitesimal generator of higher orders in semi-group theory. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **68**, 497—512 (1965).

[3] —, and P. L. BUTZER: Approximation theorems for semi-group operators in intermediate spaces. Bull. Amer. Math. Soc. **70**, 689—692 (1964).

[4] BOCHNER, S.: Additive set functions on groups. Ann. Math. **40**, 769—799 (1939).

[5] BUTZER, P. L.: Über den Grad der Approximation des Identitätsoperators durch Halbgruppen von linearen Operatoren und Anwendungen auf die Theorie der singulären Integrale. Math. Ann. **133**, 410—425 (1957).

[6] — Beziehungen zwischen den Riemannschen, Taylorschen und gewöhnlichen Ableitungen reellwertiger Funktionen. Math. Ann. **144**, 275—298 (1961)

[7] — Integral transform methods in the theory of approximation. In P. L. BUTZER and J. KOREVAAR: On Approximation Theory, ISNM **5**, 12—23. Basel 1964.

[8] CALDERÒN, A. P.: Intermediate spaces and interpolation, the complex method. Studia Math. **24**, 113—190 (1964).
[9] HILLE, E., and R. S. PHILLIPS: Functional analysis and semi-groups. New York 1957.
[10] LIONS, J.-L.: Théorèmes de traces et d'interpolation (I), (II). Ann. Sci. Norm. Sup. Pisa **13**, 389—403 (1959); **14**, 317—331 (1960).
[11] —, et J. PEETRE: Sur une classe d'espaces d'interpolation. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **19**, 5—68 (1964).
[12] MIRKIL, H.: Continuous translation of Hölder and Lipschitz functions. Canad. J. Math. **12**, 674—685 (1960).
[13] NESSEL, R. J.: Das Saturationsproblem für mehrdimensionale singuläre Integrale und seine Lösung mit Hilfe der Fouriertransformation. Dissertation TH Aachen, 1965; Contributions to the theory of saturation for singular integrals in several variables (II), (III). Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **69** (1966) (im Druck).
[14] PEETRE, J.: Espaces d'interpolation, generalisations, applications. Rend. Sem. Mate. Fis. Milano **34**, 1—34 (1964).
[15] — On an equivalence theorem of Taibleson. Unveröffentlichtes Manuskript, 1964, 9 Seiten.
[16] PLESSNER, A.: Eine Kennzeichnung der totalstetigen Funktionen. J. reine angew. Math. **160**, 26—32 (1929).
[17] TAIBLESON, M. H.: On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-space. J. Math. Mech. **13**, 407—479 (1964).
[18] YOSIDA, K.: Functional analysis. Berlin 1965.

(Eingegangen am 6. November 1965)

CORDES H. O.
Math. Annalen 163, 212—229 (1966)

Über eine nicht algebraische Charakterisierung von $\mathfrak{Z}$-Fredholm-Operatoren

Herrn GOTTFRIED KÖTHE zum 60. Geburtstag am 25. 12. 1965 gewidmet

Von

H. O. CORDES in Berkeley/Calif.

Der Begriff des Fredholmschen Operators hat sich in den letzten Jahrzehnten als überaus nützlich für die Behandlung von Problemen in der Theorie linearer Differentialgleichungen oder auch Integralgleichungen erwiesen. Bekanntlich heißt ein linearer abgeschlossener Operator A eines Banachraumes $\mathfrak{X}$ in sich Fredholmsch, wenn er folgenden Bedingungen genügt.

(0.1) $\quad \operatorname{im} A$ ist abgeschlossen; $\dim \ker A < \infty$; $\operatorname{codim} \operatorname{im} A < \infty$.

Viele der bekannten Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für lineare elliptische Probleme lassen sich in der Form ausdrücken, daß der durch das Problem definierte lineare Operator Fredholmsch ist.

Andererseits weiß man, daß bei stetigen Koeffizienten und in kompakten Bereichen die Elliptizität des Problems notwendig und hinreichend für diese Fredholm-Eigenschaft ist. Daher bedarf es zur Betrachtung von nichtelliptischen oder singulär elliptischen Problemen eines allgemeineren Begriffes, um die dann möglichen Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen in ähnlicher Weise zu untersuchen. Der Autor hat als einen solchen Begriff a. a. O. den $\mathfrak{Z}$-Fredholmschen Operator definiert und in näheren Einzelheiten untersucht ([4], [5]).

Hierzu wurden zwei Ausgangspunkte verwandt. Erstens weisen wir hin auf ein Kriterium von F. V. ATKINSON [1] für beschränkte Fredholmsche Operatoren. Sei $\mathfrak{B}$ die Banachalgebra aller beschränkten Operatoren von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{C}$ das abgeschlossene zweiseitige Ideal aller kompakten (vollstetigen) Operatoren in $\mathfrak{B}$. Dann ist nach ATKINSON ein Operator $A \in \mathfrak{B}$ Fredholmsch dann und nur dann, wenn seine Restklasse A modulo $\mathfrak{C}$ eine zweiseitige Inverse in der Quotientenalgebra $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}$ besitzt.

Zweitens erinnern wir an das bekannte Kriterium von F. RELLICH [6] für kompakte Operatoren eines Hilbertraumes $\mathfrak{H}$: Ein Operator $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ ist kompakt dann und nur dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Unterraum $\mathfrak{R}$ endlicher Kodimension existiert derart, daß die Abschätzung

$$\|Au\| \leqq \varepsilon \|u\| \tag{0.2}$$

für alle $u \in \mathfrak{R}$ richtig ist.

In [4] ist das Rellichsche Kriterium zu einer Verallgemeinerung des Begriffes der kompakten Operatoren im Hilbertraum benutzt worden. Dies

führte zu zwei speziellen Typen von C^*-Algebren, die wir R-Algebren und sub-R-Algebren nannten. Eine solche spezielle C^*-Algebra $\mathfrak{I}$ ist stets abgeschlossenes zweiseitiges Ideal einer gewissen, in [5] näher untersuchten C^*-Algebra $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$. Ein $\mathfrak{I}$-Fredholm-Operator ist definiert als Operator der Algebra $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ mit der Eigenschaft, daß seine Restklasse ein reguläres Element von $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})/\mathfrak{I}$ ist.

Dieser Begriff des $\mathfrak{I}$-Fredholm-Operators ist in [5] näher untersucht worden; als Resultate ergaben sich unter anderm ein Indexsatz ganz ähnlich zu den bekannten Aussagen über den Fredholmschen Index

$$\nu(A) = \dim \ker A - \operatorname{codim} \operatorname{im} A \,. \tag{0.3}$$

Es wurde ein $\mathfrak{I}$-Index $\nu_{\mathfrak{I}}(A)$ definiert für alle $\mathfrak{I}$-Fredholm-Operatoren A als Element einer gewissen Gruppe $\Gamma(\mathcal{N}_{\mathfrak{I}})$.

Das Ideal der kompakten Operatoren ist eine spezielle R-Algebra, und man hat $\mathfrak{A}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{B}$. Daher stimmen die $\mathfrak{I}$-Fredholm-Operatoren mit den (durch (0.1) definierten) Fredholmschen Operatoren überein. Insbesondere hat man $\Gamma(\mathcal{N}_{\mathfrak{C}}) = \mathbb{Z}$ und $\nu_{\mathfrak{C}}(A)$ ist der Fredholmindex (0.3).

In der vorliegenden Arbeit beziehen wir uns auf die Frage nach einer anderen Definition des $\mathfrak{I}$-Fredholm-Operators, die nicht von der Theorie der Banachalgebren abhängt und die sich mit (0.1) vergleichen läßt. Dies erscheint wünschenswert allein auf Grund der Tatsache, daß die Motivierung für unsere Definition in der Theorie linearer Gleichungen liegt.

Eine solche Befreiung von algebraischen Begriffen wurde in [5] bereits teilweise erzielt (vgl. Kriterium 5.9); sie ist dort jedoch nicht vollständig, da in jenem Kriterium noch die Forderung $A \in \mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ enthalten ist.

Nun ist zu jeder R-Algebra $\mathfrak{I}$ eine Menge von abgeschlossenen Unterräumen des Raumes $\mathfrak{H}$ definiert durch die Formel

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{I}} = \{\mathfrak{S} : \mathfrak{S} \subset \mathfrak{H},\ \mathfrak{S} \text{ abgeschlossen},\ P_{\mathfrak{S}^\perp} \in \mathfrak{I}\}\,, \tag{0.4}$$

wobei $P_{\mathfrak{R}}$ die orthogonale Projektion auf $\mathfrak{R}$ bedeute. Durch (0.4) ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung der R-Algebren auf eine Klasse von Mengen abgeschlossener Unterräume hergestellt, die wir in [4] und [5] maximale R-Mengen nannten (siehe auch § 1 dieser Arbeit). Das später bewiesene Kriterium (Satz 6.1) drückt nun die $\mathfrak{I}$-Fredholm-Eigenschaft mit Hilfe der maximalen R-Menge $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathfrak{I}}$ aus, ohne noch auf die R-Algebra $\mathfrak{I}$ oder die Algebra $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ selbst Bezug zu nehmen. Um es etwas genauer zu sagen, ein $\mathfrak{I}$-Fredholm-Operator ist ein beschränkter Operator, der hinreichend viele abgeschlossene Unterräume aus der Menge $\mathcal{N}$ umkehrbar eindeutig auf Räume der Menge $\mathcal{N}$ abbildet, und dessen Adjungierte dieselbe Eigenschaft hat. Ein $\mathfrak{I}$-Fredholm-Operator hat nicht mehr notwendigerweise ein abgeschlossenes Bild, wie im (0.1) für Fredholm-Operatoren gefordert. Somit hat man nicht mehr die Lösbarkeit von $Au = f$ genau für alle f orthogonal zu $\ker A^*$, wie in den Fredholmschen Sätzen für lineare Integralgleichungen zweiter Art. Jedoch folgt die Lösbarkeit von $Au = f$ für alle f gewisser Räume in $\mathcal{N}$; mit andern Worten, es ergibt sich auch eine gewisse schwächere Existenzaussage für diese Gleichung. Ähnliche Vergleiche kann man für die Eindeutigkeitsaussage bei den

Fredholmschen Sätzen und hier machen. Bezüglich einer möglichen Anwendung der Theorie weisen wir auf [4], § 9 hin, wo eine Reihe von Beispielen aus der Analysis mit Hilfe des neuen Begriffes studiert wurden. Eine ausführlichere Untersuchung solcher Anwendung ist für die nahe Zukunft geplant.

Das Hauptresultat findet sich in § 6. In § 1 geben wir eine etwas vereinfachte Diskussion des in [4] entwickelten Begriffes der R-Menge; in § 2 werden einige Bemerkungen über einen Wechsel der Riemannschen Metrik im Hilbertraum $\mathfrak{H}$ gemacht. In [3] und [4] wird die durch einen linearen Operator A induzierte Abbildung von abgeschlossenen Unterräumen auf abgeschlossene Unterräume studiert. Bis zum § 6 einschließlich ist die Arbeit unabhängig von den beiden früheren Arbeiten [4] und [5]; zum Beweis des Satzes 6.1 muß dagegen die früher entwickelte Theorie weitgehend herangezogen werden. Dies geschieht in § 7. In § 8 tragen wir endlich den Beweis eines Satzes über R-Mengen aus § 1 nach, der ebenfalls von der Theorie der Banachalgebren, insbesondere von [4], § 2 abhängig ist.

1. R-Mengen und maximale R-Mengen

Für zwei abgeschlossene Unterräume $\mathfrak{S}, \mathfrak{T}$ eines Hilbertraumes $\mathfrak{H}$ erklären wir den folgenden unsymmetrischen „Abstand".

$$\delta(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) = \sup_{\|x\|=1, x\in\mathfrak{S}} \inf_{y\in\mathfrak{T}} \|x - y\| \,. \tag{1.1}$$

Mit andern Worten, $\delta(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ ist das Maximum der Abstände aller Punkte der Einheitskugel in $\mathfrak{S}$ vom Raum $\mathfrak{T}$.

Sei für einen beliebigen abgeschlossenen Unterraum $\mathfrak{R}$ die orthogonale Projektion auf $\mathfrak{R}$ mit $P_{\mathfrak{R}}$ bezeichnet; dann hat man

$$\inf_{y\in\mathfrak{T}} \|x - y\| = \|(1 - P_{\mathfrak{T}})x\| \tag{1.2}$$

und daher

$$\begin{aligned} \delta(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) &= \sup_{\|x\|=1, x\in\mathfrak{S}} \|(1 - P_{\mathfrak{T}})x\| \\ &= \sup_{\|x\|=1, x\in\mathfrak{H}} \|(1 - P_{\mathfrak{T}})\, P_{\mathfrak{S}} x\| = \|(1 - P_{\mathfrak{T}}) P_{\mathfrak{S}}\| \,. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Man bestätigt leicht die folgenden Rechenregeln.

a) $\delta(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) = 0$ gilt dann und nur dann, wenn $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}$,

b) $\delta(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ erfüllt die Dreiecksungleichung

$$\delta(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) \leqq \delta(\mathfrak{S}, \mathfrak{R}) + \delta(\mathfrak{R}, \mathfrak{T}) \,; \tag{1.4}$$

c) Sei $\mathfrak{S}^{\perp}$ das orthogonale Komplement von $\mathfrak{S}$, dann gilt

$$\delta(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) = \delta(\mathfrak{T}^{\perp}, \mathfrak{S}^{\perp}) \,. \tag{1.5}$$

Definition 1.1. *Eine nichtleere Menge $\mathcal{M}$ abgeschlossener Unterräume von $\mathfrak{H}$ heiße R-Menge, wenn es zu jedem $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \in \mathcal{M}$ und jedem $\varepsilon > 0$ einen Raum $\mathfrak{R} \in \mathcal{M}$ gibt, derart daß*

$$\delta(\mathfrak{R}, \mathfrak{S}) < \varepsilon, \quad \delta(\mathfrak{R}, \mathfrak{T}) < \varepsilon \tag{1.6}$$

gilt.

Die Menge aller abgeschlossenen Unterräume von $\mathfrak{H}$ werde im folgenden mit $\mathscr{A}$ bezeichnet. Für eine beliebige Untermenge $\mathscr{M}$ von $\mathscr{A}$ und $\mathfrak{S}_0 \in \mathscr{M}$ definieren wir die offenen und abgeschlossenen „links-δ-Kugeln" (abgekürzt „lδ-Kugeln") in $\mathscr{M}$ durch

$$\mathscr{M}(\mathfrak{S}_0, \varrho) = \{\mathfrak{S} : \delta(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0) < \varrho, \mathfrak{S} \in \mathscr{M}\} \tag{1.7}$$

für $0 < \varrho \leqq 1$ und

$$\mathscr{M}[\mathfrak{S}_0, \varrho] = \{\mathfrak{S} : \delta(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0) \leqq \varrho, \mathfrak{S} \in \mathscr{M}\} \tag{1.8}$$

für $0 \leqq \varrho < 1$, beziehungsweise. Die in analoger Weise definierten Mengen $\mathscr{M}(\mathfrak{S}_0, 0)$ und $\mathscr{M}[\mathfrak{S}_0, 1]$ seien von diesen Begriffen ausgeschlossen, da die erstere Menge leer ist und die zweite mit $\mathscr{M}$ übereinstimmt.

Lemma 1.2. *Eine nichtleere Menge $\mathscr{M} \subset \mathscr{A}$ ist R-Menge dann und nur dann, wenn jede endliche Menge von offenen* lδ*-Kugeln in $\mathscr{M}$ einen nichtleeren Durchschnitt hat.*

Der Beweis ist evident.

Es ist möglich, die Menge aller offenen lδ-Kugeln einer gegebenen Menge $\mathscr{M} \subset \mathscr{A}$ als Basis einer Topologie zu verwenden, die wir dann die lδ-Topologie in $\mathscr{M}$ nennen werden. Die lδ-Topologie in $\mathscr{M}$ ist die Relativtopologie von $\mathscr{M}$ als Untermenge von $\mathscr{A}$, wobei $\mathscr{A}$ als Raum mit seiner entsprechenden lδ-Topologie aufgefaßt werde. Die lδ-Topologie in $\mathscr{M}$ ist nicht Hausdorffsch; z. B. $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \in \mathscr{A}$ mit $\mathfrak{S} \neq \mathfrak{T}$, $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}$ besitzen keine punktfremden Umgebungen, da $\mathfrak{S}$ in jeder lδ-Kugel um $\mathfrak{T}$ enthalten ist.

Die lδ-Topologie in $\mathscr{A}$ ist schwächer (und nicht äquivalent) als die a. a. O. (vgl. [4], § 2) diskutierte, durch die Metrik $g(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) = \|P_{\mathfrak{S}} - P_{\mathfrak{T}}\|$ erklärte Topologie, mit welcher $\mathscr{A}$ zu einem vollständigen metrischen Raum wird.

Eine R-Menge ist nun charakterisiert durch die Bedingung, daß jede nicht leere endliche Menge offener Teilmengen (in der relativen lδ-Topologie) einen nichtleeren Durchschnitt besitzt.

Definition 1.3. *Eine maximale R-Menge ist eine* lδ*-abgeschlossene R-Menge.*

Lemma 1.4. *Die* lδ*-Abschließung einer R-Menge ist eine maximale R-Menge.*

Der Beweis ist erbracht, wenn man zeigt, daß die Abschließung einer R-Menge wieder eine R-Menge ist. Dies ist eine unmittelbare Folge der obigen Bemerkung.

Definition 1.5. *Zwei R-Mengen $\mathscr{M}$ und $\mathscr{M}'$ heißen äquivalent, wenn ihre Abschließungen übereinstimmen.*

Jede R-Menge ist somit mit genau einer maximalen R-Menge äquivalent, nämlich mit ihrer Abschließung.

Lemma 1.6. *Jede offene* lδ*-Kugel einer R-Menge $\mathscr{M}$ ist eine zu $\mathscr{M}$ äquivalente R-Menge.*

Beweis. $\mathscr{M}^0 = \mathscr{M}(\mathfrak{S}_0, \varepsilon)$ (für ein $\mathfrak{S}_0 \in \mathscr{M}$ und $0 < \varepsilon \leqq 1$). Der Durchschnitt von N lδ-Kugeln in $\mathscr{M}^0$ läßt sich als Durchschnitt von $N + 1$ lδ-Kugeln in $\mathscr{M}$ ausdrücken und ist somit nichtleer. Daher ist $\mathscr{M}^0$ eine R-Menge. Es ist auch klar, daß die Abschließungen $\bar{\mathscr{M}}^0$ und $\bar{\mathscr{M}}$ von $\mathscr{M}^0$ und $\mathscr{M}$ der Relation $\bar{\mathscr{M}}^0 \subset \bar{\mathscr{M}}$ genügen. Sei nun $\mathfrak{T}_0 \in \bar{\mathscr{M}}$ vorgegeben, dann existiert eine Folge $\mathfrak{T}^n \in \mathscr{M}$ mit

$\delta(\mathfrak{T}^n, \mathfrak{T}_0) < 1/n$. Man wähle $\mathfrak{R}^n \in \mathscr{M}$ mit $\delta(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{T}^n) < 1/n$, $\delta(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{S}_0) < \varepsilon$, dann ergibt sich nach (1.4) einerseits $\mathfrak{R}^n \in \mathscr{M}^0$ und ferner $\delta(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{T}_0) < 2/n$, oder $\mathfrak{T}_0 \in \mathscr{M}^0$. Somit gilt auch $\mathscr{M} \subset \mathscr{M}^0$, q. e. d.

Wir formulieren endlich einen Satz über die „abgeschlossenen 1δ-Kugeln" $\mathscr{N}[\mathfrak{S}_0, 0]$ vom Radius Null, für eine maximale R-Menge $\mathscr{N}$, der erst am Ende dieser Arbeit unter Zurhilfenahme der in [4] entwickelten algebraischen Methoden bewiesen werden wird (§ 9). Ein Beweis ohne Benutzung einfacher Sätze über C^*-Algebren ist dem Autor nicht bekannt.

Satz 1.7. *Sei $\mathscr{N}$ eine maximale R-Menge und $\mathfrak{S}_0 \in \mathscr{N}$. Dann ist die Menge*

$$\mathscr{N}[\mathfrak{S}_0, 0] = \{\mathfrak{S} : \delta(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0) = 0, \mathfrak{S} \in \mathscr{N}\} = \{\mathfrak{S} : \mathfrak{S} \in \mathscr{N}, \mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}_0\} \tag{1.9}$$

eine zu $\mathscr{N}$ äquivalente R-Menge.

Es sei bemerkt, daß abgeschlossene 1δ-Kugeln $\mathscr{M}[\mathfrak{S}_0, \varrho]$ im allgemeinen nicht 1δ-abgeschlossene Mengen sind. Die Abschließung von $\mathscr{A}[\mathfrak{S}_0, 0]$, für ein $\mathfrak{S}_0 \neq \mathfrak{H}$, $\mathfrak{S}_0 \in \mathscr{A}$ enthält z. B. den Raum $\mathfrak{H}$, da $\mathfrak{S}_0 \in \mathscr{A}[\mathfrak{S}_0, 0]$ in jeder 1δ-Kugel $\mathscr{A}(\mathfrak{H}, \varrho) = \mathscr{A}$ enthalten ist. Andererseits ist $\mathfrak{H}$ nicht in $\mathscr{A}[\mathfrak{S}_0, 0]$ enthalten, und somit ist $\mathscr{A}[\mathfrak{S}_0, 0]$ nicht 1δ-abgeschlossen.

2. Äquivalente innere Produkte

In jedem Hilbertraum $\mathfrak{H}$ kann man das vorliegende innere Produkt (u, v) durch ein beliebiges anderes der Form

$$\langle u, v\rangle = (u, Hv) \tag{2.1}$$

ersetzen, wo H einen beschränkten positiven hermiteschen regulären (d. h. invertierbaren) linearen Operator bezeichne. Setzt man

$$\langle\langle u\rangle\rangle = \{(u, u)\}^{1/2}, \tag{2.2}$$

so bildet $\langle\langle u\rangle\rangle$ eine zu $\|u\| = \{(u, u)\}^{1/2}$ äquivalente Norm, d. h. es gilt

$$c_1\|u\| \leqq \langle\langle u\rangle\rangle \leqq c_2\|u\| \tag{2.3}$$

mit positiven Konstanten c_1, c_2, für alle $u \in \mathfrak{H}$, und der lineare Raum $\mathfrak{H}$ ist ein Hilbertraum unter (u, v) und $\|u\|$ sowohl, als auch mit $\langle u, v\rangle$ und $\langle\langle u\rangle\rangle$. Die Topologie von $\mathfrak{H}$ wird durch diesen Wechsel des inneren Produktes und der Norm nicht verändert, ebensowenig wie die (Kardinalität der) Dimension oder der in § 1 definierte Raum $\mathscr{A}$. Andererseits ändern sich die Begriffe der Orthogonalität und der Adjungierten A^* eines linearen Operators A, die ja mit Hilfe des inneren Produktes definiert sind, und insbesondere auch die orthogonale Projektion. Wir benutzen im folgenden die bereits eingeführten Symbole $\mathfrak{S}^\perp$, $P_{\mathfrak{S}}$ und A^* stets in bezug auf das Produkt (u, v); die entsprechenden Begriffe in bezug auf $\langle u, v\rangle$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}^{\langle\perp\rangle}$, $Q_{\mathfrak{S}}$ und $A^{\langle *\rangle}$.

Man zeigt leicht, daß die Beziehungen

$$\mathfrak{S}^{\langle\perp\rangle} = H^{-1}\mathfrak{S}^\perp = (H\mathfrak{S})^\perp, \quad A^{\langle *\rangle} = H^{-1}A^*H \tag{2.4}$$

erfüllt sind, mit

$$H\mathfrak{S} = \{v : v = Hu, u \in \mathfrak{S}\}. \tag{2.5}$$

Die Projektionen $P_{\mathfrak{S}}$ und $Q_{\mathfrak{S}}$ hängen ebenfalls auf einfache Weise zusammen. Man betrachte dazu den Operator

$$H_{\mathfrak{S}} = P_{\mathfrak{S}} H P_{\mathfrak{S}} . \tag{2.6}$$

$H_{\mathfrak{S}}$ transformiert die beiden Räume $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}^{\perp}$ in sich, es ist $H_{\mathfrak{S}} u = 0$ für alle $u \in \mathfrak{S}^{\perp}$, und die Einschränkung $\tilde{H}_{\mathfrak{S}}$ von $H_{\mathfrak{S}}$ auf $\mathfrak{S}$ ist regulär, d. h. besitzt eine überall in $\mathfrak{S}$ definierte (zweiseitige) Inverse $\tilde{H}_{\mathfrak{S}}^{-1}$.

Lemma 2.1. *Es gilt*

$$Q_{\mathfrak{S}} = \tilde{H}_{\mathfrak{S}}^{-1} P_{\mathfrak{S}} H . \tag{2.7}$$

Beweis. Sei $Q_{\mathfrak{S}}$ durch (2.7) definiert. Wir wollen zeigen, daß $Q_{\mathfrak{S}}$ in der Tat die verlangte orthogonale Projektion ist. Zunächst folgt

$$\begin{aligned} \langle u, Q_{\mathfrak{S}} v\rangle &= (Hu, P_{\mathfrak{S}} \tilde{H}_{\mathfrak{S}}^{-1} P_{\mathfrak{S}} H v) \\ (\tilde{H}_{\mathfrak{S}}^{-1} P_{\mathfrak{S}} H u, Hv) &= \langle Q_{\mathfrak{S}} u, v\rangle \end{aligned} \tag{2.8}$$

für alle $u, v \in \mathfrak{H}$. Somit ist $Q_{\mathfrak{S}}$ hermitesch in bezug auf $\langle u, v\rangle$. Ferner gilt

$$\begin{aligned} Q_{\mathfrak{S}}^2 &= \tilde{H}_{\mathfrak{S}}^{-1} P_{\mathfrak{S}} H P_{\mathfrak{S}} \tilde{H}_{\mathfrak{S}}^{-1} P_{\mathfrak{S}} H \\ &= \tilde{H}_{\mathfrak{S}}^{-1} \tilde{H}_{\mathfrak{S}} \tilde{H}_{\mathfrak{S}}^{-1} P_{\mathfrak{S}} H = Q_{\mathfrak{S}} . \end{aligned} \tag{2.9}$$

Folglich ist $Q_{\mathfrak{S}}$ eine orthogonale Projektion in bezug auf $\langle u, v\rangle$.

Für ein $u \in \mathfrak{S}$ hat man $P_{\mathfrak{S}} u = u$ und somit

$$\begin{aligned} Q_{\mathfrak{S}} u &= \tilde{H}_{\mathfrak{S}}^{-1} P_{\mathfrak{S}} H P_{\mathfrak{S}} u \\ &= \tilde{H}_{\mathfrak{S}}^{-1} \tilde{H}_{\mathfrak{S}} u = u . \end{aligned} \tag{2.10}$$

Umgekehrt folgt aus $Q_{\mathfrak{S}} u = u$ sofort, daß $u = Q_{\mathfrak{S}} u = P_{\mathfrak{S}} \tilde{H}_{\mathfrak{S}}^{-1} P_{\mathfrak{S}} H u \in \mathfrak{S}$. Dies zeigt, daß in der Tat der Projektionsoperator $Q_{\mathfrak{S}}$ auf $\mathfrak{S}$ projiziert. q. e. d.

Lemma 2.1. wurde vom Autor früher benutzt (vgl. [3], p. 383). Eine noch frühere Referenz scheint nicht bekannt zu sein.

Bemerkung. Der Operator $\tilde{H}_{\mathfrak{S}}^{-1}$ in (2.7) kann durch den folgenden Operator $Y_{\mathfrak{S}}$ ersetzt werden.

$$Y_{\mathfrak{S}} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (P_{\mathfrak{S}} H P_{\mathfrak{S}} - \lambda)^{-1} \, d\lambda/\lambda , \tag{2.11}$$

wo die Kurve Γ das positive Spektrum von $P_{\mathfrak{S}} H P_{\mathfrak{S}}$ vom Nullpunkt trenne.

In der Tat zeigt eine leichte Rechnung, daß die Einschränkung von $Y_{\mathfrak{S}}$ auf $\mathfrak{S}$ mit $\tilde{H}_{\mathfrak{S}}^{-1}$ übereinstimmt, oder, mit andern Worten, daß $Y_{\mathfrak{S}} u = \tilde{H}_{\mathfrak{S}}^{-1} u$ für $u \in \mathfrak{S}$, $= 0$ für $u \in \mathfrak{S}^{\perp}$.

Es sei hervorgehoben, daß jede beliebige, in ganz $\mathfrak{H}$ erklärte sesquilineare Form $\langle u, v\rangle$, für die die Formel (2.2) eine zu $\|u\|$ äquivalente Norm liefert, stets mit einem passenden, eindeutig erklärten, beschränkten linearen positiv definiten hermiteschen regulären Operator H durch die Formel (2.1) dargestellt werden kann. Somit ist die obige Änderung des Skalarproduktes die Allgemeinste.

Man wird fragen, wie sich die in § 1 für $\mathscr{A}$ eingeführte Topologie sich mit der diskutierten Änderung des inneren Produktes verhält.

Lemma 2.2. *Sei*

$$\delta(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) = \|(1 - P_{\mathfrak{T}}) P_{\mathfrak{S}}\| , \quad \hat{\delta}(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) = \langle\langle (1 - Q_{\mathfrak{T}}) Q_{\mathfrak{S}} \rangle\rangle . \tag{2.12}$$

Dann existieren positive Konstanten c', c'' derart, daß

$$c'\,\delta(\mathfrak{S},\mathfrak{T}) \leqq \hat{\delta}(\mathfrak{S},\mathfrak{T}) \leqq c''\,\delta(\mathfrak{S},\mathfrak{T}) \tag{2.13}$$

gilt für alle $\mathfrak{S},\mathfrak{T} \in \mathscr{A}$.

Der Beweis ist eine unmittelbare Folge von (1.1), welches für $\delta(\mathfrak{S},\mathfrak{T})$ und $\hat{\delta}(\mathfrak{S},\mathfrak{T})$ mit den entsprechenden Normen richtig ist, sowie von (2.3).

Lemma 2.2 zeigt, daß die 1δ-Topologie in $\mathscr{A}$ von der Wahl des inneren Produktes in $\mathfrak{H}$ unabhängig ist. Es bleiben somit auch die Begriffe der R-Menge und der maximalen R-Menge von solcher Änderung unberührt.

Wenn man $\mathfrak{H}$ als einen unendlichdimensionalen Riemannschen Raum auffaßt, so ergibt sich also, daß die 1δ-Topologie vom Koordinatensystem unabhängig, d. h. invariant ist, ebenso wie die Begriffe der R-Menge und maximalen R-Menge. Andererseits findet man, daß die a. a. O. eingeführten Begriffe der R-Algebra, sub-R-Algebra und RI-Algebra (vgl. [4] und [5]) diese Eigenschaft nicht besitzen, wie auch allgemein der Begriff der C^*-Algebra vom Koordinatensystem abhängt. Der Grund dafür ist die Tatsache, daß die Adjungierte eines Operators sich mit dem inneren Produkt ändert.

3. Die assoziierte Raumabbildung

Sei A ein beschränkter linearer Operator des Raumes $\mathfrak{H}$ in sich. Wir definieren für jedes $\mathfrak{S} \in \mathscr{A}$ den linearen Unterraum $A\mathfrak{S}$ wie in (2.5) und bezeichnen mit $\mathscr{D}_A$ die Untermenge von $\mathscr{A}$, für welche der Raum $A\mathfrak{S}$ abgeschlossen und die durch A induzierte Abbildung von $\mathfrak{S}$ auf $A\mathfrak{S}$ eineindeutig ist. Mit andern Worten, es sei

$$\mathscr{D}_A = \{\mathfrak{S} : \mathfrak{S}, A\mathfrak{S} \in \mathscr{A},\ \mathfrak{S} \cap \ker A = \{0\}\}\,. \tag{3.1}$$

Lemma 3.1. *$\mathfrak{S} \in \mathscr{D}_A$ gilt dann und nur dann, wenn es eine positive Konstante c gibt,derart daß*

$$\|Au\| \geqq c\|u\|, \quad \textit{für alle} \quad u \in \mathfrak{S}\,. \tag{3.2}$$

Beweis. Wenn (3.2) gilt, so folgt aus der Konvergenz von Au^n diejenige von u^n. Somit ist $A\mathfrak{S}$ abgeschlossen. Ferner muß A als Transformation von $\mathfrak{S}$ nach $A\mathfrak{S}$ eineindeutig sein, da sonst eine Nullösung von $Au = f$ in $\mathfrak{S}$ existieren würde.

Nun sei andererseits $\mathfrak{S} \in \mathscr{D}_A$. Dann ist die Einschränkung $\hat{A}$ von A auf $\mathfrak{S}$ eine umkehrbar eindeutige lineare Abbildung des Hilbertraumes $\mathfrak{S}$ auf den Hilbertraum $\mathfrak{T} = A\mathfrak{S}$. Nach einem bekannten Satz (vgl. [7], p. 306) ergibt sich daraus sofort die Beschränktheit von $\hat{A}^{-1}$, oder es folgt

$$\|u\| = \|\hat{A}^{-1}Au\| \leqq \|A^{-1}\|\,\|Au\| \tag{3.3}$$

für alle $u \in \mathfrak{S}$. Dies stimmt mit (3.2) überein, und Lemma 3.1 ist bewiesen.

Nun definieren wir eine Abbildung $\gamma_A : \mathscr{D}_A \to \mathscr{A}$ durch die Formel

$$\gamma_A(\mathfrak{S}) = A\mathfrak{S}, \quad \mathfrak{S} \in \mathscr{D}_A\,. \tag{3.4}$$

γ_A heiße die *zu A assoziierte Raumabbildung.*

Der Operator A ist umgekehrt durch seine assoziierte Raumabbildung γ_A charakterisiert bis auf eine von Null verschiedene multiplikative Konstante. In der Tat, aus $\mathscr{D}_A = \mathscr{D}_B$

$$\gamma_A(\mathfrak{S}) = \gamma_B(\mathfrak{S}) \quad \text{für alle} \quad \mathfrak{S} \in \mathscr{D}_A = \mathscr{D}_B \tag{3.5}$$

und für zwei beschränkte lineare Operatoren A und B schließt man, daß für $x \in \mathfrak{H}$ mit $x, Ax \neq 0$ der Raum $\mathfrak{S}_x = \{x\}$ in $\mathscr{D}_A = \mathscr{D}_B$ ist. Somit folgt $\gamma_A(\mathfrak{S}_x) = \gamma_B(\mathfrak{S}_x)$, oder

$$Bx = \lambda_x Ax, \lambda_x \neq 0, \quad \text{für alle} \quad x \notin \ker A\,. \tag{3.6}$$

Eine leichte Rechnung zeigt, daß λ_x von x unabhängig sein muß. Also hat man $B = \lambda A$, wie behauptet.

Lemma 3.2. *Man hat*

$$\mathscr{D}_A \subset \mathscr{A}(\ker A)^\perp, 1)\,, \tag{3.7}$$

und in (3.7) *steht das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn das Bild von A abgeschlossen ist.*

Bevor wir Lemma 3.2 beweisen, sei an das folgende, wohlbekannte Resultat erinnert.

Lemma 3.3. *A hat abgeschlossenes Bild dann und nur dann, wenn das Bild seiner Adjungierten A^* abgeschlossen ist.*

Beweis. Die Einschränkung $\hat{A}$ von A auf den Raum $(\ker A)^\perp$ ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Hilbertraumes $\mathfrak{H}^* = (\ker A)^\perp$ auf den Raum $\operatorname{im} A$. Wenn $\operatorname{im} A$ abgeschlossen ist, so ist auch $\operatorname{im} A$ ein Hilbertraum. Nun ist wohlbekannt und leicht zu zeigen, daß für Operatoren mit abgeschlossenem Bild die Relation

$$\mathfrak{h} = \operatorname{im} A = (\ker A^*)^\perp \tag{3.8}$$

richtig ist. Sei $\widehat{A^*}$ die Einschränkung von $\widehat{A^*}$ auf $\mathfrak{h}$, dann gilt

$$(u, \widehat{A^*}v) = (\hat{A}u, v),\ u \in \mathfrak{h}^*,\ v \in \mathfrak{h}\,. \tag{3.9}$$

Somit stellt $\widehat{A^*}$ die Adjungierte von $\hat{A}$ als Abbildung von $\mathfrak{h}^*$ nach $\mathfrak{h}$ dar. Nach Lemma 3.1 gilt $\|\hat{A}u\| \geqq c\|u\|$, $u \in \mathfrak{h}^*$; folglich existiert die Inverse $\hat{A}^{-1}$ als beschränkter Operator. Folglich besitzt auch $\widehat{A^*}$ eine beschränkte Inverse $B : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}$. Man hat dann

$$\|u\| = \|BA^*u\| \leqq \|B\|\,\|A^*u\|, \quad u \in \mathfrak{h}\,, \tag{3.10}$$

und hieraus folgt nach Lemma 3.1, daß $(\ker A^*)^\perp = \mathfrak{h} \in \mathscr{D}_{A^*}$. Speziell muß also $\operatorname{im} A^* = A^*((\ker A^*)^\perp)$ abgeschlossen sein, q. e. d.

Für jedes $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \in \mathscr{A}$ sei $\varepsilon(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ die größte Zahl, mit welcher die Ungleichung

$$\|P_{\mathfrak{T}} P_{\mathfrak{S}} u\| \geqq \varepsilon(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})\,\|P_{\mathfrak{S}} u\| \tag{3.11}$$

für alle $u \in \mathfrak{H}$ gültig ist. Anders ausgedrückt, hat man

$$\varepsilon(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) = \inf_{x \in \mathfrak{S}, \|x\| = 1} \|P_{\mathfrak{T}} x\|\,. \tag{3.12}$$

Die Zahl $\varepsilon(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ steht in einfachem Zusammenhang mit $\delta(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$.

Lemma 3.4. *Man hat*

$$(\delta(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}))^2 + (\varepsilon(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}))^2 = 1 . \tag{3.13}$$

Beweis. Es gilt

$$\|P_{\mathfrak{T}} x\|^2 + \|(1 - P_{\mathfrak{T}})x\|^2 = \|x\|^2 . \tag{3.14}$$

Somit folgt nach (1.3) und (3.12), daß

$$\begin{aligned} (\delta(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}))^2 &= \sup_{\|x\|=1, x\in\mathfrak{S}} \|(1 - P_{\mathfrak{T}})x\|^2 \\ &= \sup_{\|x\|=1, x\in\mathfrak{S}} (1 - \|P_{\mathfrak{T}} x\|^2) = 1 - \inf_{\|x\|=1, x\in\mathfrak{S}} \|P_{\mathfrak{T}} x\|^2 \\ &= 1 - (\varepsilon(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}))^2 , \end{aligned} \tag{3.15}$$

q. e. d.

Beweis von Lemma 3.2. Sei $\mathfrak{S}_0^* = (\ker A)^\perp$, dann hat man $A = A P_{\mathfrak{S}_0^*}$. Somit gilt für $\mathfrak{S} \in \mathscr{D}_A$ wegen Lemma 3.1 die Abschätzung

$$\begin{aligned} c\|P_{\mathfrak{S}} u\| &\leqq \|A P_{\mathfrak{S}} u\| \\ &= \|A P_{\mathfrak{S}_0^*} P_{\mathfrak{S}} u\| \leqq \|A\| \, \|P_{\mathfrak{S}_0^*} P_{\mathfrak{S}} u\| \end{aligned} \tag{3.16}$$

für alle $u \in \mathfrak{H}$. Wir dürfen annehmen, daß $A \neq 0$, somit ergibt sich durch Vergleich mit Lemma 3.4, daß $\varepsilon(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0^*) > 0$ und daher $\delta(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0^*) < 1$ sein muß; man hat also $\mathfrak{S} \in \mathscr{A}(\mathfrak{S}_0^*, 1)$, oder (3.7).

Wenn $\operatorname{im} A$ nicht abgeschlossen ist, so kann $\mathfrak{S}_0^* = (\ker A)^\perp$ nicht in $\mathscr{D}_A$ liegen, denn es gilt ja $A\mathfrak{S}_0^* = \operatorname{im} A$. Andererseits folgt $\delta(\mathfrak{S}_0^*, \mathfrak{S}_0^*) = 0 < 1$, oder $\mathfrak{S}_0^* \in \mathscr{A}(\mathfrak{S}_0^*, 1)$. Daher muß dann (3.7) eine echte Inklusion sein.

Endlich sei $\operatorname{im} A$ abgeschlossen, dann folgt $\mathfrak{S}_0^* \in \mathscr{D}_A$. Somit gilt nach Lemma 3.1 die Ungleichung

$$\|A u\| = \|A P_{\mathfrak{S}_0^*} u\| \geqq c\|P_{\mathfrak{S}_0^*} u\|, \; u \in \mathfrak{H}, \; c > 0 . \tag{3.17}$$

Ferner hat man auch

$$\|A u\| = \|A P_{\mathfrak{S}_0^*} u\| \leqq \|A\| \, \|P_{\mathfrak{S}_0^*} u\| , \quad u \in \mathfrak{H} , \tag{3.18}$$

und somit die Äquivalenz

$$c'\|P_{\mathfrak{S}_0^*} u\| \leqq \|A u\| \leqq c''\|P_{\mathfrak{S}_0^*} u\| , \quad u \in \mathfrak{H} , \tag{3.19}$$

mit positiven Konstanten c', c''. Folglich gilt nun (3.2), oder

$$\|A P_{\mathfrak{S}} u\| \geqq c\|P_{\mathfrak{S}} u\|, \; u \in \mathfrak{H}, \; c > 0 \tag{3.20}$$

dann und nur dann, wenn die Ungleichung

$$\|P_{\mathfrak{S}_0^*} P_{\mathfrak{S}} u\| \geqq c'''\|P_{\mathfrak{S}} u\|, \; u \in \mathfrak{H}, \; c''' > 0 \tag{3.21}$$

erfüllt ist. Wir wissen nach Lemma 3.4, daß (3.21) möglich ist dann und nur dann, wenn $\varepsilon(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) > 0$, oder $\delta(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) < 1$, oder $\mathfrak{S} \in \mathscr{A}(\mathfrak{S}_0^*, 1)$. Lemma 3.2 ist somit bewiesen.

4. Eigenschaften der assoziierten Raumabbildung

Das folgende, vorbereitende Lemma ist ein Zusatz zu Lemma 3.1.

Lemma 4.1. *Der Definitionsbereich $\mathscr{D}_A$ der assoziierten Raumabbildung ist eine 1δ-offene Untermenge von $\mathscr{A}$. Sei*

$$\delta(\mathfrak{S}) = \inf_{\|x\|=1, x\in\mathfrak{S}} \|A x\| \tag{4.1}$$

die größte, in (3.2) *für ein gegebenes* $\mathfrak{S}$ *mögliche Konstante, dann ist* $(\hat{c}(\mathfrak{S}))^{-1}$ *gleichmäßig beschränkt in einer* 1δ*-Umgebung jedes Punktes von* $\mathscr{D}_A$.

Beweis. Sei $\mathfrak{S}_0 \in \mathscr{D}_A$, dann hat man

$$\begin{aligned} \|A P_{\mathfrak{S}} u\| &\geqq \|A P_{\mathfrak{S}_0} P_{\mathfrak{S}} u\| - \|A(1 - P_{\mathfrak{S}_0}) P_{\mathfrak{S}_0} u\| \geqq \\ &\geqq \hat{c}(\mathfrak{S}_0) \|P_{\mathfrak{S}_0} P_{\mathfrak{S}} u\| - \|A\| \, \delta(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0) \|P_{\mathfrak{S}} u\| \geqq \\ &\geqq \big(\hat{c}(\mathfrak{S}_0) - (\|A\| + \hat{c}(\mathfrak{S}_0)) \, \delta(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_0)\big) \|P_{\mathfrak{S}} u\| \,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Für die 1δ-Kugel $\mathscr{A}(\mathfrak{S}_0, \varepsilon_0)$ mit

$$\varepsilon_0 = 1/2\hat{c}(\mathfrak{S}_0) \, (\|A\| + c(\mathfrak{S}_0))^{-1} \tag{4.3}$$

ergibt sich somit

$$\|A P_{\mathfrak{S}} u\| \geqq 1/2\hat{c}(\mathfrak{S}_0) \|P_{\mathfrak{S}} u\|, \; \mathfrak{S} \in \mathscr{A}(\mathfrak{S}_0, \varepsilon_0), \; u \in \mathfrak{H} \,. \tag{4.4}$$

Folglich hat man $\mathscr{A}(\mathfrak{S}_0, \varepsilon_0) \subset \mathscr{D}_A$, sowie auch die verlangte gleichmäßige Beschränktheit, in der Form

$$(\hat{c}(\mathfrak{S}))^{-1} \leqq 2(\hat{c}(\mathfrak{S}_0))^{-1} \quad \text{in} \quad \mathscr{A}(\mathfrak{S}_0, \varepsilon_0) \,, \tag{4.5}$$

q. e. d.

Lemma 4.2. Die assoziierte Raumabbildung γ_A ist 1δ-stetig.

Beweis. Seien $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ in $\mathscr{D}_A$ und sei

$$\gamma_A(\mathfrak{S}) = A\mathfrak{S} = \mathfrak{L}, \quad \gamma_A(\mathfrak{T}) = A\mathfrak{T} = \mathfrak{R} \,. \tag{4.6}$$

Dann folgt nach (1.1) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \delta(\mathfrak{L}, \mathfrak{R}) &= \sup_{\|Ax\| \leqq 1, x \in \mathfrak{S}} \inf_{y \in \mathfrak{T}} \|A(x - y)\| \leqq \\ &\leqq \|A\| \sup_{\hat{c}(\mathfrak{S})\|x\| \leqq 1, x \in \mathfrak{S}} \inf_{y \in \mathfrak{T}} \|x - y\| \leqq \\ &\leqq \|A\| \, (\hat{c}(\mathfrak{S}))^{-1} \, \delta(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) \,. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Unter Benutzung von Lemma 4.1 ergibt sich hieraus die Behauptung.

Lemma 4.3. *Man hat*

$$\operatorname{im} \gamma_A \subset \mathscr{A}[(\ker A^*)^\perp, 0] \,, \tag{4.8}$$

und Gleichheit in (4.8) *gilt dann und nur dann, wenn im* A *abgeschlossen ist.*

Beweis. Sei $\mathfrak{S}_0 < (\ker A^*)^\perp$. Wir wissen, daß $\mathscr{A}[\mathfrak{S}_0, 0]$ aus allen abgeschlossenen Unterräumen von $\mathfrak{S}_0$ besteht. Jeder Raum $\mathfrak{T}$ der Form $\mathfrak{T} = \gamma_A(\mathfrak{S}) = A\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S} \in \mathscr{D}_A$, liegt notwendig in $\mathfrak{S}_0$, da im $A \subset \mathfrak{S}_0$. Daher ist (4.8) in der Tat erfüllt. Der Raum $\mathfrak{S}_0$ selbst ist in im γ_A dann und nur dann, wenn im A abgeschlossen ist. Ist endlich im A abgeschlossen und damit $\mathfrak{S}_0 = \operatorname{im} A$, so ist, wie wir aus § 3 wissen (Beweis von Lemma 3.3), die Einschränkung $\hat{A}$ von A auf $\mathfrak{h}^* = (\ker A)^\perp$ eine invertierbare (reguläre) Abbildung von $\mathfrak{h}^*$ auf $\mathfrak{h} = \mathfrak{S}_0$. Somit erhält man auch jedes $\mathfrak{T} \subset \mathscr{A}[\mathfrak{S}_0, 0]$ in der Form $\mathfrak{T} = \gamma_A(\hat{A}^{-1}\mathfrak{T})$, womit Lemma 4.3 bewiesen ist.

Im folgenden geben wir eine Liste weiterer, leicht zu beweisender Eigenschaften der Abbildung γ_A und ihres Definitionsbereiches $\mathscr{D}_A$. Zur Orientierung über Beweise sei auf [5] hingewiesen (§ 4).

1) Man hat $\mathscr{D}_A = \mathscr{A}$ dann und nur dann, wenn A linksregulär ist, d. h. wenn es einen beschränkten Operator X gibt mit $XA = 1$. γ_A bildet auf $\mathscr{A}$ ab dann und nur dann, wenn A rechtsregulär ist.

2) γ_I ist die identische Abbildung von $\mathscr{A}$:

$$\gamma_I(\mathfrak{S}) = \mathfrak{S}, \quad \mathfrak{S} \in \mathscr{A} = \mathscr{D}_I . \tag{4.9}$$

Hier bedeute I die Identität in $\mathfrak{H}$.

3) Man hat

$$\mathscr{D}_{AB} = \{\mathfrak{S} : \mathfrak{S} \in \mathscr{D}_B, \gamma_B(\mathfrak{S}) \in \mathscr{D}_A\} \tag{4.10}$$

und

$$\gamma_{AB}(\mathfrak{S}) = \gamma_A(\gamma_B(\mathfrak{S})) \tag{4.11}$$

für beliebige Operatoren A, B. (4.10) und (4.11) zusammen sei im folgenden mit $\gamma_{AB} = \gamma_A \circ \gamma_B$ ausgedrückt.

4) Sei A regulär, dann gilt die Formel

$$\left(\gamma_{A^*}\left((\gamma_A(\mathfrak{S}))^{\perp}\right)\right)^{\perp} = \mathfrak{S}, \quad \mathfrak{S} \in \mathscr{A} . \tag{4.12}$$

Oder, mit andern Worten, wenn $(\perp)$ die durch $(\perp)\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^{\perp}$ erklärte Involution von $\mathscr{A}$ auf sich bezeichne, so folgt

$$\gamma_{A^{-1}} = (\perp) \circ \gamma_{A^*} \circ (\perp) \tag{4.13}$$

für alle regulären Operatoren A.

5) Sei $\mathscr{E}$ der durch

$$\mathscr{E} = \{[A, \mathfrak{S}] : A \in \mathfrak{B}, \mathfrak{S} \in \mathscr{D}_A\} \tag{4.14}$$

als Untermenge von $\mathfrak{B} \times \mathscr{A}$ erklärte, mit der Relativtopologie versehene topologische Raum. Dann ist $\gamma : \mathscr{E} \to \mathscr{A}$, definiert durch $\gamma[A, \mathfrak{S}] = \gamma_A(\mathfrak{S})$, eine stetige Abbildung. Hier bezeichne $\mathfrak{B}$ die Menge aller beschränkten Operatoren von $\mathfrak{H}$ in sich, mit der Topologie der Operatornorm, in $\mathscr{A}$ gelte die 1δ-Topologie.

5. $\mathscr{N}$-Operatoren

Sei $\mathscr{N}$ eine maximale R-Menge. Ein linearer beschränkter Operator A heiße im folgenden *$\mathscr{N}$-Operator*, wenn der Definitionsbereich $\mathscr{D}_A$ der assoziierten Raumabbildung γ_A Elemente von $\mathscr{N}$ enthält und wenn γ_A alle solchen Elemente wieder nach $\mathscr{N}$ transformiert. Ein *$\mathscr{N}$-*-Operator* sei ein $\mathscr{N}$-Operator, dessen Adjungierte A^* ebenfalls $\mathscr{N}$-Operator ist.

Wir bemerken, daß der Begriff des $\mathscr{N}$-Operators invariant unter einem Wechsel des inneren Produktes, wie in § 2, ist, jedoch nicht der Begriff des $\mathscr{N}$-*-Operators. Ebenfalls gibt es $\mathscr{N}$-Operatoren, die nicht $\mathscr{N}$-*-Operatoren sind, wie wir a. a. O. anhand von Beispielen zeigen werden.

Für $\mathscr{N}$-Operatoren definieren wir $\dot{\mathscr{D}}_A = \mathscr{D}_A \cap \mathscr{N}$ und $\dot{\gamma}_A$ als die Einschränkung von γ_A auf $\dot{\mathscr{D}}_A$. $\dot{\mathscr{D}}_A$ ist dann eine nichtleere Untermenge von $\mathscr{N}$ und $\dot{\gamma}_A$ bildet $\dot{\mathscr{D}}_A$ nach $\mathscr{N}$, und sogar nach $\dot{\mathscr{D}}_{A^*}$ ab, wie leicht zu zeigen ist.

Sei nun $\mathfrak{S}_0 \in \dot{\mathscr{D}}_A$, dann ergibt sich $\mathscr{N}[\mathfrak{S}_0, 0] \subset \dot{\mathscr{D}}_A$. In der Tat besteht $\mathscr{N}[\mathfrak{S}_0, 0]$ aus allen abgeschlossenen Unterräumen von $\mathfrak{S}_0$, die in $\mathscr{N}$ liegen, und solche Räume sind notwendig in $\mathscr{D}_A$, nach Lemma 4.1, also in $\dot{\mathscr{D}}_A$. Allgemeiner sieht man so, daß $\mathscr{N}(\mathfrak{S}_0, \varepsilon) \subset \mathscr{D}_A$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$.

Lemma 5.1. *$\mathring{\mathscr{D}}_A$ ist eine zu $\mathscr{N}$ äquivalente R-Menge, für jeden $\mathscr{N}$-Operator A.*

Beweis. Wir wissen bereits, daß jedes $\mathscr{N}(\mathfrak{S}_0, \varepsilon)$ zu $\mathscr{N}$ äquivalent ist (Lemma 1.6). Die obigen Bemerkungen besagen, daß $\mathring{\mathscr{D}}_A$ eine offene Untermenge von $\mathscr{N}$ ist, in der 1δ-Topologie von $\mathscr{N}$. Nach den Bemerkungen von § 1 schließt man daraus, daß $\mathring{\mathscr{D}}_A$ selbst eine zu $\mathscr{N}$ äquivalente R-Menge ist, q. e. d.

6. $\mathscr{N}$-Operatoren und $\mathfrak{I}$-Fredholm-Operatoren

Wir greifen nun auf die in zwei früheren Arbeiten dargelegten Resultate über R-Algebren und $\mathfrak{I}$-Fredholm-Operatoren zurück (siehe [4] und [5]) und wollen als Hauptresultat dieser Arbeit zeigen, daß der Begriff des $\mathfrak{I}$-Fredholm-Operators, für eine R-Algebra $\mathfrak{I}$, mit dem Begriff des $\mathscr{N}$-*-Operators aus § 5 übereinstimmt. Hierbei wird man zwischen $\mathfrak{I}$ und $\mathscr{N}$ die Beziehung

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_{\mathscr{N}}, \quad \mathscr{N} = \mathscr{N}_{\mathfrak{I}} \tag{6.1}$$

mit $\mathfrak{I}_{\mathscr{N}}$ und $\mathscr{N}_{\mathfrak{I}}$, wie in [4], Formeln (3.2) und (3.16), erwarten.

Zunächst seien die in [4] und [5] verwendeten Symbole und Begriffe erneut erläutert. Die Definitionen von $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\mathfrak{H})$, $\delta(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$, von R-Menge und maximaler R-Menge in [4] und hier sind äquivalent oder stimmen überein. Die einfachen Äquivalenzbeweise seien dem Leser überlassen.

Andererseits sind, wie bereits in § 1 erwähnt, die Topologien für die Menge $\mathscr{A}$ aller abgeschlossenen Unterräume von $\mathfrak{H}$ in [4] und hier voneinander verschieden. In [4], § 2, wurde für $\mathscr{A}$ die Metrik

$$g(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) = \operatorname{Max}\{\delta(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}), \delta(\mathfrak{T}, \mathfrak{S})\} = \|P_{\mathfrak{S}} - P_{\mathfrak{T}}\| \tag{6.2}$$

eingeführt, mit der $\mathscr{A}$ sich als vollständiger metrischer Raum erwies. Zur Vermeidung von Verwechslungen werden wir die Bezeichnungen „1δ-Topologie" und „Topologie der Metrik g" beziehungsweise verwenden. Wie erwähnt, ist die 1δ-Topologie schwächer als die g-Topologie; andererseits bildet $\mathscr{A}$ mit der g-Topologie einen Hausdorffraum.

In [4], § 3 und in [5], § 6 führten wir zu einer gegebenen R-Menge $\mathscr{M}$ zwei Mengen beschränkter linearer Operatoren ein durch die Formeln

$$\mathfrak{I}_{\mathscr{M}} = \left\{A: \begin{array}{c}\text{Zu } \varepsilon > 0 \text{ gibt es } \mathfrak{S} \in \mathscr{M} \text{ mit} \\ \|A P_{\mathfrak{S}}\| \leqq \varepsilon, \quad \|A^* P_{\mathfrak{S}}\| \leqq \varepsilon\end{array}\right\} \tag{6.3}$$

und

$$\mathfrak{B}_{\mathscr{M}} = \left\{A: \begin{array}{c}\text{Zu } \mathfrak{S} \in \mathscr{M}, \varepsilon > 0 \text{ gibt es } \mathfrak{T} \in \mathscr{M} \text{ mit} \\ \|(1 - P_{\mathfrak{S}}) A P_{\mathfrak{T}}\| \leqq \varepsilon, \quad \|(1 - P_{\mathfrak{S}}) A^* P_{\mathfrak{T}}\| \leqq \varepsilon\end{array}\right\}. \tag{6.4}$$

Es zeigte sich, daß $\mathfrak{I}_{\mathscr{M}}$ und $\mathfrak{B}_{\mathscr{M}}$ beide nur von der Äquivalenzklasse der R-Menge $\mathscr{M}$ abhängen; $\mathfrak{I}_{\mathscr{M}}$ sowohl als auch $\mathfrak{B}_{\mathscr{M}}$ erwiesen sich als Banachalgebren, genauer, als C^*-Algebren. Wir führten für C^*-Algebren vom Typ (6.3) die Bezeichnung „R-Algebra" und vom Typ (6.4) die Bezeichnung „RI-Algebra" ein.

Wir wissen, daß zwischen den Äquivalenzklassen von R-Mengen und den maximalen R-Mengen eine eineindeutige Korrespondenz besteht. In [4] wurde

gezeigt, daß für jede R-Algebra $\mathfrak{I}$ die Menge

$$\mathscr{N}_{\mathfrak{I}} = \{\mathfrak{S} : P_{\mathfrak{S}^\perp} \in \mathfrak{I}\} \tag{6.5}$$

eine maximale R-Menge darstellt, und daß $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_{\mathscr{M}}$ für $\mathscr{M} = \mathscr{N}_{\mathfrak{I}}$ gilt. Hieraus schließt man, daß zwischen den R-Algebren und den maximalen R-Mengen eine eineindeutige Zuordnung besteht, die durch die Beziehungen

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_{\mathscr{N}}, \quad \mathscr{N} = \mathscr{N}_{\mathfrak{I}} \tag{6.6}$$

festgelegt ist.

Es ist ferner klar, daß jeder R-Algebra $\mathfrak{I}$ die von $\mathscr{N}_{\mathfrak{I}}$ erzeugte RI-Algebra eindeutig zugeordnet werden kann. Für diese RI-Algebra wurde die Bezeichnung $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ eingeführt. Es ergab sich ferner, daß $\mathfrak{I}$ stets ein abgeschlossenes zweiseitiges $*$-Ideal von $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ darstellt, und ferner, daß $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ charakterisiert ist durch die Formel

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{I}) = \{A : A \in \mathfrak{B},\ A\mathfrak{I} \subset \mathfrak{I},\ \mathfrak{I}A \subset \mathfrak{I}\}\,. \tag{6.7}$$

Die Menge $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})/\mathfrak{I}$ aller Restklassen $\hat{A}$ von $A \in \mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ modulo $\mathfrak{I}$ ist dann wiederum eine Banachalgebra, unter der Norm

$$\|\hat{A}\| = \inf_{A \in \hat{A}} \|A\|\,. \tag{6.8}$$

Ein $\mathfrak{I}$-Fredholm-Operator wurde definiert als Operator in $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$, dessen Restklassen modulo $\mathfrak{I}$ eine (zweiseitige) Inverse in $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})/\mathfrak{I}$ besitzt. Ähnlich nannten wir A links (rechts) $\mathfrak{I}$-Fredholm, wenn $\hat{A}$ eine links-(rechts-)Inverse hat.

Nun behaupten wir den folgenden Satz.

Satz 6.1. *Sei $\mathfrak{I}$ eine R-Algebra und $\mathscr{N} = \mathscr{N}_{\mathfrak{I}}$ die erzeugende maximale R-Menge.*

Behauptung. Die Menge der $\mathfrak{I}$-Fredholm-Operatoren stimmt genau mit der Menge der $\mathscr{N}$-$*$-Operatoren überein.

Wir wiederholen die Aussage von Satz 6.1 in der folgenden expliziteren Weise.

Satz 6.2. *Die $\mathfrak{I}$-Fredholm-Operatoren sind charakterisiert durch folgende Eigenschaften ihrer zugehörigen assoziierten Raumabbildung und deren Definitionsbereich.*

(i) $\dot{\mathscr{D}}_A = \mathscr{D}_A \cap \mathscr{N}$ *und* $\dot{\mathscr{D}}_{A^*} = \mathscr{D}_{A^*} \cap \mathscr{N}$ *sind nichtleer.*

(ii) γ_A *transformiert* $\dot{\mathscr{D}}_A$ *nach* $\dot{\mathscr{D}}_{A^*}$.

(iii) γ_{A^*} *transformiert* $\dot{\mathscr{D}}_{A^*}$ *nach* $\dot{\mathscr{D}}_A$.

Für die spezielle R-Algebra $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(\mathfrak{H})$, die Menge aller kompakten Operatoren in $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, ergibt sich als zugehörige maximale R-Menge $\mathscr{N}_{\mathfrak{C}}$ die Gesamtheit aller abgeschlossenen Unterräume mit endlicher Kodimension. Aus der Tatsache, daß $\mathfrak{C}$ ein zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{B}$ ist und aus Formel (6.7) folgt $\mathfrak{A}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. Ein bekanntes Kriterium von ATKINSON [1] besagt daher, daß die konventionellen Fredholmschen Operatoren mit den $\mathfrak{C}$-Fredholm-Operatoren identisch sind. Es ist leicht zu sehen, daß in diesem speziellen Falle die obigen Bedingungen (i), (ii), (iii) mit den in der Einleitung genannten Bedingungen (0.1) zur Charakterisierung von Fredholmschen Operatoren äquivalent sind. Es genügt sogar, dann nur (i) zu fordern; (ii) und (iii) ergeben sich als Folge.

Letzteres gilt keinesfalls allgemein. Wenn es überhaupt reguläre Operatoren in $\mathfrak{B}$ gibt, die nicht in $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ enthalten sind, so hat man natürlich die Bedingung (i), da $\dot{\mathscr{D}}_A = \mathscr{N} = \dot{\mathscr{D}}_{A^*}$; jedoch ist solch ein Operator nicht $\mathfrak{I}$-Fredholmsch, da er nicht in $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ liegt.

Ebenfalls folgt, daß $\mathscr{N}_{\mathfrak{C}}$-Operatoren und $\mathscr{N}_{\mathfrak{C}}$-*-Operatoren dasselbe bedeuten, daher kommt man im Falle $\mathscr{N} = \mathscr{N}_{\mathfrak{C}}$ mit der Hälfte der drei obigen Bedingungen aus, die sich auf A, nicht auf A^*, erstreckt.

7. Beweis des Äquivalenzsatzes

Zum Beweis von Satz 6.1 (oder Satz 6.2) ziehen wir wesentlich die in [5] aufgebauten Resultate heran. Man bemerke, daß gemäß [5], Kriterium 5.9 und Corollary 5.12, jeder $\mathfrak{I}$-Fredholm-Operator sicherlich ein $\mathscr{N}$-*-Operator ist. Mit andern Worten, eine Richtung der Äquivalenz wurde in [5] bereits bewiesen.

Sei nun A ein $\mathscr{N}$-*-Operator. Dann genügt es zu zeigen, daß $A \in \mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ gilt, weil dann nämlich wiederum Kriterium 5.9 aus [5] anwendbar ist, und somit folgt, daß A auch $\mathfrak{I}$-Fredholmsch ist.

Auch dieses verbleibende Stück des Beweises wurde in [5], § 6 bereits vorbereitet. Gemäß Corollary 6.9 aus [5] ist nämlich ein beschränkter regulärer Operator A stets in $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$, wenn nur γ_A und γ_{A^*} je eine zu $\mathscr{N}$ äquivalente R-Menge $\mathscr{M}$, $\mathscr{M}^*$ nach $\mathscr{N}$ transformieren. Nach Lemma 5.1 enthält nun die Menge $\mathscr{D}_A$ eines $\mathscr{N}$-Operators A die zu $\mathscr{N}$ äquivalente R-Menge $\mathscr{D}_A$, und $\mathscr{M} = \dot{\mathscr{D}}_A$ wird durch γ_1 nach $\mathscr{N}$ transformiert. Ist A sogar ein $\mathscr{N}$-*-Operator, so kann man entsprechend $\mathscr{M}^* = \dot{\mathscr{D}}_{A^*}$ setzen. Zur Anwendung von Corollary 6.9 aus [5] fehlt lediglich die Regularität von A, die man für allgemeine $\mathscr{N}$-*-Operatoren nicht erwarten kann.

Der Beweis von Satz 6.1 kommt somit auf eine Beseitigung dieser Voraussetzung in Corollary 6.9 aus [5] hinaus. Dies soll im folgenden erreicht werden.

Lemma 7.1. *Sei $\mathfrak{I}$ eine R-Algebra und sei $H \in \mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ ein beschränkter positiv hermitescher regulärer Operator. Sei das zu (u, v) äquivalente innere Produkt $\langle u, v\rangle$ durch* (2.1) *eingeführt.*

Behauptung: Die Aussage $\mathfrak{S} \in \mathscr{N}_{\mathfrak{I}}$ ist äquivalent zur Aussage $P_{\mathfrak{S}\langle\perp\rangle} \in \mathfrak{I}$.

Beweis. Aus Lemma 2.1 und seiner Zusatzbemerkung erhält man als $\langle u, v\rangle$-Projektion auf $\mathfrak{S}$ den Operator

$$Q_{\mathfrak{S}} = Y_{\mathfrak{S}} P_{\mathfrak{S}} H \tag{7.1}$$

mit $Y_{\mathfrak{S}}$ wie in (2.11).

Sei nun $\mathfrak{S} \in \mathscr{N}_{\mathfrak{I}}$, dann folgt aus (2.11), daß $Y_{\mathfrak{S}} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ und man hat

$$Y_{\mathfrak{S}} H_{\mathfrak{S}} = H_{\mathfrak{S}} Y_{\mathfrak{S}} = P_{\mathfrak{S}} = 1 - P_{\mathfrak{S}\perp}\,. \tag{7.2}$$

Nach (6.5) ist $P_{\mathfrak{S}\perp} \in \mathfrak{I}$, daher sind $Y_{\mathfrak{S}}$ und $H_{\mathfrak{S}}$ $\mathfrak{I}$-Fredholm-Operatoren und ihre Restklassen sind zueinander invers. Ferner sind $P_{\mathfrak{S}} H$ und $H_{\mathfrak{S}} = P_{\mathfrak{S}} H P_{\mathfrak{S}}$ in derselben Restklasse modulo $\mathfrak{I}$ enthalten, daher folgt, daß

$$Q_{\mathfrak{S}\langle\perp\rangle} = 1 - Q_{\mathfrak{S}} = 1 - Y_{\mathfrak{S}} P_{\mathfrak{S}} H \in \mathfrak{I}\,. \tag{7.3}$$

Nach Lemma 2.1 folgt nun

$$P_{\mathfrak{S}^\perp} = Z_{\mathfrak{S}^\perp} Q_{\mathfrak{S}^\perp} H^{-1} \tag{7.4}$$

mit

$$Z_{\mathfrak{S}^\perp} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (Q_{\mathfrak{S}^\perp} H^{-1} Q_{\mathfrak{S}^\perp} - \lambda)^{-1}\, d\lambda/\lambda \tag{7.5}$$

über eine passende Kurve Γ. Offenbar sind $Z_{\mathfrak{S}^\perp}$ und H^{-1} in $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$ folglich ist auch $P_{\mathfrak{S}^\perp}$ in $\mathfrak{F}$.

Obige Schlußweise ist umkehrbar. Für $P_{\mathfrak{S}^\perp} \in \mathfrak{F}$ erschließt man $Q_{\mathfrak{S}^\perp} = 1 - Q_{\mathfrak{S}} \in \mathfrak{F}$. Somit ist $Q_{\mathfrak{S}}$ $\mathfrak{F}$-Fredholmsch und in der Restklasse von 1. Daher ist wieder $Q_{\mathfrak{S}} H^{-1} Q_{\mathfrak{S}}$ $\mathfrak{F}$-Fredholmsch und der Operator

$$X_{\mathfrak{S}} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (Q_{\mathfrak{S}} H^{-1} Q_{\mathfrak{S}} - \lambda)^{-1}\, d\lambda/\lambda \tag{7.6}$$

ist eine Inverse von $Q_{\mathfrak{S}} H^{-1} Q_{\mathfrak{S}}$ modulo $\mathfrak{F}$. Daher folgt wiederum

$$1 - X_{\mathfrak{S}} Q_{\mathfrak{S}} H^{-1} = 1 - P_{\mathfrak{S}} = P_{\mathfrak{S}^\perp} \in \mathfrak{F}\,, \tag{7.7}$$

oder nach (6.5) die Aussage $\mathfrak{S} \in \mathcal{N}$, q. e. d.

Lemma 7.2. *Sei $\mathcal{N}$ eine maximale R-Menge. Der beschränkte Operator A habe ein abgeschlossenes Bild, und es seien $\mathfrak{S}_0 = \operatorname{im} A$ sowie $\mathfrak{S}_0^* = \operatorname{im} A^*$ in $\mathcal{N}$ enthalten. Die Einschränkungen $\hat{\gamma}_A$, $\hat{\gamma}_{A^*}$ von γ_A, γ_{A^*} auf $\mathcal{N}[\mathfrak{S}_0^*, 0]$ und $\mathcal{N}[\mathfrak{S}_0, 0]$ beziehungsweise seien Abbildungen der Form*

$$\begin{aligned} &\hat{\gamma}_A : \mathcal{N}[\mathfrak{S}_0^*, 0] \to \mathcal{N}[\mathfrak{S}_0, 0] \\ &\hat{\gamma}_{A^*} : \mathcal{N}[\mathfrak{S}_0, 0] \to \mathcal{N}[\mathfrak{S}_0^*, 0]\,. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Behauptung: A^*A und AA^* sind in $\mathfrak{A}(\mathfrak{F}_{\mathcal{N}})$ enthalten.

Beweis. Man bemerke, daß der Operator $B = A^*A + 1 - P_{\mathfrak{S}_0^*}$ regulär und hermitesch ist. Nach Satz 1.7 ist $\mathcal{N}[\mathfrak{S}_0^*, 0]$ eine zu $\mathcal{N}$ äquivalente maximale R-Menge, und nach (7.8) wird diese Menge durch $\gamma_{A^*A} = \gamma_{A^*} \circ \gamma_A$ nach $\mathcal{N}$ transformiert. Andererseits sieht man, daß $\gamma_{A^*A}(\mathfrak{S}) = \gamma_B(\mathfrak{S})$ gilt, für alle $\mathfrak{S} \in \mathcal{N}[\mathfrak{S}_0^*, 0]$, da $(1 - P_{\mathfrak{S}_0^*})u = 0$ gilt, für alle $u \in \mathfrak{S}_0^*$. Somit folgt $\gamma_B(\mathfrak{S}) \in \mathcal{N}$ für alle $\mathfrak{S} \in \mathcal{N}[\mathfrak{S}_0^*, 0]$. Nach Corollary 6.9 aus [5] folgt nun $B \in \mathfrak{A}(\mathfrak{F}_{\mathcal{N}})$, und so ergibt sich auch $A^*A \in \mathfrak{A}(\mathfrak{F}_{\mathcal{N}})$, da $1 - P_{\mathfrak{S}_0^*} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{F}_{\mathcal{N}})$. Aus Symmetriegründen folgt auch $AA^* \in \mathfrak{A}(\mathfrak{F}_{\mathcal{N}})$, q. e. d.

Satz 7.3. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 7.2 gilt $A \in \mathfrak{A}(\mathfrak{F}_{\mathcal{N}})$.*

Beweis. Wir bemerken, daß

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{F}_{\mathcal{N}}) = \left\{ A : \begin{array}{l} \text{Zu } \mathfrak{S} \in \mathcal{N}[\mathfrak{S}_0^*, 0],\ \mathfrak{T} \in \mathcal{N}[\mathfrak{S}_0, 0],\ \varepsilon > 0 \text{ gibt} \\ \text{es } \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'' \in \mathcal{N} \text{ mit } \|P_{\mathfrak{R}'}, A P_{\mathfrak{S}^\perp}\| \leqq \varepsilon,\ \|P_{\mathfrak{R}''} A^* P_{\mathfrak{T}^\perp}\| \leqq \varepsilon \end{array} \right\}. \tag{7.9}$$

Dies folgt aus (6.4) und der Tatsache, daß $\mathcal{N}[\mathfrak{S}_0^*, 0]$ und $\mathcal{N}[\mathfrak{S}_0, 0]$ zu $\mathcal{N}$ äquivalente R-Mengen sind.

Nun behaupten wir das folgende Lemma.

Lemma 7.4. *Unter obigen Voraussetzungen gilt $(A\mathfrak{S}^\perp)^\perp \in \mathcal{N}$ für alle $\mathfrak{S} \in \mathcal{N}[\mathfrak{S}_0^*, 0]$.*

Beweis. Zunächst sieht man, daß $A\mathfrak{S}^{\perp}$ zu $\mathscr{A}$ gehört, für alle $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}_0^* = \mathrm{im}A^*$, denn man hat $A\mathfrak{S}^{\perp} = A(\mathfrak{S}_0^* \cap \mathfrak{S}^{\perp})$ und der abgeschlossene Raum $\mathfrak{S}^* \cap \mathfrak{S}^{\perp} = \mathfrak{S}_1$ ist in $\mathscr{D}_A$, als Unterraum von $\mathfrak{S}_0^*$. Sei nun

$$\begin{aligned} B_1 &= A^*A + 1 - P_{\mathfrak{S}_0^*} \\ B_2 &= AA^* + 1 - P_{\mathfrak{S}_0} . \end{aligned} \tag{7.10}$$

Beide Operatoren sind regulär und in $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$, wie wir nach Lemma 7.2 wissen. Zudem ergibt sich

$$AB_1 = AA^*A = B_2A , \tag{7.11}$$

da nämlich $A(1 - P_{\mathfrak{S}_0^*}) = AP_{\ker A} = 0$ und $(1 - P_{\mathfrak{S}_0})A = (A^*P_{\ker A^*})^* = 0$ gilt. Aus (7.11) folgt

$$B_2^{-1}A = AB_1^{-1} . \tag{7.12}$$

Nun sei $u = Af$, $v = Ag$, $f \in \mathfrak{S}^{\perp}$, $g \in \mathfrak{S}$, dann folgt

$$\begin{aligned} (v, B_2^{-1}u) = (Ag, B_2^{-1}Af) &= (A^*Ag, B_1^{-1}f) \\ &= \big((A^*A + (1 - P_{\mathfrak{S}_0^*}))\, g, B_1^{-1}f\big) = (f, g) = 0 , \end{aligned} \tag{7.13}$$

da $g \in \mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}_0^*$ die Relation $(1 - P_{\mathfrak{S}_0^*})g = 0$ nach sich zieht.

Der Operator B_2^{-1} ist regulär, positiv und hermitesch, und nach Lemma 7.2 gilt $B_2^{-1} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{I})$. Erklärt man $\langle u, v\rangle$ mit $H = B_2^{-1}$ durch (2.1), so ergibt sich aus (7.13), daß $A\mathfrak{S}^{\perp}$ und $A\mathfrak{S}$ bezüglich $\langle u, v\rangle$ orthogonal sind, oder es gilt $\mathfrak{T}_0 = (A\mathfrak{S}^{\perp})^{\langle\perp\rangle} \supset A\mathfrak{S}$. Nun wissen wir, daß $A\mathfrak{S} = \gamma_A(\mathfrak{S}) \in \mathscr{N}$, zufolge (7.8).

Ferner ist $\mathscr{N}$ eine maximale R-Menge und enthält daher jeden abgeschlossenen Raum, der einen in $\mathscr{N}$ enthaltenen Teilraum besitzt. Somit hat man auch $\mathfrak{T}_0 \in \mathscr{N}$, da nach obigem $\mathfrak{T}_0 \supset A\mathfrak{S} \in \mathscr{N}$. Man wende nun Lemma 7.1 an und erhält die Aussage $P_{\mathfrak{T}_0^{\perp}} = P_{A\mathfrak{S}^{\perp}} \in \mathfrak{I}$. Schließlich hat man nach Formel (6.5), daß $(A\mathfrak{S}^{\perp})^{\perp} \in \mathscr{N}$ und Lemma 7.4 ist bewiesen.

Die Vervollständigung des Beweises von Satz 7.3 gelingt nun rasch. Lemma 7.4 besagt nämlich, daß der Raum $\mathfrak{L}' = (A\mathfrak{S}^{\perp})^{\perp}$ in $\mathscr{N}$ enthalten ist, und man hat trivialerweise $P_{\mathfrak{L}'}AP_{\mathfrak{S}^{\perp}} = 0$ oder $\|P_{\mathfrak{L}'}AP_{\mathfrak{S}^{\perp}}\| \leqq \varepsilon$ für jedes beliebige $\varepsilon > 0$. In analoger Weise gelingt die Konstruktion eines Raumes $\mathfrak{L}'' \in \mathscr{N}$ mit $\|P_{\mathfrak{L}''}A^*P_{\mathfrak{T}^{\perp}}\| = 0 \leqq \varepsilon$. Nach (7.9) ist damit Satz 7.3 bewiesen.

Nun beweisen wir Satz 6.1 und Satz 6.2. Sei A ein beliebiger $\mathscr{N}$-$*$-Operator und sei $\mathfrak{S}_0^* \in \mathring{\mathscr{D}}_A = \mathscr{D}_A \cap \mathscr{N}$. Dann erfüllt der Operator $\mathring{A} = AP_{\mathfrak{S}_0^*}$ alle Voraussetzungen von Lemma 7.2 und Satz 7.3. Folglich ist $\mathring{A}$ in $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$. In ähnlicher Weise folgt, daß für $\mathfrak{S}_0 \in \mathscr{D}_{A^*}$ der Operator $A^*P_{\mathfrak{S}_0}$, und daher auch $P_{\mathfrak{S}_0}A = (A^*P_{\mathfrak{S}_0})^*$ in $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ enthalten sind. Ferner hat man

$$A = AP_{\mathfrak{S}_0^{*\perp}} + P_{\mathfrak{S}_0}AP_{\mathfrak{S}_0^{*\perp}} = P_{\mathfrak{S}_0^{\perp}}AP_{\mathfrak{S}_0^{*\perp}} . \tag{7.14}$$

Die ersten beiden Terme rechts sind nach obigem in $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$, und der letzte Term $P_{\mathfrak{S}_0^{\perp}}AP_{\mathfrak{S}_0^{*\perp}}$ ist ebenfalls in $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$, wie aus Theorem 3.9 in [4] folgt. Somit ist $A \in \mathfrak{A}(\mathfrak{I})$, q. e. d.

8. Beweis von Satz 1.7

Wir holen endlich den Beweis von Satz 1.7 nach, zu dem wir uns erneut auf die beiden früheren Arbeiten [4] und [5] beziehen. Den Ausgangspunkt bildet das folgende Lemma, das im Zusammenhang mit Lemma 2.2 aus [4] betrachtet werden sollte.

Lemma 8.1. *Sei $\mathcal{N}$ eine maximale R-Menge, und sei $\delta(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) < 1$ für $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \in \mathcal{N}$. Dann liegt der Raum*

$$\mathfrak{T}' = \mathfrak{T} \cap (\mathfrak{T} \cap \mathfrak{S}^{\perp})^{\perp} \tag{8.1}$$

ebenfalls in $\mathcal{N}$, und man hat

$$\mathfrak{T}' \subset \mathfrak{T}, g(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}') = \delta(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) . \tag{8.2}$$

Beweis. Man bemerke zunächst, daß (8.2) mit der Aussage von Lemma 2.2 in [4] übereinstimmt. Sei $\mathfrak{I}^1$ die durch Adjunktion des Einheitsoperators I aus $\mathfrak{I}$ erzeugte C^*-Algebra, dann folgt aus Corollary 2.5 in [4], daß $P_{\mathfrak{T}'} \in \mathfrak{I}^1$, da ersichtlich $P_{\mathfrak{S}^{\perp}}$, $P_{\mathfrak{T}^{\perp}} \in \mathfrak{I}$ und daher $P_{\mathfrak{S}}$, $P_{\mathfrak{T}} \in \mathfrak{I}^1$. Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, anzunehmen, daß $I \notin \mathfrak{I}$, denn $I \in \mathfrak{I}$ ist nur möglich, wenn $\mathcal{N}$ den Raum $\{0\}$ enthält und da $\mathcal{N}$ eine maximale R-Menge ist, folgte dann $\mathcal{N} = \mathscr{A}$, d. h. die Aussage $\mathfrak{T}' \in \mathcal{N}$ ist trivial. Ferner ergibt sich leicht, daß jeder Operator $C \in \mathfrak{I}^1$ eindeutig in der Form $C = \alpha + C'$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$, $C' \in \mathfrak{I}$ dargestellt werden kann. Somit hat man $P_{\mathfrak{T}'^{\perp}} = \alpha + A$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $A \in \mathfrak{I}$. Aus $(P_{\mathfrak{T}'^{\perp}})^2 = P_{\mathfrak{T}'^{\perp}}$ folgt nun $\alpha^2 - \alpha = \alpha(\alpha - 1) = 0$, man hat also entweder $\alpha = 0$, d. h. $P_{\mathfrak{T}'^{\perp}} = A \in \mathfrak{I}$ oder $\alpha = 1$, d. h. $P_{\mathfrak{T}'} = 1 - P_{\mathfrak{T}'^{\perp}} = -A \in \mathfrak{I}$. Also gilt es zu zeigen, daß der letztere Fall unmöglich ist. Wäre nun $P_{\mathfrak{T}'} \in \mathfrak{I}$, dann hätte man

$$P_{\mathfrak{T}^{\perp} \oplus \mathfrak{T}'} = P_{\mathfrak{T}^{\perp}} + P_{\mathfrak{T}'} \in \mathfrak{I} , \tag{8.3}$$

also folgte

$$\mathfrak{S} \in \mathcal{N}, \mathfrak{L} = \mathfrak{T} \cap \mathfrak{S}^{\perp} \in \mathcal{N} , \tag{8.4}$$

da nach (8.1) die Beziehung

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{T} \cap \mathfrak{T}'^{\perp} \tag{8.5}$$

oder

$$\mathfrak{L}^{\perp} = \mathfrak{T}^{\perp} \oplus \mathfrak{T}' \tag{8.6}$$

richtig ist. Aber die beiden Räume $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{L}$ sind zueinander orthogonal; daher hätte man

$$g(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = 1 \tag{8.7}$$

für alle $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M} \neq \{0\}$, $\mathfrak{N} \neq \{0\}$. Ferner ist $\mathcal{N}$ eine R-Menge, daher folgte aus (8.4) die Existenz eines Raumes $\mathfrak{K} \in \mathcal{N}$ mit

$$\delta(\mathfrak{K}, \mathfrak{S}) < 1/2, \quad \delta(\mathfrak{K}, \mathfrak{L}) < 1/2 . \tag{8.8}$$

Wendete man darauf Lemma 2.2 aus 4 an, so ergäben sich Räume $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$ und $\mathfrak{L}' \subset \mathfrak{L}$ mit

$$g(\mathfrak{K}, \mathfrak{S}') < 1/2, \quad g(\mathfrak{K}, \mathfrak{L}') < 1/2 , \tag{8.9}$$

und man hätte nach der Dreiecksungleichung $g(\mathfrak{S}', \mathfrak{L}') < 1$, oder nach (8.7) $\mathfrak{S}' = \mathfrak{L}' = \mathfrak{R} = \{0\}$. Jedoch liegt nach obiger Voraussetzung der Raum $\{0\}$ nicht in $\mathcal{N}$, daher ist dies ein Widerspruch und Lemma 8.1 ist bewiesen.

Nun wollen wir Satz 1.7 beweisen. Sei $\mathfrak{S}_0 \in \mathcal{N}$, $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \in \mathcal{N}[\mathfrak{S}_0, 0]$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Man bestimme $\mathfrak{R} \in \mathcal{N}(\mathfrak{S}_0, \varepsilon/2)$ mit $\delta(\mathfrak{R}, \mathfrak{S}) < \varepsilon/2$, $\delta(\mathfrak{R}, \mathfrak{T}) < \varepsilon/2$ und dann $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{L} \in \mathcal{N}$ mit $g(\mathfrak{R}, \mathfrak{L}) < \varepsilon/2$, nach Lemma 8.1. Es folgt $\mathfrak{L} \in \mathcal{N}[\mathfrak{S}_0, 0]$ und $\delta(\mathfrak{L}, \mathfrak{S}) < \varepsilon$, $\delta(\mathfrak{L}, \mathfrak{T}) < \varepsilon$, daher ist $\mathcal{N}[\mathfrak{S}_0, 0]$ eine R-Menge.

Nun sei $\mathfrak{S}$ beliebig aus $\mathcal{N}$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Man bestimme ein $\mathfrak{T} \in \mathcal{N}(\mathfrak{S}_0, \varepsilon/2)$ mit $\delta(\mathfrak{T}, \mathfrak{S}) < \varepsilon/2$, was möglich ist, da nach Lemma 1.6 die 1δ-Kugel $\mathcal{N}(\mathfrak{S}_0, \varepsilon/2)$ zu $\mathcal{N}$ äquivalent ist. Es folgt nach Lemma 8.1 die Existenz von $\mathfrak{R} \in \mathcal{N}[\mathfrak{S}_0, 0]$ mit $g(\mathfrak{R}, \mathfrak{T}) < \varepsilon/2$, und somit gilt $\delta(\mathfrak{R}, \mathfrak{T}) < \varepsilon$. Da dies für alle $\varepsilon > 0$ möglich ist, schließt man, daß $\mathfrak{S}$ in der 1δ-Abschließung von $\mathcal{N}[\mathfrak{S}_0, 0]$ enthalten ist. Daher ist in der Tat die R-Menge $\mathcal{N}[\mathfrak{S}_0, 0]$ zu $\mathcal{N}$ äquivalent, q. e. d.

Literatur

[1] Atkinson, F. V.: On relatively regular operators. Acta Sci. Math. **15**, 38—56 (1953).

[2] Coburn, L., and A. Lebow: Algebraic theory of Fredholm operators. Erscheint demnächst.

[3] Cordes, H. O.: Über die Spektralzerlegung von hypermaximalen Operatoren, die durch Separation der Variablen zerfallen (II. Mitteilung). Math. Ann. **128**, 373—411 (1955).

[4] — On a class of C^*-algebras. Erscheint in den Math. Ann.

[5] — On a generalized Fredholm theory. Erscheint demnächst.

[6] Rellich, F.: Störungstheorie der Spektralzerlegung. Math. Ann. **118**, 462—484 (1942).

[7] Riesz, F., and B. Sz. Nagy: Functional analysis. New York: F. Ungar Publ. Co. 1955.

(Eingegangen am 26. Oktober 1965)

HILDEBRANDT, S.
Math. Annalen 163, 230—247 (1966)

Über den numerischen Wertebereich eines Operators

Herrn GOTTFRIED KÖTHE zum 60. Geburtstag am 25. 12. 1965 gewidmet

Von

STEFAN HILDEBRANDT in Mainz

Wir betrachten in dieser Arbeit beliebige beschränkte lineare Operatoren T auf einem endlich- oder unendlichdimensionalen Hilbertraum $\mathfrak{H}$ über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen mit dem Skalarprodukt (x, y) und der Norm $\|x\| = (x, x)^{1/2}$. Es soll untersucht werden, welche Informationen über T sich aus der Gestalt des numerischen Wertebereichs

$$W(T) = \{(Tx, x) : \|x\| = 1\} \subset \mathbb{C}$$

und aus anderen Eigenschaften dieser Punktmenge gewinnen lassen und wie $\overline{W(T)}$ näher charakterisiert werden kann. Bekanntlich haben TOEPLITZ und HAUSDORFF bewiesen, daß $W(T)$ eine konvexe Menge ist[1]).

Wir zeigen in Abschnitt 1, daß jede Ecke ε des Abschlusses $\overline{W(T)}$ des numerischen Wertebereichs im Spektrum $\sigma(T)$ des Operators T liegt. Eine in $W(T)$ enthaltene Ecke ε ist sogar Eigenwert von T, wie bereits DONOGHUE [2] bemerkt hat, denn dann folgt aus $\varepsilon = (Tx, x)$ auch $Tx = \varepsilon x$. Hieraus ergibt sich, daß die konjugierte Zahl $\bar{\varepsilon}$ Eigenwert des adjungierten Operators T^* mit dem Eigenvektor x ist, d. h. $T^*x = \bar{\varepsilon} \cdot x$, denn nach KIPPENHAHN [9] verhalten sich die Eigenwerte von T, die auf dem Rande von $W(T)$ liegen, wie die Eigenwerte eines normalen Operators.

Wir betrachten die Funktionen $r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$ = Spektralradius von T, $|T| = \sup\{|(Tx, x)| : \|x\| = 1\}$ und $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}$ = Norm von T. Nach WINTNER [21] gilt $\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$ und somit $r(T) \leqq |T| \leqq \|T\| \leqq 2|T|$.

Unter ∂X verstehen wir den Rand und unter $\mathfrak{C}X$ die konvexe Hülle einer Menge $X \subset \mathbb{C}$. Da $\overline{W(T)}$ konvex ist, gilt also

$$\mathfrak{C}\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}\,. \tag{1}$$

In Nr. 2 beweisen wir, daß sich $\mathfrak{C}\sigma(T)$ gerade als Durchschnitt aller Wertebereiche von T ergibt, die bezüglich der zu (x, y) „äquivalenten" Skalarprodukte gebildet werden. Dieses Resultat war bisher nur für den Fall eines endlichdimensionalen Raumes $\mathfrak{H}$ bekannt (vgl. GIVENS [5]). Wir benutzen die Bezeichnung $|X| = \sup\{|z| : z \in X\}$ für eine Menge $X \subset \mathbb{C}$.

Für die weiteren Untersuchungen brauchen wir einige Begriffe und Ergebnisse aus der Theorie der Spektralmengen.

[1]) Für einen einfachen Beweis vgl. [2].

Sei $\mathscr{R}(X)$ die Algebra der rationalen (komplexwertigen) Funktionen $f(z)$ ohne Pole in $X \subseteq \mathbb{C}$. Dann ist nach DUNFORD [4] für jedes $f \in \mathscr{R}(\sigma(T))$ der Operator $f(T) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial G} f(\lambda)\,(\lambda \cdot I - T)^{-1}\,d\lambda$ eindeutig definiert, beschränkt und linear, wobei G eine offene Menge mit $\sigma(T) \subseteq G$ und $f \in \mathscr{R}(\overline{G})$ bezeichnet, deren Rand ∂G aus endlich vielen rektifizierbaren und positiv orientierten Jordankurven besteht.

Nach VON NEUMANN [12] heißt eine abgeschlossene Menge $X \subseteq \mathbb{C}$ *Spektralmenge* des Operators T, wenn $\sigma(T) \subseteq X$ und wenn für jedes $f \in \mathscr{R}(X)$ die Ungleichung

$$\|f(T)\| \leqq \|f\|_X \underset{\text{def}}{=} \sup\{|f(z)| : z \in X\} \tag{2}$$

erfüllt ist. Das wichtigste Resultat VON NEUMANNS ist: Für jeden Operator T ist die Kreisscheibe $\{z : |z| \leqq \|T\|\}$ eine Spektralmenge. Durch Anwendung von Kreisverwandtschaften erhält man allgemeiner den

Satz A: *Die Punktmengen* $\{z : |z - \alpha| \leqq r\}$, $\{z : |z - \alpha| \geqq r\}$ *bzw.* $\{z : \mathrm{Re}\, z \geqq 0\}$ *sind genau dann spektral für den Operator* T, *wenn* $\|T - \alpha I\| \leqq r$, $\|(T - \alpha I)^{-1}\| \leqq \frac{1}{r}$ *bzw.* $\mathrm{Re}\, T = \frac{1}{2}(T + T^*) \geqq 0$ *ist (vgl.* [15]*).*

Mit HALMOS bezeichnen wir einen Operator N, der in einem $\mathfrak{H}$ als Unterraum enthaltenden Hilbertraum $\mathfrak{K}$ definiert ist, als eine *Dilatation* von T, falls $T = PNP$ ist, wobei P den orthogonalen Projektor von $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{H}$ bedeutet. Ferner heißt N *starke Dilatation* von T, wenn sogar $T^n = PN^nP$ für alle $n = 1, 2, \ldots$ gilt. Zwischen den Spektralmengen und den normalen Dilatationen eines Operators besteht der folgende, von C. FOIAŞ und B. SZ.-NAGY [19] aufgedeckte Zusammenhang:

Satz B: *Wenn* X *eine kompakte Spektralmenge des Operators* T *ist, so gibt es eine starke normale Dilatation* N *von* T *mit* $\sigma(N) \subseteq \partial X$.

Hieraus folgt insbesondere die Existenz starker unitärer Dilatationen für eine Kontraktion T (d. h. $\|T\| \leqq 1$), ein zuerst von B. SZ.-NAGY bewiesenes Resultat (vgl. [15]).

Schließlich verwenden wir den folgenden Spezialfall eines weiteren von Neumannschen Resultates:

Satz C: *Für jede lineare Funktion* $p(z) = \alpha z + \beta$ *mit* $\alpha \neq 0$ *ist eine Menge* X *genau dann Spektralmenge des Operators* T, *wenn* $p(X)$ *Spektralmenge von* $p(T) = \alpha T + \beta I$ *ist.*

Weiterhin nennen wir einen Punkt $\lambda \in \partial X$ „*Kreispunkt*" einer kompakten konvexen Menge X, wenn es einen „*Stützkreis*" $K = \{z : |z - \alpha| \leqq r\}$ an X mit λ als Stützpunkt gibt, genauer gesagt, wenn $\lambda \in \partial K$ und $X \subseteq K$ ist. Bezeichne $\mathscr{E}$ die Menge der Extremalpunkte und $\mathscr{B}$ die Menge der Kreispunkte der (kompakten und konvexen) Menge X. Dann ist bekanntlich $\mathscr{E} = \overline{\mathscr{B}} =$ Abschluß von $\mathscr{B}$ und $X = \mathscr{C}\mathscr{E}$. Im folgenden verstehen wir unter $\mathscr{E}(T)$ bzw. $\mathscr{B}(T)$ die Menge der Extremalpunkte bzw. der Kreispunkte von $\overline{W(T)}$. Dann gilt also

$$\mathscr{E}(T) = \overline{\mathscr{B}(T)} \quad \text{und} \quad \overline{W(T)} = \mathscr{C}\mathscr{E}(T)\,.$$

Wir zeigen in Nr. 3, daß sich $\overline{W(T)}$ als Durchschnitt von Kreisen darstellen läßt, die Spektralmengen des Operators T sind. Hieraus folgt die Verschärfung eines von HALMOS [6] angegebenen Satzes über die Beschreibung von $\overline{W(T)}$ mittels der starken normalen Dilatationen von T.

Im Abschnitt 4 diskutieren wir dann verschiedene Bedingungen dafür, daß $\overline{W(T)}$ gerade die konvexe Hülle des Spektrums von T ist. Abschließend untersuchen wir die Frage, ob die in $W(T)$ gelegenen Extremalpunkte von $\overline{W(T)}$ Eigenwerte von T sind, wenn wir nur $\mathfrak{C}\sigma(T) = \overline{W(T)}$ annehmen. Wir bemerken noch, daß die Arbeit [20] von WINTNER, die allerdings einige Fehler enthält (vgl. [16] und [7]), der Ausgangspunkt unserer Überlegungen war.

1. Über den Rand des numerischen Wertebereichs

Da $\partial W(T)$ eine konvexe Kurve ist, existiert bis auf eine Ausnahmemenge von abzählbar vielen Punkten überall eine Tangente. In den Ausnahmepunkten ε hat $\overline{W(T)}$ eine „*Ecke*", d. h. es gibt einen abgeschlossenen Kegel $\mathfrak{K} \supseteq \overline{W(T)}$ mit dem Öffnungswinkel θ, wobei $0 \leqq \theta < \pi$, und mit der Spitze ε.

Satz 1: (i) *Jede Ecke ε von $\overline{W(T)}$ liegt im approximativen Punktspektrum $\pi(T)$ des Operators T.*

(ii) *Wenn die Ecke ε sogar in $W(T)$ liegt, also $(Tx, x) = \varepsilon$ für einen Vektor x mit $\|x\| = 1$ ist, so liegt ε im Punktspektrum $\sigma_p(T)$, und zwar gilt $Tx = \varepsilon x$.*

Beweis: (i) Da $p(W(T)) = W(p(T))$ und $p(\pi(T)) = \pi(p(T))$ für $p(z) = \alpha z + \beta$ ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\varepsilon = 0$ ist und $\overline{W(T)}$ im Winkelraum $\mathfrak{K} = \{z : \mathrm{Re}\, z \geqq 0, 0 \leqq \arg z \leqq \theta < \pi\}$ liegt, dabei kann $\theta > 0$ vorausgesetzt werden. Wir wählen eine komplexe Zahl $\lambda = r \cdot e^{i\theta}$ mit $r > 0$. Nun haben wir die Zerlegung einer komplexen Zahl $z = \alpha + i\beta$ in Realteil $\alpha = \frac{z + \bar{z}}{2}$ und Imaginärteil $\beta = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ und analog die Zerlegung von $T = A + iB$ mit Hilfe der selbstadjungierten Operatoren $A = \mathrm{Re}\, T = \frac{1}{2}(T + T^*)$, $B = \mathrm{Im}\, T = \frac{1}{2i}(T - T^*)$, wobei $(Tx, x) = (Ax, x) + i(Bx, x)$ mit (Ax, x), (Bx, x) reell gilt. Zerlegen wir jetzt λ in $\lambda = \mu + i\nu$, μ, ν reell, so ist $\nu \neq 0$ wegen $0 < \theta < \pi$ und daher $i = \frac{\lambda - \mu}{\nu}$. Damit bekommen wir $T = \tilde{A} + \lambda \tilde{B}$, wo $\tilde{A} = A - \frac{\mu}{\nu} \cdot B$ und $\tilde{B} = \frac{1}{\nu} \cdot B$ ebenfalls selbstadjungierte Operatoren sind, und $(Tx, x) = (\tilde{A}x, x) + \lambda(\tilde{B}x, x)$. Da $\overline{W(T)} \subseteq \mathfrak{K}$ und $\lambda = r \cdot e^{i\theta}$, $r > 0$, ist, finden wir $(\tilde{A}x, x) \geqq 0$ und $(\tilde{B}x, x) \geqq 0$ für alle $x \in \mathfrak{H}$, d. h. $\tilde{A} \geqq 0$, $\tilde{B} \geqq 0$. Andererseits ist 0 Eckpunkt von $\overline{W(T)}$, so daß es eine Folge von Einheitsvektoren x_n mit $(Tx_n, x_n) \to 0$ für $n \to \infty$ gibt, woraus $(\tilde{A}x_n, x_n) \to 0$ und $(\tilde{B}x_n, x_n) \to 0$ mit $n \to \infty$ folgt. Hieraus ergibt sich bekanntlich $\|\tilde{A}x_n\| \to 0$ und $\|\tilde{B}x_n\| \to 0$, da $\tilde{A} \geqq 0$ und $\tilde{B} \geqq 0$ ist, und damit auch $\|Tx_n\| \leqq \|\tilde{A}x_n\| + |\lambda| \cdot \|\tilde{B}x_n\| \to 0$ für $n \to \infty$, d. h. $0 \in \pi(T)$. Der erste Teil ist damit bewiesen.

(ii) Falls die Ecke $\varepsilon = 0$ in $W(T)$ liegt, gibt es einen Vektor $x \in \mathfrak{H}$, $\|x\| = 1$, mit $(Tx, x) = (\tilde{A}x, x) + \lambda \cdot (\tilde{B}x, x) = 0$, daher $(\tilde{A}x, x) = (\tilde{B}x, x) = 0$ und

wegen $\tilde{A} \geqq 0$, $\tilde{B} \geqq 0$ auch $\tilde{A}x = \tilde{B}x = 0$ und damit $Tx = \tilde{A}x + \lambda \cdot \tilde{B}x = 0$, d. h. $0 \in \sigma_p(T)$. Hiermit ist der Beweis komplett.

Teil (ii) unseres Satzes wurde von W. F. Donoghue [2] entdeckt und in ganz anderer Weise durch Reduktion auf den Fall $\dim \mathfrak{H} = 2$ bewiesen, in dem man den numerischen Wertebereich explizit berechnen kann. Im Spezialfall $\dim \mathfrak{H} < \infty$ (wo (i) und (ii) zusammenfallen) ist der Satz bereits von R. Kippenhahn [9] bewiesen worden, sein Beweis läßt sich allerdings nicht auf den allgemeinen Fall übertragen. Teil (i) scheint dagegen noch nicht bekannt zu sein. Wenden wir ihn auf vollstetige Operatoren T an, für die $\sigma(T) - \{0\} \subseteq \sigma_p(T)$ ist, so finden wir, daß jede von Null verschiedene Ecke von $\overline{W(T)}$ ein Eigenwert von T ist.

Wir bezeichnen jetzt mit $E_\lambda[T] = \{x : Tx = \lambda \cdot x\}$ den Unterraum der zum Eigenwert λ gehörenden Eigenvektoren x von T. Wir wollen $\lambda \in \sigma_p(T)$ „*normalen Eigenwert*" von T nennen, wenn $E_\lambda[T] = E_{\bar{\lambda}}[T^*]$ ist. Normale Eigenwerte verhalten sich so, als ob sie Eigenwerte eines normalen Operators wären. Es gilt nämlich:

1) *Zu einem normalen Eigenwert gibt es keine nichtlinearen Elementarteiler.*

2) *Wenn λ_1 und λ_2 normale Eigenwerte von T sind, so ist $E_{\lambda_1}[T]$ orthogonal zu $E_{\lambda_2}[T]$.*

Denn aus $(T - \lambda \cdot I)^2 x = 0$ folgt mit $y = (T - \lambda \cdot I)x$, daß $(T - \lambda \cdot I)y = 0$ ist. Da λ normal ist, haben wir auch $(T^* - \bar{\lambda} \cdot I)y = 0$ und somit $0 = ((T^* - \bar{\lambda} \cdot I)y, x) = \|(T - \lambda \cdot I)x\|^2$, daher bereits $(T - \lambda \cdot I)x = 0$, womit 1) bewiesen ist. Der Beweis von 2) ist derselbe wie der übliche Beweis bei normalen Operatoren.

Satz 2: *Für einen beliebigen Operator T gilt*

(i) *Die auf dem Rande von $W(T)$ liegenden Eigenwerte von T sind normal.*

(ii) *Wenn $\lambda \in \partial W(T)$ und $\|Tx_n - \lambda x_n\| \to 0$ mit $n \to \infty$, $\|x_n\| = 1$, so folgt $\|T^* x_n - \bar{\lambda} \cdot x_n\| \to 0$.*

Beweis: (i) Es genügt zu zeigen: aus $Tx = \lambda \cdot x$, $\|x\| = 1$, und $\lambda \in \partial W(T)$ folgt $T^* x = \bar{\lambda} \cdot x$. Da $W(p(T)) = p(W(T))$ und $\sigma_p(p(T)) = p(\sigma_p(T))$ für $p(z) = \alpha z + \beta$ ist, genügt es, $\lambda = 0$ und $\operatorname{Re} T \leqq 0$ anzunehmen. Aus $(Tx, x) = 0$ folgt $(\operatorname{Re} Tx, x) = \operatorname{Re}(Tx, x) = 0$ und daher wegen $\operatorname{Re} T$ (= selbstadjungiert) $\leqq$ $\leqq 0$ auch $\operatorname{Re} Tx = 0$. Da auch $0 = Tx = \operatorname{Re} Tx + i \cdot \operatorname{Im} Tx$ ist, folgt $\operatorname{Im} Tx = 0$ und somit $T^* x = \operatorname{Re} Tx - i \cdot \operatorname{Im} Tx = 0$.

(ii) beweist man nach genau demselben Schema.

Die Beweismethode dieses Satzes geht auf R. Kippenhahn [9] zurück, der (i) für $\dim \mathfrak{H} < \infty$ bewies. Teil (ii) ist das Gegenstück für den auf $\partial W(T)$ liegenden Teil des approximativen Punktspektrums (übrigens kann auf $\partial W(T)$ nur approximatives Punktspektrum liegen, denn $\sigma(T) \cap \partial W(T) \subseteq$ $\subseteq \partial \sigma(T) \subseteq \pi(T)$). Man sieht leicht, daß $(x_n, y_n) \to 0$ mit $n \to \infty$, wenn $\|Tx_n - \lambda_1 \cdot x_n\| \to 0$, $\|Ty_n - \lambda_2 \cdot y_n\| \to 0$, $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \partial W(T)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Ferner kann auf $\partial W(T)$ kein Residuenspektrum liegen, denn aus $\lambda \in \partial W(T)$ folgt $\bar{\lambda} \in \partial W(T^*)$, und aus $\lambda \in \sigma_r(T)$ folgt $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$, nach (i) von Satz 2 ist dann $\lambda \in \sigma_p(T)$, was ein Widerspruch dazu ist, daß $\sigma_p(T) \cap \sigma_r(T)$ leer ist (vgl. [4]).

Schließlich ergibt sich aus 1) und (i), daß zu den Eigenwerten $\lambda \in \sigma_p(T) \cap \partial W(T)$ keine nichtlinearen Elementarteiler gehören können.

Übrigens kann man Teil (i) unseres Satzes 2 auch aus einem Resultat von C. FOIAŞ und B. SZ.-NAGY ([18], S. 93) herleiten:

Sei X eine Spektralmenge von T und sei $\lambda \in \sigma_p(T)$ ein Randpunkt von X derart, daß es eine Folge von Kreisen $K_n = \{z : |z - \lambda_n| \leqq r_n\}$ gibt, die sämtlich in der Komplementärmenge von X enthalten sind und für die $\lambda_n \to \lambda$ sowie $r_n^{-1} \cdot |\lambda_n - \lambda| \to 1$ mit $n \to \infty$ ist. Dann ist λ normal.

Ist nun $\lambda \in \sigma_p(T) \cap \partial W(T)$, so gibt es eine Stützhalbebene $\mathscr{H}$ an $\overline{W(T)}$ mit λ als Stützpunkt. Wie wir später zeigen werden (vgl. Nr. 4, Lemma 6), ist $\mathscr{H}$ Spektralmenge von T. Da $\mathscr{H}$ offensichtlich die oben von der Menge X geforderten Eigenschaften besitzt, so ist λ normal.

Der Beweis des oben genannten Satzes von FOIAŞ-NAGY liefert auch das folgende Resultat:

Wenn $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$ ein isolierter Punkt von $\sigma(T)$ ist und die Resolvente $R_\lambda(T) = (\lambda \cdot I - T)^{-1}$ von T der Wachstumsbeziehung $\|R_\lambda(T)\| \leqq \frac{1}{|\lambda - \lambda_0|}$ für alle λ mit $0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ genügt, wobei $\varepsilon > 0$ beliebig klein sein kann, so ist λ normaler Eigenwert von T.

Satz 3: *Ein Operator T, dessen Resolvente der Bedingung*

$$\|R_\lambda(T)\| \leqq \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T))} \quad \text{für alle} \quad \lambda \notin \sigma(T) \tag{3}$$

genügt, hat die folgenden Eigenschaften:

(a) *Wenn $\dim \mathfrak{H} < \infty$ ist, so ist T normal.*

(b) *Wenn T vollstetig ist, so kann man T in die orthogonale Summe $T = N \oplus T_0$ von einem normalen vollstetigen Operator N und einem quasinilpotenten vollstetigen Operator T_0 zerlegen.*

Beweis: (a) Seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ die verschiedenen Eigenwerte von T. Dann betrachten wir die zugehörigen Jordan-Zerlegung von $\mathfrak{H}$ in eine direkte Summe $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2 + \cdots + \mathfrak{H}_n$ von invarianten Unterräumen $\mathfrak{H}_i$ für T: $T\mathfrak{H}_i \subseteq \mathfrak{H}_i$, so daß für $T_i = T|_{\mathfrak{H}_i}$ gilt: $\sigma(T_i) = \{\lambda_i\}$. Aus (3) folgt $\|R_\lambda(T)\| \leqq |\lambda - \lambda_i|^{-1}$ für $0 < |\lambda - \lambda_i| < \varepsilon$ und $i = 1, \ldots, n$ bei hinreichend kleinem ε. Aus dem oben Gesagten folgt, daß die λ_i normale Eigenwerte sind, es gibt also keine nichtlinearen Elementarteiler, d. h. $T_i = \lambda_i \cdot I_i$, wo I_i die Identität auf $\mathfrak{H}_i$ bezeichnet, und $\mathfrak{H}_i \perp \mathfrak{H}_j$ für $i \neq j$, d. h. die $\mathfrak{H}_i$ reduzieren T: $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{H}_n$ ist eine orthogonale Summe und $T = \lambda_1 \cdot I_1 \oplus \lambda_2 \cdot I_2 \oplus \cdots \oplus \lambda_n \cdot I_n$, also ist T normal.

(b) wird ganz ähnlich bewiesen, man muß nur beachten, daß die obige orthogonale Summe von skalaren Operatoren jetzt unendlich sein kann, sie liefert den normalen kompakten Operator N. Außerdem kommt aber noch ein kompakter Operator T_0 mit $\sigma(T_0) = \{0\}$ hinzu, da 0 jetzt Häufungspunkt des Spektrums sein kann.

Falls $\sigma(T)$ keine isolierten Eigenwerte enthält, läßt sich im allgemeinen aus (3) nichts anderes als $\mathscr{C}\sigma(T) = \overline{W(T)}$ schließen, wie wir in Abschnitt 3 sehen werden.

2. Eine Darstellung der konvexen Hülle des Spektrums

Das Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis der Relation

$$\mathfrak{C}\sigma(T) = \bigcap_{B\in\mathfrak{B}} \overline{W(BTB^{-1})}\,, \tag{4}$$

wobei B die Menge $\mathfrak{B}$ aller invertierbaren Operatoren auf $\mathfrak{H}$ durchläuft. Im Falle $\dim\mathfrak{H} < \infty$ wurde (4) zuerst von W. Givens [5] bewiesen; seine Beweismethode läßt sich aber nicht auf den unendlichdimensionalen Fall verallgemeinern, da sie die Jordan-Zerlegung eines endlichdimensionalen Operators benutzt.

Der Zweck der Durchschnittsbildung in (4) ist es, die Abhängigkeit des numerischen Wertebereichs vom Skalarprodukt zu eliminieren, denn während das Spektrum $\sigma(T)$ eines Operators T gegenüber Ähnlichkeitstransformationen BTB^{-1} invariant ist, so ist der numerische Wertebereich nur eine unitäre Invariante. Die auf der rechten Seite von (4) erscheinende Menge ist offensichtlich nichts anderes als der Durchschnitt der Wertebereiche

$$W_H(T) = \{(HTx, x) : (Hx, x) = 1\}$$

von T bezüglich aller positiv definiten Operatoren H auf $\mathfrak{H}$, d. h. bezüglich aller Skalarprodukte, die auf $\mathfrak{H}$ eine zu $\|x\|$ äquivalente Norm definieren.

Lemma 1: *Wenn für alle hinreichend großen natürlichen Zahlen n und für ein δ mit $0 < \delta$ $\|T^n\| \leqq \delta^n$ ist, so existiert für jedes θ mit $\delta < \theta$ ein selbstadjungierter invertierbarer Operator B, so daß $\|BTB^{-1}\| \leqq \theta$ ist.*

Beweis: Unter Verwendung der geometrischen Reihe ergibt sich, daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \theta^{-2n} T^{*n} T^n$ in der Operatornorm gegen einen selbstadjungierten Operator A konvergiert, der offensichtlich $\geqq I$ und damit invertierbar ist. Ferner gilt

$$\theta^{-2} T^* A T = A - I \leqq A\,,$$

also

$$T^* A T \leqq \theta^2 \cdot A\,.$$

Setzen wir $B = \sqrt{A}$, so folgt hieraus

$$\|BTy\|^2 = (T^* A T y, y) \leqq \theta^2 (Ay, y) = \theta^2 \|By\|^2\,.$$

Lassen wir nun x alle Elemente aus $\mathfrak{H}$ durchlaufen und nehmen $y = B^{-1}x$, so bekommen wir schließlich

$$\|BTB^{-1}x\| \leqq \theta \cdot \|x\|\,, \qquad \text{q. e. d.}$$

Setzen wir jetzt zur Abkürzung

$$V(T) := \bigcap_{B\in\mathfrak{B}} W(BTB^{-1})$$

und

$$v(T) := |V(T)|\,.$$

Lemma 2: *Für einen beliebigen Operator T gilt*

$$v(T) = r(T)\,.$$

Beweis: Aus $\mathscr{C}\sigma(T) = \mathscr{C}\sigma(BTB^{-1}) \subseteq \overline{W(BTB^{-1})}$ folgt zunächst

$$r(T) \leqq v(T) .$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = r(T)$ ergibt sich aus Lemma 1 umgekehrt

$$v(T) \leqq r(T) ,$$

woraus dann die Behauptung folgt.

Jetzt können wir das angekündigte Resultat beweisen:

Satz 4: *Für jeden Operator T gilt*

$$\mathscr{C}\sigma(T) = \bigcap_{B\in\mathfrak{B}} \overline{W(BTB^{-1})} . \tag{4}$$

Beweis: Da wir oben bereits $\mathscr{C}\sigma(T) \subseteq V(T)$ gezeigt haben und wissen, daß $\mathscr{C}\sigma(T)$ und $V(T)$ kompakte konvexe Mengen sind, so genügt es zu beweisen, daß jeder Stützkreis an $\mathscr{C}\sigma(T)$ auch Stützkreis an $V(T)$ ist. Dies ergibt sich jedoch aus der Relation

$$|p[\mathscr{C}\sigma(T)]| = |p[V(T)]| ,$$

welche für jede lineare Funktion $p(z) = \alpha z + \beta$ gilt, denn

$$p[W(BTB^{-1})] = W(p(BTB^{-1})) = W(Bp(T)B^{-1}) ,$$

also

$$p[V(T)] = V(p(T)) ,$$

und

$$p[\mathscr{C}\sigma(T)] = \mathscr{C}p[\sigma(T)] = \mathscr{C}\sigma(p(T)) ,$$

und wegen Lemma 2 gilt ja

$$|V(p(T))| = |\mathscr{C}\sigma(p(T))| .$$

3. Eine Darstellung des numerischen Wertebereichs als Durchschnitt von kompakten konvexen Spektralmengen

In diesem Abschnitt wollen wir den Wertebereich eines beliebigen Operators T mittels Spektralmengen und durch normale Dilatationen näher beschreiben. Dazu benötigen wir einige Beziehungen zwischen der Norm $\|T\|$ und der konvexen Funktion

$$a(T) := \sup\{\mathrm{Re}(Tx, x) : \|x\| = 1\} ,$$

die auch für sich allein interessant sind. Wir bemerken zunächst:

$$a(T + tI) = a(T) + t \quad \text{für alle reellen } t . \tag{5}$$

Lemma 3: *Für einen beliebigen Operator T gilt*

$$\|T + \|T\| \cdot I\| - a(T + \|T\| \cdot I) \leqq \frac{1}{2} \cdot \{\|T\| - a(T)\} . \tag{6}$$

Beweis: Man setze abkürzend $t = \|T\|$ und $\gamma = t - a(T)$. Dann ist

$$\|(T + t \cdot I)x\|^2 = \|Tx\|^2 + 2t \cdot \mathrm{Re}(Tx, x) + t^2 \leqq$$

$$\leqq 2t^2 + 2t \cdot a(T) = (2t)^2 \left(1 - \frac{\gamma}{2t}\right), \quad \|x\| = 1 ,$$

damit

$$\|T + t \cdot I\| \leqq 2t \cdot \sqrt{1 - \frac{\gamma}{2t}} .$$

Andererseits ist $|a(T)| \leqq t$, also $0 \leqq \gamma \leqq 2t$ oder $0 \leqq \frac{\gamma}{2t} \leqq 1$. Wegen $\sqrt{1-x} \leqq 1 - \frac{1}{2} \cdot x$ für $0 \leqq x \leqq 1$ folgt dann

$$\|T + t \cdot I\| \leqq 2t \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma}{2t}\right) = 2t - \frac{\gamma}{2}$$

und mit (5)

$$\|T + t \cdot I\| - a(T + t \cdot I) \leqq \left(2t - \frac{\gamma}{2}\right) - (a(T) + t) = t - (a(T)) - \frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{2} .$$

Damit ist (6) bewiesen.

Lemma 4[2]**:** *Für einen beliebigen Operator T gilt:*

$$\lim_{t \to +\infty} \{\|T + tI\| - t\} = a(T) . \tag{7}$$

Beweis: Die Funktion $f(t) = \|T + t \cdot I\| - t$ ist für reelles t eine monoton nichtwachsende und nach unten beschränkte Funktion, denn für $t_1 < t_2$ gilt

$$\begin{aligned} f(t_2) &= \|T + t_2 \cdot I\| - t_2 \leqq \|T + t_1 \cdot I\| + \|(t_2 - t_1)I\| - t_2 \\ &= \|T + t_1 I\| + (t_2 - t_1) - t_2 = f(t_1) , \end{aligned}$$

und aus (5) folgt $a(T) + t = a(T + t \cdot I) \leqq \|T + t \cdot I\|$, somit

$$a(T) \leqq f(t) .$$

Also existiert $\lim_{t \to +\infty} f(t)$, und es ist

$$a(T) \leqq \lim_{t \to +\infty} f(t) . \tag{8}$$

Wir definieren nun eine Folge von Operatoren T_n durch

$$T_1 = T + t_1 \cdot I, t_1 = \|T\|, \ldots, T_n = T_{n-1} + t_n \cdot I, t_n = \|T_{n-1}\|, \ldots .$$

Aus Lemma 3 erhält man

$$\|T_n\| - a(T_n) \leqq \frac{1}{2} \{\|T_{n-1}\| - a(T_{n-1})\} \leqq \cdots \leqq \frac{1}{2^n} \{\|T\| - a(T)\} .$$

Setzen wir $\tau_n = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$, so wird $T_n = T + \tau_n \cdot I$ und daher

$$\begin{aligned} 0 \leqq f(\tau_n) - a(T) &= \|T + \tau_n \cdot I\| - \tau_n - a(T) = \|T + \tau_n \cdot I\| - a(T + \tau_n \cdot I) \\ &= \|T_n\| - a(T_n) \leqq \frac{1}{2^n} \{\|T\| - a(T)\} . \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir $\lim_{n \to \infty} f(\tau_n) = a(T)$, woraus sich wegen $\tau_n \to \infty$ für $n \to \infty$ und (8) die Behauptung (7) ergibt.

[2]) Unser Ergebnis ist für $\dim \mathfrak{H} < \infty$ Spezialfall eines Theorems von F. L. Bauer [1]. Die Schlüsse von Bauer sind aber nur für $\dim \mathfrak{H} < \infty$ gültig, da die Kompaktheit der Einheitskugel in $\mathfrak{H}$ benutzt wird. Herr Dr. C. Davis hat mich nach der Fertigstellung meiner Arbeit darauf hingewiesen, daß sich (7) bereits in einer Arbeit von G. Lumer, Trans. Am. Math. Soc. **100**, 29—43 (1961), findet. Der dort gegebene Beweis von (7) ist aber von unserem ganz verschieden.

Aus der groben Abschätzung $\tau_n \leqq 2^n \cdot \|T\|$ folgt

$$0 \leqq f(2^n \cdot \|T\|) - a(T) \leqq f(\tau_n) - a(T) \leqq 2^{-n}\{\|T\| - a(T)\},$$

und wegen $-a(T) \leqq \|T\|$ schließlich

Lemma 5: *Für einen beliebigen Operator T ist*

$$(9) \quad 0 \leqq \{\|T + t \cdot I\| - t\} - a(T) \leqq 2^{-n+1} \cdot \|T\|, \quad \textit{falls} \quad t \geqq 2^n \cdot \|T\|.$$

Bezeichne K_r die Kreisscheibe $\{z : |z| \leqq r\}$. Dann ist

$$\overline{W(T)} + \beta = \overline{W(T + \beta I)} \subseteq K_{\|T + \beta \cdot I\|}$$

und daher

$$\overline{W(T)} \subseteq K_{\|T + \beta \cdot I\|} - \beta \quad \text{für alle} \quad \beta \in \mathbb{C}.$$

Beachtet man nun, daß $\overline{W(T)}$ eine kompakte und konvexe Menge und damit gleich dem Durchschnitt seiner Stützhalbebenen ist, so kann man mit Hilfe einer geeigneten Drehung $p(z) = \alpha z$, $|\alpha| = 1$, jede Stützhalbebene von $\overline{W(T)}$ in eine Halbebene $\{z : \mathrm{Re}\, z \leqq s\}$ transformieren. Mit Hilfe von Lemma 4 schließt man dann auf

$$(10) \quad \overline{W(T)} = \bigcap_{\beta \in \mathbb{C}} \{K_{\|T + \beta \cdot I\|} - \beta\},$$

wo β alle komplexen Zahlen durchläuft. Nach Satz A ist $K_{\|T + \beta \cdot I\|}$ Spektralmenge von $T + \beta \cdot I$, daher ist wegen Satz C $K_{\|T + \beta \cdot I\|} - \beta$ Spektralmenge von T. Zusammen mit (10) folgt hieraus der

Satz 5: *Der Abschluß $\overline{W(T)}$ des numerischen Wertebereiches eines beliebigen (beschränkten linearen) Operators T auf $\mathfrak{H}$ ist der Durchschnitt von Kreisscheiben, die alle Spektralmengen von T sind, und zwar gilt*

$$(10) \quad \overline{W(T)} = \bigcap_{\beta \in \mathbb{C}} \{K_{\|T + \beta \cdot I\|} - \beta\}.$$

Die Relation (10) ist etwas verschieden von dem Ergebnis, das wir in [8] bewiesen haben. Genau wie dort können wir aus Satz 5 aber die folgende Verschärfung eines Resultates von HALMOS [6] gewinnen:

Satz 6: *Für jeden Operator T gilt*

$$(11) \quad \overline{W(T)} = \bigcap_{N \in \mathfrak{N}_s(T)} \overline{W(N)},$$

wobei $\mathfrak{N}_s(T)$ die Menge aller **starken** *normalen Dilatationen N von T der Form $N = \alpha U + \beta I$, $U =$ unitär, α und β komplexe Zahlen, sind.*

Beweis: Aus $T = PNP$ folgt $(Tx, x) = (Nx, x)$ für alle $x \in \mathfrak{H}$, daher $W(T) \subseteq W(N)$ und schließlich $\overline{W(T)} \subseteq \bigcap_{N \in \mathfrak{N}_s(T)} \overline{W(N)}$. Es bleibt zu beweisen, daß $\bigcap_{N \in \mathfrak{N}_s(T)} \overline{W(N)} \subseteq \overline{W(T)}$ ist. Falls die Kreisscheibe K Spektralmenge von T ist, gibt es nach Satz B eine starke normale Dilatation N von T mit $\sigma(N) \subseteq \partial K$. Aus dem Spektraltheorem folgt dann, daß N von der Form $N = \alpha U + \beta I$ mit unitärem U und daher $N \in \mathfrak{N}_s(T)$ ist. Da N normal ist, gilt $\overline{W(N)} = \mathfrak{C}\sigma(N)$ und folglich $\overline{W(N)} \subseteq K$. Hieraus ergibt sich zusammen mit Satz 5 die Behauptung.

Herr Dr. C. BERGER hat mir mitgeteilt, daß er ebenfalls dieses Resultat erhalten, aber noch nicht publiziert hat.

4. Über Operatoren, für die der Abschluß des numerischen Wertebereichs mit der konvexen Hülle des Spektrums zusammenfällt

Im allgemeinen gilt, wie wir schon wissen, $\mathscr{C}\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$. Wir wollen jetzt Kriterien dafür aufstellen, daß $\mathscr{C}\sigma(T) = \overline{W(T)}$ ist. Abkürzend führen wir die Klasse $\mathfrak{C}_1$ von Operatoren ein durch

$$\mathfrak{C}_1 = \{T : \mathscr{C}\sigma(T) = \overline{W(T)}\}\,. \tag{12}$$

Lemma 6: *Eine abgeschlossene Halbebene ist genau dann Spektralmenge von T, wenn sie den numerischen Wertebereich $W(T)$ enthält.*

Beweis: Nach Satz A ist die Halbebene $\mathscr{H}_0 = \{z : \mathrm{Re}\, z \geqq 0\}$ genau dann Spektralmenge von T, wenn $\mathrm{Re}\, T \geqq 0$ ist, was mit $(Tx, x) \geqq 0$ für alle $x \in \mathfrak{H}$ gleichbedeutend ist, also $W(T) \subseteq \mathscr{H}_0$. Man kann jede Halbebene $\mathscr{H}$ durch eine Bewegung $p(z) = \alpha z + \beta$, $|\alpha| = 1$, auf $\mathscr{H}_0$ abbilden. Beachtet man nun Satz C, so ist $\mathscr{H}$ genau dann spektral für T, wenn es $p(\mathscr{H}) = \mathscr{H}_0$ für $p(T)$ ist, was nach obigem gleichbedeutend mit $W(p(T)) \subseteq \mathscr{H}_0$ ist, und das ist wegen $p(\mathscr{H}) = \mathscr{H}_0$ und $p(W(T)) = W(p(T))$ genau dann der Fall, wenn $W(T) \subseteq \mathscr{H}$ ist, womit alles bewiesen ist.

Eine einfache Folgerung ist das

Lemma 7: *$\overline{W(T)}$ ist genau dann in einer abgeschlossenen konvexen Menge X enthalten, wenn jede Stützhalbebene an X Spektralmenge von T ist, insbesondere also, wenn X selbst Spektralmenge von T ist.*

Dann erhalten wir als erstes Kriterium

Satz 7: *Genau dann ist $T \in \mathfrak{C}_1$, wenn jede Stützhalbebene an $\mathscr{C}\sigma(T)$ Spektralmenge von T ist.*

Beweis: Wenn $\mathscr{C}\sigma(T) = \overline{W(T)}$ ist, so ist nach Lemma 7 jede Stützhalbebene an $\mathscr{C}\sigma(T)$ Spektralmenge von T. Umgekehrt folgt aus der letzten Eigenschaft nach Lemma 7, daß $\overline{W(T)} \subseteq \mathscr{C}\sigma(T)$ ist, wegen (1) also $\mathscr{C}\sigma(T) = \overline{W(T)}$.

Als einfache Konsequenz ergibt sich das folgende, von M. Schreiber [16] auf anderem Wege bewiesene Resultat:

Wenn $\mathscr{C}\sigma(T)$ Spektralmenge von T ist, so ist $T \in \mathfrak{C}_1$.

Aus Satz 7 ergibt sich ein weiteres, von G. H. Orland [14] aufgestelltes Kriterium:

Satz 8: *Genau dann ist $T \in \mathfrak{C}_1$, wenn die Resolvente $R_\lambda(T) = (\lambda \cdot I - T)^{-1}$ der Ungleichung*

$$\|R_\lambda(T)\| \leqq \frac{1}{\mathrm{dist}(\lambda, \mathscr{C}\sigma(T))} \quad \text{für alle} \quad \lambda \notin \mathscr{C}\sigma(T) \tag{13}$$

genügt.

Beweis: Wegen Satz 7 müssen wir jetzt zeigen, daß genau dann jede Stützhalbebene an $\mathscr{C}\sigma(T)$ Spektralmenge von T ist, wenn (13) gilt. Nach Satz A wissen wir, daß $\|R_\lambda(T)\| \leqq \frac{1}{\mathrm{dist}(\lambda, \mathscr{C}\sigma(T))}$ genau dann gilt, wenn die Menge $\{z : |z - \lambda| \geqq \mathrm{dist}(\lambda, \mathscr{C}\sigma(T))\}$ spektral für T ist. Mit Hilfe von Satz C können wir dann die Behauptung auf die folgende Aussage reduzieren: Es ist $\|R_\lambda(T)\| \leqq \frac{1}{\lambda}$ für alle $\lambda > 0$ genau dann, wenn $\{z : \mathrm{Re}\, z \leqq 0\}$ Spektralmenge von T ist.

Dies ist ein Spezialfall des folgenden

Lemma 8: *Sei $\{X_n\}$ eine Folge von Spektralmengen X_n von T mit*

(a) $X \subseteq X_n$

(b) $X_n \rightrightarrows X$ *für* $n \to \infty$ *in dem Sinne, daß für jedes kompakte Gebiet G aus $\mathbb{C}$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{\lambda\in\partial X_n\cap G}\operatorname{dist}(\lambda, X\cap G)\right]=0\,.$$

Dann ist auch X eine Spektralmenge von T.

Als *Korollar* ergibt sich ein Resultat von T. NIEMINEN [13]:

$\operatorname{Re}T \leqq 0 \Leftrightarrow \|R_\lambda(T)\| \leqq \frac{1}{\lambda}$ *für alle* $\lambda > 0 \Leftrightarrow \{z : Re z \leqq 0\}$ *ist Spektralmenge von T.*

Beweis von Lemma 8: Sei $f \in \mathscr{R}(X)$. Da f nur endlich viele Pole hat, kann man wegen (b) eine ganze Zahl $N_0 = N_0(f) > 0$ finden, so daß $f \in \mathscr{R}(X_n)$ für $n \geqq N_0$ ist. Da X_n Spektralmenge von T ist, gilt

$$\|f(T)\| \leqq \|f\|_{X_n} \quad \text{für} \quad n \geqq N_0\,. \tag{14}$$

Wir haben zu zeigen, daß auch $\|f(T)\| \leqq \|f\|_X$ ist. Wäre nämlich

$$\|f\|_X \leqq \|f(T)\| - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0\,, \tag{15}$$

so könnte man wegen der Stetigkeit von f in der Nähe von ∂X zu jedem kompakten Gebiet G einen δ-Streifen S_δ, $(\delta > 0)$, um $\partial X \cap G$ finden, so daß auch

$$\|f\|_{S_\delta} \leqq \|f(T)\| - \frac{\varepsilon}{2} \tag{16}$$

ist. Aus (14), (15) und (16) folgt wegen (a)

$$\|f(T)\| \leqq \|f\|_{(X_n - X) - S_\delta \cap (X_n - X)} \quad \text{für} \quad n \geqq N_0\,. \tag{17}$$

Wegen (b) kann man nun ein $N = N(G) > 0$ bestimmen, so daß $(X_n - X) \cap \cap G \subseteq S_\delta$ für $n \geqq N$ und damit $(X_n - X) - S_\delta \cap (X_n - X) \subseteq (X_n - X) \cap \mathbb{C}G$ für $n \geqq N$, wobei $\mathbb{C}G$ das Komplement von G bezeichnet. Wählt man noch $N \geqq N_0$, so ergibt sich aus (17)

$$\|f(T)\| \leqq \|f\|_{(X_n - X)\cap \mathbb{C}G} \quad \text{für} \quad n \geqq N(G)\,. \tag{18}$$

Ist nun X kompakt, so sind wegen (b) fast alle X_n beschränkt. Für ein geeignetes Kompaktum G ist also $(X_n - X) \cap \mathbb{C}G$ die leere Menge, woraus wegen (18) $f(T) = 0$ und dann nach (15) $\|f\|_X < 0$ folgt, womit wir in diesem Fall einen Widerspruch gefunden haben.

Ist X nicht kompakt, so sind wegen (a) alle X_n nicht kompakt. Dann folgt aus (18), daß man zu jedem Kompaktum G ein n und eine komplexe Zahl $\lambda_n \in (X_n - X) \cap \mathbb{C}G$ finden kann, so daß $\|f(T)\| \leqq |f(\lambda_n)|$ ist, mit anderen Worten: es gibt eine Folge $\{\lambda_n\}$ mit $|\lambda_n| \to \infty$ für $n \to \infty$, so daß $|f(\lambda_n)| \geqq \|f(T)\|$ ist, d. h. $\lim\limits_{|z|\to\infty} |f(z)| \geqq \|f(T)\|$. Andererseits erhält man aus (15) $\lim\limits_{|z|\to\infty} |f(z)| \leqq$ $\leqq \|f\|_X \leqq \|f(T)\| - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, da X nicht beschränkt ist. Also haben wir auch in diesem Falle einen Widerspruch konstruiert; somit gilt $\|f(T)\| \leqq \|f\|_X$ für alle $f \in \mathscr{R}(X)$, was bedeutet, daß X spektral für T ist.

Lemma 8 ist insofern bemerkenswert, als im allgemeinen der Durchschnitt von Spektralmengen nicht wieder eine Spektralmenge ist. Ausnahmen bilden hier etwa die Operatoren, für die $\{z: \mathrm{Im} z \geqq 0\}$ und $\{z: \mathrm{Im} z \leqq 0\}$ bzw. $\{z: |z| \geqq 1\}$ und $\{z: |z| \leqq 1\}$ Spektralmengen sind; es sind gerade die selbstadjungierten bzw. unitären Operatoren, und für diese sind $\{z: \mathrm{Im} z = 0\}$ bzw. $\{z: |z| = 1\}$ Spektralmengen (vgl. [15]). Tiefer liegend ist das folgende Resultat von W. F. Donoghue [3], das ebenfalls in diesen Zusammenhang gehört: T ist genau dann unitär, wenn $\|R_0(T)\| \leqq 1$ und $\|R_\lambda(T)\| \leqq (|\lambda| - 1)^{-1}$ für alle λ mit $|\lambda| > 1$ gilt.

Die Konsequenzen der Bedingung (13) sind zunächst etwas überraschend, da jeder Operator T den Wachstumsbedingungen

$$\frac{1}{\mathrm{dist}(\lambda, \sigma(T))} \leqq \|R_\lambda(T)\| \quad \text{für alle} \quad \lambda \notin \sigma(T)$$

und

$$\|R_\lambda(T)\| \leqq \frac{1}{\mathrm{dist}(\lambda, \overline{W(T)})} \quad \text{für alle} \quad \lambda \notin \overline{W(T)}$$

genügt, wie A. Wintner [20] gezeigt hat.

Jetzt wollen wir eine Reihe von hinreichenden Kriterien aufstellen dafür, daß $T \in \mathfrak{C}_1$ ist. Ferner werden wir untersuchen, wann diese Kriterien zusammenfallen.

Zunächst beweisen wir der Vollständigkeit halber ein von A. Wintner [20] angegebenes Resultat.

Lemma 9: *Ein Punkt $\lambda \in \partial W(T)$ mit $|\lambda| = \|T\|$ ist in $\pi(T)$ enthalten.*

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es eine Folge von Einheitsvektoren x_n mit $(Tx_n, x_n) = \lambda_n \to \lambda$ für $n \to \infty$. Wegen $\|Tx_n\|^2 \leqq \|T\|^2 = |\lambda|^2$ folgt dann $\|Tx_n - \lambda \cdot x_n\|^2 = \|Tx_n\|^2 + |\lambda|^2 - 2\,\mathrm{Re}\bar{\lambda} \cdot \lambda_n \leqq 2 \cdot |\lambda|^2 - 2\,\mathrm{Re}\bar{\lambda} \cdot \lambda_n \to 0$ mit $n \to \infty$, und das bedeutet $\lambda \in \pi(T)$.

Wir führen nun abkürzend folgende Operatorenklassen ein:

$\mathfrak{C}_2 = \{T$: Es existiert eine in $\mathfrak{B}(T)$ dicht liegende Menge D derart, daß es zu jedem $\varepsilon \in D$ eine kompakte konvexe Spektralmenge X von T gibt, für die ε Kreispunkt ist$\}$.

$\mathfrak{C}_3 = \{T$: $p(T)$ ist normaloid für jedes $p(z) = \alpha z + \beta\}$.

$\mathfrak{C}_4 = \{T$: $\overline{W(T)}$ ist Spektralmenge von $T\}$.

$\mathfrak{C}_5 = \{T$: $\mathfrak{C}\sigma(T)$ ist Spektralmenge von $T\}$.

$\mathfrak{C}_6 = \{T$: $\sigma(T)$ ist Spektralmenge von $T\}$.

$\mathfrak{N} = \{T$: T ist normal$\}$.

Dabei heißt T nach A. Wintner [20] *normaloid*, wenn $|T| = \|T\|$ ist. Wie ich in [7] gezeigt habe, sind die Operatoren aus $\mathfrak{C}_4$, $\mathfrak{C}_5$, $\mathfrak{C}_6$, $\mathfrak{N}$ normaloid. Nun beweisen wir die folgende hinreichende Bedingung für das Bestehen der Beziehung $\mathfrak{C}\sigma(T) = \overline{W(T)}$:

Satz 9: *Es gilt*

(i) $\mathfrak{C}_1 \supseteq \mathfrak{C}_2 \supseteq \mathfrak{C}_3 \supseteq \mathfrak{C}_4 = \mathfrak{C}_5 \supseteq \mathfrak{C}_6 \supseteq \mathfrak{N}$,

(ii) $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}_3 = \mathfrak{C}_4 = \mathfrak{C}_5 = \mathfrak{C}_6 = \mathfrak{N}$ *für* $\dim \mathfrak{H} \leqq 4$,

(iii) $\mathfrak{C}_1 \neq \mathfrak{N}$ *für* $\dim \mathfrak{H} \geqq 5$ *und* $\mathfrak{C}_1 \neq \mathfrak{C}_3$ *für* $\dim \mathfrak{H} \geqq 6$.

(iv) $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2$ *für* $\dim \mathfrak{H} < \infty$,

(v) $\mathfrak{C}_1 \neq \mathfrak{C}_2$ *für* $\dim \mathfrak{H} = \infty$.

Beweis: (i) Sei $T \in \mathfrak{C}_2$, und es bezeichne D die in der Definition von $\mathfrak{C}_2$ auftretende Menge von Kreispunkten ε von $\overline{W(T)}$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon \in D$ eine Kreisscheibe K mit einem Mittelpunkt β, die spektral für T ist und auf deren Rand ε liegt. Sei $p(z) = z - \beta$. Wegen $W(p(T)) = p[W(T)]$ ist dann $p(\varepsilon) \in \partial W(p(T))$, und $p(K)$ ist Spektralmenge von $p(T)$, also haben wir $\|p(T)\| \leqq$ Radius von $p(K) = |p(\varepsilon)| \leqq |p(T)| \leqq \|p(T)\|$, insgesamt $|p(\varepsilon)| = \|p(T)\|$. Mittels Lemma 9 ergibt sich $p(\varepsilon) \in \sigma(p(T))$ und damit wegen des spektralen Abbildungssatzes $\varepsilon \in \sigma(T)$. Wir haben also $D \subseteq \sigma(T)$ gezeigt. Da $\sigma(T)$ abgeschlossen ist, folgt $\mathscr{E}(T) = \overline{\mathscr{B}(T)} = \overline{D} \subseteq \sigma(T)$ und somit $\overline{W(T)} = \mathscr{C}\mathscr{E}(T) \subseteq \mathscr{C}\sigma(T)$. Da in jedem Fall (1) gilt, erhalten wir schließlich $\overline{W(T)} = \mathscr{C}\sigma(T)$, also $T \in \mathfrak{C}_1$. Damit ist $\mathfrak{C}_2 \subseteq \mathfrak{C}_1$ gezeigt.

Für jeden normalen Operator ist das Spektrum Spektralmenge, also ist $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{C}_6$. Da mit X auch jede abgeschlossene Menge $X' \supseteq X$ eine Spektralmenge von T ist, so folgt aus $\sigma(T) \subseteq \mathscr{C}\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$, daß $\mathfrak{C}_6 \subseteq \mathfrak{C}_5 \subseteq \mathfrak{C}_4$ ist. Wenn $T \in \mathfrak{C}_4$ ist, gibt es nach Satz B eine starke normale Dilatation N von T mit $\sigma(N) \subseteq \partial W(T)$, also $\sigma(p(N)) = p(\sigma(N)) \subseteq \partial W(p(T))$ für $p(z) = \alpha z + \beta$ und somit $\overline{W(p(N))} = \mathscr{C}\sigma(p(N)) \subseteq \overline{W(p(T))}$, denn $p(N)$ ist normal. Da $p(N)$ Dilatation von $p(T)$ ist, gilt $W(p(T)) \subseteq W(p(N))$, also $\overline{W(p(T))} \subseteq \overline{W(p(N))}$. Daher folgt $\|p(T)\| \leqq \|p(N)\| = |p(N)| = |p(T)| \leqq \|p(T)\|$, also $|p(T)| = \|p(T)\|$, d. h. $p(T)$ ist normaloid für alle $p(z) = \alpha z + \beta$, somit $\mathfrak{C}_4 \subseteq \mathfrak{C}_3$. Sei nun $T \in \mathfrak{C}_3$ und ε beliebig aus $\mathscr{B}(T)$. Dann gibt es eine Abbildung $p(z) = z - \beta$, so daß $|p(\varepsilon)| = |p(T)|$ ist. Da $p(T)$ normaloid ist, folgt $|p(\varepsilon)| = \|p(T)\|$, d. h. die Kreisscheibe K mit dem Mittelpunkt β und dem Radius $|p(\varepsilon)|$ ist Spektralmenge von T, und ε liegt auf dem Rande von K, somit ist $T \in \mathfrak{C}_2$. Also ist $\mathfrak{C}_3 \subseteq \mathfrak{C}_2$.

Damit ist (i) bewiesen.

Ehe wir im Beweis fortfahren, wollen wir Norm, Spektrum und Wertebereich einer orthogonalen Summe von Operatoren bestimmen, um geeignete Beispiele konstruieren zu können.

Sei T_i ein auf dem Hilbertraum $\mathfrak{H}_i$ definierter Operator, $i = 1, \ldots, n$. Wir betrachten die orthogonale Summe $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_n$ der Operatoren T_i. Faßt man nun die $\mathfrak{H}_i$ als Unterräume von $\mathfrak{H}$ auf, so ist $\mathfrak{H}_i \perp \mathfrak{H}_j$ für $i \neq j$, $T_i = T|_{\mathfrak{H}_i}$, und reduziert T: $T\mathfrak{H}_i \subseteq \mathfrak{H}_i$, $T^*\mathfrak{H}_i \subseteq \mathfrak{H}_i$. Einen beliebigen Vektor $x \in \mathfrak{H}$ mit $\|x\| = 1$ kann man in der Form

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \quad \text{mit} \quad x_i \in \mathfrak{H}_i, \quad \|x_i\| = 1 \quad \text{und} \quad c_i \in \mathbb{C}, \quad \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 = 1$$

schreiben. Dann ist

$$(Tx, x) = \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 \cdot (T_i x_i, x_i) \qquad \text{und} \qquad \|Tx\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 \cdot \|T_i x_i\|^2 .$$

Da $|c_i|^2 \geqq 0$ und $\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 = 1$ ist, ergibt sich hieraus leicht

$$W(T) = \mathscr{C}\left\{\bigcup_{i=1}^{n} W(T_i)\right\}, \quad \overline{W(T)} = \mathscr{C}\left\{\bigcup_{i=1}^{n} \overline{W(T_i)}\right\} \tag{19}$$

und

$$\|T\| = \max_{i=1,\ldots,n} \|T_i\|, \quad |T| = \max_{i=1,\ldots,n} |T_i| . \tag{20}$$

Schließlich ist für $\|x\| = 1$ auch

$$\|(T - \lambda \cdot I)x\| \geqq \min_{i=1,\ldots,n} \inf\{\|(T_i - \lambda \cdot I_i)x_i\| : x_i \in \mathfrak{H}_i, \|x_i\| = 1\}$$

und

$$\|(T^* - \bar{\lambda} \cdot I)x\| \geqq \min_{i=1,\ldots,n} \inf\{\|T_i^* - \bar{\lambda} \cdot I_i)x_i\| : x_i \in \mathfrak{H}_i, \|x_i\| = 1\},$$

daher nach TOEPLITZ (vgl. [20]) $\sigma(T) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \sigma(T_i)$, und trivialerweise ist auch $\sigma(T_i) \subseteq \sigma(T)$, somit

$$\sigma(T) = \bigcup_{i=1}^{n} \sigma(T_i) . \tag{21}$$

Kehren wir zum Beweis von Satz 9 zurück:

(ii) Wenn $\dim \mathfrak{H} \leqq 4$ und $\mathscr{C}\sigma(T) = W(T)$ ist, so besteht $\sigma(T)$ aus höchstens vier Punkten und daher ist $W(T)$ entweder 1°: ein Punkt, 2°: eine Strecke, 3°: ein Dreieck oder 4°: ein Viereck. In den Fällen 1°, 2° und 4° liegen alle Eigenwerte von T auf $\partial W(T)$ und sind deshalb nach Satz 2 normal, woraus die Normalität von T folgt. Im Fall 3° sind die drei Ecken des Dreiecks normale Eigenwerte. Dann muß aber auch der eventuell existierende und möglicherweise im Inneren von $W(T)$ liegende vierte Eigenwert normal sein, da für die Dimension n des zu ihm gehörenden invarianten Unterraums nur noch $n = 1$ möglich ist. Daher ist T auch in diesem Fall normal, d. h. $\mathfrak{C}_1 \subseteq \mathfrak{N}$ für $\dim \mathfrak{H} \leqq 4$. Hieraus folgt zusammen mit (i) die Behauptung von (ii).

(iii) Sei $T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Bekanntlich ist $W(T_1) = \left\{z : |z| \leqq \frac{1}{2}\right\} = K_{1/2}$. Dann ist der Operator $T = T_1 \oplus T_2$, wo T_2 eine 3×3-Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen λ_1, λ_2, λ_3 bezeichnet, nicht normal; dagegen gilt $W(T) = \mathscr{C}\sigma(T)$, wenn die λ_i so gewählt werden, daß das Dreieck Δ mit den Eckpunkten λ_i die Kreisscheibe $K_{1/2}$ enthält, denn es ist $\sigma(T) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ und nach (19) $W(T) = \mathscr{C}\{\Delta \cup K_{1/2}\} = \Delta = \mathscr{C}\sigma(T)$. Damit ist $\mathfrak{C}_1 \neq \mathfrak{N}$ für $\dim \mathfrak{H} \geqq 5$ bewiesen.

Die Beziehung $\mathfrak{C}_1 \neq \mathfrak{C}_3$ läßt sich für $\dim \mathfrak{H} \geqq 6$ mit dem folgenden Beispiel erledigen: Sei $T = T_1 \oplus T_2$, wo T_1 wie oben und T_2 als 4×4-Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}$ gewählt sind. Man zeigt genauso wie oben, daß $\mathscr{C}\sigma(T) = W(T)$ ist. Dagegen ist wegen (20) $|T| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 = \|T\|$, somit ist T nicht normaloid, d. h. $T \notin \mathfrak{C}_3$, also $\mathfrak{C}_1 \neq \mathfrak{C}_3$ für $\dim \mathfrak{H} \geqq 6$.

Im Falle $\dim \mathfrak{H} = 5$ versagt diese Beweismethode, denn eine leichte Rechnung gibt für $T = T_1 \oplus T_2$, $T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $T_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ zwar $W(T) = \mathscr{C}\sigma(T)$, aber auch $|T| = 1$

$= \|T\|$. Für $\dim \mathfrak{H} = 5$ bleibt also die Frage offen, ob $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_3$, $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_4$ gilt oder nicht.

Bevor wir (iv) und (v) beweisen, wollen wir eine äquivalente Charakterisierung der Klasse $\mathfrak{C}_2$ geben:

Lemma 10: *Ein Operator T liegt genau dann in $\mathfrak{C}_2$, wenn eine in $\mathfrak{B}(T)$ dichtliegende Menge D existiert derart, daß es zu jedem $\varepsilon \in D$ ein Polynom $p(z) = z - \beta$ gibt, so daß $|p(\varepsilon)| = \|p(T)\|$ ist.*

Beweis: Daß die Bedingung notwendig ist, hatten wir bereits beim Beweis von (i) gesehen. Sie ist auch hinreichend, da nach Satz A der Kreis $K = \{z : |z| \leqq \leqq \|p(T)\|\}$ Spektralmenge von $p(T)$ ist. Somit ist $K + \beta$ Spektralmenge von $p(T)$ und enthält ε auf dem Rand.

Jetzt wollen wir den Beweis des Satzes 9 abschließen.

(iv) Sei $\dim \mathfrak{H} < \infty$, also $W(T)$ abgeschlossen, und $\mathfrak{C}\sigma(T) = W(T)$. Dann ist $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \sigma_0 \cup \sigma_1$, $\sigma_0 \cap \sigma_1 =$ leer, wobei σ_0 die Menge der normalen Eigenwerte von T bezeichnet und $\sigma_1 = \sigma(T) - \sigma_0$ ist. Nach Satz 2 ist $\sigma(T) \cap \cap \partial W(T) \subseteq \sigma_0$, somit $\mathfrak{C}\sigma_0 = W(T)$. Wegen der reduzierenden Eigenschaft normaler Eigenwerte gibt es eine Zerlegung von T in eine orthogonale Summe

$$T = N \oplus A\,, \tag{22}$$

wobei N normal ist und $\sigma(N) = \sigma_0$, $\sigma(A) = \sigma_1$. Ferner kann der Rand von $W(A)$ keine Ecke haben, denn eine solche wäre wegen Satz 1 Eigenwert von A, wegen Satz 2 sogar normaler Eigenwert von T, somit in $\sigma(A) \cap \sigma(N)$ enthalten, diese Menge ist aber nach Konstruktion leer.

Weiterhin folgt aus (22) auch $p(T) = p(N) \oplus p(A)$ für $p(z) = \alpha z + \beta$. Da N normal ist, gilt $W(N) = \mathfrak{C}\sigma(N)$, und nach Konstruktion ist $\mathfrak{C}\sigma(N) = \mathfrak{C}\sigma_0 = W(T)$, also ist $W(N) = W(T)$. Andererseits ist wegen (19) $\mathfrak{C}\{W(A) \cup \cup W(N)\} = W(T)$, daher $W(A) \subseteq W(N)$ und hieraus allgemeiner $W(p(A)) \subseteq \subseteq W(p(N))$ für alle $p(z) = \alpha z + \beta$, und das zieht, da $p(N)$ normal und daher auch normaloid ist,

$$|p(A)| \leqq |p(N)| = \|p(N)\| \tag{23}$$

nach sich.

Sei nun $\lambda \in \mathfrak{E}(T) = \mathfrak{E}(N)$ und somit Eckpunkt des konvexen Polygons $W(N)$. Da $W(A) \subseteq W(N)$ ist, kann man (indem etwa noch eine Bewegung $p(z) = \gamma z + \delta$, $|\gamma| = 1$, ausgeführt wird) annehmen, daß λ reell und $\geqq 0$ ist und $\operatorname{Re} W(A) \leqq 0$ sowie $\operatorname{Re} W(N) \leqq \lambda$ ist. Wenn wir nun noch beachten, daß λ Ecke von $W(N)$ ist, aber $W(A)$ keine Ecke hat, so können wir sogar $\lambda > 0$ voraussetzen. Mit Hilfe der Funktion $a(N)$ von Nr. 3 können wir also $a(N) = \lambda > 0$ schreiben, und daraus folgt für ein hinreichend großes $\beta_0 > 0$ die Relation

$$|N + \beta I_1| = a(N + \beta I_1) = \lambda + \beta \quad \text{für} \quad \beta \geqq \beta_0{}^{3})\,. \tag{24}$$

Aus dem Lemma 4 folgt $\lim_{\beta \to \infty} \{\|A + \beta I\| - \beta\} = a(A) \leqq 0$, und zusammen mit (24) folgt hieraus für ein genügend großes $\beta_1 \geqq \beta_0$:

$$|N + \beta I_1| - \|A + \beta I_2\| = \lambda + (\beta - \|A + \beta I_2\|) \geqq \frac{\lambda}{2} > 0 \quad \text{für} \quad \beta \geqq \beta_1\,.$$

[3]) $I = I_1 \oplus I_2$ ist die zu (22) gehörende Zerlegung von I.

Damit haben wir

$$|\lambda+\beta| = |N+\beta I_1| > \|A+\beta I_2\| \quad \text{für} \quad \beta \geqq \beta_1 \tag{25}$$

gezeigt. Aus (23) und (25) folgt mit Rücksicht auf (20): $|\lambda+\beta| = \|T+\beta I\|$. Mit anderen Worten: Für ein beliebiges $\lambda \in \mathscr{E}(T)$ haben wir eine Transformation $p(z) = \alpha z + \beta$ gefunden, so daß $|p(\lambda)| = \|p(T)\|$ ist, d. h. $T \in \mathfrak{C}_2$. Somit haben wir $\mathfrak{C}_1 \subseteq \mathfrak{C}_2$ für $\dim \mathfrak{H} < \infty$ bewiesen. Da nach (i) immer $\mathfrak{C}_1 \supseteq \mathfrak{C}_2$ ist, folgt die Behauptung von (iv).

(v) Jetzt betrachten wir den Operator $T = T_1 \oplus T_2$, wobei $T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und T_2 ein normaler Operator mit $\sigma(T_2) = K_{1/2} = \left\{z : |z| \leqq \frac{1}{2}\right\}$ ist (in einem unendlich-dimensionalen Hilbertraum $\mathfrak{H}$ kann man leicht einen solchen Operator T konstruieren). Wegen $\sigma(T_1) = \{0\}$, $W(T_1) = K_{1/2}$ und $\sigma(T_2) = K_{1/2} = \mathscr{C}\sigma(T_2) = W(T_2)$ folgt aus (19) und (20) auch $\mathscr{C}\sigma(T) = K_{1/2} = W(T)$, d. h. $T \in \mathfrak{C}_1$ und $|T| = \frac{1}{2}$, daher auch

$$|T+\beta I| \leqq |T| + |\beta| = \frac{1}{2} + |\beta| \tag{26}$$

für beliebiges $\beta \in \mathbb{C}$. Andererseits folgt $T+\beta I = (T_1+\beta I_1) \oplus (T_2+\beta I_2)$. Man sieht leicht, daß $\|T+\beta I\|^2 \geqq \|T_1+\beta I_1\|^2 \geqq |\beta|^2 + |\beta| + \frac{1}{2}$ ist. Hieraus ergibt sich wegen (26), daß $|T+\beta I| < \|T+\beta I\|$ für alle $\beta \in \mathbb{C}$ ist, und daraus leitet man $|p(T)| < \|p(T)\|$ für alle $p(z) = \alpha z + \beta$ mit $\alpha \neq 0$ her. Das bedeutet aber $T \notin \mathfrak{C}_2$, womit $\mathfrak{C}_1 \neq \mathfrak{C}_2$ für $\dim \mathfrak{H} = \infty$ bewiesen ist.

Damit ist der Beweis des Satzes 9 vollständig.

Die Behauptung (iv) sagt, daß im Falle $\dim \mathfrak{H} < \infty$ auch die bei der Definition der Klasse $\mathfrak{C}_2$ gegebene Bedingung notwendig und hinreichend für das Bestehen von $\mathscr{C}\sigma(T) = \overline{W(T)}$ ist. Da andererseits $\mathfrak{C}_1 \neq \mathfrak{C}_3$ für $\dim \mathfrak{H} \geqq 6$ ist, bekommen wir als

Korollar: *Für* $\dim \mathfrak{H} \geqq 6$ *ist* $\mathfrak{C}_2 \neq \mathfrak{C}_3$.

Die Beziehung $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{N}$ für $\dim \mathfrak{H} \leqq 4$ wurde bereits von Moyls und Marcus [11] bemerkt und mittels eines Satzes über die Eigenwerte von Dreiecksmatrizen bewiesen. Die Relationen $\mathfrak{C}_4 = \mathfrak{C}_5 \subseteq \mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_5 \neq \mathfrak{C}_1$ habe ich bereits in [7] bewiesen.

Ungelöst ist die Frage, ob $\mathfrak{C}_3 = \mathfrak{C}_4$ ist oder nicht.[4]) Sie steht mit der von Schreiber [16] geäußerten Vermutung in Zusammenhang, daß $W(T_\varphi)$ für die Toeplitz-Operatoren T_φ spektral ist, denn man kann zeigen, daß $T_\varphi \in \mathfrak{C}_3$ ist.

Die hyponormalen Operatoren T, die durch $\|T^*x\| \leqq \|Tx\|$ charakterisiert werden, sind normaloid (vgl. Stampfli [17]), und mit T ist auch $\alpha T + \beta I$ hyponormal. Die hyponormalen Operatoren sind also in der Klasse $\mathfrak{C}_3$ enthalten.

Die Überlegungen von (iv) lassen sich auf vollstetige Operatoren übertragen. Dann ergibt sich: Ein vollstetiger Operator T liegt genau dann in $\mathfrak{C}_1$, wenn er

[4]) *Zusatz bei der Korrektur.* Herr Dr. J. P. Williams (Ann Arbor) hat mir inzwischen ein Beispiel mitgeteilt, das $\mathfrak{C}_3 \neq \mathfrak{C}_4$ für $\dim \mathfrak{H} \geqq 5$ liefert. Daher ist auch $\mathfrak{C}_1 \neq \mathfrak{C}_4$ für $\dim \mathfrak{H} = 5$ (vgl. S. 244).

in $\mathfrak{C}_2$ liegt, falls zusätzlich gefordert wird, daß 0 im Innern von $\overline{W(T)}$ liegt oder Häufungspunkt von $\mathscr{E}(T)$ ist. Offen bleibt, ob dieses Ergebnis für einen beliebigen vollstetigen Operator gilt.

5. Extremalpunkte des numerischen Wertebereichs und das Punktspektrum

Es ist klar, daß die Menge $\mathscr{E}(T)$ der Extremalpunkte von $\overline{W(T)}$ im approximativen Punktspektrum $\pi(T)$ des Operators T enthalten ist, wenn $\mathscr{C}\sigma(T) = \overline{W(T)}$, d. h. $T \in \mathfrak{C}_1$ ist. Darum ist es naheliegend, folgendes zu vermuten:

Wenn $\mathscr{C}\sigma(T) = \overline{W(T)}$, so gilt

$$\mathscr{E}(T) \cap \overline{W(T)} \subseteq \sigma_p(T) . \tag{27}$$

Im Falle $\dim \mathfrak{H} < \infty$ ist diese Behauptung offensichtlich richtig. Für normale Operatoren T hat zuerst MENG [10] mit Hilfe des Spektraltheorems das Bestehen von (27) bewiesen. Wir wollen dafür einen elementaren Beweis geben; die Idee dazu stammt von W. F. DONOGHUE.

Lemma 11: *Wenn* $\lambda = (Tx, x)$, $\|x\| = 1$, $\lambda \in \mathscr{E}(T)$ *und* T *normal ist, so gilt* $Tx = \lambda \cdot x$.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß λ reell und $\mathrm{Re}(Ty, y) \leqq \lambda$ für alle Einheitsvektoren $y \in \mathfrak{H}$ ist. Dann zerlegen wir T in Real- und Imaginärteil:

$$T = A + iB, \quad A = \frac{1}{2}(T + T^*), \quad B = \frac{1}{2i}(T - T^*) .$$

Da T normal ist, sind A und B vertauschbar: $AB = BA$. Weiterhin gilt

$$\lambda = (Tx, x) = (Ax, x) + i(Bx, x) ,$$

wobei (Ax, x) und (Bx, x) reelle Zahlen sind wegen der Selbstadjungiertheit von A und B. Da λ reell ist, gilt $\lambda = (Ax, x)$, woraus wir wegen $A \leqq \lambda \cdot I$ die Relation $Ax = \lambda \cdot x$ erhalten. Also liegt x im Unterraum $\mathfrak{A} = \{y : Ay = \lambda \cdot y\}$ von $\mathfrak{H}$. Da A und B vertauschbar sind, folgt für $y \in \mathfrak{A}$

$$ABy = BAy = B(\lambda \cdot y) = \lambda \cdot By ,$$

d. h. $B\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}$. Wir können deshalb B als einen Operator auf dem Hilbertraum $\mathfrak{A}$ ansehen. Bezeichne $\tilde{B} = B|_{\mathfrak{A}}$ die Einschränkung von B auf $\mathfrak{A}$. Für $y \in \mathfrak{A}$ mit $\|y\| = 1$ gilt $(Ty, y) = (Ay, y) + i \cdot (By, y) = \lambda + i \cdot (\tilde{B}y, y)$. Weil λ Extrempunkt von $\overline{W(T)}$ und $\mathrm{Re}\, T \leqq \lambda \cdot I$ ist, folgt hieraus für den selbstadjungierten Operator $\tilde{B}$ auf $\mathfrak{A}$ entweder $\tilde{B} \leqq 0$ oder $\tilde{B} \geqq 0$, und aus $0 = (Bx, x) = (\tilde{B}x, x)$ erhalten wir schließlich $0 = \tilde{B}x = Bx$, somit $Tx = Ax + iBx = \lambda \cdot x + 0 = \lambda \cdot x$. Damit ist das Lemma bewiesen.

Satz 10: *Wenn* $\lambda = (Tx, x)$, $\|x\| = 1$ *und* $\lambda \in \mathscr{E}(T)$ *ist, so gilt* $Tx = \lambda \cdot x$, *d. h.*

$$\mathscr{E}(T) \cap W(T) \subseteq \sigma_p(T) , \tag{27}$$

falls es außerdem zu jedem $\varepsilon \in \mathscr{E}(T)$ *eine normale Dilatation* N *von* T *mit* $\varepsilon \in \mathscr{E}(N)$ *gibt.*

Bemerkung: Die Voraussetzung des Satzes über T ist insbesondere dann erfüllt, wenn es zu jedem $\varepsilon \in \mathscr{E}(T)$ eine kompakte und konvexe Spektralmenge von T gibt, für die ε Extrempunkt ist. Die Relation (27) gilt also erst recht für die Klassen $\mathfrak{C}_4$, $\mathfrak{C}_5$, $\mathfrak{C}_6$.

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es eine normale Dilatation N von T mit $\lambda \in \mathscr{E}(N)$. Es gilt $\lambda = (Tx, x) = (Nx, x)$, somit $Nx = \lambda \cdot x$ nach Lemma 11. Bezeichnet schließlich P den orthogonalen Projektor des Raumes $\mathfrak{R}$, auf dem N definiert ist, auf $\mathfrak{H}$, so ist $T = PNP$, daher $Nx = \lambda \cdot x = \lambda \cdot Px = P(\lambda \cdot x) = PNx = Tx$, d. h. $Tx = \lambda \cdot x$, q. e. d.

Die Frage, ob (27) bereits unter der Voraussetzung $\mathscr{C}\sigma(T) = \overline{W(T)}$ gilt, ist offen.

Literatur

[1] Bauer, F. L.: On the field of values subordinate to a norm. Numerische Math. **4**, 103—113 (1962).

[2] Donoghue, W. F.: On the numerical range of a bounded operator. Michigan Math. J. **4**, 261—263 (1957).

[3] — On a problem of Nieminen. Institut des Hautes Etudes Scientifique. Publ. Math. **16**, 31—33 (1963).

[4] Dunford, N., and J. T. Schwartz: Linear Operators I. (1958), New York.

[5] Givens, W.: Field of values of a matrix. Proc. Am. Math. Soc. **3**, 206—209 (1952).

[6] Halmos, P. R.: Numerical ranges and normal dilations. Acta Sci. Math. **25**, 1—5 (1964).

[7] Hildebrandt, S.: The closure of the numerical range of an operator as spectral set. Commun. Pure Appl. Math. **17**, 415—421 (1964).

[8] — Numerischer Wertebereich und normale Dilatationen. Acta Sci. Math. **26**, 187—190 (1965).

[9] Kippenhahn, R.: Über den Wertevorrat einer Matrix. Math. Nachr. **6**, 193—228 (1951—52).

[10] Meng, C. H.: A condition that a normal operator has a closed numerical range. Proc. Am. Math. Soc. 8, 85—88 (1957).

[11] Moyls, B. N., and M. D. Marcus: Field convexity of a square matrix. Proc. Am. Math. Soc. **6**, 981—983 (1955).

[12] von Neumann, J.: Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes. Math. Nachr. **4**, 258—281 (1951).

[13] Nieminen, T.: A condition for the selfadjointness of a linear operator. Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I, No. 316 (1962).

[14] Orland, G. H.: On a class of operators. Bull. Am. Math. Soc. **15**, 75—79 (1964).

[15] Riesz, F., u. B. Sz.-Nagy: Vorlesungen über Funktionalanalysis. Berlin 1956.

[16] Schreiber, M.: Numerical range and spectral sets. Michigan Math. J. **10**, 283—288 (1963).

[17] Stampfli, J. G.: Hyponormal operators. Pacific J. Math. **12**, 1453—1458 (1962).

[18] Sz.-Nagy, B., et C. Foiaş: Une relation parmi les vecteurs propres d'un opérateur de l'espace de Hilbert et de l'opérateur adjoint. Acta Sci. Math. **20**, 91—96 (1959).

[19] — — Sur les contractions de l'espace de Hilbert III. Acta Sci. Math. **19**, 26—45 (1958).

[20] Wintner, A.: Zur Theorie der beschränkten Bilinearformen. Math. Z. **30**, 228—282 (1929).

(Eingegangen am 20. Dezember 1965)

KEGEL, O. H.
Math. Annalen 163, 248—258 (1966)

Über den Normalisator von subnormalen und erreichbaren Untergruppen

Herrn Professor Dr. G. KÖTHE zum 60. Geburtstag gewidmet

Von

OTTO H. KEGEL in Frankfurt (Main)

In [9] hat WIELANDT gezeigt, daß gewisse minimale Normalteiler einer Gruppe G jeden Subnormalteiler von G normalisieren. Ziel dieser Note ist es, zu zeigen, daß man sich häufig nicht auf minimale Normalteiler zu beschränken braucht. Der § 1 befaßt sich vor allem mit perfekten Normalteilern: Ist jede subnormale (bzw. aufsteigend erreichbare) Untergruppe des perfekten Normalteilers N von G normal in diesem, so normalisiert N jede subnormale (bzw. aufsteigend erreichbare) Untergruppe von G.

In § 2 werden endlich erzeugte abelsche Normalteiler betrachtet. Für minimale, endlich erzeugte, abelsche Normalteiler von G war im wesentlichen bereits in [9] gezeigt worden, daß sie alle aufsteigend erreichbaren Untergruppen von G normalisieren. Ist die freie abelsche Gruppe A endlichen Ranges ein Normalteiler minimalen Ranges von G, so normalisiert zwar A selber nicht jede aufsteigend erreichbare Untergruppe von G (und auch nicht jeden Subnormalteiler). Es gibt aber zu jeder aufsteigend erreichbaren Untergruppe S von G eine Untergruppe $A(S)$ von endlichem Index in A, die S normalisiert.

In § 3 werden diese Ergebnisse benutzt, um eine Klasse von Gruppen anzugeben, in denen die Menge der aufsteigend erreichbaren Untergruppen einen Verband bildet. Da man sich in der letzten Zeit intensiver mit der Frage beschäftigt, wann die Vereinigung zweier Subnormalteiler einer Gruppe wieder ein Subnormalteiler ist, vgl. etwa [6], so mag dieser Beitrag zu einer etwas allgemeineren Fragestellung vielleicht von Interesse sein. — Abschließend wird eine Charakterisierung der Subnormalteiler unter den Untergruppen einer fast-polyzyklischen Gruppe angegeben.

Bezeichnungen

Ist G eine Gruppe, so heißt die Untergruppe S von G *aufsteigend (bzw. absteigend) erreichbar*, wenn es eine wohlgeordnete Kette $\{S_\sigma\}$ von Untergruppen S_σ von G gibt, für die gilt

a) S_σ ist Normalteiler von $S_{\sigma+1}$ (bzw. $S_{\sigma+1} \trianglelefteq S_\sigma$).

b) Ist λ eine Limeszahl, so gilt $S_\lambda = \bigcup_{\sigma<\lambda} S_\sigma$ (bzw. $S_\lambda = \bigcap_{\sigma<\lambda} S_\sigma$).

c) Es gilt $S = S_0$, und es gibt eine Ordinalzahl τ mit $S_\tau = G$ (bzw. es gilt $S_0 = G$, und es gibt eine Ordinalzahl τ mit $S_\tau = S$).

Die kleinste Ordinalzahl τ, für die es eine solche Normalkette von S nach G (bzw. von G nach S) gibt, heißt der *Typ* der aufsteigend (bzw. absteigend) erreichbaren Untergruppe S in G. Erreichbare Untergruppen endlichen Typs in G heißen *Subnormalteiler*.

Der Durchschnitt je zweier aufsteigend (bzw. absteigend) erreichbarer Untergruppen (bzw. zweier Subnormalteiler) ist wieder eine aufsteigend (bzw. absteigend) erreichbare Untergruppe (bzw. ein Subnormalteiler).

Ist S eine aufsteigend erreichbare Untergruppe der Gruppe G, so heißt die S mit G verbindende (aufsteigende) Normalkette $\{S_\sigma\}$ *gestrafft*, wenn $T = \langle S^{S_2} \rangle \neq S$ gilt. — Offenbar gibt es zu jeder Normalkette $\{S_\sigma\}$ von S nach G eine gestraffte, falls S in G nicht normal ist. Man erhält sie, indem man als $\bar{S}_2$ das erste Glied der Normalkette $\{S_\sigma\}$ wählt, das S nicht normalisiert; dies muß einen Vorgänger haben, den wir $\bar{S}_1$ nennen. Die gestraffte Normalkette $\{\bar{S}_\sigma\}$ stimmt von $\bar{S}_1$ an (bis auf die Indizierung) mit $\{S_\sigma\}$ überein, die Glieder von $\{S_\sigma\}$, die zwischen S und $\bar{S}_1$ liegen, werden fortgelassen. $\underline{Z}G$ = Zentrum von G; operiert die Gruppe G auf der Gruppe H und ist K eine G-zulässige Untergruppe von H, dann bezeichne $\underline{N}_G K$ den Normalisator und $\underline{C}_G$ den Zentralisator von K in G.

§ 1. Universell normalisierende Normalteiler

In [9] hat WIELANDT gezeigt, daß es in einer Gruppe G oft Normalteiler gibt, die alle Subnormalteiler von G normalisieren. Diese Eigenschaft wird hier weiter untersucht und auch für aufsteigend erreichbare Untergruppen von G betrachtet.

Definition: Die Gruppe G heißt t-Gruppe (bzw. T-Gruppe), wenn jede subnormale (bzw. aufsteigend erreichbare) Untergruppe S von G bereits ein Normalteiler von G ist. — Der Normalteiler N heißt *t-eingebettet* (bzw. *T-eingebettet*) in der Gruppe G, wenn N jede subnormale (bzw. aufsteigend erreichbare) Untergruppe S von G normalisiert.

Eine notwendige Bedingung dafür, daß der Normalteiler N in G t-eingebettet (bzw. T-eingebettet) sei, ist offenbar, daß N selbst eine t-Gruppe (bzw. eine T-Gruppe) ist. Diese Bedingung ist aber im allgemeinen nicht hinreichend, wie etwa das direkte Produkt $G = \mathfrak{S}_3 \times Z_3$ der symmetrischen Gruppe des Grades 3 mit der zyklischen Gruppe der Ordnung 3 zeigt. Ein allgemeineres Beispiel für diese Situation liefert ein maximal abelscher Normalteiler einer nicht-abelsch nilpotenten Gruppe.

In ([5], Th. 2.3.1) zeigt ROBINSON, daß jede t-Gruppe G (also auch jede T-Gruppe) eine perfekte zweite Ableitung hat. Daher werde hier das Augenmerk zunächst auf perfekte Normalteiler gerichtet. Abelsche Normalteiler werden im nächsten Abschnitt betrachtet.

Es gilt

Satz 1.1[1]: *Ist der Normalteiler N der Gruppe G eine t-Gruppe (bzw. eine T-Gruppe), so normalisiert N jede subnormale (bzw. aufsteigend erreichbare) Untergruppe S von G, für die entweder $S/N \cap S$ oder $N/N \cap S$ perfekt ist.*

[1]) Einem Brief von D. ROBINSON (22. 7. 1965) ist zu entnehmen, daß Prof. P. HALL diesen Satz bereits seit einiger Zeit kennt.

Durch Spezialisierung erhält man hieraus die nützliche

Folgerung 1.2: *Ist der Normalteiler N der Gruppe G eine perfekte t-Gruppe (bzw. T-Gruppe), so ist N in G t-eingebettet (bzw. T-eingebettet).*

Da ein direktes Produkt von nicht-abelsch einfachen Gruppen eine perfekte t-Gruppe ist, enthält Folgerung 1.2 die Aussage (1.a) von WIELANDT [9].

Ein wesentlicher Teil des Beweises von Satz 1.1 ist enthalten in

Hilfssatz 1.3: *Ist N ein Normalteiler der Gruppe G und S eine aufsteigend erreichbare Untergruppe von G mit $N \cap S = 1$ und $S \neq \langle S^N \rangle$, so ist $S \neq S'$. Ist $T = \langle S^{S_2} \rangle$, wobei S_2 das zweite Glied einer gestrafften Normalkette von S nach NS ist, so ist $T \cap N$ abelsch.*

Dies sei positiv formuliert als

Korollar 1.4: *Ist N ein Normalteiler der Gruppe G und ist S eine aufsteigend erreichbare (bzw. subnormale) Untergruppe von G mit $N \cap S = 1$, so normalisiert N die Untergruppe S, falls entweder S perfekt ist, oder N keine aufsteigend erreichbare (bzw. subnormale) abelsche Untergruppe $\neq 1$ besitzt.*

Beweis von Hilfssatz 1.3: Sei $H = NS$ und sei $\{S_\sigma\}$ eine aufsteigende gestraffte Normalreihe von S nach H, dann ist $T = \langle S^{S_2} \rangle \neq S$. Nach dem Dedekindschen Modulsatz ist $T = SD$ mit $D = N \cap T$. Da sowohl N als auch T unter S_2 invariant sind, so ist auch D unter S_2 invariant. Wegen $T \neq S$ ist $D \neq 1$. Also ist T das direkte Produkt von S und D. Ist C der Zentralisator von D in T, so ist auch C unter S_2 invariant. Da $C \supseteq S$ und da T die kleinste S enthaltende S_2-invariante Untergruppe von H ist, so gilt $C = T$. Somit ist D abelsch. — Für die Kommutatorgruppe von T erhält man

$$T' = (D \times S)' = S' \subseteq S .$$

Als charakteristische Untergruppe von T ist S' unter S_2 invariant. Da aber S unter S_2 nicht invariant ist, so ist $S \neq S'$.

Beweis von Satz 1.1: Die subnormale (bzw. aufsteigend erreichbare) Untergruppe S von G wird offenbar genau dann von der t-Gruppe (bzw. T-Gruppe) N normalisiert, wenn $\bar{S} = S/N \cap S$ in $H = SN/N \cap S$ normal ist. Sei nun $\bar{S}$ nicht normal in H und sei $\overline{N} = N/N \cap S$. Wegen $\overline{N} \cap \bar{S} = 1$ erhält man aus Hilfssatz 1.3:

$$\bar{S} \neq \bar{S}', \text{ und } D = T \cap \overline{N} \text{ ist abelsch (und } \neq 1) .$$

Nach Voraussetzung ist dann $\overline{N}$ perfekt. Da $\overline{N}$ mit N eine t-Gruppe (bzw. eine T-Gruppe) ist, so ist für jedes Element $z \in D$ die zyklische Untergruppe $Z = \langle z \rangle$ der subnormalen (bzw. aufsteigend erreichbaren) Untergruppe D von $\overline{N}$ normal in $\overline{N}$. In diesem zyklischen Normalteiler induziert $\overline{N}$ eine abelsche Gruppe von Automorphismen. Da aber $\overline{N}$ perfekt ist, so ist diese Automorphismengruppe trivial, und Z liegt im Zentrum $\underline{Z}\,\overline{N}$ von $\overline{N}$. Also gilt $D \subseteq \underline{Z}\,\overline{N}$. Da $\overline{N}$ perfekt ist, stimmt $\underline{Z}\,\overline{N}$ mit dem zweiten Zentrum von $\overline{N}$ nach dem Grünschen Lemma überein (vgl. [3], S. 227). Nach Korollar 1.4 ist also $\bar{S}\underline{Z}\,\overline{N}/\underline{Z}\,\overline{N}$ normal in $H/\underline{Z}\,\overline{N}$. Wegen $\bar{S} \cap \overline{N} = 1$ heißt das: für jedes $s \in \bar{S}$ und jedes $n \in \overline{N}$ gilt

$$n^{-1}sn = sz(n) \quad \text{mit} \quad z(n) \in \underline{Z}\,\overline{N} .$$

Für ein festes s ist dann aber die Abbildung $n \to z(n)$ von $\overline{N}$ in $Z\overline{N}$ ein Homomorphismus. Da $\overline{N}$ perfekt ist, ist dieser Homomorphismus für jedes $s \in \overline{S}$ trivial. Dann wird $\overline{S}$ von $\overline{N}$ zentralisiert, im Widerspruch zur Annahme, $\overline{S}$ werde nicht von $\overline{N}$ normalisiert. — Dieser Widerspruch beweist den Satz.

Eine Ergänzung zur Folgerung 1.2 liefert das

Korollar 1.5: *Ist die aufsteigend erreichbare Untergruppe S der Gruppe G eine perfekte t-Gruppe (bzw. T-Gruppe), so ist auch die normale Hülle $\langle S^G \rangle$ von S eine perfekte t-Gruppe (bzw. T-Gruppe).*

Beweis: Sei $\{S_\sigma\}$ eine S und G verbindende Normalkette, und sei $\{T_\sigma\}$ die durch $T_\sigma = \langle S^{S_\sigma} \rangle$ definierte Normalkette, die $S = T_1$ mit $T_\tau = \langle S^G \rangle$ verbindet. Da S perfekt ist, so ist offenbar auch jedes der T_σ perfekt; es bleibt also nur zu zeigen, daß für jedes ν mit $1 \leqq \nu \leqq \tau$ die Gruppe T_ν eine t-Gruppe (bzw. T-Gruppe) ist. Sei dies bereits für alle Ordinalzahlen $\sigma < \nu$ gezeigt. Ist nun ν von der Form $\nu = \mu + 1$, so ist T_ν Produkt von (unter S_ν zu T_μ konjugierten) Normalteilern, die perfekte t-Gruppen (bzw. T-Gruppen) sind. Aus Folgerung 1.2 ergibt sich dann, daß auch T_ν eine t-Gruppe (bzw. T-Gruppe) ist. — Sei also ν eine Limeszahl und sei U eine subnormale (bzw. aufsteigend erreichbare) Untergruppe von T_ν. Da ν eine Limeszahl ist, gilt $T_\nu = \bigcup_{\sigma<\nu} T_\sigma$ und daher auch $U = \bigcup_{\sigma<\nu} (U \cap T_\sigma)$. Da nun $U \cap T_\sigma$ als subnormale (bzw. aufsteigend erreichbare) Untergruppe der t-Gruppe (bzw. T-Gruppe) T_σ in dieser normal ist, so ist das Korollar bewiesen, wenn wir zeigen können, daß $U \cap T_\sigma$ in T_ν normal ist; denn dann ist auch U in T_ν normal. Dieser Schluß ist enthalten in

Hilfssatz 1.6: *Ist die Gruppe G Vereinigung eines aufsteigenden Turmes $\{T_\sigma\}$ von t-Gruppen derart, daß $T_\sigma \trianglelefteqq T_{\sigma+1}$ und für jede Limeszahl λ mit $T_\lambda \in \{T_\sigma\}$ ist $T_\lambda = \bigcup_{\varrho<\lambda} T_\varrho$, dann ist jedes der T_σ normal in G, und G ist eine t-Gruppe.*

Beweis: Dieser wird durch Induktion über μ erbracht: für $\mu = 1$ gilt: T_σ ist normal in $T_{\sigma+1}$. Sei nun T_σ normal in $T_{\sigma+\nu}$ für jedes ν mit $\sigma + \nu < \sigma + \mu$. Hat μ die Form $\mu = \varkappa + 1$, so ist $T_{\sigma+\varkappa}$ normal in $T_{\sigma+\mu}$; und da T_σ in $T_{\sigma+\varkappa}$ normal ist, so ist T_σ als Subnormalteiler (vom Defekt $\leqq 2$) der t-Gruppe $T_{\sigma+\mu}$ normal in dieser. — Ist μ eine Limeszahl, so gilt $T_{\sigma+\mu} = \bigcup_{\nu<\mu} T_{\sigma+\nu}$. Da aber T_σ in allen $T_{\sigma+\tau}$ normal ist, so auch in deren Vereinigung. Daher ist also T_σ normal in jedem Glied der Normalkette $\{T_\varrho, \varrho \geqq \sigma\}$, also auch in $G = \bigcup T_\varrho$.

Bemerkung: Das Korollar 1.5 gibt eine Beschränkung für die Struktur einer echten aufsteigend erreichbaren Untergruppe S einer nicht-strikt einfachen Gruppe G: Die Gruppe S ist keine perfekte t-Gruppe. — Ein anderes Kriterium in dieser Richtung findet man bei Robinson ([7], S. 41, Corollary).

Roseblade [8] hat gezeigt, daß in einer Gruppe, die die Minimalbedingung für Subnormalteiler erfüllt, jeder Normalteiler N, der keine Untergruppen $\neq N$ von endlichem Index besitzt, in G t-eingebettet ist. Etwas allgemeiner findet sich dieses Resultat bei Robinson ([7], Lemma 4.3). Dieser Satz läßt sich auf eine etwas größere Klasse von Gruppen ausdehnen.

Satz 1.7: *Ist der Normalteiler N der Gruppe G eine t-Gruppe, so normalisiert N jeden Subnormalteiler S von G derart, daß*

1. *$N/N \cap S$ die Minimalbedingung für Subnormalteiler erfüllt und keine echte Untergruppe von endlichem Index besitzt, und*

2. *die Gruppe $\bar{S} = S/N \cap S$ erzeugt wird durch Untergruppen S_ι, die der Minimalbedingung für Subnormalteiler genügen.*

Bemerkung: Die Bedingung 2. ist sicher erfüllt, wenn $S/N \cap S$ eine Torsionsgruppe ist.

Beweis: Sei S ein die Bedingungen 1. und 2. erfüllender Subnormalteiler von G. In der Gruppe NS ist $N \cap S$ normal, denn N ist eine t-Gruppe. Die Faktorgruppe $H = NS/N \cap S$ ist das Produkt von $\bar{N} = N/N \cap S$ und $\bar{S} = S/N \cap S$ mit $\bar{S} \cap \bar{N} = 1$. Sei S_ι eine die Minimalbedingung für Subnormalteiler erfüllende Untergruppe von $\bar{S}$. Dann erfüllt $H_\iota = \bar{N}S_\iota$ die Minimalbedingung für Subnormalteiler. Nach ROSEBLADE ([8], S. 134, Th. 3) normalisiert $\bar{N}$ den Subnormalteiler S_ι von H_ι. Da $\bar{S}$ aber Erzeugnis der S_ι ist, so wird auch $\bar{S}$ von $\bar{N}$ normalisiert. Also normalisiert N den Subnormalteiler S.

Bemerkungen: a) In Satz 1.7 kann man nicht auf eine Bedingung der Art 2. verzichten; dies zeige ein Beispiel: Sei p eine Primzahl und P eine lokal zyklische Gruppe vom Typ p^∞. Sei $Z = \langle z \rangle$ eine unendlich zyklische Gruppe, und sei $N = P \times Z$. Sei σ ein Isomorphismus der Gruppe Q auf P. Dann operiere Q folgendermaßen auf N: Q zentralisiere P, und für jedes $g \in Q$ gelte: $z^g = zg^\sigma$. In der nilpotenten Gruppe $G = \langle Z, P, Q \rangle$ ist $\langle P, Q \rangle$ ein Normalteiler, der die Minimalbedingung für Untergruppen erfüllt und keine echte Untergruppe von endlichem Index besitzt, den Subnormalteiler Z aber nicht normalisiert.

b) Daß sich der Rosebladesche Satz nicht ohne weiteres auf aufsteigend erreichbare Untergruppen ausdehnen läßt, zeigt bereits die Gruppe $G = \langle P, i \rangle$, wobei P eine lokal zyklische 2-Gruppe vom Typ 2^∞ ist und die Involution i jedes Element von P invertiert. Offenbar ist $\langle i \rangle$ eine aufsteigend erreichbare Untergruppe von G, deren Normalisator die Ordnung 4 hat.

Für absteigend erreichbare Untergruppen hat man den

Hilfssatz 1.8: *Ist der Normalteiler N in jeder N enthaltenden Untergruppe der Gruppe G t-eingebettet, so normalisiert N auch jede absteigend erreichbare Untergruppe S von G.*

Beweis: Sei für jede Ordinalzahl $\sigma < \nu \leqq \tau$ gezeigt, daß die Untergruppe S_σ aus der G mit S verbindenden absteigenden Normalkette $\{S_\sigma\}$ von N normalisiert wird. Ist ν von der Form $\nu = \mu + 1$, so ist S_ν als Normalteiler von S_μ subnormal in NS_μ und wird also von dem t-eingebetteten Normalteiler N normalisiert. Ist ν aber eine Limeszahl, so ist $S_\nu = \bigcap_{\sigma < \nu} S_\sigma$; da aber N jede der Gruppen S_σ normalisiert, so auch ihren Durchschnitt S_ν. — Damit ist die Aussage des Hilfssatzes durch Induktion bewiesen.

Korollar 1.9: *Ist der Normalteiler N der Gruppe G eine perfekte t-Gruppe, so normalisiert N jede absteigend erreichbare Untergruppe S von G.*

Dies ist einfach eine Zusammenfassung von Folgerung 1.2 und Hilfssatz 1.8.

§ 2. Relativ normalisierende Normalteiler

Definition: Operiert die Gruppe G so auf der abelschen Gruppe A, daß für jedes Paar G-zulässiger Untergruppen B, C von A aus $C \subset B$ folgt, daß die Kardinalität eines minimalen Erzeugendensystems der Faktorgruppe B/C größer ist als die Kardinalzahl r, so heiße A *unter G vom Grade $>r$ gemischt.* — Ist die Gruppe A unter G vom Grade >1, so werde A kurz *G-gemischt* genannt.

Einer ähnlichen Bedingung begegnet man in der Theorie der linearen Gruppen über einem Körper, wenn man voraussetzt, daß jeder irreduzible Konstituent $+1$ der linearen Gruppe G einen Grad $>r$ habe.

Satz 2.1: *Ist der abelsche Normalteiler A der Gruppe G eine G-gemischte Operatorgruppe, dann gilt für jede $AW = G$ erfüllende Untergruppe W von die Beziehung*

$$\underline{N}_G W = W .$$

Beweis: Sei W eine $AW = G$ erfüllende Untergruppe von G; dann ist natürlich A auch W-gemischt. Die Annahme $W \neq \underline{N}_G W$ bedeutet nach dem Dedekindschen Modulsatz

$$\underline{N}_G W = W(A \cap \underline{N}_G W) \quad \text{mit} \quad A \cap \underline{N}_G W \supset A \cap W = C .$$

Es gibt dann Elemente $+1$ in A/C, die W/C normalisieren und daher sogar zentralisieren. Sei b ein Urbild eines solchen Elements in A. Als Urbild der zyklischen W/C zentralisierenden Gruppe $\langle b, C\rangle/C = B/C$ ist B sicher W-zulässig. Dies widerspricht der Voraussetzung, daß A unter G gemischt ist. — Dieser Widerspruch zeigt, daß $W = \underline{N}_G W$ sein muß.

Bemerkung: Ist $G = AW$ mit $W \neq \underline{N}_G W$ und ist der abelsche Normalteiler A lokal zyklisch, so kann man die Situation von W im Untergruppenverband von G recht gut beschreiben. Ist A etwa eine Primärgruppe, so ist W eine aufsteigend erreichbare Untergruppe von G; ist A torsionsfrei mit $W \cap A = 1$, so ist A zentral in G.

Ein viel schwächerer Begriff als G-Mischung ist die schwache G-Irreduzibilität.

Definition: Die Gruppe G operiert *schwach irreduzibel* auf der abelschen Gruppe A (bzw. A ist *schwach G-irreduzibel*), falls für jede G-zulässige Untergruppe $B \neq 0$ von A die Kardinalität eines minimalen Erzeugendensystems mit der eines minimalen Erzeugendensystems von A übereinstimmt.

Für freie abelsche Gruppen endlichen Ranges gilt ein nützliches und wohl bekanntes Analogon zum Satz von CLIFFORD:

Hilfssatz 2.2: *Operiert die Gruppe G schwach irreduzibel auf der freien abelschen Gruppe endlichen Ranges $A \neq 0$, dann gibt es zu jedem Normalteiler N von G eine Untergruppe B von endlichem Index in A, die eine direkte Summe von schwach N-irreduziblen direkten Summanden von A ist (diese können unter G konjugiert gewählt werden).*

Der einfache Beweis sei übergangen.

Der Hilfssatz 2.2 (bzw. der Satz von CLIFFORD) wird ergänzt durch

Hilfssatz 2.3: *Operiert die Gruppe G schwach irreduzibel (bzw. irreduzibel) auf der freien abelschen Gruppe endlichen Ranges (bzw. dem endlich-dimensionalen*

Vektorraum A über dem Körper K), so gibt es für jede aufsteigend erreichbare Untergruppe S von G eine Untergruppe B von endlichem Index in A, die direkte Summe von (natürlich endlich vielen) schwach S-irreduziblen direkten Summanden von A ist (bzw. so ist A für jede aufsteigend erreichbare Untergruppe S von G direkte Summe von [endlich vielen] S-irreduziblen Teilräumen).

Beweis: Da der Beweis von Hilfssatz 2.3 für Vektorräume inhaltlich mit dem für freie abelsche Gruppen übereinstimmt, technisch aber einfacher ist, so sei nur letzterer vorgeführt.

Sei die Aussage des Hilfssatzes allgemein bereits für aufsteigend erreichbare Untergruppen vom Typ $<\tau$ bewiesen, und sei S in G aufsteigend erreichbar vom Typ τ. Hat τ die Form $\tau = \mu + 1$, so gibt es nach Hilfssatz 2.2 in A eine Untergruppe A_μ von endlichem Index, die direkte Summe von endlich vielen schwach S_μ-irreduziblen direkten Summanden von A ist. Jeder dieser enthält aber, da S eine aufsteigend erreichbare Untergruppe vom Typ μ von S_μ ist, eine Untergruppe von endlichem Index, die direkte Summe von [endlich vielen] schwach S-irreduziblen direkten Summanden ist. Also gibt es in A eine Untergruppe von endlichem Index, die direkte Summe von schwach S-irreduziblen direkten Summanden von A ist.

Sei also τ eines Limeszahl, d. h. $G = S_\tau = \bigcup_{\sigma<\tau} S_\sigma$. Ist A schwach S_σ-irreduzibel für ein $\sigma < \tau$, so gilt die Aussage des Hilfssatzes offenbar. Man darf daher annehmen, daß A für kein $\sigma < \tau$ schwach S_σ-irreduzibel ist. Es gibt also echte schwach S_σ-irreduzible direkte Summanden von A; sei M_σ deren Erzeugnis. Mit M_σ ist auch die kleinste reine Untergruppe $\hat{M}_\sigma$ von A, die M_σ enthält, S_σ-zulässig und hat den gleichen Rang wie M_σ. Unter den schwach S_σ-irreduziblen direkten Summanden von A kann man endlich viele so finden, daß ihr Erzeugnis gleich ihrer direkten Summe in A ist und endlichen Index in $\hat{M}_\sigma$ hat. Also gibt es nach Induktionsvoraussetzung für jedes $\nu \leqq \sigma < \tau$ in $\hat{M}_\sigma$ eine Untergruppe von endlichem Index, die direkte Summe von schwach S_ν-irreduziblen direkten Summanden von A ist.

Offenbar gilt: $$\hat{M}_{\sigma'} \leqq \hat{M}_\sigma \quad \text{für} \quad \sigma \leqq \sigma' < \tau\,.$$

Da A endlichen Rang hat, so gibt es eine Ordinalzahl ϱ derart, daß $\hat{M}_\varrho = \hat{M}_\sigma$ für alle σ mit $\varrho \leqq \sigma < \tau$ gilt. Dann ist $\hat{M}_\varrho$ auch S_σ-zulässig für alle σ mit $\varrho \leqq \sigma < \tau$, d. h. $\hat{M}_\varrho$ ist G-zulässig. Da aber A schwach G-irreduzibel ist, so ist die einzige G-zulässige reine Untergruppe von A die Gruppe A selbst. Wegen $\hat{M}_\varrho = A$ gibt es also in A eine Untergruppe von endlichem Index, die direkte Summe von [endlich vielen] schwach S-irreduziblen direkten Summanden von A ist.

Dieses Ergebnis erlaubt es, den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 2.4: a) (WIELANDT [9], (1.b)) *Ist der minimale Normalteiler A der Gruppe G endlich und abelsch, so ist A ein T-eingebetteter Normalteiler von G.*

b) *Ist die freie abelsche Gruppe endlichen Ranges A ein schwach G-irreduzibler Normalteiler der Gruppe G, so gibt es zu jeder aufsteigend erreichbaren Untergruppe S von G eine positive ganze Zahl $n = n(S)$ derart, daß A^n die Gruppe S normalisiert.*

Andere Bedingungen dafür, daß ein abelscher Normalteiler der Gruppe G einen Subnormalteiler S normalisiert, findet man bei ROBINSON ([7], § 2).

Beweis: a) Ist S eine aufsteigend erreichbare Untergruppe von G, so ist Hilfssatz 2.3 anwendbar; denn A ist ein Vektorraum über einem endlichen Primkörper. Also ist A direktes Produkt von S-irreduziblen Teilräumen A_i von A. Gilt $S \cap A_i \neq 1$, so gilt $A_i \subseteq S$; denn A_i ist S-irreduzibel. Gilt aber $S \cap A_i = 1$, so ist $\underline{N}_{A_i} S \neq 1$, da S in jeder S enthaltenden Untergruppe von G — also auch in SA_i — aufsteigend erreichbar ist. Da aber $\underline{N}_{A_i} S$ ein S-invarianter Teilraum des S-irreduziblen Vektorraumes A_i ist, so gilt $A_i \subseteq \underline{N}_G S$. Damit ist a) gezeigt.

b) Nach Hilfssatz 2.3 gibt es eine S-zulässige Untergruppe B von endlichem Index in A, die direktes Produkt von endlich vielen schwach S-irreduziblen Untergruppen A_i ist. Es genügt also zu zeigen, daß es zu jeder der Gruppen A_i eine positive ganze Zahl n_i mit der gewünschten Eigenschaft gibt.

Ist $S \cap A_i \neq 1$, so hat diese S-zulässige Untergruppe endlichen Index in der schwach S-irreduziblen Gruppe A_i, und die Behauptung ist klar. Gilt aber $S \cap A_i = 1$, so hat die S-zulässige, S zentralisierende Untergruppe $C = A_i \cap \cap \underline{N}_G S$ als nicht-triviale, S-zulässige Untergruppe der schwach S-irreduziblen Gruppe A_i endlichen Index in dieser. (Man kann zeigen, daß $C = A_i$; denn A_i ist torsionsfrei.) Damit gibt es auch in diesem Fall eine Zahl, die das Verlangte leistet.

§ 3. Normalisatorketten

Ist

$$(\mathfrak{C}) \qquad 1 = C_0 \subseteq C_1 \subseteq \cdots \subseteq C_\alpha \subseteq C_{\alpha+1} \subseteq \cdots \subseteq C_\tau = G$$

eine aufsteigend wohlgeordnete Kette (evtl. mit Wiederholungen) von Normalteilern der Gruppe G, so bezeichne $\mathfrak{N}(\mathfrak{C})$ die Menge der Untergruppen U von G, die von der Kette $(\mathfrak{C})$ „normalisiert" werden, d. h. für die

$$U C_\alpha \trianglelefteq U C_{\alpha+1} \quad \text{für jedes} \quad \alpha < \tau$$

gilt. Offenbar enthält die Menge $\mathfrak{N}(\mathfrak{C})$ auch das Erzeugnis einer beliebigen Menge von Untergruppen von G, die alle in $\mathfrak{N}(\mathfrak{C})$ liegen. Für Durchschnitte auch nur endlich vieler solcher Untergruppen konnte Verf. dies nicht zeigen.

Ist σ ein Epimorphismus der Gruppe G auf die Gruppe H, so ist

$$(\mathfrak{C}^\sigma) \qquad 1 = C_0^\sigma \subseteq C_1^\sigma \subseteq \cdots \subseteq C_\alpha^\sigma \subseteq C_{\alpha+1}^\sigma \subseteq \cdots \subseteq C_\tau^\sigma = H$$

eine aufsteigend wohlgeordnete Kette von Normalteilern von H.

Ist U eine Untergruppe von G, so ist

$$(\mathfrak{C} \cap U) \qquad 1 = C_0 \cap U \subseteq \cdots \subseteq C_\alpha \cap U \subseteq C_{\alpha+1} \cap U \subseteq \cdots \subseteq C_\tau \cap U = U$$

eine aufsteigend wohlgeordnete Kette von Normalteilern von U.

Hilfssatz 3.1: *Ist $(\mathfrak{C})$ eine aufsteigend wohlgeordnete Kette von Normalteilern der Gruppe G und ist $U \in \mathfrak{N}(\mathfrak{C})$, so gilt:*

a) *Für jeden Epimorphismus σ der Gruppe G ist $U^\sigma \in \mathfrak{N}(\mathfrak{C}^\sigma)$.*

b) *Für jede Untergruppe $V \supseteq U$ von G ist $U \in \mathfrak{N}(\mathfrak{C} \cap V)$ in V.*

Die Untergruppe U von G heißt eine *C-Untergruppe*, wenn es in G eine aufsteigend wohlgeordnete Kette ($\mathfrak{C}$) von Normalteilern mit G als letztem Glied und mit $U \in \mathfrak{N}(\mathfrak{C})$ gibt.

Hilfssatz 3.2: *Die Untergruppe U der Gruppe G ist genau dann eine C-Untergruppe von G, wenn es für jeden Epimorphismus σ von G mit $G^\sigma \neq 1$ einen Normalteiler $\neq 1$ von G^σ gibt, der U^σ normalisiert.*

Die *Beweise* dieser beiden Hilfssätze ergeben sich sofort aus den Definitionen.

Aus der Definition der C-Untergruppen ist klar, daß sie aufsteigend erreichbare Untergruppen sind. Daß andererseits nicht jede aufsteigend erreichbare Untergruppe auch eine C-Gruppe ist, ergibt sich aus der Existenz einfacher, aber nicht strikt einfacher Gruppen (vgl. P. HALL [2]). Im allgemeinen sind auch Subnormalteiler (vom Defekt $\geqq 3$) keine C-Untergruppen. Dies zeigt das folgende

Beispiel: G sei die volle Automorphismengruppe der charakteristisch einfachen Gruppe von MCLAIN, und sei I deren innere Automorphismengruppe. I ist direktes Produkt abelscher Normalteiler A, und keiner dieser ist zyklisch, da I als charakteristisch einfache Gruppe mit der Kommutatorgruppe I' übereinstimmt (vgl. [4]). Sei Z irgendeine zyklische Untergruppe $\neq 1$ des abelschen Normalteilers A von I, dann ist Z eine subnormale Untergruppe vom Defekt 3 in G, aber keine C-Untergruppe.

Gilt in G die Maximalbedingung für Normalteiler, so ist jede C-Untergruppe von G subnormal.

Im allgemeinen ist gar nicht klar, warum Vereinigung oder Durchschnitt zweier C-Untergruppen von G wieder C-Untergruppen sein sollten. Ist dies in G jedoch stets so, bilden also die C-Untergruppen von G einen Verband, so wollen wir G eine $\mathfrak{V}$-*Gruppe* nennen. — Eine recht große Klasse von $\mathfrak{V}$-Gruppen ergibt der

Satz 3.3: *Besitzt jedes epimorphe Bild $H \neq 1$ der Gruppe G einen Normalteiler $N \neq 1$, der entweder eine perfekte T-Gruppe (bzw. t-Gruppe) oder eine endlich erzeugte abelsche Gruppe ist, so ist G eine $\mathfrak{V}$-Gruppe (bzw. so ist das Erzeugnis je zweier Subnormalteiler von G eine C-Untergruppe von G).*

Beweis: Nach Hilfssatz 3.2 müssen wir für die aufsteigend erreichbaren (bzw. subnormalen) Untergruppen A und B von G und für das Erzeugnis $E = \langle A, B\rangle$ in jedem epimorphen Bild $H \neq 1$ von G einen Normalteiler $R \neq 1$ finden, der die Bilder S und T von A und B und damit auch $\langle S, T\rangle$, das Bild von E, normalisiert; dann ist E eine C-Untergruppe von G.

Sei N ein solcher, in der Voraussetzung beschriebener Normalteiler von H. Ist N eine perfekte T-Gruppe (bzw. t-Gruppe), so normalisiert $N = R$ nach Folgerung 1.2 die Untergruppen S und T. Ist aber N eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, so ist die Torsionsuntergruppe F von N ein endlicher Normalteiler von H. Ist $F \neq 1$, so gibt es einen minimalen Normalteiler R von H in F. Dieser ist in H nach Satz 2.4 a) T-eingebettet, normalisiert also S und T. — Ist aber $F = 1$, ist also N torsionsfrei, dann gibt es unter den in N enthaltenen Normalteilern $\neq 1$ von H einen von kleinstem Rang M. Nach Satz 2.4 b) gibt es

positive ganze Zahlen s und t so, daß der Normalteiler M^s die Untergruppe S und der Normalteiler M^t die Untergruppe T normalisiert; daher normalisiert der Normalteiler $R = M^{st}$ von H sowohl S als auch T. — In jedem Falle haben wir also in H einen Normalteiler $R \neq 1$ gefunden, der S und T und damit auch ihre Vereinigung normalisiert.

Bemerkung: Aus vorstehendem Satz und Korollar 1.9 ergibt sich insbesondere die Aussage: *Besitzt jedes epimorphe Bild $H \neq 1$ der Gruppe G einen Normalteiler $\neq 1$, der eine perfekte t-Gruppe ist, so ist jede absteigend erreichbare Untergruppe eine C-Untergruppe von G und damit aufsteigend erreichbar.* — Offen bleibt die Frage, ob ein abelscher minimaler Normalteiler, der endlich ist, jede absteigend erreichbare Untergruppe normalisiert.

Man kann nun eine einfache Charakterisierung der Subnormalteiler von fast-polyzyklischen Gruppen angeben. Dabei heißt die Gruppe G *fast-polyzyklisch*, wenn sie die Maximalbedingung für Untergruppen erfüllt und eine auflösbare Untergruppe von endlichem Index besitzt.

Satz 3.4: *Für die Untergruppe U der fast-polyzyklischen Gruppe G sind die folgenden Aussagen gleichwertig:*

a) *U ist subnormal in G.*

b) *Für jeden Epimorphismus σ von G mit $G^\sigma \neq 1$ enthält der Normalisator von U^σ in G^σ einen Normalteiler $\neq 1$ von G^σ.*

c) *Für jeden Epimorphismus σ von G mit endlichem Bild G^σ ist U^σ subnormal in G^σ.*

Beweis: Da es in einer fast-polyzyklischen Gruppe $G \neq 1$ stets einen endlichen oder einen endlich erzeugten abelschen Normalteiler $\neq 1$ gibt, folgt aus Satz 3.3, daß ein Subnormalteiler von G eine C-Untergruppe ist. Damit folgt b) aus a). — Wegen der Maximalbedingung für Untergruppen ist aber jede C-Untergruppe von G subnormal; und a) folgt aus b). — Da c) nur eine abgeschwächte Form von a) ist, so reicht es, um die Gleichwertigkeit von a) und c) zu erhalten, wenn man c) voraussetzt und zeigt, daß U eine C-Untergruppe ist.

Es gelte also c). Angenommen U ist keine C-Untergruppe von G. Wegen der Maximalbedingung gibt es einen Normalteiler M von G maximal derart, daß $V = MU/U$ keine C-Untergruppe von $H = G/M$ ist. Wegen c) ist H unendlich. Es gibt also in der fast-polyzyklischen Gruppe H eine freie abelsche Untergruppe $A \neq 1$, die in H normal ist und eine minimale Erzeugendenzahl hat. Nach Hilfssatz 2.2 (bzw. 2.3) gibt es eine Untergruppe B von endlichem Index in A, die direktes Produkt von [endlich vielen] schwach V-irreduziblen direkten Faktoren von A ist, da die von H in A induzierte Gruppe von Automorphismen ein epimorphes Bild von H/A ist und so das Bild von V als Subnormalteiler enthält. Sei C ein schwach V-irreduzibler direkter Faktor von A. Ist $C \cap V \neq 1$, so hat $C \cap V$ endlichen Index in der schwach V-irreduziblen Gruppe C. Ist $C \cap V = 1$, so werden wir zeigen, daß die schwach V-irreduzible Untergruppe C von $K = VC$ im Hyperzentrum von K liegt; dann hat aber der Zentralisator $\underline{C}_C V$ in C endlichen Index (da C torsionsfrei ist, kann man sogar zeigen: $C = \underline{C}_G V$). Damit besitzt jeder schwach V-irreduzible direkte Faktor

von A eine Untergruppe von endlichem Index, die V normalisiert. Also besitzt auch A selbst eine solche Untergruppe von endlichem Index. Das heißt aber, es gibt eine positive ganze Zahl n so, daß der Normalteiler A^n von H die Untergruppe V normalisiert. Damit ist aber V eine C-Untergruppe von H, im Gegensatz zur Annahme.

Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß — im Falle $V \cap C = 1$ — die schwach V-irreduzible Gruppe C im Hyperzentrum von $K = VC$ liegt. Sei hierfür $i \neq$ irgendeine Primzahlpotenz und $K_i = C\,V/C^i \underline{C}_V(C/C^i)$. Das Bild von V in dieser Gruppe ist subnormal, da K_i ein homomorphes Bild einer Untergruppe von H/A^i ist. Die von V in C/C^i induzierte Gruppe von Automorphismen ist endlich. Die von Elementen von zu i primer Ordnung erzeugte Untergruppe dieser Automorphismengruppe ist ebenfalls ein Subnormalteiler in K_i. Dieser zentralisiert aber C/C^i. Also ist die von A in C/C^i induzierte Gruppe von Automorphismen eine Primärgruppe zur selben Primzahl wie C/C^i. Damit ist K_i eine Primärgruppe, und C/C^i ist im Hyperzentrum von K_i enthalten. Nach BAER ([1], Proposition 2, S. 176) folgt aber hieraus, daß C ein hyperzentraler Normalteiler von K ist. — Damit ist der Satz bewiesen.

Literatur

[1] BAER, R.: The hypercenter of a group. Acta Math. **89**, 165—208 (1953).
[2] HALL, P.: On non-strictly simple groups. Proc. Cambridge Phil. Soc. **59**, 531—553 (1963).
[3] KUROSH, A. G.: The theory of groups, 2nd ed., vol. II. New York 1956.
[4] MCLAIN, D. H.: A characteristically simple group. Proc. Cambridge Phil. Soc. **50**, 641—642 (1954).
[5] ROBINSON, D. J. S.: Groups in which normality is a transitive relation. Proc. Cambridge Phil. Soc. **60**, 21—38 (1964).
[6] — Joins of subnormal subgroups. Illinois J. Math. **9**, 144—168 (1965).
[7] — On the theory of subnormal subgroups. Math. Z. **89**, 30—51 (1965).
[8] ROSEBLADE, J. E.: On certain subnormal coalition classes. J. Algebra **1**, 132—138 (1964).
[9] WIELANDT, H.: Über den Normalisator der subnormalen Untergruppen. Math. Z. **69**, 463—465 (1958).

(Eingegangen am 2. August 1965)

CREMER, H. und R. KAERKES
Math. Annalen 163, 259—267 (1966)

Eine Verallgemeinerung der Stabilitätskriterien von L. Cremer und A. Leonhard

GOTTFRIED KÖTHE zum 60. Geburtstag gewidmet

Von

HUBERT CREMER und ROLF KAERKES in Aachen

Die Kriterien von LOTHAR CREMER und ADOLF LEONHARD[1]) gestatten bekanntlich eine Aussage über die Stabilität eines linearen Übertragungssystems, wenn die Ortskurve oder, was gleichbedeutend ist, die Abbildung der imaginären Achse durch das charakteristische Polynom gegeben ist. Bezeichnet man die Änderung des Argumentes des charakteristischen Polynoms $P(z)$, wenn z die Punkte der imaginären Achse von $-j\infty$ nach $+j\infty$ durchläuft, mit

$$\underset{-\infty}{\overset{+\infty}{\mathrm{V}}}(\omega) \arg P(j\omega)^{2}),$$

so lautet der den Kriterien zugrunde liegende Satz:

Satz 1. Es sei P ein Polynom mit komplexen Koeffizienten,

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu,\ a_n \neq 0,$$

und $P(j\omega) \neq 0$ für $-\infty < \omega < +\infty$. Bezeichnet ϱ die Anzahl der Nullstellen z_λ von P mit $\mathrm{Re} z_\lambda > 0$, so gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \underset{-\infty}{\overset{+\infty}{\mathrm{V}}}(\omega) \arg P(j\omega) = \frac{1}{2}(n - 2\varrho).$$

Aus der Forderung $\varrho = 0$ folgt als Stabilitätsbedingung:

$$\frac{1}{2\pi} \underset{-\infty}{\overset{+\infty}{\mathrm{V}}}(\omega) \arg P(j\omega) = \frac{n}{2}. \tag{1}$$

An Hand dieser Bedingung ergeben sich die Stabilitätskriterien von Cremer-Leonhard durch die Bestimmung der Änderung des Argumentes von $P(j\omega)$ längs der imaginären Achse aus den Schnittstellen der Ortskurve mit den Koordinatenachsen. Sie lauten in der Formulierung von LOTHAR CREMER wie folgt[3]):

Erstes Kriterium

Es sei P charakteristisches Polynom eines linearen Systems

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu,\ a_n \neq 0,\ a_\nu \text{ reell}.$$

[1]) Vgl. [1], [5].
[2]) Vgl. Definition 5.
[3]) Vgl. [1].

Diejenigen Werte von ω seien bekannt, bei denen die imaginäre Achse geschnitten wird, also

$$\mathrm{Re}\, P(j\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \cdots = 0$$

ist, und die der Größe nach geordnet mit

(2) $$\omega_1, \omega_3, \omega_5, \ldots$$

bezeichnet seien, und andererseits die ebenso geordneten aus

$$\mathrm{Im}\, P(j\omega) = \omega(a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 \ldots) = 0$$

sich ergebenden Werte

(3) $$0, \omega_2, \omega_4, \ldots,$$

die zu den Schnitten der Ortskurve mit der reellen Achse gehören. Die Stabilität des Systems ist gewährleistet, wenn die Werte der Reihe (2) *der Größe nach in die Lücken der Reihe* (3) *fallen (Lückenkriterium).*

Zweites Kriterium

Man ermittle eine der beiden Schnittfrequenzreihen (2) oder (3), z. B. $\omega_2, \omega_4, \ldots$ und durch Einsetzen die Lagen der zugehörigen Schnittwerte $R_2, R_4, \ldots$ ($R_\nu = \mathrm{Re}\, P(j\omega_\nu)$) auf der reellen Achse. Notwendig und hinreichend für die Stabilität ist dann (bei positivem a_n), daß

$$R_2 < 0, R_4 > 0, R_6 < 0, \ldots$$

ist (Lagenkriterium).

Geht man von den Kroneckerschen[4]) Indizes der Schnittstellen der Ortskurve mit einem von 0 ausgehenden Strahl aus, so erhält man eine dritte Variante dieser Kriterien.

Drittes Kriterium

Es sei P charakteristisches Polynom eines linearen Übertragungssystems

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu,\ a_n \neq 0^{6}).$$

Eine komplexe Zahl w_0 sei so gewählt, daß

$$\det(w_0, a_n j^n) \neq 0^{7}).$$

Es seien $\omega_1, \ldots, \omega_k$ die Parameterwerte der Schnittstellen der Ortskurve von P mit dem von 0 ausgehenden Strahl in Richtung w_0. Zu jedem ω_λ seien zwei Parameterwerte ω_λ^* und ω_λ^{**} so gewählt, daß

$$\det(w_0, P(j\omega)) \neq 0 \quad \text{für} \quad \omega_\lambda^* \leqq \omega < \omega_\lambda \quad \text{und} \quad \omega_\lambda < \omega \leqq \omega_\lambda^{**}$$

gilt, d. h. daß der Bogen der Ortskurve über dem abgeschlossenen Intervall $\langle \omega_\lambda^*, \omega_\lambda^{**} \rangle$ die durch w_0 bestimmte Gerade durch den Nullpunkt nur in ω_λ schneidet. Unter diesen Voraussetzungen ist für die Stabilität des Systems notwendig und hinreichend, daß erstens

$$P(j\omega) \neq 0,\ \omega \in E^1\ ,^{5})$$

---

[4]) Vgl. [6].

[5]) E^1 bezeichnet die Zahlengerade, E^2 die Euklidische Ebene.

[6]) Die Koeffizienten können auch komplex sein.

[7]) $\det(a, b) = \begin{vmatrix} \mathrm{Re}\, a & \mathrm{Re}\, b \\ \mathrm{Im}\, a & \mathrm{Im}\, b \end{vmatrix}$.

gilt und zweitens

$$\sum_{\lambda=1}^{k}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sgn}\det(P(j\omega_\lambda^*), w_0)+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}\det(w_0, P(j\omega_\lambda^{**}))\right)=m$$

ist, mit $n=2m-1$ *oder* $n=2m$.

Zusatz. Ist die Ortskurve von P an den Stellen ω_λ nach ω differenzierbar und sind der Vektor w_0 und der Tangentenvektor $\dot{P}(j\omega_\lambda)$ linear unabhängig, so kann die zweite Bedingung des vorhergehenden Kriteriums durch

$$\sum_{\lambda=1}^{k}\operatorname{sgn}\det(w_0, \dot{P}(j\omega_\lambda))=m \tag{3}$$

ersetzt werden.

Der Vorteil des zuletzt genannten Kriteriums liegt darin, daß man die Ortskurve nur in Umgebungen der Punkte $P(j\omega_\lambda)$ zu kennen braucht, und die Parameterwerte ω_λ^*, ω_λ^{**} bis auf die Vorschrift $\omega_\lambda^*<\omega_\lambda<\omega_\lambda^{**}$ dort willkürlich wählen kann.

Wir wenden uns nun der Verallgemeinerung des Kriteriums auf die Fälle zu, daß das gegebene System eine Kopplung zweier linearer Übertragungsglieder ist, deren Ortskurven bekannt sind. Hier ergibt sich die Frage, ob es möglich ist, an Hand dieser Ortskurven unmittelbar, also ohne Konstruktion der resultierenden Ortskurve des Gesamtsystems, dessen Stabilität zu entscheiden.

Ein einfaches Beispiel für eine derartige Verallgemeinerung liefert der bei Hintereinanderschaltung von Übertragungsgliedern vorkommende Fall:

$$L(z)=P_1(z)\cdot P_2(z)\,.$$

Es gilt

$$\underset{-\infty}{\overset{+\infty}{\mathrm{V}}}(\omega)\arg(P_1(j\omega)\cdot P_2(j\omega))=\underset{-\infty}{\overset{+\infty}{\mathrm{V}}}(\omega)\arg P_1(j\omega)+\underset{-\infty}{\overset{+\infty}{\mathrm{V}}}\arg P_2(j\omega)\,. \tag{4}$$

Daher folgt

Satz 2. Es seien P_1 und P_2 Polynome mit dem Grad n_1 bzw. n_2. Notwendig und hinreichend dafür, daß das Polynom $L(z)=P_1(z)\cdot P_2(z)$ nur Nullstellen mit negativem Realteil hat, sind die Bedingungen

$$P_1(j\omega)\cdot P_2(j\omega)\neq 0\quad\text{für}\quad\omega\in E^1\,,$$

und

$$\frac{1}{2\pi}\underset{-\infty}{\overset{+\infty}{\mathrm{V}}}(\omega)\arg P_1(j\omega)+\frac{1}{2\pi}\underset{-\infty}{\overset{+\infty}{\mathrm{V}}}(\omega)\arg P_2(j\omega)=\frac{1}{2}(n_1+n_2)\,.$$

Während der Satz 2 aus Satz 1 und (4) unmittelbar gefolgert werden kann, ebenso wie der Übergang zu $L_1(z)=P_1(z)\ldots P_k(z)$ mit $k>2$, ist die Verallgemeinerung des Kriteriums von Cremer-Leonhard auf den bei der Parallelschaltung von Übertragungsgliedern auftretenden Fall, daß $L(z)$ Summe oder Differenz zweier Polynome ist, weniger naheliegend. Die im folgenden angegebene Lösung beruht auf einer „Entwicklung" der Variation des Arguments der Differenz zweier Funktionen mittels Kroneckerscher Indizes.

Definition 1. Sind f und g Abbildungen eines reellen Intervalls I in die Ebene der komplexen Zahlen, t_1 und τ_1 innere Punkte von I und ist

$$w_1 = f(t_1) = g(\tau_1)\,,$$

so wird das geordnete Zahlenpaar (t_1, τ_1) als „Schnittstelle von f und g" bezeichnet.

Sind f und g an der Stelle t_1 bzw. τ_1 differenzierbar und sind die Tangentenvektoren $\dot{f}(t_1)$ und $\dot{g}(\tau_1)$ linear unabhängig, so wird (t_1, τ_1) eine „reguläre Schnittstelle" von f und g genannt.

Definition 2. Es sei (t_1, τ_1) eine isolierte Schnittstelle zweier Abbildungen f und g. Je zwei Parameterwerte t_1', t_1'' und τ_1', τ_1'' seien so gewählt, daß die folgenden Forderungen erfüllt sind:

1. $t_1' < t_1 < t_1''$, $\tau_1' < \tau_1 < \tau_1''$ und $f(t) \neq g(\tau)$ für $t \in \langle t_1', t_1'' \rangle - \{t_1\}$ und $\tau \in \langle \tau_1', \tau_1'' \rangle - \{\tau_1\}$.

2. $f(t_1')$, $f(t_1'')$, $g(\tau_1')$ und $g(\tau_1'')$ sind Randpunkte eines konvexen Bereichs B. Keine drei dieser Punkte liegen auf einer Geraden.

3. Für $t \in \langle t_1', t_1'' \rangle$ und $\tau \in \langle \tau_1', \tau_1'' \rangle$ liegt $f(t)$ bzw. $g(\tau)$ stets im Innern des Bereichs B.

Die ganze Zahl

$$\frac{1}{2}\operatorname{sgn}\det(f(t_1') - g(\tau_1'), f(t_1'') - g(\tau_1')) + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}\det(f(t_1'') - g(\tau_1''), f(t_1') - g(\tau_1''))$$

wird der (verallgemeinerte) Kroneckersche Index von f und g in (t_1, τ_1) genannt und mit $\varkappa(t_1, \tau_1, f, g)$ bezeichnet.

Zusatz. Ist (t_1, τ_1) eine reguläre Schnittstelle von f und g, so gilt

$$\varkappa(t_1, \tau_1, f, g) = \operatorname{sgn}\det(\dot{g}(\tau_1), \dot{f}(t_1))^{8})\,.$$

Satz 3. Es seien P und Q zwei Polynome mit komplexen Koeffizienten

$$P = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu, \quad Q = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu z^\nu\,,$$

$$a_n \neq b_n, \quad |a_n| \geqq |b_n|\,,$$

und

$$P(j\omega) \neq Q(j\omega), \quad \omega \in E^1\,.$$

Ω_0 sei eine reelle Zahl[9]), für die

$$P(j\omega) \neq Q(j\Omega_0), \quad \omega \in E^1\,,$$

ist. Die Menge der Schnittstellen von $P(j\omega)$ und $Q(j\Omega)$ mit der Eigenschaft

$$\omega_\lambda < \Omega_\lambda < \Omega_0$$[9])

oder

$$\Omega_0 < \Omega_\mu < \omega_\mu$$

[8]) Vgl. [4].

[9]) Den Parameterwert Ω_0 wird man zweckmäßig so wählen, daß die Anzahl der zu betrachtenden Schnittpunkte möglichst klein wird, oder so, daß die Indizes der Schnittstellen möglichst einfach bestimmt werden können.

sei endlich, $\lambda = 1, \ldots, k$ und $\mu = k+1, \ldots, m$. Es sei $\varkappa_\nu$ der Kroneckersche Index der Schnittstelle (ω_ν, Ω_ν). Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \operatorname*{V}_{-\infty}^{+\infty}(\omega) \arg(P(j\omega) - Q(j\omega))$$

$$= \frac{1}{2\pi} \operatorname*{V}_{-\infty}^{+\infty}(\omega) \arg(P(j\omega) - Q(j\Omega_0)) + \sum_{\nu=1}^{k} \varkappa_\nu - \sum_{\nu=k+1}^{m} \varkappa_\nu .$$

Aus diesem Satz ergibt sich mit (1) die folgende Verallgemeinerung des Kriteriums von Cremer-Leonhard.

Kriterium für parallel gekoppelte Systeme[10]).

Es seien P und Q die charakteristischen Polynome zweier linearer Übertragungsglieder, die so miteinander gekoppelt sind, daß für das charakteristische Polynom L der Kopplung gilt:

$$L = P - Q ,$$

$$P = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu , \quad Q = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu z^\nu , \quad a_n \neq b_n .$$

Es wird angenommen, daß die Bezeichnungen P und Q so gewählt sind, daß

$$|a_n| \geqq |b_n|$$

(also auch $a_n \neq 0$) ist. Ω_0 sei ein Parameterwert, für den $Q(j\Omega_0)$ nicht auf der Ortskurve von P liegt. Die Menge der Schnittstellen der Ortskurven von P und Q mit

$$\omega_\lambda < \Omega_\lambda < \Omega_0 \quad \text{oder} \quad \Omega_0 < \Omega_\mu < \omega_\mu$$

sei endlich, $\lambda = 1, \ldots, k$ und $\mu = k+1, \ldots, m$.

Unter diesen Voraussetzungen ist das gekoppelte System dann und nur dann stabil, wenn

1. *$P(j\omega) \neq Q(j\omega)$, $\omega \in E^1$,*
2. *für die Umlaufzahl der Ortskurve von P in bezug auf den Punkt $Q(j\Omega_0)$ gilt:*

$$\frac{1}{2\pi} \operatorname*{V}_{-\infty}^{+\infty}(\omega) \arg(P(j\omega) - Q(j\Omega_0)) = \frac{n}{2} - \sum_{\nu=1}^{k} \varkappa_\nu + \sum_{\nu=k+1}^{m} \varkappa_\nu .$$

Ist $L = P + Q$, so erhält man das Kriterium durch Betrachtung der Ortskurve von $-Q$. Ein Kriterium für den Fall $L = R(P - Q)$ (wobei R wieder ein Polynom bezeichnet) ergibt sich durch Hinzunahme von Satz 2.

Der Satz 3 ist eine Anwendung des folgenden Satzes 4.

Es bezeichne:

$l: B \to B'$ die Abbildung der Menge B in die Menge B'.

Definition 3. Es sei $\langle a, b\rangle$ ein abgeschlossenes Intervall von E^1,

$$l: \langle a, b\rangle \to E^2 - \{0\}$$

[10]) Zu Anwendungen von Zwei-Ortskurvenverfahren in der Technik vgl. z. B. [2].

stetig und θ eine (unter diesen Voraussetzungen stets existierende und modulo 2π eindeutig bestimmte) stetige Abbildung

$$\theta : \langle a, b\rangle \to E^1$$

mit der Eigenschaft

$$l(t) = |l(t)| \exp(j\theta(t)), \quad t \in \langle a, b\rangle .$$

Dann wird die reelle Zahl $\theta(b) - \theta(a)$ die Variation des Argumentes von l auf $\langle a, b\rangle$ genannt und mit

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(t) \arg l(t)$$

bezeichnet.

Definition 4. Es sei ψ eine stetige und streng monoton wachsende Abbildung von E^1 auf E^1. Eine Abbildung $l : E^1 \to E^2$ soll zur Menge $\mathfrak{L}_\psi$ gehören, wenn sie folgende Eigenschaft hat: Es gibt eine komplexe Zahl, sie sei mit c_l bezeichnet, und eine natürliche Zahl n derart, daß

$$l(\psi(t)) = c_l t^n + o(t^n) \quad \text{für} \quad t \to \pm\infty, t \in E^1 .$$

Die Vereinigung aller Mengen $\mathfrak{L}_\psi$ sei mit $\mathfrak{L}$ bezeichnet. Ist $l : E^1 \to E^2 - \{0\}$, $l \in \mathfrak{L}$ und $c_l \neq 0$, so sind für jede reelle Zahl α

$$\lim_{\tau \to +\infty} \overset{\tau}{\underset{\alpha}{\mathrm{V}}}(t) \arg l(t), \quad \lim_{\tau \to -\infty} \overset{\alpha}{\underset{\tau}{\mathrm{V}}}(t) \arg l(t) \tag{5}$$

eindeutig bestimmte reelle Zahlen. Die Zahl

$$\lim_{\tau \to -\infty} \overset{\alpha}{\underset{\tau}{\mathrm{V}}}(t) \arg l(t) + \lim_{\tau \to +\infty} \overset{\tau}{\underset{\alpha}{\mathrm{V}}}(t) \arg l(t) \tag{6}$$

ist von der Wahl von α unabhängig und ein ganzzahliges Vielfaches von π.

Definition 5. Es sei $l : E^1 \to E^2 - \{0\}$ stetig, α eine reelle Zahl. Dann werden die reellen Zahlen (5), (6) die Variation des Argumentes von l auf den Intervallen $(-\infty, \alpha\rangle$ bzw. $\langle\alpha, +\infty)$ genannt und wie folgt bezeichnet:

$$\overset{+\infty}{\underset{\alpha}{\mathrm{V}}}(t) \arg l(t) = \lim_{\tau \to +\infty} \overset{\tau}{\underset{\alpha}{\mathrm{V}}}(t) \arg l(t) ,$$

$$\overset{\alpha}{\underset{-\infty}{\mathrm{V}}}(t) \arg l(t) = \lim_{\tau \to -\infty} \overset{\alpha}{\underset{\tau}{\mathrm{V}}}(t) \arg l(t) .$$

Die Variation des Argumentes von l auf E^1 erklären wir durch:

$$\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\mathrm{V}}}(t) \arg l(t) = \overset{\alpha}{\underset{-\infty}{\mathrm{V}}}(t) \arg l(t) + \overset{+\infty}{\underset{\alpha}{\mathrm{V}}}(t) \arg l(t) .$$

Satz 4[11]**.** Es seien $f \in \mathfrak{L}_\psi$, $g \in \mathfrak{L}_\psi$, $c_f \neq c_g$ und $f(t) \neq g(t)$, $t \in E^1$. Die Bezeichnungen f und g seien so festgelegt, daß $|c_f| \geqq |c_g|$ gilt. τ_0 sei eine reelle Zahl, für die

$$f(t) \neq g(\tau_0), t \in E^1 ,$$

gilt. M_1 sei die Menge der Schnittstellen von f und g, die der Bedingung

$$t_\nu < \tau_\nu < \tau_0$$

[11]) Vgl. [3].

genügen. M_2 sei die Menge der Schnittstellen von f und g, die der Bedingung

$$\tau_0 < \tau_\nu < t_\nu$$

genügen. Die Mengen M_1 und M_2 seien endlich. Dann existieren die Kroneckerschen Indizes $\varkappa_\nu = \varkappa(t_\nu, \tau_\nu, f, g)$ aller zu M_1 oder M_2 gehörigen Schnittstellen, und es gilt

$$\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\mathrm{V}}}(t) \arg(f(t) - g(t)) = \overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\mathrm{V}}}(t) \arg(f(t) - g(\tau_0)) + \\ + 2\pi \sum_{(t_\nu, \tau_\nu) \in M_1} \varkappa_\nu - 2\pi \sum_{(t_\nu, \tau_\nu) \in M_2} \varkappa_\nu .$$

Es soll nun noch gezeigt werden, wie das den Kriterien von Cremer-Leonhard äquivalente Schnittstellenkriterium (Seite 260) aus Satz 4 und Satz 1 hergeleitet werden kann. Hierzu beweisen wir den etwas allgemeineren Satz:

Satz 5. Es sei $l: E^1 \to E^2$, $l \in \mathscr{L}_\psi$ und $c_l \neq 0$. p_0 sei ein Punkt, der nicht auf $l(E^1)$ liegt, und S sei ein von p_0 ausgehender Strahl mit dem Richtungsvektor w_0,

$$\det(w_0, c_l) \neq 0 .$$

M sei die Menge der Parameterwerte t_λ, in denen l den Strahl S schneidet. Die Anzahl der t_λ sei endlich. Wählen wir zu jedem $t_\lambda \in M$ zwei Parameterwerte $t_\lambda^* < t_\lambda < t_\lambda^{**}$ derart, daß der Bogen $l(\langle t_\lambda^*, t_\lambda^{**}\rangle)$ außer $l(t_\lambda)$ keinen weiteren Punkt auf S besitzt, und setzen wir

$$\varkappa_\lambda = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} \det(l(t_\lambda^*) - p_0, w_0) + \frac{1}{2} \operatorname{sgn} \det(w_0, l(t_\lambda^{**}) - p_0) , \tag{7}$$

so gilt

$$\frac{1}{2\pi} \overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\mathrm{V}}}(t) \arg(l(t) - p_0) = -\frac{\sigma}{2} + \sum_{t_\lambda \in M} \varkappa_\lambda ,$$

$\sigma = 0$ falls n gerade, $\sigma = 1$ falls n ungerade ist[12]).

Beweis. Es sei $f(t) = l(t) - p_0$, $t \in E^1$. Dann ist $c_l = c_f$ und

$$f(\psi(t)) = c_f t^n + o(t^n), \; t \to \pm\infty , \tag{8}$$

nach Definition von $\mathscr{L}_\psi$. Wegen $p_0 \notin l(E^1)$ gibt es ein δ mit

$$0 < \delta < |f(t)|, \; t \in E^1 \quad \text{und} \quad \delta \leqq \frac{1}{2}|c_f| . \tag{9}$$

Wir bestimmen eine positive Zahl r_0 mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} &r_0 > 0, \; \psi^{-1}(-r_0) < 0 < \psi^{-1}(r_0), \; \det(w_0, f(t)) \neq 0 \quad \text{für} \quad |t| > r_0 , \\ &|f(\psi(\theta)) - c_f \theta^n| < \left|\frac{c_f \theta^n}{2}\right| \quad \text{für} \quad r_0 < |\psi(\theta)| . \end{aligned} \tag{10}$$

Nach der Definition von $\mathscr{L}_\psi$ und der Voraussetzung $\det(w_0, c_f) \neq 0$ existiert r_0. Es sei eine positive Zahl a so gewählt, daß

$$a \geqq |w_0| \max\{|\psi^{-1}(-r_0)|^n, |\psi^{-1}(r_0)|^n, 1\} .$$

[12]) n ist durch l und ψ bestimmt, vgl. Definition 2.

Wir erklären nun:

$$g(\tau) = \frac{w_0 \delta}{a} (\psi^{-1}(\tau))^n, \tau \in E^1 .$$

Dann gilt $g \in \mathfrak{L}_\psi$ und

$$|c_g| = \frac{\delta}{a} |w_0| < |c_f| ,$$

(11)
$$|g(t)| \leqq \delta \quad \text{für} \quad |t| \geqq r_0 ,$$
$$|g(t)| \neq |f(t)|, t \in E^1 .$$

Für jede Schnittstelle $(t_\lambda, \tau_\lambda)$ von f und g gilt ferner

$$\tau_\lambda < -r_0 < t_\lambda < +r_0 \quad \text{oder} \quad -r_0 < t_\lambda < +r_0 < \tau_\lambda .$$

Wir wählen t_0 so, daß

(12)
$$t_0 > \max\{\tau_\lambda\}$$

ist. Dann gilt

$$f(t) \neq g(t_0), t \in E^1 .$$

Bezeichnen wir mit M die Menge aller Schnittstellen mit

$$t_\lambda < \tau_\lambda < t_0 ,$$

so sind die t_λ, für die $(t_\lambda, \tau_\lambda)$ zu M gehört, genau die Parameterwerte, für die l den Strahl von p_0 in Richtung w_0 schneidet. Da $f \in \mathfrak{L}_\psi$ und $g \in \mathfrak{L}_\psi$, $|c_g| < |c_f|$ und $f(t) \neq g(t), t \in E^1$, gilt und nach den Voraussetzungen zu Satz 5 die Menge M endlich ist, können wir Satz 4 anwenden. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\mathrm{V}}}(t) \arg(f(t) - g(t)) = \frac{1}{2\pi} \overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\mathrm{V}}}(t) \arg(f(t) - g(t_0)) + \sum_{(t_\lambda, \tau_\lambda) \in M} \varkappa_\lambda .$$

Aus (10) folgt

$$|f(\psi(\theta))| > \frac{1}{2} |c_f| \, |\theta|^n \quad \text{für} \quad \theta < \psi^{-1}(-r_0), \psi^{-1}(r_0) < \theta ,$$

wegen $a \geqq |w_0|$ und (9)

$$|g(\psi(\theta))| \leqq \delta |\theta|^n \leqq \frac{1}{2} |c_f| \, |\theta|^n \quad \text{für jedes} \quad \theta \in E^1 .$$

Unter Beachtung von (11) und (9) findet man also

$$|f(\psi(\theta))| > |g(\psi(\theta))| \quad \text{für alle} \quad \theta \in E^1 ,$$

und daher

$$|f(t)| > |g(t)|, t \in E^1 .$$

Nach Anwendung des Beweisverfahrens des Rouchéschen Satzes ergibt sich daraus:

$$\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\mathrm{V}}}(t) \arg(f(t) - g(t)) = \overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\mathrm{V}}}(t) \arg f(t) .$$

Beachtet man, daß allgemein

$$\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\mathrm{V}}}(t) \arg(f(t) - g(t)) = \overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\mathrm{V}}}(\theta) \arg\big(f(\psi(\theta)) - g(\psi(\theta))\big)$$

gilt, so erkennt man, daß wegen (10)

$$\frac{1}{2\pi} \overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\mathrm{V}}}(t) \arg(f(t) - g(t_0)) = -\frac{\sigma}{2}$$

ist, mit $\sigma = 0$ für gerades n und $\sigma = 1$ für ungerades n, wobei n durch (8) bestimmt ist. Zum Beweise von Satz 5 bleibt somit nur noch zu zeigen, daß die Indizes $\varkappa_\lambda$ durch (7) vollständig bestimmt sind.

Es sei K ein Kreis um $f(t_\lambda) = g(\tau_\lambda)$ so klein, daß auf der abgeschlossenen Kreisscheibe kein weiterer Schnittpunkt von l mit S liegt. Es lassen sich vier Parameterwerte t'_λ, t''_λ, τ'_λ und τ''_λ so angeben, daß die erste und dritte Eigenschaft der Definition 2 erfüllt ist und die Bildpunkte dieser Parameterwerte auf dem Kreis liegen. Dann gilt

$$\varkappa_\lambda = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}\det(f(t'_\lambda) - g(\tau'_\lambda), f(t''_\lambda) - g(\tau'_\lambda)) +$$

$$+ \frac{1}{2}\operatorname{sgn}\det(f(t''_\lambda) - g(\tau''_\lambda), f(t'_\lambda) - g(\tau''_\lambda)) .$$

Werden die Punkte $f(t'_\lambda)$ und $f(t''_\lambda)$ durch S getrennt, so gilt

$$\operatorname{sgn}\det(f(t'_\lambda) - g(\tau''_\lambda)) = \operatorname{sgn}\det(f(t^*_\lambda), w_0)$$

$$\operatorname{sgn}\det(f(t'_\lambda) - g(\tau''_\lambda)) = \operatorname{sgn}\det(w_0, f(t^{**}_\lambda)) .$$

Werden diese Punkte durch S nicht getrennt, so gilt

$$\operatorname{sgn}\det(f(t'_\lambda) - g(\tau'_\lambda), f(t''_\lambda) - g(\tau'_\lambda)) +$$

$$+ \frac{1}{2}\operatorname{sgn}\det(f(t''_\lambda) - g(\tau''_\lambda), f(t'_\lambda) - g(\tau''_\lambda)) = 0$$

$$\operatorname{sgn}\det(f(t^*_\lambda), w_0) + \operatorname{sgn}\det(w_0, f(t^{**}_\lambda)) = 0 .$$

Daher gilt auch (7).

Das den Kriterien von Cremer-Leonhard äquivalente Schnittstellenkriterium folgt nun unmittelbar aus den Sätzen 5 und 1.

Literatur

[1] Cremer, L.: Ein neues Verfahren zur Beurteilung der Stabilität linearer Regelungssysteme. Z. angew. Math. Mech. **25/27**, Nr. 5/6 (1947).

[2] Jones, P.: Stability of Feedback systems using dual Nyquist diagram. Trans. IRE (Circuit Theory), Vol. CT-1 (1954).

[3] Kaerkes, R.: Ein Satz über die Variation des Argumentes einer Klasse stetiger Funktionen. Math. Ann., im Druck.

[4] Kronecker, L.: Über Systeme von Funktionen mehrerer Variabeln. Monatsbericht d. Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss., Berlin (1869).

[5] Leonhard, A.: Ein neues Verfahren zur Stabilitätsuntersuchung. Arch. Elektrotechnik **38**, 1/2 (1944).

[6] Newman, M. H. A.: Elements of topology of plane sets of points. London: Cambridge University Press 1954.

(Eingegangen am 23. Juli 1965)

Bos, W.
Math. Annalen 163, 268—272 (1966)

Ein Beitrag zur Theorie der stabilen Mannigfaltigkeiten

Herrn Professor Dr. GOTTFRIED KÖTHE zum 60. Geburtstag am 25. 12. 1965 gewidmet

Von

WERNER BOS in Heidelberg

M^n sei eine n-dimensionale zusammenhängende orientierbare Mannigfaltigkeit. In [1] wird gezeigt: *Ist M^n stabil, so sind je zwei verdickbare, verbindbare $(n-1)$-Vollkugeln B_1, $B_2 \subset M^n$ längs eines jeden Weges verbindbar, der einen Punkt von B_1 mit einem Punkt von B_2 verbindet* (Definitionen siehe unten, weitere Literatur in [1] oder [2]). Unter der Annahme, daß die Gruppe $H^+(S^{n-1})$ der orientierungserhaltenden Homöomorphismen der $(n-1)$-Sphäre S^{n-1} mit der Gruppe $HI(S^{n-1})$ der zur Identität schwach isotopen Homöomorphismen von S^{n-1} übereinstimmt, beweisen wir hier, daß von diesem Satz auch die Umkehrung gilt. Wegen $H^+(S^3) = HI(S^3)$ erhalten wir damit jedenfalls ein endgültiges Resultat für $n = 4$.

Bezüglich der Definitionen einer stabilen Mannigfaltigkeit und der schwachen Isotopie wird auf [2] verwiesen. Die Definitionen der übrigen Begriffe seien zunächst kurz angeführt. Genaueres ist [1] zu entnehmen.

Ein Unterraum $N \subset M^n$ heißt verdickbar eingebettet (oder kurz: verdickbar), wenn es eine topologische Abbildung von $N \times (-1, 1)$ auf eine Umgebung von N in M^n gibt, deren Einschränkung auf $N \times 0 = N$ die Injektion $N \subset M^n$ ist. Zwei verdickbare topologische $(n-1)$-Vollkugeln B_1, B_2 in M^n heißen verbindbar in M^n (in Zeichen: $B_1 \sim B_2$), wenn es eine verdickbare $(n-1)$-Vollkugel B in M^n gibt, die mit B_1 und B_2 je eine relativ offene Menge gemeinsam hat. Die Verbindbarkeitsrelation ist eine Äquivalenzrelation in der Menge aller $(n-1)$-Vollkugeln von M^n.

Eine Kette $a = \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1} = b$ eines Intervalls $[a, b] \subset R^1$ enthalte k relativ offene[1]) Teilintervalle $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ von $[a, b]$, so daß $\lambda_i \cap \lambda_j = \emptyset$ für $i \neq j \pm 1$ und $\bigcup_{i=1}^{k} \lambda_i = [a, b]$ ist. Eine Kettenüberdeckung $(W_1, \ldots, W_k; V)$ eines Weges $\gamma: [a, b] \to M^n$ besteht aus einer Überdeckung von $\gamma([a, b])$ durch die Mengen $W_1, \ldots, W_k$, $W_i \approx R^n$, $i = 1, \ldots, k$ und einer Zuordnung V, die jeder Menge W_i genau eine Komponente ι_i von $\gamma^{-1}(W_i)$ zuordnet, so daß $a, \iota_1, \ldots, \iota_k, b$ eine Kette von $[a, b]$ ist. Wir denken uns stets eine feste Zuordnung V gegeben, wenn wir eine Kettenüberdeckung von γ kurz mit $W_1, \ldots, W_k$ bezeichnen.

Sind B_I, $B_\mathrm{II} \subset M^n$ zwei verdickbare $(n-1)$-Vollkugeln und ist γ ein Weg in M^n, der einen Punkt von B_I mit einem Punkt von B_II verbindet, dann heißen

[1]) $\lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}$ sind also offene und λ_1, λ_k halboffene Intervalle.

B_{I} und B_{II} verbindbar längs γ (in Zeichen $B_{\mathrm{I}} \overset{\gamma}{\sim} B_{\mathrm{II}}$), wenn gilt: Zu jeder Kettenüberdeckung $W_1, \ldots, W_k$ von γ gibt es eine *Verbindungssequenz* $B'_{\mathrm{I}} = B_0, B_1, \ldots, B_k = B'_{\mathrm{II}}$ mit den Eigenschaften $B_i \subset W_i \cap W_{i+1}$, $i = 1, \ldots, k-1$, und $B_{i-1} \sim B_i$ in der Mannigfaltigkeit W_i, $i = 1, \ldots, k$. Dabei haben wir mit B'_{I}, B'_{II} geeignete Einschränkungen von B_{I}, B_{II} bezeichnet, d. h. es ist $\overline{B'_{\mathrm{I}}} \subset B_{\mathrm{I}}$, $\overline{B'_{\mathrm{II}}} \subset B_{\mathrm{II}}$.

Sei $W_1, \ldots, W_k$ eine Kettenüberdeckung von γ und $0 = \iota_0, \iota_1, \ldots, \iota_k, \iota_{k+1} = 1$ die zugeordnete Kette von $[0, 1]$[2]). $\gamma(\iota_i \cap \iota_{i+1})$ ist für $i = 1, \ldots, k-1$ als zusammenhängende Menge in einer Komponente von $W_i \cap W_{i+1}$, enthalten, die wir mit V_i bezeichnen werden.

Lemma 1. *Sei* $B_{\mathrm{I}} \overset{\gamma}{\sim} B_{\mathrm{II}}$ *und* $W_1, \ldots, W_k$ *eine Kettenüberdeckung von* γ *mit der zugeordneten Kette* $0 = \iota_0, \iota_1, \ldots, \iota_k, \iota_{k+1} = 1$ *von* $[0, 1]$. *Dann gibt es eine Verbindungssequenz* $B'_{\mathrm{I}} = B_0, B_1, \ldots, B_k = B'_{\mathrm{II}}$ *mit der Eigenschaft* $B_i \subset V_i$ *für* $i = 1, \ldots, k-1$.

Beweis. 1) Der Unterraum $\bigcup_{i=1}^{k} W_i$ von M^n ist als separable Mannigfaltigkeit metrisierbar. Wir denken uns eine Metrik eingeführt und bezeichnen den Abstand zweier Punkte $x, y \in \bigcup_{i=1}^{k} W_i$ mit $d(x, y)$.

2) Sei $t_0 = 0$, $t_k = 1$ und seien $t_1, \ldots, t_{k-1}$ feste Zahlen in $(0, 1)$ mit der Eigenschaft $t_i \in \iota_i \cap \iota_{i+1}$ für $i = 1, \ldots, k-1$. Wir wählen abgeschlossene Umgebungen Δ_i von $\gamma(t_i)$ in M^n mit den Eigenschaften $\Delta_i \subset V_i$, $\mathring{\Delta}_i \approx R^n$, für $i = 1, \ldots, k-1$ und setzen $\varepsilon = \min_{i=1,\ldots,k-1} d(\gamma(t_i), \dot{\Delta}_i)$, $t_0^+ = t_0 = 0$, $t_k^- = t_k = 1$, $t_i^- = \min_{\gamma([t,t_i]) \subset \Delta_i} t$, $t_i^+ = \max_{\gamma([t_i,t]) \subset \Delta_i} t$ für $i = 1, \ldots, k-1$ und $\gamma_i = \gamma|_{[t_{i-1}^+, t_i^-]}$ für $i = 1, \ldots, k$. Wegen $[t_{i-1}^+, t_i^-] \subset \iota_i$ ist $\gamma_i : [t_{i-1}^+, t_i^-] \to W_i$, $i = 1, \ldots, k$.

3) Jeder Weg γ_i besitzt in W_i eine Kettenüberdeckung $\mathfrak{U}^i = (U_1^i, \ldots, U_{j_i}^i)$ mit der Eigenschaft $d(x, y) < \varepsilon$ für $x, y \in U_{l_i}^i$, $i = 1, \ldots, k$, $l_i = 1, \ldots, j_i$, und zwar möge $\mathfrak{U}^i$ die Kette $t_{i-1}^+, \lambda_1^i, \ldots, \lambda_{j_i}^i, t_i^-$ von $[t_{i-1}^+, t_i^-]$ zugeordnet sein. Ferner sei μ_i diejenige Komponente von $\gamma^{-1}(\mathring{\Delta}_i)$, die den Punkt t_i enthält, $i = 1, \ldots, k-1$.

(1) $U_1^1, \ldots, U_{j_1}^1, \mathring{\Delta}_1, U_1^2, \ldots, U_{j_2}^2, \mathring{\Delta}_2, \ldots, U_1^{k-1}, \ldots, U_{j_{k-1}}^{k-1}, \mathring{\Delta}_{k-1}, U_1^k, \ldots, U_{j_k}^k$

ist eine Kettenüberdeckung von γ mit der zugeordneten Kette

(2) $$0, \lambda_1^1, \ldots, \lambda_{j_1-1}^1, \lambda_{j_1}^{1*}, \mu_1, \lambda_1^{2*}, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_{j_2-1}^2, \lambda_{j_2}^{2*}, \mu_2, \ldots$$
$$\ldots, \lambda_{j_{k-1}}^{k-1*}, \mu_{k-1}, \lambda_1^{k*}, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_{j_k}^k, 1$$

von $[0, 1]$. Dabei ist $\lambda_{j_i}^{i*}$, bzw. λ_1^{i+1*} diejenige Komponente von $\gamma^{-1}(U_{j_i}^i)$, bzw. $\gamma^{-1}(U_1^{i+1})$, die $\lambda_{j_i}^i$, bzw. λ_1^{i+1} enthält. Um die Eigenschaften einer Kettenüberdeckung für (1) zusammen mit (2) nachzuweisen, genügt es zu zeigen, daß

(3) $$\lambda_{j_i}^{i*} \cap \lambda_1^{i+1*} = \emptyset \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, k-1$$

ist, da die übrigen Bedingungen offensichtlich erfüllt sind. Nach Definition von t_i^- ist $d\{\gamma(t_i^-), \gamma(t_i)\} \geqq \varepsilon$ und wegen $\gamma(\lambda_{j_i}^{i*}) \subset U_{j_i}^i$ ist $d\{\gamma(t_i^-), \gamma(t)\} < \varepsilon$ für alle

[2]) Wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, setzen wir als Urbildintervall eines Weges stets das Intervall $[0, 1]$ voraus.

$t \in \lambda_{j_i}^{i*}$. Also ist $t_i \notin \lambda_{j_i}^{i*}$ und wegen $t_i^- \in \lambda_{j_i}^{i} \subset \lambda_{j_i}^{i*}$ sowie $t_i^- < t_i$ ist $t' < t_i$ für alle $t' \in \lambda_{j_i}^{i*}$. In derselben Weise zeigt man, daß $t'' > t_i$ für alle $t'' \in \lambda_1^{i+1*}$ ist. Daraus folgt (3)

4) Wegen $B_{\mathrm{I}} \overset{\gamma}{\sim} B_{\mathrm{II}}$ gibt es zu (1) eine Verbindungssequenz

$$B_{\mathrm{I}}', B_1^*, \ldots, B_{r-1}^*, B_{\mathrm{II}}' . \tag{4}$$

Sei $B_{\mathrm{I}} = B_0, B_1, \ldots, B_{k-1}, B_k = B_{\mathrm{II}}'$ diejenige Teilsequenz von (4), deren Elemente B_i für $i = 1, \ldots, k-1$ in $U_{j_i}^i \cap \dot{\Delta}_i$ liegen. Da die in (4) zwischen B_{i-1} und B_i stehenden Elemente sämtlich $(n-1)$-diemensionale Vollkugeln in W_i sind und in W_i der Reihe nach verbindbar sind, ist $B_0, \ldots, B_k$ eine Verbindungssequenz zu der Kettenüberdeckung $W_1, \ldots, W_k$. Wegen $B_i \subset \dot{\Delta}_i \subset V_i$, $i = 1, \ldots, k-1$, erfüllt diese Verbindungssequenz unser Lemma.

Lemma 2. *Sei* $p, p' \in S^{n-1} \times (0,1) \subset S^{n-1} \times [0,1]$, *dann gibt es eine topologische Abbildung* $\varphi : S^{n-1} \times [0,1] \approx S^{n-1} \times [0,1]$ *mit den Eigenschaften* $\varphi(p) = p'$, $\varphi / S^{n-1} \times 0 = id$, $\varphi / S^{n-1} \times 1 = id$[3]).

Beweis klar.

Wir bezeichnen mit D_1, D_2 zwei feste offene euklidische n-dimensionale Vollkugeln im R^n mit $\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2 = \emptyset$ und setzen $Q = R^n - (D_1 \cup D_2)$.

Korollar. Ist ψ eine zur Identität schwach isotope Abbildung von $\dot{D}_1$ auf sich, dann gibt es eine topologische Selbstabbildung Ψ von Q mit $\Psi / \dot{D}_1 = \psi$, $\Psi / \dot{D}_2 = id$.

Beweis. Sei $S^n = R^n \cup \infty$ die Einpunktkompaktifizierung von R^n, dann ist $Q \cup \infty \approx S^{n-1} \times [0,1]$. Die Aussage des Korollars ist daher nach Definition der schwachen Isotopie richtig, wenn wir Q durch $Q \cup \infty$ ersetzen. Der Rest folgt aus dem obigen Lemma.

Lemma 3. *Ist* $B_1 \sim B_2$ *im* R^n *und sind* Σ_1, Σ_2 *zwei verdickbare* $(n-1)$*-Sphären im* R^n, *die mit* B_1, *bzw.* B_2 *je eine relativ offene Menge gemeinsam haben und im* R^n *disjunkte n-dimensionale Vollkugeln* Δ_1, Δ_2 *beranden, dann ist* $R^n - (\dot{\Delta}_1 \cup \dot{\Delta}_2)$ *homöomorph zu* Q.

Beweis. In der Einpunktkompaktifizierung $S^n = R^n \cup \infty$ ist nach [1] $(R^n \cup \infty) - (\dot{\Delta}_1 \cup \dot{\Delta}_2)$ homöomorph zu $S^{n-1} \times [0,1]$. ∞ geht bei dieser Homöomorphie über in einen Punkt $p \in S^{n-1} \times (0,1)$. Daher ist

$$R^n - (\dot{\Delta}_1 \cup \dot{\Delta}_2) \approx \{S^{n-1} \times [0,1]\} - p \approx Q .$$

Korollar. Unter den Voraussetzungen des Lemmas gilt: Jede topologische Abbildung von $\dot{D}_1$ auf $\dot{\Delta}_1$ läßt sich zu einer topologischen Abbildung von Q auf $R^n - (\dot{\Delta}_1 \cup \dot{\Delta}_2)$ erweitern.

Beweis. Die gegebene Abbildung läßt sich „fasernweise" zu einer topologischen Abbildung von $Q \cup \infty \approx S^{n-1} \times [0,1]$ auf $(R^n \cup \infty) - (\dot{\Delta}_1 \cup \dot{\Delta}_2) \approx \approx S^{n-1} \times [0,1]$ erweitern. Wegen Lemma 2 können wir dabei annehmen, daß der Punkt ∞ in den ebenso bezeichneten Punkt des Bildes übergeht. Daraus folgt das Korollar.

[3]) Ein entsprechendes Lemma gilt für jede berandete Mannigfaltigkeit. In unserem Fall ist der Beweis besonders einfach.

Sind $\pi_1(M^n, x)$, $\pi_1(M^n, x')$ die Fundamentalgruppen von M^n mit Bezugspunkt x, bzw. x', dann wird bekanntlich durch jeden Weg δ in M^n, der x mit x' verbindet, ein Isomorphismus von $\pi_1(M^n, x')$ auf $\pi_1(M^n, x)$ induziert, der bis auf einen inneren Automorphismus unabhängig von δ ist. Daher ist jedem Normalteiler von $\pi_1(M^n, x')$ ein eindeutig bestimmter Normalteiler von $\pi_1(M^n, x)$ zugeordnet. Insbesondere sind die stabilen Normalteiler von $\pi_1(M^n, x')$ und $\pi_1(M^n, x)$ in dieser Weise einander zugeordnet, mit anderen Worten der stabile Normalteiler ist unabhängig vom Bezugspunkt. Wir können daher in dem folgenden Lemma auf die Festlegung des Bezugspunktes verzichten.

Lemma 4. *Angenommen für eine feste Zahl n ist $H^+(S^{n-1}) = HI(S^{n-1})$. Dann gilt in jeder zusammenhängenden orientierbaren Mannigfaltigkeit M^n: Ist für eine beliebige verdickbare $(n-1)$-dimensionale Vollkugel $B \subset M^n$ und einen geschlossenen Weg γ mit $\gamma(0) \in B$ die Relation $B \overset{\gamma}{\sim} B$ richtig, dann ist γ Repräsentant eines Elementes des stabilen Normalteilers der Fundamentalgruppe von M^n.*

Beweis. 1) Sei $W_1, \ldots, W_k$ eine Kettenüberdeckung von γ mit der zugeordneten Kette $0 = \iota_0, \iota_1, \ldots, \iota_k, \iota_{k+1} = 1$ von $[0, 1]$. Nach Lemma 1. gibt es eine Verbindungssequenz $B' = B_0, B_1, \ldots, B_k = B'$ mit $B_i \subset V_i$, $i = 1, \ldots, k-1$. Zum Beweis des Satzes genügt es nach [2] Theorem 15.2 zu zeigen, daß die stabile Fortsetzung einer Karte längs γ im Anfangspunkt von γ eine stabil äquivalente Karte liefert. Dazu werden wir die Existenz von k topologischen Abbildungen $h_i : R^n \approx W_i$, $i = 1, \ldots, k$ nachweisen, für die die Abbildungen $h_{i+1}^{-1} h_i : h_i^{-1}(W_i \cap W_{i+1}) \to h_{i+1}^{-1}(W_i \cap W_{i+1})$ stabil sind in allen Punkten von $h_i^{-1}(V_i)$, $i = 1, \ldots, k-1$ und für die die Abbildung

$$h_1^{-1} h_k : h_k^{-1}(W_k \cap W_1) \to h_1^{-1}(W_k \cap W_1) \text{ stabil ist im Punkt } h_k^{-1}(\gamma(0)).$$

2) Seien $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_{k-1}$ verdickbare $(n-1)$-Sphären in M^n mit den Eigenschaften: (i) $\Sigma_i \cap B_i$ enthält eine offene Menge von B_i, (ii) Σ_i berandet eine n-dimensionale abgeschlossene Vollkugel Δ_i, $i = 0, \ldots, k-1$, (iii) $\gamma(0) \in \Delta_0 \subset W_1 \cap W_k$ und $\Delta_i \subset V_i$ für $i = 1, \ldots, k-1$, (iv) $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Die Existenz eines solchen k-Tupels von $(n-1)$-Sphären folgt leicht aus der Verdickbarkeit der $(n-1)$-Vollkugeln B_i, $i = 0, \ldots, k-1$.

Nach Lemma 3 ist $W_i^* = W_i - (\mathring{\Delta}_{i-1} \cup \mathring{\Delta}_i) \approx Q$ für $i = 1, \ldots, k-1$ und $W_k^* = W_k - (\mathring{\Delta}_{k-1} \cup \mathring{\Delta}_0) \approx Q$.

Wir bezeichnen mit g einen festen stabilen Homöomorphismus von R^n auf sich, der D_1 in D_2 überführt, z. B. eine geeignete Ähnlichkeitsabbildung.

Sei $h_1 : R^n \approx W_1$ eine topologische Abbildung, die (Q, D_1) in $(W_1^*, \mathring{\Delta}_1)$ überführt. Damit definieren wir rekursiv h_i, $i = 1, \ldots, k-1$. $h_{j+1} : R^n \approx W_{j+1}$ führe Q in W_{j+1}^* über und sei eine Erweiterung der Abbildung $h_j g|_{\bar{D}_1} : \bar{D}_1 \to W_{j+1}$, $j < k-1$. Die Existenz von h_{j+1} ergibt sich aus Lemma 3, Korollar. Nach dieser Definition ist $h_1(\bar{D}_1) = \Delta_0$, $h_{k-1}(\bar{D}_2) = \Delta_{k-1}$. Wir zeigen jetzt, daß man die durch $h_k^0|_{\bar{D}_1} = h_1|_{\bar{D}_1}$ und $h_k^0|_{\bar{D}_2} = h_{k-1}|_{\bar{D}_2}$ definierte topologische

Abbildung $h_k^0 : \overline{D}_1 \cup \overline{D}_2 \to \Delta_1 \cup \Delta_{k-1}$ zu einer topologischen Abbildung $h_k : R^n \approx W_k$ erweitern kann:

Wegen der Orientierbarkeit von M^n induzieren die Abbildungen $h_1|_{D_1}$ und $h_{k-1}|_{D_2}$ bei Vorgabe einer festen Orientierung des R^n in W_k dieselbe Orientierung. Sei $h_k' : R^n \approx W_k$ eine topologische Erweiterung von $h_{k-1}|_{\dot{D}_2}$, die Q in W_k^* überführt (Lemma 3, Korollar). Dann ist $h_k'^{-1} h_1|_{\dot{D}_1}$ eine orientierungserhaltende topologische Selbstabbildung der euklidischen $(n-1)$-Sphäre $\dot{D}_1$. Wegen $H^+(S^{n-1}) = HI(S^{n-1})$ ist diese Abbildung schwach isotop zur Identität. Daher gibt es nach Lemma 2, Korollar eine topologische Abbildung χ von R^n auf sich mit $\chi|_{\dot{D}_1} = h_k'^{-1} h_1|_{\dot{D}_1}$, $\chi|_{\overline{D}_2} = id$. Wir setzen

$$h_k(x) = \begin{cases} h_1(x) & \text{für } x \in \overline{D}_1 \\ h_k' \chi(x) & \text{für } x \notin \overline{D}_1 . \end{cases}$$

3) $h_1, \ldots, h_k$ erfüllt die in 1) gestellten Bedingungen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned}(h_{j+1}^{-1} h_j)|_{h_j^{-1}(\Delta_j)} &= (h_{j+1}^{-1} h_j)|_{\overline{D}_2} = h_{j+1}^{-1}|_{h_j(\overline{D}_2)} \circ h_j|_{\overline{D}_2} = h_{j+1}^{-1}|_{h_j g(\overline{D}_1)} \circ h_j|_{\overline{D}_2} \\ &= (h_j g)^{-1}|_{h_j g(\overline{D}_1)} \circ h_j|_{\overline{D}_2} = (g^{-1} h_j^{-1} h_j)|_{\overline{D}_2} = g^{-1}|_{\overline{D}_2}, j = 1, \ldots, k-2 .\end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}h_k^{-1} h_{k-1}|_{h_{k-1}^{-1}(\Delta_{k-1})} &= h_k^{-1}|_{h_{k-1}(\overline{D}_2)} \circ h_{k-1}|_{\overline{D}_2} = (h_k' \circ \chi)^{-1}|_{h_{k-1}(\overline{D}_2)} \circ h_{k-1}|_{\overline{D}_2} \\ &= (\chi^{-1} h_k'^{-1} h_{k-1})|_{\overline{D}_2} = \chi^{-1}|_{\overline{D}_2} = id\end{aligned}$$

und

$$h_1^{-1} h_k|_{h_k^{-1}(\Delta_0)} = h_1^{-1}|_{h_k(\overline{D}_1)} \circ h_k|_{\overline{D}_1} = h_1^{-1}|_{h_1(\overline{D}_1)} \circ h_k|_{\overline{D}_1} = id .$$

Damit ist gezeigt, daß

$$h_{i+1}^{-1} h_i : h_i^{-1}(W_i \cap W_{i+1}) \to h_{i+1}^{-1}(W_i \cap W_{i+1})$$

in allen Punkten von $h_i^{-1}(\Delta_i)$, $i = 1, \ldots, k-1$ und

$$h_1^{-1} h_k : h_k^{-1}(W_k \cap W_1) \to h_1^{-1}(W_k \cap W_1)$$

in allen Punkten von $h_k^{-1}(\Delta_0)$ stabil sind. Dies ist nach [2] II Theorem 7.1 hinreichend für die in 1) gestellten Bedingungen.

Aus diesem Lemma ergibt sich sofort der angekündigte

Satz. *Ist unter der Annahme $H^+(S^{n-1}) = HI(S^{n-1})$ für eine verdickbare $(n-1)$-Vollkugel $B \subset M^n$ in der zusammenhängenden orientierbaren Mannigfaltigkeit M^n die Relation $B \overset{\gamma}{\sim} B$ für jeden geschlossenen Weg γ mit $\gamma(0) \in B$ richtig, dann besitzt M^n eine stabile Struktur.*

Literatur

[1] BOS, W.: Über die Verbindbarkeit von verdickbaren $(n-1)$-Zellen in topologischen n-Mannigfaltigkeiten. Erscheint in Math. Ann.

[2] BROWN, M., and H. GLUCK: Stable structures on manifolds I, II, III. Ann. Math. **79** 1—58 (1964).

(Eingegangen am 29. Juni 1965)

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · HEIDELBERG · NEW YORK

C. L. Siegel
Gesammelte Abhandlungen

Herausgegeben von K. Chandrasekharan, Zürich und H. Maaß, Heidelberg

In drei Teilen, die nur zusammen abgegeben werden

Mit einem Porträt
XVI, 1523 Seiten Gr.-8°
1966
Ganzleinen DM 88,—

Mit der Veröffentlichung der „Gesammelten Abhandlungen" von Carl Ludwig Siegel möchten die Herausgeber und der Verlag ihrer Verehrung für Herrn Professor Siegel Ausdruck geben, der in Kürze sein 70. Lebensjahr vollenden wird. Durch seine tiefgründigen und ausgereiften Untersuchungen hat er die Entwicklung der Mathematik wesentlich beeinflußt.

Das Werk Siegels setzt beste mathematische Tradition fort und zeichnet sich durch einen ungewöhnlichen Reichtum an fruchtbaren Ideen aus. Es wird jedem, der in der analytischen Zahlentheorie, der Himmelsmechanik oder auf den Gebieten der algebraischen Geometrie, der Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher oder der Geometrie der Zahlen weiter arbeiten will, eine Quelle wichtiger Anregungen sein. Die Veröffentlichung der in mehr als dreißig Zeitschriften und Festbänden publizierten Arbeiten in zusammenhängender Form wird das Studium dieses bedeutenden Werkes erheblich erleichtern. Die vorliegende Sammlung umfaßt alle bisher im Druck erschienenen Arbeiten und Aufsätze Siegels, darunter eine Monographie von grundlegender Bedeutung „Zur Reduktionstheorie quadratischer Formen". Der Aufsatz „Zur Geschichte des Frankfurter Mathematischen Seminars" hebt sich als einziger nichtmathematischer Beitrag von dem Gesamtwerk ab; er ist vor allem dem Andenken der Mathematiker Dehn, Epstein, Hellinger und Szász gewidmet. Ein Faksimileabdruck eines handschriftlichen Briefes Siegels an W. Gröbner gibt Zeugnis von einer gewissenhaften Art schriftlicher Mitteilung, wie sie heute nur noch selten gepflegt wird.

Seite

WLOKA, J., Reproduzierende Kerne und nukleare Räume. I. 167
(Anschrift: Institut für angew. Mathematik, 6900 Heidelberg, Tiergartenstraße)

FAN, K., Applications of a Theorem Concerning Sets with Convex Sections 189
(Anschrift: Department of Mathematics, University of California, Santa Barbara, Calif. 93106/USA)

BERENS, H., u. P. L. BUTZER, Über die Stetigkeit von Halbgruppen von Operatoren in intermediären Räumen 204
(Anschrift: Technische Hochschule, Lehrstuhl für Analysis, 5100 Aachen)

CORDES, H. O., Über eine nicht algebraische Charakterisierung von $\mathfrak{J}$-Fredholm-Operatoren 212
(Anschrift: Department of Mathematics, University of California, Berkeley, California/USA)

HILDEBRANDT, S., Über den numerischen Wertebereich eines Operators 230
(Anschrift: Mathematisches Institut der Universität, 6500 Mainz, Saarstraße 21)

KEGEL, O. H., Über den Normalisator von subnormalen und erreichbaren Untergruppen 248
(Anschrift: Mathematisches Seminar der Universität, 6000 Frankfurt/Main)

CREMER, H., u. R. KAERKES, Eine Verallgemeinerung der Stabilitätskriterien von L. CREMER und A. LEONHARD 259
(Anschrift: Technische Hochschule, Institut für Mathematik und Großrechenanlagen, 5100 Aachen)

Bos, W., Ein Beitrag zur Theorie der stabilen Mannigfaltigkeiten 268
(Anschrift: Institut für angew. Mathematik, 6900 Heidelberg, Zeppelinstraße 151)

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Edgar Seidler, 1 Berlin 31 (Wilmersdorf), Heidelberger Platz 3.
Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York — Druck der Brühlschen Universitätsdruckerei Gießen
Printed in Germany

1, 83

Mathematische Annalen

Begründet 1868 durch Alfred Clebsch · Carl Neumann

Fortgeführt durch Felix Klein · David Hilbert
Otto Blumenthal · Erich Hecke

Herausgegeben von **Heinrich Behnke,** Münster i. W.
Richard Courant, New York
Hans Grauert, Göttingen
Friedrich Hirzebruch, Bonn
Heinz Hopf, Zürich
Gottfried Köthe, Frankfurt/M.
Bartel L. van der Waerden, Zürich

Band 163 · (Schluß-) Heft 4 · 1966

Springer-Verlag · Berlin · Heidelberg · New York
Math. Ann. · Abgeschlossen am 10. März 1966 · A 21 265 D

5039+

Mathematische Annalen

Begründet 1868 durch *Alfred Clebsch* und *Carl Neumann*, früher herausgegeben von *Alfred Clebsch* (1869—1872), *Carl Neumann* (1869—1876), *Felix Klein* (1876—1924), *Adolph Mayer* (1876—1901), *Walther v. Dyck* (1888—1921), *David Hilbert* (1902—1939), *Otto Blumenthal* (1906—1938), *Albert Einstein* (1920—1928), *Constantin Carathéodory* (1925—1928), *Erich Hecke* (1929—1947), *Franz Rellich* (1947—1955), *Kurt Reidemeister* (1947—1963).

Band 1—80 Leipzig, B. G. Teubner, ab Band 81 (1920) Berlin, Springer.

An unsere Mitarbeiter!

Die Korrekturkosten sind bei den „Mathematischen Annalen" sehr hoch. Für ihre Verminderung muß unbedingt Sorge getragen werden. Wir richten deshalb an alle unsere Mitarbeiter die freundliche dringende Bitte, zu diesem Ziele an ihrem Teile mit beitragen zu wollen. Dazu ist nötig:

1. Das Manuskript muß *völlig druckfertig* und *gut leserlich* sein und für den Setzer *gemäß den „Hinweise für die Autoren"* (herausgegeben von Redaktion und Verlag) vorbereitet sein. — Diese Hinweise können von der Redaktion angefordert werden.

2. Veränderungen des Textes in der Korrektur sind auf die Fälle zu beschränken, wo sich nachträglich *wirkliche Irrtümer* herausstellen. Insbesondere sind rein stilistische Verbesserungen zu unterlassen. Sollte ein Irrtum bemerkt werden, noch bevor Korrektur eingetroffen ist, dann ist ein verbesserter Text sofort an die Redaktion zu schicken, die dafür Sorge tragen wird, daß das Manuskript noch vor dem Satz berichtigt wird.

Jede Änderung des schon gesetzten Textes muß zu Lasten der Autoren gehen.

Die Reihenfolge der Veröffentlichungen behält sich die Redaktion vor.

Die Redaktion der Mathematischen Annalen

Mathematische Annalen

Erscheinen zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung zwanglos in Heften, die zu Bänden vereinigt werden. Sie sind durch jede Buchhandlung zu beziehen. Der Preis des Bandes beträgt DM 96,—.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskripts und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0,30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Mathematischen Annalen bestimmte Manuskripte können bei jedem der unten verzeichneten Redaktionsmitglieder eingereicht werden:

Professor Dr. Dr. h. c. H. Behnke, 44 Münster/Westf., Rottendorffweg 17,

Professor Dr. R. Courant, 142 Calton Road, New Rochelle, N. Y. USA,

Professor Dr. H. Grauert, Mathematisches Institut der Universität, 34 Göttingen, Bunsenstr. 3—5,

Professor Dr. F. Hirzebruch, Mathematisches Institut der Universität, 53 Bonn (Rhein), Wegelerstr. 10

Professor Dr. Dr. h. c. H. Hopf, Zollikon bei Zürich, Alte Landstraße 37,

Professor Dr. Dr. h. c. G. Köthe, 6 Frankfurt/Main, Parkstraße 14[1],

Professor Dr. Dr. h. c. B. L. van der Waerden, Mathematisches Institut der Universität Zürich, 8006 Zürich/Schweiz

Inhaltsverzeichnis des Heftes auf Seite 6

Fischer, B.
Math. Annalen 163, 273—298 (1966)

Frobeniusautomorphismen endlicher Gruppen

Herrn Gottfried Köthe zum 60. Geburtstag am 25. 12. 1965 gewidmet

Von

Bernd Fischer in Frankfurt (Main)

Sei H eine endliche Gruppe und f ein Automorphismus von H. Läßt f kein Element $(\neq 1)$ von H fest, so operiert f fixpunktfrei auf H; operieren ferner alle Potenzen $(\neq 1)$ von f fixpunktfrei auf H, so ist f ein Frobeniusautomorphismus von H. Sei $G = H\{f\}$ die Erweiterung von H durch f im Holomorph von H und D die Klasse konjugierter Elemente von G, die f enthält. Wir werden zeigen, daß die Eigenschaft von f, ein Frobeniusautomorphismus zu sein, durch Eigenschaften der Klasse D gekennzeichnet werden kann.

Satz I. *Sei D eine Klasse konjugierter Elemente einer endlichen Gruppe G, die von D erzeugt wird. Die Ordnung der Elemente von D sei größer als 2. Dann operiert ein Element aus D genau dann als Frobeniusautomorphismus auf G', wenn zwei verschiedene Elemente von D stets eine Frobeniusgruppe erzeugen.*

Involutorische Frobeniusautomorphismen können nicht in dieser Weise gekennzeichnet werden (vgl. Bemerkung 3.5 und Satz 3.6).

Satz II. *Sei D ein normaler Komplex von Elementen einer endlichen Gruppe G, mit den Eigenschaften:*

(a) *die Elemente von D haben Primzahlordnung p für $p \neq 2$, und G wird von D erzeugt; D enthält mehr als p Elemente;*

(b) *sind x und y vertauschbare Elemente von D, so ist $\{x\} = \{y\}$;*

(c) *sind x und y nicht vertauschbare Elemente von D, so ist $\{x, y\}/Z(\{x, y\})$ eine Frobeniusgruppe mit zyklischem Kern.*

Dann ist G eine Frobeniusgruppe und G' ist nilpotent.

In der Voraussetzung (c) kann man nicht darauf verzichten, daß die Frobeniusgruppen einen zyklischen Kern haben; ob man aber die Auflösbarkeit von G beweisen kann, wenn nicht verlangt wird, daß dieser Kern zyklisch ist, ist eine offene Frage. Wir werden den Beweis von Satz II so führen, daß die volle Voraussetzung (c) möglichst isoliert wird.

Wir beweisen noch:

Satz III. *Sei A eine endliche Gruppe, die zweifach transitiv auf einer Klasse D konjugierter Elemente operiert. Erzeugen verschiedene Elemente von D eine Untergruppe mit trivialem Zentrum, so erzeugt D einen auflösbaren Normalteiler von A.*

Satz IV. *Sei D eine Klasse konjugierter Elemente ungerader Ordnung einer endlichen Gruppe G. Ist für alle verschiedenen Elemente x und y von D die Gruppe $\{x, y\}/Z(\{x, y\})$ eine Frobeniusgruppe mit zyklischem Kern, so ist G auflösbar.*

Nach einem unveröffentlichten Resultat von G. GLAUBERMAN kann man in Satz IV auf die Voraussetzung, daß die Elemente von D ungerade Ordnung haben, verzichten (vgl. Bemerkung 5.1).

Bezeichnungen

$|M|$ Mächtigkeit einer Menge M

$[x; \ldots]$ Menge aller x mit ...

$\{x; \ldots\}$ Erzeugnis aller x mit ...

$[G : U]$ Index von U in G

$G', Z(G), Z_2(G)$ Kommutatorgruppe, Zentrum, zweites Zentrum von G

$C_T(M), N_T(M)$ Zentralisator, Normalisator von M in T

ϱ-Gruppe, ϱ-Element: Gruppe, Element, so daß die Ordnungen nur durch Primzahlen aus der Menge ϱ teilbar sind

$x^y = x \circ y = y^{-1}xy$

$\mathfrak{S}_n$ symmetrische Gruppe vom Grade n

$M^n = [x^n; x \in M, n \text{ natürlich}]$

Alle betrachteten Gruppen sind endlich.

1. Hilfsmittel

Definition. Sei $\mathfrak{F}$ eine Familie von Gruppen. Eine Menge D von Elementen A einer Gruppe G ist ein $\mathfrak{F}$-System von G (und G eine $\mathfrak{F}$-Gruppe), wenn sie folgende Eigenschaften hat:

(1) G wird von D erzeugt, und D ist ein normaler Komplex von G;

(2) D enthält mehr als ein Element;

(3) sind x und y verschiedene Elemente von D, so ist $\{x, y\}/Z(\{x, y\})$ zu einem Element von $\mathfrak{F}$ isomorph.

Im folgenden sei $\mathfrak{F}$ die Familie aller Frobeniusgruppen (mit zyklischem Kern), oder $\mathfrak{F}$ bestehe aus genau einem Element F.

(1.A) D ist eine Klasse konjugierter Elemente von G [6, (A), (D)].

(1.B) Gibt es eine F-Gruppe, so ist F eine Frobeniusgruppe, F/F' ist zyklisch und F' ist einziger minimaler Normalteiler von F [6, (A)].

(1.C) Ist U eine Untergruppe von G mit $|U \cap D| \geqq 2$, so ist $U \cap D$ ein $\mathfrak{F}$-System von $\{U \cap D\}$; ist N ein Normalteiler von G mit $|DN/N| \geqq 2$, so ist DN/N ein $\mathfrak{F}$-System von G/N [6, (B)].

Definition. Sei $\mathfrak{E}$ eine Familie von Frobeniusgruppen. Dann ist $\mathfrak{E}_0$ die Familie derjenigen Frobeniusgruppen E aus $\mathfrak{E}$ mit Kern K, so daß E/K zyklisch oder $(E/K)/Z(E/K)$ eine Frobeniusgruppe ist, deren Faktorgruppe nach dem Kern zyklisch ist.

(1.D) $\mathfrak{F}$-Gruppen sind $\mathfrak{F}_0$-Gruppen [6, (C)].

(1.E) Sind a und b Elemente von D, so gibt es genau ein x in D mit $x^{-1}ax = b$ [6, (D)].

(1.F) Ist T eine Klasse konjugierter Involutionen, die eine Gruppe G erzeugt, so daß verschiedene Elemente von T nicht vertauschbar sind, so normalisiert ein Element t von T für jede Primzahl q eine q-Sylow-Gruppe von G [7, (2.D)].

2. Einseitig distributive Quasigruppen

Definition. Eine Menge D ist bezüglich der Multiplikation „$\circ$" eine *einseitig distributive Quasigruppe*, wenn für alle a, b, c aus D gilt:
(1) Zwei der Elemente a, b, c bestimmen durch

$$a \circ b = c$$

das dritte eindeutig;

(2) $$(a \circ b) \circ c = (a \circ c) \circ (b \circ c) .$$

Die Mächtigkeit von D ist die Ordnung von D; es werden nur einseitig distributive Quasigruppen endlicher Ordnung betrachtet. Wegen (2) ist die Multiplikation von rechts ein Automorphismus von D. Ist d ein Element von D, so sei d^D die Permutation

$$d^D : x \to x \circ d , \qquad x \in D ,$$

der Elemente von D und $R(D)$ die Untergruppe der symmetrischen Gruppe vom Grade $|D|$, die von allen d^D für $d \in D$ erzeugt wird.

Lemma 2.1. *Sei D eine einseitig distributive Quasigruppe. Dann folgt:*
(a) *D^D ist eine Klasse konjugierter Elemente von $R(D)$;*

(b) $$Z(R(D)) = 1 ;$$

(c) *sind a und b Elemente von D, so folgt*

$$(a^D)^{-1} b^D a^D = (b \circ a)^D ;$$

(d) $$R(D) = C_{R(D)}(d^D) \cdot D^D \quad \text{für jedes} \quad d \in D .$$

Ist umgekehrt G eine endliche Gruppe, die von einer Klasse D konjugierter Elemente mit der Eigenschaft

$$G = C_G(x) \cdot D \quad \text{für jedes} \quad x \in D$$

erzeugt wird, so ist D bezüglich der Multiplikation

$$a \circ b = b^{-1} a b , \quad a, b \in D ,$$

eine einseitig distributive Quasigruppe, und

$$R(D) \simeq G/Z(G) .$$

Zum Beweis dieses Lemmas sei auf S. K. Stein [8] und [5, Satz 2.1] verwiesen.

Lemma 2.2. *Sei D eine einseitig distributive Quasigruppe und U eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von D* (d. h. U ist eine einseitig distributive Unterquasigruppe von D). *Dann ist*

(+) $$\{U^D\} \cap D = U$$

und

$$R(U) \simeq \{U^D\}/Z(\{U^D\}) .$$

Ist umgekehrt U eine Teilmenge von D mit der Eigenschaft (+), so ist U eine einseitig distributive Unterquasigruppe von D.

Zum Beweis dieses Lemmas sei auf [5, Lemma 2.1] verwiesen.

Definition. Eine einseitig distributive Unterquasigruppe U von D ist ein *Normalteiler* von D, wenn es zu jedem Element ϱ von $R(D)$ ein $x = x(\varrho)$ in D gibt mit

$$U\varrho = U \circ x ,$$

wobei $U\varrho$ das Bild von U unter ϱ ist. Aus Lemma 2.1 (c) folgt dann für eine Teilmenge T von D

$$(T\varrho)^D = \varrho^{-1} T^D \varrho .$$

Bemerkung 2.3. Gilt in D außer (1) und (2) noch

$$(3) \qquad a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ (a \circ c) \quad \text{für} \quad a, b, c \in D ,$$

so deckt sich der hier eingeführte Normalteilerbegriff mit dem in [5] behandelten. Während man mit Hilfe von (3) die Normalteiler von D durch Normalteiler von $R(D)$ beschreiben kann [5, Lemma 2.2 und Satz 2.2], ist das ohne (3) im allgemeinen nicht möglich, wie das folgende Beispiel zeigt: Sei p eine Primzahl, so daß $p - 1$ keine Potenz von 2 ist; dann gibt es einen Primteiler $q \neq 2$ von $p - 1$. Sei G die Gruppe der Ordnung p^3 mit

$$G' \neq 1 \quad \text{und} \quad G^p = 1 .$$

Im Holomorph von G kann G durch ein Element d der Ordnung q so erweitert werden, daß $G\{d\}$ eine Frobeniusgruppe ist. Sei $D = d^G$. Dann ist D bezüglich der Multiplikation „$\circ$" eine einseitig distributive Quasigruppe. In D gibt es ein Element x mit

$$|\{d, x\}| = pq \quad \text{und} \quad \{x, d\}' \cap Z(G) = 1 .$$

Dann ist $\{x, d\}'$ kein Normalteiler von G, aber $\{x, d\} \cap D$ ein Normalteiler von D.

Lemma 2.4. *Sei D eine einseitig distributive Quasigruppe. Dann sind die folgenden Eigenschaften einer einseitig distributiven Unterquasigruppe U von D äquivalent:*

(a) *U ist ein Normalteiler von D.*

(b) *Ist d ein Element von U, so ist*

$$C_{R(D)}(d^D) \subseteq N_{R(D)}(U^D) .$$

(c) *Sind x und y Elemente von D, so gibt es ein Element z in D mit*

$$(U \circ x) \circ y = U \circ z .$$

(d) *Die Menge*

$$\tau(U) = [U \circ x; x \in D]$$

wird von $R(D)$ invariant gelassen.

Beweis. Aus (a) folgt (b): Sei U ein Normalteiler von D und $C = C_{R(D)}(d^D)$ für ein Element d von U. Wird U nicht von C normalisiert, so gibt es ein ϱ in C mit

$$U\varrho \neq U .$$

Da D ein Normalteiler von D ist, folgt die Existenz eines Elementes x in D mit

$$U\varrho = U \circ x \neq U .$$

Da d in $U \cap U\varrho$ enthalten ist, gibt es wegen (1) ein u in U mit $u \circ x = d$. Dann folgt aus (1), daß x in U enthalten ist. Nun folgt

$$U \circ x = U = U\varrho .$$

Dieser Widerspruch beweist (b).

Aus (b) folgt (c): Sei d ein Element von U, und seien x, y Elemente von D. Dann gibt es wegen (1) genau ein Element z in D mit

$$(d \circ x) \circ y = d \circ z .$$

Nun folgt aus Lemma 2.1 (c), daß $w = x^D y^D (z^D)^{-1}$ in $C_{R(D)}(d)$ enthalten ist. Wegen (b) und Lemma 2.2 wird dann U von w normalisiert. Es folgt

$$U(x^D y^D) = U z^D ,$$

woraus

$$(U \circ x) \circ y = U \circ z$$

folgt.

Aus (c) folgt (d): Aus (c) folgt für alle x aus D

$$\tau(U) = \tau(U \circ x) .$$

Weiter folgt aus (c) für alle x aus D

$$(\tau(U)) \circ x = \tau(U) = (\tau(U))x^D .$$

Da $R(D)$ von D^D erzeugt wird, folgt die Behauptung.

Aus (d) folgt (a): Sei ϱ ein Element von $R(D)$. Wegen (d) ist $U\varrho$ ein Element von $\tau(U)$. Daher gibt es ein Element x in D mit

$$U\varrho = U \circ x ,$$

d. h. U ist in D normal.

Lemma 2.5. *Sei G eine endliche Gruppe und d ein fixpunktfreier Automorphismus von G. Sei $H = G\{d\}$ die Erweiterung von G durch d im Holomorph von G und $D = d^H$. Dann ist D bezüglich*

$$x \circ y = y^{-1}xy, \quad x, y \in D ,$$

eine einseitig distributive Quasigruppe.

Beweis. Der Beweis von Lemma 2.5 wird ähnlich geführt wie der Beweis von (1.E). Da die Elemente von D innere Automorphismen von H induzieren, gilt

$$(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ (y \circ z), \quad x, y, z \in D .$$

Seien a und b Elemente von D und seien weiter x und y Lösungen von

$$a \circ x = b = a \circ y, \quad x, y \in D .$$

Dann folgt aus

$$(a \circ x)^{y^{-1}} = (b)^{y^{-1}} = yby^{-1} = a ,$$

daß xy^{-1} in $G = H'$ enthalten ist und a zentralisiert. Da d fixpunktfrei auf G operiert, folgt $x = y$. Daher hat die Gleichung

$$a \circ x = b$$

höchstens eine Lösung x; aus der Endlichkeit von $|D|$ folgt dann, daß diese

Gleichung genau eine Lösung hat. Die Gleichung

$$x \circ a = b \quad x \in D ,$$

hat für feste Elemente a und b von D genau die Lösung $x = aba^{-1}$.

Die folgende Bemerkung ist wohl bekannt:

Folgerung 2.6. *Sei f ein fixpunktfreier Automorphismus einer endlichen Gruppe G. Dann normalisiert f für jede Primzahl p eine p-Sylow-Gruppe von G; ist U eine Untergruppe von G, so normalisiert f höchstens ein Element von U^G.*

Beweis. Sei $H = G\{f\}$ die Erweiterung von G durch f im Holomorph von G. Da f fixpunktfrei auf G operiert, folgt

$$D = f^G = f^H = fG = Gf .$$

Ist P eine p-Sylow-Gruppe von G, so folgt aus den Sylow-Sätzen $H = N_H(P) \cdot G$. Daher normalisiert f mindestens eine p-Sylow-Gruppe von G.

Wegen Lemma 2.5 ist D eine einseitig distributive Quasigruppe. Wegen $Z(H) = 1$ und Lemma 2.1 ist H zu $R(D)$ isomorph. Da f kein Element von G zentralisiert, folgt aus Lemma 2.2 und Lemma 2.4 (d), daß $\tau(N_D(U))$ für alle f-invarianten Untergruppen U von G eine Überdeckung von G durch paarweise fremde Teilmengen von D ist.

3. Beweis von Satz I

In diesem Kapitel setzen wir für eine endliche Gruppe G — mit Ausnahme von Satz 3.6 — die folgenden Eigenschaften voraus:

(i) *G wird von einem normalen Komplex D erzeugt, und zwei verschiedene Elemente von D erzeugen stets eine Frobeniusgruppe.*

(ii) *Die Elemente von D sind keine Involutionen.*

(iii) *D enthält mehr als ein Element.*

Weiter sei $\mathfrak{F}$ in diesem Kapitel die Familie derjenigen Frobeniusgruppen F, so daß F/F' zyklisch und F' der Kern von F ist.

Lemma 3.1. *D ist eine Klasse konjugierter Elemente von G; ferner ist D ein $\mathfrak{F}$-System von G und bezüglich der Multiplikation*

$$a \circ b = b^{-1}ab, \quad a, b \in D ,$$

eine einseitig distributive Quasigruppe.

Beweis. Sei $\mathfrak{E}$ die Familie derjenigen Frobeniusgruppen, die von zwei Elementen erzeugt werden können. Dann ist D ein $\mathfrak{E}$-System von G. Wegen (1.D) ist D ein $\mathfrak{E}_0$-System von G. Ist D kein $\mathfrak{F}$-System von G, so gibt es zwei verschiedene Elemente x und y von D, so daß $\{x, y\}$ zu keinem Element von $\mathfrak{F}$ isomorph ist. Wegen (i) ist $Z(\{x, y\}) = 1$. Da $\{x, y\}$ zu einem Element von $\mathfrak{E}_0$ isomorph ist, gibt es dann in $\{x, y\} \cap D$ zwei Elemente a und b, so daß

$$\{a\} \neq Z(\{a, b\}) \neq 1$$

ist. Aus (i) folgt dann ein Widerspruch, der zeigt, daß D ein $\mathfrak{F}$-System von G ist.

Die anderen Behauptungen folgen dann aus (1.E) und der Definition der einseitig distributiven Quasigruppen.

Da Verwechslungen ausgeschlossen sind, werden die Elemente von D sowohl als Elemente von G als auch als Elemente der Quasigruppe D aufgefaßt.

Lemma 3.2. *Ist U eine Teilmenge von D mit*

$$U = \{U\} \cap D ,$$

so ist U ein Normalteiler von D.

Beweis. Wir zeigen, daß es für alle x, y aus D ein z in D gibt mit

$$(U \circ x) \circ y = U \circ z .$$

Die Menge D^2 hat höchstens so viele Elemente wie D; sind r und s Elemente von D mit $r^2 = s^2$, so folgt aus (i), Lemma 3.1 und (ii), daß $r = s$ ist. Daher haben D und D^2 die gleiche Mächtigkeit. Wegen (i) und (ii) ist xy ein Element von D^2, da $\{x, y\}$ für $x \neq y$ wegen Lemma 3.1 zu einem Element von $\mathfrak{F}$ isomorph ist. Daher gibt es genau ein Element w in D mit $w^2 = xy$. Ist w ein Element von U, so folgt:

$$(U \circ x) \circ y = y^{-1}x^{-1}Uxy = w^{-2}Uw^2 = (U \circ w) \circ w = U = U \circ w .$$

Sei also w kein Element von U. Ist u ein Element von U, so ist $\{u, w\}$ zu einem Element von $\mathfrak{F}$ isomorph. Da D wegen Lemma 3.1 eine einseitig distributive Quasigruppe ist, gibt es in $D \cap \{u, w\}$ ein Element z mit

$$w^{-2}uw^2 = u \circ z .$$

Daher ist w^2z^{-1} in $C_{\{u,w\}}(u)$ enthalten. Da $\{u, w\}$ wegen $u \neq w$ und (i) eine Frobeniusgruppe aus $\mathfrak{F}$ ist, folgt

$$C_{\{u,w\}}(u) = \{u\} .$$

Da w^2z^{-1} auch in

$$\{w, u\}'u = D \cap \{w, u\}$$

enthalten ist, folgt $u = w^2z^{-1}$. Insbesondere wird U von w^2z^{-1} normalisiert. Es folgt

$$(U \circ x) \circ y = w^{-2}Uw^2 = U \circ z .$$

Nun folgt Lemma 3.2 aus Lemma 2.2 und Lemma 2.4 (b).

Bemerkung 3.3. Wegen Lemma 3.2 sind alle einseitig distributiven Unterquasigruppen von D Normalteiler von D. Setzt man die Eigenschaften (ii) und (iii) voraus, so werden durch diese Eigenschaft Gruppen mit der Eigenschaft (i) nicht gekennzeichnet. Bekanntlich gibt es Gruppen H, die einen fixpunktfreien Automorphismus f zulassen, so daß f kein Frobeniusautomorphismus ist. Wegen Lemma 2.5 ist die Menge f^H (im Holomorph von H gebildet) eine einseitig distributive Quasigruppe, die wegen Lemma 2.4 (b) die Eigenschaft von Lemma 3.2 hat. Aus Satz 3.4 folgt aber, daß f^H nicht die Eigenschaft (i) haben kann.

Satz 3.4. *G ist eine Frobeniusgruppe, G' ist der Kern von G, und G/G' ist zyklisch.*

Beweis. Wir beweisen, daß G eine Frobeniusgruppe ist. Ist dann K der Kern von G und sind x und y Elemente von D, so daß x nicht in $K\{y\}$ enthalten ist, so folgt aus (i), daß

$$K\{x, y\}/K \simeq \{x, y\}/(K \cap \{x, y\})$$

eine Frobeniusgruppe ist; nach einem Satz von R. BAER [1, Satz 4.7 (a)] enthält G/K aber keine Frobeniusgruppe. Es folgt $G = K\{y\}$.

Wir nehmen nun an, daß G eine Gruppe minimaler Ordnung ist, die die Eigenschaften (i), (ii) und (iii) hat, aber keine Frobeniusgruppe ist. Wir leiten aus dieser Annahme in mehreren Schritten einen Widerspruch her.

(1) *G ist nicht auflösbar.*

Beweis. Sei d ein Element von D. Es ist zu zeigen, daß $C_{G'}(d) = 1$ ist. Da d dann fixpunktfrei auf G' operiert, folgt aus (i), daß jedes Element von G' Quotient von zwei Elementen von D ist; wegen (i) operiert d dann als Frobeniusautomorphismus auf G'. Sei M ein minimaler Normalteiler von G, der in G' enthalten ist. Ist G auflösbar, so ist M eine elementar abelsche p-Gruppe.

Ist $M = G'$, so ist G' abelsch. Dann ist $C_M(d)$ ein Normalteiler von G, also in $Z(G)$ enthalten. Da M ein Vektorraum ist und d wegen (i) und (iii) eine zu p teilerfremde Ordnung hat, gibt es nach dem Satz von Maschke in M ein Komplement zu $C_M(d)$, das in G normal ist. Aus (i) folgt dann $Z(G) = 1$ und $C_M(d) = 1$.

Daher ist M echt in G' enthalten. Da sich die Voraussetzungen (i), (ii) und (iii) auf G/M vererben, ist G/M wegen der Minimalität von G eine Frobeniusgruppe. Daher ist M die normale Hülle von $C_{G'}(d)$ in G, und M ist einziger minimaler Normalteiler von G.

Wir nehmen zunächst an, daß G' nicht nilpotent ist. Nach J. G. THOMPSON [9] ist G'/M nilpotent. Dann enthält G' genau eine p-Sylow-Gruppe P, da M eine p-Gruppe ist. Wäre $|D|$ eine Potenz von p, so wäre $G' = P$ und G' nilpotent. Daher gibt es einen Primteiler $q \neq p$ von $|D|$. Wegen (i) gibt es dann zwei verschiedene Elemente x und y von D, so daß $\{x, y\}'$ eine q-Gruppe ist, die nicht von P normalisiert wird. Aus der Minimalität von G folgt dann

$$G = \{x, y\} P ,$$

da P in G normal ist. Insbesondere ist $\{x, y\}'$ eine q-Sylow-Gruppe von G'. Wegen Lemma 3.2 ist $\{x, y\} \cap D$ ein Normalteiler von D. Wegen Lemma 2.4 (b) wird $\{x, y\}$ von $C_{G'}(x)$ normalisiert. Da P in G normal ist und D wegen Lemma 3.1 eine Klasse konjugierter Elemente von G ist, wird $C_{G'}(x)$ von $\{x, y\}$ zentralisiert. Da M einziger in G' enthaltener minimaler Normalteiler von G ist, ist M in $Z(P)$ enthalten. Es folgt, daß M auch in $Z(G)$ enthalten ist. Da G'/M nilpotent ist, ist dann auch G' nilpotent.

Aus diesem Widerspruch folgt, daß G' nilpotent ist. Dann folgt weiter, da $C_{G'}(d)$ in $Z(G')$ enthalten ist,

$$G' \cap Z(G) \geq C_{G'}(d) .$$

Wir zeigen, daß $Z(G) \cap G' = 1$ ist. Wegen der Minimalität von G ist G' eine p-Gruppe, da G' nilpotent ist. Sei w ein Element von G'. Ist dw ein Element von D, so ist w in $\{d, dw\}$ enthalten; wegen Lemma 3.1 und der Definition von $\mathfrak{F}$ ist dw genau dann ein Element von D, wenn w ein Kommutator der Form

$$(+) \qquad w = dxd^{-1}x^{-1}, \quad x \in D ,$$

ist. Seien b und c Elemente von D. Wegen (ii) gilt

$$|D| = |D^2| = |D \cdot D| .$$

Daher gibt es wegen (i) ein Element r in D mit $dc = r^2$. Dann ist

$$dcb^{-1} = r^2 b^{-1}$$

als Element von $\{r, b\}$ wegen (i) in D enthalten. Wegen (+) ist cb^{-1} in $d(D^{-1})$ enthalten. Damit ist gezeigt, daß $d(D^{-1})$ ein normaler Komplex von G ist und die Mächtigkeit $|D|$ hat. Da $G/(Z(G) \cap G')$ eine Frobeniusgruppe ist, enthält also jede Restklasse von G' nach $Z(G) \cap G'$ genau ein Element von $d(D^{-1})$. Sei nun $W/(Z(G) \cap G')$ ein minimaler Normalteiler von $G/(Z(G) \cap G')$. Dann gibt es zwei Elemente h und k in D mit

$$W = (Z(G) \cap G')\{h, k\}' = (G' \cap Z(G)) \otimes \{h, k\}' .$$

Nun folgt ein Widerspruch aus (i), da $Z(G) \cap G'$ einziger in G' enthaltener minimaler Normalteiler von G ist, und $\{h, k\}'$ in G' und damit in $G = G'\{h\}$ normal ist.

(2) *$G' = G''$ ist einziger minimaler Normalteiler von G.*

Beweis. Sei M ein minimaler Normalteiler von G. Sei zunächst M nicht in G' enthalten. Dann folgt aus (i) und

$$G = G'\{d\}, \quad d \in D ,$$

daß M in $Z(G)$ enthalten ist; wegen (i) und (ii) ist $M \cap \{d\} = 1$. Daher ist

$$\{dM/M\} = \{d\}\, M/M \simeq \{d\}/M \cap \{d\} \simeq \{d\} .$$

Dann folgt aus der Minimalität von G, daß G/M als Frobeniusgruppe auslösbar ist. Also ist M in G' enthalten. Ist M echt in G' enthalten, so ist G/M wegen der Minimalität von G auflösbar; M ist (in $Z(G)$ enthalten oder) als direktes Produkt isomorpher einfacher Gruppen wegen der Minimalität von G auflösbar. Nun folgt aus (1) ein Widerspruch, der $M = G'$ beweist.

(3) *Ist M eine maximale Teilmenge von D mit*

$$D \neq M = \{M\} \cap D ,$$

so sind $|M|$ und $[G : N_G(M)]$ teilerfremd.

Beweis. Da der Kern einer Frobeniusgruppe nach J. G. Thompson nilpotent ist, enthält M wegen (1) und (i) mehr als ein Element. Wegen $M \neq D$ und der Minimalität von G ist $\{M\}$ eine Frobeniusgruppe, und $\{M\}'$ ist nilpotent. Sei d ein Element von M und $C = C_G(d)$ für ein d aus D. Wegen Lemma 3.2 und Lemma 2.4 ist C in $N = N_G(M)$ enthalten. Sei P eine p-Sylow-Gruppe von N für einen Primteiler p von $|M|$. Dann ist $P \neq 1$. Aus $N = C\{M\}'$ und der Nilpotenz von $\{M\}'$ folgt dann, daß $N_D(P)$ nicht leer ist. Wir können annehmen, daß d ein Element von $N_D(P)$ ist. Wegen der Minimalität von G folgt aus (2), daß $N_D(P)$ echt in D enthalten ist. Da M eine Klasse konjugierter Elemente von $\{M\}$ und p ein Primteiler von $|M|$ ist, folgt aus der Nilpotenz von $\{M\}'$

$$|N_D(P) \cap M| > 1 .$$

Da $P \cap \{M\}$ eine p-Sylow-Gruppe von $\{M\}'$ ist, folgt aus der Maximalität von M zusammen mit (2)

$$N_G(P \cap \{M\}') = N_G(M) .$$

Wir nehmen an, daß P keine p-Sylow-Gruppe von G ist. Da C in N enthalten ist, gibt es ein Element x in $N_D(P)$ mit

$$D \neq P\{d, x\} \cap D \supset P\{d\} \cap D ,$$

so daß

$$w = [P\{d, x\} : P\{d\}] \neq 1$$

minimal ist. Nun folgt aus (2) und der Minimalität von G

$$(P \cap \{M\}')\{x, d\}' = \{P\{d, x\} \cap D\}' = W .$$

Da d als Frobeniusautomorphismus auf W operiert, folgt aus der Minimalität von w, daß $P \cap \{M\}'$ in $\{P\{x, d\} \cap D\}$ normal ist. Da M nicht von x normalisiert wird, erhalten wir einen Widerspruch, der zeigt, daß P eine p-Sylow-Gruppe von G ist.

Damit ist (3) bewiesen.

(4) *Sind x und y verschiedene Elemente von D, so gibt es genau eine maximale Teilmenge $M(x, y)$ von D mit*

$$D \neq M(x, y) = \{M(x, y)\} \cap D ,$$

die x und y enthält.

Beweis. Seien x und y verschiedene Elemente von D. Seien weiter M und N maximale Teilmengen von D, die x und y enthalten. Zum Beweis von (4) können wir annehmen, daß $\{x, y\}'$ eine nicht-triviale p-Gruppe ist, da $\{x, y\}$ wegen Lemma 3.1 stets eine auflösbare Frobeniusgruppe ist. Wegen (3) gibt es eine p-Sylow-Gruppe P von G, die M normalisiert. Da M eine Klasse konjugierter Elemente von $\{M\}$ ist, können wir wegen

$$N_G(M) = \{M\} C_{N_G(M)}(x)$$

annehmen, daß x in $N_D(P)$ enthalten ist. Ebenso folgt die Existenz einer p-Sylow-Gruppe Q von G, die N normalisiert und von x normalisiert wird. Dann folgt aus Lemma 3.2 und Lemma 2.4, daß

$$N_D(P) = N_D(Q)$$

in M und N enthalten ist. Nun folgt aus (2) und

$$N_G(\{N_D(P)\}') = N_G(\{N_D(Q)\}') \geqq \{M, N\} ,$$

daß $M = N$ ist, da M und N maximal sind.

Damit ist (4) gezeigt.

Seien $M_1, \ldots, M_n$ die maximalen Teilmengen von D mit

$$D \neq M_i = \{M_i\} \cap D , \qquad i = 1, \ldots, n ,$$

die ein festes Element d von D enthalten. Dann folgt aus (4)

$$M_i \cap M_j = d \quad \text{für} \quad i \neq j .$$

Wegen (3) ist

$$w = \prod_{i=1}^{n} |M_i|$$

ein Teiler von $|D|$, da $|M_i|$ und $|M_j|$ für $i \neq j$ teilerfremd sind (s. (3), Lemma 3.2 und Lemma 2.4). Da jedes von d verschiedene Element von D wegen (4) in genau einem M_i enthalten ist und die Gruppen $\{M_i\}$ wegen der Minimalität von G Frobeniusgruppen sind, folgt

$$\prod_{i=1}^{n} |M_i| \leqq |D| = |d^{-1}D| = 1 + \sum_{i=1}^{n} (|M_i| - 1) \leqq \sum_{i=1}^{n} |M_i| .$$

Da alle M_i mehr als zwei Elemente enthalten, und es ein m mit

$$|M_m| = \max_{i=1,\ldots,n} |M_i| , \qquad 1 \leqq m \leqq n ,$$

gibt, folgt aus

$$3^{n-1} \leqq \prod_{i=1, i \neq m}^{n} |M_i| \leqq n ,$$

daß $n = 1$ ist. Dann wäre aber $M_1 = D$ und G auflösbar.

Dieser Widerspruch beweist Satz 3.4.

Bemerkung 3.5. Die Voraussetzung (ii) wurde in diesem Kapitel an zwei entscheidenden Stellen benötigt: Zum Beweis von Lemma 3.2 und im Beweis von Satz 3.4, Schritt (1).

Sei $p \neq 3$ eine ungerade Primzahl. Sei H die Gruppe der Ordnung p^4 maximaler Klasse, die durch folgende Relationen gegeben ist:

$$H = \{x, y\}, x^p = y^p = a^p = b^p = 1 ,$$
$$x^y = xa, a^y = ab, b^x = b^y = b, a^x = a$$

(s. [3, S. 146 (xv)]). Dann gibt es einen Automorphismus von H, der x, y und b invertiert. Sei $G = H\{d\}$ die Erweiterung von H durch d im Holomorph von H und $D = d^G$. Dann erzeugen verschiedene Elemente von D eine Gruppe der Ordnung $2p$. Ferner ist D eine einseitig distributive Quasigruppe. Wegen

$$Z_2(H) = Z(H)\, C_H(d)$$

gibt es Unterquasigruppen von D, die nicht normal in D sind. Daher ist (ii) für Lemma 3.2 unentbehrlich.

Sei $\overline{G} = G/Z(H)$ und $\overline{D} = DZ(H)/Z(H)$. Dann ist $\overline{D}$ eine einseitig distributive Quasigruppe, in der alle Unterquasigruppen Normalteiler sind. Trotzdem ist G keine Frobeniusgruppe.

Zur Kennzeichnung involutorischer Frobeniusautomorphismen benötigt man daher zusätzliche Voraussetzungen.

Satz 3.6. *Sei D eine Klasse konjugierter Involutionen einer endlichen Gruppe G, die von D erzeugt wird. Enthält D mehr als ein Element, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

(x) *G ist eine Frobeniusgruppe und $G'' = 1$.*

(y) *Drei verschiedene Elemente von D erzeugen stets eine Frobeniusgruppe.*

(z) *Ist U eine auflösbare Untergruppe von G, die von Elementen aus D erzeugt werden kann, so ist U zyklisch oder eine Frobeniusgruppe.*

Beweis. Es ist klar, daß (y) und (z) aus (x) folgen. Es gelte (y). Sind d und e verschiedene Elemente von D, so folgt, daß $\{d, e\}'$ in $Z(G')$ enthalten ist, da $\{d, e, f\}'$ für alle f aus D abelsch ist. Da D eine Klasse konjugierter Elemente ist, folgt (x).

Der Beweis, daß (x) aus (z) folgt, wird im nächsten Kapitel geführt.

Bemerkung 3.7. Die alternierende Gruppe vom Grade 5 zeigt, daß man in (z) das Wort „zyklisch" nicht durch „elementar abelsch" ersetzen kann.

4. Beweis von Satz II und Satz 3.6

In diesem Kapitel betrachten wir eine endliche Gruppe G, die gewisse Eigenschaften (x) für $x = a, \ldots, k$ hat. Für alle Lemmata habe G die vorher formulierten Eigenschaften.

Unser Interesse gilt der Frage, ob aus (a), (b) und (c) die Auflösbarkeit von G folgt. Jedoch können wir die Auflösbarkeit von G nicht beweisen, ohne die vollen Voraussetzungen von Satz II oder Satz 3.6 (z) zu benutzen. Die betrachteten Zusatzvoraussetzungen sind aber Folgerungen der Voraussetzungen der zu beweisenden Sätze.

(a) *G wird von einem normalen Komplex D von Elementen der Primzahlordnung p erzeugt, und D enthält mehr als p Elemente.*

(b) *Sind x und y vertauschbare Elemente von D, so ist $\{x\} = \{y\}$.*

(c) *Sind x und y nicht vertauschbare Elemente von D, so ist $\{x, y\}/Z(\{x, y\})$ eine Frobeniusgruppe.*

Lemma 4.1. *Sind x und y Elemente von D, so daß $\{x, y\}/Z(\{x, y\})$ eine Frobeniusgruppe mit zyklischem Kern ist, so ist $Z(\{x, y\}) = 1$.*

Beweis. Seien x und y Elemente von D, so daß $W = \{x, y\}$ minimal ist bezüglich

$$Z(W) \neq 1 \quad \text{und} \quad 1 \neq (W/Z(W))' \text{ ist zyklisch.}$$

Wegen

$$W = W'\{x\}$$

folgt aus (a) und (b), daß $Z(W)$ in W' enthalten ist. Insbesondere ist W' nilpotent. Da $W'/Z(W)$ zyklisch ist, gibt es ein r in W', so daß $W'/Z(W)$ von $rZ(W)$ erzeugt wird. Wegen (a) und (b) ist W' eine p'-Gruppe. Daher gibt es in $rZ(W)$ ein Element s, so daß $\{s\}$ von x normalisiert wird. Dann ist $W = \{x, s\}$ und W' ist zyklisch. Ist q ein Primteiler von $|Z(W)|$, so ist die q-Sylow-Gruppe von $Z(W)$ kein direkter Faktor von W'. Daher folgt aus der Minimalität von W, daß W' eine zyklische q-Gruppe ist. Da die Ordnung der Automorphismengruppe von W' das Produkt von $q - 1$ und einer Potenz von q ist und ein Automorphismus der Ordnung $q - 1$ wegen $q \neq 2$ kein Element $(\neq 1)$ von W' zentralisiert, ist $Z(W) = 1$.

Lemma 4.2. *Ist U eine Untergruppe von G, so sei*

$$\mathfrak{D}(U) = [\{x\}; x \in D \cap U] .$$

Dann sind die Elemente von $\mathfrak{D}(U)$ in U konjugiert.

Beweis. Enthält U kein Element von D, so ist $\mathfrak{D}(U)$ leer. Sei G minimal gewählt, so daß Lemma 4.2 falsch ist. Dann ist $\mathfrak{D}(U)$ keine Klasse konjugierter Untergruppen von U, und es gibt zwei Elemente x und y in D mit $G = \{x, y\}$. Dann ist $G/Z(G)$ nach (c) eine Frobeniusgruppe. Da sich die Voraussetzungen auf nicht-abelsche Faktorgruppen vererben, folgt aus der Minimalität von

G, daß $Z(G)$ trivial ist. Ist K der Kern und H ein Frobeniuskomplement zu K in G, so enthält H ein Element von D. Wegen der Minimalität von G ist $\mathfrak{D}(U)$ eine Klasse konjugierter Untergruppen von H. Dieser Widerspruch beweist Lemma 4.2.

Lemma 4.3. *Sind x und y Elemente von D, so ist $\{x, y\}$ auflösbar.*

Beweis. Wir können annehmen, daß G von x und y erzeugt wird. Ist G eine Gruppe minimaler Ordnung, für die Lemma 4.3 falsch ist, so folgt $Z(G) = 1$. Ist K der Frobeniuskern und H ein Komplement von K in G, so ist K nach J. G. Thompson nilpotent. Da H wegen eines Isomorphiesatzes von $x^K \cap H$ und $y^K \cap H$ erzeugt wird, folgt aus der Minimalität von G, daß H auflösbar ist.

(d) *Sind x und y Elemente von D, so hat $\{x, y\}'$ ungerade Ordnung.*

Definition. Sei s ein Automorphismus von G. Dann ist $s^{-1}xs$ das Bild des Elementes x von G unter s und D_s die Menge der Fixelemente von D unter s. Ist s involutorisch und a ein Element von D_s, so sei

$$A_{s,a} = [x \in D; \{x, s^{-1}xs\} \cap D_s = \{a\} \cap D \quad \text{und} \quad a \in x^{\{x, s^{-1}xs\}}] .$$

Lemma 4.4. *Sei s ein involutorischer Automorphismus von G, so daß D_s nicht leer ist. Dann gilt:*

(+) *Ist x ein Element von D und wird $\{x\}$ von s normalisiert, so wird x von s zentralisiert.*

(++) *Ist x ein Element von D, so daß der Frobeniuskern von $\{x, x^s\}$ abelsch ist, so gibt es genau ein $a(x)$ in D_s, so daß x in $A_{s,a(x)}$ enthalten ist.*

(+++) *Die Mengen $A_{s,a}$ für a aus D_s sind paarweise elementfremd und haben alle die gleiche Mächtigkeit.*

Beweis. Sei a ein Element von D_s. Ist x ein Element von D, so daß $\{x\}$ von s normalisiert wird, so wird auch $\{x, a\}$ von s normalisiert. Wegen Lemma 4.3 ist $\{a, x\}$ auflösbar. Wegen Lemma 4.2 enthält $\{x, a\}$ dann ein normales Komplement zu $\{a\}$, das von s normalisiert wird. Da wir annehmen können, daß a und x in $\{a, x\}$ konjugiert sind, folgt (+).

Insbesondere sind alle Elemente y aus D mit $\{y\} = \{y^s\}$ in D_s enthalten. Ist x ein Element von D_s, so ist x genau in $A_{s,a}$ enthalten. Sei x ein Element von D, das nicht in D_s enthalten ist; der Frobeniuskern von $\{x, x^s\}/Z(\{x, x^s\})$ sei abelsch. Da $\{x, x^s\}$ von s normalisiert wird, folgt aus (*d*) und (+), daß s ein Element von D, das in $\{x, x^s\}$ zu x konjugiert ist, zentraliert. Es ist zu zeigen, daß

$$\{x, x^s\} \cap D_s = \{d\} \cap D, \quad d \in D ,$$

gilt. Zum Beweis dieser Behauptung können wir annehmen, daß $G = \{x, x^s\}$ eine Gruppe minimaler Ordnung ist, für die sie falsch ist. Dann ist $Z(G) = 1$. Da G wegen Lemma 4.3 auflösbar ist, können wir weiter annehmen, daß D eine Klasse konjugierter Elemente von G ist. Dann ist D ein $\mathfrak{F}$-System von G für eine geeignete Familie von Frobeniusgruppen $\mathfrak{F}$. Wegen (1.D) ist dann D ein $\mathfrak{F}_0$-System von G. Ist K der Kern von G, so folgt, daß G/K abelsch oder $(G/K)/Z(G/K)$ eine Frobeniusgruppe mit abelschem Kern ist. Aus der Minimalität von G folgt daher $G' = K$. Da G' also abelsch ist, besitzt K ein in G normales Komplement L zu $C_K(s)$, das von s normalisiert wird. Daher werden die

Mengen y^L für y aus D von s normalisiert. Es folgt $C_K(s) = 1$. Dieser Widerspruch beweist (++).

Sei w ein Element von $C_G(s)$. Dann wird D_s von w normalisiert. Sei x ein Element von $A_{s,a}$. Dann folgt aus der Definition von $A_{s,a}$, daß x^w in $\{x^s, a\}^w$ enthalten ist; also liegt x^w auch in $A_{s,w^{-1}aw}$. Wegen Lemma 4.2 sind alle Untergruppen $\{y\}$ mit y aus D_s in $\{D_s\}$ konjugiert. Daher ist nur noch zu zeigen, daß $A_{s,a}$ und $A_{s,b}$ gleiche Mächtigkeit haben, wenn b in $\{a\}$ enthalten ist. Sei $b = a^n$ für eine natürliche Zahl n. Dann folgt aus Lemma 4.2 und Lemma 4.3

$$A_{s,b} = (A_{s,a})^n .$$

Definition. Sei $\mathfrak{M}$ die Menge der maximalen Teilmengen von D, die auflösbare Untergruppen von G erzeugen (d. h. G ist genau dann auflösbar, wenn D in $\mathfrak{M}$ enthalten ist).

(e) *Sind x und y nicht vertauschbare Elemente von D, so ist $Z(\{x, y\}) = 1$; ist $p = 2$ und ist M ein Element von $\mathfrak{M}$, so ist $\{M\}$ eine Frobeniusgruppe.*

Lemma 4.5. *Ist M ein Element von $\mathfrak{M}$, so ist $\{M\}$ eine Frobeniusgruppe mit nilpotenter Kommutatorgruppe.*

Beweis. Ist $p = 2$, so folgt die Behauptung unmittelbar aus (e). Sei $p \neq 2$ und d ein Element von M. Dann folgt aus der Auflösbarkeit von $\{M\}$, daß verschiedene Elemente von $d^{\{M\}}$ nicht vertauschbar sind. Wegen (a) und Lemma 4.3 sind also die Voraussetzungen von Satz I erfüllt. Daher ist $\{M\}'$ der Kern der Frobeniusgruppe $\{M\}$. Nun folgt Lemma 4.5 aus dem Satz von J. G. THOMPSON.

Lemma 4.6. *Ist G eine nicht-auflösbare Gruppe minimaler Ordnung, so gilt:*

(f) *Enthält die Untergruppe U von G ein Element von D, so ist $\{U \cap D\}$ auflösbar; G ist nicht auflösbar.*

(g) *Ist $p \neq 2$, so ist G einfach; ist $p = 2$, so ist $G' = G''$ einziger minimaler Normalteiler von G.*

Beweis. Unsere Voraussetzungen vererben sich auf Untergruppen, die von Elementen von D erzeugt werden können. Daher ist (*f*) trivial. Sei M ein minimaler Normalteiler von G. Dann folgt aus $G = G'\{d\}$ für ein d aus D, daß M in G' enthalten ist. Ist $M \neq G'$, so folgt aus (f), daß M (in $Z(G)$ enthalten oder) auflösbar ist. Da DM/M die Voraussetzungen dieses Kapitels erfüllt, folgt $G' = M$. Ist G' von G verschieden, so können wir annehmen, daß D eine Klasse konjugierter Elemente von G ist. Ist dann $p \neq 2$, so folgt aus Satz I, daß G auflösbar ist.

Bemerkung: Satz II ist wegen Satz I bewiesen, sobald wir die Auflösbarkeit von G gezeigt haben.

Definition. Sei ϱ die Menge aller Primteiler von $[N_G(d) : C_G(d)]$ für d aus D; ist ϱ leer, so sei ϱ' die Menge aller Primzahlen.

Lemma 4.7. *Ist $\{x, y\}'$ für alle x, y aus D zyklisch, so gilt:*

(h) *Ist M ein Element von $\mathfrak{M}$, so ist $\{M\}'$ eine ϱ'-Gruppe.*

Beweis. Sei q ein Primteiler von $|\{M\}'|$. Dann ist p ein Teiler von $q - 1$, also q kein Teiler von $p - 1$.

Lemma 4.8. *Ist M ein Element von $\mathfrak{M}$, so ist $\{M\}$ nicht zyklisch; sind M und N verschiedene Elemente von $\mathfrak{M}$, so ist $M \cap N$ leer oder $\{M \cap N\}$ ist zyklisch.*

Beweis. Wegen Lemma 4.5 ist $\{M\}$ nicht zyklisch. Ist Lemma 4.8 also falsch, so gibt es Elemente X und Y von $\mathfrak{M}$ und eine Primzahl r, so daß die r-Sylow-Gruppe von $\{X \cap Y\}'$ nicht-trivial ist. Unter den Paaren X, Y von Elementen von $\mathfrak{M}$ mit der Eigenschaft, daß die r-Sylow-Gruppe von $\{X \cap Y\}'$ nicht-trivial ist, gibt es Elemente M und N von $\mathfrak{M}$, so daß die r-Sylow-Gruppe W von $\{M \cap N\}$ maximale Ordnung hat. Wegen Lemma 4.5 und Lemma 4.6 (g) ist $N_D(W)$ in einem Element L von $\mathfrak{M}$ enthalten. Da W wegen Lemma 4.5 und der Maximalität von M und N nicht die r-Sylow-Gruppe von $\{M\}$ oder $\{N\}$ sein kann, ist W echt in den r-Sylow-Gruppen von $\{L \cap N\}$ und $\{L \cap M\}$ enthalten. Aus der Maximalität von W folgt nun ein Widerspruch, der Lemma 4.8 beweist.

Lemma 4.9. *Ist r eine Primzahl aus ϱ' und R eine r-Sylow-Gruppe von G mit*

$$C_D(R) \neq N_D(R) \neq \emptyset ,$$

so ist

$$N_D(\{N_D(R)\} \cap R)$$

ein Element von $\mathfrak{M}$.

Beweis. Sei d ein Element von $N_D(R)$. Sei weiter

$$N = \{R\{d\} \cap D\} .$$

Nun folgt aus Lemma 4.3, daß $\mathfrak{D}(N)$ mehr als ein Element enthält, da $C_D(R)$ von $N_D(R)$ verschieden ist. Dann ist $\{N\}'$ eine nicht-triviale r-Gruppe. Wegen der Maximalität der Elemente von $\mathfrak{M}$ gibt es ein M in $\mathfrak{M}$, das N enthält, da N wegen Lemma 4.6 (g) von D verschieden ist. Wegen Lemma 4.2 wird $\{N\}$ von R normalisiert. Sei W die wegen Lemma 4.5 eindeutig bestimmte r-Sylow-Gruppe von $\{M\}$. Dann ist $\{N\}'$ in W enthalten. Aus Lemma 4.8 folgt, daß $N_D(\{N\}')$ in M enthalten ist. Ist $N_D(\{N\}')$ echt in M enthalten, so folgt aus der Nilpotenz von $\{M\}'$, daß $N_W(\{N\}')$ echt in W enthalten ist. Aus Lemma 4.2 folgt

$$(*) \qquad R \subseteq N_G(\{N\}') = N_D(\{N\}')\, N_{N_G(\{N\}')}(\{d\}) .$$

Daher folgt aus Lemma 4.6 (g) und Lemma 4.5, daß

$$T = d^{N_W(\{N\}')}$$

von R normalisiert wird. Insbesondere ist

$$N_W(\{N\}') = \{T\}'$$

in R enthalten, was wegen (*) nur möglich ist, wenn $W = \{N\}'$ ist. Mit diesem Widerspruch ist Lemma 4.9 bewiesen.

Lemma 4.10. *Es gilt*

$$(i) \qquad p \neq 2 .$$

Beweis. Wir nehmen an, daß die Elemente von D Involutionen sind. Sei s eine Involution aus G, die nicht in D enthalten ist. Wegen (b) ist D_s nicht leer. Aus Lemma 4.4 und Lemma 4.6 folgt für ein d aus D_s

$$A_{s,d} = D_{sd} \quad \text{und} \quad |D_s| > 1 < |D_{sd}| .$$

Insbesondere folgt aus Lemma 4.8, daß D_s und D_{sd} in $\mathfrak{M}$ enthalten sind. Sei t eine Involution aus G, die mit s vertauschbar ist. Ist t von s verschieden und t kein Element von D, so folgt, daß t ein Element a von D_s zentralisiert. Wegen Lemma 4.4 ist dann $D_t = A_{s,a}$. Aus Lemma 4.4 und Lemma 4.9 folgt, daß $|D_s|$ und $|D_{sd}|$ teilerfremd sind. Insbesondere sind verschiedene Elemente von s^G nicht vertauschbar. Weiter folgt, daß alle Involutionen einer 2-Sylow-Gruppe S von G in $Z(S)$ enthalten sind und S höchstens drei Involutionen enthält. Enthält S genau eine Involution, so ist S zyklisch oder eine verallgemeinerte Quaternionengruppe; dann folgt aus den Sätzen von W. BURNSIDE bzw. R. BRAUER und M. SUZUKI, daß G ein normales 2-Komplement besitzt; nach W. FEIT und J. G. THOMPSON wäre dann G im Widerspruch zu Lemma 4.6 auflösbar. Daher enthält $Z(S)$ genau 3 Involutionen. Wegen Lemma 4.9 können wir

$$|D_s| > |D_{sd}|$$

annehmen. Ist w ein Element von $C_G(d)$, das D_s nicht normalisiert, so folgt aus Lemma 4.4, daß $(D_s)^w$ mit einer Menge $A_{d,a}$ für ein a aus D_{sd} mehr als ein Element gemeinsam hat. Wegen Lemma 4.8 ist das nicht möglich. Es folgt

$$C_G(d) \subseteq N_G(D_s) .$$

Dann folgt aus Lemma 2.4, daß D_s ein Normalteiler der einseitig distributiven Quasigruppe D ist. Aus Lemma 4.4 folgt, daß die Involution sd alle Elemente von

$$D_s \circ z, \quad z \in D ,$$

normalisiert. Daher ist $\{(ds)^G\}$ im Kern der Permutationsdarstellung von G auf dieser Menge enthalten. Wegen Lemma 4.6 (g) wird also D_s von G' normalisiert. Also wäre $\{D_s\}'$ ein auflösbarer Normalteiler von G.

Dieser Widerspruch beweist Lemma 4.10.

Mit Lemma 4.10 ist auch Satz 3.6 bewiesen.

Lemma 4.11. *Ist $\{x, y\}'$ für alle Elemente x, y von D zyklisch, so gilt:*

(j) *In G gibt es Involutionen, und für alle Involutionen s von G ist D_s nicht leer; sind x und y Elemente von D, so ist $\{x, y\}'' = 1$.*

Beweis. Wegen Lemma 4.6 ist G nicht auflösbar. Daher gibt es nach W. FEIT und J. G. THOMPSON Involutionen in G.

Sei s eine Involution aus G, so daß D_s leer ist. Ist x ein Element von D, so wird $\{x, sxs\}$ von s normalisiert. Da $\mathfrak{D}(\{x, sxs\})$ wegen Lemma 4.2 und (d) ungerade Mächtigkeit hat, gibt es in $\{x, sxs\} \cap D$ ein Element f, so daß $\{f\}$ von s normalisiert wird. Da D_s leer ist, folgt

$$sfs = f^{-1} .$$

Sei g ein Element von D mit

$$sgs = g^{-1} \notin \{f\} .$$

Dann wird $\{g, f\}$ von s normalisiert. Da $\{f, g\}$ wegen (b) nicht abelsch ist, folgt

$$\{f, g\}' \subseteq C_G(s) .$$

Wegen Lemma 4.2 können wir annehmen, daß f und g in $\{f, g\}$ konjugiert sind.

Dann ist gf^{-1} in $\{g, f\}'$ enthalten, und es folgt

$$gf^{-1} = sgf^{-1}s = g^{-1}f ,$$

was $g^2 = f^2$ nach sich zieht. Wegen (a) ist dann $p = 2$, was (i) widerspricht.

Daher normalisiert s genau ein Element $\{f\}$ von $\mathfrak{D}(G)$. Sei x ein Element von D, das nicht in $\{f\}$ enthalten ist. Dann ist f in $\{x, sxs\}$ enthalten. Da $\{x, sxs\}'$ zyklisch und $\{x, sxs\}$ nicht abelsch ist, wird $\{x, sxs\}'$ von s zentralisiert. Sei

$$W = \{\{x, sxs\}'; x \in D\} .$$

Dann wird W von f normalisiert. Da $\{x\}$ und $\{f\}$ wegen Lemma 4.2 unter $\{x, sxs\}$ konjugiert sind, ist W ein Normalteiler von G, was wegen Lemma 4.6 nicht möglich ist.

Lemma 4.12. *Sei s eine Involution aus G und a ein Element von D_s. Dann gibt es kein Element x in D mit $x^s = x^{-1}$.*

Ist r ein Element von D, so ist r genau dann in $A_{s,a}$ enthalten, wenn $srs = ar^{-1}a$ ist. Sind c und d Elemente von $A_{s,a}$, so gilt:

$$sc^{-1}ds = a^{-1}cd^{-1}a .$$

Beweis. Sei x ein Element von D mit $x^s = x^{-1}$. Da $\{a, x\}$ von s normalisiert wird und wegen Lemma 4.3 auflösbar ist, erhalten wir einen Widerspruch zu Lemma 4.2 und (i).

Ist r in D_s enthalten, so ist r genau dann in $A_{s,a}$ enthalten, wenn $r = a$ ist; wegen (i) ist das genau dann der Fall, wenn

$$a^{-1}r = r^{-1}a$$

ist.

Ist r nicht in D_s aber in $A_{s,a}$ enthalten, so folgt für ein Element w von $A_{s,a}$, daß w und a in $\{a, w\}$ konjugiert sind. Da a von s zentralisiert wird, folgt aus (j), Lemma 4.4 und (e), daß r^{-1} a von s invertiert wird. Dann gilt:

$$srs = saa^{-1}rs = asa^{-1}rs = ar^{-1}a .$$

Gilt umgekehrt $srs = ar^{-1}a$ für ein Element r von D, das nicht in D_s enthalten ist, so folgt

$$s\{r, a\}s = \{srs, a\} = \{ar^{-1}a, a\} = \{r^{-1}, a\} = \{r, a\} .$$

Daher ist

$$\{r, a\} \supseteq \{r, srs\} .$$

Weiter folgt

$$sr^{-1}as = s(a^{-1}srsa^{-1})as = sa^{-1}srss = a^{-1}r .$$

Da $\{r, a\}'$ wegen (j) abelsch ist, folgt

$$\{r, a\}' = \{s^{\{r,a\}'}\}' C_{\{r,a\}'}(s) .$$

Da $r^{-1}a$ von s invertiert wird, ist $r^{-1}a$ in $\{s^{\{r,a\}'}\}$ enthalten. Es folgt

$$C_{\{r,a\}'}(s) = 1 \quad \text{und} \quad \{r, a\} = \{r, srs\} .$$

Da nun r und a in $\{r, a\}$ konjugiert sind, ist r in $A_{s,a}$ enthalten.

Aus dem bereits gezeigten Teil von Lemma 4.12 folgt

$$sc^{-1}ds = sa^{-1}ac^{-1}aa^{-1}da^{-1}as = a^{-1}(sac^{-1}as)s(a^{-1}da^{-1})sa$$
$$= a^{-1}cs(ad^{-1}a)^{-1}sa = a^{-1}cs(sds)^{-1}sa = a^{-1}cd^{-1}a\,.$$

Lemma 4.13. *Ist $\{x, y\}'$ für alle x, y aus D zyklisch, so folgt:*

(k) *Sei s eine Involution aus G und a ein Element von D_s. Sind c und d Elemente von $A_{s,a}$, so daß cd^{-1} ein p'-Element ist, so ist $\{a, c, d\}$ eine echte Untergruppe von G.*

Beweis. Zum Beweis dieses Lemmas können wir annehmen, daß d nicht in $\{a, c\}$ und c nicht in $\{a, d\}$ enthalten ist. Dann folgt aus der Voraussetzung, daß cd^{-1} kein p-Element ist. Da $\{c, d\}$ wegen (e) eine Frobeniusgruppe ist, die nach Voraussetzung einen zyklischen Kern hat, folgt

$$\{c, d\}' = \{cd^{-1}\} = \{c^{-1}d\}\,.$$

Wegen Lemma 4.12 wird also $\{c, d\}'$ von sa^{-1} normalisiert. Da s und a vertauschbar sind und a ungerade Ordnung hat, wird $\{c, d\}'$ von s und a normalisiert. Nun folgt die Behauptung aus Lemma 4.6.

Lemma 4.14. *Ist s eine Involution aus G, so gibt es in $C_G(s)$ eine von s verschiedene Involution.*

Beweis. Wegen (i) und Lemma 4.6 ist G einfach. Daher sind die 2-Sylow-Gruppen von G weder zyklisch noch verallgemeinerte Quaternionengruppen, enthalten also mehr als eine Involution.

Definition. Ist s eine Involution aus G und a ein Element von D_s, so sei $\mathfrak{A}_{s,a}$ die Menge der maximalen Teilmengen von $A_{s,a}$, die echte Untergruppen von G erzeugen.

Lemma 4.15. *Sei s eine Involution aus G und a ein Element von D_s. Ist A ein Element von $\mathfrak{A}_{s,a}$, so ist $\{A\}$ nicht zyklisch; ferner gilt:*

$$(+) \qquad A = \{A\} \cap A_{s,a}\,.$$

Ist t eine Involution, die mit s und a vertauschbar ist, so gilt:

$$(++) \qquad tAt = A\,.$$

$\mathfrak{A}_{s,a}$ enthält höchstens zwei Elemente; es gibt mindestens ein Element B in $\mathfrak{A}_{s,a}$, so daß $\{B\} \cap D$ ein Element von $\mathfrak{M}$ ist.

Beweis. Ist $\{A\}$ zyklisch, so folgt aus Lemma 4.4 und Lemma 4.11, daß $D = D_s$ ist. Dann ist s im Widerspruch zu Lemma 4.6 in $Z(G)$ enthalten.

Wegen Lemma 4.8 ist A in genau einem Element M von $\mathfrak{M}$ enthalten, und A wird wegen der Maximalität von A und der Definition von $A_{s,a}$ von s normalisiert. Es folgt aus Lemma 4.4

$$a^{\{M\}} = (A_{s,a} \cap M) \circ (a^{\{M\}})_s\,.$$

Ist $\{M_s\}$ zyklisch oder $\{M\}'$ abelsch, so folgt die Behauptung (+).

Wegen der Definition von $A_{s,a}$ wird $A_{s,a}$ von t normalisiert, wenn die Involution t mit a und s vertauschbar ist. Sei d ein Element von A, das nicht mit t vertauschbar ist. Da $\{d, tdt\}$ von t normalisiert wird, folgt aus Lemma 4.12 und Lemma 4.2, daß d und tdt in $\{d, tdt\}$ konjugiert sind. Insbesondere folgt

aus (e), daß $d^{-1}tdt$ ein p'-Element ist. Da tdt in $A_{s,a}$ enthalten ist, folgt aus Lemma 4.13, daß $\{a, d, tdt\}$ eine echte Untergruppe von G ist. Da $\{a, d\} \cap D$ wegen Lemma 4.8 in genau einem Element M von $\mathfrak{M}$ enthalten ist, folgt

$$\{a, d, tdt\} \cap D \subseteq M .$$

Da M wegen Lemma 4.8 eindeutig bestimmt ist, folgt aus Lemma 4.4, daß $A_{s,a} \cap M$ von t normalisiert wird. Nun folgt (++) aus der Maximalität von A.

Seien A, B, C paarweise verschiedene Elemente von $\mathfrak{A}_{s,a}$. Wegen Lemma 4.14 gibt es eine Involution t in G, die mit s vertauschbar, aber von s verschieden ist. Da D_t von s normalisiert wird, können wir wegen Lemma 4.12 und Lemma 4.2 annehmen, daß a von t normalisiert wird. Wegen (++) werden dann A, B, C von t normalisiert. Wir nehmen zunächst an, daß zwei der Elemente A, B, C in einem Element M von $\mathfrak{M}$ enthalten sind. Dann wird M wegen Lemma 4.8 von s normalisiert. Aus Lemma 4.4 folgt dann ein Widerspruch zur Maximalität der Elemente von $\mathfrak{A}_{s,a}$. Verschiedene Elemente von $\mathfrak{A}_{s,a}$ können also nicht in einem Element von $\mathfrak{M}$ enthalten sein. Da nun die Elemente A, B, C jeweils in genau einem Element von $\mathfrak{M}$ enthalten sind, kann wegen Lemma 4.8 höchstens eine der Mengen A, B, C mit D_t mehr als ein Element gemeinsam haben. Wir können also

$$B_t = a = C_t$$

annehmen. Weiter folgt aus dem bereits gezeigten Teil von Lemma 4.15 (+), daß s und t genau das Element $\{a\}$ von $\mathfrak{D}(\{B\})$ und von $\mathfrak{D}(\{C\})$ normalisieren. Da $\{B\}$ und $\{C\}$ wegen Lemma 4.5 Frobeniusgruppen sind, werden alle Elemente von $\{B\}'$ und $\{C\}'$ von s und t invertiert, also von st zentralisiert. Wegen Lemma 4.6 ist aber st nicht in $Z(G)$ enthalten. Daher enthält $\mathfrak{A}_{s,a}$ höchstens zwei verschiedene Elemente.

Sei nun A ein Element von $\mathfrak{A}_{s,a}$, so daß $\{A\} \cap D$ kein Element von $\mathfrak{M}$ ist. Wegen der ersten Aussage von Lemma 4.15 und Lemma 4.8 ist A in genau einem Element M von $\mathfrak{M}$ enthalten. Da M von s normalisiert wird, folgt aus der Maximalität von A und M zusammen mit

$$\{A\} \cap D \subset M ,$$

daß $\{M \cap D_s\}$ nicht zyklisch ist. Insbesondere folgt aus Lemma 4.8, daß M das Element von $\mathfrak{M}$ ist, das D_s enthält. Nun folgt aus $M \neq D$ und $A \neq A_{s,a}$ die letzte Behauptung von Lemma 4.15.

Es ist noch zu zeigen, daß für alle M aus $\mathfrak{M}$, die von s normalisiert werden, $\{M\}'$ abelsch ist; dann folgt (+), und der Beweis von Lemma 4.15 ist vollständig. Wegen Lemma 4.5 können wir annehmen, daß D_s in M enthalten ist. Dann können wir weiter annehmen, daß D_t für alle Involutionen t, die mit s vertauschbar sind, in M enthalten ist. Wegen Lemma 4.14 und dem bereits gezeigten Teil von Lemma 4.15 enthält dann D_{st} ein Element von $\mathfrak{M}$, das von M verschieden ist. Damit ist der Beweis von Lemma 4.15 vollständig.

Lemma 4.16. *Ist s eine Involution aus G, so ist $\{D_s\}$ nicht zyklisch. Ist E eine maximale elementar abelsche 2-Untergruppe von G, so hat E die Ordnung* 4.

Bemerkung 4.17. J. G. THOMPSON hat in [10] die Vermutung ausgesprochen, daß eine Untergruppe U ungerader Ordnung einer einfachen endlichen Gruppe W, die von einer 2-Sylow-Gruppe von G normalisiert wird, stets abelsch ist. Ist z eine zentrale Involution einer 2-Sylow-Gruppe von G, so erfüllt $U = \{D_s\}$ wegen Lemma 4.6 und Lemma 4.16 die Voraussetzungen dieser Vermutung.

Beweis von Lemma 4.16. Sei d ein Element von D mit

$$\{d\} = \{D_s\} .$$

Dann folgt aus Lemma 4.15, daß $\mathfrak{A}_{s,d}$ genau zwei Elemente enthält, da G wegen Lemma 4.6 nicht auflösbar ist. Dann gibt es wegen Lemma 4.4 in $\mathfrak{M}$ genau zwei Elemente M und N, die d enthalten. Sei m ein Element von M und n ein Element von N, so daß n nicht in M und m nicht in N enthalten ist. Dann ist $n^{-1}mn$ wegen Lemma 4.2 nicht in M enthalten. Aus Lemma 4.4 folgt dann, daß $n^{-1}mn$ in N enthalten ist. Wegen Lemma 4.2 ist aber $n^{-1}mn$ genau dann in N enthalten, wenn m in N enthalten ist. Dieser Widerspruch beweist, daß $\{D_s\}$ nicht zyklisch ist.

Seien r, s und t Involutionen aus G, die eine elementar abelsche Untergruppe E der Ordnung 8 erzeugen. Dann folgt aus Lemma 4.11, daß r, s und t ein gemeinsames Fixelement a in D haben. Wegen Lemma 4.15 gibt es höchstens zwei Elemente A und B von $\mathfrak{A}_{s,a}$, und A und B werden von E normalisiert. Wegen Lemma 4.8 und Lemma 4.15 gibt es drei eindeutig bestimmte Elemente L, M, N von $\mathfrak{M}$ mit

$$D_s \subseteq L, \quad A \subseteq M, \quad B \subseteq N .$$

Sei $D_s \neq L$. Dann können wir wegen Lemma 4.15 und Lemma 4.4 annehmen, daß $L = M$ ist. Da es in E genau 7 Involutionen gibt, folgt aus Lemma 4.15 und Lemma 4.8, daß es unter den Mengen M und N eine Menge W gibt, so daß D_d für 4 verschiedene Involutionen d aus E in W enthalten ist. Seien x und y verschiedene Involutionen aus E mit

$$D_x \subseteq W \supseteq D_y .$$

Sei weiter W' die von W verschiedene der Mengen M, N. Da W' wegen Lemma 4.15 von den Involutionen aus E normalisiert wird, wird $\{W'\}$ wegen Lemma 4.11 und Lemma 4.5 von xy zentralisiert. Es gibt also mindestens drei verschiedene Involutionen u, v, w in E mit

$$W' = D_z \quad \text{für} \quad z = u, v, w .$$

Da W von u und v normalisiert wird, folgt aus

$$W \cap W' = \{a\} \cap D ,$$

daß W und W' von uv zentralisiert wird. Dann ist uv in $Z(G)$ enthalten, was wegen Lemma 4.6 nicht möglich ist.

Daher ist $D_s = L$. Da s eine beliebige Involution aus E war, ist D_x für alle Involutionen x aus E ein Element von $\mathfrak{M}$. Wegen Lemma 4.8 folgt weiter für Involutionen x und y aus E

$$D_x = D_y \quad \text{oder} \quad D_x \cap D_y = \{a\} \cap D .$$

Da D_x für eine Involution x aus E von E normalisiert wird und E die Ordnung 8 hat, gibt es verschiedene Involutionen x und y in E mit

$$D_x = D_y \in \mathfrak{M} .$$

Aus Lemma 4.8 folgt nun

$$D_x = D_y = D_{xy} ,$$

was Lemma 4.15 widerspricht, da die Elemente von $\mathfrak{A}_{x,a}$ keine zyklischen Untergruppen von G erzeugen.

Lemma 4.18. *G enthält genau eine Klasse konjugierter Involutionen. Sind i und j vertauschbare Involutionen aus G mit $D_i = D_j$, so ist $i = j$; ferner ist D_i in $\mathfrak{M}$ enthalten.*

Beweis. Sei J die Menge der Involutionen j aus G, so daß D_j in $\mathfrak{M}$ enthalten ist.

(1) *J ist nicht leer.*

Beweis. Wir nehmen an, daß D_s für alle Involutionen s aus G nicht in $\mathfrak{M}$ enthalten ist. Wegen Lemma 4.14 gibt es verschiedene Involutionen s und r in G, die vertauschbar sind. Wegen Lemma 4.11 gibt es ein a in D, das mit r und s vertauschbar ist. Wegen Lemma 4.15 gibt es ein A in $\mathfrak{A}_{s,a}$ mit

$$\{A\} \cap D = M \in \mathfrak{M} .$$

Weiter folgt aus Lemma 4.15, daß M von r und s normalisiert wird. Wäre D_r (oder D_{sr}) nicht in M enthalten, so wäre

$$M = D_{rs} \quad (\text{oder } M = D_{(rs)s} = D_r) .$$

Also sind D_r und D_{rs} in M enthalten. Wegen Lemma 4.15 gibt es ein B in $\mathfrak{A}_{r,a}$ mit

$$N = \{B\} \cap D \in \mathfrak{M} .$$

Da D_r in M enthalten ist, folgt $M \neq N$. Aus Lemma 4.8 folgt

$$N \cap M = \{a\} \cap D .$$

Da D_{rs} auch in M enthalten ist, folgt aus Lemma 4.15

$$D_{rsr} = D_s \geq N ,$$

was nicht möglich ist. Damit ist (1) bewiesen.

(2) *Seien s und t vertauschbare Involutionen aus J. Ist st in J enthalten, so sind s und t in G konjugiert. Sind i und j vertauschbare Involutionen aus J mit $D_i = D_j$, so ist $i = j$.*

Beweis. Da st ein Element von $\mathfrak{M}$ zentralisiert, ist $st \neq 1$. Sind x und y verschiedene Involutionen aus $\{s, t\}$,so folgt aus Lemma 4.15, daß

$$D_x \cap D_y = \{d\} \cap D \qquad \text{für ein } d \text{ aus } D$$

ist. Sei D eine Klasse konjugierter Elemente von G und

$$u = |\{d\} \cap D|, a = u^{-1}|D_s|, b = u^{-1}|D_t|, c = u^{-1}|D_{st}| .$$

Dann folgt aus Lemma 4.4 und Lemma 4.15

$$|D| = ua(b + c - 1) = ub(a + c - 1) = uc(a + b - 1) ,$$

was $a = b = c$ nach sich zieht. Sei r ein Primteiler von a. Wegen Lemma 4.7 (h) ist r kein Teiler von u. Nun folgt mit dem Frattini-Schluß und Lemma 4.8, daß D_s von einer r-Sylow-Gruppe R und R von einem Element von D_s normalisiert wird. Aus Lemma 4.9 folgt dann, daß D_s, D_t und D_{st} in G konjugiert sind. Es gibt also in t^G eine Involution w mit $D_w = D_s$. Sei W die Menge der Involutionen x aus G mit

$$D_x = D_s .$$

Dann folgt aus Lemma 4.15, daß verschiedene Involutionen von W nicht vertauschbar sind, also auch keine 2-Gruppe erzeugen. Insbesondere folgt

$$W = s^{\{W\}} .$$

(3) *J ist eine Klasse konjugierter Involutionen von G.*

Beweis. Seien i und j Involutionen aus J, so daß i und j in G nicht konjugiert sind. Wegen Lemma 4.2 können wir annehmen, daß D_i und D_j ein Element a von D gemeinsam haben. Sind D_i und D_j in G konjugiert, so können wir sogar $D_i = D_j$ annehmen; dann folgt aus (2), daß i und j in $N_G(D_i)$ konjugiert sind, da sie zu der zentralen Involution von $\{i, j\}$ konjugiert sind. Daher folgt aus Lemma 4.8

$$D_i \cap D_j = \{a\} \cap D .$$

Da i und j in G nicht konjugiert sind, gibt es in $Z(\{i, j\})$ eine zentrale Involution z, die von i und j verschieden ist.

Sei D_z kein Element von $\mathfrak{M}$. Wegen Lemma 4.8 und Lemma 4.16 gibt es genau ein Element M von $\mathfrak{M}$, das D_z enthält. Dann wird M von i und j normalisiert. Da a in M enthalten ist, folgt aus

$$D_i \neq M \neq D_j ,$$

daß M von ij — und damit von z — zentralisiert wird. Wir können also annehmen, daß D_z in $D_i = M$ enthalten ist. Da M von j normalisiert wird und a in D_j enthalten ist, folgt aus Lemma 4.5, daß j alle Elemente von $\{M\}'$ invertiert. Da z in $\{ij\}$ enthalten ist und $\{M\}'$ von $(ij)^2$ zentralisiert wird, folgt aus $D_z \neq M$, daß z alle Elemente von $\{M\}'$ invertiert. Dann ist

$$D_z \cap M = \{a\} \cap D .$$

Aus diesem Widerspruch zu Lemma 4.16 folgt, daß D_z in $\mathfrak{M}$ enthalten ist. Aus Lemma 4.8 und (2) folgt dann

$$D_z \cap D_i = \{a\} \cap D = D_z \cap D_j .$$

Da i und j in G nicht beide zu z konjugiert sein können, können wir annehmen, daß i und z in G nicht konjugiert sind. Dann folgt aus dem bereits gezeigten Teil von (3), daß D_{iz} in $\mathfrak{M}$ enthalten ist. Aus (2) folgt dann

$$i^G = (iz)^G = z^G ,$$

was nicht möglich ist. Damit ist (3) bewiesen.

Es ist noch zu zeigen, daß alle Involutionen von G in J enthalten sind. Sei s eine Involution aus G, die nicht in J enthalten ist. Wegen (1) gibt es eine Involution i in J. Sei a ein Element von D_i.

(4) $D \cap \{A_{i,a}\}$ *ist ein Element von* $\mathfrak{M}$.

Beweis. Wegen Lemma 4.15 gibt es in $\mathfrak{A}_{i,a}$ höchstens zwei Elemente A und B, und wir können

$$N = \{A\} \cap D \in \mathfrak{M}$$

annehmen. Ist (4) falsch, so ist $B \neq A$. Wegen Lemma 4.8 ist B in genau einem Element M von $\mathfrak{M}$ enthalten. Wegen Lemma 4.15 wird dann M von i normalisiert. Wegen

$$M \cap D_i = \{a\} \cap D$$

ist dann

$$\{B\} \cap D = M .$$

Da J wegen (3) eine Klasse konjugierter Elemente von G ist, gibt es eine Involution s', die nicht in J enthalten ist und mit einem Element von J vertauschbar ist. Zum Beweis von (4) können wir also annehmen, daß i und s vertauschbar sind und a in D_s enthalten ist. Wegen Lemma 4.15 werden dann A und B von s normalisiert. Da auch D_i von s normalisiert wird, ist D_s in N oder in M enthalten. Sei D_s in N enthalten. Dann folgt $D_{si} = M$. Da A von is und i normalisiert wird, folgt aus

$$A \cap D_i = a = A \cap D_{is} ,$$

daß A in $D_{isi} = D_s$ enthalten ist. Dieser Widerspruch beweist (4).

(5) *Verschiedene Elemente von* J *sind nicht vertauschbar.*

Beweis. Sei j eine Involution aus J, die von i verschieden, aber mit i vertauschbar ist. Dann folgt aus (2) und Lemma 4.8

$$D_i \cap D_j = \{x\} \cap D \qquad x \in D_i .$$

Wegen (4) und Lemma 4.15 ist dann

$$D_j = \{A_{i,x}\} \cap D .$$

Aus der Definition von $\mathfrak{A}_{i,x}$ folgt dann $D_{ij} = \{x\} \cap D$, was wegen Lemma 4.16 nicht möglich ist. Damit ist (5) gezeigt.

Wir können zum Beweis von Lemma 4.18 annehmen, daß s mit i und a vertauschbar ist. Wegen (5) sind D_s und D_{si} nicht in D_i enthalten. Dann folgt aus (4), daß D_s und D_{si} in

$$M = D \cap \{A_{i,a}\}$$

enthalten sind. Sei

$$u = |\{a\} \cap D|, \; |M| = um, \; |D_i| = uw, \; |D_s| = ux, \; |D_{is}| = uy .$$

Dann folgt aus Lemma 4.4

$$m = xy \quad \text{und} \quad |D| = uwxy = ux(w + y - 1) ,$$

woraus

$$wx(y - 1) = x(y - 1)$$

folgt. Dann ist $\{D_i\}$ oder $\{D_{is}\}$ im Widerspruch zu Lemma 4.16 zyklisch. Damit ist Lemma 4.18 bewiesen.

Lemma 4.19. *Ist* S *eine 2-Sylow-Gruppe von* G, *so enthält* S *genau drei Involutionen, und alle Involutionen von* S *sind in* $Z(S)$ *enthalten.*

Beweis. Wir nehmen an, daß es nicht vertauschbare Involutionen s und t in G gibt, die eine Diedergruppe der Ordnung 8 erzeugen. Dann ist $\{s, tst\}$ eine elementar abelsche Gruppe der Ordnung 4. Aus Lemma 4.18 folgt

$$D_s \cap D_{tst} = \{a\} \cap D\,, \qquad a \in D\,.$$

Weiter folgt aus Lemma 4.18, daß D_{stst} ein Element von $\mathfrak{M}$ ist. Wegen Lemma 4.15 enthält $\mathfrak{A}_{stst,a}$ höchstens zwei Elemente A und B, und es gilt

$$D_s = \{A\} \cap D \quad \text{und} \quad D_{tst} = \{B\} \cap D \neq D_s\,.$$

Weiter ist $a^{\{D_t\}}$ ein Element von $\mathfrak{A}_{stst,a}$, d. h.

$$D_t = D_s \quad \text{oder} \quad D_t = D_{tst}\,.$$

Es folgt

$$t(D_s)t = D_{tst} = D_s\,.$$

Dieser Widerspruch beweist, daß eine 2-Sylow-Gruppe S von G genau drei Involutionen enthält.

Wir nehmen nun an, daß die Involution t aus S nicht in $Z(S)$ enthalten ist. Dann enthält S genau eine zentrale Involution z. Sei $E = \{z, t.\}$ Da die Involutionen von G eine Klasse konjugierter Elemente von G bilden, folgt

$$(') \qquad N_G(E)/C_G(E) \simeq \mathfrak{S}_3\,.$$

Sei W die Untergruppe von $N_G(E)$ mit

$$[N_G(E) : W] = 3 \quad \text{und} \quad C_G(E) \subseteq W\,.$$

Dann ist $R = C_S(t)$ eine 2-Sylow-Gruppe von W. In W sind alle Involutionen konjugiert. Nach [11, S. 169] gibt es ein w in W mit

$$t^w = z \quad \text{und} \quad R^w = R\,.$$

Wir können also annehmen, daß w ein 3-Element ist, das die drei Involutionen aus R zyklisch vertauscht. Sei $V = \{S, w\}$. Dann ist R ein Normalteiler von V. Es folgt

$$N_V(\{w\}) \neq \{w\} \quad \text{und} \quad N_R(\{w\}) = 1\,.$$

Daher enthält S eine Involution, die nicht in R enthalten ist. Aus diesem Widerspruch zu dem ersten Teil von Lemma 4.19 folgt Lemma 4.19.

Lemma 4.20. *Ist a ein Element von D, so ist in $C_G(a)$ eine 2-Sylow-Gruppe von G enthalten.*

Beweis. In $C_G(a)$ ist eine Involution s enthalten. Aus Lemma 4.15 und Lemma 4.18 folgt mit Lemma 4.4

$$|\{a\} \cap D|\,|D| = |D_s|\,(2|D_s| - 1)\,.$$

Insbesondere ist $|\mathfrak{D}(G)|$ ungerade. Daher enthält $N_G(\{a\})$ eine 2-Sylow-Gruppe S von G. Da alle Involutionen von G in G konjugiert sind, sind alle Involutionen von $N_G(\{a\})$ in $N_G(\{a\})$ konjugiert. Wegen Lemma 4.19 und [11, S. 169] gibt es ein Element w in $N_G(\{a\}) \cap N_G(S)$, das eine Involution aus S nicht zentralisiert. Wegen Lemma 4.19 können wir annehmen, daß w ein 3-Element ist, das die Involutionen von S zyklisch vertauscht. Da w dann fixpunktfrei auf S

operiert, wird $S\{w\}$ von w^S erzeugt. Da die Automorphismengruppe von $\{a\}$ zyklisch ist, wird also a von S zentralisiert.

Wir können nun Satz II beweisen. Sei s eine Involution aus G und a ein Element von D_s. Dann sind a und a^{-1} wegen Lemma 4.20 in G nicht konjugiert. Seien c und d Elemente von $A_{s,a}$. Ist cd^{-1} ein p-Element, so folgt aus Lemma 4.12, daß cd^{-1} und $c^{-1}d$ in G konjugiert sind; in der Frobeniusgruppe $\{c,d\}$ ist aber $c^{-1}d$ zu $(cd^{-1})^{-1}$ konjugiert, da die Restklassen $(\neq \{c,d\}')$ von $\{c,d\}$ nach $\{c,d\}'$ Klassen konjugierter Elemente von $\{c,d\}$ sind. Daher ist cd^{-1} stets ein p'-Element. Dann folgt aus Lemma 4.13, daß $A_{s,a}$ eine echte Untergruppe von G erzeugt. Ist z eine von s verschiedene Involution aus G, die mit s und a vertauschbar ist, so folgt

$$\{A_{s,a}\} = \{D_{zs}\} = \{D_z\}\,.$$

Dieser Widerspruch beweist Satz II.

5. Beweis von Satz III und Satz IV

Sei G eine Gruppe, die zweifach transitiv auf einer Klasse konjugierter Elemente D operiert. Seien a und b verschiedene Elemente von D. Dann hat $F = \{a,b\}$ wegen der Voraussetzung von Satz III ein triviales Zentrum. Da A zweifach transitiv auf D operiert, ist D ein F-System von $\{D\}$. Dann folgt aus (1.B), daß F eine Frobeniusgruppe ist. Sind die Elemente von D Involutionen, so ist F' eine zyklische q-Gruppe für eine ungerade Primzahl q. Dann folgt aus [5, Satz], daß $\{D\}'$ eine q-Gruppe ist. Sind die Elemente von D keine Involutionen, so folgt aus Satz I, daß $\{D\}$ eine Frobeniusgruppe mit dem Kern $\{D\}'$ ist. Dann ist $\{D\}$ nach J. G. Thompson auflösbar. Damit ist Satz III bewiesen.

Sei nun G eine Gruppe minimaler Ordnung, für die Satz IV falsch ist. Sei $\mathfrak{F}$ die Familie der Frobeniusgruppen mit zyklischem Kern. Dann ist D ein $\mathfrak{F}$-System von G. Sei d ein Element von D und n eine natürliche Zahl, so daß d^n ein Element von Primzahlordnung p ist. Sei $E = (d^n)^G$. Sind x und y verschiedene Elemente von E, so gibt es Elemente a und b von D mit $x \in \{a\}$ und $y \in \{b\}$. Natürlich ist E ein normaler Komplex von $\{E\}$. Zum Beweis der Voraussetzungen (b) und (c) von Satz II können wir annehmen, daß $x = a^n$ und $y = b^n$ ist. Aus den Isomorphiesätzen folgt:

$$\{x,y\}\,Z(\{a,b\})/Z(\{a,b\}) \simeq \{x,y\}/\{x,y\} \cap Z(\{a,b\})\,.$$

Da $Z(\{a,b\}) \cap \{x,y\}$ in $Z(\{x,y\})$ enthalten ist, ist also $\{x,y\}/Z(\{x,y\})$ epimorphes Bild einer Frobeniusgruppe mit zyklischem Kern. Daher ist $\{x,y\}/Z(\{x,y\})$ eine Frobeniusgruppe mit zyklischem Kern oder $\{x,y\}$ ist nilpotent. Da a und b wegen (1.C) und (1.A) in $\{a,b\}$ konjugiert sind, folgt aus $x = a^n$ und $y = b^n$, daß x und y in $\{a,b\}$ konjugiert sind. Nun folgt aus

$$|x^{\{a,b\}}| = |(\{a,b\}/Z(\{a,b\}))'|\,,$$

daß $\{x\} = \{y\}$ ist. Daher folgt aus Satz II, daß $\{E\}$ ein auflösbarer Normalteiler von G ist. Nun folgt Satz IV aus (1.C) und der Minimalität von G.

Bemerkung 5.1. Ist G eine Gruppe, die von einer Klasse D konjugierter Involutionen erzeugt wird, so daß verschiedene Elemente von D nicht vertauschbar sind, so ist G' nach G. GLAUBERMAN eine Gruppe ungerader Ordnung, also nach W. FEIT und J. G. THOMPSON auflösbar. Daher kann man in dem angegebenen Beweis von Satz IV auf die Voraussetzung verzichten, daß die Elemente von D ungerade Ordnung haben.

Literatur

[1] BAER, R.: Partitionen endlicher Gruppen. Math. Z. **75**, 333—372 (1961).
[2] BRAUER, R., and M. SUZUKI: On finite groups whose 2-Sylow group is a quaternion group. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. **45**, 1757—1759 (1959).
[3] BURNSIDE, W.: Theory of groups of finite order. 2nd ed. Cambridge 1911.
[4] FEIT, W., and J. G. THOMPSON: Solvability of groups of odd order. Pacific J. Math. **13**, 775—1029 (1963).
[5] FISCHER, B.: Distributive Quasigruppen endlicher Ordnung. Math. Z. **83**, 267—303 (1964).
[6] — $\mathfrak{F}$-Gruppen endlicher Ordnung. Arch. Math. **16**, 330—336 (1965).
[7] — Finite groups admitting a fixed point-free automorphism of order 2 p. Erscheint in J. Algebra.
[8] STEIN, S. K.: Left-distributive quasigroups. Proc. Am. Math. Soc. **10**, 577—578 (1959).
[9] THOMPSON, J. G.: Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. **45**, 578—581 (1959).
[10] — 2-signalizers of finite groups. Pacific J. Math. **14**, 363—364 (1964).
[11] ZASSENHAUS, H.: The theory of groups. 2nd. New York 1949.

(Eingegangen am 2. Juni 1965)

MICHLER, G.
Math. Annalen 163, 299—304 (1966)

Der Satz von Artin-Wedderburn und der Satz von Goldie

Herrn GOTTFRIED KÖTHE zum 60. Geburtstag am 25. 12. 1965 gewidmet

Von

GERHARD MICHLER in Frankfurt a. M.

1. Einleitung

Ein Ring R besitzt dann und nur dann einen (klassischen) Rechtsquotientenring $Q(R)$, der ein halbeinfacher Ring mit Minimalbedingung ist, wenn R folgende Bedingungen erfüllt:

1) 0 ist das einzige nilpotente Ideal von R,

2) in R existiert keine unendliche Menge unabhängiger Rechtsideale,

3) die Maximalbedingung für Rechtsannihilatorideale ist erfüllt (Satz von GOLDIE, vgl. [3]).

Der Satz von ARTIN-WEDDERBURN charakterisiert die halbeinfachen Ringe mit Minimalbedingung genau als diejenigen Ringe, die direkte Summe von endlich vielen vollen Matrixringen über [nicht notwendig kommutativen] Körpern sind. Also gilt

Folgerung 1. *Ein Ring R hat dann und nur dann einen (klassischen) Rechtsquotientenring $Q(R)$, der eine direkte Summe von endlich vielen vollen Matrixringen über Körpern ist, wenn R halbprim ist und die Maximalbedingung für Rechtsannihilatorideale erfüllt, und es in R keine unendliche Menge unabhängiger Rechtsideale gibt.*

Ist R sogar ein halbeinfacher Ring mit Minimalbedingung, dann erfüllt R erst recht die Voraussetzungen von Folgerung 1. Wegen der Minimalbedingung ist jedes reguläre Element eine Einheit, weshalb der Quotientenring $Q(R)$ mit R zusammenfällt, so daß also der Satz von ARTIN-WEDDERBURN eine Folge von Folgerung 1 ist. Aus ihm und Folgerung 1 folgt dann wieder der Satz von GOLDIE. Ziel dieser Arbeit ist es, einen Beweis für Folgerung 1 zu geben, der unabhängig vom Satz von GOLDIE und unabhängig vom Satz von ARTIN-WEDDERBURN ist.

2. Bezeichnungen und Definitionen

Alle hier betrachteten Ringe R sind assoziativ. Die Existenz einer Eins in R wird *nicht* angenommen. Körper = Ring, dessen multiplikative Halbgruppe eine [nicht notwendig kommutative] Gruppe ist. Z = Ring der ganzen rationalen Zahlen.

Ist R ein Ring mit oder ohne Eins, dann ist R_1 die Menge aller geordneten Paare (r, g) mit $r \in R$ und $g \in Z$, wobei auf R_1 die Addition komponentenweise

und die Multiplikation durch

$$(a, n)\,(b, m) = (ab + nb + ma, nm)$$

erklärt ist.

Die Abbildung $a \to (a, 0)$ ist ein Monomorphismus von R in R_1. E = injektive Hülle des R_1-Rechtsmoduls R_R. $\hat{R} = \mathrm{Hom}_{R_1}(E, E)$. Ist $\mu \in \hat{R}$, dann ist μ/R die Beschränkung von μ auf R.

Ein R-Rechtsuntermodul K eines R-Rechtsmoduls M heißt *groß*, wenn $K \cap V \neq 0$ für jeden R-Untermodul $V \neq 0$ von M gilt. Analog definiert man ein großes Rechtsideal.

Ist X eine Teilmenge des Ringes S, dann ist $X_r(S) = \langle x \in S \mid Xx = 0\rangle$. Analog bildet man $X_l(S)$.

Ist R ein Ring, dann heißt

$$Z(R) = \langle x \in R \mid x_r(R) \text{ großes Rechtsideal von } R\rangle$$

das singuläre Ideal von R,

$$Z_1(R) = \langle x \in R \mid x_r(R_1) \text{ großes Rechtsideal von } R_1\rangle$$

der singuläre R_1-Rechtsmodul von R.

Es ist einfach zu zeigen, daß $Z(R)$ und $Z_1(R)$ zweiseitige Ideale von R sind (vgl. z. B. GOLDIE [3], S. 204).

Bezüglich der Terminologie verweisen wir auf JACOBSON [4], GOLDIE [3] und CURTIS and REINER [1].

3. Der Quotientenring eines halbprimen Ringes

Hilfssatz 1. *Für jeden Ring R gilt $Z_1(R) \leqq Z(R)$.*

Beweis. Ist $x \in Z_1(R)$, dann ist $x_r(R_1)$ ein großes Rechtsideal von R_1. Nun ist $x_r(R) = R \cap x_r(R_1)$, weshalb $x_r(R)$ ein großes Rechtsideal von R ist, da jedes Rechtsideal von R auch ein Rechtsideal von R_1 ist. Also ist $x \in Z(R)$.

Hilfssatz 2. *Die folgenden Eigenschaften eines Ringes R sind äquivalent:*

(1) $Z(R) = 0$,

(2) $Z_1(R) = 0 = R_l(R)$,

(3) a) *Das Jacobson-Radikal $J(\hat{R})$ des Ringes $\hat{R} = \mathrm{Hom}_{R_1}(E, E)$ ist null.*
b) $R_l(R) = 0$.

Beweis. Wegen $R_l(R) \leqq Z(R)$ ist (2) eine Folge von (1) nach Hilfssatz 1. Es gelte (2). Sei $Z_1(E) = \langle v \in E, \mid v_r(R_1)$ großes Rechtsideal von $R_1\rangle$. Dann ist $Z_1(E)$ ein R_1-Rechtsuntermodul von E, und es gilt $Z_1(R) = R \cap Z_1(E)$. Da R ein großer R_1-Untermodul von E ist, ist $Z_1(E) = 0$. Nach FAITH und UTUMI ([2], S. 170, Theorem 3.1) ist $J(\hat{R}) = \langle \beta \in \hat{R} \mid \mathrm{Kern}(\beta)$ großer R_1-Untermodul von $E\rangle$. Wäre $J(\hat{R}) \neq 0$, dann existierte ein $\beta \neq 0$ in $J(\hat{R})$ und ein $x \in E$ mit $\beta x \neq 0$. Wäre $(\beta x)_r(R_1)$ kein großes Rechtsideal von R_1, dann existierte ein Rechtsideal $V \neq 0$ von R_1 mit $(\beta x)_r(R_1) \cap V = 0$. Dann ist $xv \neq 0$ für alle $v \in V$. Da $\mathrm{Kern}(\beta)$ ein großer R_1-Untermodul von E ist, gilt $xvR_1 \cap \mathrm{Kern}\beta \neq 0$. Also existiert ein $w \in R_1$ mit $\beta xvw = 0$ und $xvw \neq 0$. Hieraus folgt $0 \neq vw \in V \cap (\beta x)_r(R_1) = 0$. Aus diesem Widerspruch folgt $0 \neq \beta x \in Z_1(E) = 0$, und aus diesem $J(\hat{R}) = 0$.

Es gelte (3). Wäre $0 \neq z \in Z(R)$. Sei

$$\mu : a \to za \quad \text{für alle} \quad a \in R ,$$

dann ist μ ein R_1-Endomorphismus von $R \leqq E$. Da E injektiv ist, läßt μ sich zu einem R_1-Endomorphismus β von E so erweitern, daß $\mu = \beta/R$. Hieraus folgt $Kern(\beta) \cap R = z_r(R)$. Also ist $\text{Kern}\beta \cap R$ ein großes Rechtsideal von R und somit ein großer R_1-Untermodul von R. Da E die injektive Hülle von R ist, ist $\text{Kern}(\beta)$ ein großer Untermodul von E, d. h. $\beta \in J(\hat{R}) = 0$. Hieraus folgt $\mu = 0$, und so $zR = 0$. Wegen $R_l(R) = 0$ folgt $z = 0$. Also folgt (1) aus (3) und Hilfssatz 2 ist bewiesen.

Hilfssatz 3. *Ist R ein Ring mit $Z(R) = 0$, dann ist R isomorph zu einem Unterring R^* von $\hat{R}$, und $\hat{R}$ ist eine maximale wesentliche Erweiterung des R-Rechtsmoduls R^*.*

Beweis. Jedes $e \in E$ induziert einen R_1-Homomorphismus λ_e von R in E, wenn man definiert:

$$\lambda_e : s \to es \quad \text{für alle} \quad s \in R .$$

Da $\lambda_e \in \text{Hom}_{R_1}(R, E)$ und E ein injektiver R_1-Modul ist, läßt λ_e sich zu einem R_1-Endomorphismus $\hat{\lambda}_e$ von E erweitern. Sei μ die Abbildung, die jedem e aus E das Element $\hat{\lambda}_e$ von $\hat{R} = \text{Hom}_{R_1}(E, E)$ zuordnet. Wäre μ nicht eindeutig, dann gäbe es ein $\lambda \neq \hat{\lambda}_e$, $\lambda \in \hat{R}$, mit $\lambda/R = \hat{\lambda}_e/R$. Also wäre $R \leqq \text{Kern}(\hat{\lambda}_e - \lambda)$. Da R ein großer R_1-Untermodul von E ist, ist $(\hat{\lambda}_e - \lambda) \in J(\hat{R})$ nach Faith und Utumi ([2], S. 170, Theorem 3.1). Wegen $Z(R) = 0$ ist dann $J(\hat{R}) = 0$ nach Hilfssatz 2. Analog läßt sich zeigen, daß

$$\mu(e_1 + e_2) = \mu e_1 + \mu e_2$$

für alle $e_i \in E$ gilt.

Wäre μ nicht eineindeutig, dann gäbe es Elemente $u, v \in E$ mit $\hat{\lambda}_u = \hat{\lambda}_v$, aber $u \neq v$. Hieraus folgte,

$$0 \neq u - v \in Z(E) = \langle x \in E \,|\, x_r(R) \text{ großes Rechtsideal von } R \rangle .$$

Da R ein großer R_1-Untermodul von E und $Z(E) \cap R = Z(R)$ ist, folgt hieraus $Z(R) \neq 0$, was $Z(R) = 0$ widerspricht. Also ist μ eineindeutig. Analog wie die Eineindeutigkeit von μ zeigt man, daß μ den Ring R isomorph auf einen Unterring R^* von $\hat{R}$ abbildet.

$\hat{R}$ wird durch folgende Definition ein R_1-Rechtsmodul: Für jedes $\gamma \in \hat{R}$ und $r_1 = (r, g) \in R_1$ sei

$$\gamma r_1 = \gamma \mu(r) + g\gamma .$$

Die Modulgesetze sind erfüllt, da μ ein Ringisomorphismus von R auf R^* ist. Mit Hilfe dieser Definition läßt sich analog wie die Eindeutigkeit von μ zeigen, daß μ ein R_1-Isomorphismus von E auf einen R_1-Untermodul E^* des R_1-Moduls $\hat{R}$ ist. Nach Curtis und Reiner ([1], S. 390, Theorem 57.13) ist E^* die injektive Hülle des R_1-Moduls R^*. Wäre $E^* \neq \hat{R}$, dann existierte ein $\gamma \neq 0$ in $\hat{R}$ mit $E^* \cap \gamma R_1 = 0$. Für jedes $r_1 = (r, g) \in R_1$ gilt $\gamma r_1 = \gamma\mu(r) + g\gamma$. Wäre $\gamma\mu(r) = 0$ für alle $r \in R$, dann wäre $\gamma r = 0$ für alle $r \in R$. Daher wäre $\gamma \in J(\hat{R})$ nach Faith und Utumi ([2], S. 170, Theorem 3.1). Nach Hilfssatz 2 ist $J(\hat{R}) = 0$ wegen $Z(R) = 0$, und so $\gamma = 0$. Widerspruch! Also gibt es ein

Element $r \neq 0$ in R mit $\gamma\mu(r) \neq 0$. Für jedes $s \in R$ gilt nun

$$\gamma\mu(r)s = \gamma\hat{\lambda}_r s = \gamma(rs) = (\gamma r)s = es = \hat{\lambda}_e s\,,$$

wenn $e = \gamma r$ ist. Also ist $(\mu(r) - \hat{\lambda}_e) \in J(\hat{R}) = 0$. Hieraus folgt

$$0 \neq \gamma r = \gamma\mu(r) = \hat{\lambda}_e \in E^* \cap \gamma R_1 = 0\,.$$

Dieser Widerspruch hat $E^* = \hat{R}$ zur Folge. Daher ist $\hat{R}$ die injektive Hülle des R_1-Moduls R^*. Also ist $R^* \cap \gamma R^* \neq 0$ für alle $0 \neq \gamma \in \hat{R}$, d. h. der R-Rechtsmodul $\hat{R}$ ist eine maximale wesentliche Erweiterung des R-Rechtsmoduls R^*. Hiermit ist Hilfssatz 3 bewiesen.

Hilfssatz 4. *Für einen halbprimen Ring R sind äquivalent:*

(1) *R erfüllt die Maximalbedingung für Rechtsannihilatoren der Form $x_r(R)$, wobei $x \in Z_1(R)$ ist.*

(2) $Z_1(R) = 0$.

Beweis. Es gelte (1), aber nicht (2). Sei $0 \neq x \in Z_1(R)$ so gewählt, daß $x_r(R)$ maximal unter den Rechtsannihilatoridealen der Form $y_r(R)$ mit $y \in Z_1(R)$ ist. Wegen der Halbprimität von R existiert ein $v \in R$ mit $xvx \neq 0$. Da $x_r(R_1)$ ein großes Rechtsideal von R_1 ist, und $(xvx)_r(R_1) \geqq x_r(R_1)$ ist, ist $xvx \in Z_1(R)$. Aus $xvxR \neq 0$ folgt $x_r(R) = (xvx)_r(R)$. Daher ist $vxR \neq 0$ ein Rechtsideal von R_1 mit $vxR \cap x_r(R_1) = 0$, was $x \notin Z_1(R)$ zur Folge hat. Also ist (2) eine Folge von (1). Die Umkehrung ist trivial.

Hilfssatz 5. *Ist R ein Ring mit $R_l(R) = 0$ derart, daß in R keine unendliche Menge unabhängiger Rechtsideale existiert, dann ist $\hat{R}/J(\hat{R})$ eine direkte Summe von endlich vielen vollen Matrixringen $M_{m_i}(K_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ über Körpern K_i.*

Beweis. Aus den Voraussetzungen von Hilfssatz 5 folgt nach GOLDIE ([3], S. 202, Theorem 1.1) die Existenz einer natürlichen Zahl n derart, daß jede direkte Summe von Rechtsidealen $V \neq 0$ höchstens n Glieder enthält. Da R ein Ideal von R_1 ist, enthält jede direkte Summe von R_1-Untermoduln $P \neq 0$ des R_1-Rechtsmoduls R ebenfalls höchstens n Glieder. Also erfüllt der unitäre R_1-Modul R die Voraussetzungen von Theorème 2.2 von LESIEUR und CROISOT ([5], S. 374), aus dem die Behauptung von Hilfssatz 5 sofort folgt.

Hilfssatz 6. *Der Ring R sei halbprim und erfülle die Maximalbedingung für Rechtsannihilatoren der Form $x_r(R)$, wobei $x \in Z_1(R)$ ist. Wenn es in R keine unendliche Menge unabhängiger Rechtsideale gibt, dann enthält jedes große Rechtsideal K von R ein reguläres Element.*

Beweis. Nach Hilfssatz 4 gilt $Z_1(R) = 0$. Da R halbprim ist, ist $R_l(R)$ das Nullideal. Also folgt $J(\hat{R}) = 0$ aus Hilfssatz 2. Dann gilt nach Hilfssatz 5

$$\hat{R} = S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus \cdots \oplus S_n\,,$$

wobei die S_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ volle $m_i \times m_i$ Matrixringe über Körpern K_i sind. Daher sind die S_i nach RÉDEI ([6], Satz 255 und Satz 256″, S. 424 und S. 426) einfache Ringe mit Einselement, die die Minimalbedingung für Rechtsideale erfüllen. Aus $R_l(R) = 0$ und $Z_1(R) = 0$ folgt $Z(R) = 0$ nach Hilfssatz 2. Daher ist dann R nach Hilfssatz 3 (bis auf Isomorphie) ein Unterring des Ringes $\hat{R}$, und der R-Rechtsmodul R ist ein großer R-Untermodul des R-Moduls $\hat{R}$. Als Ideal von $\hat{R}$ ist jeder Ring S_i ein R-Rechts- und ein R-Linksmodul. Sei

$R_i = R \cap S_i$. Dann ist $R_i \neq 0$. Wäre R_i kein Primring, dann existierten Ideale $U_i \neq 0 \neq V_i$ des Ringes R_i mit $U_i V_i = 0$. Nun ist $V_i \hat{R} U_i R_i$ ein R-Rechtsuntermodul von $\hat{R}$, weshalb $V_i \hat{R} U_i R_i \cap R$ ein Rechtsideal von R ist. Wegen $U_i R_i \leqq U_i$ ist $(V_i \hat{R} U_i R_i \cap R)^2 = 0$, was $V_i \hat{R} U_i R_i = 0$ impliziert. Also ist $V_i S_i U_i R_i = 0$. Weil S_i ein Einselement besitzt, ist $V_i S_i \neq 0$. Aus der Einfachheit von S_i folgt daher $U_i R_i = 0$. Also ist U_i ein nilpotentes Subideal des halbprimen Ringes R, weil R_i ein zweiseitiges Ideal von R ist. Hieraus folgt $U_i = 0$. Widerspruch! Also ist R_i ein Primring.

Ist K ein großer R-Untermodul von R, dann ist $K_i = K \cap R_i$ ein großer R-Rechtsuntermodul von R_i und somit ein großer R-Untermodul von S_i. Sei $k_i \neq 0$ ein Element von K_i derart, daß $(k_i)_r(S_i)$ minimal unter den Rechtsannihilatoren der Form $(k)_r(S_i)$ mit $0 \neq k \in K$. Wäre $k_i R_i$ ein großer R-Untermodul von R_i, dann wäre $k_i S_i$ ein großes Rechtsideal des Ringes S_i, was $k_i S_i = S_i$ zur Folge hätte. Also wäre k_i wegen $1 \in S_i$ eine Einheit in S_i, was $(k_i)_r(S_i) \neq 0$ widersprechen würde. Hieraus folgt die Existenz eines Elementes $x \neq 0$ von R_i mit $xR \cap k_i R_i = 0$. Sei $A = K_i \cap xR$. Da K_i ein großer R-Untermodul von R_i ist, ist $A \neq 0$. Aus $k_i R_i \cap A = 0$ folgt

$$(k_i + y)_r(R_i) = (k_i)_r(R_i) \cap y_r(R_i)$$

für alle $y \in A$. Aus der Minimalität von $(k_i)_r(S_i)$ ergibt sich, daß $(k_i)_r(R_i) = R_i \cap (k_i)_r(S_i)$ minimal unter den Rechtsannihilatoren der Form $v_r(R_i)$ mit $v \in K_i$ ist. Also ist $(k_i)_r(R_i) \leqq y_r(R_i)$ für alle $y \in A$. Hieraus folgt $A \cdot (k_i)_r(R_i) = 0$. Da $A \neq 0$ ein Rechtsideal von R_i und R_i ein Primring ist, gilt $(k_i)_r(R_i) = 0$. Da R_i ein großer R-Untermodul von S_i ist, folgt hieraus $(k_i)_r(S_i) = 0$. Widerspruch! Also ist k_i rechtsregulär in S_i.

Sei $k = \sum_{i=1} k_i$. Dann ist k ein rechtsreguläres Element von $\hat{R}$, weil $(k_i)_r(S_i) = 0$ und $\hat{R} = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_n$ ist. Nach Rédei ([6], Satz 256″, S. 427) erfüllt $\hat{R}$ die Minimalbedingung für Rechtsideale, weshalb k eine Einheit von $\hat{R}$ ist. Daher ist k ein reguläres Element von R, das in K enthalten ist. Hiermit ist Hilfssatz 6 bewiesen.

Satz 1. *Die folgenden Eigenschaften eines Ringes R sind äquivalent:*

(1)
- a) *R ist halbprim und erfüllt die Maximalbedingung für Rechtsannihilatoren der Form $x_r(R)$ mit $x \in Z_1(R)$.*
- b) *In R existiert keine unendliche Menge unabhängiger Rechtsideale.*

(2) *R hat einen (klassischen) Rechtsquotientenring $Q(R)$, der eine direkte Summe von endlich vielen vollen Matrixringen $M_{m_i}(K_i)$ über Körpern K_i ist.*

(3)
- a) *Das Nullideal ist das einzige Nilrechts- und das einzige Nillinksideal von R.*
- b) *In R existiert keine unendliche Menge unabhängiger Rechtsideale.*
- c) *R erfüllt die Maximalbedingung für Links- und Rechtsannihilatoren.*

Beweis. Es gelte (1). Aus den Hilfssätzen 4, 2, 5 und 3 folgt dann wie im Beweis von Hilfssatz 6, daß R ein Unterring eines Ringes Q ist, der eine direkte Summe von endlich vielen vollen Matrixringen $M_{m_i}(K_i)$ über Körpern K_i ist.

Weiter ist Q ein R-Rechtsmodul und R ein großer R-Untermodul von Q. Daher ist $q^{-1}R = \langle y \in Q \mid qy \in R \rangle$ für jedes $q \in Q$ ein großer R-Untermodul von Q. Hieraus folgt, daß $q^{-1}R \cap R$ ein großes Rechtsideal von R ist. Nach Hilfssatz 6 enthält dann $q^{-1}R \cap R$ ein reguläres Element $c \neq 0$. Also ist $qc = a \in R$. Da Q nach RÉDEI ([6], Satz 256'', S. 427) die Minimalbedingung für Rechtsideale erfüllt, ist c eine Einheit von Q, und es gilt $q = ac^{-1}$. Nach JACOBSON ([4], Definition 1, S. 261) ist dann Q ein (klassischer) Rechtsquotientenring von R. Also folgt (2) aus (1).

Aus der Gültigkeit von (2) ergibt sich sofort, daß jeder Nilunterring von R nilpotent ist, weshalb [(3) a)] bewiesen ist, wenn gezeigt ist, daß R keine nilpotenten Ideale $N \neq 0$ besitzt. Wäre R nicht halbprim, dann existierte ein Ideal $N \neq 0$ mit $N^2 = 0$. Das zweiseitige Ideal $QNQ \neq 0$ des Ringes Q wird von einem zentralen Idempotent $e \neq 0$ erzeugt, und es gilt $e = \sum_{j=1}^{u} x_j q_j$, wobei $q_j \in Q$, $x_j \in QN$ $(j = 1, 2, \ldots, u)$. Jedes q_j hat die Form $q_j = a_j c_j^{-1}$, wobei $a_j \in R$ und c_j regulär in R ist. Nach JACOBSON ([4], Lemma 1, S. 263) existieren zu den regulären Elementen c_j reguläre Elemente c, d_j so, daß $c_j^{-1} = d_j c^{-1}$. Also folgt $ec = ce \in QN$, was $eN = 0$ und so

$$0 \neq N \leqq eQ \cap (1 - e)Q = 0$$

zur Folge hat. Aus diesem Widerspruch folgt [(3) a)].

Wegen (2) erfüllt Q nach RÉDEI ([6], Satz 256''', S. 427) die Minimal- und die Maximalbedingung für Rechtsideale. Wäre $K_1 \dotplus K_2 \dotplus \cdots \dotplus K_n \dotplus \dotplus K_{n+1} \dotplus \cdots$ eine unendliche direkte Summe von Rechtsidealen von R, dann wäre $K_1Q \dotplus K_2Q \dotplus \cdots \dotplus K_nQ + K_{n+1}Q + \cdots$ eine unendliche direkte Summe von Rechtsidealen von Q, da Q ein (klassischer) Rechtsquotientenring von R ist. Das ist aber ein Widerspruch zur Maximalbedingung. Also gilt [(3) b)]. Die Aussage [(3) c)] ist eine unmittelbare Folge der Gültigkeit der Minimal- und Maximalbedingung in Q. Also folgt (3) aus (2).

Da (1) eine Abschwächung von (3) ist, ist hiermit Satz 1 bewiesen.

Bemerkung. Daß Folgerung 1 in Satz 1 enthalten ist, ist evident.

Literatur

[1] CURTIS, C. W., and J. REINER: Representation theory of finite groups and associative algebras. 1st Ed. New York/London: Interscience Publishers 1962.

[2] FAITH, C., and Y. UTUMI: Quasi-injective modules and their endomorphism rings. Arch. Math. **15**, 166—174 (1964).

[3] GOLDIE, A. W.: Semi-prime rings with maximum condition. Proc. Lond. Math. Soc. **10**, 201—220 (1960).

[4] JACOBSON, N.: Structure of rings. 2nd Ed. Am. Math. Soc. Colloqu. Publ. **37** Providence, R. I. 1964.

[5] LESIEUR, L., et R. CROISOT: Coeur d'un module. J. Math. pures appliquées **42**, 367—407 (1963).

[6] RÉDEI, L.: Algebra I. 1st Ed. Leipzig: Geest u. Portig K. G. 1959.

(Eingegangen am 2. Juni 1965)

KULTZE, R.
Math. Annalen 163, 305—311 (1966)

Über die Poincaré-Dualität in der Bordismentheorie

Herrn GOTTFRIED KÖTHE zum 60. Geburtstag am 25. 12. 1965 gewidmet

Von

ROLF KULTZE in Heidelberg

ATIYAH hat in [1] eine Poincaré-Dualität für die orientierten Bordismen- und Cobordismengruppen hergeleitet. In [3], § 2 haben wir diese Poincaré-Dualität auf den komplexen Fall übertragen, d. h. es gilt der Satz: Ist X eine n-dimensionale, geschlossene, schwach fastkomplexe Mannigfaltigkeit, so gibt es einen Isomorphismus

$$\tau : \Gamma^k(X) \to \Gamma_{n-k}(X) ,$$

dabei sei $\Gamma^k(X)$ die k-te komplexe Cobordismengruppe und $\Gamma_{n-k}(X)$ die $(n-k)$-te komplexe Bordismengruppe von X. $\mathbf{MU}$ bezeichne das Thom-Spektrum

$$\mathbf{MU} = \{MU(1), SMU(1), MU(2), \ldots\} ,$$

und Y sei eine n-dimensionale, geschlossene, $\mathbf{MU}$-orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann gibt es nach G. W. WHITEHEAD [4], S. 276 einen Isomorphismus

$$\tau' : \Gamma^k(Y) \to \Gamma_{n-k}(Y) ,$$

der durch ein cap-Produkt gestiftet wird. In der vorliegenden Note zeigen wir nun, daß jede geschlossene, schwach fastkomplexe Mannigfaltigkeit $\mathbf{MU}$-orientierbar ist und daß für schwach fastkomplexe Mannigfaltigkeiten der Whiteheadsche Isomorphismus τ' mit τ übereinstimmt.

Wie im vorliegenden komplexen Fall kann man zeigen, daß auch die Poincaré-Dualität der orientierten Cobordismentheorie durch ein cap-Produkt gestiftet wird. Auf die multiplikative Form dieser Poincaré-Dualität hat zuerst ATIYAH [1] hingewiesen, meines Wissens aber bisher keine Einzelheiten darüber publiziert.

§ 1. Vorbemerkungen

$\mathfrak{W}^2$ bezeichne die Kategorie, deren Objekte die Raumpaare (X, A) vom Homotopietyp eines Paares endlicher CW-Komplexe und deren Morphismen die Homotopieklassen von stetigen Abbildungen sind. Weiter sei $MU(n)$ der Thom-Komplex der unitären Gruppe $U(n)$. $\mathbf{MU}$ bezeichne das Thom-Spektrum

$$\mathbf{MU} = \{A_n ; n \geqq 2\}$$

mit

$$A_n = \begin{cases} MU\left(\frac{n}{2}\right) & n \text{ gerade} \\ SMU\left(\frac{n-1}{2}\right) & n \text{ ungerade} . \end{cases}$$

Die beiden Abbildungen $\eta : S(X \barwedge Y) \to SX \barwedge Y$ und $\mu : S(X \barwedge Y) \to X \barwedge SY$ seien definiert durch

$$\eta(s \barwedge (x \barwedge y)) = (s \barwedge x) \barwedge y ,$$
$$\mu(s \barwedge (x \barwedge y)) = x \barwedge (s \barwedge y) .$$

Wir benutzen η und μ, um Abbildungen

$$\lambda_{k,l} : A_k \barwedge A_l \to A_{k+l}$$

zu konstruieren. Die Abbildungen

$$\lambda_{2p,2q} : MU(p) \barwedge MU(q) \to MU(p+q)$$

werden in üblicher Weise definiert (vgl. z. B. [3], § 3). Weiter sei

$$\lambda_{2p,2q+1} : MU(p) \barwedge SMU(q) \xrightarrow{\mu^{-1}} S(MU(p) \barwedge MU(q)) \xrightarrow{S\lambda_{2p,2q}} SMU(p+q)$$

$$\lambda_{2p+1,2q} : SMU(p) \barwedge MU(q) \xrightarrow{\eta^{-1}} S(MU(p) \barwedge MU(q)) \xrightarrow{S\lambda_{2p,2q}} SMU(p+q) .$$

Bezeichnet

$$\alpha_p : S^2 MU(p) \to MU(p+1)$$

eine durch den Klassifizierungssatz für $U(p+1)$-Bündel gestiftete Abbildung, so sei schließlich

$$\lambda_{2p+1,2q+1} : SMU(p) \barwedge SMU(q) \xrightarrow{\mu \circ \eta^{-1}} MU(p) \barwedge S^2 MU(q) \xrightarrow{1 \barwedge \alpha_q} MU(p) \barwedge$$
$$\barwedge MU(q+1) \xrightarrow{\lambda_{p,q+1}} MU(p+q+1) .$$

G. W. WHITEHEAD hat in [4], S. 254 den Begriff der Paarung von Spektren eingeführt. Wie man leicht zeigt, gilt der

Hilfssatz 1.1. *Die Abbildungen $\lambda_{k,l} : A_k \barwedge A_l \to A_{k+l}$ definieren eine Paarung des Thom-Spektrums* **MU**.

Zu dem Thom-Spektrum **MU** gehört eine verallgemeinerte Cohomologietheorie auf der Kategorie $\mathfrak{W}^2$ mit den Cohomologiegruppen

$$\Gamma^n(X, A) = \lim_r [S^r(X/A), A_{n+r}] .$$

Da $MU(n)$ $(2n-1)$-zusammenhängend ist, gilt für genügend großes r

$$\Gamma^n(X, A) \cong [S^r(X/A), A_{n+r}] .$$

$\mathfrak{S}_k$ bzw. $\tilde{\mathfrak{S}}_k$ sei die Menge der kompakten bzw. geschlossenen schwach fastkomplexen Mannigfaltigkeiten der Dimension k. Sind M_1^k und M_2^k geschlossene differenzierbare Mannigfaltigkeiten und ist $W \in \mathfrak{S}_{k+1}$ mit $\partial W = M_1 \cup M_2$, so induziert W auf M_1 und M_2 jeweils eine schwach fastkomplexe Struktur. Ist X ein topologischer Raum, so bezeichne $B_k(X)$ die Menge der Paare (M, f) mit $M \in \tilde{\mathfrak{S}}_k$ und $f : M \to X$. Zwei Paare (M_1, f_1), $(M_2, f_2) \in B_k(X)$ heißen *bordant*, wenn ein Paar (W, F) existiert mit $W \in \mathfrak{S}_{k+1}$ und $F : W \to X$, so daß gilt:

1) $\partial W = M_1 \cup M_2$.

2) Die schwach fastkomplexe Struktur von W induziert die schwach fastkomplexen Strukturen von M_1 und M_2.

3) $F | M_i = f_i$ $(i = 1, 2)$.

Der Begriff „bordant" ist eine Äquivalenzrelation. $\Gamma_k(X)$ bezeichne die Menge der Äquivalenzklassen von $B_k(X)$, ferner sei $[M, f]$ die Äquivalenzklasse von (M, f). Die Bildung disjunkter Vereinigungen macht $\Gamma_k(X)$ zu einer abelschen Gruppe.

Nach [4], S. 248 gehört zu dem Thom-Spektrum $\mathbf{MU}$ eine verallgemeinerte Homologietheorie mit den absoluten Homologiegruppen $\pi_k(\mathbf{MU} \ast X^+)$ (X endlicher CW-Komplex). Conner und Floyd haben in [2] die folgende Aussage bewiesen:

Hilfssatz 1.2. *Für jeden endlichen CW-Komplex X gilt:*

$$\Gamma_n(X) \cong \pi_n(\mathbf{MU} \ast X^+) .$$

Da wir diesen Isomorphismus öfter benötigen werden, wollen wir ihn kurz beschreiben. Sei $[M, f] \in \Gamma_n(X)$. Nach Voraussetzung kann man M für geeignetes k so in S^{n+2k} einbetten, daß das zugehörige Normalenbündel ν eine komplexe Struktur besitzt. $N(M)$ sei eine zu ν gehörende Tubenumgebung von M in S^{n+2k}, die man als komplexes k-dimensionales Vollkugelbündel über M auffassen kann. Bezeichnet $E(\gamma^k)$ den Bündelraum des universellen komplexen k-dimensionalen Vollkugelbündels über $B_{U(k)}$, so hat man eine Bündelabbildung

$$\psi : N(M) \to E(\gamma^k) ,$$

die die Abbildung

$$S^{n+2k} \to N(M)/\dot{N}(M) \xrightarrow{\psi \times f \circ \pi} E(\gamma^k) \times X/\dot{E}(\gamma^k) \times X = MU(k) \ast X^+$$

stiftet; dabei sei π die Projektion $\pi : N(M) \to M$. Die stabile Homotopieklasse der obigen Abbildung ist dann das Bild von $[M, f]$ bei dem Isomorphismus $\Gamma_n(X) \cong \pi_n(\mathbf{MU} \ast X^+)$.

Von G. W. Whitehead wurde in [4], § 6 u. a. ein cap-Produkt

$$\cap : \pi_n(\mathbf{MU} \ast X^+) \otimes \Gamma^{n-k}(X) \to \pi_k(\mathbf{MU} \ast X^+)$$

und ein Kronecker-Index

$$\langle , \rangle : \pi_n(\mathbf{MU} \ast X^+) \otimes \Gamma^n(X) \to \pi_0(\mathbf{MU}) \cong \mathbf{Z}$$

eingeführt. Diese Paarungen können unter Verwendung repräsentierender Abbildungen wie folgt beschrieben werden. $u \in \pi_n(\mathbf{MU} \ast X^+)$ werde durch $g : S^{n+l} \to A_l \ast X^+$ und $v \in \Gamma^{n-k}(X)$ durch $h : S^r(X^+) \to A_{r+n-k}$ repräsentiert. Dann ist

$$S^{n+l+r} = S^{n+l} \ast S^r \xrightarrow{g \ast 1} A_l \ast X^+ \ast S^r \to A_l \ast S^r \ast X^+ \xrightarrow{1 \ast 1 \ast \Delta} A_l \ast$$

$$\ast S^r \ast X^+ \ast X^+ \xrightarrow{1 \ast h \ast 1} A_l \ast A_{r+n-k} \ast X^+ \xrightarrow{\lambda_{l,r+n-k} \ast 1} A_{l+r+n-k} \ast X^+$$

Repräsentant von $(-1)^{n(n-k+r)} u \cap v$. Wird $v \in \Gamma^n(X)$ durch $h : S^r(X^+) \to A_{r+n}$ repräsentiert, so ist die Abbildung

$$S^{n+l+r} = S^{n+l} \ast S^r \xrightarrow{g \ast 1} A_l \ast X^+ \ast S^r \longrightarrow A_l \ast$$

$$\ast S^r \ast X^+ \xrightarrow{1 \ast h} A_l \ast A_{r+n} \xrightarrow{\lambda_{l,r+n}} A_{n+l+r}$$

Repräsentant von $(-1)^{n(n+r)} \langle u, v \rangle$.

§ 2. MU-orientierbare Mannigfaltigkeiten

Mit $\mathbf{S}$ bezeichnen wir im folgenden das Sphärenspektrum $\mathbf{S} = \{S^n; n \geqq 2\}$. Wir definieren nun eine bis auf Homotopie eindeutig bestimmte Abbildung $\mathbf{g}: \mathbf{S} \to \mathbf{MU}$. Zunächst sei $g_2: S^2 \to MU(1)$ eine Abbildung, die $S^2 - *$ homöomorph und orientierungstreu auf eine Ebene von $B_{U(1)}$ abbildet und $* \in S^2$ in den Basispunkt von $MU(1)$ überführt. $g_3: S^3 \to SMU(1)$ sei die Einhängung von g_2, g_4 wird so erklärt, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^4 & \xrightarrow{id} & S^4 \\ {\scriptstyle S^3 g_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_4} \\ S^2 MU(1) & \xrightarrow{\alpha_1} & MU(2) \end{array}$$

kommutativ ist, usw. $\mathbf{g}$ definiert dann ein Element $i \in \pi_0(\mathbf{MU}) \cong \mathbf{Z}$. Bei dem Isomorphismus $\pi_0(\mathbf{MU}) \cong \mathbf{Z}$ wird i das Einselement von $\mathbf{Z}$ zugeordnet.

X sei nun eine n-dimensionale, geschlossene, zusammenhängende, orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit und $H^n(X, \mathbf{S})$ die abelsche Gruppe

$$H^n(X, \mathbf{S}) = \lim_r [S^r X^+, S^{r+n}] \cong [X^+, S^n] .$$

Ist $V \approx R^n$ offene Teilmenge von X mit $\overline{V} \approx E^n$, so sei $h: X^+ \to S^n$ die bis auf Homotopie eindeutig bestimmte Abbildung

$$h: X^+ \xrightarrow{p} X^+/X^+ - V = S^n \xrightarrow{\bar{h}} S^n$$

mit $\operatorname{grad} \bar{h} = (-1)^n$. h definiert ein erzeugendes Element $z_0' \in H^n(X, \mathbf{S})$; das Bild von z_0' bei dem Homomorphismus

$$H^n(X, \mathbf{g}): H^n(X, \mathbf{S}) \to \Gamma^n(X)$$

nennen wir z'.

Definition 2.1. *Eine n-dimensionale, geschlossene, zusammenhängende, orientierbare, differenzierbare Mannigfaltigkeit X heißt* $\mathbf{MU}$*-orientierbar, wenn ein Element $z \in \Gamma_n(X)$ existiert mit $\langle z, z' \rangle = i$.*

Wir beweisen nun

Satz 2.2. *Jede geschlossene, zusammenhängende, schwach fastkomplexe Mannigfaltigkeit ist* $\mathbf{MU}$*-orientierbar.*

Beweis. X besitze die im Satz genannten Eigenschaften. Wir setzen $z = [X, id_X]$. z ist bei dem Isomorphismus $\Gamma_n(X) \cong \pi_n(\mathbf{MU} \mathbin{\dot{*}} X^+)$ ein Element aus $\pi_n(\mathbf{MU} \mathbin{\dot{*}} X^+)$ zugeordnet, das nach § 1 durch die Abbildung

$$S^{n+2k} \to N(X)/\dot{N}(X) \xrightarrow{\psi \times \pi} E(\gamma^k) \times X/\dot{E}(\gamma^k) \times X = MU(k) \mathbin{\dot{*}} X^+$$

repräsentiert wird.

Wir untersuchen nun den Kroneckerindex $\langle z, z' \rangle \in \pi_0(\mathbf{MU})$. Nach § 1 wird $(-1)^n \langle z, z' \rangle$ durch die Abbildung

$$S^{n+2k} \longrightarrow N(X)/\dot{N}(X) \xrightarrow{\psi \times \pi} MU(k) \mathbin{\dot{*}} X^+ \xrightarrow{1 \mathbin{\dot{*}} (g_n \circ h)} MU(k) \mathbin{\dot{*}} \mathbin{\dot{*}} A_n \xrightarrow{\lambda_{2k,n}} A_{n+2k}$$

gestiftet. Bezeichnen wir mit $N \mid \overline{V}$ bzw. $N \mid \partial \overline{V}$ die „Einschränkung" von $N(X)$ auf $\overline{V}$ bzw. $\partial \overline{V}$, so können wir die obige Abbildung auf Grund der speziellen

Gestalt von h in der Form

$$S^{n+2k} \longrightarrow N|\,\overline{V}/N|\,\partial\,\overline{V} \cup \dot{N}|\,\overline{V} \xrightarrow{\psi\times\pi} E(\gamma^k) \times \overline{V}/E(\gamma^k) \times$$

$$\times\,\partial\,\overline{V} \cup \dot{E}(\gamma^k) \times \overline{V} = MU(k) \mathbin{\hat{\times}} S^n \xrightarrow{1\mathbin{\hat{\times}}(g_n\circ\bar{h})} MU(k) \mathbin{\hat{\times}} A_n \xrightarrow{\lambda_{2k,n}} A_{n+2k}$$

schreiben. O. B. d. A. können wir annehmen, daß $N(X)$ über $\overline{V}$ (vgl. die Definition von h) trivial ist, d. h. es gibt einen Homöomorphismus

$$\varphi_{\overline{V}} : N|\,\overline{V} \to E^k \times \overline{V}$$

mit den üblichen Eigenschaften (E^k sei die Einheitskugel des C^k).

$$\omega : E^k \times \overline{V} \to E(\gamma^k)$$

bezeichne eine Bündelabbildung. Offenbar ist dann

$$\begin{array}{ccc} N|\,\overline{V} & \xrightarrow{\varphi_{\overline{V}}} & E^k \times \overline{V} \\ \downarrow & & \downarrow \omega \\ N(X) & \xrightarrow{\psi} & E(\gamma^k) \end{array}$$

und damit auch das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} N|\,\overline{V}/N|\,\partial\,\overline{V} \cup \dot{N}|\,\overline{V} & \xrightarrow{\varphi_{\overline{V}}} & E^k \times \overline{V}/E^k \times \partial\,\overline{V} \cup \dot{E}^k \times \overline{V} \\ \downarrow \psi\times\pi & & \downarrow = \\ E(\gamma^k) \times \overline{V}/E(\gamma^k) \times \partial\,\overline{V} \cup \dot{E}(\gamma^k) \times \overline{V} & \xleftarrow{(\omega\mathbin{\hat{\times}}\pi)\cdot\Delta} & S^{2k} \mathbin{\hat{\times}} S^n \\ = & & \downarrow 1\mathbin{\hat{\times}}\bar{h} \\ MU(k) \mathbin{\hat{\times}} S^n & & \\ \downarrow 1\mathbin{\hat{\times}}\bar{h} & & \\ MU(k) \mathbin{\hat{\times}} S^n & \xleftarrow{g_{2k}\mathbin{\hat{\times}}1} & S^{2k} \mathbin{\hat{\times}} S^n \\ \downarrow 1\mathbin{\hat{\times}}g_n & & \downarrow g_{2k+n} \\ MU(k) \mathbin{\hat{\times}} A_n & \xrightarrow{\lambda_{2k,n}} & A_{n+2k} \end{array}$$

h-kommutativ. Daher wird $(-1)^n\langle z, z'\rangle$ durch die Abbildung

$$S^{n+2k} \xrightarrow{p} N|\,\overline{V}/N|\,\partial\,\overline{V} \cup \dot{N}|\,\overline{V} \xrightarrow{\varphi_{\overline{V}}} S^{2k} \mathbin{\hat{\times}} S^n \xrightarrow{1\mathbin{\hat{\times}}\bar{h}} S^{2k} \mathbin{\hat{\times}} S^n \xrightarrow{g_{2k+n}} A_{n+2k}$$

repräsentiert. $(1 \mathbin{\hat{\times}} \bar{h}) \circ \varphi_{\overline{V}} \circ p$ hat den Grad $(-1)^n$, also wird $\langle z, z'\rangle \in \pi_0(\mathbf{MU})$ durch die Abbildung $g_{2k+n} : S^{2k+n} \to A_{2k+n}$ definiert, q. e. d.

§ 3. Der Hauptsatz

In [3], § 2 hatten wir u. a. gezeigt, daß für jede n-dimensionale geschlossene schwach fastkomplexe Mannigfaltigkeit gilt:

$$\Gamma^{n-k}(X) \cong \pi_k(\mathbf{MU} \mathbin{\hat{\times}} X^+)\,.$$

Wir wollen nun beweisen, daß dieser Isomorphismus mit der Whiteheadschen Poincaré-Dualität ([4], S. 276)

$$z \cap : \Gamma^{n-k}(X) \cong \pi_k(\mathbf{MU} \mathbin{\hat{\times}} X^+)$$

übereinstimmt, die zu der Paarung von $\mathbf{MU}$ gehört (vgl. Hilfssatz 1.1). Bei allen Ausführungen dieses Paragraphen beschränken wir uns der Einfachheit halber auf den Fall $n-k$ gerade, $2k < n-1$. Der allgemeine Fall läßt sich ganz analog behandeln.

Wir beschreiben zunächst den Isomorphismus

$$\Phi : \Gamma^{n-k}(X) \to \Gamma_k(X) .$$

Nach den Voraussetzungen über n und k haben wir $\Gamma^{n-k}(X) \cong \left[X^+, MU\left(\frac{n-k}{2}\right)\right]$. Ist $f : X^+ \to MU\left(\frac{n-k}{2}\right)$ stetig, so gibt es nach [3], § 2 eine zu f homotope Abbildung f', die sich wie folgt faktorisieren läßt:

$$f' : X^+ \xrightarrow{p} N(M)/\dot{N}(M) \xrightarrow{\psi_1} MU\left(\frac{n-k}{2}\right),$$

dabei ist M eine k-dimensionale, geschlossene, schwach fastkomplexe Untermannigfaltigkeit von X, $N(M)$ eine Tubenumgebung von M in X, und ψ_1 wird durch eine Bündelabbildung von $N(M)$ in $E\left(\gamma^{\frac{n-k}{2}}\right)$ induziert. Es ist dann

$$\Phi[f] = [M, j]$$

mit $j : M \subset X$. $[M, j]$ entspricht nach § 1 ein Element von $\pi_k(\mathbf{MU} \ast X^+)$, das wir nun beschreiben wollen. Die schwach fastkomplexe Struktur von X werde durch die Einbettung $X \subset S^{n+2l}$ (l genügend groß) gegeben. Da M ebenfalls eine schwach fastkomplexe Struktur besitzt, ist M auch bezüglich

$$M \overset{j}{\subset} X \subset S^{n+2l}$$

schwach fastkomplex. Bezeichnet $N_S(M)$ eine Tubenumgebung von M in S^{n+2l}, so wird $[M, j]$ bei dem Isomorphismus $\Gamma_k(X) \cong \pi_k(\mathbf{MU} \ast X^+)$ das durch

$$\beta : S^{n+2l} \longrightarrow N_S(M)/\dot{N}_S(M) \xrightarrow{\psi_2 \times j \circ \pi} MU\left(l + \frac{n-k}{2}\right) \ast X^+$$

repräsentierte Element zugeordnet. $\{\beta\}$ ist also das Bild von $[f]$ bei dem Isomorphismus $\Gamma^{n-k}(X) \cong \pi_k(\mathbf{MU} \ast X^+)$.

$z \cap [f] \in \pi_k(\mathbf{MU} \ast X^+)$ wird nach § 1 durch die Abbildung

$$\beta' : S^{n+2l} \longrightarrow N(X)/\dot{N}(X) \xrightarrow{\psi_2 \times \pi} MU(l) \ast X^+ \xrightarrow{1 \ast \Delta} MU(l) \ast$$

$$\ast X^+ \ast X^+ \xrightarrow{1 \ast f' \ast 1} MU(l) \ast MU\left(\frac{n-k}{2}\right) \ast X^+ \xrightarrow{\lambda_{2l, n-k} \ast 1} MU\left(l + \frac{n-k}{2}\right) \ast X^+$$

repräsentiert. Wir beweisen nun

Satz 3.1. *Die Abbildungen β und β' sind zueinander homotop.*

Beweis. Als „Tubenumgebung" $N_S(M)$ wählen wir die Menge derjenigen Normalenvektoren von $N(X)$, deren Fußpunkte in $N(M)$ liegen. Wir definieren dann eine Abbildung

$$\bar{\Delta} : N_S(M) \to N(X) \times N(M)$$

wie folgt: Ist n ein Normalenvektor von $N(X)$ über $x \in N(M)$, so sei $\tilde{n}$ der Normalenvektor über $\pi(x) \in M$, der aus n durch Parallelverschiebung längs

der zu $\pi(x)$ gehörenden Geodätischen hervorgeht. Wir setzen dann

$$\bar{\Delta}(n) = (\tilde{n}, x) .$$

$N_S(M)$ können wir also vermöge $\bar{\Delta}$ mit $N(X)\,|\,M \oplus N(M)$ identifizieren. β hat dann die Gestalt

$$\beta : S^{n+2l} \longrightarrow N_S(M)/\dot{N}_S(M) \xrightarrow{\bar{\Delta}} N(X)/\dot{N}(X) \ast$$
$$\ast\, N(M)/\dot{N}(M) \xrightarrow{(\psi_2 \ast \pi) \ast \psi_1} MU(l) \ast X^+ \ast MU\left(\frac{n-k}{2}\right) \longrightarrow MU(l) \ast$$
$$\ast\, MU\left(\frac{n-k}{2}\right) \ast X^+ \xrightarrow{\lambda_{2l,n-k} \ast 1} MU\left(l + \frac{n-k}{2}\right) \ast X^+ .$$

Weiter ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^{n+2l} & \longrightarrow & N_S(M)/\dot{N}_S(M) \\ \downarrow & & \downarrow \bar{\Delta} \\ N(X)/\dot{N}(X) & \xrightarrow{\Delta} & N(X)/\dot{N}(X) \ast X^+ \xrightarrow{1 \ast p} N(X)/\dot{N}(X) \ast N(M)/\dot{N}(M) \end{array}$$

h-kommutativ, also ist β homotop zu

$$\beta'' : S^{n+2l} \longrightarrow N(X)/\dot{N}(X) \xrightarrow{\Delta} N(X)/\dot{N}(X) \ast$$
$$\ast\, X^+ \xrightarrow{1 \ast p} N(X)/\dot{N}(X) \ast N(M)/\dot{N}(M) \xrightarrow{(\psi_2 \ast \pi) \ast \psi_1} MU(l) \ast X^+ \ast$$
$$\ast\, MU\left(\frac{n-k}{2}\right) \longrightarrow MU(l) \ast MU\left(\frac{n-k}{2}\right) \ast$$
$$\ast\, X^+ \xrightarrow{\lambda_{2l,n-k} \ast 1} MU\left(l + \frac{n-k}{2}\right) \ast X^+ .$$

Wie man sofort nachrechnet, stimmt β'' mit β' überein, q. e. d.

Literatur

[1] Atiyah, M. F.: Bordism and cobordism. Proc. Camb. Phil. Soc. **57**, 200—208 (1961).

[2] Conner, P. E., and E. E. Floyd: Periodic maps which preserve a complex structure. Bull. Am. Math. Soc. **70**, 574—579 (1964).

[3] Kultze, R.: Über die komplexen Cobordismengruppen. Arch. Math. (erscheint demnächst).

[4] Whitehead, G. W.: Generalized homology theories. Trans. Am. Math. Soc. **102**, 227—283 (1962).

(Eingegangen am 23. Juni 1965)

GRUNSKY, H.
Math. Annalen 163, 312—320 (1966)

Über die Reduktion eines linearen Differentialoperators zweiter Ordnung im Komplexen

Herrn GOTTFRIED KÖTHE zum 60. Geburtstag am 25. 12. 1965 gewidmet

Von

HELMUT GRUNSKY in Würzburg

In einer vorangehenden Arbeit[1]) wurde die Umkehrung eines linearen Differentialoperators

$$L(w) = w'' + p_1(z)\, w' + p_2(z)\, w$$

unter den Nebenbedingungen

$$w(z_1) = w(z_2) = 0\,, \tag{1}$$

also die Lösung des inhomogenen Randwertproblems

$$L(w) = g(z)$$

mit den Randbedingungen (1) bei gegebenem $g(z)$ durch ein Gebietsintegral dargestellt. Im folgenden soll eine ebensolche Darstellung für $w'(z)$, allgemeiner für $\beta_0(z)\, w(z) + \beta_1(z)\, w'(z)$ mit gegebenen Funktionen $\beta_0(z)$, $\beta_1(z)$ entwickelt werden; d. h. also, daß wir anstelle der Differentialgleichung mit dem Operator 2. Ordnung eine solche mit einem Operator 1. Ordnung erhalten; wir sprechen daher von einer Reduktion des Differentialoperators. Methodisch handelt es sich dabei um eine naturgemäße Fortsetzung der früheren Ausführungen, indem nun auch eine Nullstelle von ω (s. u.) auf dem Rande des Integrationsbereiches zugelassen wird. Die Ergebnisse sind in den Formeln (22) mit (21) und (14), (24) mit (23) und (14) sowie (26) mit (25) oder in (27) niedergelegt.

Mit

$$L^*(\omega) = \omega'' - (p_1\omega)' + p_2\omega$$

werde der zu $L(w)$ adjungierte Operator bezeichnet; $\omega, \tilde{\omega}$ seien zwei linear unabhängige Lösungen desselben,

$$\mathfrak{w} = \frac{\tilde{\omega}}{\omega}\,,\ D = \omega\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}\omega'\,,$$

$\mathfrak{C}$ ein zunächst beliebiges Gebiet in der z-Ebene, C sein Rand, der stückweise glatt sei. Nach der Gauß-Stokesschen Formel

$$\iint\limits_{\mathfrak{C}} \frac{\partial f}{\partial z}\,(dz) = \frac{i}{2}\int\limits_{C} f(z)\, d\bar{z}$$

[1]) Über die Umkehrung eines linearen Differentialoperators zweiter Ordnung im Komplexen. Arch. Math. 14, 247—251 (1963). Im folgenden mit U zitiert.

gilt dann:

$$\iint_{\mathfrak{C}} \overline{\mathfrak{w}}'\,\omega L(w)\,(dz) = \frac{i}{2}\int_C \frac{\overline{\mathfrak{w}}'}{\mathfrak{w}'}\,v'\,d\bar{z} \quad \text{mit} \quad v = \frac{D}{\omega}\,w\,, \tag{2}$$

solange der Integrand der linken Seite in $\mathfrak{C} \cup C$ von Singularitäten frei ist.

Wir setzen nun von C voraus, daß er aus endlich vielen Bogen C_ν ($\nu = 0, 1, \ldots, n$) zusammengesetzt sei, derart, daß auf C_ν gilt:

$$\varepsilon_\nu^{-1}\overline{\mathfrak{w}}'\,d\bar{z} = \varepsilon_\nu^{-1}\mathfrak{w}'\,dz\,, \quad |\varepsilon_\nu| = 1\,, \tag{3}$$

d. h., daß C_ν durch $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}(z)$ in ein Geradenstück der Richtung ε_ν[2]) abgebildet wird. z_ν sei der Anfangspunkt, $z_{\nu+}$ der Endpunkt von C_ν (bei einfach zusammenhängendem $\mathfrak{C}$ ist $z_{\nu+} = z_{\nu+1}$, Indices $\bmod(n+1)$). Wir nehmen an, z_0 sei eine Nullstelle von ω und außerdem der Endpunkt von C_k. (2) ist nun nicht unmittelbar anwendbar, da z_0 ein Pol 2. Ordnung von $\mathfrak{w}'$ ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $z_0 = 0$ an. Wir schränken $\mathfrak{C}$ ein zu

$$\mathfrak{C}' = \mathfrak{C} - \{z : |z| < \varrho\}\,.$$

Ferner setzen wir:

$$K = \{z : |z| = \varrho;\, z \in \mathfrak{C}\}, \quad C_0' = C_0 - \{z : |z| < \varrho\}, \quad C_k' = C_k - \{z : |z| < \varrho\}\,.$$

z_0' sei der Anfangspunkt von C_0', z_{k+}' der Endpunkt von C_k'. Dann ergibt (2):

$$\frac{2}{i}\iint_{\mathfrak{C}'} \overline{\mathfrak{w}}'\,\omega L(w)\,(dz) = \left(\int_{C_0'} + \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{n}\int_{C_\nu} + \int_{C_k'} + \int_K\right)\frac{\overline{\mathfrak{w}}'}{\mathfrak{w}'}\,v'\,d\bar{z}\,.$$

Mit Rücksicht auf (3) erhält man für $\nu \neq 0, k$:

$$\int_{C_\nu}\frac{\overline{\mathfrak{w}}'}{\mathfrak{w}'}\,v'\,d\bar{z} = \varepsilon_\nu^{-2}\int_{C_\nu} v'\,dz = \varepsilon_\nu^{-2}(v(z_{\nu+}) - v(z_\nu))\,,$$

und eine entsprechende Auswertung ergibt sich für $\int_{C_0'}$ und $\int_{C_k'}$. So findet man:

$$\begin{aligned}\frac{2}{i}\iint_{\mathfrak{C}'} \overline{\mathfrak{w}}'\,\omega L(w)\,(dz) &= \varepsilon_0^{-2}(v(z_1) - v(z_0')) + \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{n}\varepsilon_\nu^{-2}(v(z_{\nu+}) - v(z_\nu)) + \\ &+ \varepsilon_k^{-2}(v(z_{k+}') - v(z_k)) + \int_K \frac{\overline{\mathfrak{w}}'}{\mathfrak{w}'}\,v'\,d\bar{z} \qquad (4)\\ &= \sum_{\nu=1}^{n}(\varepsilon_{\nu-}^{-2} - \varepsilon_\nu^{-2})\,v(z_\nu) + \varepsilon_k^{-2}\,v(z_{k+}') - \varepsilon_0^{-2}\,v(z_0') + \int_K \frac{\overline{\mathfrak{w}}'}{\mathfrak{w}'}\,v'\,d\bar{z}\,,\end{aligned}$$

wo $\varepsilon_{\nu-}$ die Richtung des $\mathfrak{w}$-Bildes der in z_ν mündenden Seite bezeichnet. Wir untersuchen gesondert die drei letzten Glieder bei dem Grenzübergang $\varrho \to 0$. Wir normieren zunächst ω und $\tilde{\omega}$ bei $z = 0$ folgendermaßen:

$$\omega = z + \alpha_2 z^2 + \cdots, \quad \tilde{\omega} = 1 + \tilde{\alpha}_2 z^2 + \cdots$$
$$\omega' = 1 + 2\alpha_2 z + \cdots, \quad \tilde{\omega}' = 2\tilde{\alpha}_2 z + \cdots\,.$$

[2]) Wir kennzeichnen die Richtung einer orientierten Geraden stets durch die entsprechende komplexe Zahl vom Betrage 1.

Dann ist

$$\mathfrak{w} = \frac{\tilde{\omega}}{\omega} = \frac{1}{z} + O(1), \quad \mathfrak{w}' = -\frac{1}{z^2} + O(1)$$

$$D = -1 - 2\alpha_2 z + O(z^2), \quad \frac{D}{\omega} = -\frac{1}{z} - \alpha_2 + O(z).$$

Ist ferner

$$w = a_0 + a_1 z + \cdots,$$

so ist

$$v = \frac{D}{\omega} w = -\frac{a_0}{z} - (a_1 + a_0\alpha_2) + O(z), \quad v' = \frac{a_0}{z^2}(1 + O(z^2)).$$

Auf K ist mit $z = \varrho e^{i\vartheta}$:

$$\frac{\overline{\mathfrak{w}}'}{\mathfrak{w}'} = e^{4i\vartheta}(1 + O(\varrho^2)) \quad v' = a_0\varrho^{-2}e^{-2i\vartheta}(1 + O(\varrho^2)) \quad d\bar{z} = -i\varrho e^{-i\vartheta}\, d\vartheta,$$

und man erhält:

$$\int_K \frac{\overline{\mathfrak{w}}'}{\mathfrak{w}'} v'\, d\bar{z} = -ia_0\varrho^{-1} \int_{\vartheta_k(\varrho)}^{\vartheta_0(\varrho)} e^{i\vartheta}\, d\vartheta + O(\varrho).$$

Dabei sind $\vartheta = \vartheta_k(\varrho)$ und $\vartheta = \vartheta_0(\varrho)$ bei veränderlichem ϱ die Gleichungen von C_k und C_0; $\vartheta_k(0)$ bzw. $\vartheta_0(0)$ seien die Arcuswerte für die von 0 ausgehenden Tangenten an diese beiden Kurven. Die so für $0 \leqq \varrho \leqq \varrho_0$ mit einem gewissen $\varrho_0 > 0$ erklärten Funktionen $\vartheta_0(\varrho)$ und $\vartheta_k(\varrho)$ sind analytisch, da die dargestellten Kurven Urbilder von in ∞ mündenden Geraden der $\mathfrak{w}$-Ebene sind. Es ist

$$\int_{\vartheta_k(\varrho)}^{\vartheta_0(\varrho)} e^{i\vartheta}\, d\vartheta = \int_{\vartheta_k(\varrho)}^{\vartheta_k(0)} + \int_{\vartheta_k(0)}^{\vartheta_0(0)} + \int_{\vartheta_0(0)}^{\vartheta_0(\varrho)}.$$

Ferner:

$$\int_{\vartheta_k(\varrho)}^{\vartheta_k(0)} e^{i\vartheta}\, d\vartheta = ie^{i\vartheta_k(0)}(e^{i(\vartheta_k(\varrho)-\vartheta_k(0))} - 1) = -e^{i\vartheta_k(0)}\,\vartheta_k'(0)\cdot\varrho + O(\varrho^2).$$

Ebenso:

$$\int_{\vartheta_0(0)}^{\vartheta_0(\varrho)} e^{i\vartheta}\, d\vartheta = e^{i\vartheta_0(0)}\,\vartheta_0'(0)\,\varrho + O(\varrho^2).$$

Setzen wir

$$\vartheta_0'(0) = \frac{1}{2}\varkappa_0, \quad \vartheta_k'(0) = -\frac{1}{2}\varkappa_{0-},$$

so sind $\varkappa_{0-}$ und $\varkappa_0$ die Krümmungen der in $z_0 = 0$ mündenden bzw. von dort ausgehenden Seiten C_k und C_0[3]). Setzt man schließlich noch $e^{i\vartheta_0(0)} = \eta_0$, $e^{i\vartheta_k(0)} = -\eta_{0-}$, so bezeichnet η_{0-} die Richtung der in 0 mündenden, η_0 die der

[3]) Ist $z = z(s)$ eine mit der Bogenlänge s als Parameter dargestellte Kurve, so ist mit $\dot{z} = \frac{dz}{ds}$ usw. die Krümmung $\varkappa$ erklärt durch $\ddot{z} = i\varkappa\dot{z}$. Setzt man $z = \varrho e^{i\vartheta}$ mit $\varrho = 0$ für $s = 0$, so ist $\dot{z} = (\dot{\varrho} + i\varrho\dot{\vartheta})e^{i\vartheta}$, also $\dot{z}(0) = e^{i\vartheta(0)}$, $\dot{\varrho}(0) = 1$. Ferner: $\ddot{z} = (\ddot{\varrho} + 2i\dot{\varrho}\dot{\vartheta} + i\varrho\ddot{\vartheta} - -\varrho\dot{\vartheta}^2)e^{i\vartheta}$, also $\ddot{z}(0) = (\ddot{\varrho}(0) + 2i\dot{\vartheta}(0))e^{i\vartheta(0)} = i\varkappa(0)\,e^{i\vartheta(0)}$. Daher ist ($\ddot{\varrho}(0) = 0$ und) $2\dot{\vartheta}(0) = \varkappa(0)$. Ferner ist

$$\vartheta'(0) = \frac{d\vartheta}{d\varrho}\Big|_{\varrho=0} = \frac{\dot{\vartheta}(0)}{\dot{\varrho}(0)} = \dot{\vartheta}(0) = \frac{1}{2}\varkappa(0).$$

dort ausgehenden Seite (vgl. U, S. 249) und man erhält:

$$(5)\qquad \int_K \frac{\overline{w}'}{w'} v'\, d\bar{z} = -(\eta_0 + \eta_{0-})\frac{a_0}{\varrho} - \frac{i}{2}(\eta_0 \varkappa_0 - \eta_{0-}\varkappa_{0-})\, a_0 + O(\varrho)\,.$$

Andererseits ist:

$$\begin{aligned}\varepsilon_k^{-2} v(z'_{k+}) &= \varepsilon_{0-}^{-2}\left(-a_0 \varrho^{-1} e^{-i\vartheta_k(\varrho)} - (a_1 + a_0\alpha_2)\right) + O(\varrho)\\ &= \varepsilon_{0-}^{-2}\left(-a_0\varrho^{-1}e^{-i\vartheta_k(0)}\left(1 - i(\vartheta_k(\varrho) - \vartheta_k(0))\right) - (a_1 + a_0\alpha_2)\right) + O(\varrho)\,,\end{aligned}$$

und wegen

$$\vartheta_k(\varrho) - \vartheta_k(0) = \varrho\,\vartheta_k'(0) + O(\varrho^2) = -\frac{1}{2}\varkappa_{0-}\varrho + O(\varrho^2)$$

folgt:

$$\varepsilon_k^{-2} v(z'_{k+}) = \varepsilon_{0-}^{-2} a_0 \eta_{0-}^{-1}\left(1 + \frac{i}{2}\varkappa_{0-}\varrho\right)\varrho^{-1} - \varepsilon_{0-}^{-2}(a_1 + a_0\alpha_2) + O(\varrho)\,.$$

Aus

$$\mathfrak{w} = \frac{1}{z} + O(1)$$

folgt:

$$\eta_0 = -\varepsilon_0^{-1}, \quad \eta_{0-} = -\varepsilon_{0-}^{-1}$$

und man erhält:

$$(6)\qquad \varepsilon_k^{-2} v(z'_{k+}) = \eta_{0-} a_0 \varrho^{-1} + \frac{i}{2}\eta_{0-}\varkappa_{0-} a_0 - \eta_{0-}^2(a_1 + a_0\alpha_2) + O(\varrho)$$

und ebenso

$$(7)\qquad \varepsilon_0^{-2} v(z_0') = -\eta_0 a_0 \varrho^{-1} + \frac{i}{2}\eta_0\varkappa_0 a_0 - \eta_0^2(a_1 + a_0\alpha_2) + O(\varrho)\,.$$

Aus (5), (6), (7) folgt für die drei letzten Glieder in (4)

$$\begin{aligned}&\varepsilon_k^{-2} v(z'_{k+}) - \varepsilon_0^{-2} v(z_0') + \int_K \frac{\overline{w}'}{w'} v'\, d\bar{z}\\ &\qquad = i(\eta_{0-}\varkappa_{0-} - \eta_0\varkappa_0)\, a_0 + (\eta_0^2 - \eta_{0-}^2)(a_1 + \alpha_2 a_0) + O(\varrho)\,,\end{aligned}$$

und durch Grenzübergang $\varrho \to 0$ erhält man:

$$\begin{aligned}&\iint_{\mathfrak{C}} \mathfrak{w}'\,\omega L(w)\,(dz)\\ (8)\qquad &= \sum_{\nu=1}^{n} \delta_\nu \frac{Dw}{\omega}(z_\nu) + \frac{1}{2}(\eta_0\varkappa_0 - \eta_{0-}\varkappa_{0-})\, w(z_0)\\ &\quad + \frac{i}{2}(\eta_0^2 - \eta_{0-}^2)\left(w'(z_0) + \frac{1}{2}\omega''(z_0)\, w(z_0)\right)\end{aligned}$$

mit

$$(9)\qquad \delta_\nu = \frac{i}{2}(\varepsilon_{\nu-}^{-2} - \varepsilon_\nu^{-2})\,.$$

Hier sind $\varepsilon_{\nu-}$ und ε_ν die Richtungen der Bilder vermöge $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}(z)$ der in z_ν mündenden bzw. von z_ν entspringenden Seiten, η_{0-} und η_0 die Richtungen dieser Seiten selbst in z_0, $\varkappa_{0-}$ und $\varkappa_0$ ihre Krümmungen in z_0. Die bei der Herleitung der Formel gemachte Voraussetzung $z_0 = 0$ kann natürlich wegfallen.

Wir wählen speziell $\mathfrak{C}$ als ein „Dreieck" mit den Ecken $z_0 = z, z_1, z_2$ und bezeichnen die Integrationsveränderliche mit $\mathfrak{z}$. $\omega(\mathfrak{z})$, $\tilde{\omega}(\mathfrak{z})$ und $\mathfrak{w}(\mathfrak{z})$ hängen also jetzt noch von dem Parameter z ab und sollen demgemäß mit $\Omega(\mathfrak{z}, z)$, $\tilde{\Omega}(\mathfrak{z}, z)$, $\mathfrak{W}(\mathfrak{z}, z)$ bezeichnet werden. Ω und $\tilde{\Omega}$ sind, als Funktionen von $\mathfrak{z}$ betrachtet, Lösungen von $L^*(\omega) = 0$ mit den Anfangsbedingungen:

$$\Omega(z, z) = 0, \quad \Omega'(z, z) = 1$$

$$\tilde{\Omega}(z, z) = 1, \quad \tilde{\Omega}'(z, z) = 0.$$

(Hier und im folgenden bedeutet $'$ immer die Ableitung nach dem ersten Argument.)

Zu der Frage nach der Existenz von Dreiecken, wie eben geschildert, stellen wir nur fest: Die Abbildung $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}(\mathfrak{z}, z)$ (bei festem z) ist im kleinen schlicht. Eine Umgebung der Nullstelle z von $\Omega(\mathfrak{z}, z)$ wird auf eine schlichte Umgebung $\mathfrak{U}(\infty)$ von $\mathfrak{W} = \infty$ abgebildet. In $\mathfrak{U}(\infty)$ können wir zwei Punkte $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$ wählen, die untereinander und mit ∞ in $\mathfrak{U}(\infty)$ geradlinig verbunden werden können. Das $\mathfrak{z}$-Urbild eines von solchen Geradenstücken berandeten Gebietes kann als $\mathfrak{C}$ gewählt werden. Insbesondere sind z_1 und z_2 bestimmt durch $\mathfrak{W}(z_\iota, z) = \mathfrak{W}_\iota$ $(\iota = 1, 2)$. Man sieht also, daß im allgemeinen z_1, z_2 nicht willkürlich gewählt werden können. Gibt es zu einem Tripel z, z_1, z_2 überhaupt ein Dreieck, wie verlangt, so auch eine zweifach unendliche Schar, entsprechend der in gewissen Grenzen freien Wahl der beiden Strahlen durch $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$.

Für verschiedene Werte des Parameters z hängen die $\mathfrak{W}(\mathfrak{z}, z)$ durch gebrochenlineare Transformationen zusammen. Bezeichnen wir jetzt mit $\omega(\mathfrak{z})$, $\tilde{\omega}(\mathfrak{z})$, $\mathfrak{w}(\mathfrak{z})$ die Funktionen $\Omega(\mathfrak{z}, z)$, $\tilde{\Omega}(\mathfrak{z}, z)$, $\mathfrak{W}(\mathfrak{z}, z)$ für eine beliebige aber feste Wahl z_0 des Parameters z:

$$\Omega(\mathfrak{z}, z_0) = \omega(\mathfrak{z}), \quad \tilde{\Omega}(\mathfrak{z}, z_0) = \tilde{\omega}(\mathfrak{z}), \quad \mathfrak{W}(\mathfrak{z}, z_0) = \mathfrak{w}(\mathfrak{z}),$$

so erscheint das Bild von $\mathfrak{C}$ in der $\mathfrak{w}$-Ebene als ein von Kreisbogen berandetes Dreieck mit den Ecken $\mathfrak{w}_1 = \mathfrak{w}(z_1)$, $\mathfrak{w}_2 = \mathfrak{w}(z_2)$, $\mathfrak{w}(z)$. Die Seite $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2$ liegt auf einem Kreis durch die Punkte $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2, \mathfrak{w}(z)$, die beiden andern Seiten auf beliebigen Kreisen durch $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}(z)$ bzw. durch $\mathfrak{w}_2, \mathfrak{w}(z)$. Gibt es ein brauchbares Dreieck zu den Punkten z_1, z_2, z, so auch zu z_1, z_2, z' für jedes z' in einer gewissen Umgebung von z.

Wir wollen uns von jetzt ab auf den Fall eines selbstadjungierten $L(w)$ beschränken; dann ist $p_1(z) \equiv 0$ und $D = D(\mathfrak{z}, z) = \text{const} = D(z, z) = -1$. Aus (8) wird eine Formel der Gestalt

$$\iint_{\mathfrak{C}} K(\mathfrak{z}, z)\, g(\mathfrak{z})\, (d\mathfrak{z}) = -\delta_1 \frac{w(z_1)}{\Omega(z_1, z)} - \delta_2 \frac{w(z_2)}{\Omega(z_2, z)} + \beta_0 w(z) + \beta_1 w'(z) \tag{10}$$

mit

$$K(\mathfrak{z}, z) = \overline{\mathfrak{W}'(\mathfrak{z}, z)}\, \Omega(\mathfrak{z}, z).$$

Hier ist $w(z)$ eine beliebige Lösung von $L(w) = g(z)$. Die Koeffizienten δ_1, δ_2, β_0, β_1 hängen bei festen z_1, z_2 noch von z ab. Wir wollen β_0 und β_1, bei bekannten δ_1, δ_2, unabhängig von den vorigen Ableitungen, bestimmen, indem wir

(10) auf zwei zweckmäßig gewählte Funktionen, nämlich Lösungen von $L(w) = 0$, anwenden (vgl. U, S. 250). Vorher soll jedoch der Kern von (10) umgeformt werden. Für verschiedene Werte von z stehen die Funktionen Ω, $\tilde{\Omega}$ und $\mathfrak{W}$ in bekannten Zusammenhängen; es ist:

$$\begin{aligned} \Omega(\mathfrak{z}, z) &= \tilde{\omega}(z)\,\omega(\mathfrak{z}) - \omega(z)\,\tilde{\omega}(\mathfrak{z}) \\ &= \omega(z)\,\omega(\mathfrak{z})\,(\mathfrak{w}(z) - \mathfrak{w}(\mathfrak{z})) \\ \tilde{\Omega}(\mathfrak{z}, z) &= -\tilde{\omega}'(z)\,\omega(\mathfrak{z}) + \omega'(z)\,\tilde{\omega}(\mathfrak{z})\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Mit $D = -1$ erhält man:

$$\mathfrak{W}'(\mathfrak{z}, z) = \frac{-1}{\Omega^2(\mathfrak{z}, z)}\,. \tag{12}$$

Diese Beziehung speziell für $z = z_0$ angewendet, ergibt aus (11):

$$\Omega(\mathfrak{z}, z) = (\mathfrak{w}'(z)\,\mathfrak{w}'(\mathfrak{z}))^{-\frac{1}{2}}\,(\mathfrak{w}(\mathfrak{z}) - \mathfrak{w}(z))\,. \tag{13}$$

Dabei ist, wie man an Hand der Normierung für $\mathfrak{z} = z$ leicht feststellt, die Quadratwurzel durch

$$(\mathfrak{w}'(z)\,\mathfrak{w}'(\mathfrak{z}))^{\frac{1}{2}}|_{z=\mathfrak{z}} = \mathfrak{w}'(z)$$

eindeutig festzulegen. $\mathfrak{W}'(\mathfrak{z}, z)$ läßt sich nun vermöge (12) und (13) ebenfalls mittels $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{w}'$ darstellen. Man findet so:

$$K(\mathfrak{z}, z) = \frac{(\overline{\mathfrak{w}'(z)}\,\overline{\mathfrak{w}'(\mathfrak{z})})}{(\overline{\mathfrak{w}(\mathfrak{z})} - \overline{\mathfrak{w}(z)})^2}\,\frac{\mathfrak{w}(z) - \mathfrak{w}(\mathfrak{z})}{(\mathfrak{w}'(z)\,\mathfrak{w}'(\mathfrak{z}))^{\frac{1}{2}}}\,. \tag{14}$$

Wenden wir nun (10) auf $w(\mathfrak{z}) = \tilde{\Omega}(\mathfrak{z}, z)$ und auf $w(\mathfrak{z}) = \Omega(\mathfrak{z}, z)$ an, so erhalten wir wegen $L(\Omega) = L(\tilde{\Omega}) = 0$:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \delta_1 \mathfrak{W}_1 + \delta_2 \mathfrak{W}_2 \\ \beta_1 &= \delta_1 + \delta_2\,. \end{aligned} \tag{15a, b}$$

Wir wollen versuchen, den Integrationsbereich so zu bestimmen, daß β_0 und β_1 in einem bestimmten Verhältnis $\beta = \frac{\beta_0}{\beta_1}$ stehen, die Reduktion also zu einem vorgegebenen Differentialausdruck 1. Ordnung führt. Wir ersetzen in (15) δ_1 und δ_2 gemäß (9) durch

$$\delta_1 = \frac{i}{2}\,(\alpha_1 - \alpha), \quad \delta_2 = \frac{i}{2}\,(\alpha - \alpha_2)$$

mit

$$\alpha = \varepsilon_1^{-2} = \frac{\overline{\mathfrak{W}_2} - \overline{\mathfrak{W}_1}}{\mathfrak{W}_2 - \mathfrak{W}_1}, \quad \alpha_1 = \varepsilon_0^{-2}, \quad \alpha_2 = \varepsilon_2^{-2} \tag{16a, b, c}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} (\alpha_1 - \alpha)\,\mathfrak{W}_1 - (\alpha_2 - \alpha)\,\mathfrak{W}_2 &= \frac{2\beta_0}{i} \\ \alpha_1 - \alpha_2 &= \frac{2\beta_1}{i}\,. \end{aligned} \tag{17a, b}$$

Verlangen wir zunächst $\beta_1 = 0$, so folgt $\alpha_1 = \alpha_2$, also $\varepsilon_0 = \pm\varepsilon_2$, d. h., die (geradlinigen) $\mathfrak{W}$-Bilder der von z ausgehenden Seiten von $\mathfrak{C}$ sind parallel; in der $\mathfrak{w}$-Ebene erscheinen sie als zwei sich in $\mathfrak{w}(z)$ berührende Kreisbogen. Aus (17a) folgt mit (16a) und $\alpha_1 = \alpha_2 = \varepsilon_0^{-2}$:

$$\beta_0 = \varepsilon_0^{-1} \operatorname{Im}(\varepsilon_0^{-1}(\mathfrak{W}_2 - \mathfrak{W}_1)) . \tag{18}$$

Wir wollen auch hier alles durch Größen ausdrücken, die sich auf die $\mathfrak{w}$-Ebene beziehen. Indem wir die beiden Gleichungen (11) dividieren, erhalten wir:

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{z}, z) = \frac{\dfrac{\omega'(z)}{\omega(z)}\,\mathfrak{w}(\mathfrak{z}) - \dfrac{\tilde{\omega}'(z)}{\omega(z)}}{\mathfrak{w}(z) - \mathfrak{w}(\mathfrak{z})}$$

Aus $\tilde{\omega}(\mathfrak{z}) = \omega(\mathfrak{z})\,\mathfrak{w}(\mathfrak{z})$ folgt: $\tilde{\omega}'(\mathfrak{z}) = \omega(\mathfrak{z})\,\mathfrak{w}'(\mathfrak{z}) + \omega'(\mathfrak{z})\,\mathfrak{w}(\mathfrak{z})$, also

$$\frac{\tilde{\omega}'(z)}{\omega(z)} = \mathfrak{w}'(z) + \frac{\omega'(z)}{\omega(z)}\,\mathfrak{w}(z) .$$

Ferner folgt durch logarithmische Differentiation von (12) mit $z = z_0$:

$$\frac{\omega'(z)}{\omega(z)} = -\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{w}''(z)}{\mathfrak{w}'(z)} .$$

So findet man schließlich:

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{z}, z) = \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{w}''(z)}{\mathfrak{w}'(z)} + \frac{\mathfrak{w}'(z)}{\mathfrak{w}(\mathfrak{z}) - \mathfrak{w}(z)} . \tag{19}$$

Setzen wir $\mathfrak{w}'(z) = |\mathfrak{w}'(z)| \cdot \chi$, so entspricht einer Geraden der Richtung ε_0 in der $\mathfrak{W}$-Ebene ein in $\mathfrak{w}(z)$ mit der Richtung γ ($|\gamma| = 1$) mündender Kreisbogen, wobei

$$\gamma = -\chi\varepsilon_0^{-1} . \tag{20}$$

Mit $\mathfrak{W}_\iota = \mathfrak{W}(z_\iota, z)$, $\iota = 1, 2$, wird gemäß (19) und (20) aus (18):

$$\beta_0 = \gamma\overline{\mathfrak{w}'(z)} \operatorname{Im}\left(\gamma \frac{\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{w}_2}{(\mathfrak{w}_2 - \mathfrak{w}(z))(\mathfrak{w}_1 - \mathfrak{w}(z))}\right) . \tag{21}$$

Die in z_1 und z_2 verschwindende Lösung $w(z)$ von $L(w) = g(z)$ wird also dargestellt durch

$$\beta_0 w(z) = \iint_{\mathfrak{C}} K(\mathfrak{z}, z)\, g(\mathfrak{z})\, (d\mathfrak{z}) , \tag{22}$$

wo $K(\mathfrak{z}, z)$ durch (14), β_0 durch (21) gegeben ist und $\mathfrak{C}$ ein Gebiet bedeutet, dessen Bild in der $\mathfrak{w}$-Ebene von drei Kreisbogen berandet wird, deren einer auf einem Kreis durch die Punkte $\mathfrak{w}(z_1) = \mathfrak{w}_1$, $\mathfrak{w}(z_2) = \mathfrak{w}_2$, $\mathfrak{w}(z)$ liegt und $\mathfrak{w}_1$ und $\mathfrak{w}_2$ verbindet, während die beiden andern sich in $\mathfrak{w}(z)$ berühren und dort mit einer durch γ, $|\gamma| = 1$, gekennzeichneten Richtung münden.

Fassen wir nun den Fall $\beta_1 \neq 0$ ins Auge, so erhalten wir aus (17) mit

$$\beta = \frac{\beta_0}{\beta_1} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{\overline{\mathfrak{W}_2} - \overline{\mathfrak{W}_1}}{\mathfrak{W}_2 - \mathfrak{W}_1}$$

$$\alpha_1\mathfrak{W}_1 - \alpha_2\mathfrak{W}_2 = \overline{\mathfrak{W}_1} - \overline{\mathfrak{W}_2} - 2i\beta\beta_1$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = -2i\beta_1 .$$

Elimination von β_1 ergibt:

$$\alpha_1(\mathfrak{W}_1 - \beta) - \alpha_2(\mathfrak{W}_2 - \beta) = \overline{\mathfrak{W}}_1 - \overline{\mathfrak{W}}_2 .$$

Gesucht sind zwei Werte α_1, α_2 mit $|\alpha_1| = |\alpha_2| = 1$. Außer der trivialen Lösung

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = \frac{\overline{\mathfrak{W}}_1 - \overline{\mathfrak{W}}_2}{\mathfrak{W}_1 - \mathfrak{W}_2}$$

gibt es im allgemeinen genau eine weitere

$$\alpha_1 = \frac{\overline{\mathfrak{W}}_1 - \bar{\beta}}{\mathfrak{W}_1 - \beta}, \quad \alpha_2 = \frac{\overline{\mathfrak{W}}_2 - \bar{\beta}}{\mathfrak{W}_2 - \beta} . \tag{23}$$

Sie kann mit der trivialen zusammenfallen; das tritt genau dann ein, wenn β auf der Verbindungsgeraden von $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$ liegt.

$\mathfrak{W}_1 = \mathfrak{W}(z_1, z)$ und $\mathfrak{W}_2 = \mathfrak{W}(z_2, z)$ sind durch (19) als Funktionen von z bestimmt. Durch (16) und (23) erhält man ε_0 und ε_2. Den Geraden im $\mathfrak{W}$-Bild von $\mathfrak{C}$ mit diesen Richtungen entsprechen im $\mathfrak{w}$-Bild Kreisbogen durch z, deren Richtungen γ_0 und γ_2 in z gekennzeichnet sind durch

$$\gamma_0 = -\chi\varepsilon_0^{-1}, \quad \gamma_2 = -\chi\varepsilon_2^{-1}$$

(vgl. (20)). Damit ist der Integrationsbereich vermöge seines $\mathfrak{w}$-Bildes gekennzeichnet. Aus (10) erhält man für die Lösung $w(z)$ von $L(w) = g(z)$ mit $w(z_1) = w(z_2) = 0$:

$$w'(z) + \beta(z)\, w(z) = \frac{2}{i(\alpha_1 - \alpha_2)} \iint_{\mathfrak{C}} K(\mathfrak{z}, z)\, g(\mathfrak{z})\, (d\mathfrak{z}) , \tag{24}$$

wo α_1 und α_2 durch (23) bestimmt sind.

Wir wollen den Fall $L(w) = w''$, $\beta \equiv 0$ näher betrachten. Hier ist mit $z_0 = 0$:

$$\omega(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z}, \quad \tilde{\omega}(\mathfrak{z}) = 1, \quad \mathfrak{w}(\mathfrak{z}) = \frac{1}{\mathfrak{z}} , \quad \mathfrak{W}(\mathfrak{z}, z) = \frac{1}{\mathfrak{z} - z} .$$

Die Forderung, daß β nicht auf der Verbindungsgeraden von $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$ liegt, bedeutet, daß $z + \frac{1}{\beta}$ nicht auf dem Kreis durch z, z_1, z_2 liegen darf. Sie ist also bei $\beta \equiv 0$ immer erfüllt, falls z, z_1, z_2 nicht auf einer Geraden liegen. $\mathfrak{C}$ wird berandet von einem z_1 und z_2 verbindenden Bogen des Kreises durch z, z_1, z_2 und zwei Kreisbogen, die z mit z_1 bzw. z_2 verbinden und in z mit einer durch

$$\gamma_0 = \varepsilon_0^{-1} = \alpha_1^{1/2} = \pm\frac{z_1 - z}{|z_1 - z|} \quad \text{bzw.} \quad \gamma_2 = \pm\frac{z_2 - z}{|z_2 - z|} \tag{25}$$

bestimmten Richtung münden. Das heißt, die beiden Kreisbogen sind die Verbindungsstrecken z, z_1 und z, z_2. Schließlich ist der Faktor auf der rechten Seite von (24):

$$\frac{2}{i(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{2}{i(\varepsilon_0^{-2} - \varepsilon_2^{-2})} = \frac{2}{i(\gamma_0^2 - \gamma_2^2)} .$$

Damit erhält man für die Lösung $w(z)$ von

$$w''(z) = g(z) \quad \text{mit} \quad w(z_1) = w(z_2) = 0:$$

$$w'(z) = \frac{-2}{i(\gamma_0^2 - \gamma_2^2)} \iint\limits_{\mathfrak{C}} \frac{\zeta - z}{(\bar{\zeta} - \bar{z})^2}\, g(\zeta)\,(d\zeta)\,, \tag{26}$$

wo $\mathfrak{C}$ berandet wird von einem z_1 und z_2 verbindenden Bogen auf dem Kreis durch z, z_1, z_2 und den zwei geradlinigen Verbindungen von z und z_1, z und z_2 mit den Richtungen γ_0 bzw. $\gamma_2 (|\gamma_0| = |\gamma_2| = 1)$.

Wendet man (26) auf $w(z) = \frac{1}{2}(z - z_1)(z - z_2)$ an, so ist $g(z) = 1$, $w'(z) = z - \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ zu setzen, und man findet für den Faktor vor dem Integral einen neuen Ausdruck und damit insgesamt für (26):

$$w'(z) = \left(z - \frac{1}{2}(z_1 + z_2)\right) \frac{\displaystyle\iint\limits_{\mathfrak{C}} \frac{\zeta - z}{(\bar{\zeta} - \bar{z})^2}\, g(\zeta)\,(d\zeta)}{\displaystyle\iint\limits_{\mathfrak{C}} \frac{\zeta - z}{(\bar{\zeta} - \bar{z})^2}\,(d\zeta)}\,. \tag{27}$$

(Eingegangen am 28. Juli 1965)

STUMMEL, F.
Math. Annalen 163, 321—339 (1966)

Über die Differenzenapproximation des Dirichletproblems für eine lineare elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung

Herrn GOTTFRIED KÖTHE zum 60. Geburtstag am 25. 12. 1965 gewidmet

Von

FRIEDRICH STUMMEL in Frankfurt (Main)

Einleitung

In den Arbeiten von R. COURANT, K. FRIEDRICHS, H. LEWY [1] und L. A. LYUSTERNIK (s. [5], [4] und die dort zitierte Literatur) wurde zuerst die Konvergenz der Differenzenapproximation des Dirichletproblems gezeigt. Das Prinzip dieser Konvergenzbeweise beruht darauf, daß die Schar $\{u_h\}$ der Lösungen u_h der Differenzengleichungen in einer geeigneten Norm beschränkt ist, gleichmäßig für jede Wahl der Maschenweite h. Aus der Beschränktheit folgt die Kompaktheit der Schar, so daß es eine konvergente Teilfolge gibt, deren Grenzelement Lösung des Dirichletproblems ist. Wenn diese Lösung eindeutig bestimmt ist, dann muß jede konvergente Teilfolge von $\{u_h\}$ und damit auch die Schar $\{u_h\}$ selbst gegen die gesuchte Lösung konvergieren. Diese Methode setzt bekanntlich nicht die Existenz der Lösung des Dirichletproblems voraus, vielmehr folgt die Existenz der Lösung zusammen mit der Konvergenz der Näherungen.

In neuerer Zeit hat O. A. LADYŽENSKAYA (s. [4]) die Differenzenapproximation des Dirichletproblems in Verbindung mit der Hilbertraum-Formulierung des Dirichletproblems behandelt. Die Lösungen der Differenzengleichungen, die zunächst nur in Gitterpunkten definiert sind, werden multilinear fortgesetzt auf das betrachtete Gebiet G zu Funktionen $u_h \in W^{1,2}(G)$. Diese Schar $\{u_h\}$ ist beschränkt und schwach kompakt in $\mathring{W}^{1,2}(G)$. Damit läßt sich nachweisen, daß die Schar $\{u_h\}$ gegen ein Element $u \in \mathring{W}^{1,2}(G)$ strebt und daß die Funktion u Lösung des verallgemeinerten Dirichletproblems ist.

In dieser Arbeit soll die Konvergenz der Differenzenapproximation im Rahmen der Distributionstheorie behandelt werden. Damit wird es möglich, die Konvergenz der Differenzenapproximation unter sehr allgemeinen Bedingungen für die Koeffizienten des Operators und die Approximation der Randbedingung sowie des inhomogenen Terms der Differentialgleichung zu behandeln. Wir betrachten wie in [4] den allgemeinen elliptischen Differentialoperator

$$A = -\sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij}(x)D_j) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)D_i + c(x), \; x \in G, \tag{1}$$

mit stetigen Koeffizienten in $\overline{G}$ und das verallgemeinerte Dirichletproblem in der Gestalt (s. L. NIRENBERG [6])

$$B(\varphi, u) = (\varphi, f)_0,\ \varphi \in C_0^\infty(G);\ u - g \in \mathring{W}^{1,2}(G)\ . \tag{2}$$

Hier ist B die zum Operator A gehörende Bilinearform, $f \in L^2(G)$, $g \in W^{1,2}(G)$ sind gegebene Funktionen und $u \in W^{1,2}(G)$ ist die gesuchte Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe. Diese Aufgabenstellung und die Differenzenapproximation des verallgemeinerten Dirichletproblems (2) werden in Paragraph 1 formuliert. Die für das folgende wesentlichen Eigenschaften der Differenzenapproximation sind in Hilfssatz 1 zusammengefaßt.

In Paragraph 2 werden zunächst die Lösungen u_h der Differenzengleichungen fortgesetzt zu linearen stetigen Funktionalen u_h^* auf $C(Q)$, dem Banachschen Raum der auf Q stetigen Funktionen, wobei Q ein hinreichend großer Würfel ist, der das betrachtete Gebiet G enthält. Ist $\overline{G}_h$ die Menge aller Gitterpunkte aus $\overline{G}$, dann wird die Fortsetzung $u_h^* \in C(Q)^*$ der Lösung u_h der Differenzengleichung erklärt durch die Vorschrift

$$u_h^* : C(Q) \ni \varphi \to h^n \sum_{x \in \overline{G}_h} \varphi(x)\, \overline{u_h(x)} \tag{3}$$

für $0 < h < h_0$, beziehungsweise mit Hilfe des Diracschen δ-Funktionals durch die Gleichung

$$u_h^*(\,\cdot\,) = h^n \sum_{x \in \overline{G}_h} u_h(x)\, \delta(\cdot - x)\ . \tag{3'}$$

Der Raum $C(Q)$ ist ein separabler Banachscher Raum, so daß beschränkte Mengen von Funktionalen aus $C(Q)^*$ schwach * kompakt sind. Nach einem vorbereitenden Hilfssatz 2 wird in Satz 1 gezeigt, daß die mit den Lösungen der Differenzengleichungen gebildeten Funktionale u_h^* eine zulässige Approximation (s. Definition 1) der Lösung $u \in W^{1,2}(G)$ des verallgemeinerten Dirichletproblems (2) sind. Insbesondere sind damit die Schar $\{u_h^*\}$ und die Schar der Differenzenquotienten $\{D_i^h u_h^*\}$, $i = 1, \ldots, n$, schwach * konvergent gegen die Lösung $u \in W^{1,2}(G)$ des verallgemeinerten Dirichletproblems (2) beziehungsweise gegen die Differentialquotienten $D_i u$, $i = 1, \ldots, n$. Diese Aussage gilt immer dann, wenn u_h Lösung der Differenzengleichungen $A_h u_h = f_h$ in G_h, $u_h = g_h$ in $\dot{G}_h$ ist und die Funktionen f_h, g_h auf $\overline{G}_h$ Scharen von Funktionalen $\{f_h^*\}$, $\{g_h^*\}$ definieren, die zulässige Approximationen von $f \in L^2(G)$, $g \in W^{1,2}(G)$ sind im Sinne der Definition 1. Die für die Differenzenapproximation des Dirichletproblems (2) erforderliche Konstruktion von zulässigen Approximationen für $f \in L^2(G)$, $g \in W^{1,2}(G)$ ist auf mannigfache Weise möglich, unter anderem auch mit Hilfe der Faltung (vgl. [7], [8]), worauf wir jedoch nicht näher eingehen.

In Paragraph 3 behandeln wir mit diesen Methoden für eine hermitesche Bilinearform B das verallgemeinerte Dirichletsche Eigenwertproblem

$$B(\varphi, u) = \lambda(\varphi, u)_0, \quad \varphi \in C_0^\infty(G)\ , \tag{4}$$

$u \in \mathring{W}^{1,2}(G)$, $u \neq 0$, und die Differenzenapproximation dieser Aufgabe (vgl. [4], [5], [10]). Der Einfachheit halber setzen wir voraus, daß sämtliche Eigen-

werte λ_m, $m = 0, 1, 2, \ldots$, der Aufgabe (4) einfach sind. Ausgehend von der direkten Charakterisierung der Eigenwerte λ_m und Eigenfunktionen u_m von (4) (s. [2], Chapt. VI) wird in Satz 2 gezeigt, daß die Eigenwertnäherungen $\lambda_{m,h}$ gegen λ_m konvergieren für $h \to 0$ und $m = 0, 1, 2, \ldots$, und daß in einer geeigneten Normierung die zu den Lösungen $u_{m,h}$ der Differenzengleichungen gebildeten Funktionale $u^*_{m,h}$ zulässige Approximationen der Eigenfunktionen u_m, $m = 0, 1, 2, \ldots$, sind.

Die Lösungen u_h der Differenzengleichungen sind ihrer Natur nach nur auf der Menge der Gitterpunkte $\overline{G}_h \subset \overline{G}$ definiert. Ebenso ist der Träger der Funktionale u^*_h, erklärt durch die Gleichung (3) oder (3′) die Menge der Gitterpunkte $\overline{G}_h$ und die Funktionale u^*_h aus $C(Q)^*$ sind die natürliche Fortsetzung der Funktionen u_h auf $\overline{G}_h$. Ein wichtiges Resultat dieser Arbeit ist es, daß die Konvergenz der Differenzenapproximation gezeigt werden kann ohne das Hilfsmittel spezieller Fortsetzungen, etwa wie die multilineare Fortsetzung in [4], [9]. Derartige Funktionenfolgen und Aussagen über ihre Konvergenz kann man jedoch nun mit Hilfe der Faltung gewinnen. In Paragraph 4 definieren wir mit Hilfe sogenannter Mittelfunktionen (s. Definition 2) durch die Gleichung

$$(\omega_h * u^*_h)(x) = h^n \sum_{y \in \overline{G}_h} u_h(y)\, \omega_h(x - y), \quad x \in Q, \tag{5}$$

eine Schar von Funktionen $\omega_h * u^*_h \in L^2(Q)$. Ist $\{u^*_h\}$ eine zulässige Approximation von $u \in W^{1,2}(G)$, dann konvergieren $\omega_h * u^*_h$ und $\omega_h * D^h_i u^*_h$, $i = 1, \ldots, n$, für $h \to 0$ schwach in $L^2(Q)$ gegen u und $D_i u$, $i = 1, \ldots, n$ (Satz 3). Insbesondere gilt dies also für die Näherungen u^*_h der Lösung des Dirichletproblems (2) gemäß Satz 1 und der Lösungen der Eigenwertaufgabe (4) gemäß Satz 2. Auf diesem Wege kann noch eine weitergehende Konvergenzaussage gemacht werden für etwas speziellere Mittelfunktionen. Wir beschränken uns hier auf den Fall von Treppenfunktionen ω_h und zeigen in Hilfssatz 3 die starke Konvergenz von $\omega_h * u^*_h \to u$ in $L^2(Q)$ $(h \to 0)$, wenn $\{u^*_h\}$ zulässige Approximation von $u \in \dot{W}^{1,2}(G)$ ist. Durch Wahl geeigneter Mittelfunktionen ω_h erhält man in der Faltung $\omega_h * u^*_h$ auch die in [4] herangezogene multilineare Fortsetzung der Lösungen u_h auf G_h der Differenzenapproximation, worauf wir jedoch nicht näher eingehen.

Definition und Eigenschaften der in dieser Arbeit herangezogenen Funktionenräume findet man in bequem zugänglicher Form in [3], [11].

§ 1. Problemstellung und Bezeichnungen

1.1. Sei G ein beschränktes Gebiet des n-dimensionalen euklidischen Raumes E^n mit stückweise glattem Rand $\dot{G}$ und $H_0 = L^2(G)$ der Hilbertsche Raum der komplexwertigen, im Sinne von Lebesgue über G quadratisch integrierbaren Funktionen mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_0 = \int_G u(x)\, \overline{v(x)}\, dx \tag{1.1}$$

und der Norm $\|u\|_0 = (u, u)_0^{1/2}$. Die Funktionen aus $L^2(G)$ sind schwach, d. h. im Sinne der Distributionstheorie differenzierbar, und die Menge aller Funktionen, deren schwache partielle Ableitungen erster Ordnung in $L^2(G)$ liegen,

bilden den Sobolevschen Funktionenraum $W^{1,2}(G)$. Wir bezeichnen mit H_1 den Hilbertschen Raum aller Funktionen aus $W^{1,2}(G)$ mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_1 = (u, v)_0 + \sum_{i=1}^{n} (D_i u, D_i v)_0 , \tag{1.2}$$

der Norm $\|u\|_1 = (u, u)_1^{1/2}$ und der Abkürzung $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Die Menge $C_0^\infty(G)$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in G bildet einen Teilraum von H_1, dessen Abschließung bezüglich der Norm mit $\dot{H}_1 = \dot{W}^{1,2}(G)$ bezeichnet wird.

Der Differentialoperator A sei erklärt durch

$$A = -\sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij}(x) D_j) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) D_i + c(x), \quad x \in G , \tag{1.3}$$

und die Bilinearform B durch die Gleichung

$$B(u, v) = \int_G \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_i u \overline{D_j v} + \sum_{i=1}^{n} b_i u \overline{D_i v} + c u \bar{v} \right) dx . \tag{1.4}$$

Die Koeffizienten des Operators A beziehungsweise der Form B sollen reell sein und der Voraussetzung genügen

$$\begin{gathered} a_{ij}, b_i, c \in C(\overline{G}), \quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad x \in G, \quad i, j = 1, \ldots, n , \\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geqq \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad x \in G , \quad \xi \in E^n, \end{gathered} \tag{1.5}$$

mit einer positiven Konstanten α. Unter diesen Voraussetzungen gibt es eine Zahl α_1, so daß die Ungleichung besteht

$$|B(u, v)| \leqq \alpha_1 \|u\|_1 \|v\|_1, \quad u, v \in H_1 . \tag{1.6}$$

Wir nehmen ferner an, daß die Koeffizienten von A so beschaffen sind, daß eine positive Zahl α_0 existiert mit der Eigenschaft

$$|B(u, u)| \geqq \alpha_0 \|u\|_1^2, \quad u \in C_0^\infty(G) . \tag{1.7}$$

Dann gibt es zu jeder Funktion $f \in H_0$ und jeder Funktion $g \in H_1$ eine eindeutig bestimmte Funktion $u \in H_1$, so daß $u - g \in \dot{H}_1$ ist und u der Gleichung genügt

$$B(\varphi, u) = (\varphi, f)_0, \quad \varphi \in C_0^\infty(G) . \tag{1.8}$$

Die Funktion u ist damit Lösung des verallgemeinerten Dirichletproblems und genügt im schwachen Sinne der Randbedingung $u = g$ auf $\dot{G}$.

1.2. Sei h irgendeine positive Zahl und $x^{h,0} \in E^n$ ein festgewählter Punkt. Dann wird mit den Indexvektoren $m = (m_1, \ldots, m_n)$, m_i ganz, $i = 1, \ldots, n$, eine Menge E_h^n von Gitterpunkten $x^{h,m} \in E^n$ definiert mit den Komponenten

$$x_i^{h,m} = x_i^{h,0} + m_i h, \quad i = 1, \ldots, n . \tag{1.9}$$

Sei $\overline{G}_h$ die Menge aller Gitterpunkte, welche in $\overline{G}$ liegen und $G_h \subset \overline{G}_h$ die Menge derjenigen Gitterpunkte aus $\overline{G}_h$, deren benachbarte Gitterpunkte im Abstand

h in $\overline{G}_h$ sind. Schließlich sei der Rand $\dot{G}_h$ von G_h erklärt durch $\dot{G}_h = \overline{G}_h - G_h$. Für jede auf $\overline{G}$ erklärte Funktion u ist dann der Differenzenquotient

$$D_i^s u(x) = \frac{1}{s}(u(x_1, \ldots, x_i + s, \ldots, x_n) - u(x_1, \ldots, x_n)) \tag{1.10}$$

für jedes $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{G}_h$ erklärt, wenn auch $(x_1, \ldots, x_i + s, \ldots, x_n) \in \overline{G}_h$ ist. Funktionen u auf $\overline{G}_h$ lassen sich stets auf das ganze Gitter E_h^n fortsetzen, indem man $u(x) = 0$, $x \in E_h^n - \overline{G}_h$ setzt. Entsprechend läßt sich $D_i^h u$ auf E_h^n fortsetzen, indem man $D_i^h u(x) = 0$ verlangt für alle Punkte x, für die $x = (x_1, \ldots, x_n)$ oder $(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n)$ nicht in $\overline{G}_h$ liegen. Falls es erforderlich ist, werden wir im folgenden stets annehmen, daß u und $D_i^h u$, $i = 1, \ldots, n$, in dieser Weise auf E_h^n fortgesetzt sind.

In Analogie zu den Bezeichnungen in Abschnitt 1.1. setzen wir für zwei Funktionen u, v auf dem Gitter

$$\begin{aligned} (u, v)_{0,h} &= h^n \sum_{x \in \overline{G}_h} u(x)\, \overline{v(x)}\,, & \|u\|_{0,h} &= (u, u)_{0,h}^{1/2}, \\ (u, v)_{1,h} &= (u, v)_{0,h} + \sum_{i=1}^{n} (D_i^h u, D_i^h v)_{0,h}, & \|u\|_{1,h} &= (u, u)_{1,h}^{1/2}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

und

$$B_h(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} (D_i^h u, a_{ij} D_j^h v)_{0,h} + \sum_{i=1}^{n} (u, b_i D_i^h v)_{0,h} + (u, cv)_{0,h}\,. \tag{1.12}$$

Offenbar konvergiert für Funktionen $u, v \in C^\infty(\overline{G})$

$$\begin{aligned} (u, v)_{i,h} &\to (u, v)_i && (h \to 0),\ i = 0, 1\,, \\ B_h(u, v) &\to B(u, v) && (h \to 0)\,. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Die auf $\overline{G}_h$ definierten Funktionen bilden einen endlichdimensionalen Vektorraum. Mit $(u, v)_{0,h}$ beziehungsweise $(u, v)_{1,h}$ als Skalarprodukt wird dieser Vektorraum ein Hilbertscher Raum, den wir mit $H_{0,h}$ beziehungsweise $H_{1,h}$ bezeichnen. Es sei $\dot{H}_{1,h} \subset H_{1,h}$ der Teilraum aller Funktionen $u \in H_{1,h}$ mit $u(x) = 0$, $x \in \dot{G}_h$. Ist u irgendeine auf $\overline{G}$ erklärte Funktion, dann ist die Restriktion von u auf die Punktmenge $\overline{G}_h$ ein Element von $H_{0,h}$ und $H_{1,h}$ für alle $h > 0$.

Es heißt u_h eine Lösung der Differenzenapproximation des verallgemeinerten Dirichletproblems (1.8), wenn für geeignete Funktionen f_h, g_h auf $\overline{G}_h$ gilt

$$B_h(\varphi, u_h) = (\varphi, f_h)_{0,h} \tag{1.14}$$

für alle $\varphi \in \dot{H}_{1,h}$ und

$$u_h(x) = g_h(x),\ x \in \dot{G}_h\,. \tag{1.15}$$

Es ist

$$B_h(\varphi, u_h) = (\varphi, A_h u_h)_{0,h},\ \varphi \in \dot{H}_1\,, \tag{1.16}$$

wenn A_h den Differenzenoperator

$$A_h = -\sum_{i,j=1}^{n} D_i^{-h}(a_{ij}(x) D_j^h) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\, D_i^h + c(x),\ x \in G_h\,, \tag{1.17}$$

bezeichnet. Eine Lösung u_h der Differenzenapproximation des verallgemeinerten Dirichletproblems (1.14) genügt folglich dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A_h u_h &= f_h \quad \text{in} \quad G_h\,, \\ u_h &= g_h \quad \text{in} \quad \dot{G}_h\,, \end{aligned} \tag{1.18}$$

und umgekehrt ist jede Lösung u_h der Gleichungen (1.18) auch eine Lösung der Aufgabe (1.14).

Von zentraler Bedeutung für die späteren Überlegungen sind bekannte Abschätzungen für die Lösungen der Differenzenapproximation des Dirichletproblems.

Hilfssatz 1. *Die Koeffizienten des Operators A mögen der Voraussetzung* (1.5) *genügen. Dann gibt es eine positive Zahl β_1, so daß für jedes h in $0 < h < 1$ und jedes $u, v \in H_{1,h}$ die Ungleichung besteht*

$$|B_h(u, v)| \leqq \beta_1 \|u\|_{1,h} \|v\|_{1,h}\,. \tag{1.19}$$

Weiter sollen die Koeffizienten von A so beschaffen sein, daß es positive Zahlen h_0, β_0 gibt mit der Eigenschaft, daß für jedes $0 < h < h_0$ und jedes $u \in \dot{H}_{1,h}$ gilt

$$|B_h(u, u)| \geqq \beta_0 \|u\|^2_{1,h}\,. \tag{1.20}$$

Dann ist sowohl das verallgemeinerte Dirichletproblem (1.8) *als auch die Differenzenapproximation* (1.18) *für jedes $0 < h < h_0$ eindeutig lösbar. Ferner hat man die Ungleichung*

$$\beta_0 \|v\|_{1,h} \leqq \|A_h v\|_{0,h} \tag{1.21}$$

für jedes $v \in \dot{H}_{1,h}$ und jedes $0 < h < h_0$.

Beweis. Die Ungleichung (1.19) folgt sofort aus den Regularitätseigenschaften (1.5) der Koeffizienten von A und durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung. Aus dem Bestehen der Ungleichung (1.20) folgt für jedes $u \in \dot{H}_{1,h}$ die Relation

$$\beta_0 \|u\|^2_{1,h} \leqq |B_h(u, u)| = |(u, A_h u)_{0,h}| \leqq \|u\|_{0,h} \|A_h u\|_{0,h}$$

und mit $\|u\|_{0,h} \leqq \|u\|_{1,h}$ die behauptete Ungleichung (1.21) für $0 < h < h_0$. Für irgendzwei Lösungen der Differenzengleichungen (1.18) ist ihre Differenz u_h eine Lösung der Aufgabe $A_h u_h = 0$ in G_h, $u_h = 0$ in $\dot{G}_h$, also $u_h \in \dot{H}_{1,h}$, und mit Hilfe der obigen Ungleichung wird $u_h = 0$ in $\overline{G}_h$.

Sei $C^\infty(\overline{G})$ der Raum der in $\overline{G}$ beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen. Für jedes Paar $u, v \in C^\infty(\overline{G})$ konvergiert

$$B_h(u, v) \to B(u, v), \quad \|u\|_{1,h} \to \|u\|_1, \quad \|v\|_{1,h} \to \|v\|_1$$

für $h \to 0$, so daß aus der Ungleichung (1.19) die Beziehung folgt

$$|B(u, v)| \leqq \beta_1 \|u\|_1 \|v\|_1, \quad u, v \in C^\infty(\overline{G})\,.$$

Für ein Gebiet G mit stückweise glattem Rand ist der Raum $C^\infty(\overline{G})$ dicht in $H_1 = W^{1,2}(G)$. Daher läßt sich die eben gewonnene Ungleichung durch Abschließung auf den Raum $H_1 = W^{1,2}(G)$ fortsetzen und man erhält die Ungleichung (1.6) mit $\alpha_1 = \beta_1$.

Für jede Funktion $\varphi \in C_0^\infty(G)$ gibt es ein $h_1 < h_0$, so daß für alle $0 < h < h_1$ gilt $\varphi \in \dot{H}_{1,h}$ und somit auch

$$|B_h(\varphi, \varphi)| \geqq \beta_0 \|\varphi\|_{1,h}^2 , \qquad 0 < h < h_1 .$$

Für $h \to 0$ erhält man daraus die Ungleichung (1.7) mit $\alpha_0 = \beta_0$. Damit sind Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des verallgemeinerten Dirichletproblems (1.8) gesichert.

§ 2. Konvergenz der Differenzenapproximation

2.1. Sei Q ein Würfel der Gestalt

$$Q = \{x \in E^n \mid |x_i| \leqq a, i = 1, \ldots, n\} \tag{2.1}$$

und die Zahl a so groß, daß für jedes $x \in \overline{G}$ auch der Würfel

$$\{y \in E^n \mid |y_i - x_i| \leqq 1, i = 1, \ldots, n\}$$

in Q liegt. Dann bezeichnen wir mit $C(Q)$ den Banachschen Raum der auf Q erklärten stetigen Funktionen mit der Norm

$$\|\varphi\| = \max_{x \in Q} |\varphi(x)| . \tag{2.2}$$

Es sei $C(Q)^*$ der Raum der linearen stetigen Funktionale auf $C(Q)$. Für den Wert eines Funktionals $u^* \in C(Q)^*$ auf φ schreiben wir $\langle \varphi, u^* \rangle$. Seien u^*, u_j^*, $j = 1, 2, \ldots$, Funktionale aus $C(Q)^*$, dann soll die Folge $\{u_j^*\}$ schwach konvergent gegen u^* heißen,

$$u_j^* \rightharpoonup u^* \qquad (j \to \infty) , \tag{2.3}$$

wenn für jedes $\varphi \in C(Q)$ die Folge

$$\langle \varphi, u_j^* \rangle \to \langle \varphi, u^* \rangle \qquad (j \to \infty) \tag{2.4}$$

konvergiert. Da der Raum $C(Q)$ separabel ist, gibt es bekanntlich zu jeder beschränkten Folge $\{u_j^*\}$ aus $C(Q)^*$ eine Teilfolge $\{u_{j_k}^*\}$ und ein Funktional $u^* \in C(Q)^*$, so daß

$$u_{j_k}^* \rightharpoonup u^* \qquad (k \to \infty) \tag{2.5}$$

konvergiert.

Jede über das Gebiet G integrierbare Funktion $u \in L^1(G)$ definiert ein Funktional aus $C(Q)^*$ durch die Vorschrift

$$C(Q) \ni \varphi \to \int_G \varphi(x)\, \overline{u(x)}\, dx \tag{2.6}$$

und wir schreiben in diesem Falle

$$\langle \varphi, u \rangle = (\varphi, u)_0 = \int_G \varphi(x)\, \overline{u(x)}\, dx, \ \varphi \in C(Q) . \tag{2.7}$$

Sei u_h eine Funktion, die auf dem Punktgitter $\overline{G}_h \subset \overline{G}$ erklärt ist, so kann man ein Funktional $u_h^* \in C(Q)^*$ definieren durch die Vorschrift

$$u_h^* : C(Q) \ni \varphi \to h^n \sum_{x \in G_h} \varphi(x)\, \overline{u_h(x)} . \tag{2.8}$$

Es ist dann mit Hilfe des δ-Funktionals auch

$$u_h^*(\cdot) = h^n \sum_{y \in \bar{G}_h} u_h(y)\, \delta(\cdot - y) \tag{2.9}$$

mit $\langle \varphi(\cdot), \delta(\cdot - y)\rangle = \varphi(y)$. Man hat ferner die Darstellung

$$\langle \varphi, u_h^*\rangle = (\varphi, u_h)_{0,h},\ \varphi \in C(Q)\,. \tag{2.10}$$

Die Norm des Funktionals u_h^* genügt der Relation

$$\|u_h^*\| \leqq h^n \sum_{x \in \bar{G}_h} |u_h(x)|\,. \tag{2.11}$$

Andererseits erhält man die Ungleichungen

$$|\langle \varphi, u_h^*\rangle| \leqq \|\varphi\|_{0,h}\, \|u\|_{0,h} \tag{2.12}$$

und

$$\|\varphi\|_{0,h} \leqq \max_{x \in \bar{G}_h} |\varphi(x)| \left(h^n \sum_{x \in \bar{G}_h} 1\right)^{1/2}. \tag{2.13}$$

Sei jetzt und im folgenden γ eine positive Zahl, die der Bedingung genügt

$$h^n \sum_{x \in \bar{G}_h} 1 \leqq \gamma^2,\ 0 < h < 1\,, \tag{2.14}$$

so ist

$$|\langle \varphi, u_h^*\rangle| \leqq \gamma \|u_h\|_{0,h}\, \|\varphi\|,\ \varphi \in C(Q)\,, \tag{2.15}$$

und für die Norm von u_h^* besteht die Abschätzung

$$\|u_h^*\| \leqq \gamma \|u_h\|_{0,h}\,, \qquad 0 < h < 1\,. \tag{2.16}$$

2.2. Als Vorbereitung für das folgende vereinbaren wir die

Definition 1. *Für $j = 0, 1$ heißt eine Schar $\{v_h^*\}$ von Funktionalen mit*

$$\langle \varphi, v_h^*\rangle = h^n \sum_{x \in \bar{G}_h} \varphi(x)\, \overline{v_h(x)}\,,\quad \langle \varphi, D_i^h v_h^*\rangle = h^n \sum_{x \in \bar{G}_h} \varphi(x)\, \overline{D_i^h v_h(x)}\,, \tag{2.17}$$

$\varphi \in C(Q)$, eine zulässige Approximation von $v \in H_j$, wenn es eine Zahl K gibt mit der Eigenschaft

$$\|v_h\|_{j,h} \leqq K \qquad (h \to 0) \tag{2.18}$$

und wenn

$$v_h^* \rightharpoonup v \qquad (h \to 0) \tag{2.19}$$

und im Falle $j = 1$ auch

$$D_i^h v_h^* \rightharpoonup D_i v \qquad (h \to 0) \tag{2.19'}$$

konvergiert für $i = 1, \ldots, n$.

Ein einfaches Beispiel für den Begriff der zulässigen Approximation erhält man, wenn f eine stückweise stetige Funktion auf $\bar{G}$ ist und für jedes positive h auf dem Gitter $\bar{G}_h$ gesetzt wird

$$f_h(x) = f(x),\ x \in \bar{G}_h\,. \tag{2.20}$$

Dann ist offenbar $f \in H_0 = L^2(G)$ und für jede Funktion $\varphi \in C(Q)$ konvergiert

$$\langle \varphi, f_h^*\rangle = h^n \sum_{x \in \bar{G}_h} \varphi(x)\, \overline{f(x)} \to \int_G \varphi(x)\, \overline{f(x)}\, dx = \langle \varphi, f\rangle\,,$$

also $f_h^* \to f$ $(h \to 0)$. Ferner ist

$$\|f_h\|_{0,h} = \left(h^n \sum_{x \in \overline{G}_h} |f(x)|^2\right)^{1/2} \leqq \gamma \sup_{x \in G} |f(x)| \tag{2.21}$$

für $0 < h < 1$.

Entsprechend wird für eine auf $\overline{G}$ stetige und dort stückweise stetig differenzierbare Funktion g mit $g_h(x) = g(x)$, $x \in \overline{G}_h$, auch $g \in H_1 = W^{1,2}(G)$. Es konvergiert $g_h^* \to g$ $(h \to 0)$ und

$$\langle \varphi, D_i^h g_h^* \rangle = h^n \sum_{x \in \overline{G}_h} \varphi(x)\, \overline{D_i^h g(x)} \to \int_G \varphi(x)\, \overline{D_i g(x)}\, dx = \langle \varphi, D_i g \rangle$$

für $h \to 0$ und jedes $\varphi \in C(Q)$. Es ist schließlich

$$\|g_h\|_{1,h}^2 \leqq \gamma^2 \sup_{x \in G} |g(x)|^2 + \gamma^2 \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in G} |D_i g(x)|^2 \tag{2.22}$$

für $0 < h < 1$.

Eine wichtige Eigenschaft solcher zulässigen Approximationen gibt der

Hilfssatz 2. *Sei $\{v_h^*\}$ eine Schar zulässiger Approximationen von $v \in H_1$, dann konvergiert*

$$B_h(\varphi, v_h) \to B(\varphi, v) \qquad (h \to 0) \tag{2.23}$$

für jedes $\varphi \in C_0^\infty(G)$.

Beweis. Es ist

$$B_h(\varphi, v_h) = \sum_{i,j=1}^{n} (D_i^h \varphi, a_{ij} D_j^h v_h)_{0,h} + \sum_{i=1}^{n} (\varphi, b_i D_i^h v_h)_{0,h} + (\varphi, c v_h)_{0,h}\,.$$

Für $\varphi \in C_0^\infty(G)$ liegt $\psi = c\varphi$ in $C(Q)$ und nach Voraussetzung konvergiert

$$(\varphi, c v_h)_{0,h} = \langle \psi, v_h^* \rangle \to \langle \psi, v \rangle = (\varphi, cv)_0$$

für $h \to 0$. Entsprechend hat man für $\psi = b_i \varphi \in C(Q)$ die Aussage

$$(\varphi, b_i D_i^h v_h)_{0,h} = \langle \psi, D_i^h v_h^* \rangle \to \langle \psi, D_i v \rangle = (\varphi, b_i D_i v)_0$$

für $h \to 0$, da $\{v_h^*\}$ eine zulässige Approximation von $v \in H_1 = W^{1,2}(G)$ ist. Sei jetzt $\psi = a_{ij} D_i \varphi \in C(Q)$ und

$$(D_i^h \varphi, a_{ij} D_j^h v_h)_{0,h} = \langle \psi, D_j^h v_h^* \rangle + (D_i^h \varphi - D_i \varphi, a_{ij} D_j^h v_h)_{0,h}\,.$$

Der erste Term auf der rechten Seite strebt für $h \to 0$ gegen

$$\langle \psi, D_j^h v_h^* \rangle \to \langle \psi, D_j v \rangle = (D_i \varphi, a_{ij} D_j v)_0\,.$$

Mit Hilfe der Ungleichungen (2.12) und (2.13) erhält man für den zweiten Term die Abschätzung

$$|(D_i^h \varphi - D_i \varphi, a_{ij} D_j^h v_h)_{0,h}| \leqq \|a_{ij}(D_i^h \varphi - D_i \varphi)\|_{0,h}\, \|D_j^h v_h\|_{0,h} \leqq$$
$$\leqq \gamma \cdot K \max_{x \in \overline{G}} |a_{ij}(x)\, (D_i^h \varphi - D_i \varphi)\,(x)|$$

für $h \to 0$, weil $\|D_j^h v_h\|_{0,h} \leqq K$ bleibt mit einer passenden Konstanten K. Nun konvergiert der Differenzenquotient $D_i^h \varphi$ gleichmäßig in $\overline{G}$ gegen den Differentialquotienten $D_i \varphi$, so daß der obige Ausdruck gegen Null strebt für $h \to 0$. Damit ist die Behauptung des Satzes bewiesen.

2.3. Nunmehr können wir die Konvergenz der Lösungen der Differenzenapproximation des Dirichletproblems zeigen.

Satz 1. *Die Funktionen $f \in H_0 = L^2(G)$ und $g \in H_1 = W^{1,2}(G)$ seien gegeben und $\{f_h^*\}$, $\{g_h^*\}$ zwei zugehörige Scharen zulässiger Approximationen von f und g. Sei u_h Lösung der Differenzengleichungen*

$$A_h u_h = f_h \quad \text{in} \quad G_h\,, \tag{2.24}$$
$$u_h = g_h \quad \text{in} \quad \dot{G}_h\,,$$

für $h = h_j$, $h_j \to 0$ $(j \to \infty)$, und u_h^* erklärt durch die Darstellung

$$\langle \varphi, u_h^* \rangle = h^n \sum_{x \in \overline{G}_h} \varphi(x)\, \overline{u_h(x)},\ \varphi \in C(Q)\,. \tag{2.25}$$

Dann ist unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 die Schar $\{u_h^*\}$ eine zulässige Approximation von $u \in H_1 = W^{1,2}(G)$, der Lösung des verallgemeinerten Dirichletproblems (1.8). *Es konvergiert also*

$$u_h^* \rightharpoonup u\,, \quad D_i^h u_h^* \rightharpoonup D_i u\,, \qquad i = 1, \ldots, n,\ (h \to 0)\,. \tag{2.26}$$

Beweis. Für jede Funktion $\varphi \in \dot{H}_{1,h}$ wird gemäß (1.16) für die Lösung u_h der obigen Differenzengleichungen

$$(\varphi, A_h u_h)_{0,h} = B_h(\varphi, u_h) = (\varphi, f_h)_{0,h} \tag{2.27}$$

und mit $v_h = u_h - g_h$ in $\overline{G}_h$ auch

$$B_h(\varphi, v_h) = B_h(\varphi, u_h - g_h) = (\varphi, f_h)_{0,h} - B_h(\varphi, g_h)\,. \tag{2.28}$$

Es ist $v_h = u_h - g_h \in \dot{H}_{1,h}$ und nach Hilfssatz 1 erhält man für $0 < h < h_0$ die Relation

$$\beta_0 \|v_h\|_{1,h}^2 \leqq |B_h(v_h, v_h)| \leqq |(v_h, f_h)_{0,h}| + |B_h(v_h, g_h)|\,.$$

Weiter gelten die Ungleichungen

$$|(v_h, f_h)_{0,h}| \leqq \|v_h\|_{0,h}\, \|f_h\|_{0,h}$$

und

$$|B_h(v_h, g_h)| \leqq \beta_1 \|v_h\|_{1,h}\, \|g_h\|_{1,h}\,.$$

Da $\{f_h^*\}$, $\{g_h^*\}$ zulässige Approximationen von f, g sind, gibt es eine Zahl K' mit der Eigenschaft

$$\|f_h\|_{0,h} \leqq K'\,, \quad \|g_h\|_{1,h} \leqq K'$$

für alle h in $0 < h < h_0$. Mit $\|v\|_{0,h} \leqq \|v\|_{1,h}$ folgt aus den obigen Ungleichungen die Abschätzung, mit $K = \dfrac{K'}{\beta_0}(1 + \beta_1)$,

$$\|v_h\|_{1,h} \leqq K\,, \qquad 0 < h < h_0\,. \tag{2.29}$$

Sei $\langle \varphi, v_h^* \rangle = h^n \sum_{x \in G_h} \varphi(x)\, \overline{v_h(x)}$, dann ist nach (2.16)

$$\|v_h^*\| \leqq \gamma \|v_h\|_{0,h} \leqq \gamma K \tag{2.30}$$

für alle $0 < h < h_0$, also die Schar von Funktionalen $v_h^* \in C(Q)^*$ beschränkt, so daß es eine Teilfolge $\{v_{h_j}^*\}$ gibt und ein Funktional v^* mit der Eigenschaft

$$v_{h_j}^* \rightharpoonup v^* \qquad (j \to \infty)\,.$$

Weiter ist für diese Folge von Funktionalen

$$|\langle \varphi, v_h^* \rangle| \leqq \|\varphi\|_{0,h} \|v_h\|_{0,h} \leqq K \|\varphi\|_{0,h}$$

und für $h = h_j' \to 0$ $(j \to \infty)$ erhält man

$$|\langle \varphi, v^* \rangle|^2 \leqq K^2 \|\varphi\|^2 = K^2 \int_G |\varphi(x)|^2 dx$$

für jedes $\varphi \in C(Q)$. Das Funktional v^* läßt sich folglich auf den Hilbertschen Raum $L^2(Q)$ fortsetzen und es gibt eine Funktion $v \in L^2(Q)$, die in $Q - G$ gleich Null ist und für die die Darstellung gilt

$$\langle \varphi, v^* \rangle = (\varphi, v)_0 = \int_G \varphi(x) \overline{v(x)}\, dx\,. \tag{2.31}$$

Sei jetzt $\varphi \in C_0^\infty(Q)$, so wird

$$\langle D_i^{-h} \varphi, v_h^* \rangle = h^n \sum_{x \in G_h} D_i^{-h} \varphi(x) \overline{v_h(x)} = -h^n \sum_{x \in \bar{G}_h} \varphi(x) \overline{D_i^h v_h(x)}$$

und mit

$$\|D_i^h v_h\|_{0,h} \leqq \|v_h\|_{1,h} \leqq K \tag{2.32}$$

erhält man

$$|\langle D_i^{-h} \varphi, v_h^* \rangle| \leqq \|D_i^h v_h\|_{0,h} \|\varphi\|_{0,h} \leqq K \|\varphi\|_{0,h}\,.$$

Weil $D_i^{-h} \varphi$ gleichmäßig gegen $D_i \varphi$ konvergiert in $\bar{G}$ für $h \to 0$, folgt aus der letzten Ungleichung für $h = h_j' \to 0$ $(j \to \infty)$ die Konvergenz von

$$\langle D_i^{-h} \varphi, v_h^* \rangle = -\langle \varphi, D_i^h v_h^* \rangle \to \langle D_i \varphi, v^* \rangle$$

und die Relation

$$|\langle D_i \varphi, v \rangle| \leqq K \|\varphi\|_0,\ \varphi \in C_0^\infty(Q)\,. \tag{2.33}$$

Daher gibt es Funktionen $v_i \in L^2(Q)$, $i = 1, \ldots, n$ mit der Eigenschaft $v_i = 0$ in $Q - G$ und

$$-\langle D_i \varphi, v \rangle = (\varphi, v_i)_0 = -(D_i \varphi, v)_0,\ \varphi \in C_0^\infty(Q)\,. \tag{2.34}$$

Die Funktion $v \in L^2(Q)$ hat folglich verallgemeinerte Ableitungen $v_i = D_i v \in L^2(Q)$, $i = 1, \ldots, n$, so daß $v \in W^{1,2}(Q)$ liegt. Mit $v = D_i v = 0$ in $Q - G$, $i = 1, \ldots, n$, folgt hieraus, daß $v \in \mathring{W}^{1,2}(G)$ ist.

Damit haben wir gezeigt, daß die Teilfolge $\{v_{h_j}^*\}$ eine zulässige Approximation von $v \in \mathring{W}^{1,2}(G) = \dot{H}_1$ ist. Aus Hilfssatz 2 folgt sodann die Konvergenz von

$$B_h(\varphi, v_h) \to B(\varphi, v)$$

für $h = h_j' \to 0$ $(j \to \infty)$. Da $\{f_h^*\}, \{g_h^*\}$ zulässige Approximationen von f, g waren, konvergiert die rechte Seite der Gleichung (2.28)

$$(\varphi, f_h)_{0,h} - B_h(\varphi, g_h) \to (\varphi, f)_0 - B(\varphi, g)$$

für $h \to 0$ und jedes $\varphi \in C_0^\infty(G)$, so daß $v \in \dot{H}_1$ der Gleichung

$$B(\varphi, v) = (\varphi, f)_0 - B(\varphi, g),\ \varphi \in C_0^\infty(G)\,, \tag{2.35}$$

genügt. Sei schließlich $u = v + g \in W^{1,2}(G)$. Dann ist

$$B(\varphi, u) = (\varphi, f)_0,\ \varphi \in C_0^\infty(G)\,,$$

und u Lösung des verallgemeinerten Dirichletproblems. Da diese Lösung eindeutig bestimmt ist und damit jede zulässige Teilfolge $\{u_{h_j}^*\}$ der Schar $\{u_h^*\}$

gegen denselben Limes u konvergiert, muß auch die Schar $\{u_h^*\}$ eine zulässige Approximation von $u \in W^{1,2}(G) = H_1$ sein, was zu zeigen war.

§ 3. Das Eigenwertproblem

3.1. Mit den Ergebnissen des vorigen Paragraphen können wir auch das verallgemeinerte Dirichletsche Eigenwertproblem behandeln. Von den Koeffizienten des Operators A verlangen wir, daß sie den Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 genügen und daß

$$b_i(x) = 0, \; x \in G, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{3.1}$$

sei. Dann ist für die Bilinearform B stets

$$B(u, v) = \overline{B(v, u)}, \; u, v \in \dot{H}_1,$$

$B(u, u)$ reell für alle $u \in \dot{H}_1$ und

$$\alpha_0 \|u\|^2 \leqq B(u, u), \; u \in \dot{H}_1.$$

Damit besitzt der Operator A eine Folge von reellen Eigenwerten λ_m und zugehörigen Eigenfunktionen $u_m \in \dot{H}_1$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, die der Gleichung genügen

$$B(\varphi, u_m) = \lambda_m (\varphi, u_m)_0, \; \varphi \in C_0^\infty(G), \; \|u_m\|_0 = 1, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.2}$$

Definiert man Teilräume $M_m \subset \dot{H}_1$ durch die Gleichungen

$$M_0 = \dot{H}_1, \; M_m = \{v \in \dot{H}_1 \,|\, (v, u_\mu) = 0, \; \mu = 0, \ldots, m-1\}, \; m = 1, 2, \ldots, \tag{3.3}$$

so gilt bekanntlich die Darstellung

$$\lambda_m = \min\{B(v, v) \,|\, v \in M_m, \; \|v\|_0 = 1\}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.4}$$

bei einer geeigneten Numerierung der Eigenwerte. Das Minimum wird angenommen für $v = u_m$. Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, daß die Eigenwerte alle einfach sind, das heißt, je zwei Lösungen der Gleichung (3.2) zum Eigenwert λ_m sollen linear abhängig sein. Dann sind die Eigenwerte in aufsteigender Reihenfolge geordnet und es ist

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots. \tag{3.5}$$

Die Differenzenapproximation des verallgemeinerten Dirichletschen Eigenwertproblems lautet

$$\begin{aligned} A_h u_h &= \lambda_h u_h \quad \text{in} \quad G_h, \\ u_h &= 0 \qquad \text{in} \quad \dot{G}_h, \quad \|u_h\|_{0,h} = 1. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Sei N_h die Anzahl der Gitterpunkte in G_h, so gibt es für jedes $0 < h < 1$ Eigenwerte $\lambda_{\mu,h}$ und zugehörige Eigenvektoren $u_{\mu,h}$, $\mu = 0, \ldots, N_h - 1$. Wir wollen annehmen, daß die Eigenvektoren $u_{\mu,h}$ orthogonal und normiert in $H_{0,h}$ sind,

$$(u_{\mu,h}, u_{\nu,h})_{0,h} = \delta_{\mu\nu} \tag{3.7}$$

$\mu, \nu = 0, \ldots, N_h - 1$. In Analogie zu den obigen Bezeichnungen seien Teilräume $M_{m,h} \subset \dot{H}_{1,h}$ definiert durch die Gleichungen

$$M_{0,h} = \dot{H}_{1,h}, \; M_{m,h} = \{v_h \in \dot{H}_{1,h} \,|\, (v_h, u_{\mu,h})_{0,h} = 0, \; \mu = 0, \ldots, m-1\}. \tag{3.8}$$

Dann hat man bei geeigneter Numerierung die Darstellung

$$\lambda_{m,h} = \min\{B_h(v,v) \mid v \in M_{m,h},\ \|v\|_{0,h} = 1\}\,, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{3.9}$$

Das Minimum wird angenommen für $v = u_{m,h}$ und es ist

$$\lambda_{0,h} \leqq \lambda_{1,h} \leqq \cdots \leqq \lambda_{N_h-1,h}\,. \tag{3.10}$$

3.2. Mit den eben definierten Lösungen $u_{m,h}$ der Differenzengleichungen (3.6) und für eine Folge $\{h_j\}$ mit $h_j \to 0$ $(j \to \infty)$ definieren wir wieder Funktionale $u^*_{m,h} \in C(Q)^*$ durch die Gleichungen

$$u^*_{m,h}(\,\cdot\,) = h^n \sum_{y \in G_h} u_{m,h}(y)\,\delta(\,\cdot - y)\,. \tag{3.11}$$

Satz 2. *Mit Hilfe der eben eingeführten Bezeichnungen und Voraussetzungen konvergiert für jedes* $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$\lambda_{m,h} \to \lambda_m \qquad (h \to 0) \tag{3.12}$$

und bei einer geeigneten Normierung von $u_{m,h} \in \dot{H}_{1,h}$ *ist die Schar* $\{u^*_{m,h}\}$ *eine zulässige Approximation von* $u_m \in \dot{H}_1$. *Es konvergiert also*

$$u^*_{m,h} \rightharpoonup u_m, \quad D_i^h u^*_{m,h} \rightharpoonup D_i u_m \qquad (h \to 0) \tag{3.13}$$

für $i = 1, \ldots, n$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Beweis. Der Beweis wird durch Induktion geführt. Wir nehmen an, für $\mu = 0, \ldots, m-1$ konvergiere bereits

$$\lambda_{\mu,h} \to \lambda_\mu \qquad (h \to 0)$$

und es sei $\{u^*_{\mu,h}\}$ eine zulässige Approximation von $u_\mu \in \dot{H}_1$. Wir zeigen, daß dann auch $\lambda_{m,h}$ und $\{u^*_{m,h}\}$ diese Eigenschaften haben. Für den Fall $m = 0$ entfällt die obige Induktionsvoraussetzung.

Auf Grund von Hilfssatz 1 besteht die Ungleichung

$$\beta_0 \|v\|^2_{0,h} \leqq B_h(v,v),\ v \in \dot{H}_{1,h}\,,$$

so daß die Eigenwerte $\lambda_{\mu,h}$ der Relation genügen

$$\beta_0 \leqq \lambda_{0,h} \leqq \cdots \leqq \lambda_{m,h} \tag{3.14}$$

und daher für $h \to 0$ folgt

$$\beta_0 \leqq \lambda_0 \leqq \cdots \leqq \lambda_{m-1} \leqq \varliminf_{h \to 0} \lambda_{m,h}\,. \tag{3.15}$$

Aus der Darstellung (3.9) für $\lambda_{m,h}$ gewinnt man die Ungleichung

$$\lambda_{m,h} \leqq \frac{B_h(v,v)}{\|v\|^2_{0,h}}\,, \quad v \in M_{m,h},\ v \neq 0\,. \tag{3.16}$$

Für jede Funktion $\varphi \in C_0^\infty(G)$ gibt es nun eine Zahl h_1, so daß für alle $0 < h < h_1$ die Restriktion von φ auf $\overline{G}_h$ in $\dot{H}_{1,h}$ liegt. Für eine jede Funktion $\varphi \in C_0^\infty(G)$ ist eine Funktion ψ_h auf $\overline{G}_h$ erklärt durch die Gleichung

$$\psi_h(x) = \varphi(x) - \sum_{\mu=0}^{m-1} \langle \varphi, u^*_{\mu,h} \rangle\, u_{\mu,h}(x),\ x \in \overline{G}_h\,, \tag{3.17}$$

mit

$$\langle \varphi, u^*_{\mu,h} \rangle = (\varphi, u_{\mu,h})_{0,h}\,. \tag{3.18}$$

Die Funktion ψ_h liegt in $\dot{H}_{1,h}$ für alle $0 < h < h_1$ und genügt den Bedingungen

$$(\psi_h, u_{\nu,h})_{0,h} = 0\,, \qquad \nu = 0, \ldots, m-1\,, \tag{3.19}$$

das bedeutet, es liegt ψ_h in $M_{m,h}$. Im Falle $m = 0$ ist einfach $\psi_h = \varphi \in M_{0,h} = \dot{H}_{1,h}$, $0 < h < h_1$. Nun ist

$$\|\psi_h\|^2_{0,h} = \|\varphi\|^2_{0,h} - \sum_{\mu=0}^{m-1} |\langle \varphi, u^*_{\mu,h}\rangle|^2\,. \tag{3.20}$$

Mit den Gleichungen

$$\begin{aligned} B_h(\varphi, u_{\nu,h}) &= \lambda_{\nu,h}\langle \varphi, u^*_{\nu,h}\rangle\,, \\ B_h(u_{\mu,h}, u_{\nu,h}) &= \lambda_{\mu,h}\delta_{\mu\nu}\,, \end{aligned} \tag{3.21}$$

erhält man die Darstellung

$$B_h(\psi_h, \psi_h) = B_h(\varphi, \varphi) - \sum_{\mu=0}^{m-1} \lambda_{\mu,h}|\langle \varphi, u^*_{\mu,h}\rangle|^2\,. \tag{3.22}$$

Für $h \to 0$ konvergiert

$$B_h(\varphi, \varphi) \to B(\varphi, \varphi), \quad \|\varphi\|^2_{0,h} \to \|\varphi\|^2_0\,,$$

und nach Induktionsvoraussetzung konvergiert

$$\lambda_{\mu,h} \to \lambda_\mu, \quad \langle \varphi, u^*_{\mu,h}\rangle \to (\varphi, u_\mu)_0 \qquad (h \to 0)$$

für $\mu = 0, \ldots, m-1$, so daß

$$\begin{aligned} \|\psi_h\|^2_{0,h} &\to \|\varphi\|^2_0 - \sum_{\mu=0}^{m-1} |(\varphi, u_\mu)_0|^2 \\ B_h(\psi_h, \psi_h) &\to B(\varphi, \varphi) - \sum_{\mu=0}^{m-1} \lambda_\mu |(\varphi, u_\mu)_0|^2 \end{aligned} \tag{3.23}$$

strebt für $h \to 0$. Sei jetzt $\varphi \in C_0^\infty(G) \cap M_m$, das heißt

$$(\varphi, u_\mu)_0 = 0\,, \qquad \mu = 0, \ldots, m-1\,,$$

und $\varphi \neq 0$. Dann ist $\|\varphi\|_0 \neq 0$ und es konvergiert

$$\frac{B_h(\psi_h, \psi_h)}{\|\psi_h\|^2_{0,h}} \to \frac{B(\varphi, \varphi)}{\|\varphi\|^2_0} \qquad (h \to 0)\,.$$

Mit Hilfe der obigen Ungleichung (3.16) für $v = \psi_h$ folgt

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\, \lambda_{m,h} \leqq B(\varphi, \varphi), \quad \|\varphi\|_0 = 1\,,$$

für jedes $\varphi \in C_0^\infty(G) \cap M_m$, und damit die Relation

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\, \lambda_{m,h} \leqq \inf\{B(\varphi, \varphi) \mid \varphi \in M_m \cap C_0^\infty(G), \|\varphi\|_0 = 1\} = \lambda_m\,. \tag{3.24}$$

Betrachten wir die Eigenlösungen $u_{m,h}$ zum Eigenwert $\lambda_{m,h}$ der Differenzenapproximation und die dazugehörigen Funktionale $u^*_{m,h} \in C(Q)^*$. Auf Grund der Normierungsbedingung $\|u_{m,h}\|_{0,h} = 1$ und der Relation (2.16) wird $\|u^*_{m,h}\| \leqq \gamma$, $0 < h < 1$, also die Schar $\{u^*_{m,h}\}$ beschränkt in $C(Q)^*$. Sei $\{h'_j\}$ irgendeine Nullfolge, für die es eine Zahl λ^* und ein Funktional $u^* \in C(Q)^*$ gibt, so daß

$$\lambda_{m,h} \to \lambda^*, \quad u^*_{m,h} \rightharpoonup u^* \qquad (h = h'_j \to 0, j \to \infty) \tag{3.25}$$

konvergiert. Dann folgt zunächst mit $\|u_{m,h}\|_{0,h} = 1$ die Ungleichung

$$|\langle \varphi, u^*_{m,h}\rangle| \leqq \|\varphi\|_{0,h},\ \varphi \in C(Q)\ ,$$

und daraus für u^*

$$|\langle \varphi, u^*\rangle| \leqq \|\varphi\|_0,\ \varphi \in C(Q)\ .$$

Somit gibt es eine Funktion $u \in L^2(Q)$ mit den Eigenschaften $u = 0$ in $Q - G$, $\langle \varphi, u^*\rangle = (\varphi, u)_0$, $\varphi \in C(Q)$, und

$$u^*_{m,h} \rightharpoonup u \qquad (h = h'_j \to 0, j \to \infty)\ . \tag{3.25'}$$

Definieren wir die Funktion f_h auf $\overline{G}_h$ durch

$$f_h = \lambda_{m,h} u_{m,h}, \qquad h = h'_j, j = 1, 2, \ldots, \tag{3.26}$$

und die Funktionale f^*_h in der üblichen Weise, so ist die Schar $\{f^*_h\}$ eine zulässige Approximation von $f = \lambda^* u \in H_0$ im Sinne der Definition 1 und $u_{m,h}$ Lösung der Differenzengleichungen, mit diesen Funktionen f_h und $g_h = 0$ auf $\overline{G}_h$. Die Anwendung von Satz 1 liefert, daß sogar $u \in \dot{H}_1$ sein muß und die Folge $\{u^*_{h_j}\}$ eine zulässige Approximation von $u \in \dot{H}_1$ ist. Aus Hilfssatz 3 in § 4 folgt die Konvergenz von

$$\|u_{m,h}\|_{0,h} \to \|u\|_0 \qquad (h = h'_j \to 0, j \to \infty)\ , \tag{3.27}$$

also mit $\|u_{m,h}\|_{0,h} = 1$ wird $\|u\|_0 = 1$. Es war $u_{m,h} \in M_{m,h}$ und somit

$$(u_{m,h}, u_{\mu,h})_{0,h} = 0\ , \qquad \mu = 0, \ldots, m-1\ . \tag{3.28}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $\{u^*_{\mu,h}\}$ zulässige Approximation von $u_\mu \in \dot{H}_1$, $\mu = 0, \ldots, m-1$, so daß auf Grund des eben zitierten Hilfssatzes auch

$$(u, u_\mu)_0 = 0\ , \qquad \mu = 0, \ldots, m-1\ , \tag{3.29}$$

also $u \in M_m$ ist. Schließlich genügt die Funktion u der Gleichung

$$B(\varphi, u) = (\varphi, f)_0 = \lambda^* (\varphi, u)_0,\ \varphi \in C_0^\infty(G)\ , \tag{3.30}$$

und damit erhält man für $\varphi \to u$ in $\dot{H}_1$ auch

$$\lambda^* = B(u, u),\ u \in M_m,\ \|u\|_0 = 1\ . \tag{3.31}$$

Zusammen mit den oben hergeleiteten Beziehungen ist demzufolge

$$\lambda_{m-1} \leqq \varliminf_{h \to 0} \lambda_{m,h} \leqq \lambda^* \leqq \varlimsup_{h \to 0} \lambda_{m,h} \leqq \lambda_m \leqq \lambda^*$$

oder

$$\lambda^* = \lambda_m = \lim_{h \to 0} \lambda_{m,h}\ . \tag{3.32}$$

Dieses Resultat gilt für jede Nullfolge $\{h'_j\}$ mit den obengenannten Eigenschaften. Insbesondere kann man $\{h'_j\}$ so wählen, daß

$$\lambda_{m,h} \to \lim_{h \to 0} \lambda_{m,h} = \lambda^*,\ u^*_{m,h} \rightharpoonup u^*$$

konvergiert für $h = h'_j \to 0$, $j \to \infty$. Dann folgt $\lambda^* = \varliminf \lambda_{m,h} = \varlimsup \lambda_{m,h} = \lambda_m$. Daher konvergiert

$$\lambda_{m,h} \to \lambda_m \qquad (h \to 0)$$

und die oben konstruierte Funktion $u \in M_m$ ist Eigenlösung zum Eigenwert λ_m der verallgemeinerten Dirichletschen Eigenwertaufgabe. Aus dieser Über-

legung folgt weiter, daß jeder Limes u^* einer konvergenten Teilfolge $u^*_{m,h} \to u^*$ $(h'_j \to 0, j \to \infty)$ eine Eigenlösung $u^* = u_m \in M_m$ zum Eigenwert λ_m ist.

Da die Eigenwerte λ_m einfach sein sollten, ist eine solche Eigenlösung bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Wir geben jetzt noch eine Normierungsbedingung an, mit der auch dieser Faktor noch bestimmt werden kann, so daß jede so normierte konvergente Teilfolge $\{u^*_{m,h}\}$ gegen ein und dieselbe Eigenfunktion $u_m \in M_m$ konvergiert, woraus schließlich die Behauptung des Satzes folgt.

Ist $z = re^{i\alpha}$, $0 \leqq \alpha < 2\pi$, eine komplexe Zahl, dann schreiben wir für α auch $\alpha = \arg(z)$. Für eine Eigenlösung u_m zum Eigenwert λ_m mit $\|u_m\| = 1$ kann man sicher eine stetige Funktion $\psi \in C(Q)$ finden, so daß

$$\langle \psi, u_m \rangle = (\psi, u_m)_0 = 1 \tag{3.33}$$

wird. Mit einer solchen Funktion ψ lassen sich die Lösungen $u_{m,h}$ der Differenzengleichungen der Normierungsbedingung unterwerfen.

$$\|u_{m,h}\|_{0,h} = 1\,, \quad \arg(\langle \psi, u^*_{m,h} \rangle) = 0\,. \tag{3.34}$$

Wenn nun die Folge $u^*_{m,h} \to u \in \dot{H}_1$ $(h \to 0)$ konvergiert und u Eigenlösung zum Eigenwert λ_m ist, so muß $u = cu_m$ sein mit $|c| = 1$, da der Eigenwert einfach sein sollte. Aus der obigen Bedingung folgt dann weiter

$$0 = \arg(\langle \psi, u \rangle) = \arg(\bar{c}\langle \psi, u_m \rangle) = \arg(\bar{c})$$

also $c = 1$ und $u = u_m$.

§ 4. Konvergenz der Faltung

4.1. Definition 2. *Ist $\{\omega_h\}$ eine Schar von nichtnegativen Funktionen $\omega_h \in L^2(E^n)$ für $0 < h < 1$ mit den Eigenschaften*

$$\omega_h(x) = 0\,, \quad |x| \geqq h\,, \quad \int_{E^n} \omega_h(x)\,dx = 1\,, \qquad 0 < h < 1\,, \tag{4.1}$$

und es gibt eine Zahl c, so daß die Ungleichung besteht

$$h^n \sum_{y \in \bar{G}_h} \omega_h(x - y) \leqq c\,,\ x \in E^n\,, \qquad 0 < h < 1\,. \tag{4.2}$$

Dann nennen wir $\{\omega_h\}$ eine Schar von Mittelfunktionen. Mit Hilfe dieser Mittelfunktionen wird für die Funktionale

$$v^*_h(\,\cdot\,) = h^n \sum_{y \in \bar{G}_h} v_h(y)\,\delta(\,\cdot - y)$$

die Faltung $\omega_h * v^*_h$ durch die Gleichung definiert

$$(\omega_h * v^*_h)(x) = h^n \sum_{y \in \bar{G}_h} v_h(y)\,\omega_h(x - y)\,. \tag{4.3}$$

Es ist $(\omega_h * v^*_h)(x) = 0$, wenn x nicht in Q liegt und für $0 < h < 1$, das heißt, der Träger der Funktionen $\omega_h * v^*_h$ liegt im Würfel Q. Für jedes h in $0 < h < 1$ sind die Funktionen $\omega_h * v^*_h \in L^2(E^n)$. Wählt man Mittelfunktionen ω_h aus $C_0^\infty(E^n)$, die den obigen Forderungen genügen, so wird die Faltung $\omega_h * v^*_h$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion aus $C_0^\infty(E^n)$. Im folgenden wollen wir für ein

Gebiet $D \subseteq E^n$ und Funktionen $u, v \in L^2(D)$ noch die Bezeichnung

$$(u, v)_D = \int_D u(x)\,\overline{v(x)}\,dx \tag{4.4}$$

für das Skalarprodukt im Hilbertschen Raum $L^2(D)$ vereinbaren.

4.2. Damit kann man aus der schwachen Konvergenz der Funktionale v_h^* in $C(Q)^*$ eine stärkere Konvergenzaussage für die Faltung $\omega_h * v_h^*$ in $L^2(E^n)$ herleiten.

Satz 3. *Für $j = 0, 1$ sei $\{v_h^*\}$ eine zulässige Approximation von $v \in H_j$ im Sinne der Definition 1. Dann ist die Faltung $\omega_h * v_h^* \in L^2(Q)$, es konvergiert*

$$\omega_h * v_h^* \rightharpoonup v \quad \text{in} \quad L^2(Q) \qquad (h \to 0) \tag{4.5}$$

und für $j = 1$ auch

$$\omega_h * D_i^h v_h^* \rightharpoonup D_i v \quad \text{in} \quad L^2(Q) \qquad (h \to 0) \tag{4.6}$$

für $i = 1, \ldots, n$.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine Zahl K mit der Eigenschaft $\|v_h\|_{0,h} \leqq K$ für $0 < h < 1$ und es konvergiert $v_h^* \rightharpoonup v$ in $C(Q)^*$ $(h \to 0)$. Für jede Funktion $\varphi \in C(Q)$ wird

$$\langle \varphi, \omega_h * v_h^* \rangle = h^n \sum_{x \in \bar{G}_h} \overline{v_h(x)} \int \varphi(y)\,\omega_h(y - x)\,dy \tag{4.7}$$

und man erhält mit Hilfe von (2.15) die Abschätzung

$$|\langle \varphi, \omega_h * v_h^* \rangle - \langle \varphi, v_h^* \rangle| \leqq \gamma \|v_h\|_{0,h} \max_{x \in \bar{G}_h} \left| \int_Q \omega_h(y - x)\,(\varphi(y) - \varphi(x))\,dy \right| \leqq$$

$$\leqq \gamma \cdot K \cdot \max_{x \in \bar{G}} \Big(\max_{|y-x| \leqq h} |\varphi(y) - \varphi(x)| \Big) .$$

Die stetige Funktion $\varphi \in C(Q)$ ist in $\overline{G}$ gleichmäßig stetig, so daß

$$|\langle \varphi, \omega_h * v_h^* \rangle - \langle \varphi, v_h^* \rangle| \to 0 \qquad (h \to 0) \tag{4.8}$$

konvergiert für jedes $\varphi \in C(Q)$. Weiter ist

$$|(\omega_h * v_h^*)(x)|^2 \leqq h^n \sum_{y \in \bar{G}_h} |v_h(y)|^2\,\omega_h(x - y) \cdot h^n \sum_{y \in \bar{G}_h} \omega_h(x - y)$$

und mit (4.1) und (4.2) folgt daraus

$$\int_Q |(\omega_h * v_h^*)(x)|^2\,dx \leqq c \sum_{y \in \bar{G}_h} |v_h(y)|^2$$

oder

$$\|\omega_h * v_h^*\|_Q^2 \leqq c \|v_h\|_{0,h}^2 \leqq cK^2 , \tag{4.9}$$

für alle $0 < h < 1$. Die Schar $\{\omega_h * v_h^*\}$ von Funktionen $\omega_h * v_h^* \in L^2(Q)$ ist also beschränkt in $L^2(Q)$ und schwach konvergent auf dem Teilraum $C(Q) \subset L^2(Q)$. Daraus folgt die schwache Konvergenz von

$$\omega_h * v_h^* \rightharpoonup v \quad \text{in} \quad L^2(Q) \qquad (h \to 0) .$$

Ganz entsprechend folgt die schwache Konvergenz von $\omega_h * D_i^h v_h^* \rightharpoonup D_i v$ in $L^2(Q)$ $(h \to 0)$, $i = 1, \ldots, n$, im Falle $j = 1$.

4.3. Nunmehr wählen wir einen speziellen Typ von Mittelfunktionen ω_h. Sei der Würfel Q_h für $h > 0$ erklärt durch

$$Q_h = \left\{ x \in E^n \;\middle|\; |x_i| < \frac{h}{2}\,, i = 1, \ldots, n \right\} \tag{4.10}$$

und sei

$$\omega_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{h^n}, & x \in Q_h, \\ 0, & x \notin Q_h. \end{cases} \tag{4.11}$$

Diese Schar $\{\omega_h\}$ erfüllt offenbar die Bedingungen, welche wir oben für Mittelfunktionen gestellt haben. Die Faltung $\omega_h * v_h^*$ ist eine Treppenfunktion mit der Eigenschaft

$$|(\omega_h * v_h^*)(x)|^2 = h^n \sum_{x \in \bar{G}_h} |v_h(y)|^2 \omega_h(x-y)$$

und

$$\|\omega_h * v_h^*\|_Q = \|v_h\|_{0,h}. \tag{4.12}$$

Hilfssatz 3. *Ist die Schar $\{v_h^*\}$ eine zulässige Approximation von $v \in \dot{H}_1$ im Sinne der Definition* 1, *mit $v_h \in \dot{H}_{1,h}$, und $\{\omega_h\}$ die Schar der eben definierten Treppenfunktionen, dann konvergiert*

$$\begin{aligned} \omega_h * v_h^* &\to v \quad \text{in} \quad L^2(Q) \qquad (h \to 0), \\ \omega_h * D_i^h v_h^* &\to D_i v \quad \text{in} \quad L^2(Q) \qquad (h \to 0), \end{aligned} \tag{4.13}$$

$i = 1, \ldots, n$. *Für zwei Scharen $\{u_h^*\}, \{v_h^*\}$, die zulässige Approximationen von $u, v \in \dot{H}_1$ sind mit $u_h, v_h \in \dot{H}_{1,h}$ konvergiert*

$$(u_h, v_h)_{0,h} \to (u, v)_0 \qquad (h \to 0). \tag{4.14}$$

Beweis. Aus Satz 3 wissen wir bereits, daß die Schar der Treppenfunktionen $w_h = \omega_h * v_h^*$, $0 < h < 1$, in $L^2(Q)$ beschränkt ist. Wir zeigen jetzt die gleichgradige Stetigkeit dieser Schar in $L^2(E^n)$. Dabei verwenden wir die Bezeichnung

$$\Delta_i^s w(x) = w(x + s e_i) - w(x), \quad x \in E^n, \tag{4.15}$$

$i = 1, \ldots, n$, wenn $e_i \in E^n$ der Einheitsvektor in Richtung der i-ten Koordinatenachse ist, und für reelle Zahlen s. Offensichtlich gilt die Darstellung

$$\Delta_i^s w = s D_i^s w, \quad s \neq 0. \tag{4.16}$$

Sei wieder K eine Zahl mit der Eigenschaft $\|v_h\|_{1,h} \leqq K$. Dann hat man zunächst die Gleichung

$$D_i^h w_h(x) = h^n \sum_{y \in G_h} v_h(y) D_i^h \omega_h(x-y) = h^n \sum_{y \in \bar{G}_h} D_i^h v_h(y) \omega_h(x-y)$$

und die Abschätzung

$$\|D_i^h w_h\|_{E^n}^2 = h^n \sum_{y \in \bar{G}_h} |D_i^h v_h(y)|^2 \leqq \|v_h\|_{1,h}^2$$

oder

$$\|\Delta_i^h w_h\|_{E^n} \leqq hK, \qquad i = 1, \ldots, n, \; 0 < h < 1. \tag{4.17}$$

Ist N irgendeine natürliche Zahl, so wird

$$\Delta_i^{Nh} w_h(x) = w_h(x + Nhe_i) - w_h(x) = \sum_{l=0}^{N-1} \Delta_i^h w_h(x + lhe_i)$$

und

$$\|\Delta_i^{Nh} w_h\|_{E^n} \leqq \sum_{l=0}^{N-1} \|\Delta_i^h w_h(\cdot + lhe_i)\|_{E^n} \leqq NhK, \tag{4.18}$$

$i = 1, \ldots, n$, $0 < h < 1$. Ist der Würfel $Q_h(y)$ erklärt durch die Relation

$$Q_h(y) = \left\{x \in E_n \mid |x_i - y_i| \leqq \frac{h}{2},\ i = 1, \ldots, n\right\} \tag{4.19}$$

und ist r eine reelle Zahl mit $0 < r < 1$, so wird für jedes $y \in G_h$ auch

$$\int\limits_{Q_h(y)} |\Delta_i^{rh} w_h(x)|^2\, dx = h^2 |D_i^h v_h(y)|^2 \cdot rh^n$$

also

$$\|\Delta_i^{rh} w_h\|_{E^n} \leqq \sqrt{rh}\, \|v_h\|_{1,h}^2 \leqq \sqrt{rh}\, K\,, \qquad 0 < h < 1\,. \tag{4.20}$$

Für jede positive Zahl s schließlich gibt es eine natürliche Zahl N und eine Zahl r mit $0 < r < 1$, so daß $s = (N + r)h$ wird. Es ist

$$\Delta_i^s w_h(x) = \Delta_i^{Nh} w_h(x + rhe_i) + \Delta_i^{rh} w_h(x)$$

und

$$\begin{aligned} \|\Delta_i^s w_h\|_{E^n} &\leqq \|\Delta_i^{Nh} w_h\|_{E^n} + \|\Delta_i^{rh} w_h\|_{E^n} \leqq \\ &\leqq (Nh + \sqrt{rh})K \leqq (s + \sqrt{s})K\,, \end{aligned} \tag{4.21}$$

$i = 1, \ldots, n$, $0 < h < 1$. Hieraus folgt aber die gleichgradige Stetigkeit von w_h in $L^2(E^n)$. Da die Schar $w_h = \omega_h * v_h^*$ schwach gegen $v \in L^2(E^n)$ konvergierte, muß auf Grund der gleichgradigen Stetigkeit jetzt $w_h = \omega_h * v_h^*$ stark gegen $v \in L^2(E^n)$ konvergieren. Damit strebt auch

$$\|v_h\|_{0,h} = \|\omega_h * v_h^*\|_{E^n} \to \|v\|_{E^n} = \|v\|_0$$

für $h \to 0$. Sind $\{u_h^*\}$, $\{v_h^*\}$ zulässige Approximationen von u, $v \in \mathring{H}_1$, so strebt

$$(u_h, v_h)_{0,h} = (\omega_h * u_h^*, \omega_h * v_h^*)_{E^n} \to (u, v)_0$$

für $h \to 0$.

Literatur

[1] Courant, R., K. Friedrichs u. H. Lewy: Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. Math. Ann. **100**, 32—74 (1928).

[2] —, and D. Hilbert: Methods of mathematical physics, vol. I. New York 1953.

[3] Dunford, N., and J. T. Schwartz: Linear operators, vol. I, II. New York 1958, 1963.

[4] Ladyzenskaya, O. A.: The method of finite differences in the theory of partial differential equations. Am. Math. Soc. Translations (2), **20**, 77—104 (1962).

[5] Lyusternik, L. A.: On difference approximations of the Laplace operator. Am. Math. Soc. Translations (2), **8**, 289—351 (1958).

[6] Nirenberg, L.: Remarks on strongly elliptic partial differential equations. Comm. Pure Appl. Math. **8**, 648—674 (1955).

[7] Nitsche, J., and J. C. C. Nitsche: Error estimates for the numerical solution of elliptic differential equations. Arch. Rat. Mech. Analysis **5**, 293—306 (1960).

[8] Nitsche, J. C. C., u. J. Nitsche: Fehlerabschätzung für die numerische Berechnung von Integralen, die Lösungen elliptischer Differentialgleichungen enthalten. Arch. Rat Mech. Analysis **5**, 307—314 (1960).

[9] Saul'yev, V. K.: On a class of elliptic equations solvable by the method of finite differences. Vyčisl. Mat. **1**, 81—86 (1957).

[10] — On the solution of the problem of eigenvalues by the method of finite differences. Am. Math. Soc. Translations (2), **8**, 257—287 (1958).

[11] Smirnow, W. I.: Lehrgang der höheren Mathematik, Bd. V. Berlin 1962.

[12] Stummel, F.: Näherungsmethoden zur Lösung elliptischer partieller Differentialgleichungen. HMI-B **31**, Hahn-Meitner-Institut. Berlin 1963.

(Eingegangen am 23. Juni 1965)

WEIDMANN, J.
Math. Annalen 163, 340—345 (1966)

Integraloperatoren der Spurklasse

Herrn GOTTFRIED KÖTHE zum 60. Geburtstag am 25. 12. 1965 gewidmet

Von

JOACHIM WEIDMANN in Heidelberg

Einleitung

Nach R. SCHATTEN [4, 5] besteht die *Spurklasse* von Operatoren in einem Hilbertraum aus den Operatoren, die sich als Produkt von zwei Hilbert-Schmidt-Operatoren schreiben lassen. Ein Operator K im Hilbertraum $\mathscr{H}$ ist genau dann ein *Hilbert-Schmidt-Operator*, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \|K\varphi_n\|^2$ für ein vollständiges Orthonormalsystem (ONS) $\{\varphi_n\}$ aus $\mathscr{H}$, und damit für jedes ONS, konvergiert; die Reihe hat einen von der Wahl des vollständigen ONS unabhängigen Wert, die *Hilbert-Schmidt-Norm* von K. Für einen Operator K der Spurklasse folgt, daß die Reihe

$$\sigma(K) = \sum_{n=1}^{\infty} (K\varphi_n, \varphi_n)$$

für jedes ONS $\{\varphi_n\}$ absolut konvergiert, und für alle vollständigen ONS den gleichen Wert hat, die *Spur* von K. Umgekehrt folgt aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (K\varphi_n, \varphi_n)$ für jedes ONS $\{\varphi_n\}$, daß K in der Spurklasse ist. Eine besonders interessante Eigenschaft der Operatoren der Spurklasse ist die Gültigkeit der *Spurformel*

$$\sigma(K) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n ,$$

wo λ_n die Eigenwerte von K sind[1]).

Die Spurklasse ist aus verschiedenen Gründen von besonderem Interesse, und deshalb ergibt sich die Frage nach Kriterien dafür, daß ein Operator zu dieser Klasse gehört. In der vorliegenden Note werden zwei solche Kriterien für Integraloperatoren in $\mathscr{L}^2$ bewiesen. Es stellt sich heraus, daß bei positiven Integraloperatoren nur das Verhalten des Kerns in der Nähe der Diagonalen wesentlich eingeht, während wir bei nichtdefiniten Operatoren starke Stetigkeitsforderungen an den Kern stellen müssen. Als Korollar ergibt sich aus unseren Überlegungen noch die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Bilinearentwicklung der Kerne, die diese Forderungen erfüllen.

[1]) Die Beweise der Resultate über Operatoren der Spurklasse sind enthalten in R. SCHATTEN [4, 5] und J. WEIDMANN [7].

§ 1. Semidefinite Integraloperatoren

In diesem Abschnitt sei B ein beliebiges Gebiet in R^N. Alle auftretenden Funktionen in B oder $B \times B$ denken wir uns durch Null fortgesetzt auf ganz R^N bzw. $R^N \times R^N$.

Satz 1. *Es sei $K(x,y) \in \mathscr{L}^2(B \times B)$, der durch $K(x,y)$ in $\mathscr{L}^2(B)$ erzeugte Integraloperator K sei positiv semidefinit, und für $0 < d \leqq d_0$ sei*

$$K_d(x) = \frac{N^2}{\omega_N^2 d^{2N}} \int\limits_{|\xi| \leqq d} \int\limits_{|\eta| \leqq d} K(x+\xi, x+\eta)\, d\xi\, d\eta \leqq f(x)^{2})$$

mit einem $f(x) \in \mathscr{L}^1(B)$. Dann ist K in der Spurklasse.

Beweis. Zunächst sei bemerkt, daß für einen Kern $H(x,y) \in \mathscr{L}^2(B \times B)$ die Funktion $H_d(x)$ stets einen Sinn hat. Wenn $H(x,y)$ einen positiv semidefiniten Operator erzeugt, dann gilt $H_d(x) \geqq 0$ für jedes $d > 0$. Seien nun $\{\varphi_n(x)\}$ und $\{\lambda_n\}$ die normierten Eigenfunktionen bzw. die zugehörigen Eigenwerte von K. Ein positiver Operator ist genau dann in der Spurklasse, wenn die Summe seiner Eigenwerte endlich ist[1]); es genügt also zu zeigen, daß $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ konvergiert.

Die beiden Kerne

$$K^{(m)}(x,y) = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n \varphi_n(x)\, \overline{\varphi_n(y)}$$

und

$$K(x,y) - K^{(m)}(x,y)$$

sind aus $\mathscr{L}^2(B \times B)$ und erzeugen positiv semidefinite Operatoren in $\mathscr{L}^2(B)$. Da die $\varphi_n(x)$ lokal integrierbar sind, gilt

$$(\varphi_n)_d(x) = \frac{N}{\omega_N d^N} \int\limits_{|\xi| \leqq d} \varphi_n(x+\xi)\, d\xi \to \varphi_n(x)$$

fast überall für $d \to 0$[3]). Daraus folgt unmittelbar

$$K_d^{(m)}(x) = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n |(\varphi_n)_d(x)|^2 \to K^{(m)}(x,x), \quad \text{f. ü.}$$

für jedes m. Da $K(x,y) - K^{(m)}(x,y)$ einen positiv semidefiniten Operator erzeugt, folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \liminf_{d \to 0} \{K_d(x) - K_d^{(m)}(x)\} \\ &\leqq \liminf_{d \to 0} K_d(x) - \liminf_{d \to 0} K_d^{(m)}(x) \qquad (1) \\ &\leqq f(x) - \liminf_{d \to 0} K_d^{(m)}(x)\,. \end{aligned}$$

Also gilt für jedes m fast überall

$$K^{(m)}(x,x) \leqq f(x)\,.$$

---

[2]) Hier sei ω_N die Oberfläche der N-dimensionalen Einheitskugel.

[3]) Siehe z. B. C. Carathéodory [1] 11. Kapitel.

Aus der Monotonie der Folge $K^{(m)}(x,x)$ und mit Hilfe des Lebesgueschen Satzes folgt $\lim_{m\to\infty} K^{(m)}(x,x) \in \mathscr{L}^1(B)$ sowie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \lim_{m\to\infty} \int_B \sum_{n=1}^{m} \lambda_n |\varphi_n(x)|^2\, dx = \int_B \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |\varphi_n(x)|^2\, dx < \infty\,, \quad \text{q. e. d.}$$

Aus Satz 1, bzw. durch geringfügige Modifikation des Beweises ergibt sich das

Korollar. Der Kern $K(x,y) \in \mathscr{L}^2(B\times B)$ erzeuge in $\mathscr{L}^2(B)$ einen positiv semidefiniten Operator K. Der Operator K ist in der Spurklasse, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) B ist beschränkt, $K(x,y)$ wesentlich beschränkt in $B\times B$;

(b) B beliebig, $K(x,y)$ stetig und $K(x,x) \in \mathscr{L}^1(B)$;

(c) B beliebig, $K_d(x) \to f(x)$ f. ü. für $d\to 0$, $f(x) \in \mathscr{L}^1(B)$.

Beweis. (a) ist eine Folgerung von Satz 1; (b) folgt aus (c). Um (c) zu beweisen, können wir den obigen Beweis wörtlich übernehmen. Die Ungleichung (1) gilt auch in diesem Fall, da stets lim inf $\leqq$ lim gilt.

§ 2. Nichthermitesche Integraloperatoren

In diesem Abschnitt wollen wir ein Kriterium für allgemeine (d. h. nicht notwendig definite oder hermitesche) Integraloperatoren beweisen. B sei hier ein 1-dimensionales Intervall, o. E. d. A. das Intervall $I=[0,1]$. Die unten benutzte Bedingung $H(p,q)$ stammt von A. HAMMERSTEIN [2, 3], der mit Hilfe dieser Bedingung unter zusätzlicher Forderung der Stetigkeit des Kerns (vgl. Satz 2) die gleichmäßige Konvergenz der Bilinearentwicklung (vgl. § 3) bewies.

Definition. Es sei $\max(1, p/2) < q \leqq p$. Ein Kern $K(x,y) \in \mathscr{L}^2(I\times I)$ erfüllt die $H(p,q)$-*Bedingung*, wenn es eine Konstante c gibt, so daß

$$\int_I |K(x,y) - K(x',y)|^p\, dy \leqq c\,|x-x'|^q$$

$$\int_I |K(x,y) - K(x,y')|^p\, dx \leqq c\,|y-y'|^q$$

für alle $x, x', y, y' \in I$.

Satz 2. *Ein Kern $K(x,y)$, der die $H(p,q)$-Bedingung erfüllt, ist f. ü. gleich einem Kern $K_0(x,y)$, der hölderstetig ist mit dem Exponenten $(q-1)/p$.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $K(x,y) \in \mathscr{L}^2(I\times I) \subset \mathscr{L}^1(I\times I)$; die später auftretenden Mittelwerte sind also sinnvoll. Da auch Argumente $(x,y) \notin I\times I$ auftreten, erweitern wir den Definitionsbereich von $K(x,y)$ durch wiederholte Spiegelung an den Rändern auf das Quadrat $[-4,5]\times[-4,5]$. Dieser neue Kern, den wir wieder $K(x,y)$ nennen, erfüllt die $H(p,q)$-Bedingung mit dem Integrationsintervall $[-4,5]$.

Zunächst zeigen wir, daß die Funktionen

$$K_d(x,y) = \frac{1}{d^2} \iint_{(d)} K(x+\xi, y+\eta)\, d\xi\, d\eta \text{ [4]}$$

---

[4] $\iint_{(d)} = \int_{-d/2}^{d/2} \int_{-d/2}^{d/2}$.

für $0 < d \leqq 1$ gleichgradig hölderstetig sind mit dem Exponenten $(q-1)/p$. Es genügt, für beliebige x, x' und y aus I, die Ungleichung

$$|K_d(x, y) - K_d(x', y)| \leqq \text{konst.}\, |x - x'|^{(q-1)/p}$$

zu zeigen, wobei die Konstante nicht von d abhängt. Es sei zunächst $|x - x'| \leqq d$; dann gilt

$$|K_d(x, y) - K_d(x', y)| \leqq \frac{1}{d^2} \iint\limits_{(d)} |K(x+\xi, y+\eta) - K(x'+\xi, y+\eta)|\, d\xi\, d\eta \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{d^2} \left\{ \iint\limits_{(d)} |K(x+\xi, y+\eta) - K(x'+\xi, y+\eta)|^p\, d\xi\, d\eta \right\}^{1/p} d^{2-2/p}$$

$$\leqq c_1 d^{-1/p} |x - x'|^{q/p} \leqq c_1 |x - x'|^{(q-1)/p}.$$

Ebenso folgt für $|x - x'| \leqq f$ die später benötigte Ungleichung

$$|K_f(x, y) - K_f(x', y)| \leqq c_1 f^{(q-1)/p}. \tag{2}$$

Sei nun $|x - x'| > d$ und die natürliche Zahl M so gewählt, daß

$$3^{M-1} d < |x - x'| \leqq 3^M d.$$

Aus (2) folgt für $|d'| = \mathrm{d}$

$$|K_d(x, y) - K_d(x + d', y)| \leqq c_1 d^{(q-1)/p},$$

wobei wie oben c_1 nicht von d, x und y abhängt. Da dieselbe Ungleichung gilt mit d' in der zweiten Variablen, folgt

$$|K_d(x, y) - K_{3d}(x, y)| \leqq 2 c_1 d^{(q-1)/p},$$

und nach M-maliger Iteration

$$|K_d(x, y) - K_{3^M d}(x, y)| \leqq 2 c_1 d^{(q-1)/p} \sum_{\nu=0}^{M-1} (3^\nu)^{(q-1)/p} \leqq$$

$$\leqq 2 c_1 |x - x'|^{(q-1)/p} \sum_{\nu=0}^{\infty} (3^{-\nu})^{(q-1)/p} = c_2 |x - x'|^{(q-1)/p}.$$

Die entsprechende Ungleichung gilt für x' anstelle von x. Damit folgt

$$|K_d(x, y) - K_d(x', y)| \leqq |K_d(x, y) - K_{3^M d}(x, y)| + |K_{3^M d}(x, y) - K_{3^M d}(x', y)| +$$

$$+ |K_{3^M d}(x', y) - K_d(x', y)| \leqq c_3 |x - x'|^{(q-1)/p}$$

mit einer von d, x, x' und y unabhängigen Konstanten c_3.

Somit sind die $K_d(x, y)$ gleichgradig hölderstetig mit dem gewünschten Exponenten und der Konstanten $c = \max(c_1, c_3)$. Da sie außerdem gleichmäßig beschränkt sind, gibt es nach dem Satz von Ascoli eine Nullfolge d_n derart, daß $K_{d_n}(x, y)$ gleichmäßig gegen ein $K_0(x, y)$ konvergiert. $K_0(x, y)$ ist offenbar hölderstetig mit dem Exponenten $(q-1)/p$. Da außerdem $K_{d_n}(x, y)$ im $\mathcal{L}^1$-Sinne gegen $K(x, y)$ konvergiert, gilt $K(x, y) = K_0(x, y)$ f. ü., q. e. d.

Lemma 1. *Ein Kern $K(x, y)$, der eine $H(p, q)$-Bedingung erfüllt, ist f. ü. gleich einem Kern, der eine $H(2, q')$-Bedingung erfüllt mit*

$$q' = \begin{cases} \dfrac{2q-2}{p} + 1 & \text{für} \quad p \leqq 2 \\ \dfrac{2q}{p} & \text{für} \quad p \geqq 2. \end{cases}$$

Der Beweis ergibt sich im Falle $p < 2$ durch Ausnutzung der eben bewiesenen Hölderstetigkeit, und im Fall $p > 2$ mit der Hölderschen Ungleichung.

Lemma 2. *Wenn $K(x, y)$ eine $H(2, q)$-Bedingung erfüllt, dann erfüllt $P(x, y)$ die gleiche $H(2, q)$-Bedingung für fast alle x bzw. y aus I.* ($P(x, y)$ ist der Kern, der den positiv semi-definiten Operator $P = (KK^*)^{1/2}$ erzeugt.)

Der Beweis folgt aus der Identität

$$\int_I |P(x, y) - P(x', y)|^2 \, dy = \int_I |K(x, y) - K(x', y)|^2 \, dy$$

und für die andere Variable aus der Gleichung $P(x, y) = \overline{P(y, x)}$; beide Gleichungen sind fast überall erfüllt. Wir weisen darauf hin, daß die Gültigkeit fast überall der $H(p, q)$-Bedingung ausreicht, um den Beweis von Satz 2 durchzuführen. Damit sind wir nun in der Lage, das Hauptresultat dieses Abschnitts zu beweisen.

Satz 3. *Ein Kern $K(x, y)$, der eine $H(p, q)$-Bedingung erfüllt, ist in der Spurklasse.*

Beweis. Nach Satz 2 und den Lemmata ist $P(x, y)$ f. ü. gleich einem stetigen Kern; also ist nach dem Korollar (oder nach dem Satz von Mercer) P, und somit auch K, in der Spurklasse[1]).

§ 3. Bilinearentwicklung und Beispiele

Es seien $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ die Kerne, die die Operatoren $P = (KK^*)^{1/2}$ bzw. $Q = (K^*K)^{1/2}$ erzeugen. Wenn $K(x, y)$ die $H(2, q)$-Bedingung erfüllt, dann auch $P(x, y)$ und $Q(x, y)$; $P_0(x, y)$ bzw. $Q_0(x, y)$ seien die stetigen Repräsentanten von $P(x, y)$ bzw. $Q(x, y)$. Seien nun $\{\psi_n(x)\}$ die Eigenfunktionen von P, $\{\chi_n(x)\}$ die von Q und $\{\mu_n\}$ die zugehörigen Eigenwerte (P und Q haben die gleichen Eigenwerte), dann konvergieren nach dem Satz von Mercer die beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \psi_n(x) \overline{\psi_n(y)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \chi_n(x) \overline{\chi_n(y)}$$

absolut und gleichmäßig in $I \times I$ und stellen $P_0(x, y)$ bzw. $Q_0(x, y)$ dar. Die $\psi_n(x)$ und $\chi_n(x)$ können außerdem so gewählt werden, daß gilt[5])

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \psi_n(x) \overline{\chi_n(y)} \quad \text{im Sinne von} \quad \mathcal{L}^2(I \times I) .$$

Mit der Schwarzschen Ungleichung folgt auch hier die *absolute und gleichmäßige Konvergenz gegen $K_0(x, y)$.*

Das folgende Beispiel zeigt, daß aus der „$H(2, 1)$-Bedingung" (die im Sinne unserer Definition keine $H(p, q)$-Bedingung ist) die Stetigkeit nicht gefolgert werden kann. Wir zeigen, daß der in $I \times I$ nicht beschränkte Kern

$$K(x, y) = \begin{cases} \log \dfrac{1}{x} & \text{für} \quad 0 \leqq y \leqq x \leqq 1 \\ \log \dfrac{1}{y} & \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq y \leqq 1 \end{cases}$$

eine „$H(2, 1)$-Bedingung" erfüllt.

[5]) Für diese Entwicklungssätze siehe z. B. F. SMITHIES [6].

Für $x < x'$ und $|x - x'| \leqq x$ gilt

$$\int_0^1 |K(x,y) - K(x',y)|^2\, dy = \int_0^x \left(\log \frac{x'}{x}\right)^2 dy + \int_x^{x'} \left(\log \frac{x'}{y}\right)^2 dy \leqq$$

$$\leqq x \left(\log \frac{x'}{x}\right)^2 + \int_0^{x'-x} \left(\log \frac{x'-x}{y}\right)^2 dy \leqq$$

$$\leqq x \left|(x'-x)\frac{1}{x}\right|^2 + (x'-x) \int_0^1 \left(\log \frac{1}{y}\right)^2 dy \leqq c_1 |x'-x|.$$

Sei nun $x < x'$ und $|x' - x| > x$, also $x' < 2|x' - x|$, dann gilt

$$\int_0^1 |K(x,y) - K(x',y)|^2\, dy \leqq \int_0^1 |K(0,y) - K(x',y)|^2\, dy$$

$$= \int_0^{x'} \left(\log \frac{x'}{y}\right)^2 dy = x' \int_0^1 \left(\log \frac{1}{y}\right)^2 dy \leqq c_2 |x' - x|;$$

damit ist die Behauptung bewiesen.

Der große Vorzug der $H(p, q)$-Bedingung liegt darin, daß sie sich von $K(x, y)$ auf $P(x, y)$ überträgt. Es scheint sehr schwierig zu sein, für ein höherdimensionales Grundgebiet eine Bedingung zu finden, die diese Eigenschaft hat und die Stetigkeit des Kerns impliziert. Unser zweites Beispiel zeigt, daß jedenfalls aus der $H(2, 2)$-Bedingung bei einem 2-dimensionalen Gebiet keine Stetigkeit folgt. Der Kern

$$K(x,y) = \begin{cases} \log \dfrac{1}{|x|} & \text{für} \quad 0 \leqq |y| \leqq |x| \leqq 1 \\ \log \dfrac{1}{|y|} & \text{für} \quad 0 \leqq |x| \leqq |y| \leqq 1 \end{cases} \qquad x, y \in R^2$$

erfüllt die $H(2, 2)$-Bedingung, ist aber unbeschränkt. Der Beweis verwendet ähnliche Methoden wie der des ersten Beispiels.

Literatur

[1] Carathéodory, C.: Maß und Integral und ihre Algebraisierung. Basel/Stuttgart 1956.

[2] Hammerstein, A.: Über die Entwicklung des Kerns linearer Integralgleichungen nach Eigenfunktionen. Sitzber. Akad. Berlin (phys. math. Klasse), 181—184 (1923).

[3] — Entwicklung gegebener Funktionen nach Eigenfunktionen von Randwertaufgaben Math. Z. 27, 269—311 (1928).

[4] Schatten, R.: A Theory of Cross-Spaces. Princeton: Princeton University Press 1950.

[5] — Norm Ideals of Completely Continuous Operators. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1960.

[6] Smithies, F.: Integral Equations. Cambridge: Cambridge University Press 1958.

[7] Weidmann, J.: Ein Satz über nukleare Operatoren im Hilbertraum. Math. Ann. 158, 69—78 (1965).

(Eingegangen am 10. Juli 1965)

KUNZ, E.
Math. Annalen 163, 346—350 (1966)

Gruppenringe und Differentiale

Herrn GOTTFRIED KÖTHE zum 60. Geburtstag am 25. 12. 1965 gewidmet

Von

ERNST KUNZ in Heidelberg

1. R sei ein kommutativer Ring mit 1, A ein kommutativer Erweiterungsring mit derselben 1 und folgenden Eigenschaften:

a) A besitzt als R-Modul eine Basis $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ mit $1 = x_{\lambda_0}$ $(\lambda_0 \in \Lambda)$.

b) Für jedes Paar $\lambda, \mu \in \Lambda$ ist $x_\lambda \cdot x_\mu = \varrho_{\lambda,\mu} \cdot x_\nu (\varrho_{\lambda,\mu} \in R, \varrho_{\lambda,\mu} \neq 0, \nu \in \Lambda)$.

Setzt man $\lambda + \mu = \nu$, so wird Λ zu einer assoziativen und kommutativen Halbgruppe mit dem neutralen Element λ_0 (für das wir in Zukunft 0 schreiben). Ist umgekehrt eine solche Halbgruppe gegeben und für jedes Paar $(\lambda, \mu) \in \in \Lambda \times \Lambda$ ein $\varrho_{\lambda,\mu} \in R$, $\varrho_{\lambda,\mu} \neq 0$, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

$\alpha)$ $\varrho_{\lambda,\mu} = \varrho_{\mu,\lambda}$,

$\beta)$ $\varrho_{0,\lambda} = 1$,

$\gamma)$ $\varrho_{\lambda,\mu} \cdot \varrho_{\lambda+\mu,\nu} = \varrho_{\lambda,\mu+\nu} \cdot \varrho_{\mu,\nu}$,

dann wird $A = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} R x_\lambda$ mit der Multiplikation $x_\lambda \cdot x_\mu = \varrho_{\lambda,\mu} \cdot x_{\lambda+\mu}$ zu einer R-Algebra des betrachteten Typs.

Beispiele: 1) P sei ein beliebiger kommutativer Ring mit 1, $H \subseteq G$ seien zwei abelsche Gruppen, $R = PH$, $A = PG$ die Gruppenringe über P. Dann ist A über R vom betrachteten Typ mit $\Lambda = G/H$.

2) $R \subseteq A$ seien kommutative Ringe der Charakteristik $p \neq 0$ und es existiere eine p-Basis $\{y_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ von A über R. Dann bilden die Potenzprodukte $y_{\sigma_1}^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot y_{\sigma_m}^{\nu_m}$ $(0 \leqq \nu_i \leqq p-1)$ eine Basis von A über R von der in a), b) betrachteten Art. In diesem Fall ist $\Lambda = \bigoplus_{\Sigma} \mathbf{Z}/p$.

Ist A eine R-Algebra mit den Eigenschaften a), b), so nennen wir Λ die Halbgruppe von A und die $\varrho_{\lambda,\mu}$ die Strukturkonstanten von A.

Wir beschäftigen uns mit der folgenden Frage: Es sei A' eine weitere solche Algebra mit der Halbgruppe Λ' und Strukturkonstanten $\sigma_{\lambda',\mu'}$. Wann kann aus einer R-Algebrenisomorphie $A \cong A'$ geschlossen werden, daß $\Lambda \cong \Lambda'$ ist?

Im Fall, daß Λ und Λ' Gruppen sind, erweist es sich, daß der Modul der Differentiale $D_R(A)$ von A über R ein geeignetes Hilfsmittel zur Behandlung dieser Frage ist.

2. A sei eine R-Algebra von der unter **1.** betrachteten Art mit der zugehörigen Halbgruppe Λ und den Strukturkonstanten $\varrho_{\lambda,\mu} \in R$.

Lemma 1. *Ist M ein A-Modul, $d: A \to M$ eine R-lineare Abbildung mit $d(x_\lambda \cdot x_\mu) = x_\lambda\, dx_\mu + x_\mu\, dx_\lambda$ für alle $\lambda, \mu \in \Lambda$, dann ist d eine Derivation von A über R in M.*

Es ergibt sich sofort, daß $d(a \cdot b) = adb + bda$ für alle $a, b \in A$ gilt und $dr = 0$ für $r \in R$.

Lemma 2. *G sei eine abelsche Gruppe, $\varphi : \Lambda \to G$ ein Homomorphismus der Halbgruppe Λ in G. Die R-lineare Abbildung $d_\varphi : A \to A \otimes_{\mathbf{Z}} G$ werde durch*

$$d_\varphi(x_\lambda) = x_\lambda \otimes \varphi(\lambda) \quad \textit{für alle} \quad \lambda \in \Lambda$$

definiert. Dann ist d_φ eine Derivation über R.

Es gilt $d_\varphi(x_\lambda \cdot x_\mu) = d_\varphi(\varrho_{\lambda,\mu} x_{\lambda+\mu}) = \varrho_{\lambda,\mu} \cdot x_{\lambda+\mu} \otimes \varphi(\lambda + \mu)$
$= x_\lambda \cdot x_\mu \otimes \varphi(\lambda) + x_\lambda \cdot x_\mu \otimes \varphi(\mu) = x_\mu\, dx_\lambda + x_\lambda\, dx_\mu$
und die Behauptung folgt aus Lemma 1.

Ist speziell Λ eine abelsche Gruppe, so hat man eine R-Derivation

$$d : A \to A \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda \quad \text{mit} \quad dx_\lambda = x_\lambda \otimes \lambda \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \Lambda\,.$$

Satz 1. *Es sei Λ eine abelsche Gruppe und für alle $\lambda \in \Lambda$ seien die Strukturkonstanten $\varrho_{\lambda,-\lambda}$ in R invertierbar. Dann besitzt $d : A \to A \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda$ die folgende universelle Eigenschaft:*

Ist M ein beliebiger A-Modul und $\delta : A \to M$ eine R-Derivation von A in M, dann existiert genau eine A-lineare Abbildung $h : A \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda \to M$ mit $\delta = h \circ d$. (Mit anderen Worten: *Es ist $A \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda = D_R(A)$ der Differentialmodul von A über R.*)

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt, daß x_λ für alle $\lambda \in \Lambda$ in A invertierbar ist: $x_\lambda^{-1} = \varrho_{\lambda,-\lambda}^{-1} \cdot x_{-\lambda}$. Es ist $1 \otimes \lambda = x_\lambda^{-1} x_\lambda \otimes \lambda = x_\lambda^{-1}\, dx_\lambda$, folglich wird $A \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda$ als A-Modul von den Differentialen dx_λ ($\lambda \in \Lambda$) erzeugt. Dies bedeutet, daß die Abbildung h, wenn sie existiert, eindeutig bestimmt ist.

Es sei jetzt $F = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathbf{Z}\lambda$ die von Λ erzeugte freie abelsche Gruppe und K die von den Elementen $\lambda + \mu - (\lambda + \mu)$ ($\lambda, \mu \in \Lambda$) erzeugte Untergruppe. Dann ist $\Lambda = F/K$ und $A \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda = A \otimes_{\mathbf{Z}} F/A \otimes_{\mathbf{Z}} K$. Die A-lineare Abbildung $H : A \otimes_{\mathbf{Z}} F \to M$ werde durch $H(1 \otimes \lambda) = x_\lambda^{-1}\, \delta x_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$ definiert. Dann ist $H(1 \otimes (\lambda + \mu)) = x_{\lambda+\mu}^{-1}\, \delta x_{\lambda+\mu} = (x_\lambda x_\mu)^{-1}\, \delta(x_\lambda \cdot x_\mu) = x_\lambda^{-1}\, \delta x_\lambda + x_\mu^{-1}\, \delta x_\mu$ $= H(1 \otimes \lambda) + H(1 \otimes \mu)$. Mithin wird $A \otimes K$ durch H annulliert und H induziert eine A-lineare Abbildung $h : A \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda \to M$ mit $h(1 \otimes \lambda) = x_\lambda^{-1}\, \delta x_\lambda (\lambda \in \Lambda)$. Es folgt $h(dx_\lambda) = h(x_\lambda \otimes \lambda) = \delta x_\lambda$.

Bemerkungen a) Sind die $\varrho_{\lambda,-\lambda}$ in R invertierbar, dann folgt, daß alle $\varrho_{\lambda,\mu}$ ($\lambda, \mu \in \Lambda$) in R invertierbar sind, falls Λ eine Gruppe ist.

b) Von den beiden Voraussetzungen des Satz 1 ist keine überflüssig, wie man an Beispielen zeigen kann.

M sei ein A-Modul. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Der}_R(A, M)$ den A-Modul aller R-Derivationen $\delta : A \to M$. Aus Satz 1 ergibt sich:

Korollar: *Es existiert ein in M funktorieller A-Modulisomorphismus*

$$\mathrm{Der}_R(A, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\Lambda, M)\,,$$

wobei $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\Lambda, M)$ in üblicher Weise mit einer A-Modulstruktur zu versehen ist.

Beweis. Nach Satz 1 gilt $\mathrm{Der}_R(A, M) \cong \mathrm{Hom}_A(A \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda, M)$. Nach einer allgemeinen Formel ist $\mathrm{Hom}_A(A \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\Lambda, M)$. Beide Isomorphismen sind funktoriell in M.

Das Korollar kann auch leicht direkt bestätigt werden, indem man zeigt, daß die Abbildung, die jedem $d \in \mathrm{Der}_R(A, M)$ den durch die logarithmische Ableitung $\lambda \to \frac{d\lambda}{\lambda}$ induzierten Homomorphismus $\Lambda \to M$ zuordnet, ein in M funktorieller Isomorphismus $\mathrm{Der}_R(A, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\Lambda, M)$ ist.

3. A und A' seien zwei R-Algebren des betrachteten Typs, die den Voraussetzungen von Satz 1 genügen. Die zugehörigen abelschen Gruppen seien Λ und Λ'.

Satz 2. *Existiert ein Ringepimorphismus $A \to \mathbf{Z}$, so folgt aus einer R-Algebrenisomorphie $A \cong A'$ die Isomorphie der zugehörigen Gruppen: $\Lambda \cong \Lambda'$.*

Beweis. Wir identifizieren A und A' vermöge des gegebenen Isomorphismus. Nach dem Korollar zu Satz 1 hat man einen in M funktoriellen A-Modulisomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\Lambda; M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\Lambda'; M) .$$

Mit Hilfe des Epimorphismus $A \to \mathbf{Z}$ läßt sich jede abelsche Gruppe G als A-Modul auffassen und jeder Gruppenhomomorphismus ist dann zugleich A-Modulhomomorphismus. Man erhält einen in G funktoriellen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\Lambda, G) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\Lambda', G) ,$$

wobei G alle abelschen Gruppen durchläuft. Wie bekannt, folgt hieraus leicht $\Lambda \cong \Lambda'$.

Sind Λ, Λ' abelsche Gruppen und $A = \mathbf{Z}\Lambda$, $A' = \mathbf{Z}\Lambda'$ die zugehörigen Gruppenringe über $\mathbf{Z}$, dann sind die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt, denn man hat eine Augmentation $\mathbf{Z}\Lambda \to \mathbf{Z}$ mit $\sum_{\lambda \in \Lambda} z_\lambda \cdot \lambda \to \sum_{\lambda \in \Lambda} z_\lambda$. Aus einer Isomorphie $\mathbf{Z}\Lambda \cong \mathbf{Z}\Lambda'$ folgt daher $\Lambda \cong \Lambda'$. Etwas allgemeiner ergibt sich:

Korollar. *Λ und Λ' seien beliebige Gruppen, die Gruppenringe $\mathbf{Z}\Lambda$ und $\mathbf{Z}\Lambda'$ seien isomorph. Dann folgt die Isomorphie der Faktorkommutatorgruppen:*

$$\Lambda/[\Lambda, \Lambda] = \Lambda'/[\Lambda', \Lambda'] .$$

Beweis: $\mathbf{Z}[\Lambda/[\Lambda, \Lambda]]$ ist die größte kommutative Faktoralgebra von $\mathbf{Z}\Lambda$. Aus $\mathbf{Z}\Lambda \cong \mathbf{Z}\Lambda'$ folgt daher $\mathbf{Z}[\Lambda/[\Lambda, \Lambda]] \cong \mathbf{Z}[\Lambda'/[\Lambda', \Lambda']]$ und daraus $\Lambda/[\Lambda, \Lambda] \cong \Lambda'/[\Lambda', \Lambda']$ nach Satz 2.

Das Korollar verallgemeinert die aus der Darstellungstheorie bekannte Tatsache, daß für zwei endliche abelsche Gruppen Λ, Λ' aus $\mathbf{Z}\Lambda \cong \mathbf{Z}\Lambda'$ auch $\Lambda \cong \Lambda'$ folgt (vgl. [1], S. 264). Andererseits gilt aber nach der Darstellungstheorie z. B. $k\Lambda \cong k\Lambda'$ für zwei beliebige endliche abelsche Gruppen gleicher Ordnung, wenn k ein algebraisch abgeschlossener Körper ist, dessen Charakteristik die Ordnung nicht teilt (für genauere Aussagen vgl. [4] und [2]).

4. A und A' seien zwei R-Algebren, die beide den Voraussetzungen von Satz 1 genügen, Λ und Λ' die zugehörigen Gruppen. In vielen Fällen kann aus einer R-Algebren-Isomorphie $A \cong A'$ auf $\Lambda \cong \Lambda'$ geschlossen werden, auch wenn keine Augmentation $A \to \mathbf{Z}$ existiert (was z. B. der Fall ist, wenn R der Ring der ganzen Zahlen eines endlichen algebraischen Zahlkörpers $\neq \mathbf{Q}$ ist). Die beiden folgenden Sätze sind Beispiele dafür:

Satz 3. *R sei als $\mathbf{Z}$-Modul frei und es existiere eine R-Algebren-Isomorphie $A \cong A'$. Dann folgt $\Lambda \cong \Lambda'$, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

a) Λ *ist eine Divisionsgruppe,*

b) Λ *ist direkte Summe von zyklischen Gruppen,*

c) Λ *ist eine reduzierte, abzählbare p-Gruppe (p Primzahl).*

Beweis. Identifizieren wir A mit A' durch den gegebenen Isomorphismus, so folgt aus Satz 1 eine A-Modulisomorphie

$$A \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda \cong A \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda' . \tag{1}$$

Es sei T die Torsionsgruppe von Λ, Λ_n die n-Torsionsgruppe ($n \in \mathbf{Z}$), $\Lambda_{(n)}$ die Untergruppe aller Elemente von Λ, die von einer Potenz von n annulliert werden, D die Divisionsgruppe von Λ. Dann induziert der Isomorphismus (1), weil A freier $\mathbf{Z}$-Modul ist, weitere Isomorphismen:

$$A \otimes_{\mathbf{Z}} T \cong A \otimes_{\mathbf{Z}} T' , \tag{2}$$

$$A \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda_n \cong A \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda'_n , \tag{3}$$

$$A \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda_{(n)} \cong A \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda'_{(n)} , \tag{4}$$

$$A \otimes_{\mathbf{Z}} D \cong A \otimes_{\mathbf{Z}} D' . \tag{5}$$

$$A \otimes_{\mathbf{Z}} (\Lambda/T) \cong A \otimes_{\mathbf{Z}} (\Lambda'/T') \text{ usw.} \tag{6}$$

a) Ist Λ Divisionsgruppe, dann nach (5) auch Λ'. Beide Gruppen sind direkte Summen von Exemplaren der additiven Gruppe von $\mathbf{Q}$ und Exemplaren von Gruppen $\mathbf{Z}(p^\infty)$ (vgl. [3], Theorem 4). Tritt $\mathbf{Z}(p^\infty)$ in Λ, Λ' mit der Mächtigkeit α_p bzw. α'_p auf, so ist $\Lambda_{(p)} = \mathbf{Z}(p^\infty)^{\alpha_p}$, $\Lambda'_{(p)} = \mathbf{Z}(p^\infty)^{\alpha'_p}$[1]) und nach (4) folgt

$$[A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}(p^\infty)]^{\alpha_p} \cong [A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}(p^\infty)]^{\alpha'_p} .$$

Die p-Torsionsgruppe von $\mathbf{Z}(p^\infty)$ ist isomorph zu $\mathbf{Z}/p$. Es folgt $(A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/p)^{\alpha_p} \cong (A/pA)^{\alpha_p} \cong (A/pA)^{\alpha'_p} \cong (A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/p)^{\alpha'_p}$ und hieraus $\alpha_p = \alpha'_p$. Tritt $\mathbf{Q}$ in Λ bzw. Λ' mit der Mächtigkeit α bzw. α' auf, so ist $\Lambda/T \cong \mathbf{Q}^\alpha$, $\Lambda'/T' \cong \mathbf{Q}^{\alpha'}$ und aus (6) folgt

$$(A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q})^\alpha \cong (A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q})^{\alpha'} .$$

Diese A-Modul-Isomorphie ist automatisch eine $A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$-Modul-Isomorphie; es folgt $\alpha = \alpha'$.

b) Ist Λ direkte Summe von zyklischen Gruppen, dann auch Λ' als Untergruppe von $A \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda$ ([3], Theorem 17). Λ und Λ' sind dann direkte Summen von Exemplaren $\mathbf{Z}$ und $\mathbf{Z}/p^\nu$ (p Primzahl, $\nu = 1, 2, \ldots$). Es ist wieder zu zeigen, daß jeder Typ in Λ und Λ' mit der gleichen Mächtigkeit auftritt. Für $\mathbf{Z}$ ergibt sich dies aus (6). Die Mächtigkeit, mit der $\mathbf{Z}/p^\nu$ in Λ auftritt, stimmt überein mit der ν-ten Ulmschen Invariante von $\Lambda_{(p)}$, d. h. mit der Dimension des $\mathbf{Z}/p$-Vektorraumes

$$\Lambda_p \cap p^{\nu-1}\Lambda_{(p)}/\Lambda_p \cap p^\nu \Lambda_{(p)} .$$

Da A $\mathbf{Z}$-frei ist, gilt $A \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda_p \cap A \otimes_{\mathbf{Z}} p^\nu \Lambda_{(p)} = A \otimes_{\mathbf{Z}} (\Lambda_p \cap p^\nu \Lambda_{(p)})$ und aus (3) und (4) folgt

$$A \otimes_{\mathbf{Z}} (\Lambda_p \cap p^{\nu-1}\Lambda_{(p)}/\Lambda_p \cap p^\nu \Lambda_{(p)}) \cong A \otimes_{\mathbf{Z}} (\Lambda'_p \cap p^{\nu-1}\Lambda'_{(p)}/\Lambda'_p \cap p^\nu \Lambda'_{(p)}) .$$

[1]) G^α bedeutet die direkte Summe von α Exemplaren G.

Auf beiden Seiten stehen freie A/pA-Moduln, deren Ränge mit den jeweiligen Ulmschen Invarianten übereinstimmen. Es folgt die Übereinstimmung dieser Invarianten und daraus $\Lambda \cong \Lambda'$.

c) Ist Λ eine reduzierte abzählbare p-Gruppe, dann ist auch Λ' reduziert nach (5), p-Gruppe nach (4) und abzählbar, weil A freier R-Modul ist, dessen Rang mit der Mächtigkeit von Λ bzw. Λ' übereinstimmt. Wie unter b) beweist man die Übereinstimmung der Ulmschen Invarianten von Λ und Λ'. Es folgt $\Lambda \cong \Lambda'$ nach dem Satz von ULM ([3], Theorem 14).

Satz 4. *R sei ein Ring der Charakteristik p (p Primzahl), Λ und Λ' seien endlich erzeugte abelsche Gruppen, $\Lambda_{(p)}$ und $\Lambda'_{(p)}$ ihre p-primären Komponenten. Dann folgt aus einer R-Algebren-Isomorphie $R\Lambda \cong R\Lambda'$, daß Rang Λ = Rang Λ' und $\Lambda_{(p)} \cong \Lambda'_{(p)}$ (vgl. [2], Theorem 2 u. 3).*

Beweis. Aus $R\Lambda \cong R\Lambda'$ folgt $R^{p^\nu}[p^\nu\Lambda] \cong R^{p^\nu}[p^\nu\Lambda']$, $(\nu = 0, 1, \ldots)$. Setzen wir $A_\nu = R^{p^\nu}[p^\nu\Lambda] = R^{p^\nu}[p^\nu\Lambda']$, so ergibt sich aus Satz 1

$$A_\nu \otimes_{\mathbf{Z}} (p^\nu\Lambda) \cong A_\nu \otimes_{\mathbf{Z}} (p^\nu\Lambda') .$$

Da A_ν ein Ring der Charakteristik p ist, folgt $A_\nu \otimes_{\mathbf{Z}/p} (p^\nu\Lambda/p^{\nu+1}\Lambda) \cong$ $\cong A_\nu \otimes_{\mathbf{Z}/p} (p^\nu\Lambda'/p^{\nu+1}\Lambda')$ und $\dim_{\mathbf{Z}/p}(p^\nu\Lambda/p^{\nu+1}\Lambda) = \dim_{\mathbf{Z}/p}(p^\nu\Lambda'/p^{\nu+1}\Lambda')$. Mit Hilfe des Hauptsatzes für abelsche Gruppen folgt nun die Behauptung unmittelbar.

Literatur

[1] CURTIS-REINER: Representation theory of finite groups and associative algebras. New York-London: 1962.

[2] DESKINS, E.: Finite abelian groups with isomorphic group algebras. Duke Math. J. **23**, 35—40 (1956).

[3] KAPLANSKI, I.: Infinite abelian groups (Ann Arbor 1954).

[4] PERLIS, S., and G. WALKER: Abelian group algebras of finite order. Trans. Am. Math. Soc. **68**, 420—426 (1950).

(Eingegangen am 30. Juni 1965)

DOUGLIS, A.
Math. Annalen 163, 351—358 (1966)

On Weak Solutions of Non-Linear Partial Differential Equations with Real Characteristics

Dedicated to Professor GOTTFRIED KÖTHE on his 60th birthday, December 25, 1965

By

AVRON DOUGLIS in College Park, Maryland

If a non-linear partial differential equation is also a conservation law, weak solutions can be defined by integration processes as with linear equations. If the partial differential equation has real characteristics, these weak solutions in general will not be continuous everywhere, however, even though initial data be very smooth. A weak solution u, e.g., might be continuously differentiable within each of two or more regular regions within which the solution satisfies the partial differential equation strictly, but be discontinuous across the boundaries of the regions, these boundaries themselves ("shocks") and the jumps in u across them being mutually related by certain laws (the "shock conditions"). Explicit attention to the shock conditions has permitted the construction of such weak solutions that are composites of continuously differentiable solutions.

Impetus to a comprehensive theory of weak solutions of non-linear partial differential equations with real characteristics was given in 1950 and 1951 in the construction by E. HOPF [7] and J. COLE [1], independently, of weak solutions of the equation $u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = 0$ with arbitrary bounded, measurable data on the line $t = 0$. These solutions were both more general and more elegantly derived than the mere composites of smooth solutions obtainable by traditional means and inspired some subsequent effort. Significant extensions were slow to appear, however, the most complete theory today pertaining just to equations in two variables of the form $u_t + (F(x, t, u))_x + G(x, t, u) = 0$. This theory and a few related results concerning hyperbolic systems have been reviewed by O. OLEINIK [10, 11] and B. L. ROZHDESTVENSKY [13]. A parallel theory of multidimensional equations of the form $u_1 + F(x_1, \ldots, x_n, t, u, \mathrm{grad}_x u) = 0$ recently has been initiated by S. N. KRUZHKOV [9], W. H. FLEMING [6], E. D. CONWAY and E. HOPF [2], E. HOPF [8], and A. DOUGLIS [5].

In this paper, a certain difference-differential scheme for partial differential equations of the form

$$u_t + (f(x, t, u))_x = 0 , \tag{1}$$

to be solved under the initial condition

$$u(x, 0) = \varphi(x) , \tag{2}$$

is reconsidered. The justification of the scheme depends on estimates of a particular type for which we previously [3, 5] had required f to be convex in u. Here, a new method of estimation of great simplicity is described, which, for instance, enables us to drop the convexity requirement for f, obtaining results of OLEINIK, FLEMING, and E. HOPF by more elementary means. The method is also applied with advantage to the now standard case of convex f, but how far this method can be extended is not known yet.

Once the estimates governing the difference-differential scheme have been obtained, the convergence of the scheme may be proved by established means we shall merely sketch briefly.

The assumptions common to the two problems we intend to discuss are the following:

(a) The initial data are bounded and measurable. Specifically,

$$|\varphi(x)| \leqq m\,, \tag{3}$$

where m is a constant.

(b) f is continuous with respect to x, t, u for $t \geqq 0$ and for all values of x and u. For any $A > 0$,

$$\sup_{\substack{|u| \leqq A \\ 0 \leqq t \leqq T \\ \text{all } x}} |f(x, t, u)| < \infty\,.$$

(c) A non-negative, non-decreasing, Lipschitz-continuous function $V(v)$, defined for $v \geqq 0$, exists such that

$$\int_m^\infty \frac{dv}{V(v)} = \infty$$

and

$$|f(x', t, u) - f(x'', t, u)| \leqq V(v)|x' - x''| \quad \text{for} \quad |u| \leqq v, \quad 0 \leqq t \leqq T, \quad \text{and all} \quad x', x''\,. \tag{4}$$

This condition was introduced by VVEDENSKAYA (see [11]) because, for $T > 0$, the value M determined by the condition

$$\int_m^M \frac{dv}{V(v)} = T \tag{5}$$

is a bound for the weak solution:

$$|u(x, t)| \leqq M \quad \text{for} \quad 0 \leqq t \leqq T\,. \tag{6}$$

(d) For $|v| \leqq M$, $0 \leqq t \leqq T$, $f(x, t, v)$ is a continuous function of v such that $\dfrac{f(x, t, v') - f(x, t, v'')}{v' - v''} \geqq \alpha$, where α is a positive constant.

If $f(x, t, v)$ is continuously differentiable with respect to v, and $f_v(x, t, v) \geqq \geqq -C$ $(C > 0)$ for $0 \leqq t \leqq T$, $|v| \leqq M$, and all x, this condition is a mere normalization and can be realized by the change of variables

$$x' = x + (C + \alpha)t\,,$$
$$t' = t\,.$$

(e) For $x \leqq 0$, $f(x, t, u) \equiv f(u)$: i.e., f for $x \leqq 0$ is independent of x, t.

This condition, too, is a normalization and may be obtained by altering the original f to the left of a line $x = x_0$, where $x_0 > 0$. Such alterations are permissible whenever the domain of dependence upon which we whish to know the solution of the original problem is contained in the half-plane $x > x_0$ to the right of this line.

(f) For $x \leqq 0$, $\varphi(x) = 0$.

This assumption is a normalization like the last and with the same justification. (Any normalization of the type $\varphi(x) = k$ with $k \neq 0$, such as under Hypothesis (I) below might seem more appropriate than $k = 0$, is reducible to this by the change of dependent variable $u' = u - k$.)

Assumptions (a) and (b) permit us to define weak solutions of (1), (2) in a band

$$B_T\colon\ 0 \leqq t \leqq T, \quad -\infty < x < \infty\,,$$

in the following way:

Definition: Let $U(x, t)$ be Lipschitz-continuous in B_T and satisfy the initial condition

$$U_x(x, 0) = \varphi(x) \tag{7}$$

for almost all x and the non-linear differential equation

$$U_t + f(x, t, U_x) = 0 \tag{8}$$

almost everywhere in B_T. Then $u(x, t) \equiv U_x(x, t)$ is called a weak solution of (1), (2) in B_T.

The ultimate effect of our arguments is to prove that a weak solution of (1), (2) exists in B_T under either of the following alternative assumptions, besides those previously listed:

(I) f is independent of t and is a non-increasing function of x with u fixed, and φ is non-increasing.

(II) f has continuous first and second derivatives with respect to t, u, which are bounded for $0 \leqq t \leqq T$, $|u| \leqq M$. Furthermore,

$$f_{uu}(x, t, u) \geqq a \quad \text{for} \quad (x, t) \in B_T, \qquad |u| \leqq M\,,$$

where a is a positive constant.

The difference-differential scheme by which we intend to obtain weak solutions is described as follows. Let $h > 0$, and let

$$S_h = \{hj\}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\,.$$

The aim of the scheme is to approximate a solution $U(x, t)$ of (7), (8) by a function $U^h(x, t)$ defined for x in S_h and $t \geqq 0$. At the same time, $u \equiv U_x$ is to be approximated by

$$u^h(x, t) = \frac{l}{h}\left[U^h(x, t) - U^h(x - h, t)\right].$$

For brevity, we set

$$U_i \equiv U_i(t) \equiv U^h(ih, t), \quad u_i \equiv u_i(t) \equiv u^h(ih, t)\,,$$

and

$$f_i \equiv f_i(t) = f(ih, t, u_i(t)), \quad f_{x,i} = f_x(ih, t, u_i(t)),$$
$$f_{t,i} = f_t(ih, t, u_i(t)), \quad f_{u,i} = f_u(ih, t, u_i(t)),$$

with similar notation for second derivatives. We also set

$$\dot{f}_i = df_i/dt, \quad \dot{u}_i = du_i/dt, \quad \dot{U}_i = dU_i/dt.$$

The scheme consists of a boundary condition,

(9) $$U_i(t) = -f(0)t \quad \text{for} \quad i = 0, -1, -2, \ldots,$$

initial conditions,

(10) $$U_i(0) = \int_0^{ih} \varphi(x)\, dx, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

and the recursive differential conditions

(11) $$\dot{U}_i + f_i = 0 \quad \text{for all} \quad i.$$

(Assumptions (e) and (f) and the prescribed conditions (9) already imply (11) for $i \leqq 0$.) Conditions (9), (10), (11) lead immediately to the following system of relations involving the u_i alone:

(12) $$u_i(t) = 0 \quad \text{for} \quad i = 0, -1, -2, \ldots;$$

(13) $$u_i(0) = \int_{(i-1)h}^{ih} \varphi(x)\, dx \quad \text{for all} \quad i;$$

(14) $$h\dot{u}_i + f_i - f_{i-1} = 0 \quad \text{for all} \quad i.$$

The estimates controlling the convergence of this difference scheme are stated in the theorems below. The proof for the first theorem, which is included for the sake of completeness, is essentially that of [5].

Theorem 1. *Under conditions* (a) *to* (d), *the solution of* (12), (13), (14) *is bounded as follows:*

(15) $$|u_i(t)| \leqq M \quad \textit{for} \quad 0 \leqq t \leqq T \quad \textit{and all} \quad i.$$

Proof: With $\varepsilon > 0$, define $v(t)$ by the initial condition

$$v(0) = m + \varepsilon$$

and the differential equation

$$\dot{v} = V(v).$$

Our immediate aim is to prove that

(16) $$|u_i(t)| < v(t) \quad \text{for} \quad 0 \leqq t \leqq T \quad \text{and all} \quad i.$$

If (16) is untrue, let i be the least index, and, for this index, let t_0 be the least value of t, such that

(17) $$|u_i(t_0)| = v(t_0).$$

Then $0 < t_0 \leqq T$ and $i > 0$. If (17) is realized with $u_i(t_0) = v(t_0)$, then

$$u_i(t) - v(t) < 0 \quad \text{for} \quad 0 \leqq t < t_0,$$
$$u_i(t_0) - u_{i-1}(t_0) > 0.$$

Hence,

$$(u_i - v)^{\cdot}|_{t=t_0} \geqq 0 ,$$

and by (d)

$$f((i-1)h, t_0, u_i(t_0)) - f((i-1)h, t_0, u_{i-1}(t_0)) > 0 .$$

Now write equation (14) as

$$\begin{aligned} &h(u_i - v)^{\cdot} + [hV(v) + f(ih, t, u_i) - f((i-1)h, t, u_i)] + \\ &\quad + f((i-1)h, t, u_i) - f((i-1)h, t, u_{i-1}) = 0 . \end{aligned} \tag{18}$$

By assumption (c), the first expression in square brackets in (18) is non-negative. But this and the previous two inequalities contradict (18) for $t = t_0$; this contradiction precludes the equality $u_i(t_0) = v(t_0)$ examined. In a similar way, the equality $u_i(t_0) = -v(t_0)$ is precluded, and (17) thus is seen to be impossible. Inequality (16) follows. Since v satisfies the condition

$$\int_{m+\varepsilon}^{v} \frac{dw}{V(w)} = t ,$$

we see, however, that $v(T)$ tends to M, which was defined by (5), as $\varepsilon \to 0$, and condition (15) is immediately verified.

Theorem 2. *Under conditions* (a) *to* (d) *and Hypothesis*(I), *the solution of* (12), (13), (14) *satisfies the condition of monotonicity,*

$$\dot{u}_i(t) \geqq 0 \quad \textit{for} \quad 0 \leqq t \leqq T \quad \textit{and all} \quad i . \tag{19}$$

Furthermore,

$$u_i - u_{i-1} \leqq hV(M)/\alpha . \tag{19'}$$

Proof: We first remark that

$$\dot{u}_i(0) \geqq 0 \quad \text{for all} \quad i . \tag{20}$$

In fact,

$$\begin{aligned} h\dot{u}_i(0) &= f_{i-1} - f_i \\ &= [f((i-1)h, u_{i-1}(0)) - f((i-1)h, u_i(0))] + \\ &\quad + [f((i-1)h, u_i(0)) - f(ih, u_i(0))] \geqq 0 , \end{aligned}$$

either bracket being non-negative because of (I).

Secondly, condition (19) is true (by (12)) for $i \leqq 0$. To carry out an induction, assume the condition holds for $i = k - 1$:

$$\dot{u}_{k-1}(t) \geqq 0 , \tag{21}$$

where k is a positive integer. If condition (19) fails for $i = k$, $\dot{u}_k(t)$ for some value of t takes a negative value we shall denote by $-2c$ ($c > 0$). Let t_0 denote the least such value of t. By (20), $t_0 > 0$. Thus,

$$\dot{u}_k(t_0) = -2c ,$$

and

$$\dot{u}_k(t) > \dot{u}_k(t_0) \quad \text{for} \quad 0 \leqq t < t_0 . \tag{22}$$

Continuity implies the existence of a number δ such that $0 < \delta < t_0$ and that

$$\dot{u}_k(t) < -c \quad \text{for} \quad t_0 - \delta \leqq t \leqq t_0 ,$$

and, integrating, we have

$$u_k(t_0) - u_k(t) < -c(t_0 - t) \quad \text{for} \quad t_0 - \delta \leqq t \leqq t_0 .$$

Applying (d), we obtain:

$$f_k(t_0) - f_k(t) < -\alpha c(t_0 - t) \quad \text{for} \quad t_0 - \delta \leqq t \leqq t_0 .$$

However, by (d) and (21),

$$f_{k-1}(t_0) - f_{k-1}(t) \geqq 0 \quad \text{for} \quad t \leqq t_0 .$$

Hence, for $t_0 - \delta \leqq t \leqq t_0$ we have by these inequalities and (14),

$$h(\dot{u}_k(t) - \dot{u}_k(t_0)) = f_{k-1}(t) - f_k(t) - f_{k-1}(t_0) + f_k(t_0) < 0 ,$$

contradicting (22). The induction is complete, and condition (19) thereby justified. Condition (19′) is an obvious consequence of (19), (14), (c), and (I).

Theorem 3. *Under conditions* (a) *to* (e) *and Hypothesis* (II), *for* $0 < t \leqq T$ *the solution of* (12), (13), (14) *satisfies the condition,*

$$\dot{f}_i(t) \geqq -B/t , \tag{23}$$

where B is a positive constant independent of φ. Hence, a positive constant A exists such that

$$\dot{u}_i(t) \geqq -A/t \quad \textit{for} \quad 0 < t \leqq T . \tag{24}$$

Finally,

$$u_i - u_{i-1} \leqq h\alpha^{-1}(A/t + V(M)) \quad \textit{for} \quad 0 < t \leqq T . \tag{25}$$

Proof: We shall prove (23) by induction on i. By (e) and (12), condition (23) holds for $i = 0$ with any positive B. Assuming

$$\dot{f}_{k-1}(t) \geqq -B/t , \tag{26}$$

where k is a positive integer, we shall show how to determine B in such a way that (23) will follow for $i = k$. If (23) is untrue for $i = k$, then $t\dot{f}_k(t)$ for some value of t is less than $-B$ and equals, say, $-B - 2c$, where $c > 0$. Let t_0 be the least value satisfying this equality. Since $\dot{f}_k$ is continuous, clearly $t_0 > 0$. Thus,

$$t_0\dot{f}_k(t_0) = -B - 2c$$

and

$$t\dot{f}_k(t) > t_0\dot{f}_k(t_0) \quad \text{for} \quad 0 < t < t_0 . \tag{27}$$

Continuity implies the existence of a number δ such that $0 < \delta < t_0$ and that

$$-B - 2c \leqq t\dot{f}_k(t) \leqq -B - c \quad \text{for} \quad t_0 - \delta \leqq t \leqq t_0 , \tag{28}$$

and comparison with (26) shows, in particular, that

$$t(\dot{f}_k(t) - \dot{f}_{k-1}(t)) \leqq -c \quad \text{for} \quad t_0 - \delta \leqq t \leqq t_0 .$$

By (14), therefore,

$$\ddot{u}_k > 0 \quad \text{for} \quad t_0 - \delta \leqq t \leqq t_0 . \tag{29}$$

We shall apply (28) and (29) in an expansion of the function

$$g(t) \equiv t\dot{f}_k(t)$$

about the point t_0 to arrive at a result that, for sufficiently large B, contradicts (27). Since $\dot{f}_k = f_{t,k} + f_{u,k}\dot{u}_k$, we have

$$\dot{g}(t) = \dot{f}_k + tf_{u,k}\ddot{u}_k + t(f_{tt,k} + 2f_{tu,k}\dot{u}_k + f_{uu,k}\dot{u}_k^2) .$$

If we replace $\dot{u}_k$ in this expression by $(\dot{f}_k - f_{t,k})/f_{u,k}$ and then replace $\dot{f}_k$ by g/t, we obtain the result

$$\dot{g}(t) = tf_{u,k}\ddot{u}_k + \frac{1}{tf_{u,k}^2}(f_{uu,k}g^2 + P_k g + Q_k) , \tag{30}$$

where

$$P_k = f_{u,k}^2 + 2t(f_{u,k}f_{tu,k} - f_{t,k}f_{uu,k}) ,$$

$$Q_k = t^2(f_{tt,k}f_{u,k}^2 - 2f_{t,k}f_{u,k}f_{tu,k} + f_{uu,k}f_{t,k}^2) .$$

By (d) and (II), for all sufficiently large B we have

$$f_{uu,k}g^2 + P_k g + Q_k > 0 \tag{31}$$

if $|g| \geqq B$, $0 \leqq t \leqq T$, $|u| \leqq M$. Conditions (28) to (31) thus show that

$$\dot{g}(t) > 0 \quad \text{if} \quad t_0 - \delta \leqq t \leqq t_0 .$$

Since for $t_0 - \delta \leqq t \leqq t_0$

$$g(t) = g(t_0) + (t - t_0)\,\dot{g}(\tilde{t}) ,$$

where $t_0 - \delta < \tilde{t} < t_0$, we conclude that

$$g(t) < g(t_0) \quad \text{for} \quad t_0 - \delta \leqq t < t_0 ,$$

a result that contradicts (27). Condition (23) is thus vindicated for $i = k$, and, the induction now being complete, for every integer i.

Condition (24) follows trivially from (23), (d), and (II), and (25) from (24), (14), (c), and (d). Theorem 3 thus is completely proved.

The foregoing estimates permit a weak solution of either problem to be obtained in the following way. Since $U^h(x, t)$ is Lipschitz-continuous in B_T by Theorem 1, equation (11), and hypothesis (b), we first can find a sequence $\{h_n\}$ of positive numbers such that $h_n \to 0$, h_n/h_{n+1} is an integer, and the functions $U^{h_n}(x, t)$ converge continuously to a Lipschitz-continuous limit. This limit, which we denote by $U(x, t)$, satisfies conditions (9) and (10). Theorems 2 and 3 imply after some argument that, for each $t > 0$, the sequences $\{u^{h_n}(x, t)\}$ converge continuously at all but at most denumerably many values of x to a limit $u(x, t)$ and that the points of convergence are just the points at which $u(x, t)$ is continuous with respect to x, $U_x(x, t)$ exists, $u(x, t) = U_x(x, t)$, and condition (8) holds. The u thus obtained is a weak solution, as desired.

Details of this proof are like those in [5] and are based on results concerning continuous convergence previously developed in [4].

Bibliography

[1] COLE, J. D.: On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics. Quart. Appl. Math. **9**, 225—236 (1951).

[2] CONWAY, E. D., and E. HOPF: Hamilton's theory and generalized solutions of the Hamilton-Jacobi equation. J. Math. Mech. **13**, 939—986 (1964).

[3] DOUGLIS, A.: On discontinuous initial value problems for certain non-linear partial differential equations. Tech. Note BN-119, AFOSR-TN-58-165, AD-152192, Univ of Maryland, Feb., 1958, pp. 1—25.

[4] — On calculating weak solutions of quasi-linear, first order partial differential equations. Contributions to Diff. Eqns., Vol. **1**, pp. 59—94.

[5] — Solutions in the large for multi-dimensional, non-linear partial differential equations of first order. To appear in Ann. Inst. Fourier **15** (1965).

[6] FLEMING, W. H.: J. Math. Mech. **13**, 987—1008 (1964).

[7] HOPF, E.: The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. Comm. Pure Appl. Math. **3**, 201—230 (1950).

[8] — Generalized solutions of non-linear equations of first order. Unpublished.

[9] KRUZHKOV, S. N.: The Cauchy problem in the large for non-linear equations and for certain quasi-linear systems of the first order with several variables. Soviet Math. **5**, 493—496 (1964).

[10] OLEINIK, O.: Discontinuous solutions of non-linear differential equations. Sem. Istituto Naz. Alta Mat. 1962—63, pp. 404—436.

[11] — Discontinuous solutions of non-linear differential equations. Uspekhi Mat. Nauk **12**, 3—73 (1957).

[12] — Construction of a generalized solution of the Cauchy problem for a quasi-linear equation of first order by the introduction of "vanishing viscosity". Uspekhi Mat. Nauk **14**, 159—164 (1959) (Russian). Am. Math. Soc. Translations, Ser. 2, **33**, 277—283.

[13] ROZHDESTVENSKY, B. L.: Discontinuous solutions of hyperbolic systems of quasi-linear equations. Uspekhi Mat. Nauk **15**, 59—117 (1960) (Russian), translated in Russian Math. Surveys **15**, 53—111 (1960).

(Received July 16, 1965)

ELLIGER, S.
Math. Annalen 163, 359—361 (1966)

Über galoissche Körpererweiterungen von unendlichem Rang

Herrn Prof. Dr. Dr. h. c. GOTTFRIED KÖTHE zum 60. Geburtstag gewidmet

Von

SIGURD ELLIGER in Heidelberg

Der Hauptsatz der Galoisschen Theorie kommutativer endlicher Körpererweiterungen besagt: 1. jeder Zwischenkörper ist galoissch, das heißt Fixkörper einer Gruppe von Automorphismen; 2. jede Untergruppe der Automorphismengruppe ist galoissch, das heißt Automorphismengruppe eines Zwischenkörpers. Unter der Voraussetzung der Kommutativität oder der Endlichkeit bleibt jedenfalls Aussage 1. noch richtig. Sie gilt sogar für beliebige Körpererweiterungen, wenn man sie auf Zwischenkörper von endlichem (Links-) Rang beschränkt, d. h. es gilt der

Satz: *Ist E Zwischenkörper einer galoisschen Körpererweiterung K über L mit $(E:L)_1$ endlich, dann ist K über E galoissch.*

Dieser Satz wurde unter der Voraussetzung der lokalen Endlichkeit von NOBUSAWA [4] und allgemein von NAGAHARA und TOMINAGA [3] bewiesen. In dieser Note soll für ihn ein neuer Beweis gegeben werden.

Wir bezeichnen im folgenden mit $G(E', E)$ für eine feste Körpererweiterung K über L, und $L \subseteq E \subseteq E' \subseteq K$, die Menge der E-(Ring)-Monomorphismen von E' in K; mit $(G(E', E) : K_r)$ ihren Rang, d. h. die maximale Kardinalzahl über K_r linear unabhängiger Elemente aus $G(E', E)$. Für Körper E', E gilt nach [1] Folgerung I von Satz II, 2 die Ranggleichung

$$(*) \qquad (G(E', E) : K_r) = |I_1| \, (V_K(E) : V_K(E'))_r \, .$$

Dabei bedeutet $V_K(E)$ den Zentralisator von E in K und $|I_1|$ die Kardinalzahl der Äquivalenzklassen nach der Relation $R : g_1 \sim g_2$ genau dann, wenn $g_1 = g_2 i$ mit einem inneren Automorphismus i gilt. Der Rang besitzt die folgende multiplikative Eigenschaft:

Hilfssatz 1: *Für Körper $L \subseteq E \subseteq E' \subseteq K$ ist*

$$(G(E', L) : K_r) = (G(E', E) : K_r) \, (G(E, L) : K_r) \, .$$

Beweis: Entsprechend der Gleichung (*) gilt auch

$$(G(E', L) : K_r) = |I| \, (V_K(L) : V_K(E'))_r$$

und

$$(G(E, L) : K_r) = |I_2| \, (V_K(L) : V_K(E))_r \, .$$

Wegen der Rangbeziehung

$$(V_K(L) : V_K(E'))_r = (V_K(L) : V_K(E))_r \, (V_K(E) : V_K(E'))_r$$

genügt es, $|I| = |I_1| \, |I_2|$ nachzuweisen. Die Automorphismen von K, die die Elemente von E invariant lassen, bilden eine Untergruppe $G(K, E)$ der Automorphismengruppe $G(K, L)$ von K über L. Sei

$$G(K, L) = \bigcup_{s \in S} G(K, E) \, g_s$$

die Zerlegung von $G(K, L)$ in Rechtsnebenklassen. Sie induziert eine Zerlegung

$$G(E', L) = \bigcup_{s \in S' \subseteq S} G(E', E) g_s \, .$$

Die Zuordnung $g_s \to \mathrm{id}_E g_s$ eines Repräsentanten zu seiner Einschränkung auf E liefert eine eineindeutige Abbildung des Repräsentantensystems $\{g_s \mid s \in S'\}$ auf $G(E, L)$. Die Mächtigkeit $|G(E', L)|$ ist also gleich $|G(E', E)| \, |G(E, L)|$. Ferner wird bei der Abbildung $g_s \to \mathrm{id}_E g_s$ die Klasse H (nach der Relation R) der inneren Automorphismen auf die Klasse der inneren Monomorphismen $\mathrm{id}_E H$ abgebildet, also eine Klasse $g_s H$ auf die Klasse $\mathrm{id}_E g_s H$. Um den Beweis des Hilfssatzes zu Ende zu führen, müssen wir uns noch überzeugen, daß mit g_1, g_1' aus $G(E', E)$ und g_2, g_2' aus $\{g_s \mid s \in S'\}$ die Aussagen

a) $g_1 \sim g_1'$ und $g_2 \sim g_2'$ und b) $g_1 g_2 \sim g_1' g_2'$

äquivalent sind.

Aus a) folgt b): $g_1 = g_1' i_1$ und $g_2 = g_2' i_2$, also $g_1 g_2 = g_1' i_1 g_2' i_2 = g_1' g_2' i$, d. h. $g_1 g_2 \sim g_1' g_2'$.

Aus b) folgt a): $g_1 g_2 = g_1' g_2' i$, durch Einschränkung auf E folgt $\mathrm{id}_E g_2 = \mathrm{id}_E g_2' i$, also, wegen der Eineindeutigkeit der Zuordnung $g_s \to \mathrm{id}_E g_s$, $g_2 = g_2' i$ und damit $g_1 = g_1'$, d. h. $g_2 \sim g_2'$ und $g_1 \sim g_1'$. Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Zum Beweis des Satzes benötigen wir noch das folgende Kriterium dafür, daß eine Körpererweiterung galoissch ist.

Hilfssatz 2: *K über L sei eine Körpererweiterung, $G(K, L)$ die Gruppe aller L-Automorphismen von K, L' ihr Fixkörper, $M = {}_{L'}M$ ein Linksvektorraum über L', enthalten in K, mit $(M : L')_l$ endlich. Dann ist K über L genau dann galoissch, wenn*

$$(M : L)_l = (G(M, L) : K_r) \, .$$

Beweis: Die Notwendigkeit der Aussage ist ein bekannter Satz (und folgt z. B. aus [2], Kap. II, § 3, Theorem 1 mit $\mathfrak{M}_1 = {}_L M$, $\mathfrak{M}_2 = {}_L K$, $\mathfrak{A} = G(K, L) \, K_r$, $\mathfrak{B} = G(M, L) K_r$, und Kap. VII, § 2, Prop. 1). Umgekehrt ist nach demselben Satz $(M : L') = (G(M, L') : K_r)$, andererseits nach Voraussetzung $(M : L) = (G(M, L) : K_r)$. Nach Definition von L' ist $G(K, L') = G(K, L)$, und, da jeder Monomorphismus sich zu einem Automorphismus fortsetzen läßt ([2], Kap. VII, § 4, Theorem 1) $G(M, L') = G(M, L)$, also $(M : L) = (G(M, L') : K_r)$. Somit gilt $(M : L) = (M : L') \, (L' : L) = (M : L')$ und, da $(M : L')$ endlich ist, $L' = L$.

Wir kommen jetzt zum Beweis des Satzes. E' sei der Fixkörper von $G(K, E)$. Dann ist nach Hilfssatz 2

$$(G(E', L) : K_r) = (E' : L)_l = (E' : E)_l (E : L)_l \, .$$

Nach Hilfssatz 1 ist

$$(G(E', L) : K_r) = (G(E', E) : K_r)\,(G(E, L) : K_r)$$

und wieder nach Hilfssatz 2

$$(G(E, L) : K_r) = (E : L)_l\,.$$

Daraus folgt

$$(G(E', E) : K_r) = (E' : E)_l$$

wegen der Endlichkeit von $(E : L)_l$, und, nach Hilfssatz 2, K über E galoissch.

Literatur

[1] Elliger, S.: Über das Rangproblem bei Körpererweiterungen. Demnächst in J. reine angew. Math.

[2] Jacobson, N.: Structure of rings. Am. Math. Soc. Coll. Publ. **37** (1956).

[3] Nagahara, T., and H. Tominaga: Some remarks on Galois extensions of division rings. Math. J. Okay. Univ. **9**, 5—8 (1960).

[4] Nobusawa, N.: A note on galois extensions of division rings. Math. J. Okay. Univ. **7**, 179—183 (1957).

(Eingegangen am 31. Juli 1965)

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · HEIDELBERG · NEW YORK

Springer Tracts in Natural Philosophy

Volume 8

Edited by C. Truesdell
Co-Editors: L. Collatz, G. Fichera, P. Germain, J. Keller, A. Seeger

Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité

Par Maurice Roseau

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

Avec 7 figures
XII, 254 pages 8vo. 1966
Pleine toile DM 39,—

Table des matières:

La théorie spectrale des opérateurs linéaires dans les espaces vectoriels à un nombre fini de dimensions. — Etude des systèmes d'équations différentielles linéaires. — Systèmes différentiels linéaires; premiers résultats sur la stabilité des solutions. — Systèmes différentiels non linéaires; théorèmes d'existence et propriétés des solutions. — Stabilité des solutions de certains systèmes différentiels non linéaires. — La méthode directe de Liapounoff; applications. — Le théorème de Poincaré-Liapounoff dans le cas où la matrice de l'approximation linéaire dépend du temps. — Le théorème de Poincaré-Liapounoff: cas où l'équation caractéristique associée à la première approximation a une seule racine nulle, les autres ayant toutes leur partie réelle négative. — La méthode des perturbations. — La méthode des perturbations: solutions périodiques sous harmoniques. — Théorèmes de stabilité des orbites. — La théorie de la synchronisation. — La théorie de la synchronisation: applications. — Systèmes différentiels linéaires à coefficients périodiques dépendant d'un petit paramètre; stabilité de la solution stationnaire. — Etude générale des systèmes quasi linéaires périodiques. — Solutions presque périodiques de systèmes linéaires et quasi linéaires. — Sur l'existence de solutions périodiques de certains systèmes autonomes fortement non linéaires; la relaxation. — Systèmes fortement non linéaires et théorie de la synchronisation. Bibliographie. — Index alphabétique.

Seite

FISCHER, B., Frobeniusautomorphismen endlicher Gruppen 273
(Anschrift: Dept. of Mathematics, Yale University, Box 2155, Yale Station, New Haven, Conn./USA)

MICHLER, G., Der Satz von Artin-Wedderburn und der Satz von Goldie 299
(Anschrift: Mathematisches Seminar der Univ., 6 Frankfurt/M., Robert-Mayer-Straße 6)

KULTZE, R., Über die Poincaré-Dualität in der Bordismentheorie 305
(Anschrift: 69 Heidelberg, Zur Forstquelle 3)

GRÜNSKY, H., Über die Reduktion eines linearen Differentialoperators zweiter Ordnung im Komplexen 312
(Anschrift: Mathematisches Institut der Univ., 87 Würzburg, Klinikstr. 6)

STUMMEL, F., Über die Differenzenapproximation des Dirichletproblems für eine lineare elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung 321
(Anschrift: Mathematisches Seminar der Univ., 6 Frankfurt/M., Robert Mayer-Straße 8)

WEIDMANN, J., Integraloperatoren der Spurklasse 340
(Anschrift: Institut für angew. Mathematik, 69 Heidelberg, Tiergartenstr.)

KUNZ, E., Gruppenringe und Differentiale 346
(Anschrift: Mathematisches Institut der Univ., 69 Heidelberg, Tiergartenstr.)

DOUGLIS, A., On Weak Solutions of Non-Linear Partial Differential Equations with Real Characteristics 351
(Anschrift: Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, Maryland/USA)

ELLIGER, S., Über galoissche Körpererweiterungen von unendlichem Rang 359
(Anschrift: 6901 Heidelberg-Eppelheim, Wasserturmstr. 36)

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Edgar Seidler, 1 Berlin 31 (Wilmersdorf), Heidelberger Platz 3. Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York — Druck der Brühlschen Universitätsdruckerei, Gießen
Printed in Germany