SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Mathematische Annalen
Verlag: Springer
Jahr: 1966
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN235181684_0165
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0165

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Mathematische Annalen

Begründet 1868 durch Alfred Clebsch · Carl Neumann

Fortgeführt durch Felix Klein · David Hilbert
Otto Blumenthal · Erich Hecke

Herausgegeben von **Heinrich Behnke,** Münster i. W.
Richard Courant, New York
Hans Grauert, Göttingen
Friedrich Hirzebruch, Bonn
Heinz Hopf, Zürich
Gottfried Köthe, Frankfurt/M.
Bartel L. van der Waerden, Zürich

Band 165 · 1966

Springer-Verlag · Berlin · Heidelberg · New York

Alle Rechte, einschließlich das der Übersetzung in fremde Sprachen und das der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung, vorbehalten. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0,30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Springer-Verlag/Berlin · Heidelberg · New York

Printed in Germany

Druck der Brühlschen Universitätsdruckerei Gießen

NIEDERSÄCHS.
STAATS- U. UNIV.-
BIBLIOTHEK
GÖTTINGEN

2 1966.5039

Inhalt des 165. Bandes

Seite

BAER, R.: Noethersche Gruppen II 165

BENZ, W.: Eine Kennzeichnung der van der Waerden-Smid-Geometrien 19

GRAMSCH, B.: σ-Transformationen in lokalbeschränkten Vektorräumen 135

GUDERLEY, G.: Ein Extremalprinzip für reibungsfreie stationäre Strömungen eines kompressiblen Mediums 62

GÜNTHER, P.: Sphärische Mittelwerte in kompakten harmonischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten 281

HABETHA, K.: Über eine Integraldarstellung und das Phragmén-Lindelöfsche Prinzip bei elliptischen Differentialgleichungen 91

HÄRTTER, E.: Eine Bemerkung über Basen 24

HELGASON, S.: An Analogue of the Paley-Wiener Theorem for the Fourier Transform on Certain Symmetric Spaces 297

HELGASON, S.: Totally Geodesic Spheres in Compact Symmetric Spaces 309

HELMBERG, G.: Über konservative Transformationen 44

HILDEBRANDT, S.: Über das Randverhalten von Minimalflächen 1

KLÖTZLER, R.: Eine bemerkenswerte Abschätzung zur Feldtheorie quadratischer Variationsprobleme 36

KÖTHE, G.: Hebbare lokalkonvexe Räume 181

MARUHN, K.: Einige Bemerkungen zur Theorie der Gezeiten 111

MAURIN, K.: Allgemeine Eigenfunktionsentwicklungen, unitäre Darstellungen lokalkompakter Gruppen und automorphe Funktionen 204

MÜLLER, B.: Über vollständige (Ko-) Homologie 223

NITSCHE, J. C. C.: Ein Einschließungssatz für Minimalflächen 71

OSTROWSKI, A. M.: A Contribution to the Theory of the Fourier Integral Formula . 261

PERESSINI, A. L., and D. R. SHERBERT: Order Properties of Linear Mappings on Sequence Spaces 318

PIETSCH, A.: Quasinukleare Abbildungen in normierten Räumen 76

SALIÉ, H.: Reichweite von Mengen aus drei natürlichen Zahlen 196

SCHAEFER, H. H.: Eine Klasse irreduzibler positiver Operatoren 26

SCHÄFKE, F. W., und A. SCHNEIDER: S-hermitesche Rand-Eigenwertprobleme. II . . 236

SCHMIDT, G.: Über die Drehschwingungen von Kurbelwellen 152

SCHNEIDER, A., s. SCHÄFKE, F. W. 236

SHERBERT, D. R., s. PERESSINI, A. L. 318

STAUDE, U.: Periodische Lösungen bei nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typ 117

TUTSCHKE, W.: Zur Theorie der parameterabhängigen Differentialformen. II. Lineare Differentialoperatoren zweiter Ordnung und zugeordnetes Koeffizientendifferential 31

Mathematische Annalen

16. 06. 1966

Begründet 1868 durch Alfred Clebsch · Carl Neumann

Fortgeführt durch Felix Klein · David Hilbert
Otto Blumenthal · Erich Hecke

Herausgegeben von **Heinrich Behnke,** Münster i. W.
Richard Courant, New York
Hans Grauert, Göttingen
Friedrich Hirzebruch, Bonn
Heinz Hopf, Zürich
Gottfried Köthe, Frankfurt/M.
Bartel L. van der Waerden, Zürich

Band 165 · Heft 1 · 1966

1-4. + T. J. 8° Z. Nat. 593

Springer-Verlag · Berlin · Heidelberg · New York

Math. Ann. · Abgeschlossen am 25. Mai 1966 · A 21 265 E

Mathematische Annalen

Begründet 1868 durch *Alfred Clebsch* und *Carl Neumann*, früher herausgegeben von *Alfred Clebsch* (1869—1872), *Carl Neumann* (1869—1876), *Felix Klein* (1876—1924), *Adolph Mayer* (1876—1901), *Walther v. Dyck* (1888—1921), *David Hilbert* (1902—1939), *Otto Blumenthal* (1906—1938), *Albert Einstein* (1920—1928), *Constantin Carathéodory* (1925—1928), *Erich Hecke* (1929—1947), *Franz Rellich* (1947—1955), *Kurt Reidemeister* (1947—1963).

Band 1—80 Leipzig, B. G. Teubner, ab Band 81 (1920) Berlin, Springer.

An unsere Mitarbeiter!

Die Korrekturkosten sind bei den „Mathematischen Annalen" sehr hoch. Für ihre Verminderung muß unbedingt Sorge getragen werden. Wir richten deshalb an alle unsere Mitarbeiter die freundliche dringende Bitte, zu diesem Ziele an ihrem Teile mit beitragen zu wollen. Dazu ist nötig:

1. Das Manuskript muß *völlig druckfertig* und *gut leserlich* sein und für den Setzer *gemäß den „Hinweise für die Autoren"* (herausgegeben von Redaktion und Verlag) vorbereitet sein. — Diese Hinweise können von der Redaktion angefordert werden.

2. Veränderungen des Textes in der Korrektur sind auf die Fälle zu beschränken, wo sich nachträglich *wirkliche Irrtümer* herausstellen. Insbesondere sind rein stilistische Verbesserungen zu unterlassen. Sollte ein Irrtum bemerkt werden, noch bevor Korrektur eingetroffen ist, dann ist ein verbesserter Text sofort an die Redaktion zu schicken, die dafür Sorge tragen wird, daß das Manuskript noch vor dem Satz berichtigt wird.

Jede Änderung des schon gesetzten Textes muß zu Lasten der Autoren gehen.

Die Reihenfolge der Veröffentlichungen behält sich die Redaktion vor.

Die Redaktion der Mathematischen Annalen

Mathematische Annalen

Erscheinen zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung zwanglos in Heften, die zu Bänden vereinigt werden. Sie sind durch jede Buchhandlung zu beziehen. Der Preis des Bandes beträgt DM 96,—.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskripts und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0,30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Mathematischen Annalen bestimmte Manuskripte können bei jedem der unten verzeichneten Redaktionsmitglieder eingereicht werden:

Professor Dr. Dr. h. c. H. Behnke, 44 Münster/Westf., Rottendorffweg 17,

Professor Dr. R. Courant, 142 Calton Road, New Rochelle, N. Y. USA,

Professor Dr. H. Grauert, Mathematisches Institut der Universität, 34 Göttingen, Bunsenstr. 3—5,

Professor Dr. F. Hirzebruch, Mathematisches Institut der Universität, 53 Bonn (Rhein), Wegelerstr. 10,

Professor Dr. Dr. h. c. H. Hopf, Zollikon bei Zürich, Alte Landstraße 37,

Professor Dr. Dr. h. c. G. Köthe, 6 Frankfurt/Main, Parkstraße 14[1],

Professor Dr. Dr. h. c. B. L. van der Waerden, Mathematisches Institut der Universität Zürich, 8006 Zürich/Schweiz

Inhaltsverzeichnis des Heftes auf Seite 4

HILDEBRANDT, S.
Math. Annalen 165, 1—18 (1966)

Über das Randverhalten von Minimalflächen

Meinem verehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. ERNST HÖLDER zum 65. Geburtstag gewidmet

STEFAN HILDEBRANDT

Das erste Resultat über das Randverhalten von Minimalflächen fanden RIEMANN und WEIERSTRASS: Enthält der Rand einer Minimalfläche ein geradliniges Stück Γ_0, so kann man sie analytisch und als Minimalfläche über Γ_0 hinaus fortsetzen. Erst 1951 gelang es HANS LEWY [6] zu zeigen, daß man jede Minimalfläche analytisch (und als eine Minimalfläche) über einen analytischen Bogen ihrer Randkurve hinaus fortsetzen kann.

Ein bisher offen gebliebenes Problem ist die Frage nach dem Verhalten von Minimalflächen in der Nähe der Randkurve, wenn diese zwar genügend oft differenzierbar, aber nicht analytisch ist. Auf diese Frage hat mich R. COURANT hingewiesen, sie findet sich auch in dem kürzlich veröffentlichten Ergebnisbericht über Minimalflächen von J. C. C. NITSCHE[1]. Es ist naheliegend zu vermuten, daß eine Minimalfläche so oft stetig differenzierbar an ihrem Rande ist, wie dieser glatt ist.

Bei einer parametrischen Darstellung von Minimalflächen ist die ganze Nichtlinearität des Minimalflächenproblems in der Randbedingung verborgen. Um zur Lösung der genannten Aufgabe Abschätzungsmethoden mittels L_2-Schranken anwenden zu können, wie sie für das Dirichletproblem linearer elliptischer Differentialgleichungen entwickelt worden sind, hat R. COURANT daher vorgeschlagen, die Randbedingungen lokal zu linearisieren, indem man die Randkurve der Minimalfläche auf einem kleinen Stück gerade biegt. Dabei werden freilich die Differentialgleichungen der Minimalfläche in ein quasilineares elliptisches System transformiert. Diese Transformation führen wir in Abschnitt 2 durch. In Nr. 3 stellen wir die a priori-Schranken für die transformierte Fläche x auf. Es sind L_2-Schranken für die Ableitungen von x, die in bekannter Weise mittels Energieungleichungen gewonnen und dann mit dem Sobolewschen Einbettungssatz in punktweise Schranken umgewandelt werden. Als Hilfsmittel dienen zwei Ungleichungen, deren Beweis wir auf den Anhang in Nr. 7 verschoben haben. Die erste ist eine spezielle Variante einer Sobolewschen Ungleichung, die zweite wäre, wenn die Abschneidefunktion η nicht aufträte, Spezialfall einer viel allgemeineren Ungleichung von GAGLIARDO und NIRENBERG (vgl. [9], S. 125).

Verwandte Abschätzungen haben LADYSCHENSKAJA und URALZEWA für das Dirichletproblem bei quasilinearen elliptischen Gleichungen (vgl. z. B. [5]) und kürzlich FRITZ JOHN [4] für die Schalentheorie aufgestellt.

[1] Vgl. [10], Chapter III, 5, S. 237—238, und Problem 31, S. 259.

Zu Sätzen über das Randverhalten von Minimalflächen gelangen wir in Nr. 4 mittels des H. Lewyschen Resultates, das uns die Gültigkeit unserer Abschätzungen für Minimalflächen mit analytischem Rand liefert. Wir suchen nun Minimalflächen mit glattem Rand durch solche mit analytischem Rand so zu approximieren, daß die Schranken für die approximierende Folge gleichmäßig sind. Das gelingt wenigstens in zwei wichtigen Fällen, so daß wir als Hauptresultat bekommen:

1° Zu jeder $(s+2)$-mal differenzierbaren geschlossenen Randkurve Γ gibt es eine wenigstens s-mal am Rande stetig differenzierbare Minimalfläche, die zudem eine Lösung des Plateauschen Problems[1a] für Γ ist.

2° Falls eine Minimalfläche ein starkes relatives Minimum des Plateau-Problems liefert und einen $(s+2)$-mal differenzierbaren Rand hat, so ist sie am Rande wenigstens s-mal stetig differenzierbar.

(Für die genaue Formulierung vgl. Satz 4.1 und 4.2.)

In Nr. 6 wenden wir unser Resultat auf die konforme Abbildung von einfach zusammenhängenden zweidimensionalen Gebieten an. Der Abschnitt 5 weist auf einige offene Probleme hin.

Wir bemerken, daß unsere Schranken auch für das freie Problem bei Minimalflächen und für Flächen konstanter mittlerer Krümmung aufgestellt werden können, daß aber Existenzbetrachtungen für das Randverhalten fehlen, abgesehen von H. LEWY[s] Resultat [7] für das halbfreie Problem bei Minimalflächen mit analytischem Flächenstück als Rand.

Herrn Prof. COURANT möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für viele Hinweise danken. Gleichfalls danke ich Prof. JÜRGEN MOSER und Dr. PAUL RABINOWITZ für viele hilfreiche Gespräche.

1. Bezeichnungen

Wir betrachen Flächen $\mathfrak{x}(u, v) = (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v))$ und $\mathfrak{y}(u, v) = (y^1(u, v), y^2(u, v), y^3(u, v))$ im dreidimensionalen euklidischen Raum E^3, die in einem abgeschlossenen Bereich $\bar{B} = B + C$, $C = \partial B$, der u, v-Ebene definiert sind.

Die Ableitung nach u bzw. v wird mit D_u bzw. D_v bezeichnet. Unter D, D^2, ..., D^s verstehen wir irgendeine Ableitung erster, zweiter, ..., s-ter Ordnung nach u und v, und unter $\sum_{D^s}$ eine Summe über alle Ableitungen s-ter Ordnung.

Mit $\|\mathfrak{y}\|_G$ (oder einfach $\|\mathfrak{y}\|$) bezeichnen wir die L_2-Norm

$$\|\mathfrak{y}\|_G = \sqrt{\int\int_G \sum_{i=1}^{3} |y^i(u, v)|^2 \, du \, dv}$$

und mit $|\mathfrak{y}|_G$ (oder einfach $|\mathfrak{y}|$) die Supremumsnorm

$$|\mathfrak{y}|_G = \sup_{(u,v)\in G} \max_{i=1\ldots3} |y^i(u, v)| .$$

[1a] Wir schließen uns in der Bezeichnung LEBESGUE an und nennen eine in Γ eingespannte Minimalfläche eine Lösung des Plateauproblems für Γ, wenn sie den Flächeninhalt zum Minimum macht.

Ferner betrachten wir die Normen

$$\|\mathfrak{y}\|_{m,G} = \sqrt{\int\int_G \left(\sum_{i=1}^{3} \sum_{s=0}^{m} \sum_{D^s} |D^s y^i|^2 \right) du\, dv}$$

und

$$|\mathfrak{y}|_{m,G} = \sup_{(u,v)\in G} \max_{\substack{i=1\ldots3 \\ s\leqq m}} |D^s y^i(u,v)|$$

Die Klasse der in einem Gebiet G der u, v-Ebene s-mal bzw. unendlich oft stetig differenzierbaren Vektoren $\mathfrak{y}(u,v)$ bezeichnen wir mit $C^s(G)$ bzw. $C^\infty(G)$, und mit $C_c^\infty(G)$ meinen wir die Klasse der Vektoren aus $C^\infty(G)$, die einen in G gelegenen kompakten Träger besitzen.

Weiter führen wir den Hilbertraum $H_m(G)$ ein, der durch Vervollständigung von $C^m(\bar{G})$ in der m-Norm $\|\mathfrak{y}\|_{m,G}$ entsteht.

Aus dem Sobolewschen Lemma (vgl. z. B. [9], S. 144) folgt, daß für zweidimensionale Gebiete G, deren Rand eine Kegelbedingung erfüllt, $C^s(\bar{G}) \subseteqq H_{s+2}(G)$ und $|\mathfrak{y}|_{s,\bar{G}} \leqq c_s(G) \cdot \|\mathfrak{y}\|_{s+2,G}$ gilt.

Schließlich bezeichnen wir mit R_a und Q_a die Rechtecke

$$R_a = \{(u,v) : 0 \leqq u \leqq a, |v| \leqq a\} \quad \text{und} \quad Q_a = \{(u,v) : |u| \leqq a, |v| \leqq a\}.$$

Wir sagen, eine Funktion hat einen „relativ kompakten Träger in R_a", wenn es ein kleineres Rechteck $R_{a'}$, $0 < a' < a$, gibt, so daß die Funktion im Komplement $R_a - R_{a'}$ verschwindet.

Analog kann man die Normen $|\eta|_G$, $|\eta|_{m,G}$ auch für Funktionen η definieren.

2. Aufstellung der Variationsgleichungen mit linearen Randbedingungen

Sei B ein einfach zusammenhängendes Gebiet in der u, v-Ebene und Γ eine geschlossene Jordankurve im 3-dimensionalen Raume. Dann verstehen wir unter einer Minimalfläche mit der Randkurve Γ einen in $B + C$ definierten und stetigen Vektor $\mathfrak{y}(u,v)$, der in B harmonisch ist, die Randkurve C auf die Jordankurve Γ topologisch abbildet und in B den Konformitätsrelationen

$$(D_u\mathfrak{y})^2 - (D_v\mathfrak{y})^2 = 0, \qquad D_u\mathfrak{y} \cdot D_v\mathfrak{y} = 0 \tag{2.1}$$

genügt.

Wegen der Invarianz dieser Bedingungen gegenüber konformen Abbildungen von B können wir annehmen, daß B die rechte Halbebene $u > 0$ und C die imaginäre Achse $u = 0$ ist.

Bezeichne R_a das Rechteck $\{0 \leqq u \leqq a, \ |v| \leqq a\}$, C_a das Intervall $\{u = 0, |v| \leqq a\}$ auf der imaginären Achse und Γ_a das Bild von C_a unter der Abbildung $\mathfrak{y}(u,v)$. Für eine hinreichend klein gewählte Zahl $a_0 > 0$ gibt es dann eine topologische Abbildung

$$x = g(y) \tag{2.2}$$

des y-Raumes in den ebenfalls 3-dimensionalen x-Raum, die Γ auf eine Jordankurve Σ und Γ_{a_0} auf ein Intervall $\{x^1 = x^2 = 0, |x^3| \leqq b\}$ abbildet und

überdies so normiert ist, daß

$$g(\mathfrak{y}(0,0)) = (0,0,0) = 0$$

ist. Das Bild der Minimalfläche $\mathfrak{y}(u,v)$ unter der Abbildung (2.2) nennen wir $\mathfrak{x}(u,v) = g(\mathfrak{y}(u,v))$. Bezeichnet $y = h(x)$ die inverse Transformation zu g, so gilt also

$$\mathfrak{y}(u,v) = h(\mathfrak{x}(u,v)) \tag{2.3}$$

und

$$\mathfrak{x}(0,0) = (0,0,0) = 0\,. \tag{2.4}$$

Wir sagen, daß Γ_{a_0} differenzierbar von der Ordnung p ist und schreiben dafür $\Gamma_{a_0} \in C^p$, falls man $g(y) \in C^p$ wählen kann; dann ist auch $h(x) \in C^p$.

Sei $H = H(x)$ die Jacobimatrix $H = \dfrac{\partial h}{\partial x}$ und $A = A(x)$ ihre Gaußtransformierte $A = H^T \cdot H$. In den folgenden Abschätzungen (siehe Nr. 3) werden als Information über Γ nur $A = (a_{ij})$ und deren Ableitungen $A' = \left(\dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}\right)$, $A'' = \left(\dfrac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}\right)$, ... verwendet. Bezeichnet man in leicht verständlicher Weise mit $|A|_p$ das Maximum der Supremumsnormen von A, A', ..., $A^{(p)}$ auf dem E^3, so setzen wir auch

$$|\Gamma|_{p+1} = |A|_p\,. \tag{2.5}$$

Aus (2.3) ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_B(\mathfrak{y}) &= \iint_B \{(D_u\mathfrak{y})^2 + (D_v\mathfrak{y})^2\}\, du\, dv \\ &= \iint_B \{D_u\mathfrak{x} \cdot A(\mathfrak{x}) D_u\mathfrak{x} + D_v\mathfrak{x} \cdot A(\mathfrak{x}) D_v\mathfrak{x}\}\, du\, dv = \mathscr{A}_B(\mathfrak{x})\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ferner kann man bei hinreichend kleinem a_0 die Abbildung $g(x)$ so wählen, daß $A(x)$ im ganzen x-Raum gleichmäßig definit und beschränkt ist:

$$\alpha \cdot |\xi|^2 \leqq \xi \cdot A(x)\xi \leqq \beta \cdot |\xi|^2 \tag{2.7}$$

für alle $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ und für alle x, $0 < \alpha < \beta$. Das bedeutet: Wenn $\mathscr{D}_B(\mathfrak{y}) < \infty$ ist, so auch $\mathscr{D}_B(\mathfrak{x}) < \infty$, und umgekehrt.

Eine leichte Rechnung ergibt, daß die Gleichung $\Delta\mathfrak{y} = 0$ unter der Transformation (2.2) in das quasilineare elliptische Gleichungssystem

$$-2D_u[D_u\mathfrak{x}A(\mathfrak{x})] - 2D_v[D_v\mathfrak{x}A(\mathfrak{x})] + D_u\mathfrak{x} \cdot A'(\mathfrak{x})D_u\mathfrak{x} + D_v\mathfrak{x} \cdot A'(\mathfrak{x})D_v\mathfrak{x} = 0 \tag{2.8}$$

übergeht. Die Konformitätsbedingung $D_u\mathfrak{y} \cdot D_v\mathfrak{y} = 0$ transformiert sich in

$$D_u\mathfrak{x} \cdot A(\mathfrak{x}) D_v\mathfrak{x} = 0\,.$$

Setzen wir jetzt $\mathfrak{y}$ und damit auch $\mathfrak{x} \in C^2(R_a)$ voraus, so folgt wegen $x^1 = x^2 = 0$ auf C_{a_0}, daß auch $D_v x^1 = D_v x^2 = 0$ auf C_{a_0} ist, womit die obige Gleichung in

$$[D_u\mathfrak{x}A(\mathfrak{x})]_3 \cdot D_v x^3 = 0$$

übergeht. Da aber $\mathfrak{x}$ den Rand C strikt monoton auf Σ abbildet, so ist fast überall $D_v x^3 \neq 0$ und daher aus Stetigkeitsgründen

$$[D_u\mathfrak{x}A(\mathfrak{x})]_3 = 0 \quad \text{auf } C_{a_0}\,. \tag{2.9}$$

Multiplizieren wir jetzt die Gleichung (2.8) mit einem Vektor

$$\phi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3) \in C^1(R_a)$$

mit relativkompaktem Träger in R_a, $a \leqq a_0$, für den außerdem $\phi^1 = \phi^2 = 0$ auf C_a ist, während ϕ^3 frei bleibt, und integrieren wir das Ergebnis anschließend über R_a, so ergibt sich nach einer partiellen Integration

$$\text{(2.10)} \qquad \int\int_{R_a} \{2D_u x \cdot A(x) D_u \phi + 2D_v x \cdot A(x) D_v \phi + (D_u x \cdot A'(x) D_u x + D_v x \cdot A'(x) D_v x)\phi\}\, du\, dv = 0,$$

da wegen der Gleichungen (2.9) und $\phi^1 = \phi^2 = 0$ auf C_a und $\phi = 0$ auf $\partial R_a - C_a$ kein Randintegral auftritt.

Die soeben beschriebenen Vektoren ϕ wollen wir „zulässige Testvektoren" und die Gleichung (2.10) „Variationsgleichung" nennen, da sie nicht nur die Differentialgleichungen (2.8), sondern wegen der Allgemeinheit der zugelassenen Testvektoren ϕ auch eine Art natürlicher Randbedingung auf C_a enthält. In der Tat lassen sich ja die Konformitätsbedingungen (2.1) bei der Lösung des Plateauschen Problems aus einer natürlichen Randbedingung gewinnen, wie COURANT gezeigt hat (vgl. [2], S. 105–115). Falls man vom Plateauschen Problem ausgeht, läßt sich (2.10) auch direkt aus dem Variationsproblem gewinnen, wenn man das Courantsche Ergebnis [1] heranzieht, daß eine Lösung $\mathfrak{y}$ des Plateauproblems, die ja ein Minimalvektor von „$\mathscr{D}_B(\mathfrak{z}) \to \text{Min}$" ist unter allen $\mathfrak{z} \in C^0(\bar{B}) \cap H_1(B)$, welche C topologisch auf Γ abbilden, auch ein Minimalvektor eines erweiterten Variationsproblems ist:

„$\mathscr{D}_B(\mathfrak{z}) \to \text{Min}$" für alle $\mathfrak{z}$, die C nur in dem verallgemeinerten Sinne auf Γ abbilden, daß der Abstand von $\mathfrak{z}(u, v)$ zu Γ gegen Null strebt, falls auch der Abstand von (u, v) zu C gegen Null geht, und die noch in einer gewissen Weise mit einem geschlossenen Polygon verhäkelt sind.

Für das erweiterte und mittels (2.2) transformierte Variationsproblem ist dann bei hinreichend kleinem $|\varepsilon|$ der Vektor $x + \varepsilon \cdot \phi$, ϕ wie oben, ein Vergleichsvektor, so daß sich aus

$$\mathscr{A}_B(x + \varepsilon\phi) \geqq \mathscr{A}_B(x) \qquad \text{für alle} \qquad |\varepsilon| \leqq \varepsilon_0$$

in bekannter Weise (2.10) ergibt. Wir wollen hierauf nicht näher eingehen.

3. A priori Ungleichungen

Für das folgende setzen wir voraus, daß $x(u, v) \in C^\infty(R_{a_0})$ und $\Gamma_{a_0} \in C^\infty$ ist. Dann betrachten wir zwei Folgen von Rechtecken R_{a_i} und R_{b_i} mit

$$a_0 > a_1 > b_1 > a_2 > b_2 > \cdots > a_{i-1} > b_{i-1} > a_i > b_i > \cdots;$$

die Zahlen a_i und b_i werden später geeignet festgelegt. Anschließend wählen wir eine Folge von Abschneidefunktionen $\eta_i \in C_c^\infty(Q_{a_i})$, die gleich eins auf R_{b_i} sind und für die $0 \leqq \eta_i \leqq 1$ und $\eta_i(u, v) = \eta_i(-u, v)$ gilt. Wegen der Definitheitsrelation (2.7) können wir aus der Gleichung (2.8) ein Gleichungssystem der Form

$$\text{(3.1)} \qquad D_u^2 x^i = -D_v^2 x^i + \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}^i(x)\,(D_u x^j D_u x^k + D_v x^j D_v x^k)$$

herleiten, dessen Koeffizienten einer Abschätzung

$$|a^i_{jk}|_s \leqq \alpha^{-3s-3} \cdot \delta_s(|\Gamma|_{s+2}) \quad \text{mit} \quad \delta_s(x) \to 0 \quad \text{für} \quad x \to 0, \quad \delta_s(x) \text{ stetig,} \tag{3.2}$$

genügen.

Wir nehmen jetzt $s \geqq 1$ an und differenzieren (3.1) der Reihe nach durch D_v^{s-1}, $D_u^1 D_v^{s-2}$, ..., $D_u^{s-2} D_v^1$, D_u^{s-1}. Dann folgt

$$\begin{aligned}
D_u^2 D_v^{s-1} x^i &= -D_v^{s+1} x^i + D_v^{s-1} \left[\sum_{j,k} a^i_{jk}(x)\,(D_u x^j D_u x^k + D_v x^j D_v x^k)\right] \\
D_u^3 D_v^{s-2} x^i &= -D_u^1 D_v^s x^i + D_u^1 D_v^{s-2} \left[\sum_{j,k} a^i_{jk}(x)\,(D_u x^j D_u x^k + D_v x^j D_v x^k)\right] \\
D_u^4 D_v^{s-3} x^i &= -D_u^2 D_v^{s-1} x^i + D_u^2 D_v^{s-3} \left[\sum_{j,k} a^i_{jk}(x)\,(D_u x^j D_u x^k + D_v x^j D_v x^k)\right] \\
&\;\;\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
D_u^{s-1} x^i &= -D_u^{s-1} D_v^2 x^i + D_u^{s-1} \left[\sum_{j,k} a^i_{jk}(x)\,(D_u x^j D_u x^k + D_v x^j D_v x^k)\right].
\end{aligned}$$

Diese Formeln können wir dazu benutzen, sämtliche Ableitungen $(s+1)$-ter Ordnung von x durch die der Form $D D_v^s x$ und durch nichtlineare Terme niedrigerer Differentiationsordnung auszudrücken. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\sum_{D^{s+1}} \|\eta_s \cdot D^{s+1} x\|^2_{R_{a_s}} \leqq \text{const} \cdot \Big(\sum_D \|\eta_s \cdot D D_v^s x\|^2_{R_{a_s}} + \mathscr{H}_s^2\Big) \\
&\mathscr{H}_s = \sum_{i,j,k} \sum_{D^{s-1}} \sum_D \|\eta_s \cdot D^{s-1}[a^i_{jk}(x) D x^j \cdot D x^k]\|_{R_{a_s}}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Als erstes wollen wir jetzt a priori Schranken für die zweiten Ableitungen von x aufstellen.

Zur Abkürzung setzen wir $\eta = \eta_1$, $a = a_1$ und $\|\ldots\| = \|\ldots\|_{R_{a_1}}$, $|\ldots|_l = |\ldots|_{l, R_{a_1}}$, $|\ldots| = |\ldots|_{R_{a_1}}$, $\delta(x) = \delta_1(x)$, $\iint \ldots = \int\limits_{R_{a_1}} \int \ldots$.

Aus (3.1) und (3.2) folgt

$$\begin{aligned}
&\sum_{D^2} \|\eta \cdot D^2 x\|^2 \leqq \\
&\leqq \text{const} \cdot \Big(\sum_D \|\eta \cdot D D_v x\|^2 + \alpha^{-3} \cdot \delta(|\Gamma|_2) \cdot \sum_D \|\eta (D x)^2\|^2\Big).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Nun wollen wir die Relation (2.10) verwenden. Da $x^1 = x^2 = 0$ ist für $u = 0$, $|v| \leqq a_0$, und η einen relativ kompakten Träger in R_a hat, so sehen wir leicht, daß $\phi = D_v(\eta^2 D_v x)$ ein „zulässiger Testvektor" für (2.10) ist. Somit gilt

$$\sum_D \iint \{2 D x \cdot A(x) D D_v(\eta^2 \cdot D_v x) + D x \cdot A'(x) D x \cdot D_v(\eta^2 D_v x)\}\, du\, dv = 0.$$

Führen wir nun eine partielle Integration in der v-Richtung aus und beachten, daß dabei keine Randterme auftreten, da η einen relativ kompakten Träger in R_a hat, so folgt hieraus zusammen mit (2.7)

$$\alpha \cdot \sum_D \|\eta D D_v x\|^2 \leqq \sum_D \iint \eta^2 D D_v x \cdot A(x) D D_v x\, du\, dv \leqq r_1 + \cdots + r_5, \tag{3.5}$$

wobei

$$
\begin{aligned}
r_1 &\leqq \sum_D \left| \iint \eta^2 D\mathfrak{x} \cdot A'(\mathfrak{x}) D D_v \mathfrak{x} \cdot D_v \mathfrak{x} \, du \, dv \right| \\
&\leqq \text{const} \cdot |\Gamma|_2 \cdot \sum_D \|\eta \cdot D D_v \mathfrak{x}\| \cdot \|\eta \cdot D\mathfrak{x} \cdot D_v \mathfrak{x}\| \\
r_2 &\leqq 2 \sum_D \left| \iint \eta \cdot D\eta \cdot D D_v \mathfrak{x} \cdot A(\mathfrak{x}) D_v \mathfrak{x} \, du \, dv \right| \\
&\leqq \text{const} \cdot |\Gamma|_1 \cdot |\eta|_1 \cdot \|D_v \mathfrak{x}\| \cdot \sum_D \|\eta D D_v \mathfrak{x}\| \\
r_3 &\leqq 2 \sum_D \left| \iint \eta \cdot D\eta \cdot D\mathfrak{x} \cdot A'(\mathfrak{x}) D_v \mathfrak{x} \cdot D_v \mathfrak{x} \, du \, dv \right| \\
&\leqq \text{const} \cdot |\Gamma|_2 \cdot |\eta|_1 \cdot \|\eta \cdot D_v \mathfrak{x} \cdot D_v \mathfrak{x}\| \cdot \sum_D \|D\mathfrak{x}\| \\
r_4 &\leqq \tfrac{1}{2} \sum_D \left| \iint \eta^2 D\mathfrak{x} \cdot A'(\mathfrak{x}) D\mathfrak{x} \cdot D_v^2 \mathfrak{x} \, du \, dv \right| \\
&\leqq \text{const} \cdot |\Gamma|_2 \cdot \sum_D \|\eta D_v^2 \mathfrak{x}\| \cdot \|\eta \cdot D\mathfrak{x} \cdot D\mathfrak{x}\| \\
r_5 &\leqq \sum_D \left| \iint \eta D_v \eta \cdot D\mathfrak{x} \cdot A'(\mathfrak{x}) \cdot D\mathfrak{x} \cdot D_v \mathfrak{x} \, du \, dv \right| \\
&\leqq \text{const} \cdot |\Gamma|_2 \cdot |\eta|_1 \cdot \|D_v \mathfrak{x}\| \cdot \sum_D \|\eta \cdot D\mathfrak{x} \cdot D\mathfrak{x}\| .
\end{aligned}
$$

Damit folgt

$$
\begin{aligned}
r_1 + \cdots + r_5 \leqq \text{const} \cdot |\Gamma|_2 \cdot \{ &\sum_D \|\eta (D\mathfrak{x})^2\| \cdot \sum_{D^2} \|\eta D^2 \mathfrak{x}\| + \\
&+ |\eta|_1 \cdot \sum_D \|D\mathfrak{x}\| \cdot \Big(\sum_{D^2} \|\eta D^2 \mathfrak{x}\| + \sum_D \|\eta (D\mathfrak{x})^2\| \Big) \} .
\end{aligned}
$$

Dann bekommen wir zusammen mit (3.4) und (3.5)

$$
\sum_{D^2} \|\eta D^2 \mathfrak{x}\|^2 \leqq \text{const} \left[\alpha^{-1} \cdot |\Gamma|_2 \cdot \{\ldots\} + \alpha^{-3} \cdot \delta(|\Gamma|_2) \cdot \sum_D \|\eta (D\mathfrak{x})^2\| \right] .
$$

Andererseits ist nach Lemma 7.2

$$
\|\eta (D\mathfrak{x})^2\| \leqq \text{const} |\mathfrak{x}| \cdot \Big\{ \sum_{D^2} \|\eta \cdot D^2 \mathfrak{x}\| + |\eta|_1 \cdot \sum_D \|D\mathfrak{x}\| \Big\} .
$$

Hieraus folgt

$$
\sum_{D^2} \|\eta \cdot D^2 \mathfrak{x}\|^2 \leqq \gamma_1 \cdot |\mathfrak{x}| \cdot \sum_{D^2} \|\eta D^2 \mathfrak{x}\|^2 + \gamma_2 \cdot \sum_{D^2} \|\eta \cdot D^2 \mathfrak{x}\| + \gamma_3 \tag{3.6}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= \gamma_1(\alpha, |\Gamma|_2, |\mathfrak{x}|) \\
\gamma_i &= \gamma_i(\alpha, |\Gamma|_2, |\mathfrak{x}|, \mathscr{D}(\mathfrak{x}), |\eta|_1), \qquad i = 2, 3 .
\end{aligned}
$$

Dabei sind γ_1, γ_2 und γ_3 für $\alpha > 0$ stetige Funktionen ihrer Argumente. Wählt man also a hinreichend klein, so ist wegen $\mathfrak{x}(0,0) = 0$ und $\mathfrak{x} \in C^0(R_{a_0})$ auch $\gamma_1 \cdot |\mathfrak{x}| \leqq 1/2$, so daß man das erste Glied auf der rechten Seite der Ungleichung (3.6) in die linke Seite ziehen kann und

$$
\Big(\sum_{D^2} \|\eta D^2 \mathfrak{x}\| \Big)^2 \leqq \gamma_2' \cdot \sum_{D^2} \|\eta D^2 \mathfrak{x}\| + \gamma_3'
$$

bekommt, wo die γ_i', $i = 2, 3$, von denselben Argumenten stetig abhängen wie γ_2, γ_3.

Hieraus folgt dann schließlich wegen $\eta = 1$ auf R_{b_1}

$$\sum_{D^2} \|D^2 \mathfrak{x}\|_{R_{b_1}} \leqq c_1(\alpha, |\Gamma|_2, |\mathfrak{x}|_{R_{a_1}}, \mathscr{D}_{R_{a_0}}(\mathfrak{x}), |\eta_1|_{1,R_{a_1}}), \tag{3.7}$$

wo c_1 bei hinreichend kleinem $|\mathfrak{x}|_{R_{a_1}}$ eine stetige Funktion seiner Argumente ist. Damit haben wir in der gewünschten Weise die zweiten Ableitungen von $\mathfrak{x}$ auf R_{b_1} durch den Stetigkeitsmodul und das Dirichletintegral von $\mathfrak{x}$ und durch geometrische Größen von Γ abgeschätzt.

Wir wollen uns nun der Abschätzung der Ableitungen dritter und höherer Ordnung zuwenden. Wir behaupten, daß Ungleichungen der folgenden Art bestehen:

$$\begin{aligned}&\sum_{D^{s+1}} \|D^{s+1}\mathfrak{x}\|_{R_{b_s}} \leqq \\ &\leqq c_s(\alpha, |\Gamma|_{s+1}, |\mathfrak{x}|_{R_{a_0}}, |\mathfrak{x}|_{R_{a_1}}, |\mathfrak{x}|_{R_{a_2}}, \ldots, |\mathfrak{x}|_{R_{a_s}}, \mathscr{D}_{R_{a_0}}(\mathfrak{x}), a_1, a_2, \ldots, a_s),\end{aligned} \tag{3.8}$$

wobei c_s für hinreichend kleine $|\mathfrak{x}|_{R_{a_i}}$ und a_i stetig von seinen Argumenten abhängt.

Wir führen den Beweis durch Induktion. Für $s = 1$ haben wir die Behauptung soeben mit (3.7) bewiesen. Wir machen nun die Induktionsannahme, daß $s \geqq 2$ ist und daß $\sum_{D^s} \|D^s \mathfrak{x}\|_{R_{b_{s-1}}}$ in der durch (3.8) angegebenen Weise abgeschätzt ist.

Zur Vereinfachung setzen wir wieder $a = a_s$, $\eta = \eta_s$, $\|\ldots\|_s = \|\ldots\|_{s,R_{a_s}}$, $|\mathfrak{x}| = |\mathfrak{x}|_{R_{a_s}}$, usw.

Wir betrachten erneut die Gleichung (2.10) und verwenden jetzt den zulässigen Testvektor $\phi = D_v^s(\eta^2 \cdot D_v^s \mathfrak{x})$. Ganz analog zu unseren vorigen Rechnungen geben s partielle Integrationen in der v-Richtung zusammen mit (2.7)

$$\alpha \cdot \sum_D \|\eta D D_v^s \mathfrak{x}\|^2 \leqq \sum_D \iint \eta^2 \cdot D D_v^s \mathfrak{x} \cdot A(\mathfrak{x}) D D_v^s \mathfrak{x}\, du\, dv \leqq r_1 + \cdots + r_5, \tag{3.9}$$

wo

$$\begin{aligned}
r_1 &\leqq \sum_D |\iint \eta^2 \cdot \{D_v^s[D\mathfrak{x} \cdot A(\mathfrak{x})] - D D_v^s \mathfrak{x} \cdot A(\mathfrak{x})\} D D_v^s \mathfrak{x}\, du\, dv| \\
&\leqq \text{const} \cdot \mathscr{G}_s \cdot \sum_D \|\eta D D_v^s \mathfrak{x}\|, \quad \mathscr{G}_s := \sum_D \|\eta \{D_v^s[D\mathfrak{x}\, A(\mathfrak{x})] - D D_v^s \mathfrak{x} A(\mathfrak{x})\}\| \\
r_2 &\leqq 2 \sum_D |\iint \eta \cdot D\eta \cdot D D_v^s \mathfrak{x} \cdot A(\mathfrak{x}) D_v^s \mathfrak{x}\, du\, dv| \\
&\leqq \text{const} \cdot |\Gamma|_1 \cdot |\eta|_1 \cdot \|D_v^s \mathfrak{x}\| \cdot \sum_D \|\eta \cdot D D_v^s \mathfrak{x}\| \\
r_3 &\leqq 2 \sum_D |\iint \eta \cdot D\eta \cdot \{D_v^s[D\mathfrak{x} A(\mathfrak{x})] - D D_v^s \mathfrak{x} \cdot A(\mathfrak{x})\} D_v^s \mathfrak{x}\, du\, dv| \\
&\leqq \text{const} \cdot (\mathscr{G}_s^2 + |\eta|_1^2 \cdot \sum_{D^s} \|D^s \mathfrak{x}\|^2) \\
r_4 &\leqq \tfrac{1}{2} \sum_D |\iint \eta^2 \cdot D_v^{s-1}[D\mathfrak{x} \cdot A'(\mathfrak{x}) D\mathfrak{x}] D_v^{s+1} \mathfrak{x}\, du\, dv| \\
&\leqq \text{const} \cdot \|\eta \cdot D_v^{s+1} \mathfrak{x}\| \cdot \mathscr{F}_s, \quad \mathscr{F}_s := \sum_D \|\eta \cdot D_v^{s-1}[D\mathfrak{x} \cdot A'(\mathfrak{x}) D\mathfrak{x}]\| \\
r_5 &\leqq \sum_D |\iint \eta \cdot D_v \eta \cdot D_v^{s-1}[D\mathfrak{x} \cdot A'(\mathfrak{x}) D\mathfrak{x}] \cdot D_v^s \mathfrak{x}\, du\, dv| \\
&\leqq \text{const} \cdot (|\eta|_1^2 \cdot \|D_v^s \mathfrak{x}\|^2 + \mathscr{F}_s^2).
\end{aligned}$$

Aus diesen Ungleichungen folgt zusammen mit (3.9) und (3.3)

$$\begin{aligned}\sum_{D^{s+1}} \|\eta \cdot D^{s+1} x\|^2 &\leqq \text{const} \cdot [\alpha^{-1} \cdot (r_1 + \cdots + r_5) + \mathscr{H}_s^2] \leqq \\ &\leqq \text{const}\,[\alpha^{-1} \cdot \sum_{D^{s+1}} \|\eta D^{s+1} x\| \times \\ &\times (\mathscr{F}_s + \mathscr{G}_s + |\eta|_1 \cdot |\Gamma|_1 \cdot \sum_{D^s} \|D^s x\|) + \\ &+ \alpha^{-1} \cdot |\eta|_1^2 \cdot \sum_{D^s} \|D^s x\|^2 + \alpha^{-1} \cdot \mathscr{G}_s^2 + \alpha^{-1},\ \mathscr{F}_s^2 + \mathscr{H}_s^2]\,.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Um die folgenden Betrachtungen etwas übersichtlicher zu machen, unterscheiden wir nicht zwischen verschiedenen Ableitungen r-ter Ordnung und schreiben an Stelle eines p-fachen Produkts von solchen Ableitungen einfach $(D^r x)^p$. Ferner unterdrücken wir in leicht verständlicher Weise alle Indizes. Dann schreibt sich das Störungsglied $\mathscr{H}_s$ in der Form

$$\mathscr{H}_s = \sum_{D^{s-1}} \sum_{D} \|\eta \cdot D^{s-1}[a(x)\,(Dx)^2]\|\,.$$

Wie man leicht berechnet, ist $D^{s-1}[a(x)\,(Dx)^2]$ eine Summe von der Form

$$\sum_{\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots s\alpha_s = s+1} a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_s}(x) \cdot (Dx)^{\alpha_1} \cdot (D^2 x)^{\alpha_2} \ldots (D^s x)^{\alpha_s}\,.$$

Wegen (3.2) bekommen wir also

$$\mathscr{H}_s \leqq \text{const} \cdot \alpha^{-3s} \cdot \delta_{s-1}(|\Gamma|_{s+1}) \times \times \sum_{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + s\alpha_s = s+1} \|\eta (Dx)^{\alpha_1} \cdot (D^2 x)^{\alpha_2} \ldots (D^s x)^{\alpha_s}\|\,. \tag{3.11}$$

Ganz ähnlich ergibt sich auch

$$\mathscr{F}_s, \mathscr{G}_s \leqq \text{const} \cdot |\Gamma|_{s+1} \cdot \sum_{\alpha_1 + \cdots + s\alpha_s = s+1} \|\eta \cdot (Dx)^{\alpha_1} \ldots (D^s x)^{\alpha_s}\|\,. \tag{3.12}$$

Damit bleibt noch die Aufgabe, die in (3.11) und (3.12) auftretende Summe $S = \sum_{\alpha_1 + \cdots + s \cdot \alpha_s = s+1} \ldots$ abzuschätzen. Das macht, wie sich zeigen wird, nur für $s = 2$ und $s = 3$ einige Mühe.

Nach Induktionsannahme wissen wir schon, daß $\|x\|_s \leqq c_{s-1}$ ist. Im folgenden wollen wir der Kürze halber jede stetige Funktion, die von denselben Argumenten wie $c_r(\alpha, |\Gamma|_{r+1}, |x|_{R_{a_0}}, |x|_{R_{a_1}}, \ldots, |x|_{R_{a_r}}, \mathscr{D}_{R_{a_0}}(x), a_1, a_2, \ldots, a_r)$ stetig abhängt, ebenfalls mit c_r bezeichnen.

Aus dem Sobolewschen Lemma ergibt sich dann auch $|x|_{s-2} \leqq c_{s-1}$. Wir setzen nun

$$S = S_1 + S_2\,, \quad \text{wobei} \quad S_1 = \sum_{\substack{\alpha_s = \alpha_{s-1} = 0 \\ \alpha_1 + \cdots + s \cdot \alpha_s = s+1}} \|\eta \cdot (Dx)^{\alpha_1} \ldots (D^s x)^{\alpha_s}\|\,.$$

Da in S_1 nur Ableitungen bis zur $(s-2)$-ten Ordnung auftreten, die wir in der Maximumnorm durch c_{s-1} abschätzen können, bekommen wir

$$S_1 \leqq c_{s-1}\,.$$

In S_2 treten 4 wesentlich verschiedene Summanden auf:

$$S = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV}\,,$$

I: $\alpha_1 = \alpha_s = 1$, alle anderen $\alpha_i = 0$,
II: $\alpha_1 = 2$, $\alpha_{s-1} = 1$, alle anderen $\alpha_i = 0$,
III: $\alpha_2 = 1$, $\alpha_{s-1} = 1$, alle anderen $\alpha_i = 0$,
IV: $\alpha_{s-1} = 2$, alle anderen $\alpha_i = 0$.

Der Summand IV kann offenbar nur im Falle $s = 2$ auftreten. Dann ist

$$\text{IV} \leqq \begin{cases} \text{const} \cdot \sum_D \|\eta (D\mathfrak{x})^2\| & \text{für } s = 2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die übrigen Terme sind abgeschätzt durch

$$\text{I} \leqq \text{const} \sum_D \sum_{D^s} \|\eta\, D\mathfrak{x} \cdot D^s\mathfrak{x}\| \leqq \text{const} \sum_D |\eta \cdot D\mathfrak{x}| \cdot \sum_{D^s} \|D^s\mathfrak{x}\|$$

$$\text{II} \leqq \text{const} \sum_D \sum_{D^{s-1}} \|\eta (D\mathfrak{x})^2 D^{s-1}\mathfrak{x}\| \leqq \text{const} \sum_{D^{s-1}} |\eta \cdot D^{s-1}\mathfrak{x}| \cdot \sum_D \|(D\mathfrak{x})^2\|$$

$$\text{III} \leqq \text{const} \sum_{D^2} \sum_{D^{s-1}} \|\eta\, D^2\mathfrak{x}\, D^{s-1}\mathfrak{x}\| \leqq \text{const} \sum_{D^{s-1}} |\eta\, D^{s-1}\mathfrak{x}| \cdot \sum_{D^2} \|D^2\mathfrak{x}\|\,.$$

Andererseits ist nach Lemma 7.1

$$|\eta \cdot D^l\mathfrak{x}| \leqq \text{const}\,(a \cdot \sum_{D^{l+2}} \|\eta\, D^{l+2}\mathfrak{x}\| + |\eta|_2 \cdot \|\mathfrak{x}\|_{l+1}),$$

und außerdem haben wir wegen (7.3) und (3.7)

$$\|(D\mathfrak{x})^2\| \leqq c_1\,.$$

Setzt man die Ungleichungen zusammen, so ergibt sich

$$S_2 \leqq c_2 + a \cdot c_1 \cdot \sum_{D^3} \|\eta\, D^3\mathfrak{x}\| \qquad \text{für } s = 2$$

$$S_2 \leqq c_3 + a \cdot c_2 \cdot \sum_{D^4} \|\eta\, D^4\mathfrak{x}\| \qquad \text{für } s = 3\,.$$

Für $s \geqq 4$ haben wir mit $|D\mathfrak{x}| \leqq c_2$, $|D^2\mathfrak{x}| \leqq c_3$ und $\|D^s\mathfrak{x}\| \leqq c_{s-1}$ zulässige Abschätzungen und bekommen daher

$$S_2 \leqq c_{s-1} \qquad \text{für } s \geqq 4\,.$$

Zusammen ergibt sich

$$S \leqq \begin{cases} c_2 + a \cdot c_1 \cdot \sum_{D^3} \|\eta \cdot D^3\mathfrak{x}\| & \text{für } s = 2 \\ c_3 + a \cdot c_2 \cdot \sum_{D^4} \|\eta \cdot D^4\mathfrak{x}\| & \text{für } s = 3 \\ c_{s-1} & \text{für } s \geqq 4\,. \end{cases} \tag{3.13}$$

Kombination der Ungleichungen (3.10)—(3.13) liefert schließlich

$$\begin{aligned} \sum_{D^3} \|\eta\, D^3\mathfrak{x}\|^2 &\leqq c_2(1 + \sum_{D^3} \|\eta\, D^3\mathfrak{x}\|) + a \cdot c_1 \cdot \sum_{D^3} \|\eta\, D^3\mathfrak{x}\|^2 \\ \sum_{D^4} \|\eta\, D^4\mathfrak{x}\|^2 &\leqq c_3(1 + \sum_{D^4} \|\eta\, D^4\mathfrak{x}\|) + a \cdot c_2 \cdot \sum_{D^4} \|\eta\, D^4\mathfrak{x}\|^2 \qquad (3.14) \\ \sum_{D^{s+1}} \|\eta\, D^{s+1}\mathfrak{x}\|^2 &\leqq c_s(1 + \sum_{D^{s+1}} \|\eta\, D^{s+1}\mathfrak{x}\|) \qquad \text{für } s \geqq 4 \end{aligned}$$

Nun wählt man noch $a = a_2$ bzw. $a = a_3$ so klein, daß $a_2 c_1$, $a_3 c_2 \leqq 1/2$ ausfällt. Dann ergibt sich aus (3.14) leicht die Abschätzung (3.8).

Für die Zahlen a_i, $i \geqq 4$, müssen dann keine weiteren Einschränkungen gemacht werden. Daher gibt es ein b mit $0 < b < b_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Unter Verwendung des Sobolewschen Lemmas $|x|_{s,R_b} \leqq k_s \cdot \|x\|_{s+2,R_b}$ gilt dann

$$|x|_{s,R_b} \leqq c_{s+1}(\alpha, |\Gamma|_{s+2}, |x|_{R_{a_0}}, |x|_{R_{a_1}}, \ldots, |x|_{R_{a_{s+1}}}, \mathcal{D}_{R_{a_0}}(x), a_1, a_2, \ldots, a_{s+1}) \quad \text{für alle } s \geqq 2. \tag{3.15}$$

Mittels des Überdeckungssatzes kann man von diesen lokalen Schranken auch zu globalen Schranken gelangen, wenn man als Gebiet B nicht die rechte Halbebene $u > 0$, sondern ein beschränktes Gebiet (etwa eine Kreisscheibe) der u, v-Ebene nimmt. Dessen Rand C muß dann jeweils lokal geradlinig gemacht werden. Da das mittels konformer Abbildung geschehen kann und da das Dirichletintegral konform invariant ist, bleiben unsere Gleichungen unverändert.

4. Regularität von Minimalflächen am Rande

Nach einem Resultat von H. Lewy [6] sind Minimalflächen $\mathfrak{x}(u, v)$ mit analytischem Rand Γ im abgeschlossenen Bereich $\bar{B} = B + C$ analytisch; für sie gelten also unsere a priori-Abschätzungen (3.8) und (3.15). Um nun zu Existenzaussagen für Minimalflächen $\mathfrak{x}$ mit hinreichend glattem, aber nicht analytischem Rand Γ zu gelangen, versuchen wir, $\mathfrak{x}$ gleichmäßig in $\bar{B}$ durch Minimalflächen $\mathfrak{x}_n$ mit analytischen Rändern Γ_n zu approximieren, die zudem so beschaffen sind, daß die Abschätzungen (3.8) gleichmäßige Schranken für alle n liefern.

Es ist mir nicht gelungen zu zeigen, daß für jede Minimalfläche mit glattem Rand eine solche Approximation möglich ist. Immerhin gelangen wir aber mit dieser Idee in zwei wichtigen Fällen zum Ziel[2].

Erstens können wir beweisen, daß es zu jeder glatten geschlossenen Kurve $\Gamma \in C^{s+2}$ wenigstens eine Minimalfläche $\mathfrak{x}$ mit Γ als Rand gibt, die in $C^s(\bar{B})$ liegt und zudem Lösung des Plateauschen Problems für Γ ist.

Zum zweiten zeigen wir, daß eine Minimalfläche $\mathfrak{x}$ mit Rand $\Gamma \in C^{s+2}$ in $C^s(\bar{B})$ liegt, falls $\mathfrak{x}$ ein starkes relatives Minimum für das Dirichletintegral liefert.

Um zum ersten Ergebnis zu gelangen, erinnern wir an die folgende Fassung des Plateauschen Problems für eine rektifizierbare geschlossene Kurve Γ:

Unter allen Flächen $\mathfrak{x}(u, v) \in C^0(\bar{B}) \cap H_1(B)$, die C monoton auf Γ abbilden, soll eine solche gefunden werden, die das Dirichletintegral $\mathcal{D}_B(\mathfrak{x})$ zu einem Minimum macht.

Bekanntlich gibt es wenigstens eine Lösung dieses Variationsproblems. Sie liefert eine Minimalfläche und löst das Problem, eine Fläche kleinsten Flächeninhaltes in Γ einzuspannen.

Sei nun Γ eine geschlossene Kurve aus C^{s+2}. Dann können wir eine Folge von geschlossenen analytischen Kurven Γ_n finden, die im Fréchetschen Sinne und dazu gleichmäßig mit allen Ableitungen bis zur $(s+2)$-ten Ordnung

[2] Der Einfachheit halber haben wir alle Voraussetzungen und Ergebnisse global angegeben, obwohl alle Schlüsse eigentlich lokaler Natur sind.

gegen Γ konvergieren:

$$\lim_{n\to\infty}|\Gamma-\Gamma_n|_{s+2}=0, \quad \text{also auch } |\Gamma_n|_{s+2}\leqq \text{const}, \qquad n=1,2,\ldots. \tag{4.1}$$

Ferner dürfen wir annehmen[3], daß

$$\lim_{n\to\infty} d_n = d, \tag{4.2}$$

wobei d_n bzw. d das Infimum von $\mathscr{D}_B(\mathfrak{y})$ bezüglich aller zulässigen Vektoren des Plateauschen Problems für Γ_n bzw. Γ bezeichnet. Dann können wir für Γ_n Lösungen $\mathfrak{y}_n$ des Plateauproblems finden, die drei verschiedene Punkte P, Q, R auf C in drei verschiedene Punkte P_n', Q_n', R_n' auf Γ_n abbilden, welche gegen drei verschiedene feste Punkte P', Q', R' auf Γ konvergieren. Nach einer bekannten Schlußweise (vgl. [2], S. 104—105) konvergiert eine Teilfolge der $\mathfrak{y}_n$, die wir der Einfachheit halber wieder $\mathfrak{y}_n$ nennen, gleichmäßig in $B+C$ gegen einen zulässigen harmonischen Vektor $\mathfrak{y}$, für den wir wegen (4.2) leicht $\mathscr{D}_B(\mathfrak{y})=d$ zeigen können und der sich somit als Lösung des Plateauschen Problems für Γ ergibt. Wegen $\lim_{n\to\infty}|\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_n|_{\bar{B}}=0$ und (4.1) folgt für die in Nr. 2 definierten transformierten Vektoren $\mathfrak{x}_n$ und $\mathfrak{x}$ die Relation

$$\lim_{n\to\infty}|\mathfrak{x}-\mathfrak{x}_n|_{R_{a_0}}=0, \tag{4.3}$$

und mittels (4.2) und der Definitheitsrelation (2.7) bekommen wir auch

$$\mathscr{D}_{R_{a_0}}(\mathfrak{x}_n)\leqq \text{const}, \qquad n=1,2,\ldots. \tag{4.4}$$

Aus (4.1), (4.3), (4.4) und den a priori-Schranken (3.8) erhalten wir schließlich für ein geeignetes $b>0$

$$\|\mathfrak{x}_n\|_{s+2,R_b}\leqq \text{const}, \qquad n=1,2,\ldots. \tag{4.5}$$

Wegen der schwachen (Folgen-) Kompaktheit der Kugel im Hilbertraum schließen wir aus (4.3) und (4.5) in bekannter Weise, daß die $\mathfrak{x}_n$ in $H_{s+2}(R_b)$ schwach gegen $\mathfrak{x}$ konvergieren. Daher ist $\|\mathfrak{x}\|_{s+2,R_b}<\infty$, und aus dem Sobolewschen Lemma ergibt sich somit, daß $\mathfrak{x}$ in $C^s(R_b)$ liegt. Damit haben wir bewiesen:

Satz 4.1. *Wenn Γ eine geschlossene Jordankurve $\in C^{s+2}$ ist, so gibt es wenigstens eine Lösung $\mathfrak{y}$ des Plateauproblems für Γ, die in $C^s(\bar{B})$ liegt.*

Wir wollen nun voraussetzen, daß $\mathfrak{y}_0$ eine Minimalfläche mit der geschlossenen rektifizierbaren Kurve Γ als Randkurve ist, die dem Dirichletintegral ein starkes relatives Minimum verleiht. Damit meinen wir, daß es eine ε-Umgebung von $\mathfrak{y}_0$ gibt derart, daß

$$\mathscr{D}_B(\mathfrak{y}_0)<\mathscr{D}_B(\mathfrak{y})$$

ausfällt für alle $\mathfrak{y}\neq\mathfrak{y}_0$ mit $|\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_0|_{\bar{B}}\leqq\varepsilon$, die zulässig sind, d. h. die in $C^0(\bar{B})\cap H_1(B)$ liegen und C monoton auf Γ abbilden. Damit stellt $\mathfrak{y}_0$ eine Fläche kleineren Flächeninhaltes als jede andere zulässige, in Γ eingespannte Fläche, die in der ε-Umgebung von $\mathfrak{y}_0$ liegt, dar.

[3] Vgl. auch T. RADO [11], S. 90—91, und R. COURANT [2], S. 126—127.

Lemma 4.1. *Wenn $\mathfrak{y}_0$ dem Dirichletintegral ein starkes relatives Minimum unter allen in Γ eingespannten zulässigen Flächen $\mathfrak{y}$ mit $|\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_0|_{\bar{B}} \leqq \varepsilon$ verleiht, so gibt es eine Zahl $a>0$ derart, daß*

$$\mathscr{D}_B(\mathfrak{y}_0)+a \leqq \mathscr{D}_B(\mathfrak{y})$$

für alle in Γ eingespannten, zulässigen Flächen $\mathfrak{y}$ gilt, für die

$$|\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_0|_{\bar{B}} \leqq \varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{\varepsilon}{2} \leqq |\mathfrak{y}-\mathfrak{y}_0|_C$$

ist.

Beweis. Anderenfalls gäbe es eine Folge von zulässigen, in Γ eingespannten Vektoren $\mathfrak{y}_n^*$, für die $\mathscr{D}_B(\mathfrak{y}_n^*) \to \mathscr{D}_B(\mathfrak{y}_0)$ mit $n \to \infty$ und $|\mathfrak{y}_n^*-\mathfrak{y}_0|_{\bar{B}} \leqq \varepsilon$ und $\frac{\varepsilon}{2} \leqq |\mathfrak{y}_n^*-\mathfrak{y}_0|_C$ gälte. Dann ersetzen wir die $\mathfrak{y}_n^*$ durch in B harmonische Vektoren $\mathfrak{y}_n$, die auf C mit $\mathfrak{y}_n^*$ übereinstimmen. Wegen $\mathscr{D}_B(\mathfrak{y}_0) < \mathscr{D}_B(\mathfrak{y}_n) \leqq \mathscr{D}_B(\mathfrak{y}_n^*) \to \mathscr{D}_B(\mathfrak{y}_0)$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{D}_B(\mathfrak{y}_n) = \mathscr{D}_B(\mathfrak{y}_0), \tag{4.6}$$

und aus dem Maximumprinzip ergibt sich auch

$$|\mathfrak{y}_n-\mathfrak{y}_0|_{\bar{B}} \leqq \varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{\varepsilon}{2} \leqq |\mathfrak{y}_n-\mathfrak{y}_0|_C. \tag{4.7}$$

Wir dürfen noch voraussetzen, daß die $\mathfrak{y}_n$ drei feste Punkte auf C in drei feste Punkte auf Γ abbilden. Nach einem Lemma von R. COURANT (vgl. [2], S. 103) sind dann die Randwerte von $\mathfrak{y}_n$ auf C gleichgradig stetig und daher läßt sich aus den harmonischen Vektoren $\mathfrak{y}_n$ eine — wieder mit $\{\mathfrak{y}_n\}$ bezeichnete — in $B+C$ gleichmäßig konvergente Teilfolge auswählen; ihr Limes werde mit $\tilde{\mathfrak{y}}$ bezeichnet. Aus (4.6) folgt bekanntlich

$$\mathscr{D}_B(\tilde{\mathfrak{y}}) \leqq \lim_{n\to\infty} \mathscr{D}_B(\mathfrak{y}_n) = \mathscr{D}_B(\mathfrak{y}_0),$$

und aus (4.7) ergibt sich

$$|\tilde{\mathfrak{y}}-\mathfrak{y}_0|_{\bar{B}} \leqq \varepsilon, \quad \frac{\varepsilon}{2} \leqq |\tilde{\mathfrak{y}}-\mathfrak{y}_0|_C.$$

Ferner bildet $\tilde{\mathfrak{y}}$ Cmonoton auf Γ ab; $\tilde{\mathfrak{y}}$ ist also ein von $\mathfrak{y}_0$ verschiedener zulässiger Vektor mit $|\tilde{\mathfrak{y}}-\mathfrak{y}_0|_{\bar{B}} \leqq \varepsilon$ und $\mathscr{D}_B(\tilde{\mathfrak{y}}) = \mathscr{D}_B(\mathfrak{y}_0)$, was ein Widerspruch zu der Eigenschaft von $\mathfrak{y}_0$, ein starkes relatives Minimum zu liefern, ist. Damit ist das Lemma bewiesen.

Lemma 4.2. (Approximationssatz). *Sei $\{\Gamma_n\}$ eine Folge von geschlossenen Kurven aus C^2, die im Fréchetschen Sinne gegen die geschlossene Kurve $\Gamma \in C^2$ konvergieren, und außerdem gelte*

$$\lim_{n\to\infty} |\Gamma-\Gamma_n|_2 = 0. \tag{4.8}$$

Ferner sei $\mathfrak{y}_0$ eine in Γ eingespannte Minimalfläche, die $\mathscr{D}_B(\mathfrak{y})$ in einer ε-Umgebung ein starkes relatives Minimum verleiht. Dann gibt es für alle hinreichend großen n eine Minimalfläche $\mathfrak{y}_n$ mit Γ_n als Rand und mit $|\mathfrak{y}_0-\mathfrak{y}_n|_{\bar{B}} \leqq \varepsilon$.

Beweis. Wir betrachten das folgende Variationsproblem Π_n: Minimalisiere $\mathscr{D}_B(\mathfrak{y})$ unter allen „zulässigen" Vektoren $\mathfrak{y}$ mit dem Rand Γ_n (d. h. $\mathfrak{y} \in C^0(\bar{B}) \cap$ $\cap H_1(B)$, $\mathfrak{y}$ bildet C monoton auf Γ_n ab), die der Nebenbedingung

$$|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0|_{\bar{B}} \leqq \varepsilon$$

genügen. Bezeichne d_n die untere Grenze von $\mathscr{D}_B(\mathfrak{y})$ im Problem Π_n. Dann ergibt sich aus (4.8), daß $\lim_{n\to\infty} d_n$ existiert und daß

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \mathscr{D}_B(\mathfrak{y}_0) \tag{4.9}$$

ist.

Nun können wir mit den üblichen Methoden zeigen, daß das Variationsproblem Π_n einen zulässigen Vektor $\mathfrak{y}_n$ als Lösung besitzt, der in B harmonisch ist (vgl. [2], Remark 2, S. 115—116). Um dann mit der bekannten Variationsschlußweise zeigen zu können, daß $\mathfrak{y}_n$ tatsächlich Minimalfläche ist, müssen wir wissen, daß $\mathfrak{y}_n$ in das Innere der Kugel $|\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_0|_{\bar{B}} \leqq \varepsilon$ fällt. Wäre das nicht für alle hinreichend großen n der Fall, so gäbe es eine — wieder $\{\mathfrak{y}_n\}$ genannte — Teilfolge mit $|\mathfrak{y}_n - \mathfrak{y}_0|_{\bar{B}} = \varepsilon$, und wir dürfen außerdem voraussetzen, daß die $\mathfrak{y}_n$ drei feste Punkte P, Q, R auf C in drei Punkte P_n', Q_n', R_n' auf Γ_n abbilden, die ihrerseits gegen drei feste Punkte P', Q', R' auf Γ konvergieren. Nach einem beim Beweis von Satz 4.1 benutzten Ergebnis konvergiert dann eine Teilfolge der $\mathfrak{y}_n$ gleichmäßig in $\bar{B}$ gegen einen harmonischen Vektor $\tilde{\mathfrak{y}} \in C^0(\bar{B}) \cap H_1(B)$, der C monoton auf Γ abbildet und für den nach dem Maximumsprinzip $\varepsilon = |\tilde{\mathfrak{y}} - \mathfrak{y}_0|_{\bar{B}} = |\tilde{\mathfrak{y}} - \mathfrak{y}_0|_C$ ist. Aus (4.9) schließen wir aber $\mathscr{D}_B(\tilde{\mathfrak{y}}) \leqq \lim_{n\to\infty} d_n = \mathscr{D}_B(\mathfrak{y}_0)$. Damit haben wir einen Widerspruch zu Lemma 4.1 konstruiert.

Aus diesem Approximationsergebnis und aus den a priori-Schranken (3.8) erhalten wir mit denselben Schlüssen wie beim Beweis von Satz 4.1 das folgende, bereits angekündigte Resultat:

Satz 4.2. *Wenn $\mathfrak{y}(u, v)$ eine Minimalfläche mit einem von der Ordnung C^{s+2} glatten Rand Γ ist, die dem Dirichletintegral ein starkes relatives Minimum verleiht, so liegt $\mathfrak{y}$ in $C^s(\bar{B})$; $s \geqq 0$.*

5. Einige offene Fragen

Wir kommen nochmals auf das im vorigen Abschnitt aufgeworfene Approximationsproblem zurück, nämlich:

Kann man jede Minimalfläche $\mathfrak{y}(u, v)$ mit einer von der Ordnung C^s, $s \geqq 2$, glatten Randkurve Γ gleichmäßig in $\bar{B} = B + C$ beliebig genau durch Minimalflächen $\mathfrak{y}_n(u, v)$ approximieren, deren Randkurven Γ_n die Kurve Γ im Fréchetschen Sinne und dazu so approximieren, daß $\lim_{n\to\infty} |\Gamma - \Gamma_n|_s = 0$, d. h. es soll $\lim_{n\to\infty} |\mathfrak{y} - \mathfrak{y}_n|_{\bar{B}} = 0$ gelten?

Wie wir zeigten, ist dies dann der Fall, wenn $\mathfrak{y}$ ein starkes relatives Minimum liefert, es sich also um „stabile" Minimalflächen handelt. Falls sich das Approximationsproblem in der obigen allgemeinen Form lösen ließe, so wäre gezeigt, daß eine Minimalfläche $\mathfrak{y}(u, v)$ mit einer Randkurve $\Gamma \in C^{s+2}$ in $C^s(\bar{B})$ liegt.

Wir wollen zweitens bemerken, daß sich ähnliche a priori-Schranken auch für das freie und halbfreie Randwertproblem[4] von Minimalflächen aufstellen lassen. Dann müssen wir, um die Randbedingungen zu linearisieren, das freie Flächenstück lokal zu einem ebenen Stück aufbiegen. Die Transversalitätsrelationen führen zur Aufstellung einer Gleichung, die (2.10) entspricht. Für den halbfreien Fall hat H. LEWY [7] bewiesen, daß die Minimalfläche ein analytisches freies Flächenstück in einer analytischen Kurve als Spur durchsetzt und daß sie sich auf der Spur analytisch verhält. Es gelang mir nicht, zu Existenzsätzen für das Randverhalten von Minimalflächen zu gelangen, deren Rand auf nichtanalytischen Flächen liegt, da die passenden Approximationssätze fehlen. Dagegen scheint eine etwas abgeänderte Art von a priori-Ungleichungen erfolgreicher zu sein. Hierauf hoffe ich, in einer anderen Arbeit zurückzukommen.

Abschließend wollen wir feststellen, daß sich unsere Abschätzungen nahezu wörtlich gleich auch für Flächen konstanter mittlerer Krümmung H aufstellen lassen, deren Existenz für hinreichend kleine H-Werte von E. HEINZ [3] bewiesen wurde. Hier scheint es noch keinerlei Betrachtungen über das Randverhalten zu geben; insbesondere fehlt das Analogon des Ergebnisses von LEWY.

6. Konforme Abbildung

Unsere Ergebnisse gelten, wie man ohne weiteres sieht, nicht nur für Minimalflächen $\mathfrak{y} = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$ im 3-dimensionalen Raum ($n = 3$), sondern auch für beliebiges $n \geqq 2$. Besonderes Interesse verdient dabei der Fall $n = 2$ der konformen Abbildung ebener Gebiete. Hier fällt nämlich — wie J. DOUGLAS bemerkt hat — das Plateauproblem mit dem Riemannschen Abbildungssatz zusammen, die Minimalfläche $\mathfrak{y}(u, v)$ ist daher bis auf Normierung eindeutig bestimmt. Also läßt sich der Satz 4.1 anwenden, und wir bekommen:

Satz 6.1. *Sei G ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet in der w-Ebene, das durch $z = z(w)$ konform auf die Fläche des Einheitskreises B in der z-Ebene abgebildet wird. Gehört der Rand Γ von G zur Klasse C^{s+2}, so liegt $z(w)$ in $C^s(\bar{G})$, und die inverse Abbildung $w = w(z)$ liegt in $C^s(\bar{B})$.*

Bisher scheint nur das von LICHTENSTEIN [8], S. 365—366, ohne Beweis angegebene Resultat bekannt gewesen zu sein: Wenn G zur Klasse B (oder auch nur Ah) gehört, so ist $\frac{dz}{dw}$ in $G + \Gamma$ vorhanden, stetig und genügt einer H-Bedingung.

Außerdem hat S. E. WARSCHAWSKI [12] mittels der isoperimetrischen Ungleichung die Hölderstetigkeit von $w(z)$ in $\bar{B}$ bewiesen unter der Voraussetzung, daß Γ rektifizierbar ist und die Bogenlänge auf Γ einer Lipschitzbedingung genügt. Ferner zeigt WARSCHAWSKI, daß $w'(z)$ in $|z| \leqq 1$ stetig ist, falls der Tangentenwinkel $\tau(s)$ stetig ist und einen stetigen Kontinuitätsmodul $\omega(t)$ längs Γ hat, für den $\int \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty$ ausfällt. Ein Spezialfall hiervon ist ein älteres Resultat von O. D. KELLOGG.

[4] Vgl. dazu [2], Chapter VI, S. 199—222.

Wesentlich ist, daß in dem Warschawskischen Resultat nur geometrische Größen von Γ eingehen. Zusammen mit unseren Abschätzungen von Abschnitt 3 erhalten wir dann Abschätzungen von $\frac{d^s w}{dz^s}$ in $\bar{B}$, die nur von geometrischen Größen von Γ abhängen.

Anmerkung bei der Korrektur: Inzwischen habe ich bemerkt, daß das Randverhalten von analytischen Funktionen in der Literatur ausführlich diskutiert worden ist; die bisher benutzten Methoden sind aber ganz verschieden von der unseren und auf den zweidimensionalen Fall zugeschnitten. Zu nennen sind die Arbeiten von P. PAINLEVÉ, O. D. KELLOGG, W. SEIDEL und insbesondere von S. WARSCHAWSKI, von dem die schärfsten Resultate stammen. Man vgl. dazu: S. WARSCHAWSKI: On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping. Trans. Amer. Math. Soc. **38**, 310—340 (1935), und D. GAIER: Konstruktive Methoden der konformen Abbildung, Springer-Verlag 1964, 262—264, sowie die dort zitierten Arbeiten.

7. Anhang

Wir hatten

$$R_a = \{(u, v) : 0 \leqq u \leqq a,\ |v| \leqq a\}$$

und

$$Q_a = \{(u, v) : |u| \leqq a,\ |v| \leqq a\}$$

gesetzt.

Lemma 7.1. *Wenn $f(u, v) \in C^{m+2}(R_a)$ ist und $\eta(u, v)$ eine Funktion aus $C_c^\infty(Q_a)$ bezeichnet, so gilt*

$$|\eta D^m f|_{R_a} \leqq K_1 \cdot a \cdot \|\eta D_u D_v D^m f\|_{R_a} + K_2 \cdot |\eta|_{2, R_a} \cdot \|f\|_{m+1, R_a}. \tag{7.1}$$

Beweis. Wenn g eine Funktion aus $C^2(R_a)$ mit relativ kompaktem Träger in R_a ist, so hat man für $(u_0, v_0) \in R_a$

$$g(u_0, v_0) = -\int_{u_0}^{a} D_u g(u, v_0)\, du$$

und

$$D_u g(u, v_0) = -\int_{v_0}^{a} D_v D_u g(u, v)\, dv,$$

somit

$$g(u_0, v_0) = \int_{u_0}^{a}\int_{v_0}^{a} D_u D_v g(u, v)\, du\, dv.$$

Hieraus folgt

$$|g(u_0, v_0)| \leqq \int_{u_0}^{a}\int_{v_0}^{a} |D_u D_v g(u, v)|\, du\, dv \leqq \int_{0}^{a}\int_{-a}^{a} |D_u D_v g(u, v)|\, du\, dv.$$

Mittels der Schwarzschen Ungleichung ergibt sich

$$|g(u_0, v_0)|^2 \leqq 2a^2 \int_{R_a}\int (D_u D_v g)^2\, du\, dv,$$

d. h.

$$|g|_{R_a} \leqq 2a \cdot \|D_u D_v g\|_{R_a}. \tag{7.2}$$

Offensichtlich erfüllt $g = \eta \cdot D^m f$ die oben an g gestellten Voraussetzungen; damit erhält man aus (7.2)

$$\begin{aligned} |\eta \cdot D^m f|_{R_a} &\leqq 2a \|D_u D_v(\eta \cdot D^m f)\|_{R_a} \\ &\leqq 2a \cdot \|\eta \cdot D_u D_v D^m f\|_{R_a} + k_2 \cdot |\eta|_{2, R_a} \cdot \|f\|_{m+1}, \end{aligned}$$

q. e. d.

Lemma 7.2. *Wenn* $f(u,v)\in C^2(R_a)$, $\eta(u,v)\in C_c^\infty(Q_a)$ *und* $\eta(u,v)=\eta(-u,v)$ *ist, so gilt*

$$\|\eta\cdot Df\cdot D'f\|_{R_a}\leqq|f|_{R_a}\cdot k_3\cdot\Big\{\sum_{D^2}\|\eta\cdot D^2f\|_{R_a}+|\eta|_{1,R_a}\cdot\sqrt{\mathcal{D}_{R_a}(f)}\Big\}. \tag{7.3}$$

Beweis. (a) Wir erledigen zunächst den Fall, $\|\eta\cdot(D_vf)^2\|_{R_a}$ abzuschätzen, der am einfachsten ist. Es gilt bei einem fixierten u mit $0\leqq u\leqq a$

$$\int_{-a}^{a}\eta^2\cdot(D_vf)^4\,dv=-\int_{-a}^{a}f[\eta^2\cdot3(D_vf)^2\cdot D_v^2f+2\eta D_v\eta(D_vf)^3]\,dv\leqq$$

$$\leqq3\sup_{|v|\leqq a}|f(u,v)|\cdot\sqrt{\int_{-a}^{a}\eta^2\cdot(D_vf)^4\,dv}\Big\{\sqrt{\int_{-a}^{a}\eta^2\cdot(D_v^2f)^2\,dv}+$$

$$+\sup_{|v|\leqq a}|D_v\eta|\sqrt{\int_{-a}^{a}(D_vf)^2\,dv}\Big\}.$$

Daher

$$\int_{-a}^{a}\eta^2\cdot(D_vf)^4\,dv\leqq18\cdot|f|_{R_a}^2\cdot\Big\{\int_{-a}^{a}\eta^2\cdot(D_v^2f)^2\,dv+|\eta|_{1,R_a}^2\cdot\int_{-a}^{a}(D_vf)^2\,dv\Big\}. \tag{7.4}$$

Integration bezüglich u über $0\leqq a\leqq u$ gibt schließlich

$$\|\eta\cdot(D_vf)^2\|_{R_a}^2\leqq18\cdot|f|_{R_a}^2\cdot\{\|\eta\cdot D_v^2f\|_{R_a}^2+|\eta|_{1,R_a}^2\|D_vf\|_{R_a}^2\}. \tag{7.5}$$

(b) Um in der u-Richtung analog vorgehen zu können, müssen wir f in geeigneter Weise für $-a\leqq u\leqq0$ fortsetzen. Sei jetzt ein v mit $|v|\leqq a$ fest gegeben. Dann betrachten wir die Funktion

$$g(u)=\begin{cases}f(u,v) & \text{für } 0\leqq u\leqq a\\ 2f(0,v)-f(-u,v) & \text{für } -a\leqq u<0.\end{cases}$$

Offenbar sind g und D_ug in $-a\leqq u\leqq a$ stetig, während die zweite Ableitung D_u^2g in diesem Intervall stetig bis auf $u=0$ ist, wo sie einen Sprung hat.

Mit einer zu (a) völlig analogen Rechnung bekommt man — (7.4) entsprechend — die Abschätzung

$$\int_{-a}^{a}\eta^2\cdot(D_ug)^4\,du\leqq \tag{7.6}$$

$$\leqq18\cdot\sup_{|u|\leqq a}|g(u)|^2\cdot\Big\{\int_{-a}^{a}\eta^2(D_u^2g)^2\,du+\sup_{|u|\leqq a}|D_u\eta|^2\cdot\int_{-a}^{a}(D_ug)^2\,du\Big\}.$$

Wegen $\eta(u,v)=\eta(-u,v)$, $D_ug(u)=D_ug(-u)$ und $D_u^2g(u)=-D_u^2g(-u)$ ergibt sich

$$\int_{-a}^{a}\eta^2\cdot(D_ug)^4\,du=2\int_{0}^{a}\eta^2(D_uf)^4\,du,\qquad\int_{-a}^{a}|D_ug|^2\,du=2\int_{0}^{a}|D_uf|^2\,du,$$

$$\int_{-a}^{a}\eta^2\cdot(D_u^2g)^2\,du=2\int_{0}^{a}\eta^2\cdot(D_u^2f)^2\,du,$$

$$\sup_{|u|\leqq a}|g(u)|\leqq9\sup_{0\leqq u\leqq a}|f(u,v)|,\qquad\sup_{|u|\leqq a}|D_u\eta|=\sup_{0\leqq u\leqq a}|D_u\eta|.$$

Hieraus folgt zusammen mit (7.6)

$$\int_0^a \eta^2 \cdot (D_u f)^4 \, du \leqq 162 \cdot |f|^2_{R_a} \cdot \left\{ \int_0^a \eta^2 (D_u^2 f)^2 \, du + |\eta|^2_{1,R_a} \cdot \int_0^a (D_v f)^2 \, dv \right\}.$$

Integration bezüglich v über $-a \leqq v \leqq a$ gibt

$$\|\eta \cdot (D_u f)^2\|^2_{R_a} \leqq 162 \cdot |f|^2_{R_a} \cdot \{\|\eta \cdot D_u^2 f\|^2_{R_a} + |\eta|^2_{1,R_a} \cdot \|D_u f\|^2_{R_a}\}. \tag{7.7}$$

(c) Beachtet man nun noch, daß

$$2\,\|\eta \cdot D_u f \cdot D_v f\|_{R_a} \leqq \|\eta \cdot (D_u f)^2\|_{R_a} + \|\eta \cdot (D_v f)^2\|_{R_a},$$

so folgt schließlich wegen (7.5) und (7.7) die Behauptung (7.3).

Literatur

[1] COURANT, R.: On a generalized form of Plateau's problem. Trans. Am. Math. Soc. **50**, 40—47 (1941).

[2] — Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces. New York: Interscience Publ. 1950.

[3] HEINZ, E.: Über die Existenz einer Fläche konstanter mittlerer Krümmung bei vorgegebener Berandung. Math. Ann. **127**, 258—287 (1954).

[4] JOHN, F.: Estimates for the derivatives of the stresses in a thin shell and interior shell equations. Communications Pure Appl. Math. **XVIII**, 235—267 (1965).

[5] LADYSCHENSKAJA, O. A., u. N. N. URALZEWA: Quasilineare elliptische Gleichungen und Variationsaufgaben mit mehreren unabhängigen Veränderlichen. Uspechi Mat. Nauk **XVI**, 19—90 (1961) (in Russisch).

[6] LEWY, H.: On the boundary behaviour of minimal surfaces. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. **37**, 103—110 (1951).

[7] — On minimal surfaces with partially free boundary. Comm. Pure Appl. Math. **IV**, 1—13 (1951).

[8] LICHTENSTEIN, L.: Encyklopädie der Math. Wiss. II C 3. Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung.

[9] NIRENBERG, L.: On elliptic partial differential equations. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser. 3, **13**, 115—162 (1959).

[10] NITSCHE, J. C. C.: On new results in the theory of minimal surfaces. Bull. Am. Math. Soc. **71**, 195—270 (1965).

[11] RADO, T.: On the problem of Plateau. Ergeb. Math. Band 2. Berlin: Springer 1933.

[12] WARSCHAWSKI, S. E.: On differentiability at the boundary in conformal mapping. Proc. Am. Math. Soc. **12**, 614—620 (1961).

STEFAN HILDEBRANDT
65 Mainz, Saarstr. 21
Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 12. Oktober 1965)

BENZ, W.
Math. Annalen 165, 19—23 (1966)

Eine Kennzeichnung der van der Waerden-Smid-Geometrien

ERNST HÖLDER zum 65. Geburtstag am 2. 4. 1966 gewidmet

WALTER BENZ

1. In [1] haben wir den folgenden Satz bewiesen: *Eine Möbiusebene im engeren Sinn ist genau dann eine van der Waerden-Smid-Geometrie, wenn sie eine euklidische Büschelgruppe* (s. § 2 der vorliegenden Note) *besitzt.* Beim Beweis benutzten wir einen Satz von L. J. SMID ([5], § 25) (mitsamt der Erweiterung dieses Satzes auf den Fall endlicher Möbiusebenen, s. H. MÄURER [4]), nach dem eine Möbiusebene im engeren Sinn, die eine Winkelvergleichung in gewisser Stärke besitzt (u. a. soll der Satz über den Sehnentangentenwinkel gelten) eine van der Waerden-Smid-Geometrie sein muß.

In der vorliegenden Note wollen wir den erstgenannten Satz *ohne* Zuhilfenahme des Smidschen Satzes beweisen. Als Korollar unseres Beweises ergibt sich ein einfacher Beweis des Smidschen Satzes. Ein solcher einfacher Beweis des Resultates von SMID darf Interesse beanspruchen, da die Vollständigkeit des Smidschen Beweises angezweifelt wurde [s. Fortschritte der Mathematik, Bd. **55**, 991—992 (1929)], allerdings zu Unrecht, s. H. MÄURER [4].

Weiterhin folgt aus unserem Satz ein Resultat von W. SÜSS, daß nämlich die in [6] angegebenen Axiome den vollen Satz von MIQUEL implizieren[1]. Allerdings ist diese Anwendung unseres Satzes nicht sinnvoll, da so nicht unmittelbar unser in [2] gewonnenes Resultat herauskommt, daß nämlich das von SÜSS vorausgesetzte Axiom der Winkeltreue *(Haben zwei Kreise k und k' einen Punkt S gemein, und liegt der Punkt $A \neq S$ auf k', so führt jede $\mathfrak{T}$-Abbildung[2], welche k in sich selbst überführt und dabei die Punkte S und A einzeln festläßt, auch k' in sich selbst über.)* eine Folge der übrigen von SÜSS vorausgesetzten Axiome ist.

2. Sei Σ eine H-Kreisebene, d. h. eine Kreisebene[3] mit den Eigenschaften

(1) *Durch drei verschiedene Punkte geht genau ein Kreis.*

(2) *Es gibt wenigstens einen Kreis. Jeder Kreis enthält wenigstens drei verschiedene Punkte.*

[1] Der Weg über den vollen Satz von MIQUEL konnte bei SÜSS nicht zu dem endgültigen Süssschen Resultat (nämlich zu einer Kennzeichnung der klassischen 2-dimensionalen Möbiusgeometrie und hierauf fußend zu einer Kennzeichnung der linearen Gruppe auf der Kugel) führen, da sich die von SÜSS benutzte Studysche Vermutung als falsch herausstellte. Neben einem anderen von SÜSS angedeuteten Weg ist der erstgenannte Weg aber wieder gangbar, wenn man das Resultat von VAN DER WAERDEN und SMID [7] heranzieht.

[2] $\mathfrak{T}$ ist dabei eine zugrundeliegende Gruppe von Kreisverwandtschaften.

[3] Für alle in der vorliegenden Arbeit benutzten (und hier nicht definierten) Bezeichnungen und Begriffe der Möbiusgeometrie sei ein für allemal auf den zusammenfassenden Bericht [3] verwiesen.

Die beliebige Gruppe $\mathfrak{G}$ *heißt dann eine Büschelgruppe von* Σ, s. [1], *wenn jedem geordneten Punktepaar* $P, Q \neq P$ *von* Σ *eine eineindeutige Abbildung* σ_{PQ} *der Menge aller Kreise durch* P, Q *auf* $\mathfrak{G}$ *zugeordnet ist mit*

$$(\mathfrak{G}\,1) \qquad (AB;\, CD) = (CD;\, AB)$$

für je vier nicht gemeinsam einem Kreise angehörende Punkte A, B, C, D. — Allgemein werde das Bild des Kreises (PQR) gegenüber σ_{PQ} durch $\begin{pmatrix} P\,Q \\ R \end{pmatrix}$ bezeichnet; unter $(PQ;\, RS)$ — es sei P, Q, R, S ein geordnetes Punktequadrupel (bestehend aus vier verschiedenen Punkten) — wird das $\mathfrak{G}$-Element $\begin{pmatrix} P\,Q \\ R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P\,Q \\ S \end{pmatrix}^{-1}$ verstanden.

Sind c, d verschiedene Kreise, die sich in den verschiedenen Punkten A, B schneiden, so heiße $(AB;\, CD)$, $C \in c - d$, $D \in d - c$, die *Größe* des Winkels $(cd;\, B)$; ferner sollen zwei Winkel von gleicher Größe *gleich* heißen. Gegenüber dieser Interpretation stellt die Forderung ($\mathfrak{G}$ 1) die Gültigkeit des *Satzes über den Sehnentangentenwinkel* $((ABC)(ABD);\, B) = ((CDA)(CDB);\, D)$ dar und die später folgende Eigenschaft ($\mathfrak{G}$ 2) die Gültigkeit des *Satzes über die Winkelsumme im Kreisdreieck.*

Satz 1: *Ist* Σ *eine H-Kreisebene, die eine Büschelgruppe* $\mathfrak{G}$ *besitzt, so gilt in* Σ *der Satz von* MIQUEL.

Der Beweis erfolgt in vier Schritten:

a) *Sind* A, B, C, D *vier verschiedene Punkte, so gilt offenbar genau dann* $(AB;\, CD) = 1$ *(1-Element von* $\mathfrak{G}$*), wenn das Quadrupel* A, B, C, D *konzyklisch liegt.*

b) *Für vier verschiedene Punkte* A, B, C, D *gilt* $(AB;\, CD) = (BA;\, DC)$.

Beweis. Mit Hilfe von ($\mathfrak{G}$ 1) ist

$$(AB;\, CD) = \begin{pmatrix} A\,B \\ C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A\,B \\ D \end{pmatrix}^{-1} = \left[\begin{pmatrix} A\,B \\ D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A\,B \\ C \end{pmatrix}^{-1}\right]^{-1} = (AB;\, DC)^{-1}$$
$$= (DC;\, AB)^{-1} = (DC;\, BA) = (BA;\, DC).$$

c) $\mathfrak{G}$ *ist abelsch.*

Beweis. Gegeben seien Elemente $a, b \in \mathfrak{G}$. Wir wollen $ab = ba$ nachweisen. Dabei können wir $a \neq 1$, $b \neq 1$, $ab \neq 1$ voraussetzen. Seien P, Q, R verschiedene Punkte. Es sei s der Kreis durch P, Q mit $s^{\sigma_{PQ}} = a\begin{pmatrix} P\,Q \\ R \end{pmatrix}$. Sei $S \in s - \{P, Q\}$. Wegen $a \neq 1$ ist $S \neq R$. Es gilt $a = \begin{pmatrix} P\,Q \\ S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P\,Q \\ R \end{pmatrix}^{-1} = (PQ;\, SR)$. Sei t der Kreis durch P, Q mit $t^{\sigma_{PQ}} = b\begin{pmatrix} P\,Q \\ S \end{pmatrix}$. Sei $T \in t - \{P, Q\}$. Wegen $b \neq 1$ ist $T \neq S$. Es gilt $b = \begin{pmatrix} P\,Q \\ T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P\,Q \\ S \end{pmatrix}^{-1} = (PQ;\, TS)$. Mit b) folgt $a = (QP;\, RS)$, $b = (QP;\, ST)$. Also hat man $ab = \begin{pmatrix} Q\,P \\ R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q\,P \\ T \end{pmatrix}^{-1}$. Wegen $ab \neq 1$ ist $R \neq T$. Damit ist

$ab = (QP; RT) = (PQ; TR)$. Weiterhin gilt $ba = (PQ; TS) \cdot (PQ; SR) = (PQ; TR)$.

d) *Es seien A, B, C, D, E, F, G, H verschiedene Punkte. Sind dann fünf der Quadrupel AEHD, FBCG, AFCH, EBGD, EFHG, ABCD konzyklisch, so auch das sechste.*

Beweis. Mit (𝔊 1) und b) gilt

$$(HG; EF)(AF; GC)(AF; CH) = (HG; EF)(AF; GH)$$
$$= (HG; EF)(HG; FA) = (HG; EA) = (AE; GH) = (AE; GD)(AE; DH).$$

Hieraus folgt mit Hilfe von c)

$$(HG; EF)(AF; CH)(AE; HD) = (AE; GD)(AF; CG) = (DG; EA)(GC; FA).$$

Damit ist

$$\begin{aligned}(AE; HD)(FB; CG)(AF; CH)(EB; GD)(EF; HG) &= (GC; BF)(DG; BE)(HG; EF)(AF; CH)(AE; HD)\\ &= (GC; BF)(DG; BE)(DG; EA)(GC; FA)\\ &= (DG; BA)(GC; BA) = (AB; CD).\end{aligned}$$

Nun folgt sofort d)! In der Tat: Sind fünf der Elemente $(AE; HD)$, $(FB; CG)$, $(AF; CH)$, $(EB; GD)$, $(EF; HG)$, $(AB; CD)$ gleich 1, so auch das sechste.

3. *Sei 𝔊 eine Büschelgruppe der H-Kreisebene Σ. Dann heißt 𝔊 eine euklidische Büschelgruppe von Σ, wenn für je vier nicht gemeinsam auf einem Kreise liegende Punkte P, A, B, C*

$$(\mathfrak{G}\,2) \qquad (PA; BC)(PB; CA)(PC; AB) = 1$$

erfüllt ist.

Ist Σ eine H-Kreisebene und ist 𝔊 eine Büschelgruppe von Σ, so braucht 𝔊 nicht euklidisch zu sein (s. [1]).

Satz 2. *Ist Σ eine Möbiusebene im engeren Sinn, die eine euklidische Büschelgruppe 𝔊 besitzt, so genügt Σ dem vollen Satz von* MIQUEL (Axiom VI bei VAN DER WAERDEN, SMID [7]).

Der Beweis erfolgt in drei Schritten.

a) Eine Möbiusebene im engeren Sinn ist gewiß eine H-Kreisebene. Also gilt nach Satz 1 in Σ der Satz von MIQUEL.

b) *Sind A, B, C, D, E, F, G verschiedene Punkte, so gilt*

$$(GA; EF) = (EA; DF)(AF; CE)(BA; CD)(BE; DG)(BF; GC).$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}(GE; AF)(BA; GC) &= (AF; GE)(CG; AB)\\ &= (AF; GC)(AF; CE)(CG; AB) = (CG; FA)(AF; CE)(CG; AB)\\ &= (CG; FB)(AF; CE) = (BF; GC)(AF; CE).\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von (𝔊 2) gilt

$$\begin{aligned}(GA;\,EF)&=(GE;\,AF)\,(GF;\,EA)=(GE;\,AF)\,(EA;\,GF)\\&=(GE;\,AF)\,(EA;\,GD)\,(EA;\,DF)=(GE;\,AF)\,(DG;\,AE)\,(EA;\,DF)\\&=(GE;\,AF)\,(DG;\,AB)\,(DG;\,BE)\,(EA;\,DF)\\&=(GE;\,AF)\,(BA;\,GD)\,(BE;\,DG)\,(EA;\,DF)\\&=(GE;\,AF)\,(BA;\,GC)\,(BA;\,CD)\,(BE;\,DG)\,(EA;\,DF)\\&=(BF;\,GC)\,(AF;\,CE)\,(BA;\,CD)\,(BE;\,DG)\,(EA;\,DF).\end{aligned}$$

c) Aufgrund von Satz 1 verbleibt zum Nachweis des vollen Satzes von MIQUEL (s. [3]) noch zu zeigen: *Sind A, B, C, D, E, F, G verschiedene Punkte, liegen die Quadrupel BACD, BEDG, BFGC konzyklisch und berührt der Kreis (ACF) den Kreis (ADE), so liegt das Quadrupel GAEF konzyklisch.* Wir weisen $(EA;\,DF)=(FA;\,CE)$ nach. Dann folgt c) aus b).

Sei $a=(AFE)$, $b=(ACF)$, $c=(ADE)$. Wir können $b\neq c$ voraussetzen, da sonst nichts zu beweisen ist. Also ist $b\cap c=\{A\}$, da sich doch die Kreise b, c nach Voraussetzung berühren. Sei nun x der Kreis durch E, A mit (wir setzen $x^{\sigma_{EA}}=x_{EA}$ usf.)

$$(*)\qquad x_{EA}=b_{FA}a_{FA}^{-1}a_{EA}.$$

Im Falle $x=c$ sind wir fertig; denn dann folgt aus (*) $c_{EA}a_{EA}^{-1}=b_{FA}a_{FA}^{-1}$, d. h.

$$\begin{pmatrix}E\,A\\D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E\,A\\F\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}F\,A\\C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F\,A\\E\end{pmatrix}^{-1}.$$

Die Annahme $x\neq c$ wollen wir zum Widerspruch führen. Sei also jetzt $x\neq c$. Es ist $x\neq b$, da b den Punkt E nicht enthält (sonst wäre $b\cap c\ni A, F$). Also folgt $|x\cap b|\geqq 2$. Wegen $A\in x\cap b$ ist $|x\cap b|\geqq 1$. Angenommen, $|x\cap b|=1$. Wegen $x\cap b=\{A\}=c\cap b$ und $x\cap c\ni E, A$ folgte dann aufgrund des Berührsatzes $x=c$, was nicht der Fall sein sollte. Es gilt also $|x\cap b|=2$. Sei $\{A,M\}=x\cap b$. Es ist $M\neq E$, da sonst E auf b läge, was schon früher ausgeschlossen wurde. Die Punkte F, E, M, A liegen nicht konzyklisch (sie sind also insbesondere paarweise verschieden): Sonst wäre $x=(MAE)=(AFE)=a$, was nach (*) $b=a$ und also $x=b$ ergäbe. Sei $m=(EMF)$. Aus (𝔊 2) folgt $(FE;\,MA)\,(FM;\,AE)\,(FA;\,EM)=1$. Wegen (*) gilt $(EA;\,MF)=(FA;\,ME)$. Zusammengefaßt folgt hieraus

$$\begin{aligned}1&=(FE;\,MA)\,(EA;\,MF)\,(FA;\,EM)\\&=(FE;\,MA)\,(EA;\,MF)\,(EA;\,FM)=(FE;\,MA).\end{aligned}$$

Also müßte doch das Quadrupel $FEMA$ konzyklisch liegen.

4. Zum Smidschen Satz: Die von SMID herangezogene Gruppe 𝔊 der Klassen gleicher Winkel ist unmittelbar als eine euklidische Büschelgruppe zu erkennen, wenn man jedem geordneten Punktepaar P, $Q\neq P$ einen Punkt $\overline{PQ}\neq P, Q$ zuordnet. Dann soll nämlich zum Kreis (PQR) das Element $\begin{pmatrix}P\,Q\\R\end{pmatrix}$ gleich demjenigen Element aus 𝔊 sein, das den Winkel $((P\,Q\,\overline{PQ})\,(P\,Q\,R);\,Q)$

enthält. Es gilt (G1), da der Satz über den Sehnentangentenwinkel von SMID vorausgesetzt wird. (G 2) steckt zum wesentlichen Teil schon in der Definition des Smidschen Winkelbegriffs *(geordnetes Kontaktelementepaar mit gleichem Grundpunkt)*.

5. Aufgrund der Süssschen Axiome hat man eine minimal dreifach transitive Gruppe $\mathfrak{T}$ von Kreisverwandtschaften zur Verfügung, die alle wenigstens einen Fixpunkt (nach einem Brouwerschen Fixpunktsatz) besitzen. Also hat man eine minimal dreifach transitive Gruppe $\mathfrak{T}$ von Kreisverwandtschaften zur Verfügung mit der Eigenschaft, daß zu je vier verschiedenen Punkten A, B, C, D eine Involution τ aus $\mathfrak{T}$ existiert, die A mit B und die C mit D vertauscht. Eine solche Gruppe steht auch in allen van der Waerden-Smid-Geometrien zur Verfügung. (Allerdings braucht hier nicht jede Kreisverwandtschaft einen Fixpunkt zu besitzen. Das ist genau dann der Fall, wenn der zugrundeliegende Körper ein euklidischer Körper ist[4].) Nennt man jetzt jedes geordnete Tripel $(ab; P)$, a, b Kreise durch den Punkt P, $|a \cap b| \geqq 2$, einen Winkel und nennt man die Winkel $(ab; P)$, $(a'b'; P')$ genau dann gleich, wenn es ein $\tau \in \mathfrak{T}$ gibt mit $a^\tau = a'$, $b^\tau = b'$, $P^\tau = P'$, so kommt es auf eine einfache Verifikation hinaus (unter Zuhilfenahme des Süssschen Axioms der Winkeltreue), die Gruppe der Klassen gleicher Winkel (natürliche Addition von Winkeln als Verknüpfung genommen) als euklidische Büschelgruppe zu erkennen[5].

Literatur

[1] BENZ, W.: Elliptische Kreisbüschel als Gruppen. Tensor **13**, 232—245 (1963).

[2] — Über Winkel- und Transitivitätseigenschaften in Kreisebenen. I, II. J. reine angew. Math. **205**, 48—74 (1960), **207**, 1—15 (1961).

[3] — Über Möbiusebenen. Ein Bericht. Jber. dtsch. Math. Ver. **63**, 1—27 (1960).

[4] MÄURER, H.: Über die Winkelmetrik von Smid in Möbiusebenen und ihre Kennzeichnung durch den vollen Satz von Miquel. Staatsexamensarbeit, Mainz 1961.

[5] SMID, L. J.: Over Cirkelmeetkunden. Groningen 1928.

[6] SÜSS, W.: Beiträge zur gruppentheoretischen Begründung der Geometrie. III. Tohoku Math. J. **28**, 228—241 (1927).

[7] VAN DER WAERDEN, B. L., u. L. J. SMID: Eine Axiomatik der Kreisgeometrie und der Laguerregeometrie. Math. Ann. **110**, 753—776 (1935).

Prof. Dr. WALTER BENZ
Mathematisches Seminar der Universität Frankfurt
6 Frankfurt a. M., Robert-Mayer-Str. 6—8

(Eingegangen am 25. August 1965)

[4] In [2] wird übrigens u. a. gezeigt, daß eine Möbiusebene, die eine minimal dreifach transitive Gruppe $\mathfrak{T}$ von Kreisverwandtschaften besitzt so, daß jede Kreisverwandtschaft aus $\mathfrak{T}$ wenigstens einen Fixpunkt besitzt, eine van der Waerden-Smid-Geometrie über einem euklidischen Körper sein muß.

[5] Zur Existenz einer euklidischen Büschelgruppe in der Möbiusgeometrie über einem Körperpaar (also insbesondere in den van der Waerden-Smid-Geometrien) s. auch [1], wo ein anderer einfacher Weg beschritten wird.

HÄRTTER, E.
Math. Annalen 165, 24—25 (1966)

Eine Bemerkung über Basen

Professor ERNST HÖLDER zum 65. Geburtstag gewidmet

ERICH HÄRTTER

1. Eine Menge $\mathfrak{B}$ nichtnegativer ganzer Zahlen mit $0 \in \mathfrak{B}$ heißt Basis h-ter Ordnung (für die Menge $\mathfrak{Z}$ aller nichtnegativen ganzen Zahlen), wenn jede nichtnegative ganze Zahl z als $z = \sum_{i=1}^{h} b_i$ mit $b_i \in \mathfrak{B}$ darstellbar ist. O.B.d.A. nehmen wir $\mathfrak{B} = \{b_0, b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots\}$ mit $b_0 = 0$, $b_k < b_{k+1}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ an und setzen die Differenz zweier aufeinander folgender Elemente $b_{k+1} - b_k = \Delta_k$.

Dann wollen wir folgenden Satz beweisen:

Satz 1. *Es gibt keine Basis zweiter Ordnung mit $\Delta_{k+1} > \Delta_k$ für alle $k \geqq K$.*

Beweis. Angenommen, $\mathfrak{B}_0$ wäre eine Basis zweiter Ordnung mit $\Delta_{k+1} > \Delta_k$ für alle $k \geqq K$. Dann gilt für jedes Element $b_k \in \mathfrak{B}_0 (k > K)$

$$\begin{aligned} b_k &= b_K + \Delta_K + \Delta_{K+1} + \cdots + \Delta_{k-1} \geqq \\ &\geqq b_K + \Delta_K + (\Delta_K + 1) + (\Delta_K + 2) + \cdots + (\Delta_K + k - K - 1) \geqq \\ &\geqq b_K + (2\Delta_K + k - K - 1)\frac{k-K}{2}. \end{aligned}$$

Bildet man mit der Anzahlfunktion[1] $B_0(n)$ dieser Menge $\mathfrak{B}_0$ den Wert

$$\beta = \overline{\lim_{n=1,2,\ldots}} \frac{B_0(n)}{\sqrt{n}},$$

so folgt

$$\beta = \overline{\lim_{k>K}} \frac{B_0(b_k)}{\sqrt{b_k}} \leqq \overline{\lim_{k>K}} \frac{k}{\sqrt{b_K + (2\Delta_K + k - K - 1)\frac{k-K}{2}}};$$

der rechts stehende Quotient strebt für $k \to \infty$ gegen $\sqrt{2}$, so daß wir

$$\beta \leqq \sqrt{2}$$

haben. Andererseits muß für jede Basis $\mathfrak{B}$ zweiter Ordnung nach STÖHR [4] [Ungleichung (5)] gelten

$$\overline{\lim_{n=1,2,\ldots}} \frac{B(n)}{\sqrt{n}} \geqq \frac{\sqrt{2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} > \sqrt{2},$$

womit wir einen Widerspruch haben. Somit kann $\mathfrak{B}_0$ keine Basis zweiter Ordnung sein[2].

[1] Die Anzahlfunktion $B(n)$ einer Menge $\mathfrak{B}$ nichtnegativer ganzer Zahlen ist definiert als $B(n) = \sum_{\substack{0 < b \leqq n \\ b \in \mathfrak{B}}} 1$.

[2] Übrigens läßt sich dieses Ergebnis auch erzielen, wenn man statt $\overline{\lim_{n=1,2,\ldots}} \frac{B_0(n)}{\sqrt{n}}$ betrachtet $\underline{\lim_{n=1,2,\ldots}} \frac{B_0(n)}{\sqrt{n}}$ und die Abschätzung $\underline{\lim_{n=1,2,\ldots}} \frac{B(n)}{\sqrt{n}} \geqq \frac{1}{\sqrt{0{,}4992}}$ für Basen $\mathfrak{B}$ zweiter Ordnung von ROHRBACH [3] benutzt.

Für Ordnungen $h \geqq 3$ trifft Satz 1 nicht mehr zu; denn die Menge der Trigonalzahlen (einschließlich 0) $\{0, 1, 3, 6, 10, 15, \ldots, \frac{n}{2}(n+1), \ldots\}$ bildet eine Basis dritter Ordnung (GAUSS [1]; vgl. auch KRONECKER-HENSEL [2]), und die Menge der Quadratzahlen ist bekanntlich eine Basis vierter Ordnung.

2. Zwei Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen asymptotisch gleich, $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, wenn es eine Zahl N gibt, so daß

$$\mathfrak{A} \cap [N, \infty) = \mathfrak{B} \cap [N, \infty)$$

gilt[3]. Dann läßt sich die Aussage des Satzes 1 umformen zu

Satz 2. *Es gibt kein Polynom $y = f(x)$ eines Grades $\geqq 2$ derart, daß die Menge $\mathfrak{F}$ der Funktionswerte $\{f(n) | n = 1, 2, 3, \ldots\}$ mit einer Basis $\mathfrak{B}$ zweiter Ordnung asymptotisch gleich ist.*

Andererseits ist für jedes Polynom $y = ax + b$ (a, b ganze Zahlen, $a > 0$) die Menge der Funktionswerte $\mathfrak{F}$ einer Basis $\mathfrak{B}$ zweiter Ordnung asymptotisch gleich; man kann nämlich nehmen $\mathfrak{B} = \{0, 1, 2, \ldots, N\} \cup \{z \equiv b (\mathrm{mod}\, a);\ z > 0\}$ mit einem geeigneten N.

3. Als Verallgemeinerung von Satz 1 gilt der

Satz 3. *Es gibt keine Basis $\mathfrak{B}$ h-ter Ordnung ($h \geqq 2$) mit $b_k \geqq \frac{k^h}{h!} + o(k^h)$ für alle $k \geqq K$.*

Beweis. Angenommen, $\mathfrak{B}_0$ wäre eine solche Basis. Dann bildet man entsprechend wie im Beweis zu Satz 1 den Wert $\beta = \overline{\lim_{k > K}} \frac{B_0(b_k)}{\sqrt[h]{b_k}}$ und folgert, daß $\beta \leqq \sqrt[h]{h!}$ sein muß. Andererseits benutzt man wieder die Aussage (STÖHR [4], Ungleichung (5)), daß für jede Basis $\mathfrak{B}$ h-ter Ordnung

$$\overline{\lim_{n = 1, 2, \ldots}} \frac{B(n)}{\sqrt[h]{n}} \geqq \frac{\sqrt[h]{h!}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{h}\right)} > \sqrt[h]{h!}$$

gelten muß, womit man einen Widerspruch hat.

Literatur

[1] GAUSS, C. F.: Disquisitiones Arithmeticae. Leipzig: Fleischer 1801; art. 293 = Werke I, S. 348 (Göttingen) 1870.

[2] KRONECKER, L., u. K. HENSEL: Vorlesungen über Zahlentheorie I, S. 19. Leipzig: Teubner 1901.

[3] ROHRBACH, H.: Ein Beitrag zur additiven Zahlentheorie. Math. Z. **42**, 1—30 (1937).

[4] STÖHR, A.: Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe. I. J. reine angew. Math. **194**, 40—65 (1955).

Dr. ERICH HÄRTTER
Mathematisches Institut der Universität
65 Mainz, Saarstr. 21

(Eingegangen am 15. Oktober 1965)

[3] Es bedeutet $[N, \infty) = \{N, N+1, N+2, \ldots\}$.

SCHAEFER, H. H.
Math. Annalen 165, 26—30 (1966)

Eine Klasse irreduzibler positiver Operatoren

Meinem verehrten Lehrer ERNST HÖLDER zum 65. Geburtstag in Dankbarkeit gewidmet

HELMUT H. SCHAEFER

In einer früheren Mitteilung ([4], Th. 2) habe ich gezeigt, daß das Randspektrum eines positiven Operators T in einem Raum $L^1(\mu)$, wenn T einer Normbedingung genügt, bezüglich seiner approximativen Eigenfunktionen vollständig zyklisch ist. Die gegenwärtige Arbeit beschäftigt sich mit dem Fall, daß T ein irreduzibler positiver Operator auf einem Raum $C(X)$ (X kompakt) oder $L^1(\mu)$ ist, dessen Resolvente an der Stelle $\lambda = r(T)$ einen Pol besitzt; dies trifft nach einem bekannten Satz von DUNFORD-PETTIS z. B. für alle schwachkompakten T mit $r(T) > 0$ auf diesen Räumen zu [$r(T)$ bezeichnet den Spektralradius von T]. Es zeigt sich, daß der Charakter der Singularität der Resolvente bei $\lambda = r(T)$ für das (im übrigen zyklische) Spektrum auf $|\lambda| = r(T)$ vollständig beherrschend ist. Für den Fall der Banachverbände $l^p (1 < p < +\infty)$ ist dies vor kurzem von NIIRO [2] gezeigt worden; der Verfasser möchte vermuten, daß der zu beweisende Satz für wesentlich allgemeinere Klassen von Banachverbänden mutatis mutandis gültig ist. Jedoch stehen einem allgemeinen Beweis gegenwärtig beträchtliche Schwierigkeiten entgegen.

Für eine ausführliche Diskussion topologischer Vektorverbände, insbesondere für die Dualität von Banachverbänden, sowie für die grundlegenden Eigenschaften positiver Operatoren auf solchen Verbänden verweisen wir auf Kap. V und den Anhang von [5]. Dort finden sich auch sämtliche Sätze über Spektraleigenschaften positiver Operatoren, auf die wir uns im folgenden stützen werden. Wir erinnern an einige Definitionen: Ein positiver linearer Operator T auf dem (reellen) Banachverband E heißt *irreduzibel*, wenn es keinen von (0) und E verschiedenen soliden (épais, saturiert) Unterverband von E gibt, der abgeschlossen und unter T invariant ist. Unter dem *Spektrum* von T bezüglich E verstehen wir das Spektrum der kanonischen Fortsetzung von T auf die komplexe Hülle $E + iE$ von E; im Falle der unten betrachteten Räume $C(X)$ und $L^1(\mu)$ kann die komplexe Hülle mit den entsprechenden komplexen Räumen identifiziert werden, die wir wieder mit $C(X)$ und $L^1(\mu)$ bezeichnen. Das *Randspektrum* von T ist der auf dem Spektralkreis $|\lambda| = r(T)$ gelegene Teil des Spektrums von T.

Theorem. *Es sei E ein Banachverband vom Typus $C(X)$ oder $L^1(\mu)$; T sei ein irreduzibler positiver Operator auf E mit dem Spektralradius $r(T) = 1$[1], dessen Resolvente bei $\lambda = 1$ einen Pol besitzt.*

[1] Dies ist wesentlich eine Normierung von T.

Dann ist das Randspektrum von T die Gruppe aller n-ten Einheitswurzeln für ein gewisses $n \geqq 1$, und jeder dieser Punkte ist einfacher Eigenwert von T und einfacher Pol der Resolvente. Insbesondere besitzt T auf der komplexen Hülle von E eine Darstellung

$$T = \sum_{\nu=0}^{n-1} \varepsilon^{\nu} P_{\nu} + T_1,$$

wo ε eine primitive n-te Einheitswurzel ist, P_{ν} Projektoren vom Rang 1 sind und $\lim_{k\to\infty} \| T_1^k \|^{1/k} < 1$ gilt.

Bezeichnet e die eindeutig bestimmte positive Funktion, die $e = Te$ und $\|e\| = 1$ genügt, und bezeichnet φ die eindeutig bestimmte positive Linearform auf E, die $\varphi = T'\varphi$[2] und $\varphi(e) = 1$ genügt, so sind die Projektoren P_{ν} von der Form

$$P_{\nu} = (\overline{g}^{\nu} \cdot \varphi) \otimes g^{\nu} e \qquad (\nu = 0, \ldots, n-1);$$

hierbei ist g eine im wesentlichen[3] eindeutig bestimmte Funktion mit $|g(t)| \equiv 1$.

Der Beweis wird in mehreren Schritten geführt. In den nachfolgenden drei Propositionen wird stets angenommen, daß E und T den Voraussetzungen des Theorems genügen.

Proposition 1. *Die Stelle $\lambda = 1$ ist ein Pol 1. Ordnung der Resolvente von T, und das zugehörige Residuum ist ein positiver Projektor der Form $P = \varphi \otimes e$, wo $Te = e$, $T'\varphi = \varphi$ und $\varphi(e) = 1$ sind. e ist quasi-innerer Punkt[4] des positiven Kegels von E, und φ ist eine strikt positive Linearform auf E.*

Für den Beweis, der hier nicht wiederholt werden soll, siehe [5], p. 270, Prop. 3.2. Folglich hat T eine Darstellung $T = \varphi \otimes e + S$, wo 1 nicht im Spektrum von S liegt. Hieraus entnimmt man, daß die Adjungierte T' die Darstellung $T' = e \otimes \varphi + S'$ besitzt, wo 1 nicht im Spektrum von S' liegt; insbesondere ist $\lambda = 1$ Pol 1. Ordnung der Resolvente von T', und der zugehörige Eigenraum ist eindimensional. Weiterhin ist auch der Raum der Fixpunkte der Adjungierten T'' von T' eindimensional; er wird von dem kanonischen Bild von e im Bidual E'' erzeugt.

Es gilt also die Prop. 1 sinngemäß auch für T' mit der einen Ausnahme, daß der Eigenvektor φ von T' im allgemeinen nicht quasi-innerer Punkt des positiven Kegels im starken Dual E' ist. Diese Bemerkung wird für die Anwendung der folgenden beiden Propositionen im Falle $E = L^1(\mu)$ wichtig sein; zunächst setzen wir jetzt stets voraus, daß E vom Typus $C(X)$ ist.

Proposition 2. *Der Raum $E = C(X)$ läßt sich verbandsisomorph und normstetig in den Quotienten $F = E''/I_{\varphi}$ des Biduals E'' nach dem $\sigma(E'', E')$-abgeschlossenen, T''-invarianten Ordnungsideal $I_{\varphi} = \{f \in E'' : \varphi(|f|) = 0\}$ einbetten. Die von T'' in F induzierte lineare Abbildung $\hat{T}$ erscheint bei dieser Einbettung als eindeutige, $\sigma(F, I_{\varphi}^0)$-stetige Fortsetzung von T. F kann als Banachverband mit*

[2] T' bezeichnet die Adjungierte von T im topologischen Dual E'.

[3] g [bzw. im Fall $E = L^1(\mu)$ die Klasse von g] ist eindeutig bis auf einen konstanten komplexen Faktor vom Betrag 1.

[4] $f \geqq 0$ heißt quasi-innerer Punkt des positiven Kegels von E, wenn das Ordnungsintervall $[0, f]$ in E total ist. Für $E = C(X)$ stimmen die q.i. Punkte von K mit den inneren Punkten von K überein.

einem Raum $C(W)$ identifiziert werden, und $\hat{T}$ ist ein positiver irreduzibler Operator auf F.

Beweis. Der Bidual E'' von E ist selbst ein Banachverband vom Typus $C(Z)$ ([5], p. 243, Th. 8.1 und p. 246, Prop. 8.4), wo Z ein extremal unzusammenhängender, kompakter Raum ist. Das Ideal I_φ ist $\sigma(E'', E')$-abgeschlossen; in der Tat, $f \to \varphi(|f|)$ ist eine Halbnorm auf E'', die für die Topologie gleichmäßiger Konvergenz auf den Ordnungsintervallen von E' stetig ist, und diese Topologie ist wegen der starken Schwachkompaktheit dieser Ordnungsintervalle mit der Dualität $\langle E', E''\rangle$ verträglich. Der Quotient F kann also auch als starker Dual von I_φ^0 (Polare von I_φ in E') aufgefaßt werden; insbesondere ist die Einheitskugel von F $\sigma(F, I_\varphi^0)$-kompakt. Bezeichnet man mit W den Träger (support) des Radonschen Maßes φ[5] auf Z, so ist F offenbar auch mit dem Raum $C(W)$ isomorph, und W ist eine offene und abgeschlossene Teilmenge von Z. Die behauptete Einbettbarkeit von E in $C(W)$ geschieht nun mit Hilfe der kanonischen Abbildung $E'' \to F$; wegen $E \cap I_\varphi = (0)$ ist diese Abbildung auf E injektiv (E wird hierbei mit einem Teilraum von E'' identifiziert). Da die Quotientenabbildung $E'' \to F$ ein Verbandshomomorphismus ist, induziert sie einen Verbandsisomorphismus von E in $F = C(W)$, der natürlich normstetig ist. Aus der Definition von F folgt, daß $\sigma(F, I_\varphi^0)$ die Quotiententopologie von $\sigma(E'', E')$ ist; daher ist das kanonische Bild von E $\sigma(F, I_\varphi^0)$-dicht in F. Hieraus folgt nun auch sofort, daß $\hat{T}$ als eindeutige, stetige Fortsetzung von T für diese Topologie erscheint.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $\hat{T}$ in $F = C(W)$ für die Normtopologie irreduzibel ist. Dies ist aber, wie man sich leicht überlegt, dann und nur dann der Fall, wenn I_φ ein maximales (eigentliches) T''-invariantes Ideal im starken Bidual E'' ist. Es sei also $J \supset I_\varphi$ ein eigentliches, T''-invariantes Ideal in E'', das wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit als abgeschlossen voraussetzen können [da $E'' = C(Z)$ ist]. In dem Quotienten E''/J gilt für die von T'' induzierte Abbildung $\tilde{T}$ (die ein positiver Operator ist) die Beziehung $\tilde{T}\tilde{e} = \tilde{e}$, wo $\tilde{e}$ das kanonische Bild der Eigenfunktion e von T'' ist; da J eigentliches Ideal ist, gilt $\tilde{e} \neq 0$. Insbesondere ist daher $r(\tilde{T}) = 1$; aus einem bekannten Satz von KREIN [1] (siehe [5], p. 267, Korollar zu Prop. 2.6) folgt daher die Existenz einer positiven, $\tilde{T}$-invarianten Linearform $\tilde{\mu}$ auf E''/J [E''/J ist selbst vom Typ $C(U)$]. $\tilde{\mu}$ definiert aber eine nichttriviale, positive T''-invariante Linearform μ mit $\mu(J) = (0)$; da der Raum der Fixpunkte von T'' wieder von der Dimension 1 ist, ist μ ein skalares Vielfaches von φ. Daraus folgt aber $I_\varphi \subset J \subset I_\mu = I_\varphi$. Also ist I_φ maximal, und der Beweis von Prop. 2 ist vollständig.

Proposition 3. *Jedes in hinreichender Nähe des Kreises $|\lambda| = 1$ gelegene Element $\zeta \in \mathrm{ap}\,\sigma(T)$[6] ist Eigenwert von $\hat{T}$ in $F = C(W)$, und die Spektra von T und $\hat{T}$ stimmen auf $|\lambda| = 1$ überein.*

[5] Gemeint ist die eindeutige, $\sigma(E'', E')$-stetige Fortsetzung von $\varphi \in E'$.

[6] Mit $\mathrm{ap}\,\sigma(T)$ bezeichnen wir das approximierte Punktspektrum von T, d. h. die Menge aller $\lambda \in \sigma(T)$, für die $\lambda - T$ nicht ein Isomorphismus auf einen abgeschlossenen Teilraum von E ist. Der topologische Rand von $\sigma(T)$ gehört stets zum approximativen Punktspektrum.

Beweis. Zum Beweis benutzen wir das folgende Resultat von NIIRO ([2], Lemma 2):

Lemma. Ist T ein irreduzibler positiver Operator auf dem Banachverband E, und hat die Resolvente von T einen Pol an der Stelle $\lambda = r(T)$, so folgt aus den Relationen $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ und $Tx \geqq x - y$ stets

$$\varphi(x) \geqq A\|x\| - B\|y\| .$$

Hierbei ist φ die im wesentlichen eindeutig bestimmte positive, T-invariante Linearform auf E, und die Konstanten A, B hängen nur von der Normierung von φ ab.

Es sei nun ϱ, $0 < \varrho < 1$, so gewählt, daß $B(1-\varrho) < A$ ausfällt. Ferner sei $\zeta \in \operatorname{ap}\sigma(T)$, $|\zeta| \geqq \varrho$, und (f_n) sei eine Folge in E, für die $\|f_n\| = 1$ für alle n sowie $\zeta f_n - Tf_n = y_n \to 0$ gilt. Wir haben dann $T|f_n| \geqq |f_n| - ((1-|\zeta|)|f_n| + |y_n|)$, und Anwendung des Lemmas ergibt

$$\varphi(|f_n|) \geqq A - B((1-|\zeta|) + \|y_n\|),$$

also $\liminf \varphi(|f_n|) > 0$. Daraus folgt, daß das Bild $(\bar{f}_n)$ der Folge (f_n) in E'' einen $\sigma(E'', E')$-Adhärenzpunkt $\bar{f} \neq 0$ besitzt; andernfalls würde (f_n) in E schwach gegen 0 konvergieren, was nach einem bekannten Satz der Maßtheorie mit $\liminf \varphi(|f_n|) > 0$ unvereinbar ist. Nun ist der Spektralradius r_1 der Einschränkung von T'' auf I_φ aber notwendig < 1, weil sonst nach dem schon oben verwendeten Satz von KREIN eine positive Linearform $\mu \neq 0$ (d. h. ein positives Maß μ auf Z) mit $T'''\mu = \mu$ vorhanden wäre, die zu φ orthogonal ist[7]; dies ist widerspruchsvoll, da der Raum der Fixpunkte von T''' eindimensional ist. Ist daher $|\zeta| > \sup(r_1, \varrho)$, so ist für den in Rede stehenden Adhärenzpunkt $\bar{f}$ sicher $\varphi(|\bar{f}|) > 0$, und das Bild von $\bar{f}$ in $F = C(W)$ ist Eigenvektor von $\hat{T}$ zu ζ.

Ist schließlich umgekehrt $\alpha \in \sigma(\hat{T})$, $|\alpha| = 1$, so ist auch $\alpha \in \sigma(T'')$ und daher $\alpha \in \sigma(T)$.

Beweis des Theorems. Wir wenden nun auf den irreduziblen Operator $\hat{T}$ in $C(W)$ (Prop. 2) das Theorem 3.3 in [5], p. 272 (siehe auch [3], p. 309) an. Hiernach besteht wegen Prop. 3 das Randspektrum von $\hat{T}$ aus der Gruppe (ε^ν) $(\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$ aller n-ten Einheitswurzeln für ein gewisses $n \geqq 1$, und jede der Stellen ε^ν ist ein einfacher Pol der Resolvente von $\hat{T}$. Nach Prop. 3 besteht daher das Randspektrum von T ebenfalls aus den Zahlen ε^ν, die sämtlich isolierte Singularitäten von $(\lambda - T)^{-1}$ sind. Nun gilt aber, wenn C_ν eine kleine Kreislinie um ε^ν bezeichnet und $\hat{R}(\lambda)$ die Resolvente von $\hat{T}$ ist,

$$\int_{C_\nu} \hat{R}(\lambda)(\lambda - \varepsilon^\nu)^k \, d\lambda = 0 \qquad (\nu = 0, \ldots, n-1)$$

[7] I_φ ist [da $\sigma(E'', E')$-abgeschlossen] ein Band in E'', und insbesondere isomorph zu $C(V)$, wo $V = Z \sim W$. Ist $r_1 = 1$, so ergibt der Satz von KREIN ein auf V definiertes bezüglich T'' invariantes Maß. Setzt man dieses Maß durch die Definition $\mu(W) = 0$ auf Z fort, so ergibt sich $\mu \leqq T'''\mu$, also wegen $T''e = e$ sogar $T'''\mu = \mu$.

für alle ganzen $k \geqq 2$. Da aber die Einschränkung von $\hat{R}(\lambda)$ auf $E \subset C(W)$ längs C_ν mit $R(\lambda)$ identifiziert werden kann[8], sind die ε^ν auch für $R(\lambda)$ Pole 1. Ordnung, insbesondere also Elemente des Punktspektrums von T. Erneute Anwendung von Theorem 3.3 (l.c.) oder eine topologische Überlegung zeigt dann, daß T eine Darstellung der Gestalt

$$T = \sum_{\nu=0}^{n-1} \varepsilon^\nu P_\nu + T_1$$

mit den behaupteten Eigenschaften besitzt. Zur Berechnung der Projektoren P_ν benutzen wir wieder den angegebenen Satz sowie die Formel (*) in [5], p. 273 (auch zu finden unter (**) in [3], p. 311): Gilt $\varepsilon f = Tf$ mit $f = |f| g$, wo nun $|f| = e$ und g das (unimodulare) Signum von f ist, so haben die P_ν die Form

$$P_\nu = S^\nu P S^{-\nu} \qquad (\nu = 0, \ldots, n-1),$$

wo $P = \varphi \otimes e$ und S für die lineare Transformation $f \to gf$ des komplexen Raumes $C(X)$ geschrieben ist; die fragliche Formel lautet $T = \varepsilon^{-\nu} S^{-\nu} T S^\nu$. Damit ist der Satz für den Fall $E = C(X)$ vollständig bewiesen.

Um den Beweis zu beenden, müssen wir noch den Fall $E = L^1(\mu)$ betrachten. Jetzt ist der Dual E' vom Typus $C(X)$. Die Adjungierte von T ist zwar im allgemeinen nicht mehr irreduzibel, jedoch bleiben die für den Beweis der Propositionen 2 und 3 wesentlichen Aussagen der Prop. 1 für T' erhalten (man vergleiche hierzu die Bemerkung unmittelbar vor Prop. 2). Daher erhält man jetzt für T' eine Darstellung der Form $T' = \sum_{\nu=0}^{n-1} \varepsilon^\nu P'_\nu + T'_1$ wie oben, und die Resolvente $R'(\lambda)$ hat an den Stellen ε^ν Pole 1. Ordnung. Da nun aber die sämtlichen hier vorkommenden linearen Abbildungen schwach [d. h. für $\sigma(E', E)$] stetig, also Adjungierte sind, folgen jetzt die behaupteten Aussagen auch für den gegebenen Operator T auf $L^1(\mu)$.

Literatur

[1] KREIN, M. G., u. M. A. RUTMAN: Lineare Operatoren, die einen Kegel im Banachschen Raum invariant lassen. Uspehi Mat. Nauk (N.S.) **3**, no. 1 (23), 3—95 (1948) (Russisch). Auch in Am. Math. Soc. Transl. no. 26 (1950).

[2] NIIRO, F.: On indecomposable operators in $l^p (1 < p < \infty)$ and a problem of H. SCHAEFER. Scient. Pap. Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo **14** (2), 165—179 (1964).

[3] SCHAEFER, H. H.: Spektraleigenschaften positiver linearer Operatoren. Math. Z. **82**, 303 bis 313 (1963).

[4] — Über das Randspektrum positiver Operatoren. Math. Ann. **162**, 289—293 (1965).

[5] — Topological Vector Spaces. New York: Macmillan 1966.

Professor H. H. SCHAEFER
Dept. of Mathematics, University of Illinois
Urbana, Illinois 61803, USA

(Eingegangen am 20. Dezember 1965)

[8] Die Integrale können im Sinn der Topologie einfacher Konvergenz auf E verstanden werden, wobei F mit $\sigma(F, I^0_\varphi)$ versehen ist. Diese Hausdorffsche Topologie ist gröber als beide der üblicherweise zur Definition der Operatorintegrale verwendeten Normtopologien von E bzw. F.

TUTSCHKE, W.
Math. Annalen 165, 31—35 (1966)

Zur Theorie der parameterabhängigen Differentialformen

II. Lineare Differentialoperatoren zweiter Ordnung und zugeordnetes Koeffizientendifferential

Herrn Professor Dr. ERNST HÖLDER zum 65. Geburtstag gewidmet

WOLFGANG TUTSCHKE

1. In einem Gebiet G des m-dimensionalen euklidischen Raumes wird der lineare Differentialoperator zweiter Ordnung

$$L \equiv \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_k b_k \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{1}$$

betrachtet. Diesem wird die $(m-1)$-Form

$$\omega = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k(m-k)}\, b_k\, dx_{k+1} \wedge \cdots \wedge dx_m \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{k-1} \tag{2}$$

zugeordnet. Zunächst gilt:

Satz 1. *Ist die Form ω exakt, so können die b_k mit den a_{ij} so zusammengefaßt werden, daß sich L in Bianchischer Normalform*

$$L \equiv \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \tag{3}$$

befindet[1].

Beweis. Da nach Voraussetzung ω exakt sein sollte, gibt es eine $(m-2)$-Form Ω, so daß $\omega = d\Omega$ ist. Schreibt man Ω in der Form

$$\Omega = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{j-1} c_{ij}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \cdots \wedge dx_m,$$

[1] Von L. BIANCHI wurde (vgl. [2]), um die (elliptische) Differentialgleichung $L[u]=0$ in Divergenzform zu überführen, $L[u]=0$ zunächst durch eine Variablentransformation auf die Zwischenform

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

gebracht. Diese Betrachtungsweise hat streng lokalen Charakter. Die Einführung der Form ω dagegen läßt eine globale Behandlung zu. Für den Fall $m=2$ vgl. man [8, 9].

so ergibt eine leichte Rechnung und Koeffizientenvergleich

$$\sum_{k=1}^{m} b_k \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-1-m+k} \cdot \frac{\partial c_{ik}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=k+1}^{m} (-1)^{j-2-m+k} \cdot \frac{\partial c_{kj}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Setzt man $c_{ji} = -c_{ij}$ für $i<j$ und $c_{ii}=0$, so ergibt sich nach Umformung der zweiten Summe

$$\sum_{k=1}^{m} b_k \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left((-1)^{i+j-m+1} \cdot c_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

Damit ist die Bianchische Normalform (3) mit den Koeffizienten

$$A_{ij} = a_{ij} + (-1)^{i+j-m+1} \cdot c_{ij}$$

hergestellt.

Bemerkung. Die Form Ω ist bis auf eine additiv hinzutretende geschlossene Form eindeutig bestimmt. Also sind die $A_{ij}\,(i \neq j)$ nur bis auf die Koeffizienten einer geschlossenen Form eindeutig bestimmt (die A_{kk} sind eindeutig bestimmt).

Im Spezialfall $m=2$ ist $\omega = -b_1\,dx_2 + b_2\,dx_1$ und man erhält für $a_{ij} + (-1)^{i+j-m-1} c_{ij}$:

	$j=1$	$j=2$
$i=1$	a_{11}	$a_{12}+c_{12}$
$i=2$	$a_{21}-c_{12}$	a_{22}

Dieser Fall wurde in [8] ausführlich diskutiert[2].

Im räumlichen Fall $(m=3)$ ist $\omega = b_1\,dx_2 \wedge dx_3 + b_2\,dx_3 \wedge dx_1 + b_3\,dx_1 \wedge dx_2$ und man hat entsprechend für $a_{ij} + (-1)^{i+j-m-1} c_{ij}$:

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	a_{11}	$a_{12}-c_{12}$	$a_{13}+c_{13}$
$i=2$	$a_{21}+c_{12}$	a_{22}	$a_{23}-c_{23}$
$i=3$	$a_{31}-c_{13}$	$a_{32}+c_{23}$	a_{33}

2. Wenn die zu (1) gehörende $(m-1)$-Form (2) nicht geschlossen ist, wird anstelle (1) der Differentialoperator $\mu \cdot L$ betrachtet, wobei die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung der Funktion μ existieren und stetig sein sollen. $\mu \cdot L$ hat dann die Form

$$\mu \cdot L \equiv \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \sum_{k} \left(\mu b_k - \sum_{i} a_{ik} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

[2] c_{12} wurde dort mit $-\mu^*$ bezeichnet. Außerdem beachte man, daß in [8] mit ω das Differential $+b_1\,dx_2 - b_2\,dx_1$ bezeichnet wurde.

d. h., die dieser Differentialgleichung entsprechende $(m-1)$-Form (2) ist jetzt die von der Parameterfunktion μ abhängige Form

$$\omega_\mu = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k(m-k)} \left(\mu b_k - \sum_i a_{ik} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \right) dx_{k+1} \wedge \cdots \wedge dx_m \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{k-1}.$$

Die Hilfsfunktion μ wird nun so gewählt, daß die Form ω_μ geschlossen wird. Wegen

$$d\omega_\mu = (-1)^m \sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{ik} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} - \mu b_k \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$$

hat man:

ω_μ ist genau dann geschlossen, wenn μ Lösung der zu $L[u]=0$ adjungierten Differentialgleichung ist:

$$L^*[\mu] \equiv \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \right) - \sum_k \frac{\partial (\mu b_k)}{\partial x_k} = 0.$$

$\mu \equiv 1$ ist dann und nur dann Lösung von $L^*[\mu]=0$, wenn das Absolutglied dieser Differentialgleichung verschwindet; das ist genau dann der Fall, wenn die Form ω (2) selbst schon geschlossen ist. Eine exakte Form ist zwar immer geschlossen, nicht aber jede geschlossene Form exakt. Ist G_1 jedoch ein Gebiet mit nur einer Randkomponente, so ist nach dem Satz von STOKES und dem zweiten Theorem von DE RHAM (vgl. [3, 5, 6, 7]) eine in G_1 geschlossene Form dort auch exakt, d. h. äußere Ableitung einer $(m-2)$-Form Ω_μ:

$$\omega_\mu = d\Omega_\mu.$$

Unter Berücksichtigung von Satz 1 hat man mithin:

Satz 2. *Besitzt G nur eine Randkomponente oder ist G_1 ein Teilgebiet von G mit dieser Eigenschaft und ist μ (in G bzw. G_1) Lösung der zu $L[u]=0$ adjungierten Differentialgleichung, $L^*[\mu]=0$, so läßt sich $\mu \cdot L$ (in G bzw. G_1) in Divergenzform schreiben:*

$$\mu \cdot L \equiv \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tilde{a}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

Dabei ist

$$\tilde{a}_{ij} = \mu \cdot a_{ij} + (-1)^{i+j-m-1} d_{ij},$$

wenn

$$\Omega_\mu = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{j-1} d_{ij} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \cdots \wedge dx_m$$

ist und $d_{ij} \equiv -d_{ji}$ für $i>j$ gesetzt wird ($d_{kk} \equiv 0$).

Damit jede Lösung von $(\mu \cdot L)[u]=0$ auch Lösung von $L[u]=0$ ist, muß man z. B. voraussetzen, daß $\mu \neq 0$ ist[3]. Es genügt aber auch zu fordern,

[3] Ist G ein Gebiet der Klasse $A^{(2,\lambda)}$ (vgl. [4]) mit nur einer Randkomponente und ist L elliptisch (a_{ij} von der Klasse $C^{(2,\lambda)}$, b_k von der Klasse $C^{(1,\lambda)}$, jeweils in ganz $\bar{G}$), so existiert eine eindeutig bestimmte Lösung μ von $L^*[\mu]=0$ mit $\mu \equiv 1$ auf ∂G. Vermutlich ist diese Lösung in ganz G positiv (für den Fall $m=2$ wurde dies in [8] bewiesen).

daß *in jeder Umgebung eines Punktes* P_0, *wo* $\mu(P_0)=0$ *ist, auch Punkte mit* $\mu \neq 0$ *liegen.* Denn ist in P_0 $L[u] \neq 0$, so ist auch (wegen der Stetigkeit) $L[u] \neq 0$ in einer Umgebung von P_0. Da in jeder Umgebung von P_0 ein Punkt P_1 mit $\mu(P_1) \neq 0$ liegt, ist dann $(\mu \cdot L)[u] \neq 0$ im Punkte P_1. Dann könnte aber u nicht Lösung von $(\mu \cdot L)[u]=0$ sein. Obige Forderung ist z. B. stets erfüllt, wenn μ analytisch (und nicht identisch null) ist[4]. Denn es sei H die Menge aller Punkte, in denen $\mu = 0$ ist. Es ist zu zeigen, daß H keine inneren Punkte besitzt. Besitzt H innere Punkte, so ist also der offene Kern $\mathring{H}$ nicht leer. Ist μ nicht identisch null (in G bzw. G_1), so ist $\mathring{H}$ nur ein Teil von G bzw. G_1. Wegen des Zusammenhangs von G bzw. G_1 muß es wenigstens einen Punkt P_* geben, der nicht zu $\mathring{H}$ gehört, aber Häufungspunkt von $\mathring{H}$ ist[5]. Wegen der Stetigkeit verschwinden in P_* alle Ableitungen von μ. Aus der Analytizität von μ folgt dann aber, daß μ auch in einer Umgebung von P_* identisch verschwinden müßte. Also müßte P_* selbst zu $\mathring{H}$ gehören. Widerspruch!

3. Jetzt werde ein Gebiet G mit p Randkomponenten betrachtet, die in G definierte Differentialgleichung $L[u]=0$(1) sei elliptisch[6]. μ sei eine in ganz $\overline{G}$ positive Lösung von $L^*[\mu]=0$[7]. Setzt man

$$\mu a_{ij} = \hat{a}_{ij},$$

$$\mu b_k - \sum_i a_{ik} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} = \hat{b}_k,$$

so ist

$$\mu \cdot L \equiv \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\hat{a}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_k \hat{b}_k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Wegen $\mu \neq 0$ ist $\mu \cdot L$ ebenfalls elliptisch, die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen über die Koeffizienten reproduzieren sich. Da μ Lösung von $L^*[\mu]=0$ ist, ist

$$\sum_k \frac{\partial \hat{b}_k}{\partial x_k} = 0,$$

d. h., die Voraussetzungen von [10] sind erfüllt. Also gibt es eine solche nichtverschwindende Funktion μ_1, jeweils mit konstanten Randwerten auf den Randkomponenten von G, daß

$$\hat{\omega}_{\mu_1} = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k(m-k)} \left(\mu_1 \hat{b}_k - \sum_i \hat{a}_{ik} \frac{\partial \mu_1}{\partial x_i}\right) dx_{k+1} \wedge \cdots \wedge dx_m \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{k-1}$$

[4] Dazu, daß die Analytizität der Lösung einer elliptischen Differentialgleichung aus der Analytizität der Koeffizienten folgt, vgl. man z. B. [1].

[5] Dazu verbinde man einen Punkt aus $\mathring{H}$ mit einem nicht in $\mathring{H}$ gelegenen Punkt durch eine (in G bzw. G_1 verlaufende) Kurve $z=z(\xi)$, $a \leqq \xi \leqq b$. Ist dann ξ_* die obere Grenze aller ξ', für die $\mu(z(\xi)) \equiv 0$ ist in $a \leqq \xi \leqq \xi'$, so ist $z(\xi_*)$ der gesuchte Punkt P_*.

[6] G sei (vgl. [4]) von der Klasse $A^{(2,\lambda)}$, die a_{ij} seien in ganz $\overline{G}$ von der Klasse $C^{(2,\lambda)}$, die b_k in ganz $\overline{G}$ von der Klasse $C^{(1,\lambda)}$.

[7] Die Randwerte von μ seien von der Klasse $C^{(2,\lambda)}$. Dann ist (vgl. [4]) μ auch in ganz $\overline{G}$ von der Klasse $C^{(2,\lambda)}$. Vermutlich ist (vgl. Fußnote 3) die durch $\mu \equiv 1$ auf ∂G bestimmte Lösung von $L^*[\mu]=0$ in ganz $\overline{G}$ positiv.

geschlossen ist und daß alle Perioden von $\hat{\omega}_{\mu_1}$ verschwinden. Wieder nach dem zweiten Theorem von DE RHAM existiert eine $(m-2)$-Form $\hat{\Omega}_{\mu_1}$, so daß $\hat{\omega}_{\mu_1} = d\hat{\Omega}_{\mu_1}$ ist[8]. Setzt man wieder

$$\hat{\Omega}_{\mu_1} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{j-1} d_{ij} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \cdots \wedge dx_m,$$

so ergibt sich

Satz 3. *Ist μ in dem Gebiet G* (mit p Randkomponenten) *positive Lösung von $L^*[\mu] = 0$, so gibt es ein μ_1, daß*

$$\mu_1 \cdot \mu \cdot L \equiv \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tilde{a}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

ist.

Dabei ist

$$\tilde{a}_{ij} = \mu_1 \mu a_{ij} + (-1)^{i+j-m-1} d_{ij}$$

($d_{ij} = -d_{ji}$ für $i > j$, $d_{kk} \equiv 0$).

Literatur

[1] BERNSTEIN, S.: Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre. Math. Ann. **59**, 20—76 (1904).

[2] BIANCHI, L.: Sulle equazioni lineari a derivate parziali del 2° ordine. Rend. Acc. Lincei **5**, 35—44 (1889).

[3] HODGE, G.: Harmonische Integrale. Leipzig: Teubner 1958.

[4] MIRANDA, C.: Equazioni alle derivative parziali di tipo ellittico. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955.

[5] DE RHAM, G.: Sur l'Analysis situs des variétés à n dimensions. J. math. pures appl. **10**, 115—200 (1931).

[6] —, u. K. KODAIRA: Harmonic Integrals. Princeton: hekt. 1950.

[7] — Variétés différentiables. Paris: Hermann & C^ie 1955.

[8] TUTSCHKE, W.: Über periodische Lösungen nicht notwendig selbstadjungierter elliptischer Differentialgleichungssysteme in mehrfach zusammenhängenden ebenen Gebieten. Math. Nachr. **26**, 247—286 (1964).

[9] — Parameterabhängige Pfaffsche Formen in mehrfach zusammenhängenden ebenen Gebieten im Zusammenhang mit globalen Normalformen partieller Differentialgleichungen. Mber. Dt. Akad. Wiss. **6**, 129—134 (1964).

[10] — Zur Theorie der parameterabhängigen Differentialformen. I. Reduzierte Periodenmatrizen. Mber. Dt. Akad. Wiss. **6**, 881—886 (1964).

Dr. WOLFGANG TUTSCHKE
Deutsche Akademie der Wissenschaften
Forschungsgemeinschaft, Institut für reine Mathematik
Berlin-Adlershof, Rudower Chaussee 5

(Eingegangen am 20. Juli 1965)

[8] $\hat{\Omega}_{\mu_1}$ ist wieder bis auf eine additiv dazutretende geschlossene Form eindeutig bestimmt.

KLÖTZLER, R.
Math. Annalen 165, 36—43 (1966)

Eine bemerkenswerte Abschätzung zur Feldtheorie quadratischer Variationsprobleme

Meinem hochverehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. E. HÖLDER zu seinem 65. Geburtstag gewidmet

ROLF KLÖTZLER

Einleitung

Bei dem Nachweis des Minimalcharakters von Extremalen eines Variationsproblems nehmen Eigenwertkriterien eine bevorzugte Stellung ein. Der Grund dafür dürfte vor allem darin zu sehen sein, daß sich diese Eigenwertkriterien auch für mehrfache Integrale aussprechen lassen und bei numerischen Betrachtungen relativ leicht zu handhaben sind. Die diesbezüglichen Untersuchungen, zuerst durch A. SCHWARZ und nachfolgend durch L. LICHTENSTEIN eingeleitet, haben in den vergangenen drei Jahrzehnten eine weitgehende Vervollkommnung erfahren, zu der besonders E. HÖLDER in [4] bis [7] wesentlich beigetragen hat[1].

Im Prinzip beruhen diese Eigenwertkriterien darauf, zu vorgegebener Extremalen E den in einem gewissen Sinne „kleinsten" Eigenwert λ_1 der zugehörigen erweiterten Jacobischen Differentialgleichungen bzw. kanonischen Differentialgleichungen des akzessorischen Variationsproblems zu bestimmen und aus der Größe von λ_1 auf den Minimalcharakter von E zu schließen. Das setzt allerdings wiederum voraus, über gute und bequeme analytische Hilfsmittel zu verfügen, die eine solche Eigenwertbestimmung exakt oder angenähert ermöglichen.

Die Vielzahl der bekannten Berechnungs- bzw. Näherungsverfahren, wie z. B. die Einschließungssätze von TEMPLE und KRYLOW-BOGOLJUBOW-WEINSTEIN oder das Differenzenverfahren, liefern aber im allgemeinen ohne Kenntnis zusätzlicher a priori-Schranken benachbarter Eigenwerte von λ_1 nicht die Gewißheit, gerade den „kleinsten" Eigenwert λ_1 zu erfassen. Die nachfolgenden Untersuchungen werden unter Beschränkung auf einfache Integrale zeigen, daß man diesen Mangel durch eine kleine Weiterentwicklung der Theorie akzessorischer, also quadratischer Variationsprobleme beheben kann.

§ 1. Problemstellung

Vorgegeben sei das von einem zusätzlichen Parameter λ abhängige Lagrangesche Variationsproblem

$$J(x)=\int_a^b f(t, x, \dot{x}; \lambda)\, dt \to \mathrm{Min} \tag{1}$$

[1] Die hier zitierten Arbeiten geben in ihren Literaturverzeichnissen zugleich einen großen Überblick auf das weitere einschlägige Schrifttum.

mit den Nebenbedingungen $g_\nu(t, x, \dot{x}) = 0$ für $\nu = 1, \ldots, m$ und den r $(r \leqq 2n)$ wesentlichen Randbedingungen

$$x^i(a) = \gamma^i_{ah} u^h, \; x^i(b) = \gamma^i_{bh} u^h \quad \text{mit} \quad h = 1, \ldots, r$$

und $\text{Rang} \begin{pmatrix} \gamma^i_{ah} \\ \gamma^i_{bh} \end{pmatrix} = r.$

Dabei sind die u^h beliebige Parameter und die zulässigen Funktionen $x = (x^1(t), \ldots, x^n(t)) \in D^1(a, b)$ für $n > m$. Die Grundfunktion f habe die Gestalt

$$f(t, x, \dot{x}; \lambda) = \frac{1}{2} [g(t, x, \dot{x}) - \lambda h_0(t, x)],$$

mit quadratischen Formen g und h_0 bezüglich x und $\dot{x}$. Außerdem sei h_0 in x positiv definit und das System der Rand- und Nebenbedingungen linear homogen in den x und $\dot{x}$; zugleich sei $\text{Rang}(g_{\nu \dot{x}^i}) = m$. Sämtliche Koeffizienten unserer eingeführten Funktionen mögen in $[a, b]$ bezüglich t stetig sein. Schließlich setzen wir noch das Erfülltsein der Legendreschen Regularitätsbedingung voraus:

(2) $f_{\dot{x}^i \dot{x}^j} \zeta^i \zeta^j > 0$ für beliebige ζ^i mit $\zeta^i \zeta^i \neq 0$ [1a]

und $g_{\nu \dot{x}^i} \zeta^i = 0$ für $\nu = 1, \ldots, m$.

Dann existiert nach W. T. Reid [12] und E. Hölder [5] im Bereich $\mathfrak{Z}$ aller zulässigen Funktionen $x \not\equiv 0$

$$\lambda_1 = \min_{\mathfrak{Z}} R[x] \quad \text{mit} \quad R[x] = \frac{\int_a^b g\,dt}{\int_a^b h_0\,dt}, \tag{3}$$

so daß für alle $\lambda \leqq \lambda_1$ $x_0 \equiv 0$ Minimale zu $J(x)$ ist, während für $\lambda > \lambda_1$ diese Eigenschaft verlorengeht[2]. Nach der von C. Carathéodory in [1], [2] und [3] eingeführten Behandlungsweise von Variationsproblemen ist die Minimaleigenschaft von x_0 bezüglich (1) auch dann gewährleistet, wenn ein „geodätisches Feld" $\dot{x}^i = \psi^i(t, x)$, $\mu^\nu = k^\nu(t, x)$ mit ψ^i, $k^\nu \in C^1$ und eine Funktion $S(t, x) \in C^2$ mit $S(t, x(t))|_a^b = S(b, x(b)) - S(a, x(a)) \geqq 0$ in $\mathfrak{Z}$ gefunden werden kann, so daß bei festem λ und $L(t, x, \dot{x}, k; \lambda) = f + \mu^\nu g_\nu$ folgendes gilt:

$$L(t, x, \dot{x}, k; \lambda) = S_t + S_{x^i} \dot{x}^i \quad \text{für} \quad \dot{x} = \psi, \; \mu = k, \; g_\nu = 0;$$

$$L(t, x, \dot{x}, k; \lambda) > S_t + S_{x^i} \dot{x}^i \quad \text{für} \quad g_\nu = 0 \quad \text{und} \quad \dot{x} - \psi \quad \text{oder} \quad \mu - k \neq 0.$$

Denn damit ist für beliebige $x \in \mathfrak{Z}$

$$J(x) - J(x_0) = \int_a^b L(t, x, \dot{x}, k; \lambda)\,dt - 0 \geqq \int_a^b \frac{dS(t, x(t))}{dt}\,dt$$

$$= S(t, x(t))|_a^b \geqq 0 \quad \text{wie behauptet.}$$

[1a] Über doppelt auftretende Indizes wird vereinbarungsgemäß stets summiert!

[2] Wir stützen uns hier in Darstellung und Voraussetzung im wesentlichen auf die Untersuchungen von E. Hölder [5], Abschnitt 17. Danach ergibt sich die hier formulierte Aussage (3) unmittelbar, indem wir $k_{ij} x^i x^j$ durch h_0, a_1 und β_{hk} durch 0 und $-a_{ij} x^i x^j$ durch $-a_{ij} x^i x^j + \lambda_0 h_0(t, x)$ ersetzen; λ_0 ist dabei eine hinreichend große positive Zahl.

Nach [1] ist dann notwendig und hinreichend für die Existenz solcher ψ, k und S, daß S eine Lösung der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung

$$S_t + H(t, x, S_x; \lambda) = 0 \tag{4}$$

ist, die die geforderten Differenzierbarkeits- und Randeigenschaften aufweist und auf x_0 die Transversalitätsbedingung $S_{x^i} = L_{\dot{x}^i}(=0)$ erfüllt. $H(t, x, y; \lambda)$ ist dabei die Hamiltonfunktion zu L, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ ist definiert durch die wegen (2) eineindeutige Legendre-Transformation

$$\begin{aligned} &y_i = L_{\dot{x}^i},\ g_\nu(t, x, \dot{x}) = 0 \\ &\text{mit} \quad H = -L + y_i \dot{x}^i . \end{aligned} \tag{5}$$

H hat infolge der speziellen Gestalt von f und g die Form

$$H(t, x, y; \lambda) = \frac{1}{2}\{a_{ij}(t)x^i x^j + 2b_i^j(t)x^i y_j + c^{ij}(t)y_i y_j + \lambda h_0\} \tag{6}$$

mit positiv semidefiniter Matrix (c^{ij}) und stetigen Koeffizienten[3]. Die Auflösung von (5) nach $\dot{x}^i$ und μ^ν ist entsprechend [2], S. 232, vom Typ

$$\dot{x}^i = H_{y_i},\ \mu^\nu = M^\nu(t, x, y), \tag{5'}$$

wobei die rechten Seiten der Gleichungen von (5') unabhängig von λ sind.

Auf die neuen kanonischen Koordinaten umgerechnet ergibt sich leicht aus (3)

$$\lambda_1 = \operatorname*{Min}_{\mathfrak{Z}} \frac{\int_a^b (c^{ij}y_i y_j - a_{ij}x^i x^j)\, dt}{\int_a^b h_0(t, x)\, dt} \tag{7}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\dot{x}^i = H_{y_i} = c^{ij}y_j + b_j^i x^j .$$

Für die Minimale $x^*(t)$ zu (3) bzw. (7) ist nach [5] (17.17) in kanonischen Koordinaten das Erfülltsein der Bedingungen

$$\dot{x}^i = H_{y_i}(t, x, y; \lambda_1), \quad \dot{y}_i = -H_{x^i}(t, x, y; \lambda_1) \quad \text{in} \quad (a, b)$$

mit

$$\begin{aligned} &x^i(a) = \gamma_{ah}^i u^h, \quad x^i(b) = \gamma_{bh}^i u^h && (i = 1, \ldots, n) \\ &y_i(a)\gamma_{ah}^i - y_i(b)\gamma_{bh}^i = 0 && (h = 1, \ldots, r) \end{aligned} \tag{8}$$

notwendig und hinreichend.

Funktionen $x(t)$ aus $\mathfrak{Z}$, die mit ihren zugehörigen kanonischen Koordinaten y (bei irgendwelchen μ^ν) die Randbedingungen (8) erfüllen, wollen wir als Vergleichsfunktionen zu (1) bezeichnen, ihre Gesamtheit mit $\mathfrak{V}$.

Es soll nun im folgenden nachgewiesen werden, daß man direkt aus diesen Betrachtungen, d. h. insbesondere unter Verwendung der Bedingung (4), zu einer Abschätzung von λ_1 gelangt.

[3] sowie $a_{ij} = a_{ji}$, $c^{ij} = c^{ji}$.

§ 2. Beweis einer Ungleichung

Wir geben uns eine beliebige Funktion $\hat{S}(t, x) = \frac{1}{2} s_{ij}(t) x^i x^j$ mit $s_{ij} = s_{ji}$ vor, die die Randbedingung $\hat{S}(t, x(t))|_a^b \geqq 0$ in $\mathfrak{Z}$ erfülle. Über $s_{ij}(t)$ setzen wir voraus, daß diese Funktionen in (a, b) stetig differenzierbar sind und die Grenzwerte $\lim_{t \to a+0} \hat{S}_x(t, x(t)) = \hat{S}_x(a, x(a))$ bzw. $\lim_{t \to b-0} \hat{S}_x(t, x(t)) = \hat{S}_x(b, x(b))$ für beliebige $x(t) \in \mathfrak{Z}$ existieren mögen.

Weiterhin sei nun $x(t)$ irgendeine festgewählte Funktion aus $\mathfrak{Z}$. Wir bilden mit ihr

$$\hat{y}_i(t) = \hat{S}_{x^i}(t, x(t)) \equiv s_{ij}(t) x^j$$

und

$$y_i(t) = L_{\dot{x}^i}(t, x, \dot{x}, M(t, x, \hat{y}); \lambda)$$

(λ geht dabei effektiv in diese letzten Beziehungen gar nicht ein).

Wir vergleichen dann den Wert der beiden Integrale

$$K_1 = \int_a^b (c^{ij} y_i y_j - a_{ij} x^i x^j)\, dt$$

und

$$K_2 = -\int_a^b (c^{ij} \hat{y}_i \hat{y}_j + 2 b_i^j x^i \hat{y}_j + a_{ij} x^i x^j + \dot{s}_{ij} x^i x^j)\, dt\,.$$

Satz I. *Auf* $\mathfrak{Z}$ *ist* $K_1 - K_2 \geqq 0$.

Beweis. $K_1 - K_2 = \int_a^b [c^{ij} y_i y_j + c^{ij} \hat{y}_i \hat{y}_j + (2 b_k^j s_{jl} + \dot{s}_{kl}) x^k x^l]\, dt$

und

$$\dot{s}_{kl} x^k x^l = \frac{d}{dt}(s_{kl} x^k x^l) - 2 s_{kl} \dot{x}^k x^l\,.$$

Damit wird gemäß (5′) für $\dot{x}^k = c^{kj} y_j + b_j^k x^j$ eingesetzt

$$K_1 - K_2 = \int_a^b \left[c^{ij} y_i y_j + c^{ij} \hat{y}_i \hat{y}_j - 2 c^{kj} y_j \hat{y}_k + \frac{d}{dt}(s_{kl} x^k x^l) \right] dt$$

und unter Anwendung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$K_1 - K_2 = \int_a^b c^{ij} (y_i - \hat{y}_i)(y_j - \hat{y}_j)\, dt + 2[\hat{S}(t, x(t))]|_a^b\,. \tag{9}$$

Wegen der positiven Semidefinitheit der Matrix (c^{ij}) und der Randbedingung von $\hat{S}$ ist die rechte Seite dieser Gleichung (9) größer oder gleich Null, was zu beweisen war.

§ 3. Der Abschätzungssatz

Satz II. *Es sei* $x(t)$ *eine vorgegebene Vergleichsfunktion zu* (1) *und* $s_{ij}(t)$ *solche Funktionen im Sinne von § 2, daß zusätzlich die n Relationen*

$$\frac{dx^i}{dt} = H_{y_i}(t, x, \hat{y}; \lambda) \quad \textit{mit} \quad \hat{y}_i = s_{ij} x^j$$

gelten. Ist dann $\Lambda_-(t)$ *bzw.* $\Lambda_+(t)$ *der kleinste bzw. größte Wert von* λ, *für den bei festem* $t \in (a,b)$ *zu mindestens einem Vektor* $x \neq 0$

$$\hat{S}_t + H(t, x, \hat{S}_x; \lambda) = 0$$

erfüllt ist, so gilt

$$\inf_{(a,b)} \Lambda_-(t) \leqq \lambda_1 \leqq \sup_{(a,b)} \Lambda_+(t).$$

Beweis. Zunächst ist es offensichtlich, daß eine solche Funktion $\Lambda_-(t)$ bzw. $\Lambda_+(t)$ stets existiert, denn mit $\hat{S} = \frac{1}{2} s_{ij} x^i x^j$ wird $\hat{S}_t + H(t, x, \hat{S}_x; \lambda)$ zu einer quadratischen Form in x^i, aus der sich $\Lambda_-(t)$ und $\Lambda_+(t)$ berechnen durch

$$\left.\begin{matrix} \Lambda_-(t) = \mathrm{Min} \\ \Lambda_+(t) = \mathrm{Max} \end{matrix}\right\} \left[-(c^{ij} s_{ik} s_{jl} + 2 b^j_k s_{jl} + a_{kl} + \dot{s}_{kl}) x^k x^l\right]$$

bezüglich aller x unter der Nebenbedingung $h_0(t, x) = 1$.

Mit der speziellen Vergleichsfunktion der Voraussetzung von Satz II ist nach (3) bzw. (7)

$$\lambda_1 \leqq R[x] = \frac{\int_a^b (c^{ij} \hat{y}_i \hat{y}_j - a_{ij} x^i x^j)\, dt}{\int_a^b h_0(t, x)\, dt} \tag{10}$$

und gemäß der Eigenschaften der s_{ij} unter Beachtung von (5) und (5′)

$$y_i(t) = L_{\dot{x}^i}(t, x, \dot{x}, M(t, x, \hat{y}); \lambda) \equiv \hat{y}_i(t). \tag{11}$$

Da $x(t)$ außerdem Vergleichsfunktion zu (1) ist, gilt nach (8)

$$\hat{y}_i(b) \gamma^i_{bh} - \hat{y}_i(a) \gamma^i_{ah} = 0,$$

d. h. nach Multiplikation mit u^h und Berücksichtigung von $\hat{y}_i = s_{ij} x^j$: $2\hat{S}(t, x(t))|_a^b = 0$. Folglich ist mit (11) nach (9) $K_1 = K_2$, also nach (10)

$$\lambda_1 \leqq \frac{-\int_a^b (c^{ij} \hat{y}_i \hat{y}_j + 2 b^j_i x^i \hat{y}_j + a_{ij} x^i x^j + \dot{s}_{ij} x^i x^j)\, dt}{\int_a^b h_0(t, x)\, dt} \leqq$$

$$\leqq \frac{\int_a^b \Lambda_+(t)\, h_0(t, x)\, dt}{\int_a^b h_0(t, x)\, dt} \leqq \sup_{(a,b)} \Lambda_+(t).$$

Andererseits ist nach Satz I und Definition von $\Lambda_-(t)$ für *beliebige* zulässige Funktionen $x(t)$

$$\frac{K_1}{\int_a^b h_0(t, x)\, dt} \geqq \frac{K_2}{\int_a^b h_0(t, x)\, dt} \geqq \frac{\int_a^b \Lambda_-(t)\, h_0(t, x)\, dt}{\int_a^b h_0(t, x)\, dt} \geqq \inf_{(a,b)} \Lambda_-(t),$$

so daß aus dieser Ungleichung nach (7) $\lambda_1 \geqq \inf_{(a,b)} \Lambda_-(t)$ resultiert. Damit ist Satz II bewiesen.

Bemerkungen.

1. Die Beweisführung von Satz II bezüglich der unteren Schranke von λ_1 zeigt, daß man diesen Teil der Aussage lediglich schon unter den in § 2 formulierten Voraussetzungen an $s_{ij}(t)$ aussprechen kann. In diesem und ähnlichem Sinne sind bereits in den Arbeiten [8] bis [11], vor allem für spezielle Eigenwertprobleme der mathematischen Physik (auch bei partiellen Differentialgleichungen), untere Schranken von λ_1 entwickelt bzw. angegeben worden.

2. Die vorliegenden Aussagen lassen sich unmittelbar auch auf Bolza-Probleme in dem von E. HÖLDER in [5] dargestellten Sinne übertragen. Man hat dazu lediglich im Zähler von $R[x]$ die quadratische Randform $\beta_{hk}u^h u^k$ zu ergänzen und die Bedingung $S|_a^b \geqq 0$ durch $2S|_a^b + \beta_{hk}u^h u^k \geqq 0$ zu ersetzen. Außerdem tritt in (8) an Stelle von 0 die Linearform $\beta_{hk}u^k$.

3. Satz II läßt die Frage noch offen, inwiefern es stets möglich ist, zu vorgegebener Vergleichsfunktion $x(t)$ entsprechende $s_{ij}(t)$ zu finden. Wir wollen deshalb hier noch einen Hilfssatz angeben, der die Vorbedingungen zu Satz II garantiert.

Hilfssatz. *Es sei $x(t)$ in Verbindung mit m willkürlich vorgegebenen Funktionen $\mu^\nu(t) \in C^1$ eine Vergleichsfunktion mit folgenden Eigenschaften:*

$$x(t) \neq 0 \quad in \quad (a, b)$$

$$\frac{dx^i}{dt} \neq 0 \quad in \quad t = a \text{ bzw. } b \text{ falls hier } x^i = 0 \text{ ist};$$

für $\hat{y}_i(t) \equiv L_{\dot{x}^i}(t, x, \dot{x}, \mu(t); \lambda)$ gelte in $t = a$ bzw. b $x^i \neq 0$ und $\hat{y}_i = 0$, wenn hier $\sum_{h=1}^{r} |\gamma_{th}^i| \neq 0$ ist.

Dann lassen sich stets Funktionen $s_{ij}(t)$ im Sinne von Satz II konstruieren.

Beweis. Nach Definition von $\hat{y}_i(t)$ unseres Hilfssatzes und (5)/(5′) ist zunächst von selbst

$$\frac{dx^i}{dt} \equiv H_{y_i}(t, x, \hat{y}; \lambda) \quad \text{in} \quad [a, b]$$

erfüllt.

Setzen wir für $t \in (a, b)$ in die Bestimmungsgleichungen der s_{ij}

$$\hat{y}_i = s_{ij}x^j(t)$$

noch die Bedingung $s_{ij} = s_{ji}$ ein, so erhalten wir ein Gleichungssystem der Gestalt

$$\hat{y}_i = A_i^{lk}s_{lk} \quad \text{mit} \quad 1 \leqq l \leqq k \leqq n; \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{12}$$

deren Koeffizientenmatrix offensichtlich die Form hat:

$$(A_i^{lk}) = \begin{pmatrix} x^1 x^2 \dots x^n & & & & \\ x^1 & x^2 x^3 \dots x^n & & & \\ & \ddots & \ddots & x^3 x^4 \dots x^n \dots & \\ & x^1 & x^2 & \ddots\, x^3 \dots & x^n \end{pmatrix}^4$$

Wegen $x(t) \neq 0$ nach Voraussetzung ist der Rang dieser Matrix in (a, b) folglich n.

Wir ergänzen (12) durch Hinzufügen weiterer Gleichungen zu einem linearen Gleichungssystem mit $\binom{n+1}{2}$ Gleichungen und Unbekannten $s_{ij}\,(i \leqq j)$:

(12′)
$$\hat{y}_i = A_i^{lk} s_{lk}, \quad v_\varrho = B_\varrho^{lk} s_{lk}$$

mit Rang $(B_\varrho^{lk}) = \text{const}$ auf $[a, b]$ und Det. $\begin{vmatrix} A_i^{lk} \\ B_\varrho^{lk} \end{vmatrix} \neq 0$ auf (a, b).

Die v_ϱ geben wir uns willkürlich als Funktionen der Klasse C^1 vor, die lediglich für $t = a$ bzw. b die Lösung $s_{ik}(t) = 0$ für festes i und alle k in (12′) gestatten sollen, falls hier $\sum_{h=1}^{r} |\gamma_{th}^i| \neq 0$ gilt [die i-te der ersten n Gleichungen von (12′) ist ja wegen der Voraussetzungen an $\hat{y}_i$ mit diesen s_{ik}-Werten dann ohnehin auch erfüllt].

(12′) können wir nun in (a, b) eindeutig nach s_{lk} auflösen, und wir studieren noch das Verhalten von $s_{ij}(t)\tilde{x}^i\tilde{x}^j$ mit beliebigen $\tilde{x} \in \mathfrak{Z}$, wenn t gegen a bzw. b konvergiert.

Wir betrachten dazu ein festes Glied $s_{ij}(t)\tilde{x}^i\tilde{x}^j$, wobei hier und nachfolgend zunächst nicht über i und j summiert werde.

Aus der Anwendung der Cramerschen Regel auf (12′), der besonderen Gestalt der Matrix (A_i^{lk}) und der Voraussetzungen an $x(t)$ und v_ϱ ersehen wir unmittelbar

$$s_{ij}(t) = \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{t-a}\right) & \text{für } t \to a, \text{ wenn } |x^i(a)| + |x^j(a)| = 0 \\ o(1) & \text{für } t \to a, \text{ wenn } |x^i(a)| + |x^j(a)| \neq 0. \end{cases}$$

Im ersten Fall ist nach den Voraussetzungen an $x(t)$ $\sum_{h=1}^{r} |\gamma_{ah}^i| = 0$ und $\sum_{h=1}^{r} |\gamma_{ah}^j| = 0$, also auch für sämtliche Funktionen $\tilde{x}(t)$ aus $\mathfrak{Z}$ $\tilde{x}^i(a) = \tilde{x}^j(a) = 0$. Damit wird $\lim_{t \to a} s_{ij}(t)\tilde{x}^i\tilde{x}^j = 0$.

Im zweiten Fall ist $\lim_{t \to a} s_{ij}(t)\tilde{x}^i\tilde{x}^j = 0$ evident.

Entsprechendes gilt freilich auch für $t \to b$.

[4] Die nicht besetzten oder nicht punktierten Stellen sind hier durch Nullen zu ergänzen.

Zusammenfassend gesagt — und dabei nun wieder über i und j summiert — gilt für beliebige $\tilde{x}(t) \in \mathfrak{Z}$ mit $\hat{S}(t, \tilde{x}) = \frac{1}{2} s_{ij} \tilde{x}^i \tilde{x}^j$ zu den oben konstruierten s_{ij}

$$\lim_{t \to a} \hat{S}(t, \tilde{x}(t)) = \lim_{t \to b} \hat{S}(t, \tilde{x}(t)) = 0 ;$$

d. h. $\hat{S}(t, \tilde{x}(t))|_a^b = 0$, x und $\hat{S}$ erfüllen also die Bedingungen von Satz II, q.e.d.

Literatur

[1] CARATHÉODORY, C.: Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Leipzig-Berlin: B. G. Teubner 1935.

[2] — Die Methode der geodätischen Äquidistanten und das Problem von Lagrange. Ges. Werke I, 212—248. München: C. H. Beck 1954.

[3] — Die Theorie der zweiten Variation beim Problem von Lagrange. Ges. Werke I, 290—305. München: C. H. Beck 1954.

[4] HÖLDER, E.: Die Lichtensteinsche Methode für die Entwicklung der zweiten Variation, angewandt auf das Problem von Lagrange. Prace Matematyczno-Fyz. **43**, 307—346 (1935).

[5] — Entwicklungssätze aus der Theorie der zweiten Variation, Allgemeine Randbedingungen. Acta Math. **70**, 193—242 (1939).

[6] — Das Eigenwertkriterium der Variationsrechnung zweifacher Extremalintegrale. Ber. Math. Tagung, S. 291—302, Berlin 1953.

[7] — Über die partiellen Differentialgleichungssysteme der mehrdimensionalen Variationsrechnung. Jber. dtsch. Math.-Ver. **62**, 34—52 (1959).

[8] KLÖTZLER, R.: Ein Einschließungssatz für Eigenwerte zu Randwertproblemen bei elliptischen linearen partiellen Differentialgleichungen. Arch. f. Rat. Mech. a. Analys. **11**, 3, 273—290 (1962).

[9] — Über die Anwendung eines neuen Reduktionsverfahrens bei Eigenwertproblemen partieller Differentialgleichungen [russ.]. J. Wytsch. Mat. i Mat. Fys. **4**, 3, 434—447 (1964).

[10] — Neue halbnumerische Methoden zur Berechnung von Grundschwingungen, Beulwerten und Drillwiderstand. Math. u. Rechentechn. im Bauwesen, S. 110—115. Berlin: VEB Verl. f. Bauw. 1965.

[11] — Über eine Einsatzmöglichkeit des Analogrechners bei der Abschätzung der Beulwerte von Platten. Tag.-Ber. zum III. IKM 1965 in Weimar (im Druck).

[12] REID, W. T.: A boundary value problem associated with the calculus of variations. Am. J. Math. **54**, 769—790 (1932).

Prof. Dr. ROLF KLÖTZLER
X 7042 Leipzig, Tauchaer Str. 202

(Eingegangen am 11. Oktober 1965)

HELMBERG, G.
Math. Annalen 165, 44—61 (1966)

Über konservative Transformationen

Herrn Professor ERNST HÖLDER zum 65. Geburtstag gewidmet

GILBERT HELMBERG

1. Einleitung

Im folgenden sei X eine Menge, $\mathfrak{R}$ eine σ-Algebra von Untermengen von X, die als „meßbar" bezeichnet werden, und μ ein nicht negatives, σ-additives, nicht triviales und σ-endliches Maß auf dem meßbaren Raum $(X, \mathfrak{R})$ (vgl. [2] § 6, § 7). Mengentheoretische Subtraktion bezeichnen wir durch $\setminus$ und Übergang zum Komplement in X durch $'$. Ferner sei T eine meßbare (d. h. $T^{-1}\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}$) und auf ganz X definierte, aber nicht notwendigerweise invertierbare Transformation. Die Transformation T heißt *invertierbar*, wenn sie die folgenden drei voneinander unabhängigen Eigenschaften besitzt: 1) $TX = X$; 2) T ist eineindeutig; 3) $T\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}$. Die Transformation T heißt *maßtreu*, wenn $\mu(T^{-1}E) = \mu(E)$ für alle $E \in \mathfrak{R}$ gilt. Eine Menge $W \in \mathfrak{R}$ heißt *wandernd*, wenn $W \cap T^{-n}W = 0$ für alle $n \geqq 1$ gilt. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{W}$ die Klasse aller meßbaren wandernden Mengen. Die Transformation T heißt *konservativ*, wenn $\mu(W) = 0$ für alle $W \in \mathfrak{W}$ gilt, und *rein dissipativ*, wenn X die Vereinigung von abzählbar vielen wandernden Mengen ist. Die Transformation heißt *ergodisch*, wenn für jede invariante Menge $E \in \mathfrak{R}$ (d. h. $T^{-1}E = E$) entweder $\mu(E) = 0$ oder $\mu(E') = 0$ gilt (vgl. [4], [8], [6]).

Ausgangspunkt für unsere Überlegungen ist der folgende Satz von P. R. HALMOS und D. S. ORNSTEIN ([4], S. 89 f.; [8], Satz 4.8.3).

Satz I. *Es sei T konservativ und invertierbar, sowie $\mu(TE) \leqq \mu(E)$ für alle $E \in \mathfrak{R}$. Dann ist T maßtreu.*

Ziel unserer Untersuchungen ist die Verallgemeinerung von Satz I auf nicht notwendigerweise invertierbare Transformationen. Diese Verallgemeinerung scheint mir aus mehreren Gründen von Interesse zu sein:

Erstens gibt sie Anlaß dazu, auf einige anscheinend noch wenig beachtete Eigenschaften konservativer Transformationen aufmerksam zu machen, die in diesem Zusammenhang eine Rolle spielen: So gilt für eine konservative Transformation T von vorneherein „im wesentlichen" $TX = X$ (s. Satz 1). Dies hat zur Folge, daß die Definition der Inkompressibilität der Transformation T (die bekanntlich mit der Konservativität von T äquivalent ist) durch eine duale Formulierung ersetzt werden kann, in der T^{-1} durch T ersetzt ist (s. Satz 2). Ebenso gilt für eine konservative Transformation T eine zum schwachen bzw. starken Poincaréschen Wiederkehrsatz über Bildpunkte duale

Aussage über Urbildpunkte (s. Satz 3). Diese Aussagen können, ebenso wie gewisse Invarianzaussagen, zur Charakterisierung einer konservativen Transformation verwendet werden (s. Satz 4; auf einen Teil dieser Zusammenhänge hat bereits F. B. WRIGHT [16] hingewiesen). Schließlich ist die in einer Untermenge $E \in \mathfrak{R}$ durch die jeweils ersten Wiederkehrpunkte definierte „induzierte" Transformation wieder konservativ (s. Hilfssatz 5; vgl. [10], [9], S. 193 f.).

Zweitens kann im Falle einer nicht notwendigerweise invertierbaren Transformation T die Voraussetzung

$$\mu(TE) \leqq \mu(E) \quad \textit{für alle} \quad E \in \mathfrak{R}$$

im Satz I auf verschiedene Weisen verallgemeinert werden, die jeweils zu verschiedenen Aussagen führen. Für eine invertierbare Transformation T sind nämlich jeweils die Aussagen

a) $\mu(TE) \leqq \mu(E)$ *für alle* $E \in \mathfrak{R}$,
b) $\mu(E) \leqq \mu(T^{-1}E)$ *für alle* $E \in \mathfrak{R}$,

und

c) $\mu(TE) \geqq \mu(E)$ *für alle* $E \in \mathfrak{R}$,
d) $\mu(E) \geqq \mu(T^{-1}E)$ *für alle* $E \in \mathfrak{R}$,

paarweise gleichbedeutend. Ist die invertierbare Transformation T konservativ, dann ist offenbar auch die inverse Transformation T^{-1} konservativ. Nach Satz I sind in diesem Falle die Aussagen a), b), c), d) äquivalent mit der Aussage

e) $\mu(E) = \mu(T^{-1}E) = \mu(TE)$ *für alle* $E \in \mathfrak{R}$,

und daher auch untereinander äquivalent. Falls an Stelle der Invertierbarkeit von T nur mehr $T\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}$ gefordert wird, gilt dies jedoch nicht mehr: Die Voraussetzung a) hat (zusammen mit der Konservativität von T) noch stets die Aussage e) zur Folge; die Transformation T ist dann sogar „im wesentlichen" invertierbar (s. Satz 5). Jede der Aussagen c) und d) ist äquivalent mit der Maßtreue von T (s. Satz 6). Die Aussage b) kann jedoch auch für eine nicht maßtreue Transformation T zutreffen (s. das Beispiel im Anschluß an Satz 6). Lassen wir auch die Voraussetzung $T\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}$ fallen, dann wird a) und c) in der angegebenen Formulierung sinnlos, da TE nicht mehr meßbar zu sein braucht. Die eben erwähnten Aussagen bleiben jedoch richtig, wenn an den entsprechenden Stellen das Maß μ durch das angehörige äußere Maß μ^*, bzw. eine nicht meßbare Menge F durch ihre meßbare Hülle $\langle F \rangle$ ersetzt wird.

Drittens erhalten wir durch Anwendung der Verallgemeinerung von Satz I eine zusätzliche Einsicht in die Struktur einer nicht notwendigerweise invertierbaren Transformation: Die Existenz eines invarianten Maßes hat die Zerlegung von T bzw. X in einen invarianten konservativen und einen invarianten rein dissipativen Teil zur Folge (s. Satz 7), und die durch eine maßtreue konservative Transformation in einer Untermenge $E \in \mathfrak{R}$ induzierte Transformation ist wieder maßtreu (s. Satz 8). Unter der zusätzlichen Voraussetzung $\mu(E) < \infty$, aber dafür unter Abschwächung der Voraussetzung der

Konservativität von T, wurde dieser letzte Satz bereits von Herrn J. C. SMIT (Nijmegen) bewiesen (noch nicht veröffentlicht), dem ich auch für anregende Unterhaltungen über den Gegenstand dieser Arbeit zu Dank verpflichtet bin.

Da wir $X \in \mathfrak{R}$ voraussetzen, existiert für jede Untermenge $F \subset X$ ein durch

$$\mu^*(F) = \inf\{\mu(E) : F \subset E \in \mathfrak{R}\}$$

definiertes *äußeres Maß* $\mu^*(F)$ (vgl. [2], § 10). Ferner existiert wegen der σ-Endlichkeit von μ zu jeder Untermenge $F \subset X$ eine Menge $\langle F \rangle$, die *meßbare Hülle* von F, mit folgenden Eigenschaften:

1) $\langle F \rangle \in \mathfrak{R}$;
2) $F \subset \langle F \rangle$;
3) *für jede Menge* $F_1 \in \mathfrak{R}$, *die* F *enthält, gilt* $\mu(\langle F \rangle \backslash F_1) = 0$;
4) $\mu^*(F) = \mu(\langle F \rangle)$.

Durch die Eigenschaften 1), 2), 3) ist $\langle F \rangle$ bis auf eine μ-Nullmenge eindeutig bestimmt (vgl. [2], § 12). Dies hat zur Folge, daß verschiedene unserer Aussagen über Gleichheit oder Enthaltensein von Mengen jeweils nur abgesehen von einer μ-Nullmenge gelten. Wir deuten dies an den betreffenden Stellen durch das Zeichen $[\mu]$ („modulo μ") an. Unter der zusätzlichen Voraussetzung $T\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}$ kann jeweils μ^* durch μ und $\langle F \rangle$ durch F ersetzt werden. Wir unterlassen jedoch, die Sätze jeweils unter Hinzunahme dieser Voraussetzung neu zu formulieren. Ebenso gehen wir nicht weiter darauf ein, daß einige der folgenden Aussagen auch ohne die hier generell gemachte Voraussetzung der σ-Endlichkeit von μ richtig bleiben.

2. Inkompressibilität und Wiederkehraussagen

Wo keine Gefahr eines Mißverständnisses besteht, unterdrücken wir in Ausdrücken wie $T(T^{-1}E)$ die Klammern; wir schreiben hierfür also $TT^{-1}E$. Hierbei müssen wir allerdings beachten, daß T nicht als invertierbar vorausgesetzt ist. Die Operation T^{-1} (Übergang zum vollständigen Urbild unter T) ist also im allgemeinen keine Transformation, und die durch Hintereinanderschaltung definierten Operationen TT^{-1} und $T^{-1}T$ sind im allgemeinen von der Identität verschieden. Die zusätzliche Voraussetzung der Konservativität von T hat hier jedoch wieder Vereinfachungen zur Folge:

Satz 1. *Es sei* T *konservativ. Dann gilt*

$$\langle TT^{-1}E \rangle = E \ [\mu] \quad \textit{für alle} \quad E \in \mathfrak{R};$$

insbesondere gilt

$$\langle TX \rangle = X \ [\mu].$$

Beweis. Es sei $E \in \mathfrak{R}$ gegeben. Für die Menge $V = E \backslash TT^{-1}E$ gilt wegen $T^{-1}TT^{-1}E = T^{-1}E$

$$T^{-1}V = T^{-1}E \backslash T^{-1}TT^{-1}E = \emptyset,$$
$$T^{-n}V = \emptyset \quad \text{für alle} \quad n \geqq 1;$$

(dies ist auch leicht einzusehen, wenn man sich vor Augen hält, daß V die Menge aller Punkte von E ist, die keine Urbilder besitzen). Die in V enthaltene meßbare Menge $W = E \setminus \langle TT^{-1}E \rangle$ ist also wandernd und, wegen der Konservativität von T, eine μ-Nullmenge. Andererseits gilt $\langle TT^{-1}E \rangle \subset E$ $[\mu]$, woraus die Behauptung folgt.

Bekanntlich ist die Konservativität der Transformation T äquivalent mit der *Inkompressibilität* von T, definiert durch Aussage a) von Satz 2 (s. u.) (vgl. [4], S. 11). Wir zeigen unter Verwendung von Satz 1, daß sich diese Aussage durch eine duale Aussage ersetzen läßt:

Satz 2. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

a) *Aus* $E \in \mathfrak{R}$ *und* $E \subset T^{-1}E$ *folgt* $E = T^{-1}E$ $[\mu]$.

b) *Aus* $E \in \mathfrak{R}$ *und* $TE \subset E$ *folgt* $\langle TE \rangle = E$ $[\mu]$.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Aus $E \in \mathfrak{R}$ und $TE \subset E$ folgt zunächst $E \subset T^{-1}E$ und nach a) $E = T^{-1}E$ $[\mu]$. Es sei $T_1 = T|E$ die auf E eingeschränkte Transformation T. Eine wandernde Menge für T_1 ist auch wandernde Menge für T und daher eine μ-Nullmenge, T_1 ist also konservativ. Nach Satz 1 gilt $\langle TE \rangle = \langle T_1 E \rangle = E$ $[\mu]$.

b) $\Rightarrow$ a): Aus $E \in \mathfrak{R}$ und $E \subset T^{-1}E$ folgt $TT^{-1}E \subset E \subset T^{-1}E$ und nach b) weiter $\langle TT^{-1}E \rangle = T^{-1}E$ $[\mu]$. Aus der vorgehenden Einschließungskette erhalten wir dann

$$\langle TT^{-1}E \rangle \subset E \subset T^{-1}E = \langle TT^{-1}E \rangle \ [\mu],$$
$$E = T^{-1}E \ [\mu].$$

Bisweilen wird (nahegelegt durch den Übergang zur Maßalgebra) Inkompressibilität von T durch die etwas schärfere Forderung a) von Hilfssatz 1 (s. u.) definiert (vgl. [16], S. 392). Da diese Forderung auch im Beweis des weiter unten angeführten Satzes 4 eine Rolle spielt, ist es zweckmäßig, den Zusammenhang beider Definitionen klarzustellen. Wir schließen zwei weitere Hilfssätze an, die ebenfalls im folgenden benötigt werden.

Hilfssatz 1. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

a) *Aus* $E \in \mathfrak{R}$ *und* $E \subset T^{-1}E$ $[\mu]$ *folgt* $E = T^{-1}E$ $[\mu]$.

b) *Aus* $E \in \mathfrak{R}$ *und* $E \subset T^{-1}E$ *folgt* $E = T^{-1}E$ $[\mu]$ *und aus* $F \in \mathfrak{R}$ *und* $\mu(F) = 0$ *folgt* $\mu(T^{-1}F) = 0$.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Aus $F \in \mathfrak{R}$ und $\mu(F) = 0$ folgt $F \subset T^{-1}F$ $[\mu]$ und nach a) $F = T^{-1}F$ $[\mu]$, d. h. $\mu(T^{-1}F) = 0$. Der Rest der Behauptung ist trivial.

b) $\Rightarrow$ a): Es sei $E \in \mathfrak{R}$ und $E \subset T^{-1}E$ $[\mu]$. Wir setzen

$$G = E \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(E \setminus T^{-1}E)$$

und erhalten

$$T^{-1}G = T^{-1}E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-k}(E \setminus T^{-1}E).$$

Dann gilt die Einschließung $G \subset T^{-1}G$ und nach b) weiter $G = T^{-1}G$ $[\mu]$. Wegen $\mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(E \setminus T^{-1}E)\right) = 0$ folgt $E = T^{-1}E$ $[\mu]$.

Hilfssatz 2. *Für jede Menge $W \in \mathfrak{W}$ gilt*

$$T^m W \cap T^n W = \emptyset \quad \text{für} \quad m \leqq 0 \quad \text{und} \quad n \neq m;$$

insbesondere gilt

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}W \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} T^k W = \emptyset.$$

Beweis. Siehe [6], Hilfssatz 2.

Hilfssatz 3. *Es seien F und $F_k (1 \leqq k < \infty)$ beliebige Untermengen von X. Dann gelten folgende Aussagen:*

a) $\langle F \rangle \cap E = \langle F \cap E \rangle$ $[\mu]$ *für alle* $E \in \mathfrak{R}$.

b) $\left\langle \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \right\rangle = \bigcup_{k=1}^{\infty} \langle F_k \rangle$ $[\mu]$.

c) $\langle T^{-1}F \rangle \subset T^{-1}\langle F \rangle$ $[\mu]$.

Beweis. a) Aus $F \cap E \subset \langle F \rangle \cap E \in \mathfrak{R}$ folgt

$$\langle F \cap E \rangle \subset \langle F \rangle \cap E \quad [\mu]. \tag{1}$$

Andrerseits gelten die Einschließungen

$$F \subset \langle F \cap E \rangle \cup \langle F \cap E' \rangle,$$
$$\langle F \rangle \subset \langle F \cap E \rangle \cup \langle F \cap E' \rangle \quad [\mu],$$

und wegen $\langle F \cap E \rangle \subset E$ $[\mu]$ und $\langle F \cap E' \rangle \subset E'$ $[\mu]$ weiter

$$\langle F \rangle \cap E \subset \langle F \cap E \rangle \quad [\mu]. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt die Behauptung:

b) Offenbar gilt

$$\langle F_k \rangle \subset \left\langle \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \right\rangle \quad [\mu] \quad \text{für alle} \quad k \geqq 1,$$

und daher

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \langle F_k \rangle \subset \left\langle \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \right\rangle \quad [\mu].$$

In der anderen Richtung ist die Einschließung modulo μ trivial.

c) Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Beziehung $T^{-1}F \subset T^{-1}\langle F \rangle$.

Bereits F. B. WRIGHT [16], [17] und C. T. TAAM [15] haben darauf hingewiesen, daß die Konservativität der Transformation T mit der Gültigkeit der schwachen bzw. der starken Poincaréschen Wiederkehraussage äquivalent ist. Wir erweitern diese Feststellung im unten angeführten Satz 3 durch die Formulierung äquivalenter dualer Aussagen:

Aussage b) ist die Aussage des schwachen Wiederkehrsatzes: Die Bahn fast jedes Punktes in E führt mindestens einmal wieder in E zurück.

Aussage c) ist die Aussage des starken Wiederkehrsatzes: Die Bahn fast jedes Punktes in E führt unendlich oft wieder in E zurück.

Aussage d) besagt, daß „fast jeder" Punkt in E Bahnpunkt eines Ausgangspunktes in E ist (unter der Voraussetzung $T\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}$ entfallen die Anführungszeichen).

Aussage e) besagt, daß „fast jeder" Punkt in E Bahnpunkt von Ausgangspunkten in E ist, die beliebig weit in der „Vergangenheit" zurückliegen.

Im allgemeinen sind diese Aussagen für eine einzelne Menge E nicht gleichbedeutend.

Satz 3. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

a) *T ist konservativ.*

b) $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-k}E \ [\mu]$ *für alle* $E \in \mathfrak{R}$.

c) $E \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} T^{-k}E \ [\mu]$ *für alle* $E \in \mathfrak{R}$.

d) $E \subset \left\langle \bigcup_{k=1}^{\infty} T^{k}E \right\rangle \ [\mu]$ *für alle* $E \in \mathfrak{R}$.

e) $E \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\langle \bigcup_{k=n}^{\infty} T^{k}E \right\rangle \ [\mu]$ *für alle* $E \in \mathfrak{R}$.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c): Siehe [17], [15], theorem 2.

c) $\Rightarrow$ e): Es sei

$$V_n = E \setminus \bigcup_{k=n}^{\infty} T^{k}E \quad \text{für} \quad n \geqq 1 .$$

Wegen $T^{-m}T^{k}E \supset T^{k-m}E$ für $m \geqq 0$ und $k \geqq 0$ gilt

$$T^{-m}V_n = T^{-m}E \setminus \bigcup_{k=n}^{\infty} T^{-m}T^{k}E \subset T^{-m}E \setminus \bigcup_{k=n}^{\infty} T^{k-m}E \subset E' \quad \text{für} \quad m \geqq n ,$$

also

$$V_n \cap T^{-m}V_n = \emptyset \quad \text{für} \quad m \geqq n .$$

Ebenso gilt dann für die in V_n enthaltene meßbare Menge $W_n = E \setminus \left\langle \bigcup_{k=n}^{\infty} T^{k}E \right\rangle$ die Beziehung

$$W_n \cap T^{-m}W_n = \emptyset \quad \text{für} \quad m \geqq n .$$

Aus c) schließen wir $\mu(W_n) = 0$ für alle $n \geqq 1$, also

$$E \subset \left\langle \bigcup_{k=n}^{\infty} T^{k}E \right\rangle \ [\mu] \quad \text{für alle} \quad n \geqq 1 .$$

Hieraus folgt die Behauptung.

e) $\Rightarrow$ d): Trivial.

d) $\Rightarrow$ a): Für eine Menge $W \in \mathfrak{W}$ gilt nach Hilfssatz 2 $\left\langle \bigcup_{k=1}^{\infty} T^{k}W \right\rangle \cap W = \emptyset \ [\mu]$.

Aus d) folgt $\mu(W) = 0$.

Bemerkung 1. Unter der Voraussetzung $T\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}$ ist die Implikation a) $\Rightarrow$ e) in einer Verallgemeinerung des starken Wiederkehrsatzes von S. SUCHESTON [14] enthalten. Die Operation T^{-1} (die einem Punkt im allgemeinen einen Menge zuordnet) ist dann nämlich im Sinne der dort gegebenen Definition meßbar und konservativ, und die Aussage des dort abgeleiteten Wiederkehrsatzes stimmt in diesem Falle mit Aussage e) überein.

Bemerkung 2. Es sei $T\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}$ und für $E \in \mathfrak{R}$ habe $\mu(E) = 0$ die Gleichung $\mu(TE) = \mu(T^{-1}E) = 0$ zur Folge. Dann kann T als Hemimorphismus und T^{-1} als Endomorphismus der Maßalgebra des Maßraumes $(X, \mathfrak{R}, \mu)$ aufgefaßt werden (vgl. [3], 2.8). In der dieser Auffassung entsprechenden Formulierung hat F. B. WRIGHT u. a. die Äquivalenzen a)$\Leftrightarrow$d) und a)$\Leftrightarrow$b)$\Leftrightarrow$c) bewiesen (vgl. [16], theorem 10, theorem 14) und die Frage gestellt, in welchem Ausmaß sich die nur für Endomorphismen abgeleiteten Äquivalenzaussagen [wie a)$\Leftrightarrow$c)] auch auf Hemimorphismen übertragen lassen. Eine Teilantwort auf diese Frage wird durch die Äquivalenzaussage a)$\Leftrightarrow$e) und durch die Äquivalenzaussagen von Satz 4 (s. u.) gegeben.

Bemerkung 3. N. G. DE BRUIJN [1] hat einen einfachen Beweis einer allgemeinen Fassung des starken Wiederkehrsatzes gegeben, die das Resultat von S. SUCHESTON [14] und daher, unter der Voraussetzung $T\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}$, die Implikation a) $\Rightarrow$ e) umfaßt.

Die schwachen Wiederkehraussagen b) und d) von Satz 3 lassen sich auch als Invarianzaussagen über die Mengen

$$\hat{E} = \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}E$$

und

$$\check{E} = \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{k}E$$

formulieren (wir behalten diese Bezeichnungen zur Abkürzung der Schreibweise bei). Wir ergänzen diese Invarianzaussagen in der Zusammenstellung des folgenden Satzes:

Satz 4. *Die folgenden Aussagen* a), b), c) *sind äquivalent:*

a) T *ist konservativ.*

b) $T^{-1}\hat{E} = \hat{E}$ $[\mu]$ *für alle* $E \in \mathfrak{R}$.

c) $\langle T\check{E}\rangle = \langle \check{E}\rangle$ $[\mu]$ *für alle* $E \in \mathfrak{R}$.

Gilt für jede μ*-Nullmenge* $F \in \mathfrak{R}$ *auch* $\mu^*(TF) = 0$, *dann ist* a) *äquivalent mit*

d) $\langle T\hat{E}\rangle = \hat{E}$ $[\mu]$ *für alle* $E \in \mathfrak{R}$.

Gilt für jede μ*-Nullmenge* $F \in \mathfrak{R}$ *auch* $\mu(T^{-1}F) = 0$, *dann ist* a) *äquivalent mit jeder der beiden Aussagen* e), f):

e) $T^{-1}\langle \check{E}\rangle = \langle \check{E}\rangle$ $[\mu]$ *für alle* $E \in \mathfrak{R}$.

f) $\langle T^{-1}\check{E}\rangle = \langle \check{E}\rangle$ $[\mu]$ *für alle* $E \in \mathfrak{R}$.

Gilt für jede μ*-Nullmenge* $F \in \mathfrak{R}$ *auch* $\mu^*(TF) = \mu(T^{-1}F) = 0$, *dann ist* a) *äquivalent mit*

g) $\hat{E} = \langle \check{E}\rangle$ $[\mu]$ *für alle* $E \in \mathfrak{R}$.

Beweis. Die Äquivalenzen a)⇔b)⇔c) folgen aus der Äquivalenz der Aussagen a), b), d) in Satz 3 [beim Beweis von a)⇔c) kommt Hilfssatz 3b) zur Anwendung].

a)⇒ d): Es sei $E \in \mathfrak{R}$ gegeben. Wegen a)⇒ b) gilt für geeignete μ-Nullmengen $F_1, F_2 \in \mathfrak{R}$

$$T^{-1}\hat{E} \cup F_1 = \hat{E} \cup F_2,$$
$$TT^{-1}\hat{E} \cup TF_1 = T\hat{E} \cup TF_2,$$
$$\langle TT^{-1}\hat{E}\rangle = \langle T\hat{E}\rangle \ [\mu](\mu^*(TF_1) = \mu^*(TF_2) = 0),$$
$$\hat{E} = \langle T\hat{E}\rangle \ [\mu] \quad \text{(s. Satz 1)}.$$

d)⇒ a): Für eine Menge $W \in \mathfrak{W}$ gilt nach Hilfssatz 2

$$\langle TW\rangle \subset (\hat{W})' \ [\mu].$$

Aus d) folgt

$$\langle TW\rangle \subset \hat{W} \ [\mu]$$

und aus beiden Einschließungen zusammen

$$\mu^*(TW) = 0. \tag{3}$$

Ersetzen wir W durch die Menge $T^{-1}W \in \mathfrak{W}$, so erhalten wir

$$\mu(\langle TT^{-1}W\rangle) = \mu^*(TT^{-1}W) = 0. \tag{4}$$

Andererseits gilt für die wandernde Menge $V = W \setminus \langle TT^{-1}W\rangle \in \mathfrak{W}$ wie im Beweis von Satz 1 $T^{-k}V = \emptyset$ für alle $k \geqq 1$ und daher $V = \hat{V}$. Aus d) und (3) schließen wir

$$\mu(V) = \mu(\hat{V}) = \mu^*(T\hat{V}) = \mu^*(TV) = 0. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt schließlich $\mu(W) = 0$.

a)⇒ e): Es sei $E \in \mathfrak{R}$ gegeben. Aus der Definition von $\check{E}$ folgt

$$T\check{E} \subset \check{E} \subset \langle \check{E}\rangle,$$
$$\check{E} \subset T^{-1}\langle \check{E}\rangle \in \mathfrak{R},$$
$$\langle \check{E}\rangle \subset T^{-1}\langle \check{E}\rangle \ [\mu].$$

Aus der Implikation b)⇒ a) von Hilfssatz 1 schließen wir

$$\langle \check{E}\rangle = T^{-1}\langle \check{E}\rangle \ [\mu].$$

e)⇒ f): Die Behauptung folgt aus der Einschließungskette

$$T^{-1}\langle \check{E}\rangle \supset \langle T^{-1}\check{E}\rangle \supset \langle \check{E}\rangle \ [\mu] \quad \text{(s. Hilfssatz 3c)}.$$

f)⇒ a): Für eine Menge $W \in \mathfrak{W}$ gilt nach Hilfssatz 2

$$TW \subset \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}W\right)' = \bigcap_{k=0}^{\infty} T^{-k}W' \in \mathfrak{R}.$$

Wir wählen die meßbare Hülle $E = \langle TW\rangle$ derart, daß auch

$$E = \langle TW\rangle \subset \bigcap_{k=0}^{\infty} T^{-k}W'$$

gilt. Es folgt

$$W \subset T^{-1}E \subset \langle T^{-1}\check{E}\rangle = \langle \check{E}\rangle = \left\langle \bigcup_{k=0}^{\infty} T^k E \right\rangle \subset W' \ [\mu]$$

und hieraus weiter $\mu(W) = 0$.

a) $\Rightarrow$ g): Es sei $E \in \mathfrak{R}$ gegeben. Wir zeigen zunächst die Einschließung $\hat{E} \subset \langle \check{E}\rangle \ [\mu]$. In der Tat folgt aus Satz 3e) für jedes $n \geqq 0$

$$T^{-n}E \subset \left\langle \bigcup_{k=n}^{\infty} T^k T^{-n} E \right\rangle \ [\mu]$$

und wegen

$$T^k T^{-n} E = T^{(k-n)} T^n T^{-n} E \subset T^{(k-n)} E \quad \text{für} \quad k \geqq n$$

weiter

$$T^{-n}E \subset \left\langle \bigcup_{k=0}^{\infty} T^k E \right\rangle = \langle \check{E}\rangle \ [\mu],$$

$$\hat{E} \subset \langle \check{E}\rangle \ [\mu]. \tag{6}$$

Unter der Voraussetzung, daß für jede μ-Nullmenge $F \in \mathfrak{R}$ auch $\mu^*(TF) = 0$ gilt, erhalten wir andererseits aus der Implikation a) $\Rightarrow$ d)

$$TE \subset \langle T\hat{E}\rangle = \hat{E} \ [\mu],$$

und durch vollständige Induktion nach k

$$T^k E \subset \hat{E} \ [\mu] \quad \text{für alle} \quad k \geqq 1,$$

woraus $\langle \check{E}\rangle \subset \hat{E} \ [\mu]$ und, zusammen mit (6), $\langle \check{E}\rangle = \hat{E} \ [\mu]$ folgt.

g) $\Rightarrow$ a): Es sei $W \in \mathfrak{W}$ gegeben. Aus der Gleichung $\hat{W} = \langle \check{W}\rangle \ [\mu]$ erhalten wir nach Hilfssatz 2 und Hilfssatz 3a)

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-k} W = \hat{W} \cap W' = \langle \check{W}\rangle \cap W' = \langle \check{W} \cap W'\rangle = \left\langle \bigcup_{k=1}^{\infty} T^k W \right\rangle \ [\mu],$$

$$\mu(\langle TW\rangle) = \mu^*(TW) \leqq \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} T^k W \right) = 0,$$

$$\mu(W) \leqq \mu(T^{-1}\langle TW\rangle) = 0.$$

Bemerkung 4. Aus dem Beweis geht hervor, daß in e) und f) der Quantifikator „für alle $E \in \mathfrak{R}$" sogar durch „für alle $E \subset X$" ersetzt werden kann, daß aus der Konservativität von T bereits $\hat{E} \subset \langle \check{E}\rangle \ [\mu]$ für alle $E \in \mathfrak{R}$ folgt, und daß bereits unter der zusätzlichen Voraussetzung „für jede μ-Nullmenge $F \in \mathfrak{R}$ gilt $\mu^*(TF) = 0$" die Gleichung $\hat{E} = \langle \check{E}\rangle \ [\mu]$ für alle $E \in \mathfrak{R}$ gilt.

Bemerkung 5. Unter den in Bemerkung 2 aufgezählten Voraussetzungen erweitert Satz 4 die Aussagen von Theorem 13 und Theorem 14 in [16] auf den Fall einer zyklischen Halbgruppe von Hemimorphismen der Maßalgebra.

3. Maßverkleinernde und maßvergrößernde Transformationen

Der Beweisgedanke für die folgenden Verallgemeinerungen von Satz I ist der gleiche wie bei P. R. HALMOS und D. S. ORNSTEIN. Wir verwenden jedoch weitere Eigenschaften der dort definierten Hilfsmengen $E_{(k)}$ und fassen diese in einem Hilfssatz zusammen.

Hilfssatz 4. *Es sei T konservativ. Für eine beliebige Menge $E \in \mathfrak{R}$ sei die Menge $E_{(k)} \in \mathfrak{R}$ $(1 \leqq k < \infty)$ definiert durch*

$$E_{(k)} = \{x \in E : T^k x \in E,\ T^i x \notin E \ \text{für}\ 1 \leqq i < k\}$$
$$= T^{-k}E \cap T^{-(k-1)}E' \cap \cdots \cap T^{-1}E' \cap E.$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

a) $T^i E_{(k)} \cap T^j E_{(h)} = 0$ *für* $0 \leqq k-i < h-j < h$
oder $0 < k-i < h-j \leqq h$.

b) $\langle T^i E_{(k)} \rangle \cap \langle T^j E_{(h)} \rangle = 0\ [\mu]$ *für* $0 \leqq k-i < h-j < h$
oder $0 < k-i < h-j \leqq h$.

c) $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{(k)}\ [\mu]$.

d) $E = \left\langle \bigcup_{k=1}^{\infty} T^k E_{(k)} \right\rangle\ [\mu]$.

Beweis. a) Unter den angegebenen Voraussetzungen gilt

$$T^{k-i} T^i E_{(k)} \subset E,$$
$$T^{k-i} T^j E_{(h)} \subset E' \quad (\text{wegen } 1 \leqq k-i+j < h),$$

also

(7) $$T^i E_{(k)} \subset T^{-(k-i)} E,$$

(8) $$T^j E_{(h)} \subset T^{-(k-i)} E'.$$

b) Die Behauptung folgt aus (7) und (8), da die Mengen $T^{-(k-i)}E$ und $T^{-(k-i)}E'$ meßbar und disjunkt sind.

c) Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem schwachen Wiederkehrsatz [a) $\Rightarrow$ b) in Satz 3].

d) Wir zeigen zunächst

$$E \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} T^k E = \bigcup_{k=1}^{\infty} T^k E_{(k)}.$$

Die Inklusion

$$E \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} T^k E \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} T^k E_{(k)}$$

ist trivial. Andererseits ist jeder Punkt $x \in E \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} T^k E$ erster Rückkehrpunkt eines gewissen Punktes in E, also gilt auch

$$E \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} T^k E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} T^k E_{(k)}.$$

Aus Satz 3d) und Hilfssatz 3a) folgern wir nun

$$E = E \cap \left\langle \bigcup_{k=1}^{\infty} T^k E \right\rangle = \left\langle E \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} T^k E \right\rangle = \left\langle \bigcup_{k=1}^{\infty} T^k E_{(k)} \right\rangle\ [\mu].$$

Satz 5. *Es sei T konservativ und*

$$\mu^*(TE) \leqq \mu(E) \quad \textit{für alle} \quad E \in \mathfrak{R}.$$

Dann gilt

$$\mu^*(TE) = \mu(E) = \mu(T^{-1}E) \quad \textit{für alle} \quad E \in \mathfrak{R},$$

und T ist invertierbar im Sinne der folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\langle TT^{-1}E\rangle = E \ [\mu] \\ &\langle T^{-1}TE\rangle = T^{-1}\langle TE\rangle = E \ [\mu] \end{aligned}\right\} \quad \textit{für alle} \quad E \in \mathfrak{R}.$$

Beweis. Für jede Menge $F \subset X$ gilt $TF \subset T\langle F\rangle$ und daher

$$\mu^*(TF) \leqq \mu^*(T\langle F\rangle) \leqq \mu(\langle F\rangle) = \mu^*(F). \tag{9}$$

Ist die Menge $E \in \mathfrak{R}$ gegeben, so schließen wir

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} T^k E_{(k)}\right) && \text{[Hilfssatz 4d)]} \\ &\leqq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(T^k E_{(k)}) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(TE_{(k)}) && \text{[nach (9)]} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\langle TE_{(k)}\rangle) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \langle TE_{(k)}\rangle\right) && \text{[Hilfssatz 4b)]} \\ &= \mu\left(\left\langle \bigcup_{k=1}^{\infty} TE_{(k)} \right\rangle\right) = \mu^*\left(T \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{(k)}\right) && \text{[Hilfssatz 3b)]} \\ &\leqq \mu^*(TE) \leqq \mu(E) && \text{[Hilfssatz 4c)].} \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\mu^*(TE) = \mu(E) \quad \text{für alle} \quad E \in \mathfrak{R}$$

und wegen Satz 1 weiter

$$\mu(E) = \mu^*(TT^{-1}E) = \mu(T^{-1}E) \quad \text{für alle} \quad E \in \mathfrak{R}.$$

Wegen

$$E \subset \langle T^{-1}TE\rangle \subset T^{-1}\langle TE\rangle \ [\mu] \qquad \text{[Hilfssatz 3c)]}$$

folgt hieraus für $E \in \mathfrak{R}$ und $\mu(E) < \infty$

$$E = \langle T^{-1}TE\rangle = T^{-1}\langle TE\rangle \ [\mu].$$

Für eine beliebige meßbare Menge E können wir wegen der σ-Endlichkeit von μ

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k,$$

$$\left.\begin{aligned} &F_k \in \mathfrak{R} \\ &\mu(F_k) < \infty \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad 1 \leqq k < \infty$$

setzen. Unter Verwendung von Hilfssatz 3b) folgt

$$\langle T^{-1}TE\rangle = \bigcup_{k=1}^{\infty}\langle T^{-1}TF_k\rangle = \bigcup_{k=1}^{\infty}F_k = E\ [\mu],$$

$$T^{-1}\langle TE\rangle = \bigcup_{k=1}^{\infty}T^{-1}\langle TF_k\rangle = \bigcup_{k=1}^{\infty}F_k = E\ [\mu].$$

Die restliche Behauptung entnehmen wir aus Satz 1.

Bemerkung 6. Die Invertierbarkeit der Transformation T in dem in Satz 5 beschriebenen Sinne bedeutet, daß die Operation $\langle T\ldots\rangle$ und T^{-1} in der Maßalgebra des Maßraumes $(X, \mathfrak{R}, \mu)$ zueinander inverse Automorphismen induzieren.

Satz 6. *Es sei T konservativ. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

a) $\mu(E) \leqq \mu^*(TE)$ *für alle* $E \in \mathfrak{R}$.

b) $\mu(T^{-1}E) \leqq \mu(E)$ *für alle* $E \in \mathfrak{R}$.

c) $\mu(T^{-1}E) = \mu(E)$ *für alle* $E \in \mathfrak{R}$.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b): Wegen $TT^{-1}E \subset E$ folgt aus a)

$$\mu(T^{-1}E) \leqq \mu^*(TT^{-1}E) \leqq \mu(E) \quad \text{für alle} \quad E \in \mathfrak{R}.$$

b) $\Rightarrow$ a): Wegen $E \subset T^{-1}TE \subset T^{-1}\langle TE\rangle$ folgt aus b)

$$\mu(E) \leqq \mu^*(T^{-1}TE) \leqq \mu(T^{-1}\langle TE\rangle) \leqq \mu(\langle TE\rangle) = \mu^*(TE) \quad \text{für alle} \quad E \in \mathfrak{R}.$$

c) $\Rightarrow$ b): Trivial.

b) $\Rightarrow$ c): Wir führen den Beweis indirekt und setzen voraus, es gäbe eine Menge $E \in \mathfrak{R}$ mit der Eigenschaft

$$\mu(T^{-1}E) < \mu(E).$$

Wegen der σ-Endlichkeit von μ können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mu(E) < \infty$ voraussetzen. Es sei

$$\varepsilon = \frac{1}{3}\,[\mu(E) - \mu(T^{-1}E)].$$

Nach Hilfssatz 4c), d) und Hilfssatz 3b) wählen wir K so groß, daß die folgenden Ungleichungen gelten:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{K}E_{(k)}\right) \geqq \mu(E) - \varepsilon,$$

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{K}T^kE_{(k)}\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{K}\langle T^kE_{(k)}\rangle\right) \geqq \mu(E) - \varepsilon.$$

Wir setzen nun

$$F = \left\langle \bigcup_{k=1}^{K}\bigcup_{j=1}^{k}T^jE_k \right\rangle,$$

$$F_1 = F \cap E' = \left\langle \bigcup_{k=2}^{K}\bigcup_{j=1}^{k-1}T^jE_{(k)} \right\rangle\ [\mu],$$

$$F_2 = F \cap E = \left\langle \bigcup_{k=1}^{K}T^kE_{(k)} \right\rangle\ [\mu].$$

Wegen $T^{k-j}T^jE_{(k)} \subset E (1 \leqq j \leqq k)$ gilt weiter

$$T^jE_{(k)} \subset T^{-(k-j)}E \quad \text{für} \quad 1 \leqq j \leqq k,$$
$$\mu^*(T^jE_{(k)}) \leqq \mu(T^{-(k-j)}E) \leqq \mu(E) < \infty \quad \text{für} \quad 1 \leqq j \leqq k,$$
$$\mu(F) \leqq \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{k} \mu^*(T^jE_{(k)}) < \infty.$$

Wir erhalten

$$T^{-1}F \supset \left\langle \bigcup_{k=1}^{K} \bigcup_{j=1}^{k} T^{-1}T^jE_{(k)} \right\rangle \supset \left\langle \bigcup_{k=1}^{K} \bigcup_{j=0}^{k-1} T^jE_{(k)} \right\rangle = F_1 \cup \bigcup_{k=1}^{K} E_{(k)} \; [\mu],$$
$$\mu(T^{-1}F) \geqq \mu(F_1) + \mu\left(\bigcup_{k=1}^{K} E_{(k)}\right) \geqq \mu(F_1) + \mu(E) - \varepsilon \geqq$$
$$\geqq \mu(F_1) + \mu(F_2) - \varepsilon = \mu(F) - \varepsilon,$$
$$\mu(T^{-1}F) = \mu(T^{-1}F_1) + \mu(T^{-1}F_2) \leqq \mu(F_1) + \mu(T^{-1}E)$$
$$= \mu(F_1) + \mu(E) - 3\varepsilon \leqq \mu(F_1) + \mu(F_2) - 2\varepsilon,$$
$$\mu(F) - \varepsilon \leqq \mu(T^{-1}F) \leqq \mu(F) - 2\varepsilon,$$
$$0 \leqq -\varepsilon,$$

ein Widerspruch.

Bemerkung 7. Aus dem Beweis ist ersichtlich, daß die Äquivalenz der Aussagen a) und b) in Satz 6 auch ohne die Voraussetzung der Konservativität von T gilt.

Bemerkung 8. Die im Beweis benützte Menge F ist verwandt mit der Menge $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{k} T^jE_{(k)}$, die (im Falle einer invertierbaren Transformation T) in dem von P. R. HALMOS und D. S. ORNSTEIN gegebenen Beweis des Satzes I, sowie in dem von R. W. PREISENDORFER und B. W. ROOS [11] gegebenen Beweis einer Verallgemeinerung eines Satzes von M. KAC eine wesentliche Rolle spielt.

Schließlich geben wir ein Beispiel einer konservativen Transformation T an, die

$$\mu(E) \leqq \mu(T^{-1}E) \quad \textit{für alle} \quad E \in \mathfrak{R}$$

erfüllt, aber nicht maßtreu ist (vgl. [7], Abschnitt 2).

Es sei $\mathfrak{R}$ die Klasse der Borelmengen in $[0, 1[= X$ und I_n das Intervall

$$I_n = [1 - 2^{-n},\ 1 - 2^{-n-1}[\quad \text{für} \quad 0 \leqq n < \infty.$$

Offenbar gilt

$$[0, 1[= \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$$
$$I_n \cap I_m = \emptyset \quad \text{für} \quad n \neq m.$$

Die Transformation T sei in $[0, 1[$ definiert durch

$$Tx = 2^{n+1}(x - 1 + 2^{-n}) \quad \text{für} \quad x \in I_n, 0 \leqq n < \infty.$$

Dann gilt für alle $E \in \mathfrak{R}$

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} T^{-1}E = \bigcup_{n=0}^{\infty} (2^{-n-1}E + 1 - 2^{-n}), \\ 2^{-n-1}E + 1 - 2^{-n} \subset I_n \quad \text{für} \quad 0 \leqq n < \infty . \end{cases}$$

Hieraus folgt im besonderen, daß die Transformation T Borel-meßbar und bezüglich des Lebesgueschen Maßes λ auf $[0, 1[$ maßtreu, also auch konservativ ist. Wir definieren nun ein neues Maß μ auf $[0, 1[$ durch

$$\text{(11)} \qquad \mu(E) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} \lambda(E \cap I_n) \quad \text{für} \quad E \in \mathfrak{R} .$$

Dann ist μ σ-endlich und äquivalent mit λ. Die Transformation T ist also auch konservativ im Maßraum $([0, 1[, \mathfrak{R}, \mu)$. Ist E eine Borelmenge und gilt $\mu(E) > 0$, so erhalten wir aus (10) und (11)

$$\mu(T^{-1}E) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(E) = \infty .$$

Es gilt also tatsächlich $\mu(E) \leqq \mu(T^{-1}E)$ für alle $E \in \mathfrak{R}$, während beispielsweise aus der Ungleichung $\mu(I_0) = 1 < \mu(T^{-1}I_0) = \infty$ folgt, daß T nicht maßtreu ist.

4. Anwendungen

In [5] (vgl. [12], [6]) wurde in Verallgemeinerung eines Satzes von E. Hopf folgender Zerlegungssatz für eine meßbare Transformation T bewiesen ($T|Y$ bedeutet die *Einschränkung von T auf Y*; sie ist definiert, falls $T^{-1}Y \supset Y$ gilt):

Satz II. *Es gibt eine Menge $Y \in \mathfrak{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

1) $T^{-1}Y \supset Y$.

2) *$T|Y$ ist konservativ in $(Y, \mathfrak{R} \cap Y, \mu)$.*

3) $Y' = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$, $W_k \in \mathfrak{W}$ *für* $1 \leqq k < \infty$.

Durch 1), 2), 3) *ist Y bis auf eine μ-Nullmenge eindeutig bestimmt.*

Durch Anwendung von Satz 6 läßt sich diese Aussage für eine maßtreue Transformation T folgendermaßen verschärfen:

Satz 7. *Es sei T maßtreu. Dann gibt es eine Menge $Y \in \mathfrak{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

1) $T^{-1}Y = Y$.

2) *$T|Y$ ist konservativ in $(Y, \mathfrak{R} \cap Y, \mu)$.*

3) $Y' = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$, $W_k \in \mathfrak{W}$ *für* $1 \leqq k < \infty$.

Durch 1), 2), 3) *ist Y bis auf eine μ-Nullmenge eindeutig bestimmt.*

Bemerkung 9. Die Aussage $T^{-1}Y = Y$ ist gleichbedeutend mit $T^{-1}Y' = Y'$. Aussage 3) ist in diesem Fall daher gleichbedeutend mit folgender Aussage:

3') *$T|Y'$ ist rein dissipativ in $(Y', \mathfrak{R} \cap Y', \mu)$.*

Beweis von Satz 7. Es sei Y_0 eine Menge mit den Eigenschaften 1), 2), 3) aus Satz II. Wir setzen $T_0 = T|Y_0$. Für $E \in \mathfrak{R} \cap Y_0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} T^{-1}E &= (T^{-1}E \cap Y_0) \cup (T^{-1}E \cap Y_0') \\ &= T_0^{-1}E \cup (T^{-1}E \cap Y_0'), \\ \mu(E) &= \mu(T^{-1}E) = \mu(T_0^{-1}E) + \mu(T^{-1}E \cap Y_0'), \end{aligned}$$

also

$$\mu(T_0^{-1}E) \leqq \mu(E) \quad \text{für alle} \quad E \in \mathfrak{R} \cap Y_0 .$$

Nach Satz 6 gilt wegen der Konservativität von T_0

$$\mu(T_0^{-1}E) = \mu(E) \quad \text{für alle} \quad E \in \mathfrak{R} \cap Y_0$$

und, wegen der σ-Endlichkeit von μ

$$\begin{aligned} &\mu(T^{-1}E \cap Y_0') = 0 \quad \text{für alle} \quad E \in \mathfrak{R} \cap Y_0 , \\ &\mu(T^{-1}Y_0 \setminus Y_0) = 0 , \\ &\mu(T^{-k}Y_0 \setminus T^{-(k-1)}Y_0) = 0 \quad \text{für alle} \quad k \geqq 1 , \\ &\mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}Y_0 \setminus Y_0\right) = 0 . \end{aligned}$$

Die Menge $Y = \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}Y_0$ hat dann die geforderten Eigenschaften 1), 2), 3) aus Satz 7.

Korollar 7.1. *Notwendig für die Existenz eines mit μ äquivalenten σ-endlichen Maßes für die Transformation T ist die Existenz einer Zerlegung $X = Y \cup Y'$ mit den Eigenschaften* 1), 2), 3) *aus Satz 7.*

Korollar 7.2. *Es sei T maßtreu und ergodisch. Dann ist T entweder konservativ oder, abgesehen von einer invarianten μ-Nullmenge, rein dissipativ.*

In diesem Zusammenhang ist noch einmal das folgende, von P. R. HALMOS (s. [4], S. 12) angeführte Beispiel einer nicht invertierbaren Transformation in der Menge X der natürlichen Zahlen von Interesse (jede Einpunktmenge hat das Maß 1):

$$\begin{aligned} Tk &= k-1 \quad \text{für} \quad k \geqq 2 , \\ T1 &= 3 . \end{aligned}$$

Diese Transformation ist ergodisch (die einzigen invarianten Untermengen sind X und $\emptyset$), aber weder konservativ noch rein dissipativ. Es existiert keine Zerlegung der in Satz 7 beschriebenen Art und daher auch kein äquivalentes invariantes σ-endliches Maß (dies ist natürlich auch leicht direkt einzusehen).

Eine weitere Anwendung von Satz 6 bezieht sich auf die durch T unter geeigneten Voraussetzungen in einer Untermenge $E \in \mathfrak{R}$ „induzierten" Transformation im Sinne von S. KAKUTANI [10] (vgl. [18], S. 307 f., [9], S. 193 f.).

Definition 1. *Es sei $E \in \mathfrak{R}$ eine Menge mit der Eigenschaft*

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-k}E \ [\mu] \tag{12}$$

und $E_{(k)}$ $(1 \leqq k < \infty)$ definiert wie in Hilfssatz 4. Die durch

$$T_0 x = T^k x \quad \textit{für alle} \quad x \in E_{(k)} \ (1 \leqq k < \infty)$$

fast überall auf E definierte Transformation T_0 heißt die durch T in E induzierte Transformation.

Ist T invertierbar und maßtreu, dann ist leicht einzusehen, daß T_0 wieder invertierbar und maßtreu ist. Der folgende Satz von J. C. SMIT (mündliche Mitteilung, vgl. [13]) besagt, daß unter der zusätzlichen Voraussetzung $\mu(E) < \infty$ die Maßtreue von T_0 auch für eine nicht invertierbare, maßtreue Transformation T gesichert ist.

Satz III. *Es sei T maßtreu und T_0 die in einer Menge $E \in \mathfrak{R}$ mit den Eigenschaften*

$$\mu(E) < \infty\,,$$
$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} T^{-k}E \;[\mu]$$

induzierte Transformation. Dann ist T_0 maßtreu.

An Hand eines Beispiels hat J. C. SMIT auch darauf hingewiesen, daß diese Aussage im Falle $\mu(E) = \infty$ nicht mehr zutreffen muß (es sei etwa T die Verschiebung auf der Zahlengeraden

$$Tx = x + 1 \quad \text{für} \quad -\infty < x < +\infty$$

und μ das Lebesguesche Maß, sowie $E = [0, \infty[$. Im Falle einer konservativen maßtreuen Transformation T zeigt jedoch eine Beweisvariante unter Anwendung von Satz 6, daß die Maßtreue der induzierten Transformation T_0 auch für $\mu(E) = \infty$ gesichert ist (s. Satz 8 weiter unten). Wir bemerken, daß im Falle einer konservativen Transformation T wegen des schwachen Wiederkehrsatzes jede Menge $E \in \mathfrak{R}$ die Eigenschaft (12) besitzt. Um Satz 6 auf die Transformation T_0 anwenden zu können, benötigen wir einen Hilfssatz.

Hilfssatz 5. *Es sei T konservativ und T_0 die in einer Menge $E \in \mathfrak{R}$ induzierte Transformation. Dann ist auch T_0 konservativ.*

Beweis. Daß T_0 möglicherweise auf einer μ-Nullmenge in E nicht definiert ist, ist für die Anwendbarkeit der bisher angeführten Sätze unwesentlich. Beispielsweise kann T_0 durch die zusätzliche Definition

$$T_0 x = x \quad \text{für alle} \quad x \in E_{(0)} = E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{(k)}$$

zu einer auf ganz E definierten Transformation ergänzt werden. Aus der Beziehung

$$T_0^{-1} A = \bigcup_{k=0}^{\infty} (T^{-k} A \cap E_{(k)}) \quad \text{für alle} \quad A \in \mathfrak{R} \cap E$$

folgt die Meßbarkeit von T_0. Nach dem starken Wiederkehrsatz [a) $\Rightarrow$ c) in Satz 3] liegen für fast alle Punkte x von A unendlich viele der Punkte $T^k x$ $(1 \leqq k < \infty)$ wieder in A. Die Bahn $\{T_0^k x\}_{k=1}^{\infty}$ jedes solchen Punktes x ist einfach die Teilfolge aller in E enthaltenen Punkte der Folge $\{T^k x\}_{k=1}^{\infty}$. Es liegen also für fast jedes Element x in A unendlich viele Punkte der Folge $\{T_0^k x\}_{k=1}^{\infty}$ wieder in A, d. h. für T_0 gilt die starke Wiederkehraussage c) von Satz 3. Nach der Implikation c) $\Rightarrow$ a) in Satz 3 ist T_0 konservativ.

Satz 8. *Es sei T konservativ und maßtreu, und T_0 die in einer Menge $E \in \mathfrak{R}$ induzierte Transformation. Dann ist T_0 maßtreu.*

Beweis. Wir wiederholen der Vollständigkeit halber [bis (13)] den von J. C. SMIT stammenden Beweis von Satz III und verwenden die von ihm dabei eingeführte Bezeichnung

$$E_{(-k)} = T^{-k}E \cap T^{-(k-1)}E' \cap \cdots \cap T^{-1}E' \cap E'$$
$$= \{x \in E' : T^k x \in E,\ T^i x \notin E \text{ für } 0 \leqq i < k\} \qquad \text{für } 1 \leqq k < \infty.$$

Es sei $A \in \mathfrak{R} \cap E$ gegeben und $\mu(A) < \infty$. Dann gilt

$$T_0^{-1}A = \bigcup_{k=0}^{\infty} (T^{-k}A \cap E_{(k)}),$$
$$T^{-1}A \cap E_{(1)} = T^{-1}A \cap (T^{-1}E \cap E) = T^{-1}A \cap E$$
$$= T^{-1}A \setminus (T^{-1}A \cap E')$$
$$= T^{-1}A \setminus (T^{-1}A \cap E_{(-1)}),$$
$$T^{-k}A \cap E_{(k)} = T^{-k}A \cap (T^{-k}E \cap T^{-(k-1)}E' \cap \cdots \cap T^{-1}E' \cap E)$$
$$= T^{-k}A \cap T^{-(k-1)}E' \cap \cdots \cap T^{-1}E' \cap E$$
$$= (T^{-k}A \cap T^{-(k-1)}E' \cap \cdots \cap T^{-1}E') \setminus (T^{-k}A \cap T^{-(k-1)}E' \cap \cdots \cap T^{-1}E' \cap E')$$
$$= (T^{-k}A \cap T^{-1}E_{(-k+1)}) \setminus (T^{-k}A \cap E_{(-k)})$$
$$= T^{-1}(T^{-k+1}A \cap E_{(-k+1)}) \setminus (T^{-k}A \cap E_{(-k)}) \quad \text{für} \quad k > 1.$$

Hierbei gilt

$$T^{-k}A \cap E_{(-k)} \subset T^{-1}(T^{-k+1}A \cap E_{(-k+1)}) \quad \text{für} \quad k > 1.$$

Wir erhalten wegen $\mu(E_{(0)}) = 0$

$$\mu(T_0^{-1}A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(T^{-k}A \cap E_{(k)}),$$
$$\mu(T^{-1}A \cap E_{(1)}) = \mu(T^{-1}A) - \mu(T^{-1}A \cap E_{(-1)})$$
$$= \mu(A) - \mu(T^{-1}A \cap E_{(-1)}),$$
$$\mu(T^{-k}A \cap E_{(k)}) = \mu[T^{-1}(T^{-k+1}A \cap E_{(-k+1)})] - \mu(T^{-k}A \cap E_{(-k)})$$
$$= \mu(T^{-k+1}A \cap E_{(-k+1)}) - \mu(T^{-k}A \cap E_{(-k)}) \quad \text{für} \quad k > 1,$$
$$\mu(T_0^{-1}A) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(T^{-k}A \cap E_{(k)})$$
$$= \lim_{n \to \infty} [\mu(A) - \mu(T^{-n}A \cap E_{(-n)})] \tag{13}$$

[wir bemerken, daß die Partialsummen monoton wachsen und daher $\mu(T^{-n}A \cap E_{(-n)})$ monoton fällt].

Aus (13) folgt

$$\mu(T_0^{-1}A) \leqq \mu(A) \quad \text{für} \quad A \in \mathfrak{R} \cap E,\ \mu(A) < \infty.$$

Wegen der σ-Endlichkeit von μ folgt

$$\mu(T_0^{-1}A) \leqq \mu(A) \quad \text{für alle} \quad A \in \mathfrak{R} \cap E.$$

Wegen Hilfssatz 5 können wir Satz 6 anwenden und erhalten

$$\mu(T_0^{-1}A) = \mu(A) \quad \text{für alle} \quad A \in \mathfrak{R} \cap E.$$

Literatur

[1] De Bruijn, N. G.: The strong recurrence theorem of ergodic theory. Nicht veröffentlichtes Manuskript (1964).
[2] Halmos, P. R.: Measure Theory. New York: Van Nostrand 1956.
[3] — Algebraic Logic, I. Monadic Boolean algebras. Compositio Math. **12**, 217—249 (1956).
[4] — Lectures on ergodic theory. Publications of the Mathematical Society of Japan, No. 3, Tokyo 1956 (New York: Chelsea 1960).
[5] Helmberg, G.: Über die Zerlegung einer meßbaren Transformation in konservative und dissipative Bestandteile. Math. Z. **88**, 358—367 (1965).
[6] — Über rein dissipative Transformationen. Math. Z. **90**, 41—53 (1965).
[7] — On some transformations related to shift transformations in infinite dyadic product spaces. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **68** = Indag. Math. **27**, 803—812 (1965).
[8] Jacobs, K.: Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.
[9] — Lecture notes on ergodic theory. Matematisk Institut, Aarhus Universitet 1962/1963.
[10] Kakutani, S.: Induced measure preserving transformations. Proc. Imp. Acad. Sci. Tokyo **19**, 635—641 (1943).
[11] Preisendorfer, R. W., and B. W. Roos: Recurrence-partitions of finite measure spaces with applications to ergodic theory. Trans. Amer. Math. Soc. **99**, 91—101 (1961).
[12] Simons, F. H.: Ein weiterer Beweis eines Zerlegungssatzes für meßbare Transformationen. Math. Z. **89**, 247—249 (1965).
[13] Smit, J. C.: Over "ladder"-transformaties en geïnduceerde transformaties. Notitie Functionaalclub Eindhoven 17 maart 1965.
[14] Sucheston, L.: A note on conservative transformations and the recurrence theorem. Amer. J. Math. **79**, 444—447 (1957).
[15] Taam, C. T.: Recurrent properties of conservative measurable transformations. Duke Math. J. **28**, 277—279 (1961).
[16] Wright, F. B.: Recurrence theorems and operators on Boolean algebras. Proc. London Math. Soc. (3) **11**, 385—401 (1961).
[17] — The recurrence theorem. Amer. Math. Monthly **68**, 247—248 (1961).
[18] — (editor): Ergodic theory. New York: Academic Press 1963.

Gilbert Helmberg
Technische Hochschule
Eindhoven

(Eingegangen am 30. Juni 1965)

GUDERLEY, G.
Math. Annalen 165, 62—70 (1966)

Ein Extremalprinzip für reibungsfreie stationäre Strömungen eines kompressiblen Mediums*

Herrn Professor Dr. ERNST HÖLDER zum 65. Geburtstag gewidmet

GOTTFRIED GUDERLEY

1. Einleitung

Die Tatsache, daß sich die Gleichungen für die stationäre Potentialströmung eines kompressiblen Mediums aus einem Variationsprinzip herleiten lassen wurde zuerst von BATEMANN gefunden [1]. Von ihm stammen zwei verschiedene Formulierungen. Die Beschränkung auf isentrope Strömungen wurde von LIN und RUBINOV [4] beseitigt. Die vorliegende Arbeit wurde durch einen Bericht von DOLPH [3] angeregt, er führt ein allgemeines Gasgesetz in die Lin-Rubinovsche Formulierung ein.

Für tiefer liegende Untersuchungen, wie z. B. die Frage nach der Existenz von Lösungen [5], aber auch für solche praktische Aufgaben wie die Berechnung eines Strömungsfeldes durch eine Relaxationsmethode bietet die Variationsformulierung allein keine ausreichende Grundlage; man braucht dazu ein Extremalprinzip.

Das Variationsprinzip von LIN und RUBINOV ist in dieser Hinsicht unzureichend. Man kann jedoch den Integranden des Integrals, das stationär zu machen ist, aufspalten und einen der beiden Teile als Nebenbedingung auffassen. Dann ergibt sich anstelle der ursprünglichen Formulierung, in der zwei Funktionen unabhängig voneinander variiert werden können, eine andere, in der diese Funktionen durch eine Nebenbedingung miteinander verknüpft sind und ein anderer Ausdruck stationär gemacht werden muß. Führt man gewisse zusätzliche Bedingungen ein, so läßt sich in der Tat zeigen, daß man ein Minimalproblem vor sich hat.

Wir fassen recht allgemeine achsensymmetrische Strömungen ins Auge, eingeschlossen sind stationäre Strömungsfelder innerhalb eines geschlossenen Ringraumes. Im inkompressiblen Falle wurden solche Strömungen von BATCHELOR [2] untersucht. Um den folgenden Untersuchungen eine anschauliche Grundlage zu geben, beschreiben wir einige Einzelheiten dieser Strömungsfelder. Der Ring kann durch einen Meridianschnitt gekennzeichnet werden. Das Gebiet in einem Meridianschnitt, in dem die Strömung vor sich geht, wird mit G bezeichnet. Eine Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Meridianebene wird zugelassen. Wenn diese Geschwindigkeitskomponente

* Die Bekanntschaft mit den Minimalprinzipien der Hydrodynamik verdankt der Verfasser Professor ERNST HÖLDER; er denkt mit Vergnügen an diese anregenden Diskussionen zurück.

allein vorhanden ist, dann beschreiben die Teilchen Kreisbahnen, deren Mittelpunkt auf der Symmetrieachse liegt. Tritt außerdem eine Geschwindigkeitskomponente in der Meridianebene auf, dann schließen sich die Bahnen nicht mehr nach einem Umlauf. Sie ähneln entweder Spiralen, wenn sich der Radius der Bahnen allmählich vergrößert, oder Schraubenlinien mit veränderlichem Durchmesser und veränderlicher Steigung, wenn der Radius annähernd konstant bleibt. Tatsächlich tritt eine Kombination dieser Typen auf. Abb. 1 zeigt die Durchstoßpunkte der Bahn eines Teilchens durch eine Meridianebene. Im allgemeinen werden sich die Bahnen nicht schließen, sie kehren aber

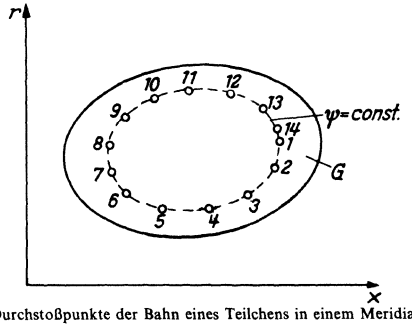


Abb. 1. Durchstoßpunkte der Bahn eines Teilchens in einem Meridianschnitt

nach einer größeren Zahl von Umläufen um die Symmetrieachse in die Nähe des Anfangspunktes zurück.

Da wir uns auf stationäre achsensymmetrische Strömungen beschränken, gibt es Teilchen, deren Bahnen bis auf eine Drehung um die Symmetrieachse und bis auf eine Verschiebung des Anfangspunkts der Zeit identisch sind. Wir werden eine „Stromfunktion" ψ einführen, die für solche Teilchen einen konstanten Wert besitzt.

Es sei v_t die Geschwindigkeitskomponente normal zu einer Meridianebene und r der Abstand eines Punktes von der Symmetrieachse. Dann folgt aus dem Flächensatz, daß für ein Teilchen $v_t \cdot r$ konstant ist. Wir vernachlässigen Reibung und Wärmeleitung; dann ist längs der Bahn eines Teilchens die Entropie konstant, außerdem gilt die Bernoullische Gleichung. Die in der Bernoullischen Gleichung auftretende Konstante kann für verschiedene Bahnen verschieden sein; natürlich ist sie die gleiche für Bahnen, die dem gleichen Werte von ψ zugeordnet sind. In unserem Probleme können daher drei Funktionen, nämlich $v_t \cdot r$, die Entropie und die Bernoullische Konstante vorgegeben werden; sie werden als willkürlich gegebene Funktionen von ψ aufgefaßt[1].

[1] Die Willkür besteht allerdings nur so lange, wie man Viskosität und Wärmeleitung vollkommen außer acht läßt. Da die Teilchen das Strömungsgebiet nicht verlassen, ergibt sich ein kumulativer Effekt dieser Einflüsse, der diese drei Funktionen langsam ändert, bis ein Gleichgewichtszustand eingetreten ist. Manchmal, z. B. wenn die Wände sich nicht bewegen, ist der Gleichgewichtszustand trivial. Nichttriviale Gleichgewichtszustände erhält man, wenn sich ein Teil der Berandung um die Symmetrieachse dreht, unter diesen Umständen sind die „willkürlichen" Funktionen, selbst im Grenzfalle verschwindender Reibung und Wärmeleitung, doch durch Reibungs- und Wärmeleitungseffekte bestimmt. In der vorliegenden Arbeit werden diese Fragen allerdings außer acht gelassen.

2. Grundgleichungen

Es seien x und r Cartesische Koordinaten in einer Meridianebene, die x-Achse falle mit der Symmetrieachse zusammen; u, v und v_t seien die Geschwindigkeitskomponenten in x- und r-Richtung und senkrecht zur Meridianebene; ϱ sei die Dichte, s die Entropie, $p(\varrho, s)$ der Druck, $i(\varrho, s)$ die Enthalpie, $e(\varrho, s)$ die innere Energie und $T(\varrho, s)$ die Temperatur. Im allgemeinen werden ϱ und s als unabhängige Variablen für die Beschreibung des thermodynamischen Zustands aufgefaßt.

Es sei

$$q^2 = u^2 + v^2 \tag{1}$$

(q ist demnach nicht der Absolutwert der Geschwindigkeit, sondern nur die Geschwindigkeitskomponente in der Meridianebene). Die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial(\varrho u r)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v r)}{\partial r} = 0 \tag{2}$$

läßt sich durch Einführung einer Stromfunktion ψ integrieren.

$$\varrho u r = \frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{3.1}$$

$$\varrho v r = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{3.2}$$

Ein konstanter Wert der Stromfunktion definiert in dem Ringraum, in dem die Strömung vor sich geht, ringähnliche Flächen. Die Bahn eines Teilchens, das ursprünglich einer solchen Fläche angehört, verbleibt in ihr. Alle solche Bahnen können durch eine Rotation um die Symmetrieachse in einander übergeführt werden.

Die Eulerschen Gleichungen lauten

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \tag{4.1}$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v_t^2}{r} = 0. \tag{4.2}$$

Von gleichem Charakter ist die Gleichung

$$v_t \cdot r = f_1(\psi), \tag{5}$$

die man aus dem Flächensatz gewinnt. In der ursprünglichen Ableitung ist $v_t \cdot r$ für die Bahn eines Teilchens konstant. Da aber die Bahnen aller Teilchen die einer Fläche $\psi = \text{const}$ angehören, gleichwertig sind, erscheint die rechte Seite als Funktion von ψ allein. Aus (4) zusammen mit der Forderung, daß die Entropie nur von ψ abhängt, ergibt sich die Bernoullische Gleichung

$$i + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}v_t^2 = i + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}\frac{f_1^2(\psi)}{r^2} = f_2(\psi). \tag{6}$$

Wieder erscheint die rechte Seite als Funktion von ψ. Weiterhin hat man für die Entropie

$$s = f_3(\psi). \tag{7}$$

Die Gleichungen (4) sind in der Bernoullischen Gleichung benutzt worden. Die Bernoullische Gleichung stellt eine der Grundgleichungen unseres Problems dar, deshalb sollte es möglich sein, (4.1) und (4.2) auf eine einzelne Gleichung zu reduzieren. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Ableitung normal zu den Flächen $\psi = \text{const}$

$$\frac{d}{dn} = -\frac{v}{q}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{u}{q}\frac{\partial}{\partial r}. \tag{8}$$

Aus (3) und (1) erhält man

$$\frac{d\psi}{dn} = r\varrho q. \tag{9}$$

Dann ergibt sich durch geeignete Kombination der Gleichungen (4)

$$\frac{1}{\varrho q}\frac{dp}{dn} + \frac{1}{q}\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{2}q^2\right) + \omega - \frac{v_t^2 u}{rq^2} = 0. \tag{10}$$

Hierin ist

$$\omega = v_x - u_r.$$

Es ist dies die Komponente des Wirbelvektors normal zu der Meridianebene. Man erkennt auf diese Weise den Zusammenhang der resultierenden Gleichung mit dem Croccoschen Wirbelsatz. Für die weitere Rechnung werden wir jedoch auf die Geschwindigkeitskomponenten u und v zurückgehen. Man kann nun dp/dn eliminieren. Aus (6) erhält man

$$\frac{di}{dn} + \frac{1}{2}\frac{d}{dn}(q^2) + \frac{1}{2}\frac{d}{dn}(v_t^2) = \frac{d}{dn}(f_2(\psi)). \tag{11}$$

Nun ist nach dem zweiten Hauptsatz

$$di = T\,ds + \frac{1}{\varrho}dp.$$

Setzt man dies in (11) ein und subtrahiert das Ergebnis von (10), so ergibt sich unter Benutzung von (9), (7) und (5)

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} = r\varrho T\frac{df_3}{d\psi} + \frac{\varrho}{r}\cdot\frac{1}{2}\frac{d}{d\psi}(f_1)^2 - r\varrho\frac{df_2}{d\psi}. \tag{12}$$

Dies ist der Croccosche Wirbelsatz für die hier betrachteten Strömungen. Der Croccosche Wirbelsatz (12) und die Bernoullische Gleichung (6) ersetzen die Eulerschen Gleichungen (4). Der Übersicht halber stellen wir die Gleichungen, auf die sich unser Problem reduziert hat, in einer Liste zusammen. Ableitungen nach ψ werden dabei durch Punkte bezeichnet. Als unabhängige Variablen für den thermodynamischen Zustand benutzen wir, wie schon

erwähnt, Entropie und Dichte.

$$u = \frac{\psi_r}{\varrho r} \tag{13.1}$$

$$v = -\frac{\psi_x}{\varrho r} \tag{13.2}$$

$$s = f_3(\psi) \tag{13.3}$$

$$v_x - u_r = T(\varrho, s) r \varrho f_3' + \frac{\varrho}{r} \frac{1}{2}(f_1^2)' - r\varrho f_2' \tag{14.1}$$

$$i(\varrho, s) + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{1}{2} \frac{f_1^2}{r^2} - f_2 = 0. \tag{14.2}$$

Natürlich kann man die Gleichungen (13) in (14) einsetzen, so daß nur zwei Gleichungen mit den abhängigen Variablen ϱ und ψ übrigbleiben.

Wir führen noch einige thermodynamische Relationen auf, die uns später von Nutzen sein werden

$$i = e + \frac{p}{\varrho} \tag{15}$$

$$T\,ds = de - p\frac{d\varrho}{\varrho^2}.$$

Daraus

$$\frac{\partial e(\varrho, s)}{\partial s} = T, \tag{16.1}$$

$$\frac{\partial e(\varrho, s)}{\partial \varrho} = \frac{p}{\varrho^2}. \tag{16.2}$$

Es sei

$$\frac{\partial p(\varrho, s)}{\partial \varrho} = a^2(\varrho, s). \tag{16.3}$$

Gegeben ist die Berandung des Gebietes G, die Werte von ψ auf der Berandung, und die Funktionen $f_1(\psi)$, $f_2(\psi)$ und $f_3(\psi)$. Für das spezielle Problem, das in der Einleitung beschrieben wurde, kann man auf dem Rande $\psi = 0$ setzen.

3. Das Minimalprinzip

Es sei

$$G(r, \varrho, \psi, \psi_x, \psi_r) = \varrho\left[-\frac{1}{2}\frac{f_1^2(\psi)}{r^2} + f_2(\psi) - e(\varrho, f_3(\psi))\right] + \frac{\psi_x^2 + \psi_r^2}{2\varrho r^2} \tag{17}$$

$$H(r, \varrho, \psi, \psi_x, \psi_r) = \frac{1}{2}\frac{f_1^2(\psi)}{r^2} - f_2(\psi) + \\ + e(\varrho, f_3(\psi)) + \frac{1}{\varrho} p(\varrho, f_3(\psi)) + \frac{\psi_x^2 + \psi_r^2}{2\varrho^2 r^2}. \tag{18}$$

Die Bernoullische Gleichung (14.2) läßt sich nun schreiben als

$$H = 0, \tag{19}$$

wie man mit Hilfe von (15) und (13) sofort erkennt. Gleichung (19) wird als Nebenbedingung in dem Variationsproblem betrachtet. Wenn (19) erfüllt ist, dann kann (17) mit Hilfe von (19) und (18) in eine einfachere Form gebracht werden; man erhält

$$G = p + \frac{\psi_x^2 + \psi_r^2}{\varrho r^2} = p + \varrho q^2 . \tag{20}$$

Hiernach ist G immer positiv. Für die Rechnung ist die Form (17) vorzuziehen.

Die Strömungsgleichungen ergeben sich nun, wenn man fordert, daß der Ausdruck

$$I = \int_G r \, dr \, dx \, G$$

mit der Nebenbedingung (19) für Variationen von ψ, die die Randwerte unverändert lassen, einen stationären Wert annimmt. Natürlich ist wegen (19) mit einer Variation von ψ eine Variation von ϱ verbunden.

Darüber hinaus behaupten wir, daß dieser stationäre Wert von I ein lokales Minimum ist, vorausgesetzt, daß

$$\frac{q}{a} \leqq 1 \tag{21.1}$$

und daß

$$\left[-\frac{1}{2r^2}(f_1^2)^{\cdot\cdot} + f_2^{\cdot\cdot} - T f_3^{\cdot\cdot} - \frac{\partial T}{\partial s}(f_3^{\cdot})^2 \right] \geqq 0 . \tag{21.2}$$

Ob die Bedingung (21.2) erfüllt ist, hängt von den zweiten Ableitungen $(f_1^2)^{\cdot\cdot}$, $f_2^{\cdot\cdot}$ und $f_3^{\cdot\cdot}$ ab.

Wenn man das Variationsproblem mit Nebenbedingung mit Hilfe eines Lagrangeschen Multiplikators auf ein absolutes Variationsproblem zurückführt und die korrekte Form für den Lagrangeschen Multiplikator einsetzt, dann erhält man die Dolphsche Form des Lin-Rubinovschen Variationsprinzips.

4. Nachweis des Extremalprinzips

Der Nachweis der Behauptung, die im vorigen Abschnitt aufgestellt wurde, wird durch direkte Rechnung geführt. Wir skizzieren den Rechnungsgang. Zunächst geben wir Formeln für die Ableitungen an, die in der Rechnung gebraucht werden. Für G wird dabei die Form (17) zugrunde gelegt.

Man erhält, unter Benutzung von (16.2),

$$\frac{\partial G}{\partial \varrho} = -\frac{1}{2}\frac{f_1^2}{r^2} + f_2 - e - \frac{p}{\varrho} - \frac{\psi_x^2 + \psi_r^2}{2\varrho^2 r^2} . \tag{22.1}$$

Man hat also

$$\frac{\partial G}{\partial \varrho} = -H \tag{22.2}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \varrho^2} = -\frac{\partial H}{\partial \varrho} = -\frac{1}{\varrho}(a^2 - q^2) \tag{22.3}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \varrho\, \partial \psi} = -\frac{\partial H}{\partial \psi} = -\frac{1}{2r^2}(f_1^2)^{\cdot} + f_2^{\cdot} - \left(T + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial s}\right) f_3^{\cdot} = B \tag{22.4}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \varrho\, \partial \psi_x} = -\frac{\partial H}{\partial \psi_x} = \frac{1}{\varrho r} v \tag{22.5}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \varrho\, \partial \psi_r} = -\frac{\partial H}{\partial \psi_r} = -\frac{1}{\varrho r} u \tag{22.6}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \psi} = \varrho\left[-\frac{1}{2r^2}(f_1^2)^{\cdot} + f_2^{\cdot} - T f_3^{\cdot}\right] \tag{22.7}$$

[unter Benutzung von (16.1)]

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \psi^2} = \varrho\left[-\frac{1}{2r^2}(f_1^2)^{\cdot\cdot} + f_2^{\cdot\cdot} - \frac{\partial T}{\partial s}(f_3^{\cdot})^2 - T(f_3^{\cdot})^2\right] \tag{22.8}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \psi_x} = \frac{\psi_x}{\varrho r^2} = -\frac{v}{r} \tag{22.9}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \psi_x^2} = \frac{1}{\varrho r^2} \tag{22.10}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \psi_r} = \frac{u}{r} \tag{22.11}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \psi_r^2} = \frac{1}{\varrho r^2}\,. \tag{22.12}$$

Wir werden sehen, daß wegen der Beziehungen (22.2) und (19) die zweiten Ableitungen von H nicht in der Rechnung auftreten.

Es sei nun ψ_0 eine festzuhaltende Funktion von x und r, und Ψ eine beliebige Funktion von x und r. Wir untersuchen das Integral I mit der Nebenbedingung (19) für Funktionen

$$\psi = \psi_0 + \varepsilon\Psi \tag{23}$$

unter der Annahme, daß ε hinreichend klein ist. Dabei werden Größen bis zur 2. Ordnung in ε berücksichtigt. Für ϱ setzen wir dementsprechend

$$\varrho = \varrho_0(x, r) + \varepsilon\varrho_1(x, r) + \varepsilon^2\varrho_2(x, r) + o(\varepsilon^2)\,. \tag{24}$$

Der Zusammenhang zwischen ϱ_1, ϱ_2 und ψ ergibt sich aus (19); ϱ_2 wird in der Rechnung allerdings nicht gebraucht. Wir nehmen an, daß (19) für ψ_0 und ϱ_0 erfüllt ist

$$H(r, \varrho_0, \psi_0, \psi_{0,x}, \psi_{0,r}) = 0\,. \tag{25}$$

Dann erhält man für die Größen erster Ordnung in ε

$$\frac{\partial H}{\partial \varrho}\varrho_1+\frac{\partial H}{\partial \psi}\Psi+\frac{\partial H}{\partial \psi_x}\Psi_x+\frac{\partial H}{\partial \psi_r}\Psi_r=0.$$

Setzt man hierin die in den Gleichungen (22) angegebenen Ableitungen ein, so erhält man

$$\varrho_1=\frac{1}{(a^2-q^2)}\left[\varrho B\Psi+\frac{v}{r}\Psi_x-\frac{u}{r}\Psi_r\right]. \tag{26}$$

Hierin ist B durch den letzten Teil der Gleichung (22.4) definiert.

Damit ist die erste Variation von ϱ durch Ψ ausgedrückt. Im Prinzip läßt sich ϱ_2 in ähnlicher Weise finden. Wir können nun die Funktion G untersuchen. Dazu schreiben wir

$$G(r,\varrho,\psi,\psi_x,\psi_r)=G(r,\varrho_0,\psi_0,\psi_{0,x},\psi_{0,r})+\varepsilon G_1+\varepsilon^2 G_2+o(\varepsilon^2). \tag{27}$$

Man erhält

$$G_1=\varrho_1\frac{\partial G}{\partial \varrho}+\Psi\frac{\partial G}{\partial \psi}+\Psi_x\frac{\partial G}{\partial \psi_x}+\Psi_r\frac{\partial G}{\partial \psi_r} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}G_2=&\varrho_2\frac{\partial G}{\partial \varrho}+\frac{1}{2}\varrho_1^2\frac{\partial^2 G}{\partial \varrho^2}+\frac{1}{2}\Psi^2\frac{\partial^2 G}{\partial \psi^2}+\frac{1}{2}\Psi_x^2\frac{\partial^2 G}{\partial \psi_x^2}+\frac{1}{2}\Psi_r^2\frac{\partial^2 G}{\partial \psi_r^2}\\&+\varrho_1\Psi\frac{\partial^2 G}{\partial \varrho\,\partial \psi}+\varrho_1\Psi_x\frac{\partial^2 G}{\partial \varrho\,\partial \psi_x}+\varrho_1\Psi_r\frac{\partial^2 G}{\partial \varrho\,\partial \psi_r}\\&+\Psi\Psi_x\frac{\partial^2 G}{\partial \psi\,\partial \psi_x}+\Psi\Psi_r\frac{\partial^2 G}{\partial \psi\,\partial \psi_r}+\Psi_x\Psi_r\frac{\partial^2 G}{\partial \psi_x\,\partial \psi_r}.\end{aligned} \tag{29}$$

Wir fordern nun, daß die erste Variation von I verschwindet. Dazu setzt man G und seine Ableitungen in (28) ein. Wegen (19) und (22.2) verschwindet $\frac{\partial G}{\partial \varrho}$. Dann ergibt sich

$$\delta I=\varepsilon\iint_G r\,dr\,dx\left\{\Psi\varrho\left[-\frac{1}{2r^2}(f_1^2)^{\cdot}+f_2^{\cdot}-Tf_3^{\cdot}\right]+\Psi_x\left(-\frac{v}{r}\right)+\Psi_r\frac{u}{r}\right\}=0.$$

Führt man auf der rechten Seite partielle Integrationen nach x und r aus, so fällt wegen der Bedingung $\Psi=0$ auf der Berandung das Linienintegral über den Rand heraus und man erhält einen Integranden

$$\left[r\varrho\left(-\frac{1}{2r^2}(f_1^2)^{\cdot}+f_2^{\cdot}-Tf_3^{\cdot}\right)+v_x-u_r\right]\Psi.$$

Damit wird man sofort auf die Gleichung (14.1) geführt. So weit stimmen, bis auf die Interpretation, unsere Untersuchungen mit denen von DOLPH überein.

Die Tatsache, daß ein solcher stationärer Wert des Integrals ein Minimum darstellt, ergibt sich aus der Betrachtung der Glieder zweiter Ordnung in ε.

In Gleichung (29) fällt auf Grund von Gleichungen (22.2) und (19) der Beitrag von ϱ_2 heraus. Weiterhin sind alle Ableitungen, die in der letzten Zeile auftreten, Null, wie man leicht aus den Gleichungen (22) abliest.

Setzt man die Ausdrücke (22) in (29) ein, so ergibt sich

$$G_2 = -\frac{1}{2}\varrho_1^2 \frac{1}{\varrho}(a^2 - q^2) + \frac{1}{2}\Psi^2\varrho\left[-\frac{1}{2r^2}(f_1^2)^{\cdot\cdot} + f_2^{\cdot\cdot} - Tf_3^{\cdot\cdot} - \frac{\partial T}{\partial s}(f_3^{\cdot})^2\right]$$
$$+ \frac{1}{2\varrho r^2}(\Psi_x^2 + \Psi_r^2) + \varrho_1\Psi B + \varrho_1\left(\Psi_x\frac{v}{\varrho r} - \Psi\frac{u}{\varrho r}\right).$$

Mit (26) erhält man nach einer kurzen Zwischenrechnung

$$G_2 = \frac{1}{2}\Psi^2\varrho\left[-\frac{1}{2r^2}(f_1^2)^{\cdot\cdot} + f_2^{\cdot\cdot} - Tf_3^{\cdot\cdot} - \frac{\partial T}{\partial s}f_3^{\cdot 2}\right]$$
$$+ \frac{1}{2\varrho r^2}(\Psi_x^2 + \Psi_r^2) + \frac{\varrho_1^2}{2\varrho}(a^2 - q^2).$$

Man hat sicher ein lokales Minumum vor sich, wenn G_2 positiv ist. Daraus ergeben sich die Bedingungen (21).

Für ein ideales Gas lassen sich die beiden letzten Glieder schreiben als

$$-Tf_3^{\cdot\cdot} - \frac{\partial T}{\partial s}f_3^{\cdot 2} = -\frac{RT}{\gamma - 1}e^{-(\gamma-1)\frac{f_3(\psi)}{R}}\left(e^{(\gamma-1)\frac{f_3(\psi)}{R}}\right)^{\cdot\cdot},$$

wobei γ das Verhältnis der spezifischen Wärmen und R die Gaskonstante bedeutet. Es gibt daher sicher eine Klasse von Funktionen f_1, f_2 und f_3, für die (21.2) erfüllt ist.

Literatur

[1] BATEMAN, H.: Irrotational motion of a compressible fluid. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S. **16**, No. 12, 816 (1930).

[2] BATCHELOR, G. K.: On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number. J. Fluid Mech. **1**, 117 (1956).

[3] DOLPH, C. L., and J. M. RICHARDSON: Formulation of Approximate Hypersonic Flow Field behind Detached Shocks by the Variational Method. Report No. GM-TM71, March, 1956, Guided Missile Research Division, The RAMO – Wooldridge Corporation, P.O. Box 290, Inglewood, Cal.

[4] LIN, C. C., and S. I. RUBINOV: On the flow behind curved shocks. J. Math. Phys. **27**, 105 (1948).

[5] SHIFFMAN, M.: On the existence of subsonic flows of a compressible fluid. J. Rational Mechanics **1**, 605 (1952).

Dr.-Ing. habil. GOTTFRIED GUDERLEY
117 Countryside Drive, Dayton, Ohio 45432, USA

(Eingegangen am 30. August 1965)

NITSCHE, J. C. C.
Math. Annalen 165, 71—75 (1966)

Ein Einschließungssatz für Minimalflächen

Meinem Lehrer ERNST HÖLDER zu seinem 65. Geburtstag in Verehrung gewidmet

JOHANNES C. C. NITSCHE*

Es seien zwei Jordankurven Γ_1 und Γ_2 in parallelen Ebenen des Euklidischen (x, y, z)-Raumes vorgelegt. Γ_1 verlaufe in der Ebene $z = -h < 0$ und sei dort im Inneren eines Kreises K_1 vom Radius δ_1 enthalten; Γ_2 verlaufe in der Ebene $z = h$ und sei dort im Inneren eines Kreises K_2 vom Radius δ_2 enthalten. Das Koordinatensystem sei dabei so gewählt, daß die Mittelpunkte dieser Kreise mit den Punkten $(-d, 0, -h)$ bzw. $(d, 0, h)$ zusammenfallen, wo $d \geqq 0$ ist. Die Größen $2h$ und $2d$ können dann als vertikaler bzw. seitlicher Abstand der beiden Kurven angesehen werden.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich wie schon die Arbeiten [3], [4] und kürzlich auch [1] mit der Frage, unter welchen Umständen die Kurven Γ_1 und Γ_2 befähigt sind, eine Minimalfläche vom Typ des Kreisringes zu beranden. In speziellen Fällen — insbesondere wenn Γ_1 und Γ_2 koaxiale Kreise sind — lassen sich konkrete Aussagen machen; gemäß [3] ist allgemein dafür jedenfalls das Erfülltsein der Ungleichung $4h^2 + 2d^2 \leqq (\delta_1 + \delta_2)^2$ notwendig. Diese Bedingung zeigt, daß weder der vertikale Abstand überhaupt noch bei gegebenem vertikalen Abstand der seitliche Abstand zu groß ausfallen dürfen. Unter Benutzung einer Bemerkung von P. LAX hat P. M. BAILYN [1] kürzlich den interessanten Satz bewiesen, daß, wenn Γ_1 und Γ_2 eine Minimalfläche vom Typ des Kreisringes beranden und wenn K_1' und K_2' zwei die Kurven Γ_1 bzw. Γ_2 enthaltende koaxiale Kreise in den Ebenen $z = -h$ bzw. $z = h$ sind, dann auch K_1' und K_2' eine Minimalfläche vom Typ des Kreisringes — natürlich eine Kettenfläche — beranden. Da dieses Resultat zwar bei festem d eine obere Schranke für den Wert von h beinhaltet, nicht aber eine Abschätzung von d bei festem h ermöglicht, ist es vom Standpunkt der obigen Fragestellung aus gesehen unbefriedigend. Man sollte indessen meinen, daß der Bailynsche Satz nicht nur für die Kreise K_1' und K_2', sondern auch für die Kreise K_1 und K_2 zutrifft, und das ist in der Tat der Fall. Es gilt nämlich der Satz, dessen Beweis Zweck der nachfolgenden Ausführungen ist:

Wenn die Kurven Γ_1 und Γ_2 eine Minimalfläche vom Typ des Kreisringes beranden, so beranden auch die Kreise K_1 und K_2 eine solche Minimalfläche.

Da die Gesamtheit der von zwei Kreisen in parallelen Ebenen berandeten Minimalflächen vom Typ des Kreisringes auf Grund der Untersuchungen von A. ENNEPER [2] und B. RIEMANN [6] und eines Eindeutigkeitssatzes von

* Research sponsored by the Air Force Office of Scientific Research under AFOSR Grant Nr. 883–65.

M. SHIFFMAN [8] vollständig bekannt ist und sich mit Hilfe gewisser elliptischer Integrale darstellen läßt — obwohl konkrete numerische Aussagen bislang noch nicht vorliegen[1] —, so stellt dieser Satz gleichzeitig eine neue notwendige Bedingung für die Fähigkeit der Kurven Γ_1 und Γ_2 dar, eine ringförmige Minimalfläche zu beranden.

Einfachkeitshalber werden wir den Beweis hier nur für den Fall $\delta_1 = \delta_2$ führen. Da eine Ähnlichkeitstransformation nichts am Sachverhalt ändert, dürfen wir dann auch $\delta_1 = \delta_2 = 1$ annehmen. In Anlehnung an die Bailynsche Methode werden wir unter der Voraussetzung, daß es keine von den Kreisen K_1 und K_2 berandete Minimalfläche vom Typ des Kreisringes gibt, eine von einem Parameter ε im Intervall $0 < \varepsilon < 1$ stetig abhängende Schar von Ringflächen Σ_ε mit den folgenden Eigenschaften konstruieren: Jede Fläche Σ_ε liegt in der Scheibe $|z| \leqq h$, ist von den Kreisen K_1 und K_2 berandet, ist antisymmetrisch bezüglich der Ebene $z = 0$ und wird darüber hinaus von allen Ebenen $z = \text{const}$ in Kreisen geschnitten, von der Ebene $z = 0$ insbesondere von einem Kreise vom Radius ε. Wenn ε gegen Eins geht, so konvergieren die Σ_ε gegen den von K_1 und K_2 bestimmten elliptischen Zylinder. Bei nach innen gerichtetem Normalenvektor fällt die mittlere Krümmung H_ε jeder Fläche Σ_ε überall positiv aus. Die von Γ_1 und Γ_2 berandete Minimalfläche S vom Typ des Kreisringes, welche übrigens in $|z| < h$ keinen Verzweigungspunkt haben kann, liegt bekanntlich (siehe T. RADÓ [7], S. 34) in der konvexen Hülle ihrer Randkurven, also gewiß im Inneren des eben erwähnten elliptischen Zylinders und daher für hinreichend großes ε auch im Inneren der Flächen Σ_ε. Wie sich z. B. aus [3] entnehmen läßt, kann die Schnittkurve von S mit der Ebene $z = 0$ nicht auf einen Punkt zusammenschrumpfen. Wenn man ε von nahe bei Eins gelegenen Werten nach Null gehen läßt, so stößt man also auf einen Wert $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$, für welchen sich die Flächen Σ_{ε_0} und S erstmalig in einem in der Scheibe $|z| < h$ gelegenen Punkt berühren. S kann dabei nicht ins Äußere von Σ_{ε_0} dringen. Wie eine einfache Überlegung zeigt, könnte in dieser Situation die mittlere Krümmung H der Fläche S im Berührungspunkt nicht kleiner als die mittlere Krümmung H_{ε_0} der Fläche Σ_{ε_0} sein, und das ist offensichtlich ein Widerspruch.

Wir schreiten nun zur Konstruktion der Flächen Σ_ε und machen für ihre Darstellung den folgenden Ansatz

$$(1)\quad \Sigma_\varepsilon = \left\{ x = a \int_0^z R^2(\zeta)\, d\zeta + R(z)\cos\vartheta,\ y = R(z)\sin\vartheta;\ |z| \leqq h,\ 0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi \right\}.$$

Die Funktion $R(z)$ soll dabei der Differentialgleichung

$$(2)\quad R'^2(z) = \lambda^2 a^2 \left(R^2(z) + \frac{1}{a^2 \varepsilon^2} \right) (R^2(z) - \varepsilon^2) \equiv \lambda^2 a^2 \Delta^2(R(z); a, \varepsilon),\ R(0) = \varepsilon$$

genügen, so daß $R'(z) < 0$ in $-h \leqq z < 0$ und $R'(z) > 0$ in $0 < z \leqq h$ gilt, während $R''(z)$ im ganzen Intervall $-h \leqq z \leqq h$ positiv bleibt. a ist ein noch festzulegen-

[1] Man sehe dazu Problem 33 auf S. 259 in [5]. Für solche Flächen gilt z. B. die Ungleichung $2h \leqq (\delta_1 + \delta_2)/\sqrt{2} = 0{,}7071\,(\delta_1 + \delta_2)$, welche schärfer als die für $d = 0$ aus [3] folgende Ungleichung $2h \leqq \delta_1 + \delta_2$ ist. [Im Falle $\delta_1 = \delta_2$ ist die genaue Schranke $2h \leqq 0{,}6627\,(\delta_1 + \delta_2)$.]

der nicht-negativer Parameter. $R(z)=R(z;a,\varepsilon)$ bestimmt sich aus der Beziehung

$$\int_{\varepsilon}^{R(z)} \frac{dr}{\Delta(r;a,\varepsilon)} = a\lambda(a,\varepsilon)\,z,\quad \lambda(a,\varepsilon)=\frac{1}{ah}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dr}{\Delta(r;a,\varepsilon)}. \tag{3}$$

Wegen $a^2\Delta^2(r;a,\varepsilon)\geqq(r^2-\varepsilon^2)/\varepsilon^2$ haben wir

$$\lambda(a,\varepsilon)\leqq\frac{\varepsilon}{h}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dr}{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}=\frac{\varepsilon}{h}\log\frac{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}, \tag{4}$$

so daß $\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda(a,\varepsilon)=0$ gilt, und zwar gleichmäßig für alle a. Weiterhin muß natürlich die Bedingung

$$F(a,\varepsilon)\equiv\int_0^h R^2(z;\,a,\varepsilon)\,dz=d \tag{5}$$

erfüllt sein. Wir wollen sie benutzen, um den Parameter a als Funktion von ε auszudrücken, und müssen jetzt feststellen, ob das möglich ist.

Auf Grund der Eigenschaften der Funktion $R(z)$ ist es zunächst klar, daß die Ungleichungen $\varepsilon\leqq R(z)\leqq 1$ und daher $ah\varepsilon^2\leqq F(a,\varepsilon)\leqq ah$ gelten. Für $a<d/h$ wird also $F(a,\varepsilon)$ kleiner als d und für $a>d/h\varepsilon^2$ größer als d sein. Zur Berechnung der partiellen Ableitung $F_a(a,\varepsilon)$ benötigen wir einen Ausdruck für die Ableitung $R_a(z;a,\varepsilon)$. Differentiation von (3) ergibt

$$2aRR_a=\frac{2RR'}{\lambda a^3\varepsilon^2}\left\{\frac{z}{h}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dr}{(r^2+a^{-2}\varepsilon^{-2})\Delta(r;a,\varepsilon)}-\int_{\varepsilon}^{R}\frac{dr}{(r^2+a^{-2}\varepsilon^{-2})\Delta(r;a,\varepsilon)}\right\}. \tag{6}$$

Wir haben nun

$$\int_0^h 2zRR'\,dz=[zR^2(z;a,\varepsilon)]_0^h-\int_0^h R^2(z;a,\varepsilon)\,dz=h-\int_0^h R^2\,dz$$

und

$$\begin{aligned}
&\int_0^h 2RR'\left\{\int_{\varepsilon}^{R}\frac{dr}{(r^2+a^{-2}\varepsilon^{-2})\Delta(r;a,\varepsilon)}\right\}dz\\
&\quad=\left[R^2(z;a,\varepsilon)\int_{\varepsilon}^{R(z;a,\varepsilon)}\frac{dr}{(r^2+a^{-2}\varepsilon^{-2})\Delta(r;a,\varepsilon)}\right]_{z=0}^{z=h}-\\
&\qquad-\int_0^h\frac{R^2R'\,dz}{(R^2+a^{-2}\varepsilon^{-2})\Delta(R;a,\varepsilon)}\\
&\quad=\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dr}{(r^2+a^{-2}\varepsilon^{-2})\Delta(r;a,\varepsilon)}-\int_0^h\frac{R^2R'\,dz}{(R^2+a^{-2}\varepsilon^{-2})\Delta(R;a,\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Da aber die Ungleichung

$$\int_0^h \frac{R^2 R'\,dz}{(R^2+a^{-2}\varepsilon^{-2})\,\Delta(R;a,\varepsilon)} \geqq \varepsilon^2 \int_0^h \frac{R'\,dz}{(R^2+a^{-2}\varepsilon^{-2})\,\Delta(R;a,\varepsilon)}$$

$$\geqq \varepsilon^2 \int_\varepsilon^1 \frac{dr}{(r^2+a^{-2}\varepsilon^{-2})\,\Delta(r;a,\varepsilon)}$$

gilt, wird

$$F_a(a,\varepsilon) = \int_0^h \{R^2(z;a,\varepsilon) + 2aR(z;a,\varepsilon)\,R_a(z;a,\varepsilon)\}\,dz \geqq$$

$$\geqq \int_0^h R^2\,dz + \frac{1}{\lambda a^3 \varepsilon^2}\left(\varepsilon^2 - \frac{1}{h}\int_0^h R^2\,dz\right)\int_\varepsilon^1 \frac{dr}{(r^2+a^{-2}\varepsilon^{-2})\,\Delta(r;a,\varepsilon)}.$$

Sollte nun $\frac{1}{h}\int_0^h R^2\,dz \leqq \varepsilon^2$ sein, dann folgte sofort $F_a(a,\varepsilon) > 0$. Anderenfalls benutzen wir die Abschätzung

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dr}{(r^2+a^{-2}\varepsilon^{-2})\,\Delta(r;a,\varepsilon)} < \frac{1}{\varepsilon^2+a^{-2}\varepsilon^{-2}}\int_\varepsilon^1 \frac{dr}{\Delta(r;a,\varepsilon)} = \frac{a^3\varepsilon^2 h\lambda}{1+a^2\varepsilon^4},$$

mit deren Hilfe wiederum

$$F_a(a,\varepsilon) > \int_0^h R^2\,dz - \left(\frac{1}{h}\int_0^h R^2\,dz - \varepsilon^2\right)\frac{h}{1+a^2\varepsilon^4} >$$

$$> \frac{a^2\varepsilon^4}{1+a^2\varepsilon^4}\int_0^h R^2\,dz + \frac{\varepsilon^2 h}{1+a^2\varepsilon^4} > 0$$

wird.

Aus (6) findet man nach leichter Umformung auch die Beziehung

$$h\lambda^2 a^5 \varepsilon^2 \frac{R_a}{R'} = \int_\varepsilon^R \frac{dr}{\Delta(r;a,\varepsilon)}\int_R^1 \frac{dr}{(r^2+a^{-2}\varepsilon^{-2})\,\Delta(r;a,\varepsilon)} -$$

$$- \int_R^1 \frac{dr}{\Delta(r;a,\varepsilon)}\int_\varepsilon^R \frac{dr}{(r^2+a^{-2}\varepsilon^{-2})\,\Delta(r;a,\varepsilon)}.$$

Wegen

$$\frac{1}{r^2+a^{-2}\varepsilon^{-2}} \begin{cases} < \dfrac{1}{R^2+a^{-2}\varepsilon^{-2}} & \text{in } R < r \leqq 1 \\ > \dfrac{1}{R^2+a^{-2}\varepsilon^{-2}} & \text{in } \varepsilon \leqq r < R \end{cases}$$

schließen wir, daß $R_a(z; a, \varepsilon) < 0$ ist für $0 < z < h$ [und natürlich $R_a(0; a, \varepsilon) = R_a(h; a, \varepsilon) = 0$].

Nach dem Vorangehenden hat die Gleichung $F(a, \varepsilon) = 0$ für $0 < \varepsilon < 1$ eine eindeutig bestimmte Lösung $a = a(\varepsilon)$, welche stetig (sogar analytisch) von ε abhängt. Indem wir abkürzend $R_{(\varepsilon)}(z) = R(z; a(\varepsilon), \varepsilon)$ und später auch $\lambda_{(\varepsilon)} = \lambda(a(\varepsilon), \varepsilon)$ setzen, haben wir nunmehr die Darstellung unserer Flächen Σ_ε gefunden:

$$\Sigma_\varepsilon = \left\{ x = a(\varepsilon) \int_0^z R_{(\varepsilon)}^2(\zeta)\, d\zeta + R_{(\varepsilon)}(z) \cos\vartheta\,, \quad y = R_{(\varepsilon)}(z) \sin\vartheta\,;\ |z| \leqq h,\ 0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi \right\}. \tag{7}$$

Für die mittlere Krümmung der Flächen Σ_ε ergibt sich der Ausdruck

$$H_\varepsilon(z, \vartheta) = (1 - \lambda_{(\varepsilon)}^2) \frac{R_{(\varepsilon)}^2(z)\,[a^2(\varepsilon)\, R_{(\varepsilon)}^4(z) + 1]}{2[R_{(\varepsilon)}^2(z) + (a(\varepsilon)\, R_{(\varepsilon)}^3(z) \cos\vartheta + R_{(\varepsilon)}(z)\, R'_{(\varepsilon)}(z))^2]^{\frac{3}{2}}}. \tag{8}$$

Im Falle $\lambda_{(\varepsilon)} = 1$ wäre Σ_ε im Gegensatz zu unserer Annahme eine Minimalfläche. Da nun $\lambda_{(\varepsilon)} < 1$ ist für hinreichend kleine ε und immer $\lambda_{(\varepsilon)} \neq 1$ gilt, und da $\lambda_{(\varepsilon)}$ stetig von ε abhängt, muß die Beziehung $\lambda_{(\varepsilon)} < 1$, d. h. $H_\varepsilon > 0$ für alle ε im Intervall $0 < \varepsilon < 1$ gelten.

Die Schar der Flächen Σ_ε ist also im Besitz aller oben aufgezählten Eigenschaften. Mit ihrer Hilfe läßt sich der formulierte Satz auf dem eingangs beschriebenen Wege beweisen.

Es steht zu vermuten, daß die Aussage dieses Satzes sogar auch dann richtig ist, wenn man die Kreise K_1 und K_2 durch konvexe Kurven ersetzt, welche die Kurven Γ_1 bzw. Γ_2 in ihrem Inneren enthalten.

Literatur

[1] Bailyn, P. M.: Doubly-connected minimal surfaces. Dissertation, New York University, Oktober 1964.

[2] Enneper, A.: Die cyklischen Flächen. Z. Math. Phys. **14**, 393—421 (1869).

[3] Nitsche, J. C. C.: A necessary condition for the existence of certain minimal surfaces. J. Math. Mech. **13**, 659—666 (1964).

[4] — A supplement to the condition of J. Douglas. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **13**, 129—198 (1964).

[5] — On new results in the theory of minimal surfaces. Bull. Am. Math. Soc. **71**, 195—270 (1965).

[6] Riemann, B.: Über die Fläche von kleinstem Inhalt bei gegebener Begrenzung. Ges. Math. Werke, 2. Aufl., pp. 301—333. Leipzig: Teubner 1892.

[7] Radó, T.: On the problem of Plateau. Ergebn. Math., Bd. **2**. Berlin: Springer 1933.

[8] Shiffman, M.: On surfaces of stationary area bounded by two circles, or convex curves, in parallel planes. Ann. Math. (2) **63**, 77—90 (1956).

Johannes C. C. Nitsche
School of Mathematics, Institute of Technology
University of Minnesota
Minneapolis, Minn. 55455, U.S.A.

(Eingegangen am 13. September 1965)

PIETSCH, A.
Math. Annalen 165, 76—90 (1966)

Quasinukleare Abbildungen in normierten Räumen

ERNST HÖLDER zum 65. Geburtstag gewidmet

ALBRECHT PIETSCH

Sind E und F zwei normierte Räume, so kann es vorkommen, daß eine nichtnukleare Abbildung $T \in \mathscr{L}(E, F)$ nuklear wird, wenn man sie als Abbildung von E in einen F umfassenden normierten Raum G betrachtet (vgl. [3], Kap. I, S. 88). Es erhebt sich deshalb die Frage nach einer Charakterisierung derjenigen Abbildungen $T \in \mathscr{L}(E, F)$, die sich durch Vergrößerung von F nuklear machen lassen.

Zur Lösung dieses Problems untersuchen wir im ersten Abschnitt sog. *quasinukleare Abbildungen*, die dadurch definiert sind, daß es auf E eine Folge von stetigen Linearformen a_n gibt, für die

$$\sum_1^\infty \|a_n\| < +\infty$$

und

$$\|Tx\| \leqq \sum_1^\infty |\langle x, a_n \rangle| \quad \text{mit } x \in E$$

gilt. Die Gesamtheit aller derartigen Abbildungen bildet einen linearen Raum $\mathscr{P}_0(E, F)$, auf dem sich in sinnvoller Weise eine Norm $T \to \pi_0(T)$ erklären läßt.

Im zweiten Abschnitt erfolgt der Nachweis, daß die quasinuklearen Abbildungen gerade mit den gesuchten Abbildungen $T \in \mathscr{L}(E, F)$ zusammenfallen, die durch Erweiterung von F nuklear werden. Dabei ist bemerkenswert, daß man stets den gleichen Oberraum G verwenden kann.

Wie in [5] gezeigt wurde, bilden die *absolutsummierenden Abbildungen* $T \in \mathscr{L}(E, F)$ einen linearen Raum $\mathscr{P}(E, F)$, auf dem man eine Norm $T \to \pi(T)$ einführen kann. Im dritten Abschnitt beweisen wir, daß $\mathscr{P}_0(E, F)$ ein linearer Teilraum von $\mathscr{P}(E, F)$ ist, auf dem die Norm π mit der Norm π_0 übereinstimmt. Unter einer sehr schwachen Voraussetzung über den normierten Raum E wird außerdem gezeigt, daß $\mathscr{P}_0(E, F)$ gerade aus denjenigen absolutsummierenden Abbildungen besteht, die sich bezüglich der π-Norm durch ausgeartete stetige lineare Abbildungen approximieren lassen. Sind E und F Hilberträume, so erhält man die interessante Aussage, daß die quasinuklearen (= absolutsummierenden) Abbildungen mit den Hilbert-Schmidt-Abbildungen zusammenfallen. Demnach gibt es umfangreiche Klassen von quasinuklearen Abbildungen, die nicht notwendig nuklear sind.

Abschließend sei bemerkt, daß die quasinuklearen Abbildungen eine wichtige Rolle in der Theorie der nuklearen lokalkonvexen Räume spielen, da sie sich in vielen Fällen wesentlich leichter als die nuklearen Abbildungen handhaben lassen (vgl. [6]).

0. Grundbegriffe und Bezeichnungen

Im folgenden sind E und F stets zwei beliebige reelle normierte Räume[1], und mit $\mathscr{L}(E, F)$ wird der lineare Raum aller stetigen linearen Abbildungen T von E in F bezeichnet, auf dem durch

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leqq 1\}$$

eine Norm definiert wird.

Eine Abbildung $T \in \mathscr{L}(E, F)$ heißt *ausgeartet*, wenn ihr Bildraum $T(E)$ endlichdimensional ist. Die Gesamtheit $\mathscr{A}(E, F)$ aller derartigen Abbildungen ist ein linearer Teilraum von $\mathscr{L}(E, F)$. Hat man eine stetige Linearform $a \in E'$ und ein Element $y \in F$, so wird die durch die Zuordnung $x \to \langle x, a\rangle y$ erklärte Abbildung von E in F mit $a \otimes y$ bezeichnet. Jede Abbildung $T \in \mathscr{A}(E, F)$ läßt sich auf viele Arten in der Form

$$T = \sum_1^s a_n \otimes y_n \quad \text{mit } a_n \in E' \text{ und } y_n \in F$$

darstellen.

Eine Abbildung $T \in \mathscr{L}(E, F)$ wird *präkompakt* genannt, wenn jede Folge $[Tx_n]$ mit $\|x_n\| \leqq 1$ eine Cauchysche Teilfolge enthält. Alle Abbildungen $T \in \mathscr{L}(E, F)$, zu denen es Folgen von Abbildungen $T_n \in \mathscr{A}(E, F)$ mit $\lim_n \|T - T_n\| = 0$ gibt, sind präkompakt. Man sagt, daß ein normierter Raum E die *Approximationseigenschaft* besitzt, wenn sich umgekehrt jede präkompakte lineare Abbildung T von E in einen beliebigen normierten Raum F durch ausgeartete Abbildungen $T_n \in \mathscr{A}(E, F)$ approximieren läßt. Bis jetzt konnte noch nicht entschieden werden, ob evtl. sogar alle normierten Räume diese Eigenschaft haben.

Für jede Indexmenge I bilden die beschränkten Zahlenfamilien $[\xi_i, I]$ einen linearen Raum m_I, der durch Einführung der Norm

$$\|[\xi_i, I]\| = \sup\{|\xi_i| : i \in I\}$$

zu einem Banachraum wird. Diese Banachräume sind universell, denn es gibt zu jedem normierten Raum F stets Indexmengen I, so daß F als linearer Teilraum von m_I aufgefaßt werden kann.

Ist E_0 ein linearer Teilraum des normierten Raumes E, so läßt sich jede Abbildung $T_0 \in \mathscr{L}(E_0, m_I)$ durch komponentenweise Anwendung des Hahn-Banach-Theorems zu einer Abbildung $T \in \mathscr{L}(E, m_I)$ mit $\|T\| = \|T_0\|$ fortsetzen.

Für einen beliebigen kompakten Hausdorffraum M ist die Gesamtheit $\mathscr{C}(M)$ der auf M erklärten stetigen reellen Funktionen φ ein Banachraum mit der Norm

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(\xi)| : \xi \in M\}.$$

Die auf $\mathscr{C}(M)$ stetigen Linearformen werden als Radonsche Maße bezeichnet. Da jedes Radonsche Maß μ aus einer eindeutig bestimmten regulären und σ-additiven Mengenfunktion erzeugt werden kann, verwendet man meist die

[1] Alle von uns bewiesenen Aussagen gelten auch in komplexen normierten Räumen.

Schreibweise

$$\langle \varphi, \mu \rangle = \int_M \varphi(\xi)\, d\mu \quad \text{mit } \varphi \in \mathscr{C}(M).$$

Ein Radonsches Maß μ heißt *positiv*, wenn für alle Funktionen $\varphi \in \mathscr{C}(M)$ mit $\varphi(\xi) \geqq 0$ stets $\langle \varphi, \mu \rangle \geqq 0$ gilt. Für jedes positive Radonsche Maß μ kann man die Banachräume $\mathscr{L}_\mu^\infty(M)$ und $\mathscr{L}_\mu^1(M)$ bilden, deren Elemente Äquivalenzklassen von μ-meßbaren beschränkten bzw. μ-integrablen reellen Funktionen sind. Schließlich wird ein positives Radonsches Maß μ *atomar* genannt, wenn es sich in der Form

$$\langle \varphi, \mu \rangle = \sum_1^\infty \mu_n \varphi(\xi_n) \quad \text{für } \varphi \in \mathscr{C}(M)$$

darstellen läßt. Dabei soll für die nichtnegativen Zahlen μ_n die Ungleichung $\sum_1^\infty \mu_n < +\infty$ gelten.

1. Quasinukleare Abbildungen

Wir nennen eine lineare Abbildung T von E in F *quasinuklear*, wenn es auf E eine Folge von stetigen Linearformen a_n gibt, so daß die Ungleichungen

$$\sum_1^\infty \|a_n\| < +\infty$$

und

$$\|Tx\| \leqq \sum_1^\infty |\langle x, a_n \rangle| \quad \text{für } x \in E$$

gelten. Setzt man

$$\pi_0(T) = \inf \left\{ \sum_1^\infty \|a_n\| \right\},$$

wobei das Infinum über alle zulässigen Folgen $[a_n]$ gebildet wird, so zeigt sich, daß T eine stetige lineare Abbildung mit $\|T\| \leqq \pi_0(T)$ ist.

Wird die Gesamtheit aller quasinuklearen Abbildungen von E in F mit $\mathscr{P}_0(E, F)$ bezeichnet, so ergibt sich mühelos

Satz 1. *$\mathscr{P}_0(E, F)$ ist ein linearer Raum mit der Norm π_0.*

Für unsere weiteren Untersuchungen benötigen wir

Lemma 1. *Wenn es zu der π_0-Cauchy-Folge $[T_n] \subset \mathscr{P}_0(E, F)$ eine Abbildung $T \in \mathscr{L}(E, F)$ mit*

$$\lim_n T_n x = Tx \quad \text{für } x \in E$$

gibt, so ist auch die Abbildung T quasinuklear, und es gilt

$$\lim_n \pi_0(T - T_n) = 0.$$

Beweis. Wir bestimmen eine monoton wachsende Folge von natürlichen Zahlen n_p, so daß

$$\pi_0(T_n - T_m) < 2^{-p-2} \quad \text{für } n, m \geqq n_p$$

gilt. Dann gibt es Folgen von Linearformen $a_n^{[p]} \in E'$ mit

$$\sum_{n=1}^\infty \|a_n^{[p]}\| < 2^{-p-2}$$

und

$$\|T_{n_{p+1}}x - T_{n_p}x\| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, a_n^{[p]}\rangle| \quad \text{für } x \in E.$$

Folglich hat man

$$\sum_{p=i}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n^{[p]}\| < 2^{-i-1}$$

und

$$\|T_{n_k}x - T_{n_i}x\| \leqq \sum_{p=i}^{k-1} \|T_{n_{p+1}}x - T_{n_p}x\| \leqq$$

$$\leqq \sum_{p=i}^{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, a_n^{[p]}\rangle| \leqq \sum_{p=i}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, a_n^{[p]}\rangle|.$$

Durch den Grenzübergang $k \to \infty$ ergibt sich schließlich die Ungleichung

$$\|Tx - T_{n_i}x\| \leqq \sum_{p=i}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, a_n^{[p]}\rangle| \quad \text{für } x \in E.$$

Also ist die Abbildung $T - T_{n_i}$ und somit auch T quasinuklear, und es gilt

$$\pi_0(T - T_{n_i}) \leqq 2^{-i-1}.$$

Deshalb hat man

$$\pi_0(T - T_n) \leqq \pi_0(T - T_{n_i}) + \pi_0(T_{n_i} - T_n) < 2^{-i} \quad \text{für } n \geqq n_i,$$

und die Beziehung

$$\lim_n \pi_0(T - T_n) = 0$$

ist bewiesen.

Als unmittelbare Folgerung aus dem vorangehenden Lemma ergibt sich nun

Satz 2. *Für einen normierten Raum E und einen Banachraum F ist $\mathscr{P}_0(E, F)$ ebenfalls ein Banachraum.*

Sind E, F und G drei normierte Räume, so kann man zeigen, daß die Mengen der quasinuklearen Abbildungen eine verallgemeinerte Normidealeigenschaft im Sinne von [7] besitzen.

Satz 3.

(1) *Aus $T \in \mathscr{P}_0(E, F)$ und $S \in \mathscr{L}(F, G)$ folgt $ST \in \mathscr{P}_0(E, G)$, und es gilt*

$$\pi_0(ST) \leqq \|S\| \, \pi_0(T).$$

(2) *Aus $T \in \mathscr{L}(E, F)$ und $S \in \mathscr{P}_0(F, G)$ folgt $ST \in \mathscr{P}_0(E, G)$, und es gilt*

$$\pi_0(ST) \leqq \pi_0(S) \, \|T\|.$$

Beweis (1). Zu einer beliebig vorgegebenen positiven Zahl ε bestimmen wir Linearformen $a_n \in E'$ mit

$$\sum_{1}^{\infty} \|a_n\| \leqq \pi_0(T) + \varepsilon$$

und

$$\|Tx\| \leqq \sum_{1}^{\infty} |\langle x, a_n\rangle| \quad \text{für } x \in E.$$

Mit $b_n = \|S\| a_n$ hat man dann

$$\sum_1^\infty \|b_n\| \leqq \|S\| \pi_0(T) + \|S\| \varepsilon$$

und

$$\|STx\| \leqq \|S\| \, \|Tx\| \leqq \sum_1^\infty |\langle x, b_n \rangle| \quad \text{für } x \in E.$$

Folglich ist die Abbildung ST quasinuklear, und es gilt die Abschätzung

$$\pi_0(ST) \leqq \|S\| \pi_0(T) + \|S\| \varepsilon,$$

aus der sich durch den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ die Ungleichung

$$\pi_0(ST) \leqq \|S\| \pi_0(T)$$

ergibt.

Beweis (2). Zu einer beliebig vorgegebenen positiven Zahl ε bestimmen wir Linearformen $b_n \in F'$ mit

$$\sum_1^\infty \|b_n\| \leqq \pi_0(S) + \varepsilon$$

und

$$\|Sy\| \leqq \sum_1^\infty |\langle y, b_n \rangle| \quad \text{für } y \in F.$$

Mit $a_n = T' b_n$ hat man dann

$$\sum_1^\infty \|a_n\| \leqq \pi_0(S) \, \|T\| + \varepsilon \, \|T\|$$

und

$$\|STx\| \leqq \sum_1^\infty |\langle Tx, b_n \rangle| = \sum_1^\infty |\langle x, a_n \rangle| \quad \text{für } x \in E.$$

Folglich ist die Abbildung ST quasinuklear, und es gilt die Abschätzung

$$\pi_0(ST) \leqq \pi_0(S) \, \|T\| + \varepsilon \, \|T\|,$$

aus der sich durch den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ die Ungleichung

$$\pi_0(ST) \leqq \pi_0(S) \, \|T\|$$

ergibt.

Wir formulieren nun das wichtige

Lemma 2. *Jede quasinukleare Abbildung $T \in \mathcal{L}(E, F)$ läßt sich als Produkt $T = QP$ von einer präkompakten Abbildung $P \in \mathcal{L}(E, E_0)$ und einer quasinuklearen Abbildung $Q \in \mathcal{P}_0(E_0, F)$ schreiben.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es eine Folge von stetigen Linearformen $a_n \in E'$ mit

$$\sum_1^\infty \|a_n\| < +\infty$$

und

$$\|Tx\| \leqq \sum_1^\infty |\langle x, a_n \rangle| \quad \text{für } x \in E.$$

Wir bestimmen nun eine Nullfolge von positiven Zahlen α_n, so daß die Ungleichung

$$\sum_1^\infty \alpha_n^{-1} \|a_n\| < +\infty$$

besteht, und setzen

$$N = \{x \in E : \langle x, a_n \rangle = 0 \quad \text{für } n = 1, 2, \ldots\}.$$

Wird die dem Element $x \in E$ zugeordnete Restklasse des Quotientenraumes $E_0 = E/N$ mit x_0 bezeichnet, so erhält man auf E_0 durch den Ansatz

$$\|x_0\| = \sup\{\alpha_n \|a_n\|^{-1} |\langle x, a_n \rangle| : n = 1, 2, \ldots \quad \text{mit } a_n \neq 0\}$$

eine Norm, und mit Hilfe eines Cantorschen Diagonalverfahrens läßt sich zeigen, daß die kanonische Abbildung $P \in \mathscr{L}(E, E_0)$ mit $Px = x_0$ präkompakt ist.

Nun definieren wir die gesuchte quasinukleare Abbildung $Q \in \mathscr{L}(E_0, F)$ durch den Ansatz

$$Qx_0 = T(P^{-1} x_0) \quad \text{für } x_0 \in E_0.$$

Zum Nachweis der Quasinuklearität werden auf E_0 die stetigen Linearformen $a_n^{[0]}$ mit

$$\langle x_0, a_n^{[0]} \rangle = \langle P^{-1} x_0, a_n \rangle \quad \text{für } x_0 \in E_0$$

betrachtet, für die wegen

$$|\langle x_0, a_n^{[0]} \rangle| = |\langle P^{-1} x_0, a_n \rangle| \leqq \alpha_n^{-1} \|a_n\| \, \|x_0\|$$

die Aussagen

$$\|a_n^{[0]}\| \leqq \alpha_n^{-1} \|a_n\|$$

gelten. Folglich hat man

$$\sum_1^\infty \|a_n^{[0]}\| \leqq \sum_1^\infty \alpha_n^{-1} \|a_n\| < +\infty$$

und

$$\|Qx_0\| = \|T(P^{-1} x_0)\| \leqq \sum_1^\infty |\langle P^{-1} x_0, a_n \rangle| = \sum_1^\infty |\langle x_0, a_n^{[0]} \rangle| \quad \text{für } x_0 \in E_0.$$

Wir geben nun zwei unmittelbare Folgerungen aus dem vorangehenden Lemma an.

Satz 4. *Jede quasinukleare Abbildung $T \in \mathscr{L}(E, F)$ ist präkompakt.*

Satz 5. *Wenn der normierte Raum E die Approximationseigenschaft besitzt, ist $\mathscr{A}(E, F)$ ein π_0-dichter linearer Teilraum von $\mathscr{P}_0(E, F)$.*

Beweis. Wir betrachten eine beliebige Abbildung $T \in \mathscr{P}_0(E, F)$ und schreiben sie in der Form $T = QP$. Nach Voraussetzung gibt es zu der präkompakten Abbildung $P \in \mathscr{L}(E, E_0)$ eine Folge von ausgearteten Abbildungen $P_n \in \mathscr{A}(E, E_0)$ mit

$$\lim_n \|P - P_n\| = 0.$$

Dann sind auch die Abbildungen $T_n = QP_n \in \mathscr{A}(E, F)$ ausgeartet, und wegen

$$\pi_0(T - T_n) \leqq \pi_0(Q)\, \|P - P_n\|$$

gilt

$$\lim_n \pi_0(T - T_n) = 0 .$$

2. Nukleare Abbildungen

Eine lineare Abbildung T von E in F heißt *nuklear*, wenn es eine Folge von stetigen Linearformen $a_n \in E'$ und eine Folge von Elementen $y_n \in F$ mit

$$\sum_1^\infty \|a_n\|\, \|y_n\| < +\infty$$

gibt, so daß T die Form

$$Tx = \sum_1^\infty \langle x, a_n \rangle y_n \qquad \text{für alle } x \in E$$

hat. Setzt man

$$\nu(T) = \inf \sum_1^\infty \|a_n\|\, \|y_n\| \quad ,$$

wobei das Infimum über alle möglichen Darstellungen von T gebildet wird, so zeigt sich, daß T eine stetige lineare Abbildung mit $\|T\| \leqq \nu(T)$ ist. Außerdem kann man beweisen (vgl. [6]), daß alle nuklearen Abbildungen von E in F einen linearen Raum $\mathscr{N}(E, F)$ mit der Norm ν bilden.

Im folgenden untersuchen wir die Beziehungen zwischen den nuklearen und den quasinuklearen Abbildungen. Als erstes Ergebnis erhalten wir

Satz 6. *Jede nukleare Abbildung $T \in \mathscr{L}(E, F)$ ist quasinuklear, und es gilt*

$$\pi_0(T) \leqq \nu(T) .$$

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es zu jeder positiven Zahl ε eine Darstellung von T in der Form

$$Tx = \sum_1^\infty \langle x, a_n \rangle y_n \qquad \text{für } x \in E ,$$

so daß die Ungleichung

$$\sum_1^\infty \|a_n\|\, \|y_n\| \leqq \nu(T) + \varepsilon$$

besteht. Setzt man $b_n = \|y_n\|\, a_n$, so gilt

$$\sum_1^\infty \|b_n\| \leqq \nu(T) + \varepsilon$$

und

$$\|Tx\| \leqq \sum_1^\infty |\langle x, a_n \rangle|\, \|y_n\| = \sum_1^\infty |\langle x, b_n \rangle| \qquad \text{für } x \in E .$$

Folglich ist T eine quasinukleare Abbildung mit

$$\pi_0(T) \leqq \nu(T) + \varepsilon .$$

Abschließend ergibt sich durch den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ die Ungleichung $\pi_0(T) \leqq \nu(T)$.

Im Falle $F = m_I$ hat man auch die Umkehrung des vorangehenden Satzes.

Satz 7. *Jede quasinukleare Abbildung $T \in \mathscr{L}(E, m_I)$ ist nuklear, und es gilt*

$$\nu(T) = \pi_0(T).$$

Beweis. Zu einer beliebig vorgegebenen positiven Zahl ε bestimmen wir eine Folge von stetigen Linearformen $a_n \in E'$ mit

$$\sum_1^\infty \|a_n\| \leqq \pi_0(T) + \varepsilon$$

und

$$\|Tx\| \leqq \sum_1^\infty |\langle x, a_n \rangle| \quad \text{für } x \in E.$$

Dann wird durch den Ansatz

$$Px = [\langle x, a_n \rangle] \quad \text{für } x \in E$$

eine stetige lineare Abbildung P von E in den Banachraum l^1 gewonnen. Außerdem ergibt sich eine stetige lineare Abbildung Q_0, die den linearen Teilraum $P(E)$ von l^1 in m_I abbildet, wenn man

$$Q_0[\xi_n] = T(P^{-1}[\xi_n]) \quad \text{für } [\xi_n] \in P(E)$$

setzt. Weil dann mit $x \in P^{-1}[\xi_n]$ die Ungleichung

$$\|Q_0[\xi_n]\| = \|Tx\| \leqq \sum_1^\infty |\langle x, a_n \rangle| = \sum_1^\infty |\xi_n|$$

besteht, hat man $\|Q_0\| \leqq 1$. Folglich läßt sich Q_0 zu einer stetigen linearen Abbildung Q von l^1 in m_I fortsetzen, für die ebenfalls $\|Q\| \leqq 1$ gilt. Ist e_n die n-te Einheitsfolge aus l^1, so ergibt sich mit $y_n = Q(e_n)$ für die Abbildung Q die Darstellung

$$Q[\xi_n] = \sum_1^\infty \xi_n y_n \quad \text{mit } [\xi_n] \in l^1.$$

Folglich hat man

$$Tx = QPx = \sum_1^\infty \langle x, a_n \rangle y_n \quad \text{für } x \in E.$$

Da wegen $\|y_n\| \leqq 1$ die Ungleichung

$$\sum_1^\infty \|a_n\| \, \|y_n\| \leqq \pi_0(T) + \varepsilon$$

besteht, ist T eine nukleare Abbildung mit

$$\nu(T) \leqq \pi_0(T) + \varepsilon.$$

Wird abschließend der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ durchgeführt, so erhält man die Aussage $\nu(T) \leqq \pi_0(T)$. Wegen Satz 6 gilt aber sogar das Gleichheitszeichen.

Da man jeden normierten Raum F in einen Banachraum m_I einbetten kann, ergibt sich durch Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse dieses Abschnittes

Theorem 1. *Eine Abbildung $T \in \mathscr{L}(E, F)$ ist dann und nur dann quasinuklear, wenn es einen F umfassenden normierten Raum G gibt, so daß T als Abbildung von E in G nuklear wird.*

3. Absolutsummierende Abbildungen

Wir nennen eine lineare Abbildung T von E in F *absolutsummierend*, wenn eine positive Zahl ϱ existiert, so daß für jeweils endlich viele Elemente $x_1, \ldots, x_s \in E$ die Ungleichung

$$\sum_1^s \|Tx_r\| \leqq \varrho \sup\{\|\sum_1^s \lambda_r x_r\| : |\lambda_r| \leqq 1\}$$

besteht. Wird das Infimum aller derartigen Zahlen ϱ mit $\pi(T)$ bezeichnet, so zeigt sich, daß T eine stetige lineare Abbildung mit $\|T\| \leqq \pi(T)$ ist. Für die Gesamtheit $\mathscr{P}(E, F)$ aller absolutsummierenden Abbildungen von E in F gelten in Analogie zu den Ergebnissen des ersten Abschnittes die folgenden Aussagen (vgl. [5] oder [6]).

Satz 8. *$\mathscr{P}(E, F)$ ist ein linearer Raum mit der Norm π.*

Satz 9. *Für einen normierten Raum E und einen Banachraum F ist $\mathscr{P}(E, F)$ ebenfalls ein Banachraum.*

Satz 10.

(1) *Aus $T \in \mathscr{P}(E, F)$ und $S \in \mathscr{L}(F, G)$ folgt $ST \in \mathscr{P}(E, G)$, und es gilt*

$$\pi(ST) \leqq \|S\| \, \pi(T).$$

(2) *Aus $T \in \mathscr{L}(E, F)$ und $S \in \mathscr{P}(F, G)$ folgt $ST \in \mathscr{P}(E, G)$, und es gilt*

$$\pi(ST) \leqq \pi(S) \, \|T\|.$$

Wir untersuchen nun die Beziehungen zwischen den quasinuklearen und den absolutsummierenden Abbildungen. Sehr einfach ergibt sich

Satz 11. *Jede quasinukleare Abbildung $T \in \mathscr{L}(E, F)$ ist absolutsummierend, und es gilt*

$$\pi(T) \leqq \pi_0(T).$$

Beweis. Zu einer beliebig vorgegebenen positiven Zahl ε bestimmen wir eine Folge von stetigen Linearformen $a_n \in E'$ mit

$$\sum_1^\infty \|a_n\| \leqq \pi_0(T) + \varepsilon$$

und

$$\|Tx\| \leqq \sum_1^\infty |\langle x, a_n \rangle| \quad \text{für } x \in E.$$

Für jeweils endlich viele Elemente $x_1, \ldots, x_s \in E$ ergibt sich dann mit $\lambda_{nr} = \operatorname{sgn} \langle x_r, a_n \rangle$ die Ungleichung

$$\sum_1^s \|Tx_r\| \leqq \sum_{r=1}^s \sum_{n=1}^\infty |\langle x_r, a_n \rangle| = \sum_{n=1}^\infty \langle \sum_{r=1}^s \lambda_{nr} x_r, a_n \rangle \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=1}^\infty \|\sum_{r=1}^s \lambda_{nr} x_r\| \, \|a_n\| \leqq \sum_1^\infty \|a_n\| \sup\{\|\sum_1^s \lambda_r x_r\| : |\lambda_r| \leqq 1\}.$$

Folglich ist T eine absolutsummierende Abbildung mit

$$\pi(T) \leqq \pi_0(T) + \varepsilon .$$

Abschließend erhält man durch den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ die Aussage

$$\pi(T) \leqq \pi_0(T) .$$

Die Umkehrung des vorangehenden Satzes ist im allgemeinen nicht richtig. Deshalb ist es von Interesse, diejenigen absolutsummierenden Abbildungen zu bestimmen, die quasinuklear sind. Zu diesem Zweck benutzen wir eine Charakterisierung der absolutsummierenden Abbildungen, die in [5] und [6] angegeben wurde. Ist nämlich U^0 die bezüglich der schwachen Topologie kompakte Einheitskugel des zu E dualen Banachraumes E', so hat man das

Theorem 2. *Eine lineare Abbildung T von E in F ist dann und nur dann absolutsummierend, wenn auf U^0 ein positives Radonsches Maß μ existiert, so daß die Beziehung*

$$\|Tx\| \leqq \int_{U^0} |\langle x, a\rangle| \, d\mu \quad \text{für } x \in E$$

besteht. Ist $M(T)$ die Menge aller derartigen Radonschen Maße, so gilt

$$\pi(T) = \inf\{\|\mu\| : \mu \in M(T)\} ,$$

und es gibt wenigstens ein $\mu_0 \in M(T)$ mit $\|\mu_0\| = \pi(T)$.

Nun erhält man

Satz 12. *Eine absolutsummierende Abbildung $T \in \mathscr{L}(E, F)$ ist dann und nur dann quasinuklear, wenn in $M(T)$ ein atomares Radonsches Maß μ existiert.*

Beweis. Wenn die Abbildung $T \in \mathscr{L}(E, F)$ quasinuklear ist, gibt es eine Folge von stetigen Linearformen $a_n \in E'$ mit

$$\sum_1^\infty \|a_n\| < +\infty$$

und

$$\|Tx\| \leqq \sum_1^\infty |\langle x, a_n\rangle| \quad \text{für } x \in E .$$

Folglich gehört das durch den Ansatz

$$\langle \varphi, \mu\rangle = \sum_1^\infty \|a_n\| \, \varphi(\|a_n\|^{-1} a_n) \quad \text{für } \varphi \in \mathscr{C}(U^0)$$

definierte atomare positive Radonsche Maß μ zu $M(T)$.

Existiert andererseits in $M(T)$ ein Radonsches Maß μ der Form

$$\langle \varphi, \mu\rangle = \sum_1^\infty \mu_n \varphi(b_n) \quad \text{für } \varphi \in \mathscr{C}(U^0) ,$$

wobei $b_n \in U^0$ und $\sum_1^\infty \mu_n < +\infty$ gilt, so bestehen mit den Linearformen $a_n = \mu_n b_n$ die Ungleichungen

$$\sum_1^\infty \|a_n\| < +\infty$$

und

$$\|Tx\| \leqq \sum_1^\infty |\langle x, a_n\rangle| \quad \text{für } x \in E.$$

Folglich ist die Abbildung T quasinuklear.

Die vorangehenden Untersuchungen haben gezeigt, daß die quasinuklearen Abbildungen gewissermaßen als *atomare* absolutsummierende Abbildungen angesehen werden können. Es erhebt sich deshalb die Frage, ob für quasinukleare Abbildungen die beiden Normen π und π_0 übereinstimmen. Zum Beweis dieser Vermutung benötigen wir einige Vorbetrachtungen, die auch für sich allein von Bedeutung sind.

Im folgenden ist μ stets ein positives Radonsches Maß auf einem kompakten Hausdorffraum M.

Satz 13. *Die identische Abbildung I_∞^1 von $\mathscr{L}_\mu^\infty(M)$ in $\mathscr{L}_\mu^1(M)$ ist absolutsummierend, und es gilt $\pi(I_\infty^1) = \|\mu\|$.*

Beweis. Wir betrachten endlich viele μ-meßbare Funktionen $f_1, \ldots, f_s$, so daß die zugehörigen Funktionenklassen $\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_s$ in $\mathscr{L}_\mu^\infty(M)$ liegen, und setzen

$$\sigma = \sup\{\|\sum_1^s \lambda_r \hat{f}_r\|_\infty : |\lambda_r| \leqq 1\}.$$

Dann gibt es zu jedem s-tupel $[\lambda_1, \ldots, \lambda_s]$ mit $\lambda_r = \pm 1$ eine μ-Nullmenge $N[\lambda_1, \ldots, \lambda_s]$, so daß

$$|\sum_1^s \lambda_r f_r(\xi)| \leqq \sigma \quad \text{für } \xi \overline{\in} N[\lambda_1, \ldots, \lambda_s]$$

gilt. Setzt man jetzt für jedes Element $\xi \in M$, das nicht in der μ-Nullmenge

$$N = \bigcup\{N[\lambda_1, \ldots, \lambda_s] : \lambda_r = \pm 1\}$$

liegt, $\lambda_r = \operatorname{sgn} f_r(\xi)$, so ergibt sich die Ungleichung

$$\sum_1^s |f_r(\xi)| = \sum_1^s \lambda_r f_r(\xi) \leqq \sigma \quad \text{für } \xi \overline{\in} N.$$

Folglich hat man

$$\sum_1^s \|I_\infty^1 \hat{f}_r\|_1 = \sum_1^s \int_M |f_r(\xi)|\, d\mu \leqq \|\mu\| \sup\{\|\sum_1^s \lambda_r \hat{f}_r\|_\infty : |\lambda_r| \leqq 1\}.$$

Damit haben wir gezeigt, daß I_∞^1 eine absolutsummierende Abbildung mit $\pi(I_\infty^1) \leqq \|\mu\|$ ist. Auf Grund der Abschätzung

$$\|\mu\| = \|I_\infty^1\| \leqq \pi(I_\infty^1)$$

besteht sogar die Identität $\pi(I_\infty^1) = \|\mu\|$.

Als kontinuierliches Analogon von Satz 7 formulieren wir nun

Satz 14. *Jede absolutsummierende Abbildung $T \in \mathscr{L}(E, m_I)$ kann auf die folgende Art zerlegt werden*[2]*:*

$$E \xrightarrow{P} \mathscr{L}_\mu^\infty(M) \xrightarrow{I_\infty^1} \mathscr{L}_\mu^1(M) \xrightarrow{Q} m_I.$$

[2] Solche Abbildungen bezeichnet A. GROTHENDIECK [3] als integral.

Dabei sind P und Q stetige lineare Abbildungen mit $\|P\| \leqq 1$ und $\|Q\| \leqq 1$, und das positive Radonsche Maß μ läßt sich so wählen, daß $\|\mu\| = \pi(T)$ gilt.

Beweis. Als kompakten Hausdorffraum M verwenden wir die mit der schwachen Topologie versehene abgeschlossene Einheitskugel U^0 von E'. Auf Grund des oben zitierten Theorems gibt es dann auf U^0 ein positives Radonsches Maß μ mit $\|\mu\| = \pi(T)$, so daß die Beziehung

$$\|Tx\| \leqq \int_{U^0} |\langle x, a\rangle| \, d\mu \quad \text{für } x \in E$$

besteht. Nun gewinnt man die gesuchte Abbildung P dadurch, daß jedem Element $x \in E$ die zu der stetigen Funktion $\varphi_x(a) = \langle x, a\rangle$ gehörige Funktionenklasse $\hat{\varphi}_x \in \mathscr{L}^\infty_\mu(M)$ zugeordnet wird. Außerdem ergibt sich eine stetige lineare Abbildung Q_0, die den linearen Teilraum $I^1_\infty P(E)$ von $\mathscr{L}^1_\mu(M)$ in m_I abbildet, wenn man

$$Q_0(f) = T[(I^1_\infty P)^{-1}(\hat{f})] \quad \text{für } \hat{f} \in I^1_\infty P(E)$$

setzt. Weil dann mit $x \in (I^1_\infty P)^{-1}(\hat{f})$ die Ungleichung

$$\|Q_0(f)\| = \|Tx\| \leqq \int_{U^0} |\langle x, a\rangle| \, d\mu = \|\hat{f}\|_1$$

besteht, hat man $\|Q_0\| \leqq 1$. Da sich aber Q_0 zu einer stetigen linearen Abbildung Q von $\mathscr{L}^1_\mu(M)$ in m_I fortsetzen läßt, für die ebenfalls $\|Q\| \leqq 1$ gilt, ist damit die gesuchte Zerlegung der Abbildung T gefunden.

In [5] wurde gezeigt, daß die zu einer absolutsummierenden Abbildung T gehörige duale Abbildung T' im allgemeinen nicht absolutsummierend ist. Dagegen hat man

Satz 15. *Für jede absolutsummierende Abbildung $T \in \mathscr{L}(E, F)$ ist die biduale Abbildung T'' ebenfalls absolutsummierend, und es gilt*

$$\pi(T'') = \pi(T).$$

Beweis. Wir betten den normierten Raum F in einen Banachraum m_I ein und zerlegen T als Abbildung von E in m_I auf die in Satz 14 angegebene Art:

$$T = Q I^1_\infty P.$$

Wenn man die kanonische Abbildung von $\mathscr{L}^1_\mu(M)$ in $\mathscr{L}^1_\mu(M)''$ mit K bezeichnet und die Tatsache benutzt, daß $\mathscr{L}^1_\mu(M)'$ mit $\mathscr{L}^\infty_\mu(M)$ identifiziert werden kann, so ergibt sich die Identität

$$(I^1_\infty)' = K I^1_\infty.$$

Folglich gilt

$$(I^1_\infty)'' = K I^1_\infty K',$$

und man erhält für T'' die Zerlegung

$$T'' = Q'' K I^1_\infty K' P''.$$

Deshalb ist T'' nach Satz 10 als Abbildung von E'' in m_I'' und somit auch als Abbildung von E'' in F'' (aufgefaßt als linearer Teilraum von m_I'') absolutsummierend, und es gilt

$$\pi(T'') \leqq \|Q''\| \, \|K\| \, \pi(I^1_\infty) \, \|K'\| \, \|P''\| \leqq \|\mu\| = \pi(T).$$

Da aber die Norm $\pi(T'')$ auf Grund ihrer Definition nicht kleiner als $\pi(T)$ sein kann, hat man sogar

$$\pi(T'') = \pi(T).$$

Bemerkung. Es wäre wünschenswert, daß man für den vorangehenden Satz einen elementaren Beweis hätte, in dem keine maßtheoretischen Begriffe benutzt werden.

Satz 16. *Für jede nukleare Abbildung* $T \in \mathscr{L}(E, m_I)$ *gilt*

$$\pi(T) = \nu(T).$$

Beweis. Da wegen Satz 6 und Satz 11 für alle nuklearen Abbildungen $T \in \mathscr{L}(E, F)$ die Ungleichung

$$\pi(T) \leqq \pi_0(T) \leqq \nu(T)$$

besteht, haben wir nur noch zu zeigen, daß im Falle $F = m_I$ auch die Aussage

$$\nu(T) \leqq \pi(T)$$

gilt.

Ist J eine beliebige Teilmenge von I, so soll $e(J)$ die Zahlenfamilie $[\varepsilon_i(J), I]$ mit $\varepsilon_i(J) = 1$ für $i \in J$ und $\varepsilon_i(J) = 0$ für $i \overline{\in} J$ sein. Der von allen Elementen $e(J)$ mit $J \subset I$ erzeugte lineare Raum m_I^0 liegt in m_I dicht.

Wir beweisen zuerst, daß unsere Behauptung für jede Abbildung $T \in \mathscr{A}(E, m_I^0)$ richtig ist. Zu diesem Zweck bestimmen wir auf $\mathscr{A}(E, m_I^0)$ eine Linearform A mit

$$\langle T, A\rangle = \nu(T) \quad \text{und} \quad |\langle S, A\rangle| \leqq \nu(S) \quad \text{für } S \in \mathscr{A}(E, m_I^0).$$

Nun stellen wir die Abbildung T mit stetigen Linearformen $a_1, \ldots, a_s \in E'$ und disjunkten Teilmengen $I_1, \ldots, I_s$ von I in der Form

$$T = \sum_1^s a_n \otimes e(I_n)$$

dar, und definieren auf E' durch den Ansatz

$$\langle x_n'', a\rangle = \langle a \otimes e(I_n), A\rangle$$

endlich viele stetige Linearformen $x_1'', \ldots, x_s''$. Schließlich entnehmen wir aus jeder Menge I_n ein Element i_n und setzen

$$\langle [\xi_i, I], b_n\rangle = \xi_{i_n}.$$

Für die Linearformen $b_n \in m_I'$ hat man dann $\|b_n\| = 1$, und wegen

$$\langle x, T'b_m\rangle = \langle Tx, b_m\rangle = \langle \sum_1^s \langle x, a_n\rangle e(I_n), b_m\rangle = \langle x, a_m\rangle \quad \text{für } x \in E$$

gilt $T'b_m = a_m$. Nun ergibt sich die Ungleichung

$$\sum_1^s \|T''x_n''\| \geqq \sum_1^s \langle T''x_n'', b_n\rangle = \sum_1^s \langle x_n'', T'b_n\rangle = \sum_1^s \langle x_n'', a_n\rangle$$

$$= \langle \sum_1^s a_n \otimes e(I_n), A\rangle = \langle T, A\rangle = \nu(T).$$

Da andererseits unter den Bedingungen $\|a\| \leqq 1$ und $|\lambda_n| \leqq 1$ die Abschätzung

$$|\langle \sum_1^s \lambda_n x_n'', a\rangle| = |\langle a \otimes \sum_1^s \lambda_n e(I_n), A\rangle| \leqq \nu(a \otimes \sum_1^s \lambda_n e(I_n)) \leqq 1$$

besteht, hat man

$$\sup\{\|\sum_1^s \lambda_n x_n''\| : |\lambda_n| \leqq 1\} \leqq 1,$$

und es gilt

$$\nu(T) \leqq \sum_1^s \|T'' x_n''\| \leqq \pi(T'') \sup\{\|\sum_1^s \lambda_n x_n''\| : |\lambda_n| \leqq 1\} \leqq \pi(T'') = \pi(T).$$

Damit ist unsere Behauptung für alle Abbildungen $T \in \mathscr{A}(E, m_I^0)$ bewiesen.

Nun wird gezeigt, daß sich jede Abbildung $T \in \mathscr{N}(E, m_I)$ bezüglich der ν-Norm durch Abbildungen aus $\mathscr{A}(E, m_I^0)$ approximieren läßt. Zu diesem Zweck stellen wir die nukleare Abbildung T in der Form

$$Tx = \sum_1^\infty \langle x, a_n\rangle y_n$$

mit

$$\varrho = \sum_1^\infty \|a_n\| \, \|y_n\| < +\infty$$

dar. Sind dann die Elemente $z_n^{[\varepsilon]} \in m_I^0$ so bestimmt, daß mit einer beliebigen positiven Zahl ε die Ungleichungen

$$\|a_n\| \, \|y_n - z_n^{[\varepsilon]}\| \leqq \varepsilon \|a_n\| \, \|y_n\|$$

gelten, und ist m_ε eine natürliche Zahl mit

$$\sum_{m_\varepsilon + 1}^\infty \|a_n\| \, \|y_n\| < \varepsilon,$$

so besteht für die Abbildung

$$T_\varepsilon = \sum_1^{m_\varepsilon} a_n \otimes z_n^{[\varepsilon]} \in \mathscr{A}(E, m_I^0)$$

die Abschätzung

$$\pi(T - T_\varepsilon) \leqq \nu(T - T_\varepsilon) \leqq \sum_1^{m_\varepsilon} \|a_n\| \, \|y_n - z_n^{[\varepsilon]}\| + \sum_{m_\varepsilon + 1}^\infty \|a_n\| \, \|y_n\| \leqq \varepsilon(\varrho + 1).$$

Durch den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ ergibt sich aber abschließend aus der Ungleichung

$$\pi(T) + \pi(T - T_\varepsilon) \geqq \pi(T_\varepsilon) = \nu(T_\varepsilon) \geqq \nu(T) - \nu(T - T_\varepsilon)$$

die behauptete Aussage $\pi(T) \geqq \nu(T)$.

Nach diesen Vorbereitungen erhalten wir

Theorem 3. *Auf dem linearen Teilraum $\mathscr{P}_0(E, F)$ von $\mathscr{P}(E, F)$ stimmt die π-Norm mit der π_0-Norm überein.*

Beweis. Wir betten den normierten Raum F in einen Banachraum m_I ein. Dann ist jede quasinukleare Abbildung $T \in \mathscr{P}_0(E, F)$ als Abbildung von E in m_I nuklear, und es gilt

$$\pi_0(T) = \nu(T) = \pi(T).$$

Als Folgerung erhalten wir

Theorem 4. *Wenn der normierte Raum E die Approximationseigenschaft besitzt, fällt $\mathscr{P}_0(E, F)$ mit der in $\mathscr{P}(E, F)$ gebildeten π-abgeschlossenen Hülle von $\mathscr{A}(E, F)$ zusammen.*

Beweis. Nach Satz 5 hat man

$$\mathscr{P}_0(E, F) \subset \overline{\mathscr{A}(E, F)}.$$

Wir betrachten nun eine Abbildung $T \in \mathscr{P}(E, F)$, die sich bezüglich der π-Norm durch ausgeartete Abbildungen T_n approximieren läßt. Da auf $\mathscr{A}(E, F)$ die π-Norm mit der π_0-Norm übereinstimmt, ist $[T_n]$ eine π_0-Cauchy-Folge, zu der es eine Abbildung $T \in \mathscr{L}(E, F)$ mit

$$\lim_n T_n x = Tx \qquad \text{für } x \in E$$

gibt. Folglich ist die Abbildung T nach Lemma 1 quasinuklear, und es gilt auch

$$\overline{\mathscr{A}(E, F)} \subset \mathscr{P}_0(E, F).$$

In [5] und [6] wurde gezeigt, daß die absolutsummierenden Abbildungen in Hilberträumen mit den Hilbert-Schmidt-Abbildungen identisch sind. Da sich diese Abbildungen aber durch ausgeartete Abbildungen approximieren lassen, und weil jeder Hilbertraum die Approximationseigenschaft besitzt, ergibt sich abschließend das

Theorem 5. *In Hilberträumen fallen die quasinuklearen Abbildungen mit den Hilbert-Schmidt-Abbildungen zusammen.*

Literatur

[1] BOURBAKI, N.: Intégration, Chap. I—V. Paris: Hermann & C^ie 1952/56.
[2] DAY, M. M.: Normed linear spaces. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1958.
[3] GROTHENDIECK, A.: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Am. Math. Soc. **16** (1955).
[4] KÖTHE, G.: Topologische lineare Räume. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.
[5] PIETSCH, A.: Absolutsummierende Abbildungen in lokalkonvexen Räumen. Math. Nachr. **27**, 77—103 (1963).
[6] — Nukleare lokalkonvexe Räume. Berlin: Akademie-Verlag 1965.
[7] SCHATTEN, R.: Norm ideals of completely continuous operators. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.

ALBRECHT PIETSCH
Institut für Mathematik, Friedrich-Schiller-Universität
X 69, Jena, Helmholtzweg 1

(Eingegangen am 23. September 1964)

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · HEIDELBERG · NEW YORK

Lecture Notes in Mathematics

An informal series of special lectures, seminars and reports on mathematical topics
Edited by **A. Dold,** Heidelberg, and **B. Eckmann,** Zürich

Volume 7 Introduction to Lie Groups and Transformation Groups

By Philippe Tondeur, Department of Mathematics, University of Zürich
VIII, 176 pages DIN A 4. 1965. Stiff paper bound DM 13,50

Volume 8 Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems

By Gaetano Fichera, University of Rome
IV, 176 pages DIN A 4. 1965. Stiff paper bound DM 13,50

Volume 9 Pseudo-Boolean Programming and Applications

By Petru L. Ivănescu, Institute of Mathematics, Romanian Academy of Sciences, Bucharest
IV, 50 pages DIN A 4. 1965. Stiff paper bound DM 4,80

Volume 10 Die Suzukigruppen und ihre Geometrien

Von Heinz Lüneburg, Mathematisches Institut der Universität Mainz
VI, 111 Seiten DIN A 4. 1965. Steif geheftet DM 8,—

Volume 11 Algèbre Locale · Multiplicités

Par Jean-Pierre Serre, Collège de France, Paris
Seconde édition, 1965. Rédigé par Pierre Gabriel
VIII, 192 pages DIN A 4. 1965. Broché DM 12,—

Seite

HILDEBRANDT, S.: Über das Randverhalten von Minimalflächen 1

BENZ, W.: Eine Kennzeichnung der van der Waerden-Smid-Geometrien 19

HÄRTTER, E.: Eine Bemerkung über Basen 24

SCHAEFER, H. H.: Eine Klasse irreduzibler positiver Operatoren 26

TUTSCHKE, W.: Zur Theorie der parameterabhängigen Differentialformen. II. Lineare Differentialoperatoren zweiter Ordnung und zugeordnetes Koeffizientendifferential 31

KLÖTZLER, R.: Eine bemerkenswerte Abschätzung zur Feldtheorie quadratischer Variationsprobleme 36

HELMBERG, G.: Über konservative Transformationen 44

GUDERLEY, G.: Ein Extremalprinzip für reibungsfreie stationäre Strömungen eines kompressiblen Mediums 62

NITSCHE, J. C. C.: Ein Einschließungssatz für Minimalflächen 71

PIETSCH, A.: Quasinukleare Abbildungen in normierten Räumen 76

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Edgar Seidler, 1 Berlin 31 (Wilmersdorf), Heidelberger Platz 3.
Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York — Druck der Brühlschen Universitätsdruckerei, Gießen
Printed in Germany

A 105

Mathematische Annalen

Begründet 1868 durch Alfred Clebsch · Carl Neumann

Fortgeführt durch Felix Klein · David Hilbert
Otto Blumenthal · Erich Hecke

Herausgegeben von **Heinrich Behnke**, Münster I. W.
Richard Courant, New York
Hans Grauert, Göttingen
Friedrich Hirzebruch, Bonn
Heinz Hopf, Zürich
Gottfried Köthe, Frankfurt/M.
Bartel L. van der Waerden, Zürich

Band 165 · Heft 2 · 1966

Springer-Verlag · Berlin · Heidelberg · New York

Math. Ann. · Abgeschlossen am 6. Juni 1966 · A 21 265 E

Niedersächsische Staats- u. Universitätsbibliothek Göttingen

25. Juni 1966

A 2 6

Mathematische Annalen

Begründet 1868 durch *Alfred Clebsch* und *Carl Neumann*, früher herausgegeben von *Alfred Clebsch* (1869—1872), *Carl Neumann* (1869—1876), *Felix Klein* (1876—1924), *Adolph Mayer* (1876—1901), *Walther v. Dyck* (1888—1921), *David Hilbert* (1902—1939), *Otto Blumenthal* (1906—1938), *Albert Einstein* (1920—1928), *Constantin Carathéodory* (1925—1928), *Erich Hecke* (1929—1947), *Franz Rellich* (1947—1955), *Kurt Reidemeister* (1947—1963).

Band 1—80 Leipzig, B. G. Teubner, ab Band 81 (1920) Berlin, Springer.

An unsere Mitarbeiter!

Die Korrekturkosten sind bei den „Mathematischen Annalen" sehr hoch. Für ihre Verminderung muß unbedingt Sorge getragen werden. Wir richten deshalb an alle unsere Mitarbeiter die freundliche dringende Bitte, zu diesem Ziele an ihrem Teile mit beitragen zu wollen. Dazu ist nötig:

1. Das Manuskript muß *völlig druckfertig* und *gut leserlich* sein und für den Setzer *gemäß den „Hinweise für die Autoren"* (herausgegeben von Redaktion und Verlag) vorbereitet sein. — Diese Hinweise können von der Redaktion angefordert werden.

2. Veränderungen des Textes in der Korrektur sind auf die Fälle zu beschränken, wo sich nachträglich *wirkliche Irrtümer* herausstellen. Insbesondere sind rein stilistische Verbesserungen zu unterlassen. Sollte ein Irrtum bemerkt werden, noch bevor Korrektur eingetroffen ist, dann ist ein verbesserter Text sofort an die Redaktion zu schicken, die dafür Sorge tragen wird, daß das Manuskript noch vor dem Satz berichtigt wird.

Jede Änderung des schon gesetzten Textes muß zu Lasten der Autoren gehen.

Die Reihenfolge der Veröffentlichungen behält sich die Redaktion vor.

Die Redaktion der Mathematischen Annalen

Mathematische Annalen

Erscheinen zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung zwanglos in Heften, die zu Bänden vereinigt werden. Sie sind durch jede Buchhandlung zu beziehen. Der Preis des Bandes beträgt DM 96,—.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskripts und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0,30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Mathematischen Annalen bestimmte Manuskripte können bei jedem der unten verzeichneten Redaktionsmitglieder eingereicht werden:

Professor Dr. Dr. h. c. H. Behnke, 44 Münster/Westf., Rottendorffweg 17,

Professor Dr. R. Courant, 142 Calton Road, New Rochelle, N. Y. USA,

Professor Dr. H. Grauert, Mathematisches Institut der Universität, 34 Göttingen, Bunsenstr. 3—5,

Professor Dr. F. Hirzebruch, Mathematisches Institut der Universität, 53 Bonn (Rhein), Wegelerstr. 10

Professor Dr. Dr. h. c. H. Hopf, Zollikon bei Zürich, Alte Landstraße 37,

Professor Dr. Dr. h. c. G. Köthe, 6 Frankfurt/Main, Parkstraße 14[1],

Professor Dr. Dr. h. c. B. L. van der Waerden, Mathematisches Institut der Universität Zürich, 8006 Zürich/Schweiz

Inhaltsverzeichnis des Heftes auf Seite 4

HABETHA, K.
Math. Annalen 165, 91—110 (1966)

Über eine Integraldarstellung und das Phragmén-Lindelöfsche Prinzip bei elliptischen Differentialgleichungen

Herrn Professor Dr. ERNST HÖLDER zum 65. Geburtstag gewidmet

KLAUS HABETHA

Einleitung

In der rechten Halbebene $E: x \geqq 0$ sei die elliptische Differentialungleichung

$$L[u] \equiv a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + d u_x + e u_y \geqq 0 \tag{0.1}$$

gegeben. Für deren Koeffizienten gelte nach SERRIN [5]

$$a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 \geqq \mu(a+c)(\xi^2+\eta^2) \tag{0.2}$$

für alle reellen ξ, η mit einer Konstanten $\mu > 0$, ferner sei

$$\sqrt{d^2+e^2} \leqq p(r)(a+c) \tag{0.3}$$

mit einer stetigen, monoton abnehmenden Funktion $p(r)$, für die

$$\int_0^\infty p(r)\,dr < \infty \tag{0.4}$$

erfüllt ist (r und φ seien die Polarkoordinaten der Ebene). Damit lassen sich die Funktionen

$$X(x) = \int_0^x \exp\left(\frac{1}{\mu}\int_t^\infty p(\tau)\,d\tau\right) dt, \quad X_1(x) = \int_0^x \exp\left(-\frac{1}{\mu}\int_t^\infty p(\tau)\,d\tau\right) dt \tag{0.5}$$

definieren, für die man leicht die Eigenschaften

$$\begin{cases} L[X] \leqq 0, & \lim\limits_{x\to\infty} X/x = 1, & \lim\limits_{x\to 0} X/x > 0 \\ L[X_1] \geqq 0, & \lim\limits_{x\to\infty} X_1/x = 1, & \lim\limits_{x\to 0} X_1/x > 0 \end{cases} \tag{0.6}$$

nachprüft. Existiert eine Lösung der Gleichung $L[u]=0$ mit den anderen Eigenschaften aus (0.6), so können $X(x)$ und $X_1(x)$ durch diese Funktion ersetzt werden.

In E werden nun Lösungen $u(x,y) \in C^2$ von (0.1) betrachtet, die der Lindelöfschen Bedingung

$$\lim_{(x,y)\to(0,\eta)} u(x,y) \leqq 0 \qquad (\eta \text{ beliebig}) \tag{0.7}$$

genügen. Dann sei, falls es in E Punkte mit $u(x, y) > 0$ gibt,

$$\alpha = \sup_E u(x, y)/X(x), \tag{0.8a}$$

anderenfalls sei

$$\alpha = \sup_E u(x, y)/X_1(x). \tag{0.8b}$$

Für endliches α sollen in dieser Arbeit die Ergebnisse von AHLFORS und HEINS [1] für subharmonische Funktionen auf Lösungen von (0.1) übertragen werden. Dabei ergibt sich auch ein Beweis für eine Vermutung von SERRIN ([5], S. 399).

Satz: *In E sei $u(x, y) \in C^2$ und genüge* (0.1) *und* (0.7), α (0.8) *sei endlich. Für die Koeffizienten von* (0.1) *gelte $a, b, c \in C^3(E)$ sowie $d, e \in C^2(E)$, außerdem* (0.2), (0.3) *und*

$$\begin{cases} |D^n(a-1)|, |D^n b|, |D^n(c-1)| = O(r^{1-n}p(r)) & (n = 0, 1, 2, 3) \\ |D^n d|, |D^n e| = O(r^{-n}p(r)) & (n = 0, 1, 2), \end{cases} \tag{0.9}$$

hier steht D^n für irgendeine Ableitung n-ter Ordnung nach x und y. Ferner sei $r^2 p(r)$ für genügend große r monoton wachsend.

Dann gilt:

1. *Zu jedem φ_0, $0 < \varphi_0 < \pi/2$, gibt es eine r-Menge $\Delta(\varphi_0)$ von endlichem logarithmischen Maß, so daß gleichmäßig für $|\varphi| \leqq \varphi_0$*

$$\lim_{r \to \infty} u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)/r = \alpha\cos\varphi \tag{0.10}$$

gilt, wenn r nur Werte außerhalb von $\Delta(\varphi_0)$ durchläuft.

2. *Es existiert eine φ-Menge Φ der äußeren logarithmischen Kapazität Null, so daß* (0.10) *für $\varphi \notin \Phi$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, ohne Ausnahme-r gilt.*

3. *In* 1. *entfällt die Ausnahmemenge $\Delta(\varphi_0)$, wenn $u(x, y)$ in E Lösung der Gleichung $L[u] = 0$ ist.*

Die Punkte 1 und 2 stellen die direkte Übertragung der Ergebnisse von AHLFORS und HEINS dar, Punkt 3 ist die Bestätigung der Vermutung von SERRIN, für Potentialfunktionen ist ein entsprechendes Ergebnis von HAYMAN [3] bewiesen worden. Punkt 1 ist vom Verfasser mit gewissen Abänderungen in [2] gezeigt worden[1].

Die Voraussetzungen auf $x = 0$ können weggelassen werden, zur Vereinfachung der Beweise sind hier aber die obigen Forderungen gestellt worden. Aus dem gleichen Grund ist auf eine Abschwächung der Differenzierbarkeitsforderungen an $u(x, y)$ verzichtet worden.

Die Forderung der Monotonie von $r^2 p(r)$ für große r zieht $p(r) \geqq \text{const} \cdot r^{-2}$ nach sich (falls nicht $p \equiv 0$ für $r \geqq r_0$). Da man aber in (0.3) ohne weiteres zu

[1] *Zusatz bei der Korrektur:* Kürzlich hat V. S. AZARIN [Verallgemeinerung eines Satzes von Hayman auf subharmonische Funktionen im m-dimensionalen Kegel. Mat. Sbornik **66** (**108**), 248—264 (1965) (Russisch)] für Potentialfunktionen die Ergebnisse von AHLFORS, HEINS und HAYMAN erweitert.

größeren $p(r)$ übergehen kann, solange (0.4) nicht verletzt ist, kann man diese Wachstumsforderung als erfüllt ansehen. Die Monotonie von $r^2 p(r)$ stellt daher im wesentlichen eine Regularitätsforderung an $p(r)$ dar. Für die üblichen Vergleichsfunktionen $p(r) = [r \log r \dots \log_{n-1} r (\log_n r)^{1+\varepsilon}]^{-1}$, wo $\log_n r$ den n-mal iterierten Logarithmus bezeichnet, ist die Forderung für genügend große r erfüllt.

Schließlich sei noch einiges zu der Voraussetzung (0.9) gesagt. Treten als Grenzwerte von a, b und c für $r \to \infty$ beliebige Konstanten auf, so kann dieser Fall auf den im Satz behandelten durch eine lineare Transformation zurückgeführt werden. Ergeben sich als Grenzwerte Funktionen $A(\varphi)$, $B(\varphi)$ bzw. $C(\varphi)$, so läßt sich der Beweisgang der Arbeit entsprechend verallgemeinern, wenn über die Greensche Funktion der Gleichung $Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0$ in E und in den Kreisen $(x-R)^2 + y^2 = R^2$ einiges ausgesagt werden kann. Konvergieren a, b und c nicht für $r \to \infty$, so sind entsprechende Aussagen für die Greenschen Funktionen von $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = 0$ erforderlich.

Der Beweis von Behauptung 3 des Satzes ergibt sich aus den Behauptungen 1 und 2: Zu zeigen ist $u(x, y)/x \geqq \alpha - \varepsilon$ in einem Bereich

$$\left\{|\varphi| \leqq \varphi_0 < \frac{\pi}{2},\ r \geqq r_0(\varphi_0, \varepsilon)\right\} \quad \text{für alle } \varphi_0;$$

eine entsprechende Abschätzung nach oben folgt aus der Definition (0.8) von α und (0.6).

Nach Behauptung 2 existieren nun zu beliebig vorgegebenem $\varphi_0 < \frac{\pi}{2}$ Geraden $\varphi = \varphi_1$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi_1 \leqq -\varphi_0$ und $\varphi = \varphi_2$, $\varphi_0 \leqq \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$, auf denen für $r \geqq r_0(\varepsilon)$ gilt

$$u(x, y)/x \geqq \alpha - \varepsilon .$$

Nach Behauptung 1 ist diese Aussage auch auf gewissen Kreisbögen $\varphi_1 \leqq \leqq \varphi \leqq \varphi_2$, $r = r_1$ und $r = r_2 > r_1 \geqq r_0(\varepsilon)$ richtig, wobei die r_i beliebig groß sein können.

Sei nun $\alpha > 0$ und $\varepsilon < \alpha$. Wegen $X_1 \leqq x$ gilt auf dem Rand des Gebietes $G: \varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, $r_1 < r < r_2$ auch $u(x, y) \geqq (\alpha - \varepsilon) X_1$. Aus $L[u - (\alpha - \varepsilon) X_1] = -(\alpha - \varepsilon) L[X_1] \leqq 0$ folgt nun die Gültigkeit des Minimumprinzips für $u - (\alpha - \varepsilon) X_1$, daher muß in $\bar{G}$ $u(x, y) \geqq (\alpha - \varepsilon) X_1$ gelten. Somit erhält man

$$u(x, y)/x \geqq (\alpha - \varepsilon) X_1/x \geqq \alpha - 2\varepsilon$$

nach (0.6), falls $r_0(\varepsilon)$ genügend groß gewählt wird. Damit ist die Behauptung 3 für $\alpha > 0$ bewiesen, für $\alpha \leqq 0$ verläuft der Beweis entsprechend mit $X(x)$ anstelle von $X_1(x)$.

Zum Beweis der Behauptungen 1 und 2 wird in § 2 eine Integraldarstellung von $u(x, y)$ in E hergeleitet. Diese unterscheidet sich von früheren Darstellungen, man vergleiche z. B. Hervé [4], durch die Verwendung einer bekannten Parametrixfunktion anstelle der Greenschen Funktion. Diese Parametrix

wird in § 1 durch Abänderung der Greenschen Funktion der Potentialgleichung gewonnen. Die dafür möglichen expliziten Abschätzungen erlauben in § 3 die Rückführung des Beweises der Behauptungen 1 und 2 auf den Beweis von AHLFORS und HEINS.

§ 1. Bestimmung einer Parametrixfunktion

In § 2 soll eine Integraldarstellung für $u(x, y)$ in der Halbebene $E: x \geqq 0$ dadurch abgeleitet werden, daß in einer Integraldarstellung in

$$K_R: (x-R)^2 + y^2 < R^2 \tag{1.1}$$

zur Grenze $R \to \infty$ übergegangen wird. Für die Potentialgleichung hat man für K_R bzw. E bekanntlich die Greenschen Funktionen

$$\begin{cases} g(x, y; x_0, y_0) = \log \left| \dfrac{R(z+\bar{z}_0) - z\bar{z}_0}{R(z-z_0)} \right| & (z \in K_R) \\ G(x, y; x_0, y_0) = \log \left| \dfrac{z+\bar{z}_0}{z-z_0} \right| & (z \in E). \end{cases} \tag{1.2}$$

Dabei ist zur Abkürzung die komplexe Schreibweise verwendet worden. Aus (1.2) erhält man

$$\begin{cases} g_x - ig_y = \dfrac{-2Rx_0 + |z_0|^2}{(z-z_0)(R(z+\bar{z}_0) - z\bar{z}_0)} \\ g_{xx} - ig_{xy} = \dfrac{(2Rx_0 - |z_0|^2)(2R(z-iy_0) - 2z\bar{z}_0 + |z_0|^2)}{(z-z_0)^2 (R(z+\bar{z}_0) - z\bar{z}_0)^2} \end{cases} \tag{1.3}$$

und

$$\begin{cases} G_x - iG_y = \dfrac{-2x_0}{(z-z_0)(z+\bar{z}_0)} \\ G_{xx} - iG_{xy} = \dfrac{4x_0(z-iy_0)}{(z-z_0)^2 (z+\bar{z}_0)^2}. \end{cases} \tag{1.4}$$

Diese Funktionen g und G sollen nun in einem Kreis

$$K_0: (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leqq \delta^2 r_0^2 = \varrho_0^2 \quad (\delta r_0 < x_0) \tag{1.5}$$

so abgeändert werden, daß sie eine Parametrixfunktion für $L[u]$ darstellen. $\mathrm{Rd}\, K_0$ und $\mathrm{Rd}\, E$ haben positiven Abstand.

Für die gesuchten Funktionen wird der Ansatz

$$\begin{cases} h(x, y) = \begin{cases} \psi(x, y)\, g(\xi(x, y), \eta(x, y); x_0, y_0) & (z \in K_0) \\ g(x, y; x_0, y_0) & (z \in K_R - K_0) \end{cases} \\ H(x, y) = \begin{cases} \psi(x, y)\, G(\xi(x, y), \eta(x, y); x_0, y_0) & (z \in K_0) \\ G(x, y; x_0, y_0) & (z \in E - K_0) \end{cases} \end{cases} \tag{1.6}$$

gemacht. Die zu bestimmenden Funktionen $\psi(x, y)$, $\xi(x, y)$ und $\eta(x, y)$ sind für h und H dieselben, daher wird vorläufig nur $h(x, y)$ behandelt. Der formal

zu $L[u]$ adjungierte Operator hat das Aussehen

$$L^*[v] \equiv av_{xx} + 2bv_{xy} + cv_{yy} + d^*v_x + e^*v_y + f^*v \tag{1.7}$$

mit

$$d^* = 2a_x + 2b_y - d\,, \quad e^* = 2b_x + 2c_y - e\,,$$
$$f^* = a_{xx} + 2b_{xy} + c_{yy} - d_x - e_y\,.$$

$h(x, y; x_0, y_0)$ soll nun so bestimmt werden, daß $L^*[h]$ auch in (x_0, y_0) endlich bleibt. Man erhält

$$\begin{aligned} L^*[h] = {} & gL^*[\psi] + g_x\{2\psi_x(a\xi_x + b\xi_y) + 2\psi_y(b\xi_x + c\xi_y) + \\ & + \psi(a\xi_{xx} + 2b\xi_{xy} + c\xi_{yy} + d^*\xi_x + e^*\xi_y)\} \\ & + g_y\{2\psi_x(a\eta_x + b\eta_y) + 2\psi_y(b\eta_x + c\eta_y) + \psi(a\eta_{xx} + 2b\eta_{xy} + c\eta_{yy} + \\ & + d^*\eta_x + e^*\eta_y)\} + g_{xx}\psi\{a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2\} \\ & + 2g_{xy}\psi\{a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y\} + g_{yy}\psi\{a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2\}\,. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Es sei dann

$$\psi(z_0) = \psi_0,\ \psi_x(z_0) = \psi_1,\ \psi_y(z_0) = \psi_2,\ \psi_{xx}(z_0) = \psi_{11},\ \cdots$$

mit entsprechenden Festsetzungen für ξ, η und die Koeffizienten. In z_0 ergeben sich die folgenden Bedingungen:

(I) $\psi_0 = 1$

(II) $a_0\psi_{11} + 2b_0\psi_{12} + c_0\psi_{22} + d_0^*\psi_1 + e_0^*\psi_2 + f_0^*\psi_0 = 0$

(III) $2\psi_1(a_0\xi_1 + b_0\xi_2) + 2\psi_2(b_0\xi_1 + c_0\xi_2) + \psi_0(a_0\xi_{11} + 2b_0\xi_{12} + c_0\xi_{22} + d_0^*\xi_1 + e_0^*\xi_2) = 0$

(IV) $2\psi_1(a_0\eta_1 + b_0\eta_2) + 2\psi_2(b_0\eta_1 + c_0\eta_2) + \psi_0(a_0\eta_{11} + 2b_0\eta_{12} + c_0\eta_{22} + d_0^*\eta_1 + e_0^*\eta_2) = 0$

(V) $a_0(\xi_1^2 - \eta_1^2) + 2b_0(\xi_1\xi_2 - \eta_1\eta_2) + c_0(\xi_2^2 - \eta_2^2) = 0$

(VI) $a_0\xi_1\eta_1 + b_0(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + c_0\xi_2\eta_2 = 0$

(VII) $$\begin{aligned} & \xi_{11}(a_0\xi_1 + b_0\xi_2) + \xi_{12}(b_0\xi_1 + c_0\xi_2) - \eta_{11}(a_0\eta_1 + b_0\eta_2) - \\ & - \eta_{12}(b_0\eta_1 + c_0\eta_2) \\ & = -\frac{1}{2}\{a_1(\xi_1^2 - \eta_1^2) + 2b_1(\xi_1\xi_2 - \eta_1\eta_2) + c_1(\xi_2^2 - \eta_2^2)\} = A_7 \end{aligned} \tag{1.9}$$

(VIII) $$\begin{aligned} & \xi_{12}(a_0\xi_1 + b_0\xi_2) + \xi_{22}(b_0\xi_1 + c_0\xi_2) - \eta_{12}(a_0\eta_1 + b_0\eta_2) - \\ & - \eta_{22}(b_0\eta_1 + c_0\eta_2) \\ & = -\frac{1}{2}\{a_2(\xi_1^2 - \eta_1^2) + 2b_2(\xi_1\xi_2 - \eta_1\eta_2) + c_2(\xi_2^2 - \eta_2^2)\} = A_8 \end{aligned}$$

(IX) $$\begin{aligned} & \xi_{11}(a_0\eta_1 + b_0\eta_2) + \xi_{12}(b_0\eta_1 + c_0\eta_2) + \eta_{11}(a_0\xi_1 + b_0\xi_2) + \\ & + \eta_{12}(b_0\xi_1 + c_0\xi_2) \\ & = -a_1\xi_1\eta_1 - b_1(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) - c_1\xi_2\eta_2 = A_9 \end{aligned}$$

(X) $$\begin{aligned} & \xi_{12}(a_0\eta_1 + b_0\eta_2) + \xi_{22}(b_0\eta_1 + c_0\eta_2) + \eta_{12}(a_0\xi_1 + b_0\xi_2) + \\ & + \eta_{22}(b_0\xi_1 + c_0\xi_2) \\ & = -a_2\xi_1\eta_1 - b_2(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) - c_2\xi_2\eta_2 = A_{10}\,. \end{aligned}$$

Dabei ist (I) eine Normierung von $\psi(x, y)$, (II) bedeutet das Verschwinden von $L^*[\psi]$ in z_0, (III)–(VI) besagen das Verschwinden der Koeffizienten von g_x, g_y, g_{xx} und g_{xy} in z_0 (nach Berücksichtigung von $g_{yy} = -g_{xx}$). Da g_{xx} und g_{xy} in z_0 Unendlichkeitsstellen 2. Ordnung haben, verlangen schließlich (VII)–(X), daß auch die ersten Ableitungen der Koeffizienten von g_{xx} und g_{xy} im Punkt z_0 Null sind. Die Notwendigkeit der Einführung von $\psi(x, y)$ kann man an dieser Stelle einsehen: Für $\psi \equiv 1$ stellen (III) und (IV) ebenfalls Gleichungen für $\xi_{11}, \ldots, \eta_{22}$ dar, die zusammen mit (VII)–(X) nicht lösbar zu sein brauchen.

Aus (V) und (VI) erhält man bis auf einen gemeinsamen Faktor

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \sqrt{a_0 c_0 - b_0^2}\sin\vartheta - b_0\cos\vartheta & \xi_2 &= a_0\cos\vartheta \\ \eta_1 &= -b_0\sin\vartheta - \sqrt{a_0 c_0 - b_0^2}\cos\vartheta & \eta_2 &= a_0\sin\vartheta, \end{aligned}$$

wobei ϑ ein freier reeller Parameter ist. Da er für das Weitere belanglos ist, wird $\vartheta = \pi/2$ gewählt:

$$\begin{cases} \xi_1 = \sqrt{\Delta_0}, & \xi_2 = 0 \\ \eta_1 = -b_0, & \eta_2 = a_0. \end{cases} \qquad (\Delta = ac - b^2) \tag{1.10}$$

Zu den obigen Werten von $\xi_1, \ldots, \eta_2$ kommt man einfacher, wenn man berücksichtigt, daß die quadratische Form

$$(\xi_1^2 + \eta_1^2)\lambda^2 + 2(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2)\lambda\mu + (\xi_2^2 + \eta_2^2)\mu^2$$

proportional zu $c_0\lambda^2 - 2b_0\lambda\mu + a_0\mu^2$ sein muß, da $h(x, y)$ eine Näherung für die Greensche Funktion von $L[u] = 0$ in z_0 sein soll. Nun werden (VII)–(X) gelöst. Es reicht hin,

$$\xi_{12} = \eta_{12} = 0 \tag{1.11}$$

zu setzen, wodurch die Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} \xi_{11}(a_0\xi_1 + b_0\xi_2) - \eta_{11}(a_0\eta_1 + b_0\eta_2) &= A_7 \\ \xi_{11}(a_0\eta_1 + b_0\eta_2) + \eta_{11}(a_0\xi_1 + b_0\xi_2) &= A_9 \\ \xi_{22}(b_0\xi_1 + c_0\xi_2) - \eta_{22}(b_0\eta_1 + c_0\eta_2) &= A_8 \\ \xi_{22}(b_0\eta_1 + c_0\eta_2) + \eta_{22}(b_0\xi_1 + c_0\xi_2) &= A_{10} \end{aligned}$$

entstehen. Die Lösungen lauten unter Berücksichtigung von (1.10)

$$\begin{cases} \xi_{11} = \dfrac{A_7}{a_0\sqrt{\Delta_0}}, & \eta_{11} = \dfrac{A_9}{a_0\sqrt{\Delta_0}} \\ \xi_{22} = \dfrac{A_8 b_0 + A_{10}\sqrt{\Delta_0}}{a_0 c_0\sqrt{\Delta_0}}, & \eta_{22} = \dfrac{A_{10} b_0 - A_8\sqrt{\Delta_0}}{a_0 c_0\sqrt{\Delta_0}}. \end{cases} \tag{1.12}$$

Als nächstes werden die Gleichungen (III) und (IV) gelöst, die ein lineares Gleichungssystem für ψ_1 und ψ_2 darstellen. Man erhält wegen der bereits be-

stimmten anderen Unbekannten

$$(1.13)\begin{cases}\psi_1=\dfrac{1}{2a_0\Delta_0}\{(a_0\eta_{11}+c_0\eta_{22}-d_0^*b_0+e_0^*a_0)\,b_0- \\ \qquad\qquad -(a_0\xi_{11}+c_0\xi_{22}+d_0^*\sqrt{\Delta_0})\sqrt{\Delta_0}\} \\ \psi_2=\dfrac{-1}{2\Delta_0}\{a_0\eta_{11}+c_0\eta_{22}-d_0^*b_0+e_0^*a_0\}\,.\end{cases}$$

Schließlich wähle man zur Erfüllung von Gleichung (II) etwa

$$(1.14)\begin{cases}\psi_{12}=\psi_{22}=0 \\ \psi_{11}=-\dfrac{1}{a_0}\{d_0^*\psi_1+e_0^*\psi_2+f_0^*\}\,.\end{cases}$$

Damit sind alle Gleichungen (I)–(X) befriedigt. Um nun die Funktionen ψ, ξ und η auch außerhalb von z_0 zu bestimmen, sei $\varrho=|z-z_0|$ und $\chi(\varrho)$ eine Funktion, die für $0\leqq\varrho\leqq\varrho_0$ monoton von 1 nach 0 abnimmt, wobei in 0 und 1 die Ableitungen bis zur 3. Ordnung Null sind, z. B.

$$(1.15)\qquad \chi(\varrho)=[1-(\varrho/\varrho_0)^4]^4,$$

es gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned}|\chi'(\varrho)| &=|[1-(\varrho/\varrho_0)^4]^3(-16\varrho^3/\varrho_0^4)|\leqq 3/\varrho_0\\ |\chi''(\varrho)| &=|[1-(\varrho/\varrho_0)^4]^2[1-5(\varrho/\varrho_0)^4](-48\varrho^2/\varrho_0^4)|\leqq 11/\varrho_0^2\\ |\chi'''(\varrho)| &=|[1-(\varrho/\varrho_0)^4][-35(\varrho/\varrho_0)^8+20(\varrho/\varrho_0)^4-1](96\varrho/\varrho_0^4)|\leqq 144/\varrho_0^3\,.\end{aligned}$$

Dann sei in K_0 (1.5)

$$(1.16)\begin{cases}\xi(x,y)=x+\chi\Big\{(\xi_1-1)(x-x_0)+ \\ \qquad\qquad +\xi_2(y-y_0)+\xi_{11}\dfrac{(x-x_0)^2}{2}+\xi_{22}\dfrac{(y-y_0)^2}{2}\Big\} \\ \eta(x,y)=y+\chi\Big\{\eta_1(x-x_0)+ \\ \qquad\qquad +(\eta_2-1)(y-y_0)+\eta_{11}\dfrac{(x-x_0)^2}{2}+\eta_{22}\dfrac{(y-y_0)^2}{2}\Big\} \\ \psi(x,y)=1+\chi\Big\{\psi_1(x-x_0)+\psi_2(y-y_0)+\psi_{11}\dfrac{(x-x_0)^2}{2}\Big\}\,.\end{cases}$$

Offenbar werden in z_0 die oben berechneten Werte $\xi_1,\ldots,\psi_{22}$ angenommen, und auf $\mathrm{Rd}K_0$ gehen ξ, η und ψ dreimal stetig differenzierbar in x, y bzw. 1 über. Es sollen nun noch einige Abschätzungen für $L^*[h]$ und $L^*[H]$ abgeleitet werden:

Aus den Voraussetzungen (0.9) und (1.10) bis (1.14) ergibt sich der Reihe nach

$$\begin{aligned}&\xi_1,\eta_2=1+O[r_0p(r_0)],\quad \xi_2,\eta_1=O[r_0p(r_0)],\\ &\xi_{11},\ldots,\eta_{22}=O[p(r_0)],\\ &\psi_1,\psi_2=O[p(r_0)],\quad \psi_{11}=O[p(r_0)/r_0]\,.\end{aligned}$$

Mit $\varrho = |z - z_0| \leqq \varrho_0 = \delta r_0$ erhält man in K_0 unter Berücksichtigung der Abschätzungen für $\chi(\varrho), \ldots, \chi'''(\varrho)$

$$\xi(x, y) = x(1 + 0[r_0 p(r_0)]) \tag{1.17}$$

und weiter

$$\begin{cases} |\xi + i\eta - z_0|^2 = |z - z_0|^2 (1 + O[r_0 p(r_0)]) \\ \xi_x - 1, \xi_y, \eta_x, \eta_y - 1 = O[r_0 p(r_0)] \\ \xi_{xx}, \ldots, \eta_{yy} = O[p(r_0)], \quad \xi_{xxx}, \ldots, \eta_{yyy} = O[p(r_0)/r_0] \\ \psi = 1 + O[r_0 p(r_0)], \quad \psi_x, \psi_y = O[p(r_0)] \\ \psi_{xx}, \psi_{xy}, \psi_{yy} = O[p(r_0)/r_0], \quad \psi_{xxx}, \ldots, \psi_{yyy} = O[p(r_0)/r_0^2]. \end{cases} \tag{1.18}$$

Dabei hängen die Abschätzungen von φ_0 ab, sie gelten gleichmäßig für $x_0 \geqq \delta_1 r_0$, wenn $\delta < \delta_1$ gewählt wird. Setzt man nach (1.8) vorübergehend

$$L^*[h] = A\psi g_{xx} + B\psi g_{xy} + Cg_x + Dg_y + Fg,$$

so folgt wegen des Verschwindens der Koeffizienten in z_0 nach der Taylorschen Formel

$$\begin{aligned} L^*[h] = {} & \frac{1}{2}\psi g_{xx}\{A_{xx}(x - x_0)^2 + 2A_{xy}(x - x_0)(y - y_0) + A_{yy}(y - y_0)^2\} \\ & + \frac{1}{2}\psi g_{xy}\{B_{xx}(x - x_0)^2 + 2B_{xy}(x - x_0)(y - y_0) + B_{yy}(y - y_0)^2\} \\ & + g_x\{C_x(x - x_0) + C_y(y - y_0)\} + g_y\{D_x(x - x_0) + D_y(y - y_0)\} \\ & + g\{F_x(x - x_0) + F_y(y - y_0)\}. \end{aligned}$$

Dabei sind die Ableitungen der Koeffizienten $A, \ldots, F$ an geeigneten Zwischenstellen zu nehmen. Verwendet man jetzt die Voraussetzung (0.9) für die Koeffizienten und die Abschätzungen (1.18), so ergibt sich nach einiger Rechnung

$$\begin{aligned} |L^*[h]| \leqq \{ & \sqrt{g_{xx}^2 + g_{xy}^2}|z - z_0|^2 + \sqrt{g_x^2 + g_y^2}|z - z_0| \\ & + g|z - z_0|/r_0\} O[p([1 - \delta]r_0)/r_0]. \end{aligned}$$

Dabei hat man die Monotonie von $p(r)$ und die Aussage

$$rp(r) \leqq 2 \int_{\frac{r}{2}}^{r} p(t)\, dt = o(1) \tag{1.19}$$

zu beachten. Hier sind (1.2) und (1.3) einzusetzen. Wegen

$$|R(z + \bar{z}_0) - z\bar{z}_0| \geqq R\left(|z + \bar{z}_0| - \frac{|zz_0|}{R}\right) \geqq R(x_0 - (1 + \delta)r_0^2/R) \geqq \delta_2 R r_0$$

für genügend große R sowie wegen (1.18, I) und der bekannten Ungleichung $\log(1 + x) \leqq x$ $(x \geqq 0)$ folgt

$$|L^*[h]| = O[p([1 - \delta]r_0)/r_0] \qquad (z \in K_0). \tag{1.20}$$

Dieselbe Schranke ist auch für $L^*[H]$ richtig. (1.20) gilt gleichmäßig für $x_0 \geqq \delta_1 r_0$ mit $\delta < \delta_1$ und $R \geqq R_0(\delta, r_0)$.

Um auch über die Differenz $h-H$ eine Aussage zu erhalten, leite man aus (1.3) und (1.4) die Abschätzungen

$$|g-G| = \log\left|1-\frac{z\bar{z}_0}{R(z+\bar{z}_0)}\right| = O\left(\frac{r_0}{R}\right)$$

$$|g_x - G_x - i(g_y - G_y)| = O\left(\frac{r_0}{R|z-z_0|}\right) \qquad (z \in K_0) \tag{1.21}$$

$$|g_{xx} - G_{xx} - i(g_{xy} - G_{xy})| = O\left(\frac{r_0}{R|z-z_0|^2}\right)$$

her. Daraus folgt wie oben

$$|L^*[h-H]| = O\left(\frac{p([1-\delta]r_0)}{R}\right) \qquad (z \in K_0) \tag{1.22}$$

gleichmäßig für $x_0 \geqq \delta_1 r_0$, $\delta < \delta_1$ und $R \geqq R_1(\delta, r_0)$.

Aussagen analog zu (1.20) und (1.22) lassen sich außerhalb von K_0 einfach herleiten, da dort $h = g$ ist. Aus

$$|L^*[h]| \leqq \sqrt{(a-c)^2+4b^2}\sqrt{g_{xx}^2+g_{xy}^2} + \sqrt{d^{*2}+e^{*2}}\sqrt{g_x^2+g_y^2} + |f^*|g$$

folgt unter Berücksichtigung von (0.10), (1.2) und (1.3)

$$|L^*[h]| = O\left(\frac{r_0 p(r)}{r(r+r_0)}\right) \qquad (z \in K_R - K_0), \tag{1.23}$$

wiederum gleichmäßig in $x_0 \geqq \delta_1 r_0$, $\delta < \delta_1$ und $R \geqq R_2(\delta, r_0)$.

Dieselbe Schranke gilt für $L^*[H]$ in $E - K_0$, und analog zu (1.22) gewinnt man schließlich

$$|L^*[h-H]| = O\left(\frac{r_0 p(r)}{(r_0+r)R}\right) \qquad (z \in K_R - K_0) \tag{1.24}$$

gleichmäßig in $x_0 \geqq \delta_1 r_0$ und $R \geqq R_3(\delta_1, r_0)$.

§ 2. Eine Integraldarstellung

In diesem Paragraphen soll folgendes bewiesen werden:

Hilfssatz: *Unter den Voraussetzungen des Satzes der Einleitung gilt mit* $H(x, y; x_0, y_0)$ *aus* (1.6) *für alle* $z_0 \in E$

$$2\pi\sqrt{\Delta_0}\, u(x_0, y_0) = \gamma x_0 + 2x_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(0,y)\,u(0,y)}{|iy - z_0|^2}\, dy + \iint_E \{uL^*[H] - HL[u]\}\, d\sigma, \tag{2.1}$$

falls in E $u(x, y) \leqq 0$ *und* $L[u] \geqq 0$ *sind. Ferner sei* $\Delta_0 = a_0 c_0 - b_0^2$ *(im Punkt* z_0*) und* γ *ist eine nichtpositive Konstante.* $L[u]$ *und* $L^*[v]$ *sind in* (0.1) *bzw.* (1.7) *definiert. Alle auftretenden Integrale konvergieren absolut.*

(2.1) wird aus einer Integraldarstellung in K_R (1.1) durch den Grenzübergang $R \to \infty$ abgeleitet. Dieser Weg der Ausschöpfung von E findet sich

für Potentialfunktionen z. B. bei TSUJI ([6], S. 149—150), allerdings erfordern hier die Gebietsintegrale erhebliche Änderungen. Eine Ausschöpfung von E etwa durch die Halbkreise um den Nullpunkt stößt wegen der Singularitäten der Ableitungen der Greenschen Funktion in den Ecken auf Schwierigkeiten.

Der wesentliche Punkt des Beweises ist der Nachweis der absoluten Konvergenz von

$$\iint_E u(x, y)\, L^*[H]\, d\sigma,$$

denn die anderen Integranden in (2.1) haben ein festes Vorzeichen. Dazu wird hilfsweise eine Integraldarstellung mit einer Funktion $v(x, y; x_0, y_0)$ gezeigt, für die

$$|L^*[H]| \leqq C L^*[v]$$

wenigstens für große r gilt.

Um diese Funktion zu ermitteln, werde der Ansatz

$$v = v(h)$$

gemacht, dabei sei $v \equiv h$ für alle großen h, so daß im Aufpunkt z_0 das Verhalten von h maßgebend ist. Für die Konvergenz der Gebietsintegrale über E sind nur große r interessant, daher kann dort $h(x, y) = g(x, y)$ angenommen werden. Es ergibt sich

$$L^*[v] = (a g_x^2 + 2b g_x g_y + c g_y^2)\{v'' + \kappa_1 v' + \kappa_2 v\} \tag{2.2}$$

mit

$$\kappa_1 = \frac{a g_{xx} + 2b g_{xy} + c g_{yy} + d^* g_x + e^* g_y}{a g_x^2 + 2b g_x g_y + c g_y^2}$$

$$\kappa_2 = \frac{f^*}{a g_x^2 + 2b g_x g_y + c g_y^2}.$$

Aus (0.2) und der Schwarzschen Ungleichung erhält man

$$|\kappa_1| \leqq \frac{\sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}\sqrt{g_{xx}^2 + g_{xy}^2} + \sqrt{d^{*2} + e^{*2}}\sqrt{g_x^2 + g_y^2}}{\mu(a+c)(g_x^2 + g_y^2)}$$

$$|\kappa_2| \leqq \frac{|f^*|}{\mu(a+c)(g_x^2 + g_y^2)},$$

unter Berücksichtigung von (0.9) und (1.3) wird schließlich

$$\begin{cases} |\kappa_1| = O[r^2 p(r)] \\ |\kappa_2| = O[r^3 p(r)] \end{cases} \tag{2.3}$$

bei festem z_0 gleichmäßig für $R \geqq R^0(z_0)$. Dann sei

$$v(g) = \int_0^{\alpha g} \int_0^t p\left(\frac{1}{\tau}\right) \frac{d\tau}{\tau^2} \qquad (g \leqq g_0). \tag{2.4}$$

Für $g \geqq g_0$ schließe man $v(g)$ zweimal stetig differenzierbar und monoton an $v \equiv 1$ an, g_0 und α werden noch festgelegt. (2.4) existiert wegen (0.4). Aus (2.4) folgt für $g \leqq g_0$

$$L^*[v] \geqq (ag_x^2 + 2bg_xg_y + cg_y^2)\left\{\frac{1}{g^2}\, p\left(\frac{1}{\alpha g}\right)\right.$$

$$\left. - O[r^2p(r)]\alpha \int_0^{\alpha g} p\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2} - O[r^3p(r)] \int_0^{\alpha g}\int_0^{t} p\left(\frac{1}{\tau}\right)\frac{d\tau}{\tau^2}\, dt\right\}.$$

Das innere Integral ist mit t monoton wachsend, wegen

$$g(x, y) \leqq G(x, y) = \log\left|1 + \frac{2x_0}{z - z_0}\right| = O\left(\frac{1}{r}\right) \leqq \frac{1}{\alpha r}$$

für geeignetes α — das hiermit festgelegt wird — und für genügend große r ergibt sich

$$L^*[v] \geqq (ag_x^2 + 2bg_xg_y + cg_y^2)\frac{1}{g^2}\, p\left(\frac{1}{\alpha g}\right). \tag{2.5}$$

$$\cdot\left\{1 - O[r^2p(r)]\frac{\alpha^2g^2}{p\left(\frac{1}{\alpha g}\right)} \int_0^{\alpha g} p\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}\right\}.$$

Nach Voraussetzung nimmt $r^2p(r)$ für genügend große r monoton zu, setzt man also g_0 genügend klein fest, so kann man in (2.5) im letzten Summanden αg durch $\frac{1}{r}$ ersetzen, wodurch sich der Ausdruck vergrößert:

$$L^*[v] \geqq \mu(a + c)(g_x^2 + g_y^2)\alpha^2r^2p(r)\{1 - O(1)\int_r^{\infty} p(t)\, dt\}.$$

Bei Beachtung von (0.4) und (1.3) ergibt sich schließlich

$$L^*[v] \geqq \alpha_0 \frac{p(r)}{r^2} > 0 \qquad (r \geqq r_1) \tag{2.6}$$

gleichmäßig in R für $R \geqq R^1(z_0)$.

Für Gebiete mit genügend glattem Rand hat man nun bekanntlich auf Grund des Gaußschen Satzes die Integralrelation

$$\iint_G \{vL[u] - uL^*[v]\}\, d\sigma = \int_{\mathrm{Rd}\, G} \left\{\left(-v\frac{\partial u}{\partial n} + u\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds + uv\omega\right\}, \tag{2.7}$$

wobei

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial n}\, ds = -(au_x + bu_y)\, dy + (bu_x + cu_y)\, dx \\ \omega = (d - a_x - b_y)\, dy - (e - b_x - c_y)\, dx \end{cases} \tag{2.8}$$

ist.

Schließt man in (2.7) in üblicher Weise den Aufpunkt z_0 durch einen kleinen Kreis aus, dessen Radius man dann gegen Null gehen läßt, so ergibt sich mit der oben bestimmten Funktion $v(h)$

$$2\pi\sqrt{\Delta_0}\,u(x_0,y_0)=\int_{\mathrm{Rd}\,G}\left\{\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds+uv\omega\right\}$$

(2.9)

$$+\iint_G\{uL^*[v]-vL[u]\}\,d\sigma$$

mit $\Delta_0=a_0c_0-b_0^2$. In der Umgebung von z_0 hat man nämlich nach (1.6), (1.16) und (1.18)

(2.10)

$$\begin{aligned}v(x,y)&=h(x,y)\\&=-\frac{1}{2}\log\{c_0(x-x_0)^2-2b(x-x_0)(y-y_0)+a_0(y-y_0)^2\}+h^*(x,y),\end{aligned}$$

wobei $h^*(x,y)=O(|z-z_0|\log|z-z_0|)$ für $|z-z_0|\to 0$ gilt.

Als Gebiet G wähle man weiter den Kreis $K_R^\varepsilon:(x-R)^2+y^2<(R-\varepsilon)^2$ ($\varepsilon>0$), da $v(h)$ für $h=0$ nur einmal stetig differenzierbar ist. Läßt man dann $\varepsilon\to 0$ gehen, so konvergieren alle Integrale ohne weiteres gegen die entsprechenden für $K_R=K_R^0$ bis auf

(2.11)

$$\iint_{K_R^\varepsilon}uL^*[v]\,d\sigma\,.$$

Um hier die Konvergenz zu untersuchen, ist $L^*[v]$ in der Nähe des Randes von K_R zu betrachten. Dort sind in $uL^*[v]$ wieder alle Ausdrücke bis auf $v''(h)$ beschränkt, man erhält mit von r_0 und R abhängigen Konstanten α_1, α_2 und δ

$$|uL^*[v]|\leqq\alpha_1+\alpha_2\frac{1}{\alpha^2g^2}p\left(\frac{1}{\alpha g}\right)\quad(R-\delta\leqq|z-R|\leqq R).$$

Wird für den Augenblick $|z-R|=\varrho$ gesetzt, so gilt

$$g\geqq\alpha_3(R-\varrho)\qquad(R-\delta\leqq|z-R|\leqq R)$$

für geeignete Wahl der Konstanten und damit wegen der Monotonie von $r^2p(r)$ für große r

$$|uL^*[v]|\leqq\alpha_1+\alpha_4\frac{1}{(R-\varrho)^2}p\left(\frac{1}{\beta(R-\varrho)}\right).$$

Somit ergibt sich für (2.11)

$$\begin{aligned}\iint_{R-\delta\leqq\varrho\leqq R-\varepsilon}|uL^*[v]|\,d\sigma&\leqq 2\pi R\int_{R-\delta}^{R-\varepsilon}\left\{\alpha_1+\alpha_4\frac{1}{(R-\varrho)^2}p\left(\frac{1}{\beta(R-\varrho)}\right)\right\}d\varrho\\&\leqq 2\pi R\{\alpha_1\delta+\alpha_5\int_{1/\beta\delta}^{1/\beta\varepsilon}p(t)\,dt\}\end{aligned}$$

und das letzte Integral konvergiert für $\varepsilon\to 0$ wegen der Voraussetzung (0.4) für $p(r)$.

Damit konvergiert auch das Integral (2.11) für $\varepsilon\to 0$ gegen das entsprechende Integral über K_R und man erhält (2.9) für das oben bestimmte

$v(h)$ im Gebiet K_R. Dabei fallen die Integrale über $\mathrm{Rd}\,K_R$ fort, denn für genügend großes R ist dort $h=g$ und damit $g=0$, also auch $v=0$. Außerdem sind aber auch $v_x=v'g_x$ und $v_y=v'g_y$ Null, da v' für $g=0$ nach (2.4) verschwindet. Es ergibt sich schließlich

$$2\pi\sqrt{\Delta_0}\,u(x_0,y_0)=\iint_{K_R}\{uL^*[v]-vL[u]\}\,d\sigma \tag{2.12}$$

mit dem $v(h)$ aus (2.4).

Mit Hilfe von (2.12) soll durch den Grenzübergang $R\to\infty$ die absolute Konvergenz des Integrals

$$\int\int_E u\frac{p(r)}{r^2}\,d\sigma \tag{2.13}$$

gezeigt werden. Dazu sei

$$V(x,y;x_0,y_0)=v(H(x,y;x_0,y_0)) \tag{2.14}$$

mit dem H aus (1.6). Aus (2.12) ergibt sich als erstes wegen $v\geqq 0$ und $L[u]\geqq 0$

$$2\pi\sqrt{\Delta_0}\,u(x_0,y_0)\leqq\iint_{K_R}uL^*[v]\,d\sigma\,. \tag{2.15}$$

Man zerlege nun K_R in $K_1=K_R\cap\{r>r_1\}$ und $K_2=K_R-K_1$, wobei r_1 so groß gewählt sei, daß nach (2.6) $L^*[v]\geqq 0$ in K_1 gilt. Es muß zuerst das Integral über K_2 behandelt werden, da über dessen Vorzeichen nichts bekannt ist. Dazu sei noch $E_2=\{0\leqq r<r_1,\ x\geqq 0\}$ und $E_1=E-E_2$, man erhält

$$\lim_{R\to\infty}\iint_{K_2}uL^*[v]\,d\sigma=\iint_{E_2}uL^*[V]\,d\sigma\,. \tag{2.16}$$

Zum Beweis von (2.16) bilde man nochmals $G_\varepsilon=E_2\cap\{x>\varepsilon\}$, K_2 enthält G_ε für genügend großes R. In G_ε geht nach (1.6), (1.21) und (2.4) sicher $L^*[V-v]$ gleichmäßig gegen Null für $R\to\infty$, so daß man als erstes

$$\lim_{R\to\infty}\iint_{G_\varepsilon}uL^*[v]\,d\sigma=\iint_{G_\varepsilon}uL^*[V]\,d\sigma \tag{2.17}$$

hat. Die Differenzen der rechten bzw. der linken Seiten von (2.16) und (2.17) lassen sich mit ε beliebig klein machen. Für

$$\iint_{E_2-G_\varepsilon}uL^*[V]\,d\sigma$$

ergibt sich das analog zu der Abschätzung von (2.11), da dann $H(x,y)\geqq\alpha_0 x$ ist. Für

$$\iint_{K_2-G_\varepsilon}uL^*[v]\,d\sigma \tag{2.18}$$

sind gemäß (2.2) und (2.4) alle Summanden gleichmäßig in R wegen $h(x,y)\leqq$ $\leqq H(x,y)$ beschränkt — so daß die entsprechenden Integrale mit ε klein werden — bis auf

$$(ag_x^2+2bg_xg_y+cg_y^2)v''=(ag_x^2+2bg_xg_y+cg_y^2)\frac{1}{g^2}p\Big(\frac{1}{\alpha g}\Big)\,.$$

Dabei kann für genügend kleines ε in K_2-G_ε sicher $h=g$ vorausgesetzt werden. Da $u(x,y)$ und $ag_x^2+2bg_xg_y+cg_y^2$ unabhängig von R abgeschätzt

werden können, bleibt in (2.18) nur

$$\int\int\limits_{K_2-G_\varepsilon} \frac{1}{g^2}\, p\Big(\frac{1}{\alpha g}\Big)\, d\sigma$$

zu prüfen. Sind ϱ und ϑ Polarkoordinaten um $z=R$, so erhält man aus (1.2)

$$g(x,y) \geqq \beta(R-\varrho)$$

mit $\beta=\beta(z_0)$. Dies ergibt wegen der Monotonie von $r^2 p(r)$ für genügend große r

$$\int\int\limits_{K_2-G_\varepsilon} \frac{1}{g^2}\, p\Big(\frac{1}{\alpha g}\Big)\, d\sigma \leqq \int\limits_{\pi-\gamma_0}^{\pi+\gamma_0} \int\limits_{R-\varepsilon}^{R} \frac{1}{\beta^2(R-\varrho)^2}\, p\Big(\frac{1}{\alpha\beta(R-\varrho)}\Big)\, \varrho\, d\varrho\, d\vartheta \leqq$$

$$\leqq 2\gamma_0 R\, \frac{\alpha}{\beta} \int\limits_{1/\alpha\beta\varepsilon}^{\infty} p(t)\, dt\,.$$

Nun ist aber $\gamma_0 = O(r_1/R)$, also geht auch (2.18) gleichmäßig in R für $\varepsilon \to 0$ gegen Null. Somit ist (2.16) bewiesen und man erhält aus (2.15)

$$C_1 \leqq \int\int\limits_{K_1} uL^*[v]\, d\sigma \leqq 0 \tag{2.19}$$

gleichmäßig in R für $R \geqq R^2(z_0)$. Die rechte Ungleichung in (2.19) ergibt sich aus $u \leqq 0$ und $L^*[v] \geqq 0$ in K_1, letzteres nach der Wahl von K_1 im Anschluß an (2.15). Nach (2.6) ergibt sich nun

$$C_2 \leqq \int\int\limits_{K_1} u\, \frac{p(r)}{r^2}\, d\sigma \leqq 0$$

gleichmäßig in R für $R \geqq R^3(z_0)$; da R hier nur noch in den Grenzen von K_1 auftritt, folgt schließlich

$$-\infty < \int\int\limits_{E_1} u\, \frac{p(r)}{r^2}\, d\sigma \leqq 0\,.$$

Damit ist (2.13) als erstes Ziel gezeigt, denn das Integral über E_2 ist selbstverständlich endlich:

$$-\infty < \int\int\limits_{E} u\, \frac{p(r)}{r^2}\, d\sigma \leqq 0\,. \tag{2.13}$$

Jetzt kann die eigentliche Ableitung der Integralformel (2.1) durchgeführt werden. Man wende (2.9) mit $G=K_R$ und $v(x,y)=h(x,y)$ an. Wegen $h=0$ auf $\mathrm{Rd}\, K_R$ erhält man

$$2\pi/\sqrt{\Delta_0}\, u(x_0,y_0) = \int\limits_{\mathrm{Rd}\, K_R} u\, \frac{\partial h}{\partial n}\, ds + \int\int\limits_{K_R} \{uL^*[h] - hL[u]\}\, d\sigma\,. \tag{2.20}$$

Hier ergibt sich durch den Grenzübergang $R \to \infty$ die gewünschte Integraldarstellung. Dazu müssen die Summanden auf der rechten Seite von (2.20) einzeln untersucht werden, für den mittleren folgt

$$\Big|\int\int\limits_{E} uL^*[H]\, d\sigma - \int\int\limits_{K_R} uL^*[h]\, d\sigma\Big| \leqq \int\int\limits_{K_{R_0}} |uL^*[H-h]|\, d\sigma + \int\int\limits_{E-K_{R_0}} |uL^*[H]|\, d\sigma + \int\int\limits_{K_R-K_{R_0}} |uL^*[h]|\, d\sigma\,.$$

Wegen (1.20), (1.23) sowie wegen des soeben bewiesenen (2.13) sind hier der zweite und dritte Summand rechts zusammen $<\varepsilon/2$ gleichmäßig für $R \geqq R_0$, falls R_0 groß genug gewählt wird. Wegen (1.22) und (1.24) ist dann auch der erste Summand $<\varepsilon/2$ für $R \geqq R_1(\varepsilon, R_0)$. Damit ist bewiesen:

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{K_R} uL^*[h]\,d\sigma = \iint_E uL^*[H]\,d\sigma, \tag{2.21}$$

alle Integrale konvergieren absolut.

Als nächstes wird in (2.20) das Integral

$$\iint_{K_R} hL[u]\,d\sigma \tag{2.22}$$

betrachtet. Später ergibt sich in (2.25), daß $\dfrac{\partial h}{\partial n}\,ds$ für alle genügend großen R positiv ist, das Randintegral in (2.20) also negativ. Daher und wegen (2.21) ist (2.22) gleichmäßig in R nach oben beschränkt. Andererseits ist $hL[u] \geqq 0$ nach Voraussetzung, so daß (2.22) gleichmäßig in R beschränkt ist. Bekanntlich ist $g(x, y)$ und damit $h(x, y)$ für festes (x, y) mit R monoton wachsend, da auch K_R größer wird, existiert der Grenzwert von (2.22) für $R \to \infty$.

Für jeden beschränkten Bereich B gilt somit nach (1.21) und (1.6)

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{K_R \cap B} hL[u]\,d\sigma = \iint_B HL[u]\,d\sigma \leqq \lim_{R\to\infty} \iint_{K_R} hL[u]\,d\sigma < \infty.$$

Also existiert

$$\iint_E HL[u]\,d\sigma,$$

und aus bekannten Sätzen folgt

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{K_R} hL[u]\,d\sigma = \iint_E HL[u]\,d\sigma. \tag{2.23}$$

Aus (2.20) hat sich somit

$$2\pi\sqrt{\Delta_0}\,u(x_0, y_0) = \int\int_E \{uL^*[H] - HL[u]\}\,d\sigma + \lim_{R\to\infty} \int_{\mathrm{Rd}\,K_R} u\frac{\partial h}{\partial n}\,ds \tag{2.24}$$

ergeben. Um hier den letzten Grenzwert zu bestimmen, beachte man, daß für genügend große R sicher K_0 (1.5) in K_R (1.1) enthalten ist, so daß auf $\mathrm{Rd}\,K_R$ $h = g$ gilt. Damit folgt nach (2.8) und (1.3)

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial n}\,ds &= -(ag_x + bg_y)dy + (bg_x + cg_y)dx \\ &= \frac{-2Rx_0 + |z_0|^2}{|R + Re^{2i\varphi} - z_0|^2 R}\{-(a\cos 2\varphi + b\sin 2\varphi)dy + \\ &\quad + (b\cos 2\varphi + c\sin 2\varphi)dx\}.\end{aligned}$$

In Polarkoordinaten hat K_R die Darstellung

$$K_R: x = 2R\cos^2\varphi, \quad y = 2R\cos\varphi\sin\varphi \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}\right),$$

also ergibt sich

$$\frac{\partial h}{\partial n}\,ds = \frac{4Rx_0 - 2|z_0|^2}{|R + Re^{2i\varphi} - z_0|^2}\{a\cos^2 2\varphi + 2b\cos 2\varphi \sin 2\varphi + c\sin^2 2\varphi\}\,d\varphi. \tag{2.25}$$

Man setze nun

$$\begin{cases} \eta = R(\pi - 2\varphi) & \left(\frac{\pi}{2} - \frac{L}{2R} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}\right) \\ \eta = -R(\pi + 2\varphi) & \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq -\frac{\pi}{2} + \frac{L}{2R}\right) \end{cases} \tag{2.26}$$

mit einer beliebigen, positiven Zahl L. Es gilt $\eta \in [L, 0]$ bzw. $[0, -L]$ und

$$d\varphi = -\frac{d\eta}{2R}, \qquad \begin{aligned} \cos 2\varphi &= -\cos\eta/R, & x &= R(1 - \cos\eta/R) \\ \sin 2\varphi &= \sin\eta/R, & y &= R\sin\eta/R. \end{aligned}$$

Daher wird

$$\left\{ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}+\frac{L}{2R}} + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{L}{2R}}^{\frac{\pi}{2}} \right\} u\frac{\partial h}{\partial n}\,ds$$

$$= \int_{-L}^{L} u\,\frac{2x_0 - |z_0|^2/R}{|R - Re^{i\eta/R} - z_0|^2}\left\{a\cos^2\frac{\eta}{R} - 2b\cos\frac{\eta}{R}\sin\frac{\eta}{R} + c\sin^2\frac{\eta}{R}\right\}d\eta$$

und

$$\lim_{R\to\infty}\left\{ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}+\frac{L}{2R}} + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{L}{2R}}^{\frac{\pi}{2}} \right\} u\frac{\partial h}{\partial n}\,ds = 2x_0 \int_{-L}^{L} \frac{a(0,\eta)\,u(0,\eta)}{|i\eta - z_0|^2}\,d\eta. \tag{2.27}$$

Für das Restintegral beachte man

$$\begin{aligned} |R + Re^{2i\varphi} - z_0|^2 &= 4R^2\cos^2\varphi + r_0^2 - 4Rr_0\cos\varphi\cos(\varphi - \varphi_0) \\ &= 4R^2\cos^2\varphi\left(1 + \frac{r_0^2}{4R^2\cos^2\varphi} - \frac{r_0\cos(\varphi - \varphi_0)}{R\cos\varphi}\right) \\ &= 4R^2\cos^2\varphi(1 + O[r_0/L]) \end{aligned}$$

gleichmäßig in R und φ, da hier $\cos\varphi \geqq \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{L}{2R}\right) \geqq \frac{L}{\pi R}$ gilt. Es folgt aus (2.25)

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}+\frac{L}{2R}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{L}{2R}} u\frac{\partial h}{\partial n}\,ds$$

$$= x_0 \lim_{R\to\infty} \int_{-\frac{\pi}{2}+\frac{L}{2R}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{L}{2R}} u\,\frac{a\cos^2 2\varphi + 2b\cos 2\varphi\sin 2\varphi + c\sin^2 2\varphi}{R\cos^2\varphi(1 + O[r_0/L])}\,d\varphi. \tag{2.28}$$

Bildet man für die Summe von (2.27) und (2.28) den Grenzwert für $L\to\infty$, so muß dieser jedenfalls existieren. Für (2.27) existiert er aber auch allein, da (2.28) nicht positiv ist, so daß (2.27) gleichmäßig in L nach unten beschränkt ist. Also existiert auch in (2.28)

$$\lim_{L\to\infty}\lim_{R\to\infty}\int_{-\frac{\pi}{2}+\frac{L}{2R}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{L}{2R}} u\,\frac{a\cos^2 2\varphi+2b\cos 2\varphi\sin 2\varphi+c\sin^2 2\varphi}{R\cos^2\varphi(1+O[r_0/L])}\,d\varphi=\gamma. \tag{2.29}$$

γ ist nun von (x_0, y_0) unabhängig, denn in (2.28) muß der Grenzwert der rechten Seite auch ohne den Faktor $1+O[r_0/L]$ mindestens für eine Folge $R_n\to\infty$ existieren, da die Integrale gleichmäßig in R beschränkt sind. Damit läßt sich in (2.29) aber leicht die Unabhängigkeit von (x_0, y_0) zeigen.

(2.27) bis (2.29) liefern nun zusammen mit (2.24) die gewünschte Integraldarstellung

$$2\pi\sqrt{\Delta_0}\,u(x_0,y_0)=\gamma x_0+2x_0\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a(0,\eta)\,u(0,\eta)}{|i\eta-z_0|^2}\,d\eta+\iint_E\{uL^*[H]-HL[u]\}\,d\sigma. \tag{2.1}$$

§ 3. Beweis des Satzes der Einleitung

In der obigen Integraldarstellung soll der Grenzwert von $u(x_0, y_0)/x_0$ für $r_0\to\infty$ untersucht werden. Für $z_0=1$ erhält man aus (2.1)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a(0,\eta)\,u(0,\eta)}{1+\eta^2}\,d\eta<\infty$$

und daraus läßt sich in bekannter Weise der Grenzwert

$$\lim_{r_0\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a(0,\eta)\,u(0,\eta)\,d\eta}{|i\eta-z_0|^2}=0 \tag{3.1}$$

ableiten, der gleichmäßig in jedem Winkelraum $|\varphi_0|\leqq\Phi<\frac{\pi}{2}$ gilt.

Als nächstes soll

$$\frac{1}{x_0}\iint_E uL^*[H]\,d\sigma$$

untersucht werden. Mit dem Kreis K_0 aus (1.5) wird der Integrationsbereich in K_0 und $E-K_0$ zerlegt. In K_0 gilt nach (1.20)

$$\frac{1}{x_0}\iint_{K_0}|uL^*[H]|\,d\sigma=\frac{1}{x_0}\iint_{K_0}|u|\,O\Big[\frac{1}{r_0}\,p([1-\delta]r_0)\Big]\,d\sigma\leqq$$

$$\leqq O\Big(\frac{p([1-\delta]r_0)}{r_0^2}\Big)\cdot\frac{r_0^2}{p([1+\delta]r_0)}\iint_{K_0}|u|\,\frac{p(r)}{r^2}\,d\sigma.$$

Nun ist $p(r)r^2$ für genügend großes r monoton wachsend, also folgt

$$\frac{1}{x_0}\iint\limits_{K_0} |uL^*[H]|\,d\sigma \leqq O(1)\iint\limits_{K_0} |u|\,\frac{p(r)}{r^2}\,d\sigma\,.$$

Aus (2.13) ergibt sich damit

$$\lim_{r_0\to\infty}\frac{1}{x_0}\iint\limits_{K_0} uL^*[H]\,d\sigma = 0\,, \tag{3.2}$$

gleichmäßig in jedem Winkelraum $|\varphi_0| \leqq \Phi < \frac{\pi}{2}$.

Um das Integral über $E - K_0$ zu untersuchen, sei $G_0 = (E - K_0) \cap \{r \geqq \sqrt{r_0}\}$, nach (1.23) gilt

$$\frac{1}{x_0}\iint\limits_{G_0} |uL^*[H]|\,d\sigma \leqq O(1)\iint\limits_{G_0} |u|\,\frac{p(r)}{r^2}\,d\sigma\,.$$

Aus (2.13) folgt daher

$$\lim_{r_0\to\infty}\frac{1}{x_0}\iint\limits_{G_0} uL^*[H]\,d\sigma = 0\,, \tag{3.3}$$

wiederum gleichmäßig in jedem Winkelraum $|\varphi_0| \leqq \Phi < \frac{\pi}{2}$.

Schließlich gilt für $E - K_0 - G_0$ nach (1.23)

$$\frac{1}{x_0}\iint\limits_{E-K_0-G_0} |uL^*[H]|\,d\sigma \leqq \iint\limits_{E-K_0-G_0} |u|\,O\left(\frac{r}{r_0}\,\frac{p(r)}{r^2}\right)d\sigma \leqq$$

$$\leqq O\left(\frac{1}{\sqrt{r_0}}\right)\iint\limits_{E} |u|\,\frac{p(r)}{r^2}\,d\sigma\,,$$

und wieder erhält man gleichmäßig für $|\varphi| \leqq \Phi < \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{r_0\to\infty}\frac{1}{x_0}\iint\limits_{E-K_0-G_0} uL^*[H]\,d\sigma = 0\,. \tag{3.4}$$

Für die rechte Seite der Integraldarstellung (2.1) ist daher mit (3.1)–(3.4) gezeigt

$$\lim_{r_0\to\infty}\left\{2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a(0,\eta)\,u(0,\eta)}{|i\eta - z_0|^2}\,d\eta + \gamma + \frac{1}{x_0}\iint\limits_{E} uL^*[H]\,d\sigma\right\} = \gamma \leqq 0\,, \tag{3.5}$$

gleichmäßig in jedem Winkelraum $|\varphi| \leqq \Phi < \frac{\pi}{2}$. Für $u(x_0, y_0)/x_0$ ist somit nur noch der Ausdruck

$$-\frac{1}{x_0}\iint_E HL[u]\,d\sigma \tag{3.6}$$

entscheidend.

Es soll zuerst der Fall $\alpha = 0$ (0.8) behandelt werden. Dann existiert sicher eine Punktfolge (x_{0n}, y_{0n}) mit $x_{0n} \to \infty$ und

$$\lim_{n\to\infty} u(x_{0n}, y_{0n})/x_{0n} = 0, \tag{3.7}$$

denn sonst wäre $u(x, y) + \varepsilon X_1(x)$ mit dem $X_1(x)$ aus (0.5) und einem geeigneten $\varepsilon > 0$ nur in einem gewissen Streifen $0 < x < \bar{x}$ positiv, was den Ergebnissen von SERRIN [5] widerspricht. Damit folgt in (3.5)

$$\gamma = 0, \tag{3.8}$$

denn (3.6) kann zu dem Grenzwert von $u(x_0, y_0)/x_0$ höchstens einen negativen Beitrag leisten.

Um nun (3.6) zu untersuchen, beachte man, daß aus (1.2) folgt

$$G(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{4xx_0}{|z - z_0|^2}\right).$$

Damit ergibt sich aus (1.6) und (1.18) in K_0

$$H(x, y; x_0, y_0) = \frac{1 + O[r_0 p(r_0)]}{2}\log\left\{1 + \frac{4xx_0}{|z - z_0|^2}(1 + O[r_0 p(r_0)])\right\}$$

und weiter

$$\frac{H(x, y; x_0, y_0)}{G(x, y; x_0, y_0)} = 1 + O[r_0 p(r_0)], \tag{3.9}$$

denn es ist

$$1 \leqq \frac{\log(1 + \lambda t)}{\log(1 + t)} \leqq \lambda \qquad (0 \leqq t < \infty,\ \lambda > 1)$$

mit Umkehrung der Ungleichungsrichtungen für $\lambda < 1$. Durch (3.9) ist die Untersuchung von (3.6) auf die von

$$F(x_0, y_0) = \frac{1}{x_0}\iint_E G(x, y; x_0, y_0)\, L[u(x, y)]\,d\sigma \tag{3.10}$$

zurückgeführt. Wegen (3.7) und (3.8) muß dieser Ausdruck sicher in einer Punktfolge (x_{0n}, y_{0n}) mit $x_{0n} \to \infty$ gegen Null konvergieren. Für den Ausdruck (3.10) haben dann aber AHLFORS und HEINS [1] gezeigt:

$$\lim_{r_0 \to \infty} F(x_0, y_0) = 0 \tag{3.11}$$

einerseits bis auf eine φ_0-Menge der äußeren logarithmischen Kapazität Null, andererseits gleichmäßig für $|\varphi_0| \leqq \Phi < \frac{\pi}{2}$, wenn r_0 außerhalb einer Menge

endlichen logarithmischen Maßes verläuft. Diese Aussagen müssen auch für (3.6) richtig sein und daher wegen (3.5), (3.8) und (2.1) für $u(x_0, y_0)$ selbst, womit der Satz der Einleitung im Fall $\alpha = 0$ bewiesen ist.

Die Fälle $\alpha \neq 0$ lassen sich nun leicht auf $\alpha = 0$ zurückführen. Ist $\alpha > 0$, so gilt nach (0.8a) $u(x, y) \leqq \alpha X(x)$ und $v(x, y) = u(x, y) - \alpha X(x)$ erfüllt wegen (0.6) die geforderten Voraussetzungen (0.1), (0.7) und ist $\leqq 0$ in E. Da nach SERRIN [5] in einer Punktfolge mit $x_n \to \infty$ $u(x_n, y_n)/X(x_n) \to \alpha$ konvergiert, muß in der gleichen Punktfolge wegen (0.6) $v(x_n, y_n)/X_1(x_n) \to 0$ gelten. Also ist $\alpha_v = 0$ und die vorigen Betrachtungen liefern die Behauptung des Satzes für $v(x, y)$, damit ergeben sie sich auch für $u(x, y)$. Entsprechend wird der Fall $\alpha < 0$ durch Betrachtung von $v(x, y) = u(x, y) - \alpha X_1(x)$ auf $\alpha = 0$ zurückgeführt.

Übrigens hat man durch Einführung des $v(x, y)$ auch eine Integraldarstellung für $\alpha > 0$, denn die Integrale mit $X(x)$ konvergieren alle absolut, wie man leicht nachprüfen kann.

Literatur

[1] AHLFORS, L. V., and M. H. HEINS: Questions of regularity connected with the Phragmén-Lindelöf principle. Ann. Math. **50**, 341—346 (1949).

[2] HABETHA, K.: Regularitätsfragen beim Phragmén-Lindelöfschen Prinzip für elliptische Differentialgleichungen. Math. Z. **85**, 291—313 (1964).

[3] HAYMAN, W. K.: Questions of regularity connected with the Phragmén-Lindelöf principle. J. math. pures appl. **35**, 115—126 (1956).

[4] HERVÉ, R.-M.: Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmonique et du potentiel. Thèse, Paris 1961.

[5] SERRIN, J.: On the Phragmén-Lindelöf principle for elliptic differential equations. J. Rational Mech. Anal. **3**, 395—413 (1954).

[6] TSUJI, M.: Potential theory in modern function theory. Tokyo: Maruzen Co. 1959.

Dr. KLAUS HABETHA
Mathematisches Institut der TU Berlin
1 Berlin 12, Hardenbergstr. 34

(Eingegangen am 28. Juli 1965)

MARUHN, K.
Math. Annalen 165, 111—116 (1966)

Einige Bemerkungen zur Theorie der Gezeiten

Herrn ERNST HÖLDER zum 65. Geburtstag gewidmet

K. MARUHN

Kürzlich gelang es H. BECKERT [1], für das Grundproblem der Kanaltheorie der Gezeiten zu weitreichenden Existenzaussagen zu kommen. In diesem Zusammenhang scheint mir ein Modell des Gezeitenphänomens von Interesse, das sich in einfacher Weise aus der Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten ergibt.

Die Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, die eng mit den Namen POINCARÉ, LIAPOUNOFF, LICHTENSTEIN u. a. verbunden ist und auch E. HÖLDER (vgl. z. B. [3], [4]) wichtige Fortschritte verdankt, beschäftigt sich mit Flüssigkeiten, die wie starre Körper gleichförmig um eine räumlich feste Achse rotieren.

Damit unser Modell dem in [1] Untersuchten entspricht[1], möge um eine räumlich feste Achse ein unendlich langer Zylinder rotieren, dessen Mantellinien parallel zur Rotationsachse verlaufen. Es handele sich um eine ebene Bewegung, die wir in einer x, y-Ebene beschreiben:

Um die aus fester Materie bestehende Kreisfläche T_0 (Rand S_0, Radius R_0, konstante Dichte f_0) sei eine inkompressible Flüssigkeit der konstanten Dichte f mit der freien Oberfläche S_1 gelagert. S_1 liege in der Nachbarschaft des Kreises S (Radius $R > R_0$), und zwar derart, daß die von S_1 bzw. S berandeten Gebiete T_1 und T den gleichen Flächeninhalt haben (vgl. hierzu auch [4]). Mittelpunkt der Kreislinien S_0 und S ist der Koordinatenursprung O. In der Entfernung L von O befinde sich außerhalb von S_1 ein punktförmiger Störkörper der Masse M („Mond"). Störkörper und Flüssigkeit sollen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_1 als starre Konfiguration um O rotieren, wobei die Flüssigkeit („Meer") reibungsfrei an der Oberfläche S_0 der „Erde" T_0 entlanggleite. Gesucht ist S_1 als freie Oberfläche, d. h. es muß dort der Druck und das Gesamtpotential konstant sein. Verglichen mit den Verhältnissen auf einer Kugel können wir in einer genügend kleinen Kugelzone in der Nähe des Äquators unsere Figur als eine „Gezeitenwelle" auffassen, die dem „Mond" folgt.

Den folgenden Betrachtungen liegt die Lichtensteinsche Theorie der Gleichgewichtsfiguren zugrunde (vgl. hierzu vor allem [2]), auf die der Kürze halber ein für allemal verwiesen sei. Es wird gezeigt, daß in dem (praktisch interessierenden) Fall $f_0 > f$ bei genügend langsamer Rotationsbewegung und

[1] Zu den physikalischen Hypothesen der Gezeitentheorie orientiere man sich etwa in [6].

für entsprechend kleine Werte von R/L genau eine Figur der gewünschten Art existiert. Die Randkurve S_1 ist in erster Näherung eine Ellipse, deren große Achse zum Mond hinweist. Im Falle $f_0 < f$ können daneben noch für endlich viele R_0/R weitere Figuren („Verzweigungsfiguren") auftreten. — Schließlich wird noch kurz auf den störungsfreien Fall ($M=0$) bei nicht notwendig kleiner Rotationsgeschwindigkeit und auf die hier möglichen Verzweigungslösungen hingewiesen. Hierbei kann weitgehend auf Rechnungen verwiesen werden, die der Verf. vor längerer Zeit für ein einfacheres Modell durchführte [5][1a].

§ 1. Die Integro-Differentialgleichung

Es seien $P(R, \varphi)$ bzw. $P_1(R+\zeta, \varphi)$ die Schnittpunkte des unter dem Winkel φ von O ausgehenden Strahles mit S bzw. S_1. Das Ziel ist, $\zeta(s)$ mit $s = R\varphi$ und damit S_1 zu bestimmen. ζ habe eine stetige Ableitung erster Ordnung; $|\zeta|$ und $\left|\frac{d\zeta}{ds}\right|$ werden als hinreichend klein vorausgesetzt.

Es bezeichnen weiter κU_1, κU und κV die Gravitationspotentiale von T_1, T (Dichte f) und von T_0 (Dichte $f_0 - f$), κG das Potential des Störkörpers (κ die Gravitationskonstante). Dann ist die Flüssigkeit genau dann im (relativen) Gleichgewicht, wenn das Gesamtpotential, bezogen auf ein mit der Konfiguration verbundenes, mitrotierendes Achsenkreuz (Winkelgeschwindigkeit ω_1) auf S_1 konstant ist, d. h. es gilt für alle $P_1 \in S_1$

$$\kappa U_1(P_1) + \kappa V(P_1) + \kappa G(P_1) + \frac{\omega_1^2}{2}(R+\zeta)^2 = C_1, \quad (C_1 \text{ konstant}). \tag{1}$$

Hierbei ist mit $x^2 + y^2 = r^2$

$$\kappa G(r, \varphi) = \frac{3}{2}\frac{\kappa M r^2}{L^3}\left(\cos^2\varphi - \frac{1}{3}\right). \tag{2}$$ [2]

Damit die gesamte Konfiguration wie ein starrer Körper rotiert, muß der Störkörper sich im Gleichgewicht befinden, d. h. der Punkt $(L, 0)$ muß schwerelos sein:

$$\omega_1^2 L + \kappa \frac{\partial}{\partial x}(U_1 + V)_{L,0} = 0. \tag{3}$$

[1a] Wir mir erst nach Einsendung des Manuskriptes bekannt wurde, betrachtete kürzlich M. G. RABINOVITSCH [Vestnik Leningrad Univ. Mat. Meh. Astronom. **19**, 61—71 (1964)] mit den Lichtensteinschen Methoden ein anders geartetes Modell (dreidimensional). Es handelt sich um eine Gleichgewichtskonfiguration in einem hinreichend kleinen Außenfeld, das noch von Parametern, etwa der Zeit, abhängen kann. Legt man etwa die aus festem Kern und flüssiger Atmosphäre bestehende ruhende Kugel und ein periodisch von der Zeit abhängendes Außenfeld zugrunde, so entsteht eine Art Gezeitenbewegung.

[2] Dieses Potential des Störkörpers wird in [1] und [6] verwendet und bedeutet (vgl. [6]), unter Vernachlässigung höherer Glieder in r/L, das Newtonsche Potential eines Mondes und „Gegenmondes" mit jeweils der Masse $M/2$.

Es ist ferner, unter $U^{(n)}$ gewisse Integralausdrücke n-ter Ordnung in ζ und $\frac{d\zeta}{ds}$ (vgl. [5], S. 58) und unter r die Radialrichtung auf S verstanden,

$$\begin{aligned} \kappa U_1(P_1) &= \kappa U(P) + U^{(1)} + U^{(2)} + \cdots, \\ \kappa V(P_1) &= \kappa V(P) + \zeta \frac{\partial V}{\partial r}\Big|_P + \frac{\zeta^2}{2!} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\Big|_P + \cdots. \end{aligned} \tag{4}$$

Wir betrachten zum Vergleich noch die Gleichgewichtskonfiguration der mit einer Winkelgeschwindigkeit ω um O rotierenden Kreisscheiben T_0 (Dichte $f_0 - f$) und T (Dichte f) bei Abwesenheit des Störkörpers (d. h. $M = 0$). Für alle $P \in S$ ist

$$\kappa U(P) + \kappa V(P) + \frac{\omega^2}{2} R^2 = C, \qquad (C \text{ konstant}). \tag{5}$$

Hierbei muß auf S die konstante Schwerkraft

$$\kappa \psi = -2\pi\kappa f R(1+\beta) + \omega^2 R \tag{6}$$

mit

$$\beta = \left(\frac{f_0}{f} - 1\right) \frac{R_0^2}{R^2} \tag{7}$$

negativ sein, d. h. es gilt

$$0 \leqq \omega^2 < 2\pi\kappa f(1+\beta). \tag{8}$$

Setzen wir noch

$$\lambda = \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{2\kappa} \tag{9}$$

und betrachten wir λ und R/L als „kleine" Parameter, so findet sich aus (1), (4) und (5) (vgl. auch [5]), wenn man die in ζ linearen Glieder isoliert und verlangt, daß T und T_1 den gleichen Flächeninhalt haben, die Integro-Differentialgleichung für ζ:

$$\begin{aligned} \psi\zeta(s) + 2f \int_S \zeta(s') \ln \frac{R}{\varrho}\, ds' &= -\frac{3}{4} \frac{M}{L} \frac{R^2}{L^2} \cos 2\varphi - \Lambda\left\{\lambda, \frac{R}{L}, \zeta\right\} + \\ &+ \frac{1}{2\pi R} \int_S \left[\Lambda\left\{\lambda, \frac{R}{L}, \zeta\right\} - \frac{\psi\zeta^2}{2R}\right] ds, \\ &\left(s = R\varphi,\ s' = R\varphi',\ \varrho = 2R \sin \frac{|\varphi - \varphi'|}{2}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

mit

$$\begin{aligned} \Lambda\left\{\lambda, \frac{R}{L}, \zeta\right\} &= 2R\lambda\zeta + \frac{\omega^2}{2\kappa} \zeta^2 + \frac{3}{2} \frac{MR\zeta}{L^3} \cos 2\varphi + \frac{1}{4} \frac{M\zeta^2}{L^3} + \\ &+ \frac{3}{4} \frac{M\zeta^2}{L^3} \cos 2\varphi + \frac{1}{\kappa}(U^{(2)} + \cdots) + 2\pi f R^2 \beta\left(\frac{1}{2} \frac{\zeta^2}{R^2} + \cdots\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Die nicht hingeschriebenen Glieder sind in λ, R/L, ζ und $\frac{d\zeta}{ds}$ insgesamt von dritter und höherer Ordnung; ψ ist aus (6) zu entnehmen.

§ 2. Der reguläre Fall

Das Ziel ist, die Existenz von Lösungen ζ der Gleichung (10) für hinreichend kleine Werte von $|\lambda|$ und R/L nachzuweisen, die zugleich mit diesen Parametern verschwinden.

Wir finden zunächst aus (3)

$$\omega_1^2 = 2\pi\kappa f \cdot \frac{R^2}{L^2}(1+\beta) + \cdots, \tag{12}$$

wobei die nicht hingeschriebenen Glieder in R/L und ζ von insgesamt mindestens dritter Ordnung sind. Es ist also $\omega_1^2 = 2\lambda\kappa$ selbst „klein"; die Konfiguration wird in der Nachbarschaft der Ruhelage ($\omega = 0$) betrachtet. (6) reduziert sich also hier auf

$$\psi = -2\pi f R(1+\beta). \tag{13}$$

Bekanntlich hat die homogene Integralgleichung

$$\zeta - \mu \int_S \zeta(s') \ln \frac{R}{\varrho}\, ds' = 0 \tag{14}$$

die Eigenwerte $\mu = n/\pi R$ ($n = 1, 2, \ldots$) mit den (normierten) Eigenfunktionen

$$u_1 = \frac{\cos n\varphi}{\sqrt{\pi R}}, \qquad u_2 = \frac{\sin n\varphi}{\sqrt{\pi R}}. \tag{15}$$

Die zu (10) gehörige homogene Integralgleichung

$$\psi\zeta + 2f \int_S \zeta(s') \ln \frac{R}{\varrho}\, ds' = 0 \tag{16}$$

hat demnach wegen (13) genau dann nichttriviale Lösungen, wenn

$$2\pi f R(1+\beta) = \frac{2\pi f R}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{17}$$

gilt, d. h. wenn

$$(1+\beta)^{-1} \quad \text{eine natürliche Zahl} \tag{18}$$

ist. In dem praktisch wichtigen Fall $f_0 > f$ ist dies wegen (7) nicht möglich. Die Gleichung (10) besitzt dann, wie sich in bekannter Weise durch sukzessive Näherungen zeigen läßt, genau eine Lösung

$$\zeta(s) = \frac{3}{4}\frac{MR}{\pi f L^3}(1+2\beta)^{-1}\cos 2\varphi + \cdots, \tag{19}$$

wobei (19) eine Potenzreihe nach $\frac{R}{L}$ ist; die nicht hingeschriebenen Glieder sind von höherer Ordnung in R/L. Die Rotationsgeschwindigkeit ω_1 ergibt sich dann aus (12). Die Kurve S_1 ist in erster Näherung eine Ellipse, deren große Achse nach dem Störkörper hinweist.

§ 3. Der Verzweigungsfall

In dem theoretisch denkbaren Fall $f_0 \leqq f$ kann (16) nichttriviale Lösungen haben. Es sei also jetzt mit $\omega = 0$ und $\beta \leqq 0$

$$1 + \beta = \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)^3. \tag{20}$$

Bei festem f_0/f kann dies für endlich viele R_0/R realisiert werden. Wie bei LICHTENSTEIN [2] in allen Einzelheiten ausgeführt und in [5] angewendet, führt das E. Schmidtsche Verfahren der Kernzerspaltung mit

$$\frac{n}{\pi R} \ln \frac{R}{\varrho} = \frac{1}{\pi R} \cos n(\varphi - \varphi') + N(s, s'), \tag{21}$$

$$r_\nu = \int_S \zeta(s')\, u_\nu(s')\, ds' \qquad (\nu = 1, 2) \tag{22}$$

unter der erlaubten Annahme (vgl. [5], S. 63) $r_2 = 0$ unsere Gleichung (10) in

$$\zeta(s) - \int_S N(s, s')\, \zeta(s')\, ds' = \frac{r_1 \cos n\varphi}{\sqrt{\pi R}} + \frac{3}{4} \frac{MR^2}{L^3} \cdot \frac{n}{2\pi f R} \cos 2\varphi + \cdots \tag{23}$$

über. In (23) sind die nicht hingeschriebenen Glieder [vgl. (10)] von insgesamt dritter und höherer Ordnung in λ, R/L und ζ. Der Kern $N(s, s')$ hat keine Nullösungen mehr.

Durch sukzessive Approximationen ergibt sich für hinreichend kleine Werte von $|r_1|$, $|\lambda|$ und R/L genau eine Lösung, wobei wieder $\lambda = \dfrac{\omega_1^2}{2\kappa}$ und R/L durch (12) zusammenhängen. Sollen reelle Lösungen unseres Problems vorliegen, so müssen sich reelle Werte von r_1 und R/L so finden lassen, daß die „Verzweigungsgleichung"

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \int_S \zeta(s') \cos n\varphi'\, ds' \tag{24}$$

identisch erfüllt ist.

Um festzustellen, ob dies möglich ist, muß man in (24) die Koeffizienten der niedrigsten Glieder in r_1 und R/L bestimmen. Durch umfangreiche, aber wenig interessante Rechnungen (man vgl. hierzu auch [5][4]) findet sich, daß die Koeffizienten von r_1 und r_1^2 verschwinden und der Koeffizient $k_1(n)$ von r_1^3 den Wert

$$k_1(n) = \frac{n}{2\pi R^4} (n - 1 + 2n\beta + 4n\beta^2) \tag{25}$$

hat. Mit Rücksicht auf (20) ergibt sich $\beta = \dfrac{1}{n} - 1$ und man erkennt leicht

$$k_1(n) > 0 \quad \text{für} \quad n = 2, 3, \ldots, k_1(1) = 0. \tag{26}$$

[3] Für $n = 2$ muß z. B. $f_0/f = 1 - R^2/2R_0^2$ sein. Man vergleiche hierzu [2], S. 78, wo der Fall einer Kugel ohne Störkörper betrachtet wird.

[4] Dort wurde $r_1 = r$ gesetzt.

Dem Fall $n=1$ entspricht $f=f_0$. Hier entstehen keine neuen Figuren (vgl. [5]).

Im Falle $n=2$ hat (24) die Form

$$k_1(2)\,r_1^3+\frac{3}{4f}\frac{MR^2}{L^3}+\cdots=0, \tag{27}$$

wobei die nicht hingeschriebenen Glieder in r_1 und R/L von höherer Ordnung sind. Hiernach kann man zu jedem $r_1<0$, wenn nur $|r_1|$ genügend klein ist, ein R/L so finden, daß (24) erfüllt ist. Die Lösung von (23) kann als Potenzreihe in r_1 geschrieben werden:

$$\zeta(s)=\frac{r_1\cos 2\varphi}{\sqrt{\pi R}}+\cdots;$$

sie liefert für S_1 in erster Näherung eine Ellipse, bei der diesmal wegen $r_1<0$ die kleine Achse zum Störkörper weist.

Schließlich sei noch auf den Verzweigungsfall hingewiesen, wenn $M=0$ ist, d. h. bei Abwesenheit des Störkörpers. Die Winkelgeschwindigkeit ω der Grundfigur braucht jetzt nicht zu verschwinden. Ist $\psi=-\dfrac{2\pi fR}{n}$, d. h.

$$\omega^2=2\pi\kappa f\left(1-\frac{1}{n}+\beta\right), \tag{28}$$

so liegt der Verzweigungsfall vor. Wie in [5] ergibt sich, wenn man die zweiten und dritten Näherungen heranzieht und beachtet, daß hier λ als unabhängiger Parameter zu betrachten ist, die Verzweigungsgleichung in der Gestalt

$$r_1\left(\frac{n}{f\pi}\lambda+k_1(n)\,r_1^2+\cdots\right)=0, \tag{29}$$

woraus sich neben $r_1=0$ (d. h. $\zeta=0$) für $\lambda<0$ und $n=2, 3, \ldots$ zwei verschiedene reelle Verzweigungsfiguren ergeben.

Literatur

[1] BECKERT, H.: Existenzbeweis zur Kanaltheorie der Gezeiten. Arch. Rational Mech. Anal. **18**, 379—396 (1965).

[2] LICHTENSTEIN, L.: Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten. Berlin: Springer 1933.

[3] HÖLDER, E.: Mathematische Untersuchungen zur Himmelsmechanik. Math. Z. **31**, 197—257 (1929).

[4] — Zur Theorie inhomogener Gleichgewichtsfiguren. Math. Z. **36**, 563—580 (1933).

[5] MARUHN, K.: Über die Verzweigung der Lösung einer Integro-Differentialgleichung aus der Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten. Math. Z. **40**, 56—69 u. 312—314 (1935).

[6] LAMB, H.: Lehrbuch der Hydrodynamik. Leipzig: B. G. Teubner 1931.

Prof. Dr. K. MARUHN
63 Gießen, Am unteren Rain 10

(Eingegangen am 21. September 1965)

STAUDE, U.
Math. Annalen 165, 117—134 (1966)

Periodische Lösungen bei nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typ

Herrn Professor Dr. ERNST HÖLDER zum 65. Geburtstag gewidmet

ULRICH STAUDE

In dieser Arbeit sollen bezüglich t periodische Lösungen der nichtlinearen elliptischen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x)u = \eta f_0(x,t) + \sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty}{}'' f_{\alpha\beta}(x)u^\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^\beta$$

bestimmt werden, die für $x=0$ und $x=1$ den Wert Null annehmen und in der „Nachbarschaft" von $u(x,t)=0$ liegen.

Für den parabolischen Fall sind ähnliche Probleme schon von KARIMOV [1]– [5] und PRODI [7] behandelt worden. Bei dem parabolischen Fall kann es aber nicht geschehen, daß die homogene Aufgabe eine Lösung besitzt, und außerdem ist bei ihnen die Periode fest vorgegeben. Wir wollen dagegen zulassen, daß die Periode noch variabel ist. Dann treten für die Periode, für die die homogene Aufgabe nichttriviale Eigenlösungen besitzt, Abzweigungen von periodischen Lösungen von der Lösung $u(x,t)=0$ auf, auf deren Betrachtung das Hauptgewicht der Arbeit liegt.

Durch eine Fourierzerlegung, wie sie von LICHTENSTEIN [6] für das Anfangswertproblem bei nichtlinearen hyperbolischen Differentialgleichungen verwendet wurde, wandeln wir die Aufgabe in ein Randwertproblem für ein unendliches gewöhnliches Differentialgleichungssystem um, das wir mit Hilfe gewöhnlicher und verallgemeinerter Greenscher Funktionen in ein unendliches Integralgleichungssystem überführen. Die Lösungen werden durch sukzessive Approximation bestimmt.

Die Behandlung der Aufgabe mit der zur Randwertaufgabe für die elliptische Differentialgleichung gehörenden Greenschen Funktion erscheint mir wegen der Abschätzung dieser Greenschen Funktion, besonders in Abhängigkeit von der sich ändernden Periode, schwieriger.

Der Vorteil, daß wir durch Verwendung der gleichmäßigen Konvergenz Lösungen im strengen Sinne erhalten, muß durch die Umständlichkeit bei den Abschätzungen, besonders bei den Greenschen Funktionen, erkauft werden.

I

1. Gegeben sei die nichtlineare, elliptische partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a(x)\frac{\partial u}{\partial x}+c(x)u=f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x};\eta\right). \tag{1.1}$$

Dabei seien $a(x)\in C^1[0,1]$, $c(x)\in C[0,1]$. Die rechte Seite habe die Gestalt

$$f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x};\eta\right)=\eta f_0(x,t)+\sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty}{}'' f_{\alpha\beta}(x)u^{\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\beta}. \tag{1.2}$$

η ist ein kleiner Parameter; $f_0(x,t)$ sei in $0\leqq x\leqq 1$ stetig für alle t und in $-\infty<t<+\infty$ stetig differenzierbar nach t für $0\leqq x\leqq 1$, habe in t die Periode $T=\frac{2\pi}{\lambda}$: $f_0(x,t+T)=f_0(x,t)$ und sei bezüglich $t=0$ symmetrisch.

Ferner sei $f_{\alpha\beta}(x)=0$ sofern $\alpha+\beta\leqq 1$ ist; die Summation ist also nur über die α und β zu erstrecken, für die $\alpha+\beta\geqq 2$ gilt, was durch das zweigestrichene Summationszeichen angezeigt wird. Für alle anderen $f_{\alpha\beta}(x)$ gelte: $f_{\alpha\beta}(x)\in C[0,1]$,

$$|f_{\alpha\beta}(x)|<F_{\alpha\beta}, \tag{1.3}$$

wobei die Reihe $\sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty}{}'' F_{\alpha\beta}u_1^{\alpha}u_2^{\beta}$ für $|u_1|<U_1$ und $|u_2|<U_2$ konvergiere. Dann existieren zwei Konstanten M_1 und M_2, so daß

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty}{}'' F_{\alpha\beta}|u_1|^{\alpha}|u_2|^{\beta}\leqq M_1(|u_1|+|u_2|)^2 \tag{1.4}$$

und

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty}{}'' F_{\alpha\beta}\{\alpha|u_1|^{\alpha-1}|u_2|^{\beta}|du_1|+\beta|u_1|^{\alpha}|u_2|^{\beta-1}|du_2|\}\leqq \tag{1.5}$$

$$\leqq M_2(|u_1|+|u_2|)(|du_1|+|du_2|)$$

für $|u_1|<U_1$, $|u_2|<U_2$.

Gesucht werden Lösungen $u(x,t)$ der Differentialgleichung, die nach beiden Variablen stetig differenzierbar sind für $0\leqq x\leqq 1$ und $-\infty<t<+\infty$ und noch folgende Bedingungen erfüllen:

a) Die Randbedingungen:

$$u(0,t)=u(1,t)=0. \tag{1.6}$$

b) Die Periodizitätsbedingung:

$$u(x,t+T)=u(x,t), \tag{1.7}$$

wobei die Periode T die Periode der Funktion $f_0(x,t)$ ist.

2. Wir beschränken uns wegen der Symmetrie von $f_0(x,t)$ auf bezüglich $t=0$ symmetrische Lösungen. Somit können wir $u(x,t)$ in eine Fourierreihe mit reinen Cosinusgliedern entwickeln:

$$u(x,t)=\frac{{}_0u(x)}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}{}_{\nu}u(x)\cos\nu\lambda t. \tag{2.1}$$

Dabei sind die Fourierkoeffizienten

$$(2.2) \qquad {}_{\nu}u(x) = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^T u(x,t) \cos \nu\lambda t \, dt, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Setzen wir die Reihe (2.1) in die Differentialgleichung (1.1) ein, so erhalten wir beim Koeffizientenvergleich folgendes unendliche gewöhnliche Differentialgleichungssystem:

$$(2.3) \qquad {}_{\nu}\ddot{u} + a(x)\,{}_{\nu}\dot{u} + (c(x) - \nu^2\lambda^2)\,{}_{\nu}u = {}_{\nu}f(x, {}_{\mu}u, {}_{\mu}\dot{u}; \eta), \qquad (\nu, \mu = 0, 1 \ldots),$$

wobei $\dot{} = \frac{d}{dx}$ bedeuten soll. Da aber $u(x,t)$ noch die Randbedingungen (1.6) erfüllen muß, ergeben sich für das System (2.3) folgende Randbedingungen:

$$(2.4) \qquad {}_{\nu}u(0) = {}_{\nu}u(1) = 0.$$

Dieses Differentialgleichungssystem ist durch die rechten Seiten miteinander verbunden, die sich analog zu (2.2) ergeben als

$$\begin{aligned} {}_{\nu}f(x, {}_{\mu}u, {}_{\mu}\dot{u}; \eta) &= \frac{\lambda}{\pi} \int_0^T f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}; \eta\right) \cos \nu\lambda t \, dt \\ (2.5) \qquad &= \eta_{\nu} f_0(x) + \frac{\lambda}{\pi} \int_0^T \sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty}{}'' f_{\alpha\beta}(x) \left(\frac{{}_0u(x)}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} {}_{\mu}u(x) \cos \mu\lambda t\right)^{\alpha} \times \\ &\quad \times \left(\frac{{}_0\dot{u}(x)}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} {}_{\mu}\dot{u}(x) \cos \mu\lambda t\right)^{\beta} \cos \nu\lambda t \, dt \\ &= \eta_{\nu} f_0(x) + \sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty}{}'' f_{\alpha\beta}(x) \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{\alpha+\beta}=0}^{\infty} {}_{\nu}b_{\alpha\beta}^{\sigma_1 \cdots \sigma_{\alpha+\beta}} \prod_{k=1}^{\alpha} {}_{\sigma_k}u \prod_{k=\alpha+1}^{\alpha+\beta} {}_{\sigma_k}\dot{u} \end{aligned}$$

mit

$$(2.6) \qquad {}_{\nu}b_{\alpha\beta}^{\sigma_1 \cdots \sigma_{\alpha+\beta}} = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^T \left(\prod_{k=1}^{\alpha+\beta} \delta(\sigma_k) \cos \sigma_k\lambda t\right) \cos \nu\lambda t \, dt,$$

wobei

$$\delta(\sigma_k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{wenn} \quad \sigma_k = 0 \\ 1 & \text{wenn} \quad \sigma_k \neq 0. \end{cases}$$

Für später brauchen wir noch folgenden

Hilfssatz 1: *Für jedes feste System von ganzen Zahlen* $0 \leqq \sigma_1, \ldots, \sigma_{\alpha+\beta} < \infty$ *gilt:*

$$(2.7) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \left|{}_{\nu}b_{\alpha\beta}^{\sigma_1 \cdots \sigma_{\alpha+\beta}}\right| \leqq 2.$$

Beweis: Aus den Additionstheoremen für die cos-Funktionen folgt

$$\cos \sigma_1\lambda t \ldots \cos \sigma_{\alpha+\beta}\lambda t = \frac{1}{2^{\alpha+\beta-1}} (\pm \cos \varrho_1\lambda t \pm \cdots \pm \cos \varrho_{2^{\alpha+\beta-1}}\lambda t),$$

wobei die ϱ_i $(i=1,\ldots,2^{\alpha+\beta-1})$ sich additiv aus den Zahlen $\sigma_1,\ldots,\sigma_{\alpha+\beta}$ ergeben. Somit ist

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left|{}_{\nu}b_{\alpha\beta}^{\sigma_1\cdots\sigma_{\alpha+\beta}}\right| \leqq \frac{\lambda}{\pi}\frac{1}{2^{\alpha+\beta-1}}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^{\alpha+\beta-1}}\left|\int_0^T \cos\varrho_i\lambda t\cos\nu\lambda t\,dt\right| .$$

Nun ist das Integral bei einem festen Satz ϱ_i nur dann ungleich Null, wenn $\nu=\varrho_i$ ist, und wir erhalten

$$\leqq \frac{\lambda}{\pi}\frac{1}{2^{\alpha+\beta-1}}\sum_{i=1}^{2^{\alpha+\beta-1}}\frac{2\pi}{\lambda}=2 .$$

3. Bezeichnen wir mit

$$(3.1)\qquad {}_{\nu}L=\frac{d^2}{dx^2}+a(x)\frac{d}{dx}+c(x)-\nu^2\lambda^2 ,$$

so haben wir nach (2.3), (2.4) folgende Aufgabenstellung:

$$(3.2)\qquad {}_{\nu}L\,{}_{\nu}u={}_{\nu}f,\quad {}_{\nu}u(0)={}_{\nu}u(1)=0, \qquad (\nu=0,1,\ldots).$$

Die dazu gehörende homogene Randwertaufgabe (RWA) ist

$$(3.3)\qquad {}_{\nu}L\,{}_{\nu}\varphi=0,\quad {}_{\nu}\varphi(0)={}_{\nu}\varphi(1)=0 .$$

Die adjungierte RWA lautet dann

$$(3.4)\qquad {}_{\nu}L^*\,{}_{\nu}\psi=0,\quad {}_{\nu}\psi(0)={}_{\nu}\psi(1)=0 .$$

Hat für ein ν die homogene RWA (3.3) keine Eigenlösung, dann existiert eine eindeutig bestimmte Greensche Funktion ${}_{\nu}\Gamma(x,\xi)$, so daß sich die Lösung der inhomogenen RWA (3.2) ergibt zu

$$(3.5)\qquad {}_{\nu}u(x)=\int_0^1 {}_{\nu}\Gamma(x,\xi)\,{}_{\nu}f(\xi)\,d\xi .$$

Hat dagegen die homogene RWA (3.3) eine Eigenlösung: ${}_{\nu}\varphi(x)$ (mehr linear unabhängige Eigenlösungen kann die RWA nicht haben, da alle Lösungen der Differentialgleichung von (3.3) mit dem Anfangswert 0 von einander linear abhängig sind), die wir als normiert annehmen können:

$$(3.6)\qquad \int_0^1 {}_{\nu}\varphi^2(x)\,dx=1 ,$$

so hat die adjungierte RWA (3.4) auch genau eine (bis auf das Vorzeichen) normierte Eigenlösung ${}_{\nu}\psi(x)$, und die inhomogene RWA (3.2) hat genau eine Lösung, wenn die Lösbarkeitsbedingung

$$(3.7)\qquad \int_0^1 {}_{\nu}f(x)\,{}_{\nu}\psi(x)\,dx=0$$

erfüllt ist. In diesem Fall existieren verallgemeinerte Greensche Funktionen: ${}_{\nu}\Gamma^*(x,\xi)$, so daß sich die Lösungen der inhomogenen RWA (3.2) ergeben zu

$$(3.8)\qquad {}_{\nu}u(x)=\zeta\,{}_{\nu}\varphi(x)+\int_0^1 {}_{\nu}\Gamma^*(x,\xi)\,{}_{\nu}f(\xi)\,d\xi .$$

Hierbei ist ζ eine beliebige Konstante.

Die verallgemeinerte Greensche Funktion kann so bestimmt werden, daß gilt:

$$\int_0^1 {}_\nu\varphi(x)\, {}_\nu\Gamma^*(x,\xi)\, dx = {}_\nu\psi(\xi). \tag{3.9}$$

Dann ergibt sich bei Multiplikation von (3.8) mit ${}_\nu\varphi(x)$ und Integration über x von 0 bis 1 wegen (3.6) aus der Lösbarkeitsbedingung (3.7) die Gleichung:

$$\int_0^1 {}_\nu\varphi(x)\, {}_\nu u(x)\, dx = \zeta, \tag{3.10}$$

die später als Verzweigungsgleichung noch Bedeutung haben wird.

Für die Gesamtheit der Greenschen Funktionen und der verallgemeinerten Greenschen Funktionen zu einer festen Randwertaufgabe gilt folgender

Hilfssatz 2: *Für die zu festen Funktionen $a(x)$ und $c(x)$ gehörenden Randwertaufgaben* (3.2) *gibt es stets nur von $a(x)$ und $c(x)$ abhängende Konstanten N und C, so daß für alle $\nu > N$ die homogene RWA* (3.3) *keine Eigenlösungen hat und für alle ν gilt:*

$$\int_0^1 |{}_\nu\Gamma(x,\xi)|\, d\xi \leqq \frac{C}{\nu^2}, \tag{3.11}$$

$$\int_0^1 \left|\frac{\partial\, {}_\nu\Gamma(x,\xi)}{\partial x}\right| d\xi \leqq \frac{C}{\nu}, \tag{3.12}$$

wobei für $\nu = 0$ im Nenner ν durch 1 zu ersetzen ist und für die $\nu \leqq N$, für die (3.3) *eine Eigenlösung hat, eine verallgemeinerte Greensche Funktion zu nehmen ist.*

Da der Beweis dieses Hilfssatzes ziemlich umständlich ist, werde ich ihn erst im Anhang (II) bringen.

4. Betrachten wir nun die homogene RWA (3.3) mit $\nu = 1$. Bezeichnen wir mit λ_i die Eigenwerte dieser Aufgabe, so ergibt sich, daß die λ_i^2 eine abzählbare Folge auf der reellen Achse bilden, die nach oben beschränkt ist durch eine Konstante L und keinen endlichen Häufungspunkt hat. Dies bedeutet für die λ_i, daß sie auf der rellen und der imaginären Achse symmetrisch zum Ursprung liegen. Alle reellen Eigenwerte, von denen es nur endlich viele gibt, liegen dann im Intervall $-\sqrt{L} < \lambda < +\sqrt{L}$. Die Randwertaufgaben (3.3) haben dann mit $\nu \neq 0$ als Eigenwerte die Zahlen $\frac{\lambda_i}{\nu}$ und die gleichen Eigenfunktionen.

Wir nehmen nun an, daß die homogene RWA (3.3) für $\nu = 1$ und $\lambda = \lambda_0 > 0$ genau eine (normierte) Eigenlösung hat: $\varphi(x)$ mit

$$|\varphi(x)| \leqq \Phi_1, \quad |\dot{\varphi}(x)| \leqq \Phi_2 \tag{4.1}$$

und für alle anderen $\lambda \geqq 0$ keine Eigenlösungen hat. Dann ist für jede RWA mit $\nu \neq 1$ λ_0 kein Eigenwert.

Setzen wir nun

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon, \tag{4.2}$$

$$\nu^2 {}_\nu u(x) = {}_\nu v_1(x), \qquad \nu {}_\nu \dot{u}(x) = {}_\nu v_2(x), \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4.3}$$

(hierbei und im folgenden ist für $\nu = 0$ als Faktor stets 1 zu nehmen),

$$\begin{aligned} {}_1\Gamma^*(x, \xi) &= {}_1\Gamma_1(x, \xi), \qquad {}_\nu\Gamma(x, \xi) = {}_\nu\Gamma_1(x, \xi), \\ \frac{\partial_1 \Gamma^*(x, \xi)}{\partial x} &= {}_1\Gamma_2(x, \xi), \qquad \frac{\partial_\nu \Gamma(x, \xi)}{\partial x} = {}_\nu\Gamma_2(x, \xi), \quad (\nu = 0, 2, 3, \ldots), \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\varphi(x) = \varphi_1(x), \qquad \dot{\varphi}(x) = \varphi_2(x) \tag{4.5}$$

und

$$\begin{aligned} {}_\nu g(x, {}_\mu v_1, {}_\mu v_2; \varepsilon, \eta) = {}_\nu f(x, {}_\mu u, {}_\mu \dot{u}; \eta) + \nu^2 (2\lambda_0 \varepsilon + \varepsilon^2) {}_\nu u = \eta {}_\nu f_0(x) + \\ + \sum_{\alpha, \beta = 0}^{\infty}{}'' f_{\alpha\beta}(x) \sum_{\sigma_1, \ldots, \sigma_{\alpha+\beta} = 0}^{\infty} {}_\nu b_{\alpha\beta}^{\sigma_1 \ldots \sigma_{\alpha+\beta}} \times \\ \times \frac{1}{\sigma_1 \ldots \sigma_{\alpha+\beta}} \prod_{k=1}^{\alpha} {}_{\sigma_k} v_1 \prod_{k=\alpha+1}^{\alpha+\beta} {}_{\sigma_k} v_2 + (2\lambda_0 \varepsilon + \varepsilon^2) {}_\nu v_1, \end{aligned} \tag{4.6}$$

wobei auch hier für $\sigma_k = 0$ als Faktor 1 zu setzen ist.

Nach (3.5), (3.8) und (4.2)–(4.6) ergibt sich dann folgendes Integralgleichungssystem

$$ {}_\nu v_i(x) = \zeta \varphi_i(x)\, \delta_{\nu 1} + \nu^{3-i} \int_0^1 {}_\nu\Gamma_i(x, \xi)\, {}_\nu g(\xi, {}_\mu v_1, {}_\mu v_2; \varepsilon, \eta)\, d\xi, \tag{4.7}$$

$$(i = 1, 2, \ \nu = 0, 1, \ldots)$$

($\delta_{\nu 1}$ = Kroneckersymbol).

Ein System von Lösungen $\{\nu^{3-i} {}_\nu v_i(x)\}$ ist aber nur dann eine Lösung der RWA (2.3), (2.4), wenn noch die Gleichung (3.10), die wegen (4.3) und (4.5) jetzt

$$\int_0^1 \varphi_1(x)\, {}_1 v_1(x)\, dx = \zeta \tag{4.8}$$

lautet, erfüllt wird.

Dieses Integralgleichungssystem lösen wir durch sukzessive Approximation:

$$\begin{aligned} {}_\nu v_i^{(0)}(x) &= 0, \\ {}_\nu v_i^{(n+1)}(x) &= \zeta \varphi_i(x)\, \delta_{\nu 1} + \nu^{3-i} \int_0^1 {}_\nu\Gamma_i(x, \xi)\, {}_\nu g(\xi, {}_\mu v_1^{(n)}, {}_\mu v_2^{(n)}; \varepsilon, \eta)\, d\xi. \end{aligned} \tag{4.9}$$

5. Um nachzuweisen, daß die sukzessive Approximation eine Lösung liefert, verwenden wir den Banachschen Fixpunktsatz.

Wir betrachten die Räume $\mathfrak{B}_i$ der Folgen stetiger Funktionen

$$\mathfrak{v}_i = \{{}_\nu v_i(x)\}, \qquad (\nu = 0, 1, 2 \ldots, i = 1, 2),$$

und führen mittels der Bezeichnung

$$[f(x)] = \max_{0 \leqq x \leqq 1} |f(x)| \tag{5.1}$$

die Norm

$$\|\mathfrak{v}_i\| = \sum_{\nu=0}^{\infty} [{}_\nu v_i(x)] \tag{5.2}$$

ein. Die beiden Räume $\mathfrak{B}_i$ mit $\|\mathfrak{v}_i\| < \infty$ sind vollständig.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{B}$ die direkte Summe der beiden Räume und führen in $\mathfrak{B}$ durch $\|\mathfrak{v}\| = \|\mathfrak{v}_1\| + \|\mathfrak{v}_2\|$ eine Norm ein, die wir genauso bezeichnen wie die Norm in den Teilräumen, da dies im folgenden wohl nicht zu Verwechslungen führt.

Durch das Integralgleichungssystem (4.7) ist in $\mathfrak{B}$ ein Operator

$$\mathfrak{w} = T\mathfrak{v} \tag{5.3}$$

erklärt, von dem wir zeigen müssen:

1. Jedes Element einer abgeschlossenen Teilmenge $\mathfrak{M}$ des vollständigen Raumes $\mathfrak{B}$ wird wieder in ein Element von $\mathfrak{M}$ überführt.

2. Der Operator T ist in $\mathfrak{M}$ kontrahierend, d. h. es gilt:

$$\|T\mathfrak{v} - T\mathfrak{v}'\| \leqq q\|\mathfrak{v} - \mathfrak{v}'\| \quad \text{mit} \quad 0 \leqq q < 1, \quad \mathfrak{v}, \mathfrak{v}' \in \mathfrak{M}.$$

3. Der Ausgangspunkt der sukzessiven Approximation liegt in $\mathfrak{M}$.

Dann existiert ein eindeutiger Fixpunkt, der die einzige Lösung des Integralgleichungssystems in $\mathfrak{M}$ ist.

Wegen der gleichmäßigen und absoluten Konvergenz von $\sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty}{}'' f_{\alpha\beta}(x) u_1^\alpha u_2^\beta$ für $|u_i| < U_i$ konvergieren auch die ${}_\nu f(x, {}_\mu u, {}_\mu \dot{u}; \eta)$ absolut für

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} [{}_\mu u] < U_1, \qquad \sum_{\mu=0}^{\infty} [{}_\mu \dot{u}] < U_2$$

und nach (4.6) auch die ${}_\nu g({}_\mu v_1, {}_\mu v_2; \varepsilon, \eta)$ für $\|\mathfrak{v}_i\| < u_i$. Sind die ${}_\mu v_i(x) \in C[0, 1]$, so sind wegen der gleichmäßigen und absoluten Konvergenz auch die ${}_\nu g(x, {}_\mu v_1, {}_\mu v_2; \varepsilon, \eta) \in C[0, 1]$.

Da die Greenschen Funktionen ${}_\nu \Gamma_i(x, \xi)$ beschränkt sind und nur die ${}_\nu \Gamma_2(x, \xi)$ für $x = \xi$ unstetig sind, so sind auch die durch den Operator T erzeugten Funktionen ${}_\nu w_i(x)$ stetig.

Wir zeigen nun, daß ein $\mathfrak{M}$ existiert, so daß für $\mathfrak{v} \in \mathfrak{M}$ auch $\mathfrak{w} \in \mathfrak{M}$ ist. Dazu weisen wir die Existenz von Konstanten $W_i < U_i$ nach, so daß für

$$\mathfrak{M} = \{\mathfrak{v} \,|\, \|\mathfrak{v}_i\| \in W_i\} \tag{5.4}$$

gilt: $T\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$.

Nach (4.6), (4.7) und (5.1)–(5.3) ist

$$\|\mathfrak{w}_1\| \leqq |\zeta|\,[\varphi_1(x)] + \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu^2 \left[\int_0^1 {}_\nu\Gamma_1(x,\xi)\,{}_\nu g(\xi, {}_\mu v_1, {}_\mu v_2; \varepsilon, \eta)\,d\xi\right];$$

weiter gilt nach (4.1), (3.11), (1.3), (4.4)–(4.6)

$$\leqq |\zeta|\,\Phi_1 + C\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{|\eta|\,[{}_\nu f_0] + \sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty}{}'' F_{\alpha\beta} \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{\alpha+\beta}=0}^{\infty} {}_\nu b_{\alpha\beta}^{\sigma_1\cdots\sigma_{\alpha+\beta}} \cdot \frac{1}{\sigma_1\cdots\sigma_{\alpha+\beta}} \times \right.$$
$$\left. \times \left[\prod_{k=1}^{\alpha} \sigma_k v_1 \prod_{k=\alpha+1}^{\alpha+\beta} \sigma_k v_2\right] + (2\lambda_0|\varepsilon| + \varepsilon^2)[{}_\nu v_1]\right\}$$

und nach Summierung über ν wegen (2.7)

$$\leqq |\zeta|\,\Phi_1 + 2C\left\{|\eta|\,\|\mathfrak{f}_0\| + \sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty}{}'' F_{\alpha\beta}\|\mathfrak{v}_1\|^\alpha \|\mathfrak{v}_2\|^\beta + (2\lambda_0|\varepsilon| + \varepsilon^2)\|\mathfrak{v}_1\|\right\},$$

wobei für $\mathfrak{f}_0$, einem Element aus $\mathfrak{V}_1$, die Norm in $\mathfrak{V}_1$ zu nehmen ist. Nach (1.4) folgt dann

$$\|\mathfrak{w}_1\| \leqq |\zeta|\,\Phi_1 + 2C\,\{(2\lambda_0|\varepsilon| + \varepsilon^2)\|\mathfrak{v}_1\| + |\eta|\,\|\mathfrak{f}_0\| + M_1(\|\mathfrak{v}_1\| + \|\mathfrak{v}_2\|)^2\}. \tag{5.5}$$

Analog erhalten wir

$$\|\mathfrak{w}_2\| \leqq |\zeta|\,\Phi_2 + 2C\{(2\lambda_0|\varepsilon| + \varepsilon^2)\|\mathfrak{v}_1\| + |\eta|\,\|\mathfrak{f}_0\| + M_1(\|\mathfrak{v}_1\| + \|\mathfrak{v}_2\|)^2\}. \tag{5.6}$$

Für den zweiten Punkt des Banachschen Fixpunktsatzes bestimmen wir

$$\|T\mathfrak{v} - T\mathfrak{v}'\| \leqq \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{2} \nu^{3-i}\left[\int_0^1 {}_\nu\Gamma_i(x,\xi)\,\{{}_\nu g(\xi, {}_\mu v_1, {}_\mu v_2; \varepsilon, \eta) - \right.$$
$$\left. - {}_\nu g(\xi, {}_\mu v_1', {}_\mu v_2'; \varepsilon, \eta)\}\,d\xi\right].$$

Dies ist nach (4.6), (4.7), (1.3), (2.7), (3.11), (3.12)

$$\leqq 4C\sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty}{}'' F_{\alpha\beta} \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{\alpha+\beta}=0}^{\infty}\left[\prod_{k=1}^{\alpha}\sigma_k v_1 \prod_{k=\alpha+1}^{\alpha+\beta}\sigma_k v_2 - \prod_{k=1}^{\alpha}\sigma_k v_1' \prod_{k=\alpha+1}^{\alpha+\beta}\sigma_k v_2'\right] +$$
$$+ 2C(2\lambda_0|\varepsilon| + \varepsilon^2)\|\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_1'\|.$$

Jetzt schätzen wir ab:

$$\left[\prod_{k=1}^{\alpha}\sigma_k v_1 \prod_{k=\alpha+1}^{\alpha+\beta}\sigma_k v_2 - \prod_{k=1}^{\alpha}\sigma_k v_1' \prod_{k=\alpha+1}^{\alpha+\beta}\sigma_k v_2'\right] \leqq$$
$$\leqq \left[\prod_{k=1}^{\alpha}\sigma_k v_1 - \prod_{k=1}^{\alpha}\sigma_k v_1'\right]\left[\prod_{k=\alpha+1}^{\alpha+\beta}\sigma_k v_2\right] + \left[\prod_{k=1}^{\alpha}\sigma_k v_1'\right]\left[\prod_{k=\alpha+1}^{\alpha+\beta}\sigma_k v_2 - \prod_{k=\alpha+1}^{\alpha+\beta}\sigma_k v_2'\right].$$

Nun ist

$$\left[\prod_{k=1}^{\alpha}\sigma_k v_1 - \prod_{k=1}^{\alpha}\sigma_k v_1'\right] \leqq [\sigma_1 v_1 - \sigma_1 v_1']\prod_{k=2}^{\alpha}[\sigma_k v_1] + \cdots$$
$$+ [\sigma_j v_1 - \sigma_j v_1']\prod_{k=1}^{j-1}[\sigma_k v_1']\prod_{k=j+1}^{\alpha}[\sigma_k v_1] + \cdots + [\sigma_\alpha v_1 - \sigma_\alpha v_1']\prod_{k=1}^{\alpha-1}[\sigma_k v_1'].$$

Ist jedes $[{}_\mu v_i]$, $[{}_\mu v_i'] \leqq {}_\mu V_i$ mit $\sum_{\mu=0}^{\infty} {}_\mu V_i = V_i$, so erhalten wir

$$\left[\prod_{k=1}^{\alpha} {}_{\sigma_k} v_1 - \prod_{k=1}^{\alpha} {}_{\sigma_k} v_1'\right] \leqq \sum_{j=1}^{\alpha} [{}_{\sigma_j} v_1 - {}_{\sigma_j} v_1'] \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\alpha} {}_{\sigma_k} V_1 .$$

Analoges ergibt sich für die Ausdrücke mit ${}_{\sigma_k} v_2$ und ${}_{\sigma_k} v_2'$.
Dann ist

$$\begin{aligned}
\|T\mathfrak{v} - T\mathfrak{v}'\| \leqq{}& 2C(2\lambda_0|\varepsilon| + \varepsilon^2)\|\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}'\| + 4C \sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty}{}'' F_{\alpha\beta} \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{\alpha+\beta}=0}^{\infty} \times \\
&\times \left\{ \sum_{j=1}^{\alpha} [{}_{\sigma_j} v_1 - {}_{\sigma_j} v_1'] \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\alpha} {}_{\sigma_k} V_1 \prod_{k=\alpha+1}^{\alpha+\beta} {}_{\sigma_k} V_2 + \sum_{j=\alpha+1}^{\alpha+\beta} [{}_{\sigma_j} v_2 - {}_{\sigma_j} v_2'] \times \right. \\
&\left. \times \prod_{k=1}^{\alpha} {}_{\sigma_k} V_1 \prod_{\substack{k=\alpha+1 \\ k \neq j}}^{\alpha+\beta} {}_{\sigma_k} V_2 \right\} \leqq 2C(2\lambda_0|\varepsilon| + \varepsilon^2)\|\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_1'\| + \\
&+ 4C \sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty}{}'' F_{\alpha\beta}(\alpha\|\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_1'\| V_1^{\alpha-1} V_2^{\beta} + \beta\|\mathfrak{v}_2 - \mathfrak{v}_2'\| V_1^{\alpha} V_2^{\beta-1}).
\end{aligned}$$

Für $V_i \leqq U_i$ ist dann wegen (1.5)

$$\|T\mathfrak{v} - T\mathfrak{v}'\| \leqq 2C(2\lambda_0|\varepsilon| + \varepsilon^2)\|\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_1'\| + 4CM_2(V_1 + V_2)\|\mathfrak{v} - \mathfrak{v}'\| .$$

Wir können nun Größen δ_1, δ_2, δ_3, $W_i \leqq U_i$ so wählen, daß für

$$|\zeta| \leqq \delta_1, \quad |\varepsilon| \leqq \delta_2, \quad |\eta| \leqq \delta_3, \quad \|\mathfrak{v}_i\|, \ \|\mathfrak{v}_i'\| \leqq V_i \leqq W_i$$

gilt nach (5.5) und (5.6): $\|\mathfrak{w}_i\| \leqq W_i$ und

$$2C(2\lambda_0|\varepsilon| + \varepsilon^2) + 4CM_2(W_1 + W_2) \leqq q < 1 .$$

Damit sind die erste und zweite Voraussetzung des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Daß die dritte Voraussetzung erfüllt ist, ergibt sich sofort aus (4.9) und (5.4).

6. Die sukzessive Approximation liefert somit eine eindeutig bestimmte Lösung, die sich als Potenzreihe in den ζ, ε, η schreiben läßt:

$$(6.1) \qquad {}_\nu v_i(x) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^{\infty} {}_\nu V_{i,\alpha\beta\gamma}(x)\, \zeta^\alpha \varepsilon^\beta \eta^\gamma$$

und nach dem Vorhergehenden für $|\zeta| \leqq \delta_1$, $|\varepsilon| \leqq \delta_2$, $|\eta| \leqq \delta_3$ und alle $x \in [0,1]$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

Damit bei fest vorgegebenem ε und η die durch (6.1) gegebene Funktion auch eine Lösung von (2.3) und (2.4) ist, muß noch die Verzweigungsgleichung (4.8) erfüllt sein:

$$(6.2) \qquad \int_0^1 \varphi_1(x)\, {}_1 v_1(x)\, dx = \zeta .$$

Dies bedeutet, da wir wegen der gleichmäßigen Konvergenz gliedweise integrieren dürfen:

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^{\infty} V_{\alpha\beta\gamma}\zeta^{\alpha}\varepsilon^{\beta}\eta^{\gamma}=\zeta\,, \tag{6.3}$$

wobei

$$V_{\alpha\beta\gamma}=\int_0^1 {}_1V_{1,\alpha\beta\gamma}(x)\,\varphi_1(x)\,dx \tag{6.4}$$

ist.

Die Verzweigungsgleichungen (6.3) wollen wir nun näher untersuchen. Betrachten wir zuerst die Glieder, in denen η nicht auftritt, so ergibt sich aus der sukzessiven Approximation (4.9), daß in jedem Glied bei der sukzessiven Approximation und somit auch bei den ${}_\nu v_i(x)$ als Faktor ζ auftritt. Weiterhin tritt wegen der Additionstheoreme der cos-Funktionen je nach dem, ob ν gerade oder ungerade ist, ζ nur in geraden oder ungeraden Potenzen auf, da die ${}_\nu b_{\alpha\beta}^{\sigma_1\cdots\sigma_{\alpha+\beta}}$ nach (2.6) nur dann ungleich Null sein können, wenn $\sum_{k=1}^{\alpha+\beta}\sigma_k\equiv\nu(\mathrm{mod}\,2)$, so daß die $V_{\alpha\beta0}$ nur dann ungleich Null sein können, wenn α ungerade ist.

Bestimmen wir ${}_1v_1(x)$, so erhalten wir für die ersten Glieder:

$${}_1V_{1,100}=\varphi_1(x)\,,$$

$${}_1V_{1,110}=2\lambda_0\int_0^1 {}_1\Gamma_1(x,\xi)\,\varphi_1(\xi)\,d\xi\,.$$

Dann folgt nach (6.4), (3.6) und (3.9)

$$V_{100}=1\,,$$

$$V_{110}=2\lambda_0\int_0^1 {}_1\psi(x)\,\varphi_1(x)\,dx\,.$$

Betrachten wir nun noch das Glied, das nur den Parameter η linear enthält, so ergibt sich nach (4.6), (4.9), (6.1), (6.3), (6.4) und (3.9):

$$V_{001}=\int_0^1 {}_1\psi(x)\,{}_1f_0(x)\,dx\,.$$

Die Verzweigungsgleichung lautet dann:

$$\zeta=\zeta+V_{001}\eta+V_{002}\eta^2+\zeta(V_{110}\varepsilon+V_{120}\varepsilon^2+V_{300}\zeta^2)+(\text{Glieder 3. und höherer Ordnung}). \tag{6.5}$$

Für $\eta=0$ erhalten wir

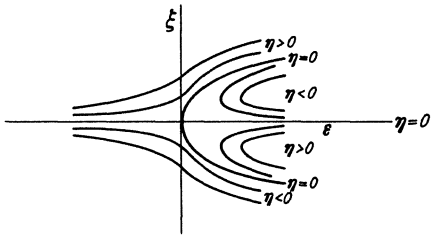
$$0=\zeta\{(V_{110}\varepsilon+V_{300}\zeta^2)\,E_1(\zeta,\varepsilon)\}\,,\qquad E_1(0,0)\neq 0\,. \tag{6.6}$$

Eine Lösung ist dann $\zeta=0$, dem entspricht für die ursprüngliche Aufgabenstellung (1.1), (1.6), (1.7) die identisch verschwindende Funktion $u(x,t)=0$.

Die geschweifte Klammer in (6.6) Null gesetzt ergibt eine Gleichung zwischen ε und ζ, in der ζ nur von gerader Ordnung auftritt, der zugehörige

Graph also symmetrisch zur ε-Achse liegt. Für kleine ζ- und ε-Werte ergibt sich annähernd eine Parabel, die je nachdem ob V_{110} und V_{300} gleiches oder entgegengesetztes Vorzeichen haben, in Richtung negativer oder positiver ε offen ist.

Ist $\eta \neq 0$, so erhalten wir z. B. mit $V_{110} V_{300} < 0$, $V_{300} V_{001} < 0$ etwa folgendes Bild:



Jedes Punktetripel ζ, ε, η, für das $|\zeta| \leqq \delta_1$, $|\varepsilon| \leqq \delta_2$, $|\eta| \leqq \delta_3$ ist und das eine Lösung der Verzweigungsgleichung (6.5) ist, liefert dann eine Lösung der Aufgabe (1.1), (1.6), (1.7), denn für diese Parameter konvergieren

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu^2 {}_\nu u(x;\zeta,\varepsilon,\eta), \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu {}_\nu \dot{u}(x;\zeta,\varepsilon,\eta), \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} {}_\nu \ddot{u}(x;\zeta,\varepsilon,\eta)$$

absolut und gleichmäßig und liefern in x stetige Funktionen. Dann ist aber

$$u(x,t;\zeta,\varepsilon,\eta) = \frac{{}_0 u(x;\zeta,\varepsilon,\eta)}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} {}_\nu u(x;\zeta,\varepsilon,\eta) \cos \nu\lambda t$$

für jedes Lösungstripel $(\zeta, \varepsilon, \eta)$ mit $|\zeta| \leqq \delta_1$, $|\varepsilon| \leqq \delta_2$, $|\eta| \leqq \delta_3$ eine nach t und x zweimal stetig differenzierbare Funktion, die eine Lösung der Differentialgleichung (1.1) ist und die Bedingungen (1.6) und (1.7) befriedigt.

7. Die in 4. gemachten Voraussetzungen entsprechen dem Fall, daß die zu (1.1), (1.6), (1.7) gehörende homogene Aufgabe genau (bis auf einen Faktor) eine mit der Periode $T_0 = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}$ periodische Lösung besitzt.

Betrachten wir noch speziell den Fall, daß $\eta = 0$ ist. Nach den Untersuchungen in 6. tritt in ${}_\nu v_i(x)$ je nachdem, ob ν gerade oder ungerade ist, ζ in geraden oder ungeraden Potenzen auf. Dann geht aber die Lösung mit $-\zeta$ aus der Lösung mit $+\zeta$ hervor durch die Änderung des Argumentes t um $\dfrac{\pi}{\lambda}$. Betrachten wir solche Lösungen als nicht verschieden, so haben wir den

Satz: *Hat die homogene Aufgabe*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} + c(x)\,u = 0$$

mit den Bedingungen (1.6), (1.7) *genau eine Lösung mit der Periode* $T_0 = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}$, *so zweigt bei der nichtlinearen Aufgabe* (1.1) *mit* $\eta = 0$ *von der Lösung* $u(x,t) = 0$ *für* $\varepsilon = 0$ *genau eine von* ε *abhängende und nur für* $\varepsilon > 0$ *oder* $\varepsilon < 0$ *existierende*

Schar mit $T(\varepsilon)$ periodischer Lösungen ab. Für die von ε abhängende Periode $T(\varepsilon)$ gilt:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} T(\varepsilon) = T_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}.$$

Der allgemeine Fall, daß die homogene Aufgabe keine mit T_0 periodische Lösung hat, läßt sich genauso behandeln. Hier tritt natürlich keine Verzweigung auf, es gibt also für genügend kleine η zu jedem T genau eine Lösung.

Der Fall, daß mehrere Eigenwerte $\lambda_i \geqq 0$ sind, läßt sich wegen der in II zu beweisenden Gültigkeit der Abschätzungen (3.11), (3.12) auch für diesen Fall genauso behandeln solange nur kein Eigenwert $\lambda_i = n\lambda_0$ ($n > 0$, ganz) ist. In dem letzteren Fall müssen wir dann mit mehreren verallgemeinerten Greenschen Funktionen arbeiten, was dann zur gleichzeitigen Betrachtung mehrerer Verzweigungsgleichungen führt.

II

Wir wollen nun die in Hilfssatz 2 unter (I.3.11) und (I.3.12) angegebenen Abschätzungen beweisen.

1. Wir beweisen sie zuerst für die Randwertaufgabe

$$(1.1) \qquad {}_\nu\ddot{u} + (b(x) - \nu^2\lambda^2)\,{}_\nu u = 0, \qquad {}_\nu u(0) = {}_\nu u(1) = 0$$

und beschränken uns dabei zunächst auf genügend große ν, so daß mit $\nu > N$ gilt:

$$(1.2) \qquad b(x) < B < \frac{1}{2}\nu^2\lambda^2, \qquad 2 < e^{\frac{1}{2}\nu^2\lambda^2}$$

Dann hat die Randwertaufgabe (1.1) keine Eigenlösungen. Durch die Randbedingungen

$$(1.3) \qquad \begin{aligned} {}_\nu u_1(0) &= 1, \quad {}_\nu u_1(1) = 0, \\ {}_\nu u_2(0) &= 0, \quad {}_\nu u_2(1) = 0 \end{aligned}$$

sind für $\nu > N$ eindeutig zwei Lösungen ${}_\nu u_i(x)$ im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ bestimmt.

Ferner gibt es zwei Konstanten B und G, so daß $G < b(x) < B$ ist. Wir definieren dann:

$$(1.4) \qquad 0 < \beta^2 = \nu^2\lambda^2 - B \leqq \nu^2\lambda^2 - b(x) \leqq \nu^2\lambda^2 - G = \gamma^2.$$

Die Greensche Funktion zu (1) lautet nach SAGAN ([8], S. 332):

$$(1.5) \qquad {}_\nu\Gamma(x,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{{}_\nu u_2(x)\,{}_\nu u_1(\xi)}{{}_\nu\dot{u}_2(0)}, & 0 \leqq x \leqq \xi \leqq 1 \\ -\dfrac{{}_\nu u_1(x)\,{}_\nu u_2(\xi)}{{}_\nu\dot{u}_2(0)} = \dfrac{{}_\nu u_1(x)\,{}_\nu u_2(\xi)}{{}_\nu\dot{u}_1(1)}, & 0 \leqq \xi \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

und die Ableitung nach x

$$(1.6) \qquad {}_\nu\dot{\Gamma}(x,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{{}_\nu\dot{u}_2(x)\,{}_\nu u_1(\xi)}{{}_\nu\dot{u}_2(0)}, & 0 \leqq x \leqq \xi \leqq 1 \\ -\dfrac{{}_\nu\dot{u}_1(x)\,{}_\nu u_2(\xi)}{{}_\nu\dot{u}_2(0)} = \dfrac{{}_\nu\dot{u}_1(x)\,{}_\nu u_2(\xi)}{{}_\nu\dot{u}_1(1)}, & 0 \leqq \xi < x \leqq 1. \end{cases}$$

Ist speziell $b(x)=b=\text{const}$, so ergeben sich mit $\alpha^2=\nu^2\lambda^2-b$ die beiden durch (1.3) bestimmten Lösungen der Differentialgleichung von (1.1) zu

$$
\begin{aligned}
&{}_\nu u_1(x)=\frac{\operatorname{Sin}\alpha(1-x)}{\operatorname{Sin}\alpha}, && {}_\nu u_2(x)=\frac{\operatorname{Sin}\alpha x}{\operatorname{Sin}\alpha},\\
&{}_\nu \dot u_1(x)=-\frac{\alpha\operatorname{Cos}\alpha(1-x)}{\operatorname{Sin}\alpha}, && {}_\nu \dot u_2(x)=\frac{\alpha\operatorname{Cos}\alpha x}{\operatorname{Sin}\alpha},\\
&{}_\nu \dot u_1(1)=-\frac{\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha}, && {}_\nu \dot u_2(0)=\frac{\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha}.
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Für die späteren Abschätzungen benötigen wir folgende Hilfssätze und Korollare:

Hilfssatz 1: *Gilt für eine Lösung $u(x)$ der Differentialgleichung*

$$\ddot u-a(x)\,u=0,\qquad (a(x)>0) \tag{1.8}$$

im Punkte $x=x_0: u(x_0)\geqq 0$, $\dot u(x_0)>0$, so ist für alle $x>x_0: u(x)>u(x_0)\geqq 0$, $\dot u(x)>\dot u(x_0)>0$.

Beweis: Da für x_0 $u(x_0)\geqq 0$ und $\dot u(x_0)>0$ sind, sind für alle $x_0<x<x_0+\varepsilon$ $u(x)$, $\dot u(x)>0$. Da nach (1.8) $\ddot u(x)>0$ falls $u(x)>0$, so folgt sofort die Behauptung.

Korollar 1: *Gilt für eine Lösung $u(x)$ von (1.8) im Punkte $x=x_0$: $u(x_0)\leqq 0$, $\dot u(x_0)<0$, so ist für alle $x>x_0: u(x)<u(x_0)\leqq 0$, $\dot u(x)<\dot u(x_0)<0$.*

Korollar 2: *Gilt für eine Lösung $u(x)$ von (1.8) im Punkte $x=x_0$ $u(x_0)\geqq 0$, $\dot u(x_0)<0$, so ist für alle $x<x_0: u(x)>u(x_0)\geqq 0$, $\dot u(x)<\dot u(x_0)<0$.*

Korollar 3: *Gilt für eine Lösung $u(x)$ von (1.8) im Punkte $x=x_0: u(x_0)\leqq 0$, $\dot u(x_0)>0$, so ist für alle $x<x_0: u(x)<u(x_0)\leqq 0$, $\dot u(x)>\dot u(x_0)>0$.*

Korollar 4: *Erfüllt eine Lösung $u(x)$ von (1.8) die Randbedingungen $u(x_0)=0$, $u(x_1)=1$, $(x_0<x_1)$, so gilt $u(x)>0$ für $x_0<x\leqq x_1$.*

Korollar 5: *Erfüllt eine Lösung $u(x)$ von (1.8) die Randbedingungen $u(x_0)=1$, $u(x_1)=0$, $(x_0<x_1)$, so gilt $u(x)>0$ für $x_0\leqq x<x_1$.*

Hilfssatz 2: *Gilt für je eine Lösung $u(x)$ bzw. $v(x)$ der beiden Differentialgleichungen*

$$\begin{aligned}&\ddot u-a(x)\,u=0\\ &\ddot v-b(x)\,v=0\end{aligned}\qquad \text{mit}\quad 0<a(x)<b(x): \tag{1.9}$$

$0\leqq u(x_0)=v(x_0)$ *und* $0<\dot u(x_0)\leqq\dot v(x_0)$, *dann ist* $0<u(x)<v(x)$ *und* $0<\dot u(x)<\dot v(x)$ *für* $x_0<x$.

Beweis: Die erste Ungleichung ergibt sich einerseits aus Hilfssatz 1, zum anderen nach TRICOMI ([9], S. 103), wenn wir $-b(x)$ mit $P_1(x)$, $-a(x)$ mit $P_2(x)$, v mit y_1 und u mit y_2 identifizieren. Die zweite Ungleichung folgt sofort:

$$0<\dot u(x)=\dot u(x_0)+\int_{x_0}^{x}\ddot u(\xi)\,d\xi=\dot u(x_0)+\int_{x_0}^{x}a(\xi)\,u(\xi)\,d\xi<$$

$$<\dot v(x_0)+\int_{x_0}^{x}b(\xi)\,v(\xi)\,d\xi=\dot v(x).$$

Anmerkung: Gilt $0 \leqq a(x) \leqq b(x)$ und die Gleichheitszeichen nicht für alle x, so folgt bei den gleichen Voraussetzungen $0 \leqq u(x) \leqq v(x)$, $0 < \dot{u}(x) \leqq \dot{v}(x)$ für $x > x_0$.

Korollar 6: *Gilt für je eine Lösung $u(x)$ bzw. $v(x)$ von (1.9) für einen Punkt x_0: $0 \leqq u(x_0) = v(x_0)$ und $0 > \dot{u}(x_0) \geqq \dot{v}(x_0)$, dann ist $0 < u(x) < v(x)$ und $0 > \dot{u}(x) > \dot{u}(x)$ für $x < x_0$.*

Hilfssatz 3: *Für die eindeutigen Lösungen der Randwertaufgaben $u(0) = 0$, $u(1) = 1$ bzw. $v(0) = 0$, $v(1) = 1$ der Differentialgleichungen (1.9) gilt: $0 < v(x) < u(x)$ für $0 < x < 1$.*

Beweis: Aus Korollar 4 folgt, daß $u(x)$, $v(x) \geqq 0$ sein müssen. Da $u(0) = v(0) = 0$ ist, muß nach Hilfssatz 2 $\dot{u}(0) > \dot{v}(0) > 0$ sein, da sonst $u(1) = v(1) = 1$ nicht möglich ist. Also ist für $x \in (0, \varepsilon)$ $u(x) > v(x)$. Gibt es für $x \in (\varepsilon, 1)$ einen ersten Punkt, für den $u(x) = v(x)$ ist, so muß dort $\dot{u}(x) \leqq \dot{v}(x)$ sein. Dann kann aber wieder wegen Hilfssatz 2 $u(1) = v(1)$ nicht sein. Somit gilt $u(x) > v(x)$ für alle $x \in (0, 1)$.

Anmerkung: Haben wir die schwächere Voraussetzung $0 \leqq a(x) \leqq b(x)$ mit dem Gleichheitszeichen nicht für alle x in $0 \leqq x \leqq 1$, so ist $0 \leqq v(x) \leqq u(x)$, wobei das Gleichheitszeichen auch nicht für alle x gilt.

Korollar 7: *Für die eindeutig bestimmten Lösungen der Randwertaufgaben $u(0) = 1$, $u(1) = 0$ und $v(0) = 1$, $v(1) = 0$ der Differentialgleichung (1.9) gilt: $0 < v(x) < u(x)$ für $0 < x < 1$.*

Aus dem Hilfssatz 1 und seinen Korollaren folgt nun wegen (1.3) und der Voraussetzung $\nu > N$: ${}_\nu u_1(x)$, ${}_\nu u_2(x)$, ${}_\nu \dot{u}_2(x) > 0$ und ${}_\nu \dot{u}_1(x) < 0$ für $0 < x < 1$.

Dann ist aber nach (1.5) und (1.6)

$$\begin{aligned} (1.10) \qquad \int_0^1 |{}_\nu \Gamma(x, \xi)| \, d\xi &= -\frac{{}_\nu u_1(x)}{{}_\nu \dot{u}_1(1)} \int_0^x {}_\nu u_2(\xi) \, d\xi + \frac{{}_\nu \dot{u}_2(x)}{{}_\nu \dot{u}_2(0)} \int_x^1 {}_\nu u_1(\xi) \, d\xi \\ &= e(x) I_1(x) + f(x) I_2(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1.11) \qquad \int_0^1 |{}_\nu \dot{\Gamma}(x, \xi)| \, d\xi &= \frac{{}_\nu \dot{u}_1(x)}{{}_\nu \dot{u}_1(1)} \int_0^x {}_\nu u_2(\xi) \, d\xi + \frac{{}_\nu \dot{u}_2(x)}{{}_\nu \dot{u}_2(0)} \int_0^1 {}_\nu u_1(\xi) \, d\xi \\ &= -\dot{e}(x) I_1(x) + \dot{f}(x) I_2(x). \end{aligned}$$

Die Abschätzung der Funktionen $e(x)$, $\dot{e}(x)$, $f(x)$, $\dot{f}(x)$, $I_1(x)$, $I_2(x)$ liefert folgendes:

I. Für $e(x)$ und $\dot{e}(x)$:

$e(x)$ ist definiert durch $e(x) = -\frac{{}_\nu u_1(x)}{{}_\nu \dot{u}_1(1)}$, ist also eine Lösung der Differentialgleichung (1.1) mit den Anfangswerten $e(1) = 0$, $\dot{e}(1) = -1$. Wir vergleichen nun die Lösungen der beiden Differentialgleichungen

$$\ddot{e}(x) - (\nu^2 \lambda^2 - b(x)) e(x) = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{e}_\gamma(x) - \gamma^2 e_\gamma(x) = 0,$$

wobei γ durch (1.4) definiert ist, mit den gleichen Anfangswerten:

$$0 = e(1) = e_\gamma(1) \quad \text{und} \quad -1 = \dot{e}(1) = \dot{e}_\gamma(1).$$

Dann gilt nach dem Korollar 6 zum Hilfssatz 2 und (1.7)

$$0 \leqq e(x) \leqq \frac{1}{\gamma} \operatorname{Sin}\gamma(1-x) = e_\gamma(x) \tag{1.12}$$

$$\dot{e}_\gamma(x) = -\operatorname{Cos}\gamma(1-x) \leqq \dot{e}(x) \leqq 0 \tag{1.13}$$

für $0 \leqq x \leqq 1$.

II. Für $f(x)$ und $\dot{f}(x)$:

$f(x)$ ist definiert durch $f(x) = \frac{{}_\nu u_2(x)}{{}_\nu \dot{u}_2(0)}$, ist also eine Lösung der Differentialgleichung von (1.1) mit den Anfangswerten $f(0) = 0$, $\dot{f}(0) = 1$. Analog wie für $e(x)$ und $\dot{e}(x)$ erhalten wir

$$0 \leqq f(x) \leqq \frac{1}{\gamma} \operatorname{Sin}\gamma x = f_\gamma(x) \tag{1.14}$$

$$0 \leqq \dot{f}(x) \leqq \operatorname{Cos}\gamma x \leqq \dot{f}(x) \tag{1.15}$$

für $0 \leqq x \leqq 1$.

III. Für $I_1(x)$ und $I_2(x)$:

Wegen (1.4) und (1.7) ergibt sich nach Hilfssatz 3 und dem daraus folgenden Korollar 7:

$$0 \leqq {}_\nu u_1(x) \leqq \frac{\operatorname{Sin}\beta(1-x)}{\operatorname{Sin}\beta}, \qquad 0 \leqq {}_\nu u_2(x) \leqq \frac{\operatorname{Sin}\beta x}{\operatorname{Sin}\beta}.$$

Somit ist

$$I_1(x) = \int_0^x {}_\nu u_2(\xi)\, d\xi \leqq \int_0^x \frac{\operatorname{Sin}\beta\xi}{\operatorname{Sin}\beta}\, d\xi = \frac{\operatorname{Cos}\beta\xi}{\beta \operatorname{Sin}\beta}\Bigg|_0^x = \frac{1}{\beta \operatorname{Sin}\beta}(\operatorname{Cos}x - 1), \tag{1.16}$$

$$I_2(x) = \int_x^1 {}_\nu u_1(\xi)\, d\xi \leqq \int_x^1 \frac{\operatorname{Sin}\beta(1-\xi)}{\operatorname{Sin}\beta}\, d\xi = -\frac{\operatorname{Cos}\beta(1-\xi)}{\beta \operatorname{Sin}\beta}\Bigg|_x^1$$

$$= \frac{1}{\beta \operatorname{Sin}\beta}(\operatorname{Cos}\beta(1-x) - 1). \tag{1.17}$$

Nun können wir zur Abschätzung der Greenschen Funktion und ihrer Ableitung nach x kommen.

Nach (1.10), (1.12), (1.14), (1.16), (1.17) ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^1 |{}_\nu\Gamma(x,\xi)|\, d\xi &\leqq \frac{1}{\gamma} \operatorname{Sin}\gamma x \cdot \frac{1}{\beta \operatorname{Sin}\beta}(\operatorname{Cos}\beta(1-x) - 1) + \\ &+ \frac{1}{\gamma} \operatorname{Sin}\gamma(1-x) \frac{1}{\beta \operatorname{Sin}\beta}(\operatorname{Cos}\beta x - 1) \leqq \\ &\leqq \frac{1}{\beta\gamma \operatorname{Sin}\beta}[\operatorname{Sin}\gamma x \operatorname{Cos}\gamma(1-x) + \operatorname{Sin}\gamma(1-x) \operatorname{Cos}\gamma x] \\ &= \frac{1}{\beta\gamma} \frac{\operatorname{Sin}\gamma}{\operatorname{Sin}\beta}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Für die weiteren Abschätzungen brauchen wir noch folgende Ungleichungen:

a) (1.19) $\gamma-\beta \leqq \sqrt{B-G}$,

denn $\gamma-\beta \leqq \sqrt{\gamma^2-\beta^2}=\sqrt{B-G}$.

b) (1.20) $e^{\beta}-e^{-\beta}>\frac{1}{2}e^{\beta}$,

denn nach (1.2) und (1.4) ist $\beta^2>\frac{1}{2}\nu^2\lambda^2$ somit

$$e^{\beta}>e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\nu\lambda}, \quad e^{-\beta}<e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\nu\lambda}<\frac{1}{2}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}\nu\lambda}<\frac{1}{2}e^{\beta},$$

also $e^{\beta}-e^{-\beta}>e^{\beta}-\frac{1}{2}e^{\beta}=\frac{1}{2}e^{\beta}$.

c) Für die gleichen ν gilt

(1.21) $$\frac{1}{\beta\gamma}<\frac{1}{\beta^2}<\frac{2}{\nu^2\lambda^2}.$$

d) Aus (1.19) und (1.20) ergibt sich

(1.22) $$\frac{\operatorname{Sin}\gamma}{\operatorname{Sin}\beta}=\frac{e^{\gamma}-e^{-\gamma}}{e^{\beta}-e^{-\beta}}\leqq\frac{2e^{\gamma}}{e^{\beta}}=2e^{(\gamma-\beta)}\leqq 2e^{\sqrt{B-G}}.$$

Mit (1.21) und (1.22) folgt dann aus (1.18)

(1.23) $$\int_0^1|{}_{\nu}\Gamma(x,\xi)|\,d\xi\leqq\frac{1}{\beta\gamma}\frac{\operatorname{Sin}\gamma}{\operatorname{Sin}\beta}\leqq\frac{4e^{\sqrt{B-G}}}{\nu^2\lambda^2}.$$

Weiterhin ist

(1.24) $$\operatorname{Cos}\alpha-1<\operatorname{Sin}\alpha \quad \text{für} \quad \alpha>0.$$

Für die Ableitung der Greenschen Funktion nach x gilt somit nach (1.11), (1.13), (1.15), (1.16), (1.17), (1.22) und (1.24)

$$\int_0^1|{}_{\nu}\dot{\Gamma}(x,\xi)|\,d\xi=-\dot{e}(x)\,I_1(x)+\dot{f}(x)\,I_2(x)\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{\beta\operatorname{Sin}\beta}\left[\operatorname{Cos}\gamma(1-x)(\operatorname{Cos}\beta x-1)+\operatorname{Cos}\gamma x(\operatorname{Cos}\beta(1-x)-1)\right]\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{\beta\operatorname{Sin}\beta}\left[\operatorname{Cos}\gamma(1-x)\operatorname{Sin}\gamma x+\operatorname{Cos}\gamma x\operatorname{Sin}\gamma(1-x)\right]$$

$$=\frac{1}{\beta}\frac{\operatorname{Sin}\gamma}{\operatorname{Sin}\beta}\leqq\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\nu\lambda}e^{\sqrt{B-G}}.$$

Wir haben nun die erwünschten Ungleichungen für alle $\nu>N$ bewiesen. Für die endlich vielen $0\leqq\nu\leqq N$ ist aber entweder die Greensche Funktion samt ihrer Ableitung nach x beschränkt oder es existiert überhaupt keine

Greensche Funktion, da die Aufgabe (1.1) eine Eigenlösung besitzt, dann nehmen wir eine (einschließlich ihrer Ableitung nach x) beschränkte, verallgemeinerte Greensche Funktion. Für diese endlich vielen Greenschen Funktionen läßt sich natürlich eine gemeinsame Konstante C_1 bestimmen, so daß

$$\int_0^1 |{}_\nu\Gamma(x,\xi)|\,d\xi \leqq \frac{C_1}{\nu^2}, \qquad \int_0^1 |{}_\nu\dot{\Gamma}(x,\xi)|\,d\xi \leqq \frac{C_1}{\nu}$$

für $0 \leqq \nu \leqq N$, wobei für $\nu = 0$ im Nenner 1 zu setzen ist. Wählen wir dann

$$C = \max\left(C_1, \frac{4e^{\sqrt{B-G}}}{\lambda^2}, \frac{2\sqrt{2}\,e^{\sqrt{B-G}}}{\lambda}\right),$$

so sind für die Randwertaufgabe (1.1) die Ungleichungen (I.3.11) und (I.3.12) bewiesen.

2. Es bleibt nun noch (I.3.11) und (I.3.12) für die Randwertaufgabe

$$(2.1) \qquad {}_\nu\ddot{u} + a(x)\,{}_\nu\dot{u} + (c(x) - \nu^2\lambda^2)\,{}_\nu u = 0, \qquad {}_\nu u(0) = {}_\nu u(1) = 0$$

zu beweisen.

Durch die Substitution ${}_\nu u = e^{-\frac{1}{2}\int_0^x a(\tau)\,d\tau} \cdot {}_\nu v$ transformiert sich die Randwertaufgabe (2.1) in

$$(2.2) \qquad {}_\nu\ddot{v} + (b(x) - \nu^2\lambda^2)\,{}_\nu v = 0, \qquad {}_\nu v(0) = {}_\nu v(1) = 0$$

mit $b(x) = -\frac{1}{4}a^2(x) - \frac{1}{2}\dot{a}(x) + c(x)$.

Zwischen den gewöhnlichen Greenschen Funktionen der Randwertaufgaben (2.1) und (2.2) bestehen folgende Beziehungen:

$$(2.3) \qquad {}_\nu\Gamma_u(x,\xi) = e^{-\frac{1}{2}\int_0^x a(\tau)\,d\tau} \cdot {}_\nu\Gamma_v(x,\xi) \cdot e^{\frac{1}{2}\int_0^\xi a(\tau)\,d\tau}$$

und

$$\begin{aligned} {}_\nu\dot{\Gamma}_u(x,\xi) = &-\frac{1}{2}a(x)e^{-\frac{1}{2}\int_0^x a(\tau)\,d\tau}\,{}_\nu\Gamma_v(x,\xi)\,e^{\frac{1}{2}\int_0^\xi a(\tau)\,d\tau} + \\ &+ e^{-\frac{1}{2}\int_0^x a(\tau)\,d\tau}\,{}_\nu\dot{\Gamma}_v(x,\xi)\,e^{\frac{1}{2}\int_0^\xi a(\tau)\,d\tau}. \end{aligned} \qquad (2.4)$$

Mit $0 < E_1 \leqq e^{\frac{1}{2}\int_0^x a(\tau)\,d\tau} \leqq E_2$ und $\left|\frac{1}{2}a(x)\right| < A$ erhalten wir dann

$$\int_0^1 |{}_\nu\Gamma_u(x,\xi)|\,d\xi \leqq \frac{E_2}{E_1}\int_0^1 |{}_\nu\Gamma_v(x,\xi)|\,d\xi,$$

$$\int_0^1 |{}_\nu\dot{\Gamma}_u(x,\xi)|\,d\xi \leqq A\frac{E_2}{E_1}\int_0^1 |{}_\nu\Gamma_v(x,\xi)|\,d\xi + \frac{E_2}{E_1}\int_0^1 |{}_\nu\dot{\Gamma}_v(x,\xi)|\,d\xi.$$

Da für ${}_{\nu}\Gamma_{v}(x, \xi)$ eine Konstante C_1 existiert, so daß die Ungleichungen (I.3.11), (I.3.12) erfüllt sind, brauchen wir nur $C = \frac{E_2}{E_1} C_1 + B \frac{E_2}{E_1} C_1$ zu setzen, um für alle gewöhnlichen Greenschen Funktionen der Randwertaufgabe (2.1) das gewünschte Ergebnis zu erhalten. Die noch ausstehenden endlich vielen verallgemeinerten Greenschen Funktionen bringen höchstens noch eine Änderung der Konstanten C.

Damit ist die Richtigkeit des Hilfssatzes 2 in I bewiesen.

Literatur

[1] KARIMOV, DJ. KH.: Sur les solutions périodiques des équations différentielles non-linéaires du type parabolique. Dokl. Akad. Nauk SSSR **25**, 3—6 (1939).

[2] — Über die periodischen Lösungen der nichtlinearen differentialen Gleichungen des parabolischen Typus. Dokl. Akad. Nauk SSSR **28**, 403—406 (1940).

[3] — Sur les solutions périodiques des équations différentielles non-linéaires du type parabolique. Dokl. Akad. Nauk SSSR **46**, 175—178 (1945).

[4] — Sur les solutions périodiques des équations différentielles non-linéaires du type parabolique. Dokl. Akad. Nauk SSSR **54**, 293—295 (1946).

[5] — Sur les solutions périodiques des équations différentielles non-linéaires du type parabolique. Dokl. Akad. Nauk SSSR **56**, 119—121 (1947).

[6] LICHTENSTEIN, L.: Zur Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus. J. reine angew. Math. **158**, 80—91 (1927).

[7] PRODI, G.: Soluzioni periodiche di equazioni alle derivate parziali di tipo parabolico e non lineari. Riv. Mat. Univ. Parma **3**, 265—290 (1952).

[8] SAGAN, H.: Boundary and eigenvalue problems in mathematical physics. New York-London: John Wiley & Sons 1961.

[9] TRICOMI, F.: Differential equations. Glasgow: Blackie & Son 1961.

Dr. ULRICH STAUDE
Mathematisches Institut der Universität
65 Mainz, Saarstr. 21

(Eingegangen am 13. August 1965)

GRAMSCH, B.
Math. Annalen 165, 135—151 (1966)

σ-Transformationen in lokalbeschränkten Vektorräumen

Herrn ERNST HÖLDER zum 65. Geburtstag am 2. 4. 1966 gewidmet

BERNHARD GRAMSCH

DEPRIT [2] und PIETSCH [11] haben die von SCHAEFER [16] definierten σ-Transformationen, topologische Endomorphismen mit endlichdimensionalem Nullraum und abgeschlossenem, endlichcodimensionalem Bildraum, in lokalkonvexen Vektorräumen eingehend untersucht. Dabei zeigte sich in [11], daß die topologischen Eigenschaften der σ-Transformationen, wie sie für Banachräume bekannt sind, im allgemeinen nicht mehr gelten.

In der vorliegenden Arbeit wird mit Hilfe der in [5] gewonnenen Resultate über lokalbeschränkte Algebren und der darin definierten holomorphen Funktionen die Theorie der σ-Transformationen auf vollständige lokalbeschränkte Vektorräume mit genügend vielen stetigen Linearformen ausgedehnt. Aus der Charakterisierung der σ-Transformationen als Endomorphismen mit invertierbarer Restklasse in der Quotientenalgebra der stetigen Endomorphismen nach dem abgeschlossenen zweiseitigen Ideal der kompakten Operatoren ergeben sich wichtige topologische Eigenschaften. Da die Menge der σ-Transformationen mit gleichem Index offen ist, erhalten wir die Stetigkeit der Indexfunktion. Das von RUSTON [15] in Banachräumen erzielte Resultat, daß für einen Operator genau dann die Aussagen der Rieszschen Theorie gelten, wenn seine Restklasse in der erwähnten Quotientenalgebra quasinilpotent ist, und eine äquivalente Aussage von PIETSCH gelten auch in den hier betrachteten Räumen (Satz 11). Ersetzen wir bei der Restklassenbildung das Ideal der kompakten Operatoren durch die möglicherweise davon verschiedene Abschließung des Ideals der Operatoren von endlichem Rang, so ergibt sich unmittelbar, daß die Restklasse jedes kompakten Operators in der neuen Quotientenalgebra quasinilpotent ist (Korollar 5).

Bekanntlich ist der Satz von Hahn-Banach in nicht normierbaren lokalbeschränkten Räumen falsch, daher müssen wir uns auf Räume mit genügend vielen stetigen Linearformen beschränken, um die Stetigkeit der hier benötigten Projektoren von endlichem Rang zu gewährleisten. Im ersten Abschnitt behandeln wir die mit σ-Transformationen zusammenhängende normale Auflösbarkeit in topologischen Vektorräumen. Die algebraischen Eigenschaften der σ-Transformationen ergeben sich im zweiten Abschnitt ohne die Annahme der lokalen Beschränktheit, während sie für die topologischen Eigenschaften im dritten Abschnitt wesentlich ist.

DEPRIT [2] und PZREWORSKA-ROLEWICZ [12], [13] haben die rein algebraische Seite der Theorie der σ-Transformationen bzw. singulären Integral-

gleichungen für beliebige lineare Räume betrachtet; jedoch bilden in der Algebra aller linearen Transformationen die Operatoren von endlichem Rang das einzige zweiseitige Ideal, das für alle linearen Abbildungen von endlichem Index als indexerhaltende Störung zulässig ist. Für Banachräume [(1)-Räume] ist bekannt, daß es im allgemeinen die kompakten Operatoren echt umfassende, abgeschlossene zweiseitige Ideale Rieszscher Endomorphismen gibt. Durch die Verknüpfung und Verschärfung von Resultaten von PIETSCH [11], RUSTON [15] und YOOD [18] gelangen wir zu dem neben Satz 11 für die Rieszsche Theorie grundlegenden Satz 13: In der Algebra aller stetigen linearen Transformationen der hier betrachteten (p)-Räume ($0 < p \leqq 1$) gibt es genau ein maximales Ideal Rieszscher Endomorphismen; dieses Ideal ist abgeschlossen und zweiseitig.

(p)-Räume haben wie Banachräume die wesentliche Eigenschaft der Stetigkeit des Index, andererseits folgt aus Beispielen von PIETSCH, daß dies bereits für FM-Räume nicht mehr der Fall ist.

1. Normale Auflösbarkeit in topologischen Vektorräumen

Im folgenden sei X ein separierter topologischer Vektorraum über den reellen oder komplexen Zahlen und $\mathscr{L}(X)$ die Algebra seiner stetigen Endomorphismen. Mit $N(T)$ bzw. $B(T)$ bezeichnen wir den Nullraum bzw. Bildraum von $T \in \mathscr{L}(X)$.

Definition 1. *Ein stetiger Endomorphismus T von X heißt normal auflösbar, wenn für jedes $x_0 \in X$ die folgende Alternative gilt: Entweder*

a) *$Tx = x_0$ hat wenigstens eine Lösung $x \in X$, oder*

b) *es existiert eine stetige Linearform x' auf X mit $x'(Tx) = 0$ für alle $x \in X$, so daß $x'(x_0) \neq 0$ gilt.*

Für lokalkonvexe Vektorräume ist bekanntlich die Abgeschlossenheit des Bildraumes $B(T)$ mit der normalen Auflösbarkeit von T äquivalent. In diesem Fall kann man die normale Auflösbarkeit auch so formulieren: $Tx = x_0$ ist genau dann lösbar, wenn $x'(x_0) = 0$ für alle Lösungen x' der homogenen adjungierten Gleichung $T'x' = 0$ erfüllt ist.

Existieren auf X *genügend viele stetige Linearformen, d. h. für jedes $x \in X$ gibt es eine stetige Linearform x' mit $x'(x) \neq 0$*, so ist auch dann in vielen Fällen[1] die auf X gegebene Topologie feiner als die feinste zulässige lokalkonvexe Topologie (z. B.: l^p, $0 < p < 1$). Für allgemeine topologische Vektorräume ist auch bei abgeschlossenem Bildraum die normale Auflösbarkeit hinfällig; denn z. B. auf dem lokalbeschränkten Raum $L^p[0, 1]$, $0 < p < 1$, verschwindet jede stetige Linearform identisch ([17]), andererseits gibt es aber stetige Endomorphismen mit abgeschlossenem, echt in $L^p[0, 1]$ enthaltenem Bildraum.

Mit Hilfe eines Trennungssatzes für konvexe Mengen können wir ein notwendiges und hinreichendes Kriterium angeben:

[1] In [6] wird eine Klasse lokalbeschränkter, nicht normierbarer Räume meßbarer Funktionen auf *stetigem* Maßraum angegeben, deren schwache Topologie separiert ist. Alle bekannten lokalbeschränkten Räume meßbarer Funktionen haben unendlichdimensionale abgeschlossene Unterräume mit genügend vielen stetigen Linearformen.

Satz 1. *Der stetige Endomorphismus T des topologischen Vektorraumes X ist genau dann normal auflösbar, wenn zu jedem nicht in $B(T)$ enthaltenem $x_0 \in X$ eine zu $B(T)$ fremde konvexe Umgebung $U(x_0)$ existiert.*

Beweis. Es sei $Tx = x_0$ nicht lösbar, d. h. $x_0 \notin B(T)$; dann existiert aber nach einem bekannten Trennungssatz ([8], S. 191) eine abgeschlossene $B(T)$ enthaltende Hyperebene, die zu $U(x_0)$ fremd ist. Damit haben wir also eine stetige Linearform x', die $x'(Tx) = 0$ für alle $x \in X$ und $x'(x_0) \neq 0$ erfüllt. Gibt es umgekehrt für jedes $x_0 \notin B(T)$ eine stetige Linearform x' mit $x'(x_0) = 1$, die auf $B(T)$ verschwindet, so ist jeweils die offene, x_0 enthaltende, konvexe Menge $\{x \in X : 1/2 < x_1'(x) < \infty\}$, x_1' sei der Realteil von x', zu $B(T)$ fremd.

Man ersieht hieraus, wie auch aus dem lokalkonvexen Fall, daß die Abgeschlossenheit des Bildraumes notwendig ist.

Da jeder algebraische Komplementärraum eines abgeschlossenen endlichcodimensionalen Teilraumes $X_0 \subset X$ auch topologischer Komplementärraum ist, sind alle stetigen Endomorphismen von X mit endlichcodimensionalem abgeschlossenen Bildraum normal auflösbar. Verschwindet jede stetige Linearform auf X identisch, so kann es derartige Abbildungen nicht geben, also auch keine kompakten Endomorphismen mit einem von Null verschiedenen Eigenwert. Auf diese Tatsache stieß WILLIAMSON [17] bei der Untersuchung der Rieszschen Theorie in allgemeinen topologischen Vektorräumen.

Ein Endomorphismus $P \in \mathscr{L}(X)$ mit $P^2 = P$ heißt stetiger Projektor; $Q = I - P$ (I identische Abbildung) ist ebenfalls stetiger Projektor, und es gilt $N(P) = B(Q)$, $B(P) = N(Q)$. Wir nennen einen Teilraum $X_0 \subset X$ stetig projiziert, wenn es einen stetigen Projektor mit $B(P) = X_0$ gibt.

Satz 2. *Gibt es auf X genügend viele stetige Linearformen, so ist jeder Endomorphismus von X mit stetig projiziertem Bildraum normal auflösbar.*

Beweis. Sei $T \in \mathscr{L}(X)$ und P stetiger Projektor mit $B(P) = B(T)$, so haben wir die topologische direkte Zerlegung $X = N(P) \oplus B(T)$. Sei $x_0 \notin B(T)$ und $x_0 = x_1 + x_2$, $x_1 \in N(P)$, $x_2 \in B(T)$, so gibt es eine stetige Linearform x' mit $x'(x_1) = 1$. Setzen wir $Q = I - P$, so verschwindet $x_1'(x) = x'(Qx)$ auf $B(T)$, und es gilt $x_1'(x_0) = 1$.

Ferner sei bemerkt, daß $T \in \mathscr{L}(X)$ genau dann normal auflösbar ist, wenn der Durchschnitt aller Hyperebenen, die den auf $B(T)$ verschwindenden Linearformen zugeordnet sind, mit $B(T)$ zusammenfällt.

Für die Theorie der σ-Transformationen benötigen wir wesentlich die folgende einfach zu beweisende Aussage.

Lemma 1. *Auf einem topologischen Vektorraum X gibt es genau dann genügend viele stetige Linearformen, wenn alle endlichdimensionalen Teilräume topologische Komplementärräume besitzen.*

Beweis. Wir brauchen nur die Notwendigkeit zu zeigen: Sei X_0 ein Teilraum der Dimension n und $x_1 \in X_0$, so gibt es ein x_1' im topologisch dualen Raum X' mit $x_1'(x_1) = 1$. In der x_1' zugeordneten Hyperebene H_1 existiert ein $x_2 \in X_0$; falls $n > 1$, und dazu ein $x_2' \in X'$ mit $x_2'(x_2) = 1$. Für $n > 2$ gibt es ein $x_3 \in H_1 \cap H_2$ und ein $x_3' \in X'$ mit $x_3'(x_3) = 1$. Schließlich erhalten wir auf diese Weise n linear unabhängige $x_i \in X$ und $x_i' \in X'$ ($i = 1, \ldots, n$) mit $x_i'(x_i) = 1$ und

$x_i'(x_j)=0$ für $i<j$. Offensichtlich kann man aus diesen n Linearformen x_i' n Linearformen $u_i \in X'$ gewinnen, die $u_i(x_j)=\delta_{ij}$ erfüllen. Die durch

$$Px=\sum_{i=1}^{n} u_i(x)x_i$$

gegebene Abbildung ist ein stetiger Projektor von X auf X_0. Wir haben also die topologische direkte Zerlegung

$$X=X_0 \oplus N(P)$$

erhalten.

Lemma 2. *X und Y seien vollständige metrisierbare topologische Vektorräume. Hat das Bild $B(T)$ der stetigen linearen Abbildung T von X in Y endliche (algebraische) Kodimension in Y, so ist $B(T)$ abgeschlossen*[1a]*. T ist dann topologischer Homomorphismus und $B(T)$ stetig projiziert.*

Gibt es auf X genügend viele stetige Linearformen und gilt $\dim(N(T))<\infty$, *so ist auch $N(T)$ stetig projiziert und T ein topologischer Isomorphismus jedes topologischen Komplementärraumes von $N(T)$ auf $B(T)$.*

Beweis. Da $N(T)$ abgeschlossen ist, induziert T eine stetige eineindeutige Abbildung T des in der Quotientenraumtopologie vollständigen metrisierbaren Raumes $X/N(T)$ auf $B(T)$.

$$\left.\begin{array}{ccc} X \xrightarrow{h} X/N(T)=\hat{X} \xrightarrow{\hat{T}} B(T) \\ \oplus \qquad\qquad \oplus \\ X_0 \xrightarrow{T_0} Y_0 \end{array}\right\} \quad Y \quad (T=\hat{T}h)$$

Sei Y_0 ein n-dimensionaler algebraischer Komplementärraum von $B(T)$ in Y, X_0 ein n-dimensionaler topologischer Vektorraum und T_0 eine auf $\hat{X}_0$ verschwindende lineare Abbildung der topologischen direkten Summe $\hat{X} \oplus X_0$ auf Y_0; dann ist wegen der Stetigkeit von T_0 die Summe $S=\hat{T}+T_0$ ($\hat{T}X_0=0$) eine stetige Abbildung des vollständigen metrisierbaren Raumes $\hat{X} \oplus X_0$ auf Y. S ist wegen der Vollständigkeit von Y nach dem Satz von Banach-Schauder offen; $B(T)=S\hat{X}$ ist demnach als Bild unter S des abgeschlossenen Unterraumes $\hat{X}$ von $\hat{X} \oplus X_0$ abgeschlossen. Die letzte Behauptung ergibt sich aus Lemma 1.

2. σ-Transformationen in vollständigen metrisierbaren topologischen Vektorräumen

Diesem Abschnitt legen wir einen vollständigen metrisierbaren topologischen Vektorraum X zugrunde und machen stets die wegen Lemma 1 naheliegende Annahme, daß auf X genügend viele stetige Linearformen existieren.

Definition 2. *Ein stetiger Endomorphismus T des vollständigen metrisierbaren Vektorraumes X heißt σ-Transformation, wenn die folgenden Aussagen gelten:*

[1a] Herr Prof. HEUSER hat mich freundlicherweise auf die entsprechende Aussage für Banachräume in [7] (Lemma 332) aufmerksam gemacht.

1) *Der Nullraum $N(T)$ ist endlichdimensional.*

2) *Der Bildraum $B(T)$ hat endliche Kodimension.*

(Vgl. Lemma 2.)

Jeder σ-Transformation wird der Index

$$\operatorname{ind}(T) = \dim N(T) - \operatorname{codim} B(T)$$

zugeordnet.

Satz 3. *Der Endomorphismus T von X ist genau dann σ-Transformation, falls zwei Abbildungen L, $R \in \mathscr{L}(X)$ existieren, für die*

a) $LT = I - F_1$,

b) $TR = I - F_2$

gilt, wobei I die identische Abbildung ist und $F_i \in \mathscr{L}(X)$ $(i = 1, 2)$ endlichdimensionalen Bildraum hat.

Beweis. Sei T σ-Transformation. Wir haben dann die topologischen direkten Zerlegungen

$$X = N(T) \oplus X_1$$

und

$$X = B(T) \oplus X_2,$$

wobei X_1 endlichcodimensional und X_2 endlichdimensional ist. T vermittelt nach einem bekannten Satz von Banach einen topologischen Isomorphismus von X_1 auf $B(T)$. T_1^{-1} sei die auf $B(T)$ definierte Inverse der Einschränkung T_1 von T auf X_1. Bezeichnen wir mit P bzw. Q den stetigen Projektor von X auf $N(T)$ längs X_1 bzw. auf $B(T)$ längs X_2, so gelten mit $S = T_1^{-1} Q$ die Gleichungen $ST = I - P$ und $TS = Q = I - (I - Q)$.

Wenn umgekehrt a) und b) für ein $T \in \mathscr{L}(X)$ erfüllt sind, wobei F_1 und F_2 endlichen Rang haben, so ist sowohl $N(T)$ als auch der Komplementärraum von $B(T)$ endlichdimensional.

Aus dem Beweis des vorangehenden Satzes ergibt sich

Korollar 1. *Ist $T \in \mathscr{L}(X)$ σ-Transformation, so gibt es eine σ-Transformation S mit $ST = I - P_1$ und $TS = I - P_2$, wobei P_1 und P_2 stetige Projektionen von endlichem Rang sind.*

Zur Formulierung algebraischer Eigenschaften der σ-Transformationen führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$\Sigma(X)$ sei die Menge aller σ-Transformationen von X,

$\mathscr{F}(X)$ das zweiseitige Ideal der Endomorphismen von endlichem Rang und

$\mathscr{K}(X)$ das zweiseitige Ideal der kompakten Endomorphismen,

dabei heißt $K \in \mathscr{L}(X)$ kompakt, falls K eine Nullmenge von X in eine kompakte Menge abbildet.

Nehmen wir nun an, daß für $T \in \mathscr{L}(X)$ Abbildungen L, $R \in \mathscr{L}(X)$ und K_1, $K_2 \in \mathscr{K}(X)$ existieren, so daß die Gleichungen

$$LT = I - K_1$$

und

$$TR = I - K_2$$

gelten, so ist sowohl LT als auch TR nach der allgemeinen Rieszschen Theorie ([9], [17]) σ-Transformation. Da für LT und TR Transformationen L_1 und R_1 existieren mit $L_1LT=I-F_1$ und $TRR_1=I-F_2$, $F_i\in\mathscr{F}(X)$ $(i=1, 2)$, erhalten wir zusammen mit Satz 3 die für Hilberträume auf NAKAMURA [10] zurückgehende Charakterisierung der σ-Transformationen:

Satz 4. *Ist $T\in\mathscr{L}(X)$, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) $T\in\Sigma(X)$.

b) *Die Restklasse von T in der Quotientenalgebra $\mathscr{L}(X)/\mathscr{F}(X)$ ist invertierbar.*

c) *Die Restklasse von T in der Quotientenalgebra $\mathscr{L}(X)/\mathscr{K}(X)$ ist invertierbar.*

$\Sigma(X)$ ist also das Urbild der Gruppe der invertierbaren Elemente in $\mathscr{L}(X)/\mathscr{F}(X)$ bzw. $\mathscr{L}(X)/\mathscr{K}(X)$ bei den entsprechenden kanonischen Homomorphismen von $\mathscr{L}(X)$.

Daraus folgt unmittelbar

Korollar 2. a) *$\Sigma(X)$ ist Halbgruppe, d. h. aus S, $T\in\Sigma(X)$ folgt $ST\in\Sigma(X)$.*

b) *Mit $T^n\in\Sigma(X)$ gilt auch $T\in\Sigma(X)$.*

c) *Sei S, $T\in\mathscr{L}(X)$ und $ST\in\Sigma(X)$, so folgt aus $T\in\Sigma(X)$ auch $S\in\Sigma(X)$ und aus $S\in\Sigma(X)$ auch $T\in\Sigma(X)$.*

d) *Aus $T\in\Sigma(X)$ und $K\in\mathscr{K}(X)$ folgt $T+K\in\Sigma(X)$.*

Für die Indexfunktion erhalten wir die gleichen Eigenschaften wie im Falle lokalkonvexer Vektorräume ([16]).

Satz 5. *Seien S, $T\in\Sigma(X)$ und $K\in\mathscr{K}(X)$, so gilt*

a) $\operatorname{ind}(ST)=\operatorname{ind}(S)+\operatorname{ind}(T)$,

b) $\operatorname{ind}(T+K)=\operatorname{ind}(T)$,

c) $\operatorname{ind}(T)=0$, *falls T in $\mathscr{L}(X)$ invertierbar ist.*

Beweis. a) (vgl. [18], [16], [2], [13]) Gegeben seien die linearen Räume X, Y, Z und die linearen Abbildungen S, T mit endlichem Index,

$$X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{S} Z.$$

n_S, n_T, n_{ST} bzw. m_S, m_T, m_{ST} seien die Dimensionen der Nullräume bzw. Kodimensionen der Bildräume von S, T, ST. Mit der direkten Zerlegung

$$X \xrightarrow{T} Y=\overbrace{Y_1\oplus\underbrace{B(T)\cap N(S)}_{N(S)}\oplus Y_2}^{B(T)}\oplus Y_3 \xrightarrow{S} \overbrace{\underbrace{SY_1}_{B(ST)}\oplus SY_3}^{B(S)}\oplus Z_1=Z$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}(ST)=n_{ST}-m_{ST}&=(n_T+\dim B(T)\cap N(S))-(m_S+\dim Y_3)\\&=(n_T+n_S-\dim Y_2)-(m_S+m_T-\dim Y_2)\\&=\operatorname{ind}(S)+\operatorname{ind}(T).\end{aligned}$$

b) Für $T \in \Sigma(X)$ gibt es nach Satz 3 ein $L \in \mathscr{L}(X)$, so daß $LT = I - F$, $F \in \mathscr{F}(X)$; demnach gilt $L(T+K) = I - F + LK$, wobei $-F + LK \in \mathscr{K}(X)$. Nun gilt aber nach der allgemeinen Theorie der kompakten Operatoren ([17], Theorem 2) $\operatorname{ind}(I - F_1) = 0$[2] und $\operatorname{ind}(I - K_1) = 0$ für $F_1 \in \mathscr{F}(X)$ und $K_1 \in \mathscr{K}(X)$. Daraus ergibt sich $\operatorname{ind}(LT) = \operatorname{ind}(L(T+K)) = 0$, und hieraus folgt mit a) $\operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(T+K) = -\operatorname{ind}(L)$.

Die Indexfunktion ist ein Homomorphismus der Halbgruppe $\Sigma(X)$ und wegen Satz 4 auch der Gruppen der invertierbaren Elemente von $\mathscr{L}(X)/\mathscr{F}(X)$ bzw. $\mathscr{L}(X)/\mathscr{K}(X)$ in die additive Gruppe der ganzen Zahlen. Der folgende Satz liefert eine interessante Eindeutigkeitsaussage solcher Homomorphismen, die mit dem gleichen Beweis auch für lokalkonvexe Vektorräume gilt. Für Banachräume findet man dieses Resultat in [3]. Mit $\Sigma_n(X)$ bezeichnen wir die Teilmenge von $\Sigma(X)$, auf der die Indexfunktion den Wert n hat.

Satz 6. *Auf der Halbgruppe $\Sigma(X)$ sei eine ganzzahlige Funktion $d(T)$ mit den folgenden Eigenschaften gegeben:*

a) $d(ST) = d(S) + d(T)$.

b) $d(S+F) = d(S)$, $F \in \mathscr{F}(X)$.

c) $d(T) = 0$, *wenn T in $\mathscr{L}(X)$ invertierbar ist.*

Dann gibt es eine rationale Zahl r, so daß

$$d(T) = r \operatorname{ind}(T)$$

für alle $T \in \Sigma(X)$.

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß die Funktion $d(T)$ auf $\Sigma_0(X)$ verschwindet. Wenn $\operatorname{ind}(T) = 0$ gilt, so ist die Dimension von $N(T)$ gleich der Codimension von $B(T)$. Mit Hilfe stetiger Linearformen kann man eine Abbildung $F \in \mathscr{F}(X)$ konstruieren, die $N(T)$ umkehrbar eindeutig auf einen topologischen Komplementärraum von $B(T)$ abbildet und auf einem topologischen Komplementärraum von $N(T)$ verschwindet; dann ist aber $T+F$ in $\mathscr{L}(X)$ invertierbar. Wir erhalten also wegen b) und c) $d(T) = d(T+F) = 0$. Auf $\Sigma_n(X)$ ist $d(T)$ konstant; denn sei $T \in \Sigma_n(X)$, so gibt es nach Satz 3 ein $L \in \Sigma(X)$ mit $\operatorname{ind}(LT) = 0$ und daher mit $d(LT) = 0$. Bei festem L gilt nun für alle $T \in \Sigma_n(X)$ $\operatorname{ind}(LT) = d(LT) = 0$, womit aus a) $d(T) = -d(L)$ für alle $T \in \Sigma_n(X)$ folgt.

$(\text{ind})^{-1}$ sei nun die zu (ind) „inverse" Abbildung $n \to \Sigma_n(X)$. Offenbar ist $d \circ (\text{ind})^{-1}$ ein Homomorphismus einer Untergruppe der additiven Gruppe $\mathfrak{Z}$ der ganzen Zahlen in $\mathfrak{Z}$. Hieraus ergibt sich $d(T) = r \operatorname{ind}(T)$, wobei r eine rationale Zahl ist.

Im Falle $X = l^p$ $(0 < p < \infty)$ fällt der Wertebereich der Indexfunktion mit $\mathfrak{Z}$ zusammen, so daß $r = k$ für eine geeignete ganze Zahl k.

3. σ-Transformationen in lokalbeschränkten Vektorräumen

Im folgenden sei X ein vollständiger lokalbeschränkter Vektorraum mit genügend vielen stetigen Linearformen. Unter einem lokalbeschränkten Vek-

[2] Dies ist auch ohne [17] klar.

torraum verstehen wir einen topologischen linearen Raum mit einer beschränkten Nullumgebung U, d. h. für jede Nullumgebung V gibt es eine reelle Zahl λ, so daß $U \subset \lambda V$. Nach einem bekannten Resultat von ROLEWICZ (vgl. [8], § 15) kann die Topologie eines lokalbeschränkten Raumes X durch eine p-Norm $(0 < p \leqq 1)$ gegeben werden; diese hat folgende Eigenschaften:

1) $\|x\|_p > 0$ für $x \neq 0$, $x \in X$.
2) $\|\lambda x\|_p = |\lambda|^p \|x\|_p$, λ reell oder komplex.
3) $\|x+y\|_p \leqq \|x\|_p + \|y\|_p$, $x, y \in X$.

Einen vollständigen p-normierten Vektorraum nennen wir (p)-Raum. Die Algebra $\mathscr{L}(X)$ der stetigen Endomorphismen eines (p)-Raumes X bildet in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen beschränkten Mengen eine vollständige lokalbeschränkte Algebra. Mittels

$$\|T\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_p}{\|x\|_p}, \qquad T \in \mathscr{L}(X),$$

wird diese Topologie auf $\mathscr{L}(X)$ durch eine submultiplikative p-Norm gegeben: $\|ST\|_p \leqq \|S\|_p \|T\|_p$, $S, T \in \mathscr{L}(X)$.

Das zweiseitige Ideal $\mathscr{K}(X)$ der kompakten Endomorphismen von X ist in dieser Topologie abgeschlossen (vgl. etwa [4]). Genau wie im Falle einer Banachalgebra sieht man ein, daß die Quotientenalgebra einer vollständigen p-normierten Algebra nach einem zweiseitigen Ideal ebenfalls eine solche Algebra darstellt. Eine vollständige p-normierte Algebra mit Einselement nennen wir kurz (p)-Algebra. $\mathscr{L}(X)/\mathscr{K}(X)$ ist also bezüglich der p-Norm $\|T\|'_p = \inf_{K \in \mathscr{K}(X)} \|T-K\|_p$ eine (p)-Algebra; das gleiche gilt für $\mathscr{L}(X)/\overline{\mathscr{F}(X)}$, wenn $\overline{\mathscr{F}(X)}$ das durch Abschließung von $\mathscr{F}(X)$ in $\mathscr{L}(X)$ gewonnene zweiseitige Ideal ist. Bekanntlich ist das Problem der Identität von $\mathscr{K}(X)$ und $\overline{\mathscr{F}}(X)$ bisher ungelöst.

Wir erhalten in diesem Abschnitt die wichtigen topologischen Eigenschaften der σ-Transformationen und die Stetigkeit der Indexfunktion, die daher eine Homotopieinvariante von $\Sigma(X)$ ist.

Da die Gruppe der invertierbaren Elemente einer (p)-Algebra offen ist ([5]), ergibt sich aus der Stetigkeit des kanonischen Homomorphismus $\mathscr{L}(X) \to \mathscr{L}(X)/\mathscr{K}(X)$ bzw. $\mathscr{L}(X)/\overline{\mathscr{F}}(X)$ unmittelbar

Satz 7. *Die Halbgruppe $\Sigma(X)$ ist in $\mathscr{L}(X)$ offen.*

Die Stetigkeit der Indexfunktion und eine wesentliche Verschärfung beinhaltet

Satz 8. a) *Für jede ganze Zahl n ist $\Sigma_n(X)$ in $\mathscr{L}(X)$ offen.* b) *Sei $T \in \Sigma(X)$, $S \in \mathscr{L}(X)$ und ferner $\|S\|_p < \sup\{\|L\|_p^{-1}, \|R\|_p^{-1}\}$, wobei sich das Supremum über alle Links- bzw. Rechtsinversen von T modulo $\mathscr{F}(X)$ oder $\mathscr{K}(X)$ erstreckt, so gilt $T+S \in \Sigma(X)$ und* $\operatorname{ind}(T+S) = \operatorname{ind} T$.

Beweis. Mit $LT = I + F$ gilt $L(T+S) = I + LS + F$; wegen $\|LS\|_p < 1$ folgt $I + LS \in \Sigma(X)$, also $L(T+S) \in \Sigma(X)$ und nach Korollar 2c) erhält man $T+S \in \Sigma(X)$. Nun ergibt sich aus Satz 5b) $\operatorname{ind}(L(T+S)) = \operatorname{ind}(I + LS + F)$

$= \operatorname{ind}(I + LS) = 0$ und nach Satz 5a) $\operatorname{ind}(T + S) = -\operatorname{ind}(L) = \operatorname{ind}(T)$.

Nur für die schärfere Abschätzung „modulo $\mathscr{K}(X)$" benützt man die Rieszsche Theorie ([17]).

Bemerkung. Mit den zu Satz 3 analogen Gleichungen ergibt sich nun ebenso die Stabilität des Index für σ-Homomorphismen von p-Räumen, womit man durch Übergang zur Graphennorm sofort den Fall abgeschlossener Operatoren in gleicher Weise behandeln kann.

Satz 9. *Die Indexfunktion ist ein stetiger Homomorphismus der Halbgruppe $\Sigma(X)$ in die diskrete additive Gruppe der ganzen Zahlen.*

Korollar 3. *Ist $T(t)$ eine stetige Abbildung des Intervalls $[a, b]$ in die Halbgruppe $\Sigma(X)$, so ist der Index von $T(t)$ auf $[a, b]$ konstant.*

Nach Satz 8 sind die $\Sigma_n(X)$ zugeordneten Restklassenmengen in $\mathscr{L}(X)/\mathscr{K}(X)$ bzw. $\mathscr{L}(X)/\overline{\mathscr{F}(X)}$ offen, da die entsprechenden kanonischen Homomorphismen offen sind. Falls die Indexfunktion auf $\Sigma(X)$ nicht identisch verschwindet, ist also die Gruppe der invertierbaren Elemente in $\mathscr{L}(X)/\mathscr{K}(X)$ bzw. $\mathscr{L}(X)/\overline{\mathscr{F}(X)}$ unzusammenhängend. Korollar 3 entsprechend erhalten wir

Korollar 4. *Die Indexfunktion ist ein stetiger Homomorphismus der Gruppe der invertierbaren Elemente von $\mathscr{L}(X)/\mathscr{K}(X)$ bzw. $\mathscr{L}(X)/\overline{\mathscr{F}(X)}$ in die diskrete additive Gruppe der ganzen Zahlen.*

Von nun an setzen wir voraus, daß die vorkommenden (p)-Räume über den *komplexen Zahlen* definiert sind.

Die in [5] erzielten Resultate über holomorphe Funktionen in (p)-Algebren ermöglichen die Übertragung der folgenden in [3] für Banachräume bewiesenen Aussage auf die von uns betrachteten (p)-Räume.

Lemma 3. *Jeder Homomorphismus der Gruppe $\mathscr{G}(\mathscr{A})$ der invertierbaren Elemente einer (p)-Algebra $\mathscr{A}$ in die additive Gruppe der ganzen Zahlen ist stetig.*

Beweis. Ist $x \in \mathscr{G}(\mathscr{A})$ und $\|e - x\|_p < 1$, so existiert die Resolvente $R(\lambda, x)$ $= (\lambda e - x)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda - 1}\left(e - \dfrac{x - e}{\lambda - 1}\right)^{-1}$ für $|\lambda - 1|^p > \|e - x\|_p$, und es gilt

$$\log x = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\|e-x\|_p < |\lambda - 1|^p = r < 1} \log \lambda \, R(\lambda, x)\, d\lambda .$$

Ferner haben wir

$$x = \exp(\log x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \exp \lambda \, R(\lambda, \log x)\, d\lambda ,$$

dabei ist Γ ein das Spektrum von $\log x$ umfassendes geeignetes Kurvensystem. Aus der auch für (p)-Algebren gültigen Funktionalgleichung der Exponentialfunktion folgt

$$x = (\exp(1/n \log x))^n .$$

Wegen $y_n = \exp(1/n \log x) \in \mathscr{G}(\mathscr{A})$ erhalten wir — der gegebene Homomorphismus sei mit d bezeichnet —

$$d(x) = n\, d(y_n);$$

da dies aber für alle n gilt, muß $d(x) = 0$ sein. Der gegebene Homomorphismus ist also auf einer Umgebung des Einselementes von $\mathscr{G}(\mathscr{A})$ stetig und daher auch auf der ganzen Gruppe.

Mit diesem Lemma können wir eine weitere Eindeutigkeitsaussage der Indexfunktionen beweisen.

Satz 10. *Sei $d(T)$ ein Homomorphismus der Halbgruppe $\Sigma(X)$ in die Gruppe der ganzen Zahlen, der der Gleichung*

$$d(T+F) = d(T)$$

für $T \in \Sigma(X)$, $F \in \mathscr{F}(X)$ genügt. Ferner sei die Gruppe der invertierbaren Elemente von $\mathscr{L}(X)$ zusammenhängend. Dann gilt $d(T) = r \operatorname{ind}(T)$, wobei r eine rationale Zahl ist.

Beweis. Wegen Lemma 3 verschwindet $d(T)$ auf der Gruppe der invertierbaren Elemente von $\mathscr{L}(X)$, da diese nach Voraussetzung zusammenhängend ist. Aus Satz 6 ergibt sich nun die Behauptung.

Aus Lemma 3 kann man einen eleganten Beweis für die Stetigkeit des Index gewinnen:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(X) \supset \Sigma(X) & \xrightarrow{\text{ind}} & \mathfrak{Z} \\ \downarrow h \qquad \downarrow h & \nearrow d & \\ \mathscr{L}(X)/\mathscr{K}(X) \supset \mathscr{G} & & \end{array}$$

Der auf $\Sigma(X)$ gegebene Homomorphismus ind (vgl. Satz 5) induziert einen Homomorphismus d der lokalbeschränkten Gruppe $\mathscr{G}$ der invertierbaren Elemente von $\mathscr{L}(X)/\mathscr{K}(X)$ in die additive Gruppe $\mathfrak{Z}$ der ganzen Zahlen. Da d nach Lemma 3 und h sowieso stetig ist, gilt dies auch für $\operatorname{ind} = d \circ h$, so daß wegen der Offenheit von $\Sigma(X)$ in $\mathscr{L}(X)$ die Stetigkeit des Index folgt. Der Beweis von Satz 8 hat aber den Vorteil, daß dort die Rieszsche Theorie nicht eingeht, vielmehr kann man sie daraus gewinnen.

Die Theorie der σ-Transformationen wenden wir im folgenden auf Endomorphismen mit Rieszscher Theorie an. Dabei benötigen wir als wesentliches Hilfsmittel ein Ergebnis aus [5].

Definition 3. *Eine Abbildung $K \in \mathscr{L}(X)$ heißt Rieszscher Endomorphismus, falls die folgenden Aussagen gelten:*

1) *$K_\lambda = \lambda I - K$ ist für alle $\lambda \neq 0$ σ-Transformation.*
2) *Zu jedem $\lambda \neq 0$ existiert eine natürliche Zahl n_0, so daß*

$$N(K_\lambda^n) = N(K_\lambda^{n_0}),$$
$$B(K_\lambda^n) = B(K_\lambda^{n_0}) \qquad \text{für } n \geqq n_0.$$

3) *Die Eigenwerte von K können sich nur bei* 0 *häufen.*

4) $\operatorname{ind}(K_\lambda^n) = 0$ *für* $n \geqq 0$ *und* $\lambda \neq 0$.

Bemerkung: Da K_λ^{-1} für genügend große λ existiert, ergibt sich wegen der Stetigkeit der Indexfunktion und Satz 5 a) 4) bereits aus 1). Ferner kann man 2) ersetzen durch die Eigenschaft

2') Zu jedem $\lambda \neq 0$ existiert eine natürliche Zahl n_0, so daß $N(K_\lambda^n) = N(K_\lambda^{n_0})$ für $n \geqq n_0$.

Beachten wir bei minimalem n_0 die Relationen $N(K_\lambda^n) \subsetneqq N(K_\lambda^{n+1})$ für $n < n_0$ und $B(K_\lambda^m) \supset B(K_\lambda^{m+1})$, so folgt aus $\operatorname{ind}(K_\lambda^n) = 0$ $B(K_\lambda^n) = B(K_\lambda^{n_0})$ für $n \geqq n_0$ und $B(K_\lambda^n) \neq B(K_\lambda^{n+1})$ für $n < n_0$.

Ein Element x einer (p)-Algebra $\mathscr{A}$ bezeichnen wir als quasinilpotent, wenn $\lim_{n\to\infty} \|x^n\|_p^{\frac{1}{n}} = 0$ erfüllt ist.

Der folgende für Rieszsche Endomorphismen fundamentale Satz erweitert auch für Banachräume Resultate von RUSTON ([15], Theorem 3.1.) und PIETSCH ([11], Satz 6.2.). Er liefert eine zum Teil algebraische Charakterisierung der Transformationen mit Rieszscher Theorie für die hier behandelten (p)-Räume.

Satz 11. *Für einen Endomorphismus* $K \in \mathscr{L}(X)$ *sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1) *K ist Rieszscher Endomorphismus.*

2) $K_\lambda = \lambda I - K$ *ist für alle* $\lambda \neq 0$ σ*-Transformation.*

3) *Die Restklasse von K in der Quotientenalgebra* $\mathscr{L}(X)/\mathscr{K}(X)$ *ist quasinilpotent.*

4) *Die Restklasse von K in der Quotientenalgebra* $\mathscr{L}(X)/\overline{\mathscr{F}(X)}$ *ist quasinilpotent.*

Bevor wir auf den Beweis eingehen, ziehen wir daraus eine im Zusammenhang mit dem bereits von BANACH gestellten Problem „$\mathscr{K}(X) = \overline{\mathscr{F}(X)}$" interessante Folgerung:

Korollar 5. *Die Restklasse eines kompakten Operators in der Quotientenalgebra* $\mathscr{L}(X)/\overline{\mathscr{F}}(X)$ *ist quasinilpotent.*

Beweis von Satz 11: 1) $\Rightarrow$ 2) gilt nach Definition. 2) $\Rightarrow$ 3): Die Restklasse $\lambda I' - K'$ in $\mathscr{L}(X)/\mathscr{K}(X)$ ist für alle $\lambda \neq 0$ invertierbar. Setzen wir $\mu = 1/\lambda$, so ist $(I' - \mu K')^{-1}$ in der komplexen Ebene eine holomorphe Funktion ([5], 2.4., 5.1.); wie im Falle einer Banachalgebra gilt dann für alle μ die Entwicklung $(I' - \mu K')^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (\mu K')^i$ ([5], 5.2), dann muß aber K' quasinilpotent sein.

3) $\Rightarrow$ 4): Aus 3) folgt 2), und aus 2) schließt man genau so wie bei „2) $\Rightarrow$ 3)" auf 4).

Da man aufgrund von Satz 4 sieht, daß 2) sowohl mit 3) als auch mit 4) äquivalent ist, genügt es, 3) $\Rightarrow$ 1) zu zeigen. Dies gelingt mit Lemma 4 bis 6 und der Bemerkung im Anschluß an Definition 3.

Zunächst erwähnen wir das auch für (p)-Räume gültige Lemma von RIESZ, dessen Beweis sich wie für Banachräume ergibt.

Lemma 4. *Sei X_0 ein echter abgeschlossener Unterraum des p-normierten Raumes X, so existiert zu vorgegebenem δ, $0<\delta<1$, ein $x_1 \in X$ mit $\|x_1\|_p = 1$, so daß für alle $x \in X_0$*

$$\|x - x_1\| \geqq \delta$$

gilt.

Lemma 5. (vgl. [15], Lemma 3.2.). *Ist die Restklasse K' von $K \in \mathscr{L}(X)$ in der Quotientenalgebra $\mathscr{L}(X)/\mathscr{K}(X)$ quasinilpotent, so gibt es für jedes $\lambda \neq 0$ eine natürliche Zahl n_0 mit $N(K_\lambda^n) = N(K_\lambda^{n_0})$ für $n \geqq n_0$.*

Beweis. $\|K'\|_p'$ sei die p-Norm von K' in $\mathscr{L}(X)/\mathscr{K}(X)$. Es genügt das Lemma für $I - \mu K$, $\mu = 1/\lambda$ und $|\mu| \leqq M$ zu beweisen, wobei M eine fest gewählte beliebig große Zahl ist. Wegen

$$\|K^{i_\nu}\|_p' \leqq (6M^p)^{-i} \qquad \text{für } i \geqq i_0$$

existiert ein $V \in \mathscr{K}(X)$ mit

$$\|K^i - V\|_p \leqq (6M^p)^{-i} \leqq (6|\mu|^p)^{-i} \qquad \text{für } |\mu| \leqq M.$$

Daraus erhalten wir $\|\mu^i(K^i - V)\|_p \leqq 1/6$ und setzen nun $U = K^i - V$. Die Annahme, daß $N_n = N((I-\mu K)^n) = N(K_\lambda^n)$ eine streng monoton wachsende Folge ist, führen wir zu einem Widerspruch. Nach Lemma 4 gibt es eine Folge $x_n \in N_{n+1}$ mit $\inf_{x \in N_n} \|x_n - x\|_p \geqq 1/2$ und $\|x_n\|_p = 1$. Bei festem $i \geqq i_0$ gilt nun

$$\begin{aligned}
\mu^i V x_n &= \mu^i K^i x_n - \mu^i U x_n, \\
&= x_n - (I - \mu^i K^i) x_n - \mu^i U x_n, \\
&= x_n - (I - \mu K)(I + \mu K + \cdots + (\mu K)^{i-1}) x_n + \mu^i U x_n.
\end{aligned}$$

Der mittlere Teil des letzten Ausdrucks liegt wegen der Vertauschbarkeit der Klammern in $N((I-\mu K)^n)$; daraus ergibt sich für $n > m$

$$\|\mu^i(Vx_n - Vx_m)\|_p \geqq \|x_n - x\|_p - \|\mu^i U x_n\|_p - \|\mu^i U x_m\|_p \geqq \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6},$$

da $x \in N_n$. Diese Ungleichung ist aber mit der Vollstetigkeit von V nicht vereinbar.

Lemma 6. (vgl. [15], Lemma 3.5.). *Ist die Restklasse von $K \in \mathscr{L}(X)$ in $\mathscr{L}(X)/\mathscr{K}(X)$ quasinilpotent, so können sich die Eigenwerte von K höchstens bei 0 häufen.*

Beweis. Wir zeigen, daß sich die den Eigenwerten λ entsprechenden Werte $\mu = 1/\lambda$ im Endlichen nicht häufen können; d. h. mit den Bezeichnungen des vorhergehenden Beweises also für $|\mu| \leqq M$. Sei x_n eine Folge von Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten λ_n; den von den Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ aufgespannten Raum bezeichnen wir mit X_n. Nach Lemma 4 gibt es eine Folge $y_n \in X_n$ mit $\|y_n\|_p = 1$ und $\inf_{y \in X_{n-1}} \|y_n - y\|_p \geqq 1/2$. Da $(I - \mu_n^i K^i) y_n$ in

X_{n-1} liegt, erhalten wir aus

$$z_n = \mu_n^i V y_n = \mu_n^i K^i y_n - \mu_n^i U y_n$$
$$= y_n - (I - \mu_n^i K^i) y_n - \mu_n^i U y_n$$

für $m < n$ mit $y = y_m - (I - \mu_m^i K^i) y_m + (I - \mu_n^i K^i) y_n$

$$\|z_n - z_m\|_p \geqq \|y_n - y\|_p - \|\mu_n^i U y_n\|_p - \|\mu_m^i U y_m\|_p \geqq 1/6$$

im Widerspruch zur Vollstetigkeit von V.

Aus Satz 11 ergibt sich

Korollar 6. a) *Ist K^n Rieszscher Endomorphismus, so gilt dies auch für $K \in \mathscr{L}(X)$.*

b) *Sind H und K vertauschbare Rieszsche Endomorphismen, so sind auch $H + K$ und HK Rieszsche Endomorphismen.*

Beweis. a) Ist die Restklasse von K^n in $\mathscr{L}(X)/\mathscr{K}(X)$ quasinilpotent, so auch die Restklasse von K.

b) Das Radikal einer kommutativen (p)-Algebra fällt mit den quasinilpotenten Elementen zusammen ([5]).

Von KATO wurde in [7] das für Banachräume im allgemeinen vom Ideal der kompakten Operatoren verschiedene, abgeschlossene zweiseitige Ideal der streng singulären Operatoren definiert; für diese Endomorphismen gilt die Rieszsche Theorie. Weitere derartige Ideale werden in [3] behandelt.

Gehen wir zu irgendeinem einseitigen Ideal $\mathscr{I} \subset \mathscr{L}(X)$ (z. B. Linksideal) über, dessen sämtliche Elemente Rieszsche Transformationen sind, so erhalten wir mit $T \in \Sigma(X)$, $K \in \mathscr{I}$ aus Satz 3 und Korollar 1 die Existenz einer Abbildung $L \in \Sigma(X)$ mit $L(T+K) = I - F + LK$, $F \in \mathscr{F}(X)$. Wegen $\Sigma(X) + \mathscr{F}(X) \subset \Sigma(X)$ gilt $I - F + LK \in \Sigma(X)$, so daß sich aus Korollar 2c) $T + K \in \Sigma(X)$ ergibt. Aus der Stetigkeit der Indexfunktion folgt nun $\operatorname{ind}(T) = \operatorname{ind}(T + \mu K) = \operatorname{ind}(T + K)$.

Zusammen mit Korollar 6 erhalten wir also

Satz 12. *Ist $\mathscr{I}$ ein aus Rieszschen Endomorphismen bestehendes einseitiges Ideal von $\mathscr{L}(X)$, so gilt*

$$\Sigma(X) + \mathscr{I} \subset \Sigma(X)$$

und

$$\operatorname{ind}(T + K) = \operatorname{ind}(T)$$

für alle $T \in \Sigma(X)$ und $K \in \mathscr{I}$.

Die Rieszschen Endomorphismen einer kommutativen (p)-Algebra $\mathscr{A} \subset \mathscr{L}(X)$ sind genau die Endomorphismen von $\mathscr{A}$, die bei dem Homomorphismus $h: \mathscr{L}(X) \to \mathscr{L}(X)/\overline{\mathscr{F}(X)}$ in das Radikal der (p)-Algebra $h(\mathscr{A})$ übergehen.

Sei nun $\mathscr{H}$ eine ideale Halbgruppe ($\mathscr{H} \cdot \mathscr{L}(H) \subset \mathscr{H}$) der Algebra $\mathscr{L}(H)$ der beschränkten Endomorphismen eines Hilbertraumes H. Besteht $\mathscr{H}$ nur aus Rieszschen Endomorphismen, so gilt $\mathscr{H} \subset \mathscr{K}(H)$. Denn sei $A \in \mathscr{H}$, so existiert

aufgrund der kanonischen Zerlegung ein partiell isometrischer Operator U mit $A = U(AA^*)^{\frac{1}{2}}$ und $(AA^*)^{\frac{1}{2}} = U^*A$. Da $(AA^*)^{\frac{1}{2}}$ symmetrisch und in $\mathscr{H}$ enthalten ist, folgt $(AA^*)^{\frac{1}{2}} \in \mathscr{K}(H)$ und damit auch $A \in \mathscr{K}(H)$. Daß auch im Hilbertraum nicht jeder Rieszsche Endomorphismus kompakt ist, sieht man am Beispiel eines nilpotenten partiell isometrischen Operators von unendlichem Rang; denn die Restklasse eines quasinilpotenten Operators ist erst recht in $\mathscr{L}(H)/\mathscr{K}(H)$ quasinilpotent. Nach dem bekannten Satz von Calkin ist $\mathscr{L}(H)/\mathscr{K}(H)$ für separablen Hilbertraum einfach. Wir werden im folgenden sehen, daß für beliebigen Hilbertraum $\mathscr{L}(H)/\mathscr{K}(H)$ halbeinfach ist.

Wir verknüpfen nun Satz 11 mit einer Verschärfung eines Resultates von YOOD ([18], Theorem 3.5.) und gelangen zu dem für die Rieszschen Ideale grundlegenden Satz 13.

Aus dem Beweis von Satz 12 ergibt sich

Korollar 7. *Für ein einseitiges Ideal $\mathscr{J}$ von $\mathscr{L}(X)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) *$\mathscr{J}$ besteht aus Rieszschen Endomorphismen.*

b) $\mathscr{J} + I \subset \Sigma(X)$.

c) $\mathscr{J} + \Sigma(X) \subset \Sigma(X)$, $\operatorname{ind}(T+K) = \operatorname{ind}(T)$, $T \in \Sigma(X)$, $K \in \mathscr{J}$.

Lemma 7. *$T \in \mathscr{L}(X)$ ist genau dann σ-Transformation, wenn die Restklasse T' von T in der Quotientenalgebra $\mathscr{L}(X)/\mathscr{J}$ nach irgendeinem zweiseitigen Rieszschen Ideal invertierbar ist.*

Wegen Korollar 7 ist dies klar.

Das *Radikal* $\mathfrak{rad}\mathscr{A}$ einer Algebra $\mathscr{A}$ mit Einselement e ist ein zweiseitiges Ideal, und zwar der Durchschnitt aller maximalen Links- bzw. Rechtsideale; es gilt

$$\begin{aligned}\mathfrak{rad}\mathscr{A} &= \{x \in \mathscr{A} : (e + xy)^{-1} \in \mathscr{A} \quad \text{für alle } y \in \mathscr{A}\} \\ &= \{x \in \mathscr{A} : (e + yx)^{-1} \in \mathscr{A} \quad \text{für alle } y \in \mathscr{A}\}.\end{aligned}$$

In topologischen Algebren mit stetigen Inversen [z. B. (p)-Algebren] ist das Radikal abgeschlossen.

Lemma 8. *Ist $\mathscr{J}$ ein zweiseitiges Rieszsches Ideal in $\mathscr{L}(X)$ und $h_{\mathscr{J}}$ der kanonische Homomorphismus von $\mathscr{L}(X)$ auf $\mathscr{L}(X)/\mathscr{J}$, so besteht das Urbild von $\mathfrak{rad}\,\mathscr{L}(X)/\mathscr{J}$,*

$$\mathscr{R} = h_{\mathscr{J}}^{-1}(\mathfrak{rad}\,\mathscr{L}(X)/\mathscr{J})$$

aus Rieszschen Endomorphismen.

Beweis. $\mathscr{R}$ ist ein zweiseitiges Ideal, es bleibt also nach Korollar 7 $\mathscr{R} + I \subset \Sigma(X)$ zu zeigen, dies folgt aber mit Lemma 7 aus der Definition des Radikals.

Lemma 9. *Sei $\mathscr{G}$ die Gruppe der invertierbaren Elemente von $\mathscr{L}(X)$. Dann bildet die Menge*

$$\mathscr{R} = \{K \in \mathscr{L}(X) : K + \mathscr{G} \subset \Sigma(X)\}$$

ein zweiseitiges Rieszsches Ideal.

Beweis. Wir brauchen nur zu zeigen, daß $\mathscr{R}$ ein zweiseitiges Ideal ist, dann folgt nämlich aus Korollar 7 die Behauptung.

a) $T \in \mathscr{G} \Rightarrow 1/\lambda T \in \mathscr{G} \Rightarrow 1/\lambda T + K \in \Sigma(X) \Rightarrow T + \lambda K \in \Sigma(X)$.

b) $K_1,\ K_2 \in \mathscr{R},\ T \in \mathscr{G} \Rightarrow T + K_1 \in \Sigma(X) \Rightarrow$ [wegen a) und der Stetigkeit des Index] $\operatorname{ind}(T + K_1) = 0 \Rightarrow$ es existiert $F \in \mathscr{F}(X)$ mit $T + K_1 + F \in \mathscr{G} \Rightarrow T + K_1 + F + K_2 \in \Sigma(X) \Rightarrow T + K_1 + K_2 \in \Sigma(X) \Rightarrow K_1 + K_2 \in \mathscr{R}$.

c) Wir zeigen zunächst, daß $\mathscr{R}$ für Elemente aus $\mathscr{G}$ die Idealeigenschaft hat: $T,\ S \in \mathscr{G},\ K \in \mathscr{R};\ \Rightarrow S^{-1}T \in \mathscr{G} \Rightarrow S^{-1}T + K \in \Sigma(X) \quad S(S^{-1}T + K) = T + SK \in \Sigma(X)$; ebenso folgt $KS \in \mathscr{R}$.

d) $A \in \mathscr{L}(X) \Rightarrow A = (\alpha I + A) - \alpha I$; für $|\alpha|^p > \|A\|_p$ gilt $S_1 = \alpha I + A \in \mathscr{G}$ und $S_2 = \alpha I \in \mathscr{G}$; $K \in \mathscr{R} \Rightarrow$ [wegen c) und b)] $KA = KS_1 + KS_2 \in \mathscr{R}$ und ebenso $AK \in \mathscr{R}$.

Satz 13. *Es gibt genau ein maximales aus Rieszschen Endomorphismen bestehendes Ideal $\mathscr{R} \subset \mathscr{L}(X)$. $\mathscr{R}$ ist zweiseitig und in der p-Normotopologie von $\mathscr{L}(X)$ abgeschlossen. Die (p)-Algebra $\mathscr{L}(X)/\mathscr{R}$ ist halbeinfach. $\mathscr{R}$ enthält also alle ein- und zweiseitigen Rieszschen Ideale und ist mit den folgenden Mengen $\mathscr{R}_i$ $(i = 1, \ldots, 5)$ identisch.*

$$\mathscr{R}_1 = h_{\mathscr{F}(X)}^{-1}\,(\operatorname{rad}\mathscr{L}(X)/\mathscr{F}(X))$$
$$\mathscr{R}_2 = h_{\overline{\mathscr{F}(X)}}^{-1}\,(\operatorname{rad}\mathscr{L}(X)/\overline{\mathscr{F}(X)})$$
$$\mathscr{R}_3 = h_{\mathscr{J}}^{-1}\quad (\operatorname{rad}\mathscr{L}(X)/\mathscr{J}),$$

$\mathscr{J}$ irgendein zweiseitiges Rieszsches Ideal.

$$\mathscr{R}_4 = \{K \in \mathscr{L}(X) : K + \Sigma(X) \subset \Sigma(X)\}$$
$$\mathscr{R}_5 = \{K \in \mathscr{L}(X) : K + \mathscr{G} \subset \Sigma(X)\},$$

$\mathscr{G}$ die Gruppe der invertierbaren Elemente von $\mathscr{L}(X)$.

Beweis. Mit Satz 3 und Korollar 7 folgt aus der Definition des Radikals, daß jedes einseitige Rieszsche Ideal in $\mathscr{R}_1$ enthalten ist, andererseits ist nach Lemma 8 $\mathscr{R}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ Rieszsches Ideal, womit wir $\mathscr{R} = \mathscr{R}_1 = \mathscr{R}_2 = \mathscr{R}_3$ erhalten, so daß $\mathscr{R}$ auch abgeschlossen ist. Es folgt nun unmittelbar $\mathscr{R}_3 \subset \mathscr{R}_4 \subset \mathscr{R}_5$ und nach Lemma 9 $\mathscr{R}_5 \subset \mathscr{R}_1$. Damit ist alles bewiesen.

Die nach unten und oben maximalen Ketten zweiseitiger Rieszscher Ideale beginnen also mit $\mathscr{F}(X)$ und enden mit dem Ideal $\mathscr{R}$, das von der Rieszschen Theorie aus gesehen das wesentliche Ideal in $\mathscr{L}(X)$ ist.

In [3] werden verschiedene Ketten Rieszscher Ideale betrachtet. Im allgemeinen gilt

$$\mathscr{F}(X) \subsetneqq \overline{\mathscr{F}(X)} \subset \mathscr{K}(X) \subsetneqq \mathscr{S}(X) \subsetneqq \mathscr{R}.$$

Dabei ist $\mathscr{S}(X)$ für Banachräume das Ideal der streng singulären Operatoren. Einseitige Rieszsche Ideale lassen sich mit $\mathscr{R}A$, $A\mathscr{R}$ bzw. $\mathscr{K}(X)A$, $A\mathscr{K}(X)$ usw., $A \in \mathscr{L}(X)$, gewinnen.

Für die hier betrachteten (p)-Räume kann man aufgrund der Stetigkeit des Index die Eigenschaft $I + \mathscr{J} \subset \Sigma(X)$ als Definition eines Rieszschen Ideals

nehmen. Für lokalkonvexe Räume bzw. vollständige F-normierte Räume mit genügend vielen Linearformen ist nicht bekannt, ob dann auch für alle Elemente von $\mathscr{J}$ die Rieszsche Theorie gilt. Andererseits erhält man auch in diesen Fällen mit denselben, zu Satz 13 führenden Überlegungen, daß ein maximales Ideal $\mathscr{R}$ existiert, das alle Ideale $\mathscr{J}$ mit $I+\mathscr{J} \subset \Sigma(X)$ umfaßt und sich in der Form

$$\mathscr{R} = h_{\mathscr{F}(X)}^{-1}(\operatorname{rad} \mathscr{L}(X)/\mathscr{F}(X)) = h_{\mathscr{K}(X)}^{-1}(\operatorname{rad} \mathscr{L}(X)/\mathscr{K}(X))$$

darstellen läßt.

PIETSCH hat in [11] für den FM-Raum ω aller Zahlenfolgen gezeigt:

1) Es gibt keine verträgliche Topologie auf $\mathscr{L}(\omega)$, so daß $\Sigma(\omega)$ offen ist.

2) Aus $I+\mu A \in \Sigma(\omega)$ für alle $\mu \in \mathbb{C}$ folgt nicht notwendig $\operatorname{ind}(I+\mu A)=0$.

3) Sind H und K vertauschbare *Rieszsche* Operatoren, so braucht dies für $H+K$ und HK nicht zu gelten.

Problem 1. Ist der von der Indexfunktion induzierte Homomorphismus der p-normierten Gruppe $\mathscr{G}$ der invertierbaren Elemente von $\mathscr{L}(X)/\mathscr{R}$ in die additive Gruppe der ganzen Zahlen eine eineindeutige Abbildung der Komponenten von $\mathscr{G}$?

Problem 2. Sind die hier betrachteten (p)-Räume die allgemeinsten vollständigen topologischen Vektorräume mit separierter schwacher Topologie, für die (Satz 8a) die Stabilität des Index gilt?

Zusatz bei der Korrektur: Ohne Berücksichtigung des zugrundeliegenden Raumes kann man fast alle Sätze aus den algebraischen und topologischen Eigenschaften des Schemas nach Satz 10 gewinnen, indem man es durch Radikalbildung nach unten fortsetzt. Damit befassen wir uns in der Arbeit „Ein Schema zur Theorie Fredholmscher Endomorphismen und eine Anwendung auf die Idealkette der Hilberträume" (erscheint in Math. Ann.). Die Voraussetzung der Separiertheit der schwachen Topologie läßt sich abschwächen, indem man annimmt, daß die Nullräume der σ-Transformationen stetig projiziert sind (Lemma 2).

Literatur

[1] DAY, M. M.: The spaces L^p with $0<p<1$. Bull. Am. Math. Soc. **46**, 816—823 (1940).

[2] DEPRIT, A.: Contribution à l'étude de l'Algèbre des Applications linéaires continues d'un Espace localement convexe séparé. Acad. roy. Belgique, Cl. Sci., Mém., Coll. 8, **31**, fasc. 2, 170 S. (1959).

[3] FELDMANN, I. A., I. C. GOHBERG, and A. S. MARKUS: Normally solvable operators and ideals associated with them. Izvest. Moldav. Filial A N SSSR **10** (76), 51—69. (Englische Übersetzung: Berkeley 1963.)

[4] GRAMSCH, B.: Abgeschlossene Ideale in Operatoralgebren topologischer Vektorräume. J. reine angew. Math. (erscheint demnächst).

[5] — Integration und holomorphe Funktionen in lokalbeschränkten Räumen. Math. Ann. **162**, 190—210 (1965).

[6] — Die Klasse metrischer linearer Räume L_ϕ. Math. Ann. (erscheint demnächst).

[7] KATO, T.: Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators. J. d'Analyse Math. **6**, 261—322 (1958).

[8] KÖTHE, G.: Topologische lineare Räume. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.

[9] LERAY, J.: Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme complètement continu d'un espace vectoriel à voisinages convexes. Acta Sci. Math. **12** B, 177—186 (1950).

[10] NAKAMURA, M.: On operators of Schaefer class in the theory of singular integral equations. Proc. Japan Acad. **33**, 455—456 (1957).

[11] PIETSCH, A.: Zur Theorie der σ-Transformationen in lokalkonvexen Vektorräumen. Math. Nachr. **21**, 347—369 (1960).
[12] PRZEWORSKA-ROLEWICZ, D.: Sur les equations involutives et leurs applications. Studia Math. **20**, 95—117 (1961).
[13] — and S. ROLEWICZ: On operators with a finite d-characteristic. Studia Math. **24**, 257—270 (1964).
[14] — — On operators preserving a conjugate space. Studia Math. **25**, 245—249 (1964/65).
[15] RUSTON, A. F.: Operators with Fredholm theory. J. London Math. Soc. **29**, 318—326 (1954).
[16] SCHAEFER, H.: Über singuläre Integralgleichungen und eine Klasse von Homomorphismen in lokalkonvexen Räumen. Math. Z. **66**, 147—163 (1956).
[17] WILLIAMSON, J. H.: Compact linear operators in linear topological spaces. J. London Math. Soc. **29**, 149—156 (1954).
[18] YOOD, B.: Difference algebras of linear transformations on a Banach space. Pac. J. Math. **4**, 615—636 (1954).

Dr. BERNHARD GRAMSCH
Institut für Angewandte Mathematik der Universität
65 Mainz, Saarstr. 21

(Eingegangen am 1. Oktober 1965)

SCHMIDT, G.
Math. Annalen 165, 152—162 (1966)

Über die Drehschwingungen von Kurbelwellen

Herrn ERNST HÖLDER zum 65. Geburtstag gewidmet

GÜNTER SCHMIDT

1. Die Ausgangsgleichungen

Zur Berechnung der Drehschwingungen wird eine Kurbelwelle mit N Kurbeln auf das Ersatzsystem einer geraden masselosen Welle zurückgeführt, die mit Scheiben periodisch veränderlichen und einer (dem Schwungrad entsprechenden) Scheibe konstanten Trägheitsmomentes besetzt ist. Die periodische Veränderlichkeit der Trägheitsbereiche führt zu Resonanzbereichen, die bei einfacher Resonanz mathematisch vor allem von E. HÖLDER [1] und bei Kombinationsresonanz in linearer Darstellung von F. WEIDENHAMMER [7] untersucht wurden. Im folgenden werden die Resonanzbereiche nichtlinear unter Berücksichtigung einer Dämpfung betrachtet, die bei Kombinationsresonanz einen besonders großen Einfluß hat.

Aus den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen des Ersatzsystems lassen sich für die Drehwinkel π_n (die sich additiv aus dem mittleren Drehwinkel ωt, den Kurbelversetzungswinkeln und den von der Torsion herrührenden Verdrehwinkeln φ_n zusammensetzen) die nichtlinearen Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
&\theta_n \pi_n'' + \frac{1}{2}\frac{d\theta_n}{d\pi_n}\pi_n'^2 + \beta_n \pi_n' + \delta_n(\varphi_n - \varphi_{n-1})' - \delta_{n+1}(\varphi_{n+1} - \varphi_n)' + \\
&\quad + GJ_0\left(\frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{l_n} - \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{l_{n+1}}\right) + \\
&\quad + R^2 J_0\left(G\Lambda + \frac{1}{3}E\right)\left[\left(\frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{l_n}\right)^3 - \left(\frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{l_{n+1}}\right)^3\right] \\
&\quad + J_0 E\left[\frac{(u_n - u_{n-1})(\varphi_n - \varphi_{n-1})}{l_n^2} - \frac{(u_{n+1} - u_n)(\varphi_{n+1} - \varphi_n)}{l_{n+1}^2}\right] = Q_n
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$(n = 0, 1, \ldots, N)$,

für die zugehörigen Längsverschiebungen u_n die mit (1) nichtlinear gekoppelten Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
&m_n u_n'' + EF\left(\frac{u_n - u_{n-1}}{l_n} - \frac{u_{n+1} - u_n}{l_{n+1}}\right) + \\
&\quad + \frac{1}{4}EFR^2\left[\left(\frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{l_n}\right)^2 - \left(\frac{\varphi_{n-1} - \varphi_n}{l_{n+1}}\right)^2\right] = 0
\end{aligned}
$$

ableiten (vgl. [6]); in ihnen bezeichnen Striche Ableitungen nach der Zeit, θ_n die Trägheitsmomente und m_n die Massen der Scheiben, β_n die Koeffizienten einer äußeren, δ_n die einer inneren Dämpfung, R den Radius, E den Elastizitätsmodul, G den Gleitmodul und J_0 das polare Querschnittsträgheitsmoment der Welle, l_n die Längen der Wellenstücke zwischen den Scheiben, Λ einen kubischen Elastizitätskoeffizienten und Q_n die äußeren Momente der Gaskräfte.

Durch Einführung dimensionsloser Größen und Hauptachsentransformation ergeben sich für die transformierten Längsverschiebungen x_n und Verdrehungen y_n die gekoppelten nichtlinearen Differentialgleichungen

$$\ddot{x}_n + \kappa_n^2 x_n = X_n, \quad \ddot{y}_n + \lambda_n^2 y_n = Y_n \qquad (n = 0, 1, \ldots, N) \tag{2}$$

mit

$$X_n = \sum_{ij} e_{nij} y_i y_j,$$

$$\begin{aligned} Y_n = {} & q_n(s) + p_n \sin 2Ms + p'_n \cos 2Ms - b_n - \alpha\lambda_n^2 y_n + \\ & + \sum_i (2M^2 + \lambda_i^2)(p_{ni} \cos 2Ms + p'_{ni} \sin 2Ms)\, y_i + \\ & + \sum_i (2Mp_{ni} \sin 2Ms - 2Mp'_{ni} \cos 2Ms + b_{ni})\, \dot{y}_i + \\ & + \sum_{ijr} f_{nijr} y_i y_j y_r + \sum_{ij} g_{nij} x_i y_j, \end{aligned}$$

dabei wird der Einfachheit halber $x_n(s) = x_n$, $y_n(s) = y_n$,

$$X_n[y_\nu(s)] = X_n(y_\nu) = X_n\{s\} = X_n$$

und entsprechend

$$Y_n(x_\nu, y_\nu, \dot{y}_\nu, s) = Y_n\{s\} = Y_n$$

geschrieben. Ableitungen nach der transformierten Zeit s werden durch Punkte bezeichnet, α ist eine kleine Frequenzvariation, die Koeffizienten b_n und b_{ni} enthalten die Dämpfungsgrößen, die Koeffizienten p_n, p'_n, p_{ni} und p'_{ni} die periodischen Komponenten der Scheibenträgheitsmomente (für die die Frahmsche Näherung zugrunde gelegt wird) und die (gliedweise) zweimal stetig differenzierbaren Funktionen

$$q_n(s) = \sum_{i=0}^{\infty} (q_{ni} \cos iMs + q'_{ni} \sin iMs) \qquad (q'_{n0} = 0)$$

die äußeren Momente der Gaskräfte. Die Summen erstrecken sich, wenn nichts anderes angegeben ist, von 0 bis N.

2. Übergang zu Integralgleichungen

Die stationären Schwingungen entsprechenden mit der Periode 2π periodischen zweimal stetig differenzierbaren Lösungen der Differentialgleichungen (2) sind nach [4] identisch mit den zweimal stetig differenzierbaren Lösungen

der Integrodifferentialgleichungen

$$x_n(s)-\kappa_n^2\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi\kappa_n^2}+G(s,\sigma)\right]x_n(\sigma)\,d\sigma=-\int_0^{2\pi}G(s,\sigma)\,X_n\{\sigma\}\,d\sigma,$$

$$y_n(s)-\lambda_n^2\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi\lambda_n^2}+G(s,\sigma)\right]y_n(\sigma)\,d\sigma=-\int_0^{2\pi}G(s,\sigma)\,Y_n\{\sigma\}\,d\sigma, \tag{3}$$

$(n=0,1,\ldots,N)$

die den Bedingungen

$$\kappa_n^2\int_0^{2\pi}x_n(\sigma)\,d\sigma=\int_0^{2\pi}X_n\{\sigma\}\,d\sigma,\quad \lambda_n^2\int_0^{2\pi}y_n(\sigma)\,d\sigma=\int_0^{2\pi}Y_n\{\sigma\}\,d\sigma \tag{4}$$

genügen; dabei ist

$$G(s,\sigma)=\frac{1}{4\pi}(s-\sigma)^2-\frac{1}{2}|s-\sigma|+\frac{\pi}{6} \tag{5}$$

die zugehörige Greensche Funktion im erweiterten Sinne.

Durch Differentiation von (3) ergibt sich

$$\dot{y}_n(s)-\lambda_n^2\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial s}G(s,\sigma)\,y_n(\sigma)\,d\sigma=-\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial s}G(s,\sigma)\,Y_n\{\sigma\}\,d\sigma, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}G(s,\sigma)=\frac{s-\sigma}{2\pi}-\frac{1}{2}\operatorname{sign}(s-\sigma);$$

denn es ist nach (5) mit einer beliebigen stetigen Funktion $f(\sigma)$

$$\int_0^{2\pi}G(s+h,\sigma)\,f(\sigma)\,d\sigma=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{4\pi}(s+h-\sigma)^2+\frac{\pi}{6}\right]f(\sigma)\,d\sigma-I_1-I_2,$$

wobei

$$I_1=\int_0^{s+h}\frac{s+h-\sigma}{2}f(\sigma)\,d\sigma=\int_0^{s}+\int_s^{s+h},\quad I_2=\int_{s+h}^{2\pi}\frac{\sigma-s-h}{2}f(\sigma)\,d\sigma=\int_s^{2\pi}-\int_s^{s+h}$$

und damit

$$I_1+I_2=\int_0^{2\pi}\frac{|s-\sigma|}{2}f(\sigma)\,d\sigma+\int_0^{2\pi}\operatorname{sign}(s-\sigma)\cdot\frac{h}{2}f(\sigma)\,d\sigma+2\int_s^{s+h}\frac{s+h-\sigma}{2}f(\sigma)\,d\sigma$$

ist, so daß

$$\int_0^{2\pi}G(s+h,\sigma)\,f(\sigma)\,d\sigma=\int_0^{2\pi}G(s,\sigma)\,f(\sigma)\,d\sigma+h\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial s}G(s,\sigma)\,f(\sigma)\,d\sigma+O(h^2)$$

gilt. Hieraus folgt bei Division durch h und Grenzübergang $h \to 0$ die Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration.

Die Integrodifferentialgleichungen (3), (6) lassen sich als System von $3(N+1)$ Integralgleichungen für die gesuchten Funktionen $x_n(s)$, $y_n(s)$ und $z_n(s) = \dot{y}_n(s)$ auffassen und in der von L. LICHTENSTEIN [2] für zwei Gleichungen angegebenen Weise lösen.

Wir untersuchen den Fall einer höchstens doppelten Verzweigung, bei der die Größen κ_n, λ_n nicht gleich ganzen Zahlen sind mit Ausnahme von

$$\lambda_k = K \quad \text{und eventuell} \quad \lambda_l = L. \tag{7}$$

Dann ergeben sich aus (3), (4) durch Abspaltung der trivialen Nullösung $\varphi_0 = \text{const}$ und der zu (7) gehörigen Nullösungen und durch Konstruktion der Resolventen entsprechend [4] die Gleichungen

$$x_n(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2\kappa_n^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m(s-\sigma)}{\kappa_n^2 - m^2} \right] X_n\{s\}\, d\sigma,$$

$$y_n(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2\lambda_n^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m(s-\sigma)}{\vartheta_{\lambda_n}^m \lambda_n^2 - m^2} \right] Y_n\{\sigma\}\, d\sigma$$

$$+ \delta_n^k (r_1 \cos Ks + r_2 \sin Ks) + \delta_n^l (r_3 \cos Ls + r_4 \sin Ls),$$

die den geeigneten Ausgangspunkt für das Approximationsverfahren zur Bestimmung der Näherungslösungen bilden; hierbei ist

$$\delta_\mu^\nu = \begin{cases} 1 & \text{für } \mu = \nu, \\ 0 & \text{für } \mu \neq \nu, \end{cases} \qquad \vartheta_\mu^\nu = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu = \nu, \\ 1 & \text{für } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

Die Verzweigungsparameter r_ν sind nachträglich aus den vier in Vektorform zusammengefaßten Verzweigungsgleichungen

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y_k(s) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} Ks\, ds, \qquad \begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y_l(s) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} Ls\, ds \tag{8}$$

zu bestimmen, die zu grundlegenden Aussagen über das Schwingungsverhalten führen. Für den Fall einer einfachen Verzweigung, bei dem λ_l nicht gleich einer ganzen Zahl ist, fällt das zweite Paar von Verzweigungsgleichungen weg, und es ist $r_3 = r_4 = 0$.

Die Näherungslösungen erster Ordnung in den kleinen Größen q_{ni}, q'_{ni}, p_n, p'_n, p_{ni}, p'_{ni}, b_n, b_{ni}, α, r_ν lauten

$$x_{n1}(s) = 0,$$

$$y_{n1}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{q_{ni} \cos iMs + q'_{ni} \sin iMs}{\vartheta_{\lambda_n}^{iM} \lambda_n^2 - i^2 M^2} + \frac{p_n \sin 2Ms + p'_n \cos 2Ms}{\vartheta_{\lambda_n}^{2M} \lambda_n^2 - 4M^2} - \frac{b_n}{\lambda_n^2} +$$

$$+ \delta_n^k (r_1 \cos Ks + r_2 \sin Ks) + \delta_n^l (r_3 \cos Ls + r_4 \sin Ls). \tag{9}$$

Schon die zweite Näherung läßt sich wegen ihrer großen Länge nicht mehr angeben. Da aber auch die dritte Näherung für die Verzweigungsdiskussion gebraucht wird, sei eine allgemeine Bemerkung über die Gestalt der Näherungen gestattet.

Während die erste Näherung in Verbindung mit den Verzweigungsgrößen r_ν nur die Grundharmonischen $\frac{\cos}{\sin} Ks$, $\frac{\cos}{\sin} Ls$ enthält, gehören zu höheren Näherungen auch höhere Harmonische bei den r_ν: zur zweiten Näherung von x_n Ausdrücke $\frac{\cos}{\sin} 2Ks$, $\frac{\cos}{\sin} 2Ls$, $\frac{\cos}{\sin}(K \pm L)s$ und konstante Ausdrücke, zur zweiten Näherung von y_n Ausdrücke $\frac{\cos}{\sin}(K \pm 2M)s$, $\frac{\cos}{\sin}(L \pm 2M)s$, zur dritten Näherung von y_n unter anderem Ausdrücke $\frac{\cos}{\sin} 3Ks$, $\frac{\cos}{\sin} 3Ls$, $\frac{\cos}{\sin}(2K \pm L)s$, $\frac{\cos}{\sin}(K \pm 2L)s$, und so fort.

Besonders wichtige und einfach zu berechnende Kenngrößen des Schwingungsverhaltens sind die Quadratsummen

$$r_1^2 + r_2^2 = A\,, \quad r_3^2 + r_4^2 = B$$

der Verzweigungsgrößen, die sich in erster Näherung als Quadrate der Schwingungsamplituden ergeben werden und im folgenden bestimmt werden. Hierbei kommt es darauf an, daß in den Endformeln für A, B der Einfluß aller kleinen Größen erfaßt wird, während Ausdrücke, die in den Endformeln gegen solche niedrigerer Größenordnung vernachlässigt werden können (wie etwa α^2 gegen α für hinreichend kleines α), wegen ihrer großen Länge schon in den nachfolgenden Verzweigungsgleichungen weggelassen werden.

Die Konvergenz des Verfahrens läßt sich ganz analog zu L. LICHTENSTEIN [2] beweisen, wenn die als klein angenommenen Größen mit Ausnahme der r_ν hinreichend klein sind.

3. Die verschiedenen Resonanzfälle

Wenn man die ersten drei Näherungen in die Verzweigungsgleichungen einsetzt, erkennt man, daß gerade die Fälle

$$K = \nu M \tag{10}$$

und

$$|K \pm L| = 2\nu M \qquad (K \neq L) \tag{11}$$

für $\nu = 1, 2$ zu „brauchbaren" Endformeln führen, die reelle positive Lösungen A, B ermöglichen. (Für $\nu = 3, 4, \ldots$ ergeben höhere Näherungen brauchbare Endformeln.) Dies entspricht der bekannten Tatsache aus der Theorie rheolinearer Schwingungen (vgl. E. METTLER [3]), daß in den Fällen (10), (11), $\nu = 1, 2, \ldots$ Resonanzbereiche vorliegen, die als Bereiche ν-ter Ordnung und im Falle (10) als Bereiche erster Art oder einfache Resonanz, im Falle (11) als Bereiche zweiter Art oder Kombinationsresonanz bezeichnet werden.

Im folgenden werden die Verzweigungsgleichungen für Bereiche erster Ordnung ($\nu = 1$) untersucht; dabei wird noch zur Vereinfachung der Formeln $p_n' = p_{ni}' = 0$ angenommen, das heißt, die Kurbelversetzungswinkel werden als Vielfache von $\pi/2$ vorausgesetzt, wie das häufig der Fall ist. Die entsprechenden Gleichungen für Bereiche zweiter Ordnung lassen sich wegen ihrer großen

Länge nicht angeben; sie führen zu größenordnungsmäßig kleineren Werten von A, B als für Bereiche erster Ordnung.

Bei einfacher Resonanz erster Ordnung, $K=M$, ergibt sich durch Einsetzen der ersten drei Näherungen in das erste Paar der Verzweigungsgleichungen (8)

$$(12)\quad F_k A \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + M^2 \alpha \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} M^2 p_{kk} \begin{pmatrix} r_1 \\ -r_2 \end{pmatrix} + M b_{kk} \begin{pmatrix} r_2 \\ -r_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_k \\ q'_k \end{pmatrix} = 0,$$

dabei ist zur Abkürzung

$$(13)\quad F_k = \frac{3}{4} f_{kkkk} + \frac{1}{4} \sum_i \left(\frac{2}{\kappa_i^2} + \frac{1}{\kappa_i^2 - 4\lambda_k^2} \right) e_{ikk} g_{kik},$$

$$\begin{pmatrix} q_k \\ q'_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{k1} \\ q'_{k1} \end{pmatrix} + \frac{5M^2}{2} \sum_i \frac{p_{ki}}{\lambda_i^2 - 9M^2} \begin{pmatrix} q_{i3} \\ q'_{i3} \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{M^2}{2} \sum_i \frac{p_{ki}}{\vartheta_i^k \lambda_i^2 - M^2} \begin{pmatrix} q_{i1} \\ -q'_{i1} \end{pmatrix} + \sum_i \frac{M b_{ki}}{\vartheta_i^k \lambda_i^2 - M^2} \begin{pmatrix} q'_{i1} \\ -q_{i1} \end{pmatrix}.$$

Die Gleichungen (12) sind für $\begin{pmatrix} q_k \\ q'_k \end{pmatrix} \neq 0$ dritten Grades in r_1 und r_2 und lassen sich nur für feste Werte der Parameter numerisch lösen. Daher beschränken wir uns auf den Fall $q_k = q'_k = 0$, der sicher bei fehlenden äußeren Gaskräften, $q_n(s) \equiv 0$, erfüllt ist und die wesentlichsten Eigenschaften des allgemeinen Falles enthalten dürfte. In diesem Fall existiert stets die Lösung

$$(\mathrm{I})\qquad r_1 = r_2 = 0, \quad \text{d. h.} \quad A = 0.$$

Außerdem folgen aus (12) zwei reelle Lösungen, für die A durch

$$(\mathrm{II})\qquad F_k A = -M^2 \alpha \pm \sqrt{\frac{1}{4} M^4 p_{kk}^2 - M^2 b_{kk}^2}$$

gegeben ist. Die Lösungen II zweigen für $A \to 0$, das heißt

$$\alpha_\pm = \pm \sqrt{\frac{1}{4} p_{kk}^2 - \frac{1}{M^2} b_{kk}^2}$$

von der verschwindenden Lösung I ab.

Aus (II) läßt sich zeigen, daß $\sqrt{A}$ und damit r_1, r_2 von der Größenordnung von $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{p_{kk}}$, $\sqrt{b_{kk}}$ sind; daraus läßt sich schließen, daß für $q_k = q'_k = 0$ in (9) die Verzweigungsgrößen von überwiegender Größenordnung sind, so daß $\sqrt{A}$ in erster Näherung die Schwingungsamplitude ist. Die durch (II) dargestellten Resonanzkurven sind Parabeln, die für $F_k > 0$ wie die Parabeln in Abb. 1, für $F_k < 0$ seitenvertauscht verlaufen.

4. Stabilitätsbetrachtung

Die Stabilität einer Lösung $\{x_n, y_n\}$ läßt sich aus den linearen Variationsgleichungen für Variationen $\{v_n, w_n\}$ dieser Lösung bestimmen. Die Variationsgleichungen lauten

$$\ddot{v}_n + \kappa_n^2 v_n = \sum_{ij} e_{nij}(y_i w_j + w_i y_j),$$

$$\ddot{w}_n + \lambda_n^2 w_n = \alpha\lambda_n^2 w_n + \sum_i (2M^2 + \lambda_i^2)(p_{ni}\cos 2Ms + p'_{ni}\sin 2Ms) w_i + \quad (n = 0, 1, \ldots, N)$$
$$+ \sum_i (2Mp_{ni}\sin 2Ms - 2Mp'_{ni}\cos 2Ms + b_{ni})\dot{w}_i +$$
$$+ \sum_{ijr} f_{nijr}(y_i y_j w_r + y_i w_j y_r + w_i y_j y_r) + \sum_{ij} g_{nij}(x_i w_j + v_i y_j).$$

Durch Einsetzen der bei einfacher Resonanz und fehlenden äußeren Momenten erhaltenen Näherung

$$x_n(s) = 0, \qquad y_n(s) = \delta_n^k(r_1 \cos Ks + r_2 \sin Ks)$$

ergeben sich für die verschwindende Lösung I Variationsgleichungen der Form

$$\ddot{w}_n + \lambda_n^2 w_n = \sum_i P_{ni}(s) w_i + \sum_i Q_{ni}(s)\dot{w}_i \qquad (n = 0, 1, \ldots, N), \tag{14}$$

dabei sind $P_{ni}(s)$, $Q_{ni}(s)$ mit der Periode 2π periodische reellwertige stetige und in absolut und gleichmäßig konvergente Fourierreihen entwickelbare Funktionen. Für die nichtverschwindende Lösung II sind die Variationsgleichungen für die Lösungsvariationen w_n ebenfalls von dieser Form, wenn durch $g_{nij} = 0$ der Einfluß der Längsbewegung vernachlässigt wird, was der Einfachheit halber vorausgesetzt werden soll[1].

Die triviale Lösung des Differentialgleichungssystems (14) ist, wie in [5] durch Benutzung des Floquetschen Satzes und Untersuchung der charakteristischen Exponenten gezeigt wurde, dann und nur dann asymptotisch stabil, wenn die beiden Bedingungen

$$P_{k2}^{(2M)} - MQ_k^{(0)} > \pm \mathrm{Re}\sqrt{[P_{k1}^{(2M)} - MQ_{k2}^{(2M)}]^2 + M^2(Q_{k1}^{(2M)})^2 - (P_k^{(0)})^2} \tag{15}$$

erfüllt sind, während Instabilität (im Sinne von LJAPUNOW) vorliegt, wenn wenigstens eine der beiden Bedingungen mit entgegengesetztem Ungleichheitszeichen gilt; die auftretenden Größen sind durch

$$P_{kk}(s) = P_k^{(0)} + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} P_{k1}^{(\nu)}\cos \nu s + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} P_{k2}^{(\nu)}\sin \nu s,$$

$$Q_{kk}(s) = Q_k^{(0)} + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} Q_{k1}^{(\nu)}\cos \nu s + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} Q_{k2}^{(\nu)}\sin \nu s$$

als Fourierkoeffizienten erklärt.

[1] Zur Berechtigung dieser Vernachlässigung vergleiche man [6].

Für die berechneten Lösungen ist

$$P_k^{(0)} = M^2\alpha + 2F_kA\,, \qquad P_{k1}^{(2M)} = \frac{3}{2}M^2 p_{kk} + F_k(r_1^2 - r_2^2)\,, \qquad P_{k2}^{(2M)} = 2F_k r_1 r_2\,,$$

$$Q_k^{(0)} = b_{kk}\,, \qquad Q_{k1}^{(2M)} = 0\,, \qquad Q_{k2}^{(2M)} = M p_{kk}\,.$$

Damit ergeben sich für die verschwindende Lösung I aus (15) die Stabilitätsbedingungen $b_{kk} < 0$ (echte Dämpfung) und

$$|\alpha| > \sqrt{\frac{1}{4}p_{kk}^2 - \frac{1}{M^2}b_{kk}^2} = \alpha_+\,.$$

Die verschwindende Lösung ist also außerhalb des Resonanzbereiches (α_-, α_+) asymptotisch stabil und im Innern instabil.

Die nichtverschwindenden Lösungen II führen für $p_{kk} > 0$ und $b_{kk} < 0$ auf die Stabilitätsbedingungen

$$\alpha < \frac{1}{2}p_{kk} \pm \sqrt{\frac{1}{4}p_{kk}^2 - \frac{1}{M^2}b_{kk}^2}$$

und

$$8\alpha^2 b_{kk}^2 - 4\alpha p_{kk} b_{kk}^2 + M^2 p_{kk}^4 - 2p_{kk}^2 b_{kk}^2 - \frac{8}{M^2}b_{kk}^4$$

$$> \pm(4M^2\alpha p_{kk}^2 + 16\alpha b_{kk}^2 - 4p_{kk}b_{kk}^2)\sqrt{\frac{1}{4}p_{kk}^2 - \frac{1}{M^2}b_{kk}^2}\,.$$

Die erste Bedingung ist im gesamten Existenzbereich der Lösungen II erfüllt. Die zweite Bedingung läßt sich nicht allgemein diskutieren. Für sehr kleine Dämpfung, $|b_{kk}| \ll p_{kk}$, führt sie auf

$$\pm\alpha < \frac{1}{2}p_{kk} = \alpha_+$$

das heißt, daß die im gesamten Resonanzbereich existierende (für $F_k > 0$ in $\alpha = \alpha_+$ abzweigende) Lösung überall asymptotisch stabil, die zweite nur außerhalb des Resonanzbereiches existierende Lösung überall instabil ist.

Für ein Beispiel großer Dämpfung, $b_{kk}^2 = \frac{3}{16}M^2 p_{kk}^2$, folgt aus der zweiten Stabilitätsbedingung für die im gesamten Resonanzbereich existierende Lösung

$$\alpha < \frac{1}{4}p_{kk} = \alpha_+ \qquad \left(\text{oder} \quad \alpha > \frac{17}{12}p_{kk}\right),$$

für die nur außerhalb des Resonanzbereiches existierende Lösung

$$\alpha < -\frac{5}{12}p_{kk} \quad \text{oder} \quad \alpha > -\frac{1}{4}p_{kk} = \alpha_-\,.$$

Die erste Lösung ist also wiederum im gesamten Existenzbereich stabil, während die zweite Lösung jetzt nur in einem Anfangsteil ihres Existenzbereiches instabil ist.

5. Kombinationsresonanzen

Wir untersuchen nun die Kombinationsresonanzen erster Ordnung,

$$|K \pm L| = 2M,$$

und schließlich noch die Sonderfälle $K = L$, $K = 3L$, $3K = L$ und im Differenzfall $K = 5L$, $5K = L$, $K = \nu M$, $L = \nu M$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) aus, die auf unübersichtliche Formeln führen. Durch Einsetzen der ersten drei Näherungen in die Verzweigungsgleichungen (8) ergeben sich die vier Bestimmungsgleichungen für r_ν

$$\begin{aligned} &F_k A\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + F'_k B\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + K^2\alpha\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + Kb_{kk}\begin{pmatrix} r_2 \\ -r_1 \end{pmatrix} + \\ &\quad + \delta^{2M}_{|K-L|}\frac{K^2+L^2}{4} p_{kl}\begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} + \delta^{2M}_{K+L}\frac{K^2+L^2}{4} p_{kl}\begin{pmatrix} r_3 \\ -r_4 \end{pmatrix} = 0, \\ &F_l B\begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} + F'_l A\begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} + L^2\alpha\begin{pmatrix} r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} + Lb_{ll}\begin{pmatrix} r_4 \\ -r_3 \end{pmatrix} + \\ &\quad + \delta^{2M}_{|K-L|}\frac{K^2+L^2}{4} p_{lk}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + \delta^{2M}_{K+L}\frac{K^2+L^2}{4} p_{lk}\begin{pmatrix} r_1 \\ -r_2 \end{pmatrix} = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

dabei ist neben (13)

$$\begin{aligned} F'_\nu = &\frac{1}{2}(f_{\nu\nu\mu\mu} + f_{\nu\mu\nu\mu} + f_{\nu\mu\mu\nu}) + \sum_i \frac{1}{2\kappa_i^2} e_{i\mu\mu} g_{\nu i\nu} + \\ &+ \frac{1}{4}\sum_i \left[\frac{1}{\kappa_i^2 + (K-L)^2} + \frac{1}{\kappa_i^2 - (K+L)^2}\right](e_{ikl} + e_{ilk})\, g_{\nu i\mu} \end{aligned}$$

für $\nu = k$, $\mu = l$ und $\nu = l$, $\mu = k$.

Die Gleichungen (16) haben stets die triviale Lösung $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0$, dagegen (für $b_{kk} b_{ll} \neq 0$ oder $p_{kl} p_{lk} \neq 0$) keine nichttriviale Lösung mit $r_1 = r_2 = 0$ oder $r_3 = r_4 = 0$.

Bei Summenresonanz $K + L = 2M$, die zunächst betrachtet wird, lassen sich aus (16) die Bedingungen

$$(F_k A + F'_k B + K^2\alpha) Lb_{ll} = (F_l B + F'_l A + L^2\alpha) Kb_{kk}, \tag{17}$$

$$(F_k A + F'_k B + K^2\alpha)(F_l B + F'_l A + L^2\alpha) = \frac{1}{16}(K^2+L^2)^2 p_{kl} p_{lk} + KLb_{kk} b_{ll} \tag{18}$$

für die nichttriviale Lösbarkeit von (16) ableiten. Durch Einsetzen von (17) in (18) und Elimination von B bzw. A ergeben sich daraus für die Bestimmung von A und B die Amplitudenformeln (für $b_{kk} b_{ll} \neq 0$)

$$(F_k F_l - F'_k F'_l) A_\pm = (L^2 F'_k - K^2 F_l)\alpha \pm (KF_l b_{kk} - LF'_k b_{ll}) V, \tag{19}$$

$$(F_k F_l - F'_k F'_l) B_\pm = (K^2 F'_l - L^2 F_k)\alpha \pm (LF_k b_{ll} - KF'_l b_{kk}) V, \tag{20}$$

$$V = \sqrt{\frac{(K^2+L^2)^2 p_{kl} p_{lk}}{16 KL b_{kk} b_{ll}} - 1},$$

wobei die oberen bzw. die unteren Vorzeichen vor den Wurzelausdrücken zusammengehören.

Ein Beispiel der durch (19), (20) dargestellten Resonanzkurven zeigt für positive Klammerfaktoren bei A, B und den Wurzeln im Falle negativer Klammerfaktoren bei α die Abb. 1, im Falle einer negativen α-Klammer in (19) und einer positiven α-Klammer in (20) die Abb. 2.

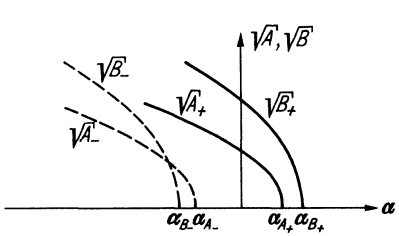


Abb. 1

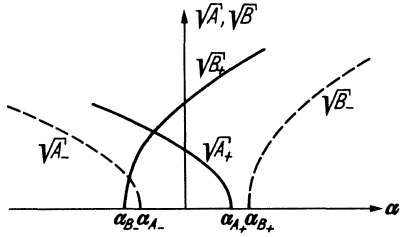


Abb. 2

Die Anfangspunkte der Resonanzkurven ergeben sich aus $A \to 0$ bzw. $B \to 0$ zu

$$(21) \qquad \alpha_{A\pm} = \pm \left| \frac{KF_l b_{kk} - LF'_k b_{ll}}{K^2 F_l - L^2 F'_k} \right| V, \qquad \alpha_{B\pm} = \pm \left| \frac{LF_k b_{ll} - KF'_l b_{kk}}{L^2 F_k - K^2 F'_l} \right| V,$$

falls die Nenner nicht verschwinden. In dem Randintervall $(\alpha_{A+}, \alpha_{B+})$ ist der Lösungsbestandteil $\sqrt{A_+}$ nichtreell, es existiert also nur die triviale Lösung $\{0, 0\}$. Dagegen existiert in dem Intervall $(\alpha_{A-}, \alpha_{A+})$ eine reelle nichtverschwindende Lösung $\{\sqrt{A_+}, \sqrt{B_+}\}$, die allerdings im allgemeinen nicht in α_{A+} von der trivialen Lösung abzweigt, da in diesem Punkt $\sqrt{B_+}$ im allgemeinen einen nichtverschwindenden Wert hat. Im Falle der Abb. 1 wachsen beide Amplituden $\sqrt{A_+}$ und $\sqrt{B_+}$ bei abnehmendem α, während sich im Falle der Abb. 2 die Amplituden gegensinnig verhalten.

Eine Abzweigung beider Lösungskomponenten von der trivialen Lösung liegt im Falle der Abb. 1 vor, wenn α_{A+} und α_{B+} zusammenfallen. Nach (21) gilt $\alpha_{A+} = \alpha_{B+}$ (und damit auch $\alpha_{A-} = \alpha_{B-}$), wenn sich die Dämpfungsgrößen wie $K : L$ verhalten,

$$\frac{b_{kk}}{K} = \frac{b_{ll}}{L}.$$

(„gleiche Hauptdämpfungen"). Dann vereinfachen sich die Amplitudenformeln (19), (20), falls die Nenner nicht verschwinden, zu

$$\frac{F_k F_l - F'_k F'_l}{K^2 F_l - L^2 F'_k} A_\pm = -\alpha \pm \sqrt{\frac{(K^2+L^2)^2}{16 K^2 L^2} p_{kl} p_{lk} - \frac{b_{kk} b_{ll}}{KL}},$$

$$\frac{F_k F_l - F'_k F'_l}{L^2 F_k - K^2 F'_l} B_\pm = -\alpha \pm \sqrt{\frac{(K^2+L^2)^2}{16 K^2 L^2} p_{kl} p_{lk} - \frac{b_{kk} b_{ll}}{KL}}.$$

Da die Dämpfungsgrößen in (21) in den Nennern der Radikanden auftreten, können die Resonanzbereiche bei ungleichen Hauptdämpfungen breiter sein als bei gleichen (sogar gegen Null gehenden) Hauptdämpfungen. Eine solche Verbreiterung der Resonanzbereiche durch Dämpfung ist auch in der Stabilitätstheorie rheolinearer Systeme bekannt; da sich aber Systeme der Form (2) nicht dieser Theorie unterordnen, muß die Untersuchung der Stabilität einer späteren Betrachtung vorbehalten bleiben.

Bei Differenzresonanz $|K-L|=2M$ lassen sich aus (16) Amplitudenformeln ableiten, die aus (19), (20) bei formaler Ersetzung von b_{kk} durch $-b_{kk}$ folgen und für $b_{kk}b_{ll}>0$ (echte Dämpfung) nur im Falle $p_{kl}p_{lk}<0$ zu reellen Amplituden führen; dieser Fall tritt in der Mechanik nur selten auf.

Literatur

[1] HÖLDER, E.: Über die Drehfrequenzbereiche mit instabilen periodischen Torsionsschwingungen bei Kurbelwellen. ZaMM **32**, 258—259 (1952).

[2] LICHTENSTEIN, L.: Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integrodifferentialgleichungen. Berlin: Springer 1931.

[3] METTLER, E.: Allgemeine Theorie der Stabilität erzwungener Schwingungen elastischer Körper. Ing.-Arch. **17**, 418—449 (1949).

[4] SCHMIDT, G.: Über die Biegeschwingungen des gelenkig gelagerten axial pulsierend belasteten Stabes. Math. Nachr. **23**, 75—132 (1961).

[5] — Zur Stabilität der Längs- und Querschwingungen eines längs pulsierend belasteten Stabes. Math. Nachr. **27**, 341—351 (1964).

[6] — Über nichtlineare Drehschwingungen rotierender Wellen. Erscheint voraussichtlich in Rev. Méc. Appl.

[7] WEIDENHAMMER, F.: Rheolineare Drehschwingungen in Kolbenmotoren. Ing.-Arch. **23**, 262—269 (1955).

Dr. GÜNTER SCHMIDT
Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin
Institut für Angewandte Mathematik und Mechanik
108 Berlin, Mohrenstr. 39

(Eingegangen am 15. September 1965)

BAER, R.
Math. Annalen 165, 163—180 (1966)

Noethersche Gruppen II

ERNST HÖLDER zum 65. Geburtstag gewidmet

REINHOLD BAER

Das Ziel dieser Note ist der Beweis des folgenden Satzes:

Die Gruppe G ist dann und nur dann noethersch (d. h. alle Untergruppen von G sind endlich erzeugbar), wenn

(a) alle abelschen Untergruppen von G endlich erzeugbar sind und

(b) jedes epimorphe Bild $H \neq 1$ von G einen Normalteiler $N \neq 1$ besitzt, in dessen Kommutatorgruppe N' die Gruppe H eine noethersche Automorphismengruppe induziert.

Den Beweis dieses Satzes werden wir im Rahmen einer Untersuchung der fast-noetherschen Gruppen (= Gruppen, deren abelsche Untergruppen endlich erzeugbar sind) führen, und zwar werden wir in § 1 das Produkt aller im Sinne von PLOTKIN radikalen Normalteiler fast-noetherscher Gruppen betrachten. So werden wir in Verallgemeinerung eines schönen Mal'cevschen Satzes zeigen, daß dieses Produkt noethersch ist (Satz 1.1). Im § 2 werden wir das Produkt aller Normalteiler der fast-noetherschen Gruppe G analysieren, in denen G eine noethersche Automorphismengruppe induziert. Insbesondere wird sich hierbei ein an sich interessantes Kriterium für die Gültigkeit der Maximalbedingung für Normalteiler ergeben, das auch einiges Licht auf den oft bemerkten Zusammenhang zwischen Maximal- und Minimalbedingung für Normalteiler wirft. In § 3 werden die Ergebnisse der §§ 1, 2 zusammengefaßt und in § 4 werden schließlich die noetherschen Gruppen charakterisiert; insbesondere wird der obige Satz bewiesen.

Bezeichnungen

$x \circ y = x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^y$

$A \circ B =$ Erzeugnis aller Kommutatoren $a \circ b$ mit a aus A und b aus B.

$G' = G \circ G =$ Kommutatorgruppe von G.

$G^{(0)} = G$, $G^{(i+1)} = [G^{(i)}]'$

$\mathfrak{c}X =$ Zentralisator der Teilmenge X in der Gruppe G.

$\mathfrak{z}G =$ Zentrum von G.

$\mathfrak{z}_0 G = 1$, $\mathfrak{z}_{i+1} G/\mathfrak{z}_i G = \mathfrak{z}[G/\mathfrak{z}_i G]$.

1. Der verallgemeinerte Satz von Mal'cev und das Radikal

Wir erinnern zunächst an einige mehr oder weniger bekannte Begriffsbildungen. Die Gruppe G heißt *nilpotent von endlicher Klasse*, wenn sie eine

endliche, 1 und G verbindende Zentralreihe besitzt; und eine Gruppe heiße *lokal nilpotent*, wenn ihre endlich erzeugbaren Untergruppen nilpotent von endlicher Klasse sind. Bekanntlich ist eine solche Gruppe auch lokal noethersch; vgl. etwa BAER ([1], p. 206, Theorem). Schließlich nennen wir (mit PLOTKIN) die Gruppe G *radikal* (kürzer: eine r-Gruppe), wenn jedes epimorphe Bild $H \neq 1$ von G einen lokal nilpotenten Normalteiler $N \neq 1$ besitzt.

Die Klasse der radikalen Gruppen ist recht umfassend. Da jedes erreichbare Element einer Gruppe in einem lokal nilpotenten Normalteiler enthalten ist — vgl. BAER ([3], p. 57, Satz 3.3) — ist die Gruppe G gewiß dann radikal, wenn jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild ein von 1 verschiedenes erreichbares Element besitzt; hieraus ergibt sich insbesondere, daß die von uns als α-Gruppen bezeichneten Gruppen — vgl. BAER ([3], p. 57) — radikale Gruppen sind. Noch spezieller sind alle *hyperabelschen* Gruppen radikal; dabei nennen wir eine Gruppe hyperabelsch, wenn ihre von 1 verschiedenen epimorphen Bilder von 1 verschiedene abelsche Normalteiler besitzen. Nennen wir schließlich mit PH. HALL eine Gruppe G *polyzyklisch*, wenn sie noethersch ist und fast alle Ableitungen $G^{(i)} = 1$ sind, so gilt, wie man sich leicht überzeugt: Eine Gruppe ist dann und nur dann polyzyklisch, wenn sie noethersch und radikal ist.

Es ist wohlbekannt und nicht schwer einzusehen, daß *das Produkt* $\mathfrak{R}G$ *aller radikalen Normalteiler von* G selbst eine radikale Gruppe ist und daß $\mathfrak{R}[G/\mathfrak{R}G] = 1$ ist; vgl. PLOTKIN ([7], p. 14—16, § 4).

Schließlich sei noch daran erinnert, daß eine Gruppe *fast-noethersch* genannt wird, wenn ihre abelschen Untergruppen noethersch sind.

Satz 1.1. *Ist* G *fast-noethersch, so ist* $\mathfrak{R}G$ *polyzyklisch,* $\mathfrak{R}[G/\mathfrak{R}G] = 1$ *und* $G/\mathfrak{R}G$ *ist fast-noethersch.*

Beweis. Sei $N(1) \subseteqq \cdots \subseteqq N(i) \subseteqq N(i+1) \subseteqq \cdots$ eine aufsteigende Folge polyzyklischer Normalteiler von G. Dann ist die Vereinigungsmenge $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} N(i)$ ein Normalteiler von G. Ist σ ein Epimorphismus von N, so ist $N^\sigma = \bigcup_{i=1}^{\infty} N(i)^\sigma$ und jedes $N(i)^\sigma$ ist ein polyzyklischer Normalteiler von N^σ. Ist $N^\sigma \neq 1$, so gibt es ein positives k mit $N(k)^\sigma \neq 1$. Da $N(k)^\sigma$ polyzyklisch ist, gibt es eine ganze Zahl n derart, daß $[N(k)^\sigma]^{(n+1)} = 1 \subset [N(k)^\sigma]^{(n)}$ ist. Als abelsche charakteristische Untergruppe des Normalteilers $N(k)^\sigma$ von N^σ ist $[N(k)^\sigma]^{(n)}$ ein von 1 verschiedener abelscher Normalteiler von N^σ. Also ist N eine hyperabelsche Gruppe. Nun besagt der verallgemeinerte Satz von Mal'cev — vgl. BAER ([2], p. 173, Hauptsatz 4) —, daß fast-noethersche hyperabelsche Gruppen polyzyklisch und insbesondere noethersch sind. Also ist N noethersch, so daß die Reihe der $N(i)$ nach endlich vielen Schritten abbricht. Damit haben wir gezeigt, daß die Maximalbedingung von den polyzyklischen Normalteilern von G erfüllt wird. Insbesondere existiert also ein maximaler polyzyklischer Normalteiler M von G.

Ist A/M eine abelsche Untergruppe von G/M, so ist A fast-noethersch und aus $A' \subseteqq M$ und $M^{(i)} = 1$ folgt $A^{(i+1)} = 1$. Also ist A eine fast-noethersche

hyperabelsche Gruppe und aus dem eben benutzten Satz von Mal'cev folgt, daß A und also auch A/M noethersch sind. Damit haben wir gezeigt:

(1) G/M ist fast-noethersch.

Sei L/M ein lokal-nilpotenter Normalteiler von G/M. Da L/M wegen (1) fast-noethersch ist, folgt aus einem Satz von Mal'cev — vgl. etwa BAER ([4], p. 100, **B.** Corollary) —, daß L/M noethersch, also polyzyklisch ist. Dann ist aber L als Erweiterung des polyzyklischen Normalteilers M durch den polyzyklischen Normalteiler L/M von G/M ein polyzyklischer Normalteiler von G. Aus der Maximalität von M folgt also $L=M$ und $L/M=1$ und wir haben gezeigt:

(2) 1 ist der einzige lokal nilpotente Normalteiler von G/M.

Ist X ein r-Normalteiler von G, so ist $MX/M \cong X/(X \cap M)$ ein epimorphes Bild von X. Wäre $MX/M \neq 1$, so existierte also ein lokal nilpotenter Normalteiler $Y \neq 1$ von MX/M. Es folgt, daß das Produkt P aller lokal nilpotenten Normalteiler von MX/M eine von 1 verschiedene charakteristische Untergruppe von MX/M ist. Da MX/M mit X ein Normalteiler ist, so ist P ein Normalteiler von G/M. Per definitionem ist P das Hirsch-Plotkin-Radikal von MX/M und dieses ist bekanntlich — vgl. etwa PLOTKIN ([7], p. 17) — lokal nilpotent im Widerspruch zu (2). Also ist $MX/M=1$ und $X \leqq MX=M$. Da M polyzyklisch ist, haben wir gezeigt:

(3) $M=\mathfrak{R}G$ ist polyzyklisch.

Aus (1)—(3) ergibt sich sofort unser Satz.

Einer leichten Verallgemeinerung der bisher gewonnenen Resultate dient das folgende

Lemma 1.2. *Ist G fast-noethersch und lokal noethersch, gibt es eine ganze Zahl k $[\geqq 0]$ derart, daß $E^{(k)}$ für jede endlich erzeugbare Untergruppe E von G nilpotent von endlicher Klasse ist, so ist G polyzyklisch.*

Bemerkung. Vergleiche in diesem Zusammenhang BAER ([4], p. 106, **E.** Proposition). — Ob auch alle fast-noetherschen, lokal polyzyklischen Gruppen polyzyklisch sind, haben wir nicht entscheiden können. Der Satz von KARGAPOLOV ([5a]; p. 232, Lemma), daß Gruppen endlich sind, wenn ihre abelschen und ihre endlich erzeugbaren Untergruppen endlich sind, legt eine solche Vermutung nahe. Vergleiche auch Satz 1.5 unten.

Beweis. Man überzeugt sich zunächst ohne große Mühe davon, daß $G^{(k)}$ lokal nilpotent ist. Also ist G eine radikale Gruppe und aus Satz 1.1 folgt, daß $G=\mathfrak{R}G$ polyzyklisch ist.

Wir wollen jetzt eine Gruppe G *schwach radikal* nennen, wenn jedes epimorphe Bild $H \neq 1$ von G einen Normalteiler $K \neq 1$ mit folgenden Eigenschaften besitzt:

K ist lokal noethersch und es gibt eine ganze Zahl k $[\geqq 0]$ derart, daß $E^{(k)}$ für jede endlich erzeugbare Untergruppe E von G nilpotent von endlicher Klasse ist.

Es ist klar, daß alle radikalen Gruppen auch schwach radikal sind. Eine weitere Erörterung der allgemeinen Eigenschaften der schwachen Radikalität erübrigt sich für unsere gegenwärtigen Zwecke.

Satz 1.3. *Die Gruppe G ist dann und nur dann polyzyklisch, wenn sie fast-noethersch und schwach radikal ist.*

Dieses Resultat kann als weitere Verallgemeinerung des Mal'cevschen Satzes angesehen werden.

Beweis. Es ist klar, daß die beiden Bedingungen notwendig für Polyzyklizität sind. Ist umgekehrt G fast-noethersch und schwach radikal, so ist $\mathfrak{R}G$ polyzyklisch und $G/\mathfrak{R}G$ fast-noethersch (Satz 1.1). Da aber G schwach radikal ist, ergibt sich $G/\mathfrak{R}G = 1$ aus Lemma 1.2, so daß $G = \mathfrak{R}G$ polyzyklisch ist.

Folgerung 1.4. *Ist die Gruppe G fast-noethersch, so gilt*

(a) *schwach radikale Untergruppen von G sind polyzyklisch,*

(b) *1 ist der einzige schwach radikale Normalteiler von $G/\mathfrak{R}G$,*

(c) *$\mathfrak{R}G$ ist das Produkt aller schwach radikalen Normalteiler von G.*

Beweis. (a) ist eine unmittelbare Folge von Satz 1.3 und (c) folgt aus (a) und der Definition von $\mathfrak{R}G$. Ist schließlich $K/\mathfrak{R}G$ ein schwach radikaler Normalteiler von $G/\mathfrak{R}G$, so ist K ein schwach radikaler Normalteiler von G, da ja $\mathfrak{R}G$ wegen Satz 1.1 polyzyklisch und also $[\mathfrak{R}G]^{(i)} = 1$ für fast alle i ist. Aus (c) folgt $K \leqq \mathfrak{R}G$, so daß $K/\mathfrak{R}G = 1$ ist.

Satz 1.5. *Die Gruppe G ist dann und nur dann polyzyklisch, wenn*

(a) *alle endlich erzeugbaren Untergruppen von G polyzyklisch sind,*

(b) *G fast-noethersch ist und*

(c) *die Maximalbedingung von den normalisatorgleichen polyzyklischen Untergruppen von G erfüllt wird.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingungen (a)–(c) ist trivial. Wir nehmen also gleich die Gültigkeit dieser Bedingungen (a)–(c) an. Zuerst folgern wir aus (b) allein.

(d) Jede polyzyklische Untergruppe von G ist in einer normalisatorgleichen polyzyklischen Untergruppe von G enthalten.

Wäre nämlich (d) falsch, so gäbe es eine polyzyklische Untergruppe U von G, die in keiner normalisatorgleichen polyzyklischen Untergruppe von G enthalten ist. Wir setzen $U = U_0$ und konstruieren durch vollständige Induktion Untergruppen U_i von G mit folgenden Eigenschaften:

(+) U_i ist ein Normalteiler von U_{i+1} mit zyklischem $U_{i+1}/U_i \neq 1$.

Haben wir bereits U_i mit $0 \leqq i \leqq n$ konstruiert, so ist

$$U = U_0 \subset \cdots \subset U_i \subset U_{i+1} \subset \cdots \subset U_n .$$

Insbesondere ist $U \leqq U_n$ und aus (+) folgt, daß U_n polyzyklisch ist. Da U in keiner normalisatorgleichen polyzyklischen Untergruppe von G enthalten ist, so ist U_n nicht normalisatorgleich. Also gibt es ein nicht in U_n enthaltenes, U_n normalisierendes Element g in G. Wir setzen

$$U_{n+1} = \{U_n, g\} = U_n\{g\} .$$

Es ist klar, daß U_n ein Normalteiler von U_{n+1} ist, und daß U_{n+1}/U_n eine von 1 verschiedene zyklische Gruppe ist. Damit haben wir die induktive Konstruktion der (+) genügenden Untergruppen U_i vollständig durchgeführt.

Die Vereinigungsmenge $V = \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n$ dieser Untergruppen ist eine Untergruppe von G. Ist σ ein Epimorphismus von V auf eine Gruppe $E \neq 1$, so ist E die Vereinigung der Bilder U_n^σ. Von diesen muß also wenigstens eines von 1 verschieden sein. Ist etwa $U_m^\sigma \neq 1$, so ist U_m^σ eine polyzyklische und erreichbare — im Sinne von BAER ([3], p. 46) — Untergruppe von E. Natürlich besitzt die polyzyklische Gruppe $U_m^\sigma \neq 1$ einen abelschen Normalteiler ungleich 1. Seine Elemente sind erreichbare — im Sinne von BAER ([3], p. 48) — Elemente von U_m^σ und also von E. Bekanntlich liegen die erreichbaren Elemente von E in einem lokal nilpotenten Normalteiler von E; vgl. BAER ([3], p. 57, Satz 3.3). Also besitzt E einen von 1 verschiedenen, lokal nilpotenten Normalteiler. Damit haben wir aber gezeigt, daß V eine radikale Gruppe ist. Wegen (b) ist folglich V eine fast-noethersche und radikale, also erst recht schwach radikale Gruppe. Anwendung von Satz 1.3 zeigt, daß V polyzyklisch ist. Insbesondere ist V noethersch, so daß die aufsteigende Untergruppenkette der U_i nach endlich vielen Schritten abbricht. Dies ist ein Widerspruch und aus diesem Widerspruch folgt (d).

Aus (c) folgt die Existenz einer maximalen normalisatorgleichen polyzyklischen Untergruppe M von G. Wäre $M \neq G$, so gäbe es ein nicht in M enthaltenes Element w in G. Mit M ist auch $W = \{M, w\}$ endlich erzeugbar. Es folgt aus (a), daß W polyzyklisch ist. Wegen (d) ist W in einer normalisatorgleichen polyzyklischen Untergruppe N enthalten. Also ist

$$M \subset W \leqq N \leqq G .$$

Dies widerspricht der Maximalität von M. Also ist $G = M$ polyzyklisch.

Bemerkung 1.6. Ist G eine lokal nilpotente, aber nicht endlich erzeugbare Gruppe — solcher Gruppen gibt es die Fülle —, so gilt a fortiori Bedingung (a). Ist U eine polyzyklische Untergruppe von G, so ist $U \neq G$. Ist v ein nicht in U enthaltenes Element aus G, so ist $V = \{U, v\}$ endlich erzeugbar und also nilpotent von endlicher Klasse. Aus $U \subset V$ folgt dann, daß U nicht normalisatorgleich ist. Da also keine polyzyklische Untergruppe von G normalisatorgleich ist, so wird auch Bedingung (c) von G erfüllt. Aber G ist nicht endlich erzeugbar, also erst recht nicht polyzyklisch. Damit haben wir die Unentbehrlichkeit der Bedingung (b) dargetan. — Ob Bedingung (c) entbehrlich ist oder nicht, haben wir nicht entscheiden können. Vergleiche auch die Bemerkung zu Lemma 1.2.

2. Gruppen mit trivialen abelschen Normalteilern und die Maximalbedingung für Normalteiler

Wir wollen der Bequemlichkeit halber unter einer $\mathfrak{n}$-Gruppe eine Gruppe verstehen, von deren Normalteilern die Maximalbedingung erfüllt wird.

Hilfssatz 2.1. *Sind X, Y Normalteiler von G, so ist dann und nur dann $G/(X \cap Y)$ eine $\mathfrak{n}$-Gruppe, wenn G/X und G/Y beides $\mathfrak{n}$-Gruppen sind.*

Ein Beweis dieser wohlbekannten Tatsache sei der Bequemlichkeit des Lesers wegen ausgeführt.

Beweis. Dann und nur dann ist G/J eine $\mathfrak{n}$-Gruppe, wenn die Maximalbedingung von den J enthaltenden Normalteilern von G erfüllt wird. Aus dieser immer wieder anzuwendenden Bemerkung folgt insbesondere die Notwendigkeit unserer Bedingung.

Wir nehmen umgekehrt an, daß G/X und G/Y beides $\mathfrak{n}$-Gruppen sind. Es sei $\mathfrak{M}$ eine nicht leere Menge von $X \cap Y$ enthaltenden Normalteilern von G. Dann ist die Menge aller AX mit A aus $\mathfrak{M}$ eine nicht leere Menge von X enthaltenden Normalteilern. Diese Menge enthält einen maximalen Normalteiler M, da G/X eine $\mathfrak{n}$-Gruppe ist. Nach Definition ist die Menge $\mathfrak{N}$ aller $M = XN$ erfüllenden Normalteiler N aus $\mathfrak{M}$ nicht leer.

Wir betrachten die Menge aller Normalteiler $Y[X \cap B]$ für B aus $\mathfrak{N}$. Diese Menge ist nicht leer und sie enthält einen maximalen Normalteiler N, da G/Y eine $\mathfrak{n}$-Gruppe ist. Dieser Normalteiler hat per definitionem die Form

$$N = Y[X \cap W] \quad \text{mit } W \text{ aus } \mathfrak{N}.$$

Natürlich ist W ein Normalteiler aus $\mathfrak{M}$, so daß insbesondere

$$X \cap Y \subseteqq W$$

ist. Sei V ein Normalteiler aus $\mathfrak{M}$ mit $W \subseteqq V$. Dann ist

$$M = XW \subseteqq XV$$

und aus der Maximalität von M folgt $XW = XV$, so daß V ebenfalls in $\mathfrak{N}$ liegt. Weiter ist

$$N = Y[X \cap W] \subseteqq Y[X \cap V];$$

und aus der Maximalität von N folgt $Y[X \cap W] = Y[X \cap V]$. Anwendung des Dedekindschen Modulsatzes auf die Ungleichungen

$$X \cap W \subseteqq X \cap V \subseteqq Y[X \cap W],$$
$$W \subseteqq V \subseteqq XW$$

ergibt

$$X \cap V = [X \cap W][Y \cap X \cap V] = X \cap W,$$

da $X \cap Y \subseteqq X \cap W$ ist. Weiter gilt

$$V = W[X \cap V] = W[X \cap W] = W,$$

so daß W maximal in $\mathfrak{M}$ ist. Also ist $G/(X \cap Y)$ eine $\mathfrak{n}$-Gruppe.

Der Normalteiler X der Gruppe G heiße $\mathfrak{n}$-*eingelagert in* G, wenn die von G in X induzierte Automorphismengruppe eine $\mathfrak{n}$-Gruppe ist. Da die von G in X induzierte Automorphismengruppe im wesentlichen mit $G/\mathfrak{c}X$ identisch ist, ist X dann und nur dann ein $\mathfrak{n}$-eingelagerter Normalteiler von G, wenn $G/\mathfrak{c}X$ eine $\mathfrak{n}$-Gruppe ist. Zur Abkürzung werden wir $X\,\mathfrak{n}\,G$ schreiben, wenn X ein $\mathfrak{n}$-eingelagerter Normalteiler von G ist.

Sind X, Y Normalteiler mit $X \subseteqq Y$, so ist $\mathfrak{c}Y \subseteqq \mathfrak{c}X$. Aus $Y\,\mathfrak{n}\,G$ folgt also $X\,\mathfrak{n}\,G$; und aus $Y\,\mathfrak{n}\,G$ folgt auch $(Y/X)\,\mathfrak{n}\,(G/X)$. Da $\mathfrak{c}(XY) = \mathfrak{c}X \cap \mathfrak{c}Y$ für be-

liebige Normalteiler X, Y von G gilt, so folgt aus Hilfssatz 2.1 weiter, daß $(XY) \mathfrak{n} G$ eine Folge von $X \mathfrak{n} G$ *und* $Y \mathfrak{n} G$ ist. Schließlich gilt

Lemma 2.2. *Ist* 1 *der einzige abelsche Normalteiler von* G, *sind* X, Y *Normalteiler von* G *mit* $X \subseteqq Y$, *so ist dann und nur dann* $Y \mathfrak{n} G$, *wenn* $X \mathfrak{n} G$ *und* $(Y/X) \mathfrak{n} (G/X)$ *gelten.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingungen folgt sofort aus den vorangeschickten Bemerkungen. Wir nehmen also an, daß $X \mathfrak{n} G$ und $(Y/X) \mathfrak{n} (G/X)$ gelten. Sei T der eindeutig bestimmte Normalteiler von G mit $X \subseteqq T$ und $T/X = \mathfrak{c}(Y/X)$. Aus unseren Voraussetzungen folgt, daß $G/\mathfrak{c}X$ und

$$[G/X]/\mathfrak{c}(Y/X) = [G/X]/[T/X] \cong G/T$$

zwei $\mathfrak{n}$-Gruppen sind. Nach Hilfssatz 2.1 ist auch $G/[T \cap \mathfrak{c}X]$ eine $\mathfrak{n}$-Gruppe. Ist t ein Element aus $T \cap \mathfrak{c}X$, so induziert t in Y/X und in X den 1-Automorphismus, stabilisiert also den Normalteiler X von Y. Hieraus folgt bekanntlich $t \circ Y \subseteqq \mathfrak{z}X$; vgl. SPECHT ([9], p. 88, Beweis von Satz 19). Als charakteristische Untergruppe des Normalteilers X ist $\mathfrak{z}X$ ein Normalteiler von G; und als abelscher Normalteiler ist $\mathfrak{z}X$ nach Voraussetzung gleich 1. Also ist $t \circ Y = 1$, so daß t in $\mathfrak{c}Y$ liegt, und wir haben $T \cap \mathfrak{c}X \subseteqq \mathfrak{c}Y$ (sogar „$=$“) gezeigt. Da $G/[T \cap \mathfrak{c}X]$ eine $\mathfrak{n}$-Gruppe ist, ist auch $G/\mathfrak{c}Y$ eine $\mathfrak{n}$-Gruppe und es gilt $Y \mathfrak{n} G$.

Bemerkung 2.3. Selbstverständlich gelten $(\mathfrak{z}G) \mathfrak{n} G$ und $\mathfrak{z}[G/\mathfrak{z}G] \mathfrak{n} (G/\mathfrak{z}G)$. Es ist aber nicht schwer, eine Gruppe G derart zu konstruieren, daß $\mathfrak{z}_2 G$ nicht $\mathfrak{n}$-eingelagert in G ist. Dies zeigt die Unentbehrlichkeit der Voraussetzung, daß 1 der einzige abelsche Normalteiler von G ist.

Lemma 2.4. *Die Gruppe* G *habe die folgenden zwei Eigenschaften:*

(a) 1 *ist der einzige abelsche Normalteiler von* G.

(b) *Ist das epimorphe Bild* H *von* G *keine* $\mathfrak{n}$*-Gruppe, so existiert ein Normalteiler* $N \neq 1$ *von* H *mit* $N' \mathfrak{n} H$.

Dann gilt:

(1) *Ist* $X \neq 1$ *ein Normalteiler von* G, *so gibt es einen Normalteiler* Y *von* G *mit* $1 \subset Y \subseteqq X$ *und* $Y \mathfrak{n} G$.

(2) *Der Durchschnitt aller Normalteiler* X *von* G *mit* $\mathfrak{n}$*-Faktorgruppe* G/X *ist gleich* 1.

Beweis. Sei $X \neq 1$ ein Normalteiler von G. Ist $X \mathfrak{n} G$, so wählen wir $X = Y$, um (1) zu beweisen. Wir nehmen also an, daß $X \mathfrak{n} G$ nicht gilt. Dann ist $G/\mathfrak{c}X$ keine $\mathfrak{n}$-Gruppe und wir können (b) anwenden. Folglich gibt es einen Normalteiler S von G mit $\mathfrak{c}X \subset S$ und $[S/\mathfrak{c}X]' \mathfrak{n} [G/\mathfrak{c}X]$.

Wäre $[S/\mathfrak{c}X]' = 1$, so wäre $S' \subseteqq \mathfrak{c}X$ und hieraus ergibt sich

$$(S \cap X)' \subseteqq S' \cap X \subseteqq X \cap \mathfrak{c}X = \mathfrak{z}X = 1,$$

wie aus (a) folgt, da $\mathfrak{z}X$ ein abelscher Normalteiler ist. Also ist $S \cap X$ ein abelscher Normalteiler von G; und aus (a) folgt $S \cap X = 1$, so daß

$$S \subseteqq \mathfrak{c}X \subset S$$

gilt. Dies ist unmöglich, woraus $[S/\mathfrak{c}X]' \neq 1$ folgt. Setzen wir $S_0 = S' \cdot \mathfrak{c}X$, so ist $1 \neq [S/\mathfrak{c}X]' = S_0/\mathfrak{c}X$ und also $\mathfrak{c}X \subset S_0$.

Sei T der eindeutig bestimmte Normalteiler von X mit $\mathfrak{c}X \subseteqq T$ und $T/\mathfrak{c}X = \mathfrak{c}[S_0/\mathfrak{c}X]$. Dann ist

$$G/T \cong [G/\mathfrak{c}X]/[T/\mathfrak{c}X] = [G/\mathfrak{c}X]/\mathfrak{c}[S_0/\mathfrak{c}X];$$

und aus $S_0/\mathfrak{c}X = [S/\mathfrak{c}X]' \cap [G/\mathfrak{c}X]$ folgt, daß G/T eine $\mathfrak{n}$-Gruppe ist. Weiter ist $T \circ S_0 \subseteqq \mathfrak{c}X$.

Wir setzen $Y = S_0 \cap X$. Dann ist Y ein in X enthaltener Normalteiler von G. Wäre $1 = Y = S_0 \cap X$, so wäre auch $S_0 \circ X = 1$, so daß $S_0 \subseteqq \mathfrak{c}X \subset S_0$ wäre. Also ist $1 \subset Y \subseteqq X$. Weiter ist [wegen (a)]

$$T \circ Y = T \circ (S_0 \cap X) \subseteqq X \cap (T \circ S_0) \subseteqq X \cap \mathfrak{c}X = \mathfrak{z}X = 1,$$

so daß $T \subseteqq \mathfrak{c}Y$ ist. Als epimorphes Bild der $\mathfrak{n}$-Gruppe G/T ist $G/\mathfrak{c}Y$ eine $\mathfrak{n}$-Gruppe, woraus $Y \mathfrak{n} G$ folgt. Damit ist (1) bewiesen.

Sei D der Durchschnitt aller Normalteiler X von G mit $\mathfrak{n}$-Faktorgruppe G/X. Wäre $D \neq 1$, so folgte aus (1) die Existenz eines Normalteilers Y von G mit $1 \subset Y \subseteqq D$ und $Y \mathfrak{n} G$. Dann ist $G/\mathfrak{c}Y$ eine $\mathfrak{n}$-Gruppe, so daß $Y \subseteqq D \subseteqq \mathfrak{c}Y$ und folglich Y abelsch ist. Also wäre Y ein von 1 verschiedener abelscher Normalteiler von G im Widerspruch zu (a), womit auch (2) bewiesen ist.

Satz 2.5. *Ist* 1 *der einzige abelsche Normalteiler von G, so sind die folgenden beiden Bedingungen notwendig und hinreichend für die Gültigkeit der Maximalbedingung für Normalteiler von G:*

(A) *Unabhängige Mengen von* $\mathfrak{n}$*-eingelagerten Normalteilern von G sind endlich.*

(B) *Ist das epimorphe Bild H von G keine* $\mathfrak{n}$*-Gruppe, so existiert ein Normalteiler* $N \neq 1$ *von H mit* $N' \mathfrak{n} H$.

Terminologische Erinnerung. Die Menge $\mathfrak{M}$ von Normalteilern von G heißt *unabhängig*, wenn das Produkt der Normalteiler aus $\mathfrak{M}$ direkt ist.

Beweis. Ist G eine $\mathfrak{n}$-Gruppe, so genügt G natürlich auch den Bedingungen (A) und (B). — Wir nehmen umgekehrt an, daß G zwar der Bedingung (B) genügt, aber keine $\mathfrak{n}$-Gruppe ist. Dann genügt also G den Bedingungen (a), (b) von Lemma 2.4 und wir können von Lemma 2.4, (1), Gebrauch machen.

Sei X ein $\mathfrak{n}$-eingelagerter Normalteiler von G. Dann ist $G/\mathfrak{c}X$ eine $\mathfrak{n}$-Gruppe. Da aber G keine $\mathfrak{n}$-Gruppe ist, ist $\mathfrak{c}X \neq 1$ und aus Lemma 2.4, (1) folgt die Existenz eines Normalteilers Y von G mit $1 \subset Y \subseteqq \mathfrak{c}X$ und $Y \mathfrak{n} G$. Da 1 der einzige abelsche Normalteiler von G ist, ist

$$X \cap Y \subseteqq X \cap \mathfrak{c}X = \mathfrak{z}X = 1.$$

Weiter sind $G/\mathfrak{c}X$ und $G/\mathfrak{c}Y$ zwei $\mathfrak{n}$-Gruppen. Aus Hilfssatz 2.1 folgt, daß auch $G/[\mathfrak{c}X \cap \mathfrak{c}Y] = G/\mathfrak{c}(XY)$ eine $\mathfrak{n}$-Gruppe ist. Also ist auch $(XY) \mathfrak{n} G$. Wir fassen zusammen:

(+) Zu jedem $\mathfrak{n}$-eingelagerten Normalteiler X von G gibt es einen $\mathfrak{n}$-eingelagerten Normalteiler $Y \neq 1$ von G mit $X \cap Y = 1$ und $(XY) \mathfrak{n} G$.

Durch eine naheliegende vollständige Induktion konstruiert man jetzt eine unendliche Folge von Normalteilern $X_i \neq 1$ von G mit folgenden Eigenschaften:

$$X_{i+1} \cap \prod_{j=1}^{i} X_j = 1, \quad \left[\prod_{j=1}^{i} X_j\right] \mathfrak{n} G, \quad X_{i+1} \mathfrak{n} G.$$

Es ist klar, daß die X_i eine unendliche unabhängige Menge von $\mathfrak{n}$-eingelagerten Normalteilern von G bilden. Also gilt Bedingung (A) nicht und wir haben das Hinreichen der Bedingungen (A), (B) dargetan.

Bemerkung 2.6. Es ist bemerkenswert, daß Bedingung (A) aus jeder der beiden folgenden Eigenschaften von G folgt:

(A′) G ist fast-noethersch.

(A″) Die Minimalbedingung wird von den Normalteilern von G erfüllt.

Der Normalteiler X von G heiße $\overline{\mathfrak{n}}$-eingelagert (kurz: $X \overline{\mathfrak{n}} G$), wenn G in X eine noethersche Automorphismengruppe induziert. Diese Bedingung ist gleichwertig damit, daß $G/\mathfrak{c}X$ noethersch ist, da ja $G/\mathfrak{c}X$ im wesentlichen mit der von G in X induzierten Automorphismengruppe identisch ist. Wir bezeichnen mit $\overline{\mathfrak{n}}G$ *das Produkt aller* $\overline{\mathfrak{n}}$*-eingelagerten Normalteiler von* G. Dies ist eine wohlbestimmte charakteristische Untergruppe von G.

Lemma 2.7. *Ist* 1 *der einzige abelsche Normalteiler von* G, *gibt es einen maximalen* $\overline{\mathfrak{n}}$*-eingelagerten Normalteiler von* G, *so hat* G *folgende Eigenschaften:*

(1) *Folgende drei Eigenschaften des Normalteilers* X *von* G *sind äquivalent:*

(a) $X \subseteqq \overline{\mathfrak{n}}G$.

(b) $X \cap \mathfrak{c}\overline{\mathfrak{n}}G = 1$.

(c) $X \overline{\mathfrak{n}} G$.

(2) $\overline{\mathfrak{n}}G$ *ist noethersch.*

(3) 1 *ist der einzige abelsche Normalteiler von* $G/\overline{\mathfrak{n}}G$.

(4) *Dann und nur dann ist* G *fast-noethersch, wenn* $G/\overline{\mathfrak{n}}G$ *fast-noethersch ist.*

(5) $\overline{\mathfrak{n}}(G/\overline{\mathfrak{n}}G) = 1$.

Beweis. Ist der Normalteiler X von G in $\overline{\mathfrak{n}}G$ enthalten, so ist

$$X \cap \mathfrak{c}\overline{\mathfrak{n}}G \subseteqq \overline{\mathfrak{n}}G \cap \mathfrak{c}\overline{\mathfrak{n}}G = \mathfrak{z}\overline{\mathfrak{n}}G = 1,$$

da $\mathfrak{z}\overline{\mathfrak{n}}G$ eine abelsche charakteristische Untergruppe von G ist.

Ist weiter $X \cap \mathfrak{c}\overline{\mathfrak{n}}G = 1$, so erinnern wir uns zunächst an die Existenz eines maximalen $\overline{\mathfrak{n}}$-eingelagerten Normalteilers M von G. Ist $Y\overline{\mathfrak{n}}G$, so sind $G/\mathfrak{c}M$ und $G/\mathfrak{c}Y$ zwei noethersche Gruppen. Also ist auch $G/\mathfrak{c}(MY) = G/[\mathfrak{c}M \cap \mathfrak{c}Y]$ als Untergruppe des direkten Produkts der noetherschen Gruppen $G/\mathfrak{c}M$ und $G/\mathfrak{c}Y$ selbst noethersch. Es folgt $(MY)\overline{\mathfrak{n}}G$ und aus der Maximalität von M ergibt sich zunächst $Y \subseteqq MY = M$ und dann $\overline{\mathfrak{n}}G \subseteqq M \subseteqq \overline{\mathfrak{n}}G$. Also ist $\overline{\mathfrak{n}}G = M$ eine $\overline{\mathfrak{n}}$-eingelagerte charakteristische Untergruppe von G. Folglich ist $G/\mathfrak{c}\overline{\mathfrak{n}}G$ noethersch. Aus $X \cap \mathfrak{c}\overline{\mathfrak{n}}G = 1$ folgt aber $\mathfrak{c}\overline{\mathfrak{n}}G \subseteqq \mathfrak{c}X$, so daß auch das epimorphe Bild $G/\mathfrak{c}X$ von $G/\mathfrak{c}\overline{\mathfrak{n}}G$ noethersch ist. Also gilt $X\overline{\mathfrak{n}}G$.

Daß schließlich $X \subseteqq \overline{\pi}G$ aus $X\overline{\pi}G$ folgt, ist in der Definition von $\overline{\pi}G$ enthalten. Damit ist (1) bewiesen.

Aus (1) folgt insbesondere, daß $G/\mathfrak{c}\overline{\pi}G$ noethersch ist. Also ist auch

$$\overline{\pi}G \cdot \mathfrak{c}\overline{\pi}G/\mathfrak{c}\overline{\pi}G \cong \overline{\pi}G/\mathfrak{z}\overline{\pi}G = \overline{\pi}G$$

noethersch — die charakteristische abelsche Untergruppe $\mathfrak{z}\overline{\pi}G$ ist ja nach Voraussetzung gleich 1. Dies beweist (2).

Sei $A/\overline{\pi}G$ ein abelscher Normalteiler von $G/\overline{\pi}G$. Dann ist $A' \subseteqq \overline{\pi}G$ und also

$$[A \cap \mathfrak{c}\overline{\pi}G]' \subseteqq A' \cap \mathfrak{c}\overline{\pi}G \subseteqq \overline{\pi}G \cap \mathfrak{c}\overline{\pi}G = \mathfrak{z}\overline{\pi}G = 1\,.$$

Folglich ist $A \cap \mathfrak{c}\overline{\pi}G$ als abelscher Normalteiler von G gleich 1 und wir folgern $A \subseteqq \overline{\pi}G$ aus (1). Mithin ist $A/\overline{\pi}G = 1$; und wir haben (3) bewiesen.

Ist $G/\overline{\pi}G$ fast-noethersch und U eine abelsche Untergruppe von G, so ist

$$U/[U \cap \overline{\pi}G] \cong U \cdot \overline{\pi}G/\overline{\pi}G \subseteqq G/\overline{\pi}G$$

als abelsche Untergruppe von $G/\overline{\pi}G$ noethersch. Weiter ist $U \cap \overline{\pi}G$ wegen (2) noethersch. Es folgt, daß U als Erweiterung einer noetherschen Gruppe durch eine noethersche Gruppe ebenfalls noethersch ist: G ist fast-noethersch.

Sei umgekehrt G fast-noethersch und $V/\overline{\pi}G$ eine abelsche Untergruppe von $G/\overline{\pi}G$. Dann ist $V' \subseteqq \overline{\pi}G$, so daß

$$[V \cap \mathfrak{c}\overline{\pi}G]' \subseteqq V' \cap \mathfrak{c}\overline{\pi}G \subseteqq \overline{\pi}G \cap \mathfrak{c}\overline{\pi}G = \mathfrak{z}\overline{\pi}G = 1$$

und also $V \cap \mathfrak{c}\overline{\pi}G$ als abelsche Untergruppe von G noethersch ist. Weiter ist

$$V/[V \cap \mathfrak{c}\overline{\pi}G] \cong V \cdot \mathfrak{c}\overline{\pi}G/\mathfrak{c}\overline{\pi}G \subseteqq G/\mathfrak{c}\overline{\pi}G\,.$$

Da $G/\mathfrak{c}\overline{\pi}G$ wegen (1) noethersch ist, so ist auch $V/[V \cap \mathfrak{c}\overline{\pi}G]$ noethersch. Also ist V als Erweiterung der noetherschen Gruppe $V \cap \mathfrak{c}\overline{\pi}G$ durch die noethersche Gruppe $V/[V \cap \mathfrak{c}\overline{\pi}G]$ noethersch und es ist folglich auch $V/\overline{\pi}G$ noethersch: $G/\overline{\pi}G$ ist fast-noethersch.

Sei $X/\overline{\pi}G$ ein $\overline{\pi}$-eingelagerter Normalteiler von $G/\overline{\pi}G$. Aus (1) folgt, daß $\overline{\pi}G$ ein $\overline{\pi}$-eingelagerter Normalteiler von G und also $G/\mathfrak{c}\overline{\pi}G$ noethersch ist. Weiter ist $[G/\overline{\pi}G]/\mathfrak{c}[X/\overline{\pi}G]$ noethersch. Sei Y der eindeutig bestimmte Normalteiler von G mit $\overline{\pi}G \subseteqq Y$ und $\mathfrak{c}[X/\overline{\pi}G] = Y/\overline{\pi}G$. Dann ist

$$G/Y \cong [G/\overline{\pi}G]/\mathfrak{c}[X/\overline{\pi}G]$$

noethersch. Da $G/[Y \cap \mathfrak{c}\overline{\pi}G]$ einer Untergruppe des direkten Produkts der noetherschen Gruppen G/Y und $G/\mathfrak{c}\overline{\pi}G$ isomorph ist, so ist auch $G/[Y \cap \mathfrak{c}\overline{\pi}G]$ noethersch. Ist y ein Element aus $Y \cap \mathfrak{c}\overline{\pi}G$, so induziert y sowohl in $\overline{\pi}G$ als auch in $X/\overline{\pi}G$ den 1-Automorphismus. Es folgt, daß $y \circ X \subseteqq \mathfrak{z}\overline{\pi}G = 1$ ist — vgl. etwa SPECHT ([9], p. 88, Beweis von Satz 19). Also liegt y in $\mathfrak{c}X$ und wir haben $Y \cap \mathfrak{c}\overline{\pi}G \subseteqq \mathfrak{c}X$ (es folgt sogar Gleichheit) dargetan. Mit $G/[Y \cap \mathfrak{c}\overline{\pi}G]$ ist auch $G/\mathfrak{c}X$ noethersch, so daß $X \subseteqq \overline{\pi}G$ und $X/\overline{\pi}G = 1$, also auch $\overline{\pi}[G/\overline{\pi}G] = 1$ folgen.

Satz 2.8. *Ist* 1 *der einzige abelsche Normalteiler von G, so sind die folgenden Eigenschaften von G äquivalent:*

(I) $\overline{\pi}G$ *ist ein* $\overline{\pi}$*-eingelagerter Normalteiler von G.*

(II) $\overline{\pi}G$ *ist noethersch.*

(III) $\overline{\pi}G$ *ist fast-noethersch.*

(IV) *Unabhängige Mengen von Normalteilern von* $\overline{\pi}G$ *sind endlich.*

(V) *Die Maximalbedingung wird von den in* $\overline{\pi}G$ *enthaltenen Normalteilern von G erfüllt.*

Beweis. Gilt (I), so induziert G in $\overline{\pi}G$ eine noethersche Automorphismengruppe. A fortiori ist die Gruppe der inneren Automorphismen von $\overline{\pi}G$ noethersch. Diese ist mit $\overline{\pi}G/_3\overline{\pi}G = \overline{\pi}G$ identisch, da ja $_3\overline{\pi}G$ eine abelsche charakteristische Untergruppe von G, also gleich 1 ist. Folglich ist $\overline{\pi}G$ noethersch. Wir haben (II) aus (I) hergeleitet.

Es ist klar, daß (III) aus (II) und (IV) aus (III) durch Abschwächung entstehen.

Wir nehmen die Gültigkeit von (IV) an und betrachten einen Epimorphismus σ von $\overline{\pi}G$ auf eine Gruppe $H \neq 1$. Aus der Konstruktion von $\overline{\pi}G$ folgt $X \subseteqq \overline{\pi}G$ für jeden $\overline{\pi}$-eingelagerten Normalteiler X von G. Die von $\overline{\pi}G$ in X induzierte Automorphismengruppe ist eine Untergruppe der von G in X induzierten Automorphismengruppe. Da die zweite noethersch ist, ist es auch die erste. Die von H in X^σ induzierte Automorphismengruppe ist ein epimorphes Bild der von $\overline{\pi}G$ in X induzierten Automorphismengruppe, also noethersch. Folglich ist X^σ ein $\overline{\pi}$-eingelagerter Normalteiler von H und $H \neq 1$ ist mit $\overline{\pi}G$ das Produkt seiner $\overline{\pi}$-eingelagerten Normalteiler. Also gibt es einen $\overline{\pi}$-eingelagerten Normalteiler $N \neq 1$ von H und a fortiori gilt $N' \overline{\pi} H$. Damit haben wir die Gültigkeit der Bedingung (B) von Satz 2.5 bewiesen.

Wegen (IV) und der allgemeinen Voraussetzung unseres Satzes können wir Satz 2.5 anwenden und es folgt, daß die Maximalbedingung von den Normalteilern von $\overline{\pi}G$ erfüllt wird. A fortiori gilt (V).

Gilt (V), so erinnern wir zunächst daran, daß $\overline{\pi}G$ alle $\overline{\pi}$-eingelagerten Normalteiler von G enthält, so daß es insbesondere unter diesen einen maximalen gibt. Wir können also Lemma 2.7, (1) anwenden, woraus $(\overline{\pi}G)\ \overline{\pi}G$, d. h. (I) folgt. Die Äquivalenz der Eigenschaften (I)–(V) ist bewiesen.

3. Das große Radikal

Unter dem *großen Radikal* einer Gruppe G wollen wir die durch $\mathfrak{R}G \subseteqq \mathfrak{G}G$ und $\mathfrak{G}G/\mathfrak{R}G = \overline{\pi}[G/\mathfrak{R}G]$ eindeutig bestimmte charakteristische Untergruppe $\mathfrak{G}G$ von G verstehen. Diese erlaubt es uns, die Resultate von §1 und § 2 bequem folgendermaßen zusammenzufassen:

Satz 3.1. *Jede fast-noethersche Gruppe G hat folgende Eigenschaften:*

(a) $\mathfrak{G}G$ *ist noethersch.*

(b) $G/\mathfrak{G}G$ *ist fast-noethersch.*

(c) $\mathfrak{G}[G/\mathfrak{G}G] = 1$.

(d) 1 *ist der einzige Normalteiler von* $G/\mathfrak{G}G$ *mit* $\overline{\pi}$*-eingelagerter Kommutatorgruppe.*

(e) *Die folgenden Eigenschaften des Normalteilers X von G sind äquivalent:*
(I) $X \subseteqq \mathfrak{G}G$.
(II) $[X/\mathfrak{R}X] \overline{\pi} [G/\mathfrak{R}X]$.
(III) *Ist σ ein Epimorphismus von G auf H mit $X^\sigma \neq 1$, so gibt es einen Normalteiler Y von H mit $1 \subset Y \subseteqq X^\sigma$ und $Y' \overline{\pi} H$.*

Beweis. Wir folgern aus Satz 1.1:
(1) $\mathfrak{R}G$ ist polyzyklisch.
(2) $G/\mathfrak{R}G$ ist fast-noethersch.
(3) $\mathfrak{R}[G/\mathfrak{R}G] = 1$.
Wir können also Satz 2.8 und Lemma 2.7 auf

$$H = G/\mathfrak{R}G$$

anwenden und erhalten:
(4) $\overline{\pi}H$ ist ein noetherscher $\overline{\pi}$-eingelagerter Normalteiler von H.
(5) $\overline{\pi}[H/\overline{\pi}H] = 1$.
(6) $H/\overline{\pi}H$ ist fast-noethersch.
(7) 1 ist der einzige Normalteiler von $H/\overline{\pi}H$ mit $\overline{\pi}$-eingebetteter Kommutatorgruppe.

Diese letzte Aussage (7) ist eine Folge von (3), (5) und Lemma 2.7, (3).

Nach Definition des großen Radikals ist
(8) $\overline{\pi}H = \overline{\pi}[G/\mathfrak{R}G] = \mathfrak{G}G/\mathfrak{R}G$
und also
(9) $G/\mathfrak{G}G \cong [G/\mathfrak{R}G]/[\mathfrak{G}G/\mathfrak{R}G] = H/\overline{\pi}H$.

Wegen (1), (4), (8) ist $\mathfrak{G}G$ als Erweiterung der noetherschen Gruppe $\mathfrak{R}G$ durch die noethersche Gruppe $\overline{\pi}H$ selbst noethersch und aus (6), (8) folgt, daß $G/\mathfrak{G}G$ fast-noethersch ist. Damit haben wir (a), (b) bewiesen und (d) folgt aus (7), (9).

Ist A ein abelscher Normalteiler von $G/\mathfrak{G}G$, so ist $A' = 1$; die Kommutatorgruppe von A ist $\overline{\pi}$-eingelagert, also $A = 1$ wegen (d). Wegen (b) und Satz 1.1 ist $\mathfrak{R}[G/\mathfrak{G}G]$ polyzyklisch. Da 1 der einzige abelsche Normalteiler von $G/\mathfrak{G}G$ ist, folgt $\mathfrak{R}[G/\mathfrak{G}G] = 1$. Hieraus und aus (9), (5) folgern wir nun

$$\mathfrak{G}[G/\mathfrak{G}G] = \overline{\pi}[G/\mathfrak{G}G] \cong \overline{\pi}[H/\overline{\pi}H] = 1,$$

womit auch (c) bewiesen ist.

Aus PLOTKIN ([7], § 1, Lemma 1) ergibt sich das leicht verifizierbare Resultat
(10) $\mathfrak{R}X = X \cap \mathfrak{R}G$ für jeden Normalteiler X von G.

Ist X ein Normalteiler und g ein Element von G, so induziert g auch einen Automorphismus $\overline{g}$ in $X \cdot \mathfrak{R}G/\mathfrak{R}G$ und einen Automorphismus $\overline{\overline{g}}$ in $X/\mathfrak{R}X$. Nun ist dann und nur dann $\overline{g} = 1$, wenn $X \circ g \subseteqq \mathfrak{R}G$ ist. Da aber X ein Normalteiler von G ist, ist stets $X \circ g \subseteqq X$, und wir folgern aus (10) die Äquivalenz von

$$\overline{g} = 1 \quad \text{und} \quad X \circ g \subseteqq X \cap \mathfrak{R}G = \mathfrak{R}X.$$

Die letzte Eigenschaft ist aber mit $\bar{\bar{g}} = 1$ äquivalent. Also ist dann und nur dann $\bar{g} = 1$, wenn $\bar{\bar{g}} = 1$ ist. Wir haben gezeigt:

(11) Ist X ein Normalteiler von G, so induziert G in den isomorphen Gruppen $X \cdot \mathfrak{R}G/\mathfrak{R}G$ und $X/\mathfrak{R}X$ isomorphe Automorphismengruppen.

Ist X ein Normalteiler von G, so ist dann und nur dann $X \subseteq \mathfrak{G}G$, wenn $X \cdot \mathfrak{R}G/\mathfrak{R}G \subseteq \overline{\mathfrak{n}}\,[G/\mathfrak{R}G]$ ist; und dies ist gleichwertig damit, daß G in $X \cdot \mathfrak{R}G/\mathfrak{R}G$ eine noethersche Automorphismengruppe induziert. Wegen (11) folgt hieraus die Äquivalenz von $X \subseteq \mathfrak{G}G$ und der Tatsache, daß G in $X/\mathfrak{R}X$ eine noethersche Automorphismengruppe induziert. Diese letzte Eigenschaft ist mit $[X/\mathfrak{R}X]\,\overline{\mathfrak{n}}\,[G/\mathfrak{R}X]$ gleichwertig, womit die Äquivalenz von (e.I) und (e.II) bewiesen ist.

Genügt der Normalteiler X von G der Bedingung (e.III), ist σ der kanonische Epimorphismus von G auf $G/\mathfrak{G}G$, so folgt $X^\sigma = 1$ aus (c), (d). Da $X^\sigma = 1$ mit $X \subseteq \mathfrak{G}G$ äquivalent ist, haben wir (e.I) aus (e.III) hergeleitet. Gilt umgekehrt $X \subseteq \mathfrak{G}G$, ist σ ein Epimorphismus von G auf H mit $X^\sigma \neq 1$, so unterscheiden wir zwei Fälle. Ist erstens $(\mathfrak{R}X)^\sigma \neq 1$, so folgt aus Satz 1.1, daß $\mathfrak{R}X$ und also auch $(\mathfrak{R}X)^\sigma$ polyzyklisch ist. Es gibt also eine ganze Zahl n mit

$$1 = [(\mathfrak{R}X)^\sigma]^{(n+1)} \subset [(\mathfrak{R}X)^\sigma]^{(n)} = A\,.$$

Dann ist $A \neq 1$ ein in X^σ enthaltener abelscher Normalteiler von H. Ist zweitens $(\mathfrak{R}X)^\sigma = 1$, so folgt aus der Äquivalenz von (e.I) und (e.II), bzw. aus (11), daß H in X^σ eine noethersche Automorphismengruppe induziert. Dann induziert H a fortiori in $[X^\sigma]'$ eine noethersche Automorphismengruppe, so daß $[X^\sigma]' \,\overline{\mathfrak{n}}\, H$ gilt. Also folgt (e.III) aus (e.I), womit die Äquivalenz von (e.I)—(e.III) dargetan ist.

4. Hauptsatz

Die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind äquivalent:

(A) *G ist noethersch.*

(B)
- (a) *G ist fast-noethersch.*
- (b) *Jedes nicht noethersche epimorphe Bild H von G besitzt einen Normalteiler $N \neq 1$ mit $N' \,\overline{\mathfrak{n}}\, H$.*

(C)
- (a) *$\mathfrak{R}G$ ist fast-noethersch.*
- (b) *Jedes nicht noethersche epimorphe Bild H von $G/\mathfrak{R}G$ besitzt einen Normalteiler $N \neq 1$ mit $N' \,\overline{\mathfrak{n}}\, H$.*
- (c) *Unabhängige Mengen $\mathfrak{n}$-eingelagerter Normalteiler von $G/\mathfrak{R}G$ sind endlich.*

(D)
- (a) *G ist fast-noethersch.*
- (b) $G = \mathfrak{G}G$.

Beweis. Es ist klar, daß (B) aus (A) folgt. Gilt (B), so ist $\mathfrak{R}G$ mit G fast-noethersch. Weiter folgt aus (B.a) und Satz 1.1, daß $G/\mathfrak{R}G$ fast-noethersch ist; und hieraus folgt (C.c) (durch Abschwächung). Also folgt (C) aus (B).

Gilt schließlich (C), so folgt aus (C.a) und Satz 1.1, daß $\mathfrak{R}G$ polyzyklisch ist. Allgemein gilt, wie schon im § 1 bemerkt: $\mathfrak{R}\,[G/\mathfrak{R}G] = 1$. Insbesondere ist

also 1 der einzige abelsche Normalteiler von $G/\mathfrak{R}G$. Wegen (C.b) und (C.c) können wir folglich Satz 2.5 auf $F = G/\mathfrak{R}G$ anwenden: Die Maximalbedingung wird von den Normalteilern von F erfüllt. Anwendung von Lemma 2.7, (2), (3), (5) ergibt also, daß $\bar{\mathfrak{n}}F$ noethersch und daß 1 der einzige abelsche und der einzige $\bar{\mathfrak{n}}$-eingelagerte Normalteiler von $F/\bar{\mathfrak{n}}F$ ist. Wegen (C.b) ist $F/\bar{\mathfrak{n}}F$ und also auch F noethersch. Damit haben wir gezeigt, daß G als Erweiterung der noetherschen Gruppe $\mathfrak{R}G$ durch die noethersche Gruppe $F = G/\mathfrak{R}G$ selbst noethersch ist. Die Äquivalenz von (A)–(C) ist dargetan.

Die Äquivalenz von (A)–(D) ist nun im Satz 3.1 enthalten.

5. Auflösbarkeitskriterien

Da eine Gruppe dann und nur dann nicht hyperabelsch ist, wenn eines ihrer epimorphen Bilder ungleich 1 ist, aber doch 1 sein einziger abelscher Normalteiler ist, so liegt es nahe, wie schon in § 2, Eigenschaften von Gruppen ohne nicht-triviale abelsche Normalteiler zu sammeln.

Lemma 5.1. *Ist* 1 *der einzige abelsche Normalteiler von* G, *so gilt:*

(a) *Die Beziehungen*

$$X \cap Y = 1, \quad X \circ Y = 1, \quad X \subseteqq \mathfrak{c}Y, \quad Y \subseteqq \mathfrak{c}X$$

der Normalteiler X, Y *von* G *sind äquivalent.*

(b) $\mathfrak{c}N = \mathfrak{c}_3 N$ *für jeden Normalteiler* N *von* G.

(c) *Ist* N *ein Normalteiler von* G, *so ist* 1 *der einzige abelsche Normalteiler von* $G/\mathfrak{c}N$.

(d) *Ist* N *ein Normalteiler von* G, *so besitzt* $G/\mathfrak{c}N$ *dann und nur dann einen von* 1 *verschiedenen Normalteiler mit von* 1 *verschiedenem Zentralisator, wenn es Normalteiler* A, B *von* G *mit* $1 \subset A \subseteqq N$, $1 \subset B \subseteqq N$, $A \cap B = 1$ *gibt.*

Bezeichnung. $\mathfrak{c}\mathfrak{c}X = \mathfrak{c}_2 X$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_2 X = \mathfrak{c}_3 X$.

Bemerkung. (b) gilt selbstverständlich auch ohne die Generalvoraussetzung von Lemma 5.1.

Beweis. Sind X, Y Normalteiler von G, so ist $X \circ Y \subseteqq X \cap Y$, so daß $X \circ Y = 1$ aus $X \cap Y = 1$ folgt. Aus $X \circ Y = 1$ folgen natürlich $X \subseteqq \mathfrak{c}Y$ und $Y \subseteqq \mathfrak{c}X$. Gilt etwa $X \subseteqq \mathfrak{c}Y$, so wird

$$X \cap Y \subseteqq Y \cap \mathfrak{c}Y = \mathfrak{z}Y = 1,$$

da ja $\mathfrak{z}Y$ als charakteristische Untergruppe des Normalteilers X von G ein abelscher Normalteiler von G ist. Damit haben wir (a) verifiziert.

Ist N ein Normalteiler von G, so folgt (mit $X = N$, $Y = \mathfrak{c}N$) auch $N \subseteqq \mathfrak{c}_2 N$ aus (a). Also gilt, wenn wir N durch $\mathfrak{c}N$ ersetzen:

$$\mathfrak{c}N \subseteqq \mathfrak{c}_3 N \subseteqq \mathfrak{c}N,$$

womit (b) bewiesen ist.

Ist N ein Normalteiler von G und $A/\mathfrak{c}N$ ein abelscher Normalteiler von $G/\mathfrak{c}N$, so ist $A' \subseteqq \mathfrak{c}N$ und also

$$(A \cap N)' \subseteqq N \cap A' \subseteqq N \cap \mathfrak{c}N = \mathfrak{z}N = 1,$$

woraus $A \cap N = 1$ und $A \subseteqq \mathfrak{c}N \subseteqq A$, d. h. $A/\mathfrak{c}N = 1$ und die Gültigkeit von (c) folgen.

Sei N ein Normalteiler von G und $K \neq 1$ ein Normalteiler von $G/\mathfrak{c}N$ mit $\mathfrak{c}K \neq 1$. Es gibt eindeutig bestimmte Normalteiler X, Y von G mit $\mathfrak{c}N \subseteqq X \cap Y$ und $K = X/\mathfrak{c}N$, $\mathfrak{c}K = Y/\mathfrak{c}N$. Hieraus folgen noch $\mathfrak{c}N \subset X$, $\mathfrak{c}N \subset Y$ und $X \circ Y \subseteqq \mathfrak{c}N$. Wir setzen

$$A = N \cap X \quad \text{und} \quad B = N \cap Y .$$

Dies sind Normalteiler von G und aus $X \nsubseteqq \mathfrak{c}N$, $Y \nsubseteqq \mathfrak{c}N$ und (a) folgt

$$1 \subset A \subseteqq N , \quad 1 \subset B \subseteqq N .$$

Weiter ist

$$A \circ B = (N \cap X) \circ (N \cap Y) \subseteqq N \cap (X \circ Y) \subseteqq N \cap \mathfrak{c}N = \mathfrak{z}N = 1 .$$

Also zentralisieren A und B sich gegenseitig, und es folgt

$$A \cap B \subseteqq \mathfrak{z}(AB) = 1 ,$$

so daß die Normalteiler A und B alle gewünschten Eigenschaften haben.

Wir nehmen umgekehrt an, daß A, B Normalteiler von G mit $1 \subset A \subseteqq N$, $1 \subset B \subseteqq N$, $A \cap B = 1$ sind. Wir setzen $K = A \cdot \mathfrak{c}N/\mathfrak{c}N$ und $J = B \cdot \mathfrak{c}N/\mathfrak{c}N$. Aus $N \cap \mathfrak{c}N = 1$ folgt $A \cap \mathfrak{c}N = B \cap \mathfrak{c}N = 1$, so daß $K \neq 1 \neq J$ ist. Weiter ist

$$K \circ J = (A \circ B)\, \mathfrak{c}N/\mathfrak{c}N \subseteqq (A \cap B)\, \mathfrak{c}N/\mathfrak{c}N = 1 ,$$

so daß $1 \subset J \subseteqq \mathfrak{c}K$ gilt. Damit ist auch (d) bewiesen.

Folgerung 5.2. *Ist* 1 *der einzige abelsche Normalteiler von* G, *besitzt jedes von* 1 *verschiedene epimorphe Bild von* G *einen von* 1 *verschiedenen Normalteiler mit von* 1 *verschiedenem Zentralisator, so enthält jeder von* 1 *verschiedene Normalteiler von* G *eine unendliche, unabhängige Menge von Normalteilern von* G.

Beweis. Ist $X \neq 1$ ein Normalteiler von G, so ist $X \cap \mathfrak{c}X = \mathfrak{z}X = 1$, also $\mathfrak{c}X \subset X\mathfrak{c}X$, also $1 \subset X\mathfrak{c}X/\mathfrak{c}X \subseteqq G/\mathfrak{c}X$. Folglich besitzt $G/\mathfrak{c}X$ nach Voraussetzung einen von 1 verschiedenen Normalteiler mit von 1 verschiedenem Zentralisator. Anwendung von Lemma 5.1, (d) ergibt also die Gültigkeit folgender Aussage:

(+) Ist $X \neq 1$ ein Normalteiler von G, so gibt es Normalteiler A, B von G mit $1 \subset A \subseteqq X$, $1 \subset B \subseteqq X$, $A \cap B = 1$.

Sei $N \neq 1$ ein Normalteiler von G. Wir wollen dann durch vollständige Induktion bezüglich n die Gültigkeit der folgenden Aussage beweisen:

(+.n) Es gibt $n+1$ unabhängige, von 1 verschiedene Normalteiler $A_1, \ldots, A_n, B_n$ von G mit $B_n \prod_{i=1}^{n} A_i \subseteqq N$.

Die Aussage (+.1) ist mit (+) identisch. Haben wir bereits (+.n) bewiesen, so können wir (+) auf $B_n \neq 1$ anwenden. Also gibt es Normalteiler A_{n+1}, B_{n+1}

mit $1 \subset A_{n+1} \leqq B_n$, $1 \subset B_{n+1} \leqq B_n$, $A_{n+1} \cap B_{n+1} = 1$. Aus der Unabhängigkeit von $A_1, \ldots, A_n, B_n$ folgt nun auch die von $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}, B_{n+1}$, und es gilt

$$B_{n+1} \prod_{i=1}^{n+1} A_i \leqq B_n \prod_{i=1}^{n} A_i \leqq N,$$

womit der induktive Beweis von (+.n) abgeschlossen ist.

Die unendliche Folge $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ von 1 verschiedener, in N enthaltener Normalteiler ist unabhängig, da jede endliche Teilmenge es ist. Damit ist Folgerung 5.2 bewiesen.

Satz 5.3. *Ist jede unabhängige Normalteilermenge eines jeden epimorphen Bildes von G endlich, so ist G dann und nur dann hyperabelsch, wenn jedes epimorphe Bild $H \neq 1$ von G einen Normalteiler $N \neq 1$ mit $\mathfrak{c}N \neq 1$ besitzt.*

Beweis. Ist $H \neq 1$ epimorphes Bild einer hyperabelschen Gruppe, so gibt es einen abelschen Normalteiler $A \neq 1$ von H. Dann ist $1 \subset A \leqq \mathfrak{c}A$ und dies zeigt die Notwendigkeit der Bedingung.

Genügt umgekehrt G unserer Bedingung, ist $H \neq 1$ ein epimorphes Bild von G, so besitzt H keine unendliche, unabhängige Menge von Normalteilern. Anwendung der Folgerung 5.2 ergibt sofort die Existenz von 1 verschiedener, abelscher Normalteiler von H. Also ist G hyperabelsch und die Bedingung hinreichend.

Lemma 5.4. *Die Gruppe G ist dann und nur dann hyperabelsch, wenn jedes epimorphe Bild $H \neq 1$ von G einen Normalteiler $N \neq 1$ mit hyperabelschem $H/\mathfrak{c}N$ besitzt.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung folgt daraus, daß alle epimorphen Bilder hyperabelscher Gruppen ebenfalls hyperabelsch sind. — Ist umgekehrt unsere Bedingung erfüllt und $H \neq 1$ ein epimorphes Bild von G, so gibt es einen Normalteiler N von H mit hyperabelschem $H/\mathfrak{c}N$. Ist $N \cap \mathfrak{c}N \neq 1$, so ist $\mathfrak{z}N$ ein abelscher Normalteiler $[\neq 1]$ von H. Ist aber $N \cap \mathfrak{c}N = 1$, so ist $H/\mathfrak{c}N \neq 1$ und es gibt einen von 1 verschiedenen abelschen Normalteiler von $H/\mathfrak{c}N$, also einen Normalteiler A von H mit $A' \leqq \mathfrak{c}N \subset A$. Wäre $A \cap N = 1$, so wäre $A \leqq \mathfrak{c}N$. Also ist $A \cap N \neq 1$ und

$$(A \cap N)' \leqq A' \cap N \leqq N \cap \mathfrak{c}N = 1,$$

so daß $A \cap N$ ein von 1 verschiedener abelscher Normalteiler von H ist. Damit ist gezeigt, daß G hyperabelsch ist.

Lemma 5.5. *Ist die endlich erzeugbare Gruppe G nicht polyzyklisch, so gibt es ein epimorphes Bild H von G, das selbst nicht polyzyklisch ist, während jedes echte epimorphe Bild von H polyzyklisch ist.*

Lemma 5.5 (sogar eine etwas allgemeinere Aussage) ist in BAER ([5], p. 273/274, Beweis des Hauptsatzes) vergraben.

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß polyzyklische Gruppen im Sinne von BAER ([5], p. 269, Definition 1) endlich definierbar sind. Da jede Untergruppe und jedes epimorphe Bild einer polyzyklischen Gruppe wieder polyzyklisch ist, so ist eine polyzyklische Gruppe sogar „vollständig endlich definierbar".

Die Gruppe G ist nach Voraussetzung nicht polyzyklisch. Also ist die Menge Σ aller Normalteiler X von G mit nicht polyzyklischer Faktorgruppe

G/X nicht leer; 1 gehört zu Σ. Ist Θ eine nicht leere Teilmenge von Σ, die durch Inklusion linear geordnet ist — wenn X und Y zu Θ gehören, so gilt $X \subseteq Y$ oder $Y \subseteq X$ —, so ist die Vereinigungsmenge V der Normalteiler aus Θ ein Normalteiler von G. Läge V nicht in Σ, so wäre G/V polyzyklisch. Da G nach Voraussetzung endlich erzeugbar ist, wird $V = \{v(1)^G, \ldots, v(n)^G\}$ von endlich vielen Klassen in G konjugierter Elemente erzeugt; vgl. BAER ([5], p. 270, Satz 1 und Folgerung 1). Jedes $v(i)$ gehört zu einem $X(i)$ aus Θ; und unter diesen endlich vielen $X(i)$ aus Θ gibt es wegen der linearen Ordnung von Θ ein größtes M. Dann enthält M alle $v(i)$; und da M ein Normalteiler ist, enthält M sogar alle $v(i)^G$ und folglich V. Also ist $V = M$ doch in Σ enthalten; und aus diesem Widerspruch folgt die Zugehörigkeit von V zu Σ. Damit haben wir gezeigt, daß das Maximumprinzip der Mengenlehre auf Σ angewandt werden kann. Es folgt die Existenz eines maximalen Normalteilers N in Σ und $H = G/N$ leistet alles verlangte.

Satz 5.6. *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind äquivalent:*

(1) *G ist polyzyklisch.*

(2)
- (a) *G ist fast-noethersch.*
- (b) *Jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild von G besitzt einen von 1 verschiedenen Normalteiler mit von 1 verschiedenem Zentralisator.*

(3)
- (a) *G ist endlich erzeugbar.*
- (b) *Abelsche Normalteiler epimorpher Bilder von G sind endlich erzeugbar.*
- (c) *Jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild von G besitzt einen von 1 verschiedenen Normalteiler mit von 1 verschiedenem Zentralisator.*

Beweis. Es ist klar, daß polyzyklische Gruppen auch die Eigenschaften (2) und (3) haben.

Genügt G der Bedingung (2), so folgt aus Satz 1.1, daß $\mathfrak{R}G$ polyzyklisch, $G/\mathfrak{R}G$ fast-noethersch und 1 der einzige abelsche Normalteiler von $G/\mathfrak{R}G$ ist. Dann ist insbesondere jede Menge unabhängiger Normalteiler von $G/\mathfrak{R}G$ endlich. Anwendung von (2.b) und Folgerung 5.2 ergibt $G/\mathfrak{R}G = 1$, so daß $G = \mathfrak{R}G$ polyzyklisch ist.

Genügt G der Bedingung (3), ohne polyzyklisch zu sein, so folgt aus (3.a) und Lemma 5.5 die Existenz eines epimorphen Bildes H von G mit folgenden Eigenschaften:

(A) H ist nicht polyzyklisch.

(B) Jedes echte epimorphe Bild von H ist polyzyklisch.

Kombination von (B) und (3.c) ergibt, daß jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild von H einen von 1 verschiedenen Normalteiler mit polyzyklischer Zentralisatorfaktorgruppe besitzt. Anwendung von Lemma 5.4 ergibt:

(C) H ist hyperabelsch.

Aus (A) folgt insbesondere $H \neq 1$; also folgt aus (C) die Existenz eines abelschen Normalteilers $K \neq 1$ von H. Wegen (B) ist H/K noethersch und wegen (3.b) ist K noethersch. Also ist H noethersch und wegen (C) sogar polyzyklisch.

Dies widerspricht (A) und aus diesem Widerspruch folgt, daß G selbst polyzyklisch ist.

Bemerkung 5.7. Bekanntlich gibt es Gruppen G mit folgenden Eigenschaften:

$G'' = 1$, so daß G insbesondere hyperabelsch ist.

G ist endlich erzeugbar, aber nicht noethersch.

Eine solche Gruppe G genügt (3.a) und (3.c), ohne polyzyklisch zu sein. Also ist (3.b) unentbehrlich.

Wir haben nicht entscheiden können, ob Bedingung (3.a) entbehrlich ist.

Literatur

[1] BAER, R.: The hypercenter of a group. Acta Math. **89**, 165—208 (1953).

[2] — Auflösbare Gruppen mit Maximalbedingung. Math. Ann. **129**, 139—173 (1955).

[3] — Erreichbare und engelsche Gruppenelemente. Abhandl. math. Seminar hamburg. Univ. **27**, 44—74 (1964).

[4] — Local and global hypercentrality and supersolubility. Indagationes math. **69**, 93 — 126 (1966).

[5] — Noethersche Gruppen. Math. Z. **66**, 269—288 (1956).

[5a] KARGAPOLOV, M. I.: Über ein Problem von O. YU. SCHMIDT (Russisch). Sib. Mat. Zhurnal **4**, 232—235 (1963).

[6] MAL'CEV, I. A.: On some classes of infinite soluble groups. Mat. Sbornik **28**, 567—588 (1951), oder Am. Math. Soc. Translations Ser. 2, **2**, 1—22 (1956).

[7] PLOTKIN, B. I.: Radikale Gruppen. Mat. Sbornik **37** (79), 507—526 (1955), Am. Math. Soc. Translations (2) **17**, 9—28 (1961).

[8] — Verallgemeinerte auflösbare und verallgemeinerte nilpotente Gruppen. Usp. Mat. Nauk **13**, 89—172 (1958), Am. Math. Soc. Translations (2) **17**, 29—115 (1961).

[9] SPECHT, W.: Gruppentheorie. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1956.

REINHOLD BAER
Mathematisches Seminar der Universität
6 Frankfurt/Main, Robert-Mayer-Str. 6—8

(Eingegangen am 22. Juli 1965)

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · HEIDELBERG · NEW YORK

Springer Tracts in Natural Philosophy

Volume 8

Edited by C. Truesdell
Co-Editors: L. Collatz, G. Fichera, P. Germain, J. Keller, A. Seeger

Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité

Par Maurice Roseau

Professeur à la Faculté
des Sciences de Paris

Avec 7 figures
XII, 254 pages 8vo. 1966
Pleine toile DM 39,—

Table des matières:

La théorie spectrale des opérateurs linéaires dans les espaces vectoriels à un nombre fini de dimensions. — Etude des systèmes d'équations différentielles linéaires. — Systèmes différentiels linéaires; premiers résultats sur la stabilité des solutions. — Systèmes différentiels non linéaires; théorèmes d'existence et propriétés des solutions. — Stabilité des solutions de certains systèmes différentiels non linéaires. — La méthode directe de Liapounoff; applications. — Le théorème de Poincaré-Liapounoff dans le cas où la matrice de l'approximation linéaire dépend du temps. — Le théorème de Poincaré-Liapounoff: cas où l'équation caractéristique associée à la première approximation a une seule racine nulle, les autres ayant toutes leur partie réelle négative. — La méthode des perturbations. — La méthode des perturbations: solutions périodiques sous harmoniques. — Théorèmes de stabilité des orbites. — La théorie de la synchronisation. — La théorie de la synchronisation: applications. — Systèmes différentiels linéaires à coefficients périodiques dépendant d'un petit paramètre; stabilité de la solution stationnaire. — Etude générale des systèmes quasi linéaires périodiques. — Solutions presque périodiques de systèmes linéaires et quasi linéaires. — Sur l'existence de solutions périodiques de certains systèmes autonomes fortement non linéaires; la relaxation. — Systèmes fortement non linéaires et théorie de la synchronisation. Bibliographie. — Index alphabétique.

Seite

HABETHA, K.: Über eine Integraldarstellung und das Phragmén-Lindelöfsche Prinzip bei elliptischen Differentialgleichungen 91

MARUHN, K.: Einige Bemerkungen zur Theorie der Gezeiten 111

STAUDE, U.: Periodische Lösungen bei nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typ 117

GRAMSCH, B.: σ-Transformationen in lokalbeschränkten Vektorräumen 135

SCHMIDT, G.: Über die Drehschwingungen von Kurbelwellen 152

BAER, R.: Noethersche Gruppen II 165

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Edgar Seidler, 1 Berlin 31 (Wilmersdorf), Heidelberger Platz 3.
Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York — Druck der Brühlschen Universitätsdruckerei Gießen
Printed in Germany

Mathematische Annalen

Begründet 1868 durch Alfred Clebsch · Carl Neumann

Fortgeführt durch Felix Klein · David Hilbert
Otto Blumenthal · Erich Hecke

Herausgegeben von **Heinrich Behnke**, Münster i. W.
Richard Courant, New York
Hans Grauert, Göttingen
Friedrich Hirzebruch, Bonn
Heinz Hopf, Zürich
Gottfried Köthe, Frankfurt/M.
Bartel L. van der Waerden, Zürich

Band 165 · Heft 3 · 1966

Springer-Verlag · Berlin · Heidelberg · New York

Math. Ann. · Abgeschlossen am 21. Juni 1966 · A 21 265 E



Mathematische Annalen

Begründet 1868 durch *Alfred Clebsch* und *Carl Neumann*, früher herausgegeben von *Alfred Clebsch* (1869—1872), *Carl Neumann* (1869—1876), *Felix Klein* (1876—1924), *Adolph Mayer* (1876—1901), *Walther v. Dyck* (1888—1921), *David Hilbert* (1902—1939), *Otto Blumenthal* (1906—1938), *Albert Einstein* (1920—1928), *Constantin Carathéodory* (1925—1928), *Erich Hecke* (1929—1947), *Franz Rellich* (1947—1955), *Kurt Reidemeister* (1947—1963).

Band 1—80 Leipzig, B. G. Teubner, ab Band 81 (1920) Berlin, Springer.

An unsere Mitarbeiter!

Die Korrekturkosten sind bei den „Mathematischen Annalen" sehr hoch. Für ihre Verminderung muß unbedingt Sorge getragen werden. Wir richten deshalb an alle unsere Mitarbeiter die freundliche dringende Bitte, zu diesem Ziele an ihrem Teile mit beitragen zu wollen. Dazu ist nötig:

1. Das Manuskript muß *völlig druckfertig* und *gut leserlich* sein und für den Setzer *gemäß den „Hinweise für die Autoren"* (herausgegeben von Redaktion und Verlag) vorbereitet sein. — Diese Hinweise können von der Redaktion angefordert werden.

2. Veränderungen des Textes in der Korrektur sind auf die Fälle zu beschränken, wo sich nachträglich *wirkliche Irrtümer* herausstellen. Insbesondere sind rein stilistische Verbesserungen zu unterlassen. Sollte ein Irrtum bemerkt werden, noch bevor Korrektur eingetroffen ist, dann ist ein verbesserter Text sofort an die Redaktion zu schicken, die dafür Sorge tragen wird, daß das Manuskript noch vor dem Satz berichtigt wird.

Jede Änderung des schon gesetzten Textes muß zu Lasten der Autoren gehen.

Die Reihenfolge der Veröffentlichungen behält sich die Redaktion vor.

Die Redaktion der Mathematischen Annalen

Mathematische Annalen

Erscheinen zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung zwanglos in Heften, die zu Bänden vereinigt werden. Sie sind durch jede Buchhandlung zu beziehen. Der Preis des Bandes beträgt DM 96,—.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskripts und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0,30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Mathematischen Annalen bestimmte Manuskripte können bei jedem der unten verzeichneten Redaktionsmitglieder eingereicht werden:

Professor Dr. Dr. h. c. H. Behnke, 44 Münster/Westf., Rottendorffweg 17,

Professor Dr. R. Courant, 142 Calton Road, New Rochelle, N. Y. USA,

Professor Dr. H. Grauert, Mathematisches Institut der Universität, 34 Göttingen, Bunsenstr. 3—5,

Professor Dr. F. Hirzebruch, Mathematisches Institut der Universität, 53 Bonn (Rhein), Wegelerstr. 10,

Professor Dr. Dr. h. c. H. Hopf, Zollikon bei Zürich, Alte Landstraße 37,

Professor Dr. Dr. h. c. G. Köthe, 6 Frankfurt/Main, Parkstraße 14[1],

Professor Dr. Dr. h. c. B. L. van der Waerden, Mathematisches Institut der Universität Zürich, 8006 Zürich/Schweiz

Inhaltsverzeichnis des Heftes auf Seite 4

KÖTHE, G.
Math. Annalen 165, 181—195 (1966)

Hebbare lokalkonvexe Räume

ERNST HÖLDER zum 65. Geburtstag

GOTTFRIED KÖTHE

1. Einleitung

Seit einer Arbeit von PHILLIPS [13] hat man sich mit der Frage der Fortsetzbarkeit stetiger linearer Abbildungen von Banachräumen beschäftigt. NACHBIN [11] gab kürzlich einen Überblick über die bisherigen Resultate und wies darauf hin, daß das duale Problem des Hochhebens von Abbildungen noch wenig bearbeitet ist. Wir wollen uns hier mit diesem dualen Problem beschäftigen.

Zum Verständnis der Fragestellung seien kurz einige Begriffe und Resultate der Fortsetzungstheorie erwähnt. Ein Banachraum E heißt ein $\mathfrak{P}_\lambda$-Raum, $\lambda \geqq 1$, wenn jeder (B)-Raum X, der einen zu E normisomorphen Teilraum H enthält, eine stetige Projektion P auf H mit $\|P\| \leqq \lambda$ besitzt. Der Zusammenhang mit der stetigen Fortsetzbarkeit ist der folgende: H sei ein zu E normisomorpher Teilraum des (B)-Raumes X, A sei eine stetige lineare Abbildung von H in den (B)-Raum Y; dann existiert eine Fortsetzung B von A, die X stetig in Y abbildet und es ist $\|B\| \leqq \lambda \|A\|$. Diese Aussage ist äquivalent damit, daß E ein $\mathfrak{P}_\lambda$-Raum ist.

Völlig geklärt ist bis heute nur die Struktur der $\mathfrak{P}_1$-Räume. Jeder $\mathfrak{P}_1$-Raum E ist normisomorph einem $C(K)$, K ein kompakter, extrem unzusammenhängender Hausdorffscher Raum, und alle diese Räume sind $\mathfrak{P}_1$-Räume. Dies wurde von GOODNER [2], NACHBIN [10] und KELLEY [5] im reellen, von HASUMI [4] im komplexen Fall bewiesen. Seit dem Bericht von NACHBIN [11] sind noch mehrere Arbeiten von LINDENSTRAUSS über das Fortsetzbarkeitsproblem erschienen (vgl. z. B. LINDENSTRAUSS [9]).

Der Begriff des $\mathfrak{P}_\lambda$-Raumes benützt mit der Normisomorphie die Struktur des normierten Raumes, er ist also ein metrischer Begriff. NACHBIN [11] wies darauf hin, daß man bei Ersetzung der Normisomorphie durch den der Struktur der lokalkonvexen Räume entsprechenden Begriff der topologischen Isomorphie ein analoges Problem erhält: Ein lokalkonvexer Raum E heiße abtrennbar, wenn jeder lokalkonvexe Raum X, der einen zu E topologisch isomorphen Teilraum enthält, eine stetige Projektion auf H besitzt. Über abtrennbare Räume ist bisher wenig bekannt.

Wir formulieren jetzt die dualen Begriffe und Probleme. Ein (B)-Raum E heißt ein $\mathfrak{H}_\lambda$-Raum, wenn es zu jedem (B)-Raum X, der einen zu E normiso-

morphen Quotientenraum X/H besitzt, eine stetige Projektion P mit dem Kern H und mit $\|P\| \leqq \lambda$ gibt.

Für lokalkonvexe Räume definieren wir: Ein lokalkonvexer Raum E heißt *hebbar in der Klasse* $\mathfrak{R}$ von lokalkonvexen Räumen, wenn es zu jedem lokalkonvexen Raum $X \in \mathfrak{R}$, der einen zu E topologisch isomorphen Quotientenraum X/H besitzt, eine stetige Projektion von X mit dem Kern H gibt. Es wird sich herausstellen, daß die Differenzierung des Begriffes durch Vorgabe von $\mathfrak{R}$ das Problem zugänglich macht.

Bisher ist nur das metrische Problem in einer Arbeit von GROTHENDIECK [3] behandelt worden. Danach gibt es keinen $\mathfrak{H}_1$-Raum, dagegen gilt: Ein (B)-Raum E ist ein $\mathfrak{H}_{1+\varepsilon}$-Raum für jedes $\varepsilon > 0$ genau dann, wenn E normisomorph einem $l^1(A)$ ist, A eine beliebige Indexmenge. Dieser Satz ergibt sich aus einer tiefliegenden Charakterisierung der Räume $L^1(\mu)$ der μ-summierbaren Funktionen auf einem lokalkompakten Raum.

Wir werden uns im folgenden mit dem Problem der Charakterisierung der hebbaren Räume beschäftigen. Wir bestimmen in Nr. 3 alle in der Klasse der Banachräume hebbaren Räume. Es sind dies alle zu einem $l^1(A)$ topologisch isomorphen (B)-Räume. Für den metrischen Fall ergibt sich, daß auch jeder $\mathfrak{H}_\lambda$-Raum, $\lambda > 1$, einem $l^1(A)$ topologisch isomorph ist. Die Lösung des Problems beruht wesentlich auf Resultaten von PEŁCZYŃSKI [12] über die komplementären Teilräume von l^1.

Ferner werden in Nr. 4 alle lokalvollständigen in der Klasse der bornologischen Räume hebbaren Räume bestimmt, in Nr. 6 alle lokalvollständigen in der Klasse der (LB)-Räume hebbaren Räume. Auch für die Klasse aller lokalkonvexen Räume erhalten wir in Nr. 5 einen gewissen Überblick über die hebbaren Räume.

2. Vorbemerkungen

Wir erinnern an einige bekannte Tatsachen, die im folgenden dauernd benützt werden. Ein abgeschlossener linearer Teilraum H_1 des lokalkonvexen Raumes $E[\mathfrak{T}]$ heißt komplementär, wenn es einen zweiten abgeschlossenen linearen Teilraum H_2 von E gibt, so daß $E[\mathfrak{T}] = H_1[\mathfrak{T}] \oplus H_2[\mathfrak{T}]$ gilt, E also als topologisches Produkt von H_1 und H_2 aufgefaßt werden kann. Ist dies der Fall, so ist die Projektion P von E auf H_1 mit dem Kern H_2 stetig. Ist umgekehrt P eine stetige Projektion von E auf einen Teilraum H_1 von E mit dem Kern H_2, so sind H_1 und H_2 abgeschlossen und es gilt $E[\mathfrak{T}] = H_1[\mathfrak{T}] \oplus H_2[\mathfrak{T}]$. Der Quotientenraum E/H_2, versehen mit der durch $\mathfrak{T}$ induzierten Quotientenraumtopologie $\hat{\mathfrak{T}}$, ist topologisch isomorph $H_1[\mathfrak{T}]$ und diese Isomorphie wird durch die Einschränkung auf H_1 der kanonischen Abbildung K von E auf E/H_2 vermittelt, deren Inverse $\hat{P}$ ist, wenn P als Produkt $\hat{P}K$ geschrieben wird, $\hat{P}$ also E/H_2 auf H_1 abbildet.

Wir werden im folgenden den Zusatz „topologisch" bei Isomorphien weglassen und für die Isomorphie zweier lokalkonvexer Räume E und F das Zeichen $E \sim F$ verwenden.

So wie die Abtrennbarkeit eines (B)-Raumes mit der Fortsetzbarkeit von Abbildungen äquivalent ist, so ist die Hebbarkeit eines lokalkonvexen Raumes mit der Möglichkeit des Hochhebens von Abbildungen verknüpft.

Es seien X und Y lokalkonvex, A eine stetige lineare Abbildung von Y in den Quotientenraum X/H. Man nennt A hebbar in X, wenn es eine stetige lineare Abbildung B von Y in X gibt mit $A = KB$, K die kanonische Abbildung von X auf X/H.

(1) *X sei ein gegebener lokalkonvexer Raum, ebenso sei ein Quotientenraum X/H von X gegeben. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

a) *Sei Y ein beliebiger lokalkonvexer Raum; jede lineare stetige Abbildung A von Y in X/H ist hebbar in X.*

b) *Sei E ein zu X/H isomorpher lokalkonvexer Raum; jede Isomorphie I von E auf X/H ist hebbar in X.*

c) *Es gibt eine stetige Projektion P von X mit dem Kern H.*

Beweis. Aus a) folgt offenbar b). Es gelte b). Es gibt dann eine stetige lineare Abbildung J von E in X, so daß $I = KJ$ gilt. Wir beweisen, daß $P = JI^{-1}K$ eine stetige Projektion von X mit dem Kern H ist. P ist als Produkt stetiger Abbildungen stetig, ferner gilt

$$P^2 = JI^{-1}KJI^{-1}K = JI^{-1}K = P,$$

P ist also eine Projektion. Für ein $y \in H$ gilt $JI^{-1}Ky = o$, H liegt im Kern von P. Ist andererseits $Px = o$, so ist $KPx = Kx = o$, also $Kx = o$, d. h. $x \in H$. Aus b) folgt damit c).

Es gelte c). Nach den Bemerkungen zu Beginn ist $P = \hat{P}K$, $\hat{P}$ eine Isomorphie von X/H auf $P(X)$, ferner ist $K\hat{P}$ die identische Abbildung von X/H. Sei A eine stetige lineare Abbildung von Y in X/H. Es gilt dann $A = (K\hat{P})A = K(\hat{P}A)$, damit ist $B = \hat{P}A$ die gesuchte hochgehobene Abbildung von Y in X.

Wir leiten daraus Charakterisierungen der $\mathfrak{H}_\lambda$-Räume, allgemeiner der hebbaren lokalkonvexen Räume ab.

(2) *Folgende Eigenschaften eines* (B)*-Raumes sind äquivalent:*

a) *E ist ein $\mathfrak{H}_\lambda$-Raum.*

b) *Ist X ein* (B)*-Raum, X/H normisomorph zu E, so ist jede Normisomorphie I von E auf X/H hebbar zu einer Abbildung J von E in X mit $\|J\| \leqq \lambda$.*

c) *Jede stetige lineare Abbildung A eines* (B)*-Raumes Y in einen zu E normisomorphen Quotientenraum X/H eines* (B)*-Raumes X kann hochgehoben werden zu einer Abbildung B von Y in X mit $\|B\| \leqq \lambda \|A\|$.*

Beweis. Sei E ein $\mathfrak{H}_\lambda$-Raum, X/H normisomorph zu E. Dann gibt es eine stetige Projektion P mit dem Kern H und $\|P\| \leqq \lambda$. Sei A eine lineare stetige Abbildung von Y in X/H. Nach dem letzten Teil des Beweises von (1) ist $B = \hat{P}A$ die hochgehobene Abbildung. Da $\|\hat{P}\| = \|P\|$ gilt, folgt $\|B\| \leqq \lambda \|A\|$. Damit folgt c) aus a) und damit auch b).

Aus b) folgt a): Sei I eine Normisomorphie von E auf X/H. Sie kann hochgehoben werden zu einer Abbildung J von E in X mit $\|J\| \leqq \lambda$. Nach dem ersten Teil des Beweises von (1) ist dann $P = JI^{-1}K$ die gesuchte Projektion. Es ist $\|P\| \leqq \|J\| \, \|I^{-1}\| \, \|K\| \leqq \|J\| \leqq \lambda$, da I^{-1} und K Normen $\leqq 1$ haben. Damit ist (2) bewiesen.

(3) *Es sei $\mathfrak{R}$ eine Klasse lokalkonvexer Räume, $E \in \mathfrak{R}$. Folgende Eigenschaften von E sind äquivalent:*

a) *E ist hebbar in $\mathfrak{R}$.*

b) *Ist $X \in \mathfrak{R}$ und $X/H \sim E$, so ist jeder Isomorphismus I von E auf X/H hebbar in X.*

c) *Es seien X, $Y \in \mathfrak{R}$, $X/H \sim E$ und A eine stetige lineare Abbildung von Y in X/H. Dann ist A hebbar in X.*

Dies ist eine einfache Folgerung aus (1).

3. Hebbare Banachräume

PEŁCZYŃSKI[12] bewies den folgenden Satz:

(1) *Jeder komplementäre Teilraum H von l^1 ist entweder endlichdimensional oder isomorph zu l^1.*

Daraus folgt

(2) *Ein separabler* (B)*-Raum ist dann und nur dann hebbar in der Klasse der Banachräume, wenn er isomorph zu l^1 oder endlichdimensional ist.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß die Bedingung notwendig ist. Jeder separable (*B*)-Raum E ist isomorph einem Quotientenraum l^1/H. Da E hebbar ist, gibt es eine stetige Projektion P von l^1 mit dem Kern H, also ist $l^1 = P(l^1) \oplus H$ und l^1/H ist isomorph $P(l^1)$, nach (1) also endlichdimensional oder isomorph l^1.

Daß jeder endlichdimensionale Raum hebbar ist, ist bekannt. Die zweite Behauptung von (1) ist daher ein Spezialfall des ersten Teiles von

(3) *Jeder zu einem $l^1(A)$ isomorphe* (B)*-Raum E ist hebbar in der Klasse der Banachräume.*

Jeder zu einem $l^1(A)$ normisomorphe (B)*-Raum E liegt in $\mathfrak{H}_{1+\varepsilon}$ für jedes $\varepsilon > 0$.*

Dies wurde im wesentlichen schon in KÖTHE [6] bewiesen, man vergleiche auch GROTHENDIECK [3]. Der Vollständigkeit halber wiederholen wir den einfachen Beweis. Nach 2. (3) genügt es zu zeigen, daß jeder Isomorphismus I von $l^1(A)$ auf den Quotientenraum X/H eines (B)-Raumes X hebbar ist.

Seien $\hat{x}_\alpha$ die Bilder Ie_α der Einheitsvektoren e_α aus $l^1(A)$, $\alpha \in A$. Es gibt dann zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x_\alpha \in \hat{x}_\alpha$ mit $\|x_\alpha\| \leqq \|\hat{x}_\alpha\| + \varepsilon \leqq \|I\| + \varepsilon$. Die durch $Be_\alpha = x_\alpha$ definierte lineare Abbildung von $l^1(A)$ in X ist wegen

$$\left\| B \sum_\alpha c_\alpha e_\alpha \right\| = \left\| \sum_\alpha c_\alpha x_\alpha \right\| \leqq \left(\sum_\alpha |c_\alpha| \right) (\|I\| + \varepsilon) = \left\| \sum_\alpha c_\alpha e_\alpha \right\| (\|I\| + \varepsilon)$$

stetig und es gilt $I = KB$, K der kanonische Homomorphismus von X auf X/H.

Ist I ein Normisomorphismus, so ist $\|B\| \leqq 1 + \varepsilon$, also $l^1(A) \in \mathfrak{H}_{1+\varepsilon}$ nach 2.(2).

Um alle hebbaren Banachräume zu bestimmen, leiten wir das zu (1) analoge Resultat für beliebige Räume $l^1(A)$ ab. Wir folgen weitgehend der Beweismethode von PEŁCZYŃSKI [12].

Alle Räume $l^1(A)$ mit Indexmengen gleicher Mächtigkeit sind normisomorph. Wir bezeichnen mit l^1_d den Raum $l^1(A_d)$, A_d die Menge aller Ordnungszahlen kleinerer Mächtigkeit als d, d eine Kardinalzahl. Es ist d auch gleich der Dimension von l^1_d, d. h. der kleinsten Mächtigkeit einer Teilmenge, deren lineare Hülle in l^1_d dicht ist.

Ein ε-Netz, $0<\varepsilon<1$, in einem (B)-Raum E ist eine Menge $\{x_\beta\}$, $\beta\in B$, von Elementen $x_\beta\in E$ mit $\|x_\beta\|=1$, $\|x_\beta-x_{\beta'}\|\geqq\varepsilon$ für $\beta\neq\beta'$. Es gibt in E stets ein maximales ε-Netz mit d Elementen, wenn d die Dimension von E ist, und alle maximalen ε-Netze haben d Elemente (vgl. GOHBERG-KREIN [1], Lemma 6.1).

(4) *Es seien die* $z_\gamma=\sum_{\gamma_i\in A_\gamma}\tau_{\gamma_i}e_{\gamma_i}$, $\gamma\in\Gamma$, *Elemente* $\neq 0$ *aus* l_d^1, *so daß die* A_γ *endliche paarweise fremde Indexmengen sind. Dann ist der von den* z_γ *aufgespannte abgeschlossene lineare Teilraum* H *von* l_d^1 *normisomorph einem* $l_{d'}^1$ *mit* $d'\leqq d$ *und es gibt eine stetige Projektion* P *der Norm* 1 *von* l_d^1 *auf* H.

Beweis. Sei $\sum_\gamma|c_\gamma|<\infty$, dann ist $\sum_\gamma c_\gamma\frac{z_\gamma}{\|z_\gamma\|}=\sum_\gamma|c_\gamma|$, da die A_γ paarweise fremd sind. Daher ist die Abbildung $\sum_\gamma c_\gamma e_\gamma\to\Sigma c_\gamma\frac{z_\gamma}{\|z_\gamma\|}$ eine Normisomorphie von $l^1(\Gamma)$ auf H. Man teile nun die Indexmenge A_d in paarweise disjunkte Teilmengen $B_\gamma\supset A_\gamma$. Dann ist jedes Element x aus l_d^1 von der Form $x=\sum_\gamma x_\gamma$, $x_\gamma\in l^1(B_\gamma)$, mit $\|x\|=\sum_\gamma\|x_\gamma\|$.

Zu jedem $l^1(B_\gamma)$ gibt es eine Projektion P_γ der Norm 1 auf den eindimensionalen linearen Teilraum $[z_\gamma]$: Sei $u_\gamma\in l^\infty(B_\gamma)$ definiert durch $u_\gamma z_\gamma=1$, $\|u_\gamma\|=\frac{1}{\|z_\gamma\|}$, so ist $P_\gamma x_\gamma=(u_\gamma x_\gamma)z_\gamma$, $x_\gamma\in l^1(B_\gamma)$, die gesuchte Projektion, denn $\|P_\gamma x_\gamma\|\leqq\|x_\gamma\|\frac{\|z_\gamma\|}{\|z_\gamma\|}=\|x_\gamma\|$. Offenbar ist dann $Px=\sum_\gamma P_\gamma x_\gamma$ eine Projektion der Norm 1 von l_d^1 auf H.

(5) *Jeder* d'*-dimensionale abgeschlossene lineare Teilraum* H *von* l_d^1, $d'\leqq d$, *enthält einen zu* $l_{d'}^1$ *isomorphen und in* l_d^1 *komplementären Teilraum* H_1.

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall $d>\aleph_0$. Der Fall $d\leqq\aleph_0$ ist bei PEŁCZYŃSKI [12] bewiesen. Es genügt, den Fall $d'=d$ zu betrachten. Denn ist H d'-dimensional, $\aleph_0\leqq d'<d$, so liegt H bereits in einem $l^1(A')$, A' eine Teilmenge der Mächtigkeit d' der Indexmenge A_d von l_d^1. Ist H_1 dort komplementär, so auch in l_d^1.

a) Wir konstruieren zuerst zu vorgegebenem ε, $0<\varepsilon<1$, d Elemente $y_\gamma\in H$ der Gestalt $y_\gamma=z_\gamma+t_\gamma$, $\|y_\gamma\|=1$, $\|t_\gamma\|\leqq\varepsilon$, $1\geqq\|z_\gamma\|\geqq 1-\varepsilon$, so daß die z_γ die Voraussetzungen von (4) erfüllen und die von Null verschiedenen Koordinaten von z_γ und t_γ über getrennten Indexmengen liegen, also $\|y_\gamma\|=\|z_\gamma\|+\|t_\gamma\|$ gilt.

Sei y_1 irgend ein Element der Norm 1 aus H; dann gibt es natürlich eine Zerlegung $y_1=z_1+t_1$ der verlangten Art. Wir nehmen an, wir hätten für alle $\gamma<\alpha$, α eine Ordinalzahl einer Mächtigkeit $d_1<d$ schon die y_γ mit den verlangten Eigenschaften konstruiert. Können wir y_α konstruieren, so folgt die Behauptung durch transfinite Induktion.

Jedes y_γ hat höchstens abzählbar viele Koordinaten $\neq 0$. Die Indizes aller dieser Koordinaten bilden eine Menge B_1 der Mächtigkeit $d_1<d$, da $d>\aleph_0$ vorausgesetzt ist. Die Menge A_d aller Indizes zerfalle in B_1 und B_2. Es ist $l^1(B_1)$ normisomorph $l_{d_1}^1$, $l^1(B_2)$ normisomorph l_d^1.

Es sei $\{x_\beta\}$ ein maximales σ-Netz in H, $0<\sigma<1$. Nur d_1 der x_β können in $l^1(B_1)$ liegen, also liegen d der x_β außerhalb H. Wir bezeichnen sie wieder mit x_β. Jedes x_β hat eine Zerlegung $x_\beta = x'_\beta + x''_\beta$, $x'_\beta \in l^1(B_1)$, $x''_\beta \in l^1(B_2)$.

Ist für ein x_β $\|x'_\beta\| < \varepsilon$, so kann man von x''_β einen endlichen Ausschnitt z_1 so bilden, daß $x''_\beta = z_1 + z_2$ wird mit $\|x'_\beta + z_2\| < \varepsilon$. Wir setzen dann $y_\alpha = x_\beta = z_1 + (x'_\beta + z_2) = z_\alpha + t_\alpha$ und haben das gesuchte Element bestimmt.

Es gebe kein x_β mit $\|x'_\beta\| < \varepsilon$. Alle x'_β liegen in $l^1(B_1)$ und da die Dimension von $l^1(B_1)$ gleich $d_1 < d$ ist, gibt es zu vorgegebenem $\delta > 0$ wenigstens zwei $x'_{\beta_1}, x'_{\beta_2}$ mit $\|x'_{\beta_1} - x'_{\beta_2}\| < \delta$. Nun ist $\|x_{\beta_1} - x_{\beta_2}\| = \|x'_{\beta_1} - x'_{\beta_2}\| + \|x''_{\beta_1} - x''_{\beta_2}\| \geqq \sigma$, also $\|x''_{\beta_1} - x''_{\beta_2}\| > \sigma - \delta$.

Sei $r = x_{\beta_1} - x_{\beta_2} = r' + r''$, $r' \in l^1(B_1)$, $r'' \in l^1(B_2)$. Dann gilt also

$$\|r\| \geqq \sigma, \quad \|r''\| > \sigma - \delta, \quad \|r'\| < \delta .$$

Man zerlege wieder r'' in einen endlichen Ausschnitt r_1 und r_2, so daß $\|r_1\| > \sigma - 2\delta$, $\|r_2\| < \delta$ ist. Dann sei

$$y_\alpha = \frac{r}{\|r\|} = \frac{r_1}{\|r\|} + \frac{r' + r_2}{\|r\|} = z_\alpha + t_\alpha .$$

z_α liegt in $l^1(B_2)$, liegt also getrennt von den z_γ, $\gamma < \alpha$, ferner ist

$$\|t_\alpha\| = \frac{1}{\|r\|} \|r' + r_2\| \leqq \frac{2\delta}{\sigma} .$$

Wir können δ, σ so wählen, daß $\frac{2\delta}{\sigma} \leqq \varepsilon$ gilt, z. B. $\sigma = \frac{1}{2}$, $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$. Damit ist y_α bestimmt.

b) Es seien H_1 bzw. H_2 die von allen $\sum_\gamma c_\gamma y_\gamma$ bzw. $\sum_\gamma c_\gamma z_\gamma$ mit $\sum_\gamma |c_\gamma| < \infty$ gebildeten linearen Teilräume von H bzw. l^1_d. Nach (4) ist H_2 normisomorph zu l^1_d und es gibt eine Projektion P der Norm 1 von l^1_d auf H_2. Also wird $l^1_d = H_2 \oplus G$, G der Kern von P.

Für ein $x \in l^1_d$ gilt also $x = \sum_\gamma c_\gamma z_\gamma + x_2$, $\sum_\gamma c_\gamma z_\gamma \in H_2$, $x_2 \in G$. Wir erklären die lineare Abbildung A durch $Ax = \sum_\gamma c_\gamma y_\gamma + x_2$. A bildet also H_2 auf H_1 ab und ist die Identität auf G. Es sei I die identische Abbildung von l^1_d.

Es ist $\|(I-A)x\| = \|\Sigma c_\gamma (z_\gamma - y_\gamma)\| \leqq \left(\sum_\gamma |c_\gamma|\right) \varepsilon$, da $\|z_\gamma - y_\gamma\| = \|t_\gamma\| \leqq \varepsilon$ gilt. Andererseits gilt

$$\|x\| \geqq \|Px\| = \left\|\sum_\gamma c_\gamma z_\gamma\right\| = \Sigma |c_\gamma| \, \|z_\gamma\| \geqq \left(\sum_\gamma |c_\gamma|\right)(1-\varepsilon) ;$$

daraus folgt $\|(I-A)x\| \leqq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \|x\|$, also $\|I-A\| \leqq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$.

Für $\varepsilon < \frac{1}{2}$ folgt aus der Neumannschen Reihe, daß $A = I - (I-A)$ eine beschränkte Inverse besitzt, also ein topologischer Automorphismus von l^1_d ist.

Daraus folgt $l^1_d = A(H_2 \oplus G) = H_1 \oplus G$ und H_1 ist isomorph zu H_2, also zu l^1_d.

Wir bemerken noch, daß APA^{-1} die Projektion von l_d^1 auf H_1 mit dem Kern G ist: Wegen $A^{-1}(G)=G$ ist $APA^{-1}(G)=o$ und wegen $A^{-1}(H_1)=H_2$, $PA^{-1}(H_1)=H_2$, ist $APA^{-1}(H_1)=H_1$.

Wir sind jetzt in der Lage, die gesuchte Verallgemeinerung von (1) zu beweisen:

(6) *Jeder komplementäre Teilraum H von l_d^1 ist isomorph einem $l_{d_1}^1$ mit $d_1 \leqq d$.*

Der folgende *Beweis* ist im wesentlichen eine Wiederholung der Überlegungen von PEŁCZYŃSKI [12] für den Fall l^1.

Ist E lokalkonvex, $F_1 \subset F_2 \subset E$, F_1 komplementär in E, F_2 abgeschlossen, so ist F_1 auch komplementär in F_2; denn ist Q die Projektion von E auf F_1, so ist die Einschränkung von Q auf F_2 eine Projektion von F_2 auf F_1.

Hat H die Dimension $d' < d$, so liegt H bereits in einem $l^1(A')$, A' eine Teilmenge von A_d der Mächtigkeit d'. Nach der eben gemachten Bemerkung ist H dann in $l^1(A')$ komplementär. Damit ist (6) zurückgeführt auf den Fall, daß H d-dimensional ist.

Sei H_1 der nach (5) existierende, zu l_d^1 isomorphe komplementäre Teilraum von H. Dann ist H_1 auch komplementär in H, es gilt also

$$H = H_1 \oplus H_2, \quad l_d^1 = H_1 \oplus H_2 \oplus G, \quad H_1 \sim l_d^1 .$$

Zum Beweise unserer Behauptung genügt es zu zeigen, daß $H_1 \oplus G \sim l_d^1$ gilt, denn dann ist

$$l_d^1 = H_1 \oplus H_2 \oplus G \sim (H_1 \oplus G) \oplus H_2 \sim l_d^1 \oplus H_2 \sim H_1 \oplus H_2 \sim H .$$

Ist E_n eine Folge von (B)-Räumen, so bezeichne $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{l^1}$ den (B)-Raum aller $x=(x_1, x_2, \ldots)$, $x_n \in E_n$, mit $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. Offenbar ist $l_d^1 = \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n\right)_{l^1}$, mit $E_n = l^1(A_n)$, die A_n abzählbar viele disjunkte Teilmengen von A_d mit je d Elementen, deren Vereinigung A_d ist. Also gilt

$$l_d^1 = \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} (H_n \oplus G_n)\right)_{l^1},$$

$E_n = H_n \oplus G_n$ die der Zerlegung $l_d^1 = H \oplus G$ normisomorph entsprechende Zerlegung von $l^1(A_n)$. Es gilt nun

$$\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} (H_n \oplus G_n)\right)_{l^1} = \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n\right)_{l^1} \oplus \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} G_n\right)_{l^1},$$

denn jedes Element $x=(y_1+z_1, y_2+z_2, \ldots)$, $y_n \in H_n$, $z_n \in G_n$, kann geschrieben werden als $(y_1, y_2, \ldots)+(z_1, z_2, \ldots)$, die Formel ist also algebraisch richtig. Ist P_n die Projektion von E_n auf H_n mit dem Kern G_n, so ist $Px=(P_1x_1, P_2x_2, \ldots)$ die Projektion von $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} (H_n \oplus G_n)\right)_{l^1}$ auf $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n\right)_{l^1}$ mit dem Kern $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} G_n\right)_{l^1}$.

Schließlich ist

$$l_d^1 = \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n\right)_{l^1} \oplus \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} G_n\right)_{l^1} = \left[\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n\right)_{l^1} \oplus \left(\bigoplus_{n=2}^{\infty} G_n\right)_{l^1}\right] \oplus G_1 .$$

Da $\left(\bigoplus_{n=2}^{\infty} G_n\right)_{l^1} \sim \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} G_n\right)_{l^1}$ gilt, folgt $l_d^1 \sim l_d^1 \oplus G_1 \sim H_1 \oplus G$.

(7) *Ein Banachraum E ist hebbar in der Klasse der Banachräume genau dann, wenn er isomorph einem l_d^1 ist.*

Nach (3) folgt die eine Hälfte. Jeder (B)-Raum ist isomorph einem Quotientenraum l_d^1/H (vgl. z. B. [7] § 22, 4). Daraus und aus (6) ergibt sich die andere Hälfte wie in (2).

Für die $\mathfrak{H}_\lambda$-Räume erhalten wir

(8) *Jeder $\mathfrak{H}_\lambda$-Raum, $\lambda > 1$, ist isomorph einem l_d^1.*

Anders ausgedrückt: Jeder $\mathfrak{H}_\lambda$-Raum ist ein hebbarer Banachraum. Dies folgt aus

(9) *Ist der Banachraum E isomorph X/H, so gibt es eine äquivalente Norm auf X, so daß X/H normisomorph zu E ist.*

Sei $M \subset X/H$ das Bild der offenen Einheitskugel von E, B die offene Einheitskugel von X, K die kanonische Abbildung von X auf X/H. Es gibt $0 < \varrho < \sigma$ mit $\varrho K(B) \subset M \subset \sigma K(B)$, also ist $\varrho B \subset K^{(-1)}(M) \cap \sigma B \subset \sigma B$. Die Menge $N = K^{(-1)}(M) \cap \sigma B$ ist absolutkonvex, beschränkt und offen, $K(N) = M$, N ist die offene Einheitskugel der gesuchten äquivalenten Norm auf X.

Damit weiß man, daß jeder $\mathfrak{H}_\lambda$-Raum, $\lambda > 1$, aus einem l_d^1 durch Übergang zu einer äquivalenten Norm entsteht. Das Grothendiecksche Resultat für die $\mathfrak{H}_{1+\varepsilon}$-Räume (siehe Einleitung) ist allerdings schärfer.

4. Hebbare bornologische Räume

Ein Vektorraum E, auf dem die feinste lokalkonvexe Topologie erklärt ist, ist isomorph einem Raum φ_d, dessen Elemente Vektoren $x = (x_\alpha)$ mit d reellen oder komplexen Koordinaten x_α, $\alpha \in A$, sind, von denen stets nur endlich viele von Null verschieden sind. Es gilt

(1) *Jeder Raum φ_d ist hebbar in der Klasse aller lokalkonvexen Räume.*

Beweis. Es sei $E[\mathfrak{T}]$ lokalkonvex und E/H in der induzierten Quotientenraumtopologie $\hat{\mathfrak{T}}$ isomorph zu φ_d. Es sei G ein algebraischer Komplementärraum zu H in E. Es genügt zu zeigen, daß die Projektion P von E auf G mit dem Kern H stetig ist. Jede $\mathfrak{T}$-Nullumgebung W in G umfaßt eine absolutkonvexe und ausgeglichene Teilmenge $V \subset G$. Dann bilden aber die $\hat{y} = y + H$, $y \in V$, eine absolutkonvexe und ausgeglichene Teilmenge $\hat{V}$ in E/H, also eine $\hat{\mathfrak{T}}$-Nullumgebung. Ist K die kanonische Abbildung von E auf E/H, so ist $K^{(-1)}(\hat{V}) = U$, die Menge aller $y + z$, $z \in H$, eine $\mathfrak{T}$-Nullumgebung in E. Es ist also $P(U) = V \subset W$, P also stetig.

Die lokale Vollständigkeit eines lokalkonvexen Raumes $E[\mathfrak{T}]$ bedeutet folgendes: Sei B eine absolutkonvexe abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von E. Die Menge $E_B = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB$ ist ein linearer Teilraum von E. Führen wir auf E_B mit B als Einheitskugel eine Norm ein, so ist E_B ein normierter

Raum. $E[\mathfrak{T}]$ heißt lokal vollständig, wenn E_B stets ein Banachraum ist. Ist $E[\mathfrak{T}]$ folgenvollständig, so ist $E[\mathfrak{T}]$ stets lokal vollständig ([7] § 20, 11. (2)).

Die Räume $\bigoplus_\beta l^1_{d_\beta}$, wo β irgend eine Indexmenge B durchläuft, sind die lokalkonvexen direkten Summen der $l^1_{d_\beta}$. Eine Nullumgebungsbasis ihrer Topologie wird durch die Mengen $\Gamma_\beta \varrho_\beta K_\beta$ gegeben, wobei $\varrho_\beta K_\beta$ ein Vielfaches der offenen Einheitskugel K_β von $l^1_{d_\beta}$ bedeutet (vgl. [7], § 18, 5.). Die $\bigoplus_\beta l^1_{d_\beta}$ sind lokalvollständig und bornologisch.

(2) *Jeder lokalvollständige bornologische Raum E ist isomorph einem Quotientenraum* $\bigoplus_\beta l^1_{d_\beta}/H$.

Beweis. E ist die lokalkonvexe Hülle $\sum_\beta E_{B_\beta}$ von Banachräumen E_{B_β}, deren abgeschlossene Einheitskugel B_β je eine absolutkonvexe abgeschlossene beschränkte Teilmenge von E ist ([7], § 28, 2. (2)). Jedes E_{B_β} ist isomorph einem $l^1_{d_\beta}/H_\beta$. Wir bilden $F = \bigoplus_\beta l^1_{d_\beta}$.

Wir erklären eine lineare Abbildung A von F in $E = \sum_\beta E_{B_\beta}$, indem wir jedem Element von $l^1_{d_\beta}$ das ihm bei der Isomorphie $l^1_{d_\beta}/H_\beta \sim E_{B_\beta}$ entsprechende Element zuordnen. Dabei wird die offene Einheitskugel K_β von $l^1_{d_\beta}$ auf die offene beschränkte Menge B^i_β von E_{B_β} abgebildet. Also ist das Bild $A(\Gamma_\beta \varrho_\beta K_\beta)$ der Nullumgebung $\Gamma_\beta \varrho_\beta K_\beta$ von F die Nullumgebung $\Gamma \varrho_\beta B^i_\beta$ von E. Da diese Nullumgebungen eine Basis in E bilden ([7], § 19, 1.), ist A offen und stetig, also ein Homomorphismus von F auf E, daher E isomorph einem Quotientenraum F/H.

Wir können nun alle lokalvollständigen bornologischen Räume bestimmen, die hebbar in der Klasse $\mathfrak{B}$ der bornologischen Räume sind.

(3) *Ein lokalvollständiger bornologischer Raum E ist hebbar in $\mathfrak{B}$ genau dann, wenn er isomorph einem Raum φ_d ist.*

Die eine Hälfte der Behauptung folgt aus (1). Sei umgekehrt $E \in \mathfrak{B}$ und lokalvollständig und hebbar in $\mathfrak{B}$. E ist nach (2) isomorph einem Quotientenraum $\left(\bigoplus_\beta l^1_{d_\beta}\right)/H$. Da $\bigoplus_\beta l^1_{d_\beta}$ in $\mathfrak{B}$ liegt und E hebbar ist, ist E topologisch isomorph einem komplementären Teilraum G von $\bigoplus_\beta l^1_{d_\beta}$.

Wir zeigen, daß G entweder einem φ_d isomorph ist oder einen zu l^1 isomorphen komplementären Teilraum enthält.

Jedes Element von G liegt in einer endlichen Summe von Räumen $l^1_{d_\beta}$. Wir nehmen zuerst an, daß für jede endliche Summe $\bigoplus_{i=1}^n l^1_{d_{\beta_i}}$ der Durchschnitt mit G endlichdimensional ist. Dann ist nach [7], § 18, 5. (4) jede beschränkte Teilmenge von G endlichdimensional. Da G als zu E isomorpher Raum bornologisch ist, ist jede absolutkonvexe und ausgeglichene Teilmenge von G eine Nullumgebung, denn sie absorbiert jede beschränkte Teilmenge von G. Die auf G durch $\bigoplus_\beta l^1_{d_\beta}$ induzierte Topologie ist also die feinste lokalkonvexe Topologie, G also isomorph einem φ_d.

Sei andererseits ein $\left(\bigoplus_{i=1}^{n} l^1_{d_{\beta_i}}\right) \cap G = S$ unendlichdimensional. Da $\bigoplus_{i=1}^{n} l^1_{d_{\beta_i}}$ durch Einführung einer die Topologie erzeugenden Norm als ein l^1_d aufgefaßt werden kann, ist S ein abgeschlossener linearer Teilraum von l^1_d. Dann enthält S aber nach 3.(5) einen abgeschlossenen, zu l^1 isomorphen und in l^1_d komplementären Teilraum G_1. Offenbar ist G_1 auch komplementär in $\bigoplus_{\beta} l^1_{d_\beta}$. Da $G_1 \subset G$ gilt, ist G_1 auch komplementär in G, wir haben also eine Zerlegung $G = G_1 \oplus G_2$ mit $G_1 \sim l^1$.

Unser Satz ist bewiesen, wenn wir einen bornologischen Raum L angeben mit einem zu G isomorphen Quotientenraum L/N, zu dem es keine stetige Projektion mit dem Kern N gibt. Es sei F ein (FM)-Raum, der einen zu l^1 isomorphen Quotientenraum F/N besitzt (vgl. [7], § 31, 5.). Es gibt keine stetige Projektion P_1 von F mit dem Kern N, denn $P_1(F)$ müßte isomorph zu l^1 sein, in l^1 ist aber die abgeschlossene Einheitskugel nicht kompakt, jede abgeschlossene beschränkte Teilmenge eines (FM)-Raumes ist aber kompakt.

Wir bilden nun $L = G_2 \oplus F$. Es ist F als (F)-Raum bornologisch, ferner G_2 als Quotientenraum G/G_1 eines bornologischen Raumes ([7], § 28, 4. (2)). Daher ist auch L bornologisch ([7], § 28, 3. (1)). Wir bilden den Quotientenraum $L/N = (G_2 \oplus F)/N \sim G_2 \oplus F/N \sim G$. Es gebe eine stetige Projektion P von $G_2 \oplus F$ mit dem Kern N. Dann ist die Einschränkung P_F von P auf F eine Projektion von F mit dem Kern N. Dann wäre $F = P_F(F) \oplus N$, also $P_F(F) \sim l^1$, was nach vorhin unmöglich ist.

5. Der lokalkonvexe Fall

Die Ergebnisse der vorigen Nummer legen die Vermutung nahe, daß die einzigen hebbaren Räume in der Klasse der (F)-Räume die endlichdimensionalen Räume sind. Ein Beweis mit den hier benützten Methoden ist mir nicht gelungen.

Dagegen läßt sich über den allgemeinen Fall der lokalkonvexen Räume noch einiges aussagen. Nach 4.(1) ist jeder Raum φ_d hebbar in der Klasse $\mathfrak{L}$ aller lokalkonvexen Räume. Wieder wird man vermuten, daß dies die einzigen hebbaren Räume in $\mathfrak{L}$ sind. Wir werden ein Teilresultat in dieser Richtung beweisen.

Wir beginnen mit einem allgemeinen Satz über das Hochheben von Quotientenraumtopologien,

(1) *Es sei E [$\mathfrak{T}$] lokalkonvex, E/H ein Quotientenraum, $\hat{\mathfrak{T}}$ die durch $\mathfrak{T}$ auf E/H induzierte Topologie. Es sei $\mathfrak{T}'$ eine gröbere (separierte) lokalkonvexe Topologie auf E/H. Dann gibt es eine (separierte) lokalkonvexe Topologie $\mathfrak{T}_1$ auf E, die gröber ist als $\mathfrak{T}$, so daß H $\mathfrak{T}_1$-abgeschlossen in E ist und die auf E/H induzierte Topologie $\hat{\mathfrak{T}}_1$ gleich $\mathfrak{T}'$ ist.*

Beweis. Wir nehmen als Nullumgebungsbasis für $\mathfrak{T}_1$ alle absolutkonvexen $\mathfrak{T}$-Nullumgebungen V mit $KV = \hat{V} \supset \hat{U}$, $\hat{U}$ eine absolutkonvexe $\mathfrak{T}'$-Nullumgebung, K die kanonische Abbildung von E auf E/H.

Wir beweisen zuerst, daß die V eine Filterbasis auf E bilden. Dazu zeigen wir, daß aus $\hat{V}_1 \supset \hat{U}_1$, $\hat{V}_2 \supset \hat{U}_2$ stets $3\widehat{(V_1 \cap V_2)} \supset \hat{U}_1 \cap \hat{U}_2$ folgt. Sei $\hat{y}$ ein Element aus $\hat{U}_1 \cap \hat{U}_2$. Es gibt also $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$ mit $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \hat{y}$. Also ist $x_1 = x_2 + z \in V_1$ mit $z \in H$. Daraus folgt $(x_2 + z) - x_1 = z \in 2V_1$, $x_2 = x_1 - z \in 3V_1$, $x_2 \in 3(V_1 \cap V_2)$, $\hat{x}_2 = \hat{y}$.

Als nächstes zeigen wir, daß $\mathfrak{T}_1$ separiert ist. Ist $x \in E$ und $\hat{x} \neq o$ in E/H, so gibt es ein $\hat{U}$, das $\hat{x}$ nicht enthält. Ist V so gewählt, daß $\hat{V} = \hat{U}$ ist, so enthält V das Element x nicht. Es muß also noch gezeigt werden, daß zu jedem $z_0 \neq o$ in H ein V existiert, das z_0 nicht enthält.

Es sei V irgend eine absolutkonvexe $\mathfrak{T}_1$-Nullumgebung. Entweder liegt der eindimensionale durch z_0 erzeugte lineare Teilraum $[z_0]$ ganz in V oder ein $\varrho z_0 \overline{\in} V$. Im letzteren Fall gilt $z_0 \overline{\in} (1/\varrho)V$. Sei also $[z_0] \subset V$ und sei $E = E_1 \oplus [z_0]$ eine komplementäre Zerlegung von E, E_1 abgeschlossen. Für jedes $x \in V$ gilt dann eindeutig $x = x^{(1)} + \beta z_0$. Aus $x_1, x_2 \in V$ folgt $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 x_1^{(1)} + \alpha_2 x_2^{(1)} + (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2) z_0$. Die in E_1 gelegenen Komponenten der Elemente von V bilden also eine absolutkonvexe Menge V_1 und es ist $V = V_1 \oplus [z_0]$.

Sei nun $V' = V_1 \oplus M$, M die Menge aller τz_0 mit $|\tau| \leqq 1/2$. V' ist als Produkt zweier $\mathfrak{T}$-Nullumgebungen von E_1 und $[z_0]$ eine $\mathfrak{T}$-Nullumgebung von E, aber auch eine $\mathfrak{T}_1$-Nullumgebung, da $\hat{V}' = \hat{V}$ und $\hat{V}$ eine $\mathfrak{T}'$-Nullumgebung ist. V' enthält z_0 nicht.

Schließlich ist H $\mathfrak{T}_1$-abgeschlossen, da E/H separiert bezüglich $\hat{\mathfrak{T}}_1 = \mathfrak{T}'$ ist.

Sei $E[\mathfrak{T}]$ ein lokalkonvexer Raum. Der ihm assoziierte bornologische Raum $E[\mathfrak{T}^\times]$ entsteht, wenn man auf E die Topologie $\mathfrak{T}^\times$ einführt, die als Nullumgebungsbasis die absolutkonvexen, alle $\mathfrak{T}$-beschränkten Teilmengen absorbierenden Teilmengen von E besitzt (vgl. [7], § 28, 2.).

Ein notwendiges Kriterium für die Hebbarkeit in der Klasse $\mathfrak{L}$ aller lokalkonvexen Räume ist

(2) *Ist der lokalvollständige lokalkonvexe Raum $E[\mathfrak{T}']$ hebbar in $\mathfrak{L}$, so ist der assoziierte bornologische Raum $E[\mathfrak{T}'^\times]$ lokalvollständig und hebbar in $\mathfrak{B}$, also $E[\mathfrak{T}'^\times]$ topologisch isomorph einem φ_d.*

Beweis. Sei $X[\mathfrak{T}]$ bornologisch und $E[\mathfrak{T}'^\times] \sim X/H$, also $\hat{\mathfrak{T}} = \mathfrak{T}'^\times$ auf X/H. Nach (1) gibt es eine lokalkonvexe Topologie $\mathfrak{T}_1$ auf X, die gröber ist als $\mathfrak{T}$, so daß $\hat{\mathfrak{T}}_1 = \mathfrak{T}'$ auf X/H gilt. Da $E[\mathfrak{T}']$ hebbar ist, gibt es eine stetige Projektion P von $X[\mathfrak{T}_1]$ mit dem Kern H. Es sei $X[\mathfrak{T}_1] = P(X) \oplus H$ die zugehörige $\mathfrak{T}_1$-komplementäre Zerlegung.

Wir zeigen, daß der zu $P(X)[\mathfrak{T}_1]$ assoziierte bornologische Raum $P(X)[\mathfrak{T}]$ ist. Durch den kanonischen Homomorphismus K von X auf X/H wird $P(X)[\mathfrak{T}_1]$ topologisch isomorph auf $(X/H)[\hat{\mathfrak{T}}_1] = (X/H)[\mathfrak{T}']$ abgebildet.

Ist W eine absolutkonvexe, alle $\mathfrak{T}_1$-beschränkten Teilmengen von $P(X)$ absorbierende Teilmenge von $P(X)$, so ist also $KW = \hat{W}$ eine absolutkonvexe, alle $\mathfrak{T}'$-beschränkten Teilmengen von X/H absorbierende Menge, also eine $\mathfrak{T}'^\times$-Nullumgebung in X/H und jede absolutkonvexe $\mathfrak{T}'^\times$-Nullumgebung entsteht auf diese Weise. Da $\mathfrak{T}'^\times = \hat{\mathfrak{T}}$ auf X/H gilt, ist $\hat{W}$ auch eine $\hat{\mathfrak{T}}$-Null-

umgebung, also $K^{(-1)}(\hat{W}) = W + H$ eine $\mathfrak{T}$-Nullumgebung in X. Es ist aber $(W + H) \cap P(X) = W$, also W eine $\mathfrak{T}$-Nullumgebung von $P(X)$.

Zum Beweis von (2) haben wir noch zu zeigen, daß P $\mathfrak{T}$-stetig ist, dann folgt die Behauptung aus 4. (3).

Nach [7], § 28, 3.(4) genügt es zu zeigen, daß jede gegen o $\mathfrak{T}$-konvergente Folge x_n in eine $\mathfrak{T}$-beschränkte Folge Px_n abgebildet wird. Aus $x_n \xrightarrow{\mathfrak{T}} o$ folgt $x_n \xrightarrow{\mathfrak{T}_1} o$; wegen der $\mathfrak{T}_1$-Stetigkeit von P gilt dann $Px_n \xrightarrow{\mathfrak{T}_1} o$, $\{Px_n\}$ ist daher $\mathfrak{T}_1$-beschränkt in $P(X)$. Da $\mathfrak{T}$ die zu $\mathfrak{T}_1$ assoziierte bornologische Topologie auf $P(X)$ ist, ist $\{Px_n\}$ auch $\mathfrak{T}$-beschränkt.

Als in $\mathfrak{L}$ hebbare lokalvollständige lokalkonvexe Räume kommen also in Frage außer den φ_d, versehen mit der feinsten lokalkonvexen Topologie $\mathfrak{T}_0$, noch die Räume φ_d mit einer Topologie $\mathfrak{T}$, deren assoziierte bornologische Topologie $\mathfrak{T}_0$ ist, und die lokal vollständig bezüglich $\mathfrak{T}$ sind. Wie in KÖTHE [8] gezeigt wurde, gibt es schon auf φ solche Topologien $\mathfrak{T} \neq \mathfrak{T}_0$, für die $\varphi[\mathfrak{T}]$ sogar vollständig ist. Die Frage, ob diese Räume hebbar sein können, bleibt offen.

6. Hebbare (LB)-Räume

Wir sahen in Nr. 4, daß die in der Klasse der Banachräume hebbaren l_d^1 in der Klasse der (F)-Räume nicht mehr hebbar sind. Die Frage ist naheliegend, ob es eine alle Banachräume enthaltende größere Klasse lokalkonvexer Räume gibt, in der die l_d^1 ebenfalls noch hebbar sind.

Dazu betrachten wir die Klasse der (LB)-Räume. Unter einem (LB)-Raum versteht man folgendes: Es sei $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ eine aufsteigende Folge von (B)-Räumen E_n, so daß die Normtopologie von E_{n+1} auf E_n eine Topologie induziert, die schwächer als die Normtopologie ist. Der induktive Limes (lokalkonvexe Hülle) $E[\mathfrak{T}] = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ wird als (LB)-Raum bezeichnet. Die Hüllentopologie $\mathfrak{T}$ hat als Nullumgebungsbasis die Mengen $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, U_n eine absolutkonvexe Nullumgebung von E_n. $\mathfrak{T}$ wird als separiert vorausgesetzt.

Es gilt nun

(1) *l_d^1 ist hebbar in der Klasse der* (LB)*-Räume.*

Sei $E[\mathfrak{T}] = \sum_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ und sei $l_d^1 \sim E/H$ und bezeichne K die kanonische Abbildung von E auf E/H. Es ist dann $E/H = K(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} K(E_n)$. Nach dem Satz von BAIRE ist ein $K(E_{n_0})$ von zweiter Kategorie und dicht in $E/H \sim l_d^1$. Da $\mathfrak{T}$ schwächer als die Normtopologie auf E_{n_0} ist, ist die Einschränkung K_0 von K auf E_{n_0} eine stetige lineare Abbildung des (B)-Raumes E_{n_0} in E/H. Nach dem Satz von BANACH-SCHAUDER ist K_0 ein Homomorphismus von E_{n_0} auf E/H.

Die Bilder $\hat{v}_\alpha$ der Einheitsvektoren e_α von l_d^1 bei der Isomorphie $l_d^1 \sim E/H$ liegen in einer beschränkten Teilmenge von E/H. Man kann deshalb zu jedem

$\hat{v}_\alpha$ ein Urbild v_α in E_{n_0} so wählen, daß alle v_α in einer beschränkten Teilmenge von E_{n_0} liegen. Da dann auch alle $\Sigma c_\alpha v_\alpha$ mit $\Sigma|c_\alpha| \leqq 1$ in einer beschränkten Teilmenge von E_{n_0} liegen, ist die durch $\hat{P}\hat{v}_\alpha = v_\alpha$ definierte lineare Abbildung eine stetige Abbildung von E/H auf einen linearen Teilraum G von $E_{n_0} \subset E$ und $P = \hat{P}K$ eine stetige Projektion von E auf G mit dem Kern H.

Wir ziehen noch eine Folgerung aus dem Beweis.

(2) *Ist* $E[\mathfrak{T}]$ *ein* (LB)*-Raum und* $E/H \sim l^1_d$, *so ist auch* H *ein* (LB)*-Raum.*

Die eben konstruierte Abbildung $\hat{P}$ ist nicht nur stetig im Sinn von $\mathfrak{T}$, sondern auch stetig im Sinn der Normtopologie von $E_{\mathfrak{g}_0}$, so daß $P_0 = \hat{P}K_0$ eine stetige Projektion von E_{n_0} auf G ist, also $E_{n_0} = G \oplus \tilde{E}_{n_0}$, $\tilde{E}_{n_0} \subset H$ gilt. Dies gilt auch noch für alle $n \geqq n_0$, also wird $E[\mathfrak{T}] = G \oplus \bigcup_{n \geqq n_0}^{\infty} \tilde{E}_n$, $H = \bigcup_{n \geqq n_0}^{\infty} \tilde{E}_n$. Die $\tilde{E}_n$ sind (B)-Räume und die durch $\mathfrak{T}$ induzierte Topologie auf H ist die der lokalkonvexen Hülle der $\tilde{E}_n$.

Es gibt weitere hebbare (LB)-Räume.

(3) *Jeder Raum* $\bigoplus_{n=1}^{\infty} l^1_{d_n}$ *ist ein hebbarer* (LB)*-Raum.*

Beweis. Sei $E[\mathfrak{T}]$ ein (LB)-Raum und $E/H \sim \bigoplus_{n=1}^{\infty} l^1_{d_n}$. Es ist also $E/H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n$, $F_n \sim l^1_{d_n}$. Sei wieder K die kanonische Abbildung von E auf E/H. Wir definieren $H_k = K^{(-1)}\left(\bigoplus_{k+1}^{\infty} F_n\right)$ für $k = 1, 2, \ldots$. H_k ist abgeschlossen in E, $H_{k-1}/H_k = F_k$.

Es ist also $E/H_1 \sim l^1_{d_1}$. Nach (1) wird $E = G_1 \oplus H_1$ mit $G_1 = P_1(E_1)$, $\hat{P}_1$ eine Isomorphie von F_1 auf G_1, und $H_1/H = \bigoplus_{n=2}^{\infty} F_n$. Nach (2) ist H_1 wieder ein (LB)-Raum. Wir können also auf H_1 und H wegen $H_1/H = \bigoplus_{n=2}^{\infty} F_n$ dasselbe Verfahren anwenden. Wir finden so für jedes k

$$H_{k-1}/H_k = F_k, \quad H_{k-1} = G_k \oplus H_k, \quad G_k = P_k(H_{k-1}), \quad \hat{P}_k$$

eine Isomorphie von F_k auf G_k.

Die direkte Summe $\bigoplus_{n=1}^{\infty} G_n$ ist ein linearer Teilraum von E. Erweitern wir $\hat{P}_k$ zu einer Abbildung von $\bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n$ in $\bigoplus_{n=1}^{\infty} G_n$, indem wir $\hat{P}_k$ gleich Null auf den F_n, $n \neq k$, setzen, so ist $\hat{P} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{P}_n$ eine eineindeutige Abbildung von E/H auf G, die jeder Nullumgebung $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ in $\bigoplus_{n=1}^{\infty} F_n$ die Menge $\bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{P}(U_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{P}_n(U_n)$ zuordnet. Jede absolutkonvexe $\mathfrak{T}$-Nullumgebung V von G enthält eine Menge $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$, V_n eine $\mathfrak{T}$-Nullumgebung von G_n. Da $\hat{P}_n$ ein Isomorphismus von F_n auf

$G_n[\mathfrak{T}]$ ist, ist $V_n = \hat{P}_n(U_n) = \hat{P}(U_n)$ für geeignetes U_n, also $\hat{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right) \subset V$; $\hat{P}$ ist stetig. Dann ist aber auch $P = \hat{P}K$ stetig; P ist die Projektion von E auf G mit dem Kern H.

Wir versuchen nun alle lokal vollständigen hebbaren (LB)-Räume zu bestimmen. Es ist bekannt, daß es (LB)-Räume gibt, die nicht folgenvollständig sind ([7], § 31, 6.); ob es auch (LB)-Räume gibt, die nicht lokalvollständig sind, ist mir nicht bekannt.

(4) *Jeder lokalvollständige* (LB)*-Raum* $E[\mathfrak{T}]$, *der hebbar in der Klasse der* (LB)*-Räume ist, ist isomorph einem komplementären Teilraum eines* $\bigoplus_{n=1}^{\infty} l^1_{d_n}$.

Wie in 4.(2) beweist man, daß E isomorph einem Quotientenraum $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} l^1_{d_n}\right)/H$ ist. Da E hebbar ist, gilt $\bigoplus_{n=1}^{\infty} l^1_{d_n} = F \oplus H$, F isomorph zu E.

Nach den Resultaten von Nr. 3 liegt die Vermutung nahe, daß jeder komplementäre Teilraum eines $\bigoplus_{n=1}^{\infty} l^1_{d_n}$ isomorph einem $\bigoplus_{n=1}^{\infty} l^1_{d'_n}$ ist mit $d'_n \leqq d_n$. Diese Frage bleibt ebenfalls offen. Wir beweisen die Umkehrung von (4) auf anderem Wege.

(5) *Jeder komplementäre Teilraum* F *eines* $\bigoplus_{n=1}^{\infty} l^1_{d'_n}$ *ist ein lokal vollständiger* (LB)*-Raum.*

Beweis. F ist als abgeschlossener Teilraum eines vollständigen Raumes vollständig, also erst recht lokal vollständig ([7], § 18, 5.(3) und § 20, 11.(2)). Nun ist $\bigoplus_{n=1}^{\infty} l^1_{d_n}$ bornologisch und ein (DF)-Raum, also auch F als Quotientenraum ([7], § 28, 4.(2) und § 29, 5.(1)). Jeder lokalvollständige bornologische (DF)-Raum ist aber ein (LB)-Raum ([7], § 29, 5.(5)).

(6) *Jeder in der Klasse der* (LB)*-Räume hebbare lokalvollständige* (LB)*-Raum ist isomorph einem komplementären Teilraum* F *eines* $\bigoplus_{n=1}^{\infty} l^1_{d_n}$ *und diese Räume* F *sind hebbar.*

Es ist noch die Hebbarkeit von F zu zeigen. Sei $\bigoplus_{n=1}^{\infty} l^1_{d_n} = F \oplus G$ und sei $E[\mathfrak{T}]$ ein (LB)-Raum mit $E/H \sim F$. Der Raum $G \oplus E$ ist nach (5) das topologische Produkt zweier (LB)-Räume, $G \oplus E = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \oplus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Dann ist

$$G \oplus E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \oplus E_n)$$

und die Topologie von $G \oplus E$ ist die der lokalkonvexen Hülle. Also ist $G \oplus E$ ebenfalls ein (LB)-Raum.

Es ist $(G \oplus E)/H \sim G \oplus E/H \sim G \oplus F = \bigoplus_{n=1}^{\infty} l^1_{d_n}$. Nach (3) gibt es eine stetige Projektion P von $G \oplus E$ mit dem Kern H. Wie im letzten Teil des Beweises von 4.(3) folgt dann, daß die Einschränkung P_E von P auf E eine Projektion von E mit dem Kern H ist, F ist hebbar.

Literatur

[1] GOHBERG, I. C., and M. G. KREIN: The basic propositions on defect numbers, root numbers and indices of linear operators. Uspehi Mat. Nauk (N.S.) **12** (1957), no. 2 (74), 43—118; AMS Translation Series 2, **13**, 185—264 (1960).

[2] GOODNER, D. B.: Projections in normed linear spaces. Trans. Am. Math. Soc. **69**, 89—108 (1950).

[3] GROTHENDIECK, A.: Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces L^1. Canad. J. Math. **7**, 552—561 (1955).

[4] HASUMI, M.: The extension property of complex Banach spaces. Tôhoku Math. J. **10**, 135—142 (1958).

[5] KELLEY, J. L.: Banach spaces with the extension property. Trans. Am. Math. Soc. **72**, 323—326 (1952).

[6] KÖTHE, G.: Das Reziprokentheorem für zeilenabsolute Matrizen. Monatsh. Math. Physik **47**, 224—233 (1939).

[7] — Topologische lineare Räume I. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.

[8] — Vollständige lokalkonvexe Räume abzählbarer Dimension. Arch. Math. **13**, 377—384 (1962).

[9] LINDENSTRAUSS, J.: Extension of compact operators. Mem. Am. Math. Soc. Nr. 48 (1964).

[10] NACHBIN, L.: A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations Trans. Am. Math. Soc. **68**, 28—46 (1950).

[11] — Some problems in extending and lifting continuous linear transformations. Proc. Intern. Symposium on linear spaces, Jerusalem 1961, 340—350.

[12] PEŁCYŃSKI, A.: Projections in certain Banach spaces. Studia Math. **19**, 209—228 (1960).

[13] PHILLIPS, R. S.: On linear transformations. Trans. Am. Math. Soc. **48**, 516—541 (1940).

Prof. Dr. Dr. h.c. G. KÖTHE
6 Frankfurt/Main, Parkstr. 14[1]

(Eingegangen am 20. April 1965)

SALIÉ, H.
Math. Annalen 165, 196—203 (1966)

Reichweite von Mengen aus drei natürlichen Zahlen

ERNST HÖLDER zum 65. Geburtstag

HANS SALIÉ

1. Wenn $a \geqq 2$ und $b > a$ natürliche Zahlen sind und

$$b = af + r \tag{1}$$

gesetzt wird mit

$$f = \left[\frac{b}{a}\right] \geqq 1, \tag{2}$$

der größten ganzen Zahl unterhalb $\frac{b}{a}$, und

$$0 \leqq r < a, \tag{3}$$

so haben die im folgenden zu untersuchenden Mengen

$$\mathfrak{A} = \{0, 1, a, b\} \tag{4}$$

bekanntlich die Ordnung

$$h = a + f - 2, \tag{5}$$

das ist die kleinste natürliche Zahl, für die

$$h\mathfrak{A} \supseteq [0, b] \tag{6}$$

gilt. Dabei bedeutet $h\mathfrak{A}$ die aus h Summanden $\mathfrak{A}$ nach SCHNIRELMANN gebildete Summe. $[m, n]$ wird zur Abkürzung für die Sequenz ganzer Zahlen

$$[m, n] = \{m, m+1, \ldots, n-1, n\}, \qquad m \geqq 0, n > m \tag{7}$$

geschrieben. In (6) steht nur für $h = 1$, wenn also $\mathfrak{A} = \{0, 1, 2, 3\}$ ist, das Gleichheitszeichen. Für $h \geqq 2$ enthält $h\mathfrak{A}$ eine Sequenz $[0, R]$, in der $R > b$ ist. R wird Reichweite von $\mathfrak{A}$ genannt, wenn R die *größte* natürliche Zahl mit $h\mathfrak{A} \supseteq [0, R]$ ist. Jedes natürliche $l \leqq R$ läßt sich demnach als Summe von h Summanden aus $\mathfrak{A}$ darstellen. $\mathfrak{A}$ heißt auch eine Abschnittsbasis der Ordnung h für R.

Geschlossene Ausdrücke für R bei beliebig gegebenen a und b scheinen nicht bekannt zu sein. Wie im folgenden gezeigt werden soll, lassen sich jedoch in vielen Fällen die Reichweiten von $\mathfrak{A}$ explicit angeben. Die Ergebnisse werden benutzt, um eine Abschätzung nach unten für das *größte* R herzuleiten, das bei den Mengen (4) *gegebener* Ordnung h auftreten kann. Eine zu einem solchen R, das gewöhnlich ([1], [2]) $n_h(3)$ bezeichnet wird, gehörige

Abschnittsbasis ist also eine zu $n_h(3)$ gehörige extremale Abschnittsbasis. Es ergibt[1] sich (man vergleiche dazu die in [3] gegebene Abschätzung für $n_3(k)$)

$$n_h(3) > \left(\frac{h}{3}\right)^3 + ch^2, \quad c = \frac{31}{36} \quad \text{für } h \geqq 13 \tag{8}$$

schärfer als die bekannte Abschätzung ([2], S. 49)

$$n_h(3) \geqq \left(\left[\frac{h}{3}\right] + 1\right)^3.$$

Um einen besseren Einblick in den Zusammenhang der Mengen $\mathfrak{A}$ mit ihren Reichweiten zu erhalten, empfiehlt es sich, die Aufgabenstellung umzukehren. Da alle Werte für R in der Form

$$R = (s+2)\,b - t, \quad s \geqq 0, \quad s+2 \leqq t \leqq b \tag{9}$$

auftreten, ist es naheliegend, nach den sämtlichen Mengen $\mathfrak{A}$ zu fragen, die bei gegebenem $s \geqq 0$ zu einem in der Darstellung (9) gegebenen R führen. Für $s \leqq 3$ wurde das Ergebnis (das sich auf alle s verallgemeinern läßt) aufgeschrieben.

2. Für jedes ganze $g \geqq 1$ enthalten die Mengen $g\mathfrak{A}$ die Sequenzen

$$[by + ax, (b-1)y + (a-1)x + g], \qquad \begin{matrix} 0 \leqq x \leqq g - y \\ 0 \leqq y \leqq g \end{matrix} \tag{10}$$

die sich, wenn $g = h$ die Ordnung von $\mathfrak{A}$ ist, für $0 \leqq y \leqq f$ zu

$$[by, b(y+1) - a(y-1) - (r+2)] \tag{11a}$$

$$[b(y+1) - a(y-x-1) - r, b(y+1) - a(y-x-2) - (x+r+3)] \tag{11b}$$

$$\begin{matrix} 0 \leqq x \leqq a-3 \quad (\text{zu } a = 2 \text{ kein } x) \\ 0 \leqq y \leqq f \end{matrix}$$

zusammenziehen. Es verbleiben dann noch aus (10)

$$[by + ax, by + a(x+1) + f - (x+y+2)] \qquad \begin{matrix} f \leqq y \leqq h \\ 0 \leqq x \leqq h - y. \end{matrix} \tag{12}$$

Aus (11a) ergibt sich für $y = 0$

$$[0, b + a - (r+2)], \tag{13}$$

wobei $b + a - (r+2) \geqq b - 1$ wegen (3) ist, so daß sich das für $y = 1$ aus (11a) entstehende Intervall

$$[b, 2b - (r+2)] \tag{14}$$

mit (13) zu

$$[0, 2b - (r+2)] \tag{15}$$

[1] Die in [4] erhaltenen Resultate beziehen sich nur auf reguläre Abschnittsbasen.

vereinigt. Man bemerke auch, daß in (10) für $g = h - 1$ der in $g\mathfrak{A}$ nicht zu verlängernde Abschnitt $[0, b-(r+2)]$ auftritt, der wegen $b-(r+2) \leqq b-2$ den Anschluß an einen mit b beginnenden nicht erreicht. Damit ist bewiesen, daß h tatsächlich die Ordnung von $\mathfrak{A}$ ist. Aus (15) geht hervor:

Satz 1. *Für alle Mengen* $\mathfrak{A}$ *ist* $R \geqq 2b-(r+2)$.

Wann hierin das Gleichheitszeichen steht, beantworten die Sätze 2 und 3.

Satz 2. *Für alle Mengen* $\mathfrak{A}$ *mit* $r=0$ *ist* $R = 2b-2$.

Beweis. Wenn $r=0$ ist, wird $b = af$ und daher wegen $b > a$ $f \geqq 2$. Enthielte $h\mathfrak{A}$ die Zahl $2b-1$, so müßte sie in (11b) für $y=0$ auftreten, da für $y \geqq 1$ alle Zahlen in (11b) mindestens gleich $2b$ sind. Dies ist aber weder der Fall, wenn $a \geqq f+2$ ist, wie die Sequenzen $(y=0,\ x=f-2)\ [2b-a,\ 2b-(f+1)]$ und $(y=0,\ x=f-1)\ [2b,\ 2b+a-(f+2)]$ zeigen, noch wenn $a \leqq f+1$ ist, weil dann die für $y=0$ größte Zahl ah in (11b) nicht $a(f+1+f-2) = 2b-a$ überschreitet.

Satz 3. *Für alle Mengen* $\mathfrak{A}$ *mit* $a \leqq f+r$ *ist* $R = 2b-(r+2)$.

Beweis. $r=0$ ist durch Satz 2 erledigt. Auch für $r \geqq 1$ fehlt die Zahl $2b-(r+1)$ in $h\mathfrak{A}$, die in einem Intervall (11b) für $y=0$ liegen müßte. Ist $r=1$, nach Voraussetzung also $a \leqq f+1$, so wird die größte Zahl für $y=0$ in (11b)

$$ah = a(a+f-2) \leqq a(2f-1) = 2b-(a+2) \leqq 2b-4 < 2b-(r+2).$$

Ist nun $r \geqq 2$ und $a \leqq f+2$, so wird $h \leqq 2f$ und $ah \leqq 2af = 2b-2r \leqq 2b-(r+2)$. Wenn schließlich $r \geqq 2$, $a \geqq f+2$ ist, kann man in (11b) $x = f-1$, $y=0$ nehmen. Das entstehende Intervall $[2b-2r,\ 2b-(r+2)-(f+r-a)]$ enthält keine Zahl oberhalb $2b-(r+2)$, da nach Voraussetzung $f+r-a \geqq 0$ ist, und das für $y=0$, $x=f$ aus (11b) gebildete Intervall schließt wegen $r \leqq a-1$ mit $b+a(f+1)-r \geqq b+af+1 = 2b-r+1$ nicht an das vorangehende an.

Der folgende Hilfssatz gibt bei gewissen Mengen $\mathfrak{A}$ eine größere Schranke für R als Satz 1 an.

Hilfssatz 1. *Wenn bei ganzem* $0 \leqq v \leqq r$

$$f \geqq v+1, \quad a \geqq f+r+v \tag{16}$$

ist, gilt für die Reichweite der betreffenden Mengen

$$R \geqq (v+2)\,b-(r+v+2). \tag{17}$$

Zum Beweise sei $v \geqq 1$, da $v=0$ im Satz 1 enthalten ist. Zuerst wird gezeigt, daß unter der Voraussetzung (16) jede Sequenz

$$[(\varrho+1)\,b-2r,\ (\varrho+2)\,b-(r+\varrho+2)], \qquad 1 \leqq \varrho \leqq v \tag{18}$$

in $h\mathfrak{A}$ auftritt. Zu diesem Zwecke braucht man aus (11b) die folgenden Intervalle

$$\begin{matrix} x = f+\varrho-2 \\ y = \varrho-1 \end{matrix} \qquad [(\varrho+1)\,b-2r,\ (\varrho+1)\,b-2r+a-f-(\varrho+1)] \tag{19}$$

$$\begin{matrix} x = \varrho-1 \\ y = \varrho \end{matrix} \qquad [(\varrho+1)\,b-r,\ (\varrho+1)\,b-r+a-(\varrho+2)] \tag{20}$$

und aus (11a) für $y = \varrho + 1$

$$[(\varrho+1)\,b, (\varrho+2)\,b - \varrho a - (r+2)]\,. \tag{21}$$

Weiter hat man aus (11b) für jedes λ

$$0 \leqq \lambda \leqq \varrho - 1 \tag{22}$$

zu bilden

$$x = f + \lambda - 1$$

$$y = \varrho \tag{23, 2\lambda}$$

$$[(\varrho+2)\,b - (\varrho-\lambda)\,a - 2r, (\varrho+2)\,b - (\varrho-\lambda-1)\,a - 2r - (f+\lambda+2)]$$

$$x = \lambda$$

$$y = \varrho + 1 \tag{23, 2\lambda+1}$$

$$[(\varrho+2)\,b - (\varrho-\lambda)\,a - r, (\varrho+2)\,b - (\varrho-\lambda-1)\,a - r - (\lambda+3)].$$

Man überzeugt sich, daß auf Grund der Voraussetzungen (16) in jeder eckigen Klammer von (19) bis (23) die zweite Zahl mindestens so groß wie die erste ist und stellt weiter leicht fest, daß sich wegen (16) die Intervalle

$$(19),\ (20),\ (21),\ (23{,}0),\ (23{,}1),\ \ldots,\ (23,\ 2\varrho - 1)$$

in der angegebenen Reihenfolge zu (18) zusammenfügen. Geht man jetzt von (15) aus und läßt für $\varrho = 1, 2, \ldots, \nu$ die Sequenzen (18) folgen, so entsteht

$$[0, (\nu+2)\,b - (r+\nu+2)]\,,$$

weil für jedes $\varrho \leqq r - 1$

$$(\varrho+2)\,b - 2r \leqq (\varrho+2)\,b - (r+\varrho+2) + 1$$

ist. Aus Hilfssatz 1 erhält man für $\nu = r$

Hilfssatz 2. *Wenn*

$$a \geqq f + 2r\,, \quad f > r \tag{24}$$

ist, wird

$$R \geqq (r+2)\,b - 2(r+1)\,. \tag{25}$$

Die Abschätzung (25) bleibt übrigens auch richtig, wenn $f \leqq r$ ist. Sie geht durch (26) in eine Gleichheit über.

Satz 4. *Alle Mengen* $\mathfrak{A}$ *mit*

$$f + 2r \leqq a < 2f + 2r \tag{26}$$

haben

$$R = (r+2)\,b - 2(r+1)\,. \tag{27}$$

Der Beweis dieses Satzes und weiter unten angegebener Sätze verläuft ganz entsprechend dem von Hilfssatz 1. Er wird daher nicht dargestellt.

Die Sätze 3 und 4 sind die Spezialfälle $\nu = 0$ und $\nu = 1$ vom allgemeineren

Satz 5. *Alle Mengen* $\mathfrak{A}$ *mit*

$$\nu(f + r - 1) + r < a \leqq (\nu+1)(f + r - 1) + 1\,, \quad \nu \geqq 0 \tag{28}$$

haben

$$R = (r\nu + 2)\,b - (r\nu + r + 2)\,. \tag{29}$$

Setzt man in Satz 5 $r=1$, so gibt (28) $v=\left[\frac{a-2}{f}\right]$. Es gilt

Satz 6. *Für Mengen* $\mathfrak{A}$ *mit* $r=1$ *ist*

$$R=\left(\left[\frac{h}{f}\right]+1\right)b-\left(\left[\frac{h}{f}\right]+2\right). \tag{30}$$

Es steht also die Berechnung von R noch aus, wenn für a

$$(v+1)(f+r-1)+1<a<(v+1)(f+r-1)+r+1\,,\quad v\geqq 0 \tag{31}$$

gilt. In diesem Falle gibt es kein (27) entsprechendes Ergebnis. Als Beispiel werde in (31) $v=0$, $a=f+r+1$ genommen.

Satz 7. *Für Mengen* $\mathfrak{A}$ *mit* $a=f+r+1$, $r\geqq 1$ *ist*

$$R=\left(\left[\frac{r-1}{f+1}\right]+3\right)b-\begin{cases}r+3 & r\equiv 1 \pmod{(f+1)}\\ r+2 & r\not\equiv 1 \pmod{(f+1)}.\end{cases}$$

Erwähnt sei noch eine obere Schranke für R. Wenn $a\geqq f$, $f\geqq 3$ ist, gilt $R<\left(\left[\frac{a-f}{2}\right]+2\right)b$.

3. Setzt man (5) in (4) ein, so erhält man alle Mengen der gegebenen Ordnung h in der Form

$$\mathfrak{A}=\{0,\,1,\,h+2-f,\,f(h+2-f)+r\}\quad 0\leqq r\leqq h+1-f\,. \tag{32}$$

Ihre Anzahl ist

$$\frac{h(h+3)}{2}-1\,. \tag{33}$$

Für die Mengen (32) mit $f=1$ gilt

Satz 8. $\mathfrak{A}=\{0,\,1,\,h+1,\,h+1+r\}$ *hat*

$$R\geqq(h+1)^2-r(r-1)-1\,.$$

Gleichheit steht, wenn $r|h$ *ist.*

Wählt man in (32)

$$f=\left[\frac{h}{3}\right]-1\,,\quad r=\left[\frac{h+1}{6}\right]+2\,,\quad h\geqq 9\,, \tag{34}$$

so kann Satz 4 mit $a=f+2r+1$ angewendet werden, wenn wegen (26) $f\geqq 2$ vorausgesetzt wird. Tatsächlich ist $h+2-f=f+2r+1$, denn

$$2f+2r-1=2\left[\frac{h}{3}\right]+2\left[\frac{h+1}{6}\right]+1=h\,.$$

Also ist h ungerade, und zwar $h \geqq 9$ wegen $f \geqq 2$. (27) ergibt nun

Satz 9. $h \equiv 1 \pmod 6$ $\mathfrak{A} = \left\{0, 1, 2\left(\frac{h-1}{3}\right) + 4, 2\left(\frac{h-1}{3}\right)^2 + 5\left(\frac{h-1}{6}\right) - 2\right\}$

$$R = \left(\frac{h-1}{3}\right)^3 + 37\left(\frac{h-1}{6}\right)^2 + 8\left(\frac{h-1}{3}\right) - 14, \quad h \geqq 13 \tag{35}$$

$h \equiv 3 \pmod 6$ $\mathfrak{A} = \left\{0, 1, \frac{2h}{3} + 3, 2\left(\frac{h}{3}\right)^2 + \frac{h-3}{2}\right\}$

$$R = \left(\frac{h}{3}\right)^3 + 31\left(\frac{h-3}{6}\right)^2 + 19\left(\frac{h}{3}\right) - 18, \qquad h \geqq 9 \tag{36}$$

$h \equiv 5 \pmod 6$ $\mathfrak{A} = \left\{0, 1, 2\left(\frac{h-5}{3}\right) + 7, 2\left(\frac{h-5}{3}\right)^2 + 5\left(\frac{h-5}{2}\right) + 3\right\}$

$$R = \left(\frac{h-5}{3}\right)^3 + 55\left(\frac{h-5}{6}\right)^2 + 38\left(\frac{h-5}{3}\right) + 7, \quad h \geqq 11. \tag{37}$$

Setzt man in Satz 4

$$f = \left[\frac{h+1}{3}\right] - 1, \quad r = \left[\frac{h+2}{6}\right] + 2, \quad a = f + 2r,$$

so muß $h \geqq 5$ sein, da $f \geqq 1$ ist. Die Ordnung

$$a + f - 2 = 2f + 2r - 2 = 2\left(\left[\frac{h+1}{3}\right] + \left[\frac{h+2}{6}\right]\right) = h$$

ist gerade. Aus (27) erhält man

Satz 10.

$h \equiv 0 \pmod 6$ $\mathfrak{A} = \left\{0, 1, \frac{2h}{3} + 3, 2\left(\frac{h}{3}\right)^2 + \frac{h}{2} - 1\right\}$

$$R = \left(\frac{h}{3}\right)^3 + 35\left(\frac{h}{6}\right)^2 + 3\left(\frac{h}{2}\right) - 10, \qquad h \geqq 6\ . \tag{38}$$

$h \equiv 2 \pmod 6$ $\mathfrak{A} = \left\{0, 1, 2\left(\frac{h-2}{3}\right) + 4, 2\left(\frac{h-2}{3}\right)^2 + \frac{3h}{2} - 1\right\}$

$$R = \left(\frac{h-2}{3}\right)^3 + 41\left(\frac{h-2}{6}\right)^2 + 6h - 10, \qquad h \geqq 8\ . \tag{39}$$

$h \equiv 4 \pmod 6$ $\mathfrak{A} = \left\{0, 1, 2\left(\frac{h-4}{3}\right) + 6, 2\left(\frac{h-4}{3}\right)^2 + 13\left(\frac{h-4}{6}\right) + 3\right\}$

$$R = \left(\frac{h-4}{3}\right)^3 + 53\left(\frac{h-4}{6}\right)^2 + 11h - 37, \qquad h \geqq 10. \tag{40}$$

In (35) bis (37) ist $R>\left(\frac{h}{3}\right)^3+31\left(\frac{h}{6}\right)^2$ für $h\geqq 13$ und in (38) bis (40) $R>\left(\frac{h}{3}\right)^3+33\left(\frac{h}{6}\right)^2$ für $h\geqq 10$.

Die größte Reichweite $n_3(h)$, die bei den Mengen (32) gegebener Ordnung h auftreten kann, muß also mindestens so groß wie die in Satz 9 und 10 genannten Werte für R sein. Es gilt

Satz 11. $n_3(h)>\left(\frac{h}{3}\right)^3+31\left(\frac{h}{6}\right)^2, \quad h\geqq 13.$

4. Gegeben sei die ganze Zahl $s\geqq 0$. Es wird die Frage behandelt: Welche Mengen (4) haben Reichweiten der Form (9)? Zuerst kann angegeben werden:

Satz 12. *Soll* $\mathfrak{A}$ *für* $s\geqq 1$ *und* $a\geqq 2s+1$ *die Reichweite* (9) *haben, so ist notwendig*

$$b\leqq a^2-2as+s. \tag{41}$$

Für $b=a^2-2as+s$ *ist* $R=(s+2)\,b-2(s+1)$. *Die Bedingung* (41) *ist aber nicht hinreichend.*

Für $s=0$ gibt es nur die durch die Sätze 2 und 3 gekennzeichneten Mengen. Die Anzahl dieser Mengen ist bei gegebener Ordnung h dann $\left[\frac{h^2+3h-3}{4}\right]$; so daß es wegen (33) $\left[\frac{h^2}{4}\right]$ Mengen mit $s\geqq 1$ und der Bedingung (9) gibt.

Der Fall $s=1$ ergibt $\left[\frac{h+1}{3}\right]$ Mengen, und zwar zu jedem a die folgenden $a-2$ Mengen:

$$\begin{array}{lll} r=1 & f+2\leqq a\leqq 2f+1 & \text{mit } R=3b-4 \\ 2\leqq r\leqq f+1 & a=f+r+1 & R=3b-(r+2). \end{array}$$

Unter diesen Mengen gegebener Ordnung $h\geqq 2$ hat die Menge

$$\left\{0,1,\left[\frac{h+1}{2}\right]+2,\left(\left[\frac{h+1}{2}\right]+1\right)\left(\left[\frac{h}{2}\right]+1\right)\right\}$$

die größte Reichweite, nämlich $R=\left[\frac{3h^2}{4}\right]+3h-1$.

Für $s=2$ erhält man zu jedem $a\geqq 4$ die folgenden Mengen und nur diese:

$$\begin{array}{lll} r=1 & 2f+2\leqq a\leqq 3f+1 & \text{mit } R=4b-5 \\ r=2 & f+4\leqq a\leqq 2f+3 & R=4b-6 \\ a=f+r+1 & r=f+2 & R=4b-(r+3) \\ a=f+r+1 & f+3\leqq r\leqq 2f+2 & R=4b-(r+2) \\ a=f+r+2 & 3\leqq r\leqq f+2 & R=4b-(r+2). \end{array}$$

Schließlich werde noch der Fall $s=3$ aufgeschrieben:

$r=1$	$3f+2\leqq a\leqq 4f+1$	mit $R=5b-6$
$r=2$	$a=2f+4$	$R=5b-6$
$r=3$	$f+6\leqq a\leqq 2f+5$	$R=5b-8$
$a=f+r+1$	$r=2f+3$	$R=5b-(r+3)$
	$2f+4\leqq r\leqq 3f+3$	$R=5b-(r+2)$
$a=f+r+2$	$r=f+3$	$R=5b-(r+3)$
$a=f+r+3$	$4\leqq r\leqq f+3$	$R=5b-(r+2)$.

Bei beliebigem $s\geqq 1$ sind $2s$ Fälle zu unterscheiden: $r=1, 2, \ldots, s$ mit Bedingungen für a sowie $a=f+r+1, f+r+2, \ldots, f+r+s$ mit Bedingungen für r.

Literatur

[1] Rohrbach, H.: Ein Beitrag zur additiven Zahlentheorie. Math. Z. **42**, 1—30 (1937).
[2] Stöhr, A.: Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe I. J. reine angew. Math. **194**, 40—65 (1955).
[3] Härtter, E.: Einige Abschätzungen für Abschnittsbasen. J. reine angew. Math. **205**, 82—90 (1961).
[4] Hofmeister, G.: Über eine Menge von Abschnittbasen. J. reine angew. Math. **213**, 43—57 (1964).

Prof. Dr. H. Salié
X 7033 Leipzig, Angerstr. 7

(Eingegangen am 18. November 1965)

MAURIN, K.
Math. Annalen 165, 204—222 (1966)

Allgemeine Eigenfunktionsentwicklungen, unitäre Darstellungen lokalkompakter Gruppen und automorphe Funktionen

Herrn Prof. Dr. ERNST HÖLDER zum 65. Geburtstag

KRZYSZTOF MAURIN

Die Entdeckung des kontinuierlichen Spektrums für einen selbstadjungierten (s.a.) Operator war Ausgangspunkt für die gewaltige Schöpfung Hilbertscher Spektraltheorie, die in der berühmten Formel $A = \int \lambda dE(\lambda)$ kulminierte, welche die endlichdimensionale Eigenwertgleichung (*) $Ae_\lambda = \lambda e_\lambda$, $H = \oplus H_\lambda$ ersetzte. Man hat aber immer gefühlt, daß es auch im unendlichen Fall eine Erweiterung der Gleichung (*) geben müsse (Berühmteste Antizipation ist wohl DIRACs Standardwerk). Nach vielen Vorstößen — zuerst, dank der Distributionstheorie, für Differentialoperatoren — gelang es mit Hilfe der Theorie der nuklearen Räume und direkter Integrale den allgemeinen Fall eines s.a. Operators zu behandeln. Im ersten Teil der Abhandlung möchten wir diese Ideen möglichst selbständig (ohne viele Literaturhinweise) entwickeln.

In den zwanziger Jahren gelang es HERMANN WEYL, Integralgleichungen auf Darstellungen kompakter Gruppen anzuwenden: Es entstand eine harmonische, wunderbar einfache Theorie der Zerlegung unitärer Darstellungen (U, H) in die orthogonale Summe irreduzibler Darstellungen: $U_g = \oplus U_g^\lambda$. Diese Zerlegung wurde erzielt durch eine Konstruktion eines Integraloperators mit einem stetigen biinvarianten Kern. Ein solcher Operator ist 1° mit allen Operatoren (U_g) der Darstellung vertauschbar und 2° vollstetig (wie man neuerdings sagt: „kompakt"), besitzt also ein reines Punktspektrum, und seine Eigenräume H_λ sind endlichdimensional; die Zerlegung von H_λ in irreduzible Räume ist schon elementar. Für nichtkompakte Gruppen gibt es meist keine solchen Integraloperatoren: Die Weylsche Theorie ist also auf den nichtkompakten Fall nicht übertragbar. (WEYLs Freude, in seiner Behandlung fastperiodischer Funktionen einen nichtkompakten Fall zu erfassen — $\mathbb{R}$ ist nichtkompakt —, erwies sich als unbegründet: A. WEILs Kompaktifizierung!)

v. NEUMANNs imposante Theorie direkter Integrale erlaubten ihm und später MAUTNER und GODEMENT, eine unitäre Darstellung einer beliebigen separablen l.k. Gruppe in ein direktes Integral von Faktoren — bzw. irreduziblen Darstellungen — zu zerlegen:

$$(**) \qquad (U, H) = \int (U^\lambda, H^\lambda)\, d\sigma .$$

Hier ist der Zusammenhang mit der Eigenfunktionentheorie scheinbar verlorengegangen. Im zweiten Teil zeigen wir, daß man in der v. Neumannschen (bzw. Mautnerschen) Zerlegung (**) H^λ doch als verallgemeinerte Eigenräume gewisser Operatoren auffassen kann. Diese Operatoren bilden eine natürliche Verallgemeinerung von Differential- und Integraloperatoren auf Lieschen Gruppen. Zu ihrer Konstruktion wurden Distributionen auf einer l.k. Gruppe herangezogen.

Im letzten — dritten — Teil zeigen wir, wie die vorstehenden Theorien zur Definition und zu einem Existenzbeweis allgemeiner Γ-automorpher Formen und Funktionen auf den homogenen Räumen $K\backslash G$ (K eine kompakte, Γ eine beliebige diskrete Untergruppe von G) herangezogen werden können.

Diese Abhandlung ist eine erweiterte Fassung der Vorlesungen, die ich in Mainz (12. bis 17. Juli 1965) auf Einladung von Professor E. HÖLDER halten durfte[1]. Sie soll ihm zu seinem 65. Geburtstag gewidmet werden.

Inhaltsangabe

1. Hilbert-Schmidt (H.S.)-Abbildungen. Nuklearität. Die Räume $\mathscr{D}(\Omega)$, $\mathscr{E}(\Omega)$ und ihre Nuklearität.

2. Allgemeine Eigenfunktionsentwicklungen. Direkte Integrale. v. Neumannsche Algebren. Zerlegbare und diagonale Operatoren. GELFANDs Tripel. Zerlegung eines Hilbert-Raumes in ein direktes Integral verallgemeinerter Eigenräume. Spektralsynthesis.

3. Distributionen auf einer lokalkompakten Gruppe G. Die Räume $\mathscr{D}(G)$, $\mathscr{E}(G)$, $\mathscr{D}'(G)$, $\mathscr{E}'(G)$. Der Gårdingsche Raum einer unitären Darstellung (U, H) von G. Die Darstellung $(\mathscr{E}', H)$ der Faltungsalgebra $\mathscr{E}'$. Umhüllende Algebra einer l.k. Gruppe. Invariante „Differentialoperatoren". $Z(\mathscr{E}'_e)$, $Z(\mathscr{E}')$.

4. Zerlegung der Darstellung (U, H) in ein direktes Integral irreduzibler Darstellungen in verallgemeinerten Eigenräumen der Repräsentanten $U(T)$ von $T \in Z(\mathscr{E}'_e)$ und $T \in Z(\mathscr{E}'(G))$.

5. Distributionen, Differential- und Integraloperatoren auf dem homogenen Raum $X = K\backslash G$. Selbstadjungiertheit wichtiger Operatoren auf X. Eigenfunktionsentwicklungen auf X.

6. Existenz- und Vollständigkeitssätze für allgemeine automorphe Funktionen und Formen. Abschließende Bemerkungen.

1. Hilbert-Schmidt (H.S.)-Abbildungen. Nuklearität

Alle in dieser Abhandlung vorkommenden Hilberträume sind separabel, sie besitzen also eine abzählbare orthonormale Basis.

Es seien H_k, $k = 1, 2$, Hilbertsche Räume mit dem Skalarprodukt $(.|.)_k$, $k = 1, 2$, und (e_j) sei eine orthonormale Basis von H_1. Für eine lineare stetige Abbildung $A: H_1 \to H_2$ ist die Zahl $|A|^2 := \Sigma \|Ae_j\|_2^2$ von der Basis (e_j) unabhängig.

[1] Entscheidende Vereinfachung und Verallgemeinerung unserer bisherigen Konstruktionen (vgl. [7], [8]) wurde im Juni 1965 in Orsay erzielt, wo ich als «professeur d'exchange» an der Pariser Universität, Centre d'Orsay, weilen durfte. Hier benutze ich die Gelegenheit, der Faculté des Scie. meinen herzlichsten Dank für ihre Gastfreundschaft auszusprechen.

Definition 1. Falls $|A| < \infty$, so heißt $A \in L(H_1, H_2)$ eine Hilbert-Schmidt-Abbildung.

Es ist klar, daß die identische Abbildung $I \in L(H)$ dann und nur dann H.S. ist, wenn der Raum H von endlicher Dimension ist ($\dim H < \infty$):

$$|I|^2 = \sum \|e_j\|^2 < \infty .$$

Es sei Ω eine n-dimensionale differenzierbare separable Mannigfaltigkeit; $C_0^\infty(\Omega)$ bedeutet die Menge der beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf Ω mit kompaktem Träger. Es sei Ω_j eine „Karte" in Ω; $H^p = H^p(\Omega_j)$ ist der Hilbertsche Raum meßbarer (komplexwertiger) Funktionen auf Ω_j mit dem Skalarprodukt

$$(f|h)_p := \int_{\Omega_j} \sum_{|\alpha| \leqq p} D^\alpha f \cdot \overline{D^\alpha h}, \qquad \text{wobei} \quad D = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^\alpha \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \ |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

Die Ableitungen werden im Sinne der Theorie der Distributionen verstanden.

H_0^p ist die Abschließung der Menge $C_0^\infty(\Omega_j)$ in der H^p-Norm. Das klassische Sobolevsche Lemma besagt, daß für $p > n/2 + l$ $H_0^p(\Omega_j)$ als eine Untermenge von $C^l(\Omega_j)$ betrachtet werden kann, und daß die Einbettungen $H_0^p(\Omega_j) \to C^l(\Omega_j)$ [und bei regulärem Rand von Ω_j auch $H^p(\Omega_j) \to C^l(\Omega_j)$] stetig sind. Genauer, es gibt eine von x und κ unabhängige Konstante c, daß

$$|D^\alpha u(x)| \leqq c \|u\|_{m+k}, \qquad m > n/2, \quad |\alpha| \leqq k, \quad u \in H_0^{m+k}. \tag{1.1}$$

Es gilt der folgende

Satz 1. *Es sei Ω_j ein Gebiet einer n-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit kompakter Abschließung. Falls $m > n/2$, $k \geqq 0$, so sind die kanonischen Einbettungen $H_0^{m+k}(\Omega_j) \to H_0^k(\Omega_j)$ vom H.S.-Typus.*

Wenn Ω_j einen regulären Rand besitzt, dann ist auch $H^{m+k}(\Omega_j) \to H^k(\Omega_j)$ vom H.S.-Typus.

Beweis. Wegen Ungleichung (1.1) ist für jedes $y \in \Omega_j$ $H_0^{m+k}(\Omega) \ni u \to D^\alpha u(y)$ ein lineares stetiges Funktional. Es gibt also ein $f_y^\alpha \in H_0^{m+k}(\Omega_j)$ so, daß

$$D^\alpha u(y) = (u|f_y^\alpha)_{m+k}, \qquad u \in H_0^{m+k}. \tag{1.2}$$

Wenn (e_i) eine orthonormale Basis in H_0^{m+k} ist, folgt aus (1.2)

$$\|f_y^\alpha\|_{m+k}^2 = \sum_i |(e_i|f_y^\alpha)_{m+k}|^2 = \sum_i |D^\alpha e_i(y)|^2 \leqq c^2 < \infty . \tag{1.3}$$

Wir summieren (1.3) über alle α mit $|\alpha| \leqq k$ und integrieren über Ω_j; wegen des Satzes von Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned} \infty > \int_{\Omega_j} \sum_{|\alpha| \leqq k} \|f_y^\alpha\|_{m+k}^2 \, dy &= \int_{\Omega_j} \sum_{|\alpha| \leqq k} \sum_i |D^\alpha e_i(y)|^2 \, dy \\ &= \sum_i \int_{\Omega_j} \sum_{|\alpha| \leqq k} |D^\alpha e_i(y)|^2 \, dy = \sum_i \|e_i\|_k^2 . \end{aligned}$$

Diese Ungleichung besagt gerade, daß die Einbettung $H^{m+k} \to H^k$ vom H.S.-Typus ist.

Korollar 1. *Es sei $\Omega_j \nearrow \Omega$, ..., d. h. (Ω_j) ist eine steigende Folge präkompakter Bereiche, die die Menge Ω ausschöpft. Es sei $H_j^m := H^m(\Omega_j)$ (bzw. $:= H_0^m(\Omega_j)$). Dann gibt es zu jedem Paar $(m, j) \in N$ ein Paar $(m', j') \in N$, daß die Einbettung $H_{j'}^{m'} \to H_j^m$ vom H.S.-Typus ist.*

Definition 2. Ein lokalkonvexer Raum Φ heißt nuklear, falls ein solches äquivalentes System von Halbnormen $(|\ |_\beta)_{\beta\in B}$ existiert, daß

1° für jedes β der (normierte) Quotienten-Raum $H_\beta := \Phi/N_\beta$, wobei $N_\beta = \{\varphi \in \Phi : |\varphi|_\beta = 0\}$, prähilbertsch ist.

2° Zu jedem $\beta \in B$ gibt es ein solches $\beta' \in B$, daß die Einbettung $H_{\beta'} \to H_\beta$ vom H.S.-Typus ist.

Die vorstehende Definition ist — wie A. PIETSCH in [9] gezeigt hat — äquivalent zu der „klassischen", von GROTHENDIECK gegebenen Definition des nuklearen Raumes; aus ihr folgt sofort, daß *ein Hilbert-* (oder allgemeiner ein Banach-) *Raum* $(H, \|\ \|)$ *dann und nur dann nuklear ist, wenn er endlichdimensional ist.*

Beweis. Wir haben eine einzige Norm und $H = \Phi$, weil $N = \{0\}$. Wegen 2° ist die Identität $I : H \to H$ vom H.S.-Typus, d. h. $\dim H < \infty$.

Wir stellen jetzt einige klassische fundamentale Eigenschaften nuklearer Räume in dem folgenden Lemma zusammen.

Lemma 1 (GROTHENDIECK, vgl. [9]). a) *Die Vervollständigung* $\tilde{\Phi}$ *eines nuklearen Raumes* Φ *ist nuklear.* b) *Ein abgeschlossener Unterraum* N *und der Quotientenraum* Φ/N *eines nuklearen Raumes sind wieder nuklear.* c) *Der strikte (abzählbare) Limes* $\Phi = \varinjlim \Phi_j$ *nuklearer Räume und die topologische abzählbare Summe* $\oplus \Phi_j$ *nuklearer Räume sind nuklear.* d) *Nukleare Räume sind reflexiv.*

Definition 3. $\mathscr{E}(\Omega)$ ist die Menge $C^\infty(\Omega)$, ausgestattet mit der l.konvexen Topologie, die durch die Normen $\|u\|_{m,j} := \|u\|_{H^m(\Omega_j)}$ gegeben ist, $m, j = 1, 2, \ldots$, $\Omega_j \nearrow \Omega$.

$\mathscr{D}(\Omega)$ ist die Menge $C_0^\infty(\Omega)$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger, die folgendermaßen topologisiert ist: Es sei Φ_j die Untermenge der Elemente von $C_0^\infty(\Omega)$, deren Träger in der Menge Ω_j liegt.

Φ_j ist mit der (relativen) Topologie des Raumes $\mathscr{E}(\Omega_j)$ ausgestattet und $\mathscr{D}(\Omega)$ ist induktiver Limes der Räume Φ_j: $\mathscr{D}(\Omega) := \varinjlim \Phi_j$, $\Omega_j \nearrow \Omega$.

Aus Korollar 1 und Lemma 1 folgt ein „neuer" Beweis von

Satz 2 (GROTHENDIECK). 1° $\mathscr{E}(\Omega)$ *ist nuklear.* 2° $\mathscr{D}(\Omega)$ *ist nuklear.* $\mathscr{E}$ *und* $\mathscr{D}$ *sind also reflexiv.*

Beweis. 1° folgt augenblicklich aus Definition 3 und Korollar 1. (2° folgt aus 1° und Satz 1.c.)

Bemerkung. Man kann zeigen, daß auch die Räume von Distributionen $\mathscr{D}'(\Omega)$ und $\mathscr{E}'(\Omega)$ nuklear, also reflexiv sind.

Definition 4. Es sei $(\Phi, \|\ \|_\alpha, \alpha \in A)$ ein l.konvexer Raum und $(E, \|\ \|)$ ein Banachraum. Eine Abbildung $F \in L(\Phi, E)$ heißt nuklear, falls sie folgende Gestalt hat:

$$F\varphi = \sum_j \langle \varphi, f_j^* \rangle g_j, \tag{1.4}$$

wobei $f_j^* \in \Phi'$ und $g_j \in E$,

$$\Sigma \|f_j^*\|_{-p} \|g_j\| < \infty, \tag{1.5}$$

wo $\|f^*\|_{-p} := \sup_{\|\varphi\|_p \leqq 1} |\langle \varphi, f^* \rangle|$ für eine stetige Halbnorm $\|\ \|_p$ in Φ.

Lemma 2 (GROTHENDIECK). *Es sei Φ nuklear und E ein Banachraum. Dann ist jedes $F \in L(\Phi, E)$ eine nukleare Abbildung.* (Diese Eigenschaft ist sogar für Nuklearität von Φ charakteristisch.)

2. Allgemeine Eigenfunktionsentwicklungen. Zerlegung unitärer Darstellungen in direkte Integrale irreduzibler Darstellungen

Definition 4'. Es sei (Λ, σ) ein separabler, lokal kompakter (l.c.) Maßraum. Für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei ein Hilbertraum $(\hat{H}(\lambda), (|)_\lambda)$ gegeben. Ein Vektorfeld $h(.)$ ist eine Abbildung $\Lambda \ni \lambda \to h(\lambda) \in \hat{H}(\lambda)$, d. h. $h(.) \in \Pi \hat{H}(\lambda)$,

Eine abzählbare Menge $(h_i(.))$ von Vektorfeldern heißt eine fundamentale Familie, falls:

1° Alle Funktionen $\Lambda \ni \lambda \to (h_i(\lambda)|h_j(\lambda))_\lambda \in \mathbb{C}$ meßbar sind für $i, j = 1, 2, \ldots$

2° Für jedes $\lambda \in \Lambda$ die Menge $\{h_j(\lambda) : j = 1, 2, \ldots\}$ den Raum $\hat{H}(\lambda)$ aufspannt.

Ein Vektorfeld $h(.)$ heißt *meßbar*, falls alle Funktionen $\lambda \to (h(\lambda)|h_j(\lambda))_\lambda$, $j = 1, 2, \ldots$ meßbar sind.

Das *direkte Integral der Hilberträume* $\hat{H}(\lambda)$, wo λ den Maßraum (Λ, σ) durchläuft, ist der lineare Raum von Äquivalenzklassen meßbarer Vektorfelder $h(.)$, für welche $\int \|h(.)\|_\lambda^2 \, d\sigma < \infty$, es wird mit $L^2(\Lambda, H(\lambda), \sigma)$, $\int_\Lambda \hat{H}(\lambda) \, d\sigma$ oder mit $\int_\Lambda^\oplus \hat{H}(\lambda) \, d\sigma$ bezeichnet. Dieser Raum ist ein separabler Hilbertscher Raum mit dem Skalarprodukt

$$(u(.)|v(.)) := \int_\Lambda (u(\lambda)|v(\lambda))_\lambda \, d\sigma .$$

Oft werden die $\hat{H}(\lambda)$ als Hilbertsche Folgenräume verstanden.

Diagonale und zerlegbare Operatoren. Es sei $I(\lambda)$ der Einheitsoperator im Raume $H(\lambda)$, und es sei $f \in L^\infty(\Lambda, \sigma)$ eine wesentlich beschränkte Funktion auf Λ. Dann heißt das Operatorfeld $\Lambda \ni \lambda \to f(\lambda) I(\lambda) \in L(H(\lambda))$ ein *Diagonaloperator* im Raume $\hat{H} = L^2(\Lambda, H(\lambda), \sigma)$.

Dieses Operatorfeld $\lambda \to f(\lambda) I(\lambda)$ kann als beschränkter Operator T_f im Raume $\hat{H}$ betrachtet werden:

$$\hat{H} \ni h \to T_f h \in \hat{H}, \quad \text{wo} \quad (T_f h)(\lambda) := f(\lambda) h(\lambda), \ \lambda \in \Lambda .$$

Man zeigt, daß $\|T_f\| = \|f\|_\infty$. Ein Operatorfeld $\lambda \to A(\lambda) \in L(H(\lambda))$ heißt meßbar, falls alle Funktionen $\lambda \to (A(\lambda) h_i(\lambda)|h_j(\lambda))$ meßbar sind, wo $(h_j(.))$ die Fundamentalfamilie ist. Einem meßbaren Operatorfeld $(A(\lambda))$ wird der Operator A mit $Ah(\lambda) = A(\lambda) h(\lambda)$ im Raume $\hat{H}$ zugeordnet. A wird *zerlegbarer* Operator im Raume $\hat{H} = L^2(\Lambda, \hat{H}(\lambda), \sigma)$ genannt und mit $\int A(\lambda) \, d\sigma$ bezeichnet.

Definition 5. Es sei H ein (separabler) Hilbertraum. Eine $*$-Unteralgebra $\mathscr{A}$ von $L(H)$ heißt eine *v. Neumannsche Algebra*, falls sie einer der äquivalenten Bedingungen genügt: 1° $\mathscr{A}$ ist schwach abgeschlossen; 2° $\mathscr{A}$ ist stark abgeschlossen; 3° $\mathscr{A} = \mathscr{A}''$, wobei $\mathscr{A}'$ den Kommutant von A, d. h. die Menge aller mit $\mathscr{A}$ vertauschbaren Operatoren aus $L(H)$ bedeutet.

Es gelten folgende klassische Sätze von V. NEUMANN:

Lemma 3 (V. NEUMANN). 1° *Die Algebra D diagonaler Operatoren ist eine kommutative v. Neumannsche Algebra.*

2° *Die Abbildung* $L^\infty(\delta) \ni f \to T_f \in D$ *ist ein topologischer Isomorphismus der normierten* $*$*-Algebra* $L^\infty(\Lambda, \sigma)$ *auf* D *für die schwachen Topologien beider Algebren.*

3° *Der Kommutant* D' *der diagonalen Algebra* D *ist eine v. Neumannsche Algebra* $\mathfrak{R}$ *zerlegbarer Operatoren in* $\hat{H}$: $D' = \mathfrak{R}$ *und* $\mathfrak{R}' = D$, *d. h. ein Operator ist dann und nur dann zerlegbar, falls er mit allen diagonalen Operatoren vertauschbar ist.*

Eine besonders wichtige Klasse v. Neumannscher Algebren bilden die sog. Faktoren:

Definition 6. Eine v. Neumannsche Algebra A, deren Zentrum $Z(A)$ aus skalaren Operatoren besteht, heißt *Faktor*, d. h. $A \cap A' = \{\lambda I : \lambda \in \mathbb{C}\}$. Wenn wir eine Untermenge B von $L(H)$ haben, dann ist der Bikommutant B'' die (kleinste) von B aufgespannte v.N.-Algebra.

In der Spektraltheorie unbeschränkter selbstadjungierter Operatoren spielt der Begriff der starken Vertauschbarkeit eine fundamentale Rolle.

Definition 7. Zwei s.a. Operatoren $A_k = A_k^*$, $k = 1, 2$ heißen *stark vertauschbar*, falls ihre Spektralscharen $\{E_k(\lambda)\}$ vertauschbar sind. Äquivalent damit ist Vertauschbarkeit ihrer Cayley-Transformierten: $(A_k + iI)(A_k - iI)^{-1}$, $k = 1, 2$.

Falls wir eine Menge M stark vertauschbarer Operatoren haben, so spannen die dazugehörigen Spektralscharen eine Kommutative v.N.-Algebra auf. Wir nennen sie die „von M erzeugte v.N.-Algebra".

Den Ausgangspunkt für unsere Theorie bildet der sog.

Vollständige Spektralsatz (v. NEUMANN). Es sei A_β, $\beta \in B$, eine „vertauschbare" Menge in $L(H)$ (oder A_β, $\beta \in B$, seien stark vertauschbar). Dann gibt es ein direktes Integral $\hat{H} = \int_\Lambda \hat{H}(\lambda)\, d\sigma$ und einen Hilbertraum-Isomorphismus F: $H \to \hat{H}$, so daß $FA_\beta F^{-1}$ diagonale Operatoren in $\hat{H}$ sind. Genauer:

$$(A_\beta h)\hat{}(\lambda)\,(FA_\beta h)(\lambda) = \hat{A}_\beta(\lambda)\,(Fh)(\lambda), \quad \lambda \in \Lambda,\ \hat{A}_\beta(\Lambda) = \text{Spektrum von } A_\beta.$$

$$(FA_\beta F^{-1})(\lambda) = \hat{A}_\beta(\lambda)\, I(\lambda), \quad \text{wo} \quad \hat{A}_\beta(\lambda) \in \mathbb{C}. \tag{2.1}$$

Bemerkung. Man sagt, daß die Abbildung F die Menge $\{A_\beta, \beta \in B\}$ simultan diagonalisiert, und aus später ersichtlichen Gründen wird F die „(A_β)-Fouriertransformation" genannt.

Obwohl der vollständige Spektralsatz sehr wichtig ist, so ist er doch für viele Anwendungen auf Probleme der Analysis und Quantentheorie schwer zu gebrauchen. Der folgende „nukleare Spektralsatz" (vgl. [5], [3], [4], [8]) bildet das nötige Bindeglied.

Satz 2. *Es sei* $(H, (|))$ *ein Hilbertraum und* $\Phi \subset H$ *ein solcher nuklearer Raum, daß* a) Φ *dicht in* H *ist*; b) *die Einbettung* $i : \Phi \to H$ *stetig ist. Es sei weiter* $F : H \to \hat{H}$ *ein Hilbertisomorphismus von* H *auf ein direktes Integral* $\hat{H} = L^2(\Lambda, \hat{H}(\lambda), \sigma)$. *Dann können* σ*-fast alle (f.a.)* $\hat{H}(\lambda)$ *als Unterräume des zu* Φ *dualen Raumes betrachtet werden:* $\hat{H}(\lambda) \subset \Phi'$, $\lambda \in \Lambda$. *Genauer: Wenn* $\hat{H}(\lambda)$ *als Folgenraum der Dimension* $d(\lambda)$ *betrachtet wird und* $\hat{\varphi} = F\varphi$, *wo* $\hat{\varphi}(\lambda) = (\hat{\varphi}_k(\lambda))$, $k = 1, 2, \ldots, d(\lambda)$, *dann gibt es solche* $e_k(\lambda) \in \Phi'$, *daß für* σ*-f.a.* λ

$$\hat{\varphi}_k(\lambda) = \langle \varphi, e_k(\lambda) \rangle, \quad k = 1, 2, \ldots, \dim \hat{H}(\lambda). \tag{2.2}$$

Der von den $(e_k(\lambda))$ (als o.n. Basis) aufgespannte Unterraum von Φ' wird mit $H(\lambda)$ bezeichnet. Falls F eine (A_β)-Fouriertransformation ist, wobei $A_\beta|\Phi \in L(\Phi)$, dann sind $e_k(\lambda)$ gemeinsame verallgemeinerte Eigenvektoren (v.E.v.) von A_β, $\beta \in B$, d. h. für $\varphi \in \Phi$ gilt

$$\langle A_\beta \varphi, e_k(\lambda)\rangle = \hat{A}_\beta(\lambda)\langle \varphi, e_k(\lambda)\rangle, \quad k = 1, 2, \ldots, \dim \hat{H}(\lambda), \quad \varphi \in \Phi, \quad d.\,h. \tag{2.3}$$

$$A'_\beta e_k(\lambda) = \hat{A}_\beta(\lambda)\, e_k(\lambda). \tag{2.3'}$$

Es gilt die verallgemeinerte Fourier-Plancherel-Gleichung

$$(\varphi|\psi) = \int_\Lambda \sum_{k=1}^{\dim H(\lambda)} \langle \varphi, e_k(\lambda)\rangle < \psi, e_k(\lambda) > d\sigma(\lambda). \tag{2.4}$$

Beweis. Da die Einbettung $i : \Phi \to H$ stetig ist, ist sie sogar nuklear:

$$i\varphi = \Sigma \langle \varphi, \varphi_j^*\rangle\, h_j, \tag{2.5}$$

wobei $\varphi_j^* \in \Phi'$, $h_j \in H$ und

$$\sum_j \|\varphi_j^*\|_{-p} \|h_j\| = \sum_j \|\varphi_j^*\|_{-p} \|\hat{h}_j\| < \infty, \tag{2.6}$$

wo $\hat{h} = Fh$ und

$$\|\varphi_j^*\|_{-p} := \sup|\langle \varphi, \varphi_j^*\rangle|, \quad \|\varphi\|_p \leqq 1 \tag{2.7}$$

für eine stetige Halbnorm $\| \ \|_p$ auf Φ ist. Wir werden beweisen, daß die Transformationen

$$F(\lambda) : \Phi \ni \varphi \to \hat{\varphi}(\lambda) := \Sigma \langle \varphi, \varphi_j^*\rangle\, \hat{h}_j(\lambda) \in \hat{H}(\lambda) \tag{2.8}$$

für σ-f.a. λ, stetig sind. Wir dürfen voraussetzen, daß $\|h_j\| = 1$ für $j = 1, 2, \ldots$ Wir haben also wegen (2.6)

$$\sum_j \|\varphi_j^*\|_{-p} = \sum_j \|\varphi_j^*\|_{-p} \|\hat{h}_j\| = \sum_j \|\varphi_j^*\|_{-p} \int \|\hat{h}_j(\lambda)\|_\lambda^2 \, d\sigma < \infty. \tag{2.9}$$

Daraus und dem Satz von Fubini bekommt man

$$\int \sum_j \|\varphi_j^*\|_{-p} \|\hat{h}_j(\lambda)\|^2 \, d\sigma < \infty,$$

also

$$c_1(\lambda)^2 := \Sigma \|\varphi_j^*\|_{-p} \|\hat{h}_j(\lambda)\|_\lambda^2 < \infty, \quad \text{für} \quad \sigma\text{-f.a. } \lambda, \tag{2.10}$$

und $c_1(.) \in L^2(\sigma)$.

Aus (2.9), (2.10), (2.7) und der Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} \|\hat{\varphi}(\lambda)\|^2 &= \left\| \sum_j \langle \varphi, \varphi_j^*\rangle \cdot \hat{h}_j(\lambda) \right\|_\lambda^2 \leqq \left(\sum_j \|\varphi\|_p \|\varphi_j^*\|_{-p} \|\hat{h}_j(\lambda)\|_\lambda \right)^2 \leqq \\ &\leqq \|\varphi\|_p^2 (\Sigma \|\varphi_j^*\|_{-p}^{\frac{1}{2}} \cdot \|\hat{h}_j(\lambda)\|_\lambda \cdot \|\varphi_j^*\|_{-p}^{\frac{1}{2}})^2 \leqq \\ &\leqq \|\varphi\|_p^2 \sum_j \|\varphi_j^*\|_{-p} \|\hat{h}_j(\lambda)\|^2 \cdot \sum_j \|\varphi_j^*\|_{-p} \leqq (c(\lambda)\|\varphi\|_p)^2, \end{aligned} \tag{2.11}$$

wo $c(\lambda) = \Sigma \|\varphi_j^*\|_{-p} c_1(\lambda) < \infty$ für f.a.λ. und sogar $c(.) \in L^2(\sigma)$. Daher $\|\hat{\varphi}(\lambda)\|_\lambda \leqq c(\lambda)\|\varphi\|_p$ für eine stetige Halbnorm $\| \ \|_p$. Aus (2.11) folgt, daß $e_k(\lambda) : \varphi \to \hat{\varphi}_k(\lambda)$ ein lineares stetiges Funktional auf Φ ist:

$$\hat{\varphi}_k(\lambda) = \langle \varphi, e_k(\lambda)\rangle, \quad k = 1, 2, \ldots, \dim \hat{H}(\lambda), \quad e_k(\lambda) \in \Phi'.$$

Die Gleichung (2.3) folgt aus (2.2) und (2.1). Die Räume $H(\lambda)$ können als gemeinsame verallgemeinerte Eigenräume von A_β betrachtet werden: Wegen der Stetigkeit von $A_\beta|\Phi$ auf Φ haben wir

$$\langle A_\beta \psi, \Sigma c_k e_k(\lambda)\rangle = \langle \psi, \sum c_k A'_\beta e_k(\lambda)\rangle = \hat{A}_\beta(\lambda)\,\langle \psi, \Sigma c_k e_k(\lambda)\rangle\,.$$

Da $i(\Phi) \subset H$ und $i: \Phi \to H$ stetig ist, so ist für jedes $h \in H$ das Funktional $\Phi \ni \varphi \to (\varphi|h)$ stetig. Man darf also H als eine Untermenge von Φ' betrachten.

Definition. Das Tripel $\Phi \subset H \subset \Phi'$, wobei Φ nuklear und dicht in H ist, nennen wir „Gelfand-Tripel". Oft ist es vorteilhaft, Φ' als den antidualen Raum von Φ — d. h. als den Raum der antilinearen Funktionale auf Φ — zu betrachten.

Es sei U ein solcher zerlegbarer unitärer Operator in $\hat{H} \subset \Phi'$, daß $U, U^*: \Phi \to \Phi$ stetig sind. Wegen der Reflexivität von Φ' und der Nuklearität von Φ können wir den Satz von Dunford-Gelfand anwenden und bekommen als Korollar

Satz 3

(2.12) $$\varphi = \int_\Lambda \varphi(\lambda)\, d\sigma\,, \qquad \varphi \in \Phi\,,$$

wobei $\varphi(\lambda) := \Sigma \hat{\varphi}_k(\lambda)\, e_k(\lambda)$,

(2.13) $$U = \int_\Lambda U(\lambda)\, d\sigma\,,$$

wobei $U(\lambda) = (U^*)'|H(\lambda)$ *und beide Integrale als schwache (falls* Φ' *nuklear ist, sogar als starke) Integrale verstanden werden*; (2.12) *gibt also eine Spektralsynthesis von* φ.

Eine v.N.-Algebra A der Operatoren in H ist im allgemeinen weder irreduzibel noch ein Faktor. Aber wie v. NEUMANN gezeigt hat, induziert das Zentrum $Z(A)$ von A eine Zerlegung des Raumes H und die zugehörige Zerlegung von A in ein direktes Integral von Faktoren. Diese Zerlegung ist wegen der Eindeutigkeit von $Z(A)$ eindeutig. Dagegen ist bekanntlich die Zerlegung von A in ein direktes Integral irreduzibler Algebren nicht eindeutig: Wie MAUTNER bewies, induziert jede maximale abelsche Algebra aus A' — dem Kommutant von A — eine Zerlegung in irreduzible Algebren.

In den nächsten Abschnitten werden wir diese Sätze auf Zerlegungen von $(U)''$ — der von einer unitären Darstellung $\{U = U_g : g \in G\}$ einer lokalkompakten Gruppe G aufgespannten v.N.-Algebra — anwenden. Um einen tieferen Einblick in diese Konstruktionen zu gewinnen, müssen wir uns den Distributionen auf beliebigen l.k. Gruppen zuwenden.

3. Distributionen auf einer lokalkompakten Gruppe

In diesem Abschnitt fassen wir kurz die wichtigsten Definitionen und Begriffe aus der Theorie der Distributionen auf einer l.k. Gruppe G zusammen.

Die Räume $\mathscr{D}(G)$, $\mathscr{E}(G)$, $\mathscr{E}'(G)$, $\mathscr{D}'(G)$. Für eine l.k. Gruppe G wird der Raum $\mathscr{D} = \mathscr{D}(G)$ der regulären Funktionen mit kompaktem Träger definiert. Dieser Raum ist für eine separable Gruppe nuklear. In den beiden wichtigsten Grenzfällen: α) G ist zusammenhängend, β) G ist diskret, wird der Raum folgendermaßen definiert.

α) *G zusammenhängend:* Ein Satz von YAMABE besagt, daß G ein projektiver Limes Liescher Gruppen ist: Zu jeder Umgebung U_k von e gibt es einen solchen Normalteiler $n_k \subset U_k$, daß $G_k := G/n_k$ Liesch ist. Der Raum $\mathscr{D}_k := \mathscr{D}(G_k)$ der beliebig differenzierbaren Funktionen mit kompakten Trägern auf der Lieschen Gruppe G_k ist nuklear. Der strikte induktive Limes $\mathscr{D}$ der Räume $\mathscr{D}(G_k)$

$$\mathscr{D} := \varinjlim \mathscr{D}_k = \varinjlim \mathscr{D}(G_k)$$

ist nuklear als abzählbarer (strikter) Limes nuklearer Räume.

β) *Diskreter Fall.* Es sei (K_k) eine Folge kompakter — daher endlicher — Untermengen von G, die G ausschöpft: $K_k \nearrow G$. Dann ist der Raum $\mathscr{D}_k := C_0(K_k)$ endlichdimensional — daher nuklear: $\mathscr{D}(G) := \varinjlim C_0(K_k)$ als strikter induktiver Limes nuklearer Räume ist wieder nuklear.

Der Raum $\mathscr{E}$. Eine Funktion f auf G (mit beliebigem Träger) heißt regulär, falls $\varphi f \in \mathscr{D}$ für jedes $\varphi \in \mathscr{D}$. $\mathscr{E} = \mathscr{E}(G)$ ist der Raum der regulären Funktionen auf G mit der feinsten lokalkonvexen Topologie, für welche die Abbildung $\mathscr{E} \ni f \to \varphi f \in \mathscr{D}$ stetig ist.

$\mathscr{D}$ ist der Unterraum von $\mathscr{E}$, der aus den Funktionen mit kompakten Trägern besteht. $\mathscr{D}' = \mathscr{D}'(G)$ ist der stark duale Raum von $\mathscr{D}$. Elemente von $\mathscr{D}'$ heißen Distributionen. $\mathscr{E}' = \mathscr{E}'(G)$, der duale Raum von $\mathscr{E}$, ist der nukleare Raum der *Distributionen mit kompaktem Träger.*

Faltung und Regularisation. Es seien $S, T \in \mathscr{D}'(G)$. $S \otimes T$ ist eine Distribution auf $G \times G$. Für jedes $\varphi \in \mathscr{D}(G)$ ist $\tilde{\varphi} : (x, y) \to \varphi(x, y)$ eine reguläre Funktion auf $G \times G$. Dann — bei üblichen Voraussetzungen — wird das Skalarprodukt $S \otimes T(\tilde{\varphi})$ definiert.

Die Abbildung

$$\mathscr{D}(G) \ni \varphi \to S * T(\tilde{\varphi}) = \int \varphi(xy)\, d(S \otimes T) \in \mathbb{C}$$

ist eine Distribution, die mit $S * T$ bezeichnet wird. Die Abbildung $(\alpha, T) \to \alpha * T$ ist eine getrennt-stetige bilineare Abbildung von $\mathscr{D} \times \mathscr{D}'$ (bzw. $\mathscr{E} \times \mathscr{E}'$) in $\mathscr{E}$ (bzw. $\mathscr{D}$), sie wird *Regularisation* von T genannt.

Reguläre Darstellungen. Die Links- und Rechtstranslationen $f \to \tau_x f$, wobei $(\tau_x f)(y) := f(x^{-1}y)$, $(r_x f)(y) := f(yx)$ definieren die sog. regulären Darstellungen von G in den Funktionsräumen: $L^2(G)$, $\mathscr{D}(G)$, $\mathscr{E}(G)$. Diese Darstellungen sind (stark) stetig und erlauben, entsprechende Darstellungen in den Distributionsräumen $\mathscr{D}'$ und $\mathscr{E}'$ zu definieren.

Der Raum $\mathscr{E}' = \mathscr{E}'(G)$ bildet in bezug auf die Faltung eine Algebra. Eine wichtige Unteralgebra von $\mathscr{E}'$ ist $\mathscr{E}'_e$ — die Menge der Distributionen mit dem Träger im neutralen Element e.

Umhüllende („Liesche") Algebra einer l.k. Gruppe. Bekanntlich, im Falle der Lieschen Gruppe, ist für ein $T \in \mathscr{E}'_e$ die Abbildung

$$\mathscr{D} \ni \varphi \to \varphi * T \in \mathscr{D} \qquad (\text{bzw.} \quad \varphi \to T * \varphi)$$

ein linearer Differentialoperator, der mit Rechts- (bzw. Links-) Translationen vertauschbar ist. Auf diese Weise wird die Algebra $\mathscr{E}'_e$ mit der rechts (bzw.

links) invarianten umhüllenden Algebra der Lieschen Gruppe G isomorph. Wir übertragen dies auf eine beliebige l.k. Gruppe.

Definition. $\mathscr{E}'_e(G)$ wird *umhüllende Algebra* der rechts- (bzw. links-) invarianten Differentialoperatoren auf der lokalkompakten Gruppe G genannt.

Unitäre Darstellungen U der l.k. Gruppe G und entsprechende Darstellungen der Faltungsalgebra $\mathscr{E}'$ und $\mathscr{E}'_e$.

Es sei G eine l.k. separable Gruppe und F ein lokalkonvexer Raum. Eine Darstellung (U, F) der Gruppe G im Raume F ist ein stetiger Homomorphismus $G \ni g \to U_g$ von G in den Unterraum umkehrbarer Elemente von $L(F)$, d. h.

(I) für jedes $h \in F$ ist die Abbildung $G \ni g \to U_g h \in F$ stetig.

Falls F tonneliert ist — was wir im folgenden immer voraussetzen —, ist die Stetigkeitsbedingung äquivalent der folgenden Bedingung:

(II) Für jede kompakte Menge $K \subset G$ ist die Menge $U_K = \{U_g : g \in K\}$ gleichgradig stetig in F (vgl. BRUHAT [1]).

Proposition 1. *Reguläre Darstellungen (τ, F) sind stetig in den Räumen $F = L^2(G), \mathscr{D}, \mathscr{E}, \mathscr{D}', \mathscr{E}'$.*

Falls H ein Hilbertscher Raum ist, kann man von einer unitären Darstellung (U, H) von G sprechen.

Im folgenden setzen wir immer voraus, daß der Darstellungs-Raum H tonneliert und vollständig ist.

Darstellungen $(\mathscr{E}', H)$ der Faltungsalgebra $\mathscr{E}'$. Eine Darstellung (U, H) der Gruppe G läßt sich auf natürliche Weise in eine Darstellung der Faltungsalgebra $\mathscr{E}'(G)$ übertragen.

Es sei (U, H) eine Darstellung von G in H. Für jedes $\varphi \in \mathscr{D}(G)$ ist der Operator

$$U(\varphi) := \int \varphi(g)\, U_g\, dg\,, \qquad \text{d. h.} \qquad U(\varphi)\, a = \int \varphi(g)\, U_g a\, dg$$

(das Integral kann entweder im schwachen oder starken Sinne verstanden werden). Falls (U, H) eine unitäre Darstellung ist, so ist $U(\varphi)$ beschränkt und $\|U(\varphi)\| \leqq |\varphi|_{L^1}$.

Definition. Ein Vektor $a \in H$ heißt regulär, falls für jedes $l \in H'$ die Funktion $g \to \tilde{a}_l(g) := \langle U_g a, l\rangle$ regulär ist.

Lemma. *Für jedes $\varphi \in \mathscr{D}(G)$ ist der Vektor $U(\varphi)h$, $h \in H$, regulär.*

Beweis. $\langle U_g U(\varphi)h, l\rangle = \int \varphi(x) \langle U_{gx} h, l\rangle\, dx = \int \varphi(g^{-1}t)\tilde{h}_l(t)\, dt$. Da aber

$$(g \to \int \varphi(g^{-1}t)\tilde{h}_l(t)\, dt) \in \mathscr{E}(G)\,,$$

so ist $U(\varphi)h$ regulär für jedes $h \in H$.

Wir werden den linearen Unterraum der U-regulären Elemente mit H_∞ bezeichnen. Lineare Kombinationen der Form $\Sigma U(\varphi_j)h_j$, $\varphi_i \in \mathscr{D}(G)$ nennen wir den Gårdingschen Raum der Darstellung (U, H).

Lemma. *Die Elemente des Gårdingschen Raumes sind regulär und bilden eine dichte Untermenge von H.*

Der *Beweis* geht wie im Falle der Lieschen Gruppe.

4. Zerlegung der Darstellung (U, H) in ein direktes Integral irreduzibler Darstellungen in verallgemeinerten Eigenräumen der Repräsentanten $U(T)$ von $T \in \mathscr{E}'(G)$

Um den allgemeinen nuklearen Spektralsatz aus § 1 auf die Zerlegung einer unitären Darstellung anwenden zu können, müssen wir zu (U, H) ein Gelfand-Tripel $\Phi \subset H \subset \Phi'$ konstruieren. Eine solche Konstruktion wurde von uns bereits in [7] und [8] gegeben. Hier — einem mündlichen Vorschlag von Prof. RYLL-NARDZEWSKI folgend — geben wir eine elegantere Fassung derselben Konstruktion.

Es sei (U, H) eine unitäre Darstellung der separablen l.k. Gruppe G in dem separablen Hilbertschen Raum H. Es sei H_0 eine solche lineare, nukleare, dichte Untermenge von H, daß die identische Einbettung $i_1 : H_0 \to H$ stetig ist. Daher ist das projektive Tensorprodukt $\mathscr{D}(G) \hat{\otimes} H_0$ wieder nuklear.

Bemerkung. Wenn E und F lineare lokalkonvexe Räume sind und k die kanonische Abbildung von $E \times F$ in $E \otimes F$ ist, dann existiert auf $E \otimes F$ eine feinste lokalkonvexe Topologie, bei welcher k stetig ist. Der Raum $E \otimes F$ mit dieser Topologie wird projektives Tensorprodukt genannt und mit $E \otimes_\pi F$ bezeichnet. Die Vervollständigung von $E \otimes_\pi F$ wird mit $E \hat{\otimes} F$ bezeichnet. Eine lineare Abbildung $A : E \otimes_\pi F \to G$ ist dann und nur dann stetig, falls die bilineare Abbildung $A \circ k : E \times F \to G$ stetig ist. Falls E und F nuklear sind, so sind die Räume $E \otimes_\pi F$ und $E \hat{\otimes} F$ nuklear.

Es sei $A : \mathscr{D} \otimes_\pi H_0 \to H$ definiert durch $A(\varphi \otimes h) := U(\varphi)h$. Wir wissen, daß $A(\mathscr{D} \otimes_\pi H_0) \subset H_\infty$ und $A(\mathscr{D} \otimes H_0)$ dicht in H ist. Es sei N der Kern von A. Da A wegen der Stetigkeit von $i_1 : H_0 \to H$ stetig ist, so ist N ein abgeschlossener Unterraum von $\mathscr{D} \otimes_\pi H_0$, daher ist der Raum $\Psi := (\mathscr{D} \otimes_\pi H_0)/N$ nuklear.

Wir setzen $\Phi := \mathrm{im}(A)$, ausgestattet mit der Topologie des nuklearen Raumes $\Psi = (\mathscr{D} \otimes_\pi H_0)/N$. Wir haben also die Zerlegung $A = [A] \circ \kappa$, wobei $[A]$ eine eineindeutige Abbildung $: \Psi \to H$ und ein topologischer Isomorphismus $: \Psi \to \Phi$ sowie κ die kanonische Abbildung $\kappa : \mathscr{D} \otimes_\pi H_0 \to \Psi$ ist.

Diese Konstruktion erlaubt, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 4. 1° *$\Phi \subset H \subset \Phi'$ ist ein Gelfand-Tripel;*

2° *$U_g : \Phi \to \Phi$ ist stetig;*

3° *$U(T) : \Phi \to \Phi$ ist stetig für jedes $T \in \mathscr{E}'(G)$.*

Beweis. 1° Φ ist dicht in H; wir haben nur die Stetigkeit der Einbettung $i : \Phi \to H$ zu beweisen. Da wegen der Stetigkeit von A auch $[A] : \Psi \to H$ stetig ist und da Ψ durch $[A]$ topologisch isomorph auf Φ abgebildet wird, ist die identische Einbettung $i = [A] \circ [A]^{-1} : \Phi \to H$ stetig. 2° und 3°. Da $U_g\, U(\varphi)h = U(\delta_g * \varphi)h \in \Phi$ bzw. $U(D)\, U(\varphi)h = U(D\varphi)h = U(D * \varphi)h) \in \Phi$, falls $h \in H_0$, genügt es, die Stetigkeit von $U_g : \Phi \to \Phi$ [bzw. $U(D)$] zu beweisen. Diese folgt wieder aus der Stetigkeit der Abbildung $\mathscr{D} \ni \varphi \to \delta_g * \varphi \in \mathscr{D}$ bzw. $(D \ni \varphi \to D\varphi := D * \varphi \in \mathscr{D})$ und dem folgenden

Lemma. *Es seien E und F topologische Vektorräume, N ein (abgeschlossener) Unterraum von E, T eine lineare Abbildung $E \to F$, die genau auf N verschwindet. Falls κ die kanonische Abbildung $E \to E/N$ ist, d. h. $\kappa(e) = [e] = e + N$ und $[T]\,[e] := Te$, dann ist* 1° *$(T : L(E, F)) \Leftrightarrow [T] \in L(E/N, F)$;* 2° *es sei $\Phi := T(E)$,*

wobei $T(E)$ ein topologischer lokalkonvexer Raum ist und $T_1 \in L(E, \Phi)$, wobei $T_1 e := Te$, $e \in E$. Dann ist $[T_1]$ ein topolog. Isomorphismus von E/N auf $\Phi = T(E)$.

Lemma. *Es sei $D \in L(E)$; dann ist die Abbildung $T(D): \Phi \to \Phi$, gegeben durch $T(D)(Te) := (T \circ D)(e)$, wohl definiert, linear und stetig.*

Der *Beweis* folgt augenblicklich aus der Bemerkung, daß

$$T(D) = [T_1 \circ D] \circ [T_1]^{-1} \in L(\Phi).$$

Auf der Menge H_∞ der regulären Elemente können wir die Darstellung $(\mathscr{E}', H)$ der Faltungsalgebra folgendermaßen definieren:

Definition. Für jedes $T \in \mathscr{E}'(G)$ und $a \in H_\infty$ sei

$$U(T)a := \int U_g a \, dT(g),$$

d. h. für $l \in H'$

$$\langle U(Ta, l\rangle := \langle \tilde{a}_l, T\rangle \int \langle U_g a, l\rangle \, dT(g).$$

Satz 5. *$\mathscr{E}' \ni T \to U(T)$ ist eine Darstellung der Faltungsalgebra $\mathscr{E}'(G)$ in H_∞: $U(T * S)a = U(T)\,U(S)a$ für jedes $a \in H_\infty$. Insbesondere $\mathscr{E}'_e \ni T \to U(T)$ ist eine Darstellung der umhüllenden Algebra der l.k. Gruppe G.*

Korollar 1. *$U_g = U(\delta_g)$, wo δ_g das Dirac-Maß ist.*

Definition. Falls G unimodulär ist, so ist $\langle \varphi, T^+\rangle := \overline{\langle \varphi^+, T\rangle}$.

G; dann ist $U(T^+) \subset U(T)^*$, daher ist für symmetrisches T, d. h. für $T = T^+$,

Lemma. *Es sei (U, H) eine unitäre Darstellung der unimodulären Gruppe G; dann ist $U(T^+) \subset U(T)^*$, daher ist für symmetrisches T, d. h. für $T = T^+$, der Operator $U(T)$ symmetrisch.*

Beweis.
$$\begin{aligned}(U(T)a|l) &= \langle \tilde{a}_1, T\rangle = \overline{\langle \tilde{a}_1^+, T^+\rangle} = \overline{\int (U_g a|l)^+ \, dT^+(g)} \\ &= \int (U_{g^{-1}} a|l)\, \overline{dT^+(g)} = \int \overline{(U_g l|a)}\, \overline{dT^+(g)} = \overline{\langle la, T^+\rangle} \\ &= \overline{(UT^+)\, l|a)} = (a|U(T^+)\, l).\end{aligned}$$

Wir bezeichnen mit $Z(A)$ das Zentrum einer Algebra A.

Lemma. *Für jedes $T \in Z(\mathscr{E}'(G))$ ist $U(T)$ mit allen U_g vertauschbar.*

Beweis. Da $\delta_g * T = T * \delta_g$, haben wir

$$U_g U(T) = U(\delta_g)\, U(T) = U(\delta_g * T) = U(T * \delta_g) = U(T)\, U(\delta_g) = U(T)\, U_g.$$

Korollar. *Die Behauptung des Lemmas gilt für $T \in Z(\mathscr{E}'_l)$:*

$$U_g U(T) = U(T)\, U_g, \qquad \text{für} \qquad T \in Z(\mathscr{E}'_l),\ g \in G.$$

Wir können jetzt eine weitgehende Verallgemeinerung eines Satzes von E. I. SEGAL [11] beweisen (vgl. auch [7]).

Satz 6. *Es sei (U, H) eine unitäre Darstellung einer Gruppe G (Separabilität vorausgesetzt), $T = T^+ \in Z(\mathscr{E}')$ oder $T = T^+ \in Z(\mathscr{E}'_l)$. Dann ist der symmetrische Operator $U(T)$ auf dem Gårding-Raum H_∞ der Darstellung (U, H) wesentlich selbstadjungiert, d. h. seine Abschließung $\tilde{U(T)}$ ist selbstadjungiert.*

Beweis. Wegen $U_g U(\varphi)h = U(\delta_g * \varphi)\, h \in H_\infty$ ist der Raum H_∞ U-invariant: $U_g H_\infty \subset H_\infty$ (sogar $U_g H_\infty = H_\infty$). Wir sollen zeigen, daß die Defekträume des Operators $U(T)$ Null-Räume sind, d. h. daß die Räume $X_\pm = \{x \in H : (U(T)a|x) = \pm i(a|x)$, für alle $a \in H_\infty\}$ nur aus dem 0-Vektor bestehen. Wir zeigen das

z. B. für den Raum X_-. Wir bezeichnen die Orthogonalprojektion auf X_- mit P und zeigen, daß $P=0$.

Lemma 1. *X_- ist U-invariant.*

Beweis. Es sei $x\in X_-$, d. h. es gilt $(U(T)a|x)\equiv -i(a|x)$, $a\in H_\infty$, daher $(U(T)a|U_g x)=(U_{g-1}U(T)a|x)=(U(T)U_{g-1}a|x)=-i(U_{g-1}a|x)=-i(a|U_g x)$; d. h. $U_g x\in X_-$. (Wir haben das Korollar benutzt.) Aus Lemma 1 folgt gleich

Lemma 2. *$U_g P=PU_g$, $g\in G$.*

Beweis. Wegen Lemma 1 ist $(I-P)\,y\perp U_g Px$, $x, y\in H$, daher

$$\begin{aligned}(U_g Px|y)&=(U_g Px|Py)=(U_g(x-P^\perp x)|Py)\\&=(U_g x|Py)-(U_g P^\perp x|Py)=(U_g x|Py)-(P^\perp x|U_{g-1}Py)\\&=(U_g x|Py)=(PU_g x|y)\end{aligned}$$

identisch für x, $y\in H$. Also $U_g P=PU_g$. ($P^\perp:=I-P$).

Lemma 3. *$PH_\infty\subset H_\infty$.*

Für $\varphi\in\mathscr{D}(G)$, $h\in H$ haben wir wegen Lemma 2

$$PU(\varphi)h=P\int\varphi(g)\,U_g h\,dg=\int\varphi(g)\,PU_g h\,dg=\int\varphi(g)\,U_g Ph\,dg=U(\varphi)Ph\in H_\infty.$$

Beweis des Satzes 6. Wir haben bereits bewiesen, daß $PH_\infty\subset H_\infty\cap X_-$. Daher haben wir für $a\in H_\infty$ $(U(T)Pa|Pa)=-i(Pa|Pa)$. Da die linke Seite reell, die rechte rein imaginär oder 0 ist, sind beide $=0$. Also ist $P\,H_\infty=0$. Da H_∞ dicht in H ist, haben wir $PH=0$, also $X_-=0$.

Nach Vorbild von E. I. SEGAL bekommen wir das

Korollar. *Es sei $T=T^+\in Z(\mathscr{E}')$, oder $T=T^+\in Z(\mathscr{E}_l')$, und es sei $V\in U'$, d. h. V ist beschränkt und mit allen U_g, $g\in G$, vertauschbar. Dann ist $\overline{U(T)}$ mit V vertauschbar. Daher, falls $U(T)=\int\lambda\,dE_\lambda$, sind alle $E_\lambda\in U''$, d. h. E_λ sind Elemente der v. Neumannschen Algebra U'' (erzeugt von $\{U_g,\ g\in G\}$). Wenn daher (U,H) eine Faktordarstellung ist (d. h. das Zentrum von U'' besteht aus skalaren Operatoren), dann sind alle Operatoren $\overline{U(T)}$ skalare Operatoren; $U(T)=\hat{T}I$, wo $\hat{T}\in\mathbb{R}$.*

Beweis 1°. $VH_\infty\subset H_\infty$. In der Tat: für $\varphi\in\mathscr{D}(G)$, $VU(\varphi)h=V\int\varphi(g)U_g h$ $=\int\varphi(g)\,U_g Vh\,dg=U(\varphi)\,Vh$.

2°. $U(T)\,VU(\varphi)h=U(T)\,U(\varphi)\,Vh=U(T*\varphi)\,Vh=VU(T*\varphi)h$
$=VU(T)\,U(\varphi)h$.

Daher ist auch die Abschließung $\overline{U(T)}$ mit V vertauschbar. Ein wichtiges Kriterium von E. NELSON [12] erlaubt uns jetzt, die starke Vertauschbarkeit der Operatoren $U(T_i)$, $T_i=T_i^+\in Z(\mathscr{E}')$ [oder $\in Z(\mathscr{E}_l')$] zu beweisen.

Satz 7. *Für $T_i\in Z(\mathscr{E}')$ oder $T_i\in Z(\mathscr{E}_l')$ sind die Operatoren $\overline{U(T_i)}$ normal und stark vertauschbar. Da sie mit der Darstellung (U,H) vertauschbar sind, erzeugen sie (d. h. ihre spektralen Familien) eine abelsche $*$-Algebra, die mit (U,H) vertauschbar ist (und daher eine Zerlegung von (U,H) in ein direktes Integral induziert).*

Beweis. Da H_∞ dicht in H ist und $U(T_i)\,U(T_k)$ für $T_i=T_i^+\in Z(\mathscr{E}')$, $i=1,2$, H_∞ in sich abbilden, und $U(T_1)^2+U(T_2)^2=U(T_1*T_1+T_2*T_2)$ wesentlich selbstadjungiert sind, sind kraft des Nelsonschen Kriteriums die Operatoren $U(T_1)$, $U(T_2)$ stark vertauschbar. Ihre Vertauschbarkeit mit allen U_g, $g\in G$,

war schon früher nachgewiesen. Wir können jetzt den nuklearen Spektralsatz (Satz 2) auf Zerlegung der Darstellung (U, H) folgendermaßen anwenden:

A. Um eine Darstellung (U, H) der Gruppe G in ein direktes Integral irreduzibler Darstellungen zu erhalten, nimmt man eine maximale kommutative C^*-Algebra in dem Kommutant $(U)'$ der von den Operatoren $\{U_g, g \in G\}$ aufgespannten Algebra (Mautnersche Zerlegung).

B. Um die Darstellung (U, H) in ein direktes Integral der Faktor-Darstellung zu erhalten, nimmt man das Zentrum von A (v. Neumannsche Zerlegung).

Wegen Satz 7 gehören die Spektralscharen der Operatoren $U(D)$, $D = D^+$, $D \in Z(G)$, zum Zentrum von A. Wir nehmen also im Falle A. eine maximale Abelsche Algebra in $(U)'$, die alle Spektralscharen von $U(D)$, $D = D^+ \in Z(G)$, enthält. Diese Algebra induziert eine Zerlegung

$$(U, H) = \int (U^\lambda, H(\lambda))\, d\sigma(\lambda),$$

wobei fast alle $H(\lambda)$ gemeinsame verallgemeinerte Eigenräume der Operatoren $U(D)$, $D = D^+ \in Z(\mathscr{E}')$ oder $D = D^+ \in Z(\mathscr{E}'_1)$, sind.

5. Distribution, Differential- und Integraloperatoren auf dem homogenen Raum $X = K\backslash G$

Es sei K eine kompakte Untergruppe von G. Falls G eine Liesche Gruppe ist, sind Differential- und Integraloperatoren auf dem homogenen Raume $X := K\backslash G$ der Links-Nebenklassen von größter Bedeutung in der Differentialgeometrie: Theorie der Riemannschen symmetrischen Räume (G – halbeinfach, K – maximale kompakte Untergruppe) und Theorie der Siegelschen automorphen Funktionen.

In diesem Abschnitt geben wir eine Methode, die es erlaubt, im allgemeinen Fall beliebiger l.k. Gruppe G gewisse wichtige selbstadjungierte Operatoren, die sich im Falle der regulären Darstellung als natürliche Verallgemeinerung der Differential- und Integraloperatoren auf dem homogenen Raum $K\backslash G$ erweisen, zu konstruieren.

Der Projektionsoperator $P = P_K$ und seine Eigenschaften

Satz 8. *Es sei (U, H) eine unitäre Darstellung der Gruppe G und $\Phi \subset H \subset \Phi'$ das im vorigen Abschnitt konstruierte Gelfand-Tripel. Es sei $P = P_K := \int_K U_k\, dk$, wobei dk das normierte Haarsche Maß auf der kompakten Untergruppe K ist. Dann gilt;*

1° *P ist eine Orthogonalprojektion in H;*

2° *die Einschränkung $P_1 := P|\Phi$ ist ein stetiger Operator im nuklearen Raume $\Phi_1 := P\Phi$, d. h. $P_1 \in L(\Phi_1)$;*

3° *P ist mit allen Operatoren $U(A)$, $A \in Z(\mathscr{E}'(G))$ (oder $A \in Z(\mathscr{E}'_1)$) vertauschbar;*

4° *$P\Phi \subset PH \subset (P\Phi)'$ ist ein Gelfand-Tripel.*

Beweis. 1° $P^2 = \int\limits_K U_{k'}\,dk' \int\limits_K U_k\,dk = \int\limits_K dk' \int\limits_K U_{k'k}\cdot dk = 1\cdot\int\limits_K U_k\,dk$

$= P\cdot P^* = \left(\int\limits_K U_k\,dk\right)^* = \int\limits_K U_k^*\,dk = \int\limits_K U_{-k}\,dk$

$= \int\limits_K U_k\,dk = P,$

(wegen der Bi-Invarianz des Haarschen Maßes auf K).

2° Da Φ tonneliert ist, so ist, wie wir wissen (vgl. Abschnitt 3), die Menge $\{U_k : k\in K\}$ gleichgradig stetig in Φ. Daher gibt es zu jeder stetigen Halbnorm $\|\ \|_p$ in Φ eine solche stetige Halbnorm $\|\ \|_q$ und eine solche Konstante $C>0$, daß für jedes $\varphi\in\Phi$:

$$\|P\varphi\|_p \leqq \int\limits_K \|U_k\varphi\|_p\,dk \leqq C\int\limits_K \|\varphi\|_q\,dk = C\,\|\varphi\|_q,$$

was eben die Stetigkeit von $P|\Phi$ bedeutet. $P\varphi\in\Phi$, da $k\to U_k\varphi\in\Phi$ stetig ist.

3° Da $U(A)$ stetig in Φ ist, ist für jedes $f\in\mathscr{D}(A)$ die Abbildung

$$g\to U(A)\,(U_g f)\in\Phi$$

stetig; da die Einbettung $\Phi\to H$ stetig ist, ist die Funktion

$$K\ni k\to U(A)\,(U_k f)\in H$$

stetig, also auf K Bochner-integrierbar. Wir bezeichnen mit S den abgeschlossenen Operator $S := \overline{U(A)}$, $A\in\mathscr{E}'(G)$, $(\in\mathscr{E}'_1)$. Da S mit allen U_g vertauschbar ist, haben wir für jedes $f\in D(U(A))$

$$PSf = \int\limits_K U_k Sf\,dk = \int\limits_K S(U_k f)\,dk = S\int\limits_K U_k f\ dk = SPf,$$

da S abgeschlossen und $k\to U_k f$ Bochner-integrierbar ist.

4° $P\Phi\subset PH\subset(P\Phi)'$ ist ein Gelfand-Tripel, da α) wegen der Stetigkeit von P (in H und Φ) $P\Phi$ dicht in PH ist; β) $P\Phi$ ist abgeschlossen in Φ: tatsächlich ist $P\Phi\subset\Phi$, da $k\to U_k\varphi\in\Phi$ stetig auf K und $\int dk\subset\infty$. Falls $P\varphi$ gegen Ψ in Φ konvergent ist, haben wir wegen der Stetigkeit von P in Φ und wegen $P^2=P$:

$$P\varphi_n = PP\varphi_n\to P\psi\ \Phi P \qquad\text{und}\qquad P\psi=\psi\in P\Phi.$$

Die Menge $P\Phi$ ist also in Φ abgeschlossen. Da jeder abgeschlossene Unterraum eines nuklearen Raumes wieder nuklear ist, so ist 4° bewiesen.

Im folgenden spielen Einschränkungen $U(A)|PH$ der Operatoren $U(A)$ eine wichtige Rolle. Es gilt der folgende

Satz 9. *Es sei P die Projektion aus Satz 8 und es sei*

$$S = U(A),\ A = A^+\in Z(\mathscr{E}'(G)),\ (\in Z(\mathscr{E}'_1)).$$

Dann gilt: 1° $PD(S) = D(S)\cap PH$. 2° Die Einschränkung $S|PH$ ist ein s.a. Operator im Hilbertschen Raume $H_1 := PH$. Falls $S=\int\lambda\,dE(\lambda)$ die Spektraldarstellung von S ist, dann ist $\int\lambda\,d(PE(\lambda))$ die Spektraldarstellung von $S|PH = PS = PSP$. 2° Die Operatoren $U(A_j)|PH = U(A_j)|PH\ A\in Z(\mathscr{E}'(G))$ sind stark vertauschbar. 3° $U(A)|PH$ ist also wesentlich s.a. 4° Es sei P' der zu P

transponierte Operator in $\Phi' : \langle P\varphi, \Psi\rangle \equiv \langle \varphi, P'\Psi\rangle$, $\varphi \in \Phi$, $\Psi' \in \Phi'$. *Dann ist* $(P\Phi) = P'\Phi'$. *Es sei* $e' \in \Phi'$ *ein verallgemeinerter Eigenvektor von* $S|PH$ *mit dem verallgemeinerten Eigenwert* λ, *dann ist* e' *ein v.E.v. von* S *mit Eigenwert* $\lambda : \langle SP\varphi', e'\rangle \equiv \lambda\langle P\varphi, e'\rangle$, $\varphi \in \Phi$. *Umgekehrt: Wenn* $e' \in \Phi'$ *ein v.E.v. von* S *ist, dann ist* $P'e'$ *v.E.v. von* $S|PH$.

Beweis. 1° Es sei $S := \overline{U(A)}$; wenn $f \in D(S) \cap PH$, dann $f = Ph \in D(S)$. Daher $D(S) \cap PH \subset PD(S)$. Umgekehrt: Da P mit S vertauschbar ist, gilt $PD(S) \subset D(S)$; da $PD(S) \subset PH$, folgt $PD(S) \subset D(S) \cap PH$.

2° Weil $S|PH$ symmetrisch in PH ist, genügt es zu zeigen, daß

$$\{SPf \pm iPf : f \in D(S)\} = PH .$$

Aber wegen der Vertauschbarkeit von P und S

$$\{SPf \pm iPf : f \in D(S)\} = P(A \pm iI)\, D(A) = PH .$$

$S|PH$ ist also s.a.

Da $\overline{U(A)}|PH$ selbstadjungiert und $\overline{U(A)|PH}$ symmetrisch ist, wird die Selbstadjungiertheit von $U(A)|PH$ aus der Inklusion $\overline{U(A)}|PH \subset \overline{U(A)|PH}$ folgen. Es sei also $f \in D(\overline{U(A)})$, d. h. $Pf \in D(\overline{U(A)})|PH$; dann gibt es eine solche Folge $f_n \in D(U(A))$, daß $U(A) f_n \to \overline{U(A)} f$, $U(A) Pf_n = PU(A) f_n \to$ $\to P(\overline{U(A)}) f = \overline{U(A)}\, Pf$, daher $Pf \in D(\overline{U(A)|PH})$, w.z.b.w. Da $(PSf|h)$ $= (SPf|h) = \int \lambda\, d(E(\lambda) Pf|h) = \int \lambda\, d(PE(\lambda) f|h)$, sehen wir, daß $\{(PE(\lambda) : \lambda \in R\}$ die Spektralschar von $S|PH$ ist. Falls $(E_j(\lambda) : \lambda \in R\}$ Spektralschar von $S_j = \overline{U(A_j)}$ ist, wissen wir, daß $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda')$ vertauschbar sind, $j = 1, 2$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ [weil die $\overline{U(A_j)}$, $j = 1, 2$ stark vertauschbar sind], daher $PE_1(\lambda)\, PE_2(\lambda')$ $= P^2 E_1(\lambda)\, E_2(\lambda') = PE_1(\lambda)\, E_2(\lambda') = PE_2(\lambda')\, E_1(\lambda) = PE_2(\lambda')\, PE_1(\lambda)$, was gerade starke Vertauschbarkeit von $\overline{U(A_j)}|PH$, $j = 1, 2$, bedeutet.

4° Da $P = P\Phi$ eine stetige Projektion in Φ ist, ist P' eine stetige Projektion in Φ': $P'P' = (P')^2 = P'$. Falls $e \in \Phi'$ ein verallgemeinerter Eigenvektor von S ist, d. h. $\langle S\varphi, e'\rangle = \lambda\langle \varphi, e'\rangle$ für jedes $\varphi \in \Phi$, dann

$$\langle SP\varphi, e'\rangle = \lambda\langle P\varphi, e'\rangle = \lambda\langle P^2\varphi, e'\rangle = \lambda\langle P\varphi, P'e'\rangle .$$

Daher

$$\langle SP\varphi, P'e'\rangle = \langle PSP\varphi, e'\rangle = \langle SP\varphi, e'\rangle = \lambda\langle P\varphi, P'e'\rangle$$

für jedes $\varphi \in \Phi$, d. h. $P'e'$ ist ein v.E.v. von $S|PH$. Es sei jetzt $e' \in P'\Phi' = (P\Phi)'$ ein v.E.v. von $S|PH$, dann $P'e' = e'$ und $\langle S\varphi, e'\rangle = \langle S\varphi, P'e'\rangle = \langle PS\varphi, e'\rangle$ $= \langle SP\varphi, e'\rangle = \lambda\langle P\varphi, e'\rangle = \lambda\langle \varphi, P'e'\rangle = \lambda\langle \varphi, e'\rangle$ für jedes $\varphi \in \Phi$, d. h. e' ist ein v.E.v. von S.

1. Bemerkung. 4° bedeutet: Falls $H = \int H(\lambda)\, d\mu$ Zerlegung von H in ein direktes Integral verallgemeinerter gemeinsamer Eigenräume von $\overline{U(A_j)}$, $A_j \in Z(\mathfrak{G})$ [oder $\in Z(\mathfrak{G}'(G))$] ist, dann ist $PH = \int P'H(\lambda)\, d\mu$ Zerlegung des Raumes PH in ein direktes Integral gemeinsamer Eigenräume von $\overline{U(A_j)|PH}$.

2. Bemerkung. Es sei $(U, L^2(G))$ eine reguläre Darstellung der Gruppe G; dann ist $\Phi = \mathfrak{D}(G)$ der Raum der regulären Funktionen auf G. $P = P_K$ ist einfach die Projektion auf den Raum der (links) K-invarianten Funktionen.

$P'\Phi'$ ist in diesem Fall die Menge K-invarianter Distributionen auf G. Da wir $PL^2(G)$ als Funktionen auf dem homogenen Raum $K\backslash G$ verstehen können, bedeutet $P'\mathscr{D}'$ den Raum (aller) Distributionen auf dem homogenen Raume $K\backslash G$ (vgl. [1]). In diesem Falle sind $U(A)$, $A \in \mathscr{E}_l'$ „Differentialoperatoren" auf dem Raume $K\backslash G$, und $U(A)$, $A \in Z(\mathscr{E}_l')$ sind invariante Differential-Operatoren auf dem homogenen Raume $K\backslash G$. Die Klasse $U(A)$, $A \in Z(\mathscr{E}'(G))$ umfaßt invariante Integraloperatoren mit kompaktem Träger auf $K\backslash G$. Spezialfälle (G-Liesche Gruppe, $K\backslash G$-symmetrischer Raum) wurden von ROELCKE in [10] untersucht.

6. Existenz- und Vollständigkeitssätze für allgemeine automorphe Funktionen und Formen

In diesem Abschnitt bedeutet Γ eine diskrete Untergruppe von G, und K ist — wie im vorigen Abschnitt — eine kompakte Untergruppe von G. Es sei $V=(V, \langle|\rangle)$ ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot|\cdot\rangle$; F ist ein Fundamentalbereich von Γ in G.

Automorphe Funktionen. Es sei (χ, V) eine unitäre Darstellung von Γ im Raum V.

Definition. $H=H(G, \Gamma, \chi)$ ist der Hilbert-Raum solcher meßbarer V-Funktionen auf G: $G \ni g \to f(g) \in V$, daß

1° $f(g\gamma)=\chi(\gamma) f(g)$, $\gamma \in \Gamma$,

2° $(f|f)=\|f\|:=\int\limits_F \langle f(g)|f(g)\rangle\, dg < \infty$.

Da offenbar — wegen der Unitärität von χ — $(f|f)$ von der Wahl des Fundamentalbereiches unabhängig ist und die Funktion $g \to \langle f(g)|f(g)\rangle$ rechts Γ-invariant ist, können wir sie als Funktion auf dem homogenen Raum $Y:=G/\Gamma$ betrachten und die Bedingung 2° durch die folgende

$2^{\circ\prime}$ $(f|f):=\int\limits_{G/\Gamma} \langle f(\cdot)|f(\cdot)\rangle\, d\mu < \infty$,

wo μ das entsprechende invariante Maß auf G/Γ ist, ersetzen.

Lemma. *Die (links)-reguläre Darstellung in $H(G, \Gamma, \chi)$ $(U_g f)(g_0):=f(g^{-1}g_0)$ ist unitär (wegen $2^{\circ\prime}$).*

Bemerkung. $(U, H(G, \Gamma, \chi))$ ist die sog. von χ induzierte Darstellung der Gruppe G; sie wird gewöhnlich mit U^χ bezeichnet (vgl. [1], [2]).

Definition. Es sei $P=P_K=\int\limits_K U_k\, dk$ der in **5.** eingeführte Projektionsoperator. Verallgemeinerte gemeinsame Eigenelemente der Operatoren $U(A)|PH$, $A \in Z(\mathscr{E}_l')$, [oder $A \in Z(\mathscr{E}'(G))$] werden allgemeine *Automorphe Funktionen* genannt.

Existenz und Vollständigkeit dieser V-Distributionen auf dem homogenen Raume ist wegen Satz 9 gesichert.

Bemerkung. Wenn man als G eine halbeinfache Liesche Gruppe, K ihre maximale kompakte Untergruppe, χ eine endlichdimensionale Darstellung von Γ nimmt, dann bekommt man die in den letzten Jahren von SIEGEL,

SEELBERG, GELFAND, PIATECKIJ-SAPIRO-GODEMENT, HARISCH-CHANDRA, SHIMURA, MURAKAMI u. a. untersuchten Funktionen.

Automorphe Formen. Automorphe V-Funktionen werden folgendermaßen verallgemeinert: Eine Abbildung $\Gamma\times G\ni(\gamma,g)\to j_\gamma(g)\in L(V)$ wird ein automorpher Faktor von Γ genannt, falls gilt: (A.F.1°). Für jedes $\gamma\in\Gamma$ ist $j_\gamma(\cdot)$ eine (stark) stetige Abbildung (A.F.2°). Die $j_\gamma(g)$ sind unitär für alle $\gamma\in\Gamma$, $g\in G$, und $j_{\alpha\beta}(g)=j_\alpha(g\beta)\,j_\beta(g)$, $\alpha,\beta\in\Gamma$, $g\in G$, $H=H(G,\Gamma,j)$.

Wir betrachten den Hilbert-Raum meßbarer V-Funktionen auf G, für welche statt 1° folgende Bedingung erfüllt ist:

(H 1°) $\qquad f(g\gamma)=j_\gamma(g)\,f(g),\ \gamma\in\Gamma,\ g\in G.$

2° $\quad (f|f)=\int\limits_F\langle f(\cdot)|f(\cdot)\rangle\,dg\left(=\int\limits_{G/\Gamma}\langle f(\cdot)|f(\cdot)\rangle\,d\mu\right)<\infty.$

Die reguläre Darstellung $(U_g^j f)(g_0):=f(g^{-1}g_0)$ ist eine unitäre Darstellung im Raume $H(G,\Gamma,j)$.

Definition. Es sei j ein Γ-automorpher Faktor und U^j die zugehörige unitäre Darstellung. Verallgemeinerte Eigenvektoren der Operatoren $U^j(A)|P_KH$, $A\in Z(\mathscr{E}_1')$ [oder $\in Z(\mathscr{E}'(G))$] werden allgemeine *j-automorphe Formen* genannt. Ihre Existenz und Vollständigkeit ist wieder durch den Satz 9 gesichert.

Wir sammeln diese Ergebnisse in dem folgenden

Hauptsatz. *Voraussetzung. Es sei K eine kompakte, Γ eine diskrete Untergruppe einer separablen l.k. Gruppe G; $j=(j_\alpha(g))$, $\alpha\in\Gamma$, $g\in G$, sei ein Γ-automorpher Faktor (bzw. (χ,V) eine unitäre Darstellung der Untergruppe Γ in Hilbertschem Raume V). Es sei $H^j=H(G,\Gamma,j)$ (bzw. $H(G,\Gamma,\chi)$) der vorstehend definierte Hilbert-Raum und $U^j=(U^j,H^j)$ (bzw. U) die von j induzierte unitäre Darstellung der Gruppe G. Es sei $P=P_K:=\int U^j\,dk$ der entsprechende Projektionsoperator. Es sei $Z(\mathscr{E}'(G))$ das Zentrum der Involutionsalgebra der Distributionen mit kompaktem Träger auf G.*

Behauptung. 1° Die Operatoren $U^j(A_i)|PH^jA_i=A_i^+\in Z(\mathscr{E}_1')$ sind wesentlich selbstadjungiert im Raume PH^j, und ihre Abschließungen sind stark vertauschbar. 2° Es gibt ein solches Gelfand-Tripel $P\Phi\subset PH^j\subset P'\Phi$, daß Operatoren $U^j(A)|P\Phi$, $U_g^j|P\Phi\in L(P\Phi)$. 3° Der Raum PH^j ist ein direktes Integral der Räume automorpher Formen

$$PH^j=\int P'H(\lambda)\,d\sigma(\lambda),$$

d. h. es gilt die Parsevalsche Formel

$$(P\varphi|\varphi)=(P\varphi|P\Psi)=\int\limits_\Lambda\Sigma\langle\varphi,e(\lambda)\rangle\,\overline{\langle\Psi,e(\lambda)\rangle}\,d\sigma(\lambda),$$

wo $e(\lambda)$, Γ-automorphe Formen, d. h. gemeinsame v.E.v. der Operatoren aus 2° sind. 4° Für jedes $\varphi\in\Phi$ gilt die Fouriersynthesis

$$P\varphi=\int\limits_\Lambda P'\varphi(\lambda)\,d\sigma(\lambda)=\int\limits_\Lambda\Sigma<\varphi,e(\lambda)>e(\lambda)\,d\sigma(\lambda).$$

5° Falls G vom Typus I ist, können wir die rechten Seiten von 3° und 4° durch Integrationen auf dem Dualobjekt $\hat G$ von G ersetzen.

$$(P\varphi|P\Psi)=(\varphi,\Psi)_{H_K}=\int\limits_{\hat G}\Sigma\langle\varphi,e_l(\hat g)\rangle\,\langle\Psi,e_l(\hat g)\rangle\,d\tilde\sigma(\hat g).$$

Bemerkung. Punkt 1° ist eine weitgehende Verallgemeinerung des Hauptergebnisses der Habilitationsschrift von W. ROELCKE [10].

Abschließende Bemerkungen. Wie wir wissen, kann man die induzierte Darstellung (U^j, H^j) in feinste, d. h. in irreduzible (oder Faktor-) Bestandteile zerlegen, indem man eine maximale Abelsche Algebra im Kommutanten von (U^j) nimmt; selbstredend nimmt man am günstigsten eine solche maximale Algebra, die alle zu $\{U^j(A) : A \in Z(\mathfrak{G}'_l)\}$ gehörenden Projektionen umfaßt. Es seien $H^j(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, die entsprechenden irreduziblen Räume. Wie wir schon wissen, können sie als Unterräume von Φ' betrachtet werden. Es wäre sinnvoll, Elemente der Räume $P'H^j(\lambda)$, automorphe Formen zu nennen. *Alle Behauptungen des „Hauptsatzes" sind also gültig bei dieser modifizierten Fassung des Begriffes automorpher Formen.*

Literatur

[1] BRUHAT, F.: Distributions sur un groupe localement compact. Bull. soc. math. France **89**, 43—75 (1961).

[2] DIXMIER, J.: Les C^*-algèbres et leur representations. Paris 1964.

[3] GELFAND-WILENKIN: Einige Anwendungen harmonischer Analyse. Moskau 1961 (russisch).

[4] KAC, G. I.: Verallgemeinerte Funktionen auf einer l.k. Gruppe ..., Trudy, Kosk. Mat. Obsc. **10**, 3—40 (1961) (russisch).

[5] MAURIN, K.: Allgemeine Eigenfunktionsentwicklungen ... Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math. astr. phys. **7**, 471—479 (1959).

[6] — Distributionen auf Yamabe-Gruppen ... Sér. sci. math. astr. phys. **9**, 845—850 (1961).

[7] MAURIN, K., and L. MAURIN: Automorphic forms, spectral theory and group representations. Sér. sci. math. astr. phys. **13**, 199—203 (1965).

[8] — Universelle umhüllende Algebra einer l.k. Gruppe und ihre s.a. Darstellungen. Anwendungen. Studia Math. **24**, 227—243 (1964).

[9] PIETSCH, A.: Nukleare Räume. Berlin: Akademie-Verlag 1965.

[10] ROELCKE, W.: Automorphe Funktionen und Spektraltheorie. Habilitationsschrift, Münster 1960.

[11] SEGAL, I. E.: Hypermaximality of certain operators on Lie groups. Proc. Am. Math. Soc. **3**, 13—15 (1952).

[12] NELSON, E.: Analytic vectors. Ann. of Math. **70**, 572—615 (1959).

Prof. Dr. KRZYSZTOF MAURIN
Warszawa 36 (Polen), Górska 7; 35

(Eingegangen am 13. Oktober 1965)

MÜLLER, B.
Math. Annalen 165, 223—235 (1966)

Über vollständige (Ko-) Homologie

Herrn Professor ERNST HÖLDER zum 65. Geburtstag gewidmet

BRUNO MÜLLER

1. Sogenannte vollständige (Ko-)Homologiefolgen sind für Gruppen (vgl. CARTAN-EILENBERG [2], Chap. XII), für Frobenius- und Quasi-Frobenius-Algebren (NAKAYAMA [11], [12], [13]; OGAWA [14]; ROSENBERG/CHASE (unveröffentlicht)) und für Frobenius- und Quasi-Frobenius-Erweiterungen (KASCH [7]; MÜLLER [10]) angegeben worden. Es handelt sich dabei um die Erscheinung, daß sich in diesen Fällen die Funktoren Tor und Ext — als Funktoren einer kovarianten Variablen bei geeigneter Fixierung der anderen Variablen und bei geeigneter Modifikation von Tor_0 und Ext^0 — in eine einzige zusammenhängende Folge mit „angenehmen" Homogenitätseigenschaften schreiben lassen. Sind A_R, ${}_RM$, N_R beliebige Moduln[1] und ${}_RA^+ = {}_R\mathrm{Hom}(A_R, R_R)$ das Duale von A, so erzeugen die Abbildungen[2]

$$\psi\colon \quad A \underset{R}{\otimes} M \ni a \otimes m \to (\alpha \to \alpha(a)m) \in \mathrm{Hom}({}_RA^+, {}_RM)$$

und

$$\varphi\colon \quad N \underset{R}{\otimes} A^+ \ni n \otimes \alpha \to (a \to n\alpha(a)) \in \mathrm{Hom}(A_R, N_R)$$

die beiden exakt-zusammenhängenden Folgen von Funktoren

$$\mathrm{Tor}_n(A, M),\ \mathrm{Ke}\psi(M),\ \mathrm{Cok}\psi(M),\ \mathrm{Ext}^n(A^+, M)$$

und

$$\mathrm{Tor}_n(N, A^+),\ \mathrm{Ke}\varphi(N),\ \mathrm{Cok}\varphi(N),\ \mathrm{Ext}^n(A, N);$$

$n \geqq 1$ (vgl. CARTAN-EILENBERG [2], Ex. III, 2). Man kann also die Funktoren Tor und Ext immer in eine exakt-zusammenhängende Folge schreiben. Das Besondere der oben genannten Beispiele ist die Homogenität dieser Folgen: Sie verschwinden für alle injektiven und alle projektiven Moduln M und N; oder äquivalent: Sie sind *satellitenhomogen*, d. h. die beiden Nachbarn jedes Folgengliedes sind seine beiden Satelliten. Diese Überlegungen motivieren folgende

Definition. *Die Folge T^n der Satelliten von $T^1 = \mathrm{Ext}^1(A, _)$ heißt vollständige Kohomologiefolge für A_R, wenn sie für alle injektiven und alle projektiven Moduln N_R verschwindet. Die Folge H_n aller Satelliten von $H_1 = \mathrm{Tor}_1(A, _)$ heißt vollständige Homologiefolge für A_R, wenn sie für alle injektiven und projektiven Moduln ${}_RM$ verschwindet.*

[1] Wir betrachten durchweg nur Ringe mit Einselement und unitäre Moduln.

[2] Ist A endlich erzeugt projektiv, so sind ψ und φ Isomorphismen. Diese Tatsache wird im folgenden laufend benutzt.

Ziel der vorliegenden Untersuchungen ist, notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz vollständiger (Ko-)Homologiefolgen anzugeben. Dabei behandeln wir den „absoluten" (Satz 3) und den „relativen" Fall (relative Bedingungen bezüglich einer Ringerweiterung R/S; Satz 4). Letzterer wird dann auf Algebren angewandt (Hochschildgruppen; Satz 7 und die folgenden Bemerkungen); diese Ergebnisse enthalten insbesondere Resultate von NAKAYAMA [11], [12] — bei gleichzeitiger Vereinfachung der Beweisführung[3].

Bemerkung 1. Die Funktoren $\mathrm{Ext}^1(A, _)$ und $\mathrm{Tor}_1(A, _)$ sind halbexakt; die Folgen T^n und H_n ihrer Satelliten sind also exakt-zusammenhängend (CARTAN-EILENBERG [2], Chap. III, § 3 und FLANDERS [4]) und daher genau dann satellitenhomogen, wenn sie für alle injektiven und alle projektiven Moduln verschwinden, d. h. vollständige (Ko-)Homologiefolgen sind.

Bemerkung 2. Bekanntlich gilt $T^n = \mathrm{Ext}^n(A, _)$ und $H_n = \mathrm{Tor}_n(A, _)$ für alle $n \geqq 1$. Das folgende Lemma liefert — unter gewissen Voraussetzungen — eine komplette Beschreibung der Folgen T^n und H_n.

Lemma 1. (i) *Der endlich erzeugte Modul A_R besitze eine vollständige Homologiefolge H_n, und es existiere eine exakte Folge $0 \to K \to P \to A \to 0$ mit (endlich erzeugt) projektivem P und endlich erzeugtem K. Dann gilt $H_0 = \mathrm{Ke}\psi$; $H_{-1} = \mathrm{Cok}\psi$; $H_{-n-1} = \mathrm{Ext}^n(A^+, _)$, $n \geqq 1$; und A ist reflexiv.*

(ii) *Der endlich erzeugte Modul A_R besitze eine vollständige Kohomologiefolge T^n. Dann gilt $T^0 = \mathrm{Cok}\varphi$; $T^{-1} = \mathrm{Ke}\varphi$; $T^{-n-1} = \mathrm{Tor}_n(^-, A^+)$, $n \geqq 1$.*

Beweis. (i) Zu endlich erzeugtem C_R existiert eine endlich erzeugte projektive Erweiterung $Q \to C \to 0$ und mit injektivem ${}_RM$ erhält man exakte (kommutative) Diagramme $0 \to C^+ \to Q^+$ und

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \\ Q \otimes M & \to & C \otimes M & \to & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_Q} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_C} & & \\ \mathrm{Hom}(Q^+, M) & \to & \mathrm{Hom}(C^+, M) & \to & 0 \\ \downarrow & & & & \\ 0 & & & & \end{array}$$

so daß ψ_C epimorph ist. Aus $0 \to K \to P \to A \to 0$ folgt nun $0 \to A^+ \to P^+ \to K^+$ und, da P endlich erzeugt projektiv ist,

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ K \otimes M & \to & P \otimes M & \to & A \otimes M & \to & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_K} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_P} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \\ \mathrm{Hom}(K^+, M) & \to & \mathrm{Hom}(P^+, M) & \to & \mathrm{Hom}(A^+, M) & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

[3] Einige unserer Resultate — insbesondere Satz 7, (ii) — wurden unabhängig auch von ROSENBERG/CHASE bewiesen.

so daß ψ auch monomorph ist. Also ergibt sich $\mathrm{Ke}\psi(M)=0=\mathrm{Cok}\psi(M)$ für jedes injektive M. Da auch $\mathrm{Ext}^n(A^+, M)$ für jedes injektive M verschwindet und da die Funktoren $\mathrm{Tor}_n(A,-)$, $\mathrm{Ke}\psi$, $\mathrm{Cok}\psi$, $\mathrm{Ext}^n(A^+,-)$ eine exakt-zusammenhängende Folge bilden, sind die rechtsstehenden die Rechtssatelliten von $\mathrm{Tor}_1(A,-)$ und somit gleich den H_n, $n\leqq 0$. Es gilt $H_n(R)=0$ für alle n, insbesondere also $\mathrm{Ke}\psi(R)=0=\mathrm{Cok}\psi(R)$; und A ist reflexiv.

(ii) Sind C_R beliebig, N_R projektiv und n_i, δ_i duale Erzeugendensysteme zu N sowie $\sum_i n_i\otimes\gamma_i\in\mathrm{Ke}\varphi_C$, so folgt für alle $c\in C$

$$0=\sum_i n_i\gamma_i(c), \quad \text{also} \quad \sum_i \delta_k(n_i)\,\gamma_i=0$$

und

$$\sum_i n_i\otimes\gamma_i=\sum_{i,k} n_k\delta_k(n_i)\otimes\gamma_i=\sum_{i,k} n_k\otimes\delta_k(n_i)\,\gamma_i=0\,;$$

und φ_C ist monomorph. Dann erhält man mit einer endlich erzeugt projektiven Erweiterung $0\to L\to Q\to A\to 0$ von A das exakte und kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & N\otimes A^+ & \to & N\otimes Q^+ & \to & N\otimes L^+ & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_Q} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_L} & & \\
0 & \to & \mathrm{Hom}(A,N) & \to & \mathrm{Hom}(Q,N) & \to & \mathrm{Hom}(L,N) & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

und hieraus folgt, daß φ auch epimorph ist. Aus $\mathrm{Ke}\varphi(N)=\mathrm{Cok}\varphi(N)=\mathrm{Tor}_n(N, A^+)=0$ für alle projektiven N ergibt nun ein ähnlicher Schluß wie oben die Behauptung.

2. Lemma 2 (Morita/Taschikawa [9]). *Für Moduln über einem Quasi-Frobenius-Ring sind die Begriffe injektiv und projektiv äquivalent.*

Eine *vollständige projektive Auflösung* eines Moduls A ist die Zeile X eines kommutativen exakten Diagramms

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \to & A_1 & \to & A_0 & \to & A_{-1} & \to & A_{-2} & \to & \cdots \\
 & & & \searrow & & \nearrow & & & & & \\
 & & & & A & & & & & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & & & & & \\
 & & 0 & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

mit projektiven A_k. Die Homologiegruppen des Komplexes $X\otimes M$ bilden eine exakt-zusammenhängende Folge von Funktoren, die für projektive M verschwindet und die $\mathrm{Tor}_n(A, M)$ enthält. Ebenso bilden die Homologiegruppen von $\mathrm{Hom}(X, N)$ eine exakt-zusammenhängende Folge, die für injektive N verschwindet und die $\mathrm{Ext}^n(A, N)$ enthält. Ist R insbesondere quasi-Frobenius, also „injektiv" und „projektiv" dasselbe, so sind diese beiden Folgen satellitenhomogen und folglich die vollständige Homologie- und Kohomo-

logiefolge für A. Ferner besitzt dann jeder Modul A eine vollständige projektive Auflösung: Man braucht nur zwei gewöhnliche projektive und injektive Auflösungen zusammenzufügen. Diese Bemerkungen liefern den Beweis des ersten Teils des folgenden

Satz 3. (i) *Ist R ein Quasi-Frobenius-Ring, so besitzt jeder R-Modul A eine vollständige projektive Auflösung sowie eine vollständige Homologiefolge H_n und Kohomologiefolge T^n*[4]. *Ist X eine beliebige projektive Auflösung von A, so läßt sich H_n aus dem Komplex $X \otimes M$ und T^n aus $\mathrm{Hom}(X, N)$ berechnen.*

(ii) *R ist Quasi-Frobenius-Ring, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(1) *Jeder zyklische Modul hat eine vollständige Kohomologiefolge.*

(2) *R ist beidseitig Noethersch, und jeder zyklische Modul hat eine vollständige Homologiefolge.*

(3) *R ist beidseitig Noethersch, und jeder endlich erzeugte Modul hat eine vollständige projektive Auflösung.*

Beweis. Aus (2) folgt $\mathrm{Tor}_n(R/I, M) = 0$, $n \geqq 1$, für alle Rechtsideale I von R und alle injektiven ${}_RM$, also insbesondere für $M = \mathrm{Hom}_Z(R, D)$, wo D eine beliebige divisible Gruppe ist. Folglich gilt

$$0 = \mathrm{Tor}_n(R/I, \mathrm{Hom}_Z(R, D)) = \mathrm{Hom}_Z(\mathrm{Ext}^n(R/I, R), D)$$

(CARTAN-EILENBERG [2], Chap. VI, Prop. 5.3); also $\mathrm{Ext}^n(R/I, R) = 0$, R_R ist injektiv und R ist quasi-Frobenius.

Gilt (1), so erhält man für jedes Rechts- und Linksideal I von R und jeden projektiven Modul P $\mathrm{Ext}^n(R/I, P) = 0$; d. h. jedes projektive P ist injektiv. Insbesondere gilt dies für R und $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} R$ als Rechts- und als Linksmoduln. Angenommen, R sei etwa nicht rechts-Noethersch, so existiert eine Folge $I_1 \subsetneqq I_2 \subsetneqq I_3 \subsetneqq \cdots$ von endlich erzeugten Rechtsidealen; und wegen der Injektivität von ${}_RR$ gilt $rl(I_n) = I_n$ (IKEDA/NAKAYAMA [6], Th. 1). Somit ist

$$l(I_n) \backslash l(I_{n+1}) \neq 0\,;$$

und ist x_n ein Element hieraus und $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, so hat man die Abbildung

$$I_R \ni x \to (x_n x)_{n=1}^{\infty} \in \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} R_R\,,$$

da für $x \in I_k$ und alle $n \geqq k$ gilt $x_n x = 0$. Wegen der Injektivität von $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} R_R$ gilt $(x_n x)_{n=1}^{\infty} = (z_n)_{n=1}^{\infty} x$ mit einem $(z_n)_{n=1}^{\infty} \in \overset{\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} R$ und daher $z_n = 0$ für alle $n \geqq n_0$; insbesondere also $x_{n_0} x = 0$ für alle $x \in I$. Andererseits ist aber $x_{n_0} I_{n_0+1} \neq 0$. Man hat also einen Widerspruch; und R muß (beidseitig) Noethersch und daher quasi-Frobenius sein (vgl. CHASE [3], Prop. 4.1).

[4] Ist A endlich erzeugt, so sind die Voraussetzungen von Lemma 1 erfüllt und man erhält die dort angegebenen kompletten Beschreibungen von H_n und T^n.

Aus (3) erhält man zu jedem endlich erzeugten Modul C eine exakte Folge $0 \to C \to F$ mit endlich erzeugtem freien F. Jeder endlich erzeugte Modul ist also torsionslos; insbesondere gilt das für F/C; C ist somit als Untermodul von F abgeschlossen und daher $= C_1^+$ mit einem endlich erzeugten Modul C_1. Ebenso folgt $C_1 = C_2^+$, $C_2 = C_3^+$. Nun ist jeder duale Modul M^+ direkter Summand in M^{+++}, speziell also $C_2 = C_3^+$ direkt in $C = C_3^{+++}$. Ist C unzerlegbar, so folgt $C = C_2$ und $C^{++} = C_2^{++} = C$, und C ist reflexiv. Nun besitzt jeder endlich erzeugte Modul M über einem Noetherschen Ring eine direkte Zerlegung in endlich viele unzerlegbare Untermoduln; diese sind reflexiv und somit auch M selbst. Ein beidseitig Noetherscher Ring, über dem jeder endlich erzeugte Modul reflexiv ist, ist aber quasi-Frobenius.

3. Satz 4. *Es sei R/S eine Ringerweiterung*[5] *und R_S, R_S^* beide endlich erzeugt projektiv. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(4) *R_R^* ist Progenerator*[6].

(5) *Jeder S-endlich erzeugt projektive Modul A_R besitzt eine vollständige Homologiefolge H_n, die sogar für alle (R, S)-projektiven Moduln ${}_RM$ verschwindet.*

(6) *Jeder S-endlich erzeugt projektive Modul A_R besitzt eine vollständige Kohomologiefolge T^n, die sogar für alle (R, S)-injektiven Moduln N_R verschwindet.*

In dieser Situation ist jeder S-endlich erzeugt projektive Modul A_R reflexiv, und seine vollständigen (Ko-) Homologiefolgen H_n und T^n haben die in Lemma 1 angegebene Struktur.

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß jeder S-endlich erzeugt projektive Modul A_R die (R, S)-exakte, R-endlich erzeugt projektive Auflösung

$$\cdots \to A \underset{S}{\otimes} R \underset{S}{\otimes} R \to A \underset{S}{\otimes} R \to A \to 0$$

besitzt. Existieren vollständige (Ko-)Homologiefolgen zu A, so ist Lemma 1 anwendbar und ergibt den letzten Teil der Behauptung.

Wir setzen nun (5) voraus. Der Modul $E_S = \mathrm{Hom}(R_S, R_S)_S$ ist endlich erzeugt projektiv und die Folge

$$0 \to R_R \to E_R \to E/R_R \to 0$$

relativ exakt, also auch E/R_S endlich erzeugt projektiv. Nach (5) hat somit E/R_R eine vollständige Homologiefolge; und insbesondere ist

$$\mathrm{Tor}_n^R(E/R, \mathrm{Hom}_Z(R, D)) = 0$$

für alle divisiblen Gruppen D. Damit folgt (CARTAN-EILENBERG [2], Chap. VI, Prop. 5.3) $\mathrm{Hom}_Z(\mathrm{Ext}_R^n(E/R, R), D) = 0$, also $\mathrm{Ext}_R^n(E/R, R) = 0$ und R_R ist relativ injektiv, somit direkt in E; man erhält

$$R_R \oplus * \sim E_R \oplus * \sim \oplus R_R^*$$

und R_R^* ist Generator.

[5] Mit gemeinsamem Einselement $1 \in S \subset R$. $R^* = \mathrm{Hom}(R_S, S_S)$, $^*R = \mathrm{Hom}({}_SR, {}_SS)$.

[6] Endlich erzeugt projektiv und Generator.

Die exakte Folge

$$0 \to {}_SK_R \to {}_SR^* \underset{S}{\otimes} R_R \to {}_SR^*_R \to 0$$

liefert eine exakte Folge

$$0 \to {}_R\mathrm{Hom}({}_SR^*, {}_SC) \to {}_R\mathrm{Hom}({}_SR^* \underset{S}{\otimes} R, {}_SC) \to {}_R\mathrm{Hom}({}_SK, {}_SC) \to 0$$

für jeden (injektiven) Modul ${}_SC = {}_S\mathrm{Hom}_Z(S, D)$; D diversibel. Es ist

$${}_R\mathrm{Hom}({}_SR^*, {}_SC) \sim {}_RR \underset{S}{\otimes} C$$

relativ projektiv; und

$${}_SR \underset{S}{\otimes} C \oplus * \sim {}_S\mathrm{Hom}_Z(R^*; D) \oplus * \sim \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} {}_S\mathrm{Hom}_Z(S, D)$$

injektiv, also

$${}_R\mathrm{Hom}({}_SR^* \underset{S}{\otimes} R, {}_SC) \sim {}_R\mathrm{Hom}({}_SR, {}_S\mathrm{Hom}({}_SR^*, {}_SC)) \sim {}_R\mathrm{Hom}({}_SR, {}_SR \underset{S}{\otimes} C)$$

injektiv. Somit folgt für die nach (5) existierende vollständige Homologiefolge H_n für R^*_R

$$0 = H_1({}_R\mathrm{Hom}({}_SR^* \underset{S}{\otimes} R, {}_SC)) \to H_1({}_R\mathrm{Hom}({}_SK, {}_SC)) \to H_0({}_R\mathrm{Hom}({}_SR^*, {}_SC)) = 0,$$

also

$$0 = H_1({}_R\mathrm{Hom}({}_SK, {}_SC)) = \mathrm{Tor}_1^R(R^*, \mathrm{Hom}({}_SK, {}_SC)) \sim \mathrm{Hom}({}_S\mathrm{Ext}^1_R(R^*, K), {}_SC)$$

und $\mathrm{Ext}^1_R(R^*, K) = 0$, R^*_R projektiv. R^*_R ist also Progenerator.

Wird (6) vorausgesetzt, so ergibt die vollständige Kohomologiefolge für E/R_R $\mathrm{Ext}_R(E/R, R) = 0$, d. h. die (R, S)-Injektivität von R_R. Die Folge

$$0 \to K_R \to R^* \underset{S}{\otimes} R_R \to R^*_R \to 0$$

liefert mit der vollständigen Kohomologiefolge T^n für R^*_R

$$0 = T^0(R^*) \to T^1(K) \to T^1(R^* \underset{S}{\otimes} R) = 0,$$

da R^*_R relativ injektiv und $R^* \underset{S}{\otimes} R_R$ projektiv ist. Es folgt

$$0 = T^1(K) = \mathrm{Ext}^1_R(R^*, K)$$

und R^*_R ist Progenerator, wie zuvor.

Jetzt werde (4) angenommen. Zu S-endlich erzeugtem projektiven A_R betrachtet man die Standardauflösungen

$$\cdots \to A \underset{S}{\otimes} R \underset{S}{\otimes} R \to A \underset{S}{\otimes} R \to A \to 0 \qquad \mathrm{Hom}(R_S, A_S) \to \mathrm{Hom}(R_S, \mathrm{Hom}(R_S, A_S)_S) \to \cdots$$

$$0$$

Die Zeile X ist relativ exakt, und ihre Moduln sind alle endlich erzeugt projektiv, da R_R^* so ist; also ist X eine vollständige projektive Auflösung für A. Der durch Anwendung von $\mathrm{Hom}(_, R_R)$ entstehende Komplex Y ist wegen der (R, S)-Injektivität von R_R wieder exakt und somit eine endlich erzeugt projektive Auflösung für $A^+ = \mathrm{Hom}(A_R, R_R)$. Die beiden Komplexe $X \underset{R}{\otimes} M$ und $\mathrm{Hom}_R(Y, M)$ sind isomorph; ihre Homologiegruppen H_n sind also identisch, bilden offensichtlich eine vollständige Homologiefolge für A und verschwinden sogar für relativ projektive M, da X relativ exakt ist. Also folgt (5).

Ebenso sind die Komplexe $\mathrm{Hom}_R(X, N)$ und $N \underset{R}{\otimes} Y$ isomorph und ihre gemeinsamen Homologiegruppen T^n liefern eine vollständige Kohomologiefolge für A, wie in (6) behauptet.

Die eigentümliche Unsymmetrie in (5) und (6) hängt mit der S-Projektivität von A zusammen. Wir untersuchen diese Frage unter gleichzeitiger Annahme der Voraussetzungen von Satz 4 und (4) sowie deren Rechts-Links-Analoga.

Lemma 5. *Sind ${}_SR$, R_S endlich erzeugt und projektiv und ${}_R^*R$, R_R^* Progeneratoren, so verschwinden die vollständige Homologiefolge H_n und die vollständige Kohomologiefolge T^n eines endlich erzeugten Moduls A_R genau dann für alle relativ projektiven und alle relativ injektiven Moduln, wenn A_S und ${}_SA^+$ projektiv sind.*

Beweis. Man hat für alle N_S

$$0 = T^1(\mathrm{Hom}(R_S, N_S)) = \mathrm{Ext}_R^1(A, \mathrm{Hom}(R_S, N_S)) = \mathrm{Ext}_S^1(A, N),$$

also die Projektivität von A_S; und

$$0 = T^{-2}(N \underset{S}{\otimes} R) = \mathrm{Tor}_1^R(N \underset{S}{\otimes} R, A^+) = \mathrm{Tor}_1^S(N, A^+).$$

Damit ist ${}_SA^+$ flat; beim Beweis von Satz 4 wurde bereits eine endlich erzeugt projektive Auflösung für ${}_RA^+$ konstruiert; diese ist auch eine solche Auflösung für ${}_SA^+$. Der Modul ${}_SA^+$ ist also ebenfalls (endlich erzeugt) projektiv.

Sind umgekehrt A_S und ${}_SA^+$ projektiv, so ist unter den angegebenen Voraussetzungen auch ${}_SA^+$ endlich erzeugt und zu A_R wie zu ${}_RA^+$ existieren vollständige (Ko-)Homologiefolgen mit den Eigenschaften (5) bzw. (6). Die Homologiefolge für A stimmt mit der Kohomologiefolge für A^+ überein, und umgekehrt (Lemma 1). Damit folgt die Behauptung.

Im Hinblick auf das vorangehende Lemma ist es interessant zu wissen, wann für S-endlich erzeugt projektives A auch A^+ S-projektiv ist. Hier gilt

Lemma 6. *Sind ${}_SR$, R_S endlich erzeugt projektiv und ist ${}_SR_R \otimes * \sim {}_SE_R$, so folgt: Jeder relativ projektive Rechtsmodul N_R ist relativ injektiv; jeder relativ injektive Linksmodul ${}_RM$ ist relativ projektiv; für jeden S-endlich erzeugt projektiven Rechtsmodul A_R ist auch ${}_RA^+$ S-endlich erzeugt projektiv. Jede Rechtsquasi-Frobenius-Erweiterung erfüllt die obigen Voraussetzungen. Eine Ringerweiterung, die diese Voraussetzungen und ihr Rechts-Links-Analogon erfüllt, braucht nicht quasi-Frobenius zu sein.*

Beweis. Ein relativ projektiver Modul N_R ist direkt in $N \underset{S}{\otimes} R_R$ und wegen der Voraussetzung auch in $N \underset{S}{\otimes} E_R$. Es ist

$$N \underset{S}{\otimes} E_R \sim \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}({}_SE, {}_SS)_S, N_S)_R \sim \mathrm{Hom}(R \underset{S}{\otimes} {}^*R_S, N_S)_R \sim$$
$$\sim \mathrm{Hom}(R_S, \mathrm{Hom}({}^*R_S, N_S)_S)_R$$

relativ injektiv. Entsprechend ist

$${}_R\mathrm{Hom}({}_SE, {}_SM) \sim {}_R\mathrm{Hom}({}_S\mathrm{Hom}(R_S, R_S), {}_SM) \sim {}_RR \underset{S}{\otimes} \mathrm{Hom}({}_SR, {}_SM)$$

relativ projektiv. Ferner ist ${}_SA^+$ direkt in ${}_S\mathrm{Hom}(A_R, E_R)$ und

$${}_S\mathrm{Hom}(A_R, E_R) \sim {}_S\mathrm{Hom}(A \underset{R}{\otimes} R_S, R_S) \sim {}_S\mathrm{Hom}(A_S, R_S)$$

direkt in $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} {}_S\mathrm{Hom}(S_S, R_S) \sim \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} {}_SR$, also endlich erzeugt projektiv. — Bezüglich der Bemerkung über Quasi-Frobenius-Erweiterungen vgl. MÜLLER [10], Satz 31. — Ist R der Ring der 2×2-Matrizen über einem beliebigen Ring mit Einselement und S der Unterring der (oberen) Dreiecksmatrizen, so ist $E = R$ und ${}_SR$, R_S endlich erzeugt projektiv, d. h. man hat die obige Voraussetzung und ihr symmetrisches Analogon, aber R/S ist nicht quasi-Frobenius.

Bemerkung 3. Die Beschränkung auf S-projektive Moduln A führt zu einer gewissen Überlagerung absoluter und relativer Eigenschaften; z. B. besitzt ein solches A eine (R, S)-exakte, R-projektive Auflösung. Es könnte auf den ersten Blick angemessener erscheinen, bei Betrachtung einer Ringerweiterung R/S auch den Begriff einer vollständigen (Ko-)Homologiefolge zu „relativieren". Natürlich kann man zu beliebigem A die Folgen der relativen Satelliten der beiden relativen Funktoren $\mathrm{Tor}_1(A, _)$ und $\mathrm{Ext}^1(A, _)$ bilden; und diese sind in gewissen Fällen — z. B. für beidseitige Quasi-Frobenius-Erweiterungen — auch relativ satellitenhomogen. Was man jedoch nicht mehr beweisen kann, ist ein relatives Analogon zu Lemma 1: Die relativen Funktoren Tor und Ext erscheinen nicht mehr in derselben Folge. Damit geht ein wesentlicher Zug der vollständigen (Ko-)Homologie verloren. — Man vergleiche das von HOCHSCHILD [5], S. 262, diskutierte Beispiel aus der relativen Kohomologie der Gruppen.

4. Für eine Algebra Λ/K erhält man besonders einfache Verhältnisse. Ist Λ_K endlich erzeugt projektiv, so auch ${}_K\Lambda$, Λ_K^* und ${}^*_K\Lambda$.[7] Ferner sind dann die drei Eigenschaften Λ^*_Λ projektiv, ${}^*_\Lambda\Lambda$ Generator und ${}_\Lambda\Lambda$ relativ injektiv äquivalent. Schließlich sind diese Eigenschaften auch mit ihren Rechts-Links-Analoga gleichwertig [ROSENBERG/CHASE (unveröffentlicht)], und eine Algebra Λ/K hat alle genannten Eigenschaften genau dann, wenn sie als Ringerweiterung (beidseitig) quasi-Frobenius ist.

Wir bemerken, daß die Kategorien der Λ^e-Linksmoduln, Λ^e-Rechtsmoduln und $\Lambda - \Lambda$-Moduln (mit $\kappa m = m\kappa$ für alle $\kappa \in K$, $m \in M$) isomorph sind.

[7] Λ^*, ${}^*\Lambda$ sind die Dualen von Λ_K, ${}_K\Lambda$.

Satz 7. (i) *Es sei Λ/K eine Algebra und Λ_K endlich erzeugt projektiv. Besitzt der $\Lambda-\Lambda$-Modul Λ eine vollständige Homologiefolge, die für alle $(\Lambda-\Lambda, \Lambda-K)$-injektiven $\Lambda-\Lambda$-Moduln verschwindet, oder eine vollständige Kohomologiefolge, die für alle $(\Lambda-\Lambda, \Lambda-K)$-projektiven $\Lambda-\Lambda$-Moduln verschwindet, so ist Λ/K quasi-Frobenius.*

(ii) *Ist umgekehrt Λ/K quasi-Frobenius, so existiert eine vollständige Homologiefolge H_n und eine vollständige Kohomologiefolge T^n für den $\Lambda-\Lambda$-Modul Λ, die beide für alle $(\Lambda-\Lambda, \Lambda-K)$- und $(\Lambda-\Lambda, K-\Lambda)$-injektiven (= projektiven) $\Lambda-\Lambda$-Moduln verschwinden. Für alle n gilt $H_n = T^{-n-1}F$ mit einem Automorphismus F der Kategorie der $\Lambda-\Lambda$-Moduln; insbesondere können $F(M) = \Lambda^* \underset{\Lambda}{\otimes} M$ oder $F(M) = M \underset{\Lambda}{\otimes} \Lambda^*$ gewählt werden.*

Beweis. (i) Im ersten Fall hat man $\mathrm{Tor}^{\Lambda-\Lambda}(\Lambda, M) = 0$ für alle $(\Lambda-\Lambda, \Lambda-K)$-injektiven $\Lambda-\Lambda$-Moduln M, im zweiten $\mathrm{Ext}_{\Lambda-\Lambda}(\Lambda, M) = 0$ für alle $(\Lambda-\Lambda, \Lambda-K)$-projektiven M. Nun gilt in der Situation B_Λ, ${}_\Lambda C$, wenn einer dieser Moduln K-projektiv ist,

$$\mathrm{Tor}^{\Lambda-\Lambda}(\Lambda, C \underset{K}{\otimes} B) = \mathrm{Tor}^{\Lambda}(B, C)$$

und in der Situation ${}_\Lambda B$, ${}_\Lambda C$ mit K-projektivem B

$$\mathrm{Ext}_{\Lambda-\Lambda}(\Lambda, \mathrm{Hom}_K(B, C)) = \mathrm{Ext}_\Lambda(B, C)$$

(CARTAN-EILENBERG [2], Chap. IX, Th. 2.8 und 2.8a). Da für jedes ${}_\Lambda C$ der Modul

$${}_{\Lambda^e}C \underset{K}{\otimes} \Lambda^* \sim {}_{\Lambda^e}\mathrm{Hom}({}_\Lambda \Lambda^e, {}_\Lambda C)$$

(Λ^e, Λ)-injektiv, mit anderen Worten ${}_\Lambda C \underset{K}{\otimes} \Lambda^*_\Lambda$ $(\Lambda-\Lambda, \Lambda-K)$-injektiv ist, folgt für den ersten Fall

$$0 = \mathrm{Tor}^{\Lambda-\Lambda}(\Lambda, C \underset{K}{\otimes} \Lambda^*) = \mathrm{Tor}^{\Lambda}(\Lambda^*, C)$$

und Λ^*_Λ ist flat. Da es eine endlich erzeugt projektive Auflösung besitzt, ist es dann auch projektiv, und Λ/K ist quasi-Frobenius. Im zweiten Fall ergibt sich, da ${}_{\Lambda^e}\mathrm{Hom}_K({}^*\Lambda, C) \sim {}_{\Lambda^e}\Lambda^e \underset{\Lambda}{\otimes} C$ für alle ${}_\Lambda C$ $(\Lambda-\Lambda, \Lambda-K)$-projektiv ist,

$$0 = \mathrm{Ext}_{\Lambda-\Lambda}(\Lambda, \mathrm{Hom}_K({}^*\Lambda, C)) = \mathrm{Ext}_\Lambda({}^*\Lambda, C)\ ;$$

${}^*_\Lambda\Lambda$ ist also projektiv und Λ/K wieder quasi-Frobenius.

(ii) Ist Λ/K (beidseitige) Quasi-Frobenius-Erweiterung, so auch Λ^e/Λ; und die Begriffe (Λ^e, Λ)-injektiv und (Λ^e, Λ)-projektiv sind äquivalent (MÜLLER [10], Satz 4, Th. 36). Satz 4, (4) ist für $R/S = \Lambda^e/\Lambda$ erfüllt und man erhält zu $A_R = \Lambda_{\Lambda^e}$ eine vollständige Homologiefolge H_n und eine vollständige Kohomologiefolge T^n, die für alle (Λ^e, Λ)-injektiven (= projektiven) Moduln ${}_{\Lambda^e}M$ bzw. N_{Λ^e} verschwinden — d. h. für alle $(\Lambda-\Lambda, \Lambda-K)$-injektiven $\Lambda-\Lambda$-Moduln M bzw. für alle $(\Lambda-\Lambda, K-\Lambda)$-injektiven N. Der duale Modul ${}_R A^+$ ist (CARTAN-EILENBERG [2], Chap. IX, Prop. 2.2)

$$\begin{aligned}
{}_{\Lambda^e}\mathrm{Hom}(\Lambda_{\Lambda^e}, \Lambda^e_{\Lambda^e}) &= {}_{\Lambda^e}\mathrm{Hom}(\Lambda_{\Lambda^e}, \Lambda \underset{K}{\otimes} \Lambda^0_{\Lambda^e}) \sim \\
&\sim {}_{\Lambda^e}\mathrm{Hom}(\Lambda_{\Lambda^e}, \mathrm{Hom}_K({}^*\Lambda^0, \Lambda)_{\Lambda^e}) \sim \\
&\sim {}_{\Lambda^e}\mathrm{Hom}(\Lambda \underset{\Lambda^0}{\otimes} {}^*\Lambda^0_\Lambda, \Lambda_\Lambda) \sim \\
&\sim {}_{\Lambda^e}\mathrm{Hom}(\Lambda^*_\Lambda, \Lambda_\Lambda)\,.
\end{aligned}$$

Die Abbildung

$$\Lambda \ni \lambda \to (\alpha \to \lambda \circ \alpha) \in \mathrm{Hom}(\Lambda_\Lambda^*, \Lambda_\Lambda^*)$$

ist ein Ringisomorphismus (MÜLLER [10], Satz 22). Identifiziert man beide Ringe vermöge dieser Isomorphie, so wird

$$_{\mathrm{Hom}(\Lambda_\Lambda^*, \Lambda_\Lambda^*)}\Lambda^* = {}_\Lambda\Lambda^*$$

und

$$\mathrm{Hom}(\Lambda_\Lambda^*, \Lambda_\Lambda)_{\mathrm{Hom}(\Lambda_\Lambda^*, \Lambda_\Lambda^*)} = \mathrm{Hom}(\Lambda_\Lambda^*, \Lambda_\Lambda)_\Lambda .$$

Mit Λ_Λ^* sind diese beiden Moduln und ${}_\Lambda\mathrm{Hom}(\Lambda_\Lambda^*, \Lambda_\Lambda)$ Progeneratoren, und die Paare

$$\Lambda^* \underset{\Lambda}{\otimes} -, \quad \mathrm{Hom}(\Lambda_\Lambda^*, \Lambda_\Lambda) \underset{\Lambda}{\otimes} - \qquad \text{bzw.} \qquad - \underset{\Lambda}{\otimes} \Lambda^*, \; - \underset{\Lambda}{\otimes} \mathrm{Hom}(\Lambda_\Lambda^*, \Lambda_\Lambda)$$

sind inverse Automorphismen der Kategorien der Λ-Links- bzw. Λ-Rechtsmoduln (BASS [1], Morita I). Jedes Paar erzeugt inverse Automorphismen der Kategorie der $\Lambda - \Lambda$-Moduln, die sich in einer „Modifikation der Links- bzw. Rechtsmodulstruktur" auswirken, während die Struktur auf der jeweils andern Seite unverändert bleibt (vgl. NAKAYAMA [11]).

Aus CARTAN-EILENBERG [2], Chap. IX, Th. 2.8a ergibt sich für jeden $\Lambda - \Lambda$-Modul M

$$\begin{aligned} H_{-n-1}(M) &= \mathrm{Ext}^n_{\Lambda-\Lambda}(\mathrm{Hom}(\Lambda_{\Lambda^e}, \Lambda^e_{\Lambda^e}), M) \sim \\ &\sim \mathrm{Ext}^n_{\Lambda-\Lambda}(\mathrm{Hom}(\Lambda_\Lambda^*, \Lambda_\Lambda) \underset{\Lambda}{\otimes} \Lambda, M) \sim \\ &\sim \mathrm{Ext}^n_{\Lambda-\Lambda}(\Lambda, \mathrm{Hom}({}_\Lambda\mathrm{Hom}(\Lambda_\Lambda^*, \Lambda_\Lambda), {}_\Lambda M)) \sim \\ &\sim \mathrm{Ext}^n_{\Lambda-\Lambda}(\Lambda, \Lambda^* \underset{\Lambda}{\otimes} M) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} &\sim \mathrm{Ext}^n_{\Lambda-\Lambda}(\Lambda \underset{\Lambda}{\otimes} \mathrm{Hom}(\Lambda_\Lambda^*, \Lambda_\Lambda), M) \sim \\ &\sim \mathrm{Ext}^n_{\Lambda-\Lambda}(\Lambda, \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(\Lambda_\Lambda^*, \Lambda_\Lambda)_\Lambda, M_\Lambda)) \sim \\ &\sim \mathrm{Ext}^n_{\Lambda-\Lambda}(\Lambda, M \underset{\Lambda}{\otimes} \Lambda^*) ; \end{aligned}$$

also $H_{-n-1}(M) = T^n(F(M))$, $n \geqq 1$, für jede der beiden im Satz angegebenen Bedeutungen von F. Da beide Folgen H und T satellitenhomogen sind und F ein Kategorienisomorphismus ist, folgt $H_{-n-1} = T^n F$ für alle n.

Wir wissen, daß $H_n(M) = 0$ für alle $(\Lambda - \Lambda, \Lambda - K)$-projektiven (= injektiven) M gilt. Ist M dagegen $(\Lambda - \Lambda, K - \Lambda)$-projektiv, so auch $M \underset{\Lambda}{\otimes} \Lambda^*$ und es folgt

$$H_n(M) = T^{-n-1}(M \underset{\Lambda}{\otimes} \Lambda^*) = 0 .$$

Analog folgert man $T^n(N) = 0$ für die $(\Lambda - \Lambda, \Lambda - K)$-projektiven N; und der Satz ist vollständig bewiesen.

Bemerkung 4. Lemma 1 liefert mittels der Abbildungen

$$\begin{aligned} \psi: &\quad \Lambda \underset{\Lambda^e}{\otimes} M \to \mathrm{Hom}({}_{\Lambda^e}\mathrm{Hom}(\Lambda_{\Lambda^e}, \Lambda^e_{\Lambda^e}), {}_{\Lambda^e}M), \\ \varphi: &\quad M \underset{\Lambda^e}{\otimes} \mathrm{Hom}(\Lambda_{\Lambda^e}, \Lambda^e_{\Lambda^e}) \to \mathrm{Hom}(\Lambda_{\Lambda^e}, M_{\Lambda^e}) \end{aligned}$$

folgende explizite Beschreibungen von H_0 und T^0:

$$H_0(M) = \mathrm{Ke}\psi(M)$$
$$= \left\{ m \in M \mid \sum_i \lambda_i' m \lambda_i = 0 \; \forall \sum_i \lambda_i \otimes \lambda_i'^0 \in (\Lambda^e)^\Lambda \right\} / \left\{ \sum_i \lambda_i m_i - m_i \lambda_i \mid m_i \in M, \lambda_i \in \Lambda \right\},$$

$$T^0(M) = \mathrm{Cok}\varphi(M)$$
$$= \left\{ m \in M \mid \lambda m = m\lambda \; \forall \lambda \in \Lambda \right\} / \left\{ \sum_{i,k} \lambda_{ik} m_k \lambda_{ik}' \mid m_k \in M, \sum_i \lambda_{ik} \otimes \lambda_{ik}'^0 \in (\Lambda^e)^\Lambda \right\}.$$

H_0 ist also eine Untergruppe und T^0 eine Faktorgruppe der entsprechenden Hochschildgruppen.

Bemerkung 5. Besonders übersichtlich werden die Verhältnisse, wenn Λ/K Frobenius ist. Dann existieren „duale Erzeugendensysteme" r_i, l_i zu ${}_K\Lambda$, Λ_K (vgl. z. B. PAREIGIS [15]) und die Casimirelemente sind genau die $\sum_i r_i \lambda \otimes l_i$, $\lambda \in \Lambda$. Mit

$$\sigma: \quad M \ni m \to \sum_i r_i m l_i \in M$$

folgt

$$H_0(M) = \mathrm{Ke}\sigma / \left\{ \sum_i \lambda_i m_i - m_i \lambda_i \right\}$$

und

$$T^0(M) = M^\Lambda / \mathrm{Im}\,\sigma.$$

Ferner ist dann die durch den Funktor $F(M) = M \underset{\Lambda}{\otimes} \Lambda^*$ bewirkte Modifikation der Rechtsmodulstruktur von M einfach $m \circ \lambda = m\lambda'$ mit dem Nakayama-automorphismus $\lambda \to \lambda'$, $\alpha \circ \lambda = \lambda' \circ \alpha$. Ist Λ/K sogar symmetrische Frobenius-Erweiterung, also $\lambda = \lambda'$, so wird F der identische Automorphismus und man hat mit $H_n = T^{-n-1}$ die von der (Ko-)Homologie der Gruppen her bekannten einfachen Verhältnisse (vgl. NAKAYAMA [11]).

5. Bemerkung 6 (zum Reduktionstheorem). Ist $S^n = S_{-n-1}$ eine beliebige satellitenhomogene Folge von Funktoren für R-Moduln M, beispielsweise eine vollständige Homologiefolge $S_n = H_n$ oder eine vollständige Kohomologiefolge $S^n = T^n$, und

$$0 \to M \to M_1 \to \cdots \to M_m \to M' \to 0$$

eine exakte Folge mit projektiven oder injektiven M_k, so gilt $S^{n+m}(M) = S^n(M')$ für alle ganzen n, m; d. h. man hat ein *Reduktionstheorem.*

Explizitere Formeln lassen sich im Falle einer Ringerweiterung R/S angeben, wenn die S^n für alle relativ projektiven und alle relativ injektiven Moduln verschwinden (vgl. Satz 4 und Lemma 5). Man betrachtet die exakte Folge

$$0 \to \mathrm{Ke}\alpha_m \to \underset{S}{R} \otimes \cdots \otimes \underset{S}{R} \xrightarrow{\alpha_m} \cdots \to \underset{S}{R} \otimes \underset{S}{R} \otimes R \xrightarrow{\alpha_2} \underset{S}{R} \otimes R \xrightarrow{\alpha_1} R \to 0$$

mit

$$\alpha_k(x_0 \otimes \cdots \otimes x_k) = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i x_0 \otimes \cdots \otimes x_i x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_k,$$

die sowohl links- wie rechts-zerfällt. Die mittels $_ \underset{R}{\otimes} M$ und $\mathrm{Hom}(_, {}_R M)$ hieraus entstehenden Folgen

$$0 \to {}_R\mathrm{Ke}\alpha_m \underset{R}{\otimes} M \to {}_R R \underset{S}{\otimes} \cdots \underset{S}{\otimes} M \to \cdots \to {}_R R \underset{S}{\otimes} M \to {}_R M \to 0$$

und

$$0 \to {}_R M \to {}_R\mathrm{Hom}({}_S R, {}_S M) \to \cdots \to$$
$$\to {}_R\mathrm{Hom}({}_S R \underset{S}{\otimes} \cdots \underset{S}{\otimes} R, {}_S M) \to {}_R\mathrm{Hom}({}_R\mathrm{Ke}\alpha_m, {}_R M) \to 0$$

sind also ebenfalls exakt, und die mittleren Moduln sind relativ projektiv bzw. relativ injektiv. Mit den Funktoren

$$D^0(M) = M,\ D^m(M) = \mathrm{Hom}({}_R\mathrm{Ke}\alpha_m, {}_R M),\ D^{-m}(M) = \mathrm{Ke}\alpha_m \underset{R}{\otimes} M,$$

$m \geqq 1$, folgt also $S^{n+m} = S^n D^m$ für beliebige ganze n, m.

Für die Hochschildgruppen kann man statt mit $R/S = \Lambda^e/\Lambda$ auch mit $R/S = \Lambda/K$ arbeiten. In den exakten Folgen

$$0 \to {}_\Lambda\mathrm{Ke}\alpha_m \underset{\Lambda}{\otimes} M_\Lambda \to {}_\Lambda\Lambda \underset{K}{\otimes} \cdots \underset{K}{\otimes} \Lambda \underset{K}{\otimes} M_\Lambda \to \cdots \to {}_\Lambda\Lambda \underset{K}{\otimes} M_\Lambda \to {}_\Lambda M_\Lambda \to 0$$

und

$$0 \to {}_\Lambda M_\Lambda \to {}_\Lambda\mathrm{Hom}({}_K\Lambda, {}_K M)_\Lambda \to \cdots \to$$
$$\to {}_\Lambda\mathrm{Hom}({}_K\Lambda \underset{K}{\otimes} \cdots \underset{K}{\otimes} \Lambda, {}_K M)_\Lambda \to {}_\Lambda\mathrm{Hom}({}_\Lambda\mathrm{Ke}\alpha_m, {}_\Lambda M)_\Lambda \to 0$$

sind die mittleren Moduln $(\Lambda - \Lambda, K - \Lambda)$-projektiv bzw. injektiv. Für solche Moduln verschwinden sämtliche H_n und T^n aus Satz 7, (ii) und man hat wieder $S^{n+m} = S^n D^m$, diesmal für die $\Lambda - \Lambda$-Moduln M.

NAKAYAMA [11] hat — unter engeren Voraussetzungen, z. B. Λ/K Frobenius-Algebra über einem Körper K — ein analoges Reduktionstheorem für die vollständige Hochschildfolge bewiesen. Dabei treten an Stelle unserer $D^m(M)$ die Moduln

$$C^0(\Lambda, M) = M,\ C^m(\Lambda, M) = \mathrm{Hom}_K(\Lambda \underset{K}{\otimes} \cdots \underset{K}{\otimes} \Lambda, M),$$
$$C^{-m}(\Lambda, M) = \Lambda \underset{K}{\otimes} \cdots \underset{K}{\otimes} \Lambda \underset{K}{\otimes} M,\ m \geqq 1,$$

auf, wobei die Modulstruktur auf eine komplizierte Weise definiert ist. Man rechnet nach, daß diese $C^m(\Lambda, M)$ nicht unitär sind und daß ihre unitären Untermoduln $1 \cdot C^m(\Lambda, M) \cdot 1$ — bei geeigneten Identifizierungen — gerade unsere $D^m(M)$ sind. Ferner sind die Hochschildgruppen für einen nichtunitären Modul gleich denen für den zugehörigen unitären Untermodul (vgl. NAKAYAMA [11], S. 169). Somit ist NAKAYAMAs Reduktionstheorem in unseren Ergebnissen enthalten.

Literatur

[1] BASS, H.: The Morita theorems. Skriptum Summer Institute on Algebra 1962, Univ. of Oregon, Eugene, Oregon, USA.

[2] CARTAN, H., and S. EILENBERG: Homological Algebra. Princeton: Princeton Univ. Press 1956.

[3] CHASE, S. U.: Direct products of modules. Trans. Am. Math. Soc. **97**, 457—473 (1960).
[4] FLANDERS, H.: Satellites of half exact functors, a correction. Proc. Am. Math. Soc. **15**, 834—837 (1964).
[5] HOCHSCHILD, G.: Relative homological algebra. Trans. Am. Math. Soc. **82**, 246—269 (1956).
[6] IKEDA, M., and T. NAKAYAMA: On some characteristic properties of quasi-Frobenius and regular rings. Bull. Am. Math. Soc. **5**, 15—19 (1954).
[7] KASCH, F.: Dualitätseigenschaften von Frobenius-Erweiterungen. Math. Z. **77**, 219—227 (1961).
[8] MATLIS, E.: Injective modules over Noetherian rings. Pacific. J. Math. **8**, 511—528 (1958).
[9] MORITA, K., and H. TASCHIKAWA: Character modules, submodules of a free module, and quasi-Frobenius-rings. Math. Z. **65**, 414—428 (1956).
[10] MÜLLER, B.: Quasi-Frobenius-Erweiterungen I, II. Math. Z. **85**, 345—368 (1964); **88**, 380—409 (1965).
[11] NAKAYAMA, T.: On the complete cohomology theory of Frobenius algebras. Osaka Math. J. **9**, 165—187 (1957).
[12] — Note on complete cohomology of a quasi-Frobenius algebra. Nagoya Math. J. **13**, 115—121 (1958).
[13] — On algebras with complete cohomology. Abhandl. math. Seminar hamburg. Univ **22**, 300—307 (1958).
[14] OGAWA, H.: On a duality of cohomology groups of Frobenius algebras. Tohoku Math. J. **13**, 46—65 (1961).
[15] PAREIGIS, B.: Einige Bemerkungen über Frobenius-Erweiterungen. Math. Ann. **153**, 1—13 (1964).
[16] MORITA, K.: Adjoint pairs of functors and Frobenius extensions. Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku **9**, no. 205, 40—71 (1965).

Dozent Dr. BRUNO MÜLLER
Mathem. Institut der Universität
65 Mainz, Saarstr. 21

(Eingegangen am 28. September 1965)

SCHÄFKE, F. W. und A. SCHNEIDER
Math. Annalen 165, 236—260 (1966)

S-hermitesche Rand-Eigenwertprobleme. II

Herrn E. HÖLDER zum 65. Geburtstag am 2. 4. 1966 gewidmet

F. W. SCHÄFKE und A. SCHNEIDER

0. Einleitung

In der vorliegenden Note wird die Theorie von Teil I, F. W. SCHÄFKE und A. SCHNEIDER [20], weitergeführt und ergänzt. Im Teil I war gezeigt worden, wie sich gewisse Rand-Eigenwertprobleme für gewöhnliche lineare Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung,

$$C_1(x)\,y'(x)+D_1(x)\,y(x)=\lambda\,[C_2(x)\,y'(x)+D_2(x)\,y(x)]\,, \tag{0.1}$$

$$A_1 y(a)+B_1 y(b)=\lambda\,[A_2 y(a)+B_2 y(b)] \tag{0.2}$$

als „*S*-hermitesche" Eigenwertprobleme auffassen und gegebenenfalls als normale, reduzible und definite Probleme im Rahmen einer fast rein linearalgebraischen Theorie über einen Satz von H. WIELANDT [22] auf die Eigenwerttheorie vollstetiger hermitescher Operatoren im Hilbertraum zurückführen lassen. Nunmehr wird, im vorliegenden Teil II, die Struktur der behandelten Probleme näher untersucht, insbesondere hinsichtlich der möglichen Randbedingungen. Zugleich wird im einzelnen dargelegt, wie sich frühere Theorien dieses Gedankenkreises in den gegebenen Rahmen einordnen.

Abschnitt 1 geht von der folgenden Fragestellung aus: Gegeben seien das System (0.1) und dazu Matrizen $C_3(x)$, $D_3(x)$, derart, daß für reelles λ

$$(C_3v'+D_3v)^*\,((C_1-\lambda C_2)\,u'+(D_1-\lambda D_2)u)-$$
$$-((C_1-\lambda C_2)\,v'+(D_1-\lambda D_2)v)^*\,(C_3u'+D_3u)=\frac{d}{dx}\,v^*Hu$$

mit einer λ-unabhängigen, in $[a, b]$ invertierbaren, stetig differenzierbaren und schief-hermiteschen Matrix $H(x)$ für alle stetig differenzierbaren $u(x)$, $v(x)$ gilt. Gesucht werden alle möglichen Randbedingungen (0.2) [mit (n, n)-Matrizen] und (n, n)-Matrizen A_3, B_3, derart, daß hierdurch ein *S*-hermitesches Problem (0.1), (0.2) mit Symmetrie in $\mathfrak{H}_0$ bzw. $\mathfrak{G}_0$, also nicht erst in Teilräumen, entsteht. — Wir bezeichnen solche Probleme als *S*-hermitesch im *Normalfall*. Abschnitt 1 gibt für die möglichen Matrizen A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 eine einfache Charakterisierung durch eine $(2n, 2n)$-Matrix-Relation, die den Ausgangspunkt der folgenden Untersuchungen bildet. Abschnitt 2 bringt einen Existenzbeweis für solche Matrizen und damit eine vereinfachende Reduktion, die die weitere Untersuchung vom speziellen $H(x)$ unabhängig macht. Überdies

bilden nach dieser Transformation die möglichen (λ-unabhängigen) $(2n, 2n)$-Matrizen eine Gruppe mit einfachen Automorphismen. Hierauf gestützt, gelingt im Abschnitt 3 die vollständige Charakterisierung und Aufzählung aller dieser λ-unabhängigen Matrizen. Anschließend bringt Abschnitt 4 auch die vollständige Charakterisierung und Aufzählung aller möglichen λ-abhängigen $(2n, 2n)$-Matrizen. Damit ist die Struktur der Gesamtheit möglicher Matrixsysteme $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ der obigen Fragestellung völlig geklärt. Abschnitt 5 untersucht, hiermit eng zusammenhängend, die „symmetrisierenden" Unterräume $\mathfrak{U}$ von Rand-Vektoren

$$\begin{pmatrix} y(a) \\ y(b) \end{pmatrix},$$

d. h. solche, für die

$$\begin{pmatrix} u(a) \\ u(b) \end{pmatrix} \in \mathfrak{U}, \quad \begin{pmatrix} v(a) \\ v(b) \end{pmatrix} \in \mathfrak{U}$$

nach sich zieht

$$v(x)^* H(x) u(x)|_a^b = 0.$$

Wieder wird eine volle Charakterisierung und Aufzählung sämtlicher solcher Unterräume und entsprechender Randbedingungen gegeben. Dabei zeigt sich, daß jede Randbedingung

$$A_1 y(a) + B_1 y(b) = 0$$

für einen maximalen symmetrisierenden Unterraum sich durch Matrizen A_3, B_3 so ergänzen läßt, daß ein S-hermitesches Problem im Normalfall entsteht. Für die λ-linearen Bedingungen (0.2) besteht nur die eine einfache notwendige und hinreichende Zusatzbedingung: Bei $\operatorname{rg}(A_1, B_1) = n$ muß

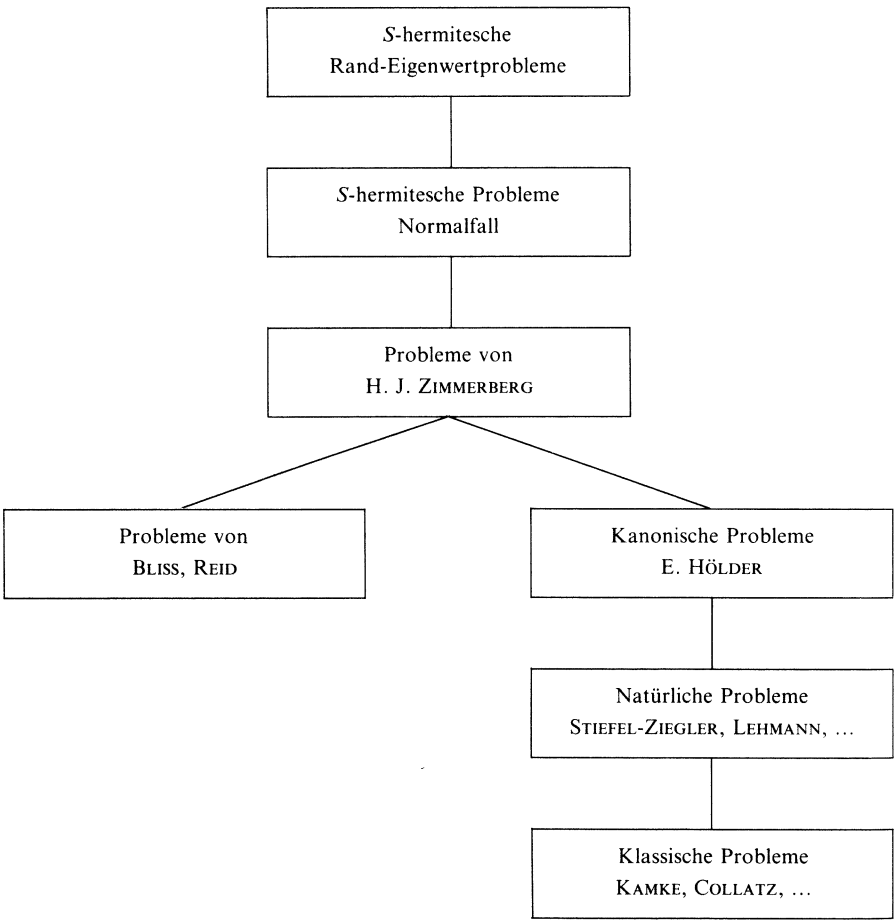
$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = n + \operatorname{rg}(A_2, B_2)$$

gelten.

An diese allgemeinen Untersuchungen zum Normalfall anschließend, wird in den folgenden Abschnitten die Einordnung spezieller Problemklassen erörtert. Abschnitt 6 gibt zunächst die Einordnung der selbstadjungierten und definiten Rand-Eigenwertprobleme von G. A. Bliss [1], [2], W. T. Reid [14], [15], [16], [17], [18], [19] (parameterunabhängige Randbedingungen) und H. J. Zimmerberg [23], [24] (λ-lineare Randbedingungen). Abschnitt 7 behandelt die „kanonischen Eigenwertprobleme" von E. Hölder [5], [6] und zeigt, daß diese Spezialfälle der Probleme von H. J. Zimmerberg sind. Den von E. Stiefel und H. Ziegler [21] definierten und von N. J. Lehmann [11] und E. Bukovics [3] untersuchten „natürlichen Eigenwertproblemen" ist Abschnitt 8 gewidmet: Sie sind einfache Spezialfälle der kanonischen Probleme. Schließlich wird im Abschnitt 9 dargelegt, wie die „klassischen" Eigenwertprobleme, die vor allem von E. Kamke [7], [8], [9], [10] untersucht bzw. von L. Collatz [4] dargestellt wurden und denen sich auch neuere Arbeiten

wie u. a. H. MAASS [13], H. LEPTIN [12] widmen, als Spezialfälle der natürlichen Eigenwertprobleme erscheinen.

Zusammenfassend ergibt sich folgendes Einordnungsschema, bei dem jeweils die oberhalb notierten Problemklassen die tiefer stehenden umfassen:



Es sollte bemerkt werden, daß abgesehen von diesen Einordnungsangaben die vorliegende Arbeit auch für die speziellen Problemklassen in drei Richtungen wesentliche neue Erkenntnisse bringt: Für alle wird durch die Einordnung in den Normalfall erstmals gezeigt, daß hermitesche Symmetrie für geeignet definierte Funktionale schon im Raum aller stetig differenzierbaren bzw. stetigen Vektorfunktionen erreicht werden kann. Dies ist noch bei H. J. ZIMMERBERG nicht gelungen. Weiter wird für alle Probleme im Normalfall, also auch für die von H. J. ZIMMERBERG betrachteten, nicht nur eine Charakterisierung der möglichen Randbedingungen durch mehr oder weniger

naheliegende notwendige und hinreichende Bedingungen gegeben, sondern es gelingt erstmals eine vollständige Aufzählung sowohl für die symmetrisierenden Randbedingungen als auch für die möglichen Ergänzungen zu S-hermiteschen Problemen. Schließlich wird speziell für die klassischen Probleme erstmals eine Charakterisierung und Aufzählung aller möglichen Randbedingungen mitgeteilt und damit eine lange offene Frage beantwortet.

1. S-hermitesche Rand-Eigenwertprobleme: Normalfall

Im folgenden bezeichnen wir das Differentialgleichungssystem

$$C_1(x)\,y'(x)+D_1(x)\,y(x)=\lambda(C_2(x)\,y'(x)+D_2(x)\,y(x)) \tag{1.1}$$

(mit den Annahmen von Teil I, Abschnitt 3) bezüglich zweier stetiger (n, n)-Matrizen $C_3(x)$, $D_3(x)$ als S-hermitesches *System* im *Normalfall*, wenn (λ reell)

$$(C_3v'+D_3v)^*\,((C_1-\lambda C_2)\,u'+(D_1-\lambda D_2)u)- \tag{1.2}$$
$$-((C_1-\lambda C_2)\,v'+(D_1-\lambda D_2)\,v)^*\,(C_3u'+D_3u)=\frac{d}{dx}\,v^*Hu$$

mit einer λ-unabhängigen, in $[a, b]$ invertierbaren, stetig differenzierbaren und schief-hermiteschen Matrix $H(x)$ für alle stetig differenzierbaren $(n, 1)$-Vektoren $u(x)$, $v(x)$ gilt. Unmittelbare Folgerungen sind:

$$\int_a^b (C_3v'+D_3v)^*\,(C_2u'+D_2u)\,dx\equiv G_0(u, v)=\overline{G_0(v, u)}\quad (u, v\in\mathfrak{G}_0), \tag{1.3}$$

$$\int_a^b (C_3v'+D_3v)^*\,(C_1u'+D_1u)\,dx\equiv F_0(u, v)= \tag{1.4}$$
$$=\overline{F_0(v, u)}+\begin{pmatrix}v(a)\\ v(b)\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix}-H(a) & O\\ O & H(b)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(a)\\ u(b)\end{pmatrix}\quad (u, v\in\mathfrak{F}_0),$$

wobei zuletzt in naheliegender Weise $(2n, 1)$-Vektoren und eine $(2n, 2n)$-Matrix benutzt wurden. Dabei ist $\mathfrak{F}_0=\bigtimes_{\nu=1}^{n} C_1\,[a, b]$ und entweder $\mathfrak{G}_0=\mathfrak{F}_0$ oder $\mathfrak{G}_0=\bigtimes_{\nu=1}^{n} C_0\,[a, b]$ im Falle $C_2(x)=C_3(x)=O$.

Wir sagen weiter: Die Randbedingungen [mit (n, n)-Matrizen]

$$A_1y(a)+B_1y(b)=\lambda(A_2y(a)+B_2y(b)) \tag{1.5}$$

ergänzen zusammen mit (n, n)-Matrizen A_3, B_3 das obige System im Normalfall zu einem S-hermiteschen *Rand-Eigenwertproblem* im *Normalfall*, wenn für alle Randvektoren die Relationen

$$(A_3v(a)+B_3v(b))^*\,(A_2u(a)+B_2u(b))\equiv G_1(u, v)=\overline{G_1(v, u)}, \tag{1.6}$$

$$(A_3v(a)+B_3v(b))^*\,(A_1u(a)+B_1u(b))\equiv \tag{1.7}$$
$$\equiv F_1(u, v)=\overline{F_1(v, u)}+\begin{pmatrix}v(a)\\ v(b)\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix}H(a) & O\\ O & -H(b)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(a)\\ u(b)\end{pmatrix}$$

bestehen.

(1.3), (1.4), (1.6), (1.7) ziehen

$$G(u,v) \equiv G_0(u,v) + G_1(u,v) = \overline{G(v,u)} \qquad (u, v \in \mathfrak{G}_0), \tag{1.8}$$

$$F(u,v) \equiv F_0(u,v) + F_1(u,v) = \overline{F(v,u)} \qquad (u, v \in \mathfrak{F}_0), \tag{1.9}$$

also die Möglichkeit (Teil I, Abschnitt 3)

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0, \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \tag{1.10}$$

nach sich.

Mit den Bezeichnungen

$$\mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} H(a) & O \\ O & -H(b) \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{J} = \begin{pmatrix} O & -E \\ E & O \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

$$\mathfrak{A}_\lambda = \begin{pmatrix} A_1 - \lambda A_2 & B_1 - \lambda B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

kann (1.6), (1.7) in der Forderung

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{A}_\lambda^* \mathfrak{J} \mathfrak{A}_\lambda \tag{1.13}$$

für (zwei) alle λ zusammengefaßt werden. Die Frage nach der Struktur sämtlicher Randbedingungen (1.5) und zugehörigen Matrizen A_3, B_3, die das gegebene S-hermitesche System im Normalfall zu einem S-hermiteschen Rand-Eigenwertproblem im Normalfall ergänzen, ist so zurückgeführt auf die Frage nach Charakterisierung und Aufzählung der Matrizen $\mathfrak{A}_\lambda$, die bei gegebenem $\mathfrak{Q}$ die Eigenschaft (1.13) haben.

Dieser Frage dienen die Untersuchungen der folgenden Abschnitte 2, 3, 4.

2. Randbedingungen im Normalfall: Existenz, Reduktion

Wir benutzen die Eigenschaften von $\mathfrak{Q}$ zu einer ersten Existenzaussage und einem vereinfachenden Reduktionsschritt.

Satz 2.1: *Es existiert eine (konstante, invertierbare)* $(2n, 2n)$*-Matrix* $\mathfrak{B}$ *mit* (1.13), *d. h. mit*

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{B}^* \mathfrak{J} \mathfrak{B}.$$

Beweis: Nach den Voraussetzungen über $H(x)$ in 1 ist $iH(x)$ in $[a, b]$ stetig, invertierbar und hermitesch, hat also reelle Eigenwerte $\lambda_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, die in $[a, b]$ stetig und stets von 0 verschieden sind. Daher ist die Anzahl der positiven Eigenwerte über $a \leqq x \leqq b$ konstant, ebenso die der negativen. (1.11) zeigt damit, daß $i\mathfrak{Q}$ genau n positive und n negative Eigenwerte hat. Dasselbe gilt für $i\mathfrak{J}$. Da nun Rang und Signatur die einzigen affinen Invarianten für eine hermitesche Matrix sind, ergibt sich die Behauptung.

$\mathfrak{B}$ kann mit bekannten Methoden, etwa über die Hauptachsentransformation, konstruktiv bestimmt werden.

Satz 2.1 legt die reduzierende Transformation

$$\mathfrak{A}_\lambda = \hat{\mathfrak{A}}_\lambda \mathfrak{B} \tag{2.2}$$

nahe. Sie reduziert (1.13) auf

$$\mathfrak{J} = \hat{\mathfrak{A}}_\lambda^* \mathfrak{J} \hat{\mathfrak{A}}_\lambda . \tag{2.3}$$

Wir bezeichnen hierbei

$$\hat{\mathfrak{A}}_\lambda = \begin{pmatrix} \hat{A}_1 - \lambda \hat{A}_2 & \hat{B}_1 - \lambda \hat{B}_2 \\ \hat{A}_3 & \hat{B}_3 \end{pmatrix} . \tag{2.4}$$

Unsere Frage ist damit auf die nach der Struktur der Matrizen $\hat{\mathfrak{A}}_\lambda$ mit (2.3) reduziert.

3. Struktur der λ-unabhängigen Randbedingungen im Normalfall

Wir bestimmen jetzt sämtliche (λ-unabhängigen) Matrizen

$$\hat{\mathfrak{A}} = \begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hat{A}_3 & \hat{B}_3 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

mit

$$\mathfrak{J} = \hat{\mathfrak{A}}^* \mathfrak{J} \hat{\mathfrak{A}} . \tag{3.2}$$

Zunächst zeigen wir

Satz 3.3: *Die Matrizen* $\hat{\mathfrak{A}}$ *mit* $\hat{\mathfrak{A}}^* \mathfrak{J} \hat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{J}$ *bilden eine multiplikative Gruppe* Γ *mit* * *als Anti-Automorphismus.*

Beweis: Mit $\hat{\mathfrak{A}} \in \Gamma$ gilt $\hat{\mathfrak{A}}^{-1} \in \Gamma$, wie wegen $\hat{\mathfrak{A}}^{-1*} = \hat{\mathfrak{A}}^{*-1}$ sofort zu sehen ist. Ebenso einfach folgt $\hat{\mathfrak{A}}\hat{\mathfrak{B}} \in \Gamma$ aus $\hat{\mathfrak{A}} \in \Gamma$, $\hat{\mathfrak{B}} \in \Gamma$:

$$(\hat{\mathfrak{A}}\hat{\mathfrak{B}})^* \mathfrak{J} \hat{\mathfrak{A}}\hat{\mathfrak{B}} = \hat{\mathfrak{B}}^* \hat{\mathfrak{A}}^* \mathfrak{J} \hat{\mathfrak{A}}\hat{\mathfrak{B}} = \hat{\mathfrak{B}}^* \mathfrak{J} \hat{\mathfrak{B}} = \mathfrak{J} .$$

Um schließlich $\hat{\mathfrak{A}}^* \in \Gamma$ aus $\hat{\mathfrak{A}} \in \Gamma$ zu folgern, wird

$$\mathfrak{J}^* = \mathfrak{J}^{-1} = -\mathfrak{J}$$

benutzt. Damit ist (3.2) äquivalent zu

$$-\hat{\mathfrak{A}}^{-1} \mathfrak{J}^* \hat{\mathfrak{A}}^{*-1} = -\mathfrak{J}^* ,$$

also zu

$$\hat{\mathfrak{A}} \mathfrak{J} \hat{\mathfrak{A}}^* = \mathfrak{J} ,$$

was zu zeigen war.

Ein *Automorphismus* von Γ ist offenbar mit

$$\mathfrak{J}\hat{\mathfrak{A}}\mathfrak{J} \to \hat{\mathfrak{A}} , \quad \mathfrak{J} = \begin{pmatrix} O & E \\ E & O \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

gegeben wegen $\mathfrak{J}^* = \mathfrak{J}^{-1} = \mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}\mathfrak{J}\mathfrak{J} = \mathfrak{J}^* = -\mathfrak{J}$.

Mit $\hat{\mathfrak{A}} \in \Gamma \leftrightsquigarrow \hat{\mathfrak{A}}^* \in \Gamma$ ist sofort die folgende erste Charakterisierung gegeben.

Satz 3.5: (3.1), (3.2) *sind äquivalent zu den drei Relationen*

$$\hat{A}_1 \hat{B}_1^* - \hat{B}_1 \hat{A}_1^* = O , \tag{3.6}$$

$$\hat{A}_1 \hat{B}_3^* - \hat{B}_1 \hat{A}_3^* = E , \tag{3.7}$$

$$\hat{A}_3 \hat{B}_3^* - \hat{B}_3 \hat{A}_3^* = O . \tag{3.8}$$

Diese Charakterisierung entspricht übrigens unmittelbar einer direkten Kennzeichnung der Matrizen $\mathfrak{A}_\lambda$ mit (1.13):

Satz 3.9: $\mathfrak{Q} = \mathfrak{A}^* \mathfrak{J} \mathfrak{A}$ *ist äquivalent zu* $\mathfrak{J}^* = \mathfrak{A} \mathfrak{Q}^{-1} \mathfrak{A}^*$.

Der *Beweis* ist voll analog zum letzten Teil des Beweises von Satz 3.3.

Ein erster Schritt zu einer Aufzählung sämtlicher $\hat{\mathfrak{A}} \in \Gamma$ ist die folgende Charakterisierung sämtlicher „Zeilen" $(\hat{A}_3, \hat{B}_3)$, die eine gegebene „Zeile" $(\hat{A}_1, \hat{B}_1)$ zu einem $\hat{\mathfrak{A}} \in \Gamma$ ergänzen, und umgekehrt, unter der Annahme, daß eine solche Ergänzung überhaupt möglich ist. Damit ist zugleich ein wesentliches Beweishilfsmittel für die weiteren Schlüsse bereitgestellt.

Satz 3.10: *Es sei*

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hat{A}_3 & \hat{B}_3 \end{pmatrix} \in \Gamma .$$

Dann sind

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hat{A}_5 & \hat{B}_5 \end{pmatrix} \in \Gamma , \quad \begin{pmatrix} \hat{A}_4 & \hat{B}_4 \\ \hat{A}_3 & \hat{B}_3 \end{pmatrix} \in \Gamma$$

äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hat{A}_5 & \hat{B}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ W & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hat{A}_3 & \hat{B}_3 \end{pmatrix}, \quad W = W^* ,$$

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_4 & \hat{B}_4 \\ \hat{A}_3 & \hat{B}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & V \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hat{A}_3 & \hat{B}_3 \end{pmatrix}, \quad V = V^* .$$

Beweis: Es genügt der Nachweis der ersten Äquivalenz. Die andere ergibt sich analog oder aus der ersten über den Automorphismus (3.4). Mit Satz 3.3 erhält man nun zunächst die Äquivalenz zu

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hat{A}_5 & \hat{B}_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hat{A}_3 & \hat{B}_3 \end{pmatrix}^{-1} \in \Gamma .$$

In dieser Matrix ist die erste Zeile notwendig (E, O). Damit gehört aber diese Matrix nach Satz 3.5 genau dann zu Γ, wenn die zweite Zeile (W, E) mit $W = W^*$ ist. Denn $\hat{A}_1 = E$, $\hat{B}_1 = O$ gibt mit (3.7) $\hat{B}_3 = E$ und mit (3.8) $\hat{A}_3 = \hat{A}_3^*$.

Wir geben nunmehr eine Charakterisierung und Aufzählung aller möglichen „Zeilen" $(\hat{A}_1, \hat{B}_1)$. Zunächst zur Charakterisierung:

Satz 3.11: *Zu den* (n, n)*-Matrizen* $\hat{A}_1$, $\hat{B}_1$ *existieren* (n, n)*-Matrizen* $\hat{A}_3$, $\hat{B}_3$ *mit der Eigenschaft*

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hat{A}_3 & \hat{B}_3 \end{pmatrix} \in \Gamma$$

genau dann, wenn

$$\text{(3.12)} \qquad \operatorname{rg}(\hat{A}_1, \hat{B}_1) = n , \quad \hat{A}_1 \hat{B}_1^* = \hat{B}_1 \hat{A}_1^* \ \textit{(hermitesch)} .$$

In diesem Falle sind

$$\text{(3.13)} \qquad \hat{A}_3 = -(\hat{A}_1 \hat{A}_1^* + \hat{B}_1 \hat{B}_1^*)^{-1} \hat{B}_1 , \ \hat{B}_3 = (\hat{A}_1 \hat{A}_1^* + \hat{B}_1 \hat{B}_1^*)^{-1} \hat{A}_1$$

möglich.

Beweis: Die Notwendigkeit von (3.12) ist aus Satz 3.5 fast unmittelbar zu erkennen. (3.12) ist auch hinreichend, weil mit $\operatorname{rg}(\hat{A}_1, \hat{B}_1) = n$ $\hat{A}_1 \hat{A}_1^* + \hat{B}_1 \hat{B}_1^*$ [als Gramsche Matrix von n linear unabhängigen $(1, 2n)$-Vektoren] hermitesch und positiv-definit, also invertierbar ist. (3.6) und die Konstruktion (3.13) zieht dann sofort (3.7) und (3.8) nach sich, was zu zeigen war.

Ein weiterer Beweis für die Charakterisierung (3.12), der zugleich zu einer Aufzählung führt, beruht auf

Satz 3.14: *Seien $\hat{A}_1$, $\hat{B}_1$ (n, n)-Matrizen mit* (3.12). *Ist dann $Q = Q^2 = Q^*$ die orthogonale Projektion auf den Nullraum von $\hat{B}_1$, also mit $P = E - Q$*

$$\hat{B}_1 Q = Q \hat{B}_1^* = O\,, \quad \hat{B}_1 P = \hat{B}_1\,,$$

so ist die Matrix

$$\hat{A}_1 Q + \hat{B}_1 P = R$$

invertierbar.

Beweis: Die Spalten von

$$\begin{pmatrix} \hat{B}_1^* \\ -\hat{A}_1^* \end{pmatrix}$$

bilden wegen (3.12) ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung

$$(\hat{A}_1, \hat{B}_1)\, \mathfrak{x} = 0$$

für $(2n, 1)$-Vektoren $\mathfrak{x}$. Daher folgt aus

$$(*) \qquad (\hat{A}_1 Q + \hat{B}_1 P)\, x = 0$$

mit geeignetem $(n, 1)$-Vektor y die Darstellung

$$Qx = \hat{B}_1^* y\,, \quad Px = -\hat{A}_1^* y\,.$$

Mit $Q \hat{B}_1^* = O$ gibt die erste Gleichung $Qx = 0$. Damit aber liefert (*) $\hat{B}_1 Px = 0$, also nach Definition von Q nunmehr $Px = 0$, mithin $x = 0$. Das ergibt die Behauptung: Die (n, n)-Matrix $\hat{A}_1 Q + \hat{B}_1 P = R$ hat keine nicht-triviale Null-Lösung, ist also invertierbar.

Damit folgt nun unmittelbar

Satz 3.15: *Seien $\hat{A}_1$, $\hat{B}_1$ (n, n)-Matrizen mit* (3.12) *und P, Q, R mit Satz* 3.14 *konstruiert. Dann gibt*

$$\hat{A}_5 = -R^{*-1} P\,, \quad \hat{B}_5 = R^{*-1} Q$$

eine Ergänzung zu

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hat{A}_5 & \hat{B}_5 \end{pmatrix} \in \Gamma\,.$$

Das bestätigt man sofort mit Satz 3.5.

Zu den hiermit gegebenen $\hat{A}_5$, $\hat{B}_5$ kann man nun umgekehrt sofort eine mögliche Ergänzung $\hat{A}_4$, $\hat{B}_4$ zu

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_4 & \hat{B}_4 \\ \hat{A}_5 & \hat{B}_5 \end{pmatrix} \in \Gamma$$

angeben, nämlich

$$\hat{A}_4 = RQ, \quad \hat{B}_4 = RP,$$

also

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_4 & \hat{B}_4 \\ \hat{A}_5 & \hat{B}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & O \\ O & R^{*-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & P \\ -P & Q \end{pmatrix}.$$

Hier kann (mit Vertauschung der Indizes $1 \to 4$, $3 \to 5$) die zweite Äquivalenz von Satz 3.10 angewandt werden. Sie liefert

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hat{A}_5 & \hat{B}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & V_1 \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & O \\ O & R^{*-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & P \\ -P & Q \end{pmatrix}$$

mit $V_1 = V_1^*$; oder mit

$$V = V^* = R^{-1} V_1 R^{-1*}$$

auch

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hat{A}_5 & \hat{B}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & O \\ O & R^{*-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & V \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & P \\ -P & Q \end{pmatrix}.$$

Dies gibt nun zwar für jeden Projektor Q, $P = E - Q$, jedes $V = V^*$ und jedes invertierbare R Matrizen aus Γ, wie man, gestützt auf Satz 3.3, an Hand von Satz 3.5 für die Faktoren bestätigt. Es ist jedoch dabei Q die orthogonale Projektion auf den Nullraum von $\hat{B}_1$ genau dann, wenn

$$\hat{B}_1 x = 0 \leftrightsquigarrow Px = 0, \quad \hat{B}_1 Q = O.$$

Mit

$$\hat{B}_1 = R(P + VQ)$$

bedeutet das

$$VQ = O.$$

Benutzt man nun noch die erste Äquivalenz von Satz 3.10 für den Übergang zu $\hat{A}_3$, $\hat{B}_3$, so erhält man zusammenfassend:

Satz 3.16: *Mit willkürlichen orthogonalen Projektoren Q, $P = E - Q$, hermiteschen Matrizen W, V und invertierbaren Matrizen R erhält man sämtliche Matrizen aus Γ in der Form*

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hat{A}_3 & \hat{B}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ W & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & O \\ O & R^{*-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & V \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & P \\ -P & Q \end{pmatrix}.$$

In einer solchen Darstellung kann Q als Projektion auf den Nullraum von $\hat{B}_1$ und $VQ = O$ gewählt werden.

Durch diese vollständige Aufzählung ist die Struktur der Matrizen $\hat{\mathfrak{A}}$ mit $\hat{\mathfrak{A}}^* \mathfrak{J} \hat{\mathfrak{A}} = \mathfrak{J}$ und über die Transformation (2.2) die der Matrizen $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{Q} = \mathfrak{A}^* \mathfrak{J} \mathfrak{A}$ ganz zu übersehen.

Wir verzichten darauf, Satz 3.16 gruppentheoretisch weiter zu interpretieren und auch die Fragen der Mehrdeutigkeit weiter zu verfolgen.

4. Struktur der λ-linearen Randbedingungen im Normalfall

Gestützt auf die Resultate von Abschnitt 3 soll jetzt die Struktur der Matrizen (2.4) mit (2.3), also

$$\hat{\mathfrak{A}}_\lambda = \begin{pmatrix} \hat{A}_1 - \lambda \hat{A}_2 & \hat{B}_1 - \lambda \hat{B}_2 \\ \hat{A}_3 & \hat{B}_3 \end{pmatrix} \in \Gamma \quad (\lambda \text{ reell}) \tag{4.1}$$

untersucht werden. Dazu kennzeichnen wir zunächst sämtliche „Zeilen" $(\hat{A}_1 - \lambda \hat{A}_2,\ \hat{B}_1 - \lambda \hat{B}_2)$, die eine Ergänzung durch geeignete $\hat{A}_3$, $\hat{B}_3$ zu $\hat{\mathfrak{A}}_\lambda \in \Gamma$ gestatten.

Satz 4.2: *Zu vier (n, n)-Matrizen $\hat{A}_1$, $\hat{B}_1$, $\hat{A}_2$, $\hat{B}_2$ existieren genau dann Matrizen $\hat{A}_3$, $\hat{B}_3$ mit* (4.1), *wenn*

$$(\hat{A}_1 - \lambda \hat{A}_2)(\hat{B}_1 - \lambda \hat{B}_2)^* \quad \textit{hermitesch} \quad (\lambda \textit{ reell}), \tag{4.3}$$

$$\operatorname{rg}(\hat{A}_1, \hat{B}_1) = n, \tag{4.4}$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hat{A}_2 & \hat{B}_2 \end{pmatrix} = n + \operatorname{rg}(\hat{A}_2, \hat{B}_2). \tag{4.5}$$

In diesem Falle ist

$$\hat{\mathfrak{A}}_\lambda = \begin{pmatrix} E & -\lambda W \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hat{A}_3 & \hat{B}_3 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

mit

$$W = \hat{A}_1 \hat{B}_2^* - \hat{B}_1 \hat{A}_2^* = W^* \tag{4.7}$$

und

$$\operatorname{rg}(\hat{A}_2, \hat{B}_2) = \operatorname{rg} W. \tag{4.8}$$

Beweis: 1) Wir zeigen zunächst, daß (4.3), (4.4), (4.5), (4.6), (4.7), (4.8) aus (4.1) folgen. Dazu ist nach Satz 3.10

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_1 + \hat{A}_2 & \hat{B}_1 + \hat{B}_2 \\ \hat{A}_3 & \hat{B}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & W \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hat{A}_3 & \hat{B}_3 \end{pmatrix}$$

mit $W = W^*$, also

$$\hat{A}_2 = W \hat{A}_3, \quad \hat{B}_2 = W \hat{B}_3.$$

Damit folgen die behaupteten Aussagen unmittelbar, wenn man noch Satz 3.5 heranzieht.

2) Sei nun umgekehrt (4.3), (4.4), (4.5) gegeben. Dann ist (4.7) Folgerung aus (4.3) (Vergleich der λ-linearen Glieder) und (4.8) äquivalent zu (4.5) unter Voraussetzung von (4.3), (4.4), da danach die Spalten von

$$\begin{pmatrix} \hat{B}_1^* \\ -\hat{A}_1^* \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems

$$(\hat{A}_1 \hat{B}_1)\, x = 0$$

für $(2n, 1)$-Vektoren bilden. Damit nun erweisen sich (4.3), (4.4), (4.5) als äquivalent zu (4.4), (4.8) und

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hat{A}_2 & \hat{B}_2 \end{pmatrix} \mathfrak{J} \begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hat{A}_2 & \hat{B}_2 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} O & -W \\ W & O \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$ [1]

Wir benutzen weiter Satz 3.11 und wählen $\hat{A}_5$, $\hat{B}_5$ so, daß

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hat{A}_5 & \hat{B}_5 \end{pmatrix} \in \Gamma. \tag{4.10}$$

Dann läßt sich

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hat{A}_2 & \hat{B}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ W_1 & W_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hat{A}_5 & \hat{B}_5 \end{pmatrix}$$

mit geeigneten (n, n)-Matrizen W_1, W_2 darstellen. (4.9), (4.10) ergeben jetzt

$$\begin{pmatrix} E & O \\ W_1 & W_2 \end{pmatrix} \mathfrak{J} \begin{pmatrix} E & O \\ W_1 & W_2 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} O & -W \\ W & O \end{pmatrix},$$

also $W_2 = W = W^*$, $W_1 W = W W_1^*$. Dazu ist nun mit (4.8)

$$\operatorname{rg}(W_1, W) = \operatorname{rg}(\hat{A}_2, \hat{B}_2) = \operatorname{rg} W,$$

also

$$W_1 = W K_1, \quad W K_1 W = W K_1^* W$$

mit geeignetem K_1. Dann gibt es aber, wie wir anschließend zeigen, ein

$$K = K^*$$

mit

$$W_1 = W K_1 = W K.$$

Damit wird

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hat{A}_2 & \hat{B}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & O \\ K & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hat{A}_5 & \hat{B}_5 \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_1, & \hat{B}_1 \\ \hat{A}_2, & \hat{B}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hat{A}_3 & \hat{B}_3 \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hat{A}_3 & \hat{B}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ K & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{A}_1 & \hat{B}_1 \\ \hat{A}_5 & \hat{B}_5 \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

Das liefert aber (4.6) und die Behauptung.

Wir tragen den Beweis nach für den eben benutzten

Hilfssatz 4.11: *Sei W eine hermitesche (n, n)-Matrix, K_1 eine (n, n)-Matrix mit*

$$W K_1 W = W K_1^* W.$$

[1] Statt der Betrachtung des obigen linearen Gleichungssystems kann man auch (4.9) zusammen mit der Relation $\operatorname{def} \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \leqq \operatorname{def} \mathfrak{A} + \operatorname{def} \mathfrak{B}$ zum Nachweis von (4.8) benutzen.

Dann existiert eine hermitesche (n, n)-Matrix K mit

$$WK_1 = WK.$$

Beweis: $P = P^* = P^2$ sei die orthogonale Projektion auf den Nullraum von W, $Q = E - P$. Dann ist

$$PW = WP = O, \quad QW = WQ = W.$$

Setzt man

$$\tilde{W} = W + P,$$

so ist $\tilde{W}$ hermitesch und invertierbar, sowie

$$W = \tilde{W}Q = Q\tilde{W}.$$

(Zum Nachweis der Invertierbarkeit: $\tilde{W}x = Wx + Px = 0$ zieht durch Anwendung von Q $Wx = Px = 0$ nach sich, also $x = 0$, weil $Wx = 0$ sofort $x = Px$ ergibt, nach Definition von P.) Nach Voraussetzung wird nun

$$\tilde{W}QK_1^*Q\tilde{W} = \tilde{W}QK_1Q\tilde{W},$$

also, da $\tilde{W}$ invertierbar ist,

$$QK_1^*Q = QK_1Q.$$

Setzt man jetzt

$$K = QK_1P + PK_1^*Q + QK_1Q,$$

so ist K hermitesch und

$$WK = WK_1P + O + WK_1Q = WK_1,$$

was zu zeigen war.

Satz 3.16 und Satz 4.2 ergeben nun zusammen eine Aufzählung aller Matrizen (4.1).

Satz 4.12: *Mit willkürlichen orthogonalen Projektoren P, $Q = E - P$, hermiteschen Matrizen W, K, V und invertierbaren Matrizen R erhält man sämtliche Matrizen* (4.1) *in der Form*

$$\mathfrak{A}_\lambda = \begin{pmatrix} E & -\lambda W \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & O \\ K & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & O \\ O & R^{*-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & V \\ O & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & P \\ -P & Q \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe von Satz 2.1 und (2.2) sind damit zugleich alle Matrizen (1.12) mit (1.13) zu übersehen.

5. Symmetrisierende Unterräume

Wir gehen aus von der Bilinearform aus (1.4):

$$\begin{pmatrix} v(a) \\ v(b) \end{pmatrix}^* \mathfrak{Q} \begin{pmatrix} u(a) \\ u(b) \end{pmatrix} = \mathfrak{v}^* \mathfrak{J} \mathfrak{u} \tag{5.1}$$

mit

$$\mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} H(a) & O \\ O & -H(b) \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{J} = \begin{pmatrix} O & -E \\ E & O \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{B}^* \mathfrak{J} \mathfrak{B}, \tag{5.3}$$

$$\mathfrak{B} \begin{pmatrix} u(a) \\ u(b) \end{pmatrix} = \mathfrak{u}, \quad \mathfrak{B} \begin{pmatrix} v(a) \\ v(b) \end{pmatrix} = \mathfrak{v}, \ldots \tag{5.4}$$

Wir fragen nach sämtlichen Unterräumen $\mathfrak{U}$ des komplexen $(2n)$-dimensionalen Raumes mit

$$\mathfrak{v}^* \mathfrak{J} \mathfrak{u} = 0 \qquad (\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in \mathfrak{U}). \tag{5.5}$$

Einen solchen Unterraum bezeichnen wir als *symmetrisierenden Unterraum* (bezüglich $\mathfrak{J}$). Zunächst gilt

Satz 5.6: *Mit einem Unterraum ist jeder Teilraum symmetrisierend. Jeder symmetrisierende Unterraum hat eine Dimension* $\leqq n$.

Beweis: Die erste Aussage ist trivial. Für den Nachweis der zweiten sei $\mathfrak{U}$ symmetrisierender Unterraum mit einer Dimension $\geqq n+1$. Dann würde ein $\mathfrak{u} \in \mathfrak{U}$, $\mathfrak{u} \neq 0$ existieren, das zu sämtlichen Eigenlösungen zu negativen Eigenwerten von $i\mathfrak{J}$ orthogonal wäre. Damit müßte aber $\mathfrak{u}^*(i\mathfrak{J})\,\mathfrak{u} > 0$ gelten, im Widerspruch zur Annahme, daß $\mathfrak{U}$ symmetrisierender Unterraum ist.

Im folgenden verwenden wir die Zerlegung

$$\mathfrak{u} = \begin{pmatrix} \mathfrak{u}_1 \\ \mathfrak{u}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{v} = \begin{pmatrix} \mathfrak{v}_1 \\ \mathfrak{v}_2 \end{pmatrix}, \ldots, \tag{5.7}$$

sowie die Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{U}_i &= \{\mathfrak{y}_i : \quad \mathfrak{y} \in \mathfrak{U}\} \\ \mathfrak{B}_i &= \{\mathfrak{y}_i : \quad \mathfrak{y} \in \mathfrak{B}\} \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2). \tag{5.8}$$

Wir betrachten die wegen Satz 5.6 allein interessanten *maximalen* symmetrisierenden Unterräume. Wir zeigen

Satz 5.9: *Jeder maximale symmetrisierende Unterraum hat die Dimension n. Zu jedem symmetrisierenden Unterraum* $\mathfrak{U}$ *gibt es genau einen maximalen symmetrisierenden Unterraum* $\mathfrak{B}$ *mit* $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{U}$ *und* $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{U}_1$.

Beweis: Sei $\mathfrak{U}$ symmetrisierender Unterraum. Wir bilden, mit naheliegender Bezeichnungsweise, den Unterraum

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{U} + \begin{pmatrix} \mathfrak{O} \\ \mathfrak{U}_1^{\perp} \end{pmatrix}$$

aller Vektoren

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{u}_1 \\ \mathfrak{u}_2 + \mathfrak{u}_3 \end{pmatrix}$$

mit $\mathfrak{u}_3^* \mathfrak{v}_1 = 0$ für alle $\mathfrak{v}_1 \in \mathfrak{U}_1$. Dann ist $\mathfrak{B}$ offenbar symmetrisierender Unterraum, wie

$$\mathfrak{v}^* \mathfrak{J} \mathfrak{u} = \mathfrak{v}_2^* \mathfrak{u}_1 - \mathfrak{v}_1^* \mathfrak{u}_2$$

zeigt. Ferner ist $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{U}_1$. Ist nun $\dim \mathfrak{U}_1^{\perp} = \varrho$, so $\dim \mathfrak{U}_1 = n - \varrho$. Damit gibt es ϱ linear unabhängige Elemente $\mathfrak{u}$ in $\mathfrak{U}$ mit linear unabhängigen $\mathfrak{u}_1$ und $n - \varrho$ linear unabhängige Elemente in

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{O} \\ \mathfrak{U}_1^{\perp} \end{pmatrix}.$$

Daher ist $\dim \mathfrak{V} \geqq n$, also nach Satz 5.6 $\dim \mathfrak{V} = n$ und $\mathfrak{V}$ maximaler symmetrisierender Unterraum. — Es bleibt der Nachweis der Eindeutigkeit. Sei dazu $\mathfrak{W}$ maximaler symmetrisierender Unterraum, $\mathfrak{W} \supset \mathfrak{U}$, $\mathfrak{W}_1 = \mathfrak{U}_1$. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{O} \\ \mathfrak{U}_1^{\perp} \end{pmatrix} \subset \mathfrak{W},$$

da sonst, wie eben, echt erweitert werden könnte. Damit aber gilt $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{W}$, also, da $\mathfrak{V}$ maximal war, $\mathfrak{W} = \mathfrak{V}$.

Es bleibt nunmehr die Aufgabe der Charakterisierung und Aufzählung sämtlicher maximalen symmetrisierenden Unterräume. Zunächst zur Charakterisierung:

Satz 5.10: $\mathfrak{U}$ *ist maximaler symmetrisierender Unterraum genau dann, wenn*

$$\mathfrak{U} = \{u : \hat{A}_1 u_1 + \hat{B}_1 u_2 = 0\} \tag{5.11}$$

mit

$$\operatorname{rg}(\hat{A}_1, \hat{B}_1) = n, \tag{5.12}$$

$$\hat{A}_1 \hat{B}_1^* \quad \textit{hermitesch.} \tag{5.13}$$

Beweis: $\mathfrak{U}$ werde aufgespannt durch die Spalten der $(2n, n)$-Matrix

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist offenbar $\mathfrak{U}$ symmetrisierend genau dann, wenn $\mathfrak{U}^* \mathfrak{J} \mathfrak{U} = \mathfrak{O}$, also

$$U_2^* U_1 = U_1^* U_2 = \text{hermitesch}$$

ist. Dazu ist $\mathfrak{U}$ maximal genau dann, wenn

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = n.$$

Ein solcher Unterraum läßt sich mit $\hat{A}_1 = -U_2^*$, $\hat{B}_1 = U_1^*$ in der Form (5.11), (5.12), (5.13) darstellen; und umgekehrt.

Damit kann nun an Satz 3.11 angeschlossen werden:

Satz 5.14: *Die „Zeilen" $(\hat{A}_1, \hat{B}_1)$ der Matrizen $\hat{\mathfrak{A}} \in \Gamma$ entsprechen genau den Randbedingungen für maximale symmetrisierende Unterräume.*

Schließlich können wir aus Satz 3.16 oder auch mit anderer Herleitung über den Beweis von Satz 5.9 die folgende Aufzählung entnehmen:

Satz 5.15: *Man erhält sämtliche Randbedingungen*

$$\hat{A}_1 u_1 + \hat{B}_1 u_2 = 0$$

für maximale symmetrisierende Unterräume, indem man P sämtliche orthogonalen Projektoren, $Q = E - P$, R sämtliche invertierbaren Matrizen und V sämtliche hermiteschen Matrizen mit $VQ = O$ durchlaufen läßt, in der Form

$$\hat{B}_1 = RP, \quad \hat{A}_1 = R(Q - V).$$

Dabei ist P die orthogonale Projektion auf $\mathfrak{U}_1$.

Für die letzte Aussage kann man die Überlegung zum Beweise von Satz 5.10, speziell $\hat{B}_1 = U_1^*$ heranziehen.

6. Einordnung der Probleme von BLISS, REID und ZIMMERBERG

Seit 1926 haben G. A. BLISS [1], [2] und anschließend W. T. REID [14], [15], [16], [17], [18], [19] Eigenwertprobleme für Differentialgleichungssysteme von der Form

$$y'(x)+D_1(x)\,y(x)=\lambda D_2(x)\,y(x), \tag{6.1}$$

$$A_1\,y(a)+B_1\,y(b)=0 \tag{6.2}$$

untersucht. Wir haben hier die Bezeichnungen geändert, nämlich denen unserer Theorie angepaßt, und lassen — gegenüber den früheren der genannten Arbeiten — auch komplexwertige (n, n)-Matrizen und $(n, 1)$-Vektoren zu.

In diesen Arbeiten wird zunächst angenommen, daß eine in $[a, b]$ stetig differenzierbare, stets invertierbare Matrix $T(x)$ mit

$$T'-TD_1-D_1^*T=O, \tag{6.3}$$

$$TD_2+D_2^*T=O \tag{6.4}$$

existiert. (6.3), (6.4) bedeuten, daß für jedes reelle λ mit den Operatoren

$$\begin{cases} L_\lambda y=y'+D_1y-\lambda D_2y, \\ L_\lambda^* y=-y'+D_1^*y-\lambda D_2^*y \end{cases} \tag{6.5}$$

gilt:

$$L_\lambda^*T=-TL_\lambda. \tag{6.6}$$

Weiter wird angenommen, daß stets Ty den adjungierten Randbedingungen genügt, wenn y (6.2) erfüllt. Das bedeutet die Forderung

$$\begin{pmatrix} v(a) \\ v(b) \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} T^*(a) & O \\ O & -T^*(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(a) \\ u(b) \end{pmatrix}=0 \tag{6.7}$$

für alle $u(x)$, $v(x)$, die (6.2) erfüllen. Schließlich wird verlangt, daß T^*D_2 hermitesch ist:

$$T^*D_2=D_2^*T=-TD_2, \tag{6.8}$$

wobei zuletzt (6.4) benutzt wurde.

Erst 1958 hat W. T. REID [19] bemerkt, daß hier stets $T(x)$ als schiefhermitesch und invertierbar gewählt werden kann. Die allgemeine Lösung von (6.3) ist nämlich

$$T(x)=Y^{*-1}CY^{-1}$$

mit einer Fundamentalmatrix $Y(x)$ von $y'+D_1y=0$ und konstanter Matrix C. Daher ist $T(x)$ zugleich mit C bzw. mit $T(a)$ invertierbar und (oder) schiefhermitesch. (6.3), (6.4), (6.7) sind danach auch für

$$e^{i\alpha}T(x)-e^{-i\alpha}T^*(x)$$

anstatt $T(x)$ erfüllt. Wählt man dabei α reell so, daß $e^{2i\alpha}$ nicht Eigenwert von $T^*(a)\,T^{-1}(a)$ ist, so ist diese Matrix Lösung von (6.3), (6.4) und erfüllt dazu (6.7); sie ist ferner durchweg invertierbar und schiefhermitesch. Schließlich ist auch (6.8) erfüllt, nämlich

$$(e^{i\alpha}T(x)-e^{-i\alpha}T^*(x))^*\,D_2(x)=(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})\,T^*(x)\,D_2(x)$$

hermitesch. Im folgenden sei also $T(x)$ auch schiefhermitesch.

Dies bedeutet, daß man diese Probleme mit

$$C_1 = E, \quad C_2 = O, \quad C_3 = O, \quad D_3 = T \tag{6.9}$$

und

$$H = -D_3 = D_3^* \tag{6.10}$$

unter die Theorie von Teil I und die Überlegungen der Abschnitte 1 bis 5 dieses Teils II subsummieren kann. Dabei entspricht (6.2) einem Unterraum einer Dimension $\geqq n$, der symmetrisierend ist gemäß Abschnitt 5, also maximaler symmetrisierender Unterraum der Dimension n ist. So kann man nach Satz 5.14 verbunden mit der Transformation (2.2) A_3, B_3 so bestimmen, daß

$$\begin{pmatrix} H(a) & O \\ O & -H(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} O & -E \\ E & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix} \tag{6.11}$$

gilt. Dann wird mit

$$Sy = \begin{pmatrix} D_3(x)\, y(x) \\ A_3 y(a) + B_3 y(b) \end{pmatrix} \tag{6.12}$$

das Problem S-hermitesch und gemäß Abschnitt 1 ist sogar

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0, \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \tag{6.13}$$

wählbar, wo hier wegen $C_2 = C_3 = O$

$$\mathfrak{G}_0 = \sum_{\nu=1}^{n} C_0 [a, b]$$

sein kann. Die von BLISS und REID betrachteten Probleme sind dann stets rechtsdefinit oder — evtl. nach λ-Translation — linksdefinit. Die Voraussetzungen in den ersten der genannten Arbeiten verlangen überdies, daß die Probleme nicht-ausgeartet (im Sinne von Teil I, Abschnitt 2) sind.

Neuerdings hat H. J. ZIMMERBERG [23], [24] statt (6.2) auch λ-lineare Randbedingungen

$$A_1 y(a) + B_1 y(b) = \lambda (A_2 y(a) + B_2 y(b)) \tag{6.14}$$

untersucht. Wieder werden (6.3), (6.4), (6.8) gefordert. Weiter soll nun für jedes reelle λ (6.7) gelten, falls u, v beide (6.14) genügen. Er fordert überdies

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = n + \operatorname{rg}(A_2, B_2). \tag{6.15}$$

Man erkennt hier, wie eben, daß $T(x)$ als invertierbar und schiefhermitesch angenommen werden kann. Man kann so wieder die Einordnung mit (6.9), (6.10) erreichen. Nach Satz 4.2, verbunden mit der Transformation (2.2), gibt es dazu A_3, B_3 mit

$$\begin{pmatrix} H(a) & O \\ O & -H(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 - \bar{\lambda} B_2 & B_1 - \bar{\lambda} B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} O & -E \\ E & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 - \lambda A_2 & B_1 - \lambda B_2 \\ A_3 & B_3 \end{pmatrix}. \tag{6.16}$$

Daher wird auch dies Problem S-hermitesch mit (6.12), (6.13).

Damit sind alle eben genannten Probleme als Spezialfälle in unsere Theorie eingeordnet. Darüber hinaus sind für sie einige wesentliche weitere Erkenntnisse gewonnen: Es ist gelungen, die möglichen Randbedingungen nicht nur durch gewisse notwendige und hinreichende Bedingungen zu charakterisieren, sondern sie sämtlich aufzuzählen und in ihrer Struktur zu übersehen. Weiter wurde gezeigt, daß man Symmetrie schon in $\mathfrak{F}_0$ bzw. $\mathfrak{G}_0$ erreichen kann, im Gegensatz etwa zu H. J. ZIMMERBERG [23], der für sein Funktional — in unserer Bezeichnung — $\mathfrak{F} = \mathfrak{R}_1$ wählen muß.

Abschließend vermerken wir, daß im Falle eines ausgearteten Problems wegen (6.12), (6.13) offenbar sofort Teil I, Satz 2.20 angewandt werden kann, um gegebenenfalls

$$G\mathfrak{G}_0 \subset F\mathfrak{F}_0$$

und damit die Reduzibilität nachzuweisen.

7. Kanonische Eigenwertprobleme (HÖLDER) als Spezialfall

Wir betrachten für $(m, 1)$-Vektoren $y_1(x)$, $y_2(x)$ das System

$$y_1' - D_{12}^* y_1 - D_{22} y_2 = 0 \tag{7.1}$$

$$y_2' + D_{11} y_1 + D_{12} y_2 = \lambda E_{11} y_1 . \tag{7.2}$$

Dabei wird angenommen, daß alle (m, m)-Koeffizientenmatrizen in $[a, b]$ stetig und

$$D_{11}, \quad D_{22}, \quad E_{11} \quad \text{hermitesch} \tag{7.3}$$

sind.

Ein solches System wird als *kanonisches* System bezeichnet. Wir setzen nun

$$\mathfrak{y}_1 = \begin{pmatrix} y_1(a) \\ y_1(b) \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{y}_2 = \begin{pmatrix} -y_2(a) \\ y_2(b) \end{pmatrix}. \tag{7.4}$$

Sei $n = 2m$. Mit einer orthogonalen Projektion P, $Q = E - P$, mit hermiteschen (n, n)-Matrizen V_0 und V_1, die

$$V_0 Q = V_1 Q = O \tag{7.5}$$

genügen, hat man in

$$P\mathfrak{y}_2 + (Q - V_0)\,\mathfrak{y}_1 = -\lambda V_1 \mathfrak{y}_1 \tag{7.6}$$

Randbedingungen, die genau der Normalform der „allgemeinen Randbedingungen" bei E. HÖLDER [5] entsprechen. Durch Multiplikation mit Q bzw. P zerfallen sie in

$$Q\mathfrak{y}_1 = 0 \tag{7.7}$$

$$P\mathfrak{y}_2 - V_0 \mathfrak{y}_1 = -\lambda V_1 \mathfrak{y}_1 . \tag{7.8}$$

Hier notiert (7.7) die „*wesentlichen*" oder „*geometrischen*" Randbedingungen und (7.8) die „*restlichen*" oder „*dynamischen*" Randbedingungen.

Mit (7.1), (7.2), (7.3) und (7.5), (7.6) ist ein „*kanonisches Eigenwertproblem*" im Sinne von E. HÖLDER [5], [6] gegeben. Wir zeigen nun, daß ein solches ein spezielles Problem von Abschnitt 6 mit λ-linearen Randbedingungen ist.

Wir fassen die Vektoren $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zu dem $(n, 1)$-Vektor $y(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$ zusammen und schreiben (7.1), (7.2) in der Form

$$y' + D_1 y = \lambda D_2 y \tag{7.9}$$

mit

$$D_1 = \begin{pmatrix} -D_{12}^*, & -D_{22} \\ D_{11}, & D_{12} \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} O, & O \\ E_{11}, & O \end{pmatrix}. \tag{7.10}$$

Wir setzen

$$T(x) = \begin{pmatrix} O, & -E_m \\ E_m, & O \end{pmatrix}. \tag{7.11}$$

wobei E_m die (m, m)-Einheitsmatrix ist. Dann ist offenbar $T(x)$ stetig differenzierbar, schiefhermitesch und für alle $x \in [a, b]$ invertierbar. Mit (7.3) prüft man sofort nach, daß (6.3), (6.4), (6.8) erfüllt sind.

Mit der $(2n, 2n)$-Matrix

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} E_m & O & O & O \\ O & O & E_m & O \\ O & -E_m & O & O \\ O & O & O & E_m \end{pmatrix} \tag{7.12}$$

gilt

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{y}_1 \\ \mathfrak{y}_2 \end{pmatrix} = \mathfrak{B} \begin{pmatrix} y(a) \\ y(b) \end{pmatrix} \tag{7.13}$$

und

$$\begin{pmatrix} T^*(a), & O \\ O, & -T^*(b) \end{pmatrix} = \mathfrak{B}^* \mathfrak{J} \mathfrak{B}. \tag{7.14}$$

Wegen (7.13) erscheinen die Randbedingungen (7.6) in der Form

$$(Q - V_0, P)\, \mathfrak{B} \begin{pmatrix} y(a) \\ y(b) \end{pmatrix} = -\lambda (V_1, O)\, \mathfrak{B} \begin{pmatrix} y(a) \\ y(b) \end{pmatrix}. \tag{7.15}$$

Setzen wir also

$$(A_1, B_1) = (Q - V_0, P)\, \mathfrak{B} \tag{7.16}$$

$$(A_2, B_2) = (-V_1, O)\, \mathfrak{B}, \tag{7.17}$$

so entsteht

$$A_1 y(a) + B_1 y(b) = \lambda [A_2 y(a) + B_2 y(b)], \tag{7.18}$$

also die Gestalt von (6.14).

Wir ziehen jetzt Satz 5.15 heran. Damit hat man für alle reellen λ in (7.5), (7.6) Randbedingungen für einen maximalen symmetrisierenden Unterraum. Genügen dann $u(x)$, $v(x)$ (7.18), so erfüllen

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{v}_1 \\ \mathfrak{v}_2 \end{pmatrix} = \mathfrak{B} \begin{pmatrix} v(a) \\ v(b) \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{u}_1 \\ \mathfrak{u}_2 \end{pmatrix} = \mathfrak{B} \begin{pmatrix} u(a) \\ u(b) \end{pmatrix} \tag{7.19}$$

(7.6). Somit gilt unter Beachtung von (7.14)

$$\begin{pmatrix} v(a) \\ v(b) \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} T^*(a), & O \\ O & , -T^*(b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(a) \\ u(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{v}_1 \\ \mathfrak{v}_2 \end{pmatrix}^* \mathfrak{J} \begin{pmatrix} \mathfrak{u}_1 \\ \mathfrak{u}_2 \end{pmatrix} = 0 . \tag{7.20}$$

Also ist auch (6.7) nachgewiesen.

Wegen (7.5) und

$$\begin{pmatrix} Q - V_0 & P \\ -V_1 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & V_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q - V_0 & P \\ -P & Q \end{pmatrix} \tag{7.21}$$

ist weiter

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} Q - V_0, & P \\ -V_1 , & O \end{pmatrix} = n + \operatorname{rg}(-V_1, O) . \tag{7.22}$$

Dies heißt dann mit (7.16), (7.17) gerade (6.15) bzw.

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} A_1, B_1 \\ A_2, B_2 \end{pmatrix} = n + \operatorname{rg}(A_2, B_2) . \tag{7.23}$$

Nunmehr sind die kanonischen Eigenwertprobleme als spezielle Probleme mit λ-linearen Randbedingungen von Abschnitt 6 nachgewiesen. Folglich existieren Matrizen A_3, B_3 derart, daß mit

$$Sy = \begin{pmatrix} T(x)\, y(x) \\ A_3 y(a) + B_3 y(b) \end{pmatrix} \tag{7.24}$$

ein S-hermitesches Rand-Eigenwertproblem im Normalfall vorliegt. Man kann hier direkt

$$(A_3, B_3) = (-P, Q)\, \mathfrak{B} \tag{7.25}$$

wählen. Denn dann ist

$$\mathfrak{A}_\lambda = \begin{pmatrix} A_1 - \lambda A_2, & B_1 - \lambda B_2 \\ A_3 & , \quad B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q - V_0 + \lambda V_1, & P \\ -P & , \quad Q \end{pmatrix} \mathfrak{B} \tag{7.26}$$

und wegen

$$\hat{\mathfrak{A}}_\lambda = \begin{pmatrix} Q - V_0 + \lambda V_1, & P \\ -P & , \quad Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E, & -\lambda V_1 \\ O, & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E, & V_0 \\ O, & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & , P \\ -P, & Q \end{pmatrix} \tag{7.27}$$

nach Satz 4.12 $\hat{\mathfrak{A}}_\lambda \in \Gamma$ (λ reell). Zugleich sieht man noch, daß $\mathfrak{B}$ eine nach Satz 2.1 existierende reduzierende Transformation ist.

Man hat gemäß Abschnitt 1

$$\begin{aligned} F(u, v) = \int_a^b & [v_1^* u_2' + v_1^* D_{11} u_1 + v_1^* D_{12} u_2 - v_2^* u_1' + v_2^* D_{12}^* u_1 + v_2^* D_{22} u_2]\, dx + \\ & + (\mathfrak{v}_2^* Q \mathfrak{u}_1 - \mathfrak{v}_1^* P \mathfrak{u}_2 + \mathfrak{v}_1^* V_0 \mathfrak{u}_1) , \end{aligned} \tag{7.28}$$

$$G(u, v) = \int_a^b v_1^* E_{11} u_1\, dx + \mathfrak{v}_1^* V_1 \mathfrak{u}_1 \tag{7.29}$$

mit hermitescher Symmetrie in

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 , \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 . \tag{7.30}$$

Eine weitere Besonderheit der kanonischen Eigenwertprobleme ist, daß mit dem Raume

$$\mathfrak{F}_1 = \{y(x) : -y_1'(x) + D_{12}^*(x)\, y_1(x) + D_{22}(x)\, y_2(x) = 0,\ Q\mathfrak{y}_1 = 0\} \tag{7.31}$$

($\mathfrak{F}_0 \supset \mathfrak{F}_1 \supset \mathfrak{R}_1$) gilt

$$F(u, v) = \int_a^b [v_1^*(x)\, D_{11}(x)\, u_1(x) - v_2^*(x)\, D_{22}(x)\, u_2(x)]\, dx + \mathfrak{v}_1^* V_0 \mathfrak{u}_1 \tag{7.32}$$

$$(u, v \in \mathfrak{F}_1).$$

Dies kann insbesondere dazu dienen, eine etwaige Linksdefinitheit zu erkennen. (7.29), (7.32) geben ferner die wichtige Verbindung zur Variationsrechnung, entsprechend den Extremalprinzipien von Teil I, Abschnitt 4.

8. Einordnung der „natürlichen" Eigenwertprobleme"

In $[a, b]$ seien die Funktionen

$$n_0(x), \ldots, n_{m-1}(x),\ m_0(x), \ldots, m_m(x)$$

reell und stetig,

$$m_m(x) \neq 0.$$

Wir wählen in dem kanonischen System (7.1), (7.2) speziell die (m, m)-Matrizen

$$\text{(8.1)} \quad \begin{cases} D_{11} = \begin{pmatrix} m_{m-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & m_0 \end{pmatrix}, \quad E_{11} = \begin{pmatrix} n_{m-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n_0 \end{pmatrix}, \\ D_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{22} = \begin{pmatrix} -m_m^{-1} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Mit

$$y_i = \begin{pmatrix} y_{i,1} \\ \vdots \\ y_{i,m} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2)$$

bedeutet dann (7.1)

$$\begin{cases} y_{1,m}' = y_{1,m-1}, \\ \vdots \\ y_{1,2}' = y_{1,1}, \\ y_{1,1}' = -m_m^{-1} y_{2,1} \end{cases}$$

oder

$$\begin{cases} y_{1,m} = \eta, \\ y_{1,m-1} = \eta', \\ \vdots \\ y_{1,1} = \eta^{(m-1)}, \\ y_{2,1} = -m_m \eta^{(m)}. \end{cases} \tag{8.2}$$

Kürzt man weiter

$$f_m = m_m, \quad f_\nu = m_\nu - \lambda n_\nu \qquad (\nu = 0,1, \ldots, m-1) \tag{8.3}$$

ab, so besagt (7.2) offenbar

$$y'_{2,\nu} = -y_{2,\nu+1} - f_{m-\nu} y_{1,\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m-1)$$
$$y'_{2,m} + f_0 y_{1,m} = 0$$

oder mit (8.2)

$$\begin{cases} y_{2,\nu} = (-1)^\nu (f_m \eta^{(m)})^{(\nu-1)} + (-1)^{\nu-1} (f_{m-1} \eta^{(m-1)})^{(\nu-2)} + \cdots - f_{m-\nu+1} \eta^{(m-\nu+1)} \\ \qquad\qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m), \end{cases} \tag{8.4}$$

$$(-1)^m (f_m \eta^{(m)})^{(m)} + (-1)^{m-1} (f_{m-1} \eta^{(m-1)})^{(m-1)} + \cdots + f_0 \eta = 0. \tag{8.5}$$

Unser kanonisches System entspricht so der Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$M[\eta] = \lambda N[\eta] \tag{8.6}$$

mit

$$M[\eta] = \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu (m_\nu(x)\, \eta^{(\nu)}(x))^{(\nu)}, \tag{8.7}$$

$$N[\eta] = \sum_{\nu=0}^{m-1} (-1)^\nu (n_\nu(x)\, \eta^{(\nu)}(x))^{(\nu)}. \tag{8.8}$$

Hierzu wird $m_\nu(x)$, $n_\nu(x)$ ν-mal stetig differenzierbar in $[a, b]$ angenommen, was für (8.1), (7.1), (7.2) unnötig war.

Gemäß (8.3), (8.4) führen wir noch die Abkürzungen

$$M_\nu[\eta] = (-1)^\nu (m_m \eta^{(m)})^{(\nu-1)} + - \cdots - m_{m-\nu+1} \eta^{(m-\nu+1)} \qquad (\nu = 1, \ldots, m) \tag{8.9}$$

$$N_\nu[\eta] = (-1)^\nu n_m \eta^{(m)})^{(\nu-1)} + - \cdots - n_{m-\nu+1} \eta^{(m-\nu+1)} \qquad (\nu = 1, \ldots, m) \tag{8.10}$$

mit der Verabredung

$$n_m(x) \equiv 0 \tag{8.11}$$

ein und erhalten damit

$$y_{2,\nu} = M_\nu[\eta] - \lambda N_\nu[\eta] \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m). \tag{8.12}$$

Mit (7.4) wird nun

$$\mathfrak{y}_1 = \begin{pmatrix} \eta^{(m-1)}(a) \\ \vdots \\ \eta(a) \\ \eta^{(m-1)}(b) \\ \vdots \\ \eta(b) \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{y}_2 = \begin{pmatrix} -[M_1[\eta] - \lambda N_1[\eta]]_{x=a} \\ \vdots \\ \\ \\ \\ [M_m[\eta] - \lambda N_m[\eta]]_{x=b} \end{pmatrix} \tag{8.13}$$

Setzt man hierfür die Randbedingungen (7.5), (7.6) an, d. h. mit einem orthogonalen Projektor P, $Q = E - P$ und hermiteschen Matrizen V_0, V_1 bei

$$V_0 Q = V_1 Q = O \tag{8.14}$$

die Randbedingungen

$$P\mathfrak{y}_2 + (Q - V_0)\mathfrak{y}_1 = -\lambda V_1 \mathfrak{y}_1 , \tag{8.15}$$

so erhält man in (8.6) bis (8.15) als Spezialfall kanonischer Eigenwertprobleme die sog. *„natürlichen Eigenwertprobleme"*, die von E. STIEFEL und H. ZIEGLER [21] definiert und von N. J. LEHMANN [11] und E. BUKOVICS [3] eingehender untersucht wurden. (8.15) entspricht dabei genau der von LEHMANN, l.c. S. 134—135, betrachteten Normalform der wesentlichen und restlichen Randbedingungen[2].

Man wird bemerken, daß gemäß (7.31) hier $u, v \in \mathfrak{F}_1$ bedeutet:

$$u_1 = \begin{pmatrix} \alpha^{(m-1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} \beta^{(m-1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} u_{2,1} = -m_m \alpha^{(m)} \\ v_{2,1} = -m_m \beta^{(m)} \end{cases}$$

mit $(m+1)$-mal stetig differenzierbaren $\alpha(x)$, $\beta(x)$ und das Bestehen der „wesentlichen" Randbedingungen für beide Funktionen. Dann wird gemäß (7.32), (7.29)

$$F(u, v) = \int_a^b \left[\sum_{\nu=0}^{m} m_\nu(x) \alpha^{(\nu)}(x) \overline{\beta^{(\nu)}(x)} \right] dx + \mathfrak{v}_1^* V_0 \mathfrak{u}_1 , \tag{8.16}$$

$$G(u, v) = \int_a^b \left[\sum_{\nu=0}^{m-1} n_\nu(x) \alpha^{(\nu)}(x) \overline{\beta^{(\nu)}(x)} \right] dx + \mathfrak{v}_1^* V_1 \mathfrak{u}_1 . \tag{8.17}$$

Das sind die aus der Theorie natürlicher Eigenwertprobleme vertrauten Funktionale. Die Erweiterung der Räume mit entsprechenden Dichtheitsbetrachtungen ist bekannt.

9. „Klassische" Eigenwertprobleme

Betrachtet man die selbstadjungierte Differentialgleichung n-ter Ordnung (8.6), (8.7), (8.8), also bei $n = 2m$

$$\sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu (m_\nu(x) \eta^{(\nu)}(x))^{(\nu)} = \lambda \left(\sum_{\nu=0}^{m-1} (-1)^\nu (n_\nu(x) \eta^{(\nu)}(x))^{(\nu)} \right) \tag{9.1}$$

mit ν-mal stetig differenzierbaren reellen $m_\nu(x)$, $n_\nu(x)$ und $m_m(x) \neq 0$, und dazu parameterunabhängige Randbedingungen der Form

$$U_\nu[\eta] \equiv \sum_{\mu=0}^{n-1} (\alpha_{\nu\mu} \eta^{(\mu)}(a) + \beta_{\nu\mu} \eta^{(\mu)}(b)) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{9.2}$$

[2] Die Untersuchung der Randbedingungen bei BUKOVICS erscheint unangemessen und umständlich. BUKOVICS hat überdies offenbar LEHMANN [11] an wesentlichen Stellen mißverstanden. Beide lassen schließlich die Arbeiten von E. HÖLDER [5], [6] unbeachtet.

derart, daß für je zwei Funktionen $\eta(x)$, $\zeta(x)$, die beide (9.2) genügen,

$$\int_a^b M[\eta]\,\bar{\zeta}\,dx = \int_a^b \eta\,\overline{M[\zeta]}\,dx, \tag{9.3}$$

$$\int_a^b N[\eta]\,\bar{\zeta}\,dx = \int_a^b \eta\,\overline{N[\zeta]}\,dx \tag{9.4}$$

gilt, so hat man die „*klassischen*" selbstadjungierten Eigenwertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen, wie sie von zahlreichen Autoren, insbesondere von E. KAMKE [7], [8], [9], [10] und L. COLLATZ [4] studiert wurden.

Es ist nicht trivial, daß diese klassischen Probleme sich als Spezialfall den in 8 betrachteten natürlichen Eigenwertproblemen einordnen. So trifft es nicht zu, daß sämtliche klassischen Probleme denjenigen natürlichen Eigenwertproblemen entsprechen, bei denen nach Einsetzen von (8.13) in (8.15) der Faktor von λ *identisch* verschwindet. Eine derartige Feststellung könnte man N. J. LEHMANN [11], S. 130 mit den Bezeichnungen S. 136, entnehmen; sie ist jedoch möglicherweise anders gemeint. Jedenfalls erscheint eine Klärung des Sachverhalts angezeigt.

(9.3), (9.4) bedeuten

$$\mathfrak{v}_2^* \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{v}_1^* \mathfrak{y}_2$$

für

$$\mathfrak{y}_1 = \begin{pmatrix} \eta^{(m-1)}(a) \\ \vdots \\ \eta(b) \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{v}_1 = \begin{pmatrix} \zeta^{(m-1)}(a) \\ \vdots \\ \zeta(b) \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{y}_2 = \begin{pmatrix} -[M_1[\eta] - \lambda N_1[\eta]]_{x=a} \\ \vdots \\ [M_m[\eta] - \lambda N_m[\eta]]_{x=b} \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{v}_2 = \begin{pmatrix} -[M_1[\zeta] - \lambda N_1[\zeta]]_{x=a} \\ \vdots \\ [M_m[\zeta] - \lambda N_m[\zeta]]_{x=b} \end{pmatrix}$$

mit jedem reellen λ, falls η, ζ beide (9.2) genügen. Da nun

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{y}_1 \\ \mathfrak{y}_2 \end{pmatrix} = D_\lambda \begin{pmatrix} \eta^{(m-1)}(a) \\ \vdots \\ \eta(b) \\ \eta^{(m)}(a) \\ \vdots \\ \eta^{(2m-1)}(b) \end{pmatrix}$$

mit einer invertierbaren unteren Dreiecksmatrix besteht [in deren Diagonale $(2m)$-mal 1, m-mal $\pm m_m(a)$ und m-mal $\pm m_m(b)$ steht], heißt dies, daß (9.2) bezüglich $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$ für jedes reelle λ einen symmetrisierenden Unterraum einer Dimension $\geqq n$ im Sinne von Abschnitt 5 beschreibt. Nach Satz 5.9 ist danach die Dimension $= n$ und der Unterraum ein maximaler symmetrisierender Unterraum. Es sind also die n Bedingungen (9.2) linear unabhängig und für jedes reelle λ nach Satz 5.15 äquivalent zu Randbedingungen

$$P_\lambda \mathfrak{y}_2 + (Q_\lambda - V(\lambda))\,\mathfrak{y}_1 = 0,$$

wo P_λ eine orthogonale Projektion, $Q_\lambda = E - P_\lambda$ und $V(\lambda)$ hermitesch mit $V(\lambda)\, Q_\lambda = O$ ist. Hier ist nun notwendig

$$P_\lambda = P$$

als orthogonale Projektion auf den Unterraum der möglichen $\mathfrak{y}_1$ von λ unabhängig, weil $\mathfrak{y}_1$, ausgedrückt durch η, und (9.2) λ nicht enthalten.

Wir drücken jetzt

$$\mathfrak{y}_2 = \mathfrak{y}_{20} - \lambda \mathfrak{y}_{21} \tag{9.5}$$

und

$$\mathfrak{y}_{21} = L_0 \mathfrak{y}_{20} + L_1 \mathfrak{y}_1 \tag{9.6}$$

aus, wobei offenbar L_0 nilpotent, $L_0^n = O$, ist. Dann müssen mit hermiteschen

$$V(0) = V_0\,, \quad V(1) = V_0 - V_1$$

und einer invertierbaren Matrix

$$E - R_0$$

bei

$$Q V_0 = Q V_1 = O$$

die Randbedingungen für $\lambda = 1$ und $\lambda = 0$ äquivalent sein, wo in den ersteren schon $Q\mathfrak{y}_1 = 0$ beachtet wurde:

$$P(\mathfrak{y}_{20} - L_0 \mathfrak{y}_{20} - L_1 P \mathfrak{y}_1) + (Q - V_0 + V_1)\, \mathfrak{y}_1 \equiv$$
$$\equiv (E - R_0)\, [P \mathfrak{y}_{20} + (Q - V_0)\, \mathfrak{y}_1]\,.$$

Das bedeutet die beiden Gleichungen

$$R_0 P = P L_0\,, \quad R_0 (Q - V_0) = P L_1 P - V_1\,.$$

Notwendige Folgerungen sind:

$$P L_0 = P L_0 P\,, \quad P L_0 V_0 + P L_1 P \quad \text{hermitesch.}$$

Diese sind umgekehrt hinreichend für die Existenz von

$$R_0 = P L_0\,, \quad V_1 = P L_0 V_0 + P L_1 P\,.$$

Damit erhält man:

Satz 9.7: *Die klassischen (Kamkeschen) Randbedingungen entsprechen durch Äquivalenz genau denjenigen „natürlichen" Randbedingungen*

$$P \mathfrak{y}_2 + (Q - V_0)\, \mathfrak{y}_1 = -\lambda V_1 \mathfrak{y}_1\,,$$

bei denen

$$P L_0 = P L_0 P\,,$$
$$P L_0 V_0 + P L_1 P = V_1 \quad \textit{(hermitesch)}$$

mit den Matrizen (9.5), (9.6) *gilt.*

Es ist danach gerade

$$P \mathfrak{y}_{21} - V_1 \mathfrak{y}_1 = 0$$

Folgerung von

$$P \mathfrak{y}_{20} + (Q - V_0)\, \mathfrak{y}_1 = 0\,,$$

nicht notwendig eine Identität.

Literatur

[1] BLISS, G. A.: A boundary value problem for a system of ordinary differential equations of the first order. Trans. Am. Math. Soc. **28**, 569—584 (1926).
[2] — Definitely self-adjoint boundary value problems. Trans. Am. Math. Soc. **44**, 413—428 (1938).
[3] BUKOVICS, E.: Lineare Eigenwertaufgaben in der Mechanik (Ein Beitrag zur Theorie der natürlichen Eigenwertprobleme). Acta Phys. Austr., Bd. XII, 3; 262—303 (1959).
[4] COLLATZ, L.: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Leipzig: Akademische Verlagsges. 1949.
[5] HÖLDER, E.: Entwicklungssätze aus der Theorie der zweiten Variation (Allgemeine Randbedingungen). Acta math. **70**, 193—242 (1939).
[6] — Einordnung besonderer Eigenwertprobleme in die Eigenwerttheorie kanonischer Differentialgleichungssysteme. Math. Ann. **119**, 21—66 (1943).
[7] KAMKE, E.: Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. I. Math. Z. **45**, 759—787 (1939).
[8] — II. Math. Z. **46**, 231—250 (1940).
[9] — III. Math. Z. **46**, 251—286 (1940).
[10] — IV. Math. Z. **48**, 67—100 (1942/43).
[11] LEHMANN, N. J.: Eine Integraldarstellung für selbstadjungierte Randwertaufgaben (einschließlich einer Theorie der natürlichen Eigenwertprobleme). Math. Nachr. **14**, 129—156 (1955).
[12] LEPTIN, H.: Kamkesche Eigenwertprobleme und Hilbert-Schmidt-Operatoren. Math. Z. **82**, 133—151 (1963).
[13] MAASS, H.: Über die Zurückführung der Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen auf Integralgleichungen. Math. Z. **58**, 385—390 (1953).
[14] REID, W. T.: A system of ordinary linear differential equations with two-point boundary conditions. Trans. Am. Math. Soc. **44**, 508—521 (1938).
[15] — Some remarks on linear differential systems. Bull. Am. Math. Soc. **45**, 414—419 (1939).
[16] — A new class of self-adjoint boundary value problems. Trans. Am. Math. Soc. **52**, 381—425 (1942).
[17] — Definitely self-adjoint differential systems. Bull. Am. Math. Soc. **51**, 881 (1945).
[18] — Self-adjoint boundary value problems. Bull. Am. Math. Soc. **55**, 1063 (1949).
[19] — A class of two point boundary problems. Ill. J. Math. **2**, 434—453 (1958).
[20] SCHÄFKE, F. W., u. A. SCHNEIDER: S-hermitesche Rand-Eigenwertprobleme. I. Math. Ann. **162**, 9—26 (1965).
[21] STIEFEL, E., u. H. ZIEGLER: Natürliche Eigenwertprobleme. Z. angew. Math. Phys. Vol. I, 111—138 (1950).
[22] WIELANDT, H.: Über die Eigenwertaufgaben mit reellen diskreten Eigenwerten. Math. Nachr. 4, 308—314 (1950/51).
[23] ZIMMERBERG, H. J.: Two-point boundary problems involving a parameter linearly. Ill. J. Math. **4**, 593—608 (1960).
[24] — Two-point boundary conditions linear in a parameter. Pacific. J. Math. **12**, 385—393 (1962).

In den zitierten Arbeiten finden sich zahlreiche weitere Literaturangaben.

Prof. Dr. F. W. SCHÄFKE
Mathematisches Institut, Universität Köln
5 Köln-Lindenthal, Weyertal 86

(Eingegangen am 10. September 1965)

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · HEIDELBERG · NEW YORK

Lecture Notes in Mathematics

An informal series of special lectures, seminars and reports on mathematical topics
Edited by **A. Dold,** Heidelberg, and **B. Eckmann,** Zürich

Volume 7 Introduction to Lie Groups and Transformation Groups

By Philippe Tondeur, Department of Mathematics, University of Zürich
VIII, 176 pages DIN A 4. 1965. Stiff paper bound DM 13,50

Volume 8 Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems

By Gaetano Fichera, University of Rome
IV, 176 pages DIN A 4. 1965. Stiff paper bound DM 13,50

Volume 9 Pseudo-Boolean Programming and Applications

By Petru L. Ivănescu, Institute of Mathematics, Romanian Academy of Sciences, Bucharest
IV, 50 pages DIN A 4. 1965. Stiff paper bound DM 4,80

Volume 10 Die Suzukigruppen und ihre Geometrien

Von Heinz Lüneburg, Mathematisches Institut der Universität Mainz
VI, 111 Seiten DIN A 4. 1965. Steif geheftet DM 8,—

Volume 11 Algèbre Locale · Multiplicités

Par Jean-Pierre Serre, Collège de France, Paris
Seconde édition, 1965. Rédigé par Pierre Gabriel
VIII, 192 pages DIN A 4. 1965. Broché DM 12,—

Seite

KÖTHE, G.: Hebbare lokalkonvexe Räume 181

SALIÉ, H.: Reichweite von Mengen aus drei natürlichen Zahlen 196

MAURIN, K.: Allgemeine Eigenfunktionsentwicklungen, unitäre Darstellungen lokalkompakter Gruppen und automorphe Funktionen 204

MÜLLER, B.: Über vollständige (Ko-) Homologie 223

SCHÄFKE, F. W., und A. SCHNEIDER: S-hermitesche Rand-Eigenwertprobleme. II . . 236

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Edgar Seidler, 1 Berlin 31 (Wilmersdorf), Heidelberger Platz 3. Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York — Druck der Brühlschen Universitätsdruckerei, Gießen Printed in Germany

Mathematische Annalen

Begründet 1868 durch Alfred Clebsch · Carl Neumann

Fortgeführt durch Felix Klein · David Hilbert
Otto Blumenthal · Erich Hecke

Herausgegeben von **Heinrich Behnke,** Münster i. W.
Richard Courant, New York
Hans Grauert, Göttingen
Friedrich Hirzebruch, Bonn
Heinz Hopf, Zürich
Gottfried Köthe, Frankfurt/M.
Bartel L. van der Waerden, Zürich

Band 165 · Heft 4 · 1966

Springer-Verlag · Berlin · Heidelberg · New York

Math. Ann. · Abgeschlossen am 6. Juli 1966 · A 21 265 E

Mathematische Annalen

Begründet 1868 durch *Alfred Clebsch* und *Carl Neumann*, früher herausgegeben von *Alfred Clebsch* (1869—1872), *Carl Neumann* (1869—1876), *Felix Klein* (1876—1924), *Adolph Mayer* (1876—1901), *Walther v. Dyck* (1888—1921), *David Hilbert* (1902—1939), *Otto Blumenthal* (1906—1938), *Albert Einstein* (1920—1928), *Constantin Carathéodory* (1925—1928), *Erich Hecke* (1929—1947), *Franz Rellich* (1947—1955), *Kurt Reidemeister* (1947—1963).

Band 1—80 Leipzig, B. G. Teubner, ab Band 81 (1920) Berlin, Springer.

An unsere Mitarbeiter!

Die Korrekturkosten sind bei den „Mathematischen Annalen" sehr hoch. Für ihre Verminderung muß unbedingt Sorge getragen werden. Wir richten deshalb an alle unsere Mitarbeiter die freundliche dringende Bitte, zu diesem Ziele an ihrem Teile mit beitragen zu wollen. Dazu ist nötig:

1. Das Manuskript muß *völlig druckfertig* und *gut leserlich* sein und für den Setzer *gemäß den „Hinweise für die Autoren"* (herausgegeben von Redaktion und Verlag) vorbereitet sein. — Diese Hinweise können von der Redaktion angefordert werden.

2. Veränderungen des Textes in der Korrektur sind auf die Fälle zu beschränken, wo sich nachträglich *wirkliche Irrtümer* herausstellen. Insbesondere sind rein stilistische Verbesserungen zu unterlassen. Sollte ein Irrtum bemerkt werden, noch bevor Korrektur eingetroffen ist, dann ist ein verbesserter Text sofort an die Redaktion zu schicken, die dafür Sorge tragen wird, daß das Manuskript noch vor dem Satz berichtigt wird.

Jede Änderung des schon gesetzten Textes muß zu Lasten der Autoren gehen.

Die Reihenfolge der Veröffentlichungen behält sich die Redaktion vor.

Die Redaktion der Mathematischen Annalen

Mathematische Annalen

Erscheinen zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung zwanglos in Heften, die zu Bänden vereinigt werden. Sie sind durch jede Buchhandlung zu beziehen. Der Preis des Bandes beträgt DM 96,—.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskripts und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0,30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Mathematischen Annalen bestimmte Manuskripte können bei jedem der unten verzeichneten Redaktionsmitglieder eingereicht werden:

Professor Dr. Dr. h. c. H. Behnke, 44 Münster/Westf., Rottendorffweg 17,

Professor Dr. R. Courant, 142 Calton Road, New Rochelle, N. Y. USA,

Professor Dr. H. Grauert, Mathematisches Institut der Universität, 34 Göttingen, Bunsenstr. 3—5,

Professor Dr. F. Hirzebruch, Mathematisches Institut der Universität, 53 Bonn (Rhein), Wegelerstr. 10

Professor Dr. Dr. h. c. H. Hopf, Zollikon bei Zürich, Alte Landstraße 37,

Professor Dr. Dr. h. c. G. Köthe, 6 Frankfurt/Main, Parkstraße 14[1],

Professor Dr. Dr. h. c. B. L. van der Waerden, Mathematisches Institut der Universität Zürich, 8006 Zürich/Schweiz

Inhaltsverzeichnis des Heftes auf Seite 4

OSTROWSKI, A. M.
Math. Annalen 165, 261—280 (1966)

A Contribution to the Theory of the Fourier Integral Formula*

ERNST HÖLDER for his 65th anniversary

A. M. OSTROWSKI

Introduction

1. The Fourier Integral Formula has been usually discussed under the condition, that the corresponding function $f(x)$ is L-integrable over every finite interval, while the infinite integrals occuring in this formula have to be understood as Cauchy-Lebesgue-integrals, that is to say as limits of integrals

$$\int_A^B \text{ for } A \to -\infty,\ B \to +\infty .$$

This implies in particular, that $f(x)$ is assumed to be absolutely integrable over every finite singularity, while in some applications we have to do with functions which are only conditionally integrable in the finite singular points.

2. In this paper we will treat the theory of the Fourier integral under the assumption, that the function $f(x)$ is not necessarily L-integrable over every finite interval, but that the so-called Harnack-Lebesgue-integral of $f(x)$ exists over every finite interval.

3. In the theory of the Fourier Integral-Formula usually the local conditions are formulated in a manner which is unnecessarily restrictive. We deal in our presentation with these conditions introducing the concept of a *Dirichlet-point* of $f(x)$ and a Dirichlet-value $D_f(x)$ of $f(x)$ in such a point, which could be characterized as a point of convergence of the corresponding Fourier-series and the value of this series in such a point.

4. As to the convergence conditions qualifying the infinitary behaviour of $f(x)$, usually two conditions are considered:

1) the existence of $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$;

2) the monotonic convergence of $f(x)$ to 0 as $|x| \to \infty$

or suitable combinations of these conditions, concerning $\pm\infty$

Other conditions used in this connection are more or less immediately reduced to the two above conditions.

* The work on this paper was carried out under a contract of the Mathematical Institute of the University of Basle with the European Research Office of the US-Army.

In this paper we use a type of condition comprising both conditions mentioned, namely the condition that the integral

$$\int^{\infty} f(x)\cos(ux+\gamma)\,dx$$

exists for every fixed γ *uniformly* in u.

5. Using this type of condition, the main difficulty of the proof remains that of justifying the inversion of the order of integration, a subject which, to my knowledge, has not as yet been treated in the case of Harnack-Lebesgue integrals. We deal with this problem in the part III of this paper after having given in the part I a summary of the essential results on the Harnack-Lebesgue integral, and in the part II a discussion of the uniform existence of such integrals. In the part IV I treat the so-called Fourier Single Integral Theorem, and, finally, in the last part V of this paper, Fourier's Double Integral Formula.

I. Summary of classical properties of the HL-Integral

6. We consider in the following a finite interval on the x-axis $I=\langle\alpha,\beta\rangle$ and a function $f(x)$ defined and measurable on I. A point x_0 of I will be called a *point of integrability* if there exists a symmetric neighborhood U of x_0 such that f is Lebesgue summable on the intersection UI of U with I. Otherwise x_0 will be called a *Harnack point* for f on I. The set of all these Harnack points for f on I will be called the *Harnack set for f on I* and denoted generally by H_f.

7. H_f is obviously closed. We assume from now on that H_f is *of measure zero and nowhere dense on I*.

H_f can be therefore covered by a finite set Δ of non overlapping intervals, where the total length $|\Delta|$ of Δ can be made arbitrarily small[1].

We can always assume that the intervals of Δ are closed and have no points in common; further that every point of H_f is an *interior* point of the corresponding interval of Δ.

Beyond that, we shall usually have to require, and this is one of the fundamental points of the theory, that each of the intervals of Δ contains at least one point of H_f. Such a covering will be called, with E. H. MOORE [MOORE (1901), p. 303], *a narrow covering of H_f*.

8. If S is a subset of I then we will denote by the symbol f_S the function which vanishes in all points of S and is equal to $f(x)$ in all points of $I-S$.

To define the Harnack-Lebesgue HL-integral of $f(x)$ over I, consider a general sequence Δ_ν of finite narrow coverings of H_f for which we have $|\Delta_\nu|\to 0$.

Consider then the sequence of the Lebesgue integrals $\int_\alpha^\beta f_{\Delta_\nu}(x)\,dx$. If this sequence is convergent as $\nu\to\infty$ for every choice of the sequence Δ_ν, we call its limit, which is then independent of the choice of the sequences Δ_ν, the

[1] In HARNACK's and HOBSON's presentations [HARNACK (1884), HOBSON (1927)] H_f is assumed to be of the *content* zero. However, for a closed set, by the Borel covering theorem, a set of measure zero is also a set of content zero.

Harnack-Lebesgue integral of f over I, and denote it as $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ or, if necessary, (HL) $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ so that we have

$$(1) \qquad (\mathrm{HL}) \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \lim_{\nu\to\infty} \int_\alpha^\beta f_{\Delta_\nu}(x)\,dx \qquad (|\Delta_\nu| \to 0).$$

9. For some applications it is of importance that in the sufficient condition for the existence of the HL-integral the requirement that the Δ_ν are narrow coverings of H_f, can be weakened. E. H. MOORE proved l.c., p. 308–309:

If a closed zero set ω in I contains H_f and if for every sequence of narrow coverings of ω, Δ_ν, with $|\Delta_\nu| \to 0$ the limit $\lim_{\nu\to\infty} \int_\alpha^\beta f_{\Delta_\nu}(x)\,dx$ exists, this limit is the HL-integral of f over I.

An important property of the HL-integral is, that if we have $\alpha < \gamma < \beta$, then the relation holds

$$(2) \qquad (\mathrm{HL}) \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = (\mathrm{HL}) \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + (\mathrm{HL}) \int_\gamma^\beta f(x)\,dx$$

whenever the left hand integral or both right hand integrals exist[2].

10. If the integral (HL) $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ exists, then the function (HL) $\int_\alpha^x f(x)\,dx$ is a continuous function of x for all $x \prec I$ [MOORE (1901) p. 312].

If $f(x)$ has an HL-integral in I and $m(x)$ is bounded and monotone in I, then the product $f(x)\,m(x)$ has also an HL-integral in I and we have the second mean-value theorem ([5] HOBSON (1927), pp. 689–690):

$$(3) \qquad \int_\alpha^\beta f(x)\,m(x)\,dx = m(\alpha) \int_\alpha^\xi f(x)\,dx + m(\beta) \int_\xi^\beta f(x)\,dx.$$

11. However, while the HL-integrability of $f(x)$ insures also that of $cf(x)$ for every constant c, the HL-integral is no longer necessarily an *additive* functional of $f(x)$. If $f(x)$ and $g(x)$ are HL-integrable in I, $f(x)+g(x)$ need not have an HL-integral in I [MOORE (1981) p. 329].

But the following property still holds ([5] HOBSON I (1927) pp. 686–687):

If $f(x)$ and $g(x)$ are HL-integrable in I and if either the sets H_f, H_g have no points in common, or the sets H_f and H_g coincide and $H_{f+g} = H_f - L$ for a closed set L; then $f(x)+g(x)$ is HL-integrable and we have

$$(4) \qquad (\mathrm{HL}) \int_I [f(x)+g(x)]\,dx = (\mathrm{HL}) \int_I f(x)\,dx + (\mathrm{HL}) \int_I g(x)\,dx.$$

In particular, (4) holds if $g(x)$ is L-integrable and $f(x)$ HL-integrable on I.

12. As the set H_f is a closed nowhere dense zero set in I, its complement with respect to I, $I - H_f$, consists of an enumerable set of "complementary

[2] This was first proved by E. H. MOORE (1901), pp. 310—311, disproving an earlier assertion to the contrary by O. STOLZ (1899), who p. 277 had asserted that (2) is not generally true.

intervals" to H_f, which have no points in common, are open, save perhaps that beginning at α and that ending at β, and have both end points in H_f save perhaps α and β. Ordering these complementary intervals according to their monotonically diminishing length, denote them by $I_\nu(a_\nu, b_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, where

$$b_\nu - a_\nu \downarrow 0, \quad \sum_\nu (b_\nu - a_\nu) = \beta - \alpha .$$

13. We put now

$$\omega_\nu = \operatorname*{osc}_{a_\nu \leqq x \leqq b_\nu} \int_{a_\nu}^{x} f(x)\,dx \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

if the integral $\int_{a_\nu}^{b_\nu} f(x)\,dx$ exists – this is obviously in our hypotheses a Cauchy Lebesgue integral, while $\omega_\nu = \infty$ if $f(x)$ is not integrable over I_ν.

Then the fundamental theorem of E. H. MOORE ((1901) p. 324) is:

Theorem I. *Necessary and sufficient for the HL-integrability of $f(x)$ over I is that the corresponding Moore test series*

$$\sum_\nu \omega_\nu$$

converges, and in the case of convergence the HL-integral of f over I can be represented by the corresponding Moore series

$$(\mathrm{HL}) \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \sum_\nu \int_{a_\nu}^{b_\nu} f(x)\,dx . \tag{6}$$

14. In the preceding discussion the interval $\langle \alpha, \beta \rangle$ was assumed as a finite interval. In the case of an infinite interval the corresponding integral is, of course, defined by

$$(\mathrm{HL}) \int_\alpha^\infty f(x)\,dx = \lim_{\beta \uparrow \infty} (\mathrm{HL}) \int_\alpha^\beta f(x)\,dx ,$$

$$(\mathrm{HL}) \int_{-\infty}^\beta f(x)\,dx = \lim_{\alpha \downarrow \infty} (\mathrm{HL}) \int_\alpha^\beta f(x)\,dx .$$

II. The uniform existence of the HL-Integral

15. Let $f(x, y)$ be a measurable function of x on the interval $I = \langle a, b \rangle$ for every value of the parameter y running through the set $\mathfrak{M}$. We are going to define the *uniform existence of the HL-integral*, $\int_a^b f(x, y)\,dx$, for $y \prec \mathfrak{M}$.

Consider the following situation: Assume that there exists a closed zero subset ω of I containing any $H_{f(x,y)}$ for all $y \prec \mathfrak{M}$. Assume further that for every sequence of finite narrow coverings Δ_ν of ω with

$$|\Delta_\nu| \to 0 \quad (\nu \to \infty)$$

the sequence $\int_a^b f_{\Delta_\nu}(x, y)\,dx$ tends *uniformly* to $\int_a^b f(x, y)\,dx$ for $y \prec \mathfrak{M}$,

$$\int_a^b f_{\Delta_\nu}(x, y)\,dx \Rightarrow \int_a^b f(x, y)\,dx \quad (\nu \to \infty, y \prec \mathfrak{M}) . \tag{7}$$

Then we will say that *the integral* $\int_a^b f(x, y)\,dx$ *exists uniformly* for $y \prec \mathfrak{M}$.

The set ω with the above property will be called an *h-set* for $f(x, y)$ as $x \prec \langle a, b\rangle$ and $y \prec \mathfrak{M}$.

16. The above definition holds for the *finite* interval. In the case that I is infinite, say $\langle a, \infty)$, the integral $\int_a^\infty f(x, y)\,dx$ is said to *exist uniformly for* $y \prec \mathfrak{M}$, if there exists a set ω on the x-axis, whose intersection with every finite closed interval is a closed zero set and which contains all Harnack sets $H_{f(x,y)}$ for $y \prec \mathfrak{M}$, satisfying the two conditions: β

1) The integral over the finite interval $\langle a, \beta\rangle$, $\int_a f(x, y)\,dx$ exists uniformly for all β with $a < \beta < \infty$ and all $y \prec \mathfrak{M}$;

2) The integral $\int_a^A f(x, y)\,dx$ converges with $A \uparrow \infty$ uniformly for $y \prec \mathfrak{M}$.

This set ω will be called an *h-set* for f as $x \prec \langle a, \infty)$ and $y \prec \mathfrak{M}$.

The definition of the uniform existence for the integrals $\int_{-\infty}^a f(x, y)\,dx$, $\int_{-\infty}^\infty f(x, y)\,dx$ is completely similar. Observe that, with the above definition, if the integral $\int_a^b f(x, y)\,dx$ exists uniformly for $y \prec \mathfrak{M}$, then the integral $\int_\alpha^\beta f(x, y)\,dx$ exists uniformly for $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$ and $y \prec \mathfrak{M}$.

17. With this definition we are going now to prove:

Theorem II. *If* $\int_a^b f(x, y)\,dx$ *exists uniformly for* $y \prec \mathfrak{M}$, *and if* $M(x, z)$ *is a function of* x, *monotone for* $x \prec \langle a, b\rangle$ *and bounded for* $x \prec \langle a, b\rangle$ *and for* $z \prec \mathfrak{M}^*$,

$$|M(x, z)| \leqq C \quad (x \prec \langle a, b\rangle, z \prec \mathfrak{M}^*), \tag{8}$$

then the integral

$$\int_a^b f(x, y)\, M(x, z)\,dx \tag{9}$$

exists uniformly for $y \prec \mathfrak{M}$, $z \prec \mathfrak{M}^*$.

18. *Proof.* Denote by ω the h-set of $f(x, y)$ for the interval $\langle a, b\rangle$ and $y \prec \mathfrak{M}$. ω is a set on the x-axis, whose intersection with every finite closed interval is a closed zero set containing all corresponding Harnack sets $H_{f(x,y)}$ for $y \prec \mathfrak{M}$.

To prove the uniformity in the case of a finite interval $\langle a, b\rangle$ and to prove that the condition 1) of no. 15 is satisfied in the case $b = \infty$, take a $\beta > a$, which is $= b$ if $b < \infty$ and $< b$ if $b = \infty$. Denote by ω' the intersection of ω with $\langle a, \beta\rangle$ and for an arbitrary $\varepsilon > 0$ denote by Δ a narrow covering of ω' with $|\Delta| < \varepsilon$. Then we have by (3),

$$\int_a^\beta (f - f_\Delta)\, M(x, z)\,dx = M(a, z) \int_a^\xi (f - f_\Delta)\,dx + M(\beta, z) \int_\xi^\beta (f - f_\Delta)\,dx \tag{10}$$

for a ξ between a and β and therefore

$$\left|\int_a^\beta (f-f_\Delta)\,M(x,z)\,dx\right| \leqq C\left[\left|\int_a^\xi (f-f_\Delta)\,dx\right| + \left|\int_\xi^\beta (f-f_\Delta)\,dx\right|\right]. \tag{11}$$

ξ depends on y and z and lies in any case between a and β. Therefore, by our assumption about f, the cofactor of C on the right tends to 0 with $\varepsilon \downarrow 0$, uniformly in y. This proves the Theorem II for a finite b and also the condition 1) for $b=\infty$.

19. To prove the condition 2) of no. 16 for $b=\infty$, it is sufficient to apply (2) and (3) for $a<A<B$ as follows:

$$\int_A^B f(x,y)\,M(x,z)\,dx = M(A,z)\int_A^\xi f(x,y)\,dx + M(B,z)\int_\xi^B f(x,y)\,dx\,.$$

It follows then by (8)

$$\left|\int_A^B f(x,y)\,M(x,z)\,dx\right| \leqq C\left[\left|\int_A^\xi f(x,y)\,dx\right| + \left|\int_\xi^B f(x,y)\,dx\right|\right].$$

But here, by our assumption about f, the cofactor of C tends to 0 with $A \uparrow \infty$ uniformly for $B>A$, $y \prec \mathfrak{M}$, $z \prec \mathfrak{M}^*$.

The proof in the case of the integrals $\int_{-\infty}^A$, $\int_{-\infty}^\infty$ is completely similar.

From Theorem II follows that if $\int_a^b f(x,y)\,dx$, $a<b$, exists uniformly for $y \prec \mathfrak{M}$, then the same is true for each integral $\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx$, $a \leqq \alpha \leqq \beta \leqq b$.

20. The conditions of the Theorem II can be slightly modified, so as to obtain the

Theorem II°. *Assume that the integral*

$$\int_a^\beta f(x,y)\,dx \quad (a \leqq \beta < b)$$

exists for all β with $a \leqq \beta < b$ and all $y \prec \mathfrak{M}$, and is uniformly bounded for all these y and β,

$$\left|\int_a^\beta f(x,y)\,dx\right| \leqq K \quad (a \leqq \beta < b,\ y \prec \mathfrak{M}).$$

Assume that $M(x,z)$ is a function of x and z monotone for $a \leqq x < b$, bounded uniformly for these x and for $z \prec \mathfrak{M}^*$,

$$|M(x,z)| \leqq C \quad (x \prec \langle a,b\rangle,\ z \prec \mathfrak{M}^*),$$

and tending to 0 with $x \uparrow b$, uniformly for $z \prec \mathfrak{M}^*$,

$$M(x,z) \rightrightarrows 0 \quad (x \uparrow b,\ z \prec \mathfrak{M}^*).$$

Then the integral (9) exists uniformly for $y \prec \mathfrak{M}$, $z \prec \mathfrak{M}^*$.

21. *Proof.* Take β and B with $a<\beta<B<b$ and apply to the interval $\langle\beta, B\rangle$ the second mean value Theorem.

We have

$$\int_{\beta}^{B} f(x,y)\,M(x,z)\,dx = M(\beta,z)\int_{\beta}^{\xi} f(x,y)\,dx + M(B,z)\int_{\xi}^{B} f(x,y)\,dx,$$

$$\left|\int_{\beta}^{B} f(x,y)\,M(x,z)\,dx\right| \leqq 2K\,\mathrm{Max}\left(|M(\beta,z)|, |M(B,z)|\right).$$

As the second factor tends with $\beta \uparrow b$ to 0 uniformly in $z \prec \mathfrak{M}^*$, we see that $\left|\int_{\beta}^{B}\right|$ tends to 0 uniformly in $y \prec \mathfrak{M}$, $z \prec \mathfrak{M}^*$. The Theorem II° is proved.

22. For a function $f(x)$, HL-integrable in the (finite or infinite) interval $\langle a, b\rangle$, we will say that $f(x)$ *belongs to the class* U_q *or satisfies the condition* U_q if

$$F_\gamma(u) = \int_a^b f(x)\cos(ux+\gamma)\,dx \quad (u \geqq q)$$

exists for all values of $u \geqq q$ and all γ and if for each fixed γ its existence is uniform in $u \geqq q$.

This is obviously equivalent with the simultaneous uniform existence for $u \geqq q$ of the integrals

$$\int_a^b f(x)\cos ux\,dx, \quad \int_a^b f(x)\sin ux\,dx,$$

or also with the uniform existence of the integral

$$\int_a^b f(x)\,e^{iux}\,dx.$$

23. It follows now from the above Theorem II, that if $f(x)$ belongs in $\langle a, b\rangle$ to the class U_q, the same is true for the product $f(x)\,M(x)$ if $M(x)$ is monotone in $\langle a, b\rangle$ and remains there uniformly bounded, $|M(x)| \leqq C$.

We obtain in particular the following

Lemma 1. *If, for a positive* A *and a certain* q, $\dfrac{f(x)}{x}$ *belongs to the class* U_q *in* (A, ∞), *then for any* x_0, $\dfrac{f(x_0+x)}{x}$ *belongs to the class* U_q *in* (A_1, ∞) *with any* $A_1 \geqq \mathrm{Max}(|A| - x_0, 0)$.

24. This follows from the identity

$$\int_{A_1}^{\infty} \frac{f(x_0+x)}{x}\cos(ux+\gamma)\,dx = \int_{A_1+x_0}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\cos(u(x-x_0)+\gamma)\,dx$$

$$= \cos ux_0 \int_{A_1+x_0}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\cos(ux+\gamma)\,dx +$$

$$+ \sin ux_0 \int_{A_1+x_0}^{\infty} \frac{f(x)}{x-x_0}\cos\left(ux+\gamma-\frac{\pi}{2}\right)dx,$$

if we take A_1 such that

$$A_1 + x_0 > |A|, \quad A_1 + x_0 > x_0$$

and apply to the two last right hand integrals the Theorem II, replacing $M(x, z)$ of this Theorem by $\frac{1}{x - x_0}$.

A corresponding Lemma holds obviously for convenient neighborhoods of $-\infty$.

25. We will need in what follows the

Lemma 2. *Assume that $f(x)$ is HL-integrable over $(-\infty, \infty)$. Let $\gamma(\alpha, x)$ be a continuous function of the point (α, x) for*

$$\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2, \quad -\infty < x < \infty .$$

Then, if the integral

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \gamma(\alpha, x)\, dx$$

exists uniformly for $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$, it is a continuous function of α in this interval.

26. *Proof.* We prove the Lemma first under the assumption that $f(x)$ vanishes outside a finite interval $\langle A, B\rangle$, so that we have in this case

$$\varphi(\alpha) = \int_{A}^{B} f(x)\, \gamma(\alpha, x)\, dx .$$

Denoting by ω the Harnack set of $f(x)$ in $\langle A, B\rangle$ and by Δ a narrow covering of ω, we have by the assumption of the uniform existence

$$\int_{A}^{B} f_{\Delta}(x)\, \gamma(\alpha, x) \Rightarrow \int_{A}^{B} f(x)\, \gamma(\alpha, x)\, dx \quad (|\Delta| \to 0, \alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2),$$

and our assertion follows, if we prove that the lefthand expression is a continuous function of α.

Here, however, $f_{\Delta}(x)$ is Lebesgue integrable and the continuity of our integral follows at once from

$$\int_{A}^{B} f_{\Delta}(x)\, [\gamma(\alpha + h, x) - \gamma(\alpha, x)]\, dx \leqq$$

$$\leqq \int_{A}^{B} |f_{\Delta}(x)|\, dx \operatorname*{Max}_{A \leqq x \leqq B} (|\gamma(\alpha + h, x) - \gamma(\alpha, x)|),$$

where both α and $\alpha + h$ lie between α_1 and α_2, since the last right hand factor tends to 0 with $|h| \to 0$. Our Lemma is now proved for any finite interval $\langle A, B\rangle$.

27. In the general case, by the assumption of the uniform existence, for any $\varepsilon > 0$, we can find A, B such that

$$\left| \int_{B}^{\infty} f(x)\, \gamma(\alpha, x)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{5}, \quad \left| \int_{-\infty}^{A} f(x)\, \gamma(\alpha, x)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{5} \tag{12}$$

for all α from $\langle \alpha_1, \alpha_2\rangle$.

We have then

$$\varphi(\alpha+h)-\varphi(\alpha)=\int_A^B f(x)\,[\gamma(\alpha+h,x)-\gamma(\alpha,x)]\,dx+$$
$$+\int_{-\infty}^{A} f(x)\,\gamma(\alpha+h,x)\,dx+\int_B^{\infty} f(x)\,\gamma(\alpha+h,x)\,dx-$$
$$-\int_{-\infty}^{A} f(x)\,\gamma(\alpha,x)\,dx-\int_B^{\infty} f(x)\,\gamma(\alpha,x)\,dx.$$

But here the modulus of the first right hand integral is certainly $<\frac{\varepsilon}{5}$ for sufficiently small $|h|$, in virtue of the already proved part of our Lemma.

By (12) the modulus of the left hand expression is $\leqq\varepsilon$, and our Lemma is proved.

III. A theorem on inversion of the order of repeated integrations

28. **Theorem III.** *Consider a finite closed interval I' $(u\leqq y\leqq v)$ and an open interval $I(\alpha<x<\beta)$, where α could also be $-\infty$ and β could be ∞. Let $I^*=\langle a,b\rangle$ be the general closed subinterval of I, $\alpha<a<b<\beta$. Consider a function $f(x,y)$ measurable in $R=I\times I'$. Make further the following assumptions:*

(A) *The HL-integrals*

$$\varphi(y)\equiv\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx,\quad \varphi_{I^*}(y)\equiv\int_a^b f(x,y)\,dx$$

exist uniformly for $y\prec I'$, and the Lebesgue integrals $\int_u^v\varphi(y)\,dy$, $\int_u^v\varphi_{I^*}(y)\,dy$ exist.

(B) *Let ω be an h-set on the x-axis for the function $f(x,y)$ and for $x\prec I^*$, $y\prec I'$. Assume that for every finite narrow covering Δ of ω the integral*

$$\psi^{(\Delta)}(x)\equiv\int_u^v f_\Delta(x,y)\,dy$$

exists for all $x\prec I^*-\omega$, that $\psi^{(\Delta)}(x)$ is integrable over $I^*-\omega$ and that

$$\int_{I'}\int_{I^*} f_\Delta\,dx\,dy=\int_{I^*}\int_{I'} f_\Delta\,dy\,dx. \tag{13}$$

Then both double integrals of $f(x,y)$ exist and we have

$$\int_u^v\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx\,dy=\int_\alpha^\beta\int_u^v f(x,y)\,dy\,dx. \tag{14}$$

29. *Proof.* Let $I^*=\langle a,b\rangle$ be as in the assumption (B) a closed finite subinterval of I and ω an h-set corresponding to $f(x,y)$, $x\prec I^*$, $y\prec I'$. Denote by Δ_ν a sequence of finite narrow coverings of ω, so that $|\Delta_\nu|\to 0$, $\Delta_\nu\downarrow\omega$. Then (13) can be applied for each Δ_ν and we have

$$\int_u^v\int_a^b f_{\Delta_\nu}(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\int_u^v f_{\Delta_\nu}(x,y)\,dy\,dx. \tag{15}$$

As $v \to \infty$ the left side integral converges to the integral $\int_u^v \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$. Indeed, we have

$$\int_u^v \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy - \int_u^v \int_a^b f_{\Delta_\nu}(x, y)\, dx\, dy$$
$$= \int_u^v \left[\int_{I^*} f(x, y)\, dx - \int_{I^*} f_{\Delta_\nu}(x, y)\, dx \right] dy .$$

But the bracketed expression here tends to 0 uniformly in $y \prec I'$ by the assumption (A), and the whole difference tends indeed to 0.

30. In order to rewrite the right side integral in (15) conveniently, observe that the integral

$$\psi(x) = \int_u^v f(x, y)\, dy$$

exists for all $x \prec I^* - \omega$, in virtue of the assumption (B), since every point of I^* outside ω lies outside of one of the Δ_ν. We have then

$$\psi^{(\Delta_\nu)}(x) = \psi_{\Delta_\nu}(x)$$

and the right side expression in (15) can be written as

$$\int_a^b \psi_{\Delta_\nu}(x)\, dx$$

and the Harnack set of $\psi(x)$ is contained in ω.

31. This has however in virtue of (15) with $v \to \infty$ the limit $\int_u^v \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$, and this signifies by the definition of the HL-integral that the integral

$$\int_a^b \psi(x)\, dx = \int_a^b \int_u^v f(x, y)\, dy\, dx$$

exists and that we have

$$\int_u^v \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_u^v f(x, y)\, dy\, dx . \tag{16}$$

For $a \downarrow \alpha$, $b \uparrow \beta$ the left side integral in (16) tends by the assumption (A) to the left-side integral in (13). Therefore the limit of the right side integral as $a \downarrow \alpha$, $b \uparrow \beta$ exists too as the HL-integral over I and we obtain the formula (13). The Theorem III is proved.

32. Applying the Theorem III, the verification of the property (B) (as expressed by (13)) may present major difficulties. In the most important case this verification is immediate using the Fubini-Hobson Theorem, stating that for a function $f(x, y)$ measurable in the rectangle

$$R = (\alpha < x < \beta, u < y < v)$$

we have

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_\alpha^\beta \left(\int_u^v f(x, y)\, dy \right) dx = \int_u^v \left(\int_\alpha^\beta f(x, y)\, dx \right) dy ,$$

provided one of the integrals

$$\iint_R |f(x,y)|\,dx\,dy,\quad \int_\alpha^\beta\left(\int_\mu^\nu |f(x,y)|\,dy\right)dx,\quad \int_u^\nu\left(\int_\alpha^\beta |f(x,y)|\,dx\right)dy$$

exists. The assumption (B) of the Theorem III is therefore certainly satisfied if, using I^*, ω and Δ as defined in this Theorem, one of the integrals

$$\int_{I^*-\Delta}\left(\int_u^\nu |f(x,y)|\,dy\right)dx,\quad \int_u^\nu\left(\int_{I^*-\Delta} |f(x,y)|\,dx\right)dy \tag{17}$$

exists.

33. Consider for instance a function $f(x)$ for which the HL-integral $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ exists and a function $s(x,y)$ continuous in $I\times I'$ and uniformly bounded in this set. Then for the product

$$f(x,y)=f(x)\,s(x,y)$$

the assumption (A) is reduced in this example to the assumption, that the HL-integrals

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,s(x,y)\,dx,\qquad \int_a^b f(x)\,s(x,y)\,dx$$

exist uniformly for $y\prec I'$, as they are then continuous functions in I'. On the other hand the first of the integrals (17) becomes here

$$\int_{I^*-\Delta} |f(x)|\left(\int_u^\nu |s(x,y)|\,dy\right)dx$$

and certainly exists for every I^* and every $\Delta\succ H_f$, as specified above.

Applying this to the theory of Fourier integral we have to take $s(x,y)=\cos xy$.

IV. Fourier single integral Theorem

34. Under *Fourier single integral formula* usually is understood the formula

$$f(x)=\lim_{u\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{\sin u(t-x)}{t-x}. \tag{18}$$

However, even in the simplest application of this formula the limit, $f(x)$, often has to be replaced by the arithmetical mean of the values of the limits of $f(t)$ in x from the right and from the left, or even by some other expressions, which are derived in the theory of Fourier series. In order to separate the difficulties essentiel to the theory of Fourier integrals from those concerning the Fourier series, we introduce the concepts of *Dirichlet points* and *Dirichlet values.*

35. Consider a function $f(x)$ defined in the neighborhood of x_0 and HL-integrable in this neighborhood. Suppose that there exist two positive

numbers a, b such that the integral (HL) $\int_{-a}^{b} f(x_0+t)\,dt$ exists. Then for every real u the "Dirichlet integral"

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{b} f(x_0+t)\frac{\sin ut}{t}\,dt \tag{19}$$

exists as an HL-integral too, since $\frac{\sin ut}{t}$ is sectionwise monotone.

If now the expression (19) with $u\to\infty$ has a limit we say that x_0 is a *Dirichlet point* of $f(x)$ and denote the limit of (19) by the symbol $D_f(x_0)$ – it will be called the *Dirichlet value of* $f(x)$ *in* x_0 – provided the above limit does not depend of the choice of a, b as soon as they are taken sufficiently small. We have then

$$D_f(x_0)=\lim_{u\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{b} f(x_0+t)\frac{\sin ut}{t}\,dt. \tag{20}$$

In the most important cases we have $D_f(x_0)=\frac{1}{2}\{f(x_0+0)+f(x_0-0)\}$.

36. Using this notation the Fourier single integral formula can be written

$$D_f(x_0)=\lim_{u\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0+t)\frac{\sin ut}{t}\,dt. \tag{21}$$

We have now to discuss convenient conditions under which this formula holds.

We begin by proving a generalized version of the so-called *fundamental Lemma* (or also *Riemann-Lebesgue-Lemma*) of the theory of Fourier series.

37. **Theorem IV.** *Assume that* $f(x)$ *is HL-integrable in the finite interval* $\langle\alpha,\beta\rangle$ *and belongs there to a class* U_q.

Then we have, uniformly in a, b, $\alpha\leqq a\leqq b\leqq\beta$:

$$\int_{a}^{b} f(x)\sin ux\,dx\Rightarrow 0\quad(u\to\infty,\ \alpha\leqq a\leqq b\leqq\beta). \tag{22}$$

38. *Proof.* Denoting by ω the Harnack set of $f(x)$ for $\langle\alpha,\beta\rangle$ and by Δ a narrow covering of ω, we have by assumption

$$\int_{a}^{b} f_{\Delta}(x)\sin ux\,dx\Rightarrow\int_{a}^{b} f(x)\sin ux\,dx\quad(u\geqq q,\ |\Delta|\to 0,\ \alpha\leqq a\leqq b\leqq\beta).$$

The uniformity in a and b follows at once from Theorem II.

It is therefore sufficient to prove that the left side expression in this formula, which is a *Lebesgue* integral, tends to 0 uniformly in a and b, and for that it is sufficient to prove (22) under the assumption that $f(x)$ is Lebesgue integrable over the interval $\langle\alpha,\beta\rangle$.

39. To prove our Theorem for any Lebesgue integrable function $f(x)$, it is sufficient to prove it for a portionwise constant function $L(x)$.

Indeed, for any given $\varepsilon > 0$ a portionwise constant function over $\langle \alpha, \beta \rangle$, $L(x)$, can be found so that

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - L(x)|\, dx \leqq \varepsilon .$$

But then we have

$$\left| \int_a^b f(x) \sin ux\, dx \right| \leqq \left| \int_a^b (f(x) - L(x)) \sin ux\, dx \right| + \left| \int_a^b L(x) \sin ux\, dx \right| .$$

If we already know that the last right hand term tends to 0 as $u \to \infty$, it follows

$$\overline{\lim_{u \to \infty}} \left| \int_a^b f(x) \sin ux\, dx \right| \leqq \varepsilon$$

and therefore, since $\varepsilon > 0$ is arbitrary, the assertion.

40. On the other hand, every portionwise constant function on $\langle \alpha, \beta \rangle$ is a linear combination of functions, which have over a certain subinterval of $\langle \alpha, \beta \rangle$ the value 1 and everywhere else the value 0. We can therefore assume that $f(x) = 1$ on $\langle A, B \rangle$ and $= 0$ everywhere else.

Further since now our integral (22) can be written as $\int_A^b - \int_A^a$, it is sufficient to prove our assertion for $a = A$, $b > A$. But then, putting $\gamma = \mathrm{Min}(B, b)$, we have

$$\int_A^b f(x) \sin ux\, dx = \int_A^{\gamma} \sin ux\, dx = \frac{1}{u} \cos ux \Big|_{\gamma}^{A},$$

and the modulus of the right hand expression is $\leqq \frac{2}{|u|}$ and tends to 0 with $u \to \infty$. The Theorem IV is proved.

41. We can now formulate and prove the following theorem concerning the Fourier single integral formula.

Theorem V. *Assume that $f(x)$ is HL-integrable over any finite interval and that $\frac{f(x)}{x}$ belongs to a class U_q for some q in some neighborhoods of ∞ and $-\infty$. Then we have in every Dirichlet point x_0 of $f(x)$ the formula* (21).

42. *Proof.* By the Lemma 1 for any x_0, $\frac{f(x_0 + t)}{t}$ belongs to the class U_q in some intervals (A, ∞) and $(-\infty, -A)$, $A > 0$. On the other hand by the Theorem II $\frac{f(x_0 + t)}{t}$ certainly belongs for any fixed positive a to the class U_q in the intervals $\langle a, A \rangle$, $\langle -A, -a \rangle$ and therefore also in the intervals (a, ∞), $(-\infty, -a)$.

On the other hand we have

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0+t)\frac{\sin ut}{t}\,dt - D_f(x_0)\right| \leqq$$

$$\leqq \left|\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{b} f(x_0+t)\frac{\sin ut}{t}\,dt - D_f(x_0)\right| + \tag{23}$$

$$+\left|\frac{1}{\pi}\int_{b}^{\infty} f(x_0+t)\frac{\sin ut}{t}\,dt\right| + \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-a} f(x_0+t)\frac{\sin ut}{t}\,dt\right|.$$

43. For any given $\varepsilon>0$ we can by our hypotheses chose a and b so great that the sum of the two last terms in (23) stays, uniformly in $u\geqq q$, under ε. Hence, as $u\to\infty$ the left hand expression in (23) has its limit superior $\leqq\varepsilon$ and since $\varepsilon>0$ is arbitrary, (21) is proved.

44. The validity of the formula (21) is usually proved in the general presentations of the Fourier integral theory, using one of the following conditions for a function $f(x)$, L *integrable* over every finite interval:

1) $$\int_{0}^{\infty}\left|\frac{f(x)}{x}\right|dx<\infty\,,\quad \int_{-\infty}^{0}\left|\frac{f(x)}{x}\right|dx<\infty\,;$$

2) $$\frac{f(x)}{x}=g(x)\cos(px+q)$$

for constant p and q, where $g(x)$ tends monotonically to 0 with $x\to\pm\infty$.

Any of the above conditions corresponding to ∞ can be combined with either of the two conditions corresponding to $-\infty$.

45. The condition 1) is due to [4] HOBSON (1909), pp. 353–4 and PRINGSHEIM (1910) p. 384.

As to the condition 2) it is apparently due in its complete form to S. BOCHNER (1932) p. 28. Although Bochner quotes Pringsheim's papers (1910), this paper does not contain the complete condition 2), but only a part of it, made erroneous by the ommission of the assumption $\lim_{|x|\to\infty} f(x)=0$. Namely, PRINGSHEIM (1910) gives on p. 384 as $(B_{\infty}^{(2)})$ the condition that our $g(x)$ is for sufficiently large x monotone and finite or a difference of two such functions. This condition, which was also taken over by [5] HOBSON (1926), Vol. 2, p. 725, is obviously not sufficient since it is also satisfied for $g(x)\equiv 1$, $f(x)\equiv x$, and in this case the integral in (21) does not exist at all.

On the other hand the trigonometric factor as $\cos(px+q)$ does not occur in Pringsheim's paper in the conditions for (21) at all.

46. The conditions 1) are obviously contained in the conditions of the Theorem V.

The condition 2) is also contained in that of the Theorem V.

Indeed, suppose that the condition 2) at $+\infty$ is satisfied. From the identity

$$g(x)\cos(px+q)\cos(ux+\gamma) = \frac{1}{2}g(x)\left[\cos((u+p)x+\gamma+q)+\cos((u-p)x+\gamma-q)\right]$$

it follows, that $\frac{f(x)}{x}$ belongs for a $q>p$ to U_q in a neighborhood of ∞, whenever $g(x)$ belongs to this class in a convenient neighborhood of ∞. On the other hand, the uniform existence of the integral

$$\int^{\infty} g(x)\cos(ux+\gamma)\,dx$$

in a neighborhood of ∞ for $u \geqq q > 0$ follows by the Theorem II°, if we identify in this Theorem $f(x, y)$ with $\cos(ux+\gamma)$ and $M(x, z)$ with $g(x)$.

V. Fourier's double integral Theorem

47. The right hand integral in (21) can be written at once in the form

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0+t)\int_0^u \cos\alpha t\,d\alpha\,dt \tag{24}$$

and the essentiell difficulty in the derivation of Fourier's double integral Theorem lies in the proof that in (24) the order of integrations can be inverted, that is, denoting $f(x_0+t)$ by $g(t)$, that we have

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^u g(t)\cos\alpha t\,d\alpha\,dt = \int_0^u\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\cos\alpha t\,dt\,d\alpha\,. \tag{25}$$

48. If we want to apply the Theorem III to the proof of (25), we have to put $x=t$, $y=\alpha$, $\alpha=-\infty$, $\beta=\infty$, $u=0$, $v=u$; to the function $\varphi(y)$ in the Theorem III corresponds here

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\cos\alpha t\,dt\,.$$

From the Lemma 2 and the observation at the end of sec. 19 follows that if $g(t)$ is assumed to belong to the class U_0 in $(-\infty, \infty)$ the condition (A) of Theorem III is satisfied.

49. As to the condition (B), we can take as the h-set the intersection ω of the Harnack set of $g(t)$ with the interval $\langle a, b\rangle$. If then Δ is a narrow covering of ω, we have for $\psi^{(\Delta)}(t)$

$$\psi^{(\Delta)}(t) = \int_0^u g_\Delta(t)\cos\alpha t\,d\alpha = g_\Delta(t)\frac{\sin\alpha t}{t}\,.$$

Then the integral

$$\int_{I^*} g_\Delta(t)\frac{\sin\alpha t}{t}\,dt = \int_{I^*-\Delta} g(t)\frac{\sin\alpha t}{t}\,dt$$

is a Lebesgue integral and the condition (13) becomes here

$$\int_0^u \int_a^b g_\Delta(t) \frac{\sin\alpha t}{t}\, dt\, d\alpha = \int_a^b \int_0^u g_\Delta(t) \frac{\sin\alpha t}{t}\, d\alpha\, dt$$

and is obviously satisfied as the integrand is majorized by $|\alpha|\,|g_\Delta(t)|$.

50. Therefore (25) is indeed true and we can rewrite (24) as

$$\int_0^u \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0+t)\cos\alpha t\, dt \right) d\alpha .$$

Since this has a limit for $u \to \infty$, this limit can be written as

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x_0+t)\cos\alpha t\, dt\, d\alpha$$

and we obtain from (21)

$$D_f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^\infty f(x_0+t)\cos\alpha t\, dt\, d\alpha ,$$

the Fourier double integral formula. Replacing here x_0 by x and introducing $x+t$ instead of t as a new variable of integration, we obtain the usual form of the Fourier double integral formula

$$D_f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t)\cos\alpha(t-x)\, dt\, d\alpha . \tag{26}$$

51. We have

Theorem VI. *If $f(x)$ satisfies the condition U_0 in $(-\infty, \infty)$, the Fourier double integral formula* (26) *holds in any Dirichlet point x of $f(x)$.*

However, in many important cases the assumption of Theorem VI is not satisfied, but $f(x)$ belongs to the class U_q *for any positive q.* In this case we can still obtain the formula (26) introducing a supplementary assumption concerning the behaviour of $\dfrac{f(t)}{t}$ at infinity.

Observe that if we assume that $f(x) \prec U_q$ for *any positive q*, the argument leading to (25) cannot be used for the whole α-interval $\langle 0, u\rangle$, but for any interval $\langle p, u\rangle$ with $u > p > 0$. Then this argument leads to the formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_p^u f(x_0+t)\cos\alpha t\, d\alpha\, dt = \int_p^u \int_{-\infty}^\infty f(x_0+t)\cos\alpha t\, dt\, d\alpha, \tag{27}$$

and we have to see how we can replace here p by 0. We will use now the following assumption:

(Q) $f(x)$ is HL-integrable in any finite interval and belongs in the interval $(-\infty, \infty)$ for each $q > 0$ to the class U_q. Further, there exist positive A and c, so that both integrals

$$\int_A^\infty \frac{f(t)}{t}\sin\alpha t\, dt, \quad \int_{-\infty}^{-A} \frac{f(t)}{t}\sin\alpha t\, dt \tag{28}$$

exist uniformly for $0 \leqq \alpha \leqq c$.

We are going to prove

52. **Theorem VII.** *If* $f(x)$ *satisfies the condition* (Q), *then the Fourier double integral formula* (26) *holds in any Dirichlet point* x *of* $f(x)$.

Before entering into the proof of Theorem VII, we prove first two lemmata.

Lemma 3. *Under the condition* (Q) *the integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin\eta t}{t}\,dt \quad (0<\eta<\mathrm{Min}(1,c)) \tag{29}$$

exists and tends to 0 *as* $\eta \downarrow 0$.

53. *Proof* of the Lemma 3. Observe first that $\frac{\sin\eta t}{t}$ has for a fixed η in any finite interval only a finite number of extrema.

The portions of the integral (29) over (A, ∞) and $(-\infty, -A)$ exist by the assumption (Q), while the interval $\langle -A, A\rangle$ can be decomposed into a finite number of intervals, in which $\frac{\sin\eta t}{t}$ is monotone. We see that (29) certainly exists.

54. We chose an $\varepsilon>0$ and decompose now the integral in (29) as follows:

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^{-A} + \int_{A}^{\infty} + \int_{0}^{A} + \int_{-A}^{0} \tag{30}$$

We can choose A so large, that the moduli of the first and of the second right hand integrals are $\leqq \frac{\varepsilon}{4}$. In the third right hand integral we choose $\eta < \frac{\pi}{2A}$, so that $\frac{\sin\eta t}{t}$ remains monotone in $(0, A)$. We can therefore apply the second mean value theorem to the product $f(t)\frac{\sin\eta t}{t}$:

$$\int_{0}^{A} f(t)\frac{\sin\eta t}{t}\,dt = \eta\int_{0}^{\xi} f(t)\,dt + \frac{\sin\eta A}{A}\int_{\xi}^{A} f(t)\,dt, \quad \xi \prec \langle 0, A\rangle ; \tag{31}$$

since $\int_{0}^{x} f(t)\,dt$ is continuous for $0\leqq x\leqq A$, its modulus remains under a positive constant $C = C(A)$. Therefore we obtain from (31)

$$\left|\int_{0}^{A} f(t)\frac{\sin\eta t}{t}\,dt\right| \leqq C\eta\left[1+2\frac{\sin\eta A}{\eta A}\right] < 3C\eta,$$

and choosing $\eta < \frac{\varepsilon}{12C}$, we make the modulus of the third right-hand integral in (30) $< \frac{\varepsilon}{4}$.

In exactly the same way we see that the modulus of the fourth right-hand integral in (30) becomes $< \frac{\varepsilon}{4}$ and the modulus of the integral in (29) $< \varepsilon$. The Lemma 3 is proved.

Lemma 4. *Assume that $f(x)$ satisfies the condition* (Q) *concerning the integrals* (28). *Then for any x_0, putting $A_1 = A + > |x_0|$, the integrals*

$$\int_{A_1}^{\infty} \frac{f(t)}{t - x_0} \sin \alpha t \, dt, \qquad \int_{-\infty}^{-A_1} \frac{f(t)}{t - x_0} \sin \alpha t \, dt \tag{32}$$

exist uniformly for $0 \leqq \alpha \leqq c$.

The Lemma follows for the first integral (32) from the decomposition

$$\int_{A_1}^{\infty} \frac{f(t)}{t - x_0} \sin \alpha t \, dt = \int_{A_1}^{\infty} \frac{f(t)}{t} \sin \alpha t \frac{1}{1 - \frac{x_0}{t}} dt$$

if we apply the Theorem II replacing there $M(x, z)$ by $\frac{1}{1 - \frac{x_0}{t}}$ and observe that this expression remains bounded and goes with $t \to \infty$ monotonically to 1.

The proof for the second integral (32) is completely symmetric.

55. Returning now to the formula (27) observe that the inner integral on the left side can be integrated and the left-hand expression becomes

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x_0 + t) \frac{\sin ut}{u} - f(x_0 + t) \frac{\sin pt}{p} \right] dt,$$

and by Lemma 3 and Lemma 4 the subtrahend under the sign of integral is integrable for sufficiently small p, and the same is true for the minuend, so that

$$\int_{p}^{u} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0 + t) \cos \alpha t \, dt \, d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0 + t) \frac{\sin ut}{u} dt - \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0 + t) \frac{\sin pt}{p} dt;$$

but here for $p \downarrow 0$ the subtrahend tends to zero and we see that the outer integral can be taken from 0 to u. We obtain

$$\int_{0}^{u} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0 + t) \cos \alpha t \, dt \, d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0 + t) \frac{\sin ut}{u} dt,$$

and now (26) follows exactly as in the proof of Theorem VI. Theorem VII is proved.

56. The Fourier double integral formula is usually proved in the general presentations of the Fourier integral theory using some special conditions for a function $f(x), L$ integrable over every finite interval. These conditions can be reduced to the following two:

1) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty\,, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$

2) $f(x)$ tends monotonically to 0 with $x \to \infty$ and $x \to -\infty$.

Here any of the above conditions corresponding to $+\infty$ can be combined to any conditions corresponding to $-\infty$.

These conditions are due to PRINGSHEIM (1910), p. 406 [3].

Both results follow from our Theorem VII. If Pringsheim's condition 1) is valid, then even the condition of our Theorem VI is satisfied. If Pringsheim's condition 2) is valid, then the integral

$$\int_A^B f(t)\cos(ut+\gamma)\,dt \quad (u \geqq q > 0)$$

is by the second mean value Theorem equal to

$$f(A)\int_A^{\xi} \cos(ut+\gamma)\,dt, \quad \xi > A.$$

Therefore its absolut value is $\leqq \frac{2f(A)}{u} \leqq \frac{2f(A)}{q}$, so that $f(t)$ belongs indeed to U_q for any $q > 0$.

On the other hand we have for $0 < A < B$ by the second mean value theorem

$$\int_A^B \frac{f(t)}{t}\sin\alpha t\,dt = f(A)\int_A^{\xi} \frac{\sin\alpha t}{t}\,dt\,,$$

$$\left|\int_A^B \frac{f(t)}{t}\sin\alpha t\,dt\right| \leqq \pi|f(A)|\,,$$

since we have generally

$$\left|\int_A^B \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx\right| \leqq \pi \quad (0 < A \leqq B < \infty, \alpha \geqq 0)\,.$$

Therefore the second part of the condition (Q) of the Theorem VII is also satisfied, and the Theorem VII is applicable.

[3] As a matter of fact the reader of PRINGSHEIM's paper is easily led to assume that PRINGSHEIM announces still another sufficient condition for the validity of FOURIER's double integral formula, the condition denoted by PRINGSHEIM as (b_∞). However the condition (b_∞) is *only proved to be sufficient for the Fourier's formula if the inner integral in* (26) *is interpreted as a principal value.* The mistaken impression is provoked by the fact that PRINGSHEIM used in his statement two subordinate propositions in a false order.

Bibliography

[1] BOCHNER, S.: Vorlesungen über Fouriersche Integrale. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft 1932.

[2] HAHN, O.: Über eine Verallgemeinerung der Fourierschen Integralformel. Acta Math. **49**, 301—353 (1926).

[3] HARNACK, A.: Die allgemeinen Sätze über den Zusammenhang der Funktionen einer reellen Variablen mit ihren Ableitungen. Math. Ann. **24**, 217—252 (1884).

[4] HOBSON, E. W.: SIR WILLIAM ROWAN HAMILTON's fluctuating functions. J. London Math. Soc. **VII**, 338—358 (1909).

[5] — The theory of a function of a real variable and the theory of Fourier's series, I. 3, ed. (1927); II 2, ed. (1926).

[6] MOORE, E. H.: Concerning HARNACK's theory of improper definite integrals. Trans. Am. Math. Soc. **I**, 296—330 (1926).

[7] PRINGSHEIM, A.: Über neue Gültigkeitsgrenzen für die Fouriersche Integralformel. Math. Ann. **68**, 367—408 (1910).

[8] STOLZ, O.: Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, **III**, p. 277. Leipzig: B. G. Teubner 1899.

[9] TONELLI, L.: Serie trigonometriche. Bologna: Nicola Zanichelli 1928.

Prof. Dr. A. M. OSTROWSKI
Certenago/Montagnola, Tessin, Schweiz

(Received September 22, 1965)

GÜNTHER, P.
Math. Annalen 165, 281—296 (1966)

Sphärische Mittelwerte in kompakten harmonischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Herrn Prof. Dr. E. HÖLDER zum 65. Geburtstag hochachtungsvoll gewidmet

PAUL GÜNTHER

Einleitung

In einer n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit V mit positiv definiter Metrik bezeichne $K_{t,x}$ das Innere einer geodätischen Kugel vom (zunächst genügend kleinen) Radius t mit dem Mittelpunkt $x \in V$ und dem Volumen $k_t(x)$; $S_{t,x}$ sei die Oberfläche von $K_{t,x}$ mit dem Inhalt $m_t(x)$. Schließlich sei dv das Volumenelement von V und do das Oberflächenelement von $S_{t,x}$. Ist φ eine stetige Funktion, so sind

$$K_t[\varphi](x) = k_t(x)^{-1} \int\limits_{K_{t,x}} \varphi \, dv, \quad M_t[\varphi](x) = m_t(x)^{-1} \int\limits_{S_{t,x}} \varphi \, do$$

der sphärische Mittelwert von φ über $K_{t,x}$ bzw. $S_{t,x}$. Die vorliegende Note befaßt sich mit diesen Mittelwerten in kompakten Mannigfaltigkeiten V.

In § 1 wird gezeigt, wie man die sphärischen Mittelwerte in einer vollständigen Mannigfaltigkeit V für beliebiges t definieren kann. Ist V kompakt, so sind $k_t K_t[\varphi]$ und $m_t M_t[\varphi]$ bei festem t lineare, beschränkte und symmetrische Operatoren in $L_2(V)$, dem Raum aller über V quadratisch summierbaren Funktionen. $K_t[\varphi]$ bzw. $M_t[\varphi]$ sind genau dann symmetrisch, wenn $k_t(x)$ bzw. $m_t(x)$ nicht von x abhängen.

In § 2 wird vorausgesetzt, daß V kompakt und harmonisch[1] ist. Ist die universelle Überlagerung $\tilde{V}$ von V auch kompakt, so ist $M_t[\varphi]$ in t periodisch, $K_t[\varphi]$ ist dagegen nur für gerade Dimensionszahl periodisch. Ist $\mathfrak{H}$ das orthogonale Komplement der Funktion 1 in $L_2(V)$, so ist $\|M_t\|_{\mathfrak{H}} < 1$ (mit Ausnahme gewisser t-Werte). Ferner gibt es auf der Zahlengeraden eine abzählbare, dichte Menge von t-Werten, für welche die Gleichung $M_t[\varphi] = 0$ nicht-

[1] Über harmonische Räume siehe RUSE, WALKER, WILLMORE [12]; bezüglich der Mittelwertsätze insbesondere Kap. 2, 4. — Bezüglich der Tatsache, daß $M_t[\varphi]$ einer Differentialgleichung vom Darbouxschen Typ genügt und mit Δ_2 vertauschbar ist, siehe OLEVSKY [10], WEINSTEIN [13] für ein V konstanter Krümmung, GÜNTHER [4] für ein harmonisches V. — Bei WEINSTEIN findet sich auch die Verallgemeinerung des Rieszschen Satzes über den sphärischen Mittelwert subharmonischer Funktionen. — Unter den harmonischen Räumen befinden sich insbesondere die symmetrischen Räume vom Rang 1, siehe hierzu HELGASON [5], insbesondere Kap. 10. — Meines Wissens ist es eine noch offene Frage, ob es noch weitere harmonische Räume positiv definiter Metrik gibt.

triviale Lösungen φ besitzt. Über die Auflösung von $M_t[\varphi]=\psi$ bei festem t und gegebenem ψ werden zwei Bemerkungen gemacht, die sich auf den Fall $V=S^3$ beziehen[2]. Die Beweise für diese Resultate beruhen auf der Tatsache, daß in einer harmonischen Riemannschen Mannigfaltigkeit für die Lösungen φ von $\triangle_2\varphi+\lambda\varphi=0$ gilt[3]:

$$v(t)\,\varphi(x)=M_t[\varphi](x),$$

wobei die $v(t)$ einer gewöhnlichen Differentialgleichung genügen. Aus den Eigenschaften von $v(t)$ kann man auf die von $M_t[\varphi]$ schließen.

In § 3 wird gezeigt, daß für eine kompakte Mannigfaltigkeit konstanter negativer Krümmung gilt:

$$\lim_{t\to\infty} M_t[\varphi]=\frac{1}{|V|}\int_V \varphi\,dv.$$

Daraus kann man z. B. leicht entnehmen, daß es stets geodätische Linien vorgegebener (genügend großer) Länge t gibt, die in einem beliebigen Punkt $x\in V$ beginnen und in einem gegebenen Gebiet $U\subset V$ enden, ohne dabei von den Sätzen über das ergodische Verhalten der geodätischen Linien Gebrauch machen zu müssen. — Den Schluß bildet eine Anwendung unserer Betrachtungen auf das Anfangswertproblem bei der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\triangle_2 u+Cu=0$$

für eine gesuchte Funktion $u(t,x)$, wobei $x\in V$ und $t\geqq 0$ und

$$u(0,x)=\varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=\psi(x)$$

gilt. Ist dabei V kompakt, $\mathrm{Dim}\,V=3$, so gilt das Huygenssche Prinzip im engeren Sinne genau dann, wenn V konstante Krümmung K besitzt und $C=K$ ist[4]. Eine kleine Anfangsstörung breitet sich dann zunächst ringförmig über V aus, jedoch verhält sich die Trägermenge der Lösung für große t in den Fällen $K>0$ und $K\leqq 0$ ganz verschieden.

§ 1

Es sei V eine n-dimensionale, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der Klasse C^∞. Ist $x\in V$, so sei T_x der Tangentialraum von x; dieser ist ein euklidischer Raum, τ_x sei das zugehörige Volumenelement (eine n-Form

[2] Für den euklidischen Fall siehe hierzu JOHN [7], insbesondere Kap. VI. — $S_{t,x}$ kann mit der Antipodenmannigfaltigkeit von x zusammenfallen; für diesen Fall bei symmetrischem V ist das Problem von HELGASON [6] gelöst worden.

[3] Siehe RUSE, WALKER, WILLMORE [12], FRIEDMAN [2].

[4] Siehe GÜNTHER [4]. — Das Anfangswertproblem für ein V konstanter Krümmung, $\mathrm{Dim}\,V=3$, und $C=0$ wurde schon von E. HÖLDER explizit behandelt: Poissonsche Wellenformel in nichteuklidischen Räumen, Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig **90**, 55—66 (1938). Dabei wird für das auftretende Diffusionsglied u. a. auch ein asymptotischer Ausdruck für $t\to\infty$ angegeben; ferner findet sich dort ein Hinweis auf die fastperiodischen Eigenschaften der Lösung.

ungerader Art[5]). Ferner sei $q_x(\mathfrak{a}) = \mathrm{Exp}_x(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a} \in T_x$ die Exponentialabbildung von T_x, wegen der Vollständigkeit von V bildet q_x den ganzen Raum T_x differenzierbar auf V ab; im übrigen ist q_x eine orientierbare Abbildung. Bezeichnet ω das Volumenelement von V, so ist $\tau'_x = q_x^*(\omega)$ ein weiteres Volumenelement in T_x, es gibt dann eine Funktion $U_x(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a} \in T_x$ der Klasse C^∞, so daß $\tau'_x = U_x \tau_x$. Die Orientierung von q_x sei dabei so gewählt, daß $U_x(0) = 1$ wird. Ist $r = |\mathfrak{a}|$ für $\mathfrak{a} \in T_x$, so kann man noch schreiben: $\tau_x = dr \wedge \sigma_x$, $\tau'_x = dr \wedge \sigma'_x$. Schließlich sei $\Xi_{t,x} = \{\mathfrak{a} \in T_x,\ |\mathfrak{a}| < t\}$, $\Sigma_{t,x} = \{\mathfrak{a} \in T_x,\ |\mathfrak{a}| = t\}$. Für eine auf V stetige Funktion $\varphi \in C(V)$ setzen wir nun:

$$\tilde{K}_t[\varphi](x) = \int_{\Xi_{t,x}} \varphi(q_x(\mathfrak{a}))\, \tau'_x,$$

$$\tilde{M}_t[\varphi](x) = \int_{\Sigma_{t,x}} \varphi(q_x(\mathfrak{a}))\, \sigma'_x = \frac{d}{dt} \tilde{K}_t[\varphi](x). \tag{1.1}$$

Für genügend kleine Werte von t stimmen $\tilde{K}_t[\varphi](x)$ bzw. $\tilde{M}_t[\varphi](x)$ mit dem in üblicher Weise gebildeten Integral von φ über die geodätische Vollkugel mit dem Radius t und dem Mittelpunkt x bzw. über deren Oberfläche überein. Ist $k_t(x) = \tilde{K}_t[1](x) \neq 0$ bzw. $m_t(x) = \tilde{M}_t[1](x) \neq 0$, so kann man die normierten sphärischen Mittelwerte bilden:

$$K_t[\varphi](x) = k_t^{-1}(x)\, \tilde{K}_t[\varphi](x), \quad M_t[\varphi](x) = m_t^{-1}(x)\, \tilde{M}_t[\varphi](x). \tag{1.2}$$

Im folgenden sei V kompakt. $L_2(V)$ bezeichne den Hilbertraum aller über V quadratisch summierbaren reellen Funktionen mit der üblichen Definition des Skalarproduktes und der Norm:

$$(\varphi, \psi) = \int_V \varphi \psi \omega, \quad \|\varphi\| = (\varphi, \varphi)^{\frac{1}{2}}.$$

Hilfssatz 1: Für zwei stetige Funktionen φ, ψ gilt bei beliebigem $t > 0$:

$$(\varphi, \tilde{K}_t[\psi]) = (\tilde{K}_t[\varphi], \psi), \quad (\varphi, \tilde{M}_t[\psi]) = (\tilde{M}_t[\varphi], \psi). \tag{1.3}$$

Beweis: Es sei $\mathfrak{B}$ der Faserraum aller kontravarianten Vektoren aus V (kontravariantes Tangentenbündel); ist $\mathfrak{a}$ ein Vektor in $x \in V$, so sei $p(\mathfrak{a}) = x$ die Projektion von $\mathfrak{B}$ auf V. Die Exponentialabbildung $q(\mathfrak{a}) = \mathrm{Exp}\,\mathfrak{a}$ werde ebenfalls als Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf V aufgefaßt. Dann ist $q^*(\omega) \wedge p^*(\omega)$ eine $2n$-Form (gerader Art) auf $\mathfrak{B}$. Die Koordinaten von x in einem lokalen Koordinatensystem seien $x^1, x^2, \ldots, x^n$; für einen kontravarianten Vektor in x werde geschrieben $\mathfrak{a} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Dann sind $(x^1, \ldots, x^n, \xi^1, \ldots, \xi^n)$ lokale Koordinaten von $\mathfrak{B}$ in einer Umgebung von $\mathfrak{a}$. Es sei ε die Orientierung der (orientierbaren) Mannigfaltigkeit $\mathfrak{B}$, die in den genannten Koordinatensystem den Wert 1 hat. Ferner sei $\mathfrak{B}_t = \{\mathfrak{a} \in \mathfrak{B},\ |\mathfrak{a}| \leqq t\}$. Ist f eine auf $\mathfrak{B}$ stetige Funktion, so gilt wegen der lokalen Produktdarstellung von $\mathfrak{B}$:

$$\int_{\mathfrak{B}_t} f \varepsilon q^*(\omega) \wedge p^*(\omega) = \int_V \left(\int_{\Xi_{t,x}} f \tau'_x \right) \omega.$$

[5] Forme d'espèce impaire im Sinne von DE RHAM [11].

Ist $\mathfrak{a} \in \mathfrak{V}$, so sei $\mu(\mathfrak{a}) = -\frac{d}{ds}(\mathrm{Exp}\, s\mathfrak{a})_{s=1}$. Dann ist μ ein involutorischer Diffeomorphismus von $\mathfrak{V}$ auf sich selbst. Ferner gilt $p \circ \mu = q$ und $q \circ \mu = p$. Schließlich sieht man leicht ein, daß $\mu^*(q^*(\omega) \wedge p^*(\omega)) = (-1)^n q^*(\omega) \wedge p^*(\omega)$ sowie $\mu^*(\varepsilon) = (-1)^n \varepsilon$ gilt. Damit folgt dann

$$\int_{\mathfrak{V}_t} f \varepsilon q^*(\omega) \wedge p^*(\omega) = \int_{\mathfrak{V}_t} (f \circ \mu)\, \varepsilon q^*(\omega) \wedge p^*(\omega).$$

Nach diesen Vorbereitungen ergibt sich

$$(\varphi, \tilde{K}_t[\psi]) = \int_V \varphi \left(\int_{\Xi_{t,x}} (\psi \circ q)\, \tau_x' \right) \omega = \int_{\mathfrak{V}_t} (\varphi \circ p)(\psi \circ q)\, \varepsilon q^*(\omega) \wedge p^*(\omega)$$
$$= \int_{\mathfrak{V}_t} (\varphi \circ q)(\psi \circ p)\, \varepsilon q^*(\omega) \wedge p^*(\omega) = (\tilde{K}_t[\varphi], \psi).$$

Damit ist die erste Formel in (1.3) gezeigt. Die zweite ergibt sich daraus durch Differentiation nach t.

Bemerkung: Werden in einer Umgebung von x in V Normalkoordinaten eingeführt und sind g_{ij} die Komponenten des Fundamentaltensors in diesen Koordinaten, so ist

$$U_x(\mathfrak{a}) = g(q_x(\mathfrak{a}))^{\frac{1}{2}} g(x)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{mit} \quad g = \mathrm{Det}(g_{ij}).$$

Hieraus folgt, daß $U_x(\mathfrak{a})$ die im allgemeinen nur lokal definierte sog. Diskriminantenfunktion von V ist (vgl. RUSE, WALKER, WILLMORE [12], p. 17 ff, insbesondere p. 19). $U_x(\mathfrak{a})^{\frac{1}{2}}$ ist dann der Anfangskoeffizient in der Hadamardschen Grundlösung der zu V gehörigen Potentialgleichung. Die Symmetrieeigenschaft der Diskriminantenfunktion drückt sich auf $\mathfrak{V}$ so aus:

$$U(\mu(\mathfrak{a})) = U(\mathfrak{a}).$$

Diese Invarianz ergibt sich so: $\mu_t(\mathfrak{a}) = \frac{d}{ds}(\mathrm{Exp}\, s\mathfrak{a})_{s=t}$ ist eine einparametrige Gruppe von Diffeomorphismen von $\mathfrak{V}$ auf sich selbst, — die geodätische Strömung von V. Es ist $\mu(\mathfrak{a}) = -\mu_1(\mathfrak{a})$. Es gilt dann:

$$\mu^*(\varepsilon U \tau_x \wedge p^*(\omega)) = (\mu^* U)\, \varepsilon \mu_1^*(\tau_x \wedge p^*(\omega)),$$

andererseits nach dem Beweis von Hilfssatz 1:

$$\mu^*(\varepsilon U \tau_x \wedge p^*(\omega)) = \varepsilon U \tau_x \wedge p^*(\omega).$$

Nach dem Liouvilleschen Satz über die Invarianz des Volumenelementes von $\mathfrak{V}$ gilt aber für beliebiges t:

$$\mu_t^*(\tau_x \wedge p^*(\omega)) = \tau_x \wedge p^*(\omega).$$

Daraus folgt sofort die Behauptung.

Hilfssatz 2: Es gibt nur von V und t abhängige Konstanten A und B, so daß für alle stetigen Funktionen φ auf V gilt:

$$\|\tilde{K}_t[\varphi]\| \leqq A\|\varphi\|, \quad \|\tilde{M}_t[\varphi]\| \leqq B\|\varphi\|. \tag{1.4}$$

Beweis: Wir zeigen die Behauptung für $\tilde{M}_t$, für $\tilde{K}_t$ verläuft der Beweis analog. Es sei $\eta = 1$, falls $U \geqq 0$, $\eta = -1$, falls $U < 0$. Dann setzen wir:

$$\tilde{M}_t^+ [\varphi](x) = \tilde{M}_t [\eta\varphi](x).$$

Für $\varphi \geqq 0$ ist dann auch stets $\tilde{M}_t^+ [\varphi] \geqq 0$. Nach der Schwarzschen Ungleichung erhält man damit:

$$\tilde{M}_t [\varphi](x)^2 \leqq \tilde{M}_t^+ [1](x)\, \tilde{M}_t^+ [\varphi^2](x).$$

Wegen der obigen Bemerkung über die Invarianz von U bei der Abbildung μ gilt die Symmetrieformel (1.3) auch für $\tilde{M}_t^+$ anstelle von $\tilde{M}_t$. Dann folgt aber:

$$\|\tilde{M}_t [\varphi]\|^2 \leqq (\tilde{M}_t^+ [1], \tilde{M}_t^+ [\varphi^2]) = (\tilde{M}_t^{+(2)} [1], \varphi^2) \leqq B^2 \|\varphi\|^2,$$

falls B^2 eine obere Schranke für $\tilde{M}_t^{+(2)} [1]$ ist, die wegen der Kompaktheit von V sicher existiert. q.e.d.

$\tilde{K}_t$ und $\tilde{M}_t$ sind also lineare, beschränkte und symmetrische Operatoren in $L_2(V)$, die auf einer dichten Teilmenge definiert sind und deshalb in eindeutiger Weise auf ganz $L_2(V)$ fortgesetzt werden können. Diese Fortsetzungen werden mit den gleichen Symbolen bezeichnet. Wir haben so:

Satz 1: *In einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit sind die (nichtnormierten) Mittelwertoperatoren $\tilde{K}_t$ und $\tilde{M}_t$ für ganz $L_2(V)$ definiert, linear, beschränkt und symmetrisch.*

Für die kompakte Mannigfaltigkeit V gibt es eine positive Zahl L, so daß für jedes $x \in V$ und alle $\mathfrak{a} \in \Xi_{L,x}$ die Exponentialabbildung $q_x(\mathfrak{a})$ regulär ist. (Hat V eine Krümmung $\leqq 0$, so kann man $L = \infty$ wählen.) Für diese $\mathfrak{a}$ gilt dann auch $U_x(\mathfrak{a}) > 0$, schließlich ist $m_t(x) > 0$ für $0 < t < L$.

Hilfssatz 3: Für eine stetige Funktion $\varphi \in C(V)$, ein t mit $0 < t < L$, und für alle $x \in V$ sei:

$$\varphi(x) \leqq M_t [\varphi](x).$$

Dann ist $\varphi = \text{const}$.

Beweis: Es sei x_1 ein Punkt, in dem φ sein Maximum ϱ annimmt. Dann gilt:

$$M_t [\varphi - \varrho](x_1) \geqq 0,$$

während der Integrand $\varphi - \varrho \leqq 0$ ist; wegen $U_x(\mathfrak{a}) > 0$ folgt dann $\varphi(x) = \varrho$ für $x \in S_{t,x_1} = q_{x_1}(\Sigma_{t,x_1})$. Ist y ein beliebiger Punkt von V, so gibt es einen Weg auf V, der x_1 mit y verbindet und aus endlich vielen geodätischen Bögen der Länge t besteht. Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Endpunkte dieser Bögen, so ist $x_{i+1} \in S_{t,x_i}$. Weiß man schon $\varphi(x_i) = \varrho$, so folgt also $\varphi(x_{i+1}) = \varrho$, schließlich erhält man $\varphi(y) = \varrho$.

Bemerkung: Fordert man $\varphi(x) \geqq M_t [\varphi](x)$, so erhält man, wenn man den gleichen Schluß wie eben mit dem Minimum von φ durchführt, ebenfalls $\varphi = \text{const}$. Im übrigen gelten die gleichen Aussagen für $K_t [\varphi]$.

Folgerung: Ist $\varphi \in C(V)$, $0 < t < L$, so gibt es stets Punkte $x \in V$, für die

$$\varphi(x) = M_t [\varphi](x), \quad \text{bzw.} \quad \varphi(x) = K_t [\varphi](x)$$

gilt.

Satz 2: *V sei eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $0<t<L$. Dann sind die folgenden Aussagen paarweise äquivalent. 1) $M_t[\varphi]$ ist ein symmetrischer Operator von $L_2(V)$. 2) $M_t[\varphi]$ bildet das orthogonale Komplement von $1\in L_2(V)$ in sich ab. 3) $m_t(x)=\tilde{M}_t[1](x)$ ist eine konstante Funktion.*

Beweis: Es ist trivialerweise $1=M_t[1]$. Dann folgt aber 2) aus 1). Sei jetzt 2) erfüllt, dann gilt für jedes $\varphi\in L_2(V)$:

$$(M_t[\varphi],1)=(\varphi,1).$$

Aber andererseits gilt wegen der Symmetrie von $\tilde{M}_t$:

$$(M_t[\varphi],1)=\left(\frac{1}{m_t}\tilde{M}_t[\varphi],1\right)=\left(\tilde{M}_t[\varphi],\frac{1}{m_t}\right)=\left(\varphi,\tilde{M}_t\left[\frac{1}{m_t}\right]\right).$$

Damit folgt:

$$\tilde{M}_t\left[\frac{1}{m_t}\right]=1,\quad \text{d. h.}\quad M_t\left[\frac{1}{m_t}\right]=\frac{1}{m_t}.$$

Aus dem Hilfssatz 3 folgt damit sofort 3).

Ist schließlich 3) erfüllt, so folgt 1) aus der Symmetrie von $\tilde{M}_t$. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Bemerkung: Soll $m_t(x)$ für jedes t von x unabhängig sein, so müssen eine Reihe von Differentialinvarianten von V konstante Werte besitzen; dies muß z. B. für die skalare Krümmung R gelten, im Falle $n=2$ wird man somit auf die Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung geführt. — Im übrigen gilt der Satz 2 auch für $K_t[\varphi]$.

§ 2

Es sei V eine vollständige, analytische Riemannsche Mannigfaltigkeit. V heißt harmonisch, falls es für jedes $x\in V$ eine Funktion $h_x(t)$ der reellen Variablen t gibt, so daß $U_x(\mathfrak{a})=h_x(|\mathfrak{a}|)$ für alle $\mathfrak{a}\in T_x$ gilt. $h_x(t)$ ist dann nicht mehr von x abhängig[6]. Aus der Invarianz der Funktion U bei der involutorischen Abbildung μ (siehe § 1) folgt nämlich: $h_x(t)=h_y(t)$, falls $y\in S_{t,x}=q_x(\Sigma_{t,x})$. Für genügend kleine t folgt die Behauptung dann wie beim Beweis von Hilfssatz 3, daraus mittels des Prinzips der analytischen Fortsetzung für beliebige t.

In einer vollständigen harmonischen Mannigfaltigkeit V ist der (normierte) sphärische Mittelwert für eine stetige Funktion φ und beliebiges $t>0$ gegeben durch

$$M_t[\varphi](x)=\frac{1}{\omega_n}\int_{\Sigma_{t,x}}\varphi(q_x(\mathfrak{a}))\,\bar{\sigma}_x,\quad M_0[\varphi](x)=\varphi(x). \tag{2.1}$$

Dabei ist ω_n der Oberflächeninhalt der euklidischen Einheitskugel und $\bar{\sigma}_x$ ihr Oberflächenelement. Ist φ eine Lösung der Gleichung $\triangle_2\varphi+\lambda\varphi=0$, ($\triangle_2$:

[6] Vgl. hierzu RUSE, WALKER, WILLMORE [12].

Laplace-Beltrami-Operator von V, $\lambda = \text{const}$), so gilt:

$$v(t)\,\varphi(x) = M_t[\varphi](x). \tag{2.2}$$

Dabei genügt $v(t)$ der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$v'' + (f'/f)\,v' + \lambda v = 0, \quad v(0) = 1, v'(0) = 0, \tag{2.3}$$

wobei $f(t) = t^{n-1}h(t)$ gesetzt ist. Diese Aussage zeigt man für genügend kleine t in bekannter Weise (RUSE, WALKER, WILLMORE [12], FRIEDMAN [2]), für beliebige t dann mittels analytischer Fortsetzung.

Ist V kompakt, so bilden die Eigenfunktionen $\varphi_0 = \text{const}$, φ_1, φ_2, ... des Eigenwertproblems $\triangle_2\varphi + \lambda\varphi = 0$ ein vollständiges, orthonormales Funktionensystem in $L_2(V)$ (vgl. hierzu auch [3]); die zugehörigen Eigenwerte seien $\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots$. Es gilt dann:

$$v_i(t)\,\varphi_i(x) = M_t[\varphi_i](x). \tag{2.4}$$

Dabei genügt v_i der Gleichung (2.3) mit λ_i anstelle von λ.

Wir geben zunächst einige Eigenschaften der Funktionen $v_i(t)$ an. Ist $f(t) > 0$ für alle $t > 0$, so kann die in § 1 erwähnte Konstante $L = \infty$ gewählt werden. (Die universelle Überlagerungsmannigfaltigkeit von V ist homöomorph dem R_n; siehe ALLAMIGEON [1].) Wie beim Beweis von Hilfssatz 3 folgt $|v_i(t)| < 1$ für alle $t > 0$ und $i \geqq 1$.

Hat $f(t)$ dagegen Nullstellen, so sei L die kleinste positive. Dann ist die universelle Überlagerung $\tilde{V}$ von V kompakt, jede geodätische Linie von $\tilde{V}$ ist eine einfache geschlossene Kurve der Länge $2L$ (siehe ALLAMIGEON [1]). Im übrigen ist $\tilde{V}$ auch harmonisch mit der gleichen Funktion $f(t)$. Jeder Eigenwert λ_i von V ist auch Eigenwert von $\tilde{V}$, zu dem die gleiche Funktion v_i gehört. Für die Exponentialabbildung von $\tilde{V}$ gilt dann

$$\operatorname{Exp}(t\mathfrak{a}) = \operatorname{Exp}([t + 2L]\mathfrak{a}), \quad |\mathfrak{a}| = 1. \tag{2.5}$$

Damit erhält man für die Funktion $f(t)$ leicht:

$$f(t) = f(t + 2L). \tag{2.6}$$

Der Operator $M_t[\varphi]$ für $\tilde{V}$ ist dann periodisch mit der Periode $2L$, das gleiche gilt dann auch für die $v_i(t)$ und demnach auch von $M_t[\varphi]$ für die ursprüngliche Mannigfaltigkeit V. Aus der Gleichung $\operatorname{Exp}(t\mathfrak{a}) = \operatorname{Exp}(-[2L - t]\mathfrak{a})$, $|\mathfrak{a}| = 1$ für $\tilde{V}$ ergibt sich noch:

$$f(t) = (-1)^{n-1} f(2L - t). \tag{2.7}$$

Aus der Periodizität von v_i und aus (2.3) leitet man dann noch ab:

$$v_i(L + t) = v_i(L - t). \tag{2.8}$$

Es gilt ferner $|v_i(t)| < 1$ für alle $t \neq kL$, k ganz und $i \geqq 1$. Für $0 < t < L$ leitet man dies wie oben ab, für $L < t < 2L$ folgt es aus (2.8).

Satz 3: *Es sei V eine analytische, kompakte, harmonische Riemannsche Mannigfaltigkeit. $\mathfrak{H}$ sei das orthogonale Komplement der Funktion 1 in $L_2(V)$. Dann gilt für $t \neq kL$, k ganz,*

$$|||M_t|||_{\mathfrak{H}} < 1.$$

Wegen (2.4) und $|v_i(t)|<1$ für $i\geqq 1$, $t\neq kL$ ergibt sich der Beweis aus dem folgenden

Hilfssatz 4: Es sei $y(t;\lambda)$ die Lösung der Differentialgleichung

$$y''+(f'/f)\,y'+\lambda y=0 \quad \text{mit} \quad y(0)=1,\ y'(0)=0,\ \lambda>0\,.$$

Dabei sei $f'/f=\dfrac{n-1}{t}-t\varphi(t)$ mit $n\geqq 2$, ganz, $\varphi(t)$ stetig für $0\leqq t\leqq\vartheta$. Dann gilt für jedes t_0 mit $0<t_0\leqq\vartheta$:

$$\lim_{\lambda\to\infty} y(t_0;\lambda)=0\,.$$

Beweis: Sei $n-1=1+2p$ und zunächst $p\geqq\dfrac{1}{2}$. Es sei $K_p(t;\tau,\lambda)$ die Lösung der Differentialgleichung:

$$y''+\frac{n-1}{t}y'+\lambda y=0 \quad \text{mit} \quad K_p(\tau;\tau,\lambda)=0,\ K_p'(\tau;\tau,\lambda)=1\,.$$

Diese Funktion läßt sich in bekannter Weise durch Zylinderfunktionen darstellen. Dabei gelten folgende Abschätzungen, die man aus dem Verhalten der Zylinderfunktionen für $t\to 0$ und $t\to\infty$ entnimmt:

$$|K_p(t;\tau,\lambda)|\leqq\frac{C_1}{\sqrt{\lambda}},\quad |K_p'(t;\tau,\lambda)|\leqq C_1\,,$$

wo C_1 von t, τ und λ unabhängig ist. Ferner sei

$$y_0(t;\lambda)=a(\sqrt{\lambda}t)^{-p}I_p(\sqrt{\lambda}t)\,;$$

I_p sei die Besselfunktion zum Index p, a sei so gewählt, daß $y_0(0;\lambda)=1$. Dann gibt es eine von t, τ und λ unabhängige Konstante C_2, so daß

$$|ty_0'(t;\lambda)|\leqq C_2\,. \tag{2.9}$$

Für $y(t;\lambda)$ gilt nun die Darstellung:

$$\begin{aligned} y(t;\lambda)&=y_0(t;\lambda)+\int_0^t K_p(t;\tau,\lambda)\,\tau\varphi(\tau)\,y'(\tau;\lambda)\,d\tau\,,\\ y'(t;\lambda)&=y_0'(t;\lambda)+\int_0^t K_p'(t;\tau,\lambda)\,\tau\varphi(\tau)\,y'(\tau;\lambda)\,d\tau\,. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Hieraus ergibt sich:

$$|ty'(t;\lambda)|\leqq C_2+C_1\vartheta\int_0^t|\varphi(\tau)\|\tau y'(\tau;\lambda)|\,d\tau\,.$$

Nach einem bekannten Lemma von Gronwall folgt daraus, daß $ty'(t,\lambda)$ für $0\leqq t\leqq\vartheta$ und $\lambda>0$ gleichmäßig beschränkt ist:

$$|ty'(t;\lambda)|\leqq C_3\,.$$

Dann folgt aber aus (2.10):

$$|y(t_0;\lambda)| \leqq |y_0(t_0;\lambda)| + \frac{C_1 C_3}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{t_0} |\varphi(\tau)|\, d\tau .$$

Wegen des Verhaltens von I_p für große reelle Argumente folgt die Behauptung.

Ist aber schließlich $p=0$, so kann man anstelle von (2.9) nur zeigen:

$$|t^{\frac{1}{2}} y_0'(t;\lambda)| \leqq \lambda^{\frac{1}{4}} C_2 .$$

Dann erhält man die gleichmäßige Beschränktheit von $\lambda^{-\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{2}} y'(t;\lambda)$, diese genügt aber zum Beweis der Behauptung auch für diesen Fall.

Folgerung: Aus Satz 3 ergibt sich z. B. die Existenz von Elementen $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{H}$ mit

$$\varphi_1 + M_t[\varphi_1] = \psi, \quad \varphi_2 - M_t[\varphi_2] = \psi$$

bei gegebenem $\psi \in \mathfrak{H}$ und festem t mit $0 < t < L$. Man überblickt leicht die Lösbarkeitsverhältnisse für $\psi \in L_2(V)$.

Ferner folgt aus Satz 3 unter den gleichen Voraussetzungen über V;

Satz 4: *Es sei $\varphi \in L_2(V)$, $M_t^{(k)}[\varphi]$ bezeichne den k-mal iterierten sphärischen Mittelwert, ferner sei $t \neq kL$, k ganz. Dann gilt im Sinne starker Konvergenz in $L_2(V)$:*

$$\lim_{k\to\infty} M_t^{(k)}[\varphi] = \frac{1}{|V|} \int_V \varphi\omega, \quad \text{wobei} \quad |V| = \int_V \omega . \tag{2.11}$$

Ist φ hinreichend oft stetig differenzierbar, so gilt (2.11) *im Sinne gleichmäßiger Konvergenz auf V.*

Beweis: Es sei $\varphi = c_0\varphi_0 + \overline{\varphi}$ mit $\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{|V|}}$, $c_0 = \int_V \varphi_0\varphi\omega$. Dann ist $\overline{\varphi} \in \mathfrak{H}$ und $M_t^{(k)}[\overline{\varphi}]$ konvergiert im Mittel gegen 0 wegen Satz 3, während $M_t^{(k)}[\varphi_0] = \varphi_0$ ist.

Ist φ genügend oft stetig differenzierbar, so kann man φ in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe $\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} c_i\varphi_i$ entwickeln; es gilt dann:

$$M_t^{(k)}[\varphi] = c_0\varphi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i (v_i(t))^k \varphi_i ,$$

aber wegen $(v_i(t))^k \to 0$ gleichmäßig in i folgt die Behauptung über die gleichmäßige Konvergenz von (2.11).

Wir beschäftigen uns nunmehr mit der Gleichung $M_t[\varphi] = 0$ und zeigen für eine kompakte, harmonische Riemannsche Mannigfaltigkeit V:

Satz 5: a) *Es gibt auf dem positiven Teil der Zahlengeraden $t \geqq 0$ eine abzählbare, dichte Menge T von t-Werten, für welche die Gleichung $M_t[\varphi] = 0$*

nichttriviale Lösungen $\varphi \in L_2(V)$ besitzt. b) *Ist $t \notin T$, so liegen die Funktionen $M_t[\varphi]$ mit $\varphi \in L_2(V)$ dicht in $L_2(V)$; aus $M_t[\varphi]=0$, $\varphi \in L_2(V)$ folgt $\varphi = 0$.*

Beweis: Es sei $t \in T$, falls $v_i(t)=0$ für irgendein $i \geqq 0$. Die Behauptung b) ergibt sich dann so: Wäre $(M_t[\varphi], \psi)=0$ für alle φ und ein ψ, so wäre insbesondere $(M_t[\varphi_i], \psi)=v_i(t)(\varphi_i, \psi)=0$, also $\psi=0$. Nach einem bekannten Satz von F. Riesz sind dann die $M_t[\varphi]$ dicht in $L_2(V)$. Ist ferner $M_t[\varphi]=0$, so folgt $(M_t[\varphi], \varphi_i)=(\varphi, M_t[\varphi_i])=0$, also auch $(\varphi, \varphi_i)=0$ für alle i, d. h. $\varphi=0$.

Um a) zu beweisen, nehmen wir $t \in T$ und $v_j(t)=0$ an. Dann ist $M_t[\varphi_j]=0$. Es bleibt demnach zu zeigen, daß T abzählbar und dicht ist. Jedes einzelne v_i kann wegen der Analytizität nur abzählbar viele Nullstellen haben, die sich im Endlichen nicht häufen. Also ist auch T abzählbar. Sei jetzt $0<a \leqq t \leqq b$ ein beliebiges Intervall I. Wir zeigen $T \cap I \neq \emptyset$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $f(t)>0$ in I annehmen. Es sei dann $0<k \leqq f(t) \leqq K$ in I; man wähle i_0 so groß, daß $\lambda_i > \dfrac{K}{k}\left(\dfrac{\pi}{b-a}\right)^2$ für $i \geqq i_0$ gilt. Für die Differentialgleichung

$$(f v_i')' + \lambda_i f v_i = 0, \quad i \geqq i_0, \ t \in I$$

gilt dann:

$$0<f \leqq K, \quad \lambda_i f > K\left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2.$$

Nach einem bekannten Satz hat v_i mindestens eine Nullstelle in I (vgl. etwa KAMKE [8], S. 126), also $T \cap I \neq \emptyset$. q.e.d.

Wir machen noch zwei Bemerkungen, die illustrieren, welche Schwierigkeiten bei der Lösung der Gleichung $M_t[\varphi]=\psi$ bei festem t und gegebenem ψ auftreten. Es sei $V=S^3$ mit der üblichen Metrik konstanter Krümmung 1. Dann ist $f(t)=\sin^2 t$. Die Eigenwerte sind $k(k+2)$ für $k=0, 1, 2, \ldots$, und für die $v_i(t)$ erhalten wir

$$v_i(t)=\frac{1}{\sin t}\,\frac{\sin(k+1)t}{k+1}.$$

Es ist $t \in T$, falls $t=r\pi$ mit $r>0$ rational, nicht ganz.

Bemerkung 1: Es gibt t-Werte $t_0 \notin T$ und für jedes $m \geqq 0$ Funktionen $\psi \in C^m(V)$, so daß die Gleichung $M_{t_0}[\varphi]=\psi$ keine Lösung $\varphi \in L_2(V)$ besitzt.

Beweis: Es sei θ eine positive Liouville-Zahl. Dann gilt bekanntlich

$$\liminf_{k \to \infty} (k+1)^{\omega} |\sin(k+1)\theta\pi| = 0, \tag{2.12}$$

für jedes reelle ω. Setze $t_0=\theta\pi$ und $\psi=\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{g_k}{(k+1)^{\beta}}$, wobei g_k irgendeine Eigenfunktion mit $\|g_k\|=1$ zum Eigenwert $k(k+2)$ ist. Wird $\beta>0$ genügend groß gewählt, so kann man $\psi \in C^m(V)$ erreichen. Wäre $M_{t_0}[\varphi]=\psi$, $\varphi \in L_2(V)$ und $\varphi=\sum_{i=0}^{\infty} c_i' \varphi_i$, so wäre $c_i'=c_i/v_i(t_0)$, falls $\psi=\sum_{i=0}^{\infty} c_i \varphi_i$. Für die c_i', die zum

gleichen Eigenwert gehören, gilt dann

$$\sum_{\lambda_i = k(k+2)} c_i'^2 = \left\{ \frac{\sin t_0}{(k+1)^{\beta-1} \sin(k+1)\,\theta\pi} \right\}^2 = a_k$$

und aus (2.12) folgt

$$\limsup_{k \to \infty} a_k = \infty .$$

Dann kann aber die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} c_i'^2$ nicht konvergieren — im Widerspruch zur Annahme $\varphi \in L_2(V)$.

Bemerkung 2: Es sei $\psi = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varphi_i \in L_2(V)$, ferner konvergiere die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} c_i^2 \lambda_i^{2+\varepsilon}$ für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ [dies ist z. B. für $\psi \in C^4(V)$ erfüllt]. Dann gilt für fast alle t_0: Es gibt genau ein $\varphi \in L_2(V)$, so daß $M_{t_0}[\varphi] = \psi$ ist.

Beweis: Wir betrachten alle diejenigen positiven irrationalen Zahlen θ, welche die Approximation $1/q^{2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ durch rationale Zahlen p/q nicht zulassen. Nach einem bekannten Satz von Khintchin (siehe etwa KOKSMA [9], S. 47/48) sind dies fast alle. Für solche θ gilt

$$\liminf_{k \to \infty} (k+1)^{1+\varepsilon} |\sin(k+1)\,\theta\pi| > 0 ;$$

also gilt für ein k_0 und $k \geqq k_0$:

$$(k+1)^{1+\varepsilon} |\sin(k+1)\,\theta\pi| \geqq A > 0 .$$

Wir setzen wieder $t_0 = \theta\pi$. Sind c_i' die Fourierkoeffizienten der gesuchten Funktion φ, so muß gelten, falls $\lambda_i = k(k+2)$, $k \geqq 1$ ist:

$$|c_i'| = \left| \frac{c_i}{v_i(t_0)} \right| = \left| \frac{(k+1) c_i \sin t_0}{\sin(k+1)\,\theta\pi} \right| \leqq \frac{1}{A} (k+1)^{2+\varepsilon} |c_i \sin t_0| \leqq \frac{2|c_i|}{A} \lambda_i^{1+\frac{\varepsilon}{2}} .$$

Aus dieser Abschätzung folgt sofort die Konvergenz von $\sum_{i=0}^{\infty} c_i'^2$.

Von dem sphärischen Mittelwert $K_t[\varphi]$ über die Vollkugel zeigen wir zum Schluß dieses Paragraphen den

Satz 6: *Es sei V eine analytische, kompakte, einfach zusammenhängende harmonische Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ist* $\operatorname{Dim} V$ *gerade, so ist $K_t[\varphi](x)$ eine in t periodische Funktion, ist dagegen* $\operatorname{Dim} V$ *ungerade, so gilt:*

$$\lim_{t \to \infty} K_t[\varphi] = \frac{1}{|V|} \int_V \varphi\omega ;$$

für $\varphi \in L_2(V)$ im Sinne starker Konvergenz in $L_2(V)$, für hinreichend oft stetig differenzierbares φ im Sinne gleichmäßiger Konvergenz auf V.

Beweis: Es gilt offenbar für alle $t \geqq 0$:

$$w_i(t)\,\varphi_i(x) = K_t[\varphi_i](x), \quad i = 0, 1, \ldots,$$

mit

$$w_i(t) = \frac{\int_0^t f(\tau)\, v_i(\tau)\, d\tau}{\int_0^t f(\tau)\, d\tau}.$$

Aus der Voraussetzung folgt, daß der Fall eines endlichen L vorliegt. Da ferner $\tilde{K}_L[\varphi_i](x) = \int_V \varphi_i \omega = 0$ für $i \geqq 1$ ist, so ist auch $w_i(L) = 0$ für $i \geqq 1$. Sei nun zunächst $n = \operatorname{Dim} V$ gerade, dann folgt aus (2.7) sofort $\int_0^{2L} f(\tau)\, d\tau = 0$, ferner $\int_0^{2L} f(\tau)\, v_i(\tau)\, d\tau = 0$ und damit erhält man aus der Periodizität von $f(t)$ und $v_i(t)$ die von $w_i(t)$.

Ist dagegen $n = \operatorname{Dim} V$ ungerade, so ist $f(t) \geqq 0, = 0$ nur für $t = kL$; dann ist zwar $\int_0^t f(\tau)\, v_i(\tau)\, d\tau$ periodisch mit der Periode $2L$ und gleichmäßig in i beschränkt, aber $\int_0^t f(\tau)\, d\tau \to \infty$ für $t \to \infty$, also gleichmäßig in i: $\lim_{t\to\infty} w_i(t) = 0$ für $i \geqq 1$. Daraus folgt die Behauptung.

§ 3

Es sei jetzt V eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter negativer Krümmung K. Der Einfachheit wegen nehmen wir $K = -1$ an, was keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Im übrigen gelten alle Sätze dieses Paragraphen auch für eine kompakte euklidische Mannigfaltigkeit, wie man aus den Beweisen leicht ersehen kann.

In V ist $f(t) = \mathfrak{Sin}^{n-1} t$. Für die $v_i(t)$ erhält man die Differentialgleichung:

$$v_i'' + (n-1)\,\mathfrak{Cotg}\, t \cdot v_i' + \lambda_i v_i = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots.$$

Hilfssatz 5: Es sei $\varrho = \Re\mathfrak{e}\left\{\frac{n-1}{2} - \sqrt{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - \lambda_1}\right\}$. Wegen $\lambda_1 > 0$ ist auch $\varrho > 0$. Dann gibt es eine von t und i unabhängige Konstante C, so daß für $i \geqq 1$ und alle t gilt:

$$|v_i(t)| \leqq C\, \mathfrak{Cof}^{-\varrho} t. \tag{3.1}$$

Zum Beweis dieses Hilfssatzes beachte man, daß die Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + (n-1)\,\mathfrak{Cotg}\, t \cdot y' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

durch die hypergeometrische Funktion wie folgt dargestellt wird:

$$y(t) = F(\alpha, \beta, \gamma; -\mathfrak{Sin}^2 t) = (\mathfrak{Cos}^2 t)^{-\beta} F(\gamma - \alpha, \beta, \gamma; \mathfrak{Tg}^2 t),$$

wobei

$$\alpha = \frac{n-1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - \lambda},\ \beta = \frac{n-1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - \lambda},\ \gamma = \frac{n}{2}$$

ist. Die Behauptung folgt dann aus bekannten Eigenschaften der hypergeometrischen Funktionen.

Satz 7: *V sei eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter negativer Krümmung. Ist $\varphi \in L_2(V)$, so gilt im Sinne starker Konvergenz in $L_2(V)$:*

$$\lim_{t\to\infty} M_t[\varphi] = \frac{1}{|V|}\int_V \varphi\omega. \tag{3.2}$$

Ist φ hinreichend oft stetig differenzierbar, so gilt (3.2) *im Sinne gleichmäßiger Konvergenz auf V.*

Unter Benutzung von Hilfssatz 5 verläuft der Beweis analog dem Beweis von Satz 4.

Wir ziehen einige Folgerungen aus Satz 7.

Folgerung 1: Es sei $\varphi \in L_2(V)$, $t_0 > 0$ beliebig. Dann gilt (Konvergenz im Mittel):

$$\lim_{k\to\infty} M_{t_0}^{(k)}[\varphi] = \lim_{t\to\infty} M_t[\varphi].$$

(Für genügend oft stetig differenzierbares φ gleichmäßige Konvergenz auf V).

Dies ergibt sich sofort aus den Sätzen 4 und 7.

Folgerung 2: Wie in § 1 sei $S_{t,x} = q_x(\Sigma_{t,x})$. $S_{t,x}$ besteht aus allen Punkten von V, die sich mit x durch eine geodätische Linie der Länge t verbinden lassen. U sei das Innere einer beliebig kleinen geodätischen Kugel um einen beliebigen Punkt $y \in V$. Dann gibt es eine von x unabhängige Zahl $t_0 > 0$, so daß für $t \geqq t_0$ gilt:

$$S_{t,x} \cap U \neq \emptyset.$$

Beweis: Es sei $\varphi \in C^\infty(V)$ so gewählt, daß $\varphi > 0$ in U und $\varphi = 0$ außerhalb U gilt. Dann ist

$$\frac{1}{|V|}\int_V \varphi\omega = \frac{1}{|V|}\int_U \varphi\omega = c_1 > 0.$$

Es gibt also ein t_0, so daß für alle $t \geqq t_0$ und alle x gilt:

$$M_t[\varphi](x) > \frac{c_1}{2} > 0.$$

Wäre nun $S_{t,x} \cap U = \emptyset$, so wäre $\varphi(q_x(\mathfrak{a})) = 0$ für $\mathfrak{a} \in \Sigma_{t,x}$, und damit $M_t[\varphi](x) = 0$; also muß $S_{t,x} \cap U \neq \emptyset$ sein.

Folgerung 3: Nach Folgerung 2 gibt es zu gegebenen $t \geqq t_0$, x und U immer geodätische Linien der Länge t, die in x beginnen und in U enden. $\mathfrak{M}(t, x, U)$ sei die Menge der Einheitsvektoren $\mathfrak{a}$ aus T_x, so daß für die geodätische Linie $\gamma(s)$ mit $\gamma(0) = x$, $\dot{\gamma}(0) = \mathfrak{a}$ gilt $\gamma(t) \in U$. Dann ist $\mathfrak{M}(t, x, U) \subset \Sigma_{1,x}$. Es sei $\mu(\mathfrak{M})$ das Maß dieser Menge $\mathfrak{M}(t, x, U)$.

Behauptung: Bei festem U gilt gleichmäßig in x:

$$\lim_{t \to \infty} \mu(\mathfrak{M}) = \omega_n \frac{|U|}{|V|}.$$

Beweis: $\varepsilon > 0$ sei beliebig vorgegeben. U' sei das Innere einer geodätischen Kugel um y, so daß $U' \subset U$ und $|U| - |U'| < \frac{|V|\varepsilon}{2}$. $\varphi \in C^\infty(V)$ sei so gewählt, daß $\varphi = 1$ auf U', $0 \leqq \varphi \leqq 1$ auf $U - U'$ und $\varphi = 0$ außerhalb U gilt. Dann existiert ein t_1, so daß für alle $t \geqq t_1$ und alle x gilt:

$$\frac{1}{|V|} \int_V \varphi\omega - M_t[\varphi](x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ferner gilt für $t \geqq t_1$:

$$\frac{|U|}{|V|} - \frac{\mu(\mathfrak{M})}{\omega_n} \leqq \frac{|U'|}{|V|} - \frac{\mu(\mathfrak{M})}{\omega_n} + \frac{\varepsilon}{2} \leqq \frac{1}{|V|} \int_{U'} \varphi\omega - \frac{1}{\omega_n} \int_{\mathfrak{M}} \varphi(q_x(t\mathfrak{a}))\bar{\sigma}_x + \frac{\varepsilon}{2} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{|V|} \int_U \varphi\omega - M_t[\varphi](x) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Andrerseits wähle man eine geodätische Kugel um y, für deren Inneres U'' gilt: $U'' \supset U$ und $|U''| - |U| < \frac{|V|\varepsilon}{2}$; ferner werde $\psi \in C^\infty(V)$ so gewählt, daß $\psi = 1$ auf U, $0 \leqq \psi \leqq 1$ in U'' und $\psi = 0$ außerhalb von U'' gilt. Dann existiert ein t_2, so daß für alle $t \geqq t_2$ und alle x gilt:

$$M_t[\psi](x) - \frac{1}{|V|} \int_V \psi\omega < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann gilt analog zu oben:

$$\frac{\mu(\mathfrak{M})}{\omega_n} - \frac{|U|}{|V|} \leqq M_t[\psi](x) - \frac{1}{|V|} \int_V \psi\omega + \frac{1}{|V|}(|U''| - |U|) < \varepsilon.$$

Aus diesen Abschätzungen folgt die Behauptung.

Wir machen noch einige Bemerkungen über das Anfangswertproblem bei der Wellengleichung. V sei eine analytische kompakte Riemannsche Mannig-

faltigkeit der Dimension $n=3$. Gesucht wird eine reelle Funktion $u(t, x)$, die für $x \in V$, $t \geqq 0$ zweimal stetig differenzierbar ist und der Gleichung [$C=C(t,x)$, analytisch]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \triangle_2 u + Cu = 0 \tag{3.3}$$

und den Anfangsbedingungen

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi(x) \tag{3.4}$$

genügt.

Soll nun für das Anfangswertproblem (3.3), (3.4) stets das Huygenssche Prinzip im engeren Sinne gelten, so ist dafür notwendig und hinreichend, daß V konstante Krümmung K besitzt und $C=K$ ist[7]. Dies sei im folgenden erfüllt. Eine kleine Anfangsstörung ($\varphi, \psi \neq 0$ nur in einer Umgebung U eines Punktes $y \in V$) wird sich dann zunächst ringartig mit scharfer vorderer und hinterer Grenze in V ausbreiten. Wie verhält sich aber die Trägermenge der zugehörigen Lösung für große t? Dazu betrachten wir die Lösungsformel von (3.3), (3.4) für den vorliegenden Fall[8]:

$$u(t, x) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin\sqrt{K}t}{\sqrt{K}} M_t[\varphi](x)\right) + \frac{\sin\sqrt{K}t}{\sqrt{K}} M_t[\psi](x). \tag{3.5}$$

a) Ist $K>0$, so ist die universelle Überlagerung $\tilde{V}$ von V gerade S^3. Nach den Betrachtungen in § 2 ist $M_t[\varphi]$ in t periodisch mit der Periode $2L$, wobei $L=\frac{\pi}{\sqrt{K}}$. Folglich ist auch $u(t, x)$ in t periodisch mit der gleichen Periode. — Es erhebt sich die allgemeine Frage, unter welchen Bedingungen an V und C die Lösung von (3.3), (3.4) überhaupt periodisch ist[9].

b) Ist $K \leqq 0$, so gibt es eine nur von U abhängige Zahl t_0, so daß bei geeigneter Wahl von φ und ψ die Lösung $u(t, x) \neq 0$ für alle $x \in V$ und alle $t \geqq t_0$ ist. Man braucht dazu etwa nur $\varphi=0$, $\psi>0$ in U, $\psi=0$ in $V-U$ zu wählen. Nach Folgerung 2 von Satz 7 ist dann $M_t[\psi](x)>0$, demnach auch $u(t,x)>0$ für $t \geqq t_0$, $x \in V$. Die zu Anfang auf U beschränkte Störung hat sich also trotz der Gültigkeit des Huygensschen Prinzips im engeren Sinne auf ganz V ausgebreitet. Hält man einen Punkt $x \in V$ fest, so kann man das Maß $\mu(\mathfrak{M})$ der in Folgerung 3 erwähnten Menge $\mathfrak{M}(t, x, U)$ als ein Maß für die Menge der zur Zeit t durch x laufenden Wellenfronten auffassen, die von den Punkten $y \in U$ ausgehen.

[7] Siehe [4].

[8] In [4] ist diese Formel für genügend kleine t gezeigt worden. Man überlegt sich leicht ihre Allgemeingültigkeit.

[9] V soll natürlich kompakt sein. Die Geschlossenheit aller geodätischen Linien dürfte wohl eine notwendige Bedingung sein, die z. B. für die kompakten symmetrischen Räume vom Rang 1 erfüllt ist. Für $V=S^{2m}$, $C=\text{const}$ ist aber das Anfangswertproblem nicht periodisch in t.

Literatur

[1] ALLAMIGEON, A. C.: Propriétés globales des espaces harmoniques. C. R. Acad. Sci (Paris) **252**, 1093—1095 (1961).
[2] FRIEDMAN, A.: Functiontheoretic charakterisation of Einstein and harmonic spaces. Trans. Am. Math. Soc. **101**, 240—258 (1961).
[3] — The wave equation for differential forms. Pacific J. Math. **11**, 1267—1279 (1961).
[4] GÜNTHER, P.: Über einige spezielle Probleme aus der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, **102**, Heft 1 (1957).
[5] HELGASON, S.: Differential geometry and symmetric spaces. New York 1962.
[6] — The Radon transform on euclidean spaces, compact two-point homogeneous spaces and Grassmann manifolds. Acta Math. **113**, 153—180 (1965).
[7] JOHN, F.: Plane waves and spherical means applied to partial differential equations. New York 1955.
[8] KAMKE, E.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Lösungen und Lösungsmethoden. Leipzig 1944.
[9] KOKSMA, J. F.: Diophantische Approximationen. Ergebn. Math. **4**, Berlin, 1936.
[10] OLEVSKY, M.: Quelques théorèmes de la moyenne dans les espaces à courbure constante. Dokl. Akad. Nauk UdSSR **45**, 95—98 (1944).
[11] DE RHAM, G.: Variétés différéntiables. Paris 1955.
[12] RUSE, H. S., A. G. WALKER, and T. J. WILLMORE: Harmonic spaces. Rom 1961.
[13] WEINSTEIN, A.: Spherical means in spaces of constant curvature. Ann. di Mat. (IV) **60**, 87—92 (1963).

Prof. Dr. PAUL GÜNTHER
Mathematisches Institut der Universität
X 70 Leipzig C 1, Talstr. 35

(Eingegangen am 12. Januar 1966)

HELGASON, S.
Math. Annalen 165, 297—308 (1966)

An Analogue of the Paley-Wiener Theorem for the Fourier Transform on Certain Symmetric Spaces*

SIGURDUR HELGASON

§ 1. Introduction

The classical theorem of PALEY-WIENER [12] (see also SCHWARTZ [13]) characterizes the class of functions which are Fourier transforms of C^∞ functions of compact support on $\boldsymbol{R}^n$. In the formulation of HÖRMANDER [10], the theorem states that an entire analytic function U is the Fourier-Laplace transform of a C^∞ function on $\boldsymbol{R}^n$ with support in the ball $|x| \leqq A$ if and only if for each integer N there exists a constant C_N such that

$$|U(\xi + i\eta)| \leqq C_N(1 + |\xi + i\eta|)^{-N} e^{A|\eta|}, \qquad (\xi, \eta \in \boldsymbol{R}^n). \tag{1}$$

The present paper considers the analogous question for the Fourier transform on a symmetric space S of the noncompact type, as developed primarily by HARISH-CHANDRA [5]. A partial answer is given by Corollary 5.6. The problem is to prove that for each $U(\xi + i\eta)$ satisfying (1) the inverse Fourier transform ((7) § 4)

$$f(\exp H) = \int_A U(\lambda)\, \varphi_\lambda(\exp H)\, |\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2}\, d\lambda \tag{2}$$

vanishes for $|H| > A$. In Prop. 5.1, such a statement is proved for each term in the expansion (Prop. 4.2)

$$\varphi_\lambda(\exp H) = \sum_{\mu \in L} \psi_\mu(\lambda, H)\,; \tag{3}$$

the proof is based on translating the integration in (2) into the complex domain in such a way that the singularities of $\boldsymbol{c}(\lambda)^{-1}$ and of the coefficients in the asymptotic expansion (3) are simultaneously avoided. This is possible by using the formula of Gindikin-Karpelevič for $\boldsymbol{c}(\lambda)$ and Harish-Chandra's recursion formula for the coefficients in (3). The Paley-Wiener theorem then results from passage to the function φ_λ itself; however this requires justification of the term-by-term integration in (2) and (3). In this paper we have carried out the detailed justification for the case $\operatorname{rank}(G/K) = 1$ and the simpler case G complex.

* Work supported in part by the National Science Foundation, NSF GP-2600.

§ 2. Notation

As usual, $\boldsymbol{R}$ and $\boldsymbol{C}$ denote the fields of real and complex numbers, respectively. Lie groups are denoted by capital Roman letters and their Lie algebras by the corresponding lower case German letters. The identity element of a group is denoted e (and sometimes O). If M is a manifold, and p a point in M, the tangent space to M at p is denoted M_p; $\mathscr{E}(M)$ (resp. $\mathscr{D}(M)$) denotes the space of complex-valued C^∞ functions (resp. C^∞ functions of compact support) on M. If $f \in \mathscr{E}(M)$, $\operatorname{supp}(f)$ denotes the support of f.

§ 3. Preliminaries

Let S be a symmetric space of the noncompact type [7], G the largest connected group of isometries of S in the compact open topology, o a fixed point in S and K the isotropy subgroup of G at o. Let $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ be the corresponding Cartan decomposition of the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of G, $\mathfrak{k}$ denoting the Lie algebra of K, and $\mathfrak{p}$ being the orthogonal complement of $\mathfrak{k}$ with respect to Killing form B of $\mathfrak{g}$. We assume as usual that the Riemannian structure of S is induced by B. Let d denote the distance function on S, and $|\ |$ the norm in $\mathfrak{p}$. As usual we identify S_0 and $\mathfrak{p}$, S and G/K, so the Exponential mapping of S_0 into S can be regarded as a map $\operatorname{Exp}: \mathfrak{p} \to G/K$. Let the positive function ω on $\mathfrak{p}$ be determined by

$$\int_{G/K} f(p)\, dp = \int_{\mathfrak{p}} f(\operatorname{Exp} X)\, \omega(X)^2\, dX\,,$$

dp and dX being the volume elements of G/K and $\mathfrak{p}$. As in [5], p. 585 let $I(G)$ denote the set of all $f \in \mathscr{E}(G)$ satisfying the following two conditions: a) f is bi-invariant under K; b) for each left invariant differential operator D on G and each integer $q \geqq 0$

$$\tau_{D,q}(f) = \sup_{x \in G} |\omega_q(x)\, (Df)(x)| < \infty\,. \tag{1}$$

Here $\omega_q(x) = \omega(X)\,(1 + |X|^q)$ if $x = k \exp X (k \in K, X \in \mathfrak{p})$. Let $I_c(G) = \mathscr{D}(G) \cap I(G)$.

Let $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ be a maximal abelian subspace, $\mathfrak{a}'$ the set of regular elements in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}^+$ any connected component of $\mathfrak{a}'$ (a Weyl chamber in $\mathfrak{a}$). Let Λ denote the dual of $\mathfrak{a}$, Λ^c and $\mathfrak{a}^c$ their respective complexifications. Each $\lambda \in \Lambda^c$ can be viewed as a linear form on $\mathfrak{a}^c$ and $H_\lambda \in \mathfrak{a}^c$ is uniquely determined by the condition $B(H, H_\lambda) = \lambda(H)$ for $H \in \mathfrak{a}^c$. We put $\langle \lambda, \mu \rangle = B(H_\lambda, H_\mu)$, $|\nu| = \langle \nu, \nu \rangle^{1/2}$ for $\lambda, \mu \in \Lambda^c$, $\nu \in \Lambda$. An element $\lambda \in \Lambda$ is called a root if the space

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \lambda(H) X \quad \text{for all} \quad H \in \mathfrak{a}\}$$

is $\neq 0$. A root is called positive if its values on $\mathfrak{a}^+$ are > 0. Let Δ denote the set of roots $\neq 0$, Δ_+ the set of all roots > 0, and Δ_0 the set of positive roots which are not integral multiples of other positive roots. If $\alpha \in \Delta$, the number $m_\alpha = \dim(\mathfrak{g}_\alpha)$ is called the multiplicity of α and we put as usual

$$\varrho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} m_\alpha \alpha\,, \quad \pi = \prod_{\alpha \in \Delta_0} \alpha\,.$$

Let $\mathfrak{n} = \sum_{\alpha>0} \mathfrak{g}_\alpha$, $N = \exp(\mathfrak{n})$, $A = \exp(\mathfrak{a})$. Then we have the Iwasawa decompositions $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ and $G = KAN$. If $x \in G$, let $H(x) \in \mathfrak{a}$ be determined by $x \in K \exp H(x) N$. Let log denote the inverse of the mapping $\exp : \mathfrak{a} \to A$.

The Weyl group W of S is the group of linear transformations of $\mathfrak{a}$ induced by those elements of $\mathrm{Ad}_G(K)$ which leave $\mathfrak{a}$ invariant. Here Ad_G denotes the adjoint representation of G. The group W acts on A via the exponential mapping and on Λ^c by duality. Let $\mathcal{S}(\mathfrak{a})$ denote the set of complex-valued rapidly decreasing C^∞ functions on $\mathfrak{a}$ ([13], II, p. 89) and $\mathcal{I}(\mathfrak{a})$ (resp. $\mathcal{I}_c(\mathfrak{a})$) the set of W-invariant elements in $\mathcal{S}(\mathfrak{a})$ (resp. $\mathcal{D}(\mathfrak{a})$). The spaces $\mathcal{S}(A)$, $\mathcal{I}(A)$, $\mathcal{I}_c(A)$ and $\mathcal{S}(\Lambda)$, $\mathcal{I}(\Lambda)$, $\mathcal{I}_c(\Lambda)$ are defined similarly.

§ 4. The expansion for the spherical function

For $\lambda \in \Lambda^c$ we consider now the spherical function

$$\varphi_\lambda(x) = \int_K e^{(i\lambda - \varrho)(H(xk))}\, dk \qquad (x \in G). \tag{1}$$

Since $K \exp(\mathfrak{a}^+) K$ is dense in G this function is determined by the values $\varphi_\lambda(\exp H)$ $(H \in \mathfrak{a}^+)$ and on this Weyl chamber $\mathfrak{a}^+$ one has a series expansion for φ_λ which we shall now describe. We put

$$\varphi(\lambda, H) = \varphi_\lambda(\exp H) \qquad (H \in \mathfrak{a}).$$

Let $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ be the simple roots in Δ_+ ([5], p. 252) and let $L \subset \Lambda$ consist of all $\mu = m_1\alpha_1 + \cdots + m_l\alpha_l$ where $m_1, \ldots, m_l$ are nonnegative integers. Put $m(\mu) = m_1 + \cdots + m_l$. The rational functions $\Gamma_\mu (\mu \in L)$ on $\mathfrak{a}^c$ are defined recursively by $\Gamma_0 = 1$ and

$$\{\langle \mu, \mu - 2\varrho\rangle - 2\mu\}\Gamma_\mu = 2 \sum_{\alpha \in \Delta_+} m_\alpha \sum_{k \geqq 1} \Gamma_{\mu - 2k\alpha}\{\langle \mu - 2k\alpha, \alpha\rangle - \alpha\},$$

where k runs over all integers $\geqq 1$ for which $\mu - 2k\alpha \in L$. Let $L' = L - \{0\}$. For $\mu \in L'$ let σ_μ denote the set of $H \in \mathfrak{a}^c$ satisfying $\langle \mu, \mu\rangle = 2i\mu(H)$ and if $s, t \in W$ let $\tau_\mu(s, t)$ denote the set of all $H \in \mathfrak{a}^c$ satisfying $i(sH - tH) = H_\mu$. Let ${}^*\mathfrak{a}^c$ denote the complement in $\mathfrak{a}^c$ of the union of all the hyperplanes $r\sigma_\mu$, $\tau_\mu(s, t)$ $(r, s, t \in W,\ \mu \in L')$ and let $'\mathfrak{a}^c$ denote the set of $H \in {}^*\mathfrak{a}^c$, where $\pi(H) \neq 0$. If $M \geqq 0$ let $\mathfrak{a}(M)$ denote the set of $H \in \mathfrak{a}$ satisfying $\alpha_i(H) > M$ for $1 \leqq i \leqq l$. We shall often identify Λ^c and $\mathfrak{a}^c$ via the mapping $\lambda \to H_\lambda$; thus a function on $\mathfrak{a}^c$ automatically becomes a function on Λ^c without change in notation. For a certain holomorphic function $\boldsymbol{c}$ on $'\mathfrak{a}^c$, described explicitly below, the following holds ([5], p. 282). For any compact subset U of ${}^*\mathfrak{a}^c$ there exists a number $M \geqq 0$ such that

$$\varphi(\lambda, H) = \sum_{\mu \in L} \psi_\mu(\lambda, H) \qquad (H_\lambda \in {}'\mathfrak{a}^c \cap U,\ H \in \mathfrak{a}(M)) \tag{2}$$

where

$$\psi_\mu(\lambda, H) = \sum_{s \in W} \boldsymbol{c}(s\lambda)\, \Gamma_\mu(is\lambda - \varrho) e^{(is\lambda - \varrho - \mu)(H)} \qquad (H_\lambda \in {}'\mathfrak{a}^c,\ H \in \mathfrak{a}^c).$$

We shall now strengthen this statement.

Lemma 4.1. *Suppose H_λ does not lie on any of the hyperplanes $\sigma_v(v \in L')$ and let $H \in \mathfrak{a}^+$. Then there exists a constant $K_{\lambda,H}$ such that*

$$|\Gamma_\mu(i\lambda - \varrho)| \leqq K_{\lambda,H} e^{\mu(H)} \quad \text{for all} \quad \mu \in L.$$

Proof. Put $b_\mu = \Gamma_\mu(i\lambda - \varrho)$ and select constants c_1, c_2 such that for all $\mu \in L$, $\alpha \in \Delta_+$,

$$|\langle \mu + \varrho, \alpha\rangle - i\langle \alpha, \lambda\rangle| \leqq c_1(m(\mu)+1), \quad |\langle \mu, \mu\rangle - 2i\langle \mu, \lambda\rangle| \geqq c_2 m(\mu)^2.$$

Then, by the definition of $\Gamma_\mu(i\lambda - \varrho)$,

$$|b_\mu| \leqq c(m(\mu))^{-1} \sum_{\alpha \in \Delta_+} m_\alpha \sum_{k \geqq 1} |b_{\mu - 2k\alpha}|,$$

where $c = 4c_1 c_2^{-1}$. Let N_0 be an integer such that

$$c \sum_{\alpha \in \Delta_+} m_\alpha (1 - e^{-2\alpha(H)})^{-1} \leqq N_0$$

and select $K = K_{\lambda,H}$ such that

$$|b_\nu| \leqq K e^{\nu(H)} \tag{4}$$

for all $\nu \in L$, $m(\nu) \leqq N_0$. We shall prove (4) by induction on $m(\nu)$. Let $N > N_0$ be an integer and suppose (4) holds for all $\nu \in L$ with $m(\nu) < N$. Let $\mu \in L$ such that $m(\mu) = N$. Then

$$|b_\mu| \leqq cN^{-1} \sum_{\alpha \in \Delta_+} m_\alpha \sum_{k \geqq 1} K e^{(\mu - 2k\alpha)(H)} \leqq K e^{\mu(H)},$$

and the lemma is proved.

Proposition 4.2. *The expansion*

$$\varphi(\lambda, H) = \sum_{\mu \in L} \psi_\mu(\lambda, H) \tag{5}$$

is valid for all $H_\lambda \in \mathfrak{a}^c$ and all $H \in \mathfrak{a}^+$.

Proof. Consider now fixed H_λ and H. Let $b = \min_{1 \leqq i \leqq l} \alpha_i(H)$ and determine $H_1 \in \mathfrak{a}^+$ such that $\alpha_i(H_1) = \frac{1}{2} b$ $(1 \leqq i \leqq l)$. Select an open neighborhood U of H in $\mathfrak{a}^+$ such that

$$\alpha_i(A) > \alpha_i(H_1) \qquad (A \in U, 1 \leqq i \leqq l).$$

Let $B \in \mathfrak{a}$. Then by Lemma 4.1 there exists a constant $M_{\lambda,B}$ such that

$$|\sum_s c(s\lambda)\, \Gamma_\mu(is\lambda - \varrho)\, e^{is\lambda(A+iB)}| \leqq M_{\lambda,B}\, e^{\mu(H_1)}$$

for all $\mu \in L$, $A \in U$. It follows that

$$|\psi_\mu(\lambda, A + iB)| \leqq M_{\lambda,B} e^{-\varrho(A)} e^{\mu(H_1 - A)}$$

and consequently, the series on the right hand side of (5) converges uniformly on a neighborhood of H in $\mathfrak{a}^c$. Thus both sides of (5) are analytic in $\mathfrak{a}^+$ and by (2) they coincide on an open subset of $\mathfrak{a}^+$. But $\mathfrak{a}^+$ is connected so (5) follows.

Remark. It had previously been pointed out to me by HARISH-CHANDRA that Prop. 4.2 can be derived from the results of [6], by use of the method of [5], p. 297–298.

The function $c(\lambda)$ is given by $c(\lambda) = I(i\lambda)/I(\varrho)$ where

$$I(v) = \prod_{\alpha \in \Delta_+} B\left(\frac{m_\alpha}{2}, \frac{m_{\alpha/2}}{4} + \frac{\langle v, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}\right), \qquad v \in A^c \tag{6}$$

B denoting the Beta function. In special cases such a formula was proved by HARISH-CHANDRA [5], p. 303, BHANU-MURTHY [1], [2] and in full generality by GINDIKIN-KARPELEVIČ [4]. As observed in [9], §§ 2–3, formula (6) implies that on A, c^{-1} is a tempered distribution, the function π_0 in [5], p. 579 is a constant multiple of π, and the mapping $A \to |\pi c|^2 A$ maps $\mathscr{I}(A)$ onto itself. The Fourier inversion formula of HARISH-CHANDRA ([5], pp. 612, 610, 586) can therefore be restated as follows. The Fourier transform of $f \in I(G)$ is defined by

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_G f(x)\, \varphi_{-\lambda}(x)\, dx \qquad (\lambda \in A)$$

and $\tilde{f} \in \mathscr{I}(A)$. Each function of the form

$$f(x) = w^{-1} \int_A A(\lambda)\, \varphi_\lambda(x)\, |c(\lambda)|^{-2}\, d\lambda \qquad (A \in \mathscr{I}(A)) \tag{7}$$

lies in $I(G)$ and

$$\tilde{f} = A\,. \tag{8}$$

In (7), w is the order of the Weyl group W, the measures dx, $d\lambda$ and also da below, are regularly normalized ([5], p. 597). Finally, if $F \in \mathscr{S}(A)$ and F^* denotes its (Euclidean) Fourier transform

$$F^*(\lambda) = \int_A F(a) e^{-i\lambda(\log a)} da \qquad (\lambda \in A)$$

then by [5], p. 596,

$$\tilde{f} = (F_f)^* \qquad (f \in I(G)) \tag{9}$$

where the function $F_f \in \mathscr{I}(A)$ is given by

$$F_f(a) = e^{\varrho(\log a)} \int_N f(an)\, dn \qquad (a \in A)$$

dn being Haar measure on N, suitably normalized.

§ 5. The analog of the Paley-Wiener theorem

In any metric space, let $V^R(p)$ denote the closed ball of radius R and center p.

Consider now any $F \in \mathscr{I}_c(A)$. Select R such that $\mathrm{supp}(F) \subset V^R(O)$. The Fourier transform F^* on A can, by the classical Paley-Wiener theorem, be extended to a holomorphic function on A^c satisfying for each integer $N > 0$ an inequality

$$|F^*(\xi + i\eta)| \leqq C_N (1 + |\xi + i\eta|)^{-N} e^{R|\eta|} \tag{1}$$

for all $\xi, \eta \in A$, where C_N is a constant, and $|\xi + i\eta| = (|\xi|^2 + |\eta|^2)^{1/2}$. As suggested by (7) § 4, we form the function

$$g(x) = w^{-1} \int_A F^*(\lambda)\, \varphi_\lambda(x)\, |\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2}\, d\lambda \qquad (x \in G)$$

and as will be seen later, the analog of the Paley-Wiener theorem amounts to that $g \in I_c(G)$, more precisely, that the restriction $\bar{g}$ of g to A satisfies $\mathrm{supp}(\bar{g}) \subset V^R(O)$. We shall at any rate prove the analogous statement for each term in the expansion (5), § 4.

Proposition 5.1. *Let $\mu \in L$, $F \in \mathscr{I}_c(A)$ with $\mathrm{supp}(F) \subset V^R(O)$. Then*

$$\int_A F^*(\lambda)\, \psi_\mu(\lambda, H)\, |\boldsymbol{c}(\lambda)|^{-2}\, d\lambda = 0$$

if $H \in \mathfrak{a}^+$ and $|H| > R$.

Proof. The integrand is certainly defined if $H_\lambda \in {}^t\mathfrak{a}^c \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$, $H \in \mathfrak{a}^+$. For such H_λ we have $|\boldsymbol{c}(\lambda)|^2 = \boldsymbol{c}(\lambda)\, \boldsymbol{c}(-\lambda) = \boldsymbol{c}(s\lambda)\, \boldsymbol{c}(-s\lambda)$ for each $s \in W$ so the integrand is $e^{-(\varrho+\mu)(H)}$ times

$$\sum_{s \in W} F^*(s\lambda)\, \boldsymbol{c}(-s\lambda)^{-1}\, e^{is\lambda(H)}\, {}^t\Gamma_\mu(is\lambda - \varrho).$$

This expression, however, is an analytic integrable function on the entire A and it suffices to prove

$$\int_A F^*(-\xi)\, \boldsymbol{c}(\xi)^{-1}\, e^{-i\xi(H)}\, {}^t\Gamma_\mu(-i\xi - \varrho)\, d\xi = 0 \tag{2}$$

if $|H| > R$ in $\mathfrak{a}^+$. To do this we shift the integration in (2) into the complex space A^c in such a way that the singularities of the functions $\boldsymbol{c}(\lambda)^{-1}$ and ${}^t\Gamma_\mu(-i\lambda - \varrho)$ are simultaneously avoided, Cauchy's theorem applicable, resulting in estimates for (2). By the recursive definition of the rational function $\lambda \to {}^t\Gamma_\mu(-i\lambda - \varrho)$ on A^c it is clear that it is holomorphic outside the set where $\langle 2\nu, -i\lambda - \varrho\rangle = \langle \nu, \nu - 2\varrho\rangle$ for some $\nu \in L'$, that is outside the set

$$\left\{\lambda \in A^c \mid \langle \nu, \lambda\rangle = \frac{1}{2} i\langle \nu, \nu\rangle \quad \text{for some} \quad \nu \in L'\right\}. \tag{3}$$

On the other hand the formula for $\boldsymbol{c}(\lambda)$ shows that the function $\lambda \to \boldsymbol{c}(\lambda)^{-1}$ is holomorphic on the complement in A^c of the subset

$$\left\{\lambda \in A^c \mid \langle \alpha, \lambda\rangle = i\left(\frac{m_\alpha}{2} + \frac{m_{\alpha/2}}{4} + n\right)\langle \alpha, \alpha\rangle \quad \text{for some} \quad n \in \boldsymbol{Z}^+, \alpha \in \Delta_+\right\}. \tag{4}$$

Here $\boldsymbol{Z}^+$ denotes the set of nonnegative integers. The fortunate circumstance is that both sets (3) and (4) are contained in the set

$$\{\lambda \in A^c \mid i\langle \nu, \lambda\rangle < 0 \quad \text{for some} \quad \nu \in L'\}. \tag{5}$$

The path of integration in (2) will now be shifted away from this set.

Consider now any $\xi, \eta \in A$ such that $-H_\eta \in \mathfrak{a}^+$. Let $H_1, \ldots, H_l$ be the basis of $\mathfrak{a}$, dual to the basis $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ of A and for each $\lambda \in A^c$ write $H_\lambda = \sum_j \lambda_j H_j (\lambda_j \in \boldsymbol{C})$. We shall identify a function φ on a subset of A^c with a

function on a subset of $\boldsymbol{C}^l$ by the convention $\varphi(\lambda)=\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$. All ξ_j, η_k are real and $\eta_k<0$ $(1\leqq k\leqq l)$. The function

$$G(\lambda)=G(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)=F^*(-\lambda)\, \boldsymbol{c}(\lambda)^{-1}\, e^{-i\lambda(H)}\, \Gamma_\mu(-i\lambda-\varrho)$$

is holomorphic at each point $\lambda=(\xi_j+is_j\eta_j)$ $(0\leqq s_j\leqq 1,\ 1\leqq j\leqq l)$ because the condition in (5) is violated. In fact, if $\nu\in L'$, $\nu=n_1\alpha_1+\cdots+n_l\alpha_l$, then $\langle \nu, \lambda\rangle = \sum_j n_j(\xi_j+is_j\eta_j)$ has a nonpositive imaginary part. If the function $G(\lambda)$ behaves suitably at infinity we can therefore conclude from Cauchy's theorem that

$$\int_{R^l} G(\xi_1, \ldots, \xi_l)\, d\xi_1 \ldots d\xi_l = \int_{R^l} G(\xi_1+i\eta_1, \ldots, \xi_l+i\eta_l)\, d\xi_1 \ldots d\xi_l. \tag{6}$$

In order to estimate G we first observe, by induction on $m(\mu)$, that

$$\Gamma_\mu(-i(\xi+i\eta)-\varrho)=p_\mu(\xi+i\eta)\,(q_\mu(\xi+i\eta))^{-1},$$

where p_μ and q_μ are polynomials and

$$q_\mu(\xi+i\eta)=\prod_\nu (\langle \nu, \nu\rangle+2i\langle \nu, \xi\rangle-2\langle \nu, \eta\rangle),$$

the product being taken over all $\nu\in L'$ such that $\mu-\nu\in L$. Consequently,

$$|\Gamma_\mu(-i(\xi+i\eta)-\varrho)|\leqq c_\mu|\, p_\mu(\xi+i\eta)| \qquad (\xi\in \Lambda,\ -H_\eta\in \mathfrak{a}^+) \tag{7}$$

where c_μ is a constant. In order to estimate $\boldsymbol{c}(\lambda)^{-1}$ we use the formula (see e.g. [11], p. 6 or [15], p. 151)

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z)}\, e^{-a\log z}=1, \quad |\arg z|\leqq \pi-\delta, \tag{8}$$

where a is any constant, log being the principal value of the logarithm and $\delta>0$. Now formula (6) § 3 implies a product formula

$$\boldsymbol{c}(\lambda)^{-1}=\prod_{\alpha\in \Delta_+} \boldsymbol{c}_\alpha(\lambda)^{-1}$$

and the factor $\boldsymbol{c}_\alpha(\lambda)^{-1}$ can be estimated by means of (8), taking $a=\frac{1}{2}m_\alpha$ and

$$z=\frac{1}{4}m_{\alpha/2}+i\frac{\langle \lambda, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}.$$

In fact (8) implies

$$\left|\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}m_\alpha+z\right)}{\Gamma(z)}\right|\leqq K_1+K_2|z|^{\frac{1}{2}m_\alpha} \qquad (K_1, K_2 \text{ constants})$$

whenever the real part of z is $\geqq 0$ and this is the case if λ lies in the set

$$\{\lambda=\xi+i\eta \mid \xi\in \Lambda,\ -H_\eta\in Cl(\mathfrak{a}^+)\}, \tag{9}$$

(Cl denoting closure). It follows that

$$|\boldsymbol{c}(\xi+i\eta)|^{-1}\leqq C_1+C_2\prod_{\alpha\in \Delta_+} |\xi+i\eta|^{\frac{1}{2}m_\alpha} \tag{10}$$

for all $\xi \in \Lambda$, $-H_\eta \in \mathfrak{a}^+$, C_1 and C_2 being constants. The inequalities (1), (7) and (10) show that the application (6) of Cauchy's theorem is legitimate, so for each $-H_\eta \in \mathfrak{a}^+$,

$$\int_\Lambda F^*(-\xi)\, c(\xi)^{-1} e^{-i\xi(H)} \Gamma_\mu(-i\xi - \varrho)\, d\xi$$
$$= \int_\Lambda F^*(-\xi - i\eta)\, c(\xi + i\eta)^{-1} e^{-i\xi(H) + \eta(H)} \Gamma_\mu(-i\xi + \eta - \varrho)\, d\xi .$$

Let us denote this quantity by $Q(H)$. Choosing the integer N in (1) equal to

$$l + 1 + \text{degree}(p_\mu) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta_+} m_\alpha$$

we have

$$|Q(H)| \leqq C e^{R|\eta|} e^{\eta(H)} \quad \text{for all} \quad H, -H_\eta \in \mathfrak{a}^+ , \tag{11}$$

C being a constant. Now fix $H \in \mathfrak{a}^+$ with $|H| > R$. Put $H_\eta = -tH$ $(t > 0)$. Then by (11),

$$|Q(H)| \leqq C e^{t|H|(R - |H|)} .$$

Letting $t \to \infty$ we obtain $Q(H) = 0$, and the proposition is proved.

Definition. We shall say that the symmetric space G/K satisfies condition (Γ) if for each $F \in \mathscr{I}_c(A)$ and each $H \in \mathfrak{a}^+$, the term-by-term integration

$$\int_\Lambda \sum_{\mu \in L} \psi_\mu(\lambda, H)\, F^*(\lambda)\, |c(\lambda)|^{-2}\, d\lambda = \sum_{\mu \in L} \int_\Lambda \psi_\mu(\lambda, H)\, F^*(\lambda)\, |c(\lambda)|^{-2}\, d\lambda$$

is valid.

Lemma 5.2. *The space G/K satisfies condition (Γ) in the following cases:*

(i) *G/K has rank one* (i.e. $\dim(\mathfrak{a}) = 1$).

(ii) *G is complex.*

Proof. (i) Without any assumption on the rank l we shall prove that there exist constants c, d and e such that

$$|\Gamma_{m\alpha}(i\lambda - \varrho)| \leqq c(1 + m^d)(1 + |\lambda|^e) \qquad (\lambda \in \Lambda, m \in \mathbf{Z}^+) \tag{12}$$

where α is any of the roots $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$. Let $p = m_\alpha$, $q = m_{2\alpha}$. It is readily seen from the recursion formula for Γ_μ that $\Gamma_{m\alpha} \equiv 0$ for odd m. Put $a_n(\lambda) = \Gamma_{2n\alpha}(i\lambda - \varrho)$ for $n \in \mathbf{Z}^+$. Then

$$(4n^2\langle\alpha, \alpha\rangle - 4in\langle\alpha, \lambda\rangle)\, a_n(\lambda)$$
$$= 2p \sum_0^{n-1} a_r(\lambda)\,(2r\langle\alpha, \alpha\rangle + \langle\varrho, \alpha\rangle - i\langle\alpha, \lambda\rangle) +$$
$$+ 2q \sum_{0 \leqq r \equiv n (\mathrm{mod}\, 2)}^{n-2} a_r(\lambda)\,(4r\langle\alpha, \alpha\rangle + \langle\varrho, 2\alpha\rangle - 2i\langle\alpha, \lambda\rangle) .$$

Now define for all $r \in \mathbf{Z}^+$,

$$\gamma_r(\lambda) = 2p|2r\langle\alpha, \cdot\alpha\rangle + \langle\varrho, \alpha\rangle - i\langle\alpha, \lambda\rangle| +$$
$$+ 2q|4r\langle\alpha, \alpha\rangle + \langle\varrho, 2\alpha\rangle - 2i\langle\alpha, \lambda\rangle| ,$$
$$c_r(\lambda) = |4r^2\langle\alpha, \alpha\rangle - 4ir\langle\alpha, \lambda\rangle|$$

and define the functions $b_n(\lambda)$ inductively by

$$b_n(\lambda) = c_n(\lambda)^{-1} \sum_{r=0}^{n-1} b_r(\lambda)\, \gamma_r(\lambda) \qquad b_0(\lambda) \equiv 1 .$$

It is clear by induction on n that

$$|a_n(\lambda)| \leqq b_n(\lambda) \quad \text{for all} \quad n \in \boldsymbol{Z}^+, \lambda \in \Lambda .$$

Now

$$\begin{aligned} b_n(\lambda)\, c_n(\lambda) &= \sum_{0}^{n-2} b_r(\lambda)\, \gamma_r(\lambda) + b_{n-1}(\lambda)\, \gamma_{n-1}(\lambda) \\ &= b_{n-1}(\lambda)\, c_{n-1}(\lambda) \left(1 + \gamma_{n-1}(\lambda)\, (c_{n-1}(\lambda))^{-1}\right) \end{aligned}$$

so by iteration

$$b_n(\lambda)\, c_n(\lambda) = b_2(\lambda)\, c_2(\lambda) \prod_{r=2}^{n-1} \left(1 + \frac{\gamma_r(\lambda)}{c_r(\lambda)}\right).$$

But it is clear that

$$\gamma_r(\lambda) \leqq C r^{-1} c_r(\lambda) \quad \text{for} \quad r \geqq 1, \lambda \in \Lambda ,$$

where C is a constant. Since $\log(1+x) \leqq x$ for $x \geqq 0$ we conclude that

$$\prod_{r=2}^{n-1} \left(1 + \frac{\gamma_r(\lambda)}{c_r(\lambda)}\right) \leqq \exp\left(C \sum_{2}^{n-1} \frac{1}{r}\right) < n^C$$

and the inequality (12) follows. It is now clear from (1), (10) and (12) that if $\operatorname{rank} S = 1$ we have for $H \in \mathfrak{a}^+$,

$$\sum_{\mu \in L} \int_{\Lambda} |\psi_\mu(\lambda, H)\, F^*(\lambda)\, \boldsymbol{c}(\lambda)^{-2}|\, d\lambda < \infty$$

so condition (Γ) is verified.

(ii) In the case when G is complex we shall prove that each Γ_μ is constant. Then Lemma 4.1 implies that G/K satisfies condition (Γ).

Lemma 5.3. *Suppose G complex and let $\mu \in L$. Then*

(13) $\Gamma_\mu \equiv$ *the number of partitions of* $\frac{1}{2}\mu$ *into a sum of positive roots.*

Remark. This partition function is familiar from the representation theory of compact Lie groups (see B. KOSTANT: A formula for the multiplicity of a weight, Trans. Am. Math. Soc. **93**, 53–73 (1959) and P. CARTIER: On Weyl's character formula, Bull. Am. Math. Soc. **67**, 228–230 (1961)).

Proof. According to HARISH-CHANDRA [5], p. 304, if $H \in \mathfrak{a}^+$, $H_\lambda \in \mathfrak{a}^c$,

$$\varphi_\lambda(\exp H) = \sum_{s \in W} \boldsymbol{c}(s\lambda) e^{is\lambda(H)} \prod_{\alpha \in \Delta_+} (e^{\alpha(H)} - e^{-\alpha(H)})^{-1} .$$

In this case every $\alpha \in \Delta_+$ has multiplicity 2 so

$$\begin{aligned} e^{\varrho(H)} \varphi_\lambda(\exp H) &= \sum_{s \in W} \boldsymbol{c}(s\lambda) e^{is\lambda(H)} \prod_{\alpha \in \Delta_+} (1 + e^{-2\alpha(H)} + e^{-4\alpha(H)} + \cdots) \\ &= \sum_{s \in W} \boldsymbol{c}(s\lambda) e^{is\lambda(H)} \sum_{\mu \in L} M_\mu e^{-\mu(H)} , \end{aligned}$$

where M_μ is the number of partitions of $\frac{1}{2}\mu$ into a sum of positive roots (order immaterial). Thus by (5) § 4,

$$\sum_{s,\mu} c(s\lambda)\,{}^{\backprime}\Gamma_\mu(is\lambda-\varrho)\,e^{(is\lambda-\mu)(H)} = \sum_{s,\mu} c(s\lambda)\,M_\mu\,e^{(is\lambda-\mu)(H)}$$

for all $H\in\mathfrak{a}^+$, $H_\lambda\in{}^{\backprime}\mathfrak{a}^c$. Fix λ such that the linear forms $is\lambda-\mu$ ($s\in W$, $\mu\in L$) are all different and in addition $H_\lambda\in{}^{\backprime}\mathfrak{a}^c$. There exists a nonempty open subset $V\subset\mathfrak{a}^+$ such that $tV\subset V$ for $t\geqq 1$ and such that for each $\xi\in A^c$ the series

$$\sum_{s,\mu} c(s\lambda)\,{}^{\backprime}\Gamma_\mu(is\lambda-\varrho)\,e^{(is\lambda-\mu+\xi)(H)},$$
$$\sum_{s,\mu} c(s\lambda)\,M_\mu\,e^{(is\lambda-\mu+\xi)(H)}$$

converge uniformly for $H\in V$. In fact, the first series converges uniformly on a subset of $\mathfrak{a}^+$ of the form

$$\left\{H\in\mathfrak{a}^+\,|\,\alpha_i(H)>M,\ \alpha_i(H)>\frac{1}{2}\alpha_j(H),\ 1\leqq i,j\leqq l\right\}$$

(see [5], Lemma 31, p. 276) which is open and nonempty, and the equation introducing M_μ shows that for each $H_0\in\mathfrak{a}^+$, $M_\mu\leqq ce^{\mu(H_0)}$, where c is a constant. The existence of V is now clear so by [5], p. 307 we can conclude that $M_\mu={}^{\backprime}\Gamma_\mu(is\lambda-\varrho)$. This proves (13) on a dense subset of A^c, hence on A^c itself. Now Lemma 5.2 is also proved.

Lemma 5.4. *Let o, d, A and N be as in § 3. Then*

$$d(o,a\cdot o)<d(o,an\cdot o)\quad\text{for}\quad a\in A, n\neq e\quad\text{in}\quad N.$$

Proof. Let n^* be an element in N such that the point $an^*\cdot o$ minimizes the distance from o to the horocycle $aN\cdot o$. Then the geodesic in S joining o and $an^*\cdot o$ is perpendicular to this horocycle at $an^*\cdot o$ (see e.g. [7], Lemma 13.6, Ch. I). The manifold $A\cdot o$ contains all the geodesics intersecting the horocycle $N\cdot o$ orthogonally at o ([8], Lemma 3.3). Hence the manifold $an^*A\cdot o$ contains all the geodesics intersecting the horocycle $aN\cdot o$ orthogonally at $an^*\cdot o$. In particular, there exists an element $b\in A$ such that $an^*b\cdot o=o$. This implies $n^*=e$, proving the lemma.

Theorem 5.5. *Suppose G/K satisfies condition (Γ). Then*

(i) *The mapping $f\to F_f$ is an isomorphism of the convolution algebra $I(G)$ onto the convolution algebra $\mathcal{I}(A)$.*

(ii) *The mapping $f\to F_f$ maps $I_c(G)$ onto $\mathcal{I}_c(A)$; moreover, if $f\in I_c(G)$ and $\bar{f}$ denotes its restriction to A then for each $R>0$,*

$$\operatorname{supp}(F_f)\subset V^R(0)\Leftrightarrow\operatorname{supp}(\bar{f})\subset V^R(0).$$

Proof. Let $F\in\mathcal{I}_c(A)$. Select R such that $\operatorname{supp}(F)\subset V^R(0)$. Then the Fourier transform F^* satisfies an inequality of the form (1) and we can define $g\in I(G)$ by

$$g(x)=w^{-1}\int_A F^*(\lambda)\,\varphi_\lambda(x)\,|c(\lambda)|^{-2}\,d\lambda\qquad(x\in G).$$

By Prop. 5.1 and condition (Γ) we have $g \in I_c(G)$ and $g(\exp H) = 0$ if $|H| > R$ in $\mathfrak{a}$. Also, by (8) and (9) § 4,

$$\tilde{g}(\lambda) = F_g^*(\lambda) = F^*(\lambda) \qquad (\lambda \in \Lambda^c). \tag{14}$$

In particular, we can use this on a function $F = F_f$ where f is an arbitrary function in $I_c(G)$. Then $F_f^* = F^* = F_g^*$ so, since the Euclidean Fourier transform is one-to-one, $F_f = F_g$. But $f, g \in I_c(G)$ and the mapping $f \to F_f$ is one-to-one on $I_c(G)$ ([7], p. 454). Hence $f = g$. This shows that $I_c(G)$ is contained in the space $I_0(G)$, defined in [5], p. 586 (cf. also the remarks at the end of § 4 above). As shown in [5], p. 612 this implies that the inversion formula

$$f(x) = w^{-1} \int_{\Lambda} \tilde{f}(\lambda)\, \varphi_\lambda(x)\, |c(\lambda)|^{-2}\, d\lambda$$

holds for all $f \in I(G)$. In view of Theorem 3.3 in [9], this gives (i).

Concerning (ii) we first observe that (14) implies $F_g = F$. This means that if $f \in I_c(G)$, $\operatorname{supp}(F_f) \subset V^R(0)$ then $\operatorname{supp}(\tilde{f}) \subset V^R(0)$. The converse is clear from Lemma 5.4 so the theorem is proved.

Remark. That $f \to F_f$ is one-to-one on $I(G)$ for every G/K was conjectured by HARISH-CHANDRA in [5], p. 612 and has subsequently been proved by him (unpublished).

Corollary 5.6. *Suppose G/K satisfies condition (Γ). If $R > 0$ let $I_c^R(G)$ denote the set of functions $f \in I_c(G)$ such that $\operatorname{supp}(\tilde{f}) \subset V^R(0)$. A W-invariant function on Λ is the Fourier transform $\tilde{f}(\lambda)$ ($f \in I_c^R(G)$) if and only if it can be extended to a holomorphic function ψ on Λ^c satisfying for each integer $N > 0$,*

$$|\psi(\xi + i\eta)| \leqq C_N (1 + |\xi + i\eta|)^{-N} e^{R|\eta|} \qquad (\xi, \eta \in \Lambda)$$

where C_N is a constant.

This is the analog of the classical Paley-Wiener theorem (see e.g. [10], p. 21) and is an immediate consequence of this theorem combined with (9) § 4 and Theorem 5.5.

Remarks. For the spaces G/K of constant negative curvature, Theorem 5.5 (ii) was proved by TAKAHASHI [14], p. 330. For the case $G = \boldsymbol{SL}(2, \boldsymbol{R})$, $K = \boldsymbol{SO}(2)$, the analogue of the Paley-Wiener theorem was proved by EHRENPREIS and MAUTNER [3]. If G is complex, Cor. 5.6 gives nothing really new because then the Fourier transform is, due to the formula for the spherical function, so closely related to the Euclidean Fourier transform.

References

[1] BHANU MURTHY, T. S.: Plancherel's measure for the factor space $\boldsymbol{SL}(n, \boldsymbol{R})/\boldsymbol{SO}(n, \boldsymbol{R})$. Doklady Akad. Nauk SSSR **133**, 503—506 (1960).

[2] — The assymptotic behavior of zonal spherical functions on the Siegel upper half-plane. Doklady Akad. Nauk SSSR **135**, 1027—1029 (1960).

[3] EHRENPREIS, L., and F. I. MAUTNER: Some properties of the Fourier transform on semi-simple Lie groups, I. Ann. Math. **61**, 406—439 (1955); II. Trans. Am. Math. Soc. **84**, 1—55 (1957).

[4] GINDIKIN, S. G., and F. I. KARPELEVIČ: Plancherel measure of Riemannian symmetric spaces of nonpositive curvature. Doklady Akad. Nauk SSSR **145**, 252—255 (1962).

[5] HARISH-CHANDRA: Spherical functions on a semisimple Lie group, I, II. Am. J. Math. **80**, 241—310, 553—613 (1958).
[6] — Some results on differential equations and their applications. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **45**, 1763—1764 (1959).
[7] HELGASON, S.: Differential geometry and symmetric spaces. New York: Academic Press 1962.
[8] — Duality and Radon transform for symmetric spaces. Am. J. Math. **85**, 667—692 (1963).
[9] — Fundamental solutions of invariant differential operators on symmetric spaces. Am. J. Math. **86**, 565—601 (1964).
[10] HÖRMANDER, L.: Linear partial differential operators. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1963.
[11] MAGNUS, W., u. R. OBERHETTINGER: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1948.
[12] PALEY, R., and N. WIENER: Fourier transforms in the complex domain. Am. Math. Soc. Colloquium, New York, 1934.
[13] SCHWARTZ, L.: Théorie des Distributions, I, II. Paris: Hermann 1950, 1951.
[14] TAKAHASHI, R.: Sur les répresentations unitaires des groupes de Lorentz généralisés. Bull. Soc. Math. France **91**, 289—433 (1963).
[15] TITCHMARSH, E. C.: The theory of functions. 2nd edition. Oxford University Press 1939.

Professor S. HELGASON
The Institute for Advanced Study
Princeton, N. J.

(Received January 29, 1965)

HELGASON, S.
Math. Annalen 165, 309—317 (1966)

Totally Geodesic Spheres in Compact Symmetric Spaces*

SIGURDUR HELGASON

§ 1. Introduction

Let M be a compact, irreducible Riemannian globally symmetric space, $I_o(M)$ the largest connected group of isometries of M. As customary, let the Riemannian structure of M be that induced by the negative of the Killing form of the Lie algebra of $I_o(M)$. Let κ be the maximum of the sectional curvatures of M whose values are then restricted to the interval $[0, \kappa]$. By a theorem of E. CARTAN, the maximum dimensional totally geodesic submanifolds of M of constant curvature 0 are all conjugate under $I_o(M)$. In this paper we shall prove an analogous statement for the maximal curvature κ.

Theorem 1.1. *The space M contains totally geodesic submanifolds of constant curvature κ. Any two such submanifolds of the same dimension are conjugate under $I_o(M)$. The maximal dimension of such submanifolds is $1 + m(\bar{\delta})$ where $m(\bar{\delta})$ is the multiplicity of the highest restricted root $\bar{\delta}$* (see § 2). *Also, $\kappa = \|\bar{\delta}\|^2$, where $\| \ \|$ denotes length.*

Remark. Except for the case when M is a real projective space the submanifolds above of dimension $1 + m(\bar{\delta})$ are actually spheres.

During the proof of Theorem 1.1 we shall obtain the following result:

Theorem 1.2. *Assume that the space M above is simply connected. Then the closed geodesics in M of minimal length are permuted transitively by $I_o(M)$. The minimum length is $2\pi/\|\bar{\delta}\|$.*

For Grassmann manifolds a result like Theorem 1.2 is proved and applied by ELÍASSON [3] in a study of closed geodesics on manifolds homeomorphic to Grassmann manifolds. Certain totally geodesic spheres in Grassmann manifolds have been studied by WOLF [6], [7]. See also RAUCH [8].

Notation. We shall use the customary notation $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{R}$, and $\boldsymbol{C}$ for the integers, real numbers and complex numbers, respectively. Lie groups are denoted by capital Roman letters and their Lie algebras by the corresponding lower case German letters. The adjoint representation of a Lie group (resp. Lie algebra) is denoted Ad (resp. ad). If N is a manifold, p a point in N then N_p denotes the tangent space to N at p.

* Work supported in part by the National Science Foundation, NSF GP-2600.

§ 2. Root space decompositions

Let $\mathfrak{u}$ be a compact semisimple Lie algebra over $\boldsymbol{R}$, θ an involutive automorphism of $\mathfrak{u}$. Let $\mathfrak{u}^c$ be the complexification of $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{g}$ the real form of $\mathfrak{u}^c$ corresponding to $(\mathfrak{u}, \theta)$, that is $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$, where $\mathfrak{k}=\{T\in\mathfrak{u}|\theta T=T\}$ and $\mathfrak{p}=\{iX|X\in\mathfrak{u},\ \theta X=-X\}$. Then $\mathfrak{u}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}_*$, where $\mathfrak{p}_*=i\mathfrak{p}$. Let $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}$ be a maximal abelian subspace, put $\mathfrak{a}_*=i\mathfrak{a}$ and extend $\mathfrak{a}_*$ to a maximal abelian subalgebra $\mathfrak{t}$ of $\mathfrak{u}$. Then the complexification $\mathfrak{t}^c\subset\mathfrak{u}^c$ is a Cartan subalgebra of $\mathfrak{u}^c$. Let Δ denote the corresponding system of nonzero roots, $\Delta_\mathfrak{p}$ the set of $\alpha\in\Delta$ which do not vanish identically on $\mathfrak{a}^c$ (the complexification of $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{u}^c$). Let Σ denote the set of restrictions of elements of $\Delta_\mathfrak{p}$ to $\mathfrak{a}^c$; its elements are called restricted roots. Let $\mathfrak{t}_\mathfrak{k}=\mathfrak{k}\cap\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_{\mathfrak{k}_*}=i\mathfrak{t}_\mathfrak{k}$. Then all $\alpha\in\Delta$ take real values on $\mathfrak{a}+\mathfrak{t}_{\mathfrak{k}_*}$. Select compatible orderings in the dual spaces of $\mathfrak{a}+\mathfrak{t}_{\mathfrak{k}_*}$ and $\mathfrak{a}$ and let Δ^+ and Σ^+ denote the set of positive elements in Δ and Σ, respectively. If f is a function on $\mathfrak{t}^c$ its restriction to $\mathfrak{a}^c$ is denoted $\bar{f}$. For each $\lambda\in\Sigma$ the number of $\alpha\in\Delta_\mathfrak{p}$ such that $\lambda=\bar{\alpha}$ is called the multiplicity of λ and is denoted by $m(\lambda)$.

For each linear form λ on $\mathfrak{a}^c$ put

$$\mathfrak{k}_\lambda=\{T\in\mathfrak{k}|(\mathrm{ad}H)^2T=\lambda(H)^2T \quad \text{for all} \quad H\in\mathfrak{a}_*\}$$
$$\mathfrak{p}_\lambda=\{X\in\mathfrak{p}_*|(\mathrm{ad}H)^2X=\lambda(H)^2X \quad \text{for all} \quad H\in\mathfrak{a}_*\}.$$

Then $\mathfrak{k}_\lambda=\mathfrak{k}_{-\lambda}$, $\mathfrak{p}_\lambda=\mathfrak{p}_{-\lambda}$ and $\mathfrak{k}_o$ and $\mathfrak{p}_o$ are the centralizers of $\mathfrak{a}_*$ in $\mathfrak{k}$ and $\mathfrak{p}_*$, respectively. The endomorphisms $(\mathrm{ad}H)^2$ $(H\in\mathfrak{a}_*)$ commute and are symmetric with respect to the Killing form B of $\mathfrak{u}^c$. But the eigenvalues of $(\mathrm{ad}H)^2$ are 0 and $\lambda(H)^2$ $(\lambda\in\Sigma)$ (cf. [4], p. 248). It follows that

$$\mathfrak{k}_\lambda=\mathfrak{p}_\lambda=\{0\} \quad \text{if} \quad \lambda\notin\Sigma\cup\{0\}$$

and that we have the direct decompositions

$$\mathfrak{k}=\mathfrak{k}_o+\sum_{\lambda\in\Sigma^+}\mathfrak{k}_\lambda, \tag{1}$$

$$\mathfrak{p}_*=\mathfrak{p}_o+\sum_{\lambda\in\Sigma^+}\mathfrak{p}_\lambda. \tag{2}$$

For each $\alpha\in\Delta$ select $X_\alpha\neq 0$ in $\mathfrak{u}^c$ such that $[H, X_\alpha]=\alpha(H)X_\alpha$ for all $H\in\mathfrak{t}^c$. Extend θ to an automorphism of $\mathfrak{u}^c$, also denoted θ, and let

$$\mathfrak{u}^+(\alpha)=\boldsymbol{C}(X_\alpha+\theta X_\alpha),\ \mathfrak{u}^-(\alpha)=\boldsymbol{C}(X_\alpha-\theta X_\alpha).$$

Then we have for $\lambda\in\Sigma$ (cf. Lemma 3.6, Ch. VI in [4])

$$\mathfrak{k}_\lambda+i\mathfrak{k}_\lambda=\sum_{\bar{\alpha}=\lambda}\mathfrak{u}^+(\alpha),\quad \mathfrak{p}_\lambda+i\mathfrak{p}_\lambda=\sum_{\bar{\alpha}=\lambda}\mathfrak{u}^-(\alpha). \tag{3}$$

Since λ is real on $\mathfrak{a}$, the two right hand sides in (3) are invariant under the conjugation of $\mathfrak{u}^c$ with respect to $\mathfrak{g}$, so

$$\mathfrak{k}_\lambda=\mathfrak{k}\cap\sum_{\bar{\alpha}=\lambda}\mathfrak{u}^+(\alpha),\quad \mathfrak{p}_\lambda=\mathfrak{p}_*\cap\sum_{\bar{\alpha}=\lambda}\mathfrak{u}^-(\alpha) \tag{4}$$

and

$$\mathfrak{k}_o=\mathfrak{t}_\mathfrak{k}+\mathfrak{k}\cap\sum_{\bar{\alpha}=0}\mathfrak{u}^+(\alpha),\quad \mathfrak{p}_o=\mathfrak{a}_*. \tag{5}$$

Using the well-known commutation relations between the X_α the following two lemmas are obtained from (3), (4), and (5) without difficulty.

Lemma 2.1. *Let* $\lambda, \mu \in \Sigma \cup \{0\}$. *Then*

$$[\mathfrak{k}_\lambda, \mathfrak{p}_\mu] \subset \mathfrak{p}_{\lambda+\mu} + \mathfrak{p}_{\lambda-\mu},$$
$$[\mathfrak{k}_\lambda, \mathfrak{k}_\mu] \subset \mathfrak{k}_{\lambda+\mu} + \mathfrak{k}_{\lambda-\mu},$$
$$[\mathfrak{p}_\lambda, \mathfrak{p}_\mu] \subset \mathfrak{k}_{\lambda+\mu} + \mathfrak{k}_{\lambda-\mu};$$

For each linear function ξ on $\mathfrak{t}^c$ let $H_\xi \in \mathfrak{t}^c$ be determined by $B(H_\xi, H) = \xi(H)$ $(H \in \mathfrak{t}^c)$ and if η is a linear function on $\mathfrak{a}^c$ let $A_\eta \in \mathfrak{a}^c$ be determined by $B(A_\eta, H) = \eta(H)$ for all $H \in \mathfrak{a}^c$. Put $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = B(H_{\xi_1}, H_{\xi_2})$, $\langle \eta_1, \eta_2 \rangle = B(A_{\eta_1}, A_{\eta_2})$ and $|\xi| = |H_\xi| = B(H_\xi, H_\xi)^{1/2}$ if $H_\xi \in i\mathfrak{t}$, $\|\eta\| = \|A_\eta\| = B(A_\eta, A_\eta)^{1/2}$ if $A_\eta \in \mathfrak{a}$. If $\lambda \in \Sigma$ let $\mathfrak{a}_\lambda$ denote the subspace $\boldsymbol{R}iA_\lambda$ of $\mathfrak{a}_*$. If $\alpha \in \Delta$ then $H_\alpha - A_{\bar{\alpha}} \in \mathfrak{t}_{\mathfrak{k}_*}$.

Lemma 2.2. *Let* $\lambda \in \Sigma$. *Then*

$$[\mathfrak{k}_\lambda, \mathfrak{p}_\lambda] \subset \mathfrak{p}_{2\lambda} + \mathfrak{a}_\lambda.$$

Let $W_\mathfrak{t}$ and $W_\mathfrak{a}$ be the Weyl groups of $(\mathfrak{u}, \mathfrak{t})$ and $(\mathfrak{u}, \mathfrak{a}_*)$, respectively. They act on $\mathfrak{t}^c$ and $\mathfrak{a}^c$ as well as on their duals ($sH_\xi = H_{s\xi}$ etc.) The sets Δ and Σ have been ordered. Let $C \subset \mathfrak{a} + \mathfrak{t}_{\mathfrak{k}_*}$ be the Weyl chamber where all $\alpha \in \Delta^+$ take positive values and let $C_\mathfrak{p} \subset \mathfrak{a}$ be the Weyl chamber where all $\lambda \in \Sigma^+$ take positive values. By the compatibility of the orderings, $C_\mathfrak{p} \subset \mathrm{Cl}(C)$, Cl denoting closure.

Lemma 2.3. *Let* $\delta \in \Delta^+$*denote the highest root. Then* $H_\delta \in \mathrm{Cl}(C)$, $A_{\bar{\delta}} \in \mathrm{Cl}(C_\mathfrak{p})$ *and* $A_{\bar{\delta}} \neq 0$.

Proof. Since $W_\mathfrak{t}$ permutes Δ and $W_\mathfrak{a}$ permutes Σ, the two first statements are contained in the general statement that the closed Weyl chamber consists of those elements which dominate their transforms under the Weyl group. Finally $\delta \geqq \alpha$ for all $\alpha \in \Delta$ so, by the compatibility of the orderings, $\bar{\delta} \geqq \lambda$ for all $\lambda \in \Sigma$; hence $\bar{\delta} \neq 0$.

Lemma 2.4. *Let* $\alpha \in \Delta_\mathfrak{p}$. *Then*

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = m \langle \bar{\alpha}, \bar{\alpha} \rangle, \quad \textit{where} \quad m = 1, 2 \text{ or } 4.$$

This is well known (cf. ARAKI [1], p. 6—7) but we give a direct proof. The linear form $\alpha + \theta\alpha$ is 0 on $\mathfrak{a}$; it is not in Δ because then $[X_\alpha, \theta X_\alpha]$ would lie in $\mathfrak{k} + i\mathfrak{k}$, whereas clearly $[X_\alpha, \theta X_\alpha] \subset \mathfrak{p} + i\mathfrak{p}$. If $\alpha + \theta\alpha = 0$ then $m = 1$. If $\alpha + \theta\alpha \neq 0$ then $\alpha + \theta\alpha$ is not a root so the integer $2\langle \theta\alpha, \alpha \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle$ is $\geqq 0$, whence the angle between H_α and $H_{\theta\alpha}$ is 0, $\pi/3$ or $\pi/2$. But

$$A_{\bar{\alpha}} = \frac{1}{2}(H_\alpha - H_{\theta\alpha}) \tag{6}$$

so the lemma follows.

§ 3. Closed geodesics of minimal length. Proof of Theorem 1.2

Preserving the notation of § 2, we assume now that $\mathfrak{u}$ is simple. Let U be the simply connected Lie group with Lie algebra $\mathfrak{u}$, "extend" θ to an automorphism

of U and let K be the group of fixed points of θ. As is well known, K is connected. The negative of the Killing form B of $\mathfrak{u}^c$ induces a Riemannian structure on U/K and on U. Let o denote the point $\{K\}$ in U/K and let Exp denote the Exponential mapping of $\mathfrak{p}_*$ onto U/K.

Let $\gamma(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ be a geodesic in a Riemannian manifold. The geodesic is called *closed* if there exists a number $L > 0$ such that $\gamma(t+L) = \gamma(t)$ for all t. The geodesic is said to be *simply closed* if in addition $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ for $0 < t_1 < t_2 \leqq L$. If $|t|$ is the arc parameter, L is then called the length of the simply closed geodesic.

If a geodesic in the symmetric space U/K intersects itself then since it is an orbit of a one-parameter group of U it is a simply closed geodesic (see e.g. [4], p. 355).

Lemma 3.1. *The shortest, periodic one-parameter subgroups in a simple, simply connected, compact Lie group U have length $4\pi/|\delta|$ and they are all conjugate in U.*

Let $C_* = iC \subset \mathfrak{t}$ and consider the polyhedron $P_* \subset C_*$ given by

$$P_* = \{H \subset \mathfrak{t} | (2\pi i)^{-1}\alpha(H) > 0 (\alpha \in \Delta^+),\ (2\pi i)^{-1}\delta(H) < 1\}.$$

Since U is simply connected, the unit lattice $\mathfrak{t}_e = \{H \in \mathfrak{t} | \exp H = e\}$ satisfies the well-known relation

$$\mathfrak{t}_e \cap \mathrm{Cl}(P_*) = \{0\} \tag{1}$$

([4], p. 264). For $\alpha \in \Delta$ let $\mathfrak{t}_\alpha = \{H \in \mathfrak{t} | \alpha(H) \in 2\pi i \boldsymbol{Z}\}$ and let T_α be the centralizer of $\exp \mathfrak{t}_\alpha$ in U. In view of Lemma 4.5, Ch. VII in [4], T_α contains an element u such that the restriction of $\mathrm{Ad}(u)$ to $\mathfrak{t}$ is the reflection s_α in the hyperplane $\alpha = 0$. It follows that

$$\exp(2H(\alpha)) = e, \tag{2}$$

where $H(\alpha) = 2\pi i H_\alpha / |\alpha|^2$ is the projection of 0 onto the hyperplane $\alpha = 2\pi i$ in $\mathfrak{t}$. Each $H \in \mathfrak{t}_e$ satisfies $\beta(H) \in 2\pi i \boldsymbol{Z}$ for all $\beta \in \Delta$ so it is clear from (1), (2) and Lemma 2.3 that the one-parameter subgroup $t \to \exp(2tH(\delta))$ is periodic and has length $2|H(\delta)|$. Now let $t \to \exp tX$ be any periodic one-parameter subgroup of U of length $\leqq 2|H(\delta)|$, the parameter being fixed such that $\exp t\ X \neq e$ for $0 < t < 1$ and $\exp X = e$. Then for some $u \in U$, $H_1 = \mathrm{Ad}(u)X$ lies in $\mathrm{Cl}(C_*)$ and since $\exp H_1 = e$, $\delta(H_1) = n2\pi i$ where $n \geqq 0$ in $\boldsymbol{Z}$. Since $H_1 \neq 0$ we have $n \neq 0$. Also $n \neq 1$ by (1). But the point $2H(\delta)$ is the only point which minimizes the distance from 0 to the union of the hyperplanes $\delta = n2\pi i (n \geqq 2)$ in $\mathfrak{t}$. Thus $H_1 = 2H(\delta)$ and the lemma is proved.

We can now prove Theorem 1.2 for the space U/K. First observe that if $H \in \mathfrak{a}_*$ then $\mathrm{Exp} H = o$ if and only if $\exp 2H = e$. Let $A(\overline{\alpha}) = \pi i A_{\overline{\alpha}} / \|\overline{\alpha}\|^2$, $(\alpha \in \Delta_\mathfrak{p})$, and let us verify the relation

$$\mathrm{Exp}(2A(\overline{\alpha})) = o. \tag{3}$$

Let $|\alpha|^2 = m\|\overline{\alpha}\|^2$, so by Lemma 2.4, $m = 1, 2, 4$. In the first case, $H_\alpha = A_{\overline{\alpha}}$ and (3) reduces to (2). In the cases $m = 2, 4$ we use $iH_\alpha - iA_{\overline{\alpha}} \in \mathfrak{k}$, so by (2),

$$\exp(2\pi i A_{\overline{\alpha}} / \|\overline{\alpha}\|^2) \in \exp(2\pi i H_\alpha / \|\overline{\alpha}\|^2) K = K,$$

proving (3). In particular $4A(\bar{\delta}) \in \mathfrak{t}_e$, and since $\delta(4A(\bar{\delta})) = 4\pi i$ and $4A(\bar{\delta}) \in \mathrm{Cl}(C_*)$ we have by (1), $4tA(\bar{\delta}) \notin \mathfrak{t}_e$ for $0 < t < 1$. Consequently the geodesic

$$t \to \mathrm{Exp}(2tA(\bar{\delta})) \tag{4}$$

is simply closed and has length $2\|A(\bar{\delta})\| = 2\pi/\|\bar{\delta}\|$.

Now let $t \to \mathrm{Exp} tX$ be any simply closed geodesic of length $\leqq 2\pi/\|\bar{\delta}\|$ such that $\mathrm{Exp} X = o$, $\mathrm{Exp} t_1 X \neq \mathrm{Exp} t_2 X$ for $0 < t_1 < t_2 \leqq 1$. Select $k \in K$ such that $H = \mathrm{Ad}_U(k)X \in \mathrm{Cl}(C_{\mathfrak{p}_*})$ where $C_{\mathfrak{p}_*} = iC_{\mathfrak{p}}$. Then $2H \in \mathfrak{t}_e$ so

$$\delta(H) = m\pi i,$$

where $m \geqq 0$ in $\boldsymbol{Z}$. But $H \neq 0$ so $m \neq 0$ and $m \neq 1$ because of (1). But the point $2A(\bar{\delta})$ is the only point which minimizes the distance from 0 to the union of the hyperplanes $\bar{\delta} = m\pi i (m \geqq 2)$ in $\mathfrak{a}_*$. Thus $H = 2A(\bar{\delta})$ and Theorem 1.2 is proved for the space U/K.

In order to complete the proof of Theorem 1.2 we must consider the group U as a symmetric space $U \times U/U^*$ ($U^* =$ diagonal in $U \times U$) with Riemannian structure Q^* defined by the Killing form B^* of $\mathfrak{u} \times \mathfrak{u}$, the identification being made via the mapping $\tau : (u_1, u_2)U^* \to u_1 u_2^{-1}$ ($u_1, u_2 \in U$). The tangent space to $U \times U/U^*$ at o is according to the usual identification given by the orthogonal complement of the Lie algebra of U^* in $\mathfrak{u} \times \mathfrak{u}$, hence equals the space $\{(X, -X) | X \in \mathfrak{u}\}$. Since

$$B^*((X, -X), (Y, -Y)) = 2B(X, Y) \qquad X, Y \in \mathfrak{u} \tag{5}$$

and since $d\tau_o(X, -X) = 2X$ it is clear that for each tangent vector Z to $U \times U/U^*$,

$$2Q^*(Z, Z) = Q(d\tau(Z), d\tau(Z)). \tag{6}$$

Here Q is the Riemannian structure on U defined by B. The space $\{(H, -H) | H \in \mathfrak{t}\}$ is a maximal abelian subspace of the tangent space above and is contained in the Cartan subalgebra $\mathfrak{t} \times \mathfrak{t}$ of $\mathfrak{u} \times \mathfrak{u}$. The roots of $(\mathfrak{u} \times \mathfrak{u})^c$ with respect to $(\mathfrak{t} \times \mathfrak{t})^c$ are given by the linear forms

$$(H_1, H_2) \to \alpha(H_1), \quad (H_1, H_2) \to \alpha(H_2) \quad (H_1, H_2 \in \mathfrak{t}^c)$$

as α runs through the roots of $\mathfrak{u}^c$ with respect to $\mathfrak{t}^c$. The highest restricted root, say $\tilde{\delta}$, is given by $\tilde{\delta}(H, -H) = \delta(H)$ ($H \in \mathfrak{t}$) and by (5) we find $A_{\tilde{\delta}} = (\frac{1}{2}H_\delta, -\frac{1}{2}H_\delta)$ and $2\|\tilde{\delta}\|^2 = |\delta|^2$. In the Riemannian structure Q^* the one-parameter subgroups from Lemma 3.1 have length $2\pi\sqrt{2}/|\delta|$ which equals $2\pi/\|\tilde{\delta}\|$. This concludes the proof of Theorem 1.2.

We note some simple consequences of the proof. First we have from (2) and (3),

Corollary 3.2. *Let $\alpha \in \Delta$. Then $|\alpha| \leqq |\delta|$ and $\|\bar{\alpha}\| \leqq \|\bar{\delta}\|$.*

Corollary 3.3. *Suppose $\alpha \in \Delta$ and $\bar{\alpha} \neq \pm\bar{\delta}$. Then*

$$2\frac{\langle \bar{\alpha}, \bar{\delta} \rangle}{\langle \bar{\delta}, \bar{\delta} \rangle} = 0 \text{ or } \pm 1$$

so the value is 0 if $2\bar{\alpha} \in \Sigma$.

In fact, $\delta(A(\bar{\delta}))=\pi i$ and by (3), $\alpha(A(\bar{\delta}))=\frac{1}{2}\pi i n$ where $n\in \boldsymbol{Z}$. But $\delta-\alpha$ is a positive integral linear combination of the simple roots in Δ^+, so $n=0$, ± 1, ± 2. But if $n=\pm 2$ we deduce from Cor. 3.2 that $\bar{\alpha}=\pm\bar{\delta}$.

Let M be as in Theorem 1.2. For each $p\in M$ let A_p denote the set of midpoints of closed geodesics of minimal length passing through p. We call A_p the *midpoint locus* (associated with p).

Corollary 3.4. *For each $p\in M$ the midpoint locus[1] A_p is a totally geodesic submanifold of M and is an orbit of the isotropy subgroup of $I_o(M)$ at p.*

In fact let $q\in A_p$. Then the geodesic symmetry of M with respect to q leaves p fixed and consequently maps A_p into itself. In addition to Theorem 1.2 we now need the following more general lemma whose proof is contained in the proof of Prop. 5.1 in [5].

Lemma 3.5. *Let Q be a Riemannian globally symmetric space, N a submanifold of Q such that for each $n\in N$, N is invariant under the geodesic symmetry of Q with respect to n. Then N, with the Riemannian structure induced by Q, is totally geodesic in Q.*

We conclude this section with a further description of the midpoint locus and the space of closed geodesics of minimal length.

For $\varepsilon=0$, $1/2$, 1, put

$$\mathfrak{k}(\varepsilon)=\sum_{\langle\lambda,\bar{\delta}\rangle=\varepsilon\langle\bar{\delta},\bar{\delta}\rangle}\mathfrak{k}_\lambda;\quad \mathfrak{p}(\varepsilon)=\sum_{\langle\lambda,\bar{\delta}\rangle=\varepsilon\langle\bar{\delta},\bar{\delta}\rangle}\mathfrak{p}_\lambda.$$

Then by Cor. 3.3, $\mathfrak{k}(1)=\mathfrak{k}_{\bar{\delta}}$, $\mathfrak{p}(1)=\mathfrak{p}_{\bar{\delta}}$ and

$$\mathfrak{k}=\mathfrak{k}_o+\mathfrak{k}(0)+\mathfrak{k}\left(\frac{1}{2}\right)+\mathfrak{k}(1),\quad \mathfrak{p}_*=\mathfrak{p}_o+\mathfrak{p}(0)+\mathfrak{p}\left(\frac{1}{2}\right)+\mathfrak{p}(1).$$

Proposition 3.6. *Let S and S', respectively, denote the centralizers of $\exp 2A(\bar{\delta})$ and $A(\bar{\delta})$ in K. Their respective Lie algebras are given by*

$$\mathfrak{s}=\mathfrak{k}_o+\mathfrak{k}(0)+\mathfrak{k}_{\bar{\delta}},\quad \mathfrak{s}'=\mathfrak{k}_o+\mathfrak{k}(0). \tag{7}$$

In the space U/K the midpoint locus A_o can be identified with K/S and the space of closed geodesics of minimal length is identified with U/S'. Let $o'=\operatorname{Exp}A(\bar{\delta})$; then

$$A_{o'}=\operatorname{Exp}\mathfrak{p}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Proof. The relations (7) are immediate. Using θ one finds that an element $k\in K$ commutes with $\exp 2A(\bar{\delta})$ if and only if k leaves the point $\operatorname{Exp}A(\bar{\delta})$ fixed. Hence $A_o=K/S$; the identification of U/S' is also immediate. Finally

$$A_{o'}=\exp(-A(\bar{\delta}))K\exp A(\bar{\delta})\cdot o.$$

If $T\in\mathfrak{k}$ it is clear that

$$\operatorname{Ad}_U(\exp(-A(\bar{\delta})))T\equiv-\sinh(\operatorname{ad}(A(\bar{\delta})))T \pmod{\mathfrak{k}}$$

[1] This leads to a natural definition of the Radon transform for M, generalizing the one given in [5].

so the curve

$$t \to \exp(-A(\bar{\delta}))\exp tT\exp(A(\bar{\delta}))\cdot o$$

has tangent vector $-\sinh(\mathrm{ad}A(\bar{\delta}))T$ at $t=0$. But

$$\sinh(\mathrm{ad}A(\bar{\delta}))\mathfrak{k} = \mathfrak{p}\left(\frac{1}{2}\right).$$

which finishes the proof.

§ 4. Totally geodesic spheres. Proof of Theorem 1.1

In order to compute the maximal curvature κ for the space U/K from § 3 it suffices to consider plane sections $\subset \mathfrak{p}_*$ spanned by orthonormal vectors H, X where $H \in C_{\mathfrak{p}_*}$. The corresponding curvature is then given by a formula of Cartan (cf. [4], p. 205) as

$$B((\mathrm{ad}H)^2 X, X). \tag{1}$$

Decomposing X by (2) § 2,

$$X = X_o + \sum_{\lambda \in \Sigma^+} X_\lambda$$

we have

$$B((\mathrm{ad}H)^2 X, X) = \sum_{\lambda \in \Sigma^+} \lambda(H)^2 B(X_\lambda, X_\lambda) \leqq \delta(H)^2$$

so $\kappa \leqq \|\bar{\delta}\|^2$.

Now since $2\bar{\delta}$ is not a restricted root it is easily seen from Lemmas 2.1 and 2.2 that the subspace $\mathfrak{a}_{\bar{\delta}} + \mathfrak{p}_{\bar{\delta}}$ of $\mathfrak{p}_*$ is a Lie triple system. Let S and $\mathfrak{s}$ be as in Prop. 3.6. If $\lambda \in \Sigma^+$ such that $\langle \lambda, \bar{\delta} \rangle = 0$ then by Cor. 3.3 neither $\bar{\delta} + \lambda$ nor $\bar{\delta} - \lambda$ is a restricted root. Hence by (7) § 3 and Lemmas 2.1 and 2.2,

$$[\mathfrak{s}, \mathfrak{a}_{\bar{\delta}}] = \mathfrak{p}_{\bar{\delta}}, \quad [\mathfrak{s}, \mathfrak{p}_{\bar{\delta}}] = \mathfrak{a}_{\bar{\delta}} + \mathfrak{p}_{\bar{\delta}}. \tag{2}$$

Since $\mathfrak{a}_{\bar{\delta}}$ is a maximal abelian subspace of $\mathfrak{a}_{\bar{\delta}} + \mathfrak{p}_{\bar{\delta}}$, the globally symmetric space $M_\delta = \mathrm{Exp}(\mathfrak{a}_{\bar{\delta}} + \mathfrak{p}_{\bar{\delta}})$ has rank one. If H, X are orthonormal vectors, $H \in \mathfrak{a}_{\bar{\delta}}$, $X \in \mathfrak{p}_{\bar{\delta}}$, the corresponding sectional curvature of M_δ is by (1) equal to $\|\bar{\delta}\|^2$. It follows that $\kappa = \|\bar{\delta}\|^2$ and that M_δ has constant curvature. Let S_o denote the identity component of S. Since $[\mathfrak{s}, \mathfrak{a}_{\bar{\delta}}] = \mathfrak{p}_{\bar{\delta}}$ it is clear that the orbit $\mathrm{Ad}_U(S_o)\cdot A(\bar{\delta})$ is the sphere in $\mathfrak{a}_{\bar{\delta}} + \mathfrak{p}_{\bar{\delta}}$ with center 0, passing through $A(\bar{\delta})$. Since all $s \in S_o$ leave $\mathrm{Exp}A(\bar{\delta})$ fixed all geodesics in M_δ through o pass through $o' = \mathrm{Exp}A(\bar{\delta})$. Hence $M_\delta - o'$ is the diffeomorphic image of a ball ([4], p. 356) so M_δ is simply connected, thus a sphere.

Now since the geodesic symmetry $s_{o'}$ of U/K leaves o fixed it is clear that any geodesic segment of minimum length joining o and o' is a part of a closed geodesic of length $\leqq 2\pi/\|\bar{\delta}\|$. By Theorem 1.2 it is a simply closed geodesic of length $2\pi/\|\bar{\delta}\|$. The closed geodesics of this length, starting at o, and passing through o' are permuted transitively by S, hence form finitely many distinct spheres Σ_i of dimension $1 + m(\bar{\delta})$, namely the images of M_δ under S. Let σ_i denote the unit sphere in the tangent space $(\Sigma_i)_o$. Each σ_i is an orbit of

$\mathrm{Ad}_U(S_o)$ so any two different σ_i are disjoint. Now let Σ be any totally geodesic sphere in U/K of curvature $\|\bar{\delta}\|^2$. Using a motion $u \in U$ we may assume that Σ passes through o and o'. Then the unit sphere σ in the tangent space $(\Sigma)_o$ is contained in the union of the σ_i. But σ is connected so it is contained in a single σ_i. Hence there exists an element $s \in S$ such that $s \cdot \Sigma \subset M_\delta$.

Next we observe that

$$\mathfrak{s} \supset [\mathfrak{a}_{\bar{\delta}} + \mathfrak{p}_{\bar{\delta}},\ \mathfrak{a}_{\bar{\delta}} + \mathfrak{p}_{\bar{\delta}}] .$$

The right hand side of this relation is a Lie algebra $\mathfrak{k}'$ contained in $\mathfrak{k}$ and $\mathrm{ad}_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{k}')$ restricted to $\mathfrak{a}_{\bar{\delta}} + \mathfrak{p}_{\bar{\delta}}$ is the Lie algebra of the special orthogonal group of the tangent space $(M_\delta)_o$. It follows that this group is contained in the restriction of $\mathrm{Ad}_U(S_o)$ to $(M_\delta)_o$. Thus any two totally geodesic spheres of the same dimension, contained in M_δ, are conjugate under a member of U; to finish the proof of Theorem 1.1 for the space U/K it remains to verify that any totally geodesic submanifold N of U/K of constant curvature $\|\bar{\delta}\|^2$ is a sphere. But if N were not a sphere it is clear, passing to the universal covering of N, that N would contain a simply closed geodesic of length $< 2\pi/\|\bar{\delta}\|^2$ which is impossible.

If M is any compact Riemannian globally symmetric space such that $I_o(M)$ is simple then Theorem 1.1 can be applied to the universal covering space of M and the theorem follows for M.

Now let us establish the remark following Theorem 1.1 in the case when $I_o(M)$ is simple. Let Z denote the center of U and put

$$K_Z = \{u | u^{-1}\theta(u) \in Z\} .$$

Then U/K_Z is a Riemannian globally symmetric space and any such space, associated with $(\mathfrak{u}, \theta)$, actually covers U/K_Z ([4], Theorem 8.1, Ch. VII). It is appropriate to call U/K_Z the *adjoint space* of the orthogonal symmetric Lie algebra $(\mathfrak{u}, \theta)$ because if its construction (which does not require $\mathfrak{u}$ to be simple) is carried out for the group case $\mathfrak{u} = \mathfrak{v} \times \mathfrak{v}$, θ interchanging the two factors, then one obtains the adjoint group of $\mathfrak{v}$. Under the covering map $\varphi : uK \to uK_Z$ of U/K onto U/K_Z the sphere $\mathrm{Exp}(\mathfrak{a}_{\bar{\delta}} + \mathfrak{p}_{\bar{\delta}})$ is mapped onto a sphere if and only if $\varphi(\mathrm{Exp} A(\bar{\delta})) \neq o$. But $\varphi(\mathrm{Exp} A(\bar{\delta})) = o$ if and only if $\exp A(\bar{\delta}) \in K_Z$, which is equivalent to $\exp 2A(\bar{\delta}) \in Z$, which in turn implies $K = S$. But if $K = S$ then by Prop. 3.6, $\mathfrak{p}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ so

$$\mathfrak{p}_* = \mathfrak{a}_* = \mathfrak{p}_{\bar{\delta}} + \sum_{\langle \lambda, \bar{\delta} \rangle = 0} \mathfrak{p}_\lambda .$$

Thus Σ^+ has the property that all $\lambda \in \Sigma^+ - \{\bar{\delta}\}$ are perpendicular to $\bar{\delta}$. This means $\Sigma^+ = \{\bar{\delta}\}$ so U/K is a sphere and consequently, U/K_Z is a real projective space.

We have now established Theorem 1.1 and the subsequent remark for the case when $I_o(M)$ is simple. The remaining case when M is a group (cf. [4], Prop. 1.2, p. 327) is handled quite similarly. We only indicate the necessary changes.

Suppose U has Riemannian structure given by $-B$. Then if X, Y are orthonormal vectors in $\mathfrak{u}$ the corresponding sectional curvature of U is

$$\frac{1}{4}B((\mathrm{ad}X)^2 Y, Y),$$

and the maximum sectional curvature is readily found to be $\frac{1}{4}|\delta|^2$. However, with the conventions in Theorem 1.1 we must view U as $U \times U/U^*$, whereby the Riemannian structure is multiplied by $\frac{1}{2}$ (cf. (6) § 3). Accordingly all sectional curvatures are multiplied by 2 so $\kappa = 2|\delta|^2/4$ which, as we have seen, equals $\|\tilde{\delta}\|^2$. Since the multiplicity $m(\tilde{\delta})$ now equals 2 the totally geodesic spheres in U of curvature $\|\tilde{\delta}\|^2$ have dimension $\leqq 3$. In the adjoint group U/Z the totally geodesic submanifolds of constant curvature $\|\tilde{\delta}\|^2$ and dimension 3 are spheres unless the point $\exp H(\delta)$ lies in Z. As is well known, $\exp H(\delta) \in Z$ if and only if $\alpha(H(\delta)) \in 2\pi i \boldsymbol{Z}$ for all $\alpha \in \Delta$ (see e.g. [4], p. 268). But in view of Cor. 3.2, $\alpha(H(\delta)) \in 2\pi i \boldsymbol{Z}$ implies that all roots except $\pm\delta$ are orthogonal to δ, which implies $U = \boldsymbol{SU}(2)$ so U/Z is a real projective space.

References

[1] Araki, S.: On root systems and an infinitesimal classification of irreducible symmetric spaces. J. Math. Osaka City Univ. **13**, 1–34 (1962).

[2] Cartan, E.: Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries a groupe fondamental simple. Ann. Sci. École Norm. Sup. **44**, 345–467 (1927).

[3] Elíasson, H.: Über die Anzahl geschlossener Geodätischer in gewissen Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. (to appear).

[4] Helgason, S.: Differential geometry and symmetric spaces. New York: Academic Press, 1962.

[5] — The Radon transform on Euclidean spaces, compact two-point homogeneous spaces and Grassmann manifolds. Acta Math. **113**, 153—180 (1965).

[6] Wolf, J. A.: Geodesic spheres in Grassmann manifolds. Illinois J. Math. **7**, 425–446 (1963).

[7] — Elliptic spaces in Grassmann manifolds. Illinois J. Math. **7**, 447–462 (1963).

[8] Rauch, H. E.: The global study of geodesics in symmetric and nearly symmetric Riemannian manifolds. Comment. Math. Helv. **35**, 111–125 (1961).

Prof. S. Helgason
The Institute for Advanced Study
Princeton, N. J.

(Received January 29, 1965)

PERESSINI, A. L. and D. R. SHERBERT
Math. Annalen 165, 318—332 (1966)

Order Properties of Linear Mappings on Sequence Spaces

A. L. PERESSINI and D. R. SHERBERT

Introduction

Each vector space λ of real sequences has a natural order structure; namely, the order generated by the cone K_λ of sequences $x=(x_i)\in\lambda$ such that $x_i\geqq 0$ for all i. If λ and μ are sequence spaces, their order structures induce an order relation on various classes of linear mappings of λ into μ. Specifically, if S and T are linear mappings of λ into μ, define $S\geqq T$ to mean that $(S-T)$ maps each sequence in K_λ into a sequence in K_μ. The object of this paper is to continue the study initiated in [13] of this order on certain classes of linear mappings. In particular, we shall concern ourselves with the spaces of weakly continuous and order continuous linear mappings on sequence spaces.

Although our primary objective is the study of linear mappings on sequence spaces, we have stated and proved our results in the more general setting of ordered vector spaces whenever possible. Some of the propositions stated specifically for sequence spaces do carry over in some form to the Köthe function spaces introduced by DIEUDONNÉ in [4], but since both the methods and the results are altered substantially in this setting, we shall not include a description of this material here.

For the sake of orientation, we shall now list some of the basic definitions and results concerning sequence spaces. Further details and references on this subject can be found in § 30 of [9] and [3]. Our terminology in ordered vector spaces is standard, hence the basic definitions will not be given here. However, the reader will find the definitions of all order theoretic terms that are not defined in this paper in the introductory section of [11].

Throughout this paper, ω will denote the vector space of all sequences of real numbers with addition and scalar multiplication defined in the usual component-wise fashion. The symbol φ will be used exclusively to denote the linear subspace of ω consisting of those sequences in ω with only a finite number of nonzero components. A *sequence space* is any linear subspace of ω containing φ. If λ is a sequence space, the *Köthe dual* λ^* of λ is the sequence space defined by

$$\lambda^*=\{u=(u_i)\in\omega:\sum_{i=1}^{\infty}|x_iu_i|<+\infty \quad \text{for all} \quad x\in\lambda\}.$$

In general $(\lambda^*)^*\supset\lambda$; if $\lambda^{**}=\lambda$ we say that λ is *perfect*. The pair λ, λ^* is a dual system (in the sense of [9]) for the bilinear form

$$\langle x,u\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}x_iu_i \quad x\in\lambda;u\in\lambda^*.$$

Hence the standard dual system topologies can be defined on λ and λ^*.

We now list several important sequence spaces together with their Köthe duals:

λ	λ^*
$l^p = \{x \in \omega : \sum_{i=1}^{\infty} \lvert x_i \rvert^p < +\infty\}$ $(p \geqq 1)$	l^q where $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
$l^\infty = \{x \in \omega : \sup_i \lvert x_i \rvert < +\infty\}$	l^1
$(c) = \{x \in \omega : \lim_i x_i \text{ exists}\}$	l^1
$(c_0) = \{x \in \omega : \lim_i x_i = 0\}$	l^1
φ	ω
ω	φ

Other interesting examples of sequence spaces arising in summability theory, function theory, etc., can be found in [3] and [9].

A sequence space λ is an ordered vector space for the cone $K_\lambda = \{x = (x_i) \in \lambda : x_i \geqq 0 \text{ for all } i\}$. The dual cone $K'_\lambda = \{u \in \lambda^* : \sum_{i=1}^{\infty} x_i u_i \geqq 0 \text{ for all } x \in K_\lambda\}$ coincides with K_{λ^*}. In [12], we observed that the locally convex topology on a sequence space λ generated by the semi-norms

$$p_u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i u_i| \quad u \in \lambda^*$$

(KÖTHE calls this the *normal topology* in [9]) coincides with the topology on λ of uniform convergence on order bounded sets in λ^*.

If λ and μ are sequence spaces, an infinite matrix $A = (a_{ij})$ is a *matrix transformation* of λ into μ if

(a) $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j$ converges absolutely for each $x = (x_j)$ in λ and each positive integer i.

(b) The equations $y_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j$ define an element $y = (y_i)$ of μ for each $x = (x_j)$ in λ.

If $A = (a_{ij})$ is a matrix transformation of λ into μ, then (b) defines a linear mapping $y = Ax$ of λ into μ. On the other hand, if T is a linear mapping of λ into μ and if there is a matrix transformation $A = (a_{ij})$ of λ into μ such that $Tx = Ax$ for all $x \in \lambda$, then A is unique and we say that T is *represented* by A. If λ is an ideal in ω (that is, $x \in \lambda$ and $|y| \leqq |x|$ imply $y \in \lambda$), an important result essentially due to G. KÖTHE and O. TOEPLITZ identifies the following classes of linear mappings of λ into μ:

(1) The class of all linear mappings of λ into μ that can be represented by a matrix transformation of λ into μ.

(2) The class of all linear mappings of λ into μ that are continuous for the weak topologies $\sigma(\lambda, \lambda^*)$ and $\sigma(\mu, \mu^*)$.

(3) The class of all linear mappings of λ into μ that are sequentially continuous for $\sigma(\lambda, \lambda^*)$ and $\sigma(\mu, \mu^*)$.

The class of mappings characterized by (1), (2), or (3) will be denoted by $L(\lambda, \mu)$. If $A \in L(\lambda, \mu)$, the transpose of the matrix representing A represents the adjoint operator $A^* \in L(\mu^*, \lambda^*)$. (See [13], Proposition (2.1) for some details and references for the preceding results.)

A net $\{y_\alpha\}$ in a vector lattice E *decreases* to y_0 in E if $y_0 = \inf_\alpha y_\alpha$ and if $y_\alpha \leqq y_{\alpha'}$ whenever $\alpha \geqq \alpha'$. A net $\{x_\alpha\}$ in E *order converges* to x_0 in E if there is a net $\{y_\alpha\}$ that decreases to the zero element θ of E such that $|x_\alpha - x_0| \leqq y_\alpha$ for all α. If E and F are vector lattices a linear mapping T of E into F is *order continuous (*resp. *order sequentially continuous)* if it maps each net (resp. each sequence) in E that order converges to θ into a net (resp. sequence) in F that order converges to θ. The collection of all order continuous (resp. sequentially order continuous) linear mappings of E into F will be denoted by $L^o(E, F)$ (resp. $L^{so}(E, F)$). $L^b(E, F)$ will denote the collection of all order bounded linear mappings of E into F. If E is a vector lattice and F is an order complete vector lattice, then $L^b(E, F)$ is an order complete vector lattice. In fact, if $T \in L^b(E, F)$ and x is in the positive cone in E, then the positive part T^+ of T is given by $T^+ x = \sup\{Tz : \theta \leqq z \leqq x\}$. Moreover, if $\mathfrak{M}$ is a directed($\leqq$) majorized subset of $L^b(E, F)$, then the mapping $S = \sup \mathfrak{M}$ is defined for x in the positive cone of E by the formula $Sx = \sup\{Tx : T \in \mathfrak{M}\}$. The remaining lattice theoretic relations described on pg. 36 of [2] for linear functionals are easily verified for linear mappings in $L^b(E, F)$ as well.

Investigations of L. KANTOROVITCH (see [7] and [8]) have shown that the following restrictions on a vector lattice E are particularly significant in the study of the topological properties of order convergence and the order properties of linear mappings:

(A) If A is a subset of E that has a supremum, then there is a countable subset A' of A such that $\sup A' = \sup A$.

(B) If $\{y^{(m,n)}\}$ is a sequence in E that order converges to $y^{(n)} \in E$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, and if $\{y^{(n)}\}$ order converges to $y^{(0)}$ (resp. $\{y^{(n)}\}$ is not majorized in E), there is an increasing sequence $\{m_n : n = 1, 2, \ldots\}$ of positive integers such that $\{y^{(m_n,n)}\}$ order converges to $y^{(0)}$ (resp. $\{y^{(m_n,n)}\}$ is not majorized in E).

(C) If $\{A_n\}$ is a sequence of non-majorized subsets of E, there exist finite subsets A_n' of A_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ such that $\{\sup A_n' : n = 1, 2, \ldots\}$ is not a majorized set.

If E is an order complete vector lattice, then the combination of properties (A) and (B) is equivalent to the requirement that E be regular in the sense of [8] (see [10] for a proof of this equivalence). Though there is no standard terminology in the literature for spaces with properties (A), (B), or (C), we shall say that a space with property (A) is *order separable*, a space with property (B) has the *diagonal property*, and a space with property (C) is *finitely unbounded*, since these terms seem quite suggestive.

In the first section, we shall derive several sufficient conditions for vector lattices to have properties (A), (B), or (C) with particular attention being given to the situation in sequence spaces. We shall also give an order theoretic characterization of the Köthe dual of a sequence space. Some of these results are employed in the concluding section to obtain information about the order structure of the spaces of linear mappings mentioned in this introduction. In particular, we shall obtain two rather strong decomposition theorems for order bounded linear mappings.

§ 1

We shall begin this section with some simple observations concerning the lattice structure of sequence spaces that will be useful in our subsequent considerations.

(1.1) Lemma: *If A is a subset of a sequence space λ and A has a supremum $x^{(0)}$ in λ, then $x_i^{(0)} = \sup\{a_i : a \in A\}$ for each positive integer i.*

Proof. Since A has a supremum in λ, it has a supremum $y^{(0)}$ in ω defined by $y_i^{(0)} = \sup\{a_i : a \in A\}$ and it is clear that $y^{(0)} \leqq x^{(0)}$ since $\lambda \subset \omega$. If $y_i^{(0)} < x_i^{(0)}$ for some i, choose $\varepsilon > 0$ such that $y_i^{(0)} + \varepsilon < x_i^{(0)}$. Then, if $e^{(i)}$ denotes the i^{th} unit vector[1], the element $z^{(0)} = x^{(0)} - \varepsilon e^{(i)}$ is in λ since $\lambda \supset \varphi$. However, $z^{(0)}$ is an upper bound for A and yet $z^{(0)} < x^{(0)}$ contrary to the definition of $x^{(0)}$. We conclude that $y^{(0)} = x^{(0)}$.

(1.2) Corollary: *If a sequence space λ is a vector lattice, a net $\{x^{(\alpha)}\}$ in λ order converges to $x^{(0)} \in \lambda$ if and only if $\{x^{(\alpha)}\}$ is order bounded and $x_i^{(\alpha)}$ converges to $x_i^{(0)}$ for each positive integer i.*

The following result provides a convenient characterization of order complete sequence spaces.

(1.3) Proposition: *If a sequence space λ is a vector lattice, then λ is order complete if and only if it is an ideal in ω.*

Proof. An ideal in an order complete vector lattice is always order complete (see Theorem 2 of Chapter 15 in [1]). On the other hand, suppose λ is order complete, $x \in \lambda$, and $|y| \leqq |x|$. Then $|x| \in \lambda$ since λ is a vector lattice. Define $y^{(n)}$ as follows

$$y_i^{(n)} = \begin{cases} |x_i| & \text{if} \quad i \neq n \\ y_n & \text{if} \quad i = n \end{cases}$$

then $y^{(n)} \in \lambda$ since $\lambda \supset \varphi$, and $y = \inf\{y^{(n)} : n = 1, 2, \ldots\}$ by (1.1).

(1.4) Proposition: *Every sequence space λ is order separable.*

Proof. Suppose that A is a subset of λ that has a supremum $x^{(0)} \in \lambda$, then $x_i^{(0)} = \sup\{a_i : a \in A\}$ for each i by (1.1). For each positive integer i, choose a countable set $\{a^{(i,k)} : k = 1, 2, \ldots\} \subset A$ such that

$$x_i^{(0)} = \sup\{a_i^{(i,k)} : k = 1, 2, \ldots\}.$$

Then $A' = \{a^{(i,k)} : i, k = 1, 2, \ldots\}$ obviously has the property that $\sup A' = \sup A$.

The proof of the following result makes use of a refinement of a construction employed by L. KANTOROVITCH in [8] (see Satz 34). We are able to avoid the

[1] $e^{(i)} = (\delta_{ij} : j = 1, 2, \ldots)$ where δ_{ij} is the Kronecker delta. The symbol $e^{(i)}$ will be used exclusively to denote this sequence throughout this paper.

use of metric functions (see Definition 18 in [8]); in particular, we replace the effect of condition 3(b) for metric functions by a topological condition that is particularly convenient for sequence spaces and Köthe function spaces.

(1.5) Proposition: *If $E(\mathfrak{T})$ is an order complete, monotone complete*[2], *metrizable topological vector lattice with the property*

(*) $\{y^{(n)}\}$ $\mathfrak{T}$*-converges to* θ *whenever* $\{y^{(n)}\}$ *decreases to* θ

then E has the diagonal property.

Proof. Suppose that $\{y^{(n)}\}$ decreases to θ and that $\{y^{(k,n)}\}$ decreases to $y^{(n)}$ for each n. Choose a countable θ-neighborhood basis $\{V_n : n = 1, 2, \ldots\}$ for $\mathfrak{T}$ consisting of open sets such that

$$y^{(n)} \in V_n;\ \overline{V}_{n+1} \subset V_n;\ \theta \leqq x \leqq y \in V_n \quad \text{implies} \quad x \in V_n.$$

Now $\{y^{(k,1)} - y^{(1)}\}$ decreases to θ, hence $\{y^{(k,1)} - y^{(1)}\}$ converges to θ for $\mathfrak{T}$ by (*). Since V_1 is open and $y^{(1)} \in V_1$, there is an integer k_1 such that $y^{(k_1,1)} \in V_1$. Since $y^{(k,2)}$ decreases to $y^{(2)}$ and $\sup\{y^{(k_1,1)}, y^{(k,2)}\}$ decreases to $\sup\{y^{(k_1,1)}, y^{(2)}\} = y^{(k_1,1)}$, there is a $k_2 > k_1$ such that

$$\sup\{y^{(k_1,1)}, y^{(k_2,2)}\} \in V_1,\ y^{(k_2,2)} \in V_2$$

since V_1 and V_2 are open.

Proceeding by induction, using the facts that

$$\sup\{y^{(k_p,p)}, \ldots, y^{(k_{n-1},n-1)}, y^{(k,n)}\}$$

decreases to

$$\sup\{y^{(k_p,p)}, \ldots, y^{(k_{n-1},n-1)}\}$$

for $p = 1, 2, \ldots, n-1$, and that $\{y^{(k,n)}\}$ decreases to $y^{(n)}$; we can find $k_n > k_{n-1}$ such that

$$\sup\{y^{(k_p,p)}, \ldots, y^{(k_n,n)}\} \in V_p \qquad (1 \leqq p \leqq n-1)$$

$$y^{(k_n,n)} \in V_n.$$

Therefore $\sup\{y^{(k_m,m)}, \ldots, y^{(k_{m+p},m+p)}\} \in V_m$ for $m, p = 1, 2, \ldots$.

Define $z^{(n)} = \sup\{y^{(k_1,1)}, \ldots, y^{(k_n,n)}\}$ for $n = 1, 2, \ldots$, then

$$z^{(n+p)} - z^{(n)} \leqq \sup\{y^{(k_n,n)}, \ldots, y^{(k_{n+p},n+p)}\} \in V_n$$

for all p, hence $\{z^{(n)}\}$ is topologically bounded. Since $\{z^{(n)}\}$ is monotone increasing and $E(\mathfrak{T})$ is monotone complete,

$$s_n = \sup\{y^{(k_p,p)} : p \geqq n\}$$

exists in E for each n. Also, since $\sup\{y^{(k_n,n)}, \ldots, y^{(k_{n+p},n+p)}\}$ increases to s_n, it follows from (*) that $s_n \in \overline{V}_n \subset V_{n-1}$. Therefore $\{s_n\}$ converges to θ for $\mathfrak{T}$. But the cone in $E(\mathfrak{T})$ is closed and $\{s_n\}$ is monotone decreasing, hence $\theta = \inf s_n$ (see Proposition 6 on pg. 26 of [2]). We conclude that $\{y^{(k_n,n)}\}$ order converges to θ. The proposition follows.

The preceding result is particularly useful for our purposes since, by virtue of Theorem 3 in [5], each Köthe function space (and therefore each sequence space) is monotone complete for each admissible topology.

[2] Recall that an ordered topological vector space is *monotone complete* if every topologically bounded monotone increasing net has a supremum.

(1.6) Proposition: *If a sequence space λ is a vector lattice, and if λ admits a topology $\mathfrak{T}$ for which $\lambda(\mathfrak{T})$ is a complete metrizable topological vector space such that either the cone in λ is $\mathfrak{T}$-closed or the projections $x \to x_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ are $\mathfrak{T}$-continuous, then λ^* is finitely unbounded.*

Proof. Suppose that $\{E_n : n = 1, 2, \ldots\}$ is a sequence of subsets of λ^* such that each E_n contains θ and is not majorized. Then, for a fixed integer n, one of the following two alternatives must hold:

(a) For some positive integer i, $\{u_i : u \in E_n\}$ is not majorized.

(b) $v_i = \sup\{u_i : u \in E_n\}$ exists for each i, but $v = (v_i) \notin \lambda^*$.

In either case, there exists a finite set $E_n' \subset E_n$ and an $x^{(n)} \in \lambda$ such that $x^{(n)} \geqq \theta$, $d(x^{(n)}, \theta) \leqq 2^{-n}$ [3] and

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{(n)} (\sup E_n')_i \geqq n \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

(In case (a), this is clear; in case (b), we know that there must be an $x^{(n)} \in \lambda$ such that

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^{(n)} v_i = +\infty ; \quad d(x^{(n)}, \theta) \leqq 2^{-n} ; \quad x^{(n)} \geqq \theta$$

by definition of λ^*. Therefore, we can choose an integer N_n such that

$$\sum_{i=1}^{N_n} x_i^{(n)} v_i \geqq 2n .$$

But then there is a finite set $E_n' = \{u^{(j)} : j = 1, \ldots, N_n\} \subset E_n$ such that

$$\sum_{i=1}^{N_n} x_i^{(n)} (\sup E_n')_i \geqq n$$

hence (*) holds.)

The sequence $\left\{ \sum_{n=1}^{k} x^{(n)} : k = 1, 2, \ldots \right\}$ is Cauchy for the metric d, hence there is an $x^{(0)} \in \lambda$ such that

$$x^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{(n)} .$$

If the cone in λ is $\mathfrak{T}$-closed, $x^{(0)} \geqq x^{(n)}$ for each n. Likewise, if the projections $x \to x_i$ are $\mathfrak{T}$-continuous for each i, it would follow that $x_i^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_i^{(n)}$ for each i, hence $x^{(0)} \geqq x^{(n)}$ for each n again.

Suppose that $\{\sup E_n' : n = 1, 2, \ldots\}$ is majorized by some element $u^{(0)} \in \lambda^*$. Then

$$n \leqq \sum_{i=1}^{\infty} (\sup E_n')_i x_i^{(n)} \leqq \sum_{i=1}^{\infty} u_i^{(0)} x_i^{(0)} < +\infty$$

for each n, which is impossible. Since it is no restriction of generality to assume that each E_n contains θ, the proof is complete.

[3] $d(x, y)$ denotes a translation invariant metric generating the topology $\mathfrak{T}$.

Examples of sequence spaces satisfying the hypotheses on λ in (1.6) are: l^p $(p \geqq 1)$, l^∞, (c), (c_0), ω. It follows that the Köthe duals of all these spaces are finitely unbounded. Consideration of the collection $\{E_n\}$ defined by

$$E_n = \{ke^{(n)} : k = 1, 2, \ldots\} \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

shows that ω is not finitely unbounded, hence φ does not admit a topology of the sort described in the proposition.

In [8], Satz 25, KANTOROVITCH proves that in every finitely unbounded, order complete vector lattice the following criterion for order boundedness is valid: A subset B is order bounded if $\{\alpha_n x_n\}$ order converges to θ whenever $\{\alpha_n\}$ is a sequence of real numbers decreasing to 0 and $x_n \in B$. Spaces for which this criterion is valid are said to have the *boundedness property*. Observe that if B is an order bounded subset of an order complete vector lattice, it is always true that $\{\alpha_n x_n\}$ order converges to θ whenever $\{\alpha_n\}$ decreases to 0 and $x_n \in B$ since order complete vector lattices are archimedean. Thus the above criterion is actually a characterization of order boundedness in spaces with the boundedness property. Proposition (1.6) proves that each sequence space of the sort described in the hypothesis has the boundedness property for its Köthe dual; moreover, the following result is also valid.

(1.7) Proposition: *Each perfect sequence space λ has the boundedness property.*

Proof. Since λ is perfect, we can write

$$\lambda = \cap\{\lambda_u : u \in \lambda^*, u \geqq \theta\}$$

where each λ_u is linear and order isomorphic to $l^1 \times \omega$, l^1 or ω ([9], § 30). Since ω and l^1 can easily be shown to have the boundedness property, each λ_u has this property also.

Now suppose that B is a subset of λ with the property that $\{\alpha_n x^{(n)}\}$ order converges to θ whenever $\{\alpha_n\}$ decreases to 0 and $x^{(n)} \in B$. Then $B \subset \lambda_u$ for each $u \geqq \theta$, $u \in \lambda^*$, and B retains the stated property in λ_u. Therefore, since λ_u has the boundedness property, there is a $y^{(u)} \geqq \theta$ in λ_u such that $B \subset [-y^{(u)}, y^{(u)}]$. For each i, define $y_i = \inf\{y_i^{(u)} : u \in \lambda^*, u \geqq \theta\}$. Then since B is contained in the order intervals $[-y^{(u)}, y^{(u)}]$ in ω for each $u \in \lambda$, $u \geqq \theta$, it follows that B is contained in the order interval $[-y, y]$ in ω. If we can show that $y \in \lambda$, it will follow that B is order bounded in λ. To prove this, suppose $u \in \lambda^*$, $u \geqq \theta$. Then

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i u_i \leqq \sum_{i=1}^{\infty} y_i^{(u)} u_i < +\infty ,$$

hence $y \in (\lambda^*)^* = \lambda$.

Another sufficient condition for order complete vector lattices to have the boundedness property is provided by the following result.

(1.8) Proposition: *Suppose that E is a vector lattice whose cone contains a countable exhausting subset. Then E has the boundedness property.*

Proof. Suppose that B is a subset of E that is not order bounded but that $\{\alpha_n x_n\}$ order converges to θ whenever $\{\alpha_n\}$ decreases to 0 and $x_n \in B$. Suppose

that $H=\{h_n : n=1, 2, \ldots\}$ is a countable exhausting subset of the cone in E. We can assume that H is an increasing sequence since E is a vector lattice. Since B is not order bounded, there exist $x_n \in B$ such that $x_n \notin n^2[-h_n, h_n]$ $(n=1, 2, \ldots)$. Now $\left\{\frac{1}{n} x_n\right\}$ order converges to θ by assumption, hence this sequence is order bounded. Therefore, there exist integers n_0, m_0 with $m_0 > n_0$ such that

$$\frac{1}{n} x_n \in m_0[-h_{n_0}, h_{n_0}] \qquad n=1, 2, \ldots .$$

Since H is an increasing sequence, $\frac{1}{m_0} x_{m_0} \in m_0[-h_{m_0}, h_{m_0}]$ contrary to the choice of x_{m_0}. We conclude that B must be order bounded.

We shall now conclude this section with an order theoretic description of the Köthe dual of a sequence space that will be useful in obtaining a corresponding characterization of the space of weakly continuous linear mappings on sequence spaces.

(1.9) Proposition: *If a sequence space λ is an ideal in ω, the following assertions concerning a linear functional f on λ are equivalent:*

(a) *There is a unique $u \in \lambda^*$ such that $f(x) = \langle x, u\rangle$ for all $x \in \lambda$.*

(b) *f is order continuous.*

(c) *f is order sequentially continuous.*

Proof. If (a) is satisfied, then to show that u defines an order continuous linear form on λ, it is sufficient to show that $\{|u|(y^{(\alpha)})\}$ converges to 0 whenever $\{y^{(\alpha)}\}$ is a net decreasing to θ. Now for any positive integer N we have

$$|u|(y^{(\alpha)}) = \sum_{i=1}^{N} |u_i| y_i^{(\alpha)} + \sum_{i=N+1}^{\infty} |u_i| y_i^{(\alpha)} .$$

For a given $\varepsilon > 0$ and a given index α_0, choose N_0 so that

$$(*) \qquad \sum_{i=N_0+1}^{\infty} |u_i| y_i^{(\alpha_0)} < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Then (*) holds for all $\alpha \geqq \alpha_0$ since $\{y^{(\alpha)}\}$ is monotone decreasing. Also, the net $\{|u_i| y^{(\alpha)}\}$ tends to 0 for each i; hence for some $\alpha_1 \geqq \alpha_0$, we have

$$(**) \qquad \sum_{i=1}^{N_0} |u_i| y_i^{(\alpha_1)} < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Combining (*) and (**), we conclude that $\{|u|(y^{(\alpha)})\}$ converges to 0 since ε was an arbitrary positive number.

Obviously (b) implies (c). To prove that (c) implies (a), define $u_i = f(e^{(i)})$ $(i=1, 2, \ldots)$. Then, if $x \in \lambda$ and $x^{(n)}$ denotes the n^{th} section of x (that is, $x_i^{(n)} = x_i$ for $i \leqq n$; $x_i^{(n)} = 0$ for $i > n$), we have

$$f(x^{(n)}) = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \qquad n=1, 2, \ldots .$$

But $\{x^{(n)}\}$ order converges to x since

$$|x - x^{(n)}|_i = \begin{cases} 0 & \text{if } i \leqq n \\ |x_i| & \text{if } i > n \end{cases}$$

Hence $\{f(x^{(n)})\}$ converges to $f(x)$, that is, the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_i x_i$$

converges for each $x \in \lambda$. Since λ is an ideal in ω, this convergence is absolute, hence $u \in \lambda^*$. The uniqueness of u is obvious.

§ 2

Throughout this section, the domains and counter-domains of the linear mappings under consideration will always be assumed to be order complete vector lattices.

(2.1) Proposition: *If λ and μ are sequence spaces, then $L^{so}(\lambda, \mu) \subset L(\lambda, \mu)$.*

Proof. Suppose that $A \in L^{so}(\lambda, \mu)$ and define $A(e^{(k)}) = (a_{ik} : i = 1, 2, \ldots) \in \mu$. We shall show that (a_{ik}) is a matrix transformation of λ into μ that represents A. If $x \in \lambda$ and $\{x^{(n)}\}$ is the sequence of sections of x, then $\{x^{(n)}\}$ order converges to x as we have seen in the proof of (1.9). Therefore $\{Ax^{(n)}\}$ order converges to Ax. But order convergence implies component convergence, hence

$$(Ax^{(n)})_i = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k A(e^{(k)}) \right)_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \to (Ax)_i$$

for each i; that is, $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k$ converges for each $x \in \lambda$ and each i. Since λ is an ideal in ω, it follows that this convergence is absolute. Also $(Ax)_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k$ for each i. Hence (a_{ik}) is a matrix transformation of λ into μ that represents A. We conclude that $A \in L(\lambda, \mu)$.

The following result is essentially due to L. KANTOROVITCH (see the proof of Theorem 8 in [7]), but we shall repeat the short proof here.

(2.2) Proposition: *If F has the boundedness property, then $L^{so}(E, F) \subset L^b(E, F)$.*

Proof. Suppose $[-x, x]$ is a given order interval in E, that $T \in L^{so}(E, F)$, and that $\{Tx_n : x_n \in [-x, x]\}$ is a given sequence in $T[-x, x]$. If $\{\alpha_n\}$ is a sequence of real numbers decreasing to 0, then $\{\alpha_n x_n\}$ order converges to θ since E is archimedean. Therefore $\{\alpha_n T x_n\}$ order converges to θ in F since $T \in L^{so}(E, F)$. Since F has the boundedness property, $T[-x, x]$ is order bounded, hence $T \in L^b(E, F)$.

(2.3) Corollary: *If F has a countable exhausting subset or if F is a perfect sequence space, then $L^{so}(E, F) \subset L^b(E, F)$.*

Proof. This result follows immediately from (2.2), (1.8), and (1.7).

The following example shows, among other things, that $L^{so}(\lambda, \mu)$ may be a proper subset of $L(\lambda, \mu)$ even if λ and μ are perfect sequence spaces.

(2.4) Example: Since l^2 is a perfect sequence space, (2.3) implies that $L^{so}(l^2, l^2) \subset L^b(l^2, l^2)$. However, it is not true that $L(l^2, l^2) \subset L^b(l^2, l^2)$ as we shall

now see. Define the infinite matrix (a_{pq}) by

$$a_{pq} = \begin{cases} \dfrac{1}{p-q} & \text{if } p \neq q \\ 0 & \text{if } p = q\,. \end{cases}$$

HILBERT has shown that this matrix defines a mapping that is in $L(l^2, l^2)$ (see [6], pg. 212). However, on pp. 257–258 of [3] it is shown that if x and y are the elements of l^2 defined by

$$x_p = y_p = \frac{1}{\sqrt{p}\log p} \quad p > 1\,;\; x_1 = x_2,\; y_1 = y_2\,,$$

then

$$(*) \qquad \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |a_{pq}| x_p y_q = +\infty\,.$$

We shall now use (*) to show that $A \notin L^b(l^2, l^2)$.

Define

$$z_p = \sum_{q=1}^{\infty} |a_{pq}| y_q$$

and set

$$u_q^{(p)} = (\operatorname{sgn} a_{pq}) y_q\,.$$

Then $u^{(p)} \in [-y, y]$ for all p, and

$$z_p = \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} u_q^{(p)} = (Au^{(p)})_p \qquad p = 1, 2, \ldots\,.$$

Now if $A \in L^b(l^2, l^2)$, then $Au^{(p)} \in [-u, u]$ for some $u \geqq \theta$ in l^2 for all p. It would follow that

$$-\langle u, v\rangle \leqq \langle Au^{(p)}, v\rangle \leqq \langle u, v\rangle$$

for all $v \geqq \theta$ in l^2. In particular, if $v = e^{(p)}$, we obtain

$$z_p = |z_p| = |(Au^{(p)})_p| \leqq u_p$$

for each p. Since $u \in l^2$, $x \in l^2$, it follows that

$$\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |a_{pq}| y_q x_p = \sum_{p=1}^{\infty} z_p x_p \leqq \sum_{p=1}^{\infty} u_p x_p < +\infty$$

contrary to relation (*) above. Therefore A is not an order bounded linear mapping on l^2 into l^2. In particular, A is a mapping in $L(l^2, l^2)$ that is not in $L^{so}(l^2, l^2)$ or $L^o(l^2, l^2)$.

(2.5) Proposition: *The following conditions are both sufficient for* $L(\lambda, \mu)$ *to be contained in* $L^b(\lambda, \mu)$:

(1) λ *is an arbitrary perfect sequence space and* μ *is* (c), (c_0), *or* l^∞.

(2) μ *is an arbitrary perfect sequence space and* $\lambda = l^1$.

Proof. By Proposition (3.3) in [13], each of the above conditions is sufficient for $L(\lambda, \mu)$ to be a lattice. But then every mapping T in $L(\lambda, \mu)$ is the

difference of two positive mappings T_1, T_2 in $L(\lambda, \mu)$, hence T is order bounded.

In connection with the proof of (2.5), it should be pointed out that, for $L(\lambda, \mu)$ to be a lattice it is not only necessary, but also sufficient that every mapping in $L(\lambda, \mu)$ be the difference of two positive mappings in $L(\lambda, \mu)$ (see the remark after Proposition (3.2) in [13]).

The following result provides an order theoretic characterization of $L(\lambda, \mu)$ in case $L(\lambda, \mu)$ is contained in $L^b(\lambda, \mu)$.

(2.6) Proposition: *If λ and μ are sequence spaces and $L(\lambda, \mu) \subset L^b(\lambda, \mu)$, then $L^o(\lambda, \mu) = L^{so}(\lambda, \mu) = L(\lambda, \mu)$.*

Proof. Clearly $L^o(\lambda, \mu) \subset L^{so}(\lambda, \mu)$ and (2.1) shows that $L^{so}(\lambda, \mu) \subset L(\lambda, \mu)$, hence it is only necessary to show that $L(\lambda, \mu) \subset L^o(\lambda, \mu)$. Suppose that $A \in L(\lambda, \mu)$ and that A is represented by the matrix (a_{ij}). Since $a^{(i)} = (a_{ij} : j = 1, 2, \ldots) \in \lambda^*$ for each i, it follows from (1.9) that each row $a^{(i)}$ of (a_{ij}) represents an order continuous linear functional on λ. Now if $\{x^{(\alpha)}\}$ is a net in λ that order converges to x, then $\{x^{(\alpha)}\}$ is order bounded, hence $\{Ax^{(\alpha)}\}$ is order bounded in μ. Also, for each i, we have

$$\langle a^{(i)}, x^{(\alpha)} \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j^{(\alpha)} \to \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j = \langle a^{(i)}, x \rangle$$

that is, $\{Ax^{(\alpha)}\}$ is componentwise convergent to Ax in μ. Therefore $\{Ax^{(\alpha)}\}$ order converges to Ax by (1.2), that is, $A \in L^o(\lambda, \mu)$.

(2.7) Proposition: *If λ and μ are sequence spaces and $L^{so}(\lambda, \mu) \subset L^b(\lambda, \mu)$, then $L^{so}(\lambda, \mu)$ and $L^o(\lambda, \mu)$ are ideals in $L^b(\lambda, \mu)$.*

Proof. Suppose $T \in L^{so}(\lambda, \mu)$ and that $\{y^{(n)}\}$ is a sequence in λ that decreases to θ. Since

$$|T|(y^{(n)}) = \sup\{Tz : |z| \leqq y^{(n)}\}$$

there exists a double sequence $\{z^{(n,m)} : m, n = 1, 2, \ldots\}$ such that $|z^{(n,m)}| \leqq y^{(n)}$ $(n, m = 1, 2, \ldots)$, and

$$(*) \qquad (Tz^{(n,m)})_m + \frac{1}{n} \geqq (|T|(y^{(n)}))_m \geqq 0 .$$

This is possible because of (1.1).

Since $\{y^{(n)}\}$ decreases to θ, $\{z^{(n,m)}\}$ order converges to θ for each fixed m, since $|z^{(n,m)}| \leqq y^{(n)}$ $(n, m = 1, 2, \ldots)$. Therefore $\{Tz^{(n,m)}\}$ order converges to θ in μ for each fixed m, since T is order sequentially continuous. Again by (1.1)

$$\lim_n (Tz^{(n,m)})_m = 0 \qquad m = 1, 2, \ldots .$$

The inequality (*) now shows that

$$\lim_n (|T|(y^{(n)}))_m = 0 \qquad m = 1, 2, \ldots .$$

Since $|T| \in L^b(\lambda, \mu)$, the sequence $\{|T|(y^{(n)})\}$ is order bounded, hence $\{|T|(y^{(n)})\}$ order converges to θ by (1.2).

If $\{x^{(n)}\}$ is an arbitrary sequence that order converges to θ, there is a sequence $\{y^{(n)}\}$ that decreases to θ such that $|x^{(n)}| \leqq y^{(n)}$ for all n. Thus if $T \in L^{so}(\lambda, \mu)$ and $S \in L^b(\lambda, \mu)$ satisfies $|S| \leqq |T|$, we obtain

$$|Sx^{(n)}| \leqq |S|(|x^{(n)}|) \leqq |T|(y^{(n)}) .$$

Therefore $\{Sx^{(n)}\}$ order converges to θ and we conclude that $L^{s^o}(\lambda, \mu)$ is an ideal in $L^b(\lambda, \mu)$. An entirely similar proof shows that $L^o(\lambda, \mu)$ is an ideal in $L^b(\lambda, \mu)$.

Our next objective is to determine conditions under which $L(E, F)$ and $L^{s^o}(E, F)$ are bands in $L^b(E, F)$. When this is the case, a theorem of F. RIESZ (see [2], pg. 25) yields a rather strong decomposition theorem for order bounded linear mappings. The following result will be used in these band considerations.

(2.8) Proposition: *If λ and μ are perfect sequence spaces, then $L(\lambda, \mu)$ is complete for the topology $\mathfrak{S}_0$ of uniform convergence on order bounded sets when μ is equipped with its normal topology $o(\mu, \mu^*)$.*

Proof. Suppose that $\{A^{(\alpha)}\}$ is a Cauchy net for the $\mathfrak{S}_0$-uniform structure. Then the net $\{A^{(\alpha)T}\}$ of transposes of elements in the given net is a Cauchy net for the $\mathfrak{S}_0$-uniformity on $L(\mu^*, \lambda^*)$. Therefore there is an infinite matrix A such that $\{A^{(\alpha)T}\}$ converges componentwise to A^T.

If $x \geqq \theta$ is an element of λ, $v \in \mu^*$, and $\varepsilon > 0$, there is an index α_0 depending on ε, x, v, such that

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} (a_{ij}^{(\alpha)T} - a_{ij}^{(\beta)T}) v_j \right| |y_i| \leqq \varepsilon$$

for all $y \in [-x, x]$ and all $\alpha, \beta \geqq \alpha_0$. In particular, if $v = e^{(k)}$, we have

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ik}^{(\alpha)T} - a_{ik}^{(\beta)T}| \, |y_i| \leqq \varepsilon$$

for all $y \in [-x, x]$ and all $\alpha, \beta \geqq \alpha_0$. Therefore the nets $\{a_k^{(\alpha)T}\}$ of kth columns of $\{A^{(\alpha)T}\}$ are Cauchy nets for the uniform structure associated with $o(\lambda^*, \lambda)$.

Since λ^* is complete for $o(\lambda^*, \lambda)$ (see [9], § 30, 5(7)), it follows that $\{a_k^{(\alpha)T}\}$ converges to its component limit a_k^T for $o(\lambda^*, \lambda)$. Therefore $a_k^T \in \lambda^*$ and we conclude that

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ki} x_i| < +\infty$$

for all $x \in \lambda$. Moreover, $\{a_k^{(\alpha)T}\}$ converges to a_k^T for $\sigma(\lambda^*, \lambda)$ since $o(\lambda^*, \lambda)$ is finer than $\sigma(\lambda^*, \lambda)$, hence

$$\lim_{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(\alpha)} x_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} x_j$$

for each $x \in \lambda$ and each k. We conclude that $\{A^{(\alpha)} x\}$ is Cauchy in μ for the $o(\mu, \mu^*)$-uniform structure, hence $\{A^{(\alpha)} x\}$ converges to Ax for $o(\mu, \mu^*)$ since μ is perfect. Therefore $Ax \in \mu$ for each $x \in \lambda$, hence $A \in L(\lambda, \mu)$.

It remains to show that $\{A^{(\alpha)}\}$ converges to A for the $\mathfrak{S}_0$-topology. If x and v are arbitrary elements of the positive cones of λ and μ^* respectively, and if $\varepsilon > 0$, there is an index α_0 depending on x, v, ε, such that

$$|\langle A^{(\alpha)} y - A^{(\beta)} y, u \rangle| < \varepsilon$$

whenever $y \in [-x, x]$, $u \in [-v, v]$, and $\alpha, \beta \geqq \alpha_0$. Passing to the limit on β, we obtain

$$|\langle A^{(\alpha)} y - Ay, u \rangle| \leqq \varepsilon$$

if $y \in [-x, x]$, $u \in [-v, v]$, and $\alpha \geqq \alpha_0$. Therefore $\{A^{(\alpha)}\}$ converges to A for the $\mathfrak{S}_0$-topology, which completes the proof.

The following corollary generalizes the classical result that the space of continuous linear mappings between l^p and l^q $(1 \leqq p, q \leqq +\infty)$ is complete for the uniform norm.

(2.9) Corollary: *If λ and μ are perfect sequence spaces, then $L(\lambda, \mu)$ is complete for the uniform structure associated with the topology $\mathfrak{T}_{b\beta}$ of uniform convergence on $\sigma(\lambda, \lambda^*)$-bounded sets in λ when μ is equipped with its strong topology $\beta(\lambda, \lambda^*)$.*

Proof. Suppose $\{A^{(\alpha)}\}$ is a Cauchy net for the $\mathfrak{T}_{b\beta}$-uniform structure, then $\{A^{(\alpha)}\}$ is Cauchy for the $\mathfrak{S}_0$-uniform structure. Therefore $\{A^{(\alpha)}\}$ converges to its component limit A for the $\mathfrak{S}_0$-topology; in particular, $A \in L(\lambda, \mu)$. Therefore, for each $x \in \lambda$ and for each $u \in \mu^*$, we have

$$(*) \qquad \lim_{\alpha} \langle A^{(\alpha)}x - Ax, u\rangle = 0 .$$

If B is a $\sigma(\lambda, \lambda^*)$-bounded set, S is a $\sigma(\mu^*, \mu)$-bounded set, and $\varepsilon > 0$, there is an index α_0, depending on B, S, ε such that

$$|\langle A^{(\alpha)}x - A^{(\beta)}x, u\rangle| < \varepsilon$$

for all $x \in B$, $u \in S$, and $\alpha, \beta \geqq \alpha_0$. By virtue of (*) this implies that

$$|\langle A^{(\alpha)}x - Ax, u\rangle| < \varepsilon$$

for all $x \in B$, $u \in S$, and $\alpha \geqq \alpha_0$. Therefore $\{A^{(\alpha)}\}$ converges to A for $\mathfrak{T}_{b\beta}$, that is, $L(\lambda, \mu)$ is complete for $\mathfrak{T}_{b\beta}$.

(2.10) Proposition: *If λ and μ are perfect sequence spaces, and $L(\lambda, \mu) \subset \subset L^b(\lambda, \mu)$, then $L(\lambda, \mu)$ is a band in $L^b(\lambda, \mu)$ and $L(\lambda, \mu) = L^{so}(\lambda, \mu) = L^o(\lambda, \mu)$.*

Proof. (2.6) shows that $L^o(\lambda, \mu) = L^{so}(\lambda, \mu) = L(\lambda, \mu)$, hence $L(\lambda, \mu)$ is an ideal in $L^o(\lambda, \mu)$ by (2.7). Since $L(\lambda, \mu)$ is complete for the $\mathfrak{S}_0$-topology, it is closed in $L^b(\lambda, \mu)$ for the $\mathfrak{S}_0$-topology on $L^b(\lambda, \mu)$. The result now follows from the second part of (3.8) in [13].

The next result concerns minimal vector lattices, which are discussed in [14].

(2.11) Proposition: *If $L^{so}(E, F) \subset L^b(E, F)$, F is minimal, and the cone in F is closed for $\sigma(F, F^b)$, then every directed$(\leqq)$ subset $\mathfrak{A}$ of $L^{so}(E, F)$ that is majorized in $L^b(E, F)$ has its supremum in $L^{so}(E, F)$.*

Proof. Without loss in generality, we can assume that $S = \sup(\mathfrak{A}) \in L^b(E, F)$ is a positive linear mapping. If $x \geqq \theta$ is in E and f is a positive linear functional on F, then since

$$Sx = \sup\{Tx : T \in \mathfrak{A}\}$$

it follows that

$$f(Sx) = \sup\{f(Tx) : T \in \mathfrak{A}\}$$

since F is minimal. Therefore, if $\varepsilon > 0$ is given and $\{y_n\}$ decreases to θ, there is a $T_f \in \mathfrak{A}$ such that

$$f(Sy_1) \leqq f(T_f y_1) + \varepsilon .$$

But $(S - T_f)$ is a positive linear mapping, hence

$$|f(Sy_n)| \leqq |f(T_f y_n)| + f(S - T_f)y_n$$
$$\leqq |f(T_f y_n)| + \varepsilon .$$

The minimality of F implies that each order convergent net in F converges for the order topology $\mathfrak{T}_0$, and that each positive linear functional on F is $\mathfrak{T}_0$-continuous (see [14]). It follows that f is order continuous. Hence we obtain

$$\lim_n f(Sy_n) = 0 .$$

Thus $\{Sy_n\}$ converges to θ for $\sigma(F, F^b)$. Since S is a positive linear mapping, it follows that $\{Sy_n\}$ is monotone decreasing. Moreover, the cone in F is $\sigma(F, F^b)$-closed, hence $\theta = \inf\{Sy_n\}$, (see Proposition 6 on pg. 26 of [2]). We conclude that $\{Sy_n\}$ decreases to θ.

If $\{x_n\}$ order converges to x_0, there is a sequence $\{y_n\}$ that decreases to θ such that $|x_n - x_0| \leqq y_n$ for all n. But then

$$|Sx_n - Sx_0| \leqq |S||x_n - x_0| \leqq |S|y_n ,$$

hence $\{Sx_n\}$ order converges to Sx_0, that is, $S \in L^{so}(E, F)$.

(2.12) Corollary: *If λ and μ are sequence spaces, μ is minimal, and $L^{so}(\lambda, \mu) \subset L^b(\lambda, \mu)$, then $L^{so}(\lambda, \mu)$ is a band in $L^b(\lambda, \mu)$.*

Proof. By virtue of (2.7), $L^{so}(\lambda, \mu)$ is an ideal in $L^b(\lambda, \mu)$. Also $\mu^* = \mu^b$, hence the cone in μ is $\sigma(\mu, \mu^b)$-closed. The result now follows directly from (2.11).

It is clear from the proofs of (2.11) and (2.12) that the corresponding results for $L^o(E, F)$ and $L^o(\lambda, \mu)$ are also valid.

By the corollary to (14.2) in [14], each order complete vector lattice that is reflexive for the order topology $\mathfrak{T}_0$ is minimal. In particular, every reflexive complete metrizable locally convex lattice is minimal.

We have just seen that under suitable conditions on λ and μ, the spaces $L(\lambda, \mu)$, $L^{so}(\lambda, \mu)$, and $L^o(\lambda, \mu)$ are bands in $L^b(\lambda, \mu)$. Consequently, by applying Théorème 1 on pg. 25 of [2], we obtain several interesting decomposition theorems for order bounded linear mappings. These decompositions are quite strong and resemble the Lebesgue decomposition of measures since the components T_1, T_2 of a mapping T in such a decomposition satisfy $0 = \inf(|T_1|, |T_2|)$.

Example: Since $(l^\infty)^* = l^1$, an operator T is in $L(l^\infty, l^\infty)$ if and only if it is continuous for the weak*-topology $\sigma(l^\infty, l^1)$. The fact that l^∞ has an order unit implies that $L^b(l^\infty, l^\infty)$ coincides with the space of linear operators on l^∞ that are continuous for the supremum norm topology. Thus $L^b(l^\infty, l^\infty)$ properly contains $L(l^\infty, l^\infty)$ since the dual of l^∞ for this norm properly contains l^1. By (2.5) and (2.10), we know that $L(l^\infty, l^\infty)$ is a band in $L^b(l^\infty, l^\infty)$ and that $L(l^\infty, l^\infty) = L^o(l^\infty, l^\infty) = L^{so}(l^\infty, l^\infty)$. If $L(l^\infty, l^\infty)^\perp$ denotes the band of operators in $L^b(l^\infty, l^\infty)$ that are disjoint from $L(l^\infty, l^\infty)$, then $L^b(l^\infty, l^\infty)$ is the order direct sum of $L(l^\infty, l^\infty)$ and $L(l^\infty, l^\infty)^\perp$. Therefore, if $T \in L^b(l^\infty, l^\infty)$ and $T = T_1 + T_2$ where $T_1 \in L(l^\infty, l^\infty)$ and $T_2 \in L(l^\infty, l^\infty)^\perp$, then $|T| = |T_1| + |T_2|$ is the corresponding decomposition of $|T|$. It follows that $|PT| = P|T| \leqq |T|$ where P is the projection of $L^b(l^\infty, l^\infty)$

onto $L(l^\infty, l^\infty)$. Since the cone in $L^b(l^\infty, l^\infty)$ is normal and the lattice operations are continuous for the uniform operator topology (see (3.4) and (3.5) in [13]) it follows that P is continuous for this topology. Thus the space of norm continuous linear operators on l^∞ is the order direct sum and the topological direct sum for the uniform operator topology of $L(l^\infty, l^\infty)$ and $L(l^\infty, l^\infty)^\perp$.

This decomposition corresponds to the following construction:

Let βN denote the Stone-Cech compactification of the positive integers N. Then l^∞ is isomorphic to $C(\beta N)$; let $\bar{x}$ denote the image in $C(\beta N)$ of x in l^∞ under this isomorphism. Then if $T \in L^b(l^\infty, l^\infty)$, for the linear functional on l^∞ that maps x into $(Tx)_n$ there corresponds a measure μ_n on βN such that

$$(Tx)_n = \int \bar{x} d\mu_n .$$

Let $t_{nk} = \mu_n(\{k\})$ and define the linear transformation T_1 on l^∞, the "matrix part" of T, by

$$(T_1 x)_n = \sum_{k=1}^{\infty} t_{nk} x_k .$$

Then $T_1 \in L(l^\infty, l^\infty)$ and if we set $T_2 = T - T_1$ we have the decomposition $T = T_1 + T_2$ stated above. Details are left to the reader.

References

[1] BIRKHOFF, G.: Lattice Theory, revised edition. Am. Math. Soc. Coll. Publ. **25** (1948).
[2] BOURBAKI, N.: Eléments de mathématique, Livre VI, Integration. Act. Sci. et Ind., no. 1175. Paris: Hermann & Cie 1952 .
[3] COOKE, R. G.: Infinite matrices and sequence spaces. London: Macmillan Co. 1950.
[4] DIEUDONNÉ, J.: Sur les espaces de Köthe. J. Anal. Math. **1**, 81—115 (1951).
[5] GOFFMAN, C.: Completeness in topological vector lattices. Am. Math. Monthly **66**, 87—92 (1959).
[6] HARDY, G. H., J. E. LITTLEWOOD, and G. POLYA: Inequalities. Cambridge: Univ. Press 1934.
[7] KANTOROVITCH, L.: Linear operations in semi-ordered spaces. Mat. Sbornik **7**, 209—280 (1940).
[8] — Lineare halbgeordnete Räume. Mat. Sbornik **2**, 121—168 (1937).
[9] KÖTHE, G.: Topologische lineare Räume. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1960.
[10] ORIHARA, M.: On regular vector lattices. Proc. Imp. Acad. Tokyo **18**, 525—529 (1942).
[11] PERESSINI, A. L.: On topologies in ordered vector spaces. Math. Ann. **144**, 199—223 (1961).
[12] — Concerning the order structure of Köthe sequence spaces. Michigan Math. J. **10**, 409—415 (1963).
[13] — Concerning the order structure of Köthe sequence spaces II. Michigan Math. J. **11**, 357—364 (1964).
[14] SCHAEFER, H. H.: Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorräume III. Math. Ann. **141**, 113—142 (1960).

A. L. PERESSINI and D. R. SHERBERT
Math. Department, University of Illinois
Urbana, Ill., USA

(Received January 30, 1965)



SPRINGER-VERLAG
BERLIN · HEIDELBERG · NEW YORK

Herausgegeben von
M. Beckmann, Bonn
R. Henn, Göttingen
A. Jaeger, Cincinnati
W. Krelle, Bonn
H. P. Künzi, Zürich
K. Wenke,
Ludwigshafen/Rh.
Ph. Wolfe,
Santa Monica/Cal.

Ökonometrie und Unternehmensforschung

Econometrics and Operations Research

Geschäftsführende Herausgeber **W. Krelle** und **H. P. Künzi**

Band II Lineare Programmierung und Erweiterungen

Von **George B. Dantzig,** Chairman of the Operations Research Center and Professor of Operations Research, University of California, Berkeley

Deutsche Übersetzung und Bearbeitung nach dem berichtigten Neudruck der englischen Ausgabe von Arno Jaeger, Director of Graduate Studies and Professor of Mathematics, University of Cincinnati

Mit 103 Abbildungen
XVI, 712 Seiten
Gr.-8°. 1966
Ganzleinen
DM 68,—

Das fundamentale Werk über lineare Programmierung von George B. Dantzig, dessen Name mit der Begründung und Entwicklung dieses neuen Fachgebietes unlösbar verbunden ist, hat nicht nur für Studenten der Mathematik oder Wirtschaftswissenschaften eine außerordentliche Bedeutung, sondern auch für alle Praktiker, die Optimierungsproblemen großen Umfangs begegnen. Der potentielle Interessentenkreis für dieses Buch ist noch unübersehbar. Denn schon dehnen sich die Anwendungen der linearen Programmierung und ihrer Verallgemeinerungen auf Medizin, Biologie und andere Wissensgebiete aus. Wer an dieser Entwicklung, deren Auswirkungen auf die Zukunft man nur erahnen kann, teilhaben möchte, wird diese Veröffentlichung auch als Nachschlagewerk ungemein wertvoll finden.

■ **Bitte Prospekt anfordern!**

Früher erschien

Pseudo-Boolean Programming and Applications

By Petru L. Ivanescu, Institute of Mathematics,
Romanian Academy of Sciences, Bucharest
(Lecture Notes in Mathematics, Volume 9)
IV, 50 pages DIN A 4. 1965. Stiff paper bound DM 4,80

Seite

OSTROWSKI, A. M.: A Contribution to the Theory of the Fourier Integral Formula . 261

GÜNTHER, P.: Sphärische Mittelwerte in kompakten harmonischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten 281

HELGASON, S.: An Analogue of the Paley-Wiener Theorem for the Fourier Transform on Certain Symmetric Spaces 297

HELGASON, S.: Totally Geodesic Spheres in Compact Symmetric Spaces 309

PERESSINI, A. L., and D. R. SHERBERT: Order Properties of Linear Mappings on Sequence Spaces 318

Verantwortlich für den Anzeigenteil: Edgar Seidler, 1 Berlin 31 (Wilmersdorf), Heidelberger Platz 3.
Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg · New York — Druck der Brühlschen Universitätsdruckerei Gießen
Printed in Germany