CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

ZEHNTEN BANDES ERSTE ABTEILUNG

HERAUSGEGEBEN

VON DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN

IN KOMMISSION BEI B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

1917.

CARL FRIEDRICH GAUSS WERKE

BAND X 1.

CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

ZEHNTEN BANDES ERSTE ABTEILUNG.

HERAUSGEGEBEN

VON DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN.

IN KOMMISSION BEI B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1917.

KLEINERE VERÖFFENTLICHUNGEN.

[ZUR KREISTHEILUNG.]

Intelligenzblatt der allgemeinen Litteraturzeitung Nr. 66, 1. Juni 1796, S. 554.

III. NEUE ENTDECKUNGEN.

Es ist jedem Anfänger der Geometrie bekannt, dass verschiedene ordentliche Vielecke, namentlich das Dreyeck, Fünfeck, Fünfzehneck, und die, welche durch wiederholte Verdoppelung der Seitenzahl eines derselben entstehen, sich geometrisch construiren lassen. So weit war man schon zu EUKLIDS Zeit, und es scheint, man habe sich seitdem allgemein überredet, dass das Gebiet der Elementargeometrie sich nicht weiter erstrecke: wenigstens kenne ich keinen geglückten Versuch, ihre Grenzen auf dieser Seite zu erweitern.

Desto mehr, dünkt mich, verdient die Entdeckung Aufmerksamkeit, dass *ausser jenen ordentlichen Vielecken noch eine Menge anderer, z. B. das Siebzehneck, einer geometrischen Construction fähig ist.* Diese Entdeckung ist eigentlich nur ein Corollarium einer noch nicht ganz vollendeten Theorie von grösserm Umfange, und sie soll, sobald diese ihre Vollendung erhalten hat, dem Publicum vorgelegt werden.

C. F. GAUSS, a. Braunschweig.
Stud. der Mathematik zu Göttingen.

Es verdient angemerkt zu werden, dass Hr. GAUSS jetzt in seinem 18ten Jahre steht, und sich hier in Braunschweig mit eben so glücklichem Erfolge der Philosophie und der classischen Litteratur als der höheren Mathematik gewidmet hat.

Den 18. April 96

E. A. W. ZIMMERMANN, Prof.

BEMERKUNG ZU DER VORSTEHENDEN NOTIZ.

Diese Ankündigung der Entdeckung der geometrischen Konstruierbarkeit des regelmäßigen Siebzehnecks ist die erste Veröffentlichung von GAUSS. SARTORIUS V. WALTERSHAUSEN bemerkt*): »Diese Entdeckung, welche er bis zum Ende seines Lebens sehr hoch schätzte, ist es vornehmlich gewesen, welche seinem Leben eine bestimmte Richtung gegebe nhat, denn von jenem Tage an war er fest entschlossen nur der Mathematik sein Leben zu widmen«. Vergl. die erste Eintragung des Tagebuchs vom 30. März 1796. Im ersten Satze des Textes heißt es in der ursprünglichen Veröffentlichung »Viereck« statt »Fünfeck«; vergl. jedoch Werke II, S. 186, Zeile 15 v. u. Im Vorwort zu den *Disqu. Arithm.* (Werke I, S. 6) gedenkt GAUSS dieser Anzeige mit den Worten: »Propositum huius operis, ad quod edendum iam annos abhinc quinque publice fidem dederam, . . .«

SCHLESINGER.

*) GAUSS zum Gedächtnis, Leipzig 1856, S. 16.

VORREDE.

Lehrbuch der Astronomie von Joseph Piazzi.
Aus dem Italienischen übersetzt von Johann Heinrich Westphal.
Berlin bei G. Reimer 1822.

Das Original dieses Werks ist im Jahr 1817 unter dem Titel Lezioni elementari di astronomia ad usu del real osservatorio di Palermo in zwei Bänden zu Palermo erschienen, und war zunächst für die astronomischen Vorlesungen bestimmt, welche der Verf. zu halten hatte. Obgleich wir an elementarischen Schriften über Astronomie keinen Mangel haben, und einige darunter in ihrer Art vortrefflich sind, so wird man doch, bei der Verschiedenheit der Vorkenntnisse und Absichten der Leser, das Hinzukommen einer neuen nicht für überflüssig halten, zumal von einem Verfasser, der sich um mehrere Theile der Wissenschaft so hohe Verdienste erworben hat. Ich zweifle daher nicht, dass die Übertragung dieses Werks in unsere Sprache, durch einen Gelehrten, der seine gründlichen Einsichten bereits durch eigene Arbeiten erprobt hat, allen Freunden der Astronomie willkommen sein werde, die entweder durch die Sprache, oder durch die Schwierigkeit, sich italienische Werke zu verschaffen, abgehalten werden das Original zu lesen. Hin und wieder hat der Herr Übersetzer in kleinen Einschaltungen einiges hinzugesetzt, was dem Verfasser bei der Herausgabe des Originals noch nicht bekannt sein konnte, und der letzte Abschnitt, die Berechnung der Cometenbahnen betreffend, rührt von jenem allein her, welcher den Lesern einen Dienst zu erzeigen glaubte, wenn er die Olberssche Methode an die Stelle der von dem Verfasser gewählten unvollkommenen indirecten setzte.

Möge diese Arbeit dazu beitragen, die mehr als oberflächliche Befreundung mit einer Wissenschaft zu befördern, die so vielfachen Stoff zu einer edeln und kräftigen Geistesnahrung darbietet.

Göttingen, den 20. October 1821.

C. F. Gauss.

EINE IN DEUTSCHLAND ERFUNDENE RECHEN-MASCHINE.

DINGLERS *Polytechnisches Journal* Bd. 52 (1834), S. 237, entnommen der Zeitschrift *Le National*, 27. März 1834.

Herr SCHIERECK, Professor der Mathematik zu Frankfurt a. M., hat der französischen Akademie der Wissenschaften eine Dissertation über die Theorie der Zahlen eingeschickt. Dieser Abhandlung ist ein Zeugnis des Herrn GAUSS, des berühmten Geometers zu Göttingen, beigelegt, folgenden Inhalts:

Herr SCHIERECK hat mir ein Modell einer Rechenmaschine gezeigt, welche er zur Ausführung der arithmetischen Operationen erfunden hat. Ich bezeuge mit Vergnügen, dass diese Maschine den beabsichtigten Zweck sehr leicht erreicht, und dass dieses nach den Verbesserungen, welche der Erfinder an ihr zu machen beabsichtigt, noch mehr der Fall sein wird. Diese sinnreiche Erfindung ist umso schätzbarer, weil diese Maschine mit geringen Kosten hergestellt werden kann.

BEMERKUNG.

Die vorstehende Mitteilung hat R. MEHMKE im 48. Bande der Zeitschrift für Mathematik und Physik S. 318 wieder abdrucken lassen. Joseph Friedrich SCHIERECK aus Posen gebürtig, hatte in Göttingen studiert. Über seine Rechenmaschine hat sich nichts näheres feststellen lassen. Er starb im November 1842. Vergl. H. E. SCRIBA, Biographisch-literarisches Lexikon der Schriftsteller des Großherzogtums Hessen im 19. Jahrhundert; 2. Abteilung, S. 638 ff.

SCHLESINGER.

VORWORT.

Gesammelte Abhandlungen von G. EISENSTEIN, Berlin 1848. S. 1, 2.

Die zuerst in den verschiedenen Bänden von CRELLE's Journal für Mathematik erschienenen und hier gesammelten Aufsätze bewegen sich, theils in der Höheren Arithmetik, theils in der Theorie der über Logarithmen und Kreisgrössen hinaus liegenden transcendenten Functionen, theils in der Verknüpfung dieser beiden grossen Gebiete, die zu den schönsten und fruchtbarsten im ganzen Umfange der Mathematik gehören. Die Höhere Arithmetik bietet einen unerschöpflichen Reichthum an interessanten Wahrheiten dar, und zwar an solchen, die nicht vereinzelt, sondern in innigem Zusammenhange stehen und immer neue, ja unerwartete Verknüpfungen erkennen lassen, je weiter die Wissenschaft sich ausbildet. Ein grosser Theil ihrer Lehren gewinnt auch einen neuen Reiz durch die Eigenthümlichkeit, dass gewichtige Lehrsätze in einfach ausgeprägtem Inhalt uns leicht durch Induction zugeführt werden, deren Begründung doch so tief liegt, dass man erst nach vielen vergeblichen Versuchen dazu gelangt, und dann meistens erst auf beschwerlichen künstlichen Wegen, während die einfacheren Methoden lange verborgen bleiben. Auch auf dem Felde der transcendenten Functionen fehlt es nicht an ähnlichen Reizen und ähnlichen Erscheinungen.

Von den eigenthümlichen Schönheiten dieser Gebiete haben Alle sich angezogen gefühlt, die darin beschäftigt gewesen sind: keiner aber hat es wohl so oft ausgesprochen wie EULER, der namentlich in fast allen seinen zahlreichen, zur Höheren Arithmetik gehörenden Aufsätzen die Erklärung wiederholt, wie viele Freude ihm diese Forschungen machen, und wie sehr er darin eine Erholung von und eine Stärkung zu andern der unmittelbaren practischen Anwendung näher liegenden Arbeiten finde. Mit eben so grosser Lebhaftigkeit spricht er seine Überraschung aus, als zu seiner Kenntnis gekommen war, dass seine eigene Auflösung eines die transcendenten Functionen betreffenden Fundamental-Problems, mit welchem er sich viele Jahre beschäftigt hatte, an Einfachheit weit überboten sei durch eine neue Auflösung desselben Problems von LAGRANGE. »Penitus obstupui«, (sagt er Acta Acad. Petrop. T. 3.) »quum hoc mihi nunciaretur.«

Die vorliegenden Aufsätze enthalten so viel treffliches und gediegenes, dass durch dieselben dem Verfasser ein ehrenvoller Platz neben seinen Vorgängern gesichert wird, an deren Arbeiten jene sich würdig anschliessen. Ihre Zusammenstellung verpflichtet alle die zum Danke, denen sie dadurch zugänglicher werden.

Göttingen im September 1847.

C. F. GAUSS.

ARITHMETIK.

NACHTRÄGE ZU DEN BÄNDEN I, II UND VIII.

NACHLASS.

EINIGE ASYMPTOTISCHE GESETZE DER ZAHLENTHEORIE.

[I.]

[Handschriftliche Eintragung in dem Buche:] JOHANN CARL SCHULZE, Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer .... Tafeln. I, Berlin 1778; [von GAUSS' Hand] **Gauß. 1791.**

[Auf der Rückseite des letzten Blattes.]

[1.]

Primzahlen unter a $(=\infty)$

$$\frac{a}{la}.$$

[2.]

Zahlen aus zwei Factoren

$$\frac{lla\,.\,a}{la},$$

(wahrsch.) aus 3 Factoren

$$\frac{\frac{1}{2}(lla)^2 a}{la}, \ldots$$

et sic in inf.

[3.]

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{x}=(\text{pro } x \text{ inf.})\ llx+V.$$

V esse Const. suspicor ac prope 1,266...

1796 Mai.

[4.]

Zahlen die keine gleichen F[actoren] haben

$$\frac{a}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots},$$

die höchstens 2 gl. F. h.

$$\frac{a}{1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\cdots}$$

die höchstens 3 gl. F. h.

$$\frac{a}{1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\cdots},$$

et sic in inf.

[5.]

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\frac{x}{x-1}=(x \text{ inf})\ a.lx$$

a Constans ac prope 1,874.

[Auf der Rückseite des hinteren Schutzblattes]

[6.]

Numerus factorum usque ad n

$$(lln+1)n.$$

[II.]

[Handschriftliche Eintragungen bei S. 209 des Buches:]
J. H. LAMBERT, Zusätze zu den Logarithmischen und Trigonometrischen Tabellen ...,
Berlin bei Haude & Spener, 1770; [von GAUSS' Hand] **C. F. Gauß. 1793.**

[1.]

Numerus omnium ex solis factoribus 2, 3, 5, 7 compositorum numerorum infra n est

$$\frac{\frac{1}{8}(ln)^4}{(l2)(l3)(l4)(l5)} \text{ praeter propter.}$$

[2.]

E $2 \ldots n$ Infra m

$$\frac{ln}{lm}m.$$

[III.]

[Aus dem Tagebuch.]

[1.]

Factorum Summae in Infinito $= \frac{\pi\pi}{6} \cdot$ Sum[ma] Num[erorum]

[1796] 20. Jun. G[ottingae].

[2.]

Numerus fractionum inaequalium, quarum denominatores certum limitem non superant, ad numerum fractionum omnium, quarum num[eratores] aut denom[inatores] sint diversi infra eundem limitem, in infinito ut $6 : \pi\pi$

[1796] Sept. 6.

[Aus den »Exercitationes Mathematicae«.]

[3.]

$$\text{Lim.}\ \frac{\Sigma\ \text{pr. ad}\ n\ \text{infra}\ n}{nn}$$

(Pr. usque ad $P+30n$) sunt

$$(4-1)(3^2-1)(5^2-1)n = 576n$$

ideo a

$$P\ldots Pn \quad \text{generaliter} \quad \frac{1.3}{2.2}\cdot\frac{2.4}{3.3}\cdot\frac{4.6}{5.5}\cdots nn.$$

Si $P:n = \infty:1$

adeoque

$$\text{Limes quaesitus} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2.2}\cdot\frac{2.4}{3.3}\cdot\frac{4.6}{5.5}\cdots = \frac{3}{\pi\pi} = \frac{3}{9{,}8696} = 0{,}3039+$$

[IV.]

[Aus Scheda Ac, Varia, Nov. 1799, S. 19.]

[1.]

Accipiendo φ ita ut in Disqu. Ar. art. [38], summa seriei

$$1+\frac{\varphi 2}{4}+\frac{\varphi 3}{9}+\frac{\varphi 4}{16}+\ldots+\frac{\varphi n}{nn}$$

exhiberi potest quam proxime per

$$\frac{6}{\pi\pi}\log n + \text{Const.}$$

$$\text{Const.} = 0{,}71 \pm$$

Erit autem

$$\frac{\pi\pi}{6}\,\text{Const.} = 0{,}5772156$$
$$+ \tfrac{1}{3}\log 2 + \tfrac{1}{8}\log 3 + \tfrac{1}{24}\log 5$$

pr[aeter] pr[opter] $= 0{,}5772156$

$$+\ 0{,}569974 = \frac{6}{\pi\pi}\left(\tfrac{1}{4}\log 2 + \tfrac{1}{9}\log 3 + \tfrac{1}{16}\log 4\right)$$

$$\overline{1{,}1471896}$$

unde Const. $= 0{,}697413$.

[2.]

Ponendo valorem medium mult[itudinis] gen[erum]

$$= \alpha \log N + \beta = M,$$

erit valor medius pro

N	
$8n+0$	$2M - 5\alpha\log 2$
1	$M + \frac{3}{2}\alpha\log 2$
2	$M + \frac{1}{2}\alpha\log 2$
3	$\frac{1}{2}M + \frac{3}{4}\alpha\log 2$
4	$M - \frac{1}{2}\alpha\log 2$
5	$M + \frac{3}{2}\alpha\log 2$
6	$M + \frac{1}{2}\alpha\log 2$
7	$\frac{1}{2}M + \frac{3}{4}\alpha\log 2$
$3n+0$	$\frac{3}{2}M - \frac{9}{8}\alpha\log 3$
$3n+1$	$\frac{3}{4}M + \frac{9}{16}\alpha\log 3$
$3n+2$	$\frac{3}{4}M + \frac{9}{16}\alpha\log 3$
$5n+0$	$\frac{5}{3}M - \frac{25}{18}\alpha\log 5$
per 5 non div.	$\frac{5}{6}M + \frac{25}{72}\alpha\log 5$

[3.]

		med.	
a			
	a''	arithm.	a, a'
a'			
	a'''	harm.	a', a''
a''			
	a^{IV}	arithm.	a'', a'''
a'''			
		etc.	
etc.			

$$a^{\infty} = a + \frac{2}{3}\frac{a'-a}{a'} + \frac{2}{3}\cdot\frac{14}{15}\left(\frac{a'-a}{a'}\right)^2 \dots$$
$$= a\frac{a'+a}{2a}\cdot\frac{7a'+a}{6a'+2a}\cdot\frac{31a'+a}{30a'+2a}\cdot$$

[Aus Scheda Ae, Varia, Julius 1800, S. 39.]

[4]

Sit pro numero

$$a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} \dots = M,$$
$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\dots = \varphi M,$$

erit

$$\Sigma \varphi M \text{ quam proxime } M(\log M + 0{,}15443) + ?$$

BEMERKUNGEN ZU DEN ASYMPTOTISCHEN GESETZEN DER ZAHLENTHEORIE.

Im Vorstehenden sind diejenigen Aufzeichnungen aus dem Nachlaß zusammengestellt, die sich auf »asymptotische Gesetze« und auf sogenannte »mittlere Werte« der Zahlentheorie beziehen. Die unter [III] [1] und [2] wiedergegebenen Aufzeichnungen gehören dem an anderer Stelle dieses Bandes vollständig abgedruckten »*Tagebuch*« an, die unter [III] [3] wiedergegebene Notiz den gleichfalls weiter unten abgedruckten »*Exercitationes mathematicae*« (1796). Sie sollen aber wegen des sachlichen Zusammenhangs hier zusammen mit den übrigen erläutert werden *).

---

*) Die folgenden Bemerkungen sind mit Benutzung der im IX. Bericht über den Stand der Herausgabe von GAUSS' Werken (Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche-

Den Beweis des Satzes [I] [1], wonach die Anzahl der unter a liegenden Primzahlen asymptotisch durch $\frac{a}{\log a}$ dargestellt wird, haben J. HADAMARD (Bulletin de la Soc. Mathém. **24**, 1896, S. 199) und CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN (Annales de la Societé scientif. de Bruxelles **20**, 2e partie, 1896, S. 360—361) erbracht. Vergl. auch den Werke II, S. 444 ff. abgedruckten Brief von GAUSS an ENCKE.

Der Beweis von [I] [2] ist in einer Arbeit von E. LANDAU (Bulletin de la Soc. Mathém. **28**, 1900, S. 25) enthalten, wo gezeigt wird, daß die Mengen aller Zahlen $\leqq a$, die aus k Primfaktoren zusammengesetzt sind, asymptotisch gleich

$$\frac{1}{(k-1)!}\,\frac{a\,(\log\log a)^{k-1}}{\log a}$$

ist.

Die in [I] [3] enthaltene Behauptung hat F. MERTENS (CRELLES Journal **78**, 1874, S. 52) unter der Form

$$\sum_{p \text{ Primzahl} \leqq x} \frac{1}{p} = \log\log x + C - \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{p} \frac{1}{mp^m} + O\left(\frac{1}{lx}\right)$$

bewiesen, wo C die EULER-MASCHERONIsche Konstante bedeutet. Für die von GAUSS mit V bezeichnete Konstante ergäbe sich hiernach der Wert 1,26149, der von dem von GAUSS vermuteten etwas abweicht.

Die Behauptung [I] [4] hat L. GEGENBAUER (Denkschriften der K. Akademie d. Wiss. Wien **49**, 1885, Abt. 1, S. 47) bewiesen.

Der Beweis von [I] [5] ergibt sich aus der bei [3] genannten Abhandlung von MERTENS (a. a. O. S. 53).

Der Satz [I] [6] ist wohl ein nicht völlig zutreffender Ausspruch der Formel

$$\sum_{p \leqq x} \left[\frac{x}{p}\right] = x \,.\, \log\log x + (V-1)\,x + o(x),$$

die aus den Sätzen [I] [1] und [3] hervorgeht.

In [II] [1] ist $l4$ und $l5$ im Nenner wohl ein Schreibfehler für $l5$ und $l7$, aber selbst dann wäre die Formel nicht ganz zutreffend, da wie GRAM (K. Danske Vid. Selsk. Skr. Ser. 6, Bd. 7, 1890—1894, S. 1) gezeigt hat, der richtige Wert der gemeinten Anzahl asymptotisch gleich

$$\frac{1}{24}\cdot\frac{(\log n)^4}{\log 2\,.\log 3\,.\log 5\,.\log 7}$$

ist.

Die Bedeutung von [II] [2] haben wir nicht ermitteln können.

Die Aussage [III] [1] hat DIRICHLET (Abhandl. der K. preuß. Akad. d. Wissenschaften 1849, Werke **2**, 1897, S. 59) bewiesen. Bezeichnet man nämlich mit DIRICHLET die Summe der Faktoren von n mit $f(n)$, so hat nach GAUSS

Mitteilungen 1911, S. 26 ff.) enthaltenen Ausführungen von P. BACHMANN und E. LANDAU, sowie einiger schriftlichen Mitteilungen von P. BACHMANN abgefaßt worden. Die zu benutzenden Zeichen O und o haben die folgende Bedeutung (vergl. etwa LANDAU, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen I, Leipzig und Berlin 1909, S. 31 und 61): Es seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei für alle reellen Werte von x, von einem gewissen an, erklärte reelle Funktionen, $g(x)$ positiv; dann bedeutet $f(x) = O(g(x))$, daß es zwei Zahlen ξ und A gibt, so daß für $x \geqq \xi$

$$|f(x)| < A\,g(x)$$

ist, und $f(x) = o(g(x))$, daß

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

$$\frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(n)}{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

den asymptotischen Wert $\frac{\pi^2}{6}$, was offenbar auf die von DIRICHLET a. a. O. bewiesene Gleichung

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n) = \frac{\pi^2}{12}n^2+O(n.\log n)$$

hinauskommt.

Die Aussagen [III] [2] und [3] finden in der von DIRICHLET (a. a. O., S. 60—64) bewiesenen Formel

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\cdots+\varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}n^2+O(n^\delta)$$

ihren Ausdruck, wo $\varphi(n)$ die Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen nicht größer als n und δ eine zwischen 1 und 2 gelegene Größe bedeutet. In [III] [3] wird der Fall $n = 30$ betrachtet. Es ist für $n = 30$

$$\sum_{m=1}^{30}\varphi(m) = 278.$$

Nun ist aber

$$(4-1)(3^2-1)(5^2-1) = 576 = 2.288,$$

also *angenähert*

$$\frac{\sum\limits_{m=1}^{30}\varphi(m)}{30.30} = \frac{1}{2}\,\frac{(2^2-1)(3^2-1)(5^2-1)}{2^2.3^2.5^2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2.2}\cdot\frac{2.4}{3.3}\cdot\frac{4.6}{5.5}.$$

Analog ist dann allgemein *angenähert*

$$\frac{\sum\limits_{m=1}^{n}\varphi(m)}{nn} = \frac{1}{2}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{2}\prod\frac{p-1.p+1}{pp}.$$

Aus derselben DIRICHLETschen Formel läßt sich auch der in [IV] [1] gegebene asymptotische Ausdruck erschließen.

In [IV] [2] finden wir eine Formel für den Mittelwert der Anzahl der Geschlechter binärer quadratischer Formen der Determinante $-N$, die in den artt. 301—302 der *Disqu. Arithm.* in viel schärferer Fassung auftritt.

Der Beweis von [IV] [4] ergibt sich aus der genannten Abhandlung von DIRICHLET (a. a. O. S. 52—57); die von GAUSS angegebene Konstante stimmt in allen fünf Dezimalen mit dem richtigen Werte $2C-1$ überein, wo C die EULER-MASCHERONIsche Konstante bedeutet.

Man vergleiche auch die Artikel **26** und **27** des in der zweiten Abteilung dieses Bandes abgedruckten Aufsatzes von P. BACHMANN »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«.

SCHLESINGER.

[ZUR ENTSTEHUNGSGESCHICHTE DER DISQUISITIONES ARITHMETICAE.]

Gauss an v. Zimmermann.

Hochwohlgeborner Herr
Verehrenswürdigster Herr Hofrath.

Jeder neue Beweis wie sehr Ew. Hochwohlgeb. jede Gelegenheit ergreifen mir nützlich zu sein vermehrt meine Bewunderung und Verehrung Ihrer Güte und bestärkt mich in dem Bestreben mich ihrer würdig zu machen welches ich so viele Ursache habe meine heiligste Pflicht sein zu lassen.

Ich fühle es ganz wie schmeichelhaft mir die Ehre ist wozu Ew. Hochwohlg. mir Hoffnung machen. Gott gebe dem edeln Fürsten ein langes Leben und was können sich nicht die Wissenschaften von ihm versprechen, da er schon eine nur wenige interessirende Arbeit seiner Begünstigung nicht unwerth hält; wie sehr wünschte ich eine gemeinnützigere oder glänzendere geben zu können.

Ich lege hier, Ew. Hochwohlg. Verlangen gemäss einen etwas ausführlichen Plan derselben bei; Sie werden daraus sehen dass der Hauptzweck bloss sein kann den Verstand zu üben und neues Licht über Gegenstände zu verbreiten, die die grössten Geometer unsrer Zeit ihrer eifrigsten Untersuchungen gewürdigt haben. Mir scheint Eulers Ausspruch nicht Unrecht zu haben »Semper cuiusquam problematis, quod a summis ingeniis frustra est tentatum, solutio maximi est momenti«. Und eben dieser grosse Mann hat an mehrern Orten geurtheilt dass Untersuchungen dieser Art zur Übung des Scharfsinns noch dienlicher sind als selbst die Geometrie.

Nach meinem Überschlage wird die ganze Schrift gegen 400 Artikel ausmachen wovon im Durchschnitt ungefehr zwei eine gedruckte Quartseite füllen mögte. Daher ich das Ganze etwa auf ein Alphabet schätze; im Octav vielleicht etwas weniger. Dass ich diesen Entwurf nicht zu gross gemacht habe, sondern vielmehr manches dem Leser zu entwickeln zu überlassen genöthigt bin, werden Sie daraus schliessen können, dass ich nothwendig das Wesentliche der Untersuchungen meiner Vorgänger habe mitnehmen müssen, und die von Euler zusammen ungefehr 50, die von La Grange etwa 30 und eine einzige Abhandlung von Le Gendre 12 Bogen beträgt. Ich würde eine Unmöglichkeit unternehmen wenn hierunter nicht manche Wiederholungen wären und durch meine Methoden die weitläuftigsten Rechnungen sehr zusammengezogen würden. Eigentliche Kupfer kann ich entbehren; nur habe ich einen grossen Vorrath von mancherlei Tabellen die ich in müssigen Stunden noch weiter ausdehne und die vielleicht zum Theil sehr nützlich sein können in diesem Felde noch neue Erfindungen zu machen. Von verschiednen derselben muss ich wenigstens Proben geben. So ist eine Tafel gewiss das bequemste Mittel die Factoren der Zahlen zu bestimmen. Ich füge davon eine kleine Probe bei. Die Punkte bedeuten nichts anders als dass die oben stehende Zahl ein quadratischer Rest der auf der linken Seite stehenden Zahl sei; die Abwesenheit der Punkte das Gegentheil. Ihr Gebrauch würde am bequemsten sein wenn man die einzelnen Streifen A, B, C, D etc. ausschnitte und auf dünne Pappe oder Blech zöge. Es werden dann nach den Umständen gewisse Stäbe zusammengelegt und man sieht gewöhnlich mit der grössten Schnelligkeit welche Zahlen nicht Factoren sind. Bei der Schrift selbst wird indessen nur eine kleine Probe der Tafel hinreichen; diess ist nemlich nur Eine einzelne Anwendung der Tafel. Statt der Punkte kann auch jedes andre Zeichen dienen. — — Ich muss noch hinzusetzen dass wenn ich in Absicht des Titels gar nicht genirt bin, ich die Schrift schlechthin Disquisitiones Arithmeticae nennen würde, da ihr Inhalt schwerlich sich genauer würde characterisiren lassen.

Der Hr. Hofrath Kästner hat mir versprochen mir die Bekanntschaft des Hn P. Hindenburg zu verschaffen; ich habe ihm einen Aufsatz zur Ansicht vorgelegt, und ich denke denselben wenn er mir sein Urtheil darüber wird gesagt haben an Hindenburg zu schicken.

Es ist mir ein sehr angenehmes Geschäft Ew. Hochwohlgeb. von meinem jungen Schweizer Nachricht zu geben. Er ist aus Thun im Canton Bern und hat sich schon in Bern unter TRALLES Anleitung gute Mathematische Kenntnisse erworben, die er hier seit einem halben Jahre mit dem besten Erfolg erweitert. Er wird hier bis Michaelis bleiben und dann nach Paris gehen, ehe er Deutschland verlässt denkt er noch mehrere Örter davon zu besuchen, und er wird es nicht versäumen auch Braunschweig zu sehen. Sein Name ist BECKH.

Ich bin glücklich mich mit der innigsten Verehrung und Dankbarkeit nennen zu können

Hochwohlgeborner Herr Hofrath
Ew. Hochwohlgeborn
ergebensten Diener

Göttingen den 12ten Merz 1797. GAUSS.

BEMERKUNG.

Der hier mit der ursprünglichen Rechtschreibung abgedruckte Brief befindet sich gegenwärtig im Besitz der Königlichen Bibliothek zu Berlin. Die Aufschrift lautet

Se. Hochwohlgeborn
dem Herrn Hofrath
v. ZIMMERMANN
durch Einschluss. Braunschweig

Zwei spätere Briefe von GAUSS an v. ZIMMERMANN vom 22. November und vom 24. Dezember 1797, die sich ebenfalls auf die *Disqu. Arithm.* beziehen, sind im Auszug veröffentlicht in der Schrift von L. HÄNSELMANN, *Karl Friedrich Gauss. Zwölf Kapitel aus seinem Leben,* Leipzig 1878, S. 34—37. Vergl. den Artikel 2 des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«.

Den S. 19, Zeile 4, 3 v. u. angeführten Ausspruch EULERS hat GAUSS auf das vordere Schutzblatt seines Exemplars von LAMBERTS *Zusätzen* eingetragen, mit der Quellenangabe: EULER, Comm. N. Petr. XI, p. 153; er findet sich in der Tat in der Abhandlung: *De motu corporis ad duo centra virium fixa attracti,* Novi comm. Acad. Petrop. **11** (1765) 1767, S. 152—184, auf S. 153. Das S. 19, Z. 2 v. u. erwähnte Urteil EULERS lautet: »Quare cum vulgo ad ratiocinii facultatem comparandam demonstrationes geometricae commendari soleant, quippe quae regularum rationandi usum maxime contineant, nescio an non ad hunc scopum demonstrationes arithmeticae multo magis sint accommodatae: in his enim multo maiori cura est cavendum, ne a praescriptis Logicorum regulis aberremus, quoniam plerumque nimis est difficile, in errorem non prolabi« und steht in der Abhandlung: *Specimen de usu observationum in mathesi pura,* Novi comment. Acad. Petrop. **6** (1756/7), 1761, S. 185—230, auf S. 187. Die S. 20, Zeile 18 erwähnte »kleine Probe« der zur Bestimmung der Faktoren von Zahlen dienenden Tafel findet sich in den *Disqu. Arith.,* Werke I, S. 469, die Anleitung zu ihrem Gebrauch ebenda, S. 404, 405.

SCHLESINGER.

[ZUR THEORIE DER POTENZRESTE.]

[QUADRATISCHE RESTE.]

[I.]

[ÜBER EINIGE SUMMEN.]

[1.]

[Aus Scheda Ae, Julius 1800, S. 28.]

Theorema demonstrandum.

n numerus impar

r radix aequationis $x^n - 1 = 0$

$$\left.\begin{matrix} R \\ N \end{matrix}\right\} \text{ indefinite } \left\{\begin{matrix} \text{residuum} \\ \text{non residuum} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{ipsius } n, < n, \\ \text{ad } n \text{ primum.} \end{matrix}$$

Productum ex

$$(r - r^{-1})(r^3 - r^{-3})(r^5 - r^{-5}) \ldots (r^{n-2} - r^{n-2})$$

evolvi in

$$\Sigma r^R - \Sigma r^N.$$

Demonstratum iam est illud productum evolvi vel in $\Sigma r^R - \Sigma r^N$ vel in $\Sigma r^N - \Sigma r^R$.

[2.]

[Aus Scheda Ae, Julius 1800, S. 31.]

Theorema novissimum pulcherrimum.

Summae

$$\sin\frac{0}{n}P+\sin\frac{1}{n}P+\sin\frac{4}{n}P+\sin\frac{9}{n}P+\cdots+\sin\frac{(n-1)^2}{n}P$$

$$\cos\frac{0}{n}P+\cos\frac{1}{n}P+\cos\frac{4}{n}P+\cos\frac{9}{n}P+\cdots+\cos\frac{(n-1)^2}{n}P$$

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|}
\text{fit} = \left\{\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right. & \sqrt{n} & 0 & 0 & \sqrt{n} \\
 & \sqrt{n} & \sqrt{n} & 0 & 0 \\
\hline
\text{pro } n \equiv & 0 & 1 & 2 & 3
\end{array}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{mod. } 4}$$

[3.]

[Aus Scheda Ae, Julius 1800, S. 32.]

Erstens $n \equiv 1 \pmod{8}$

$$\Sigma\cos\frac{RP}{n}-\Sigma\cos\frac{NP}{n}=+\sqrt{n}.$$

Zweitens $n \equiv 5 \pmod{8}$

$$\Sigma\cos\frac{RP}{n}-\Sigma\cos\frac{NP}{n}=+\sqrt{n}.$$

Drittens $n \equiv 3 \pmod{8}$

$$\Sigma\sin\frac{RP}{n}-\Sigma\sin\frac{NP}{n}=+\sqrt{n}.$$

Viertens $n \equiv 7 \pmod{8}$

$$\Sigma\sin\frac{RP}{n}-\Sigma\sin\frac{NP}{n}=+\sqrt{n}.$$

[4.]

Gauss an Olbers.

[Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke II, 1 (1900), S. 267 ff.]

Braunschweig, 1805 September 3.

Ich hoffe, dass nur Ihre überhäuften Arbeiten, nicht aber Krankheit, oder sonst etwas Unangenehmes, Schuld sind, dass ich so lange mit keinem Briefe von Ihnen erfreut worden bin. Meine Beschäftigungen waren auch seit einiger Zeit nicht von der Art, dass sie für den Geometer, noch meine Begegnisse, dass sie für den theilnehmenden Freund sonderlich Stoff zu Mittheilungen dargeboten hätten. Ich bin durch verschiedene Umstände — theils durch einige Briefe von Le Blanc in Paris, der meine *Disqu. Arith.* mit wahrer Leidenschaft studirt, sich ganz mit ihnen vertraut gemacht und mir manche recht artige Kommunikationen darüber gemacht hat, theils durch die Anwesenheit eines Freundes, der jenes Werk jetzt gleichfalls studirt und sich öfters bei mir Raths erholt — theils auch durch eine Art von Überdruss oder wenigstens Ermüdung an dem todten mechanischen Kalkül verleitet worden, in diesem einmal eine Pause zu machen und meine geliebten arithmetischen Untersuchungen wieder vorzunehmen. Sie erinnern sich vielleicht noch von unsern Gesprächen in Bremen her, namentlich an dem schönen Nachmittage, den wir auf der Vahr zubrachten, dass ich schon seit längerer Zeit eine sehr beträchtliche Sammlung von Untersuchungen nicht sowohl im Pult, als in petto habe, die hinreichenden Stoff zu einem zweiten Bande der *Disqu. Arith.* geben, und die, wenigstens meinem Urtheile nach, ebenso merkwürdig sind, als die im ersten enthaltenen. Sie erinnern sich aber auch vielleicht zu gleicher Zeit meiner Klagen über einen Satz, der theils schon an sich sehr interessant ist, theils einem sehr beträchtlichen Theile jener Untersuchungen als Grundlage oder als Schlussstein dient, den ich damals schon über 2 Jahr kannte, und der alle meine Bemühungen, einen genügenden Beweis zu finden, vereitelt hatte. Dieser Satz ist schon in meinen *Disq.* pg. 636 [*)] angedeutet, oder viel-

[*) Werke I, S. 442, 443.]

mehr nur ein specieller Fall davon, nämlich der, wo n eine Primzahl ist, auf den sich übrigens hier die übrigen würden zurückführen lassen. Was da von »Quaecunque igitur radix etc.« bis »valde sunt memorabilia« steht, ist streng dort bewiesen, aber was folgt, nämlich die Bestimmung des Wurzelzeichens, ist es gerade, was mich immer gequält hat. Dieser Mangel hat mir alles Übrige, was ich fand, verleidet; und seit 4 Jahren wird selten eine Woche hingegangen sein, wo ich nicht einen oder den andern vergeblichen Versuch, diesen Knoten zu lösen, gemacht hätte — besonders lebhaft nun auch wieder in der letzten Zeit. Aber alles Brüten, alles Suchen ist umsonst gewesen, traurig habe ich jedesmal die Feder wieder niederlegen müssen. Endlich vor ein paar Tagen ist's gelungen — aber nicht meinem mühsamen Suchen, sondern bloss durch die Gnade Gottes möchte ich sagen. Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Räthsel gelöst; ich selbst wäre nicht im Stande, den leitenden Faden zwischen dem, was ich vorher wusste, dem, womit ich die letzten Versuche gemacht hatte, — und dem, wodurch es gelang, nachzuweisen. Sonderbar genug erscheint die Lösung des Räthsels jetzt leichter als manches andere, was mich wohl nicht so viele Tage aufgehalten hat als dieses Jahre, und gewiss wird niemand, wenn ich diese Materie einst vortrage, von der langen Klemme, worin es mich gesetzt hat, eine Ahnung bekommen.

. . . .

BEMERKUNG.

Die vorstehenden Aufzeichnungen [1]—[3] gehören insofern in die Lehre von den quadratischen Resten als sie die ersten Vorstudien zu den Untersuchungen darstellen, die GAUSS 1808 in der Abhandlung *Summatio quarundam serierum singularium* (Werke II, S. 9 ff.) veröffentlicht hat. Für das Geschichtliche vergleiche man neben dem Briefe [4] noch die Tagebuchaufzeichnungen Nr. 118 vom Mai 1801 und Nr. 123 vom 30. August 1805 sowie den Artikel 18 des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«.

SCHLESINGER.

[II.]

[BESTIMMUNG DES DEZIDENTEN IN DER LEHRE VON DEN QUADRATISCHEN RESTEN.]

[Aus Handbuch 18, Bd. Mathematische Brouillons, October 1805, S. 164.]

Designemus per $\left(\frac{k}{p}\right)$ multitudinem productorum ex his

$$k,\ 2k,\ 3k,\ \ldots,\ \tfrac{1}{2}(p-1)k,$$

quorum residua minima positiva secundum modulum p cadunt infra $\frac{1}{2}p$; porro per $[x]$ numerum integrum quantitate x proxime minorem. Habebis

$$1)\qquad \left(\frac{k}{p}\right) = \left[\frac{2k}{p}\right] + \left[\frac{4k}{p}\right] + \left[\frac{6k}{p}\right] + \cdots + \left[\frac{(p-1)k}{p}\right]$$
$$- 2\left[\frac{k}{p}\right] - 2\left[\frac{2k}{p}\right] - 2\left[\frac{3k}{p}\right] - \cdots - 2\left[\frac{\frac{1}{2}(p-1)k}{p}\right],$$

$$2)\qquad [x] + [-x] = -1,$$

$$3)\qquad \left(\frac{k}{p}\right) + \left(\frac{-k}{p}\right) = \tfrac{1}{2}(p-1),$$

$$4)\qquad \left(\frac{k}{p}\right) = \tfrac{1}{4}(p \mp 1)(k-1) - 3\left[\frac{k}{p}\right] - \left[\frac{2k}{p}\right] - 3\left[\frac{3k}{p}\right] - \cdots$$
$$= \tfrac{1}{4}(p \mp 1)(k-1) - 2\left\{\left[\frac{k}{p}\right] + \left[\frac{3k}{p}\right] + \left[\frac{5k}{p}\right] + \cdots + \left[\frac{\frac{1}{2}(p-3)k}{p}\right]\right\}$$
$$- \left\{\left[\frac{k}{p}\right] + \left[\frac{2k}{p}\right] + \left[\frac{3k}{p}\right] + \cdots + \left[\frac{\frac{1}{2}(p-1)k}{p}\right]\right\}.$$

$$
\begin{aligned}
[x]+[2x]+[3x]+\cdots+[nx] = \; & 0\left[\frac{1}{x}\right] \\
& + 1\left\{\left[\frac{2}{x}\right]-\left[\frac{1}{x}\right]\right\} \\
& + 2\left\{\left[\frac{3}{x}\right]-\left[\frac{2}{x}\right]\right\} \\
& \quad \vdots \\
[nx] = h \qquad\qquad & + h\left\{n-\left[\frac{h}{x}\right]\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
& \overset{h}{[x]+[2x]+[3x]+\cdots+[nx]} \\
& \quad +\left[\frac{1}{x}\right]+\left[\frac{2}{x}\right]+\left[\frac{3}{x}\right]+\cdots+\left[\frac{h}{x}\right]
\end{aligned}\right\} = nh.
$$

BEMERKUNG.

Die vorstehende Aufzeichnung bildet eine Vorarbeit zu dem dritten Beweise des Reziprozitätsgesetzes (Comm. Gott. **16**, 1808, Werke II, S. 1 ff.). Die hier bewiesene Formel bildet dort das *Theorema* des art. 5 (Werke II, S. 7). Da sich auf folgenden Seiten des Handbuchs die Vorausberechnung der Örter von Juno und Ceres auf das Jahr 1808 findet, so wird diese Aufzeichnung wohl auf 1806—1807 anzusetzen sein. Vergl. den Artikel **20** des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«.

SCHLESINGER.

[III.]

FÜNFTER BEWEIS DES FUNDAMENTALSATZES BEI DEN QUADRATISCHEN RESTEN.

[Aus Handbuch 21, Bg. Aufsätze, Notizen und Rechnungen zur Mathematik und Astronomie gehörig. Angefangen September 1813, S. 4—5.]

I) Es sei p eine (ungerade) Primzahl, a eine Radix primitiva für den Modulus p, x eine unbestimmt bleibende Grösse. Wir bezeichnen durch fx die Function

$$[1+]\,x+x^{a}+x^{aa}+x^{a^3}+x^{a^4}+x^{a^5}+\text{etc.}+x^{a^{p-2}}.$$

Man sieht leicht, dass

$$fx-([1+]\,x+xx+x^3+\text{etc.}+x^{p-1})$$

durch $1-x^p$ theilbar seyn müsse, da die Zahlen $1, a, aa, a^3\ldots, a^{p-2}$ den Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots, p-1$ nach dem Modulus p congruent sind (ohne Rücksicht auf die Ordnung). Es ist also fx durch

$$1+x+xx+\text{etc.}+x^{p-1}=\frac{1-x^p}{1-x}$$

theilbar. Es wird also auch allgemein, wenn n irgend eine ganze Zahl bedeutet, $f(x^n)$ durch $\frac{1-x^{np}}{1-x^n}$ theilbar seyn. Nun ist aber leicht zu beweisen, dass

$$\frac{1-x^{np}}{1-x^n}\ \text{durch}\ \frac{1-x^p}{1-x}$$

theilbar sei, wenn n durch p nicht theilbar ist, in diesem Fall wird also $f(x^n)$ auch durch $\frac{1-x^p}{1-x}$ theilbar seyn. Hingegen sieht man leicht, dass wenn n

durch p theilbar ist, $f(x^n)-p$ durch $1-x^p$ also auch durch $\frac{1-x^p}{1-x}$ theilbar seyn w[ird].

II) Man bezeichne ferner

$$x - x^{\alpha} + x^{\alpha\alpha} - x^{\alpha^3} + \text{etc.} - x^{\alpha^{p-2}}$$

durch ξ. Alsdann ist

$$+x\xi - (x^2 - x^{\alpha+1} + x^{\alpha\alpha+1} - x^{\alpha^3+1} + \text{etc.} - x^{\alpha^{p-2}+1}) = 0$$

und die Grössen

$$\begin{array}{llllll}
-x^{\alpha}\xi & -(x^{2\alpha} & -x^{\alpha\alpha+\alpha} & +x^{\alpha^3+\alpha} & -x^{\alpha^4+\alpha} & +\text{etc.}-x^{\alpha^{p-1}+\alpha}), \\
+x^{\alpha\alpha}\xi & -(x^{2\alpha\alpha} & -x^{\alpha^3+\alpha\alpha} & +x^{\alpha^4+\alpha\alpha} & -x^{\alpha^5+\alpha\alpha} & +\text{etc.}-x^{\alpha^{p}+\alpha\alpha}), \\
-x^{\alpha^3}\xi & -(x^{2\alpha^3} & -x^{\alpha^4+\alpha^3} & +x^{\alpha^5+\alpha^3} & -x^{\alpha^6+\alpha^3} & +\text{etc.}-x^{\alpha^{p+1}+\alpha^3}), \\
+x^{\alpha^4}\xi & -(x^{2\alpha^4} & -x^{\alpha^5+\alpha^4} & +x^{\alpha^6+\alpha^4} & -x^{\alpha^7+\alpha^4} & +\text{etc.}-x^{\alpha^{p+2}+\alpha^4})
\end{array}$$

u. s. w. bis zu

$$-x^{\alpha^{p-2}}\xi - (x^{2\alpha^{p-2}} - x^{\alpha^{p-1}+\alpha^{p-2}} + x^{\alpha^{p}+\alpha^{p-2}} + x^{\alpha^{p+1}+\alpha^{p-2}} + \text{etc.} - x^{\alpha^{2p-4}+\alpha^{p-2}})$$

jede einzeln durch $1-x^p$ theilbar. Addirt man alles, so ist folglich klar, dass

$$\xi\xi - f(x^2) + f(x^{\alpha+1}) - f(x^{\alpha\alpha+1}) + f(x^{\alpha^3+1}) - \text{etc.} + f(x^{\alpha^{p-2}+1})$$

durch $1-x^p$ theilbar seyn werde, also auch durch $\frac{1-x^p}{1-x}$. Nun ist aber bekanntlich unter den Zahlen

$$2,\ \alpha+1,\ \alpha\alpha+1,\ \alpha^3+1 \ \text{etc. bis}\ \alpha^{p-2}+1$$

nur eine einzige nemlich $\alpha^{\frac{1}{2}(p-1)}+1$ durch p theilbar: dem vorhergehenden Theorem zufolge wird also

$$\xi\xi \mp f(x^{\alpha^{\frac{1}{2}(p-1)}+1})$$

und folglich $\xi\xi \mp p$ durch $\frac{1-x^p}{1-x}$ theilbar seyn, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $\frac{1}{2}(p-1)$ gerade oder ungerade, d. i. je nachdem p von der Form $4m+1$ oder $4m-1$ ist.

III) Es sei nun q irgend eine ungerade (positive) Zahl also $\frac{1}{2}(q-1)$ eine ganze Zahl. Es wird folglich

$$(\xi\xi)^{\frac{1}{2}(q-1)} - (\pm p)^{\frac{1}{2}(q-1)}$$

durch $\xi\xi - (\pm p)$, also auch durch $\frac{1-x^p}{1-x}$ theilbar seyn; jene erstere Grösse kann man auch so schreiben:

$$\xi^{q-1} \mp p^{\frac{1}{2}(q-1)},$$

wo das obere Zeichen gelten wird, wenn von den Zahlen p, q wenigstens eine von der Form $4m+1$ ist, das untere hingegen, wenn beide von der Form $4m+3$ sind.

IV) Nehmen wir jetzt noch an, dass auch q eine von p verschiedene Primzahl ist, so folgt aus dem Theorem, welches in den *Disqu. Ar.* p. 46 [*)] steht, dass

$$\xi^q - (x^q - x^{\alpha q} + x^{\alpha\alpha q} - x^{\alpha^3 q} + x^{\alpha^4 q} - \text{etc.} - x^{\alpha^{p-2} q})$$

durch q theilbar sein werde, oder von der Form qX, so dass X eine Function mit lauter ganzen Coefficienten bedeutet. Nun ist q nach dem Modulus p einer Potenz von α congruent, es sei $q \equiv \alpha^\mu$. Es ist also

$$x^q - x^{\alpha q} + x^{\alpha\alpha q} - \text{etc.} - x^{\alpha^{p-2} q} - (x^{\alpha^\mu} - x^{\alpha^{\mu+1}} + x^{\alpha^{\mu+2}} - x^{\alpha^{\mu+3}} + \text{etc.} - x^{\alpha^{p+\mu-2}})$$

durch $1-x^p$ theilbar; durch dieselbe Grösse wird aber auch

$$x^{\alpha^\mu} - x^{\alpha^{\mu+1}} + x^{\alpha^{\mu+2}} - x^{\alpha^{\mu+3}} + \text{etc.} - x^{\alpha^{p+\mu-2}} \mp \xi$$

theilbar seyn, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem μ gerade oder ungerade, d. i. je nachdem q ein quadratischer Rest oder Nichtrest von p ist. Um durch die doppelten Zeichen keine Verwirrung zu veranlassen, wollen wir annehmen, dass der Buchstab ε im erstern Falle die Grösse $+1$, im zweiten die Grösse -1 bedeutet; es wird folglich

$$x^q - x^{\alpha q} + x^{\alpha\alpha q} - x^{\alpha^3 q} + \text{etc.} - x^{\alpha^{p-2} q} - \varepsilon\xi$$

[*) Werke I, S. 42.]

oder

$$\xi^q - qX - \varepsilon\xi$$

durch $1-x^p$, folglich da nach III) $\xi^q \mp \xi p^{\frac{1}{2}(q-1)}$ durch $\frac{1-x^p}{1-x}$ theilbar ist, auch

$$\mp \xi p^{\frac{1}{2}(q-1)} + qX + \varepsilon\xi$$

oder

$$qX + (\varepsilon \mp p^{\frac{1}{2}(q-1)})\xi$$

durch $\frac{1-x^p}{1-x}$ theilbar seyn. Durch dieselbe Function ist also auch

$$q\xi X + (\varepsilon - (\pm p)^{\frac{1}{2}q-1})\xi\xi$$

und folglich auch

$$q\xi X \pm p\,[\varepsilon - (\pm p)^{\frac{1}{2}q-1}]$$

theilbar, wo die obern Zeichen sich auf die Form $4m+1$, die untern auf die Form $4m-1$ von p beziehen. Nehmen wir nun an, dass ξX mit $\frac{1-x^p}{1-x}$ auf gewöhnliche Art dividirt den Rest

$$ax^{p-2} + bx^{p-3} + cx^{p-4} + \text{etc.} + l = R$$

gebe, so wird offenbar auch

$$qR \pm p(\varepsilon - (\pm p)^{\frac{1}{2}q-1})$$

durch $\frac{x^p-1}{x-1}$ theilbar seyn, welches nicht anders möglich ist, als wenn jene Grösse identisch $= 0$ wird. Wir haben also

$$lq \pm p\,(\varepsilon - (\pm p)^{\frac{1}{2}(q-1)}) = 0,$$

folglich ist

$$p\,(\varepsilon - (\pm p)^{\frac{1}{2}q-1})$$

durch q theilbar, mithin auch $\varepsilon - (\pm p)^{\frac{1}{2}q-1}$, welche Grösse auch durch $\varepsilon \mp p^{\frac{1}{2}(q-1)}$ dargestellt werden kann, wenn das obere Zeichen genommen wird in den Falle, da wenigstens eine der Grössen p, q von der Form $4m+1$ ist, das untere hingegen, wenn beide die Form $4m+3$ haben. Hieraus leiten wir also die Schlussfolge ab:

Ist q ein quadratischer Rest von p, so wird, nach der eben ausgesprochenen Bestimmung der Zeichen,

$$p^{\frac{1}{2}(q-1)} \equiv \pm 1 \pmod{q},$$

also auch p quadratischer Rest von q, dafern wenigstens eine der Primzahlen p, q von der Form $4m+1$ ist, und Nichtrest von q, wenn beide die Form $4m+3$ haben.

Ist hingegen q ein quadratischer Nichtrest von p, also $\varepsilon = -1$, so wird

$$p^{\frac{1}{2}(q-1)} \equiv \mp 1 \pmod{q},$$

folglich auch p Nichtrest von q im erstern Falle und Rest im andern.

Dieses ist eben das Fundamentaltheorem selbst.

BEMERKUNG.

Die vorstehende Abhandlung, die aus dem September des Jahres 1813 stammt, ist eine von dem lateinischen Texte der *Demonstratio sexta* (1818, Werke II, S. 55 ff.) nur wenig abweichende deutsche Darstellung dieses Beweises des Reziprozitätssatzes; die Zählung der Beweise ist hier umgekehrt, wie in der veröffentlichten Abhandlung. Vergl. den Artikel **20** des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«.

SCHLESINGER.

[IV.]

DRITTER BEWEIS DES FUNDAMENTALSATZES BEI DEN QUADRATISCHEN RESTEN IN EINER NEUEN EINKLEIDUNG.

[Aus Handbuch 21, Bg, S. 6—8.]

1. Es seyn m, M zwei positive ungerade [theilerfremde] Zahlen und $mM = \mu$. Wir bezeichnen

durch f	den Inbegriff der $\frac{1}{2}(m-1)$	Zahlen	$1, 2, 3, \ldots, \frac{1}{2}(m-1)$,
f'	$\frac{1}{2}(m-1)$		$\frac{1}{2}(m+1), \frac{1}{2}(m+3), \ldots, m-1$,
F	$\frac{1}{2}(M-1)$		$1, 2, 3, \ldots, \frac{1}{2}(M-1)$,
F'	$\frac{1}{2}(M-1)$		$\frac{1}{2}(M+1), \frac{1}{2}(M+3), \ldots, M-1$,
φ	$\frac{1}{2}(\mu-1)$		$1, 2, 3, \ldots, \frac{1}{2}(\mu-1)$,
φ'	$\frac{1}{2}(\mu-1)$		$\frac{1}{2}(\mu+1), \frac{1}{2}(\mu+3), \ldots, \mu-1$.

Die Zahlen f', F', φ' sind folglich identisch mit $m-f$, $M-F$, $\mu-\varphi$.

2. Wir bezeichnen ferner durch A, B, C, D die Inbegriffe der kleinsten positiven Reste, welche nach dem Modulus μ resp. alle Zahlen

$$fM+Fm,\ fM+F'm,\ f'M+Fm,\ f'M+F'm$$

geben. Die Anzahl der Zahlen in einem jeden wird offenbar $\frac{1}{4}(m-1)(M-1)$, also die Anzahl aller $(m-1)(M-1)$. Ferner sieht man leicht, dass alle unter sich ungleich und keiner durch m noch durch M theilbar seyn werden; woraus man den Schluss zieht, dass alle zusammen mit dem Inbegriffe aller weder durch m noch durch M theilbaren Zahlen zwischen den Grenzen 0 und μ, d. i. in den beiden Reihen φ und φ' identisch sind.

Noch bemerken wir, dass alle Zahlen $f'M+F'm$ identisch sind mit

$$(m-f)M+(M-F)m$$

d. i. mit

$$2\mu-(fM+Fm);$$

die Zahlen D werden also die Ergänzungen der Zahlen A zu μ, und aus ähnlichem Grunde die Zahlen C die Ergänzungen der Zahlen B zu μ seyn.

3. Wir scheiden die Zahlen A, B, C, D resp. in zwei Classen α und α', β und β', γ und γ', δ und δ', so dass in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ diejenigen fallen, welche kleiner als $\frac{1}{2}\mu$, in $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ hingegen diejenigen, welche grösser als $\frac{1}{2}\mu$ sind. Zusammengenommen werden also $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ alle weder durch m noch durch M theilbaren Zahlen in φ, so wie $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ zusammen die ähnlichen Zahlen in φ' darstellen. Da nun offenbar Fm alle durch m theilbaren Zahlen in φ und fM alle durch M theilbaren in φ gibt, und alle diese Zahlen ungleich seyn müssen (keine zugleich durch m und M theilbar seyn kann); so besteht φ offenbar aus $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, Fm und fM; und auf ähnliche Weise φ' aus $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$, $F'm$ und $f'M$.

4. Die Anzahl der Zahlen, welche von A, B, C, D in die Classen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kommen, bleibt zwar noch unbestimmt; allein so viel ist klar, da δ und δ' zusammen die Ergänzungen von α und α' zusammen zu μ sind, dass nothwendig δ die Ergänzungen von α' und δ' die Ergänzungen von α seyn werden. Eben so müssen γ, γ' resp. die Ergänzungen von β' und β zu μ seyn. Bedeutet also p die Anzahl der Zahlen in α, q die Anzahl der Zahlen in β, so sind

in δ' gleichfalls p

in γ' gleichfalls q

in α' oder in δ hingegen $\frac{1}{4}(m-1)(M-1)-p$

in β' oder in γ aber $\frac{1}{4}(m-1)(M-1)-q$.

5. Die kleinsten Reste der $\frac{1}{2}(m-1)$ Zahlen fM nach dem Modulus m liegen zum Theil in f, zum Theil in f'; die Anzahl der letzteren sey n, also die Anzahl der erstern $\frac{1}{2}(m-1)-n$. Eben so liegen die kleinsten Reste der $\frac{1}{2}(M-1)$ Zahlen Fm nach dem Modulus M zum Theil in F, zum Theil in F'; die Anzahl der letztern $=N$ gesetzt, wird die der erstern $=\frac{1}{2}(M-1)-N$ seyn.

6. Zählen wir jetzt alle Zahlen in φ' zusammen, die nach dem Modulus m einer der Zahlen fM congruent sind. In so fern φ' aus $\alpha', \beta', \gamma', \delta', f'M, F'm$ zusammengesetzt ist, und alle Zahlen α', β' offenbar die gedachte Eigenschaft haben und keine der übrigen sie hat, wird offenbar die verlangte Anzahl $= \frac{1}{2}(m-1)(M-1)-p-q$ seyn. Offenbar besteht aber φ' auch andererseits aus den Zahlen

$$\begin{array}{lll}
\frac{1}{2}(\mu+1) & , \frac{1}{2}(\mu+3) & , \ldots, \frac{1}{2}(M+1)m-1 \\
\frac{1}{2}(M+1)m, & \frac{1}{2}(M+1)m+1, & \ldots, \frac{1}{2}(M+3)m-1 \\
\frac{1}{2}(M+3)m, & \frac{1}{2}(M+3)m+1, & \ldots, \frac{1}{2}(M+5)m-1 \\
\frac{1}{2}(M+5)m, & \frac{1}{2}(M+5)m+1, & \ldots, \frac{1}{2}(M+7)m-1 \\
 & \text{etc. bis} & \\
(M-1)m, & (M-1)m+1, & \ldots, \mu-1
\end{array}$$

oder

	unter welchen sich Zahlen von gedachter Eigenschaft befinden
$\frac{1}{2}(M-1)m+f'$	n
$\frac{1}{2}(M+1)m,\ \frac{1}{2}(M+1)m+f,\ \frac{1}{2}(M+1)m+f'$	$\frac{1}{2}(m-1)$
$\frac{1}{2}(M+3)m,\ \frac{1}{2}(M+3)m+f,\ \frac{1}{2}(M+3)m+f'$	$\frac{1}{2}(m-1)$
$\frac{1}{2}(M+5)m,\ \frac{1}{2}(M+5)m+f,\ \frac{1}{2}(M+5)m+f'$	$\frac{1}{2}(m-1)$
etc.	
$(M-1)m,\ (M-1)m+f,\ (M-1)m+f',$	$\frac{1}{2}(m-1).$

Auf diese Weise beträgt also die Anzahl aller $n+\frac{1}{4}(M-1)(m-1)$ und man hat also die Gleichung

$$n = \frac{1}{4}(m-1)(M-1)-p-q.$$

7. Scheiden wir auf ähnliche Weise aus φ' alle Zahlen aus, welche nach dem Modulus M einer der Zahlen Fm congruent sind, so sind dies die Zahlen α' und γ', also ihre Anzahl $\frac{1}{4}(m-1)(M-1)-p+q$. Dieselbe Anzahl findet sich aber durch eine zweite Zerlegung von φ' in

$$\frac{1}{2}M(m-1)+F',\ f'M,\ f'M+F,\ f'M+F' \qquad .$$

$= N+\frac{1}{4}(M-1)(m-1)$. Wir haben also

$$N = -p+q.$$

8. Es wird demnach

$$N - n = 2q - \tfrac{1}{4}(m-1)(M-1);$$

also sind N und n beide gerade oder beide ungerade, so oft $\frac{1}{4}(m-1)(M-1)$ gerade, d. i. so oft unter den Zahlen m, M wenigstens eine von der Form $4k+1$ ist; hingegen werden N, n nothwendig die eine gerade, die andere ungerade seyn müssen, wenn $\frac{1}{4}(m-1)(M-1)$ ungerade ist, d. i. wenn beide Zahlen m, M zugleich von der Form $4k+3$ sind.

Hieraus folgt das Fundamentaltheorem von selbst.

Bei dieser Einkleidung des Beweises ist der wahre Nerf desselben mehr in die Augen fallend als bei derjenigen, in welcher er in den Göttingischen Commentationen Bd. XVI [*)] erscheint.

Novbr. 12. [1813]

BEMERKUNG.

Die vorstehende »neue Einkleidung« des dritten Beweises (Werke II, S. 1) ist (vergl. den Artikel **20** des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«) nur in der Entwickelung von dem fünften Beweise (1818, Werke II, S. 51 ff.) verschieden.

SCHLESINGER.

[*) 1808, Werke II, S. 1 ff.]

[KUBISCHE UND BIQUADRATISCHE RESTE.]

[V.]

[ZWEI SÄTZE ÜBER KUBISCHE UND BIQUADRATISCHE RESTE.]

[Aus Handbuch 18, Bd. Mathematische Brouillons, October 1805, Einbanddecke.]

Wenn eine Primzahl p sich unter die Form

$$aa+27bb$$

setzen lässt, so ist 2 Res. Cub. ipsius p.

Wenn sich dieselbe unter die Form

$$aa+64bb$$

setzen lässt, so ist ± 2 ein Biquadr. Rest von p.

BEMERKUNG.

Vergl. hierzu die Werke VIII, S. 6 abgedruckte Aufzeichnung sowie die *Theoria Residuorum Biquadraticorum, Commentatio secunda* (1832) art. 24, Werke II, S. 95, 96.

SCHLESINGER.

[VI.]

[ZUR LEHRE VON DEN GANZEN KOMPLEXEN ZAHLEN.]

[Ein Zettel in Ec 2, Kapsel 43.]

[1.]

Sind a, b Primzahlen unter sich, so werden entweder beide $ax+by$, $ay-bx$ oder keine durch $aa+bb$ theilbar sein.

Bew[eis.]

Multiplicirt man die beiden identischen Gleichungen

$$(a-bi)(x+iy) = ax+by+(ay-bx)i$$
$$(a+bi)(\alpha-\beta i) = a\alpha+b\beta+(b\alpha-a\beta)i$$

in einander, so wird, identisch,

$$(aa+bb)\{\alpha x+\beta y+(\alpha y-\beta x)i\} = (a\alpha+b\beta)(ax+by)+$$
$$+(a\beta-b\alpha)(ay-bx)+\{(a\alpha+b\beta)(ay-bx)+(ax+by)(b\alpha-a\beta)\}i.$$

Bestimmt man also α, β so, dass

$$a\alpha+b\beta = 1,$$

so wird

$$(aa+bb)(\alpha x+\beta y)+(b\alpha-a\beta)(ay-bx) = ax+by$$
$$(aa+bb)(\alpha y-\beta x)-(b\alpha-a\beta)(ax+by) = ay-bx.$$

Die $\begin{pmatrix}\text{erste}\\ \text{zweite}\end{pmatrix}$ Gleichung beweiset, dass, wenn $\begin{pmatrix}ay-bx\\ ax+by\end{pmatrix}$ durch $aa+bb$ theilbar ist, auch $\begin{pmatrix}ax+by\\ ay-bx\end{pmatrix}$ es sein werde.

[2.]

Ist eine Primzahl

$$p = 3n+1 = x^2+3y^2,$$

so ist

$$2x \equiv \frac{\frac{3}{2}n(\frac{3}{2}n-1)\dots(n+1)}{1\dots\frac{1}{2}n} \qquad (\text{m[od.] } p)$$

Unter derselben Voraussetzung ist

$$4p = l^2+27m^2$$

und

$$l \equiv \frac{-(n+1)(n+2)\dots 2n}{1.2\dots n}.$$

Ist eine Primzahl

$$p = 8n+1 = a^2+2b^2,$$

so ist

$$2a \equiv \frac{4n\dots(3n+1)}{1\dots n};$$

ist

$$p = 8n+3 = a^2+2b^2,$$

so ist

$$2a \equiv \frac{(4n+1)\,4n\dots(3n+2)}{1\dots n}.$$

[3.]

[Zettel in Ec 3, Kapsel 43.]

Der Modulus $a+ib$ und $aa+bb = D$.
Kleinster Rest von $x+iy$ (mod. $a+bi$)

$$x+iy-(a+ib)\left\{\left[\frac{ax+by}{D}\right]+i\left[\frac{ay-bx}{D}\right]\right\}.$$

Modulus $-7+10i$, $D = 149$.

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	$+1$	10	$-6-2i$	20	$+2+3i$	30	$-3-5i$
1	$-1-i$	11	$-6+i$	21	$+1-5i$	31	$+5-2i$
2	$+2i$	12	$-3-2i$	22	$+1-6i$	32	$+3+4i$
3	$+2-2i$	13	$+1+5i$	23	$-5i$	33	$-6+3i$
4	-4	14	$-3+4i$	24	$+2-5i$	34	$-1-4i$
5	$+4+4i$	15	$+7-i$	25	$-7i$	35	$-3+5i$
6	$-7+2i$	16	$+2+i$	26	$-3i$	36	$+1+8i$
7	$-1-2i$	17	$-1-3i$	27	$-3+3i$	37	$+i$
8	$-1+3i$	18	$-2+4i$	28	$+6$		etc.
9	$+4-2i$	19	$+6-2i$	29	$+4+i$		

Indices der Elementargrössen.

$+i$	37	$+5+2i$	61	$+5-6i$	18	$-3-10i$	99
$+1+i$	75	$+5-2i$	31	$-3+8i$	9	$-7+8i$	76
$+1-i$	38	$+1+6i$	122	$-3-8i$	15	$-7-8i$	54
$+1+2i$	81	$+1-6i$	22	$+5+8i$	50	-11	107
$+1-2i$	127	$+5+4i$	72	$+5-8i$	77	$-11+4i$	59
-3	137	$+5-4i$	121	$+9+4i$	17	$-11-4i$	8
$-3+2i$	57	-7	136	$+9-4i$	56	$-7-10i$	101
$-3-2i$	12	$-7+2i$	6	$+1+10i$	43		
$+1+4i$	108	$-7-2i$	104	$+1-10i$	102		
$+1-4i$	140	$+5+6i$	132	$-3+10i$	76		

Modulus $-11+4i$, $D = 137$.

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	$+1$	9	$-2+5i$	18	$-2-2i$	27	$+3-2i$
1	$+1+2i$	10	$-1-3i$	19	$+2-6i$	28	$+3-7i$
2	$-3+4i$	11	$-6-i$	20	$+3+2i$	29	$+6+3i$
3	$-6i$	12	$-2i$	21	$-5-3i$	30	$-4+4i$
4	$+1-2i$	13	$+4-2i$	22	$+5-2i$	31	$+3+3i$
5	$+5$	14	$+4-5i$	23	$+5-3i$	32	$+4-6i$
6	$+1-i$	15	$-1-4i$	24	-4	33	$+1-5i$
7	$+3+i$	16	$-4-2i$	25	$+3i$	34	$+i$
8	$-3-4i$	17	$+4+i$	26	$+5-i$		

Indices der Elementargrössen.

$+i$	34	$+1-4i$	119	$-7-2i$	32	$+1+10i$	
$+1+i$	40	$+5+2i$	111	$+5+6i$		$+1-10i$	
$+1-i$	6	$+5-2i$	22	$+5-6i$		$-3+10i$	
$+1+2i$	1	$+1+6i$	125	$-3+8i$		$-3-10i$	
$+1-2i$	4	$+1-6i$	45	$-3-8i$		$-7+8i$	
-3	127	$+5+4i$	51	$+5+8i$		$-7-8i$	
$-3+2i$	95	$+5-4i$	105	$+5-8i$		-11	58
$-3-2i$	88	-7	98	$+9+4i$	97	$-11-4i$	104
$+1+4i$	83	$-7+2i$	13	$+9-4i$	114		

Modulus 11, $D = 121$.

[*Potenzen der Primitiv-Wurzel.*]

0	$+1$	8	$+3+4i$	16	$+4+2i$	24	$+4$
1	$+3-2i$	9	$-5-5i$	17	$+5-2i$	25	$+1+3i$
2	$+5-i$	10	$-3-5i$	18	$-5i$	26	$-2-4i$
3	$+2-2i$	11	$+3+2i$	19	$+1-4i$	27	$-3+3i$
4	$+2+i$	12	$+2$	20	$-5-3i$	28	$-3+4i$
5	$-3-i$	13	$-5-4i$	21	$+1+i$	29	$-1-4i$
6	$+3i$	14	$-1-2i$	22	$+5+i$	30	$+i$
7	$-5-2i$	15	$+4-4i$	23	$-5+4i$		

Indices der Elementargrössen.

i	30	$+1-4i$	19	$-7-2i$	56	$+1+10i$	111
$+1+i$	21	$+5+2i$	67	$+5+6i$	39	$+1-10i$	21
$+1-i$	111	$+5-2i$	17	$+5-6i$	69	$-3+10i$	5
$+1+2i$	74	$+1+6i$	112	$-3+8i$	57	$-3-10i$	55
$+1-2i$	94	$+1-6i$	32	$-3-8i$	27	$-7+8i$	98
-3	36	$+5+4i$	73	$+5+8i$	40	$-7-8i$	118
$-3+2i$	61	$+5-4i$	83	$+5-8i$	80		
$-3-2i$	71	-7	24	$+9+4i$	46		
$+1+4i$	89	$-7+2i$	16	$+9-4i$	26		

Modulus $-7+8i$, $D=113$

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	$+1$	8	$+7$	16	$+4+3i$	24	$+4$
1	$+1-4i$	9	$+1-5i$	17	$+2+3i$	25	$+5-i$
2	$+1+6i$	10	$+4-3i$	18	$-1-4i$	26	$-5+2i$
3	$+2-4i$	11	$+1+3i$	19	$-2-i$	27	-6
4	$+2+2i$	12	-2	20	$+1-i$	28	$+i$
5	$+3+2i$	13	$+5$	21	$+5+2i$		
6	$+4-2i$	14	$-1+3i$	22	$-1-2i$		
7	$-3-3i$	15	$+3$	23	$+6+i$		

Indices der Elementargrössen.

$+i$	28	$+1+4i$	74	-7	64	$+5-8i$	12
$+1+i$	48	$+1-4i$	1	$-7+2i$	55	$+9+4i$	70
$+1-i$	20	$+5+2i$	21	$-7-2i$	53	$+9-4i$	3
$+1+2i$	78	$+5-2i$	82	$+5+6i$	42	$+1+10i$	97
$+1-2i$	47	$+1+6i$	2	$+5-6i$	32	$+1-10i$	110
-3	71	$+1-6i$	107	$-3+8i$	24	$-3+10i$	31
$-3+2i$	45	$+5+4i$	7	$-3-8i$	25	$-3-10i$	49
$-3-2i$	61	$+5-4i$	59	$+5+8i$	39	$-7-8i$	20

Modulus $-3+10i$, $D = 109$

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	$+1$	7	$-4+2i$	14	$-4+i$	21	$+1-5i$
1	$-1-2i$	8	$-2+3i$	15	$-4+4i$	22	$+2-4i$
2	$-3+4i$	9	$-2-2i$	16	$+2+i$	23	$+3i$
3	$+1-i$	10	$+1-4i$	17	$-5i$	24	$+6-3i$
4	$-3-i$	11	$+1+5i$	18	$+3-2i$	25	$-5+4i$
5	$+4-3i$	12	-4	19	$+3-i$	26	$+3+3i$
6	$-2i$	13	$-3-5i$	20	$+5-2i$	27	$+i$

Indices der Elementargrössen.

$+i$	27	$+1+4i$	95	-7	26	$+5-8i$	63
$+1+i$	30	$+1-4i$	10	$-7+2i$	67	$+9+4i$	57
$+1-i$	3	$+5+2i$	102	$-7-2i$	58	$+9-4i$	59
$+1+2i$	55	$+5-2i$	20	$+5+6i$	94	$+1+10i$	66
$+1-2i$	97	$+1+6i$	69	$+5-6i$	88	$+1-10i$	87
-3	50	$+1-6i$	76	$-3+8i$	6	$-3-10i$	83
$-3+2i$	72	$+5+4i$	38	$-3-8i$	106		
$-3-2i$	35	$+5-4i$	79	$+5-8i$	86		

Modulus $+1+10i$, $D = 101$

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	$+1$	7	$-1+3i$	14	$+3+3i$	21	$-2+5i$
1	$+1+i$	8	$-4+2i$	15	$-1-4i$	22	$+3+2i$
2	$+2i$	9	$+4-3i$	16	$+3-5i$	23	$+0-5i$
3	$-2+2i$	10	$-3+2i$	17	$-2-i$	24	$-5-4i$
4	-4	11	$-5-i$	18	$-1-3i$	25	$+i$
5	$-4-4i$	12	$-3+4i$	19	$+2-4i$		
6	$+1+2i$	13	$+3$	20	$-4-i$		

Indices der Elementargrössen.

$+i$	25	$-3-2i$	72	$+5+4i$	74	$-3+8i$	94
$+1+i$	1	$+1+4i$	65	$+5-4i$	91	$-3-8i$	3
$+1-i$	76	$+1-4i$	45	-7	43	$+5+8i$	58
$+1+2i$	6	$+5+2i$	96	$-7+2i$	82	$+5-8i$	59
$+1-2i$	42	$+5-2i$	11	$-7-2i$	89	$+9+4i$	86
-3	63	$+1+6i$	29	$+5+6i$	30	$+9-4i$	18
$-3+2i$	10	$+1-6i$	83	$+5-6i$	99	$+1-10i$	77

Modulus $+9+4i$, $D=97$.

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	$+1$	7	$+4+i$	14	-3	21	$-3+i$
1	$+1+i$	8	$+3+5i$	15	$-3-3i$	22	$-4-2i$
2	$+2i$	9	$+2-i$	16	$-4+3i$	23	$-2-6i$
3	$-2+2i$	10	$+3+i$	17	$+2+3i$	24	$+i$
4	-4	11	$+2+4i$	18	$+3-4i$		
5	$+5$	12	$+2-3i$	19	$-2-5i$		
6	$-4+i$	13	$+5-i$	20	$-1+2i$		

Indices der Elementargrössen.

$+i$	24	$-3-2i$	84
$+1+i$	1	$+1+4i$	78
$+1-i$	73	$+1-4i$	79
$+1+2i$	33	$+5+2i$	22
$+1-2i$	68	$+5-2i$	43
-3	14	$+1+6i$	80
$-3+2i$	41	$+1-6i$	87

Modulus $+5+8i$, $D = 89$.

[*Potenzen der Primitiv-Wurzel.*]

0	$+1$	6	-5	12	$+4+2i$	18	$-2+i$
1	$+1-i$	7	$+3$	13	$-2+3i$	19	$-1+3i$
2	$-2i$	8	$+3-3i$	14	$-4-3i$	20	$+2+4i$
3	$-2-2i$	9	$+5+2i$	15	$+1-4i$	21	$+1-6i$
4	-4	10	$-1+2i$	16	$+2+3i$	22	$+i$
5	$+4-i$	11	$+1+3i$	17	$+5+i$		

Indices der Elementargrössen.

$+i$	22	$-3+2i$	38	$+1+6i$	56	$-7-2i$	
$+1+i$	23	$-3-2i$	35	$+1-6i$	21	$+5+6i$	
$+1-i$	1	$+1+4i$	27	$+5+4i$	26	$+5-6i$	
$+1+2i$	84	$+1-4i$	15	$+5-4i$	33	$-3+8i$	
$+1-2i$	54	$+5+2i$	9	-7	83	$-3-8i$	
-3	51	$+5-2i$	52	$-7+2i$	63	$+5-8i$	

Modulus $-3+8i$, $D = 73$.

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	$+1$	5	$+4-i$	10	$+4-3i$	15	$-1-3i$
1	$+1+i$	6	-3	11	$-1-2i$	16	$-1+4i$
2	$+2i$	7	$-3-3i$	12	$+1-3i$	17	$-2-5i$
3	$-2+2i$	8	$-3+2i$	13	$+4-2i$	18	$+i$
4	-4	9	$+3+2i$	14	$-2-i$		

Indices der Elementargrössen.

$+i$	18	$-3+2i$	8	$+1+6i$	13	$-7-2i$	1
$+1+i$	1	$-3-2i$	45	$+1-6i$	3	$+5+6i$	61
$+1-i$	55	$+1+4i$	23	$+5+4i$	69	$+5-6i$	57
$+1+2i$	47	$+1-4i$	52	$+5-4i$	31	$-3-8i$	62
$+1-2i$	32	$+5+2i$	66	-7	51		
-3	6	$+5-2i$	35	$-7+2i$	10		

Modulus $+5+6i$, $D = 61$.

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	$+1$	4	-4	8	$-1+4i$	12	-3
1	$-1-i$	5	$-1-2i$	9	$-1+2i$	13	$-2-3i$
2	$+2i$	6	$-1+3i$	10	$+3-i$	14	$+5$
3	$+2-2i$	7	$-2+3i$	11	$+1+4i$	15	$+i$

Indices der Elementargrössen.

$+i$	15	-3	12	$+5+2i$	19	$+5-4i$	46
$+1+i$	31	$-3+2i$	58	$+5-2i$	6	-7	53
$+1-i$	16	$-3-2i$	22	$+1+6i$	4	$-7+2i$	55
$+1+2i$	35	$+1+4i$	11	$+1-6i$	29	$-7-2i$	56
$+1-2i$	39	$+1-4i$	38	$+5+4i$	32	$+5-6i$	1

Modulus $-7+2i$, $D = 53$.

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	$+1$	4	-4	8	$-3i$	12	$-4-2i$
1	$+1+i$	5	$-2+3i$	9	$-4-i$	13	$+i$
2	$+2i$	6	$+2-i$	10	$-1+2i$		
3	$-2+2i$	7	$+3+i$	11	$-3+i$		

Indices der Elementargrössen.

$+i$	13	-3	47	$+5+2i$	51	$+5-4i$	16
$+1+i$	1	$-3+2i$	30	$+5-2i$	15	-7	28
$+1-i$	40	$-3-2i$	18	$+1+6i$	27	$-7-2i$	17
$+1+2i$	19	$+1+4i$	24	$+1-6i$	7		
$+1-2i$	36	$+1-4i$	25	$+5+4i$	9		

Modulus 7, $D = 49$.

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	$+1$	4	$+3i$	8	-2	12	$+i$
1	$+1-2i$	5	$-1+3i$	9	$-2-3i$		
2	$-3+3i$	6	$-2-2i$	10	$-1+i$		
3	$+3+2i$	7	$+1+2i$	11	$+1+3i$		

Indices der Elementargrössen.

$+i$	12	$+1-2i$	1	$+1+4i$	29	$+1+6i$	34
$+1+i$	46	-3	16	$+1-4i$	11	$+1-6i$	46
$+1-i$	34	$-3+2i$	45	$+5+2i$	42	$+5+4i$	9
$+1+2i$	7	$-3-2i$	27	$+5-2i$	6	$+5-4i$	15

Modulus $+5+4i$, $D = 41$.

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	$+1$	3	$+1-3i$	6	$+2+2i$	9	$-1-3i$
1	$-2+i$	4	$-2i$	7	$-1+2i$	10	$+i$
2	$-1+i$	5	-3	8	-4		

Indices der Elementargrössen.

$+i$	10	$+1-2i$	27	$+1+4i$	8	$+1+6i$	15
$+1+i$	32	-3	5	$+1-4i$	39	$+1-6i$	33
$+1-i$	22	$-3+2i$	3	$+5+2i$	4	$+5-4i$	32
$+1+2i$	31	$-3-2i$	6	$+5-2i$	29		

Modulus $+1+6i$, $D = 37$.

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	$+1$	3	$+2+2i$	6	$-1+2i$	9	$+i$
1	$-1+i$	4	$+2-i$	7	$-3i$		
2	$-2i$	5	$-1+3i$	8	$-2+3i$		

Indices der Elementargrössen.

$+i$	9	$+1-2i$	24	$+1+4i$	2	$+1-6i$	11
$+1+i$	28	-3	34	$+1-4i$	3		
$+1-i$	19	$-3+2i$	32	$+5+2i$	5		
$+1+2i$	13	$-3-2i$	17	$+5-2i$	10		

Modulus $+5+2i$, $D=29$.

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	$+1$	2	$-2i$	4	$+1+2i$	6	$-3+i$
1	$-1+i$	3	$+2+2i$	5	$+2+i$	7	$+i$

Indices der Elementargrössen.

$+i$	7	$+1+2i$	4	$-3+2i$	13	$+1-4i$	1
$+1+i$	22	$+1-2i$	26	$-3-2i$	9	$+5-2i$	11
$+1-i$	15	-3	3	$+1+4i$	20		

Modulus $+1+4i$ $D=17$.

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	1	1	$+1-2i$	2	-2	3	$+1-i$	4	$+i$

Indices der Elementargrössen.

$+i$	4	$+1-i$	3	$+1-2i$	1	$-3+2i$	7	$+1-4i$	10
$+1+i$	7	$+1+2i$	6	-3	3	$-3-2i$	5		

Modulus $-3+2i$, $D=13$.

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	$+1$	1	$+1-i$	2	$-2i$	3	$+i$

Indices der Elementargrössen.

$+i$	3	$+1-i$	1	$+1-2i$	11	$-3-2i$	7
$+1+i$	4	$+1+2i$	10	-3	2		

Modulus 3, $D = 9$.

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

$0 \mid +1 \parallel 1 \mid +1-i \parallel 2 \mid +i$

Indices der Elementargrössen.

$+i \mid 2 \parallel 1+i \mid 3 \parallel 1+2i \mid 1 \parallel 1-2i \mid 3$

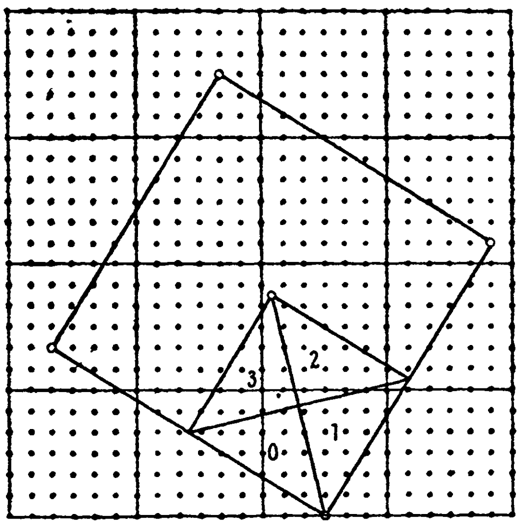
Modulus $1+2i$, $D = 5$.

Primitiv-Wurzel.

$+i$

Indices der Elementargrössen.

$+i \mid 1 \parallel 1+i \mid 3 \parallel 1-i \mid 2 \parallel 1-2i \mid 1$



$13+8i$

481 Div. per $9+20i$

$52+169i$	$208+195i$
$65+91i$	$221+117i$
$78+13i$	$234+39i$
$130+182i$	$74+111i$
$143+104i$	$148+222i$
$156+26i$	$185+37i$

BEMERKUNG.

Zu der Notiz [2] vergleiche man die bezüglichen Bemerkungen im Artikel **21** des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«.

Die Notiz [3] entspricht (nach einer Mitteilung von P. BACHMANN) vollständig den bezüglichen Bestimmungen in der *Commentatio secunda* (Werke II, S. 113 ff.) über biquadratische Reste. Die Tabellen geben für jeden der betrachteten Moduln zuerst die Reste *) der ersten $\frac{1}{4}(D-1)$ *Potenzen einer primitiven Wurzel* bis zum Reste i, woraus die Reste der folgenden Potenzen leicht zu entnehmen sind. Dann folgen die *Indizes* für die Einheit i und die Primfaktoren $1+i$ und $\alpha+\beta i$, für die $\alpha \equiv 1$ (mod. 4) und die Norm $\alpha^2+\beta^2$ kleiner als D ist, ausgenommen die Primzahl $a+bi$ selbst.

Für die Moduln $-3+2i$, 3 und $1+2i$ steht in der Handschrift Elementar-Wurzel statt Primitiv-Wurzel.

Die Figur enthält in dem inneren, schief stehenden (in der Handschrift rot gezeichneten) großen Quadrat ein vollständiges Restsystem modulo $13+8i$, von dem durch das kleinere Quadrat ein Viertel abgetrennt ist.

SCHLESINGER.

*) Es sind aber nicht überall die nach der im Text (S. 39) gegebenen Formel kleinsten Reste.

[VII.]

BEWEIS EINES SATZES AUS DER HÖHERN ARITHMETIK ZUR THEORIE DER BIQUADRATISCHEN RESTE GEHÖRIG.

[Aus Handbuch 21, Bg, S. 5, 6.]

Es sei a eine ganze positive oder negative Zahl von der Form $4m+1$, n eine ganze positive Zahl, die mit a keinen Theiler gemein habe. f bedeute den Complexus der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$, f' die ungeraden darunter, f'' die geraden; ferner bedeute g die Zahlen $\frac{1}{2}f''$, oder alle Zahlen $1, 2, 3, \ldots, \frac{1}{2}n$ oder $1, 2, 3, \ldots, \frac{1}{2}(n-1)$, jenachdem n gerade oder ungerade, h die übrigen $\frac{1}{2}n+1$, $\frac{1}{2}n+2, \ldots, n$ oder $\frac{1}{2}(n+1)$, $\frac{1}{2}(n+3), \ldots, n$. Man hat sodann

$$\tfrac{1}{4}n(a-1) = \Sigma\left[\frac{fa}{4n}+\frac{1}{4}\right]+\Sigma\left[\frac{fa}{4n}+\frac{1}{2}\right]$$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}n(a-1) &= \Sigma\left[\frac{ga}{2n}+\frac{1}{2}\right]+\Sigma\left[\frac{ha}{2n}\right] = \Sigma\left[\frac{ga}{2n}+\frac{1}{2}\right]-\Sigma\left[\frac{ga}{2n}\right]+\Sigma\left[\frac{fa}{2n}\right]\\
&= \Sigma\left[\frac{ga}{2n}+\frac{1}{2}\right]-\Sigma\left[\frac{ga}{2n}\right]+\Sigma\left[\frac{fa}{4n}\right]+\Sigma\left[\frac{fa}{4n}+\frac{1}{2}\right]\\
&= \Sigma\left[\frac{ga}{2n}+\frac{1}{2}\right]+\Sigma\left[\frac{f'a}{4n}\right]+\Sigma\left[\frac{fa}{4n}+\frac{1}{2}\right],\end{aligned}$$

folglich

$$\Sigma\left[\frac{fa}{4n}+\frac{1}{4}\right] = \Sigma\left[\frac{ga}{2n}+\frac{1}{2}\right]+\Sigma\left[\frac{f'a}{4n}\right]$$

und

$$\Sigma\left[\frac{fa}{4n}+\frac{1}{2}\right]-\Sigma\left[\frac{fa}{4n}+\frac{1}{4}\right] = \Sigma\left[\frac{f'a}{4n}+\frac{1}{2}\right]-\Sigma\left[\frac{f'a}{4n}\right].$$

Nun aber ist

$$\left[\frac{ha}{4n}+\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{ha}{4n}+\frac{1}{4}\right] = \left[\frac{(n-h)a}{4n}+\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{(n-h)a}{4n}+\frac{1}{4}\right],$$

also

$$\Sigma\left[\frac{fa}{4n}+\frac{1}{2}\right]-\Sigma\left[\frac{fa}{4n}+\frac{1}{4}\right] = 2\Sigma\left[\frac{ga}{4n}+\frac{1}{2}\right]-2\Sigma\left[\frac{ga}{4n}+\frac{1}{4}\right],$$

wenn n ungerade,

$$= 2\Sigma\left[\frac{ga}{4n}+\frac{1}{2}\right]-2\Sigma\left[\frac{ga}{4n}+\frac{1}{4}\right]-\left[\frac{a}{8}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{a}{8}+\frac{1}{4}\right],$$

wenn n gerade.

Das Theorem kann also auch so ausgedrückt werden:

»Die Summe aller

$$\left[\frac{f'a}{4n}+\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{f'a}{4n}\right],$$

wo f' alle ungeraden Zahlen bis n inclusive bedeutet, ist gleich der doppelten Summe aller

$$\left[\frac{ga}{4n}+\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{ga}{4n}+\frac{1}{4}\right],$$

wenn g alle Zahlen bis $\frac{1}{2}n$ bedeutet, nur dass für $g = \frac{1}{2}n$ nur der halbe Werth gezählt werden muss«.

BEMERKUNG.

Gauss hat die Gelegenheiten, wo der hier mitgeteilte Satz in der Theorie der biquadratischen Reste verwendbar ist, nicht näher angedeutet; vermutlich hat er ihm bei Umformungen gedient ähnlich denjenigen, wie sie in der *Commentatio secunda*, art. 73—75, Werke II, S. 143 ff. und verwandten Aufzeichnungen auftreten.

Bachmann.

[VIII.]

[ZUM REZIPROZITÄTSGESETZ DER QUADRATISCHEN UND DER BIQUADRATISCHEN RESTE.]

[Auf einem Deckelblatt in Ec2, Kapsel 43.]

[1.]

Das Fundamentaltheorem für die quadratischen Reste.

Es sei

$$\left(\frac{b}{a}\right) = 1 \qquad \text{wenn } b\,\mathrm{R}\,a$$

$$\left(\frac{b}{a}\right) = -1 \quad \text{wenn } b\,\mathrm{N}\,a.$$

Dann ist (a, b ungerade positiv)

$$2\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b}\right) = 1 + \left(\frac{-1}{a}\right) + \left(\frac{-1}{b}\right) - \left(\frac{-1}{a}\right)\left(\frac{-1}{b}\right).$$

[2.]

Die verschiedenen Zahlen, die für den Modulus $a+ib$ allen Zahlen congruent sind, lassen sich am besten in *zwei* Complexen vorstellen; nemlich

1) $\alpha+i\alpha'$, wo α, α' alle geraden Zahlen zwischen $-a$ und $+a$,

2) $\beta+i\beta'$, wo β, β' alle ungeraden Zahlen zwischen $-b$ und $+b$

vorstellen.

[3.]

Sind $a+bi$, $a'+b'i$ Primzahlen; a, a' ungerade, b, b' gerade und

$$(a'+b'i)^{\frac{1}{4}(aa+bb-1)} \equiv i^{\mu} \;(\text{mod. } a+bi)$$
$$(a+bi)^{\frac{1}{4}(a'a'+b'b'-1)} \equiv i^{\mu'} \;(\text{mod. } a'+b'i),$$

so ist

$$\mu-\mu'-\tfrac{1}{2}\{(a'-1)b+(a-1)b'+bb'\}$$

durch 4 theilbar.

Elegant in reellen Zahlen so:

$$p = aa+bb \qquad a\equiv \alpha \equiv 1 \;(\text{mod. } 4)$$
$$\pi = \alpha\alpha+\beta\beta$$

$$\text{Character } \frac{a\alpha+b\beta}{p} = \text{Character } \frac{a\alpha+b\beta}{\pi} + \tfrac{1}{4}(a\alpha+b\beta-1)$$
$$\text{Character } \frac{a\alpha-b\beta}{p} + \text{Character } \frac{a\alpha-b\beta}{\pi} = \tfrac{1}{4}(a\alpha-b\beta-1).$$

Noch schöner lässt sich das F[undamental] T[heorem] so generalisiren. Es seien m, m' ungerade komplexe Zahlen,

p, p' ihre Normen,

$$m \equiv i^{\lambda} \;(\text{mod. } 2+2i)$$
$$m' \equiv i^{\lambda'} \;(\text{mod. } 2+2i);$$

Dann ist

$$\text{Ch}\frac{m}{m'} - \text{Ch}\frac{m'}{m} = \tfrac{1}{4}(p'-1)\lambda - \tfrac{1}{4}(p-1)\lambda' + \tfrac{1}{8}(p-1)(p'-1).$$

BEMERKUNG.

Unter Ch $\frac{m}{m'}$, Ch $\frac{m'}{m}$ ist hier der Exponent ρ bezw. ρ' in den Kongruenzen

$$m^{\frac{p-1}{4}} \equiv i^{\rho} \;(\text{mod. } m'),\quad m'^{\frac{p'-1}{4}} \equiv i^{\rho'} \;(\text{mod. } m)$$

zu verstehen.

BACHMANN.

[4.]

[Aus Handbuch 21, Bg, S. 24.]

Das Fundamentaltheorem für die biquadratischen Reste ist

$$\text{Dec.}\ \frac{A+Bi}{a+bi} - \text{Dec.}\ \frac{a+bi}{A+Bi} = \tfrac{1}{2}(A-1)b + \tfrac{1}{2}(a-1)B + \tfrac{1}{2}Bb.$$

BEMERKUNG.

Eine Datierung der Aufzeichnungen [1.]—[3.] ist nicht gelungen. Für [4.] ergibt sich als untere Zeitgrenze das Ende des Jahres 1813.

BACHMANN.

[IX.]

HAUPTMOMENTE DES BEWEISES FÜR DIE BIQUADRATISCHEN RESTE.

[Ein Zettel in Ec 3, Kapsel 43.]

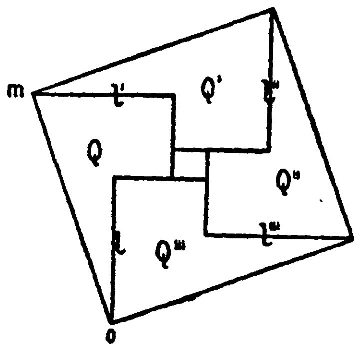
Rest $a+bi=m$, Modulus $A+Bi=M$, beide $\equiv 1$ (mod. $2+2i$).

1. Man bildet den ersten Quadranten von M und macht durch Division mit m dessen Variegation.

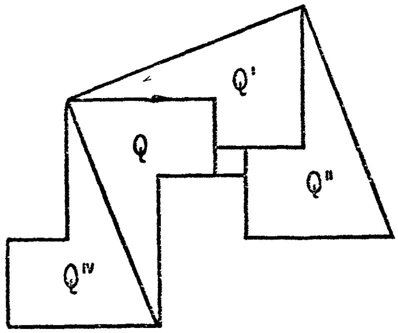
2. Man verbinde den Punkt 0 auf irgend eine Weise, doch ohne aus den Ligamenten der Variegation herauszugehn, mit $\frac{m-1}{1+i}$ durch die Linie l und zieht gleichfalls die Linien (l', l'', l''')

$$il+m,\quad -l+(1+i)m,\quad -il+im.$$

Dadurch wird das ganze Quadrat, das mittelste Quadrat abgerechnet, welches ohnehin den Intensor 0 hat, in 4 Theile symmetrisch getheilt; zwischen l und l' liegt Q, zwischen l' und l'' liegt Q' u. s. w.



3. Es sei $-iQ''' = Q^{\mathrm{IV}}$. Wir setzen an die Stelle von Q''' dessen Variegation Q^{IV}; allein, da dessen Quadrate durchgehends Intensoren haben, die um 1 kleiner sind als die Intensoren von Q''', so wird noch der ganze Inhalt von Q^{IV} hinzuzusetzen seyn. Der Apparat sieht also so aus:



4. Ebenso sei

$$Q'' - im = Q^{\mathrm{V}},\ im - iQ' = Q^{\mathrm{VI}};$$

die Intensoren von Q^{VI} sind die von Q negativ, genau so wie die von Q^{V} ....

BEMERKUNG.

Vgl. zu diesem Bruchstücke die »*Vorbereitungen zur allgemeinen Theorie der biquadratischen Reste*« Werke II, S. 326—331. Unter »Variegation des ersten Quadranten von M durch Division mit m« dürfte das Quadrat mit den Ecken 0, $\frac{M}{m}$, $(1+i)\frac{M}{m}$, $i\frac{M}{m}$ zu verstehen sein. Der Begriff des Intensors wird a. a. O. in art. 4, Werke II, S. 328 festgesetzt. Statt »Ligamenten« braucht GAUSS daselbst den Ausdruck »Ligaturen«; man geht wohl nicht fehl, wenn man dem Bruchstücke ein früheres Datum beilegt als den »Vorbereitungen«. Dasselbe dürfte gelten für Notizen des Nachlasses im Handbuch 18, Bd (begonnen Oktober 1805) S. 248—256 und andere in der Scheda An, S. 74—88 befindliche Studien, von denen SCHERING in seiner Fußnote Werke II, S. 334 Gebrauch gemacht zu haben scheint, die sich aber ihrer allzu skizzenhaften Form wegen zur Veröffentlichung nicht eignen.

BACHMANN.

[X.]

ZUR THEORIE DES BIQUADRATISCHEN RESTES $1+i$.

[Zwei Zettel in Ec 3, Kapsel 43.]

[1.]

Modulus $a+bi=p$, b gerade und positiv, $aa+bb=D$.

1. Es sei Ω der Inbegriff der Zahlen $x+iy$, wo

$$\frac{x+iy}{a+bi}=\xi+i\eta,$$

und ξ, η zwischen 0 und $\frac{1}{2}$.

2. Man theile Ω in zwei Classen M und N, wo für M $\xi-\eta$ positiv, für N negativ ist, und nenne die Anzahl der in M und N enthaltenen Zahlen m, n. Man hat dann

$$m+n=\tfrac{1}{4}(D-1).$$

3. Der Decident von

$$\begin{array}{ll} 1+i \text{ ist dann} & \equiv 3m+2n \\ 1-i & \equiv 2m+n \\ -1+i & \equiv 3n \\ -1-i & \equiv m \end{array}$$

4. Durch Induction haben wir gefunden, dass wenn unter den Zahlen

$$\left[\frac{a}{b}\right],\ \left[\frac{3a}{b}\right],\ \left[\frac{5a}{b}\right],\ \left[\frac{7a}{b}\right],\ \ldots,\ \left[\frac{(b-1)a}{b}\right]$$

zusammen μ gerade und ν ungerade sind, man

$$m-\mu = n-\nu$$

haben werde, wodurch m und n bestimmt sind.

5. Beispiel $p = 9+14i$

$$\left[\frac{9}{14}\right], \left[\frac{27}{14}\right], \left[\frac{45}{14}\right], \left[\frac{63}{14}\right], \left[\frac{81}{14}\right], \left[\frac{99}{14}\right], \left[\frac{117}{14}\right] = 0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8;$$

$$\mu = 3,\ \nu = 4$$

[Beispiel] $p = 5+12i$

$$\left[\frac{5}{12}\right], \left[\frac{15}{12}\right], \left[\frac{25}{12}\right], \left[\frac{35}{12}\right], \left[\frac{45}{12}\right], \left[\frac{55}{12}\right] = 0,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 4;$$

$$\mu = 4,\ \nu = 2.$$

6. Man hat $\mu+\nu = \frac{1}{2}b$,

$$\nu = \left[\frac{a}{b}\right]+\left[\frac{3a}{b}\right]+\left[\frac{5a}{b}\right]+\cdots-2\left[\frac{a}{2b}\right]-2\left[\frac{3a}{2b}\right]-2\left[\frac{5a}{2b}\right]\cdots$$

Der erste Theil wird $= \frac{1}{4}(a-1)b$, insofern a positiv,

$$\nu = \tfrac{1}{4}(a-1)b+2\left[\frac{a}{b}\right]+2\left[\frac{2a}{b}\right]+2\left[\frac{3a}{b}\right]+\cdots+2\left[\frac{\frac{1}{2}b.a}{b}\right]$$
$$-2\left[\frac{a}{2b}\right]-2\left[\frac{2a}{2b}\right]-2\left[\frac{3a}{2b}\right]-\cdots-2\left[\frac{ba}{2b}\right]$$
$$= \tfrac{1}{4}(a-1)b+2\varphi(b,a)-2\varphi(2b,a)$$
$$= -\tfrac{1}{4}(a-1)b-2\varphi(a,b)+2\varphi(a,2b).$$

Nun ist

$$2\varphi(a,2b)-2\varphi(a,b) = \tfrac{1}{2}(a-1)(b-1)-4\left\{\left[\frac{b}{a}\right]+\left[\frac{3b}{a}\right]+\left[\frac{5b}{a}\right]+\cdots+\left[\frac{\frac{1}{2}(a-3)b}{a}\right]\right\}$$

wenn $a\equiv 1 \pmod{4}$,

$$= \tfrac{1}{2}(a+1)(b-1)-4\left\{\left[\frac{b}{a}\right]+\left[\frac{3b}{a}\right]+\left[\frac{5b}{a}\right]+\cdots+\left[\frac{\frac{1}{2}(a-1)b}{a}\right]\right\}$$

wenn $a\equiv 3 \pmod{4}$,

also

$\equiv 0$ mod. 4, wenn a von der Form $8n+1$, $8n+7$

$\equiv 2$ mod. 4, wenn a von der Form $8n+3$, $8n+5$.

[7.] Ferner wird

$$m = \tfrac{1}{8}(D-1) + \tfrac{1}{4}b - \nu$$
$$n = \tfrac{1}{8}(D-1) - \tfrac{1}{4}b + \nu.$$

Also der Decident von $1+i$

$$= \tfrac{3}{8}(D-1) + \tfrac{1}{4}b - \nu$$
$$= \tfrac{3}{8}(D-1) + \tfrac{1}{4}ab + h,$$

wo

$$h = 0 \text{ für } a \text{ [von der] Form } 8n+1,\ 8n+7,$$
$$2 \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad 8n+3,\ 8n+5;$$

man kann dafür auch $\frac{aa-1}{4}$ setzen.

$$\tfrac{1}{8}\{5aa + 5bb - 5 + 2ab + 2aa - 2\} = \tfrac{1}{8}(7aa + 2ab + 5bb - 7)$$
$$\equiv \tfrac{1}{8}(-aa + 2ab - 3bb + 1),$$

da die Differenz

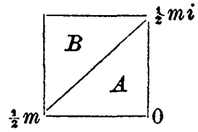
$$= aa + bb - 1.$$

So ist das Theorem, die obige Induction als richtig angenommen, bewiesen.

Grösseres Tableau der m, n,

$1+2i$	1. 0	$3+2i$	1. 2	$5+2i$	4. 3	$7+2i$	6. 7	$9+2i$	11.10	$11+2i$	15.16
$1+4i$	3. 1	$3+4i$	4. 2	$5+4i$	4. 6	$7+4i$	7. 9	$9+4i$	13.11	$11+4i$	18.16
$1+6i$	6. 3	$3+6i$	6. 5	$5+6i$	9. 6	$7+6i$	9.12	$9+6i$	14.15	$11+6i$	18.21
$1+8i$	10. 6	$3+8i$	9. 9	$5+8i$	11.11	$7+8i$	16.12	$9+8i$	16.20	$11+8i$	23.23
$1+10i$	13.10	$3+10i$	15.12	$5+10i$	16.15	$7+10i$	20.17	$9+10i$	25.20	$11+10i$	25.30
$1+12i$	21.15	$3+12i$	19.17	$5+12i$	22.20	$7+12i$	25.23	$9+12i$	29.27	$11+12i$	36.30
$1+14i$	28.21	$3+14i$	26.25	$5+14i$	27.28	$7+14i$	31.30	$9+14i$	34.35	$11+14i$	40.39
$1+16i$	36.28	$3+16i$	35.31	$5+16i$	37.33	$7+16i$	38.38	$9+16i$	42.42	$11+16i$	49.45
$1+18i$	45.36	$3+18i$	43.40	$5+18i$	44.43	$7+18i$	46.47	$9+18i$	51.50	$11+18i$	55.56
$1+20i$	55.45	$3+20i$	52.50	$5+20i$	54.52	$7+20i$	55.57	$9+20i$	61.59	$11+20i$	66.64
$1+22i$	66.55	$3+22i$	64.59	$5+22i$	65.62	$7+22i$	69.64	$9+22i$	72.69	$11+22i$	76.75

Eine besondere Untersuchung verdient die Anzahl der geraden und ungeraden [Zahlen] im ersten Quadranten. Sie ist respective der Zahl aller in *A* und *B* gleich.



Das Zeichen von i ändert nichts.

$1+2i$	0.1	$5+6i$	6. 9	$1+10i$	12.13	$11+6i$	20.19	$3+14i$	26.25
$3+2i$	2.1	$1+8i$	8. 8	$3+10i$	14.13	$5+12i$	20.22	$13+6i$	25.25
$1+4i$	2.2	$7+4i$	8. 8	$7+8i$	12.16	$13+2i$	22.21		
$3+4i$	2.4	$3+8i$	8.10	$11+2i$	16.15	$9+10i$	20.25		
$5+2i$	4.3	$9+2i$	10.11	$11+4i$	18.16	$11+8i$	24.22		
$1+6i$	4.5	$7+6i$	12. 9	$1+12i$	18.18	$13+4i$	22.24		
$5+4i$	6.4	$5+8i$	10.12	$9+8i$	20.16	$7+12i$	24.24		
$7+2i$	6.7	$9+4i$	12.12	$7+10i$	18.19	$1+14i$	24.25		

Dass die Zahlen der ersten Colonne immer gerade sind, beweiset man daher, dass, wenn die Summe aller Zahlen im ersten Quadr. $=t+iu$ ist, und

$$(a-bi)(t+iu) = T+iU$$

gesetzt wird, man

$$T+U = \tfrac{1}{8}(pp-1)$$

hat etc.

[2.]

Das obige nur auf Induction gegründete Lemma wird durch folgendes ersetzt.

Man hat für $a, b-a$ positiv

$$M = -P+Q-R$$

wo

$$P = \left[\frac{b}{a}\right]+\left[\frac{2b}{a}\right]+\left[\frac{3b}{a}\right]+\cdots+\left[\frac{\frac{1}{2}(a-1)b}{a}\right] = \varphi(a,b) = \tfrac{1}{4}(a-1)b-\varphi(b,a)$$

$$Q = \left[\tfrac{1}{2}b+\frac{a}{2b}\right]+\left[\tfrac{1}{2}b+\frac{3a}{2b}\right]+\left[\tfrac{1}{2}b+\frac{5a}{2b}\right]+\cdots+\left[\tfrac{1}{2}b+\frac{(b-1)a}{2b}\right]$$

$$= \tfrac{1}{4}bb+\varphi(2b,a)-\varphi(b,a)$$

$$R = \left[\frac{b+a}{b-a}\right]+\left[\frac{2(b+a)}{b-a}\right]+\left[\frac{3(b+a)}{b-a}\right]+\cdots+\left[\frac{\frac{1}{2}(b-a-1)(b+a)}{b-a}\right]$$

$$= \varphi(b-a,\ b+a).$$

Also

$$M = \tfrac{1}{4}bb - \tfrac{1}{4}(a-1)b + \varphi(2b, a) - \varphi(b-a,\ b+a).$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\varphi(b-a,\ b+a) &= \varphi(b-a,\ 2b) - \tfrac{1}{8}(b-a)^2 + \tfrac{1}{8}\\ &= \tfrac{1}{2}(b-a-1)b - \tfrac{1}{8}(b-a)^2 + \tfrac{1}{8} - \varphi(2b,\ b-a)\\ &= \tfrac{3}{8}bb - \tfrac{1}{4}ab - \tfrac{1}{8}aa - \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{8} - \varphi(2b,\ b-a).\end{aligned}$$

Also

$$M = \tfrac{1}{8}aa - \tfrac{1}{8}bb + \tfrac{3}{4}b - \tfrac{1}{8} + \varphi(2b,\ a) + \varphi(2b,\ b-a).$$

Da nun a ungerade und b gerade ist, so wird

$$\begin{aligned}\varphi(2b,\ b-a) = &\left[\frac{b-a}{2b}\right] + \left[\frac{3(b-a)}{2b}\right] + \left[\frac{5(b-a)}{2b}\right] + \left[\frac{7(b-a)}{2b}\right] + \cdots + \left[\frac{(b-1)(b-a)}{2b}\right]\\ &+ \left[\frac{b-a}{b}\right] + \left[\frac{2(b-a)}{b}\right] + \left[\frac{3(b-a)}{b}\right] + \cdots + \left[\frac{\frac{1}{2}b(b-a)}{b}\right],\end{aligned}$$

oder wenn die ersten Theile rückwerts genommen werden,

$$\begin{aligned}= &\left[\frac{a}{2b}\right] + \left[\frac{3a}{2b}\right] + \left[\frac{5a}{2b}\right] + \cdots + \left[\frac{(b-1)a}{2b}\right] + \frac{b-a-1}{2} + \frac{b-a-3}{2}\\ &+ \frac{b-a-5}{2} + \cdots - \frac{a-1}{2}\\ &- \left[\frac{a}{b}\right] - \left[\frac{2a}{b}\right] - \left[\frac{3a}{b}\right] - \cdots - \left[\frac{\frac{1}{2}ba}{b}\right] + 1 + 2 + 3 + \cdots + \tfrac{1}{2}b - 1.\end{aligned}$$

Also

$$\varphi(2b, a) + \varphi(2b,\ b-a) = 2\left\{\left[\frac{a}{2b}\right] + \left[\frac{3a}{2b}\right] + \left[\frac{5a}{2b}\right] + \cdots + \left[\frac{(b-1)a}{2b}\right]\right\} + \frac{b(b-a-1)}{4}$$

und

$$M = 2\left\{\left[\frac{a}{2b}\right] + \left[\frac{3a}{2b}\right] + \left[\frac{5a}{2b}\right] + \cdots + \left[\frac{(b-1)a}{2b}\right]\right\} + \tfrac{1}{8}(D-1) + \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{4}ab,$$

$$\begin{aligned}(\#)\quad M &= 2\varphi(2b, a) - 2\varphi(b,\ a) + \tfrac{1}{8}(D-1) + \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{4}ab\\ &= -2\varphi(a, 2b) + 2\varphi(a,\ b) + \tfrac{1}{8}(D-1) + \tfrac{1}{4}ab\end{aligned}$$

je nachdem

$$(*)\ \left\{\begin{aligned}M &= -\tfrac{1}{2}(a-1)(b-1) + 4\left\{\left[\frac{b}{a}\right] + \left[\frac{3b}{a}\right] + \left[\frac{5b}{a}\right] + \cdots + \left[\frac{\frac{1}{2}(a-3)b}{a}\right]\right\} \quad a \equiv 1\\ M &= -\tfrac{1}{2}(a+1)\underbrace{(b-1) + 4\left\{\left[\frac{b}{a}\right]\right.}_{+\frac{1}{8}(D-1)+\frac{1}{4}ab} + \left[\frac{3b}{a}\right] + \left[\frac{5b}{a}\right] + \cdots + \left.\left[\frac{\frac{1}{2}(a-1)b}{a}\right]\right\} \quad a \equiv 3\end{aligned}\right.\ (\text{mod. } 4)$$

Man hat auch

$$\varphi(a,b)+\varphi(a,2b)=\tfrac{1}{4}(a\mp 1)(b-1)+2\left\{\left[\frac{2b}{a}\right]+\left[\frac{4b}{a}\right]+\left[\frac{6b}{a}\right]+\cdots+\left[\frac{[\frac{1}{4}a].2b}{a}\right]\right\}.$$

Es sei

$$\varepsilon=\pm 1 \text{ für } a\equiv \pm 1 \pmod{4},$$

so ist

$$\begin{gathered}(a-\varepsilon)b \text{ durch } 8\\ (a-\varepsilon)(a+2+\varepsilon) \text{ durch } 16\\ (a-\varepsilon)(a+3\varepsilon)[b] \text{ durch } 32\end{gathered}$$

theilbar.

$$\begin{aligned}M&\equiv\tfrac{1}{2}(a-\varepsilon)+\tfrac{1}{8}(D-1)+\tfrac{1}{4}ab\\ &\equiv\tfrac{1}{2}(a-\varepsilon)+\tfrac{1}{8}((a+b)^2-1).\end{aligned}$$

[3.]

Obige Formel (✻) kann auch so dargestellt werden:

$$M=\tfrac{1}{8}(D-1)+\tfrac{1}{4}ab+\tfrac{1}{2}(a\mp 1)-4\left\{\left[\frac{b+a}{2b}\right]+\left[\frac{b+2a}{2b}\right]+\left[\frac{b+3a}{2b}\right]+\cdots+\left[\frac{b+\frac{1}{2}ba}{2b}\right]\right\}.$$

Nemlich sogleich aus (#)

$$\begin{aligned}M=\tfrac{1}{8}(D-1)-\tfrac{1}{4}ab+\tfrac{1}{2}b&+2\left[\frac{a}{2b}\right]+2\left[\frac{2a}{2b}\right]+2\left[\frac{3a}{2b}\right]\quad+\cdots+2\left[\frac{\frac{1}{2}ba}{2b}\right]\\ &+2\left[\frac{(\frac{1}{2}b+1)a}{2b}\right]+\cdots+2\left[\frac{ba}{2b}\right]\\ &-2\left[\frac{a}{b}\right]-2\left[\frac{2a}{b}\right]-2\left[\frac{3a}{b}\right]\quad-\cdots-2\left[\frac{\frac{1}{2}ba}{b}\right]\\ =\tfrac{1}{8}(D-1)-\tfrac{1}{4}ab+\tfrac{1}{2}b&-2\left[\frac{a+b}{2b}\right]-2\left[\frac{2a+b}{2b}\right]-2\left[\frac{3a+b}{2b}\right]-\cdots-2\left[\frac{\frac{1}{2}(b-1)a+b}{2b}\right]\\ &-2\left[\frac{\frac{1}{2}ba+b}{2b}\right]+2\left[\frac{(b-1)a}{2b}\right]+2\left[\frac{(b-2)a}{2b}\right]+\cdots+2\left[\frac{(\frac{1}{2}b+1)a}{2b}\right]+2\left[\frac{ba}{2b}\right]\\ =\tfrac{1}{8}(D-1)+\tfrac{1}{4}ab&+2\left[\frac{a+2}{4}\right]-4\left\{\left[\frac{b+a}{2b}\right]+\cdots+\left[\frac{b+\frac{1}{2}ba}{2b}\right]\right\}.\end{aligned}$$

Die Form der Verwandlung wird wol schon von dem Zeichen ✂ an mit Vortheil abgekürzt werden können. Vielleicht noch früher.

BEMERKUNG.

Zu [1.] art. 1, 2, 3 vgl. *Commentatio secunda* art. 72 (Werke II, S. 143), wo die Zeichen m, n durch g, g' und $D = a^2 + b^2$ durch p ersetzt sind. Der zu beweisende Satz steht am Ende des art. 76.

In [2.] bedeutet M dasselbe, wie m in [1.]. Die Ausgangsformel $M = -P + Q - R$ ist nichts anderes als der Ausdruck für g als Summe größter Ganzen, von der in art. 74 ausgegangen und woraus die Formel für M vor dem Zeichen ✂ in völlig gleicher Weise hergeleitet wird. Die Formel für M beim Zeichen # ist die Schlußformel für das g des art. 74. Die weiteren Umformungen, welche für M denselben Ausdruck liefern, der für g in art. 75 (S. 148, Z. 2) gegeben wird, weichen von denjenigen der *Commentatio secunda* ab, wo »die Form der Verwandlung schon von dem Zeichen ✂ an mit Vortheil abgekürzt« wird. Da der Satz in [1.] aus einem auf Induktion gegründeten Lemma gewonnen und dieses in [2.] durch ein anderes »ersetzt« wird, ist zu vermuten, daß der Ausdruck, den Gauss für g in art. 74 der *Commentatio secunda* hergeleitet hat, ihm zur Zeit der Niederschrift dieser Betrachtungen ebenfalls nur induktorisch gewiß war; die Übereinstimmung der weiteren Entwicklungen mit denen der *Commentatio secunda* aber läßt vermuten, daß sie nicht viel früheren Datums sind, als der in der letztern gegebene Beweis des Ergänzungssatzes für $1 + i$.

Bachmann.

[XI.]

[BEWEIS DES REZIPROZITÄTSSATZES FÜR DIE BIQUADRATISCHEN RESTE, DER AUF DIE KREISTEILUNG GEGRÜNDET IST.]

[Zettel in Ec 3, Kapsel 43.]

[1.]

Im Gebiete der complexen ganzen Zahlen, m complexe ungerade Primzahl, m' Adjuncte, $\left[\frac{k}{m}\right]$ diejenige der vier Einheiten 1, i, -1, $-i$, welcher

$$k^{\frac{1}{4}(mm'-1)}$$

nach dem Modulus m congruent ist.

$$\left(\frac{k}{M}\right) = \text{Product aller } \left[\frac{k}{m}\right],$$

indem man für m sämmtliche einzelne Primfactoren [von M] substituirt.

[2.]

p reelle positive Primzahl $\equiv 1 \pmod{4} = mm'$

q reelle positive Primzahl $\equiv 1$, von p verschieden und $= nn'$

Die reellen Theile von $m, n \equiv 1 \pmod{4}$

x eine unbestimmt bleibende Grösse

$\mathrm{X} = \frac{x^p-1}{x-1}$

e Primitivwurzel für den Modulus m, und zwar eine solche dass

$$e^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv i \pmod{m}$$

oder

$$\left(\frac{e}{m}\right) = i.$$

$$x + ix^e - x^{ee} - ix^{e^3} + x^{e^4} + \text{u.s.w.} - ix^{e^{p-2}} \qquad = T$$

$$x^q + ix^{qe} - x^{qee} - ix^{qe^3} + x^{qe^4} + \text{u.s.w.} - ix^{qe^{p-2}} = U.$$

Dies vorausgesetzt hat man

$$TT \equiv -m(x - x^e + x^{ee} - x^{e^3} + \text{u.s.w.} - x^{e^{p-2}}) \text{ (mod. } X)$$
$$\equiv -mV \text{ (mod. } X).$$

Folgt unmittelbar aus Anwendung der Principien (*Disqu. Ar.* art. 345) unter Benützung der in der *Theoria Res. Biquadr.* artt. 18—20 gegebenen Sätze [*)].

Und da bekanntlich

$$VV \equiv p \text{ (mod. } X),$$

so wird

$$T^4 \equiv mmp \equiv m^3 m' \text{ (mod. } X).$$

Ferner ist (*Disqu. Arithm.* art. 53 [**)])

$$T^q \equiv U \text{ (mod. } q).$$

Auch ist leicht zu übersehen, dass

$$\left(\frac{q}{m}\right) U \equiv T \text{ (mod. } X).$$

Aus der Verbindung dieser drei Sätze folgt leicht auf ähnliche Art wie *Theorematis fundamentalis demonstrationes et ampliat. novae*, art. 6 [***)]

$$\left(\frac{q}{m}\right)(m^3 m')^{\frac{1}{4}(q-1)} \equiv 1 \text{ (mod. } q),$$

folglich auch nach mod. n und mod. n'.

[*) Werke I, S. 422; II, S. 82 ff.]

[**) Werke I, S. 43.]

[***) Werke II, S. 58.]

Diese beiden Congruenzen aequivaliren den Gleichungen

$$\left(\frac{q}{m}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^3\left(\frac{m'}{n}\right) = 1$$

$$\left(\frac{q}{m}\right)\left(\frac{m}{n'}\right)^3\left(\frac{m'}{n'}\right) = 1$$

oder was dasselbe ist

$$\left(\frac{q}{m}\right)\left(\frac{m'}{n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)$$

$$\left(\frac{q}{m}\right)\left(\frac{m'}{n'}\right) = \left(\frac{m}{n'}\right).$$

Da nun allgemein

$$\left(\frac{m'}{n}\right)\left(\frac{m}{n'}\right) = 1, \quad \left(\frac{m'}{n'}\right)\left(\frac{m}{n}\right) = 1,$$

so wird, wenn man obige Gleichungen resp. mit $\left(\frac{m}{n'}\right)$, $\left(\frac{m}{n}\right)$ multiplicirt

$$\left(\frac{q}{m}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n'}\right) = \left(\frac{m}{q}\right).$$

[3.]

Der zweite Fall ist, wo $q \equiv 3 \pmod{4}$.

$$T = x + ix^e - x^{ee} - ix^{e^3} + \cdots$$

$$T_1 = x - ix^e - x^{ee} + ix^{e^3} + \cdots$$

$$U = x^q + ix^{qe} - x^{qee} - ix^{qe^3} + \cdots$$

$$U_1 = x^q - ix^{qe} - x^{qee} + ix^{qe^3} + \cdots$$

$$\left(\frac{q}{m}\right) U \equiv T \quad (\text{mod. } \mathbf{X})$$

$$U_1 \equiv T_1\left(\frac{q}{m}\right) \quad (\text{mod. } \mathbf{X})$$

$$T^q \equiv U_1 \quad (\text{mod. } q)$$

$$TT_1 \equiv (-1)^{\frac{1}{4}(p-1)} p \quad (\text{mod. } \mathbf{X})$$

$$T^{q+1} \equiv \left(\frac{q}{m}\right) . (-1)^{\frac{1}{4}(p-1)} . p \quad (\text{mod. } \mathbf{X};\ q)$$

$$T^{q+1} \equiv \left(\frac{-q}{m}\right) p$$

$$T^4 \equiv mmp$$

$$T^{q+1} \equiv m^{\frac{1}{2}(q+1)} p^{\frac{1}{4}(q+1)} \equiv \left(\frac{-q}{m}\right) p.$$

Also

$$m^{\frac{1}{2}(q+1)} p^{\frac{1}{4}(q-3)} \equiv \left(\frac{-q}{m}\right)$$

Erhoben zur Potenz $\frac{1}{2}(q-1)$

$$m^{\frac{1}{4}(qq-1)} p^{\frac{1}{8}(q-3)(q-1)} \equiv \left(\frac{-q}{m}\right)^{\frac{1}{2}(q-1)}$$

$q \equiv 3 \pmod{8}$

$$\left(\frac{m}{q}\right) \equiv \left(\frac{-q}{m}\right)$$

Also

$q \equiv 7 \pmod{8}$

$*$ unten

?

In diesem Falle wird obige Gleichung

$$\left(\frac{m}{q}\right) \cdot p^{\frac{1}{2}(q-1)} \equiv \left(\frac{-q}{m}\right)^3 \pmod{q}.$$

Zugleich aber ist allgemein (für $q \equiv 3 \pmod{4}$)

$$\left(\frac{m}{q}\right)^2 \equiv p^{\frac{1}{2}(q-1)} \pmod{q},$$

woraus

$$\left(\frac{m}{q}\right)^3 \equiv \left(\frac{-q}{m}\right)^3$$

also

$$\left(\frac{m}{q}\right) = \left(\frac{-q}{m}\right).$$

(Man wird $-q = k$ setzen, also

$$\left(\frac{m}{k}\right) = \left(\frac{k}{m}\right)$$

allgemein, wenn k Primzahl $\equiv 1 \pmod{4}$, positiv oder negativ.)

[4.]

Zur Anwendung auf zweigliedrige complexe Zahlen sind zuvörderst zwei Sätze zu bemerken.

1) $\left(\frac{k}{l}\right) = 1$, wenn k, l zwei reelle Zahlen ohne gemeinsamen Divisor und l ungerade.

2) $\left(\frac{i}{l}\right) = i^{\frac{1}{4}(l-1)}$, wenn $l \equiv 1 \pmod{4}$, also

$= (-1)^{\frac{1}{4}(l-1)}$.

Es seien

$$a + bi = m, \quad A + Bi = M$$

ohne gemeinsamen Theiler; a, A beide $\equiv 1$.

$$\left(\frac{a+bi}{A+Bi}\right)\left(\frac{A}{A+Bi}\right) = \left(\frac{aA+bAi+(A+Bi)(a-bi)}{A+Bi}\right) = \left(\frac{aA+bB}{A+Bi}\right) = \left(\frac{A+Bi}{aA+bB}\right)$$

oder da

$$\left(\frac{A}{A+Bi}\right) = \left(\frac{Bi}{A}\right) = \left(\frac{i}{A}\right) = i^{\frac{1}{2}(A-1)},$$

so wird

$$\left(\frac{m}{M}\right) i^{\frac{1}{2}(A-1)} = \left(\frac{M}{aA+bB}\right)$$

und ebenso

$$\left(\frac{M_1}{m_1}\right) i^{\frac{1}{2}(a-1)} = \left(\frac{m_1}{aA+bB}\right),$$

also multiplicirend

$$\left(\frac{m}{M}\right)\left(\frac{M_1}{m_1}\right) i^{\frac{1}{2}(a+A-2} = \left(\frac{Mm_1}{aA+Bb}\right) = \left(\frac{aA+bB+(aB-bA)i}{aA+bB}\right)$$

$$= \left(\frac{i}{aA+Bb}\right) = i^{\frac{1}{2}(aA+bB-1)}.$$

Folglich

$$\left(\frac{m}{M}\right)\left(\frac{M_1}{m_1}\right) = i^{\frac{1}{2}(aA+bB-1-A-a+2)} = i^{\frac{1}{2}((a-1)(A-1)+bB)}$$

$$= i^{\frac{1}{2}bB} = \varepsilon,$$

also ± 1 je nachdem $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}B$ nicht beide ungerade [oder] beide ungerade. Also

$$\left(\frac{m}{M}\right) = \varepsilon\left(\frac{M}{m}\right) \qquad \text{W. Z. B. W.}$$

BEMERKUNG.

Vergl. die auf diesen Beweis bezüglichen Ausführungen in dem Artikel 23 des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«. SCHERING bemerkt (Göttinger Nachrichten 1879, S. 384), daß GAUSS in einem Briefe an EISENSTEIN (wie dieser an RIEMANN und RIEMANN wieder mündlich an SCHERING mitgeteilt habe) die Grundzüge seines Beweises des biquadratischen Reziprozitätssatzes mit Hilfe der Kreisteilung angegeben haben soll; leider sind die Briefe von GAUSS an EISENSTEIN nicht wieder aufgefunden worden.

SCHLESINGER.

[XII.]

[ZUR GESCHICHTE DER THEORIE DER KUBISCHEN UND BIQUADRATISCHEN RESTE.]

Gauss an Sophie Germain.

Votre lettre du 20 Fevrier, mais qui ne m'est parvenue que le 12 Mars, a été pour moi la source d'autant de plaisir que de surprise. Combien l'acquisition d'une amitié aussi flateuse et precieuse est-elle douce à mon coeur. L'interêt vif, que Vous avez pris à mon sort pendant cette guerre funeste merite la plus sincere reconnaissance. Assurément, Votre lettre au Général Pernety m'eût été fort utile, si j'avois été dans le cas d'avoir recours à une protection specielle de la part du gouvernement françois. Heureusement les évenemens et les suites de la guerre ne m'ont pas touché de trop près jusqu'ici, bienque je sois persuadé, qu'elles auront une grande influence sur le plan futur de ma vie. Mais comment Vous décrire mon admiration et mon étonnement, en voïant se metamorphoser mon correspondant estimé Mr. Leblanc en cet illustre personnage, qui donne un exemple aussi brillant de ce que j'aurois peine de croire. Le goût pour les sciences abstraites en general et surtoût pour les mysteres des nombres est fort rare: on ne s'en etonne pas; les charmes enchanteurs de cette sublime science ne se decelent dans toute leur beauté qu'à ceux qui ont le courage de l'approfondir. Mais lorsqu'une personne de ce sexe, qui, par nos moeurs et par nos prejugés, doit rencontrer infiniment plus d'obstacles et de difficultés, que les hommes, à se familiariser avec ces recherches epineuses, sait neansmoins franchir ces entraves et penetrer ce qu'elles ont de plus caché, il faut sans doute, qu'elle ait le plus noble courage, des talens tout à fait extraordinaires, le génie superieur. En effet rien ne pourroit me prouver d'une maniere plus flateuse et moins equivoque, que les attraits de cette science, qui a embelli ma vie de tant de jouissances, ne sont pas chimeriques, que la predilection, dont Vous l'avez honorée.

Les notes savantes, dont toutes Vos lettres sont si richement remplies, m'ont donné mille plaisirs. Je les ai étudiées avec attention, et j'admire la facilité, avec laquelle Vous avez penetré toutes les branches de l'Arithmetique, et la sagacité avec laquelle Vous les avez su generaliser et perfectionner. Je Vous prie d'envisager comme une preuve de cette attention, si j'ose ajouter une remarque à un endroit de Votre derniere lettre. Il me semble, que la proposition inverse, savoir »si la somme des puissances n^emes^ de deux nombres quelconques est de la forme $hh+nff$, la somme de ces nombres eux-mêmes sera de la meme forme« est enoncée un peu trop generalement. Voici un exemple où cette règle est en défaut:

$$15^{11}+8^{11} = 8\,649\,755\,859\,375+8\,589\,934\,592 =$$
$$8\,658\,345\,793\,967 = 1\,595\,826^2+11.745\,391^2$$

Neanmoins $15+8 = 23$ ne peut se reduire sous la forme $xx+11yy$.

Il en est de même de la proposition: si l'un des facteurs de la formule $yy+nzz$ (n étant un nombre premier) est de la forme $(1, 0, n)$, l'autre appartient necessairement à la meme forme. Votre demonstration ne prouve que ce, qu'aucune autre forme indéfinie, que telle qui est equivalente à $(1, 0, n)$, multipliée par la forme $(1, 0, n)$, ne peut donner le produit $(1, 0, n)$, mais cette demonstration ne s'étend pas sur les nombres définis. Soit, pour le déterminant $-n$, C une classe de formes, quelconque mais ni equivalente à la principale, ni à une autre classe anceps, soit D la classe resultante de la duplication de C (qui sera differente de la principale), enfin soit D' la classe opposée à D. Il s'ensuit, que de la composition de $C+C+D'$ résulte la classe principale. Ainsi si les deux nombres f, g peuvent être representés par une forme de la classe C, et le nombre h par une forme de la classe D', le produit $fg\times h$ peut se reduire à $(1, 0, n)$; mais il est facile [de voir] que fg ne se reduit pas seulement à D ou D' mais aussi à $(1, 0, n)$. Nous avons donc ici le cas, qu'un facteur fg, et le produit $fg.h$ sont de la forme $(1, 0, n)$, sans que pourtant l'autre facteur y appartienne nécessairement. Au reste on voit facilement que le premier facteur doit être composé, sans cela la proposition serait juste. Dans l'exemple ci dessus le facteur $\frac{15^{11}+8^{11}}{23}$ enveloppe le diviseur 67.

Depuis cinq ans des travaux astronomiques — auxquels pour le dire en passant je dois surtout l'heureuse situation, dont j'ai joui pendant la vie de notre duc, le victime malheureux de son attachement fidel à la maison de Prusse — m'ont empeché de me delivrer autant qu'auparavant à ma predilection pour l'Arithmetique et les autres branches de l'analyse. Je n'ai pas pourtant negligé celle ci tout à fait. Tout au contraire j'ai rassemblé peu à peu un grand nombre de recherches, qui un jour fourniront un autre volume — sinon deux — certainement pas moins interessant que le premier. Même dans le dernier hiver j'ai reussi à y ajouter une branche entierement nouvelle. C'est la theorie des residus cubiques et des residus biquarrés, portée à un degré de perfection égal à celui, qu'a atteint la theorie des residus quarrés. Je mets cette theorie, qui repand un nouveau jour sur les residus quarrés parmi les recherches les plus curieuses donc je me sois jamais occupé. Je ne saurais Vous en donner une idée sans écrire un Memoire expres. Voici pourtant quelque theoreme special, qui pourra servir d'un petit echantillon.

I. Soit p un nombre premier de la forme $3n+1$. Je dis, que 2 (c. à. d. $+2$ et -2) est residu cubique de p, si p se reduit à la forme $xx+27yy$; que 2 est Non-residu cubique de p, si $4p$ se reduit à cette forme. P. E. 7. 13. 19. 31. 37. 43. 61. 67. 73. 79. 94. Vous ne trouveres que $31 = 4+27$, $43 = 16+27$, et $2 \equiv 4^3$ (mod. 31), $2 \equiv (-9)^3$ (mod. 43).

II. Soit p un nombre premier de la forme $8n+1$. Je dis que $+2$ et -2 seront residus ou non-residus biquarrés de p, suivant ce que p est ou n'est pas de la forme $xx+64yy$. Par ex. parmi les nombres 17. 41. 73. 89. 97. 113. 137 Vous ne trouves que $73 = 9+64$, $89 = 25+64$, $113 = 49+64$, et $25^4 \equiv 2$ (mod. 73), $5^4 \equiv 2$ (mod. 89), $20^4 \equiv 2$ (mod. 113).

Les demonstrations de ces theoremes et de ceux qui sont plus generaux sont intimement liées à des recherches delicates. — Voici une autre proposition relative aux residus quarrés, dont la demonstration est moins cachée: je ne l'ajoute pas, pour ne pas Vous derober le plaisir de la developper Vous-même, si Vous la trouveres digne d'occuper quelques momens de Votre loisir.

Soit p un nombre premier. Soient les $p-1$ nombres inferieurs à p partagés en deux classes

$$A \ldots\ldots\ldots 1, 2, 3, 4, \ldots, \tfrac{1}{2}(p-1)$$
$$B \ldots\ldots\ldots \tfrac{1}{2}(p+1),\ \tfrac{1}{2}(p+3),\ \tfrac{1}{2}(p+5), \ldots, p-1.$$

Soit a un nombre quelconque non-divisible par p. Multipliés tous les nombres A par a; prenés en les moindres residus selon le module p, soient, entre ces residus, α appartenants à A et β appartenants à B de sorte que $\alpha+\beta = \frac{1}{2}(p-1)$. Je dis, que a est residu quarré de p lorsque β est pair, non-residu lorsque β est impair.

On peut tirer de cette proposition plusieurs consequences très remarquables; entre-autres, elle donne le moïen d'etendre l'induction, par laquelle on rassemble des cas speciels du theoreme fondamental aussi loin qu'on veut, ce qui ne pourroit se faire par les methodes exposés art. 116—124[*)].

J'ai donné dans mon ouvrage deux demonstrations rigoureuses de ce fameux theoreme et j'en possede encore trois autres toutes entierement differentes entre elles; deux d'entre elles même peuvent être conduites de deux differentes manieres chacune: ainsi je pourrois soutenir que je peus le demontrer de sept manieres differentes. Les autres demonstrations que je prefererois pour l'elegance aux deux données dans mon ouvrage seront publiées aussitot que j'y trouverai l'occasion. A Propos, dans la premiere demonstration qui se trouve dans la IV. section il s'est glissé une faute legere que je n'ai aperçue, qu'apres que je ne pouvois plus l'indiquer. Il faut donc faire la correction suivante.

p. 146 (cas (4)) l. 21 lisés comme il suit: »Facile vero perspicitur, ex ista aequatione deduci posse haec $a'pRh\ldots(\alpha)$, $\pm ahRa'\ldots(\beta)$, $\pm ahRp\ldots(\gamma)$. Ex (α) sequitur, perinde ut in (2), h vel utriusque a', p vel neutrius residuum esse. Sed casus prior ideo est impossibilis, quod ex hRa' et (β) sequeretur aRa' contra hypoth. Quamobrem necessario est hNp adeoque, per (γ), aNp. Q. E. D.«[**)]

[*) Werke I, S. 87—94.]

[**) Werke I, S. 108 ist die Stelle nach der Anmerkung berichtigt, die Gauss dem art. 2 der Abhandlung *Theorematis arithmetici demonstratio nova,* Comm. Soc. Reg. scient. Gotting. **16**, 1808, Comm. classis mathem. ad annos 1801—1805, S. 70 beigefügt hat; vergl. Werke I, S. 477.]

Au reste à la page 144 il se trouve une faute d'impression non-indiquée, savoir art. 139 ligne 3 au lieu de $\pm aNp$ il faut lire $\pm aRp$ [*)].

J'aurois repondu plus tot à Votre lettre, mais la decouverte d'une nouvelle planete par M. OLBERS m'a un peu distrait. Par le premier essai que j'ai fait sur son orbite, je trouve son mouvement considerablement plus vite que celui de Cérès, Pallas et Junon, savoir 978″ par jour. L'inclinaison de l'orbite de 7° 6′. L'excentricite 0,1. Cette planete a beaucoup plus de clarté que Cérès, Pallas et Junon, et j'espere la trouver parmi les observations de l'histoire celeste, peut être même parmi celles de FLAMSTEED. Je viens d'achever un ouvrage etendu sur les methodes, qui me sont propres, à determiner les orbites des planetes. Mais quoique je l'aie ecrit en allemand, je trouve beaucoup de difficulté d'y engager un libraire.

La guerre a suspendu tout commerce, plusieurs de nos plus grands libraires l'ont refusé. Je suis à present à traiter avec un autre qui se montre un peu plus courageux. S'il trouvera son conte à cette entreprise, peut être il sera encouragé par-là à risquer la publication d'un second volume de mes *disquisitiones.*

Continuez, Mademoiselle, de me favoriser de Votre amitié et de Votre correspondance, qui font mon orgueil, et soïes persuadée, que je suis et serai toujours avec la plus haute estime

Votre plus sincère admirateur
CH. FR. GAUSS.

Bronsvic ce 30 April 1807
jour de ma naissance.

GAUSS an OLBERS.

[WILHELM OLBERS, Sein Leben und seine Werke II, 1 (1900), S. 376, 377.]

Braunschweig, 1807 Juli 21.

. . . . . .

Bei meiner Rückkunft habe ich hier einige Briefe aus Paris vorgefunden von BOUVARD, LAGRANGE und SOPHIE GERMAIN . . . . Meinen Brief hat LA-

[*) Werke I, S. 107 ist dieser Druckfehler berichtigt.]

GRANGE wirklich, wie er selbst schreibt [*)], sogleich im Institut und Bureau des Longitudes vorgelesen . . . . .

LAGRANGE interessirt sich noch mit vieler Wärme für die Astronomie und höhere Arithmetik; die beiden Probe-Theoreme (in welchen Primzahlen 2 ein kubischer oder ein biquadratischer Rest ist), die ich auch Ihnen vor einiger Zeit mittheilte, hält er für »ce qu'il peut y avoir de plus beau et de plus difficile à demontrer«. Aber die SOPHIE GERMAIN hat mir die Beweise derselben geschickt; noch habe ich sie zwar nicht durchgehen können, ich glaube aber, dass sie gut sind; wenigstens hat sie die Sache von der rechten Seite angegriffen, nur etwas weitläufiger sind sie als nöthig sein wird. . . . .

GAUSS an OLBERS.

[WILHELM OLBERS, Sein Leben und seine Werke II, 1 (1900), S. 629.]

Göttingen, 1816 März 21.

. . . . . .

Für Ihre Nachrichten, die Pariser Preise betreffend, bin ich Ihnen sehr verbunden. Ich gestehe zwar, dass das FERMATsche Theorem als isolirter Satz für mich wenig Interesse hat, denn es lassen sich eine Menge solcher Sätze leicht aufstellen, die man weder beweisen, noch widerlegen kann. Allein ich bin doch dadurch veranlasst, einige alte Ideen zu einer grossen Erweiterung der höheren Arithmetik wieder vorzunehmen. Freilich gehört diese Theorie zu den Dingen, wo man nicht voraussehen kann, inwiefern es gelingen wird, dunkel vorschwebende entfernte Ziele zu erreichen. Ein glückliches Gestirn muss mit obwalten, und meine Lage und so vielfache abziehende Geschäfte erlauben mir freilich nicht, solchen Meditationen so nachzuhängen, wie in den glücklichen Jahren 1796—1798, wo ich die Hauptsachen meiner *Disquisitiones Arithmeticae* bildete. Allein ich bin überzeugt, wenn das Glück mehr thun sollte, als ich erwarten darf, und mir einige Hauptschritte in jener

[*)] Der Brief von LAGRANGE vom 31. Mai 1807 ist abgedruckt *Oeuvres de Lagrange* t. XIV, 1892, S. 298.]

Theorie glücken, auch der FERMATsche Satz nur als eines der am wenigsten interessanten Corollarien dabei erscheinen wird. . . . .

GAUSS an BESSEL.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und BESSEL, Leipzig 1880, S. 246.]

Göttingen 23. December 1816.

. . . . . .

Seit mehreren Monaten sind es gewisse Untersuchungen aus der höheren Arithmetik, auf die ich wiederum zurückgekommen bin, und die mich schon seit beinahe 12 Jahren geplagt haben. Sie gehören zu der Gattung derjenigen, wo man nicht im voraus sagen kann: dies will ich thun, sondern wo, vielleicht nach 999 misslungenen Versuchen, eine glückliche 1000-te Combination zum Ziele führt. Jetzt habe ich zwar das Ziel erreicht, doch immer noch auf einem nicht genug kurzen Wege. Der Gegenstand ist die Theorie der biquadratischen Reste, deren ich vielleicht schon mehrere Male gegen Sie erwähnt habe. Auch diess Brüten über einer Sache, ohne dass mittheilbare Resultate daraus hervorgehn, hat mich in anderen Dingen und besonders in meiner Correspondenz zurückgesetzt. Ich werde jetzt nur soviel davon aufschreiben, dass die neuen noch in der Luft schwebenden Ideen wenigstens meinem Gedächtnis erhalten werden.

BEMERKUNG.

Der hier in der ursprünglichen Schreibung wiedergegebene Brief an SOPHIE GERMAIN ist zuerst 1879 von dem Fürsten B. BONCOMPAGNI als Autographie veröffentlicht worden. Die Urschrift befindet sich jetzt im GAUSSarchiv, während zwei frühere und ein späterer Brief von GAUSS an dieselbe Empfängerin in der Bibliothèque nationale zu Paris aufbewahrt werden. Die Briefe der SOPHIE GERMAIN an GAUSS sind veröffentlicht unter dem Titel: *Cinq lettres de Sophie Germain à Charles Fréderic Gauss publiées par B. Boncompagni d'après les originaux possédés par la Société Royale des sciences à Göttingen. Berlin 1880.* Über die Bedeutung des hier abgedruckten Briefes vom 30. April 1807 vgl. E. SCHERING, Göttinger Nachrichten 1879, S. 381 ff.

Die Nachricht, auf die sich GAUSS in dem Schreiben an OLBERS vom 21. März 1816 bezieht, ist in einem Briefe vom 7. März 1816 enthalten, den OLBERS aus Bremen an GAUSS gerichtet hat*). Sie betrifft

*) W. OLBERS, Sein Leben und seine Werke II, 1, S. 626.

eine von der Pariser Akademie für 1818 gestellte Preisaufgabe, von der OLBERS schreibt: [sie] »scheint mir recht für Sie geschaffen, lieber GAUSS.« Die Aufgabe lautet, soweit sie hier in Betracht kommt, in der OLBERSschen Übersetzung wie folgt:

». . . Nun ist also nur noch das andere Theorem zu beweisen: Daß es nämlich keine Potenz außer dem Quadrat gibt, die in zwei andere Potenzen von demselben Grade zerlegt werden könne.«

SCHLESINGER.

[ZUR THEORIE DER FORMEN.]

[I.]

[ÜBER POLYGONALZAHLEN.]

[Eintragung im LEISTE*), S. 68.]

[1.]

Die Reihen der Polygonalzahlen lassen sich auch rückwerts fortsetzen, und dadurch kommt man bei allen, die Trigonalzahlen und Quadratzahlen ausgenommen, auf Zahlen, welche von den übrigen ganz verschieden sind.

Pentagonalzahlen

100, 77, 57, 40, 26, 15, 7, 2, 0, 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117 . . .

Hexagonalzahlen

105, 78, 55, 36, 21, 10, 3, 0, 1, 6, 15, 28, 45, 66 . . .

[2.]

Jede Zahl besteht aus drei Trigonalzahlen.

Jede Zahl der Form $8n+1$	drei $\square$	i, pp, pp; i, pi, pi —
$8n+3$	drei $\square$	i, i, i —
$8n+5$	drei $\square$	i, pp, pi —
$8n+7$	vier $\square$	i, i, i, pi —

[*) Gemeint ist das durchschossene Exemplar von CHR. LEISTE, *Die Arithmetik und Algebra*, Wolfenbüttel 1790, das GAUSS besessen und dessen Durchschußblätter er von 1796 an bis über 1797 hinaus zu wissenschaftlichen Aufzeichnungen benutzt hat. Die Seitenzahl bezieht sich auf die Seite des Leistetextes, der gegenüber sich die GAUSSsche Aufzeichnung befindet.]

BEMERKUNG.

Die vorstehende Aufzeichnung bezieht sich auf den S. 68 stehenden Text des LEISTEschen Werkes, der von den Polygonalzahlen handelt. Solche zum Text gehörige Bemerkungen finden sich auf den Durchschußblättern nur sehr spärlich; wir haben außer der hier abgedruckten noch zu den Seiten 9, 36, 37, 44, 105, 108 welche bemerkt.

Vergl. zu der vorstehenden Aufzeichung die Tagebuchaufzeichnungen Nr. 17 und 18 vom 3. und 10. Juli 1796 und die darauf bezüglichen Bemerkungen in dem Artikel 12 des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«. Es bedeutet:

i impar,
pp pariter par,
pi pariter impar.

Die »series numerorum pentagonalium retro continuata« findet sich schon bei EULER in der Abhandlung *Observatio de summis divisorum*, Novi Comment. Acad. Petrop. 5 (1754/5) 1760, S. 64, Opera omnia, ser. I, vol. 2, S. 380; er gibt die Zahlen 2, 7, 15, 26, 40, 57, 77, 100, 126.

SCHLESINGER.

[II.]

[ÜBER DIE ANZAHL DER ZERLEGUNGEN EINER PRIMZAHL IN DREI QUADRATE.]

[Ein Zettel in Ea 5, Kapsel 40.]

Wenn A eine Primzahl ist, so gibt es so viele Formen der Divisoren $4n+1$ von $\square + A\square$ als es verschiedene Arten gibt A in drei Quadrate zu zerlegen.

Bew[eis.]

1. *Eine jede Zerlegung von A in drei Quadrate gibt eine Form oder einen Multiplicator.*

Ist nemlich

$$A = aa + bb + cc,$$

so erhält man dadurch den Multiplicator $aa+bb$ bei $\frac{ca}{b}$ oder $\frac{cb}{a}$. —

$$aa+bb;\ aa+cc;\ bb+cc$$

sind verbunden und geben folglich nur eine Form.

2. *Jeder Multiplicator gibt eine Zerlegung von A.*

Man darf voraussetzen, dass das von allen Zahlen kleiner als A gilt (vermöge der Depressionsmethode), dass also der Multiplicator $(= \triangle) = mm + nn + pp$, so dass $mm+nn$ ein Multiplicator von A oder

$$(mm+nn)A = xx + (mn+nn+pp)yy$$

also

$$A = yy + \frac{ppyy+xx}{mm+nn} = yy + zz + ww.$$

Beide Sätze gelten nicht bloss von Primzahlen, sondern auch von zusammengesetzten. (Zus. $(zz+ww)(mm+nn+pp) = xx+App.$)

3. Es bleibt uns also zu beweisen übrig, dass wenn A eine Primzahl ist, kein Multiplicator (im eingeschränkten Sinne) zu mehr als einer Zerlegung gehören könne. Bei zusammengesetzten Zahlen ist dies nicht immer der Fall, z. B. die Zerlegungen von 185 in

$$4+81+100 \text{ und } 36+49+100$$

geben einen Multiplicator 85 bei $\frac{10.9}{2}$ und $\frac{10.7}{6}$, beide gleich 45. Der kleinste Multiplicator ist 9, so dass

$$1.2+2.9-2.10 = 0 \text{ und } 1.6+2.7-2.10 = 0.$$

4. Es sei also

$$A = aa+bb+cc = a'a'+b'b'+c'c'$$

und beide Zerlegungen sollen zusammenhangende Multiplicatoren geben, also

$$(aa+bb)(a'a'+b'b') = \square + A\square$$

oder wenn

$$a'a'+b'b' = mm+nn+pp = \triangle,$$
$$am+bn+cp = 0$$

(weil

$$a'a'+b'b' = (aa+bb)xx+2qxy+ryy = \square+\square+\square).$$

Daher müsste sein

$$(mm+nn)A = \square+\triangle\square,$$

und

$$mm+nn = \square+\triangle\square$$

(weil $A = \square+\triangle\square$ eine Primzahl), welches nur möglich ist, wenn

$$mm+nn = \square;$$

wir müssen also gegenwärtig setzen

$$a'a'+b'b' = ff+gg,$$

so dass

$$af+bg=0,$$

also wenn

$$\frac{a}{b}=\frac{\mu t}{\mu u},$$

$$f=\nu u;\ g=\nu t,$$

und so hätten wir endlich für A die beiden Zerlegungen

$$\mu\mu tt+\mu\mu uu+cc$$

und

$$\nu\nu tt+\nu\nu uu+c'c',$$

welches nicht sein kann, wenn A eine Primzahl ist; daher

$$\mu=\nu$$

und beide Zerlegungen dieselben sind.

Erläuterungen.

1) Wenn $aa+bb$ und $a'a'+b'b'$ $(=\triangle)$ zusammenhangen, so ist

$$(aa+bb)\triangle=xx+(aa+bb+cc)yy,$$

woraus sogleich eine Zerlegung von $\triangle$ in drei Quadrate folgt, wovon das eine $=yy$. Man wird leicht finden, dass diese Quadrate

$$mm+nn+pp$$

von der Art sind, dass

$$am+bn+cp=0.$$

2) Wenn

$$aa'+bb'+cc'=0,$$

so kann man allemal setzen

$$(aa+bb+cc)(a'a'+b'b')=AA+(a'a'+b'b'+c'c')BB$$

und

$$(a'a'+b'b'+c'c')(aa+bb)=A'A'+(aa+bb+cc)B'B';$$

man setze

$$B=c;\ B'=c' \text{ und } A=ab'-a'b=A'.$$

Additamentum:

Numerorum non primorum in terna quadrata distributio.

10 9, 1 | **18** 9, 9 — 16, 1, 1 | **21** 16, 4, 1 | **22** 9, 9, 4 |
25 16, 9 | **26** 25, 1 — 16, 9, 1 | **27** 9, 9, 9 — 25, 1, 1 |
30 25, 4, 1 | **33** 25, 4, 4 — 16, 16, 1 | **34** 25, 9 — 16, 9, 9 |
35 25, 9, 1 | **38** 36, 1, 1 — 25, 9, 4 | **42** 25, 16, 1 |
45 36, 9 — 25, 16, 4 | **46** 36, 9, 1 | **49** 36, 9, 4 |
50 49, 1 — 25, 25 — 25, 16, 9 | **51** 49, 1, 1 — 25, 25, 1 |
54 49, 4, 1 — 36, 9, 9 | **57** 49, 4, 4 — 25, 16, 16 |
58 49, 9 | **62** 49, 9, 4 — 36, 25, 1 | **65** 64, 1 — 49, 16 — 36, 25, 4 |
66 64, 1, 1 — 49, 16, 1 — 25, 25, 16 |

Selecta

205 196, 9 — 169, 36 — 144, 36, 25 |
221 196, 25 — 196, 16, 9 — 169, 36, 16 — 121, 100 — 121, 64, 36 |

BEMERKUNGEN.

Diese Aufzeichnung von GAUSS ist wohl als ein früher Anlauf zu dem Ziele zu betrachten, welches er mit seinem berühmten Satze im art. 291 der *Disquisitiones Arithmeticae* erreicht hat. Nach der Ausdrucksweise jener Zeit heißt Teiler von x^2+Ay^2 jede Primzahl Δ, von der ein Vielfaches durch die Form darstellbar, für welche also $M\Delta = x^2+Ay^2$ ist, allgemeiner eine quadratische Form $\Delta x^2+2qxy+ry^2$ mit der Determinante $-A$, deren erster Koeffizient gleich Δ und durch welche dann auch der Multiplikator M darstellbar ist. Ist $\Delta = 4n+1$, so folgt wegen $\left(\frac{-A}{\Delta}\right) = 1$ auch $\left(\frac{\Delta}{A}\right) = 1$ und

$$(-1)^{\frac{\Delta-1}{2}} = 1,$$

die Form gehört also zum Hauptgeschlecht. Bei solcher Deutung würde der GAUSSsche Satz also lauten: Wenn A Primzahl ist, so gibt es soviel Formen (Klassen) des Hauptgeschlechts, als es verschiedene Arten gibt, A in drei Quadrate zu zerlegen, eine Aussage, die nicht ganz zutreffend wäre.

Bei dem Versuche, den Beweisgang aufzuklären, werde auch $A = 4n+1$ vorausgesetzt.

Zu 1. Ist $A = a^2+b^2+c^2$ und $a^2+b^2 \equiv 1 \pmod{4}$, so wird

$$x^2+Ay^2 = x^2+(a^2+b^2+c^2)y^2$$

für $x = ac$, $y = b$ resp. $x = bc$, $y = a$ gleich

$$(a^2+b^2)(b^2+c^2) \text{ resp. } (a^2+b^2)(a^2+c^2),$$

zu jeder Zerlegung von A gehört also ein Teiler $a^2+b^2 \equiv 1 \pmod{4}$ und eine Form

$$(a^2+b^2)x^2+2qxy+ry^2$$

mit der Determinante $-A$, durch welche auch die andern Teiler b^2+c^2, a^2+c^2, darstellbar sind; diese drei verbundenen oder zusammenhängenden Teiler oder Multiplikatoren geben also nur eine Form.

Zu 2. Ist Δ Primteiler von der Form $4n+1$ von x^2+Ay^2 d. h.

$$M.\Delta = x^2+Ay^2,$$

so ist wegen $\left(\frac{-A}{\Delta}\right) = 1$ auch $\left(\frac{-\Delta}{A}\right) = 1$ also auch

$$N.A = x^2+\Delta y^2.$$

Gilt nun die Behauptung in 2. für die Primzahl Δ, so entspricht dem Theiler $A = 4n+1$ eine Zerlegung

$$(1) \qquad \Delta = m^2+n^2+p^2$$

und der Multiplikator $N = m^2+n^2$. Demnach findet sich

$$(2) \qquad (m^2+n^2)A = x^2+(m^2+n^2+p^2)y^2$$

oder

$$A = \frac{x^2+p^2y^2}{m^2+n^2}+y^2,$$

also eine Zerlegung von A in drei Quadrate

$$(3) \qquad A = a^2+b^2+c^2,$$

wenn man schreibt $y = c$ und

$$x^2+p^2c^2 = (m^2+n^2)(a^2+b^2) = (an-bm)^2+(am+bn)^2$$

d. i.

$$x^2 = (an-bm)^2, \quad p^2c^2 = (am+bn)^2,$$

woraus

$$(am+bn+cp)(am+bn-cp) = 0$$

also bei passender Bezeichnung der Basen der Quadrate und Wahl ihrer Vorzeichen

$$(4) \qquad am+bn+cp = 0$$

hervorgeht. Ferner nimmt die Gleichung (2) die Gestalt an

$$(5) \qquad (m^2+n^2)(a^2+b^2+c^2) = (an-bm)^2+(m^2+n^2+p^2)c^2. -$$

Wie jedoch aus dieser Betrachtung eine zum Beweise der Behauptung in 2. führende »Depressionsmethode« zu entnehmen ist, bleibt unklar.

Zu 4. Wären $A = a^2+b^2+c^2$ mit $a^2+b^2 \equiv 1 \pmod{4}$ und $A = a'^2+b'^2+c'^2$ zwei Zerlegungen von A, denen ein- und derselbe Primteiler $\Delta = 4n+1$ zukäme, so bestände einerseits eine Gleichung

$$(a^2+b^2)\Delta = x^2+Ay^2 = x^2+(a'^2+b'^2+c'^2)y^2,$$

andererseits müßte deshalb Δ nach dem Satze in 2. die Summe zweier der drei Quadrate a'^2, b'^2, c'^2, etwa

$$\Delta = a'^2+c'^2$$

sein. Aus

$$(a^2+b^2)\Delta = x^2+Ay^2 = x^2+(a^2+b^2+c^2)y^2$$

folgt aber (siehe 2.)

$$\Delta = m^2 + n^2 + p^2, \quad am + bn + cp = 0$$

und die Gleichung (5) oder

$$(m^2 + n^2) A = x^2 + \Delta y^2.$$

Da

$$A = b'^2 + (a'^2 + c'^2) = b'^2 + \Delta\, 1^2$$

und A Primzahl ist, so erschließt man hieraus

$$m^2 + n^2 = r^2 + \Delta s^2 = r^2 + (m^2 + n^2 + p^2) s^2$$

was $s = 0$ erfordert. Die Zerlegung von Δ würde also

$$\Delta = a'^2 + c'^2 = r^2 + p^2,$$

dem entsprechend die Gleichung (4) die einfachere Gestalt

$$ar + cp = 0 \text{ d. i. } aa' + cc' = 0$$

annähme. Dies gibt die Beziehungen $a = \mu t$, $c = \mu u$, $a' = \nu t$, $c' = \nu u$, also wenn $t^2 + u^2 = S$ gesetzt wird, für A die zwei Zerlegungen

$$A = b^2 + S\mu^2, \quad A = b'^2 + S\nu^2,$$

die mit einander identisch sein müssen, da A Primzahl ist. So erhielte man $b = b'$, $\mu = \nu$ und die beiden als verschieden vorausgesetzten Zerlegungen von A würden einander gleich.

BACHMANN.

[III.]

[ÜBER TERNÄRE QUADRATISCHE FORMEN.]

[Eintragung im LEISTE, S. 111.]

[1.]

Zur Möglichkeit des Ausdrucks

$$a\square + b = c\square$$

wird erfordert:

1) dass $+bc$ ein Rest v. a sei,
2) dass $-ab$ ein Rest v. c sei,
3) dass $+ac$ ein Rest v. b sei.

Allgemeiner, zur Möglichkeit der Gleichung

$$a\square + b\square = c\square$$

ist nöthig, dass

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & +ac \text{ Rest von } b \\ 2) & -ab \text{ Rest von } c \\ 3) & +bc \text{ Rest von } a \end{array}\right\} \text{ sei.}$$

[2.]

Generalissime ad possibilitatem aequationis

$$axx + byy + czz = 0$$

requiritur,

I) ut non omnes a, b, c idem signum habeant,

II) ut

			div. c. max.
$-bc$	residua	$a\times$	b, c
$-ac$	sint	$b\times$	c, a
$-ab$	ipsorum	$c\times$	a, b
a factt. suis quadratis liberati			

[Aus Scheda Ae, Varia, Julius 1800, S. 3—5.]

[3.]

PROBLEMA.

Formam ternariam determinantis 0 in binariam transmutare.

Sol[*utio*] *Casus I.*

Si omnes coefficientes formae adiunctae sunt 0.

Sit proposita

$$=\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$$

habebuntque a, a', a'' idem signum. Sit m ipsorum div. comm. max. eodem signo acceptus, metieturque etiam ipsos b, b', b''. Tunc erit

$$axx + a'yy + a''zz + 2byz + 2b'xz + 2b''xy = m(\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}z)^2$$

ipsique $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ divisorem communem non habebunt. Accipiantur

$$\alpha, \beta, \gamma, \quad \alpha', \beta', \gamma', \quad \alpha'', \beta'', \gamma''$$

ita ut sit

$$\begin{aligned} &\alpha\mathfrak{A} + \beta\mathfrak{B} + \gamma\mathfrak{C} = 1, \\ &\beta'\gamma'' - \beta''\gamma' = \mathfrak{A}, \\ &\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha' = \mathfrak{B}, \\ &\alpha'\beta'' - \alpha''\beta' = \mathfrak{C} \end{aligned}$$

transibitque f per substitutionem

$$\begin{matrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{matrix}$$

in formam

$$\begin{pmatrix} m, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

Casus II.

Si conditio in I apud formam propositam non habet locum, certo in forma ipsi adiuncta locum habebit. Determinentur itaque α, α', α'' etc. ita ut haec adiuncta per substitutionem

$$\begin{matrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{matrix}$$

transeat in

$$\begin{pmatrix} M, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

transibitque proposita per substitutionem illi adiunctam in formam talem

$$\begin{pmatrix} 0, & a', & a'' \\ b, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

atque formae binariae (a', b, a'') determinans erit M.

[4.]

PROBLEMA.

Solvere aequationem

$$axx + a'x'x' + a''x''x'' + 2(bx'x'' + b'xx'' + b''xx') = 0,$$

determinans huius formae ternariae f supponitur $= D$.

Indoles solutionis consistit in inventione formae ternariae determinantis D^3 cuius coefficientes omnes sint divisibiles per D et quae sub f contenta sit.

1) Si aequatio est solubilis, talis forma dabitur.
Tunc formae propositae aequivalens inveniri potest forma talis

$$\begin{pmatrix} 0, & a', & a'' \\ b, & b', & 0 \end{pmatrix}$$

quae per substitutionem

$$\begin{matrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & b', & 0 \\ 0, & 0, & a'b' \end{matrix}$$

transit in

$$D\begin{pmatrix} 0, & 1, & a'a'' \\ b, & 1, & 0 \end{pmatrix}$$

proprietate requisita praeditam.

[5.]

Algorithmus per quem si fieri potest ad talem formam pervenitur.

I. Proposita propria

$$f = \begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix} \quad \text{det. } D = Mmm,$$

adiuncta

$$F = \begin{pmatrix} Am, & A'm, & A''m \\ Bm, & B'm, & B''m \end{pmatrix} \quad \text{det.} = MMm^4.$$

Tunc erit

$$f \equiv (h, h', h'')^2 \pmod{m};$$

fiat

$$\beta'\gamma'' - \beta''\gamma' = h \text{ etc.}$$

$$\alpha h + \alpha' h' + \alpha'' h'' = 1,$$

f transit per substitutionem

$$\begin{matrix} m\alpha, & \beta, & \gamma \\ m\alpha', & \beta', & \gamma' \\ m\alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{matrix}$$

in formam talem

$$\begin{pmatrix} mma, & a'm, & a''m \\ bm, & b'm^2, & b''m^2 \end{pmatrix}$$

eritque determinans formae

$$\begin{pmatrix} ma, & a', & a'' \\ b, & mb', & mb'' \end{pmatrix}$$

Mm. Conditio possibilitatis aequationis

$$f = \begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix} \ldots Mmm \ldots \begin{pmatrix} Am, & A'm, & A''m \\ Bm, & B'm, & B''m \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B'' \end{pmatrix} \ldots MMm \ldots \begin{pmatrix} aM, & a'M, & a''M \\ bM, & b'M, & b''M \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{Mf}{\square} \; R \; \frac{m}{\square} \\ \frac{mF}{\square} \; R \; \frac{M}{\square} \\ -\frac{MmfF}{\square} \; R \text{ div. comm. max. ipsorum } \frac{m}{\square}, \frac{M}{\square} \end{array}}$$

BEMERKUNGEN.

Die Aufzeichnung [1.] stammt aus sehr früher Zeit, etwa 1796, die Aufzeichnung [2.] ist in anderer Schrift, offenbar später, hinzugeschrieben. Zu [3.] vergleiche man die artt. 281 (Schluß) und 299 der *Disquisitiones Arithmeticae* [Werke I, S. 323 und 358]. In [4.] werden die Bedingungen für die Auflösbarkeit einer ternären quadratischen Gleichung gegeben. Diese sind von H. St. Smith (Proc. of the Royal Society London **13**, 1864, S. 110, Papers I, S. 410) aufgestellt und von Arnold Meyer (Crelles Journal f. Mathematik **98**, 1885, S. 177) bewiesen worden, und stimmen mit den in der vorstehenden Aufzeichnung von Gauss enthaltenen vollkommen überein. Vergl. den Artikel **12** des Bachmannschen Aufsatzes »Über Gauss' zahlentheoretische Arbeiten«. Im vorstehenden bedeuten $\frac{m}{\square}$ u. s. w. die von ihrem größten quadratischen Teiler befreiten Zahlen.

Schlesinger.

[IV.]

[ZUR BESTIMMUNG DER KLASSENANZAHL.]

[Aus Scheda Ae, Varia, Julius 1800, S. 36.]

Es sei $2E$ die Zahl nach der die Form der Th[eiler] recurrirt,

$$\cos\frac{P}{4E}+i\sin\frac{P}{4E} = \cos A+i\sin A = \rho,$$

so ist

$$\frac{\sqrt{D}}{E}\{\operatorname{cotg} A \pm \operatorname{cotg} 3A \pm \ldots \pm \operatorname{cotg} nA\} \quad n<E$$

$$= \frac{\sqrt{D}}{2E}\{\operatorname{cotg} A \pm \operatorname{cotg} 3A \pm \ldots \pm \operatorname{cotg} nA\} \quad n<2E.$$

[Aus Scheda Af, Mémoires de Mathematiques, Bronsuic 1801, S. 78.]

Es sei $2E$ die Zahl, nach der die Formen der Theiler recurriren

$$\rho^{2E} = 1,$$

so ist die Zahl der quadratischen Formen

$$= \frac{\sqrt{D}}{E}\left\{\frac{1+\rho}{1-\rho} \pm \frac{1+\rho^3}{1-\rho^3} \pm \ldots \pm \frac{1+\rho^n}{1-\rho^n}\right\} \quad n<E$$

(proxime)

$$= \frac{\sqrt{D}}{2E}\left\{\frac{1+\rho}{1-\rho} \pm \frac{1+\rho^3}{1-\rho^3} \pm \ldots \pm \frac{1+\rho^n}{1-\rho^n}\right\} \quad n<2E.$$

BEMERKUNG.

Vergleiche hierzu die Tagebuchnotizen Nr. 114 vom 30. Oktober und Nr. 115 vom 3. Dezember 1800. Ferner Werke II, S. 285, 286 und die zugehörigen Anmerkungen von R. DEDEKIND ebenda, S. 297, sowie den Artikel 27 des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«.

SCHLESINGER.

[V.]

[ZUR THEORIE DER FORMEN.]

[Ein Zettel in Ed 3, Kapsel 44.]

[1.]

Wir bezeichnen mit p eine als Modulus anzusehende Primzahl; mit $x, y, z\ldots$ unbestimmte Zahlen ohne Einschränkung (oder lieber $0, 1, 2, \ldots, p-1$); mit $t, u, v\ldots$ unbestimmte Zahlen durch p nicht theilbar (oder lieber $1, 2, 3, \ldots, p-1$); durch R einen bestimmten quadratischen Rest, durch N einen bestimmten Nichtrest. Von den doppelten Ansätzen bezieht sich der erste auf den Fall $p \equiv 1$, der andere auf den Fall $p \equiv 3$ (mod. 4).

Anzahl der Auflösungen der Congruenzen.

xx	$\equiv 0$	1
$xx+yy$	$\equiv 0$	$2p-1,\ 1$
$xx-yy$	$\equiv 0$	$2p-1$
$xx+yy-zz$	$\equiv 0$	pp
$xx+yy+zz$	$\equiv 0$	pp
$tt+uu+R$	$\equiv 0$	$p-5,\ p+1$
$tt+uu+N$	$\equiv 0$	$p-1,\ p-3$
$tt+uu$	$\equiv 0$	$2p-2,\ 0$
$\{xx+yy+R$	$\equiv 0$	$p-1,\ p+1$
$\{xx+yy+N$	$\equiv 0$	$p-1,\ p+1$
$tt-uu+R$	$\equiv 0$	$p-5,\ p-3$
$tt-uu+N$	$\equiv 0$	$p-1,\ p-3$
$tt-uu$	$\equiv 0$	$2p-2$

$xx-yy+R$	$\equiv 0$	$p-1$
$xx-yy+N$	$\equiv 0$	$p-1$
$xx+x'x'+x''x''+x'''x'''$	$\equiv 0$	p^3+pp-p
$xx+yy+zz+R$	$\equiv 0$	$pp+p$
$xx+yy+zz+N$	$\equiv 0$	$pp-p$
$xx+x'x'+x''x''-x'''x'''$	$\equiv 0$	$p^3+pp-p,\ p^3-pp+p$
$xx+yy-zz+R$	$\equiv 0$	$pp+p,\ pp-p$
$xx+yy-zz+N$	$\equiv 0$	$pp-p,\ pp+p.$

[2.]

Die Schlüsse von LAGRANGE, *Mem. de l'Ac. de Berlin* 1770, p. 126 werden durch Heranziehung der complexen Grössen ungemein vereinfacht.

Bezeichnen wir durch p', q' die Adjuncten der complexen Zahlen p, q, so haben wir die ursprüngliche Gleichung

$$Aa = pp'+qq',$$

die wir Kürze halber auch so schreiben

$$Aa = (p,\ q).$$

Es ist Voraussetzung, dass p und a inter se primi sind; man mache also

$$m \equiv \frac{q}{p} \ (\text{mod. } a)$$

und setze

$$1+mm' = ab.$$

Dann ist in ganzen Zahlen

$$Ab = \left(\frac{p+mq}{a},\ \frac{q-pm}{a}\right) = (r,\ s).$$

Macht man dann weiter

$$m+n \equiv 0 \ (\text{mod. } b) \ \text{ und } \ 1+nn' = bc,$$

so ist in ganzen Zahlen

$$Ac = \left(\frac{r+n's}{b},\ \frac{s-nr}{b}\right)$$

u. s. f.

Allgemein ist nemlich

$$\begin{aligned}(p,\, q)\cdot(1,\, m) &= (p+mq,\; q-m'p)\\ &= (p+m'q,\; q-mp)\\ (p,\, q)\cdot(P,\, Q) &= (pP+qQ,\; qP'-pQ')\\ &= (pP-qQ,\; qP'+pQ')\\ &= (pP-qQ,\; q'P+p'Q)\\ &= (pP-q'Q',\; pQ+q'P').\end{aligned}$$

[3.]

Steigen wir höher hinauf, so ist alles dieses nur ein sehr spezieller Fall aus einer viel allgemeineren Untersuchung, die so ausgesprochen werden kann: *Es sind zu untersuchen die allgemeinen Eigenschaften der unbestimmten Form*

$$\tfrac{1}{2}(a+a')xx'+bx'y+b'xy'+\tfrac{1}{2}(c+c')yy'.$$

Was ist hier der Determinans?

Nichts anderes als

$$bb'-\tfrac{1}{4}(a+a')(c+c') = \Delta.$$

Bezeichnen wir eine solche Form durch

$$(a,\, b,\, c),$$

wo a, c reell sind, so geht solche in

$$\begin{aligned}&\left(c,\; mc-b',\; \frac{(mc-b)(m'c'-b')-\Delta}{c}\right)\\ &= (c,\; mc-b',\; a-mb'-m'b+mm'c)\\ &= ctt'+(mc-b')t'u+(m'c-b)tu'+(a-mb'-m'b+mm'c)uu'\end{aligned}$$

über durch die Substitution

$$\begin{aligned}x &= \quad -u\\ y &= t+mu\end{aligned}$$

oder umgekehrt

$$\begin{aligned}t &= mx+y\\ u &= -x.\end{aligned}$$

Es sind aequivalent

proprie	improprie
a, b, c	$a, -b, c$
$a, ma+b, a-mb'-m'b+mm'c$	c, b', a
$c, -b', a$	

BEMERKUNG.

Die vorstehenden Aufzeichnungen stammen aus später Zeit; das geht daraus hervor, daß auf der Rückseite des Zettels, auf dem sie aufgezeichnet sind, die Bemerkung steht:

JACOBI, Zerlegung der Zahlen in 4 Quadrate,
CRELLE **3**, 2; auch **12**, 2*).

Die in [2.] erwähnten »Schlüsse von LAGRANGE« beziehen sich auf das »Théorème: Si la somme de quatre carrés est divisible par un nombre premier plus grand que la racine carrée de la même somme, ce nombre sera nécessairement égal à la somme de quatre carrés.« (Oeuvres de LAGRANGE III (1869), S. 193; der Titel der Abhandlung lautet: *Démonstration d'un théorème d'Arithmétique*).

Bemerkenswert ist in [3.] das Auftreten der heute sogenannten HERMITEschen Formen. Vergl. die bezüglichen Ausführungen in dem Artikel **12** des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«.

Die Hilfsformel der Nr. [2.]

$$(p, q).(P, Q) = (pP+qQ, qP'-pQ')$$

findet sich auch in einer Aufzeichnung des Handbuchs **19**, Be, S. 147, die Werke III, S. 384 abgedruckt ist und die sicher aus der Zeit nach 1825 stammt.

SCHLESINGER.

---

*) Die von GAUSS erwähnten Abhandlungen JACOBIS sind: *Note sur la décomposition d'un nombre donné en quatre carrés*, CRELLES Journal f. Mathem. **3** (1828), S. 191, JACOBIS Werke I, S. 245 und *De compositione numerorum e quattuor quadratis*, CRELLES Journal f. Mathem. **12** (1834), S. 167, JACOBIS Werke VI, S. 245.

ALGEBRA.

NACHTRÄGE ZU DEN BÄNDEN I, III UND VIII.

BRIEFWECHSEL
[ZUM FUNDAMENTALSATZ DER ALGEBRA.]

[1.]

PFAFF an GAUSS.

{Helmstedt 30. May 1799

Ew. Wohlgeb.

. . . .

Verschiedene Kleinigkeiten in Ihrer Schrift, die verschrieben oder in der Eile versehen sind, habe ich mir bereits angemerkt, um sie Ihnen beym Zurücksenden mitzutheilen, damit sie nicht etwa beym Abdruck zufällig, wenn die Gedanken auf das wichtigere geheftet sind, wieder übersehen werden. Z. B. § 18 steht: simili modo T ubique <u>inter 7 et 9</u>, inter <u>15 et 17</u> etc. et generaliter inter <u>$8k+7$</u> et <u>$8k+9$</u> valorem negativum habebit; wo die unterstrichenen Worte heissen müssen: inter 5 et 7, 13 et 15, $8k+5$ et $8k+7$. Auch vorher: T . . . positivum valorem habebit . . . . . . a $8k+3$ usque ad $8k+5$, anstatt $8k+1$ ad $8k+3$. Einige weitere Anmerkungen über die Sache und Ihre Darstellung wollte ich Ihnen auch schreiben: es ist mir aber, besonders durch eine noch diesen Nachmittag dazwischen gekommene nicht wohl zu vermeidende Abhaltung, die Zeit für heute zu kurz geworden, und doch wollte ich Sie nicht noch einen Posttag länger auf Antwort warten lassen, da Sie ausdrücklich Beschleunigung der ganzen Angelegenheit gewünscht haben. Eines an sich unbedeutenden Umstandes muss ich jedoch noch erwähnen. Sie werden selbst zugeben, dass die Betrachtung der krummen Linien und ihrer Schenkel, auf deren nothwendigem Durchschnitt Ihr Beweis beruht, etwas verwickelt und abstract ist. Sollte es daher nicht nützlich und zur Erläuterung dienlich seyn, wenn Sie etwa für einen Fall in concreto, für welchen der zu beweisende Satz schon aus anderen Gründen ausgemacht ist, wie $m = 4$, die Natur dieser krummen Linien genauer entwickelten, und durch Zeichnung darstellten, wobey Sie auch noch allenfalls die Coëfficienten $A, B, C, \ldots$ zweckmässig auswählen könnten? Es würde dieses wohl kein Auswuchs seyn, durch den etwa die Concinnitaet des Ganzen leiden könnte. In den Figuren sind Sie auch fast zu sparsam gewesen, da Sie die Fig. 2 in verschiedenen Bedeutungen und Absichten gebrauchen, indem die mit Zahlen bezeichneten Puncte § 18 etwas ganz anders vorstellen, als § 20. Ich bin der Meynung, dass man beym Schreiben sich selbst die Pflicht aufzulegen hat, auch für die Bequemlichkeit der Leser zu sorgen, selbst wenn es gewissermassen mit eigener Unbequemlichkeit verknüpft wäre. Nächst dem materiellen Gehalt sind doch immer Ordnung und Deutlichkeit die ersten formellen Eigenschaften jedes Vortrags. Gegen die Ordnung, worin Sie Ihre Ideen entwickeln, habe ich nichts einzuwenden, aber der Deutlichkeit möchte für die Mehrheit der Leser noch etwas nachzuhelfen seyn. In beyden ist Euler mehr zum Muster zu empfehlen, als die neuen französischen Mathematiker. Sie werden diese Anmerkungen für keinen Tadel halten: ich wünsche aber auch, dass Sie solche nicht für einen blossen Rath, um zu rathen, ansehen, sondern dadurch für die Zukunft auf einen Punct aufmerksamer werden mögen, der wirklich zum Vortheil der Wissenschaft wichtiger ist, als man leicht zu glauben geneigt ist.

Ich empfehle mich Ihrem ferneren freundschaftl. Andenken, und verharre mit vollkommenster Hochachtung

Ihr ergebenster Freund

J. F. Pfaff.

N.S. An H. H[of]r[ath] v. Z[immermann] viele Empfehlungen. Sie sprachen bey Ihrem Hierseyn von Bachet's *Problemes plaisans*. Ich besann mich damals nicht gleich, dass ich das Buch selbst habe, das Ihnen also auf Verlangen zu Dienst steht.}

[2.]

PFAFF an GAUSS.

. . . .

{Es war mir erfreulich, dass Sie meine wenigen unbedeutenden Anmerkungen gut aufgenommen haben, und selbst noch mehrere wünschen. Es gehört zu den Vorzügen der Mathematik, dass darinn nicht viel zu disputiren ist, und dass man von dem unangenehmen Eindruck, welchen die Rechthaberey erweckt, selten etwas erfährt. — Ihr Verlangen nach mehreren Bemerkungen, und nach Angabe der Stellen, die etwa deutlicher seyn könnten, kann ich übrigens jezt nicht so wie ich wünschte erfüllen, da ich dazu Ihre Abhandlung, die mir inzwischen aus dem Gesicht gekommen war, wieder genauer durchgehen müsste, als es meine Zeit zulässt, indem ich 3 Collegia zu lesen, u. ausserdem noch eigene Beschäftigungen habe, welche ich um so weniger jezt aussezen kan, da ich auf Michaelis eine Reise in mein Vaterland zu machen gedenke. —

Einige Kleinigkeiten, die mir aufgestossen waren, wovon ich das vorigemal etwas erwähnte (meistens Schreib- und Sprachfehler) halte ich jetzt nicht einmal für nöthig anzuzeigen, theils weil Ihre Bemerkung wegen der sin. u. cos., dass die Leser sich selbst daraus finden werden, auch hier gälte, theils weil Sie ohnehin das Ganze vor dem Abdruck noch einmal selbst genau durchsehen werden. — Wenn ich äusserte, dass Ihre Abhandlung noch hie u. da an Deutlichkeit gewinnen könnte, so folgte ich dabey dem Total-Eindruck, den sie bey dem ersten Lesen auf mich gemacht hatte, u. vermuthlich auch auf andere Leser machen wird: allerdings liegt aber viel davon an der Kürze, die Sie, wie Sie sagen, absichtlich gewählt haben. Dass Sie für die letzte Figur die Gleichung und damit ein concretes Beyspiel geben wollen, wird, wie ich auch glaube, zur Erläuterung dienen: ich dachte erst, dass es noch dienlicher wäre, wenn Sie, nicht am Ende in einer Anmerkung, sondern schon vor der allgemeinen Untersuchung ein solches Beyspiel entwickelten, zur Vorbereitung auf das folgende; doch mag Ihnen diess für Ihren Zweck zu weitläufig scheinen. Ich hatte mir jenes etwa zwischen § 16 u. § 18 gedacht, an der Stelle von § 17. Sie sagen in Ihrem Brief, dass Sie den ganzen § 18 bloss zur leichteren Verständlichkeit vorläufig beygefügt haben, u. anfangs willens gewesen seyen, ihn ganz wegzulassen. Ohne Zweifel meynen Sie damit den § 17, u. ich muss gestehen, dass mir dieser § nicht recht hat einleuchten wollen, besonders, da man fragen könnte, warum die niedrigen Potenzen von $r=\infty$ gegen die ersten weggelassen werden, da dieser ihr Coëfficient $=0$ wird (welcher Zweifel übrigens durch Betrachtungen der Gleichungen zwischen y u. x gehoben werden möchte). Was den § 18 betrift, so habe ich bey wiederholter Ansicht leicht bemerken können, dass die Puncte (1) (3) (5) ... nicht in der Figur 2 abgebildet sind (welches schon die Menge der Puncte in der Figur, nur bis 15, hätten zeigen können). Indessen war doch diese Auslegung, welche sonst dem übrigen Sinn gar keinen Eintrag thut, ziemlich natürlich, da die Worte § 18 »Designato puncto circumferentiae ... per (1)« auf die Figur hinleiten, u. man eher geneigt ist, unter geraden Linien sich Schenkel von Winkeln, als ohne Erinnerung krummlinichte Schenkel dadurch angedeutet zu denken. Wenn Sie, wie Sie schreiben, zur Verhütung alles Missverständnisses noch etwas beyfügen, so wird es desto besser seyn. — Auch die Anmerkg. zu § 20 ist in dieser Hinsicht etwas dunkel, und wohl auf eine oder die andere Art verschrieben. Bey eben diesem § 18 steht als Note »Suppono summam S majorem esse quam $\sqrt{\frac{1}{2}}$; alioquin radium R majorem quam 1 accipere oportet«. Es wird hier etwas verschrieben seyn, u. ohne Zweifel heissen müssen: S minorem quam $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Dabey würde aber die Bedenklichkeit entstehen, ob u. warum diese einschränkende Bedeutung zulässig sey. Dass die Linie, welche $=1$ gesetzt wird, willkührlich ist, hat natürlich hierauf keinen Einfluss. Ferner sagen Sie: summa

$$A\sin(m-1)\varphi+\frac{B}{R}\sin(m-2)\varphi+\frac{C}{R^2}\sin(m-3)\varphi+\frac{D}{R^3}\sin(m-4)\varphi+\text{ec.}$$

certo non potest esse major quam $S\,(=A+B+C+D+\text{ec.})$. Dabey kann man wieder nach dem Grund fragen, da Sie $R<1$ nehmen, also $\frac{1}{R}, \frac{1}{R^2}, \frac{1}{R^3}$ ec. grösser als 1 sind. Übrigens weiss ich nicht, warum R nicht auch grösser als 1 sollte genommen werden dürfen (der sin. tot. ist zwar $=1$, kommt aber natürlich hier nicht in Betrachtung). Für $R>1$ würden dann beyde Bedenklichkeiten wegfallen. Aus diesen Gründen, so weit ich die Sache für jezt übersehe, scheint mir daher eine kleine Änderung nöthig zu seyn, die sich leicht anbringen liesse. —

Ihre Darstellung des wirklich sinnreichen u. einfachen Beweises von D'ALEMBERT ist fast etwas zu gedrängt ausgefallen, so dass es dem Leser, der die Abhandlung nicht selbst hat, schwer seyn möchte, sich sogleich darein zu finden. Vielleicht liessen sich die Hauptpuncte, worauf es dabey ankommt (nehmlich der Ausdruck von x durch eine convergirende Reihe nach X, für kleine Werthe von X, u. der Schluss von kleinen Werthen auf grössere) etwas fasslicher herausheben. Inzwischen ist mir noch eine Bedenklichkeit bey D'ALEMBERTS Beweis aufgestossen. Wenn nehmlich nach BOUGAINVILLE eine allgemeine algebraische Gleichung zwischen x u. X angenommen wird, so lässt sich zwar (mit Hülfe des NEWTONschen #ogramms) x durch eine Reihe nach Potenzen von X darstellen, aber für die Coëfficienten dieser Reihe ergeben sich öfters selbst höhere Gleichungen, daher jene auch unmöglich ausfallen können, wo dann nicht ohne Beweis vorausgesezt werden dürfte, dass sie von der Form $a+b\sqrt{-1}$ sind. So möchte der Beweis in seiner Allgemeinheit sogleich vorgetragen eine Art von logischem Zirkel enthalten. Doch liesse sich auf diese Einwendung vielleicht noch antworten. — Eben indem ich diesen Brief schreibe, bin ich, da ich mir D'ALEMBERTS Beweis auf eine andre Art entwickeln wollte, noch auf eine Schwierigkeit gestossen, ich habe aber jezt nicht Zeit, der Sache weiter nachzudenken. Doch lässt sich vielleicht schon aus folgendem einfachen Beyspiel übersehen, worauf es ankommt, u. was ich damit meyne. Es sey nehmlich die quadratische Gleichung: $y = Ax - Bx^2$, so wird x durch eine convergirende Reihe nach y dargestellt (u. zugleich möglich) wenn $\frac{y}{B} < \frac{A^2}{4B^2}$. Nun könnte man neue Werthe von y u. x annehmen, nehmlich $y' = y + \eta$, $x' = x + \chi$, u. zwey Gleichungen formiren, die eine zwischen y u. x, die andre zwischen η u. χ. Da nun für die erste, y die vorerwähnte Grenze hat, u. für die andere η auch eine gewisse Grenze, so könnte man schliessen, $y + \eta = y'$ werde eine grössere Grenze haben, als die vorige, u. so immer weiter. Dieser Schluss wäre aber natürlich unrichtig, wie sich auch ergibt, wenn man die Gleichung für η entwickelt.

Sie ist:

$$\eta = (A - 2Bx)\chi - B\chi^2$$

also ist die Grenze für sie:

$$\frac{\eta}{B} < \frac{(A-2Bx)^2}{4B^2}.$$

Aber aus der ersten Gleichung ist

$$x = \frac{A}{2B} \pm \sqrt{\left(\frac{A^2}{4B^2} - \frac{y}{B}\right)}$$

also

$$\frac{(A-2Bx)^2}{4B^2} = \frac{A^2}{4B^2} - \frac{y}{B},$$

mithin

$$\frac{\eta}{B} < \frac{A^2}{4B^2} - \frac{y}{B},$$

woraus weiter nichts folgt als

$$\frac{\eta}{B} + \frac{y}{B} \text{ d. i. } \frac{y'}{B} < \frac{A^2}{4B^2},$$

die vorige Grenze. Überhaupt ist die Kleinheit der Werthe von x, für welche die Reihe convergirt, nicht absolut, sondern hängt von den Coëfficienten ab, und diese ändern sich mit der Gleichung. Die allgemeinere Entwicklung dieser Bemerkungen u. ihres näheren Zusammenhangs mit D'ALEMBERTS Schlüssen, worauf sie sich beziehen, kann ich jezt nicht übernehmen: inzwischen würde es mich freuen, wenn Sie solche (so wie die vorige Einwendung gegen D'AL. Beweis) einer weiteren Überlegung werth hielten. —

Ich hatte den Band der Berliner Memoires von 1772 gerade im Haus, aber die Abhandlung von LA GRANGE über die unmögl. Wurzeln noch nicht gelesen, an dem Post-Tag, da mir gemeldet wurde, dass Sie solche zu sehen wünschten. Wegen des für Sie wichtigen arithmetischen Inhalts wollte ich Sie nicht warten lassen, u. las also gleich den Aufsaz von LA GRANGE so weit durch, als nöthig war, um die Haupt-Momente deutlich zu übersehen, besonders da die Sache mit vieler Klarheit vorgetragen ist. Sie werden aus dieser Abhandlung sehen, dass LA GRANGE die Lücken in EULERS Beweis auszufüllen sücht, besonders was theils den von FONCENEX als nicht evident bemerkten Saz, theils die Bestimmung möglicher Werthe von α, β ec. durch u (§ 7 Ihrer Dissert.) betrift. In Rücksicht des 2$^{\text{ten}}$ Punctes möchte es noch darauf ankommen, ob die Säze von der Elimination in der früheren Abhandlung von LA GRANGE (die bekanntlich auch von MICHELSEN deutsch übersezt ist) völlig streng erwiesen sind. Besonders ist mir dabey folgende Bedenklichkeit eingefallen: Wenn r Gleichungen für r unbekannte Grössen u, α, β, ... λ, μ ... gegeben sind, so lassen sich im allgemeinen immer α, β, ... λ, μ, ...

rationell durch u ausdrücken (wie unmittelbar aus dem Verfahren der Elimination folgt), aber es können die Werthe dieser Grössen unbestimmt $a = \frac{0}{0}$ werden, nicht nur für gleiche Werthe aus der Gleichung für u, sondern für jedes u (wo man dann eigentlich keine Gleichung des ersten Grads für a erhält). Doch möchte eine nähere Betrachtung der Elimination für den Fall, der hier zunächst in Betracht kommt, diese Bedenklichkeit heben.

Ich habe Sie schon zu lang mit diesem Brief aufgehalten. Ich will also nichts weiter beyfügen, als dass mir fernere Nachrichten und Mittheilungen von Ihnen jederzeit sehr willkommen seyn werden, u. dass ich mit der aufrichtigsten Hochachtung verharre

Ihr

Helmstedt,
8. Jul. 1799

ergebenster Freund
J. F. Pfaff.

N.S. Sollte in Braunschweig oder Wolfenbüttel Cheyne's *Methodus fluxionum*[*)] zu haben seyn, so würden Sie mich durch dessen Mittheilung auf kurze Zeit verbinden. H. H[of]r[ath] Zimmermann bitte ich mich geh[orsam]st zu empfehlen, wie auch H. Bergrath Volckmar, dessen nähere hier kürzlich gemachte Bekanntschaft mir sehr angenehm gewesen ist. Noch fällt mir eben jezt folgendes bey, das vielleicht doch auch eine Erwägung verdiente. Die Gleichungen $T = 0$ u. $U = 0$ nach x u. y entwickelt gäben eliminiert Gleichungen für x u. für y, deren jede eine mögliche Wurzel haben müsste. Sollte diess nicht aus bekannten Säzen von den möglichen Wurzeln bey Gleichungen vom $2r^{\text{ten}}$ u. $2r-1^{\text{ten}}$ Grad herzuleiten seyn? Indessen möchte doch der Beweis vielleicht nicht leichter seyn, als bey Foncenex's Verfahren. Übrigens wäre eine nähere Betrachtg. der Gleichungen für x u. y immer gut. Bey Foncenex muss u nicht möglich seyn, aber hier müssen x u. y möglich seyn. Doch ich will Sie nicht länger mit flüchtigen Gedanken aufhalten.}

[*) George Cheyne, *Fluxionum methodus inversa sive quantitatum fluentium leges generaliores*, Lond. 1704.]

[3.]

GAUSS an DROBISCH.

Wohlgeborner Herr
Hochzuehrender Herr Professor.

Vor einigen Tagen ist mir das, durch Euer Wohlgeboren gütiges Schreiben schon einige Wochen früher angemeldete Werk aus der DIETRICHschen Buchhandlung zugekommen, und ich eile nunmehro, Ihnen für beides meinen verbindlichsten Dank abzustatten. Dieses schätzbare Werk wird gewiss dazu beitragen, in Deutschland die Liebe zu feineren mathematischen Forschungen mehr zu verbreiten.

Es ist mir umso angenehmer gewesen, zu bemerken, dass Sie in die von mir vor einigen Jahren zuerst in nuce bekannt gemachten [*)], obwohl schon seit fast 40 Jahren gehegten Grundansichten über die imaginären Grössen eingegangen sind, da im Allgemeinen wenige für die Aufklärung der Metaphysik der Mathematik Sinn zu haben scheinen, und namentlich die meisten sogenannten Philosophen von Fach, wenn sie sich auf Mathematik einlassen, uns nur aegri somnia für Philosophie verkaufen. Nur ist die Darstellung der imaginären Grössen in den Relationen der Puncte in plano nicht sowohl ihr Wesen selbst, welches höher und allgemeiner aufgefasst werden muss, als vielmehr das uns Menschen reinste oder vielleicht einzig ganz reine Beispiel ihrer Anwendung. Ich habe öfters meine Theorie mündlich vorgetragen, und dann gefunden, dass sie sehr leicht aufgefasst wird, und gar nichts abstruses behält.

Von FOURIERS Werk habe ich in den hiesigen g[elehrten] A[nzeigen] 1833 Februar p. 321 [**)] eine Anzeige gegeben, indem ich darin dem was darin eigentlich verdienstlich ist Gerechtigkeit widerfahren lassen, habe ich zugleich eine wenngleich nur leise Andeutung dessen was ich davon tadle gegeben. Ich habe dort absichtlich mich über die captiöse Phrase, dass die fehlenden Wurzeln imaginär werden, welche Phrase im Grunde ist, was die Engländer

[*) Anzeige der *Theoria residuorum biquadraticorum, Comm. secunda,* 1831, Werke II, S. 174 ff.]
[**) Werke III, S. 110 ff.]

unfair nennen, nicht weiter ausgelassen; aber ich kann auf das klarste beweisen, dass ein Zusammenhang zwischen den einzelnen imaginären Wurzelpaaren mit bestimmten Stellen, wo Wurzeln ausfallen, nicht Statt findet, und behalte mir vor, diess bei einer andern Gelegenheit zu entwickeln.

Es ist mir angenehm gewesen, dass Sie die Einfachheit und gleichsam Directheit meines ersten Beweises die Wurzeln betreffend von 1799, anerkennen. Auch bin ich weit davon entfernt zu läugnen, dass mein zweiter Beweis weitläufig ist. Mein Zweck dabei war hauptsächlich mit, nachzuweisen was eigentlich den durchaus illusorischen Versuchen, mit denen selbst Geometer ersten Ranges früher sich selbst getäuscht hatten, fehle, und wie es ergänzt werden müsse, und diess konnte nicht ohne Ausführlichkeit geschehen. Hingegen kann ich den Vorwurf der Weitläufigkeit nicht zugeben, wenn Sie ihn auch auf den Dritten erstrecken. Diesen halte ich für den kürzesten und einfachsten von allen dreien. Auch ist derselbe im höchsten Grade sinnlich zu machen was ich aber dort für ein hors d'oeuvre hätte halten müssen, wo ich alles in rein algebraischer Form darstellen wollte. Übrigens aber finde ich den Cauchyschen Beweis in seiner Grundidee eben so elegant, und möchte, wenn ich mich auf Einen beschränken sollte, selbst diesem den Vorzug geben. Aber am lehrreichsten ist es wohl beide Grundideen zu entwickeln, wo in der That die Betrachtung der gleichsam geometrischen Bedeutung beider für den Verstand etwas recht ergötzliches hat. Eine concentrirte aber durchaus alles wesentliche enthaltende Darstellung meines dritten Beweises hatte ich in den G. G. A. 1816 p. 338f. [*)] gegeben.

Unter Bezeugung meiner ausgezeichneten Hochachtung und Ergebenheit habe ich die Ehre zu beharren

Ew. Wohlgeboren

Göttingen den 14. August 1834. gehorsamer Diener

C. F. Gauss.

H. Prof. Möbius bitte ich unter meiner besten Empfehlung um die baldige Mittheilung der magnetischen Beobachtung am 6., 7. d. zu erinnern, die wir hier umso begieriger erwarten, da hier am 7. ungemein auffallende Anomalien beobachtet sind.

[*) Werke III, S. 107.]

[4.]

GAUSS an SCHUMACHER.

Göttingen, 1840 Juni 20.

Beigehend, mein theuerster Freund, schicke ich Ihnen den CLAUSENschen Aufsatz zurück. Ich habe ihn mit Vergnügen gelesen, wenn gleich derselbe, seinem wesentlichen Inhalt nach nur eine analytische Einkleidung desjenigen Princips ist, welches ich im letzten (24.) Artikel meiner Schrift von 1799[*)] in geometrischer Form angedeutet habe, sowie ich auch dort (Ende des 23. Art.) bemerkt habe, dass der Nerv davon eigentlich mit dem D'ALEMBERTischen Princip coincidirt. Indessen macht die Tournure, die Hr. CLAUSEN ihm gegeben hat, ihn der Aufnahme in die A. N. zweifelsohne vollkommen würdig[**)]. Ganz befriedigend und dem Rigor antiquus genügend ist übrigens die Ausführung nicht, indem daraus allein, dass eine Grösse [sich] unaufhörlich in einerlei Sinn ändert, z. B. wie bei CLAUSEN eine reale negative, die immer noch weiter (absolut) abnehmen kann, noch nicht evident ist, dass sie jeden auf dem Wege liegenden Werth wirklich erreichen kann, also im CLAUSENschen Falle den 0 Werth erreichen. Ich habe diesen Umstand in den letzten Zeilen jener Schrift selbst angemerkt, so wie zugleich, dass er sich allerdings heben lässt, aber gerade weil diess, im Geiste des Rigor antiquus, nicht ohne einige Umständlichkeit geschehen kann, habe ich später dieses Verfahren nicht selbst ausgeführt. . . . .

[*) Werke III, S. 29.]

[**) Der vom 16. Juni 1840 datierte Aufsatz von THOMAS CLAUSEN, *Beweis, dass die algebraischen Gleichungen Wurzeln von der Form* $a+bi$ *haben,* ist abgedruckt in den Astronomischen Nachrichten **17** (1840), Spalte 325 ff.]

[5.]

GAUSS an MÖBIUS.

Hochgeschätzter Freund!

. . . .

Für die jetzt übersandte Abhandlung sage ich meinen verbindlichsten Dank. Ich habe freilich die genauere Lectüre auf freiere Zeit zurücklegen müssen. Der Gegenstand gehört einem Felde an, dem Sie schon manche schöne Früchte abgewonnen haben. Ich möchte Ihrem Nachdenken noch einen analogen Gegenstand empfehlen, zu dessen eigner Bearbeitung mir schwerlich in langer Zeit Musse gegeben sein wird. Ich meine die verschiedene Gestaltung und Kreuzung der Linien $T = 0$ oder $U = 0$ in meiner Schrift von 1799 [*)] nach Massgabe der Ordnung der betreffenden Function. Ich meine die Enumeratio aller verschiedener Fälle für die Configuration der unendlichen Äste. Anderes damit verwandtes hat mich vielfach beschäftigt, und ich wollte erst zu meiner neulich in der Societ. gehaltenen Vorlesung [**)] die Darstellung der Hauptmomente jener Untersuchung als 3ten Theil bestimmen; aber ich würde zur Ausarbeitung dieser Darstellung einer viel grösseren Musse bedurft haben, als mir zu Gebote gestanden hat.

Ihrem freundlichen Andenken empfehle ich mich angelegentlich und ergebenst

C. F. GAUSS.

Göttingen den 13. August 1849.

BEMERKUNGEN ZUM VORSTEHENDEN BRIEFWECHSEL.

Das GAUSSarchiv besitzt im ganzen zwanzig Briefe von JOHANN FRIEDRICH PFAFF an GAUSS. Die Briefe von GAUSS an PFAFF sind bis auf einen, vom 21. März 1825, nicht aufzufinden gewesen. Dieser eine ist abgedruckt in der *Sammlung von Briefen gewechselt zwischen Joh. Friedr. Pfaff und ... andern*, herausgegeben von Dr. CARL PFAFF, Leipzig 1853, S. 277 ff. Die vorstehenden beiden Briefe von PFAFF werfen ein interessantes Streiflicht auf die Entstehungszeit von GAUSS' Inauguraldissertation.

[*) *Demonstratio nova etc.*, Werke III, S. 1; siehe besonders art. 17, S. 10.]

[**) *Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen*, vorgelesen in der Sitzung der Königl. Gesellsch. d. Wissenschaften am 16. Juli 1849, Werke III, S. 71.]

Der Brief von GAUSS an DROBISCH, der hier nach einer im GAUSSarchiv befindlichen Abschrift abgedruckt ist (die Urschrift ist in Privatbesitz), ist durch die Wertung von Interesse, die GAUSS darin den verschiedenen Beweismethoden für den Fundamentalsatz zu Teil werden läßt. Das Werk von MORITZ WILHELM DROBISCH, von dem darin die Rede ist, führt den Titel: *Grundzüge der Lehre von den höheren numerischen Gleichungen nach ihren analytischen und geometrischen Eigenschaften,* Leipzig 1834, XXX + 341 S. mit 2 Kupfertafeln; es gibt S. 94 ff. den Beweis der Wurzelexistenz nach der Inauguraldissertation von GAUSS. Die Bemerkung, die GAUSS in dem Briefe in bezug auf seinen zweiten und dritten Beweis macht, ist durch eine auf S. 94 des Buches von DROBISCH befindliche Fußnote veranlaßt, in der es heißt: »Desselben berühmten Geometers *dem. nova altera etc.*, Gottingae 1816 [Werke III, S. 31] und *demonstratio tertia,* ibid. eod. ao. [Werke III, S. 57] würden sich theils wegen der Weitläufigkeit des Beweises, theils wegen der dabei gebrauchten Hülfsmittel hier nicht benutzen lassen«. Den von CAUCHY in der *Analyse algébrique,* 1821, S. 329 (Oeuvres, 2. série, t. III, 1897, S. 274) gegebenen Existenzbeweis*) entwickelt DROBISCH a. a. O. S. 88 ff.; bekanntlich muß aber dieser CAUCHYsche Beweis im Sinne des 4. Einwands, den GAUSS 1799 gegen den Beweis von D'ALEMBERT erhoben hat (Werke III, S. 10), vervollständigt werden, vergl. was GAUSS in dem Briefe [4.] über den Beweis von CLAUSEN bemerkt. GAUSS selbst hat in einer Vorlesung, die er von Neujahr bis Ostern 1840 über die *Theorie der imaginären Größen* gehalten hat, neben seinem ersten und dritten Beweise, den gedachten Beweis von CAUCHY vorgetragen. Eine Ausarbeitung dieser Vorlesung von E. HEINE (vergl. Werke VIII, S. 330, 345) befindet sich im GAUSSarchiv. In bezug auf die Bemerkungen, die GAUSS über das Werk von FOURIER und seine Anzeige macht, vergl. die weiter unten abgedruckten Stellen aus Briefen von GAUSS an SCHUMACHER. Der von GAUSS gebrauchte Ausdruck aegri somnia (S. 106, Zeile 17) stammt aus HORAZ, *Ars poëtica* 7, wo es von einem Buche heißt: »cuius velut aegri somnia vanae fingentur species«.

Der Brief an SCHUMACHER vom 20. Juni 1840 fehlt in der von C. A. F. PETERS veranstalteten Ausgabe des Briefwechsels GAUSS-SCHUMACHER. Er ist die Antwort auf den im dritten Bande, S. 379 abgedruckten Brief Nr. 697 SCHUMACHERS. Die Urschrift befindet sich im GAUSSarchiv.

Der Brief an A. F. MÖBIUS befindet sich mit noch mehreren andern von GAUSS an denselben Empfänger gerichteten im MÖBIUSarchiv der K. S. Gesellsch. der Wissensch. zu Leipzig**); die Abhandlung, für deren Zusendung GAUSS dankt, ist wohl die *Über die Grundformen der Linien dritter Ordnung* (Abhandlungen der mathem.-phys. Classe der K. S. Gesellschaft der Wissensch. **1**, Leipzig 1852***), S. 1, MÖBIUS' Werke II, S. 89).

SCHLESINGER.

---

*) Man führt diesen Beweis neuerdings auf J. R. ARGAND zurück, siehe die anonym erschienene Schrift *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires,* Paris 1806, § 31 und Annales de mathématiques pures et appliquées **5**, 1815, S. 201, beides neu herausgegeben von J. HOÜEL, Paris 1874.

) Vergl. H. LIEBMANN, *Aus dem Möbiusarchiv,* Berichte der math.-phys. Klasse der K. S. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig **32, 1910, S. 198; der hier im Auszug abgedruckte Brief ist erst nach dem Erscheinen dieses Aufsatzes aufgefunden worden, auch ist zu bemerken, daß der Brief von GAUSS an MÖBIUS vom 17. Oktober 1843 sich gegenwärtig im GAUSSarchiv befindet.

***) 1852 ist das Jahr der Fertigstellung des ersten Bandes der Abhandlungen, die MÖBIUSsche Abhandlung selbst ist bereits 1849 ausgegeben worden.

NACHLASS UND BRIEFWECHSEL.

[ÜBER DIE KREISTHEILUNGSGLEICHUNG.]

[I.]

[ÜBER DIE PERIODEN VON $\frac{p-1}{3}$ UND $\frac{p-1}{4}$ GLIEDERN.]

[1.]

[Eintragung im HELLWIG *), letzte Einbandseite.]

Aequationes pro summis periodorum subtriplarum $\sqrt[6n+1]{1}$.

$$3x = z - 1$$

$$7. \qquad x^3 + x^2 - 2x - 1 = z^3 - 21z - 7 \qquad \Sigma\sqrt[3]{\frac{21 \pm 21\sqrt{-3}}{2}}$$

$$13. \qquad x^3 + x^2 - 4x + 1 = z^3 - 39z + 65 \qquad \Sigma\sqrt[3]{\frac{39 \pm 39\sqrt{-3}}{2}}.$$

[2.]

[Eintragung im LEISTE, S. 8.]

Ad solutionem aequ: $x^p = 1$ aeq: conditionales:

secundi gradus

$$\begin{array}{r|l} xx + x - n = 0 & \text{pro } p = 4n + 1 \\ xx + x + n = 0 & \text{pro } p = 4n - 1 \end{array}$$

[*) Gemeint ist das Exemplar von J. CHR. L. HELLWIG, *Anfangsgründe der allgemeinen Mathematik u. s. w.*, Braunschweig 1777, in das GAUSS mehrere wissenschaftliche Bemerkungen eingetragen hat.]

tertii gradus

p	aequ. 1.	aeq. 2. e prima $z = 3x+1$	Radicum binae partes
7	$x^3+x^2-2x-1=0$	$z^3-21z-7=0$	$\sqrt[3]{}(7\pm 21\sqrt{-3}):2$
13	$x^3+x^2-4x+1=0$	$z^3-39z+65=0$	$\sqrt[3]{}(-65\pm 39\sqrt{-3}):2$
19	$x^3+x^2-6x-7=0$	$z^3-57z-133=0$	$\sqrt[3]{}(133\pm 57\sqrt{-3}):2$
31	$x^3+x^2-10x-8=0$	$z^3-93z-4.31=0$	
37	$x^3+x^2-12x+7=0$	$z^3-111z+11.37=0$	

Aequationis secundae forma generalis

$$z^3-3pz-kp \qquad \text{Rad.} = \sqrt[3]{}(kp\pm l\sqrt{-3}):2$$

k determinatur hoc modo: $\qquad l = p(t\pm u)$

sit

$$p = tt+3uu$$

et erit

$$k = \pm t\pm 3u.$$

[3.]

[Aus Handbuch 18, Bd, Oktober 1805, S. 147.]

Cubus.

Es sei

$$4p = aa+27bb.$$

Man mache

$$\frac{a}{\sqrt{4p}} = \cos\varphi, \quad \frac{b\sqrt{27}}{\sqrt{4p}} = \sin\varphi.$$

Dann ist der Period von $\frac{1}{3}(p-1)$ Gliedern

$$= -\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}\cos\tfrac{1}{3}\varphi\sqrt{p}.$$

Biquadrat.

Es sei

$$p = aa+4bb,$$

$$\frac{a}{\sqrt{p}} = \cos\varphi, \quad \frac{2b}{\sqrt{p}} = \sin\varphi$$

Der Period von $\frac{1}{4}(p-1)$ Gliedern

$$= -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{p} + \tfrac{1}{2}\sqrt{p}\cos\tfrac{1}{2}\varphi$$
$$= \Pi$$

$$\Pi^0 + i\Pi' - \Pi'' - i\Pi''' = \sqrt{p}\cdot\sqrt[4]{\frac{a+b\sqrt{-4}}{a-b\sqrt{-4}}}.$$

BEMERKUNG.

Zu den Aufzeichnungen [1.] und [2.] vergleiche man die Tagebuchnotizen Nr. 39 vom 1. Okt. 1796 und Nr. 67 vom 20. Juli 1797, zu [3.] die Tagebuchnotiz Nr. 128 aus dem Jahre 1806. Wir können hiernach die vorstehenden Aufzeichnungen als die ersten nach der Entdeckung ansehen. Vergl. *Disquisitiones Arithmeticae* art. 358 (Werke I, S. 445) und die bezüglichen Bemerkungen im Artikel **15** des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«.

SCHLESINGER.

[II.]

DER GOLDENE LEHRSATZ.

[1.]

[Ein Zettel in Ea 5, Kapsel 40.]

1. Es sei p eine Primzahl und $p-1$ habe die Factoren e, f. Z. B. 67; $66 = 6.11$.

2. Bekanntlich lassen sich die irrationalen Werthe von $\sqrt[p]{1}$ in e (6) Klassen theilen, deren jede f (11) Glieder enthält und so dass, wenn man in jeder eine Elementarwurzel nimmt, die Exponenten der übrigen eine geometrische Reihe bilden, deren Exponenten $= \sqrt[f]{1}$ Mod. p.

3. Die Summen dieser e Klassen sind Wurzeln einer Gleichung vom Grade e, welche sich leicht in jedem Falle angeben lässt.

4. *Diese Gleichung ist möglich für jeden Primmodulus* $= \sqrt[e]{1}$ Mod p.

Beispiel

$$7 = \text{pr.} = 1 + 2.3$$

Elementarwurzel $\sqrt[7]{1} = \rho$.

Datur aequatio pro

$$\begin{aligned} \rho + \rho^6 &= a \\ \rho^2 + \rho^5 &= b \qquad x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0 \\ \rho^4 + \rho^3 &= c \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat reelle Wurzeln für jeden Primmodulus $14n \pm 1$. Ex. gr. für 13 sind die Wurzeln 7, 9, 10.

[2.]

[Eintragung im LEISTE, S. 108.]

Theorema generale Demonstrandum.

1. Sit p primus et si fieri potest discerpatur $p-1$ in factores e, f. Ex. gr. $43 = p$; $42 = 3.14$.

2. His positis semper datur aequatio gradus e, cuius radices sunt $\Sigma(\sqrt[p]{1})^z$, term. f, mod. p. Nostro casu datur aequatio

$$x^3 + Axx + Bx + C = 0,$$

cuius radices sunt

1) $\varepsilon + \varepsilon^{(\rho^3)} + \varepsilon^{(\rho^6)} + \varepsilon^{(\rho^9)} + \cdots + \varepsilon^{(\rho^{39})}$

2) $\varepsilon^{\rho} + \varepsilon^{(\rho^4)} + \varepsilon^{(\rho^7)} + \cdots$

3) $\varepsilon^{\rho\rho} + \varepsilon^{(\rho^5)} + \cdots$

ubi $\varepsilon = \sqrt[p]{1}$, ρ radix elem. modulo existente p.

Dico, hanc aequationem habere omnes radices (resid: f) reales posito modulo quocunque m, quando

$$m^e \equiv 1 \text{ modulo } p.$$

BEMERKUNG.

Vergl. die bezüglichen Bemerkungen im Artikel **17** des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«; ferner die ebenda (in einer Fußnote zum Artikel **15**) abgedruckte Aufzeichnung, die GAUSS in LAMBERTS *Tabellen*, S. 223 eingetragen hat. In [2.] bedeutet die Abkürzung (resid: f) residua summarum, d. h. Reste der Perioden.

SCHLESINGER.

[III.]

[DIE UNZERLEGBARKEIT DER KREISTEILUNGSGLEICHUNG.]

[Aus Handbuch 18, Bd, October 1805, S. 198—199.]

[1.]

Die radices propriae der Gleichung

$$x^{a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \cdots} - 1 = 0$$

oder

$$x^n - 1 = 0,$$

wo a, b, c, d etc. ungleiche Primzahlen bedeuten, sind enthalten in der Gleichung

$$\frac{x^n - 1 \,.\, x^{\frac{n}{ab}} - 1 \,.\, x^{\frac{n}{ac}} - 1 \,.\, x^{\frac{n}{bc}} - 1 \text{ etc. } x^{\frac{n}{abcd}} - 1 \text{ etc. etc.}}{x^{\frac{n}{a}} - 1 \,.\, x^{\frac{n}{b}} - 1 \,.\, x^{\frac{n}{c}} - 1 \,.\, x^{\frac{n}{d}} - 1 \text{ etc. } x^{\frac{n}{abc}} - 1 \,.\, x^{\frac{n}{abd}} - 1 \,.\, x^{\frac{n}{bcd}} - 1 \text{ etc. etc.}} = 0$$

oder

$$X = 0.$$

Der Werth von X für $x = 1$ wird gleich 1, wenn mehr als ein Factor im Exponenten n, oder $= a$, wenn $n = a^\alpha$. Setzt man die Anzahl der Factoren a, b, c, d etc. $= \nu$, so sind

$$\left.\begin{matrix}\text{im Zähler}\\ \text{im Nenner}\end{matrix}\right\}\text{von } X \left\{\begin{matrix} 1 + \frac{\nu.\nu-1}{1.2} + \frac{\nu.\nu-1.\nu-2.\nu-3}{1.2.3.4} + \text{etc.} \\ \nu + \frac{\nu.\nu-1.\nu-2}{1.2.3} + \cdots \end{matrix}\right.$$

Factoren, oder in jedem $2^{\nu-1}$.

Wenn X einen Factor vom Grade λ hätte, dessen Coefficienten alle rational wären, so lässt sich zeigen

1) dass λ durch $a^{\alpha-1}(a-1)$, $b^{\beta-1}(b-1)$, $c^{\gamma-1}(c-1)$ u. s. w. theilbar seyn müsste,

2) dass sodann auch die Function, deren Wurzeln alle eigentlichen Wurzeln der Gleichung

$$x^{b^\beta c^\gamma d^\delta \cdots}-1=0$$

sind, einen Factor der Dimension $\frac{\lambda}{a^{\alpha-1}(a-1)}$ haben müsste, dessen Coefficienten alle durch Wurzeln der Gleichung

$$x^{a^\alpha}-1=0$$

rational dargestellt werden könnten.

Von dem Beweise würde folgendes Hauptmomente ausmachen.

I. Wenn a, b, c, d etc. ganze Zahlen sind, R Wurzel der Gleichung $x^\beta-1=0$ und p Primzahl $=k\beta+1$, so wird

$$(a+bR+cR^2+dR^3+\cdots)^\beta$$

entwickelt nicht

$$\equiv 0 \pmod{p,\ x^{\beta-1},\ x^{\beta-2},\ \ldots}$$

seyn können.

Bew[eis]: Wäre

$$(a+bR+cR^2+\cdots)^\beta\equiv 0$$

so wäre auch

$$(a+bR+cR^2+\cdots)^{\beta k+1}\equiv 0;$$

aber jene Potenz ist

$$\equiv a+bR+cR^2+\text{ etc.}\equiv (b-a)R+(c-a)R^2+\text{ etc.},$$

folglich müsste sein

$$a\equiv b\equiv c \text{ etc.},$$

daraus würde aber folgen

$$a^2+b^2+c^2+\cdots-ab-ac-\text{ etc.}\equiv 0 \pmod{pp}.$$

[2.]

Gleichung

$$x^{a^\alpha a'^{\alpha'} a''^{\alpha''} a'''^{\alpha'''}} - 1 = 0$$

oder

$$x^n - 1 = 0.$$

[Die] Gleichung der primitiven Wurzeln $X = 0$ hat

$$n\,\frac{a-1\,.\,a'-1\,.\,a''-1\ldots}{a\,.\,a'\,.\,a''\ldots}$$

Dimensionen. X habe den rationalen Divisor Y, und es sei [ρ] eine Wurzel der Gleichung $Y = 0$, [für] diese ρ kann man voraussetzen

$$\rho = r r' r'' \ldots,$$

so dass r, r', r'' u. s. w. primitive Wurzeln der Gleichungen

$$x^{a^\alpha} - 1 = 0,\quad x^{a'^{\alpha'}} - 1 = 0 \text{ etc.}$$

sind. Es sei ferner σ eine Wurzel der Gleichung

$$\frac{X}{Y} = 0,$$

so kann man voraussetzen

$$\sigma = r^\beta r'^{\beta'} r''^{\beta''} \ldots,$$

so dass β, β', β'' etc. Divisoren von

$$a^{\alpha-1}(a-1),\quad a'^{\alpha'-1}(a'-1),\quad a''^{\alpha''-1}(a''-1) \text{ etc.}$$

sind.

Alle Wurzeln, die ein vollständiges System bilden, werden sich so darstellen lassen:

$$g, g', g'', \ldots \text{ radices primit. congr. } x^{a^{\alpha-1}(a-1)} \equiv 1 \text{ (mod. } a^\alpha) \text{ etc.}$$

$$r^{g^{\lambda x}}\, r'^{g'^{\mu x + \mu' x'}}\, r''^{g''^{\nu x + \nu' x' + \nu'' x''}} \ldots,$$

wo λ, μ', ν' etc. Divisoren von $a^{\alpha-1}(a-1), \ldots$

$$\frac{\mu a^{\alpha-1}(a-1)}{\lambda} \text{ div. per } \mu'$$

$$\frac{\nu a^{\alpha-1}(a-1)}{\lambda}, \quad \frac{\nu\nu' a'^{\alpha'-1}(a'-1)}{\mu'} \text{ div. per } \nu'' \text{ etc.}$$

[und] wo für x alle ganze Zahlen $0, 1, 2, \ldots, (a^{\alpha-1}(a-1):\lambda)-1$

x' alle ganze Zahlen $0, 1, 2, \ldots, (a'^{\alpha'-1}(a'-1):\mu')-1$

x'' alle ganze Zahlen $0, 1, 2, \ldots, (a''^{\alpha''-1}(a''-1):\nu'')-1$

zu substituiren sind. Hier besteht das ganze System aus

$$\frac{n(a-1)(a'-1)(a''-1)\ldots}{a.a'.a''\ldots\lambda.\mu'.\nu''\ldots}$$

Wurzeln und alle Wurzeln der Gleichung $X=0$ zerfallen in $\lambda\mu'\nu''$ etc. Systeme, $\mu<\mu'$, ν, $\nu'<\nu''$ etc.

BEMERKUNG.

Nach der Tagebuchnotiz Nr. 136 hat GAUSS die Unzerlegbarkeit der Gleichung, der die primitiven Lösungen von $x^n = 1$ genügen, für ein zusammengesetztes n am 12. Juni 1808 bewiesen. Die vorstehende Aufzeichnung stammt wahrscheinlich aus dieser Zeit, da in demselben Handbuche astronomische Rechnungen vorangehen, die die Örter der kleinen Planeten Juno und Ceres für 1808 bestimmen. Vergl. auch die bezüglichen Bemerkungen in dem Artikel 14 des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«.

SCHLESINGER.

[IV.]

[ÜBER DAS REGELMÄSSIGE SIEBZEHNECK.]

[1.]

PFAFF an GAUSS.

{Helmstedt, 22. März 1802.

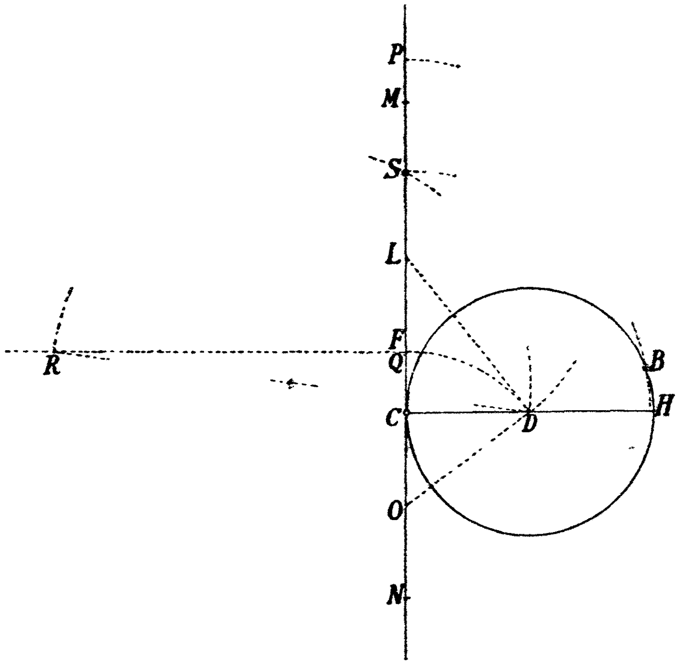
. . . .

LANGSDORFS Compendium [*)] habe ich kürzlich bekommen, aber noch nicht durchgesehen, es ist jezt beym Buchbinder. Prof. PFLEIDERER, den man wohl als den Repräsentanten der ächt geometrischen Methode in Deutschland ansehen kann, ist, wie er in einem Brief an mich geäussert hat, nicht damit zufrieden. In eben diesem Brief hat er mir auch eine geometrische Construction des 17-Ecks mitgetheilt, nach Ihren Formeln oder nach denjenigen, die ich ihm als Auszug aus Ihrem ersten Msct. überschickt hatte. Soviel ich mich erinnere, habe ich Ihnen das vorigemal diese Construction nicht communicirt, sie ist mit seinen Worten folgende:

»Diametro CH circuli dati ad extremum eius C normalis ducatur PN recta: a qua abscindantur primum $CF = \frac{1}{4}CH$; tum FM, FN utraque $= FH$. Bifariam in punctis L, O secentur rectae CM, CN: et ad centrum D circuli propositi ductis LD, OD rectis, ab perpendiculo PN abscindantur $LP = LD$, $OQ = OD$. Ad rectam CQ applicetur rectangulum (CSQ) aequale rectangulo sub DC et CP, et excedens quadrato (quod fit, si recta PN ad Q punctum normalis ducitur $QR = CP$, et super diametro DR circulus describitur secans rectam CP in S). Denique centro C, intervallo CS, descri-

[*) K. CHR. v. LANGSDORF, *Anfangsgründe der reinen elementaren und höheren Mathematik u. s. w.*, Erlangen 1802.]

batur circulus, secans propositum circulum in B. Erit HB latus polygoni regularis XVII laterum, circulo dato inscribendi«.



Ich habe schon vor einiger Zeit eine Construction gefunden, die ich Ihnen gelegentlich ein andermal mittheilen will. . . . .

Behalten Sie ferner in freundschaftlichem Andenken

Ihren ergebensten Freund

J. FR. PFAFF.}

[2.]

GAUSS an GERLING.

Sie haben wol gezürnt, liebster GERLING, dass ich Ihr Verlangen, Ihre Abhandlung Ihnen noch im vorigen Jahre zurückzusenden, nicht erfüllt habe. Theils wünschte ich Ihnen über die Polygone die nöthige Auskunft zu geben; allein immer konnte ich dazu keine Musse gewinnen, indem besonders die practischen Arbeiten fast alle Zeit absorbiren. Theils hoffte ich, Ihnen ein

Exemplar meiner Vorlesung über die Attraction elliptischer Ringe [*)] beifügen zu können, welches auch manches andre Ihnen wol Interessante enthält z. B. die ersten Linien meiner arithmetisch-geometrischen Mittel; allein obgleich ich diese Vorlesung bereits vor einigen Wochen zur Correctur gehabt, habe ich doch noch immer keine Abdrücke erhalten. Länger darf ich aber mit meiner Antwort nicht zögern.

Zuvörderst danke ich verbindlichst für die Mittheilung Ihres Aufsatzes, den ich mit vielem Vergnügen gelesen habe. Ihre Resultate sind merkwürdig und ich wünsche sehr, dass Sie diese Versuche weiter fortsetzen mögen.

Ich glaube, dass Sie mit Unrecht die Theorie der Polygone in meinen D. A. scheuen, und dass es nur auf den Versuch ankommt, wo Sie gewiss alles sehr leicht finden werden. Wenn ich jetzt ein Paar Stunden dazu anwende, über diesen Gegenstand zu schreiben, so geschieht es in der Hoffnung, dass eben das Lückenhafte, welches in einer abgerissenen Darstellung der 17-Theilung, die ich hier gebe, nothwendig bleiben muss, Sie anreizen wird, das Allgemeine an der Quelle zu schöpfen. Für mich wenigstens sind und bleiben die Unters[uchungen] der höhern Arithmetik, bei weitem das Allerschönste der Mathematik, und der Genuss, den ich, auch an der schönsten astronomischen Untersuchung finde, ist gar Nichts, verglichen mit dem, welchen die höhere Arithmetik gewährt.

Bloss synthetisch beweisen lässt sich die Constructibilität des 17-Ecks sehr leicht und kurz.

Es sei

$$360^0 = 17\varphi.$$

Ich setze

$\cos\varphi + \cos 4\varphi = a$	$a + b = e$
$\cos 2\varphi + \cos 8\varphi = b$	$c + d = f$
$\cos 3\varphi + \cos 5\varphi = c$	Also nach einem bekannten Satze
$\cos 6\varphi + \cos 7\varphi = d$	1) $e + f = -\frac{1}{2}$.

Durch leichte Entwickelung, mit der Überlegung, dass

$$\cos n\varphi = \cos(17 - n)\varphi,$$

[*) *Determinatio attractionis etc.*, 1818, Werke III, S. 331.]

findet man

$$\begin{array}{l|l} 2ab = e+f = -\tfrac{1}{2} & 2bc = a+2c+d \\ 2ac = 2a+b+d & 2bd = a+2b+c \\ 2ad = b+c+2d & 2cd = e+f = -\tfrac{1}{2}. \end{array}$$

Hieraus also

$$2ac+2ad+2bc+2bd = 4a+4b+4c+4d$$

d. i.

$$2ef = -2$$

oder

2) $$ef = -1.$$

Man sieht also aus 1) und 2), dass e und f Wurzeln der Gleichung

$$xx+\tfrac{1}{2}x-1 = 0$$

sind also die eine gleich

$$= -\tfrac{1}{4}+\sqrt{\tfrac{17}{16}}, \text{ die andre } = -\tfrac{1}{4}-\sqrt{\tfrac{17}{16}}.$$

Dass die erste $= e$, die andre $= f$ ist, gibt eine oberflächliche Kenntniss der numerischen Werthe; will man diese nicht benutzen, so ist die Untersuchung altioris indaginis (besonders bei den Polygonen im Allgemeinen) und kann hier nicht entwickelt werden. S. m. Abhandlung *Summatio quarundam serierum singularium* 1808 [*)].

Ferner sind a und b Wurzeln der Gleichung

$$xx-ex-\tfrac{1}{2} = 0$$

also die Werthe

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}e \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}ee)} \\ &= -\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}\sqrt{17} \pm \tfrac{1}{8}\sqrt{(34-2\sqrt{17})}. \end{aligned}$$

Dass das obere Zeichen für a, das untere für b gelten muss, ist in diesem Falle leicht einzusehen, da

$$a-b = (\cos\varphi - \cos 2\varphi)+(\cos 4\varphi - \cos 8\varphi)$$

offenbar positiv seyn muss. Auf ähnliche Weise wird

[*) Werke II, S. 9.]

$$c = -\tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{8}\sqrt{17} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(34 + 2\sqrt{17})}$$
$$d = -\tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{8}\sqrt{17} - \tfrac{1}{8}\sqrt{(34 + 2\sqrt{17})}.$$

Endlich sind nun offenbar $\cos\varphi$ und $\cos 4\varphi$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung (weil das Product $\cos\varphi\ \cos 4\varphi = \frac{1}{2}c$)

$$xx - ax + \tfrac{1}{2}c\,[=0],$$

also

$$\cos\ \varphi = +\tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{2}c)}$$
$$\cos 4\varphi = +\tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{2}c)}.$$

Da nun

$$2aa = 2 + b + 2c$$

wird, so ist

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8}b - \tfrac{1}{4}c)} \\ &= -\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16}\sqrt{17} + \tfrac{1}{16}\sqrt{(34 - 2\sqrt{17})} \overset{*}{+} \tfrac{1}{8}\sqrt{\{17 + 3\sqrt{17}} \\ &\qquad - \sqrt{(34 - 2\sqrt{17})} - 2\sqrt{(34 + 2\sqrt{17})\}}.\end{aligned}$$

Diess ist dieselbe Formel, die in meinen D. A. p. 662 steht[*)], nur ist dort durch einen Druckfehler statt des $+$, welches hier mit * bezeichnet ist, ein $-$ gesetzt, oder, was dasselbe ist, die dortige Formel stellt nicht $\cos\varphi$ sondern $\cos 4\varphi$ d. i. $\sin\frac{90^\circ}{17}$ vor, also die halbe Seite des 34-Ecks. — Die übrigen Cosinus bekommen ganz ähnliche Ausdrücke.

In den D. A. habe ich vorgezogen, statt des $\cos n\varphi$, die Grösse

$$\cos n\varphi + \sqrt{-1}\ \sin n\varphi$$

d. i. die Wurzel der Gleichung $x^{17} - 1 = 0$ zu brauchen, wodurch alles viel zierlicher wird.

Die obige Darstellung ist an sich zureichend. Im Allgemeinen, wenn es die Theilung des Kreises in p Theile gilt, wo p eine Primzahl, kommt es darauf an, die $\frac{p-1}{2}$ Cosinus der Bögen

$$\frac{360}{p},\ 2\cdot\frac{360}{p},\ 3\cdot\frac{360}{p},\ \ldots,\ \frac{1}{2}(p-1)\cdot\frac{360}{p}$$

[*) Werke I, S. 462, wo der Druckfehler verbessert ist.]

auf eine solche Weise in Gruppen zu theilen, dass ähnliche Erfolge hervorgehn wie hier, und diess beruht lediglich [auf] arithmetischen Principien, die der 3. Abschnitt meiner *Disq* enthält. Alles hängt dabei von den Factoren der Zahl $\frac{1}{2}(p-1)$ ab; ist diese Zahl eine Potenz von 2, z. B.

$$p = 3,\ 5,\ 17,\ 257,\ 65537,$$

so kommen bloss quadratische Gleichungen vor; hingegen z. B. für $p = 31$, wo $\frac{1}{2}(p-1) = 3.5$, ist eine cubische und eine Gleichung vom 5. Grade unausweichlich.

Das Geschichtliche jener Entdeckung ist bisher nirgends von mir öffentl. erwähnt; ich kann es aber sehr genau angeben. Der Tag war der 29. März 1796, und der Zufall hatte gar keinen Antheil daran. Schon früher war alles was auf die Zertheilung der Wurzeln der Gleichung

$$\frac{x^p-1}{x-1} = 0$$

in zwei Gruppen sich bezieht, von mir gefunden, wovon der schöne Lehrsatz D. A. p. 637 [*)] unten abhängt u. zwar im Winter 1796 (meinem ersten Semester in Göttingen), ohne dass ich den Tag aufgezeichnet hätte. Durch angestrengtes Nachdenken über den Zusammenhang aller Wurzeln unter einander nach arithmetischen Gründen, glückte es mir bei einem Ferienaufenthalt in Braunschweig, am Morgen des gedachten Tages (ehe ich aus dem Bette aufgestanden war) diesen Zusammenhang auf das klarste anzuschauen, so dass ich die specielle Anwendung auf das 17-Eck und die numerische Bestätigung auf der Stelle machen konnte. Freilich sind später noch andere Untersuchungen des 7. Abschnitts der D. A. hinzu gekommen. Ich kündigte diese Entdeckung in der Jenaischen Literaturzeitung an, wo mein Inserat ungefähr im May oder Junius 1796 [**)] abgedruckt seyn wird. Der Druck meiner *Disq. Arith.* fing im April 1798 an, ging langsam fort, wurde mehrere male ganz unterbrochen (weil der Drucker von Braunschweig wegzog, daher vom Bogen R an, andere Schrift gebraucht ist) und wurde im Sommer 1801 vollendet.

Im Jahr 1798 oder 1799 kam ein gewisser Huguené oder Huguenot (ein

[*) Werke I, S. 443.]

[**) Siehe S. 3 dieses Bandes; die Anzeige ist in der Tat im Juni 1796 erschienen.]

preussischer Officier) durch Braunschweig, dem v. ZIMMERMANN von meinen Untersuchungen erzählte. Auf seine Bitte theilte ich ihm einen kleinen Aufsatz, der die Theorie des 17-Ecks vollständig enthielt (ungefähr wie oben, aber viel ausführlicher) mit, den er behielt. Dieser Mensch soll sich nachher nicht entblödet haben, in einem Werke, das er hat drucken lassen [*)], welches ich aber selbst nicht gesehen habe, diese Sache auf eine solche Art vorzutragen, dass der Leser glauben könnte, es sei des HUGUENOT eigne Arbeit! Unglücklicherweise aber, soll dieses Buch sogar mehrere Jahre nach der Erscheinung meiner D. A. erst gedruckt seyn, wodurch seine Unverschämtheit umso lächerlicher wird [**)]. — Übrigens darf ich Ihrer Discretion und Ihrer Beurtheilung vertrauen, falls Sie von dem Geschichtlichen irgend etwas zu erwähnen passend finden. . . . .

Leben Sie wohl, liebster GERLING und erfreuen bald mit einigen Zeilen

Ihren ergebensten

Göttingen d. 6. Januar 1819. C. F. G.

Soeben, indem ich das Paket absenden will, werden mir einige Abdrücke meiner Vorlesung überbracht; ich ergreife also diese Gelegenheit, noch einen für Sie beizulegen.

[*) *Mathematische Beyträge zur weiteren Ausbildung angehender Geometer*, von dem K. Preuss. Hauptmann im Feld-Artillerie Corps v. HUGUENIN, Königsberg, bey Goebbels & Unzer, 1803.]

[**) GAUSS war über das Buch v. HUGUENINS ungenau unterrichtet. Auf S. 283 dieses Buches findet sich nämlich die folgende Fußnote: »Dass das 17-Eck durch quadratische Gleichungen in einen Kreis beschrieben werden könne, entdeckte zuerst ein junger Geometer aus Braunschweig, dessen Name wie ich mich erinnere GAUS ist: er machte solches einigen Gelehrten bekannt und da dieses Verwunderung und vielleicht einigen Unglauben erregte, so gab er etwas über sein Verfahren an. Zu dieser Zeit (im J. 1796) befand ich mich in Braunschweig, wo ich solches nebst allem was man von dieser unerwarteten Auflösung wusste, erfuhr und hatte das Vergnügen, diese Spur verfolgend, seine eigene Auflösung in kurzer Zeit heraus zu bringen; die hier gegebene Auflösung aber ist meine eigene und gänzlich von jener verschieden; daher es mir frey stehen wird, diese als mein Eigenthum hier bekannt zu machen, indem ich die Herausgabe der ersten Auflösung, welche gänzlich trigonometrisch war, ihrem Erfinder selbst überlasse«.]

[ALLGEMEINES ZUR LEHRE VON DEN GLEICHUNGEN].

[V.]

[DIE BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DEN KOEFFIZIENTEN EINER GLEICHUNG UND DEN POTENZSUMMEN IHRER WURZELN.]

[Eintragung im LEISTE, S. 6, 7.]

[1.]

Sit data aequatio

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \cdots = 0$$

cuius radices

$$x', x'', x''', \ldots x^N.$$

Sit

$$\begin{aligned}\Sigma x &= (1)\\ \Sigma xx &= (2)\\ \Sigma x^3 &= (3)\end{aligned}$$

& sic deinceps : tum

$$\begin{aligned}A &= (1)\\ B &= \tfrac{1}{2}(1)^2 - \tfrac{1}{2}(2)\\ C &= \tfrac{1}{6}(1)^3 - \tfrac{1}{2}(1)(2) + \tfrac{1}{3}(3)\\ D &= \tfrac{1}{24}(1)^4 - \tfrac{1}{4}(1)^2(2) + \tfrac{1}{8}(2)^2 + \tfrac{1}{3}(1)(3) - \tfrac{1}{4}(4).\end{aligned}$$

Sit E. g.

$$(1) = -1;\quad (2) = -3;\quad (3) = +17;\quad (4) = -27.$$

Erit aequatio fundam.

$$x^4+x^3+2xx-4x+3=0$$
$$\text{(Obiter} = (xx+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{5}{2})^2-13\,(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2})^2)$$

[2.]

$$(1)=A$$
$$(2)=AA-2B$$
$$(3)=A^3-3AB+3C$$
$$(4)=A^4-4AAB+6B^2+4AC-4D$$
$$(5)=A^5-5A^3B+5AB^2+5AAC-5BC-5AD+5E$$
$$(6)=A^6-6A^4B+9A^2B^2-2B^3+6A^3C+3CC-12ABC$$
$$-6AAD+6AE-6F+6BD$$

$$(n)=A^n-nA^{n-2}B+\frac{n.n-3}{1.2}A^{n-4}B^2-\frac{n.n-4.n-5}{1.2.3}A^{n-6}B^3\ldots$$
$$\ldots-nA^{n-3}C+\frac{n.n-5}{1.2}A^{n-6}CC-\frac{n.n-7.n-8}{1.2.3}A^{n-9}C^3\ldots$$

legem generalem vide pagina sequenti.

Coefficiens termini $a^m b^n c^p d^q \ldots$ (si A significet numerum permutationum huius expressionis)

$$=\frac{A}{m+n+p+\cdots}(m+2n+3p+\cdots).$$

BEMERKUNG.

Zu der vorstehenden Aufzeichnung vergl. man die Tagebuchnotizen Nr. 6 vom 23. Mai 1796 und Nr. 28 vom 21. August 1796 sowie die bezüglichen Bemerkungen im Artikel 15 des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«.

SCHLESINGER.

[VI.]

[ALGEBRAISCHER LEHRSATZ.]

[1.]

[Aus Handbuch 21, Bg, S. 76.]

Eine ganz neue Ansicht der Gleichungen beruhet auf Folgendem. Das unendliche Planum, welches alle complexen Grössen darstellt, theilt sich scharf in n Flächenräume, deren jeder Einer der Wurzeln der Gleichung

$$fx = 0$$

angehört; jeder Scheidungslinie gehört eine Wurzel der Gleichung

$$f'x = 0$$

an, und in allen Puncten Einer Scheidungslinie ist der imaginäre Theil von fx constant.

Instructiv wird die Entwicklung der Gleichung

$$fx = 2x^5 + 5x^4 + 20x^3 + 40xx + 80x + g$$

sein, für verschiedene schicklich gewählte Werthe des letzten Gliedes.

Man hat

$$f'x = 10(x^4 + 2x^3 + 6xx + 8x + 8) = 10(xx+4)(xx+2x+2)$$

deren Wurzeln also

$$\begin{aligned} \alpha &= +2i \\ \alpha' &= -2i \end{aligned} \qquad f\alpha = -80 - 64i + g$$

$$\begin{aligned} \beta &= -1+i \\ \beta' &= -1-i \end{aligned} \qquad f\beta = +42 + 10i + g$$

Es ist also

$$
\begin{array}{lll}
\text{I.} & \text{für } g = +35\tfrac{23}{61} & \text{Mod.}\, f\alpha \;= \text{Mod.}\, f\beta \;= \tfrac{10}{61}\sqrt{226505} \\
\text{II.} & \text{für } g = -49\tfrac{7}{9} & \text{Ang.}\, f\alpha \;= \text{Ang.}\, f\beta' = 180^0 + \text{Arc. tg. } \tfrac{9}{7} \\
 & & \text{Ang.}\, f\alpha' = \text{Ang.}\, f\beta \;= 180^0 - \text{Arc. tg. } \tfrac{9}{7} \\
\text{III.} & \text{für } g = -36\tfrac{12}{17} & \text{Ang.}\, f\alpha + 180^0 = \text{Ang.}\, f\beta \;= \text{Arc. tg. } \tfrac{37}{21} \\
 & & \text{Ang.}\, f\alpha' + 180^0 = \text{Ang.}\, f\beta' = -\text{Arc. tg. } \tfrac{37}{21}.
\end{array}
$$

Einer Entwickelung werth ist die Gleichung

$$fx = x^5 - 4x^4 + 8x^3 - 8xx + 4x + g = 0 = x(xx - 2x + 2)^2 + g,$$

wo

$$f'x = (5xx - 6x + 2)(xx - 2x + 2) = 5\left(x - \frac{3+i}{5}\right)\left(x - \frac{3-i}{5}\right)(x - (1+i))(x - (1-i)).$$

Namentlich in Beziehung auf die Linie, wo

$$f(a + bi) = f(a - bi).$$

[2.]

Gauss an Schumacher. Göttingen, 2. April 1833.

Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher. II. Altona 1860, S. 328.

Recht sehr danke ich Ihnen, theuerster Freund, für die gütige Mittheilung des lineirten Papiers. Ich finde es sehr brauchbar besonders für Zeichnungen jeder Art, denen rechtwinklige Coordinaten zum Grunde liegen, insofern nicht die grösste Genauigkeit gefordert wird, und das ist bei meinen Zeichnungen ohnehin nie der Fall, da ich sie nie mache, um etwas durch Abmessung definitiv daraus abzuleiten; also für Zeichnung terrestrischer Puncte, allenfalls auch selbst kleiner Sternkarten, Versinnlichung des Ganges des Barometers, Variationen der Magnetnadel etc. etc., nicht weniger auch zu Zeichnungen, die sich auf rein mathematische Sachen beziehen, wie z. B. in Rücksicht auf die imaginären Wurzeln der Gleichungen, und gerade mit Gegenständen der letztern Art habe ich mich in der letzten Zeit viel beschäftigt.

Da Sie jetzt wohl meine Anzeige von FOURIER[*)] gelesen haben, so interessirt Sie vielleicht die Bemerkung, dass ich absichtlich S. 324[**)] »sondern so lange als . . . . . . zweifelhaft bleiben muss« hier in gemessenen Worten mich ausgedrückt habe, aber nicht weil ich selbst über Dasein oder Nichtdasein eines solchen Zusammenhangs ungewiss geblieben, sondern weil in den G. G. A. nicht der Ort war mich darüber auf bestimmtere Weise zu erklären. Ich glaube auf das klarste nachweisen zu können, dass ein solcher Zusammenhang nicht existirt, allein dies wird erst geschehen können, wenn ich einmahl Gelegenheit nehme meine Untersuchungen über die Wurzeln der Gleichungen ausgearbeitet bekannt zu machen. Sie wissen, dass ich langsam schreibe, allein das kommt hauptsächlich daher, weil ich mir nie anders gefallen kann, als wenn in kleinem Raum möglichst viel ist, und kurz zu schreiben viel mehr Zeit kostet als lang. Wollte ich jene Untersuchungen, die, wenn ich sie einmal entwickele, nur eine mässige Zahl Bogen betragen dürfen, mit der Breite, wie FOURIERS Buch geschrieben ist, vortragen, so würde ich vielleicht nur $\frac{1}{4}$ so viel Zeit und mehrere grosse Quartbände gebrauchen. . . . . . .

[3.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 1836. Junius 20.

Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER. III. Altona 1861, S. 68—69.

. . . . Bei Gelegenheit der Vorlesung, die ich halte, bin ich veranlasst in diesen Tagen auf die Theorie der Gleichungen zurückzukommen, der ich jetzt einen ganz neuen Gesichtspunkt abgewonnen habe, in Folge von welchem es mir nicht unwahrscheinlich ist, dass sich dennoch eine Brücke zwischen FOURIERS critischen Punkten und bestimmten Paaren von imaginären Wurzeln schlagen lässt. Vor etwa 3 Jahren habe ich in einem Briefe an Sie die entgegengesetzte Meinung ausgesprochen, aber freilich hatte ich damals nicht alle auf den Gegenstand bezüglichen Details entwickelt, was, wenn man einen

[*) Werke III, S. 119.]
[**) Werke III, S. 121, Zeile 10—12.]

negativen Satz zu beweisen hat, nothwendig ist um ganz gewiss zu sein. Die allgemeinen Apperçus, die in 999 Fällen gut gehen, können das 1000te mal am Ende in einen cul de sac führen. Berichtigen Sie diesmahl meine damaligen vielleicht zu positiven Behauptungen, aber bemerken Sie zugleich, dass ich nicht ohne Ursach pauca sed matura zu meinem Wahlspruch für alles zu veröffentlichende gemacht habe. Die allgemeinen Apperçus sind die Geburten Einer Stunde, aber um daraus etwas gereiftes zu machen, ist oft lange, oft jahrelange grosse Detailarbeit nöthig, von der man voraussieht, dass man sie gewiss durchführen kann, wenn man sich dazu gibt, obwohl auch dann immer noch manche ähnliche Geburten zweiten und dritten Ranges, die schon auf Ordre kommen müssen, nöthig sind. Procreare iucundum, at parturire molestum. Was übrigens meinen gegenwärtigen Gesichtspunkt betrifft, so würden auch erst sehr zeitraubende Details, um alle Verzweigungen zu verfolgen, nöthig sein, und ich glaube, nicht, dass ich, indem so vielerlei unter

. . . .

[Der Schluß des Briefes fehlt.]

[4.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, den 24. Juni 1836.

Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER. III. Altona 1861. S. 72.

. . . . . . Ich habe in den letzten Tagen meine Ideen über die Gleichungen weiterverfolgt, aber das Resultat ist eher das entgegengesetzte, und führt vielmehr zur Bestärkung in meiner früheren Ansicht, dass es einen in der Natur der Sache liegenden allgemeinen willkürfreien Zusammenhang zwischen den einzelnen critischen Punkten und den einzelnen Paaren von imaginären Wurzeln gar nicht gibt. Es scheint mir selbst, dass ich in meinem letzten Briefe dem Ausdruck meiner früheren Ansicht in einem älteren Briefe Unrecht gethan habe, indem mir jetzt (nach langer Unterbrechung) jene frühere Ansicht nicht gleich in derselben Frische gegenwärtig war, in der ich sie damals aufgefasst hatte. Soviel bleibt aber immer gewiss, dass bei solchen negativen Sätzen [für] die Verwandlung der subjectiven Überzeugung in eine objective (für andere) eine höchst abschreckende Detailarbeit erforderlich wäre. Man würde, um die Verschiedenheit der Fälle wirklich anschaulich zu machen, eine grosse Menge von Gleichungen in concreto durch Curven versinnlichen müssen; jede Curve müsste durch Punkte gezeichnet werden, und die Bestimmung eines einzigen Punkts erfordert schon langwierige Rechnungen. Sie sehen es wohl der Fig. 4 bei meiner ersten Schrift von 1799 nicht an, wie viel Arbeit die richtige Zeichnung dieser Curve erfordert hat, und doch ist diess vergleichungsweise nur ein sehr einfacher Fall gegen viele, die hier betrachtet werden müssten. . . . . . .

BEMERKUNGEN.

I. Von der Richtigkeit des von GAUSS in der Aufzeichung [1.] ausgesprochenen Satzes kann man sich nach einer mündlichen Mitteilung von F. KLEIN, wie folgt überzeugen. Setzt man $f(x) = w$ und bezeichnet die Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$ — die der Einfachheit wegen alle von einander verschieden sein mögen — durch $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, so sind die Punkte $w = f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_{n-1})$ die im Endlichen gelegenen einfachen Verzweigungspunkte der algebraischen Funktion x von w. Denkt man sich die zu dieser Funktion gehörige n-blättrige RIEMANNsche Fläche in der Weise konstruiert, daß man durch die Verzweigungspunkte $f(\alpha_1)$, $f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_{n-1})$ zur reellen w-Achse parallel laufende Verzweigungsschnitte legt und etwa längs des von $f(\alpha_\varkappa)$ ausgehenden Schnittes die Blätter 1 und $\varkappa+1$ aneinander heftet, so liefert die Abbildung der Blätter dieser Fläche auf die x-Ebene die durch die Bilder der Verzweigungsschnitte begrenzten n Flächenräume, von denen in dem GAUSSschen Satze die Rede ist. In der Handschrift geht diesem Satze unmittelbar voran der Werke III, S. 112 und Werke VIII, S. 32 abgedruckte Lehrsatz mit einem Beispiel. Beide Sätze gehören zusammen und fallen, wie auch die Eingangsworte der Aufzeichnung [1.] zeigen, unter den »ganz neuen Gesichtspunkt«, den GAUSS in der Briefstelle [3.] erwähnt.

SCHLESINGER.

II. Die in den Briefstellen [2.]—[4.] an SCHUMACHER und auch schon früher in dem Briefe an DROBISCH (S. 106, 107) gemachten Bemerkungen, die an FOURIERS *Analyse des équations déterminées* (Paris, 1831, deutsch in OSTWALDS Klassikern Nr. 127) anknüpfen, verlangen ein Eingehn auf GAUSS' Anzeige dieses Werkes (Werke III, S. 119), da einige Angaben dieser Anzeige einer Richtigstellung bedürfen. Die Aussage Werke III, S. 121, Zeile 4: »In der That ist es zwar wahr, dass die Gleichung $X = 0$ zusammengezählt genau soviele Paare imaginärer Wurzeln enthält, als solche Ausfälle oder kritische Stellen vorkommen«, trifft bei der a. a. O. S. 120, Zeile 5 bis 1 v. u. gegebenen Definition der kritischen Stellen nicht zu, wie schon das Beispiel der Gleichung $(x-b)^n - c = 0$ zeigt, wo n eine gerade Zahl $\geqq 4$, b beliebig reell, c positiv sein soll. Trotz ihrer $n-2$ verschiedenen imaginären Wurzeln hätte die Gleichung keine kritische Stelle im Sinne von GAUSS. Wir definieren (vergl. Archiv der Mathem. und Physik (3) **16**, 1910, S. 157) eine kritische Stelle auf folgende Weise: Es bedeuten $f(x) = 0$ eine Gleichung n^{ten} Grades mit reellen Koeffizienten, $f'(x), f''(x), \ldots$ die Derivierten von $f(x)$ und α eine reelle Größe; in der Reihe $f(\alpha)$, $f'(\alpha), \ldots, f^{(n)}(\alpha)$ sei e die Anzahl der verschwindenden intermediären Funktionen*), c und d die Anzahl

*) Sollte also etwa $f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots = f^{(l-1)}(\alpha) = 0$ sein, so sind diese ersten l verschwindenden Größen bei der Bestimmung von e nicht mitzuzählen.

der durch eine ungerade Zahl fehlender Glieder unterbrochenen Zeichenwechsel bezw. Zeichenfolgen und $\sigma = e - c + d$. Wenn $\sigma \geqq 2$ ist, so heiße a eine kritische Stelle von $f(x) = 0$ *). Bei dieser Definition gilt der folgende präzisierte FOURIERsche Satz: Es seien a und a' zwei beliebige reelle Zahlen ($a < a'$); bedeutet Z_a bezw. $Z_{a'}$ die Anzahl der Vorzeichenwechsel in den Reihen

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ \ldots,\ f^{(n)}(a), \tag{1}$$

$$f(a'),\ f'(a'),\ f''(a'),\ \ldots,\ f^{(n)}(a') \tag{2}$$

und ist 2λ die Summe der sämtlichen ihrer Definition nach niemals ungeraden Zahlen σ, die allen zwischen a und a' gelegenen kritischen Stellen von $f(x) = 0$ entsprechen, so ist stets

$$Z_a - Z_{a'} - 2\lambda \geqq 0 \tag{3}$$

und die durch die linke Seite von (3) definierte Zahl gibt die genaue Anzahl der zwischen den Grenzen a und a' gelegenen Wurzeln von $f(x) = 0$, jede Wurzel nach ihrer Vielfachheit gezählt. Für den Fall, daß die Grenzen a und a' kritische Stellen oder Wurzeln von $f(x) = 0$ sind, ist für die Bildung von 2λ und die Zählung der Gleichungswurzeln a auszuschließen, a' einzuschließen **). Für $a = -\infty$, $a' = +\infty$ erhält man den folgenden Satz, der an die Stelle der GAUSSschen Angabe zu treten hat: Die Anzahl aller imaginären Wurzeln von $f(x) = 0$ ist gleich der Summe aller Zahlen σ, die den sämtlichen zwischen $-\infty$ und $+\infty$ gelegenen kritischen Stellen von $f(x) = 0$ entsprechen. — Aus der Ungleichung (3) folgt, daß, wenn zwischen a und a' eine kritische Stelle liegt, für die $\sigma > 2$ ist, $Z_a - Z_{a'} > 2$ sein muß. Hiernach trifft die Aussage von GAUSS (Werke III, S. 120, Zeile 11 v. u.), wonach »sämmtliche einzelne Differenzen $g' - g$, $g'' - g'$, $g''' - g''$ u. s. w. nur entweder $= 1$ oder $= 2$ werden«, wenn man die Grenzen eng genug wählt, nicht zu. Daß man $g' - g$ nichts stets $\leqq 2$ machen kann, war FOURIER bekannt, wie aus seiner »Regel des doppelten Vorzeichens« (a. a. O. S. 103) hervorgeht, wo er auch das Beispiel einer Gleichung mit 14 imaginären Wurzeln erwähnt. Die oben gegebene Definition der kritischen Stellen ist ihrem Wesen nach auch nur eine Präzisierung der genannten FOURIERschen Regel.

Daß sich nicht »eine Brücke zwischen FOURIERS critischen Punkten und bestimmten Paaren von imaginären Wurzeln schlagen lässt« (vergl. die Briefstelle [3.]), folgt aus dem Beispiel $(x-b)^n + c = 0$ (n gerade, b reell, $c > 0$), mit der einzigen kritischen Stelle b und n verschiedenen imaginären Wurzeln. Offen bleibt aber noch die folgende Frage: Es sei für $f(x) = 0$ die Anzahl m der kritischen Stellen nicht größer als $\frac{n}{2}$ und für jede $\sigma = 2$ ***); gibt es dann »einen willkürfreien Zusammenhang« (vergl. die Briefstelle [4.]) zwischen den einzelnen dieser m kritischen Stellen und m Paaren von imaginären Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$?

ALFRED LOEWY.

---

*) Für das Beispiel ist b eine kritische Stelle mit $e = n - 1$, $c = 1$, $d = 0$, also $\sigma = n - 2$.

**) Der von GAUSS, Werke III, S. 120, Zeile 8, bei Seite gesetzte »ausnahmliche Fall« schließt aus, daß eine der Größen aus den Reihen (1), (2) gleich Null wird. Es handelt sich also um eine etwas stärkere Beschränkung, als wenn man fordert, daß a und a' weder Gleichungswurzeln noch kritische Stellen sein sollen.

***) Schon der Fall $\sigma = 2$ kommt nicht nur entsprechend der GAUSSschen Anzeige, die nur $d = 1$ zuläßt, zustande, sondern in allgemeinster Weise für ein beliebiges ganzzahliges e, wenn $c = e - 1$, $d = 1$ oder $c = e - 2$, $d = 0$ ist. Es folgt dies aus $\sigma = 2$ und aus der gemäß der Definition der Zahlen c, d, e stets giltigen Relation $e \geqq c + d$.

ANALYSIS.

NACHTRÄGE ZU DEN BÄNDEN III UND VIII.

NACHTRÄGLICHE BEMERKUNG ZU DER S. 36—64 DES VIII. BANDES ABGEDRUCKTEN ABHANDLUNG: DE INTEGRATIONE FORMULAE DIFFERENTIALIS $(1+n\cos\varphi)^\nu d\varphi$.

Es ist hier ein bedauernswerter Irrtum zu berichtigen, der sich bei der früheren Herausgabe von Stücken des GAUSSschen Nachlasses, die sich auf Analysis beziehen, eingeschlichen hat (wie ich dies übrigens bereits 1902 in meinem damaligen *Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauss' Werken*, Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mitteilungen S. 12, ausgeführt habe).

Im Jahre 1893 wurde von WILHELM MEYER (Göttingen) in den Akten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften ein Manuskript mit dem Titel *De integratione formulae differentialis* $(1+n\cos\varphi)^\nu d\varphi$ gefunden, das weder einen Verfassernamen noch eine Angabe über Ort und Zeit der Abfassung enthielt, dessen Handschrift aber derjenigen des jugendlichen GAUSS so ähnlich war, daß über den Verfasser kein Zweifel zu bestehen schien. So wurde es von E. SCHERING in den Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften vom Jahre 1893, S. 617—646, als von GAUSS herrührend veröffentlicht und auch im Bd. VIII der Werke, 1900, S. 35—64 wieder abgedruckt, trotzdem R. FRICKE (der im Bd. VIII die Beiträge zur Analysis bearbeitete) auf eine Reihe von Unstimmigkeiten aufmerksam wurde, denen er in der Anmerkung auf S. 64 des genannten Bandes Ausdruck gegeben hat.

Ganz unabhängig davon hat mir bald darauf CONRAD MÜLLER, der sich damals auf meine Veranlassung mit Studien über die an der Göttinger Universität um die Wende des 18. Jahrhunderts wirkenden Mathematiker beschäftigte, eines Tages (1902) berichtet, daß er in den Göttingischen Anzeigen von 1800, Stück 31, eine Besprechung von KÄSTNER über eine von THIBAUT eingereichte Schrift gefunden habe, die im wesentlichen eine vom Verfasser selbst herrührende Inhaltsangabe enthalte. Die Vergleichung ergab dann sofort, daß es sich dabei genau um die vorgenannte, also fälschlich GAUSS zugeschriebene Arbeit handelte. Nun ist wirklich jeder Zweifel ausgeschlossen: nicht GAUSS, sondern THIBAUT ist der Verfasser.

KLEIN.

NACHLASS.

EXERCITATIONES MATHEMATICAE.

[Zettel in Fh, Kapsel 50.]

[1.]

Demonstratio elementaris propositionis de productis e Cosinibus.

$$\sin \tfrac{1}{13}\pi \,.\, \cos \tfrac{1}{13}\pi = \tfrac{1}{2} \sin \tfrac{2}{13}\pi$$

$$\tfrac{1}{2} \sin \tfrac{2}{13}\pi \,.\, \cos \tfrac{2}{13}\pi = \tfrac{1}{4} \sin \tfrac{4}{13}\pi$$

& sic porro et si tandem

$$\sin \frac{2^n \pi}{13} = \pm \sin \frac{1}{13}\pi$$

erit

$$\frac{1}{2^n} = \pm \cos \frac{1}{13}\pi \,.\, \cos \frac{2}{13}\pi \,.\, \cos \frac{4}{13}\pi \ldots \cos \frac{2^{n-1}}{13}\pi.$$

Eodem modo demonstratur productum

$$\cos \frac{m}{13}\pi \,.\, \cos \frac{2m}{13}\pi \ldots \cos \frac{2^{n-1} m}{13}\pi$$

dare idem productum. Hae veritates etiam aeque facile absque omni calculo per solam polygoni inspectionem demonstrantur.

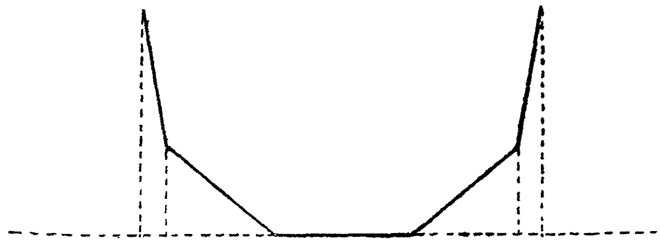
Aug. 21. 96.

[2.]

Perfacilis est demonstratio geometrica propositionis

$$\cos 0 + \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \cos 3\frac{2\pi}{n} + \cdots + \cos (n-1)\frac{2\pi}{n} \quad \text{esse} = 0,$$

si polygonum in hoc situ consideretur:



Eodem.

[3.]

Summa Serierum periodos quarum summa $= 0$ tenentium commode invenitur, si singula membra per successivas variabilis cuiusdam x potestates multiplicentur, unde huius serei, quae est recurrens, summa sic exhibetur:

$$\frac{a + bx + cxx + \cdots}{1 - x^n},$$

quae pro nostro casu $x = 1$ abit in hanc formam $\frac{0}{0}$. Si valor huius expressionis per regulas notas investigetur, ad eadem pervenietur, quae B[eatus] D[ANIEL] BERN[OULLI] ex principio metaphysico, sc. rationis sufficientis eruerat.

Aug. 28. 96.

[4.]

$$\text{Lim.}\ \frac{\Sigma\,\text{pr. ad } n \text{ infra } n}{nn}$$

(Pr. usque ad $P+30n$) sunt

$$(4-1)(3^2-1)(5^2-1)n = 576n$$

ideo a

$$P\ldots Pn \quad \text{generaliter} \quad \frac{1.3}{2.2}\cdot\frac{2.4}{3.3}\cdot\frac{4.6}{5.5}\cdots nn.$$

Si $P:n = \infty:1$

adeoque

$$\text{Limes quaesitus} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2.2}\cdot\frac{2.4}{3.3}\cdot\frac{4.6}{5.5}\cdots = \frac{3}{\pi\pi} = \frac{3}{9{,}8696} = 0{,}3039+$$

[5.]

Si Φ significet eiusmodi functionem ut sit

$$\Phi : \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = x,$$

erit

$$\Phi x = x - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}Ax^3 + \tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{1}{7}Bx^3 - \tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{1}{10}Cx^3$$
$$+\tfrac{1}{13}\cdot\tfrac{9}{12}Dx^3 - \tfrac{1}{16}\cdot\tfrac{11}{14}Ex^3\left(+\tfrac{1}{19}\cdot\tfrac{15}{18}Fx^3 - \tfrac{1}{22}\cdot\tfrac{17}{21}Gx^3 + \cdots\right)$$

Seu concinnius

$$= x - \frac{1.3}{2.3.4}Ax^3 + \frac{3.5}{5.6.7}Bx^3 - \frac{5.9}{8.9.10}Cx^3 + \frac{9.11}{11.12.13}Dx^3 - \frac{11.15}{14.15.16}Ex^3 + \cdots$$

[6.]

Si

$$\Phi : \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = x,$$

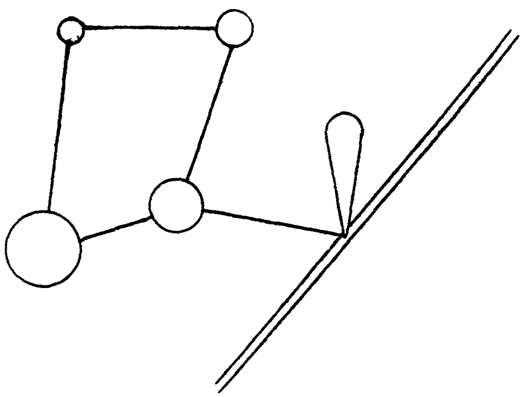
erit

$$\Phi x = x - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{120}x^9 - \frac{11}{15600}x^{13} + \frac{211}{13000.272}x^{17} - \ldots$$

. . . .

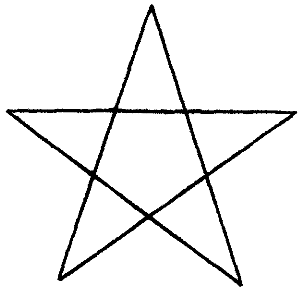
[7.]

Incumbant corpora A, B, C &c plano hor[izontali] (quod sine frictione concipimus) filis utcunque connexa; applicetur filo in E potentia secundum EF, ita ut punctum E semper super hac linea protrahatur; quaeritur motus corporum A, B, C, ...



[8.]

Investigare polyhedra regularia, quae originem ducunt a polygonis huius figurae



Quot formas diversas polyg[onum] hab[ere] potest?

Resp[onsio]: $\frac{\text{Num: primorum infra } N \text{ ad } N}{2}$

. . . .

[9.]

Evolvere prod[ucta]

$$1 - x \,.\, 1 - x^2 \,.\, 1 - x^3 \,.\, 1 - x^4 \ldots$$
$$1 - x \,.\, 1 - x^2 \,.\, 1 - x^4 \ldots$$

[10.]

Invenire

$$\text{Lim:}\, \frac{\Sigma\, \text{pr. ad } n \text{ infra } n}{nn}$$
$$\pm\ 0{,}307.$$

[11.]

Ex aeq[uationibus]

$$\begin{array}{l|l|l|l} 0 = Aa' & = Aa'' & = Aa''' & = Aa^{\mathrm{IV}} \\ \quad + Ba'' & + Ba''' & + Ba^{\mathrm{IV}} & + Ba' \\ \quad + Ca''' & + Ca^{\mathrm{IV}} & + Ca' & + Ca'' \\ \quad + Da^{\mathrm{IV}} & + Da' & + Da'' & + Da''' \end{array}$$

sequi: sive

$$A = B = C = D = 0$$

sive

$$a' = a'' = a''' = a^{\mathrm{IV}} = 0.$$

BEMERKUNGEN ZU DEN EXERCITATIONES MATHEMATICAE.

Zu [1.] und [2.] ist zu bemerken, daß von demselben Tage, 21. August 1796, die beiden Tagebuchaufzeichnungen Nr. 28. und Nr. 29. herrühren; in der Nr. 28. wird auf die *Exercitationes mathematicae* ausdrücklich Bezug genommen.

Die Notiz [3.] ist (nach einer schriftlichen Mitteilung von P. STÄCKEL) im Anschluß an die Beschäftigung mit drei Abhandlungen von DANIEL BERNOULLI enstanden, die in den Novi Comment. Acad. Petrop. **16** (1771), S. 71, **17** (1772), S. 5, **18** (1773), S. 3 enthalten sind und sich auf Reihen von der Form

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_1 + a_2 + \cdots \text{ in inf.}$$

beziehen, wo

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$$

ist. Die ersten n Glieder $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nennt D. BERNOULLI die Periode. Summiert man gliedweise und bezeichnet mit $s_\varkappa$ die Summe der $\varkappa$ ersten Reihenglieder, so ist

$$s_n = 0, \quad s_{n+1} = s_1, \quad s_{n+2} = s_2, \ldots, s_{2n} = 0, \ldots$$

und da die n Summen $s_1, s_2, \ldots, s_n$ auf diese Weise gleichberechtigt sind, so schließt D. BERNOULLI ähnlich wie LEIBNIZ bei

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots,$$

daß der wahre Wert der Summe das arithmetische Mittel aus den n ersten Teilsummen ist; darin besteht (siehe a. a. O. **18**, S. 5) das »ratiocinium metaphysicum«. —

GAUSS setzt die Potenzreihe an

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1} + a_1 x^n + \cdots,$$

die für $x = 1$ in die betrachtete Reihe übergeht und formal aus der Entwickelung des Bruches

$$\frac{a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1}}{1 - x^n}$$

entsteht. Für $x = 1$ ergibt sich »per regulas notas« als Grenzwert

$$-\frac{a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \cdots + (n-1)a_n}{n},$$

was wegen $s_n = 0$ mit dem arithmetischen Mittel der n ersten Teilsummen übereinstimmt.

Wir bemerken noch, daß D. BERNOULLI Reihen von der hier betrachteten Art erhält, indem er in

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots,$$
$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots$$

für x einen aliquoten Teil von π setzt. Man vergl. hierzu die Tagebuchnotiz Nr. 29. Ferner werde auf die einschlägige neuere Literatur verwiesen *).

Zu [4.] und [10.] vergl. man die Erläuterungen auf S. 18 dieses Bandes.

Die in [5.] betrachtete Umkehrung eines elliptischen Integrals kommt auch in der Notiz Nr. 32 des *Tagebuchs* vom 9. September 1796 vor und wird in der Tagebuchnotiz Nr. 33 vom 14. September verallgemeinert. Hier sowohl wie in der Tagebuchnotiz Nr. 33 bedient sich GAUSS einer eigentümlichen rekurrierenden Bezeichnungsweise für die Glieder einer Reihe; es bedeutet nämlich A das erste, B das zweite, C das dritte Glied der betreffenden Reihe, u.s.w. Diese Bezeichnung wird von J. STIRLING **) benutzt, der sie auf NEWTON zurückführt ***). Daß sich GAUSS zu der hier in Betracht kommenden Zeit mit STIRLING beschäftigt hat, geht auch aus anderen Zeugnissen hervor, vergl. weiter unten.

Die in [6.] mit Φ bezeichnete Funktion nannte GAUSS später den sinus lemniscaticus; die hier gegebene Reihenentwickelung findet sich mehrfach auch im »LEISTE« (bei S. 20 nur bis x^9, bei S. 86 und auf der Einbanddecke genau so wie hier, vergl. weiter unten) und auf dem Werke III, S. 404—406 abgedruckten Zettel *Elegantiores integralis* $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ *proprietates* †), wo auch der Konvergenzbereich angegeben wird.

Die »Responsio« in [8.] läßt vermuten, daß GAUSS durch geometrische Erwägungen veranlaßt worden ist, die in [4.] und [10.] betrachteten zahlentheoretischen Grenzwerte zu untersuchen.

Die in [9.] betrachteten Produkte weisen auf das Studium EULERscher Schriften. Das erste gehört der Theorie der elliptischen Funktionen an, vgl. den in der zweiten Abteilung dieses Bandes abgedruckten Aufsatz des Unterzeichneten »Über GAUSS' Arbeiten zur Funktionentheorie« und Werke III, S. 434, 440, 464. Das zweite

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^{2^2})(1-x^{2^3})\ldots$$

findet sich bei EULER in der Abhandlung *De partitione numerorum* Novi Comment. Acad. Petrop. **3** (1750/51) 1753, S. 125, abgedruckt Comment. arithmeticae I, 1849, S. 73 und L. EULERI Opera omnia, Ser. I, vol. 2, S. 285.

Zu [11.] vergl. man die Werke VIII, S. 30, 31 abgedruckte Notiz.

SCHLESINGER.

---

*) Vergl. G. FROBENIUS, CRELLES Journal f. Mathematik **89** (1880), S. 262; O. HÖLDER, Mathem. Annalen **20** (1882), S. 535 und zahlreiche daran anschließende Arbeiten.

**) J. STIRLING, *Methodus Differentialis sive Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum*, Londini 1730, S. 3.

***) A. a. O. S. 31.

†) Siehe Werke III, S. 405, [4.]

[ÄLTESTE UNTERSUCHUNGEN ÜBER LEMNISKATISCHE FUNKTIONEN.]

[I.]

[REIHENENTWICKELUNGEN UND ADDITIONSTHEOREME.]

[Eintragungen im LEISTE *).]

[1.]

[Einbanddecke]

$$\int \frac{dp}{\sqrt{(1-p^4)}} = \left[\frac{\pi}{4}\right] \frac{2}{\int \sqrt{\sin x\, dx}} = 1{,}311\,031$$

nach STIRLING: *De summatione et interpolatione serierum* [**)]

1,31 102 877 714 605 987

1,2453.

[*) Vgl. die Fußnote auf S. 78.]

[**) *Methodus differentialis sive Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum*, auctore JACOBO STIRLING. Londini 1730, S. 58.]

[2.]

[Einbanddecke]

$$\begin{array}{llllll}
1\,[\varphi] & -\frac{1}{10}\,[\varphi^5] & -\frac{1}{24}\,[\varphi^9] & -\frac{5}{208}\,[\varphi^{13}] & -\frac{35}{17.128}\,[\varphi^{17}] & \ldots \\
 & +\frac{1}{20} & +\frac{7}{120} & +\frac{9}{208} & & \ldots \\
 & & -\frac{7}{200} & +\frac{1}{64} & & \ldots \\
 & & & -\frac{57}{800} & & \ldots \\
 & & & +\frac{57}{2000} & & \ldots \\
\hline
1\,[\varphi] & -\frac{1}{10}\,[\varphi^5] & +\frac{1}{120}\,[\varphi^9] & -\frac{11}{15\,600}\,[\varphi^{13}] & +\frac{211}{3\,536\,000}\,[\varphi^{17}] & \ldots
\end{array}$$

$$\left[\frac{1}{10}=\right]\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5},\quad \left[\frac{1}{120}=\right]\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9},\quad \left[\frac{11}{15600}=\right]\frac{33}{80}\cdot\frac{1.1.1}{5.9.13},\quad \left[\frac{211}{3536000}=\right]\frac{211.9}{3200}\cdot\frac{1.1.1.1}{5.9.13.17}.$$

[3.]

[Schutzblatt]

$$\int\sqrt{\sin x}\,dx = \tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \int dx\,(\sqrt{x}-\sqrt{\sin x})$$

$$= 2\int\frac{pp\,dp}{\sqrt{(1-p^4)}}$$

$$\begin{array}{r}
0,7\,849\,171 \\
1\,363\,706 \\
1,6\,337\,417 \\
1\,794\,738 \\
1,5\,163\,437 \\
2\,928\,571 \\
\hline
4,543\,704
\end{array}\quad \times\frac{\pi}{12} = 1,189\,539$$

FUSS $1,198 \pm = \frac{\pi}{\varpi}$

EULER applicata mea reductione 1,198 122.

[4.]

[S. 16]

In der Curva (Elastica) Lemniscata ist

s Sehne eines Bogens

c Sehne des Compl[ements] des B[ogens]

$$ss + cc + cc\,ss = 1$$

Sehne des dopp[elten Bogens] $\dfrac{2(s+s^3)c}{1+s^4} = \dfrac{2sc}{1-ss\,cc} = \dfrac{2sc}{ss+cc}$

Cosehne des dopp[elten Bogens] $\dfrac{1-2ss-s^4}{1+2ss-s^4} = \dfrac{cc-ss}{1+cc\,ss} = \dfrac{cc-ss}{2-ss-cc}$

Sehne der Summe $\dfrac{s'c+sc'}{1-s'sc'c}$ d[er] Diff[erenz] $\dfrac{s'c-sc'}{1+s'sc'c}$

Cosehne der Summe $\dfrac{c'c-s's}{1+s'sc'c}$ d[er] Diff[erenz] $\dfrac{c'c+s's}{1-s'sc'c}$

[S. 17—18 nach längerer Rechnung]

[Sehne des doppelten Bogens] $sc\dfrac{2+2ss}{1+s^4} = sc\dfrac{2+2cc}{1+c^4}$

[Cosehne des doppelten Bogens] $\dfrac{1-2ss-s^4}{1+2ss-s^4} = \dfrac{1-2cc-c^4}{1+2cc-c^4}$

[Sehne des dreifachen Bogens] $s\dfrac{3-6s^4-s^8}{1+6s^4-3s^8}$

[Cosehne des dreifachen Bogens] $c\dfrac{3-6c^4-c^8}{1+4cc-6c^4+4c^6+c^8} = c\dfrac{1+6s^4-3s^8}{1+4ss-6s^4+4s^6+s^8}$.

[5.]

[S. 20]

Theilt man also auch hier die ganze Peripherie in 360^0, so ist

arcus	chorda	
0	0	
30^0		$= \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{(\sqrt{12}-3)}}{1+\sqrt{(\sqrt{12}-3)}}} = \dfrac{1-\sqrt{(\sqrt{12}-3)}}{\sqrt{(4-\sqrt{12})}}$
45^0	0,6435943	$= \sqrt{(\sqrt{2}-1)}$
60^0	0,8253788	$= \sqrt[4]{(\sqrt{12}-3)} = \sqrt{(\sqrt{\tfrac{3}{2}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}})}\sqrt[8]{3}$
90^0	1	

[6.]

[S. 20—21]

$$d\sin = \frac{2}{c+\frac{1}{c}}\,d\varphi = \frac{1+ss}{cs}\,d\varphi$$

$$d\cos = \frac{-2}{s+\frac{1}{s}}\,d\varphi$$

$$\sin = \varphi - \frac{1}{10}\varphi^5 + \frac{1}{120}\varphi^9 + \cdots$$

$$\cos = 1 - \varphi\varphi + \tfrac{1}{2}\varphi^4 - \cdots$$

$$\frac{1}{\sin} = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{10}\varphi^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{\cos} = 1 + \varphi\varphi + \frac{1}{2}\varphi^4 + \cdots$$

$$\varphi = s + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}s^5 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{9}s^9 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{13}s^{13} + \cdots$$

Man nenne nach der Analogie des Kreises

$$\frac{s}{c}\cdots t,$$

so ist

$$dt = \left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{cc}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{cc}+\frac{ss}{cc}\right)\right)d\varphi.$$

$$s\,4 = sc\,\frac{1+ss}{1+s^4}\;\frac{[4(1-5s^4-5s^8+s^{12})(1+s^4)]}{1+20s^4-26s^8-20s^{12}+s^{16}}.$$

[7.]

S. 24]

Ad p. 16

$$\begin{aligned}
&\varphi 1 &&= \varphi\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \varphi\sqrt{\tfrac{1}{3}}\\
&\varphi\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \varphi\sqrt{\tfrac{1}{3}} &&= \varphi\tfrac{1}{7}\\
&\varphi\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \varphi\sqrt{\tfrac{1}{3}} &&= \varphi 1 - \varphi\sqrt{\tfrac{2}{2}\tfrac{1}{3}}\\
&\varphi 1 &&= \varphi\sqrt{\frac{1}{m}} + \varphi\sqrt{\frac{m-1}{m+1}}\\
&\varphi\sqrt{\frac{1}{m}} - \varphi\sqrt{\frac{m-1}{m+1}} &&= \varphi\,\frac{mm-2m-1}{mm+2m-1}.
\end{aligned}$$

[8.]

[S. 54]

Bestimmung der zwei ersten Coefficienten des Ausdrucks

$$\frac{1}{\sqrt{(1+\sin\varphi^2)}} = a + b\cos 2\varphi - c\cos 4\varphi - d\cos 6\varphi \ldots$$

$$a = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{4.3}{1.2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{64}\cdot\frac{6.5.4}{1.2.3} + \ldots$$

$$= 1 - \frac{1.1}{2.2} + \frac{1.1.3.3}{2.2.4.4} - \ldots$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}(0\ldots 1) \times \frac{2}{\pi} = \frac{2A}{\pi} = 0{,}83462$$

$$b = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{3.3}{2.6}\cdot\frac{5.5}{4.8} + \text{etc.}$$

$$= 2a - \frac{2}{A}.$$

BEMERKUNGEN.

Die Aufzeichnungen [I.] sind mit den Tagebuchnotizen Nr. 50 vom 7. und Nr. 51 vom 8. Januar 1797 in Beziehung zu setzen. Die Artikel [1.], [3.], [4.], [8.] weisen darauf hin, daß GAUSS bei seinen Untersuchungen von dem Studium der EULERschen Abhandlung *De miris proprietatibus curvae elasticae* *) ausgegangen ist. Die »curva elastica rectangula« wird durch die Gleichung

$$(1) \qquad y = \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

in rechtwinkligen Koordinaten gegeben; das Integral

$$(2) \qquad z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

mißt ihre Bogenlänge. JACOB und JOHANN BERNOULLI hatten gezeigt **), daß das Integral (2) auch die Bogenlänge der Lemniskate ausdrückt. GAUSS hat in [4.] und ebenso in der Nr. 51 des *Tagebuchs* das Integral (2) erst nach der curva elastica benannt, dann aber das Wort *elastica* durchgestrichen und *lemniscata* darüber geschrieben.

Die Integrale in den artt. [1.] und [3.] sind zwischen den Grenzen 0 und 1 in bezug auf p, zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ in bezug auf x zu nehmen. Setzen wir (vergl. art. [8.] und Werke III, S. 150)

*) Acta Acad. Petrop. 1782, II (1786), S. 34, Opera omnia, Ser. I, vol. 21, S. 91; die folgenden Zitate beziehen sich auf die Opera.

**) JAC. BERNOULLI, Acta erudit. 1694, S. 276 und 336, Opera, Genevae 1744, S. 601 und 608; JOH. BERNOULLI, Acta erudit. 1694, S. 394, Opera omnia, Lausannae 1742, I, S. 119.

$$\int_0^1 \frac{dp}{\sqrt{1-p^4}} = A, \quad \int_0^1 \frac{p^2\,dp}{\sqrt{1-p^4}} = B,$$

so ist nach EULER (a. a. O. S. 106)

$$AB = \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

Der in [1.] angegebene Wert 1,311031 für A steht bei EULER*) a. a. O. S. 104, der in [3.] bei der Berechnung von $2B$ benutzte Wert $B = 0{,}599061$ ebenda S. 99. Wie der von GAUSS in [1.] angegebene STIRLINGsche Wert zeigt, ist der EULERsche Wert von A zu klein, entsprechend ist der EULERsche Wert von B zu groß**). Das in [3.] bei dem FUSSschen Werte 1,198 $\pm$ stehende »$= \frac{\pi}{\varpi}$« hat GAUSS ersichtlich erst später (mit anderer Schrift und Tinte) hinzugeschrieben; er hat die Bezeichnung

$$\varpi = 2\int_0^1 \frac{dp}{\sqrt{1-p^4}}$$

erst später (siehe Werke III, S. 404***)) eingeführt. Wir machen schon hier auf die große Bedeutung aufmerksam, die dieser Zahl $\frac{\pi}{\varpi}$ in der Entwickelung von GAUSS' hierhergehörigen Arbeiten zukommt. Die Zahl 1,2453 hat GAUSS bei [1.] auch ersichtlich später hingeschrieben; wir werden ihre Bedeutung im Abschnitt [II.] kennen lernen.

Die im art. [2.] auftretende Reihe haben wir auch im art. [6] der *Exercitat. mathem.* (S. 141 dieses Bandes) für die Umkehrung des Integrals (2) gefunden; sie wird hier direkt aus der Reihe

$$x + \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{24}x^9 + \frac{5}{208}x^{13} + \cdots$$

für das Integral (2), die z. B. auch in [6.] auftritt, hergeleitet. Zu den Additions- und Multiplikationsformeln in [4.], der Formel für $s4$, d. h. für den sinus lemniscaticus des vierfachen Bogens am Ende von [6.] so wie für die Reihenentwickelungen in [6.] vergl. man die Werke III, S. 404, 405, 406 abgedruckten Aufzeichnungen †).

In bezug auf die Bezeichnungen werde folgendes bemerkt. »Sehne eines Bogens« bedeutet die Umkehrung des Integrals (2), in dem z die Bogenlänge, x den vom Doppelpunkte auslaufenden Fahrstrahl — also eben die Sehne — für die Lemniskate darstellt. Die Bezeichnung s hat GAUSS dann im art. [6.] in sin geändert, später schreibt er dafür sl oder sin lemn. Die »Sehne des Komplements« ist (vergl. Werke III, S. 404) die zu

---

*) Vergl. die Angabe bei GAUSS, Werke III, S. 412 (aus Scheda Aa, S. 3).

**) STIRLING gibt a. a. O. S. 57, $B = 0{,}59907011\ 736779611$, vergl. GAUSS, Werke III, S. 150.

***) Abdruck eines Zettels (Fh, Kapsel 50), den SCHERING (Werke III, S. 493) für die älteste Aufzeichnung zur Lehre von den lemniskatischen Funktionen gehalten hat. SCHERING scheint also weder die *Exercitat. mathem.* noch den LEISTE gekannt zu haben. Das letztere geht auch aus der Bemerkung SCHERINGS (Werke III, S. 496, Zeile 19—21) hervor, vergl. die weiter unten im Abschnitt [III.] abgedruckten Aufzeichnungen aus LEISTE.

†) Werke III, S. 405, art. [3.] muß in der Formel für $\cos\operatorname{lemn} 2\varphi$ der Nenner lauten $1 + 2ss - s^4$ statt $1 + 2ss + s^4$, vergl. oben die Formel für die »Cosehne des doppelten Bogens«.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} - \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

gehörige Sehne; sie wird mit c, cos, später mit cl oder cos lemn. bezeichnet.

Die Formeln für »Sehne der Summe und Differenz« in [4.] stehen bei EULER a. a. O. S. 111. In [7.] ist φ das Integral (2); in der letzten Gleichung dieses Artikels muß die rechte Seite lauten

$$\varphi \frac{-mm+2m+1}{mm+2m-1}.$$

Entwickelungen nach den Kosinus der Vielfachen des Winkels φ für Ausdrücke von der Form $(1-2z\cos\varphi+z^2)^\nu$ oder $(1-\alpha\cos\varphi)^\nu$ sind zuerst von EULER*) in der Störungstheorie angewandt worden. GAUSS hat sie aus dem art. 279 des I. Bandes der *Institutiones calculi integralis***) sicher gekannt. Die Reihenentwickelungen für die Koeffizienten a und b in [8.] ergeben sich unmittelbar nach dem an der genannten Stelle auseinandergesetzten Verfahren von EULER; die Integraldarstellung von a und b dürfte GAUSS erhalten haben, indem er die gefundenen Reihen mit denjenigen verglich, die EULER in der Abhandlung über die curva elastica für die Integrale A und B gegeben hat***); auch der numerische Wert, den GAUSS für $\frac{2A}{\pi}$ gibt, findet sich in dieser Abhandlung EULERS (a. a. O. S. 104). Daß GAUSS schon zu jener Zeit das D'ALEMBERTsche Verfahren der gliedweisen Integration zwischen den Grenzen 0 und 2π angewandt haben sollte, um die Integraldarstellung der Koeffizienten zu finden, scheint wenig wahrscheinlich. Vergl. auch die Auszüge aus der Scheda Ac weiter unten *Zur Theorie des arithmetisch-geometr. Mittels,* Abschnitt [IV.], art. [2.] und Werke III, S. 128.

Als Abfassungszeit der artt. [1.]—[7.] können die ersten Januartage 1797 angesetzt werden; [8.] dürfte wohl etwas später, aber jedenfalls vor den 19. März desselben Jahres (vergl. die Bemerkungen zu [II.]) zu datieren sein.

SCHLESINGER.

---

*) *Pièce qui a remporté le prix de l'Académie des Sciences en 1748 sur les inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter* (Paris, 1749).

**) L. EULERI Opera omnia, Series I, vol. 11, S. 165 ff.

***) L. EULERI Opera omnia, Series I, vol. 21, S. 98; bei EULER ist: $A = c$, $B = a$.

[II.]

[DOPPELTE PERIODIZITÄT, PRODUKTDARSTELLUNG UND REIHENENTWICKELUNGEN VON ZÄHLER UND NENNER.]

[Eintragungen im LEISTE.]

[1.]

[S. 39]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}}$$

$$\frac{x\left(1-\frac{x^6}{729u^6}\right)\left(1-\frac{x^6}{729.2^6.u^6}\right)\left(1-\frac{x^6}{729.3^6.u^6}\right)\cdots}{\left(1-\frac{x^3}{2^3.u^3}\right)\left(1-\frac{x^3}{5^3.u^3}\right)\left(1-\frac{x^3}{8^3.u^3}\right)\cdots\left(1+\frac{x^3}{u^3}\right)\left(1+\frac{x^3}{4^3.u^3}\right)\cdots}$$

$$1+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{10^3}+\cdots = 1{,}01$$

$$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{8^3}+\frac{1}{11^3}+\cdots = \underline{0{,}13}$$

$$0{,}8$$

$$\frac{1{,}766^3}{6} = 0{,}9$$

$$\sqrt[3]{(1-x^3)} = \frac{\left(1-\frac{x^3}{u^3}\right)\left(1-\frac{1}{4^3}\,\frac{x^3}{u^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^3}\,\frac{x^3}{u^3}\right)\cdots}{\left(1-\frac{1}{2^3}\,\frac{x^3}{u^3}\right)\cdots\left(1+\frac{x^3}{u^3}\right)\cdots}.$$

[2.]

[S. 62]

Sehne v[on] $x =$

$$x\left(1+\frac{x^4}{\Pi^4}\right)\left(1+\frac{x^4}{16\Pi^4}\right)\left(1+\frac{x^4}{81\Pi^4}\right)\cdots$$

$$\left(1-\frac{x^4}{\Pi^4}\right)\left(1-\frac{x^4}{16\Pi^4}\right)\cdots$$

$$\times \text{ Prod. ex } \left(1-\frac{2(m^4-6m^2n^2+n^4)}{(mm+nn)^4}\left(\frac{x}{\Pi}\right)^4+\frac{1}{(mm+nn)^4}\frac{x^8}{\Pi^8}\right)$$

sumtis pro m, n omnibus numeris integris inaequalibus

$$:\left(1+\frac{4x^4}{\Pi^4}\right)\left(1+\frac{4x^4}{81\Pi^4}\right)\left(1+\frac{4x^4}{625\Pi^4}\right)\cdots$$

$$\times \text{ Pr. ex } \left(1-\frac{2(m^4-6m^2n^2+n^4)}{(mm+nn)^4}\left(\frac{2x}{\Pi}\right)^4+\frac{1}{(mm+nn)^4}\left(\frac{2x}{\Pi}\right)^8\right)$$

sumtis pro m, n omnibus numeris imparibus inaequalibus

[3.]

[S. 63—64]

$$\sin x = x\,\frac{1-\frac{1}{60}x^4-\frac{1}{10080}x^8+\frac{1}{10080.11700}x^{12}\cdots}{1+\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{10080}x^8+\frac{1}{1296000}x^{12}\cdots}\quad\left[=\frac{Mx}{Nx}\ ^{*)}\right]$$

Posito numeratore $=y$ erit

$$x = y+\frac{1}{60}y^5-\frac{13}{10080}y^9+\cdots$$

Rechnung nach dieser Formel für $22^0\frac{1}{2}$

$$1{,}311\,028\,777 = \Pi\left[=\int_0^1\frac{dp}{\sqrt{(1-p^4)}}\right]$$

[*) Die Koeffizienten von x^{12} sind unrichtig, sie müßten lauten $\frac{23}{259459200}$ im Zähler und $\frac{17}{19958400}$ im Nenner.]

Π^4 2,954160

Π^5 3,873119

Π^8 8,72

Π^9 11,43

$$\begin{array}{rl}
1{,}311028 & [=\Pi] \\
-\quad 64552 & \left[=\frac{1}{60}\Pi^5\right] \\
-\quad 1134 & \left[=\frac{1}{10080}\Pi^9\right] \\
\hline
1{,}245342 & [=M\Pi]
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
1{,}2461884376 & \left[=1+\frac{\Pi^4}{12}\right] \\
8658392 & \left[=\frac{1}{10080}\Pi^8\right] \\
\hline
1{,}2453225984 & \\
21961 & [^*)] \\
\hline
1{,}24534456 & [=N\Pi]
\end{array}$$

[4.]

[S. 86]

$$1[\varphi]-\frac{1}{10}[\varphi^5]+\frac{1}{120}[\varphi^9]-\frac{11}{15600}[\varphi^{13}]+\frac{211}{3536000}[\varphi^{17}]-\text{ etc.}$$

$$\sin(t+u\sqrt{-1})=\frac{\sin t\cos u\sqrt{-1}+\sin u\sqrt{-1}\,.\cos t}{1-\sin u\sqrt{-1}\,.\cos u\sqrt{-1}\,.\cos t\sin t}$$

$$=\frac{\sin t+\cos t\sin u\cos u\,.\sqrt{-1}}{\cos u-\cos t\sin u\sin t\,.\sqrt{-1}}.$$

[5.]

[S. 88]

$$0;\qquad \pm\Pi;\qquad 2\Pi;\qquad 3\Pi;\quad 4\Pi\quad\text{etc.}$$

$$0\pm\Pi\sqrt{-1};\qquad \pm\Pi\pm\Pi\sqrt{-1}\quad\text{etc.}$$

$$0\pm 2\Pi\sqrt{-1};\qquad \pm\Pi\pm 2\Pi\sqrt{-1}\quad\text{etc. etc.}$$

$$\left(1-\frac{x^4}{\Pi^4}\right)\left(1-\frac{x^4}{16\Pi^4}\right)\left(1-\frac{x^4}{81\Pi^4}\right)\cdots$$

[*) Die Zahl ist unrichtig, weil der Koeffizient von x^{12} in der Formel für $\sin x$ fehlerhaft ist.]

$$\Pi \pm \left|\begin{matrix} 0 & & 0 \\ 1 & \pm & 1 \\ 2 & & 2 \\ 3 & & 3 \\ 4 & & 4 \\ 5 & & 5 \end{matrix}\right| \sqrt{-1}$$

$$\Sigma \frac{1}{\rho^4} = 2\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \text{etc.}\right)$$

$$\Sigma \frac{m^4 - 6m^2n^2 + n^4}{(mm+nn)^4}.$$

[6.]

[S. 89]

$$\cos(t + u\sqrt{-1}) = \frac{\frac{\cos t}{\cos u} - \sin t \sin u \sqrt{-1}}{1 + \frac{\cos t}{\cos u} \sin t \sin u \sqrt{-1}}$$

$$= \frac{\cos t - \sin t \cos u \sin u \sqrt{-1}}{\cos u - \sin u \cos t \sin t \sqrt{-1}}.$$

Also der $\cos = 0$ für	$= \infty$ für
$t = (2k+1)R$	$u = (2k+1)R$
$u = 2kR$	$t = 2kR$, $\left[R = 90^0 = \Pi\right]$.

$$\cos u = \frac{\left(1 - \frac{4xx}{\Pi\Pi}\right)\left(1 - \frac{4xx}{9\Pi\Pi}\right)\left(1 - \frac{4xx}{25\Pi\Pi}\right)\cdots}{\left(1 + \frac{4xx}{\Pi\Pi}\right)\left(1 + \frac{4xx}{9\Pi\Pi}\right)\left(1 + \frac{4xx}{25\Pi\Pi}\right)\cdots}$$

$$\times \left(\frac{1 - \frac{2(mm-nn)}{(mm+nn)^2}\frac{xx}{\Pi\Pi} + \frac{x^4}{(mm+nn)^2\Pi^4}}{1 + \frac{2(mm+nn)}{(mm+nn)^2}\frac{xx}{\Pi\Pi} + \frac{x^4}{(mm+nn)^2\Pi^4}}\right)$$

Positis pro

$$\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\} \text{ omnibus valoribus } \left\{\begin{matrix} \text{impari} \\ \text{pari} \end{matrix} \text{bus}\right\}$$

$$1 - xx + \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{3}{10}x^6 \ldots \; [= \cos \operatorname{lemn} x]$$

$$\frac{16}{\Pi^4}(1{,}014678)+\Sigma\frac{m^4-6m^2n^2+n^4}{(mm+nn)^4}$$

$$\frac{1-\frac{1}{2}xx-\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{240}x^6\ldots}{1+\frac{1}{2}xx-\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{240}x^6\ldots}\left[=\cos\operatorname{lemn} x=\frac{\mu x}{\nu x}\right].$$

[7.]

[S. 66]

Zähler bei sin 90^0 $\left[90^0 \text{ heisst } \frac{360^0}{4}, \text{ also } = \int_0^1 \frac{dp}{\sqrt{(1-p^4)}} = \Pi\right]$

$$\begin{array}{rl}
1{,}31102878 & [=\Pi] \\
- \quad 6455202 & \left[=\frac{1}{60}\Pi^5\right] \\
- \quad 113514 & \left[=\frac{1}{10080}\Pi^9\right] \\
\hline
1{,}24534162 & \\
+ \quad 300 & \\
\hline
1{,}24534462 & [=M\Pi]
\end{array}$$

Nenner

$$\begin{array}{rl}
1{,}2461884 & \left[=1+\frac{\Pi^4}{12}\right] \\
- \quad 86583 & \left[=\frac{1}{10080}\Pi^8\right] \\
\hline
1{,}24532257 & \\
+ \quad 2196 & \\
\hline
1{,}24534453 & [=N\Pi]
\end{array}$$

$$\left(N\frac{1\,[\varphi]}{1+\sqrt{-1}}\right)^2-\left(M\frac{1\,[\varphi]}{1+\sqrt{-1}}\right)^2=\mu[\varphi]$$
$$+ \qquad\qquad =\nu[\varphi]\ [^*)]$$

$$\left(N\frac{1\,[\varphi]}{1+\sqrt{-1}}\right)^4-\left(M\frac{1\,[\varphi]}{1+\sqrt{-1}}\right)^4=N(1+\sqrt{-1})[\varphi].$$

[*) In der Handschrift werden hier die Buchstaben m, n benutzt; wir haben in Übereinstimmung mit art. [9.] die Zeichen μ, ν gesetzt.]

Hinc

$$N^4 + M^4 = N2[\varphi].$$

[8.]

S. 67]

Sit $1,24\ldots = a [= M\Pi = N\Pi]$

$$\begin{aligned} N\varpi &= 2a^4 [^{*})] \\ N2\varpi &= (2a^4)^4 \\ N4\varpi &= (2a^4)^{16} \\ N8\varpi &= (2a^4)^{64} \\ &\text{etc.} \\ N\lambda\varpi &= (2a^4)^{\lambda\lambda} \\ M2[\varphi] &= 2MN\sqrt{(N^4 - M^4)} \end{aligned}$$

[S. 70]

$$[\nu^2 =] MM + NN = 1 + 1[\varphi^2] + \tfrac{1}{6}[\varphi^4] - \tfrac{1}{30}[\varphi^6] + \tfrac{17}{2520}[\varphi^8]\ldots$$

$$\nu = 1 + \tfrac{1}{2}[\varphi^2] - \tfrac{1}{24}[\varphi^4] + \tfrac{1}{240}[\varphi^6] + \tfrac{17}{40320}[\varphi^8]\ldots$$

$$\begin{aligned} N2[\varphi] &= M^4 + N^4 \\ M2[\varphi] &= 2MN\mu\nu \\ \mu\nu &= N(1+\sqrt{-1})[\varphi] \\ \mu\mu &= \frac{NN-MM}{NN+MM}\nu\nu \end{aligned}$$

$$\mu 2[\varphi].\nu 2[\varphi] = M(1+\sqrt{-1})[\varphi]^4 + N(1+\sqrt{-1})[\varphi]^4 [= N2(1+\sqrt{-1})\varphi].$$

[*) In der Handschrift steht in den folgenden Formeln statt ϖ das gewöhnliche Π, so daß also dieser Buchstabe hier das Doppelte der Größe bedeuten würde, die er oben art. [3.], S. 64 des LEISTE, bezeichnet; es wurde darum hier die später von GAUSS ständig benutzte Bezeichnung

$$\varpi = 2\int_0^1 \frac{dp}{\sqrt{1-p^4}}$$

angewendet.]

[S. 71]

$$N4[\varphi] = M^{16} + 4M^{12}N^4 + 6M^8N^8 + 4M^4N^{12} + N^{16}$$
$$+ 16(N^8\nu^8 - N^8\nu^6\mu^2 - \nu^8N^6M^2).$$

[9.]

[S. 71]

Bei $45^0\left[=\frac{\varpi}{4}\right]$

Zähler des Sinus		Nenner des Sinus	
0,65551439	$\left[=\frac{\varpi}{4}\right]$	1,01538678	
— 201725		— 338	
— 221		1,01538340	$\left[=N\frac{\varpi}{4}\right]$
0,65349493	$\left[=M\frac{\varpi}{4}\right]$		

$\left[\log_{10} M\frac{\varpi}{4} =\right]$ 9,8152422   0,0066301 $\left[=\log_{10} N\frac{\varpi}{4}\right]$

$\left[4\log_{10} M\frac{\varpi}{4} =\right]$ 2609688   0,0265204 $\left[=4\log_{10} N\frac{\varpi}{4}\right]$

$\left[\left(M\frac{\varpi}{4}\right)^4 = 0,\right]$18237647

$\left[\left(N\frac{\varpi}{4}\right)^4 =\right]$ 1,06291846

$\left[M\frac{\varpi}{2} =\right]$ 1,24534493,

welches mithin die erste Rechnung oben [siehe art. 3] bestätigt.

$\Pi =$ 1,245344 $\left[= M\frac{\varpi}{2} = N\frac{\varpi}{2} = a,\right.$ siehe art. 8$\left.\right]$

$l\,\Pi$ 0,0952896

$[4\log_{10}\Pi =]$ 0,3811584   2,40524 $[=\Pi^4]$

4,81048 $= N\varpi$ $[=2\Pi^4]$

log hyp. dieser Zahl = 1,5708 = $\frac{1}{2}\pi$ Circuli?

[10.]

[S. 72—73]

$$\log \text{Denom[inatoris]} = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{10080}x^8 + \frac{17}{19958400}x^{12} \ldots$$
$$- \frac{1}{288} \quad x^8 + \frac{1}{120960} \quad [x^{12}] \ldots$$
$$+ \frac{1}{5184} \quad [x^{12}] \ldots$$

$$[\log N =] \; \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{280}x^8 + \frac{1}{4950}x^{12} - \frac{1}{78000}x^{16} \ldots$$

$$\log \text{Numeratoris} = \log x - \frac{1}{60}x^4 - \frac{1}{4200}x^8 - \frac{1}{321750}x^{12} - \frac{1}{19890000}x^{16} \ldots$$

$$d \log \sin = \frac{\sqrt{(1-\sin^4)}}{\sin}\, d \operatorname{arc}$$

$$s = \frac{\varphi}{1 + \frac{1}{10}s^4 \ldots}$$

$$s = \varphi - \left(\frac{1}{10}s^5 + \frac{1}{24}s^9 \ldots\right)$$

$$ls = l\varphi - \frac{1}{10}[\varphi^4] + \frac{1}{300}[\varphi^8] - \frac{1}{4875}[\varphi^{12}] \ldots$$

[III.]

[TEILUNG DER LEMNISKATE.]

[Eintragungen im LEISTE.]

[1.]

[S. 69]

Die Theilung der Lemniscata in sieben Theile gibt die Gleichung:

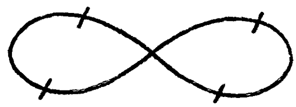
$$16\,(1-x^4)\left(\frac{1\quad -5\quad\quad -5\quad\quad +1}{1\quad +20\quad -26\quad +20\quad +1}\right)^2 = \left(\frac{3\quad *-6\quad *-1}{1\quad *+6\quad *-3}\right)^2.$$

[2.]

[S. 87]

Sit $\sin\frac{1}{5}kR = (k)$, tum habebuntur aequationis radices (0), $\pm(4)$, $\pm(2)$,

$$\frac{(0)+(5)(4)(1)\sqrt{-1}}{(1)-(0)(5)\ldots}$$



$$\frac{(4)+(1)(4)(1)\sqrt{-1}}{(1)-(4)(4)(1)\sqrt{-1}}$$

$$\frac{(2)-(3)(4)(1)\sqrt{-1}}{(1)+(2)(3)(4)\sqrt{-1}}$$

$$\pm 1,\ \sqrt{-1}\left[\begin{array}{c|c|}(0) & \frac{(4)}{(1)}\cdot\frac{1+(1)(1)\sqrt{-1}}{1-(4)(4)\sqrt{-1}}\\ (2) & \\ (4) & \frac{(2)}{(3)}\quad\frac{1+(3)(3)\sqrt{-1}}{1-(2)(2)\sqrt{-1}}\end{array}\right.$$

[3.]

[S. 90—91]

[cos 18^0]

0,965425785 [$= \mu\, 18^0$]

1,034180311 [$= \nu\, 18^0$]

1	1,31102877 [$= \frac{\varpi}{2}$]	sin 36^0	
2	1,71879545		0,524411511 [$= \frac{\varpi}{5}$]
4	2,95416	—	661011
5	3,87311	—	292
6	5,07777		0,523750208 [$= M\, 36^0$]
8	8,72765		1,006302208 [$= 1 + \frac{1}{12}\left(\frac{\varpi}{5}\right)^4$]
9	11,44320	—	567
10	15,00		[1,006301641 $= N\, 36^0$]

[sin] $36^0 =$

$$\frac{0{,}523750208}{1{,}006301641} = 0{,}5204703904.$$

[sin] $72^0 = \cos 18^0$

$$\frac{0{,}965425785}{1{,}034180311} = 0{,}9335177577.$$

[4.]

[S. 102]

Die Theilung der Lemniscata in 5 Theile führt auf diese Gleichung

$$\frac{9 - 36x^4 + 30x^8 + 12x^{12} + x^{16}}{1 + 12x^4 + 30x^8 - 36x^{12} + 9x^{16}} = \frac{4(1 - x^4)}{1 + 2x^4 + x^8}$$

$$\left.\begin{array}{rrrrrrr}
9 & -36 & +\ 30 & +\ 12 & +\ 1 & & \\
 & +18 & -\ 72 & +\ 60 & +\ 24 & +\ 2 & \\
 & & +\ 9 & -\ 36 & +\ 30 & +12 & +1 \\
-4 & -48 & -120 & +144 & -\ 36 & & \\
 & +\ 4 & +\ 48 & +120 & -144 & +36 & \\
\hline
5 & -62 & -105 & +300 & -125 & +50 & +1
\end{array}\right\} = 0.$$

[Wurzeln dieser Gleichung vom 24. Grade sind $\sin\operatorname{lemn}\frac{k\varpi}{5}$ für $k = 1, 2, 3, 4$, die übrigen sind imaginär, also:]

Determ. rad. imag.

$$\frac{\square}{\square} = \frac{4(1-x^4)}{\square},$$

[setze $x^4 = y$, so ist]

$$(3-6y-yy)(1+y) = 2(1+6y-3yy)\sqrt{(1-y)}$$

$$S = \sqrt{720} - 26\ [= 12\sqrt{5} - 26]$$

$$\left[= \left(\sin\operatorname{lemn}\frac{2\varpi}{5}\right)^4 + \left(\sin\operatorname{lemn}\frac{4\varpi}{5}\right)^4\right]$$

$$\begin{array}{l} 349 - 156\sqrt{5} \\ \underline{-9 + \quad 4\sqrt{5}} \\ 340 - 152\sqrt{5}\ \left[= \frac{1}{2}\left(\sin\operatorname{lemn}\frac{4\varpi}{5}\right)^4 - \frac{1}{2}\left(\sin\operatorname{lemn}\frac{2\varpi}{5}\right)^4\right]^2. \end{array}$$

Zwei Wurzeln obiger Gleichung sind

$$+0{,}0733810047\ \left[= \left(\sin\operatorname{lemn}\frac{2\varpi}{5}\right)^4\right]$$

$$+0{,}7594355\ \left[= \left(\sin\operatorname{lemn}\frac{4\varpi}{5}\right)^4\right].$$

[5.]

[S. 100—101]

Auflösung der Gleichung

$$5 - 62x - 105xx + 300x^3 - 125x^4 + 50x^5 + x^6\ [= 0\ *)]$$

[Es folgt eine Zahlenrechnung, anscheinend nach der Regula falsi].

Also eine Wurzel

$$= 0{,}07338100477\ \left[= \left(\sin\operatorname{lemn}\frac{2\varpi}{5}\right)^4\right]$$

und folglich

$$\sin 36^0 = 0{,}52047024\ [= \sqrt[4]{0{,}073381}].$$

[*) Das x in dieser Gleichung ist die vierte Potenz der im art. [4.] ebenso bezeichneten Unbekannten; die Gleichung hat also die Wurzeln $\left(\sin\operatorname{lemn}\frac{k\varpi}{5}\right)^4$ für $k = 1, 2, 3, 4$.]

Hieraus aber folgt eine zweite Wurzel

$$= 16\,\frac{(1-t)^2 t}{(1+t)^2}$$

$$\begin{aligned}
l16 &= 1{,}2041200\\
lt &= 0{,}8655836-2 \ [= \log_{10} 0{,}073381\ldots = \log_{10}(\sin \text{lemn } 36^0)^4]\\
l(1-t)^2 &= 0{,}9338025-1\\
-l(1+t)^2 &= 0{,}8769844-1\\
\hline
&\quad 0{,}8804905-1 \ [= \log_{10}]\ 0{,}7594348 \ [= \log_{10}(\sin \text{lemn } 72^0)^4].
\end{aligned}$$

Also

$$l \sin 72^0 = 0{,}9701226$$

und

$$\sin 72^0 = 0{,}9335179.$$

[6.]

[Ein Zettel Fh Nr. 1, Kapsel 50.]

Rechnungen zur Lemniscata gehörig.

$$(\sin 0{,}4)^4 + (\sin 0{,}8)^4 = 12\sqrt{5} - 26 \,[^*)]$$
$$= 2(0{,}4164078649 \quad 9873817845 \quad 5042012387 \quad 65741)$$

$$\left(\tfrac{1}{2}(\sin 0{,}8)^4 - \tfrac{1}{2}(\sin 0{,}4)^4\right)^2 = 340 - 152\sqrt{5}$$
$$= 0{,}1176674200 \quad 3196614580 \quad 5602352846 \quad 01228.$$

Daraus Radix

$$\begin{array}{r}
0{,}3430268503 \quad 0761971797 \quad 7310507555 \quad 85731\\
-0463415326 \quad 98758\\
\hline
6847092228 \quad 86973
\end{array}$$

Also

$$(\sin 0{,}4)^4 = 0{,}0733810146 \quad 9111846047 \quad 7731504831 \quad 80010$$

Daraus Radix

$$(\sin 0{,}4)^2 = 0{,}2708893033 \quad 8999814497 \quad 30710$$

[*) sin 0,4 und sin 0,8 bedeuten $\sin\frac{4\varpi}{10}$ und $\sin\frac{8\varpi}{10}$, d. h. also $\sin \text{lemn}\frac{2\varpi}{5}$ und $\sin \text{lemn}\frac{4\varpi}{5}$.]

$$(\sin 0{,}8)^4 = 0{,}7594347153\quad 0635789643\quad 2352519994\quad 51472$$

Daraus Radix

$$(\sin 0{,}8)^2 = 0{,}8714555153\quad 9155336074\quad 646029.$$

[7.]

[In *Sammlung von Rechnungen usw.* Fh Nr. 2, Kapsel 50.]

Berechnungen die Lemniscata betreffend.

$(\sin 0{,}4)^4$ u. $(\sin 0{,}8)^4$ sind Wurzeln der Gleichung[en]

$$\begin{aligned} p^4+q^4 &= \sqrt{720}-26 \\ (pp+qq)^2 &= 14\sqrt{5}-30 \\ (pp-qq)^2 &= 10\sqrt{5}-22 \\ pp+qq &= 5^{\frac{1}{4}}(3-5^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

BEMERKUNGEN ZU DEN ABSCHNITTEN [II.] UND [III.].

Das in [II.] [1.] auftretende Integral und seine Umkehrung hatte GAUSS, wie die Tagebuchnotiz Nr. 32 vom 9. September 1796 und art. [5.] der *Exercitat. mathem.* zeigen (siehe oben S. 140 dieses Bandes), anfangs neben dem lemniskatischen Integrale betrachtet. Auffallend ist dort wie auch hier die Benutzung des Buchstaben x in zweierlei Bedeutung, besonders in der letzten Formel des Artikels, wo überdies $\sqrt[3]{(1-x^3)}$ ein Schreibfehler für $\sqrt{(1-x^3)}$ ist. Die Reihen, die zwischen den beiden Quotienten von unendlichen Produkten stehen, deuten auf eine Untersuchung der Konvergenz der Produkte; vergl. auch [II.] [5.].

In [II.] [2.] und [3.] erscheint die Funktion $\sin\operatorname{lemn} x$ als Quotient, das einemal von doppelt unendlichen Produkten, das anderemal von beständig konvergenten Potenzreihen. Das hier sowie in [II.] [5.] und [6.] auftretende Π hat die Bedeutung

$$\Pi = \frac{\varpi}{2} = \int_0^1 \frac{dp}{\sqrt{1-p^4}}.$$

In [II.] [5.] werden die Nullstellen der Funktion sinus lemniscaticus schematisch dargestellt; die Reihen $\sum \frac{1}{p^4}$ und

$$\sum \frac{m^4-6m^2n^2+n^4}{(m^2+n^2)^4} = \tfrac{1}{2}\sum\left\{\frac{1}{(m+n\sqrt{-1})^4}+\frac{1}{(m-n\sqrt{-1})^4}\right\}$$

deuten auch hier (vergl. [II.] [1.]) auf Konvergenzuntersuchungen *).

*) Ein Ausdruck, der an die letztere Reihe erinnert, wird in der Notiz Nr. 61 des *Tagebuchs* (19.—21. März 1797) mit Π in Verbindung gebracht.

Auch [II.] [4.] gehört noch in diesen Zusammenhang; wir finden hier die schon wiederholt betrachtete Potenzreihe für $\sin\operatorname{lemn} x$; dann aber wird die Zerfällung des Wertes dieser Funktion für ein komplexes Argument mit Hilfe des Additionstheorems und der Formeln

$$\sin\operatorname{lemn} u\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\sin\operatorname{lemn} u,$$

$$\cos\operatorname{lemn} u\sqrt{-1} = \frac{1}{\cos\operatorname{lemn} u}$$

(vergl. Werke III, S. 411) gegeben. Übersichtlicher angeordnet als für die Funktion sinus lemniscaticus folgen in [II.] [6.] die analogen Untersuchungen für cosinus lemniscaticus.

Die in [II.] [3.] ausgeführten Zahlenrechnungen werden in [II.] [7.] mit größerer Schärfe wiederholt. Die in [II.] [7.] und [8.] von GAUSS benutzten Zeichen M, N, μ, ν bedeuten die Zähler und Nenner von $\sin\operatorname{lemn}$ und von $\cos\operatorname{lemn}$, also

$$M = x - \frac{1}{16}x^5 - \frac{1}{10\,080}x^9 + \frac{23}{259\,459\,200}x^{13} + \cdots,$$

$$N = 1 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{10\,080}x^8 + \frac{17}{19\,958\,400}x^{12} + \cdots,$$

$$\mu = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{240}x^6 - \cdots,$$

$$\nu = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{240}x^6 - \cdots;$$

dieselben Funktionen hat GAUSS später (vergl. Werke III, S. 405, 406) mit P, Q, p, q bezeichnet; diese Bezeichnungen werden uns bei irregulären (vergl. S. 170, Fußnote) Leisteaufzeichnungen weiter unten im Abschnitt [IV.], art. [1.], [2.] noch begegnen.

Die Reihen für μ und ν hat GAUSS mit der Bezeichnung p, q auch auf das vordere Schutzblatt des I. Bandes seines Exemplars von SCHULZES *Tafeln* eingetragen.

In [II.] [3.] und [7.] wird zunächst der Wert

$$a = M\frac{\varpi}{2} = N\frac{\varpi}{2}$$

mit Hülfe der Potenzreihen für M und N berechnet. Auf vier Dezimalstellen hatte GAUSS diese Zahl (1,2453) auch auf die Einbanddecke des LEISTE hingeschrieben (siehe oben [I.] [1.], S. 145). Es werden dann in [II.] [7.] und [8.] die Ausdrücke von $N2\varphi$ und $M2\varphi$ durch $M\varphi$ und $N\varphi$, ferner die Darstellung von $N\lambda\varpi$ für ein beliebiges positives ganzzahliges λ als Potenz von a gegeben. Diese Resultate finden in der Notiz Nr. 63 des *Tagebuchs* vom 29. März besondere Erwähnung. In [II.] [8.] werden dann die Werte $M\frac{\varpi}{4}$ und $N\frac{\varpi}{4}$ berechnet, und mit Hilfe der Formel für $M2\varphi$ der in [II.] [3.] unmittelbar berechnete Wert $M\frac{\varpi}{2}$ bestätigt. Die Formel für $N2\varphi$ ergibt dann

$$N\varpi = 2\left(M\frac{\varpi}{2}\right)^4,$$

und GAUSS findet nun durch numerische Induktion die Gleichung

$$N\varpi = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Dieses Ergebnis wird in derselben Notiz Nr. 63 des *Tagebuchs* als maxime memorabile bezeichnet.

Die in [II.] [7.] und [8.] gegebenen Beziehungen zwischen den vier Funktionen M, N, μ, ν findet man auch vervollständigt auf S. 63 des Handbuchs 16, Bb (begonnen November 1801), abgedruckt Werke III, S. 410, 411; die Formeln von [II.] [10.] sind in dem Mai 1809 angefangenen Handbuch 19, Be, S. 80, 81 weiter ausgeführt, abgedruckt Werke III, S. 408.

In [III.] sind die auf die Lemniskatenteilung bezüglichen Leisteaufzeichnungen mit zwei andern Notizen *) zusammengestellt, die aber der Handschrift nach zu urteilen alle aus derselben Zeit herrühren. Übrigens ist diese Zeit durch die Tagebuchnotizen Nr. 60 vom 19. März und Nr. 62 vom 21. März 1797 auf das genaueste festgelegt.

In [III.] [1.] sind in der Gleichung 48. Grades, die die Siebenteilung liefert, nur die Koeffizienten angedeutet. Die Gleichung lautet nach einer brieflichen Mitteilung von K. SCHWERING:

$$16\,(1-x^4)\left(\frac{1-5x^4-5x^8+x^{12}}{1+20x^4-26x^8+20x^{12}+x^{16}}\right)^2 = \left(\frac{3-6x^4-x^8}{1+6x^4-3x^8}\right)^2;$$

sie ergibt sich, indem man in

$$(\ast) \qquad (\sin\operatorname{lemn} 4\varphi)^2 = (\sin\operatorname{lemn} 3\varphi)^2$$

beiderseits aus Abschnitt [I.], artt. [4.] und [6.] die Ausdrücke durch $x = \sin\operatorname{lemn}\varphi$ einsetzt und nachher den Faktor x^2 unterdrückt. Man erkennt dann, daß der Gleichung $(\ast)$ die Bestimmung

$$7\varphi = 2(m + m'\sqrt{-1})\varpi$$

für ganzzahlige m, m' entspricht.

In [III.] [2.] bedeutet sin wieder sin lemn und R steht (wie auch schon in [II.] [6.]) für 90°, bedeutet also $\frac{\varpi}{2}$. Daß es sich um die Fünfteilung der Lemniskate handelt, lehrt auch die kleine Figur.

In [III.] [3.] wird dann die transzendente Bestimmung der reellen Wurzeln der Teilungsgleichung vorgenommen. Die kleine Tabelle links gibt die Potenzen von $\frac{\varpi}{2}$; eine kleinere solche Tabelle war schon oben [II.] [3.] vorgekommen, eine ähnliche, die aber mit größerer Schärfe gerechnet — also jedenfalls später zusammengestellt ist —, findet sich auf S. 3 der Scheda Aa (begonnen Juli 1798), abgedruckt Werke III, S. 413.

Die artt. [4.] und [5.] des Abschnitts [III.] sind durch die vom Herausgeber hinzugefügten Einschaltungen verständlich gemacht. Das »Determ. rad. imag.« (S. 162) findet seine Erledigung in der Tagebuchnotiz Nr. 60 vom 19. März 1797; vergl. auch Abschnitt [III.], art. [2.]. Der Schluß von [4.], von »$S = \sqrt{720} - 26$« an, könnte etwas später eingetragen sein, vielleicht nach der in Nr. 63 des Tagebuchs aufgezeichneten Entdeckung, daß die Fünfteilung geometrisch, d. h. mit Lineal und Zirkel, ausführbar sei. Die algebraische Darstellung der Wurzeln findet sich nämlich im LEISTE nicht, sondern erst auf den in [6.] und [7.] abgedruckten Zetteln.

Der Zusammenhang mit den Tagebuchnotizen Nr. 60—Nr. 63 zeigt, daß die in den Abschnitten [II.] und [III.] zusammengestellten Aufzeichnungen Entdeckungen wiedergeben, die zwischen dem 19. und dem 29. März 1797 gemacht worden sind.

SCHLESINGER.

---

*) Diese sind zwar schon Werke III, S. 421, art. [13.] abgedruckt, der Abdruck ist jedoch unvollständig und durch unrichtige Deutung der von GAUSS benutzten Zeichen entstellt.

[IV.]

[VERMISCHTE FORMELN ZUR THEORIE DER LEMNISKATISCHEN FUNKTIONEN.]

[Eintragungen im LEISTE.]

[1.]

[S. 26]

$$P.nx = nQ^{nn-1}P - \frac{n.nn-1.nn+6}{60}Q^{nn-5}P^5$$
$$-\frac{n^6-13n^4+36nn+420n.nn-1}{10080}Q^{nn-9}P^9\ldots$$

$$lP.nx = ln + lP + (nn-1)lQ - \frac{nn-1.nn+6}{60}\,\frac{P^4}{Q^4}$$
$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{1-14+49+384-420}{10080} \\ -\dfrac{1+10+13-60+36}{7200} \end{array}\right\}\frac{P^8}{Q^8}\ldots$$

[2.]

[S. 78]

$$\frac{QdP-PdQ}{QQ} = \sqrt{\left(1-\frac{P^4}{Q^4}\right)}[dx]$$
$$Q\frac{dP}{dx} - P\frac{dQ}{dx} = pq$$
$$q\frac{dp}{dx} - p\frac{dq}{dx} = PQ$$
$$(QP''-PQ'')(QP'-PQ') = 2Q^3Q' - P^3P' = 4Q^3Q' - 4P^3P'$$

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} Q^2P''-PQQ'' = -2P^3 \\ PPQ''-PQP'' = 2Q^3 \end{array}\right.$$

$$P(P+Q)Q''-Q(P+Q)P''=2(Q^3+P^3)$$

$$\text{I} \ldots PQ''-QP''=2QQ-2QP+2PP$$

$$\text{II} \ldots QP''-PQ''=2QQ+2QP+2PP$$

[3.]

[S. 90]

$$\frac{x-\frac{1}{60}x^5-\frac{1}{10080}x^9\ldots}{e^{\frac{1}{2}\frac{xx}{\varpi\varpi}\pi}}$$

[4.]

[S. 92—93]

$$\begin{aligned}\sin\text{lemn}\, a = {} & 0{,}9\,550\,060 \sin a \\ & -0{,}0430\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\text{lemn}\, a = {} & 0{,}95\,500\,599 \sin a \\ & -0{,}04\,304\,950 \sin 3a \\ & +0{,}00\,186\,048 \sin 5a \\ & -0{,}00\,008\,040 \sin 7a \\ & +0{,}00\,000\,347 \sin 9a \\ & -0{,}00\,000\,015 \sin 11a \\ & +0{,}00\,000\,001 \sin 13a\end{aligned}$$

Posito $\sin\varphi^0 = s$, atque φ express. in gradibus arcus cuius sinus lemnisc. $= s$ erit in gradibus

$$\begin{aligned} & = \varphi^0 \\ & + 4^0{,}933\,559 \sin 2\varphi \qquad \left(\frac{90}{\pi}-\frac{90}{\varpi\varpi} \qquad 0{,}0861\right. \\ & + \ 0{,}317\,820 \sin 4\varphi \\ & \quad\ 0{,}030\,313 \sin 6\varphi \\ & \quad\ 0{,}003\,414 \sin 8\varphi \\ & \quad\ 0{,}000\,422 \sin 10\varphi \\ & \quad\ 0{,}000\,055 \sin 12\varphi \\ & \quad\ 0{,}000\,007 \sin 14\varphi \\ & \quad\ 0{,}000\,001 \sin 16\varphi \end{aligned}$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi)}}.$$

[5.]

[Rückseite des Titels]

$$\Pi = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{8}\right)^2\frac{1}{4}+\left(\frac{5}{16}\right)^2\frac{1}{8}+\cdots\right\}$$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}c)}}\left[=\sqrt{\frac{2}{3}}\right]\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\frac{1}{3}c)}}$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{1}{3}c)}}=\right]1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}c+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{9}cc+\cdots$$

$$\left[\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\varpi}{\pi}=\right]1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{81}+\cdots$$

$$\begin{array}{r}
[0,]816496580927726\ \left[=\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right]\\
17010345435994\\
1033614740034\\
78956681530\\
\hline
834619497785284\\
6682531640\\
599571589\\
55862862\\
5344024\\
521297\\
51583\\
5169\\
523\\
53\\
6\\
\hline
\left[\frac{\varpi}{\pi}=\right]\ 0,834626841674030
\end{array}$$

[6.]

[Zettel in Fh Nr. 2, Kapsel 50.]

Ponendo sin lemn φ = sin circ. χ erit

$$\begin{aligned}\chi = \frac{\pi}{\varpi}\varphi - 0{,}086\,266 \sin 2\varphi \\ + \quad 1866 \sin 4\varphi \\ - \quad 53 \sin 6\varphi \\ + \quad 2 \sin 8\varphi\end{aligned}$$

[Auf der Rückseite]

$$Px = \frac{x - \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{10080}x^9 \ldots}{e^{\frac{1}{2}\frac{xx}{\varpi\varpi}\pi}}$$

$$Q(1+\sqrt{-1})\pi = 4e^{\frac{1}{2}\varpi}.$$

BEMERKUNGEN.

Die in den artt. [1.] bis [5.] wiedergegebenen Leisteaufzeichnungen gehören zu den irregulären*). In [1.], [2.] sind P, Q die früher mit M, N bezeichneten Zähler und Nenner des sinus lemniscaticus; diese Bezeichnungen hat Gauss auch auf dem Werke III, S. 404—406, art. [1.]—[4.] abgedruckten Zettel und in sehr viel späterer Zeit in den Handbüchern 16, Bb und 19, Be (siehe Werke III, S. 408—412) benutzt. Zu den Formeln in [1.] vergleiche man Werke III, S. 411, 412; in den Koeffizienten von $\frac{P^8}{Q^8}$ sind in den Zählern die Potenzen von n zu ergänzen. Die Aufzeichnung [3.] erscheint schon äußerlich durch das Zeichen ϖ für die halbe lemniskatische Periode als irregulär; der hingeschriebene Quotient ist die von Juli 1798 ab in der Scheda Aa**) (siehe Werke III, S. 416 ff.) ständig mit P bezeichnete Funktion, die die Eigenschaft

$$P(\varpi + x) = -P(x)$$

*) Während die in den Abschnitten [I.], [II.], [III.] wiedergegebenen Leisteaufzeichnungen in fortlaufender Reihenfolge gemacht sind und den Tagebuchnotizen des Jahres 1797 entsprechen, sind die in diesem Abschnitt [IV.] zusammengestellten Notizen auf leer gebliebenen Stellen von Durchschußblättern, die Gauss früher mit Aufzeichnungen andern Inhalts beschrieben hatte, eingetragen. Wir bezeichnen solche Leistenotizen im Text und weiterhin als irreguläre. Vergl. den Artikel 2 des Aufsatzes »Über Gauss' Arbeiten zur Funktionentheorie«.

**) Die Scheda Aa ist begonnen Juli 1798; ihr Inhalt hängt mit den Tagebuchnotizen Nr. 92, 94, 95 (Juli—Oktober 1798) zusammen. Sie dürfte Oktober 1798 abgeschlossen worden sein, denn im November 1798 beginnt die Scheda Ab.

besitzt und sich als die JACOBIsche Thetafunktion $H(x)$ *) für den lemniskatischen Fall charakterisieren läßt, während die Funktionen M, N den WEIERSTRASSschen Al-Funktionen **) entsprechen. Derselbe Quotient findet sich auch auf dem in [6.] abgedruckten Zettel. Die daselbst und in [4.] auftretenden Reihenentwickelungen nach den Sinus der Vielfachen eines Winkels weisen auf die Tagebuchnotiz Nr. 91 b vom Juli 1798 hin. Die in [4.] in dem ersten Ansatz für $\sin \operatorname{lemn} a$ als Koeffizient von $\sin a$ auftretende Zahl stand ursprünglich auch ebenso (mit 60 in der 6. und 7. Dezimale) im *Tagebuch*; die dann folgende Entwickelung in [4.] ist viel vollständiger und in den 7. und 8. Dezimalen genauer als die des *Tagebuchs*, sie ist also jedenfalls später, und damit ist dieser ganze Komplex von Aufzeichnungen auf Juli 1798, kurz vor Beginn der Scheda, Aa datiert.

Das am Schluß von [4.] hingeschriebene Integral stellt den Zusammenhang mit der Aufzeichnung [5.] her, die eine geschicktere und schärfere Ausführung der in [I.] [8.] (oben S. 149 dieses Bandes) begonnenen Rechnung enthält. In [5.] bedeutet Π wieder die Viertelperiode

$$\Pi = \int_0^1 \frac{dp}{\sqrt{1-p^4}} = \frac{\varpi}{2};$$

setzt man in diesem Integral $p = \sqrt{1-\xi^2}$, so erhält man die Form

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-\frac{1}{2}\xi^2)}},$$

aus der die erste in [5.] angegebene Reihe für Π hervorgeht. Die Reihe für

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\varpi}{\pi} = \sqrt{6}\,\frac{1,3110\ldots}{3,1415\ldots}$$

findet sich auch in der Tagebuchnotiz Nr. 91 a (Juli 1798). Die mit Hilfe dieser Reihe ausgeführte numerische Rechnung liefert einen Wert für $\frac{\varpi}{\pi}$, der zwar viel genauer ist als der in [I.] [8.] angegebene, jedoch wird auf S. 24 der Scheda Aa ein noch genauerer Wert berechnet (es folgen nämlich auf die vierzehnte Dezimalstelle 3 noch die Stellen 164), so daß also die hier gegebene Rechnung die frühere ist. Damit ist auch [5.] auf Juli 1798 datiert, wobei allerdings noch die Möglichkeit offen bleibt, daß die erste Reihe für Π schon vor den übrigen Notizen hingeschrieben worden ist, zu einer Zeit, als GAUSS noch Π und nicht $\frac{\varpi}{2}$ als Zeichen für die Viertelperiode benutzte.

SCHLESINGER.

*) Vergl. etwa JACOBIS Werke I, S. 224.

**) Vergl. WEIERSTRASS' Werke I, S. 6.

ZUR THEORIE
DES ARITHMETISCH-GEOMETRISCHEN MITTELS.

[I.]

[SPECIME]N TERMINI MEDII SI NOMINE UTI LICET ARITHMETICO-GEOMETRICI.

[Zettel in Ff, Kapsel 46 a.]

[1.]

Modulus v. 2 = 0,82781

$$ly = \int u\,dz$$

$$u = 1 + z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{4}z^3 - \frac{1}{16}z^4 \ldots$$

[1] $$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{Tm.}(1+x) = 1+z = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}xx + \frac{1}{32}x^3 - \frac{21}{1024}x^4 + \frac{31}{2048}x^5 \\ \qquad\qquad - \frac{195}{16384}x^6 + \frac{305}{32768}x^7 \ldots \end{array}\right.$$

[2] $$1 + x = 1 + 2z + \frac{1}{2}zz - \frac{1}{4}z^3 + \frac{3}{16}z^4 - \frac{5}{32}z^5 + \frac{23}{256}z^6 - \frac{5}{128}z^7 \ldots$$

[3] Basis cuius Modulus u, $= 1 + u + \frac{uu}{4} * + \frac{u^4}{448} - \frac{u^5}{2240} \cdots$

[4] Quadratum cuius latus est aequal. parti alteri huius seriei post 1
$$= uu + \frac{u^3}{1.2} + \frac{u^4}{1.2.8} + \frac{u^5}{1.2.8.14} + \frac{u^6}{2.8.14.20} \cdots$$

Quodsi supponamus legem, quae elucet, hu[ius seriei] veram esse, prior sive radix =

$$u + \frac{uu}{4} \ast + \frac{u^4}{448} - \frac{u^5}{2240} + \frac{24}{23296} u^6 \ldots$$

[2.]

Sit e. g. $u = 0{,}1$ atque ad calculum illa serie uta[mur]

Quant. (cuius mod. $= u$) $= 1 + \sqrt{(uu + \frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{16}u^4 + \cdots)}$

$$\begin{array}{r}
0{,}01 \\
0{,}0005 \\
0{,}00000625 \\
\ldots\ldots 44642857142857 \\
223214285714 \\
858516484 \\
2682864 \\
7060 \\
16 \\
\hline
0{,}01050629486693263499\,5 \text{[*)]}
\end{array}$$

$\varepsilon^{\ast 0,1 \ast} = 1{,}1024994$ [**)]

$\sqrt{(\varepsilon^{\ast t \ast})} = 1 + \frac{1}{2} t \ast \ast + \frac{1}{896} t^4 - \frac{1}{1280} t^5 - \frac{9}{17920} t^6 - \ldots$

$\lambda(1+z)$ plus minus $\sqrt{(1+z)} - 2$

$$= z - \frac{1}{4} zz + \frac{1}{8} z^3 - \frac{9}{112} z^4 + \frac{131}{2240} z^5 \ldots$$

$\varepsilon = 2{,}251877, \quad \varepsilon^{-1} = 0{,}2528383, \quad 1 : \varepsilon^{-1} = 3{,}955096$

$\lambda(1+z) = z - \frac{1}{4} zz + \frac{1}{8} z^3 \ast.$

[*) In der Handschrift lautet die vorletzte Ziffer 8 statt 9.]

[**) In der Handschrift lautet diese Zahl, 1,01024994.]

[Aus Scheda Ab, Exercitationes atque Schedae analyticae, 1798 Nov., S. 20 ff.]

[3.]

[S. 20]

$$1{,}1\,892\,071\,150\,027 \quad [= \sqrt{1\,.\,\sqrt{2}}]$$

$$1{,}4\,142\,135\,623\,730 \; [= \sqrt{2}].$$

[S. 21]

$$l(1+x) = x - \tfrac{1}{4}xx + \tfrac{1}{8}x^3 - \tfrac{9}{112}x^4 \ldots$$

[5]
$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{1}{2}x - \frac{1}{16}xx + \frac{1}{32}x^3 - \frac{21}{1024}\qquad x^4 + \cdots [= \mathrm{Tm.}\,(1+x) - 1] \\
\qquad - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{64}[x^3] - \frac{9}{1024}\qquad \left[x^4 + \cdots = -\frac{1}{4}(\mathrm{Tm.}\,(1+x) - 1)^2\right] \\
\qquad\qquad + \frac{1}{64}[x^3] - \frac{3}{512}\qquad \left[x^4 + \cdots = \frac{1}{8}(\mathrm{Tm.}\,(1+x) - 1)^3\right] \\
\qquad\qquad\qquad - \frac{1}{16}\left[\cdot\frac{9}{112}x^4 + \cdots = -\frac{9}{112}(\mathrm{Tm.}\,(1+x) - 1)^4\right]
\end{array}\right.$$

[6]
$$l(1+x) = x - \tfrac{1}{4}xx + \tfrac{1}{8}x^3 - \tfrac{9}{112}x^4 + \tfrac{131}{2240}x^5 + \cdots$$

[7]
$$\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{16}xx + \tfrac{1}{32}x^3 - \tfrac{21}{1024}x^4 + \tfrac{31}{2048}x^5 + \cdots \; [= \mathrm{Tm.}\;(1+x) - 1]$$

$$\begin{array}{rl}
0{,}19814 & [= \mathrm{Tm.}\,\sqrt{2} - 1] \\
- \quad 981 & \\
\hline
18833 & \\
+ \quad 97 & \\
\hline
18931 & \\
12 & \\
18921 &
\end{array}$$

[4.]

$$[8]\quad \left\{\begin{aligned} &1+x-\frac{1}{4}xx+\frac{1}{8}x^3-\frac{9}{112}x^4+\frac{131}{2240}x^5[+\cdots=1+l(1+x)]\\ &\quad+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}x^3+\frac{5}{64}[x^4]-\frac{25}{448}\left[x^5+\cdots=\frac{1}{4}l(1+x)^2\right]\\ &\qquad+\frac{1}{448}x^4-\frac{1}{448}\left[x^5+\cdots=\frac{1}{448}l(1+x)^4\right]\\ &\qquad\quad-\frac{1}{2240}\left[x^5+\cdots=\frac{-1}{2240}l(1+x)^5\right]\end{aligned}\right.$$

$$[9]\quad \left\{\begin{aligned} &x-\frac{1}{2}xx+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}\,[x^5-\cdots=\log(1+x)]\\ &\quad+\frac{1}{4}xx-\frac{1}{3}x^3+\frac{11}{48}x^4-\frac{5}{24}\left[x^5+\cdots=\frac{1}{4}\log(1+x)^2\right]\\ &\qquad+\frac{1}{24}x^3-\frac{1}{16}x^4+\frac{7}{96}\left[x^5-\cdots=\frac{1}{24}\log(1+x)^3\right]\\ &\qquad\quad+\frac{1}{336}x^4-\frac{1}{168}\left[x^5+\cdots=\frac{1}{336}\log(1+x)^4\right]\\ &\qquad\qquad-\frac{1}{6720}\left[x^5+\cdots=\frac{-1}{6720}\log(1+x)^5\right]\end{aligned}\right.$$

[S. 23]

$$\begin{aligned} u &= \tfrac{1}{4}z^3-\tfrac{1}{2}z^u\\ &\quad+\tfrac{1}{2}z^3\end{aligned}$$

[10] $[\mathrm{Tm.}(1+2y)-1=]\,z=y-\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{4}y^3-\frac{21}{64}y^4+\frac{31}{64}y^5-\frac{195}{256}y^6+\frac{305}{256}y^7$ etc.

[11] $$y=z+\frac{1}{4}z^2-\frac{1}{8}z^3+\frac{3}{32}z^4-\frac{5}{64}[z^5+\cdots].$$

[5.]

[S. 25]

[12] $$y=2z+\frac{1}{2}zz-\frac{1}{4}z^3+\frac{3}{16}z^4-\frac{5}{32}z^5+\frac{23}{256}z^6+\cdots$$

[13] $$2\varphi z=\varphi\left(2z+\frac{1}{2}zz-\frac{1}{4}z^3\text{ etc.}\right).$$

[S. 26]

$$\begin{array}{lll} & 2 & 1 \\ & 1{,}5 & 1{,}41\,421\,356\ [=\sqrt{2}] \\ [\tfrac{1}{2}(1{,}5+\sqrt{2})=] & 1{,}45\,710\,678 & \end{array}$$

$$\partial\frac{1}{M}=\frac{\partial M}{M^2},\quad M\frac{1+x}{2\sqrt{x}},\quad M'\frac{1+x}{2\sqrt{x}}.$$

[S. 38]

$$\begin{array}{lrl} M\tfrac{1}{2} & [0,]7283955 & \\ & [0,]86419775 & [=\tfrac{1}{2}(1+0{,}7283955)] \\ & [0,]85346079 & [=\sqrt{0{,}7283955}] \\ & 85882927 & [=\tfrac{1}{2}(0{,}86419775+0{,}85346079)] \\ & 1260 & \\ M^2\tfrac{1}{2}= & 0{,}85882094 & [=M(M\tfrac{1}{2})] \\ & 0{,}92941047 & [=\tfrac{1}{2}(1+0{,}85882094)] \\ & 672597 & \\ \hline & 92806822 & \\ & 6718 & \\ M^4\tfrac{1}{2}= & 0{,}9280677 & \end{array}$$

[II.]

[REIHENENTWICKELUNGEN UND BEZIEHUNGEN ZUM ELLIPSENUMFANG.]

[Eintragungen im LEISTE.]

[1.]

[S. 25]

[1] $$1-\frac{1.1}{2.2}BB-\frac{1.1.1.3}{2.2.4.4}B^4-\text{ etc.}$$

[2] $$B+\frac{1}{4}B^3+\frac{9}{64}B^5\ldots=4z+8z^5$$

[3] $$B=4z-16z^3-376z^5$$

[4] $$\text{Periph.}=1-4z^2+20z^4+800z^6$$

[S. 26]

Peripheria Ellipseos

[5] $$=1-\frac{1.1}{2.2}BB-\frac{1.1.1.3}{2.2.4.4}B^4\text{ etc.}$$

[6] $$B+\frac{1}{4}B^3+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}B^5\ldots=(2z^{\frac{1}{2}}+2z^{\frac{3}{2}}+\text{ etc.})^2=rr$$

[7] $$=\frac{2bbrdr}{BBdB}-\frac{rr}{B^3}$$

[8] $$\frac{2Bbbrdr-rrdB}{B^3dB}=C\frac{r^4bbxdp}{B^4pdx}$$

$$\frac{2bbrdr}{BBdB}-\frac{bb}{BB}\qquad\frac{bb}{BdB}\left(\frac{2dr}{r}-\frac{dB}{B}\right)$$

[9] $$\frac{2BBbbdr-rBdB}{r^3bb[dB]}=C\frac{xdp}{pdx}.$$

[2.]

[S. 37]

[10] $$\int \frac{\frac{bb}{a}+\left(\frac{aa-bb}{a}\right)ss}{\sqrt{\left(1-\frac{aa-bb}{aa}ss\right)}}[ds].$$

---

[11] $$\mathbf{M}\nu = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{(1-\nu\nu)}}{1+\sqrt{(1-\nu\nu)}}\,\mathbf{M}\frac{1-\sqrt{(1-\nu\nu)}}{1+\sqrt{(1-\nu\nu)}}$$

[12] $$\mathbf{M}\frac{2\sqrt{x}}{1+x} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}x\mathbf{M}x$$

[13] $$\mathbf{M}x = \frac{1}{2}+\frac{1}{16}xx+\frac{1}{32}x^4+\frac{41}{2048}x^6+\ldots$$

Peripheria Ellipsis cuius axes a, b est

[14] $$\pi\frac{bb}{a}\left|K\sqrt{\frac{aa-bb}{aa}}\right|\left(1+\frac{aa-bb}{bb}\mathbf{M}\sqrt{\frac{aa-bb}{aa}}\right)$$

[15] $$=\pi\frac{bb}{a}\,\frac{1+N\sqrt{\frac{aa-bb}{bb}}}{\text{Med. inter 1 et }\frac{b}{a}}$$

[16] $$N\nu = \nu\nu\mathbf{M}\nu = \frac{1}{2}\nu\nu+\nu\,.\,N\frac{1-\sqrt{(1-\nu\nu)}}{1+\sqrt{(1-\nu\nu)}}.$$

[3.]

[S. 48]

[17] $$q = \frac{\pi}{2}a\left(1-\frac{1.1}{2.2}\left(\frac{aa-bb}{aa}\right)-\frac{1.1.1.3}{2.2.4.4}\left(\frac{aa-bb}{aa}\right)^2\ldots\right)$$

[18] $$\frac{aa}{M(a,b)} = a\left(1+\frac{1.1}{2.2}\left(\frac{aa-bb}{aa}\right)+\frac{1.1.3.3}{2.2.4.4}\left(\frac{aa-bb}{aa}\right)^2\ldots\right)$$

[19] $$\frac{a}{M(a,b)}-\frac{2q}{\pi a} = \frac{1}{2}\left(\frac{aa-bb}{aa}\right)+\frac{1.1.3}{2.2.4}\left(\frac{aa-bb}{aa}\right)^2\ldots$$

[4.]

[S. 49]

[20] $$K\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1+x} = (1+x)Kx$$

[21] $$K\sqrt{(1-xx)} = Hx \qquad \frac{1-x}{1+x} = y$$

[22] $$K\frac{1-x}{1+x} = H\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1+x}$$

[23] $$\frac{2y^{\frac{1}{2}}}{1+y} = \sqrt{(1-xx)}$$

[24] $$H\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1+x} = \frac{1+x}{2}Hx$$

[25] $$Hx = \frac{2}{1+x}H\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1+x}$$

[26] $$\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1+x} = {}'x$$

[27] $$\frac{1-\sqrt{(1-xx)}}{1+\sqrt{(1-xx)}} = x'$$

[28] $$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x'+\frac{1}{8}x'x''+\text{etc.} = \mathbf{M}x.$$

[5.]

S. 83]

[29] $$L\frac{2\nu^{\frac{1}{2}}}{1+\nu} = \frac{1+\nu}{2}\nu L\nu + \frac{\nu+1}{2}K\nu \qquad \frac{L}{K} = \mathbf{M}$$

[30] $$\mathbf{M}\frac{2\nu^{\frac{1}{2}}}{1+\nu} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu\mathbf{M}\nu$$

[31] 1) $$\frac{2}{1+\nu}\left(K\frac{2\nu^{\frac{1}{2}}}{1+\nu} - L\frac{2\nu^{\frac{1}{2}}}{1+\nu}\right) = K\nu - \nu L\nu$$

(Verif.)

[32] 2) $$K\frac{2\nu^{\frac{1}{2}}}{1+\nu} = (1+\nu)K\nu.$$

[S. 88]

[33] $$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\nu\nu+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\nu^4+\text{etc.}=K$$

[34] $$\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\nu^3+\frac{1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6}\nu^5+\text{etc.}=\mathrm{L}$$

[35] $$K\nu=\frac{1}{M\sqrt{(1-\nu\nu)}}=\frac{1}{\overline{1+\nu}\,M\frac{1-\nu}{1+\nu}}$$

[36] $$\frac{\partial K}{\partial\nu}=\nu\frac{\partial\mathrm{L}}{\partial\nu},\quad \frac{\nu\partial\nu K}{\partial\nu}=\frac{\partial\nu\mathrm{L}}{\partial\nu}$$

[37] $$K'=\nu\mathrm{L}',\quad \nu K+\nu\nu K'=\mathrm{L}+\nu\mathrm{L}'$$

[38] $$K+\left(\nu-\frac{1}{\nu}\right)K'=L$$

[39] $$(1+\nu)K\nu=K\frac{2\sqrt{\nu}}{1+\nu}$$

[40] $$(1+\nu)K'\nu+K\nu=K'\frac{2\sqrt{\nu}}{1+\nu}\Big\}\times\frac{1-\nu}{(1+\nu)^2\nu^{\frac{1}{2}}}.$$

[6.]

[S. 56]

$\ldots{}'a$	a	a'	a''
$'b$	b	b'	b''
$'A$	A	A'	A''
$'B$	B	B'	B''

$$A=a+b$$
$$B=a-b$$
$$A'=a\qquad=\tfrac{1}{2}({}'a+{}'b)$$
$$B'=\sqrt{(aa-bb)}=\tfrac{1}{2}({}'a-{}'b)$$
$$A''=\tfrac{1}{4}({}''a+{}''b)$$
$$B''=\tfrac{1}{4}({}''a-{}''b)$$

3,38889961	0,025313952
1,70710678	0,29289322
1	0,70710675 [$=\sqrt{\tfrac{1}{2}}$]
0,8535533912	0,8408964152

[III.]

[DIFFERENTIAL- UND FUNKTIONALGLEICHUNGEN.]

[Zwei Zettel in Ff, Kapsel 46 a.]

[1.]

[Erster Zettel]

Ponendo

$$y = x^{-1} + \frac{1}{4} x^{-3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16} x^{-5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{25}{36} x^{-7} \text{ etc.}$$

$$(= \varphi x$$

eruitur

$$xy + (3xx - 1)\frac{dy}{dx} + x(xx - 1)\frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

Iam ponendo $x = \frac{1}{2}(t + t^{-1})$ erit

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2}{1-t^{-2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{2}{1-t^{-2}}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{2}{1-t^{-2}}\right)^2 \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{1}{t^3}\left(\frac{2}{1-t^{-2}}\right)^3 \frac{dy}{dt}.$$

Hinc

$$\frac{tt+1}{2t} y + \frac{3t^4 + 2tt + 3}{2tt-2} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{tt+1}{2t}\left(\frac{tt-1}{2t}\right)^2 \left\{\left(\frac{2tt}{tt-1}\right)^2 \frac{d^2 y}{dt^2} - \left(\frac{2t}{tt-1}\right)^3 \frac{dy}{dt}\right\}$$

sive

$$\frac{tt+1}{2t} y + \frac{3t^4+1}{2tt-2} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{t(tt+1)}{2} \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

sive

$$(t^4 - 1)y + t(3t^4 + 1)\frac{dy}{dt} + tt(t^4 - 1)\frac{d^2 y}{dt^2} = 0.$$

Hinc facile deducitur

$$y = 2\left(t^{-1}+\frac{1}{4}t^{-5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}t^{-9}+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{36}t^{-13}+\text{etc.}\right)$$

sive

$$\varphi\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right) = 2t\varphi tt.$$

Ponendo $x = \frac{1}{p}$ erit

$$y - p(1+pp)\frac{dy}{dp}+pp(1-pp)\frac{d^2y}{dp^2} = 0.$$

[2.]

[Zweiter Zettel]

Wenn

$$\varphi x = x^{-1}+\frac{1}{4}x^{-3}+\frac{1.9}{4.16}x^{-5}+\text{etc.},$$

so ist bewiesen, dass

$$2x\varphi xx = \varphi\frac{xx+1}{2x} \dots\dots\dots\dots (1).$$

Es sei

$$\frac{\sqrt{xx-1}}{\varphi\sqrt{\frac{xx}{xx-1}}} = \Psi x,$$

woraus, $\sqrt{\frac{xx}{xx-1}} = u$ gesetzt, folgt

$$\varphi u = \frac{1}{\sqrt{uu-1}\,.\,\Psi\sqrt{\frac{uu}{uu-1}}}.$$

Dann gibt die Functionalgleichung (1)

$$\frac{2x}{\sqrt{x^4-1}\,.\,\Psi\sqrt{\frac{x^4}{x^4-1}}} = \frac{1}{\frac{xx-1}{2x}\,\Psi\frac{xx+1}{xx-1}},$$

mithin

$$\Psi\sqrt{\frac{x^4}{x^4-1}} = \sqrt{\frac{xx-1}{xx+1}}\,.\,\Psi\frac{xx+1}{xx-1}.$$

Man setze $\frac{xx-1}{xx+1} = tt$, so wird $xx = \frac{1+tt}{1-tt}$ und

$$\Psi\frac{1+tt}{2t} = \frac{1}{t}\Psi tt.$$

Nun ist aber auch

$$M\frac{1+tt}{2t} = \frac{1}{t}Mtt.$$

Macht man daher allgemein

$$\frac{\Psi z}{Mz} = Fz,$$

so wird

$$F\frac{1+tt}{2t} = Ftt,$$

woraus man leicht schliesst, dass Fz eine Konstante sein müsse.

Nun ist für $u = \infty$, $\varphi u = \frac{1}{u}$; also $\Psi\sqrt{\frac{uu}{uu-1}}$ oder $\Psi 1 = 1$. Es ist aber auch $M1 = 1$, folglich die Konstante $= 1$ und daher

$$Mx = \frac{\sqrt{xx-1}}{\varphi\sqrt{\frac{xx}{xx-1}}}.$$

Also [ist] $\frac{1}{Mx}$ der von V freie Theil des Ausdrucks

$$\frac{1}{\sqrt{xx-1}\cdot\sqrt{\left(\frac{xx}{xx-1} - \cos V^2\right)}}$$

oder auch der von V freie Theil bei

$$\frac{1}{\sqrt{(xx - \cos V^2 (xx-1))}} = \frac{1}{\sqrt{(xx \sin V^2 + \cos V^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1 + (xx-1)\sin V^2)}},$$

und folglich

$$\frac{1}{M\sqrt{(1+y)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+y\sin V^2)}}$$ (abiectis partibus angulum V implicantibus)

Übrigens ist es gleichgültig, ob man $\sin V^2$ oder $\cos V^2$ schreibt.

$$\varphi x = 1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1.9}{4.16}x^4 \text{ etc.}$$

$$\varphi s = \frac{1}{Mc} = \frac{\text{tang}}{sM\frac{1}{c}}$$

0	0
30°	0,728395
45°	0,847213
60°	0,931808
90°	1.

[IV.]

[INVESTIGATIO FUNCTIONUM QUAE EX EVOLUTIONE MEDIORUM ARITHMETICO-GEOMETRICORUM ORIUNTUR.]

[Auszüge aus der Scheda Ac. Varia, Novbr. 1799.
Imprimis de Integrali $\int \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1+\mu\mu \sin \varphi^2)}}$. 22. XI. S. 7 ff.]

[1.]

[S. 7]

[1] $$\frac{\varpi}{\pi} = \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{8} \cdots\right)\sqrt{\frac{1}{2}}$$

[2] $$= \left(1 + \frac{1.2.3}{2.4.4}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1.2.3.5.6.7}{2.4.4.6.8.8}\cdot\frac{1}{81} + \frac{1.2.3.5.6.7.9.10.11}{2.4.4.6.8.8.10.12.12}\cdot\frac{1}{729}\cdots\right)\sqrt{\frac{2}{3}}$$

[3] $$= \left(1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{81} + \frac{1.3.5.7.9.11}{4.4.8.8.12.12}\cdot\frac{1}{729}\cdots\right)\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

[S. 9]

[4] $$\frac{\varpi}{\pi} - \frac{2}{\varpi} = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{27} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{243} + \text{etc.}\right)\sqrt{\frac{1}{6}}$$

[5] $$\frac{\varpi}{\pi} - \frac{2}{\varpi} = \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{27} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{12}\cdot\frac{1}{243}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{12}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{16}\cdot\frac{1}{2187}\cdot\ \cdot\right)\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

[2.]

[S. 9]

[6] $$\frac{1}{\sqrt{(1-cz)}} = A + A'c + A''c2 + A'''c3 + \text{etc.}$$

$$A = 1 + \frac{1.3}{4.4}zz + \frac{1.3.5.7}{4.4.8.8}z^4 + \frac{1.3.5.7.9.11}{4.4.8.8.12.12}z^6 + \text{etc.}$$

$$A' = 2z\left(\frac{1}{4} + \frac{1.3.5}{4.4.8}zz + \frac{1.3.5.7.9}{4.4.8.8.12}z^4 + \frac{1.3.5.7.9.11.13}{4.4.8.8.12.12.16}z^6 + \text{etc.}\right)$$

$$A'' = 2z^2\left(\frac{1.3}{4.8} + \frac{1.3.5.7}{4.4.8.12}zz + \frac{1.3.5.7.9.11}{4.4.8.8.12.16}z^4 + \text{etc.}\right)$$

$$A''' = 2z^3\left(\frac{1.3.5}{4.8.12} + \frac{1.3.5.7.9}{4.4.8.12.16}zz + \frac{1.3.5.7.9.11.13}{4.4.8.8.12.16\ 20}z^4 + \text{etc.}\right)$$

etc.

$$2zA - 4A' + 3zA = 0$$
$$3zA' - 8A'' + 5zA''' = 0$$
$$5zA'' - 12A''' + 7zA^{\text{IV}} = 0$$
etc.

$$\frac{A'}{A} = \cfrac{2z}{4 - \cfrac{9zz}{8 - \cfrac{25zz}{12 - \cfrac{49zz}{16 - \text{etc.}}}}}$$

Terminus constans duarum expressionum

$$(4 + 4z + zz\cos\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$(4 + (8z + 4zz)\cos\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}$$

idem est et quidem

$$\frac{1}{2\ \text{Term. med. Ar. G. inter 1 et } 1+z}.$$

[3.]

[S. 10]

Medium arithmetico-geometricum inter 1 et x per huius modi formulam exhiberi potest, apprime utilem quoties x est numerus satis magnus

[7] $$Mx = \frac{C(x-\alpha x^{-1}-\beta x^{-3}-\gamma x^{-5}-\text{etc.})}{\log.(4x-ax^{-1}-bx^{-3}-cx^{-5}-\text{etc.})}.$$

Hic factor constans

$$C = \frac{1}{2}\pi = 1{,}57079632\ldots;$$

$$\alpha = \frac{1}{4};\ \beta = \frac{5}{64};\ \gamma = \frac{11}{256};\ \delta = \frac{469}{36384};\ \varepsilon = \frac{1379}{2^{16}}\ldots;$$

$$a = 1;\ b = \frac{9}{32};\ c = \frac{19}{128};\ d = \frac{4769}{49152};$$

[8] $$\text{Denominator} = \log.\ 4x - \frac{1}{4}x^{-2} - \frac{13}{128}x^{-4} - \frac{23}{384}x^{-6} - \frac{2701}{2^{16}}x^{-8}$$

---

[9] Obs[ervatio]: Numerator, omisso factore C, pro $x = 2$, fit

$$= M3 = 1{,}863617.$$

Posito denominatore $= \log.\ z$ erit

[10] $$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}z + z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-3} - 2z^{-5} - \frac{1}{4}z^{-7} - 3z^{-9} - \frac{1}{2}z^{-11} + 6z^{-13} \\ &\qquad + \frac{3}{4}z^{-15} - 22z^{-17} - 3\frac{1}{2}z^{-19} + 64z^{-21} \\ &= \frac{1}{\frac{4}{z} - \frac{16}{z^3} + \frac{56}{z^5} - \frac{160}{z^7}}. \end{aligned}\right.$$

Posito numeratore $= Cy$ erit

[11] $$x = y + \frac{1}{4}y^{-1} + \frac{1}{64}y^{-3} - \frac{1}{256}y^{-5} - \frac{23}{16384}y^{-7}$$

Denominator fit pro $x = 1 + t$

[12] $$= -\frac{A}{\log.\frac{1}{8}t - \frac{1}{16}tt + \frac{5}{128}t^3 - \frac{7}{256}t^4 + \frac{337}{16384}t^5},$$

$$A \text{ proxime} = 4{,}9348 = \frac{1}{2}\pi\pi.$$

[4.]

[S. 11]

[13] Posito numeratore $= \frac{C}{Q}$

erit

[14] $$Q = \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^{-3} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 x^{-5} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 x^{-7} + \text{etc.}$$

[15] $Q =$ Pars ipsius $(xx - \cos\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}$, quae a φ est libera

[16] $$= \frac{1}{\frac{1}{2}\pi} \times \text{valor integralis}$$

$$\int\sqrt{\frac{1-rr}{xx-rr}}\,dr \qquad \int\frac{dr}{\sqrt{(1-rr)(xx-rr)}}$$

ab $r = 0$ usque ad $r = 1$
spectando x tamquam constans

[17] Ponendo $\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = q$

erit numerator

[18] $$= -A\colon \log.\ (q + 2q^5 + 15q^9 + 150q^{13}$$

[19] $$= -A\colon \log.\ \varphi q.$$

Coefficientes seriei deducuntur ex aequatione

$$\left(\varphi\sqrt{\frac{q}{1+4qq}}\right)^2 = \varphi q$$

$$\left(\text{Forsan } \varphi q = q + \frac{1.2}{1.1}q^5 + \frac{1.2.5.6}{1.1.2.2}q^9 + \frac{1.2.5.6.9.10}{1.1.2.2.3.3}q^{13}\right)$$

[20] $$M\sqrt{(1-kk)} = \frac{k \text{ Numerator pro } \frac{1}{k}}{C} \quad \text{demonstr. GALEN}$$

[21] Obser[vatio:] $\frac{M\sin 75^\circ}{M\sin 15^\circ} = \sqrt{3}$

[22] $\left\{\begin{array}{l} 1-4+32-176 \\ \quad\; -12+192 \\ \qquad\quad -80 \end{array}\right.$ $1-4zz+20z^4-64z^6\ldots =$ Periph. Ellips.

[5.]

[S. 12]

[24] Posito termino constante expressionis

$$(1+\mu\cos\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$= A$, erit

$$M\sqrt{(1+\mu)} = \frac{1}{A}$$

[24] Terminus constans expressionis $\left(hh-2\cos\varphi+\frac{1}{hh}\right)^{-\frac{1}{2}}$ est $= \dfrac{1}{\text{Terminus medius inter } h-\frac{1}{h} \text{ et } h+\frac{1}{h}}$

[25] Si $(\mu\mu-\cos\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}$ in seriem

$$A+2B\cos 2\varphi+\text{etc.}$$

evolvi concipitur atque ponitur

$$A = F\mu,\ B = G\mu$$

erit

[26]
$$\left\{\begin{array}{l} F\frac{1}{2}\left(\mu+\frac{1}{\mu}\right) = 2\mu F\mu\mu \\ G\frac{1}{2}\left(\mu+\frac{1}{\mu}\right) = \frac{1}{\mu}G\mu\mu+\frac{1}{\mu}F\mu\mu \end{array}\right.$$

Ponendo

[27] $\frac{Gx}{Fx} = Hx \qquad x,\ x',\ x''$ etc.

erit

[28] $Hx = \frac{1}{2x'}+\frac{1}{4x'x''}+\frac{1}{8x'x''x'''}$ etc. $= \frac{1}{8}x^{-2}+\frac{1}{16}x^{-4}+\frac{41}{8024}x^{-6}$ etc.

$$Hxx = 2xxH\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)-1$$

[29]
$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \log.\left(\frac{1}{4}s+\frac{1}{16}s^3+\left[\frac{17}{512}s^5+\cdot\cdot\right]\right)}{\partial s} = \frac{1+\frac{3}{4}[s^2]+\frac{85}{128}[s^4]+\frac{315}{512}[s^6]\ldots}{s+\frac{1}{4}[s^3]+\frac{17}{128}[s^5]+\frac{45}{512}[s^7]\ldots} \\ &\qquad = \left[\frac{1}{s}\right]\left(1+\frac{1}{2}[s^2]+\frac{13}{32}[s^4]+\frac{23}{64}[s^6]\ldots\right)\end{aligned}\right.$$

[6.]

[S. 13]

$$x = x$$

$$x' = (x+\sqrt{(xx-1)})^2$$

φ	$M \sin \varphi$	φ	$M \sin \varphi$	φ	$[M \sin \varphi]$
0	0				
5	0,4099431	35	0,7719980	65	0,9525779
10	0,5009995	40	0,8115373	70	0,9696118
15	0,5674713	45	0,8472130.8	75	0,9828890
20	0,6271771	50	0,8791266	80	0,9923894
25	0,6803557	55	0,9073216	85	0,9980965
30	0,7283955	60	0,93180839162	90	1,0000000

---

[30]
$$\left\{\begin{aligned} Me^x &= 1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{16}xx+\frac{5}{96}x^3+\frac{11}{1024}x^4+\cdots \\ e^{-\frac{1}{2}x}Me^x &= 1+\frac{1}{16}xx+\frac{1}{3072}x^4+\frac{23}{737280}x^6+\cdots \\ &= M\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}x}+e^{-\frac{1}{2}x}\right)\end{aligned}\right.$$

[31] Si statuitur $M\sin\varphi = A - \alpha\cos 2\varphi - \beta\cos 4\varphi$ — etc.

pro $\varphi =$	Erit $A-\gamma\cos 2\varphi-\zeta\cos 4\varphi$
0^0	0,6212056
15	0,7566142
30	0,7832460
45	0,7991911
60	0,8103679
75	0,8168167
90	0,8189303

$$\frac{1}{M\sin 60^0} = 1{,}0731820072.$$

[7.]

[S. 13]

[32] $$\frac{1}{4}s+\frac{1}{16}s^3+\frac{17}{512}s^5+\ldots = z$$

[33] 1) $$Ps = 1+4zz+4z^4 \ast +4z^8$$

[34] $$= (2z+2z^9+2z^{25}+\ldots)^2+(1+2z^4+2z^{16}+\ldots)^2$$

[35] 2) $$sPs = 2(2z+2z^9+\ldots)\times(1+2z^4+2z^{16}+\ldots)$$

[36] $$Px = 1+\frac{1}{4}xx+\frac{1.9}{4.16}x^4+\text{etc.}$$

[37] $$Mc = \frac{1}{Ps}$$

[38] $$Ms = \frac{\pi}{-2Ps\times\log.\left(\frac{1}{4}s+\frac{1}{16}s^3+\frac{17}{512}s^5+\frac{45}{2048}s^7+\frac{18893}{196608}s^9\right)}$$

[39] $$\frac{Pc}{Ps} = -\frac{2}{\pi}\log.\left(\frac{1}{4}s+\frac{1}{16}s^3+\text{etc.}\right)$$

$$= -\frac{2}{\pi}\log.\left(\frac{1}{4}t-\frac{1}{16}t^3+\frac{17}{512}t^5-\frac{45}{2048}t^7+\text{etc.}\right).$$

[8.]

[S. 14]

[40] Ponendo $P\cos\varphi = N + a\cos 2\varphi + b\cos 4\varphi + \text{etc.}$

erit

$$\begin{aligned} N &= 1,393203 \\ a &= 0,581803 \\ b &= 0,309601 \\ c &= 0,209449 \\ d &= 0,157960 \\ e &= 0,126704 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi}\log.(1-\cos 2\varphi) = &+ 0,220635 \\ &+ 0,636620 \cos 2\varphi \\ &+ 0,318310 \cos 4\varphi \\ &+ 0,212207 \cos 6\varphi \\ &+ 0,159155 \cos 8\varphi \\ &+ 0,127324 \cos 10\varphi \end{aligned}$$

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{5.5}{4.6}\cdot\frac{9.9}{8.10}\cdot\frac{13.13}{12.14}\text{ etc. in inf.}\right)^2$$

$$b = \frac{2}{9}N$$

$$N = \left(\frac{3.3.7.7.11.11.15}{2.4.6.8.10.12.14}\text{ etc. in inf.}\right)^2 = 2\frac{\varpi\varpi}{\pi\pi}$$

$$2aN = \frac{16}{\pi\pi} \qquad a = \frac{4}{\varpi\varpi}$$

$$\frac{\varpi}{\sqrt{8}} = \frac{4.6.8.10.12.14}{5.5.9.9.13.13}\text{ etc.}$$

$$\frac{\varpi}{2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{12}{13}\cdots$$

[9.]

[41]
$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 x^4 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^2 x^6 + \text{etc.}$$
$$= \left(1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 x^2 + \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{8}\right)^2 x^4 + \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{9}{12}\right)^2 x^6 + \text{etc.}\right)^2.$$

Demonstratio.

Ponatur

$$1+\left(\frac{1}{4}\right)^2 x^4+\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{8}\right)^2 x^8+\text{etc.}=t$$

eritque, posito

$$x(x^4-1)\frac{d^2t}{dx^2}+(3x^4-1)\frac{dt}{dx}+x^3t=R,$$

$$R=0.$$

Hinc etiam

$$0=x\frac{dR}{dx}+R;$$

nec non

$$0=2xt\frac{dR}{dx}+2\left(t+3x\frac{dt}{dx}\right)R,$$

unde fit (evolutione facta)

$$0=xx(x^4-1)\left(2t\frac{d^3t}{dx^3}+6\frac{dt}{dx}\cdot\frac{d^2t}{dx^2}\right)+3x(3x^4-1)\left(2t\frac{d^2t}{dx^2}+2\frac{dt}{dx}\cdot\frac{dt}{dx}\right)$$
$$+(19x^4-1)2t\frac{dt}{dx}+8x^3tt$$

sive ponendo $tt=u$

$$0=xx(x^4-1)\frac{d^3u}{dx^3}+3x(3x^4-1)\frac{d^2u}{dx^2}+(19x^4-1)\frac{du}{dx}+8x^3u,$$

cui aequationi invenitur respondere

$$u=1+\left(\frac{1}{2}\right)^3 x^4+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3 x^8+\text{etc.}$$

[S. 15]

Iam quum

$$t=\frac{\sqrt{8}}{\pi}\int\frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)(1-x^4z^4)}}$$

a $z=0$ usque ad $z=1$, fit, pro $x=1$,

$$t=\frac{\sqrt{8}}{\pi}\cdot\frac{\varpi}{2}=\frac{\varpi}{\pi}\sqrt{2}$$

adeoque

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3+\cdots=2\frac{\varpi\varpi}{\pi\pi}.$$

Idem alio modo.

Valor seriei

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2+\text{etc.}$$

fit

$$=\frac{4}{\pi\pi}\int\int\frac{d\varphi\, d\psi}{\sqrt{(1-\cos\varphi^2\cos\psi^2)}}$$

a $\varphi=0$ usque ad $\varphi=90^0$ et a $\psi=0$ usque ad $\psi=90^0$.

Faciendo itaque

$$\cos\varphi\cos\psi=\cos v,$$

idem valor fit

$$=\frac{4}{\pi\pi}\int\int\frac{d\varphi\, dv}{\sqrt{(\cos\varphi^2-\cos v^2)}}$$

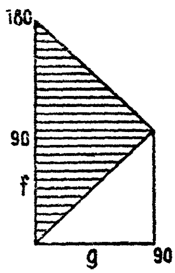
et quidem ab $v=0$ usque ad $v=90^0$ et a $\varphi=0$ usque ad $\varphi=v$. Denique statuendo

$$\varphi+v=f,\ v-\varphi=g$$

erit expressio nostra

$$=\frac{2}{\pi\pi}\int\int\frac{df\, dg}{\sqrt{\sin f.\sin g}}$$

a $g=0$ usque ad $g=90^0$ et ab $f=g$ usque ad $f=180^0-g$. Sed haud difficulter probatur integrale eundem valorem nancisci, si sumatur ab $f=0$ usque ad $f=90^0$ et a $g=0$ usque ad $g=90^0$, unde ipsius valor deducitur



$$=2\frac{\varpi\varpi}{\pi\pi},$$

uti supra.

[V.]

[THEORIA SINUS LEMNISCATICI UNIVERSALISSIME ACCEPTI.]

[Aus der Scheda Ac, Varia Novbr. 1799, S. 26 ff.

[1.]

[S. 26]

Problema.

Ponendo

$$\frac{du}{\sqrt{(1+\mu\cos u)}} = d\varphi,$$

ita ut sit

$$\varphi = u + A'\sin u + A''\sin 2u + A'''\sin 3u \text{ etc.},$$

invenire u per seriem talem

$$u = \varphi + \alpha'\sin\varphi + \alpha''\sin 2\varphi + \alpha'''\sin 3\varphi \text{ etc.}$$

---

[1] $$\frac{\pi}{M\sqrt{(1+\mu\mu)}} = \varpi, \quad \frac{\pi}{\mu M\sqrt{\left(1+\frac{1}{\mu\mu}\right)}} = \varpi'$$

[2] $$Sn\varpi = \frac{\pi}{\mu\varpi}\left(\frac{4\sin n\pi}{e^{\frac{1}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi} + e^{-\frac{1}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}} - \frac{4\sin 3n\pi}{e^{\frac{3}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi} + e^{-\frac{3}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}} + \text{etc.}\right).$$

[2.]

[S. 26]

[3] $$S\varphi = \frac{T\varphi}{W\varphi}, \quad T90^0 = \sqrt{\cos v}, \quad (\operatorname{tg} v = \mu)$$

[4] $$W\varphi = \sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}\sqrt[4]{\frac{1}{1+\mu\mu}}\left\{1+\frac{2\cos 2n\pi}{e^{\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}}+\frac{2\cos 4n\pi}{e^{4\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}}+\text{etc.}\right\},$$

[5] $$\left[\sqrt[4]{\frac{1}{1+\mu^2}}\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}\right] = \sqrt{M\cos v}$$

[6] $$T\varphi = \sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}\sqrt[4]{\frac{1}{\mu\mu(1+\mu\mu)}}\left\{\frac{2\sin n\pi}{e^{\frac{1}{4}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}}-\frac{2\sin 3n\pi}{e^{\frac{9}{4}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}}+\text{etc.}\right\}$$

Terminus Constans $(Sn\varpi)^2$

[7] $$= \frac{8\pi\pi}{\mu\mu\varpi\varpi}\left\{\frac{e^{-\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}+4e^{-4\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}+9e^{-9\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}+\cdots}{1+2e^{-\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}+2e^{-4\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}+\cdots}\right\}.$$

[S. 29]

[8] $$\frac{1}{\sin\text{lemn}\,\varphi} = \frac{\pi}{\varpi}\left(\frac{1}{\sin\varphi}-\frac{4}{e^{\pi}+1}\sin\varphi-\frac{4}{e^{3\pi}+1}\sin 3\varphi-\frac{4}{e^{5\pi}+1}\sin 5\varphi-\text{etc.}\right)$$

[9] $$\begin{aligned}\frac{1}{P\varphi} = \frac{\pi}{\varpi}\Big(\frac{1}{\sin\varphi} &- 4(e^{-2\pi}-e^{-6\pi}+e^{-12\pi}-\text{etc.})\sin\varphi\\ &-4(e^{-4\pi}-e^{-10\pi}+e^{-18\pi}-\text{etc.})\sin 3\varphi\\ &-4(e^{-6\pi}-e^{-14\pi}+e^{-24\pi}-\text{etc.})\sin 5\varphi\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big)\end{aligned}$$

[3.]

S. 31]

[10] $$\begin{aligned}(T\varphi)^2 = A(1+2e^{-2\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 4\varphi+2e^{-8\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 8\varphi+\text{etc.})\\ -2B(e^{-\frac{1}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 2\varphi+e^{-\frac{9}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 6\varphi+\text{etc.}),\end{aligned}$$

[11] $$A = \frac{\cos v\sqrt{M\cos v}}{2\cos\frac{1}{2}v},\quad B = \frac{\cos v\sqrt{M\cos v}}{2\sin\frac{1}{2}v},$$

[12] $$(W\varphi)^2 = C(1+2e^{-2\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 4\varphi+\text{etc.})+2D(e^{-\frac{1}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 2\varphi+\text{etc.})$$

[13]
$$\left\{\begin{aligned} C &= \frac{(1+\cos v)\sqrt{M\cos v}}{2\cos\frac{1}{2}v} = \cos\tfrac{1}{2}v\sqrt{M\cos v},\\ D &= \frac{(1-\cos v)\sqrt{M\cos v}}{2\sin\frac{1}{2}v} = \sin\tfrac{1}{2}v\sqrt{M\cos v},\end{aligned}\right.$$

[14]
$$(1-\cos v)(T\varphi)^2+\cos v\,(W\varphi)^2$$
$$= \frac{\cos v}{\cos\frac{1}{2}v}\sqrt{M\cos v}\left(1+2e^{-\frac{2\varpi'}{\varpi}\pi}[\cos 4\varphi]+\cdots\right),$$

[15]
$$-(1+\cos v)(T\varphi)^2+\cos v\,(W\varphi)^2$$
$$= \frac{2\cos v}{\sin\frac{1}{2}v}\sqrt{M\cos v}\left(e^{-\frac{1}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 2\varphi+\cdots\right),$$

[16]
$$\left\{\begin{aligned} (T([\tfrac{1}{2}]\varpi-\varphi))^2 &= \cos v\,((W\varphi)^2-(T\varphi)^2).\\ (W([\tfrac{1}{2}]\varpi-\varphi))^2 &= \frac{\sin v^2\,(T\varphi)^2+\cos v^2\,(W\varphi)^2}{\cos v},\end{aligned}\right.$$

[17]
$$T\varphi\, W([\tfrac{1}{2}\varpi-]\varphi)$$
$$= \left[\frac{\sqrt{2\cos v\,.\,M\cos v}}{\sqrt[4]{\sin v}}\right]\left\{2e^{-\frac{1}{8}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\sin\varphi-2e^{-\frac{9}{8}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\sin 3\varphi+2e^{-\frac{25}{8}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\sin\varphi-\text{ etc.}\right\}.$$

[S. 32]
$$(S\varphi)^2 = P+2Q\left\{\frac{\cos 2\varphi}{e^{\frac{\pi\varpi'}{\varpi}}-e^{-\frac{\pi\varpi'}{\varpi}}}-\frac{2\cos 4\varphi}{e^{2\frac{\varpi'\pi}{\varpi}}-e^{-2\frac{\varpi'\pi}{\varpi}}}+\frac{3\cos 6\varphi}{\left[e^{3\frac{\varpi'\pi}{\varpi}}-e^{-3\frac{\varpi'\pi}{\varpi}}\right]}-\cdots\right\}.$$

[4.]

[S. 33]

Aequationis
$$\frac{dx}{\sqrt{(1+\mu\mu xx)(1-xx)}}+\frac{dy}{\sqrt{(1+\mu\mu yy)(1-yy)}} = 0$$
integrale completum est
$$\frac{y\sqrt{(1+\mu\mu xx)(1-xx)}+x\sqrt{(1+\mu\mu yy)(1-yy)}}{1+\mu\mu xxyy} = \text{Const.}$$

Statuendo itaque

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+\mu\mu xx)(1-xx)}} = u$$

atque

$$\begin{aligned} x &= Fu \\ 1 &= F\tfrac{1}{2}\Pi \\ y &= Fw \\ x' &= F(\tfrac{1}{2}\Pi - u) \\ y' &= F(\tfrac{1}{2}\Pi - w) \end{aligned}$$

fit

$$1) \qquad \frac{y\sqrt{1+\mu\mu xx\,.\,1-xx}+x\sqrt{1+\mu\mu yy\,.\,1-yy}}{1+\mu\mu xxyy} = F\overline{u+w}.$$

Quare faciendo $y = 1$ fit

$$\sqrt{\frac{1-xx}{1+\mu\mu xx}} = F(\tfrac{1}{2}\Pi + u) = F(\tfrac{1}{2}\Pi - u) = Gu = x'$$

atque

$$1 = xx + x'x' + \mu\mu xxx'x' \quad . \; . \; . \; \mathrm{I}$$

$$\frac{yx'+xy'+\mu\mu xx'(xy+x'y')}{1+\mu\mu xxyy} = F\overline{u+w}.$$

[5.]

[S. 34]

Sit

[18]
$$\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{M\cos\varphi}{M\sin\varphi}}} = z$$

[19]
$$1+2z^4+2z^{16}+2z^{36}+\ldots = p$$

[20]
$$2z+2z^9+2z^{25}+\ldots \qquad = q$$

eritque

[21]
$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{M\cos\varphi} &= pp+qq \\ \frac{\sin\varphi}{M\cos\varphi} &= 2pq \\ \frac{\cos\varphi}{M\cos\varphi} &= pp-qq \end{aligned}\right.$$

$$\mu = \operatorname{tg} \varphi$$

[22]
$$\begin{cases} \varpi = \dfrac{\pi \cos \varphi}{M \cos \varphi}, \\ \varpi' = \dfrac{\pi \cos \varphi}{M \sin \varphi}, \end{cases}$$

[23]
$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{M \dfrac{pp-qq}{pp+qq}}{M \dfrac{2pq}{pp+qq}} = \log. \frac{1}{z}$$

[24]
$$\frac{\cos \frac{1}{2} \varphi}{\sqrt{M} \cos \varphi} = p, \quad \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi}{\sqrt{M} \cos \varphi} = q.$$

Si ψ ita accipitur, ut sit

$$\sin \psi = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \varphi^2,$$

erit

[25]
$$\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{M \cos \psi}{M \sin \psi}}} = z^2$$

[26]
$$\begin{cases} p' = \frac{1}{2} \sqrt{(pp+qq)} + \frac{1}{2} \sqrt{(pp-qq)} \\ q' = \frac{1}{2} \sqrt{(pp+qq)} - \frac{1}{2} \sqrt{(pp-qq)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

[6.]

[S. 35]

$$\frac{1}{\sqrt{(1-\mu\mu \sin \varphi^2)}} = A - 2A' \cos 2\varphi + 2A'' \cos 4\varphi - \text{etc.}$$

$$A = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \mu\mu + \frac{1.1.3.3}{2.2.4.4} \mu^4 + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.2.4.4.6.6} \mu^6 + \text{etc.}$$

$$A' = \frac{1}{8} \mu^2 + \frac{3}{32} \mu^4 + \frac{75}{1024} \mu^6 \ldots$$

$$\frac{\partial A' \mu\mu}{\partial \mu} = \frac{1}{2} \mu^3 + \frac{1.1.3.3}{2.2.4.4} \mu^5 \times 4 + \cdots = \mu\mu \frac{\partial A}{\partial \mu}.$$

[7.]

[S. 37]

$$\mathrm{sl}\, n\varpi = \mathrm{t[ang]}\, u\pi$$

$$\frac{\pi}{\varpi} du = \mathrm{cl}\, n\varpi\, dn$$

$$\mathrm{cl}\, n\varpi = \frac{\pi}{\varpi}\left(\frac{4}{e^{\frac{1}{2}\pi} + e^{-\frac{1}{2}\pi}} \mathrm{c[o]s}\, n\pi + \cdots\right)$$

$$\pi u = \frac{4}{e^{\frac{1}{2}\pi} + e^{-\frac{1}{2}\pi}} \sin n\pi + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{e^{\frac{3}{2}\pi} + e^{-\frac{3}{2}\pi}} \sin 3n\pi + \text{etc.}$$

Dem[onstratum.]

$$1 + 2p\cos\varphi + 2pp\cos 2\varphi + \text{etc.} = \frac{\frac{1}{p} - p}{\frac{1}{p} + p - 2\cos\varphi}$$

$$1 - 2p\cos\varphi + 2pp\cos 2\varphi - \text{etc.} = \frac{\frac{1}{p} - p}{\frac{1}{p} + p + 2\cos\varphi}$$

$$p\cos\varphi + p^3\cos 3\varphi + \text{etc.} = \frac{\left(\frac{1}{p} - p\right)\cos\varphi}{\left(\frac{1}{p} + p\right)^2 - 4\cos\varphi^2}$$

$$2p\sin\varphi + \frac{2}{3}p^3\sin 3\varphi + \text{etc.} = \mathrm{Arctg}\,\frac{2\sin\varphi}{\frac{1}{p} - p}$$

$$\frac{1}{2}\pi u = \mathrm{Arctg}\,\frac{2\sin\varphi}{e^{\frac{1}{2}\pi} - e^{-\frac{1}{2}\pi}} - \mathrm{Arctg}\,\frac{2\sin\varphi}{e^{\frac{3}{2}\pi} - e^{-\frac{3}{2}\pi}} + \text{etc.}$$

[8.]

[S. 37]

Problema.

Summare seriem

$$\left(\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\right)^2+\left(\frac{1}{x^3+\frac{1}{x^3}}\right)^2+\left(\frac{1}{x^5+\frac{1}{x^5}}\right)^2\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{xx}+\frac{4}{x^8}+\frac{9}{x^{18}}+\frac{16}{x^{32}}\cdots}{1+\frac{2}{xx}+\frac{2}{x^8}+\frac{2}{x^{18}}\cdots}$$

[S. 38]

$$'S\varphi=\frac{1}{GS\varphi+H\frac{1}{S\varphi}}\qquad\qquad \sin v=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}{'v^2}$$

1) $G+H=1$

2) $$\sqrt{\left(\frac{1}{\sin{'v}\operatorname{tang}{'v}}-\frac{1}{\operatorname{tang}{'v}}\right)}\times\sqrt{\left(\frac{1}{\sin v\operatorname{tg}v}-\frac{1}{\operatorname{tg}v}\right)}\times$$
$$\left(G+H\frac{1}{\frac{1}{\sin v\operatorname{tg}v}-\frac{1}{\operatorname{tg}v}}\right)=1$$

$$\frac{1+\cos{'v}}{2}=H$$

$$\frac{1-\cos{'v}}{2}=G.$$

[S. 39]

$$\operatorname{sl}\left(\tfrac{1}{2}\varpi+(\tfrac{1}{2}+k)\varpi'\varepsilon\right)=-\operatorname{cl}(\tfrac{1}{2}+k)\varpi'\varepsilon$$
$$=-\frac{1}{c'(\frac{1}{2}+k)\varpi'}=\frac{1}{s'k\varpi'}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sl}\left(\frac{1}{2}\varpi+(\frac{1}{2}+k)\varpi'\varepsilon\right)+u}=s'(k\varpi'-u\varepsilon)$$

$$\frac{\partial s}{\partial\varphi}=\sqrt{(1-xx)}\sqrt{\left(1+\frac{xx}{\mu\mu}\right)}$$

$\frac{1}{2}\varpi+\left(\frac{1}{2}+k\right)\varpi'\varepsilon$	0	$\frac{1}{2}\left(e^{\left(\frac{1}{2}+k\right)\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}+e^{-\left(\frac{1}{2}+k\right)\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\right)$
$\frac{1}{2}\varpi+\left(\frac{1}{2}+k\right)\varpi'\varepsilon+u$	$\mp u\varepsilon$	$\cdots\cdots\quad +\nu$

$$(P\varphi)^2 = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}{2^{\frac{7}{4}}\cos\frac{1}{8}\pi}\left(1+2e^{-2\pi}\cos 4\varphi+2e^{-8\pi}\cos 8\varphi+\text{etc.}\right)$$
$$-\frac{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}{2^{\frac{7}{4}}\sin\frac{1}{8}\pi}\left(2e^{-\frac{1}{2}\pi}\cos 2\varphi+2e^{-\frac{9}{2}\pi}\cos 6\varphi+2e^{-\frac{25}{2}\pi}\cos 10\varphi+\text{etc.}\right)$$

$$(Q\varphi)^2 = 2^{\frac{3}{4}}\cos\frac{1}{8}\pi\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}\left(1+2e^{-2\pi}\cos 4\varphi+\cdots\right)$$
$$+2^{\frac{3}{4}}\sin\frac{1}{8}\pi\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}\left(2e^{-\frac{1}{2}\pi}\cos 2\varphi+\text{etc.}\right)$$

[9.]

[S. 40]

Series

$$1-x-x^3+x^6+x^{10}-\text{etc.}$$

produci videtur ex evolutione producti infiniti

$$(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)(1-x^9)\ldots(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{12})\ldots$$

Ponendo

$$(1-z)(1-zz)(1-z^3)\ldots = \Pi z$$

erit

$$1)\quad \frac{\Pi z\,\Pi z^4}{\Pi z^2} = 1-z-z^3+z^6+z^{10}\ldots$$

$$2)\quad \frac{\Pi z\,\Pi z}{\Pi z^2} = 1-2z+2z^4-2z^9+2z^{16}-\text{etc.}$$

$$3)\quad \frac{(\Pi zz)^2}{\Pi z} = 1+z+z^3+[z^6+z^{10}+\cdots]$$

$$(\Pi z)^3 = (1-z-z^3+z^6+z^{10}\ldots)(1-2z+2z^4-2z^9+2z^{16}\ldots)(1-2z^2+2z^8-2z^{18}\ldots)$$
$$= (1+z+z^3+z^6\ldots)(1-2z+2z^4\ldots)^2$$

$$p = \frac{(\Pi(-z^4))^2}{\Pi z^8}; \quad q = \frac{2z\Pi(-z^8)\Pi z^{32}}{\Pi z^{16}} = \frac{2z(\Pi z^{16})^2}{\Pi z^8}$$

$$\left.\begin{aligned} p-q &= \frac{\Pi z . \Pi z}{\Pi z^2} \\ p+q &= \frac{\Pi(-z)\Pi(-z)}{\Pi zz} \\ \frac{\Pi z\Pi(-z)}{\Pi zz} &= \frac{\Pi zz\Pi zz}{\Pi z^4} \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} q &= \frac{2z\Pi z^{16}\Pi z^{16}}{\Pi z^8} \\ p &= \frac{(\Pi z^8)^5}{(\Pi z^4)^2(\Pi z^{16})^2} \\ p-q &= \frac{\Pi z\Pi z}{\Pi zz} \\ p+q &= \frac{(\Pi zz)^5}{(\Pi z)^2(\Pi z^4)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{M\cos\varphi} = \frac{(\Pi z^4)^6}{(\Pi zz)^4} \quad \textit{Demonstr.}$$

[10.]

[S. 41]

Si

$$(1-\alpha^2z^2)(1-\alpha^2z^4)(1-\alpha^2z^6)\ldots\left(1-\frac{1}{\alpha^2}z^2\right)\left(1-\frac{1}{\alpha^2}z^4\right)\ldots$$
$$\times\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)$$

producere supponitur

$$P\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)+Q\left(\alpha^3-\frac{1}{\alpha^3}\right)+R\left(\alpha^5-\frac{1}{\alpha^5}\right)\ldots,$$

producet

$$(1-\alpha^2z^4)(1-\alpha^2z^6)\ldots\times\left(1-\frac{1}{\alpha\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha^2}zz\right)\ldots\times\left(\alpha z-\frac{1}{\alpha z}\right)$$
$$P\left(\alpha z-\frac{1}{\alpha z}\right)+Q\left(\alpha^3z^3-\frac{1}{\alpha^3z^3}\right)+\text{etc.}$$

Quare

$$\frac{1-\alpha\alpha zz}{1-\frac{1}{\alpha\alpha}}\left(P\left(\alpha z-\frac{1}{\alpha z}\right)+Q\left(\alpha^3z^3-\frac{1}{\alpha^3z^3}\right)+\text{etc.}\right)\times\frac{\alpha-\frac{1}{\alpha}}{\alpha z-\frac{1}{\alpha z}}$$
$$=P\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)+Q\left(\alpha^3-\frac{1}{\alpha^3}\right)\ldots$$

Hinc sequitur

$$Q = zzP, \quad R = z^4Q, \quad S = z^6R \quad \text{etc.}$$

$$\frac{(\Pi z^4)^6}{(\Pi zz)^4} = \frac{1}{M\cos\zeta};\quad \frac{(\Pi y^4)^6}{(\Pi yy)^4} = \frac{1}{M\cos\eta}\ [^*)]$$

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{(\Pi y^2)^6(\Pi z)^4}{(\Pi z^2)^6(\Pi y)^4} = -\frac{\log z}{\pi} = -\frac{\pi}{\log y}\\ \log y\log z = \pi\pi\end{gathered}}$$

[11.]

[S. 42]

$$\begin{aligned}(P\varphi)^2 &= 0{,}3522376226\ 6118372314 && = A\\ &- 0{,}3535519576\ 3585935635\cos 2\varphi && = 2B[e^{-\frac{1}{2}\pi}]\\ &+ 0{,}0013155679\ 2352259042\cos 4\varphi && = 2Ae^{-2\pi}\\ &- 0{,}0000012329\ 5741446398\cos 6\varphi && = 2B[e^{-\frac{1}{2}\pi}]e^{-4\pi}\\ &+ 0,\ldots\ldots\ldots\ 0856752170\cos 8\varphi && = 2Ae^{-8\pi}\\ &- 0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1494\cos 10\varphi && = 2B[e^{-\frac{1}{2}\pi}]e^{-12\pi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(P\varphi)^2 &= A(1+2e^{-2\pi}\cos 4\varphi+2e^{-8\pi}\cos 8\varphi+2e^{-18\pi}\cos 12\varphi\ \text{etc.})\\ &- 2B(e^{-\frac{1}{2}\pi}\cos 2\varphi+e^{-\frac{9}{2}\pi}\cos 6\varphi+e^{-\frac{25}{2}\pi}\cos 10\varphi\ \text{etc.})\end{aligned}$$

$$B = (1+\sqrt{2})A,\qquad A = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}{\cos 22\tfrac{1}{2}^0\sqrt{8}[\sqrt[4]{2}]}.$$

[S. 43]

$$0 = \frac{2^{\frac{1}{4}}\cos 0{,}25}{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}A - \frac{2^{\frac{1}{4}}\sin 0{,}25}{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}B$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{2^{\frac{1}{4}}\cos 0{,}25}{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}A + \frac{2^{\frac{1}{4}}\sin 0{,}25}{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}B$$

$$A = 2^{-\frac{3}{4}}\frac{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}{\cos 0{,}25},\quad B = 2^{-\frac{3}{4}}\frac{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}{\sin 0{,}25}.$$

[*) In der Handschrift steht links vom Gleichheitszeichen beidemal M statt Π.]

[12.]

Si

$$(1+ax)(1+ax^3)(1+ax^5)\ldots\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{x^3}{a}\right)\left(1+\frac{x^5}{a}\right)\cdots = K$$

supponitur producere

$$+\frac{R}{aa}+\frac{Q}{a}+P+Qa+Raa+\cdots,$$

producet

$$(1+ax^3)(1+ax^5)\ldots\left(1+\frac{1}{ax}\right)\left(1+\frac{x}{a}\right)\cdots = K\times\frac{1+\frac{1}{ax}}{1+ax}\text{[*)]}$$

$$\cdots+\frac{R}{x^4}\frac{1}{aa}+\frac{Q}{xx}\frac{1}{a}+P+Qxxa+Rx^4aa+\cdots$$

Quare]

$$[K] = \cdots\frac{R}{x^3}\cdot\frac{1}{a}+\frac{Q}{x}+Pxa+Qx^3aa+\text{etc.}$$

$$= \cdots Q\left[\frac{1}{a}+\right]P[+]Q[a+]R[aa+\cdots]$$

$$= P\left(1+x\left(a+\frac{1}{a}\right)+x^4\left(aa+\frac{1}{aa}\right)+x^9\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)\cdots\right).$$

Si ex quadrato [ipsius K] prodit

$$+\frac{Q}{a}+P+Qa\ \text{etc.},$$

erit

$$\left[\cdots+\right]\frac{P}{xxaa}[+]\frac{Q}{xxa}[+]\frac{R}{xx}[+]\frac{S}{xx}a[+]\frac{T}{xx}[aa+\cdots]$$

$$[=\cdots+]\frac{R}{x^4aa}[+]\frac{Q}{xxa}[+]P[+]Qxxa[+]Rx^4[aa+\cdots]$$

[Quare]

$$[K^2=]P[+]Q\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)+\right]Pxx\left[\left(aa+\frac{1}{aa}\right)+\right]Qx^4\left[\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)+\right]$$

$$Px^8\left[\left(a^4+\frac{1}{a^4}\right)+\right]Qx^{12}\left[\left(a^5+\frac{1}{a^5}\right)+\right]Px^{18}\left[\left(a^6+\frac{1}{a^6}\right)+\text{etc.}\right]$$

[*) In der Handschrift stehen links vom Gleichheitszeichen statt der positiven Vorzeichen negative.]

[13.]

[S. 45]

$$T = 0 \qquad \varphi = k\varpi + \tfrac{1}{2}l\varpi'\sqrt{-1}$$
$$W = 0 \qquad \varphi = (k+\tfrac{1}{2})\varpi + (l+\tfrac{1}{2})\varpi\sqrt{-1}$$

$$Tn\varpi = \frac{\varpi}{\pi}\sin n\pi\left(1+\frac{4\sin n\pi^2}{\left(e^{\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}-e^{-\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\right)^2}\right)\left(1+\frac{4\sin n\pi^2}{\left(e^{2\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}-e^{-2\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\right)^2}\right)\cdots$$

$$Qn\varpi = \left(1-\frac{4\sin n\pi}{\left(e^{\frac{1}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}+e^{\frac{1}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\right)^2}\right)\cdots$$

$$\sin\varphi\left(1-\frac{2\cos\varphi}{x+x^{-1}}\right)\left(1+\frac{2\cos\varphi}{x+x^{-1}}\right)\left(1-\frac{2\cos\varphi}{xx+x^{-2}}\right)\left(1+\cdots\right)\text{ etc.}$$

$$=\frac{\frac{\sin\varphi}{x^{\frac{1}{4}}}-\frac{\sin 3\varphi}{x^{\frac{9}{4}}}+\frac{\sin 5\varphi}{x^{\frac{25}{4}}}\cdots}{\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}+\frac{1}{x^{\frac{9}{4}}}+\frac{1}{x^{\frac{25}{4}}}\cdots}$$

[S. 46]

$$\left(1-\frac{2\cos 2\varphi}{xx+\frac{1}{xx}}\right)\left(1-\frac{2\cos 2\varphi}{x^6+\frac{1}{x^6}}\right)\left(1-\frac{2\cos 2\varphi}{x^{10}+\frac{1}{x^{10}}}\right)\text{ etc.}$$

$$=\frac{1-\frac{2\cos 2\varphi}{xx}+\frac{2\cos 4\varphi}{x^8}-\frac{2\cos 6\varphi}{x^{18}}+\text{etc.}}{1+\frac{2}{x^8}+\frac{2}{x^{32}}+\text{etc.}}$$

$$\frac{x^4+1}{x^4+2xx+1}\cdot\frac{x^{12}+1}{x^{12}+2x^6+1}\cdots=\frac{1-\frac{2}{x^8}+\frac{2}{x^{32}}-\text{etc.}}{1+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^8}+\text{etc.}}$$

$$1+2y+2y^4+2y^9+\cdots=\frac{(1+y)^2(1+y^3)^2(1+y^4)^2(1+y^5)^2(1+y^7)^2\cdots}{(1+yy)(1+y^6)(1+y^8)(1+y^{10})(1+y^{14})\cdots}.$$

[14.]

[S. 51]

$$x = e^{\frac{1}{2}\frac{\varpi\pi}{\varpi'}}\,;\quad \alpha = \cos\varphi + \varepsilon\sin\varphi$$

$$T\varphi = \frac{\varpi}{\pi}\sin\varphi\,\frac{(1-x^4\alpha^2)(1-x^8\alpha^2)(1-x^{12}\alpha^2)\ldots\left(1-\frac{x^4}{\alpha^2}\right)\left(1-\frac{x^8}{\alpha^2}\right)\left(1-\frac{x^{12}}{\alpha^2}\right)\text{ etc.}}{(1-x^4)^2(1-x^8)^2(1-x^{12})^2\text{ etc.}}$$

$$W\varphi = \frac{(1+xx\alpha\alpha)(1+x^6\alpha\alpha)(1+x^{10}\alpha\alpha)\ldots\left(1+\frac{x^2}{\alpha\alpha}\right)\left(1+\frac{x^6}{\alpha^3}\right)\left(1+\frac{x^8}{\alpha^3}\right)\text{ etc.}}{(1+x^2)^2(1+x^6)^2(1+x^{10})^2\text{ etc.}}.$$

Functiones Lemniscaticas considerare
cöperamus 1797. Januar. 8.

[VI.]

DIFFERENTIATIO MEDIORUM ARITH[METICO]-GEOM[ETRICORUM].

[Aus Scheda Ae, Varia, Julius 1800, S. 6.]

1.

Quum pro valore quocunque ipsius n sit

$$M(x+nx,\ y+ny) = M(xy) + nM(x,y)$$

erit differentiando secundum n

$$\frac{dM(x+nx,y+ny)}{dn} = \frac{dM(x+nx,y+ny)}{d(x+nx)}\cdot\frac{d(x+nx)}{dn}$$
$$+\frac{dM(x+nx,y+ny)}{d(y+ny)}\cdot\frac{d(y+ny)}{dn} = M(x,y)$$

sive

$$\frac{x\,dM(x,y)}{dx} + \frac{y\,dM(x,y)}{dy} = M(x,y).$$

2.

Porro fit

$$(1)\qquad \frac{dM(x,y)}{dx} = \frac{1}{2}\,\frac{dM(x,y)}{dx'} + \frac{1}{2}\,\frac{y'}{x}\,\frac{dM(x,y)}{dy'}$$

$$(2)\qquad \frac{dM(x,y)}{dy} = \frac{1}{2}\,\frac{dM(x,y)}{dx'} + \frac{1}{2}\,\frac{y'}{y}\,\frac{dM(x,y)}{dy'}.$$

Hinc ex (1)

$$\frac{dM(x,y)}{dx} = \frac{1}{2}\,\frac{M}{x} + \frac{1}{2}\left(1-\frac{x'}{x}\right)\frac{dM(x',y')}{dx'}$$
$$= M\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{xx'}\,(x-x') + \frac{1}{8}\,\frac{1}{xx'x''}\,(x-x')\,(x'-x'')\ldots\right)$$

$$\frac{dM(x,y)}{dx} = \frac{1}{2}\cdot\frac{M}{x} + \frac{2x'(x'x'-y'y')}{x(xx-yy)}\cdot\frac{dM(x',y')}{dx'}$$

$$= \frac{M}{2x}\left(1 + \frac{2(x'x'-y'y')}{xx-yy} + \frac{4(x''x''-y''y'')}{xx-yy}\ldots\right)$$

$$\frac{dM(x,y)}{dy} = \frac{1}{2}\cdot\frac{M}{x'} + \frac{1}{2}\left(\frac{y'}{y} - \frac{y'}{x'}\right)\frac{dM(x',y')}{dy'}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{M}{x'} + \frac{2y'}{y}\cdot\frac{x'x'-y'y'}{xx-yy}\cdot\frac{dM(x',y')}{dy'}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{M}{x'}\left(1 + 2\,\frac{y'(x'x'-y'y')}{y(xx-yy)} + 4\,\frac{y''(x''x''-y''y'')}{y(xx-yy)}\ldots\right)$$

$$dM(x,y) = M \times \begin{array}{l} dx \times \frac{1}{2x(xx-yy)}\{xx-yy+2(x'x'-y'y')+4(\ldots \quad \} \\ dy \times \frac{1}{2y(xx-yy)}\{xx-yy-2(x'x'-y'y')-4(\ldots \quad \} \end{array}$$

[VII.]

ALGORITHMI AD MEDIA AR[ITHMETICO]-GE[OMETRICA] PERTINENTES.

[Aus Scheda Af, Mémoires de Mathematique, Bronsuic 1801.]

[1.]

[S. 11]

$$\begin{array}{|ll|}\hline a & b \\ a' = \frac{1}{2}(a+b) & b' = \sqrt{ab} \\ a'' = \frac{1}{2}(a'+b') & b'' = \sqrt{a'b'} \\ a''' = \frac{1}{2}(a''+b'') & b''' = \sqrt{a''b''} \\ \multicolumn{2}{|c|}{\text{etc.}} \\ \multicolumn{2}{|c|}{a^\infty = b^\infty = M(a, b)} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|ll|}\hline A = a & B = \sqrt{(aa-bb)} \\ A' = \frac{1}{2}(A+B) & B' = \sqrt{AB} \\ A'' = \frac{1}{2}(A'+B') & B'' = \sqrt{A'B'} \\ A''' = \frac{1}{2}(A''+B'') & B''' = \sqrt{A''B''} \\ \multicolumn{2}{|c|}{\text{etc.}} \\ \multicolumn{2}{|c|}{A^\infty = B^\infty = M(A, B)} \\ \hline \end{array}$$

$$\boxed{4(a'-b')(a'+b') = 8(a'-b')a'' = (a-b)^2}$$

[2.]

[1] $$z = \frac{1}{4}\,\frac{B}{A}\,\frac{a}{a'}\sqrt{\frac{a'}{a''}}\sqrt[4]{\frac{a''}{a'''}}\cdots = \frac{\frac{1}{4}B}{\sqrt{(a'\sqrt{(a''\sqrt{(a'''\sqrt{(a^{\mathrm{IV}}\ldots\sqrt{(a^n\ldots a^\infty)})})})})}}$$

$$\log z = \log B - \log 4 - \tfrac{1}{2}(\log a' + \tfrac{1}{2}(\log a'' + \tfrac{1}{2}(\log a''' + \tfrac{1}{2}(\log a^{\mathrm{IV}} + \cdots$$
$$\cdots + \tfrac{1}{2}(\log a^n + \cdots + \log a^\infty))))$$

[2] $$z = e^{-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{M(a,b)}{M(A,B)}}$$

[3] $$\log \text{brigg}\left(\log\frac{1}{z}\right) + 0{,}1660958116 = \log M(a,b) - \log M(A,B)$$

[4] $$\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial B(M(a,b))^2}{Bbb} = \frac{\pi}{2}\,\frac{M(a,b)\,\partial M(A,B) - M(A,B)\,\partial M(a,b)}{M(A,B)^2}$$

[5] $$ff = \frac{z\partial B}{Bbb\partial z}$$

$$2ff' = \frac{1}{Bbb} - \frac{z\partial B}{BBbb\partial z} + \frac{2z\partial B}{b^4\partial z} -$$

[3.]

$$1 + 2zz + 2z^8 + 2z^{18}\ldots = p = \sqrt{\frac{a}{M(a,b)}},$$

$$1 - 2zz + 2z^8 - 2z^{18}\ldots = q = \sqrt{\frac{b}{M(a,b)}},$$

$$2z^{\frac{1}{2}} + zz^{\frac{9}{2}} + 2z^{\frac{25}{2}} + \text{etc.} = r = \sqrt{\frac{B}{M(a,b)}}.$$

$$p^4 = q^4 + r^4$$

$$p^4 - 2r^4 = q^4 - r^4 = 2q^4 - p^4 = 1 - 24\left(\frac{zz}{1+zz} + \frac{3z^6}{1+z^6} + \frac{5z^{10}}{1+z^{10}} + \text{etc.}\right)$$
$$= 1 - 12z\,\frac{\partial(1+zz)(1+z^6)(1+z^{10})\ldots}{(1+zz)(1+z^6)(1+z^{10})\ldots}$$

$$\text{illud productum} = \sqrt[6]{\frac{2z^{\frac{1}{2}}pp}{qr}} = \sqrt[6]{\frac{2z^{\frac{1}{2}}a}{\sqrt{bB}}} = \sqrt[12]{\frac{4zaa}{bB}}.$$

[4.]

[S. 12]

[6] $$\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial B}{Bbbff} = \frac{2\partial\varphi}{\sin 2\varphi . ff}$$

[7] $$\log z = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{F}{f}$$

$$F = -\frac{2}{\pi} f \log z$$

$$\frac{\partial^2 z}{z\partial B^2} - \frac{\partial z^2}{zz\partial B^2} = \frac{1}{Bbbff}$$

$$-\frac{\partial z^2}{zz\partial B^2} - \frac{\partial z\partial^2 B}{z\partial B^3} = \frac{1}{Bbbff}$$

$$\frac{B''}{zB'^3} + \frac{1}{zzB'^2} + \frac{1}{Bbbff} = 0$$

[8] $$zB'' + B' + \frac{zzB'^3}{Bbbff}\ [= 0]$$

$$\partial\frac{rr}{pp} = \frac{2r}{p^3}(p\partial r - r\partial p)$$

$$q^4 = \frac{2z}{pr\partial z}\,(p\partial r - r\partial p)$$

$$B' = \frac{q^4 rr}{pp} = bbffB$$

---

[9] $$\left\{\begin{aligned} f = \mathrm{A}&(1 + \tfrac{1}{4}xx + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{9}{16}x^4\ldots) \\ &+ \mathrm{B}(x^{-1} + \tfrac{1}{4}x^{-3} + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{9}{16}x^{-5}\ldots)\end{aligned}\right.$$

[10] $$-\frac{\pi}{2}(fF' - Ff') = \frac{1}{Bbb}$$

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{2\partial\varphi}{\sin 2\varphi . ff},$$

[11] $$z = \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi . ff\frac{\partial z}{\partial\varphi}$$

$$\log z = \frac{1}{ff}\log\operatorname{tang}\varphi + \int\log\operatorname{tang}\varphi\,\frac{f'}{f^3}\,[2\,d\varphi]$$

[12] $$(x^3 - x)f'' + (3xx - 1)f' + xf = 0.$$

[S. 13]

[5.]

Observatio

$$\frac{\text{Med. inter } 1 \text{ et } \sqrt{2}-1}{\text{Med. inter } 1 \text{ et } \sqrt{(2\sqrt{2}-2)}} = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Theorema.

$$\frac{\partial^2 m}{\partial z^2}\cdot zz + \frac{\partial m}{\partial z}\cdot z + \frac{ss}{m^3} = 0$$

$$\left[\frac{ss}{m^3}\right] = r^4 m$$

$$m = \frac{1}{pp}, \quad m' = -\frac{2p'}{p^3}, \quad m'' = \frac{6p'p'}{p^4} - \frac{2p''}{p^3}$$

$$-2p''\frac{zz}{p^3} + 6p'p'\frac{zz}{p^4} - 2p'\frac{z}{p^3} + \frac{r^4}{pp}\ [=0]$$

$$2p''zz - \frac{6p'p'}{p}zz + 2p'z - r^4 p = 0$$

$$2q''zz - \frac{6q'q'}{q}zz + 2q'z + r^4 q = 0$$

$$r^4 = 2z\left(\frac{p'}{p} - \frac{q'}{q}\right).$$

[VIII.]

[DER BILINEARE ALGORITHMUS.]

[Aus Scheda An, Cereri, Palladi, Iunoni sacrum, Febr. 1805.]

[1.]

[S. 37]

Es sind gegeben vier Grössen a, b, A, B; man bildet daraus nach folgender Ordnung

$$\begin{array}{lllll} 2a' = a+b, & b'b' = ab, & cc = aa-bb, & c = \frac{1}{2}('a-'b), & cc = 4a'c', \\ 2a'' = a'+b', & b''b'' = a'b', & c'^2 = a'^2-b'^2, & c' = \frac{1}{2}(a-b), & c'^2 = 4a''c'', \\ 2a''' = a''+b'', & b'''^2 = a''b'', & c''^2 = a''^2-b''^2, & c'' = \frac{1}{2}(a'-b'), & c''^2 = 4a'''c''' \end{array}$$

etc.

Grenze $= h$.

Man mache

$$[1] \quad \left\{ \begin{aligned} x^2 &= \frac{c}{4a'^{\frac{1}{2}}a''^{\frac{1}{4}}a'''^{\frac{1}{8}}\ldots} = \frac{ca'^{\frac{1}{2}}a''^{\frac{1}{4}}a'''^{\frac{1}{8}}\ldots}{4a'a''^{\frac{1}{2}}a'''^{\frac{1}{4}}\ldots} \\ &= \frac{c}{4a'}\left(\frac{a'}{a''}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a''}{a'''}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{a'''}{a^{\mathrm{IV}}}\right)^{\frac{1}{8}}\ldots \\ &= \frac{cb'^{\frac{1}{2}}b''^{\frac{1}{4}}\ldots}{4b''b'''^{\frac{1}{2}}\ldots} \end{aligned} \right.$$

$$x^4 = \frac{a-b}{8a''}\left(\frac{a''}{a'''}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a'''}{a^{\mathrm{IV}}}\right)^{\frac{1}{4}} \text{ etc.},$$

so ist

$$[2] \quad \left\{ \begin{aligned} a &= h(1+2x^4+2x^{16}+2x^{36}+\ldots)^2 \\ b &= h(1-2x^4+2x^{16}-2x^{36}+\ldots)^2 \\ c &= h(2x+2x^9+2x^{25}+\ldots)^2. \end{aligned} \right.$$

Ferner

[3] $$\left\{\begin{array}{ll} A' = \tfrac{1}{2}(A+B), & B' = \dfrac{2ABa'}{b'(A+B)} \\ A'' = \tfrac{1}{2}(A'+B'), & B'' = \dfrac{2A'B'a''}{b''(A'+B')} \\ A''' = \tfrac{1}{2}(A''+B''), & B''' = \dfrac{2A''B''a'''}{b'''(A''+B'')} \\ \text{etc.} & \end{array}\right.$$

Man bestimme H durch die Gleichung

[4] $$H = \frac{hA'^{\frac{1}{2}}A''^{\frac{1}{4}}A'''^{\frac{1}{8}}\ldots}{a'^{\frac{1}{2}}a''^{\frac{1}{4}}a'''^{\frac{1}{8}}\ldots} = \frac{chA'^{\frac{1}{2}}A''^{\frac{1}{4}}A'''^{\frac{1}{8}}\ldots}{4x}$$

und y durch [die weiter unten folgende Gleichung [7]], so ist

[5] $$\left\{\begin{array}{l} A = H\left(1+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)x^4+\left(yy+\dfrac{1}{yy}\right)x^{16}+\text{etc.}\right)^2 \\ B = H\left(1-\left(y+\dfrac{1}{y}\right)x^4+\left(yy+\dfrac{1}{yy}\right)x^{16}-\text{etc.}\right)^2 \end{array}\right.$$

[2.]

[S. 38]

$$\frac{b}{a} = \cos 2M,\quad \frac{a'}{a} = \cos M^2$$

$$\frac{b'}{a'} = \cos 2M'$$

etc.

$$\operatorname{tg} M^2 = \sin 2M'$$

$$a^\infty = a\cos M^2 \cos M'^2 \cos M''^2 \text{ etc.}$$

[6] $$\left\{\begin{array}{l} \sin\varphi\ \sqrt{\sin 2M} = \operatorname{tg}\psi \\ \sin\varphi'\sqrt{\sin 2M'} = \operatorname{tg}\psi' \\ \sin\varphi''\sqrt{\sin 2M''} = \operatorname{tg}\psi'' \\ \qquad\text{etc.} \\ \sin 2\psi' = \operatorname{tg}\psi\sqrt{\sin 2M} \end{array}\right.$$

$$\frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi} = \frac{\cos M^2}{\cos\psi'^2}$$

$$\sin\varphi^{\infty} = \sin\varphi\,\frac{\cos M^2 . \cos M'^2 . \cos M''^2 \ldots}{\cos\psi'^2 . \cos\psi''^2 . \cos\psi'''^2 \ldots} = \frac{a^{\infty}\sin\varphi}{a\cos\psi'^2 . \cos\psi''^2 . \cos\psi'''^2 \ldots}$$

[Es folgt ein Beispiel $2M = 75^0$]

[S. 39]

$$xx = \frac{\sin 2M}{4\cos M^2 . \cos M' . \cos M''^{\frac{1}{2}} . \cos M'''^{\frac{1}{4}} \ldots}$$
$$= \frac{\operatorname{tang} M}{2\cos M' . \cos M''^{\frac{1}{2}} . \cos M'''^{\frac{1}{4}} \ldots}$$

$$\frac{2x + 2x^9 + \cdots}{1 + 2x^4 + \cdots} = \sqrt{\sin 2M}$$
$$\frac{1 - 2x^4 + 2x^{16} + \cdots}{1 + 2x^4 + 2x^{16} + \cdots} = \sqrt{\cos 2M}$$

$$\frac{\left(y + \frac{1}{y}\right)x + \left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right)x^9 + \cdots}{1 + \left(yy + \frac{1}{yy}\right)x^4 + \left(y^4 + \frac{1}{y^4}\right)x^{16} + \cdots} = \operatorname{tg}\psi$$

[7] $$y + \frac{1}{y} = 2\sin\varphi^{(\infty)}$$

[Es folgen Zahlenrechnungen].

[3.]

[S. 40]

Eine andere Manier:

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\varphi\sqrt{(1 - \sin 2M^2 . \sin\varphi^2)}$$
$$\operatorname{tg}\omega' = \operatorname{tg} 2\omega . \sqrt{\cos 2M} = \operatorname{tg} 2\omega . \sqrt{\frac{b}{a}}$$
$$\operatorname{tg}\omega'' = \operatorname{tg} 2\omega' . \sqrt{\cos 2M'} = \operatorname{tg} 2\omega' . \sqrt{\frac{b'}{a'}}$$
$$\operatorname{tg}\omega''' = \operatorname{tg} 2\omega'' . \sqrt{\cos 2M''} = \operatorname{tg} 2\omega'' . \sqrt{\frac{b''}{a''}}$$
etc.

Dann ist φ^{∞} das letzte Glied der Reihe ω, $\frac{1}{2}\omega'$, $\frac{1}{4}\omega''$, $\frac{1}{8}\omega'''$ etc.

$$[8] \qquad \sin\varphi = \frac{1+2x^4+\cdots}{2x+2x^9+\cdots}\cdot\frac{\left(y+\frac{1}{y}\right)x+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)x^9+\cdots}{1+\left(yy+\frac{1}{yy}\right)x^4+\cdots}$$

$$\sqrt{(1-\sin 2M^2.\sin\varphi^2)} = \frac{\sqrt{1-2xx+2x^8+\cdots)}\sqrt{\left(1-xx\left(yy+\frac{1}{yy}\right)+x^8\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right)+\cdots\right)}}{1+\left(yy+\frac{1}{yy}\right)x^4+\cdots}$$

[Es folgen Umformungen der hier auftretenden Reihen in Produkte, die in der Abhandlung Werke III, S. 446 ff. viel ausführlicher und übersichtlicher dargestellt sind, und die darum nicht abgedruckt werden; auf derselben Seite steht noch unten die Formel:]

$$[9] \qquad \operatorname{tang}\varphi = \left[\frac{1}{i}\cdot\right]\frac{\left(y+\frac{1}{y}\right)x+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)x^9+\cdots}{\left(y-\frac{1}{y}\right)x-\left(y^3-\frac{1}{y^3}\right)x^9+\cdots}\cdot\frac{1+2x^4+2x^{16}+\cdots}{1-2x^4+2x^{16}-\cdots}\,[*)]$$

[*) In der Handschrift lautet der zweite Faktor

$$\frac{1-2x^4+2x^{16}\cdots}{1+2x^4-2x^{16}\cdots}.]$$

[IX.]

[DIE BEZIEHUNG ZWISCHEN DEN UNENDLICH VIELEN WERTEN DES ARITHMETISCH-GEOMETRISCHEN MITTELS. UNMITTELBARE ANWENDUNG DER THEORIE AUF DIE ELLIPTISCHEN TRANSZENDENTEN UND AUF DIE REKTIFIKATION DER ELLIPSE.]

[1.]

[Aus Handbuch 19, Be, Kleine Aufsätze aus verschiedenen Theilen der Mathematik, Angefangen im May 1809, S. 6.]

Medium arithm[etico-geometricum] inter A et B $= M$

$$\begin{aligned} a &= A, & b &= \sqrt{(AA-BB)} = C \\ a' &= \tfrac{1}{2}(a+b), & b' &= \sqrt{ab} \\ a'' &= \tfrac{1}{2}(a'+b'), & b'' &= \sqrt{a'b'} \\ &\ldots \end{aligned}$$

Medium [inter a et b] $= m$.

[1] $$M = \frac{k\pi m}{\log 16 + 2\log\frac{a'}{B} - \log\frac{a'}{a''} - \frac{1}{2}\log\frac{a''}{a'''} - \frac{1}{4}\log\frac{a'''}{a^{\mathrm{IV}}} - \cdots}$$

[2] $$= \frac{\frac{1}{2}k\pi m}{\log 4 + \log\frac{a'}{B} - \frac{1}{2}\log\frac{a'}{a''} - \text{etc.}}$$

[3] $$\log\tfrac{1}{2}k\pi = 9{,}8339042$$

[4] $$\left.\begin{aligned} &c'c' + 2c''c'' + 4c'''c''' + \text{etc.} \\ &+ C'C' + 2C''C'' + 4C'''C''' + \text{etc.} \end{aligned}\right\} = \frac{1}{2}aa - \frac{2mM}{\pi}.$$

[Ein Blatt in Fg, Kapsel 46 a, Wasserzeichen FHF 1810.]

Arithmetisch-geometrische Mittel.

[2.]

$$m = \mu(1+2x+2x^4+2x^9+\text{etc.})^2$$
$$n = \mu(1-2x+2x^4-2x^9+\text{etc.})^2$$
$$\sqrt{(mm-nn)} = \mu(2x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{9}{4}}+2x^{\frac{25}{4}}+\text{etc.})^2$$

Das AGMittel zwischen m und $\sqrt{(mm-nn)}$ sei $=\lambda$. Man hat dann

$$\lambda = \frac{\pi\mu}{\log\frac{1}{x}} \text{ oder } x = e^{-\frac{\pi\mu}{\lambda}}.$$

Für Briggische Logarithmen wird $\lambda = \frac{a\mu}{\log\frac{1}{x}}$, wo $\log a = 0{,}1349342$.

Auch kann man sich folgender Formel bedienen:

$$x = \frac{mm-nn}{16m'.\sqrt{m''}.\sqrt[4]{m'''}.\sqrt[8]{m^{\mathrm{IV}}}.\&c} = \frac{m-n}{8\sqrt{m''}.\sqrt[4]{m'''}.\sqrt[8]{m^{\mathrm{IV}}}\ldots}.$$

Beispiel

3,0000000	0,4771213	3,0000000	0,4771213
1,0000000	0,0000000	2,8284270	0,4515450
2,0000000	0,3010300	2,9142135	0,4645214
1,7320508	0,2385606	2,9129510	0,4643332
1,8660254	0,2709175	2,9135822	0,4644273
1,8612098	0,2697953		
1,8636176	0,2703568	0,2703567	9,6989700
1,8636159	0,2703564	0,2709175	0,5716671
1,8636167	0,2703566	0,2706371	9,1273029
		0,3010300	

a	0,1349342		
μ	0,2703566		0,6396307 = Canon $\left[=\frac{\mu}{\lambda}\right]$
C.λ . . .	9,5355727		
	9,9408635		
	0,8726970		
x	9,1273030		

[3.]

Die AGMittel gestalten sich anders, wenn man für ein n', n'', n''' &c den negativen Werth wählt: doch sind alle Resultate in folgender Form begriffen:

[1] $$\frac{1}{(\mu)} = \frac{1}{\mu} + \frac{4ik}{\lambda}.$$

Beispiel für einen imaginären Werth des AGMittels.

3,0000000		0,4771213	0^0
1,0000000		0,0000000	360^0
2,0000000		0,3010300	0^0
— 1,7320508		0,2385606	180^0
0,1339746		9,1270225	0^0
	$+1,8612098i$	0,2697953	90^0
0,0669873	$+0,9306049i$	9,9698876	$85^0\ 52'\ 58'',10$
0,3530969	$+0,3530969i$	9,6984089	45 0 0
$\bar{0}$,2100421	$+0,6418509i$	9,8295254	71 52 46,58
0,2836930	$+0,6208239i$	9,8341482	65 26 29,05
0,2468676	$+0,6313374i$	9,8311572	68 38 36,05
0,2470649	$+0,6324002i$	9,8318368	68 39 37,82
$0,2469962\frac{1}{2}$	$+0,6318688i$	9,8314971	68 39 6,95
$0,2469962\frac{1}{2}$	$+0,6318685i$	9,8314970	68 39 6,93
$0,2469962\frac{1}{2}$	$+0,6318686\frac{1}{2}i$	$9,8314970\frac{1}{2}$	68 39 6,94

$$\frac{1}{(\mu)} = +0,5365910 - 1,3728774i = \frac{1}{\mu} + \frac{4i}{\lambda}.$$

[4.]

Schöner Lehrsatz.

[2] $$\frac{\frac{2\partial m}{m}-\frac{2\partial n}{n}}{mm-nn}=\frac{\frac{\pi\partial\lambda}{\lambda}-\frac{\pi\partial\mu}{\mu}}{\lambda\mu}.$$

Integrationsfähig durch eine Reihe wird die vorstehende Gleichung, wenn man sie in folgende Form setzt:

$$\frac{2\mu\mu}{mm-nn}\left(\frac{dm}{m}-\frac{dn}{n}\right)=-\pi d\frac{\mu}{\lambda}.$$

Das Hauptmoment des Beweises des umstehenden Lehrsatzes ist folgendes. Setzt man

$$\frac{n}{m}=a,\quad \frac{\sqrt{(mm-nn)}}{m}=b,\quad \frac{m}{\lambda}=A,\quad \frac{m}{\mu}=B,$$

so wird

$$A=1+\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}a^4+\frac{1.9.25}{4.16.64}a^6+\text{etc.}$$

$$B=1+\frac{1}{4}bb+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}b^4+\frac{1.9.25}{4.16.64}b^6+\text{etc.}$$

(1) $$aA+(3aa-1)\frac{dA}{da}+(a^3-a)\frac{ddA}{da^2}=0,$$

$$bB+(3bb-1)\frac{dB}{db}+(b^3-b)\frac{ddB}{db^2}=0,\text{[*)]}$$

woraus

(2) $$aB+(3aa-1)\frac{dB}{da}+(a^3-a)\frac{ddB}{da^2}=0.$$

Aus (1) und (2) folgt, wenn wir

$$\frac{BdA}{da}-\frac{AdB}{da}=u$$

setzen,

$$(3aa-1)u+(a^3-a)\frac{du}{da}=0$$

oder

$$(a^3-a)u=\text{Const.}$$

[*) In der Handschrift steht b^3-a statt b^3-b.]

Nun wird für $a = 1,\ b = 0$

$$A = \infty,\ (a^3 - a)A = 0;$$

$$B = 1;\ \frac{dA}{da} = \infty,$$

$$(a^3 - a)\frac{dA}{da} = -\frac{2}{\pi},\ \frac{dB}{da} = -\frac{1}{2},$$

$$(a^3 - a)u = -\frac{2}{\pi}.$$

[5.]

Summation einer Reihe, wo die Logarithmen der Glieder eine arithmetische Progression der zweiten Ordnung bilden.

Es seyn die Logarithmen dreier auf einander folgender Glieder:

$$a - b - c,\ a,\ a + b - c$$

und von einer andern Reihe

$$\alpha - \beta - \gamma,\ \alpha,\ \alpha + \beta - \gamma.$$

Ist nun

$$\alpha = a + \frac{bb}{4c} + \frac{1}{2}\log k\pi - \frac{1}{2}\log c$$

$$\beta = i \cdot 180^0 \cdot \frac{b}{c}$$

$$\gamma = \frac{kk\pi\pi}{c},$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\log k\pi &= 0{,}0674670.920.5 \\ k\pi &= 1{,}3643763538.418 \\ kk\pi\pi &= 1{,}86152283563 \\ 4kk\pi\pi &= 7{,}4460913425, \end{aligned}$$

so sind die Summen beider Reihen gleich.

Beispiel.

4,2		
	$+4,7$	
8,9		$-3,6$
	$+1,1$	
[1]0,0		$-3,6$
	$-2,5$	
7,5		$-3,6$
	$-6,1$	
1,4		

[Es folgt eine logarithmische Rechnung für $a = 10$, $b = -0,7$, $c = 1,8$, die ergibt:

$$\alpha = 1,01832497,\ \beta = -i.70^0,\ \gamma = 1,0341793.]$$

[6.]

Ist

$$[3] \qquad \frac{n}{m} = \frac{\mu\left(1-2e^{-M\pi}+2e^{-4M\pi}-2e^{-9M\pi}+\ldots\right)^2}{\mu\left(1+2e^{-M\pi}+2e^{-4M\pi}+2e^{-9M\pi}+\ldots\right)^2}$$

so kann man statt M setzen

$$[4] \qquad M^* = \frac{1}{2ai}+\frac{1}{2bi}+\frac{1}{2ci}+\frac{1}{2di}+\frac{1}{2ei}+\text{etc.}+\frac{1}{M}$$

wo a, b, c, d, e u.s.w. eine beliebige ungerade Menge ganzer reeller Zahlen bedeuten; oder auch

$$[5] \qquad \frac{pM+2qi}{r+2sMi} = \frac{M+2(qr-psMM)i}{rr+4ssMM},$$

wo p, q, r, s beliebige der Bedingung

$$pr+4qs = 1$$

genüge leistende ganze reelle Zahlen sind.

Setzt man

$$Pe^{-\pi t} = pt \qquad\qquad P(e^{-\pi t},\ e^{2\pi u}) = p(t, u)$$

so ist $\qquad\qquad$ so ist

$$1)\quad p(t+2ik) = pt \qquad\qquad e^{-\frac{uu}{4\pi t}}\sqrt{t}.p(t,u) = p\left(\frac{1}{t},\ \frac{iu}{t}\right)$$

$$2)\quad pt = \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot p\frac{1}{t}$$

$$pt^4 = p(t+i)^4 + (\tfrac{1}{2}p\tfrac{1}{4}t - \tfrac{1}{2}p(\tfrac{1}{4}t+i))^4$$

$$pt = \tfrac{1}{2}p\tfrac{1}{4}t + \tfrac{1}{2}p(\tfrac{1}{4}t+i)$$

$$pt + p(t+i) = 2p\,4t$$

$$p(t+i) = 2p\,4t - pt = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(p\frac{1}{4t} - p\frac{1}{t}\right).$$

$e^{-\pi} = h$ gesetzt, ist

$$\sum h^{\alpha nn+2\beta n+\gamma} = \frac{h^{\gamma-\frac{\beta\beta}{\alpha}}}{\sqrt{\alpha}}\sum h^{\frac{1}{\alpha}nn+\frac{2\beta i}{\alpha}.n}$$

$$2ei + \frac{1}{M} = M' \qquad pM' = \sqrt{M}.pM$$

$$2di + \frac{1}{M'} = M'' \qquad pM'' = \sqrt{M'}.pM'$$

$$2ci + \frac{1}{M''} = M''' \qquad pM''' = \sqrt{M''}.pM''$$

$$2bi + \frac{1}{M'''} = M^{\mathrm{IV}} \qquad \text{etc.}$$

$$2ai + \frac{1}{M^{\mathrm{IV}}} = M^{\mathrm{V}}$$

etc.

oder

$$pM^{\mathrm{V}} = \sqrt{MM'M''M'''M^{\mathrm{IV}}}.pM$$

$$pM^{\mathrm{V}} = \sqrt{[2bi,\ 2ci,\ 2di,\ 2ei,\ M]}.pM.$$

[Ein Blatt in Fg, Kapsel 46 a.]

[7.]

Es sei

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1$$

und

$$\frac{\alpha M-\beta i}{\delta+\gamma M i}=N,$$

$$ac=bb+1,\ AC=BB+1;$$

ist hier

$$M=\frac{1+bi}{a},\quad N=\frac{1+Bi}{A},$$

so geht die Form (a, b, c) in (A, B, C) über durch die Transf[ormation]

$$\begin{matrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{matrix}$$

Wir unterscheiden 6 Fälle jenachdem nach dem Modulus 2

α	1	1	1	0	1	0
β	0	1	0	1	1	1
γ	0	0	1	1	1	1
δ	1	1	1	1	0	0
	1	2	3	4	5	6

Es ist dann

$$[6]\qquad \begin{array}{r|c|c|c|c|c|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ hpN= & pM & qM & rM & qM & rM & pM\\ hqN= & qM & pM & pM & rM & pM & rM\\ hrN= & rM & rM & qM & pM & qM & qM\end{array}$$

$$h^{[-1]}=i^{\alpha}\sqrt{(\delta+\gamma M)}.$$

[8.]

Die Reduction von pM, qM, rM auf die einfachste Form.

Es sei $M = \frac{\alpha+\beta i}{\delta-\gamma i}$, wo α, β, γ, δ ganze reelle Zahlen und Zähler und Nenner ohne gemeinschaftlichen Factor; man setze

$$\begin{aligned} \alpha\alpha+\beta\beta &= A \\ \alpha\gamma+\beta\delta &= B \\ \gamma\gamma+\delta\delta &= C \\ \alpha\delta-\beta\gamma &= \sqrt{(AC-BB)} = D. \end{aligned}$$

Man suche die einfachste Form des Det[erminanten] $-DD$, welche der Form (A, B, C) aequivalent ist; sie sei (a, b, c).

Dann lassen sich die Functionen von M auf Functionen von

$$\frac{D+bi}{a}$$

zurückführen. Der Algorithmus ist dieser

$$\begin{array}{lll} \frac{D+Bi}{A} = M & DD+BB = AA' & B+B' = hA' \\ \frac{D+B'i}{A'} = M' & DD+B'B' = A'A'' & B'+B'' = h'A'' \\ \frac{D+B''i}{A''} = M'' & DD+B''B'' = A''A''' & B''+B''' = h''A''' \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{D+Bi}{A}}\cdot pM &= pM' \text{ für gerades } h \\ &= qM' \text{ für ungerades } h \end{aligned}$$

$$\varepsilon^h\sqrt{\frac{D+Bi}{A}}\cdot qM = rM' \qquad \varepsilon = \sqrt{i}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{D+Bi}{A}}\cdot rM &= qM' \text{ für gerades } h \\ &= pM' \text{ für ungerades } h \end{aligned}$$

Wenn man aus h, h', h'', u.s.w. die Transformation von (A, B, A') in (a, b, c) ableitet, so werden deren Elemente (ob sie gerade oder ungerade) entscheiden, welche Funktion von $\frac{D+bi}{a}$ mit der gegebnen von M so zusammenhängt, dass letztere in

$$\varepsilon^H \sqrt{\frac{D+Bi}{A} \cdot \frac{D+B'i}{A'} \cdot \frac{D+B''i}{A''} \cdots}$$

multiplicirt werden muss. Wo M nicht rational ist, mag man $D = -1$ setzen und den Algorithmus ebenso bilden. Nämlich wenn $M = g + hi$, so geht man von der Form $\frac{1}{g}, \frac{h}{g}, \frac{gg+hh}{g}$ (Det. -1) aus und sucht ihre Aequivalente etc.

[9.]

Es ist

M. Ar.-G. zwischen 1 ... 0,2	0,5208016	log ... 9,7166723	$= \frac{1}{pM^2}$
1,2 ... 0,8	0,9898721	log ... 9,9955791	$= \frac{1}{\left(p\frac{1}{M}\right)^2}$
	0,5261302	9,7210932	M

Man sucht

$$p\left(\tfrac{1}{7}M + \tfrac{6}{7}i\right) = -0{,}4201578 + 0{,}3006159i \qquad M = \operatorname{cotg}\psi$$

$$= q\left(\tfrac{1}{7}M - \tfrac{1}{7}i\right) \qquad \psi = 62^0\,14'\,59''$$

$$= r\left(\frac{7M}{1+MM} + \frac{7i}{1+MM}\right) \cdot \sqrt{\frac{7(M+i)}{1+MM}} \qquad a = \tfrac{7}{2}\sin 2\psi$$

$$b = 7\sin\psi^2$$

$$r(a+bi) = 2A\left(\cos\tfrac{1}{4}b\pi - i\sin\tfrac{1}{4}b\pi\right)$$
$$+ 2A^9\left(\cos\tfrac{9}{4}b\pi - i\sin\tfrac{9}{4}b\pi\right)$$
etc.

$\log A = -\frac{1}{4}k\pi . a$

$\log\frac{1}{4}k\pi = 9{,}5328742$

$a \ldots 0{,}4600640$

$9{,}9929382$

$0{,}9838711$

$A \ldots 9{,}0161289$

$2A \ldots 9{,}3171589$

$0{,}39602$

$9{,}71318$

Richtig.

Man hat

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\sin\varphi^2 . \sin\lambda^2)}} = \pi(pt)^2$$

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\sin\varphi^2 . \cos\lambda^2)}} = \pi\left(p\frac{1}{t}\right)^2 = \pi t(pt)^2$$

$qt = pt . \sqrt{\cos\lambda}$

$rt = pt . \sqrt{\sin\lambda}.$

[10.]

[Ein Zettel in Fi Nr. 6, Kapsel 50.]

Setzt man

$$\operatorname{tg} T \sqrt{\frac{a}{b}} = \operatorname{tg} T'$$
$$\operatorname{tg} 2T' \sqrt{\frac{a'}{b'}} = \operatorname{tg} 2T''$$
$$\operatorname{tg} 4T'' \sqrt{\frac{a''}{b''}} = \operatorname{tg} 4T'''$$

u.s.w.

so wird

$$\int \frac{dT}{\sqrt{(aa\sin T^2 + bb\cos T^2)}} = \int \frac{dT'}{\sqrt{(a'a'\sin 2T'^2 + b'b'\cos 2T'^2)}} = \int \frac{dT''}{\sqrt{(a''a''\sin 2T''^2 + b''b''\cos 2T''^2)}},$$

auch ist

$$\frac{\sin 2T}{\sqrt{(aa\sin T^2 + bb\cos T^2)}} = \frac{\sin 2T'}{\sqrt{(a'a'\sin 2T'^2 + b'b'\cos 2T'^2)}}.$$

[Zwei Zettel in Fi Nr. 6, Kapsel 50.]

[Erster Zettel]

[11.]

$$a = \mu(1 + 2xx + 2x^8 + 2x^{18} + \text{etc.})^2 = \mu f x$$
$$b = \mu(1 - 2xx + 2x^8 - 2x^{18} + \text{etc.})^2 = \mu f i x$$
$$c = \mu(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{9}{2}} + x^{\frac{25}{2}} + \text{etc.})^2 \qquad = \mu\ldots$$
$$aa - bb = 16cc$$
$$a + b = 2a',\; ab = b'b',\; cc = a'c',\; a - b = 8c' \text{ etc.}$$

x ist die Grenze von

$$\frac{c}{a},\; \sqrt{\frac{c'}{a'}},\; \sqrt[4]{\frac{c''}{a''}},\; \sqrt[8]{\frac{c'''}{a'''}}\cdots$$

Ferner ist das ar.-geom. Mittel zwischen a und $4c$

$$= -\frac{\mu\pi}{2\log x} = \nu.$$

Es ist also

$$\log x = -\frac{1}{2}\,\frac{\mu\pi}{\nu}. \qquad \operatorname{Log}\frac{k\pi}{2} = 9{,}8339041884.$$

[12.]

Setzt man

$$\sqrt{(aa\sin T^2 + bb\cos T^2)} = \Delta,$$

$$\int\frac{dT}{\Delta} = \frac{\theta}{\mu},$$

so erhält man θ durch folgenden Algorithmus

$$\operatorname{tg} T\sqrt{\frac{a}{b}} = \operatorname{tg} T'$$

$$\operatorname{tg} 2\,T'\sqrt{\frac{a'}{b'}} = \operatorname{tg} 2\,T''$$

$$\operatorname{tg} 4\,T''\sqrt{\frac{a''}{b''}} = [\operatorname{tg}]\, 4\,T'''$$

$$\operatorname{tg} 8\,T'''\sqrt{\frac{a'''}{b'''}} = [\operatorname{tg}]\, 8\,T^{\mathrm{IV}}$$

etc.

Dann ist $\theta = T^{\infty}$.

Man hat ferner:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}T = \frac{x^{\frac{1}{4}}\sin\frac{1}{2}\theta - x^{\frac{9}{4}}\sin\frac{3}{2}\theta + x^{\frac{25}{4}}\sin\frac{5}{2}\theta - \text{etc.}}{x^{\frac{1}{4}}\cos\frac{1}{2}\theta + x^{\frac{9}{4}}\cos\frac{3}{2}\theta + x^{\frac{25}{4}}\cos\frac{5}{2}\theta + \text{etc.}}$$

$$\operatorname{tg} T' = \frac{x^{\frac{1}{2}}\sin\theta - x^{\frac{9}{2}}\sin 3\theta + x^{\frac{25}{2}}\sin 5\theta - \text{etc.}}{x^{\frac{1}{2}}\cos\theta + x^{\frac{9}{2}}\cos 3\theta + x^{\frac{25}{2}}\cos 5\theta + \text{etc.}}$$

$$\operatorname{tg} 2\,T'' = \frac{x\sin 2\theta - x^9\sin 6\theta + x^{25}\sin 10\theta - \text{etc.}}{x\cos 2\theta + x^9\cos 6\theta + x^{25}\cos 10\theta + \text{etc.}}.$$

Eine independente Rechnung ist folgende

$$\frac{a}{b}\operatorname{tg} T = \operatorname{tg} U$$
$$\operatorname{tg} T' = \sqrt{\operatorname{tg} T . \operatorname{tg} U}, \qquad U' = \tfrac{1}{2}(T+U)$$
$$\operatorname{tg} 2T'' = \sqrt{\operatorname{tg} 2T' . \operatorname{tg} 2U'}, \quad U'' = \tfrac{1}{2}(T'+U')$$
$$\operatorname{tg} 4T''' = \sqrt{\operatorname{tg} 4T'' . \operatorname{tg} 4U''}, \quad U''' = \tfrac{1}{2}(T''+U'')$$

u.s.w.

Dann ist

$$T^\infty = U^\infty = \theta$$

$$\begin{aligned}\int\sqrt{(aa\sin T^2 + bb\cos T^2)}\,dT = {} & \frac{\theta}{\mu}(a'a' - 2(a''a''-b''b'') - (4a'''a'''-b'''b''')\ldots) \\ & + \tfrac{1}{2}(a-b)\sin 2U' - \tfrac{1}{2}(a'-b')\sin 4U'' \\ & - \tfrac{1}{2}(a''-b'')\sin 8U'' - \tfrac{1}{2}(a'''-b''')\sin 16U^{\mathrm{IV}}\ldots\end{aligned}$$

[Zweiter Zettel]

Zur Rectification der Ellipse.

[13.]

Es sei

$$\int\sqrt{(aa\cos T^2 + bb\sin T^2)}\,dT = W.$$

Man bilde die Reihe der arithm.-geom. Mittel

$$\begin{array}{r|ccc}
a,\, b & aa-bb = 16cc & & cc = a'c' \\
a',\, b' & a'a'-b'b' = 16c'c' & & c'c' = a''c'' \\
a'',\, b'' & a''a''-b''b'' = 16c''c'' & & c''c'' = a'''c''' \\
\text{etc.} & \text{etc.} & & \text{etc.} \\
\vdots & & & \\
[M(a,b) =]\ \alpha & & &
\end{array}$$

Man hat dann ferner zu setzen

$$\begin{array}{lll}
\frac{4\sin T}{a} = p & cp = \sin 2u & p' = \frac{p}{\cos u^2} \\
\frac{4\sin T'}{a'} = p' & c'p' = \sin 2u' & p'' = \frac{p'}{\cos u'^2} \\
\frac{4\sin T''}{a''} = p'' & c''p'' = \sin 2u'' & \text{etc.} \\
\vdots & \vdots &
\end{array}$$

Dann ist, den letzten Wert von $T = \theta$ gesetzt,

$$W = \frac{\theta}{\alpha}(a'a' - 32c''c'' - 64c'''c''' - 128c^{\mathrm{IV}}c^{\mathrm{IV}}\ldots)$$
$$+ 8c'\cos T\sin T' + 16c''\cos T'\sin T'' + 32c'''\cos T''\sin T''' + \cdots$$
$$= \frac{\theta}{\alpha}(a'a' - 32c''c'' - 64c'''c''' - 128c^{\mathrm{IV}}c^{\mathrm{IV}}\ldots)$$
$$+ 2a'p'\cos T + 4a''p''\cos T' + 8a'''p'''\cos T''\ldots$$

Salv. factore const.

$a = 302{,}78000$	2,4811272	c	...0,7886597
$b = 301{,}78000$	2,4796904	c'	...9,0969100 — 10
$a' = 302{,}28000$	2,4804094	c''	...5,7134110 — 10
$b' = 302{,}27944$	2,4804086	c'''	...8,9464130 — 20
$\alpha = 302{,}27977$	2,4804090		

Factor von θ...	2,4804098
$\frac{1}{2}\pi$	0,1961199
Erdquadrant	2,6765297
	7,0000000
Factor Const.	4,3234703
	2,4811272
a	6,8045975

Also die Länge des Bogens

$$= \frac{\theta}{90^\circ}\cdot 10\,000\,000^{\mathrm{m}} + 21060{,}580\cos T\sin T' + 17{,}418\cos T'\sin T''.$$

[14.]

Die Winkel finden sich

$\sin 2u = g\sin T$	g ...8,9095925	h ...9,9992822
$\sin T' = \frac{h\sin T}{\cos u^2}$	g' ...7,2185606	h' ...9,9999996
	g''...3,8350620	h'' 0

Z. B. $51.31.48 = \varphi$

$0{,}09986$

00144

$38.33.46 = T$

$\sin T$	$9{,}79475$
	$8{,}90959$
	$9{,}99928$
	$9{,}79403$
	28
$\sin T'$	$9{,}79431$
$T' =$	$38.31.0$

Man führe noch ein

$$a \operatorname{tg} U = b \operatorname{tg} T$$
$$a' \operatorname{tg} U' = b' \operatorname{tg} T'$$
$$a'' \operatorname{tg} U'' = b'' \operatorname{tg} T''.$$

Dann ist:

$$\sin T' = \frac{\sin \frac{1}{2}(T+U)}{\cos \frac{1}{2}(T-U)}$$

$$\cos U' = \frac{a \sin T'}{a' \operatorname{tg} T} = \frac{b \sin T'}{a' \operatorname{tg} U} = \frac{b' \sin T'}{a' \sqrt{\operatorname{tg} T . \operatorname{tg} U}}$$

$$\cos T' = \frac{\sin U'}{\sqrt{\operatorname{tg} T . \operatorname{tg} U}}$$

$$b' \cos T' = \frac{a \sin U'}{\operatorname{tg} T}$$

$$b' \cos T' = \frac{b \sin U'}{\operatorname{tg} U}$$

$$\frac{\cos(T+U)}{\cos T \cos U} = \frac{\cos(T'+U')\cos(T'-U')}{\cos T'^2}$$

$$\frac{\cos(T+U)}{\sin T \sin U} = \frac{\cos(T'+U')\cos(T'-U')}{\sin U'^2}$$

$$\frac{2\cos(T+U)}{\sqrt{\sin 2T . \sin 2U}} = \frac{\cos(T'+U') . \cos(T'-U')}{\cos T' . \sin U'}.$$

BRIEFWECHSEL.

[1.]

PFAFF an GAUSS.

{Helmstedt, 24. November 1799.

Theuerster Freund

. . . .

Nun noch ein paar Worte, soweit es die Kürze der Zeit gestattet, von den mathematicis, welche Ihr Brief enthält. . . . . .

Sehr interessant war mir die besondere Bemerkung, welche Sie über das arithm. geom. Mittel zwischen 1 und $\sqrt{2}$ gemacht haben, wobey die Übereinstimmung gewiss nicht zufällig und isolirt ist, sondern noch mehr in sich schliessen wird. — So leicht das arithm. harm. Mittel zu finden und zu beweisen ist, so wenig scheint bey der ersten Ansicht klar zu seyn, wie das a. g. M. zu bestimmen sey. Ich hätte gewünscht, Musse zu haben, mich auf diese curiose Speculation einzulassen. Ich bin aber in diesem Winter zu sehr mit meinen Vorlesungen beschäftigt, so dass ich kaum Zeit genug haben werde, meine Abhandlung über die meth. tang. invers. vollends zum Druck ins reine zu bringen, welche ich auch inzwischen wieder ganz liegen lassen musste. Indessen habe ich doch der Versuchung nicht widerstehen können, eben jezt, da mich Ihr Brief wieder daran erinnerte, wenigstens einen Versuch zu machen, wovon ich doch ein paar Worte sagen will. Ich sezte (wodurch die Untersuchung n i c h t beschränkt wird) $a = 1$, $b = 1 + x$; so wird

$$a' = \sqrt{(1 + x)},\ b' = 1 + \tfrac{1}{2}x.$$

Nun suchte ich überhaupt die a und b durch Reihen nach x auszudrücken, und das Gesez der Coefficienten zu bestimmen.

Es sei

$$a^n = 1 + \alpha^n x + \beta^n x^2 + \gamma^n x^3 + \delta^n x^4 \ldots$$
$$b^n = 1 + A^n x + B^n x^2 + C^n x^3 + D^n x^4 \ldots,$$

so ergeben sich 2 Reihen von Gleichungen für die Coëfficienten: die eine ist leicht:

$$A^{n+1} = \frac{A^n + \alpha^n}{2}; \quad B^{n+1} = \frac{B^n + \beta^n}{2}; \quad C^{n+1} = \frac{C^n + \gamma^n}{2}; \text{ etc.}$$

bey der anderen ist wegen des Infinitinomii die Rechnung verwickelter, ich habe sie nicht weiter fortführen können, als bis δ und D, bin aber zweifelhaft, ob, was ich bis dahin fand, richtig ist, da ich zu eilig und unordentlich rechnete. Ich erhielt nehmlich für jedes n (exc[eptis] exc[ipiendis])

$$\alpha^n = A^n = \frac{1}{2}; \quad \beta^n = B^n = -\frac{1}{16}; \quad \gamma^n = C^n = \frac{1}{32}; \quad \delta^n = D^n = -\frac{5}{2.128}.$$

Es wäre doch auffallend, dass von a'' und b'' an die Reihen wenigstens in den 5 ersten Gliedern übereinstimmen. Ich wäre neugierig zu wissen, wie es weiter geht, was sich für ein Gesez ergibt, ob etwa für $n = \infty$ die Reihe sich summiren lässt, wenigtens für gewisse Werthe von x. Aber die Zeit hat kaum zugereicht, so weit zu rechnen, und fast wäre mir die Zeit zu kurz geworden, um noch an Sie zu schreiben.

Ich werde übrigens diese Aufgabe bey mehrerer Musse nicht aus dem Sinn verliehren, ob gleich diese Untersuchung, die weiter führen kann, bey Ihnen in guten Händen ist. — Erhalten Sie ferner Ihre freundschaftlichen, mir sehr schäzbaren Gesinnungen

Ihrem ergebensten Fr[eunde]

J. F. Pfaff.}

[2.]

PFAFF an GAUSS.

{Theuerster Freund!

Ich sage Ihnen meinen herzlichen Dank für Ihren freundschaftlichen Brief, dessen Inhalt mir sehr interessant gewesen ist . . . .

Ihr Problem von dem lezten Gliede der Reihe

$$a,\ b,\ \left[\frac{a+b}{2},\ \sqrt{\frac{b(a+b)}{2}},\ \frac{a+b+\sqrt{2b(a+b)}}{4}\right], \ldots$$

hat mir recht wohl gefallen. Als ich gestern Mittag Ihr Paket erhielt, nahm ich mir vor, die Auflösung bis nach Beendigung eines Geschäfts zu verschieben, das mir jezt zur Last fällt . . . . . Indessen gestern Abend, als ich zu Haus kam, konnte ich mich nicht enthalten, das Problem näher anzusehen . . . . ., und fand auch sehr bald die Auflösung, ... Es ist nehmlich

$$f(a, b) = \frac{\sqrt{(b^2-a^2)}}{\text{Arc cos}\,\frac{a}{b}},$$

oder (für $b < a$),

$$= \frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{\log\left(\frac{a+\sqrt{(a^2-b^2)}}{b}\right)}.$$

Ist $a = 1$, $b = \sec\omega$, so wird

$$f(1, \sec\omega) = \frac{\tan g\,\omega}{\omega},$$

welches im Kreis durch eine einfache Construction dargestellt werden kann. Ferner ist

$$\log\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = \frac{2u}{f(1, \sqrt{(1-u^2)})}.$$

Für $a = 1$, $b = \sin\omega$ ist

$$f(1, \sin\omega) = \frac{\cos\omega}{\log \text{tg}\,\frac{1}{2}\,\omega}.$$

. . . . Für das versiegelte Billet und für das mir dadurch verschaffte

Vergnügen bin ich Ihnen sehr verbunden. Ich schicke Ihnen das Billet hierbey zurück: ob ich gleich, wie natürlich, nicht zweifeln kann, dass unsere Auflösungen übereinstimmen, so würde es mich doch freuen, wenn Sie mir gelegentlich das Billet wieder zum Andenken zurückschickten. . . . .

Fast hätte ich vergessen, Ihnen im voraus zu Ihrer Entdeckung Glück zu wünschen. Mir ist es besonders lieb, dass die h[öhere] Arithmetik mehr mit der Analysis in Verbindung gebracht ist, da ich durch frühe Verwöhnung immer mehr und lieber mit Buchstaben als mit Zahlen zu thun gehabt habe.

Schenken Sie ferner Ihr freundschaftliches Andenken

Ihrem ergebensten Freund

Helmstedt J. F. Pfaff.

8. Dec. 1800.

Nachschrift.

Zu meinem vorigen Brief an Sie, th[eurer] Fr[eund], folgt hiebey noch ein kleines Supplement, aus Veranlassung einer Bemerkung, die Ihnen gewiss auch nicht wird entgangen seyn. . . . .

Wird bey der Reihe $a, b \ldots$ in Ihrem Gesez bloss das geändert, dass zuerst das geometrische, und dann das arithm. Mittel genommen wird, so ist

$$f'(a, b) = \frac{\sqrt{(ab - b^2)}}{\operatorname{Arc\,cos} \sqrt{\frac{b}{a}}},$$

wie schon daraus folgt, dass $f'(a, b) = f(b, \sqrt{ab})$. Wenn bey Ihrem arithm.-geometrischen Mittel eine ähnliche Verwechslung gemacht wird, so ist $M'(a, b) = M(b, a)$: wie unmittelbar erhellt, weil dort auch das 3te und 4te Glied bloss verwechselt sind. Ich gestehe indessen, dass ich diese beyden leichten Bemerkungen nicht zuerst auf dem einfachsten Weg gemacht habe*).

C[etera] ut in literis.

J. Fr. Pf.}

*) sonderbar, dass mir nicht gleich einfiel, dass bei dem arithm.-geom. M. die erwähnte Verwechslung gar keinen Unterschied macht, wo dann auch natürlich $M(b, a) = M(a, b)$.

Anhang zu [2.]

[Aus H. C. SCHUMACHERS Tagebuch *Gaussiana*, Göttingen, November 1808.]

{A und B sein zwei beliebige Grössen; man bilde eine Reihe, in der alle folgenden Glieder wechselweise aus dem arithmetischen und geometrischen Mittel der zwei vorher gehenden bestehen, also so:

$$a,\ b,\ \frac{a+b}{2},\ \sqrt{\frac{ab+b^2}{2}},\ \frac{a+b+\sqrt{2b(a+b)}}{4},\ \ldots\}$$

{Erhalten von GAUSS den 2^{ten} December 1808 Göttingen H. C. S.}

Man bestimme t und u so, dass die erste Grösse A (die grössere) $= \frac{tt+1}{tt-1}u$, die andre Grösse B (die kleinere) $= \frac{2t}{tt-1}u$ wird. Es wird also

$$A' = \tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{tt+2t+1}{tt-1}\cdot\frac{u}{2}$$

$$B' = \frac{t+1}{tt-1}\cdot u\sqrt{t}$$

werden, oder

$$A' = \frac{t+1}{t-1}\cdot\frac{u}{2} \qquad B' = \frac{2\sqrt{t}}{t-1}\cdot\frac{u}{2}.$$

Hieraus ist klar, dass wenn man $t = t't'$, $u = 2u'$ setzt,

$$A' = \frac{t't'+1}{t't'-1}u' \qquad B' = \frac{2t'}{t't'-1}u'$$

wird, welche Ausdrücke denen für A und B ganz analog sind.

Es ist aber klar, dass wenn man ferner

$$t' = t''t'' \qquad u' = 2u''$$

$$t'' = t'''t''' \qquad u'' = 2u'''$$

etc.

macht, A'', B'' eben so durch t'', u'' und A''', B''' eben so durch t''', u''' bestimmt werden, wie A, B durch t, u, also allgemein

$$A^n = \frac{\sqrt[2^{n-1}]{t+1}}{\sqrt[2^{n-1}]{t-1}} \cdot \frac{u}{2^n} \qquad B^n = \frac{\sqrt[2^n]{t}}{\sqrt[2^{n-1}]{t-1}} \cdot \frac{u}{2^{n-1}}.$$

Nun ist für $i = \infty$

$$i(\sqrt[i]{t} - 1) = \log \operatorname{hyp} t$$

und also für $n = \infty$

$$B^\infty = \frac{u}{\log t} = A^\infty.$$

Zur Bestimmung von t und u hat man übrigens $B(tt+1) = 2At$ oder

$$t = \frac{A}{B} + \sqrt{\left(\frac{AA}{BB} - 1\right)}$$

wenn für t die grössere Wurzel genommen wird, also

$$u = \sqrt{(AA - BB)}$$

$$A^\infty = B^\infty = \frac{\sqrt{(AA-BB)}}{\log\left\{\frac{A}{B} + \sqrt{\left(\frac{AA}{BB} - 1\right)}\right\}}.$$

[3.]

Gauss an Bessel. Braunschweig, den 3. September 1805.

[Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel, Leipzig 1880, S. 10—14.]

. . . . Sie haben mir gütigst erlaubt, zuweilen bei meinen astronomischen Arbeiten Ihre bereitwillige Gefälligkeit in Anspruch zu nehmen: schon einmal haben Sie die Freundschaft gehabt, eine beschwerliche Rechnung für mich zu übernehmen, und schon wieder bin ich so frei, Ihnen eine neue zuzumuthen. Ich habe mich schon seit einiger Zeit mit Perturbationsrechnungen beschäftigt, wo ich hauptsächlich zum Behuf von Planeten wie Pallas und Juno, die eine starke Excentricität oder Neigung haben, mir eine eigne Methode ausgedacht habe, bei der allerdings viel, sehr viel Arbeit ist, der aber dies nicht zum Vorwurf gereichen kann, da, meinem Urtheile nach, alle bisherigen Methoden in einem solchen Falle ganz unzulänglich sind. Etwas Charakteristisches bei dieser Methode ist es, dass die Entwickelung der Coefficienten eines solchen Ausdruckes

$$(aa+a'a'-2aa'\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}A^0 + A'\cos\varphi + A''\cos 2\varphi + A'''\cos 3\varphi \text{ etc.}$$

nicht wie bei den bisher üblichen Methoden bloss für Einen bestimmten Werth von a, a' sondern für eine grosse Menge verschiedener Werthe erforderlich werden. Z. B. Bei einer Rechnung, die ich für die Ceres[*)] unternommen habe, habe ich 50 gebraucht; bei Pallas und Juno werden noch mehrere erforderlich sein.

Nun bin ich im Besitz von besonderen, zum Theil auf ganz heterogen scheinende Untersuchungen gegründeten Kunstgriffen, jene Coefficienten mit sehr grosser Geschwindigkeit zu bestimmen. Indess macht die grosse Menge doch immer die Arbeit beschwerlich und ich habe es daher [vor], zumal da für jeden Planeten die Arbeit mehrere Male (mit den successive verbesserten Elementen) wird gemacht werden müssen, ein für allemal eine Tabelle zu berechnen, mit deren Hülfe man dann mit sehr geringer Arbeit die gesuchten Coefficienten angeben könne, und bei dieser Gelegenheit bin ich so unbescheiden, mir in Etwas Ihre Unterstützung auszubitten.

Begreiflich darf die Tafel nicht A^0, A' etc. selbst angeben, weil sie sonst doppelte Eingänge haben müsste. Hingegen zu aA^0, aA', aA'' etc. oder $a'A^0$, $a'A', a'A''$ etc. braucht man nur Einen Eingang, da diese Grössen bloss Functionen von $\frac{a}{a'}$ sind. Es ist nicht schwer, $\frac{a}{a'}=f$ gesetzt (in der Vorauss[etzung] $a<a'$), folgende Reihen zu entwickeln:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}a'A^0 &= 1+\tfrac{1}{4}ff+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{9}{16}f^4+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{9}{16}\cdot\tfrac{25}{36}f^6+\text{etc.}\\
&= 1+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}ff+\tfrac{1.3}{2.4}\cdot\tfrac{1.3}{2.4}f^4+\tfrac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\tfrac{1.3.5}{2.4.6}f^6+\text{etc.}\\
\tfrac{1}{2}a'A' &= \tfrac{1}{2}f\Big(1+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}ff+\tfrac{1.3}{2.4}\cdot\tfrac{3.5}{4.6}f^4+\tfrac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\tfrac{3.5.7}{4.6.8}f^6+\text{etc.}\Big)\\
\tfrac{1}{2}a'A'' &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}ff\Big(1+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5}{6}ff+\tfrac{1.3}{2.4}\cdot\tfrac{5.7}{6.8}f^4+\tfrac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\tfrac{5.7.9}{6.8.10}f^6+\text{etc.}\Big)
\end{aligned}$$

etc.

[*) In der Handschrift steht hier und im folgenden auch für Pallas und Juno das entsprechende Zeichen.]

Ferner ist bekannt, dass folgende Gleichungen Statt finden:

$$A^0 - 2\left(f + \frac{1}{f}\right)A' + 3A'' = 0$$

$$3A' - 4\left(f + \frac{1}{f}\right)A'' + 5A''' = 0$$

$$5A'' - 6\left(f + \frac{1}{f}\right)A''' + 7A^{\text{IV}} = 0 \text{ etc.}$$

Gewöhnlich berechnet man A^0 und A' aus obigen Reihen und dann daraus vermittelst eben gedachter Formeln A'', A''', A^{IV} etc. Allein diess Verfahren ist zu meinem Zwecke unbrauchbar, »denn wenn A^0 oder A' nur etwas weniges »fehlerhaft sind z. B. nur um 1 in der 7ten Decimale, so werden die daraus »bei A'', A''' etc. entspringenden Fehler immer grösser, beinahe in Geometrischer »Progression, diess ist desto beträchtlicher, je kleiner f ist, und man kann für »die entfernteren Coefficienten, z. B. für A^{X}, welcher bei Pallas wol nöthig »sein kann, ganz und gar falsche Werthe erhalten.« Diese Bemerkung ist meines Wissens noch nicht gemacht, aber von Wichtigkeit. Ich habe daher auf eine ganz andere Methode gedacht, wo ich die Logarithmen selbst von A^{X} bis auf die 6te Ziffer mit den gewöhnlichen Logarithmen Tafeln genau erhalte. Ehe ich diese erkläre, bemerke ich noch, dass ich nicht $a'A^0$, $a'A'$, $a'A''$, $a'A'''$ etc. in meiner Tafel ansetze. 1) sind mir zu meinen Zwecken die Logarithmen angemessener, 2) würden die Logarithmen von diesen Grössen zu stark sich ändern und das Interpoliren zu beschwerlich machen. Ich habe es vielmehr am dienlichsten gefunden, die Logarithmen von

$$A^0 \sqrt{(a'a' - aa)} = B^0$$

$$\frac{A'}{f} \sqrt{(a'a' - aa)} = B'$$

$$\frac{A''}{ff} \sqrt{(a'a' - aa)} = B''$$

$$\frac{A'''}{f^3} \sqrt{(a'a' - aa)} = B''' \text{ etc.}$$

anzusetzen, und zum Argumente der Tafel den Winkel zu nehmen $(= W)$, dessen Tangente $\frac{a}{a'} = f$ ist. Die Tafel selbst soll von Minute zu Minute gehen und zwar fürs erste so weit als für die drei neuen Planeten zureicht, nemlich von 17^0 bis 35^0. Natürlich aber berechne ich die Tafel nicht unmittelbar von Minute zu Minute, sondern Anfangs nur von 32′ zu 32′ und weiterhin von 16′ zu 16′ (nämlich von 33° an), das übrige findet sich dann eben so genau durch eigne Interpolations Methoden.

Ich habe demnach nach meinem Zuschnitte nöthig die Logarithmen von $B^0, B', B'' \ldots B^{\mathrm{X}}$ für die Werte von W

$$16^0\,20',\; 16^0\,52',\; 17^0\,24' \ldots\ldots 32^0\,20',\; 32^0\,36',\; 32^0\,52' \ldots\ldots 36^0\,4'$$

zusammen für 45 Werthe. Nun nehme ich über mich selbst

1) das ganze Interpolationsgeschäft
2) die ganze Rechnung für die 17 letzten Werthe
3) die Berechnung von B^0 und B' für die 28 ersten

und ersuche Sie zu übernehmen die Berechnung der übrigen Coefficienten für die 28 ersten Werthe, von $16^0\,20'$ bis $30^0\,44'$ inclus[ive].

Meine Berechnungsmethode ist nun folgende.

Ich setze

$$\left.\begin{aligned} B^0 &= 2N^0\,B'\,(1+ff) \\ 3B' &= 4N'\,B''\,(1+ff) \\ 5B'' &= 6N''\,B'''\,(1+ff) \\ 7B''' &= 8N'''\,B^{\mathrm{IV}}(1+ff) \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} (\odot)$$

dadurch wird

$$\left.\begin{aligned} N^0 &= 1-\frac{9}{8}\left(\frac{f}{1+ff}\right)^2\frac{1}{N'} \\ N' &= 1-\frac{25}{24}\left(\frac{f}{1+ff}\right)^2\frac{1}{N''} \\ N'' &= 1-\frac{49}{48}\left(\frac{f}{1+ff}\right)^2\frac{1}{N'''} \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} (☾)$$

Man kann vermittelst dieser Formel N^0, N', N'' etc. durch continuirliche Brüche leicht darstellen; allein folgender Ausdruck, auf den ich gekommen bin, ist noch viel brauchbarer:

$$\frac{1}{N^n} = \cfrac{1+ff}{1-\cfrac{\frac{1}{(2n+3)^2-1}ff}{1-\cfrac{\frac{(2n+3)^2}{(2n+5)^2-1}ff}{1-\cfrac{\frac{9}{(2n+7)^2-1}ff}{1-\cfrac{\frac{(2n+5)^2}{(2n+9)^2-1}ff}{1-\cfrac{\frac{25}{(2n+11)^2-1}ff}{1-\cfrac{\frac{(2n+7)^2}{(2n+13)^2-1}ff}{1-\text{etc.}}}}}}}}$$

wo das alternirende Gesetz offenbar genug ist. Folglich wird

$$(1+ff)\,N^{\mathrm{X}} = 1-\cfrac{\frac{1}{528}ff}{1-\cfrac{\frac{529}{624}ff}{1-\cfrac{\frac{9}{728}ff}{1-\cfrac{\frac{625}{840}ff}{1-\cfrac{\frac{\mathbf{25}}{\mathbf{960}}\mathbf{ff}}{1-\cfrac{\frac{\mathbf{729}}{\mathbf{1088}}\mathbf{ff}}{1-\cfrac{\frac{\mathbf{49}}{\mathbf{1224}}\mathbf{ff}}{1-\text{etc.}}}}}}}}$$

Sie können hier ohne Bedenken die rothen [*)] Grössen ganz vernachlässigen, da sie kaum eine Einheit in der 7[ten] Decimale machen können. Ich habe bei den letzten Werthen von W noch ein Paar mehr genommen.

Nun, vermittelst dieser Formel berechne ich $\log N^{\mathrm{X}}$, daraus nach der Formel (☾) rückwerts $N^{\mathrm{IX}}, N^{\mathrm{VIII}} \ldots N^0$, welche alle bis auf die 7[te] Decimale zuverlässig werden. Ferner berechne ich nach einer eigenthümlichen äusserst bequemen Methode, die ich Ihnen in der Folge gern auch mittheile, $\log B^0$ und $\log B'$ (letztern bloss der Controle wegen), und Endlich aus $\log B^0$ und den Log[arithmen] von $N^0, N' \ldots N^{\mathrm{IX}}$ vermittelst der Formeln (☉) die Log[a-

[*) Die in der Handschrift mit roter Tinte geschriebenen Zahlen und Buchstaben sind hier fett gedruckt.]

rithmen] von $B', B'' \ldots B^{\text{x}}$; der Logarithmus von B' darf von dem auf dem andern Wege gefundenen nur höchstens um 2 in der 7ten Stelle differiren, in welchem Falle ich, um B'' daraus abzuleiten, gewöhnlich das Mittel nehme; ist der Unterschied 1, so ziehe ich den letztgenannten vor, ist er grösser, so liegt gewiss entweder in der einen oder der anderen Rechnung ein Fehler.

. . . . .

[4.]

SCHUMACHER an GAUSS.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER I, Altona 1860, S. 1.]

{Sie werden sich, verehrter Herr Professor! über die Zuschrift eines Unbekannten wundern, vielleicht sie etwas zu dreist finden. Ehe Sie aber mich verurtheilen, bitte ich den Brief auszulesen; ich hoffe Sie werden dann selbst gestehen, dass ich in der Sache mich nur an Sie wenden konnte.

Vor ungefähr 10 Jahren gab ein Spanier PEDRAYES allen Mathematikern eine Differentialgleichung zu integriren auf, die in den Gött. Anz. und HINDENBURG's Archiv [*)] abgedruckt ist. PFAFF hat sie nur für einen besonderen Fall integrirt (so viel ich noch erinnere setzt er die beyden Veränderlichen gleich), sonst ist meines Wissens gar nichts geschehen, so ungeheuer es auch scheinen mag, dass, da Sie, LAPLACE, LAGRANGE leben, ein Fremder solche Männer vergeblich ausfordern darf. Freilich sagt er, dass neue Methoden, Methoden die er erfunden, dazu erforderlich wären, aber kann er nicht durch Umwege erreicht haben, wozu man auf kürzerem Wege hätte kommen können? Und was er erfunden hat, kann es nicht nacherfunden werden? Ich gestehe Ihnen, wie ich voriges Jahr zufällig das Stück von HINDENBURG in die Hand bekam, und daraus diese Umstände erfuhr, überlief mich ein Schauder, das Blut kochte mir, und in demselben Augenblick fasste ich den Entschluss (lächeln Sie immer) mich ganz der Mathematik zu widmen, zu der ich schon als Knabe mich hingerissen fühlte, und die ich seit der Zeit ohne Lehrer

[*)] Göttingische gelehrte Anzeigen 1798, 37. Stück, S. 361, HINDENBURGS Archiv der r. u. a. Mathematik, Heft 9, 1799, S. 85.]

durch Selbststudium verfolgt habe. — Ich hatte hier Gelegenheit mit dem Generale der spanischen Truppen, dem Marquis von Romaña bekannt zu werden, und habe von ihm das Versprechen erhalten, er werde mir Pedrayes eigne Auflösung schaffen.

Kaum hatte ich das Versprechen erhalten, so dachte ich an Sie. Gewiss, Herr Professor, Sie können die Aufgabe lösen, wenn Sie wollen! Wie ehrenvoll wäre es für Deutschland, wenn Sie unser Stolz, ehe die Auflösung vielleicht aus Spanien kömmt, sie hier gäben!

Wollten Sie mich durch ein paar Zeilen benachrichtigen, ob Sie von Ihrer kostbaren Zeit, hiezu einige Stunden abbrechen wollen, so würden Sie mich unendlich verbinden.

Mit der unbegränztesten Hochachtung

Ihr ergebenster

Schumacher,

Altona, den 2. April 1808. (Dr. der Rechte, Palmaillenstrasse im Hause der Conferenzräthin Schumacher.)}

[5.]

Gauss an Schumacher.

[Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher I, Altona 1860, S. 2.]

Vor allen Dingen muss ich Sie, mein theuerster Herr Doctor, um Vergebung bitten, dass ich Ihre verehrte Zuschrift vom 2ten May [*)] so lange unbeantwortet gelassen habe. Die Sünde des Aufschiebens wird so leicht zur Gewohnheit, wenn man öfters mit Arbeiten beschäftigt ist, die den grössten Theil unsrer Zeit in Anspruch nehmen.

Was die von Ihnen erwähnte Aufgabe betrifft, so muss ich Ihnen aufrichtig gestehen, dass ich bisher es noch nicht habe über mich gewinnen können, sie zum Gegenstande einer besondern ernstlichen Untersuchung zu machen. Ich habe die Unart, ein lebhaftes Interesse bei mathematischen Gegenständen nur da zu nehmen, wo ich sinnreiche Ideenverbindungen und durch Eleganz oder Allgemeinheit sich empfehlende Resultate ahnen darf,

[*) So in der Handschrift; richtig wäre April.]

und wenn ich offenherzig sprechen soll, muss ich erklären, dass mich so etwas aus jenem Problem nicht angesprochen hat. Es kann wol seyn, dass ich irre, und dass wirklich an PEDRAYES Problem mehr ist, als man aus seiner Exposition schliessen kann, aber aller Wahrscheinlichkeit nach lässt sich wol nicht viel von jemand erwarten, der sein Problem so verworren vorträgt, dass man den Sinn nur errathen muss. Übrigens weiss ich kaum, ob sie der Aufl[ösung] des H. Prof. PFAFF nicht Unrecht thun, wenn Sie sagen, dass er die Gleichung nur für einen besonderen Fall integrirt habe: wenn PFAFF den Sinn der Aufgabe errathen hat, so ist die wahre Pointe der Aufgabe nicht das Integriren, sondern das Angeben einer Gleichung zwischen x und u, bei der jene Diff[erential]-Gleichung sich algebr[aisch] integriren lässt, und wenn es eine andere Aufl[ösung] gibt, als die des Hrn. PFAFF, so scheint es wird dieselbe bloss in der Aufstellung einer andern Relation zwischen x und u bestehen als der einfachsten $x = u$, z. B. vielleicht in einer ähnlichen wie $xx + uu = 1$ [*)].

Vielleicht wäre ich im Besitz von Wahrheiten, die zur Entscheidung dieser Sache dienen könnten. Mir ist bei der Integralrechnung immer das weit weniger interessant gewesen, wo es nur auf Substituiren, Transformiren etc. kurz auf einen gewissen geschickt zu handhabenden Mechanismus ankommt, um Integrale auf algebraische oder Logarithmische oder Kreisfunctionen zu reduciren, als die genauere tiefere Betrachtung solcher Transcendenten Functionen, die sich auf jene nicht zurückführen lassen. Mit Kreisfunctionen und Logarithmischen wissen wir jetzt umzugehen, wie mit dem 1 mal 1, aber die herrliche Goldgrube, die das Innere der höheren Functionen enthält, ist noch fast ganz Terra Incognita. Ich habe darüber ehemals sehr viel gearbeitet und werde dereinst ein eignes grosses Werk darüber geben, wovon ich bereits in meinen *Disquiss. arithm.* p. 593 [**)] einen Wink gegeben habe. Man geräth in Erstaunen über den überschwenglichen Reichthum an neuen höchst interessanten Wahrheiten und Relationen, die dergleichen Functionen darbieten wohin u. a. auch diejenigen gehörigen, mit denen die Rectification der Ellipse und Hyperbel zusammenhängt). Es könnte wol sein, dass gerade aus diesen

[*) Die Handschrift hat $xx + yy = 1$; in der Aufgabe des PEDRAYES heissen die beiden Veränderlichen x und u.]

[**) Art. 335, Werke I, S. 412—413.]

Untersuchungen die Beantwortung der PEDRAYES-Aufgabe sich entnehmen liesse, vorausgesetzt, dass sie eine Auflösung zulässt, die wirklich einen Werth hat: allein wenn ich auch klarer sähe, dass die ganze Aufgabe zu etwas führen könnte, als dies bis jetzt der Fall ist, würde ich doch jetzt von dieser Untersuchung abstrahiren müssen, da ich mich erst dann in diese weitaussehende Materie wieder hinein werfen werde, wenn ich an die Ausarbeitung jenes grossen Werks werde denken können. Dazu bin ich aber jetzt noch mit zu vielen andern mir nicht minder interessanten Untersuchungen überhäuft.

Sollten Sie des Hrn. PEDRAYES Auflösung erhalten haben, so würden Sie mich immer sehr durch die Mittheilung verbinden, und es würde mich gewiss innigst freuen, wenn ich finden würde, dass ich mir eine falsche Vorstellung von seiner Aufgabe gemacht habe. Haben Sie sie freilich bis jetzt noch nicht, so werden Sie sie schwerlich jetzt durch den Marquis DE ROMANA erhalten.

Von meinem Werke über die Bewegung der Himmelskörper [*)] sind leider erst 17 Bogen, also etwa 3/5 des Ganzen fertig. Ich hoffe, dass auf den Novbr. der Druck vollendet seyn wird.

Wird die von Ihnen angekündigte Bearbeitung von CARNOT, *Géométrie de Position* [Paris, An XI-1803 **)] bald erscheinen?

Mit ausgezeichneter Hochachtung habe ich die Ehre zu beharren

Ew. Wohlgeboren

ergebenster Diener

Göttingen, d. 17. September 1808. C. F. GAUSS.

[6.]

SCHUMACHER an GAUSS. Kopenhagen, d. 5ten April 1816.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER I, Altona 1860, S. 123—124.]

.... {Ein Landsmann von Ihnen ist hier Professor der Mathematik. Er heisst DEGEN. Vor einiger Zeit sagte er mir, er beschäftigte sich schon seit-

[*) *Theoria motus corporum coelestium*, Hamburgi 1809, Werke VII, 1906, S. 1 ff.; vergl. in Bezug auf den Druck dieses Werkes die Briefe von GAUSS an OLBERS, *Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke* II, 1, 1900, S. 396, 409, 414, 419, 422, 431.]

[**) Siehe: L. N. M. CARNOT, *Geometrie der Stellung*, aus dem Französischen übersetzt mit Anmerkungen von H. C. S. SCHUMACHER, I, II, Altona 1808—1810.]

dem er TETENS Schüler sei, mit gewissen Mediis arithmetico-geometricis, die von den Ihrigen verschieden sind. Er nimmt nemlich zwei Grössen, von denen a die grössere, b die kleinere seyn soll (die Stelle ist gleichgültig)

$$\begin{array}{lll} a, & \tfrac{1}{2}(a+b) = a', & \tfrac{1}{2}(a'+b') = a'', \text{ u. s. w.} \\ b, & \sqrt{ab} = b', & \sqrt{a'b'} = b'', \text{ u. s. w.} \end{array}$$

Er selbst weiss nur, dass diese Reihe einen Limes hat, den man bald findet. Ich habe mich sehr mit diesem Limes beschäftigt und bin jetzt so glücklich gewesen, einen Zusammenhang mit der Ellipse zu finden, den ich mir die Freiheit nehme Ihnen vorzulegen. Da der Limes dieser Reihe so wie ich ihn dargestellt habe, von $\frac{a}{b}$ abhängt, so bezeichne ich ihn mit $M\left(\frac{b}{a}\right)$. Ich nenne ferner die sehr schnell convergirende Reihe (aus den Differenzen der successiven $a, a', a'' \ldots$ gebildet)

$$\frac{a-a'}{2a'} + \frac{a-a'}{2a'}\cdot\frac{a'-a''}{2a''} + \frac{a-a'}{2a'}\cdot\frac{a'-a''}{2a''}\cdot\frac{a''-a'''}{2a'''} + \ldots$$

$\mathfrak{M}\left(\frac{b}{a}\right)$, dann ist

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a'}{M\left(\frac{b}{a}\right)} - \frac{(a-a')\,\mathfrak{M}\left(\frac{b}{a}\right)}{M\left(\frac{b}{a}\right)}\right) = \text{Quadrans Ellipseos } \left(\frac{b'}{a'}\right),$$

wo das Zeichen $\left(\frac{b'}{a'}\right)$ eine Ellipse bedeutet, deren grosse Axe $= 1$, kleine Axe $= \frac{b'}{a'}$ ist. Ich habe nun DEGEN angezeigt, ich habe seinen Limes gefunden und halte es für billig zu warten, ob er dasselbe finde. Wie ich vor 14 Tagen an LINDENAU schrieb, hatte ich den Limes noch nicht.

Gewiss haben Sie bei Ihren Mediis auch dieses angesehen, und Sie würden mich sehr durch ein paar Worte darüber verbinden.

Leben Sie wohl, werthester Freund und vergessen Sie nicht

Ihren ganz eignen

SCHUMACHER.}

[7.]

Gauss an Schumacher. Göttingen, den April 1816.

[Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher I, Altona 1860, S. 125—126.]

.... Haben Sie denn wirklich vergessen, dass das Arithmetisch Geometrische Mittel, mit welchem Hr. Degen sich beschäftigt, ganz dasselbe ist, womit ich mich seit 1791 beschäftigt habe, und jetzt einen ziemlichen Quartband darüber schreiben könnte? Ich habe zwar ausser jenem auch noch andere ar[ithmetisch-]geo[metrische] Mittel betrachtet, die aber ganz elementarisch sind[*)]. Jenes ist das wahre, worüber Sie hier auch eine im Jahre 1800 von mir angefangene kleine Abhandlung gelesen haben (in einem blauen Octavbande, *Varia* betitelt[**)], worin noch von Ihrer Hand eine Restitutio in Integrum einiger durch einen Dintenfleck unkenntlich gewordenen Stellen zu sehen ist).

In jener Abhandlung steht theils ein Beweis, dass wenn ein Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{(g+h\cos\varphi)}}$$

in die Reihe

$$A+B\cos\varphi+C\cos 2\varphi+D\cos 3\varphi\ldots$$

verwandelt wird, $\frac{1}{A}$ das Medium Arithm. Geom. zwischen dem grössten und kleinsten Werthe von $\sqrt{(g+h\cos\varphi)}$, d. i. zwischen $\sqrt{(g+h)}$ und $\sqrt{(g-h)}$ ist, theils der Beweis, dass

$$d\,\mathrm{Med}\,(x,y)=\mathrm{Med}\,(x,y)\times\left\{\begin{array}{l}\frac{dx}{x}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{x-x'}{x'}+\frac{1}{8}\cdot\frac{x-x'}{x'}\cdot\frac{x'-x''}{x''}+\text{etc.}\right)\\ +\frac{dy}{y}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{x-x'}{x'}-\frac{1}{8}\cdot\frac{x-x'}{x'}\cdot\frac{x'-x''}{x''}-\text{etc.}\right)\end{array}\right\}$$

Gerade diese Formel unter andern ist von Ihnen selbst restituirt.

Durch die Media und ihre Differentiale kann man dann leicht die übrigen Coefficienten B, C, D etc. bestimmen, so wie überhaupt die Coefficienten von

[*) Vergl. den Brief [2.] und den zugehörigen Anhang, oben S. 234—237.]

[**) Dieser Band befindet sich unter der Bezeichnung »Handbuch 15, Ba« im Gaussarchiv; die betreffende Abhandlung steht S. 3—18, sie ist Werke III, S. 361—374 abgedruckt.]

$(g+h\cos\varphi)^{\frac{1}{2}-k}$, wo k irgend eine ganze Zahl ist (welche Reduction bekannt genug ist).

In dem zweiten Theile der Abhandlung *Disquisitiones Generales circa Seriem infinitam* $1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x$ etc. (welche ich vielleicht bald gebe) werde ich einen Theil meiner Untersuchungen über die Ar. Geom. Mittel bekannt zu machen anfangen.

Leben Sie wohl, werthester Freund, und vergessen sie nicht

Ihren ergebensten

C. F. G[AUSS.]

[8.]

GAUSS an BESSEL. Göttingen den 30. März 1828.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und BESSEL, Leipzig 1880, S. 477.]

...... Zur Ausarbeitung der seit vielen Jahren (1798) angestellten Untersuchungen über die transcendenten Functionen werde ich vorerst wol noch nicht kommen können, da erst noch mit manchen andern Dingen aufgeräumt werden muss. Hr. ABEL ist mir, wie ich sehe, jetzt zuvorgekommen [*)] und überhebt mich in Beziehung auf etwa $^1/_3$ dieser Sachen der Mühe, zumahl da er alle Entwickelungen mit Eleganz und Concision gemacht hat. Er hat gerade denselben Weg genommen, welchen ich 1798 einschlug, daher die grosse Übereinstimmung der Resultate nicht zu verwundern ist. Zu meiner Bewunderung erstreckt sich dies sogar auf die Form und zum Theil auf die Wahl der Zeichen, so dass manche seiner Formeln wie eine reine Abschrift der meinigen erscheinen. Jeder Misdeutung zuvorzukommen bemerke ich jedoch, dass ich mich nicht erinnere, von diesen Sachen irgend jemanden etwas mitgetheilt zu haben.

Nicht dasselbe kann ich aber von einer Kleinigkeit sagen, die Sie im 1. Heft des 3. Bds von CRELLE's Journal [**)] von mir finden werden.

[*) Siehe N. H. ABEL, *Recherches sur les fonctions elliptiques*, CRELLES Journal für Mathematik 2 (1828), S. 101, Oeuvres, nouvelle édition, I, 1881, S. 263—351; dieser erste Teil der *Recherches* ist am 20. September 1827 erschienen.]

[**) *Beweis eines algebraischen Lehrsatzes*, CRELLES Journal für Mathematik 3, 1828, S. 1, Werke III, S. 65.]

Diesen Beweis des HARRIOT'schen Lehrsatz[es] habe ich, seitdem ich in Göttingen bin, sehr häufig mündlich vorgetragen[*)]; der verstorbene PFAFF schrieb mir u. a. mehrere Jahre vor seinem Tode[**)], dass er ihm in Halle von jemand (als von mir herrührend) mitgetheilt sei, der ihn wieder durch die zweite oder dritte Hand aus Jena erhalten habe, wie ich vermuthe von dem verst[orbenen] POSSELT; PFAFF, dessen Beifall dieser Beweis erhalten hatte, ersuchte mich um meine Zustimmung, um ihn in einer Sammlung von Abhandlungen, die er herauszugeben beabsichtigte, bekannt zu machen. Ich gab ihm diese natürlich gern; allein das projectirte Buch ist meines Wissens nicht erschienen. Ob dies in einem Zusammenhange mit dem Erscheinen eines Beweises von derselben Grundidee in dem letzten Hefte des 2^n Bandes von CRELLES Zeitschrift[***)] (welches mir erst fast zugleich mit dem 1^{ten} des 3. Bdes zu gesichte gekommen ist, etwa 3 oder 4 Monate später als ich CRELLE den Aufsatz geschickt hatte) steht, muss ich auf sich beruhen lassen. . . . . . .

Anhang zu [8.]

[a.]

PFAFF an GAUSS. Halle, 20. Oktober 1824.

{. . . . . Ehe ich meinen alten Vorsatz, ein Lehrbuch der algebraischen und höheren Analysis (über welche ich öfter lese) herauszugeben, ausführe, gedenke ich einige Abhandlungen und weitere Ausführungen einzelner Lehren (wie auch KAESTNER gerathen und gethan hat) herauszugeben, und vielleicht schon in der nächsten Ostermesse einen Anfang damit zu machen. Darunter gehört auch die Entwickelung des HARRIOTTischen Satzes. Zufällig erhielt ich vor einigen Jahren von einem Zuhörer, der früher in Jena Analysis bey Prof. v. MÜNCHOW gehört hatte, ein Vorlesungs-Heft von letzterem, worin auch ein Beweis des HARRIOTTischen Satzes, als von Ihnen herrührend und mitgetheilt, vorkommt. In ein schon seit geraumer Zeit ins reine gearbeitetes Manuscript

---

[*) Vergl. M. A. STERN, *Über einen Satz von Gauss,* Göttinger Nachrichten 1869, S. 330, abgedruckt Werke X 2, S. 70.]

[**) Siehe die als Anhang zu diesem Briefe abgedruckten beiden Briefstellen.]

[***) Gemeint ist jedenfalls: *Beweis des Harriotischen Satzes* von J. A. GRUNERT, CRELLEs Journal für Mathematik 2 (1828), S. 335—344.]

nahm ich (mit denjenigen Änderungen, welche die Verbindung mit dem übrigen erforderte) Ihren einfachen und sinnreichen Beweis auf, weil durch dessen Weglassung eine wesentliche Lücke in der Abhandlung entstanden wäre, und weil ich dachte, dass Sie bei Ihren übrigen wichtigen und schweren Untersuchungen schwerlich so bald dazu kommen würden, diesen Beweis selbst bekannt zu machen. Jezt benuze ich gegenwärtige Gelegenheit, Sie um die Genehmigung dieser Bekanntmachung zu bitten. . . . .}

[b.]

Gauss an Pfaff. Göttingen, 21. März 1825.

[Sammlung von Briefen gewechselt zwischen Joh. Friedrich Pfaff und .... Anderen; herausg. von Dr. Carl Pfaff, Leipzig 1853, S. 277—278.]

. . . . . . Im nächsten Sommer werden mich meine Dreiecksmessungen wieder von Göttingen entfernen; ich habe noch ein Dreiecksnetz von Barmen bis Ostfriesland, der Nordsee und Helgoland zu führen. Ich wünsche sehr alle Arbeiten dieser Art, die noch rückständig sind, in einem Stück zu vollenden, um dann die Lebensjahre, die der Himmel mir noch schenken wird, ungestört auf Arbeiten im Studirzimmer wenden zu können. Jene Messungen erhalten einen ihrer vornehmsten Reize für mich durch den Umstand, dass sie mir Gelegenheit zur Anwendung der mir eigenthümlichen theoretischen Methode, solche Messungen zu behandeln, geben. Nach Beendigung der Messungen werde ich darüber ein eigenes Werk, vermuthlich von bedeutender Ausdehnung ausarbeiten[*)]. Meine Preisschrift über die Transformation der Flächen ist, wie ich höre, jetzt unter der Presse[**)]. Gegenwärtig bin ich mit einer Untersuchung aus der höheren Arithmetik beschäftigt als Anfang der Theorie der biquadratischen Reste; wenn es möglich ist, werde ich die Abhandlung der

[*) Erschienen sind die Abhandlungen
Disquisitiones generales circa superficies curvas, 1827, Werke IV, S. 217;
Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodaesie I, 1843, ebenda, S. 259; II, 1846, ebenda, S. 301.]

[**) *Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird*, erschienen Altona 1825, Werke IV, S. 189; vergl. in bezug auf den Druck dieser Abhandlung *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. Schumacher* II, 1860. S. 5—7.]

k. Societät noch vor meiner diesjährigen Abreise vorlegen [*)]. Mit Verlangen sehe ich Ihrem neuen Werk entgegen [**)]. Ich rechne mir's zur Ehre, dass Sie meinen Beweis des HARRIOTischen Lehrsatzes darin aufnehmen wollen: ich habe ihn öfters mündlich vorgetragen, ohne doch zu wissen, wie er in die Hände des Professor MÜNCHOW gekommen ist. Die Besorgniss, dass er, durch mehrere Hände gegangen, vielleicht verunstaltet sein könnte, beunruhigt mich nicht, da Sie in diesem Fall dies sogleich erkannt haben und mir ihn dann erst zur Anerkennung communicirt haben würden. So wie ich mir ihn aufgezeichnet habe, füllt er nicht viel über eine Octavseite. . . . .

BEMERKUNGEN.

Die im Vorstehenden (beginnend auf S. 172) zum ersten Male im Zusammenhange abgedruckten Aufzeichnungen geben im Verein mit den bereits in den Bänden III und VIII der Werke aus dem Nachlaß veröffentlichten Stücken und mit den artt. 16.—19. der von GAUSS selbst veröffentlichten *Determinatio attractionis* (1818, Werke III, S. 352) so ziemlich alles, was von GAUSS' Arbeiten zur Lehre von dem arithmetisch-geometrischen Mittel***) auf uns gekommen ist. Zum Teil sind die vorstehenden Aufzeichnungen so lückenhaft, daß sie ausführliche Erläuterungen erfordern. Wir werden uns dabei einer festen und einheitlichen Bezeichnung bedienen, die wir im engen Anschluß an GAUSS wählen und hier mit einem Abriß der Lehre von dem agM. vorab zusammen stellen wollen. Die Anordnung dieses Abrisses soll zugleich den Gang der Entwicklung von GAUSS' Untersuchungen auf diesem Gebiete veranschaulichen. Es folgen dann die eigentlichen Erläuterungen nach Abschnitten geordnet.

Abriß der Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels.

1.

Es seien a, b zwei beliebige Zahlen, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a^2 \neq b^2$. Wir bilden den Algorithmus †)

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{ll} a_1 = \dfrac{a+b}{2}, & b_1 = \sqrt{ab}, \\ a_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}, & b_2 = \sqrt{a_1 b_1}, \\ \cdots & \cdots \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}, & b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \\ \cdots & \cdots \end{array}\right.$$

[*) Die Abhandlung *Theoria residuorum biquadraticorum, Comment. prima,* Werke II, S. 65, ist der Königl. Societät am 5. April 1825 vorgelegt worden. Dem Briefwechsel nach hat GAUSS seine Reise um den 20. April angetreten.]

[**) Dieses Werk von PFAFF ist, vergl. GAUSS an BESSEL, oben S. 247, nicht erschienen; PFAFF ist am 20. April 1825 gestorben.]

***) Wir schreiben im folgenden allemal kurz agM.

†) Er findet sich schon bei LAGRANGE, *Sur une nouvelle Méthode de calcul intégral,* Mémoires de l'Acad. de Turin, 2, 1784—85, Oeuvres II, S. 251, siehe besonders S. 272 ff., 304 ff.

Dann existiert *)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = M(a,b) = M(a_n,b_n) \tag{2}$$

und wird das agM. zwischen a und b genannt. Es ist für ein beliebiges ρ

$$M(\rho a, \rho b) = \rho M(a,b). \tag{3}$$

Setzt man

$$c^2 = \sqrt{a^2-b^2} \tag{4}$$

und bildet den Algorithmus

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{a}_1 = \dfrac{a+c}{2},\quad \bar{c}_1 = \sqrt{ac}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{a}_{n+1} = \dfrac{\bar{a}_n+\bar{c}_n}{2},\quad \bar{c}_{n+1} = \sqrt{\bar{a}_n\bar{c}_n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \tag{5}$$

der zu dem Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \bar{a}_n = \lim_{n\to\infty} \bar{c}_n = M(a,c) \tag{6}$$

führt, so kann zwischen den beiden Algorithmen (1) und (5) durch Rückwärtsverlängerung ein Zusammenhang hergestellt werden. Man bildet zu dem Ende:

$$c_n = \sqrt{a_n^2-b_n^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{4a}$$

Dann ist

$$\left\{\begin{array}{ll} a = a_1+c_1, & b = a_1-c_1, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n-1} = a_n+c_n, & b_{n-1} = a_n-c_n. \end{array}\right. \tag{7}$$

Man bildet nun analog

$$\left\{\begin{array}{lll} a_{-1} = a+c, & b_{-1} = a-c, & c_{-1} = \sqrt{a_{-1}^2-b_{-1}^2}, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{-n-1} = a_{-n}+c_{-n}, & b_{-n-1} = a_{-n}-c_{-n}, & c_{-n-1} = \sqrt{a_{-n-1}^2-b_{-n-1}^2}, \end{array}\right. \tag{1'}$$

dann gelten in den beiden Folgen

$$\ldots a_{-2},\ a_{-1},\ a,\ a_1,\ a_2, \ldots$$
$$\ldots b_{-2},\ b_{-1},\ b,\ b_1,\ b_2, \ldots$$

die für positive Indizes aufgestellten Beziehungen auch für negative Indizes und es ist ferner

$$\frac{1}{2^n} a_{-n} = \bar{a}_n,\quad \frac{1}{2^n} c_{-n} = \bar{c}_n. \tag{8}$$

Die Rückwärtsverlängerung des Algorithmus (5) ergibt sich, indem man setzt

---

*) GAUSS liefert den Existenzbeweis (Werke III, S. 361) nur für reale positive a, b und unter der Annahme, daß in dem Algorithmus (1) alle Quadratwurzeln mit dem positiven Vorzeichen gewählt werden. Den direkten und vollständigen Existenzbeweis für den allgemeinsten Fall hat zuerst L. v. DÁVID erbracht, CRELLES Journal für Mathematik **135** (1907), S. 62.

$$\overline{b}_n^2 = \overline{a}_n^2 - \overline{c}_n^2 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{8}$$

und

$$\left\{\begin{array}{lll} \overline{a}_{-1} = a+b, & \overline{c}_{-1} = a-b, & \overline{b}_{-1} = \sqrt{\overline{a}_{-1}^2 - \overline{c}_{-1}^2}, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \overline{a}_{-n-1} = \overline{a}_{-n} + \overline{b}_{-n}, & \overline{c}_{-n-1} = \overline{a}_{-n} - \overline{b}_{-n}, & \overline{b}_{-n-1} = \sqrt{\overline{a}_{-n-1}^2 - \overline{c}_{-n-1}^2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right. \tag{5)'}$$

Es ist dann für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$2^n a_n = \overline{a}_{-n}, \quad 2^n b_n = \overline{b}_{-n}, \quad 2^n c_n = \overline{c}_{-n} \tag{8 a}$$

und ferner

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\overline{a}_{-n}}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\overline{b}_{-n}}{2^n} = M(a,b) = M(a_n, b_n) \\ \qquad = M(a_{-n}, b_{-n}) = 2^{-n} M(\overline{a}_{-n}, \overline{b}_{-n}) = 2^n M(\overline{a}_n, \overline{b}_n), \\ \lim\limits_{n\to\infty} \overline{a}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \overline{c}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{-n}}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_{-n}}{2^n} = M(a,c) = M(\overline{a}_n, \overline{c}_n) \\ \qquad = M(\overline{a}_{-n}, \overline{c}_{-n}) = 2^n M(a_n, c_n) = 2^{-n} M(a_{-n}, c_{-n}). \end{array}\right. \tag{9}$$

Endlich bestehen die Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt{a_n} + \sqrt{b_n} = 2\sqrt{a_{n+2}}, \\ \sqrt{a_n} - \sqrt{b_n} = 2\sqrt{c_{n+2}}. \end{array}\right. \tag{10}$$

wo $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = c$ zu nehmen ist.

2.

Aus den Definitionsgleichungen des Algorithmus folgen (siehe Werke III, S. 373, vergl. auch die Ausführungen von SCHERING, ebenda S. 380) die Gleichungen

$$\frac{1}{c^2} d \log \frac{a}{b} = \frac{1}{2^n} \frac{1}{c_n^2} d \log \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2^n} \frac{1}{b_n^2} d \log \frac{c_n}{a_n} = \frac{1}{2^n} \frac{1}{a_n^2} d \log \frac{c_n}{b_n}. \tag{11}$$

Lassen wir also n als positive ganze Zahl ins Unendliche wachsen, so ist

$$\frac{1}{c^2} d \log \frac{a}{b} = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \frac{1}{b_n^2} d \log \frac{a_n}{c_n}$$

oder, da nach (9)

$$\frac{1}{2^n} \log \frac{4 a_n}{c_n} = \frac{M(a,b)}{M(a,c)} \cdot \frac{M(a_n, c_n)}{M(a_n, b_n)} \log \frac{4 a_n}{c_n} \tag{12}$$

ist,

$$\frac{1}{c^2} d \log \frac{a}{b} = -C \frac{1}{M(a,b)^2} d \frac{M(a,b)}{M(a,c)}, \tag{13}$$

wo für einen Augenblick

$$C = \lim_{n\to\infty} \frac{M(a_n, c_n)}{M(a_n, b_n)} \log \frac{4 a_n}{c_n} = \lim_{\varepsilon\to 0} M(1, \varepsilon) \log \frac{4}{\varepsilon} \tag{14}$$

gesetzt wurde. Zur Bestimmung dieses Grenzwertes schlägt GAUSS in der Aufzeichung [IX.] art. [4.], S. 220 das folgende Verfahren ein.

Wir setzen

$$k = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \frac{c}{a}, \quad k' = \frac{b}{a}, \quad k^2+k'^2 = 1, \tag{15}$$

$$\left\{\begin{aligned} A &= \frac{a}{M(a,c)} = \frac{1}{M(1,k)}, \\ B &= \frac{a}{M(a,b)} = \frac{1}{M(1,k')}. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Dann lautet die Gleichung (13)

$$-\frac{1}{c^2}\,d\log k' = -\frac{C}{a^2}(A\,dB - B\,dA)$$

oder (vergl. Werke III, S. 222, Gl. [96] und oben [IX.] art. [4.], S. 220)

$$\frac{1}{C} = k'(k'^2-1)\left(A\frac{dB}{dk'} - B\frac{dA}{dk'}\right). \tag{17}$$

Für A, B gelten die Reihenentwicklungen

$$A = 1+\frac{1}{4}k'^2+\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 k'^4+\cdots = F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,k'^2\right), \quad |k'|<1, \tag{18}$$

$$B = 1+\frac{1}{4}k^2+\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 k^2+\cdots = F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,k^2\right), \quad |k|<1, \tag{19}$$

die am einfachsten nach der von GAUSS in der Abhandlung vom Jahre 1800 (Werke III, S. 366) angegebenen Methode *) abgeleitet werden können.

Aus ihnen ergibt sich (vergl. den art. 8. der Abhandlung von 1800, Werke III, S. 370) zunächst, daß A, B ein System linearunabhängiger Lösungen der Differentialgleichung

$$k'(k'^2-1)\frac{d^2u}{dk'^2} + (3k'^2-1)\frac{du}{dk'} + k'u = 0 \tag{20}$$

bilden. Daraus folgt durch einfache Integration, daß die rechte Seite von (17), also auch C, von k' unabhängig ist (siehe oben [IX.] art. [4.], S. 220 **)).

Ferner läßt sich mit Hilfe der Reihenentwicklungen (18), (19) leicht die Beziehung angeben, die das agM. mit dem Ellipsenquadranten verknüpft.

Für eine Ellipse mit den Halbachsen a und b, $a>b$ hat man die bekannten Darstellungen des Quadranten q durch Integral und Reihe ***)

$$\left\{\begin{aligned} q &= a\int_0^1 \frac{(1-k^2x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\ &= \frac{\pi}{2}a\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{k^2}{1}-\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2\frac{k^4}{3}-\cdots\right). \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Die Vergleichung mit (19) ergibt (siehe oben [II.] art. [2.], Gl. [14], S. 178)

---

*) Vergl. H. v. MANGOLDT, *Über eine Stelle aus den von Gauss nachgelassenen Schriften über das arithm.-geom. Mittel*, Zeitschrift für Mathem. und Physik **20**, 1875, S. 362.

**) Vergl. auch den art. [4.] des Abschnitts [VII.] S. 211.

***) Siehe z. B. EULER, *Animadversiones in Rectificationem Ellipsis*, Opuscula varii argumenti II (1750). S. 128; Opera omnia, ser. I, vol. 20, S. 21. Vergl. oben [II.], art. [1.], S. 177.

$$q = \frac{\pi}{2} a\left(k(1-k^2)\frac{dB}{dk} + (1-k^2)B\right). \tag{22}$$

Nun folgt aus der Differentialgleichung (20) auf elementare Weise, daß

$$\lim_{k\to 1}(1-k)B = 0, \tag{23}$$

ferner ist geometrisch evident, daß für ein festes a und gegen Null abnehmendes b der Ellipsenquadrant dem Grenzwert a zustrebt, also daß

$$\lim_{k\to 1} q = a \tag{24}$$

ist. Danach ergibt sich aus (22)

$$\lim_{k\to 1} k(1-k^2)\frac{dB}{dk} = \frac{2}{\pi}. \tag{25}$$

Da A ebenso von k' abhängt, wie B von k, so folgt aus (23) und (25)

$$\lim_{k'\to 1}(1-k')A = 0,\quad \lim_{k'\to 1} k'(1-k'^2)\frac{dA}{dk'} = \frac{2}{\pi}, \tag{26}$$

und da nach (19) offenbar

$$\lim_{k'\to 1} B = 1,\quad \lim_{k'\to 1}\frac{dB}{dk'} = -\frac{1}{2}$$

ist, so finden wir, indem wir in der Gleichung (17) k' gegen 1 konvergieren lassen,

$$\frac{1}{C} = \frac{2}{\pi} \tag{27}$$

wodurch der Grenzwert (14) gleich $\frac{\pi}{2}$, also die Gleichung

$$\lim_{\varepsilon\to 0} M(1,\varepsilon)\log\frac{4}{\varepsilon} = \frac{\pi}{2} \tag{14a}$$

gefunden ist. Die Gleichung (13) erscheint hiernach in der Form

$$\frac{1}{c^2}\, d\log\frac{a}{b} = -\frac{\pi}{2}\frac{1}{M(a,b)^2}\, d\,\frac{M(a,b)}{M(a,c)}, \tag{13a}$$

und aus (12) ergibt sich, indem man n ins Unendliche wachsen läßt,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\log\frac{4a_n}{c_n} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{M(a,b)}{M(a,c)}. \tag{12a}$$

Die Gleichung (13a) hat GAUSS für außerordentlich wichtig gehalten, er hat sie wiederholt aufgezeichnet, oben [IX.] art. [4.] als Schönen Lehrsatz, in der Werke VIII, S. 98 abgedruckten Aufzeichnung als Theorema elegantissimum.

3.

Die für $|x| < 1$ konvergenten Reihen, deren Exponenten die Quadratzahlen sind,

$$\left\{\begin{aligned} p(x) &= 1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \cdots \\ q(x) &= 1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + \cdots \end{aligned}\right. \tag{28}$$

erfüllen (vergl. Werke III, S. 466) die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \tfrac{1}{2}[p(x)^2 + q(x)^2] &= p(x^2)^2, \\ p(x)\cdot q(x) &= q(x^2)^2. \end{aligned}\right. \tag{29}$$

Setzt man also

$$a = \mu p(x)^2, \quad b = \mu q(x)^2, \tag{30}$$

so ist

$$a_n = \mu p(x^{2^n})^2, \quad b_n = \mu q(x^{2^n})^2. \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{31}$$

Es entsteht nun die Frage, ob sich bei gegebenen a, b die Größen μ und x stets so bestimmen lassen, daß die Gleichungen (30) bestehen.

Da

$$\lim_{n\to\infty} p(x^{2^n}) = \lim_{n\to\infty} q(x^{2^n}) = 1$$

ist, so wird das agM. zwischen $p(x)^2$ und $q(x)^2$ gleich Eins (vergl. Werke III, S. 467, Theorem (23)), wir haben also

$$\mu = M(a, b). \tag{32}$$

Bildet man nun $r(x)$ so, daß

$$r(x)^4 = p(x)^4 - q(x)^4,$$

so ist also

$$c = M(a, b)\, r(x)^2 \tag{33}$$

und allgemein

$$c_n = M(a, b)\, r(x^{2^n})^2, \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{33 a}$$

und es ergibt sich aus der zweiten der Gleichungen (10) für $n = 0$

$$2 r(x^4) = p(x) - q(x), \tag{34}$$

$$r(x) = 2 x^{\frac{1}{4}} (1 + x^2 + x^6 + x^{10} + \cdots) \tag{35}$$

Hiernach haben wir

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{r(x^{2^n})}{2} \right\}^{\frac{1}{2^{n-2}}} = x, \tag{36}$$

also nach (33)

$$x = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{c_n}{4 M(a, b)} \right\}^{\frac{1}{2^{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{c_n}{4 a_n} \right)^{\frac{1}{2^{n-1}}} \tag{37}$$

(vergl. oben [IX.] art. [11.], S. 227)), so daß die Vergleichung mit (12a) die Bestimmung

$$x = e^{-\pi \frac{M(a, b)}{M(a, c)}} \tag{38}$$

ergibt.

4.

Die Beziehung des agM. zum vollständigen elliptischen Integral erster Gattung wird durch die Formeln (vergl. (15), (16))

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \frac{a}{M(a, c)} = \frac{1}{M(1, k)} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k'^2 x^2)}} \\ B &= \frac{a}{M(a, b)} = \frac{1}{M(1, k')} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} \end{aligned} \right. \tag{39}$$

dargestellt. Für ihre Herleitung hat GAUSS zwei verschiedene Methoden angegeben. Bei der ältern*) wird zuerst mit Hilfe der Reihenentwicklung (18) von A gezeigt, daß in der Entwicklung nach Kosinus der Vielfachen von φ der Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{1-k'^2\cos^2\varphi}} = P + 2Q\cos 2\varphi + 2R\cos 4\varphi + \cdots$$

der von φ freie Teil

$$P = \frac{1}{M(1, \sqrt{1-k'^2})} = A$$

ist, woraus dann durch Integration in Bezug auf φ zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ die Integraldarstellung (39) von A folgt. Bei der späteren**) wird durch Anwendung der LANDENschen Transformation***) direkt die Invarianz des Integrals

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}$$

beim Übergange von a, b zu a_1, b_1 gezeigt und daraus die Darstellung (39) durch Grenzübergang gewonnen.

Erläuterungen zu [I.], S. 172—176.

In der Formel [1] des art. [1.] bedeutet Tm. $(1+x)$, was »Terminus medius ipsius $1+x$« zu lesen wäre, das agM. zwischen $1+x$ und 1 also

[1]' $$\text{Tm.}\,(1+x) = M(1+x, 1),$$

die für $|x|<1$ konvergente Potenzreihe findet sich (mit einer Methode für ihre Herleitung) im art. 5. der Abhandlung von 1800, Werke III, S. 365 Eine andere Methode, um zu dieser Reihenentwicklung zu gelangen, gibt PFAFF in seinem Briefe vom 24. November 1799 (siehe Briefwechsel [1.], S. 232, vergl. auch die unten folgenden Erläuterungen dazu). In [2] stellt GAUSS die Umkehrung der Reihe [1] auf.

In [3] wird eine neue Funktion eingeführt, die GAUSS als »Basis cuius modulus u« also als Umkehrung einer Funktion »Modulus« bezeichnet†). Diese erscheint am Ende des art. [2.] als $\lambda(1+z)$, in dem der Scheda Ab entnommenen art. [3.] wird sie mit $l(1+x)$ bezeichnet. Die im art. [4.], Formel [8], oben S. 175 angedeutete Rechnung zeigt, daß, soweit die ersten Glieder in Betracht kommen,

[3]' $$1+x = 1+u+\frac{u^2}{4}+\frac{u^4}{448}-\frac{u^5}{2240}+\cdots$$

in der Tat die Umkehrung der Reihe

[6]' $$u = l(1+x) = x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}-\frac{9}{112}x^4+\frac{131}{2240}x^5+\cdots$$

---

*) Siehe die Aufzeichnungen [III.] art. [2.], oben S. 182 und [IV.] artt. [1.], [2.], S. 184, 185, ferner die Abhandlung von 1800, art. 8, Werke III, S. 370 und Werke VIII, S. 84.

**) Siehe die Aufzeichnung [IX.] art. [10.] oben S. 227 und die *Determinatio attractionis* (1818), art. 16, Werke III, S. 352.

***) Diese findet sich schon bei LAGRANGE a. a. O. Oeuvres II, S. 273.

†) Vergl. die Angabe zu Beginn des art. [1.]; die Reihe [3] liefert für $u = 0{,}82781$ in der Tat angenähert den Wert 2.

ist; die Addition der in [8] untereinander stehenden Reihen gibt nämlich $1+x$. Zu einer analytischen Definition der Funktion Basis cuius modulus u oder $1+x$ führt die Darstellung [4], oben S. 172, von x^2. Danach ist nämlich

$$[4]' \qquad x^2 = u^2 + \frac{u^3}{1.2} + \frac{u^4}{1.2.8} + \frac{u^5}{1.2.8.14} + \frac{u^6}{1.2.8.14.20} + \cdots,$$

also, wenn wir in bekannter Weise *)

$$P_u(k) = \int_0^u e^{-t} t^{k-1}\,dt = e^{-u} u^k \left\{ \frac{1}{k} + \frac{u}{k(k+1)} + \frac{u^2}{k(k+1)(k+2)} + \cdots \right\}$$

setzen,

$$[4]'' \qquad x^2 = u^2 + \frac{u^3}{1.2}\left\{1 + e^{\frac{u}{6}}\left(\frac{u}{6}\right)^{-\frac{1}{3}} P_{\frac{u}{6}}\left(\frac{8}{6}\right)\right\}.$$

Hieraus folgt

$$1+x = 1 + \sqrt{u^2 + \frac{u^3}{2}\left(1 + e^{\frac{u}{6}}\left(\frac{u}{6}\right)^{-\frac{1}{3}} \int_0^{\frac{u}{6}} e^{-t} t^{\frac{1}{3}}\,dt\right)}$$

oder

$$[3]'' \qquad x = u\sqrt{1 + \frac{u}{2}\left(1 + e^{\frac{u}{6}} u^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{6} \int_0^u e^{-\frac{u}{6}} u^{\frac{1}{3}}\,du\right)}.$$

Hiernach besteht zwischen x und u die Differentialgleichung

$$(\alpha) \qquad du(16x^2 - 4u^2 + ux^2) = 12uxdx.$$

Die neuere Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung ermöglicht es, mit Hilfe dieser Differentialgleichung die Gaussschen Angaben zu bewahrheiten. Ich verdanke der Güte von J. Horn die folgende Analyse der Differentialgleichung (α).

»Setzt man $u = x(1+w)$, so verwandelt sich unsere Differentialgleichung in

$$(\beta) \qquad x\frac{dw}{dx} = \frac{8w - x + 12w^2 - 2xw + 4w^3 - xw^2}{12 - 8w + x - 4w^2 + xw},$$

die für kleine Werte von x und w die Form

$$x\frac{dw}{dx} = \frac{2}{3}w - \frac{1}{12}x + \cdots$$

hat. Setzt man also $\xi = cx^{\frac{2}{3}}$ (c eine Konstante), so wird die Differentialgleichung (β) durch eine Potenzreihe

$$w = C_{10}x + C_{01}\xi + \cdots$$

von x und ξ befriedigt, die für kleine $|x|$ und $|\xi|$ konvergiert. Für $c = 0$ hat man die in der Umgebung von $x = 0$ holomorphe Lösung

$$w = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots$$

*) Vergl. z. B. Niels Nielsen, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, Leipzig 1906, S. 25, l. (1), S. 28, Gl. (4), S. 210, Gl. (1).

Bestimmt man in dieser die Koeffizienten $C_1, C_2, C_3, \ldots$ durch Einsetzen in die Differentialgleichung und geht dann zu $u = x(1+w)$ zurück, so findet man für u in der Tat die Reihe [6]'. — Andererseits lautet für $x^2 = X$ die Differentialgleichung (α):

$$6u\frac{dX}{du} = (16+u)X - 4u^2;$$

sie hat die Lösung

$$X = Cu^{\frac{8}{3}}e^{\frac{u}{6}} + \sum_{n=2}^{\infty} c_n u^n,$$

wo C willkürlich, $c_2 = 1$, $(6n-16)c_n = c_{n-1}$. Für $C = 0$ ergibt sich für X die beständig konvergente Potenzreihe [4]'.«

Soweit die Mitteilung von Horn.

Die Beziehung, in der die Funktion $l(1+x)$ zum agM. steht, kann aus dem art. [3.] entnommen werden. Die in [5], oben S. 174, untereinander geschriebenen Reihen geben addiert

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{9}{224}x^4 + \cdots,$$

d. h. $\frac{1}{2}l(1+x)$. Setzt man also die Reihe [7]

$$z = \text{Tm.}(1+x) - 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}xx + \frac{1}{32}x^3 - \frac{21}{1024}x^4 + \cdots$$

in $l(1+x)$ an die Stelle von x ein, so ist

[5]' $$l(1+z) = \frac{1}{2}l(1+x).$$

Im art. [5.] wird diese Gleichung in etwas anderer Form ausdrücklich angegeben. Das y der dortigen Gleichung [12], oben S. 175, ist nämlich mit dem x der Gleichung [2] des art. [1.] identisch, d. h. y ist mit z durch die Gleichung

$$1+z = \text{Tm}(1+y) = M(1+y, 1)$$

verknüpft; läßt man also φz dasselbe bedeuten wie $l(1+z)$, so stimmt die Gleichung [13] vollständig mit [5]' überein.

Wir wollen nun in diese Funktionalgleichung [5]' noch die inverse Funktion von $u = l(1+x)$ einführen, die Funktion also, die Gauss in den artt. [1.] und [2.] Basis cuius modulus $= u$ nennt, und im art. [2.], S. 173 mit

$$\varepsilon^{*u*} = 1+x = 1+\sqrt{u^2+\frac{1}{2}u^3+\frac{1}{16}u^4+\cdots} = 1+u+\frac{u^2}{4}+\frac{u^4}{448}-\cdots$$

bezeichnet*); es ist also hier x^2 eine ganze transzendente Funktion von u, vergl. oben die Gleichungen [4]' und [4]''. Die Gleichung [5]' ergibt dann die Darstellung

*) Daß ε^{*u*} tatsächlich diese Bedeutung hat, ergibt sich daraus, daß die Reihe für $\sqrt{(\varepsilon^{*t*})}$ ins Quadrat erhoben die Reihe $1+t+\frac{t^2}{4}+\frac{t^4}{448}+\cdots$ liefert, und daß auch die numerischen Werte von $\varepsilon^{*0,1*}$, ferner von $\varepsilon = \varepsilon^{*1*}$ und von $\varepsilon^{-1} = \varepsilon^{*-1*}$ stimmen. Wie $l(1+x)$ an den Logarithmus, so soll also die inverse Funktion an die Exponentialfunktion erinnern. Im art. [4.], S. 175, wird in [9] der Versuch gemacht, einen unmittelbaren Zusammenhang zwischen den Funktionen $l(1+x)$ und $\log(1+x)$ herzustellen; die Addition der untereinander geschriebenen Reihen gibt nämlich

$$[5]'' \qquad 1+x = \varepsilon^{*u*}, \quad \text{Tm.}\,(1+x) = 1+z = \varepsilon^{*\frac{u}{2}*}$$

die Gauss vermutlich vor Augen hatte, als er die hier angewandten Bezeichnungen einführte. Man kann die Bedeutung der in dem Abschnitt [I.] enthaltenen Aufzeichnungen wohl darin sehen, daß Gauss **die durch die Darstellung [5]'' bewirkte Uniformisierung des agM.** $M(1+x, 1)$ **angestrebt hat.** Daß er diesen Weg später verlassen hat, zeigt, daß ihm dessen Mängel bewußt geworden sind. Die Uniformisierung [5]'' gilt nämlich nur für den in der Umgebung von $x = 0$ durch die Reihe [1] dargestellten Zweig von $M(1+x, 1)$, wie auch die Funktionalbeziehung [5]' auf die Konvergenzbereiche der Reihen für z und für $l(1+x)$ beschränkt ist. Wie Gauss zu der Erkenntnis gelangt sein mag, daß der hier befolgte Gedankengang unzulänglich ist, ließ sich aus dem uns überkommenen Nachlaß ebenso wenig feststellen, wie der Ursprung der Funktion $l(1+x)$. Charakteristisch ist, daß Gauss sich hier der bloßen Induktion bedient, indem er Reiheninversionen, Einsetzen einer Reihe in eine andere u.s.w. durch die Berechnung der 4 bis 5 ersten Glieder erledigt; es weist dies auf eine sehr frühe Abfassungszeit hin.

Der Zettel, dem die artt. [1.] und [2.] entstammen und der die Überschrift trägt, die hier dem ganzen Abschnitt [I.] vorangestellt wurde, ist die älteste Aufzeichnung über das agM., die wir besitzen, und jedenfalls die erste, in der die Bezeichnung »agM.« gebraucht wird*); er dürfte älter sein als die Aufzeichnungen artt. [3.]—[5.] der Scheda Ab, die aus den ersten Monaten des Jahres 1799 stammen**). In der Scheda Ab werden auch andere Bezeichnungen gebraucht als auf dem Zettel, so heißt die Funktion »Modulus von $1+x$« auf dem Zettel (siehe art. [2.]) $\lambda(1+x)$, in der Scheda Ab (siehe art. [3.]) dagegen $l(1+x)$ und für das agM. wird statt des Tm. des Zettels (art. [1.]) in der Scheda Ab (art. [5.]) die auch später beibehaltene Bezeichnung M benutzt.

Besonders bemerkenswert ist, daß auf S. 26 der Scheda Ab (siehe den art. [5.], S. 176) zum ersten Male der **reziproke Wert** des agM. erscheint. In seiner Abhandlung aus dem Jahre 1800 (aus dem Nachlaß abgedruckt Werke III, S. 361) vollzieht Gauss den Übergang vom agM. selbst zu seinem reziproken Werte im art. 6 (a. a. O., S. 366, 367) und kündigt ihn am Schluß des art. 5 (a. a. O., S. 366) mit folgenden Worten an: »Quum hi coefficientes***) legem obviam non exhibeant, has series praetergredimur aliamque viam tentamus, quae successum feliciorem praestabit«. In diesen Worten spricht sich ein Erlebnis aus, und dieses kann nichts anderes sein, als die in der Tagebuchnotiz Nr. 98 vom 30. Mai 1799 niedergelegte Bemerkung:

»Terminum medium arithmetico-geometricum inter 1 et $\sqrt{2}$ esse $= \frac{\pi}{\varpi}$ usque ad figuram undecimam comprobavimus, qua re demonstrata prorsus novus campus in analysi certo aperietur«

die ja in dem besonderen Falle von $M(\sqrt{2}, 1)$ die Bedeutung gerade des reziproken Wertes dieser Größe hervortreten läßt. Beachtet man, daß in der Scheda Ab, nämlich im art. [3.], oben S. 174, das agM. zwischen

---

$$x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{9}{112}x^4 + \frac{131}{2240}x^5 + \cdots = l(1+x).$$

Übrigens reduziert sich die oben von uns für die Darstellung von x^2 herangezogene Funktion $P_u(k)$ für $k = 1$ auf $1 - e^{-u}$.

*) Die linke obere Ecke dieses Zettels ist abgerissen, dadurch sind die in eckigen Klammern befindlichen Ergänzungen in der Überschrift S. 172, ferner in der ersten und dritten Textzeile auf S. 173 nötig geworden.

**) Die Scheda Ab enthält nämlich auf S. 3 das Datum 1798, Nov. 28, auf S. 4, Dec. 10 und auf S. 5, 1799, Febr. 5. Unserere Aufzeichnungen beginnen auf S. 20.

***) Gemeint sind die Koeffizienten der Reihe [1] (oben S. 172) für $M(1+x, 1)$.

1 und $\sqrt{2}$ vorkommt *), so wird es zur Gewißheit, daß diese Bemerkung über $M(\sqrt{2}, 1)$ **) den Schritt ausgelöst hat, der auf jene verheißungsvolle »alia via« hinüberführte, und daß unsere Aufzeichnungen der Scheda Ab gerade in jenen letzten Maitagen des Jahres 1799 entstanden sind. Was die Entwicklungen des Zettels, d. h. die artt. [1.] und [2.], anlangt, so bietet sich für ihre Datierung kein sicherer Anhaltspunkt; sollte das $l(1+x)$ der Tagebuchnotiz Nr. 83 mit der durch die Reihe [6] definierten Funktion übereinstimmen, so müßte der Zettel vor dem April 1798 geschrieben sein, andernfalls könnte er mit der Tagebuchnotiz Nr. 95 vom Oktober 1798 in Verbindung gebracht werden, in der ja wie auch in der Nr. 98 der »novus in analysi campus« erwähnt wird.

Die in den Abschnitten [II.], [III.], [IV.] zusammengestellten Aufzeichnungen zeigen das zielbewußte Fortschreiten auf dem nach dem 30. Mai 1799 eingeschlagenen Wege und die Eröffnung des neuen Feldes der Analysis: der Theorie der Modulfunktion und der elliptischen Funktionen. — Vergl. den Abschnitt III. des Aufsatzes »Über GAUSS' Arbeiten zur Funktionentheorie«, Werke X 2.

Erläuterungen zu [II.], S. 177—180.

Die Formeln [1], [5], [17] geben die bekannte ***) Reihenentwicklung des Ellipsenquadranten q mit den Halbachsen a, b $(a>b)$ nach Potenzen der Größe

$$B = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$$

(siehe *Abriß*, Gl. (21), S. 254, wo $k = B$ zu nehmen ist).

In den Formeln [1], [5] ist der Faktor $\frac{\pi}{2}a$ unterdrückt. Die Gleichung [18] stellt, wenn man beiderseits den Faktor a wegläßt, die Entwicklung von $\frac{a}{M(a,b)}$ nach Potenzen von B dar (vergl. *Abriß*, Gl. (19), S. 254). GAUSS dürfte diese Entwicklung in derselben Weise gefunden haben, wie er sie im art. 7 der Abhandlung von 1800 (Werke III, S. 361, siehe dort S. 367) abgeleitet hat. Wir geben diese Ableitung hier wieder und verweisen auf eine zweite Art der Herleitung, die in der Aufzeichnung [III.] enthalten ist, und auf die wir weiter unten zurückkommen.

Es ist

$$\frac{a}{M(a,b)} = \frac{a}{M(a+c, a-c)} = \frac{1}{M(1+B, 1-B)} = \frac{1}{M(1, \sqrt{1-B^2})};$$

setzt man nun

$$B = \frac{2t}{1+t^2},$$

*) Die Zahl 0,19814 ist $M(\sqrt{2}, 1)-1$ auf fünf Dezimalstellen, vergl. Werke III, S. 364, Exemplum 4.

**) Wie aus dem bereits erwähnten Briefe [1.], S. 232 von PFAFF hervorgeht, hat GAUSS diese Bemerkung an PFAFF brieflich mitgeteilt.

***) Man vergl. die oben S. 254 Fußnote angeführte Abhandlung EULERS, wo S. 128 die Reihenentwicklung für den Ellipsenquadranten genau in der von GAUSS benutzten Form gegeben wird. Die Übereinstimmung auch in den Bezeichnungen bestätigt, daß GAUSS jene Abhandlung EULERS gekannt hat; EULER sowohl wie GAUSS haben q, statt des EULERschen n hat GAUSS in den Formeln des art. [1.] B, in späteren Formeln der artt. [2.] und [5.] aber ν; den Buchstaben n dürfte GAUSS vermieden haben, weil er mit n eine ganze Zahl zu bezeichnen pflegte. Auf den ersten Durchschußblättern des LEISTE hat sich GAUSS (wie es scheint nach der FUSSschen Liste vom Jahre 1783) ein Verzeichnis der Werke EULERS angelegt, er hat sich also schon sehr früh lebhaft für EULER interessiert.

so wird

$$M(1+B,\,1-B) = M(1,\sqrt{1-B^2}) = M\left(1,\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = \frac{1}{1+t^2}M(1+t^2,\,1-t^2).$$

Setzt man ferner in der Funktionalgleichung

$$M\left(1+\frac{2t}{1+t^2},\ 1-\frac{2t}{1+t^2}\right) = \frac{1}{1+t^2}M(1+t^2,\ 1-t^2)$$

die Entwicklung

$$\frac{1}{M(1+B,\,1-B)} = 1+\alpha B^2+\beta B^4+\gamma B^6+\cdots$$

mit unbestimmten Koeffizienten ein, so findet man

$$\alpha = \frac{1}{4},\ \beta = \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16},\ \gamma = \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{36},\ldots$$

Den allgemeinen Zusammenhang zwischen dem agM. und dem vollständigen elliptischen Integral erster Gattung hat Gauss zu der Zeit, wo er jene Formeln in den Leiste einschrieb, jedenfalls noch nicht gekannt (siehe weiter unten).

Die linke Seite der Formel [2] und das erste Glied von [6] geben also die Entwicklung von

$$\frac{Ba}{M(a,b)} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{M(a,b)} = \frac{c}{M(a,b)}.$$

Die Gleichung [6] entspricht somit der Formel (33) des *Abrisses*, wenn man dort $x = z^2$ setzt. Sie enthält also den Zusammenhang zwischen dem agM. und den Reihen, deren Exponenten eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden, bezw. die Quadratzahlen sind*).

Die Gleichung [2] enthält auf der rechten Seite nur die zwei ersten Glieder der Reihe r^2, die Gleichung [3] entsteht aus [2] bezw. [6], indem man B ausrechnet; in solchen Operationen mit Reihen, deren Inversion und dergl. war Gauss schon in sehr früher Zeit wohlgeübt**).

Übrigens ist der Koeffizient von z^5 in [3] unrichtig, die Reihe lautet

[3]' $$B = 4z-16z^3+56z^5-160z^7-\cdots$$

Gleichung [4] ergibt sich, indem man [3] in [1] einsetzt; demgemäß ist auch in [4] der Koeffizient von z^6 unrichtig; die richtige Formel lautet

[4]' $$1-4z^2+20z^4+663z^6+\cdots$$

Wenn wir die Bedeutung der Formeln [3], [4] in moderner Ausdrucksweise hervorheben wollen, so werden wir sagen: diese Formeln stellen die Uniformisierung des vollständigen elliptischen Integrals zweiter Gattung als Funktion des Moduls B mit Hilfe der Modulfunktion dar. Freilich ist hier alles noch rein formal, da eine analytische Bestimmung der Veränder-

*) Solche Reihen betrachtet Gauss auch in der Tagebuchnotiz Nr. 58 vom 16. Febr. 1797; vergl. auch die Bemerkung Scherings, Werke III, S. 493, Zeile 4—6, wonach Gauss den Zusammenhang zwischen agM. und den Reihen, deren Exponenten die Quadratzahlen sind, 1794 gekannt haben soll. Mit dem agM. hat sich Gauss, wie er April 1816 an Schumacher schreibt (siehe oben Briefwechsel [7.], S. 247), seit 1791 beschäftigt. Wie Gauss in der Anzeige seiner Abhandlung *Determinatio attractionis etc.* (Werke III, S. 360) angibt, hat er die Untersuchungen über das agM. unabhängig von den ähnlichen Untersuchungen von Lagrange (vergl. oben S. 251, Fußnote) und Legendre angestellt.

**) Man vergl. z. B. die Tagebuchnotiz Nr. 49 vom 27. Dezember 1796 und die Methoden des Abschnittes [I.].

lichen z noch nicht gegeben wird. Diese ergibt sich erst später, siehe den Abschnitt [IV.]. Der Ausdruck [7] hat den Wert

$$[7]' \qquad \frac{1}{B^2}\left(\frac{2}{\pi}\frac{q}{a}-\frac{a}{M(a,b)}\right);$$

aus der Gleichung (siehe *Abriß*, Gleichung (33))

$$r^2 = \frac{c}{M(a,b)}$$

folgt nämlich

$$\frac{a}{M(a,b)} = \frac{r^2}{B}.$$

Abgesehen von dem Faktor $-\frac{1}{B^2}$ kommt der Ausdruck [7]' auch in [19], oben S. 178, vor, ferner steht er mit der in [34], oben S. 180, auftretenden Größe $\mathbf{L}$ in der Beziehung

$$[7]'' \qquad \frac{a}{M(a,b)}-\frac{2q}{\pi a} = \nu\mathbf{L} \qquad \left(\nu = B = \frac{c}{a}\right).$$

Auf diese Beziehung kommen wir weiter unten (S. 265) zurück.

Die Bedeutung der in den Formeln [11]—[16], [28], [29], [30], oben S. 178, 179, auftretenden Größe $\mathbf{M}$ ergibt sich am einfachsten wie folgt.

In [35], oben S. 180, bedeutet M das agM., und zwar ist

$$M\sqrt{1-\nu^2} = M(1,\sqrt{1-\nu^2})\ *),$$

es ist also

$$[35]' \qquad K(\nu) = \frac{1}{M(1,\sqrt{1-\nu^2})}\ **).$$

Damit stimmt die Reihenentwicklung [33] (vergl. [2] und [6]), ferner die Funktionalgleichung [20], die in [32] und [39] wiederholt ist. Die Gleichung [38], worin K' die Derivierte von K nach ν bedeutet, kann zur Definition der Größe L dienen. Aus der für K' geltenden Funktionalgleichung [40] folgt dann in Verbindung mit [20] die in [29] angegebene Funktionalgleichung für L: unter derselben Nummer findet man die Definition von $\mathbf{M}$ als Quotienten von L und K. Es ist also

$$[29]' \qquad \mathbf{M}(\nu) = 1+\left(\nu-\frac{1}{\nu}\right)\frac{K'(\nu)}{K(\nu)}.$$

Mit der durch [38] definierten Größe L steht die durch die Reihenentwicklung [34] erklärte Größe $\mathbf{L}$ in naher Beziehung ***).

---

*) Die Unterscheidung zwischen den Buchstaben M und $\mathbf{M}$ ist in der GAUSSschen Handschrift nicht gemacht.

**) $K(\nu)$ unterscheidet sich also von dem JACOBIschen

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\nu^2x^2)}}$$

nur durch den Faktor $\frac{2}{\pi}$.

***) Die Unterscheidung zwischen den Buchstaben $\mathbf{L}$ und L ist auch vom Herausgeber interpoliert (vergl. Fußnote *)). Wahrscheinlich hat GAUSS die Bezeichnung gegen eine »Uraufzeichnung« geändert. So hat z. B. die Gleichung [38] ursprünglich gelautet $\nu K+(\nu^2-1)K' = L$ und ist dann durch Korrekturen in die oben wiedergegebene Form gebracht worden.

Für $\mathbf{L}$ zeigt zunächst die Vergleichung von [34] mit der Reihenentwicklung (21) des *Abrisses* für den Ellipsenquadranten q, daß

[34]' $$-\frac{\pi}{2}a\mathbf{L} = \frac{dq}{d\nu}$$

ist (in (21) ist $k = \nu$ zu nehmen) *). Ferner führt die Vergleichung der Reihenentwicklungen [33], [34] und ihrer Derivierten nach ν zu den Differentialrelationen [36] oder [37]. Die Vergleichung der aus [37] folgenden Gleichung

[38]' $$\mathbf{L} = \nu K + (\nu^2-1)K'$$

mit [38] gibt die Beziehung zwischen $\mathbf{L}$ und L:

[34]'' $$L = \frac{1}{\nu}\mathbf{L} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\nu^2 + \frac{1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6}\nu^4 + \cdots,$$

sodaß also (vergl. [34]')

[34]''' $$-\nu a\frac{\pi}{2}L = \frac{dq}{d\nu}$$

ist **). — Für das durch [29]' definierte $\mathbf{M}$ verifiziert man sofort die Funktionalgleichung [30] oder [12] ([11] ist einfach die Umkehrung von [12]); aus dieser läßt sich die Entwicklung [28] unmittelbar herleiten. Die Potenzreihenentwicklung [13] ***) ergibt sich entweder direkt durch Anwendung der Funktionalgleichung [12] oder durch Division von [34]'' mit [33]. Diese doppelte Herleitung von [13] bildet eine erwünschte Bestätigung unserer Deutung der Gaussschen Formeln.

Wir bemerken noch, daß sich aus den Differentialrelationen [37] sofort die homogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung herleiten ließen, denen K und $\mathbf{L}$ als Funktionen von ν genügen. Diese Differentialgleichungen gehören (nach [38]') zu derselben Klasse (im Sinne von Riemann); K und $\mathbf{L}$ sind in der späteren Terminologie von Gauss (*Disquisitiones circa seriem,* 1812, Werke III, S. 130) functiones contiguae.

Nun kann die Darstellung [14] bezw. [15] des Ellipsenumfangs durch Vergleichung mit den Reihenentwicklungen [5] oder [17] verifiziert werden. Wir setzen eine Ableitung durch Integralformeln hierher.

---

*) Dieselbe Entwicklung für $\frac{dq}{d\nu}$ findet sich auf Seite 129 der oben erwähnten Eulerschen Abhandlung. Euler hat $a = 1$. Die Bedeutung der Beziehung [34]' wird weiter unten hervortreten.

**) Wenn man die Integraldarstellung von K beachtet, so erkennt man erst die wahre Bedeutung der von Gauss eingeführten Größe L. Aus [34]''' folgt nämlich sofort

$$L = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\nu^2x^2)}},$$

so daß L gewissermaßen als ein Gegenstück zu

$$K = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\nu^2x^2)}},$$

erscheint. Es ist dies um so bemerkenswerter, als wie bereits erwähnt, Gauss zur Zeit, als er diese Aufzeichnungen machte, die Integraldarstellung von K nicht gekannt hat.

***) In [13] ist, wahrscheinlich infolge eines Schreibfehlers, der Koeffizient von x^6 unrichtig; er lautet $\frac{41}{16048}$ (vergl. oben S. 188, art. [5.], Gleichung [28]).

Aus den Integraldarstellungen von q und K folgen in bekannter Weise*) die zuerst von LEGENDRE (*Exercices de calcul intégral* I, 1811, S. 61 u. ff.) aufgestellten Relationen (die sogenannten Klassenbeziehungen) zwischen den vollständigen Integralen erster und zweiter Gattung:

$$(\alpha)\qquad \frac{\pi}{2}\frac{dK}{d\nu} = \frac{q}{a}\frac{1}{\nu(1-\nu^2)} - \frac{\pi}{2}\frac{K}{\nu},$$

$$(\beta)\qquad \frac{1}{a}\frac{dq}{d\nu} = \frac{1}{a}\frac{q}{\nu} - \frac{\pi}{2}\frac{K}{\nu},$$

von denen die zweite (β) vollständig mit der Gleichung [7]″ S. 263 übereinstimmt. Aus (α) ergibt sich

$$q = a\nu(1-\nu^2)\frac{\pi}{2}\frac{dK}{d\nu} + (1-\nu^2)\frac{\pi}{2}K,$$

und mit Rücksicht auf die Definition von $\mathbf{M}$ in [29]′:

$$q = \frac{\pi}{2}aK(1-\nu^2\mathbf{M}).$$

Diese Formel ist nichts anderes als die von GAUSS aufgezeichnete Formel [14]. Wir haben sie noch einmal verifiziert, weil sich in den GAUSSschen Formeln [14] und [15] eine Anzahl von Schreibfehlern befindet, die vielleicht daher rühren, daß GAUSS in einer »Uraufzeichnung« a statt b geschrieben hatte (vergl. die Integralformel [10]). Die richtigen Gleichungen lauten für den Quadranten:

$$[14]'\qquad q = \frac{\pi}{2}aK\left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right)\left\{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\mathbf{M}\left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right)\right\},$$

$$[15]'\qquad q = \frac{\pi}{2}a\,\frac{1-N\left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right)}{\text{Med. inter } 1 \text{ et } \frac{b}{a}},$$

wo N durch die Gleichung [16] definiert wird**).

Setzt man in [14]′ für $\mathbf{M}$ seinen Wert $\mathbf{M} = \frac{L}{K}$ oder, mit Rücksicht auf [34]″,

$$\mathbf{M} = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{\nu a}\frac{1}{K}\frac{dq}{d\nu},\quad \nu = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}},$$

ein, so erhält man für q den Ausdruck

$$[14]''\qquad q = \frac{\pi}{2}aK(\nu) + \nu\frac{dq}{d\nu},$$

was mit der zweiten der LEGENDREschen Gleichungen (β), also mit [7]″ übereinstimmt.

*) Vergl. z. B. H. DURÈGE, *Theorie der elliptischen Funktionen* (Leipzig 1878), S. 290.

**) Während uns heute die Beziehung des agM. zum vollständigen Integral erster Gattung als die am nächsten liegende erscheint, tritt bei den älteren Analysten (LANDEN, LAGRANGE) die Beziehung zum vollständigen Integral zweiter Gattung immer zuerst hervor. Auch SCHUMACHER hat, als er sich gelegentlich (Brief vom 5. April 1816, siehe oben Briefwechsel [6.], S. 246) mit dem agM. beschäftigte, als erstes Ergebnis die Formel [15]′ gefunden. Den Zusammenhang des agM. mit dem Ellipsenquadranten hat GAUSS in der »*Determinatio attractionis*« (1818) (Werke III, S. 354 oben) und in der Anzeige dieser Abhandlung (ebenda, S. 360) nach andern Methoden abgeleitet. Vergl. auch die aus 1800 stammende nachgelassene Abhandlung über das agM. (Werke III, S. 261 ff., besonders S. 373 die Formel für $dM(x, y)$, die auch in der Aufzeichnung [VI.], oben S. 208 vorkommt).

Die Aufzeichnung [6.] S. 180 steht mit den in den artt. [1.]—[5.] enthaltenen in keinem unmittelbaren Zusammenhang; sie ist darum bemerkenswert, weil sie zeigt, daß GAUSS schon damals neben dem einfachen Algorithmus aus a, b auch den aus a und $\sqrt{a^2-b^2}$ sowie die aus beiden durch Rückwärtsverlängerung hervorgehenden Ketten (vergl. *Abriß*, Artikel 1. S. 252) betrachtet hat. Das Zahlenbeispiel hängt mit $M(\sqrt{2}, 1)$ (vergl. die Tagebuchnotiz Nr. 98, oben S. 260) zusammen.

Die in dem Abschnitt [II.] zusammengestellten Leisteaufzeichnungen beginnen bei Seite 25. Da die den Tagebuchnotizen von 1796 entsprechenden Leistenotizen nur etwa bis zu der Seite 16 reichen, so ergibt sich also als untere Zeitgrenze für alle hier wiedergegebenen Aufzeichnungen das Jahr 1797; eine genaue Zeitbestimmung werden wir erst nach Besprechung der Abschnitte [III.] und [IV.] geben können. Die Notizen [II.] gehören zu den »irregulären« Eintragungen (vergl. oben S. 170, Fußnote *)), da sie mit ersichtlich späterer Schrift und Tinte auf zerstreuten Stellen, die bei den regulären Aufzeichnungen unbeschrieben geblieben waren, eingetragen sind. Ihre Form ist durchaus fragmentarisch, sie zeigen zahlreiche Schreib- und Rechenfehler (vergleiche z. B. [13], [14], [3], [4]) und Folgewidrigkeit in der angewandten Bezeichnung (M, L in verschiedenen Bedeutungen, vergl. oben S. 263). Wir haben also in diesen Notizen nicht eine redigierte Darstellung fertiger Ergebnisse vor uns, sondern Rechnungen, die während der Arbeit, vielleicht zum Teil im Anschluß an ältere, für uns wohl verlorene Notizen gemacht worden sind. Daß solche ältere Notizen vorhanden waren, ist unzweifelhaft, da ja (vergl. oben S. 262 Fußnote *)) GAUSS sich seit 1791 mit dem agM. beschäftigt hatte; auch hat die Angabe SCHERINGS, daß GAUSS schon 1794 den Zusammenhang des agM. mit den Reihen, deren Exponenten die Quadratzahlen sind, gekannt habe, sehr große innere Wahrscheinlichkeit (vergl. die Tagebuchaufzeichnungen Nr. 58 vom 16. Februar 1797 und Nr. 7 vom 24. Mai 1796). Ihrem Inhalte nach enthalten die Aufzeichnungen [II.] wesentlich drei Elemente:

1) Die Beziehung des agM. zum Ellipsenquadranten,

2) die Beziehung des agM. zu den Reihen, deren Exponenten die Quadratzahlen sind und die dadurch bedingte Einführung der Große z,

3) die grundsätzliche Einführung des reziproken Wertes K des agM. (vergl. oben S. 260) und seine Reihenentwicklung nach positiven ganzen Potenzen von ν (siehe [2], [6], [18], [33]), die den ganzen Notizen gleichsam als Unterbau zu Grunde liegt.

Erläuterungen zu [III.], S. 181—183.

Die Reihe φx des ersten Zettels art. [1.] geht aus der Reihe (18) des *Abrisses* (S. 254) hervor, indem man darin $k' = \frac{1}{x}$ setzt und dann noch mit $\frac{1}{x}$ multipliziert; sie genügt derselben Differentialgleichung (20) S. 254, der die Reihen (18), (19) Genüge leisten. Mit Hilfe der Differentialgleichung wird die Funktionalgleichung (1) des art. [2.], S. 182 hergeleitet, aus der dann im zweiten Zettel art. [2.] erschlossen werden soll, daß φ den reziproken Wert eines agM. darstellt, so daß es sich also um eine neue Ableitung der Reihenentwickelung für $\frac{1}{M(1, k)}$ handelt. Es kommt dabei auf den Schluß an, daß eine Funktion $F(z)$, die der Funktionalgleichung

$$(\alpha) \qquad F\left(\frac{1+t^2}{2t}\right) = F(t^2)$$

Genüge leistet, eine Konstante sein müsse (S. 183). Setzt man

$$\xi = \frac{1}{t}, \quad G\left(\frac{1}{t^2}\right) = F(t^2),$$

so lautet die Gleichung (α):

$$(\beta) \qquad G\left(\frac{2\xi}{1+\xi^2}\right) = G(\xi^2).$$

Bildet man den Algorithmus (5) des *Abrisses* (S. 252) und setzt

$$k_n = \frac{\bar{c}_n}{\bar{a}_n} = \frac{2\sqrt{k_{n-1}}}{1+k_{n-1}}, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

so folgt aus (β)

$$G(k_0) = G(k_1) = \cdots = G(k_n).$$

Nun ist aber nach (6) des *Abrisses* (S. 252)

$$\lim_{n\to\infty} k_n = 1.$$

Wenn also die Funktion $G(x)$ so beschaffen ist, daß $\lim\limits_{x\to 1} G(x)$ als endlicher oder unendlich großer Wert existiert, der unabhängig ist von dem Wege, auf dem die Veränderliche x in den Punkt $x = 1$ einrückt, so ist für ein jedes k_0, für das $G(k_0)$ endlich und stetig ist,

$$G(k_0) = \lim_{n\to\infty} G(k_n) = \lim_{x\to 1} G(x),$$

also in der Tat konstant. Dies ist aber nicht notwendig der Fall, wenn die Funktion $G(x)$ die angegebene Bedingung für $x = 1$ nicht erfüllt; so befriedigt z. B. die Funktion

$$G(x) = \left\{\frac{iM(1, \sqrt{1-x^2})}{M(1,x)}\right\}^{\frac{2\pi i}{\log 2}},$$

für die jene Bedingung nicht erfüllt ist, die Funktionalgleichung (β), ohne sich auf eine Konstante zu reduzieren.

Wir bemerken noch, daß die Funktionalgleichung für $M(t) = M(t, 1)$, von der im art. [2.] Gebrauch gemacht wird, vollständig mit der übereinstimmt, die im art. 5. der Abhandlung von 1800 (Werke III, S. 365) benutzt wird.

Aus der Feststellung, daß der reziproke Wert von $M(\sqrt{1+y}, 1)$ mit dem von V freien Gliede der Entwicklung von

$$\frac{1}{\sqrt{1+y\sin^2 V}}$$

übereinstimmt (siehe S. 183), folgt für $y = 1$, daß der reziproke Wert von $M(\sqrt{2}, 1)$ gleich dem absoluten Gliede der Entwickelung von $(1+\sin^2 V)^{-\frac{1}{2}}$ sei. Von diesem absoluten Gliede hatte GAUSS aber schon zu Anfang des Jahres 1797 bei S. 54 des LEISTE eingeschrieben (siehe oben S. 149, art. [8.]), daß es gleich

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\varpi}{\pi}$$

sei; vergl. auch die Aufzeichnung auf der Rückseite des Leistetitelblatts, oben S. 169, art. [5.]. Wir haben damit alles, was für einen Beweis der Bemerkung in der Nr. 98 des *Tagebuchs* (siehe oben S. 260) erforderlich ist, hier nachgewiesen.

Am Schluß des art. [2.], S. 183 bedeuten s und c den Sinus und Kosinus eines Winkels, die kleine Tabelle gibt für die in der ersten Spalte stehenden Grade die Werte von $M(1, \sin\alpha^0)$; eine ausführlichere und genauere solche Tabelle ist im Abschnitt [IV.] art. [6.], S. 189 aus der Scheda Ac abgedruckt, vergl. die Bemerkungen zu diesem Abschnitte weiter unten.

Erläuterungen zu [IV.], S. 184—193.

Die ersten 8 Seiten der Scheda Ac (begonnen November 1799) enthalten Aufzeichnungen über die analytische Geometrie des Raumes und die sphärische Trigonometrie. Nur auf S. 7 finden sich zwischen diesen geometrischen Notizen, aber in sorgfältiger Schrift und von Linien eingerahmt, drei Zeilen, mit den Reihenentwickelungen [1], [2], [3] (oben S. 184) für $\frac{\varpi}{\pi}$, von denen die erste und dritte schon Werke III, S. 423, art. [15.] abgedruckt sind. Die erste Entwicklung [1] stimmt mit der auf der Titelrückseite des LEISTE stehenden und oben S. 169 wiedergegebenen Reihe überein. Ebenda ist auch die Reihe [2] angedeutet und mit ihrer Hilfe der Wert von $\frac{\varpi}{\pi}$ auf 15 Dezimalstellen berechnet. Dieselbe Reihe [2] ist auch im *Tagebuch*, Nr. 91 a mit der Datierung Juli 1798 aufgezeichnet. Mit der S. 8 schließen die geometrischen Betrachtungen ab und es folgen auf S. 9 zunächst die beiden Reihen [4], [5] für $\frac{\varpi}{\pi}-\frac{\pi}{\varpi}$, von denen die zweite Werke III, S. 423, art. [15] abgedruckt ist. Dann folgt die Aufzeichnung art. [2], zu der man den Schluß des art. [2.] des vorigen Abschnitts [III.], S. 183, ferner den Brief an BESSEL vom 3. September 1805 (siehe oben Briefwechsel, [3.], S. 238) vergleichen kann. Zu diesen Entwicklungen dürfte GAUSS durch Untersuchungen, die der theoretischen Astronomie angehören, veranlaßt worden sein. In [6] bedeutet c den Kosinus eines Winkels, $c2, c3, \ldots$ sind die Kosinus seiner Vielfachen. Bemerkenswert ist die elegante Kettenbruchentwicklung für den Quotienten der beiden ersten Koeffizienten $\frac{A'}{A}$. Dieser Quotient, der auch in der Aufzeichnung [25]—[28], S. 188, betrachtet wird, steht wie z. B. die Entwicklungen [28] zeigen, in engem Zusammenhang mit der im LEISTE vorkommenden Funktion **M** (vergl. insbesondere Abschnitt [II.] Gl. [13] und [28]) *). Der Zusammenhang dieser Entwicklungskoeffizienten mit dem agM. wird in wenig abweichender Form in den Gln. [23], [24] S. 188 hervorgehoben.

Während die bisher betrachteten Notizen über das agM. vorwiegend formaler Natur waren, führen die Aufzeichnungen der artt. [3.] und [4.] in die Tiefen dieser Theorie ein. Auf den Weg, der GAUSS zu der wichtigen Quotientendarstellung [7] geführt haben mag, wirft die Gleichung [10], S. 186, ein helles Licht, wenn man sie mit den Leisteformeln des art. [1.] von Abschnitt [II.] S. 177 vergleicht.

Das Verhalten der Funktion $M(1, x)$, die GAUSS mit Mx bezeichnet, für große Werte von x wird in erster Annäherung durch die Gleichung

$$(\alpha) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} M(1, x) \log 4x = \frac{\pi}{2}$$

gegeben, die mit der Gleichung (14 a) unseres *Abrisses* (S. 255) übereinstimmt. Diese Gleichung kommt zwar in den hier zu besprechenden Aufzeichnungen nicht ausdrücklich vor, sie liegt aber, wie wir sehen werden, der Quotientendarstellung [7] zugrunde und spielt auch in späteren Entwicklungen von GAUSS zum agM. namentlich bei der Ableitung des »Schönen Lehrsatzes« **) eine wichtige Rolle, wo auch ein Weg für ihre Ableitung angedeutet ist; wir haben im Artikel 2. des *Abrisses* diese Andeutungen ausgeführt. Es kommt dabei die Beziehung des agM. zum Ellipsenquadranten zur Geltung, indem nämlich durch diese Beziehung die Anwendung der Methoden ermöglicht wird, die EULER in der oben (S. 254, Fußnote) genannten Abhandlung *Animadversiones etc.* der Opuscula varii argumenti II angegeben hat. In dieser Abhandlung untersucht EULER das Verhalten des Ellipsenquadranten q, wenn die große Achse den festen Wert 1

*) Man vergl. auch Werke III, S. 371, und GAUSS' Brief an SCHUMACHER vom April 1816, siehe oben Briefwechsel [7.], S. 247, ferner die allgemeinen Formeln, Werke III, S. 128, 129, (*Disquisitiones circa seriem etc.* 1812).

**) Siehe Abschnitt [IX.] art. [4.], S. 220.

behält, während die kleine Achse p sich der Null annähert. Zunächst folgt das auch geometrisch evidente Resultat, daß

$$\lim_{p \to 0} q = 1$$

sein muß. Die Betrachtung der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, der q als Funktion von p genügt (a. a. O. S. 147):

$$p(1-p^2)\frac{d^2q}{dp^2} - (1+p^2)\frac{dq}{dp} + pq = 0,$$

leitet EULER zu dem Ansatz (a. a. O. S. 155)

$$q = 1 + Ap^2 + Bp^4 + \cdots - \left(\frac{1}{2}p^2 + \beta p^4 + \cdot\cdot\right)\log p.$$

Für A findet EULER zunächst induktiv durch numerische Rechnung den Wert

$$A = \log 2 - \frac{1}{4},$$

den er dann durch Vergleichung des Ellipsenbogens mit einem Parabelbogen bestätigt. In der von BORCHARDT ausgearbeiteten und im Bande I der Werke JACOBIS auszugsweise abgedruckten Vorlesung von JACOBI, wird (S. 522—525) die EULERsche Methode auf das Integral erster Gattung angewandt. In der ursprünglichen BORCHARDTschen Ausarbeitung, die von dem abgedruckten Texte nicht unbeträchtlich abweicht, lautet die betreffende Stelle, wie folgt:

»Man erhält als Endwert für $\varkappa = 0$

$$K' = \log\frac{4}{\varkappa} \text{ *)}.$$

Dieses Resultat hat zuerst EULER gefunden und veröffentlicht in dem Werke Opuscula varii argumenti, welches man häufig auf Auktionen bekommt; es findet sich auch im LEGENDRE [*Exercices de calcul intégral* I, 1811, § 72 ff.]. Die Schwierigkeit seiner Herleitung bestand nicht in der Form des Resultats, da man schon lange wußte, daß man bei solchen Entwicklungen, welche Potenzen enthalten, auch einen logarithmischen Term beifügen muß; ja man konnte in unserem Falle sogar leicht finden, daß der Endwert $= \log\frac{n}{\varkappa}$ war, aber der numerische Wert von n war sehr schwer zu ermitteln, was man bei LEGENDRE nachsehen kann, der zwar den Wert $n = 4$ findet, aber keinen stringenten Beweis dafür gibt.«

Wie man sofort erkennt, ist die Gleichung JACOBIS mit der oben angegebenen Gleichung (α) gleichwertig. Da GAUSS die Beziehung zwischen dem agM. und dem Ellipsenquadranten gekannt hat (siehe Abschnitt [II.] Gln. [14], [15], S. 178), so könnte er die Gleichung (α) bezw. die Gleichung

$$(\beta) \qquad \lim_{p \to 0} M(1,p)\log\frac{4}{p} = \frac{\pi}{2}$$

in folgender Weise unmittelbar aus dem EULERschen Resultat abgeleitet haben. Nehmen wir $a = 1$, so folgt aus den Formeln [14] (siehe die berichtigte Formel [14]' S. 265) und [35] des Abschnitts [II.] S. 180, wenn man $\nu^2 = 1 - p^2$ setzt, die Gleichung

$$\frac{1}{M(1,p)} = K(\nu) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-p^2}{p}\frac{dq}{dp} + q\right).$$

*) Hier ist $K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1-\varkappa^2)\sin^2\varphi}}$.

Nun ist nach EULER

$$q = 1 + \left(\log 2 - \frac{1}{4}\right) p^2 - \frac{1}{2} p^2 \log p + p^4 [\ldots],$$

also

$$\frac{dq}{dp} = (2 \log 2 - 1) p - p \log p + p^3 [\ldots]$$

und

$$\frac{1-p^2}{p} \frac{dq}{dp} + q = 2 \log 2 - \log p + p^2 [\ldots],$$

woraus die Gleichung (β) ohne weiteres hervorgeht. Daß GAUSS ursprünglich diese Herleitung angewandt hat, ist darum sehr wahrscheinlich, weil sie sich an die im LEISTE aufgezeichneten Formeln des Abschnitts [II.] ganz unmittelbar anknüpfen läßt.

Dagegen kann der von GAUSS in der späteren Aufzeichnung des Abschnittes [IX.] art. [4.] angedeutete Weg mehr als eine Übertragung des von EULER für den Ellipsenquadranten vorgezeichneten Verfahrens auf das agM. bezw. auf die Funktion $K(\nu)$ bezeichnet werden; auch dafür standen GAUSS schon hier alle erforderlichen Mittel zur Verfügung, indem er aus den Differentialrelationen [37] des Abschnitts [II.] nur die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für $K(\nu)$ herzuleiten brauchte, um Schritt für Schritt dem Vorgange EULERs folgen zu können.

Jedenfalls können wir sagen, daß GAUSS das Verhalten von $M(1, x)$ für große Werte von x mit Hilfe des Ellipsenquadranten erforscht hat und zwar auf einem Wege, der ihm durch die EULERsche Abhandlung »*Animadversiones etc.*« vorgezeichnet war.

* * *

Der weitere Fortgang von GAUSS' Untersuchungen liegt jetzt klar zu Tage.

Es ist nach der Formel [3] im LEISTE (Abschnitt [II.], S. 177)

[3]' $$B = 4z - 16z^3 + 56z^5 - \cdots;$$

setzt man hierin

$$B = \frac{1}{x}, \quad z = \frac{1}{\mathfrak{z}},$$

so kommt die Formel

[10]' $$x = \cfrac{1}{\frac{4}{\mathfrak{z}} - \frac{16}{\mathfrak{z}^3} + \frac{56}{\mathfrak{z}^5} - \frac{160}{\mathfrak{z}^7} - \cdots}$$

zum Vorschein, die mit [10], S. 186 übereinstimmt; wir haben nur der Deutlichkeit wegen $\mathfrak{z}$ an Stelle des von GAUSS benutzten z geschrieben, weil später in [22], S. 188 und von [32], S. 190 an) z in derselben Bedeutung wie im LEISTE benutzt wird.

Aus [10]' ergibt sich

$$\log \mathfrak{z} = \log\left(4x - \frac{1}{x} - \frac{9}{32} \frac{1}{x^3} - \cdots\right),$$

so daß die Gleichung (α) auch in der Form

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} M(1, x) \log \mathfrak{z} = C$$

geschrieben werden kann. Dies veranlaßt nun zu setzen

$$M(1, x) = \frac{C(x - \alpha x^{-1} - \beta x^{-3} - \cdots)}{\log \mathfrak{z}};$$

die Koeffizienten $\alpha, \beta, \ldots$ lassen sich numerisch bestimmen, ihre Werte stehen im art. [3.], S. 186.

Jetzt macht GAUSS die »Observatio« [9]. Diese leitet ihn zu der Vermutung, daß der Zähler »omisso factore C« auch allgemein ein agM. sein könnte, und da der reziproke Wert des agM. einfacher zu behandeln ist, als das agM. selbst, so setzt er in [13] den Zähler $= \frac{C}{Q}$ und findet für Q die Entwicklung [14], aus der er gemäß Abschnitt [III.] art. [2.], S. 182 die Aussage [15] erschließt. Nun macht er ähnlich wie schon für $x = \sqrt{2}$ im LEISTE (siehe oben S. 149, art. [8.]) den Übergang zur Integraldarstellung, schreibt aber zunächst, wohl infolge eines Rechenfehlers, das unrichtige

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{x^2-r^2}}\, dr,$$

neben das er erst später (mit ersichtlich anderen Schriftzügen und anderer Tinte) berichtigend das Integral erster Gattung setzt*). Die Reihenentwicklung [14], die genau mit der Funktion φx der Aufzeichnung [III.] art. [1.] übereinstimmt, läßt jetzt Q als agM. erkennen, was in der Gleichung [20] ausgesprochen ist. »Numerator pro $\frac{1}{k}$« bedeutet dort soviel, wie der Zähler des Ausdrucks in [7] für $x = \frac{1}{k}$. Das »demonstr[atum]« deutet darauf hin, daß es sich um den Beweis einer früher gehegten Vermutung handelte (vergl. oben), die unerklärliche Buchstabenverbindung GALEN (verschnörkelte Großbuchstaben) erinnert an das »vicimus GEGAN« der Tagebuchnotiz Nr. 43 vom 21. Oktober 1796.

Die jetzt gewonnene allgemeine Einsicht, daß der reziproke Wert des agM. das vollständige Integral erster Gattung ist, liefert nicht nur aufs neue den Beweis der in der Tagebuchnotiz vom 30. Mai 1799 gemachten Bemerkung (siehe oben S. 260), sondern muß als ausschlaggebend dafür angesehen werden, daß GAUSS von nun ab seine Aufmerksamkeit dem allgemeinen elliptischen Integral erster Gattung als der wahren Verallgemeinerung des lemniskatischen Integrals zuwendet. Die »Peripheria Ellipseos« tritt in der Gleichung [22] noch einmal auf. Die kleine Zahlenrechnung zeigt, daß GAUSS hier die Formel [4] des LEISTE (Abschnitt [II.], S. 177) nachgerechnet hat, indem er in die Entwicklung [1] (S. 177) den Wert [3] einsetzt. Er begeht aber wieder einen Rechenfehler, denn statt -176 muß richtig $+551$ stehen, wodurch statt $-64z^3$ der richtige Wert $+663z^3$ zum Vorschein kommt.

Mit der Formel [22] ändert sich die Bedeutung des Buchstaben z; von nun ab ist z der reziproke Wert der in [10] mit demselben Buchstaben bezeichneten Große (unseres $\mathfrak{z}$), hat also dieselbe Bedeutung wie in den Formeln des LEISTE, Abschnitt [II.]. Nach einigen Zwischenrechnungen drückt GAUSS in [32] die Größe z durch $s = \frac{1}{x}$ aus, die logarithmische Derivierte dieses Ausdrucks wird schon in [29] betrachtet. Dabei hat s dieselbe Bedeutung wie das B in der Leisteformel [3] Abschnitt [II.], S. 177, so daß also [32] durch Inversion der berichtigten Reihe [3] bezw. der in [10]′, S. 270 auftretenden Reihe, für $x = \frac{1}{s}$, $\mathfrak{z} = \frac{1}{z}$ hervorgeht. Nun bildet er die Funktion $P(s)$, die nach der Reihenentwicklung [36] (vergl. [33] im LEISTE, Abschnitt [II.], S. 180) und nach [37] (vergl. [35] im LEISTE, Abschnitt [II.], S. 180) durch die Gleichung

$$[37]' \qquad M(1, \sqrt{1-s^2}) = \frac{1}{P(s)}$$

definiert werden kann. Der in [37] benutzte Buchstabe c hat nämlich die Bedeutung $\sqrt{1-s^2}$, wobei man etwa an cosinus oder an die GAUSS geläufige Bezeichnung $c = \sqrt{a^2-b^2}$ für $a = 1$, $b = s$ zu denken hat. Setzt man in die Reihe [36] für s seinen Ausdruck aus [10]′

$$[10]'' \qquad s = 4z - 16z^3 + 56z^5 - 160z^7 - \cdots$$

---

*) Der Abdruck gibt an dieser Stelle (S. 187) die Anordnung der Handschrift genau wieder.

ein, so ergibt sich für $P(s)$ die Darstellung [33], deren Umformung in die Summe von zwei Quadraten [34] sehr nahe liegt. Die Gleichung [35] dürfte GAUSS dann mit Hilfe der ihm bekannten Formel (LEISTE, [6] Abschnitt [II.], S. 177)

[6]' $$sP(s) = s + \frac{1}{4}s^3 + \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}s^5 + \cdots = (2z^{\frac{1}{2}} + 2z^{\frac{9}{2}} + \cdots)^2$$

abgeleitet haben. Die Formel [38] und die ihr äquivalente [39] (in dieser hat c wieder die Bedeutung $\sqrt{1-s^2}$) ist nun nichts anderes als die Quotientendarstellung aus [7] in den neuen Bezeichnungen; wir können sie in der Form

[38]' $$\log z = -\frac{\pi}{2}\frac{M(1, \sqrt{1-s^2})}{M(1, s)}$$

schreiben, in der sie dann unmittelbar mit der Hauptformel (38) unseres *Abrisses* (S. 256) übereinstimmt. Wir werden ihr auf S. 34 der Scheda Ac (Abschnitt [V.] art. [5.], S. 197) wieder begegnen.

Wir sehen, daß sich GAUSS durch diese Untersuchungen in den vollen Besitz der Theorie des agM. gesetzt hat. Während er im LEISTE die Größe z nur in formaler Weise, nämlich durch den Reihenansatz [6], S. 177 definierte, erzielt er hier die genuine analytische Definition [38]' von z durch das agM., d. h. er hat jetzt das geleistet, was im Artikel 3. unseres *Abrisses* dargestellt ist. Endlich eröffnet ihm der Zusammenhang zwischen dem agM. und dem vollständigen elliptischen Integral erster Gattung den Zugang zu der allgemeinen Theorie der elliptischen Funktionen, indem die Formel [38]' die Große $-\frac{2}{\pi}\log z$ direkt durch den Periodenquotienten darstellt*).

Die auf diese Theorie bezüglichen Aufzeichnungen der Scheda Ac sind in dem Abschnitt [V.] enthalten. Ehe wir auf diesen eingehn, bemerken wir noch wiederholt, daß die im art. [6.] S. 189 enthaltene Tabelle eine Erweiterung der am Schlusse des Abschnitts [III.], S. 183 befindlichen darstellt. Ferner möge noch mit wenigen Worten auf die Bedeutung der in den artt. [8.] und [9.] enthaltenen Aufzeichnungen hingewiesen werden, die auch schon im Bande III der Werke S. 423—425 abgedruckt sind**).

In [31], S. 189 setzt GAUSS für $M(1, \sin\varphi)$ eine trigonometrische Reihe an. Er scheint sich aber überzeugt zu haben, daß es auch hier zweckmäßiger ist, den reziproken Wert zu entwickeln, und findet, daß die Koeffizienten dieser Entwicklung in einfacher Weise von der lemniskatischen Periode abhängen. Insbesondere erweist sich das absolute Glied N gleich $2\frac{\varpi^2}{\pi^2}$, ein Resultat, das mit dem im art. [13.] des Abschnitts [I.] der weiter unten abgedruckten Abhandlung »*Zur Theorie der transcendenten Functionen gehörig*«***) ausgesprochenen Theorem (das GAUSS dort als »zu den Hauptsätzen dieser Theorie« gehörig bezeichnet) im Zusammenhang steht. In der Formel für den Maximalwert der dort betrachteten Funktion $\varphi\alpha$ bedeutet nämlich ϖ die lemniskatische Periode. Die im art. [9.] bewiesene Reihenidentität [41], S. 191

---

*) Das GAUSSsche z ist nichts anderes als das JACOBIsche $\sqrt{q}$.

**) Der Abdruck ist im ganzen dem Original entsprechend, obgleich nicht philologisch genau. In der ersten Formel findet sich jedoch ein störendes Versehen, indem nämlich SCHERING statt des auf der rechten Seite von [40] stehenden Ausdrucks $P\cos\varphi$, gesetzt hat $\frac{1}{M(1, \cos\varphi)}$, während es nach [37] heißen müßte $\frac{1}{M(1, \sin\varphi)}$.

***) Aus dem Handbuch **16**, Bb; die Abhandlung ist auszugsweise bereits Werke III, S. 436 abgedruckt. Die hier in Rede stehende Stelle findet sich (mit Änderungen gegen die Handschrift) auf S. 441.

hat GAUSS im Jahre 1830 der Philosophischen Fakultät zu Göttingen als Preisaufgabe vorgeschlagen, die Aufgabe ist jedoch nicht gestellt worden *).

Die Vergleichung der Abschnitte [II.], [III.], [IV.] zeigt vor allem, daß die Leisteaufzeichnungen [II.] früher entstanden sind als [III.] und [IV.]. Erstens sind die in [II.] angewandten Methoden sehr viel primitiver als die der Abschnitte [III.] und [IV.], nämlich rein formal, andererseits bilden die in [II.] gegebenen Reihenentwickelungen für den reziproken Wert des agM. und die daselbst zusammengestellten Formeln für den Ellipsenquadranten die Grundlage für die Betrachtungen von [III.] und [IV.]. Aber auch die Aufzeichnungen [II.] dürften nach dem 30. Mai 1799 entstanden sein; denn sie enthalten alle Hilfsmittel, um die in der Tagebuchnotiz Nr. 98 von diesem Tage (siehe S. 260) angegebene Gleichung

$$\frac{\pi}{\varpi} = M(\sqrt{2}, 1)$$

zu beweisen, und es unterliegt auch keinem Zweifel, daß GAUSS das auf dem Leisteschutzblatt bei dem Werte $1{,}198 \pm$ später hinzugesetzte »$= \frac{\pi}{\varpi}$« (siehe oben S. 146, art. [3.] und die zugehörige Bemerkung S. 150) gerade um den 30. Mai 1799 geschrieben hat. Wahrscheinlich werden wir die Aufzeichnungen [II.] auf die Sommermonate 1799 anzusetzen haben.

Für die Datierung der Aufzeichnungen [III.] und [IV.] bietet das *Tagebuch* die nötigen Anhaltspunkte. Die Nr. 100 vom November 1799 »circa terminos medios arithmetico-geometricos multa nova deteximus« fällt zeitlich mit dem Beginn der Scheda Ac (November 1799, siehe S. 184 die Überschrift) zusammen; der erste Satz der am 14. Dezember 1798 zu Helmstedt niedergeschriebenen Nr. 101: »Medium arithmetico-geometricum tamquam quotientem duarum functionum transscendentium repraesentabile esse iam pridem inveneramus« bezieht sich offenbar auf die Gleichung [7], S. 186, und damit sind die artt. [1.]—[3.], oben S. 184—187, auf November 1799 datiert; sie sind noch in Braunschweig geschrieben. Der zweite Satz von Nr. 101 »nunc alteram harum functionum ad quantitates integrales reducibilem esse deteximus« bezieht sich auf die Gleichungen [13]—[16] des art. [4.], S. 187; diese Gleichungen und damit der ganze art. [4.] sind also schon im Dezember in Helmstedt geschrieben **). Die Funktion $\varphi(x)$ des Abschnitts [III.], S. 181, stimmt, wie schon bemerkt, mit Q in Gl. [15], S. 187 überein; man liest ferner in der Nr. 102 des *Tagebuchs* vom 23. Dezember »Medium arithmetico-geometricum ipsum est quantitas integralis«, was mit der Bemerkung der Abhandlung von 1800, art. 8, Werke III, S. 370: »Hoc itaque modo media nostra arithmetico-geometrica ad quantitates integrales revocata sunt« fast wörtlich übereinstimmt. An dieser letzteren Stelle ist von der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung die Rede, der der reziproke Wert des agM. Genüge leistet; diese Differentialgleichung wird im Abschnitt [III.] aufgestellt, man wird also den in [III.] abgedruckten Zettel mit der Tagebuchnotiz Nr. 102 in Verbindung zu setzen haben.

---

*) Nach den Fakultätsakten lautet die von GAUSS vorgeschlagene Aufgabe wie folgt:

»Demonstretur per methodos rigorosas atque concinnas aequalitas, quae intercedit inter seriem infinitam

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 x + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3 xx + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3 x^3 + \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^3 x^4 + \text{etc.}$$

atque quadratum seriei infinitae

$$1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 x + \left(\frac{1.5}{4.8}\right)^2 xx + \left(\frac{1.5.9}{4.8.12}\right)^2 x^3 + \left(\frac{1.5.9.13}{4.8.12.16}\right)^2 x^4 + \text{etc.«}$$

Wie man sieht, hat GAUSS an die Stelle des in der Scheda Ac auftretenden x^2 hier x gesetzt. Mit derselben Änderung ist die Gleichung [41] auch Werke III, S. 424 abgedruckt.

**) Bei Gl. [13] beginnt ersichtlich andere Tinte.

An den Schluß von [III.], S. 183, knüpft art. [5.] von [IV.], S. 188 unmittelbar an, ferner ist die Tabelle der Werte von $M \sin \varphi$ auf S. 189 eine wesentliche Erweiterung der am Ende von [III.], S. 183 befindlichen; GAUSS wird also nach dem 23. Dezember 1799 wieder die Eintragungen in die Scheda Ac fortgesetzt und die artt. [5.] ff.*) vor dem 13. Februar 1800 geschrieben haben. Die Tagebuchnotiz Nr. 103 von diesem Tage bezieht sich nämlich auf die Theorie der ternären quadratischen Formen, und eine von diesen Formen handelnde Eintragung findet sich auf S. 22 der Scheda (gedruckt Werke II, S. 311). Die vom 6. Mai 1800 an gemachten Tagebuchaufzeichnungen Nr. 105 ff. stehen wieder mit den späteren Aufzeichnungen der Scheda Ac, zu deren Besprechung wir jetzt übergehen, in Übereinstimmung.

Erläuterungen zu [V.], S. 194—206.

Die Funktion [2] ist der in der Tagebuchnotiz Nr. 108 von Ende Mai 1800 erwähnte »sinus lemniscaticus universalissime acceptus« **). Sie ist mit den in [1] durch das agM. definierten Größen ϖ, ϖ' nach der Analogie des sinus lemniscaticus gebildet. In der Tat haben wir z. B. in der Scheda Aa, S. 8 die Darstellung

$$[2]' \qquad \mathrm{sl}\,\varphi = \frac{\pi}{\varpi}\,\frac{4}{e^{\frac{1}{2}\pi}+e^{-\frac{1}{2}\pi}}\,\mathrm{sc}\,\varphi - \frac{\pi}{\varpi}\,\frac{4}{e^{\frac{3}{2}\pi}-e^{-\frac{3}{2}\pi}}\,\mathrm{sc}\,3\varphi \text{ etc},$$

wo sl den sinus lemniscaticus, sc den sinus circuli, d. h. den gewöhnlichen Sinus bedeutet und φ beiderseits im Gradmaß zu denken ist***); will man also, wie es SCHERING beim Abdruck dieser und ähnlicher Formeln im Bande III der Werke (S. 417 ff.) getan hat, auf Bogenmaß reduzieren, so hat man für $\varphi = 180^0$ linker Hand den halben Lemniskatenumfang ϖ und rechter Hand den halben Kreisumfang, also π zu nehmen, dabei ist das lemniskatische ϖ aus dem in [1] definierten ϖ zu bilden, indem man $\mu = 1$ setzt. Es ist nämlich (siehe die Tagebuchnotiz Nr. 98, oben S. 260) in diesem Fall

$$[1]' \qquad \varpi = \varpi' = \frac{\pi}{M(\sqrt{2}, 1)}.$$

Für diesen Wert $\mu = 1$ ergibt die Formel [2] unmittelbar die Darstellung [2]' des sinus lemniscaticus in der Form, wie sie Werke III, S. 417, art. [6.] angegeben ist†), d. h. beiderseits auf Bogenmaß reduziert.

*) Danach gehört also der Zettel [III.] sowohl der Zeit der Abfassung als auch dem Inhalte nach zwischen die artt. [4.] und [5.] des der Scheda Ac entnommenen Abschnitts [IV.]; daß er beim Abdruck vorangestellt worden ist, geschah nur, um die fortlaufende Wiedergabe des Inhalts der Scheda Ac nicht zu unterbrechen.

**) An einer späteren Stelle der Scheda Ac, nämlich S. 39, siehe den art. [8] oben S. 200, bezeichnet GAUSS die Umkehrungsfunktion des Integrals

$$\varphi = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1+\frac{x^2}{\mu^2}\right)}}$$

geradezu mit $x = \mathrm{sl}\,\varphi$, also mit demselben Zeichen, das er auch häufig (siehe z. B. die gleich folgende Gleichung [2]' in unserem Text) für den sinus lemniscaticus im engern Sinne verwendet.

***) Vergl. die Aufzeichnung oben S. 170, art. [8.], wo aber φ und χ im Bogenmaß zu denken sind, was durch den Faktor $\frac{\pi}{\varpi}$ bei φ angezeigt wird.

†) SCHERING hat in dieser Formel ψ an Stelle des GAUSSschen n gesetzt; mit derselben Änderung hat er auch die Formel [2] und einen Teil der übrigen in unserem [V.] Abschnitt zusammengestellten Formeln Werke III, S. 433—435 wiedergegeben.

Im art. [2.] werden die Funktionen T und W eingeführt; sie sind ganz nach der Analogie der lemniskatischen P, Q gebildet, die GAUSS in der Scheda Aa eingeführt hatte (siehe Werke III, S. 415 art. [4.] ff., insbesondere art. [8.], S. 418) und die auch in der Scheda Ac (siehe in den artt. [8.], S. 201 und [11.], S. 203 die Formeln für P^2 und Q^2) vorkommen. Hier bei den Funktionen T und W tritt auch wieder φ im Gradmaß auf, was die Gleichung $T\,90^0 = \sqrt{\cos v}$ besonders deutlich zeigt. Es ist jedoch zu bemerken, daß GAUSS bei dieser Bezeichnungsweise links, d. h. bei $T\varphi$, $W\varphi$, geradezu $\varphi = n\varpi$, und rechts, d. h. unter dem trigonometrischen Funktionszeichen ebenso $\varphi = n\pi$ nimmt, also nicht, wie wir erwarten würden, $\varphi^0 = n \,.\, 180^0$.

Um die Beziehung zwischen den Funktionen T, W und den JACOBIschen Thetafunktionen möglichst deutlich hervortreten zu lassen, sollen die in den artt [2.], [3.] und [5.] enthaltenen GAUSSschen Formeln hier in der neueren Bezeichnungsweise wiedergegeben werden, wobei wir uns an H. WEBERS *Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen*, Braunschweig 1891, anschließen wollen.

Setzt man

$$q = e^{-\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}$$

und

$$\vartheta_{00}(n|q) = 1 + 2q\cos 2n\pi + 2q^4\cos 4n\pi + 2q^9\cos 6n\pi + \cdots$$

$$\vartheta_{11}(n|q) = 2q^{\frac{1}{4}}\sin n\pi - 2q^{\frac{9}{4}}\sin 3n\pi + 2q^{\frac{25}{4}}\sin 5n\pi - \cdots$$

$$\vartheta_{10}(n|q) = 2q^{\frac{1}{4}}\cos n\pi + 2q^{\frac{9}{4}}\cos 3n\pi + 2q^{\frac{25}{4}}\cos 5n\pi + \cdots$$

$$\vartheta_{01}(n|q) = 1 - 2q\cos 2n\pi + 2q^4\cos 4n\pi - 2q^9\cos 6n\pi + \cdots$$

so ist, wenn wir in Übereinstimmung mit GAUSS $\varphi = n\varpi$ nehmen,

$$W\varphi = \sqrt{M(1, \cos v)}\,\vartheta_{00}(n|q)$$

$$T\varphi = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\sqrt{M(1, \cos v)}\,\vartheta_{11}(n|q)$$

$$T(\tfrac{1}{2}\varpi - \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\sqrt{M(1, \cos v)}\,\vartheta_{10}(n|q)$$

$$W(\tfrac{1}{2}\varpi - \varphi) = \sqrt{M(1, \cos v)}\,\vartheta_{01}(n|q)\,.$$

Die Formeln [10], [12] geben also $\vartheta_{11}^2(n|q)$, $\vartheta_{00}^2(n|q)$ dargestellt durch $\vartheta_{00}(2n|q^2)$ und $\vartheta_{10}(2n|q^2)$, die Formeln [14], [15] sind den folgenden (siehe WEBER a. a. O., S. 79, 80) aequivalent:

$$[14]' \quad \begin{cases} 2\vartheta_{00}(0|q^2)\,\vartheta_{00}(2n|q^2) = \vartheta_{00}^2(n|q) + \vartheta_{01}^2(n|q), & (\text{WEBER } (16), \text{ S. } 80) \\ 2\vartheta_{00}(0|q^2)\,\vartheta_{10}(2n|q^2) = \vartheta_{10}^2(n|q) - \vartheta_{11}^2(n|q), & (\text{WEBER } (14), \text{ S. } 80) \end{cases}$$

wobei die Gleichungen [16], die die Quadrate der Funktionen $\vartheta_{10}(n|q)$, $\vartheta_{01}(n|q)$ durch die der Funktionen $\vartheta_{00}(n|q)$, $\vartheta_{11}(n|q)$ darstellen (vergl. WEBER a. a. O., S. 54), heranzuziehen sind. Die Gleichungen [14]′ stellen also für die Thetafunktionen die sogenannte LANDENsche Transformation dar. Demgegenüber gibt die Gleichung [17] die Darstellung von $\vartheta_{11}(n|q^{\frac{1}{2}})$ durch das Produkt $\vartheta_{11}(n|q)\,\vartheta_{01}(n|q)$, nämlich:

$$[17]' \quad \vartheta_{10}(0|\sqrt{q})\,\vartheta_{11}(n|\sqrt{q}) = 2\vartheta_{01}(n|q)\,\vartheta_{11}(n|q), \qquad (\text{WEBER } (10), \text{ S. } 79)$$

also die sogenannte GAUSSsche Transformation (vergl. die Gleichung [6]′ unten S. 280.).

In Bezug auf die Konstanten haben wir

$$(\alpha)\qquad \frac{1}{M(1,\cos v)} = \vartheta_{00}^2(0|q),\quad \frac{\cos v}{M(1,\cos v)} = \vartheta_{01}^2(0|q),\quad \frac{\sin v}{M(1,\cos v)} = \vartheta_{10}^2(0|q);$$

die dritte dieser Gleichungen ist nichts anderes als die zweite Gleichung von [3]

$$T\,90^\circ = T\frac{\varpi}{2} = \sqrt{\cos v},$$

die im wesentlichen auf die im LEISTE aufgezeichnete Gleichung [6] des Abschnitts [II.], oben S. 177, hinauskommt, wenn man beachtet, daß unser q gleich dem dortigen z^2 ist. —

Ferner gelten die Relationen

$$(\beta)\qquad \left\{\begin{aligned} \vartheta_{00}^2(0|q^2)+\vartheta_{10}^2(0|q^2) &= \vartheta_{00}^2(0|q)\\ \vartheta_{00}^2(0|q^2)-\vartheta_{10}^2(0|q^2) &= \vartheta_{01}^2(0|q)\\ 2\,\vartheta_{00}(0|q^2)\;\vartheta_{10}(0|q^2) &= \vartheta_{10}^2(0|q), \end{aligned}\right.$$

die für

$$\begin{array}{l|l} a_0 = M(a_0, b_0)\,\vartheta_{00}^2(0|q) & a_1 = M(a_0, b_0)\,\vartheta_{00}^2(0|q^2)\\ b_0 = M(a_0, b_0)\,\vartheta_{01}^2(0|q) & b_1 = M(a_0, b_0)\,\vartheta_{01}^2(0|q^2)\\ c_0 = M(a_0, b_0)\,\vartheta_{10}^2(0|q) & c_1 = M(a_0, b_0)\,\vartheta_{10}^2(0|q^2) \end{array}$$

den Relationen des agM.:

$$a_0 = a_1+c_1,\quad b_0 = a_1-c_1,\quad c_0 = 2\sqrt{a_1c_1}$$

entsprechen. Mit den in unserem *Abriß*, Artikel 3., S. 255 benutzten GAUSSschen Bezeichnungen ist

$$\vartheta_{00}(0|x) = p(x),\quad \vartheta_{01}(0|x) = q(x),\quad \vartheta_{10}(0|x) = r(x).$$

Die Bezeichnung der Gln. [19], [20] des art. [5.] weicht von dieser etwas ab.

Charakteristisch für die hier umrissene Theorie der allgemeinen elliptischen Funktionen ist, daß GAUSS nicht den in dem *Problema* zu Beginn des art. [1.], S. 194 formulierten Gedankengang weiter verfolgt, sondern, von dem elliptischen Integral völlig losgelöst, nach der Analogie des sinus lemniscaticus die Funktion $S\varphi$, den sinus lemniscaticus universalissime acceptus, mit den beiden Perioden 2ϖ und $2\varpi' i$ bildet, die er wiederum durch die Gleichungen [1] mit Hilfe des agM. definiert hat. In der oben S. 248 abgedruckten Briefstelle an BESSEL (vom 30. März 1828) sagt GAUSS, ABEL habe denselben Weg genommen, den er (GAUSS) 1798 eingeschlagen hatte; gemeint sind hier offenbar die auf lemniskatische Funktionen bezüglichen Arbeiten aus der zweiten Hälfte des Jahres 1798 (Juli-Oktober), wie sie in der Scheda Aa aufgezeichnet (gedruckt Werke III, S. 413—419, artt. [1.]—[4.], [6.]—[8.]) und in den Tagebuchnotizen Nr. 92 und Nr. 95 angezeigt sind. Zugleich geht aber aus diesem Ausspruche von GAUSS hervor, daß er bei der Entwickelung der allgemeinen Theorie der elliptischen Funktionen (denn um diese handelt es sich ja bei ABEL) ganz nach der Analogie der lemniskatischen Funktionen vorgegangen ist. In der Tat sehen wir auch in den in diesem Abschnitte wiedergegebenen Aufzeichnungen zwischen den auf die allgemeinen elliptischen Funktionen bezüglichen Formeln immer wieder lemniskatische Formeln auftreten, so im art. [2.] und weiterhin in den artt. [7.], [8.], [11.]. Auch die Schlußbemerkung dieses Abschnitts — mit der auch die Scheda Ac abschließt — zeigt, daß GAUSS die ganze hier behandelte Funktionsklasse als in der Betrachtung der Lemniskate wurzelnd nach dieser Kurve benannt hat.

Zur Herleitung der im art. [3.] zusammengestellten Formeln für die Transformation zweiter Ordnung der Thetafunktionen, d. h. um die Quadrate der vier Funktionen

$$T\varphi,\; W\varphi,\; W\left(\frac{\varpi}{2}-\varphi\right)\; T\left(\frac{\varpi}{2}-\varphi\right)$$

und das Produkt $T\varphi\, W\left(\frac{\varpi}{2}-\varphi\right)$ darzustellen, scheint GAUSS sich schon hier eines Prinzips bedient zu haben, das man jetzt als das Transformationsprinzip von HERMITE bezeichnet*). Mit voller Deutlichkeit tritt dieses Prinzip freilich erst im art. [12.] des weiter unten aus dem Handbuch 16, Bb abgedruckten Abschnitts [I.] der Abhandlung »*Zur Theorie der transscendenten Functionen gehörig*« hervor, vergl. auch den art. [5.] dieses Abschnitts, wo GAUSS die Transformationsformeln zusammenstellt und darüber schreibt »aus einem allgemeinen Theorem abzuleiten, s. u.«, womit eben jener Satz des art. [12.] gemeint ist. Aus diesen Transformationsformeln ergeben sich für die Nullwerte

$$W0,\quad W\tfrac{1}{2}\varpi,\quad T\tfrac{1}{2}\varpi$$

Beziehungen, die ohne weiteres den Algorithmus des agM. liefern, also zu einer Bestätigung der Formeln dienen, die GAUSS im art. [5.], oben S. 197, zusammengestellt hat**). Dieser Artikel enthält dem art. [7.] des Abschnitts [IV.] gegenüber nichts wesentlich Neues; bemerkenswert ist nur die explizite Darstellung der Größe z in den Gln. [18] und [23] und die auch weiterhin im art. [8.], S. 200, noch einmal auftretende Gleichung $\sin\psi = \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}$, die den Modul der LANDENschen Transformation liefert.

Der art. [4.], S. 196, gibt das Additionstheorem für das Integral

$$\varphi = \int\frac{dS}{\sqrt{(1-S^2)(1+\mu^2S^2)}};$$

durch die Transformation $S = \sin u$ verwandelt sich dieses Integral in

$$\int\frac{du}{\sqrt{1+\mu^2\sin^2 u}},$$

das GAUSS auf das Titelblatt der Scheda Ac gesetzt hat, siehe S. 184 in der Überschrift.

Die lemniskatischen Formeln im art. [7.] (die übrigens ebenso wie die der artt. [2.], [8.] und [11.] zum Teil bereits Werke III, S. 419, 420 abgedruckt sind) bedürfen keiner Erläuterung. Im art. [8.] bedeutet sl — wie bereits oben bemerkt — den sinus lemniscaticus universalissime acceptus. Die am Schluß von art. [8.] stehenden Formeln für die lemniskatischen $(P\varphi)^2$, $(Q\varphi)^2$ werden im art. [11.] zum Teil wiederholt und numerisch ausgeführt.

Bei der im art. [9.] behandelten Umformung von Potenzreihen, deren Exponenten eine arithmetische Progression zweiter Ordnung bilden, in Produkte konnte GAUSS an EULER und an seine eigenen älteren Untersuchungen anknüpfen. Unter diesen letzteren erwähnen wir hier nur den art. [9.] der *Exercitationes mathematicae*, oben S. 142, und die S. 26 der Scheda Aa (also im Spätsommer 1798) formulierte Aufgabe:

Investigatio factorum progressionis infinitae

$$1+x+x^3+x^6+x^{10}+x^{15}+x^{21}+\text{etc.} = S.$$

Die Lösung dieser Aufgabe gibt die Gl. 3) des art. [9.]; sie findet sich auch in der 1808 veröffentlichten *Summa io quarundam serierum singularium*, Werke II, S. 20. Das hier mit Πz bezeichnete Produkt hat GAUSS später (siehe den art. [4.] des Abschnitts [I.] der weiter unten folgenden Abhandlung *Zur Theorie der*

*) Siehe HERMITEs zweiten Brief an JACOBI vom August 1844, CRELLES Journal für Mathematik **32**, 1845, S. 176, Oeuvres de CH. HERMITE, I (1905), S. 18 ff., besonders S. 24, 25.

**) Vergl. die Tagebuchaufzeichnung Nr. 106 vom 22. Mai 1800, wo es heißt: »per quod simul omnia praecedentia [d. h. die Theorie der lemniskatischen Funktionen] nec non theoria mediorum arithmetico-geometricorum pulcherrime nectuntur infinitiesque augentur.«

transscendenten Functionen gehörig aus Handbuch 16, Bb und die Werke III, S. 446 ff. aus Handbuch 18, Bd, S. 221—233 abgedruckte Abhandlung) mit [z] und (siehe art. 5 der *Hundert Theoreme über die neuen Transscendenten*, Werke III, S. 465) mit Fz bezeichnet. Die Buchstaben p, q bedeuten hier dasselbe wie im art. [5.], für ihre hier gegebenen Ausdrücke vergl. Werke III, S. 446 ff. aus Handbuch 18, Bd.

Im art. [10.] treten als durchaus neues Element die von zwei Veränderlichen a, z abhängigen Produkte auf, ihre Umwandlung in eine Reihe erfolgt nach einer Methode, die später auch JACOBI (1829, JACOBIS Werke I, S. 232) ersonnen hat. Im art. [12.] wird so das Produkt K, das die allgemeine Thetafunktion darstellt, und sein Quadrat in eine Reihe verwandelt, wobei aber die konstanten Faktoren P bezw. P und Q unbestimmt bleiben. Nimmt man bei der Umformung von K noch die Bestimmung von $P = \frac{1}{\Pi x^2}$ hinzu, so erhält man die berühmte Identität zwischen der Reihen- und Produktdarstellung der Thetafunktionen in der Form, wie sie GAUSS später (siehe Abschnitt [I.], art. [4] der unten folgenden Abhandlung *Zur Theorie der transscendenten Functionen gehörig*, ferner *Hundert Theoreme*, Werke III, S. 464, das vierte Theorem) wiederholt angegeben hat. Bekanntlich hat JACOBI in einem Briefe an P. H. FUSS *) erklärt, es sei diese Identität »wohl das wichtigste und fruchtbarste«, was er »in reiner Mathematik erfunden habe«. Die artt. [13.], [14.] geben die Anwendungen auf die Funktionen T und W. Im art. [14.] bedeutet ε ebenso wie im art. [8.] die $\sqrt{-1}$. Wir bemerken noch, daß sich zwischen dem art. [13.] und dem die Scheda Ac abschließenden art. [14.] auf S. 47 beginnend eine Anwendung der Theorie der elliptischen Funktionen findet: *Motus solidi a nullis viribus sollicitati*, über die SCHERING Werke III, S. 495 kurz berichtet.

Die hier besprochenen Aufzeichnungen entsprechen den Tagebuchnotizen Nr. 105—Nr. 108, sie sind demnach im Mai 1800 in Braunschweig verfaßt worden. Man vergl. hierzu den Abschnitt V. des Aufsatzes »Über GAUSS' Arbeiten zur Funktionentheorie«.

Erläuterungen zu [VI.] und [VII.], S. 207—212..

Die Aufzeichnung der Scheda Ae im Abschnitt [VI.] kann als Vorarbeit zu der Pars altera der Abhandlung von 1800 (Werke III, S. 372) angesehen werden und bildet zugleich durch die Ausführung einiger in jener Abhandlung nur angedeuteten Rechnungen eine Ergänzung zu ihr. In den Gleichungen (1), (2) des art. 2. ist

$$x' = \tfrac{1}{2}(x+y), \quad y' = \sqrt{xy},$$

ebenso bedeuten weiterhin x'', y'' u.s.w. die folgenden Elemente im Algorithmus des agM. In der Formel S. 208, Z. 5 fehlen in der Handschrift gewisse Faktoren; die Formel muß lauten

$$\frac{dM(x,y)}{dy} = \frac{1}{2}\frac{M}{x'}\left(1 + 2\,\frac{y'(x'x'-y'y')}{y(xx-yy)}\cdot\frac{x'}{x''} + 4\,\frac{y''(x''x''-y''y'')}{y(xx-yy)}\cdot\frac{x'}{x'''} + \cdots\right).$$

Die Aufzeichnung der Scheda Af, Abschnitt [VII.], geht sehr erheblich über den Standpunkt der Abhandlung von 1800 (Werke III, S. 361) hinaus, indem sie bereits alle wesentlichen Bestandteile für eine selbständige Theorie der Modulfunktion enthält. Sie gewinnt besondere historische Bedeutung dadurch, daß sie Ergebnisse, die sonst nur aus erheblich später zu datierenden Aufzeichnungen bekannt waren, für das Jahr 1801 sicherstellt. So die Formel [1], die übersichtliche Zusammenstellung der Ausdrücke von a, b, $\sqrt{a^2-b^2}$ durch die Reihen p, q, r am Anfang des art. [3.], und die wichtige Relation [10], die hier anscheinend unabhängig von der Differentialgleichung [12] aus der Darstellung [2] hergeleitet worden ist.

*) *Briefwechsel zwischen Jacobi und Fuss*, herausg. von STÄCKEL und AHRENS, 1908, S. 60, siehe auch Bibliotheca Mathematica, (3) 8, S. 291.

Man vergleiche art. [1.] des Abschnitts [VIII.], S. 213, die artt. [2.] und [4.] des Abschnitts [IX.], S. 218 und 220, ferner Werke III, S. 468, 469, die alle aus sehr viel späterer Zeit stammen. In Gleichung [3], S. 210, ist

$$0{,}1\,660\,958\,116 = \log_{10}\frac{2}{m\pi},$$

wo m der Modul der BRIGGschen Logarithmen ist; in [5] beziehungsweise [7] ist

$$f = \frac{1}{M(a,b)}, \quad F = \frac{1}{M(A, B)}.$$

Besonders hervorzuheben ist noch das *Theorema* im art. [5.]; dieses spielt nämlich eine wichtige Rolle bei der im Handbuch 16, Bb, S. 111—112 gegebenen Lösung des Umkehrproblems des elliptischen Integrals erster Gattung (abgedruckt im Auszug Werke III, S. 401, 402, vollständig hier als Abschnitt [II.] des folgenden Hauptstücks). GAUSS führt es daselbst (siehe Werke III, S. 401) an mit der Bemerkung »wovon jedoch der Beweis tiefer liegt«.

Erläuterungen zu [VIII.], S. 213—216.

Die durch [1] eingeführte Größe x ist mit der in der Scheda Ac (siehe Abschnitt [V.], Gleichung [18], S. 197) durch z bezeichneten Größe identisch; es ist

$$x^4 = e^{-\pi\frac{M(a,b)}{M(a,c)}}.$$

Die Darstellung [1] ergibt sich durch Grenzübergang bei wiederholter Anwendung der LANDENschen Transformation

$$\sin\psi = \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}$$

vergl. oben S. 198), sie findet sich auch in der Abhandlung aus Handbuch 18, Bd, Werke III, S. 448, wo aber die hier mit x bezeichnete Größe mit $\sqrt[4]{x}$ bezeichnet ist. Die Formeln [2], wo $h = M(a, b)$ ist, sind uns schon von den Schedae Ac und Af her bekannt. Das wesentlich Neue, was uns hier entgegentritt, ist der Algorithmus [3]. GAUSS erhält ihn anscheinend durch folgenden Gedankengang.

Die Gleichungen [5] lauten in neuerer Bezeichnungsweise (vergl. oben S. 275)

$$[5]' \qquad A = H.\vartheta_{00}^2(v|q), \quad B = H.\vartheta_{01}^2(v|q); \quad v = e^{2i\pi y}, \; q = x^4.$$

Es ist also

$$[5]'' \qquad \frac{B}{A} = \frac{\vartheta_{01}^2(v|q)}{\vartheta_{01}^2(v|q)}.$$

Ähnlich, wie aus

$$\frac{b}{a} = \frac{\vartheta_{01}^2(0|q)}{\vartheta_{00}^2(0|q)}$$

gebildet ist

$$\frac{b'}{a'} = \frac{\vartheta_{01}^2(0|q^2)}{\vartheta_{00}^2(0|q^2)},$$

bildet nun GAUSS aus [5]″

$$\frac{B'}{A'} = \frac{\vartheta_{01}^2(2v|q^2)}{\vartheta_{00}^2(2v|q^2)}.$$

Nach den in der Scheda Ac enthaltenen Formeln für die Transformation zweiter Ordnung (siehe oben die Gleichungen [14]′, [17]′, S. 275)

$$2\vartheta_{00}(0|q^2)\,\vartheta_{00}(2v|q^2) = \vartheta_{00}^2(v|q) + \vartheta_{01}^2(v|q),$$
$$\vartheta_{01}(0|q^2)\,\vartheta_{01}(2v|q^2) = \vartheta_{00}(v|q)\,\vartheta_{01}(v|q)$$

ergibt sich aus den obigen Formeln

[5]‴
$$\frac{B'}{A'} = \frac{AB}{\left(\frac{A+B}{2}\right)^2}\frac{a'}{b'}.$$

GAUSS setzt nun fest, daß wie beim agM.

$$A' = \frac{A+B}{2}$$

sein soll: dann folgt aber aus [5]‴

$$B' = \frac{2AB}{A+B}\frac{a'}{b'}.$$

Auf eine weitere Erläuterung der GAUSSschen Formeln können wir verzichten, da sie mit Hilfe der Theorie der Thetafunktionen leicht bestätigt werden können, wir bemerken nur noch, daß die in [6] festgesetzte Beziehung zwischen den aufeinanderfolgenden Werten $\varphi, \varphi', \ldots$ sich in der Form

[6]′
$$\sin\varphi = \frac{a}{c}\,\frac{2\sin\varphi'\sqrt{\frac{c'}{a'}}}{1+\sin^2\varphi'\cdot\frac{c'}{a'}} = \frac{2a\sin\varphi'}{(a+b)+(a-b)\sin^2\varphi'}$$

darstellen läßt*). Es ist dies die sogenannte GAUSSsche Transformation der *Determinatio attractionis* (1818), Werke III, S. 352. Die Darstellung von $\sin\varphi$ und $\operatorname{tang}\varphi$ durch Thetafunktionen in den Gleichungen [8] und [9] stimmt — von geringfügigen Schreibfehlern abgesehen, die beim Abdruck oben S. 216 beseitigt sind — mit der aus dem Jahre 1827 stammenden im Handbuch 16, Bb (abgedruckt Werke III, S. 473, art. [5.]) überein, wenn man das dortige $\theta = \varphi - \frac{\pi}{2}$ setzt. Bemerkenswert ist, daß oben S. 216, Gleichung [9] (im Nenner von $\operatorname{tang}\varphi$) auch die ungerade Thetafunktion in derselben Form wie a. a. O. S. 472 auftritt**).

Die Aufzeichnung [VIII.] beginnt auf S. 37 der Scheda An; auf S. 35 dieser Scheda findet sich am Schluß einer astronomischen Rechnung die Bemerkung: »geendigt d. 2. May 1809«. Unser Abschnitt [VIII.] ist danach mit der Tagebuchnotiz Nr. 139 vom 20. Juni 1809 »Series ad Media arithmetico-geometrica pertinentia fusius evolutae« in Verbindung zu bringen. Vergl. auch die aus dem Handbuch 18, Bd, S. 221—233 stammende Abhandlung, die Werke III, S. 446 abgedruckt ist, und (vergl. die Bemerkung SCHERINGS ebenda S. 494) aus derselben Zeit stammt.

Erläuterungen zu [IX.], S. 217—231.

In SCHERINGS Untersuchungen über das agM., die Werke III, S. 374 abgedruckt sind, finden sich zwei Gleichungen, die eine S. 377 Zeile 3, die andere S. 380 Zeile 13, 14, von denen SCHERING S. 380 sagt, daß GAUSS sie nebeneinander aufgezeichnet habe. In der Tat sind diese Gleichungen im art. [1.] des Ab-

*) Es ist nämlich $\sin 2M = \frac{c}{a}$; vergl. auch die aus Scheda Ac herrührende Formel [14]′, S. 275.

**) SCHERING bemerkt Werke III, S. 390 (wohl in Bezug auf die vorstehende Aufzeichnung), daß die Bestimmung eines reellen y »durch eine Lücke unvollendet gelassen« sei. In der Tat befindet sich (siehe oben S. 214, nach Gl. [4]) an der Stelle, wo die Erklärung von y folgen sollte, eine Lücke, die jedoch durch einen Hinweis auf die im art. [2.] folgende Gleichung [7] ausgefüllt werden konnte. Vergl. auch die im Abschnitt [IX.] artt. [10.—12.], S. 227 ff. wiedergegebenen Aufzeichnungen.

schnitts [IX] enthalten, und zwar stimmt die erste mit der Gl. [1], die zweite mit der Gl. [4] überein. Die Bedeutung namentlich der ersten Gleichung erhellt aus ihrem Zusammenhang mit dem »Schönen Lehrsatz« des art. [4.], S. 220, vergl. den Artikel 2. unseres *Abrisses* oben S. 255 und die Erörterungen von SCHERING im Artikel 13. seines Aufsatzes, Werke III, S. 379, 380; die Gleichung der ersten Zeile von S. 380 ist nichts anderes als jener »Schöne Lehrsatz«, der also auch mit dem Werke VIII, S. 98 abgedruckten *Theorema elegantissimum* übereinstimmt (vergl. die Bemerkung von R. FRICKE, a. a. O.). Übrigens ist die Gleichung [1] vollkommen identisch mit der historisch so bedeutungsvollen Gleichung [7] des Abschnitts [IV.] (oben S. 186), die in der Scheda Ac, S. 10 aufgezeichnet ist. In [1], [2], [3] bedeutet k den Modul der BRIGGschen Logarithmen, vergl. auch art. [2.], S. 218, wo die mit a bezeichnete Größe gleich $k\pi$ ist. Die Handschrift enthält noch eine Formel für die Peripheria Ellipsis, die mit der in der Anzeige der *Determinatio attractionis* (Werke III, S. 360) gegebenen übereinstimmt und darum hier nicht abgedruckt worden ist.

Die im art. [1.] enthaltene Aufzeichnung stammt aus dem Mai 1809.

Die in den artt. [2.]—[9.] wiedergegebenen Aufzeichnungen geben eine vollständige Skizze für die Theorie der Modulfunktion. Der Inhalt der artt. [2.] und [4.] ist im wesentlichen in der Scheda Af (siehe die artt. [2.], [3.], [4.] des Abschnitts [VII.], S. 210, 211) enthalten. Der Satz [1] des art. [3.], S. 219 gibt den *nexum mutuum*, der die *infinite multos terminos medii arithmetico-geometrici* mit einander verbindet, und den GAUSS nach der Notiz Nr. 109 des *Tagebuchs* am 3. Juni 1800 in Braunschweig gefunden hat. Zu diesem Fundamentalsatz der Lehre von der Modulfunktion ist folgendes zu bemerken.

Bedeutet $\mathfrak{M}(a, b)$ einen beliebigen von Null verschiedenen Wert des agM. zwischen a und b, bei dessen Erzeugung durch den Algorithmus des agM. die Vorzeichen der Quadratwurzeln also irgendwie gewählt worden sind, so ist stets

$$(*)\qquad \frac{1}{\mathfrak{M}(a,b)} = \frac{\delta}{M(a,b)} + \frac{i\gamma}{M(a,c)}.$$

Wenn in dieser Formel $M(a, b)$, $M(a, c)$ irgend zwei bestimmte Werte des agM. zwischen a und b, beziehungsweise zwischen a und $c = \sqrt{a^2-b^2}$ bedeuten, so sind δ, γ ganze Zahlen, die den Bedingungen

$$\delta \equiv 1, \quad \gamma \equiv 0 \pmod{4}$$

genügen. Nennt man zwei Werte $M(a, b)$, $M(a, c)$ zusammengehörig, wenn der reale Teil des Quotienten $\frac{M(a,b)}{M(a,c)}$ wesentlich positiv ist, so gilt*) das folgende. Bedeuten $M(a,b)$, $M(a,c)$ zwei zusammengehörige Werte, so ist in der Formel $(*)$ dann und nur dann $\delta = 1$, wenn auch $\mathfrak{M}(a, b)$ und $M(a, c)$ zusammengehörige Werte sind. Das ist also die Bedeutung der GAUSSschen Formel [1] oder**)

$$[1]' \qquad \frac{1}{\mathfrak{M}(a,b)} = \frac{1}{M(a,b)} + \frac{4ik}{M(a,c)}.$$

Wahrscheinlich hat GAUSS diese Formel aus der Theorie der Reihen p, q, r, die er als die Summatorischen Funktionen bezeichnet***), abgeleitet; diese Vermutung stützt sich auf den art. [6.], S. 222, wo in [5] der allgemeinste Wert der dort mit M bezeichneten Größe angegeben und in den Kettenbruch [4] entwickelt wird, bei dem der Quotient

$$\frac{n}{m} = \frac{q^2}{p^2}$$

*) Nach einer Mitteilung von L. v. DÁVID.

**) Vergl. Werke III, S. 378.

***) Werke III, S. 386 unten; diese Stelle, d. h. die fünf letzten Zeilen dieser Seite, hat GAUSS auf der letzten Einbandseite seines Handexemplars der *Disquisitiones arithmeticae* aufgezeichnet.

seinen Wert nicht verändert. Hier ist also

$$M = \frac{M(m, n)}{M(m, \sqrt{m^2-n^2})};$$

auch wendet GAUSS in den artt. [6.], [7.], [8.], [9.] die Funktionszeichen p, q, r etwas abweichend von der sonst gebrauchten Weise an, indem er nämlich

$$\begin{aligned} p(t) &= 1 + 2e^{-\pi t} + 2e^{-4\pi t} + 2e^{-9\pi t} + \cdots, \\ q(t) &= 1 - 2e^{-\pi t} + 2e^{-4\pi t} - 2e^{-9\pi t} + \cdots, \\ r(t) &= 2e^{-\frac{1}{4}\pi t} + 2e^{-\frac{9}{4}\pi t} + 2e^{-\frac{25}{4}\pi t} + \cdots \end{aligned}$$

setzt; vergl. die Werke VIII, S. 101 in art. [3.] abgedruckte Aufzeichnung, die aus dem Handbuch 25, Bh, S. 25 stammt und etwa 1825 geschrieben sein dürfte. Daß auf S. 223 mit den Formeln für die lineare Transformation von pt auch die entsprechenden Formeln für die von den beiden Veränderlichen abhängige Thetafunktion aufgezeichnet sind (vergl. die ausführliche Darstellung dieser Theorie im Abschnitt [I.] artt. [1.] und [13.] der unten folgenden Abhandlung *Zur Theorie der transscendenten Functionen gehörig*, besonders die letzte Gleichung des art. [13.]), erscheint durch die Form bemerkenswert, in der GAUSS hier die allgemeine Thetafunktion schreibt, nämlich

$$\sum_n h^{\alpha n^2 + 2\beta n + \gamma},$$

wo die quadratische binäre Form im Exponenten den Zusammenhang mit der Zahlentheorie unmittelbar hervortreten läßt.

In den artt. [7.] und [8.] wird das Verhalten der drei Summatorischen Funktionen p, q, r bei ganzzahliger linearer Transformation von M in den sechs verschiedenen Fällen modulo 2 aufgestellt und mit Zuhilfenahme der Reduktionstheorie der binären quadratischen Formen negativer Determinante, die »einfachste Form« von M gefunden. Daß in der Tabelle [6], S. 224, für h der reziproke Wert des in der Handschrift und Werke III, S. 386 angegebenen Wertes $i^\alpha\sqrt{\delta + \gamma t)}$ genommen werden muß, hat schon P. PEPIN*) bemerkt. Vergl. im übrigen den Abschnitt V. des Aufsatzes »Über GAUSS' Arbeiten zur Funktionentheorie«.

Die beiden Zettel, auf denen die art. [1.]—[9.] aufgezeichnet sind, stammen aus verhältnismäßig später Zeit; das geht u. a. daraus hervor, daß auf dem zweiten Zettel (siehe oben S. 226) die von FOURIER 1822 eingeführte Bezeichnung der Grenzen eines bestimmten Integrals benutzt wird. Sie dürften etwa 1825 geschrieben sein, aber, wie bereits bemerkt, stammt ihr wesentlicher Inhalt aus dem Jahre 1801. Auszüge aus diesen beiden Zetteln sind Werke III, S. 378, 379, 385—386 und VIII, S. 99, 100—101 abgedruckt.

In den artt. [10.] und [12.] wird die Darstellung des elliptischen Integrals erster und zweiter Gattung mit veränderlicher oberer Grenze ähnlich wie in der *Determinatio attractionis* gegeben; die Rektifikation der Ellipse wird im art. [13.] noch nach einer zweiten Methode behandelt. Die Entstehungszeit dieser Untersuchungen ist durch die Tagebuchnotizen Nr. 110 und Nr. 111 auf 5. bis 10. Juni 1800 festgelegt. Die *Transcendentes ellipticae*, auf die nach Nr. 110 GAUSS seine Theorie nun auch unmittelbar angewendet hat, sind die Integrale erster Gattung, und mit der unmittelbaren Anwendung ist der *Algorithmus* gemeint, der $\theta = T^\infty$ liefert (siehe oben S. 228). Von den drei verschiedenen Methoden, nach denen GAUSS gemäß der Notiz Nr. 111 die Rektifikation erledigt hat, sind hier zwei entwickelt. Die in den artt. [10.]—[14.] abgedruckten drei Zettel selbst sind ersichtlich kurz hintereinander, aber auch sehr viel später als 1800

---

*) *Introduction à la théorie des fonctions elliptiques d'après les Oeuvres posthumes de Gauss*, Memorie dell' Accad. Pontif. de' Nuovi Lincei 9, 2, 1893, S. 103.

geschrieben*). Der im art. [13.], S. 230 enthaltenen Rechnung liegt nämlich der WALBECKsche Wert der Abplattung der Erde $\frac{1}{302,78}$ zu Grunde, der aus dem Jahre 1819 stammt**) und mit dem GAUSS in den zwanziger Jahren des XIX. Jahrhunderts gearbeitet hat***). Bezeichnet man mit a die halbe große, mit b die halbe kleine Achse der Meridanellipse, so ist

$$a = 302,78 = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}-\mathrm{b}}, \quad b = 1-a = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}-\mathrm{b}},$$

also in der Tat

$$\frac{1}{a} = \frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{\mathrm{a}} = \frac{1}{302,78}$$

die Abplattung. Der *factor constans* ist also $(\mathrm{a}-\mathrm{b})^{-1}$, und der sich ergebende Wert $\log_{10} \mathrm{a} = 6,8045975$ stimmt mit dem Werke IX, S. 69 berechneten (dort ist die halbe große Achse mit a bezeichnet) überein; zur Berechnung des Ellipsenumfangs dient dort die gewöhnliche Reihe, siehe im LEISTE, oben S. 177, Gl. [5].

Erläuterungen zum Briefwechsel, S. 232—251.

Dem Briefe [1.] zufolge hat GAUSS die in der Tagebuchnotiz Nr. 98 vom 30. Mai 1799 niedergelegte Bemerkung (siehe oben S 260) an PFAFF brieflich mitgeteilt†). Die Auseinandersetzungen zur Lehre vom agM., die PFAFF daraufhin in seinem Briefe gibt, sind sehr bemerkenswert. Er beobachtet nämlich, daß für $a = 1$, $b = 1+x$ in den Entwicklurgen der aufeinanderfolgenden arithmetischen und geometrischen Mittel nach Potenzen von x jeweils gewisse erste Koeffizienten übereinstimmen, und daß diese übereinstimmenden Koeffizienten in allen folgenden Reihenentwicklungen (also auch in der Grenzreihe) erhalten bleiben††). Diese Beobachtung wird durch den folgenden Satz erklärt und bestätigt, der zugleich die Antwort auf die von PFAFF aufgeworfenen Fragen gibt.

---

*) Der erste, der den art. [10.] enthält, ist anscheinend von einem Buchdeckel abgelöst; die beiden andern und noch ein dritter, mit Zahlenrechnungen und der Wiederholung von Formeln, die auch auf den andern stehen, sind von demselben Bogen abgetrennt. In der Formel des art. [10.], S. 227 Zeile 9, enthält die Handschrift ein Versehen, das Integral im dritten Gliede der Gleichung muß nämlich lauten

$$\int \frac{dT''}{\sqrt{(a''a'' \sin 4\,T''^2 + b''b'' \cos 4\,T''^2)}};$$

dabei ist natürlich

$$a' = \frac{a+b}{2}, \quad b' = \sqrt{ab}, \quad a'' = \frac{a'+b'}{2}, \quad a'' = \sqrt{a'b'}.$$

**) HENRIC. JOH. WALBECK, *Dissertatio de forma et magnitudine telluris etc.* Aboae 1819.

***) Vergl. die *Zahlen, das Erdsphäroid betreffend,* abgedruckt Werke IX, S. 69 und die zugehörige Bemerkung ebenda S. 71, ferner die Briefe von GAUSS an OLBERS vom 18. April 1822, 6. Juli 1824, 1. März 1827, abgedruckt ebenda S. 369, 320, 377.

†) Zum Briefwechsel GAUSS-PFAFF vergl. die Bemerkung S. 109 dieses Bandes.

††) PFAFF hat in der Tat, wie er befürchtet, einen Rechenfehler begangen; es ist nämlich $\delta'' = -\frac{11}{4.128}$, also von $D'' = -\frac{5}{2.128}$ verschieden. Erst von $n = 3$ an ist

$$\delta^n = D^n = \frac{1}{2}(\delta'' + D'') = -\frac{21}{8.128}.$$

Daß die von PFAFF »für jedes n« gefundenen Werte der Koeffizienten von x, x^2, x^3, x^4 in der Grenzreihe auftreten, bestätigt man an der z. B. oben S. 172 in Gl. [1] angegebenen Reihe für $\mathrm{Tm}(1+x) = M(1+x, 1)$.

Bildet man aus den für $|x| < \rho$ konvergenten Reihen

$$a = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots,$$
$$b = 1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots$$

den Algorithmus des agM. in der Weise, daß alle a_n, b_n sich für $x = 0$ auf 1 reduzieren, so erscheinen auch die a_n, b_n und $M(a, b)$ in der Form von Potenzreihen, die in einer gewissen Umgebung*) von $x = 0$ konvergent sind; in den Reihen für a_n, b_n stimmen die Koeffizienten der gleichhohen Potenzen von x bis einschließlich zur (2^n-1)ten Potenz überein und diese übereinstimmenden Koeffizienten bleiben bei allen folgenden a_{n+k}, b_{n+k} und demgemäß auch in der Grenzpotenzreihe für $M(a, b)$ erhalten**).

Für a_1, b_1 ist der Satz unmittelbar einleuchtend. Nimmt man ihn für a_k, b_k als bewiesen an, setzt also

$$a_k = 1 + \varphi_1 x + \cdots + \varphi_\lambda x^\lambda + \alpha^{(k)}_{\lambda+1} x^{\lambda+1} + \cdots,$$
$$b_k = 1 + \varphi_1 x + \cdots + \varphi_\lambda x^\lambda + \beta^{(k)}_{\lambda+1} x^{\lambda+1} + \cdots,$$

wo $\lambda = 2^k - 1$ ist, so ist zunächst klar, daß in den Entwicklungen von

$$a_{k+1} = \tfrac{1}{2}(a_k + b_k), \quad b_{k+1} = \sqrt{a_k b_k}$$

die Koeffizienten der Potenzen von x bis zur $(2\lambda + 1)$ten einschließlich durch

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda, \ \alpha^{(k)}_{\lambda+1}, \ldots, \alpha^{(k)}_{2\lambda+1}, \ \beta^{(k)}_{\lambda+1}, \ldots, \beta^{(k)}_{2\lambda+1}$$

bestimmt werden. Für das arithmetische Mittel hat man, wie auch PFAFF bemerkt, unmittelbar***)

$$a_{k+1} = s_{2\lambda+1} + \tfrac{1}{2}(\alpha^{(k)}_{2\lambda+2} + \beta^{(k)}_{2\lambda+2}) x^{2\lambda+2} + \cdots,$$

wo

$$s_{2\lambda+1} = 1 + \varphi_1 x + \cdots + \varphi_\lambda x^\lambda + \tfrac{1}{2}(\alpha^{(k)}_{\lambda+1} + \beta^{(k)}_{\lambda+1}) x^{\lambda+1} + \cdots + \tfrac{1}{2}(\alpha^{(k)}_{2\lambda+1} + \beta^{(k)}_{2\lambda+1}) x^{2\lambda+1}$$

ist. Da aber in $s^2_{2\lambda+1}$ die Glieder bis zu $x^{2\lambda+1}$ einschließlich mit den entsprechenden Gliedern in dem Produkt $a_k b_k$ übereinstimmen, so folgt, daß auch in b_{k+1} die Glieder bis zu $x^{2\lambda+1}$ einschließlich durch $s_{2\lambda+1}$ gegeben werden, womit unser Satz allgemein bewiesen ist.

Zu der Bemerkung PFAFFS über die Methodus tangentium inversa vergl. man die Schrift *Viro illustri A. G. Kaestner de problemate e geometria curvarum respondet Jo. Frid. Pfaff*, 1799, die als Gratulationsschrift zum 80. Geburtstage KAESTNERS (27. September 1799) gedruckt worden ist, aber die eigentliche Behandlung des geometrischen Problems nicht enthält. Diese sollte vielmehr (nach Blatt 3a, Zeile 15, 16 der Gratulationsschrift, vergl. auch die von KAESTNER selbst verfaßte Anzeige, Göttingische gelehrte Anzeigen, 1799, III, S. 1761) in einem besonderen *Tractatus geometrico-analyticus de methodo angentium inversa* gegeben werden, der aber niemals erschienen ist.

Zu dem in [2.] von PFAFF erörterten Mittel vergl. die in dem »Anhang« zu diesem Briefe zusammengestellten Auszüge aus den »*Gaussiana*« SCHUMACHERS†). Die ersten in $\{\ \}$ eingeschlossenen Zeilen

---

*) Diese bestimmt sich einerseits durch ρ, andererseits dadurch, daß sie keine Wurzel der Gleichungen $a = 0$, $b = 0$, $a^2 - b^2 = 0$ ($x = 0$ ausgenommen) enthalten darf, vergl. L. v. DÁVID, CRELLES Journal für Mathematik **140**, 1911, S. 292.

**) Siehe H. SCHAPIRA, *Über ein allgemeines Princip algebraischer Iterationen*, Verhandlungen des Naturhistorisch-med. Vereins zu Heidelberg, N.F. 4, 1887, S. 25 ff., wo auf S. 40—42 ein allgemeiner Satz ausgesprochen ist, der den oben angegebenen als besonderen Fall einschließt.

***) Man beachte, daß bei PFAFF a^n das geometrische und b^n das arithmetische Mittel bezeichnet.

†) Ausführlich behandelt dieses Mittel C. W. BORCHARDT, In memoriam DOMINICI CHELINI, Collec-

dieses »Anhangs« sind einer von SCHUMACHER geschriebenen Aufzeichnung entnommen, während das folgende eine eigenhändige Aufzeichnung von GAUSS wiedergibt. Die Entdeckung, zu der PFAFF am Schluß seines Schreibens [2.] GAUSS »im voraus« Glück wünscht, ist wahrscheinlich die in den Tagebuchnotizen Nr. 114 vom 30. November und Nr. 115 vom 3. Dezember 1800 angezeigte Darstellung der Klassenanzahl binärer quadratischer Formen durch unendliche Produkte und unendliche Reihen, vergl. Werke II, S. 285, 286 und die Bemerkungen ebenda S. 297.

Zu dem Briefe an BESSEL [3.] sind die auf die Koeffizientenbestimmung der dort behandelten Reihenentwickelung bezüglichen Stellen oben S. 183, 185, ferner Werke VIII, S. 84 zu vergleichen. Diesen Brief an BESSEL hatte GAUSS einem Briefe an OLBERS vom 3. September 1805 (*Wilhelm Olbers, sein Leben und seine Werke* II, *Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss* 1. Abt. 1900, S. 269) beigelegt mit der Bitte, ihn an den Empfänger zu befördern. In dem Briefe an OLBERS heißt es:

»Ich werde beiher meine angefangenen Arbeiten über die Störung der Planeten fortsetzen, sowohl was zur allgemeinen Theorie als zur Anwendung auf die Asteroïden gehört. In jener ist es von besonderer Wichtigkeit, die Koefficienten, die aus

$$(a^2+a'^2-2aa'\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}} = A^0+2A'\cos\varphi+2A''\cos 2\varphi+2A'''\cos 3\varphi \text{ etc.}$$

entspringen, leicht angeben zu können, weil man sie für sehr viele Werthe von a, a' braucht.«

Man vergl. auch die wahrscheinlich aus dem Oktober 1802 stammende Aufzeichnung in dem Handbuch 17, Bc (betitelt »Astronomische Untersuchungen und Rechnungen vornehmlich über die Ceres-Ferdinandea, 1802«) S. 24, die Werke VII, S. 384 abgedruckt ist, ferner den Brief [7.] von GAUSS an SCHUMACHER, besonders aber in der aus dem Handbuch 19, Be, S. 36 ff. stammenden, weiter unten abgedruckten Abhandlung »*Einiges über die unendliche Reihe* $1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\cdots$« die artt. [5.] und [6.], S. 42 ff. des Handbuchs, wo die Beweise für die in dem Briefe an BESSEL mitgeteilten Formeln gegeben sind.

Über die in dem Briefe [4.] von SCHUMACHER und dem Antwortschreiben [5.] von GAUSS genannte Aufgabe von PEDRAYES vergl. die ausführlichen Angaben im Abschnitt VI. des Aufsatzes »Über GAUSS' Arbeiten zur Funktionentheorie«. DON PEDRO CARO Y SUREDA MARQUIS DE LA ROMAÑA (1761—1811) war Befehlshaber der spanischen Truppen, die auf Befehl NAPOLEONS während der Monate März, April und Mai des Jahres 1808 auf den dänischen Inseln landeten, um die Vorhut der gegen Schweden bestimmten Armee des Generals BERNADOTTE zu bilden*).

---

tanea mathematica etc. 1881, S. 206—212, BORCHARDTS Werke (1888), S. 455. Das im GAUSSarchiv befindliche Tagebuch SCHUMACHERS *Gaussiana* stammt aus der Zeit, wo SCHUMACHER sich in Göttingen aufhielt, um unter der Anleitung von GAUSS astronomische Studien zu machen, also aus dem Winter 1808/09 (vergl. GAUSS an OLBERS, *Wilhelm Olbers, sein Leben und seine Werke* II, 1, 1900, S. 430); es enthält teils Aufzeichnungen SCHUMACHERS über Mitteilungen von GAUSS, teils von GAUSS selbst geschriebene Notizen. In bezug auf die in dem Anhang zu [2.] wiedergegebene Notiz vergl. auch noch die Bemerkung SCHUMACHERS in dem Briefe an GAUSS vom 8. Juni 1816, *Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher* I, 1860, S. 127: »wie Ihre elementaren Media, über die ich ein paar Zettel von Ihrer Hand inter κειμηλια bewahre«.

*) Vergl. *Biographie universelle*, 38 (1824), S. 497—504.

In geschichtlicher Beziehung besonders wichtig sind die beiden Briefe [6.] und [7.], vergl. den Abschnitt VIII. des oben genannten Aufsatzes. CARL FERDINAND DEGEN war in der Tat ein Landsmann von GAUSS, er ist nämlich zu Braunschweig am 1. November 1766 geboren; biographische Angaben über ihn findet man in der *Festskrift ved hundredaarsjubilaeet for N. H. Abels födsel*, Kristiania 1902, Artikel von HOLST, S. 13, französische Übersetzung: *N. H. Abel*, *Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance*, S. 14, 15. JOH. NIK. TETENS (1736—1807) war 1776—1799 Professor in Kiel, dann Etatsrat in Kopenhagen. Die Äußerung von GAUSS (siehe oben S. 248), daß er im zweiten Teil seiner Abhandlung *circa seriem* $1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\cdots$ einiges aus seinen Untersuchungen über das agM. bekannt machen wolle, stimmt mit dem ursprünglichen Entwurfe dieser Abhandlung, den wir weiter unten abdrucken (siehe die bereits erwähnte Abhandlung *Einiges über die unendliche Reihe* $1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\cdots$ aus Handbuch 19, Be, besonders den art. [5.]) überein. In der späteren (Werke III, S. 207 abgedruckten) Bearbeitung der Fortsetzung der von GAUSS selbst veröffentlichten Abhandlung von 1812 wird das agM. nicht ausdrücklich erwähnt, aber im art. 46, Werke III, S. 217, Gleichung [90] ist

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,1-x\right)=\frac{1}{M(1,\sqrt{x})}.$$

Die Äußerung von GAUSS über ABEL in dem Briefe [8.] ist darum bemerkenswert, weil sie auf den Weg, den GAUSS 1798 bei den lemniskatischen und weiterhin 1800 bei den allgemeinen elliptischen Funktionen eingeschlagen hat, ein helles Licht wirft. Ganz ähnlich äußert GAUSS sich auch in einem Briefe an CRELLE (siehe Werke III, S. 495, letzter Absatz) und in einem Briefe an SCHUMACHER vom 30. Mai 1828 (*Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher* II, 1860, S. 177, 178). Vergl. den Abschnitt IX. des mehrfach erwähnten Aufsatzes.

In bezug auf den zweiten Teil des Briefes [8.] und die darauf bezüglichen Briefstellen [a.] und [b.] ist folgendes zu bemerken. JOH. FRIEDRICH POSSELT (1794– 1823) war seit 1819 Professor der Mathematik in Jena als Nachfolger von KARL DIETRICH V. MÜNCHOW (1778—1836), der 1810—1818 Professor in Jena, dann in Bonn war. Während GAUSS' Gedächtnis in bezug auf Ereignisse aus seiner Jugendzeit fast untrüglich genannt werden kann, zeigt es sich hier im Jahre 1828 bei dem nur wenige Jahre zurückliegenden Anlaß nicht in gleichem Maße zuverlässig; der Brief von PFAFF war nicht mehrere Jahre, sondern genau ein halbes Jahr vor dessen Tode geschrieben.

Mit Ausnahme der Briefstelle [b.] sind alle hier wiedergegebenen Briefstellen, auch die bereits anderweitig veröffentlichten, nach den im GAUSSarchiv befindlichen Urschriften ohne jede Änderung abgedruckt worden.

SCHLESINGER.

ZUR THEORIE DER TRANSSCENDENTEN FUNCTIONEN GEHÖRIG.

[I.]

[ENTWICKELUNGEN UND UMFORMUNGEN DER UNENDLICHEN REIHEN UND PRODUKTE.]

[Aus Handbuch 16, Bb, Den astronomischen Wissenschaften gewidmet, November 1801.]

[1.]

[S. 40]

Es sei

$$\Sigma e^{-\alpha(k+\omega)^2} = T,$$

indem für k alle ganze positive und negative Zahlen gesetzt werden, und

$$T = A + 2B\cos\omega P + 2C\cos 2\omega P + 2D\cos 3\omega P + \text{etc.},$$

so ist

$$A = \int T d\omega, \quad B = \int T\cos\omega P.d\omega, \quad C = \int T\cos 2\omega P.d\omega,$$
$$D = \int T\cos 3\omega P.d\omega \ \text{ u. s. w.},$$

alle Integrale von $\omega = 0$ bis $\omega = 1$ ausgedehnt. Es ist aber klar, dass jene Integrale zwischen diesen Grenzen mit den Integralen

$$\int e^{-\alpha\omega\omega} d\omega, \quad \int e^{-\alpha\omega\omega}\cos\omega P.d\omega, \quad \int e^{-\alpha\omega\omega}\cos 2\omega P.d\omega, \quad \int e^{-\alpha\omega\omega}\cos 3\omega P.d\omega \ \text{etc.}$$

übereinkommen, wenn diese von $\omega = -\infty$ bis $\omega = +\infty$ ausgedehnt werden. Da nun allgemein

$$e^{-\alpha\omega\omega}\cos n\omega P$$

$$= \tfrac{1}{2}e^{-\alpha\omega\omega+in\omega P}+\tfrac{1}{2}e^{-\alpha\omega\omega-in\omega P} = \tfrac{1}{2}e^{-\frac{nnPP}{4\alpha}}\left(e^{-\alpha\left(\omega-\frac{inP}{2\alpha}\right)^2}+e^{-\alpha\left(\omega+\frac{inP}{2\alpha}\right)^2}\right),$$

so folgt leicht, dass

$$\int e^{-\alpha\omega\omega}\cos n\omega P.d\omega = e^{-\frac{nn\pi\pi}{\alpha}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$$

folglich

$$T = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\left(1+2e^{-\frac{\pi\pi}{\alpha}}\cos\omega P+2e^{-4\frac{\pi\pi}{\alpha}}\cos 2\omega P+2e^{-9\frac{\pi\pi}{\alpha}}\cos 3\omega P+\text{etc.}\right).$$

In einer andern Form so

[1] $$\Sigma e^{-\alpha\, k+\omega)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\cdot e^{-\alpha\omega\omega}.\Sigma e^{-\frac{\pi\pi}{\alpha}\left(k+\frac{\alpha\omega i}{\pi}\right)^2}.$$

Allgemeiner

$$\Sigma e^{-\alpha(k+\omega)^2}(\cos 2(k+\omega)\alpha\psi+i\sin 2(k+\omega)\alpha\psi)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\cdot\Sigma e^{-\frac{\pi\pi}{\alpha}\left(k-\frac{\alpha\psi}{\pi}\right)^2}(\cos 2k\omega\pi-i\sin 2k\omega\pi)\text{ [*)]}.$$

Oder, $\alpha\alpha' = \pi\pi$ und $-\alpha\psi = \omega'\pi$ gesetzt,

$$\Sigma e^{-\alpha(k+\omega)^2}(\cos(2k+2\omega)\omega'\pi-i\sin(2k+2\omega)\omega'\pi)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\cdot\Sigma e^{-\alpha'(k+\omega')^2}(\cos 2k\omega\pi-i\sin 2k\omega\pi),$$

$$\Sigma e^{-\alpha\left(k+\omega-\frac{1}{4}\right)^2}-\Sigma e^{-\alpha\left(k+\omega+\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$= 4\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\cdot\left(e^{-\frac{\pi\pi}{\alpha}}\sin\omega P-e^{-9\frac{\pi\pi}{\alpha}}\sin 3\omega P+\text{etc.}\right)\text{ [**)]}.$$

[*) Links vom Gleichheitszeichen hat die Handschrift $-i\sin 2(k+\omega)\alpha\psi$.]

[**) Rechts vom Gleichheitszeichen hat die Handschrift $-3e^{-9\frac{\pi\pi}{\alpha}}\sin 3\omega P$.]

Man kann den Lehrsatz [1, S. 288] auch so ausdrücken:

$$\Sigma t e^{-\pi t^4 kk - 2\pi ttk\sqrt{u} - \frac{1}{2}\pi u}$$

ändert den Werth nicht, wenn t in $\frac{1}{t}$ und u in $-u$ verwandelt wird.

Das Arithmetisch-Geometrische Mittel zwischen

$$(1+2x+\ldots)^2 \text{ und } (2x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{9}{4}}+\text{u.s.w.})^2$$

ist $\dfrac{\pi}{\log\frac{1}{x}}$.

[S. 41]

Das Integral

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(aa\cos\varphi^2+bb\sin\varphi^2)}}$$

wird gleich dem Integrale

$$\int\frac{d\varphi'}{\sqrt{(a'a'\cos\varphi'^2+b'b'\sin\varphi'^2)}},$$

beide von φ und $\varphi'=0$ gerechnet, wenn man

$$a'=\tfrac{1}{2}(a+b),\quad b'=\sqrt{ab}$$

und

$$\frac{1}{\sin\varphi}=\frac{a+b}{2a}\cdot\frac{1}{\sin\varphi'}+\frac{a-b}{2a}\cdot\sin\varphi'$$

$$\sin\varphi'=\frac{a-\sqrt{(aa\cos\varphi^2+bb\sin\varphi^2)}}{(a-b)\sin\varphi}=\frac{(a+b)\sin\varphi}{a+\sqrt{(aa\cos\varphi^2+bb\sin\varphi^2)}} \text{*)}$$

[setzt.]

---

*) [mit anderer Schrift und Tinte an der Seite]

$$\frac{a-b}{a+b}=\mu,\quad \frac{2\sqrt{\mu'}}{1+\mu'}=\mu,\quad \sqrt{\left(1-\frac{bb}{aa}\right)}=\mu,$$

$$\frac{2}{\mu\sin\varphi}=\sin\varphi'.\sqrt{\mu'}+\frac{1}{\sin\varphi'.\sqrt{\mu'}}.$$

[2.]

Man setze

$$P = 1 + \frac{x^n . 1 - x^{2n+1}}{1 + x^n . 1 + x^{n+1}} + \frac{x^{2n} . 1 - x^{2n+2} . 1 - x^{n+1}}{1 + x^n . 1 + x^{n+1} . 1 + x^{n+2}} + \frac{x^{3n} . 1 - x^{2n+3} . 1 - x^{n+1} . 1 - x^{n+2}}{1 + x^n . 1 + x^{n+1} . 1 + x^{n+2} . 1 + x^{n+3}} + \text{etc.}$$

$$Q = \frac{x^n}{1 + x^n} + \frac{x^{2n} . 1 - x^{n+1}}{1 + x^n . 1 + x^{n+1}} + \frac{x^{3n} . 1 - x^{n+1} . 1 - x^{n+2}}{1 + x^n . 1 + x^{n+1} . 1 + x^{n+2}}$$

$$+ \frac{x^{4n} . 1 - x^{n+1} . 1 - x^{n+2} . 1 - x^{n+3}}{1 + x^n . 1 + x^{n+1} . 1 + x^{n+2} . 1 + x^{n+3}} + \text{etc.}$$

$$R = P - Q.$$

Man suche zuerst diese Differenz, indem man das erste, zweite, dritte Glied u.s.w. der Reihe Q von dem ersten, zweiten, dritten Gliede der Reihe P abzieht, so kommt

$$R = \frac{1}{1 + x^n} + \frac{x^n . 1 - x^n}{1 + x^n . 1 + x^{n+1}} + \frac{x^{2n} . 1 - x^n \ 1 - x^{n+1}}{1 + x^n . 1 + x^{n+1} \ 1 + x^{n+2}} + \frac{x^{3n} . 1 - x^n \ 1 - x^{n+1} . 1 - x^{n+2}}{1 + x^n . 1 + x^{n+1} . 1 + x^{n-2} . 1 + x^{n+3}} \text{ etc.}$$

Wir bezeichnen diese Reihe durch $\varphi(x, n)$.

Man suche ferner jene Differenz R, indem man das erste, zweite, dritte Glied u.s.w. der Reihe Q von dem zweiten, dritten, vierten u.s.w. der Reihe P abzieht, so wird

$$R = 1 - \frac{x^{2n+1}}{1 + x^{n+1}} - \frac{x^{3n+2} . 1 - x^{n+1}}{1 + x^{n+1} . 1 + x^{n+2}} - \frac{x^{4n+3} \ 1 - x^{n+1} . 1 - x^{n+2}}{1 + x^{n+1} . 1 + x^{n+2} . 1 + x^{n+3}} - \text{u.s.w.}$$

oder offenbar

$$R = 1 - x^{2n+1} \varphi(x, n+1)$$

folglich

$$\varphi(x, n) = 1 - x^{2n+1} \varphi(x, n+1).$$

Dieser Schluss ist allgemein, so lange $n > 1$, man hat demnach unter dieser Einschränkung

$$\varphi(x, n) = 1 - x^{2n+1} + x^{4n+4} - x^{6n+9} + x^{8n+16} - \text{etc.}$$

Hingegen ist für den Fall $n = 0$ das letzte Glied von Q nicht als verschwindend zu betrachten. Setzt man es $= T$, so wird der erste Werth von R um T kleiner seyn als der zweite, also

$$T = 1 - x\varphi(x, 1) - \varphi(x, 0)$$

oder

$$\varphi(x, 0) = 1 - x\varphi(x, 1) - T = 1 - x + x^4 - x^9 + x^{16} - \ldots - T,$$

also da

[S. 42]

$$\varphi(x, 0) = \tfrac{1}{2}$$

und

$$2T = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-xx}{1+xx} \cdot \frac{1-x^3}{1+x^3} \cdot \frac{1-x^4}{1+x^4} \text{ etc.},$$

so wird

$$\frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-xx}{1+xx} \cdot \frac{1-x^3}{1+x^3} \cdot \frac{1-x^4}{1+x^4} \text{ etc.} = 1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + 2x^{16} - \text{etc.}$$

Der erste Theil ist hier

$$1 - x \,.\, 1 - x^3 \,.\, 1 - x^5 \,.\, 1 - x^7 \ldots \frac{1-xx}{1+x} \cdot \frac{1-x^4}{1+xx} \cdot \frac{1-x^6}{1+x^3} \text{ etc.}$$
$$= (1-x)^2 (1-xx)(1-x^3)^2 (1-x^4)(1-x^5)^2 (1-x^6) \text{ etc.}$$

Bezeichnen wir noch

$$1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + 2x^{16} \text{ etc. mit } Fx,$$

so wird offenbar

$$Fx \,.\, F(-x) = (Fxx)^2.$$

[3]

Zieht man auf ähnliche Weise von der Reihe

$$\frac{1-x^{2n+2}}{1-x^{n+1}} + \frac{x^n \,.\, 1-x^{2n+4} \,.\, 1-x^{n+2}}{1-x^{n+1} \,.\, 1-x^{n+3}} + \frac{x^{2n} \,.\, 1-x^{2n+6} \,.\, 1-x^{n+2} \,.\, 1-x^{n+4}}{1-x^{n+1} \,.\, 1-x^{n+3} \,.\, 1-x^{n+5}} + \text{etc.}$$

die Reihe

$$\frac{x^n \,.\, 1-x^{n+2}}{1-x^{n+1}} + \frac{x^{2n} \,.\, 1-x^{n+2} \,.\, 1-x^{n+4}}{1-x^{n+1} \,.\, 1-x^{n+3}} + \frac{x^{3n} \,.\, 1-x^{n+2} \,.\, 1-x^{n+4} \,.\, 1-x^{n+6}}{1-x^{n+1} \,.\, 1-x^{n+3} \,.\, 1-x^{n+5}} + \text{etc.}$$

ab, so erhält man einmal

$$\frac{1-x^n}{1-x^{n+1}} + \frac{x^n \,.\, 1-x^n \,.\, 1-x^{n+2}}{1-x^{n+1} \,.\, 1-x^{n+3}} + \frac{x^{2n} \,.\, 1-x^n \,.\, 1-x^{n+2} \,.\, 1-x^{n+4}}{1-x^{n+1} \,.\, 1-x^{n+3} \,.\, 1-x^{n+5}} + \text{etc.} = \psi(x, n)$$

und zweitens

$$1+x^{n+1}+\frac{x^{2n+3}.1-x^{n+2}}{1-x^{n+3}}+\frac{x^{2n+3}.x^{n+2}.1-x^{n+2}.1-x^{n+4}}{1-x^{n+3}.1-x^{n+5}}+\text{etc.}$$
$$=1+x^{n+1}+x^{2n+3}\psi(x,n+2).$$

Man hat also, den Fall $n=0$ ausgenommen,

$$\psi(x,n)=1+x^{n+1}+x^{2n+3}\psi(x,n+2)$$

folglich

$$\psi(x,n)=1+x^{n+1}+x^{2n+3}+x^{3n+6}+x^{4n+10}+\text{etc.},$$

dagegen hat man für den Fall $n=0$

$$\psi(x,0)=1+x+x^3\psi(x,2)-\frac{1-x^2.1-x^4.1-x^6}{1-x.1-x^3.1-x^5}\text{ etc.},$$

folglich

[2] $$\frac{1-x^2.1-x^4.1-x^6\ldots}{1-x.1-x^3.1-x^5\ldots}=1+x+x^3+x^6+x^{10}+\text{etc.}$$

[4.]

[S. 43]

Wir bezeichnen

$$(1-x)(1-xx)(1-x^3)\text{ etc. mit }[x]\,[^*)],$$

so ist

$$x[x^{24}]=x-x^{25}-x^{49}+x^{121}+x^{169}-x^{289}-x^{361}-\text{etc.}\,[^{**})],$$

[2]' $$\begin{cases}1+x+x^3+x^6+\text{etc.}=\dfrac{(1-xx)(1-x^4)(1-x^6)\ldots}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\ldots}=\dfrac{[xx]^2}{[x]}\\ \qquad=(1+x)(1+xx)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)\ldots\\ \qquad\cdot(1-x^2)(1-x^4)(1-x^{16})\ldots\end{cases}$$

[3] $$1-2x+2x^4-2x^9+\text{etc.}=\frac{(1-x)(1-xx)(1-x^3)\ldots}{(1+x)(1+xx)(1+x^3)\ldots}=\frac{[x]^2}{[xx]}$$

[4] $$\begin{cases}1+2x+2x^4+2x^9+\text{etc.}=\dfrac{(1+x)(1-xx)(1+x^3)\ldots}{(1-x)(1+xx)(1-x^3)\ldots}=\dfrac{[xx]^5}{[x]^2[x^4]^2}\\ \qquad=(1+x)^2(1-xx)(1+x^3)^2(1-x^4)(1+x^5)^2\ldots\,[^{***})]\end{cases}$$

[5] $$[-x]=\frac{[xx]}{[x][x^4]}.$$

[*) Zum Unterschied von den die Zusätze des Herausgebers einschließenden Klammern sind die hier von GAUSS benutzten Klammern verstärkt.]

[**)] Folgt aus # [S. 293], wenn man statt x, y schreibt x^3, $-x$ [und dann an die Stelle von x setzt x^{12}].

[***)] Entwickelt die Potenzen der Reihe.

$$\ldots\left[\left(1+\frac{x^{16}}{yy}\right)\left(1+\frac{x^8}{yy}\right)\right]\left(y+\frac{1}{y}\right)(1+x^8yy)(1+x^{16}yy)(1+x^{24}yy)\ldots$$
$$=\frac{1}{[x^8]x}\left\{\left(y+\frac{1}{y}\right)x+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)x^9+\ldots\right\}$$

$$(1+xy)(1+x^2y)(1+x^3y)(1+x^4y)\ldots\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{x^2}{y}\right)\left(1+\frac{x^3}{y}\right)\left(1+\frac{x^4}{y}\right)\ldots$$
$$=\frac{1}{[x]}\left\{1+x\left(y-1+\frac{1}{y}\right)+x^3\left(yy-y+1-\frac{1}{y}+\frac{1}{yy}\right)\right.$$
$$\left.+x^6\left(y^3-yy+y-1+\frac{1}{y}-\frac{1}{yy}+\frac{1}{y^3}\right)\ldots\right\}$$

$$[x^3]=1-3x+5x^3-7x^6+9x^{10}-\text{etc.}$$

folgt leicht aus ☾ [S. 294], wenn man $y=1+\omega$ setzt und daraus die Bedingungsgl[eichung] bildet.

$$\#\left\{\begin{array}{l}(1+xy)(1+x^3y)(1+x^5y)\ldots\left(1+\dfrac{x}{y}\right)\left(1+\dfrac{x^3}{y}\right)\left(1+\dfrac{x^5}{y}\right)\ldots\\[1ex] =\dfrac{1}{[xx]}\left\{1+x\left(y+\dfrac{1}{y}\right)+x^4\left(yy+\dfrac{1}{yy}\right)+x^9\left(y^3+\dfrac{1}{y^3}\right)+\ldots\right\},\end{array}\right.$$

$$\text{etc.}+x^{(\omega-1)^2}+x^{\omega\omega}+x^{(\omega+1)^2}+\text{etc.}=\frac{[xx]\ldots 1+x^{2\omega+3}.1+x^{2\omega+1}.1+x^{2\omega-1}.1+x^{2\omega-3}\ldots}{x^{-\omega\omega}.x^{2\omega-1}.x^{2\omega-3}\ldots}.$$

[5.]

Aus einem allgemeinern Theorem abzuleiten, s. u. [art. 12]

$$\left\{1+x\left(y+\frac{1}{y}\right)+x^4\left(yy+\frac{1}{yy}\right)\ldots\right\}.\left\{1-x\left(y+\frac{1}{y}\right)+x^4\left(yy+\frac{1}{yy}\right)\ldots\right\}$$
$$=(1-2xx+2x^8-2x^{18}\ldots)\left\{1-xx\left(yy+\frac{1}{yy}\right)+x^8\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right)\ldots\right\}$$

$$\left\{\left(y+\frac{1}{y}\right)x+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)x^9+\left(y^5+\frac{1}{y^5}\right)x^{25}\ldots\right\}\left\{1+x^4\left(yy+\frac{1}{yy}\right)+x^{16}\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right)\ldots\right\}$$
$$=\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{9}{2}}+x^{\frac{25}{2}}+x^{\frac{49}{2}}\ldots\right)\left\{\left(y+\frac{1}{y}\right)x^{\frac{1}{2}}+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)x^{\frac{9}{2}}+\text{etc.}\right\}$$

$$\left\{1+x\left(y+\frac{1}{y}\right)+x^4\left(yy+\frac{1}{yy}\right)\ldots\right\}^2+\left\{1-x\left(y+\frac{1}{y}\right)+x^4\left(yy+\frac{1}{yy}\right)\ldots\right\}^2$$
$$=2(1+2xx+2x^8+2x^{18}\ldots)\left\{1+xx\left(yy+\frac{1}{yy}\right)+x^8\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right)\ldots\right\}$$

$$\left\{\left(y+\frac{1}{y}\right)x+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)x^9+\left(y^5+\frac{1}{y^5}\right)x^{25}\ldots\right\}^2+\left\{1+x^4\left(yy+\frac{1}{yy}\right)+x^{16}\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right)+\ldots\right\}^2$$
$$=(1+2xx+2x^8+2x^{18}\ldots)\left\{1+xx\left(yy+\frac{1}{yy}\right)+x^8\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right)\cdots\right\}$$

$$\left\{1+x\left(y+\frac{1}{y}\right)+x^4\left(yy+\frac{1}{yy}\right)\cdots\right\}^4-\left\{1-x\left(y+\frac{1}{y}\right)+x^4\left(yy+\frac{1}{yy}\right)\cdots\right\}^4$$
$$=8\left(x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{9}{4}}+x^{\frac{25}{4}}\ldots\right)^3\left\{\left(y+\frac{1}{y}\right)x^{\frac{1}{4}}+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)x^{\frac{9}{4}}+\text{etc.}\right\}\ [*)]$$

$$\left\{1+x\left(yy+\frac{1}{yy}\right)+x^4\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right)\cdots\right\}^4-\left\{\left(y+\frac{1}{y}\right)x^{\frac{1}{4}}+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)x^{\frac{9}{4}}+\ldots\right\}^4$$
$$=(1-2x+2x^4-2x^9\ldots)^3\left\{1-x\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right)+x^4\left(y^{16}+\frac{1}{y^{16}}\right)-\text{etc.}\right\}$$

$$☾\left\{\begin{aligned}&\left\{\left(y-\frac{1}{y}\right)x-\left(y^3-\frac{1}{y^3}\right)x^9+\left(y^5-\frac{1}{y^5}\right)x^{25}\ldots\right\}\\&\cdot\left\{\left(y+\frac{1}{y}\right)x+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)x^9+\left(y^5+\frac{1}{y^5}\right)x^{25}\ldots\right\}\\&=(1-2x^8+2x^{32}\ldots)\left\{\left(yy-\frac{1}{yy}\right)xx-\left(y^6-\frac{1}{y^6}\right)x^{18}+\text{etc.}\right\}\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\left(y-\frac{1}{y}\right)x-\left(y^3-\frac{1}{y^3}\right)x^9+\left(y^5-\frac{1}{y^5}\right)x^{25}\ldots\right\}^2$$
$$+\left\{\left(y+\frac{1}{y}\right)x+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)x^9+\left(y^5+\frac{1}{y^5}\right)x^{25}\ldots\right\}^2$$
$$=2(1+2x^8+2x^{32}\ldots)\left\{\left(yy+\frac{1}{yy}\right)xx+\left(y^6+\frac{1}{y^6}\right)x^{18}+\text{etc.}\right\}$$

$$-\left\{\left(y-\frac{1}{y}\right)x-\left(y^3-\frac{1}{y^3}\right)x^9+\left(y^5-\frac{1}{y^5}\right)x^{25}\ldots\right\}^2$$
$$+\left\{\left(y+\frac{1}{y}\right)x+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)y^9+\left(y^5+\frac{1}{y^5}\right)x^{25}+\ldots\right\}^2$$
$$=4(x^2+x^{18}+x^{50}\ldots)\left\{1+\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right)x^8+\left(y^8+\frac{1}{y^8}\right)x^{32}\ldots\right\}$$

[*) In der Handschrift steht rechts vom Gleichheitszeichen im zweiten Faktor $x^{\frac{9}{2}}$ statt $x^{\frac{9}{4}}$].

[6.]

[S. 44]

Durch Induction haben wir gefunden:

$$1 + x + x^5 + x^8 + x^{16} + x^{21} + x^{33} \dots$$
$$= (1+x)(1+x^5)(1-x^6)(1+x^7)(1+x^{11})(1-x^{12})(1+x^{13})(1+x^{17})(1-x^{18})(1+x^{19})$$
$$= \frac{[xx]^2[x^3][x^{12}]}{[x][x^4][x^6]} = \frac{[x^6]^2[-x]}{[-x^3][xx]}$$
$$= (1 - x^3 - x^9 + x^{18} + x^{30}\dots)(1+x)(1+x^3)(1+x^5)\dots,$$

$$\left(1 + \left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right)x^9 + \left(y^6 + \frac{1}{y^6}\right)x^{36} + \text{etc.}\right)\left(\frac{1}{y}x + yyx^4 + \frac{1}{y^4}x^{16} + y^5x^{25} + \dots\right)$$
$$\cdot\left(yx + \frac{1}{yy}x^4 + y^4x^{16} + \frac{1}{y^5}x^{25} + \dots\right) = \left(1 + \left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right)x^3 + \left(y^6 + \frac{1}{y^6}\right)x^{12} + \dots\right)\frac{xx[x^{18}]^3}{[x^6]},$$

Factor

$$\frac{[x^{18}]^3}{[x^6]} = \frac{(1-x^{18})(1-x^{18})(1-x^{36})(1-x^{36})\dots}{(1-x^6)(1-x^{12})(1-x^{24})(1-x^{30})\dots}.$$

Also

$$(1 - 2x^{36} + 2x^{144} - \dots)$$
$$\cdot\{(x - x^{25} - x^{49} + x^{121} + \text{etc.})^2 + (x^4 - x^{16} - x^{64} + x^{100} + x^{196} - \text{etc.})^2\}$$
$$= (1 - 2x^{12} + 2x^{48} - 2x^{108} + \text{etc.})\frac{xx[x^{18}]^3}{[x^6]}.$$

$$\frac{[x^{36}]^2}{[x^{72}]}\left\{[x^{24}]^2 + x^6\frac{[x^{12}]^2[x^{72}]^4}{[x^{36}]^2[x^{24}]^2}\right\} = \frac{[x^{12}]^2[x^{18}]^3}{[x^{24}][x^6]}.$$

Also

$$\frac{[x][x^4]^3[x^6]^2}{[xx]^2[x^3]^3[x^{12}]} + x\frac{[x][x^{12}]^3}{[x^3]^3[x^4]} = 1;$$
$$[x^2]^{24} = 16x[x]^8[x^4]^{16} + [x]^{16}[x^4]^8.$$

[7.]

Durch Induction ferner gefunden:

$$[6]\left\{\begin{aligned} & 1 + x + x^2 + x^5 + x^7 + x^{12} + x^{15} + \dots \\ & = (1+x)(1+x^2)(1-x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1-x^6)(1+x^7)(1+x^8)(1-x^9)\dots \\ & = \frac{(1-x^3)(1-x^6)(1-x^9)(1-x^{12})(1-x^{15})(1-x^{18})\dots}{(1-x)(1-x^5)(1-x^7)(1-x^{11})(1-x^{13})(1-x^{17})\dots} = \frac{[xx][x^3]^2}{[x][x^6]}\end{aligned}\right.$$

$$\frac{4x\,(2)^3(6)(12)^2}{(1)(3)(4)^2} = \frac{(2)^{10}}{(1)^4(4)^4} - \frac{(6)^{16}}{(3)^4(12)^4}\,[^*)]$$

$$-4x\,[(1)]\frac{(3)(12)^3}{(4)(6)^2} = \frac{(1)^4}{(2)^2} - \frac{(3)^4}{(6)^2}\,[^{**})].$$

[8.]

[S. 45]

Durch Induction gefunden:

$$[7]\left\{\begin{aligned} &(1+2x+2x^4+2x^9+\ldots)+(1+2x^3+2x^{12}+2x^{27}+\ldots)\\ &= 2(1+x)(1+x^3)(1+x^5)(1+x^7)\ldots\times(1-x^5)(1-x^7)(1-x^{17})(1-x^{19})\ldots\\ &\qquad\qquad\times(1-x^{12})(1-x^{24})(1-x^{36})\ldots\\ &= \frac{2[xx]^2[x^{12}]}{[x][x^4]}\times(1-x^5)(1-x^7)(1-x^{17})(1-x^{19})\ldots \end{aligned}\right.$$

$$[8]\left\{\begin{aligned} &(1+2x+2x^4+2x^9+\ldots)-(1+2x^3+2x^{12}+2x^{27}+\ldots)\\ &= 2x(1+x)(1+x^3)(1+x^5)(1+x^7)\ldots\times(1-x)(1-x^{11})(1-x^{13})(1-x^{23})\ldots\\ &\qquad\qquad\times(1-x^{12})(1-x^{24})\ldots\\ &= \frac{2x[xx]^2[x^{12}]}{[x][x^4]}(1-x)(1-x^{11})(1-x^{13})(1-x^{23})\ldots \end{aligned}\right.$$

[9.]

Durch Induction gefunden:

$$\varepsilon-\varepsilon\varepsilon=\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} &\{1+2x+2x^4+2x^9+\cdots\}+(\varepsilon-\varepsilon\varepsilon)\{1+2x^3+2x^{12}+2x^{27}+\cdots\}\\ &= -2\varepsilon\varepsilon(1-\varepsilon x)(1-\varepsilon\varepsilon x^3)(1-\varepsilon x^5)(1-\varepsilon\varepsilon x^7)\ldots(1+x^3)(1+x^9)(1+x^{15})(1+x^{21})\ldots\\ &\qquad\times(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{12})\ldots \end{aligned}$$

Dieselbe Summe wäre demnach

$$\begin{aligned} &= -2\varepsilon\varepsilon\{1-\varepsilon x-\varepsilon\varepsilon x^3+\varepsilon\varepsilon x^6+\varepsilon x^{10}-x^{15}-x^{21}+\varepsilon x^{28}+\varepsilon\varepsilon x^{36}-\text{etc.}\}\\ &\qquad\cdot(1+x^3)(1+x^9)(1+x^{15})\ldots\\ &= \frac{2}{x^{\frac{1}{8}}}\{-\varepsilon\varepsilon x^{\frac{1}{8}}+x^{\frac{9}{8}}+\varepsilon x^{\frac{25}{8}}-\varepsilon x^{\frac{49}{8}}-x^{\frac{81}{8}}+\varepsilon\varepsilon x^{\frac{121}{8}}-\text{etc.}\}(1+x^3)(1+x^9)(1+x^{15})\text{ etc.} \end{aligned}$$

[*) Hier ist $(n) = [x^n]$ gesetzt.]

[**) In der Handschrift fehlt links vom Gleichheitszeichen der Faktor (1).]

Woraus folgt

$$1.\quad 1+2x+2x^4+2x^9+\text{etc.} = \frac{1}{x^{\frac{1}{8}}}\left\{x^{\frac{1}{8}}+2x^{\frac{9}{8}}-x^{\frac{25}{8}}+x^{\frac{49}{8}}-2x^{\frac{81}{8}}-\cdots\right\} .\,(1+x^3)(1+x^9)(1+x^{15})\ldots$$

$$2.\quad 1+2x^3+2x^{12}+2x^{27}+\text{etc.} = \frac{1}{x^{\frac{1}{8}}}\left\{x^{\frac{1}{8}}+x^{\frac{25}{8}}-x^{\frac{49}{8}}-x^{\frac{121}{8}}+x^{\frac{169}{8}}+\cdots\right\} .\,(1+x^3)(1+x^9)(1+x^{15})\ldots\text{[*)]}$$

$$\text{Factor communis} = \frac{[x^6]^2}{[x^3][x^{12}]}.$$

Auch scheint zu seyn

$$[9]\quad \left\{\begin{aligned} &1+2x^9+2x^{36}+\text{etc.}\\ &=\frac{1}{x^{\frac{1}{8}}}\left\{x^{\frac{1}{8}}-x^{\frac{25}{8}}+x^{\frac{49}{8}}-x^{\frac{121}{8}}-x^{\frac{169}{8}}\ldots\right\}(1+x^3)(1+x^9)(1+x^{15})\ldots\end{aligned}\right.$$

$$[10]\quad \left\{\begin{aligned} &x+x^4+x^{16}+x^{25}+\text{etc.}\\ &=\frac{1}{x^{\frac{1}{8}}}\left\{x^{\frac{9}{8}}-x^{\frac{81}{8}}-x^{\frac{225}{8}}+x^{\frac{441}{8}}+x^{\frac{729}{8}}-\cdots\right\}(1+x^3)(1+x^9)(1+x^{15})\ldots\\ &=x\frac{[x^6]^2[x^9][x^{36}]}{[x^3][x^{12}][x^{18}]},\end{aligned}\right.$$

folglich

$$1-x-x^3+x^6+\text{etc.} = \frac{[x][x^4]}{[xx]},$$

wie gehörig.

Ist alles bewiesen.

[10.]

Durch Induction gefunden:

$$(1+2x+2x^4+2x^9+\cdots)-(1+2x^5+2x^{20}+\cdots)$$
$$=2x\,(1+x^3)(1+x^{13})(1+x^{23})\ldots(1+x^7)(1+x^{17})\ldots(1-x^4)(1+x^8)(1+x^{12})\ldots$$
$$.\,(1-x^{10})(1-x^{20})\ldots\text{**)}$$

[*) In der Handschrift steht $-x^{\frac{169}{8}}-\cdots$.]

**) $(1-x^4)(1+x^8)(1+x^{12})\ldots$ ist
$(1-x^4)(1-x^{36})(1-x^{44})(1-x^{76})\ldots(1+x^8)(1+x^{12})(1+x^{28})(1+x^{32})\ldots.$

$$\begin{aligned}(1+2x+2x^4+2x^9+\ldots)+(1+2x^5+2x^{20}+\ldots)\\ =2(1+x)(1+x^9)(1+x^{11})(1+x^{19})(1+x^{21})\ldots\\ .(1+x^4)(1-x^{12})(1+x^{16})(1+x^{24})(1-x^{10})(1-x^{20})\ldots\text{*)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{9}{4}}+x^{\frac{25}{4}}+x^{\frac{49}{4}}+\ldots)+(x^{\frac{5}{4}}+x^{\frac{45}{4}}+\ldots)\\ =x^{\frac{1}{4}}(1+x)(1-x^3)(1-x^7)(1+x^9)(1+x^{11})\ldots\\ .(1+xx)(1+x^4)(1+x^6)(1+x^8)(1-x^{10})(1+x^{12})\ldots\end{aligned}$$

[11.]

[S. 46]

Zum Beweise der letztern Gleichung scheint folgendes brauchbar:

$$(1+xy)(1-x^3y)\left(1-\frac{x^7}{y}\right)\left(1+\frac{x^9}{y}\right)(1+x^{11}y)(1-x^{13}y)\left(1-\frac{x^{17}}{y}\right)\left(1-\frac{x^{19}}{y}\right)\ldots$$

wird entwickelt in

$$P\left\{\begin{array}{llll}1-x^4yy & +x^{28}y^4 & -x^{72}y^6 & +\ldots\\ -\frac{x^{16}}{yy} & +\frac{x^{52}}{y^4} & -\frac{x^{108}}{y^6} & +\ldots\end{array}\right\}+Q\left\{y-\frac{x^6}{y}\begin{array}{lll}-x^{14}y^3 & +x^{48}y^5 & -\ldots\\ +\frac{x^{32}}{y^3} & -\frac{x^{78}}{y^5} & +\ldots\end{array}\right\}$$

wo P und Q blosse Functionen von x.

Setzt man $y=x^3$, so verschwindet der in Q multiplicirte Theil, und man hat

$$(1-x^8)(1-x^{12})(1-x^{28})(1-x^{32})\ldots=P(1-2x^{10}+2x^{40}-2x^{90}\text{ etc.}).$$

Also

$$P=\frac{[x^{20}]}{[x^{10}]^2}(1-x^8)(1-x^{12})(1-x^{28})(1-x^{32})\ldots$$

Setzt man hingegen

$$y=-\frac{1}{x},$$

so verschwindet das erste Product, und man hat

---

*) besser: $(1+x)\dfrac{1+x^3}{1-x^3}(1+x^4)(1+x^6)\dfrac{1+x^7}{1-x^7}(1+x^9)(1-x^{10})(1+x^{11})\dfrac{1+x^{13}}{1-x^{13}}(1+x^{14})$ etc.

$$P(1-xx-x^{18}+x^{24}+x^{56}-x^{66}\ldots) = \frac{Q}{x}(1-x^8-x^{12}+x^{36}+x^{44}-\ldots).$$

Nun ist hier

der Factor von $P\ldots\ldots[x^{20}](1-x^2)(1-x^{18})(1-x^{22})(1-x^{38})\ldots$

der Factor von $\frac{Q}{x}\ldots\ldots[x^{20}](1-x^8)(1-x^{12})(1-x^{28})(1-x^{32})\ldots,$

folglich

$$Q = \frac{x[x^{20}]}{[x^{10}]^2}(1-x^2)(1-x^{18})(1-x^{22})(1-x^{38})\ldots$$

Setzt man also

$$(1+x)(1-x^3)(1-x^7)(1+x^9)\cdots = t,$$
$$(1-x)(1+x^3)(1+x^7)(1-x^9)\cdots = u,$$

so hat man

$$t = P(1-x^4-x^{16}+x^{28}+x^{52}-\text{etc.}) + Q(1-x^6-x^{14}+x^{32}+x^{48}-\text{etc.})$$

und

$$u = P(1-x^4-x^{16}+x^{28}+x^{52}-\text{etc.}) - Q(1-x^6-x^{14}+x^{32}+x^{48}-\text{etc.}),$$

also

$$t+u = 2P(1-x^4-x^{16}+x^{28}+x^{52}-\text{etc.}) = 2P[x^{20}](1-x^4)(1-x^{16})(1-x^{24})(1-x^{36})\ldots$$
$$= \frac{2[x^{20}][x^4]}{[x^{10}]^2} = \frac{2}{x^{\frac{1}{4}}}\frac{[x^{20}][xx]}{[x^{10}]^2[x^4]}\times\{x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{9}{4}}+\text{etc.}\},$$

$$t-u = 2Q(1-x^6-x^{14}+x^{32}+x^{48}-\text{etc.}) = 2Q[x^{20}](1-x^6)(1-x^{14})(1-x^{26})(1-x^{34})\ldots$$
$$= \frac{2x[x^{20}]^3}{[x^{10}]^3}\frac{[xx]}{[x^4]} = \frac{2}{x^{\frac{1}{4}}}\frac{[x^{20}]}{[x^{10}]^2}\frac{[xx]}{[x^4]}\times\{x^{\frac{5}{4}}+x^{\frac{45}{4}}+\ldots\}.$$

Woraus dann das gedachte Theorem [siehe die letzte Gleichung des art. 10.] von selbst folgt.

[12.]

[S. 47]

Zum Beweise der ersteren Sätze hingegen wird man sich auf folgende Art verhalten.

$$(1-xy)(1+xxy)\left(1+\frac{x^8}{y}\right)\left(1-\frac{x^9}{y}\right)(1-x^{11}y)(1+x^{12}y)\text{ etc.}$$

wird entwickelt in

$$P\left\{\begin{matrix} 1-x^3yy+x^{26}y^4-x^{69}y^6+\cdots \\ -\frac{x^{17}}{yy}\quad+\frac{x^{54}}{y^4}\quad-\frac{x^{111}}{y^6}\quad+\cdots \end{matrix}\right\}+Q\left\{\begin{matrix} y-x^{13}y^3+x^{46}y^5-\cdots \\ -\frac{x^7}{y}+\frac{x^{34}}{y^3}\quad-\frac{x^{81}}{y^5}\quad+\cdots \end{matrix}\right\}$$

wo P und Q bloss Functionen von x sind. Um diese zu bestimmen, setzen wir erst $y=x^{\frac{7}{2}}$. wodurch

$$(1-x^9)(1-x^{11})(1-x^{29})(1-x^{31})\cdots = P(1-2x^{10}+2x^{40}-\cdots) = P\frac{[x^{10}]^2}{[x^{20}]}.$$

Zweitens setzen wir

$$y=\frac{1}{x},$$

so wird

$$P\{1-x-x^{19}+x^{22}+x^{58}\cdots\}+\frac{Q}{x}\{1-x^9-x^{11}+x^{38}+x^{42}-x^{87}\cdots\} = 0,\ [^*)]$$

also

$$Q=-xP\frac{(1-x)(1-x^{19})(1-x^{21})\cdots}{(1-x^9)(1-x^{11})(1-x^{29})\cdots} = -x\left[\frac{[x^{20}]}{[x^{10}]^2}\right](1-x)(1-x^{19})(1-x^{21})\cdots$$

Setzen wir also

$$(1-x)(1+xx)(1+x^8)(1-x^9)\cdots = t$$
$$(1-x^3)(1+x^4)(1+x^6)(1-x^7)\cdots = u,$$

so hat man (aus $y=1$ und $y=xx$)

[*) In der Handschrift steht x^{67} statt x^{87}.]

$$t = P(1 - x^3 - x^{17} + x^{26} + x^{54} - \cdots) + Q(1 - x^7 - x^{13} + \cdots)$$
$$u = P(1 - x^7 - x^{13} + x^{34} + x^{46} - \cdots) + Qxx(1 - x^3 - x^{17} + x^{26} + x^{54} \cdots).$$

Man findet aber auch durch ein ganz ähnliches Verfahren

$$(1 - x^3 y)(1 + x^4 y)\left(1 + \frac{x^6}{y}\right)\left(1 - \frac{x^7}{y}\right) \cdots$$
$$= P\left(1 - x^7 yy - \frac{x^{13}}{yy} \begin{matrix} + x^{34} y^4 \cdots \\ + \frac{x^{46}}{y^4} \cdots \end{matrix}\right) + Qxx \left(\begin{matrix} y - x^{17} y^3 + \cdots \\ - \frac{x^3}{y} + \frac{x^{26}}{y^3} \quad - \cdots \end{matrix}\right).$$

Hieraus folgt

$$tx + u = (P + Qx)\{1 + x - x^4 - x^7 - x^{13} - x^{18} + x^{27} + x^{34} \cdots\}$$
$$-tx + u = (P - Qx)\{1 - x + x^4 - x^7 - x^{13} + x^{18} - x^{27} + x^{34} \cdots\}$$

oder

$$tx + u = (P + Qx)[-x^5](1 + x)(1 - x^4)(1 - x^6)(1 + x^9) \cdots$$
$$u - tx = (P - Qx)[-x^5](1 - x)(1 + x^4)(1 + x^6)(1 - x^9) \cdots$$

Nun ist ferner

$$(P + Qx)(1 - x - x^{19} + x^{22} + \cdots) = -\frac{Q}{x}(1 - xx + x^3 - x^9 - x^{11} + x^{21} + x^{24} \cdots)$$
$$= -\frac{Q}{x}[-x^5](1 - xx)(1 + x^3)(1 + x^7)(1 - x^8) \cdots$$

$$(P - Qx)(1 - x - x^{19} + x^{22} + \cdots) = -\frac{Q}{x}(1 + xx - x^3 - x^9 - x^{11} - x^{21} + x^{24} \cdots)$$
$$= -\frac{Q}{x}[-x^5](1 + xx)(1 - x^3)(1 - x^7)(1 + x^8) \cdots,$$

also

$$P + Qx = \frac{[-x^5]}{[x^{10}]^2}(1 - xx)(1 + x^3)(1 + x^7)(1 - x^8) \cdots$$
$$P - Qx = \frac{[-x^5]}{[x^{10}]^2}(1 + xx)(1 - x^3)(1 - x^7)(1 + x^8) \cdots$$

$$tx + u = (1 + x^5)^2(1 + x^{15})^2 \cdots$$
$$\cdot (1 + x)(1 - xx)(1 + x^3)(1 - x^4)(1 - x^6)(1 + x^7)(1 - x^8)(1 + x^9) \cdots$$

$$u-tx = (1+x^5)^2(1+x^{15})^2\cdots$$
$$.(1-x)(1+xx)(1-x^3)(1+x^4)(1+x^6)(1-x^7)(1+x^8)(1-x^9)\cdots$$

[S. 48]

Hieraus folgt

$$tx+u = \frac{[xx]^3}{[x][x^4]}\cdot\frac{[x^{10}]}{[x^5][x^{20}]} = \frac{[x][x^4]}{[xx]^2}\,\frac{[x^{10}]}{[x^5][x^{20}]}(1+2x+2x^4+2x^9\ldots)$$
$$u-tx = \frac{[x][x^4]}{[xx]^2}\cdot\frac{[x^{10}]^6}{[x^5]^3[x^{20}]^3} = \frac{[x][x^4]}{[xx]^2}\,\frac{[x^{10}]}{[x^5][x^{20}]}(1+2x^5+2x^{20}+2x^{45}\ldots).$$

Woraus das Theorem [die beiden ersten Gleichungen von art. 10., S. 297, 298] von selbst folgt.

[13.]

Zu den Hauptsätzen in dieser Theorie gehört folgendes Theorem. Bezeichnet man

$$\left(e^{-\frac{P\alpha}{24}} - e^{-\frac{25P\alpha}{24}} - e^{-\frac{49P\alpha}{24}} + e^{-\frac{121P\alpha}{24}} + e^{-\frac{169P\alpha}{24}} - \ldots\right)\sqrt[4]{\alpha} \text{ durch } \varphi\alpha,$$

so ist

$$\varphi\alpha = \varphi\frac{1}{\alpha}.$$

Diese Function ist ein Maximum für $\alpha = 1$, wo ihr Werth

$$= 0{,}7682255, \quad \log\ldots\ 9{,}8854887;$$

das Quadrat [ist =] 0,5901704, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ dadurch dividirt

$$= 1{,}19814 = \frac{\pi}{\varpi}\,[*)].$$

[*)] Das obige Maximum [ist] also

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{2}\sqrt{1{,}19814\ldots}}.$$

Hier das numerische:

						doppelt	halb
log P	0,798179868358	1	9,8863019705	0,7696654	0,5923848	0,8773058
log M	9,6377843114	25	7,1575492622	14373 1	21	− 379118
C. log 24 . . .	8,619788758288	49	4,4287965540	26 8		− 16383
	9,055752938046	121	6,2425384293	0,7682254	9,7726024	+ 1
Zahl	0,11369802951			9,8854887	0,0752575	0,8377558
					9,8478599	0,0752575
						9,9231174
						9,8478599

Ferner ist

$$(\varphi 2\lambda)^{24} = 4(\varphi\lambda)^8(\varphi 4\lambda)^8\{(\varphi\lambda)^8 + (\varphi 4\lambda)^8\}$$

$$\varphi\alpha = e^{-\frac{\alpha}{24}P}\sqrt[4]{\alpha}(1-e^{-\alpha P})(1-e^{-2\alpha P})(1-e^{-3\alpha P})\ldots$$

oder

$$[x] = \frac{\varphi\frac{-\log x}{P}\cdot\sqrt[24]{\frac{1}{x}}}{\sqrt[4]{\frac{-\log x}{P}}}.$$

Es sei

$$(1+xy)(1+x^3y)(1+x^5y)\ldots\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{x^3}{y}\right)\left(1+\frac{x^5}{y}\right)\cdots = F(x,y),$$

so ist

$$F\left(e^{-\frac{1}{2}\alpha P}, e^{P\omega\sqrt{\alpha}}\right)e^{-\frac{P}{24\alpha}} = F\left(e^{-\frac{1}{2}\frac{P}{\alpha}}, e^{iP\omega\sqrt{\frac{1}{\alpha}}}\right)e^{-\frac{P\alpha}{24}}\cdot e^{\frac{1}{2}P\omega\omega}\;[*)].$$

[14.]

[S. 49]

Ist ε eine Wurzel der Gleichung $x^5-1=0$, also

$$\varepsilon - \varepsilon\varepsilon - \varepsilon^3 + \varepsilon^4 = \sqrt{5},$$

so wird, weil

$$\frac{2}{1+\sqrt{5}} = \varepsilon + \varepsilon^4, \quad \frac{2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = 2 - \varepsilon - \varepsilon^4,$$

$$(1+2x+2x^4+\cdots)+\sqrt{5}(1+2x^5+2x^{20}+\ldots)$$
$$= 2(1+\sqrt{5})\frac{[xx]^2[x^5][x^{20}]}{[x][x^4][x^{10}]}\cdot\{u - tx(1-\varepsilon-\varepsilon^4)\}.$$

Das Product

$$(1+\varepsilon y)(1-x\varepsilon\varepsilon y)\left(1-\frac{x\varepsilon^3}{y}\right)(1+xx\varepsilon y)\left(1+\frac{xx\varepsilon^4}{y}\right)(1-x^3\varepsilon\varepsilon y)\left(1-\frac{x^3\varepsilon^3}{y}\right)$$
$$\cdot(1+x^4\varepsilon y)\left(1+\frac{x^4\varepsilon^4}{y^6}\right) \text{ etc.}$$

[*)] So ist, $\log x \log x' = \pi\pi$ gesetzt,

$$x^{\frac{1}{12}+\omega\omega}F(x,x^{2\omega}) = F(x',e^{-iP\omega})x'^{\frac{1}{12}}.$$

hat die Form

$$M\left(1-x\varepsilon^3yy-\frac{x^3\varepsilon\varepsilon}{yy}+x^6\varepsilon^6y^4+\frac{x^{10}\varepsilon^4}{y^4}-x^{15}\varepsilon^9y^6-\frac{x^{21}\varepsilon^6}{y^6}+\text{etc.}\right)$$
$$+N\left(y-\frac{x\varepsilon\varepsilon}{y}-x^3\varepsilon^3y^3+\frac{x^6\varepsilon^4}{y^3}+x^{10}\varepsilon^6y^5-\frac{x^{15}\varepsilon^6}{y^5}\cdots\right).$$

Man setze

$$y=\varepsilon\sqrt{x},$$

so wird der Factor von N gleich 0, also

$$(1-\varepsilon^4x)(1-\varepsilon x^3)(1-\varepsilon^4x^5)(1-\varepsilon x^7)\cdots=M(1-2xx+2x^8-2x^{18}\cdots)=M\frac{[xx]^2}{[x^4]}.$$

Man setze ferner

$$y=-\varepsilon^4,$$

so wird

$$0=M(1-\varepsilon x-\varepsilon^4x^3+\varepsilon\varepsilon x^6+\varepsilon^3x^{10}-\text{etc.})-N\varepsilon^4(1-\varepsilon^4x-\varepsilon x^3+\varepsilon^3x^6+\varepsilon^2x^{10}-\text{etc.}).$$

Daraus

$$(1-\varepsilon x)(1-\varepsilon^4x^3)(1-\varepsilon x^5)(1-\varepsilon^4x^7)\cdots=N\varepsilon^4\frac{[xx]^2}{[x^4]},$$

also

$$M=\frac{1}{[xx]^2}(1-\varepsilon^4x-\varepsilon x^3+\varepsilon^3x^6\cdots),$$

$$N=\frac{\varepsilon}{[xx]^2}(1-\varepsilon x-\varepsilon^4x^3+\varepsilon\varepsilon x^6\cdots),$$

$$M+N\varepsilon=\frac{1}{[xx]^2}\{1+\varepsilon\varepsilon-(\varepsilon^4+\varepsilon^3)x\cdots\}.$$

Setzt man also

$$(1-x\varepsilon\varepsilon)(1-x\varepsilon^3)(1+xx\varepsilon)(1+xx\varepsilon^4)(1-x^3\varepsilon\varepsilon)(1-x^3\varepsilon^3)\cdots=m,$$
$$(1-x\varepsilon)(1-x\varepsilon^4)(1+xx\varepsilon\varepsilon)(1+xx\varepsilon^3)(1-x^3\varepsilon)(1-x^3\varepsilon^4)\cdots=n,$$

so ist aus

$$y=1,\quad y=\varepsilon\varepsilon$$

$$(1+\varepsilon)m=M(1-x\varepsilon^3-x^3\varepsilon\varepsilon+x^6\varepsilon^6+x^{10}\varepsilon^4-\cdots)$$
$$+N(1-x\varepsilon\varepsilon-x^3\varepsilon^3+x^6\varepsilon^4+x^{10}\varepsilon^6-\cdots),$$

$$(1+\varepsilon^3)n=M(1-x\varepsilon\varepsilon-x^3\varepsilon^3+x^6\varepsilon^4+x^{10}\varepsilon^6-\cdots)$$
$$+N\varepsilon\varepsilon(1-x\varepsilon^3-x^3\varepsilon\varepsilon+x^6\varepsilon^6+x^{10}\varepsilon^4-\cdots),$$

$$(\varepsilon+\varepsilon\varepsilon)m+(1+\varepsilon^3)n=(M+N\varepsilon)\{1+\varepsilon-x(\varepsilon\varepsilon+\varepsilon^4)-2x^3\varepsilon^3+x^6(\varepsilon^4+\varepsilon\varepsilon)$$
$$+x^{10}(\varepsilon^6+1)\ldots\}$$
$$-(\varepsilon+\varepsilon\varepsilon)m+(1+\varepsilon^3)n=(M-N\varepsilon)\{1-\varepsilon-x(\varepsilon\varepsilon-\varepsilon^4)+\ldots\}.$$

Die in $M+N\varepsilon$ multiplicirte Reihe ist

$$=1+ix^{\frac{1}{2}}\left\{ix^{\frac{1}{2}}\varepsilon^4+\frac{1}{ix^{\frac{1}{2}}\varepsilon^4}\right\}+x^2\left\{-x\varepsilon^3+\frac{1}{-x\varepsilon^3}\right\}+\cdots$$
$$=[-x](1+\varepsilon)(1-\varepsilon x)(1-\varepsilon^4x)(1+\varepsilon xx)(1+\varepsilon^4xx)(1-\varepsilon x^3)(1-\varepsilon^4x^3)\cdots$$

Ferner hat man

$$(1-\varepsilon x-\varepsilon^4x^3\ldots)(M+N\varepsilon)=N\begin{pmatrix}\varepsilon^4-\varepsilon^3x-x^3+\varepsilon^2x^6\ldots\\+\varepsilon-\varepsilon\varepsilon x-x^3+\varepsilon^3x^6\ldots\end{pmatrix}$$
$$=\varepsilon N\left(1+ix^{\frac{1}{2}}\left(i\varepsilon\varepsilon x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{i\varepsilon\varepsilon x^{\frac{1}{2}}}\right)+\cdots\right)$$
$$=\varepsilon N[-x](1+x^3)(1-\varepsilon^3x)(1-\varepsilon^2x)(1+\varepsilon^3xx)\ldots\text{[*)]},$$

also

$$(\varepsilon+\varepsilon\varepsilon)m+(1+\varepsilon^3)n=(1+\varepsilon+\varepsilon\varepsilon+\varepsilon^3)\frac{[xx]^4}{[x]^2[x^4]^2}\cdot\frac{1-x^5}{1-x}\cdot\frac{1+x^{10}}{1+xx}\cdot\frac{1-x^{15}}{1-x^3}\cdot\frac{1+x^{20}}{1+x^4}\cdots$$

oder

$$(\varepsilon\varepsilon+\varepsilon^3)m+(\varepsilon+\varepsilon^4)n=(\varepsilon+\varepsilon\varepsilon+\varepsilon^3+\varepsilon^4)\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

[S. 50]

Ebenso ist die Reihe, in welche $M-N\varepsilon$ multiplicirt ist, die folgende

$$[-x](1-\varepsilon)(1+\varepsilon x)(1+\varepsilon^4x)(1-\varepsilon xx)(1-\varepsilon^4xx)\ldots;$$

ferner hat man

$$(1-\varepsilon x-\varepsilon^4x^3\ldots)(M-N\varepsilon)=(\varepsilon^4-\varepsilon)N[-x](1+\varepsilon^3x)(1+\varepsilon^2x)(1-\varepsilon^3xx)(1-\varepsilon^2xx)\ldots,$$

also

$$-(\varepsilon^2+\varepsilon^3)m+(\varepsilon+\varepsilon^4)n=\frac{[xx]^4}{[x]^2[x^4]^2}(\varepsilon-\varepsilon\varepsilon-\varepsilon^3+\varepsilon^4)\frac{1+x^5}{1+x}\cdot\frac{1-x^{10}}{1-x^2}\cdot\frac{1+x^{15}}{1+x^3}\cdots\text{[**)]}$$

[*) In der Handschrift steht vor dem Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung das Vorzeichen $-$.]

[**) In der Handschrift steht rechter Hand $\varepsilon-\varepsilon\varepsilon-\varepsilon\varepsilon+\varepsilon^4$.]

Wir haben folglich

$$(\varepsilon\varepsilon+\varepsilon^3)m+(\varepsilon+\varepsilon^4)n=(\varepsilon+\varepsilon\varepsilon+\varepsilon^3+\varepsilon^4)\frac{[xx][x^5][x^{20}]}{[x][x^4][x^{10}]^2}(1+2x+2x^4+2x^9+\ldots),$$

$$-(\varepsilon\varepsilon+\varepsilon^3)m+(\varepsilon+\varepsilon^4)n=(\varepsilon-\varepsilon\varepsilon-\varepsilon^3+\varepsilon^4)\frac{[xx][x^5][x^{20}]}{[x][x^4][x^{10}]^2}(1+2x^5+2x^{20}+2x^{45}+\ldots),$$

also

$$(1+2x+2x^4+2x^9+\ldots)+(\varepsilon-\varepsilon\varepsilon-\varepsilon^3+\varepsilon^4)(1+2x^5+2x^{20}+\ldots)$$
$$=-2(\varepsilon\varepsilon+\varepsilon^3)m\frac{[x^4][x][x^{10}]^2}{[xx][x^5][x^{20}]},$$

$$(1+2x+2x^4+2x^9+\ldots)-(\varepsilon-\varepsilon\varepsilon-\varepsilon^3+\varepsilon^4)(1+2x^5+2x^{20}+\ldots)$$
$$=-2(\varepsilon+\varepsilon^4)n\frac{[x^4][x][x^{10}]^2}{[xx][x^5][x^{20}]}.$$

Also Product

$$(1+2x+\ldots)^2-5(1+2x^5+\ldots)^2=-4\frac{1-x^5}{1-x}\cdot\frac{1+x^{10}}{1+xx}\cdot\frac{1-x^{15}}{1-x^3}\cdots\frac{[x]^2[x^{10}]^4}{[x^5]^2[x^{20}]^2}\left[\frac{[x^4]^2}{[xx]^2}\right]$$
$$=-4\frac{[x][x^4][x^{10}]^2}{[x^5][x^{20}]}[^*)].$$

[15.]

Die Siebentheilung führt auf folgende Gleichung

$$b=\left(\frac{1-2x+2x^4-\cdots}{1+2x+2x^4+\cdots}\right)^2$$
$$A=\left(\frac{1+2x^7+2x^{28}+\cdots}{1+2x+2x^4+\cdots}\right)^2$$
$$B=\left(\frac{1-2x^7+2x^{28}-\cdots}{1+2x+2x^4+\cdots}\right)^2$$

[*)] Bedeutet salvo calc[uli] err[ore]

$$5PP-pp=4\sqrt[6]{ppq^5\left(\frac{r}{2}\right)^5\frac{PP}{Q\frac{R}{2}}}$$

$$5QQ-qq=\left[4\sqrt[6]{qqp^5\left(\frac{r}{2}\right)^5\frac{QQ}{P\frac{R}{2}}}\right]$$

$$\frac{5PP-pp}{5QQ-qq}=\sqrt{\frac{q}{p}\,\frac{P}{Q}}.$$

$$A^8 - \frac{4}{7}A^6 + \frac{16-32bb}{49}A^5 - \frac{30}{343}A^4 + \frac{32-64bb}{2401}A^3 - \frac{20+768bb-768b^4}{16807}A^2$$
$$+ \frac{48-2144bb+6144b^4-4096b^6}{823543}A - \frac{1}{823543} = 0$$

$$B^8 - \frac{4}{7}bbB^6 + \frac{16b^3-32b}{49}B^5 - \frac{30b^4}{343}B^4 + \frac{32b^5-64b^3}{2401}B^3 - \frac{20b^6+768b^4-768b^2}{16807}B^2$$
$$+ \frac{48b^4-2144b^5+6144b^3-4096b}{823543}[B] - \frac{1}{823543} = 0.$$

Wenn man in der ersten Gleichung statt bb, $1-bb$ und statt A, $-A$ setzt, so wird sie nicht geändert.

[16.]

[S. 51]

Für die Dreitheilung hat man

$$a \qquad b \qquad \frac{b}{a} = t$$
$$A \qquad B \qquad \frac{B}{A} = T$$

1) $$T^4 + (12t - 16t^3)T^3 + 6ttT^3 - (16t - 12t^3)T + t^4 = 0$$

oder

$$(T-t)^4 = 16(t-t^3)(T-T^3)$$

$$\frac{A}{a} = \frac{3t - t^3 + T(1-3tt)}{3\{T(1-tt) + t(1-TT)\}}.$$

Setzt man

$$T = \operatorname{tang} H^2, \quad t = \operatorname{tang} h^2,$$

so ist

$$\cos(h+H) = \sqrt[4]{\cos 2h \,.\, \cos 2H}$$
$$\sin(h+H) = \sqrt[4]{\sin 2h \,.\, \sin 2H}.$$

Setzt man

$$T = \operatorname{tang} N, \quad t = \operatorname{tang} n,$$

so ist

$$3\sin(2N-2n)^2 = 4\sin(N+3n)\,.\,\sin(3N+n)$$
$$\sin(N-n)^4 = \sin 4n \,.\, \sin 4N$$

$$\frac{A\cos n}{a\cos N} = \frac{B\sin n}{b\sin N} = \frac{2\sin(N+3n)}{3\sin(2N-2n)} = \frac{\sin(2N-2n)}{2\sin(3N+n)}.$$

[II.]

[LÖSUNG DES UMKEHRPROBLEMS FÜR DAS ELLIPTISCHE INTEGRAL ERSTER GATTUNG.]

[Aus Handbuch 16, Bb, Den astronomischen Wissenschaften gewidmet, November 1801, S. 111—112]

Setzt man

$$1+2x\cos\varphi+2x^4\cos 2\varphi+2x^9\cos 3\varphi+2x^{16}\cos 4\varphi+\text{etc.}=P,$$

$$\frac{dP}{d\varphi}=P',\quad \frac{dP'}{d\varphi}=P'',$$

so wird

$$P'P'-PP''$$

$$=(4xx+16x^8+36x^{18}+64x^{32}+\text{etc.})(1+2xx\cos 2\varphi+2x^4\cos 4\varphi+\text{etc.})$$

$$+(2x^{\frac{1}{2}}+18x^{\frac{9}{2}}+50x^{\frac{25}{2}}+98x^{\frac{49}{2}}+\ldots)(x^{\frac{1}{2}}\cos\varphi+x^{\frac{9}{2}}\cos 3\varphi+x^{\frac{25}{2}}\cos 5\varphi+\text{etc.}).$$

Ferner

$$PP=(1+2xx+2x^8+2x^{18}+\text{etc.})(1+2xx\cos 2\varphi+2x^8\cos 4\varphi+\text{etc.})$$

$$+(4x^{\frac{1}{2}}+4x^{\frac{9}{2}}+4x^{\frac{25}{2}}+4x^{\frac{49}{2}}+\text{etc.})(x^{\frac{1}{2}}\cos\varphi+x^{\frac{9}{2}}\cos 3\varphi+x^{\frac{25}{2}}\cos 5\varphi+\text{etc.}).$$

Noch

$$2x^{\frac{1}{2}}\cos\varphi+2x^{\frac{9}{2}}\cos 3\varphi+2x^{\frac{25}{2}}\cos 5\varphi+2x^{\frac{49}{2}}\cos 7\varphi+\text{etc.}=B$$

gesetzt,

$$BB=$$

$$(2x+2x^9+2x^{25}+2x^{49}+\text{etc.})(1+2x^4\cos 4\varphi+2x^{16}\cos 8\varphi+2x^{36}\cos 12\varphi+\text{etc.})$$

$$+(1+2x^4+2x^{16}+2x^{36}+\text{etc.})(2x\cos 2\varphi+2x^9\cos 6\varphi+2x^{25}\cos 10\varphi+\text{etc.})$$

oder besser

$$R = 2x^{\frac{1}{4}} \sin \tfrac{1}{2}\varphi - 2x^{\frac{9}{4}} \sin \tfrac{3}{2}\varphi + 2x^{\frac{25}{4}} \sin \tfrac{5}{2}\varphi - 2x^{\frac{49}{4}} \sin \tfrac{7}{2}\varphi + \text{etc.}$$

gesetzt, wird

$$RR = (2x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{9}{2}} + 2x^{\frac{25}{2}} + 2x^{\frac{49}{2}} + \text{etc.})(1 + 2xx\cos 2\varphi + 2x^8 \cos 4\varphi + \text{etc.})$$
$$-(1 + 2xx + 2x^8 + 2x^{18} + \text{etc.})(2x^{\frac{1}{2}} \cos\varphi + 2x^{\frac{9}{2}} \cos 3\varphi + 2x^{\frac{25}{2}} \cos 5\varphi$$
$$+ 2x^{\frac{49}{2}} \cos 7\varphi + \text{etc.})$$

und

$$R'R' - RR''$$
$$= \tfrac{1}{2}(2x^{\frac{1}{2}} + 18x^{\frac{9}{2}} + 50x^{\frac{25}{2}} + 98x^{\frac{49}{2}} + \text{etc.})(1 + 2xx\cos 2\varphi + 2x^8 \cos 4\varphi$$
$$+ 2x^{18} \cos 6\varphi + \text{etc.})$$
$$-(4xx + 16x^8 + 36x^{18} + 64x^{32} + \text{etc.})(2x^{\frac{1}{2}} \cos\varphi + 2x^{\frac{9}{2}} \cos 3\varphi + 2x^{\frac{25}{2}} \cos 5\varphi + \text{etc.}).$$

Setzt man also

$$1 + 2xx\cos 2\varphi + 2x^8 \cos 4\varphi + \text{etc.} = p, \quad 1 + 2xx + 2x^8 + \text{etc.} = a,$$
$$\frac{x\,\partial a}{\partial x} = a',$$
$$2x^{\frac{1}{2}} \cos\varphi + 2x^{\frac{9}{2}} \cos 3\varphi + \text{etc.} = r, \quad 2x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{9}{2}} + \text{etc.} = b,$$
$$\frac{x\,\partial b}{\partial x} = b',$$

so wird

$$P'P' - PP'' = a'p + b'r, \qquad PP = ap + br,$$
$$R'R' - RR'' = b'p - a'r, \qquad RR = bp - ar,$$
$$P^4 + R^4 = (aa + bb)(pp + rr)$$
$$= (aa + bb)^{\frac{3}{2}}(1 + 2x\cos 2\varphi + 2x^4 \cos 4\varphi + 2x^9 \cos 6\varphi + \text{etc.}),$$
$$P'P' - PP'' = \frac{aa' + bb'}{aa + bb} PP - \frac{ab' + ba'}{aa + bb} RR,$$
$$R'R' - RR'' = \frac{ab' - ba'}{aa + bb} PP + \frac{aa' + bb'}{aa + bb} RR,$$
$$aa + bb = (1 + 2x + 2x^4 + \text{etc.})^2,$$
$$aa' + bb' = (1 + 2x + 2x^4 + \text{etc.})(2x + 8x^4 + \text{etc.}).$$

Hier ist noch zu bemerken (wovon jedoch der Beweis tiefer liegt)

$$ab' - ba' = \tfrac{1}{2}\, ab\,(a^4 - b^4),$$

also

$$\frac{P'P'-PP''}{PP} - \frac{R'R'-RR''}{RR} = -\frac{1}{2}\left(\frac{PP}{RR} + \frac{RR}{PP}\right) ab\,(aa - bb).$$

Noch findet man

$$PR' - RP' = (x^{\frac{1}{8}} + 3x^{\frac{9}{8}} - 5x^{\frac{25}{8}} - 7x^{\frac{49}{8}} + 9x^{\frac{81}{8}} + \ldots)$$
$$.(x^{\frac{1}{8}}\cos\tfrac{1}{2}\varphi - x^{\frac{9}{8}}\cos\tfrac{3}{2}\varphi - x^{\frac{25}{8}}\cos\tfrac{5}{2}\varphi + x^{\frac{49}{8}}\cos\tfrac{7}{2}\varphi + \text{etc.}).$$

Das Quadrat des zweiten Factors im andern Theile der vorstehenden Gleichung wird

$$= \tfrac{1}{2}(x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{9}{4}} + x^{\frac{25}{4}} + x^{\frac{49}{4}} + \text{etc.})(1 - 2x\cos 2\varphi + 2x^4\cos 4\varphi - 2x^9\cos 6\varphi + \text{etc.})$$
$$+ \tfrac{1}{2}(1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + \text{etc.})(x^{\frac{1}{4}}\cos\varphi + x^{\frac{9}{4}}\cos 3\varphi + x^{\frac{25}{4}}\cos 5\varphi$$
$$+ x^{\frac{49}{4}}\cos 7\varphi\,[+\text{etc.}]).$$

Der erste Factor wird

$$= (aa + bb)\sqrt[4]{\frac{(aa-bb)ab}{2}}\ ?$$

Zusammen wird reductis reducendis

$$(PR' - RP')^2 = \tfrac{1}{4}(aa + bb)(ap - br)(bp + ar)$$
$$= \tfrac{1}{4}((aa - bb)PP + 2abRR)(2abPP - (aa - bb)RR).$$

Setzt man also

$$\frac{R}{P}\sqrt{\frac{aa-bb}{2ab}} = \sin\theta,$$

so wird

$$\partial\varphi = \frac{2\,\partial\theta}{\sqrt{\{(aa-bb)^2\cos\theta^2 + (aa+bb)^2\sin\theta^2\}}},$$

$$\cos\theta = \frac{2x^{\frac{1}{4}}\cos\frac{1}{2}\varphi + 2x^{\frac{9}{4}}\cos\frac{3}{2}\varphi + 2x^{\frac{25}{4}}\cos\frac{5}{2}\varphi + \text{etc.}}{P}\sqrt{\frac{aa+bb}{2ab}}.$$

[III.]

[IN DEN KLEINSTEN TEILEN ÄHNLICHE ABBILDUNG DER FLÄCHE EINER ELLIPSE AUF DIE FLÄCHE EINES KREISES.]

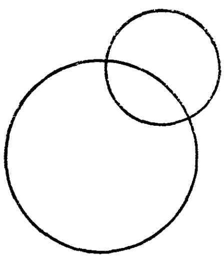
[Aus Handbuch 19, Be, Kleine Aufsätze aus verschiedenen Theilen der Mathematik, Angefangen im May 1809.]

[S 172]

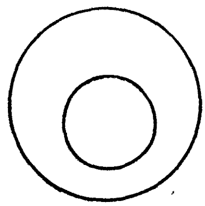
Anziehung in der Ebne, umgekehrt dem Abstande proport[ional].

Es sei eine in sich selbst zurückkehrende Linie $= L$ aufgegeben. Man wünscht allgemein, jede andere L' zu bestimmen, so dass der Flächenring zwischen beiden gar keine Anziehung auf den innern Raum bewirke.

$_*$ Die allgemeine Auflösung kommt darauf an, dass, die Coordinaten jedes Punctes in L durch x, y ferner $x+yi$ durch t und eine unbestimmte Grösse durch φ und $\cos\varphi + i \sin\varphi$ durch ε bezeichnet, t in der Gestalt einer Function von ε dargestellt werde, $t = f\varepsilon$. Es ist dann allgemein, t' die $x'+iy'$ in L' bezeichnend, $t' = af\varepsilon$. *



$_{**}$ Schönes Theorem. Wenn eine in sich zurück-k[ehrende] Linie L in jedem Puncte des unendlichen Raumes dieselbe Anziehung ausübt, wie eine andere Linie L', und beide einander schneiden, so gilt jene Gleichheit auch innerhalb des gemeinschaftlichen Raumes.



Vielleicht etwas ähnliches auch wenn sie sich nicht schneiden sondern nur einschliessen? ** [*)]

[*) In der Handschrift ist der oben zwischen $_*$ * gesetzte Absatz mit Bleistift, der zwischen $_{**}$ ** gesetzte mit Tinte durchstrichen.]

[2.]

[S. 173]

Die Puncte einer Ellipse werden durch

$$2t = (a+b)\varepsilon + (a-b)\varepsilon^{-1}$$

dargestellt.

Hier wird t durch die Gleichung bestimmt

$$(t+\sqrt{(tt-(aa-bb))})^n \pm (t-\sqrt{(tt-(aa-bb))})^n$$
$$= (a+b)^n \pm (a-b)^n.$$

[3.]

[S. 176]

Es sein x,y indef[inite] die Coordinaten der Puncte einer Ellipse, deren Halbaxen $= a, b$ und $x+yi = T$, ferner

$$\frac{aa-bb}{2(aa+bb)} = k.$$

Es sei ferner t Function eines unbestimmten Winkels $= \cos\varphi + i\sin\varphi$. Man soll T in die Form

[1] $$t + At^3 + Bt^5 + Ct^7 \ldots$$

bringen.

Setzt man $x-yi = T'$, so wird

[2] $$T' = t^{-1} + At^{-3} + Bt^{-5} + Ct^{-7} \ldots$$

und die Coefficienten werden bestimmt durch die Gl[eichung]

[3] $$k(TT + T'T') = TT' - \frac{2aabb}{aa+bb}.$$

Es findet sich

$$\begin{aligned}
T = {} & t \\
& + t^3(k - 2k^3 + 3k^5 - k^7 \\
& + t^5(2kk - 9k^4 + 24k^6 - 35k^8 \\
& + t^7(5k^3 - 36k^5 + 142k^7 - 348k^9 \\
& + t^9(14k^4 - 140k^6 + 740k^8 \\
& + t^{11}(42k^5 - 540k^7 + 3600k^9 \\
& + t^{13}(132k^6 - 2079k^8 + 16786k^{10} \\
& + t^{15}(429k^7 - 8008k^9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t = {} & T - T^3(k - 2k^3 + 3k^5 - k^7 \\
& + T^5(k^2 - 3k^4 + 6k^6 - 7k^8 \\
& - T^7(k^3 - 4k^5 + 10k^7 - 24k^9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
TT = {} & tt \\
& + t^4(2k - 4k^3 + 6k^5 - 2k^7 \\
& + t^6(5kk - 22k^4 + 58k^6 - 84k^8 \\
& + t^8(14k^3 - 98k^5 + 380k^7 - 920k^9 \\
& + t^{10}(42k^4 - 408k^6 + 2115k^8 \\
& + t^{12}(132k^5 - 1650k^7 + 10780k^9 \\
& + t^{14}(429k^6 - 6578k^8 \\
& + t^{16}(1430k^7 - 26026k^9 \\
& + t^{18}(4862k^8 \\
& + t^{20}(16796k^9
\end{aligned}$$

[S. 177]

Die erste senkrechte Reihe in T ist

$$= \frac{1-(1-4ktt)^{\frac{1}{2}}}{2kt},$$

die zweite

$$= \frac{1-(1-2ktt-2kkt^4)(1-4ktt)^{-\frac{1}{2}}}{2t^3},$$

die dritte

$$= \frac{k}{t^5}\{1 - ktt - (1 - 7ktt + 12kkt^4 - 2k^3t^6 - k^4t^8).(1 - 4ktt)^{-\frac{3}{2}}\}.$$

Es wird hier der constante Theil von TT'

$$= 1 + kk \quad * \quad - k^6 - k^8 + k^{10} \ldots$$
$$= 1 : (1 - kk + k^4 \quad * \quad * \quad - k^{10} \ldots$$

[4.]

Es wird gut sein, anstatt k einzuführen

[4] $$\lambda = \frac{a-b}{a+b},$$
$$k = \frac{\lambda}{1+\lambda\lambda},$$
$$\lambda = k + k^3 + 2k^5 + 5k^7 + 14k^9 + 42k^{11} \ldots = \frac{1-\sqrt{(1-4kk)}}{2k}.$$

[5] $$\left\{\begin{aligned} T = t &+ t^3(\lambda - 3\lambda^3 + 10\lambda^5 - 29\lambda^7 + 73\lambda^9 - \\ &+ t^5(2\lambda\lambda - 13\lambda^4 + 66\lambda^6 - 277\lambda^8 + 1007\lambda^{10} + \\ &+ t^7(5\lambda^3 - 51\lambda^5 + 352\lambda^7 - 1932\lambda^9 + \\ &+ t^9(14\lambda^4 - 196\lambda^6 + 1720\lambda^8 - 11\,665\lambda^{10} - \\ &+ t^{11}(42\lambda^5 - 750\lambda^7 + 8010\lambda^9 - \\ &+ t^{13}(132\lambda^6 - 2871\lambda^8 + 36\,190\lambda^{10} - \\ &+ t^{15}(429\lambda^7 - 11\,011\lambda^9 + \end{aligned}\right.$$

$$t = T - T^3(\lambda - 3\lambda^3 + 10\lambda^5 - 29\lambda^7$$
$$+ T^5(\lambda^2 - 5\lambda^4 + 21\lambda^6 - 77\lambda^8$$

[5a] $$[T] = (1 + 2\lambda\lambda + \lambda^4 + 2\lambda^6 + 2\lambda^8 + \overset{*}{\ldots})(u + \lambda u^{-1}),$$

wenn

[6] $$u = \cos E + i \sin E,$$

E excentrische Anomalie.

Hieraus

$$t = u + \lambda(u^{-1} - u^3) + \lambda\lambda(-u + u^5) + \lambda^3(-u^{-1} + 2u^3 - u^7)$$
$$+ \lambda^4(-u^{-3} + 2u - 2u^5 + u^9) \ldots$$

wie auch

[7] $$\left\{\begin{aligned} \log t = \log u &+ \lambda(u^{-2} - u^2) + \lambda\lambda(-\tfrac{1}{2}u^{-4} + \tfrac{1}{2}u^4) + \\ &+ \lambda^3(\tfrac{1}{3}u^{-6} - u^{-2} + u^2 - \tfrac{1}{3}u^6) + \lambda^4(-\tfrac{1}{4}u^{-8} + \tfrac{1}{4}u^8) \;\ldots \end{aligned}\right.$$

$$u = t + \lambda(t^3 - t^{-1}) + \lambda\lambda(2t^5 - t - t^{-3}) + \lambda^3(5t^7 - 4t^3 + t^{-1} - 2t^{-5})$$
$$+ \lambda^4(14t^9 - 15t^5 + 2t + 4t^{-3} - 5t^{-7}) \ldots$$

$$\log u = \log t + \lambda(t^2 - t^{-2}) + \lambda\lambda\left(\frac{3}{2}t^4 - \frac{3}{2}t^{-4}\right)$$
$$+ \lambda^3\left(\frac{10}{3}t^6 - 2t^2 + 2t^{-2} - \frac{10}{3}t^{-6}\right) + \lambda^4\left(\frac{35}{4}t^8 - 8t^4 + 8t^{-4} - \frac{35}{4}t^{-8}\right).$$

Gesetz gefunden 1839 Oct. 9. S[iehe] u[nten] S. 222 [*)].

[S. 222]

Gründe auf denen die Reihen S. 176, 177 beruhen.

[5.]

Für die Ellipse, deren halbe grosse und kleine Axe $1+\lambda$, $1-\lambda$ ist, sei der complexe Ausdruck eines unbestimmten Punkts

[8] $$(1+\lambda)\cos e + (1-\lambda)\sin e \,.\, i = u + \lambda u^{-1}.$$

Für einen zweiten Punkt seien E, U dasselbe, was e, u für jenen. Der Logarithme der Entfernung ist also der reelle Theil von

$$\log(U-u) + \log\left(1 - \frac{\lambda u^{-1}}{U}\right)$$

oder von

$$\frac{u}{U} - \frac{1}{2}\frac{uu}{UU} - \frac{1}{3}\frac{u^3}{U^3}\ldots$$
$$-\frac{\lambda}{uU} - \frac{1}{2}\frac{\lambda\lambda}{uuUU} - \frac{1}{3}\frac{\lambda^3}{u^3U^3}\ldots \text{[**)]},$$

folglich

[9] $$\left\{\begin{aligned} &= -\cos(E-e) - \tfrac{1}{2}\cos 2(E-e) - \tfrac{1}{3}\cos 3(E-e) - \text{etc.} \\ &\quad -\lambda\cos(E+e) - \tfrac{1}{2}\lambda\lambda\cos 2(E+e) - \tfrac{1}{3}\lambda^3\cos 3(E+e) - \text{etc.}\end{aligned}\right.$$

Ist auf der Peripherie der Ellipse die Masse $2\pi A$ so vertheilt, dass auf jedes Element die Masse

---

[*) Es folgen noch die Entwicklungen von T, TT und TT' nach Potenzen von λ, in denen die Koeffizienten bis zu λ^{10} einschließlich berechnet sind.]

[**)] Der Kunstgriff bleibt anwendbar, wenn die zwei Punkte in verschiedenen Ellipsen mit gleichen Brennpunkten liegen.

[10] $$de\left\{\begin{array}{l} A+A'\cos e+A''\cos 2e+A'''\cos 3e+\text{etc.} \\ +B'\sin e+B''\sin 2e+B'''\sin 3e+ \end{array}\right\}$$

kommt, so ist das Potential einer Masse, in dem Punkte der Ellipse, auf den sich E bezieht,

[11] $$-\pi\left\{\begin{array}{l} (1+\lambda)A'\cos E+\tfrac{1}{2}(1+\lambda\lambda)A''\cos 2E+\tfrac{1}{3}(1+\lambda^3)A'''\cos 3E+\cdots \\ +(1-\lambda)B'\sin E+\tfrac{1}{2}(1-\lambda\lambda)B''\sin 2E+\tfrac{1}{3}(1-\lambda^3)B'''\cos 3E \end{array}\right\}$$

Ist hingegen dieselbe Masse im Centrum concentrirt, so ist das Potential der reelle Theil von

$$2\pi A\log(U+\lambda U^{-1}),$$

[also]

[12] $$=2\pi A(\lambda\cos 2E-\tfrac{1}{2}\lambda\lambda\cos 4E+\tfrac{1}{3}\lambda^3\cos 6E-\cdots).$$

[S. 223]

Damit beide Potentiale gleich gross sein, muss bei der Vertheilung auf jedes Element der Peripherie der Ellipse kommen die Masse

[13] $$A\,de.\left(1-\frac{4\lambda}{1+\lambda\lambda}\cos 2e+\frac{4\lambda\lambda}{1+\lambda^4}\cos 4e-\frac{4\lambda^3}{1+\lambda^6}\cos 6e\ldots\right);$$

wird diese Masse $=A\,dp$ gesetzt und p von $e=0$ an gezählt, so ist

$$p=e-\frac{2\lambda}{1+\lambda\lambda}\sin 2e+\frac{2}{2}\cdot\frac{\lambda\lambda}{1+\lambda^4}\sin 4e-\frac{2}{3}\cdot\frac{\lambda^3}{1+\lambda^6}\sin 6e\ldots$$

welches mit der Formel S. 177 [der Handschrift, siehe Gleichung [7], oben S. 314] übereinstimmt, wenn ip den imaginären Theil von $\log t$ bedeutet.

[6.]

Ist [log] t die Differenz, wenn man von dem vollständigen Potential (d. i. imaginären Theil mit gerechnet) der im Centrum concentrirten Masse das vollständige Potential der auf die Ellipse vertheilten Masse subtrahirt, beide in dem Punkte geltend, dessen complexe Zahl $u+\frac{\lambda}{u}$ ist, so wird

[14] $$\log t = \log u - \frac{\lambda}{1+\lambda\lambda}(uu - u^{-2}) + \frac{1}{2}\frac{\lambda\lambda}{1+\lambda^4}(u^4 - u^{-4}) - \frac{1}{3}\frac{\lambda^3}{1+\lambda^6}(u^6 - u^{-6}) \text{ u.s.w.},$$

welches die obige Reihe selbst ist. [Siehe die Gl. [7], oben S. 314].

Hieraus ferner

[15] $$t = u \cdot \frac{1+\lambda u^{-2}}{1+\lambda uu} \cdot \frac{1+\lambda^3 uu}{1+\lambda^3 u^{-2}} \cdot \frac{1+\lambda^5 u^{-2}}{1+\lambda^5 uu} \cdot \text{etc.}$$

Man kann t auch folgende Form geben, wobei

$$\mu\mu = \lambda$$

gesetzt ist,

[16] $$t = \frac{1+\mu^4\left(\frac{1}{\mu\mu uu} + \mu\mu uu\right) + \mu^{16}\left(\frac{1}{\mu^4 u^4} + \mu^4 u^4\right) + \cdots}{\mu\left(\frac{1}{\mu u} + \mu u\right) + \mu^9\left(\frac{1}{\mu^3 u^3} + \mu^3 u^3\right) + \mu^{25}\left(\frac{1}{\mu^5 u^5} + \mu^5 u^5\right) + \cdots}$$
$$= u\frac{1+\mu\mu u^{-2} + \mu^6 u^2 + \mu^{12} u^{-4} + \mu^{20} u^4 + \cdots}{1+\mu\mu u^2 + \mu^6 u^{-2} + \mu^{12} u^4 + \mu^{20} u^{-4} + \cdots}.$$

[S. 224]

Noch zierlicher setze man

$$u = \lambda^\alpha.$$

Es ist dann

[17] $$t = \frac{\sum \lambda^{\frac{1}{8}(4n+1+2\alpha)^2}}{\sum \lambda^{\frac{1}{8}(4n-1+2\alpha)^2}},$$

wo für n alle ganzen Zahlen positiv, negativ und 0 eingeschlossen zu setzen sind.

Daraus folgt,

$$t = f(\lambda, u)$$

gesetzt,

$$f(\lambda, \lambda u) f(\lambda, u) = 1.$$

Die allgemeine Gleichung ist

[18] $$\frac{dt}{\sqrt{(aa+bbtt)}\sqrt{(bb-aatt)}} = \frac{idu}{u} = \frac{dT}{\sqrt{(4\lambda - TT)}},$$

wo h mit λ oder μ durch die Gleichung zusammenhängt

[19] $$h = \left(\frac{2\mu + 2\mu^9 + 2\mu^{25} + \cdots}{1 + 2\mu^4 + 2\mu^{16} + \cdots}\right)^2 = \frac{bb}{aa},$$ *bedarf Berichtigung* [*)]

[und] wo

[20] $$ab = 2\,(\mu^{\frac{1}{2}} + \mu^{\frac{9}{2}} + \mu^{\frac{25}{2}} + \cdots)^2.$$

[7.]

Der Zusammenhang zwischen t und T, wenn anstatt T S. 176 [der Handschrift, oben S. 312, vergl. die Gl. [5a], S. 314] T' geschrieben

[21] $$T' = T(1 + 2\lambda\lambda + \lambda^4 + 2\lambda^6 + 2\lambda^8 + \cdots),$$

ist enthalten in

[22] $$\log\frac{T}{t} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1 - \frac{4\lambda}{1+\lambda\lambda}\cos 2e + \frac{4\lambda\lambda}{1+\lambda^4}\cos 4e - \frac{4\lambda^3}{1+\lambda^6}\cos 6e \ldots\right) . \log(u + \lambda u^{-1} - T) \,.\, de.$$

Der von T unabhängige Theil des Integrals ist

[23] $$\left\{\begin{aligned} & -\frac{2\lambda\lambda}{1+\lambda\lambda} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2\lambda^4}{1+\lambda^4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2\lambda^6}{1+\lambda^6} + \text{etc.} \\ & = 2\log\left\{\frac{1-\lambda\lambda}{1-\lambda^4}\cdot\frac{1-\lambda^6}{1-\lambda^8}\cdot\frac{1-\lambda^{10}}{1-\lambda^{12}}\cdots\right\} = 2\log\left\{\frac{1}{1+\lambda\lambda+\lambda^6+\lambda^{12}+\lambda^{20}+\lambda^{30}\ldots}\right\}. \end{aligned}\right.$$

[S. 225]

Setzt man

[24] $$t = AT + BT^3 + CT^5 + \cdots,$$

wo nicht zu vergessen ist, dass $A, B, C\ldots$ und T hier andere Bedeutung haben als oben S. 176 [der Handschrift, oben S. 312], so ist

[25] $$\left\{\begin{aligned} A &= (1 + \lambda\lambda + \lambda^6 + \lambda^{12} + \lambda^{20} + \lambda^{30}\ldots)^2 \\ &= 1 + 2\lambda\lambda + \lambda^4 + 2\lambda^6 + 2\lambda^8 + \cdots, \end{aligned}\right.$$ *Ist die Reihe* $*$ *S. 177* [Gl. [5a], oben S. 314]

wo der Coefficient von λ^{2n} einfach mit der Anzahl der Zerlegungen von $4n+1$ in zwei Quadrate zusammenhängt [**)],

[*) Siehe art. [8.], unten S. 319.]

[**) Die Handschrift hat »abhängt«.]

$$B = -A\left(\frac{\lambda}{1+\lambda\lambda}+\frac{2\lambda^3}{1+\lambda^4}+\frac{3\lambda^5}{1+\lambda^6}+\cdots\right)$$
$$= -A\left(\frac{\lambda}{(1-\lambda\lambda)^2}-\frac{\lambda^3}{(1-\lambda^4)^2}+\frac{\lambda^5}{(1-\lambda^6)^2}-\cdots\right)$$
$$= -A\,\frac{d\log((1+\lambda\lambda)(1+\lambda^4)(1+\lambda^6)\ldots)}{2d\lambda}$$
$$= -A\,\frac{d\log A}{12d\lambda}+\frac{A\,d\log(1-2\lambda\lambda+2\lambda^8-2\lambda^{18}\ldots)}{6d\lambda}$$
$$= -A\{\lambda+\lambda^3+4\lambda^5+\lambda^7+6\lambda^9+4\lambda^{11}+8\lambda^{13}+\lambda^{15}+\cdots\},$$

die Coefficienten von λ^{2n+1} sind hier aequal dem Aggregat aller ungeraden Divisoren von $2n+2$.

Es ist auch

$$B = -A\left(\frac{\lambda}{1-\lambda\lambda}+\frac{3\lambda^5}{1-\lambda^6}+\frac{5\lambda^9}{1-\lambda^{10}}+\frac{7\lambda^{13}}{1-\lambda^{14}}\cdots\right)$$
$$= +A\,\frac{d\log(1-\lambda\lambda)(1-\lambda^6)(1-\lambda^{10})\ldots}{2d\lambda},$$
$$\frac{B}{A^3} = \lambda-3\lambda^3+10\lambda^5-29\lambda^7\ldots$$

[8.]

[S. 226]

Das berichtigte Resultat[*)] in einfachster Form ist, $\mu\mu=\lambda$ [gesetzt,]

[19a] $$\begin{cases} 1+2\mu^4+2\mu^{16}+2\mu^{36}+\cdots = a\\ 2\mu+2\mu^9+2\mu^{25}+\cdots = b\end{cases}$$

[18a] $$\int\frac{dt}{\sqrt{(aa-bbtt)(bb-aatt)}} = \int\frac{dT}{\sqrt{(4\mu\mu-TT)}}\;[^{**})],$$

also

[26] $$\begin{cases} t+\frac{1}{6}\left(\frac{bb}{aa}+\frac{aa}{bb}\right)t^3+\left(\frac{3}{40}\,\frac{b^4}{a^4}+\frac{1}{20}+\frac{3}{40}\,\frac{a^4}{b^4}\right)t^5+\cdots\\ \qquad = \frac{ab}{2\mu}\left\{T+\frac{1}{24\mu\mu}\,T^3+\frac{3}{640\mu^4}\,T^5+\cdots\right\},\end{cases}$$

also erste Glieder

[27] $$T = \frac{2\mu}{ab}\left\{t+\frac{a^4+b^4-1}{6aabb}\,t^3+\cdots\right\}.$$

[*) Siehe die Gleichungen [18], [19], [20], oben S. 317, 318.]

[**) In der Handschrift fehlt rechts vom Gleichheitszeichen das Integralzeichen.]

Auch wird aus dem S. 223 [der Handschrift] gegebenen Product-Ausdruck [Gleichung [15], oben S. 317], wenn man zuerst

$$u = \mu x$$

schreibt, woraus

$$x + \frac{1}{x} = \frac{T}{\mu}$$

wird, leicht abgeleitet

$$t = T\frac{(1-\mu^4)^2+\mu^6 TT}{(1-\mu\mu)^2+\mu\mu\, TT}\cdot\frac{(1-\mu^8)^2+\mu^{14} TT}{(1-\mu^6)^2+\mu^{10} TT}\cdot \text{etc.}$$

oder

$$t = \frac{(1-\mu^4)(1-\mu^8)(1-\mu^{12})\ldots}{(1-\mu\mu)(1-\mu^6)(1-\mu^{10})\ldots}\cdot T\cdot\frac{1+\frac{\mu^6}{(1-\mu^4)^2}TT}{1+\frac{\mu\mu}{(1-\mu\mu)^2}TT}\cdot\frac{1+\frac{\mu^{14}}{(1-\mu^8)^2}TT}{1+\frac{\mu^{10}}{(1-\mu^6)^2}TT}\cdots,$$

und hieraus der allgemeine Ausdruck für $\log\frac{t}{T}$ vermittelst einer nach geraden Potenzen von T steigenden Reihe.

BEMERKUNGEN ZUR THEORIE DER TRANSZENDENTEN FUNKTIONEN.

Die hier als Hauptüberschrift gewählten Worte gehören in der Handschrift zu der den Abschnitt [I.] bildenden Abhandlung; wir haben diese mit den Aufzeichungen zusammengefaßt, die in den Abschnitten [II.] und [III.] wiedergegeben sind, weil alle drei Stücke sich auf die Lehre von den elliptischen Funktionen beziehen.

Erläuterungen zu [I] und [II.], S. 287—311.

Der art. [1.] enthält in seinem ersten Teile die Formel für die lineare Transformation der Thetafunktionen; es ist nämlich in neuerer Bezeichnungsweise (vergl oben S. 275)

$$T = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(k+\omega)^2} = e^{-\alpha\omega^2}\vartheta_{00}\left(\frac{\alpha\omega}{\pi i}\,|\,e^{-\alpha}\right)$$

und die Formel [1] lautet

$$[1]' \qquad e^{-\alpha\omega^2}\vartheta_{00}\left(\frac{\alpha\omega}{\pi i}\,|\,e^{-\alpha}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,\vartheta_{00}\left(\omega\,|\,e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}}\right),$$

also, wenn man $e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}} = q = e^{\tau\pi i}$ setzt (vergl. etwa WEBER, *Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen*, Braunschweig 1891, S. 78, Gl. (11)),

$$[1]'' \qquad e^{-\frac{\pi i \omega^2}{\tau}} \vartheta_{00}\left(\frac{\omega}{\tau} \,|\, e^{-\frac{\pi i}{\tau}}\right) = \sqrt{-i\tau}\, \vartheta_{00}\left(\omega \,|\, e^{\tau\pi i}\right).$$

P bedeutet in den Gleichungen des art. [1.], wie auch sonst oft bei GAUSS (siehe z. B. *Disquisitiones arithmeticae,* Werke I, S. 413), den Umfang des Kreises vom Halbmesser Eins. Zu den Formeln selbst vergl. oben S. 223 die Formeln für $p\left(\frac{1}{t}, \frac{iu}{t}\right)$ und für $\sum h^{\alpha n^2 + 2\beta n + \gamma}$.

Die den art. [1.] abschließende Bemerkung über das agM. enthält die auch im art. 16. der *Determinatio attractionis* (1818), Werke III, S. 352 unten, zu findende LANDENsche Transformation. Ihr Auftreten an dieser Stelle zeigt, daß GAUSS die Bedeutung der Gleichung [1] als Transformationsformel wohl erkannt hat.

Die artt. [2.], [3] geben die Umformung der Potenzreihen, deren Exponenten eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden (Thetanullreihen), in Produkte, vergl. schon in der Scheda Ac, oben S. 201, art. [9.]. Im art. [4.] wendet sich GAUSS nach einer Zusammenfassung dieser Umformungsgleichungen zu den von den beiden Veränderlichen x und y abhängenden Reihen und Produkten (Thetafunktionen). Die Gleichung ⧺ ist jene schon in der Scheda Ac (siehe oben S. 204) auftretende berühmte Identität zwischen der Reihen- und der Produktdarstellung der Thetafunktion, vergl. auch die Abhandlung *Zur Theorie der neuen Transscendenten,* Werke III, S. 416, Gl. 6. in Verbindung mit Gl. 9. auf S. 447 (diese Abhandlung stammt aus dem Handbuch 18, Bd, S. 221—223 und ist, da sie der Tagebuchaufzeichnung Nr. 139 entspricht, im Juni 1809 verfaßt). In den artt. [5.]—[10.] werden Transformationsformeln für die allgemeine Thetafunktion durch Induktion aufgestellt und dann in den artt. [11.], [12.] mit Hilfe des jetzt sogenannten HERMITEschen Transformationsprinzips bewiesen, vergl. oben S. 277. Man vergl. zu diesen Formeln auch die bereits erwähnte Abhandlung *Zur Theorie der neuen Transscendenten,* Werke III, S. 446 und die *Hundert Theoreme,* ebenda S. 461 ff. In der letzteren Abhandlung (die wohl aus der Zeit um 1825 stammt) werden für die drei geraden Thetafunktionen »besondere Functionalzeichen eingeführt« (Werke III, S. 465); es ist für $x = q$, $y = e^{2\pi v i}$

$$P(x, y) = \vartheta_{00}(v|q), \quad Q(x, y) = \vartheta_{01}(v|q), \quad R(x, y) = \vartheta_{10}(v|q);$$

zu diesen tritt später (1827, Werke III, S. 472) das Zeichen $S(x, y)$ für die ungerade Thetafunktion. Wir fügen noch für einige der wichtigsten Formeln Verweisungen auf die entsprechenden Stellen der oben genannten späteren Abhandlungen hinzu.

Im art. [3.],	zu [2]	vergl. Werke III, S. 447, Gl. 14. (auch Werke II, S. 20),	
art. [4.],	„ [3]	„ „ „ , S. 447, Gl. 10.,	
	„ [4]	„ „ „ , S. 447, Gl. 11.,	
	„ [5]	„ „ „ , S. 446, Gl. 5.,	
art. [7.],	„ [6]	„ „ „ , S. 449, Gl. 24.,	
art. [8.],	„ [7]	„ „ „ , S. 450, Gl. 36.,	
	„ [8]	„ „ „ , S. 451, Gl. 41.,	
art. [9.],	„ 1.	„ „ „ , S. 450, Gl. 29.,	für $-x$ statt x,
	„ 2.	„ „ „ , S. 450, Gl. 30.,	„ „
	„ [9]	„ „ „ , S. 449, Gl. 28.,	„ „
	„ [10]	„ „ „ , S. 449, Gl. 25. und 27.	

Im art. [13.] bedeutet ϖ die lemniskatische Periode; zu dem daselbst gefundenen Maximalwert $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\sqrt{\frac{\varpi}{\pi}}$ wird man die aus der Scheda Aa stammenden numerischen Werte Werke III, S. 418 art. [8.] vergleichen können. In der Fußnote oben S. 302 ist $M = \log_{10} e$.

Im art. [14.] kommt für die Transformationsformeln mit fünften Einheitswurzeln wieder das sog. HERMITEsche Prinzip zur Anwendung; man wird diese Rechnungen als Vorbereitungen für die Fünfteilung anzusehen haben, die erst in der Abhandlung *Zur Theorie der neuen Transscendenten*, Werke III, S. 456—459 vollständig ausgeführt wird. Die in der Fußnote am Schluß von art. [14.] befindliche Formel hat GAUSS mit Bleistift an den Rand geschrieben, sie stimmt mit der Werke III, S. 475 (vom 29. August 1827, aus demselben Handbuch 16, Bb, S. 140 stammenden) für $5PP-pp$ überein.

Siebenteilung und Dreiteilung werden in den artt. [15.], [16.] ausgeführt.

Im Handbuch 16, Bb, folgen auf S. 51—53 jetzt noch Betrachtungen, die bereits Werke III, S. 442 ff., art. [8.], [9.] ohne wesentliche Auslassungen abgedruckt sind und darum hier nicht noch einmal wiedergegeben werden; dagegen mußten des Zusammenhangs wegen, die art. [1.]—[7.] der Werke III, S. 436 beginnenden Abhandlung, die nur einen Auszug aus dem Text des Handbuchs 16, Bb darstellen, hier mit dem unverkürzten Texte aufs neue abgedruckt werden*).

Die Abfassungszeit dieses Abschnitts [I.] ist, wie SCHERING (Werke III, S. 494, Absatz 3) andeutet, durch eine Mitteilung von GAUSS an SCHUMACHER auf das Jahr 1808 festgelegt. Mit dieser Mitteilung hat es folgende Bewandtnis. Zu der Zeit, wo JACOBIS erster Brief an SCHUMACHER (vom 13. Juni 1827, siehe JACOBIS Werke I, S. 31) in Altona ankam, war GAUSS gerade bei SCHUMACHER zu Besuch (vergl. *Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke* II, 2, Berlin 1909, S. 484, Fußnote). Während der Dauer von GAUSS' Anwesenheit und mit seiner »Approbation« schrieb SCHUMACHER in seinem Antwortschreiben an JACOBI: »GAUSS hat schon im Jahre 1808 die 3 theilung, 5 theilung und 7 theilung entwickelt, und dabei die neuen darauf sich beziehenden Modulscalen gefunden« (siehe den *Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher* II, S. 175, vergl. auch den ersten Brief JACOBIS an LEGENDRE vom 5. August 1827, JACOBIS Werke I, S. 394, ferner LEGENDRE ebenda S. 398, JACOBI ebenda S. 416, LEGENDRE ebenda S. 418, 428). Nun finden wir in den art. [14.], [15.], [16.] unserer Abhandlung Untersuchungen über Fünfteilung, Siebenteilung und Dreiteilung, ferner hat GAUSS am 6. August 1827, also bald nach seiner um den 18 Juli erfolgten Heimkehr von der Reise, auf S. 132 desselben Handbuchs 16, Bb, Aufzeichnungen begonnen, die an die hier in Rede stehenden Untersuchungen anknüpfen, dann allerdings sehr wesentlich darüber hinausgehn. Diese Aufzeichnungen, die sich bis zur S. 145 des Handbuchs erstrecken, sind Werke III, S. 470—480 abgedruckt. Die Angaben von GAUSS, die SCHUMACHER an JACOBI mitgeteilt hat, beziehen sich also sicher auf unsere Abhandlung [I.]. Weiter wird man annehmen können, daß der äußere Anstoß, der GAUSS im Jahre 1808 zur Wiederaufnahme der Arbeiten an der Lehre von den elliptischen Funktionen geführt hat, durch den Brief SCHUMACHERS vom 2. April 1808 (siehe oben S. 242, [4.]) gegeben war. Vergl. den Abschnitt VI. des Aufsatzes »Über GAUSS' Arbeiten zur Funktionentheorie«.

Auf den Seiten 63, 72, 73 des Handbuchs 16, Bb sind Formeln über lemniskatische Funktionen aufgezeichnet, die Werke III, S. 405, 406 untermischt mit älteren, und S. 409 Zeile 5 v. u. bis S. 412 untermischt mit späteren Aufzeichnungen wiedergegeben sind. Sie stehen, wie die Stelle Werke III, S. 412 zeigt, mit zahlentheoretischen Untersuchungen in Verbindung.

Den Seiten 111—112 eben dieses Handbuchs ist der Abschnitt [II.] entnommen, auf den wir schon

---

*) Eine von HATTENDORF angefertigte vollständige Abschrift der Abhandlung [I.] mit vielen dazu gehörigen Rechnungen und noch einigen andern auf den GAUSSschen Nachlaß bezüglichen Aufzeichnungen ist nach HATTENDORFS 1882 erfolgtem Ableben für das GAUSSarchiv erworben worden. Wir haben diese Abschrift beim Abdruck verglichen und konnten ihr einige Verbesserungen der Handschrift entnehmen. Vergl. K. HATTENDORF, *Die elliptischen Functionen in dem Nachlasse von Gauss*, Hannover, 1869. Eine Ableitung für die Werke III, S. 436—415 abgedruckten Formeln der hier in Rede stehenden GAUSSschen Abhandlung gibt P. PEPIN auf S. 94 ff. seiner oben S. 282 genannten Schrift.

oben S. 279 hingewiesen haben*). Dieselbe Rechnung findet sich in etwas gedrängter Darstellung in den erwähnten am 6. August 1827 begonnenen Aufzeichnungen desselben Handbuchs, abgedruckt Werke III, S. 473, art. [5.]. Unser Abschnitt [II.] steht in dem Handbuche nach flächentheoretischen Betrachtungen, die Werke VIII, S. 405—407 abgedruckt sind und die, wie P. STÄCKEL a. a. O., S. 407 bemerkt, 1825 geschrieben sein dürften; in dieses Jahr wäre also auch der Abschnitt [II.] zu setzen. Daß GAUSS aber diese Verifikationsrechnung schon 1800—1801 ausgeführt hat, zeigt nicht nur die Tagebuchnotiz Nr. 108 (vergl. die Erläuterungen zu dieser Notiz in dem unten folgenden Abdruck des *Tagebuchs*), sondern auch der Umstand, daß der hier zur Anwendung gelangende Satz

$$ab'-ba' = \tfrac{1}{2}ab(a^4-b^4),$$

von dem GAUSS (oben S. 310) sagt, daß der Beweis davon tiefer liegt, mit dem *Theorema* der Scheda Af (1801), oben S. 212, identisch ist**).

Erläuterungen zu [III.], S. 311—320.

Diese Abhandlung besteht aus zwei zu verschiedenen Zeiten entstandenen Teilen. Der erste, die artt. [1.]—[4.] und noch einige beim Abdruck weggelassene Formeln enthaltende, steht auf den S. 172—177 des Handbuchs 19, Be; er stammt wohl aus dem Jahre 1834, da auf S. 184 des Handbuchs (gedruckt Werke V, S. 609, art. [7.]) das Datum »1835, Januar 23« steht. Im art. [1.] ist die Aufgabe berührt, für eine geschlossene Linie L, deren Punkte die Koordinaten x, y haben, $x+yi$ als Funktion von $\cos\varphi+i\sin\varphi$ darzustellen, d. h. diese Linie auf den Kreis mit dem Halbmesser Eins abzubilden. In den artt. [3.], [4.] sucht GAUSS für den Fall, wo L eine Ellipse ist, diese Aufgabe in der Weise zu lösen, daß er für $T = x+yi$ die Reihe [1] mit reellen Koeffizienten ansetzt und die Koeffizienten so bestimmt, daß die Reihe [1] und ihr konjugierter Wert [2] in die Gleichung [3], die nichts anderes ist als

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1,$$

eingesetzt, diese für $t = \cos\varphi+i\sin\varphi$ befriedigen. Nach Einführung von λ statt k durch die Gleichung [4] ergibt sich die Entwicklung [5], von der ausgehend dann durch Vermittlung der Gleichung [5 a] der Zusammenhang zwischen t und der durch [6] definierten Größe u hergestellt wird. Wie GAUSS dazu gelangt ist, den Faktor***) von $u+\lambda u^{-1}$ auf der rechten Seite der Gleichung [5 a] gerade so zu wählen, geht aus der Aufzeichung nicht hervor; wahrscheinlich hat ihn eine numerische Induktion dabei geleitet. Den Zusammenhang dieser Reihe, sowie der Reihe [7] mit der Theorie der elliptischen Funktionen findet GAUSS erst nach etwa fünf Jahren (siehe die Bemerkung am Schluß des art. [4.]). Zu der durch die Gleichung [5 a] gegebenen Darstellung von $x+yi$, wenn x, y die Koordinaten eines Ellipsenpunktes sind, vergleiche man den art. [2.] und die, Werke VIII, S. 341 abgedruckte — wohl aus späterer Zeit stammende — Aufzeichnung. Mit dieser Form der Darstellung einer Ellipse beginnt auch der zweite Teil unserer Abhandlung im art. [5.].

---

*) Ein Auszug ist Werke III, S. 401, 402 abgedruckt.

**) Auf S. 53 des Handbuchs 16, Bb bei der Werke III, S. 445 abgedruckten, auf die Differentialgleichungen für die Reihen p, q bezüglichen Rechnung, steht dieser Satz in der Form

$$p^4-q^4 = -4\frac{xdq}{qdx}+\frac{4xdp}{pdx}$$

mit einem Fragezeichen. Diese Formel fehlt in dem Abdruck Werke III, S. 445.

***) GAUSS hat später ein $\ast$ hingesetzt, um diese Reihe anführen zu können, siehe den art. [7.] S. 318.

Dieser zweite Teil ist auf S. 222—226 desselben Handbuchs 19, Be aufgezeichnet, seine Abfassungszeit ist in dem Hinweis am Schluß des art. [.4] genau angegeben. Für eine Ellipse, deren Halbachsen zu $1+\lambda$ und $1-\lambda$ angenommen werden, wird gefragt, mit welcher Dichte die Masse $2\pi A$ auf der Peripherie ausgebreitet werden muß, damit ihr Potential*) in den Punkten der Ellipse übereinstimmt mit dem Potential der im Ellipsenmittelpunkt aufgespeicherten Masse. Die Differenz dieser beiden Potentiale ist also nach heutiger Ausdrucksweise nichts anderes, als die zu dem Mittelpunkt als Pol gehörige GREENsche Funktion der Ellipsenfläche, multipliziert mit $2\pi A$. Im art. [6.] bildet GAUSS die Differenz der vollständigen Potentiale, d. h. er denkt sich jedes der beiden Potentiale durch Hinzufügen der sogenannten konjugierten Funktion zu einer monogenen Funktion der komplexen Veränderlichen $x+yi$ ergänzt und diese beiden Funktionen von einander subtrahiert; setzt man diese Differenz gleich $\log t$, so liefert t offenbar die in den kleinsten Teilen ähnliche Abbildung der Ellipse auf den Einheitskreis, d. h. das so definierte t stimmt mit der ebenso bezeichneten Größe der artt. [3.] und [4.] überein. Insbesondere ist die Reihe [14] mit [7] identisch, womit für die letztere Reihe das »Gesetz gefunden« ist. Der Übergang von den Logarithmen zu den Zahlen führt zu der Produktdarstellung [15] von t, die unmittelbar in die üblichen Bezeichnungen der Theorie der elliptischen Funktionen übertragen werden kann. Setzt man nämlich wie oben S. 321

$$\lambda^2 = \mu^4 = x = q, \quad \lambda u^2 = \mu^2 u^2 = y = e^{2\pi i v},$$

so ist

$$t = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{\vartheta_{00}(v|q)}{\vartheta_{10}(v|q)}$$

und der Übergang von [15] zu [16] vollzieht sich durch Anwendung der oft genannten Identität zwischen den Produkt- und Reihenformen der Thetafunktionen, siehe z. B. die Gleichung $\#$ S. 293.

In der Gleichung [18], bezw. der berichtigten Form [18a], S. 319, und ebenso in [21] hat T die Bedeutung

$$T = u + \lambda u^{-1},$$

während die in den artt. [3.] und [4.] mit T bezeichnete Größe in [21] mit T' bezeichnet ist. In [22] ist T wieder in der Bedeutung $U+\lambda U^{-1}$ zu nehmen, wo also, vergl. art. [5.], S. 315,

$$U = \cos E + i \sin E$$

sich auf einen andern Ellipsenpunkt bezieht als u. Aus [22] ergibt sich für den reziproken Wert des in Gl. [24] mit A bezeichneten Faktors zunächst die in [23] unter dem Logarithmuszeichen auftretende Produktdarstellung, die vermöge der schon in der Scheda Ac (siehe oben S. 201, art. [9.], Gl. 3), wo $z = \lambda^2$ zu nehmen ist) angegebenen Umformung in den reziproken Wert von

$$(1+\lambda^2+\lambda^6+\lambda^{12}+\cdots)^2$$

verwandelt werden kann. Damit ist nun auch für die in der Gl. [5a], oben S. 314 auftretende Reihe $*$ das »Gesetz gefunden«. Im art. [8.] ist in den sonst üblichen Bezeichnungen

$$a = p(\mu^4) = p(\lambda^2) = \vartheta_{00}(0|\lambda^2),$$
$$b = r(\mu^4) = r(\lambda^2) = \vartheta_{10}(0|\lambda^2),$$

und nun folgt aus der bekannten Formel

$$2\,\vartheta_{00}(0|q^2)\,\vartheta_{10}(0|q^2) = \vartheta_{10}^2(0|q)$$

die im art. [6.], Gl. [20] angegebene Formel

**) Wir machen besonders darauf aufmerksam, daß GAUSS im Texte die Bezeichnung Potential benutzt und zwar in einer Weise, die darauf schließen läßt, daß ihm dieser Kunstausdruck damals (1839) völlig geläufig war. In dem älteren Teile der Abhandlung artt. [1.]—[4.] findet er sich nicht.

$$ab = \tfrac{1}{2}\,(r\,|\lambda))^2 = \tfrac{1}{2}\,\vartheta_{10}^2(0\,|\lambda).$$

Ferner folgt aus [18 a], wenn man

$$\tau^2 = \frac{a^2}{b^2}\,t^2, \quad k = \frac{b^2}{a^2} = \frac{\vartheta_{10}^2(0\,|\lambda^2)}{\vartheta_{00}^2(0\,|\lambda^2)}$$

setzt,

$$\frac{1}{a^2}\int\limits_0^\tau \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}} = \int\limits_0^T \frac{d\,T}{\sqrt{4\,\mu^2-T^2}} = \arcsin\frac{T}{2\,\mu} = i\log u,$$

also in den Bezeichnungen von JACOBI

$$t = \sqrt{k}\,\sin\operatorname{am}\left(\frac{2\,K}{\pi}\arcsin\frac{T}{2\,\mu}\right) = \sqrt{k}\,\sin\operatorname{am}\left(\frac{2\,K}{\pi}\,i\log u\right),$$

wo

$$a^2 = \vartheta_{00}^2(0\,|\lambda^2) = \frac{2\,K}{\pi} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}}, \quad \lambda = \mu^2$$

ist. Diese Formel befindet sich in Übereinstimmung mit derjenigen Lösung der hier in Rede stehenden Aufgabe, die H. A. SCHWARZ in der Abhandlung *Notizia sulla rappresentazione conforme di un' area ellittica sopra un' area circolare,* Annali di Matematica pura ed applicata, 2. serie, **3** (1870), S. 166, Gesammelte mathem. Abhandlungen II, 1890, S. 102, gegeben hat.

SCHLESINGER.

[ZUR THEORIE DER UNENDLICHEN REIHE $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.]

[I.]

[ENTWICKELUNGEN IN KETTENBRÜCHE.]

[Aus Handbuch 18, Bd, Mathematische Brouillons, October 1805.]

[1.]

[S. 52]

Es sei $\sin\frac{1}{4}\varphi = x$, so ist

$$\frac{\varphi - \sin\varphi}{\frac{4}{3}\sin\frac{1}{2}\varphi^3} = 1 + \frac{6}{5}xx + \frac{6.8}{5.7}x^4 + \frac{6.8.10}{5.7.9}x^6 + \text{etc.}$$

$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{\frac{3.6}{3.5}xx}{1 + \cfrac{\frac{2}{5.7}xx}{1 - \cfrac{\frac{5.8}{7.9}xx}{1 - \cfrac{\frac{4.1}{9.11}xx}{1 - \cfrac{\frac{7.10}{11.13}xx}{1 - \frac{6.3}{13.15}xx \text{ etc.}}}}}}}$$

[S. 54]

$$P = 1 + \frac{6}{5}xx + \frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}x^4 + \frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{10}{9}x^6 + \cdots \left[= \frac{\varphi - \sin\varphi}{\frac{4}{3}\sin\frac{1}{2}\varphi^3}\right]$$

$$\alpha = \frac{6}{5}xx$$

$$Q = 1 + \frac{8}{7}xx + \frac{8}{7}\cdot\frac{10}{9}x^4 + \frac{8}{7}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{12}{11}x^6 + \cdots$$

$$\beta = -\frac{2}{35}xx$$

$$R = 1 + \frac{2.8}{9}xx + \frac{3.8.10}{9.11}x^4 + \frac{4.8.10.12}{9.11.13}x^6 + \cdots$$

$$\gamma = \frac{5.8}{7.9}xx$$

$$S = 1 + \frac{2.10}{11}xx + \frac{3.10.12}{11.13}x^4 + \frac{4.10.12.14}{11.13.15}x^6 + \cdots$$

$$\delta = \frac{4}{99}xx$$

$$T = 1 + \frac{3.10}{13}xx + \frac{5.10.12}{13.15}x^4 + \frac{10.10.12.14}{13.15.17}x^6 + \cdots$$

$$\varepsilon = \frac{7.10}{11.13}xx$$

$$U = 1 + \frac{3.12}{15}xx + \frac{6.12.14}{15.17}x^4 + \frac{10.12.14.16}{15.17.19}x^6 + \cdots$$

$$\begin{aligned} 1 &= P - \alpha Q \\ P &= Q - \beta R \\ Q &= R - \gamma S \\ R &= S - \delta T \\ S &= T - \varepsilon U \end{aligned}$$

etc.

$$P = \frac{1}{1 - \alpha\frac{Q}{P}} = \frac{1}{1 - \cfrac{\alpha}{1 - \cfrac{\beta R}{Q}}} = \frac{1}{1 - \cfrac{\alpha}{1 - \cfrac{\beta}{1 - \cfrac{\gamma S}{R}}}} \quad \text{etc.}$$

[S. 55—57]

Wenn man $\sin\frac{1}{2}\varphi = s$ setzt, so wird

$$\frac{\varphi - \sin\varphi}{\frac{4}{3}\sin\frac{1}{2}\varphi^3} = \cos\frac{1}{2}\varphi \times \left\{1 + \frac{4}{5}ss + \frac{4.6}{5.7}s^4 + \frac{4.6.8}{5.7.9}s^6 \ldots\right\}$$

$$= 1 + \frac{1.3}{2.5}ss + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{3}{7}s^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{3}{9}s^6 \ldots [*)].$$

[*) In der Handschrift lautet das letzte Glied $\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{5}{9}s^4$.]

[2.]

$$\frac{1+\frac{3}{1}\cdot\frac{12}{15}xx+\frac{3.4}{1.2}\cdot\frac{12.14}{15.17}x^4\ldots}{1+2\,\frac{12}{13}\,xx+3\,\frac{12.14}{13.15}\,x^4\ldots} = \cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{9.12}{13.15}\,xx}{1-\cfrac{\frac{3.6}{15.17}\,xx}{1-\cfrac{\frac{11.14}{17.19}\,xx}{1-\frac{4.10}{19.21}\,xx \text{ etc.}}}}}$$

$$\frac{1+2\,\frac{12}{13}\,xx+3\,\frac{12.14}{13.15}\,x^4+\cdots}{1+\frac{12}{11}\,xx+\frac{12.14}{11.13}\,x^4+\cdots} = \cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{9.12}{11.13}\,xx}{1-\cfrac{\frac{2.2}{13.15}\,xx}{1-\text{etc.}}}}$$

$$1+\frac{12}{11}\,xx+\frac{12.14}{11.13}\,x^4\cdot\cdot = \cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{9.12}{9.11}\,xx}{1+\cfrac{\frac{2}{11.13}\,xx}{1-\cdots}}}$$

[3.]

[S. 59]

$$[P=]\;1-\frac{1}{2}[s^2]-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}[s^4]-\frac{1.1.3}{2.4.6}[s^6]-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}[s^8+\cdots=\sqrt{(1-s^2)}]$$

$$[\alpha=]\;\frac{1.2}{1.3}[s^2]$$

$$[Q=]\;1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}[s^2]+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}[s^4]+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}[s^6]+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{9}\left[s^8+\cdots=\frac{\arcsin s}{s}\right]$$

$$[\beta=]\;\frac{1.2}{3.5}[s^2]$$

$$[R=]\;1+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}[s^2]+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{3}{7}[s^4]+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{3}{9}[s^6]$$
$$+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{3}{11}\left[s^8+\cdots=\frac{3}{2}\,\frac{\arcsin s-s\sqrt{(1-s^2)}}{s^3}\right]$$

$$[\gamma=]\;\frac{3.4}{5.7}[s^2]$$

$$[S=]\;1+\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{7}[s^2]+\frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{3.5}{7.9}[s^4]+\frac{3.5.7}{2.4.6}\cdot\frac{3.5}{9.11}[s^6]+\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\cdot\frac{3.5}{11.13}[s^8+\cdots]$$

$$[\delta=]\;\frac{3.4}{7.9}[s^2]$$

$$[T=]\, 1+\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{9}[s^2]+\frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{5.7}{9.11}[s^4]+\frac{3.5.7}{2.4.6}\cdot\frac{5.7}{11.13}[s^6]+\frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\cdot\frac{5.7}{13.15}[s^8+\cdots]$$

$$[\varepsilon=]\,\frac{5.6}{9.11}[s^2]$$

$$[U=]\, 1+\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{11}[s^2]+\frac{5.7}{2.4}\cdot\frac{5.7}{11.13}[s^4]+\frac{5.7.9}{2.4.6}\cdot\frac{5.7.9}{11.13.15}[s^6]$$
$$+\frac{5.7.9.11}{2.4.6.8}\cdot\frac{5.7.9}{13.15.17}[s^8+\cdots]$$

u.s.w.

Also

$$\frac{\varphi}{\cos\varphi}=\cfrac{s}{1-\cfrac{\frac{2}{3}ss}{1-\cfrac{\frac{2}{15}ss}{1-\cfrac{\frac{12}{35}ss}{1-\cfrac{\frac{12}{63}ss}{1-\cfrac{\frac{30}{99}ss}{1-\text{etc.}}}}}}}$$

[4.]

[S. 60]

Theorem.

$$\frac{1+\frac{a.b}{1.c}x+\frac{a.a+1}{1.2}\cdot\frac{b.b+1}{c.c+1}xx \text{ etc.}}{1+\frac{c-a.c-b}{1.c}x+\frac{c-a.c+1-a}{1.2}\cdot\frac{c-b.c+1-b}{c.c+1}xx \text{ etc.}}=(1-x)^{-a-b+c}.$$

[S. 122]

Verwandlung.

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{\alpha.\beta}{\gamma.\gamma+1}x}{1-\cfrac{\frac{\gamma+1-\alpha.\gamma+1-\beta}{\gamma+1.\gamma+2}x}{1-\cfrac{\frac{\alpha+1.\beta+1}{\gamma+2.\gamma+3}x}{1-\cdots}}}}=\frac{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\gamma-\alpha.\gamma-\beta}+\cfrac{\frac{\alpha\beta}{\gamma-\alpha.\gamma-\beta}}{1-\cfrac{\frac{\gamma-\alpha.\gamma-\beta}{\gamma.\gamma+1}x}{1-\cfrac{\frac{\alpha+1.\beta+1}{\gamma+1.\gamma+2}x}{1-\cdots}}}$$

BEMERKUNGEN.

Die hier zusammengestellten Aufzeichnungen stehen zerstreut zwischen astronomischen Rechnungen und Entwickelungen, mit denen aber nicht immer ein unmittelbarer Zusammenhang erkennbar ist. — Die Funktion, von der der art. [1.] handelt, stimmt, von dem Faktor $\frac{4}{3}$ abgesehen, mit der im art. 90 der *Theoria motus* (1809) mit X bezeichneten Funktion überein, siehe Werke VII (1906), S. 116, wo die hier angegebenen Reihen- und Kettenbruchentwickelungen auftreten, vergl. auch in der Abhandlung *circa seriem* (1812), Werke III, S. 137. Das Verfahren, durch das hier der Kettenbruch aus der Reihe abgeleitet wird, ist das auf LAMBERT*) zurückgehende Divisionsverfahren, im wesentlichen also dasselbe, wie das im art. 12 der Abhandlung von 1812, Werke III, S. 134 im allgemeinen Falle angewandte Die am Schluß des art. [1.] gegebene Entwicklung nach Potenzen von $\sin\frac{1}{2}\varphi$ stimmt mit der Reihe R des art. [3.] überein; wir sehen hier wieder durch das Divisionsverfahren:

$$Q-P = \alpha R,\quad R-Q = \beta S,\quad S-R = \gamma T,\quad T-S = \delta U, \ldots$$

den Kettenbruch für $\frac{\varphi}{\cos\varphi}$ entstehen, wo man jetzt $s = \sin\varphi$ zu setzen hat. Dieser Kettenbruch steht auch in der Abhandlung von 1812, Werke III, S. 137, Gleich. [35]. Natürlich sind alle hier auftretenden Reihen besondere Fälle von $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$. Das gleiche gilt von den Reihen des art. [2.]; in der Bezeichnung der Abhandlung von 1812, Werke III, S. 134, ist der erste Kettenbruch des art. [2.]:

$$G\left(\frac{12}{2}, 2\ \frac{13}{2}, x^2\right),\quad \text{der zweite: } G\left(\frac{12}{2}, 1, \frac{11}{2}, x^2\right),\quad \text{der dritte: } F\left(\frac{12}{2}, 1, \frac{11}{2}, x^2\right);$$

vergl. die im Astronom. Jahrbuch für 1811, Werke VII (1906), S. 301 gegebenen Entwickelungen für A, ferner Werke III, S. 209. An der Hand von EULERS Abhandlung *Specimen transformationis singularis serierum,* Nova Acta Acad. Petropol. **12** (1794) 1801, S. 58—70, fand GAUSS auch den allgemeinen Gesichtspunkt für die speziellen Entwickelungen der artt. [1.]—[3.]; aus dieser Abhandlung EULERS (§ 10, a. a. O. S. 61, 62) stammt das »Theorem« des art. [4.]. Die darauf folgende »Verwandlung«, die in den Bezeichnungen der Abhandlung *circa seriem*

$$G(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x) = \frac{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} + \frac{\alpha\beta}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\, G(\gamma-\alpha, \beta, \gamma, x)$$

autet, ergibt sich aus diesem EULERschen Theorem mit Hinzunahme der Relation (siehe Werke III, S. 133, Gl. [19])

$$(*)\qquad F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x) = F(\alpha, \beta, \gamma, x) + \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}\, x \,.\, F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x),$$

aus der die Kettenbruchentwickelung für den Quotienten

$$G(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$$

---

*) Siehe J. H. LAMBERT, *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques,* Histoire de l'Académie, Berlin (1761) 1768, Mémoires, S. 265; siehe besonders S. 268. Während LAMBERT für die von ihm betrachteten besonderen Fälle eine Untersuchung der Konvergenz der Kettenbrüche vornimmt, fehlt eine solche Untersuchung bei GAUSS, vergl. dazu die Bemerkung zu der weiter unten folgenden Abhandlung [III.]. Es verdient noch hervorgehoben zu werden, daß GAUSS in späterer Zeit auf diese LAMBERTsche Abhandlung ausdrücklich Bezug genommen hat, siehe die Fußnote Werke X 2, S. 62.

folgt. GAUSS hat also zu der Zeit, wo er jene »Verwandlung« ausführte, die Relation (✱) und damit den Schlüssel für die ganze Theorie der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ gekannt. Diese Zeit läßt sich mit ziemlicher Genauigkeit bestimmen. Auf S. 43—45 des Handbuchs 18, Bd, beginnt nämlich die Untersuchung über die Identität des Kometen von 1772 mit dem von 1805, indem dort die Beobachtungen des Kometen von 1772 neu reduziert und berechnet werden. Über diese Rechnung berichtet GAUSS an OLBERS am 3. Januar 1806, siehe *Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke* II, 1, 1900, S. 279. Andererseits finden sich auf S. 64 ff. des Handbuchs Reduktionen von Beobachtungen der Pallas und Juno aus dem Februar 1806. Damit sind die Aufzeichnungen der artt. [1.]—[3.] und das »Theorem« von [4.] auf den Anfang des Jahres 1806 festgelegt. Aber auch die »Verwandlung« stammt aus dem ersten Drittel dieses Jahres, da die auf S. 147 des Handbuchs stehende algebraische Aufzeichnung (abgedruckt oben S. 112, art. [3.]) nach der Aufzeichnung Nr. 128 des *Tagebuchs* aus den Monaten April—Mai 1806 herrührt.

SCHLESINGER.

[II.]

[ALLGEMEINES ÜBER DIE REIHE $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.]

[Aus Handbuch 18, Bd, Mathematische Brouillons, October 1805.]

[1.]

[S. 234]

Es sei

$$1 + \frac{\alpha . \beta}{1 . n} x + \frac{\alpha . \alpha + 1 . \beta . \beta + 1}{1 . 2 . n . n + 1} xx + \cdots = \{\alpha, \beta, n\} = P$$

$$1) \quad \{\alpha, \beta, n + 1\} = \{\alpha, \beta, n\} - \frac{\alpha \beta x}{n . n + 1} \{\alpha + 1, \beta + 1, n + 2\},$$

$$2) \quad \{\alpha, \beta + 1, n\} = \{\alpha, \beta, n\} + \frac{\alpha x}{n} \{\alpha + 1, \beta + 1, n + 1\},$$

$$3) \quad \{\alpha, \beta + 1, n + 1\} = \{\alpha, \beta, n,\} + \frac{\alpha (n - \beta) x}{n . n + 1} \{\alpha + 1, \beta + 1, n + 2\}.$$

Also

$$4) \quad (n - \beta) \{\alpha, \beta, n + 1\} + \beta \{\alpha, \beta + 1, n + 1\} = n \{\alpha, \beta, n\},$$

$$5) \quad \{\alpha, \beta + 1, n\} = \{\alpha + 1, \beta, n\} + \frac{(\alpha - \beta) x}{n} \{\alpha + 1, \beta + 1, n + 1\},$$

$$6) \quad \beta \{\alpha, \beta + 1, n\} = \alpha \{\alpha + 1, \beta, n\} - (\alpha - \beta) \{\alpha, \beta, n\}. \text{ gut.}$$

[2.]

Wenn in der D[ifferential] G[leichung]

$$(x - xx) d^2 P - (x - xx) \frac{dP d^2 x}{dx} + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1) x\} dP dx - \alpha\beta P dx^2 \; [= 0]$$

statt [x]

$$x = \frac{t}{t-1}$$

subst[ituirt] wird, so erhält man[*]

$$(1-t)(t-t^2)\,ddP + (1-t)(\gamma + (\alpha+\beta-1-\gamma)t)\,dP\,dt + \alpha\beta P\,dt^2 = 0.$$

Ferner ergibt sich für]

$$x = \frac{4t}{(1+t)^2}, \quad dx = \frac{4(1-t)\,dt}{(1+t)^3},$$

$$ddx = [-]\,\frac{8(2-t)\,dt^2}{(1+t)^4}, \quad x - xx = \frac{(1-t)^2\,[4t]}{(1+t)^4},$$

$$\frac{[4t](1-t)}{(1+t)^4}P'' + \frac{[4t](4-2t)}{(1+t)^5}P' + \left\{\gamma - (\alpha+\beta+1)\frac{4t}{(1+t)^2}\right\}P'\frac{4}{(1+t)^3} - \alpha\beta P\frac{16(1-t)}{(1+t)^6}\ [=0.]$$

[3.]

[S. 235]

$$\frac{1 + \frac{A.B+\beta}{1.C+\gamma}x + \frac{A.A+\alpha.B+\beta.B+2\beta}{1.2.C+\gamma.C+2\gamma}xx\ldots}{1 + \frac{A.B}{1.C}x + \frac{A.A+\alpha.B.B+\beta}{1.2.C.C+\gamma}xx\ldots}$$

$$= \left\{\frac{A}{\alpha}, \frac{B}{\beta}, \frac{C}{\gamma}, \frac{\alpha\beta x}{\gamma}\right\}\ [=]\ \cfrac{1}{1 - \cfrac{\frac{A.\beta C-\gamma B}{C.C+\gamma}x}{1 - \cfrac{\frac{B+\beta.\alpha C+\alpha\gamma-A\gamma}{C+\gamma.C+2\gamma}x}{1 - \cfrac{\frac{A+\alpha.\beta C+\beta\gamma-\gamma B}{C.C+\gamma}x}{\text{etc.}}}}}$$

$C = 1,\ \gamma = 0$

$$\cfrac{1}{1 - \cfrac{A\beta x}{1 - \cfrac{(B+\beta)\alpha x}{1 - \cfrac{(A+\alpha)\beta x}{1 - \cfrac{(B+2\beta)\alpha x}{\ddots}}}}} = \frac{1 + A(B+\beta)x + \cdots}{1 + ABx + \cdots}$$

$$\text{tang}\,[\varphi] = \cfrac{\varphi}{1 - \cfrac{\frac{\varphi\varphi}{3}}{1 - \cfrac{\frac{\varphi\varphi}{15}}{\text{etc.}}}}$$

[*) In der Handschrift ist diese Transformation nicht ganz durchgeführt; das Ergebnis ist deshalb nach Werke III, S. 218 ergänzt.]

[4.]

[S. 244]

$$\begin{aligned}
\Pi\,0{,}2 &= x\\
\Pi\,0{,}4 &= y\\
\Pi\,0{,}6 &= 0{,}24\pi : y \sin 72^0\\
\Pi\,0{,}8 &= 0{,}16\pi : x \sin 36^0\\
\Pi\,9 &= 10\,.\,189\,.\,192\\
\Pi\,9{,}2 &= x\,.\,1066\,.\,1023\,.\,966\,.\,768 : 10^9\\
\Pi\,9{,}4 &= y\,.\,192^3\,.\,329\,.\,561\,.\,777\\
\Pi\,9{,}6 &= \pi\,.\,96^4\,.\,462\,.\,988\,.\,989 : y \sin 72^0\\
\Pi\,9{,}8 &= \pi\,.\,672^3\,.\,528\,.\,493\,.\,494 : x \sin 36^0\\
\Pi\,10{,}0 &= 100\,.\,189\,.\,192.
\end{aligned}$$

[Die Logarithmen werden auf 12 Dezimalstellen gerechnet mit Benutzung der Werte:]

$$[\log_{10}]\,x \ldots 9{,}962922504818,$$
$$[\log_{10}]\,y \ldots 9{,}948052773504,$$

[die aber (vergl. Werke III, S. 161) von der 9. Ziffer an unrichtig sind.]

Invenimus autem

$$F(-\tfrac{1}{5}, -\tfrac{1}{5}, 10{,}1) = 1{,}0041288636 = \frac{\Pi 9\,.\,\Pi 9{,}4}{\Pi 9{,}2\,.\,\Pi 9{,}2}$$
$$F(-\tfrac{1}{5}, -\tfrac{1}{5}, 10\tfrac{1}{5}, 1) = 1{,}0040454154 = \frac{\Pi 9{,}2\,.\,\Pi 9{,}6}{\Pi 9{,}4\,.\,\Pi 9{,}4}$$
$$F(\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{5}, 11{,}1) = 1{,}0038882487 = \left[\frac{\Pi 10\,.\,\Pi 9{,}6}{\Pi 9{,}8\,.\,\Pi 9{,}8}\right].$$

$$\begin{aligned}
\Lambda z &= \log 1 + \log 2 + \log 3 + \cdots + \log k + z \log k\\
&\quad - \log(z+1) - \log(z+2) - \cdots - \log(z+k)\\
\Lambda' z &= -\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3} - \cdots - \frac{1}{z+k} + \log k\\
\Lambda'' z &= \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z+2)^2} + \frac{1}{(z+3)^2} + \text{etc.}\\
\Lambda''' z &= -\frac{2}{(z+1)^3} - \frac{2}{(z+2)^3} - \frac{2}{(z+3)^3} - \cdots
\end{aligned}$$

etc.

$$\begin{aligned}\Lambda(z+\omega) = \Lambda z &+ \omega\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\text{etc.}+\tfrac{1}{z}-0,[57721\ldots]\right)\\ &+\tfrac{1}{2}\omega\omega\left(\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{(z+2)^2}+\frac{1}{(z+3)^2}+\text{etc.}\right)\\ &-\tfrac{1}{3}\omega^3\left(\frac{1}{(z+1)^3}+\frac{1}{(z+2)^3}+\frac{1}{(z+3)^3}+\text{etc.}\right)\\ &+\tfrac{1}{4}\omega^4\left(\frac{1}{(z+1)^4}+\frac{1}{(z+2)^4}+\frac{1}{(z+3)^4}+\text{etc.}\right)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

[Auf S. 245 folgt eine Tafel der Werte von $\log_{10}\Pi z$ für die Werte von z von 9,20 bis zu 10,20, fortschreitend um je 0,02; die Tafel ist auf 10 Dezimalstellen gerechnet, aber mit Benutzung der ungenauen Werte von $\log x$ und $\log y$.]

[S. 246]

[5.]

Berechnung von $\log\varpi\left[=\log_{10}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}\right]$

[$\varpi =$] 1,31 102 877 714 605 987

[$3\varpi =$] 3,93 308 633 143 817 961

983 271 582 859 544 902
15 732 345 325 752 718
983 271 582 859 545
---
999 987 199 768 157 165
9 999 871 997 682
2 999 961 599 305

1,000 000 199 601 754 152

[2 $\log_{10} e$ = 0,]86 858 896 380 650 365
173 717 792 761 301
---
86 685 178 587 889 064
760 015 343 33
1 737 177 927
65 144
869
---
86 685 940 406 423
8 651 333

[86 685 931 755 090]

866 859 404 064
1 733 718 808
---
865 125 685 256
758

[865 133 26]

339	... 2,53019	96982	03082	16009
[225]	... 2,35218	25181	11362	48416
	4,88238	22163	14444	64425
	0	56457	91567	17660
	88238	78621	06011	82085
		866	85931	75509
$\log \varpi =$	0,11761	22245	79919	93424
eine scharfe Rechnung gab				94762

ϖ ...	0,11761	22245	79919	94586	18858	564
$\sqrt{\pi}$ ...	0,24857	49363	47066	92717	56368	
$\pi^{\frac{1}{4}}\varpi^{\frac{1}{2}}$	0,18309	35804	63493	43651	87610	
$\sqrt[4]{8}$	0,22577	24967	47985	89641	03042	
$\Pi\, 0,25$	9,95732	10837	15507	54010	84568	
$\left[\frac{\sqrt{\pi}}{\varpi}\right]$	0,13096	27117	67146	98131	37517	
$\Pi - 0,25$	0,08828	37954	82654	52142	22085	
0,75	9,87506	12633	91700	04686	75501	
$\Pi\, 0,75$	9,96334	50588	74354	56828	97586	

. . . .

[Es folgt durch wiederholte Anwendung desselben Verfahrens die Berechnung der Logarithmen von $\Pi\, 1,75$, $\Pi\, 2,75$, ... $\Pi\, 11,75$ auf je 20 Dezimalstellen. Dann von $\Pi \frac{1}{4}$ ausgehend die Berechnung der Logarithmen von $\Pi\, 1,25$, $\Pi\, 2,25$, ... $\Pi\, 12,25$.]

[S. 247]

$$\Pi\, 7,5 = \frac{1001 \,.\, 8100}{1024} \sqrt{\pi}$$

$\frac{1001}{1024}$	9,99013	41208	39506	68853
[8100]	3,90848	50188	78649	74918
	3,89861	91397	18156	43771
[$\sqrt{\pi}$]	0,24857	49363	47066	92718
$\Pi\, 7,5$	4,14719	40760	65223	36489

[Es folgt die Berechnung der Logarithmen von $\Pi\, 8{,}5$, $\Pi\, 9{,}5$, $\Pi\, 10{,}5$, $\Pi\, 11{,}5$ dann von $\Pi\, 8{,}25$ bis zu $\Pi\, 13{,}00$, fortschreitend je um $0{,}25$, alles auf 20 Dezimalstellen.]

BEMERKUNGEN.

Die in den artt. [1.]—[3.] wiedergegebenen Aufzeichnungen folgen in dem Handbuch 18, Bd, unmittelbar auf die Werke III, S. 446—460 abgedruckte Abhandlung, die die Seiten 221—233 des Handbuchs füllt. Nach der Nr. 140 des *Tagebuchs* ist diese Abhandlung auf Juni 1809 zu datieren; damit befindet sich auch in Übereinstimmung, daß am Ende der S. 220 des Handbuchs (vergl. die Bemerkung von SCHERING, Werke III, S. 494) die Bemerkung steht: »Geendiget den 28. April 1809.«

Unsere artt. [1.]—[3.] sind also um die Mitte des Jahres 1809 niedergeschrieben. — Die Gleichungen 1), 2), 3), des art. [1.] sind Beziehungen zwischen verwandten Reihen*), die den Gleichungen [16], [17], [19] der Abhandlung *circa seriem* Werke III, S. 133 entsprechen. Die im art. [2.] angegebene Differentialgleichung steht schon auf S. 46, 47 der 1803 begonnenen Scheda Am, wo auch die allgemeine Reihe mit α, β, γ auftritt; die beiden im art. [2.] vorgenommenen Transformationen finden sich auch Werke III, S. 217 bezw. 224 aus dem Nachlaß abgedruckt. Der Zweck der im art. [4.] eingeführten Verallgemeinerung erhellt aus dem Beispiel $C = 1$, $\gamma = 0$. Zu den numerischen Angaben der artt. [4.] und [5.], die auch aus dem Jahre 1809 stammen dürften, ist folgendes zu bemerken. Den ersten Gleichungen des art. [4.] für $\Pi\, 0{,}6$ und $\Pi\, 0{,}8$ liegt die Formel

$$\Pi z \,.\, \Pi(1-z) = \frac{z(1-z)\pi}{\sin z\pi},$$

Werke III, S. 148, zu Grunde. Die mit Λz bezeichnete Größe ist der Logarithmus der im art. 18. der Abhandlung *circa seriem*, Werke III, S. 144 Gleichung [38] erklärten Funktion $\Pi(k, z)$. Zu der Formel für $\Lambda(z+\omega)$ vergleiche man die Gleichung [60] derselben Abhandlung, a. a O. S. 153; der Koeffizient von ω auf der rechten Seite unserer Formel ist nach Gleichung [67], Werke III, S. 154, nichts anderes als Ψz, die Zahl, deren Mantisse in der Handschrift nicht angegeben ist, soll die EULER-MASCHERONIsche Konstante sein. Im art. [5.] bedeutet ϖ die Hälfte der in den Arbeiten über lemniskatische Funktionen ebenso bezeichneten Größe, der dafür angegebene numerische Wert ist der STIRLINGsche, vergl oben S. 145; von dem hier berechneten Wert von $\log_{10}\varpi$ weicht der Werke III, S. 414 (aus Scheda Aa, S. 3 stammend) angegebene von der 9. Dezimalstelle an ab. Bei der Berechnung von $\log_{10}\Pi\frac{1}{4}$ wird die Formel

$$\Pi\tfrac{1}{4} = \sqrt[4]{\tfrac{1}{8}\pi\varpi^2},$$

bei der von $\log_{10}\Pi(-\frac{1}{4})$ die Formel

$$\Pi(-\tfrac{1}{4}) = \Pi\tfrac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\varpi}$$

benutzt, vergl. Werke III, S. 150. Die Werte von $\log_{10}\Pi\frac{1}{4}$ und $\log_{10}\Pi\frac{3}{4}$ sind auf 20 Dezimalstellen auch in der Tafel Werke III, S. 161 enthalten. Weiterhin kommt allemal die Formel

$$\Pi(z+n) = \Pi z\,.\,(z+1)(z+2)\ldots(z+n)$$

Werke III, S. 146, Gl. 45 zur Anwendung.

SCHLESINGER.

*) Diese Verdeutschung für series contiguae schlägt GAUSS selbst in der Anzeige der Abhandlung *circa seriem* vor, siehe Werke III, S. 199.

[III.]

EINIGES ÜBER DIE UNENDLICHE REIHE

$$1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha.\alpha+1.\beta.\beta+1}{1.2.\gamma.\gamma+1}xx+\frac{\alpha.\alpha+1.\alpha+2.\beta.\beta+1.\beta+2}{1.2.3.\gamma.\gamma+1.\gamma+2}x^3\ldots.$$

[Aus Handbuch 19, Be, Kleine Aufsätze aus verschiedenen Theilen der Mathematik, Angefangen im May 1809.]

[1.]

[S. 36]

Wir bezeichnen den Werth dieser Reihe, welche stets convergirt, wenn x kleiner ist als 1, durch das Zeichen $F(\alpha, \beta, \gamma)$, so wie die davon derivirte Function oder $\frac{dF(\alpha,\beta,\gamma)}{dx}$ durch $F'(\alpha, \beta, \gamma)$. Wir haben also sofort

$$(1) \qquad F'(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1).$$

Die Coefficienten von x^r verhalten sich bei den drei Functionen

$$F(\alpha, \beta, \gamma), \quad xF'(\alpha, \beta, \gamma), \quad F(\alpha+1, \beta, \gamma)$$

offenbar wie

$$1, \qquad r, \qquad \frac{\alpha+r}{\alpha}.$$

Wir schliessen hieraus

$$(2) \qquad F(\alpha+1, \beta, \gamma) = F(\alpha, \beta, \gamma) + \frac{x}{\alpha} F'(\alpha, \beta, \gamma)$$

und auf ähnliche Art

$$(3) \qquad F(\alpha, \beta+1, \gamma) = F(\alpha, \beta, \gamma) + \frac{x}{\beta} F'(\alpha, \beta, \gamma).$$

Hingegen werden sich die Coefficienten derselben Potenz von x in $F'(\alpha, \beta, \gamma)$ und $F'(\alpha+1, \beta, \gamma)$ noch wie

$$\frac{\alpha+r.\beta+r}{\gamma+r} \text{ und } \frac{(\alpha+r+1)(\alpha+r)(\beta+r)}{\alpha(\gamma+r)}$$

und der von $xF'(\alpha+1, \beta, \gamma)$ wie $\frac{(\alpha+r)r}{\alpha}$ verhalten. Der Coefficient in

$$(1-x)F'(\alpha+1, \beta, \gamma)$$

verhält sich also wie

$$\frac{(\alpha+r)(\alpha\beta+\beta+(\alpha+\beta-\gamma+1)r)}{\alpha(\gamma+r)},$$

folglich der in

$$(\alpha+1-\gamma)F'(\alpha, \beta, \gamma) - \alpha(1-x)F'(\alpha+1, \beta, \gamma)$$

wie $-\beta(\alpha+r)$. Wir haben also
[S. 37]

$$(4) \qquad F'(\alpha+1, \beta, \gamma) = \frac{\beta}{1-x}F(\alpha, \beta, \gamma) + \frac{\alpha-\gamma+1+\beta x}{\alpha(1-x)}F'(\alpha, \beta, \gamma)$$

und eben so ist offenbar

$$(5) \qquad F'(\alpha, \beta+1, \gamma) = \frac{\alpha}{1-x}F(\alpha, \beta, \gamma) + \frac{\beta-\gamma+1+\alpha x}{\beta(1-x)}F'(\alpha, \beta, \gamma).$$

Aus der Verbindung von (2) und (4) schliessen wir ferner

$$(6) \qquad F(\alpha-1, \beta, \gamma) = \frac{\alpha-\gamma+\beta x}{\alpha-\gamma}F(\alpha, \beta, \gamma) - \frac{x-xx}{\alpha-\gamma}F'(\alpha, \beta, \gamma)$$

und eben so

$$(7) \qquad F(\alpha, \beta-1, \gamma) = \frac{\beta-\gamma+\alpha x}{\beta-\gamma}F(\alpha, \beta, \gamma) - \frac{x-xx}{\beta-\gamma}F'(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$(8) \qquad F'(\alpha-1, \beta, \gamma) = -\frac{(\alpha-1)\beta}{\alpha-\gamma}F(\alpha, \beta, \gamma) + \frac{(\alpha-1)(1-x)}{\alpha-\gamma}F'(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$(9) \qquad F'(\alpha, \beta-1, \gamma) = -\frac{(\beta-1)\alpha}{\beta-\gamma}F(\alpha, \beta, \gamma) + \frac{(\beta-1)(1-x)}{\beta-\gamma}F'(\alpha, \beta, \gamma).$$

Hieraus ist klar, dass man aus $F(\alpha, \beta, \gamma)$ und $F'(\alpha, \beta, \gamma)$ allgemein

$$F(\alpha+k, \beta+l, \gamma) \text{ und } F'(\alpha+k, \beta+l, \gamma)$$

für jede ganze Werthe von k und l, sie mögen positiv oder negativ seyn, rational ableiten kann.

[2.]

Der Coefficient von x^r in $F(\alpha, \beta, \gamma-1)$ verhält sich wie $\frac{\gamma-1+r}{\gamma-1}$, daher wird

$$(10) \qquad F(\alpha, \beta, \gamma-1) = F(\alpha, \beta, \gamma) + \frac{x}{\gamma-1} F'(\alpha, \beta, \gamma).$$

Endlich sind die Coefficienten in $xF'(\alpha, \beta, \gamma-1)$ und $F'(\alpha, \beta, \gamma-1)$ proportional den Zahlen

$$\frac{r(\gamma-1+r)}{\gamma-1} \text{ und } \frac{(\alpha+r)(\beta+r)}{\gamma-1},$$

folglich der Coefficient in $(1-x)F'(\alpha, \beta, \gamma-1)$ proportional

$$\frac{\alpha\beta+(\alpha+\beta+1-\gamma)r}{\gamma-1},$$

also

$$(11) \qquad F'(\alpha, \beta, \gamma-1) = \frac{\alpha\beta}{(\gamma-1)(1-x)} F(\alpha, \beta, \gamma) + \frac{(\alpha+\beta+1-\gamma)x}{(\gamma-1)(1-x)} F'(\alpha, \beta, \gamma).$$

Aus der Verbindung der Gleichungen (10) und (11) folgt endlich

$$(12) \qquad F(\alpha, \beta, \gamma+1) = -\frac{(\alpha+\beta-\gamma)\gamma}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma) + \frac{\gamma(1-x)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)} F'(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$(13) \qquad F'(\alpha, \beta, \gamma+1) = \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)x} F(\alpha, \beta, \gamma) - \frac{\gamma\gamma(1-x)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)x} F'(\alpha, \beta, \gamma).$$

[S. 38]

Man sieht also, dass nun aus $F(\alpha, \beta, \gamma)$ und $F'(\alpha, \beta, \gamma)$ allgemein $F(\alpha', \beta', \gamma')$ und $F'(\alpha', \beta', \gamma')$ rational abgeleitet werden kann, wenn

$$\alpha'-\alpha, \quad \beta'-\beta, \quad \gamma'-\gamma$$

ganze Zahlen sind.

Die bei der Ableitung dieser Lehrsätze gebrauchten Relationen zwischen den Coefficienten stellt folgendes Tableau dar:

In	Coefficient von	
	x^{r-1}	x^r
$F(\alpha, \beta, \gamma)$		C
$F'(\alpha, \beta, \gamma)$	Cr	$\frac{C(r+\alpha)(r+\beta)}{r+\gamma}$
$F(\alpha+1, \beta, \gamma)$		$\frac{C(r+\alpha)}{\alpha}$
$F'(\alpha+1, \beta, \gamma)$	$\frac{Cr(r+\alpha)}{\alpha}$	$\frac{C(r+\alpha)(r+\alpha+1)(r+\beta)}{\alpha(r+\gamma)}$
$F(\alpha, \beta, \gamma-1)$		$\frac{C(r+\gamma-1)}{\gamma-1}$
$F'(\alpha, \beta, \gamma-1)$	$\frac{Cr(r+\gamma-1)}{\gamma-1}$	$\frac{C(r+\alpha)(r+\beta)}{\gamma-1}$

Aus der Verbindung der vorhergehenden Formeln, oder wenn man lieber will, auf ähnliche Art wie diese gefunden sind, ergeben sich noch folgende:

$$(14)\quad F(\alpha+1, \beta, \gamma+1) = -\frac{\gamma}{\beta-\gamma} F(\alpha, \beta, \gamma) + \frac{\gamma(1-x)}{\alpha(\beta-\gamma)} F'(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$(15)\quad F(\alpha, \beta+1, \gamma+1) = -\frac{\gamma}{\alpha-\gamma} F(\alpha, \beta, \gamma) + \frac{\gamma(1-x)}{\beta(\alpha-\gamma)} F'(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$(16)\quad F'(\alpha+1, \beta, \gamma+1) = \frac{\beta\gamma}{(\beta-\gamma)x} F(\alpha, \beta, \gamma) - \frac{\gamma(\gamma-\beta x)}{\alpha(\beta-\gamma)x} F'(\alpha, \beta, \gamma),$$

[S. 39]

$$(17)\quad F'(\alpha, \beta+1, \gamma+1) = \frac{\alpha\gamma}{(\alpha-\gamma)x} F(\alpha, \beta, \gamma) - \frac{\gamma(\gamma-\alpha x)}{\beta(\alpha-\gamma)x} F'(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$(18)\quad F(\alpha-1, \beta, \gamma-1) = \frac{\gamma-1-\beta x}{\gamma-1} F(\alpha, \beta, \gamma) + \frac{x-xx}{\gamma-1} F'(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$(19)\quad F(\alpha, \beta-1, \gamma-1) = \frac{\gamma-1-\alpha x}{\gamma-1} F(\alpha, \beta, \gamma) + \frac{x-xx}{\gamma-1} F'(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$(20)\quad F'(\alpha-1, \beta, \gamma-1) = \frac{(\alpha-1)\beta}{\gamma-1} F(\alpha, \beta, \gamma) + \frac{(\alpha-1)x}{\gamma-1} F'(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$(21)\quad F'(\alpha, \beta-1, \gamma-1) = \frac{\alpha(\beta-1)}{\gamma-1} F(\alpha, \beta, \gamma) + \frac{(\beta-1)x}{\gamma-1} F'(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$(22)\quad F(\alpha+1, \beta+1, \gamma) = \left[\frac{1}{1-x} F(\alpha, \beta, \gamma) + \frac{x(\alpha+\beta-\gamma+1)}{\alpha\beta(1-x)} F'(\alpha, \beta, \gamma)\right],$$

$$(23)\quad F'(\alpha+1, \beta+1, \gamma) = \left[\frac{\beta+\alpha-\gamma+2}{(1-x)^2} F(\alpha, \beta, \gamma) \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha\beta(1-x) + (\alpha+\beta-\gamma+1)(\gamma+1-(\alpha+\beta+1)x)}{\alpha\beta(1-x)^2} F'(\alpha, \beta, \gamma)\right].$$

$$(24)\quad F(\alpha-1,\beta-1,\gamma)=\Big[\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)+(\alpha(\alpha-\gamma)+(\beta+\alpha-\gamma)(\beta-1))x}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma)$$
$$-\frac{x(1-x)(\alpha+\beta-\gamma-1)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}F'(\alpha,\beta,\gamma)\Big],$$

$$(25)\quad F'(\alpha-1,\beta-1,\gamma)=\Big[\frac{(\gamma-\alpha-\beta)(\alpha-1)(\beta-1)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma)+\frac{(\alpha-1)(\beta-1)(1-x)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}F'(\alpha,\beta,\gamma)\Big],$$

$$(26)\quad F'(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1)=\frac{\gamma}{\alpha\beta}F'(\alpha,\beta,\gamma),$$

$$(27)\quad F'(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1)=\frac{\gamma}{x-xx}F(\alpha,\beta,\gamma)-\frac{\gamma(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)}{\alpha\beta(x-xx)}F'(\alpha,\beta,\gamma),$$

$$(28)\quad F(\alpha-1,\beta-1,\gamma-1)=\Big[\frac{\gamma-1-(\alpha+\beta-1)x}{\gamma-1}F(\alpha,\beta,\gamma)+\frac{x(1-x)}{\gamma-1}F'(\alpha,\beta,\gamma)\Big],$$

$$(29)\quad F'(\alpha-1,\beta-1,\gamma-1)=\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\gamma-1}F(\alpha,\beta,\gamma).\text{*)}$$

[3.]

Aus der Verbindung der Gleichungen (1) und (27) folgt nun leicht, wenn man die zweite derivirte Function durch $F''(\alpha,\beta,\gamma)$ bezeichnet

$$(30)\quad \alpha\beta F(\alpha,\beta,\gamma)-(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)F'(\alpha,\beta,\gamma)-(x-xx)F''(\alpha,\beta,\gamma)=0.$$

Es sei P der Werth von $F(\alpha,\beta,\gamma)$ und Q der Werth derselben Function, wenn man für x, $1-x$ setzt. Man hat dann:

$$\alpha\beta P-(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)\frac{dP}{dx}-(x-xx)\frac{d^2P}{dx^2}=0,$$
$$\alpha\beta Q-(\alpha+\beta+1-\gamma-(\alpha+\beta+1)x)\frac{dQ}{dx}-(x-xx)\frac{d^2Q}{dx^2}=0,$$

also, für den Fall, wo $2\gamma=\alpha+\beta+1$ ist, welcher eine besondere Aufmerksamkeit verdient,

[S. 40]

$$\alpha\beta P-\gamma(1-2x)\frac{dP}{dx}-(x-xx)\frac{d^2P}{dx^2}=0,$$
$$\alpha\beta Q-\gamma(1-2x)\frac{dQ}{dx}-(x-xx)\frac{d^2Q}{dx^2}=0.$$

Hieraus folgt

---

*) *Das bisherige bekannt gemacht Comment. Recent. Soc. Gott. T. II* [, Werke III, S. 123].

$$-\frac{\gamma(1-2x)\,dx}{x-xx} = \frac{Qd^2P-Pd^2Q}{QdP-PdQ},$$

also

$$Q\frac{dP}{dx}-P\frac{dQ}{dx} = A(x-xx)^{-\gamma}, \tag{31}$$

wo A eine Constante ist, deren Werth weiterhin zu

$$\frac{\alpha.\beta.\alpha+1.\beta+1.\alpha+2.\beta+2}{\gamma.\gamma.\gamma+1.\gamma+1.\gamma+2}\cdots$$

bestimmt wird. Also z. B. für $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$

$$A = \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{49}{48}\cdots = \frac{1}{\pi}.$$

Dieselbe kann auch allgemein durch

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma}\left(1+\frac{\gamma-\alpha.\gamma-\beta}{1.\gamma+1}+\frac{\gamma-\alpha.\gamma+1-\alpha.\gamma-\beta.\gamma+1-\beta}{1.2.\gamma+1.\gamma+2}+\text{etc.}\right)$$

vorgestellt werden.

[4.]

Eine der merkwürdigsten Relationen finden wir auf folgende Art: Man setze

$$P = P'(1-x)^{\mu},$$

so wird die Differentialgleichung

$$\left(\alpha\beta+\frac{\mu(\gamma-(\alpha+\beta+\mu)x)}{1-x}\right)P'-(\gamma-(\alpha+\beta+2\mu+1)x)\frac{dP'}{dx}-(x-xx)\frac{d^2P'}{dx^2} = 0.$$

Man setze $\mu = \gamma-\alpha-\beta$, so wird diese Gleichung

$$(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)P'-(\gamma-(2\gamma-\alpha-\beta+1)x)\frac{dP'}{dx}-(x-xx)\frac{d^2P'}{dx^2} = 0,$$

woraus leicht folgt

$$P' = F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma),$$

also

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = (1-x)^{-\alpha-\beta+\gamma}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma). \tag{32}$$

Zur Verwandlung unserer Functionen oder ihrer Verhältnisse in continuirliche Brüche sind folgende Relationen brauchbar:

(33) $$F(\alpha,\beta,\gamma+1)-F(\alpha,\beta,\gamma)=-\frac{\alpha\beta x}{\gamma\cdot\gamma+1}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2),$$

(34) $$F(\alpha,\beta+1,\gamma)-F(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{\alpha x}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1),$$

(35) $$F(\alpha+1,\beta,\gamma)-F(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{\beta x}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1),\text{[*)]}$$

[S. 41]

(36) $$F(\alpha,\beta+1,\gamma+1)-F(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma\cdot\gamma+1}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2),$$

(37) $$F(\alpha+1,\beta,\gamma+1)-F(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{\beta(\gamma-\alpha)x}{\gamma\cdot\gamma+1}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+2),$$

(38) $$F(\alpha-1,\beta+1,\gamma)-F(\alpha+1,\beta-1,\gamma)=\frac{(\alpha-\beta)x}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1).$$

Aus der Verbindung von (36) und (37) folgt

(39) $$\frac{F(\alpha,\beta+1,\gamma+1)}{F(\alpha,\beta,\gamma)}=\cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma\cdot\gamma+1}}{1-\cfrac{\frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)x}{\gamma+1.\gamma+2}}{1-\cfrac{\frac{(\alpha+1)(\gamma+1-\beta)x}{\gamma+2.\gamma+3}}{1-\cfrac{\frac{(\beta+2)(\gamma+2-\alpha)x}{\gamma+3.\gamma+4}}{1-\text{etc.}}}}}}$$

(40) $$\frac{F(\alpha+1,\beta,\gamma)}{F(\alpha,\beta,\gamma)}=\cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{\beta x}{\gamma}}{1-\cfrac{\frac{(\alpha+1)(\gamma-\beta)x}{\gamma\cdot\gamma+1}}{1-\cfrac{\frac{(\beta+1)(\gamma-\alpha)x}{\gamma+1.\gamma+2}}{1-\cfrac{\frac{(\alpha+2)(\gamma+1-\beta)x}{\gamma+2.\gamma+3}}{\text{etc.}}}}}}$$

Also für $\alpha=0$

[*) Zwischen die Gleichungen (35) und (36) hat Gauss später die Gleichung hingeschrieben:]

$$F(\alpha-1,\beta+1,\gamma)-F(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{(\alpha-\beta-1)x}{\gamma}F(\alpha,\beta+1,\gamma+1).$$

$$(41) \qquad 1+\frac{\beta}{\gamma}x+\frac{\beta.\beta+1}{\gamma.\gamma+1}xx+\frac{\beta.\beta+1.\beta+2}{\gamma.\gamma+1.\gamma+2}x^3+\text{etc.}$$

$$=\cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{\beta}{\gamma}x}{1-\cfrac{\frac{2(\gamma-\beta)}{\gamma.\gamma+1}x}{1-\cfrac{\frac{(\beta+1)\gamma}{\gamma+1.\gamma+2}x}{1-\frac{3(\gamma+1-\beta)}{\gamma+2.\gamma+3}x \text{ etc.}}}}}$$

[5.]

[S. 42]

Mit Hülfe des vorhergehenden hat man nun auch sofort das Nöthige zur Bestimmung der Coefficienten der Reihe, in welche

$$\frac{1}{\sqrt{(aa+a'a'-2aa'\cos\varphi)}}$$

entwickelt wird. Setzt man dieselbe

$$T = A^0+2A'\cos\varphi+2A''\cos 2\varphi+2A'''\cos 3\varphi \text{ u.s.w.},$$

so wird, f statt $\frac{a}{a'}$ geschrieben und r[*)] statt $\cos\varphi+i\sin\varphi$,

$$\frac{1}{a'}(1-fr)^{-\frac{1}{2}}(1-fr^{-1})^{-\frac{1}{2}} = T,$$

also

$$a'A^0 = 1+\frac{1.1}{2.2}ff+\frac{1.1.3.3}{2.2.4.4}f^4+\frac{1.1.3.3.5.5}{2.2.4.4.6.6}f^6\ldots = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, f^2\right),$$

$$a'A' = \frac{1}{2}f\left(1+\frac{1.3}{2.4}ff+\frac{1.3.3.5}{2.4.4.6}f^4+\frac{1.3.3.5.5.7}{2.4.4.6.6.8}f^6\ldots\right) = \frac{1}{2}f.F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, f^2\right),$$

$$a'A'' = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}ff\left(1+\frac{1.5}{2.6}ff+\frac{1.5.3.7}{2.6.4.8}f^4+\frac{1.5.3.7.5.9}{2.6.4.8.6.10}f^6\ldots\right)$$
$$= \frac{1.3}{2.4}ff.F\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 3, ff\right),$$

$$a'A''' = \frac{1.3.5}{2.4.6}f^3\left(1+\frac{1.7}{2.8}ff+\frac{1.7.3.9}{2.8.4.10}f^4+\frac{1.7.3.9.5.11}{2.8.4.10.6.12}f^6\ldots\right)$$
$$= \frac{1.3.5}{2.4.6}f^3.F\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 4, ff\right)$$

u.s.w.

[*) Statt r steht in der Handschrift ρ.]

Aus der Verbindung der Gleichungen (15) und (19) folgt

$$\beta(\alpha-\gamma)xF(\alpha,\beta+1,\gamma+1)$$
$$-\gamma(\gamma-1)F(\alpha,\beta-1,\gamma-1)+\gamma(\gamma-1+(\beta-\alpha)x)F(\alpha,\beta,\gamma)=0.$$

Also für unsern Fall, wo $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\gamma-\frac{1}{2}$,

$$-(\gamma-\tfrac{1}{2})^2xF(\tfrac{1}{2},\gamma+\tfrac{1}{2},\gamma+1)-\gamma(\gamma-1)F(\tfrac{1}{2},\gamma-\tfrac{3}{2},\gamma-1)$$
$$+\gamma(\gamma-1+(\gamma-1)x)F(\tfrac{1}{2},\gamma-\tfrac{1}{2},\gamma)=0.$$

Es ist folglich, weil

$$ffA^{(\gamma-2)},\qquad fA^{(\gamma-1)};\qquad A^{(\gamma)}$$

proportional sind

$$\gamma(\gamma-1)F(\tfrac{1}{2},\gamma-\tfrac{3}{2},\gamma-1),\ (\gamma-\tfrac{3}{2})\gamma F(\tfrac{1}{2},\gamma-\tfrac{1}{2},\gamma),\ (\gamma-\tfrac{3}{2})(\gamma-\tfrac{1}{2})F(\tfrac{1}{2},\gamma+\tfrac{1}{2},\gamma+1),$$

allgemein [*)]

$$(43)\qquad \left(\gamma-\frac{3}{2}\right)A^{(\gamma-2)}-(\gamma-1)\left(f+\frac{1}{f}\right)A^{(\gamma-1)}+\left(\gamma-\frac{1}{2}\right)A^{(\gamma)}=0,$$

also

$$A^{(0)}-2\left(f+\frac{1}{f}\right)A'+3A''=0,$$
$$3A'-4\left(f+\frac{1}{f}\right)A''+5A'''=0,$$
$$5A''-6\left(f+\frac{1}{f}\right)A'''+7A^{\mathrm{IV}}=0\ \text{ etc.}$$

Man setze

$$(44)\qquad \frac{2}{1}\cdot\frac{1+ff}{f}\cdot\frac{A'}{A^0}=B^0,\quad \frac{4}{3}\cdot\frac{1+ff}{f}\cdot\frac{A''}{A'}=B',\quad \frac{6}{5}\cdot\frac{1+ff}{f}\cdot\frac{A'''}{A''}=B''\ \text{etc.},$$

so wird

$$(45)\qquad B^0=\frac{1}{1-\frac{9}{8}\left(\frac{f}{1+ff}\right)^2B'},\quad B'=\frac{1}{1-\frac{25}{24}\left(\frac{f}{1+ff}\right)^2B''},\quad B''=\frac{1}{1-\frac{49}{48}\left(\frac{f}{1+ff}\right)^2B'''}$$
etc.

[S. 43]

Nun ist aber auch

[*) In der Handschrift steht hier »und«.]

$$B^0 = \frac{(1+ff)F(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, ff)}{F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, ff)}, \quad B' = \frac{(1+ff)F(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 3, ff)}{F(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, ff)} \text{ etc.}$$

Man hat also auch

$$(46) \qquad B^{(n-2)} = \cfrac{1+ff}{1 - \cfrac{\frac{1.1}{(2n-2)2n}ff}{1 - \cfrac{\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+2)}ff}{1 - \cfrac{\frac{9}{(2n+2)(2n+4)}ff}{1 - \cfrac{\frac{(2n+1)^2}{(2n+4)(2n+6)}ff}{1 + \text{etc.}}}}}}$$

[6.]

Will man nun die Coefficienten A^0, A', A'' etc. bis incl. $A^{(n)}$ berechnen, so bestimmt man zuerst $B^{(n-1)}$ vermittelst der eben gegebnen Formel; sodann die vorhergehenden $B^{(n-2)}$, $B^{(n-3)}$ u.s.w. bis B^0 durch die Formeln (45) und endlich aus A^0, welches aus (42) oder durch specielle Methoden bestimmt seyn kann, vermittelst der Formeln (43) die übrigen A', A'' etc. Es ist hiebei bequem einen Hülfswinkel θ einzuführen, dessen Tangente $= f$. Man hat sodann

$$\frac{f}{1+ff} = \tfrac{1}{2} \sin 2\theta$$

und

$$A^0 = \frac{1}{a' \text{ Medium inter 1 et } \sqrt{(1-ff)}} = \frac{\cos\theta}{a' M(\cos\theta, \sqrt{\cos 2\theta})}.$$

Will man ein für allemal eine Tafel berechnen, so ist es am zweckmässigsten, dieselbe nach den Winkeln θ zu ordnen, und des bequemern Interpolirens wegen nicht die Coefficienten A^0, A', A'' etc. selbst, sondern die Logarithmen von

$$a'A^0\sqrt{(1-ff)}, \quad \frac{a'A'\sqrt{(1-ff)}}{f}, \quad \frac{a'A''\sqrt{(1-ff)}}{ff}, \quad \frac{a'A'''\sqrt{(1-ff)}}{f^3} \text{ u.s.w.}$$

oder etwa von den doppelten Grössen einzutragen.

Setzt man also etwa

$$2a'A^0\sqrt{(1-ff)} = \varpi^0, \qquad 2a'A'\sqrt{(1-ff)} = \varpi' f,$$
$$2a'A''\sqrt{(1-ff)} = \varpi'' ff, \quad 2a'A'''\sqrt{(1-ff)} = \varpi''' f^3 \text{ u.s.w.,}$$

so ist die bequemste Art, die Rechnung zu führen, folgende:

Man suche das arithmetisch-geometrische Mittel zwischen

$$\frac{\cos\theta}{2\sqrt{\cos 2\theta}} = \xi \text{ und } \tfrac{1}{2} = \eta.$$

Dieses Mittel sei $= M$ und die successiven Werthe des arithmetischen Mittels ξ', ξ'', ξ''' u.s.w. Man setze

$$\zeta = \frac{1}{16}\xi\xi \operatorname{tang}\theta^2,\quad \zeta' = \frac{\zeta\zeta}{\xi'\xi'},\quad \zeta'' = \frac{\zeta'\zeta'}{\xi''\xi''} \text{ u.s.w.},$$

so ist

$$\text{I} \qquad \varpi^0 = \frac{1}{M}$$

$$\text{II} \qquad \varpi' = \varpi^0\left(\frac{1}{2} + \frac{\zeta'}{\zeta} + \frac{2\zeta''}{\zeta} + \frac{4\zeta'''}{\zeta} + \text{u.s.w.}\right).$$

[S. 44]

Diese zweite Formel soll eigentlich nur zur Controlle dienen, indem aus ϖ^0 die folgenden vermittelst der Gleichungen

$$\begin{aligned}
\varpi' &= \tfrac{1}{2}\varpi^0 B^0 \cos\theta^2,\\
\varpi'' &= \tfrac{3}{4}\varpi' B' \cos\theta^2,\\
\varpi''' &= \tfrac{5}{6}\varpi'' B'' \cos\theta^2 \text{ u.s.w.}
\end{aligned}$$

abgeleitet werden.

Geht man hiebei bis ϖ^{X}, so hat man

$$B^{\text{IX}} = \cfrac{1+ff}{1-\cfrac{\frac{1}{440}ff}{1-\cfrac{\frac{441}{528}ff}{1-\cfrac{\frac{9}{624}ff}{1-\cfrac{\frac{529}{728}ff}{1-\cfrac{\frac{25}{840}ff}{1-\frac{625}{960}ff \text{ etc.}}}}}}}$$

$$B^{\text{I}} = \cfrac{1+ff}{1-\cfrac{\frac{1}{528}ff}{1-\cfrac{\frac{529}{624}ff}{1-\cfrac{\frac{9}{728}ff}{1-\cfrac{\frac{625}{840}ff}{1-\frac{25}{960}ff \text{ etc.}}}}}}$$ [*)]

[7.]

[S. 45]

Wir kommen auf die Gleichung (30) zurück, und bemerken, dass wenn allgemein

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = P \text{ und } F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x) = Q$$

gesetzt wird, die beiden Gleichungen Statt haben

$$\alpha\beta P - (\gamma-(\alpha+\beta+1)x)\frac{dP}{dx} - (x-xx)\frac{d^2P}{dx^2} = 0,$$
$$\alpha\beta Q - (\gamma-(\alpha+\beta+1)x)\frac{dQ}{dx} - (x-xx)\frac{d^2Q}{dx^2} = 0.$$

Hieraus folgt erstlich, dass das vollständige Integral der Gleichung

$$\alpha\beta y - (\gamma-(\alpha+\beta+1)x)\frac{dy}{dx} - (x-xx)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

sey

$$y = \mathfrak{A}F(\alpha, \beta, \gamma, x) + \mathfrak{B}F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x),$$

wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Constanten sind.

[S. 46]

Zweitens, dass

$$-\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x-xx}dx = d\log(QdP-PdQ),$$

also

[31 a] $$\frac{QdP-PdQ}{dx} = \frac{A}{x^\gamma(1-x)^{\alpha+\beta+1-\gamma}}.$$

[*) In der Handschrift folgt hier die durchgeführte Rechnung für das Beispiel $\theta = 36^\circ 20'$.]

Noch eine wichtige Verwandlung vollführt man auf folgende Art: Man setze

$$x = \frac{t}{t-1},$$

also

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{(t-1)^2}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2}{(t-1)^3}.$$

Hiedurch verwandelt sich die Gleichung für $F(\alpha, \beta, \gamma, x) = P$ in

$$\frac{\alpha\beta}{t-1}P - (\gamma + (\alpha+\beta-1-\gamma)t)\frac{dP}{dt} - (t-tt)\frac{d^2P}{dt^2} = 0.$$

Macht man also

$$P = (t-1)^{\mu} P',$$

so wird

$$\frac{\alpha\beta-\gamma\mu+\mu t(\gamma-\alpha-\beta+\mu)}{t-1}P' - (\gamma+(\alpha+\beta-1-\gamma-2\mu)t)\frac{dP'}{dt} - (t-tt)\frac{d^2P'}{dt^2} = 0.$$

Um den Bruch wegzuschaffen, setzt man

$$\alpha\beta - \alpha\mu - \beta\mu + \mu\mu = 0,$$

also entweder $\mu = \alpha$ oder $\mu = \beta$. Im ersten Falle wird

$$(-\alpha\beta+\alpha\gamma)P' - (\gamma-(\gamma+1+\alpha-\beta)t)\frac{dP'}{dt} - (t-tt)\frac{d^2P'}{dt^2} = 0,$$

woraus

$$P' = \mathfrak{A}' F(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, t) + \mathfrak{B}' F(\alpha, \gamma-\beta, \alpha+1-\beta, 1-t).$$

Hieraus folgert man leicht

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, -\frac{x}{1-x}\right),$$

$$= (1-x)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma-\alpha, \gamma, -\frac{x}{1-x}\right).$$

Mit Hülfe dieser Verwandlung kann man die Werthe unserer Functionen für negative x auf die Werthe für positive reduciren. [*)]

$$F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{1}{x}\right) = Ax^{\alpha} F(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, x)$$

$$+ Bx^{\beta} F(\beta, \beta+1-\gamma, \beta+1-\alpha, x),$$

[*) Die folgenden Formeln ohne Text sind ersichtlich später hinzugefügt.]

$$A = (\cos \alpha\pi + i \sin \alpha\pi)\frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\beta-1-\alpha)}{\Pi(\beta-1)\,\Pi(\gamma-1-\alpha)}$$

$$B = (\cos \beta\pi + i \sin \beta\pi)\frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\alpha-1-\beta)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\gamma-1-\beta)}.$$

[8.]

[S. 67]

Zu den oben gelieferten Untersuchungen können wir noch folgende wichtige Nachträge liefern.

I. $$(1+x)^{\alpha} F(\alpha, \alpha+1-\gamma, \gamma, x) = F\left(\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}, \gamma, \frac{4x}{(1+x)^2}\right),$$

II. $$(1+x)^{2\alpha} F(\alpha, \alpha+1-\gamma, \gamma, xx) = F\left(\alpha, \gamma-\frac{1}{2}, 2\gamma-1, \frac{4x}{(1+x)^2}\right),$$

III. $$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)}\cdot\frac{(\gamma+1-\alpha)(\gamma+1-\beta)}{(\gamma+1)(\gamma+1-\alpha-\beta)}\cdot\frac{(\gamma+2-\alpha)(\gamma+2-\beta)}{(\gamma+2)(\gamma+2-\alpha-\beta)} \text{ etc.}$$
$$= \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\gamma-1-\alpha-\beta)}{\Pi(\gamma-1-\alpha)\,\Pi(\gamma-1-\beta)},$$

wenn man durch Πz den Werth des Integrals

$$\int e^{-x} x^z dx$$

von $x = 0$ bis $x = \infty$ bezeichnet, welcher, falls z eine ganze Zahl ist, durch das Product $1.2.3.4\ldots z$ ausgedrückt wird.

IV. $$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{i^{\gamma-1} F(-i, \gamma-1, \gamma, 1)}{i^{\gamma-1-\alpha} F(-i, \gamma-1-\alpha, \gamma-\alpha, 1)}\cdot$$
$$\cdot\frac{i^{\gamma-1-\alpha-\beta} F(-i, \gamma-1-\alpha-\beta, \gamma-\alpha-\beta, 1)}{i^{\gamma-\beta-1} F(-i, \gamma-1-\beta, \gamma-\beta, 1)} F(\alpha, \beta, i+\gamma, 1),$$

V. $$F\left(\alpha, \beta, \frac{1}{2}, x\right) = \mathfrak{A} F\left(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta+\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{x}}{2}\right)$$
$$+ \mathfrak{A} F\left(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta+\frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{x}}{2}\right),$$

wo

$$\mathfrak{A} = \frac{\Pi(-\frac{1}{2}).\Pi(-\frac{1}{2}-\alpha+\beta).\Pi(-\frac{1}{2}+\alpha-\beta)}{\Pi(-\frac{1}{2}-\alpha).\Pi(-\frac{1}{2}-\beta).\Pi(-\frac{1}{2}-\alpha-\beta)};$$

VI. $$F\left(\alpha, \beta, \frac{3}{2}, x\right) = \frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{x}} F\left(2\alpha-1, 2\beta-1, \alpha+\beta-\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{x}}{2}\right)$$
$$-\frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{x}} F\left(2\alpha-1, 2\beta-1, \alpha+\beta-\frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{x}}{2}\right),$$

wo

$$\mathfrak{B} = \frac{2\alpha+2\beta-1}{(2\alpha-1)(2\beta-1)}\mathfrak{A}.$$

[9.]

Es sei ferner wie oben [art. 7.]

$$P = F(\alpha, \beta, \gamma, x), \quad Q = F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x),$$

so dass

$$Q\frac{dP}{dx} - P\frac{dQ}{dx} = \frac{A}{x^\gamma(1-x)^{\alpha+\beta+1-\gamma}},$$

wo

$$A = \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\alpha+\beta-\gamma)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}.$$

Ferner

$$Q = B.P - \frac{A}{1-\gamma}\cdot x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x),$$

wo

$$B = \frac{\Pi(-\gamma)\,\Pi(\alpha+\beta-\gamma)}{\Pi(\alpha-\gamma)\,\Pi(\beta-\gamma)}.$$

[S. 68]

Hiedurch kann also die bei $x > 0{,}5$ langsamere Convergenz auf eine schnellere gebracht werden. Diess Verfahren ist jedoch nicht anwendbar, wenn $\gamma = 1$. Setzt man in diesem Fall

$$Q = R - AP\log x,$$

wo

$$A = \frac{\Pi(\alpha+\beta-1)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)},$$

so wird

$$R = A\left(-2\Pi'0 - \frac{\Pi'(\alpha-1)}{\Pi(\alpha-1)} - \frac{\Pi'(\beta-1)}{\Pi(\beta-1)}\right) + (1)\alpha\beta x + ((1)+(2))\frac{\alpha.\alpha+1.\beta.\beta+1}{1.2.1.2}xx$$
$$+ ((1)+(2)+(3))\frac{\alpha.\alpha+1.\alpha+2.\beta.\beta+1.\beta+2}{1.2.3.1.2.3}x^3 + \text{etc.},$$

wo

$$(1) = \frac{1-(2\alpha-1)(2\beta-1)}{2\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - 2,$$

$$(2) = \frac{4-2\alpha.2\beta}{4.\alpha+1.\beta+1} = \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} - \frac{2}{2},$$

$$(3) = \frac{9-(2\alpha+1)(2\beta+1)}{6.\alpha+2.\beta+2} = \frac{1}{\alpha+2} + \frac{1}{\beta+2} - \frac{2}{3}$$

etc.

[10.]

$$\Pi(a-1)\,\Pi(-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad \Pi a\,.\,\Pi(-a) = \frac{a\pi}{\sin a\pi},$$

$$\Pi a = \frac{1.2.3.4\ldots f.f^a}{1+a.2+a.3+a\ldots f+a} \quad \text{pro } f = \infty,$$

$$\frac{\Pi' a}{\Pi a} = -\frac{1}{1+a} - \frac{1}{2+a} - \frac{1}{3+a} - \frac{1}{4+a} - \cdots - \frac{1}{f+a} + \log f \; [\text{pro } f = \infty]$$

$$\frac{\Pi'(a-1)}{\Pi(a-1)} - \frac{\Pi'(-a)}{\Pi(-a)} = \pi \operatorname{cotang} a\pi.$$

BEMERKUNGEN.

Neben der lateinischen Bearbeitung der *Disquisitiones circa seriem*, über die SCHERING in den Bemerkungen zu dem aus dem Nachlaß herausgegebenen zweiten Teile dieser Abhandlung berichtet (Werke III, S. 230), verdient die vorstehende deutsche Bearbeitung derselben Abhandlung besondere Beachtung. Sie besteht aus zwei Teilen, die aber kurz hintereinander niedergeschrieben sein dürften, der erste umfaßt die artt. [1.]—[7.], der zweite die artt. [8.] und [9.], beide werden wohl auf das Jahr 1809 anzusetzen sein. Gegenüber den *Disquisitiones* (Werke III, S. 132) fällt zunächst auf, daß die Beziehungen zwischen verwandten Reihen (siehe die Gleichungen (2) bis (29), oben S. 339—342) hier immer in der besonderen Form gegeben werden, daß wenn $u = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, v eine verwandte Reihe, u', v' die Derivierten bedeuten,

$$v = Au + Bu', \quad v' = Cu + Du'$$

gesetzt wird, wo A, B, C, D gewisse rationale Funktionen von x sind. Es ist also diejenige Form der Transformation, durch welche die Differentialgleichung (30), der u genügt, in die (nach RIEMANN*)) zu derselben Klasse gehörige Differentialgleichung, der v Genüge leistet, übergeht.

Bei der Bestimmung der in der Gleichung (31) des art. [3.] auftretenden Konstanten A wird auf eine spätere Stelle verwiesen. Nun erscheint zwar im art. [7.] die analoge Gleichung [31 a] für beliebige Werte der α, β, γ und im art. [9.] wird die Darstellung dieser allgemeinen Konstanten mit Hilfe der Π-Funktion gegeben, aber ohne Beweis. Ein Beweis findet sich in dem nachgelassenen art. 50. der *Disquisitiones*, Werke III, S. 221 Bemerkenswert ist im art. [3.] das Beispiel $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$, das dem arithmetisch-geometrischen Mittel entspricht; in diesem Falle ergibt sich $A = \frac{1}{\pi}$ und die Gleichung (31) ist nichts anderes als der Schöne Lehrsatz, oben S. 218, oder das Theorema elegantissimum, Werke VIII, S. 98. Im art. [4.] wird die EULERsche Gleichung (32), vergl. oben S. 329, ähnlich wie auch in dem nachgelassenen art. 40 der *Disquisitiones*, Werke III, S. 209, abgeleitet; »eine der merkwürdigsten Relationen« nennt sie GAUSS, ohne übrigens EULER zu erwähnen. Es folgen dann die Umwandlungen der Quotienten

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1)}{F(\alpha, \beta, \gamma)} \text{ und } \frac{F(\alpha+1, \beta, \gamma)}{F(\alpha, \beta, \gamma)}$$

in Kettenbrüche, ganz ähnlich wie im art. 12. der *Disquisitiones*, Werke III, S. 134. Die Frage der

*) B. RIEMANN, Gesammelte Werke, 2. Aufl., 1892, S. 380.

Konvergenz dieser Kettenbrüche hat GAUSS nicht erörtert, während er die Konvergenz der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ namentlich auch für den Punkt $x = 1$ in der Abhandlung von 1812 genau untersucht. Daß er aber über die formale Umformung hinaus auch die quantitative Bedeutung der Kettenbruchentwicklung erkannt hat, ergibt sich schon aus dem oben S. 237 abgedruckten Briefe an BESSEL, in dem die Brauchbarkeit der dort betrachteten besonderen Kettenbrüche für die numerische Berechnung maßgebend ist. — Wie L. W. THOMÉ *) gezeigt hat, konvergiert der Kettenbruch, der dem Quotienten

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1)}{F(\alpha, \beta, \gamma)}$$

entspricht, in der ganzen komplexen x-Ebene mit Ausnahme der reellen Werte, die nicht kleiner sind als 1, und stellt dort den Quotienten jener Reihen bezw. den ihrer analytischen Fortsetzungen innerhalb der durch den Querschnitt $(1, +\infty)$ zerschnittenen Ebene dar.

Die artt. [5.], [6.] geben die Begründung der in dem Briefe an BESSEL, oben S. 237, auseinandergesetzten Entwicklungen, wobei wieder das agM. eine Rolle spielt, das diesmal auch ausdrücklich genannt wird. Die am Schluß von art. [7.] später hinzugeschriebenen Formeln enthalten schon die erst im art. [8.] eingeführte Π-Funktion. In den Gleichungen I., II. des art. [8.], die mit den Gln. [100], [101] Werke III, S. 225 gleichbedeutend sind, entspricht die angewandte Transformation von x^2 in $\frac{4x}{(1+x)^2}$ dem Übergang von $x = \frac{b}{a}$ zu $x_1 = \frac{b_1}{a_1}$, wo

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{ab};$$

vergl. auch in der Abhandlung von 1812, Werke III, S. 129 die dritte Form (»tertio fit«) der dort auftretenden Koeffizienten. In der Gleichung IV. kann i einen ganz beliebigen Wert haben. Zu V. vergleiche man Werke III, S. 227, Gleich. [106] und S. 228, Gleich. [107]. Für den am Schluß von art. [9.] behandelten Ausnahmefall $\gamma = 1$, der auch beim agM. auftritt, vergl. den nachgelassenen art. 45 der *Disquisitiones*, Werke III, S. 214, für art. [10.] die artt. [18.] und ff. der *Disquisitiones*, ebenda S. 144.

SCHLESINGER.

*) *Über die Kettenbruchentwickelung der Gaussschen Function* $F(\alpha, 1, \gamma, x)$. CRELLES Journal für Mathematik **66**, 1866, S. 322 und *Über die Kettenbruchentwickelung des Gaussschen Quotienten* $F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x) : F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, ebenda **67**, 1867, S. 299; siehe auch RIEMANNS aus dem Jahre 1863 stammendes Fragment *Sullo svolgimento del quoziente di due serie ipergeometriche in frazione continua infinita*, in der Bearbeitung von H. A. SCHWARZ zuerst veröffentlicht 1876 in der 1. Auflage von RIEMANNS Gesammelten Werken, 2. Auflage, 1892, S. 424.

[IV.]

[NACHTRÄGE ZUM ART. 6. DER ABHANDLUNG VON 1812*).]

[Aus Handbuch 19, Be, Kleine Aufsätze usw, May 1809]

[S. 289]

[1.]

Zu den die Reihe

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha\,\alpha+1.\beta.\beta+1}{1.2.\gamma.\gamma+1}xx \text{ u.s.w.}$$

betreffenden Relationen kann man noch beifügen:

$$0 = \gamma(\alpha-\beta)F(\alpha, \beta, \gamma) + \beta(\gamma-\alpha)F(\alpha, \beta+1, \gamma+1) + \alpha(\beta-\gamma)F(\alpha+1. \beta, \gamma),$$

$$0 = \gamma(\gamma-1)F(\alpha, \beta-1, \gamma-1) + \gamma((\alpha-\beta)x - (\gamma-1))F(\alpha, \beta, \gamma)$$
$$+ \beta(\gamma-\alpha)xF(\alpha, \beta+1, \gamma+1).$$

[2.]

Bei Entwickelung von $(1+ff-2f\cos\varphi)^{-\theta}$ in die Reihe

$$A_0 + 2A_1\cos\varphi + 2A_2\cos 2\varphi + 2A_3\cos 3\varphi + \text{u.s.w.}$$

wird

$$A_0 = F(\theta, \theta, 1, ff),$$
$$A_1 = \theta f F(\theta, 1+\theta, 2, ff),$$
$$A_2 = \frac{\theta.1+\theta}{1.2}ffF(\theta, 2+\theta, 3, ff),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_n = \frac{\theta.1+\theta.2+\theta.3+\theta\ldots n-1+\theta}{1.2.3.4\ldots n}f^nF(\theta, n+\theta, n+1, ff).$$

[*) Siehe Werke III, S. 128.]

Setzt man den Factor

$$F(\theta, n+\theta, n+1, ff) = F_n,$$

so gibt die [zweite] obige Relation

$$0 = n(n+1)\{F_{n-1} - (1+ff)F_n\} + (n+\theta)(n+1-\theta)ffF_{n+1}.$$

[3.]

[Es ist]

$$F_n = (1-ff)^{-\theta} + \frac{\theta(\theta-1)}{n[+1]}(1-ff)^{-\theta-1}ff - \ldots.$$

Schon in der Formel S. 46 [des Handbuchs *)] ist enthalten

$$F_n = (1-ff)^{-\theta} F\left(\theta, 1-\theta, n+1, -\frac{ff}{1-ff}\right)$$

und [es] bleibt also nur übrig nachzuweisen, wie viel Bedeutung dieser Formel übrig bleibt, wenn sie divergirt.

[S. 290]

Die Ableitung der Gleichung

$$F(\theta, n+\theta, n+1, ff) = (1-ff)^{-\theta} F\left(\theta, 1-\theta, n+1, -\frac{ff}{1-ff}\right)$$

geschieht für diesen Zweck am passendsten, indem man die einzelnen Glieder des zweiten Theils nach Potenzen von ff entwickelt und alles, was einerlei Potenz von ff enthält, zusammenfasst, wo dann die Gleichheit mit dem betreffenden Gliede des ersten Theils leicht erkannt wird. Es ist z. B. das Glied des ersten Theils, welches f^6 enthält

$$\frac{\theta.\theta+1.\theta+2}{1.2.3}\cdot\frac{n+\theta.n+\theta+1.n+\theta+2}{n+1.n+2.n+3}f^6,$$

während aus dem zweiten Theil hervorgeht

*) [Gemeint ist die Formel, oben S. 350, $F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, -\frac{x}{1-x}\right)$.]

$$\frac{\theta.\theta+1.\theta+2}{1.2.3}\cdot f^6$$

$$-\frac{\theta+1.\theta+2}{1.2}\cdot\frac{\theta.1-\theta}{1.n+1}\cdot f^6$$

$$+\quad\frac{\theta+2}{1}\cdot\frac{\theta.\theta+1}{1.2}\cdot\frac{1-\theta.2-\theta}{n+1.n+2}\cdot f^6$$

$$-\quad\frac{\theta.\theta+1.\theta+2}{1.2.3}\cdot\frac{1-\theta.2-\theta.3-\theta}{n+1.n+2.n+3}\cdot f^6$$

$$=\frac{\theta.\theta+1.\theta+2}{1.2.3}\cdot f^6\cdot F(-3,\, 1-\theta,\, n+1,\, 1)$$

$$=\frac{\theta.\theta+1.\theta+2}{1.2.3}f^6\cdot\frac{\Pi n.\Pi(n+2+\theta)}{\Pi(n+3)\Pi(n+\theta-1)}=\frac{\theta.\theta+1.\theta+2}{1.2.3}\,\frac{n+\theta.n+\theta+1.n+\theta+2}{n+1.n+2.n+3}[\cdot f^6]$$

[4.]

[S. 291]

Setzt man

$$1+\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}x+\frac{\alpha.\alpha+1.\beta.\beta+1}{\gamma.\gamma+1.\delta.\delta+1}xx+\text{u.s.w.}=\psi(\alpha,\beta,\gamma,\delta,x)=P,$$

so ist

$$(\alpha\beta-(\gamma-1)(\delta-1))P+((\alpha+\beta+1)x-(\gamma+\delta-1))\frac{dP}{dx}+(xx-x)\frac{ddP}{dx^2}$$
$$=\frac{(\alpha\beta-\gamma\delta)(\gamma-1)(\delta-1)}{\gamma\delta}+\frac{\alpha\beta(\gamma-1)(\delta-1)((\alpha+1)(\beta+1)-(\gamma+1)(\delta+1))}{\gamma.\gamma+1.\delta.\delta+1}x$$
$$=A+Bx.$$

Schreibt man

$$x=\frac{t}{t-1},$$

so wird die Gleichung

$$\frac{\alpha\beta-(\gamma-1)(\delta-1)}{t-1}P-((\alpha+\beta-\gamma-\delta+2)t+\gamma+\delta-1)\frac{dP}{dt}+(tt-t)\frac{ddP}{dt^2}$$
$$=\frac{-A+(A+B)t}{(t-1)^2}.$$

Diese Art führt nicht bequem zum Ziel. Wohl aber die auf S. 290 [des Handbuchs, siehe art. 3] angedeutete.

[5.]

Es kommt nur darauf an zu zeigen, dass für die Reihe [*)]

$$1 - \frac{k(1-\theta)}{n+1} + \frac{k.k-1}{1.2}\,\frac{1-\theta.2-\theta}{n+1.n+2} - \frac{k.k-1.k-2}{1.2.3}\,\frac{1-\theta.2-\theta.3-\theta}{n+1.n+2.n+3} + \text{u.s.w.},$$

[S. 292]

wo k eine ganze positive Zahl ist, eben so wie n, und deren Summe

$$= \frac{n+\theta.n+\theta+1.n+\theta+2\ldots n+\theta+k-1}{n+1.n+2.n+3\ldots n+k} = S$$

ist, bei unvollständiger Summirung bis zum $m$ten Gliede aber $= S_m$ gesetzt wird, allemahl $S - S_m$ dasselbe Zeichen hat, wie das erste weggelassene Glied. Für den Fall, wo $1-\theta$ positiv ist, wird dieser Beweis sehr leicht. Es alterniren nehmlich die Zeichen der Glieder der Reihe

$$1 \quad -a \quad +b \quad -c \quad +d\ldots\ldots g\ldots\ldots p$$

und absolut genommen nehmen sie zu bis zu einem gewissen Gliede z. B. g und von da an nehmen sie ab. Es ist dann klar, dass

$1-S$ positiv und kleiner als 1,
$1-a-S$ negativ und absolut kleiner als a,
$1-a+b-S$ positiv und kleiner als b,
$1-a+b-c-S$ negativ u.s.w.

sein wird. Die Schlussweise gilt, bis man bei der Summation zu g gelangt ist. Für die übrigen braucht man nur von hinten anzufangen, wo

das letzte Glied,
die algebraische Summe der beiden letzten,
die algebraische Summe der drei letzten, u.s.w.

eine Reihe mit alternirenden Zeichen bildet.

[S. 293]

Es scheint, dass der Beweis sich viel leichter dadurch führen lässt, dass man nachweiset, aus der Gültigkeit des Satzes bis zu einem gewissen Werth von k folge auch die Richtigkeit für den nächstfolgenden.

[*) In der Handschrift steht »dass wenn die Reihe«.]

[6.]

Nachdem dieser Satz fest steht. beachte man zunächst, dass die Entwickelung von

$$(1-ff)^{-\theta-\mu}$$

lauter Glieder von einerlei Zeichen hat, sobald $\mu+\theta$ positiv geworden ist. Dann ergibt sich aus dem Hülfssatz leicht, dass

$$F(\theta, n+\theta, n+1, ff) = A$$

gesetzt, [ferner]

$$(1-ff)^{-\theta} F\left(\theta, 1-\theta, n+1, -\frac{ff}{1-ff}\right) = B_\mu,$$

insofern von $F\left(\theta, 1+\theta, n+1, -\frac{ff}{1-ff}\right)$ die ersten μ Glieder summirt werden, während das nächstfolgende Glied $b_{\mu+1}$ heisst, $A-B_\mu$ dasselbe Zeichen haben wird, wie $b_{\mu+1}$.

Jener Hülfssatz ist übrigens ein spezieller Fall von dem Allgemeinern:

Wenn a, b, c, d u s.w. positive Grössen sind, jede folgende grösser als die vorhergehende, so ist die Summe

$$a - kb + \frac{k\ k-1}{1.2} c - \frac{k.k-1.k-2}{1.2.3} d + \text{ u.s.w.}$$

wo man auch abbricht, immer mit demselben Zeichen behaftet, wie das letzte zugezogene Glied.

Man wendet diess an, indem man von hinten anfängt. Der Satz bleibt auch wahr, wenn von irgend einer Stelle an die Grössen a, b, c, d u.s.w. alternirende Zeichen haben.

BEMERKUNG.

Dieser Aufzeichnung (der letzten des Handbuchs 19, Be) geht unmittelbar vorher (auf S. 288 des Handbuchs) die von SCHERING in den Bemerkungen Werke III, S. 230 erwähnte Berechnung von $\log \Pi i$ und Πi. Daß diese, wie SCHERING angibt, »nach dem Jahre 1847« anzusetzen ist, folgt daraus, daß sich auf S. 276 des Handbuchs die Zeitangabe »1847, Mai 13« findet. Natürlich gilt dieselbe Zeitbestimmung für die vorstehend abgedruckte Aufzeichnung. Zu dem Gegenstande vergleiche man den art. 6. der *Disquisitiones circa seriem,* Werke III, S. 128.

SCHLESINGER.

BRIEFWECHSEL.

[1.]

GAUSS an BESSEL. Göttingen 21. October 1810.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und BESSEL, Leipzig 1880, S. 128—129.]

. . . . . . Durch Ihre Untersuchung über das Integral

$$\int \frac{dx}{\log x}$$

haben Sie mir eine grosse Freude gemacht. Ich hatte im Grunde denselben Weg eingeschlagen, bin aber bei weiten nicht so weit darauf vorwerts gegangen, wie Sie Ich setzte nämlich $x = e^y$, wodurch das Integral

$$\int \frac{e^y dy}{y}$$

wird. Um diess von $y = a$ bis $y = a+t$ zu integriren, verwandle ich

$$\frac{e^{a+t}dt}{a+t}$$

in

$$\begin{aligned} e^a dt \Big\{ \frac{1}{a} + \frac{t}{a} + \frac{tt}{2a} + \frac{t^3}{6a} & + \\ - \frac{t}{aa} - \frac{tt}{aa} - \frac{t^3}{2aa} & - \\ + \frac{tt}{a^3} + \frac{t^3}{a^3} & + \text{etc.} \Big\} \end{aligned}$$

also das Integral

$$
\begin{aligned}
= e^a \Big\{ & \frac{1}{a}\left(t + \frac{1}{2}tt + \frac{1}{6}t^3 + \text{etc.}\right) \\
& - \frac{1}{aa}\left(\frac{1}{2}tt + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \text{etc.}\right) \\
& + \frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{10}t^5 + \text{etc.}\right) \\
& \qquad \text{etc.} \Big\}
\end{aligned}
$$

wo man die Coefficienten von $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{a^3}$ etc. für bestimmte Werthe von t ein für allemal berechnen kann. Offenbar kann man auch t negativ setzen, und dann kommt die Operation mit der Ihrigen überein. Nur hatte ich mich beschränkt, für t rationale Werthe $\frac{1}{2}$ und 1 zu substituiren, und so die Integrale für $y = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ bestimmt . . . .

[2.]

Gauss an Olbers. Göttingen, 17. Oktober 1811.

[Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke II, 1, (1900), S. 482.]

. . . .

Meine Pallasrechnungen haben nun seit 6 Wochen ganz ruhen müssen. Ich habe mich viel diese Zeit her mit den transcendenten Functionen, worauf die Integration der Gleichung

$$(\alpha + \beta x + \gamma xx)\frac{ddy}{dx^2} + (\delta + \varepsilon x)\frac{dy}{dx} + \zeta y = 0$$

führt, beschäftigt und sehr artige Sachen gefunden. Die meisten transcendenten Functionen, mit denen man sich bisher beschäftigt hat, sind darunter als specielle Fälle begriffen. — Auch mit den unexplicabeln Functionen

$$1 . 2 . 3 \ldots x \text{ und } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x}$$

hängt diese Untersuchung zusammen.

[3.]

GAUSS an BESSEL. Göttingen, 21. November 1811.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und BESSEL, Leipzig 1880, S. 151—154.]

. . . . Mit Vergnügen sehe ich aus Ihrem Briefe, dass Sie auch über die Facultäten gearbeitet haben. Wahrscheinlich werden sich unsre Ansichten öfters begegnen. Ich arbeite nemlich jetzt an einer Abhandlung für unsere Soc[ietät], die in etwa 6 Wochen vollendet seyn wird, und die Reihe

$$1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha.\alpha+1.\beta.\beta+1}{1.2.\gamma.\gamma+1}xx+\frac{\alpha.\alpha+1.\alpha+2.\beta.\beta+1.\beta+2}{1.2.3.\gamma.\gamma+1.\gamma+2}x^3+\text{etc.}$$

betrifft, und auch die Functionen, die mit KRAMPS Facultäten[*)] zusammenhangen, berührt. Eine solche Function ist allerdings in der Analyse einzuführen; ich finde es aber nicht zweckmässig, eine solche, wie KRAMP gethan hat, $a^{b|c}$, die von drei veränderlichen Grössen abhangt aufzunehmen, da man mit einer Function Einer veränderlichen Grösse $1^{x|1}$ vollkommen eben so weit reicht. Also das Product

$$1.2.3\ldots x = \Pi x$$

ist die Function, die meiner Meinung nach in der Analyse eingeführt werden muss, und auf die so wie auf die davon derivirten Functionen

$$\frac{d\Pi x}{\Pi x.dx}\ \text{etc.}$$

unzählige Aufgaben sich zurückführen lassen. Will man sich aber nicht wie KRAMP zahllosen Paralogismen und Paradoxen und Widersprüchen[**)] blossstellen, so muss $1.2.3\ldots x$ nicht als Definition von Πx gebraucht werden, da eine solche nur, wenn x eine ganze Zahl ist, einen bestimmten Sinn hat, sondern man muss von einer höheren allgemein, selbst auf imaginäre Werthe von x anwendbaren, Definition ausgehen, wovon, wie Sie mit Recht bemerken,

[*) Siehe: *Analyse des réfractions astronomiques et terrestres,* par le citoyen KRAMP, Leipzig 1799, Chapitre III, Analyse des facultés numériques, S. 46 ff.]

[**) Siehe z. B. die von BESSEL, *Briefwechsel,* S. 200, erwähnten Stellen in KRAMPS Abhandlung: § 40, S. 56 und § 200, S. 108.]

jene als specieller Fall erscheint. Ich habe folgende gewählt[*)]:

$$\Pi x = \frac{1.2.3\ldots k.k^x}{x+1.x+2.x+3\ldots x+k},$$

wenn k unendlich wird. Ich freue mich, dass unsere Ansichten hier wie in andern Puncten zusammentreffen.

Das Wesen einer Function ist das Bestimmtseyn, und darauf gründet sich das Haupterforderniss einer guten Definition. Höchst verwerflich ist daher eine Definition aus einer ihrer Natur nach divergirenden Reihe wie KRAMP's Γx[**)], welches

$$= \log \Pi \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) \log x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \log 2\pi.$$

Eine Reihe die nicht immer convergirt, wie meine obige, kann auch nur innerhalb der Schranken, wo sie convergirt, als Definition gelten, und die Frage was aus der Function werden soll***), wenn man ihr Argument jene Schranken überschreiten lässt, verträgt nur dann erst eine Antwort, wenn ein höheres

[*) In Wirklichkeit geht diese Definition der Funktion Πx auf EULER zurück, der sich in dem Briefe an GOLDBACH vom 13. Oktober 1729 (P. H. FUSS, *Correspondance mathématique et physique* I, St Pétersbourg 1843, S. 3) und in den *Institutiones calculi differentialis* II, 1755, cap. XVII, Opera omnia ser. I, vol. 10, S. 641 zur Definition von $x!$ des unendlichen Produkts

$$\frac{1^{1-x}.2^x}{1+x} \cdot \frac{2^{1-x}.3^x}{2+x} \cdot \frac{3^{1-x}.4^x}{3+x} \cdots$$

bedient. GAUSS weist (*Disquisitiones circa seriem*, art. 20, Werke III, S. 145, 146) selbst — allerdings ohne EULER zu nennen — auf die Identität seiner Definition von Πx mit der von EULER gegebenen hin.]

[**) Siehe a. a. O. § 179, S. 102, wo Γy durch die Reihe

$$\beta y + \tfrac{1}{3}\delta y^3 + \tfrac{1}{5}\zeta y^5 + \tfrac{1}{7}\vartheta y^7 + \cdots$$

erklärt wird, in der nach § 129, 130, S. 85

$$\beta = \tfrac{1}{12}, \quad \delta = -\tfrac{1}{120}, \quad \zeta = \tfrac{1}{252}, \quad \vartheta = -\tfrac{1}{240}, \ldots$$

also

$$\beta = \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}, \quad \delta = -\tfrac{1}{4}\mathfrak{B}, \quad \zeta = \tfrac{1}{6}\mathfrak{C}, \quad \vartheta = -\tfrac{1}{8}\mathfrak{D}, \ldots,$$

wo $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \ldots$ die BERNOULLIschen Zahlen sind; vergl. den art. 20. der *Disquisitiones circa seriem*, Werke III, S. 152.]

***) Man sollte überhaupt nie vergessen, dass die Functionen, wie alle mathematischen Begriffszusammensetzungen, nur unsere eignen Geschöpfe sind, und dass, wo die Definition, von der man ausging, aufhört einen Sinn zu haben, man eigentlich nicht fragen soll was ist? sondern was convenirt anzunehmen? damit ich immer consequent bleiben kann. So z. B. das Product aus —·—.

Princip zur Definition aufgefunden ist, wie bei meiner Reihe die Differentialgleichung

$$0 = \alpha\beta P - (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)\frac{dP}{dx} - (x - xx)\frac{ddP}{dx^2}\text{*)}.$$

Auf gleiche Art fallen alle Paradoxa, die einige Mathematiker bei den Logarithmen gefunden haben, von selbst weg, wenn man nicht von der gewöhnlichen Definition basis $^{\text{logar.}}$ = Zahl ausgeht, die eigentlich nur dann recht befriedigend ist, wenn der Exponent eine ganze Zahl ist, und ganz [und gar] keinen Sinn gibt, wenn der Exponent gar imaginär werden soll — sondern jede Grösse die in der Reihe

$$1 + x + \tfrac{1}{2}xx + \tfrac{1}{6}x^3 + \text{etc.}\ldots$$

für x subst[ituirt] ihr den Werth A gibt, Logarithm von A[**)] nennt; wie ich mit Vergnügen sehe, hat der Portugiese ACUNHA[***)] diese Definition wirklich gewählt — in einer schlechten Rec[ension] in unseren Gel[ehrten] Anz[eigen †)] ist er deswegen getadelt — aber freilich die nöthigen Beweise, dass allgemein

$$(1 + x + \tfrac{1}{2}xx\ldots)(1 + y + \tfrac{1}{2}yy\ldots) = 1 + (x + y) + \tfrac{1}{2}(x + y)^2 + \cdots$$

nur schlecht, nemlich bloss durch Induction ausgeführt, obgleich es so sehr leicht streng zu beweisen ist.

So wie es mir immer Vergnügen macht, in Wesentlichen Dingen mit Ihnen, lieber BESSEL, zusammen zu treffen, so kann ich nicht leugnen, dass ich auch mit Vergnügen bemerke, wenn wir in Kleinigkeiten, die mehr nur Sache des Geschmacks sind, uns begegnen. Noch heute las ich ihre Recension

---

*) Nach welcher jedem, reellen oder imaginären Werthe von x vermittelst eines stetigen Überganges von $x = 0$, ohne $x = 1$ zu berühren (was durch imaginäre Zwischenwerthe geschehen kann), ein, gewöhnlich mehrere, ja unendlich viele Werthe von P entsprechen.

[**) In der Handschrift steht x statt A.]

[***) JOSÉ ANASTASIO DA CUNHA, *Principios Mathematicos*, Lisboa 1790. GAUSS kannte wahrscheinlich die Übersetzung *Principes Mathématiques* de feu J.-A. DA CUNHA, traduits littéralement du Portugais par J. M. D'ABREU, Bordeaux 1811, siehe Livre IX, S. 117 ff., wo in dem von GAUSS angegebenen Sinne von den Potenzen und Logarithmen gehandelt wird.]

[†) Göttingische Gelehrte Anzeigen 1811, 181. Stück, S. 1801, siehe besonders S. 1804—1805; diese Anzeige bezieht sich auf die französische Übersetzung des in Rede stehenden Werks.]

von CAGNOLI in der Jen[aischen] A[llgemeinen] L[iteraturzeitung*)], wo es mich freute, dass Sie sich gegen das widerwärtige $\sim$ erklären. Auch ist mir jedesmal fatal das garnicht analogische $\sin^2 \varphi$, obgleich auch LAPLACE es gebraucht; fürchtet man, dass $\sin \varphi^2$ zweideutig werden könne (was doch vielleicht nie oder höchst selten eintritt, wenn man von $\sin (\varphi^2)$ spräche), ei nun, so schreibe man $(\sin \varphi)^2$ aber nicht $\sin^2 \varphi$, was der Analogie nach nur $\sin (\sin \varphi)$ bedeuten sollte. Noch unausstehlicher ist mir das barbarische den Franzosen nachgeäffte »Sey $a = b$«. Es sind diess freilich alles nur nichtswürdige Kleinigkeiten, aber wenn mir bei einer analytischen Ausführung Eleganz immer ein wohlthuender Genuss ist, so mag ich auch gern, dass am äusseren Kleide nichts mein Auge beleidigt. . . . .

[4.]

GAUSS an BESSEL. Göttingen, den 18. Dezember 1811.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und BESSEL. Leipzig 1880, S. 155.]

Seit einigen Tagen habe ich endlich das Königsberger Archiv, das ich mir verschrieben hatte, empfangen. Mit grossem Interesse habe ich Ihren ersten Aufsatz[**)], theuerster BESSEL, gelesen und den andern[***)] wenigstens vorerst durchblättert. Jener und die schönen Hülfsmittel, die er darbietet, das li für grosse Zahlen zu berechnen, sind mir jetzt um so angenehmer, da ich unlängst eine schöne in diesem Jahr zu Deventer erschienene Factorentafel von CHERNAC[†)] bis 1020000 erhalten habe, aus welcher ich nach und nach die Primzahlen von Myriade zu Myriade abzählen lassen will, um sie

[*) Jahrgang 1811, Nr. 206, 207, *Recensionen von Fr. W. Bessel*, herausgegeben von ENGELMANN, Leipzig 1878, S. 138; die Rezension bezieht sich auf die *Trigonométrie rectiligne et sphérique* par ANTOINE CAGNOLI, traduite de l'Italien par N. M. CHOMPRÉ, 2[de] éd., Paris 1808.]

[**) *Untersuchung der durch das Integral* $\int \frac{dx}{lx}$ *ausgedrückten transcendenten Function*, Königsberger Archiv für Naturwissenschaften und Medicin 1, 1812, S. 1, FR. W. BESSELS Abhandlungen II, Leipzig 1876, S. 330.]

[***) *Über die Theorie der Zahlenfacultäten*, Königsberger Archiv u.s.w. 1, 1812, S. 241, FR. W. BESSELS Abhandlungen II, 1876, S. 342.]

[††) *Cribrum Arithmeticum sive tabula continens numeros primos etc.*, confecit LADISLAUS CHERNAC, Pannonius, Daventriae 1811, vergl. auch GAUSS' Anzeige dieses Werks, Gött. Gel. Anzeigen 1812, S. 477, Werke II, S. 181.]

mit dem Werthe des Integrals

$$\int \frac{e^x - 1}{x}\, dx$$

von $x = 0$ an gerechnet zu vergleichen[*)]. Sie haben mir den Wunsch zu erkennen gegeben, dass ich diese Aufsätze in unseren Gel[ehrten] Anz[eigen] anzeigen mögte: unsere Freundschaft, lieber BESSEL, macht es mir zur Pflicht, ehe ich es thue, mich schriftlich mit Ihnen über einen oder den andern Punct zu unterhalten, wo meine Ansicht nicht ganz mit der Ihrigen übereinstimmt. Nehmen Sie also die folgenden Bemerkungen gütig auf und theilen mir Ihre Meinung darüber eben so freimüthig und offen mit, als ich die meinige. Ich meine aus einer Ihrer gelegentlichen Äusserungen schliessen zu können, dass Ein Grundsatz uns beiden gemein ist: »Es gibt in der Mathematik keine wahren Controversen« und so zweifle ich nicht, dass wir uns durch den wechselseitigen Austausch unserer Ideen schon verständigen werden.

Zuvörderst würde ich jemand, der eine neue Function in die Analyse einführen will, um eine Erklärung bitten, ob er sie schlechterdings bloss auf reelle Grössen (reelle Werthe des Arguments der Function) angewandt wissen will, und die imaginären Werthe des Arguments gleichsam nur als ein Überbein ansieht, oder ob er meinem Grundsatze beitrete, dass man in dem Reiche der Grössen die imaginären $a + b\sqrt{-1} = a + bi$ als gleiche Rechte mit den reellen geniessend ansehen müsse. Es ist hier nicht von praktischem Nutzen die Rede, sondern die Analyse ist mir eine selbsständige Wissenschaft, die durch Zurücksetzung jener fingirten Grössen ausserordentlich an Schönheit und Ründung verlieren und alle Augenblick Wahrheiten, die sonst allgemein gelten, höchst lästige Beschränkungen beizufügen genöthigt seyn würde. Ich glaube voraussetzen zu müssen, dass Sie im Wesentlichen über diesen Punct mit mir einstimmen, da schon Ihre Erklärungen im Artikel 18.[**)] zeigen, dass Sie keineswegs sich den Weg zu Untersuchungen über li$(a + bi)$ versperren wollen. Was soll man sich nun bei $\int \varphi x . dx$ für $x = a + bi$ denken? Offenbar, wenn man von klaren Begriffen ausgehen will, muss man annehmen, dass x durch unendlich kleine Incremente (jedes von der Form $\alpha + \beta i$) von

[*) Vergl. hierzu die Werke II, S. 435 abgedruckte *Tafel der Frequenz der Primzahlen* und den Brief an ENCKE vom 24. Dezember 1849, ebenda S. 444.]

[**) Siehe FR. W. BESSELS Abhandlungen II, Leipzig 1876, S. 341, 1. Spalte.]

demjenigen Werthe, für welchen das Integral 0 seyn soll, bis zu $x = a + bi$ übergeht, und dann alle $\varphi x . dx$ summirt. So ist der Sinn vollkommen festgesetzt. Nun aber kann der Übergang auf unendlich viele Arten geschehen: so wie man sich das ganze Reich aller reellen Grössen durch eine unendliche gerade Linie [dargestellt] denken kann, so kann man das ganze Reich aller Grössen, reeller und imaginärer Grössen, sich durch eine unendliche Ebne sinnlich machen, worin jeder Punct, durch Abscisse $= a$, Ordinate $= b$ bestimmt, die Grösse $a + bi$ gleichsam repräsentirt. Der stetige Übergang von einem Werthe von x zu einem andern $a + bi$ geschieht demnach durch eine Linie und ist mithin auf unendlich viele Arten möglich.

Ich behaupte nun, dass das Integral $\int \varphi x . dx$ nach zweien verschiednen Übergängen immer einerlei Werth erhalte, wenn innerhalb des zwischen beiden die Übergänge repräsentirenden Linien eingeschlossenen Flächenraumes nirgends $\varphi x = \infty$ wird. Diess ist ein schöner Lehrsatz*), dessen eben nicht schweren Beweis ich bei einer schicklichen Gelegenheit geben werde. Er hängt mit schönen andern Wahrheiten die Entwicklungen in Reihen betreffend zusammen. Der Übergang nach jedem Puncte lässt sich immer ausführen, ohne jemals eine solche Stelle, wo $\varphi x = \infty$ wird, zu berühren. Ich verlange daher, dass man solchen Puncten ausweichen soll, wo offenbar der ursprüngliche Grundbegriff von $\int \varphi x . dx$ seine Klarheit verliert und leicht auf Widersprüche führt. Übrigens ist zugleich hieraus klar, wie eine durch $\int \varphi x . dx$ erzeugte Function für einerlei Werthe von x mehrere Werthe haben kann, indem man nemlich beim Übergange dahin um einen solchen Punct, wo $\varphi x = \infty$ [**)] entweder gar nicht, oder einmal, oder mehreremale herumgehen kann. Definirt man z. B. $\log x$ durch

$$\int \frac{1}{x} \cdot dx,$$

von $x = 1$ anzufangen, so kommt man zu $\log x$ entweder ohne den Punct $x = 0$ einzuschliessen oder durch ein- oder mehrmaliges Umgehen desselben; jedesmal kommt dann die Constante $+ 2\pi i$ oder $- 2\pi i$ hinzu: so sind die

*) Eigentlich ist hiebei noch angenommen, dass φx selbst eine einförmige Function von x ist, oder wenigstens für deren Werth innerhalb jenes ganzen Flächenraumes nur Ein System von Werthen ohne Unterbrechung der Stetigkeit angenommen wird.

[**) In der Handschrift steht $x = \infty$.]

vielfachen Logarithmen von jeder Zahl ganz klar. Kann φx nie für einen endlichen Werth von x unendlich werden, so ist das Integral immer nur eine einförmige Function. Diess ist z. B. der Fall für

$$\varphi x = \frac{e^x - 1}{x},$$

so dass

$$\int \frac{e^x - 1}{x} dx$$

gewiss eine einförmige Function von x ist, deren Werth durch die immer convergirende, also immer einen und nur Einen Sinn habende Reihe dargestellt wird

$$x + \frac{1}{4} xx + \frac{1}{18} x^3 + \frac{1}{96} x^4 + \text{etc.}$$

Ich wollte, Herr SOLDNER hätte, da er doch einmal eine neue Function einführen wollte[*)], statt seines

$$\operatorname{li} x = \int \frac{dx}{\log x}$$

lieber jene gewählt, da eine einförmige Function immer ohne Vergleich als classischer und einfacher anzusehen ist als eine vielförmige, zumal da $\log x$ selbst schon eine vielförmige Function ist. Es wäre vielleicht gut, auch für

$$\int \frac{e^x - 1}{x} dx$$

oder wenigstens für

$$\int \frac{e^x dx}{x}$$

ein eignes Zeichen und Namen einzuführen, um so mehr da bei den Aufgaben aus der Physik [, die] auf $\operatorname{li} x$ führen, gemeiniglich x selbst eine Exponentialgrösse ist. Wenn man die Wahrheiten für SOLDNERS li auf mein

$$\int \frac{e^x dx}{x},$$

das ich einmal Kürze halber mit $\operatorname{Ei} x$, Exponentiallogarithmen bezeichnen will,

[*) JOHANN GEORG V. SOLDNER, *Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendente,* München 1809.]

übertragen will, so ist die Integration so anzunehmen, dass Ei einer reellen negativen unendlichen Grösse verschwindet.

Ich habe alles dieses vorausgeschickt, um meine Ansicht zu begründen, dass ich EULERN beitreten muss, wenn er sagt[*)], dass

$$\int \frac{dx}{\log x},$$

falls es für $x < 1$ reell angenommen werde, für Werthe > 1 nothwendig imaginäre Werthe erhalte. Ihre Differenz von den reellen, welche MASCHERONI[**)], SOLDNER und Sie ihm beilegen, ist $= \pi i$ oder $3\pi i$ oder $5\pi i$ etc. Den Übergang durch $x = 1$ statuire ich nicht; man würde auf ganz ähnliche Art beweisen können, dass $\log - x = \log + x$ (ein Satz, den man gelten lassen kann, wenn man sich auf reelle Grössen einschränkt, der aber sogleich wegfallen muss, wenn man dem Reiche aller Grössen meinem obigen Grundsatze zufolge zwei Dimensionen beilegt.) Machen Sie $\mathrm{li}\, x$ reell für irgend einen Werth von x zwischen 0 und 1, gut! Aber welche Werthe wollen sie nun

$$\mathrm{li}\,(0{,}5 + 0{,}001\,i),\quad \mathrm{li}\,(0{,}6 + 0{,}001\,i),\quad \mathrm{li}\,(0{,}7 + 0{,}001\,i),\quad \mathrm{li}\,(0{,}8 + 0{,}001\,i),$$
$$\mathrm{li}\,(0{,}9 + 0{,}001\,i),\quad \mathrm{li}\,(1{,}0 + 0{,}001\,i),\quad \mathrm{li}\,(1{,}1 + 0{,}001\,i) \text{ etc. bis } \mathrm{li}\,(1{,}5 + 0{,}001\,i)$$

beilegen? Imaginäre ohne Zweifel, aber sie sollen doch dem Gesetze der Stetigkeit folgen, nirgends ein Sprung ex abrupto seyn? Gehen Sie dann von $\mathrm{li}\,(1{,}5 + 0{,}001\,i)$, indem Sie den imaginären Theil $0{,}001\,i$ auf 0 abnehmen lassen, [zu $\mathrm{li}\; 1{,}5$] über, so kommen sie gewiss nicht auf einen reellen Werth von $\mathrm{li}\; 1{,}5$, sondern auf einen, welchem $-\pi i$ anhängt Bei dem, was Sie zum Beweise gegen EULER und mich beibringen, finde ich zu erinnern 1) dass Sie sagen, soll $\mathrm{li}\, x$ im ganzen Umfange reell werden, so muss man etc., allein das Sollen hängt ja nicht von uns ab, wenn die Stetigkeit nicht ohne Ursache aufgehoben werden darf, und es soll ja eben bewiesen werden, dass es im ganzen Umfange reell genommen werden darf. 2) Allerdings ist

$$\int \frac{dy}{y}$$

[*)] *Institutiones calculi integralis* I, 1768, § 228, L. EULERI Opera omnia, ser. I, vol. 11, S. 128.]

[**)] LORENZO MASCHERONI, *Adnotationes ad calculum integralem Euleri*, Ticini, 1790, Adnotatio I, wieder abgedruckt in L. EULERI Opera omnia, ser. I, vol. 11, siehe dort S. 432.]

sowohl $\log y$ als $\log -y$, aber nie beides zugleich, sondern das erstere, wenn man das Integral von $y = 1$ anfangen lässt, das zweite, wenn es von $y = -1$ anhebt; das zweite Integral ist eben so wie das erste in dem allgemeinen $\log y + C$ begriffen, wenn man das einemal $C = 0$, das zweite mal $C = \pm \pi i$ oder $\pm 3\pi i$ etc. setzt. Sehr wahr aber ists, dass EULERS Bemerkung insofern einer Berichtigung bedarf, als keineswegs C unendlich wird, wenn das Integral von $z = 0$ anheben soll[*)]. — Meiner Ansicht nach darf man also nicht setzen

$$\int \frac{dx}{\log x} = C + l(\pm lx) + \text{etc.},$$

sondern muss sich entweder zu $l(+lx)$ oder zu $l(-lx)$ erklären, aber nur zu einem bestimmt entschliessen. —

Übrigens glaube ich, dass die Ausdehnung der Untersuchungen auf imaginäre Argumente zu höchst interessanten Resultaten Anlass geben wird. Doch mögte ich aus den oben angeführten Gründen lieber die Function

$$\int \frac{e^x - 1}{x}\, dx$$

als

$$\int \frac{dx}{\log x}$$

wählen, weil ich vermuthe, dass erstere concinnere Resultate geben wird. So zum Beispiel, möchte ich sehr gern wissen, ob jene Function oder, was dasselbe ist, die Reihe

$$x + \frac{1}{4} xx + \frac{1}{18} x^3 + \text{etc.}$$

für gewisse endliche Werthe von x von der Form $a + bi$ wol 0 werden kann. Mit Gewissheit kann ich es noch nicht behaupten, ob wol es mir sehr wahrscheinlich ist. Gibt es solche Werthe (dann gewiss unendlich viele), so werden diess sehr merkwürdige Grössen seyn und die ganze Reihe wird sich in unendliche Factoren der Form $(1 + 2\alpha x + \beta xx)$ zerlegen lassen[**)]. —

Von ein Paar andern Kleinigkeiten kann ich diessmal nur einige Worte hinzusetzen. Ich hätte gewünscht, dass Sie etwas umständlicher (pag. 6[***)] am

[*) Siehe *Institutiones calculi integralis* I, a. a. O.]

[**) Vergl. den S. 374 folgenden Brief an BESSEL vom 5. Mai 1812.]

[***) FR. W. BESSEL, Abhandlungen II, 1876, S. 331, 1. Spalte.]

Ende der Note) gezeigt hätten, wie die allgemeine Gültigkeit des Gesetzes des continuirlichen Bruches nach Ihrem angedeuteten Verfahren folge. Die Constante 0,577... hatte ich schon vor längerer Zeit auf 23 Stellen auf doppeltem Wege aus 10 und 20 Gliedern berechnet und von der 20sten an von MASCHERONI verschieden gefunden, nemlich $\overset{18}{0}60653$[*)]; ich glaube, dass meine Zahl die richtige ist, habe aber die Rechnungen selbst nicht aufgehoben. — Mit verschiedenen Ihrer Untersuchungen werden Sie in meiner nun bald vollendeten Abhandlung Berührungspuncte finden. — Die Ableitungen Artikel 17.[**)], die sich auf divergirende Reihen und divergirende unendliche Producte gründen, also auf einen immer etwas schlüpferigen Weg, möchten doch wol noch einigen Bedenklichkeiten Platz lassen. — . . . .

[5.]

GAUSS an LAPLACE.

Göttingen ce 30. Janvier 1812

Monsieur

Je vous dis mille remercimens pour les deux memoires que vous m'avés fait l'honneur de m'envoyer[***)] et que j'ai reçus dans ces jours. Les fonctions que vous y traités aussi bien que les questions de probabilités, sur lesquelles vous preparés un grand ouvrage ont un grand attrait pour moi, quoique j'aie peu travaillé moimeme sur les dernieres. Je me rappelle pourtant d'un probleme curieux, duquel je me suis occupé il y a 12 ans, mais lequel je n'ai pas reussi alors à resoudre à ma satisfaction[†)]. Peut être daignerés vous

[*) Siehe MASCHERONI, a. a. O. S. 431; die zwanzigste, einundzwanzigste und zweiundzwanzigste Stelle sind bei MASCHERONI in der Tat fehlerhaft, dagegen sind von der dreiundzwanzigsten Stelle an die Ziffern richtig, bis zur letzten (zweiunddreißigsten), die um eine Einheit erhöht werden muß. Man wird hiernach bei MASCHERONI einen Druckfehler vermuten. Die von GAUSS hier als 3 angegebene dreiundzwanzigste Stelle lautet richtig 1, vergl. auch *Disquisitiones circa seriem* art. 31, Werke III, S. 154, Text und Fußnote. Die bei MASCHERONI fehlerhaften Ziffern hat auch SOLDNER a. a. O. S. 13 richtig angegeben.]

[**) FR. W. BESSEL, Abhandlungen II, 1876, S. 340, 1. Spalte.]

[***) Es handelt sich wohl um die beiden folgenden Abhandlungen von LAPLACE: *Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres et sur leur application aux probabilités*, Mémoires de l'Académie des Sciences **10** (1809), Paris 1810, S. 353 und *Mémoire sur les intégrales définies et sur leur application aux probabilités etc.*, ebenda **11** (1810), Paris 1811, S. 279.]

[†) Siehe die Tagebuchaufzeichnung Nr. 113 vom 25. Oktober 1800.]

vous en occuper quelques momens: dans ce cas je suis sur que vous trouverés une solution plus complete. Le voici. Soit M une quantité inconnue entre les limites 0 et 1, pour laquelle tou[te]s les valeurs sont ou egalement probables ou plus ou moins selon une loi donnée: qu'on la suppose convertie en une fraction continue

$$M = \cfrac{1}{a' + \cfrac{1}{a'' + \text{etc.}}}$$

Quelle est la probabilité, qu'en s'arretant dans le developpement à un terme fini, $a^{(n)}$, la fraction suivante

$$\cfrac{1}{a^{(n+1)} + \cfrac{1}{a^{(n+2)} + \text{etc.}}}$$

soit entre les limites 0 et x? Je la designe par $P(n, x)$ et j'ai en supposant pour M toutes les valeurs egalement probables

$$P(0, x) = x;$$

$P(1, x)$ est une fonction transcendente dependante de la fonction

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x}$$

que EULER nome inexplicable et sur la quelle je viens de donner plusieurs recherches dans un memoire presenté à notre societé des sc[iences] qui sera bientot imprimé[*)]. Mais pour les cas ou n est plus grand, la valeur exacte de $P(n, x)$ semble intraitable. Cependant j'ai trouvé par des raisonnemens tres simples que pour n infini on a

$$P(n, x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2}.$$

Mais les efforts que j'ai fait lors de mes recherches pour assigner

$$P(n, x) - \frac{\log(1+x)}{\log 2}$$

pour une valeur tres grande de n, mais pas infinie, ont été infructueux.

. . . .

[*) *Disquisitiones circa seriem etc.*, der Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegt am 30. Januar 1812, Werke III, S. 123; siehe insbesondere S. 154 ff.]

J'ai fait usage de la methode des moindre[s] carrés depuis l'an 1795 et je trouve dans mes papiers, que le mois de Juin 1798 est l'epoque où je l'ai rapprochée aux principes du calcul des probabilités: une note la dessus se trouve dans un journal que j'ai tenu sur mes occupations mathematiques depuis l'an 1796, et que j'ai montré dans ces jours à Mr. DE LINDENAU[*)].

Cependant mes applications frequentes de cette methode ne datent que des l'année 1802, depuis ce tems j'en fait usage pour ainsi dire tous les jours dans mes calculs astronomique[s] sur les nouvelles planetes. Comme je m'etois proposé depuis ce tems de reunir toutes les methodes dont je me suis servi dans un ouvrage etendu, (que j'ai commencé 1805 et dont le Manuscrit d'abord en allemand étoit achevé en 1806, mais lequel à la priere de Mr. PERTHES j'ai traduit depuis en latin; l'impression a commencé en 1807 et n'est finie qu'en 1809[**)]), je ne me suis pas haté d'en publier un morceau detaché, ainsi Mr. LEGENDRE m'est prevenu. Au reste j'avais deja communiqué cette meme methode, beaucoup avant la publication de l'ouvrage de M. LEGENDRE[***)], à plusieurs personnes, entre autres à Mr. OLBERS en 1803 qui certainement doit se le rappeler. Ainsi, pouvais je dans ma *theorie des mouvement[s] des planetes*, parler de la methode des moindre[s] quarrés, dont j'avais fait depuis 7 ans mille et mille applications, dont j'avais developpé la theorie, dans la section 3me du II.livre de cet ouvrage[†)], du moins en allemand, beaucoup avant d'avoir vu l'ouvrage de Mr. LEGENDRE — je dis, pouvais je parler de ce principe, que j'avais annoncé a plusieurs de mes amis deja en 1803 comme devant faire partie de l'ouvrage que je preparois, — comme d'une methode empruntée de Mr. LEGENDRE? Je n'avait pas l'idée, que

---

[*) Es handelt sich hier um die Aufzeichnung des *Tagebuchs* Nr. 88 vom 17. Juni 1798; siehe auch den Brief an OLBERS vom 24. Januar 1812, Werke VIII, S. 140. Vergl. zum folgenden überhaupt die Werke VIII, S. 136—141 abgedruckten Veröffentlichungen und Briefstellen, wo übrigens S. 138 und S. 139 das Jahr 1794 — nicht wie im Text und in der *Theoria motus*, art. 186, Werke VII, S. 253, 1795 — als dasjenige angegeben ist, seitdem GAUSS die Methode der kleinsten Quadrate angewandt hatte.]

[**) *Theoria motus corporum coelestium*, Hamburgi 1809, Werke VII (1906), S. 1.]

[***) A. M. LEGENDRE, *Nouvelles Méthodes pour la détermination des orbites des comètes*, Paris 1806, datiert vom 6. März 1805; ABBE hat 1871 noch auf eine zweite vor der *Theoria motus* erschienene Arbeit verwiesen, nämlich auf die des Amerikaners ADRAIN: *Research concerning the probabilities of the errors wich happen in making observations*, The Analyst or Mathem. Museum 1, 1808, S. 93, der unabhängig von LEGENDRE zur Methode der kleinsten Quadrate gelangt sein soll.]

[†) A. a. O. artt. 175—186, Werke VII (1906), S. 240—254.]

Mr. LEGENDRE pouvait attacher tant de prix à une idée aussi simple, qu'on doit plutot s'etonner qu'on ne l'a pas eue depuis 100 ans, pour se facher que je raconte, que je m'en suis servi avant lui? En effet il serait tres facile de le prouver à tout le monde par des temoignages qu'on ne saurait refuser, si cela valait la peine. Mais j'ai cru que tous ceux qui me connaissent le croiroient meme sur ma parole, ainsi que je l'aurait cru de tout mon coeur si Mr. LEGENDRE avait avancé, qu'il avait possedé la methode deja avant 1795. J'ai dans mes papiers beaucoup de choses, donc peut etre je pourrai perdre la priorité de la publication: mais soit, j'aime mieux faire mûrir les choses.

. . . .

Continués, Monsieur, de m'honorer de votre bienveillance, que je range parmi les choses les plus essentielles à mon bonheur.

CH. FR. GAUSS.

[6.]

GAUSS an BESSEL. Göttingen, 5. Mai 1812.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und BESSEL. Leipzig 1880, S. 169—174.]

. . . . Meine Abhandlung über die transscendenten Functionen[*)] habe ich, weil ihr Umfang zu gross wurde, theilen müssen. Der erste Theil wurde schon im Januar der Societät übergeben und ist jetzt auch bereits abgedruckt. Er enthält, obgleich eigentlich nur als Nebenuntersuchungen, das Hauptsächlichste was ich bis jetzt über die transsc[endente] Function

$$\Pi x = 1.2.3\ldots x$$

und

$$\Psi x = \frac{d\Pi x}{\Pi x.dx}$$

zu sagen weiss. Auch eine Tafel für beide Functionen oder vielmehr log brigg. Πx, und Ψx, von $x = 0$ bis $x = 1$ durch alle Hunderttheile. Ich würde dieser Tafel ersten Theil, da ich aus Ihrem vorletzten Briefe erfuhr, dass Sie eine Ähnliche für log Πx berechnet haben, beim Abdruck meiner Abhandlung weg-

[*) *Disquisitiones circa seriem etc.* 1812, Werke III, S. 123.]

geschnitten haben, wenn nicht die zweite für Ψx (welche Herr NICOLAI sorgfältig unter meiner Aufsicht berechnet hatte auf 18 Decimalen) mit ihr in so genauer Verbindung stände. Ausserdem ist meine Tafel für $\log \Pi x$ auf 20 Decimalen berechnet, wovon die letzte hin und wieder auf 1 oder 2 Einheiten ungewiss seyn kann. Man kann daraus also auch die Logarithmen aller Sinus auf ebensoviele Decimalen ableiten, wenn man ihrer bedarf. Den zweiten Theil meiner Abhandlung hoffe ich auch bald vollenden zu können.[*)]

. . . .

Ungern schreibe ich Ihnen heute über die Realität oder Nicht-Realität der Integrallogarithmen, und zwar deswegen ungern, weil ich in einem Gedränge von andern Geschäften nicht Zeit gewinnen kann, Ihnen so ausführlich diessmal zu schreiben als ich wünschte und als nöthig wäre. Indess kann ich doch auch nicht ganz davon schweigen, und füge also noch einiges darüber bei, mit dem Wunsche, dass Sie solches nicht missverstehen mögen. Sie scheinen mir, theuerster BESSEL, in Ihrem vorletzten Briefe nicht so wohl auf meine Ansichten entrirt zu seyn und darauf geantwortet zu haben, als vielmehr einige ganz neue Gründe für die Realität aufzustellen. Und doch scheint mir noch jetzt eine bestimmte Erklärung vorausgehen zu müssen, ob die Untersuchung, schlechthin und auf immer, nur auf reelle Argumente der Function

$$\int \frac{e^x dx}{x} = Fx$$

d. i. auf reelle Werthe von x eingeschränkt oder auch auf imaginäre ausgedehnt werden soll. In jedem dieser beiden Fälle würde ich mich auf eine verschiedene Weise über die Sache erklären. Im letztern Fall sehe ich die imaginären Werthe von x nicht als Hors d'Oeuvres, sondern als eben so gute Grössen an wie die reellen, und dann ist leicht zu zeigen, dass bei einem Übergange von einem negativen reellen Werthe von x zu einem positiven reellen (und zwar bei einem Übergange nicht durch Zero, denn diesen statuire ich nicht, weil man sich da gar nichts klares denken kann, sondern durch die imaginären Werthe, welcher auf 1000 verschiedne Arten geschehen kann, z. B. indem Sie

$$x = a(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$$

[*) Der hier folgende Teil des Briefes ist astronomischen Inhalts und bereits im VII. Band der Werke, S. 421 abgedruckt.]

setzen und φ von 180^0 bis 360^0 wachsen lassen) keine Stetigkeit Statt findet, wenn Sie nicht allgemein

$$Fx = A + \log x + x + \tfrac{1}{4}xx \text{ etc.}$$

setzen. — Im erstern Falle hingegen, wenn man x bloss auf reelle Werthe einschränkt (was Sie aber doch nicht thun zu wollen scheinen) würde ich sagen, die Definition von Fx sei nur halb bestimmt: Die Werthe derselben für positive x sind von denen für negative durch eine unübersteigliche Kluft getrennt, sie bilden zwei Systeme für sich, zwischen denen entweder nur die Willkür oder irgend ein fremdes, ein neues Princip eine Verbindung stiften kann. Desswegen würde ich es in diesem Fall als zulässig betrachten, Fx immer reell anzunehmen, und, weil diess das einfachste ist, für negative x

$$Fx = A + \log(-x) + x + \tfrac{1}{4}xx + \cdots,$$

für positive

$$Fx = A + \log(+x) + \text{etc.}$$

setzen (denn meiner Meinung nach hätte man übrigens eben so viel Recht, auch ein andres A für positive, ein andres für negative anzunehmen, obwol diess unnatürlich seyn würde). Das fremde oder neue Princip, was hier zur Completirung der Definition dient, wäre, dass $F\omega$ und $F(-\omega)$ sich der Gleichheit desto mehr nähern sollen, je kleiner ω ist. Aber zweckmässiger scheint mir doch auch in diesem Falle folgendes Princip zu seyn: »Wenn $\Phi(Fx)$ eine solche Function ist, die für ein sich dem 0 unendlich näherndes x einen endlichen Werth behält, so soll die Stetigkeit in dem Puncte $x = 0$ nicht unterbrochen werden.« Nehme ich nun z. B. die Function

$$e^{Fx} = y,$$

so wird deren Stetigkeit offenbar unterbrochen, wenn Sie nicht allgemein

$$Fx = A + \log x + \text{etc.}$$

setzen, also Fx imaginär für positive x, wenn Sie es für negative reell genommen haben. So liesse sich der Fall denken, dass bei Ihrer Art, die Integrallogarithmen zu fassen, man bei einer Aufgabe in die Nothwendigkeit käme zu sagen, die Auflösung sei:

$$y = e^{\mathrm{li}\, t}$$

so lange $t < 1$ und

$$y = -e^{\mathrm{li}\, t}$$

so bald $t > 1$. —

Das Wesentlichste, was ich auf Ihre neuen Gründe erwidern würde, besteht etwa in folgendem.

1°. Ihre Bemerkung, dass die Entwicklung von $f(x+\lambda)$ in eine Reihe nach Potenzen von λ nach TAYLORS Satze Ausnahmen leidet, scheint mir bei der Entwicklung von Fx in

$$A + \log x + x + \tfrac{1}{4} xx + \text{etc.}$$

nicht ganz anwendbar zu seyn, da ja $\log x$ keine Potenz von x ist und also eigentlich nicht Fx sondern $Fx - \log x$ in eine solche Reihe entwickelt wird, und hiebei fällt Ihr Grund für die Ausnahme weg. — Ich weiss übrigens auch nicht, dass das TAYLORsche Theorem jemals eine unrichtige Reihe geben kann, so lange sie convergent bleibt [*)], und so bald sie aufhört convergent zu seyn, hat ihre Summe als Summe keinen Sinn.

2°. Sie schliessen aus

$$\mathrm{li}\, x - \mathrm{li}\, \frac{1}{x} = C + 2(\log x + \text{etc.})$$

indem Sie $x = 1$ setzen, $C = 0$. Allein diess halte ich nicht für verstattet, weil ich mir bei li 1 gar keine eigentliche Grösse denken kann. Sie könnten nach derselben Form des Beweises auch ableiten $\frac{1}{0} = 0$. Bezeichnet man die Function $\frac{1}{x}$ durch fx, so ist $fx + f(-x) = 0$. Also $f0 + f0 = 0$. Erlaubt man sich also $f0$ als eine bestimmte Grösse anzusehen, so folgt hieraus $2f0 = 0$ oder $f0 = 0$ [**)].

3°. Auf Ihre Bemerkung, dass Sie $\mathrm{li}\, x$ als die Summe aller $\frac{dx}{\log x}$ [***)] von 0 an ansehen, ist im Vorigen schon implicite geantwortet. Sie können dann ohne ein neues Princip zu Hülfe zu nehmen über $x = 1$ nicht hinaus.

[*) Bekanntlich kann sich dieser Fall im Gebiete der realen Veränderlichen wohl ereignen, wie das von CAUCHY angeführte Beispiel der Entwicklung von $e^{-\frac{1}{x^2}}$ nach Potenzen von x zeigt.]

[**) Die drei letzten Sätze dieses Absatzes lauteten ursprünglich anders; in einer Nachschrift vom 10. Mai 1812 hat GAUSS die ursprüngliche Fassung durch die im Text wiedergegebene ersetzt.]

[***) In der Handschrift steht $\int \frac{dx}{\log x}$.]

Ich wünsche nichts mehr, liebster BESSEL, als dass Sie diese Bemerkungen gütig aufnehmen und die Eile, womit sie niedergeschrieben sind, entschuldigen mögen. Vielleicht interessirt Sie noch folgender Zusatz zu meinem letzten Briefe[*)]. Ich habe den kleinsten imaginären Werth, der $Fx - \log x$ oder

$$\int \frac{e^x - 1}{x} dx = x + \tfrac{1}{4} xx + \text{etc.}$$

$= 0$ macht, sorgfältig berechnet und gefunden

$$x = 3{,}183\,297 \pm 6{,}896\,441 \sqrt{-1}$$
$$= 7{,}598\,016\,(\cos 65^0\, 12'\, 20{,}''8 \pm i \sin 65^0\, 12'\, 20{,}''8).$$

Der nächste Werth ist beiläufig

$$x = 3{,}796 \pm 13{,}296\, i.$$

Ich erkenne aber in diesen Zahlen bis jetzt nichts classisches.

. . . .

[7.]

GAUSS an LAPLACE.

Göttingen le 5 nov. 1812

Monsieur

Je vous dois encore mille remercimens pour le precieux cadeau, que vous m'avés fait l'honneur de me faire de votre *Théorie des Probabilités*[**)]: M. OLBERS m'a remis le second volume et Mr. DE LINDENAU le premier. Il est superflu de dire, combien la lecture de cet ouvrage m'a été et est encore intéressante et instructive. Vous aurés reçu une copie d'un mémoire sur une fonction transcendante très-générale, que j'ai eu l'honneur de vous envoïer. Ce mémoire ne contient que la première partie de mes recherches sur cette matière, je n'ai pas encore eu le loisir d'achever le second mémoire, qui en contiendra la suite. En effet outre les occupations habituelles de ma place, les calculs sur les perturbations m'ont couté depuis deux ans beaucoup de tems. Souvent je serais tenté de le regretter comme pouvant [être] peut être mieux

[*) Siehe oben S. 370.]

[**) P. S. LAPLACE, *Théorie analytique des Probabilités*, Paris 1812.]

emploïé qu'à des calculs machinals, si la considération de l'utilité d'un tel travail ne me consolait. Peut être il faudra encore une année entière pour achever les calculs de la perturbation produite par Jupiter seulement. Récemment pour prendre un peu de relâche après des calculs fastidieux, je me suis occupé du problème célèbre des attractions d'un spheroïde elliptique [*)]. C'est vous, Monsieur, qui il y a 30 ans en avés donné le premier la solution complette [**)], dont j'ai admiré tant de fois la subtilité. Je me flatte que la manière nouvelle, dont je traite cette question meritera l'attention des geometres. J'ai composé la dessus un mémoire qui sera lu bientôt à la Societé Roïale et ensuite imprimé parmi ses »Commentationes« [***)]. J'ai l'honneur de vous offrir ici un Extrait de ce qui est essentiel au probleme cité, et je vous prie de le presenter à l'Institut, duquel plusieurs membres ont bien merité du même probleme. Vous verrés avec plaisir que deux pages m'ont suffi pour obtenir la solution complette.

Continués Monsieur de m'honorer de votre bienveillance et agréés l'assurance de la plus profonde estime, avec laquelle j'ai l'honneur d'être votre très humble serviteur

CHARLES-FREDERIC GAUSS.

BEMERKUNGEN.

Die vorstehenden von GAUSS zwischen dem 21. Oktober 1810 und dem 5. November 1812 geschriebenen Briefstellen gewähren einen Einblick in die verschiedenartigen Gedankenverbindungen, die GAUSS um die Zeit der Abfassung der *Disquisitiones circa seriem* an die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ angeknüpft hat. Das Interesse von GAUSS am Integrallogarithmus geht, wie der Werke II, S. 444 abgedruckte Brief an ENCKE zeigt, bis in die Göttinger Studentenzeit zurück †), dem oben abgedruckten Briefe [5.] an LAPLACE entnehmen wir, daß GAUSS sich auch schon 1800 mit der inexplikabeln Funktion $\Psi(x)$ beschäftigt hat.

Zu der Stelle des Briefes [3] an BESSEL, wo von der Fortsetzung der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ auf Grund eines »höheren Prinzips« die Rede ist, vergleiche man die Schlußsätze des nachgelassenen art. 38. der Abhandlung *circa seriem*, Werke III, S. 209—210. Die bei ACUNHA (1790) auftretende Erklärung des Logarithmus durch Umkehrung der Exponentialreihe, die GAUSS in demselben Briefe lobend erwähnt, findet sich

[*)] Vergl. die Tagebuchaufzeichnungen Nr. 142 vom 26. September und Nr. 143 vom 15. Oktober 1812.]

[**)] *Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes*, Histoire de l'Académie des Sciences, Année 1782, Paris 1785, Mémoires de Math. et Phys., S. 113.]

[***)] *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo novo tractata.* Soc. Reg. Scient. tradita XVIII. Mart. MDCCCXIII, Werke V, S. 1.]

†) Vergl. auch den Abschnitt [I.] des folgenden Hauptstücks *Zur Lehre von den Reihen.*

auch in den beiden Preisschriften, die WOLFGANG und JOHANN BOLYAI 1837 der JABLONOWSKIschen Gesellschaft der Wissenschaften eingereicht hatten; siehe P. STÄCKEL, *Wolfgang und Johann Bolyai, Geometrische Untersuchungen*, Leipzig 1913, I, S. 129, 245 und II, S. 228. Über die Bezeichnung $\sin^2\varphi$, $\cos^2\varphi$ hat sich GAUSS in ähnlicher Weise wie hier S. 365 im Jahre 1814 auch öffentlich geäußert, siehe Werke IV, S. 361; vergl. dazu auch *Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher* III, S. 292.

Zu den auf die Integration im komplexen Gebiet bezüglichen Erörterungen des Briefes [4.] an BESSEL *) vergleiche man das im folgenden als Abschnitt [VI.] der *Lehre von den Reihen* abgedruckte Bruchstück *Bestimmung der Convergenz der Reihen u.s.w.*

Über die von GAUSS in dem Briefe [5.] berührte Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung vergleiche man die Bemerkung zu der Aufzeichnung Nr. 113 in dem unten folgenden Abdruck des *Tagebuchs*. Zu der in demselben Briefe erörterten Prioritätsfrage, oben S. 373—374, ist noch folgendes zu bemerken. In einem an GAUSS gerichteten Briefe **) vom 31. Mai 1809 schreibt LEGENDRE in Bezug auf die Methode der kleinsten Quadrate:

»Je ne vous dissimulerai-donc pas, Monsieur, que j'ai éprouvé quelque regret de voir qu'en citant mon mémoire pag. 221 [***)], vous dites principium nostrum quo jam inde ab anno 1795 usi sumus etc. Il n'est aucune découverte qu'on ne puisse s'attribuer en disant qu'on avoit trouvé la même chose quelques années auparavant; mais si on n'en fournit pas la preuve en citant le lieu où on l'a publiée, cette assertion devient sans objet et n'est plus qu'une chose désobligeante pour le véritable auteur de la découverte. En Mathématiques il arrive très souvent qu'on trouve les mêmes choses qui ont été trouvées par d'autres et qui sont bien connues; c'est ce qui m'est arrivé nombre de fois, mais je n'en ai point fait mention et je n'ai jamais appellé principium nostrum un pr[incipe] qu'un autre avait publié avant moi. Vous êtes assez riche de [votre] fonds, Monsieur, pour n'avoir rien à envier à personne; et [je suis] bien persuadé au reste que j'ai à me plaindre de l'expression seulement et nullement de l'intention . . . . . .«

Daß GAUSS in seinem Briefe auf diese Prioritätsfrage einging, war durch einen an ihn gerichteten Brief von LAPLACE vom 15. November 1811 verursacht, in dem es in bezug auf die Methode der kleinsten Quadrate heißt:

»Monsieur GAUSS dit dans son ouvrage sur le mouvement elliptique qu'il la possedait avant que M. LE GENDRE l'ait publiée; je desirerois bien sçavoir si avant cette publication on avait imprimé quelque chose en allemagne sur cette méthode et je prie Monsieur GAUSS de vouloir bien m'en instruire.«

In bezug auf den Auszug aus der Abhandlung über die Anziehung der elliptischen Sphäroide, den GAUSS dem Briefe [7.] beigelegt hatte (siehe oben S. 379) vergleiche man die Briefe an SCHUMACHER vom 31. Dezember 1812, *Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher* I, 1860, S. 95, und an OLBERS vom 8. April 1813, *Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke* II, 1, 1900, S. 515. In seinem Antwortschreiben vom 20. November 1812 schreibt LAPLACE darüber das folgende:

»A votre lettre était jointe une demonstration très simple du theorème sur les attractions des spheroides elliptiques. j'ai commencé par le lire et j'ai été ravi de sa simplicité. elle a produit le même effet sur ceux des membres de l'institut qui se sont occupés de cet objet et aux quels je l'ai communiquée suivant vos intentions. cette demonstration a quelque analogie avec une demonstration fort simple du même

---

*) Dieser Teil des Briefes ist auch schon Werke VIII, S. 90—92 abgedruckt.

**) Der Brief befindet sich im GAUSSarchiv; die in der folgenden Wiedergabe eingeklammerten Worte sind aus der Handschrift beim Öffnen des Briefes weggeschnitten worden.

***) Werke VII, 1906, S. 253.

theorème, donnée par M. JVORI, geometre anglais, dans la seconde partie des transactions philosophiques de 1809 [*)]. peut être, vous ne la connaissés pas; je vous engage à la voir. . . . .«

Diese Mitteilung von LAPLACE erwähnt GAUSS in dem *Additamentum* zu seiner Abhandlung, Werke V, S. 21 und in seiner *Anzeige* vom 5. April 1813 in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen, Werke V, S. 279, siehe insbesondere S. 285.

Die vorstehend wiedergegebenen Auszüge aus Briefen von LAPLACE sind ebenso wie die Briefstellen [1.], [3.], [4.], [6.] an BESSEL nach den im GAUSSarchiv befindlichen Handschriften, die an LAPLACE nach den ebenda befindlichen Abschriften abgedruckt. Es sind Abschriften von 8 Briefen von GAUSS an LAPLACE vorhanden, deren Urschriften sich in Paris im Privatbesitz befinden, die Abschriften sind 1877 angefertigt und von J. BERTRAND, dem damaligen vorsitzenden Sekretär der Pariser Akademie der Wissenschaften, beglaubigt.

SCHLESINGER.

*) JAMES IVORY, *On the Attractions of homogeneous Ellipsoids* Philosophical Transactions of the Royal Society of London 1809, S. 345.

[ZUR LEHRE VON DEN REIHEN.]

[I.]

NEUE METHODE DIE SUMME DER DIVERGIRENDEN REIHE $1-1+2-6+24-\text{etc.}$ [=] 0,5963 ... ZU FINDEN.

[Ein Blatt in Fa, Kapsel 46 a]

1.

Es sei

[1] $$x-x^2+2x^3-6x^4+\text{etc.}=\xi$$

und man wird finden

[2] $$\xi+xx\xi'-x=0.$$

Diese Different[ial] Gl[eichung] muss so integrirt werden, dass für $x=0$, $\xi=0$ werde; der Werth von ξ, für $x=1$, den wir c nennen[*)], ist die gesuchte Summe.

2.

Wir bekommen durch fortgesetzte Differentiation folgende Gleich[ungen]:

$$\begin{gathered}
\xi+xx\xi'-x=0\\
(1+2x)\xi'+xx\xi''-1=0\\
2\xi'+(1+4x)\xi''+xx\xi'''=0\\
6\xi''+(1+6x)\xi'''+xx\xi^{\mathrm{IV}}=0\\
12\xi'''+(1+8x)\xi^{\mathrm{IV}}+xx\xi^{\mathrm{V}}=0\\
\text{etc.}
\end{gathered}$$

[*) In der Handschrift wird dieser Wert mit e bezeichnet.]

3.

Hieraus folgt, dass für $x = 1$

$$\begin{aligned}
\xi &= c\\
\xi' &= -c+1\\
\xi'' &= +3c-2\\
\xi''' &= -13c+8\\
\xi^{\mathrm{IV}} &= +73c-44\\
\xi^{\mathrm{V}} &= -501c+300\\
\xi^{\mathrm{VI}} &= +4051c-2420\\
\xi^{\mathrm{VII}} &= -37633c+22460.
\end{aligned}$$

4.

Mithin der Werth von ξ für $x = 1-\omega$

$$[3] \quad \left\{\begin{array}{l} c\left(1+\omega+\frac{3}{2}\omega^2+\frac{13}{6}\omega^3+\frac{73}{24}\omega^4+\frac{501}{120}\omega^5+\text{etc.}\right) \\ -\left(\omega+\omega^2+\frac{8}{6}\omega^3+\frac{44}{24}\omega^4+\frac{300}{120}\omega^5+\frac{2420}{720}\omega^6+\text{etc.}\right)\end{array}\right.$$

Diese Reihen convergiren, wenn $\omega < 1$.

5.

Endlich ist

$$[4] \qquad c = \frac{\omega+\omega\omega+\frac{8}{6}\omega^3+\text{etc.}}{1+\omega+\frac{3}{2}\omega^2+\text{etc.}}$$

$$[5] \qquad = 1-\frac{1}{6}\omega^2-\frac{1}{6}\omega^3-\frac{1}{8}\omega^4-\frac{7}{90}\omega^5-\frac{37}{1008}\omega^6-\frac{17}{3360}\omega^7\ldots$$

für $\omega = 1$; also

$$\begin{array}{r} [1-]c = 0{,}1667 \\ 1666 \\ 125\,. \\ 778 \\ 367 \\ \hline 5728 \\ 51 \end{array}$$

[6]

[6] $$(A+ax)y+(B+bx)y'+(C+cx)y''\cdots=0$$

[7] $$Pe^{px}+Qe^{qx}+\cdots$$

$$\left.\begin{array}{r}A.P+BPp\ldots\\ +A.Q+BQq\ldots\end{array}\right\}=0$$

[8] $$\frac{1}{x}y+xy'=1$$

[9] $$-\frac{1}{xx}y+\left(1+\frac{1}{x}\right)y'+xy''=0\ [^*)]$$

[10] $$y=e^{\alpha x}+e^{\beta x}$$

[11] $$\frac{\int e^{-1:x}dx:x}{e^{-1:x}}.$$

[7.]

[Eintragungen im LEISTE.]

[S. 58]

$$1-x+\frac{xx}{4}-\frac{x^3}{36}+\text{etc.}=\varphi$$

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}-\text{etc.}=\psi$$

$$\varphi'=-\psi:x,\qquad \psi'=\varphi.$$

[S. 65]

$$z=1-x+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{4.9}+\cdots[=\varphi]$$

$$x\frac{dz}{dx}=-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{4.3}+\frac{x^4}{4.9.4}\text{ etc. }[=-\psi]$$

[12] $$x\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{dz}{dx}+z=0.$$

[13] $$z=yx^m,\quad \frac{dz}{dx}=mx^{m-1}y+x^m\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2m+1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(\frac{mm}{xx}+\frac{1}{x}\right)y\ [=0]$$

[*) In der Handschrift steht irrtümlich: $\frac{1}{x}y+\left(1-\frac{1}{xx}\right)y'+xy''=0.$]

[14] $$m = -\tfrac{1}{2}$$

[15] $$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{1}{4}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)y \; [= 0].$$

[8.]

[Aus dem *Tagebuch*, Nr. 82.]

Seriei

[16] $$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{144}x^4 \ldots [= \psi]$$

summam consideravimus invenimusque eam $= 0$, si

[17] $$2\sqrt{x} + \frac{3}{16}\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{21}{1024}\frac{1}{\sqrt{x^3}} \cdots = \left(k + \frac{1}{4}\right)\pi \; [\text{*})]$$

Brunsv[igae,] Oct. 16. [1797]

BEMERKUNGEN.

Mit der Aufgabe, die »Summe« der divergenten Reihe

(α) $$1 - 1 + 2! - 3! + 4! - 5! + \cdots$$

zu finden, hat sich EULER in seiner Abhandlung *De seriebus divergentibus* **) beschäftigt. Die Reihe ist, wie EULER (a. a. O. S. 213, § 13) bemerkt, »a WALLISio hypergeometrica dicta, signis alternantibus instructa« ***). Im art. 1. des vorstehenden Bruchstücks schließt sich GAUSS ganz an EULER an. EULER bildet (a. a. O. § 19, S. 220) die Reihe [1], zeigt, daß sie formal der Differentialgleichung [2] genügt, stellt dann die allgemeine Lösung von [1] in der Form [11] dar und erklärt die »Summe« von (α) durch die Gleichung

(β) $$c = 1 - 1 + 2 - 6 + \cdots = e\int_0^1 e^{-\frac{1}{x}}\frac{dx}{x}.$$

Durch Verwandlung der Reihe [1] in einen Kettenbruch (a. a. O. § 21, S. 224) findet EULER dann für c den Wert 0,5963473621237 †). Im Sinne von H. POINCARÉ kann man die Beziehung der divergenten

---

[*) In der Handschrift steht links vom Gleichheitszeichen im dritten Gliede $\sqrt{.}\,3x$ statt $\sqrt{x^3}$; vergl. in den Bemerkungen S. 389 die Bestätigung der obigen Formel.]

**) Novi Commentarii Acad. Petropol. 5 (1754/5) 1760, S. 205

***) Hypergeometrisch heißt nach J. WALLIS (*Arithmetica infinitorum*, 1655, Propositio 190) eine Reihe, deren n-tes Glied das Produkt der n ersten Glieder einer arithmetischen Reihe ist. Auch GAUSS bedient sich im art. 29 der Abhandlung *circa seriem*, Werke III, S. 159 dieses Kunstausdrucks.

†) In den *Institutiones calculi differentialis*, 1755, Pars posterior, Cap. I, § 10, III (L. EULERI Opera

Potenzreihe [1] zu der Differentialgleichung [2], der sie formal genügt, so aussprechen, daß der Ausdruck

$$\frac{1}{x^n}(\xi_0 - x + 1!\,x^2 - 2!\,x^3 + \cdots + (-1)^n (n-1)!\,x^n),$$

wo

$$(\gamma) \qquad \xi_0 = e^{\frac{1}{x}} \int_0^x e^{-\frac{1}{x}} \frac{dx}{x}$$

ist, für jeden positiven ganzzahligen Wert von n sich dem Grenzwerte Null nähert, wenn x als reale positive Größe in den Punkt $x = 0$ einrückt*); man sagt die Reihe [1] stelle die Lösung (γ) der Differentialgleichung [2] für kleine positive Werte von x asymptotisch dar.

GAUSS schlägt zur Bestimmung der durch die Gleichung (β) definierten Konstanten c in den artt. 2.—5. der vorstehenden Aufzeichnung den folgenden Weg ein. Er entwickelt die allgemeine Lösung der Differentialgleichung [2] nach Potenzen von $\omega = 1 - x$; diese in der Umgebung der regulären Stelle $x = 1$, d. h. also für $|\omega| < 1$ konvergente Entwicklung [3] hängt linear von dem Werte c ab, den die Lösung für $x = 1$ annimmt, und zwar ist in [3] die mit c multiplizierte Reihe die Entwicklung von $e^{\frac{1}{x} - 1}$, die in der zweiten Zeile in der Klammer stehende Reihe die Entwicklung von

$$-e^{\frac{1}{x}} \int_1^x e^{-\frac{1}{x}} \frac{dx}{x}$$

nach Potenzen von ω. In [4] stellt also der Quotient rechts vom Gleichheitszeichen die Funktion

$$(\delta) \qquad -e \int_1^x e^{-\frac{1}{x}} \frac{dx}{x} = e \int_0^\omega e^{-\frac{1}{1-\omega}} \frac{d\omega}{1-\omega}$$

omnia, ser. I, vol. 10, S. 225) betrachtet EULER die divergente Reihe

$$(\alpha') \qquad 1 - 2! + 3! - 4! + \cdots$$

und gibt ihre »Summe« mit 0,4036524077 an, was in den vier letzten Stellen von dem Werte $1 - c$ abweicht. Daß die letzten Stellen des von EULER im *Calculus differentialis* angegebenen Wertes der »Summe« von (α') unrichtig sind, bemerkt MASCHERONI in seinen oben S. 369, Fußnote, angeführten *Adnotationes* siehe a. a. O. S. 426), wo er zwischen der »Summe« c der Reihe (α) und der EULER-MASCHERONIschen Konstanten $A = 0{,}57721\ldots$ die Beziehung

$$c + e\left(A - 1 + \frac{1}{2.2!} - \frac{1}{3.3!} + \frac{1}{4.4!} - \cdots\right) = 0$$

herleitet. Die Lösung [11] der Differentialgleichung [2] verwandelt sich durch die Transformation $x = -\frac{1}{\log z}$, wenn man noch 0 als untere Grenze des Integrals nimmt, in $-\frac{1}{z}\operatorname{li} z$, die Reihe [1] geht durch dieselbe Transformation in die von MASCHERONI a. a. O. S. 426 in der Gleichung (3) angegebene divergente Entwicklung des Integrallogarithmus über.

*) Vergl. J. HORN, *Über das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle*, CRELLEs Journal für Mathematik **120**, 1899, S. 1, wo S. 17 gerade die Differentialgleichung [2] als Beispiel behandelt wird.

dar und in [5] steht rechts vom Gleichheitszeichen die Entwicklung dieser Funktion in der Umgebung von $x = 1$ oder $\omega = 0$, nach Unterdrückung des Faktors ω.

Die Funktion (δ) nähert sich dem Grenzwerte c, wenn x mit einem zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ gelegenen Argument in den Punkt 0 einrückt, also jedenfalls wenn die Annäherung zwischen zwei von $x = 0$ auslaufenden Sehnen des Konvergenzkreises der in [5] auftretenden Reihe erfolgt. Die Angabe von GAUSS, daß diese Reihe für $\omega = 1$ oder $x = 0$ die durch die Gleichung (β) definierte Konstante c darstellt, wird also*) bestätigt sein, wenn es gelingt, die Konvergenz jener Reihe für $\omega = 1$ zu erweisen. GAUSS hat in der hier vorliegenden Aufzeichnung diesen Konvergenzbeweis nicht geliefert, er läßt sich aber in folgender Weise erbringen.

Wie L. FEJÉR gezeigt hat**) gilt für die Koeffizienten der Entwicklung

$$\frac{e \cdot e^{-\frac{1}{1-\omega}}}{1-\omega} = \gamma_0 + \gamma_1 \omega + \gamma_2 \omega^2 + \cdots$$

die asymptotische Darstellung

$$\gamma_n = \sqrt{\frac{e}{\pi}}\, \frac{\sin\left(2\sqrt{n} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\lambda(n)}{n^{\frac{1}{4}}}}{n^{\frac{1}{4}}}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo $\lambda(n)$ dem absoluten Betrage nach für jedes n kleiner ist als eine angebbare Konstante. Hieraus ergeben sich für die Entwicklung der Funktion (δ)

$$e \int_0^{\omega} e^{-\frac{1}{1-\omega}} \frac{d\omega}{1-\omega} = g_1 \omega + g_2 \omega^2 + g_3 \omega^3 + \cdots$$

zwei Folgerungen, die wir einer brieflichen Mitteilung von L. FEJÉR entnehmen. »Erstens ist

$$|g_n| = \left| \frac{\gamma_{n-1}}{n} \right| < \frac{\text{const.}}{n^{\frac{5}{4}}},$$

was die unbedingte Konvergenz der Reihe

$$g_1 + g_2 + g_3 + \cdots,$$

d. h. also der Reihe [5] für $\omega = 1$ erkennen läßt. Zweitens zeigt die asymptotische Darstellung von γ_n, daß die g_n in unendlich viele Gruppen zerfallen, in denen abwechselnd das positive bezw. negative Vorzeichen herrscht«. —

Der letztere Umstand erklärt es, weshalb GAUSS bei der von ihm (am Ende des art. 5, S. 383) vorgenommenen Summation erster Glieder eine schlechte Annäherung an den wahren Wert der Konstanten c erhielt.

*) Nach einem bekannten Satze von ABEL, siehe Oeuvres, nouv. édit. I, Christiania 1881, S. 223, Théorème IV, vergl. A. PRINGSHEIM, Münchener Sitzungsberichte **27**, 1897, S. 347.

) Siehe Comptes Rendus **147, Paris 1908, S. 1040; der Beweis, der sich auf ein von RIEMANN in seiner Habilitationsschrift über trigonometrische Reihen (§ 13, RIEMANNS Werke, 2. Aufl., S. 260 ff.) gegebenes Verfahren gründet, ist ausgeführt im Mathem. und naturw. Anzeiger (Értesitö) der ungar. Akademie der Wissensch. **27**, 1909, S. 1, einen andern Beweis der FEJÉRschen Formel findet man bei O. PERRON, Archiv der Mathem. und Physik, 3. Reihe, **22**, 1914, S. 329.

Im art. [6.] hat nun GAUSS versucht, die Beziehung der divergenten Reihe [1] zu der Differentialgleichung [2] in der Weise klar zu stellen, daß er einen Zusammenhang mit den Untersuchungen von LAPLACE über die homogene lineare Differentialgleichung mit linearen Koeffizienten (siehe die Gleichung [6]) herstellte *). Die Formel [7] weist deutlich auf die asymptotischen Reihenansätze von LAPLACE hin. GAUSS geht durch Differentiation von der Differentialgleichung [2] oder [8] zu der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung [9] über, die, wenn man $\frac{1}{x}$ als neue unabhängige Veränderliche einführt, die Form

$$[9]' \qquad x\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\frac{dy}{dx}-y = 0$$

annimmt. Diese Gleichung [9]' ist in der Tat ein besonderer Fall der LAPLACEschen Differentialgleichung [6]; sie ist zwar in dem GAUSSschen Texte nicht ausdrücklich angegeben, aber der Ansatz [10], der ebenso wie [7] zu der asymptotischen Darstellung in der Nähe von $x = \infty$ gehört, bezieht sich nicht auf [9] sondern auf [9]'.

Dem die artt. 1.—[6.] umfassenden Bruchstück haben wir in den artt. [7.] und [8.] zwei andere Aufzeichnungen hinzugefügt, die namentlich mit den Betrachtungen des art. [6.] eng zusammenhängen. Die in [7.] eingeführten Reihen φ und ψ sind sogenannte BESSELsche oder Zylinderfunktionen, und zwar haben wir in der jetzt üblichen Bezeichnungsweise

$$\varphi = J_0(2\sqrt{x}), \quad \psi = -x\varphi' = -\sqrt{x}\,J_0'(2\sqrt{x}) = \sqrt{x}\,J_1(2\sqrt{x}),$$

wo

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n},$$

$$J_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(n+1)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n+1}$$

ist **). Die Differentialgleichung [12], der φ genügt, ist ein besonderer Fall der LAPLACEschen Gleichung [6] des art. [6.]. Daß GAUSS die für große Werte von x geltenden asymptotischen Darstellungen der ganzen transzendenten Funktionen φ und ψ betrachtet hat, zeigt die im art. [8.] wiedergegebene Aufzeichnung Nr. 82 des *Tagebuchs*, wo in der Gleichung [17] eine asymptotische Bestimmung für die Nullstellen der Funktion ψ gegeben wird ***) J. HORN bestätigt die Gleichung [17] durch die folgende Rechnung.

---

*) Siehe DE LA PLACE, *Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres*, Histoire de l'Académie des Sciences, année 1782, Paris 1785, Mémoires, S. 1 ff.; siehe insbesondere S. 47 ff.

) Die Funktion $J_0(t)$ findet sich wohl zuerst bei DANIEL BERNOULLI, *Theoremata de oscillationibus corporum etc.* Commentarii Acad. Petrop. **6 (1732/33) 1738, S. 116, 118, die Differentialgleichung, der sie Genüge leistet, ebenda **7** (1734/35) 1740, S. 171. Die allgemeine BESSELsche Funktion $J_\nu(t)$ kommt in der Abhandlung von EULER *De motu vibratorio tympanorum*, Novi Commentarii Acad. Petropol. **10**, (1764) 1766, S. 243, auf S. 256 vor; diese Abhandlung hat GAUSS jedenfalls gekannt.

***) Die asymptotische Darstellung von $J_0(t)$ findet sich zuerst veröffentlicht bei S. D. POISSON, *Sur la distribution de la chaleur dans les corps solides*, Journal de l'École Polytechnique, cah. 19, 1823, S. 249, auf S. 350; die analoge Darstellung für $J_1(t)$ gibt wohl zum ersten Male P. A. HANSEN, *Ermittelung der absoluten Störungen u.s.w.* I. Theil, Schriften der Sternwarte Seeberg, Gotha, 1843, S. 115, § 51, der auch in einer Fußnote auf S. 116 die asymptotische Formel

»Für die BESSELsche Funktion $J_1(x)$ gilt*) die asymptotische Darstellung

$$J_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{P\cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)+Q\sin\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)\right\},$$

wo

$$P = 1+\frac{15}{128x^2}-\cdots,\quad Q = \frac{3}{8x}-\frac{105}{1024x^3}+\cdots$$

ist. Die Gleichung $J_1(x) = 0$ schreibt sich also

$$\operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{4}-x\right) = \operatorname{tg}\left(x-\left(k+\frac{1}{4}\right)\pi\right) = -\frac{Q}{P} = -\frac{3}{8x}+\frac{75}{512x^3}\cdots,$$

wo k eine ganze Zahl bedeutet; hieraus folgt

$$\left(k+\frac{1}{4}\right)\pi-x = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{8x}-\frac{75}{512x^3}\cdots\right) = \frac{3}{8x}-\frac{21}{128x^3}\cdots,$$

also

$$x+\frac{3}{8x}-\frac{21}{128x^3}\cdots = \left(k+\frac{1}{4}\right)\pi.$$

Aus der Gleichung $\psi = 0$ oder $J_1(2\sqrt{x}) = 0$ folgt demnach

$$2\sqrt{x}+\frac{3}{16\sqrt{x}}-\frac{21}{1024x\sqrt{x}}\cdots = \left(k+\frac{1}{4}\right)\pi,$$

was mit der Formel [17] übereinstimmt«.

Es steht hiernach fest, daß GAUSS die asymptotische Darstellung der Funktion ψ, mindestens so weit, als sie in der vorstehenden Rechnung benutzt wird, am 16 Oktober 1797, wo er die Tagebuchnotiz Nr. 82 schrieb, gekannt hat. Aus derselben Zeit dürften auch die Leisteaufzeichnung art. [7.] und der die artt. 1.—[6.] enthaltende Zettel stammen. Untersuchungen zum KEPLERschen Problem, die GAUSS einige Jahre später angestellt hat, und die mit den hier besprochenen Ansätzen zusammenhängen, sind weiter unten im Abschnitt [VII.] abgedruckt; vergl. die Bemerkungen zum Abschnitt [VII.] und zu dem auf diesen Abschnitt folgenden Briefwechsel.

SCHLESINGER.

$$\lambda = \frac{1}{2}\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{32\lambda}+\frac{21}{2048\lambda^3}-\frac{1899}{327680\lambda^5}\pm \text{etc.}$$

für die Wurzeln der Gleichung $J_1(t) = 0$ aufstellt. Wie man sieht, stimmt diese Formel mit der GAUSSschen Gleichung [17] überein.

*) Siehe HANSEN a. a. O.

[II.]

GRUNDBEGRIFFE DER LEHRE VON DEN REIHEN.

[Handschrift von 6 Seiten in Fa, Kapsel 46 a.]

1.

Der Inbegriff einer jeden Anzahl beliebiger Grössen kann im weitern Sinne des Worts eine Reihe genannt werden; indess würde diese Ausdehnung des Begriffs wenig Nutzen haben und man beschränkt daher in der höhern Mathematik den Ausdruck Reihe auf den Inbegriff solcher Grössen, die, insofern man jeder derselben ihre eigene Stelle anweiset, d. i. die erste, zweite, dritte Grösse u. s. f. unterscheidet. alle nach einem Princip bestimmt werden. Der wesentliche Charakter einer Reihe ist also, dass für jeden Ort in derselben die entsprechende Grösse (das Glied der Reihe) sofort völlig bestimmt ist, und es daher als möglich angesehen wird, sobald man das Princip nach welchem die Reihe gebildet wird (ihr Gesetz) kennt, sie soweit man will fortzusetzen. Den Ort eines jeden Gliedes bezeichnet man durch eine Zahl, die der Index desselben heisst, so dass 1 der Index des ersten Gliedes ist, 2 der des zweiten u. s. f.

2.

Der hier gegebene Begriff einer Reihe ist von weiterem Umfange als der gewöhnliche, da man sie durch den Inbegriff der Werthe einer Function Einer veränderlichen Grösse erklärt, welche dieselbe erhält, indem man diese veränderliche Grösse nach und nach $= 1, 2, 3$ u s. f. setzt, wenn man anders nicht auch den Ausdruck Function in einer ausgedehnteren Bedeutung nehmen will, als bisher geschehen ist. Denn nach dieser Erklärung wäre z. B. die Reihe der Primzahlen 1, 2, 3, 5, 7 u. s. f. oder jede daraus abgeleitete wie

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{25}, \frac{1}{49}, \frac{1}{121} \text{ u. s. f.}$$

nicht unter den Reihen enthalten, welches dem Sprachgebrauche weniger gemäss ist. Zum Unterschiede kann man solche Reihen, wo jedes Glied durch eine analytische Function des Index dargestellt wird, analytische Reihen nennen, so wie man die Function selbst, allgemein vorgestellt, das allgemeine Glied der Reihe zu nennen pflegt.

3.

Ist eine Reihe a', a'', a''' u. s. f. ... $[R]$, in welcher für jeden endlichen Index das entsprechende Glied einen endlichen reellen Werth erhält, so beschaffen, dass in ihr, so weit man sie auch fortsetzt, kein Glied vorkommt, das grösser*) als eine gegebene Grösse λ wäre, so kann man λ eine obere Grenze für die Reihe nennen (limes supra seriem, une limite en plus); ist hingegen keine Grösse gross genug, um nach diesem Begriffe eine obere Grenze genannt werden zu können, oder mit andern Worten, kann man in der Reihe zu so grossen Grössen als man will oder zu grössern gelangen, wenn man sie nur weit genug fortsetzt, so sagt man die Reihe habe keine obere Grenze. Es ist klar, dass wenn λ eine obere Grenze der Reihe $[R]$ ist, jede Grösse, welche grösser als λ ist, gleichfalls eine obere Grenze der Reihe sein werde, und im Fall nicht schon λ selbst die kleinste obere Grenze ist, wird es noch kleinere als λ geben; nun ist es aber von selbst klar, dass es kleinere Grössen als λ gebe, die nicht mehr obere Grenzen der Reihe genannt werden können; lässt man demnach λ durch alle Zwischengrössen stetig abnehmen, so muss man nothwendig auf eine kleinste obere Grenze L' kommen, die also die

*) Die Wörter grösser und kleiner werden hier allemal, wo nicht das Gegentheil erinnert wird, mit Rücksicht auf die Zeichen verstanden, so dass 0 und jede positive Grösse grösser als jede negative, und von zwei negativen Grössen diejenige die grössere genannt wird, die ohne Rücksicht auf das Zeichen die kleinere wäre. Eben so sind die Ausdrücke zunehmen und abnehmen zu verstehen.

Eigenschaft haben wird, dass kein Glied der Reihe [R] grösser als L' ist, wohl aber in dieser Reihe, wenn sie nur weit genug fortgesetzt wird, Glieder vorkommen können, die grösser sind, als jede andere Grösse, die kleiner als L' ist.

Ganz auf ähnliche Weise kann μ eine untere Grenze (une limite en moins) der Reihe [R] heissen, wenn in derselben kein Glied vorkommen kann, das kleiner als μ wäre, woraus von selbst erhellet, was Reihen sind, die keine untere Grenze haben. Bei jeder Reihe, die untere Grenzen hat, wird es eine grösste untere Grenze M' geben, so dass jede grössere Grösse als M' nicht mehr untere Grenze der Reihe heissen kann. — Da wir diese kleinsten obern und grössten untern Grenzen allein brauchen, so wollen wir dieselben in der folge schlechthin die obere, und die untere Grenze nennen und also den vorigen allgemeinern Begriff einer obern oder untern Grenze, welchen wir bloss zur Ableitung des gegenwärtigen gebraucht haben, ganz bei Seite setzen.

Übrigens sieht man leicht ein, dass es zwei verschiedene Arten gebe, wie eine Grösse L' die obere Grenze einer Reihe sein könne; entweder nemlich, wenn es in der Reihe wirklich ein Glied (oder mehrere) gibt, dass [es] der L' gleich ist, die übrigen aber alle kleiner sind, oder, wenn zwar kein der Grösse L' gleiches Glied in der Reihe vorkommen kann, aber doch, wenn [R] weit genug fortgesetzt wird, Glieder, die so wenig als man will von L' abweichen. Ganz auf dieselbe Art verhält es sich mit den untern Grenzen.

Auf diese Weise gibt es vier verschiedene Arten von Reihen:

I. Reihen, die weder eine obere noch eine untere Grenze haben, z. B. $1, -2, +3, -4, +5$ u. s. f.

II. Reihen, die keine obere aber eine untere Grenzen haben, wie $1, 2, 3, 4$ u. s. f., wovon die untere Grenze 1.

III. Reihen, die keine untere aber eine obere Grenze haben, wie $-1, -2, -3$ u. s. f.

IV. Reihen, die so wohl eine obere als eine untere Grenze haben. Diese beiden Grenzen werden immer ungleich sein, wenn nicht alle Glieder der Reihe einander gleich sind. Z B $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ u. s. f, wo die obere Grenze 1, die untere $\frac{1}{2}$.

Die letztere Art von Reihen ist hier für uns die wichtigste.

4.

Wenn die Reihe a', a'', a''' u. s. f. die obere Grenze L' hat, so sieht man leicht, dass dieselbe auch mit Weglassung des ersten Gliedes, oder die Reihe a'', a''' u. s. f. eine obere Grenze L'' haben müsse, und zwar wird L'' kleiner als L' sein, wenn $a' = L'$ und die folgenden Glieder alle wenigstens um eine bestimmte Grösse kleiner sind; sonst wird sein $L'' = L'$, in keinem Falle aber $L'' > L'$. Auf gleiche Art wird die Reihe a''', a^{IV} u. s. f. die obere Grenze L''' haben, die Reihe a^{IV}, a^{V} u. s. f. die obere Grenze L^{IV} u. s. f., und so werden alle diese obern Grenzen eine neue Reihe bilden L', L'', L''', L^{IV} u. s. f., in welcher kein Glied grösser[*)] als das vorhergehende sein kann. So leitet man aus der ursprünglichen Reihe -1, -2, -3 u. s. f. die Reihe -1, -2, -3 u. s. f. als obere Grenzen Reihe ab, die mit jener selbst überein kommt; aus der Reihe

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4}\ \text{u. s. f.}$$

diese 1, 1, 1 u. s. f. wo alle Glieder 1 sind; aus der Reihe

[1] $$1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{3}{8},\ -\frac{1}{16},\ \frac{5}{32},\ \frac{7}{64},\ -\frac{3}{128}\ \text{u. s. f.,}$$

welche aus Entwickelung des Bruches

[2] $$\frac{1}{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}xx}$$

entsteht**), diese

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{5}{32},\ \frac{5}{32},\ \frac{5}{32},\ \frac{5}{32},\ \frac{7}{64},\ \frac{23}{1024}\ \text{u. s. f.}$$

Auf gleiche Art werden, wenn die Reihe a', a'', a''', a^{IV} u. s. f. eine untere Grenze M' hat, auch die Reihen a'', a''' u. s. f., a''', a^{IV} u. s. f., a^{IV}, a^{V} u. s. f. u. s. f. untere Grenzen M'', M''', M^{IV} u. s. f. haben, und diese werden eine neue Reihe M', M'', M''', M^{IV} u. s. f. bilden, in welcher kein Glied kleiner sein kann als das vorhergehende.

[*) Die Handschrift hat: kleiner.]

**) Die Gründe, worauf die Formation dieser Reihen beruhet, werden anders wo vorgetragen werden.

Wenn beide Umstände sich vereinigen, dass die ursprüngliche Reihe sowohl eine obere als eine untere Grenze hat, oder zur IV ten Gattung gehört, so kann in [der] Reihe L', L'', L''' u. s. f. kein Glied vorkommen, das kleiner als irgend ein Glied der Reihe M', M'', M''' u. s. f. wäre. Denn gesetzt es wäre $L' < M^m$, so würde wenn n irgend eine ganze Zahl bedeutet, die kleiner als 1 und m (oder auch der kleinsten von beiden gleich) ist, sein $L^n \leqq L'$, $M^n \geqq M^m$ und folglich $L^n < M^n$, welches widersprechend ist, da L^n die obere, M^n die untere Grenze von Einer und derselben Reihe a^n, a^{n+1}, a^{n+2} etc. bedeuten. — Hieraus folgt nun leicht, dass die Reihe L', L'', L''' u. s. f. eine untere, die Reihe M', M'', M''' u. s. f. aber eine obere Grenze haben werde; jene wollen wir durch L, diese [durch] M bezeichnen*), und man begreift leicht, dass L nicht kleiner als M sein könne, sondern entweder $L > M$ oder $L = M$ sein müsse. L nennen wir die letzte obere Grenze der ursprünglichen Reihe [R], M die letzte untere derselben. Zugleich erhellet, dass L, M auch die letzten beiderseitigen Grenzen der Reihen a'', a''', a^{IV} u. s. f.; a''', a^{IV} u. s. f. u. s. f. sein werden, oder dass man bei Bestimmung der letzten Grenzen einer Reihe von ihren Anfangsgliedern so viele weglassen kann, als man will.

5.

Erklärung. Wenn in einer Reihe der vierten Art die letzte obere Grenze und die letzte untere einander gleich sind, so nennt man sie die absolute Grenze der Reihe.

6.

Lehrsatz. Wenn a, a', a'' etc. eine Reihe ist, die die absolute Grenze A hat; b, b', b'', b''' etc. eine Reihe, deren absolute Grenze B, so hat die Reihe $a+b$, $a'+b'$, $a''+b''$ etc. die absolute Grenze $A+B$.

---

*) Die erstere Reihe wird auch eine obere Grenze L', die zweite eine untere M' haben, auf die aber nicht weiter Rücksicht genommen zu werden braucht.

BEMERKUNGEN.

Die Begriffe und Sätze, die GAUSS in dem vorstehenden Bruchstück entwickelt, sind lange vor der ersten Veröffentlichung dieser Aufzeichnung (1912 im Heft III der *Materialien zu einer wissenschaftlichen Biographie von Gauss*, S. 136) von andern Mathematikern aufgestellt und bekannt gemacht worden. Was GAUSS kleinste obere bezw. größte untere Grenze nennt, wird gewöhnlich auf B. BOLZANO zurückgeführt *); nach M. PASCH **) sagt man dafür obere bezw. untere S c h r a n k e. Was GAUSS als letzte obere bezw. letzte untere Grenze bezeichnet, findet sich bei CAUCHY als la plus grande bezw. la plus petite des limites ***); P. DU BOIS REYMOND †) sagt dafür obere und untere U n b e s t i m m t h e i t s g r e n z e. Der Begriff der obern Schranke findet sich übrigens schon im art. 6. Absatz 4. von GAUSS' *Demonstratio nova* (1799), Werke III, S. 10. Während letzte obere und untere Grenzen stets vorhanden sind, bildet das Vorhandensein einer a b s o l u t e n Grenze (art. 5.), d. h. des Grenzwertes oder Limes für eine Reihe einen besondern Fall.

Die R e i h e n, die GAUSS hier betrachtet und auf die er sich a b s i c h t l i c h beschränkt, würden mit einem neuern Kunstausdruck als abzählbare Mengen zu bezeichnen sein, die überdies in einer bestimmten Anordnung vorgelegt sind. Von einer Ausdehnung der Untersuchung auf den »Inbegriff einer jeden Anzahl beliebiger Größen«, d. h. also auf allgemeine lineare Punktmengen, versprach GAUSS sich »wenig Nutzen« (siehe die einleitenden Worte, S. 390).

Zum art. 4., S. 393 ist noch zu bemerken, daß die Glieder der Reihe [1] die Koeffizienten sind in der Entwicklung der rationalen Funktion [2] nach positiven ganzen Potenzen von x. Mit den aus der Entwicklung rationaler Funktionen entspringenden sogenannten r e k u r r i e r e n d e n R e i h e n, besonders mit den zugehörigen R e l a t i o n s s k a l e n und ihren Verallgemeinerungen hat sich GAUSS in jungen Jahren vielfach beschäftigt, siehe die Tagebuchaufzeichnungen Nr. 8 vom 26. Mai, Nr. 10 vom 3. Juni und Nr. 20 vom 16. Juli 1796.

Die letzte Seite der Handschrift enthält Rechnungen zur Osterformel und zwar mit Beispielen für das achtzehnte Jahrhundert; mit Rücksicht auf die Tagebuchnotiz Nr. 107 vom 16. Mai 1800 wird man daher die Abfassungszeit dieses Bruchstücks auf die Wende des XVIII. zum XIX. Jahrhundert ansetzen können.

SCHLESINGER.

---

*) *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Prag 1817, S. 41, vergl. O. STOLZ Mathematische Annalen **18**, 1881, S. 257.

) Mathematische Annalen **30, 1887, S. 132.

***) *Analyse algébrique*, 1821, S. 132, 151 bezw. 390, 399; Oeuvres, 2. série, t. III, S. 121, 136 bezw. 322, 329.

†) Antritts-Programm der Universität Freiburg, 1871, S. 3, vergl. *Allgemeine Functionentheorie* I, 1882, S. 266.

[III.]

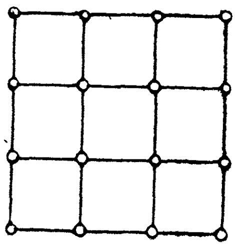
FRAGEN ZUR METAPHYSIK DER MATHEMATIK.

[Aus Handbuch 19, Be, Kleine Aufsätze aus verschiedenen Theilen der Mathematik, Angefangen im May 1809, S. 136, 137.]

1.

Welches ist die wesentliche Bedingung, dass eine Verknüpfung von Begriffen als sich auf eine Grösse beziehend gedacht werden könne?

2.



Alles wird viel einfacher, wenn man zuerst von der Unendlichkeit der Theilbarkeit abstrahirt und bloss Discrete Grössen betrachtet. Z. B. wie bei den biquadratischen Resten die Punkte als Gegenstände, die Übergänge, also Verhältnisse, als Grössen, wo die Bedeutung von $a+bi-c-di$ sogleich klar ist.

[3.]

Die Mathematik ist so im allgemeinsten Sinn die Wissenschaft der Verhältnisse, indem man von allem Inhalt der Verhältnisse abstrahirt.

Verhältniss setzt zwei Dinge voraus und heisst dann einfaches Verhältniss etc.

[4.]

Die allgemeine Vorstellung von Dingen, wo jedes nur zu zweien ein Verhältniss der Ungleichheit hat, sind Punkte in einer Linie.

Kann ein Punkt zu mehr als zweien ein Verhältniss haben, so ist das Bild davon die Lage von Punkten in einer Fläche, die durch Linien verbunden sind. Soll hier aber eine Untersuchung möglich seyn, so kann sie nur die Punkte betreffen, die zu dreien in einem Wechselverhältniss stehen, und wo es zwischen den Verhältnissen ein Verhältniss gibt.

[5.]

Ganz vorzüglich wichtig wird seyn, die Theorie des Gegensatzes zur Klarheit zu bringen ohne Grösse. So kommen z. B. beim Nivelliren einer Ebne folgende Gegensätze vor. Die Stellung der Blase in der Glasröhre ist bei der Ruhe bestimmt durch [die] Geometrische Axe der Röhre [und eine] Linie durch die Ebne der Füsse.

BEMERKUNG.

Die vorstehende Aufzeichnung folgt unmittelbar auf die in den Werken VIII, S. 444 abgedruckte Bemerkung, die »1825, Dec. 4« datiert ist. Man vergleiche zu dem Gegenstande die *Anzeige* der zweiten Abhandlung über die biquadratischen Reste vom Jahre 1831, Werke II, S. 169, besonders S. 174 ff., ferner den weiter unten im *Briefwechsel* abgedruckten Brief [6.] von GAUSS an GRASSMANN vom 14. Dezember 1844. Zu dem im art. [5.] als Beispiel herangezogenen Nivellieren einer Ebene vergleiche man die Notiz Werke VIII, S. 197.

SCHLESINGER.

[IV.]

[DARSTELLUNG VON DISKONTINUIERLICHEN FUNKTIONEN.]

[Aus Handbuch 19, Be, Kleine Aufsätze aus verschiedenen Theilen der Mathematik, Angefangen im May 1809, S. 277.]

Die discontinuirliche Function von t, welche für t von 0 bis 180^0 mit $\sin t$ übereinstimmt, von 180^0 bis 360^0 aber verschwindet, ist

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin t - \frac{2}{1.3.\pi}\cos 2t - \frac{2}{3.5.\pi}\cos 4t - \frac{2}{5.7.\pi}\cos 6t - \text{ u.s.w.}$$

oder, was dasselbe ist, wenn der Werth von 90^0 bis 270^0 verschwinden, von 0 bis 90^0 und von 270^0 bis 360^0 aber mit $\cos t$ übereinstimmen soll, ist die Formel

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{2}{1.3.\pi}\cos 2t - \frac{2}{3.5.\pi}\cos 4t + \frac{2}{5.7.\pi}\cos 6t - \ldots.$$

Man kann dies auch so ausdrücken:

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi}\cos u - \frac{4}{15\pi}\cos 2u - \frac{4}{35\pi}\cos 3u - \text{ u.s.w.}$$

gibt immer den positiven Werth von $\sin\frac{1}{2}u$.

Die Function von u, welche von $u = -A$ bis $u = +A$ constant $= 1$ sein, für alle übrigen Werthe aber verschwinden soll, ist

$$\frac{A}{\pi} + \frac{2\sin A}{\pi}\cdot\cos u + \frac{2\sin 2A}{2\pi}\cdot\cos 2u + \frac{2\sin 3A}{3\pi}\cdot\cos 3u + \text{ u.s.w.}$$

Die Function soll von $u = 0$ bis $u = A$ durch $A - u$, von $u = -A$ bis $u = 0$ durch $A + u$ dargestellt werden, ausserhalb dieser Grenzen aber verschwinden:

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}AA + 2(1-\cos A)\cos u + \frac{2}{4}(1-\cos 2A)\cos 2u + \frac{2}{9}(1-\cos 3A)\cos 3u + \text{u.s.w.}\right)$$

Die Function soll constant sein $= B - A$ für $u = -A$ bis $u = +A$, ferner von $u = A$ bis $u = B$ gleichförmig abnehmen, bis sie für $u = B$ verschwindet; eben so soll sie wie u von $-A$ zu $-B$ übergeht gleichförmig von $B - A$ zu 0 übergehen und ausserhalb der Grenzen $-B$ und $+B$, d. i. von -180^0 bis $-B$ und von $+B$ bis $+180^0$ verschwinden:

$$\frac{1}{\pi}\Big\{\frac{1}{2}(BB - AA) + 2(\cos A - \cos B)\cos u + \frac{2}{4}(\cos 2A - \cos 2B)\cos 2u$$
$$+ \frac{2}{9}(\cos 3A - \cos 3B)\cos 3u + \text{etc.}\Big\}.$$

BEMERKUNG.

Auf der vorhergehenden Seite 276 des Handbuchs endet die S. 273 beginnende Abhandlung über den Lehrsatz von LAGRANGE, die Werke VIII, S. 80—83 abgedruckt ist, mit der Datierung »1847, Mai 13.«

SCHLESINGER.

[V.]

CONVERGENZ DER REIHEN, IN WELCHE DIE PERIODISCHEN FUNCTIONEN EINER VERÄNDERLICHEN GRÖSSE ENTWICKELT WERDEN.

[Handschrift von 13 mit A1 bis A13 bezeichneten Blättern in Fa, Kapsel 46 a.]

Ehe ich zu der Untersuchung selbst, welcher diese Denkschrift gewidmet ist, übergehe, verweile ich etwas bei einigen Begriffsbestimmungen, die anderwerts entweder noch gar nicht vorkommen, oder nicht überall auf die gleiche Weise angewandt werden.

1.

Convergenz der unendlichen Reihen im Allgemeinen.

Ich werde unter Convergenz, einer unendlichen Reihe schlechthin beigelegt, nichts anderes verstehen, als die beim unendlichen Fortschreiten der Reihe eintretende unendliche Annäherung ihrer Glieder an die 0. Die Convergenz einer Reihe an sich ist also wohl zu unterscheiden von der Convergenz ihrer Summirung zu einem endlichen Grenzwerthe; letztere schliesst zwar die erstere ein, aber nicht umgekehrt.

Divergent heisst eine unendliche Reihe, in welcher bei hinlänglich weiter Fortsetzung Glieder erscheinen, die jede (vorher) gegebene Grösse überschreiten.

Reihen, die weder schlechthin convergent, noch divergent sind, werden entweder in ihrem unendlichen Fortschreiten eine unendliche Annäherung an einen von 0 verschiedenen Grenzwerth darbieten, in welchem Fall man sie convergent zu diesem Werthe nennen kann, oder so beschaffen sein, dass sie nie aufhören in einem endlichen Zwischenraum hin und her zu schwanken. Für unsern Zweck ist es jedoch nicht nothwendig, diese Unterscheidung noch weiter ins Einzelne zu verfolgen.

Wir haben demnach drei Arten oder Ordnungen von unendlichen Reihen, oder da zwei dieser Arten wieder in je zwei zerfallen, fünf Ordnungen, nemlich:

I. Divergente Reihen.

II. Zwischen gewissen Grenzen stets schwankend bleibende Reihen.

Endlich die zu einem bestimmten Grenzwerthe convergirende[n] Reihen, nemlich

III. Reihen, die zu einem von 0 verschiedenen Grenzwerthe convergiren.

IV. und V. Die zu 0 convergirenden Reihen, welche ich ohne weitern Zusatz convergirende Reihen nenne. In die V. Classe setze ich diejenigen, bei denen die successive Summation eine unendliche Annäherung an eine endliche bestimmte Grenze darbietet, in die IV. die, wo dies nicht Statt findet.

Durch Addition zweier Reihen zu einander (indem man das erste Glied der einen Reihe zum ersten der andern addirt, das zweite zum zweiten u.s.w.) entsteht eine neue Reihe, über deren Classe sich folgendes sagen lässt. Die Addition zweier Reihen der fünften Classe gibt eine der fünften; die Addition einer der fünften zu einer der vierten, gibt eine der vierten, und allgemein bleibt die Ordnung ungeändert dieselbe, wenn eine Reihe der fünften oder überhaupt eine von höherer Ordnung hinzuaddiert wird. Man schliesst daraus leicht allgemein, dass durch Addition beliebig vieler Reihen eine Reihe entsteht, deren Ordnung mit der niedrigsten Ordnung übereinstimmt, wenigstens allemahl, wenn von dieser niedrigsten Ordnung nur eine unter den addierten ist: die Addition zweier oder mehrerer von gleicher Ordnung kann allerdings in speciellen Fällen eine von höherer hervorbringen. Hiemit hängt auch die Classification derjenigen Reihen zusammen, deren Glieder complexe Grössen sind. Man betrachtet die Reihe der reellen Theile, und die der imaginären jede für sich: gehören sie zu gleicher Ordnung, so setzt man auch die ganze Reihe in eben dieselbe, im entgegengesetzten Falle richtet sich letztere nach der niedrigern Stufe.

Wenn man die Glieder einer unendlichen Reihe

$$R = A, A', A'', A''' \text{ u.s.w.}$$

mit den Gliedern einer geometrischen Reihe

$$1,\ h,\ hh,\ h^3 \text{ u.s.w.}$$

multiplicirt, so wird die neue Reihe

$$S = A,\ hA',\ hhA'',\ h^3A''' \text{ u.s.w.}$$

in dem Falle, wo h kleiner ist als 1, nicht bloss convergent sein, sondern auch eine convergente Summation darbieten, also zur 5ten Ordnung gehören, allemahl wo R nicht divergent ist, also zur 2., 3., 4. oder 5. Ordnung gehört. In der That, da in jeder nicht divergirenden Reihe keines der Glieder eine gewisse Grösse g [*)] überschreiten kann, so wird in der Reihe S das Glied mit dem Index n jedenfalls nicht grösser sein als gh^n, und jedes der folgenden noch kleiner, und eben so wird die Summation der auf dies Glied folgenden, wie weit man sie auch fortsetzt, nicht grösser sein als

$$\frac{gh^n}{1-h},$$

welche Grösse einen so kleinen nicht verschwindenden Werth c als man nur wünscht, erlangen kann, wenn man nur n gross genug annimmt.

Ist h grösser als 1, oder werden die Glieder der Reihe R mit den Gliedern einer steigenden geometrischen Progression multiplicirt, so sind drei Fälle denkbar:

I. Indem man h als veränderlich betrachtet und von dem Werthe [Eins] an allmählig wachsen lässt, hört S sofort auf convergent zu sein, wie wenig auch h den Werth 1 überschreitet.

II. S bleibt convergent bis zu einem bestimmten Werte von h, nemlich $h = \frac{1}{e}$, wo e ein ächter Bruch ist Dies b i s kann einschliesslich oder ausschliesslich zu verstehn sein, nemlich entweder ist $\frac{1}{e}$ der letzte Werth des wachsenden h, für welchen S convergent ist, oder der erste für welchen S nicht convergent ist.

III. S bleibt stets convergent, wie gross man auch h annehmen möge, wie z. B. in dem Falle, wo R eine Exponentialgrösse oder den Sinus oder Cosinus eines Bogens ausdrückt.

[*) In der Handschrift steht an dieser Stelle noch das Wort »nicht«.]

Im Falle I. convergirt also die Reihe R langsamer, im Falle III. schneller als jede fallende geometrische Progression; so wie im Falle II. jene Reihe langsamer convergirt als jede fallende geometrische Progression mit einem kleinern Exponenten als e, aber schneller als jede mit irgend einem grössern Exponenten als e. In so fern steht also unter allen fallenden geometrischen Progressionen, diejenige deren Exponent $= e$ ist, in Beziehung auf Convergenz der Reihe R am nächsten, und es wird daher nicht unschicklich sein, e den Exponenten der Convergenz der Reihe R zu nennen. Bei alledem ist klar, dass je nachdem S selbst, für $h = \frac{1}{e}$, noch convergent oder schon divergent wird, jene Progression noch weniger oder mehr convergent ist als R, und wir werden weiter unten zeigen, wie eine noch nähere Anschmiegung erreicht werden kann [*)].

2.

Die zur Analysis gehörigen Begriffsbestimmungen, ihre Unterscheidungen und gegliederten Classificirungen, die in den Lehrbüchern aufgestellt zu werden pflegen, lassen zum Theil noch erkennen, dass man bei ihrer Einführung sich auf einem niedern Standpunkte mit beschränkterm Gesichtspunkte befand. Man schuf eine Begriffsbildung, um diesem oder jenem praktischen Bedürfnisse entgegenzukommen, und dachte bei jener an keine weitern Grenzen als dieses Bedürfniss erforderte. Über diese Grenzen hinaus hatte die Begriffsbestimmung keinen klaren Sinn mehr. Kein Wunder also, dass wenn man sich auf Fragen einliess, wo die selben Begriffe ausserhalb des Gebiets, in welchem allein sie ihre Berechtigung hatten, in Anspruch genommen wurden, Widersprüche und Verwirrung die Folge waren. Es gehören dahin z. B. die lange streitigen Fragen über die Logarithmen der negativen Grössen, die immer nur ein Streit de lana caprina bleiben mussten, so lange nicht der Begriff von Logarithm aus Einem Guss auf eine für das ganze Gebiet der Grössen gültige, vollkommen klare Art festgestellt war. Zu den Ursachen, welchen man eine solche im 17. und 18. Jahrhundert so oft vorkommende und auch zum Theil noch in das gegenwärtige hineinreichende Unzulänglichkeit bei den mathematischen Begriffsbestimmungen vorzüglich zuzuschreiben hat, und auf deren

[*) Siehe den unten folgenden Anhang.]

specielle Erörterung ich hier mich nicht einlassen will, gehört auch der verkehrte Gesichtspunkt, aus welchem man die jetzt sogenannten imaginären Grössen so lange betrachtet hat. Wir sehen dieselben zuerst unter dem Namen von unmöglichen Grössen auftreten bei denjenigen quadratischen Gleichungen, wo die Auflösung die Ausziehung der Quadratwurzel aus einer negativen Grösse erfordert. In so weit enthielt der Ausdruck, dass die Wurzeln der Gleichung unmöglich seien, eigentlich nichts weiter als eine Verneinung der Existenz von Wurzeln. Späterhin machte man die Bemerkung, dass auch bei algebraischen Gleichungen von höhern Graden in solchen Fällen, wo sie entweder gar nicht auflösbar waren oder wenigstens nicht eine ihrem Grade gemässe Anzahl von Wurzeln darboten, die Unauflösbarkeit oder Unvollzähligkeit der Auflösungen immer nur von der Unmöglichkeit, aus einer negativen Grösse eine Quadratwurzel zu erhalten, abhing, und d'Alembert und Euler generalisirten diese Bemerkung (dem Wesen nach, wenn auch nicht in dieser klaren Ausdrucksweise) dahin, dass es nur der Zulassung einer fingirten Grösse $\sqrt{-1}$ bedürfe, um jeder entwickelten algebraischen Gleichung die ihrer Ordnungszahl gleiche Menge von Wurzeln zu verschaffen. Ein genügender strenger Beweis dies[es] wichtigsten Lehrsatzes in der Theorie der algebraischen Gleichungen ist zwar erst viel später gelungen; aber schon von jener Zeit an wurde es immer mehr üblich, die unschicklichen Benennungen von unmöglichen Grössen fahren zu lassen, und die jene fingirte $\sqrt{-1}$ involvirenden Grössen imaginäre zu nennen, im Gegensatz der reellen, unter denen man die Totalität aller positiven und negativen begriff. Seit der Zeit sind die imaginären Grössen, wie eine besondere Gattung von Grössen, in den analytischen Calcul aufgenommen, und man hat sich wohl dabei gestanden, indem ihre Beihülfe sehr häufig auf eine überraschend leichte Art zu einem Ziele führt, welches ohne sie nur viel mühsamer sich erreichen lassen würde, oder indem ihre Zuziehung mancher mathematischen Lehre, die, wenn sie bloss auf das Gebiet der reellen Grössen beschränkt werden müsste, nur ungelenk und lückenhaft erscheinen würde, die schönste Abrundung gibt.

Bei allem dem sind die imaginären Grössen, so lange ihre Grundlage immer nur in einer Fiction bestand, in der Mathematik nicht sowohl wie eingebürgert, als viel mehr nur wie geduldet betrachtet, und weit davon entfernt geblieben, mit den reellen Grössen auf gleiche Linie gestellt zu werden.

Zu einer solchen Zurücksetzung ist aber jetzt kein Grund mehr, nachdem die Metaphysik der imaginären Grössen in ihr wahres Licht gesetzt und nachgewiesen ist, dass diese, eben so gut wie die negativen, ihre reale gegenständliche Bedeutung haben*). Die vollständige Erkenntniss der Natur einer analytischen Function muss auch die Einsicht in ihr Verhalten bei den imaginären Werthen des Arguments in sich schliessen, und oft ist sogar letztere unentbehrlich zu einer richtigen Beurtheilung der Gebarung der Function im Gebiete der reellen Argumente. Unerlässlich ist es daher auch, dass die ursprüngliche Festsetzung des Begriffs der Function sich mit gleicher Bündigkeit über das ganze Grössengebiet erstrecke, welches die reellen und die imaginären Grössen unter dem gemeinschaftlichen Namen der complexen Grössen in sich begreift[**)].

[Anhang.]

[Ein Blatt in Fa, Kapsel 46 a.]

Maasstab für Convergenz der Reihen.

Allgemeines Glied der Reihe R_n, der Summenreihe S_n.

Es sei $\rho_n R_n$ das allgemeine Glied einer neuen Reihe, die weder convergent noch divergent ist. Man wird dann die Convergenzen der Reihen (R) und $\left(\frac{1}{\rho}\right)$ als gleich- zu betrachten haben.

Es wird ρ_n in die Form zu bringen sein

$$\rho_n = e^{\alpha n} n^\beta (\log n)^\gamma . (\log \log n)^\delta . (\log^3 n)^\varepsilon \text{ u.s.w.},$$

wo α, β, γ, δ, ... positive, negative Zahlen oder 0 sein können, aber die erste, die nicht verschwindet, jedenfalls positiv.

Die Bedeutung lässt sich so aussprechen:

---

*) Göttingische gelehrte Anzeigen, 1831, St. 64. [Werke II, S. 169.]

[**) In der Handschrift folgen noch zwei Artikel, die hier nicht mit abgedruckt wurden.]

Die Reihe

$e^{\alpha' n} R_n$	conver-	α'	kleiner	α
$e^{\alpha n} n^{\beta'} R_n$	girt oder	β'	oder	β
$e^{\alpha n} n^{\beta} (\log n)^{\gamma'} R_n$	diver-	γ'	grösser	γ
$e^{\alpha n} n^{\beta} (\log n)^{\gamma} (\log\log n)^{\delta'} [R_n]$	girt je nach	δ'	[ist]	δ
$e^{\alpha n} n^{\beta} (\log n)^{\gamma} (\log^2 n)^{\delta} (\log^3 n)^{\varepsilon'} [R_n]$	dem	ε'	als	ε

Wenn eine der Reihen

$$e^{\alpha n} R_n,\quad e^{\alpha n} n^{\beta} R_n,\quad e^{\alpha n} n^{\beta} (\log n)^{\gamma} [R_n] \quad \text{u.s.w.}$$

weder divergirt noch convergirt, so ist der Ausdruck damit zu Ende. Trifft d[ies] z. B. bei der dritten zu, so ist $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$, etc.

Die Summenreihe S_n, unter [der] Voraussetzung, dass alle Glieder von (R) wenn nicht gleich, doch von irgend einer Stelle an gleiche Zeichen haben, wird unendlich, wenn die erste der Grössen

$$\alpha - 1,\quad \beta - 1,\quad \gamma - 1,\quad \text{u.s.w.},$$

die nicht $= 0$ wird, negativ ist oder wenn alle $= 0$ [sind].

[VI.]

BESTIMMUNG DER CONVERGENZ DER REIHEN, IN WELCHE DIE PERIODISCHEN FUNCTIONEN EINER VERÄNDERLICHEN GRÖSSE ENTWICKELT WERDEN.

[Handschrift von 16 mit B 1 bis B 16 bezeichneten Seiten in Fa, Kapsel 46 a.]

1.

Die Überschrift bezeichnet zwar den Hauptgegenstand dieser Denkschrift, der jedoch nur einen Theil ihres Inhalts ausmacht. Die Lösung der Aufgabe gehört recht eigentlich in das Gebiet der Lehre von den complexen (imaginären) Grössen, auf welche man in frühern Zeiten die Geschäfte der Analysis nur ausnahmsweise auszudehnen sich erlaubte. Die vollkommene Befugniss, der Analysis gleichmässig das ganze Gebiet der complexen Grössen zu unterwerfen, habe ich im Jahre 1831 nachgewiesen: allein die Wege in diesem Gebiete sind noch nicht überall gebahnt, und die in der Analysis bisher gangbaren Begriffsabgrenzungen sind ursprünglich fast immer nur unter der stillschweigenden Voraussetzung gemacht, dass man über das Gebiet der reellen Grössen nicht hinausgehe, und ermangeln selbst unter dieser Beschränkung nicht selten einer befriedigenden Schärfe. Es werden daher mit dem Hauptgegenstande einige Nebenuntersuchungen und Erörterungen verbunden werden müssen, ohne jedoch bei denselben eine grössere Ausführlichkeit zu beabsichtigen, als für unsere Zwecke nöthig ist.

2.

Zuvörderst ist die bekannte Versinnlichung der complexen Grössen in Erinnerung zu bringen, wo jede complexe Grösse $x+iy$ (die imaginäre Einheit

$\sqrt{-1}$ durch i bezeichnet) durch denjenigen Punkt einer unbegrenzten Ebene repräsentirt wird, dessen rechtwinkelige Coordinaten in Beziehung auf ein beliebig gewähltes System, x und y sind. Es wird damit, wie schon an einem anderen Orte [*)] bemerkt ist, nur bezweckt, die Bewegung in dem an sich vom Räumlichen unabhängigen Felde der abstracten complexen Grössen zu erleichtern und eine Sprache für dasselbe zu vermitteln.

Auf diese Weise versinnlicht sich durch eine Linie in der Ebene eine durch unendlich kleine Differenzen nach der Stetigkeit fortschreitende Reihe complexer Grössen, die ich einen Zug nennen werde, so wie jede der einem bestimmten Zuge angehörenden Grössen eine Stelle in diesem Zuge. Ist die letzte der einen Zug bildenden complexen Grössen der ersten gleich, während alle dazwischen liegenden unter sich ungleich sind, so wird dieser geschlossene Zug vertreten durch eine geschlossene Linie, und der von dieser Linie eingeschlossene Flächenraum vertritt wieder alle diejenigen nach der Stetigkeit mit einander zusammenhängenden complexen Grössen, die in jenem Zuge ihre Limite finden, und die ich eine Schicht complexer Grössen nennen werde. Dieser Begriff lässt sich noch allgemeiner auffassen als der Inbegriff aller nach der Stetigkeit unter sich zusammenhängender complexer Grössen, die von den übrigen nicht dazu zu rechnenden durch einen oder mehrere geschlossene Züge geschieden sind. In letzterem Falle bildet einer dieser Züge, der äusserste, die Scheidung von dem übrigen unendlichen Gebiete (welches dann auch als eine unendliche Schicht bezeichnet werden mag), die anderen dienen dazu, im Innern eine oder mehrere Schichten — in der räumlichen Vorstellungsart: Inseln oder Enclaven — abzusondern.

3.

Zu einem Zuge complexer Grössen steht eine dadurch begrenzte Schicht in einer gewissen Beziehung analog derjenigen, wonach von einem Flächenstück ausgesagt wird, dass es der Begrenzungslinie zur Rechten oder zur Linken liege**). Bestimmt ist diese Unterscheidung nur, insofern man in der

[*) Siehe den art. 5. der Jubiläumsschrift von 1849 *Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen*, Werke III, S. 79.]

**) Da hier nicht der Ort ist in die Metaphysik des Räumlichen weiter einzudringen, so übergehe ich den Umstand, dass die Wechselbeziehung zwischen vorwärts-

Linie eine bestimmte Richtung als eine vorwärts gehende annimmt: wählt man dafür die entgegengesetzte, so wird, was vorher rechts war, zu links und umgekehrt. Auf gleiche Weise muss in einem eine Schicht complexer Grössen S begrenzenden, oder, was dasselbe ist, zwei solcher Schichten S und S' scheidenden Grössenzuge eine bestimmte Folgeordnung angenommen werden und das Charakteristische im Verhältniss einer Schicht zu dem Grenzzuge kann dann am einfachsten auf folgende Art ausgesprochen werden: Es seien t, $t+\alpha$ zwei unendlich wenig verschiedene complexe Grössen in dem Zuge, die erste vorangehend, die andere folgend; $t+\beta$ eine andere gleichfalls unendlich wenig von t verschiede[ne] complexe Grösse und

$$\frac{\beta}{\alpha} = k + il.$$

Es wird dann, (wenn wir den singulären Fall ausschliessen, wo die Grösse t in räumlicher Darstellung des Zuges eine Spitze darbietet) $l = 0$ oder unendlich klein sein, wenn $t+\beta$ dem Zuge selbst angehört; hingegen wird für einen positiven endlichen Werth von l die Grösse $t+\beta$ einer der Schichten S und S', und für einen negativen der andern angehören; und dies Verhältniss wird für den ganzen Zug dasselbe bleiben, eben so wie der, welcher einen See hart am Ufer so zu umschreiten anfängt, dass jener ihm zur Rechten liegt, denselben fortwährend zur Rechten behält, wenn er nur sich selbst nicht umwendet.

Man kann dies dadurch ausdrücken, dass man sagt, diejenige Schicht, welcher die positiven Werthe von l entsprechen, habe ein positives Verhältniss zu dem Grenzzuge, die andere ein negatives. Offenbar vertauschen sich diese Benennungen, sobald man in dem Grenzzuge die entgegengesetzte Folgeordnung wählt. Man erkennt hieraus die Bedeutung eines Ausdrucks, dessen ich mich in der Folge zuweilen bedienen werde. Es seien F, F' die beiden denkbaren Folgeordnungen in einem Zuge Z, der die Schicht S begrenzt; ebenso

---

rückwärts und rechts-links erst durch die Hinzufügung des dritten Gegensatzes oben-unten zwischen den Raumtheilen, welche die Fläche scheidet, Haltung bekommt, so wie den, dass dieses Verhältniss nicht durch eine Definition a priori gegeben, sondern nur durch Zusammenhalten mit einem wirklich Vorhandenen, drei Dimensionen darbietenden erkannt werden kann, insofern in diesem die Namen bereits feststehen. Man vergl. Göttingische gelehrte Anzeigen 1831, S. 637 [Werke II, S. 177]. Die abstracte allgemeine Lehre von den complexen Grössen hat mit beiden nichts zu schaffen.

f, f' die beiden Folgeordnungen in einem Zuge z, welcher die Schicht s begrenzt. Ist nun das Verhältniss von S zu Z, unter Voraussetzung der Folgeordnung F dasselbe wie das Verhältniss von s zu z unter Voraussetzung der Folgeordnung f, d. i. sind beide positiv oder beide negativ, so drücke ich dies dadurch aus, dass ich die Folgeordnungen F in Beziehung auf S und f in Beziehung auf s wie gleich betrachte, wo denn offenbar auch F' und f' gleich sein werden. Es ist hieraus von selbst klar, was in dem am Schluss des zweiten Artikels [S. 408] erwähnten Falle, wo eine Schicht complexer Grössen durch mehrere von einander verschiedene Züge begränzt wird, unter gleicher Folgeordnung in diesen Zügen zu verstehen ist. Es verhält sich damit ebenso, als wenn die sämmtlichen Uferlinien eines[*)] eine oder mehrere Inseln einschliessenden Sees in einem solchen Sinn durchlaufen werden, dass man allemahl den See an derselben Seite, d. i. entweder allemahl rechts oder allemahl links hat.

4.

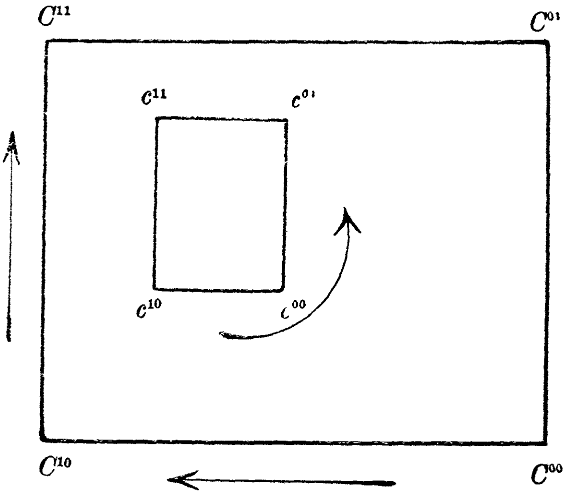
Um dies durch ein einfaches Beispiel zu erläutern, seien A, a, a', A' reelle Grössen, jede folgende algebraisch grösser als die vorhergehende, d. i. $a-A$, $a'-a$, $A'-a'$ alle positiv; und auf ähnliche Weise verhalten sich die reellen Grössen B, b, b', B'. Ich bezeichne die acht complexen Grössen

$$A+Bi,\quad A'+Bi,\quad A+B'i,\quad A'+B'i,\quad a+bi,\quad a'+bi,\quad a+b'i,\quad a'+b'i$$

der Reihe nach mit $C^{0,0}$, $C^{1,0}$, $C^{0,1}$, $C^{1,1}$, $c^{0,0}$, $c^{1,0}$, $c^{0,1}$, $c^{1,1}$. Ferner die Schicht complexer Grössen $x+yi$, wo x zwischen A und A', hingegen y zwischen B und B' liegt, mit S. Eben so diejenige Schicht, wo x zwischen a und a', hingegen y zwischen b und b' liegt, mit s. Endlich bemerke man, dass S begrenzt wird durch den geschlossenen Zug Z, zusammengesetzt aus vier partiellen Zügen von C^{00} nach C^{10}, von C^{10} nach C^{11}, von C^{11} nach C^{01} und von C^{01} nach C^{00}, und zwar so, dass im ersten und dritten Stück der imaginäre Theil constant bleibt, im zweiten und vierten hingegen der reelle. Auf ähnliche Weise sei z der geschlossene Zug, welcher die Schicht s begrenzt, und dessen vier Bestandtheile man hat, wenn man in denen von Z nur überall C gegen c vertauscht. Man erkennt leicht, dass auf diese Weise sowohl die Schicht S

[*)] Hier stehen in der Handschrift noch die Worte: Sees, welcher] zu dem Zuge Z, als die Schicht s zu dem Zuge z, wenn in den beiden Zügen die angegebene Folgeordnung vorausgesetzt wird, ein positives Verhältniss haben, oder dass diese Folgeordnungen für Z in Beziehung auf S und für z in Beziehung auf s gleiche sind.

Sondern wir nun aber aus den complexen Grössen S diejenigen aus, welche die Schicht s und zugleich diejenigen, welche den Zug z bilden, so bleibt Eine zusammenhängende Schicht übrig, die ich mit Σ bezeichne, und von welcher die zwei Züge Z, z die vollständige Begrenzung bilden. In Beziehung auf diese Schicht Σ sind nun die obigen Folgeordnungen in den Zügen nicht gleiche sondern entgegengesetzte: der Folgeordnung $C^{00}\, C^{10}\, C^{11}\, C^{01}\, C^{00}$ gleich würde diese sein: $c^{00}\, c^{01}\, c^{11}\, c^{10}\, c^{00}$. Man vergl. die räumliche Darstellung, wo durch die Pfeile die gleichen Folgeordnungen angedeutet sind.



5.

Es muss hier noch hervorgehoben werden der Satz, dass eine Schicht Σ, die durch zwei oder mehrere geschlossene Züge begrenzt ist, sich in eben so viele partielle Schichten zerlegen lässt, die jede nur von Einem Zuge begrenzt werden. Es wird zum Beweise dieses Satzes nur nöthig sein, zu zeigen, dass allemahl Σ sich in zwei andere Schichten Σ' und Σ'' zerlegen lasse, so dass Σ' nur durch Einen Zug begrenzt werde, und die Anzahl der Züge, durch welche Σ'' begrenzt ist, um eine Einheit kleiner sei, als die Zahl der Grenzzüge von Σ. Es seien Z und z zwei geschiedene Grenzzüge von Σ, $\zeta = Cc$, $\zeta' = C'c'$ zwei andere Züge, so beschaffen, dass ihre Anfänge C und C' zu Z, und die Enden c und c' zu z gehören, dass sie selbst keine Stelle gemein haben, und dass die Schicht, welche durch den geschlossenen Zug $CC'c'cC$ begrenzt wird (wo CC', cc' beziehungsweise Theile von Z, z sind) ganz der Schicht Σ angehört, also einen Theil derselben ausmacht. Von der Möglichkeit, diesen Bedingungen Genüge zu leisten, überzeugt man sich leicht, indem man erwägt, dass, in Folge des stetigen Zusammenhangs der Schicht Σ, die zwei Züge Z, z sich durch einen ganz dieser Schicht angehörenden Zug Cc verbinden lassen, und dass man nöthigenfalls den zweiten Zug $C'c'$ dem ersten so nahe wie man will nehmen darf. Wir haben also in der durch den Zug $CC'c'cC$ begrenzten Schicht das geforderte Σ'; nennt man das, was nach Absonderung derselben von Σ übrig bleibt, Σ'', so werden dazu als Begrenzung gehören: erstlich diejenigen Züge, welche etwa noch ausser Z und z die Begrenzung von Σ bildeten, zweitens anstatt dieser beiden Züge Z, z der einfache gleichfalls geschlossene Zug $Ccc''c'C'C''C$, wo c'' eine beliebige Stelle in dem nicht geschlossenen Zuge bedeutet, welcher von z übrig bleibt, wenn man cc' davon absondert, und eben so C'' eine beliebige Stelle von Z ausserhalb CC'.

Es liesse sich übrigen[s] auch nachweisen, dass auf diese Weise Σ'' wirklich Eine nach der Stetigkeit zusammenhängende Schicht bildet, was ich aber hier unterlasse, theils weil dazu noch einige anderweitige Erörterungen erforderlich sein würden, theils weil für gegenwärtigen Zweck zureicht, dass Σ'', möge es Eine einzige zusammenhängende [Schicht] oder mehrere getrennte vorstellen, gewiss zusammen eine um eine Einheit geringere Anzahl von geschlossenen Grenzzügen darbietet als Σ.

Man bemerke noch, dass in der Gesammtheit der Grenzzüge von Σ' und Σ'' wieder erscheinen: erstlich die Grenzzüge von Σ, und dann noch dazu die Züge ζ und ζ' und zwar jeder zweimahl. Man sieht aber leicht, dass in ζ als Grenzzug von Σ', und in ζ als Grenzzug von Σ'' entgegengesetzte Folgeordnungen gelten müssen, wenn diese Schichten gleiches Verhältniss dazu haben sollen, und dasselbe gilt von ζ'. In denjenigen Anwendungen also, in welchen zwei an sich gleiche aber in entgegengesetzten Folgeordnungen vorkommende Züge wie einander destruirend betrachtet werden können, kann man die Totalität der Grenzzüge von Σ der Totalität der Grenzzüge von Σ' und Σ'' gleich setzen, und demnach auch der Totalität der einfachen Grenzzüge sämmtlicher aus weiterer Zerlegung hervorgehender Schichten.

6.

Die Begriffbestimmung eines Integrals $\int ft\,dt$ lässt sich auf zwei verschiedenen Arten feststellen.

Einmahl erklärt man das Integral als eine solche Function von t, aus deren Differentiation $ft.dt$ hervorgeht.

Die zweite Art geht zunächst von einer Integration zwischen bestimmten Grenzen t_0 und T aus. Man theilt die Differenz $T-t_0$ in eine beliebige Anzahl, z. B. n gleicher oder ungleicher Theile

$$t_1-t_0,\ t_2-t_1,\ t_3-t_2,\ \ldots,\ T-t_{n-1},$$

und bestimmt das Aggregat

$$(t_1-t_0)ft_0+(t_2-t_1)ft_1+(t_3-t_2)ft_2+\cdots+(T-t_{n-1})ft_{n-1}.$$

Dieses Aggregat wird je nach der Art und Menge der Abtheilungen verschieden sein, aber sich einer bestimmten Grenze S unendlich annähern, wenn man die Grösse der Theile unendlich abnehmen, mithin ihre Anzahl unendlich zunehmen lässt. Mit dem Ausdruck Integral $\int ft.dt$ von $t=t_0$ bis $t=T$ genommen, oder symbolisch mit

$$\int_{t_0}^{T} ft.dt$$

bezeichnet man nun eben diesen Grenzwerth S, welcher in der abgekürzten Sprache als Summe unendlich vieler unendlich kleiner Elemente $ft.dt$ zwischen den Werthen $t=t_0$ und $t=T$ auftritt, oder in geometrischer Einkleidung als Quadratur. Da dieses S abhängig ist von der Wahl der Grenzwerthe t_0 und T und bei gleich bleibendem t_0 sich mit T zugleich verändert, so kann man es wie eine Function von T betrachten, und indem man diese Function mit FT bezeichnet, wird, wie sich leicht nachweisen lässt,

$$dFT=fT.dT$$

werden, oder indem man t anstatt T schreibt,

$$dFt=ft.dt.$$

Es ist hieraus klar, dass beide Begriffsbestimmungen zusammenfallen.

7.

Bei der zweiten, der summatorischen, Begründungsart liegt stillschweigend die Voraussetzung in Beziehung auf die Function ft zum Grunde, dass ihr

Werth zwischen den Grenzen $t = t_0$ und $t = T$ überall ein bestimmter und zwar ein endlicher sei. Ich füge darüber einige Erläuterungen bei.

Die Forderung, dass der Werth von ft ein bestimmter sei, ist schon von selbst erfüllt, wenn diese Function in die Classe derjenigen gehört, welche Euler, nicht eben glücklich, mit dem Namen einförmige*) belegt hat, und die man treffender einwerthige nennen könnte, da eben ihr Charakter darin besteht, dass jedem Werthe der Veränderlichen nur Ein Werth der Function entspricht.

Ist hingegen ft eine vielwerthige Function, so ist erforderlich, dass nach einem Principe bestimmt sei, welcher aus den verschiedenen Werthen der Function für jeden Wert von t zwischen den Grenzen t_0 und T gelten soll. Das Princip, dass die Werthe der Function nach der Stetigkeit zusammenhängen sollen, wird, sobald ft für einen der Werthe von t gegeben ist, zur Bestimmung des Zuges ausreichen, so lange man nicht auf einen Werth von t kommt, für welchen der betreffende Werth von ft mit einem andern zusammenfällt, (also zwei Züge einander kreuzen), in welchem Falle über das fernere Fortschreiten eine anderweitige Bestimmung getroffen werden muss. Übrigens verstehe ich das Fortschreiten nach der Stetigkeit nur so, dass unendlich kleinen Veränderungen von t unendlich kleine Änderungen von ft entsprechen, und sehe einen Übergang von reellen Werthen zu imaginären nicht als eine Unterbrechung der Stetigkeit an.

Die zweite Bedingung, dass der Werth von ft, so lange t die Grenzen t_0 und T nicht überschreitet, überall endlich sei, ist übrigens keine absolut nothwendige. Man nehme an, dass ft unendlich werde für $t = t'$, aber für alle zwischen t_0 und t' liegende Werthe endlich bleibe. Ist $t' - \omega$ ein solcher Werth, so hat $\int_{t_0}^{t'-\omega} ft.dt$ einen bestimmten endlichen Werth, und wenn derselbe bei unendlich abnehmendem ω nicht über alle Grenzen wächst, sondern sich nur einer endlichen Grenze G unendlich nähert, so wird es erlaubt

*) Angemessener würde es sein, einförmige oder einformige Functionen diejenigen zu nennen, die für alle Werthe von x nach einem einzigen Gesetze gebildet werden; zweiförmige, vielförmige hingegen wären dann die, wo für die Werthe zwischen gewissen Grenzen ein Gesetz gilt, zwischen andern ein anderes gilt, kurz was man sonst functiones discontinuae nannte. In neuester Zeit hat [man] aber die Benennung continuirliche und discontinuirliche Function in einer andern Bedeutung zu nehmen angefangen.

sein, unter $\int\limits_{t_0}^{t'}$ eben diese Grenze zu verstehen. Bleibt dann ferner ft endlich für alle Werthe von t, welche zwischen t' und T fallen, letztern eingeschlossen, und ist $t'+\omega$ ein solcher Werth, so wird $\int\limits_{t'+\omega}^{T} ft.dt$ einen bestimmten endlichen Werth haben, und wenn dieser bei unendlich abnehmendem ω sich nur einer endlichen Grenze unendlich nähert, so wird diese Grenze G' als Werth von $\int\limits_{t'}^{T} ft.dt$ betrachtet werden dürfen, und mit gleichem Rechte die Summe $G+G'$ als Werth von $\int\limits_{t_0}^{T} ft.dt$[*)].

Wenn hingegen diese Bedingungen nicht beide zutreffen, d. i. wenn indem ft' unendlich wird,

$$\int\limits_{t_0}^{t'-\omega} ft.dt \text{ und } \int\limits_{t'+\omega}^{T} ft.dt,$$

bei unendlich abnehmendem ω, nicht beide endliche Grenzwerthe haben, so bildet in der zweiten Begründungsart der Wert $t=t'$ eine unübersteigliche Scheidewand, so lange man (wie man bisher immer gethan hat) sich dabei ausschliesslich auf reelle Werthe von t beschränkt. Es findet sich also hier eine Lücke in der Integralrechnung: denn in allen den unzähligen Fällen, wo $ft.dt$ nicht als das Differential einer analytischen[**)] Function Ft dargestellt werden kann, d. i. einer solchen, die eine allgemein gültige Werth-Bestimmung für jeden Werth von t durch algebraische oder ganz eingebürgerte transsсendente Operationen darbietet, und wo man also die Bedeutung von $\int ft.dt$ nur in unserer zweiten Art auffassen kann, bleiben, unter den vorhin bezeichneten Umständen die beiden Parthien der Functionalwerthe, diesseits und jenseits der Scheidewand, ohne Verknüpfung. Folgeweise hat man dann in solchen Fällen öfters unberechtigte Willkür eintreten lassen, während die strenge Wissenschaft für jede analytische Function, die sie in ihren Bereich zieht, eine allgemeingültige Genesis aus einem einheitlichen Princip verlangt. Allerdings ist gegen diese Forderung in der neuern Mathematik fort und fort vielfach gefehlt.

[*) In der Handschrift lautet die untere Grenze des Integrals t'; im Vorhergehenden schrieb GAUSS für die untere Grenze abwechselnd bald t_0, bald t^0.]

[**) Früher hieß es »entwickelten«, was GAUSS durchgestrichen hat.]

8.

Die gründliche Abhülfe dieses Mangels ist nur dadurch zu gewinnen, dass man den imaginären Grössen völlig gleiche Rechte einräumt, also die Analysis gleichmässig über das ganze Gebiet der complexen Grössen erstreckt. In diesem Gebiete kann man von einem Werthe der veränderlichen Grösse t zu einem andern auf unendlich vielen verschiedenen Wegen nach der Stetigkeit gelangen, und so bei der Integration $\int ft.dt$ solche Werthe von t, für welche ft unendlich gross wird, umgehen. Eine vollständige Abhandlung der aus diesem Gesichtspunkte aufgefassten Theorie des Integrirens würde einen viel grössern Raum erfordern als hier zulässig ist: Es werden jedoch einige für unsere Hauptuntersuchung nothwendige Sätze hier entwickelt werden müssen.

$_*$I. Wenn sich eine analytische Function Ft angeben lässt, aus deren Differentiation $ft.dt$ hervorgeht, und diese Function eine einwerthige ist, so wird auch ft eine einwerthige Function sein.* [*)]

9.

. . . .

[Ein Zettel in Fa, Kapsel 46 a.]

Die Function ft habe für alle Werthe von $t = x + iy$, deren imaginärer Theil iy unterhalb bestimmter Grenzen liegt, nemlich y nicht grösser als h, bestimmte endliche Wahlwerthe, die nach der Stetigkeit zusammenhangen, und die mit dem Intervall 2π nach x periodisch sind, so dass

$$f(t + 2\pi) = ft.$$

Für jeden bestimmten Werth von y, der nicht grösser ist als h, wird sich ft durch die convergente Reihe[**)]

$$\begin{aligned} ft = P + 2P_1 \cos x + 2P_2 \cos 2x + 2P_3 \cos 3x + \text{u.s.w.} \\ + 2Q_1 \sin x + 2Q_2 \sin 2x + 2Q_3 \sin 3x + \text{u s.w.} \end{aligned}$$

[*) Die zwischen $_*$ * gesetzte Stelle ist in der Handschrift durchstrichen.]

[**) Man vergl. den auf der ungerechtfertigten Vertauschung zweier Grenzübergänge beruhenden Beweisversuch für die Konvergenz der FOURIERreihe einer stetigen Funktion, Werke VII, 1906, S. 470.]

ausdrücken lassen, wo

$$2\pi P_n = \int_0^{2\pi} \cos nx . f(x+iy) . dx$$

$$2\pi Q_n = \int_0^{2\pi} \sin nx . f(x+iy) . dx,$$

mithin bestimmte Functionen von y sein werden. Für $y = 0$ gehe

P_n über in A_n
Q_n „ „ B_n.

Man hat, indem man $dft = f't . dt$ setzt

$$2\pi \frac{dP_n}{dy} = i \int_0^{2\pi} \cos nx f'(x+iy) dx$$

$$2\pi \frac{dQ_n}{dy} = i \int_0^{2\pi} \sin nx f'(x+iy) dx,$$

wobei nicht schwer ist sich zu überzeugen, dass diese Resultate auch dann gültig bleiben würden, wenn innerhalb der festgesetzten Grenzen $f'(x+iy)$ auch ein oder einigemahl unendlich würde*), obwohl jener Fall auch schon mit unserer Voraussetzung, dass die Wahlfunction nur Einen Werth hat, unvereinbar ist.

---

*) Die Hauptmomente des Beweises sind folgende. Fx, fx Functionen von x, die von $x = A$ bis $x = A+D$ endliche, nach der Stetigkeit fortschreitende Wahlwerthe haben, D positiv. Man kann beweisen, dass $\frac{dFx}{dx} = fx$, für jeden Wert von x, der in jenem Zwischenraume liegt, so jedoch, dass der Beweis nicht anwendbar ist auf den Fall $x = A$. Ich behaupte, dass auch für diesen Werth selbst jene Relation stattfinden wird.

Es sei a eine unendlich kleine Grösse,

$$FA = G, \quad fA = g, \quad F(A+ab) = G+ac,$$

wo erlaubt ist anzunehmen, dass auch b und c unendlich klein sind. Es sei ferner

$$f(A+ab) = g+d$$

$$\int_{A+ab}^{A+a} fx . dx = (a-ab)(g+d+e),$$

wo d, e unendlich klein sein werden. Also

Es ist aber, y als constant betrachtet,

$$\frac{d\cos nxf(x+iy)}{dx} = -n\sin nxf(x+iy) + \cos nxf'(x+iy)$$

$$\frac{d\sin nxf(x+iy)}{dx} = n\cos nxf(x+iy) + \sin nxf'(x+iy).$$

Also

$$-n\int_0^{2\pi}\sin nxf(x+iy)\,dx + \int_0^{2\pi}\cos nxf'(x+iy)\,dx = 0$$

$$n\int_0^{2\pi}\cos nxf(x+iy)\,dx + \int_0^{2\pi}\sin nxf'(x+iy)\,dx = 0,$$

weil $\cos nxf(x+iy)$ vermöge der Voraussetzung für die Grenzwerthe der Integration $x=0$ und $x=2\pi$ gleiche Werthe erhält, und $\sin nxf(x+iy)$ für beide $=0$ ist. Es ist folglich

$$-2n\pi Q_n - 2\pi i\frac{dP_n}{dy} = 0$$

$$2n\pi P_n - 2\pi i\frac{dQ_n}{dy} = 0$$

d. i.

$$\frac{dP_n}{dy} = inQ_n,\quad \frac{dQ_n}{dy} = -inP_n$$

und folglich

$$\frac{ddP_n}{dy^2} = nnP_n,$$

von welcher Gleichung das vollständige Integral ist

$$P_n = \alpha_n e^{ny} + \beta_n e^{-ny}$$

in dem α_n, β_n zwei willkürliche Constanten bezeichnen. Hiemit wird dann ferner

$$Q_n = -\alpha_n ie^{ny} + \beta_n ie^{-ny}.$$

Diese Constanten bestimmen sich dadurch, dass für $y=0$

$$F(A+a) = G + ac + (a-ab)(g+d+e)$$

und

$$\frac{F(A+a)-FA}{a} = (g+d+e)(1-b)+c,$$

also von g um eine unendlich kleine Grösse verschieden.

$$P_n = A_n, \quad Q_n = B_n$$

werden muss, also

$$\alpha_n = \tfrac{1}{2}(A_n + iB_n), \quad \beta_n = \tfrac{1}{2}(A_n - iB_n).$$

Wir haben demnach

$$P_0 = A_0, \quad P_1 = \tfrac{1}{2}A_1(e^y + e^{-y}) + \tfrac{1}{2}iB(e^y - e^{-y})$$

und allgemein

$$P_n = \tfrac{1}{2}A_n(e^{ny} + e^{-ny}) + \tfrac{1}{2}iB_n(e^{ny} - e^{-ny}),$$

und ebenso

$$Q_n = \tfrac{1}{2}B_n(e^{ny} + e^{-ny}) - \tfrac{1}{2}iA_n(e^{ny} - e^{-ny}).$$

[VII.]

[ÜBER DIE KONVERGENZ DER ENTWICKLUNG DER MITTELPUNKTSGLEICHUNG.]

[Vier Zettel, Astr. d 1, Kapsel 90.]

[1.]

[Erster Zettel]

[Es sei für]

[1] $$t = \cos u + i \sin u$$

[2] $$\frac{1}{(1-\alpha t)(1-\alpha t^{-1})} = T,$$

so haben [wir]

[3] $$(1-\alpha\alpha)T = 1 + 2\alpha\cos u + 2\alpha\alpha\cos 2u + 2\alpha^3\cos 3u + \text{u.s.w.},$$

$$(1-\alpha\alpha)^3 TT = 1 + \alpha\alpha + 4\alpha\cos u + (6\alpha\alpha - 2\alpha^4)\cos 2u$$
$$+ (8\alpha^3 - 4\alpha^5)\cos 3u + (10\alpha^4 - 6\alpha^6)\cos 4u + \text{etc.}$$

[Für] $\alpha = \operatorname{tang}\theta$ [ist]

[4] $$T = \frac{1}{1+\alpha\alpha - 2\alpha\cos u} = \frac{\cos\theta^2}{1-\sin 2\theta\,.\cos u},$$

[5] $$(1-\alpha\alpha)T = \frac{\cos 2\theta}{1-\sin 2\theta\,.\cos u}.$$

[Es bedeute*) v die wahre, E die exzentrische, M die mittlere Anomalie und $\varepsilon = \sin\varphi$ die Exzentrizität, so ist]

[*) Die Bezeichnungen entsprechen denen der *Theoria motus*, 1809, siehe Werke VII (1906), S. 17, 19.]

[6] $$\frac{dv}{dM} = \frac{\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)}}{(1-\varepsilon\cos E)^2} = \frac{\cos\varphi}{(1-\sin\varphi\,.\cos E)^2}.$$

[Ferner ist]

[7] $$1-\varepsilon\cos E = 0$$

für

[8] $$\begin{cases} \cos E = \frac{1}{\varepsilon} \\ \sin E = i\frac{\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)}}{\varepsilon} \\ \quad E = i\log\frac{1+\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)}}{\varepsilon} \end{cases}$$

[9] $$M[= E-\varepsilon\sin E] = i\left\{\log\frac{1+\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)}}{\varepsilon} - \sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)}\right\}$$

[10] $$\begin{cases} \cos M + i\sin M = \left\{\frac{1-\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)}}{\varepsilon}\right\} e^{+\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)}} \\ \qquad = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi\,.\,e^{+\cos\varphi}. \end{cases}$$

Beispiel:

$\varepsilon = 0{,}254236$	0,4685742	2,3666507
$\varphi = 14^0\,43'\,41'',950$	5,0172181	2,3428710
$\cos\varphi$ 9,9854903	4,2115277	1,8118966
$\varkappa\,[=\log_{10} e]$ 9,6377843	0,9371484	2,8114452
$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ 9,1114013	3,5474520	1,2707953
$+0{,}4200245$	1,4057226	3,2800194
	2,9412684	0,7396514
$[\log_{10}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi\,.\,e^{\cos\varphi} =]$ 9,5314258	1,8742968	3,7485936

[Zweiter Zettel]

Knotenpunkte bei Keplers Problem.

[2.]

Die Excentricität $= f$; sonst die gewöhnlichen Bezeichnungen [wie im art. 1.].

[11] $$\begin{cases} \cos E = \frac{1}{\sin\varphi} \\ \sin E = i \operatorname{cotang}\varphi \\ e^{iE} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi \\ E = i\log\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi \end{cases}$$

[12] $$\begin{cases} M = i(\log\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi - \cos\varphi) \\ e^{iM} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi\,.\,e^{\cos\varphi} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta \\ \cos M = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{g} \\ \sin M = i\operatorname{cotg}\theta. \end{cases}$$

Geht hier

$$E \text{ in } E+\varepsilon$$

und damit

$$M \text{ in } M+\mu$$

über, so ist

[13] $$\mu = \frac{1}{2}f\sin E\,.\,\varepsilon\varepsilon + \frac{1}{6}f\cos E\,.\,\varepsilon^3 - \frac{1}{24}f\sin E\,.\,\varepsilon^4 \text{ u.s.w.}$$

und es werden die Werthe von $1-f\cos E$

[14] $$= f\sin E\,.\,\varepsilon + \frac{1}{2}f\cos E\,.\,\varepsilon\varepsilon - \frac{1}{6}f\sin E\,.\,\varepsilon^3 \text{ u.s.w.}$$

[und von] $1-g\cos M$

[15] $$= g\sin M\,.\,\mu + \frac{1}{2}g\cos M\,.\,\mu\mu - \frac{1}{6}g\sin M\,.\,\mu^3 \text{ u.s.w.}$$

Man hat also

[16] $$\frac{\cos\varphi}{(1-f\cos E)^2} = \frac{g\sin M\,.\,\cos\varphi}{2f\sin E\,.\,(1-g\cos M)}\Omega,$$

wo

[17] $$\Omega = \frac{1+\frac{1}{3}\operatorname{cotg}E\,.\,\varepsilon}{1+\operatorname{cotg}E\,.\,\varepsilon}$$

[18] $$= 1 - \frac{2}{3}\operatorname{cotg}E\,.\,\varepsilon,$$

oder

[19] $$\frac{\cos\varphi}{(1-f\cos E)^2} = \frac{\cos\theta}{2(1-g\cos M)}\left(1-\frac{2}{3}\operatorname{cotg}E\,.\,\varepsilon\right).$$

Oder, da

[20] $$\varepsilon\varepsilon = \frac{2\mu}{f \sin E} = \frac{2(1-g\cos M)}{fg \sin E . \sin M} = \frac{2(1-g\cos M)}{-\cos\varphi . \cos\theta},$$

also

[21] $$\varepsilon = -i\sqrt{\frac{2(1-g\cos M)}{\cos\varphi . \cos\theta}}$$

[ist, so folgt]

[22] $$1 - \frac{2}{3}\operatorname{cotg} E . \varepsilon = 1 + \frac{\sqrt{8}}{3\cos\varphi^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{1-g\cos M}{\cos\theta}},$$

[23] $$\frac{\cos\varphi}{(1-f\cos E)^2} = \frac{\cos\theta}{2(1-g\cos M)} + \frac{\sqrt{2}}{3\cos\varphi^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{\cos\theta}{1-g\cos M}}.$$

[3.]

Es ist, wenn man $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta = \gamma$ setzt [vergl. die Gleichungen [1] bis [5] des art. 1.],

[24] $$\begin{cases} \dfrac{\cos\theta}{1-g\cos M} = \dfrac{1-\gamma\gamma}{(1-\gamma e^{iM})(1-\gamma e^{-iM})} \\ \qquad = 1 + 2\gamma\cos M + 2\gamma\gamma\cos 2M + \text{etc.}, \end{cases}$$

[25] $$\sqrt{\frac{\cos\theta}{1-g\cos M}} = \sqrt{(1-\gamma\gamma)}\begin{cases} 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\gamma\gamma + \frac{1.1.3.3}{2.2.4.4}\gamma^4 + \cdots \\ + 2\cdot\frac{1}{2}\gamma\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\gamma\gamma + \frac{1.3.3.5}{2.4.4.6}\gamma^4\ldots\right)\cos M \\ + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\gamma\gamma\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\gamma\gamma + \cdots\right)\cos 2M \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Also der Coeffic[ient] von $\cos nM$

[26] $$= 2\sqrt{(1-\gamma\gamma)}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\gamma^n\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\gamma\gamma + \text{etc.}\right)$$

oder proxime

[27] $$= 2\gamma^n\frac{\Pi 2n}{2^{2n}\,\Pi n^2} = \frac{2\gamma^n}{\sqrt{n\pi}}.$$

Es ist also in der Entwickl[ung] von $\frac{dv}{dM}$ [siehe die Gleichung [6] des art. 1.] der Coefficient von $\cos nM$

[28] $$= \gamma^n\left\{1 + \frac{\sqrt{8}}{3\cos\varphi^{\frac{3}{2}} . \sqrt{n\pi}}\right\}.$$

Berechnung von $\frac{\cos\varphi}{rr} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\theta}{1-g\cos M} - \sqrt{\frac{2\cos\theta}{9\cos\varphi^3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1-g\cos M)}}$.

0	**7.30**	**15**	**22.30**	**30**
9,8782827	9,8782827	9,8782827	9,8782827	9,8782827
9,0755074	9,1775110	9,3721414	9,5531812	9,7012866
9,0536038	9,0536038	9,0536038	9,0536038	9,0536038
1,5860936	1,4650937	1,2282173	0,9996419	0,8056631
9,5332866	9,5332866	9,5332866	9,5332866	9,5332866
0,7930468	0,7325468½	0,6141086½	0,4998209½	0,4028315½
6,3500223	5,0207860	3,2073126	2,1139830	1,5031284
4,3621180	3,3013954	1,9134674	1,1304353	0,7232142
2,1199858	1,8443079	1,4040911	1,0792140	0,8632133
— 0,1320815	— 0,1249173	— 0,1102459	— 0,0956663	— 0,0832991

37.30	**45**	**52.30**	**60**	**67.30**
9,8782827	9,8782827	9,8782827	9,8782827	9,8782827
9,8210018	9,9189472	0,0003148	0,0688354	0,1271730
9,0536038	9,0536038	9,0536038	9,0536038	9,0536038
0,6435474	0,5069145	0,3903762	0,2899096	0,2025649
9,5332866	9,5332866	9,5332866	9,5332866	9,5332866
0,3217737	0,2534572½	0,1951881	0,1449548	0,1012824½
1,1409876	0,9106165	0,7550363	0,6448331	0,5637800
0,4979105	0,3635116	0,2779585	0,2205532	0,1803718
0,7162428	0,6119894	0,5351490	0,4766959	0,4310911
0,0731657	0,0648845	0,0580712	0,0524160	0,0476829

75	**82.30**	**90**	**97.30**	**105**
9,8782827	9,8782827	9,8782827	9,8782827	9,8782827
0,1772582	0,2205162	0,2580194	0,2905886	0,3188614
9,0536038	9,0536038	9,0536038	9,0536038	9,0536038
0,1261601	0,0590558	0	0,0519782	0,0976412
9,5332866	9,5332866	9,5332866	9,5332866	9,5332866
0,0630800½	0,0295279	0	0,0259891	0,0488206
0,5023709	0,4547435	0,4171224	0,3869850	0,3625946
0,1512739	0,1296163	0,1131365	0,1003750	0,0903572
0,3947905	0,3654387	0,3414181	0,3215863	0,3051167
0,0436935	0,0403115	0,0374322	0,0349763	0,0328793

112.30	**120**	**127.30**	**135**	**142.30**
9,8782827	9,8782827	9,8782827	9,8782827	9,8782827
0,3433384	0,3644158	0,3824100	0,3975726	0,4101036
9,0536038	9,0536038	9,0536038	9,0536038	9,0536038
0,1375940	0,1723203	0,2022082	0,2275697	0,2486541
9,5332866	9,5332866	9,5332866	9,5332866	9,5332866
0,0687970	0,0861601½	0,1011041	0,1137848½	0,1243270½
0,3427239	0,3264877	0,3132368	0,3024894	0,2938861
0,0824157	0,0760823	0,0710224	0,0669937	0,0638190
0,2914001	0,2799796	0,2705095	0,2627252	0,2564245
0,0310919	0,0295742	0,0282951	0,0272295	0,0263574

150	**157.30**	**165**	**172.30**	**180**
9,8782827	9,8782827	9,8782827	9,8782827	9,8782827
0,4201606	0,4278648	0,4333064	0,4365470	0,4376232
9,0536038	9,0536038	9,0536038	9,0536038	9,0536038
0,2656582	0,2787348	0,2879972	0,2935240	0,2953612
9,5332866	9,5332866	9,5332866	9,5332866	9,5332866
0,1328291	0,1393674	0,1439986	0,1467620	0,1476806
0,2871588	0,2821096	0,2785969	0,2765259	0,2758415
0,0613685	0,0595482	0,0582917	0,0575546	0,0573116
0,2514534	0,2476962	0,2150688	0,2435144	0,2429998
0,0256631	0,0251348	0,0247636	0,0245431	0,0244699

Der constante Theil von

$$\frac{\sqrt{2}}{3\cos\varphi^{\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{\cos\theta}{1-g\cos M}}$$

ist gleich

$$\sqrt{\frac{\cos\theta}{9\cos\varphi^3}}\cdot\frac{1}{\mathrm{Med}\,(\sin(45^0-\tfrac{1}{2}\theta),\ \sin(45^0+\tfrac{1}{2}\theta))},$$

in Zahlen 0,5508570, auch

[29]
$$\frac{\sqrt{2}}{3\cos\varphi^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{\mathrm{M[ed]}\left(1,\ \dfrac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\sqrt{\cos\theta}}\right)}.$$

[4.]

[Dritter Zettel]

Nro. 2 als weiterer Zusatz.

Indem man

[30] $\cos\varphi = p,\ \cos\theta = q,\ [x = 1-g\cos M,\ y = 1-f\cos E]$

setzt, wird [*)]

[31]
$$\left\{\begin{aligned}\frac{px}{yy} = \frac{1}{2}q&\left(\begin{aligned}1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p}\cdot i\varepsilon-\frac{1}{12}\varepsilon\varepsilon+\frac{1}{60}\frac{1}{p}i\varepsilon^3\ldots\\ +\frac{1}{4}\cdot\frac{p}{q}\varepsilon\varepsilon-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{q}i\varepsilon^3\ldots\end{aligned}\right)\\ \times&\left(\begin{aligned}1+\frac{1}{p}\cdot i\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon\varepsilon+\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{p}i\varepsilon^3\ldots\\ -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{pp}\varepsilon\varepsilon-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^3}i\varepsilon^3\ldots\end{aligned}\right)\end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{2}{q}\cdot\frac{px}{yy}=\right]1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p}i\varepsilon+\frac{1}{4}\varepsilon\varepsilon&+\frac{13}{30}\cdot\frac{1}{p}i\varepsilon^3\ldots\\ +\frac{1}{4}\cdot\frac{p}{q}\varepsilon\varepsilon&-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{q}i\varepsilon^3\ldots\\ -\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{pp}\varepsilon\varepsilon&-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^3}i\varepsilon^3\ldots\\ &-\frac{7}{36}\cdot\frac{1}{p}i\varepsilon^3\ldots\\ &+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{q}i\varepsilon^3\ldots\\ &+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p^3}i\varepsilon^3\ldots\end{aligned}$$

[*) Die in der Handschrift an dieser Stelle folgende Gleichung ist unvollständig, die vollständige Gleichung findet sich auf der zweiten Seite des Blättchens; wir haben gleich diese hierher gesetzt und die unvollständige unterdrückt.]

[32] $$\left[\frac{2}{q}\cdot\frac{px}{yy}\right] = 1+\frac{2}{3}\,\frac{1}{p}i\varepsilon+\frac{1}{12ppq}(3ppq+3p^3-5q)\varepsilon\varepsilon$$
$$+\frac{1}{180p^3q}(43ppq+15p^3-45q)i\varepsilon^3\ldots$$

[33] $$\varepsilon = -i\sqrt{\frac{2x}{pq}}-\frac{1}{3}i\frac{x}{ppq}-\frac{1}{36}i\sqrt{\frac{2x^3}{pq}}\left\{\frac{5}{p^3q}-\frac{3}{pq}+\frac{9}{qq}\right\}\ldots$$

$$\left[\frac{2}{q}\cdot\frac{px}{yy}=\right] 1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2x}{p^3q}}+\frac{2}{9}\cdot\frac{x}{p^3q}\qquad+\frac{1}{54}\sqrt{\frac{2x^3}{p^9q^5}}(5q-3ppq+9p^3)$$
$$-\frac{1}{6}\cdot\frac{x}{p^3qq}(3ppq+3p^3-5q)-\frac{1}{18}\sqrt{\frac{2x^3}{p^9q^5}}(3ppq+3p^3-5q)$$
$$-\frac{1}{90}\sqrt{\frac{2x^3}{p^9q^5}}(43ppq+15p^3-45q)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

[34] $$= 1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2x}{p^3q}}+\frac{1}{18}\cdot\frac{x}{p^3qq}(19q-9ppq-9p^3)$$
$$+\frac{1}{270}\sqrt{\frac{2x^3}{p^9q^5}}(235q-189ppq-45p^3)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Logarithm von

[35] $$\frac{1}{540}\sqrt{\frac{2}{p^9q^3}}(235q-189ppq-45p^3)$$

ist 9,9046115. Die Multiplication mit $\sqrt{(1-g\cos M)}$ auf der dritten Seite [*)].

Näherungsweise wird (n) dargestellt durch

$$\frac{G(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta)^n}{(n+2,6)^{\frac{5}{2}}},\quad \log G = 7{,}18800$$

oder auch

$$\frac{G(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta)^n}{(n+2,54)^{\frac{5}{2}}},\quad [\log]\,G\;[=]\;7{,}18234.$$

[*) Die dritte und vierte Seite unseres Blättchens enthalten fast nur Zahlenreihen, die nicht mit abgedruckt sind.]

[Vierter Zettel]

[5.]

Bestimmung des Zuges complexer Werthe von

$$E = p + qi;$$

[36] $$q = \log \operatorname{tg}(45^0 + \tfrac{1}{2}\theta),$$

[für reelle Werte von $M = E - f \sin E$,]

[37] $$p - \frac{f \sin p}{\cos\theta} = M, [*)]$$

[38] $$\frac{\log \operatorname{tg}(45^0 + \frac{1}{2}\theta)}{kf . \operatorname{tg}\theta} = \cos p,$$

k [der] Modul [**)] d[er] Brigg[schen] Log[arithmen.]

Für $M = 0$; $p = 0$; $\theta = 68.\ 27.\ 39{,}75$

$\log \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\theta}{2}\right) \ldots 9{,}8577971\ 5$ Zahl $= 0{,}7207708$

$\operatorname{tg}\theta \ldots 0{,}4037371\ 5$

$kf \ldots 9{,}4540600.$

θ	p	M
71^0	$-20^0\ 0'\ 0''$	$+\ 19.\ 25.\ 42$
76	$-37.\ 2.\ 0$	$+\ 56.\ 24.\ 12$ [***)]
81	$-52.\ 4.\ 22$	$+137.\ 10.\ 24$

[*) Gauss hat hier und im Folgenden die Exzentrizität mit e bezeichnet; wir haben in Übereinstimmung mit dem art. [2.] dafür f gesetzt.]

[**) Die Handschrift hat hier Basis.]

[***) In der Handschrift sind hier und in der Tabelle auf der folgenden Seite für $\theta = 76^0$ die unrichtigen Werte $p = -35^0\,13'\,33''$, $M - p = 89^0\,29'\,3''$, $M = 54^0\,15'\,30''$ angegeben und errechnet. Nun ist der Logarithmus von $\cos 35^0\,13'\,33''$ gleich $9{,}9\underline{1}216$, während der richtige Wert von $\log_{10}\cos p$, wie er sich durch Subtraktion der Zahlen $9{,}35622$ und $9{,}45406$ (siehe auf der folgenden Seite) ergibt, $9{,}9\underline{0}216$ lautet. Gauss hat also bei dieser Subtraktion ein Versehen begangen. Im Text sind überall die richtigen Zahlen eingesetzt.]

	$\theta = 76^0$	$\theta = 81^0$
$\log \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\theta}{2}\right)$	9,95945	0,04298
$\operatorname{tg}\theta$	0,60323	0,80029
	9,35622	9,24269
kf	9,45406	9,45406
[$\cos p$	9,90216	9,78863]
p	$-37.\ 2.\ 0$ [*)]	[$-52.\ 4.\ 22$]
$\sin p$	9,77980	9,89696
f in Sec.	5,13070	5,13070
	4,91050	5,02766
$\cos\theta$	9,38368	9,19433
[$M-p$ in Sec. =]	336372	681286
	93. 26. 12 [*)]	189. 14. 46

[*) Siehe die Fußnote ***) auf der vorigen Seite.]

BRIEFWECHSEL.

[1.]

GAUSS an C. F. HINDENBURG.

Braunschweig d. 8^{ten} Oct. 1799.

Wohlgeborener

Hoch zu verehrender Herr Professor.

Ich nehme mir die Freiheit, Ew. Wohlgeboren hiemit ein Exemplar einer vor Kurzem von mir fertig gewordenen kleinen Schrift [*)] zukommen zu lassen, und bitte dasselbe als ein geringes Zeichen meiner Verehrung von Dero grossen Verdiensten gütigst anzunehmen. Vielleicht haben Dieselben auf eine oder die andere Art Gelegenheit zum allgemeinen Bekanntwerden dieser Schrift etwas beizutragen; mir aber wird es die grösste Freude sein, wenn Ew. Wohlgeboren derselben den schätzbarsten Beifall gönnen wollen. Erlauben Dieselben mir nur die eine Bemerkung, dass die Kürze, Gedrungenheit, womit sie geschrieben ist, in mehr als Einer sehr wichtigen Ursache ihren Grund hat; zwar hat das die Folge, dass nicht jeder gleich beim ersten flüchtigen Durchlesen sich des Ganzen bemächtigt; allein diess hat bei einem Aufsatze, der eigentlich nur für die Geübtere bestimmt sein kann, Nichts auf sich, und ich habe schon mehrere überzeugende Belege, dass man bei aufmerksamer nicht übereilter Lectüre keine Dunkelheit darin gefunden hat.

Es sind schon drittehalb Jahre, dass ich mir einmal die Freiheit nahm Ew. Wohlgeboren zu schreiben und Denenselben einen kleinen Aufsatz über

[*) *Demonstratio nova etc.* Helmstadii 1799, Werke III, S. 1.]

das wichtige Theorem VON LAGRANGE zu communiciren[*)], wovon Hr. H[of] R[ath] KÄSTNER in Göttingen damals die Besorgung gütigst übernehmen wollen. Da ich nicht gefunden, dass Ew. Wohlgeboren davon in Dero Archiv Gebrauch gemacht und ich auch von Denenselben auf mein Schreiben keine Antwort erhalten habe, so muss ich fast daraus schliessen, dass dasselbe Ihnen nicht zu Händen gekommen sei. Dem sei indess wie ihm wolle, so ist es mir gegenwärtig aus mehreren Ursachen lieb, dass mein Beweis jenes Lehrsatzes nicht gedruckt ist, theils weil ich das LAPLACEsche Verfahren[**)], welches mir damals noch unbekannt war, weit vorziehe und für eleganter und subtiler halte, theils weil ich nach der Hand zu dem Theorem selbst erhebliche Erweiterungen gefunden habe[***)], welche ich bekannt machen werde, sobald andere Arbeiten mir Musse dazu lassen. Indessen würde es mir lieb sein wenn Ew. Wohlgeboren mich zu unterrichten die Güte haben wollten, ob Dieselben gedachten Aufsatz erhalten haben oder nicht, und im ersten Fall mir denselben wieder zurückschicken, zumal da Dieselben nach der ausführlichen Bearbeitung dieser Gegenstände von meinem verehrungswürdigsten Freunde, Herrn Prof. PFAFF[†)] ohnehin keinen Gedanken mehr haben könnten, Gebrauch davon zu machen.

Von meinen in voriger Messe angekündigten *Disquiss. Arithmett.* ist, leider, der Druck durch verschiedene verdriessliche Umstände sehr verzögert; das Werk wird etwa zwischen 30 und 40 Bogen stark werden, wovon kaum die Hälfte abgedruckt ist; indessen hoffe ich den Druck, welcher seit einigen Monaten ganz unterbrochen gewesen ist, bald wieder in raschen Gang zu bringen und das Ganze dann bald zu vollenden.

[*) Dieser Aufsatz ist nach einer im Nachlaß (Fb, Kapsel 46 a) befindlichen Handschrift abgedruckt Werke VIII, S. 76; vergl. auch die Tagebuchaufzeichnung Nr. 49 vom 27. Dezember 1796.]

[**) Siehe den VII. Abschnitt der Abhandlung von LAPLACE *Mémoire sur l'usage du calcul aux différences partielles dans la théorie des suites,* Histoire de l'Acad. des Sciences, Année 1777, Paris 1780, Mémoires etc. S. 113; vergl. *Mécanique céleste* I, Paris, an VII (1798—99), livre II, Nr. 22.]

[***) Siehe die Tagebuchaufzeichnung Nr. 86 vom Mai 1798.]

[†) Außer der Arbeit von J. FR. PFAFF, die GAUSS in dem HINDENBURG eingereichten Aufsatze anführt, (siehe Werke VIII, S. 76 letzte Zeile) *Analysis einer wichtigen Aufgabe des Herrn de la Grange,* Archiv der r. u. a. Mathematik **1**, Heft 1, S. 81, kommen noch in Betracht die Aufsätze *Allgemeine Summation einer Reihe, worin höhere Differenziale vorkommen,* ebenda **1**, Heft 3, 1795, S. 337 und **2**, Heft 5, 1796, S. 67, ferner *Auszug aus einem Briefe von Herrn Prof. Pfaff an den Herausgeber,* ebenda **2**, Heft 7, 1797, S. 347 und *Disquisitiones analyticae,* Helmstadii 1797, 3. Abhandlung: *Investigatio serierum transcendenter summabilium,* S. 65—132.]

Mit der vollkommensten Verehrung habe ich die Ehre zu beharren Ew. Wohlgeboren

ganz ergebenster Diener
Doctor GAUSS.

[2.]

GAUSS an SCHUMACHER.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER VI, Altona 1865, S. 51.]

. . . . Über . . . die Convergenz der Reihe für die Mittelpunktsgleichung, kann ich für jetzt mich nicht weiter auslassen. Da ich, lange vor 1817 (wo ich CARLINIS Abh[andlung] in den Effem. für 1818[*)] erhielt) die Aufgabe selbst auf eine ohne allen Vergleich kürzere Art aufgelöset hatte, so habe ich damals diese Abhandl[ung] ebenso wie jetzt JACOBIS Aufsatz[**)] nur ganz flüchtig angesehen, und nachdem ich in jener die Übereinstimmung des Hauptresultats mit dem meinigen bemerkt hatte, nicht weiter gelesen; daher war das von JACOBI jetzt gerügte Versehen von mir nicht bemerkt.

Stets der Ihrige
C. F. GAUSS.

Göttingen, 4. Dec[ember] 1849.

[3.]

GAUSS an SCHUMACHER.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER VI, Altona 1865, S. 53.]

Ich kann nicht unterlassen, eine Unrichtigkeit, die sich in den Schluss meines letzten Briefes eingeschlichen hat, sogleich zu berichtigen. Ich schrieb diesen Schluss bloss nach dem, was ich von JACOBIS Aufsatz (seit März 1849,

[*)] *Ricerche sulla convergenza della serie che serve alla soluzione del problema di Keplero,* Memoria di FRANCESCO CARLINI, Milano 1817; auch als Appendice zu den Effemeridi di Milano 1818.]

[**)] *Über die annähernde Bestimmung sehr entfernter Glieder in der Entwickelung der elliptischen Coordinaten, nebst einer Ausdehnung der Laplaceschen Methode zur Bestimmung der Functionen grosser Zahlen,* Astronomische Nachrichten 28, Nr. 665, März 1849, S. 257, JACOBIS Werke VII, S. 175.]

nach damals nur flüchtiger Ansicht) im Gedächtniss hatte oder zu haben glaubte, indem ich denselben gar nicht selbst wieder nachsah.

Ich glaubte nemlich in JACOBIS Aufsatz stehe, dass CARLINI die Convergenz für die Mittelpunktsgleichung richtig, aber für den Radius Vector falsch angegeben habe; auch die Formel selbst hatte ich nur ihrer Form nach im Gedächtniss und meinte, dass sie mit meiner vor 40 oder mehreren Jahren [gefundenen] übereinstimmend gewesen sei. Das Wahre ist, dass meine Convergenzformel [*)] mit der von JACOBI [**)] übereinstimmt, nemlich wenn ε die Excentricität, e die Basis der hyp[erbolischen] Log[arithmen] bedeutet, so convergiren die Coefficienten jener Reihe langsamer als jede fallende geometrische Progression, deren Exponent kleiner ist als

$$\frac{\varepsilon e^{\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)}}}{1+\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)}}$$

oder als

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi . e^{\cos\varphi}, \quad (\text{wenn } \varepsilon = \sin\varphi)$$

aber etwas schneller als die geometr[ische] Progr[ession], deren Exponent dieser Grösse gleich ist.

Geirrt habe ich also mich gestern ohne Zweifel ***), indem ich sagte, dass ich 1817 CARLINIS Abhandl[ung] nur bis dahin angesehen habe, wo die Übereinstimmung in der Hauptsache (s. oben) hervorgetreten sei. Ohne Zweifel habe ich sie damals gar nicht näher angesehen, weil ich keine Lust hatte, eine 48 Seiten lange Abhandlung durchzulesen, die durch höchst verwickelte Rechnung eine Aufgabe auflösen sollte, die ich selbst (so weit es nöthig) schon lange vorher auf einer halben Octavseite aufgelöset hatte.

Ich glaube mich übrigens bestimmt zu erinnern, dass ich damals, als ich meine Auflösung gefunden hatte (ich meine, in einem der ersten Jahre dieses Jahrhunderts [†)], ich sogar die Richtigkeit jener Convergenzbestimmung durch

[*) Siehe oben Abschnitt [VII.], art. [2.], Gleichung [28], S. 423.]

[**) Siehe JACOBI, a. a. O., JACOBIS Werke VII, S. 178 und 188, vergl. ferner die bald nach Abfassung dieses Briefes erschienene Bearbeitung der CARLINIschen Abhandlung von JACOBI: *Untersuchungen über die Convergenz der Reihe, durch welche das Keplersche Problem gelöst wird,* Astronomische Nachrichten **30**, Nr. 709—712, 1850, S. 197, JACOBIS Werke VII, S. 189, insbesondere S. 237.]

***) Ohne Zweifel sage ich, weil ich in diesem Augenblick CARLINIS Abhandlung nicht selbst nachgesehen habe, sondern bloss flüchtig den JACOBIschen Bericht.

[†) Vergl. die Angabe in dem folgenden Briefe vom 5. Februar 1850.]

einen Fall in Concreto bei einer grossen Excentricität constatirt habe, worüber sich vielleicht noch ein Papier wird auffinden lassen.

So viel heute in Eile, weil es mir unangenehm war, Ihnen gestern etwas unrichtiges aus dem Gedächtniss geschrieben zu haben.

Der Ihrige

Göttingen den 6. December 1849. C. F. Gauss.

[4.]

Gauss an Schumacher. Göttingen, 5. Februar 1850.

[Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher VI, Altona 1865, S. 58.]

Von meiner Methode, den Grad der Convergenz der nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen eines Winkels fortschreitenden, eine beliebige periodische Function ausdrückenden Reihe zu bestimmen, habe ich noch eine numerische Rechnung, welche sich auf ein Beispiel der Mittelpunktsgleichung bezieht, aufgefunden, welches Blatt wohl 50 ± Jahre alt sein mag[*)]. Die Methode leistet aber viel mehr, als bloss einen genäherten Ausdruck für ein sehr weit vom Anfange entferntes Glied zu finden; sie ist auch geeignet, alle Glieder bis zum Anfang selbst hin, numerisch zu berechnen, und zwar mit aller zu wünschenden Schärfe. In dem Maasse ist jenes Beispiel damals nicht durchgeführt, was jetzt zu ergänzen mir die Zeit fehlt. Bei weitem mehr Zeit wird aber erfordert werden, um die ganze Theorie in einer mir selbst genügenden Gestalt**) auszuführen. Ich bin nicht abgeneigt, eine mir zu Theil werdende Musse dazu zu verwenden, möglicherweise wird aber die Arbeit dann einen grössern Umfang erhalten, als sich für Aufnahme in die A[stronomischen] N[achrichten] eignet. . . . .

[*) Siehe den Abschnitt VII, S. 420, insbesondere die Zahlentafel des art. 3., S. 424.]

**) Sie sind ganz im Irrthum, wenn Sie glauben, dass ich darunter nur die letzte Politur in Beziehung auf Sprache und Eleganz der Darstellung verstehe. Diese kosten vergleichungsweise nur unbedeutenden Zeitaufwand; was ich meine, ist die innere Vollkommenheit. In manchen meiner Arbeiten sind solche Incidenzpunkte, die mich jahrelanges Nachdenken gekostet haben, und deren in kleinen Raum concentrirter Darstellung nachher niemand die Schwierigkeit anmerkt, die erst überwunden werden musste.

[5.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 1. September 1850.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER VI, Altona 1865, S. 107.]

. . . . Indem ich eben im Begriff war, diesen Brief zu schliessen, erhielt ich die von Ihnen übersandte PREHNsche Abhandlung [*)], von der ich doch erst flüchtig Einsicht nehmen wollte. Darf ich mich offen gegen Sie aussprechen, so glaube ich nicht, dass eine Reise des H[errn] Verfassers zu seiner Zufriedenheit ausfallen würde. Meine Anforderungen an mathematische Argumentation in Beziehung auf Strenge und Klarheit liegen in der That von denen des Verfassers soweit entfernt, dass ich an einer gegenseitigen Verständigung zweifle; wir stehen auf ganz verschiedenem Boden, wie Conservativer und Radicaler. Solche Gleichnisse hinken allerdings: in diesem Falle wäre ich der Radicale, der kein historisches Recht anerkennt, sondern nichts ohne strengen Beweis des Rechtstitel[s] gelten lässt. Der Unterschied ist aber, dass im Leben Conservativer und Radicaler ihre Ansprüche à tout prix realisiren, in der Wissenschaft aber die strengsten Forderungen nur zu unserer eigenen Befriedigung gemacht werden, und man den andern, der sich mit laxen oder unklaren Beweisen begnügen mag, gern gewähren lässt. Der eigentliche Kern der Sache ist wie mir deucht folgender.

Es ist der Character der Mathematik der neueren Zeit (im Gegensatz gegen das Alterthum), dass durch unsere Zeichensprache und Namengebungen wir einen Hebel besitzen, wodurch die verwickeltsten Argumentationen auf einen gewissen Mechanismus reducirt werden. An Reichthum hat dadurch die Wissenschaft unendlich gewonnen, an Schönheit und Solidität aber, wie das Geschäft gewöhnlich betrieben wird, eben so sehr verloren. Wie oft wird jener Hebel eben nur mechanisch angewandt, obgleich die Befugniss dazu in den meisten Fällen gewisse stillschweigende Voraussetzungen implicirt. Ich fordere, man soll bei allem Gebrauch des Calculs, bei allen Begriffsverwen-

[*) JEPPE PREHN, *Über die Bedeutung der divergenten unendlichen Reihen, die Bestimmung ihrer Werthe, und über die Zulässlichkeit ihrer Anwendung bei analytischen Rechnungen*, CRELLES Journal für Mathematik **41** (1850), S. 1, vergl. *Berichtigungen*, ebenda S. 364, die letzteren sind nach dem am 28. November 1850 erfolgten Tode des Verfassers erschienen.]

dungen sich immer der ursprünglichen Bedingungen bewusst bleiben, und alle Producte des Mechanismus niemals über die klare Befugniss hinaus als Eigenthum betrachten. Der gewöhnliche Gang ist aber der, dass man für die Analysis einen Character der Allgemeinheit in Anspruch nimmt, und dem Andern, der so herausgebrachte Resultate noch nicht für bewiesen anerkennt, zumuthet, er solle das Gegentheil nachweisen. Diese Zumuthung darf man aber nur an den stellen, der seinerseits behauptet ein Resultat sei falsch, nicht aber dem, der ein Resultat nicht für bewiesen anerkennt, welches auf einem Mechanismus beruhet, dessen ursprüngliche, wesentliche Bedingungen in dem vorliegenden Fall gar nicht zutreffen. So ist es sehr oft mit divergirenden Reihen. Reihen haben eine klare Bedeutung, wenn sie convergiren; diese Klarheit der Bedeutung fällt weg mit dieser Bedingung, und es ändert im Wesentlichen Nichts, ob man sich des Worts Summe oder Werth bedient. Der Raum eines Briefes ist aber viel zu klein, um alles weiter auszuführen. — Nehmen Sie meinetwegen statt obigen Gleichnisses einer Maschine das von Papiergeld. Es kann dies zu grossen Arbeiten vortheilhaftest benutzt werden, aber solide ist der Gebrauch nur, wenn ich gewiss bin, es jeden Augenblick in klingende Münze umsetzen zu können.

Es scheint mir übrigens aus einigen Indicien hervorzugehen, dass der Verfasser mit meinen Arbeiten nicht bekannt ist. Er meint die Gültigkeit des Gebrauchs der divergenten Reihen sei allgemein unbedenklich anerkannt noch in den ersten Decennien des gegenwärtigen Jahrhunderts. Ich habe sie nie anerkannt; zwar niemals ex professo dagegen geschrieben, aber überall, wo eine Veranlassung war, die Zulässigkeit der Reihen nur unter der Bedingung der Convergenz als sich von selbst verstehend entschieden ausgesprochen. In diesem Augenblick würde ich nur [hinweisen] z. B. auf meine Schrift von 1799, p. 12[*)]. Meine Schrift von 1812 über die Reihe $1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x$ etc. [**)]. Die Anzeige meiner Schrift über die Anziehung der ellipt[ischen] Sphäroide in den Göttinger gelehrten Anzeigen 1813, p. 547, auch abgedruckt Monatliche Correspondenz 27. Bd. p. 424[***)]. Auch die Art wie H. Pr[ehn] über die

[*) Werke III, S. 9—10, Absatz 3.]
[**) Werke III, S. 123 ff.]
[***) Werke V, S. 281 oben.]

imaginären Grössen spricht, zeigt, dass er sich noch ganz auf dem Standpunkte befindet, auf dem man sich vor 1831 befand, und die gänzlich veränderte Gestalt dieser Lehre, die ich ihr gegeben habe, nur auf ein Paar Seiten, aber den Kern der Sache erschöpfend, gar nicht kennt. . . . . .

[6.]

GAUSS an H. G. GRASSMANN.

Euer Wohlgeboren

geehrtes Schreiben würde ich schon früher mit meinem gehorsamsten Danke für Ihr gütigst übersandtes Werk[*)] erwiedert haben, wenn ich nicht gewünscht hätte, über letzteres erst eine Ansicht fassen zu können. Zunächst bin ich lange vom Buchbinder aufgehalten; hernach, in einem Gedränge von andern heterogenen Arbeiten Ihr Buch durchlaufend glaube ich zu bemerken, dass die Tendenzen desselben theilweise denjenigen Wegen begegnen, auf denen ich selbst nun seit fast einem halben Jahrhundert gewandelt bin, und wovon freilich nur ein kleiner Theil 1831 in den Comment. der Göttingischen Societät[**)] und noch mehr in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen (1831, Stück 64)[***)] gleichsam im Vorbeigehen erwähnt ist; nemlich die concentrirte Metaphysik der complexen Grössen, während von der unendlichen Fruchtbarkeit dieses Princips für Untersuchungen räumliche Verhältnisse betreffend zwar vielfältig in meinen Vorlesungen gehandelt[†)], aber Proben davon nur hin und wieder, und, als solche nur dem aufmerksamern Auge erkennbar, bei andern Veranlassungen mitgetheilt sind[††)]. Indessen scheint

[*) *Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre* von HERMANN GRASSMANN, I. Theil, *Die lineale Ausdehnungslehre.* Leipzig 1844; Gesammelte mathem. und physikal. Werke I, 1, Leipzig 1894.]

[**) *Theoria Residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda,* Werke II, S. 93, siehe besonders S. 102 ff.]

[***) Werke II, S. 169, siehe besonders S. 175 ff.]

[†) Vergl. die Auszüge aus einer Dezember 1839 bis Ostern 1840 gehaltenen Vorlesung über die *Theorie der imaginären Grössen*: Werke VIII, S. 331—334 und 346—347.]

[††) Vergl. die bereits erwähnte Stelle, Werke II, S. 175, wo mit ähnlichen Worten auf die Inauguraldissertation von 1799 (Werke III, S. 1) und auf die Preisschrift von 1822 (Werke IV, S. 189) hingewiesen wird.]

dies nur eine partielle und entferntere Ähnlichkeit in der Tendenz zu sein; und ich sehe wohl, dass um den eigentlichen Kern Ihres Werks herauszufinden, es nöthig sein wird, sich erst mit Ihren eigenthümlichen Terminologien zu familiarisiren. Da aber dazu, bei mir, nothwendig eine von andern Beschäftigungen freiere Zeit erforderlich sein wird, so darf ich jetzt nicht länger anstehen, Ihnen meinen ergebensten Dank für die gefällige Übersendung Ihres Werks auszusprechen, dem ich die Versicherung der besonderen Hochachtung beifüge, mit welcher ich beharre

Euer Wohlgeboren
ergebenster Diener

Göttingen, 14. December 1844. C. F. Gauss.

BEMERKUNGEN ZU DEN ABSCHNITTEN V, VI, VII UND ZUM BRIEFWECHSEL.

Die Abschnitte [V.] und [VI.], S. 400—419.

Im Nachlaß von Gauss finden sich fünf verschiedene Fassungen für den Anfang einer Abhandlung »*Convergenz der Reihen, in welche die periodischen Functionen einer veränderlichen Grösse entwickelt werden*«.

Die vier ältern Fassungen haben das gemeinsam, daß sie mit der Erörterung des Begriffs der »Konvergenz einer Reihe« beginnen und über diese Erörterung auch nicht wesentlich hinauskommen *). Wir haben im Abschnitt [V.] die beiden ersten Artikel des vierten und ausführlichsten dieser ältern Entwürfe wiedergegeben; in der Handschrift folgen noch zwei Artikel, die Erörterungen über die Einteilung der Funktionen in explizite und implizite enthalten. Der Abdruck dieser beiden Artikel 3. und 4. erschien zwecklos. Dagegen haben wir die am Schluß des art. 1., oben S. 403, erwähnte Erweiterung, die sich auf einem einzelnen Blatte gefunden hat, als Anhang abgedruckt. Man wird in den Erörterungen dieses art. 1. und des Anhangs die Anfänge der Betrachtungen wiedererkennen, die Paul du Bois-Reymond als Infinitärkalkül bezeichnet hat **). Bei der Einführung der iterierten Logarithmen neben der Potenz, wodurch eine »nähere Anschmiegung erreicht werden kann« (oben S. 403), im Anhang, hätte Gauss auf Abel ***) verweisen können, falls er auch diese Untersuchungen nach 1831 angestellt haben sollte, was für die artt. 1. und 2. durch die Erwähnung der Anzeige von 1831 im art. 2., oben S. 405, feststeht. Während bei Gauss nur die einfache Exponentialgröße $e^{\alpha n}$ auftritt, hat P. du Bois-Reymond a. a. O. seine Skalen noch durch iterierte Exponentialfunktionen erweitert. Wir bemerken auch, daß P. du Bois-Reymond ausdrücklich auf die Wichtigkeit des Infinitärkalküls für die Theorie der Fourierschen Reihen hinweist; es

*) Der erste Entwurf enthält 3 Quartseiten, der zweite 3 Oktavseiten, der dritte 6 Quartseiten, der vierte 13 Quartseiten.

) Siehe Annali di Matematica, 2. Serie **4, 1870, S. 339; Crelles Journal für Mathematik **74**, 1872, S. 294; Mathem. Annalen **8**, 1875, S. 363; **11**, 1877, S. 149; vergl. auch A. Pringsheim, Mathem. Annalen **35**, 1890, S. 302 und *Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre* I, 1, 1916, S. 224 ff.

***) Crelles Journal für Mathematik **3**, 1828, S. 79, Oeuvres de N. H. Abel, nouvelle édition, I, 1881, S. 399.

zeigt dies, daß die Untersuchungen des art. 1. und des Anhangs in naher Beziehung zu dem in dem Titel der Abhandlung bezeichneten Gegenstande stehen.

Die Erörterungen des art. 2. des Abschnitts [V.] werden in der fünften Fassung, die wir in den artt. 1.—8. des Abschnitts [VI.] unverkürzt wiedergeben, weiter ausgebaut. Im Eingang zum art. 1. dieses Abschnitts wird von der in der Überschrift bezeichneten Aufgabe gesagt, daß sie »recht eigentlich« in die Analysis der komplexen Größen gehöre; es wird dann in den artt. 2.—5. in Auseinandersetzungen eingetreten, für die die Worte gelten, mit denen GAUSS den art. 5. seiner *Jubiläumsschrift* (Werke III, S. 79) abschließt, nämlich, daß ihr »Gegenstand die nach der Stetigkeit zusammenhängenden Größenkombinationen sind«, die zwar »einem höhern von Räumlichem unabhängigen Gebiete der allgemeinen abstrakten Größenlehre« angehören, »in welchem man sich ... [aber] nicht bewegen kann, ohne eine von räumlichen Bildern entlehnte Sprache«. Die in den artt. 6.—8. enthaltenen Untersuchungen über Integrale zeigen, daß GAUSS beabsichtigt hat, die Untersuchungen der artt. 2.—5. auf die Lehre von der Integration im komplexen Gebiete anzuwenden *). Leider hat sich im Nachlaß keine Aufzeichnung vorgefunden, die sich auf diese Anwendung bezieht, und auch keine, in der von der weitern Anwendung der Analysis der komplexen Größen auf den in der Überschrift bezeichneten Gegenstand die Rede wäre. Die Aufzeichnung, die wir dem Abschnitt [VI.] als art. 9. hinzugefügt haben, bezieht sich zwar auf einen hierher gehörigen Gegenstand, sie läßt aber auch kaum erkennen, was GAUSS beabsichtigt haben mag. Dagegen werden wir nachher an der Hand der Stücke [2.]—[4.] des *Briefwechsels* zeigen, daß die Wurzel der geplanten Abhandlung, von der uns in den Abschnitten [V.] und [VI.] nur einige einleitende Kapitel überkommen sind, in den im Abschnitt [VII.] zusammengestellten Aufzeichnungen enthalten ist, zu deren Deutung und Erklärung wir uns jetzt wenden.

Erläuterungen zum Abschnitt [VII.], S. 420—428.

Um das Verständnis der im Abschnitt [VII.] zusammengestellten, recht lückenhaften und nicht einheitlich entworfenen Aufzeichnungen zu erleichtern, geben wir hier zunächst eine zusammenfassende Darstellung ihres Inhalts, bei der auch auf die Erläuterung der Einzelheiten des Textes eingegangen werden soll.

Es bedeute wie in der *Theoria motus*, artt. 5., 6. (Werke, VII, 1906, S. 17, 19) v die wahre, E die exzentrische, M die mittlere Anomalie und wie im art. [2.] unseres Textes $f = \sin\varphi$ die Exzentrizität **); dann gelten die Gleichungen

$$\text{(I)} \qquad M = E - f\sin E \qquad (\textit{Theoria motus}, \text{ Gl. XII, S. 21})$$

$$\text{(II)} \qquad \operatorname{tang}\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-f}{1+f}}\operatorname{tang}\frac{v}{2} \qquad (\textit{Theoria motus}, \text{ Gl. VII, S. 20}),$$

also, siehe die Gl. [6], oben S. 421,

$$[6]' \qquad \frac{dv}{dM} = \frac{dv}{dE}\cdot\frac{dE}{dM} = \frac{\sqrt{1-f^2}}{(1-f\cos E)^2} = \frac{\cos\varphi}{(1-\sin\varphi\,.\,\cos E)^2}.$$

*) R. DEDEKIND berichtet in seiner Lebensbeschreibung RIEMANNS (siehe RIEMANNS Werke, 2. Auflage, 1891, S. 545), daß GAUSS, als RIEMANN ihn 1851 vor der mündlichen Doktorprüfung besuchte, geäußert habe, er bereite seit Jahren eine Schrift vor, die denselben Gegenstand behandele, wie RIEMANNS Inauguraldissertation, sich aber freilich nicht darauf beschränke. Offenbar hat GAUSS dabei an die hier in Rede stehende Abhandlung »*Bestimmung der Convergenz der Reihen u.s.w.*« gedacht.

**) Im art [1.] wird die Exzentrizität mit ε, in der *Theoria motus* mit e bezeichnet.

Es sei nun

$$\text{(III)} \qquad \frac{dv}{dM} = 1 + C_1 \cos M + C_2 \cos 2M + C_3 \cos 3M + \cdots,$$

woraus sich durch Integration für die sogenannte Mittelpunktsgleichung $v-M$ die Entwicklung

$$\text{(IV)} \qquad v-M = C_1 \sin M + \frac{C_2}{2} \sin 2M + \frac{C_3}{3} \sin 3M + \cdots$$

ergibt. Die $C_1, C_2, C_3, \ldots$ sind Funktionen der Exzentrizität f; es handelt sich um eine asymptotische Darstellung von $\frac{1}{n} C_n$ für große Werte von n.

Die Lösung der Gleichung [7], oben S. 421,

$$[7]' \qquad 1-\sin\varphi \cos E = 0$$

ist (siehe die Gln. [8], [11], wo diese Lösung mit E bezeichnet wird)

$$\mathfrak{E} = i \log \operatorname{cotang} \frac{\varphi}{2}.$$

Setzt man

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{E} - f \sin \mathfrak{E},$$

so ist (siehe die Gln. [9], [10], [12], wo diese Größe mit M bezeichnet wird)

$$\mathfrak{M} = i \log \operatorname{cotang} \frac{\theta}{2},$$

für

$$\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} e^{\cos\varphi},$$

und also $\mathfrak{M}$ die Lösung der Gleichung

$$1-g\cos M = 0,$$

wo

$$g = \sin\theta$$

ist. Setzt man nun *)

$$(\ast) \qquad E = \mathfrak{E} + \varepsilon, \quad M = \mathfrak{M} + \mu,$$

so ist also

$$\mu = \varepsilon - f\left\{\sin(\mathfrak{E}+\varepsilon) - \sin\mathfrak{E}\right\}$$

und, da $\cos\mathfrak{E} = \frac{1}{f}$ ist (siehe die Gl. [11], oben S. 422),

$$[13]' \qquad \mu = \frac{1}{2} f \sin\mathfrak{E}.\varepsilon^2 + \frac{1}{6}\varepsilon^3 - \frac{1}{24} f \sin\mathfrak{E}.\varepsilon^4 - \cdots,$$

woraus (siehe die Gl. [14], oben S. 422)

$$[14]' \qquad \frac{d\mu}{d\varepsilon} = 1 - f\cos E = f\sin\mathfrak{E}.\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{6} f\sin\mathfrak{E}.\varepsilon^3 - \cdots$$

folgt. Analog ist dann (siehe die Gl. [15], oben S. 422)

$$[15]' \qquad 1-g\cos M = g\sin\mathfrak{M}.\mu + \frac{1}{2}\mu^2 - \frac{1}{6} g \sin\mathfrak{M}.\mu^3 + \cdots.$$

Wir setzen nun (nach Gl. [30], oben S. 425 **))

---

*) Über die Bedeutung dieser Substitution siehe weiter unten S. 445.

**) Die Formeln des art. [2.] von Gl. [16] an sind nichts anderes, als erste Annäherungen der Entwicklungen des art. [4.]; wir verfahren also hier zunächst im Anschluß an diesen art. [4.].

$$\cos\varphi = p, \quad \cos\theta = q, \quad x = 1-g\cos M, \quad y = 1-f\cos E,$$

dann folgt nach [14]′

[14]″
$$\frac{1}{y^2} = \frac{-1}{p^2}\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}\Big\{1+\frac{1}{p}i\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon^2+\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{p}i\varepsilon^3+\cdots$$
$$-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p^2}\varepsilon^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^3}i\varepsilon^3-\cdots\Big\},$$

und nach [15]′, indem man für μ die Reihenentwicklung [13]′ einsetzt,

[15]″
$$x = \frac{-pq\varepsilon^2}{2}\Big\{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p}i\varepsilon-\frac{1}{12}\varepsilon^2+\frac{1}{60}\cdot\frac{1}{p}i\varepsilon^3+\cdots$$
$$+\frac{1}{4}\frac{p}{q}\varepsilon^2-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{q}i\varepsilon^3+\cdots\Big\}.$$

Multipliziert man diese beiden Ausdrücke miteinander und mit p, so erhält man zunächst die Gleichung [31], oben S. 425, aus der dann die Gleichung [32] oder

[32]′
$$\frac{\cos\varphi}{(1-f\cos E)^2} = \frac{\cos\theta}{2(1-g\cos M)}\Big\{1-\frac{2}{3}\operatorname{cotang}\mathfrak{E}.\varepsilon+\cdots\Big\}.$$

folgt. Zieht man in [15]″ beiderseits die Quadratwurzel aus und berechnet aus der so entstehenden Gleichung ε durch Reihenumkehrung, so erhält man die Gleichung [33], oben S. 426, oder

[33]′
$$\varepsilon = -i\sqrt{\frac{2(1-g\cos M)}{\cos\varphi.\cos\theta}}-\frac{1}{3}i\frac{1-g\cos M}{\cos^2\varphi.\cos\theta}-\cdots.$$

Setzt man diesen Wert von ε in [32] ein, so ergibt sich [34] oder

[34]′
$$\frac{\cos\varphi}{(1-\sin\varphi\cos E)^2} = \frac{\cos\theta}{2(1-\sin\theta\cos M)}+\frac{\sqrt{2}}{3\cos^{\frac{3}{2}}\varphi}\sqrt{\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta\cos M}}+\cdots.$$

Soweit ist alles ganz streng, und die auftretenden Reihenentwicklungen konvergieren für hinreichend kleine Werte von ε und μ, das heißt also, wenn E hinreichend nahe an $\mathfrak{E}$, und M hinreichend nahe an $\mathfrak{M}$ liegt. Bei der weiteren Rechnung ersetzt nun Gauss die auf den rechten Seiten der Gleichungen [32], [33], [34] auftretenden Reihen durch ihre ersten Glieder; in der Tat sind die Gleichungen [19], [21], [23] des art. [2.], oben S. 422, 423, nichts anderes als die in der angegebenen Weise reduzierten Gleichungen [32]′, [33]′, [34]′. Die Gleichung [23], das heißt [34]′ mit Vernachlässigung der nicht hingeschriebenen Glieder, bildet also jetzt den Ausgangspunkt für alles folgende.

Setzt man, wie im art. [3.], oben S. 423, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta = \gamma$, so ergeben die Gleichungen [1]—[5] des art. [1.], oben S. 420 *), die Gleichungen [24] und [25], oben S. 423, das heißt die Entwicklungen von

$$\frac{\cos\theta}{1-g\cos M} \text{ und } \sqrt{\frac{\cos\theta}{1-g\cos M}}$$

nach den Kosinus der Vielfachen von M. In der Entwicklung der Quadratwurzel lautet der Koeffizient von $\cos nM$

$$2(1-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\gamma^n\Big(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\gamma^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{2n+3}{2n+4}\gamma^4+\cdots\Big).$$

*) Um Übereinstimmung zwischen den Bezeichnungen der artt. [1.] und [3.] zu erzielen, hat man in den Gleichungen [3] und [5] zu nehmen $\alpha = \gamma = \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}$, also das dortige θ gleich der Hälfte des hier mit θ bezeichneten Winkels, und $u = M$ zu setzen. Man vergl. übrigens den art. [5.] des Abschnitts [III.] über $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, oben S. 345.

Da nun

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\gamma^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{2n+3}{2n+4}\gamma^4+\cdots\right)=(1-\gamma^2)^{-\frac{1}{2}}$$

ist, so ergibt sich dieser Koeffizient für große Werte von n gleich:

$$2\gamma^n\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}=2\gamma^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2},$$

und hieraus folgt mit Benutzung der STIRLINGschen Näherungsformel

$$n!=n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

der von GAUSS in der Gleichung [27], S. 423, angegebene Näherungswert $2\gamma^n\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Nunmehr findet man mit Benutzung der Gleichung [23] für den Koeffizienten C_n der Entwicklung (III) S. 439 den in der Gl. [28], oben S. 423, angegebenen Wert, also für den Koeffizienten von $\sin nM$ in der Entwicklung (IV) der Mittelpunktsgleichung den angenäherten Wert

$$[28]' \qquad \frac{C_n}{n}=\frac{1}{n}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}e^{\cos\varphi}\right)^n\left(1+\frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{2n\pi\cos^3\varphi}}\right).$$

In der Tabelle am Schluß des art. [3.], oben S. 424, hat GAUSS für einen bestimmten Wert der Exzentrizität den Fehler berechnet, den man begeht, wenn man sich auf die durch die Gleichung [23], oben S. 423, dargestellte Annäherung beschränkt. Die 25 Zahlengruppen beziehen sich auf die 25 allemal um $7^0 30'$ wachsenden Werte der mittleren Anomalie M von 0^0 bis 180^0; die in einer Gruppe untereinander stehenden Zahlen bedeuten der Reihe nach:

den Wert von M (fett gedruckt)

$\log_{10}\cos\varphi$

$\log_{10}(1-f\cos E)^2$

$\log_{10}\frac{1}{2}\cos\theta$

$\pm\log_{10}(1-g\cos M)^{-1}$, jenachdem $M\lesseqgtr 90^0$,

$\log_{10}\sqrt{\frac{2\cos\theta}{9\cos^3\varphi}}$

$\pm\log_{10}(1-g\cos M)^{-\frac{1}{2}}$, jenachdem $M\lesseqgtr 90^0$,

$\frac{\cos\varphi}{(1-f\cos E)^2}$

$\frac{1}{2}\frac{\cos\theta}{1-g\cos M}$

$\sqrt{\frac{2\cos\theta}{9\cos^3\varphi}}\frac{1}{\sqrt{1-g\cos M}}$

$\frac{\cos\varphi}{r^2}-\frac{1}{2}\frac{\cos\theta}{1-g\cos M}-\sqrt{\frac{2\cos\theta}{9\cos^3\varphi}}\frac{1}{\sqrt{1-g\cos M}}$,

wo $r=1-f\cos E$ ist, so daß also die letzte Zahl den begangenen Fehler angibt. Der dieser Tabelle zugrunde liegende Wert der Exzentrizität ist hiernach

$$f=\sin\varphi=0{,}6550518$$

entsprechend dem Werte

$$(*) \qquad \log_{10}f=9{,}8162757-10.$$

Für diesen Wert der Exzentrizität ist auch der am Schluß von art. [3.], oben S. 425, angegebene Zahlenwert 0,5508570 des Ausdrucks [29] berechnet*). Da der konstante Teil von

$$\frac{\cos\theta}{2(1-g\cos M)}$$

gleich $\frac{1}{2}$ ist, so ergibt also die Näherungsformel [23] für den konstanten Teil von $\frac{dv}{dM}$ den Wert 1,0508570 statt 1. — Auch der Wert 9,9046115 für den Logarithmus des Ausdrucks [35], oben S. 426, und die Zahlenbeispiele des art. [5.], oben S. 427, sind für eben denselben Wert der Exzentrizität berechnet. Für die Beispiele des art. [5.] zeigt dies schon der dort angegebene Wert

$$\log_{10} kf = 9{,}4540600,$$

den man in der Tat erhält, wenn man dem in (✱) gegebenen Werte von $\log_{10} f$ den Wert

$$\log_{10} k = \log_{10}\log_{10} e = 9{,}6377843$$

hinzuzählt. In bezug auf den art. [5.] wäre noch zu bemerken, daß θ hier einfach einen durch die Gleichung [36] erklärten Hilfswinkel bedeutet, also mit dem in den artt. [2.]—[4.] durch θ bezeichneten Winkel nichts zu tun hat. Die Ausdrücke [37], [38] ergeben sich, wenn man in $M = E - f\sin E$ einsetzt

$$E = p + i\log\operatorname{tang}(45^0 + \tfrac{1}{2}\theta)$$

und dann ausdrückt, daß M reell sein soll. Die Bezeichnung »Zug komplexer Werte«, die GAUSS hier anwendet, ist im Abschnitt [VI.] art. 2., oben S. 408, erklärt. Wir kommen so auf den Zusammenhang, der zwischen den Abschnitten [V.], [VI.] und [VII.] besteht, und damit auch zu den hier in Betracht kommenden geschichtlichen Feststellungen.

Erläuterungen zum Briefwechsel, S. 429—437.
Geschichtliches zu den Abschnitten [V.], [VI.], [VII.].

In den Briefstellen [3.] und [4.] schreibt GAUSS, daß er in den ersten Jahren des XIX. Jahrhunderts, beziehungsweise etwas mehr oder weniger als 50 Jahre vor dem 5. Februar 1850 eine Methode gefunden habe, um den »Grad der Konvergenz« trigonometrischer Reihen, insbesondere der Entwicklung der Mittelpunktsgleichung, zu bestimmen. Auch habe er damals die Richtigkeit dieser Konvergenzuntersuchung durch numerische Rechnung an einem Beispiel der Mittelpunktsgleichung für einen großen Wert der Exzentrizität bestätigt; seine »Konvergenzformel« für die Koeffizienten der Entwicklung der Mittelpunktsgleichung stimme mit der von JACOBI (siehe das Zitat oben S. 432 Fußnote **)) gegebenen überein.

Dazu ist zuvörderst zu bemerken, daß der Ausdruck »Grad der Konvergenz« hier im Sinne des art. 1. von Abschnitt [V.], oben S. 400, den Grad der Annäherung der Reihenkoeffizienten an die Null bedeutet, wie denn auch die in der Briefstelle [3.] aus der »Konvergenzformel« gezogene Folgerung, nämlich die Vergleichung der Konvergenz der Reihenkoeffizienten mit der einer geometrischen Progression, ganz im Sinne dieses art. [1.] gehalten ist.

Die Feststellung vom 5. Februar 1850 macht GAUSS auf Grund einer von ihm damals aufgefundenen Aufzeichnung, die jene numerische Rechnung enthielt. Nun finden wir auf dem zweiten Zettel, der in den artt. [2.] und [3.] des Abschnitts [VII.] abgedruckt ist, einmal die mit der JACOBIschen völlig übereinstimmende

*) Es ist: $\log_{10}\cos\varphi = 9{,}8782827-10$; $\log_{10}(\frac{1}{2}\cos\theta) = 9{,}0536038-10$, also $\theta = 76^0 55' 20''$.

asymptotische Formel für die Entwicklungskoeffizienten der Mittelpunktsgleichung *); ferner ist die Tabelle des art. [3.], wie wir oben S. 441 gesehen haben, für den Wert 0,6550518 der Exzentrizität gerechnet, und dieser Wert ist in der Tat als groß zu bezeichnen (siehe oben S. 433, erste Zeile), da er die Exzentrizitäten der großen Planeten erheblich übertrifft und schon nahe an der LAPLACEschen Grenze 0,6627430 . . **) liegt. Auch die Angabe in der Briefstelle [3.], daß die Herleitung der Formel eine halbe Oktavseite einnehme, trifft für unsern Zettel wenn auch nicht buchstäblich, so doch dem Sinne nach zu, da die Entwicklung, die zu dem Ergebnis führt, in der Tat sehr kurz ist. Die Bemerkung der Briefstelle [4.], daß die Methode auch geeignet sei, alle Glieder numerisch zu berechnen, nicht nur die entfernten, und zwar mit jeder Genauigkeit, findet auf dem dritten Zettel ihre Bestätigung (siehe unsern art. [4.]); die auf diesem Zettel befindlichen nicht mit abgedruckten Zahlenrechnungen beziehen sich auch auf das im art. [3.] behandelte Beispiel, sind aber nicht zu Ende geführt, was mit der Briefstelle [4.] im Einklang steht.

Es ist also unzweifelhaft, daß wir in den beiden Zetteln, die in den artt. [2.], [3.], [4.] abgedruckt sind, die von GAUSS 1850 wiedergefundenen Aufzeichnungen vor uns haben. Was ihre Entstehungszeit anlangt, so können wir das »50 $\pm$« des Briefes [4.] in Übereinstimmung mit der Angabe des Briefes [3.] genauer zu »50 —« bestimmen, d. h. also die Abfassung dieser Aufzeichnungen in die ersten Jahre des XIX. Jahrhunderts setzen. Denn erstens bedient sich GAUSS darin stets der Bezeichnung i für $\sqrt{-1}$, was er im XVIII. Jahrhundert noch nicht getan hat, zweitens tritt am Schluß des art. [3.] die Darstellung des konstanten Teils von $(1-g\cos M)^{-\frac{1}{2}}$ durch das arithmetisch-geometrische Mittel auf, und diese Darstellung hat GAUSS erst um den 23. Dezember 1799 gefunden (siehe oben S. 183, 185 und die zugehörigen Bemerkungen S. 273—274). In dem Beispiel des ersten Zettels, oben S. 421, ist der Wert der Exzentrizität $\varepsilon = 0{,}254236$ den V. Elementen des kleinen Planeten Juno entnommen, die in der Monatlichen Correspondenz **11**, S. 476, Mai 1805 (Werke VI, S. 264) veröffentlicht sind, und die GAUSS gestützt auf seine Beobachtung vom 20. Februar 1805 berechnet hatte. Die VI. Elemente der Juno, die GAUSS am 25. August 1806 an die Monatliche Correspondenz gesandt hat (siehe Monatl. Corr. **14**, S. 378, Werke VI, S. 280, vergl. auch S. 279), geben die Exzentrizität 0,254944. Der erste Zettel ist also jedenfalls zwischen dem 20. Februar 1805 und dem 25. August 1806 geschrieben. Wahrscheinlich stammt auch der vierte Zettel aus dieser Zeit; GAUSS würde also den Kunstausdruck »Zug komplexer Werte«, den er im Abschnitt [VI.] art. 2., oben S. 408, erklärt, schon zu Anfang des XIX. Jahrhunderts angewandt haben, was immerhin Rückschlüsse auf seine damalige Bewandertheit in der Analysis der komplexen Veränderlichen gestattet.

Es sind aber noch andere, bis ins XVIII. Jahrhundert zurückreichende Spuren vorhanden, die auf GAUSSens Beschäftigung mit diesem Gegenstande hinweisen und die auch darüber hinaus einen Einblick in den ganzen Gedankenkreis gewähren, der für GAUSS in diesem Zusammenhang in Betracht kam.

Den Ausgangspunkt bildete für GAUSS die noch in die Göttinger Studentenjahre fallende Beschäftigung mit dem LAGRANGEschen Lehrsatz, die in der Aufzeichnung Nr. 49 des *Tagebuchs* vom 27. Dezember 1796 angezeigt ist, und für die der Brief [1.] an HINDENBURG ***), sowie die Werke VIII, S. 76 abgedruckte

*) Um den JACOBIschen Ausdruck (siehe JACOBIS Werke VII, S. 188 und 237)

$$\left\{\frac{ei^{\sqrt{1-ee}}}{1+\sqrt{1-ee}}\right\}^p\left(\frac{1}{p}+\frac{4}{3\sqrt{2p^3\pi}}\;\frac{1}{\sqrt[4]{(1-ee)^3}}\right)$$

mit dem GAUSSschen in Übereinstimmung zu bringen, hat man zu setzen $f = \sin\varphi$ für e, e für i und n für p; dann ergibt sich unmittelbar unsere Formel [28]', oben S. 441.

**) LAPLACE, *Mécanique céleste*, t. V, 1825, Suppl. *Sur le développement des coord. éllipt.* S. 11.

***) Die Urschrift dieses Briefes befindet sich im Privatbesitz; dem Abdruck liegt eine im GAUSSarchiv befindliche, von C. H. MÜLLER angefertigte Abschrift zugrunde.

Abhandlung mit der zugehörigen Bemerkung von R. FRICKE zu vergleichen ist *). GAUSS wird wohl die Abhandlung von LAGRANGE *Sur le problème de Képler*, die im 25. Bande (1769), 1771, S. 204 der Memoiren der Berliner Akademie **) steht, auch schon um diese Zeit gekannt haben, da er die auf die Umkehrungsformel bezügliche, die im 24. Bande derselben Sammlung steht, in der Abhandlung Werke VIII, S. 76 selbst zitiert ***). In jener Abhandlung *Sur le problème de Képler* gewinnt LAGRANGE die Entwicklungen der drei Größen E, r, v (in der Bezeichnung von GAUSS) nach den Sinus bezw. Kosinus der Vielfachen der mittleren Anomalie M, indem er aus den Gleichungen (I), (II), oben S. 438, und aus der Polargleichung der Ellipse durch Anwendung seiner Umkehrungsformel zuerst nach Potenzen der Größe $f \sin M$ entwickelt, dann die Potenzen von $\sin M$ durch die trigonometrischen Funktionen der Vielfachen von M ausdrückt und nach diesen ordnet; er setzt:

$$E = M + \sum A_n \sin nM,$$
$$r = 1 + \frac{f^2}{2} - \sum B_n \cos nM,$$
$$v = M + \sum K_n \sin nM$$

und drückt die A_n, B_n durch einfache, die K_n durch kompliziertere Reihen aus, die nach Potenzen der Exzentrizität f fortschreiten. Die Bestimmung des infinitären Verhaltens der Koeffizienten A_n, B_n kommt auf die Untersuchung der BESSELschen Funktion $J_n(nf)$ und ihrer Derivierten für große Werte von n hinaus. Die oben S. 385 abgedruckte Notiz Nr. 82 des *Tagebuchs* vom 16. Oktober 1797 zeigt, wie wir S. 389 nachgewiesen haben, daß GAUSS sich etwa 10 Monate nach den Studien zur LAGRANGEschen Reihe mit der asymptotischen Darstellung der BESSELschen Funktion $J_1(x)$ beschäftigt hat.

Weitere Spuren finden wir in den Tagebuchnotizen Nr. 83 vom April 1798 (eine asymptotische Formel), Nr. 86 vom Mai 1798 (die LAGRANGEsche Reihe), Nr. 87 vom Juni 1798 (die allgemeinen trigonometrischen Reihen), Nr. 88 vom 17. Juni 1798 (Beschäftigung mit LAPLACE), Nr. 104 vom 27. April 1800 (einen Satz über die Konvergenz trigonometrischer Reihen), Nr. 113 vom 25. Oktober 1800 (Hinweis auf frühere Beschäftigung mit einer asymptotischen Formel, vergl. eine Aufzeichnung in dem als Scheda Ab bezeichneten Hefte des Nachlasses, die vom 5. Februar 1799 datiert ist, und den Brief an LAPLACE vom 30. Januar 1812, oben S. 371); zu allen diesen Notizen vergleiche man die Bemerkungen in dem unten folgenden Abdruck des *Tagebuchs.* Endlich ist hier noch die briefliche Mitteilung zu erwähnen, die GAUSS im Frühjahr 1799 an v. ZACH in bezug auf die Zeitgleichungstafel von ULUGH-BEIGH †) hat gelangen lassen und die GAUSS in seinen Briefen an OLBERS vom 27. Januar 1812, Werke VIII, S. 140, und an SCHUMACHER vom 3. Dezember 1831, ebenda, S. 138 erwähnt. Eine Aufzeichnung mit der Überschrift »Mittelpunkts-

---

*) An der von FRICKE zitierten Stelle: SARTORIUS V. WALTERSHAUSEN, *Gauss zum Gedächtniss*, 1856, S. 22, wird gesagt, PFAFF habe damals (also im April 1797) den Aufsatz von GAUSS an HINDENBURG befördert; wie der Brief [1.] zeigt, war es aber nicht PFAFF, sondern KAESTNER. Auch die Angabe SARTORIUS V. WALTERSHAUSENS, HINDENBURG sei bald nach Empfang des GAUSSschen Manuskripts gestorben, trifft nicht zu, denn C. FR. HINDENBURG starb in Leipzig am 17. März 1808.

**) Oeuvres de LAGRANGE III, S. 113.

***) Unter den im Nachlaß befindlichen Auszügen aus Zeitschriften u.s.w. (Ca 4) sind Bemerkungen zu den in den Bänden 1—25 der Berliner Mémoires enthaltenen mathematischen Abhandlungen vorhanden.

†) Ein Auszug aus dieser Tafel war in den Allgemeinen Geographischen Ephemeriden **3**, 1799, 2. Stück, Februar S. 182, 183 in einem Berichte von BURCKHARDT über die Tafeln des ULUGH-BEIGH erschienen; S. 181 a. a. O. heißt es: »Die 8. Tafel enthält die Mittelpunkts Gleichung; sie ist für jede 6 Minuten der Anomalie bis auf Tertien berechnet«.

gleichung nach ULUGH BEY in Zeittertien«, in der GAUSS die erwähnte Zeitgleichungstafel benutzt, findet sich im Nachlaß (Astr. d. 7, Kapsel 90)*).

JACOBI sagt (a. a. O., JACOBIS Werke VII, S. 175), es hätte vor CARLINI (1817) kein anderer Mathematiker oder Astronom die Aufgabe behandelt, den Koeffizienten des Sinus eines sehr großen Vielfachen der mittleren Anomalie in der Entwicklung der Mittelpunktsgleichung annähernd zu bestimmen, eine Aufgabe, die zu den schwierigsten ihrer Art gehöre. Natürlich konnte JACOBI nicht wissen, daß GAUSS schon lange vor CARLINI diese Aufgabe richtig gelöst hatte (während ja CARLINIS Lösung fehlerhaft war) und so zu einem Ergebnis gelangt war, das mit dem übereinstimmt, das JACOBI selbst etwa 50 Jahre später auf dem von CARLINI vorgezeichneten Wege von neuem abgeleitet hat. —

In der Briefstelle [4.] spricht GAUSS von seiner Geneigtheit, seine Methode in einer ihm »selbst genügenden Gestalt auszuführen«, und bemerkt, daß die Arbeit »einen größeren Umfang erhalten« würde; auch SARTORIUS v. WALTERSHAUSEN berichtet**), daß GAUSS nach seinem Doktorjubiläum (16. Juli 1849) »mit der Theorie der Konvergenz der Reihen« beschäftigt gewesen sei. Wir werden also die Entwürfe [V.] und [VI.] als Vorarbeiten zu der Abhandlung anzusehen haben, deren Plan GAUSS in der Briefstelle [4.] erwähnt. Diese Entwürfe sind also nach dem 5. Februar 1850 entstanden***), und wir können nunmehr über das, was jene geplante Abhandlung enthalten sollte, die folgenden zusammenfassenden Angaben machen. Auf eine Theorie der komplexen Größen sollte die Entwicklung der Lehre von dem Zusammenhang der Flächen (Analysis situs) folgen, die bestimmt war, der Lehre von der Integration im komplexen Gebiete als Grundlage zu dienen. Wahrscheinlich würde sich GAUSS aber auch hier — ähnlich wie in dem Briefe an BESSEL vom 18. Dezember 1811 (siehe oben S. 365, besonders S. 367 Fußnote) — auf die Integrale einförmiger Funktionen beschränkt haben, wenngleich die von DEDEKIND berichtete Äußerung (oben S. 438, Fußnote) auch der gegenteiligen Möglichkeit Raum gibt. Eine Erörterung der Eigenschaften allgemeiner (auch komplexer) Zahlenfolgen würde zu dem eigentlichen Gegenstande der Abhandlung übergeleitet haben, zur Bestimmung des infinitären Verhaltens der Koeffizienten einer allgemeinen trigonometrischen Reihe und der Untersuchung ihrer Konvergenz. Die Anwendung auf die Entwicklung der Mittelpunktsgleichung hätte den Abschluß gebildet †).

Wie GAUSS die allgemeinen trigonometrischen Reihen zu behandeln gedachte, dafür gibt der Nachlaß kaum einen Fingerzeig; daß bei der Mittelpunktsgleichung die imaginäre Substitution (siehe oben die Gleichungen (✱) auf S. 439)

$$(✱✱) \qquad E = i \log \operatorname{cotang} \frac{\varphi}{2} + \varepsilon$$

*) In dem erwähnten Briefe an OLBERS vom 27. Januar 1812, Werke VIII, S. 140, schreibt GAUSS, daß die Papiere, worin er 1799 die Methode der kleinsten Quadrate auf ULUGH-BEIGHS Zeitgleichungstafel angewandt hatte, verloren gegangen seien; allem Anschein nach hat GAUSS sie 1850, zugleich mit den auf die Mittelpunktsgleichung bezüglichen Aufzeichnungen, wiedergefunden.

**) *Gauss zum Gedächtniss*, 1856, S. 69.

***) Im art. 2. des Abschnitts [VI.], oben S. 408, wird auf die *Jubiläumsschrift* von 1849 Bezug genommen.

†) Nach den Akten der Philosophischen Fakultät zu Göttingen (vol. 117, S. 84) hat GAUSS im Jahre 1833 drei Preisaufgaben vorgeschlagen, von denen die eine den Wortlaut hatte: »Enarrentur variae methodi problema KEPLERI solvendi, imprimis per series infinitas revoceturque gradus convergentiae, quam hae offerunt, ad mensuram accuratam«. Die Fakultät hat aber eine andere der vorgeschlagenen Aufgaben (nämlich, die Trägheitsmomente der regelmäßigen Körper zu bestimmen) gewählt und gestellt.

sofort auf Integrale im komplexen Gebiet führt, wenn man die Koeffizienten der Entwicklung in Integralform darstellt, ist einleuchtend. Die Bedeutung dieser Substitution erläutert J. HORN in einer brieflichen Mitteilung wie folgt:

»Für die Entwicklung (III), oben S. 439, ist

$$C_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{dv}{dM}e^{inM}dM = \frac{\cos\varphi}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{inM}\frac{dE}{1-f\cos E},$$

oder, indem man*) $z = e^{iE}$ einführt,

$$C_n = -\frac{i\cos\varphi}{\pi}\int F(z)(\Phi'(z))^n dz,$$

wobei

$$F(z) = \frac{1}{z-\frac{f}{2}(z^2+1)}, \quad \Phi(z) = ze^{-\frac{f}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$$

gesetzt ist und über den Kreis $|z| = 1$ integriert wird. Die Funktion $F(z)$ hat die reellen singulären Stellen

$$z_0 = \frac{1-\sqrt{1-f^2}}{f} = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = e^{i\mathfrak{E}} < 1,$$

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{1-f^2}}{f} = \operatorname{cotang}\frac{\varphi}{2} = e^{-i\mathfrak{E}} > 1,$$

die zugleich Nullstellen von $\Phi'(z)$ sind. Der Integrationsweg $|z| = 1$ kann durch den Integrationsweg $|z| = z_0$ ersetzt werden, der nur der singulären Stelle z_0 ausweichen muß. Demgemäß hat man zu setzen

$$z = z_0 e^{i\varepsilon}$$

oder, was dasselbe ist,

$$E = \mathfrak{E} + \varepsilon = i\log\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} + \varepsilon,$$

und dies ist eben die von GAUSS angewandte Substitution. Nimmt man als Integrationsweg den Kreis $|z| = z_1$ mit Umgehung der singulären Stelle z_1, so hat man

$$z = z_1 e^{\vartheta i} \text{ oder } E = \vartheta - i\log\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2},$$

eine Substitution, die in einer Abhandlung von W. SCHEIBNER**) benutzt wird.«

Soweit die Mitteilung von HORN***).

---

*) Vergl. für das folgende H. BURKHARDT, *Über Funktionen grosser Zahlen, insbesondere über die näherungsweise Bestimmung entfernter Glieder in den Reihenentwicklungen der Theorie der Keplerschen Bewegung*, Sitzungsberichte der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissensch. 1914, S. 1.

) W. SCHEIBNER, *Über die asymptotischen Werthe der Coefficienten in den nach der mittleren Anomalie vorgenommenen Entwicklungen*, zuerst erschienen in den Berichten der Kgl. Sächsischen Gesellsch. der Wissensch. zu Leipzig, Mathem.-phys. Classe 8, 1856, S. 40, dann gekürzt in den Mathematischen Annalen **17, 1880, S. 545, siehe hier S. 551.

***) Man vergl. auch die in der erwähnten Abhandlung von BURKHARDT angeführte Literatur, der noch hinzuzufügen wäre A. L. CAUCHY, *Mémoire sur divers points d'Analyse,* Mémoires de l'Académie des Sciences 8, Paris 1829, S. 101, Oeuvres 1. série, II, S. 33.

In dem auf S. 382 beginnenden Hauptstück haben wir das im Nachlaß befindliche Material gesammelt, das mit dieser unvollendet gebliebenen Abhandlung von GAUSS im Zusammenhang steht. Der Brief [5.] gehört hierher, weil GAUSS sich darin über seine Auffassung der Reihenkonvergenz ausspricht, der Brief [6.], weil darin von der »Metaphysik der komplexen Größen« gehandelt wird*). Der Vollständigkeit wegen wäre noch eine Stelle in dem Briefe von GAUSS an WOLFGANG BOLYAI vom 20. April 1848**) zu nennen, wo von einem allgemeinen Kriterium für die Konvergenz der Reihensummen die Rede ist.

SCHLESINGER.

---

*) Die Urschrift des an GRASSMANN gerichteten Briefes befindet sich im Besitz der Familie GRASSMANNS; der Brief ist bereits abgedruckt bei V. SCHLEGEL, *H. Grassmann, sein Leben und seine Werke,* Leipzig 1878, S. 22—23 und in H. GRASSMANNS Gesammelten Werken I, 2, Leipzig 1896, S. 397. Der oben stehende Abdruck ist mit der Urschrift verglichen worden.

**) *Briefwechsel zwischen C. Fr. Gauss und W. Bolyai,* herausg. von F. SCHMIDT und P. STÄCKEL, Leipzig 1899, S. 133, 5); vergl. BOLYAIS Bemerkung, ebenda, S. 139 und die zu S. 133—134 gehörige Anmerkung STÄCKELS, ebenda, S. 195, 196.

GEOMETRIE.

NACHTRAGE ZU DEN BÄNDEN IV UND VIII.

NACHLASS.

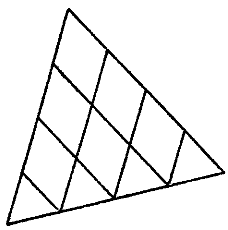
[ANSÄTZE ZUR TRANSZENDENTEN TRIGONOMETRIE.]

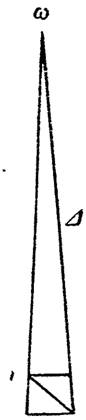
[Aus Scheda Af, Mémoires de Mathématique, Bronsuic 1801.]

[I.]

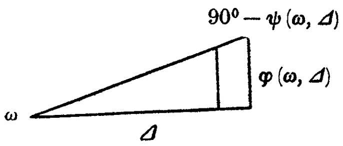
[S. 68]

$$\omega\partial\psi\Delta = 2i\psi(\omega\varphi\Delta)$$
$$\partial\Delta = i\varphi(\omega\varphi\Delta)$$
$$\varphi(\omega\varphi\Delta)\omega\partial\psi\Delta = 2\partial\Delta.\psi(\omega\varphi\Delta)$$
$$\psi'\Delta = \frac{2\psi(\omega\varphi\Delta)}{\omega\varphi(\omega\varphi\Delta)}$$
$$\chi'\Delta = \varphi\Delta$$
$$\psi'\Delta = \frac{2\psi\{\omega\chi'\Delta\}}{\omega\chi'\{\omega\chi'\Delta\}}$$
$$\psi'\Delta.\alpha\omega\omega\chi'\Delta = 2\beta\omega\omega\chi'\Delta^2$$
$$\alpha\psi'\Delta = 2[\beta]\chi'\Delta.$$





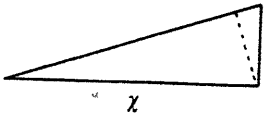
[II.]



$$\frac{\partial\varphi(\omega, \Delta)}{\partial\Delta} = \psi(\omega, \Delta).$$

[S. 69]

[III.]

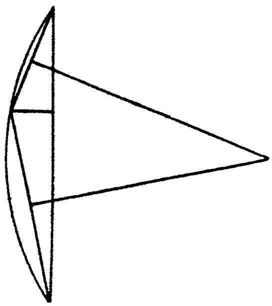


$$\varphi(\omega, \Delta)$$
$$\psi\{\omega, \chi(\omega, \Delta)\}$$

$$\Delta = \chi\{\omega, \chi(\omega, \Delta)\} + \varphi\{\psi(\omega, \chi(\omega, \Delta)), \varphi(\omega, \Delta)\}$$
$$\psi(\omega, \Delta) = \psi\{\psi(\omega, \chi(\omega, \Delta)), \varphi(\omega, \Delta)\}$$
$$\varphi\{\omega, \chi(\omega, \Delta)\} = \chi\{\psi(\omega, \chi(\omega, \Delta)), \varphi(\omega, \Delta)\}$$
$$\varphi(\omega, \Delta) = \omega f\Delta + \omega\omega f'\Delta$$
$$\chi(\omega, \Delta) = \Delta + \omega g\Delta + \omega\omega g'\Delta$$
$$\psi(\omega, \Delta) = \omega + \omega\omega h'\Delta.$$

[S. 70]

[IV.]



$$\varphi\{2\varphi(\Delta, \tfrac{1}{2}a),\ \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}(a+b)) - \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}a)\}$$
$$= \varphi\{2\varphi(\Delta, \tfrac{1}{2}b),\ \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}(a+b)) - \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}b)\}$$

$$\begin{matrix} \psi\{2\varphi(\Delta, \tfrac{1}{2}a),\ \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}(a+b)) - \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}a)\} \\ +\psi\{2\varphi(\Delta, \tfrac{1}{2}b),\ \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}(a+b)) - \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}b)\} \end{matrix} = \begin{matrix} \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}a) \\ +\psi(\Delta, \tfrac{1}{2}b) \end{matrix}$$

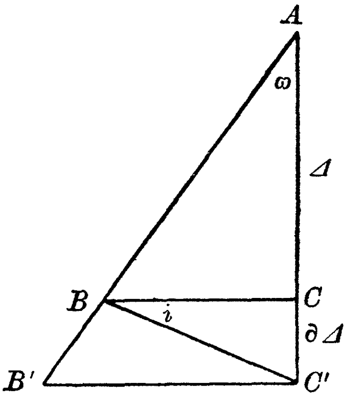
$$\varphi\{2\varphi(\Delta, \tfrac{1}{2}a),\ \psi^{0,1}(\Delta, \tfrac{1}{2}a)\,\partial\tfrac{1}{2}a\} = \varphi\{2\varphi(\Delta, \tfrac{1}{2}\partial a),\ \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}a)\}$$

$$\varphi(\Delta, a) = \Delta f a + \Delta^3 f' a$$
$$\psi(\Delta, a) = a + \Delta\Delta g a.$$

BEMERKUNGEN.

Das als Scheda Af bezeichnete Heft enthält Aufzeichnungen der verschiedensten Art, die, wie widerholte Datierungen zeigen, aus den Jahren 1801 bis 1803 stammen. Da die hier abgedruckten Notizen fast am Ende des Heftes stehen, ist anzunehmen, daß ihre Abfassung in das Jahr 1803 fällt. Neben der Aufzeichnung Nr. 99 des *Tagebuchs*: In principiis geometriae egregios progressus fecimus, Br[unovici 1799] Sept., und den Äußerungen in dem Briefe an WOLFGANG BOLYAI vom 16. Dez. 1799, (Werke VIII, S. 159) bilden die vorstehenden Notizen das älteste Zeugnis für GAUSSens Beschäftigung mit den Grundlagen der Geometrie; sie sind um so wertvoller, als es sich in ihnen um Versuche handelt, einen Zugang zu der transzendenten Trigonometrie zu gewinnen, von der GAUSS seinem Schüler WACHTER bei dessen Besuch im April 1816 erzählt hat (Werke VIII, S. 176).

Die Notiz [I.] enthält einen Ansatz, um für ein rechtwinkliges Dreieck, bei dem der eine spitze Winkel ω so klein ist, daß man in den Reihenentwicklungen nach Potenzen von ω von den Gliedern dritter und höherer Ordnung absehen darf, Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln zu finden. Es sei also im Dreieck ABC der Winkel bei C ein Rechter und der Winkel ω bei A sehr klein: die Kathete AC werde mit Δ bezeichnet. Dann ist in erster Näherung:



$$BC = \omega\varphi(\Delta), \tag{1}$$

$$\sphericalangle ABC = 90^0 - \omega - \omega\psi(\Delta), \tag{2}$$

wo $\varphi(\Delta)$, $\psi(\Delta)$ noch zu bestimmende Funktionen bedeuten. Die Winkelsumme im Dreieck ABC ist $180^0 - \omega\psi(\Delta)$, also, wenn die Funktion $\psi(\Delta)$ positiv ist, kleiner als 180^0. Um die unbekannten Funktionen $\varphi(\Delta)$ und $\psi(\Delta)$ zu bestimmen, verlängere man AC um $CC' = \partial\Delta$, errichte in C' auf AC' das Lot $C'B'$, das die Verlängerung von AB in B' treffe, und ziehe BC'; der Winkel CBC' werde mit i bezeichnet. Dann ergibt die Anwendung der Formel (1) auf das Dreieck BCC':

$$\partial\Delta = i\varphi(\omega\varphi(\Delta)). \tag{3}$$

Das quergestreifte Dreieck in der Notiz [I.], S. 451 soll auf den Inhalt des Dreiecks hinweisen. Dieser ist in der antieuklidischen Geometrie der Abweichung der Winkelsumme von 180^0 proportional. Mithin wird der Inhalt des Dreiecks ABC proportional $\omega\psi(\Delta)$ und daher ist der Inhalt des Vierecks $BCC'B'$ proportional $\omega\partial\psi(\Delta)$. Nun ist das Viereck $BCC'B'$, bis auf Größen höherer Ordnung, doppelt so groß wie das Dreieck BCC', dessen Inhalt proportional $i\psi(\omega\varphi(\Delta))$ ist, folglich gilt die Gleichung

$$\omega\partial\psi(\Delta) = 2i\psi(\omega\varphi(\Delta)). \tag{4}$$

Durch Verbindung von (3) und (4) gelangt man zu der Funktionalgleichung

$$\psi'(\Delta) = \frac{2\psi(\omega\varphi(\Delta))}{\omega\varphi(\omega\varphi(\Delta))}. \tag{5}$$

Um sie zu lösen, setzt GAUSS

$$\varphi(\Delta) = \chi'(\Delta) \tag{6}$$

und denkt sich $\chi'(\Delta)$ nach Potenzen von Δ entwickelt:

$$\chi'(\Delta) = \alpha\Delta + \cdots, \tag{7}$$

das konstante Glied fehlt, weil $\varphi(0) = 0$ ist. Jetzt wird nach (5):

$$\psi'(\Delta)\left\{\alpha\omega^2\chi'(\Delta) + \cdots\right\} = 2\psi(\omega\chi'(\Delta)), \tag{8}$$

mithin muß die Entwicklung von $\psi(\Delta)$ nach Potenzen von Δ mit einem Gliede $\beta\Delta^2$ anfangen, und man hat, nach Potenzen von ω entwickelnd:

$$\psi'(\Delta).\alpha\omega^2\chi'(\Delta) + \cdots = 2\beta\omega^2(\chi'(\Delta))^2 + \cdots, \tag{9}$$

woraus durch Vergleichung der Koeffizienten von ω^2 die Schlußformel von GAUSS hervorgeht:

$$\alpha\psi'(\Delta) = 2\beta\chi'(\Delta). \tag{10}$$

Um die Rechnung zu Ende zu führen, integriere man die Gleichung (10) und substituiere

$$\psi(\Delta) = \frac{2\beta}{\alpha}\chi(\Delta) \tag{11}$$

in der Funktionalgleichung (5). Indem noch $\omega\chi'(\Delta) = \xi$ gesetzt wird, geht diese über in die Differentialgleichung

$$\xi\chi'(\xi) = 2\chi(\xi), \tag{12}$$

mithin ist $\chi(\xi) = \frac{1}{2}\alpha\xi^2$ und

$$\varphi(\xi) = \alpha\xi, \quad \psi(\xi) = \beta\xi^2. \tag{13}$$

Dabei ist $\xi = \omega\chi'(\Delta)$. Indem man beachtet, daß von vornherein bei den Entwicklungen nach Potenzen von ω von den Gliedern dritter und höherer Ordnung abgesehen wurde, ergibt sich schließlich, daß der Ansatz unter den gemachten Voraussetzungen zu den Gleichungen führt:

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi(\Delta) = \alpha\Delta + \ast + \alpha_3\Delta^3 + \cdots, \\ \psi(\Delta) = \ast + \beta\Delta^2 + \beta_3\Delta^3 + \cdots, \end{array}\right. \tag{14}$$

wobei die Koeffizienten $\alpha, \alpha_3, \ldots; \beta, \beta_3, \ldots$ unbestimmt bleiben.

GAUSS hat neben die letzten Formeln der Notiz [I.] geschrieben:

$$\varphi(\Delta) = \sin\Delta.$$

In der Tat wird die Funktionalgleichung (5) durch diese Annahme für $\varphi(\Delta)$ in Verbindung mit

$$\psi(\Delta) = -(1 - \cos\Delta)$$

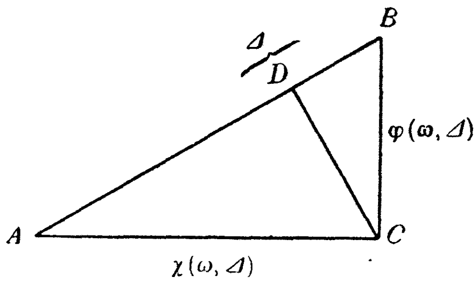
erfüllt, wenn, den Voraussetzungen entsprechend, $\sin(\omega\sin\Delta)$ durch $\omega\sin\Delta$ und $\cos(\omega\sin\Delta)$ durch $1 - \frac{1}{2}\omega^2\sin^2\Delta$ ersetzt werden darf, und man wird so auf die in der sphärischen Trigonometrie geltenden Gleichungen geführt.

Im Unterschied gegen die Notiz [I.] wird in der Notiz [III.] ein Ansatz versucht, bei dem ω einen beliebigen spitzen Winkel bezeichnet. Einen Übergang hierzu bildet die kurze Notiz [II.], in der bereits $\omega\varphi(\Delta)$ und $\omega\psi(\Delta)$ durch $\varphi(\omega, \Delta)$ und $\psi(\omega, \Delta)$ ersetzt werden. Jedoch gilt die Gleichung

$$\frac{\partial\varphi(\omega, \Delta)}{\partial\Delta} = \psi(\omega, \Delta),$$

wie man sich leicht überzeugt, nur für kleine Winkel ω im Sinne der Notiz [I.].

In der Aufzeichnung [III.] handelt es sich um ein rechtwinkliges Dreieck mit dem spitzen Winkel ω, bei dem die Hypotenuse mit Δ bezeichnet wird; die Katheten heißen $\varphi(\omega, \Delta)$ und $\chi(\omega, \Delta)$, der andere spitze



Winkel wird gleich $90^0-\psi(\omega,\Delta)$ gesetzt. Es ist also in der Figur:

$$\text{(I)}\qquad \left\{\begin{aligned} BC &= \varphi(\omega,\Delta),\\ AC &= \chi(\omega,\Delta),\\ \sphericalangle ABC &= 90^0-\psi(\omega,\Delta).\end{aligned}\right.$$

Um Beziehungen zwischen den Funktionen $\varphi(\omega,\Delta)$, $\chi(\omega,\Delta)$ und $\psi(\omega,\Delta)$ zu gewinnen, fälle man von C das Lot CD auf die Hypotenuse AB und betrachte die rechtwinkligen Teildreiecke ACD und BCD. Zunächst wird im Dreieck ACD:

$$\text{(II)}\qquad \left\{\begin{aligned} CD &= \varphi(\omega,\chi(\omega,\Delta)),\\ AD &= \chi(\omega,\chi(\omega,\Delta)),\\ \sphericalangle ACD &= 90^0-\psi(\omega,\chi(\omega,\Delta)).\end{aligned}\right.$$

Mithin ist im Dreieck BCD der Winkel BCD gleich $\psi(\omega,\chi(\omega,\Delta))$ und daher:

$$\text{(III)}\qquad \left\{\begin{aligned} DB &= \varphi\{\psi(\omega,\chi(\omega,\Delta)),\ \varphi(\omega,\Delta)\},\\ CD &= \chi\{\psi(\omega,\chi(\omega,\Delta)),\ \varphi(\omega,\Delta)\},\\ \sphericalangle CBD &= 90^0-\psi\{\psi(\omega,\chi(\omega,\Delta)),\ \varphi(\omega,\Delta)\}.\end{aligned}\right.$$

Nun ist $AD+DB = AB$, $\sphericalangle CBD = \sphericalangle ABC$ und es müssen die beiden für CD gefundenen Werte übereinstimmen. Hieraus folgen die Funktionalgleichungen:

$$\text{(IV)}\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta &= \chi(\omega,\chi(\omega,\Delta))+\varphi\{\psi(\omega,\chi(\omega,\Delta)),\ \varphi(\omega,\Delta)\},\\ \psi(\omega,\Delta) &= \psi\{\psi(\omega,\chi(\omega,\Delta)),\ \varphi(\omega,\Delta)\},\\ \varphi(\omega,\chi(\omega,\Delta)) &= \chi\{\psi(\omega,\chi(\omega,\Delta)),\ \varphi(\omega,\Delta)\}.\end{aligned}\right.$$

Um aus ihnen die Funktionen φ, χ, ψ zu bestimmen, entwickelt GAUSS nach Potenzen von ω und setzt:

$$\text{(V)}\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi(\omega,\Delta) &= \omega f(\Delta)+\omega^2 f'(\Delta)+\omega^3 f''(\Delta)+\cdots,\\ \chi(\omega,\Delta) &= \Delta+\omega g(\Delta)+\omega^2 g'(\Delta)+\omega^3 g''(\Delta)+\cdots,\\ \psi(\omega,\Delta) &= \omega+\omega^2 h'(\Delta)+\omega^3 h''(\Delta)+\cdots;\end{aligned}\right.$$

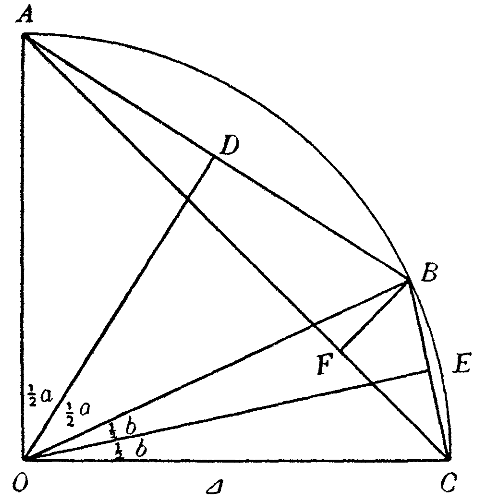
die Striche bedeuten hier nicht wie in der Notiz [I.] Ableitungen nach Δ, sondern sind als Indizes aufzufassen. Warum als Anfangsglieder der Entwicklungen $\omega f(\Delta)$, Δ und ω angenommen sind, ergibt die Figur, indem man zur Grenze für $\omega = 0$ übergeht; vergl. auch die Gleichung (2) zur Notiz [I.].

In der Scheda Af folgen noch einige flüchtig hingeworfene Zeilen, die zeigen, daß GAUSS die Entwicklungen (V) in die Gleichungen (IV) eingesetzt hat, aber nicht zur Bestimmung der Koeffizienten vorgedrungen ist; ihr Abdruck erschien nicht erforderlich. Dagegen verdient erwähnt zu werden, daß GAUSS dazwischen die Formel

$$\operatorname{Arctang}(\cos\omega.\operatorname{tang}\Delta) = \cos\omega.\mathrm{t[ang}\,\Delta] - \tfrac{1}{3}\cos\omega^3.\mathrm{t[ang}\,\Delta^3+\cdots]$$

vermerkt hat, deren linke Seite in der sphärischen Trigonometrie der Ausdruck für die Funktion $\chi(\omega,\Delta)$ ist.

Die Notiz [IV.] enthält einen anderen Ansatz, bei dem nur zwei zu bestimmende Funktionen auftreten. Um den Punkt O werde der Kreis mit dem Halbmesser Δ beschrieben. Es seien AB und BC



zwei Sehnen mit den Zentriwinkeln a und b. Von O fälle man auf AB das Lot OD, auf AC das Lot BF. Wenn dann die Funktionen $\varphi(\omega, \Delta)$ und $\psi(\omega, \Delta)$ dieselbe Bedeutung haben, wie in der Notiz [III.], so ist

$$AB = 2\varphi(\Delta, \tfrac{1}{2}a), \quad BC = 2\varphi(\Delta, \tfrac{1}{2}b),$$
$$\sphericalangle OAD = \sphericalangle OBD = 90^0 - \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}a),$$
$$\sphericalangle OBE = \sphericalangle OCE = 90^0 - \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}b),$$
$$\sphericalangle OAF = \sphericalangle OCF = 90^0 - \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}(a+b))$$

und daher

$$\sphericalangle BAF = \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}(a+b)) - \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}a),$$
$$\sphericalangle BCF = \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}(a+b)) - \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}b).$$

Mithin wird im Dreieck BAF:

$$BF = \varphi\left\{2\varphi(\Delta, \tfrac{1}{2}a),\ \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}(a+b)) - \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}a)\right\}$$

und im Dreieck BCF:

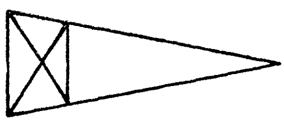
$$BF = \varphi\left\{2\varphi(\Delta, \tfrac{1}{2}b),\ \psi(\Delta, \tfrac{1}{2})) - \psi(\Delta, \tfrac{1}{2}b)\right\}.$$

Dies ist die erste Funktionalgleichung des Textes. Die zweite erhält man aus der doppelten Zerlegung des Winkels ABC:

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABF + \sphericalangle CBF = \sphericalangle OBD + \sphericalangle OBE.$$

Die weiteren Rechnungen brechen sogleich wieder ab. Gauss hat noch für $\varphi(\Delta, a)$ und $\psi(\Delta, a)$ die Ausdrücke hingeschrieben, die in der sphärischen Trigonometrie gelten, nämlich

$$\varphi(\Delta, a) = \Delta \sin a - \tfrac{1}{6}\Delta^3 \sin a \,.\, \cos a^2 + \cdots,$$
$$\psi(\Delta, a) = a - \tfrac{1}{2}\Delta\Delta \sin a \,.\, \cos a + \cdots.$$



Auf weitere Untersuchungen über die transzendente Trigonometrie deuten einige Figuren auf S. 71 der Scheda, von denen eine hier wiedergegeben sei. Was damit beabsichtigt ist, hat sich nicht feststellen lassen. Es ist bemerkenswert, daß die Werke VIII, S. 255—257 abgedruckte Notiz, in der Gauss eine Herleitung der transzendenten Trigonometrie gibt, ebenfalls auf geometrischen Konstruktionen und daraus folgenden Relationen für zwei unbekannte Funktionen beruht. Man vergleiche auch den in der zweiten Abteilung dieses Bandes abgedruckten Aufsatz »Gauss als Geometer«.

Stäckel.

[ZUR SPHÄRISCHEN TRIGONOMETRIE.]

{Die Fundamentalgleichung

$$\cos c \cos A = \sin c \cot b - \sin A \cot B$$

kann, mit Vertauschung der Buchstaben, noch auf folgende 5 Arten geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
\cos a \cos C &= \sin a \cot b - \sin C \cot B \\
\cos c \cos B &= \sin c \cot a - \sin B \cot A \\
\cos b \cos C &= \sin b \cot a - \sin C \cot A \\
\cos b \cos A &= \sin b \cot c - \sin A \cot C \\
\cos a \cos B &= \sin a \cot c - \sin B \cot C.
\end{aligned}$$

Die Form, in welcher diese Gleichungen hier geschrieben sind, eignet sich am besten dazu, um sie im Gedächtniss zu behalten. Denn da die vier Bestandtheile, welche hier in Betracht kommen, im Umfange des Dreiecks unmittelbar auf einander folgen, so kann man immer zwei derselben wie mittlere, und die beiden andern wie äussere ansehen. Alsdann sagt die Gleichung in Worten: Das Product der Cosinus der beiden mittleren Bestandteile ist gleich dem Producte aus dem Sinus der mittleren Seite mit dem Cotangens der äusseren Seite, vermindert um das Product aus dem Sinus des mittleren Winkels mit dem Cotangens des äusseren Winkels. Man beachte dabei die Ähnlichkeit, welche das Vorkommen von cos, sin und cot mit den Napierschen Regeln hat.

Dieses mnemonische Hülfsmittel pflegte Gauss seinen Zuhörern mitzuteilen.}

BEMERKUNG.

In dem *Lehrbuch der Elementar-Mathematik* von TH. WITTSTEIN, 2. Band, 2. Abteilung: *Stereometrie*, Hannover 1862, finden sich, wie im Vorwort, S. VIII, hervorgehoben wird, drei auf GAUSS zurückgehende Stellen. Die auf inhaltsgleiche sphärische Dreiecke bezügliche Stelle, S. 119, deckt sich mit dem Werke VIII, S. 293 abgedruckten Briefe von GAUSS an SCHUMACHER vom 6. Jan. 1842. Die in der zweiten, S. 161, gegebene Herleitung der sogenannten MOLLWEIDEschen Gleichungen findet sich schon in dem Werke VIII, S. 289 abgedruckten Briefe von GAUSS an GERLING vom 18. Februar 1815. Dagegen verdient die S. 146 des WITTSTEINschen Buches mitgeteilte Gedächtnisregel für die Fundamentalgleichung hier nachgetragen zu werden.

STÄCKEL.

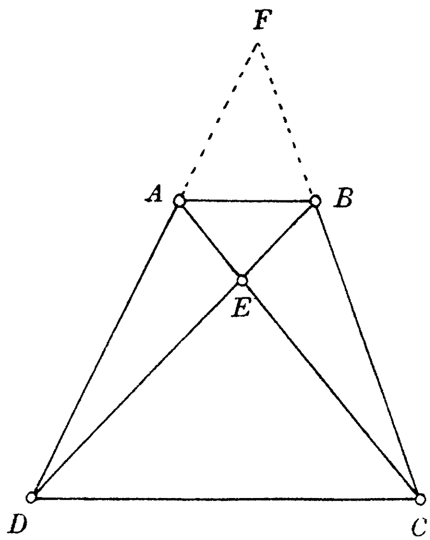
BRIEFWECHSEL.

[1.]

SCHUMACHER an GAUSS. Altona, 19. März 1836.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER III, Altona 1861, S. 7—8.]

{. . . . Mir ist neulich ein Paradox vorgekommen, das ich so frei bin Ihnen vorzulegen. Ich kann es noch nicht genügend erklären.



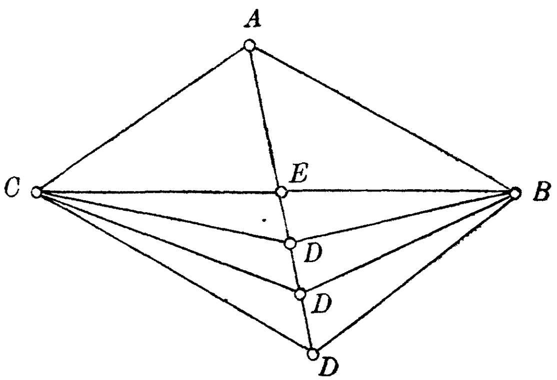
Bekanntlich ist, wenn man bei einem Vierecke $ABCD$ einen Punct sucht, von dem die Summe der an die Winkelpuncte gezogenen Linien ein Minimum sey, der gesuchte Punct der Durchschnittspunct der Diagonalen E. Lässt man nun die Puncte A, B in den Linien DA, BC immer mehr hinaufrücken, bis sie am Ende in F zusammenfallen, so fällt auch E zugleich in F, das Viereck verwandelt sich in das Dreieck DFC, und man hätte den Punct F als denjenigen, von dem die Summe der an die Winkelpuncte F, C, D des Dreiecks gezogenen Linien ein Minimum sey. Das ist aber bekanntlich nur wahr, wenn der Winkel $F \geqq 120^0$.

Noch mehr, man kann dieselbe Construction bei jedem der andern beiden Winkelpuncte des Dreiecks machen, und würde, wenn die Seiten des Dreiecks a, b, c sind, so 3 Gleichungen erhalten:

$$a+b = \text{Minimum}$$
$$b+c = \text{Minimum}$$
$$a+c = \text{Minimum},$$

also $a+b = b+c = a+c$, welches absurd ist. Es folgt daraus $a = b = c$.

Ebenso wenn man das Viereck $ABCD$ betrachtet, so ist der gesuchte Punct wiederum E. Lässt man nun D auf AD immer gegen E rücken, bis dieser Punct in CB fällt, so verwandelt sich das Viereck in das Dreieck ABC



und der gesuchte Punct muss, da der Schnitt aufhört, irgendwo in der Linie CB liegen. Offenbar erfüllt jeder Punct in dieser Linie (der zwischen C und B liegt*)) die Bedingung für die Puncte C, B; soll er sie auch für den Punct A erfüllen, so muss es das Perpendikel von A auf CB seyn. Ebenso kann man bei jeder der andern beiden Seiten des Dreiecks raisonniren. Wenn also die Seiten s, s', s'', die darauf gefällten Perpendikel p, p', p'' sind, so hat man:

$$s+p = \text{Min.}$$
$$s'+p' = \text{Min.}$$
$$s''+p'' = \text{Min.},$$

also $s+p = s'+p' = s''+p''$, welches wiederum absurd ist, da bekanntlich:

$$sp = s'p' = s''p''.\}$$

---

*) auch C und B selbst. Dann ist

$$BC+BA = \text{Minimum}$$
$$CA+BC = \text{Minimum},$$

also $CA = BA$, quod absurdum.

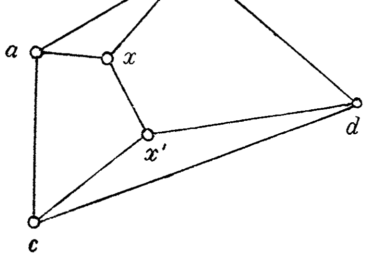
[2]

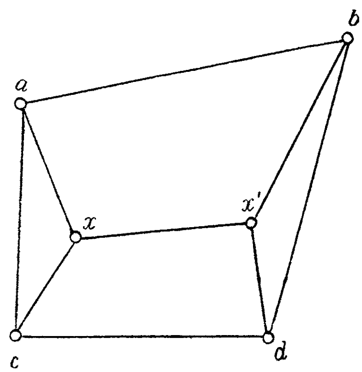
GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 21. März 1836.

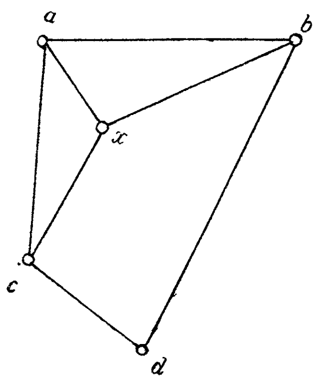
[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER III, Altona 1861, S. 13—14.]

.... Was Ihr Viereck betrifft, so heisst doch die Aufgabe so: Vier Pkte a, b, c, d sind gegeben, man soll einen 5ten x finden, so dass $ax+bx+cx+dx$ ein Minimum wird, und das ist von den 3 Durchschnittspunkten ab mit cd, ac mit bd, ad mit bc der eine, wo man für die Auswahl die Bedingung entweder leicht auf Anschauung reduciren, oder analytisch einkleiden könnte. Lassen Sie nun a, b, c fest sein und d dem c immer näher rücken, so bleibt diese Auflösung noch immer so lange richtig, als Sie nicht c mit d zusammenfallen lassen. Fällt aber c mit d zusammen, so erfordert Geist und Buchstabe der mathematischen Aufgabe, als solcher, dass Sie dann c zweimahl zählen, also in dem Dreieck abc $ax+bx+2cx$ zu einem Minimum machen, wo sich die allgemeine Auflösung noch immer als richtig ausweiset.

Ist bei einem 4 Eck nicht von der stricten mathematischen Aufgabe, wie sie oben ausgesprochen ist, sondern von dem kürzesten Verbindungssystem die Rede, so werden mehrere einzelne Fälle von einander unterschieden werden müssen, und es bildet sich so eine recht interessante mathematische Aufgabe, die mir nicht fremd ist, vielmehr habe ich bei Gelegenheit einer Eisenbahnverbindung zwischen Harburg, Bremen, Hannover, Braunschweig sie in Erwägung genommen und bin selbst auf den Gedanken gekommen, dass sie eine ganz schickliche Preisfrage für unsre Studcnten bei Gelegenheit abgeben könnte. Die Möglichkeit verschiedener Fälle erläutern wohl hinreichend folgende Figuren:







wo in der dritten Figur die Verbindung von c nach d direct gehen muss (was wirklich bei obigem Beispiel der Fall wird). Doch die Zeit drängt, also heute hiervon nicht mehr . . . . . .

[3.]

SCHUMACHER an GAUSS. Altona, 2. April 1836.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER III, Altona 1861, S. 24—25.]

{. . . . . Bei Ihrem Problem der vortheilhaftesten Verbindung von 4 Städten, kann es auch vorkommen, dass eine Verbindung zwischen zweyen derselben ein grösseres Gewicht bekommt, weil diese Verbindung dem, der die Kosten der Eisenbahn hergiebt, wichtiger ist als die anderen. In diesem Falle würde die gebrochene Linie zwischen beiden Städten mehr der graden, die durch beide geht, genähert werden müssen. Ist es in dieser Rücksicht, dass die Verbindung von Braunschweig nach Hannover nach der graden Linie geht, also das höchste Gewicht hat, oder ist es von dem von mir erwähnten Gewicht abgesehen, eine Folge ihrer gegenseitigen Lage?}

[4.]

SCHUMACHER an GAUSS. Altona, 7. April 1836.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER III, Altona 1861, S. 26—28.]

{Ich muss Sie, mein theuerster Freund, noch einmal mit einer Kleinigkeit beschweren, nemlich mit der Auflösung der Aufgabe: wenn 4 Puncte gegeben sind, einen 5ten zu finden, von dem die an die gegebenen 4 gezogenen Linien ein Minimum sind. Ich kann nicht die in Ihrem Briefe angedeutete Auflösung, nemlich dass es einer von den Durchschnittspuncten der durch 2 dieser Puncte gezogenen Linien ist, finden. Um sie in den Stand zu setzen, besser darüber zu urtheilen, worin mein Fehler liegt, will ich Ihnen kurz darlegen, wie ich die Sache angegriffen habe.

Zuerst nahm ich die Aufgabe sur le haut ton, und fing mit einer beliebigen Anzahl von Puncten an, deren rechtwinklichte Coordinaten (a, b), (a', b'), (a'', b'') ... u.s.w. sind. Wenn ich die Coordinaten des unbekannten Punctes (x, y) setze, so ergeben sich gleich die Gleichungen

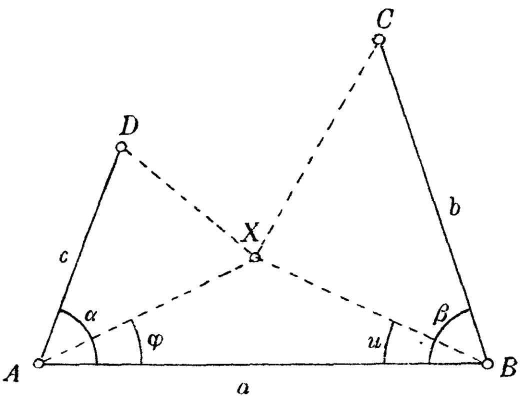
$$0 = \frac{x-a}{\sqrt{\{(x-a)^2+(y-b)^2\}}} + \frac{x-a'}{\sqrt{\{(x-a')^2+(y-b')^2\}}} + \frac{x-a''}{\sqrt{\{(x-a'')^2+(y-b'')^2\}}} + \cdots \text{ u.s.w.}$$

$$0 = \frac{y-b}{\sqrt{\{(x-a)^2+(y-b)^2\}}} + \frac{y-b'}{\sqrt{\{(x-a')^2+(y-b')^2\}}} + \frac{y-b''}{\sqrt{\{(x-a'')^2+(y-b'')^2\}}} + \cdots \text{ u.s.w.}$$

Daraus fand ich dann, da $\frac{y-b}{x-a}$ die Tangente des Winkels ist, den die durch die Puncte (x, y), (a, b) gezogene Linie mit der Abscissenaxe*) macht (diese Winkel mit w, w', w'' u.s.w. bezeichnet), für das Minimum die beiden Gleichungen

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} 0 = \cos w + \cos w' + \cos w'' + \cdots \\ 0 = \sin w + \sin w' + \sin w'' + \cdots, \end{cases}$$

und da die Lage der Abscissenaxe beliebig ist, da die gegebenen Abscissen, welche sich auf die angenommene Lage der Abscissenaxe bezogen, ganz aus diesen Ausdrücken verschwunden sind, so kann man die Winkel w, w', w'' ... von jeder beliebigen durch (x, y) gezogenen Linie rechnen. Den Gleichungen (A) geschieht Genüge, wenn die von (x, y) an (a, b), (a', b') u.s.w. gezogenen Linien lauter gleiche Winkel bilden, und für ein Viereck, dessen innere Winkel alle $< 180^0$ sind, durch den Durchschnittspunct der Diagonalen. Mehr kann ich aber nicht aus den Grundgleichungen herausbringen. Will ich x und y direct suchen, so komme ich auf mir unübersehbare Complication.



Ich versuchte es noch für das Viereck auf eine andere Art. Sind A, B, C, D die gegebenen, X der gesuchte Punct, so nahm ich als Gegebene der Aufgabe a, b, c und die Winkel α, β, als Unbekannte die Winkel φ, u. Die

*) oder einer durch (x, y) gezogenen Parallele mit der Abscissenaxe.

Function

$$U = a\frac{\sin u}{\sin(\varphi+u)} + a\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+u)} + \sqrt{\left(\frac{aa\sin\varphi^2}{\sin(\varphi+u)^2} + bb - 2ba\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+u)}\cos(\beta-u)\right)}$$
$$+\sqrt{\left(\frac{aa\sin u^2}{\sin(\varphi+u)^2} + cc - 2ca\frac{\sin u}{\sin(\varphi+u)}\cos(\alpha-\varphi)\right)}$$

soll dann ein Minimum seyn. Die Gleichungen $\frac{\partial U}{\partial\varphi} = 0$ und $\frac{\partial U}{\partial u} = 0$ sind aber auch für mich zu complicirt.

Möchten Sie wohl, mein theuerster Freund, wenn Sie einen freien Augenblick haben, mir Ihre Methode mittheilen? Man könnte es wohl, wenn man sich gleiche Gewichte an 4 von einem Punct ausgehenden Fäden hängend vorstellte, die über Rollen in den Puncten A, B, C, D gingen, machen; wo dann das Gleichgewicht zu suchen wäre, bei dem die Gewichte den Verbindungspunct der Fäden in den gesuchten ziehen würden. Will man dann einigen Puncten eine grössere verhältnissmässige Wichtigkeit beilegen, so lässt sich das leicht durch grösseres an diesen Puncten angebrachtes Gewicht ausdrücken. Ich vermuthe aber, Sie haben einen rein analytischen oder geometrischen Weg gewählt . . . . .}

[5.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 13. April 1836.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER III, Altona 1861, S. 30—32.]

Wegen der geometrischen Aufgabe bin ich sehr gern erbötig, mich Ihnen näher zu expliciren, sobald Sie, mein theuerster Freund, mir erst näher bezeichnen, was denn eigentlich Ihnen dabei einer nähern Explication bedürftig scheint. Obgleich ich Ihren Brief wiederholt gelesen habe, ist es mir doch nicht möglich gewesen, dieses daraus abzunehmen. Da nun aber der Gegenstand viele Seiten hat, und eine complete Auseinandersetzung von Allem ein kleines Buch füllen könnte, so würde ich, wenn ich auf gut Glück Eine Seite hervorhöbe, und alles was ich darüber sagen könnte, entwickelte, riskiren, mich ganz vergeblich abgequält zu haben, wenn sich nachher fände, dass das gar nicht der Ihnen dunkele Punkt gewesen sei. Sie leiten aus Ihrem

Calcul zwei Gleichungen ab:

$$\text{(A)}\qquad \begin{cases} 0 = \cos w + \cos w' + \cos w'' + \cos w''' \ldots \\ 0 = \sin w + \sin w' + \sin w'' + \sin w''' \ldots . \end{cases}$$

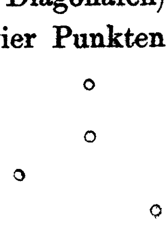
Sie sagen ferner: diesen Gleichungen geschehe Genüge, wenn die von (x, y) nach (a, b), (a', b'), $(a'', b'')\ldots$ gezogenen Linien lauter gleiche Winkel bilden und für ein Viereck, dessen innere Winkel alle < 180 sind, durch den Durchschnitt der Diagonalen. (Ich verstehe dies so, dass Sie zwei Fälle als von selbst einleuchtend vorfinden 1) allgemein wenn $w' - w = w'' - w' = w''' - w'' = \text{etc.} = w - w^n$, 2) wenn bei 4 Pkten $w'' = w + 180^0$, $w''' = w' + 180^0$). Mehr (fahren Sie fort) kann ich aber nicht aus den Grundgleichungen herausbringen.

Ich weiss nun eigentlich nicht, was Sie denn mehr gewünscht haben. Ich kann also nur rathen. Z. B.

1) wollen Sie sich nicht mit der Aufgabe, wo nur von 4 Pkten die Rede ist (von welcher allein in unsern frühern Briefen die Rede gewesen ist), beschäftigen, sondern auch mit einer grössern Zahl? Eine solche allgemein betrachet wird immer auf höhere Gleichungen führen müssen,

2) oder wenn Sie, wie der Anfang Ihres Briefes vermuthen lässt, sich nur mit 4 Pkten beschäftigen, was wünschen Sie in diesem Fall mehr? Ist es Ihnen vielleicht nicht einleuchtend, dass dann aus den Gleichungen (A) Ihr Schluss mit Nothwendigkeit folgt? Dies würde sich (sobald ich weiss, dass dies Ihr Bedenken ist) leicht erledigen können, oder

3) finden Sie Anstoss daran, dass das Resultat (Schnitt von 2 Diagonalen) nur für Vierecke gilt, deren Winkel alle $< 180^0$, und dass bei vier Punkten wie [die Figur sie zeigt], die ein Dreieck, mit dem vierten Pkte inwendig, bilden, nothwendig dieser vierte Pkt die Auflösung gibt? Dann würde sich die Metaphysik davon und warum hier die blinde Rechnung aus den Gleichungen (A) nicht zureicht, leicht aufhellen lassen Oder verlangen Sie



4) dass die Unterscheidung in beiden Fällen

auf eine analytische Bedingung reducirt werde, so würde sich das auch thun lassen, obwohl ich die Entwicklung in diesem Augenblick nicht gegenwärtig habe . . . . .

[6.]

Schumacher an Gauss. Altona, 19. April 1836.

[Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher III, Altona 1861, S. 39—40.]

{Ich sehe aus Ihrer Antwort, mein theuerster Freund, mit Beschämung, dass ich mich sehr undeutlich ausgedrückt haben muss. Vor allem bitte ich Sie überzeugt zu seyn, dass es nie meine Absicht gewesen ist, dass Sie sich abquälen sollten, ein Missverständniss, das ich kaum möglich gehalten hätte, wenn ich auch vergessen habe hinzuzufügen, dass meine Bitten nur unter der Voraussetzung gemacht waren, dass Sie sie in einigen müssigen Augenblicken erfüllen konnten.

Es kann jetzt nicht von dem, was ich wünschte, mehr die Rede seyn; es sei mir nur erlaubt historisch zu bemerken, dass ich in Bezug auf Ihren Brief vom 21. März (in dem Sie den Punct, der dem gesuchten Minimum bei einem Viereck *abcd* entspricht, in einen der 3 Durchschnittspuncte der Linien *ab*, *cd*; *ac*, *bd*; *ad*, *bc* legen) diese 3 Puncte aus den Gleichungen zwischen den Cosinussen und Sinussen von *w* abzuleiten suchte, aber nur, wenn alle inneren Winkel $< 180^0$, den Durchschnittspunct der Diagonalen finden konnte, und daher zu wissen wünschte, wie man diese 3 Puncte durch Rechnung aus den bekannten Gleichungen finden könnte.

Ich wünschte ferner zu wissen, ob sich die gesuchten Coordinaten x, y aus den Gleichungen zwischen den Coordinaten finden lassen, wobei ich schon für das Viereck auf unübersehbare Complication stiess.

Dass aus den Gleichungen für sin und cos der Winkel *w* mein Schluss mit Nothwendigkeit folge, hatte ich freilich nicht bewiesen, ich vermuthe aber der Beweis wird sich aus dem Umstande, dass die Lage der Linie, von welcher die Winkel w gezählt werden, beliebig ist, herleiten lassen.

Nachdem ich so das, was ich sagen wollte, erklärt habe, bitte ich Sie herzlich, meinen Wunsch als nicht gemacht anzusehen und weiter nicht zu beachten . . . . .}

[7.]

Gauss an Schumacher. Göttingen, 21. April 1836.

[Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher III, Altona 1861, S. 44—45.]

Es scheint, mein theuerster Freund, dass Sie den von mir ungeschickter Weise gebrauchten Ausdruck abquälen härter auslegen als er gemeint war. Ich übernehme gern (wie ich glaube öfters bewiesen zu haben) selbst weitläuftige Auseinandersetzungen, wenn ich weiss, Ihnen damit eine Gefälligkeit zu erweisen. Ich wollte nur sagen, dass ich vorher gewiss zu sein wünschte, welches der dunkle Punkt sei, um nicht zu riskiren, das zu thun, was die Römer hircum mulcere nannten.

In der That bin ich es bei dem fraglichen Gegenstande noch immer nicht. Es lässt sich

1) aus Ihren Gleichungen beweisen, dass **nur** der Durchschnittspunkt zweier Seitenpaare ihnen Genüge leistet.

Es scheint aber nach Ihrem Briefe, dass Sie auf die Entwicklung dieses Beweises, der die Nothwendigkeit zeigt, keinen Werth legen, und in dieser Ungewissheit enthalte ich mich jetzt der Entwickelung.

Dann aber hat auch die analytische Auflösung, den Punkt zu finden, wo zwei durch zwei Paare gegebener Punkte gezogene Linien einander schneiden, gar keine Schwierigkeit. In der That, wenn es die beiden Paare a, b mit a', b' und a'', b'' mit a''', b''' sind, so hat man die beiden Gleichungen

$$x(b'-b)+y(a-a')+a'b-ab'=0$$
$$x(b'''-b'')+y(a''-a''')+a'''b''-a''b'''=0,$$

woraus x und y durch Elimination folgen.

Und ebenso erhält man die beiden andern Durchschnittspunkte . . . . .

BEMERKUNG.

Daß bei einem ebenen Viereck, dessen Winkel kleiner als 180° sind, der Schnittpunkt der Diagonalen den Punkt kleinster Entfernungssumme liefert, hatte bereits J. FR. A. FAGNANO bewiesen: *Problemata quaedam ad methodum maximorum et minimorum spectantia,* Nova acta eruditorum anni 1775, Lipsiae 1779, S. 281. Die Verallgemeinerung auf *n* Punkte haben TÉDENAT und L'HUILIER behandelt, Annales de mathématiques pures et appliquées publiées par GERGONNE **1**, 1810—11, S. 285 und 291; bei ihnen findet sich auch schon die von SCHUMACHER in dem Briefe [4.] hergeleitete Gleichung (A).

Die Worte: h i r c u m m u l c e r e, deren sich GAUSS im ersten Absatz der Briefstelle [7.] bedient, sind eine Anspielung auf den Vers in VERGILS *Bucolica,* Ecloga III, 91:

Atque idem iungat vulpes et mulgeat hircos.

Die beiden im dritten Bande des Briefwechsels zwischen GAUSS und SCHUMACHER als Nr. 528 und Nr. 529 abgedruckten Briefe (unter [7.] ist der erste Teil von Nr. 528 wiedergegeben), bilden in Wirklichkeit einen einzigen Brief, dem das Datum des 21. April 1836 zukommt; dies geht mit voller Deutlichkeit daraus hervor, daß SCHUMACHER in dem Briefe Nr. 531 den GAUSSschen Brief vom 21. April »Ihren vorletzten Brief« nennt (a. a. O. S. 53 und 54), so daß also zwischen Nr. 529 und Nr. 530 kein Brief von GAUSS an SCHUMACHER liegt, während GAUSS auf SCHUMACHERS Brief Nr. 527 vom 19. April nicht v o r dem 21. April antworten konnte.

Die hier abgedruckten Briefstellen sind nach den im GAUSSarchiv befindlichen Handschriften ohne jede Änderung wiedergegeben.

STÄCKEL.

[MANNIGFALTIGKEITEN VON *n* DIMENSIONEN.]

[I.]

ÜBER DIE ERMITTELUNG DES KLEINSTEN WERTHES FÜR DAS MAASS DES ZWANGES.

[A. Ritter, *Ueber das Princip des kleinsten Zwanges*, Inaugural-Dissertation, Göttingen 1853, S. 20—23.]

{Die Regel, welche die Mathematik für das Aufsuchen der grössten und kleinsten Werthe einer »stetigen« Funktion angiebt, ist bekanntlich die: man variire die Funktion und setze die Coefficienten der von einander unabhängigen Variationen gleich Null; die Auflösung der hierdurch erhaltenen Gleichungen ergiebt die gesuchten Werthe der unabhängigen Veränderlichen. Die Gleichung $dZ = 0$ würde daher unsere Aufgabe sofort zum Abschluss bringen unter der Voraussetzung, dass Z eine stetige Funktion ist; sie ist der Ausdruck für das Lagrangesche Princip, also identisch mit derjenigen, welche aus der Verbindung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten mit dem Dalembertschen Princip sich ergiebt. Sie enthält in der That die allgemeinen Gesetze der Bewegung eines Systems materieller Punkte für alle die Fälle, wo die Bedingungen, denen die Bewegung unterworfen ist, sich durch »Gleichungen« ausdrücken lassen.

Anders verhält es sich indessen, wenn unter den gegebenen äusseren Beschränkungen auch solche vorkommen, welche nur durch »Ungleichungen«, z. B. von der Form

$$f(\xi, \eta, \zeta, \ldots) \geqq 0$$

auszudrücken sind. In diesem Falle wird die Funktion Z unstetig, und der Anwendung jener Regel muss dann eine Untersuchung desjenigen Theils ihrer

Werthen-Reihe vorangehen, welcher bei der vorliegenden Frage in Betracht kommt.

Mit Hülfe jeder gegebenen Bedingungs-Gleichung lässt sich Eine der veränderlichen Grössen in der Funktion Z eliminiren. Nennen wir den Inbegriff aller Werthe einer von N veränderlichen Grössen abhängigen Funktion für alle Combinationen dieser Grössen von $-\infty$ bis $+\infty$ einen analytischen Raum von N Dimensionen*), so wird die Berücksichtigung jeder »Gleichung«, die Wirkung haben, dass sie die Anzahl der Dimensionen des analytischen Raumes der Funktion Z um Eine vermindert. Jede »Ungleichung« dagegen beschränkt das Gebiet der Veränderlichkeit, ohne eine Dimension hinwegzunehmen, sie theilt den ganzen analytischen Raum der Funktion in zwei Theile, deren Einer als »möglich«, während der andere als »unmöglich« betrachtet werden soll.

Unsere Aufgabe schreibt nun vor: es soll unter allen »möglichen« Werthen-Combinationen diejenige gesucht werden, welche die Funktion Z zu einem Minimum macht. Unsere nächste Sorge wird daher die sein: die Ausdehnung des »möglichen« Gebietes in dem analytischen Raum jener Funktion kennen zu lernen. Es sei nun durch Berücksichtigung sämmtlicher »Gleichungen« die Anzahl seiner Dimensionen bis auf n vermindert, und die Anzahl der noch zu berücksichtigenden »Ungleichungen« sei $= \mu$; dann wird, wenn wir den ganzen analytischen Raum von n Dimensionen mit $\mathfrak{R}_n$ bezeichnen, die Wirkung der Ungleichungen die sein: dass sie das mögliche Gebiet auf ein begrenztes Stück des Raumes $\mathfrak{R}_n$ einschränkt, und zwar wird dieses Stück, welches wir $\mathfrak{r}_n$ nennen, immer noch einen Raum von n Dimensionen bilden.

Es sind nun zwei Fälle möglich: entweder liegt der Punkt, welcher die gesuchte Werthen-Combination repräsentirt, »innerhalb« des Raumes $\mathfrak{r}_n$, oder er liegt in der Begrenzung desselben. Um uns hierüber Aufschluss zu verschaffen, suchen wir zunächst denjenigen Punkt des Raumes $\mathfrak{R}_n$ auf, welcher das absolute Minimum der Funktion Z repräsentirt, d. h. wir suchen nach der bekannten Regel ihr Minimum, ohne die Ungleichungen zu berücksichtigen. Findet sich dann, dass die Substitution der gefundenen Werthe alle Unglei-

*) Die hierdurch wesentlich erleichterte Ausdrucksweise möge diese Einkleidung entschuldigen.

chungen positiv macht, so ist die Aufgabe gelöst, und es ist so gut, als wären gar keine Ungleichungen vorhanden gewesen.

Im entgegengesetzten Falle ist der Punkt in der Begrenzung des Stückes $\mathfrak{r}_n$ zu suchen, und die anzuwendende Methode wird im Allgemeinen folgende sein. Vorausgesetzt: dass die Ungleichungen von einander unabhängig sind, d. h. dass keine von ihnen in einer oder mehreren der anderen enthalten ist, werden die Grenzen des Stücks $\mathfrak{r}_n$ durch μ Räume von $n-1$ Dimensionen gebildet, und je n von diesen Grenz-Räumen schneiden sich in Einem Punkte; oder — wenn $n > \mu$ — alle Grenz-Räume haben Einen Raum von $n-\mu$ Dimensionen gemeinschaftlich. Der erste Schritt ist nun der: dass wir Einen der Durchschnittspunkte (im ersten Falle) oder Einen Punkt des Durchschnitts-Raums (im letzteren) aufsuchen; dieser Punkt bildet den Ausgangspunkt für unsere Untersuchung. Wir finden ihn, indem wir irgend ein Werthen-System aufsuchen, welches n von den Ungleichungen $=$ Null und die übrigen positiv, oder — wenn $n > \mu$ — welches alle μ Ungleichungen $=$ Null werden lässt. Von diesem Punkte ausgehend untersuchen wir weiter: in welcher Richtung wir von ihm fortschreiten müssen, um den Werth der Funktion Z am schnellsten abnehmen zu lassen, oder auf welche Weise eine gegebene Aenderung von Z durch möglich kleinste Aenderung des Werthen-Systems zu erreichen ist, wobei als Maass der letzteren die Summe der Quadrate der einzelnen Aenderungen betrachtet werden kann. In der gefundenen Richtung lassen wir dann den Punkt sich ändern, bis entweder derjenige Punkt, in welchem die Funktion ein Minimum wird, erreicht ist, oder bis eine der vorher positiven Ungleichungen aufhört erfüllt zu sein, d. h. Null wird. Im ersteren Falle ist die Aufgabe gelöst, im letzteren bildet der gefundene Punkt den Ausgangspunkt für eine ähnliche Untersuchung, welche ihrerseits dann wieder zu einem anderen Punkte führt, der entweder selbst das Minimum repräsentirt, oder wieder als Ausgangspunkt für einen dritten Schritt dient — kurz die ganze Operation wird so lange fortgesetzt, bis man zu einem Werthen-Systeme gelangt, welches die Eigenschaft besitzt, dass jede »mögliche« Aenderung desselben mit einem Grösserwerden der Funktion Z verbunden ist. Die Grenz-Räume, in deren gemeinschaftlichem Durchschnittsraum der endlich gefundene Punkt liegt, repräsentiren die »wirksamen« Ungleichungen, d. h. diejenigen, welche als Gleichungen erfüllt werden.

Die Aufgabe würde daher vollkommen die nämliche gewesen sein, wenn diese wirkenden Ungleichungen von vornherein als Gleichungen, die übrigen Ungleichungen aber gar nicht gegeben wären. Die mögliche Veränderlichkeit der Funktion Z wäre dann schon durch die Natur der Aufgabe auf die richtige Anzahl der »unabhängigen« Veränderlichen beschränkt und innerhalb dieser Beschränkung eine stetige gewesen; und in diesem Falle würde also der Anwendung des LAGRANGEschen Princips oder der hiernach modificirten Gleichung $dZ = 0$ Nichts entgegengestanden haben; während sonst, in der Ungewissheit über die wirkenden Ungleichheiten, oder über die wirklich unabhängigen Veränderlichen, jenes Princip, um allgemein gültig zu sein, nur in der Form $dZ \geqq 0$ ausgesprochen werden dürfte, also in Form einer Ungleichung, eines indirecten Urtheils. Dem Sinne nach würde es in dieser Fassung mit dem GAUSSschen Princip übereinstimmen, ohne jedoch die Eleganz der Form und die unmittelbare Evidenz des letzteren zu erreichen.}

[II.]

BESTIMMUNG DES KLEINSTEN WERTHES DER SUMME

$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=R^2$

FÜR m GEGEBENE UNGLEICHUNGEN $u \geqq 0$.

[Aus der Vorlesung *Über die Methode der kleinsten Quadrate,* Wintersemester 1850/51, nachgeschrieben von AUGUST RITTER.]

[1.]

Die gegebenen Ungleichungen seien linear und ihre Anzahl grösser als die der Variabeln. Für diesen Fall ist das Verfahren folgendes. Wir setzen n von den Ungleichungen gleich 0 und zwar eine solche Combination von n Ungleichungen, bei welcher die übrigen $m-n$ positiv werden, d. h. wir suchen für die Grössen

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

ein System von Werthen

$$k_1, k_2, \ldots, k_n,$$

welche n von den Ungleichungen zu 0, die übrigen $m-n$ positiv werden lassen. Von diesem bestimmten Werthen-System gehen wir nun aus und untersuchen zunächst, wie man dasselbe ändern muss, damit die Summe ihrer Quadrate am schnellsten abnehme, oder, was dasselbe bedeutet, wie man eine vorgeschriebene Abnahme jener Summe durch eine möglichst geringe Aenderung des Werthen-Systems erreichen kann. Als Maass der letzteren betrachten wir die Wurzel aus der Summe der Quadrate der einzelnen Aenderungen. Unter allen Combinationen $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$, welche eine vorgeschriebene

Aenderung $-2\lambda_1$ unserer Funktion bewirken, suchen wir also diejenige heraus, bei welcher die Grösse

$$\sqrt{\delta x_1^2 + \cdots + \delta x_n^2}$$

den kleinsten Werth annimmt. Um dies analytisch auszudrücken, haben wir die Variation der Grösse R^2 gleich $-2\lambda_1$ zu setzen, nachdem wir darin die Werthe $k_1, \ldots, k_n$ für die Grössen $x_1, \ldots, x_n$ substituirt haben, und dann zu untersuchen, wie unter dieser Bedingung und unter den aus der Variation von

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \ldots, \quad u_n = 0$$

hervorgehenden Bedingungen

$$\delta u_1 \geqq 0, \quad \delta u_2 \geqq 0, \quad \ldots, \quad \delta u_n \geqq 0$$

die Grösse

$$\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \cdots + \delta x_n^2 = R_1^2$$

ein Minimum wird. Wir haben also jetzt in Bezug auf die Grössen $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ genau dieselbe Aufgabe zu lösen, wie vorher in Bezug auf $x_1, \ldots, x_n$, nur dass wir statt wie vorhin n jetzt nur $n-1$ Variabeln haben (denn Eine kann mittelst der Gleichung

$$\delta(R^2) = -2\lambda_1$$

eliminirt werden) und statt der m früheren Ungleichungen nur n. Wenden wir daher dasselbe Verfahren auf diese neue Aufgabe an. —

Wir suchen wieder zuerst eine Combination von Werthen für $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$, welche $n-1$ von den Ungleichungen zu 0 und die letzte positiv macht und die Gleichung

$$\delta(R^2) + 2\lambda_1 = 0$$

[befriedigt]; seien diese Werthe

$$l_1, \ l_2, \ \ldots, \ l_n.$$

Von dieser Combination von Werthen ausgehend suchen wir dann die kleinste Aenderung dieses Werthen-Systems, welche eine vorgeschriebene Abnahme der Funktion R_1^2 um $2\lambda_2$ hervorbringt. Die Aenderungen $[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$ der einzelnen Werthe müssen dabei also folgenden Bedingungen genügen:

$$\delta^2(R^2) = 0, \quad \delta(R_1^2) = -2\lambda_2; \quad \delta^2 u_1 \geqq 0, \ \delta^2 u_2 \geqq 0, \ \ldots, \ \delta^2 u_{n-1} \geqq 0,$$

und wie schon bemerkt soll die Summe ihrer Quadrate $\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2=R_2^2$ ein Minimum dabei sein. Dies ist wiederum eine der ursprünglichen völlig analoge Aufgabe; wir haben aber statt der n Variablen jetzt nur $n-2$ (weil zwei von ihnen aus den beiden Gleichungen $[\delta R^2+2\lambda_1=0,\ \delta R_1^2+2\lambda_2=0]$ eliminirt werden können) und statt der m Ungleichungen nur $n-1$.

Die Auflösung dieser dritten Aufgabe führt wieder auf eine ähnliche vierte, diese auf eine fünfte etc., wobei jedesmal die folgende Eine Veränderliche und Eine Ungleichung weniger enthält als die ihr vorhergehende Aufgabe.

Im weiteren Verlauf dieses Verfahrens können nun zwei verschiedene Fälle eintreten: entweder es lässt sich bis zum letzten Schritte, wo man es nur noch mit Einer Veränderlichen und 2 Ungleichungen zu thun hat, ohne Hinderniss verfolgen; oder aber es tritt schon vorher ein solches ein, welches der Fortsetzung des Verfahrens in der bisherigen Weise ein Ende macht.

Bei jeder neuen Aufgabe tritt nämlich, wie wir gesehen haben, die Frage auf: wie man durch eine möglichst geringe Aenderung des vorliegenden Werthen-Systems eine gewisse Abnahme der Function R^2 um 2λ erreichen könne. Es kann nun der Fall eintreten — und darin besteht eben das erwähnte mögliche Hinderniss —, dass eine solche Abnahme der Grösse R^2 überhaupt durch keine Aenderung des Werthen-Systems erreicht werden kann, eben weil sie durch Substitution der betreffenden Werthe schon ihren kleinsten Werth erhalten hat.

In beiden Fällen ist man zu gewissen End-Werthen gelangt, welche der letzten Partial-Aufgabe genügen, und es fragt sich nun, wie man diese Werthe zur Auflösung der Haupt-Aufgabe weiter benutzen kann. Zuvor ist jedoch noch zu bemerken, dass in dem ersten Falle, wo die Natur der Aufgabe es mit sich bringt, dass man das angegebene Verfahren bis zu dem letzten Schritte verfolgen muss, eben in Bezug auf diesen letzten Schritt das Verfahren — wenn auch an sich dasselbe bleibend — doch in seiner Darstellung etwas anders aussehen wird. Bevor man nämlich zur Lösung der letzten Aufgabe schreitet, wo man also $n-1$ Gleichungen und 2 Ungleichungen hat für die Grössen, deren Minimalwerthe man sucht, hat man zu erwägen, dass nunmehr die Aenderung des Werthen-Systems nur noch in einer einzigen Weise geschehen kann, da durch die Aenderung Eines Werthes die aller übrigen schon bedingt ist. Die Frage nach der Art und Weise der Aenderung des Werthen-Systems, wie sie bei allen vorhergehenden Schritten auftrat, ist hier also überflüssig, und es handelt sich hier nur um die Grösse dieser Aenderung, und diese ergiebt sich daraus, dass das zugehörige letzte λ, welches eine Funktion derselben ist, Null werden muss, wenn nicht schon vorher die Aenderung den Punkt erreicht, wo die letzte übriggebliebene Ungleichung aufhört erfüllt zu werden. In beiden Fällen erhält λ einen bestimmten Werth, und die Werthe, welche die vorhergehende Minimal-Gleichung erfüllen, sind demnach gefunden.

Die Benutzung dieser Werthe zur Lösung der Haupt-Aufgabe geschieht nun in folgender Weise. Das Erfülltsein der letzten Minimal-Gleichung hat für die ihr vorhergehende die Bedeutung: dass sie die Art und Weise angiebt, wie man die in der vorhergehenden substituirten bestimmten Werthe verändern muss, um sie am schnellsten abnehmen zu lassen. Um sie nun zu einem wirklichen Minimum zu machen, brauchen wir nur die Werthe wirklich in der angegebenen Weise so weit zu ändern, bis entweder die entsprechende Grösse λ zu 0 wird oder die überzählige positiv gelassene Ungleichheit aufhört erfüllt zu sein. Die hierdurch erhaltenen Werthe geben dann an, in welcher Weise das in der vorhergehenden Minimal-Gleichung substituirte Werthen-System geändert werden muss, um sie am schnellsten abnehmen zu lassen, wodurch man in den Stand gesetzt wird, auch sie zu einem wirklichen Minimum zu machen; und so kann man rückwärtsgehend Eine Minimal-Gleichung nach der andern zu einem wirklichen oder relativen Minimum machen, bis man endlich auch die Haupt-Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

zu einem solchen gemacht hat.

Die Aufgabe ist gelöst, wenn bei zunehmender Aenderung der Werthe $x_1, \ldots, x_n$ die Variation von R^2 Null wird; sie ist dagegen noch nicht erledigt, wenn die Aenderung des Werthen-Systems durch das Nullwerden Einer oder mehrerer der vorhin positiv gelassenen $m-n$ Ungleichungen aufgehalten wird. In diesem Falle ist das ganze bis dahin beschriebene Verfahren noch einmal in Bezug auf die jetzt Null gewordenen Ungleichungen zu wiederholen.

Man sucht wieder die Richtung, in der man das neue Werthen-System ändern muss, um R^2 am schnellsten abnehmen zu lassen, ändert dasselbe dann demgemäss, soweit es die Ungleichungen zulassen, etc. und wiederholt das Verfahren so oft, bis endlich

$$\partial(R^2) \geqq 0$$

wird, in welchem Falle die wirklichen Minimalwerthe der Grössen $x_1, \ldots, x_n$ gefunden sind.

[2.]

Sind n Veränderliche vorhanden, so können nicht mehr als n Bedingungsungleichheiten wirksam sein, und dieselben als Gleichungen betrachtet geben unmittelbar die Minimalwerthe, wenn sie alle wirksam sind.

Nennen wir den analytischen Ort für den Werth der Funktion von n Variabeln: einen Punkt, wenn alle n einen bestimmten Werth haben, eine Linie für $n-1$, eine Fläche für $n-2$, einen Raum für $n-3$ etc., so ist in unserer Aufgabe der Punkt zu suchen, welcher einer bestimmten Combination der n Variabeln entspricht. Der Punkt ist also gefunden, wenn n Ungleichheiten wirksam sind, er ist auf einer Linie zu suchen, wenn $n-1$ wirksam sind, auf einer Fläche, wenn $n-2$ etc.

Die Funktion, welche ein Minimum werden soll, ist die Summe der Quadrate sämmtlicher Coordinaten oder das Quadrat der Entfernung des gesuchten Punktes vom Ursprung, das Quadrat des radius vector im weiteren Sinn genommen. Sind gar keine Ungleichheiten gegeben, so ist der Ursprung selbst der gesuchte Punkt. Ist Eine wirksame Ungleichheit gegeben, so liegt der Punkt in einem Mannigfaltigen von $n-1$ Dimensionen, und zwar so, dass er dem Ursprung möglichst nahe liegt; für 2 Wirksame in einer Mannigfaltigkeit von $n-2$ Dimensionen etc. Jede hinzukommende wirksame Ungleichheit entfernt den Punkt vom Ursprung und beschränkt seinen Spielraum zugleich um Eine Dimension. Die ganze Schwierigkeit liegt im Aufsuchen der wirksamen Ungleichungen.

[Es soll]

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \text{Min[imum]}$$

[sein, und] es seien [die Ungleichungen] gegeben:

$$\begin{array}{ll} a_1' \ x_1 + a_2' \ x_2 + \cdots + b' \ = u'; & u' \geqq 0, \\ a_1'' \ x_1 + a_2'' \ x_2 + \cdots + b'' \ = u''; & u'' \geqq 0, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_1^{(m)} x_1 + a_2^{(m)} x_2 + \cdots + b^{(m)} = u^{(m)}; & u^{(m)} \geqq 0, \end{array}$$

wobei wir voraussetzen, dass alle linearen Gleichungen $u', u'', \ldots$ auf die Form gebracht sind, dass die Summe der Quadrate ihrer Coefficienten $= 1$ ist. Dann ist das Verfahren folgendes:

Man sucht zuerst ein System von Werthen der $x_1, x_2, \ldots$, welches n von den Ungleichungen zu 0 macht und die übrigen $m-n$ positiv. Dann bekommt man $x_1, x_2, \ldots$ als Funktionen von $u', \ldots, u^{(n)}$ und zwar, worin letztere $= 0$ gesetzt sind. Substituirt man diese Funktionen in $u^{(n+1)}, \ldots, u^{(m)}$, so hat man

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} u^{(n+1)} = A_1' \quad u' + A_2' \quad u'' + \cdots + A_n' \quad u^{(n)} + C', \\ u^{(n+2)} = A_1'' \quad u' + A_2'' \quad u'' + \cdots + A_n'' \quad u^{(n)} + C'', \\ \cdots\cdots\cdots \\ u^{(m)} \quad = A_1^{(m-n)} u' + A_2^{(m-n)} u'' + \cdots + A_n^{(m-n)} u^{(n)} + C^{(m-n)}, \end{array} \right.$$

worin also, nachdem die Werthe $u', \ldots, u^{(n)}$ gleich 0 gesetzt sind, nur die Constanten $C', \ldots, C^{(m-n)}$ bleiben, welche dann nach der obigen Voraussetzung positive Grössen sein sollen. Diesem Werthen-System entspricht dann ein Punkt, welcher in dem von sämmtlichen Ungleichungen abgegrenzten Spielraume liegt, und zwar in der Begrenzung desselben. Den Ungleichungen genügt er demnach, aber im Allgemeinen noch nicht der Bedingung: dass das Quadrat seines Abstandes vom Ursprung der Coordinaten ein Minimum sei. Es kann vielmehr andere Punkte der Begrenzung geben, welche ebenfalls n von den Ungleichungen gleich 0 und die übrigen positiv machen, dabei aber dem Ursprung näher liegen. Solchen Punkten entsprechen aber Systeme von Werthen der Grössen $x_1, \ldots, x_n$, welche nicht mehr sämmtliche $u', \ldots u^{(n)}$ zu 0 machen; es werden vielmehr einige von ihnen unwirksam d. h. positiv, und an ihrer Stelle ebensoviele der $u^{(n+1)}, \ldots, u^{(m)}$ zu 0 werden.

Um nun von unserem durch die n Gleichungen $[u' = 0, \ldots, u^{(n)} = 0]$ fixirten Ausgangspunkte, den wir als Durchschnittspunkt von n Mannigfaltigkeiten von $n-1$ Dimensionen vorstellen, zu solchen näher liegenden Punkten zu gelangen, müssen wir dem Punkte $[x_1, \ldots, x_n]$ eine gewisse Beweglichkeit einräumen, d. h. den Grössen $u', \ldots, u^{(n)}$, deren Funktion seine Lage ist, eine gewisse Veränderlichkeit von ihrem augenblicklichen Werthe 0 aus nach der positiven Seite hin. Um aber gleich die wirksamste Ortsveränderung mit ihm vorzunehmen, d. h. diejenige, mittelst welcher er sich innerhalb der ihm auferlegten Beschränkungen am schnellsten dem Ursprung der Coordinaten nähert, bilden wir zunächst aus den Formeln u', u'', ..., $u^{(n)}$ einen Ausdruck für den radius vector unseres Punktes oder für die Summe

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$$

und erhalten daraus

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 = k_1 + a_1' u' + a_1'' u'' + \cdots + a_1^{(n)} u^{(n)}, \\ x_2 = k_2 + a_2' u' + a_2'' u'' + \cdots + a_2^{(n)} u^{(n)}, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x_n = k_n + a_n' u' + a_n'' u'' + \cdots + a_n^{(n)} u^{(n)}. \end{array}\right.$$

Wir untersuchen jetzt, wie die Summe der Quadrate dieser Ausdrücke:

$$R^2 = x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$$

am schnellsten zu verkleinern ist, d. h. welche von den Grössen u', ..., $u^{(n)}$ wir veränderlich annehmen müssen, um der Variation

$$\delta(R^2)$$

den grössten negativen Werth zu ertheilen. Stellen wir also in der vollständigen Variation die mit $\delta u'$, $\delta u''$, ... multiplicirten Glieder resp. zusammen, so haben wir nur nach den Factoren derselben zu sehen:

$$\delta(R^2) = A\delta u' + B\delta u'' + \cdots + L\delta u^{(n)}.$$

Hat zum Beispiel der Factor L den grössten negativen Werth, so wissen wir, dass eine Aenderung von $u^{(n)}$ den Punkt am schnellsten dem Coordinaten-Ursprung nähert. Wir geben also der Grösse $u^{(n)}$ einen von 0 verschiedenen Werth und lassen denselben so lange zunehmen, bis in Einer der Gleichungen (1) das Glied $A_n u^{(n)}$ einen ebenso grossen negativen Werth erhält, als das positive Glied C; oder wenn dies nicht der Fall ist, bis der Factor L durch diese Aenderung aufhört, negativ zu sein, in welchem letzterm Falle der gesuchte Punkt gefunden ist. Im ersteren Fall setzt man diejenige der Gleichungen (1), welche 0 wird, an die Stelle von $u^{(n)}$, welche letztere nunmehr als unwirksam wegzustreichen ist. Mit den übrigen $m-1$ Ungleichungen setzt man nun das Verfahren in derselben Weise fort, und zwar so lange, bis in dem Ausdruck $\delta(R^2)$ sämmtliche Coefficienten positiv.

Mittelst der übrig bleibenden Gleichungen kann man dann ebenso viele $x, \ldots$ aus der Minimal-Gleichung eliminiren und dann nach den gewöhnlichen Regeln verfahren. Man sucht ein Werthen-System, welches n von den Ungleichheiten zu 0, die übrigen $m-n$ positiv macht — wir nennen diese Werthe $k_1, k_2, \ldots, k_n$ —, und bestimmt dann durch Variation der Grösse R^2 diejenige Aenderung des Werthen-Systems, welche R^2 am schnellsten vermindert, d. h. die kleinste Aenderung des Werthen-Systems, welche eine bestimmte Abnahme der Grösse R^2 um λ bewirkt. Als Maass der Aenderung des Werthen-Systems nehmen wir dabei

$$\sqrt{\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \cdots}.$$

Wir haben also in dem Ausdruck

$$2\{x_1 \delta x_1 + x_2 \delta x_2 + \cdots\}$$

für $x_1, x_2, \ldots$ die Werthe $k_1, k_2, \ldots$ zu setzen und ihn dann $= -[2]\lambda_1$ zu setzen:

$$k_1 \delta x_1 + k_2 \delta x_2 + \cdots = -\lambda_1. \tag{3}$$

Ferner soll sein

$$\delta x_1^2 + \delta x_2^2 + \cdots = \text{Min[imum]}.$$

Um die Aenderung des Werthen-Systems $\delta x_1, \delta x_2, \ldots$ zu finden, welche diese Quadratsumme am schnellsten vermindert, oder die kleinste Aenderung derselben, welche eine bestimmte Verminderung λ_2 bewirkt, haben wir wieder

$$\delta x_1 \delta^2 x_1 + \delta x_2 \delta^2 x_2 + \cdots = -\lambda_2$$

und

$$\delta^2 x_1^2 + \delta^2 x_2^2 + \cdots = \text{Min[imum]}.$$

Ferner haben wir durch Variation der Gleichung (3):

$$k_1 \delta^2 x_1 + k_2 \delta^2 x_2 + \cdots = 0.$$

Wenn wir dann in der Gleichung (3) für $\delta x_1, \ldots$ ihre Werthe in $\delta u_1, \ldots$

ausgedrückt setzen:

$$-\lambda_1 = K_1\delta u_1 + K_2\delta u_2 + \cdots + K_n\delta u_n,$$

so wird der grösste positive Coefficient K_n entscheiden, welche Grösse u_n durch ihre Aenderung zur Verminderung der ursprünglichen Function am meisten beiträgt. Wir ändern deshalb diese, d. h. wir setzen $u_n > 0$ statt $u_n = 0$, und behalten also noch $n-1$ Gleichungen $u = 0$ übrig, mithin auch

$$\delta u_1 \geqq 0,\ \delta u_2 \geqq 0,\ \ldots,\ \delta u_{n-1} \geqq 0.$$

Bezeichnen wir $\delta^2 x = \delta(\delta x)$ mit ξ, so soll:

$$\xi_1\delta x_1 + \xi_2\delta x_2 + \cdots = -\lambda_2;$$
$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots = \text{Min[imum]}$$

[sein].

BEMERKUNG.

Daß GAUSS sich mit »Mannigfaltigkeiten von mehr als zwei Dimensionen« beschäftigt hat, zeigt eine Andeutung am Schluss der Selbstanzeige der *Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio secunda* vom 23. April 1831, Werke II, S. 178, und bestätigt ein Bericht von SARTORIUS V. WALTERSHAUSEN über ein Gespräch mit GAUSS, das zwischen 1847 und 1855 stattgefunden hat. »Wir können uns, sagte er, etwa in Wesen hineindenken, die sich nur zweier Dimensionen bewußt sind; höher über uns stehende würden vielleicht in ähnlicher Weise auf uns herabblicken, und er habe, fuhr er scherzend fort, gewisse Probleme hier zur Seite gelegt, die er in einem höhern Zustand später geometrisch zu behandeln gedächte« (GAUSS zum Gedächtnis, Leipzig 1856, S. 81). Daß diese Gedanken auf eine frühe Zeit zurückgehen, wird durch einen Brief WACHTERS an GAUSS vom 12. Dezember 1816 wahrscheinlich gemacht, der eine zwischen beiden Männern im April 1816 stattgehabte Unterhaltung wiederspiegelt. WACHTER schreibt*):

»Vor kurzem suchte ich die Construction des Fundamentalkörpers, (das, was der Würfel für den Raum von 3 Dimensionen) allgemein für einen Raum von beliebig vielen Dimensionen. Ich fand, daß dieses, wofern eine gewisse Schlußart richtig ist, mit der Zahl der rechten Winkel um einen Punkt in der Ebene zusammenhänge, daß nämlich der Raum n Dimensionen haben würde, wenn die Summe der rechten Winkel um einen Punkt herum $= 2^{n-1}$, und daß dann die Zahl der Ecken des Fundamentalkörpers in diesem Raum von n Dimens[ionen] durch 2^n, die Zahl der Begränzungen der ersten Art von der Dimension $(n-1)$ für jede Ecke durch n, und die Zahl derselben, der Gränzkörper von der Dim[ension] $(n-1)$, für den ganzen Körper durch $2n$, die Zahl der Begränzungen [**)] der zweiten Art von der Dim[ension] $(n-2)$ durch $4n$, sein körperlicher Inhalt, wenn die Seite L, durch L^n, und seine Diagonale durch $L\sqrt{n}$ gegeben werde. —

*) Siehe P. STÄCKEL, *F. L. Wachter*, Mathematische Annalen **54**, 1901, S. 49, wo S. 61—69 der ganze Brief veröffentlicht ist. Werke VIII, S. 175 sind nur die auf die anti-Euklidische Geometrie bezüglichen Stellen abgedruckt.

[**) In der Handschrift steht Berührungen.]

Von einer andern Seite läßt sich zeigen: daß wenn es möglich, daß eine gerade Linie Zweige habe, sie derselben unendlich viele, und auch der Raum unendlich viele Dimensionen haben würde. Auf gewisse Weise könnte man sagen, daß auch in Ihrer, der anti-euklideischen Geometrie, der Raum unendlich viele Dimensionen habe, die aber alle wieder im unendlichen liegen. Nämlich es sei BAC ein rechter Winkel, AD die Constante für das rechtwinklichte asymptotische Dreieck, dessen anderer Winkel $= 45^0$; der rechte Winkel BAC werde durch AD halbiert, dann ließe sich dieselbe Construction durch DE, EF u.s.w. an den Punkten D, E, F u.s.w. wiederholen, ohne daß die Linie AC jemals erreicht würde, — und dieses auf analoge Art räumlich gedacht gäbe innerhalb des von drei rechtwinklichten Ebenen begränzten Raumes körperliche Ecken, welche zuerst durch 3 Ebenen von 45^0 Oeffnung begränzt, der Reihe nach durch eben so viel Körper von der Dimension 3, 4, 5 u.s.w. bis ∞, begränzt gedacht werden könnten.«

Auch der Brief von GAUSS an GRASSMANN vom 14. Dezember 1844 (siehe oben S. 436) ist in diesem Zusammenhang zu erwähnen; sagt doch GAUSS darin, dass GRASSMANNs Tendenzen teilweise denjenigen Wegen begegneten, auf denen er selbst nun seit fast einem halben Jahrhundert gewandelt sei, und bezeichnet er als ein Zeugnis für diese Bestrebungen die oben erwähnte Selbstanzeige vom Jahre 1831. Man vgl. hierzu auch noch die Andeutungen im art. 5. der *Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen* vom Jahre 1849, Werke III, S. 79*).

Eine weitere, ausgiebigere Quelle ist A. RITTER (1826—1908), der von Michaelis 1850 bis 1853 in Göttingen studiert hat und 1853 unter GAUSS mit einer Abhandlung *Ueber das Princip des kleinsten Zwanges* promoviert worden ist. Daß die unter [I.] abgedruckten, den siebenten Abschnitt der Dissertation bildenden Ausführungen auf Anregungen von GAUSS zurückgehen, würde nur den Wert einer Vermutung haben, wenn nicht der auf der Bibliothek der Technischen Hochschule zu Aachen aufbewahrte handschriftliche Nachlaß RITTERs die Ausarbeitung einer Vorlesung über die Methode der kleinsten Quadrate enthielte, die dieser im Wintersemester 1850/51 bei GAUSS gehört hat. Den Schluß der Handschrift bildet nämlich die unter [II.] abgedruckte Notiz, die, wie es scheint, den Inhalt der beiden letzten Vortragsstunden wiedergibt.

Ob RITTER die Gedanken von GAUSS überall richtig aufgefasst hat, muß dahingestellt bleiben; immerhin macht gerade die Stelle, die sich auf Mannigfaltigkeiten von n Dimensionen bezieht, einen Vertrauen erweckenden Eindruck. Die Behandlung des Minimumsproblems ist in verschiedener Beziehung unvollständig. Es genüge hier zu bemerken, daß man nicht immer Punkte finden kann, für die n der Ausdrücke $u_1, \ldots, u_m$ verschwinden, während gleichzeitig die andern $m-n$ positiv ausfallen. Zum Beispiel verschwinden für $n = 3$ und $m = 8$, wenn es sich um das Innere eines von acht Dreiecken begrenzten Achtflächers handelt, in jeder der sechs Ecken vier der Ausdrücke $u_1, \ldots, u_8$. Im übrigen vergleiche man den in der zweiten Abteilung dieses Bandes abgedruckten Aufsatz »GAUSS als Geometer«.

STÄCKEL.

*) Die von GAUSS begehrte Lehre von den »nach der Stetigkeit zusammenhängenden Größencombinationen« hat RIEMANN in dem Habilitationsvortrag vom 10. Juni 1854 begründet, RIEMANNs Werke, 2. Aufl., S. 272. Bei der Entwicklung des Begriffs mehrfach ausgedehnter Größen verweist RIEMANN (a. a. O. S. 273 ausdrücklich auf die oben im Text genannten Veröffentlichungen von GAUSS.

NACHBILDUNG DES TAGEBUCHS (NOTIZENJOURNALS)

VON

C. F. GAUSS

1796 MART. 30 — 1814 JUL. 9

1796

× Principia quibus innititur sectio circuli, ac divisibilitas eiusdem geometrica in septemdecim partes &c. Mart 30 Brunsv.

× Numerorum primorum non omnes numeros infra ipsos residua quadratica esse posse demonstratione munitum.

Apr. 8. Ibid.

Formula pro cosinibus angulorum peripheriae submultiplorum expressionem generaliorem non admittent nisi in duas periodos

Apr. 12. Ibid

× Amplificatio normae residuorum ad residua et mensuras non indivisibiles.

Apr. 29 Gotting.

Numeri cuiusvis divisibilitas varia in binos primos

Mai. 14 Gott

× Coefficientes aequationum per radicum potestatum summas facile dantur Mai. 23 Gott.

— Transformatio seriei $1-2+8-64\ldots$ in fractionem continuam $\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{8}{1+\cfrac{12}{1+\cfrac{32}{1+\cfrac{56}{1+128\ldots}}}}}}}$

Mai. 24 G.

$$1-1+1.3-1.3.7+1.3.7.15 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{12}{1+28}}}}}$$

et alia

Scalam simpliciem in ~~fractionibus~~ seriebus varia[bi]liter recurrentibus esse functionem similem secundi ordinis scalarum componentium 26 Mai.

Comparationes infinitorum in numeris primis & factoribus. ~~num.~~ cont. - 31 M. G.

Scala ubi seriei termini sunt producta vel adeo functiones quaecunque terminorum quotcunque serierum 3 Jun. G.

Formula pro summa factorum numeri cuiusvis compositi f. generis a^{n+1} ~~[illegible]~~ 5 Jun. G.

Periodorum summa omnibus ~~infra~~ modulum numeris pro elementis sumtis fact. gen. $((n+1)a - na)^{n-1}$ 5 Jun. G

Leges distributionis — — — — — — 19 Jun. G

Factorum summae in infinity $= \frac{\pi\pi}{6}$ sum. Num. 20 Jun. G.

Coepi de multiplicatoribus (in formis diversorum formam qu.) connexis cogitare - - 22 Jun. G

* Nova theorematis aurei demonstratio a priori toto coelo diversa eaque haud parum elegans 27 Jun.

Quaeque partitio numeri a in trea II dat formam in trea II separabilem. 3 Jul.

~~[illegible]~~

** ΕΥΡΗΚΑ num. $= \Delta + \Delta + \Delta$. — — 10 Jul. Gött

Determinatio Euleriana formarum in quibus numeri compositi plus una vice continentur

Principia componendi scalas serierum variatim recurrentium 16 Jul. Gött.

Methodus Euleriana pro demonstranda relatione inter ~~producta~~ rectangula sub segmentis rectarum sese secantium in sectionibus conicis ad omnes curvas applicatur. 31 Jul. 1

* $a^{2^n+1\,(p)} \equiv 1$ semper solvere in potestate. Aug 3 Gött

Rationem theorematis aurei quomodo ~~altius~~ profundius perscrutari oporteat perspexi et ad hoc accingor supra ~~primam~~ quadraticas aequationes egredi conatus. Inventio formularum qui semper per ~~per~~ primos: $\sqrt[n]{1}$ (numerice) dividi possunt. Aug. 13 Brd.

Obiter $(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$ evolutum — 14

Rei summa iamiam intellecta. Restat ut singula muniantur — 16. G.

$(a^p) \equiv (a)$ mod. p., a radix aequationis cuiuscunque quomodocunque irrationalis. 18.

Si P, Q functiones alg. quantitatis indeterminatae fuerint inc. Datur $tP + uQ = 1$ ~~tum~~ in algebra tum speciosa tum numerica. 19 G

Exprimuntur potestates radicum aequationis propositae aggregatae per coefficientes aequationis lege perquam simplici. (cum aliis quibusdam geometr. in Exerc.) 21. G

Summatio seriei infinitae $1 + \frac{x^n}{1\ldots n} + \frac{x^{2n}}{1\ldots 2n}$ &c. eod.

* Minutiis quibusdam exceptis feliciter propositum attigi scil. si $p^n \equiv 1 \pmod{\pi}$ fore $x^n - 1$ compositum e factoribus gradum n non excedentibus ~~[illegible]~~ & proinde aequationem conditionalem fore solubilem. Sept. 2 G.
unde duas theor: aurei demonstr. deduxi.

Numerus fractionum inaequalium quarum denominatores certum limitem non superat ad numerum fractionum omnium quarum num. aut denom. sint diversi infra eundem limitem in infinito ut $6 : \pi\pi$ Sept. 6.

Si $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}}$ stat. $\Pi : x = z$ & $x = \Phi : z$ erit

$\Phi : z = z - \frac{1}{8} z^4 + \frac{1}{112} z^7 - \frac{1}{1792} z^{10} + \frac{3}{1792 \cdot 52} z^{13} - \frac{3 \cdot 185}{1792 \cdot 52 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16} z^{16}$ Sept. 9

Si $\phi \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = x$ erit:

$\phi : z = z - \frac{1}{2n+1} z^n A + \frac{n-1}{4 \cdot 2n+1} z^n B - \frac{nn-n-1}{2 \cdot n+1 \cdot 3n+1} C \dots$

Methodus facilis inveniendi aeq: in y ex aeq. in x si ponatur $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} \dots = y$ Sept. 14

fractiones quarum denominator continet quantitates irrationales (quomodocunque?) in alias transmutare ab hoc incommodo liberatas. Sept. 16

Coefficientes aeq: auxiliariae eliminationi inservientis ex radicibus aeq: datae determinati eod.

Nova methodus qua resolutionem aequationum universalem investigare forsitanque invenire licebit Sept. 17.

Scil. transm: aeq: in aliam cuius radices $\alpha\varrho' + \beta\varrho'' + \gamma\varrho''' + \dots$ ubi $\sqrt[n]{1} = \varrho', \varrho''$ & n numerum aequationis gradum denotans

In mentem mihi venit radices aeq. $x^n - 1$ ex aeq., communes radices habentibus eliciendi ut vero plerumque tantum aequationes coefficientibus rationalibus gaudentes resolvi oporteat Sept. 29 Brunsv.

Aequatio tertii gradus est haec: $x^3 + xx - nx + \frac{nn-3n-1-mp}{3} = 0$ ubi $3n+1 = p$ & m numerus resid. cubicorum fini les sui excipientes. unde sequitur si $n = 3k$ fore $m+1 = 3l$ si $n = 3k \pm 1$ fore $m = 3l$. Octob. 1 Bruns.

sive $z^3 - 3pz + (pp - 8p - 9pm) = 0$

Hoc m penitus determinatum $m+1$ semper $\square - 3\square$

Aequationis $x^p - 1 = 0$ radices per integros multiplicati aggregati cifram producere non possunt. ⊙ Oct: 9. Brunsv.

Quaedam sese obtulerunt de multiplicatoribus aequationum vt certi termini eiiciantur, quae praeclara pollicentur ⊙ Oct 16. Bruns.

Lex detecta: quando et demonstrata erit systema ad perfectionem evexerimus Oct 18 Brunsv

* Vicimus GEGAN Oct. 21. Bruns

formula interpolationis elegans Nov. 25 G

Incepi Expressionem $1 - \frac{1}{2^\omega} + \frac{1}{3^\omega} \dots$ in seriem transmutare secundum potestates ipsius ω progredientem. Nov. 26. G

Formulae trigonometricae per series expressae per Dec.

Differentiationes generalissimae Dec. 23.

Curvam parabolicam quadrare suscepi, cuius puncta quotcunque dantur Dec. 26

Demonstrationem genuinam theorematis La Grangiani detexi Dec. 27

$$\left.\begin{aligned}
\int \sqrt{\sin x}\,.\,dx &= 2\int \frac{yy\,dy}{\sqrt{(1-y^4)}} \\
\int \sqrt{\tan x}\; dx &= 2\int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}} \\
\int \sqrt{\tfrac{1}{\sin x}}\; dx &= 2\int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}}
\end{aligned}\right\} yy = \tfrac{\sin}{\cos} x$$

1797 Jan. 7.

Curvam ~~elasticam~~ lemniscatam a $\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$) pendentem

perscrutari coepi Jan. 8

Criterii Euleriani rationem sponte detexi Jan. 10.

Integrale complet. $\int \frac{\partial x}{\sqrt[n]{(1-x^n)}}$ ad circ. quadr. reducitur Jan. 12.

Methodus facilis $\int \frac{x^{m-1}\partial x}{1+x^m}$ determinandi commentus sum.

Supplementum eximium ad polygonorum descriptionem inveni. Sc. si a, b, c, d sint factores primi numeri primi p unitate truncati tunc ad polygoni p laterum nihil aliud requiri quam ut $1°$ arcus indefinitus in a, b, c, d.. partes secetur $2°$ ut polygona a, b, c, d.. laterum describantur. Götting. Januar. 19

Theoremata de Ress. -1 ∓ 2 simili methodo ~~pacto~~ demonstratae et cetera .... Gott. Febr. 4.

Forma $aa+bb+cc-bc-ac-ab$ quod ad divisores attinet convenit cum hac $aa+3bb$ Febr. 6

Amplificatio prop. penult. p. 1. scilicet

$$1-a+a^3-a^6+a^{10}\ldots = \cfrac{1}{1+\cfrac{a}{1+\cfrac{a^2-a}{1+\cfrac{a^3}{1+\cfrac{a^4-a^2}{1+\cfrac{a^5}{1+\&c.}}}}}}$$ Febr. 16

Unde facile omnes series, ubi exp. sr. sec. ordinis constituunt transformantur

Formularum integratum formae

$$\int e^{-t^a}\,dt \quad \text{et} \quad \int \frac{du}{\sqrt[\beta]{1+u^\gamma}}$$

inter se comparationem institui. Mrz 2.

Cur ~~[illegible]~~ ad aequationem perveniatur gradus $nn\ \frac{1}{2}$ dividendo curvam lemniscatam in n partes . . . Mrt. 19

A potestatibus integr. $\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}^{(\vartheta-1)}$ pendet

$$\Sigma\left(\frac{mm+6mn+nn}{(mm+nn)^4}\right)^k$$

Lemniscata geometrice in quinque partes dividitur Mrt. 21.

Inter multa alia Curvam Lemniscatam spectantia observavi Numeratorem sinus decompositi, arcus duplicis esse =
2 Num. Denom. sinus × Num. Den. Cos. arcus simpl.
Denominatorem vero = hic
Num. sin.^{4} + Denom. sin.^{4}. Jam si Denominatur pro arcu π' ponatur θ erit Denom. sin arcus $k\pi'$, = θ^{kk} Jam θ = 4,810480 cuius numeri logarithmus hyperbolicus est = 1,570796 i.e. = $\frac{1}{2}\pi$ quod maxime est memorabile cuiusque proprietatis demonstratio gravissima analyseos incrementa ~~pr~~ pollicetur. Mart. 29.

Demonstrationes elegantiores pro nexu divisorum formae $\square - N$, $+1$ cum -1, ± 2 inveni Iun 17 Gotting

Deductionem secundam theoriae polygonorum excolui Iul. 17 Gotting

Per utramque methodum monstrari potest puras tantum aequationes solui oportere.

Quod Art. 1. per ind. inuenimus demonstratione muniuimus Iul. 20.

Casum singularem solutionis congruentiae $x^n - 1 \equiv 0$ (scilicet quando ~~m~~ congr. aux.: radices aequales habet) qui tamdiu nos ~~ne~~ vexauit felicissimo successu vicimus, ex ~~profa~~ congruentiarum solutione si modulus est numeri primi potestas. ~~patet~~ Iul. 21.

Si $x^{m+n} + ax^{m+n-1} + bx^{m+n-2} \dots + n$ (A)

per $x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} \dots + \mu$ (B)

dividatur atque omnes coefficientes in (A), a, b, c &c sint numeri integri

~~[illegible] ipsos esse numeros rationales~~
~~[illegible] si numeri rationales esse~~

Coefficientes vero omnes in B rationales etiam hi omnes erunt integri ubicunque n ultimus in incedit. Jul. 23.

Forsan omnia Producta

ex $(a + b\rho + c\rho^2 + d\rho^3 \ldots)$
designante ρ omnes radices prim. aeq. $x^n = 1$
ad formam $(x - \rho y)(x - \rho^2 y) \ldots$
reduci potest. Est enim

$$(a+b\rho+c\rho^2)\times(a+b\rho^2+c\rho) = (a-b)^2 + (a-b)(c-a) + (c-a)^2$$

$$(a+b\rho+c\rho^2+d\rho^3)\times(a+b\rho^3+c\rho^2+d\rho)$$

$$= (a-c)^2 + (b-d)^2$$

$$(a+b\rho+c\rho^2+d\rho^3+e\rho^4+f\rho^5)\times = (a+b-d-e)^2$$

$$- (a+b-d-e)(a-c-d-f)$$

Vide Febr. 4.

$$+ (a-c-d-f)^2$$

$$= (a+b-d-e)^2$$

$$+ (a+b-d-e)(b+c-e-f)$$

$$+ (b+c-e-f)^2$$

Falsum est
Hinc enim sequeretur binis numeris e forma
$\Pi(x-\rho y)$ contentis productum in eadem forma esse
quod facile refutatur

\# Radicum aeq. $x^n = 1$ periodi plures eandem summam habere
non possunt demonstratum Jul. 27. 1796

#Plani possibilitatem demonstravi. Jul. 28

Quod Jul. 27 inscripsi errorem involvit: sed eo felicius
nunc rem exhausimus quoniam probare possumus nullum
periodum esse posse numerum ~~fract~~ rationalem. Aug. 1 Gotting.

Quomodo periodorum numerum duplicando
signa adornare oporteat

Functionum primarum multitudinem per analysin
simplicissimam erui. Aug. 26

Theorema. Si ~~a+~~ax + bxx + etc ... + mx^{μ} est functio secundum
modulum p prima erit

$\frac{p}{a}$ ~~b + cx~~ + x

$d + x + x^{p} + x^{pp} + \text{etc}\; x^{p^{\mu-1}}$ per hanc fctnem secundum
hunc modulum divisibilis Aug. 30

&c. etc

Demonstratum, usque ad multo maiora perintroi,
Modulorum multiplicium strata Aug. 31.

Aug. 1. generalius ad quosvis modulos adaptatum
Sept. 4.

#Principia detexi, ad quae congruentiarum secundum
modulos multiplices resolutio ad congruentias secundum
modulum linearem reducitur Sept. 9

#Aequationes habere radices imaginarias
methodo genuina demonstratum. Bruns. Oct.

Prom. in dissert. peculiari mense Aug. 1797.

Noua theorematis Pythagorici Dem. Bruns. Oct 16

Seriem $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{144}x^4 \ldots$ summam considerando

inuenimusque eam $= 0$ si

$$2\sqrt{x} + \frac{3}{16}\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{21}{1024}\frac{1}{\sqrt{x^3}} \qquad = \left(k + \tfrac{1}{4}\right)\pi$$

Brunsu. Oct. 16.

Positis $l(1+x) = \varphi' x$; $l(1+\varphi' x) = \varphi'' x$; $l(1+\varphi'' x) = \varphi''' x$ &c. erit $\varphi^i x = \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{3}{2}i}} +$ Brunsu Apr.

Classes dari in quauis ordine. hincque numerorum in formas quadratas discerpibilitas ad theoriam solidam reducta Brunsv. Apr.

Demonstrationem genuinam compositionis virium eruimus Götting. Mai.

Theorema la Grange de ~~trans~~formatione functionum ad functiones quotcunque variabilium extendi Götting. Mai.

Series $1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1.1}{2.4}\right)^2 + \left(\frac{1.1.3}{2.4.6}\right)^2 + \&c. = \frac{4}{\pi}$ ~~ut et omnino genus~~ simul cum theoria generali serierum ~~angulos~~ sinus et cosinus angulorum arithmetice crescentium inuoluentium

Calculus probabilitatis contra La Place defensus Gott. Iun. 17.

Problema eliminationis ita solutum ut nihil amplius desiderari possit. Gott. Jun.

Varia elegantiuscula circa attractionem sphaerae

$$1 + \frac{1}{9}\,\frac{1.3}{4.4} + \frac{1}{81}\,\frac{1.3.5.7}{4.4.8.8} + \frac{1}{729}\,\frac{1.3.5.7.9.11}{4.4.8.8.12.12} \ldots = 1{,}02220\ldots = \frac{1{,}3110\ldots}{3{,}1415\ldots}\sqrt{6}$$

$$\text{arc. sin } \underline{\text{lemn.}}\ \cancel{\sin\varphi - \text{arc. sin lemn.}} = \cancel{\ldots\ \varpi - \frac{2\varphi\,\varpi}{\pi}}$$

$$\sin.\ \underline{\text{lemnisc.}} = 0{,}9550098\ \sin. - 0{,}0430495\ \sin 3 + 0{,}0018605\ \sin 5 - 0{,}0000803\ \sin 7$$

$$\sin^2 \text{lemn.} = 0.4569472 = \frac{\pi}{\varpi\varpi}\ \cos.\ \ldots$$

$$\text{Arc. sin. lemn. } \sin\varphi = \frac{\varpi}{\pi}\varphi + \left(\frac{\varpi}{\pi} - \frac{2}{\varpi}\right)\sin 2\varphi + \left(\frac{11}{2}\frac{\varpi}{\pi} - \frac{12}{\varpi}\right.\ \sin 4\varphi$$

$$\sin^2 = 0{,}4775031\ldots \sin - \ldots + 0{,}03$$

#i lemniscata, elegantissima omnes exspectationes superantia acquisivimus et quidem per methodos quae campum prorsus novum nobis aperiunt. Gott. Jul.

Solutio problematis ballistici Gott. Jul.

Cometarum theoriam perfectiorem reddidi Gott. Jan.

Novus in analysi campus se nobis aperuit, scilicet investigatio functionum etc. Oct.

Formas superiores considerare coepimus Br. Febr. 14 1799

Formulas novas exactas pro parallaxi eruimus ——— Br. Apr. 8

Terminum medium arithmetico-geometricum inter 1 et $\sqrt{2}$ esse $= \frac{\pi}{\varpi}$ usque ad figuram undecimam comprobavimus, qua re demonstrata prorsus novus campus in analysi certo aperietur Br. Mai 30.

In principiis Geometriae egregios progressus fecimus Br. Sept.

Circa terminos medios arithmetico-geometricos multa nova deteximus. Br. Novemb.

Medium arithmetico-geometricum tamquam quotientem duarum functionum transcendentium repraesentabilem esse iam pridem inveneramus nunc alteram harum functionum ad quantitates integrales reducibilem esse deteximus. Helmst. Dec. 14

Medium Arithmetico-Geometricum ipsum est quantitas integralis —— ~~Dem~~ —— Dec. 23

#. In theoria formarum binariarum formas reductas assignare contigit 1800. Febr. 13

Seriem $a\cos A + a'\cos(A+\varphi) + a''\cos(A+2\varphi) + \text{etc.}$ ad limitem convergit, si a, a', a'' etc. constituunt progressionem sine mutatione signi ad 0 continuo convergentem. Demonstratum Brunov. Apr. 27.

Theoriam quantitatum transcendentium

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-\alpha xx)(1-\beta xx)}}$$

ad summam universalitatem perduximus Brunov. Mai. 6.

Incrementum ingens huius theoriae Brunov. Maj. 22 invenire contigit, per quod simul omnia praecedentia nec non theoria mediorum arithmetico geometricorum pulcherrime nectuntur infinitiesque augentur

Iisdem diebus circa (Mai 16) problema chronologicum de festo paschali eleganter resolvimus.

Promulg. [illegible]

Numeratorem et denominatorem sinus lemniscatici (universalissime accepti) ad quantitates integras reducere contigit, simulque omnium functionum lemniscaticarum quae excogitari possunt, evolutiones in series infinitas ex principiis genuinis hausimus. inventum pulcherrimum sane nullique praecedentium inferius. Praeterea iisdem diebus principia deteximus secundum quae series arithmetico-geometricae interpolari debent, ita ut ~~omnes~~ terminos in progressione data ad ~~term~~ indicem quemcunque rationalem pertinentes per aequationes algebraicas exhibere iam in potestate sit. Mai ult. Jun 2. 3.

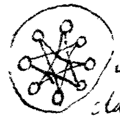
Inter duos numeros datos ~~duo~~ [int] semper dantur infinite multi termini medii tum arithmetico geometrici tum harmonico geometrici, quorum nexum mutuum ex asse perspiciendi felicitas nobis est facta. Junio 3. Brunov

Theoriam nostram iam ad transcendentes ellipticas immediate applicavimus Junio 5

Rectificatio Ellipseos tribus Methodis d. Jun. 10 [illegible] absoluta.

Calculum Numerico Exponentialem omnino novum invenimus — — — — Jun 13

Problema e calculo probabilitatis circa fractiones continuas olim frustra tentatum solvimus Oct. 25



Nov 30. Felix fuit dies quo multitudinem classium formarum binar. per triplicem methodum assignare largitum est nobis puta 1) per prod. infin 2) per aggregatum infinitum 3) per aggregatum finitum cotangentium seu logarithmorum sinuum. Brun.

\# Dec. 3. Methodum quartam et omnibus simplicissimam deteximus pro dett. negativis ex sola multit. numerorum ξ, ξ' etc. petitam si $Ax+\xi$, $Ax+\xi'$ etc. sunt formae lineares divisor. $\square + D$. Hel.

\# Impossibile esse ut sectio circuli ad aequationes inferiores quam theoria nostra suggerit reducatur demonstratum Brunov. Apr. 6

Iisdem diebus Pascha Judaeorum per methodum novam determinare coepimus (Apr. 1).

* Methodus quinta theorema fundamentale demonstrandi se obtulit adiumento theorematis elegantissimi theoriae sectionis circuli puta

$$\sum \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \Big\} \frac{nn}{a} P = \begin{matrix}+\sqrt{a}\\ +\sqrt{a}\end{matrix} \Big| \begin{matrix}0\\ +\sqrt{a}\end{matrix} \Big| \begin{matrix}0\\ 0\end{matrix} \Big| \begin{matrix}+\sqrt{a}\\ 0\end{matrix}$$

prout $a \equiv 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \pmod 4$ | substituendo pro n omnes numeros a 0 usque ad a−1

Brunsv. Mai. medio

\# Methodus nova simplicissima expeditissima ~~motu~~ elementa orbitarum corporum coelestium investigandi. Brunsu. Sept. m.

\# Theoriam motus Lunae aggressi sumus Aug.

Formulas permultas novas in Astronomia theorica utilissimas eruimus   1801 Mense Octobr

Annis insequentibus 1802. 1803. 1804 occupationes astronomicae maximam otii partem abstulerunt, calculi imprimis circa planetarum novorum theoriam instituti. Unde evenit, quod hisce annis catalogus hicce neglectus est. ~~[illegible]~~ Dies itaque, quibus aliquid ad matheseos incrementa conferre datum est memoriae exciderunt. ——

#Demonstratio theorematis venustissimi supra 1801 Mai. commemorati quam per 4 annos et ultra omni contentione quaesiveramus tandem perfecimus. Comment. rec. I   1805. Aug 30.

Theoriam interpolationis ulterius excoluimus   1805 Novbr.

#Methodum ex duobus locis heliocentricis corporis circa solem moventis eiusdem ~~orbitam~~ elementa determinandi novam perfectissimam detegimus   1806. Januar.

#Methodum e tribus planetae locis geocentricis eius orbitam determinandi ad summum perfectionis gradum evehimus   1806. Mai.

#Methodus nova ellipsin et hyperbolam ad parabolam reducendi   1806 April.

#Eodem circiter tempore resolutionem functionis $\frac{x^l-1}{x-1}$ in factores quatuor absolvimus.

#Methodus nova e quatuor planetae locis geocentricis, quorum duo extremi sunt incompleti eius orbitam determinandi 1807 Jan. 21

#Theoria Residuorum cubicorum et biquadraticorum incepta 1807 Febr. 15 ulterius exculta et completa reddita Febr. 17. Demonstratione adhuc eget:

* Demonstratio huius theoriae per methodum elegantissimam inventa ita ut penitus perfecta sit nihilque amplius desideretur   1807 Febr 22
Huic simul residua et non residua quadratica egregie illustrantur.

Theoremata, quae theoriae praecedenti incrementa maximi pretii adiungunt, demonstratione eleganti munita {scilicet pro quibusnam radicibus primitivis statuere oporteat in b positivum, pro quibusque negativum $aa + 27bb = 4p$, $aa + 4bb = p$} Febr 24

* Demonstratio omnino nova theorematis fundamentalis principiis omnino elementaribus innixam deteximus Maii 6.

Theoria divisionis in periodos tres (art. 358) ad principia longe simpliciora reducta 1808 May 10

Aequationem $X-1=0$, quae continet omnes radices primitivas aequationis $x^n-1=0$, in factores cum coëfficientibus rationalibus discerpi non posse, demonstr. pro valoribus compositis ipsius n 1808 Jun. 12

* Theoriam formarum cubicarum, solutionem aequ. $x^3+ny^3+nnz^3-3nxyz=1$ aggressus sum Dec. 23

* Theorema de residuo cubico 3 per methodum ipse item elegantem demonstratum ~~per x x+1~~ per considerationem valorum $\frac{\varepsilon+1}{x}$ ubi termini semper habent $a, a\varepsilon, a\varepsilon\varepsilon$ exceptis duobus qui dant $\varepsilon, \varepsilon\varepsilon$ hi vero sunt $\frac{1}{\varepsilon-1} = \frac{\varepsilon\varepsilon-1}{3}$, $\frac{1}{\varepsilon\varepsilon-1} = \frac{\varepsilon-1}{3}$ adeoque productum $\equiv \frac{1}{3}$ 1809 Jan 6

Series ad Media arithmeticogeometrica pertinentes fusius evolutae 1809 Jun 20

* Quinquesectionem pro mediis arithm: geom. absol. 1809 Jun 29

Catalogum praecedentem per fata iniqua iterum interruptum initio anni 1812 resumimus. In mense Nov. 1811 contigerat demonstrationem theorematis fundamentalis in doctrina aequationum pure analyticam completam reddere; sed quum nihil chartis servatum fuerit, pars quaedam essentialis memoriae penitus exciderat. Hanc per satis longum temporis intervallum frustra quaesitam tandem feliciter redinvenimus 1812 febr. 29

Theoriam Attractionis Sphaeroidis Elliptici in puncta extra solidum sita prorsus novam invenimus Seeberg. 1812. Sept. 26

Etiam partes reliquas eiusdem theoriae per methodum novam mirae simplicitatis absolvimus 1812 Oct. 15 Gött

Fundamentum theoriae residuorum biquadraticorum generalis, per septem propemodum annos summa contentione sed semper frustra quaesitum tandem feliciter deteximus eodem die quo filius nobis natus est. 1813 Oct. 23 Gött

Subtilissimum hoc est omnium eorum quae umquam perfecimus. Vix itaque operae pretium est, his intermiscere mentionem quarundam simplificationum ad calculum orbitarum parabolicarum pertinentium.

Observatio per inductionem facta gravissima theoriam residuorum biquadraticorum cum functionibus lemniscaticis elegantissime nectens. Puta si $a+bi$ est numerus primus $a-1+bi$ per $2+2i$ divisibilis, multitudo omnium solutionum congruentiae $1 = xx+yy+xxyy \pmod{a+bi}$, inclusis $x=\infty, y=\pm i$, $x=\pm i, y=\infty$ fit $= (a-1)^2+bb$ 1814 Jul. 9

ABDRUCK DES TAGEBUCHS (NOTIZENJOURNALS) MIT ERLÄUTERUNGEN.

VORBEMERKUNGEN ZUM ERSTEN ABDRUCK DES TAGEBUCHS

in der »*Festschrift zur Feier des hundertfünfzigjährigen Bestehens der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*«, Beiträge zur Gelehrtengeschichte Göttingens, Berlin 1901; siehe auch Mathematische Annalen **57**, 1903, S. 1—34 *).

Die tagebuchartigen Aufzeichnungen von GAUSS füllen in der Urschrift 19 kleine Oktavseiten in einem unscheinbaren Heftchen, welches sich seit GAUSS' Tode in der Familie weiter vererbt hat und uns durch Vermittlung von Herrn STÄCKEL im Sommer 1898 seitens des Enkels von GAUSS, des Herrn C. GAUSS in Hameln, zur Benutzung bei der Weiterführung der Gesamtausgabe von GAUSS' Werken zur Verfügung gestellt wurde. Herr C. GAUSS hat später — unter Wahrung seines persönlichen Eigentumsrechts — in dankenswerter Weise verfügt, daß besagtes Heftchen dauernd im hiesigen GAUSSarchiv aufbewahrt werden soll.

Die außerordentliche wissenschaftliche Bedeutung dieses *Tagebuchs* oder *Notizenjournals* (wie es GAUSS selbst gelegentlich in einem Brief an OLBERS nennt; siehe Nr. 88 des folgenden Abdrucks) ist bereits im zweiten derjenigen Berichte, welche der K. Gesellschaft der Wissenschaften alljährlich über den Stand der Herausgabe von GAUSS' Werken erstattet werden, unter Mitteilung einiger charakteristischer Stellen hervorgehoben worden**), — sie tritt nicht minder in dem Bande VIII von GAUSS' Werken hervor, wo wir vielfach auf die Angaben des *Tagebuchs* verweisen konnten. Nach dem von der K. Gesellschaft angenommenen allgemeinen Plane für die Weiterführung der Gesamtausgabe soll dasselbe in Band X der Werke ausführlich publiziert und bearbeitet werden. Aber es ist bis dahin noch ein langer Weg, dessen Ende noch nicht mit Sicherheit abzusehen sein dürfte. Ich glaube also auf allgemeine Zustimmung rechnen zu dürfen, wenn ich das *Tagebuch* hier vorab als Beitrag zu der von der K. Gesellschaft der Wissenschaften anläßlich ihres 150jährigen Bestehens geplanten historischen Festschrift in vorläufiger Form veröffentliche. Die endgültige Bearbeitung in Band X wird damit nichts an ihrem Werte verlieren, sie wird aber dadurch, daß das Material schon jetzt zur öffentlichen Kenntnis und öffentlichen Diskussion kommt, erleichtert werden.

Zwei Dinge dürfen ja wohl gleich hier vorab hervorgehoben werden, welche dem *Tagebuch* einen unvergleichlichen biographischen Wert verleihen.

---

*) Diese Vorbemerkungen werden hier mit Weglassung einiger nur für den ersten Abdruck in Betracht kommender Stellen und mit einigen durch die gegenwärtigen Verhältnisse bedingten Abänderungen wiedergegeben.

) Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1899, Geschäftliche Mitteilungen, Heft 1. (Abgedruckt Mathematische Annalen **53, 1899, S. 45—48.)

Das eine ist der unmittelbare, sozusagen persönliche Einblick, den wir gerade für die entscheidenden Jahre 1796—1800 in den wissenschaftlichen Werdegang des jungen GAUSS gewinnen*). Da ist noch keine Spur der abgeschlossenen Reife des wissenschaftlichen Urteils oder auch der vornehmen Zurückhaltung, wie sie GAUSS in späteren Lebensjahren zu eigen waren. Wichtiges und Unwichtiges wechselt ab; neben Entdeckungen von der größten Tragweite finden sich Trivialitäten, wie sie der Anfänger zu überwinden hat; überall aber tritt der persönliche Anteil, den GAUSS an seinen Mühen und Erfolgen nimmt, in überquellender Weise zu Tage. Und dabei immer wieder die Eigenart seines mathematischen Genius: induktiv, an der Hand von Zahlenrechnungen, die Resultate zu finden, um hinterher langsam, in härtester Arbeit, die Beweise zu zwingen.

Das andere ist die Verknüpfung der einzelnen wissenschaftlichen Fortschritte, die GAUSS gelingen, und die genaue Datierung bestimmter Entdeckungen. Man kann allerdings den Wunsch nicht unterdrücken, GAUSS möchte bei seinen Aufzeichnungen mit größerer Konsequenz vorgegangen sein und sich außerdem nicht so vielfach mit bloßen Andeutungen begnügt haben. Manche Frage nach der Entstehung von GAUSS' späteren mathematischen Auffassungen und Ideen wird sich auch mit Hilfe des *Tagebuches* niemals beantworten lassen und andererseits wird uns manche Tagebuchnotiz dauernd unverständlich bleiben. Trotzdem ist der Fortschritt, der sich aus einem genauen Vergleich der einzelnen Nummern des *Tagebuches* mit den erhaltenen Stücken des Nachlasses ergeben muß, zweifellos ein sehr bedeutender. Ich habe bei dieser ersten Publikation als meine Hauptaufgabe angesehen, in dieser Hinsicht die Wege nur erst zu ebnen, und bin nur nach einer Seite weiter gegangen, indem ich nämlich das Material aus den Jahren 1797—1800 heranzog, welches sich auf die *Theorie der elliptischen Funktionen* bezieht. Das Hauptergebnis meiner betreffenden Studien findet sich in einer Bemerkung zu Nr. 111 des *Tagebuches:* die Fachgenossen müssen entscheiden, wie weit sie dasselbe als gesicherten Besitz anerkennen und dementsprechend die bisher geltende Auffassung abändern wollen.

Hinsichtlich der Art der im folgenden gegebenen Veröffentlichung und der hinzugefügten Bemerkungen mögen übrigens folgende Angaben vorausgeschickt werden.

Zunächst, was die Notizen des *Tagebuches* selbst betrifft, so habe ich mich bei deren Wiedergabe keineswegs genau an die Äußerlichkeiten des Originals gebunden. Vor allen Dingen habe ich im Interesse der Übersichtlichkeit und der bequemeren Bezugnahme die sämtlichen Sätze durchlaufend numeriert. Die Angaben über Ort und Zeit wurden möglichst gleichförmig gestaltet, und auch dem Text, wo es wünschenswert schien, hin und wieder ein Wort oder eine Silbe (die dann in eckige Klammern eingeschlossen sind) hinzugefügt. Leicht erkennbare sprachliche Unrichtigkeiten wurden verbessert. Die Formeln wurden herausgehoben und in moderner Weise gedruckt. Einer Anzahl Nummern hat GAUSS gewisse Marken vorangestellt, um deren Wichtigkeit hervorzuheben, ferner ist eine große Zahl der Notizen, insbesondere derjenigen zahlentheoretischen Inhalts, im Original mit roter Tinte unterstrichen; im Druck wurden sowohl die Marken wie auch die Unterstreichungen weggelassen. Es scheint, als seien die Unterstreichungen erst hinterher angebracht und darauf bezüglich, ob GAUSS die einzelne Notiz bei späteren Arbeiten benutzt hat oder nicht.

Dann aber, was die Bemerkungen angeht, die den einzelnen Nummern zugesetzt sind, so haben sie vorwiegend den Zweck, den aktenmäßigen Wert des mitgeteilten Materials zu erhöhen. Hierzu schien vor allen Dingen der Hinweis auf parallellaufende Zeitangaben in den bisherigen Veröffentlichungen von GAUSS' Werken oder Briefen erwünscht. Besonderen Dank habe ich Herrn DEDEKIND für einige erläuternde Bemerkungen zu sagen, die mit seiner Namensunterschrift den in Betracht kommenden Nummern hinzugefügt worden sind. Hierüber hinaus habe ich verschiedentlich auf den handschriftlichen Nachlaß von GAUSS, wie

*) GAUSS ist am 30. April 1777 geboren, war also, als er das *Tagebuch* am 30. März 1796 begann, noch nicht ganz 19 Jahre alt.

er zur Zeit im hiesigen GAUSSarchiv aufbewahrt wird, Bezug genommen und insbesondere bei denjenigen Nummern, die sich auf die elliptischen Funktionen in den Jahren 1797—1800 beziehen, solche Stücke des Nachlasses abgedruckt, die nun erst an der Hand des *Tagebuchs* ihre volle Bedeutung gewinnen. Für die Jahre 1796, 1797 ist in dieser Hinsicht ein mit Schreibpapier durchschossenes Exemplar des Lehrbuchs von LEISTE: *Die Arithmetik und Algebra,* Wolfenbüttel 1790, (114 pag.) besonders wertvoll, in dem GAUSS damals auf dessen freie Seiten eine Reihe der interessantesten Eintragungen gemacht hat (wie er ja überhaupt in die Bücher seiner Bibliothek vielfach Notizen eintrug, gleich als wollte er jedes leere Blatt ausnutzen, das Dauer zu besitzen schien)*). Für die Jahre 1798—1800 kommen dann neben losen Zetteln, die sich zufällig erhalten haben, insbesondere die sogenannten Schedae in Betracht, d. h. Notizheftchen, welche in ungeregelter Aufeinanderfolge Zahlenrechnungen und Bemerkungen der verschiedensten Art, vielfach auch die Ansätze zu zusammenhängenden Darstellungen enthalten; das Nähere hierüber ist unten bei den einzelnen Nummern mitgeteilt. —

Ich habe noch nach verschiedenen Seiten hin für vielfache Unterstützung, die ich bei meiner Arbeit fand, Dank auszusprechen. Herr BRENDEL dahier (der jetzige Generalredaktor der GAUSSausgabe) hat mich durch seine große Kenntnis des Nachlasses weitgehend unterstützt. Nicht minder bin ich den Bearbeitern von Band VIII der GAUSSschen Werke, den Herren BÖRSCH, FRICKE und STÄCKEL, sowie den Herren FUETER und SOMMER dahier für vielfache Bemerkungen und sonstige Hilfe verpflichtet. Der Mitwirkung von Herrn DEDEKIND gedachte ich schon oben; sie erstreckte sich schließlich auf fast alle Teile des *Tagebuchs* und ist mir besonders wertvoll gewesen.

Göttingen, den 3. Juli 1901.

F. KLEIN.

VORBEMERKUNG ZU DEM HIER FOLGENDEN ABDRUCK DES TAGEBUCHS.

Die Auffindung des *Tagebuchs* durch STÄCKEL und seine erste Herausgabe durch KLEIN bedeuten die Eröffnung eines neuen Abschnitts in der GAUSSforschung, die durch diesen Stoff neubelebt und in die Bahnen zuverlässiger geschichtlicher Untersuchung geleitet worden ist. Die nachfolgende vom Unterzeichneten besorgte Ausgabe schließt sich eng an die erste an, nur konnten die Bemerkungen vermehrt und ausführlicher gestaltet werden; namentlich bei solchen Aufzeichnungen, die sonst nirgendwo berührte Gegenstände betreffen, haben sie oft die Form von kleinen Abhandlungen angenommen. Die einzelnen Bemerkungen sind mit den Namen ihrer Urheber unterzeichnet; der bei vielen Nummern diesen Namen vorangestellte Name KLEINS soll darauf hinweisen, daß die betreffende Aufzeichnung in der ersten Ausgabe erläutert war, und daß der wesentliche Inhalt jener Erläuterung in die jetzt vorliegende Bemerkung eingearbeitet worden ist. Die meisten Nummern sind jetzt verständlich; die wenigen, die keine Bemerkungen zeigen, haben sich nicht aufklären lassen.

Dem Abdruck des *Tagebuchs* in den Werken ist eine photographische Nachbildung dieser wichtigen Urkunde vorangestellt worden, die alle Einzelheiten der Handschrift deutlich hervortreten läßt. Wir machen besonders auf die in den *Vorbemerkungen* von KLEIN erwähnten Marken und auf die roten Unterstreichungen aufmerksam, die in der Nachbildung im Halbton wiedergegeben sind.

SCHLESINGER.

---

*) Die Notizen aus LEISTE werden in der Folge so zitiert, daß jedesmal die Druckseite angegeben wird, neben der sie sich in dem durchschossenen Exemplare befinden.

ABDRUCK DES TAGEBUCHS (NOTIZENJOURNALS) MIT ERLÄUTERUNGEN.

[1.]

Principia quibus innititur sectio circuli, ac divisibilitas eiusdem geometrica in septemdecim partes etc.

[1796] Mart. 30. Brunsv[igae]

Das gleiche Datum Werke I, S. 476 (handschriftliche Bemerkung zum art. 365. der *Disquis. Arithm.*). Vergl. die oben S. 3 abgedruckte Anzeige im Intelligenzblatt der allgemeinen Litteraturzeitung Nr. 66 vom 1. Juni 1796. Zur Geschichte der Entdeckung vergl. den oben S. 121 abgedruckten Brief an GERLING vom 6. Januar 1819, ferner zwei Stellen aus Briefen von W. BOLYAI, die nach dem Abdruck in dem *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und W. Bolyai*, herausgegeben von P. STÄCKEL und F. SCHMIDT, Leipzig 1899, S. 144 und 152 hier wiedergegeben seien. Am 12. April 1855 schreibt BOLYAI an den Wiener Astronomen KREIL »und (im *Disquis. Arithm.* pag. 662) $\cos\frac{P}{17} = \cdots$ war noch vor 1797 erfunden, weil er es bei mir dann an einem Abende in Göttingen sagte« und am 13. Juli 1855 an W. SARTORIUS v. WALTERSHAUSEN: »... nur einmal sah ich an ihm eine mäßige Freude, wo er die kleine Tafel, auf welcher er das 17eck *Disquis. Arithm.* p. 662 berechnet hat, zum Andenken mir gab, und [die] ich nun als etwas interessantes [nach Göttingen] hinschicke«.

Auf S. 77 der 1801 begonnenen Scheda Af hat GAUSS die folgende Zusammenstellung für ihn wichtiger Daten eingetragen:

1.	Jan.	1801	⚳ entdeckt
19.	Febr.	1803	⚴ wiedergefunden
28.	März	1802	⚴ entdeckt
30.	März	1796	Construction des 17 Ecks
30.	April	1777	∗
7.	Dec.	1801	⚳ wiedergefunden

Es bedeutet hier ⚳ Ceres, ⚴ Pallas.

KLEIN. SCHLESINGER.

[2.]

Numerorum primorum non omnes numeros infra ipsos residua quadratica esse posse demonstratione munitum.

[1796] Apr. 8. Ibid. [Brunsvigae]

Die Zeitangabe stimmt mit einer Werke I, S. 475 wiedergegebenen handschriftlichen Bemerkung von GAUSS überein, wo die Worte des art. 130. der *Disquisitiones arithmeticae* (Werke I, S. 98, 99) »Postquam rigorose demonstravimus, quemvis numerum primum formae $4n+1$, et positive et negative acceptum, alicuius numeri primi ipso minoris non-residuum esse ...« mit folgender Bemerkung begleitet werden: »hanc demonstrationem deteximus 1796 Apr. 8.« Im Anschluß an diesen Satz gibt GAUSS im art. 131. der *Disquisitiones arithmeticae* den ersten seiner sechs Beweise des quadratischen Reziprozitätsgesetzes, bezüglich dessen es Werke I, S. 475 weiter heißt: »Theorema fundamentale per inductionem detectum 1795 Martio. Demonstratio prima, quae in hac sectione traditur, inventa 1796 Apr.«. Der Wortlaut der Tagebuchnotiz Nr. 2 stimmt aber nicht mit dem Satze des art. 130. sondern mit dem sehr viel einfacheren des art. 96. der *Disquisitiones arithmeticae* (Werke I, S. 74) überein. GAUSS muß also entweder die Beweise beider Sätze am 8. April 1796 gefunden haben, oder die Tagebuchnotiz ist verschrieben und sollte lauten: Numeros primos non omnium numerorum infra ipsos etc. Das letztere ist darum anzunehmen, weil der im Texte der Tagebuchnotiz angezeigte Beweis dafür, daß quadratische Reste einer Primzahl nicht alle unter ihr liegenden Zahlen sein können, GAUSS sicher schon bekannt war, als er (März 1795) das Fundamentaltheorem durch Induktion fand, während er den Beweis des im art. 130. enthaltenen Satzes, daß wenigstens eine Primzahl $p' < p = 4n+1$ vorhanden sei, von der p Nichtrest ist, wie Werke II, S. 4 (1808) berichtet wird, ein ganzes Jahr lang (nämlich März 1795 bis April 1796) trotz angestrengtester Arbeit nicht zu zwingen vermochte.

KLEIN. BACHMANN.

[3.]

Formulae pro cosinibus angulorum peripheriae submultiplorum expressionem generaliorem non admittent nisi in duab[us] periodis.

[1796] Apr. 12. Ibid. [Brunsvigae]

[4.]

Amplificatio normae residuorum ad residua et mensuras non indivisibiles.

[1796] Apr. 29. Gotting[ae]

Diese Notiz bezieht sich auf das verallgemeinerte quadratische Reziprozitätsgesetz, das GAUSS später im art. 133. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 101, entwickelt hat; wegen des Datums vergl. die Bemerkung zu diesem Artikel, Werke I, S. 476.

KLEIN. BACHMANN.

[5.]

Numeri cuiusvis divisibilitas varia in binos primos.

[1796] Mai. 14. Gott[ingae]

Es ist hier offenbar der Satz gemeint, daß jede gerade Zahl als die Summe zweier Primzahlen dargestellt werden kann. Man bezeichnet diesen empirischen Satz gemeinhin als GOLDBACHschen, unter Berufung auf die Briefe GOLDBACHS und EULERS vom 7. und 30. Juni 1742*). Anscheinend geht diese Bezeichnung auf eine Notiz in den Nouvelles Annales de Mathématiques **14**, 1855, S. 117 zurück, die von dem damaligen Herausgeber TERQUEM herrührt**). Im **18.** Bande (1859) derselben Zeitschrift, S. 2 des Bulletin de Bibliographie etc., bemerkt TERQUEM jedoch, daß sich der gedachte Satz auf S. 379 der 3. Ausgabe von E. WARINGS *Meditationes algebraicae****) findet, wo es heißt: »Omnis par numerus constat e duobus primis numeris et omnis impar numerus vel est primus numerus, vel constat e tribus primis numeris etc.« †).

STÄCKEL. SCHLESINGER.

[6.]

Coefficientes aequationum per radicum potestates additas facile dantur.

[1796] Mai. 23. Gott[ingae]

Hierzu, wie auch zu der Nr. 28 vom 21. August 1796, vergl. man die oben S. 127, 128 abgedruckte Aufzeichnung aus LEISTE.

KLEIN.

[7.]

Transformatio seriei

$$1-2+8-64\ldots$$

in fractionem continuam:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{8}{1+\cfrac{12}{1+\cfrac{32}{1+\cfrac{56}{1+128\ldots}}}}}}}$$

---

*) Siehe P. H. FUSS, *Correspondance mathématique et physique etc.* I, St. Petersburg 1843, S. 127 und 135.

**) S. 293 desselben Bandes findet sich eine *Note sur le théorème de Goldbach* von DESBOVES.

***) Editio tertia recensita et aucta, Cantabrigiae 1782. Die erste Ausgabe war 1770 erschienen.

†) Vergl. auch die Aufsätze von CATALAN und von ENESTRÖM, Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matem. e fisiche, pubbl. da B. BONCOMPAGNI **18**, 1885, S. 467, 468.

$$1-1+1.3-1.3.7+1.3.7.15+\cdots$$
$$=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{6}{1+\cfrac{12}{1+28\ldots}}}}}$$

et aliae.

[1796] Mai. 24. G[ottingae]

In sein Exemplar von LAMBERTS *Tafeln* hat GAUSS die Umformung der divergenten Reihe

$$(1)\qquad 1-mx+m.\overline{m+n}\,xx-m.\overline{m+n}.\overline{m+2n}\,x^3+\text{etc. in inf.}$$

n den Kettenbruch

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{mx}{1+\cfrac{nx}{1+\cfrac{(m+n)x}{1+\text{etc.}}}}}$$

eingetragen, die EULER zuerst in seiner Abhandlung *De seriebus divergentibus,* Novi Comment. Acad. Petrop. 5 (1754/55) 1760, S. 205, siehe besonders S. 232, als Verallgemeinerung der analogen Umformung der Reihe

$$(1a)\qquad 1-1x+1.2x^2-1.2.3x^3+1.2.3.4x^4-\cdots \text{ in inf.}$$

behandelt hatte *). Den EULERschen Gedanken der Umformung einer divergenten Reihe in einen Kettenbruch wendet GAUSS in unserer Tagebuchaufzeichnung auf zwei Beispiele an. Bei beiden erweist sich aber nicht nur die Reihe, sondern auch der Kettenbruch als divergent. Auf das erste Beispiel kommen wir in der Bemerkung zu der Aufzeichnung Nr. 58 vom 16. Februar 1797 zurück, in Bezug auf das zweite Beispiel ist folgendes zu bemerken.

An der erwähnten Stelle von GAUSS' Exemplar der LAMBERTschen Tafeln findet sich auch die Umformung:

$$(2)\qquad x-axx+abx^3-abcx^4+\text{etc.}$$
$$=\cfrac{1}{\cfrac{1}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{a}+\cfrac{1}{\cfrac{a}{b-a}\,\cfrac{1}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{(b-a)^2}{ab(c-b)}+\cfrac{1}{\cfrac{ab(c-b)^2\frac{1}{x}}{(b-a)\left\{cd(b-a)-bc(c-a)+ab(c-b)\right\}}+\text{etc.}}}}}}$$

---

*) EULER ist später auf jene Reihe (1) in einer besondern Abhandlung Nova Acta Acad. Petrop. 2 (1784) 1788, S. 36 zurückgekommen. Auf die »Summation« der Reihe (1a) für $x = 1$ bezieht sich die oben S. 382 abgedruckte Aufzeichnung von GAUSS, vergl. die zugehörige Bemerkung S. 385. Die Umformung der Reihe (1) in den Kettenbruch gibt GAUSS auch im art. 14. der *Disquisitiones circa seriem,* 1812, Werke III, S. 138, Gl. [86].

Mit Hilfe dieser Formel kann für

$$a = 2^1 - 1,\quad b = 2^2 - 1,\quad c = 2^3 - 1,\quad \ldots$$

das Beispiel unserer Tagebuchaufzeichnung gerechnet werden. Setzt man allgemein

$$(3)\qquad c_0 x - c_1 x^2 + c_2 x^3 - c_3 x^4 + \cdots \text{ in inf.}$$

$$= \cfrac{1}{\cfrac{a_1}{x} + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cfrac{a_3}{x} + \cfrac{1}{a_4 + \text{etc.}}}}} \qquad = \cfrac{b_0}{\cfrac{1}{x} + \cfrac{b_1}{1 + \cfrac{b_2}{\cfrac{1}{x} + \cfrac{b_3}{1 + \cfrac{b_4}{\cfrac{1}{x} + \text{etc.}}}}}}$$

so ist

$$(4)\qquad b_0 = c_0 = \frac{1}{a_1},\quad b_1 = \frac{1}{a_1 a_2},\quad b_2 = \frac{1}{a_2 a_3},\quad \ldots,\quad b_m = \frac{1}{a_m a_{m+1}},\quad \ldots$$

und zur Bestimmung der $a_2, a_3, \ldots$ dienen die bekannten Formeln *)

$$(5)\qquad a_{2n} = \frac{A_n^2}{B_n B_{n-1}},\quad a_{2n+1} = \frac{B_n^2}{A_n A_{n+1}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

wo A_0, B_0 gleich 1 ist und für $n \geqq 1$ die Determinantendarstellungen

$$(6)\qquad A_n = |c_{i+k-2}|,\quad B_n = |c_{i+k-1}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

gelten. Für das GAUSSsche Beispiel, d. h. für

$$(7)\qquad c_0 = 1,\quad c_k = 1(2-1)(2^2-1)\ldots(2^k-1) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

findet man **) die Werte

$$(8)\qquad a_{2n} = \frac{1}{2^n - 1},\quad a_{2n+1} = \frac{1}{2^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

also in Übereinstimmung mit den Angaben von GAUSS:

$$b_0 = 1,\quad b_1 = 1,\quad b_2 = 2,\quad b_3 = 6,\quad b_4 = 12,\quad b_5 = 28$$

und allgemein

$$b_{2n} = 2^{2n} - 2^n,\quad b_{2n+1} = 2^n(2^{n+1} - 1).$$

---

*) Siehe z. B. T.-J. STIELTJES, *Recherches sur les fractions continues*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse 8, 1894, Abhandlung J., S. 26.

**) Die Berechnung der Determinanten A_n, B_n gestaltet sich am einfachsten, wenn man beachtet, daß für die Determinanten

$$(\nu, n) = |c_{\nu+i+k-2}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

die Rekursionsformel

$$(\nu, n) = c_\nu . c_{n-1}\, 2^{(n-1)\nu + \frac{1}{2}n(n-1)}\, (\nu + 1,\ n - 1)$$

gilt, aus der sich sofort

$$(\nu, n) = c_\nu c_{\nu+1} \ldots c_{\nu+n-1} c_{n-1} c_{n-2} \ldots c_1 . 2^{\frac{1}{2}n(n-1)(n+\nu-1) - \frac{1}{6}(n-2)(n-1)n}$$

ergibt. Man hat dann

$$A_n = (0, n),\quad B_n = (1, n).$$

Aus der Konvergenz der mit den Werten (8) gebildeten Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ folgt nach M. A. STERN *) die Divergenz des mit eben diesen Werten gebildeten Kettenbruchs für jeden Wert von $z = \frac{1}{x}$. Für $z = 1$ ergibt sich das GAUSSsche Beispiel. Da die a_k positiv sind, so ist auf den divergenten Kettenbruch die Theorie von STIELTJES **) anwendbar.

SCHLESINGER.

[8.]

Scalam simplicem in seriebus variatim recurrentibus esse functionem similem secundi ordinis scalarum componentium.

[1796] 26. Mai.

Bedeutet $G(x)$ eine ganze rationale Funktion von x von $(n-1)$-tem oder niedrigerem Grade und entwickelt man

$$\frac{G(x)}{1 - a_1 x - a_2 x^2 - \cdots - a_n x^n}$$

in die unendliche Reihe $s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + \cdots$, so ist

$$s_{n+t} = a_1 s_{n+t-1} + a_2 s_{n+t-2} + \cdots + a_n s_t \qquad (t = 0, 1, 2, \ldots).$$

Eine solche Reihe nennt A. DE MOIVRE (*Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis,* Londini 1730, S. 27, siehe auch schon Philosophical Transactions, London 1722, S. 162) rekurrent und bezeichnet die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ als Index oder Scala relationis***). Sowohl hier als auch in den Aufzeichnungen Nr. 10 und Nr. 20, die sich auf denselben Gegenstand beziehen, denkt sich GAUSS anscheinend den Nenner in Faktoren zerlegt und die zum Nenner gehörige einfache Skala aus den zu den Faktoren gehörigen Skalen komponiert. Hier in der Nr. 8, wo von einer Funktion zweiten Grades die Rede ist, hat er vermutlich die Zerlegung des Nenners in zwei Faktoren im Auge, wogegen sich die Nr. 20 auf den Fall von drei und mehr Faktoren beziehen könnte. Die Zerlegung des Nenners in ein Produkt von Faktoren ersten Grades und die Entwicklung der reziproken Werte dieser Faktoren in geometrische Reihen kommt im art. 1. der aus dem Nachlaß herausgegebenen *Theoria interpolationis methodo nova tractata* (Werke III, S. 265) vor. Ein Beispiel einer rekurrenten Reihe für $n = 2$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$ findet sich im art. 4. des nachgelassenen Bruchstücks *Grundbegriffe der Lehre von den Reihen* (oben S. 393).

KLEIN. LOEWY.

[9.]

Comparationes infinitorum in numeris primis et factoribus cont[entorum].

[1796] 31. Mai. G[ottingae]

Diese Aufzeichnung, sowie die Nr. 13 vom 19. Juni 1796 beziehen sich wohl auf die oben S. 11, 12 abgedruckten Eintragungen in SCHULZES *Tafeln,* die vom Mai 1796 datiert sind.

BACHMANN.

*) Siehe STERN, *Über die Kennzeichen der Convergenz eines Kettenbruchs,* CRELLES Journal für Mathem. **37**, 1848, S. 255, besonders S. 260.

**) Siehe a. a. O. S. 36 ff.

***) Vergl. auch die Kapitel IV, XIII und XVII von EULERS *Introductio in analysin infinitorum* I,

[10.]

Scala ubi seriei termini sunt producta vel adeo functiones quaecunque terminorum quotcunque serierum.

[1796] 3. Iun. G[ottingae]

Vergl. die Bemerkung zu der Nr. 8.

[11.]

Formula pro summa factorum numeri cuiusvis compositi:

$$\text{f[actum] gener[ale] } \frac{a^{n+1}-1}{a-1}.$$

[1796] 5. Iun. G[ottingae]

Diese Notiz spricht den Satz aus, daß wenn eine Zahl N in Primzahlpotenzen zerlegt gleich Πa^n ist, die Summe der Teiler von N durch das Produkt (factum)

$$\Pi \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

dargestellt wird.

BACHMANN.

[12.]

Periodorum summa omnibus infra modulum numeris pro elementis sumtis:

$$\text{fact[um] gen[erale] } ((n+1)a-na)a^{n-1}$$

[1796] 5. Iun. G[ottingae]

Der Ausdruck Periode hat hier sicher die gleiche Bedeutung wie in den *Disquisitiones arithmeticae*, art. 46, Werke I, S. 39. Ist N teilerfremd zu p und d der Exponent, zu dem N modulo p gehört oder allgemeiner, für den

$$N^d \equiv 1 \pmod{p}$$

wird, so nennt dort GAUSS die Potenzen

$$1, N, N^2, \ldots, N^{d-1}$$

oder ihre Reste modulo p eine Periode. Die Wendung »omnibus infra modulum numeris pro elementis sumtis« zeigt, daß in unserer Aufzeichnung der Modulus p als Primzahl gedacht ist. Nun ist für die Summe aller dieser Perioden, auch wenn ihre einzelnen Glieder durch die Reste nach dem Modul p ersetzt werden, ein dem angedeuteten Produkte ähnlicher Ausdruck nicht vorhanden. Würde unter Periode nur die Anzahl ihrer Glieder verstanden, so wäre die periodorum summa, da $\varphi(d)$ Zahlen zum Exponenten d gehören, die auf alle Teiler d von $p-1$ bezogene Summe $\sum d.\varphi(d)$, für die man, wenn in Primfaktoren zerlegt

$$p-1 = \Pi a^n$$

Lausannae 1748, wo MOIVRE angeführt und die Bezeichnung scala gebraucht wird, sowie desselben Verfassers *Institutiones calculi differentialis* I, 1755, § 46, L. EULERI Opera omnia, ser. I, vol. 10, S. 45.

gedacht wird, den Ausdruck

$$\Pi \frac{a^{2n+1}+1}{a+1}$$

erhält. Zieht man nur die voneinander verschiedenen Perioden in Betracht, so ergibt sich (siehe die vorhergehende Nr. 11)

$$\sum d = \Pi \frac{a^{n+1}-1}{a-1};$$

beides stimmt nicht. Nimmt man aber den Ausdruck Summa im Sinne von Gesamtheit oder Anzahl, so besagte unsere Notiz nichts anderes als den Satz (*Disquis. arithm.* art. 39., Werke I, S. 31)

$$\sum \varphi(d) = p-1 = \Pi a^n,$$

was, wenn die Formel von GAUSS richtig geschrieben ist, mit ihr übereinstimmen würde; doch wäre dann die dem Faktor des Produkts gegebene Form sehr wunderlich.

Wahrscheinlich liegt aber hier ein Schreibfehler vor und der Faktor soll

$$((n+1)a-n)a^{n-1}$$

lauten. Bildet man nämlich für alle Reste modulo p oder, was auf dasselbe hinauskommt, für alle Exponenten $k = 1, 2, \ldots, p-1$ und für eine primitive Wurzel g von p die Potenzen

$$1,\ g^k,\ g^{2k},\ \ldots,\ g^{(p-2)k},$$

so erscheint für die $\varphi(d)$ Werte von k, die teilerfremd sind zu dem Teiler d von $p-1$, je eine d-gliedrige Periode $\delta = \frac{p-1}{d}$ mal, und man erhält so eine Summa — im Sinne von Gesamtheit oder Anzahl — von

$$\sum_{d\delta=p-1} \varphi(d).\delta$$

Perioden. Hier ist aber

$$\sum_{d\delta=p-1} \varphi(d).\delta = (p-1)\Pi\left(1+\frac{a-1}{a}+\frac{a(a-1)}{a^2}+\cdots+\frac{a^{n-1}(a-1)}{a^n}\right) = \Pi a^n.\Pi\left(1+n\frac{a-1}{a}\right)$$
$$= \Pi((n+1)a-n)a^{n-1}.$$

BACHMANN.

[13.]

Leges distributionis.

[1796] 19. Iun. G[ottingae]

Vergl. die Bemerkung zu der Nr. 9.

[14.]

Factorum Summae in Infinito $= \frac{\pi\pi}{6}$. Sum[mam] Num[erorum].

[1796] 20. Iun. G[ottingae]

Vergl. die Notiz Nr. 31 vom 6. September 1796 und die oben S. 14 abgedruckte Aufzeichnung aus den *Exercitationes Mathematicae* sowie die zugehörigen Bemerkungen oben S. 17, 18.

KLEIN. BACHMANN.

[15.]

Coepi de multiplicatoribus (in formis divisorum form[aru]m qu[adraticarum]) connexis cogitare.

[1796] 22. Iun. G[ottingae]

Vergl. Werke I, S. 476, wo zur Überschrift der Sectio quinta der *Disquisitiones arithmeticae* »de formis aequationibusque indeterminatis secundi gradus« vermerkt ist: Inde a Iun. 22. 1796. Bezüglich der Begriffe »Multiplicatores connexi« und »Forma divisorum« vergl. die oben S. 80 abgedruckte Aufzeichnung, wo im ersten Satze von Formen der Divisoren und im art. 1. von verbundenen, im art. 4. von zusammenhängenden Multiplikatoren die Rede ist, sowie die zugehörigen Bemerkungen S. 83.

KLEIN. BACHMANN.

[16.]

Nova theorematis aurei demonstratio a priori toto coelo diversa eaque haud parum elegans.

[1796] 27. Iun.

Vergl. Werke I, S. 476, Bemerkung zum art. 262. der *Disquisitiones arithmeticae,* wo indes als Datum für die Auffindung dieses zweiten Beweises des quadratischen Reziprozitätsgesetzes, in Übereinstimmung mit GAUSS' eigener Notiz in seinem Handexemplar der *Disquisitiones arithmeticae,* 1796, Juli 27. angegeben ist. Aus der Reihenfolge der Nummern 15, 16, 17 des *Tagebuchs* ergibt sich aber, daß Juli ein Schreibfehler ist. Wegen der Bezeichnung des Reziprozitätsgesetzes der quadratischen Reste als »theorema aureum« vergl. den Artikel 17 des Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«, Werke X 2, S. 44, 45.

KLEIN. BACHMANN.

[17.]

Quaeque partitio numeri a in tria $\square$ dat formam in tria $\square$ separabilem.

[1796] 3. Iul.

Man vergl. zu dieser und zu der folgenden Nr. 18 die oben S. 78 abgedruckte Aufzeichnung aus dem LEISTE, ferner den Artikel 12 des Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«, Werke X 2, S. 29, 30. Unter dem Zeichen $\square$ ist Quadratzahl bezw. Quadrat einer Linearform, unter Forma ohne Zweifel binäre quadratische Form zu verstehen; somit weist diese Notiz schon auf die allgemeinen Ergebnisse hin, die im art. 280. der *Disquisitiones arithmeticae,* Werke I, S. 318 dargestellt sind.

BACHMANN.

[18.*)]

ΕΥΡΗΚΑ! num[erus] $= \Delta + \Delta + \Delta$.

[1796] 10. Iul. Gott[ingae]

Vergl. die Bemerkung zu der Nr. 17; es soll zum Ausdruck gebracht werden, daß jede Zahl als Summe von drei Dreieckszahlen dargestellt werden kann.

KLEIN. BACHMANN.

[19.]

Determinatio EULERiana formarum in quibus numeri compositi plus una vice continentur.

[1796 Iul. Gottingae]

Gemeint sind hier jedenfalls die Methoden, die EULER für die Entscheidung der Frage angegeben hat, ob eine vorgegebene Zahl von der Form $4n+1$ eine Primzahl ist oder nicht; siehe die §§ 40—43 der Abhandlung *De numeris, qui sunt aggregata duorum quadratorum,* Novi Comm. Acad. Petropol. **4** (1752/53) 1758, S. 3—40, insbesondere S. 29 ff.**) und *Extrait d'une lettre de M. Fuss à M. Béguelin,* Nouv. Mémoires de l'Académie de Berlin (1776) 1779, S. 340—346***). Im LEISTE finden sich an mehreren Stellen nach diesen Methoden ausgeführte Rechnungen, so heißt es z. B. bei S. 48:

[*) Zwischen den Notizen Nr. 17 und Nr. 18 steht in der Handschrift noch eine Aufzeichnung, die GAUSS durchstrichen hat und die darum nur schwer lesbar ist (vergl. die Nachbildung). Sie lautet wie folgt:]

[17a.]

Summa trium quadratorum continue proportionalium numquam primus esse potest: conspicuum exemplum novimus et quod congruum videtur. Confidamus.

[1796] 9. Iul.

Wenn die drei Quadrate ganzer Zahlen x^2, y^2, z^2 in laufender Proportion stehen, so ist

$$x:y:z = 1:\frac{m}{n}:\frac{m^2}{n^2}.$$

Als Summe der drei Quadrate ergibt sich also die zerlegbare Form

$$m^4+m^2n^2+n^4 = (m^2+mn+n^2)(m^2-mn+n^2),$$

die im allgemeinen keine Primzahl darstellt. Vielleicht hat GAUSS zunächst die Möglichkeit

$$m^2+mn+n^2 = p, \quad m^2-mn+n^2 = 1$$

übersehen, die für $m=n=1$, $p=3$ eintritt. Bei dem »conspicuum exemplum« war wohl für m oder n eine von Eins verschiedene ganze Zahl genommen worden.

BACHMANN.

) L. EULERi Opera omnia, series I, vol. 2, S 295. Vergl. auch noch die Abhandlung *Quomodo numeri praemagni sint explorandi, utrum sint primi nec ne,* Novi Comm. Acad. Petrop. **13 (1768) 1769, S. 67—88, Opera omnia, ser. I, vol. 3, S. 112.

***) L. EULERi Opera omnia, ser. I, vol. 3, S. 421; diese Note ist ein ausführlicher Bericht über den

Discerpend. 283009 in bina quadrata

$$4225 + 528^2,$$

also Primzahl.

STÄCKEL. SCHLESINGER.

[20.]

Principia componendi scalas serierum variatim recurrentium.

[1796] 16. Iul. Gott[ingae]

Vergl. die Bemerkung zu der Nr. 8. Daß GAUSS sich auch noch im folgenden Monat mit rekurrenten Reihen beschäftigt hat, zeigt der vom 28. August 1796 datierte art. [3.] der *Exercitationes mathem.*, oben S. 139.

LOEWY.

[21.]

Methodus EULERiana pro demonstranda relatione inter rectangula sub segmentis rectarum sese secantium in sectionibus conicis ad omnes curvas applicata [*)].

[1796] 31. Iul. Gott[ingae]

EULER gibt in der *Introductio in analysin infinitorum,* Lausannae 1748, II, § 92, 93 einen einfachen Beweis für den im wesentlichen schon von APOLLONIUS (Buch 3, § 17, 19, 22) erkannten Satz: Werden durch einen Punkt O zwei Geraden gezogen, die einen Kegelschnitt in den Punkten A, B und A', B' treffen, so hat, wenn nur die Geraden ihre Richtung beibehalten, das Verhältnis der Produkte $OA.OB$ und $OA'.OB'$ für alle Lagen von O denselben Wert. Daß der Beweis sich auf Kurven höherer Ordnung übertragen läßt, ist EULER nicht entgangen; an einer spätern Stelle der *Introductio* hat er dies für die Kurven dritter Ordnung ausführlich dargelegt und sagt dann (§ 247): Atque similis proprietas in lineas quarti, quinti atque superiorum ordinum competet.

STÄCKEL.

[22.]

$a^{2^n \mp 1\,(p)} \equiv 1$ semper solvere in potestate.

[1796] Aug. 3. Gott[ingae]

Diese Aufzeichnung besagt vermutlich, daß GAUSS, wenn p eine Primzahl von der Form $2^n \mp 1$ ist, die Funktion $x^p - 1$ in Bezug auf einen Primzahlmodul in ihre Primfunktionfaktoren zu zerlegen vermochte. Vergl. *Analysis Residuorum,* Werke II, S. 229 und S. 199—211; S. 209 wird der Fall $p = 31 = 2^5 - 1$ modulo 331 behandelt.

BACHMANN.

Inhalt der erst nach EULERS Tode veröffentlichten, 1801 erschienenen Abhandlung *De formulis speciei* $mxx + nyy$ *ad numeros primos explorandos idoneis, earumque mirabilibus proprietatibus,* Nova Acta Acad. Petrop. **12** (1794) 1801, S. 22—46, die also GAUSS im Juli 1796 nicht gekannt haben kann.

[*) In der Handschrift steht applicatum.]

[23.]

Rationem theorematis aurei quomodo profundius perscrutari oporteat perspexi et ad hoc accingor supra quadraticas aequationes egredi conatus. Inventio formularum, quae semper per primos: $\sqrt[n]{1}$ (numerice) dividi possunt.

[1796] Aug. 13. Ibid. [Gottingae]

Siehe Werke II, S. 230. Gemeint sind die Ausdrücke $x^{\pi}-1$, für die $p^n \equiv 1 \pmod{\pi}$. — Im letzten Satze des Textes hat die Handschrift qui statt quae.

BACHMANN.

[24.]

Obiter $(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$ evolutum.

[1796 Aug.] 14.

Bei S. 111 des LEISTE steht eine Aufzeichnung: »*Canon quantitatum imaginariarum exponentialium*« mit Ausdrücken für $a^{\sqrt{-1}}$ und $(a+b\sqrt{-1})^{n\sqrt{-1}}$.

SCHLESINGER.

[25.]

Rei summa iamiam intellecta. Restat ut singula muniantur.

[1796 Aug.] 16. G[ottingae]

Da diese Aufzeichnung, ebenso wie die Nummern 22, 23, 26, 27, in der Handschrift rot (in der Nachbildung im Halbton) unterstrichen ist, bezieht sie sich wahrscheinlich auf einen der in den genannten Nummern behandelten arithmetischen Gegenstände, während die Nr. 24 nur eine gelegentlich (obiter) gemachte Bemerkung darstellt.

SCHLESINGER.

[26.]

$(a^p) \equiv (a)$ mod. p, a radix aequationis cuiusvis quomodocunque irrationalis.

[1796 Aug.] 18. [Gottingae]

Es ist dies der Satz, der im art. 350. der *Analysis Residuorum*, Werke II, S. 224, in der Form

$$(P, \rho^{\tau}) \equiv P \pmod{\tau}$$

ausgesprochen ist. Es bedeutet also hier (a) eine ganze rationale Funktion von x, die für $x = a$ verschwindet, und entsprechend (a^p) die Funktion, deren Wurzeln die p-ten Potenzen der Wurzeln der ersten Funktion sind; p Primzahl.

DEDEKIND. BACHMANN.

[27.]

Si P, Q functiones alg[ebraicae] quantitatis indeterminatae fuerint inc[ognitae]. Datur:

$$tP + uQ = 1$$

in algebra tum speciata tum numerica.

[1796 Aug.] 19. G[ottingae]

Siehe für die algebra numerica (Zahlentheorie) *Analysis Residuorum*, art. 335., Werke II, S. 215, für die algebra speciata oder speciosa (Buchstabenrechnung) *Demonstratio nova etc.*, 1816, art. 2., Werke III, S. 35.

KLEIN. BACHMANN.

[28.]

Exprimuntur potestates radicum aequationis propositae aggregatae per coefficientes aequationis lege perquam simplici (cum aliis quibusdam geometr[icis] in Exerc[itationibus]).

[1796 Aug.] 21. G[ottingae]

Vergl. die Bemerkung zu der Nr. 6, oben S. 490. Der art. [2.] der dort angeführten Leisteaufzeichnung (oben S. 128) zeigt, daß es sich hier um die explizite Darstellung der Potenzsummen der Wurzeln durch die Koeffizienten einer algebraischen Gleichung handelt. Für $n = 1, 2, 3, 4$ finden sich diese Formeln bei ALBERT GIRARD in der *Invention nouvelle en l'Algèbre*, Amsterdam 1629 (neue Ausgabe Leyden 1884), die allgemeine Darstellung mit dem von GAUSS gefundenen Bildungsgesetz gibt WARING in den *Miscellanea analytica de aequationibus algebraicis etc.*, Cambridge 1762 *). In EULERS *Introductio in analysin infinitorum*, Lausannae 1748, Liber I, § 166, S. 128 findet man bloss die NEWTONschen Formeln, die keine independente, sondern nur eine rekurrente Darstellung der Potenzsummen geben. In der Abhandlung *Observationes circa radices aequationum* **) hat auch EULER eine independente Darstellung der Potenzsummen abzuleiten versucht, doch ist er zu keinem so übersichtlichen Bildungsgesetz gelangt, wie es bei WARING und GAUSS vorliegt. Wie wenig bekannt WARINGS Darstellung geblieben war, geht u. a. daraus hervor, daß von ihr in KLÜGELS *Mathematischem Wörterbuch* I, Leipzig 1803, wo S. 467 und 507 (fälschlich als 495 numeriert) von den NEWTONschen und den expliziten GIRARDschen Formeln gehandelt wird, nicht die Rede ist. Auch die im art. [1.] der Leisteaufzeichnung (oben S. 127) angegebene explizite Darstellung der Gleichungskoeffizienten durch die Potenzsummen findet sich bei WARING a. a. O., und zwar gibt WARING die allgemeinen Formeln für ein beliebiges n, während GAUSS sich auf die vier ersten Koeffizienten beschränkt.

Die in unserer Tagebuchnotiz erwähnten *Exercitationes Mathematicae*, die oben S. 138 abgedruckt sind, haben bei den artt. [1.], [2.] in der Tat dieselbe Zeitangabe, 21. August 1796.

LOEWY.

---

*) Vergl. hierzu L. SAALSCHÜTZ, Bibliotheca mathematica (3) **9**, 1908, S. 65.

) Novi Comm. Acad. Petrop. **15 (1770) 1771, S. 51.

[29.]

Summatio Seriei infinitae

$$1 + \frac{x^n}{1\ldots n} + \frac{x^{2n}}{1\ldots 2n} \text{ etc.}$$

eod[em die, 1796 Aug. 21.]

Die Reihe befriedigt die Differentialgleichung

$$\frac{d^n u}{dx^n} = u$$

mit den Anfangsbedingungen, daß für $x = 0$, $u = 1$ und die $n-1$ ersten Derivierten gleich Null sind. Daraus ergibt sich

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^{\nu n}}{(\nu n)!} = \frac{1}{n} \sum_{\varkappa=1}^{n} e^{x\left(\cos\frac{2\varkappa\pi}{n} + i\sin\frac{2\varkappa\pi}{n}\right)};$$

vergl. die Bemerkung zum art. [3.] der *Exercitationes mathematicae*, oben S. 143, 144. Über Funktionen dieser Art, die HOENE-WRONSKI (*Philosophie des Mathématiques*, Paris 1811) als Sinus bezw. Kosinus höherer Ordnung bezeichnet hat, gibt es eine umfangreiche Literatur, die bei S. GÜNTHER, *Die Lehre von den ... Hyperbelfunktionen*, Halle 1881, und bei K. WALLNER, Programm der K. Realschule Rothenburg o. T. 1913, zusammengestellt ist.

SCHLESINGER.

[30].

Minutiis quibusdam exceptis feliciter scopum attigi scil[icet] si

$$p^n \equiv 1 \pmod{\pi},$$

fore $x^\pi - 1$ compositum e factoribus gradum n non excedentibus et proin aequationem conditionalem fore solubilem; unde duas theor[ematis] aurei demonstr[ationes] deduxi.

[1796] Sept. 2. G[ottingae]

Siehe *Analysis Residuorum* art. 360., Werke II, S. 230, sowie die Tagebuchnotizen Nr. 23 vom 13. August 1796 und Nr. 68 vom 21. Juli 1797. Die aequatio conditionalis ist vermutlich dieselbe, die GAUSS sonst aequatio auxiliaris genannt hat, vergl. *Analysis Residuorum* artt. 365. und 366., Werke II, S. 233, 234, wo sich die beiden Beweise des »theorematis aurei« finden Die Minutia excepta sind die am Ende des art. 363., Werke II, S. 232 erwähnten Schwierigkeiten, die erst in der Tagebuchnotiz Nr. 68 als behoben angemerkt werden.

DEDEKIND. BACHMANN.

[31.]

Numeros fractionum inaequalium quarum denominatores certum limitem non superant ad numerum fractionum omnium quarum num[eratores] aut denom[inatores] sint diversi infra eundem limitem in infinito ut 6: $\pi\pi$.

[1796] Sept. 6.

Vergl. die Bemerkung zu der Nr. 14, oben S. 495.

[32.]

Si $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}}$ stat[uatur] $\Pi : x = z$ et $x = \Phi : z$, erit

$$\Phi : z = z - \frac{1}{8} z^4 + \frac{1}{112} z^7 - \frac{1}{1792} z^{10} + \frac{3}{1792.52} z^{13} - \frac{3.185}{1792.52.14.15.16} z^{16} \ldots$$

[1796] Sept. 9.

Vergl. den art. [5.] der *Exercitationes mathematicae,* oben S. 140 und die zugehörige Anmerkung S. 144. Im Zähler des Koeffizienten von z^{16} muß es statt 185 heißen 165 *). Das hier betrachtete Integral kommt auch in der oben S. 152 abgedruckten Leisteaufzeichnung vor. In der Werke VIII, S. 93 abgedruckten, aus dem Jahre 1800 stammenden Aufzeichnung untersucht GAUSS die Umkehrung des Integrals $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$. Vergl. auch die folgende Notiz Nr. 33.

SCHLESINGER.

[33.]

Si

$$\Phi : \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = x$$

erit:

$$\Phi : z = z - \frac{1.z^n}{2.n+1} A + \frac{n-1.z^n}{4.2n+1} B - \frac{nn-n-1.[z^n]}{2.n+1.3n+1} C \ldots$$

[1796] Sept. 14.

Hier bedeutet (vergl. die Bemerkung zum art. [5.] der *Exercitationes mathematicae,* oben S. 144) A das erste Glied der Reihe, also z, B das zweite, also $+\frac{1.z^n}{2(n+1)} \cdot z$, C das dritte, also $\frac{(n-1)z^n}{4(2n+1)} \cdot \frac{1.z^n}{2(n+1)} \cdot z$ u.s.w. Diese Schreibweise wird auf NEWTON zurückgeführt. Für $n = 3$ ergeben sich die in der vorhergehenden Nummer betrachteten Ausdrücke.

SCHLESINGER.

---

*) Der Koeffizient von z^{16} lautet nämlich, vergl. S. 140 letzte Zeile

$$-\frac{1.3.3.5.5.9.9.11.11.15}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15}.$$

[34.]

Methodus facilis inveniendi aeq[uationem] in y ex aeq[uatione] in x, si ponatur:

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} \cdots = y.$$

[1796 Sept. 16.]

GAUSS hat wohl die sogenannte TSCHIRNHAUSENsche Transformation im Auge: Aus einer Gleichung: $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \cdots + M = 0$ soll die transformierte Gleichung in y abgeleitet werden, wenn $y = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots$ ist. Es könnte dann mit der bequemen Methode, die Gleichung in y zu finden, die mittels der Potenzsummen gemeint sein, die für den besondern Fall $y = x^\tau$ im art. 348. der *Analysis Residuorum,* Werke II, S. 223 als Solutio prima auseinandergesetzt ist. Man hätte so eine unmittelbare Anknüpfung an die Notiz Nr. 28 vom 21. August 1796.

LOEWY.

[35.]

Fractiones quarum denominator continet quantitates irrationales (quomodocunque?) in alias transmutare ab hoc incommodo liberatas.

[1796] Sept. 16.

Vermutlich handelt es sich um die Umwandlung einer gebrochenen rationalen Funktion einer Wurzel einer algebraischen Gleichung in eine ganze rationale Funktion dieser Wurzel. Ausführlich behandelt GAUSS die »principia talis transformationis, quum in libris algebraicis non inveniantur« im art. 11. der *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi* (Werke III, S. 177). Auf die Möglichkeit einer solchen Umwandlung wird auch schon im art. 360. III der *Disquisitiones arithmeticae* (Werke I, S. 453) hingewiesen.

LOEWY.

[36.]

Coefficientes aeq[uationis] auxiliariae eliminationi inservientis ex radicibus aeq[uationis] datae determinati.

eod[em die, 1796 Sept. 16.]

Vermutlich hängt diese Aufzeichnung mit den Untersuchungen über Elimination zusammen, von denen in der Aufzeichnung Nr. 89 des *Tagebuchs* vom Juni 1798 die Rede ist.

LOEWY.

[37.]

Nova methodus qua resolutionem aequationum universalem investigare forsitanque invenire licebit. Scil[icet] transm[utetur] aeq[uatio] in aliam, cuius radices

$$\alpha\rho' + \beta\rho'' + \gamma\rho''' + \cdots,$$

ubi

$$\sqrt[n]{1} = \alpha, \beta, \gamma \text{ etc.}$$

et n numerus aequationis gradum denotans.

[1796] Sept. 17.

Diese Aufzeichnung zeigt, daß GAUSS mit Hilfe der sogenannten LAGRANGEschen Resolvente*) die algebraische Auflösbarkeit der allgemeinen algebraischen Gleichung untersucht und damals noch an die Möglichkeit gedacht hat, die Auflösung auf diese Weise auch wirklich zu finden. Daß GAUSS sich viel mit dieser Frage beschäftigt hat, geht aus einer Stelle des nicht veröffentlichten Teiles des Caput sextum der *Analysis Residuorum***) hervor, wo es im art. 262. heißt:

Post illustrissimorum Geometrarum labores repetitos nulla spes superesse videtur Aequationum solutionem generalem possibilem esse (i. e. reductionem ad aequationes puras†)). Sed tamen maxime est memorabile, aequationes omnes, ad quas solutio aequationis $x^n = 1$ ducit, resolvi sive ad puras eiusdem gradus reduci posse . . . .

†) Nos etiam huic rei multum operae impendimus; et tantum non de impossibilitate sumus certi. Forsan, quae in hoc genere meditati sumus et quae forsan ad demonstrationem rigorosam huius impossibilitatis ducere possunt, alia occasione publici iuris faciemus.

*) Siehe LAGRANGE, *Réflexions sur la résolution algébrique des équations,* Nouveaux Mémoires de l'Académie, année 1770, Berlin 1772, S. 134 und *Suite des réflexions etc.*, ebenda, année 1771, Berlin 1773, S. 138, besonders S. 163 der *Suite*, Oeuvres III, S. 331. Eine deutsche Übersetzung beider Teile dieser Abhandlung findet sich in *Leonh. Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen,* . . . übersetzt und mit . . . Zusätzen begleitet von J. A. CHR. MICHELSEN, 3. Buch: *Die Theorie der Gleichungen aus den Schriften der Hrn. Euler und de la Grange,* Berlin 1791, S. 271 ff.; der zweite Teil beginnt auf S. 378. GAUSS hat das MICHELSENsche *dritte Buch* spätestens im April 1797 gekannt, da er es in der Abhandlung *Neuer Beweis des Lagrangischen Lehrsatzes* (Werke VIII, S. 76) anführt, die er etwa im April 1797 (nämlich dritthalb Jahre vor dem 8. Oktober 1799, siehe den Brief an HINDENBURG von diesem Tage, oben S. 429) durch KAESTNER hat an HINDENBURG senden lassen; vergl. auch die Tagebuchnotiz Nr. 49 vom 27. Dezember 1796. Die Arbeit von LAGRANGE, *Réflexions sur la résolution* etc., von der hier die Rede ist, meint PFAFF in dem oben S. 101 abgedruckten Briefe, wenn er S. 104, Zeile 5, 4 v. u. von »der früheren Abhandlung von LA GRANGE, die bekanntlich auch von MICHELSEN deutsch übersetzt ist« spricht.

**) Über diese Handschrift (Ea 9, Kapsel 40) vergleiche man die Bemerkungen, die R. DEDEKIND dem Abdruck zweier Abschnitte, Werke II, S. 240 hinzugefügt hat, und den Artikel 2 von P. BACHMANNS Aufsatz »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«, Werke X 2, S. 6; danach ist das 6. Kapitel der *Analysis Residuorum* vermutlich vor dem 20. Juli 1797 verfaßt worden.

Diese Stelle zeigt auch, daß GAUSS schon im Jahre 1797 zu der Überzeugung gelangt war, die allgemeine algebraische Gleichung sei durch Wurzelzeichen nicht auflösbar; öffentlich ausgesprochen hat er diese Überzeugung erst im art. 9. der *Inauguraldissertation* (1799, Werke III, S. 17) und im art. 359. der *Disquisitiones arithmeticae* (1801, Werke I, S. 449).

Die Anwendung der LAGRANGEschen Resolvente auf die Kreisteilungsgleichung (siehe *Disquisitiones arithmeticae* art. 360., Werke I, S. 450) ist erst in den Tagebuchnotizen Nr. 65 und Nr. 66 vom Juli 1797 angezeigt.

LOEWY.

[38.]

In mentem mihi venit radices aeq[uationis] $x^n - 1$ [$= 0$] ex aeq[uationibus] communes radices habentibus elicere ut adeo plerumque tantum aequationes coefficientibus rationalibus gaudentes resolvi oporteat.

[1796] Sept. 29. Bruns[vigae*)]

Wahrscheinlich hat GAUSS hier die Zurückführung der Auflösung der Gleichung $x^n = 1$ auf

$$x^{a^\alpha} = 1, \quad x^{a'^{\alpha'}} = 1, \quad x^{a''^{\alpha''}} = 1, \quad \ldots$$

im Auge, wenn $n = a^\alpha . a'^{\alpha'} . a''^{\alpha''} \ldots$ ist und $a, a', a'', \ldots$ lauter verschiedene Primzahlen bedeuten, vergl. *Disquisitiones arithmeticae,* art. 336. (Werke I, S. 413) und art. 366. (Werke I, S. 463); hier ist auch noch weiter von der Zurückführung der Gleichungen die Rede, deren Grad eine Primzahlpotenz ist, auf solche vom Primzahlgrad, was aber die Kenntnis der Lösungen von $x^a = 1$, $x^{a'} = 1$, $x^{a''} = 1, \ldots$, also die Einführung von Irrationalitäten erfordert. Vergl. auch den ersten Absatz des art. [2.] des nachgelassenen Bruchstücks *Über die Unzerlegbarkeit der Kreisteilungsgleichung,* oben S. 118**), und besonders den art. 238. des aus dem Jahre 1797 stammenden 6. Kapitels der *Analysis Residuorum,* Werke II, S. 199.

LOEWY.

[39.]

Aequatio tertii gradus est haec:

$$x^3 + xx - nx + \frac{nn - 3n - 1 - mp}{3} = 0,$$

ubi $3n + 1 = p$ et m numerus resid[uorum] cubic[orum] similes sui excipientes. Unde sequitur si $n = 3k$, fore $m + 1 = 3l$; si $n = 3k \pm 1$, fore $m = 3l$.

[*) Zwischen dem 17. und dem 29. September 1796 scheint GAUSS von Göttingen nach Braunschweig abgereist zu sein. Es wären dann die Tagebuchnotizen Nr. 4 bis Nr. 37 in Göttingen geschrieben; bei der Nr. 38 beginnt auch andere Tinte.]

**) Die Angabe von GAUSS oben S. 118 Zeile 7 v. u., die Zahlen $\beta, \beta', \ldots$ seien Divisoren von

$$a^{\alpha-1}(a-1), \quad a'^{\alpha'-1}(a'-1), \quad \ldots$$

trifft nicht zu, es kommen vielmehr für β nur die $a^{\alpha-1}(a-1)$ Zahlen in Frage, die kleiner als a^α und zu a^α teilerfremd sind, und entsprechend für $\beta', \beta'', \ldots$.

Sive

$$z^3 - 3pz + pp - 8p - 9pm = 0.$$

Hoc [modo] m penitus determinatum, $m+1$ semper $\square + 3\square$.

[1796] Octob. 1. Bruns[vigae]

Es bedeutet hier m die Anzahl der Lösungen der Kongruenz

$$1 + g^{3t} \equiv g^{3z} \pmod{p},$$

also dasselbe, was im art. 358. der *Disquisitiones arithmeticae,* Werke I, S. 445 mit $(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) = a - 1$ bezeichnet wird*). Setzt man ferner, unter Beibehaltung der dortigen Zeichen k, a, b, c, $k = 2a - b - c$, so ist

$$m = \frac{k+n}{3} - 1.$$

Die erste der obigen Gleichungen nimmt dann die Gestalt an

$$x^3 + x^2 - nx - \tfrac{1}{9}(kp + n) = 0$$

und geht durch die Substitution $z = 3x + 1$ in die zweite Gleichung über. Da zudem nach art. 358. der *Disquisitiones arithmeticae,* Werke I, S. 447, Gleichung II,

$$m + 1 = \frac{k+n}{3} = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc$$

ist, so folgt

$$\begin{aligned} 4(m+1) &= (2a - b - c)^2 + 3(b-c)^2, \\ &= (2b - a - c)^2 + 3(a-c)^2 \\ &= (2c - a - b)^2 + 3(b-c)^2. \end{aligned}$$

Da nach Werke I, S. 447, Gleichung I, $a + b + c = n$, also gerade ist, so ist eine der Zahlen a, b, c, etwa a, und die Summe und die Differenz der beiden andern, $b \pm c$, gerade, also

$$m + 1 = \left(a - \frac{b+c}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{b-c}{2}\right)^2.$$

Die zweite Gleichung hat GAUSS auch in sein Exemplar von LAMBERTS *Tabellen,* S. 223 eingeschrieben, und zwar in der Form

$$z^3 - 3pz - p(9a - (p+1)) \; [= 0]$$

mit der Angabe

$$4p = 3NN + (9a - p - 1)^2;$$

hier haben p, a die obige Bedeutung und man hat, wie aus den sieben letzten Zeilen von S. 447, Werke I hervorgeht, $N = 3(b-c)$ zu nehmen. Beispiele findet man in der oben S. 111 abgedruckten Leisteaufzeichnung. Vergl. auch die Tagebuchnotiz Nr. 67 vom 20. Juli 1797, ferner den Artikel 15 des BACHMANNschen Aufsatzes, Werke X 2, S. 39.

Im Texte muß es statt excipientes wohl heißen excipientium.

KLEIN. BACHMANN.

*) Die dort mit n, m bezeichneten Größen heißen in unserer Tagebuchnotiz p, n.

[40.]

Aequationis

$$x^p - 1 = 0$$

radices per integros multiplicatae aggregatae cifram producere non possunt.

[1796] ⊙ Oct. 9. Brunsv[igae]

Wenn p eine Primzahl ist, so bedeutet die Aussage, daß die primitiven Wurzeln von $x^p - 1 = 0$ mit ganzen Zahlen multipliziert nicht die Summe Null geben können, die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung; siehe den art. 341. der *Disquisitiones arithmeticae,* Werke I, S. 417. Für einen zusammengesetzten Exponenten vergleiche man die Tagebuchaufzeichnung Nr. 136 vom 12. Juni 1808.

BACHMANN.

[41.]

Quaedam sese obtulerunt de multiplicatoribus aequationum, ut certi termini eiiciantur, quae praeclara pollicentur.

[1796] ⊙ Oct. 16. Bruns[vigae]

Unter multiplicatores versteht GAUSS hier wohl Transformationen, möglicherweise TSCHIRNHAUSENsche, also solche von der in der Nr. 34 betrachteten Form. Man hätte dann die vorliegende Aufzeichnung auf die Beseitigung gewisser Gleichungskoeffizienten durch TSCHIRNHAUSENsche Transformationen zu beziehen. Die Wendung »praeclara pollicentur« scheint anzudeuten, daß die Frage nach der Auflösbarkeit der allgemeinen Gleichung durch Wurzelgrößen das Ziel dieser Untersuchungen gebildet habe, und die beiden folgenden, für sich nicht zu deutenden Nummern 42, 43 können Fortschritte auf dem hier eingeschlagenen Wege ankündigen. Die rote Unterstreichung in der Handschrift würde dann auf die in der Bemerkung zu der Nr. 37 genannten Veröffentlichungen in der *Dissertation* und in den *Disquisitiones arithmeticae* zu beziehen sein.

LOEWY.

[42.]

Lex detecta: quando et demon[stra]ta erit systema ad perfectionem evexerimus.

[1796] Oct. 18. Brunsv[igae]

[43.]

Vicimus GEGAN.

[1796] Oct. 21. Bruns[vigae]

[44.]

Formula interpolationis elegans.

[1796] Nov. 25. G[ottingae]

GAUSS hat vielleicht hier die sogenannte LAGRANGEsche Interpolationsformel gemeint. Sie findet sich in LAGRANGES *Leçons élémentaires sur les mathématiques* (Oeuvres de LAGRANGE VII, S. 286), die nach den Angaben in den Oeuvres zuerst in den zwei Ausgaben der Séances des Écoles normales, an III (1794—1795) erschienen sind und dann wieder im Journal de l'École Polytechnique, tome 2 (1812) abgedruckt wurden. Vorher war übrigens schon WARING zu dieser Formel gelangt. (Vgl. A. VON BRAUNMÜHL, Bibliotheca mathematica (3) 2, 1904, S. 95 und 96). Bei GAUSS steht die fragliche Formel in der aus seinem Nachlaß herausgegebenen Abhandlung *Theoria interpolationis methodo nova tractata* (Werke III, S. 273), deren erster Entwurf nach SCHERING (ebenda, S. 328) aus dem Jahre 1805 zu stammen scheint. Auch in dem Aufsatz *Über Interpolation* von J. F. ENCKE (Berliner Astronomisches Jahrbuch, 1830, Ges. math. u. astron. Abhandlungen, Berlin 1888, S. 4), der aus den bei GAUSS im Jahre 1812 gehörten Vorlesungen hervorgegangen ist, spielt die Interpolationsformel eine grundlegende Rolle; endlich findet sie sich im art. 7. der Abhandlung *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi* (1814, Werke III, S. 172). LOEWY.

[45.]

Incepi Expressionem

$$1-\frac{1}{2^{\omega}}+\frac{1}{3^{\omega}}\cdots$$

in seriem transmutare secundum potestates ipsius ω progredientem.

[1796] Nov. 26. G[ottingae]

Mit der hier von GAUSS betrachteten Reihe hat sich EULER in der Arbeit, Histoire de l'Académie Berlin, 17 (1761) 1768, Mémoires, S. 83 beschäftigt (vergl. E. LANDAU, Bibliotheca mathem. (3) 7, S. 69). Daß diese Reihe nur dann unbedingt konvergiert, wenn der reelle Teil von ω, $\Re(\omega)$, größer ist als Eins, daß sie ferner, wie unsere Tagebuchnotiz angibt, in eine gewöhnliche Potenzreihe von ω verwandelt werden kann und daß diese Potenzreihe dann beständig konvergent ist, folgt aus RIEMANNS Abhandlung, Monatsberichte der Berliner Akademie 1859, S. 671, Werke, 2. Aufl. 1892, S. 145. Nach neueren Untersuchungen ist die ursprüngliche Reihe für $0<\Re(\omega)\leqq 1$ bedingt konvergent. SCHLESINGER.

[46.]

Formulae trigonometricae per series expressae.

[1796] per Dec.

[47.]

Differentiationes generalissimae.

[1796] Dec. 23.

Es handelt sich jedenfalls um die Differentiation mit einem Index, der keine positive ganze Zahl ist.

Versuche, die sich auf solche Verallgemeinerungen beziehen, finden sich schon bei LEIBNIZ in verschiedenen Briefen*). GAUSS hat wohl an EULER angeknüpft, siehe dessen Abhandlung *De progressionibus transcendentibus etc.*, Comm. Acad. Petrop. 5 (1730/31) 1738, S. 36, besonders S. 55. Im Nachlaß von GAUSS findet sich keine Spur dieser Untersuchungen.

SCHLESINGER.

[48.]

Curvam parabolicam quadrare suscepi, cuius puncta quotcunque dantur.

[1796] Dec. 26.

Hierher gehörige Formeln finden sich bei S. 13 des LEISTE.

KLEIN.

[49.]

Demonstrationem genuinam theorematis LA GRANGiani detexi.

[1796] Dec. 27.

Aus dem oben S. 429 abgedruckten Briefe von GAUSS an C. F. HINDENBURG vom 8. Oktober 1799 geht hervor, daß GAUSS etwa im April 1797 einen Aufsatz mit seinem Beweise des LAGRANGEschen Lehrsatzes durch KAESTNER an HINDENBURG hat senden lassen, damit dieser den Aufsatz in seinem Archiv der reinen und angew. Mathematik veröffentliche. Die Veröffentlichung ist unterblieben und, wie SARTORIUS v. WALTERSHAUSEN**) berichtet, »kam das eingesandte Manuskript nie wieder zum Vorschein«. Es befindet sich jedoch im GAUSSarchiv eine Handschrift dieses Beweises, die Werke VIII, S. 76 abgedruckt ist. Eine etwas andere Darstellung desselben Beweises mit weniger Text ist im LEISTE neben den Druckseiten 10—12 aufgezeichnet. Vergl. auch die Nr. 86 vom Mai 1798.

KLEIN. SCHLESINGER.

[50.]

$$\left.\begin{aligned}\int\sqrt{\sin x}\,.\,dx &= 2\int\frac{yy\,dy}{\sqrt{(1-y^4)}}\\ \int\sqrt{\operatorname{tang} x}\,.\,dx &= 2\int\frac{dy}{\sqrt[4]{(1-y^4)}}\\ \int\sqrt{\frac{1}{\sin x}}\cdot dx &= 2\int\frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}}\end{aligned}\right\}\quad yy = {\sin \atop \cos}\, x.$$

1797 Ian. 7.

Zu dem ersten und dritten der hier auftretenden Integrale vergl. die in dem Abschnitt [I.] der *Ältesten Untersuchungen über lemniskatische Funktionen* art. [1.], S. 145 und art. [3.], S. 146 wiedergegebenen

*) Eine Zusammenstellung der einschlägigen Briefstellen gibt C. W. BORCHARDT in BONCOMPAGNIS Bulletino di bibliografia 2, 1869, S. 277, Ges. Werke, 1888, S. 486.

**) *Gauss zum Gedächtniss*, 1856, S. 22; einige irrtümliche Angaben, die sich an dieser Stelle finden, sind schon oben S. 444 berichtigt worden.

Leisteaufzeichnungen, sowie die dazugehörigen Bemerkungen S. 149, wo auch Literaturnachweise gegeben sind. Das zweite Integral ist ein besonderer Fall des in der Nr. 53 vom 12. Januar 1797 aufgezeichneten Integrals $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$, das durch die Substitution*) $z^n = \frac{1-x^n}{x^n}$ in $-\int \frac{z^{n-2}\,dz}{1+z^n}$ übergeht und so wieder als besonderer Fall des in der Nr. 54 betrachteten Integrals $\int \frac{x^n\,dx}{1+x^m}$ erscheint.

SCHLESINGER.

[51.]

Curvam (elasticam) lemniscatam a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$$

pendentem perscrutari coepi.

[1797] Ian. 8.

Damit stimmt überein die auf dem letzten Blatte der Scheda Ac befindliche Notiz: »Functiones lemniscaticas considerare coeperamus 1797. Januar. 8.«, siehe oben S. 206. Daß GAUSS schon früher die Umkehrung des lemniskatischen Integrals in eine Reihe entwickelt hatte (siehe den art. [6.] der *Exercitationes mathematicae,* oben S. 141), steht mit diesen Angaben nicht im Widerspruch, sondern zeigt, daß GAUSS erst am 8. Januar 1797 die volle Bedeutung des lemniskatischen Integrals erkannt und es zum Ausgangspunkte einer selbständigen Theorie gemacht hat, während es ihm früher nur als ein einzelner Fall des allgemeinen Integrals

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^n)}}$$

erschienen war (siehe die Tagebuchaufzeichnungen Nr. 32 und Nr. 33 vom September 1796). Die wahre Eigenart des Falles $n = 4$ hat GAUSS durch Anwendung des EULERschen Additionstheorems erkannt; dies zeigen die oben S. 147 ff. in den artt. [4.]—[7.] abgedruckten Leistenotizen. Daß diese Notizen mit den am 8. Januar 1797 begonnenen Untersuchungen in Verbindung stehen, geht auch schon aus dem äußerlichen Merkmal hervor, daß hier wie dort in der Überschrift das Wort *elastica* durchstrichen und an seine Stelle *lemniscata* gesetzt ist.

KLEIN. SCHLESINGER.

[52.]

Criterii EULERiani rationem sponte detexi.

[1797] Ian. 10.

Die beiden folgenden Notizen Nr. 53, 54 (vergl. auch Nr. 50) zeigen, daß es sich um das EULERsche (richtiger NEWTONsche) Kriterium für die sogenannten binomischen Integrale $\int x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}\,dx$ handelt. Siehe EULER, *Institutiones calculi integralis* I, 1768, § 104, Opera omnia, ser. I, vol. 11, S. 62.

SCHLESINGER.

*) Für $n = 4$ ist diese Substitution bei S. 27 des LEISTE ausgeführt; ebenda bei S. 104 finden sich mit der Überschrift »Untersuchungen über das Integral $y = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}}$« Reihenentwicklungen und numerische Rechnungen.

[53.]

Integrale completum

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)}}$$

ad circ[uli] quadr[aturam] reducere commentus sum.

[1797] Ian. 12.

Vergl. die Bemerkung zu der Nr. 50 und die Nr. 59 vom 2. März 1797. Im § 352 von EULERS *Institutiones calculi integralis* I, 1768, Opera omnia, ser. I, vol. 11, S. 226, wird für dieses *integrale completum* der Wert

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)}} = \frac{\pi}{n \sin\frac{\pi}{n}}$$

gegeben; im § 353 werden dann die einfachsten Fälle $n = 2, 3, 4, 6$ berechnet. GAUSS will sagen, daß, da $\sin\frac{\pi}{n}$ für ein beliebiges n durch Wurzeln aus ganzen Zahlen dargestellt werden kann, der betreffende Integralwert, was seinen transzendenten Charakter angeht, nur von π abhängt.

SCHLESINGER.

[54.]

Methodus facilis

$$\int \frac{x^n\,dx}{1+x^m}$$

determinandi.

[1797 Ian.]

Hierher gehörige Formeln und Rechnungen findet man aufgezeichnet im LEISTE bei den Seiten 27, 91, 92; sie schließen sich durchweg an die Methode an, nach der EULER diese Integrale behandelt, siehe *Institutiones calculi integralis* I, 1768, art. 77., Opera omnia, ser. I, vol. 11, S. 41, oder auch *Methodus integrandi formulas differentiales rationales unicam variabilem involventes*, Comm. Acad. Petrop. **14** (1744/6), 1751, S. 3, Opera omnia, ser. I, vol. 17, S. 70, besonders die artt. 44—59.

KLEIN. SCHLESINGER.

[55.]

Supplementum eximium ad polygonorum descriptionem inveni. Sc[ilicet], si $a, b, c, d, \ldots$ sint factores primi numeri primi p unitate truncati, tunc ad polygoni p laterum descriptionem nihil aliud requiri quam ut:

1°. arcus indefinitus in $a, b, c, d, \ldots$ partes secetur,

2°. ut polygona $a, b, c, d, \ldots$ laterum describantur.

Gotting[ae, 1797] Ian. 19.

Hier ist jedenfalls Folgendes gemeint. Bedeuten wie im Texte $a, b, c, \ldots$ die Primteiler von $p-1$

und setzt man

$$p-1 = aA,\quad A = bB,\quad B = cC,\quad \ldots,$$

so bestimmen sich die A-gliedrigen Perioden nach der im art. 352. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 431 entwickelten Methode durch eine Gleichung a-ten Grades, die durch Auflösung von $x^a = 1$ und Teilung eines gewissen Winkels in a gleiche Teile gelöst wird; darauf die B-gliedrigen Perioden durch eine Gleichung b-ten Grades, die durch Auflösung von $x^b = 1$ und Teilung eines gewissen Winkels in b gleiche Teile gelöst wird u.s.w.; vergl. die Bemerkung zu der Nr. 66.

BACHMANN.

[56.]

Theoremata de res[iduis] -1, ∓ 2 simili methodo demonstrata ut cetera. ...

Gott[ingae, 1797] Febr. 4.

Dieselbe Zeitangabe Werke I, S. 476, Anmerkung zum art. 145. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 110.

KLEIN.

[57.]

Forma

$$aa+bb+cc-bc-ac-ab,$$

quod ad divisores attinet, convenit cum hac:

$$aa+3bb.$$

[1797] Febr. 6.

Setzt man

$$a^2+b^2+c^2-bc-ac-ab = \alpha,$$

so ist

$$(2a-b-c)^2+3(b-c)^2 = 4\alpha.$$

Jeder ungerade Primteiler der ersten Form ist also auch Teiler der Form x^2+3y^2. Umgekehrt, ist p ein Teiler der letzteren, so gibt es eine ungerade Zahl A, für die

$$A^2 \equiv -3 \pmod{p}$$

ist; setzt man $B = 1$, so ist also:

$$A^2+3B^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Wählt man dann

$$a = 0,\quad b = \frac{A+B}{2},\quad c = \frac{A-B}{2},$$

so ist p auch Teiler der ersteren Form.

BACHMANN.

[58].

Amplificatio prop[ositionis] penult[imae] p[aginae] 1, scilicet

$$1 - a + a^3 - a^6 + a^{10} \dots$$
$$= \cfrac{1}{1 + \cfrac{a}{1 + \cfrac{a^2 - a}{1 + \cfrac{a^3}{1 + \cfrac{a^4 - a^2}{1 + \cfrac{a^5}{1 + \text{etc.}}}}}}}$$

Unde facile omnes series, ubi exp[onentes] ser[ièm] sec[undi] ordinis constituunt, transformantur.

[1797] Febr. 16.

Die »Propositio penultima« der ersten Seite des *Tagebuchs,* auf die hier Bezug genommen wird, ist das erste Beispiel der Notiz Nr. 7 vom 24. Mai 1796, das für $a = 2$ aus der hier angegebenen Formel hervorgeht. Eine Umformung, die der hier von GAUSS aufgezeichneten nahe verwandt ist, findet sich ohne Beweis in einem *Theorema* betitelten Aufsatze von G. EISENSTEIN *); beide Umformungen sind als besondere Fälle in einer Gleichung enthalten, die EISENSTEIN in der Abhandlung *Théorèmes sur les formes cubiques etc.* **) ebenfalls ohne Beweis angegeben hat. Ein Beweis dieser EISENSTEINschen Gleichung kann aus einem Briefe von STIELTJES an HERMITE ***) entnommen werden. Die GAUSSsche Umformung ergibt sich in folgender Weise aus den oben S. 492 in der Bemerkung zu der Notiz Nr. 7. angegebenen allgemeinen Formeln. Setzt man daselbst in (3) und (6)

$$c_0 = r^{\frac{1}{4}}, \quad c_1 = r^{(\frac{1}{2}+1)^2}, \quad c_2 = r^{(\frac{1}{2}+2)^2}, \quad c_3 = r^{(\frac{1}{2}+3)^2}, \quad \dots,$$

so ist

$$A_n = r^{\frac{1}{2}n(\frac{1}{2}+2n-2)}\left|r^{(i+k-2)^2}\right| \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$
$$B_n = r^{\frac{3}{2}n(\frac{3}{2}+2n-2)}\left|r^{(i+k-2)^2}\right| \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

und für die als Faktor auftretende Determinante findet man †)

$$\left|r^{(i+k-2)^2}\right| = r^{n(n-1)^2}(r^2-1)^{n-1}(r^4-1)^{n-2}\dots(r^{2n-2}-1).$$

Die Ausdrücke (5) und (4) oben S. 492 ergeben also

$$b_0 = r^{\frac{1}{4}}, \quad b_{2n} = r^{2n}(r^{2n}-1), \quad b_{2n+1} = r^{4n+2} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

was nach Unterdrückung des Faktors $r^{\frac{1}{4}}$ in Reihe und Kettenbruch für $x = 1$, $r^2 = a$ mit der Forme

*) CRELLES Journal f. Mathematik **29**, 1846, S. 96, Mathematische Abhandlungen von G. EISENSTEIN, Berlin 1847, S. 175; vergl. auch die zweite Fußnote auf der folgenden Seite.

) CRELLES Journal f. Mathematik **27, 1844, S. 75, siehe besonders S. 78.

***) Siehe *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes* II, Paris 1905, S. 423—425, vergl. auch das Briefbruchstück Nr. 387, S. 340.

†) Vergl. STIELTJES, a. a. O. S. 424, Gleichung (γ).

von GAUSS übereinstimmt. Reihe und Kettenbruch von GAUSS konvergieren*) für $|a| < 1$, sie sind also in dem ersten Beispiele der Nr. 7, wo $a = 2$ ist, beide divergent.

Die Tagebuchaufzeichnung, von der hier die Rede ist, stellt das älteste unmittelbare Zeugnis dafür dar, daß GAUSS sich mit den Potenzreihen beschäftigt hat, deren Exponenten eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden, vergl. die Bemerkungen oben S. 262, 266 und den in der zweiten Abteilung dieses Bandes abgedruckten Aufsatz »Über GAUSS' Arbeiten zur Funktionentheorie«.

EISENSTEIN ist im Juli 1844 nach Göttingen gekommen (siehe *Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher* IV, Altona 1862, S. 265, 266); der vom Dezember 1843 datierte Aufsatz im 27. Bande des CRELLEschen Journals ist also sicher nicht unmittelbar von GAUSS beeinflußt. Dagegen könnte dem *Theorema* im 29. Bande des Journals eine persönliche Anregung von GAUSS vorangegangen sein; man ist versucht, die einleitenden Worte**) geradezu für die Wiedergabe einer von GAUSS getanen Äußerung zu halten.

KLEIN. SCHLESINGER.

[59.]

Formularum integralium formae:

$$\int e^{-t^\alpha}\,dt \quad \text{et} \quad \int \frac{du}{\sqrt[\beta]{(1+u^\gamma)}}$$

inter se comparationem institui.

[1797] M[a]rt. 2.

Wahrscheinlich sind hier die zwischen den Grenzen 0 und $+\infty$ genommenen bestimmten Integrale gemeint. Die Substitutionen

$$t^\alpha = x \text{ beziehungsweise } u^\gamma = \frac{x}{1-x}$$

ergeben nämlich

$$(1) \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha}\,dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} e^{-x}\,x^{\frac{1}{\alpha}-1}\,dx,$$

$$(2) \qquad \int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt[\beta]{1+u^\gamma}} = \frac{1}{\gamma}\int_0^1 x^{\frac{1}{\gamma}-1}(1-x)^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}-1}\,dx,$$

---

*) Vergl EISENSTEIN, Mathem. Abhandlungen, S. 176.

**) »Invenit vir clarissimus GAUSS [*Summatio quarundam serierum singularium,* 1811, art. 8., Werke II, S. 20] aequalitatem inter duas expressiones abstrusiores hancce

$$1 + x + x^3 + x^6 + x^{10} + \text{etc.} = \frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^5}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^7}\ \text{etc.}$$

Non minus memorabilis videatur eiusdem seriei evolutio sequens

$$1 + x + x^3 + x^6 + x^{10} + \text{etc.} = \cfrac{1}{1-\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2-x}{1-\text{etc.}}}}«$$

so daß die Beziehung zwischen den Integralen (1) und (2) auf die bekannte Gleichung zwischen den EULERschen Integralen hinauskommt, die EULER in der Abhandlung *Evolutio formulae integralis* $\int x^{f-1} dx (lx)^{\frac{m}{n}}$ *integratione a valore* $x = 0$ *ad* $x = 1$ *extensa**) angegeben hat, und die in den jetzt üblichen Bezeichnungen so lautet:

$$\mathrm{B}(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)};$$

vergl. auch den art. 28. der GAUSSschen Abhandlung *circa seriem* vom Jahre 1812, Werke III, S. 251.

SCHLESINGER.

[60.]

Cur ad aequationem perveniatur gradus nn^{ti} dividendo curvam lemniscatam in n partes.

[1797] M[a]rt. 19.

Während der Grad der Gleichung, von der die Teilung des Kreises in n gleiche Teile abhängt, gleich der Anzahl der Teile ist, so ergab sich für die mit Hilfe des EULERschen Additionstheorems gebildete Gleichung, von der die Teilung der Lemniskate in n Teile abhängt, der Grad gleich n^2. Der Grund hierfür, d. h. die Bedeutung nicht nur der n realen, sondern auch der n^2-n komplexen Wurzeln**), ergibt sich nur aus der doppelten Periodizität der lemniskatischen Funktion. GAUSS hatte also am 19. März 1797 bereits die doppelte Periode entdeckt. Damit war ihm der Weg eröffnet zur Auffindung der Nullstellen und Unendlichkeitsstellen von sinus und cosinus lemniscaticus und zur Darstellung dieser Funktionen als Quotienten doppelt unendlicher Produkte; siehe die oben S. 153 ff. in den art. [2.]—[6.] abgedruckten Leisteaufzeichnungen. Ferner fand er sich genötigt, seine Funktionen auch für komplexe Werte des Arguments zu betrachten. In der Tat findet sich auf dem letzten Blatte des *Tagebuchs,* mit dem etwas verwischten, aber noch deutlich erkennbaren Datum »1797, Apr. 15.«, also im unmittelbaren Anschluß an die in den Tagebuchnotizen Nr. 60 bis Nr. 63 angezeigten Entdeckungen, die Aufzeichnung:

Quantitates imaginariae: Quaeritur criterium generale, secundum quod functiones plurium variabilium complexae ab incomplexis dignosci possint.

Zur Lemniskatenteilung selbst vergl. die oben S. 160 ff. im Abschnitt [III.] zusammengestellten Aufzeichnungen, ferner die Tagebuchnotiz Nr. 62, und die berühmte Stelle im art. 335. des siebenten Abschnitts der *Disquisitiones arithmeticae* (1801), Werke I, S. 412, 413.

SCHLESINGER.

[61.]

A potestatibus Integ[ralis]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \qquad (0 \ldots 1)$$

*) Novi Commentarii Acad. Petrop. **16** (1771), 1772, S 91, L. EULERI Opera omnia, ser. I, vol. 17, S. 316, siehe insbesondere § 25, S. 330 und das *Supplementum,* S. 354 der Opera.

**) Vergl. oben S. 162 das »Determ. rad. imag.« für die Fünfteilung. Im Text der Tagebuchaufzeichnung hieß das zweite Wort (vergl. die Nachbildung) ursprünglich plures; GAUSS wollte also etwa schreiben: Warum mehr als n Wurzeln vorhanden sind u.s.w.

pendet

$$\sum\left(\frac{mm+6mn+nn}{(mm+nn)^4}\right)^k.$$

[1797 Mart.]

Es ist für positive ganzzahlige Werte von k

$$S_k = \sum_{m,n}\left\{\frac{m^4-6m^2n^2+n^4}{(m^2+n^2)^4}\right\}^k = \frac{1}{2}\sum_{m,n}\left\{\frac{1}{(m+n\sqrt{-1})^4}+\frac{1}{(m-n\sqrt{-1})^4}\right\}^k,$$

wo m, n alle Paare ganzer Zahlen mit Ausnahme von $m = 0$, $n = 0$ durchlaufen. Die S_k lassen sich also in einfacher Weise durch die

$$s_k = \sum_{m,n}\frac{1}{(m+n\sqrt{-1})^{4k}} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

ausdrücken, und von dieser Summe läßt sich leicht zeigen, daß sie sich von der k-ten Potenz der Größe

$$\Pi = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

nur durch einen rationalen Zahlenfaktor unterscheidet. Man braucht dazu nur auf die Formeln zurückzugreifen, die GAUSS um dieselbe Zeit (März 1797) in den LEISTE eingetragen hat, und die in dem Abschnitt [II.] über *Lemniskatische Funktionen*, oben S. 153 ff. abgedruckt sind. Man nehme nämlich von den einzelnen Faktoren des doppelt unendlichen Produkts, das in der Darstellung von sinlemn x, oben art. [2.], S. 153 den Zähler bildet, den Logarithmus, also $\log\left(1-\frac{1}{(m+n\sqrt{-1})^4}\frac{x^4}{\Pi^4}\right)$, entwickle diesen nach Potenzen von $\left\{\frac{1}{m+n\sqrt{-1}}\frac{x}{\Pi}\right\}^4$ und summiere in bezug auf m, n wie angegeben. Man erhält dann für den Logarithmus des Zählers von sinlemn x, abgesehen von dem Gliede $\log x$, eine nach Potenzen von $\frac{x^4}{\Pi^4}$ fortschreitende Reihe, in der der Koeffizient von $-\frac{1}{k}\frac{x^{4k}}{\Pi^{4k}}$ gleich s_k ist. Vergleicht man diese Reihe mit der auf anderem Wege erhaltenen Entwickelung dieses Zählerlogarithmus (siehe oben art. [10.], S. 159 den »log. Numeratoris«), wo die Koeffizienten rationale Zahlen sind, so ergibt sich die Richtigkeit unserer Aussage. Man wird mit Sicherheit behaupten können, daß GAUSS diesen Gedankengang verfolgt hat, da es sich so am ungezwungensten erklärt, weshalb GAUSS damals gerade auch die Entwickelungen der Logarithmen von Zähler und Nenner des sinlemn x aufgezeichnet hat; vergl. auch die sehr viel spätere Aufzeichnung (auf S. 88 des Mai 1809 begonnenen Handbuchs 19, Be), die Werke III, S. 408 abgedruckt ist. Allerdings würde dann das $mm+6mn+nn$ in unserer Tagebuchnotiz als Schreibfehler für $m^4-6m^2n^2+n^4$ gelten müssen, was aber umso eher angeht, als die Größe

$$\frac{m^4-6m^2n^2+n^4}{(m^2+n^2)^4}$$

in dem Doppelprodukt oben S. 153 wirklich vorkommt und auch die Summe S_1 noch an zwei andern Stellen dieser Leisteaufzeichnung (oben S. 155, 156) erscheint. GAUSS würde dann hier zum ersten Male in der Entwicklungsgeschichte der elliptischen Funktionen die Klasse von Reihen betrachtet haben, die in allgemeinster Form in EISENSTEINS Abhandlung *Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind* *) auftreten.

KLEIN. SCHLESINGER.

---

*) CRELLES Journal für Mathematik **35**, 1847, S. 153, Mathematische Abhandlungen, 1847, S. 213.

[62.]

Lemniscata geometrice in quinque partes dividitur.

[1797] M[a]rt. 21.

»Geometrice« heißt mit Zirkel und Lineal. Die Gleichung für die Fünfteilung siehe oben S. 161 ff. artt. [4.] und [5.], die algebraische Darstellung ihrer reellen Wurzeln ebenda und S. 163, art. [6.]. Vergl. auch die bei der Nr. 60 angeführte Stelle der *Disquisitiones arithmeticae,* wobei jedoch zu bemerken ist, daß schon der Graf FAGNANO im II. Bande der *Produzioni matematiche* (Pesaro, 1750), S. 356 ff.*) gezeigt hat, daß die Lemniskate sich »algebraisch« in gleiche Teile zerlegen lasse, wenn die Anzahl der Teile in einer der drei Formen 2.2^m, 3.2^m, 5.2^m enthalten ist, wo m eine positive ganze Zahl bedeutet. Anknüpfend an die bei der Nr. 60 erwähnte Stelle der *Disquisitiones arithmeticae* und durch Anwendung der von GAUSS für die Kreisteilung geschaffenen Methode hat N. H. ABEL in seinen *Recherches sur les fonctions elliptiques* (CRELLES Journal für Mathematik **2**, 1827, und **3**, 1828, Oeuvres, nouvelle édition, I, 1881, S. 261 ff.) nachgewiesen, daß die Teilung der Lemniskate in n gleiche Teile für diejenigen Werte von n mit Zirkel und Lineal bewirkt werden kann, für die dies beim Kreise möglich ist (siehe Oeuvres I, S. 314 und 361).

KLEIN. SCHLESINGER.

[63.]

Inter multa alia Curvam Lemniscatam spectantia observavi:

[1)] Numeratorem sinus decompositi, arcus duplicis esse = 2 Num. Denom. Sinus $\times$ Num. Den[om]. Cos. arcus simpl[icis];

[2)] Denominatorem vero = (Num. sin.)^4 + (Denom. sin.)^4.

[3)] Iam si hic denominator pro arcu ϖ^l ponatur θ, erit Denom[inator] sin arcus $k\varpi^l$, $= \theta^{kk}$.

[4)] Iam

$$\theta = 4{,}810480,$$

[5)] cuius numeri logarithmus hyperbolicus est

$$= 1{,}570796 \quad \text{i. e.} \quad = \tfrac{1}{2}\pi,$$

quod maxime est memorabile, cuiusque proprietatis demonstratio gravissima analyseos incrementa pollicetur.

[1797] Mart. 29.

Man findet die hier zusammengestellten fünf Aussagen in den oben S. 156 ff. artt. [7.] und [8.] abgedruckten Leisteaufzeichnungen entwickelt. Setzt man wie a. a. O.

$$\sin \operatorname{lemn} \varphi = \frac{M(\varphi)}{N(\varphi)}, \quad \cos \operatorname{lemn} \varphi = \frac{\mu(\varphi)}{\nu(\varphi)},$$

*) Opere matematiche del MARCHESE G. C. DE' TOSCHI DI FAGNANO, II, 1911, S. 304 ff. *Metodo per misurare la lemniscata,* Schediasma II.

so ist nach den beiden ersten Aussagen (siehe oben S. 157)

$$M(2\varphi) = 2M(\varphi)N(\varphi)\mu(\varphi)\nu(\varphi),$$
$$N(2\varphi) = M(\varphi)^4 + N(\varphi)^4.$$

Die hier in der Tagebuchaufzeichnung mit π^l bezeichnete Größe wird in der Leistehandschrift mit Π bezeichnet, wir haben dafür in dem Abdruck das von GAUSS später stets benutzte ϖ gesetzt. Die hier mit θ bezeichnete Größe heißt im LEISTE (siehe oben S. 157) $2a^4$; es ist also nach der dritten Aussage (siehe oben S. 157)

$$N(\varpi) = \theta, \quad N(k\varpi) = \theta^{kk}$$

für ein ganzes positives k. Ferner ist nach der vierten und fünften Aussage (siehe oben S. 158)

$$N(\varpi) = 4{,}81\,048, \quad \log 4{,}81\,048 = 1{,}5\,708 = \frac{\pi}{2}.$$

Die »demonstratio« der hier nur durch numerische Rechnung erkannten Eigenschaft [5)] gelingt GAUSS erst im Juli 1798; vergl. die Bemerkungen zu der Tagebuchaufzeichnung Nr. 92.

KLEIN. SCHLESINGER.

[64.]

Demonstrationes elegantiores pro nexu divisorum formae $\square - a$, $+1$ cum -1, ± 2 inveni.

[1797] Iun. 17. Gotting[ae]

Dies bezieht sich auf die in den artt. 147.—150. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 113 behandelte Frage. Es werden dort bezüglich der Teiler von $x^2 - a$ die Fälle unterschieden:

1) a von der Form $4n+1$ oder $-(4n-1)$,
2) a von der Form $-(4n+1)$ oder $4n-1$,
3) a von der Form $\pm(4n+2)$.

Man würde also die Aufzeichnung zu lesen haben: Demonstrationes elegantiores pro nexu divisorum formae $\square - a$ cum $+1$, -1, ± 2 inveni. (Nach einer Mitteilung von S. GUNDELFINGER in einem Briefe an F. KLEIN vom 10. April 1903.)

BACHMANN.

[65.]

Deductionem secundam theoriae polygonorum excolui.

[1797] Iul. 17. Gotting[ae]

Vergl. die folgende Notiz.

[66.]

Per utranque methodum monstrari potest puras tantum aequationes solvi oportere.

[1797 Iul.]

Außer der Methode des art. 352. der *Disquisitiones arithmeticae* (Werke I, S. 431) hat GAUSS für die Lösung der Kreisteilungsgleichung noch eine auf der Anwendung der LAGRANGEschen Resolvente (vergl.

die Tagebuchnotiz Nr. 37) beruhende Methode angegeben, die im art. 360. der *Disquisitiones arithmeticae* (Werke I, S. 450) auseinandergesetzt ist. Am Schluß des art. 18. der nachgelassenen Abhandlung *Disquisitionum circa aequationes puras ulterior evolutio* (Werke II, S. 263) spricht GAUSS von gewissen allgemeinen Untersuchungen, »quae theoriam secundam aequationum purarum in art. 360. *Disquiss. Arithm.* inchoatam magis illustrant«; daraus geht hervor, daß er in der Tagebuchnotiz Nr. 65 mit der deductio secunda eben die Methode des art. 360. meint. Es scheint übrigens, daß GAUSS das Wesen dieser Methode schon erkannt hatte, als er die Tagebuchnotiz Nr. 55 schrieb, und daß es sich bei Nr. 65 nur mehr um die vollständige Durchführung handelte. Die Notiz Nr. 66 hebt hervor, daß beide Methoden die Lösung der Kreisteilungsgleichung durch reine Gleichungen, d. h. durch Wurzelzeichen ermöglichen. Vergl. den Artikel 15 des Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«, Werke X 2, S. 37.

BACHMANN.

[67.]

Quod Oct. 1. per ind[uctionem] invenimus demonstratione munivimus.

[1797] Iul. 20.

Siehe oben S. 505 die Notiz Nr. 39 vom 1. Oktober 1796 und die zugehörige Anmerkung. Der Beweis findet sich im art. 358. der *Disquisitiones arithmeticae,* Werke I, S. 445.

KLEIN. BACHMANN.

[68.]

Casum singularem solutionis congruentiae

$$x^n - 1 \equiv 0$$

(scilicet quando cong[ruentia] aux[iliaris] radices aequales habet), qui tam diu nos vexavit, felicissimo successu vicimus, ex congruentiarum solutione, si modulus est numeri primi potestas.

[1797] Iul. 21.

Vergl. hierzu die *Annotatio* zum art. 251. der *Analysis Residuorum,* Werke II. S. 209, und die zu diesem Artikel gehörige Bemerkung von DEDEKIND ebenda, S. 241, ferner das Ende des art. 363. ebenda S. 232 und den art. 372. ebenda S. 237. Siehe auch den Artikel 16 des Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«, Werke X 2, S. 42.

KLEIN. BACHMANN.

[69.]

Si

$$\text{(A)} \qquad x^{\mu+\nu} + ax^{\mu+\nu-1} + bx^{\mu+\nu-2} + \cdots + n$$

per

$$\text{(B)} \qquad x^{\mu} + \alpha x^{\mu-1} + \beta x^{\mu-2} + \cdots + m$$

dividatur atque omnes coefficientes in (A) a, b, c, etc. sint numeri integri, coefficientes vero omnes in (B) rationales, etiam hi omnes erunt integri ultimumque n ultimus m metietur.

[1797] Iul. 23.

Dieser Satz wird im art. 42. der *Disquisitiones arithmeticae,* Werke I, S. 34 bewiesen. GAUSS benutzt ihn auch im art. 341. der *Disquisitiones arithmeticae,* Werke I, S. 418, 419 beim Beweise der Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung für den Fall eines Primzahlgrades. Mithin muß GAUSS die Aussage der Tagebuchnotiz Nr. 40, die ja auf den Satz des art. 341. hinausläuft, am 9. Oktober 1796 entweder anders als in den *Disquisitiones arithmeticae* oder noch nicht vollständig bewiesen haben. Vergl. auch die Anmerkung zum art. 42. der *Disquisitiones arithmeticae,* Werke I, S. 475, wo das Datum 1797 Jul. 22. angegeben ist. — In der Handschrift stehen in den Exponenten der Ausdrücke (A), (B) die Buchstaben m, n statt μ, ν.

KLEIN. LOEWY.

[70.]

Forsan omnia producta ex

$$(a+b\rho+c\rho^2+d\rho^3+\cdots)$$

designante ρ omnes radices prim[itivas] aeq[uationis] $x^n = 1$ ad formam

$$(x-\rho y)(x-\rho^2 y)\ldots$$

reduci possunt[*)]. Est enim:

$$\begin{aligned}
(a+b\rho+c\rho^2)\times(a+b\rho^2+c\rho) &= (a-b)^2+(a-b)(c-a)+(c-a)^2\\
(a+b\rho+c\rho^2+d\rho^3)\times(a+b\rho^3+c\rho^2+d\rho) &= (a-c)^2+(b-d)^2\\
(a+b\rho+c\rho^2+d\rho^3+e\rho^4+f\rho^5)\times\qquad &= (a+b-d-e)^2\\
-(a+b-d-e)(a-c-d-f)&+(a-c-d-f)^2\\
&= (a+b-d-e)^2\\
+(a+b-d-e)(b+c-e-f)&+(b+c-e-f)^2.
\end{aligned}$$

Vid. Febr. 4.

Falsum est. Hinc enim sequeretur, e binis numeris in forma Pr[oducti] e $(x-\rho y)$ contentis productum in eadem forma esse, quod facile refutatur.

[1797 Iul.]

Im zweiten und dritten Gliede der letzten Gleichung scheinen einige Vorzeichen verschrieben zu sein, denn es gilt die Identität:

$$-(a+b-d-e)(a-c-d+f)+(a-c-d+f)^2 = -(a+b-d-e)(b+c-e-f)+(b+c-e-f)^2.$$

KLEIN. SCHLESINGER.

[*) In der Handschrift steht potest.]

[71.]

Radicum aeq[uationis] $x^n = 1$ periodi plures eandem summam habere non possunt demonstratur.

[1797] Iul. 27. Gott[ingae]

Vergl. die Notiz Nr. 73 vom 1. August 1797.

[72.]

Plani possibilitatem demonstravi.

[1797] Iul. 28. Gotting[ae]

Am 6. März 1832 schreibt GAUSS an WOLFGANG BOLYAI (Werke VIII, S. 224): »Um die Geometrie vom Anfange an ordentlich zu behandeln, ist unerläßlich, die Möglichkeit eines Planums zu beweisen; die gewöhnliche Definition enthält zu viel, und implicirt eigentlich subreptive schon ein Theorem. Man muß sich wundern, daß alle Schriftsteller von EUKLID bis auf die neuesten Zeiten so nachlässig dabei zu Werk gegangen sind«. Wohl veranlaßt durch den Brief an BOLYAI hat GAUSS im März 1832 seine *Begründung des Planum* im Handbuch 19, Be, S. 153 aufgezeichnet, sie ist abgedruckt Werke VIII, S. 194; an derselben Stelle findet man auch unter [2.] eine kurze, aus der Zeit zwischen 1820 und 1830 stammende Notiz über die Notwendigkeit eines Beweises für die Möglichkeit der Ebene. Man vergleiche ferner den Brief an BESSEL vom 27. Jan. 1829, Werke VIII, S. 200.

STÄCKEL.

[73.]

Quod Iul. 27. inscrips[imus] errorem involvit: sed eo felicius nunc rem exhausimus, quoniam probare possumus nullum periodum esse posse numerum rationalem.

[1797] Aug. 1.

Würden die Notizen Nr. 71 und 73 auf die Kreisteilung, nämlich auf die Einheitswurzeln vom Primzahlgrad bezogen, so wären sie unmittelbare Folgerungen aus der Aussage der Notiz Nr. 40 vom 9. Oktober 1796, d. h. aus der Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung; dann wäre aber bei Nr. 71 nichts Falsches. Wie S. GUNDELFINGER in einem Briefe an KLEIN vom 10. April 1903 bemerkt, wird aber GAUSS in der Nr. 71 unter n jedenfalls eine beliebige zusammengesetzte Zahl verstanden haben, und es kämen demnach hier Sätze in Betracht, wie sie zuerst E. E. KUMMER *) aufgestellt hat. Bedeutet n eine zusammen-

---

*) E. E. KUMMER, *Theorie der idealen Primfaktoren der complexen Zahlen, welche aus den Wurzeln der Gleichung $\omega^n = 1$ gebildet sind, wenn n eine zusammengesetzte Zahl ist*, Abhandlungen der Akademie der Wissensch. zu Berlin (1856) 1857, Mathem. Abh., S. 1; siehe auch zwei Abhandlungen von L. FUCHS in CRELLES Journal f. Mathematik **61**, 1863, S. 374 und **65**, 1866, S. 74, FUCHS' Werke I, S. 53 und S. 69.

gesetzte Zahl, so enthält die Nr. 71 in der Tat einen Irrtum, indem die Perioden einer Gruppe (nach KUMMER a. a. O. § 2) dann einander gleich werden können, wenn sie verschwinden. Dies kann GAUSS, wenn er, wie sehr wahrscheinlich, die Perioden ebenso wie KUMMER definiert hat, nachträglich sehr wohl erkannt haben und die Nr. 73 bedeutet dann, wenn auch keinen Ersatz für die Aussage der Nr. 71, so doch einen erheblichen Fortschritt in der Erkenntnis dieser Verhältnisse. Unter einer rationalen Zahl wäre in der Nr. 73 eine von Null verschiedene zu denken.

BACHMANN.

[74.]

Quomodo periodorum numerum duplicando signa adornare oporteat.

[1797 Aug.]

Hier ist wohl folgendes gemeint. Geht man von den e Perioden mit f Gliedern η_i (Voraussetzung ist ein gerades f) zu den $2e$ Perioden mit $\frac{f}{2}$ Gliedern η_i' über, so sind diese durch jene mittels quadratischer Gleichungen bestimmt und es fragt sich, welches Vorzeichen der bei der Auflösung dieser Gleichungen auftretenden Quadratwurzeln einer jeden der kleinern Perioden zukommt.

BACHMANN.

[75.]

Functionum primarum multitudinem per analysin simplicissimam erui.

[1797] Aug. 26.

Der Anfang einer bezüglichen Tabelle ist bei S. 5 des LEISTE aufgezeichnet; man vergl. die artt. 343, 344. der *Analysis Residuorum*, Werke II, S. 220.

DEDEKIND.

[76.]

Theorema: Si

$$1 + ax + bxx + \text{etc.} + mx^{\mu}$$

est functio secundum modulum p prima, erit:

$$d + x + x^p + x^{pp} + \text{etc.} + x^{p^{\mu-1}}$$

per hanc f[un]ct[io]nem s[e]c[un]d[u]m hunc modulum divisibilis etc. etc.

[1797] Aug. 30.

Vergl. den art. 356. der *Analysis Residuorum*, Werke II, S. 227.

BACHMANN.

[77.]

Demonstratum, viaque ad multa maiora per introd[uctionem] modulorum multiplicium strata.

[1797] Aug. 31.

Vergl. die Nr. 76. Siehe den art. 372. der *Analysis Residuorum*, Werke II, S. 237.

BACHMANN.

[78.]

Aug. 1. generalius ad quosvis modulos adaptatur.

[1797] Sept. 4.

Hier ist Aug. 1. wohl ein Schreibfehler für Aug. 31., denn es handelt sich ohne Zweifel um den allgemeinsten Fall dessen, was in der Nr. 76 für einen Primzahlmodul, in der Nr. 77 für einen Modul, der eine Primzahlpotenz ist, bewiesen worden und nun für einen ganz beliebigen Modul erledigt wird. Mit der Nr. 73 vom 1. August hat diese Notiz offenbar nichts zu tun.

BACHMANN.

[79.]

Principia detexi, ad quae congruentiarum secundum modulos multiplices resolutio ad congruentias secundum modulum linearem reducitur.

[1797] Sept. 9.

Vergl. die Nr. 77 vom 31. August 1797, ferner die artt. 372 ff. der *Analysis Residuorum*, Werke II, S. 237.

BACHMANN.

[80.]

Aequationes habere radices imaginarias methodo genuina demonstratum.

Bruns[vigae, 1797] Oct.

Prom[ulgatum] in dissert[atione] pecul[iari*)] mense Aug. 1799.

Siehe Werke III, S. 1. GAUSS ist auf Grund dieser Dissertation am 16. Juli 1799 **) von der philosophischen Fakultät der Universität Helmstedt zum Doktor promoviert worden.

SCHLESINGER.

[*) *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores primi vel secundi gradus resolvi posse.* Helmstadii apud C. G. FLECKEISEN, 1799.]

**) Siehe den Brief an W. BOLYAI vom 16. Dezember 1799, *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und W. Bolyai*, herausgegeben von F. SCHMIDT und P. STÄCKEL, Leipzig 1899, S. 34. In seiner Schrift: *K. F. Gauss, Zwölf Kapitel aus seinem Leben*, Leipzig 1878, bezeichnet L. HÄNSELMANN, S. 47, fälschlich den 14. Juli als den Tag, an dem »das Diplom ausgefertigt« wurde. Daß der 16. Juli der richtige Tag ist,

[81.]

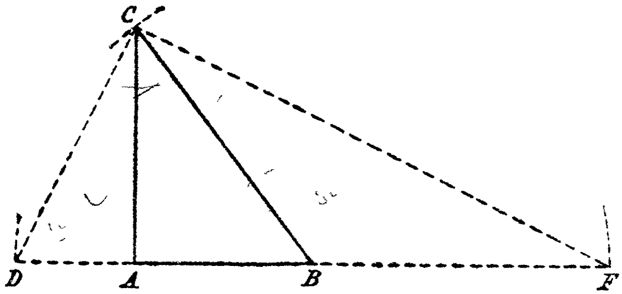
Nova theorematis PYTHAGORAEI dem[onstratio].

Bruns[vigae, 1797] Oct. 16.

Der Beweis ist im Nachlaß vorhanden:

Nova theorematis pythagoraei demonstratio.

[Zettel in Ff, Kapsel 41.]



Theorema.

Si trianguli ABC angulus sit rectus, erit

$$AB^{qu} + AC^{qu} = BC^{qu}.$$

Demonstr[atio].

Producatur AB utrinque fiatque

$$BD = BF = BC.$$

Tum triangula CBD, CBF erunt isocelia et anguli

$$BDC = BCD; \quad BCF = BFC.$$

At

$$BDC + DCB + BCF + CFB = 2 \text{ Rectis}.$$

Quare $DCB + BCF$ erit $=$ Recto. Hinc Angulus $CDA = ACF$ et triangula

wird bestätigt von P. ZIMMERMANN, *Zum Gedächtniss an Karl Friedrich Gauss*, Braunschweigisches Magazin 5, 1899, Heft 15; dieser hat die Akten der Helmstedter Fakultät eingesehen. Das Gesuch von GAUSS war am 26. Juni 1799 eingereicht worden und bereits am 28. Juni erstattete PFAFF, der die Dissertation schon kannte (vergl. die oben S. 99—105 abgedruckten Briefe), sein Gutachten. Die mündliche Prüfung wurde erlassen und das Diplom, wie es scheint, vor dem Druck der Dissertation ausgestellt, nachdem die Gebühren durch den Herzog von Braunschweig bezahlt worden waren.

ACD, AFC similia. Quare

$$AC:AD = AF:AC$$

et AC^{qu} = Rectg. sub AD et AF i. e. sub $BC-AB$ et $BC+AB$. Hinc (EUCL. Elem. II)

$$AC^{qu} = BC^{qu} - AB^{qu}$$

et

$$AC^{qu} + AB^{qu} = BC^{qu} \qquad QED.$$

[82.]

Seriei

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{144}x^4 \cdots$$

summam consideravimus invenimusque eam = 0, si

$$2\sqrt{x} + \frac{3}{16}\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{21}{1024}\frac{1}{\sqrt{.3x}} \cdots = \left(k + \frac{1}{4}\right)\pi.$$

Brunsv[igae, 1797] Oct. 16.

Eine Erläuterung und Bestätigung dieser Aufzeichnung findet man oben S. 388—389. Hier möge nur wiederholt werden, daß in der Gleichung linker Hand im dritten Gliede statt $\sqrt{.3x}$ gelesen werden muß $\sqrt{x^3}$.

SCHLESINGER.

[83.]

Positis:

$$l(1+x) = \varphi' x; \quad l(1+\varphi' x) = \varphi'' x; \quad l(1+\varphi'' x) = \varphi''' x, \quad \text{etc.}$$

erit

$$\varphi^i x = \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{3}{2}i}} + \cdots.$$

Brunsv[igae, 1798] Apr. [*)]

In dieser Aufzeichnung wird die von einer Funktion $l(1+x)$ gebildete i-te Iterierte $\varphi^{(i)}(x)$ durch eine Reihe dargestellt, von der das allein angegebene erste Glied vermuten läßt, daß sie zur Bestimmung des asymptotischen Verhaltens von $\varphi^{(i)}(x)$ für große Werte des Index i dienen soll. Welche Funktion GAUSS hier unter $l(1+x)$ versteht, läßt sich unmittelbar weder aus der Aufzeichnung selbst noch aus

[*) Die Unterbrechung in den Eintragungen vom 16. Oktober 1797 bis zum April 1798 läßt darauf schließen, daß GAUSS, als er sich Mitte Oktober 1797 nach Göttingen begab, das Tagebuch in Braunschweig zurückgelassen hatte. Erst nach seiner Rückkehr setzt er die Aufzeichnungen fort.]

andern Stücken des Nachlasses feststellen. Man könnte daran denken, $l(1+x)$ mit dem natürlichen Logarithmus oder mit der in dem *Specimen termini medii etc.* (oben, S. 172) auftretenden Funktion, die im art. [3.] (oben, S. 174) mit $l(1+x)$ bezeichnet wird, zu identifizieren, d. h. also in der Umgebung von $x=0$ zu setzen

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \tag{1}$$

oder

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} - \frac{9}{112}x^4 + \cdots; \tag{2}$$

aber diese beiden Möglichkeiten scheiden aus, da, wie sich alsbald zeigen wird, für die beiden Funktionen (1), (2) das Anfangsglied der Entwicklung der i-ten Iterierten anders lautet, als GAUSS es angibt. Wir wollen vielmehr fragen, was sich aus dem GAUSSschen Anfangsgliede für die Funktion $l(1+x)$ erschließen läßt, wenn wir annehmen, daß diese Funktion in der Umgebung von $x=0$ in der Form

$$l(1+x) = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \tag{3}$$

entwickelbar ist.

Setzt man

$$l(1+x) = x_1, \quad l(1+x_1) = x_2, \quad \ldots, \quad l(1+x_i) = x_{i+1}, \quad \ldots, \tag{4}$$

so gilt für $x_i = \varphi^{(i)}(x)$ die Funktional- oder Differenzengleichung

$$x_{i+1} = x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 + \cdots. \tag{5}$$

Diese Gleichung ist als besonderer Fall in der Gleichung

$$x_{i+1} = a x_i + \sum A_{\lambda\mu}\left(\frac{1}{i}\right)^{\lambda} x_i^{\mu} \qquad (\lambda = 1,\ \mu = 0;\ \lambda+\mu \geqq 1) \tag{6}$$

enthalten, die J. HORN unter der Voraussetzung $a \neq 1$ im ersten Teile seiner Abhandlung *Laplacesche Integrale als Lösungen von Funktionalgleichungen* *) untersucht. Den Fall $a=1$, der nach (5) gerade für uns hier in Betracht kommt**), hat HORN a. a. O. nicht behandelt; in einer brieflichen Mitteilung gibt er darüber die folgenden Erörterungen. Die Gleichung (5), oder wie wir schreiben wollen:

$$x_{i+1} = x_i + a_{m+1} x_i^{m+1} + a_{m+2} x_i^{m+2} + \cdots, \tag{7}$$

wo $a_{m+1} \neq 0$ sein soll, wird formal durch eine Reihe von der Form

$$x_i = \sum C_{\lambda\mu}\, i^{-\frac{\lambda+1}{m}} \left(\frac{\log i}{i}\right)^{\mu} \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

befriedigt, in der die Koeffizienten durch Rekursionsformeln bestimmt werden, bis auf C_{m0}, das als willkürliche Konstante (oder periodische Funktion von i mit der Periode 1) anzusehen ist. Der Anfangskoeffizient C_{00} ergibt sich, da

$$x_{i+1} - x_i = C_{00}\left\{(i+1)^{-\frac{1}{m}} - i^{-\frac{1}{m}}\right\} + \cdots = C_{00}\, i^{-\frac{1}{m}}\left\{\left(1+\frac{1}{i}\right)^{-\frac{1}{m}} - 1\right\} + \cdots = -\frac{C_{00}}{m}\, i^{-\frac{m+1}{m}} + \cdots,$$

$$a_{m+1} x_i^{m+1} + \cdots = a_{m+1} C_{00}^{m+1}\, i^{-\frac{m+1}{m}} + \cdots$$

---

*) CRELLES Journal für Mathematik **146**, 1915, S. 95.

**) Die Begründung dafür, daß hier nur die Form (5), also die Form (3) der Entwicklung von $l(1+x)$ in Betracht kommt, geben wir weiter unten.

ist, aus der Gleichung

$$-\frac{C_{00}}{m} = a_{m+1} C_{00}^{m+1};$$

die Reihe (8) lautet also, wenn wir nur das Anfangsglied hinschreiben,

$$x_i = \sqrt[m]{-\frac{1}{m\,a_{m+1}\,i}} + \cdots. \tag{9}$$

Um Übereinstimmung mit dem Anfangsgliede von GAUSS zu erzielen, hat man zu nehmen

$$m = 3, \quad a_{m+1} = -\tfrac{1}{2}, \tag{10}$$

d. h. für $l(1+x)$ eine Entwicklung in der Umgebung von $x = 0$ von der Form

$$l(1+x) = x - \frac{x^4}{2} + x^5\,\mathfrak{P}(x), \tag{11}$$

wo $\mathfrak{P}(x)$ eine beliebige in der Umgebung von $x = 0$ konvergente gewöhnliche Potenzreihe bedeutet. Dagegen würde für die Annahmen (1) bezw. (2) das Anfangsglied der Entwicklung (8) $\frac{2}{i}$ bezw. $\frac{4}{i}$ lauten.

HORN bemerkt weiter, daß nunmehr mit Hilfe der von ihm sonst angewandten Methoden die Reihe (8) mit den Lösungen der Differenzengleichung (7) in Verbindung zu bringen und, um aus (8) eine asymptotische Reihe für die i-te Iterierte x_i zu erhalten, das noch willkürliche C_{m0} in der Weise zu bestimmen wäre, daß die entsprechende Lösung von (7) die Anfangsbedingung $x_0 = x$ erfüllt.

Will man sich aber darauf beschränken, die quantitative Bedeutung des ersten Gliedes der Reihe (8) hervortreten zu lassen, so bedarf es nur der sehr viel einfacheren Methoden, die L. LEAU *) angegeben hat. Da bei GAUSS nur das erste Glied angegeben ist, so erscheint diese Beschränkung gerechtfertigt. Als weitere Vereinfachung wollen wir annehmen, daß die Koeffizienten $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ in der Gleichung (7) reell sind, und daß auch x eine reelle Veränderliche bedeutet, eine Annahme, die GAUSS im Jahre 1798 sicher gemacht haben wird. Wir schließen uns nun an LEAU **) an.

Nach (7) oder

$$x_i = x_{i-1} + a_{m+1} x_{i-1}^{m+1} + a_{m+2} x_{i-1}^{m+2} + \cdots \tag{7'}$$

hat man

$$\frac{1}{x_i^m} = \frac{1}{x_{i-1}^m} - h(x_{i-1}), \tag{12}$$

wo

$$h(x) = \frac{1}{x^m} - \frac{1}{x_1^m} = m\,a_{m+1} + \cdots \tag{13}$$

in der Umgebung von $x = 0$ holomorph ist. Aus (12) folgt

$$\frac{1}{x_i^m} = \frac{1}{x^m} - \left\{ h(x) + h(x_1) + \cdots + h(x_{i-1}) \right\}$$

oder

$$x_i^m = \frac{x^m}{1 - (h(x) + \cdots + h(x_{i-1}))\,x^m}. \tag{14}$$

Setzt man

$$h(x) = m\,a_{m+1}(1 + \delta(x)), \tag{15}$$

---

*) *Étude sur les équations fonctionnelles etc.* Thèses, Paris 1897, auch Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse **11**, Abhandlung E.

**) A. a. O., Chapitre III, S. 29 ff.

so ist $\delta(0) = 0$ und $\delta(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ holomorph. Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, nehmen wir an, daß a_{m+1} negativ sei; für die bei GAUSS vorliegende Form (11) von $l(1+x)$ tritt dies wirklich ein. Dann ist für hinreichend kleine positive Werte von x erstens $0 < x_1 < x$, und man kann zweitens x so klein wählen, daß $|\delta(x)| < K < 1$ sei. Ein in dieser Weise abgegrenzter Bereich positiver Werte von x heiße G. Liegt x innerhalb G, so gilt also das gleiche von jedem x_i und es ist folglich auch $|\delta(x_i)| < K < 1$; wir haben also nach (14) und (15)

$$(16) \qquad x_i^m = \frac{x^m}{1 - i m a_{m+1} x^m \left(1 + \frac{1}{i}(\delta(x) + \delta(x_1) + \cdots + \delta(x_{i-1}))\right)},$$

und da

$$\frac{1}{i}|\delta(x) + \delta(x_1) + \cdots + \delta(x_{i-1})| < K < 1$$

ist, so folgt $\lim\limits_{i\to\infty} x_i^m = 0$, also auch $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = 0$. Für ein dem Bereiche G angehöriges x und ein beliebig kleines positives ε kann man also k so groß wählen, daß für $i \geqq k$, $|\delta(x_i)| < \varepsilon$ ist. Dann ist

$$\frac{1}{i}|\delta(x) + \delta(x_1) + \cdots + \delta(x_{i-1})| < \frac{kK + (i-k)\varepsilon}{i},$$

wo die rechte Seite für $i \to \infty$ den Grenzwert ε hat. Schreibt man nun (16) in der Form

$$i x_i^m = \frac{1}{-m a_{m+1} + \frac{1}{i x^m} - m a_{m+1}\frac{1}{i}(\delta(x) + \delta(x_1) + \cdots + \delta(x_{i-1}))},$$

so erkennt man, daß sich $i x_i^m$ von $-\frac{1}{m a_{m+1}}$ beliebig wenig unterscheidet, wenn i hinreichend groß gewählt wird. Es ist also, wenn x dem Bereiche G angehört,

$$\lim_{i\to\infty} i x_i^m = -\frac{1}{m a_{m+1}},$$

oder etwas anders geschrieben

$$(17) \qquad \lim_{i\to\infty} \sqrt[m]{i}\left(x_i - \sqrt[m]{-\frac{1}{m a_{m+1} i}}\right) = 0,$$

also insbesondere für den bei GAUSS vorliegenden Fall (10)

$$(18) \qquad \lim_{i\to\infty} \sqrt[3]{i}\left(\varphi^{(i)}(x) - \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{3}{2} i}}\right) = 0.$$

GAUSS hat für seine Funktion $l(1+x)$ unzweifelhaft die Reihe (8) bezw. (9) formal aufgestellt und dabei den Grenzwert (18) vor Augen gehabt. Wie wir gesehen haben, folgt aus den Angaben unserer Tagebuchaufzeichnung für $l(1+x)$ nur die Form (11). Daß tatsächlich nur der Ansatz (3) für die Darstellung von $l(1+x)$ in der Umgebung von $x = 0$ den Angaben der Tagebuchnotiz entspricht, geht daraus hervor, daß für den Ansatz

$$(3)' \qquad l(1+x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$

wo $a_1 \neq 1$ ist, also für die Differenzengleichung

$$(5)' \qquad x_{i+1} = a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots,$$

wenn $0 < |a_1| < 1$ vorausgesetzt wird, nach KOENIGS (*Recherches sur les intégrales de certaines équations* *fonctionnelles,* Annales de l'École Norm. Sup. 2. série 1, 1884, Supplém. S. 1) die Gleichung

$$\lim_{i\to\infty} \frac{x_i}{a_1^i} = B(x)$$

gilt, wo $B(x)$ in der Umgebung von $x = 0$ holomorph, in $x = 0$ von der ersten Ordnung Null und $B'(0) = 1$ ist.

Man vergl. die geschichtlichen Bemerkungen oben S. 443, 444.

SCHLESINGER.

[84.]

Classes dari in quovis ordine; hincque numerorum in terna quadrata discerpibilitas ad theoriam solidam reducta.

Brunsv[igae, 1798] Apr.

GAUSS hat hier wohl absichtlich ordine geschrieben statt, wie man zunächst erwarten würde, genere, weil im art. 287. der *Disquisitiones arithmeticae,* Werke I, S. 336, der Nachweis gesondert für jede der beiden Ordnungen (proprie et improprie primitivi) geführt wird. Ganz genau müßte es heißen: Classes dari in quovis genere cuiusvis ordinis. Vergl. die Angabe Werke I, S. 476, Bemerkung zum art. 287. III der *Disquisitiones arithmeticae,* »Demonstratione primum munita sunt Mense Aprili 1798«.

KLEIN. BACHMANN.

[85.]

Demonstrationem genuinam compositionis virium eruimus.

Gotting[ae, 1798] Mai.

Im Nachlaß haben sich keine auf diesen Beweis bezügliche Aufzeichnungen gefunden, aber in einem Briefe von F. L. WACHTER an GAUSS, datiert Altenburg, den 16. Dezember 1814, wird er erwähnt. Es heißt dort:

»... Den DUCHAYLAschen Beweis für das Kräfteparallelogramm habe ich deswegen unrichtig genannt, weil ihm, in der Gestalt, die ihm POISSON in seiner Mechanik gegeben, die Beweiskraft mangelt. Ihr Beweis scheint mir noch wesentlich verschieden zu sein, weil er streng auf dem Begriff einer festen Ebene beruht, POISSON hingegen ausdrücklich nur auf den Satz sich stützt: daß es gleich sey, an welchem Punkte einer festen Linie eine Kraft wirkt, und dieser Satz scheint mir völlig unzureichend zu seyn ...«.

Über WACHTER vergl. P. STÄCKEL, Mathematische Annalen 54, 1901, S. 49. DUCHAYLAS wesentlich geometrischer Beweis findet sich in der Correspondance de l'école polytechnique, Nr. 4, Paris 1808; POISSON hat ihm in seinem *Traité de mécanique,* Paris 1811, T. I, S. 11, eine analytische Gestalt gegeben.

STÄCKEL.

[86.]

Theorema LA GRANGE de transformatione functionum [*)] ad functiones quotcunque variabilium extendi.

Gotting[ae, 1798] Mai.

Im Nachlaß findet sich keine Aufzeichnung, die hier in Betracht kommen könnte, aber in dem oben S. 429 abgedruckten Briefe an HINDENBURG vom 8. Oktober 1799 erwähnt GAUSS die hier angezeigte Verallgemeinerung der Umkehrungsformel von LAGRANGE **) und bemerkt, daß er inzwischen das Verfahren von LAPLACE zum Beweise dieser Formel, das ihm im April 1797 noch unbekannt war, kennen gelernt habe. Nun enthält der VIII. Abschnitt derselben Abhandlung von LAPLACE, in deren VII. Abschnitt jenes Verfahren entwickelt ist (siehe die zweite Fußnote auf S. 430), eine Verallgemeinerung des LAGRANGEschen Satzes auf Funktionen von zwei und mehr Veränderlichen ***). GAUSS hat also bei seiner Verallgemeinerung jedenfalls an LAPLACE angeknüpft. Es ist dies darum besonders bemerkenswert, weil GAUSS um diese Zeit, also etwa in der ersten Hälfte des Jahres 1798, überhaupt angefangen hat, sich mit den Schriften von LAPLACE zu beschäftigen, vergl. die Notiz Nr. 88 und die zugehörigen Bemerkungen.

SCHLESINGER.

[87.]

Series

[1] $$1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1.1}{2.4}\right)^2+\left(\frac{1.1.3}{2.4.6}\right)^2+\text{etc.}=\frac{4}{\pi}$$

simul cum theoria generali serierum involventium sinus et cosinus angulorum arithmetice crescentium.

[1798] Iun.

Welche Teile der allgemeinen Lehre von den trigonometrischen Reihen GAUSS im Auge hatte, als er die vorstehende Notiz schrieb, ergibt sich aus den Anfangsworten des oben S. 433 abgedruckten Briefes an SCHUMACHER vom 5. Februar 1850. Danach handelte es sich um die »Methode, den Grad der Konvergenz« einer solchen Reihe zu bestimmen, d. h. also um die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens des allgemeinen Gliedes für große Werte des Stellenzeigers, und zwar insbesondere bei der Entwicklung der Mittelpunktsgleichung nach den Sinus der Vielfachen der mittleren Anomalie. Wir wissen ja auch z. B. aus den Bemerkungen zu ULUGH-BEIGHS Tafeln †), daß diese Untersuchungen von GAUSS bis in die letzten Jahre des achtzehnten Jahrhunderts zurückreichen. Das Studium der Schriften von LAPLACE, mit dem

---

[*) In der Handschrift steht functionem.]

**) Daß es sich hier wirklich um den Umkehrungssatz von LAGRANGE handelt, wird dadurch außer Zweifel gesetzt, daß, wie die Handschrift erkennen läßt, GAUSS ursprünglich statt transformatione schreiben wollte reversione.

***) Eine vereinfachte Darstellung dieser Verallgemeinerung von LAPLACE gibt G. DARBOUX, *Sur la série de Laplace,* Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences 68, Paris 1869, S. 324, vergl. auch T.-J. STIELTJES, *Sur une généralisation de la série de Lagrange,* Annales de l'École Normale (3) 2, 1885, S. 93.

†) Diese Bemerkungen hatte GAUSS im Frühjahr 1799 brieflich an v. ZACH mitgeteilt, vergl. die genauen Angaben oben S. 444 in den Bemerkungen zum *Briefwechsel* der *Reihenlehre.*

GAUSS nach dem Zeugnis der Tagebuchnotizen Nr. 86 und Nr. 88 um die hier in Rede stehende Zeit beschäftigt war, ist auch für diese Untersuchungen von Bedeutung gewesen.

Mit diesen geschichtlichen Feststellungen läßt sich auch das Auftreten der Reihe [1] in Einklang bringen. Diese Reihe für $\frac{4}{\pi}$ hat GAUSS auch in seinen Abdruck des zweiten Bandes von SCHULZEs Tafelwerk eingeschrieben und zwar mit dem Zusatz »EULER, H. d. l'A. 1778, p. 609«. In der Tat findet man in der Histoire de l'Académie des Sciences für das Jahr 1778 (Paris 1781), beginnend auf S. 603 der Mémoires: *Extraits de différentes lettres de M. Euler à M. le Marquis de Condorcet,* und in dem dritten Briefe (vom 12./23. September 1776), der auf S. 606 beginnt, wird S. 609 (L. EULERI Opera omnia, ser. I, vol. 18, S. 77) die Reihe [1] durch Betrachtung von Integralen der Form

$$\int_0^1 dx \left(\log \frac{1}{x}\right)^\lambda = \int_0^\infty u^\lambda e^{-u} du,$$

also von Π-Funktionen (in der Bezeichnung der *Disquisitiones circa seriem,* 1812, Werke III, S. 151), gewonnen. Da bei dieser Herleitung trigonometrische Reihen nicht ins Spiel kommen, so muß GAUSS, als er die Tagebuchnotiz schrieb. ein von dem EULERschen abweichendes Verfahren im Sinn gehabt haben. Dazu kommt, daß in SCHULZEs *Tafeln* neben der Reihe [1] noch die Reihe

$$[2] \qquad 1 + \frac{1.1}{2.4} + \frac{1.1.3.3}{2.4.4.6} + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.4.4.6.6.8} + \dots \text{ in inf.} = \frac{4}{\pi}$$

eingeschrieben ist; GAUSS dürfte also auf beide Reihen durch ein einheitliches Verfahren gekommen sein, das auf einer Entwicklung in eine trigonometrische Reihe beruhte. Im Nachlaß findet sich keine Aufzeichnung, die hierüber Aufklärung gibt, man ist also auf Vermutungen angewiesen. Nun hat JAMES IVORY in demselben Jahre, aus dem auch unsere Tagebuchnotiz stammt, eine Abhandlung veröffentlicht*), in der jene EULERsche Reihe [1] nach einer Methode hergeleitet wird, die sich in einem GAUSS durchaus vertrauten Gedankenkreise bewegt, und die mit den nötigen Abänderungen auch zur Ableitung der Reihe [2] benutzt werden kann. Sie gründet sich auf die von LAGRANGE**) gegebene trigonometrische Entwicklung

$$(3) \quad (a^2+b^2-2ab\cos\theta)^n = \left(a-b e^{\theta\sqrt{-1}}\right)^n \left(a-b e^{-\theta\sqrt{-1}}\right)^n = P + 2Q\cos\theta + 2R\cos 2\theta + \cdots \text{ in inf.},$$

deren Koeffizienten $P, Q, R, \dots$ in der Form von Potenzreihen der Größe $\frac{b}{a}$ dargestellt werden. Diese Entwicklung war namentlich ihrer astronomischen Anwendungen wegen sehr bekannt und berühmt; GAUSS wird sie 1798 ebensogut gekannt haben wie IVORY. Nach dem art. 6. der *Disquitiones circa seriem* vom Jahre 1812, wo GAUSS diese Entwicklung wiedergibt, hat man insbesondere für den von θ freien Teil

$$(4) \qquad P = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (a^2+b^2-2ab\cos\theta)^n d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (a^2+b^2-2ab\cos 2\varphi)^n d\varphi$$

---

*) J. IVORY, *A new series for the rectification of the Ellipsis; together with some observations on the Evolution of the Formula* $(a^2+b^2-2ab\cos\Phi)^n$, Transactions of the Royal Society of Edinburgh 4, 1798, Part II, S. 177—190. Auf diese wenig bekannte Abhandlung verweist H. BURKHARDT, *Encyklopädie der mathem. Wissenschaften* II A 12, S. 883.

**) J. L. LAGRANGE, *Solution de différents problèmes de calcul intégral,* Miscell. Taurin. 3, 1762—1765, Oeuvres I, Paris 1867, S. 469, insbesondere S. 620 ff.; *Recherches sur les inégalités des Satellites de Jupiter,* Prix de l'Académie des Sciences 9, Paris 1766, Oeuvres VI, Paris 1873, S. 63, insbesondere S. 88.

die zwiefache Darstellung (siehe Werke III, S. 128, 129)

$$(5)\qquad P = a^{2n} F\left(-n, -n, 1, \frac{b^2}{a^2}\right) = (a+b)^{2n} F\left(-n, \frac{1}{2}, 1, \frac{4ab}{(a+b)^2}\right).$$

Mit freier Benutzung der IVORYschen Abhandlung läßt sich nun der Beweis für die Entwicklungen [1] und [2] wie folgt erbringen.

Bedeutet φ die exzentrische Anomalie, x die Exzentrizität einer Ellipse, deren große Achse gleich 1 ist, so hat man

$$1 - x^2\cos^2\varphi = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2}\cos 2\varphi = a^2 + b^2 - 2ab\cos 2\varphi,$$

für

$$a = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2},\quad b = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2},\quad x^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2},$$

so daß also x als das Verhältnis zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel von a, b erscheint (LANDENsche Transformation). Für $n = \frac{1}{2}$ ergibt sich aus (4) mit Benutzung der ersten Reihendarstellung in (5) für das vollständige elliptische Integral zweiter Gattung, d. h. für den halben Ellipsenumfang:

$$\int_0^\pi (1 - x^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\,d\varphi = \int_0^\pi (a^2 + b^2 - 2ab\cos 2\varphi)^{\frac{1}{2}}\,d\varphi = a\pi\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{b^2}{a^2} + \left(\frac{1\,.\,1}{2\,.\,4}\right)^2\frac{b^4}{a^4} + \left(\frac{1\,.\,1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2\frac{b^6}{a^6} + \cdots\right).$$

Setzt man hierin $x = 1$, also $a = \frac{1}{2}$, $\frac{b}{a} = 1$, so erhält man die Reihe [1]. Für $n = -\frac{1}{2}$ und mit Benutzung der zweiten Reihendarstellung in (5) ergibt sich die von GAUSS oft angewandte Entwicklung des vollständigen Integrals erster Gattung

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\cos^2\varphi}} = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos 2\varphi}} = \pi\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 x^4 + \left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2 x^6 + \cdots\right),$$

aus der die Gleichung

$$\int_0^1 d(x^2)\,\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\cos^2\varphi}} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2\cdot\frac{1}{4} + \cdots$$

hervorgeht. Linker Hand findet man nach Vertauschung der Integrationsfolge sofort den Wert $\frac{4}{\pi}$, womit die Entwicklung [2] gewonnen ist. Die Annahme, daß das Verfahren von GAUSS dem hier befolgten ähnlich gewesen sein mag, wird auch dadurch gestützt, daß im art. [3.] des Abschnitts [VII.] der *Reihenlehre*, der von der Konvergenz der Entwicklung der Mittelpunktsgleichung handelt (siehe oben S. 423), die Entwicklung (3) für $n = -\frac{1}{2}$ benutzt wird.

SCHLESINGER.

[88.]

Calculus probabilitatis contra LA PLACE defensus.

Gott[ingae, 1798] Iun. 17.

Auf diese Aufzeichnung nimmt GAUSS in zwei Briefstellen unmittelbar Bezug, nämlich in dem Briefe an OLBERS vom 24. Januar 1812 (abgedruckt Werke VIII, S. 140) und in dem an LAPLACE vom 30. Januar 1812 (abgedruckt S. 371 dieses Bandes). An OLBERS schreibt GAUSS: »Unter meinen Papieren finde ich, daß ich im Junius 1798 . . . . zuerst LAPLACEs Methode gesehen und die Unverträglichkeit derselben mit den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in einem kurzen Notizen-Journal über meine mathematischen Beschäftigungen angezeigt habe« und in dem Briefe an LAPLACE heißt es (siehe oben S. 373): »le mois de Juin 1798 est l'époque où je l'ai rapprochée [nämlich die Methode der kleinsten Quadrate] aux principes du calcul des probabilités«. Daraus geht hervor, daß es sich in unserer Aufzeichnung um die von GAUSS im art. 186. der *Theoria motus* (1809, Werke VII, 1906, S. 254) besprochene Methode von LAPLACE-BOSCOVICH handelt, die LAPLACE im XI. Abschnitt seiner Abhandlung *Sur quelques points du Système du monde,* Histoire de l'Académie des Sciences, Année 1789, Paris 1793, Mémoires etc. S. 32 auseinandersetzt, und daß GAUSS diese Abhandlung im Juni 1798 kennen gelernt hat. Man vergl. auch die Einleitung des Aufsatzes von A. GALLE »GAUSS als Geodät«, Werke XI 2.

KLEIN. SCHLESINGER.

[89.]

Problema eliminationis ita solutum, ut nihil amplius desiderari possit.

Gott[ingae, 1798] Iun.

Mit der Eliminationstheorie, auf die sich auch schon die Tagebuchnotiz Nr. 36 vom 16. September 1796 bezieht, hat sich GAUSS beschäftigt, als er die Beweise seiner Vorgänger EULER und LAGRANGE für den Fundamentalsatz der Algebra einer kritischen Prüfung unterzog. (Vgl. die Tagebuchnotiz Nr. 80 vom Oktober 1797.) Im art. 8. der *Dissertation* (1799, Werke III, S. 13) lesen wir bei der Besprechung des EULERschen Beweises: »Ceterum operae pretium esse videtur, in formulas illas, quae α, β etc. rationaliter per u, B, C etc. exprimant, profundius et generalissime inquirere; de qua re aliisque ad eliminationis theoriam (argumentum haudquaquam exhaustum) pertinentibus alia occasione fusius agere suscipiam«. Über LAGRANGE und seine Kritik des EULERschen Beweises spricht sich GAUSS im art. 12. der *Dissertation* (Werke III, S. 20) aus. Auf diesen Punkt bezieht sich auch die Bemerkung von PFAFF in dem oben abgedruckten Briefe vom 8. Juli 1799, S. 104 unten und S. 105 dieses Bandes.

LOEWY.

[90.]

Varia elegantiuscula circa attractionem sphaerae.

[1798 Iun. sive Iul.]

[91a.]

$$1+\frac{1}{9}\frac{1.3}{4.4}+\frac{1}{81}\frac{1.3.5.7}{4.4.8.8}+\frac{1}{729}\frac{1.3.5.7.9.11}{4.4.8.8.12.12}\cdots = 1{,}02220\ldots$$
$$=\frac{1{,}3110\ldots}{3{,}1415\ldots}\sqrt{6}\left[=\frac{\varpi}{2}\frac{1}{\pi}\sqrt{6}\right].$$

[1798] Iul.

[91b.]

$$\text{arc.}\sin\text{lemn.}\sin\varphi-\text{arc.}\sin\text{lemn.}\cos\varphi=\varpi-\frac{2\varphi\varpi}{\pi}$$

$$\begin{aligned}\sin\text{lemnisc.}[a] &= 0{,}95500598\ \sin[a]\\ &\quad -0{,}0430495\ \ \sin 3[a]\\ &\quad +0{,}0018605\ \ \sin 5[a]\\ &\quad -0{,}0000803\ \ \sin 7[a]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^2\text{lemn.}[a] &= 0{,}4569472=\frac{\pi}{\varpi\varpi}\\ &\quad -[0{,}4569472]\cos 2[a]\ldots\end{aligned}$$

$$\text{arc.}\sin\text{lemn.}\sin\varphi=\frac{\varpi}{\pi}\varphi+\left(\frac{\varpi}{\pi}-\frac{2}{\varpi}\right)\sin 2\varphi+\left(\frac{11}{2}\frac{\varpi}{\pi}-\frac{12}{\varpi}\right)\sin 4\varphi+\cdots$$

$$\begin{aligned}\sin^5[\varphi] &= 0{,}4775031\sin[\varphi]\\ &\quad +0{,}03\ldots\ldots[\sin 3\varphi]\end{aligned}$$

. . . . . .

Die Aufzeichnungen der Nr. 91a und b stehen im engsten Zusammenhang mit den oben S. 168 ff. in den artt. [4.]—[6.] abgedruckten Notizen. Die Reihe der Nr. 91a findet sich im art. [5.], oben S. 169, der die Aufzeichnungen auf der Rückseite des Leistetitels wiedergibt, und dient dort zur Berechnung von $\frac{\varpi}{\pi}$; GAUSS hat sie später (im November 1799) auf S. 7 der Scheda Ac (abgedruckt oben S. 184 Gleichung [3]) noch einmal hingeschrieben.

Die trigonometrischen Reihen der Nr. 91b finden sich im wesentlichen im art. [4.], oben S. 168. Bei der Entwicklung von arc sin lemn s ist hier $s = \sin\varphi$ gesetzt und φ im Bogenmaß gedacht, während S. 168 φ in Graden ausgedrückt erscheint; darum lautet das erste Glied rechts vom Gleichhheitszeichen hier $\frac{\varpi}{\pi}\varphi$, dort φ^0. Für den Koeffizienten von $\sin 2\varphi$ sind auf S. 9 der Scheda Ac zwei, oben S. 184 Gln. [4], [5] abgedruckte Reihenentwicklungen angegeben. Die Entwicklung des art. [6.], oben S. 170, erscheint als unmittelbare Umkehrung der hier angegebenen Formel für arc sin lemn sin φ, wenn man dort φ mit χ vertauscht, also sin lemn χ = sin circ φ setzt. In der Entwicklung von sin lemn a ist hier ebenso wie auf S. 168 auf beiden Seiten der Gleichung a im Gradmaß zu denken, man hätte also, behufs Zurückführung auf das Bogenmaß, für 180° links vom Gleichheitszeichen die halbe Lemniskatenlänge ϖ, dagegen rechts vom Gleichheitszeichen die halbe Kreislänge π zu setzen. Vergl. die Bemerkung zu der folgenden Nr. 92.

KLEIN. SCHLESINGER.

[92.]

De lemniscata, elegantissima omnes exspectationes superantia acquisivimus et quidem per methodos, quae campum prorsus novum nobis aperiunt.

Gott[ingae, 1798] Iul.

Die hier angezeigten Ergebnisse finden sich in der Scheda Aa, die im Juli 1798 begonnen worden ist. Unter der Überschrift: *Scheda prima. De curva lemniscata* beginnt S. 3 der Scheda eine Zusammenfassung älterer Formeln, die im wesentlichen Werke III, S. 413—415 bis dahin, wo es heißt »Spätere Bemerkung« (diese stammt aus dem Handbuch 16, Bb, S. 72), abgedruckt ist. Das eigentlich Neue beginnt auf S. 6 der Scheda mit den Worten:

»Si valores sc [i. e. sinuscirculi], qui reddunt ipsum sl [i. e. sinumlemniscaticum] $= 0$ secundum regulas notas productum infinitum generare concipiuntur, nec non valores ipsius sc qui reddunt ipsum sl $= \infty$ . . . . .«

u.s.w., wie Werke III, S. 415, beginnend im art. [4.], gedruckt ist. GAUSS knüpft also unmittelbar an die in der Nr. 91b des *Tagebuchs* und in der Aufzeichnung oben S. 168, art. [4.], gegebenen Ansätze an, wonach sin lemn φ als Funktion von $s = \sin\varphi$ betrachtet wird. Aus der Kenntnis der Null- und Unendlichkeitsstellen von sin lemn φ und cos lemn φ (siehe oben S. 153 ff., die artt. [2.], [5.], [6.]) ergeben sich dann unmittelbar die Werte von s, die diesen Stellen entsprechen, in der Form von Exponentialgrößen, wie wir sie in den Ausdrücken für $P\varphi$, $Q\varphi$, $p\varphi$ und $q\varphi$ Werke III, S. 416 auftreten sehen. $P\varphi$ ist die oben S. 168, art. [3.] und S. 170, art. [6.] eingeführte Funktion; vergl. Werke III, S. 416, art. [5.], eine Aufzeichnung, die jedoch nicht aus der Scheda Aa, sondern von losen Zetteln aus späterer Zeit stammt.

Die jetzt gewonnene Darstellung von $P\varphi$, $Q\varphi$ in der Form einfach unendlicher Produkte liefert auch die in der Tagebuchnotiz Nr. 63 (vom 29. März 1797) gemeinte *demonstratio* des damals nur durch Induktion gefundenen Resultats (vergl. auch oben, S. 158 letzte Zeile)

$$\theta = N\varpi = e^{\frac{\pi}{2}},$$

sie brachte also wirklich, wie GAUSS damals voraussagte, *gravissima analyseos incrementa* mit sich. Daß GAUSS diese Bestätigung sofort vorgenommen hat, zeigt eine in der Scheda Aa aufgezeichnete, aber Werke III nicht mit abgedruckte Tafel der Werte von $e^{\frac{1}{2}k\pi}$ und $e^{-\frac{1}{2}k\pi}$ für $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ und dann S. 8—13 der Scheda die Werke III, S. 431, beginnend mit »*Ecce iam computum pro* $e^{\frac{1}{2}\pi}$« bis S. 432 abgedruckte sehr genaue Berechnung von $e^{\frac{1}{2}\pi}$ und $e^{-\frac{1}{2}\pi}$. Dazwischen steht (noch auf S. 7 der Scheda) die Werke III, S. 417, art. [6.] wiedergegebene Partialbruchdarstellung und (auf S. 8 der Scheda) die den Schluß des art. [6.] bildende Entwicklung des sinus lemniscaticus, und zwar in der Form:

$$\mathrm{sl}\,\varphi = \frac{\pi}{\varpi}\,\frac{4}{e^{\frac{1}{2}\pi}+e^{-\frac{1}{2}\pi}}\,\mathrm{sc}\,\varphi - \frac{\pi}{\varpi}\,\frac{4}{e^{\frac{3}{2}\pi}-e^{-\frac{3}{2}\pi}}\,\mathrm{sc}\,3\varphi \text{ etc.}$$

Es ist dies also genau die in der Nr. 91b und oben S. 168 gegebene Entwicklung von sin lemn φ nach den Sinus der Vielfachen von φ, nur erscheinen die Koeffizienten, die dort bloß numerisch angegeben waren, hier in einer das allgemeine Gesetz aufzeigenden analytischen Form. Aber auch hier hat GAUSS auf beiden Seiten der Gleichung φ im Gradmaß gedacht (vergl. die Bemerkung bei der Nr. 91); beim Abdruck Werke III, S. 417 hat der Herausgeber SCHERING beiderseits auf Bogenmaß reduziert; die von ihm mit ψ bezeichnete Größe hat also den Wert

$$\psi = \frac{\varphi^0}{180^0}.$$

Mit denselben Änderungen gegen die Handschrift sind dann Werke III, S. 417, art. [7.] noch die auf den Seiten 14, 15 der Scheda stehenden Formeln für $\log P$, $\log Q$, $\log p$, $\log q$ und $\log \sin \operatorname{lemn} \varphi$ abgedruckt. Damit sind die zu der hier besprochenen Tagebuchnotiz Nr. 92 gehörigen Aufzeichnungen erschöpft. Vergl. die Bemerkungen zu den Nummern 94, 95, 98.

KLEIN. SCHLESINGER.

[93.]

Solutio problematis ballistici.

Gott[ingae, 1798] Iul.

Der Nachlaß enthält keine auf dieses Problem bezüglichen Aufzeichnungen. Dagegen hat GAUSS in einem am 15. August 1842 an ENCKE geschriebenen Briefe einige Gedanken über die Art, wie ballistische Versuche anzustellen sind, ausgesprochen. Diesen Brief sowie die Anfrage ENCKES, die ihm vorhergegangen war, findet man unter den Nachträgen zur Physik, Werke XI 1, S. 49 ff. abgedruckt.

SCHLESINGER.

[94.]

Cometarum theoriam perfectiorem reddidi.

Gott[ingae, 1798] Iul.

Auf die zur Theorie der lemniskatischen Funktionen gehörigen Entwicklungen der Scheda Aa, die bis zur S. 15 gehen und bei der Nr. 92 besprochen worden sind, folgt auf S. 16 die Überschrift: *Scheda secunda. De motu cometarum.* Unter dieser Überschrift finden sich aber die Differentialgleichungen des Zweikörperproblems für die Erde und daran anschließende Entwicklungen, die sich bis zur S. 20 der Scheda erstrecken und kaum über die Ableitung des Flächensatzes und des Integrals der lebendigen Kraft hinausgehen; sie enthalten nichts, was sich im besonderen auf die Kometenbewegung bezieht. GAUSS' Untersuchungen über die Bahnbestimmung der Kometen fallen in eine spätere Zeit.

KLEIN. BRENDEL.

[95.]

Novus in analysi campus se nobis aperuit, scilicet investigatio functionum etc.

[1798] Oct.

Nach den bei der Nr. 94 erwähnten Aufzeichnungen finden wir auf S. 21 ff. der Scheda Aa wieder Entwicklungen zur Theorie der lemniskatischen Funktionen, die man mit den hier angekündigten Fortschritten in Verbindung zu setzen hat. Was auf S. 21, 22 der Scheda steht, ist Werke III, S. 418, soweit noch art. [7.] reicht, abgedruckt. Es folgen dann S. 23—25 der Scheda Rechnungen, die darauf hinzielen, aus den Entwicklungen von $\log P$, $\log Q$ analoge trigonometrische Reihenentwicklungen für P, Q selbst zu erhalten. Es gelingt dies zunächst in der Weise, daß die Koeffizienten numerisch gefunden werden; so steht z. B. auf S. 25

$$\begin{aligned} P\varphi = {} & 0{,}8346268416\ \ 7407316.4 \sin\varphi \\ + {} & \quad 62694861\ \ 2274007.5 (\sin\varphi)^3 \\ + {} & \qquad 874\ \ 5689900.5 (\sin\varphi)^5 \\ + {} & \qquad\qquad 238.56 (\sin\varphi)^7, \end{aligned}$$

wo, wie S. 24 bemerkt wird, der Koeffizient von $\sin\varphi$ nichts anderes ist als $\frac{\varpi}{\pi}$, und daraus wird nun weiter die Form

$$\begin{aligned} P\varphi = {} & 0{,}8393290109\ \ 26691403 \sin\varphi \\ - {} & \quad 15673988\ \ 60966741 \sin 3\varphi \\ + {} & \qquad 54\ \ 66056449 \sin 5\varphi \\ - {} & \qquad\qquad \ldots 37 \sin 7\varphi \end{aligned}$$

gewonnen. Das Gesetz der Koeffizienten in dieser Entwicklung und in der analogen für $Q\varphi$ scheint GAUSS durch numerische Induktion gefunden zu haben, das zeigen die auf S 29—33 befindlichen Rechnungen für $e^{-\frac{1}{4}\pi}$, $e^{-\pi}$, $e^{-\frac{9}{4}\pi}$. Auf S. 27 und 28 stehen die Werke III, S. 418 im art. [8.] abgedruckten Formeln für sin lemn φ, $P\varphi$, $Q\varphi$ *). Diese endgültigen Darstellungen von P, Q:

$$(*)\quad \begin{cases} P\varphi = 2^{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}\left(\frac{\sin\varphi}{e^{\frac{1}{4}\pi}} - \frac{\sin 3\varphi}{e^{\frac{9}{4}\pi}} + \frac{\sin 5\varphi}{e^{\frac{25}{4}\pi}} - \cdots\right), \\ Q\varphi = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}{2^{\frac{1}{4}}}\left(1 + \frac{2\cos 2\varphi}{e^{\pi}} + \frac{2\cos 4\varphi}{e^{4\pi}} + \cdots\right) \end{cases}$$

hat GAUSS wohl durch Einsetzen in die auf S. 23 der Scheda aufgezeichnete Gleichung

$$\frac{d}{[d\varphi]}\frac{P}{Q} = \frac{1}{Q}\frac{dP}{d\varphi} - \frac{P}{QQ}\frac{dQ}{d\varphi} = \sqrt{\left(1 - \frac{P^4}{Q^4}\right)}$$
$$QP' - PQ' = \sqrt{(Q^4 - P^4)}$$

bestätigt (vergl. auch die Leistenotiz oben S. 167, art. [2.]).

Die angegebenen Reihen für P, Q liefern auch sofort die S. 28 der Scheda unmittelbar anschließend (wie in dem Abdruck Werke III, S. 418, art. [8.]) aufgezeichneten Reihen

$$(**)\quad \begin{cases} \sqrt{\frac{\varpi}{\pi}} = 1 - 2e^{-\pi} + 2e^{-4\pi} - 2e^{-9\pi} + \cdots, \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varpi}{\pi}} = e^{-\frac{1}{4}\pi} + e^{-\frac{9}{4}\pi} + e^{-\frac{25}{4}\pi} + \cdots, \end{cases}$$

die den Zusammenhang herstellen zwischen der lemniskatischen Periode und den nach Potenzen von $e^{-\pi}$ bezw. $e^{-\frac{1}{4}\pi}$ fortschreitenden Reihen, deren Exponenten die Quadratzahlen sind. Die auf S. 26 der Scheda stehende Aufzeichnung **)

*) Auch bei diesen ist im Abdruck beiderseits auf Bogenmaß reduziert.

**) Vergl. oben S. 277.

»Investigatio factorum progressionis infinitae

$$1 + x + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + x^{21} + \text{etc.} = S«$$

zeigt, daß GAUSS durch die Entdeckung der beiden Reihen (✱✱) veranlaßt worden ist, seine älteren Untersuchungen über Potenzreihen, deren Exponenten eine arithmetische Progression zweiter Ordnung bilden, zu vergleichen. Von solchen Untersuchungen liegen Spuren vor im art. [9.] der *Exercitat. mathem.* (1796), oben S. 142, in der Tagebuchnotiz Nr. 58 vom 16. Februar 1797, die wieder auf Nr. 7 vom 24. Mai 1796 zurückweist, und in einer mündlichen Überlieferung (Werke III, S. 493, Zeile 3—6), wonach GAUSS die Beziehungen zwischen dem arithmetisch-geometrischen Mittel und den Potenzreihen, deren Exponenten Quadratzahlen sind, schon 1794 gekannt haben soll. GAUSS konnte also hier einen Zusammenhang zwischen der lemniskatischen Periode und dem arithmetisch-geometrischen Mittel vermuten, einen Zusammenhang, der ihm in der Tagebuchnotiz Nr. 98 vom 30. Mai 1799 zur Gewißheit geworden ist (certo aperietur heißt es dort, gleichsam als Bekräftigung des hier stehenden ... nobis aperuit).

Die Reihen (✱✱) hat GAUSS in der Tat sofort dazu benutzt, um den Wert von $\sqrt{\frac{\varpi}{\pi}}$ auf 26 Dezimalstellen zu berechnen (S. 28 der Scheda, mit Änderung der Reihenfolge abgedruckt Werke III, S. 418, 419, art. [8.]), und auf einem etwa aus derselben Zeit stammenden Zettel (in Fh, Nr. 2, Kapsel 50, demselben, auf dem die Werke III, S. 420, art. [12.] abgedruckten Reihen aufgezeichnet sind) wird diese Zahl ins Quadrat erhoben*), also $\frac{\varpi}{\pi}$ vermittels der ins Quadrat erhobenen Reihen (✱✱) berechnet. Die Vergleichung von

$$\frac{\varpi}{\pi} = 4\left(e^{-\frac{1}{4}\pi} + e^{-\frac{9}{4}\pi} + e^{-\frac{25}{4}\pi} + \cdots\right)^2$$

mit der z. B. im Leiste (siehe oben S. 176, Gl. [6.]) aufgezeichneten Reihe

$$4\left(z^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{9}{2}} + z^{\frac{25}{4}} + \cdots\right)^2$$

liegt dann sehr nahe; sie stimmen für $z = e^{-\frac{1}{2}\pi}$ überein.

Als die der Notiz Nr. 95 zugrunde liegenden Entdeckungen können wir also ansehen: Die Aufstellung der trigonometrischen Reihenentwicklungen für den Zähler und Nenner des sinus lemniscaticus, die im wesentlichen mit den JACOBIschen Thetafunktionen für den lemniskatischen Fall übereinstimmen, die Darstellung der lemniskatischen Periode durch Reihen, deren Exponenten die Quadratzahlen sind und möglicherweise hieran anschließend die Wiederaufnahme der Untersuchungen über das arithmetisch-geometrische Mittel (vergl oben S. 172 ff. und die zugehörigen Bemerkungen S. 260, 261). Auf den von GAUSS bei der Entwicklung der Theorie der lemniskatischen Funktionen 1798 eingeschlagenen Weg wirft die Bemerkung ein helles Licht, die GAUSS in dem oben S. 248 abgedruckten Briefe an BESSEL vom 30. März 1828, in bezug auf ABEL macht. Vergl. die Abschnitte III und IV des Aufsatzes »Über GAUSS' Arbeiten zur Funktionentheorie«, Werke X 2.

KLEIN. SCHLESINGER.

---

*) Es heißt dort:

Evectio numeri 0,91 357 913 815 611 682 140 724 ad quadratum

und als Ergebnis der Rechnung

$$\left[\frac{\varpi}{\pi} =\right] 0{,}8\,346\,268\,416\,740\,731\,872\,812\,057\,352\,513.$$

[96.]

Formas superiores considerare coepimus.

Br[unsvigae] Febr. 14. 1799.

Dasselbe Datum auch Werke I, S. 476, Bemerkung zum art 266. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 299. In der im November 1798 begonnenen Scheda Ab findet sich eine Reihe auf die ternären quadratischen Formen bezüglicher Aufzeichnungen, die mit den Worten beginnen:

Huiusmodi functiones

$$ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'xx'' + 2b''xx'$$

formas superiores vocamus.

KLEIN.

[97.]

Formulas novas exactas pro parallaxi eruimus.

Br[unsvigae, 1799] Apr. 8.

Diese Formeln (für die Mondparallaxe) hat GAUSS an verschiedenen Stellen aufgezeichnet, und zwar wie es seine Gewohnheit war, auf leeren Blättern von Büchern seiner Bibliothek. In unmittelbarem Zusammenhang mit unserer Tagebuchnotiz scheint die folgende Eintragung zu stehen, die sich auf den hintern Einbandseiten von KLÜGELS *Analytischer Geometrie*, 1770, (Nr. 739 der GAUSSbibliothek) findet:

Ist des Mondes Declination $= d$, sein Stundenwinkel $= h$, Horizontalparallaxe $= \pi$, Polhöhe $= \varphi$, so ist (genau)

$$\text{cotg par[allaxis] Asc[ensionis] r[ectae]} = \frac{\cos d}{\cos\varphi \sin h \sin\pi} - \operatorname{cotg} h$$

Diameter im Horizont $= \Delta$

Vergrösserter Diameter $= \Delta'$

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta' = \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta \sin(h+p)\cos d'}{\sin h \cos d}$$

$$\operatorname{tang} d' = \frac{\sin(h+p)}{\sin h}\left(\operatorname{tang} d - \frac{\sin\pi \sin\varphi}{\cos d}\right)$$

$\boxed{\text{REV. GALEN}}$ [*)]

Am ausführlichsten ist von diesen Formeln in einem Briefe die Rede, den GAUSS in Braunschweig am 17. April 1799 geschrieben hat und der gegenwärtig in der Autographensammlung DARMSTAEDTER der Königlichen Bibliothek zu Berlin aufbewahrt wird. Es heißt in diesem Briefe:

[*) Siehe die unerklärliche Buchstabenverbindung GALEN auch oben S. 187 aus Scheda Ac.]

Ich habe seit meinem letzten Briefe das Brouillon wieder gefunden von der Berechnung der Bedeckung des τ ≈ [*)]. Ich hatte diese meistens ad normam BOHNENBERGER [**)] geführt, weil ich damals mich nicht gleich in diesen Arbeiten genug orientirt hatte, um Ihnen das Resultat sogleich angeben zu können, wie Sie damals wünschten. Daraus sehe ich also, wie BOHNENBERGER die Längenparallaxe u.s.w. berechnet hat (mit Ausnahme der sphäroidischen Gestalt der Erde, auf die ich damals nicht Rücksicht genommen hatte, weil ich irrig voraussetzte, die Horizontalpar[allaxe] in dem Berliner Jahr B[uch] gelte für Berlin) und dass seine Methode nicht Näherung sei. In der That sind auch die exacten Formeln für Jemand, der in der analytischen Trigon[ometrie] nur mässig geübt ist, so leicht zu finden, dass es unbegreiflich sein würde, wenn sie noch von Niemand entwickelt wären. Indess muss ich gestehen, dass die Form, in der B[OHNENBERGER] sie darstellt [***)], mir weniger bequem scheint als die meinige, obgleich er vielleicht das Gegentheil geglaubt haben mag. Er richtet es nemlich so ein, dass man alles vermittelst der trigonometrischen Tafeln machen kann; allein ich glaube, dass der Grund davon ein Vorurtheil ist. . . . Meine Formeln werde ich also zwar nicht bekannt machen, zumal da sie wahrscheinlich schon in andern Büchern stehen werden (vielleicht in CAGNOLI [†)]) aber rechnen werde ich doch immer nach ihnen. Dies sind sie:

π Horizontalparallaxe unterm Aequator
π' verbesserte Horiz. Par.
ρ Entfernung vom Mittelpunkte der Erde
β Breite des Zeniths
λ Länge des Zeniths
b Breite des ☾ [Mondes]
l Länge des ☾
$\delta = l - \lambda$
r Halbmesser des ☾

[*) τ aquarii.]

[**) *Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung vorzüglich vermittelst des Spiegelsextanten* von M. J. G. F. BOHNENBERGER, Göttingen 1795, §§ 187—190, S. 341 ff.]

[***) Siehe a. a. O. S. 346 unten, beziehungsweise S. 350.]

[†) *Traité de Trigonométrie rectiligne et sphérique etc.* par M. CAGNOLI, traduit de l'Italien par M. CHOMPRÉ, Paris 1786.]

r' Vergrösserter Halbmesser
b' Scheinbare Breite [des Mondes]
p Längenparallaxe

I. $\sin \pi' = \rho \sin \pi$

II. $\operatorname{cotang} p = \frac{\cos b}{\cos \beta \sin \delta \sin \pi'} - \operatorname{cotang} \delta$

III. $\operatorname{tang} b' = \frac{\sin \delta + p}{\sin \delta}\left(\operatorname{tang} b - \frac{\sin \pi' \sin \beta}{\cos b}\right)$

IV. $\sin r' = \frac{\sin \delta + p}{\sin \delta} \cdot \frac{\cos b'}{\cos b} \sin r$ [*)].

Zur Ausübung sind in den meisten Fällen folgende Formeln die bequemsten.

I. Man suche den Logarithmen einer Zahl M nach der Formel

$$\frac{1}{M} = \cos b - \rho \sin \pi \cos \beta \cos \delta,$$

dann wird

II. $\operatorname{tang} p = M\rho \sin \pi \cos \beta \sin \delta$

III. $\operatorname{tang} b' = M \sin b \cos p - M\rho \cos p \sin \beta \sin \pi$

IV. $\sin r' = M \cos b' \cos p \sin r,$

(wofür man allemal die Näherung

$$r' = M \cos b' \cos p \,.\, r$$

brauchen darf).

Nach den letztern Formeln habe ich die Berechnung für Seeberg als Beispiel beigelegt. Ich merke nur noch an, dass das was BOHNENBERGER N nennt (nach meinem Brouillon [**)]) immer gleich ist dem Logarithm von $2M$ .....

Die GAUSSschen Formeln finden sich im Wesentlichen bei BOHNENBERGER a. a. O. § 187, S. 344—346 ***); die Formel für die Längenparallaxe (II. der GAUSSschen Formeln) hat nach BOHNENBERGERS Zitat bereits »LEXELL in den Berliner Ephemeriden für 1777, S. 152 u. f.« bekannt gemacht.

[*) Die Formeln II, III, IV stimmen für $\rho = 1$, $\beta = \varphi$, $b = d$, $\delta = h$, $r = \frac{1}{2}\Delta$, $r' = \frac{1}{2}\Delta'$, $b' = d'$ mit den oben aus KLÜGEL mitgeteilten überein. GAUSS hat sie mit den nachfolgenden Gebrauchsformeln in den hier benutzten Bezeichnungen in seinen 1798 erworbenen Abdruck von RÖSLERS *Handbuch der praktischen Astronomie,* 1788, eingeschrieben.]

[**) Die Bezeichnung N kommt bei BOHNENBERGER nicht vor; GAUSS hatte wohl die auf S. 350 der *Anleitung* stehenden Näherungsformeln vor Augen, in denen der gemeinsame Nenner $\cos B\,(\sin \frac{1}{2} A)^2$ in der Bezeichnung von GAUSS gleich $\frac{1}{2M}$ ist.]

***) GAUSS' Bezeichnungen weichen von denen BOHNENBERGERS etwas ab, vergl. die Zusammenstellung der Bezeichnungen bei BOHNENBERGER a. a. O. S. 345.

Die zu Anfang unserer Briefstelle erwähnte Bedeckung von τ aquarii ist wohl diejenige, die nach den Allgemeinen geographischen Ephemeriden **3**, 1799, S. 202, am 13. Dezember 1798 stattgefunden hat und von dem damaligen K. Preuß. Obersten und General-Quartiermeister bei der Neutralitäts-Armee VON LECOQ in Preußisch-Minden beobachtet worden ist. Die Vergleichung mit den im GAUSSarchiv befindlichen Briefen VON LECOQS an GAUSS zeigt, daß der hier im Auszug mitgeteilte Brief vom 17. April 1799 an VON LECOQ gerichtet ist. In seinem Bericht *Über die trigonometrische Aufnahme in Westphalen**) schreibt VON LECOQ (S. 139): »Im astronomischen Theile ist mir der Doctor GAUSS von großem Nutzen gewesen; seine Ausrechnungen und Briefe haben zu meinem Unterrichte viel beygetragen . . .«.

GALLE.

[98.]

Terminum medium arithmetico-geometricum inter 1 et $\sqrt{2}$ esse $= \frac{\pi}{\varpi}$ usque ad figuram undecimam comprobavimus, qua re demonstrata prorsus novus campus in analysi certo aperietur.

Br[unsvigae, 1799] Mai. 30.

Der hier niedergelegten Bemerkung, sie mag dem Zufall oder einer Vermutung ihre Entstehung verdanken, muß die genaue Berechnung der beiden Größen $\frac{\pi}{\varpi}$ und $M(\sqrt{2}, 1)$ vorhergegangen sein. Für $\frac{\pi}{\varpi}$ läßt sich dies auch in der Tat nachweisen. Nach der EULERschen Beziehung**)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}$$

st nämlich

$$(*) \qquad 2\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{\varpi},$$

da ja

$$\varpi = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

ist. Den bei STIRLING***) auf 17 Dezimalstellen berechneten Wert des Integrals $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$, d. h. der *Ordinata Curvae Elasticae* hat GAUSS damals sicherlich gekannt (vergl. oben S. 145); auf das Schutzblatt des LEISTE hat er neben den dort notierten Näherungswert $1{,}198 \pm$ des Integrales $(*)$ mit genau denselben Schriftzügen, wie sie die Tagebuchnotiz Nr. 98 zeigt, die Zeichen »$= \frac{\pi}{\varpi}$« hingeschrieben (siehe oben S. 146,

*) Monatliche Correspondenz **8**, 1803, S. 136 ff., S. 197 ff.

**) Siehe *Institutiones calculi integralis* I (1768), § 334, Opera omnia, ser. I, vol. 11, S. 210, vergl. oben S. 150, Gl. (3), wo infolge eines Druckfehlers $\frac{\pi}{2}$ statt $\frac{\pi}{4}$ steht.

***) *Methodus Differentialis etc.*, Londini 1730, S. 57.

art. [3.]). Ferner tritt die Größe $\frac{\pi}{\varpi}$ auf, wenn man aus der Gleichung

$$\sin \operatorname{lemn} \varphi = \sin \operatorname{circuli} \chi$$

(siehe oben S. 170, art. [6.]) χ durch φ in Bogenmaß darstellen will. Endlich haben die Darstellungen der Zähler und Nenner von sinus lemniscaticus, $P\varphi$, $Q\varphi$, wie sie in der Scheda Aa (Werke III, S. 418 und oben S. 537) und auch in der Scheda Ac (siehe oben S. 195, Gleichung [8], [9]) gegeben sind, beide den Faktor $\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}$. — In bezug auf $M(\sqrt{2}, 1)$ wissen wir nur, daß es als Beispiel in der Scheda Ab (siehe oben S. 174) und auch im LEISTE (siehe oben S. 180, dort allerdings $M(1, \sqrt{\tfrac{1}{2}})$) auftritt, aber diese beiden Stellen sind wohl erst nach der in der Tagebuchnotiz Nr. 98 gemachten Bemerkung geschrieben. Die Veranlassung $M(\sqrt{2}, 1)$ zu betrachten, könnte für GAUSS vielleicht in einer Bemerkung STIRLINGS gelegen haben, der auf S. 57 seines angeführten Werkes im Exemplum IV sagt: »Quod si longitudini Elasticae adiiciatur sua Ordinata, habebitur numerus 1, 9100 9889 4513 8559 8, qui est semiperipheria Ellipseos habentis 1 et $\sqrt{2}$ pro Axibus«. Es ist in der Tat

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^1 dx \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}.$$

In der Abhandlung von 1800 hat GAUSS im Exemplum 4. den Wert von $M(\sqrt{2}, 1)$ auf 19 Dezimalstellen berechnet (siehe Werke III, S. 364).

Die Voraussage, daß der Beweis für dieses Ineinandergreifen der lemniskatischen Funktionen mit dem agM. sicher ein neues Feld der Analysis eröffnen werde, zeigt, eine wie hohe Bedeutung GAUSS der Bemerkung vom 30. Mai 1799 beigelegt hat. Dies kommt auch darin zum Ausdruck, daß er diese Bemerkung an JOH. FRIEDR. PFAFF brieflich mitgeteilt hat. Aus der oben S. 232 abgedruckten Antwort PFAFFS vom 24. November 1799 geht hervor, daß GAUSS, als er an PFAFF über den Gegenstand schrieb, noch nicht im Besitz des Beweises der Gleichung

$$\frac{\pi}{\varpi} = M(\sqrt{2}, 1)$$

gewesen ist. Die vollständige Durchführung dieses Beweises scheint ihm erst im November 1799 gelungen zu sein (siehe die Bemerkungen zu den Abschnitten [II.] bis [IV.] der *Theorie des agM.*, oben S. 273 und die Tagebuchnotiz Nr. 100). Die Tragweite der Bemerkung der Nr. 98 für die Entwicklung von GAUSS' Gedankengang besteht darin, daß GAUSS durch sie auf die Wichtigkeit des reziproken Wertes des agM. aufmerksam wurde, während er früher (vergl. das *Specimen*, oben S. 172) nur das agM. selbst betrachtet hatte. Vergl. dafür auch den Schluß des art. 5. der Abhandlung von 1800, Werke III, S. 366.

KLEIN. SCHLESINGER.

[99.]

In principiis Geometriae egregios progressus fecimus.

Br[unsvigae, 1799] Sept.

Für diese Arbeiten über die ersten Gründe der Geometrie siehe den Brief von GAUSS an WOLFGANG BOLYAI vom 16. Dezember 1799, Werke VIII, S. 159. Wahrscheinlich stammt auch der Beweis des Lehrsatzes vom Flächeninhalt des Dreiecks, den GAUSS in dem Briefe an WOLFGANG BOLYAI vom 6. März 1832 mitteilt (Werke VIII, S. 221), aus dieser frühen Zeit; vergl. den Aufsatz »GAUSS als Geometer«, Werke X 2.

STÄCKEL.

[100.]

Circa terminos medios arithmetico-geometricos multa nova deteximus.

Br[unsvigae, 1799] Novemb.

Man wird als Belege für die hier angezeigten Entdeckungen die Leisteaufzeichnungen im Abschnitt [II.], oben S. 177 und die artt. [1.]—[3.] aus der Scheda Ac des Abschnitts [IV.], oben S. 184 anzusehen haben. Natürlich sind nicht alle diese Entdeckungen im November gemacht worden, die Eintragung ins *Tagebuch* wird vielmehr nur die Bedeutung haben, daß vor der Abreise nach Helmstedt ein Teil der erlangten Ergebnisse in die damals begonnene Scheda Ac eingetragen worden ist.

KLEIN. SCHLESINGER.

[101.]

Medium arithmetico-geometricum tamquam quotientem duarum functionum transscendentium repraesentabile esse iam pridem inveneramus; nunc alteram harum functionum ad quantitates integrales reducibilem esse deteximus.

Helmst[adii, 1799] Dec. 14.

Der erste Satz bezieht sich auf die Quotientendarstellung [7], oben S. 186, der zweite auf die Formeln [13]—[16] des art. [4.], oben S. 187, nach denen der Zähler dem reziproken Werte von

$$\int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{(1-r^2)(x^2-r^2)}}$$

gleich gefunden wird. Das ursprünglich irrtümlicherweise hingeschriebene Integral zweiter Gattung hat GAUSS vergessen durchzustreichen.

KLEIN. SCHLESINGER.

[102.]

Medium Arithmetico-Geometricum ipsum est quantitas integralis. Dem[onstratum].

[1799] Dec. 23.

Man könnte diese Notiz mit der Gleichung [20], oben S. 187, in Verbindung bringen, die ja vermöge der Integraldarstellung [16] von Q auch eine Integraldarstellung für den reziproken Wert des agM. liefert; für eine solche Verbindung spräche auch das hier wie dort später hinzugeschriebene demonstr[atum]. Dagegen wäre es nicht recht verständlich, weshalb GAUSS neun Tage (14.—23. Dezember) gebraucht haben sollte, um aus der Darstellung [16] die Folgerung [20] zu ziehen; auch machen die Aufzeichnungen auf S. 11 der Scheda Ac dem Ansehen der Schriftzüge nach den Eindruck, unmittelbar hintereinander geschrieben zu sein. Und in der Tat scheint die fast wörtliche Übereinstimmung mit der Bemerkung im art. 8. der Abhandlung von 1800, Werke III, S. 370: »hoc itaque modo media nostra arithmetico-geometrica ad quantitates integrales revocata sunt« eher darauf hinzudeuten, daß es sich hier darum handelt, daß der reziproke Wert des agM. als das Integral einer einfachen Differentialgleichung definiert werden kann, so daß der Abschnitt [III.], oben S. 181, hier als Beleg heranzuziehen wäre.

KLEIN. SCHLESINGER.

[103.]

In theoria formarum trinariarum formas reductas assignare contigit.

1800 Febr. 13.

Dasselbe Datum Werke I, S. 476, Bemerkung zum art. 272. der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 307. Während die Notizen Nr. 100 bis Nr. 102 mit den Aufzeichnungen auf S. 7—15 der Scheda Ac (siehe oben S. 184—193) in Verbindung stehen, gehört zu dieser Notiz eine Eintragung auf S. 22 der Scheda, die Werke II, S. 311 abgedruckt ist.

KLEIN. SCHLESINGER.

[104.]

Series [*)]

$$a \cos A + a' \cos (A + \varphi) + a'' \cos (A + 2\varphi) + \text{etc.}$$

ad limitem convergit, si a, a', a'' etc. constituunt progressionem sine mutatione signi ad 0 continuo convergentem. Demonstratum.

Brunov[ici, 1800] Apr. 27.

Es ist hier der Satz ausgesprochen, daß die Reihen

$$a + a' \cos \varphi + a'' \cos 2\varphi + \cdots,$$
$$a' \sin \varphi + a'' \sin 2\varphi + \cdots$$

konvergieren, wenn die $a, a', a'', \ldots$ monoton**) der Null zustreben. Dieser Satz ist zuerst veröffentlicht und bewiesen von HJALMAR HOLMGREN, Journal de Mathématiques **16**, 1851, S. 186, mit einer überflüssigen Einschränkung schon von C. J. MALMSTEN, Nova acta Upsal. **12**, 1844, S. 255.

SCHLESINGER.

[*) Die Handschrift hat Seriem.]

**) Das liegt in dem continuo des Tagebuchtextes. Ohne diese Einschränkung ist der Satz bekanntlich nicht richtig.

[105.]

Theorian quantitatum transcendentium:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-\alpha xx)(1-\beta xx)}}$$

ad summam universalitatem perduximus.

Brunov[ici, 1800] Mai. 6.

Die Aufdeckung des Zusammenhangs zwischen dem agM. und dem vollständigen elliptischen Integral erster Gattung, sowie die in dem besondern Falle der lemniskatischen Funktionen gewonnenen Einsichten, führten GAUSS zu der Erkenntnis, daß die Größen

$$(*) \qquad \frac{c}{M(1,c)}, \ \frac{c}{M(1,s)} \qquad (s=\sqrt{1-c^2})$$

(siehe den art. [7.], oben S. 190, aus Scheda Ac, S. 13) für das elliptische Integral mit dem Modul s die analoge Rolle spielen, wie die Größe

$$\frac{1}{M(\sqrt{2},1)}=\frac{\varpi}{\pi}.$$

auf die sie sich für $s=\sqrt{\frac{1}{2}}$ reduzieren, für die Lemniskate. Daß GAUSS' Auffassung dieser Größen (der Periodizitätsmoduln) dem neuern Standpunkte sehr nahe gewesen sein muß, zeigt die folgende Aufzeichnung, die sich auf einem Zettel ohne Datum findet:

Der Radicalfehler, woran meine bisherigen Bestrebungen, den Geist der elliptischen Function zu verkörpern, gescheitert sind, scheint der zu sein, dass ich dem Integral

$$(**) \qquad \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin\varphi^2)}}$$

die Bedeutung als Ausdruck eines endlichen Theils der Kugelfläche habe unterlegen wollen, während es wahrscheinlich nur einen unendlich schmalen Kugelsector ausdrücken soll.

Offenbar bedeutet hier die »Kugelfläche« den Ort der komplexen Veränderlichen, der »endliche Theil«, dessen »Ausdruck« das Integral (**) sein sollte, den Fundamentalbereich oder das Periodenparallelogramm; wenn dann GAUSS von »einem unendlich schmalen Kugelsektor« spricht, so zeigt dies, daß er damals, als er diesen Zettel schrieb, es für wahrscheinlich hielt, daß man die reellen Größen (*) selbst, oder genauer (vergl. oben S. 194 Gln. [1])

$$\frac{2\pi}{M(1,\sqrt{1-e^2})}, \ \frac{2\pi}{M(1,e)}$$

als die Periodizitätsmoduln des Integrals (**), für e reell und kleiner als Eins, anzusehen habe. Am 6. Mai hatte er sich zur völligen Klarheit über diese Verhältnisse durchgerungen, und damit war der Weg frei für weitere Fortschritte. Vergl. den Abschnitt IV des Aufsatzes »Über GAUSS' Arbeiten zur Funktionentheorie«, Werke X 2.

KLEIN. SCHLESINGER.

[106.]

Incrementum ingens huius theoriae Brunov. Mai. 22 invenire contigit, per quod simul omnia praecedentia nec non theoria mediorum arithmetico-geometricorum pulcherrime nectuntur infinitiesque augentur.

[Brunovici, 1800 Mai. 22.]

Es handelt sich hier um die in der Scheda Ac, S. 26 ff. aufgezeichneten Entdeckungen, die oben im Abschnitt [V.] der *Theorie des agM.*, S. 194 ff. artt. [1.]—[8.] abgedruckt sind. »Omnia praecedentia« bedeutet die Theorie der lemniskatischen Funktionen. Der Zusammenhang mit dem agM. tritt besonders im art. [5.] hervor; er besteht darin, daß die im art. [3.] aufgestellten Formeln für die Transformation zweiter Ordnung der Funktionen

$$T\varphi,\ W\varphi,\ T\left(\frac{\varpi}{2}-\varphi\right),\ W\left(\frac{\varpi}{2}-\varphi\right)$$

(die im wesentlichen nichts anderes sind als die JACOBIschen Thetafunktionen), wenn man $\varphi = 0$ setzt, für die Reihen

$$W0,\ T\frac{\varpi}{2},\ W\frac{\varpi}{2}$$

die Beziehungen des agM. liefern. Der Zusammenhang zwischen dem agM. und den Reihen, deren Exponenten die Quadratzahlen sind, erscheint also hier gleichsam als die Projektion der Transformationsformeln des art. [3.] auf die Ebene $\varphi = 0$.

KLEIN. SCHLESINGER.

[107.]

Iisdem diebus circa (Mai. 16.) problema chronologicum de festo paschali eleganter resolvimus.

(Promulgatum in ZACHII Comm. liter. Aug. 1800, p. 121, 223.)

[1800 Mai. 16.]

Der erste, der das Osterfest aus der Jahreszahl mittels arithmetischer Regeln zu bestimmen versucht hat, scheint LAMBERT *) gewesen zu sein, und zwar gilt seine Regel für den julianischen Kalender. Nach CARLINI **) sind unter den Vorläufern von GAUSS noch ORIANI ***) und die Patres CANOVAI und DEL RICCO †) zu nennen, die arithmetische Formeln zur Lösung von Aufgaben der Kirchenrechnung aufgestellt haben. Was GAUSS im Jahre 1800 von diesen Arbeiten gekannt haben mag, hat sich nicht feststellen

---

*) JOH. HEINRICH LAMBERT, *Einige Anmerkungen über die Kirchenrechnung*, Astronom. Jahrbuch für das Jahr 1778, Berlin 1776, S. 210.

) *Formole analitiche pel calcolo della Pasqua* di LODOVICO CICCOLINI, Roma 1817, Biblioteca italiana **13, 1819, S. 346. Nach dem anschließenden Briefe ebenda S. 350, *Al signor Francesco Carlini astronomo di Brera* ist CARLINI als der Verfasser der Besprechung anzusehen.

***) BARNABA ORIANI, *De usu fractionum continuarum ad inveniendos cyclos calendarii novi et veteris,* Effemeridi di Milano 1786.

†) STANISLAO CANOVAI e GAËTANO DEL RICCO, *Elementi di fisica matematica,* Firenze 1788.

lassen. Seine allgemeine Osterformel, die sowohl für den julianischen als auch für den gregorianischen Kalender gilt, veröffentlichte er unter dem Titel *Berechnung des Osterfestes* in v. ZACHS Monatlicher Correspondenz der Erd- und Himmelskunde, August 1800, S. 121, Verbesserungen S. 223, Werke VI, S. 73; vergl. *Noch etwas über die Bestimmung des Osterfestes,* Braunschweigisches Magazin 12. September 1807, Werke VI, S. 82, ferner *Eine leichte Methode, den Ostersonntag zu finden,* Astronom. Jahrbuch für das Jahr 1814, Berlin 1811, S. 273, und die durch P. TITTEL veranlaßte *Berichtigung zu dem Aufsatze: Berechnung des Osterfestes u.s.w.,* Zeitschrift für Astronomie, herausgeg. von v. LINDENAU und BOHNENBERGER **1**, 1816, S. 158 *). Daß die GAUSSsche Osterregel in ihrer ursprünglichen Form vom Jahre 4200 an ihre Gültigkeit verliert, hat zuerst FRANÇAIS **) öffentlich festgestellt und gleichzeitig die folgende Abänderung angegeben, durch die die GAUSSsche Vorschrift unbeschränkte Geltung erlangt: Bezeichnet man den Quotienten, der sich bei der Division der ganzen Zahl a durch die ganze Zahl b ergibt, durch $Q\left(\frac{a}{b}\right)$, bedeutet A die Jahreszahl und setzt man $k = Q\left(\frac{A}{100}\right)$, so hat man die Zahl p, die nach GAUSS ursprünglicher Festsetzung (Werke VI, S. 78) gleich $Q\left(\frac{k}{3}\right)$ zu nehmen ist, nach FRANÇAIS durch die Formel

$$p = Q\left(\frac{k - Q\left(\frac{k-17}{25}\right)}{3}\right)$$

zu bestimmen, was mit der von GAUSS in der Zeitschrift für Astronomie 1816 angegebenen Festsetzung ***)

$$p = Q\left(\frac{8k+13}{25}\right)$$

übereinstimmt, aber für die Rechnung etwas bequemer ist.

LOEWY.

[108.]

Numeratorem et denominatorem sinus lemniscatici (universalissime accepti) ad quantitates integrales reducere contigit; simul omnium functionum lemniscaticarum, quae excogitari possunt, evolutiones in series infinitas ex principiis genuinis haustae; inventum pulcherrimum sane nullique praecedentium inferius.

Praeterea iisdem diebus principia deteximus, secundum quae series arithmetico-geometricae interpolari debent, ita ut terminos in progressione data ad indicem quemcunque rationalem pertinentes per aequationes algebraicas exhibere iam in potestate sit.

[1800] Mai. ult. Iun. 2. 3.

Der *sinus lemniscaticus universalissime acceptus* ist die in der Scheda Ac, S. 26, siehe oben S. 194, nach der Analogie des sinus lemniscaticus aufgebaute Funktion $S\varphi$. Die Zurückführung des Zählers und

*) Die beiden letztgenannten Aufsätze sind im VI. Bande der Werke nicht enthalten; sie werden mit noch einigen zur Chronologie gehörigen Nachlaßstücken im Bande XI 1 abgedruckt.

) J. F. FRANÇAIS, *Solution directe des principaux problèmes du calendrier,* Annales de Mathématiques pures et appliquées **4, 1813, S. 273.

***) Siehe auch die Werke VI, S. 79, Zeile 5 v. u. abgedruckte handschriftliche Bemerkung.

des Nenners dieser Funktion, d. h. der Funktionen $T\varphi$ und $W\varphi$, auf *quantitates integrales* liefert den unmittelbaren Nachweis dafür, daß ihr Quotient $x = S\varphi$ der Differentialgleichung

$$\left(\frac{dS\varphi}{d\varphi}\right)^2 = (1+\mu^2 x^2)(1-x^2)$$

Genüge leistet. Dieser Nachweis ist in der Scheda Ac nicht aufgezeichnet und hat sich auch in keinem andern aus dieser Zeit herrührenden Teile des Nachlasses gefunden. Er ist uns jedoch in zwei späteren Fassungen erhalten, die sich beide in dem Handbuch 16, Bb (begonnen November 1801) befinden. Die ältere, die wahrscheinlich aus dem Jahre 1825 stammt, steht S. 111, 112 des Handbuchs und ist mit Änderungen gegen die Handschrift Werke III, S. 401, 402, unverändert oben S. 308—310 abgedruckt; die spätere, die nach GAUSS' eigener Angabe im August 1827 verfaßt ist, steht S. 139 des Handbuchs und ist Werke III, S. 473, art. [5.] abgedruckt. Daß wir aber diesen Nachweis für die Zeit unserer Tagebuchnotiz in Anspruch nehmen dürfen, folgt daraus, daß er wesentlich auf den Formeln für die Transformation zweiter Ordnung der Funktionen

$$T\varphi,\ W\varphi,\ T\left(\frac{\varpi}{2}-\varphi\right),\ W\left(\frac{\varpi}{2}-\varphi\right)$$

beruht, die auf S. 31 der Scheda Ac aufgezeichnet sind (siehe oben S. 195, 196, art. [3.]), so daß dieser Umstand erst den Grund dafür erkennen läßt, weshalb GAUSS diese Transformationsformeln in der Scheda Ac entwickelt. Ferner wird die für die Ausführung jenes Nachweises erforderliche Formel, S. 111 des Handbuchs 16, Bb,

$$ab' - ba' = \tfrac{1}{2}\, ab\,(a^4 - b^4),$$

(siehe oben S. 310) von der GAUSS a. a. O. sagt, daß der Beweis davon tiefer liegt, in der Scheda Af, S. 13 (abgedruckt oben S. 212, art. [5.]) als besonderes *Theorema* abgeleitet; diese Scheda Af ist aber ganz im Jahre 1801 geschrieben worden. —

Die im zweiten Satze des ersten Absatzes unseres Tagebuchtextes bezeichnete Entwicklung »aller nur denkbaren lemniskatischen Funktionen in unendliche Reihen aus genuinen Prinzipien abgeleitet« bezieht sich auf die S. 41 und 43 der Scheda Ac befindlichen Rechnungen (abgedruckt oben S. 202, art. [10.] und S. 204, art. [12.]), die auf die Ableitung der berühmten Identität zwischen den Reihen- und den Produktentwicklungen der Thetafunktionen:

$$\begin{aligned}(1+\alpha x)(1+\alpha x^3)(1+\alpha x^5)\ldots\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)\left(1+\frac{x^3}{\alpha}\right)\left(1+\frac{x^5}{\alpha}\right)\\ = P\left(1+x\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+x^4\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)+x^9\left(\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}\right)+\cdots\right),\end{aligned}$$

wo P von α unabhängig ist, hinzielen. Vermöge dieser Identität ist GAUSS nämlich imstande, für eine beliebige Thetafunktion die durch Kenntnis ihrer Nullstellen gegebene Produktentwicklung in eine Reihenentwicklung umzusetzen.

Der zweite Absatz der Notiz Nr. 108 betrifft die Gleichung für die Teilung der Perioden. Eine darauf bezügliche Aufzeichnung aus dieser Zeit ist uns nicht erhalten.

KLEIN. SCHLESINGER.

[109.]

Inter duos numeros datos semper dantur infinite multi termini medii tum arithmetico geometrici tum harmonico geometrici, quorum nexum mutuum ex asse perspiciendi felicitas nobis est facta.

[1800] Iunio 3. Brunov[ici]

Eine mit dieser Notiz gleichzeitige Aufzeichnung, die sich auf die unendlich vielen Werte des agM. bezieht, ist uns nicht erhalten. Dagegen steht der »nexus mutuus« auf einem Zettel, der oben S. 218 ff., art. [2.]—[6.], abgedruckt ist, und der schon durch das Wasserzeichen FHF 1810 auf eine wesentlich spätere Zeit verwiesen wird; er dürfte (vergl. die Bemerkungen oben S. 282) etwa 1825 geschrieben sein. Die hier in Betracht kommende Stelle ist namentlich die Formel

$$(*)\qquad \frac{1}{(\mu)} = \frac{1}{\mu} + \frac{4ik}{\lambda},$$

wo

$$\mu = M(m, n), \quad \lambda = M(m, \sqrt{m^2 - n^2})$$

ist und (μ) einen der Werte bedeutet, die man für das agM. zwischen m und n erhält, wenn man »für ein n', n'', n''' etc. einen negativen Wert wählt«. Die Formel $(*)$ setzt überdies voraus, daß wenn der reale Teil von $\frac{\mu}{\lambda}$ wesentlich positiv ist, das gleiche auch für den realen Teil von $\frac{(\mu)}{\lambda}$ gilt (vergl. oben S. 281). Der Weg, auf dem GAUSS zu diesem Ergebnis vorgedrungen ist, kann, da Aufzeichnungen aus der Zeit der Entdeckung fehlen, nicht mit voller Sicherheit angegeben werden. Die Aufzeichnung von 1825 weist darauf hin, daß GAUSS die Formel $(*)$ wohl aus der Darstellung der $m, n, \sqrt{m^2 - n^2}$ mit Hilfe der Thetanullreihen p, q, r gefunden hat (siehe besonders den art. [6.] oben S. 222, 223, wo der allgemeinste Wert von M aufgestellt wird, für den $\frac{q^2}{p^2} = \frac{n}{m}$ ungeändert bleibt). Die Wendungen »ex asse perspiciendi« und das sonst nur bei zahlentheoretischen Ergebnissen vorkommende »felicitas nobis est facta« (siehe die Nummern 30, 73, 114, 141 des *Tagebuchs*) geben der Annahme Raum, daß GAUSS auch sogleich die Beziehungen zur Theorie der binären quadratischen Formen durchschaut haben wird.

Das harmonische Mittel zwischen zwei Zahlen m, n ist durch die Gleichung

$$m_1 = \frac{2mn}{m+n}$$

erklärt. Der Algorithmus des harmonisch-geometrischen Mittels ist demnach:

$$\frac{1}{m_{\varkappa+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_\varkappa} + \frac{1}{n_\varkappa}\right), \quad \frac{1}{n_{\varkappa+1}} = \sqrt{\frac{1}{m_\varkappa} \cdot \frac{1}{n_\varkappa}}$$
$$(\varkappa = 0, 1, 2, \ldots; \ m_0 = m, \ n_0 = n),$$

so daß sich

$$\lim_{\varkappa \to \infty} m_\varkappa = \lim_{\varkappa \to \infty} n_\varkappa = \frac{mn}{M(a, b)}$$

ergibt, wodurch das harmonisch-geometrische Mittel auf das agM. zurückgeführt ist*). In der Scheda Ac findet sich auf S. 20 die folgende Notiz:

*) Vergl. TH. LOHNSTEIN, Zeitschrift für Math. und Physik **33** (1888), S. 316.

Terminus constans expressionis

$$\frac{A\,d\varphi}{\sqrt{(f+2g\cos\varphi+h\cos\varphi^2)}}$$

est Medium Geometrico harmonicum inter

$$\frac{A}{\sqrt{\frac{\sqrt{((f+h)^2-4gg)}+f-h}{2}}} \text{ et } \frac{A}{\sqrt[4]{((f+h)^2-4gg)}}.$$

An einer andern, oben S. 14—16 abgedruckten Stelle der Scheda Ac, hat GAUSS in Verbindung mit gewissen mittleren Werten der Zahlentheorie ein arithmetisch-harmonisches Mittel betrachtet (siehe besonders S. 16, art. [3.]).

KLEIN. SCHLESINGER.

[110.]

Theoriam nostram iam ad transcendentes ellipticas immediate applicavimus.

1800 Iunio 5.

Transcendentes ellipticae sind (vergl. den oben bei der Nr. 105 wiedergegebenen Zettel) Integrale erster Gattung. Man wird also diese Notiz auf den Algorithmus beziehen, den GAUSS z. B. auf den oben S. 227, 228, artt. [10.] und [12.] abgedruckten Zetteln und im art. 18. der *Determinatio attractionis*, Werke III, S. 354 entwickelt hat, und der nach dem geeignet normierten Integral erster Gattung mit veränderlicher oberer Grenze als Grenzwert hinstrebt. Vergl. auch den »bilinearen Algorithmus« der Scheda An, oben S. 213.

KLEIN. SCHLESINGER.

[111.]

Rectificatio Ellipseos tribus modis diversis absoluta.

[1800] Iun. 10.

Zwei dieser Methoden sind auf dem oben S. 227 ff. abgedruckten Zettel und zwar in den artt. [12.] und [13.] wiedergegeben. Vergl. auch die Anzeige der Abhandlung *Determinatio attractionis*, Werke III, S. 360 und den art. 17. dieser Abhandlung selbst, ebenda S. 354.

KLEIN. SCHLESINGER.

[112.]

Calculum Numerico-Exponentialem omnino novum invenimus.

[1800] Iun. 12.

Es handelt sich vermutlich um die numerischen Berechnungen von Potenzen der Zahl e, die in einem besondern Päckchen gesammelt im Nachlaß vorhanden (Fh, Nr. 2, Kapsel 50) und Werke III, S. 426—431 unter der Überschrift *Sammlung von Rechnungen, vornehmlich solchen, bei denen von meinen Methoden, die*

Factoren grosser Zahlen zu finden, und von den Wolframschen Logarithmentafeln Gebrauch gemacht ist abgedruckt sind. Es werden daselbst die gesuchten Exponentialgrößen durch Produkte ganzer Zahlen approximiert, und da man die Logarithmen nach WOLFRAM sehr genau kennt, so bleibt nur noch e^δ zu berechnen, wo δ eine sehr kleine, sehr genau bekannte Zahl ist.

Die WOLFRAMschen Tafeln *), auf die GAUSS in der Überschrift ausdrücklich hinweist, sind zum ersten Male in der SCHULZEschen *Sammlung logarithmischer u.s.w. Tafeln* veröffentlicht worden; einen Abdruck dieser Tafeln hat GAUSS im Jahre 1791, als er zum ersten Male in Braunschweig bei Hofe vorgestellt wurde, von dem damaligen braunschweigischen Staatsminister Geheimen Rat FERONCE V. ROTHENKREUZ zum Geschenk erhalten **). Dieser Abdruck mit vielen handschriftlichen Eintragungen von GAUSS (vergl. oben S. 11, in der Überschrift) befindet sich im GAUSSarchiv.

KLEIN. SCHLESINGER.

[113.]

Problema e calculo probabilitatis circa fractiones continuas olim frustra tentatum solvimus.

[1800] Oct. 25.

Das Problem, von dem hier die Rede ist, erwähnt GAUSS in dem oben S. 371 abgedruckten Briefe an LAPLACE vom 30. Januar 1812, in dem er von einer Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung schreibt, mit der er sich vor 12 Jahren beschäftigt habe. Es handelt sich danach um die folgende Frage: Es sei M eine unbekannte, zwischen 0 und 1 gelegene Größe, für die alle Werte in gleichem Maße wahrscheinlich sind; man verwandle M in einen Kettenbruch

$$M = \cfrac{1}{a' + \cfrac{1}{a'' + \text{etc.}}}$$

mit positiven ganzzahligen Nennern $a', a'', \ldots$ und frage nach der Wahrscheinlichkeit $P(n, x)$ dafür, daß der Wert des Kettenbruchs

$$\cfrac{1}{a^{(n+1)} + \cfrac{1}{a^{(n+2)} + \text{etc.}}}$$

zwischen den Grenzen 0 und x liege, wo auch x einen positiven echten Bruch bedeutet. — Hieraus geht hervor, daß eine in dem als Scheda Ab bezeichneten Hefte des Nachlasses befindliche Aufzeichnung vom 5. Februar 1799 ***) die Untersuchungen wiedergibt, auf die GAUSS in der vorliegenden Tagebuchnotiz mit den Worten hinweist: *olim frustra tentatum.* Wir lassen zunächst diese ältere Aufzeichnung hier folgen.

---

*) *Natürliche oder hyperbolische Logarithmen bis auf 48 Decimalstellen, von Herrn Wolfram berechnet.*

**) Vergl. L. HÄNSELMANN, *K. F. Gauss,* Leipzig 1878, S. 25, 26.

***) Diese Aufzeichnung hat SCHLESINGER in der Scheda Ab bemerkt und für den nachstehenden Abdruck bearbeitet.

Disquisitiones ad Calculum probabilitatis pertinentes. Febr. 5.

[Aus Scheda Ab, Exercitationes atque Schedae analyticae, 1798 Nov., S. 5 und 4.]

Quantitas quaedam incognita A, quae supponitur iacere inter 0 et 1, ita ut probabilitas eam iacere inter binos arctiores limites aeque-distantes eadem sit, transmutatur in fractionem continuam formae [*)]

$$\cfrac{1}{a' + \cfrac{1}{a'' + \cfrac{1}{a''' + \text{etc.}}}}$$

Quanta est probabilitas, ut aliquis denominatorum a', a'', a''' etc., cuius locus datur, numero integro dato sit aequalis?

Brevitatis gratia designamus per $\varphi' x$ probabilitatem fractionem primariam esse inter 0 et x; per $\varphi'' x$ prob[abilitatem] fractionem secundam

$$\cfrac{1}{a'' + \cfrac{1}{a''' + \text{etc.}}}$$

iacere inter 0 et x; similiterque $\varphi''' x$ etc. Tum erit

[1] $$\varphi' x = x,$$

[2] $$\varphi^{n+1} x = \varphi^n 1 - \varphi^n \frac{1}{1+x} + \varphi^n \frac{1}{2} - \varphi^n \frac{1}{2+x} + \text{etc.}$$

Quare erit

[3] $$\varphi'' x = 1\left[-\frac{1}{1+x}\right] + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2+x}\right] + \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3+x}\right] + \cdots [**)].$$

[4] $$\varphi^{n+1}\frac{1}{2} = 1 - \varphi^n \frac{2}{3} + \cdots,$$

$$\left[\psi x = \varphi^n \frac{1}{x},\quad \psi' x = \varphi^{n+1}\frac{1}{x},\right]$$

$$\psi' \frac{1}{x} = \psi 1 - \psi(1+x) + \psi 2 - \psi(2+x) + \cdots\cdots$$

$$\varphi''\frac{1}{2} = \frac{2}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{4} - \frac{2}{5} + \cdots$$

$$\varphi''\frac{2}{3} = \frac{3}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{6} - \frac{3}{8} + \cdots$$

$$\varphi''\frac{2}{5} = \frac{5}{5} - \frac{5}{7} + \frac{5}{10} - \frac{5}{12} + \cdots$$

[*) In der Handschrift sind die im folgenden auftretenden Nenner statt mit $a', a'', a''', \ldots$ mit [1], [2], [3], ... bezeichnet.]

[**) In der Handschrift lautet diese Stelle: »Quare $\varphi'' x$ erit $= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{x}$«, was aber nur für positive ganzzahlige Werte von x gilt, vergl. *Disquisitiones circa seriem,* 1812, art. 31., Gl. [67], Werke III, S. 154.]

x	$\varphi'' x$	$\varphi''' x$
0	0	
1	1	
$\frac{1}{2} = 0,5$	$2 - 2\,l2 \qquad = 0,6137$	0,5748
$\frac{1}{3} = 0,333\ldots$	$3 - \frac{3}{2}\,l3 - \frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0,4451818$	
$\frac{2}{3} = 0,666\ldots$	$\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\,l3 + \frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0,7590$	

[S. 4]

Tam complicatae evadunt, ut nulla spes superesse videatur.

Dazu ist folgendes zu bemerken. Wenn die erste Stufe der Kettenbruchentwicklung des positiven echten Bruches M

$$M = \frac{1}{a' + \mu}$$

ist, wo a' eine positive ganze Zahl und μ wieder einen echten Bruch bedeutet, so können die positiven echten Brüche M nach den Werten von a' in Klassen eingeteilt werden und die Werte einer Klasse werden in abnehmender Folge durchlaufen, wenn μ von 0 einschließlich bis 1 ausschließlich wächst; es sind die Zahlen des Intervalls von $\frac{1}{a'}$ bis $\frac{1}{a'+1}$, dessen Länge $\frac{1}{a'} - \frac{1}{a'+1}$ ist.

Nach der Fragestellung von GAUSS werden jetzt die Zahlen herausgehoben, bei denen μ zwischen 0 und x liegt, wo $0 < x < 1$. In der Klasse a' sind dies die Zahlen zwischen $\frac{1}{a'}$ und $\frac{1}{a'+x}$. Sind diese gleich wahrscheinlich, so liefert also das Intervall den Beitrag $\frac{1}{a'} - \frac{1}{a'+x}$, und da das Gesamtintervall der Werte M die Länge 1 hat, so ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit in Übereinstimmung mit der Gleichung [3] auf voriger Seite

$$P(1, x) = \varphi''(x) = \sum_{a'=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{a'} - \frac{1}{a'+x} \right\} = \Psi(x) - \Psi(0), \tag{5}$$

wenn (vergl. die *Disquis. circa seriem,* 1812, Werke III, S. 153)

$$\Psi(x) = \frac{d \log \Pi(x)}{dx}$$

die logarithmische Ableitung der GAUSSschen Π-Funktion bedeutet. Damit ist die Angabe von GAUSS in dem Briefe an LAPLACE (siehe oben S. 372), daß $P(1, x)$ von der inexplikablen Funktion EULERS

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x}$$

abhänge, bestätigt.

Beim nächsten Schritt wird

$$M = \cfrac{1}{a' + \cfrac{1}{a'' + \nu}}$$

gesetzt, wo a', a'' ganze, positive Zahlen sind und ν einen echten Bruch bedeutet. Man findet

$$P(2,x) = \varphi'''(x) = \sum_{a'=1}^{\infty}\sum_{a''=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{a'+\cfrac{1}{a''+x}} - \frac{1}{a'+\cfrac{1}{a''}}\right\},$$

indem die Zahlen der Klasse a' in Unterklassen nach dem Werte der Zahlen a'' eingeteilt werden, die jetzt, wenn ν von 0 bis 1 wächst, in zunehmender Folge durchlaufen werden.

Allgemein ist*)

$$P(n,x) = \varphi^{(n+1)}(x) = \sum_{a',\ldots,a^{(n)}}\left|\frac{1}{a'+\cfrac{1}{a''+\ddots\cfrac{1}{a^{(n)}}}} - \frac{1}{a'+\cfrac{1}{a''+\ddots\cfrac{1}{a^{(n)}+x}}}\right|.$$

Bezeichnet man den n-ten Näherungsbruch des Kettenbruchs für M mit $\frac{A_n}{B_n}$, wo

$$|A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n| = 1$$

ist, so erhält man

$$(6)\qquad P(n,x) = \sum_{a',\ldots,a^{(n)}}\left|\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_n + x A_{n-1}}{B_n + x B_{n-1}}\right| = \sum_{a',\ldots,a^{(n)}}\frac{x}{B_n(B_n + x B_{n-1})}.$$

Da nun

$$B_{n+1} = a^{(n+1)} B_n + B_{n-1}$$

ist, so ergibt sich

$$P(n+1,x) = \sum_{a',\ldots,a^{(n+1)}}\frac{x}{(a^{(n+1)}B_n + B_{n-1})(a^{(n+1)}B_n + B_{n-1} + x B_n)}$$

$$= \sum_{a',\ldots,a^{(n)}}\sum_{a^{(n+1)}=1}^{\infty}\left\{\frac{\cfrac{1}{a^{(n+1)}}}{B_n\left(B_n + \cfrac{1}{a^{(n+1)}}B_{n-1}\right)} - \frac{\cfrac{1}{a^{(n+1)}+x}}{B_n\left(B_n + \cfrac{1}{a^{(n+1)}+x}B_{n-1}\right)}\right\},$$

also indem man die n-fache Summe nach (6) auswertet

$$(7)\qquad P(n+1,x) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{P\left(n,\frac{1}{\nu}\right) - P\left(n,\frac{1}{\nu+x}\right)\right\},$$

und dies ist nichts anderes, als die von Gauss aufgestellte Gleichung [2].

Nach der Tagebuchaufzeichnung Nr. 113 ist es Gauss im Oktober 1800 gelungen »das Problem zu lösen«. Gemeint ist damit der von ihm in dem Briefe an Laplace (oben S. 372) angegebene asymptotische Wert

$$(8)\qquad \lim_{n\to\infty} P(n,x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2}.$$

Wie Gauss diesen Wert gefunden haben mag, hat sich nicht feststellen lassen. Unter der Voraussetzung, daß $\lim_{n\to\infty} P(n,x) = f(x)$ existiert, ergibt sich aus (7)

$$(9)\qquad f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left\{f\left(\frac{1}{\nu}\right) - f\left(\frac{1}{\nu+x}\right)\right\}$$

und diese Funktionalgleichung wird offenbar durch den Wert

$$(10)\qquad f(x) = \text{const.} \log(1+x)$$

---

*) Für diesen Absatz benutzen wir eine briefliche Mitteilung von O. Perron.

befriedigt. Da für $P(n, x)$ als Wahrscheinlichkeit sofort $P(n, 1) = 1$ folgt, ist auch $f(1) = 1$, mithin ergibt sich aus (10) in Übereinstimmung mit (8)

$$f(x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2}.$$

STÄCKEL.

[114.]

Nov. 30. Felix fuit dies, quo multitudinem classium formar[um] binar[iarum] per triplicem methodum assignare largitum est nobis; puta:

1. per prod[uctum] infin[itum],
2. per aggregatum infinitum,
3. per aggregatum finitum cotangentium seu logarithm[orum] sinuum.

Brun[ovici, 1800 Nov. 30.]

Siehe Werke II, S. 285. Vergl. auch die folgende Nummer.

BACHMANN.

[115.]

Dec. 3. Methodum quartam ex omnibus simplicissimam deteximus pro det[erminantibus] negativis ex sola multit[udine] numeror[um] ρ, ρ' etc. petitam, si $Ax+\rho$, $Ax+\rho'$, etc. sunt formae lineares divisor[um] for[mae] $\square + D$.

Ibid. [Brunovici, 1800 Dec. 3.]

Siehe Werke II, S. 286. Vergl. zu den Nummern 114 und 115 auch die oben S. 91 abgedruckten Aufzeichnungen und den Schluß des oben S. 235 abgedruckten Briefes von PFAFF vom 8. Dezember 1800, ferner Werke I, S. 476 die Bemerkung und ebenda S. 466 das Additamentum zu dem art. 306. X der *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 375, sowie endlich den Art. 27 des Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten« Werke X 2, S. 66.

KLEIN. BACHMANN.

[116.]

Impossibile esse, ut sectio circuli ad aequationes inferiores, quam theoria nostra suggerit, reducatur, demonstratum.

Brunov[ici, 1801] Apr. 6.

Dieselbe Aussage findet sich auch in den *Disquisitiones arithmeticae* (1801) und zwar im art. 365. (Werke I, S. 462) für den Fall, wo die Anzahl n der Teile, in die der Kreis zu teilen ist, eine Primzahl, im art. 366. (ebenda, S. 463) für die Fälle, wo diese Anzahl eine Primzahlpotenz und eine beliebige zusammengesetzte Zahl ist. Wahrscheinlich sind diese Bemerkungen ebenso wie die entsprechenden, ihnen im art. 336. (ebenda, S. 413) voraufgehenden erst während der Drucklegung eingefügt worden*). Ein Beweis für GAUSS' Behauptung ist aber weder in seinen Veröffentlichungen noch in seinem Nachlasse enthalten, auch ist ein Beweis, der nur solche Hilfsmittel benutzt, wie GAUSS sie im Jahre 1801 sonst angewandt hat, bisher nicht veröffentlicht worden. Es soll darum hier ein elementarer Beweis ohne GALOIssche Theorie gegeben werden; er gründet sich auf den folgenden Satz:

Gegeben sei eine Gleichung $J(x) = 0$ vom n-ten Grade, deren Koeffizienten dem Rationalitätsbereiche P angehören und die in P irreduzibel ist. Eine Wurzel ξ_1 dieser Gleichung sei rational mit Koeffizienten aus P dargestellt durch die Größen $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$, wo ρ_1 einer Gleichung $X_1(x) = 0$ genügt, deren Koeffizienten P angehören, und die in P irreduzibel ist, ρ_2 einer Gleichung $X_2(x) = 0$, deren Koeffizienten dem durch Adjunktion von ρ_1 erweiterten Rationalitätsbereiche (P, ρ_1) angehören und die in diesem Bereiche irreduzibel ist u.s.w., endlich ρ_k einer Gleichung $X_k(x) = 0$, deren Koeffizienten dem Rationalitätsbereiche $(P, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{k-1})$ angehören und die in diesem Bereiche irreduzibel ist. Dann ist das Produkt der Grade aller Gleichungen $X_1(x) = 0$, $X_2(x) = 0, \ldots, X_k(x) = 0$ durch den Grad n von $J(x) = 0$ teilbar.

Adjungiert man nämlich dem Bereiche P der Reihe nach $\rho_1, \rho_2, \ldots$, so sei ρ_α die erste dieser Größen, durch deren Adjunktion $J(x) = 0$ reduzibel wird; die Wurzel ξ_1 genügt dann in dem Rationalitätsbereiche $(P, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\alpha)$ einer irreduziblen Gleichung, deren Grad n' kleiner als n ist. Es sei h_α der Grad der in $(P, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{\alpha-1})$ irreduziblen Gleichung $X_\alpha(x) = 0$, der ρ_α genügt; dann ist nach dem Satze von KRONECKER-KNESER**) $\frac{n}{n'} = \frac{h_\alpha}{h'_\alpha}$, wenn h'_α der Grad derjenigen irreduziblen Gleichung ist, die nach Adjunktion von ξ_1 zum Rationalitätsbereiche $(P, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{\alpha-1})$ durch ρ_α befriedigt wird. Bei weiterer Adjunktion der auf ρ_α folgenden Größen bleibe die Gleichung n'-ten Grades für ξ_1 irreduzibel bis zur Adjunktion von ρ_β. In dem Bereiche $(P, \rho_1, \ldots, \rho_\alpha, \ldots, \rho_\beta)$ genüge ξ_1 einer irreduziblen Gleichung vom Grade $n'' < n'$. Bezeichnet dann h_β den Grad der im Bereiche $(P, \rho_1, \ldots, \rho_\alpha, \ldots, \rho_{\beta-1})$ irreduziblen Gleichung $X_\beta(x) = 0$, der ρ_β genügt, und h'_β den Grad der irreduziblen Gleichung, die sich für ρ_β im Bereiche $(P, \rho_1, \ldots, \rho_\alpha, \ldots, \rho_{\beta-1}, \xi_1)$ ergibt, so ist $\frac{n'}{n''} = \frac{h_\beta}{h'_\beta}$. Derart fortfahrend erhält man die weiteren Beziehungen

$$\frac{n''}{n'''} = \frac{h_\gamma}{h'_\gamma}, \quad \frac{n'''}{n^{(4)}} = \frac{h_\delta}{h'_\delta}, \quad \ldots.$$

Da ξ_1 schließlich rational in $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ wird, also einer Gleichung ersten Grades genügt, so ergibt sich die Beziehung $\frac{n^{(t-1)}}{1} = \frac{h_\tau}{h'_\tau}$, wo $t \leqq k$ und h_τ der Grad jener irreduziblen Gleichung $X_\tau(x) = 0$ ist, deren Wurzel ρ_τ bewirkt, daß ξ_1 rational bekannt wird, während h'_τ den Grad der irreduziblen Gleichung bedeutet, der ρ_τ in dem Rationalitätsbereiche $(P, \rho_1, \ldots, \rho_\alpha, \ldots, \rho_{\tau-1}, \xi_1)$ genügt. Die Multiplikation der gefundenen

---

*) Vergl. auch den oben S. 121 abgedruckten Brief von GAUSS an GERLING vom 6. Januar 1819, wo es (oben S. 125) heißt: »Alles hängt dabei von den Factoren der Zahl $\frac{1}{2}(p-1)$ ab; ist diese Zahl eine Potenz von 2, z. B. $p = 3, 5, 17, 257, 65537$, so kommen bloß quadratische Gleichungen vor; hingegen z. B. für $p = 31$, wo $\frac{1}{2}(p-1) = 3.5$, ist eine cubische und eine Gleichung vom 5. Grade unausweichlich«.

) Dieser Satz lautet wie folgt: Sind $J_1(x) = 0$ und $J_2(x) = 0$ zwei im Rationalitätsbereiche P irreduzible Gleichungen der Grade n_1 und n_2 mit den Wurzeln η_1 und η_2 und sind die Grade der irreduziblen Gleichungen, denen η_1 nach Adjunktion von η_2 und η_2 nach Adjunktion von η_1 genügen, n'_1 und n'_2, so ist $\frac{n_1}{n'_1} = \frac{n_2}{n'_2}$. Siehe A. KNESER, Mathem. Annalen **30, 1887, S. 195, CRELLES Journal für Mathem. **106**, 1890, S. 51, O. HÖLDER, Mathem. Annalen **38**, 1891, S. 309, G. FROBENIUS, ebenda **70**, 1911, S. 457. Der Beweis, den KNESER im 106. Bande des CRELLEschen Journals für diesen Satz gibt, erfordert nur die einfachsten Hilfsmittel. Vgl. auch A. LOEWY, Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung 1917.

Beziehungen liefert

$$\frac{h_\alpha . h_\beta \ldots h_\tau}{n} = h'_\alpha . h'_\beta \ldots h'_\tau.$$

Da sich das Produkt $h_\alpha . h_\beta \ldots h_\tau$ als durch n teilbar erweist, trifft dies umsomehr für das Produkt der Grade aller Hilfsgleichungen $X_1 = 0$, $X_2 = 0, \ldots, X_k = 0$ zu, und damit ist unser Satz bewiesen.

Der bequemeren Ausdrucksweise wegen wollen wir unter einer Gleichungskette $X_1 = 0$, $X_2 = 0, \ldots, X_k = 0$ für $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ ein Gleichungssystem verstehen, bei dem ρ_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ stets Wurzel von $X_i = 0$ ist und $X_1 = 0$ Koeffizienten aus dem ursprünglichen Rationalitätsbereiche P, $X_2 = 0$ aus dem durch ρ_1 erweiterten, u.s.w. schließlich $X_k = 0$ aus dem Bereiche $(P, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{k-1})$ besitzt. Die Irreduzibilität der Gleichungen $X_i = 0$ in den Rationalitätsbereichen, denen ihre Koeffizienten angehören, wird hier nicht vorausgesetzt.

Wir ziehen nun aus unserem Satz die folgenden Schlüsse:

Corollar I. Die irreduzible Gleichung $J(x) = 0$ mit Koeffizienten aus P habe den Grad $n = p_1 . p_2 \ldots p_f$, wobei $p_1, p_2, \ldots, p_f$ lauter (auch eventuell gleiche) Primzahlen bedeuten. Es sei eine Gleichungswurzel ξ_1 irgendwie als rationale Funktion von Größen $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ mit Koeffizienten aus P mittels einer Gleichungskette $Y_1 = 0$, $Y_2 = 0, \ldots, Y_k = 0$ für $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ dargestellt, und man ersetze jede Hilfsgleichung $Y_i = 0$, die in dem Rationalitätsbereiche $(P, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{i-1})$, dem ihre Koeffizienten angehören, reduzibel ist, durch die irreduzible Gleichung $X_i = 0$, der ρ_i genügt, also durch eine Gleichung von niedrigerem Grade. Dann ist für das so gebildete Gleichungssystem, das wir mit $X_1 = 0$, $X_2 = 0, \ldots,$ $X_k = 0$ bezeichnen, nach unserem Satze erstens das Produkt der Grade aller Gleichungen $X_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ durch $p_1 . p_2 \ldots p_f$ teilbar, und zweitens enthält dieses System mindestens f Gleichungen der Grade $p_1, p_2, \ldots, p_f$ oder wenigstens eine Gleichung, deren Grad eine zusammengesetzte Zahl ist. Diese zusammengesetzte Zahl ist wenigstens durch eine und, wenn $k < f$ ist, sogar durch zwei der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_f$ teilbar.

Alles dies ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, daß das Produkt der Grade von $X_1 = 0$, $X_2 = 0, \ldots,$ $X_k = 0$ durch $p_1 . p_2 \ldots p_f$, den Grad von $J(x) = 0$, teilbar ist und $p_1, p_2, \ldots, p_f$ lauter Primzahlen sind.

Corollar II. Hat man eine Wurzel ξ_1 der im Rationalitätsbereiche P irreduziblen Gleichung $J(x) = 0$ vom n-ten Grade mittels einer Gleichungskette $X_1 = 0$, $X_2 = 0, \ldots, X_k = 0$ für die Größen $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ durch diese Größen rational mit Koeffizienten aus P dargestellt und ist das Produkt der Grade aller Gleichungen der Kette gleich n, so sind die Gleichungen $X_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ in den Bereichen, denen ihre Koeffizienten angehören, irreduzibel. Sind weiter hierbei noch die Grade aller Gleichungen der Kette Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k$, so kann man nicht unter die Grade der Gleichungen $X_1 = 0$, $X_2 = 0, \ldots, X_k = 0$ heruntersteigen und nicht mit einer Kette niedrigerer Gleichungen operieren.

Wäre nämlich, wenn das Produkt der Grade der Gleichungen der Kette gleich n ist, eine der Gleichungen $X_i = 0$ reduzibel, so könnte man sie durch einen ihrer irreduziblen Faktoren ersetzen, wodurch das Produkt der Grade der Hilfsgleichungen $< n$ würde; dies stünde aber mit unserem Satze im Widerspruch. Mithin erweisen sich die Gleichungen $X_i = 0$ ausnahmslos als irreduzibel. Sind ferner die Grade der Gleichungen $X_1 = 0$, $X_2 = 0, \ldots, X_k = 0$ Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ und ist $p_1 . p_2 \ldots p_k = n$, so besagt Corollar I, daß man nicht unter die Grade $p_1, p_2, \ldots, p_k$ der Gleichungskette $X_1 = 0$, $X_2 = 0, \ldots,$ $X_k = 0$ heruntersteigen kann.

Ist die Anzahl n der Teile, in die der Kreis geteilt werden soll, eine Primzahl und wird $n-1$ irgendwie zerlegt in $n - 1 = \alpha . \beta \ldots \zeta$, so führt Gauss im art. 352. der *Disquisitiones arithmeticae,* (Werke I, S. 431) die Auflösung der Kreisteilungsgleichung $X = 0$, von der er im art. 341. (Werke I, S. 417) zeigt, daß sie irreduzibel ist, zurück auf eine Gleichungskette $X_1 = 0$, $X_2 = 0, \ldots, X_k = 0$ von den Graden

$\alpha, \beta, \ldots, \zeta$. Diese Gleichungen sind nach Corollar II in den Bereichen, denen ihre Koeffizienten angehören, irreduzibel. Wählt man die Zerlegungszahlen $\alpha, \beta, \ldots, \zeta$ sämtlich als Primzahlen, so erfüllt die Gleichungskette von GAUSS sämtliche Bedingungen unseres Corollars II. Mithin ist die Behauptung der GAUSSschen Tagebuchnotiz für einen Primzahlgrad, d. h. also die Behauptung des art. 365. der *Disquisitiones arithmeticae* (Werke I, S. 462) bewiesen.

Im allgemeinen Fall, wo der Grad $N = a^\alpha . b^\beta \ldots$ ist und $a, b, \ldots$ lauter verschiedene Primzahlen bedeuten, gilt Folgendes: Die Kreisteilungsgleichung $X = 0$ vom Grade $\varphi(N) = a^{\alpha-1}(a-1)\, b^{\beta-1}(b-1)\ldots$ ist irreduzibel. Ihre Auflösung wird zurückgeführt auf die Hilfsgleichungen, die bei der Teilung des Kreises in $a, b, \ldots$ Teile auftreten und auf $\alpha - 1$ Gleichungen a-ten Grades, $\beta - 1$ Gleichungen b-ten Grades u.s.w. Man kann also die Auflösung der Gleichung $X = 0$ auf eine Gleichungskette zurückführen, die nur Gleichungen vom Primzahlgrade enthält, und für die das Produkt der Grade gleich dem Grade $\varphi(N)$ von $X = 0$ ist. Nach unserem Corollar II ist es unmöglich, die Grade der Gleichungen dieser Kette zu erniedrigen, und jede andere für die Lösung von $X = 0$ benutzbare Kette würde mindestens eine gleiche Anzahl von Gleichungen derselben Grade oder wenigstens eine Gleichung enthalten, deren Grad eine größere, zusammengesetzte Zahl ist.

GAUSS' in den *Disquisitiones arithmeticae* art. 366. (Werke I, S. 463) enthaltene eigene Aussage für den allgemeinen Fall (quando vero [numerus $\varphi(N)$] factores primos alios quam 2 puta p, p' etc. implicat, aequationes gradus p-ti, p'-ti etc. nullo modo evitari possunt) ist übrigens nicht so genau wie die obige und wie die von GAUSS für den Fall einer Primzahlpotenz (a. a. O. tunc enim [si circulus in a^α partes secandus est] praeter eas aequationes, quae ad sectionem in a partes requiruntur, necessario adhuc $\alpha - 1$ alias a-ti gradus solvere oportet; etiam has nullo modo nec evitare nec deprimere licet), wo nämlich nicht nur davon, daß die in $\varphi(N)$ enthaltenen Primzahlen als Gradzahlen nicht vermieden bezw. nicht unterschritten werden können, sondern auch von ihrer Vielfachheit die Rede ist. Z. B. für die Teilung des Kreises in $3^2 . 7$ Teile könnte man, da $\varphi(N) = 2^2 . 3^2$ ist, nach GAUSS a. a. O. nur die Unvermeidlichkeit von Gleichungen zweiten und dritten Grades aussagen, während nach dem oben Bewiesenen zwei Gleichungen zweiten und zwei Gleichungen dritten Grades unvermeidlich sind. Vielleicht hängt dies damit zusammen, daß GAUSS bei der Abfassung der *Disquisitiones arithmeticae* noch nicht im Besitz des Beweises für die Irreduzibilität der allgemeinen Kreisteilungsgleichung war, den er nach Nr. 136 des *Tagebuchs* erst am 12. Juni 1808 gefunden hat. Das, was GAUSS für den allgemeinen Fall in den *Disquisitiones arithmeticae* ausspricht (siehe oben), kann nämlich aus seinen Angaben für den Fall der Primzahlpotenz unmittelbar gefolgert werden. Denn, hat man die Kreisteilungsgleichung für den Fall $N = a^\alpha . b^\beta \ldots$ gelöst, so hat man sie auch für die in N enthaltenen einzelnen Primzahlpotenzen $a^\alpha, b^\beta, \ldots$ mitgelöst. Folglich sind nach GAUSS' Angaben über die Primzahlpotenzgrade die Primfaktoren von $(a-1)\, a^{\alpha-1}$ bezw. $(b-1)\, b^{\beta-1}$ u.s.w., d. h. alle Primfaktoren von $\varphi(N) = a^{\alpha-1}(a-1)\, b^{\beta-1}(b-1)\ldots$ als Gradzahlen unvermeidlich; inbezug auf die Vielfachheit versagt dieses Verfahren. Daß GAUSS für die Primzahlpotenz auch die Vielfachheit genau bezeichnet, deutet darauf hin, daß er zur Zeit der Veröffentlichung der *Disquisitiones arithmeticae* die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung für einen Primzahlpotenzgrad schon gekannt haben dürfte. In der Tat läßt sich diese durch eine leichte Abänderung des im art. 341. der *Disquisitiones arithmeticae* (Werke I, S. 417) enthaltenen Beweises für den Primzahlgrad erschließen, während für den allgemeinen Fall eines beliebigen Grades andere Hilfsmittel erforderlich sind.

In den artt. 365. und 366. der *Disquisitiones arithmeticae* (Werke I, S. 462, 463) hat GAUSS aus seiner allgemeinen Aussage über die Unvermeidlichkeit der durch seine Theorie gegebenen Hilfsgleichungen den Schluß gezogen, daß der Kreis mit Zirkel und Lineal nur dann in N gleiche Teile geteilt werden kann, wenn $\varphi(N) = 2^k$ ist, d. h. wenn N von ungeraden Primteilern bloß solche von der Form $2^m + 1$ und zwar nur in der ersten Potenz enthält. Dieses besondere Ergebnis hat zuerst L. WANTZEL *) zu beweisen versucht, indem er den folgenden Satz aufstellte: Soll sich eine Wurzel einer irreduziblen Gleichung durch Quadratwurzeln, d. h. durch eine Kette von Hilfsgleichungen zweiten Grades finden lassen, so muß der Gleichungsgrad notwendig eine Potenz von 2 sein. Die WANTZELsche Aussage folgt unmittelbar aus unserem oben bewiesenen Satze.

LOEWY.

[117.]

Iisdem diebus Pascha Iudaeorum per methodum novam determinare docuimus.

[1801] (Apr. 1.)

Über die Einrichtung des jüdischen Kalenders dürfte GAUSS sich aus CHRISTIAN WOLFS *Elementa matheseos universae* **) unterrichtet haben. Seine *Berechnung des jüdischen Osterfestes* ist in v. ZACHS Monatlicher Correspondenz der Erd- und Himmelskunde 5, Mai 1802, S. 435 veröffentlicht worden (Werke VI, S. 80); den ersten Beweis der GAUSSschen Regel gab CISA GRESY ***) auf Veranlassung des Freiherrn VON ZACH †); CH. Z. SLONIMSKY ††) hat die GAUSSsche Formel so ausgestaltet, daß sie auf alle Fragen des jüdischen Kalenders eines Jahres Auskunft erteilt; einen durchsichtigen Beweis gab M. HAMBURGER †††).

KLEIN. LOEWY.

[118.]

Methodus quinta theorema fundamentale demonstrandi se obtulit adiumento theorematis elegantissimi theoriae sectionis circuli, puta

*) L. WANTZEL, *Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas,* Journal de Mathém. 2, 1837, S. 366. Der bekannte elementare Beweis, wie er von J. PETERSEN, *Theorie der algebraischen Gleichungen,* Kopenhagen 1878, S. 156 und von F. KLEIN, *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie,* Leipzig 1895, S. 4 gegeben wird, ist eine Verschärfung des in seiner ursprünglichen Form unzureichenden Beweises von WANTZEL auf derselben Grundlage.

**) Tomus IV., qui geographiam cum hydrographia, chronologiam etc. complectitur, handelt im Cap. VII. der *Elementa chronologiae,* S. 182, de calendariis iudaico et muhamedano. In dem von GAUSS 1800 erworbenen Abdruck des WOLFschen Werkes findet sich eine handschriftliche Eintragung *Die Berechnung des Neumonds Tisri für jedes jüdische Jahr A,* die Werke XI 1 zum Abdruck gelangt.

***) CHEVALIER CISA GRESY, *Démonstration des formules de M. Gauss pour déterminer le jour de Pâque des juifs,* Correspondance astronom. 1, 1818, S. 556.

†) Siehe ebenda, S. 568.

††) CH. Z. SLONIMSKY, *Eine allgemeine Formel für die gesammte jüdische Kalenderberechnung,* CRELLES Journal für Mathematik 28, 1844, S. 179.

†††) M. HAMBURGER, *Ableitung der Gaussschen Formel zur Bestimmung des jüdischen Osterfestes,* ebenda 116, 1896, S. 90.

$$\sum_{\cos}^{\sin}\Big\}\frac{nn}{a}P = \begin{array}{c|c|c|c} +\sqrt{a} & 0 & 0 & +\sqrt{a} \\ +\sqrt{a} & +\sqrt{a} & 0 & 0 \end{array}$$

prout $a \equiv$ 0 1 2 3 (mod. 4)

substituendo pro n omnes numeros a 0 usque ad $(a-1)$.

Bruns[vigae, 1801] Mai. medio.

Vergl. hierzu die oben S. 23 abgedruckte Aufzeichnung *Theorema novissimum pulcherrimum.* Siehe auch die Notiz Nr. 123 vom 30. August 1805.

KLEIN.

[119.]

Methodus nova simplicissima expeditissima elementa orbitarum corporum coelestium investigandi.

Brunsv[igae, 1801] Sept. m[edio]

GAUSS hatte sich schon seit längerer Zeit mit dem Studium der theoretischen Astronomie und nach Ausweis der Scheda Ac (begonnen Nov. 1799), S. 23, auch mit der OLBERSschen Methode der Bestimmung parabolischer Bahnen *) beschäftigt, als der am 1. Januar 1801 von PIAZZI in Palermo entdeckte erste kleine Planet Ceres bei seinem bevorstehenden Wiedererscheinen gegen Ende des Sommers 1801 von den Astronomen vergeblich am Himmel gesucht wurde. Die Schwierigkeit der Bahnbestimmung lag hauptsächlich darin, daß die Beobachtungen von PIAZZI sich nur über den kurzen Zeitraum von 42 Tagen erstreckten, für welchen Fall die bis dahin üblichen Methoden nicht ausreichten. Die Aufgabe, durch genauere Bestimmung seiner Bahn die Wiederauffindung doch noch zu ermöglichen, übte auf GAUSS eine starke Anziehungskraft aus und er verwandte von nun ab einen großen Teil seiner Arbeitszeit zu Untersuchungen und Rechnungen zur Bahnbestimmung, aus denen schließlich als vollendetes Werk die *Theoria motus* (erschienen 1809) hervorging.

Auf welche besondere Methode die vorstehende Eintragung Bezug nimmt, ob auf die in der Monatlichen Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, Juni 1802, abgedruckte**) oder auf eine Vorgängerin dieser, läßt sich nicht entscheiden, da die ältesten im Nachlaß, namentlich in den Schedae Ag und Ah vorhandenen Aufzeichnungen und Rechnungen über diesen Gegenstand erst aus dem November 1801 stammen. Das gleiche gilt von der Tagebucheintragung Nr. 121.

In der Vorrede zur *Theoria motus* (Werke VII, 1906, S. 7) sagt GAUSS:

»satis mirum videtur, problema generale

> Determinare orbitam corporis coelestis, absque omni suppositione hypothetica, ex observationibus tempus haud magnum complectentibus neque adeo delectum, pro applicatione methodorum specialium, patientibus

---

*) W. OLBERS, *Abhandlung uber die leichteste und bequemste Methode, die Bahn eines Cometen zu berechnen,* Weimar 1797, Sein Leben und seine Werke I, Berlin 1894, S. 3.

**) *Vorschriften, um aus der geocentrischen Länge und Breite eines Himmelskörpers, dem Orte seines Knotens, der Neigung der Bahn, der Länge der Sonne und ihrem Abstande von der Erde abzuleiten: Des Himmelskörpers heliocentrische Länge in der Bahn, wahren Abstand von der Sonne und wahren Abstand von der Erde,* Werke VI, S. 87.

usque ad initium huius saeculi penitus propemodum neglectum esse, vel saltem a nemine serio ac digne tractatum, quum certe theoreticis propter difficultatem atque elegantiam sese commendare potuisset, etiamsi apud practicos de summa eius utilitate nondum constaret. Scilicet invaluerat apud omnes opinio, impossibilem esse talem determinationem completam ex observationibus breviori temporis intervallo inclusis, male sane fundata, quum nunc quidem certissimo iam evictum sit, orbitam corporis coelestis ex observationibus bonis paucos tantummodo dies complectentibus, absque ulla suppositione hypothetica, satis approximate iam determinari posse.

Incideram in quasdam ideas, quae ad solutionem problematis magni de quo dixi facere videbantur, mense Septembri a. 1801, tunc in labore plane diverso occupatus [*)]. . . . . eodem circiter tempore rumor de planeta novo Ian. 1. istius anni in specula Panormitana detecto per omnium ora volitabat, moxque ipsae observationes inde ab epocha illa usque ad 11. Febr. ab astronomo praestantissimo PIAZZI institutae ad notitiam publicam pervenerunt. . . . . Unquamne opportunius experiri potuissem, ecquid valeant ideolae meae ad usum practicum, quam si tunc istis ad determinationem orbitae Cereris uterer, qui planeta inter 41 illos dies geocentrice arcum trium tantummodo graduum descripserat, et post annum elapsum in coeli plaga longissime illinc remota indagari debebat? Prima haecce methodi applicatio facta est mense Oct. 1801, primaque nox serena, ubi planeta ad normam numerorum inde deductorum quaesitus est (Dec. 7, 1801 a clar. DE ZACH) transfugam observationibus reddidit«.

Siehe auch die *Anzeige* der *Theoria motus,* Werke VI, S. 56 und den Brief an OLBERS vom 25. Mai 1802, *Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke* II 1, Berlin 1900, S. 48.

Vergl. die Nummern 122, 125, 126, 127, 129.

BRENDEL.

[120.]

Theoriam motus Lunae aggressi sumus.

[1801] Aug.

Die um diese Zeit entstandene *Theorie der Bewegung des Mondes* ist im Nachlaß vorhanden und Werke VII, 1906, S. 611—639 abgedruckt. In einem Briefe an SCHUMACHER vom 23. Januar 1842 (*Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher* IV, Altona 1862, S. 51) schreibt GAUSS:

Eben im Sommer 1801 hatte ich mir vorgesetzt, ähnliche Arbeit über den ☽ [Mond] auszuführen, aber kaum hatte ich die theoretischen Vorarbeiten angefangen (denn diese sind es, auf welche in der Vorrede meiner *Th*[*eoria*] *M*[*otus*] *C*[*orporum*] *C*[*oelestium*] angespielt wird), als das Bekanntwerden von PIAZZIS ⚳ [Ceres] Beob[achtungen] mich in eine ganz andere Richtung zog.

Die in diesem Briefe erwähnte Stelle aus der Vorrede zur *Theoria Motus* ist oben bei der Nr. 119 abgedruckt. Augenscheinlich sind die Tagebucheintragungen Nr. 119 und Nr. 120 gleichzeitig gemacht.

BRENDEL.

[*) Vergl. die folgende Nr. 120.]

[121.]

Formulas permultas novas in Astronomia Theorica utilissimas eruimus.

1801 Mense . Octobr.

Siehe die beiden vorhergehenden Eintragungen, sowie die folgende.

BRENDEL.

[122.]

Annis insequentibus 1802, 1803, 1804 occupationes astronomicae maximam otii partem abstulerunt, calculi imprimis circa planetarum novorum theoriam instituti. Unde evenit, quod hisce annis catalogus hicce neglectus est. Dies itaque, quibus aliquid ad matheseos incrementa conferre datum est, memoriae exciderunt.

Im November 1801 hatte GAUSS mehrere Bahnen der Ceres berechnet, die PIAZZIS Beobachtungen (Vergl. die Bemerkung zu der Nr. 120) hinreichend gut darstellten, und die nebst einer Ephemeride zur Aufsuchung unter der Überschrift *Fortgesetzte Nachrichten über den längst vermutheten neuen Haupt-Planeten unseres Sonnen-Systems* in der Monatlichen Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, Dezember 1801 (Werke VI, S. 199), veröffentlicht wurden. Die Rechnungen nebst den Rechnungsvorschriften finden sich ganz oder doch zum größten Teil in den bei der Nr. 119 genannten Schedae Ag und Ah. Hiernach wurde Ceres auch am 7. Dezember von VON ZACH aufgefunden und ihre Identität durch eine weitere Beobachtung von OLBERS am 1. Januar 1802 bestätigt.

GAUSS benutzte die neuen Beobachtungen sogleich zu einer genaueren Bahnbestimmung und vertiefte sich auf lange Zeit, auch noch über das Jahr 1804 hinaus, so in die Bahnberechnungen der Ceres und der später entdeckten Pallas, daß er seine übrigen Untersuchungen fast ganz liegen ließ. Die Schedae Ai, Ak, Al sind voll von solchen Berechnungen. Im Jahre 1802 beschäftigte er sich außerdem mit der Berechnung der Störungen der Ceres, welche Werke VII, 1906, S. 377 ff. abgedruckt sind.

An der eigentlichen Verbesserung seiner Methode zur Bahnbestimmung scheint GAUSS auch in dieser Zeit weniger gearbeitet zu haben, denn aus den Eintragungen Nr. 125 bis Nr. 127 ist zu schließen, daß die Form, in der diese Methode uns in der *Theoria motus* entgegentritt, erst im Jahre 1806 entstanden ist.

Man vergleiche GAUSS' Briefwechsel mit OLBERS und Werke VI.

BRENDEL.

[123.]

Demonstratio theorematis venustissimi supra 1801 Mai. [*)] commemorati, quam per 4 annos et ultra omni contentione quaesiveramus, tandem perfecimus. Comment[ationes] rec[entiores], I.

1805 Aug. 30.

Es handelt sich um die Untersuchungen der im I. Bande der Commentationes societatis regiae scien-

[*) Nr. 118, oben S. 560.]

tiarum Gottingensis recentiores veröffentlichten Abhandlung *Summatio quarumdam serierum singularium* (vorgelegt am 24. August 1808), Werke II, S. 9, siehe auch die Anzeige ebenda S. 155. Eine lebhafte Schilderung seiner fortgesetzten, lange vergeblich gebliebenen Bemühungen um den Beweis und seines endlichen Erfolgs gibt GAUSS in dem oben S. 24 abgedruckten Briefe an OLBERS vom 3. September 1805. Vergl. den Artikel **18** des BACHMANNschen Aufsatzes, Werke X 2, S. 45.

KLEIN.

[124.]

Theoriam interpolationis ulterius excoluimus.

1805 Novbr.

Das im Oktober 1805 begonnene Handbuch, betitelt *Mathematische Brouillons* (18, Bd), wird mit einer Aufzeichnung über Interpolation eröffnet, die (vergl. die Bemerkung von SCHERING Werke III, S. 328) als ein erster Entwurf der Werke III, S. 265 aus dem Nachlaß abgedruckten Abhandlung *Theoria interpolationis methodo nova tractata* anzusehen ist. Daraus folgt im Einklang mit unserer Tagebuchnotiz, daß diese Abhandlung nicht vor dem November 1805 verfaßt sein kann. Andererseits ist sie aber jedenfalls vor dem 25. August 1806 geschrieben, weil bei dem im art. 41. (Werke III, S. 325) gegebenen Beispiel die Exzentrizität der Juno entsprechend den V. Elementen dieses kleinen Planeten gleich 0,254236 genommen wird, vergl. die auf eben diesen Wert bezügliche Bemerkung, oben S. 443.

KLEIN. SCHLESINGER.

[125.]

Methodum ex duobus locis heliocentricis corporis circa solem moventis eiusdem elementa determinandi novam perfectissimam deteximus.

1806 Ianuar.

GAUSS berichtet hierüber in dem Briefe an OLBERS vom 3. Februar 1806 (*Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke* II 1, Berlin 1900, S. 287); man vergleiche die Bemerkungen zu den Nummern 120 und 122 und die artt. 88.—97. der *Theoria motus* (Werke VII, 1906, S. 112), sowie den Bericht*) über die letzteren in der Monatlichen Correspondenz **20**, 1809, S. 322. — Im Nachlaß finden sich die entsprechenden Untersuchungen im Handbuch 18, Bd, S. 52 und an anderen Stellen. Bei seinen früheren Bahnbestimmungen hat sich GAUSS einer weniger vollkommenen Methode bedient.

BRENDEL.

[126.]

Methodum e tribus planetae locis geocentricis eius orbitam determinandi ad summum perfectionis gradum eveximus.

1806 Mai.

---

*) *Über die Aufgabe: »Aus zwey ihrer Grösse und Lage nach gegebenen Radii Vectores und der verflossenen Zeit die elliptischen Elemente der Planetenbahn zu bestimmen«.* Nach § 88—97 der *Theoria motus corporum coelestium etc. etc.* des Hrn. Prof. GAUSS. [Der ungenannte Verfasser ist vermutlich v. ZACH.]

Man vergleiche *Theoria motus,* liber secundus, artt. 115—163. (Werke VII, 1906, S. 155). Im Nachlaß stehen die entsprechenden Untersuchungen im Handbuch 18, Bd, S. 94.

BRENDEL.

[127.]

Methodus nova ellipsin et hyperbolam ad parabolam reducendi.

1806 April.

Man vergleiche *Theoria motus,* artt. 33 ff., Werke VII, 1906, S. 45, sowie im Nachlaß das Handbuch 18, Bd, S. 70.

BRENDEL.

[128.]

Eodem circiter tempore resolutionem functionis $\frac{x^p-1}{x-1}$ in factores quatuor absolvimus.

[1806 April.—Mai.]

Im art. 22. der am 5. April 1825 der Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegten *Theoria Residuorum biquadraticorum Commentatio prima,* Werke II, S. 89 sagt GAUSS in bezug auf die hier angezeigte Zerlegung, daß sie im engsten Zusammenhang stehe mit den in den artt. 15.—20. jener Abhandlung enthaltenen Untersuchungen, und daß sie sich mit Hilfe dieser Untersuchungen ohne Schwierigkeit vollständig erledigen lasse. Sed — fährt er fort — hanc tractationen ad aliam occasionem nobis reservamus. Im Nachlaß hat sich keine auf diesen Gegenstand bezügliche Aufzeichnung vorgefunden.

BACHMANN.

[129.]

Methodus nova e quatuor planetae locis geocentricis, quorum duo extremi sunt incompleti, eius orbitam determinandi.

1807 Ian. 21.

Man vergleiche den Brief von GAUSS an OLBERS vom 27. Januar 1807, *Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke* II 1, Berlin 1900, S. 320, sowie *Theoria motus,* liber secundus, artt. 164.—171., Werke VII, 1906, S. 222, ferner im Nachlaß das Handbuch 18, Bd, S. 133.

BRENDEL.

[130.]

Theoria Residuorum cubicorum et biquadraticorum incepta

1807 Febr. 15,

[131.]

ulterius exculta et completa reddita Febr. 17. Demonstratione adhuc eget:

[1807 Febr. 17.]

[132.]

Demonstratio huius theoriae per methodum elegantissimam inventa ita ut penitus perfecta sit nihilque amplius desideretur.

Hinc simul residua et non residua quadratica egregie illustrantur.

1807 Febr. 22.

[133.]

Theoremata, quae theoriae praecedenti incrementa maximi pretii adiungunt, demonstratione eleganti munita (scilicet pro quibusnam radicibus primitivis statuere oporteat ipsum b positivum pro quibusque negativum,

$$aa+27bb = 4p;\quad aa+4bb = p).$$

[1807] Febr. 24.

In den Nummern 130—133 sind die Ergebnisse der *Theoria Residuorum biquadraticorum, Commentatio prima* (vorgelegt am 5. April 1825), Werke II, S. 65 gemeint. In dieser Abhandlung (a. a. O. S. 67) und in ihrer Anzeige (ebenda S. 165), ebenso in dem Briefe an DIRICHLET vom 30. Mai 1828 (ebenda, zweiter Abdruck, S. 516) setzt GAUSS den Anfang seiner Beschäftigung mit den biquadratischen Resten auf 1805; in dem Briefe an SOPHIE GERMAIN vom 30. April 1807 (siehe oben S. 70, insbesondere S. 72) wird »der letzte Winter« — also die Zeit der hier vorliegenden Tagebuchaufzeichnungen erwähnt. Vergl. auch die Bemerkung zu der Nr. 128, sowie die Werke VIII, S. 3—11 und 15—19 abgedruckten Nachlaßstücke und die zugehörigen Bemerkungen, ferner die oben S. 37 abgedruckte Aufzeichnung und die Briefstellen an SOPHIE GERMAIN (oben S. 72, I, II) und an OLBERS (oben S. 75).

KLEIN. SCHLESINGER.

[134.]

Demonstrationem omnino nova[m] theorematis fundamentalis principiis omnino elementaribus innixam deteximus.

[1807] Maii 6.

In einem am 8. Mai 1807 begonnenen und am 12. desselben Monats abgeschlossenen Briefe an OLBERS (Siehe *Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke* II, 1, 1900, S. 357, besonders S. 359, 360) schreibt GAUSS:

Hierbei alle meine von Mlle. SOPHIE GERMAIN erhaltenen Briefe. Personalia weiss ich eigentlich weiter keine, als die sich daraus abnehmen lassen. Bloss von einem franz[ösischen] Officier, der im Nov[ember] 1806 hier durchkam, erfuhr ich, dass SOPHIE GERMAIN, unter der ich aber damals meinen LEBLANC noch nicht ahndete, ein in Paris sehr geehrter und bewunderter Name sei. Neulich als ich ihr antwortete und einige Arithmetica mittheilte [*)] wurde ich dadurch veranlasst, wieder eine Untersuchung vorzunehmen, und gleich zwei Tage nachher gelang mir eine äusserst angenehme neue Entdeckung. Es ist ein neuer, sehr zierlicher und kurzer Beweis des Fundamentalsatzes art. 1[31. der *Disquisitiones arithmeticae*], dessen erster, sehr mühsamer (obwol im Grunde auch einfacher, aber langes Detail erfordernder) Beweis mich über ein Jahr gekostet hatte. . . .

Nach der durch das *Tagebuch* **) gegebenen Zählung handelt es sich bei der vorliegenden Aufzeichnung und in der Briefstelle an OLBERS um den sechsten Beweis des Reziprozitätsgesetzes der quadratischen Reste. Die zugehörige Abhandlung führt den Titel *Theorematis arithmetici demonstratio nova* (Werke II, S. 1, vergl. auch die *Anzeige* ebenda S. 151); sie wurde der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften am 15. Januar 1808 vorgelegt, also früher als die in den Tagebuchaufzeichnungen Nr. 118 und Nr. 123 angezeigte *Summatio quarumdam serierum singularium* (Werke II, S. 9, vorgelegt am 24. August 1808). Daraus erklärt es sich, daß GAUSS die *demonstratio nova* in der *Anzeige*, Werke II, S. 153, abweichend von der Zählung des *Tagebuchs*, als fünften Beweis bezeichnet. Vergl. auch den Artikel 20 des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten« Werke X 2, S. 50.

KLEIN.

[135.]

Theoria divisionis in periodos tres (art. 358) ad principia longe simpliciora reducta.

1808 Maii 10.

Hier sind wohl die Prinzipien gemeint, die in dem Aufsatze *Disquisitionum circa aequationes puras ulterior evolutio*, Werke II, S. 243, dargelegt sind. Die Artikelnummer bezieht sich auf die *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 445.

KLEIN. BACHMANN.

[136.]

Aequationem

$$X-1 = 0,$$

quae continet omnes radices primitivas aequationis

$$x^n-1 = 0,$$

in factores cum coefficientibus rationalibus discerpi non posse, demonstr[atum] pro valoribus compositis ipsius n.

1808 Iun. 12.

Vergl. die Notiz Nr. 40 vom 9. Oktober 1796, in der die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung für den Fall, wo n eine Primzahl ist, angezeigt wird. Daß GAUSS die Irreduzibilität für den Fall, wo n

[*) Siehe den Brief vom 30. April 1807, oben S. 70.]

**) Vergl. die Nr. 118 vom Mai 1801, oben S. 560.

eine Primzahlpotenz ist, schon bei Abfassung der *Disquisitiones arithmeticae* gekannt haben dürfte, ist in der Bemerkung zu der Nr. 116, oben S. 559, auseinandergesetzt worden. Von dem Beweise der Irreduzibilität im allgemeinen Fall enthält der Nachlaß nur das oben S. 116 abgedruckte Bruchstück, aus dem man aber nicht auf das Beweisverfahren schließen kann, das GAUSS im Auge hatte. Auch eine Reihe von Einzelheiten in diesem Bruchstück bleiben unklar, so vor allem die letzten Zeilen von S. 117; vergl. auch die Bemerkung zu der Nr. 38. Im Text der obigen Tagebuchnotiz Nr. 136 dürfte, wie DEDEKIND beim ersten Abdruck bemerkt hat, die Form $X-1=0$ der Gleichung ein Schreibfehler für $X=0$ sein; diese Vermutung wird durch das S. 116 abgedruckte Bruchstück bestätigt. Über die verschiedenen Arten von Irreduzibilitätsbeweisen für die Kreisteilungsgleichung sehe man M. RUTHINGER, *Die Irreducibilitätsbeweise der Kreisteilungsgleichung*, Straßburger Dissertation 1907.

LOEWY.

[137.]

Theoriam formarum cubicarum, solutionem aequ[ationis]

$$x^3+ny^3+nnz^3-3nxyz=1$$

aggressus sum.

[1808] Dec. 23.

Vergl. die Ausführungen von R. FRICKE, Werke VIII, S. 24—26 und eine Bemerkung von SCHERING, Werke II, S. 398. Die dort zitierte, Werke II, S. 243 abgedruckte Abhandlung *Disquisitionum circa aequationes puras ulterior evolutio* stammt (siehe die Bemerkung von DEDEKIND a. a O. S. 265 und die Tagebuchnotiz Nr. 135) in der Tat aus dem Jahre 1808.

Vergl. den Artikel 25 des BACHMANNschen Aufsatzes Werke X 2, S. 60.

KLEIN.

[138.]

Theorema de residuo cubico 3 per methodum specialem elegantem demonstratum per considerat[iones] valorum $\frac{x+1}{x}$, ubi terni semper habent a, $a\varepsilon$, $a\varepsilon\varepsilon$ exceptis duobus, qui dant ε, $\varepsilon\varepsilon$, hi vero sunt

$$\frac{1}{\varepsilon-1}=\frac{\varepsilon\varepsilon-1}{3},\quad \frac{1}{\varepsilon\varepsilon-1}=\frac{\varepsilon-1}{3}$$

adeoque productum $\equiv \frac{1}{3}$.

1809 Ian. 6.

Hier ist ε nicht als dritte Wurzel aus 1, sondern als rationale Wurzel der Kongruenz

$$\varepsilon^2+\varepsilon+1\equiv 0 \pmod{p}$$

aufzufassen, wo p eine natürliche Primzahl von der Form $3n+1$ bedeutet.

DEDEKIND.

[139.]

Series ad Media arithmetico geometrica pertinentes fusius evolutae.

1809 Iun. 20.

Man kann annehmen, daß der Brief SCHUMACHERS an GAUSS vom 2. April 1808 (abgedruckt oben S. 242, [4.]), namentlich die darin erwähnte Aufgabe des PEDRAYES (vergl. GAUSS' Antwortschreiben vom 17. September 1808, abgedruckt oben S. 243, [5.]) die äußere Veranlassung dazu geboten hat, daß GAUSS die Untersuchungen über elliptische Funktionen, die seit 1800 zurückgetreten waren, wieder aufnahm. An die hier zu besprechende Tagebuchaufzeichnung erinnert der Anfang der im III. Bande der Werke, S. 446 abgedruckten nachgelassenen Abhandlung, die S. 221—233 des im Oktober 1805 begonnenen Handbuchs 18, Bd aufgezeichnet ist. Diese Abhandlung beginnt nämlich mit den Worten: »Die Theoreme in Beziehung auf diejenigen Reihen und unendlichen Producte, welche zu der Theorie der Arithmetisch Geometrischen Mittel gehören, ordnen wir so«. Da sie unmittelbar auf eine astronomische Rechnung folgt, der die Bemerkung beigefügt ist: »geendiget d. 28. April 1809« (vergl. SCHERINGS Bemerkung, Werke III, S. 494) ist ihr Zusammenhang mit unserer Tagebuchnotiz gesichert. Dasselbe gilt von der oben S 213 abgedruckten Aufzeichnung, die den Seiten 37—40 der Scheda An entnommen ist; auf S. 35 der Scheda, am Schluß einer astronomischen Rechnung findet sich nämlich die Angabe: »geendigt d. 2. May 1809«.

KLEIN. SCHLESINGER.

[140.]

Quinquesectionem pro mediis arithm[etico] Geom[etricis] absol[vimus].

1809 Iun. 29.

Die Fünfteilung der Perioden wird in der bei der Nr. 139 genannten Abhandlung des Handbuchs 18 Bd, siehe Werke III, S. 456 ff. entwickelt.

KLEIN. SCHLESINGER.

[141.]

Catalogum praecedentem per fata iniqua iterum interruptum initio anni 1812 resumimus. In mense Nov. 1811 contigerat demonstrationem theorematis fundamentalis in doctrina aequationum pure analyticam completam reddere; sed quum nihil chartis servatum fuerit, pars quaedam essentialis memoriae penitus exciderat. Hanc per satis longum temporis intervallum frustra quaesitam tandem feliciter redinvenimus.

1812 Febr. 29.

Es handelt sich um die *Demonstratio nova altera* des Fundamentalsatzes der Algebra, vorgelegt am 7. Dezember 1815, Commentationes soc. reg. sc. Gottingensis rec. 3, 1816, Werke III, S. 31; vergl. die Anzeige ebenda, S. 105. In einem Briefe an OLBERS vom 19. Februar 1826, *Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke* II 2, Berlin 1909, S. 439, schreibt GAUSS:

Ich habe in meinem wissenschaftlichen Leben öfters den Fall gehabt, dass ich durch äussere Umstände veranlasst, Beschäftigungen, die nicht glückten, bei Seite legte, und die allerdings später glückten, z. B. mein Beweis für das Haupttheorem der Lehre von den Gleichungen, der in dem 3. Bande unsrer Comment[ationes] steht; aber ich habe nachher die 10fache Anstrengung gehabt, nur erst wieder auf den Punkt zu kommen, auf dem ich schon früher mehr als einmahl gewesen war.

Vergl. auch die Bemerkung von M. BRENDEL, Werke VII, 1906, S. 610.

KLEIN. SCHLESINGER.

[142.]

Theoriam Attractionis Sphaeroidis Elliptici in puncta extra solidum sita prorsus novam invenimus.

Seeberg[ae], 1812 Sept. 26.

Siehe die folgende Nummer. Die Ortsangabe bezieht sich auf die Sternwarte Seeberg bei Gotha.

KLEIN.

[143.]

Etiam partes reliquas eiusdem theoriae per methodum novam mirae simplicitatis absolvimus.

1812 Oct. 15. Gott[ingae.]

Die Abhandlung: *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum, methodo nova tractata* wurde am 18. März 1813 der Königl. Societät d. W. übergeben und ist im zweiten Bande der Commentationes, Göttingen 1813 veröffentlicht worden; sie ist abgedruckt Werke V, S. 1—22. In der Selbstanzeige (Gött. gel. Anzeigen, 5. April 1813, Werke V, S. 281) heißt es: »Der Verfasser der gegenwärtigen Abhandlung, welcher seit lange schon die Überzeugung hatte, daß die echte Auflösungsmethode jener berühmten Aufgabe erst noch gefunden werden müsse, wurde vor einem halben Jahre veranlaßt, sich mit derselben näher zu beschäftigen«. Am 15. November 1812 schreibt GAUSS an GERLING über diese Untersuchung das folgende:

In der letzten Zeit habe ich mich mit der berühmten Aufgabe der Anziehung der elliptischen Sphäroide beschäftigt. Ich habe die Freude gehabt, eine Auflösung zu finden, deren Einfachheit und Eleganz alle meine Erwartungen noch übertroffen hat. Ich werde sie sobald es sich thun lässt in einer Vorlesung der Societät übergeben.

Vergl. auch den Brief von GAUSS an LAPLACE vom 5. November 1812, oben S. 379 und die zugehörigen Bemerkungen S. 380, sowie den Brief von GAUSS an SCHUMACHER vom 31. Dezember 1812, *Briefwechsel* I, Altona 1860, S. 95.

KLEIN. STÄCKEL.

[144.]

Fundamentum theoriae residuorum biquadraticorum generalis, per septem propemodum annos summa contentione sed semper frustra quaesitum tandem feliciter deteximus eodem die, quo filius [*)] nobis natus est.

1813 Oct. 23. Gott[ingae].

[145.]

Subtilissimum hoc est omnium eorum, quae umquam perfecimus. Vix itaque operae pretium est, his intermiscere mentionem quarumdam simplificationum ad calculum orbitarum parabolicarum pertinentium.

Vergl. zu den Nummern 144 und 145 die folgende Stelle aus dem Briefe von GAUSS an DIRICHLET vom 30. Mai 1828, Werke II, zweiter Abdruck, S. 516: »Die ganze Untersuchung, deren Stoff ich schon seit 23 Jahren vollständig besitze, die Beweise der Haupttheoreme aber (zu welchen das in der ersten Commentation noch nicht zu rechnen ist), seit etwa 14 Jahren — (obwohl ich wünsche und hoffe, an letzteren, den Beweisen, noch einiges vereinfachen zu können) — habe ich auf ungefähr drei Abhandlungen berechnet«. Man sehe auch die Bemerkung zu der Nr. 133 sowie den letzten Absatz des Artikels 22 von BACHMANNS Aufsatz, Werke X 2, S. 56.

In Bezug auf die in der Nr. 145 erwähnten Vereinfachungen zur Berechnung parabolischer Bahnen vergleiche man die Abhandlung *Observationes Cometae secundi a. MDCCCXIII,* Werke VI, S. 25, sowie Werke VII, 1906, S. 338—349.

KLEIN. BRENDEL.

[146.]

Observatio per inductionem facta gravissima theoriam residuorum biquadraticorum cum functionibus lemniscaticis elegantissime nectens. Puta si $a+bi$ est numerus primus, $a-1+bi$ per $2+2i$ divisibilis, multitudo omnium solutionum congruentiae

$$1 \equiv xx+yy+xxyy \pmod{a+bi} \text{ [**)]},$$

inclusis

$$x = \infty, \quad y = \pm i; \quad x = \pm i, \quad y = \infty,$$

fit

$$= (a-1)^2+bb.$$

1814 Iul. 9.

[*) Dieser am 23. Oktober 1813 geborene zweite Sohn aus GAUSS' zweiter Ehe mit MINNA WALDECK hieß WILHELM, widmete sich der Landwirtschaft und folgte später seinem älteren Bruder EUGEN nach Amerika.]

[**) In der Handschrift steht statt des Kongruenzzeichens $\equiv$ das Gleichheitszeichen $=$.]

Die Anzahl Lösungen der Kongruenz (mod. $a+bi$) ist die gleiche wie die der Kongruenz

$$2 \equiv (1+x^2)(1+y^2) \pmod{p},$$

wo $p = a^2+b^2$, in reellen ganzen Zahlen (nach DEDEKIND, Brief an KLEIN). Man hat also zu suchen, wie groß die Anzahl der Lösungen von

$$2 \equiv u \,.\, v \pmod{p}$$

ist, bei denen gleichzeitig $u-1$, $v-1$ quadratische Reste von p sind. DEDEKIND hat für alle Primzahlen $p < 100$ auf diese Weise die GAUSSsche Aussage bestätigt gefunden. Andererseits hat R. FRICKE (Brief an KLEIN) darauf hingewiesen, daß die Gleichung

$$1 = x^2 + y^2 + x^2 y^2$$

die zwischen

$$x = \sin \operatorname{lemn} u, \quad y = \cos \operatorname{lemn} u$$

bestehende Beziehung ist. Der Zusammenhang aber der Theorie der biquadratischen Reste mit den lemniskatischen Funktionen, der durch die Anzahl der Lösungen jener Kongruenz vermittelt wird, bleibt aufzuklären.

BACHMANN.

SCHLUSSBEMERKUNG*).

Hinter der Nr. 146, mit der die Aufzeichnungen des *Tagebuchs* als solche schließen, sowie auch zwischendurch eingeheftet, finden sich in der Handschrift noch einige Blätter, die mit verschiedenartigen, teils mathematischen, teils nicht mathematischen Aufzeichnungen beschrieben sind**). Auf der Innenseite der Einbanddecke endlich stehen in eine Falte hineingeschrieben die folgenden Sinnsprüche:

Nil Desperare.

Habeant sibi.

QVA EXEAS HABES.

---

*) Diese Schlußbemerkung und das folgende Sachverzeichnis sind mit einigen geringfügigen Änderungen aus der ersten Ausgabe des *Tagebuchs* übernommen worden.

**) Eine dieser Aufzeichnungen mathematischen Inhalts ist oben S. 515 in der Bemerkung zu der Nr. 60 wiedergegeben.

SACHVERZEICHNIS ZUM TAGEBUCH.

I. ZAHLENTHEORIE.

II. ALGEBRA.

---

*) Die hier folgende Zählung der Beweise entspricht den Angaben des *Tagebuchs;* vergl. den Artikel **20** des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten« Werke X 2, S. 50.

III. ANALYSIS.

A) Kettenbrüche: Nr. 7, 58, 113.
B) Interpolation und mechanische Quadratur: Nr. 44, 48, 124.
C) Differentialrechnung: Nr. 47.
D) Integralrechnung: Nr. 50, 52, 53, 54, 59.
E) Unendliche Reihen.
 a) LAGRANGEscher Umkehrungssatz: Nr. 49, 86.
 b) Rekurrente Reihen: Nr. 8, 10, 20.
 c) Besondere Reihenentwicklungen: Nr. 24, 32, 33, 45, 46.
 d) Summierung besonderer Reihen: Nr. 29, 87.
 e) Trigonometrische Reihen: Nr. 87, 104.
 f) Asymptotische Entwicklungen: Nr. 82, 83, 113.
F) Lemniskatische Integrale und Funktionen: Nr. 50, 51, 60, 61, 62, 63, 91a, 91b, 92, 95, 98, 112, 146.
G) Arithmetisch-geometrisches Mittel: Nr. 98, 100, 101, 102, 106, 108, 109, 139, 140.
H) Allgemeine elliptische Integrale und Funktionen: Nr. 105, 106, 108, 110, 111.

IV. GEOMETRIE.

A) PYTHAGOREIscher Lehrsatz: Nr. 81.
B) Grundlagen der Geometrie: Nr. 72, 99.
C) Algebraische Kurven: Nr. 21.

V. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG.

Nr. 88, 113.

VI. MECHANIK.

A) Zusammensetzung von Kräften: Nr. 85.
B) Anziehung von Kugel und Ellipsoid: Nr. 90, 142, 143.
C) Ballistisches Problem: Nr. 93.

VII. ASTRONOMIE.

A) Parallaxe: Nr. 97.
B) Berechnung des Osterfestes: Nr. 107, 117.
C) Planetenbahnen: Nr. 119, 121, 122, 125, 126, 129.
D) Kometenbahnen: Nr. 94, 121, 127, 145.
E) Mondbewegung: Nr. 120.

BERICHTIGUNGEN.

S. 7. Die Überschrift soll lauten: Vorrede. Mathematische Abhandlungen besonders aus dem Gebiete der Höheren Arithmetik und der Elliptischen Functionen von Dr. G. EISENSTEIN. Berlin 1847.

S. 110, Zeile 1, 2. Die Urschrift des Briefes von GAUSS an DROBISCH vom 14. August 1834 befindet sich im GAUSSarchiv.

S. 148, in der Formel für $s4$ (letzte Gleichung des art. [6.]) muß der Nenner des zweiten Bruches lauten $1+20s^4-26s^8+20s^{12}+s^{16}$.

S. 150, Gleichung (3) muß lauten $AB = \frac{\pi}{4}$.

S. 171, Zeile 9 ist das Komma hinter Scheda zu streichen.

» » , Zeile 20, 21 in der Klammer ist zu lesen: es folgen nämlich auf die dreizehnte Dezimalstelle 0 noch die Stellen 73164.

S. 188, wo die Nummer [24] zweimal auftritt, ist das erste Mal [23] zu lesen.

S. 192, letzte Zeile ist statt $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ zu lesen $\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

S. 251, zweite Fußnote ist statt S. 247 zu lesen S. 249.

S. 254, Gleichung (19) ist statt $\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^2$ zu lesen $\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4$.

S. 379, dritte Fußnote ist statt *novo* zu lesen *nova*.

S. 389, in der Fußnote ist statt $\frac{1}{2}\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)$ zu lesen $\frac{1}{2}\pi\left(k+\frac{1}{4}\right)$.

S. 444, vorletzte Textzeile und

S. 445, erste Fußnote ist statt 27. Januar zu lesen 24. Januar.

S. 509, fünfte Zeile der Bemerkung zu der Nr. [49] ist statt *) zu lesen **).

S. 535, Zeile 11 ist hinter »= 0« ein Komma zu setzen.

BEMERKUNGEN ZUR ERSTEN ABTEILUNG DES ZEHNTEN BANDES.

Die vorliegende erste Abteilung des zehnten Bandes von GAUSS' Werken enthält zunächst einige kleinere, bisher in den Werken noch nicht abgedruckte Veröffentlichungen, dann eine Reihe von Nachlaßstücken und Briefstellen aus den verschiedenen Gebieten der Reinen Mathematik, die eine erneute Durchforschung der Handschriften von GAUSS noch zu Tage gefördert hat, endlich eine Nachbildung des wissenschaftlichen *Tagebuchs* oder *Notizenjournals* und einen Abdruck des Textes dieser wichtigen Urkunde mit ausführlichen Erläuterungen. Die Nachlaßstücke und Briefstellen sind entsprechend den in den Werken bisher befolgten Grundsätzen nach ihrer Zugehörigkeit zur *Arithmetik, Algebra, Analysis* und *Geometrie* in Gruppen zusammengefaßt worden; über Einzelheiten unterrichtet am besten das nachstehende *Inhaltsverzeichnis*. Es möge nur noch erwähnt werden, daß, mit Rücksicht auf den Zusammenhang mit den hier zum ersten Male veröffentlichten Stücken, einzelne schon im dritten und achten Bande der Werke ganz oder teilweise abgedruckte Aufzeichnungen noch einmal wiedergegeben worden sind; der Gesamtumfang dieser Wiederholungen beträgt etwa 20 Seiten. Zur Bequemlichkeit für eine spätere Nachprüfung wurden die Stellen, wo sich die Urschriften der hier abgedruckten Nachlaßstücke befinden, durch Angabe der zur Zeit im GAUSSarchiv angewandten Bezeichnungsweise kenntlich gemacht. Über diese Bezeichnungsweise sei hier — ohne damit der in einem folgenden Bande zu gebenden ausführlichen Beschreibung des Nachlasses vorgreifen zu wollen — das nachstehende bemerkt.

Die kleinen Notizheftchen, die GAUSS von 1798 ab benutzt und anfangs als *Schedae* bezeichnet hat, tragen den Leitbuchstaben A und werden durch die kleinen Buchstaben a, b, ..., n unterschieden; wir haben also die Schedae Aa, Ab, ..., An. Die steif gebundenen Handbücher, deren erstes im Jahre 1800 begonnen wurde, sind mit dem Leitbuchstaben B und weiter mit a, b, ..., h bezeichnet; die den so gebildeten Zeichen Ba, Bb, ... vorangestellten Zahlen 15, 16, ... entsprechen der ältern Nummerierung der Nachlaßstücke, wie sie der in dem *Verzeichniss der Handschriften im Preussischen Staate*, I. *Hannover*, 3. *Göttingen*, 3. (Berlin 1894), S. 101—113, enthaltene Katalog des GAUSSschen Nachlasses von WILHELM MEYER gibt. Neben den Schedae und Handbüchern kommen für die abgedruckten Nachlaßstücke noch einzelne Druckwerke in Betracht, die GAUSS besessen und deren unbedruckte Seiten oder Durchschußblätter er mit wissenschaftlichen Aufzeichnungen beschrieben hat, so namentlich der LEISTE (siehe oben, S. 78, Fußnote), ferner eine Reihe von losen Zetteln, die mit den Leitbuchstaben E beziehungsweise F versehen sind, jenachdem sie zahlentheoretischen oder analytischen Inhalts sind.

Die wiedergegebenen Briefstellen wurden, so weit uns die Urschriften zugänglich waren, nach diesen abgedruckt oder mit ihnen verglichen. Bei den Nachlaßstücken und Briefen wurde die Schreibung der

Vorlage unverändert beibehalten, dagegen bei allem, was von den Bearbeitern herrührt, durchweg die neuere allgemeine deutsche Rechtschreibung angewandt. Wie in den früheren Bänden sind Einschaltungen der Bearbeiter in den GAUSSschen Text in eckige Klammern [ ], Abdrücke von Briefstellen und Mitteilungen, die nicht von GAUSS herrühren, in geschweifte Klammern { } gesetzt.

Die Auswahl der in diesem Bande abgedruckten arithmetischen Nachlaßstücke erfolgte im Einvernehmen mit P. BACHMANN, der auch die Erläuterungen zu vielen dieser Stücke verfaßt hat. Die geometrischen Stücke hat P. STÄCKEL herausgegeben und erklärt. Die Bearbeitung der übrigen Teile dieses Bandes, wie auch die allgemeine Redaktion lag in den Händen von L. SCHLESINGER, der dabei von P. STÄCKEL und vom Unterzeichneten unterstützt wurde. Bei der Erläuterung einzelner Nachlaßteile und Tagebuchaufzeichnungen haben, wie an den betreffenden Stellen kenntlich gemacht ist, außer den bereits Genannten noch M. BRENDEL, R. DEDEKIND †, L. FEJÉR, R. FRICKE, A. GALLE, S. GUNDELFINGER †, J. HORN, E. LANDAU, A. LOEWY, O. PERRON, K. SCHWERING mitgewirkt.

Die dem Text eingefügten Erläuterungen zu den abgedruckten Stücken werden weiterhin durch die *Aufsätze über Gauss' wissenschaftliche Tätigkeit auf den einzelnen Gebieten der Mathematik* ergänzt. Diese Aufsätze sollen soweit sie sich auf Reine Mathematik beziehen in der zweiten Abhandlung des vorliegenden zehnten Bandes abgedruckt werden, soweit sie Physik, Astronomie und Geodäsie betreffen, zusammen mit den noch nicht veröffentlichten auf diese Gebiete bezüglichen Stücken des Nachlasses im elften Bande. Vor dem Abdruck in den Werken werden sie in der von BRENDEL, SCHLESINGER und mir herausgegebenen Sammlung: *Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss* dem Urteil der Fachgenossen unterbreitet.

F. KLEIN.

INHALT.

GAUSS WERKE BAND X 1.
NACHTRÄGE ZUR REINEN MATHEMATIK.

KLEINERE VERÖFFENTLICHUNGEN.

ARITHMETIK.

ALGEBRA.

ANALYSIS.

GEOMETRIE.

ABDRUCK DES TAGEBUCHS (NOTIZENJOURNALS) MIT ERLAUTERUNGEN.

Göttingen, Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

C. F. GAUSS WERKE

HERAUSGEGEBEN VON DER KGL. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.

IN KOMMISSION BEI B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

A. AUSGABE AUF DRUCKPAPIER.

Band I. DISQUISITIONES ARITHMETICAE. Zweiter Abdruck 1870. Preis Mk 26 —
II. HÖHERE ARITHMETIK. Zweiter Abdruck. 1876. Preis Mk 20.—.
Nachträge zum ersten Abdruck des zweiten Bandes. 1876. Preis Mk. 2.—
III. ANALYSIS. Zweiter Abdruck. 1876. Preis Mk. 20.—.
IV. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG UND GEOMETRIE. Zweiter Abdruck 1880 Preis Mk. 25.—.
V. MATHEMATISCHE PHYSIK. Zweiter Abdruck. 1877. Preis Mk 25 —.
VI. ASTRONOMISCHE ABHANDLUNGEN UND AUFSÄTZE 1874. Preis Mk. 33 —.
VII. THEORIA MOTUS UND THEORETISCH-ASTRONOMISCHER NACHLASS Parabolische Bewegung, Störungen der Ceres und der Pallas, Theorie des Mondes 1906 Preis Mk. 30.—.
VIII ARITHMETIK, ANALYSIS, WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG, GEOMETRIE (Nachträge zu Band I—IV.) 1900. Preis Mk. 24.—.
IX. GEODÄSIE. (Fortsetzung von Band IV.) 1903. Preis Mk. 26.—.
X. Abteilung 1. NACHLASS UND BRIEFWECHSEL ZUR REINEN MATHEMATIK. (Nachträge zu Bd. I—IV und VIII. TAGEBUCH. 1917. Preis Mk. 38.—.
X. Abteilung 2. AUFSÄTZE UBER GAUSS' WISSENSCHAFTLICHE TÄTIGKEIT AUF DEN GEBIETEN DER REINEN MATHEMATIK. Unter der Presse.
XI Abteilung 1. NACHLASS UND BRIEFWECHSEL ZUR PHYSIK, ASTRONOMIE UND CHRONOLOGIE. Unter der Presse.
XI. Abteilung 2. AUFSÄTZE UBER GAUSS' WISSENSCHAFTLICHE TÄTIGKEIT AUF DEN GEBIETEN DER ANGEWANDTEN MATHEMATIK In Vorbereitung.
XII. BIOGRAPHISCHES NEBST EINEM GENERALREGISTER In Vorbereitung

B. AUSGABE AUF SCHREIBPAPIER.

Band I—VI (nur vollständig abzugeben). Preis Mk. 180.—.
Band VII. Preis Mk. 37.—.
Band VIII. Preis Mk. 30.—.
Band IX. Preis Mk. 32.—.
Band X. Abteilung 1. Preis Mk. 46.—.

Berichte über den Stand der Herausgabe von Gauss' Werken werden, von 1898 beginnend, regelmäßig in den Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (geschäftliche Mitteilungen) veröffentlicht.

GÖTTINGEN, GEDRUCKT IN DER DIETERICHSCHEN UNIV.-BUCHDRUCKEREI (W. FR. KAESTNER).