

Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik

Verlag: de Gruyter

Jahr: 1830

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN243919689_0005

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0005

LOG Id: LOG_0016

LOG Titel: Über die Existenz der Wurzeln einer höhern Gleichung mit einer Unbekannten.

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

12.

Über die Existenz der Wurzeln einer höhern Gleichung mit einer Unbekannten.

(Vom Hrn. *Adam Burg*, Professor der höhern Mathematik am K. K. polytechnischen Institute zu Wien.)

Bekanntlich läßt sich das Dasein von wenigstens einer reellen Wurzel in einer Gleichung von ungeraden, so wie das Vorhandensein von wenigstens zwei reellen Wurzeln in einer geordneten Gleichung von gerader Ordnung, deren letztes Glied negativ ist, sehr leicht und einfach nachweisen, so daß es nur darauf ankommt, Gleichungen von gerader Ordnung, welche ihr letztes Glied positiv haben, in dieser Beziehung zu untersuchen. Da aber solche Gleichungen auch lauter imaginäre Wurzeln haben können, so handelt es sich, wie ebenfalls bekannt, bloß darum, zu zeigen, daß einer solchen Gleichung in jedem Falle ein Genüge geschieht, wenn man in ihr die Unbekannte $x = p + q\sqrt{-1}$ setzt, weil unter dieser Form nicht nur jede imaginäre (wenn nämlich p und q reelle Größen bedeuten), sondern auch eine jede reelle Wurzel, wenn $q = 0$ ist, kann dargestellt werden; daher es auch nicht nothwendig ist, den Beweis von der Existenz einer Wurzel, welche im Allgemeinen die Form $p + q\sqrt{-1}$ hat, bloß auf Gleichungen von der letztgenannten Gattung zu beschränken, sondern es kann dieser, wie es auch sonst geschieht, sogleich auf alle Gleichungen ausgedehnt werden. Der allerdings scharfsinnige Beweis, welcher von Herrn Cauchy herrührt, und meines Wissens noch der einzige ist, welcher als genügend angesehen wird, erscheint mir doch keinesweges so einfach, als daß es nicht wünschenswerth sein sollte, dafür einen wenigstens eben so strengen, aber weit einfacheren zu finden. Irre ich nicht, so hat der nachstehende Beweis, welcher sich auf Gleichungen von gerader Ordnung überhaupt, ohne auf das Zeichen des letzten Gliedes Rücksicht zu nehmen, bezieht, diese genannte Eigenschaft.

1. Der Ordnungs-Exponent N einer jeden Gleichung $X=0$ von gerader Ordnung ist immer in der Form enthalten $N=n \cdot 2^m$, wo n nur ungerade, m aber beliebig eine jede ganze positive Zahl bezeichnet. Transformirt man die gegebene Gleichung in eine andere $X'=0$ mit quadrirten Differenzen, welche Gleichung wir, der Kürze wegen, die erste transformirte Gleichung nennen wollen, so ist diese, wie bekannt, von der Ordnung $N' = \frac{N(N-1)}{2} = n \cdot 2^{m-1} (n \cdot 2^m - 1)$. Wird auch für diese Gleichung jene $X''=0$, deren Wurzeln die quadrirten Differenzen der Wurzeln der Gleichung $X=0$ sind, oder die zweite transformirte Gleichung gesucht, so ist diese von der Ordnung

$$N'' = \frac{N'(N'-1)}{2} = n \cdot 2^{m-2} (n \cdot 2^m - 1) [n \cdot 2^{m-1} (n \cdot 2^m - 1) - 1],$$

so wie wieder die dritte transformirte Gleichung den Ordnungs-Exponenten $\frac{N''(N''-1)}{2} = n \cdot 2^{m-3} (n \cdot 2^m - 1) [n \cdot 2^{m-2} (n \cdot 2^m - 1) - 1] \{n \cdot 2^{m-2} (n \cdot 2^m - 1) [n \cdot 2^{m-1} (n \cdot 2^m - 1) - 1] - 1\}$ haben würde, u. s. w.

Man sieht leicht, daß die m te transformirte Gleichung $X^{(m)}$ der quadrirten Differenzen von ungerader Ordnung sein muß, weil sowohl der erste Factor $n \cdot 2^{m-m} = n$, als auch jeder der folgenden, welche sämmtlich von der Form $2^y - 1$ sind, ungerade ist.

2. Da nun diese m te transformirte Gleichung von ungerader Ordnung ist, also nothwendig wenigstens eine reelle Wurzel x_a haben muß, so hat die $(m-1)$ te transformirte Gleichung wenigstens ein Paar Wurzeln x_a, x_b , für welche $x_a = (x_a - x_b)^2$, oder $x_a - x_b = \sqrt{x_a}$ ist. Es wird aber dieser Gleichung in jedem Falle, es mag die reelle Wurzel x_a positiv oder negativ sein, Genüge geleistet, wenn man setzt: $x_a = P + Q\sqrt{-1}$, $x_b = P_1 + Q_1\sqrt{-1}$, weil dann $x_a - x_b = (P - P_1) + (Q - Q_1)\sqrt{-1}$, also von der Form $A + B\sqrt{-1}$ ist, wo $B=0$ wird, wenn x_a positiv ist.

Da aber, wenn wir nur eine dieser beiden Wurzeln weiter betrachten, die $(m-1)$ te transformirte Gleichung eine Wurzel x_a von der Form $P + Q\sqrt{-1}$ hat, so giebt es in der $(m-2)$ ten transformirten Gleichung ein Paar Wurzeln x'_a, x'_b , für welche wieder $x'_a - x'_b = \sqrt{x_a} = \sqrt{P + Q\sqrt{-1}}$ sein muß; und es wird auch dieser Gleichung wie-

der genug gethan, wenn man setzt: $x'_a = P' + Q'\sqrt{-1}$, $x'_b = P'_1 + Q'_1\sqrt{-1}$, weil $x'_a - x'_b$ wieder die Form $A' + B'\sqrt{-1}$ annimmt, und bekanntlich das Quadrat dieses Binoms ebenfalls von derselben Form ist.

Da aber ferner die $(m-2)$ te transformirte Gleichung auf diese Weise wenigstens eine Wurzel x'_a von der Form $P' + Q'\sqrt{-1}$ hat, so muß nach demselben Raisonement die $(m-3)$ te transformirte Gleichung wenigstens eine Wurzel von der Form $P'' + Q''\sqrt{-1}$ zulassen u. s. w., so, daß man durch dieselben fortgesetzten Schlüsse endlich auf die $(m-m)$ te transformirte, d. i. auf die ursprüngliche Gleichung $X=0$ selbst zurückkommt, von welcher auf diese Art erwiesen ist, daß sie sofort wenigstens eine Wurzel von der Form $p + q\sqrt{-1}$ haben oder zulassen müsse.
