

Werk

Titel: Mathematische Annalen

Verlag: Springer

Jahr: 1989

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN235181684_0284

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0284

LOG Id: LOG_0020

LOG Titel: Universelle versus relative Einhüllende: Eine geometrische Untersuchung von Quotienten von universellen Einhüllenden halbeinfacher Lie-Algebren.

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Universelle versus relative Einhüllende: Eine geometrische Untersuchung von Quotienten von universellen Einhüllenden halbeinfacher Lie-Algebren*

Wolfgang Soergel

Department of Mathematics, Harvard University, One Oxford Street,
Cambridge, MA 02138, USA

1. Leitfaden

1.1. Überblick

Sei G eine zusammenhängende halbeinfache algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper $\mathbb{C}$ der Charakteristik $\text{char } \mathbb{C} = 0$. Sei $\mathfrak{g}$ ihre Lie-Algebra, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ deren universelle Einhüllende, Z deren Zentrum. Wohlbekannt ist das folgende

Theorem (Duflo). *Die minimalen primitiven Ideale in $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ sind genau die von maximalen Idealen in Z erzeugten Ideale.*

Des weiteren zerfällt $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ unter der adjungierten G -Operation in isotypische Komponenten, $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{E \in \hat{G}} \mathcal{U}(\mathfrak{g})_E$, und es gilt das folgende

Theorem (Kostant). *Für jeden einfachen G -Modul E ist $\mathcal{U}(\mathfrak{g})_E$ ein freier Z -Modul vom Rang $\dim_{\mathbb{C}} E^0$.*

Ich werde mit Hilfe von relativen Einhüllenden Algebren analoge Theoreme für gewisse Quotienten von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ herleiten. Sei dazu $P \subset G$ eine Parabolische, $A = P/(P, P)$, ihre Lie-Algebren seien $\mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{a}$. So ist $X = G/(P, P)$ ein $G \times A$ -Raum unter der Operation $(g, a) \cdot g_1(P, P) = gg_1a(P, P)$. Ich bezeichne die Bilder der universellen Einhüllenden $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ [bzw. $\mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{a})$] unter der Operatordarstellung

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \hookrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{a}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}_X)$$

mit R [bzw. R_a]. Sie liegen sogar schon in $\Gamma = \Gamma(X, \mathcal{D}_X)^A$. Auf die dankenswerte Anregung von [BB2], Probleme 2, 3 hin interessiere ich mich für die Relationen zwischen den drei Ringen $R \subset R_a \subset \Gamma$, insbesondere auch zwischen deren primitiven Spektren.

Ist speziell P eine Borel'sche, so ist A kanonisch isomorph zu jedem maximalen Torus $H \subset P$, und ich schreibe $\text{Lie } H = \mathfrak{h} = \mathfrak{a}$. Es bezeichne $S(\mathfrak{h})$ [bzw. $S(\mathfrak{a})$] die symmetrische Algebra über $\mathfrak{h}$ [bzw. $\mathfrak{a}$]. Unsere drei Ringe haben dann nach Šapovalov [Ša1], Theorem 1, bewiesen in [Ša2], die Form $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = R \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_Z S(\mathfrak{h}) = R_a = \Gamma$. Auf andere Weise wird das auch in [BB2], Proposition 8 gezeigt. Ich

betrachte für allgemeines P unser Γ als die natürliche Verallgemeinerung von $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{Z}} S(\mathfrak{h})$. Es gilt nämlich für Γ stets ein „Theorem von Duflo“ (Corollar 15 aus 4.4), das heißt, $(\ker \lambda)\Gamma$ ist ein primitives Ideal von Γ für alle $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, und Γ wird als $S(\mathfrak{a})$ - G -Modul durch ein Analogon zum Theorem von Kostant beschrieben (Corollar 12 aus 4.2).

Es bezeichne $\bar{Z}$ das Zentrum von R . An gewissen „guten“ Stellen $\chi \in \text{Spec } \bar{Z}$ (und die generische Stelle ist gut!) stehen die drei Ringe $R \subset R_{\mathfrak{a}} \subset \Gamma$ lokal in derselben Beziehung wie im Fall einer Borel'schen P , d.h. $R_{\chi} \otimes_{\mathbb{Z}} S(\mathfrak{a}) = \Gamma_{\chi}$, und man erhält auch für R_{χ} ein „Theorem von Duflo“ und ein „Theorem von Kostant“ (Theorem 21 aus 5.4). Aber auch an den „schlechten“ Stellen geht noch so viel Information von Γ auf R über, daß wir das primitive Spektrum $\text{Prim } R$ von R beschreiben können (Abschnitte 1.4 und 6.2).

Die Frage, welche Stellen gut bzw. schlecht sind, zerlege ich in zwei Teilfragen:

- A) Für welche $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ ist lokal $(R_{\mathfrak{a}})_{\lambda} = \Gamma_{\lambda}$?
- B) Für welche $\chi \in \text{Spec } \bar{Z}$ ist lokal $R_{\chi} \otimes_{\mathbb{Z}} S(\mathfrak{a}) = (R_{\mathfrak{a}})_{\chi}$?

Die erste Frage steht in enger Beziehung zu Kostant's Problem. Ich behandle sie in Abschnitt 1.2. Die zweite Frage wird beantwortet durch ein geometrisches hinreichendes Kriterium an χ (Abschnitt 1.3).

Ich möchte schließlich noch ganz herzlich Jens Carsten Jantzen danken, dessen Tür weit offen stand, wann immer er in seinem Zimmer war – und das nicht nur im wörtlichen Sinn!

1.2. Zu Frage A)

Was kann ich über die Inklusion $R_{\mathfrak{a}} \subset \Gamma$ aussagen? Ist P eine Borelsche, so ist $R_{\mathfrak{a}} = \Gamma$. Wie das Beispiel 8.2 zeigt, ist das im allgemeinen falsch. Aber nicht zu sehr: Sei $S = S(\mathfrak{a})$ und $K = \text{Quot}(S)$ der zugehörige Quotientenkörper. So ist $R_{\mathfrak{a}} \otimes_S K = \Gamma \otimes_S K$ nach Proposition 2 aus 2.2, und es gibt sogar $s \in S$, $s \neq 0$ mit $s\Gamma \subset R_{\mathfrak{a}}$ (Corollar 3 aus 2.2). Ich zeige noch genauer: Γ ist der „ganze Abschluß“ von $R_{\mathfrak{a}}$ in $R_{\mathfrak{a}} \otimes_S K$ (Theorem 13 aus 4.3).

Die Frage, ob $R_{\mathfrak{a}} = \Gamma$, ist eine Art „Kostant's Problem über dem Grundring S “ (Corollar 8 aus 3.5) und hängt eng zusammen einerseits mit Kostant's Problem (über $\mathbb{C}$) für eindimensional von $\mathfrak{p}$ induzierte $\mathfrak{g}$ -Moduln, andererseits – vermutlich – mit der Geometrie der Dixmier-Schichten.

Ich zeige in diesem Zusammenhang:

1. Ist die Impulsabbildung $T^*(G/P) \rightarrow G\mathfrak{p}^{\perp} \subset \mathfrak{g}^*$ birational mit normalem Bild, so ist $R_{\mathfrak{a}} = \Gamma$ (Theorem 30 aus 7.2).

2. Genau dann ist bei $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ lokal $(R_{\mathfrak{a}})_{\lambda} = \Gamma_{\lambda}$, wenn die kanonische Abbildung $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} \mathbb{C}_{\lambda+\delta})^{\mathfrak{g}-\text{endl.}}$ surjektiv ist (Theorem 29 aus 7.1).

Es bezeichnet hier, $\forall \lambda \in \mathfrak{a}^*$, $\mathbb{C}_{\lambda}$ den eindimensionalen $\mathfrak{p}$ -Modul $\mathbb{C}$ mit $v \cdot a = \lambda(v)a \ \forall v \in \mathfrak{p}, \forall a \in \mathbb{C}$. Ich definiere $\delta \in \mathfrak{a}^*$ durch $\mathbb{C}_{\delta} \cong A^{\max}(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$.

Es scheint mir ein sehr interessantes Problem zu sein, die $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ geometrisch zu charakterisieren, für die $(R_{\mathfrak{a}})_{\lambda} = \Gamma_{\lambda}$ ist. Das wird wohl darauf hinauslaufen, die assoziierte Graduierte von $R_{\mathfrak{a}}$ bezüglich der „Basis-Filtrierung“ (vgl. Abschn. 4.1) zu berechnen, was mir nicht gelingen will.

Grundlage für die zweite Aussage oben ist unter anderem eine „tangential“ Beschreibung der globalen Schnitte einer homogenen Garbe von getwisteten Differentialoperatoren im Geiste von [GK, 8]. Das führe ich für einen beliebigen

homogenen Raum einer beliebigen algebraischen Gruppe in den Abschn. 3.1–3.4 durch.

1.3. Zu Frage B)

Was kann ich über die Beziehung von R zu R_a aussagen? Es bezeichne $Z(\text{Ring})$ sein Zentrum. Man erhält $\bar{Z} := Z(R) = \text{im } Z(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) = R \cap S$ nach Abschn. 5.1. Ist P eine Borel'sche, so ist $R \otimes_{\bar{Z}} S = R_a$. Wie das Beispiel 8.1 zeigt, ist das im allgemeinen falsch. Aber nicht zu sehr: Man betrachte die Multiplikation $m: R \otimes_{\bar{Z}} S \rightarrow R_a$. So ist $\ker m$ das Ideal der S -Torsionselemente (Corollar 20 aus 5.3), und ist S flach (als $\bar{Z}$ -Modul) an einer Stelle $\chi \in \text{Spec } \bar{Z}$, so ist die Abbildung m_χ zwischen den Lokalisierungen ein Isomorphismus (Theorem 17 aus 5.3). Das folgende Diagramm (erklärt in 5.1) zeigt, wie geometrisch dieses Kriterium ist.

$$\begin{array}{ccc} \lambda & \longmapsto & \lambda + \delta \\ \text{Spec}_{\max} S = \alpha^* & \longrightarrow & \mathfrak{h}^* = \text{Spec}_{\max} S(\mathfrak{h}) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \text{Spec}_{\max} \bar{Z} = \pi(\alpha^*) & \longrightarrow & \mathfrak{h}^*/(W \cdot) = \text{Spec}_{\max} Z. \end{array}$$

1.4. Über die primitiven Spektren

Ich kann die primitiven Spektren $\text{Prim } R$ und $\text{Prim } R_a$ sehr explizit beschreiben (6.2 und 6.1). Zum Beispiel sind die minimalen primitiven Ideale von R genau die Ideale, die als Annulatoren der $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} \mathbb{C}_\lambda$, für $\lambda \in \alpha^*$, auftreten (Corollar 27 aus 6.2). Zum Beweis dieser Aussagen muß ich einen Umweg über Γ machen.

Die Beziehung von $\text{Prim } R$ zu $\text{Prim } R_a$ wird beschrieben durch ein kommutatives Diagramm (5.2):

$$\begin{array}{ccc} \text{Prim } R & \xleftarrow{R \cap} & \text{Prim } R_a \\ \theta \downarrow & & \downarrow \theta_a \\ \text{Spec}_{\max} \bar{Z} & \xleftarrow{\pi} & \text{Spec}_{\max} S. \end{array}$$

Hier sind θ, θ_a die zentralen Charaktere, und $(R \cap)$ ist surjektiv nach Corollar 28 aus 6.2. Ist für $\chi \in \text{Spec}_{\max} \bar{Z}$ mein m_χ ein Isomorphismus (vgl. 1.3), so erhalte ich ein kartesisches Teildiagramm (vgl. Abschn. 6.3)

$$\begin{array}{ccc} \theta^{-1}(\chi) & \longleftarrow & \theta_a^{-1}(\pi^{-1}(\chi)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{\chi\} & \longleftarrow & \pi^{-1}(\chi). \end{array}$$

Was die Beziehung von $\text{Prim } \Gamma$ zu $\text{Prim } R_a$ angeht, wage ich die

Vermutung: Durch $\text{Prim } \Gamma \xrightarrow{\cap R_a} \text{Prim } R_a$ wird eine Bijektion erklärt.

In den meisten Fällen ist das trivial nach 1.2. Im allgemeinen weiß ich noch nicht einmal, ob so eine Abbildung erklärt wird. Ein nichttrivialer Spezialfall wird in Beispiel 8.2 behandelt.

2. Algebraische Beschreibung von R , R_a und Γ

2.1. Die Kerne der Operatordarstellungen

In [BB1, 1.5 und 1.6], wird für eine glatte, n -dimensionale $\mathbb{C}$ -Varietät X und einen abgeschlossenen Punkt $x \in X$ der $\Gamma(X, \mathcal{D}_X)$ -Modul $H_x^n(X, \mathcal{O}_X)$ untersucht. Mit den dortigen Aussagen erkennt man ohne Mühe, daß $H_x^n(X, \mathcal{O}_X)$ auch isomorph ist zu dem Modul der globalen Schnitte der Wolkenkratzergarbe $\mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X m_x$.

Man nehme nun speziell $X = G/(P, P)$ wie in der Einleitung und $x = \bar{e} = e(P, P) \in X$. Die Wolkenkratzergarbe $\mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X m_{\bar{e}}$ sowie ihre globalen Schnitte bezeichne ich mit M .

Proposition 1. i) M ist treuer Γ -Modul.

ii) $R = \mathcal{U}(\mathfrak{g})/\text{Ann } M$, $R_a = \mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{a})/\text{Ann } M$.

iii) $M = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} S$ als $\mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{a}) \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes S$ -Modul, wenn ich darauf S durch verschobene Rechtsmultiplikation (Notiert: $*$) operieren lasse, d.h. $a * (u \otimes s) = u \otimes (a - \delta(a))s \quad \forall a \in \mathfrak{a}$.

Beweis. i) ist [BB1, Lemma 1.6], ii) folgt trivial. iii) errechnet sich aus [BB1, Proposition 3.5], auf folgende Weise: Man betrachte $\iota: P \rightarrow G \times A$ mit $\iota(p) = (p, \bar{p}^{-1})$, setze $Q = \iota(P) = \text{Stab}_{G \times A}(\bar{e})$ und $\mathfrak{q} = \text{Lie } Q = d\iota(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{a}$. Nach anfänglich zitierter Proposition 3.5 bestimmt die Wahl eines Basisvektors $v \in \mathcal{A}^{\max}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{a}/\mathfrak{q})$ einen Isomorphismus

$$M \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{a}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{q})} \mathcal{A}^{\max}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{a}/\mathfrak{q}).$$

Ich kürze $\mathcal{A}^{\max}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{a}/\mathfrak{q}) = \mathcal{A}^{\max}$ ab, und erhalte zunächst nach PBW einen Isomorphismus $S(\mathfrak{a}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{p} \times \mathfrak{a}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{q})} \mathcal{A}^{\max}$ mit $s \mapsto s \otimes v$.

Welche $\mathfrak{p}$ -Modul-Struktur erbt $S(\mathfrak{a})$? Sei $y \in \mathfrak{p}$, und $\bar{y}$ sein Bild in $\mathfrak{a}$. Es ist

$$\begin{aligned} y(s \otimes v) &= (y, -\bar{y})(s \otimes v) + \bar{y}s \otimes v \\ &= s \otimes d\iota(y)v + \bar{y}s \otimes v. \end{aligned}$$

Nun kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{q} & \longrightarrow & \text{End}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{a}/\mathfrak{q}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathfrak{p} & \longrightarrow & \text{End}(\mathfrak{g}/[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]) \end{array}$$

wo die senkrechten Pfeile Isomorphismen sind, und $\mathfrak{p}$ operiert auf $\mathcal{A}^{\max}(\mathfrak{g}/[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}])$ und $\mathcal{A}^{\max}(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$ durch denselben Charakter δ . Damit wird $y(s \otimes v) = (\bar{y} + \delta(y))s \otimes v$. Der zusammengesetzte Isomorphismus $S(\mathfrak{a}) \rightarrow S(\mathfrak{a}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{p} \times \mathfrak{a}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{q})} \mathcal{A}^{\max}$, wo unter der ersten Abbildung $a \mapsto (a + \delta(a)) \quad \forall a \in \mathfrak{a}$, erhält folglich die $\mathcal{U}(\mathfrak{p})$ -Modulstruktur [vorne links erklärt mit $\mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{a}$, $\mathcal{U}(\mathfrak{p}) \rightarrow S(\mathfrak{a})!$], und auch die $S(\mathfrak{a})$ -Modulstruktur, sofern ich vorne links $a \in \mathfrak{a}$ durch Multiplikation mit $(a - \delta(a))$ operieren lasse. Induziere ich weiter nach $\mathfrak{g} \times \mathfrak{a}$, ergibt sich iii) der Proposition. $\square$ e.d.

2.2. $R_a \subset \Gamma$ ist fast eine Gleichheit

Man setze $N_K = N \otimes_S K$ für jeden S -Modul N . Mit den Ideen aus [BB1] zeige ich:

Proposition 2. $(R_a)_K = \Gamma_K = \text{End}_K(M_K)^{\mathfrak{g}_K - \text{endl.}}$.

Beweis. Γ ist ein G -Untermodul von $\Gamma(\mathcal{D}_X)$, den globalen Schnitten des G -equivarianten $\mathcal{O}_X$ -Moduls $\mathcal{D}_X$. Insbesondere besteht Γ aus $\mathfrak{g}$ -endlichen Vektoren für die adjungierte $\mathfrak{g}$ -Operation. Indem wir für die zweite Inklusion Proposition 1, i) verwenden, wird $(R_a)_K \subset \Gamma_K \subset \text{End}_K(M_K)^{\mathfrak{g}_K - \text{endl.}}$. Ich zeige Gleichheit des vordersten und hintersten Ringes. Man betrachte dazu $\mu: \mathfrak{p}_K \rightarrow K$, gegeben durch $p \mapsto y \mapsto (\bar{y} + \delta(y)) \in S$.

Nach Proposition 1, iii) ist $M_K \cong \mathcal{U}(\mathfrak{g}_K) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p}_K)} K_\mu$ als $\mathfrak{g}_K$ -Modul, und es reicht zu zeigen, daß

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}_K) \rightarrow \text{End}_K \left(\mathcal{U}(\mathfrak{g}_K) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p}_K)} K_\mu \right)^{\mathfrak{g}_K - \text{endl.}}$$

surjektiv ist. Das folgt hinwiederum aus [Ja1, 6.9 (10), S. 89], sobald wir erkannt haben, daß μ dominant ist. Man wähle $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{p}$ eine Cartan'sche. Nun nimmt μ auf $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}_K \subset \mathfrak{p}_K$ als einzigen komplexen ($\in \mathbb{C}$) Wert die Null an. Damit nimmt μ erst recht auf den H_α als einzigen ganzzahligen Wert die Null an und ist folglich dominant. q.e.d.

Corollar 3. Es gibt $s \in S$, $s \neq 0$, so daß $s\Gamma \subset R_a$.

Beweis. Das folgt aus der Proposition durch folgende

Bemerkung. Γ ist endlich erzeugter R -Modul. [BB1, Beweis von Lemma 4.5.]

Es ist sogar $\Gamma = \text{End}_S(M)^{\mathfrak{g} - \text{endl.}}$. Um das – und einiges mehr – zu zeigen, brauche ich etwas allgemeine Theorie.

3. Tangentiale Beschreibung von getwisteten Differentialoperatoren auf homogenen Räumen

3.1. Definitionen

Sei ganz allgemein G eine algebraische Gruppe und X ein homogener G -Raum. Eine „homogene getwistete Garbe von Differentialoperatoren“ auf X (kurz: homogene tdo) im Sinne von [HMSW], Appendix A, ist eine getwistete Garbe von Differentialoperatoren $\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{D}$ auf X , samt einer algebraischen G -Operation auf $\mathcal{D}$ (wobei $\mathcal{D}$ über die Linksmultiplikation als $\mathcal{O}_X$ -Modul aufgefaßt wird) und einem Algebrenhomomorphismus $\alpha: \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{D})$, so daß folgende Verträglichkeitsbedingungen gelten:

1. a) $\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{D}$ ist G -äquivariant. b) Die Multiplikation in $\mathcal{D}$ ist G -äquivariant.
2. Die Operation von $\mathfrak{g}$ auf $\mathcal{D}$ durch $D \mapsto [\alpha(\xi), D]$, $\forall \xi \in \mathfrak{g}$, ist die Ableitung der G -Operation auf $\mathcal{D}$.
3. α ist G -äquivariant. (G operiert über Ad auf $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$!)

Sei $x \in X$, $B = \text{Stab}_G(x)$, $\mathfrak{b} = \text{Lie } B$. Wie in [HMSW] parametrisiere ich die homogenen tdo's durch $\lambda \in (\mathfrak{b}^*)^B$ als $\mathcal{D}_\lambda$. Es wird $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_X$ und $(\mathcal{D}_\lambda)^{\text{opp}} \cong \mathcal{D}_{-\lambda - \delta}$, wo δ der Charakter von $\Lambda^{\max}(\mathfrak{g}/\mathfrak{b})$ ist [HMSW]. Insbesondere ist $\mathcal{D}_\lambda$ auch als $\mathcal{O}_X$ -Modul über die Rechtsmultiplikation mit einer algebraischen G -Operation versehen, die dieselbe Verschiebung von Schnitten in $\mathcal{D}_\lambda$ und dieselbe $\mathfrak{g}$ -Operation liefert wie die algebraische G -Operation aus den Strukturdaten von $\mathcal{D}_\lambda$.

3.2. Zusammenhang mit induzierten Darstellungen

Über α wird $M = \mathcal{D}_\lambda / \mathcal{D}_\lambda \mathfrak{m}_x$ ein $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -Modul.

Proposition 4. *Es ist $M = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_{\lambda + \delta}$.*

Beweis. Zunächst will ich zeigen: $\mathbb{C}_\lambda \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cong \mathcal{D}_\lambda / \mathfrak{m}_x \mathcal{D}_\lambda$ als $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -Rechtsmoduln. [$\mathbb{C}_\lambda$ ist eigentlich $\mathcal{U}(\mathfrak{b})$ -Linksmodul. Aber $\text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}_\lambda) = \mathbb{C} = \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}_\lambda)^{\text{opp}}$!]

Ich muß dazu die Definition von $\mathcal{D}_\lambda$ rekapitulieren [HMSW]. Sei $\mathcal{U}^0 = \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ die übliche Garbe von Schiefpolynomringen, $\mathfrak{g}^0 = \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g} \subset \mathcal{U}^0$ die übliche Untergarbe von Lie-Algebren. Durch die kurze exakte Sequenz $\mathfrak{b}^0 \hookrightarrow \mathfrak{g}^0 \rightarrow T_X$ erkläre ich die Garbe von Idealen $\mathfrak{b}^0$. Sie ist G -äquivariant, und hat den geometrischen Halm $\mathfrak{b}$ in x . Ein $\lambda \in (\mathfrak{b}^*)^B$ definiert eine G -äquivariante Abbildung $\sigma_\lambda: \mathfrak{b}^0 \rightarrow \mathcal{O}_X$ und weiter $\varphi_\lambda: \mathfrak{b}^0 \rightarrow \mathcal{U}^0, s \mapsto s - \sigma_\lambda(s)$. Das von $\text{im } \varphi_\lambda$ erzeugte Ideal $J_\lambda \subset \mathcal{U}^0$ läßt sich schon als $(\text{im } \varphi_\lambda) \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ beschreiben. Denn $\text{im } \varphi_\lambda$ kommutiert mit $\mathcal{O}_X$ nach Definition, und ist stabil unter $\text{ad}(\mathfrak{g})$, da φ_λ G -äquivariant ist. Nun ist $\mathcal{D}_\lambda = \mathcal{U}^0 / J_\lambda$, folglich

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\lambda / (\mathfrak{m}_x \mathcal{D}_\lambda) &= \mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) / \left(\mathfrak{m}_x \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) + (\text{im } \varphi_\lambda) \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \right) \\ &= \mathcal{U}(\mathfrak{g}) / \langle \xi - \lambda(\xi) \mid \xi \in \mathfrak{b} \rangle \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \\ &= \mathbb{C}_\lambda \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathcal{U}(\mathfrak{g}). \end{aligned}$$

Nun wollte ich aber eine Aussage über Linksmoduln machen. Ich erinnere mich an $\mathcal{D}_\lambda \cong \mathcal{D}_{-\lambda-\delta}^{\text{opp}}$, und erhalte ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{D}_\lambda) & \longrightarrow & \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}_\lambda / \mathcal{D}_\lambda \mathfrak{m}_x) \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\text{opp}} & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{D}_{-\lambda-\delta})^{\text{opp}} & \longrightarrow & \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{D}_{-\lambda-\delta} / \mathfrak{m}_x \mathcal{D}_{-\lambda-\delta}) \end{array}$$

von Ringhomomorphismen. Hier ist $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\text{opp}}$ der prinzipale Antiautomorphismus, und alle senkrechten Pfeile sind Isomorphismen. Es ist also $\mathcal{D}_\lambda / \mathcal{D}_\lambda \mathfrak{m}_x$ isomorph zu $\mathbb{C}_{-\lambda-\delta} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, aufgefaßt als $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -Linksmodul über den prinzipalen Antiautomorphismus, also $\mathcal{D}_\lambda / \mathcal{D}_\lambda \mathfrak{m}_x = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_{\lambda+\delta}$. q.e.d.

3.3. Zwei $\mathfrak{b}$ -Operationen auf M

$M = \mathcal{D}_\lambda / \mathcal{D}_\lambda \mathfrak{m}_x$ ist als geometrischer Halm der G -äquivarianten Garbe $\mathcal{D}_\lambda$ in x ein $\text{Stab}_G(x) = B$ -Modul. Die abgeleitete $\mathfrak{b}$ -Operation notiere ich $\xi \perp m, \forall \xi \in \mathfrak{b}, m \in M$. Andererseits ist M ein $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ -Modul, also auch ein $\mathcal{U}(\mathfrak{b})$ -Modul. Diese Operation notiere ich $\xi \cdot m$.

Um die Beziehung dieser Operationen anzugeben, nehme ich $m = u \cdot \bar{1} \in M$, mit $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Es wird

$$\begin{aligned} \xi \perp (u \cdot \bar{1}) &= (\xi u - u \xi) \cdot \bar{1} + u \cdot (\xi \perp \bar{1}) \\ &= (\xi u - u \xi) \cdot \bar{1} \end{aligned}$$

da die Multiplikation $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes M \rightarrow M$ B -äquivariant ist, und $\bar{1}$ B -stabil ist.

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}\xi \cdot (u \cdot \bar{1}) &= (\xi u - u\xi) \cdot \bar{1} + u\xi \cdot \bar{1} \\ &= (\xi u - u\xi) \cdot \bar{1} + u \cdot ((\lambda + \delta)(\xi)) \cdot \bar{1} \\ &= (\xi u - u\xi) \cdot \bar{1} + ((\lambda + \delta)(\xi)) \cdot u \cdot \bar{1}\end{aligned}$$

nach Proposition 4. Zusammenfassend unterscheiden sich die beiden Operationen also nur um den Skalar $(\lambda + \delta)(\xi) \in \mathbb{C}$, es gilt $\xi \perp m - \xi \cdot m = ((\lambda + \delta)(\xi)) \cdot m$. Insbesondere liefern sie dieselbe $\mathfrak{b}$ -Operation auf $\text{End}_{\mathbb{C}}(M)$.

3.4. Tangentiale Beschreibung der globalen Schnitte

Sei von nun an G zusammenhängend. Ich bezeichne für jeden $\mathfrak{g}$ -Modul N mit $N^{G-\text{alg.}}$ den maximalen Untermodul, auf dem die $\mathfrak{g}$ -Operation sich zu einer algebraischen G -Operation integrieren läßt. Sicher ist stets $N^{G-\text{alg.}} \subset N^{\mathfrak{g}-\text{endl.}}$, und für G halbeinfach und einfach zusammenhängend ist sogar $N^{G-\text{alg.}} = N^{\mathfrak{g}-\text{endl.}}$. Ist andererseits G unipotent, so ist $N^{G-\text{alg.}} = N^{\mathfrak{g}-\text{nil}}$ der maximale Untermodul, auf dem $\mathfrak{g}$ lokal nilpotent operiert. (Man integriert die $\mathfrak{g}$ -Operation dann vermittels $\log: G \rightarrow \mathfrak{g}$.)

Spezieller gilt das folgende

Lemma 5. *Sei B eine algebraische Gruppe, $\mathfrak{b} = \text{Lie } B$, und seien V, W rationale B -Moduln. So ist $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)^{\mathfrak{b}-\text{endl.}} \subset \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)$ stabil unter der abstrakten B -Operation, und wird sogar ein rationaler B -Modul. Die beiden Operationen von $\mathfrak{b}$ auf diesem Modul stimmen überein. Ist B zusammenhängend, so gilt genauer:*

$$\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)^{B-\text{alg.}} = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, W)^{\mathfrak{b}-\text{endl.}}.$$

Beweis. Im Falle $\dim V < \infty$ ist nichts zu zeigen. Im allgemeinen ist

$$\text{Hom}(V, W) = \varprojlim \text{Hom}(V_1, W)$$

als abstrakter B -Modul und als $\mathfrak{b}$ -Modul, wo V_1 die endlichdimensionalen B -stabilen Teilräume von V durchläuft. (Ich kürze hier und im folgenden $\text{Hom}_{\mathbb{C}}$ mit Hom ab.)

Sei $H \subset \text{Hom}(V, W)$ ein Teilraum. Es ist $\dim H < \infty$ genau dann, wenn es eine feste Schranke $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $\dim p(H) \leq n$ für alle Projektionen $p: \text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(V_1, W)$. Insbesondere ist also $\dim \mathbb{C}BH < \infty$, falls H stabil ist unter $\mathfrak{b}$ und $\dim H < \infty$. Es folgt dann auch, daß für geeignetes V_1 die kanonische Projektion $\mathbb{C}BH$ in $\text{Hom}(V_1, W)$ einbettet. Damit habe ich alle Aussagen des Lemmas auf den trivialen Fall $\dim V < \infty$ zurückgeführt. q.e.d.

Sei nun wieder $B \subset G$ wie vorhin. Sei N sowohl $\mathfrak{g}$ -Modul als auch ein abstrakter B -Modul [wie z. B. $\text{End}_{\mathbb{C}}(M)$!]. Ich definiere

$$N_B^{G-\text{alg.}} = \{v \in N^{G-\text{alg.}} \mid \text{Die beiden } B\text{-Operationen stimmen auf } v \text{ überein}\}.$$

Ich zeige nun:

Theorem 6. $\Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda) = \text{End}_{\mathbb{C}}(M)_B^{G-\text{alg.}}$.

Bemerkung. Ist B zusammenhängend, so ist $\text{End}_{\mathbb{C}}(M)_B^{G-\text{alg.}} = \text{End}_{\mathbb{C}}(M)^{G-\text{alg.}}$. Ist zusätzlich G reduktiv und umfaßt B einen maximalen Torus von G , so gilt weiter: $\text{End}_{\mathbb{C}}(M)^{G-\text{alg.}} = \text{End}_{\mathbb{C}}(M)^{\mathfrak{g}-\text{endl.}}$. Das alles folgt aus obigem Lemma 5 und Abschn. 3.3. Über gemeinsam mit Borho erzielte Resultate in der Richtung des obigen Theorems hat J.-L. Brylinski diesen Juni in Paris vorgetragen.

Beweis. Ich fasse die nötigen Behauptungen in folgendem kommutativen Diagramm zusammen:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda) & \ni D \mapsto \varphi_D(g) = (g^{-1}D)(\bar{1}) & \\ \downarrow & \searrow & \\ & \{ \varphi : G \rightarrow M \mid \varphi \text{ regulär, } \varphi(gh) = h^{-1}\varphi(g) \ \forall g \in G, h \in B \} & \\ \text{End}_{\mathbb{C}}(M)_B^{G-\text{alg.}} \ni f \mapsto \varphi_f(g) = (g^{-1}f)(\bar{1}). & & \end{array}$$

Ich zeige, daß alle drei Pfeile Injektionen darstellen, und daß $D \mapsto \varphi_D$ sogar eine Bijektion ist. Es folgt dann leicht die Bijektivität aller drei Abbildungen. Zunächst ist G zusammenhängend, also X irreduzibel, mithin M ein treuer $\Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda)$ -Modul nach [BB1, 1.6], und das liefert uns eine Inklusion $\Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda) \hookrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(M)$. Nun ist $\Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda)$ ein G -Modul und die Inklusion ist B -äquivariant, somit erhalte ich $\Gamma(X, \mathcal{D}_\lambda) \hookrightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(M)_B^{G-\text{alg.}}$.

$M = \mathcal{D}_\lambda / \mathcal{D}_\lambda \mathfrak{m}_x$ ist der geometrische Halm in x der äquivarianten Garbe $\mathcal{D}_\lambda$ (aufgefaßt als $\mathcal{O}_X$ -Modul über die Rechtsmultiplikation!), somit ist $D \mapsto \varphi_D$ ein Isomorphismus aus allgemeinen Gründen. Was die Abbildung $f \mapsto \varphi_f$ angeht, rechnet man zunächst nach, daß

$$\begin{aligned} \varphi_f(gh) &= ((h^{-1}g^{-1})f)(\bar{1}) \\ &= h^{-1} \cdot ((g^{-1}f)(h \cdot \bar{1})) \\ &= h^{-1}((g^{-1}f)(\bar{1})) \\ &= h^{-1}(\varphi_f(g)) \quad \forall g \in G, h \in B \end{aligned}$$

(man verwendet für die zweite Gleichung, daß beide B -Operationen auf f übereinstimmen!)

Was die Injektivität von $f \mapsto \varphi_f$ angeht, bemerke ich zunächst, daß mein Diagramm aus G -äquivarianten Morphismen besteht, wo G rechts durch die linksreguläre Darstellung operiert. Jetzt gilt $\varphi_f \equiv 0 \Rightarrow (uf)(\bar{1}) = (u\varphi_f)(e) = 0 \ \forall u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Wäre $f \neq 0$, so gäbe es $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ von minimalem Grad mit $f(u \cdot \bar{1}) \neq 0$. Es wäre aber dann $(\check{u}f)(\bar{1}) = f(u \cdot \bar{1}) \neq 0$, wie man leicht erkennt indem man $(\check{u}f)$ ausschreibt, und dieser Widerspruch vollendet den Beweis des Satzes. q.e.d.

3.5. Anwendungen

Ich gehe jetzt wieder zu den ursprünglichen Notationen zurück, die nur für 3.1 bis 3.4 außer Kraft gesetzt waren, und formuliere zwei nützliche Corollare von Theorem 6.

Corollar 7. Sei $\lambda \in \alpha^*$. Es ist $\Gamma(G/P, D_\lambda) = \text{End}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} \mathbb{C}_{\lambda+\delta})^{\mathfrak{g}-\text{endl.}}$.

Beweis. Mit Proposition 4 und Theorem 6. q.e.d.

Corollar 8. $\Gamma = \Gamma(X, \mathcal{D}_X)^A = \text{End}_S(M)^{\text{a-endl.}}$.

Beweis. Ich kürze die rechte Seite mit End ab. $\Gamma \subset \text{End}$ ist evident. Da Q zusammenhängend ist, bleibt nur zu zeigen, daß sich die Operation von $g \times a$ rechts integrieren läßt. Aber die Operation von a ist trivial, und läßt sich somit integrieren, ferner läßt sich die Operation von $q = i(p)$ integrieren nach obigem Lemma, folglich läßt sich die Operation von $p \times a$ nach $P \times A$ integrieren. Aber $P \times A$ umfaßt einen maximalen Torus von $G \times A$! q.e.d.

4. Kohomologische Methoden

4.1. Die Basisfiltrierung

Sei für den Moment S eine beliebige endlich erzeugte kommutative $\mathbb{C}$ -Algebra, und Y eine glatte $\mathbb{C}$ -Varietät. In seinem Vortrag in Warschau [Bei] führt Beilinson den Begriff einer „ S -tdo auf Y “ ein. So ein Objekt ist eine $S \otimes \mathcal{O}_Y$ -Algebra, die lokal (im Zariski-Sinn!) isomorph ist zu $S \otimes \mathcal{D}_Y$. Eine S -tdo ist aufzufassen als eine von $\text{Spec}_{\max} S$ parametrisierte Familie von tdo's (Garben von “twisted differential operators”) auf Y . Die Automorphismen der S -tdo $S \otimes \mathcal{D}_Y$ werden, immer nach [Bei], gegeben durch die geschlossenen S -wertigen 1-Formen auf Y . Insbesondere ist die Filtrierung $S \otimes \mathcal{D}_Y \supset \dots \supset S \otimes \mathcal{D}_Y^2 \supset S \otimes \mathcal{D}_Y^1 \supset S \otimes \mathcal{O}_Y$ stabil unter diesen Automorphismen, und sie operieren durch die Identität auf den Subquotienten $S \otimes \mathcal{D}_Y^i / S \otimes \mathcal{D}_Y^{i-1} = S \otimes (\mathcal{D}_Y^i / \mathcal{D}_Y^{i-1})$.

Es folgt, daß ich auf jeder S -tdo $\mathcal{D}$ eine “basic filtration” durch gewisse $\mathcal{D}_{\text{bas}}(i)$ erklären kann, so daß für jede lokale Trivialisierung $\mathcal{D}|_V \cong S \otimes \mathcal{D}_V$ gilt: $\mathcal{D}_{\text{bas}}(i) \cong S \otimes \mathcal{D}_V^i$. Es folgt ferner für die assoziierte Graduierte $\text{gr}_{\text{bas}} \mathcal{D}$ von $\mathcal{D}$ bezüglich dieser „Basisfiltrierung“:

Lemma 9. $\text{gr}_{\text{bas}} \mathcal{D}$ ist kanonisch isomorph zu $S \otimes p_* \mathcal{O}_{T^*Y}$.

Hier bezeichnet $p: T^*Y \rightarrow Y$ die kanonische Projektion.

4.2. Die Kohomologie der relativen Einhüllenden

Es sei nun wieder $S = S(\alpha)$. Betrachten wir das A -Hauptfaserbündel $\text{pr}: X = G/(P, P) \rightarrow G/P = Y$. Es ist lokal trivial sogar in der Zariski-Topologie. Sei $\mathcal{U} = \text{pr}_*(\mathcal{D}_X)^A$ die „relative Einhüllende“ im Sinne von [BB2]. Nach Definition ist $\Gamma = \Gamma(Y, \mathcal{U})$, und nach [BB2] ist $\mathcal{U}$ eine S -tdo auf Y . Für alle $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ ist $\mathcal{D}_\lambda \cong \mathcal{U}/(\ker \lambda) \mathcal{U}$, und es wird $M(\lambda) := M/(\ker \lambda * M) = \mathcal{D}_\lambda / \mathcal{D}_\lambda m_\lambda = \mathcal{U}(g) \otimes_{\mathcal{U}(p)} \mathbb{C}_{\lambda + \delta}$.

Nach Lemma 9 ist $\text{gr}_{\text{bas}} \mathcal{U} \cong S \otimes p_* \mathcal{O}_{T^*Y}$. Nach dem Satz von Elkik (vgl. [BB1, 1.4]) verschwinden die höheren Kohomologiegruppen dieser Garbe. Es folgt sofort:

Proposition 10. $H^v(Y, \mathcal{U}) = 0, \forall v \geq 1$.

Die Filtrierung $\mathcal{U}_{\text{bas}}(i)$ von $\mathcal{U}$ induziert eine Filtrierung $\Gamma_{\text{bas}}(i)$ von Γ . Ich setze

$$R(T^*Y) = R(T^*(G/P)) = \Gamma(T^*Y, \mathcal{O}_{T^*Y}).$$

Mit den obigen Überlegungen folgt für die assoziierte graduierte Algebra $\text{gr}_{\text{bas}} \Gamma$ sofort:

Proposition 11. $\text{gr}_{\text{bas}}\Gamma = S \otimes R(T^*Y)$. Insbesondere ist dieser Ring normal.

Ich hatte ein „Theorem von Kostant“ für Γ versprochen.

Corollar 12. Als S - G -Modul ist unkanonisch $\Gamma \cong S \otimes R(T^*Y)$.

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß die kurzen exakten Sequenzen

$$\Gamma_{\text{bas}}(i-1) \hookrightarrow \Gamma_{\text{bas}}(i) \rightarrow \Gamma_{\text{bas}}(i)/\Gamma_{\text{bas}}(i-1)$$

spalten als Sequenzen von S - G -Moduln. Es reicht, eine Spaltungsabbildung auf

$$R^i(T^*Y) \subset S \otimes R^i(T^*Y) = \Gamma_{\text{bas}}(i)/\Gamma_{\text{bas}}(i-1)$$

zu erklären, die G -äquivariant ist. Das ist möglich, da G als halbeinfach vorausgesetzt war. q.e.d.

Bemerkung. $R(T^*Y)$ ist endlich erzeugt als $\mathbb{C}$ -Algebra. Das kann man z. B. daraus folgern, daß die Impulsabbildung $T^*Y \rightarrow \mathfrak{g}^*$ eigentlich ist. Da es eine dichte G -Bahn in T^*Y gibt, sind ferner die G -Multiplizitäten in $R(T^*Y)$ endlich (alles nach [BB1]).

4.3. Γ als ganzer Abschluß

Theorem 13. $\Gamma = \{\gamma \in (R_{\mathfrak{a}})_{\mathbb{K}} \mid \text{Die von } R_{\mathfrak{a}} \text{ und } \gamma \text{ erzeugte Unter algebra } R_{\mathfrak{a}}\{\gamma\} \text{ ist endlich erzeugter } R_{\mathfrak{a}}\text{-Bimodul}\}$.

Beweis. $\subset$) nach Corollar 3.

$\supset$) Ich zeige sogar: $\Gamma = \{\gamma \in \Gamma_{\mathbb{K}} \mid \Gamma\{\gamma\} \text{ ist endlich erzeugter } \Gamma\text{-Bimodul}\}$.

Ich kürze dazu $\Gamma_{\text{bas}}(i) = \Gamma^i$ ab, und erhalte eine Filtrierung $\Gamma_{\mathbb{K}}^i$ auf $\Gamma_{\mathbb{K}}$ mit assoziierter Graduierung $\text{gr}_{\text{bas}}\Gamma_{\mathbb{K}} = (\text{gr}_{\text{bas}}\Gamma)_{\mathbb{K}}$. Nach Proposition 11 ist $\text{gr}_{\text{bas}}\Gamma$ ganz abgeschlossen in $\text{gr}_{\text{bas}}\Gamma_{\mathbb{K}}$. Ich führe nun einen Beweis durch Widerspruch und wähle nun $\gamma \in \Gamma_{\mathbb{K}}$ wie oben, von minimal möglichem Grad, so daß $\gamma \in \Gamma_{\mathbb{K}}^i$ aber $\gamma \notin \Gamma^i$. Ich finde $t \in S$, $t \neq 0$, so daß $t\gamma^n \in \Gamma \ \forall n \geq 0$. Sei $\sigma(\gamma) \in \Gamma_{\mathbb{K}}^i/\Gamma_{\mathbb{K}}^{i-1}$ das Symbol von γ . Es ist auch $t\sigma(\gamma)^n \in \text{gr}_{\text{bas}}\Gamma$, $\forall n \geq 0$. Somit ist $\sigma(\gamma) = \sigma(\gamma_1)$ für geeignetes $\gamma_1 \in \Gamma^i$ ($\text{gr}_{\text{bas}}\Gamma$ ist normal!). Es hätte $(\gamma - \gamma_1)$ echt kleineren Grad. Nun ist aber $\Gamma\{\gamma - \gamma_1\} = \Gamma\{\gamma\}$. Es gibt kein Entkommen mehr vom Widerspruch. q.e.d.

4.4. Ein Theorem von Duflo für Γ

Proposition 14. Für alle $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ ist $(\ker \lambda)\Gamma \hookrightarrow \Gamma \rightarrow \Gamma(G/P, \mathcal{U}/(\ker \lambda)\mathcal{U})$ eine kurze exakte Sequenz.

Beweis. Man betrachte den Koszul-Komplex

$$\dots \rightarrow A^2 \mathfrak{a} \otimes S \rightarrow \mathfrak{a} \otimes S \rightarrow S \rightarrow S/\ker \lambda \rightarrow 0.$$

Tensoriere ich ihn über S mit $\mathcal{U}$, erhalte ich eine exakte Sequenz von Garben

$$\dots \rightarrow A^2 \mathfrak{a} \otimes \mathcal{U} \rightarrow \mathfrak{a} \otimes \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}/(\ker \lambda)\mathcal{U} \rightarrow 0.$$

Die höheren Kohomologiegruppen aller dieser Garben verschwinden. Das ist wohlbekannt für $\mathcal{D}_\lambda = \mathcal{U}/(\ker \lambda)\mathcal{U}$, und folgt für die $(A^i \alpha \otimes \mathcal{U})$ aus Proposition 10. Somit erhalte ich eine exakte Sequenz von globalen Schnitten

$$\dots \rightarrow A^2 \alpha \otimes \Gamma \rightarrow \alpha \otimes \Gamma \rightarrow \Gamma \rightarrow \Gamma(G/P, \mathcal{U}/(\ker \lambda)\mathcal{U}) \rightarrow 0$$

die meine Proposition beinhaltet. q.e.d.

Nach Proposition 11 und Lemma 2.6.4 in [Di] hat jedes primitive Ideal von Γ einen zentralen Charakter $\lambda \in \alpha^*$. Das kleinste primitive Ideal zu einem festen zentralen Charakter λ wird beschrieben durch das folgende

Corollar 15. $(\ker \lambda)\Gamma = \text{Ann } M(\lambda)$ ist vollprim.

Beweis. Nach der vorhergehenden Proposition ist $\Gamma/(\ker \lambda)\Gamma = \Gamma(G/P, \mathcal{D}_\lambda)$ nullteilerfrei als Ring von Differentialoperatoren. Es ist ferner $M(\lambda) = \mathcal{D}_\lambda/\mathcal{D}_\lambda \mathfrak{m}_\mathfrak{e}$ ein treuer $\Gamma(G/P, \mathcal{D}_\lambda)$ -Modul. q.e.d.

5. Beziehung von R zu R_α

5.1. Beziehung der Zentren

Ich wähle nun $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ eine Cartansche in einer Borelschen in meiner Parabolischen. Sei $\varrho \in \mathfrak{h}^*$ der Charakter von $A^{\max}(\mathfrak{g}/\mathfrak{b})^*$. Ich definiere auf $\mathfrak{h}^*$ zwei Operationen der Weylgruppe W , mit Fixpunkten 0 und $(-\varrho)$, notiert $w\mu$ und $w \cdot \mu$, mit Quotienten $\mathfrak{h}^*/W$ und $\mathfrak{h}^*/(W \cdot)$. Es ist kanonisch $\text{Spec}_{\max} Z = \mathfrak{h}^*/(W \cdot)$. Da $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ halbeinfacher $\text{ad}(\mathfrak{g})$ -Modul ist, liefert die kanonische Surjektion $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow R$ eine Surjektion der Zentren $Z \rightarrow \bar{Z}$. Analog erhalte ich eine Surjektion $Z \otimes S(\alpha) \rightarrow Z(R_\alpha)$.

Proposition 16. i) $Z(R_\alpha) = S$.

ii) Wir haben ein kommutatives Diagramm wie unten.

iii) $\tilde{\pi}$ ist endlich und dominant, vom Grad $|W_\alpha|$, wo $W_\alpha = \{w \in W \mid w \cdot \alpha^* = \alpha^*\}$.

Im folgenden Diagramm ist $\tilde{\pi}$ durch die Inklusion $\bar{Z} = Z(R) \subset Z(R_\alpha) = S$ erklärt, der untere horizontale Pfeil durch die kanonische Surjektion $Z \rightarrow \bar{Z}$.

$$\begin{array}{ccc} \lambda & \longmapsto & \lambda + \delta \\ \text{Spec}_{\max} S = \alpha^* & \longrightarrow & \mathfrak{h}^* = \text{Spec}_{\max} S(\mathfrak{h}) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \text{Spec}_{\max} \bar{Z} = \pi(\alpha^*) & \longrightarrow & \mathfrak{h}^*/(W \cdot) = \text{Spec}_{\max} Z. \end{array}$$

Beweis. R_α operiert ja treu auf dem in Proposition 1 sehr explizit beschriebenen Modul M . Sei $z \in Z$. Es ist $\pi^*(z) =: t = z + u_1$ mit $u_1 \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}$, wo $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{b}$ das Nilradikal bezeichnet. Wir erhalten $\forall u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}), \forall s \in S$ die folgenden Gleichheiten von Elementen aus M . [Es ist $\otimes$ über $\mathcal{U}(\mathfrak{p})$ aufzufassen!]:

$$\begin{aligned} z(u \otimes s) &= uz \otimes s \\ &= ut \otimes s \\ &= u \otimes \bar{t}s \\ &= T_\delta(\bar{t}) * (u \otimes s). \end{aligned}$$

Hier bezeichnet $\bar{t} \in S$ das Bild von t unter $\mathcal{U}(\mathfrak{h}) \rightarrow S(\mathfrak{a})$ und $T_\delta: S \rightarrow S$ ist definiert durch $T_\delta(v) = v + \delta(v) \forall v \in \mathfrak{a}$. Das beweist i) und ii). iii) ist elementare algebraische Geometrie, sobald man weiß, daß kein nichttriviales $w \in W$ ganz $\mathfrak{a}^* + \mathfrak{q}$ fixiert. Das ist klar, da $\mathfrak{q}$ regulär ist. q.e.d.

5.2. Notationen zu primitiven Idealen

Man betrachte das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mu & \mathfrak{h}^* & \longleftarrow & \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{a}^* & & (\mu, \lambda) \\
 \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 I(\mu) & \text{Prim } \mathcal{U}(\mathfrak{g}) & \xleftarrow{\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \cap} & \text{Prim } \mathcal{U}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{a}) & & I(\mu, \lambda) \\
 & \theta \downarrow & & \downarrow \theta_a & & \\
 & \mathfrak{h}^*/(W \cdot) & \longleftarrow & (\mathfrak{h}^*/(W \cdot)) \times \mathfrak{a}^* & &
 \end{array}$$

Die horizontalen Pfeile oben und unten sind einfach die Projektionen. $I(\mu)$ [bzw. $I(\mu, \lambda)$] sind die Annulatoren der einfachen Moduln mit den höchsten Gewichten μ [bzw. (μ, λ)] bzgl. $\mathfrak{b}$. Darin liegt als Teildiagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \lambda & \mathfrak{a}^* & \xleftarrow{\text{id}} & \mathfrak{a}^* & & \lambda \\
 \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 I(\lambda + \delta) & \text{Prim } R & \xleftarrow{R \cap} & \text{Prim } R_a & & I(\lambda + \delta, \lambda) \\
 & \theta \downarrow & & \downarrow \theta_a & & \\
 & \pi(\mathfrak{a}^*) & \xleftarrow{\pi} & \mathfrak{a}^* & &
 \end{array}$$

wo rechts oben $\mathfrak{a}^* \hookrightarrow \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{a}^*$ über $\lambda \mapsto (\lambda + \delta, \lambda)$ eingebettet wird, was die Einbettungen links oben und rechts unten festlegt. Die Einbettung auf den primitiven Spektren kommt von den kanonischen Quotientenabbildungen. Es ist $I(\lambda + \delta)$ [bzw. $I(\lambda + \delta, \lambda)$] der Annulator in R [bzw. R_a] des einfachen Quotienten von $M(\lambda)$, $\forall \lambda \in \mathfrak{a}^*$.

Es bezeichne für jeden Ring $\text{Max}(\text{Ring}) \subset \text{Prim}(\text{Ring})$ seine maximalen Ideale. In unserem obigen Diagramm liegt nochmal wieder als Teildiagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Max } R & \xleftarrow{(R \cap)} & \text{Max } R_a \\
 \theta \downarrow & & \downarrow \theta_a \\
 \pi(\mathfrak{a}^*) & \xleftarrow{\pi} & \mathfrak{a}^* .
 \end{array}$$

In diesem letzten Diagramm sind θ (bzw. θ_a) bijektiv, und ich schreibe ihre Umkehrabbildungen $\chi \mapsto I_{\max}(\chi)$ [bzw. $\lambda \mapsto J_{\max}(\lambda)$].

Es bezeichne $T \subset \mathfrak{a}^*$ die (dichte!) Menge der „am wenigsten ganzen“ Gewichte aus $\mathfrak{a}^*$, d.h. $T = \{\lambda \in \mathfrak{a}^* \subset \mathfrak{h}^* \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z} \text{ für eine Wurzel } \alpha \text{ von } G \Rightarrow \alpha \text{ ist Wurzel aus dem halbeinfachen Levifaktor von } P\}$. Sei $\lambda \in T$, $\chi = \pi(\lambda)$ sein Bild in $\text{Spec}_{\max} \bar{\mathbb{Z}}$. So ist $I_{\max}(\chi) = \text{Ann}_R M(\lambda) = I(\lambda + \delta)$, $J_{\max}(\lambda) = \text{Ann}_{R_a} M(\lambda) = I(\lambda + \delta, \lambda)$. Denn für $\lambda \in T$ ist $M(\lambda)$ einfacher R -Modul nach [Ja2, 1.17, S. 35] und sein Annulator ist das maximale Ideal zum entsprechenden zentralen Charakter nach [Ja1, 5.21, S. 70].

5.3. Beziehung von R zu R_a

Theorem 17. Es sei $\chi \in \text{Spec } \bar{Z}$. Ist S_χ ein freier $\bar{Z}_\chi$ -Modul, so ist sein Rang $|W_a|$ und $R_\chi \otimes_{Z_\chi} S_\chi = (R \otimes_Z S)_\chi = (R_a)_\chi$.

Bemerkung. Die Bedingung an $\chi \in \text{Spec}_{\max} \bar{Z}$ ist gleichbedeutend mit: $\alpha^* \xrightarrow{\pi} \text{Spec}_{\max} \bar{Z}$ ist flach an allen $\lambda \in \tilde{\pi}^{-1}(\chi)$. Insbesondere ist sie in den glatten χ stets erfüllt. [Ha, III, Ex. 9.3.a.]

Beweis. Die Aussage über den Rang folgt aus Proposition 16. Das Theorem folgt sofort aus

Proposition 18. Sei $0 \neq s \in \bar{Z}$, so daß $S[s^{-1}]$ frei ist über $\bar{Z}[s^{-1}]$. So ist $(R \otimes_Z S)[s^{-1}] = R_a[s^{-1}]$.

Beweis. Es bezeichne $T \subset \alpha^*$ die Menge der am wenigsten ganzen Gewichte, und $T_s = \{\lambda \in T \mid s(\tilde{\pi}(\lambda)) \neq 0\}$. Ich zeige zunächst das folgende

Lemma 19.

$$\bigcap_{\lambda \in T_s} I_{\max}(\tilde{\pi}(\lambda)) = 0 \subset R \quad \text{und} \quad \bigcap_{\lambda \in T_s} J_{\max}(\lambda) = 0 \subset R_a.$$

Beweis (Lemma). Es reicht, das Letztere zu zeigen. Es ist nun aber

$$\begin{aligned} \text{Ann}_{\mathfrak{U}(\mathfrak{g} \times \alpha)} M &= \bigcap_{\lambda \in T_s} \text{Ann } M(\lambda) \\ &= \bigcap_{\lambda \in T_s} J_{\max}(\lambda) \end{aligned}$$

da $T_s \subset \alpha^*$ Zariski-dicht, und da Induktion von Idealen [bei uns wird das Nullideal von $S(\alpha) = S$ nach $\mathfrak{U}(\mathfrak{g} \times \alpha)$ induziert!] mit beliebigen Schnitten vertauscht. q.e.d. (Lemma)

Sei nun $s_1, s_2, \dots, s_n$ Basis von S_s über $\bar{Z}_s$ (mit $n = |W_a|!$). Sei $\lambda \in T_s$, $\chi = \tilde{\pi}(\lambda)$ und seien $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ die verschiedenen Elemente von $\tilde{\pi}^{-1}(\chi)$. So ist die Familie $\{\lambda_i : S_s \rightarrow \mathbb{C}\}_{i=1}^n$ linear unabhängig. Folglich ist die Matrix $[\lambda_i(s_j)]$ nicht singulär. Denn gilt eine Relation $\sum_i a_i \lambda_i(s_j) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{C}$ mit gewissen $a_i \in \mathbb{C}$, so folgt

$$\left(\sum_i a_i \lambda_i \right) \left(\sum_j z_j s_j \right) = \sum_j \chi(z_j) \cdot \sum_i a_i \lambda_i(s_j) = 0 \quad \forall z_j \in \bar{Z}_s$$

also ist $\sum_i a_i \lambda_i$ Null auf S_s , also $a_i = 0 \quad \forall i$.

Mein Ziel ist es ja, die Injektivität von $m_s : R_s \otimes_{Z_s} S_s \rightarrow (R_a)_s$ zu zeigen. Nun ist aber $R_s \otimes_{Z_s} S(\alpha)_s = R_s \cdot s_1 \oplus \dots \oplus R_s \cdot s_n$. Sei $v_1 s_1 + \dots + v_n s_n$ null in $(R_a)_s$. So operiert es durch Null auf $M(\lambda) \quad \forall \lambda \in T_s$, folglich ist $v_1 \lambda(s_1) + \dots + v_n \lambda(s_n) \in I_{\max}(\tilde{\pi}(\lambda))$, $\forall \lambda \in T_s$, und mit der Invertierbarkeit meiner Matrix oben folgt $v_1, \dots, v_n \in \bigcap_{\lambda \in T_s} I_{\max}(\tilde{\pi}(\lambda)) = 0$. q.e.d.

Corollar 20. Der Kern von $m : R \otimes_Z S \rightarrow R_a$ besteht genau aus den S -Torsionselementen.

Beweis. R_a hat keine S -Torsion, daher $\ker(m) \supset$. Kennt man das vorhergehende Theorem auch nur für eine Stelle χ , folgt mühelos $\ker(m) \subset$. q.e.d.

5.4. Lokale Theoreme von Duflo und Kostant in R

Theorem 21. Sei $\chi \in \text{Spec}_{\max} \bar{\mathbb{Z}}$. Ist S_χ ein freier $\bar{\mathbb{Z}}_\chi$ -Modul und gilt $(R_\alpha)_\chi = \Gamma_\chi$, so ist unkanonisch $R_\chi \cong \bar{\mathbb{Z}}_\chi \otimes_{\mathbb{C}} R(T^*(G/P))$ als $\bar{\mathbb{Z}}_\chi$ - G -Modul, und $\ker \chi R_\chi$ ist das minimale primitive Ideal von R_χ . Es ist sogar vollprim.

Bemerkung. Für generische χ gilt also unser Theorem.

Beweis. Es ist

$$R_\chi \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_\chi} S_\chi = (R_\alpha)_\chi = \Gamma_\chi = S_\chi \otimes_{\mathbb{C}} R(T^*(G/P))$$

die erste Gleichung nach Theorem 17, die zweite nach Voraussetzung, die dritte nach Corollar 12. Ich nehme die isotypischen Komponenten zu einem endlich-dimensionalen einfachen G -Modul E und erhalte $R_\chi^E \otimes_{\bar{\mathbb{Z}}_\chi} S_\chi \cong S_\chi \otimes_{\mathbb{C}} R(T^*(G/P))^E$. Nun sind die G -Multiplizitäten in $R(T^*(G/P))$ endlich, und das folgende Lemma beschließt den Beweis der ersten Aussage.

Was die zweite Aussage angeht, reicht es zu zeigen, daß $\ker \chi R_\chi$ vollprim ist. Sei $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ mit $\tilde{\pi}(\lambda) = \chi$. So ist $(\ker \lambda) \Gamma_\chi$ vollprim in Γ_χ nach Corollar 15. Aber nach obiger Gleichungskette in Verbindung mit der ersten Aussage schneidet dies Ideal R_χ in $\ker \chi R_\chi$. q.e.d.

Das folgende Lemma ist wohlbekannt.

Lemma 22. Sei A noetherscher lokaler Ring, $A \subset B$ eine endliche Ringerweiterung, B ein freier A -Modul. Sei M ein A -Modul. Ist $M \otimes_A B$ freier B -Modul von endlichem Rang, so ist M freier A -Modul vom selben Rang.

Beweis. Als A -Untermodule von $M \otimes_A B$ ist M endlich erzeugt. Da B treuflach ist über A , folgt aus „ $M \otimes_A B$ ist B -flach“ auch „ M ist A -flach“. Damit ist M frei. q.e.d.

6. Die primitiven Ideale von R und R_α

6.1. Die primitiven Ideale von R_α

Ich bestimme die kleinsten Ideale in den Fasern von $\theta_\alpha: \text{Prim } R_\alpha \rightarrow \mathfrak{a}^*$.

Theorem 23. $\sqrt{(\ker \lambda) R_\alpha} = R_\alpha \cap (\ker \lambda) \Gamma = \text{Ann } M(\lambda)$ ist primitiv, $\forall \lambda \in \mathfrak{a}^*$.

Beweis. Alle Aussagen bis auf die erste Gleichheit folgen sofort aus Corollar 15. Von der ersten Gleichheit ist $\subset$ evident. Ich zeige $\supset$. Dazu brauche ich die folgende nichtkommutative Version des Lemmas von Artin-Rees (vgl. auch [CH, 11.4 und 11.7]):

Lemma 24. Sei A ein linksnoetherscher Ring, $M \subset N$ noethersche A -Moduln, $I \subset A$ ein von endlich vielen zentralen Elementen erzeugtes Ideal. So gibt es n , so daß

$$IM \supset (M \cap I^n N).$$

Beweis (Lemma). Der Ring $GA = \bigoplus_{v \geq 0} I^v$ ist als Quotient eines Polynomrings über A linksnoethersch, und $\bigoplus_{v \geq 0} I^v N$ ist noetherscher GA -Modul. $\bigoplus_{v \geq 0} (I^v N \cap M)$ ist als Untermodul auch endlich erzeugt, sagen wir, von $\bigoplus_{v \geq 0}^n (I^v N \cap M)$. Es folgt, daß $IM \supset (M \cap I^n N)$. q.e.d. (Lemma)

Jetzt sind ja $R_a \subset \Gamma$ noethersche R_a -Moduln nach Corollar 3. Folglich ist für n hinreichend groß $(R_a \cap \ker \lambda \Gamma)^n \subset R_a \cap (\ker \lambda)^n \Gamma \subset (\ker \lambda) R_a$, was die ausstehende Inklusion zeigt. q.e.d.

6.2. Die primitiven Ideale von R

Das Analogon für R ist das folgende

Theorem 25.

$$\sqrt{(\ker \chi)R} = \bigcap_{\pi(\lambda)=\chi} (\ker \lambda) \Gamma \cap R \quad \forall \chi \in \text{Spec}_{\max} \bar{Z}.$$

Beweis. Es bezeichne $\bigcap = \bigcap_{\pi(\lambda)=\chi} (\ker \lambda) \Gamma \cap R$.

Ich zeige $\subset$. Als Schnitt der vollprimen Ideale $(\ker \lambda) \Gamma \cap R$ (vgl. Corollar 15) ist $\bigcap$ semiprim. Sicher ist $(\ker \chi)R \subset \bigcap$. Es folgt $\sqrt{(\ker \chi)R} \subset \bigcap$.

Der entscheidende Punkt im Beweis der anderen Inklusion $\supset$ ist das folgende

Lemma 26. $\sqrt{(\ker \chi)R} \supset (\ker \chi) \Gamma \cap R \quad \forall \chi \in \text{Spec}_{\max} \bar{Z}.$

Beweis (Lemma). Nach der Bemerkung zu Corollar 3 ist Γ endlich erzeugter R -Modul. Das Lemma folgt nun mühelos aus dem vorhergehenden Artin-Rees-Lemma 24. q.e.d. (Lemma)

Nun ist mit etwas algebraischer Geometrie

$$(\ker \chi)S \supset \left(\prod_{\pi(\lambda)=\chi} \ker \lambda \right)^N$$

für $N \gg 0$. Folglich ist, u. U. mit noch größerem N , $(\ker \chi) \Gamma \cap R \supset \bigcap^N$. Nach dem Lemma ist somit $\sqrt{(\ker \chi)R} \supset \bigcap^N$, also $\sqrt{(\ker \chi)R} \supset \bigcap$. q.e.d.

Corollar 27. Die minimalen Ideale aus $\text{Prim } R$ sind genau die $\text{Ann } M(\lambda)$, für $\lambda \in \alpha^*$.

Corollar 28. $(R \cap): \text{Prim } R_a \rightarrow \text{Prim } R$ ist surjektiv.

Beweis. Nach Theorem 23 und Corollar 27 ist $R \cap$ surjektiv auf den minimalen primitiven Idealen. Aber für jedes minimale $I \in \text{Prim}(R_a)$ ist $R/(R \cap I) \cong R_a/I$. q.e.d.

6.3. Über die Beziehung der beiden primitiven Spektren

Vergessen wir für den Moment mal alle alten Notationen, bis auf den Grundkörper $\mathbb{C}$, und nehmen zwei beliebige $\mathbb{C}$ -Algebren $Z \subset A$, so daß Z zentral in A ist. Für jedes $\chi: Z \rightarrow \mathbb{C}$ definiere ich $\text{Prim}^\chi(A) = \{I \in \text{Prim } A \mid I \cap Z = \ker \chi\}$. Seien nun Homomorphismen $Z \rightarrow \bar{Z} \xrightarrow{\bar{\chi}} \mathbb{C}$ von kommutativen $\mathbb{C}$ -Algebren gegeben, und bezeichne χ ihre Komposition. So ist aus trivialen Gründen

$$\text{Prim}^\chi A \xleftarrow{A \cap} \text{Prim}^{\bar{\chi}} \left(A \otimes_Z \bar{Z} \right)$$

eine Bijektion. Indem wir uns wieder an unsere alten Notationen erinnern, erhalten wir das folgende kommutative Diagramm von Mengen, in dem das linke

Viereck kartesisch ist:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Prim } R & \xleftarrow{R \cap} & \text{Prim}(R \otimes_Z S) & \xleftarrow{\quad} & \text{Prim } R_a \\
 \theta \downarrow & & \downarrow \theta_a & \nearrow & \\
 \text{Spec}_{\max} \bar{Z} & \xleftarrow{\tilde{\pi}} & \mathfrak{a}^* & &
 \end{array}$$

Ist $\tilde{\pi}$ flach bei $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, so ist nach Theorem 17 $(R \otimes_Z S(\mathfrak{a}))_\lambda \cong (R_a)_\lambda$, somit ist die Inklusion oben rechts eine Bijektion der Fasern über λ .

7. Über das Verhältnis von R_a zu Γ

7.1. Zusammenhang mit Kostant's Problem

Sei $\lambda \in \mathfrak{a}^*$. So ist $\Gamma/(\ker \lambda)\Gamma = \Gamma(G/P, \mathcal{D}_\lambda) = \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} \mathbb{C}_{\lambda+\delta})^{\mathfrak{g}-\text{endl.}}$, die erste Gleichheit nach Proposition 14, die zweite nach Corollar 7. Ich zeige nun:

Theorem 29. *Sei $\lambda \in \mathfrak{a}^*$. Es ist $(R_a)_\lambda = \Gamma_\lambda$ genau dann, wenn die kanonische Abbildung $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} \mathbb{C}_{\lambda+\delta})^{\mathfrak{g}-\text{endl.}}$ eine Surjektion ist.*

Beweis. Nach den Vorbemerkungen ist diese kanonische Abbildung surjektiv genau dann, wenn $(R_a)_\lambda \rightarrow \Gamma/(\ker \lambda)\Gamma$ surjektiv ist, genau dann, wenn $(R_a)_\lambda \rightarrow \Gamma_\lambda/(\ker \lambda)\Gamma_\lambda$ surjektiv ist. Ich zerlege beide Seiten in ihre isotopischen Komponenten unter G . Diese sind endlich erzeugte S_λ -Moduln nach Corollar 12, und das Lemma von Nakayama beendet den Beweis. q.e.d.

7.2. Zusammenhang mit der Geometrie der Impulsabbildung

Die Ringe $R \subset R_a \subset \Gamma$ und $\Gamma/(\ker \lambda)\Gamma$ sind Ringe von Differentialoperatoren. Die Grade bezeichne ich mit einem oberen Index.

Theorem 30. *Es gebe $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, so daß $R^n \rightarrow (\Gamma/(\ker \lambda)\Gamma)^n$ surjektiv ist für alle n . So ist $R_a = \Gamma$.*

Bemerkung. Die Bedingung des Theorems ist z. B. stets erfüllt, wenn die Abbildungen $\mathcal{U}^n(\mathfrak{g}) \rightarrow \Gamma(G/P, \mathcal{D}_{G/P})^n$ surjektiv sind für alle n . Dafür geben [BB1] ein geometrisches hinreichendes Kriterium: Die Impulsabbildung $T^*(G/P) \rightarrow \mathbb{G}^{\mathfrak{p}^\perp} \subset \mathfrak{g}^*$ muß birational mit normalem Bild sein. Das ist z. B. im Falle $G = SL(n, \mathbb{C})$ stets richtig [BB1].

Beweis. Ich zeige durch Induktion: $R_a^{n+1} = \Gamma^{n+1}$. Aber $\gamma \in \Gamma^{n+1}$ hat nach Voraussetzung die Form $\gamma = r + s\gamma_1$ mit $r \in R^{n+1}$, $s \in \ker \lambda$. Es muß dann $\gamma_1 \in \Gamma^n$ sein. Nach Induktionsannahme war aber $\Gamma^n = R_a^n$. q.e.d.

8. Beispiele

8.1. Der Fall $G = SL(n+1, \mathbb{C})$, $G/P = \mathbb{CP}^n$ der komplex projektive Raum

Sei $n \geq 1$. Die Gruppe $G = SL(n+1, \mathbb{C})$ operiert auf $\mathbb{C}^{n+1}$ in kanonischer Weise. Ich bezeichne die Standardbasis von $\mathbb{C}^{n+1}$ mit $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$. Ich betrachte in G die

Parabolische $P = \{g \in G \mid g(\mathbb{C}e_1) = \mathbb{C}e_1\}$ und erhalte $(P, P) = \text{Stab}_G(e_1)$. So wird kanonisch $X = G/(P, P) = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$. Identifiziere ich A mit $\mathbb{C}^*$ über den ersten Eintrag in der Diagonale, so geht die Operation von A auf X in die Multiplikation mit $z \in \mathbb{C}^*$ auf $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ über. Es wird $\Gamma(\mathcal{D}_X) = \mathbb{C}\{x_i, \partial_i\}_{i=1}^{n+1}$ die Weyl-Algebra, und $\Gamma(\mathcal{D}_X)^A = \Gamma = \mathbb{C}\{x_i \partial_j\}_{i,j=1}^{n+1}$ die Unteralgebra aller Ausdrücke „vom gleichen Grad in X und ∂ “. Es wird $R \subset \Gamma$ das Erzeugnis aller $\{x_i \partial_j\}_{i \neq j}$ und $\{x_i \partial_i - x_{i+1} \partial_{i+1}\}_{i=1}^n$. Es wird $\mathfrak{a} = \mathbb{C}(x_1 \partial_1 + \dots + x_{n+1} \partial_{n+1}) \subset \Gamma$. Insbesondere ist $R_{\mathfrak{a}} = \Gamma$, was aber nach Theorem 30 sowieso schon klar war. Ich wähle $\mathfrak{h}$ die Cartansche aller Diagonalmatrizen in $\mathfrak{g}$, darüber $\mathfrak{b}$ die Borelsche aller oberen Dreiecksmatrizen aus $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$. Ich definiere $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ durch $\varepsilon_i(\text{Matrix}) = i\text{-ter Eintrag in der Diagonale}$. Die $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{n+1}$ erzeugen $\mathfrak{h}^*$, und die $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ für $1 \leq i \leq n$ bilden die Basis des Wurzelsystems von $\mathfrak{g}$, die zu $\mathfrak{b}$ gehört. $\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ sind die Basiswurzeln zu P . Die Abb. 1 zeigt $\mathfrak{a}^* \subset \mathfrak{h}^*$ bzw. $\pi(\mathfrak{a}^*) \subset \mathfrak{h}^*/(W \cdot)$ für $n=2$ als gestrichelte Linie mit Knoten an den ganzen Gewichten. Um die verschobene W -Operation zu veranschaulichen, habe ich das Wurzelsystem um $(-\varrho)$ verschoben eingezeichnet. Ich identifiziere $\mathfrak{h}^*/(W \cdot)$ mit der um $(-\varrho)$ verschobenen positiven Weyl-Kammer. Obwohl mein reelles Bild den komplexen Sachverhalt nur unzulänglich darstellen kann, hoffe ich dennoch, daß es dessen Verständnis erleichtert.

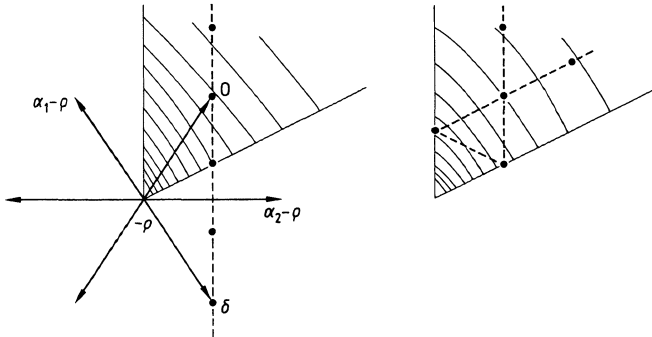


Abb. 1

Die zugehörigen Rechnungen folgen. Ich führe sie für beliebiges n durch. Ich bezeichne mit $s_i = s_{\alpha_i} \in W$ die Spiegelung an α_i , und $\tau(w) = \{\alpha \text{ Basiswurzel} \mid w(\alpha) \text{ ist keine Wurzel aus } \mathfrak{b}\}$. Zunächst schlägt man [Bou, Planche I], auf und erhält:

$$2\varrho = n\varepsilon_1 + (n-2)\varepsilon_2 + \dots + (-n)\varepsilon_{n+1}$$

$$\delta = -n\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{n+1}.$$

(Man beachte, daß $\delta = 2\varrho(\text{Untersystem zu } \{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}) - 2\varrho$!) Es wird weiter $\mathfrak{a}^* = \mathbb{C}\delta \subset \mathfrak{h}^*$. Ich zeige nun:

Behauptung. Für $n \geq 2$ sind $(s_1 \dots s_{n-1} s_n)\varrho = (\varrho + \delta)$ die einzigen unter der (unverschobenen!) Weylgruppenoperation konjugierten Elemente von $\varrho + \mathbb{C}\delta$. Es ist $\tau(s_1 \dots s_n) = \{\alpha_n\}$.

Beweis. Ich identifiziere die Weylgruppe mit der symmetrischen Gruppe durch $\mathcal{S}_{n+1} \ni \sigma \mapsto w_\sigma \in W$, wobei $w_\sigma(\varepsilon_i) = \varepsilon_{\sigma(i)}$. Seien nun $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$ und $\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}$, so daß

$w_\sigma(2\varrho + 2a\delta) = 2\varrho + 2b\delta$, also ausgeschrieben

$$w_\sigma \left((n-2an)\varepsilon_1 + \sum_{i=2}^{n+1} (n-2i+2+2a)\varepsilon_i \right) = (n-2bn)\varepsilon_1 + \sum_{i=2}^{n+1} (n-2i+2+2b)\varepsilon_i.$$

Da auf beiden Seiten die Summe der Koeffizienten null ist, ist das (obwohl die ε_i keine Basis von $\mathfrak{h}^*$ bilden!) gleichbedeutend zu:

$$n-2i_0+2+2a=n-2bn \quad \sigma(i_0)=1$$

$$n-2an=n-2\sigma(1)+2+2b$$

$$n-2i+2+2a=n-2\sigma(i)+2+2b \quad i \neq 1, i_0$$

oder, etwas kürzer geschrieben:

$$i_0 - (1+a) = bn$$

$$an = \sigma(1) - (1+b)$$

$$\sigma(i) - i = b - a \quad i \neq 1, i_0.$$

Da $n \geq 2$ folgt $(b-a) \in \mathbb{Z}$. Sei o.B.d.A. $b > a$. Wäre $i_0 = 1$, so wäre $\sigma(i) > i \quad \forall i \geq 2$. Da das unmöglich ist, muß $i_0 \neq 1$ sein, und $\sigma(i) > i \quad \forall i \neq i_0$. Somit ist $i_0 = (n+1)$, $\sigma(i) = (i+1)$ für $i \neq n+1$. Es folgt $b = a+1$, und man erkennt, daß $a=0, b=1$ mit dem eben bestimmten σ die einzige Lösung unseres Gleichungssystems ist. Nebenbei ist $w_\sigma = s_1 \dots s_n$ und $\tau(w_\sigma) = \{\alpha_n\}$, wie man sofort sieht.

Behauptung. Die Elemente von $\varrho + \mathbb{C}\delta$ mit nicht-trivialer Isotropiegruppe (bezüglich der unverschobenen W -Operation!) sind genau die $\varrho + \left(\frac{i_0+1}{n+1} \right) \delta$ mit $2 \leq i_0 \leq n+1$.

Beweis. Ich muß meine obigen Gleichungen lösen für $b=a$, aber mit nichttrivialem σ . Man sieht, daß σ genau die Transposition von i_0 und 1 sein muß, und löst ohne Schwierigkeiten die erste Gleichung (die mit der zweiten übereinstimmt, falls $b=a$!).

Ich zitiere noch aus [Bou, Planche I, (VIII)], daß $\mathbb{Z}(\delta/n+1)$ die ganzen Elemente von $\mathfrak{a}^* = \mathbb{C}\delta$ sind, und habe damit mein Bild „hergeleitet“.

Mit Theorem 23 können wir uns nun unschwer ein Bild von $\text{Prim } R_a$ machen (vgl. [BJ], 4.5, d)). Die Fasern $\theta_a^{-1}(\lambda)$ von $\theta_a: \text{Prim } R_a \rightarrow \mathfrak{a}^*$ enthalten nur das maximale Ideal $J_{\max}(\lambda)$ für λ nicht ganz regulär, zusätzlich noch das fast maximale Ideal zur τ -Invariante $\{\alpha_1\}$ für dominante reguläre ganze λ , und zusätzlich noch das fast-maximale Ideal zur τ -Invariante $\{\alpha_n\}$ für nicht-dominante reguläre ganze λ . Durch die Surjektion $\text{Prim } R_a \rightarrow \text{Prim } R$ aus Corollar 28 ist dann auch $\text{Prim } R$ beschrieben. Die Abb. 2 zeigt $\theta_a: \text{Prim } R_a \rightarrow \mathfrak{a}^*$ bzw. $\theta: \text{Prim } R \rightarrow \pi(\mathfrak{a}^*)$.

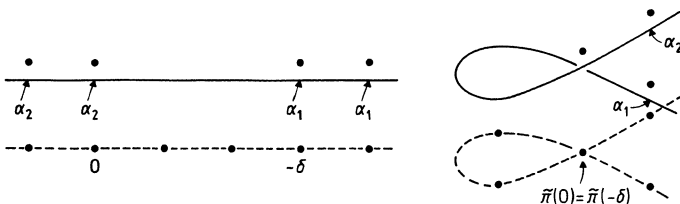


Abb. 2

Insbesondere hat $\theta^{-1}(\tilde{\pi}(0))$ drei Elemente (davon zwei minimale!), $\theta_a^{-1}(0)$ aber nur zwei. Nach 6.3 kann dann $m: R \otimes_Z S \rightarrow R_a$ kein Isomorphismus sein. Am Schluß werde ich zeigen, daß $\pi(\alpha^*)$ glatt ist außerhalb von $\tilde{\pi}(0) = \tilde{\pi}(-\delta)$.

Nach Theorem 17 ist m_χ ein Isomorphismus für $\chi \in \pi(\alpha^*)$, $\chi \neq \tilde{\pi}(0) = \tilde{\pi}(-\delta)$. Wenn ich hingegen am singulären Punkt $\tilde{\pi}(0)$ lokalisiere, ist $m_{\tilde{\pi}(0)}: (R \otimes_Z S)_{\tilde{\pi}(0)} \rightarrow (R_a)_{\tilde{\pi}(0)}$ kein Isomorphismus und tötet die beiden überflüssigen minimalen primitiven Ideale in dem linken Ring.

Um zu zeigen, daß $\tilde{\pi}(0) = \tilde{\pi}(-\delta)$ die einzige singuläre Stelle von $\tilde{\pi}(\alpha^*) = \text{Spec}_{\max} \bar{Z}$ ist, stütze ich mich auf zwei Lemmata.

Lemma 31. *Sei $\pi: X \rightarrow Y$ ein Morphismus von $\mathbb{C}$ -Varietäten (= Schemata von endlichem Typ über $\mathbb{C}$). Sei π endlich, bijektiv auf den abgeschlossenen Punkten und habe injektives Tangential in jedem abgeschlossenen Punkt. So ist π ein Isomorphismus.*

Beweis. Es reicht, für alle $x \in X$ abgeschlossen die Bijektivität von $\pi^*: \mathcal{O}_{Y, \pi(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ zu zeigen. π ist dominant, somit ist π^* injektiv. π ist bijektiv und endlich, somit ist π^* surjektiv nach dem Lemma von Nakayama für den endlich erzeugten $\rightarrow \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_{x^2}$ eine Surjektion, mithin $\mathfrak{m}_x = \mathcal{O}_{X, x} \cdot \mathfrak{m}_{\pi(x)}$ nach dem Lemma von Nakayama für den endlich erzeugten $\mathcal{O}_{X, x}$ -Modul $\mathfrak{m}_x$. Es folgt $\mathbb{C} = \mathcal{O}_{X, x} / \mathfrak{m}_{\pi(x)} \mathcal{O}_{X, x}$, somit ist π^* surjektiv nach dem Lemma von Nakayama für den endlich erzeugten $\mathcal{O}_{Y, \pi(x)}$ -Modul $\mathcal{O}_{X, x}$. q.e.d.

Lemma 32. *Sei im $\mathbb{C}$ -Vektorraum V ein Wurzelsystem R gegeben mit Weylgruppe W . Man betrachte $\pi: V \rightarrow V/W$. Sei $v \in V$. Es ist $\ker(d\pi)_v = \sum_{\alpha \in R, \alpha(v)=0} \mathbb{C}\alpha$.*

Beweis. Dank Luna's Scheibensatz dürfen wir uns auf den Fall $v=0$ beschränken. Es gilt also $(d\pi)_0 = 0$ zu zeigen. Das ist gleichbedeutend dazu, daß es keine linearen W -invarianten Funktionen ($\neq 0$!) auf V gibt, d. h. daß $(V^*)^W = 0$. q.e.d.

Ich will zeigen, daß $\pi(\alpha^*)$ glatt ist außerhalb von $\tilde{\pi}(0) = \tilde{\pi}(-\delta)$.

Zunächst liegt nach den Rechnungen vom Anfang jedes $\lambda \in \alpha^*$ auf höchstens einer Spiegelebene, und α^* steht auf keiner Spiegelebene senkrecht. Nach Lemma 32 hat folglich $\tilde{\pi}: \alpha^* \rightarrow \pi(\alpha^*)$ injektives Tangential in jedem abgeschlossenen Punkt. Nach Lemma 31 ist $\tilde{\pi}: \alpha^* - \{0, -\delta\} \rightarrow \pi(\alpha^*) - \{\tilde{\pi}(0)\}$ ein Isomorphismus, insbesondere ist also $\pi(\alpha^*)$ glatt außerhalb von $\tilde{\pi}(0) = \tilde{\pi}(-\delta)$.

8.2. Der Fall $G = \text{Sp}(2n, \mathbb{C})$, $G/P = \mathbb{CP}^{2n-1}$ der komplex projektive Raum

Ich betrachte nun $G = \text{Sp}(2n, \mathbb{C}) \subset \text{SL}(2n, \mathbb{C}) = \hat{G}$ (allen von 8.1 übernommenen Notationen setze ich einen Hüt auf!), und nehme $P = G \cap \hat{P}$. Es wird kanonisch $X = \hat{X}$, $A = \hat{A}$, $\Gamma = \hat{\Gamma}$, $\alpha = \hat{\alpha}$.

Ich wähle die Cartansche $\mathfrak{h} = \mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathfrak{g}$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n, -\lambda_1, \dots, -\lambda_n)$$

erhalte $\mathfrak{h}^* \cong \mathbb{C}^n \supset \mathbb{R}^n$ und benutze die Notationen von [Bou, Planche III]. Zur Parabolischen P gehören alle Basiswurzeln außer α_1 .

Die Abb. 3 zeigt $\alpha^* \subset \mathfrak{h}^*$ bzw. $\pi(\alpha^*) \subset \mathfrak{h}^*/(W \cdot)$ für $n=2$. Sie ist analog zu interpretieren wie Abb. 1.

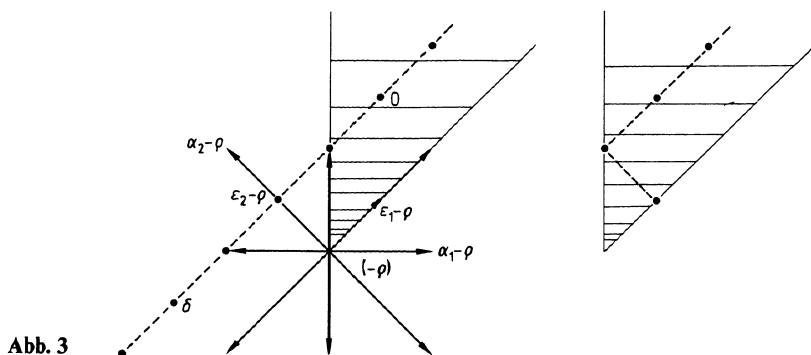


Abb. 3

Die zugehörigen Rechnungen folgen. Ich führe sie für beliebiges n durch. Mit den Formeln aus [Bou] prüft man nach, daß gilt:

$$\delta = -2\varrho + 2\varrho(\text{Untersystem erzeugt von } \alpha_2, \dots, \alpha_n) = -2n\varepsilon_1, \quad W_\alpha = \{e, s_{2\varepsilon_1}\},$$

und $(\delta/2)$ ist der Fixpunkt von $(s_{2\varepsilon_1} \cdot)$ in α^* . Die ganzen Elemente von α^* sind genau die $(a/2n)\delta, a \in \mathbb{Z}$. Ferner ist $b\delta$ regulär genau dann, wenn $(2n)b \neq 1, 2, \dots, (2n-1)$. Denn $2\varrho + 2b\delta = (2n-4nb)\varepsilon_1 + (2n-2)\varepsilon_2 + (2n-4)\varepsilon_3 + \dots + 2\varepsilon_n$ liegt auf einer (unverschobenen!) Wand genau dann, wenn ein Koeffizient rechts null ist, oder zwei bis aufs Vorzeichen übereinstimmen. Es ist $\tau(s_{2\varepsilon_1}) = \{\alpha_1\}$. Wie im ersten Beispiel können wir uns unschwer (vgl. [BJ, 4.5, d]) ein Bild von $\text{Prim} R_\alpha$ und $\text{Prim} R$ machen. Die Abb. 4 zeigt $\theta_\alpha: \text{Prim} R_\alpha \rightarrow \alpha^*$ bzw. $\theta: \text{Prim} R \rightarrow \pi(\alpha^*)$. Auch wenn es nicht so aussieht, sind doch α^* und $\pi(\alpha^*)$ als Varietäten beide isomorph zu $\mathbb{C}$.

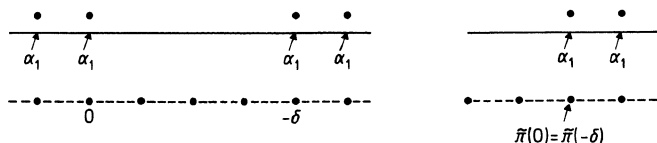


Abb. 4

Fasse ich 8.1 und 8.2 zusammen, so erkenne ich, daß in unserem Fall $(R_\alpha \cap): \text{Prim } \Gamma \rightarrow \text{Prim } R_\alpha$ eine Bijektion ist. In den Fasern mit zwei Elementen über α^* kann man das maximale Ideal in $\text{Prim } \Gamma$ bzw. $\text{Prim } R_\alpha$ nämlich als das Radikalideal endlicher Codimension beschreiben.

Ich wähle eine Basis $y_1 \in \alpha$, setze $(y_1 + \delta(y_1)/2) = y \in S$ und erhalte $S = \mathbb{C}[y]$. Ich will ein kommutatives Diagramm herleiten, in dem die waagerechten Pfeile Isomorphismen sind:

$$\begin{array}{ccc} \alpha^* & \longleftarrow & \text{Spec}_{\max} \mathbb{C}[y] \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ \pi(\alpha^*) & \longleftarrow & \text{Spec}_{\max} \mathbb{C}[y^2] \end{array}$$

Mit Proposition 18 folgt dann nämlich: $R \otimes_{\mathbb{Z}} S = R_a$. Dazu faktorisiere ich $\pi: \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*/(W \cdot)$ in $\mathfrak{h}^* \xrightarrow{\pi_1} \mathfrak{h}^*/(s_{2\epsilon_1} \cdot) \rightarrow \mathfrak{h}^*/(W \cdot)$ und erhalte darin $\alpha^* \rightarrow \pi_1(\alpha^*) \rightarrow \pi(\alpha^*)$. Ich zeige nur noch, daß $\pi_1(\alpha^*) \rightarrow \pi(\alpha^*)$ ein Isomorphismus ist. Das folgt aus Lemma 31 und Lemma 32. [Um zu sehen, daß das Tangential dieser Abbildung in $\pi_1(-\delta/2)$ injektiv ist, benötigt man nochmals den Scheibensatz!]

Ich zeige nun, daß $R_a \neq \Gamma$. Für $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$ ist das schon klar mit Theorem 29, da $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}} M(\delta/2)^{\mathfrak{a}-\text{endl.}}$ keine Surjektion ist nach [Jo]. Ich will das nun allgemeiner in anderer Weise zeigen. Dazu fasse ich $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$ auf als die Fixpunkte der Involution τ auf $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2n, \mathbb{C})$,

$$\tau: \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -D^t & B^t \\ C^t & -A^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \left(- \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^t \right) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ich erinnere daran, daß alle Notationen zu $\mathfrak{sl}$ durch einen Hüt ausgezeichnet werden! Es ist $\tau(\hat{\mathfrak{h}}^*) = (\hat{\mathfrak{h}}^*)$, und $\hat{\epsilon}_i \mapsto -\hat{\epsilon}_{i+n}$ für $1 \leq i \leq n$. Bezeichne $\hat{w}_\sigma \in \hat{W}$ das Element der Weylgruppe zur Permutation $i \leftrightarrow n+i$, so ist also $\tau(\lambda) = -\hat{w}_\sigma(\lambda)$. τ operiert auf $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}})$, also auf $\hat{Z}$, also auf $\text{Spec}_{\max} \hat{Z}$, über unseren Isomorphismus dann auch auf $\mathfrak{h}^*/(\hat{W} \cdot)$. Mit etwas Mühe erkennt man, daß für diese Operation von τ das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \lambda & & \hat{\mathfrak{h}}^* & \xrightarrow{\hat{\pi}} & \hat{\mathfrak{h}}^*/(\hat{W} \cdot) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (-\lambda - 2\hat{\varrho}) & & \hat{\mathfrak{h}}^* & \xrightarrow{\hat{\pi}} & \hat{\mathfrak{h}}^*/(\hat{W} \cdot) \end{array}$$

kommutiert. Ich definiere weiter die Involution $\tau: S \rightarrow S$ durch $y \mapsto (-y)$. Das induziert mir $\tau: \alpha^* \rightarrow \alpha^*$ mit $\tau(\lambda) = (-\lambda - \delta) \quad \forall \lambda \in \alpha^*$. Ich setze nun meine τ zu einer Involution τ auf $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}} \times \mathfrak{a})$ zusammen. Ich zeige, daß τ eine Involution auf $\hat{R}_a$ induziert, d. h. daß der Kern der kanonischen Surjektion $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}} \times \mathfrak{a}) \rightarrow \hat{R}_a$ stabil ist unter τ .

Zunächst gebe ich einige Beziehungen der Symbole mit und ohne Hüt an. Die Inklusion $\mathfrak{h} \hookrightarrow \hat{\mathfrak{h}}$ liefert eine Surjektion $\mathfrak{h}^* \hookrightarrow \hat{\mathfrak{h}}^*$ unter der $\hat{\epsilon}_i \mapsto \epsilon_i$, $\hat{\epsilon}_{i+n} \mapsto -\epsilon_i$ für $1 \leq i \leq n$. Schränke ich diese Surjektion auf $\hat{\alpha}^*$ ein, erhalte ich den Isomorphismus $\hat{\alpha}^* = \alpha^*$ vom Anfang. Unter diesem geht $\hat{\delta} = -(2n-1)\hat{\epsilon}_1 + \hat{\epsilon}_2 + \dots + \hat{\epsilon}_{2n}$ in $\delta = -2n\epsilon_1$ über, und ich kann δ und α^* unbeschadet ohne Hut herumstehen lassen. Ich bezeichne mit $\hat{I}_{\max}(\mu, \lambda)$ das maximale Ideal in $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}} \times \mathfrak{a})$ zum selben zentralen Charakter wie $\hat{I}(\mu, \lambda)$, $\forall \mu \in \hat{\mathfrak{h}}^*$, $\lambda \in \alpha^*$. Es ist also $\hat{J}_{\max}(\lambda) = \hat{I}_{\max}(\lambda + \delta, \lambda)$. Nun ist nach Lemma 19 der Kern von $\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{g}} \times \mathfrak{a}) \rightarrow \hat{R}_a$ genau $\bigcap_{\lambda \in \alpha^*} \hat{J}_{\max}(\lambda)$ und das Ergebnis der folgenden Gleichungskette zeigt, daß dieser Kern stabil ist unter τ :

$$\tau(\hat{J}_{\max}(\lambda)) = \tau(\hat{I}_{\max}(\lambda + \delta, \lambda)), \quad (1)$$

$$= \hat{I}_{\max}(-\lambda - \delta - 2\hat{\varrho}, -\lambda - \delta), \quad (2)$$

$$= \hat{I}_{\max}(-\lambda, -\lambda - \delta), \quad (3)$$

$$= \hat{J}_{\max}(-\lambda - \delta). \quad (4)$$

Hier sind (1) und (4) klar, (2) folgt, da wir wissen wie τ auf Z und S operiert, und (3) gilt, da $(-\lambda - \delta - 2\hat{\varrho}) \in \hat{W} \cdot (-\lambda) \quad \forall \lambda \in \alpha^*$. Denn das ist gleichbedeutend zu $(-a\delta - \delta - \hat{\varrho}) \in \hat{W} \cdot (-a\delta + \varrho) \quad \forall a \in \mathbb{C}$, und um das zu zeigen gebe ich $\hat{w} \in \hat{W}$ an, so

daß $\hat{w}\delta = \delta$, $\hat{w}(-2\delta - 2\hat{\varrho}) = 2\hat{\varrho}$. Es ist ja

$$\delta = -(2n-1)\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \dots + \hat{e}_{2n}$$

$$2\hat{\varrho} = (2n-1)\hat{e}_1 + (2n-3)\hat{e}_2 + \dots - (2n-1)\hat{e}_{2n}$$

und man sieht, daß $\hat{w} = \hat{w}_\sigma$ mit $\sigma(1) = 1$, $\sigma(i) = 2n+2-i$ für $2 \leq i \leq 2n$, obige Forderungen erfüllt.

Aber warum ist nun $R_\alpha \neq \Gamma$? In unserem Falle ist ja $\Gamma = \hat{R}_\alpha$, und darauf operiert τ . R_α ist stabil unter τ , und es ist $R_\alpha = R \otimes_{\mathbb{Q}[y^{\pm 1}]} \mathbb{C}[y] = R \oplus Ry$, wie wir früher gesehen haben. Das ist nun auch die Eigenraumzerlegung von R_α bezüglich τ . In R_α^1 , den Operatoren vom Grad ≤ 1 , hat τ also nur den eindimensionalen (-1) -Eigenraum $\mathbb{C}y$. In Γ^1 ist dieser Eigenraum aber größer, enthält er doch das Bild des (-1) -Eigenraums von τ in $\hat{g}$. Also ist $R_\alpha \neq \Gamma$.

Literatur

- [BB1] Borho, W., Brylinski, J.-L.: Differential operators on homogeneous spaces. I. *Invent. Math.* **69**, 437–476 (1982)
- [BB2] Borho, W., Brylinski, J.-L.: Differential operators on homogeneous spaces. II. Preprint (1987)
- [Bei] Beilinson, A.: Localisation of representations of reductive Lie algebras. In: *Proceedings of the ICM, Warschau*, 699–710 (1983)
- [BJ] Borho, W., Jantzen, J.C.: Über primitive Ideale in der Einhüllenden einer halbeinfachen Lie-Algebra. *Invent. Math.* **39**, 1–53 (1977)
- [Bou] Bourbaki, N.: *Groupes et algèbres de Lie* 4–6. Paris: Herman 1968
- [CH] Chatters, A.W., Hajarnavis, C.R.: *Rings with chain condition*. Research Notes in Mathematics, Vol. 44. Boston London Melbourne: Pitman 1980
- [Di] Dixmier, J.: *Algèbres enveloppantes*. Paris Bruxelles Montreal: Gauthiers-Villars 1974
- [GK] Gelfand, I.M., Kirillov, A.M.: The structure of the Lie field connected with a split semisimple Lie algebra. *Funct. Anal. Appl.* **3**, 6–21 (1969)
- [Ha] Hartshorne, R.: *Algebraic geometry*. Berlin Heidelberg New York: Springer 1977
- [HMSW] Hecht, H., Milicic, D., Schmid, W., Wolf, J.A.: Localisation and standard modules for real semisimple Lie groups. I. The duality theorem. *Invent. Math.* **90**, 297–332 (1987)
- [Ja1] Jantzen, J.C.: *Einhüllende Algebren halbeinfacher Lie-Algebren*. Berlin Heidelberg New York: Springer 1983
- [Ja2] Jantzen, J.C.: *Moduln mit einem höchsten Gewicht*. (Lecture Notes Mathematics, Vol. 750). Berlin Heidelberg New York: Springer 1970
- [Jo] Joseph, A.: Kostants problem, Goldie rank and Gelfand-Kirillov conjecture. *Invent. Math.* **56**, 191–213 (1980)
- [Ša1] Šapovalov, N.N.: Structure of the algebra of regular differential operators on a basic affine space. *Funct. Anal. Appl.* **8**, 37–46 (1974)
- [Ša2] Šapovalov, N.N.: An existence theorem. *Funct. Anal. Appl.* **10**, 52–55 (1976)

Eingegangen am 11. November 1987