SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik
Verlag: de Gruyter
Jahr: 1833
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN243919689_0010
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0010

LOG Id: LOG_0025
LOG Titel: Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung. (Fortsetzung).
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

18.

Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung.

(Fortsetzung des Aufsatzes No. 1. im ersten, und No. 10. im zweiten Hefte dieses Bandes.)

(Von dem Herrn Dr. *Stern* zu Göttingen.)

Zweites Kapitel.

A. Verwandelung der Reihen in Kettenbrüche.

30.

Eben so wie es oft nützlich ist, einen Kettenbruch in eine Reihe zu verwandeln, so kann auch zuweilen das umgekehrte Verfahren, die Verwandelung der Reihe in einen Kettenbruch, mit Nutzen angewandt werden. In der Regel werden diese Reihen nach fortschreitenden Potenzen einer Gröfse x geordnet sein, und es soll daher im Folgenden gezeigt werden, wie eine Reihe

$$(P.)\quad \frac{\alpha}{\alpha_1}x^m+\frac{\beta}{\beta_1}x^{m+h}+\frac{\gamma}{\gamma_1}x^{m+2h}+\frac{\delta}{\delta_1}x^{m+3h}\ldots.^{*})$$

in einen Kettenbruch verwandelt werden kann. Es ist aber

$$(P)=\frac{\alpha}{\alpha_1}x^m\left(1+\frac{\beta\alpha_1}{\alpha\beta_1}x^h+\frac{\gamma\alpha_1}{\alpha\gamma_1}x^{2h}+\ldots.\right);$$

es ist also nur nöthig zu zeigen, wie eine Reihe, von der Form des in Klammern eingeschlossenen Ausdrucks, in einen Kettenbruch verwandelt werden kann. Zu diesem Zwecke kann man verschiedene Methoden anwenden.

Erste Methode.

31.

Die einfachste Art, eine Reihe von der Form

$$(Q.)\quad 1+\frac{A_1}{\alpha_1}x^h+\frac{A_2}{\alpha_2}x^{2h}+\frac{A_3}{\alpha_3}x^{3h}\ldots.^{**})$$

in einen Kettenbruch zu verwandeln, ergiebt sich aus 28., wenn man das

*) Diese Form schadet übrigens der Allgemeinheit der Untersuchung nicht, indem man $x=1$ setzen, und $\frac{\alpha}{\alpha_1}+\frac{\beta}{\beta_1}$ etc. alsdann jede beliebige Reihe ausdrücken kann.

**) Soll dieser Ausdruck auf Reihen, in welchen negative Glieder vorkommen, angewandt werden, so hat man nur nöthig, in den bezüglichen Gliedern Zähler oder Nenner des Coeffizienten negativ zu nehmen.

dortige Verfahren umkehrt. Man setze nemlich $A_1 x^h = b_1$, $A_2 x^{2h} = -b_1 . b_2$, $A_3 x^{3h} = b_1 . b_2 . b_3$ etc., $\alpha_1 = a_1$; $\alpha_2 = a_1 . a_1, a_2$; $\alpha_3 = a_1, a_2 . a_1, a_3$ etc., also ist $b_1 = A_1 x^h$; $b_2 = -\frac{A_2 . x^{2h}}{b_1} = -\frac{A_2 . x^h}{A_1}$; $b_3 = \frac{A_3 x^{3h}}{b_1 . b_2} = -\frac{A_3 . x^h}{A_2}$, und allgemein $b_m = -\frac{A_m . x^h}{A_{m-1}}$; ferner ist $a_1 = \alpha_1$; $a_1, a_2 = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_1}$; $a_1, a_3 = \frac{\alpha_3 . \alpha_1}{\alpha_2}$; und wenn m eine gerade Zahl bedeutet, so ist überhaupt, wie leicht einzusehen ist:

$$\frac{\alpha_{m-1} . \alpha_{m-3} \ldots \alpha_3 . \alpha_1}{\alpha_{m-2} . \alpha_{m-4} \ldots \alpha_2} = a_1, a_{m-1}; \quad \frac{\alpha_m . \alpha_{m-2} \ldots \alpha_2}{\alpha_{m-1} . \alpha_{m-3} \ldots \alpha_1} = a_1, a_m; \quad \frac{\alpha_{m+1} . \alpha_{m-1} \ldots \alpha_3 . \alpha_1}{\alpha_m . \alpha_{m-2} \ldots \alpha_2} = a_1, a_{m+1}.$$

Da aber $a_1, a_{m+1} = a_{m+1} . a_1, a_m + b_{m+1} . a_1, a_{m-1}$, so folgt

$$a_{m+1} = \frac{\frac{\alpha_{m+1} . \alpha_{m-1} \ldots . \alpha_3 . \alpha_1}{\alpha_m . \alpha_{m-2} \ldots . \alpha_2} + \frac{A_{m+1} . x^h}{A_m} . \frac{\alpha_{m-1} . \alpha_{m-3} \ldots . \alpha_3 . \alpha_1}{\alpha_{m-2} . \alpha_{m-4} \ldots . \alpha_2}}{\frac{\alpha_m . \alpha_{m-2} \ldots . \alpha_2}{\alpha_{m-1} . \alpha_{m-3} \ldots . \alpha_1}}$$

$$= \frac{(A_m . \alpha_{m+1} + A_{m+1} . x^h . \alpha_m)(\alpha_{m-1} \ldots . \alpha_1)^2}{A_m (\alpha_m . \alpha_{m-2} \ldots . \alpha_2)^2}.$$

Eben so findet man $a_m = \frac{(A_{m-1} . \alpha_m + A_m . x^h . \alpha_{m-1})(\alpha_{m-2} . \alpha_{m-4} \ldots . \alpha_2)^2}{A_{m-1} (\alpha_{m-1} . \alpha_{m-3} \ldots . \alpha_1)^2}$.

Aus der Reihe (Q.) entsteht also der Kettenbruch $F(a_1 a_m) =$

$$F\Big(1 + A_1 x^h : \alpha_1 - \frac{A_2 . x^h}{A_1} : \frac{(A_1 . \alpha_2 + A_2 . x^h . \alpha_1)}{A_1 . \alpha_1^2} - \frac{A_3 . x^h}{A_2} : \frac{(A_2 . \alpha_3 + A_3 . x^h . \alpha_2) . \alpha_1^2}{A_2 . \alpha_2^2}$$
$$- \frac{A_4 . x^h}{A_3} : \frac{(A_3 . \alpha_4 + A_4 . x^h . \alpha_3) . (\alpha_2)^2}{A_3 (\alpha_3 . \alpha_1)^2} \text{ etc.}\Big)$$

Schafft man aus diesem Kettenbruche alle gebrochenen Theilzähler und Theilnenner, und die überflüssigen Factoren weg (§. 10. und 18.) so findet man $F(a, a_m) =$

$$F\Big(1 + A_1 x^h : \alpha_1 - \alpha_1^2 . A_2 x^h : (A_1 \alpha_2 + A_2 . x^h . \alpha_1) - A_1 . \alpha_2^2 . A_3 x^h : (A_2 . \alpha_3 + A_3 . x^h . \alpha_2)$$
$$- A_2 . \alpha_3^2 . A_4 . x^h : (A_3 \alpha_4 + A_4 . x^h . \alpha_3) \text{ etc.}\Big)$$ *).

32.

Es soll z. B. das Binomium $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n.n-1}{1.2} x^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} x^3 \ldots$ in einen Kettenbruch verwandelt werden; man setze, um diese Reihe mit

*) Nach §. 28. Anmerk. liefse sich diese Formel durch

$$\overset{m}{\underset{1}{-\infty}} F\left(1 + \frac{A_1 . x^h}{\alpha_1 - \frac{A_{m-1} . \alpha_m^2 . A_{m+1} . x^h}{A_m . \alpha_{m+1} + A_{m+1} . x^h . \alpha_m}}\right)$$

bezeichnen, wenn man $A_0 = 1$ setzt; ist die Reihe eine endliche, so wird irgend ein Werth $A_s = 0$ sein, und alsdann auch der Kettenbruch ein endlicher sein, weil auch A_{s+1}, A_{s+2} etc. alsdann $= 0$ sind.

der Reihe (Q.) zu vergleichen, $A_1 = n$, $A_2 = n.n-1$, $A_3 = n.n-1.n-2 \ldots$ $\ldots \alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1.2, \ldots . \alpha_m = 1.2 \ldots m$; $h = 1$, so erhält man

$$(1+x)^n = 1 + \cfrac{nx}{1 - \cfrac{n.n-1.x}{1.2.n+n.n-1.x - \cfrac{n.1.2^2.n.n-1.n-2.x}{n.n-1.1.2.3+n.n-1.n-2.2.x - \cfrac{n.n-1(2.3)^2.n.n-1.n-2.n-3.x}{n.n-1.n-2.2.3.4+n.n-1.n-2.n-3.2.3.x} \text{ etc.}}}}$$

und wenn man den Bruch reducirt:

1. $$(1+x)^n = 1 + \cfrac{nx}{1 - \cfrac{(n-1)x}{2+(n-1)x - \cfrac{2.(n-2).x}{3+(n-2)x - \cfrac{3(n-3)x}{4+(n-3)x} \text{ etc.}}}}$$

welchen Ausdruck man durch ${}^{m}_{1-\infty}F\left(1 + \cfrac{nx}{1 - \cfrac{m.(n-m)x}{m+1+(n-m).x}}\right)$ andeuten kann.

Man bemerke, dafs der Bruch abbricht, wenn n eine ganze Zahl ist, sobald $m = n$ wird.

Nimmt man $-n$ statt n, so hat man:

2. $$(1+x)^{-n} = 1 - \cfrac{nx}{1 - \cfrac{(-n-1)x}{2+(-n-1)x - \cfrac{2(-n-2)x}{3+(-n-2,x} \text{ etc.}}} = 1 - \cfrac{nx}{1 + \cfrac{(n+1)x}{2-(n+1)x + \cfrac{2(n+2)x}{3-(n+2)x} \text{ etc.}}}$$

$$= {}^{m}_{1-\infty}F\left(1 - \cfrac{nx}{1 + \cfrac{m.(m+n)x}{m+1-(m+n)x}}\right),$$

welcher Bruch ebenfalls abbricht, wenn n eine ganze Zahl ist.

Da $(1+x)^{-1} = \cfrac{1}{(1+x)^n}$ ist, so folgt aus (1.):

$$(1+x)^{-n} = \cfrac{1}{{}^{m}_{1-\infty}F\left(1 + \cfrac{nx}{1 - \cfrac{m(n-m)x}{m+1+(n-m)x}}\right)} = \cfrac{1}{{}^{m}_{1-\infty}F\left(1 + \cfrac{nx}{1 + \cfrac{m(m-n)x}{m+1-(m-n)}}\right)}.$$

Eben so findet man aus (2.)

$$(1+x)^n = \cfrac{1}{{}^{m}_{1-\infty}F\left(1 - \cfrac{nx}{1 + \cfrac{m(m+n)x}{m+1-(m+n)x}}\right)}.$$

Man hat also die merkwürdige Beziehung:

$${}^{m}_{1-\infty}F\left(1 + \cfrac{nx}{1 + \cfrac{m(m-n)x}{m+1-(m-n)x}}\right) = \cfrac{1}{{}^{m}_{1-\infty}F\left(1 - \cfrac{nx}{1 + \cfrac{m(m+n)x}{m+1-(m+n)x}}\right)}.$$

33.

Es sei die Reihe $\frac{1}{m}-\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m+2n}-\frac{1}{m+3n}\ldots\ldots$ gegeben, welche man bekanntlich aus $\int\frac{x^{m-1}dx}{1+x^n}$ erhält, wenn man nach der Integration $x=1$ setzt, und diese Reihe soll in einen Kettenbruch verwandelt werden, so ist, im Vergleich mit der Reihe (*Q.*), $x=1$, $A_1=A_2=A_3$ etc. $=1$, $\alpha_1=m$, $\alpha_2=-(m+n)$, $\alpha_3=m+2n$, und überhaupt $\alpha_{2r+1}=(m+2rn)$, $\alpha_{2r}=-(m+(2r-1)n)$, und die ganze Reihe $=Q-1$, also

$$=\frac{1}{m}-\cfrac{m^2}{-(m+n)+m-\cfrac{(m+n)^2}{m+2n-(m+n)-\cfrac{(m+2n)^2}{-m+3n+(m+2n)}-\text{etc.}}}$$

Reducirt man den Bruch und verändert die Zeichen (nach §. 19.), so verwandelt sich dieser Bruch in folgenden: $F(1:m+m^2:n+(m+n)^2:n$ etc.), welchen man durch ${}_{0\ldots\infty}^{x}F\left(\frac{1}{m+\frac{(m+xn)^2}{n}}\right)$ bezeichnen kann, oder durch

$${}_{0\ldots\infty}^{x}F[1:m+(m+xn)^2:n].$$

Setzt man $m=1$, $n=2$, so wird die Reihe $=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$ etc. $=\frac{\pi}{4}$, und Kettenbruch $\frac{\pi}{4}={}_{0\ldots\infty}^{x}F[1:1+(1+2x)^2:2]$ *), wie schon früher (§. 28.) gefunden wurde.

34.

Substituirt man in §. 32. statt n den Exponenten $r+n$, so hat man nach Formel (1.),

(*a.*) $(1+x)^{r+n}={}_{1\ldots\infty}^{m}F[1+(r+n)x:1-m(r+n-m)x:(m+1+(r+n-m)x)]$.

Nun ist

(*b.*) $(1+x)^r={}_{1\ldots\infty}^{r}F[1+rx:1-m(r-m)x:(m+1+(n-m)x)]$,

(*c.*) $(1+x)^n={}_{1\ldots\infty}^{n}F[1+nx:1-m(n-m)x:(m+1+(n-m)x)]$,

---

*) Dieser Kettenbruch ist historisch merkwürdig, weil er die erste Veranlassung zur Ausbildung der Theorie der Kettenbrüche war. Er wurde von Baron Brounker gefunden, der ihn Wallis (s. dessen *Arithm. Inf. Prop.* 191.) mittheilte. Euler behauptet an mehreren Orten (z. B. *mém. de l'ac. de Pétersb. T.* 5. *pag.* 31.), Brounker habe diesen Kettenbruch aus der schon vor Leibnitz bekannten Reihe $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ etc. abgeleitet, indessen scheint doch aus Wallis Worten hervorzugehen, dafs Brounker ihn auf dem viel weitläufigeren, von Wallis angegebenen Wege, gefunden hat, denn in der angeführten Stelle heifst es: *quum vero nobilissimo viro difficilius persuasum iri video, ut illud ipse suscipere velit, conabor ego rem illam ad ipsius mentem, quam possim, proxime, breviter exhibere.*

also

$$(a) = (b).(c).$$

Man sieht leicht wie sich auf ähnliche Weise noch unendlich viele Beziehungen finden lassen. Hätte man den Ausdruck

$$\frac{A.x^m + A_1.x^{m+h} + A_2.x^{m+2h} \ldots .}{Bx^n + B_1x^{n+k} + B_2x^{n+2k} \ldots .},$$

welchen man in einen Kettenbruch verwandeln will, so müfste man ihn erst nach bekannten Regeln in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandeln, und auf diese das gezeigte Verfahren anwenden *).

Zweite Methode.

35.

Die Kettenbrüche, welche man nach der ersten Methode aus den Reihen erhält, haben alle, wie die allgemeine Form zeigt, sowohl in allen Theilzählern als Theilnennern, die Gröfse x. Die zweite Methode aber beruht auf einem auch sonst in der Analysis gebräuchlichen Verfahren, wodurch man Kettenbrüche von anderer Form erhalten kann. Man denkt sich nemlich den Kettenbruch als schon vorhanden, und vergleicht ihn mit der gegebenen Reihe, wodurch man den Werth der einzelnen Theilzähler und Theilnenner erhält. Die Form des Kettenbruchs könnte also hypothetisch willkürlich angenommen werden; aber am brauchbarsten werden diejenigen Kettenbrüche sein, bei welchen die Gröfse x entweder nur in allen Theilzählern oder in allen Theilzählern und Theilnennern vorkommt; es sollen daher nur Kettenbrüche dieser Art berücksichtigt werden.

36.

Es sei also die Reihe

$$(T.) \quad 1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 \text{ etc.}$$

gegeben, welche in einen Kettenbruch verwandelt werden soll, dessen Theilzähler alle $= x$ sind. Man setze den gesuchten Kettenbruch $= F(1 + x : a_1 + x : a_2 + x : a_3 \text{ etc.})$ **), so ist

$A_1x + A_2x^2 \ldots . = F(x : a_1 + x : a_2 \ldots .)$ oder $A_1 + A_2x \ldots . = F(1 : a_1 + x : a_2 \ldots .)$.

Ferner setze man $F(a_1 + x : a_3 \ldots .) = P$, also ist $A_1 + A_2x \ldots . = \frac{1}{a_1 + \frac{x}{P}}$ und

*) Über diese Methode, Reihen in Kettenbrüche zu verwandeln, s. m. besonders Euler in *Introd. in Anal. inf.* und *Opusc. analyt. T. 2. pag.* 138 ff.

**) Die Formel $F(1 + \alpha_1 x : \alpha_1 + \alpha_2 x : \alpha_2 \text{ etc.})$ würde nicht allgemeiner sein, weil es immer möglich ist, die Gröfsen α_1, α_2 .... aus dem Zähler zu schaffen (§. 18.).

$$(1.) \quad (A_1 + A_2 x \ldots.)\left(a_1 + \frac{x}{P}\right) - 1 = 0,$$

folglich, da die constanten Glieder einander aufheben müssen:

$$A_1 a_1 - 1 = 0 \text{ oder } a_1 = \frac{1}{A_1},$$

und man erhält aus (1.) die Gleichung:

$$a_1(A_2 x + A_3 x^2 \ldots.) + \frac{x}{P}(A_1 + A_2 x \ldots.) = 0,$$

oder

$$a_1 P(A_2 x + A_3 x^2 \ldots.) + x(A_1 + A_2 x \ldots.) = 0,$$

also auch

$$a_1 P(A_2 + A_3 x \ldots.) + (A_1 + A_2 x \ldots.) = 0.$$

Man setze nun $P = a_2 + \frac{x}{P_1}$, so hat man

$$(2.) \quad a_1\left(a_2 + \frac{x}{P_1}\right)(A_2 + A_3 x \ldots.) + (A_1 + A_2 x \ldots.) = 0,$$

also auch

$$a_1 a_2 A_2 + A_1 = 0, \text{ und } a_2 = -\frac{A_1}{a_1 A_2}.$$

Aus Gleichung (2.) folgt wieder

$$a_1 a_2(A_3 + A_4 x \ldots.) + \frac{a_1}{P_1}(A_2 + A_3 x \ldots.) + (A_2 + A_3 x \ldots.) = 0,$$

und wenn man $P_1 = a_3 + \frac{x}{P_2}$ setzt:

$$3. \quad a_1 a_2\left(a_3 + \frac{x}{P_2}\right)(A_3 + A_4 x \ldots.) + a_1(A_2 + A_3 x \ldots.) + \left(a_3 + \frac{x}{P_2}\right)(A_2 + A_3 x \ldots.) = 0,$$

also

$$a_1 a_2 a_3 A_3 + a_1 A_2 + a_3 A_2 = 0, \text{ d. h. } a_3 = -\frac{a_1 A_2}{A_2 + a_1 a_2 A_3}.$$

Aus (3.) würde man wieder die Bedingungsgleichung

$$a_1 a_2 a_3 a_4 A_4 + a_1 a_2 A_3 + a_1 a_4 A_3 + a_3 a_4 A_3 + A_2 = 0$$

erhalten, woraus wieder a_4 gefunden wird, und so könnte man allmälig alle Theilnenner des Kettenbruches finden.

Es ist aber leicht, jede folgende Bedingungsgleichung aus der vorhergehenden abzuleiten. Schreibt man nemlich die schon erhaltenen auf etwas geänderte Weise, so findet man

$$a_1 A_2 a_2 + A_1 = 0,$$

$$(a_1 A_3 a_2 + A_2) a_3 + a_1 A_2 = 0,$$

$$[(a_1 a_2 A_4 + A_3) a_3 + a_1 A_3] a_4 + a_1 a_2 A_3 + A_2 = 0.$$

Hieraus kann man nach Analogie folgendes Gesetz ableiten:

Wenn a_m durch die Gleichung $Q a_m + q = 0$ bestimmt wird, so dafs q nicht a_m enthält, so wird a_{m+1} durch die Gleichung $(Q_1 a_m + q_1) a_{m+1} + Q = 0$ bestimmt, wo Q_1, q_1, die Ausdrücke bedeuten, die man erhält,

wenn man in Q und q den Index *) aller darin vorkommender A um eine Einheit erhöht.

Um die allgemeine Gültigkeit dieses Satzes einzusehen, nehme man an, es sei die Gleichung $Qa_m + q = 0$ aus der Gleichung

$$(U.)\quad \left(a_m + \frac{x}{P_{m-1}}\right)(Q + Q_1 x + Q_2 x^2 \ldots.) + q + q_1 x + q_2 x^2 \ldots. = 0$$

entstanden, wo $P_{m-1} = a_{m+1} + \frac{x}{a_{m+2}}$ etc. ist, und Q_n, q_n die Ausdrücke bedeuten, die man aus Q_{n-1}, q_{n-1} erhält, indem man den Index aller in Q_{n-1}, q_{n-1} vorkommender A um eine Einheit erhöht. Läfst man die constanten Glieder weg, und dividirt mit x, so verwandelt sich die Gleichung $(U.)$, wenn man zugleich statt P_{m-1} den Werth $a_{m+1} + \frac{x}{P_m}$ setzt, in folgende:

$$\left(a_{m+1} + \frac{x}{P_m}\right)[(Q_1 a_m + q_1) + (Q_2 a_m + q_2)x + \ldots.] + Q + Q_1 x + Q_2 x^2 \ldots. = 0,$$

und hieraus folgt

$$(Q_1 a_m + q_1) a_{m+1} + Q = 0.$$

Die Formel $(U.)$ ist aber, wie aus dem Vorhergehenden erhellt, für die Werthe $m = 2$, $m = 3$, folglich auch für alle folgende Werthe von m richtig, und das angegebene Gesetz ist daher allgemein.

37.

Aus den Formeln $a_m = -\frac{q}{Q}$, $a_{m+1} = -\frac{Q}{Q_1 a_m + q}$ folgt, dafs der Nenner des Bruches, durch welchen irgend ein Theilnenner bestimmt wird, der Zähler des Bruches ist, durch welchen der darauf folgende Theilnenner bestimmt wird. Um daher das Bildungsgesetz dieser Theilnenner zu kennen, hat man nur nöthig, das der Nenner der Brüche, durch welche sie bestimmt werden, zu suchen. In der Folge soll N_m der Nenner des Bruches sein, durch welchen a_m bestimmt wird, so dafs $a_m = -\frac{N_{m-1}}{N_m}$ ist.

38.

Hat man den Kettenbruch $F(a_1, a_m) = F(a_1 + 1 : a_2 + \ldots. + 1 : a_m)$, so kommen in dem Zähler dieses Kettenbruches a_1, a_m Glieder vor, welche alle Elemente a_1, $a_2 \ldots. a_m$, andere, die nur $m-2$, $m-4$ u. s. w. Elemente enthalten. Man bezeichne die Summe der Glieder, die $m-n$ Elemente enthalten, durch $(a_1, a_m)_n$, so ist

*) Es versteht sich von selbst, dafs man sich hierbei a_1, a_2 u. s. w. nicht selbst wieder durch A_1, A_2 u. s. w. ausgedrückt denken darf.

$$a_1, a_m = (a_1, a_m)_0 + (a_1, a_m)_2 + (a_1, a_m)_4 \ldots .\ ^*).$$

Nun ist

$$a_1, a_{m+1} = a_{m+1} \cdot a_1, a_m + a_1, a_{m-1} \quad (\S.\ 6.),$$

folglich auch

$$(a_1, a_{m+1})_n = a_{m+1} \cdot (a_1, a_m)_n + (u_1, a_{m-1})_{n-2}.$$

Giebt man nun den Buchstaben a_1, a_2, u. s. w. dieselbe Bedeutung, wie in den vorhergehenden §§., so hat man allgemein

$$N_m = (a_1, a_{m-1})_0 \cdot A_m + (a_1, a_{m-1})_2 \cdot A_{m-1} + (a_1, a_{m-1})_4 \cdot A_{m-2} \ldots .$$

Angenommen, es sei dieser Ausdruck bis zu einem gewissen Werthe von m richtig, so dafs

4. $N_{m-1} = (a_1, a_{m-2})_0 \cdot A_{m-1} + (a_1, a_{m-2})_2 \cdot A_{m-2} + (a_2, a_{m-2})_4 A_{m-3} \ldots .$

5. $N_m = (a_1, a_{m-1})_0 \cdot A_m + (a_1, a_{m-1})_2 \cdot A_{m-1} + (a_1, a_{m-1})_4 A_{m-2} \ldots .$

so hat man

$$a_m N_m + N_{m-1} = a_m (a_1, a_{m-1})_0 A_m + [a_m (a_1, a_{m-1})_2 + (a_1, a_{m-2})_0] A_{m-1} +$$
$$[a_m (a_1, a_{m-1})_4 + (a_1, a_{m-2})_2] A_{m-2} \ldots = (a_1, a_m)_0 A_m + (a_1, a_m)_2 A_{m-1} + (a_1, a_m)_4 A_{m-2} \ldots$$

Es ist aber, nach (§. 36.), $N_{m+1} = a_m N_m + N_{m-1}$, vorausgesetzt, dafs man den Index der A, in N_m und N_{m-1} überall um eine Einheit erhöhet, folglich ist

$$N_{m+1} = (a_1, a_m)_0 A_{m+1} + (a_1, a_m)_2 A_m + (a_1, a_m)_4 A_{m-1} \ldots .$$

also die angenommene Form auch noch für den Werth $m+1$ richtig. Aus §. 36. folgt aber

$$N_3 = (a_1, a_2)_0 A_3 + (a_1, a_2)_2 A_2,$$
$$N_4 = (a_1, a_3)_0 A_4 + (a_1, a_3)_2 A_3.$$

Die Formeln (4.), (5.) sind daher für den Fall $m = 4$, und also auch für alle folgende Werthe von m richtig.

Man hat also folgende Regel: Will man den Nenner des Bruches wissen, der den Werth von a_m angiebt, so bilde man aus den bekannten Werthen $a_1, a_2, \ldots . a_{m-1}$ einen Kettenbruch $F(a_1 + 1 : a_2 \ldots . + 1 : a_{m-1})$, nehme den Zähler a_1, a_{m-1} dieses Bruches und multiplicire jeden Theil $(a_1, a_{m-1})_{2n}$ mit A_{m-n}, so giebt die Summe dieser Producte den gesuchten Nenner. Da aber $a_m = -\frac{N_{m-1}}{N_m}$ ist, so hat man

$$a_m = -\frac{(a_1, a_{m-2})_0 A_{m-1} + (a_1, a_{m-2})_2 A_{m-2} + \ldots .}{(a_1, a_{m-1})_0 A_m + (a_1, a_{m-1})_2 A_{m-1} + \ldots .}.$$

Eigentlich mufs man bei dem Werthe von N_m zwei Fälle unterscheiden, je nachdem $m = 2n$, oder $= 2n+1$, d. h. eine gerade oder ungerade Zahl ist. Je nachdem der eine oder andere Fall eintritt, hat man

$$N_{2n} = (a_1, a_{2n-1})_0 \cdot A_{2n} + (a_1, a_{2n-1})_2 \cdot A_{2n-1} + \ldots . + (a_1, a_{2n-1})_{2n-2} \cdot A_{n+1},$$

*) Ist m eine gerade Zahl, so ist das letzte Glied dieses Ausdrucks $(a_1, a_m)_m = 1$.

oder

$$N_{2n+1} = (a_1, a_{2n})_0 \cdot A_{2n+1} + (a_1, a_{2n})_2 \cdot A_{2n} + \ldots + (a_1, a_{2n})_{2n-2} A_{n+2} + A_{n+1}.$$

Man bemerke noch Folgendes: Ist $N_{m-1} = \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_{m-1}}$, so ist auch $N_m = -\frac{N_{m-1}}{N_m} = \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_m}$. Da nun $N_2 = a_1 A_2 = -\frac{A_1}{a_1}$ und $A_1 = \frac{1}{a_1}$ (§. 36.), also $N_2 = -\frac{1}{a_1 \cdot a_2}$ ist, so hat man allgemein:

$$N_{2m} = -\frac{1}{a_1 \cdot a_2 \ldots a_{2m}}, \quad N_{2m+1} = \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \ldots a_{2m+1}}$$

oder

$$N_{2m} = -\frac{1}{(a_1, a_{2m})_0}, \quad N_{2m+1} = \frac{1}{(a_1, a_{2m+1})_0}.$$

Hierdurch hat man einen bequemeren Ausdruck für a_m gewonnen, nemlich

$$a_m = \pm \frac{1}{(a_1, a_{m-1})_0} \times \frac{1}{(a_1, a_{m-1})_0 A_m + (a_1, a_{m-1})_2 A_{m-1} + \ldots},$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem m eine gerade oder ungerade Zahl ist.

39.

Es sei die Reihe $x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} \ldots\right) = \log(1+x)$ gegeben, die nach §. 36. in einen Kettenbruch verwandelt werden soll. Hier ist $(T.) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} \ldots$ und daher $A_1 = -\frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{1}{3}$, $A_3 = -\frac{1}{4}$ etc. allgemein $A_{2m-1} = -\frac{1}{2m}$, $A_{2m} = \frac{1}{2m+1}$. Man findet daher die Werthe von a_1, a_2 u. s. w. nach §. 36. auf folgende Weise. Es ist

$$a_1 = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 = -2.1^3,$$

$$-2 A_2 \cdot a_2 + A_1 = 0,$$

also

$$a_2 = -\frac{3}{4} = -\frac{3}{1^2 \cdot 2^2},$$

$$-2 A_3 a_2 + A_2 = \frac{3}{2} A_3 + A_2 = -\frac{1}{2 \cdot 4},$$

also

$$(\tfrac{3}{2} A_3 + A_2) a_3 - 2 A_2 = 0,$$

und

$$a_3 = -16 = -2.2^3,$$

$$(\tfrac{3}{2} A_4 + A_3) a_3 - 2 A_3 = \frac{3}{10},$$

$$[(\tfrac{3}{2} A_4 + A_3) a_3 - 2 A_3] a_4 + \tfrac{3}{2} A_3 + A_2 = 0,$$

oder

$$a_4 - \frac{5}{3^2} = -\frac{5}{2^2 \cdot 3^2}.$$

Fährt man auf diese Weise fort, so findet man, dafs überhaupt

$$a_{2m} = -\frac{2m+1}{m^2.(m+1)^2}, \quad a_{2m+1} = -2(m+1)^3$$

ist, und man hat daher

$$\log(1+x) = x.F\left(1+x:-2+x:-\frac{3}{1^2.2^2}+x:-2.2^3+x:-\frac{5}{2^2.3^2}\ldots.\right)$$

$$= x.F\left(1-x:2+x:\frac{3}{1^2.2^2}+x:2.2^3\ldots.\right)\ldots. \quad (\S.\ 19.)$$

oder

$$\log(1+x) = x.{}_1^m{}_{-\infty}^m F\left(1-x:2+x:\frac{2m+1}{m^2(m+1)^2}+x:2(m+1)^3\right).$$

Wäre der Ausdruck $(1+x)^m = 1+mx+\frac{m.m-1}{1.2}x^2\ldots.$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, so hätte man $a_1 = \frac{1}{m}$; $\frac{1}{m}A_2.a_2+A_1 = 0$, also $a_2 = -\frac{2m}{m-1}$; $\frac{1}{m}A_3.a_2+A_2 = \frac{m.m+1}{1.2.3}$; $\left(\frac{1}{m}A_3.a_2+A_2\right)a_3+\frac{1}{m}A_2 = 0$; also

$$a_3 = -\frac{3(m-1)}{m.m+1},$$

und man fände allgemein

$$a_{2n} = \pm\frac{2.m.(m+1)\ldots.(m+n-1)}{m-1.(m-2)\ldots.(m-n)}, \quad a_{2n+1} = \pm\frac{(2n+1).(m-1)(m-2)\ldots.(m-n)}{m.(m+1)\ldots.(m+n)},$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Man überzeugt sich leicht, dafs der entsprechende Kettenbruch abbricht, wenn m eine ganze, positive oder negative Zahl ist, und kann hier ähnliche Betrachtungen wie in §. 32. anstellen.

Aus der Gleichung (*U.*) in §. 36. folgt

$$a_m(Q_1x+Q_2x^2\ldots.)+\frac{x}{P_{m-1}}(Q+Q_1x+\ldots.)+q_1x+q_2x^2\ldots. = 0,$$

oder

$$P_{m-1} = -\frac{Q+Q_1x+Q_2x^2\ldots.}{a_mQ_1+q_1+(a_mQ_2+q_2)x+(a_mQ_3+q_3)x^2\ldots.},$$

durch welche Formel der Rest des Kettenbruchs ausgedrückt wird, wenn man denselben bis zum Theilnenner a_m berechnet hat.

40.

Es ist nun leicht, auch den Ausdruck $\frac{1+A_1x+A_2x^2+\ldots.}{1+B_1x+B_2x^2+\ldots.}$ in einen Kettenbruch $F(1+x:a_1+x:a_2\ldots.)$ zu verwandeln. Angenommen, dafs P, $P_1\ldots.$ dieselbe Bedeutung haben wie in §. 36., so findet man

$$\frac{1+A_1x+A_2x^2\ldots.}{1+B_1x+B_2x^2\ldots.} = \frac{a_1+\frac{x}{P}+x}{a_1+\frac{x}{P}}$$

und

$$\left(a_1+\frac{x}{P}\right)[(A_1-B_1)x+(A_2-B_2)x^2+\ldots.]-x(1+B_1x+B_2x^2\ldots.)=0.$$

Dividirt man diese Gleichung mit x, und setzt zugleich $A_m-B_m=C_m$, so hat man

$$(U_1.)\quad (C_1+C_2x+\ldots.)\left(a_1+\frac{x}{P}\right)-1-(B_1x+B_2x^2\ldots.)=0.$$

Diese Gleichung enthält alle Glieder, welche die Gleichung (1.) in §. 36. enthält, sobald man statt A den Buchstaben C setzt, aufserdem aber noch die Glieder B_1x, $B_2x^2\ldots.$ Die Bedingungsgleichungen werden also dieselben Glieder enthalten, wie die des erwähnten §., sobald statt A der Buchstabe C gesetzt wird, nur werden noch einige den Buchstaben B enthaltende Glieder dazu kommen. Die Entwickelung der Gleichung $(U_1.)$ zeigt dies am besten. Zuerst folgt aus derselben

$$a_1C_1-1=0 \text{ und } a_1=\frac{1}{C_1},$$

also

$$a_1(C_2x+C_3x^2\ldots.)+\frac{x}{a_2+\frac{x}{P_1}}(C_1+C_2x\ldots.)-(B_1x+B_2x^2\ldots.)=0,$$

oder

$$\left(a_2+\frac{x}{P_1}\right)[a_1C_2-B_1+(a_1C_3-B_2)x+(a_1C_4-B_3)x^2\ldots.]+C_1+C_2x\ldots.=0.$$

Die Glieder, welche B enthalten, erhält man aus denjenigen, die C enthalten, indem man statt a_1C_2, a_1C_3 u. s. w. bezüglich $-B_1$, $-B_2$ u. s. w. setzt. Man findet daher die Bedingungsgleichungen auf folgende Weise: Man denke sich zuerst, es sei die Gleichung

$$(m.)\quad (C_1+C_2x\ldots.)\left(a_1+\frac{x}{P}\right)-1=0$$

gegeben (d. h. man nehme an, es solle die Reihe $1+C_1x+C_2x^2\ldots.$ in einen Kettenbruch $F(1+x:a_1+x:a_2\ldots.)$ verwandelt werden), und entwickele die Bedingungsgleichungen, die die Werthe von a_1, a_2 u. s. w. bestimmen, nach §. 36. ff.; man setze in den erhaltenen Bedingungsgleichungen $a_1C_2=-B_1$, $a_1C_3=-B_2$ u. s. w. und addire die hieraus entstehenden Glieder zu den schon erhaltenen, so hat man die wahren Bedingungsgleichungen. Aus der Gleichung $(m.)$ erhielte man z. B. die Bedingungsgleichungen

$$a_1C_2a_2+C_1=0,$$
$$(a_1a_2C_3+C_2)a_3+a_1C_2=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

daher sind die wahren Bedingungsgleichungen:

$$a_1 C_2 a_2 + C_1 - B_1 a_2 = 0,$$
$$(a_1 a_2 C_3 + C_2) a_3 + a_1 C_2 - a_2 B_2 a_3 - B_1 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

41.

Zwei auf einander folgende, aus der Gleichung (m.) entwickelte Bedingungsgleichungen werden allgemein durch die Formeln

$$1. \quad Q a_m + q = 0,$$
$$2. \quad (Q_1 a_m + q_1) a_{m+1} + Q = 0$$

dargestellt werden können, wenn man unter Q_1, q_1 die Werthe versteht, die man aus Q, q, erhält, indem man den Index der C überall um eine Einheit erhöht (§. 36.).

Aus (1.) und (2.) erhält man die wahren Bedingungsgleichungen

$$3. \quad (Q - R) a_m + q - r = 0,$$
$$4. \quad [(Q_1 - R_1) a_m + q_1 - r_1] a_{m+1} + Q - R = 0,$$

wo R, r, R_1, r_1, die Werthe bedeuten, die man erhält, indem man in Q, q, Q_1, q_1 statt $a_1 C_2$, $a_1 C_3$ u. s. w. $-B_1$, $-B_2$ u. s. w. setzt. Man würde aber R_1, r_1 auch unmittelbar aus R, r, erhalten können, indem man den Index der B um eine Einheit erhöhte, und man kann daher sagen: Ist ein Theilnenner a_m durch die Gleichung $0 = S a_m + T$ gegeben, so erhält man den folgenden a_{n+1} durch die Gleichung $(S_1 a_m + T_1) a_{m+1} + S = 0$, wo S_1, T_1 die Werthe bedeuten, die man aus S und T erhält, indem man den Index aller C und aller B um eine Einheit erhöht. Auch hier ist also der Nenner des Bruches, durch welchen a_m bestimmt wird, der Zähler desjenigen, durch welchen a_{m+1} bestimmt wird, und man hat daher auch hier nur nöthig, das Bildungsgesetz der Nenner dieser Brüche zu erforschen. Bezeichnet man wieder durch N_m den Nenner des Bruches, durch welchen a_m bestimmt wird, so giebt die Gleichung (5.) in §. 38. sogleich den Theil des Werthes von N_m, in welchem C vorkommt, nemlich

$$(a_1, a_{m-1})_0 C_m + (a_1, a_{m-1})_2 C_{m-1} + (a_1, a_{m-1})_4 C_{m-2} + \ldots.$$

Hieraus mufs der andere Theil des Werthes von N_m abgeleitet werden, indem man allgemein statt $a_1 C_n$ den Werth $-B_{n-1}$ setzt. In dieser Hinsicht bemerke man, dafs $a_1, a_{m-1} = a_1 . a_2, a_{m-1} + a_3, a_{m-1}$, und daher auch $(a_1, a_{m-1})_{2n} = a_1 (a_2, a_{m-1})_{2n} + (a_3, a_{m-1})_{2n-2} \ldots$ (§. 4.). Aus irgend einem Gliede $(a_1, a_{m-1})_{2n} . C_{m-n}$ folgt daher durch die erwähnte Substitution das Glied $-B_{m-n-1} (a_2, a_{m-1})_{2n}$, und man hat daher:

$$N_m = \begin{cases} (a_1, a_{m-1})_0 C_m + (a_1, a_{m-1})_2 C_{m-1} + (a_1, a_{m-1})_4 C_{m-2} \ldots . \\ \quad - (a_2, a_{m-1})_0 B_{m-1} - (a_2, a_{m-1})_2 B_{m-2} \ldots . \end{cases}$$

Man muſs auch hier zwei Fälle unterscheiden, je nachdem m eine gerade oder ungerade Zahl ist. Ist $m = 2n$, so hat man

$$N_{2n} = \begin{cases} (a_1, a_{2n-1})_0 C_{2n} + (a_1, a_{2n-1})_2 C_{2n-1} + \ldots . + (a_1, a_{2n-1})_{2n-2} . C_{n+1} \\ \quad - (a_2, a_{2n-1})_0 B_{2n-1} + \ldots . - (a_2, a_{2n-1})_{2n-4} . B_{n+1} - B_n ; \end{cases}$$

ist dagegen $m = 2n+1$, so hat man:

$$N_{2n+1} = \begin{cases} (a_1, a_{2n})_0 C_{2n+1} + (a_1, a_{2n})_2 C_{2n} + \ldots . + (a_1, a_{2n})_{2n-2} C_{n+2} + C_{n+1} \\ \quad - (a_2, a_{2n})_0 B_{2n} + \ldots . - (a_2, a_{2n})_{2n-4} B_{n+2} - (a_2, a_{2n})_{2n-2} B_{n+1} . \end{cases}$$

Da $a = -\frac{N_{m-1}}{N_m}$ ist, so wird $N_m = \frac{1}{a_1 . a_2 \ldots . a_m}$, wenn $N_{m-1} = \frac{-1}{a_1 . a_2 \ldots . a_{m-1}}$ ist. Nun hat man (§. 40.) $a_1 C_2 a_2 + C_1 = 0$, also $N_2 = a_1 C_2 = -\frac{C_1}{a_2}$, aber $a_1 = \frac{1}{C_1}$, also $N_2 = -\frac{1}{a_1 . a_2}$, und daher allgemein:

$$N_{2n} = -\frac{1}{a_1 . a_2 \ldots . a_{2n}}, \quad N_{2n+1} = \frac{1}{a_1 . a_2 \ldots . a_{2n+1}} .$$

42.

Es soll z. B. der Ausdruck

$$\frac{x(e^x + e^{-x})}{e^x - e^{-x}} = \frac{x(e^{2x}+1)}{e^{2x}-1} = \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots .}{1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} + \ldots .}$$

in einen Kettenbruch verwandelt werden. Man setze $x^2 = y$, so geht dieser Ausdruck in folgenden über: $\frac{1 + \frac{y}{2!} + \frac{y^2}{4!} + \frac{y^3}{6!} + \ldots .}{1 + \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} + \frac{y^3}{7!} + \ldots .}$. Hier ist $C_1 = -\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} = \frac{2}{3!}$, $C_2 = \frac{1}{5!} - \frac{1}{4!} = -\frac{4}{5!}$, $C_3 = -\frac{1}{7!} + \frac{1}{6!} = \frac{6}{7!}$, allgemein $C_m = \frac{2m}{(2m+1)!}$, und $B_m = \frac{1}{(2m+1)!}$, also

$$a_1 = \frac{1}{C_1} = 3,$$

$$N_2 = a_1 C_2 - B_1 = \frac{1}{3.5}, \quad a_2 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3.5}} = 5,$$

$$N_3 = a_1 a_2 C_3 + C_2 - a_2 B_2 = \frac{1}{3.5.7}, \quad a_3 = \frac{\frac{1}{3.5}}{\frac{1}{3.5.7}} = 7.$$

Fährt man auf diese Weise fort, so findet man dafs allgemein $a_m = 2m+1$ ist, und es ist daher der entsprechende Kettenbruch $= {}_1^m{}_{-\infty}F[1+x^2 : (2m+1)]$.

43.

Soll der Ausdruck $\dfrac{1}{1+B_1 x+B_2 x^2 \ldots .}$ in einen Kettenbruch

$$F(1+x : a_1 + x : a_2 \ldots .)$$

verwandelt werden, so erhält man die gesuchten Werthe sogleich aus §. 40., wenn man $A_1, A_2 \ldots . = 0$ setzt, d. h. statt C_n überall $-B_n$ substituirt; also ist

$$N_{2n} = \left\{\begin{matrix} -(a_1, a_{2n-1})_0 . B_{2n} - (a_1, a_{2n-1})_2 . B_{2n-1} - \ldots - (a_1, a_{2n-1})_{2n-2} B_{n+1} \\ -(a_2, a_{2n-1})_0 . B_{2n-1} \ldots . - (a_2, a_{2n-1})_{2n-4} . B_{n+1} - B_n \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{a_1 . a_2 \ldots a_{2n}},$$

und

$$N_{2n+1} = \left\{\begin{matrix} -(a_1, a_{2n})_0 . B_{2n+1} - (a_1, a_{2n})_2 . B_{2n} - \ldots - (a_1, a_{2n})_{2n-2} B_{n+2} - B_{n+1} \\ -(a_2, a_{2n})_0 . B_{2n} \ldots . - (a_2, a_{2n})_{2n-2} . B_{n+1} \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{a_1 . a_2 \ldots a_{2n+1}}.$$

Für diesen Fall trifft also die Regel, wie man eine folgende Bedingungsgleichung aus einer vorhergehenden findet, vollkommen mit der des §. 36. zusammen. Ist nemlich a_m durch die Gleichung $S a_m + T = 0$ gegeben, so wird die folgende $(S_1 a_m + T_1) a_{m+1} + S = 0$ sein, wo S_1, T_1 aus S, T entsteht, indem man den Index der B um einel Einheit erhöht. Soll z. B. der Ausdruck $\dfrac{1}{(1+x)^m} = \dfrac{1}{1+m.x+\dfrac{m.m-1}{1.2}x^2 \ldots .}$ in einen Kettenbruch verwandelt werden, so hat man $B_1 = m$, $B_2 = \dfrac{m.m-1}{1.2}$ etc., also

$$a_1 = \frac{1}{B_1} = -\frac{1}{m},$$

$$N_2 = -a_1 B_2 - B_1 = -\frac{(m+1)}{1.2}, \quad a_2 = \frac{m}{-\dfrac{(m+1)}{1.2}} = -\frac{2m}{m+1},$$

$$N_3 = -(a_1 a_2 B_3 + B_2 + a_2 B_2) = -\frac{m(m-1)}{2.3}, \quad a_3 = \frac{-\dfrac{(m+1)}{1.2}}{-\dfrac{m(m-1)}{2.3}} = \frac{3(m+1)}{m(m-1)},$$

und man findet, dafs allgemein

$$a_{2n} = \pm \frac{2.m.(m-1)\ldots.(m-n+1)}{(m+1)(m+2)\ldots.(m+n)}, \quad a_{2n+1} = \pm \frac{(2n+1)(m+1)(m+2)\ldots.(m+n)}{m.(m-1)\ldots.(m-n)},$$

wo das obere oder untere Zeichen genommen werden mufs, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Dasselbe Resultat ergiebt sich auch aus dem in §. 39. gefundenen Kettenbruche, der den Werth von

$(1+x)^m$ angiebt, sobald man dort überall statt m den Werth $-m$ substituirt. Man vergl. auch §. 32.

44.

Will man die Reihe $1+A_1x+A_2x^2+\ldots.$ in einen Kettenbruch verwandeln, der die Form $F(1:1+x:a_1+x:a_2\ldots.)$ haben soll, so kann man die Werthe von a_1, a_2 .... unmittelbar auf ähnliche Weise wie in (§. 36.) finden. Leichter werden sie auf folgende Weise gefunden. Aus der angenommenen Form des Kettenbruchs folgt $\frac{1}{1+A_1x+A_2x^2\ldots.} = F(1+x:a_1+x:a_2\ldots.)$. Die Werthe von a_1, a_2 .... werden also ganz dieselben sein, wie in (§. 43.), sobald man statt B überall A setzt.

Will man den Ausdruck $\frac{1}{1+B_1x+B_2x^2\ldots.}$ in einen Kettenbruch verwandeln, der die Form $F(1:1+x:a_1+x:a_2\ldots.)$ haben soll, so ist $1+B_1x+B_2x^2\ldots. = F(1+x:a_1+x:a_2\ldots.)$. Die gesuchten Gröfsen würden also auf dieselbe Weise wie in §. 36. ff. gefunden.

Soll dagegen der Ausdruck $\frac{1+A_1x+A_2x^2+\ldots.}{1+B_1x+B_2x^2+\ldots.}$ in einen Kettenbruch $F(1:1+x:a_1+x:a_2\ldots.)$ verwandelt werden, so könnte man statt dessen $\frac{1+B_1x+B_2x^2+\ldots.}{1+A_1x+A_2x^2+\ldots.} = F(1+x:a_1+x:a_2\ldots.)$ setzen. Die Aufgabe ist alsdann auf die des (§. 40.) zurückgeführt, und man kann die dort gefundenen Werthe unmittelbar anwenden, wenn man A und B überall vertauscht.

45.

Es möge noch der Fall hervorgehoben werden, wenn die Reihe

$$1+A_1x+A_2x^2+\ldots.$$

in einen Kettenbruch verwandelt werden soll, der die Form

$$F[1+x:(a_1+x)+x:(a_2+x)+\ldots.]$$

hat. Aus dieser Annahme folgt sogleich

$$A_1+A_2x+A_3x^2\ldots. = F[1:(a_1+x)+x:(a_2+x)+\ldots.].$$

Man setze $x+\frac{x}{a_2+x+\text{etc.}} = P$, so hat man $(A_1+A_2x+\ldots.)(a_1+P)=1$, und daher

$$A_1a_1-1=0 \text{ oder } a_1=\frac{1}{A_1}.$$

Ferner sei $P=x+\frac{x}{a_2+P_1}$, so hat man

$$\left(a_1+x+\frac{x}{a_2+P_1}\right)(A_2x+A_3x^2\ldots.)+A_1\left(x+\frac{x}{a_2+P_1}\right)=0,$$

oder

$$(A.)\quad A_1(a_2+P_1+1)+(A_2+A_3x+\ldots.)[(a_1+x)(a_2+P_1)+x]=0=$$
$$(a_2+P_1)[(A_1+A_2a_1)+(A_2+A_3a_1)x+(A_3+A_4a_1)x^2....]+A_1+A_2x+A_3x^2....$$

Hieraus folgt $A_1a_2+a_1A_2a_2+A_1=0$, oder $a_2=-\frac{A_1}{A_1+A_1a_2}$.

Man findet allgemein jede Bedingungsgleichung aus der vorhergehenden auf folgende Weise: Ist a_m durch die Gleichung $Qa_m+q=0$ gegeben, so wird a_{m+1} durch die Gleichung $(Q_1a_m+q_1+Q)a_{m+1}+Q=0$ bestimmt, wo Q_1, q_1 wieder die Werthe bedeuten, die man aus Q, q, erhält, indem man den Index der A um eine Einheit erhöht. Denn angenommen, es entstände die Gleichung Qa_m+q aus der Gleichung

$$(1.)\quad (a_m+P_{m-1})(Q+Q_1x+Q_2x^2+\ldots.)+q+q_1x+q_2x^2....=0,$$

wo

$$P_{m-1}=x+\frac{x}{a_{m+1}+x}+\frac{x}{a_{m+2}+x\ \text{etc.}}=x+\frac{x}{a_{m+1}+P_m}$$

ist, so hätte man

$$a_m(Q_1+Q_2x+....)+\left(1+\frac{1}{a_{m+1}+P_m}\right)(Q+Q_1x+Q_2x^2....)+q_1+q_2x....=0,$$

oder

$$(a_{m+1}+P_m)(a_mQ_1+q_1+Q)+(a_{m+1}+P_m)a_m(Q_2x+Q_3x^2....)+$$
$$(a_{m+1}+P_m)(Q_1x+Q_2x^2...)+Q+Q_1x+Q_2x^2....+(a_{m+1}+P_m)(q_2x+q_3x^2+...),$$

woraus $a_{m+1}(a_mQ_1+q_1+Q)+Q=0$ folgt. Da aber die Gleichung (1.) wirklich richtig ist, wenn $m=2$ ist, wie die Gleichung $(A.)$ zeigt, so gilt das angegebene Bildungsgesetz der Bedingungsgleichungen für alle folgende Werthe von m. Man sieht, dafs auch hier der Nenner des Bruches, durch welchen irgend ein Theilnenner a_m bestimmt wird, der Zähler des Bruches ist, durch welchen a_{m+1} bestimmt wird.

Man sieht, dafs hier die Berechnung der Theilnenner verwickelter wird, als bei den früher (§. 36., §. 44.) betrachteten Formen, und ich übergehe daher genauere Erörterungen, die sich leicht aus dem Vorhergehenden ergeben, da ohnehin nicht leicht das Bedürfnifs entstehen wird, Reihen in Kettenbrüche von der hier angenommenen Form zu verwandeln.

46.

Folgende Bemerkungen über die zweite Methode §. 36.—45. mögen hier noch Platz finden. Es ist aus der Darstellung ersichtlich, dafs die Theilnenner a_1, a_2, ... durch die Reihencoefficienten A_1, A_2, ... vollkommen bestimmt sind. Einer jeden Reihe $1+A_1x+A_2x^2+....$

entspricht also nur ein Kettenbruch von angegebener Form, d. h. zwei nicht identische Kettenbrüche, welche beide in einer und derselben der §. 36., §. 44., §. 45., angegebenen Formen enthalten sind, können nicht aus derselben Reihe entstanden sein. Was man also auch für eine, von den früher gegebenen abweichende Methode anwendet, eine Reihe $1+A_1x+A_2x^2\ldots.$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, immer wird dieser Kettenbruch, sobald er in einer der angegebenen Formen enthalten ist, oder darauf zurückgeführt werden kann, mit dem, nach der angegebenen Methoden berechneten zusammenfallen. Wäre die Reihe $1+Ax^m+A_1x^{2m}+\ldots.$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, so würde man sie sogleich auf die frühere Form zurückbringen, indem man $x^m=y$ setzte. Die Theilzähler würden also in diesem Falle nicht mehr x sondern x^m sein. Auch zusammengesetztere Reihen würde man, wie die Analysis lehrt, auf die Form $1+A_1x+A_2x^2\ldots.$ zurückbringen, und daher nach der angegebenen Methode in einen Kettenbruch verwandeln können.

Es darf nicht übersehen werden, dafs diese Methode noch einer weitere Ausbildung bedarf *). Die allgemeinen Ausdrücke für die Theilnenner, welche in den berechneten Beispielen (§. 39., §. 42., § 43.,) gegeben wurden, sind dort nicht durch einen strengen Beweis, sondern vielmehr durch Induction gefunden worden. In allen ähnlichen Fällen, wo die Reihencoefficienten nach einem gewissen Gesetze gebildet sind, wird sich auch ein solches für die Theilnenner der entsprechenden Kettenbrüche angeben lassen. Die vorhergehenden Betrachtungen bieten aber unmittelbar kein Mittel dar, diese allgemeinen Ausdrücke zu finden und zugleich ihre Richtigkeit zu beweisen. Hierzu scheint es vielmehr nothwendig zu sein, einen einfachen Ausdruck zu finden, welcher jeden Theilnenner a_m (oder jedes N_m, N_{m+1}) unmittelbar aus den Reihencoefficienten $A_1, A_2,\ldots.$ finden lehrt. Der Verfasser hat sich vergebens bemüht, die Lösung dieser Aufgabe zu finden, vielleicht aber können die mitgetheilten Ausdrücke für N_m, N_{m+1}, welche wohl noch nirgendwo angegeben sind, darauf führen. Allerdings kann man einen solchen Beweis in vielen Fällen durch andere, im folgenden Abschnitt erläuterte Mittel finden, aber sie sind indi-

*) Diese Bemerkung gilt auch von anderen ähnlichen Methoden, welche man bei anderen Schriftstellern findet. Man vergleiche namentlich *Mém de l'ac. de Pétersb. T. 1. pag. 156. ff., pag. 226. ff., T. 7. pag. 139. ff.* In letzterem Aufsatze sind die allgemeinen Ausdrücke für die Theilnenner keinesweges bewiesen.

rect und beruhen auf Betrachtung einzelner Reihen; daher ist die Ausbildung einer allgemeineren Methode sehr wünschenswerth.

47.

Man braucht die in den vorhergehenden §§. enthaltenen Formeln nur umzukehren, d. h. man braucht nur $a_1, a_2, \ldots$ als bekannte, $A_1, A_2, \ldots$ als unbekannte Gröfsen zu betrachten, um sogleich eine Methode, Kettenbrüche in Reihen zu verwandeln, zu erhalten. Aus der Formel

$$a_m = -\frac{(a_1, a_{m-2})_0 A_{m-1} + (a_1, a_{m-2})_2 A_{m-2} + \ldots.}{(a_1, a_{m-1})_0 A_m + (a_1, a_{m-1})_2 A_{m-1} + \ldots.} \ldots\ldots (\S. 38.)$$

folgt

$$(a_1, a_m)_0 A_m +$$
$$[a_m (a_1, a_{m-1})_2 + (a_1, a_{m-2})_0] A_{m-1} + [a_m (a_1, a_{m-1})_4 + (a_1, a_{m-2})_2] A_{m-2} + \ldots. = 0.$$

Da aber allgemein $(a_1, a_m)_n = a_m (a_1, a_{m-1})_n + (a_1, a_{m-2})_{n-2}$ ist, so geht die obige Gleichung in folgende über:

$$(a_1, a_m)_0 A_m + (a_1, a_m)_2 A_{m-1} + (a_1, a_m)_4 A_{m-2} + \ldots. = 0$$

oder

$$1. \quad A_m = -\frac{(a_1, a_m)_2 A_{m-1} + (a_1, a_m)_4 A_{m-2} + \ldots.}{(a_1, a_m)_0}.$$

Ist also ein Kettenbruch $F(1 + x : a_1 + x : a_2 + \ldots.)$ gegeben, der in eine Reihe $1 + A_1 x + A_2 x^2 \ldots.$ verwandelt werden soll, so zeigt die vorstehende Formel, wie man jeden Coefficienten A_m der Reihe finden kann. Man bemerke noch Folgendes. Sind A_{m-2}, A_{m-1} durch die Bedingungsgleichungen

$$(a_1, a_{m-2})_0 A_{m-2} + q = 0,$$
$$(a_1, a_{m-1})_0 A_{m-1} + Q = 0$$

gegeben, so findet man A_m durch die Gleichung

$$2. \quad a_m . [(a_1, a_{m-1})_0 A_m + Q_1] + (a_1, a_{m-2}) A_{m-1} + q_1 = 0,$$

oder

$$(a_1, a_m)_0 A_m = -(a_m . Q_1 + (a_1, a_{m-2}) A_{m-1} + q_1),$$

wo Q_1, q_1 die Werthe bedeuten, die man aus Q, q erhält, indem man den Index der A um eine Einheit erhöht. Der Beweis dieses Satzes beruht darauf, dafs die Bedingungsgleichungen dieselben, nur anders geordnet, sind, wie in §. 36., also auch auf dieselbe Weise gebildet werden. Ist aber $q . a_{m-1} + r = 0$, so ist auch $a_m (q_1 a_{m-1} + r_1) + q = 0 = Q a_m + q$ und $(Q_1 a_m + q_1) a_{m+1} + Q = (Q_1 a_m + q_1) a_{m+1} + q_1 a_{m-1} + r_1 = 0$, wenn q_1, r_1 die Werthe bedeuten, die man aus q, r erhält, indem man den Index der A

um eine Einheit erhöht. Hieraus ergiebt sich die Wahrheit der Gleichung (2.) von selbst.

Wollte man den Kettenbruch $F(1+x:a_1+x:a_2....)$ nach §. 28. in eine Reihe verwandeln, so hätte man $b_1=b_2=b_3....=x$, und es wäre der zu x^m gehörende Coefficient $A_m=\pm\frac{1}{a_1,\,a_{m-1}.a_1,\,a_m}$. Die resultirende Reihe ist daher auch von der verschieden, die aus dem zuletzt gezeigten Verfahren entsteht.

Soll ein Kettenbruch von der Form $F(1:1+x:a_1+x:a_2....)$ in eine Reihe $1+A_1x+A_2x^2+....$ verwandelt werden, so findet man die erforderlichen Formeln aus §. 44. (oder §. 43.). Die Berechnung wird aber bequemer ausfallen, wenn man einen solchen Kettenbruch in einen anderen $F(1:1+1:b_2+1:b_3)$ verwandelt (§. 25.). Setzt man $b_1=1$, so kann man diesen letzteren Kettenbruch so ansehen, als sei er, durch Hinweglassung der ersten Einheit aus $F(1+1:b_1+1:b_2+.....)$ enstanden, und ihn daher unmittelbar nach dem vorhergehenden in eine Reihe auflösen, indem man $x=1$ setzt.

Hieran knüpft sich zugleich die Bemerkung, dafs man überhaupt alle Kettenbrüche nach der in diesem §. gezeigten Methode in Reihen auflösen kann, weil man sie immer unter die Form $F(1+x:a_1+x:a_2....)$ bringen kann, indem man $x=1$ setzt.

Es sei z. B. der Kettenbruch $F(1:1+1:3+4:5+9:7....)$ gegeben, welcher durch ${}_{1=2}^{m}F(1:1+m^2:2m+1)$ angedeutet werden kann. Statt dessen kann man

$$F\left(1:1+1:3+1:\frac{5}{4}+1:\frac{4.7}{9}+1:\frac{9.9}{8.8}....\right)$$

schreiben. Man hat daher $a_1=1$, $a_2=3$, $a_3=\frac{5}{4}$, $a_4=\frac{4.7}{9}$, also (nach Formel 1.):

$$A_1=\frac{1}{a_1}=1,$$

$$A_2=-\frac{A_1}{a_1a_2}=-\tfrac{1}{3},$$

$$A_3=-\frac{(a_1+a_3)A_2}{a_1a_2a_3}=\tfrac{1}{5},$$

$$A_4=-\frac{(a_1a_2+a_1a_4+a_3a_4)A_3+A_2}{a_1a_2a_3a_4}=-\tfrac{1}{7}.$$

Setzt man die Arbeit fort, so findet man die Reihe

$$1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{11}\ldots.$$

also ${}_1\overset{m}{\underset{\infty}{}}F(1:1+m^2:2m+1)=\frac{\pi}{4}$ *).

B. Ableitung der Kettenbrüche aus gewissen Reihen.

48.

Schon in §. 2. wurde gezeigt, wie man Kettenbrüche aus gewissen Gröfsen $A, B, C, D, \ldots$, von welchen je drei auf einander folgende einen gewissen Zusammenhang haben, ableiten kann. Hat man also gewisse, nach Potenzen von x fortschreitende Reihen, welche mit anderen ähnlich gebildeten in einem solchen Zusammenhange stehen, so kann man daraus sogleich einen Kettenbruch ableiten. Das einfachste Beispiel dieser Art bietet die allgemeine Gleichung des 2ten Grades dar. Aus der Gleichung $c=ax+bx^2$ folgt $cx=ax^2+bx^3$, $cx^2=ax^3+bx^4$, $cx^3=ax^4+bx^5\ldots$. Vergleicht man diese Ausdrücke mit denen des §. 2., so findet man

$$c=A,\ x=B,\ x^2=C,\ x^3=D,\ x^4=E\ldots.$$

$$a=a,\ b=b,\ \frac{a}{c}=a_1=a_2=a_3\ldots.\ \frac{b}{c}=b_1=b_2=b_3\ldots.,$$

folglich

$$\frac{c}{x}=a+\cfrac{b}{\cfrac{a}{c}+\cfrac{\cfrac{b}{c}}{\cfrac{\cfrac{a}{c}+\cfrac{\cfrac{b}{c}}{\cfrac{a}{c}}\text{ etc.}}}}=a+\cfrac{bc}{a+\cfrac{bc}{a+}\text{ etc.}}$$

oder

$$x=F(c:a+bc:a+bc:a\ldots.)$$

Schon hieraus sieht man, dafs die Wurzel jeder quadratischen Gleichung durch einen Kettenbruch ausgedrückt werden kann. Dieser Gegenstand wird jedoch später genauer erörtert werden. Unter den Reihen aber, aus welchen Kettenbrüche auf solche Weise abgeleitet werden können, ist besonders diejenige merkwürdig, welche zuerst Gaufs zu diesem Zwecke angewandt hat **).

---

*) Dieser Ausdruck wird später noch auf andere Weise gefunden werden.

**) *Comm. soc. Gotting. rec. T. II. ad a.* 1812.

Es sei

$$(A.)\quad \varphi(a,b,c,x)=1+\frac{ab}{c}x+\frac{a.a+1.b.b+1}{1.2.c.c+1}x^2+\frac{a.a+1.a+2.b.b+1.b+2}{1.2.3.c.c+1.c+2}\ldots.$$

gegeben. Die Buchstaben a und b können ohne Änderung des Werthes der Reihe vertauscht werden, also ist $\varphi(a,b,c,x)=\varphi(b,a,c,x)$.

Setzt man $b+1$ statt b, $c+1$ statt c, so findet man

$$\varphi(a,b+1,c+1,x)=1+\frac{a.b+1}{c+1}x+\frac{a.a+1.b+1.b+2}{1.2.c+1.c+2}x^2+\frac{a.a+1.a+2.b+1.b+2.b+3}{1.2.3.c+1.c+2.c+3}x^3\ldots.$$

und wenn man die Glieder, die gleich hohe Potenzen von x enthalten, mit einander verbindet, so findet man

$$\varphi(a,b+1,c+1,x)-\varphi(a,b,c,x)=\frac{a}{c}.\frac{c-b}{c+1}x\left[1+\frac{a+1.b+1}{c+2}x+\frac{a+1.a+2.b+1.b+2}{1.2.c+2.c+3}\ldots.\right],$$

oder

$$\varphi(a,b+1,c+1,x)-\varphi(a,b,c,x)=\frac{a}{c}.\frac{c-b}{c+1}x\varphi(a+1,b+1,c+2).$$

Hieraus folgt,

$$1.\quad \frac{\varphi(a,b+1,c+1,x)}{\varphi(a,b,c,x)}=\frac{1}{1-\frac{a}{c}.\frac{c-b}{c+1}x.\frac{\varphi(a+1,b+1,c+2,x)}{\varphi(a,b+1,c+1,x)}}.$$

Setzt man in Gleichung (1.) $b+1$ statt a, a statt b und $c+1$ statt c, so findet man

$$\frac{\varphi(b+1,a+1,c+2,x)}{\varphi(b+1,a,c+1,x)}=\frac{1}{1-\frac{b+1.c-a+1}{c+1.c+2}x.\frac{\varphi(b+2,a+1,c+3,x)}{\varphi(b+1,a+1,c+2,x)}}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{b+1.c-a+1}{c+1.c+2}x.\frac{\varphi(a+1,b+2,c+3,x)}{\varphi(a+1,b+1,c+2,x)}},$$

oder

$$\frac{\varphi(a+1,b+1,c+2)}{\varphi(a,b+1,c+1,x)}=\frac{1}{1-\frac{b+1.c-a+1}{c+1.c+2}x.\frac{\varphi(a+1,b+2,c+3)}{\varphi(a+1,b+1,c+2)}},$$

und wenn man diesen Werth in Gleichung (1.) substituirt:

$$2.\quad \frac{\varphi(a,b+1,c+1,x)}{\varphi(a,b,c,x)}=\frac{1}{1-\frac{a}{c}.\frac{c-b}{c+1}x}{1-\frac{b+1.c-a+1}{c+1.c+2}x.\frac{\varphi(a+1,b+2,c+3,x)}{\varphi(a+1,b+1,c+2,x)}}.$$

Substituirt man hier $a+1$ statt a, $b+1$ statt b, $c+2$ statt c, so findet man

$$\frac{\varphi(a+1,b+2,c+3,x)}{\varphi(a+1,b+1,c+2,x)}=\frac{1}{1-\frac{a+1}{c+2}.\frac{c+1-b}{c+3}x}{1-\frac{b+2.c-a+2}{c+3.c+4}x.\frac{\varphi(a+2,b+3,c+5,x)}{\varphi(a+2,b+2,c+4,x)}}.$$

Diesen Werth kann man wieder in Gleichung (2.) substituiren, und fährt man auf diese Weise fort, so entwickelt sich $\frac{\varphi(a,b+1,c+1,x)}{\varphi(a,b,c,x)}$ in einen Kettenbruch, dessen Theilnenner alle $=1$ sind, dessen Theilzähler abwechselnd $=-\frac{(a+m).(c+m-b)}{(c+2m).(c+2m-1)}x$ und $-\frac{(b+m+1)(c+m-a+1)}{(c+2m+1)(c+2m+2)}x$ sind, wo für m nacheinander die Werthe 0, 1, 2, 3 .... gesetzt werden müssen (den ersten Theilzähler ausgenommen, der $=1$ ist). Man hat also

$$3.\quad \frac{\varphi(a,b+1,c+1,x)}{\varphi(a,b,c,x)} = {}_{0-\infty}^{m}F\left[1:1-\frac{(a+m)(c+m-b)}{(c+2m)(c+2m+1)}.x:1-\frac{(b+m+1)(c+m-a+1)}{(c+2m+1)(c+2m+2)}x:1\right].$$

Setzt man $b=0$, so wird $\varphi(a,b,c,x)=1$, und man erhält in diesem Falle aus Gleichung (3.), indem man zugleich $c-1$ statt c setzt:

$$4.\quad \varphi(a,1,c,x) = {}_{0-\infty}^{m}F\left[1:1-\frac{a+m.c+m-1}{c+2m-1.c+2m}x:1-\frac{m+1.c+m-a}{c+2m.c+2m-1}x:1\right].$$

Jede Reihe, die in der Form $\varphi(a,1,c,x)$ enthalten ist, kann daher sogleich in einen Kettenbruch verwandelt werden. Gaufs hat gezeigt, dafs die wichtigsten, in der Analysis vorkommenden Reihen in dieser Form enthalten sind.

Ist z. B. $a=1$, $c=2$, $x=-y$, so ist

$$\varphi(a,1,c,x) = 1-\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{3}y^2-\tfrac{1}{4}y^3....,$$

und daher

$$\log(1+y) = y\varphi(1,1,2,-y) = y.F\left[1:1+\frac{1.1}{1.2}y:1+\frac{1.1}{2.3}y:1+\frac{2.2}{3.4}y:1+\frac{2.2}{4.5}y:1 \text{ etc.}\right]$$
$$= y.{}_{0-\infty}^{m}F\left[1:1-\frac{1+m.1+m}{1+2m.2+2m}y:1-\frac{1+m.1+m}{2+2m.3+2m}y:1\right]$$
$$= y.{}_{0-\infty}^{m}F\left[1:1-\frac{1+m}{2(1+2m)}y-\frac{1+m}{2(3+2m)}y:1\right].$$

Es ist $t=\text{tang}\,t(1-\frac{1}{3}\text{tang}^2t+\frac{1}{5}\text{tang}^3t-\frac{1}{7}\text{tang}^6.t....)$. Setzt man daher $a=\frac{1}{2}$, $c=\frac{3}{2}$, $x=-\text{tang}^2t$, so ist $t=\text{tang}\,t.\varphi(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},-\text{tang}^2t) = \text{tang}\,t.{}_{0-\infty}^{m}F\left[1:1+\frac{\frac{1}{2}+m.\frac{1}{2}+m}{\frac{1}{2}+2m.\frac{3}{2}+2m}\text{tang}^2t:1+\frac{1+m.1+m}{\frac{3}{2}+2m.\frac{5}{2}+2m}.\text{tang}^2t:1\right]$, also

$$t=\text{tang}\,tF\left[1:1+\frac{\frac{1^2}{4}}{\frac{1.3}{4}}\text{tang}^2t:1+\frac{\frac{1^2}{4}}{\frac{3.5}{4}}\text{tang}^2t:1+\frac{\frac{3^2}{4}}{\frac{5.7}{4}}\text{tang}^2t:1+\frac{\frac{2^2}{4}}{\frac{7.9}{4}}\text{tang}^2t:1....\right],$$

woraus man nach gehöriger Reduction

$$t=\text{tang}\,tF[1:1+\text{tang}^2t:3+2^2\text{tang}^2t:5+3^2\text{tang}^2t:7....]$$

findet, was man kürzer durch $t = \tang t\,{}_{1}{}^{m}_{-\infty}F[1:1+m^2.\tang^2 t:2m+1]$ andeuten kann.

Diese und die übrigen Kettenbrüche, welche Gaufs aus der Gleichung (4.) entwickelt hat, sind in der Form $F(1:1+x:a_1+x:a_2....)$ enthalten, oder können doch auf dieselbe zurückgeführt werden; sie müssen daher (§. 46.) mit denjenigen übereinstimmen, die man nach der Methode des §. 44. erhält. Man kann aber mit Hülfe derselben Prinzipien $\varphi(a, 1, c, x)$ auch in einen Kettenbruch verwandeln, der der Form $(1+x:a_1+x:a_2....)$ entspricht, und also mit denjenigen übereinstimmen mufs, die man nach §. 36. erhält.

Man findet nemlich auf ähnliche Weise, wie die Gleichung (1.) gefunden wurde: $\varphi(a+1,b-1,c,x)-\varphi(a,b,c,x)=\frac{b-a-1}{c}x.\varphi(a+1,b,c+1,x)$ und

$$5.\quad \frac{(a,b,c,x)}{\varphi(a+1,b-1,c,x)} = 1-\frac{b-a-1}{c}x.\frac{\varphi(a+1,b,c+1,x)}{\varphi(a+1,b-1,c,x)}.$$

Setzt man aber in Gleichung (3.), $a+1$ statt a, $b-1$ statt b, so findet man

$$\frac{\varphi(a+1,b,c+1,x)}{\varphi(a+1,b-1,c,x)}$$

$$= {}_{0}{}^{m}_{-\infty}F\left[1:1-\frac{(a+1+m).(c+m-b+1)}{(c+2m).(c+2m+1)}x:1-\frac{(b+m).(c+m-a)}{(c+2m+1).(c+2m+2)}x:1\right],$$

und wenn man diesen Werth in Gleichung (5.) substituirt:

$$6.\quad \frac{\varphi(a,b,c,x)}{\varphi(a+1,b-1,c,x)} =$$

$${}_{0}{}^{m}_{-\infty}F\left[1-\frac{b-a-1}{c}x:1-\frac{(a+1+m).(c+m-b+1)}{(c+2m).(c+2m+1)}x:1-\frac{(b+m).(c+m-a)}{(c+2m+1).(c+2m+2)}x:1\right].$$

Nimmt man $b=1$, so ist $\varphi(a+1, b-1, c, x)=0$, und daher

$$7.\quad \varphi(a,1,c,x) =$$

$${}_{0}{}^{m}_{-\infty}F\left[1+\frac{a.x}{c}:1-\frac{(a+1+m).(c+m)}{(c+2m).(c+2m+1)}x:1-\frac{(m+1).(c+m-a)}{(c+2m+1).(c+2m+2)}x:1\right].$$

Die Gleichheit der Ausdrücke (4.) und (7.) bildet wieder eine sehr merkwürdige Beziehung zwischen Kettenbrüchen.

Setzt man wieder $a=1$, $c=2$, $x=-y$, so giebt die Gleich. (7.):

$$\log(1+y) = yF\left[1-\frac{1}{2}y:1+\frac{2.2}{2.3}y:1+\frac{1.1}{3.4}y:1+\frac{3.3}{4.5}y:1+\frac{2.2}{5.6}y:1....\right]$$

$$= yF\left[1-y:2+y:\frac{3}{2^2}+y:2.2^3....\right],$$

wie schon §. 39. gefunden wurde.

Es ist wegen einer folgenden Betrachtung wichtig, den Werth von tang t in einem Kettenbruche ausgedrückt zu haben, welcher daher noch aus dem Vorhergehenden abgeleitet werden soll. Will man die Reihe $\sin t = t\left(1-\frac{t^2}{3!}+\frac{t^4}{5!}\ldots.\right)$ mit der Reihe (*A.*) vergleichen, so findet man

$$\sin t = t\varphi\left(n, n', \frac{3}{2}, -\frac{t^2}{4n.n'}\right),$$

wo $n=a$, $n'=b$ unbegränzt grofse Zahlen bedeuten, so dafs alle endlichen, welche zu denselben addirt, oder von denselben subtrahirt werden sollen, als überflüssig weggelassen werden können, und $n=n'=n+1=n'+1=n+2=n'+2$ u. s. w. ist. Eben so findet man

$$\cos t = \varphi\left(n, n', \frac{1}{2}, -\frac{t^2}{4n.n'}\right),$$

also

$$\text{tang}\, t = \frac{\sin t}{\cos t} = t\,\frac{\varphi\left(n, n', \frac{3}{2}, -\frac{t^2}{4n.n'}\right)}{\varphi\left(n, n', \frac{1}{2}, -\frac{t}{4n.n'}\right)}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Gleichung (3.), so hat man

$$n=a,\ n'=b=b+1,\ c=\frac{1}{2},\ x=-\frac{t^2}{4n.n'},$$

und daher

$$\text{tang}\, t = t.{}_0^m{}_\infty F\left[1:1+\frac{n.n_1}{\frac{(4m+1)(4m+3)}{4}}.-\frac{t^2}{4n.n'}:1+\frac{n.n'}{\frac{4m+3.4m+5}{4}}.-\frac{t^2}{4n.n'}:1\right]$$

$$= t.{}_0^m{}_\infty F\left[1:1-\frac{t^2}{(4m+1)(4m+3)}:1-\frac{t^2}{(4m+3)(4m+5)}:1\right],$$

oder

$$\text{tang}\, t = F\left[t:1-\frac{t^2}{1.3}:1-\frac{t^2}{3.5}:1-\frac{t^2}{5.7}:1-\frac{t^2}{7.9}:1\ldots.\right]$$

$$= F[t:1-t^2:3-t^2:5-t^2:7\ldots.] = {}_1^m{}_\infty F[t:1-t^2:2m+1].$$

Folgender Fall verdient noch eine besondere Erörterung. Man hat

$$x = \sin x.\cos x\,\varphi(1, 1, \tfrac{3}{2}, \sin x^2),$$

also, nach Gleichung (4.):

$$8.\quad x = F\left[\sin x.\cos x:1-\frac{1.2}{1.3}\sin x^2:1-\frac{1.2}{3.5}\sin x^2:1\ldots.\right],$$

und aus Gleichung (7.) findet man

$$9.\quad x = F\left[\sin x.\cos x+\sin x.\cos x.\frac{1.2}{1.3}\sin x^2:1-\frac{2.2}{1.5}\sin x^2:1-\frac{1.2}{5.7}\sin x^2:1\ldots.\right].$$

Ist $\sin x = 0$, so ist auch $x=0$, und daher auch die beiden Kettenbrüche (8.) und (9.) nothwendig $=0$; ist dagegen $\cos x = 0$, so ist $\sin x = 1$ und

$x = \frac{\pi}{2}$, was auch der Werth der beiden Kettenbrüche sein muſs. Da sich aber in diesem Falle der Ausdruck (8.) in *) $F\left[0:1-\frac{2.2}{1.5}:1-\frac{1.2}{3.5}:1....\right]$ und der Ausdruck (9.) in $F\left[0+0:1-\frac{2.2}{1.5}:1-\frac{1.2}{5.7}:1....\right]$ verwandelt, so müssen diese beiden Kettenbrüche nothwendig die Form $\frac{0}{0}$ haben, d. h. es muſs $F\left[1-\frac{1.2}{1.3}:-\frac{1.2}{3.5}:1....\right]=0$, und auch $F\left[1-\frac{2.2}{1.5}:1-\frac{1.2}{5.7}:1....\right]=0$ sein, oder allgemeiner, es muſs

$$_{0-\infty}^{m}F\left[1-\frac{(1+m).(\frac{1}{2}+m)}{(\frac{1}{2}+2m).(\frac{3}{2}+2m)}:1-\frac{(1+m).(\frac{1}{2}+m)}{(\frac{3}{2}+2m).(\frac{5}{2}+2m)}:1\right]=0$$

sein (nach Gleich. 4.), und

$$_{0-\infty}^{m}F\left[1-\frac{(2+m)(\frac{3}{2}+m)}{(\frac{3}{2}+2m)(\frac{5}{2}+2m)}:-\frac{(1+m)(\frac{1}{2}+m)}{(\frac{5}{2}+2m)(\frac{7}{2}+2m)}:1\right]=0 \text{ sein.}$$

Aus diesen Bemerkungen lieſsen sich eine Menge einzelner Sätze ableiten.

Aus $1-\cfrac{1.2}{1.3\over 1-\cfrac{1.2}{3.5\over 1-\cfrac{3.4}{5.7\over 1\text{ etc.}}}}=0$ folgt $1=\cfrac{1.2}{1.3\over 1-\cfrac{1.2}{3.5\over 1-\cfrac{3.4}{5.7\over 1\text{ etc.}}}}=\cfrac{1.2}{3-\cfrac{1.2}{5-\cfrac{3.4}{7\text{ etc.}}}}$

also $3-\cfrac{1.2}{5-\cfrac{3.4}{7-\cfrac{3.4}{9\text{ etc.}}}}=1.2$, folglich $1-\cfrac{1.2}{5-\cfrac{3.4}{7-\cfrac{3.4}{9\text{ etc.}}}}=0$ u. s. w.

Aehnliche Resultate lieſsen sich auch aus $F\left[1-\frac{2.2}{1.5}:1-\frac{1.2}{5.7}:1...,\right]=0$ ableiten.

Über die Verwandlung der Reihen in Kettenbrüche kann man auſser den angeführten Schriften noch folgende nachsehen:

Nouv. mém. de l'acad. de Berlin 1776. *pag.* 236 ff., und 1794. *pag.* 126.
Nova acta acad. Petr. 1784. *pag.* 36 ff.
Lambert Beiträge zum Gebrauch der Mathem. Thl. II. S. 54 ff.
Annales de mathém. par Gergonne. *T. IX.*

*) Diese Kettenbrüche dienen als Beweis der in §. 22. aufgestellten Behauptung.

Drittes Kapitel.

A. Verwandelung der unendlichen Producte in Kettenbrüche.

49.

Unter **unendlichen Producten** werden hier Brüche verstanden, deren Zähler und Nenner das Product einer unendlichen Anzahl von Factoren sind. Die Methode, solche Ausdrücke in Kettenbrüche zu verwandeln, welche im Folgenden gezeigt werden soll, beruht auf der Eigenschaft dieser Producte, sich in Reihen verwandeln zu lassen, welche Letztere wieder in Kettenbrüche verwandelt werden können. Es seien a_1, a_2, a_3, ... a_n beliebige Ausdrücke, und man bilde aus denselben das Product $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots.(1+a_n)$, welches durch das Zeichen $(1+a_1|n)$ angedeutet werden soll, so hat man

$$(1+a_1|2) = (1+a_1)(1+a_2) = 1+a_1+a_2(1+a_1|1).$$

Hieraus folgt

$$(1+a_1|3) = (1+a_3)(1+a_1|2) = 1+a_1+a_2(1+a_1|1)+a_3(1+a_1|2),$$

und wenn man auf diese Weise fortfährt, so erhält man

1. $$(1+a_1|n) = 1+a_1+a_2(1+a_1|1)+a_3(1+a_1|2)+\ldots.+a_n(1+a_1|n-1).$$

Auf ähnliche Weise kann auch der Ausdruck

$$\frac{(1+a_1|n)}{(1+b_1|n)} = \frac{(1+a_1)(1+a_2)\ldots.(1+a_n)}{(1+b_1)(1+b_2)\ldots.(1+b_n)}$$

entwickelt werden. Man setze

$$\frac{1+a_1}{1+b_1} = 1+c_1; \quad \frac{1+a_2}{1+b_2} = 1+c_2; \quad \ldots. \quad \frac{1+a_n}{1+b_n} = 1+c_n,$$

so erhält man aus der Formel (1.):

$$\frac{(1+a_1|n)}{(1+b_1|n)} = (1+c_1|n) = 1+c_1+c_2(1+c_1|1)+c_3(1+c_1|2)+\ldots.+c_n(1+c_1|n-1),$$

oder, wenn man für c_1, c_2, c_3 .... c_n die Werthe $\frac{a_1-b_1}{1+b_1}$, $\frac{a_2-b_2}{1+b_2}$, $\frac{a_3-b_3}{1+b_3}$, ... $\frac{a_n-b_n}{1+b_n}$ substituirt:

2. $$\frac{(1+a_1|n)}{(1+b_1|n)} = 1+\frac{a_1-b_1}{1+b_1}+\frac{a_2-b_2}{1+b_2}\cdot\frac{(1+a_1|1)}{(1+b_1|1)}+\ldots.+\frac{a_n-b_n}{1+b_n}\cdot\frac{(1+a_1|n-1)}{(1+b_1|n-1)}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$1+a_1 = d_1, \quad 1+a_2 = d_2, \quad \ldots. \quad 1+a_n = d_n,$$
$$1+b_1 = e_1, \quad 1+b_2 = e_2, \quad \ldots. \quad 1+b_n = e_n,$$

so hat man *)

3. $$\frac{d_1.d_2.d_3....d_n}{e_1.e_2.e_3....e_n} = 1+\frac{d_1-e_1}{e_1}+\frac{d_2-e_2}{e_2}.\frac{d_1}{e_1}+\frac{d_3-e_3}{e_3}.\frac{d_1.d_2}{e_1.e_2}+....\frac{d_n-e_n}{e_n}.\frac{d_1.d_2....d_{n-1}}{e_1.e_2....e_{n-1}}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Reihe $1+\frac{A_1}{\alpha_1}x^h+\frac{A_2}{\alpha_2}x^{2h}+\frac{A_3}{\alpha_3}x^{3h}....$ und setzt $x=1$, so hat man

$$d_1-e_1=A_1 \quad (d_2-e_2)d_1=A_2 \quad (d_3-e_3)d_1.d_2=A_3 \quad .... \quad (d_n-e_n)d_1d_2....d_n=A_n,$$

$$e_1=\alpha_1 \qquad e_1.e_2=\alpha_2 \qquad e_1.e_2.e_3=\alpha_3 \quad .... \quad e_1.e_2.....e_{n-1}=\alpha_n,$$

folglich (§. 31.)

$$\frac{d_1.d_2.d_3....d_n}{e_1.e_2.e_3....e_n}=1+\cfrac{d_1-e_1}{e_1-\cfrac{(d_2-e_2)d_1.e_1^2}{(d_1-e_1)e_1.e_2+(d_2-e_2)d_1.e_1-\cfrac{(d_1-e_1)(d_3-e_3)d_1.d_2.e_2^2.e_1^2}{(d_2-e_2)d_1.e_1.e_2.e_3+(d_3-e_3)d_1.d_2.e_1.e_2}}} \text{ etc.}$$

Dieser Ausdruck kann aber noch sehr abgekürzt werden, indem man die sich aufhebenden Glieder und die überflüssigen Factoren wegläfst, und zwar findet man nach vorgenommener Reduction:

$$\frac{d_1.d_2....d_n}{e_1.e_2....e_n}=1+\cfrac{d_1-e_1}{e_1-\cfrac{(d_2-e_2)d_1.e_1}{d_1.d_2-e_1.e_2-\cfrac{(d_1-e_1)(d_3-e_3)d_2.e_2}{d_2.d_3-e_2.e_3-\cfrac{(d_2-e_2)(d_4-e_4)d_3.e_3}{d_3.d_4-e_3.e_4} \text{ etc.}}}}$$

Da die Bildung der Ausdrücke d_1, d_2, d_3, ... e_1, e_2, e_3, ... durch keine Voraussetzung beschränkt ist, so kann man also jedes beliebige unendliche Product, mit Hülfe dieser Formel, in einen Kettenbruch verwandeln.

Will man diese Formel in einen allgemeinen Ausdruck zusammenfassen, so hat man

4. $$\frac{d_1.d_2....d_n}{e_1.e_2....e_n} = {}_{1\cdots\infty}^{m}F\left(1+\cfrac{d_1-e_1}{e_1-\cfrac{(d_{m-1}-e_{m-1})(d_{m+1}-e_{m+1})d_m.e_m}{d_m.d_{m+1}-e_m.e_{m+1}}}\right),$$

wo $d_0-e_0=1$ gesetzt werden mufs.

Es ist z. B.

$$\frac{\pi}{2} = \tfrac{2}{1}.\tfrac{2}{3}.\tfrac{4}{3}.\tfrac{4}{5}.\tfrac{6}{5}.\tfrac{6}{7}....$$

Setzt man

$$d_1=2, \quad d_2=2, \quad d_3=4, \quad d_4=4, \quad d_5=6, \quad d_6=6, \quad ....$$
$$e_1=1, \quad e_2=3, \quad e_3=3, \quad e_4=5, \quad e_5=5, \quad e_6=7, \quad ....$$

*) Schweins Analysis S. 235.

so ist

$$5.\quad \frac{\pi}{2} = F(1+1:1+1.2:1+2.3:1+3.4:1 \text{ etc.})\ ^*).$$

Man könnte auch $\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6....}{3.1.5.3.7.5....}$ schreiben. Setzt man nun

$$d_1 = 2,\ d_2 = 2,\ d_3 = 4,\ d_4 = 4,\ d_5 = 6,\ d_6 = 6, \ldots.$$
$$e_1 = 3,\ e_2 = 1,\ e_3 = 5,\ e_4 = 3,\ e_5 = 7,\ e_6 = 5,$$

so findet man

$$6.\quad \frac{\pi}{2} = F(1-1:3-2.3:1+1.2:3+4.5:1+3.4:3+6.7:1 \text{ etc.}).$$

Würde man

$$d_1 = 2.2,\ d_2 = 4.4,\ d_3 = 6.6,\ d_4 = 8.8, \ldots.$$
$$e_1 = 1.3,\ e_2 = 3.5,\ e_3 = 5.7,\ e_4 = 7.9, \ldots.$$

setzen, so erhielte man

$$7.\quad \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{2^2.1.3}{2^2.4^2-1.3^2.5} - \frac{4^2.3.5}{4^2.6^2-3.5^2.7} - \frac{6^2.5.7}{6^2.8^2-5.7^2.9} \text{ etc.},$$

und auf ähnliche Weise könnte man noch andere Entwicklungen von $\frac{\pi}{2}$ finden. Eine andere bekannte Formel ist

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3.6.6.12.12.18.18.24....}{2.5.7.11.13.17.19.23....}.$$

Setzt man daher

$$d_1 = 3,\ d_2 = 6,\ d_3 = 6,\ d_4 = 12, \ldots.$$
$$e_1 = 2,\ e_2 = 5,\ e_3 = 7,\ e_4 = 11, \ldots.$$

so hat man

$$\frac{\pi}{2} = F(1+1:2-2.3:8+5.6:1+6.7:5+11.12:1+12.13:5 \text{ etc.}),$$

oder (nach §. 15.)

$$8.\quad \frac{\pi}{2} = F(1+1:1+1:1+2.3:2+5.6:1+6.7:5+11.12:1+12.13:5 \text{ etc.}).$$

Der Ausdruck

$$\sqrt{2} = \frac{2.2.6.6.10.10....}{1.3.5.7.\ 9.11....}$$

giebt, wenn man

$$d_1 = 2,\ d_2 = 2,\ d_3 = 6,\ d_4 = 6, \ldots.$$
$$e_1 = 1,\ e_2 = 3,\ e_3 = 5,\ e_4 = 7, \ldots.$$

setzt:

---

*) Diesen Ausdruck hat schon Euler auf anderem Wege gefunden, *com ac Petr. T. 11. pag.* 48.

9. $\sqrt{2} = F(1+1:1+1.2:1+2.3:3+5.6:1+6.7:3+9.10:1 \text{ etc.})$

Die Kettenbrüche (6.), (8.), (9.), bei welchen die Theilnenner abwechselnd wiederkehren, während die Theilzähler nach einem bestimmten Gesetze fortschreiten, sind besonders bemerkenswerth, weil sich aus keiner bisher bekannten Methode ähnliche Kettenbrüche ergeben haben; vermöge der Formel (4.) dagegen ist es leicht, eine Menge solcher Kettenbrüche zu finden. So z. B. findet Euler (*Intr. in an. inf.* §. 185.):

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{4.4.8.8.12.12....}{3.5.7.9.11.13....}.$$

Hieraus erhält man

10. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = F(1+1:3+3.4:1+4.5:3+7.8:1+8.9:3+11.12:1 \text{ etc.})$.

Man bemerke, dafs es sehr leicht ist, solche Kettenbrüche, die aus unendlichen Producten abgeleitet sind, auf irgend eine Potenz zu erheben. Denn da $\left(\frac{d_1 . d_2 . d_3 .... d_n}{e_1 . e_2 . e_3 .... e_n}\right)^t = \frac{d_1^t . d_2^t . d_3^t .... d_n^t}{e_1^t . e_2^t . e_3^t .... e_n^t}$, so findet man aus Formel (4.), indem man statt d, e überall d^t, e^t setzt:

$$\left(\frac{d_1 . d_2 . d_3 .... d_n}{e_1 . e_2 . e_3 .... e_n}\right)^t = {}_{1}^{m}{}_{-\infty}F\left(1 + \frac{d_1^t - e_1^t}{e_1^t - \frac{(d_{m-1}^t - e_{m-1}^t)(d_{m+1}^t - e_{m+1}^t) d_m^t . e_m^t}{d_m^t . d_{m+1}^t - e_m^t . e_{m+1}^t}}\right).$$

So z. B. giebt der Ausdruck

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{2^2.2^2.4^2.4^2.6^2.6^2....}{1^2.3^2.3^2.5^2.5^2.7^2....},$$

indem man $d_1 = 2$, $d_2 = 2$, ... $e_1 = 1$, $e_2 = 3$, ... setzt:

$$\frac{\pi^2}{4} = 1 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{1.5.1^2.2^2}{4^2-3^2 + \cfrac{3.7.2^2.3^2}{9^2-8^2 + \cfrac{5.9.3^2.4^2}{16^2-15^2 \text{ etc.}}}}}$$

B. Verwandelung der Kettenbrüche in unendliche Producte.

50.

Es werde der zu verwandelnde Kettenbruch durch die allgemeine Formel $1 + \cfrac{n}{n_1 - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 \text{ etc.}}}}$ angedeutet, welche kürzer durch ${}_{1}^{m}{}_{-\infty}F\left(1 + \frac{n}{n_1 - \frac{b_m}{a_m}}\right)$ ausgedrückt werden kann. Soll nun dieser Kettenbruch in ein unendliches

Product $\frac{d_1 . d_2 . d_3 \ldots}{e_1 . e_2 . e_3 \ldots}$ verwandelt werden, so vergleiche man den Ausdruck ${}_{1-x}^{m}F\left(1 + \frac{n}{n_1 - \frac{b_m}{a_m}}\right)$ mit der Formel (4.) des §. 49., und man findet $n = d_1 - e_1$, $n_1 = e_1$, also $d_1 = n + n_1$, $e_1 = n_1$ und $\frac{d_1}{e_1} = \frac{n+n_1}{n_1}$, ferner

$$b_m = (d_{m-1} - e_{m-1})(d_{m+1} - e_{m+1}) d_m . e_m,$$
$$a_m = d_m . d_{m+1} - e_m . e_{m+1}.$$

Hieraus findet man

$$12. \quad d_{m+1} = \frac{b_m - a_m . d_m (d_{m-1} - e_{m-1})}{(d_{m-1} - e_{m-1}) d_m (e_m - d_m)},$$

$$13. \quad e_{m+1} = \frac{b_m - a_m . e_m (d_{m-1} - e_{m-1})}{(d_{m-1} - e_{m-1}) e_m (e_m - d_m)} \text{ und}$$

$$14. \quad \frac{d_{m+1}}{e_{m+1}} = \frac{e_m}{d_m} \cdot \frac{b_m - a_m . d_m (d_{m-1} - e_{m-1})}{b_m - a_m . e_m (d_{m-1} - e_{m-1})}.$$

Vermöge der Formeln (12.) und (13.) kann man also jeden Zähler und Nenner eines Factors $\frac{d_{m+1}}{e_{m+1}}$ des unendlichen Products berechnen, und zwar auf dem Wege der Recursion, indem man d_m, d_{m-1}, e_m, e_{m-1} als bekannt voraussetzt. Eigentlich aber ist es nicht sowohl wichtig, die Zähler und Nenner der Factoren einzeln, als vielmehr ihren Quotienten $\frac{d_{m+1}}{e_{m+1}}$ zu kennen. Diesen kann man aber auch durch ein independentes Verfahren, d. h. unmittelbar aus den Gliedern des Kettenbruchs finden, ohne die Zähler und Nenner der vorhergehenden Factoren zu kennen. In dieser Beziehung bemerke man Folgendes. Es ist nicht blos der ganze Kettenbruch ${}_{1-x}^{m}F\left(1 + \frac{n}{n_1 - \frac{b_m}{a_m}}\right)$ dem ganzen unendlichen Producte $\frac{d_1 . d_2 . d_3 . d_4 \ldots}{e_1 . e_2 . e_3 . e_4 \ldots}$ gleich, sondern auch jeder Theil des Kettenbruchs einem Theile des unendlichen Products, d. h. es ist $1 + \frac{n}{n_1} = \frac{d_1}{e_1}$, $1 + \frac{n}{n_1 - \frac{b_1}{a_1}} = \frac{d_1 . d_2}{e_1 . e_2}$, $1 + \frac{n}{n_1 - \frac{b_1}{a_1 - \frac{b_2}{a_2}}} = \frac{d_1 . d_2 . d_3 \ldots}{e_1 . e_2 . e_3 \ldots}$ u. s. w. Dies folgt unmittelbar aus Formel (3.); denn läfst man das unendliche Product irgendwo abbrechen, setzt man z. B.

$$d_4 = d_5 = d_6 = \ldots = 1,$$
$$e_4 = e_5 = e_6 = \ldots = 1,$$

so hat man

$$\frac{d_1 \cdot d_2 \cdot d_3}{e_1 \cdot e_2 \cdot e_3} = 1 + \frac{d_1 - e_1}{e_1} + \frac{d_2 - e_2}{e_2} \cdot \frac{d_1}{e_1} + \frac{d_3 - e_3}{e_3} \cdot \frac{d_1 \cdot d_2}{e_1 \cdot e_2},$$

und nach Formel (4.)

$$\frac{d_1 \cdot d_2 \cdot d_3}{e_1 \cdot e_2 \cdot e_3} = 1 + \cfrac{d_1 - e_1}{e_1 - \cfrac{(d_2 - e_2) d_1 \cdot e_1}{d_1 \cdot d_2 - e_1 \cdot e_2 - \cfrac{(d_1 - e_1)(d_3 - e_3) d_2 \cdot e_2}{d_2 \cdot d_3 - e_2 \cdot e_3}}} = 1 + \cfrac{n}{n_1 - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2}}},$$

und auf dieselbe Weise findet man, dafs jeder andere Theil des unendlichen Products dem entsprechenden Theile des Kettenbruchs gleich ist. Zwei auf einander folgende Theile des Kettenbruchs ${}_{1-r}^{m}F\left(1 + \cfrac{n}{n_1 - \cfrac{b_m}{a_m}}\right)$, ${}_{1-r+1}^{m}F\left(1 + \cfrac{n}{n_1 - \cfrac{b_m}{a_m}}\right)$ sind also bezüglich $= \frac{d_1 \cdot d_2 \ldots d_{r+1}}{e_1 \cdot e_2 \ldots e_{r+1}}$, $\frac{d_1 \cdot d_2 \ldots d_{r+2}}{e_1 \cdot e_2 \ldots e_{r+2}}$, und der zweite Ausdruck durch den ersten dividirt, giebt $\frac{d_{r+2}}{e_{r+2}}$. Will man also die successiven Theile des unendlichen Products erfahren, so berechne man die successiven Theile des Kettenbruchs, dividire jeden folgenden durch den unmittelbar vorhergehenden, und die Quotienten werden das Verlangte geben.

Es soll z. B. der Kettenbruch

$$F(1+1:1+2:2+3:3+4:4\ldots) = {}_{1-\infty}^{m}F\left(1 + \frac{m}{m}\right)$$

in ein unendliches Product verwandelt werden. Hier ist

$$1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1},\quad 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2}} = \frac{3}{2},\quad 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3}}} = \frac{8}{5},\quad 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4}}}} = \frac{30}{19},\ \ldots.$$

also

$$\frac{d_1}{e_1} = \frac{2}{1},\quad \frac{d_2}{e_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4},\quad \frac{d_3}{e_3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{5} = \frac{16}{15},\quad \frac{d_4}{e_4} = \frac{5}{8} \cdot \frac{30}{19} = \frac{75}{76},\ \ldots.$$

Das Gesetz, nach welchem diese Factoren gebildet sind, fällt in die Augen. Es ist nemlich

$$\frac{d_1}{e_1} = \frac{2}{1},\quad \frac{d_2}{e_2} = \frac{3.1}{3.1+1},\quad \frac{d_3}{e_3} = \frac{4(3.1+1)}{4(3.1+1)-1},\quad \frac{d_4}{e_4} = \frac{5[4(3.1+1)-1]}{5[4(3.1+1)-1]+1}.$$

Aus der Natur des gegebenen Kettenbruchs kann man aber leicht ableiten, dafs dieses Gesetz allgemein ist, d. h. wenn der $n$te Factor des unendlichen Products $= \frac{l}{l \pm 1}$ ist, so wird der $n+1$te Factor $= \frac{n + 2(l \pm 1)}{n + 2(l \pm 1) \mp 1}$

sein. Denn es sei *) $\frac{a}{b} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\ddots+\cfrac{n-1}{n-1}}} = {}^{m}_{1-n-1}F\left(1+\frac{m}{m}\right)$. Ist nun ${}^{m}_{1-n}F\left(1+\frac{m}{m}\right) = \frac{(n+1)a}{(n+1)b\pm 1}$, so ist auch

${}^{m}_{1-n+1}F\left(1+\frac{m}{m}\right) = \frac{(n+1)(n+1)a+(n+1)a}{(n+1)[(n+1)b\pm 1]+(n+1)b}$ (§. 6. *B.*) $= \frac{(n+2)(n+1)a}{(n+2)[(n+1)b\pm 1]\mp 1}$,

folglich

$$\frac{d_1 \ldots d_n}{e_1 \ldots e_n} = \frac{{}^{m}_{1-n}F\left(1+\frac{m}{m}\right)}{{}^{m}_{1-n-1}F\left(1+\frac{m}{m}\right)} = \frac{(n+1)b}{(n+1)b\pm 1} = \frac{l}{l\pm 1},$$

$$\frac{d_1 \ldots d_{n+1}}{e_1 \ldots e_{n+1}} = \frac{{}^{m}_{1-n+1}F\left(1+\frac{m}{m}\right)}{{}^{m}_{1-n}F\left(1+\frac{m}{m}\right)} = \frac{(n+2)[(n+1)b\pm 1]}{(n+2)[(n+1)b\pm 1]\mp 1} = \frac{(n+2)(l\pm 1)}{(n+2)(l\pm 1)\mp 1}.$$

Nun ist aber wirklich

$${}^{m}_{1-1}F\left(1+\frac{m}{m}\right) = 1+\frac{1}{1} = \frac{2}{1},$$

$${}^{m}_{1-2}F\left(1+\frac{m}{m}\right) = 1+\frac{1}{1+\frac{2}{2}} = \frac{6}{4} = \frac{3.2}{3.1+1},$$

$${}^{m}_{1-3}F\left(1+\frac{m}{m}\right) = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\frac{3}{3}}} = \frac{24}{15} = \frac{4.6}{4.4-1},$$

folglich allgemein ${}^{m}_{1-n}F\left(1+\frac{m}{m}\right) = \frac{(n+1)a}{(n+1)b\pm 1}$, wenn ${}^{m}_{1-n-1}F\left(1+\frac{m}{m}\right) = \frac{a}{b}$ ist, und das Bildungsgesetz der Factoren ist daher allgemein bewiesen.

Aus späteren Betrachtungen (§. 69.) wird sich ergeben, dafs ${}^{m}_{1-x}F\left(1+\frac{m}{m}\right) = \frac{e}{e-1}$ ist; man hat daher

$$\frac{e}{e-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{75}{76}\cdot\frac{456}{455}\cdot\frac{3185}{3186}\cdot\ldots$$

Wollte man die Factoren nach den Formeln (12.) und (13.) berechnen, so hätte man

---

*) Und zwar soll $\frac{a}{b}$ den Bruch bedeuten, welcher aus der Verwandelung von ${}^{m}_{1-n-1}F\left(1+\frac{m}{m}\right)$ in einen gewöhnlichen Bruch entsteht, ohne dafs eine fernere Reduction vorgenommen wird (vergl. §. 3.).

$$n=1, \quad b_1=-2, \quad b_2=-3, \quad b_3=-4, \quad \ldots.$$
$$n_1=1, \quad a_1=2, \quad a_2=3, \quad a_3=4, \quad \ldots.$$
$$d_1=2, \quad d_2=\frac{-2-2.2}{2.-1}=3, \quad d_3=\frac{-3-3.3}{3.-1}=4, \quad \ldots.$$
$$e_1=1, \quad e_2=\frac{-2-2}{1.-1}=4, \quad e_3=\frac{-3-3.4}{4.-1}=\frac{15}{4}, \quad \ldots,$$

woraus man wieder $\frac{d_1}{e_1}=\frac{2}{1}$, $\frac{d_2}{e_2}=\frac{3}{4}$, $\frac{d_3}{e_3}=\frac{16}{15}$, ... findet.

Es wurde früher (§. 32.) gefunden:

$$\frac{4}{\pi}=F(1+1.1:2+3.3:2+5.5:2 \text{ etc.})=\underset{0}{\overset{m}{\infty}}F(1+(2m+1)^2:2).$$

Soll dieser Bruch in ein unendliches Product verwandelt werden, so hat man

$$1=\frac{1}{1}, \quad 1+\frac{1.1}{2}=\frac{3}{2}, \quad 1+\frac{1}{2+\frac{3^2}{2}}=\frac{15}{13}, \quad 1+\frac{1}{2+\frac{3^2}{2+\frac{5^2}{2}}}=\frac{105}{76}, \quad 1+\frac{1}{2+\frac{3^2}{2+\frac{5^2}{2+\frac{7^2}{2}}}}=\frac{945}{789}, \ldots$$

und daher $\frac{4}{\pi}=\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{10}{13}\cdot\frac{91}{76}\cdot\frac{684}{791}\cdots$.

Das Gesetz, nach welchem hier die Factoren gebildet werden, leuchtet ein, sobald man sie auf folgende Weise schreibt:

$$\frac{3}{2}=\frac{3.1}{3.1-1}, \quad \frac{10}{13}=\frac{5.2}{5.2+1.3}, \quad \frac{91}{76}=\frac{7.13}{7.13-1.3.5}, \quad \frac{684}{789}=\frac{9.76}{9.76+1.3.5.7},$$

und es ist wieder leicht, die Allgemeinheit dieses Gesetzes aus der Beschaffenheit des Kettenbruches abzuleiten, sobald man bemerkt, dafs, wenn der $m$te der Theile $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{15}{13}, \ldots. = \frac{a}{b}$ ist, alsdann der $m+1$te $= \frac{(2m+1)a}{(2m+1)b \pm a}$ ist.

51.

Die im Vorhergehenden gezeigte Verwandelung der Kettenbrüche in unendliche Producte beruht auf den Betrachtungen des §. 50. Sie kann aber auf einfacherem Wege gefunden werden. Man kann nemlich statt eines jeden Kettenbruchs $F(a, a_m)$ den Ausdruck

$$a\left(\frac{F(a,a_1)}{a}\cdot\frac{F(a,a_2)}{F(a,a_1)}\cdot\frac{F(a,a_3)}{F(a,a_2)}\cdot\ldots\cdot\frac{F(a,a_{m-1})}{F(a,a_{m-2})}\cdot\frac{F(a,a_m)}{F(a,a_{m-1})}\right)$$

setzen. Hierdurch ist also der Kettenbruch sogleich in ein Product verwandelt, und setzt man $\frac{F(a,a_1)}{a}=\frac{d_1}{e_1}$, $\frac{F(a,a_2)}{F(a,a_1)}=\frac{d_2}{e_2}$ u. s. w., so fallen diese Ausdrücke ganz mit denen des vorigen §. zusammen, nur dafs dort $a=1$ war, welche Beschränkung nun wegfällt.

Hieraus ergiebt sich denn auch unmittelbar ein Verfahren, jedes unendliche Product $\frac{d.d_1....d_n}{e.e_1....e_n}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln. Denn man braucht nur

$$\frac{d}{e}=\frac{a}{1},\ \frac{d_1}{e_1}=\frac{F(a,a_1)}{a},\ \frac{d_2}{e_2}=\frac{F(a,a_2)}{F(a,a_1)},\ ....$$

oder

$$d=a,\quad d_1=a,a_1,\quad d_2=a_1.a,a_2,\quad ....$$
$$e=1,\quad e_1=a.a_1,\quad e_2=a_1,a_2.a,a_1,\ ....$$

zu setzen, und die Werthe von $a,\ a_1,\ ....\ b_1,\ b_2,\ ....$ durch $d,\ d_1,\ ....\ e,\ e_1,\ ....$ zu bestimmen. Man kommt hierdurch zuletzt wieder auf Formel (4.) zurück, weshalb die genauere Entwickelung hier übergangen werden möge; nur bemerke man, dafs in Formel (4.) $d=e=1$ ist.

Da nicht blos das ganze unendliche Product dem ganzen Kettenbruch gleich ist, sondern auch jeder einzelne Theil $\frac{d.d_1}{e.e_1}$, $\frac{d.d_1.d_2}{e.e_1.e_2}$ u. s. w. bezüglich jedem einzelnen Theile $F(a,a_1)$, $F(a,a_2)$ u. s. w., so folgt hieraus, dafs jedes unendliche Product, das man auf dem angegebenen Wege in einen Kettenbruch mit blos positiven Gliedern verwandeln kann, convergirt, indem seine einzelnen Theile abwechselnd gröfser und kleiner als der wahre Werth sein, und sich demselben immer mehr nähern werden, je mehr Factoren man zu ihrer Bildung anwendet (§. 11.).

Die im vorigen §. gefundenen Entwickelungen in unendliche Producte scheinen nicht blos deswegen interessant zu sein, weil man sie noch auf keinem andern Wege erhalten hat, sondern weil man überhaupt, so viel dem Verfasser bekannt ist, bisher nur für Functionen von π unendliche, aus ganzen Zahlen bestehende Producte gefunden hat, keineswegs aber für Functionen von e, wie der hier gefundene Ausdruck $\frac{e}{e-1}$ ist. Da der Ausdruck einer Menge ähnlicher Functionen in Kettenbrüchen bekannt ist, so können aus demselben mit Leichtigkeit eben so viel unendliche Producte abgeleitet werden.

(Die Fortsetzung folgt.)