Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques.

Deuxième Mémoire.

Recherches sur les parallélloèdres primitifs.

Par M. *Georges Voronoï* à Varsovie.

Introduction.

Les méthodes connues de réduction des formes quadratiques positives binaires, ternaires et quaternaires*) reposent sur une propriété des formes quadratiques positives, à savoir:

Chaque forme quadratique positive $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ *à n variables possède dans l'ensemble E composé de tous les systèmes* $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *de valeurs entières des variables* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *n minima consécutifs*

$$M_1 \leqq M_2 \leqq \cdots \leqq M_n$$

déterminés à condition que le déterminant ω *d'un système*

$$(1.)\qquad (l_{11}, l_{21}, \ldots l_{n1}),\ (l_{12}, l_{22}, \ldots l_{n2}), \ldots (l_{1n}, l_{2n}, \ldots l_{nn})$$

de représentations de ces minima dans l'ensemble E ne s'annule pas.

*) *Lagrange*, Recherches d'Arithmétique. (Oeuvres, t. III, p. 695.)

Gauß, Disquisitiones arithmeticae. (Oeuvres, t. I, art. 171, p. 146).

Lejeune-Dirichlet, Über die Reduktion der positiven quadratischen Formen mit drei unbestimmten ganzen Zahlen. (Oeuvres, t. II, p. 41.)

Minkowski, Sur la réduction des formes quadratiques positives quaternaires. (Comptes Rendus des séances de l'Académie de Paris, t. 96, p. 1205.)

Dans tous les cas où on a

$$\omega = \pm 1,$$

on peut transformer la forme quadratique donnée $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$ en une forme équivalente à l'aide d'une substitution

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} x'_k. \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

Dans la forme transformée $\Sigma\Sigma a'_{ij} x_i x_j$, on aura

$$a'_{kk} = M_k. \qquad (k=1, 2, \ldots n)$$

La forme obtenue $\Sigma\Sigma a'_{ij} x_i x_j$ s'appelle réduite d'après les minima consécutifs.

Les formes quadratiques positives binaires, ternaires et quaternaires peuvent être réduites d'après les minima consécutifs.*) L'algorithme à l'aide duquel on effectue la réduction de ces formes est fondé sur le théorème suivant.

Pour qu'une forme quadratique positive

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j \qquad (n=2, 3, 4)$$

soit réduite d'après les minima consécutifs, il faut et il suffit qu'on ait les inégalités

$$(2.) \qquad f(x_1, x_2, \ldots x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \ldots x_n) \geqq a_{kk} \qquad (k=1, 2, \ldots n)$$

et

$$(3.) \qquad a_{11} \leqq a_{22} \leqq \cdots \leqq a_{nn},$$

quelles que soient les valeurs entières des variables

$$x_1, \ldots x_{k-1}, \; x_{k+1}, \ldots x_n. \qquad (k=1, 2, \ldots n)$$

*) *Korkine* et *Zolotareff*, Sur les formes quadratiques positives. (Mathematische Annalen, t. 6, p. 336 et t. 11, p. 242.)

En faisant

$$(4.)\qquad x_i = x'_i + \delta_i x'_k \quad \text{où} \quad \delta_k = 0 \quad \text{et} \quad i = 1, 2, \ldots n, \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots n)}$$

on déterminera pour la forme donnée $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ les nombres entiers $\delta_1, \ldots \delta_{k-1}, \delta_{k+1}, \ldots \delta_n$ à condition que la valeur correspondante $f(\delta_1, \ldots \delta_{k-1}, 1, \delta_{k+1}, \ldots \delta_n)$ soit la plus petite possible. En faisant successivement $k = 1, 2, \ldots n$ et en répétant le procédé exposé, on transformera toujours la forme donnée à l'aide d'une série de substitutions (4.) en une forme qui ne diffère de la forme réduite que par une permutation des coefficients $(n = 2, 3, 4)$.

Le procédé exposé dans le cas général ne peut être non plus prolongé indéfiniment et on arrivera toujours à une forme quadratique équivalente $\Sigma\Sigma a'_{ij} x_i x_j$ qui vérifie les inégalités (2.) et (3.), mais on ne connaît pas, à partir du nombre des variables $n > 4$, si les coefficients $a'_{kk} (k = 1, 2, \ldots n)$ dans la forme obtenue présentent un système de minima consécutifs, de plus: on ne connaît même pas, si la réduction de chaque forme quadratique positive d'après les minima consécutifs est possible.

On se débarrasse de la difficulté signalée par le changement de la notion du système de n minima consécutifs en ne considérant que les systèmes (1.) qui vérifient l'équation

$$\omega = \pm 1.$$

C'est la méthode connue d'*Hermite**) qui a été récemment reprise par M. *Minkowski* dans le mémoire intitulé: „Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz"**).

En partant comme M. *Minkowski* de la même base: des travaux de *Lejeune-Dirichlet* et d'*Hermite* concernant les formes quadratiques positives, j'ai travaillé pendant douze ans dans un autre champ de recherches, étudiant les propriétés des systèmes de nombres entiers qui représentent le minimum de la forme

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

---

*) *Hermite*, Extraits de lettres à Jacobi sur différents objets de la théorie des nombres. (Ce Journal, t. 40, p. 302.)

**) Ce Journal, t. 129, p. 220.

dans l'ensemble E, la forme quadratique $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$ étant positive et $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ les paramètres arbitraires quelconques.

Dans le cas $n=2$, le problème posé a été résolu par *Lejeune-Dirichlet* et par *Hermite**).

En réfléchissant aux principes qui ont servi de base dans ces recherches à ces deux illustres géomètres, j'ai observé que le problème énoncé est intimement lié au problème de la réduction des formes quadratiques positives.

En effet, *Lejeune-Dirichlet* et *Hermite* ont démontré le théorème suivant.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'inégalité

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2\alpha x + 2\beta y \geqq 0$$

subsiste, quelles que soient les valeurs entières de x et y, se ramènent en général à six inégalités

$$(5.)\quad \begin{cases} al^2 + 2blm + cm^2 \pm 2(\alpha l + \beta m) \geqq 0, \\ al'^2 + 2bl'm' + cm'^2 \pm 2(\alpha l' + \beta m') \geqq 0, \\ al''^2 + 2bl''m'' + cm''^2 \pm 2(\alpha l'' + \beta m'') \geqq 0, \end{cases}$$

où les systèmes de nombres entiers

$$(l, m), (l', m') \text{ et } (l'', m'')$$

ne dépendent que des coefficients de la forme quadratique (a, b, c).

En envisageant les paramètres α et β comme les coordonnées cartésiennes d'un point (α, β) du plan, on déterminera par les inégalités (5.) un hexagone P qui est formé de trois paires d'arêtes parallèles. L'étude des propriétés de l'hexagone P joue un rôle important dans les recherches de *Lejeune-Dirichlet* qui a indiqué deux propriétés fondamentales de l'hexagone P.

I. *Il existe un groupe de translations de l'hexagone P à l'aide desquelles tout le plan sera couvert par les hexagones congruents.*

II. *Chaque forme quadratique positive binaire peut être transformée en une forme équivalente (a, b, c) satisfaisant aux conditions*

$$(6.)\quad a - b \geqq 0,\ b \geqq 0,\ c - b \geqq 0.$$

---

*) *Lejeune-Dirichlet,* Mémoire cité.

Hermite, Sur la théorie des formes quadratiques ternaires. (Ce Journ., t. 40, p. 178.)

L'hexagone P correspondant à la forme (a, b, c), *dans le cas*

$$a-b>0,\ b>0,\ c-b>0,$$

est caractérisé par les systèmes

$$(1,0),\ (0,1),\ (1,-1). \tag{7.}$$

Dans les cas $a-b=0$, *ou* $b=0$, *ou* $c-b=0$, *l'hexagone P se réduit à un parallélogramme.*

Les inégalités (6.) définissent un domaine D de formes quadratiques binaires qui est parfaitement déterminé par les systèmes (7.).

A l'aide de la substitution

$$x=x',\ y=-y',$$

on transformera le domaine D en un domaine D' défini par les inégalités

$$a+b\geqq 0,\ -b\geqq 0,\ c+b\geqq 0 \tag{8.}$$

qui est caractérisé par les systèmes

$$(1,0),\ (0,1),\ (1,1).$$

On appelle réduites d'après *Selling* les formes quadratiques positives binaires qui vérifient les inégalités (8.)*).

En effectuant toutes les transformations du domaine D à l'aide des substitutions

$$x=px'+qy',\ y=p'x'+q'y'$$

à coefficients entiers et à déterminant ± 1, on obtient un ensemble (D) des domaines de formes quadratiques binaires.

L'ensemble (D) des domaines partage uniformément l'ensemble de toutes les formes quadratiques positives binaires, c'est-à-dire: une forme qui

*) *Selling*, Über die binären und ternären quadratischen Formen. (Ce Journal, t. 77, p. 143.)

est intérieure à un domaine quelconque D de l'ensemble (D) n'appartient à aucun autre domaine de cet ensemble; une forme qui est intérieure à une face du domaine D n'appartient qu'à un autre domaine de l'ensemble (D) qui est contigu au domaine D par cette face.

Les résultats exposés m'ont amené à un nouveau point de vue sur le problème de réduction des formes quadratiques positives.

Le problème de réduction des formes quadratiques positives consiste en une partition uniforme de l'ensemble des formes quadratiques positives à l'aide des domaines de formes, déterminés à l'aide des inégalités linéaires et jouissant de la propriété que chaque substitution à coefficients entiers et à déterminant ± 1 *ne change pas l'ensemble* (D) *de ces domaines. En partageant l'ensemble* (D) *en classes de domaines équivalents et en choisissant les représentants de toutes les classes*

$$D, D_1, \ldots D_{m-1}, \tag{9.}$$

on appellera réduites les formes quadratiques qui appartiennent à ces domaines.

On pourrait ajouter les conditions supplémentaires aux domaines (9.) en demandant: 1.) que $m=1$, 2.) que les formes quadratiques positives qui sont intérieures au domaine D ne soient pas équivalentes et enfin, 3.) que le nombre des inégalités linéaires qui définissent le domaine D soit le plus petit possible.

J'espère revenir une autre fois au problème posé de la réduction des formes quadratiques positives.

Dans ce mémoire, je me borne à l'étude des domaines de formes quadratiques qu'on obtient en généralisant les résultats exposés des recherches de *Lejeune-Dirichlet* et d'*Hermite* pour les formes quadratiques positives à un nombre quelconque de variables.

L'hexagone de *Lejeune-Dirichlet* peut être remplacé pour les formes quadratiques positives à n variables par un polyèdre convexe de l'espace analytique à n dimensions.

Pour une forme quadratique positive $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$, le polyèdre correspondant R présente un ensemble des points (α_i) vérifiant l'inégalité

$$\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j + 2\,\Sigma \alpha_i x_i \geqq 0 \tag{10).}$$

dans l'ensemble E. Le polyèdre R peut être déterminé à l'aide des inégalités indépendantes

$$\Sigma\Sigma a_{ij}\, l_{ik} l_{jk} \pm 2\,\Sigma \alpha_i\, l_{ik} \geqq 0, \qquad (k=1,2,\dots\tau)$$

dont le nombre 2τ ne dépasse par une limite

$$2\tau \leqq 2(2^n - 1).$$

Les systèmes de nombres entiers

$$(11.) \qquad \pm(l_{11}, l_{21}, \dots l_{n1}), \pm(l_{12}, l_{22}, \dots l_{n2}), \dots \pm(l_{1\tau}, l_{2\tau}, \dots l_{n\tau})$$

définissent par les équations correspondantes

$$\Sigma\Sigma a_{ij}\, l_{ik} l_{jk} \pm 2\,\Sigma \alpha_i\, l_{ik} = 0$$

2τ faces à $n-1$ dimensions du polyèdre R. Comme ces faces se partagent en τ paires de faces parallèles, j'appelle parallélloèdre le polyèdre R correspondant à une forme quadratique positive quelconque.

Les systèmes (11.) jouissent de plusieurs propriétés importantes.

1. *Pour qu'un système* $(l_1, l_2, \dots l_n)$ *appartienne à la série* (11.), *il faut et il suffit que deux systèmes* $(l_1, l_2, \dots l_n)$ *et* $(-l_1, -l_2, \dots -l_n)$ *soient les seules représentations du minimum de la forme* $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$ *dans l'ensemble composé de tous les systèmes de nombres entiers qui sont congrus au système* $(l_1, l_2, \dots l_n)$ *par rapport au module* 2, *le système* $l_1 = 0,\ l_2 = 0, \dots l_n = 0$ *étant exclu.*

2. *Parmi les systèmes* (11.) *se trouvent toutes les représentations du minimum arithmétique de la forme quadratique positive* $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$.

3. *Parmi les systèmes* (11.) *se trouvent tous les systèmes* (1.) *qui représentent n minima consécutifs de la forme* $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$.

4. *Tous les déterminants qu'on peut former de n systèmes quelconques appartenant à la série* (11.) *ne dépassent pas en valeur numérique une limite* $n!$.

En désignant par le symbole S_ν le nombre de faces à ν dimensions $(\nu = 0, 1, 2, \dots n-1)$ d'un parallélloèdre R, j'ai trouvé que

$$S_\nu \leqq (n+1-\nu)\, \Delta^{(n-\nu)} (m^n)_{m=1}. \qquad (\nu=0,1,2,\dots n-1)$$

En faisant $\nu=0$ dans cette inégalité, on obtient

$$S_0 \leqq (n+1)!,$$

donc le nombre des sommets d'un parallélloèdre R ne dépasse pas une limite $(n+1)!$. En faisant $\nu=n-1$, on obtient

$$S_{n-1} \leqq 2(2^n-1).$$

Je démontre dans ce mémoire qu'il existe des parallélloèdres pour lesquels le symbole S_ν s'exprime par la formule

$$S_\nu=(n+1-\nu)\Delta^{(n-\nu)}(m^n)_{m=1}. \qquad (\nu=0,1,2,\dots n-1)$$

Tous ces parallélloèdres sont primitifs.

La notion des parallélloèdres primitifs joue un rôle important dans mes recherches.

Je suis arrivé à la notion des parallélloèdres primitifs en observant que les parallélloèdres possèdent la propriété I des hexagones de *Lejeune-Dirichlet*, à savoir:

I. *Il existe un groupe de translations d'un parallélloèdre R à l'aide desquelles on remplit uniformément l'espace analytique à n dimensions par les parallélloèdres congruents.*

Désignons par (R) l'ensemble des parallélloèdres qui sont définis par l'inégalité

$$\Sigma\Sigma a_{ij}x_ix_j+2\Sigma\alpha_ix_i \geqq \Sigma\Sigma a_{ij}l_il_j+2\Sigma\alpha_il_i,$$

$l_1, l_2, \dots l_n$ étant des nombres entiers arbitraires. Chaque système (l_i) de nombres entiers caractérise un parallélloèdre de l'ensemble (R).

Je démontre que l'ensemble (R) des parallélloèdres correspondant aux différents systèmes (l_i) de nombres entiers remplit uniformément l'espace à n dimensions.

Le groupe correspondant de translations du parallélloèdre R défini par les inégalités (10.) est composé de vecteurs $[\lambda_i]$ qui sont déterminés par les égalités

$$\lambda_i = -\sum_{k=1}^{n} a_{ik} l_k, \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

$l_1, l_2, \ldots l_n$ étant des nombres entiers arbitraires.

Chaque sommet (α_i) des parallélloèdres de l'ensemble (R) appartient au moins à $n+1$ parallélloèdres. J'appelle simple un sommet (α_i) qui n'appartient qu'à $n+1$ parallélloèdres de l'ensemble (R) et j'établis une notion de parallélloèdre primitif commme il suit:

On appelle parallélloèdre primitif un parallélloèdre dont tous les sommets sont simples.

Tous les parallélloèdres qui ne sont pas primitifs sont dits imprimitifs. A ce point de vue, l'hexagone de *Lejeune-Dirichlet* présente un parallélloèdre primitif et chaque parallélogramme est un parallélloèdre imprimitif à deux dimensions.

Chaque parallélloèdre imprimitif est une limite des parallélloèdres primitifs et peut être envisagé comme un cas de dégénérescence des parallélloèdres primitifs.

Je partage les parallélloèdres primitifs en types différents en caractérisant un type de parallélloèdres primitifs par un ensemble (L) de simplexes corrélatifs aux différents sommets des parallélloèdres qui appartiennent à l'ensemble (R).

Un sommet pareil (α_i) est détérminé par $n+1$ équations

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l_{ik} l_{jk} + 2\,\Sigma \alpha_i l_{ik} = A. \qquad (k=0, 1, 2, \ldots n)$$

A $n+1$ systèmes de nombres entiers

$$(l_{1k}, l_{2k}, \ldots l_{nk}), \qquad (k=0, 1, 2, \ldots n)$$

je fais correspondre un simplexe L en le définissant comme un ensemble de points qui sont déterminés par les égalités

$$x_i = \sum_{k=0}^{n} \vartheta_k l_{ik}, \text{ où } \sum_{k=0}^{n} \vartheta_k = 1 \text{ et } \vartheta_k \geqq 0. \qquad (k=0, 1, 2, \ldots n,\ i=1, 2, \ldots n)$$

L'ensemble (L) des simplexes qui sont corrélatifs aux sommets de l'ensemble (R) de parallélloèdres primitifs jouit de propriétés importantes.

1. *L'ensemble (L) de simplexes partage uniformément l'espace à n dimensions.*

2. *En effectuant les différentes translations d'un simplexe de l'ensemble (L) le long des vecteurs $[l_i]$ qui sont déterminés par les nombres entiers arbitraires $l_1, l_2, \ldots l_n$, on obtient une classe de simplexes congruents qui appartiennent à l'ensemble (L).*

3. *Le nombre des simplexes incongruents de l'ensemble (L) est fini.*

La propriété II des hexagones de *Lejeune-Dirichlet* pour les parallé-loèdres primitifs peut être généralisée comme il suit:

II. *Toutes les formes quadratiques qui définissent les parallélloèdres primitifs appartenant au type caractérisé par l'ensemble (L) de simplexes sont intérieures à un domaine de formes quadratiques à $\frac{n(n+1)}{2}$ dimensions défini par des inégalités linéaires.*

J'obtiens les inégalités linéaires qui définissent un domaine D de formes quadratiques correspondant à un ensemble (L) de simplexes en examinant les arêtes incongruentes des parallélloèdres primitifs appartenant au type caractérisé par l'ensemble (L) de simplexes.

Chaque sommet (α_i) des parallélloèdres primitifs de l'ensemble (R) appartient à $n+1$ arêtes $[\alpha_i, \alpha_{ik}]$ de ces parallélloèdres $(k=0,1,2,\ldots n)$.

En posant

$$\alpha_{ik} - \alpha_i = p_{ik}\,\varrho_k, \qquad (i=1,2,\ldots n;\ k=0,1,2,\ldots n)$$

on peut déterminer le paramètre positif ϱ_k, de manière que les nombres $p_{1k}, p_{2k}, \ldots p_{nk}$ soient entiers et ne possèdent pas de diviseur commun. Je démontre que le paramètre ϱ_k s'exprime par une fonction linéaire

$$\varrho_k = \Sigma\Sigma p_{ij}^{(k)} a_{ij} \tag{12.}$$

des coefficients de la forme quadratique donnée $\Sigma\Sigma a_{ij}x_ix_j$, les coefficients

$$p_{ij}^{(k)} = p_{ji}^{(k)}, \qquad (i=1,2,\ldots n;\ j=1,2,\ldots n)$$

étant rationnels.

J'appelle régulateur de l'arête $[\alpha_i, \alpha_{ik}]$ la fonction ϱ_k déterminée par la formule (12.); le système (p_{ik}) est dit caractéristique de l'arête

$$[\alpha_i, \alpha_{ik}]. \qquad (k=0,1,2,\ldots n)$$

Comme l'arête $[\alpha_i, \alpha_{ik}]$ est corrélative à une face P_k à $n-1$ dimensions du simplexe L qui est corrélatif au sommet (α_i), j'appelle la fonction (12.) *régulateur de la face* P_k et le système $\pm(p_{ik})$ *caractéristique de la face* P_k *du simplexe* L $(k=0, 1, 2, \dots n)$.

En désignant par

$$\varrho_k \text{ et } \pm(p_{ik}), \qquad (k=1, 2, \dots \sigma)$$

les régulateurs et les caractéristiques de toutes les faces incongruentes à $n-1$ dimensions de l'ensemble (L) de simplexes, je démontre le théorème important suivant:

Le domaine de formes quadratiques qui est caractérisé par l'ensemble (L) *de simplexes est défini par les inégalités linéaires*

$$\varrho_k = \Sigma\Sigma p_{ij}^{(k)} a_{ij} \geqq 0. \qquad (k=1, 2, \dots \sigma)$$

Tous les domaines de formes quadratiques que j'ai étudiés dans ce mémoire possèdent une propriété remarquable: ils sont des domaines simples, c'est-à-dire le nombre des inégalités indépendantes qui les définissent est égal à $\frac{n(n+1)}{2}$.

Une autre coïncidence a attiré depuis longtemps mon attention: c'est la relation qui existe entre les résultats exposés dans ce mémoire et ceux qui ont été obtenus dans mon premier mémoire intitulé: „Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites"*). J'ai observé que l'ensemble de caractéristiques $\pm(p_{ik})$, $k=1, 2, \dots \sigma$ n'est autre chose que l'ensemble de toutes les représentations du minimum d'une forme quadratique parfaite φ. Le domaine D ou bien coïncide avec le domaine R correspondant à la forme parfaite φ, ou bien présente une partie de ce domaine.

Malgré tous mes efforts, je n'ai pas réussi à découvrir le lien qui rattache les deux problèmes exposés et qui semblent être si différents, abstraction faite d'une formule remarquable

$$\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{\sigma} \varrho_k \omega_k (p_{1k} x_1 + p_{2k} x_2 + \dots + p_{nk} x_n)^2$$

qui fournit l'expression d'une forme quadratique arbitraire $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$ en fonction des régulateurs $\varrho_k (k=1, 2, \dots \sigma)$ qui sont déterminés par la formule (12.).

*) Ce Journal, t. 133, p. 97.

Dans cette formule $\omega_k (k=1,2,\dots\sigma)$ sont des nombres entiers positifs qui ne dépendent que des faces correspondantes des simplexes de l'ensemble (L).

Aux différents types de parallélloèdres primitifs correspond un ensemble (D) des domaines de formes quadratiques. L'ensemble (D) partage uniformément l'ensemble de toutes les formes quadratiques positives à n variables.

J'expose dans ce mémoire un algorithme à l'aide duquel on peut déterminer tous les domaines de formes qui sont contigus à un domaine de l'ensemble (D) par les faces à $\frac{n(n+1)}{2}-1$ dimensions. Cet algorithme se ramène à une certaine reconstruction de l'ensemble (L) de simplexes en un autre ensemble (L').

L'ensemble (D) des domaines de formes se transforme en soi-même par toutes les substitutions à coefficients entiers et à déterminant ± 1. En partageant l'ensemble (D) en des classes de domaines équivalents, on obtient à l'aide de l'algorithme exposé les représentants

$$D, D_1, \dots D_{m-1}$$

des classes différentes de domaines appartenant à l'ensemble (D).

En appelant réduites les formes quadratiques qui appartiennent aux domaines obtenus, on établit une méthode nouvelle de réduction des formes quadratiques positives.

J'ai appliqué la théorie générale exposée à l'étude des deux types de parallélloèdres primitifs de l'espace à n dimensions qui correspondent au domaine principal des formes quadratiques et aux domaines qui sont contigus au domaine principal par les faces à $\frac{n(n+1)}{2}-1$ dimensions. Le domaine principal est défini par les inégalités

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \geqq 0, \qquad (i=1,2,\dots n)$$

$$-a_{ij} \geqq 0. \qquad (i=1,2,\dots n;\ j=1,2,\dots n;\ i \neq j)$$

J'étudie en détail les parallélloèdres de l'espace à 2, 3 et 4 dimensions.

Dans l'espace à 2 dimensions, il n'existe qu'un seul type de parallélloèdres primitifs, à condition qu'on ne considère pas comme différents les types équivalents; c'est l'hexagone de *Lejeune-Dirichlet.*

L'ensemble (D) des domaines est composé dans ce cas d'une seule classe dont le représentant est le domaine principal défini par les inégalités (8.).

Dans l'espace à 2 dimensions, il n'existe qu'une seule espèce de parallélloèdres imprimitifs — c'est le parallélogramme.

Dans l'espace à 3 dimensions, il n'existe qu'un seul type de parallélloèdres primitifs — c'est un polyèdre à 14 faces dont 8 sont hexagonales et 6 sont parallélogrammatiques.

L'ensemble (D) des domaines est composé dans ce cas d'une seule classe dont le représentant est le domaine principal. En appelant réduite une forme quadratique positive ternaire $ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy$ qui appartient au domaine principal déterminé à l'aide des inégalités

$$a + b' + b'' \geqq 0,\ a' + b'' + b \geqq 0,\ a'' + b + b' \geqq 0,\ -b \geqq 0,\ -b' \geqq 0,\ -b'' \geqq 0,$$

on arrivera à la méthode de réduction des formes quadratiques positives ternaires due à *Selling**).

Dans l'espace à 3 dimensions, il existe 4 espèces de parallélloèdres imprimitifs, ce sont: 1.) le parallélopipède, 2.) le prisme à base hexagonale, 3.) le dodécaèdre parallélogrammatique et 4.) le dodécaèdre à 4 faces hexagonales et à 8 faces parallélogrammatiques.

Dans l'espace à 4 dimensions, il existe trois types de parallélloèdres primitifs. L'ensemble (D) des domaines est composé de trois classes de domaines de formes quadratiques quaternaires.

J'ai déterminé les trois représentants de ces classes

$$D,\ D',\ D''.$$

En appelant réduites les formes quadratiques positives quaternaires qui appartiennent aux domaines D, D' et D'', je suis arrivé à une modification de la méthode de réduction des formes quadratiques positives quaternaires due à M. *Charve**).

Jusqu'à présent, je n'ai considéré que les parallélloèdres qui sont définis par les formes quadratiques positives.

On peut envisager le problème de partition uniforme de l'espace analytique à n dimensions par des polyèdres convexes congruents indépendamment de la théorie des formes quadratiques.

---

*) *Selling*, Mémoire cité.

**) *Charve*, De la réduction des formes quadratiques quaternaires positives (Comptes-Rendus des séances de l'Academie de Paris, t. 92, p. 782 et Annales de l'École Normale supérieure, 2e série, t. XI, p. 119).

En appelant parallélоèdre chaque polyèdre convexe qui jouit de la propriété I, je démontre le remarquable théorème suivant.

En effectuant toutes les transformations linéaires possibles a l'aide du groupe continu de substitutions

$$x_i = \alpha_{i0} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x'_k \qquad (i=1, 2, \dots n)$$

à coefficients réels quelconques d'un parallélоèdre primitif, on obtient un ensemble de parallélоèdres primitifs qui est parfaitement déterminé par une classe de formes quadratiques positives équivalentes, à condition qu'on ne considère pas comme différentes les formes quadratiques à coefficients proportionnels.

En vertu de ce théorème, le problème de partition uniforme de l'espace à n dimensions par des parallélоèdres primitifs congruents se ramène toujours à l'étude des parallélоèdres primitifs correspondant aux formes quadratiques positives.

Je suis porté à croire, sans pouvoir le démontrer, que le théorème énoncé est aussi vrai pour les parallélоèdres imprimitifs.

Les parallélоèdres de l'espace à 2 et à 3 dimensions ont été étudiés par M. *Fedorow**) qui a découvert à l'aide de considérations purement géométriques l'existence de deux espèces de parallélоèdres dans l'espace à 2 dimensions et l'existence de cinq espèces de parallélоèdres dans l'espace à 3 dimensions. M. *Fedorow* a démontré qu'il n'existe pas d'autres parallélоèdres dans l'espace à 2 et à 3 dimensions.

Les parallélоèdres à 3 dimensions de M. *Fedorow* jouent un rôle important dans la théorie de la structure des cristaux**).

*) *Fedorow*, Éléments de la théorie des figures. St. Pétersbourg, 1885 (*en russe*). *Fedorow*, Reguläre Plan- und Raumteilung. (Abhandlungen der K. bayer. Akademie der Wiss., II Cl., XX Bd. II Abt. München, 1899.)

Voyez aussi: *Minkowski*, Allgemeine Lehrsätze über die convexen Polyeder. (Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathem.-physikalische Klasse, 1897, p. 198.)

**) Voyez: *Fedorow*, Cours de la Cristallographie. St. Pétersbourg, 1901 (*en russe*).
Soret, Cristallographie physique. Genève, 1894.
Schönflies, Kristallsysteme und Kristallstruktur. Leipzig, 1891.
Sommerfeldt, Physikalische Kristallographie. Leipzig, 1907.

Première partie.

Partition uniforme de l'espace analytique à n dimensions à l'aide des translations d'un même polyèdre convexe.

Section I.

Propriétés générales des parallélloèdres.

Sur les polyèdres convexes à n dimensions.

1. On appellera point de l'espace analytique à n dimensions chaque système $(x_1, x_2, \dots x_n)$, ou simplement (x_i), des valeurs réelles des variables $x_1, x_2, \dots x_n$.

Envisageons un système d'inégalités linéaires

$$(1.)\qquad a_{0k} + \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\, x_i \geqq 0 \qquad (k=1,2,\dots \sigma)$$

à coefficients réels quelconques.

On dira que l'ensemble R des points vérifiant les inégalités (1.) est à n dimensions, s'il existe des points satisfaisant aux conditions

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik}\, x_i > 0. \qquad (k=1,2,\dots \sigma)$$

On les appellera points intérieurs à l'ensemble R.

*Principe fondamental**). *Pour que l'ensemble R des points vérifiant les inégalités* (1.) *soit à n dimensions, il faut et il suffit que l'équation*

$$\varrho_0 + \sum_{k=1}^{\sigma} \varrho_k (a_{0k} + \Sigma a_{ik}\, x_i) = 0$$

---

*) Le principe énoncé ne diffère que par la formulation du principe fondamental exposé dans mon premier mémoire intitulé: Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites. (Ce Journal, t. 133, p. 113.)

ne se réduise pas à une identité tant que tous les paramètres $\varrho_0, \varrho_1, \dots \varrho_\sigma$ *sont positifs ou nuls.*

Définition I. *On appellera polyèdre convexe chaque ensemble des points vérifiant un système d'inégalités linéaires, à condition que cet ensemble soit borné et à n dimensions.*

2. Admettons que les inégalités (1.) définissent un polyèdre convexe R et supposons que toutes les inégalités (1.) soient indépendantes. Dans ce cas, le polyèdre R possède σ faces à $n-1$ dimensions qui sont définies par les équations correspondantes

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i = 0. \qquad (k=1,2,\dots\sigma)$$

Définition II. *Supposons qu'un point* (α_i) *appartenant à* R *vérifie les équations*

$$(2.) \qquad a_{0r} + \Sigma a_{ir} x_i = 0, \qquad (r=1,2,\dots\mu)$$

et qu'on ait les inégalités

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik} \alpha_i > 0. \qquad (k=\mu+1,\dots\sigma)$$

Désignons par ν *le nombre des dimensions de l'ensemble* $P(\nu)$ *composé des points appartenant à* R *et vérifiant les équations* (2.). *On appellera face à* ν *dimensions du polyèdre* R *l'ensemble* $P(\nu)$ $(\nu = 0, 1, 2, \dots n-1)$.

Dans le cas $\nu = 1$, on appellera arête du polyèdre R une face $P(1)$ et dans le cas $\nu = 0$, on appellera sommet du polyèdre R une face $P(0)$.

Pour plus de généralité dans les notations, on désignera par le symbole $P(n)$ le polyèdre R lui-même.

Sous cette restriction, on peut énoncer la proposition suivante:

Chaque point appartenant au polyèdre R *est intérieur à une face* $P(\nu)$ *de ce polyèdre, où* $\nu = 0, 1, 2, \dots n$.

3. Supposons que le polyèdre R possède s sommets

$$(\alpha_{i1}), \ (\alpha_{i2}), \dots \ (\alpha_{is}).$$

Désignons par

$$(\alpha_{i1}), \ (\alpha_{i2}), \dots \ (\alpha_{im})$$

tous les sommets de R qui vérifient les équations (2.).

*Théorème**). *La face $P(\nu)$ à ν dimensions $(\nu = 0, 1, 2, \ldots n)$ du polyèdre R définie par les équations* (2.) *présente un ensemble de points déterminés à l'aide des égalités*

$$x_i = \sum_{r=1}^{m} \vartheta_r \alpha_{ir} \text{ où } \Sigma\vartheta_r = 1 \text{ et } \vartheta_r \geqq 0. \qquad (r = 1, 2, \ldots m)$$

Ensemble des domaines à n dimensions correspondant aux différents sommets d'un polyèdre convexe.

4. Supposons qu'un sommet (α_i) du polyèdre R soit déterminé par les équations

$$(1.) \qquad a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i = 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots \mu)$$

Définition. On appellera domaine correspondant au sommet (α_i) l'ensemble A des points déterminés à l'aide des égalités

$$(2.) \qquad x_i = \sum_{k=1}^{\mu} \varrho_k a_{ik} \text{ où } \varrho_k \geqq 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots \mu)$$

Désignons par

$$(3.) \qquad A_1, A_2, \ldots A_s$$

les domaines correspondant aux différents sommets

$$(\alpha_{i1}), (\alpha_{i2}), \ldots (\alpha_{is})$$

du polyèdre R. En vertu de la définition établie, l'ensemble (3.) de domaines jouit des propriétés suivantes:

I. *Tous les domaines de l'ensemble* (3.) *sont à n dimensions.*

Admettons que le domaine A déterminé par les égalités (2.) ne soit pas à n dimensions.

Tous les points (x_i) appartenant au domaine A vérifieront au moins une équation linéaire

$$\Sigma p_i x_i = 0.$$

---

*) Voyez mon mémoire cité, n° 12.

En vertu de (2.), on aura

(4.) $$\Sigma p_i a_{ik} = 0. \qquad (k=1,2,\dots \mu)$$

Comme les équations (1.) définissent un sommet (α_i) du polyèdre R, on trouvera parmi les systèmes

$$(a_{11}, \dots a_{n1}), \ (a_{12}, \dots a_{n2}), \dots (a_{1\mu}, \dots a_{n\mu})$$

n systèmes dont le déterminant ne s'annule pas; il s'ensuit que les égalités (4.) sont impossibles.

II. *Chaque point de l'espace à n dimensions appartient au moins à un domaine de l'ensemble* (3.).

Soit (a_i) un point arbitraire. Examinons les sommes

$$\Sigma a_i \alpha_{ik}, \qquad (k=1,2,\dots s)$$

et supposons que la plus petite somme $\Sigma a_i \alpha_i$ corresponde au sommet (α_i) défini par les équations (1.). On aura les inégalités

$$\Sigma a_i \alpha_{ik} \geqq \Sigma a_i \alpha_i. \qquad (k=1,2,\dots s)$$

En vertu du théorème du n° 3, on obtient

$$\Sigma a_i x_i \geqq \Sigma a_i \alpha_i,$$

quel que soit un point (x_i) appartenant au polyèdre R.

On en conclut que les inégalités

$$\Sigma a_i \alpha_i - \Sigma a_i x \geqq 0 \text{ et } a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i \geqq 0 \qquad (k=1,2,\dots \sigma)$$

ne peuvent pas définir un polyèdre à n dimensions et, en vertu du principe fondamental du n° 1, on aura une identité

$$\varrho_0 + \varrho(\Sigma a_i \alpha_i - \Sigma a_i x_i) + \sum_{k=1}^{\sigma} \varrho_k (a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i) = 0,$$

où

$$\varrho_0 \geqq 0, \ \varrho \geqq 0, \ \varrho_k \geqq 0. \qquad (k=1,2,\dots \sigma)$$

En faisant $x_i = \alpha_i$ dans cette identité, il viendra

$$\varrho_0 + \sum_{k=1}^{\sigma} \varrho_k (a_{0k} + \Sigma a_{ik} \alpha_i) = 0,$$

et comme d'après la supposition faite

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik} \alpha_i > 0$$

tant que $k = \mu + 1, \ldots \sigma$, il est nécessaire que

$$\varrho_0 = 0, \; \varrho_{\mu+1} = 0, \; \ldots \; \varrho_\sigma = 0,$$

donc

$$\varrho (\Sigma a_i \alpha_i - \Sigma a_i x_i) + \sum_{k=1}^{\mu} \varrho_k (a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i) = 0.$$

On en tire

$$a_i = \sum_{k=1}^{\mu} \frac{\varrho_k}{\varrho} a_{ik} \text{ où } \frac{\varrho_k}{\varrho} \geqq 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots \mu)$$

donc le point (a_i) appartient au domaine A.

III. *Un point qui est intérieur à une face* $A(\nu)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots n)$ *d'un domaine quelconque de l'ensemble* (3.) *n'appartient qu'aux domaines de l'ensemble* (3.) *qui sont contigus par la face* $A(\nu)$.

Admettons que le point (a_i) soit intérieur à une face $A(\nu)$ du domaine A.

En désignant par

$$(a_{i1}), (a_{i2}), \ldots (a_{i\tau}), \quad \tau \leqq \mu$$

les points qui caractérisent la face $A(\nu)$, on peut poser*)

$$a_i = \sum_{k=1}^{\tau} \varrho_k a_{ik} \text{ où } \varrho_k > 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots \tau)$$

Admettons que le point (a_i) soit intérieur à une autre face $A'(\nu')$ d'un domaine A' qui correspond à un sommet (α'_i). On peut poser

$$a_i = \sum_{h=1}^{\tau'} \varrho'_h a'_{ih} \text{ où } \varrho'_h > 0. \qquad (h = 1, 2, \ldots \tau')$$

*) Voyez mon mémoire cité, n° 13.

En vertu de ces égalités, on aura une identité

$$(5.) \qquad \varrho_0 + \sum_{k=1}^{\tau} \varrho_k (a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i) = \sum_{h=1}^{\tau'} \varrho'_h (a'_{0h} + \Sigma a'_{ih} x_i).$$

En faisant dans cette identité $x_i = \alpha_i$, on obtient

$$\varrho_0 = \sum_{h=1}^{\tau'} \varrho'_h (a'_{0h} + \Sigma a'_{ih} \alpha_i),$$

et il en résulte que

$$\varrho_0 \geqq 0.$$

En faisant dans l'identité (5.) $x_i = \alpha'_i$, on obtient

$$\varrho_0 + \sum_{k=1}^{\tau} \varrho_k (a_{0k} + \Sigma a_{ik} \alpha'_i) = 0;$$

par suite $\varrho_0 = 0$ et

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik} \alpha'_i = 0. \qquad (k=1,2,\dots \tau)$$

De la même manière, on trouve

$$a'_{0h} + \Sigma a'_{ih} \alpha_i = 0. \qquad (h=1,2,\dots \tau')$$

On en conclut que les deux faces $A(\nu)$ et $A'(\nu')$ coïncident*).

En vertu des propriétés démontrées de l'ensemble (3.) de domaines, on dira que cet ensemble partage uniformément l'espace à n dimensions.

Définition du groupe des vecteurs.

5. *Définition* I. *On appellera vecteur l'ensemble des points déterminés à l'aide des égalités*

$$(1.) \qquad x_i = \alpha_i + u(\alpha_i' - \alpha_i) \quad où \quad 0 \leqq u \leqq 1,$$

(α_i) *et* (α_i') *étant deux points quelconques différents.*

On désignera le vecteur déterminé à l'aide des égalités (1.) par le symbole $[\alpha_i, \alpha'_i]$. Dans le cas $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2, \dots n)$, on désignera le vecteur correspondant par le symbole $[\alpha'_i]$ et on l'appellera vecteur du point (α'_i).

Définition II. *Supposons que*

$$(2.) \qquad [\lambda_{i1}], [\lambda_{i2}], \dots [\lambda_{im}]$$

*) Voyez mon mémoire cité, n° 20, p. 133.

soient les vecteurs des points arbitraires $(\lambda_{i1}), (\lambda_{i2}), \ldots (\lambda_{im})$. *On appellera groupe de vecteurs l'ensemble G des vecteurs déterminés à l'aide des égalités*

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^{m} l_k \lambda_{ik},$$

${}_1, l_2, \ldots l_m$ *étant des nombres entiers arbitraires.*

On appellera base du groupe G de vecteurs les vecteurs (2.).

Translation des polyèdres.

6. *Définition. Effectuons une transformation linéaire d'un polyèdre R à l'aide d'une substitution*

$$(1.) \qquad x_i = x_i' - \lambda_i, \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ *étant arbitraires. On dira qu'on a effectué une translation du polyèdre R le long du vecteur* $[\lambda_i]$.

Supposons que le polyèdre R soit déterminé par les inégalités

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i \geqq 0. \qquad (k=1,2,\ldots \sigma)$$

Le polyèdre transformé R' sera déterminé, en vertu de (1.), par les inégalités

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik}(x_i - \lambda_i) \geqq 0. \qquad (k=1,2,\ldots \sigma)$$

On appellera congruents les polyèdres R et R'.

7. Soit G un groupe de vecteurs. En effectuant les translations différentes du polyèdre R le long des vecteurs appartenant au groupe G, on formera un ensemble (R) de polyèdres congruents.

On dira que l'ensemble (R) de polyèdres congruents partage uniformément l'espace à n dimensions aux conditions suivantes:

I. *Chaque point de l'espace à n dimensions appartient au moins à un polyèdre de l'ensemble* (R).

II. *Un point qui est intérieur à une face quelconque* $P(\nu)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots n)$ *d'un polyèdre de l'ensemble* (R) *n'appartient qu'aux polyèdres de l'ensemble* (R) *qui sont contigus par la face* $P(\nu)$.

Définition des paralléloèdres.

8. *Définition. On appellera paralléloèdre chaque polyèdre convexe R possédant un groupe G de translations à l'aide desquelles on peut remplir uniformément l'espace à n dimensions par les polyèdres congruents au polyèdre R.*

En vertu de la définition établie, les paralléloèdres possèdent une propriété importante, à savoir:

En effectuant une transformation linéaire d'un paralléloèdre à l'aide d'une substitution à coefficients réels quelconques

$$x_i = \alpha_{i0} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x'_k, \qquad (i=1,2,\dots n)$$

on obtient un polyèdre convexe qui est aussi un paralléloèdre.

Observons qu'en vertu de la définition établie, chaque parallélopipède de l'espace à n dimensions est un paralléloèdre.

Propriétés du groupe de vecteurs d'un paralléloèdre.

9. Supposons qu'un paralléloèdre R soit défini par les inégalités

$$(1.) \qquad a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i \geqq 0. \qquad (k=1,2,\dots \sigma)$$

Désignons par G le groupe du paralléloèdre R et supposons que le groupe G possède la base

$$(2.) \qquad [\lambda_{i1}],\ [\lambda_{i2}], \dots [\lambda_{im}].$$

Tous les vecteurs qui forment la base du groupe G ne peuvent pas vérifier une même équation linéaire

$$\Sigma p_i \lambda_i = 0,$$

puisqu' autrement l'ensemble (R) des paralléloèdres congruents correspondant au groupe G ne remplirait pas l'espace à n dimensions.

On en conclut que parmi les vecteurs (2.) se trouvent n vecteurs

$$(3.)\qquad [\lambda_{i1}],\ [\lambda_{i2}], \dots [\lambda_{in}]$$

dont le déterminant $\pm \varDelta$ ne s'annule pas; on les appellera indépendants.

Théorème I. *La valeur numérique $\varDelta$ du déterminant de n vecteurs indépendants possède une limite*

$$\varDelta \geqq \int_{(R)} dx_1\, dx_2 \dots dx_n.$$

Soit (α_i) un point quelconque qui est intérieur au parallèloèdre R. Introduisons dans nos recherches un parallélopipède K déterminé à l'aide des égalités

$$(4.)\qquad x_i = \alpha_i + \sum_{k=1}^{n} u_k \lambda_{ik}, \qquad (i=1,2,\dots n)$$

où

$$(5.)\qquad -\delta \leqq u_k \leqq \delta. \qquad (k=1,2,\dots n)$$

On peut choisir le paramètre positif δ, de manière que tous les points du parallèloèdre R défini par les inégalités (1.) appartiennent au parallélopipède K.

Prenons un nombre entier positif m et déterminons $(m+1)^n$ systèmes $(l_1, l_2, \dots l_n)$ de nombres entiers vérifiant les inégalités

$$(6.)\qquad 0 \leqq l_k \leqq m. \qquad (k=1,2,\dots n)$$

Désignons par

$$(7.)\qquad \lambda_i^{(h)} = \sum_{k=1}^{n} l_k^{(h)} \lambda_{ik}, \qquad (h=1,2,\dots (m+1)^n)$$

$(m+1)^n$ vecteurs correspondants appartenant au groupe G.

En effectuant les translations du parallèloèdre R le long des vecteurs (7.), on obtient $(m+1)^n$ parallèloèdres différents de l'ensemble (R):

$$(8.)\qquad R^{(h)}. \qquad (h=1,2,\dots (m+1)^n)$$

Désignons par H un parallélopipède qui est déterminé par les égalités

$$(9.) \qquad x_i = \alpha_i + \sum_{k=1}^{n} u_k \lambda_{ik}, \qquad (i=1,2,\dots n)$$

où

$$(10.) \qquad -\delta \leqq u_k \leqq m + \delta. \qquad (k=1,2,\dots n)$$

Je dis que tous les points des parallélloèdres (8.) appartiennent au parallélopipède H. En effet, soit $(x_i^{(h)})$ un point quelconque du parallélloèdre $R^{(h)}$ $(h = 1, 2, \dots (m+1)^n)$. En posant

$$(11.) \qquad x_i = x_i^{(h)} - \lambda_i^{(h)}, \qquad (i=1,2,\dots n)$$

on obtient un point (x_i) appartenant au parallélloèdre R qui est congruent au point donné $(x_i^{(h)})$. En vertu de (4.), (7.) et (11.), on obtient

$$x_i^{(h)} = \alpha_i + \sum_{k=1}^{n} (l_k + u_k) \lambda_{ik},$$

et à cause de (5.) et (6.), il vient

$$-\delta \leqq l_k + u_k \leqq m + \delta, \qquad (k=1,2,\dots n)$$

donc le point $(x_i^{(h)})$ appartient au parallélopipède H.

Il s'ensuit que

$$\int_{(H)} dx_1 dx_2 \dots dx_n \geqq \sum_h \int_{(R^h)} dx_1 dx_2 \dots dx_n. \qquad (h=1,2,\dots (m+1)^n)$$

En observant que

$$\int_{(H)} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \Delta (m + 2\delta)^n$$

et que

$$\int_{(R^h)} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int_{(R)} dx_1 dx_2 \dots dx_n, \qquad (h=1,2,\dots (m+1)^n)$$

on obtient

$$\Delta (m + 2\delta)^n \geqq (m+1)^n \int_{(R)} dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

En faisant croître indéfiniment le nombre m, on trouve

$$\Delta \geqq \int_{(R)} dx_1\, dx_2 \dots dx_n.$$

10. *Théorème* II. *Le groupe G des vecteurs d'un paralléloèdre possède une base formée de n vecteurs indépendants.*

Désignons par G' un groupe de vecteurs ayant la base (3.). Il peut arriver que les deux groupes G et G' coïncident. Dans ce cas n vecteurs (3.) présentent une base du groupe G.

En admettant le contraire, on aura parmi les vecteurs (2.) au moins un vecteur $[\lambda'_i]$ qui n'appartient pas au groupe G'. En posant

$$\lambda'_i = \sum_{k=1}^{n} l'_k \lambda_{ik},$$

on aura parmi les nombres $l'_1, l'_2, \dots l'_n$ au moins un nombre qui sera fractionnaire.

Désignons par $l_1, l_2, \dots l_n$ les nombres entiers vérifiant les inégalités

$$|l'_k - l_k| \leqq \frac{1}{2} \qquad (k=1, 2, \dots n)$$

et supposons que $l'_r - l_r \neq 0$.

En désignant

$$\lambda'_{ik} = \lambda_{ik}, \quad (k=1, 2, \dots n,\ k \neq r) \quad \text{et} \quad \lambda'_{ir} = \lambda'_i - \Sigma\, l_k\, \lambda_{ik},$$

on obtient un système de n vecteurs indépendants

$$[\lambda'_{i1}],\ [\lambda'_{i2}], \dots [\lambda'_{in}]$$

appartenant au groupe G dont le déterminant $\pm \Delta'$ vérifie l'inégalité

$$0 < \Delta' \leqq \frac{1}{2} \Delta.$$

Le procédé exposé ne peut être prolongé indéfiniment, en vertu du théorème I, donc on obtiendra toujours un système de n vecteurs formant la base du groupe G.

11. *Théorème* III. *La valeur numérique Δ du déterminant d'un système de n vecteurs formant la base du groupe G s'exprime par la formule*

$$\Delta = \int_{(R)} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Supposons que le système (3.) de n vecteurs présente une base du groupe G.

Introduisons dans nos recherches un parallélopipède H' déterminé à l'aide des égalités

$$x_i = \alpha_i + \sum_{k=1}^{n} u_k \lambda_{ik}, \qquad (i=1,2,\ldots n) \tag{12.}$$

où

$$\delta \leqq u_k \leqq m - \delta. \qquad (k=1,2,\ldots n) \tag{13.}$$

Je dis que chaque point du parallélopipède H' appartient au moins à un des paralléloèdres (8.). En effet, soit (x_i') un point quelconque du parallélopipède H'.

Désignons par R^0 un paralléloèdre de l'ensemble (R) auquel appartient le point (x_i'). Soit $[\lambda_i]$ le vecteur qui définit une translation du paralléloèdre R en R^0. En posant

$$x_i = x_i' - \lambda_i, \tag{14.}$$

on obtient un point (x_i) appartenant au paralléloèdre R qui est congruent au point (x_i'). En vertu de la supposition faite, le vecteur $[\lambda_i]$ peut être déterminé par les égalités

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^{n} l_k \lambda_{ik}. \tag{15.}$$

Comme le point (x_i') appartient au parallélopipède H', on présentera les égalités (14.), à cause de (12.) et (15.), sous la forme suivante:

$$x_i = \alpha_i + \sum_{k=1}^{n} (u_k - l_k) \lambda_{ik}.$$

Le point (x_i) appartenant au parallélloèdre R appartient aussi, en vertu de la supposition faite, au parallélopipède K déterminé par les égalités (4.), à condition de (5.). Il s'ensuit que

$$-\delta \leqq u_k - l_k \leqq \delta, \qquad (k=1,2,\dots n)$$

et comme, à cause de (13.),

$$\delta \leqq u_k \leqq m - \delta, \qquad (k=1,2,\dots n)$$

il vient

$$0 \leqq l_k \leqq m, \qquad (k=1,2,\dots n)$$

donc le vecteur $[\lambda_i]$ déterminé par les égalités (15.) se trouve parmi les vecteurs (7.) et le point examiné (x') du parallélopipède H' appartient à un parallélloèdre de la série (8.)

Il s'ensuit que

$$\int\limits_{(H')} dx_1\, dx_2 \dots dx_n \leqq \sum_h \int\limits_{(R^h)} dx_1\, dx_2 \dots dx_n, \qquad (h=1,2,\dots (m+1)^n)$$

donc

$$\Delta (m-2\delta)^n \leqq (m+1)^n \int\limits_{(R)} dx_1\, dx_2 \dots dx_n.$$

En faisant croître indéfiniment le nombre m, on obtient

$$\Delta \leqq \int\limits_{(R)} dx_1\, dx_2 \dots dx_n.$$

En vertu du théorème I, il est nécessaire que

$$\Delta = \int\limits_{(R)} dx_1\, dx_2 \dots dx_n.$$

Propriétés des faces à $n-1$ dimensions d'un parallélloèdre.

12. Supposons qu'un parallélloèdre R soit défini par les inégalités indépendantes

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i \geqq 0. \qquad (k=1,2,\dots \sigma)$$

Désignons par P_k ($k = 1, 2, \dots \sigma$) les faces à $n-1$ dimensions du parallélloèdre R déterminées par les équations correspondantes

$$(1.) \qquad a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i = 0. \qquad (k = 1, 2, \dots \sigma)$$

Soit (α_i) un point qui est intérieur à la face P_k. Examinons un parallélopipède K défini par les égalités

$$(2.) \qquad x_i = \alpha_i + u_i \text{ où } |u_i| \leqq \varepsilon. \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

On peut choisir un paramètre ε si petit qu'on aura les inégalités

$$(3.) \qquad a_{0r} + \Sigma a_{ir} x_i > 0, \qquad (r = 1, 2, \dots \sigma, r \neq k)$$

quel que soit un point (x_i) du parallélopipède K. Il en résulte que tous les points du parallélopipède K vérifiant l'inégalité

$$(4.) \qquad a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i \geqq 0$$

appartiennent au parallélloèdre R. Comme le point (α_i) vérifie l'équation (1.), l'inégalité (4.) se réduit, à cause de (2.), à celle-ci

$$\Sigma a_{0k} u_i \geqq 0.$$

Je dis qu'on peut choisir une valeur du paramètre ε si petite que tous les points du parallélopipède K vérifiant l'inégalité

$$\Sigma a_{ik} u_i \leqq 0$$

appartiendront à un autre parallélloèdre R_k de l'ensemble (R). On démontrera aisément la proposition énoncée en s'appuyant sur les propriétés démontrées du groupe G de vecteurs.

Deux parallèloèdres R et R_k sont contigus par la face P_k à $n-1$ dimensions.

Désignons par $[\lambda_{ik}]$ le vecteur qui définit une translation du parallèloèdre R_k en R.

La face P_k qui est définie dans le parallèloèdre R par l'équation (1.) sera définie dans le parallèloèdre R_k par l'équation

$$-a_{0k} - \Sigma a_{ik} x_i = 0. \tag{5.}$$

En effectuant une translation de la face P_k le long du vecteur $[\lambda_{ik}]$, on obtient une autre face P_k du parallèloèdre R qui sera dans ce parallèloèdre déterminée par l'équation

$$-a_{0k} - \Sigma a_{ik}(x_i - \lambda_{ik}) = 0.$$

On appellera parallèles les faces P_k et P'_k du parallèloèdre R.

Nous sommes arrivés au résultat important suivant:

Toutes les faces à $n-1$ dimensions d'un parallèloèdre peuvent être partagées en paires de faces parallèles.

13. Désignons par

$$R_1,\ R_2,\ \dots\ R_\sigma$$

tous les parallèloèdres qui sont contigus au parallèloèdre R par les faces $P_1, P_2, \dots P_\sigma$. Désignons par

$$[\lambda_{i1}],\ [\lambda_{i2}],\ \dots [\lambda_{i\sigma}] \tag{6.}$$

les vecteurs correspondants.

En vertu de la définition du parallèloèdre, les vecteurs (6.) forment la base du groupe G. Parmi les vecteurs de ce groupe se trouvent les systèmes de n vecteurs qui forment une base du groupe G.

Faces congruentes à différentes dimensions d'un parallèloèdre.

14. Supposons qu'une face $P(\nu)$ à ν dimensions d'un parallèloèdre R appartienne aussi aux parallèloèdres $R_1, R_2, \dots R_\tau$ de l'ensemble (R).

Soit (α_i) un point qui est intérieur à la face $P(\nu)$. On peut déterminer une valeur positive du paramètre ε, de manière que tous les points du parallélopipède K défini par les égalités

$$x_i = \alpha_i + u_i \text{ où } |u_i| \leqq \varepsilon \qquad (i=1,2,\dots n)$$

appartiennent aux paralléloèdres $R, R_1, R_2, \dots R_\tau$.

Désignons par $[\lambda_{ik}]$ les vecteurs le long desquels on effectuera les translations des paralléloèdres R_k en R $(k=1,2,\dots\tau)$.

En effectuant les translations de la face $P(\nu)$ le long des vecteurs $[\lambda_{ik}]$ $(k=1,2,\dots\tau)$, on obtient les faces nouvelles

$$P'(\nu), P''(\nu), P^{(\tau)}(\nu)$$

du paralléloèdre R.

Définition I. *On appellera congruentes les faces du paralléloèdre R*

$$P(\nu),\ P'(\nu), \dots P^{(\tau)}(\nu)$$

à ν dimensions $(\nu=0,1,2\dots n-1)$.

15. *Théorème. Le nombre des paralléloèdres de l'ensemble (R) qui sont contigus par une même face à ν dimensions ne peut être inférieur à $n+1-\nu$* $(\nu=0,1,2,\dots n-1)$.

Supposons que la face $P(\nu)$ soit déterminée dans le paralléloèdre R par les équations

$$(1.) \qquad a_{0r} + \Sigma a_{ir} x_i = 0. \qquad (r=1,2,\dots\mu)$$

Désignons par $R_1, R_2, \dots R_\mu$ les paralléloèdres qui sont contigus à R par les faces à $n-1$ dimensions définies par les équations (1.). La face $P(\nu)$ appartiendra à tous les paralléloèdres $R_1, R_2, \dots R_\mu$, donc

$$\tau \geqq \mu.$$

Comme la face $P(\nu)$ est à ν dimensions, il est nécessaire que

$$\mu \geqq n-\nu,$$

et par suite

$$\tau \geqq n - \nu.$$

16. *Définition* II. *On appellera simple une face à ν dimensions qui n'appartient qu'à $n+1-\nu$ parallélloèdres de l'ensemble* (R).

Définition III. *On appellera primitif un parallélloèdre dont toutes les faces à différentes dimensions sont simples.*

Les parallélloèdres primitifs possèdent plusieurs propriétés importantes qui en simplifient l'étude.

Dans les recherches ultérieures, on n'étudiera que les parallélloèdres primitifs et tous les parallélloèdres imprimitifs qui peuvent être considérés comme une limite des parallélloèdres primitifs.

Je suis porté à croire que chaque parallélloèdre imprimitif peut être envisagé à ce point de vue, mais je n'ai pas réussi à le démontrer.

Section II.

Propriétés fondamentales des parallélloèdres primitifs.

Définition des parallélloèdres primitifs.

17. Nous avons appelé au n° 16 „parallélloèdre primitif" tout parallélloèdre dont toutes les faces à différentes dimensions sont simples.

Théorème I. *Pour qu'un parallélloèdre soit primitif il faut et il suffit que tous ses sommets soient simples.*

Le théorème énoncé est évident en vertu de la définition établie.

Théorème II. *Deux parallélloèdres primitifs appartenant à l'ensemble* (R) *ne peuvent être contigus que par une face à $n-1$ dimensions.*

Supposons qu'une face $P(\nu)$ à ν dimensions d'un parallélloèdre primitif R soit déterminée à l'aide de $n-\nu$ équations

$$(1.) \qquad a_{0r} + \Sigma a_{ir}\, x_i = 0. \qquad {\scriptstyle (r=1,2,\ldots\, n-\nu)}$$

Désignons par $R_1, R_2, \ldots R_{n-\nu}$ les parallélloèdres qui sont contigus au parallélloèdre R par les faces à $n-1$ dimensions définies à l'aide des équations (1.). La face $P(\nu)$ n'appartiendra qu'aux parallélloèdres $R, R_1, \ldots R_{n-\nu}$, en vertu de la définition établie, donc le théorème énoncé est démontré.

Arêtes des parallélloèdres primitifs de l'ensemble (R).

18. Soit (α_i) un sommet du parallélloèdre primitif R déterminé par n équations

$$(1.) \qquad a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i = 0. \qquad (k=1, 2, \dots n)$$

Désignons par $R_1, R_2, \dots R_n$ les parallélloèdres contigus au parallélloèdre R par les faces à $n-1$ dimensions déterminées à l'aide des équations (1.).

En vertu de la définition établie, le sommet (α_i) n'appartiendra qu'aux parallélloèdres $R_1, R_2, \dots R_n$ de l'ensemble (R).

Déterminons n nombres $p_{1k}, p_{2k} \dots p_{nk}$ à l'aide des équations

$$(2.) \qquad \Sigma a_{ir}\, p_{ik} = 0. \qquad (r=1, 2, \dots n;\ r \neq k;\ k=1, 2, \dots n)$$

Les équations (2.) ne définissent les nombres $p_{1k}, p_{2k}, \dots p_{nk}$ qu' à un facteur commun près. Ajoutons aux équations (2.) une condition

$$(3.) \qquad \Sigma a_{ik} p_{ik} > 0 \qquad (k=1, 2, \dots n)$$

et envisageons un vecteur g_k déterminé à l'aide des égalités

$$x_i = \alpha_i + p_{ik}\varrho \quad \text{où} \quad \varrho \geqq 0.$$

En attribuant au paramètre ϱ des valeurs positives suffisamment petites, on déterminera, à cause de (3.), les points du vecteur g_k qui appartiennent à R.

Désignons par ϱ_k la limite supérieure des valeurs du paramètre ϱ qui définissent les points du vecteur g_k appartenant à R. En posant

$$\alpha_{ik} = \alpha_i + p_{ik}\varrho_k,$$

on déterminera un sommet (α_{ik}) du parallélloèdre R adjacent au sommet (α_i) par une arête $P_k(1)$ du parallélloèdre R $(k=1, 2, \dots n)$. On caractérisera l'arête $P_k(1)$ par le symbole $[\alpha_i, \alpha_{ik}]$.

Observons que tous les points de l'arête $P_k(1)$ vérifient $n-1$ équations

$$a_{0r} + \Sigma a_{ir} x_i = 0. \qquad (r=1, 2, \dots n;\ r \neq k)$$

Il s'ensuit que l'arête $P_k(1)$ appartient aux parallélloèdres

$$R, R_1 \ldots R_{k-1}, R_{k+1}, \ldots R_n \qquad (k=1, 2, \ldots n)$$

et en vertu de la définition établie, n'appartient à aucun autre parallélloèdre de l'ensemble (R).

On en conclut que les parallélloèdres

$$R_1, R_2, \ldots R_n$$

sont contigus par une arête aussi. En désignant cette arête par $P_0(1)$, on la déterminera par le symbole $[\alpha_i, \alpha_{i0}]$ en posant

$$\alpha_{i0} = \alpha_i + p_{i0}\varrho_0.$$

Nous sommes arrivés au résultat suivant:

Il existe $n+1$ arêtes des parallélloèdres de l'ensemble (R) contiguës par un même sommet de ces parallélloèdres.

Observons que $n-1$ arêtes

$$P_1(1), \ldots P_{k-1}(1), P_{k+1}(1), \ldots P_k(1) \qquad (k=1, 2, \ldots n)$$

définissent une face à $n-1$ dimensions qui est commune aux parallélloèdres R et R_k $(k=1, 2, \ldots n)$. Deux parallélloèdres R_k et R_h $(k=1, 2, \ldots n,\ h=1, 2, \ldots n)$ sont contigus par une face à $n-1$ dimensions qui est définie par $n-1$ arêtes

$$P_r(1). \qquad (r=0, 1, 2, \ldots n;\ r \neq k, r \neq h)$$

Forme canonique
des équations qui définissent un sommet d'un parallélloèdre primitif.

19. En conservant les notations précéndentes, on peut déterminer le sommet (α_i) dans le parallélloèdre R à l'aide des équations

$$(1.) \qquad u_k(a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i) = 0, \qquad (k=1, 2, \ldots n)$$

$u_1, u_2, \ldots u_n$ étant des paramètres arbitraires positifs. On dira que l'équation

$$-u_k(a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i) = 0 \text{ où } u_k > 0$$

ne définit pas dans le parallélоèdre R une face à $n-1$ dimensions puisque l'inégalité

$$-u_k(a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i) \geqq 0$$

ne sera pas vérifiée par tous les points du parallélоèdre R.

Théorème. On peut déterminer les valeurs positives des paramètres $u_1, u_2, \dots u_n$ *à un facteur commun près, de manière qu'en posant*

$$a'_{0k} = u_k a_{0k}, \quad a'_{ik} = u_k a_{ik}, \qquad (i=1,2,\dots n;\ k=1,2,\dots n)$$

on définira le sommet (α_i) *dans le parallélоèdre* R *par les équations*

$$(2.) \qquad \Sigma a'_{ik}(x_i - \alpha_i) = 0, \qquad (k=1,2,\dots n)$$

et on définira le sommet (α_i) *dans le parallélоèdre* R_k $(k=1,2,\dots n)$ *par les équations*

$$(3.) \qquad \begin{cases} \Sigma(a'_{ih} - a'_{ik})(x_i - \alpha_i) = 0, & (h=1,2,\dots n;\ h \neq k) \\ -\Sigma a'_{ik}(x_i - \alpha_i) = 0. & (k=1,2,\dots n) \end{cases}$$

Prenons un paramètre positif arbitraire δ et déterminons les paramètres $u_1, u_2, \dots u_n$, d'après les équations

$$(4.) \qquad u_k \Sigma a_{ik}(\alpha_i - \alpha_{i0}) = \delta. \qquad (k=1,2,\dots n)$$

Je dis que les valeurs obtenues de $u_1, u_2, \dots u_n$ satisfont aux conditions du théorème énoncé.

Pour le démontrer, observons en premier lieu que les équations (4.) définissent les valeurs positives de $u_1, u_2, \dots u_n$. En effet, nous avons vu au n° 18 que l'arête $P_0(1)$ définie par les égalités

$$(5.) \qquad x_i = \alpha + u(\alpha_{i0} - \alpha_i) \text{ où } 0 \leqq u \leqq 1$$

n'appartient qu'aux parallélоèdres $R_1, R_2, \dots R_n$. On en conclut qu'en attribuant au paramètre u une valeur négative quelconque, suffisamment petite, on déterminera par les égalités (5.) un point qui sera intérieur au parallélоèdre R. Il s'ensuit que

$$\Sigma a_{ik}(\alpha_i - \alpha_{i0}) > 0, \qquad (k=1,2,\dots n)$$

et les équations (4.) donnent

$$u_k > 0. \qquad (k=1,2,\dots n)$$

Cela posé, désignons par

$$(6.) \qquad \Sigma a_{ir}^{(k)}(x_i - \alpha_i) = 0 \qquad (r=1,2,\dots n)$$

les équations qui définissent le sommet (α_i) dans le paralléloèdre R_k $(k=1,2\dots n)$.

Observons que n arêtes $P_r(1)$ $(r=0,1,2\dots n, r \neq k)$ sont contiguës par le sommet (α_i) dans le paralléloèdre R_k. Chaque équation (6.) sera vérifiée par $n-1$ arêtes. On peut donc poser

$$(7.) \qquad \begin{cases} \Sigma a_{ik}^{(k)}(\alpha_{ir} - \alpha_i) = 0, & (r=1,2\dots n;\ r \neq k) \\ \Sigma a_{ik}^{(k)}(\alpha_{i0} - \alpha_i) > 0 \end{cases}$$

et

$$(8.) \qquad \begin{cases} \Sigma a_{ih}^{(k)}(\alpha_{ir} - \alpha_i) = 0, & (r=0,1,2,\dots n; r \neq k, r \neq h) \\ \Sigma a_{ih}^{(k)}(\alpha_{ih} - \alpha_i) > 0. & (h=1,2,\dots n; h \neq k) \end{cases}$$

Les conditions établies définissent les coefficients des équations (6.) à un facteur positif commun près, qui peut être choisi arbitrairement.

Observons que les coefficients des équations (1.), qui définissent le sommet (α_i) dans le paralléloèdre R, sont déterminés aussi à un facteur positif commun près et satisfont aux conditions

$$(9.) \qquad \begin{cases} \Sigma a_{ik}(\alpha_{ir} - \alpha_i) = 0, & (r=1,2,\dots n; r \neq k;\ k=1,2,\dots n) \\ \Sigma a_{ik}(\alpha_{ik} - \alpha_i) > 0. & (k=1,2,\dots n) \end{cases}$$

Des égalités (4.), (7.), (8.) et (9.), on tire

$$\left.\begin{aligned} a_{ik}^{(k)} &= -\delta_k u_k a_{ik}, \\ a_{ih}^{(k)} &= \delta_h(u_h a_{ih} - u_k a_{ik}), \end{aligned}\right\} \qquad (i=1,2,\dots n;\ h=1,2,\dots n;\ h \neq k)$$

où $\delta_1, \delta_2, .. \delta_n$ sont des facteurs positives. On peut poser

$$\delta_1 = 1, \delta_2 = 1, \dots \delta_n = 1,$$

et les équations (6.) deviennent

$$\Sigma(u_h a_{ih} - u_k a_{ik})(x_i - \alpha_i) = 0, \qquad (h=1,2,\dots n;\ h \neq k)$$

$$-\Sigma u_k a_{ik}(x_i - \alpha_i) = 0.$$

Le théorème énoncé est donc démontré.

On dira que les équations (2.) et (3.) qui définissent le sommet (α_i) dans les parallèloèdres contigus $R, R_1, \dots R_n$ sont présentées sous la forme canonique.

Nous avons vu au n° 18 que les parallèloèdres R_k et R_h $(k=1,2,\dots n;$ $h=1,2,\dots n)$ sont contigus par une face à $n-1$ dimensions. Comme cette face est caractérisée par les arêtes $P_r(1)$ $(r=0,1,2,\dots n; r \neq k; r \neq h)$, on la déterminera dans le parallèloèdre R_k par une équation canonique

$$\Sigma(a'_{ih} - a'_{ik})(x_i - \alpha_i) = 0.$$

Cette même face sera déterminée dans le parallèloèdre R_h par l'équation canonique

$$\Sigma(a'_{ik} - a'_{ih})(x_i - \alpha_i) = 0.$$

Forme canonique des inégalités qui définissent un parallèloèdre primitif.

20. Supposons qu'un parallèloèdre primitif R soit déterminé à l'aide des inégalités indépendantes

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i \geqq 0. \qquad (k=1,2,\dots \sigma)$$

En désignant par $u_1, u_2, \dots u_\sigma$ des paramètres positifs arbitraires, on déterminera le parallèloèdre R à l'aide des inégalités indépendantes

$$(1.) \qquad u_k(a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i) \geqq 0. \qquad (k=1,2,\dots \sigma)$$

Nous allons voir que tout le problème de l'étude des paralléloèdres primitifs se ramène au choix convenable des paramètres $u_1, u_2, \dots u_\sigma$.

Théorème fondamental. On peut déterminer les valeurs positives des paramètres $u_1, u_2, \dots u_\sigma$ *à un facteur commun près, de manière qu'en posant*

$$a'_{0k} = u_k a_{0k}, \; a'_{ik} = u_k a_{ik}, \qquad (i=1,2,\dots n;\; k=1,2,\dots \sigma)$$

on déterminera le paralléloèdre R *à l'aide des inégalités*

$$(2.) \qquad a'_{0k} + \Sigma a'_{ik} x_i \geqq 0 \qquad (k=1,2,\dots \sigma)$$

qui jouissent de la propriété suivante: tous les sommets du paralléloèdre R *seront déterminés par les équations présentées sous la forme canonique.*

On appellera canoniques les inégalités (2.).

En conservant les notations précédentes, supposons qu'on ait choisi les paramètres $u_1, u_2, \dots u_n$, de manière que le sommet (α_i) soit déterminé par les équations canoniques

$$a'_{0k} + \Sigma a'_{ik} x_i = 0. \qquad (k=1,2,\dots n)$$

Examinons les équations qui définissent un sommet (α_{ik}) $(k=1,2,\dots n)$ du paralléloèdre R adjacent au sommet (α_i) par l'arête $P_k(1)$.

Le sommet (α_{ik}) vérifie $n-1$ équations

$$(3.) \qquad a'_{0h} + \Sigma a'_{ih} x_i = 0. \qquad (h=1,2,\dots n;\; h \neq k)$$

Désignons par

$$(4.) \qquad b_{0k} + \Sigma b_{ik} x_i = 0$$

la n^{me} équation qui définit le sommet (α_{ik}).

Déterminons les paramètres positifs $v_h (h=1,\ 2,\dots n,\ h \neq k)$ et v_k correspondant aux équations (3.) et (4.), qui ramènent ces équations à la forme canonique:

$$v_h (a'_{0h} + \Sigma a'_{ih} x_i) = 0 \qquad (h=1,2,\dots n;\; h \neq k)$$

et

$$v_k (b_{0k} + \Sigma b_{ik} x_i) = 0.$$

Je dis qu'on peut poser

$$v_h = 1. \qquad (h=1,2,\ldots n;\ h \neq k)$$

Pour le démontrer, examinons l'équation canonique qui définit dans le parallélloèdre $R_h\,(h=1,2\ldots n; h \neq k)$ une face à $n-1$ dimensions commune aux parallélloèdres R_r et $R_h\,(r=1,2,\ldots n; r \neq h, r \neq k)$.

En vertu du théorème du n° 19, cette face sera déterminée dans R_h par l'équation canonique

$$\Sigma(a'_{ir} - a'_{ih})(x_i - \alpha_i) = 0.$$

D'autre part, cette même face sera déterminée dans R_h, en vertu de la supposition faite, par l'équation canonique

$$\Sigma(v_r a'_{ir} - v_h a'_{ih})(x_i - \alpha_i) = 0.$$

Il en résulte que

$$v_r a'_{ir} - v_h a'_{ih} = \delta(a'_{ir} - a'_{ih}), \qquad (i=1, 2,\ldots n)$$

et par suite

$$v_r = \delta,\ v_h = \delta,$$

donc

$$v_r = v_h. \qquad (r=1,2,\ldots n;\ r \neq k;\ r \neq h)$$

Comme les paramètres $v_h\,(h=1,2,\ldots n)$ sont définis à un facteur près, on peut poser

$$v_h = 1, \qquad (h=1,2,\ldots n;\ h \neq k)$$

et il ne reste qu'à déterminer le paramètre v_k pour définir le sommet (α_{ik}) par les équations canoniques.

21. En appliquant le procédé exposé à tous les sommets du parallélloèdre R adjacents au sommet (α_i) et ainsi de suite, on déterminera successivement les valeurs des différents paramètres correspondant à toutes les inégalités (1.).

Il peut arriver qu'on détermine pour une même inégalité la valeur du paramètre correspondant de plusieurs manières. Je dis que toutes ces valeurs d'un même paramètre coïncident.

Le problème posé est extrêmement difficile. C'est dans cette partie des recherches exposées que se manifeste leur vrai caractère géométrique, et on ne parvient à surmonter les difficultés qui en résultent qu'à l'aide des méthodes géométriques.

Ensemble des simplexes correspondant aux différents sommets d'un parallélоèdre primitif.

22. Nous avons vu au n° 4 qu'aux différents sommets d'un parallélоèdre R

$$(\alpha_{i1}),\ (\alpha_{i2}),\ldots\ (\alpha_{is})$$

correspondent les domaines

$$(1.)\qquad A_1,\ A_2,\ldots\ A_s$$

qui remplissent uniformément l'espace à n dimensions.

En conservant les notations précédentes, examinons un domaine A qui correspond au sommet (α_i) du parallélоèdre R.

Le domaine A est composé des points déterminés par les égalités

$$(2.)\qquad x_i = \sum_{k=1}^{n} \varrho_k a_{ik} \quad \text{où} \quad \varrho_k \geqq 0. \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

Le domaine A possède n faces à $n-1$ dimensions qui correspondent à n arêtes $P_k(1)$, $(k=1,2,\ldots n)$ contiguës par le sommet (α_i).

On appellera simple le domaine A.

Retranchons du domaine A un simplexe L en le déterminant à l'aide des égalités

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \vartheta_k u_k a_{ik} \quad \text{où} \quad \Sigma\vartheta_k \leqq 1 \quad \text{et} \quad \vartheta_k \geqq 0. \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

Le simplexe L possède $n+1$ faces à $n-1$ dimensions qui sont opposées à $n+1$ sommets

$$(0),\ (u_1 a_{i1}),\ (u_2 a_{i2}),\ldots\ (u_n a_{in}).$$

Examinons la face du simplexe L qui est opposée au sommet (0). On peut présenter l'équation qui définit cette face sous la forme

$$(3.)\qquad 1-\Sigma p_i x_i=0.$$

Il s'ensuit qu'on aura une inégalité

$$1-\Sigma p_i x_i>0$$

pour chaque point de L qui n'appartient pas à la face examinée.

Comme les sommets de $L:(u_k a_{ik})$ $(k=1,2,\dots n)$ vérifient l'équation (3.), on a

$$(4.)\qquad \Sigma p_i a_{ik}=\frac{1}{u_k}, \qquad (k=1,2,\dots n)$$

donc

$$\Sigma p_i a_{ik}>0. \qquad (k=1,2,\dots n)$$

En vertu de (2.), on obtient l'inégalité

$$\Sigma p_i x_i>0$$

qui subsiste, quel que soit un point (x_i) du domaine A, le sommet (0) étant exclu.

23. Examinons de la même manière n domaines $A_1, A_2, \dots A_n$ qui sont contigus au domaine A par des faces à $n-1$ dimensions.

On retranchera du domaine simple A_k $(k=1,2,\dots n)$ défini par les égalités

$$x_i=\Sigma \varrho_h a_{ih}+\varrho_k b_{ik} \text{ où } \varrho_k \geqq 0 \text{ et } \varrho_h \geqq 0, \qquad (h=1,2,\dots n;\ h \neq k)$$

un simplexe L_k composé de points

$$x_i=\Sigma \vartheta_h u_h a_{ih}+\vartheta_k v_k b_{ik} \text{ où } \Sigma\vartheta_h+\vartheta_k \leqq 1,\ \vartheta_k \geqq 0,\ \vartheta_h \geqq 0. \qquad (h=1,2,\dots n;\ h \neq k)$$

Désignons par

$$1-\Sigma p_{ik} x_i=0$$

l'équation de la face du simplexe L_k qui est opposée au sommet (0).

On aura les égalités

$$\Sigma p_{ik}\, a_{ih} = \frac{1}{u_h} \qquad (h = 1, 2, \dots n,\ h \neq k)$$

et

$$\Sigma p_{ik}\, b_{ih} = \frac{1}{u_k}.$$

En vertu des égalités (4.), on obtient

$$\Sigma p_{ik}\, a_{ih} = \Sigma p_i\, a_{ih}. \qquad (h = 1, 2, \dots n,\ h \neq k)$$

Il s'ensuit que

$$(5.) \qquad \Sigma p_{ik}\, x_i = \Sigma p_i\, x_i,$$

quel que soit un point (x_i) appartenant à la face commune des domaines A et A_k.

En appliquant le procédé exposé aux domaines qui sont contigus aux domaines $A_1, A_2, \dots A_n$ et ainsi de suite, on retranchera de chaque domaine de l'ensemble (1.) un simplexe correspondant.

Il peut arriver qu'on retranche d'un même domaine le simplexe correspondant de plusieurs manières. Je dis que tous ces simplexes coïncident.

Il est clair que le problème posé ne diffère que par une formulation du problème énoncé au n° 21.

Nous allons exposer une formulation nouvelle de ce problème.

Sur une fonction définie par l'ensemble des simplexes correspondant aux différents sommets d'un paralléloèdre primitif.

24. Introduisons dans nos recherches une fonction $P(x_1, x_2, \dots x_n)$ des variables $x_1, x_2, \dots x_n$ en la définissant comme il suit.

1. On déterminera la fonction $P(x_1, x_2, \dots x_n)$ dans le domaine A par la formule

$$P_{(A)}(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i.$$

2. Dans les domaines A_k $(k = 1, 2, \dots n)$ contigus au domaine A par les faces à $n-1$ dimensions, on déterminera la fonction $P(x_1, x_2, \dots x_n)$ par

la formule

$$P_{(A_k)}(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} p_{ik} x_i. \qquad (k=1, 2, \dots n)$$

3. Soit

$$(1.) \qquad A, A', A'', \dots A^{(m)}$$

une série de domaines qui sont successivement contigus par les faces à $n-1$ dimensions. On retranchera de ces domaines successivement les simplexes

$$L, L', L'', \dots L^{(m)}$$

et on déterminera les fonctions correspondantes

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i, \ \sum_{i=1}^{n} p'_i x_i, \ \sum_{i=1}^{n} p''_i x_i, \dots \sum_{i=1}^{n} p_i^{(m)} x_i.$$

On définira la fonction $P(x_1, x_2, \dots x_n)$ dans les domaines (1.) par la formule

$$P_{(A^{(k)})}(x_1, x_2, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i^{(k)} x_i. \qquad (k=1, 2, \dots m)$$

Théorème fondamental. La fonction $P(x_1, x_2, \dots x_n)$ définie par les conditions 1., 2. *et* 3. *est continue et uniforme dans tout l'espace à n dimensions.*

Observons que le théorème fondamental énoncé ne présente qu'une formulation nouvelle du théorème fondamental du n° 20.

Prenons un contour fermé arbitraire C. En parcourant le contour C, on peut déterminer une série de domaines contigus successivement par les faces à $n-1$ dimensions auxquels appartiennent les points du contour C:

$$A^{(0)}, A', A'', \dots A^{(m)}, A^{(0)}, A', \dots.$$

Pour le démontrer, prenons un point (ξ_{i0}) du contour C et désignons par C_0 une courbe qui est parcourue dans un domaine $A^{(0)}$ à partir du point initial (ξ_{i0}). Admettons que la courbe C_0 ne coïncide pas avec le contour C et désignons par (ξ_{i1}) le point final de la courbe C_0.

Supposons qu'en partant du point (ξ_{i1}) on soit sorti du domaine $A^{(0)}$ et qu'on soit entré dans le domaine A'. Désignons par C_1 une partie du contour C qu'on a parcourue dans le domaine A' à partir du point (ξ_{i1}) et ainsi de suite. Supposons qu'on ait partagé à l'aide du procédé exposé le contour C en parties

$$C_0, C_1, \dots C_m, C_0$$

qui appartiennent aux domaines

$$(2.) \qquad A^{(0)}, A', A'', \dots A^{(m)}, A^{(0)}.$$

Il peut arriver que deux domaines adjacents de cette série $A^{(k)}$ et $A^{(k+1)}$ ne soient pas contigus par une face à $n-1$ dimensions. On intercalera dans ce cas entre les domaines $A^{(k)}$ et $A^{(k+1)}$ des domaines nouveaux en les déterminant comme il suit:

Un point $(\xi_{i,k+1})$ qui est le point final de la courbe C_k et qui présente le point initial de la courbe C_{k+1} appartient, en vertu de la supposition faite, aux domaines $A^{(k)}$ et $A^{(k+1)}$. On en conclut que le point $(\xi_{i,k+1})$ est intérieur à une face $A^{(k)}(\nu)$ à ν dimensions qui est commune aux domaines $A^{(k)}$ et $A^{(k+1)}$.

On peut déterminer un parallélopipède K à l'aide des égalités

$$x_i = \xi_{i,k+1} + u_i \quad \text{où} \quad |u_i| \leqq \varepsilon, \qquad (i=1,2,\dots n)$$

de manière que tous les points du parallélopipède K n'appartiennent qu' aux domaines de la série (1.) (n° 22.) qui sont contigus par la face $A^{(k)}(\nu)$.

Prenons dans le parallélopipède K deux points (x_{ik}) et $(x_{i,k+1})$ qui sont intérieurs aux domaines $A^{(k)}$ et $A^{(k+1)}$ et menons dans le parallélopipède K une courbe $C^{(k)}$ qui joint les points (x_{ik}) et $(x_{i,k+1})$. On peut choisir cette courbe, de manière qu'elle ne franchisse aucune face des domaines (1.) (n° 22.) dont le nombre des dimensions est inférieur à $n-1$.

Supposons que la courbe $C^{(k)}$ traverse les domaines

$$A^{(k)}, A_1^{(k)}, \dots A_\mu^{(k)}, A^{(k+1)}.$$

En vertu de la supposition faite, les domaines obtenus sont successivement contigus par les faces à $n-1$ dimensions. Tous ces domaines sont contigus deux à deux par la face $A^{(k)}(\nu)$.

De la même manière, on examinera toutes les paires de domaines adjacents de la série (2.) et on formera la série

$$A^{(0)}, A', \dots A^{(m)}, A^{(0)}$$

de domaines contigus successivement par les faces à $n-1$ dimensions auxquels appartiennent tous les points du contour fermé donné C.

25. Cela posé, observons que le théorème fondamental énoncé est vrai dans le cas où tous les domaines (2.) sont contigus au moins par une arête.

En effet, supposons qu' on ait retranché des domaines (2.) successivement les simplexes

$$(3.) \qquad L^{(0)}, \ L', L'', \dots L^{(m)}, L^{(m+1)}.$$

Je dis que le simplexe $L^{(m+1)}$ retranché du domaine $A^{(0)}$ coïncide avec le simplexe $L^{(0)}$. Pour le démontrer, désignons par

$$\Sigma p_i^{(0)} x_i, \ \ \Sigma p_i' x_i, \dots \Sigma p_i^{(m)} x_i, \ \ \Sigma p_i^{(m+1)} x_i$$

les fonctions correspondant aux simplexes (3.).

Comme les simplexes $L^{(0)}$ et $L^{(m+1)}$ sont retranchés du même domaine $A^{(0)}$, on peut poser

$$(4.) \qquad \Sigma p_i^{(m+1)} x_i = \delta \, \Sigma p_i^{(0)} x_i.$$

En vertu de la supposition faite, les domaines (2.) sont contigus au moins par une arête. Soit (a_i) un point de cette arête.

Comme les domaines $A^{(0)}$ et A' sont contigus par une face à $n-1$ dimensions, on aura, comme nous l'avons vu au n° 23, une égalité

$$(5.) \qquad \Sigma p^{(0)}_i x_i = \Sigma p_i' x_i$$

qui subsiste, quel que soit le point (x_i) de la face commune aux domaines $A^{(0)}$ et A'.

En faisant $x_i = a_i$, on obtient

$$\Sigma p^{(0)} a_i = \Sigma p_i' a_i.$$

De la même manière, on obtiendra

$$\Sigma p_i^{(0)} a_i = \Sigma p_i' a_i = \cdots \Sigma p_i^{(m)} a_i = \Sigma p_i^{(m+1)} a_i.$$

D'autre part, l'identité (4.) donne

$$\Sigma p_i^{(0)} a_i = \delta \Sigma p_i^{(m+1)} a_i,$$

et comme $\Sigma p_i^{(0)} a_i > 0$, il vient $\delta = 1$, donc

$$\Sigma p_i^{(m+1)} x_i = \Sigma p_i^{(0)} x_i,$$

et les deux simplexes $L^{(0)}$ et $L^{(m+1)}$ coïncident.

En vertu de la définition établie, on déterminera la fonction $P(x_1, \ldots x_n)$ dans le domaine $A^{(0)}$ par la formule

$$P_{(A^0)}\ (x_1, x_2, \ldots x_n) = \Sigma p_i^{(0)} x_i$$

en partant du domaine $A^{(0)}$ et en revenant dans ce domaine après avoir parcouru le chemin C.

26. Nous allons voir que le cas général peut être ramené au cas examiné. A cet effet, envisageons la projection d'un contour quelconque C prise par rapport à une surface S déterminée par l'équation

$$\Sigma x_i^2 = 1.$$

En posant

$$(6.)\qquad x_i' = \frac{x_i}{\sqrt{\Sigma x_i^2}}, \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

on appellera le point (x_i') la projection du point (x_i) dans la surface S.

Désignons par C' une projection du contour quelconque C.

Admettons qu'en parcourant le contour C', on revienne au point initial (ξ_i') avec la même détermination de la fonction $P(x_1, \ldots x_n)$ qu'en partant de ce point. Je dis qu'on reviendra au point correspondant (ξ_i) du contour C avec la même détermination de la fonction $P(x_1, \ldots x_n)$.

Pour le démontrer, il suffit d'observer que les points (ξ_i) et (ξ'_i), en vertu des égalités (6.), appartiennent aux mêmes domaines de la série (2.).

On en conclut qu'il suffit d'examiner les différents contours fermés appartenant à la surface S.

27. Introduisons dans nos recherches une fonction $d(x_i, x'_i)$ en la définissant par la formule

$$d(x_i, x'_i) = \sqrt{\Sigma (x'_i - x_i)^2}.$$

On appellera écart de deux points (x_i) et (x'_i) la valeur correspondante de la fonction $d(x_i, x'_i)$.

Lemme. On peut déterminer un paramètre positif δ satisfaisant à la condition suivante: chaque contour fermé C appartenant à la surface S sera situé dans les domaines qui sont contigus au moins par une arête, si l'écart de tous les points du contour C, les uns des autres, ne surpasse pas la limite δ.

Soit (ξ_i) un point du contour C appartenant au domaine A. Posons

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \varrho_k a_{ik} \text{ où } \varrho_k \geqq 0. \qquad (k=1,2\ldots n)$$

En vertu de l'égalité

$$\Sigma \xi_i^2 = 1,$$

la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} \varrho_k$ n'est pas inférieure à une limite fixe positive

$$(7.) \qquad \sum_{k=1}^{n} \varrho_k \geqq \tau.$$

Admettons que le contour C ne soit pas situé tout entier dans le domaine A.

Soit (ξ'_i) un point de C qui n'appartient pas au domaine A. En posant

$$(8.) \qquad \xi'_i = \sum_{k=1}^{n} \varrho'_k a_{ik},$$

on aura parmi les nombres $\varrho'_1, \varrho'_2, \ldots \varrho'_n$ au moins un nombre négatif.

Supposons, pour fixer les idées, que

$$(9.)\qquad \varrho'_1 \geqq 0,\ \varrho'_2 \geqq 0, \dots \varrho'_\mu \geqq 0$$

et que

$$(10.)\qquad \varrho'_{\mu+1} < 0,\ \varrho'_{\mu+2} < 0, \dots \varrho'_n < 0.$$

D'après la supposition faite, on a l'inégalité

$$d(\xi_i, \xi'_i) \leqq \delta.$$

On peut choisir le paramètre δ, de manière qu'on ait les inégalités

$$(11.)\qquad |\varrho'_k - \varrho_k| < \varepsilon, \qquad (k=1,2,\dots n)$$

ε étant un paramètre positif aussi petit qu'on voudra.

A cause de (10.), on obtient

$$(12.)\qquad 0 \leqq \varrho_k < \varepsilon,\ -\varepsilon < \varrho'_k < 0. \qquad (k=\mu+1;\ \mu+2,\dots n)$$

Choisissons parmi les nombres $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_n$ celui qui est le plus grand. En vertu de l'inégalité (7.), ce nombre ne peut être inférieur à $\frac{\tau}{n}$. En supposant que

$$\varepsilon < \frac{\tau}{n},$$

on trouvera le nombre cherché parmi les nombres $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_\mu$. Supposons, pour fixer les idées, que

$$\varrho_1 > \frac{\tau}{n}.$$

L'inégalité (11.) donne

$$(13.)\qquad \varrho'_1 > \frac{\tau}{n} - \varepsilon.$$

Cela posé, supposons que le point (ξ'_i) appartienne au domaine A' et posons

$$(14.)\qquad \xi'_i = \sum_{k=1}^{n} u_k a'_{ik} \text{ où } u_k \geqq 0. \qquad (k=1,2,\dots n)$$

Désignons par (α_i) et (α'_i) deux sommets du paralléloèdre R correspondant aux domaines A et A' en les définissant par les équations

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i = 0, \qquad (k=1,2,\dots n)$$

et par les équations

$$a'_{0k} + \Sigma a'_{ik} x_i = 0. \qquad (k=1,2,\dots n) \tag{15.}$$

En vertu des égalités (8.) et (14.), on obtient une identité

$$\varrho'_0 + \sum_{k=1}^{n} \varrho'_k (a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i) = \sum_{k=1}^{n} u_k (a'_{0k} + \Sigma a'_{ik}\, x_i). \tag{16.}$$

En faisant dans cette identité $x_i = \alpha_i$, on trouve

$$\varrho'_0 = \Sigma u_k (a'_{0k} + \Sigma a'_{0k}\, \alpha_i) \geqq 0. \tag{17.}$$

En faisant dans l'identité (16.) $x_i = \alpha'_i$, il viendra

$$\varrho'_0 + \sum_{k=1}^{n} \varrho'_k (a_{0k} + \Sigma a_{ik}\, \alpha'_i) = 0. \tag{18.}$$

Admettons que

$$a_{01} + \Sigma a_{i1}\, \alpha'_i > 0.$$

En vertu de (9.), (12.), (13.) et (17.), on aura

$$\varrho'_0 + \sum_{k=1}^{\mu} \varrho'_k (a_{0k} + \Sigma a_{ik}\, \alpha'_i) > \left(\frac{\tau}{n} - \varepsilon\right)(a_{01} + \Sigma a_{i1}\, \alpha'_i),$$

$$\sum_{k=\mu+1}^{n} \varrho'_k (a_{0k} + \Sigma a_{ik}\, \alpha'_i) \geqq -\varepsilon \sum_{k=\mu+1}^{n} (a_{0k} + \Sigma a_{ik}\, \alpha'_i),$$

et l'égalité (18.) donne

$$\frac{\tau}{n}(a_{01} + \Sigma a_{i1}\, \alpha'_i) < \varepsilon \left[a_{01} + \Sigma a_{i1}\, \alpha'_i + \sum_{k=\mu+1}^{n} (a_{0k} + \Sigma a_{ik}\, \alpha'_i)\right]. \tag{19.}$$

Désignons

$$A = \frac{\tau}{n}(a_{01} + \Sigma a_{i1}\, \alpha'_i) \quad \text{et} \quad B = a_{01} + \Sigma a_{i1}\, \alpha'_i + \sum_{k=\mu+1}^{n} (a_{0k} + \Sigma a_{ik}\, \alpha'_i);$$

on aura

$$A > 0 \text{ et } B > 0,$$

et par suite

$$(20.) \qquad \varepsilon > \frac{A}{B}.$$

On pourrait déterminer le rapport $\frac{A}{B}$ correspondant aux différents sommets du parallélloèdre R. Désignons par ω le plus petit de ces rapports qui ne s'annule pas. Le paramètre ε étant arbitraire, on peut supposer que

$$\varepsilon \leqq \omega.$$

L'inégalité (20.) devient impossible, il est donc nécessaire que $A = 0$ ou autrement

$$a_{01} + \Sigma a_{i1} \alpha'_i = 0.$$

En vertu de l'égalité obtenue, les coefficients de l'équation

$$a_{01} + \Sigma a_{i1} x_i = 0$$

sont proportionnels à ceux d'une équation qui se trouve parmi les équations (15.).

En posant

$$a_{01} + \Sigma a_{i1} x_i = u(a'_{0h} + \Sigma a'_{ih} x_i) \quad \text{où} \quad u > 0,$$

on aura

$$a_{i1} = u\, a'_{ih}. \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

Nous sommes arrivés au résultat suivant: tous les domaines traversés par le contour examiné C sont contigus au moins par une arête qui est caractérisée par le point (a_{i1}).

28. Nous sommes maintenant en état d'aborder la démonstration du théorème fondamental énoncé.

Soit C un contour quelconque appartenant à la surface S. Supposons qu'en partant du point (ξ_i) on passe par les points $(\xi_i^{(0)})$, (ξ'_i), (ξ''_i) et on revient au point (ξ_i).

Le chemin autour du contour C peut être remplacé par deux chemins $C^{(0)}$ et C'.

Le contour $C^{(0)}$ sera composé d'une partie $(\xi_i) - (\xi_i^{(0)})$ de C, du vecteur $[\xi_i^{(0)}, \xi_i'']$ et d'une partie $(\xi_i'') - (\xi_i)$ de C.

Le contour C' sera composé d'une partie $(\xi_i^{(0)}) - (\xi_i') - (\xi_i'')$ du contour C et du vecteur $[\xi_i'', \xi_i^{(0)}]$.

Admettons qu'en parcourant les chemins $C^{(0)}$ et C' on définisse uniformément la fonction $P(x_1, x_2, \dots x_n)$. Dans ce cas le trajet par la partie $(\xi_i^{(0)}) - (\xi_i') - (\xi_i'')$ du contour C peut être remplacé par le chemin le long du vecteur $[\xi_i^{(0)}, \xi_i'']$.

En remplaçant la partie $(\xi_i^{(0)}) - (\xi_i') - (\xi_i'')$ du contour C par le vecteur $[\xi_i^{(0)}, \xi_i'']$, on transformera le contour C en $C^{(0)}$, donc, en parcourant le contour C, on reviendra au point (ξ_i), en vertu des suppositions faites, avec la même détermination de la fonction $P(x_1, x_2, \dots x_n)$.

Deux contours $C^{(0)}$ et C' peuvent être examinés de la même manière et ainsi de suite.

Supposons qu'on ait déterminé les contours

$$(21.)\qquad C_1, C_2, \dots C_m$$

qui remplacent le chemin C. En admettant que la fonction $P(x_1, x_2, \dots x_n)$ soit uniforme le long des contours (21.), on démontrera qu'elle sera uniforme le long du contour donné C.

Cela posé, observons qu'on peut toujours choisir les contours (21.), de manière que ces contours satisfassent aux conditions du lemme du n° précédent. Dans ce cas, chaque contour (21.) sera situé dans des domaines qui sont contigus au moins par une arête. Nous avons vu au n° 25 qu'en parcourant des contours pareils on reviendra toujours au point de départ avec la même détermination de la fonction $P(x_1, x_2, \dots x_n)$ qu'en sortant de ce point. Il est donc démontré que chaque contour fermé C possède la même propriété.

Nous avons démontré que la fonction $P(x_1, x_2, \dots x_n)$ est uniformément définie dans chaque domaine de l'ensemble (1.) (n° 22). Il reste à démontrer que la fonction $P(x_1, x_2, \dots x_n)$ est bien définie dans chaque point de l'espace à n dimensions.

Admettons qu' un point (ξ_i) appartienne à deux domaines A et $A^{(0)}$.

Je dis que la fonction $P(x_1, x_2, \dots x_n)$ pour le point (ξ_i) aura une même valeur déterminée dans le domaine A et dans le domaine $A^{(0)}$.

Pour le démontrer, on formera une série de domaines

$$A, A', \dots A^{(m)}, A^{(0)}$$

qui sont successivement contigus par des faces à $n-1$ dimensions et auxquels appartient le point (ξ_i).

Comme le point (ξ_i) appartient à la face commune des domaines A et A', on aura, en vertu de la formule (5.) du n° 23,

$$P_{(A)}(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = P_{(A')}(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n).$$

De la même manière, on obtient

$$P_{(A')}(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = P_{(A'')}(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$P_{(A^{(m)})}(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = P_{(A^0)}(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n).$$

Il en résulte que

$$P_{(A)}(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) = P_{(A^0)}(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n).$$

Le théorème fondamental énoncé est donc démontré.

Forme canonique des inégalités qui définissent l'ensemble (R) des parallélloèdres primitifs.

29. Choisissons dans l'ensemble (R) des parallélloèdres primitifs un parallélloèdre quelconque R_0. Supposons que le parallélloèdre R_0 soit déterminé à l'aide des inégalités canoniques

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i \geqq 0. \qquad (k=1, 2, \dots \sigma)$$

Observons qu'on peut remplacer ces inégalités par les inégalités canoniques suivantes:

$$u(a_{0k}+\Sigma a_{ik}x_i)\geqq 0, \qquad (k=1,2,\dots\sigma)$$

u étant un paramètre arbitraire positif.

Désignons par R_k $(k=1,2,\dots\sigma)$ le parallélloèdre qui est contigu au parallélloèdre R_0 par la face déterminée dans R_0 par l'équation

(1.) $$a_{0k}+\Sigma a_{ik}x_i=0$$

et supposons que le vecteur $[\lambda_{ik}]$ définisse une translation du parallélloèdre R_k en R_0.

Il s'ensuit que le parallélloèdre R_k sera déterminé par les inégalités canoniques

$$a_{0h}+\Sigma a_{ih}(x_i+\lambda_{ik})\geqq 0, \qquad (h=1,2,\dots\sigma)$$

ou par les inégalités canoniques

(2.) $$u_k[a_{0h}+\Sigma a_{ih}(x_i+\lambda_{ik})]\geqq 0, \qquad (h=1,2,\dots\sigma)$$

u_k étant un paramètre positif arbitraire.

La face P_k à $n-1$ dimensions commune aux parallélloèdres R_0 et R_k est définie dans le parallélloèdre R_0 par l'équation (1.). Dans le parallélloèdre R_k, la face P_k sera déterminée par une équation dont les coefficients sont proportionnels à ceux de l'équation

$$-a_{0k}-\Sigma a_{ik}x_i=0.$$

On peut choisir le paramètre positif u_k, de manière qu'on ait l'identité

$$-a_{0k}-\Sigma a_{ik}x_i=u_k\big(a_{0h}+\Sigma a_{ih}(x_i+\lambda_{ik})\big).$$

Dans ce cas, l'inégalité

$$-a_{0k}-\Sigma a_{ik}x_i\geqq 0$$

se trouve parmi les inégalités (2.) qui définissent le parallélloèdre R_k.

On dira que ces inégalités sont présentées sous la forme canonique.

30. Observons une propriété importante des inégalités canoniques qui définissent les parallélоèdres $R_0, R_1, R_2, \dots R_\sigma$.

Soit (α_i) un sommet du parallélоèdre R_0 déterminé par les équations canoniques

$$(3.)\qquad a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i = 0. \qquad (k=1,2,\dots n)$$

Examinons les équations canoniques qui définissent le sommet (α_i) dans le parallélоèdre R_k $(k=1,2,\dots n)$.

Les équations (3.) étant canoniques, on déterminera le sommet (α_i) dans le parallélоèdre R_k, en vertu du théorème du n° 19, par les équations

$$\Sigma (a_{ih} - a_{ik})(x_i - \alpha_i) = 0, \qquad (h=1,2,\dots n;\ h \neq k)$$

$$-\Sigma a_{ik}(x_i - \alpha_i) = 0. \qquad (k=1,2,\dots n)$$

En vertu de la supposition faite, l'inégalité

$$-\Sigma a_{ik}(x_i - \alpha_i) \geqq 0$$

se trouve parmi les inégalités canoniques (2.) qui définissent le parallélоèdre R_k, il en résulte que les inégalités

$$\Sigma (a_{ih} - a_{ik})(x_i - \alpha_i) \geqq 0, \qquad (h=1,2,\dots n,\ h \neq k)$$

se trouvent aussi parmi les inégalités canoniques (2.).

On en conclut que l'équation canonique

$$\Sigma (a_{ih} - a_{ik})(x_i - \alpha_i) = 0$$

définit dans le parallélоèdre R_k une face à $n-1$ dimensions qui est commune aux parallélоèdres R_k et R_h. La même face sera détérminée dans le paralléloèdre R_h par une équation canonique

$$\Sigma (a_{ik} - a_{ih})(x_i - \alpha_i) = 0.$$

31. En appliquant le procédé exposé, on peut déterminer les inégalités canoniques qui définissent les parallélоèdres contigus aux parallélоèdres $R_1, R_2, \dots R_\sigma$ et ainsi de suite.

Quel que soit un paralléloèdre R de l'ensemble (R), on peut former une série de paralléloèdres

$$R_0, R', R'', \dots R^{(m)}, R$$

qui sont successivement contigus. On déterminera successivement les inégalités canoniques qui définissent les paralléloèdres de cette série.

On pourrait arriver au paralléloèdre R par d'autres voies et déterminer les inégalités canoniques qui définissent le paralléloèdre R de plusieurs manières.

Nous allons voir que les inégalités canoniques qui définissent un paralléloèdre de l'ensemble (R) ne dépendent pas du chemin par lequel on arrive au paralléloèdre R en partant du paralléloèdre principal R_0.

Fonction génératrice de l'ensemble (R) des paralléloèdres primitifs.

32. Envisageons un ensemble (R) de paralléloèdres primitifs. Supposons que chaque paralléloèdre R de l'ensemble (R) soit caractérisé par un vecteur $[\lambda_i]$ qui définit une translation du paralléloèdre R en un paralléloèdre principal R_0.

Désignons par G le groupe des vecteurs $[\lambda_i]$ qui correspondent aux différents paralléloèdres de l'ensemble (R).

Introduisons dans nos recherches une fonction

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$$

des variables $x_1, x_2, \dots x_n$ et des paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ en la définissant dans l'espace à n dimensions et pour le groupe G comme il suit:

1. Dans le paralléloèdre principal R_0, on posera

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, 0, 0, \dots 0) = 0.$$

2. Dans le paralléloèdre R_k qui est contigu à R_0, on posera

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \dots \lambda_{nk}) = a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i, \qquad (k = 1, 2, \dots \sigma)$$

à condition que dans le paralléloèdre R_0 l'équation canonique

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i = 0$$

définisse la face à $n-1$ dimensions commune aux paralléloèdres R_0 et R_k.

3. En supposant que deux paralléloèdres R et R' caractérisés par les vecteurs $[\lambda_i]$ et $[\lambda'_i]$ soient contigus par une face à $n-1$ dimensions qui est définie dans R par une équation canonique

$$a_0 + \Sigma a_i x_i = 0,$$

on posera

$$V(x_1, x_2, \ldots x_n, \lambda'_1, \lambda'_2, \ldots \lambda'_n) = V(x_1, x_2, \ldots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) + a_0 + \Sigma a_i x_i.$$

33. Soit R un paralléloèdre quelconque de l'ensemble (R) caractérisé par un vecteur $[\lambda_i]$. On formera une série de paralléloèdres

$$R_0, R', \ldots R^{(m)}, R$$

qui sont contigus successivement par des faces à $n-1$ dimensions. Désignons par

$$a_0^{(0)} + \Sigma a_i^{(0)} x_i = 0$$

l'équation de la face commune aux paralléloèdres R_0 et R' et définie dans R_0; désignons par

$$a'_0 + \Sigma a'_i x_i = 0$$

l'équation de la face commune aux paralléloèdres R' et R'' définie dans R' et ainsi de suite.

En appliquant la définition établie, on déterminera la fonction

$$V(x_1, x_2, \ldots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$$

par la formule

$$V(x_1, x_2, \ldots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) = \sum_{k=0}^{m} \left(a_0^{(k)} + \Sigma a_i^{(k)} x_i\right).$$

34. *Théorème fondamental. La fonction $V(x_1, x_2, \ldots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$ est bien définie pour chaque vecteur $[\lambda_i]$ du groupe G.*

Supposons qu'on ait formé une série de parallélоèdres

$$R, R', R'', \dots R^{(m)}, R \tag{1.}$$

qui sont successivement contigus. En partant du parallélоèdre R avec une détermination quelconque de la fonction $V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$, on reviendra dans le parallélоèdre R après avoir parcouru les parallélоèdres (1.) avec une détermination de la fonction $V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ qui, en vertu de la définition établie, s'exprime par la somme

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) + \sum_{k=0}^{m} (a_0^{(k)} + \Sigma a_i^{(k)} x_i).$$

Nous allons démontrer qu'on aura toujours

$$\sum_{k=0}^{m} (a_0^{(k)} + \Sigma a_i^{(k)} x_i) = 0.$$

Examinons, en premier lieu, le cas, où tous les parallélоèdres (1.) sont contigus au moins par un sommet (α_i). En vertu du théorème II du n° 17, tous les parallélоèdres primitifs (1.) seront dans ce cas contigus deux à deux par des faces à $n-1$ dimensions.

Désignons par

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik}(x_i - \alpha_i) = 0, \qquad (k = 1, 2, \dots m)$$

l'équation canonique de la face commune aux parallélоèdres $R^{(k)}$ et R $(k = 1, 2, \dots m)$ définie dans le parallélоèdre R.

Nous avons vu au n° 30 que l'équation canonique de la face commune aux parallélоèdres R' et R'' et définie dans R' sera

$$\Sigma (a_{i2} - a_{i1})(x_i - \alpha_i) = 0$$

et ainsi de suite. On obtient les formules

$$\begin{aligned}
a_0^{(0)} &+ \Sigma a_i^{(0)} x_i = \Sigma a_{i1}(x_i - \alpha_i), \\
a_0' &+ \Sigma a_i' x_i = \Sigma (a_{i2} - a_{i1})(x_i - \alpha_i), \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_0^{(m-1)} &+ \Sigma a_i^{(m-1)} x_i = \Sigma (a_{im} - a_{i,m-1})(x_i - \alpha_i), \\
a_0^{(m)} &+ \Sigma a_i^{(m)} x_i = -\Sigma a_{im}(x_i - \alpha_i),
\end{aligned}$$

et il s'ensuit que

$$\sum_{k=0}^{m} (a_0^{(k)} + \Sigma a_i^{(k)} x_i) = 0.$$

35. Nous allons voir que le cas général peut être ramené au cas examiné.

Lemme. On peut déterminer un paramètre positif δ, de manière que chaque contour fermé C soit situé dans des parallélloèdres qui sont contigus au moins par un sommet, à condition que l'écart de deux points quelconques du contour C ne surpasse pas la limite δ.

Observons, en premier lieu, que l'écart de deux points (ξ_i) et (ξ_i') appartenant à deux parallélloèdres qui ne sont pas contigus ne peut être inférieur à une limite fixe. Pour le démontrer, supposons que le point (ξ_i) appartienne au parallélloèdre R défini à l'aide des inégalités

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i \geqq 0. \qquad (k=1, 2, \ldots \sigma)$$

Désignons par $R_1, R_2, \ldots R_\sigma$ les parallélloèdres qui sont contigus à R et examinons l'ensemble K des points appartenant aux parallélloèdres $R, R_1, \ldots R_\sigma$.

Désignons par

$$(\alpha_{i1}), (\alpha_{i2}), \ldots (\alpha_{is})$$

les sommets du parallélloèdre R et désignons par

$$(\alpha_{i1}^{(h)}), (\alpha_{i2}^{(h)}), \ldots (\alpha_{is}^{(h)}), \qquad (h=1, 2, \ldots \sigma)$$

les sommets du parallélloèdre R_h $(h=1, 2, \ldots \sigma)$.

En vertu de la supposition faite, on aura les inégalités

$$a_{0h} + \Sigma a_{ih} \alpha_{ik}^{(h)} \leqq 0, \qquad (k=1, 2, \ldots s;\ h=1, 2, \ldots \sigma).$$

Désignons par ϱ la plus petite valeur numérique des sommes

$$a_{0h} + \Sigma a_{ih} \alpha_{ik}^{(h)} \qquad (k=1, 2, \ldots s;\ h=1, 2, \ldots \sigma)$$

qui ne s'annulent pas. En vertu de la supposition faite, on aura l'inégalité

$$\varrho + a_{0h} + \Sigma a_{ih}\,\alpha_{ik}^{(h)} \leqq 0,$$

à condition que

$$a_{0h} + \Sigma a_{ih}\,\alpha_{ik}^{(h)} < 0,$$

où $k = 1, 2, \ldots s$, $h = 1, 2, \ldots \sigma$.

Cela posé, prenons un point quelconque (ξ_i') qui n'appartient pas à l'ensemble K. Examinons les points d'un vecteur $[\xi_i, \xi_i']$. En posant

$$x_i = \xi_i + u(\xi_i' - \xi_i) \quad \text{où} \quad 0 \leqq u \leqq 1,$$

laisons croître le paramètre u d'une manière continue dans l'intervalle $0 < u < 1$. On déterminera un point

$$\xi_i^{(0)} = \xi_i + u_0(\xi_i' - \xi_i) \quad \text{où} \quad 0 < u_0 < 1 \tag{2.}$$

qui appartient à la frontière de l'ensemble K, c'est-à-dire à une face à $n-1$ dimensions des paralléloèdres $R_1, R_2, \ldots R_\sigma$ et qui appartient aussi à un autre paralléloèdre R'.

Supposons que le point $(\xi_i^{(0)})$ appartienne au paralléloèdre R_h. Les paralléloèdres R_h et R' seront contigus par une face à $n-1$ dimensions.

Désignons par

$$(\alpha_{i1}^{(h)}),\ (\alpha_{i2}^{(h)}),\ \ldots\ (\alpha_{it}^{(h)}) \tag{3.}$$

les sommets du paralléloèdre R_h qui appartiennent à cette face.

Aucun de ces sommets ne vérifie l'équation

$$a_{0h} + \Sigma a_{ih}\,x_i = 0$$

puisqu' autrement la face examinée appartiendrait à deux paralléloèdres de la série $R, R_1, \ldots R_\sigma$, ce qui est contre l'hypothèse.

On aura donc les inégalités

$$\varrho + a_{0h} + \Sigma a_{ih}\,\alpha_{ik}^{(h)} \leqq 0. \qquad (k=1, 2, \ldots t)$$

Le point $(\xi_i^{(0)})$ appartenant à la face de R_h, qui est caractérisée par les sommets (3.), peut être déterminé par les égalités

$$\xi_i^{(0)} = \sum_{k=1}^{k=t} \vartheta_k\,\alpha_{ik}^{(h)} \quad \text{où} \quad \sum_{k=1}^{k=t} \vartheta_k = 1 \ \text{ et } \ \vartheta_k \geqq 0. \qquad (k=1, 2, \ldots t)$$

Des inégalités précédentes, on tire

$$\varrho + a_{0h} + \Sigma a_{ih} \xi_i^{(0)} \leqq 0.$$

En observant que d'autre part on a

$$(4.) \qquad a_{0h} + \Sigma a_{ih} \xi_i \geqq 0,$$

on trouve, à cause de (2.),

$$(5.) \qquad \varrho + a_{0h} + \Sigma a_{ih} \xi'_i < 0.$$

En vertu des inégalités (4.) et (5.), l'écart $d(\xi_i, \xi'_i)$ ne peut être inférieur à une limite fixe d.

36. Cela posé, examinons un contour fermé C dont les points ont l'écart mutuel qui ne surpasse pas δ. En supposant que

$$\delta < d,$$

on aura un contour C qui est situé dans des paralléloèdres contigus deux à deux.

Soit (ξ_i) un point quelconque du contour C appartenant au paralléloèdre R. Admettons que pas tous les points du contour C n'appartiennent à R et désignons par (ξ'_i) un point du contour C qui n'appartient pas à R. Posons

$$(6.) \qquad \xi_i = \sum_{k=1}^{s} \vartheta_k \alpha_{ik} \quad \text{où} \quad \Sigma \vartheta_k = 1 \ \text{ et } \ \vartheta_k \geqq 0, \qquad (k=1,2,\dots s)$$

$$(7.) \qquad \xi'_i = \sum_{k=1}^{s} \vartheta'_k \alpha_{ik} \quad \text{où} \quad \Sigma \vartheta'_k = 1.$$

Comme le point (ξ'_i) n'appartient pas à R, on aura parmi les nombres $\vartheta'_1, \vartheta'_2, \dots \vartheta'_s$ au moins un nombre qui sera négatif. Supposons, pour fixer les idées, que

$$(8.) \qquad \vartheta'_1 \geqq 0, \dots \vartheta'_\mu \geqq 0 \ \text{ et } \ \vartheta'_{\mu+1} < 0, \dots \vartheta'_s < 0.$$

On peut choisir le paramètre δ si petit qu'on ait les inégalités

$$(9.)\qquad |\vartheta'_k - \vartheta_k| < \varepsilon, \qquad (k=1,2,\dots s)$$

ε étant un paramètre positif aussi petit que l'on voudra. En vertu de (8.), il viendra

$$(10.)\qquad 0 \leqq \vartheta_k < \varepsilon, \quad -\varepsilon < \vartheta'_k < 0. \qquad (k=\mu+1,\dots s)$$

Observons que le plus grand nombre parmi les nombres $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots \vartheta_s$ ne peut être inférieur à $\frac{1}{s}$ à cause de (6.). En supposant que

$$\varepsilon < \frac{1}{s},$$

on trouvera le nombre cherché parmi les nombres $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots \vartheta_\mu$. Admettons, pour fixer les idées, que

$$\vartheta_1 > \frac{1}{s}.$$

En vertu de (9.), il viendra

$$(11.)\qquad \vartheta'_1 > \frac{1}{s} - \varepsilon.$$

Nous avons démontré que le point (ξ'_i) ne peut appartenir qu'aux parallélоèdres $R_1, R_2, \dots R_\sigma$ qui sont contigus à R. En supposant que le point (ξ'_i) appartienne au parallélоèdre R_h, on aura une inégalité

$$(12.)\qquad a_{0h} + \Sigma a_{ih}\xi'_i < 0.$$

En observant qu'en vertu des égalités (7.)

$$a_{0h} + \Sigma a_{ih}\xi'_i = \sum_{k=1}^{s} \vartheta'_k (a_{0h} + \Sigma a_{ih}\alpha_{ik}),$$

on obtient, à cause de (12.),

$$\sum_{k=1}^{s} \vartheta'_k (a_{0h} + \Sigma a_{ih}\alpha_{ik}) < 0.$$

De cette inégalité on tire, à cause de (10.) et (11.),

$$\frac{1}{s}(a_{0h} + \Sigma a_{ih}\alpha_{i1}) - \varepsilon\left[a_{0h}\,\Sigma a_{ih}\alpha_{i1} + \sum_{k=\mu+1}^{s}(a_{0h} + \Sigma a_{ih}\alpha_{ik})\right] < 0.$$

En posant

$$A = \frac{1}{s}(a_{0h} + \Sigma a_{ih}\alpha_{i1}) \text{ et } B = a_{0h} + \Sigma a_{ih}\alpha_{i1} + \sum_{k=\mu+1}^{s}(a_{0h} + \Sigma a_{ih}\alpha_{ik}),$$

admettons que $A > 0$; l'inégalité précédente donne $B > 0$, donc

$$\varepsilon > \frac{A}{B}. \tag{13.}$$

Observons que les nombres A et B ne changent pas quand on remplace le parallèloèdre R par un parallèloèdre quelconque de l'ensemble (R). On en conclut que le rapport $\frac{A}{B}$ qui ne s'annule pas possède un minimum positif ω.

En supposant que

$$\varepsilon < \omega,$$

l'inégalité (13.) devient impossible et il est nécessaire que $A=0$ ou autrement

$$a_{0h} + \Sigma a_{ih}\alpha_{i1} = 0.$$

Nous sommes arrivés au résultat suivant: tous les parallèloèdres dans lesquels est situé le contour examiné C sont contigus par le sommet (α_{i1}).

A l'aide du lemme du n° 35, on démontrera aisément le théorème fondamental énoncé en répétant les raisonnements exposés au n° 28.

Propriétés fondamentales de la fonction génératrice $V(x_1, x_2, \ldots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$

37. *Théorème* I. *Supposons que deux vecteurs* $[\lambda_i]$ *et* $[\lambda_i^{(0)}]$ *caractérisent deux parallèloèdres* R *et* $R^{(0)}$ *de l'ensemble* (R). *On aura une inégalité*

$$V(x_1, x_2, \ldots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) > V(x_1, x_2, \ldots x_n, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots \lambda_n^{(0)}),$$

à condition que le point (x_i) *soit intérieur au parallélоèdre* $R^{(0)}$.

Soit $(\xi_i^{(0)})$ un point quelconque qui est intérieur au parallélоèdre $R^{(0)}$.

Prenons un point (ξ_i) qui est intérieur au parallélоèdre R et examinons un vecteur $[\xi_i^{(0)}, \xi_i]$ déterminé par les égalités

$$x_i = \xi_i^{(0)} + u(\xi_i - \xi_i^{(0)}) \text{ où } 0 \leqq u \leqq 1.$$

Une partie du vecteur $[\xi_i^{(0)}, \xi_i]$ appartient au parallélоèdre R^0. Désignons

$$\xi_i' = \xi_i^{(0)} + u_1(\xi_i - \xi_i^{(0)}) \text{ où } 0 < u_1 < 1$$

et supposons que le vecteur $[\xi_i^{(0)}, \xi_i']$ présente la partie du vecteur $[\xi_i^{(0)}, \xi_i]$ qui appartient à $R^{(0)}$.

La seconde partie $[\xi_i', \xi_i]$ du vecteur $[\xi_i^{(0)}, \xi_i]$ ne possède qu'un seul point (ξ_i') commun au parallélоèdre $R^{(0)}$. Le point (ξ_i') appartient à une face $P^{(0)}(\nu)$ du parallélоèdre $R^{(0)}$. On choisira parmi les parallélоèdres qui sont contigus par la face $P^{(0)}(\nu)$ un parallélоèdre R' qui contient une partie du vecteur $[\xi_i', \xi_i]$.

Désignons

$$\xi_i'' = \xi_i + u_2(\xi_i - \xi_i^{(0)}) \text{ où } u_1 < u_2 \leqq 1$$

et supposons que le vecteur $[\xi_i', \xi_i'']$ présente une partie du vecteur $[\xi_i', \xi_i]$ qui appartient au parallélоèdre R' et ainsi de suite.

Supposons qu'on ait déterminé m points du vecteur $[\xi_i^{(0)}, \xi_i]$

$$(1.) \qquad \xi_i^{(k)} = \xi_i^{(0)} + u_k(\xi_i - \xi_i^{(0)}), \qquad (k=1, 2, \ldots m)$$

où

$$(2.) \qquad 0 < u_1 < u_2 < \cdots < u_m < 1$$

qui correspondent aux vecteurs $[\xi_i^{(0)}, \xi_i']$, $[\xi_i', \xi_i'']$, … $[\xi_i^{(m)}, \xi_i]$ appartenant aux parallélоèdres

$$R^{(0)}, R', \ldots R^{(m-1)}, R$$

contigus successivement.

Désignons par

$$a_0^{(k)} + \Sigma a_i^{(k)} x_i = 0, \qquad (k=0, 1, 2, \ldots m-1)$$

l'équation canonique de la face commune aux parallélloèdres $R^{(k)}$ et $R^{(k+1)}$ qui est définie dans le parallélloèdre $R^{(k)}$.

En vertu de la définition établie au n° 32, on aura une formule

$$(3.) \qquad V(x_1, x_2, \ldots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) = V(x_1, x_2, \ldots x_n, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots \lambda_n^{(0)}) + \sum_{k=0}^{m-1} (a_0^{(k)} + \Sigma a_i^{(k)} x_i).$$

Examinons les sommes

$$a_0^{(k)} + \Sigma a_i^{(k)} \xi_i^{(0)} \text{ et } a_0^{(k)} + \Sigma a_i^{(k)} \xi_i. \qquad (k=0, 1, 2, \ldots m-1)$$

En vertu de la supposition faite, le point $(\xi_i^{(k+1)})$ vérifie l'équation

$$a_0^{(k)} + \Sigma a_i^{(k)} \xi_i^{(k+1)} = 0.$$

Comme le point $(\xi_i^{(k)})$ appartient au parallélloèdre $R^{(k)}$, on aura une inégalité

$$a_0^{(k)} + \Sigma a_i^{(k)} \xi_i^{(k)} \geqq 0.$$

En vertu de (1.) et (2.), on obtient

$$a_0^{(k)} + \Sigma a_i^{(k)} \xi_i^{(0)} \geqq 0 \text{ et } a_0^{(k)} + \Sigma a_i^{(k)} \xi_i \leqq 0. \qquad (k=0, 1, 2, \ldots m-1)$$

Comme le point $(\xi_i^{(0)})$ est intérieur au parallélloèdre $R^{(0)}$, on aura

$$a_0^{(0)} + \Sigma a_i^{(0)} \xi_i^{(0)} > 0 \text{ et } a_0^{(0)} + \Sigma a_i^{(0)} \xi_i < 0,$$

Il en résulte que

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_0^{(k)} + \Sigma a_i^{(k)} \xi_i^{(0)}) > 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{m-1} (a_0^{(k)} + \Sigma a_i^{(k)} \xi_i) < 0.$$

En substituant dans la formule (3.), on obtient

$$V(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots \xi_n^{(0)}, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) > V(\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \dots \xi_n^{(0)}, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots \lambda_n^{(0)})$$

et

$$V(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) < V(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots \lambda_n^{(0)}).$$

Théorème **II.** *Supposons que les paralléloèdres $R^{(0)}, R', \dots R^{(n-\nu)}$ soient contigus par une face $P(\nu)$ à ν dimensions. En désignant par $[\lambda_i^{(k)}]$, $(k=0,1,2,\dots n-\nu)$ les vecteurs qui caractérisent ces paralléloèdres, on aura une inégalité*

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) > V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots \lambda_n^{(0)}),$$

à condition que le point (x_i) soit intérieur à la face $P(\nu)$ et que le vecteur $[\lambda_i]$ ne se trouve pas parmi les vecteurs $[\lambda_i^{(k)}]$, $(k=1,2,\dots (n-\nu))$.

En supposant que $\lambda_i = \lambda_i^{(k)}$, on aura l'égalité

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \dots \lambda_n^{(k)}) = V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots \lambda_n^{(0)}).$$
$$(k=1,2,\dots (n-\nu))$$

On démontrera aisément le théorème II énoncé en répétant les raisonnements qui ont été exposés précédemment.

38. Les résultats obtenus ouvrent une nouvelle voie pour les recherches concernant les paralléloèdres primitifs. On peut envisager l'ensemble (R) des paralléloèdres primitifs sous un nouveau point de vue, à savoir:

Chaque paralléloèdre $R^{(0)}$ de l'ensemble (R) caractérisé par le vecteur $[\lambda_i^{(0)}]$ présente un ensemble de points (x_i) vérifiant l'inégalité

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \geqq V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots \lambda_n^{(0)}),$$

quel que soit le vecteur $[\lambda_i]$ appartenant au groupe G.

Nous avons vu au n° 32 que pour le paralléloèdre principal R_0 de l'ensemble (R) on a

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, 0, 0, \dots 0) = 0.$$

Il s'ensuit que le paralléloèdre principal R_0 est défini par l'inégalité

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \geqq 0$$

qui subsiste, quel que soit le vecteur $[\lambda_i]$ du groupe G.

Détermination de la fonction génératrice $V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$.

39. Supposons que le paralléloèdre principal R_0 soit déterminé à l'aide des inégalités canoniques

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i \geqq 0. \qquad (k=1, 2, \dots \sigma)$$

Désignons par $[\lambda_{ik}]$ le vecteur qui définit une translation du paralléloèdre R_k en R_0 $(k=1, 2, \dots \sigma)$.

Prenons deux paralléloèdres R_k et R_h contigus au paralléloèdre R_0 par les faces P_k et P_h qui ne sont pas parallèles. Posons

$$\lambda = \lambda_k + \lambda_{ih}$$

et désignons par R le paralléloèdre de l'ensemble (R) caractérisé par le vecteur $[\lambda_i]$.

Le paralléloèdre R est contigu aux paralléloèdres R_k et R_h par les faces qui sont congruentes aux faces P_h et P_k.

On peut donc former deux séries

$$R_0, R_k, R \text{ et } R_0, R_h, R$$

de paralléloèdres qui sont succesivement contigus.

Supposons que le paralléloèdre R_k soit déterminé à l'aide des inégalités canoniques

$$u_k [a_{0r} + \Sigma a_{ir} (x_i + \lambda_{ik})] \geqq 0. \qquad (r=1, 2, \dots \sigma)$$

La face du paralléloèdre R_k qui est congruente à la face P_h sera déterminée par l'équation

$$u_k [a_{0h} + \Sigma a_{ih} (x_i + \lambda_{ik})] = 0.$$

Il en résulte que la fonction $V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ s'exprime par la somme

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) = a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i + u_k [a_{0h} + \Sigma a_{ih} (x_i + \lambda_{ik})].$$

De la même manière, on obtient

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) = a_{0h} + \Sigma a_{ih} x_i + u_h [a_{0k} + \Sigma a_{ik} (x_i + \lambda_{ih})].$$

En vertu du théorème fondamental du n° 34, on aura une identité

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik} x_i + u_k [a_{0h} + \Sigma a_{ih} (x_i + \lambda_{ik})] = a_{0h} + \Sigma a_{ih} x_i + u_h [a_{0k} + \Sigma a_{ik} (x_i + \lambda_{ih})].$$

Il s'ensuit que

$$(1.) \qquad a_{0k} + u_k (a_{0h} + \Sigma a_{ih} \lambda_{ik}) = a_{0h} + u_h (a_{0k} + \Sigma a_{ik} \lambda_{ih})$$

et

$$a_{ik} + u_k a_{ih} = a_{ih} + u_h a_{ik}. \qquad (i=1, 2, \dots n)$$

Nous avons supposé que les coefficients a_{ik} et a_{ih}, $(i = 1, 2, \dots n)$ ne soient pas proportionnels, donc il est nécessaire que

$$u_k = 1 \quad \text{et} \quad u_h = 1.$$

Nous sommes arrivés au résultat important suivant:

Chaque parallélloèdre R caractérisé par un vecteur $[\lambda_i]$ sera déterminé par les inégalités canoniques

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik} (x_i + \lambda_i) \geqq 0. \qquad (k=1, 2, \dots \sigma)$$

Observons qu'en vertu de (1.), on aura l'égalité

$$\Sigma a_{ik} \lambda_{ih} = \Sigma a_{ih} \lambda_{ik}.$$

Dans cette égalité, on peut attribuer aux indices k et h les valeurs $k = 1, 2, \dots \sigma$; $h = 1, 2, \dots \sigma$.

40. *Théorème. Les vecteurs*

$$[\lambda_{i1}],\ [\lambda_{i2}], \dots [\lambda_{i\sigma}]$$

forment la base du groupe G. En posant

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^{\sigma} l_k \lambda_{ik} \tag{2.}$$

où $l_1, l_2, \dots l_\sigma$ sont des nombres entiers arbitraires, on déterminera chaque vecteur $[\lambda_i]$ du groupe G. En désignant

$$a_i = \sum_{k=1}^{\sigma} l_k a_{ik}, \tag{3.}$$

on définira la fonction $V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ par la formule

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) = \sum_{k=1}^{\sigma} l_k \Big(a_{0k} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\lambda_{ik} + \sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i\Big) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_i. \tag{4.}$$

Admettons que la formule (4.) soit vérifiée pour les vecteurs $[\lambda_i^{(0)}]$ et $[\lambda_i']$ qui sont définis par les égalités

$$\lambda_i^{(0)} = \sum_{k=1}^{n} l_k^{(0)} \lambda_{ik} \quad \text{et} \quad \lambda_i' = \sum_{k=1}^{n} l_k' \lambda_{ik}. \qquad (i=1, 2, \dots n) \tag{5.}$$

Nous allons voir que la formule (4.) sera aussi vraie pour le vecteur $[\lambda_i]$ déterminé par les égalités

$$\lambda_i = \lambda_i^{(0)} + \lambda_i'.$$

Désignons par $R, R^{(0)}$ et R' les paralléloèdres caractérisés par les vecteurs $[\lambda_i], [\lambda_i^{(0)}]$ et $[\lambda_i']$.

Le paralléloèdre $R^{(0)}$ sera déterminé par les inégalités canoniques

$$a_{0k} + \Sigma a_{ik}(x_i + \lambda_i^{(0)}) \geqq 0. \qquad (k=1, 2, \dots \sigma)$$

On en conclut que la fonction $V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ s'exprime par la formule

$$(6.)\qquad V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) = V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots \lambda_n^{(0)}) + U(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda'_1, \lambda'_2, \dots \lambda'_n),$$

où la fonction $U(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda'_1, \lambda'_2, \dots \lambda'_n)$ présente la fonction génératrice déterminée à condition que le paralléloèdre $R^{(0)}$ ait été choisi pour le paralléloèdre principal.

En désignant

$$(7.)\qquad a_i^{(0)} = \sum_{k=1}^{\sigma} l_k^{(0)} a_{ik} \quad \text{et} \quad a'_i = \sum_{k=1}^{\sigma} l'_k a_{ik}, \qquad (i=1, 2, \dots n)$$

on aura, en vertu de la supposition faite,

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots \lambda_n^{(0)}) = \sum_{k=1}^{\sigma} l_k^{(0)} \Big(a_{0k} - \frac{1}{2} \Sigma a_{ik} \lambda_{ik} + \Sigma a_{ik} x_i\Big) + \frac{1}{2} \Sigma a_i^{(0)} \lambda_i^{(0)},$$

$$U(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda'_1, \lambda'_2, \dots \lambda'_n) = \sum_{k=1}^{\sigma} l'_k \Big(a_{0k} + \Sigma a_{ik} \lambda_i^{(0)} - \frac{1}{2} \Sigma a_{ik} \lambda_{ik} + \Sigma a_{ik} x_i\Big) + \frac{1}{2} \Sigma a'_i \lambda'_i.$$

Posons

$$l_k = l_k^{(0)} + l'_k. \qquad (k=1, 2, \dots \sigma)$$

En vertu de (6.) on obtient

$$(8.)\qquad V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) = \Sigma l_k \Big(a_{0k} - \frac{1}{2} \Sigma a_{ik} \lambda_{ik} + \Sigma a_{ik} x_i\Big) + \frac{1}{2} \Sigma a_i^{(0)} \lambda_i^{(0)} + \frac{1}{2} \Sigma a'_i \lambda'_i + \sum_{k=1}^{\sigma} \sum_{i=1}^{\sigma} a_{ik} l'_k \lambda_i^{(0)}.$$

Examinons la somme

$$(9.)\qquad \frac{1}{2} \Sigma a_i^{(0)} \lambda_i^{(0)} + \frac{1}{2} \Sigma a'_i \lambda'_i + \sum_{k=1}^{\sigma} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} l'_k \lambda_i^{(0)}.$$

En vertu de (5.), on aura

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\,\lambda_i^{(0)} = \sum_{h=1}^{\sigma}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\,l_h^{(0)}\,\lambda_{ih}.$$

Nous avons vu au n° 39 que

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\,\lambda_{ih} = \sum_{i=1}^{n} a_{ih}\,\lambda_{ik}, \tag{10.}$$

donc

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\,\lambda_i^{(0)} = \sum_{h=1}^{\sigma}\sum_{i=1}^{n} a_{ih}\,l_h^{(0)}\,\lambda_{ik}$$

et, à cause de (7.), il vient

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\,\lambda_i^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(0)}\,\lambda_{ik}.$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{k=1}^{\sigma}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\,l'_k\,\lambda_i^{(0)} = \Sigma\, a_i^{(0)}\,\lambda'_i.$$

En vertu de (7.), on aura aussi

$$\sum_{k=1}^{\sigma}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\,l'_k\,\lambda_i^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} a'_i\,\lambda_i^{(0)}.$$

On peut donc présenter la somme (9.) sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Sigma\, a_i^{(0)}\lambda_i^{(0)} + \frac{1}{2}\Sigma\, a'_i\lambda'_i + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\,l'_k\,\lambda_i^{(0)} &= \frac{1}{2}\left(\Sigma\, a_i^{(0)}\lambda_i^{(0)} + \Sigma\, a_i^{(0)}\lambda'_i + \Sigma\, a'_i\lambda_i^{(0)} + \Sigma\, a'_i\lambda'_i\right)\\ &= \frac{1}{2}\Sigma\left(a_i^{(0)} + a_i^{(0)}\right)\left(\lambda_i^{(0)} + \lambda'_i\right).\end{aligned}$$

Comme

$$a_i^{(0)} + a'_i = a_i \quad\text{et}\quad \lambda_i^{(0)} + \lambda'_i = \lambda_i,$$

la formule (8.) peut s'écrire

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) = \sum_{k=1}^{\sigma} l_k\left(a_{0k} - \frac{1}{2}\Sigma\, a_{ik}\,\lambda_{ik} + \Sigma\, a_{ik}\,x_i\right) + \frac{1}{2}\Sigma\, a_i\,\lambda_i.$$

Il est aisé de vérifier la formule (4.) dans les cas

$$\lambda_i = \pm\lambda_{ik}. \qquad (k=1,2,\dots\sigma)$$

Il en résulte que la formule (4.) subsiste, quel que soit le vecteur $[\lambda_i]$ appartenant au groupe G.

Théorème II. *Le groupe G possède une base formée de n vecteurs*

$$[\pi_{i1}],\ [\pi_{i2}],\ \dots [\pi_{in}].$$

En posant

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^{n} l_k \pi_{ik} \tag{11.}$$

où $l_1, l_2, \dots l_n$ sont des nombres entiers arbitraires, on déterminera chaque vecteur $[\lambda_i]$ du groupe G. En désignant

$$V(x_1, x_2, \dots x_n,\ \pi_1, \pi_2, \dots \pi_n) = p_{0k} + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i, \qquad (k=1,2,\dots n)$$

et

$$a_i = \sum_{k=1}^{n} l_k p_{ik}, \tag{12.}$$

on aura la formule

$$V(x_1, x_2, \dots x_n,\ \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) = \sum_{k=1}^{n} l_k\Big(p_{0k} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_{ik}\pi_{ik} + \sum_{i=1}^{n} p_{ik} x_i\Big) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i\lambda_i.$$

On démontrera aisement le théorème II énoncé à l'aide de la formule (4.).

Observons que la somme $\Sigma a_i\lambda_i$ présente, en vertu des égalités (11.) et (12.), une forme quadratique des variables entières $l_1, l_2, \dots l_n$

$$\Sigma a_i\lambda_i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} A_{kh} l_k l_h,$$

où on a posé

$$A_{kh} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_{ik}\pi_{ih} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_{ih}\pi_{ik}. \qquad (k=1,2,\dots n;\ h=1,2,\dots n)$$

Nous allons voir que la forme quadratique obtenue $\Sigma\Sigma A_{kh} l_k l_h$ est positive.

Détermination du centre des parallélloèdres primitifs.

41. *Théorème* I. *Chaque parallélloèdre primitif possède un centre.*

Désignons par (ξ_i) le point vérifiant les égalités

$$(1.)\qquad p_{0k} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_{ik}\,\pi_{ik} + \sum_{i=1}^{n} p_{ik}\,\xi_i = 0. \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\dots n)}$$

Je dis que le point (ξ_i) présente le centre du parallélloèdre principal R_0.

Pour le démontrer, posons

$$\lambda_{ih} = \sum_{k=1}^{n} l_k^{(h)}\,\pi_{ik}. \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\dots\sigma)}$$

En vertu du théorème II du n° 40, on obtient

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_{1h}, \lambda_{2h}, \dots \lambda_{nh}) = \Sigma\, l_k^{(h)} \left(p_{0k} - \frac{1}{2}\,\Sigma p_{ik}\pi_{ik} + \Sigma p_{ik}\,x_i\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (p_{i1}\,l_1^{(h)} + \cdots + p_{in}\,l_n^{(h)})\,\lambda_{ih}.$$

D'autre part, en vertu de la définition établie au n° 32, on a

$$V(x_1, x_2, \dots x_n, \lambda_{1h}, \lambda_{2h}, \dots \lambda_{nh}) = a_{0h} + \Sigma\, a_{ih}\, x_i.$$

Il s'ensuit que

$$(2.)\qquad a_{ih} = \sum_{k=1}^{n} l_k^{(h)}\, p_{ik}, \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\dots\sigma)}$$

et

$$(3.)\qquad a_{0h} = \sum_{k=1}^{n} l_k^{(h)} \left(p_{0k} - \frac{1}{2}\,\Sigma p_{ik}\,\pi_{ik}\right) + \frac{1}{2}\,\Sigma\, a_{ih}\,\lambda_{ih}. \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\dots\sigma)}$$

Multiplions les égalités (1.) par $l_k^{(h)}$ et en attribuant à l'indice k les valeurs $1, 2, \dots n$, additionnons les égalités obtenues, il viendra, à cause de (2.) et (3.),

$$a_{0h} - \frac{1}{2}\Sigma a_{ih}\lambda_{ih} + \Sigma a_{ih}\xi_i = 0. \qquad (h=1,2,\dots\sigma) \tag{4.}$$

Cela posé, prenons un point quelconque (x_i) appartenant au parallélloèdre R_0.

Pour que le point (ξ_i) soit le centre du parallélloèdre R_0, il faut et il suffit que le point (x_i') déterminé par les égalités

$$x_i' = 2\xi_i - x_i, \qquad (i=1,2,\dots n) \tag{5.}$$

appartienne au parallélloèdre R_0 aussi.

En vertu de la supposition faite, on aura les inégalités

$$a_{0h} + \Sigma a_{ih}x_i \geqq 0. \qquad (h=1,2,\dots\sigma) \tag{6.}$$

En observant qu'à cause de (4.) et (5.)

$$a_{0h} + \Sigma a_{ih}x_i' = -a_{0h} - \Sigma a_{ih}(x_i - \lambda_{ih})$$

et que l'inégalité

$$-a_{0h} - \Sigma a_{ih}(x_i - \lambda_{ih}) \geqq 0$$

se trouve parmi les inégalités (6.), on obtient

$$a_{0h} + \Sigma a_{ih}x_i' \geqq 0. \qquad (h=1,2,\dots\sigma)$$

Il est donc démontré que le point (ξ_i) présente le centre du parallélloèdre R_0.

Observons que le centre (ξ_i) est intérieur au parallélloèdre R_0.

Pour le démontrer, supposons qu'un point (x_i) soit intérieur au parallélloèdre R_0.

On aura les inégalités

$$a_{0h} + \Sigma a_{ih}x_i > 0. \qquad (h=1,2,\dots\sigma)$$

Parmi ces inégalités se trouvent les inégalités

$$-a_{0h}-\Sigma a_{ih}(x_i-\lambda_{ih})>0. \qquad (h=1,2, \ldots \sigma)$$

En faisant la somme de ces inégalités, on obtient

$$\Sigma a_{ih}\lambda_{ih}>0, \qquad (h=1,2,\ldots \sigma)$$

et, à cause de l'égalité (4.), il vient

$$a_{0h}+\Sigma a_{ih}\xi_i>0. \qquad (h=1,2,\ldots \sigma)$$

42. *Théorème* II. *La forme quadratique*

$$\sum_{i=1}^{n}(p_{i1}l_1+p_{i2}l_2+\cdots+p_{in}l_n)(\pi_{i1}l_1+\pi_{i2}l_2+\cdots+\pi_{in}l_n)$$

des variables entières $l_1, l_2, \ldots l_n$ *est positive.*

Appliquons le théorème I du n° 37 au centre (ξ_i) du parallélloèdre principal R_0, on aura l'inégalité

$$(7.) \qquad V(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)>0,$$

quel que soit le vecteur $[\lambda_i]$ du groupe G, le vecteur $[0]$ étant exclu.

En vertu du théorème II du n° 40 et des égalités (1.), il vient

$$p(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)=\frac{1}{2}\Sigma(p_{i1}l_1+\cdots+p_{in}l_n)(\pi_{i1}l_1+\cdots+\pi_{in}l_n)$$

et, à cause de (7.), on trouve

$$\Sigma(p_{i1}l_1+p_{i2}l_2+\cdots+p_{in}l_n)(\pi_{i1}l_1+\pi_{i2}l_2+\cdots+\pi_{in}l_n)>0.$$

L'inégalité obtenue subsiste, quelles que soient les valeurs entières des variables $l_1, l_2, \ldots l_n$, le système $l_1=0,\ l_2=0,\ \ldots\ l_n=0$ étant exclu.

Groupe continu de transformations linéaires des paralléloèdres primitifs.

43. Effectuons une transformation linéaire du paralléloèdre primitif principal R_0 à l'aide d'une substitution

$$x_i = \alpha_{i0} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x'_k, \qquad (i=1, 2, \dots n)$$

à coefficients réels quelconques et du déterminant qui ne s'annule pas.

On obtiendra un nouveau paralléloèdre primitif R' qui sera déterminé à l'aide des inégalités canoniques

$$a'_{0h} + \sum_{k=1}^{n} a'_{kh} x'_k \geqq 0, \qquad (h=1, 2, \dots \sigma)$$

où on a posé

$$(1.) \qquad a'_{0h} = a_{0h} + \sum_{i=1}^{n} a_{ih} \alpha_{i0}, \quad a'_{kh} = \sum_{i=1}^{n} a_{ih} \alpha_{ik}. \qquad (k=1, 2, \dots n;\ h=1, 2, \dots \sigma)$$

Le groupe G' de vecteurs correspondant au paralléloèdre obtenu R' sera déterminé par les égalités

$$(2.) \qquad \lambda_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \lambda'_k,$$

à condition qu'au vecteur $[\lambda_i]$ du groupe G corresponde le vecteur $[\lambda'_i]$ dans le groupe G'.

Désignons

$$V(x_1, x_2, \dots x_n,\ \lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) = p_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

et

$$V(x'_1, x'_2, \dots x'_n,\ \lambda'_1, \lambda'_2, \dots \lambda'_n) = p'_0 + \sum_{i=1}^{n} p'_i x_i.$$

En vertu de la formule (4.) du n° 40 et des égalités (1.) et (2.), on obtient

$$p'_0 = p_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i \alpha_{i0}, \qquad p'_k = \sum_{i=1}^{n} p_i \alpha_{ik}. \qquad (k=1, 2, \dots n)$$

Il en résulte que $[\pi_i]$ et $[\pi'_i]$ étant deux vecteurs correspondants quelconques, on aura

$$(3.) \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i \pi_i = \sum_{i=1}^{n} p'_i \pi'_i.$$

Théorème. La forme quadratique

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} A_{kh} l_k l_h = \sum_{i=1}^{n} (p_{i1} l_1 + p_{i2} l_2 + \cdots + p_{in} l_n)(\pi_{i1} l_1 + \pi_{i2} l_2 + \cdots + \pi_{in} l_n)$$

présente un invariant dans le groupe continu de transformations linéaires.

Le théorème énoncé est évident en vertu de l'égalité (3.).

44. Effectuons une transformation des paralléloèdres primitifs de l'ensemble (R) à l'aide d'une substitution

$$p_{0k} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} p_{ik} \pi_{ik} + \sum_{i=1}^{n} p_{ik} x_i = x'_k. \qquad (k=1, 2, \ldots n)$$

On obtiendra un ensemble de paralléloèdres primitifs (R').

La valeur correspondante de la fonction $V(x'_1, x'_2, \ldots x'_n, \lambda'_1, \lambda'_2, \ldots \lambda'_n)$ pour l'ensemble (R') sera exprimée par la formule

$$V(x'_1, x'_2, \ldots x'_n, \lambda'_1, \lambda'_2, \ldots \lambda'_n) = \sum_{i=1}^{n} l_i x'_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} l_i l_j.$$

En vertu du théorème du n° 38, le paralléloèdre principal de l'ensemble (R') sera déterminé par les inégalités

$$\frac{1}{2} \Sigma \Sigma A_{ij} l_i l_j + \sum_{i=1}^{n} l_i x_i \geqq 0$$

qui subsistent, quelles que soient les valeurs entières de $l_1, l_2, \ldots l_n$.

Les différents paralléloèdres de l'ensemble (R') seront déterminés par les inégalités

$$(4.) \qquad \frac{1}{2} \Sigma \Sigma A_{ij} l_i l_j + \Sigma l_i x_i \geqq \frac{1}{2} \Sigma \Sigma A_{ij} l_i^{(0)} l_j^{(0)} + \Sigma l_i^{(0)} x_i.$$

Chaque parallélloèdre de l'ensemble (R') sera caractérisé par un système correspondant $(l_i^{(0)})$ de nombres entiers $l_1^{(0)}, l_2^{(0)}, \dots l_n^{(0)}$.

Observons qu'on pourrait remplacer la base du groupe G formée de n vecteurs par une autre base formée de n vecteurs aussi, ces deux bases seront équivalentes, en vertu du théorème III du n° 11; la forme quadratique positive correspondante $\Sigma\Sigma A_{ij} l_i l_j$ sera remplacée par une forme équivalente; les inégalités (4.) définissent dans ce cas l'ensemble des parallélloèdres qui peut être transformé en l'ensemble (R') à l'aide d'une substitution linéaire correspondante à coefficients entiers et du déterminant ± 1.

Le remarquable théorème suivant est donc démontré.

Théorème. En effectuant les transformations linéaires d'un parallélloèdre primitif à l'aide de substitutions à coefficients réels quelconques qui forment un groupe continu de substitutions linéaires, on obtient un ensemble de parallélloèdres primitifs qui est parfaitement déterminé par une classe de formes quadratiques positives équivalentes, à condition qu'on ne considère pas comme différentes les formes quadratiques à coefficients proportionnels.

Nous allons voir que chaque forme quadratique positive définit, à l'aide des inégalités (4.), un ensemble de parallélloèdres congruents qui peuvent être primitifs ou imprimitifs.

Section III.

Détermination des parallélloèdres à l'aide des formes quadratiques positives.

Définition du polyèdre convexe correspondant à une forme quadratique positive.

45. Soit $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ une forme quadratique positive arbitraire à n variables $x_1, x_2, \dots x_n$. Envisageons un ensemble R de points (α_i) vérifiant l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \geqq 0,$$

quelles que soient les valeurs entières de $x_1, x_2, \dots x_n$.

En vertu de la définition établie, l'ensemble R jouit des propriétés suivantes:

1. *L'ensemble R est à n dimensions.*
2. *Le point* (0) *présente le centre de l'ensemble R.*
3. *L'ensemble R est convexe.*

Prenons un système de paramètres arbitraires $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$ et examinons un vecteur g composé de points (α_i) qui sont déterminés par les égalités

$$\alpha_i = \varrho\,\varepsilon_i \quad \text{où} \quad \varrho \geqq 0.$$

Il est aisé de démontrer qu'il existe un intervalle

$$0 \leqq \varrho \leqq \varrho_0 \quad \text{où} \quad \varrho_0 > 0$$

qui correspond aux points du vecteur g appartenant à l'ensemble R.

En posant

$$\alpha_{i0} = \varrho_0\,\varepsilon_i,$$

on obtient un vecteur $[\alpha_{i0}]$ dont les points appartiennent à l'ensemble R. Le point (α_{i0}) appartient à la frontière de l'ensemble R, c'est-à-dire: le point (α_{i0}) vérifie l'inégalité

$$(1.)\qquad \Sigma\Sigma\, a_{ij}\, x_i\, x_j + 2\,\Sigma\, \alpha_{i0}\, x_i \geqq 0,$$

quelles que soient les valeurs entières de $x_1, x_2, \dots x_n$ et vérifie au moins une égalité

$$(2.)\qquad \Sigma\Sigma\, a_{ij}\, l_i\, l_j + 2\,\Sigma\, \alpha_{i0}\, l_i = 0,$$

$l_1, l_2, \dots l_n$ étant des nombres entiers qui ne s'annulent pas.

Désignons

$$(3.)\qquad \alpha_{i1} = -\,\alpha_{i0} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, l_j, \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

on aura, à cause de (2.), l'égalité

$$\Sigma\Sigma\, a_{ij}\, x_i\, x_j + 2\,\Sigma\, \alpha_{i1}\, x_i = \Sigma\Sigma\, a_{ij}\,(l_i - x_i)(l_j - x_j) + 2\,\Sigma\, \alpha_{i0}\,(l_i - x_i)$$

et, en vertu de (1.), on obtient

$$(4.) \qquad \Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j + 2\Sigma \alpha_{i1} x_i \geqq 0,$$

donc le point (α_{i1}) appartient à l'ensemble R aussi.

En faisant la somme des inégalités (1.) et (4.), on trouve, à cause de (3.),

$$\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j - \Sigma\Sigma a_{ij} x_i l_j \geqq 0.$$

L'inégalité obtenue subsiste, quelles que soient les valeurs entières de $x_1, x_2, \dots x_n$; cette inégalité peut s'écrire

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l_i l_j \leqq \Sigma\Sigma a_{ij} (l_i - 2x_i)(l_j - 2x_j).$$

On en conclut que le système (l_i) n'est autre chose qu'une représentation du minimum de la forme quadratique positive $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$ déterminée dans l'ensemble composé de tous les systèmes de nombres entiers qui sont congrus au système (l_i) par rapport au module 2.

Le nombre des systèmes pareils est fini. Supposons que tous ces systèmes forment une série

$$(5.) \qquad (l_{i1}), (l_{i2}), \dots (l_{i\sigma}).$$

46. *Théorème. L'ensemble R présente un polyèdre convexe déterminé à l'aide des inégalités*

$$(6.) \qquad \Sigma\Sigma a_{ij} l_{ik} l_{jk} + 2\Sigma \alpha_i l_{ik} \geqq 0. \qquad (k = 1, 2, \dots \sigma)$$

En vertu de la définition établie, chaque point (α_i) de l'ensemble R vérifie ces inégalités. Admettons qu'un point (α_i) vérifiant ces inégalités n'appartienne pas à l'ensemble R. On déterminera dans ce cas une valeur positive du paramètre ϱ dans l'intervalle $0 < \varrho < 1$, de manière qu'en posant

$$(7.) \qquad \alpha_i^{(0)} = \varrho\, \alpha_i \quad \text{où} \quad 0 < \varrho < 1,$$

on obtienne un point $(\alpha_i^{(0)})$ appartenant à la frontière de l'ensemble R. Le point $(\alpha_i^{(0)})$ vérifiera, comme nous l'avons vu, une égalité

$$(8.) \qquad \Sigma \Sigma a_{ij} l_i l_j + 2 \Sigma \alpha_i^{(0)} l_i = 0$$

caractérisée par un système (l_i) appartenant à la série (6.).

En vertu de l'égalité obtenue, on trouve

$$\Sigma \alpha_i^{(0)} l_i < 0$$

et, à cause de (7.), il vient

$$\Sigma \alpha_i l_i < 0.$$

En présentant l'égalité (8.) sous la forme

$$\Sigma \Sigma a_{ij} l_i l_j + 2 \Sigma \alpha_i l_i = 2(1-\varrho) \Sigma \alpha_i l_i,$$

on aura l'inégalité

$$\Sigma \Sigma a_{ij} l_i l_j + 2 \Sigma \alpha_i l_i < 0,$$

ce qui est contre l'hypothèse.

Inégalités indépendantes qui définissent le polyèdre convexe correspondant à une forme quadratique positive.

47. Il peut arriver que parmi les inégalités (6.) du n° précédent se trouvent des inégalités dépendantes. Admettons, par exemple, que l'inégalité

$$(1.) \qquad \Sigma \Sigma a_{ij} l_i l_j + 2 \Sigma \alpha_i l_i \geqq 0$$

soit dépendante. On aura dans ce cas une identité

$$(2.) \qquad \Sigma \Sigma a_{ij} l_i l_j + 2 \Sigma \alpha_i l_i = \varrho_0 + \sum_{k=1}^{\sigma} \varrho_k (\Sigma \Sigma a_{ij} l_{ik} l_{jk} + 2 \Sigma \alpha_i l_{ik})$$

où

$$\varrho_0 \geqq 0, \quad \varrho_k \geqq 0. \qquad (k=1,2,\ldots \sigma)$$

Nous avons vu au n° 45 que l'inégalité

$$\Sigma\Sigma\, a_{ij} x_i x_j - \Sigma\Sigma\, a_{ij} x_i l_j \geqq 0$$

subsiste quelles que soient les valeurs entières de $x_1, x_2, \dots x_n$.

En faisant dans l'identité (2.)

$$\alpha_i = -\frac{1}{2}\Sigma\, a_{ij} l_j,$$

on obtient

$$\varrho_0 + \Sigma\,\varrho_k (\Sigma\Sigma\, a_{ij} l_{ik} l_{jk} - \Sigma\Sigma\, a_{ij} l_{ik} l_j) = 0,$$

et par suite

$$\varrho_0 = 0, \quad \varrho_k (\Sigma\Sigma\, a_{ij} l_{ik} l_{jk} - \Sigma\Sigma\, a_{ij} l_{ik} l_j) = 0. \qquad (k = 1, 2, \dots \sigma)$$

En supposant que $\varrho_k \gtrless 0$, on aura

$$\Sigma\Sigma\, a_{ij} l_{ik} l_{jk} - \Sigma\Sigma\, a_{ij} l_{ik} l_j = 0,$$

donc

$$\Sigma\Sigma\, a_{ij} l_i l_j = \Sigma\Sigma\, a_{ij} (l_i - 2\, l_{ik})(l_j - 2\, l_{jk}).$$

En vertu de l'égalité obtenue, le système $(l_i - 2\, l_{ik})$ se trouve dans la série (5.) du n° 45. C'est une condition nécessaire pour que l'inégalité (1.) soit dépendante.

48. *Théorème. Pour qu'une inégalité*

$$\Sigma\Sigma\, a_{ij} l_i l_j + 2\,\Sigma\,\alpha_i l_i > 0 \qquad (3.)$$

soit indépendante, il faut et il suffit que la forme quadratique $\Sigma\Sigma\, a_{ij} x_i x_j$ ne possède que deux représentations (l_i) et $(-l_i)$ du minimum dans l'ensemble composé de tous les systèmes de nombres entiers qui sont congrus au système (l_i) par rapport au module 2.

Nous avons démontré que la condition énoncée est suffisante. Il reste à démontrer que cette condition est nécessaire.

Admettons que l'inégalité (3.) soit indépendante. Dans ce cas, l'équation

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l_i l_j + 2\Sigma \alpha_i l_i = 0$$

définit une face P à $n-1$ dimensions du polyèdre R.

Soit (α_i) un point qui est intérieur à la face P. On aura l'inégalité

$$(4.) \qquad \Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j + 2\Sigma \alpha_i x_i > 0,$$

quelles que soient les valeurs entières de $x_1, x_2, \ldots x_n$, les deux systèmes (0) et (l_i) étant exclus. En posant, comme nous l'avons fait au n° 45,

$$(5.) \qquad \alpha'_i = -\alpha_i - \Sigma a_{ij} l_j,$$

on aura aussi une inégalité

$$(6.) \qquad \Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j + 2\Sigma \alpha'_i x_i > 0$$

qui subsiste, quelles que soient les valeurs entières de $x_1, x_2 \ldots x_n$, les deux systèmes (0) et (l_i) étant exclus. En faisant la somme des inégalités (4.) et (6.), on trouve, à cause de (5.),

$$\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j - \Sigma a_{ij} x_i l_j > 0$$

ou autrement

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l_i l_j < \Sigma\Sigma a_{ij} (l_i - 2x_i)(l_j - 2x_j).$$

L'inégalité obtenue subsiste, quelles que soient les valeurs entières de $x_1, x_2, \ldots x_n$, les deux systèmes (0) et (l_i) étant exclus.

Le théorème énoncé est donc démontré.

Corollaire. Le nombre des inégalités indépendantes qui définissent le polyèdre R correspondant à une forme quadratique positive ne peut pas surpasser la limite $2(2^n - 1)$.

Ensemble (R) de parallélloèdres défini par une forme quadratique positive.

49. *Théorème. Supposons que le polyèdre convexe R correspondant à une forme quadratique positive $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$ soit déterminé à l'aide des inégalités*

$$\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j + 2\Sigma \alpha'_i x_i \geqq 0.$$

En effectuant les translations du polyèdre R le long des vecteurs déterminés par les égalités

$$\lambda_i = -\Sigma a_{ij} l_j,$$

$l_1, l_2, \dots l_n$ étant des nombres entiers arbitraires, on composera un ensemble (R) de polyèdres congruents qui partagent uniformément l'espace à n dimensions.

Désignons par R' le polyèdre qu'on obtient à l'aide d'une translation du polyèdre R le long du vecteur $[\lambda_i]$. Le polyèdre R' sera déterminé par les inégalités

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} l_j) x_i \geqq 0.$$

Cette inégalité peut s'écrire

$$\Sigma\Sigma a_{ij} (x_i + l_i)(x_j + l_j) + 2 \Sigma \alpha_i (x_i + l_i) \geqq \Sigma\Sigma a_{ij} l_i l_j + 2 \Sigma \alpha_i l_i.$$

On en conclut que le polyèdre R' sera déterminé par les inégalités

$$(1.) \qquad \Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j + 2 \Sigma \alpha_i x_i \geqq \Sigma\Sigma a_{ij} l_i l_j + 2 \Sigma \alpha_i l_i$$

qui subsistent, quelles que soient les valeurs entières des variables $x_1, x_2, \dots x_n$.

On dira que le polyèdre R' congruent au polyèdre R est caractérisé par le système (l_i).

Désignons par (R) l'ensemble de tous les polyèdres congruents au polyèdre R et qui sont caractérisés par les différents systèmes (l_i) de nombres entiers.

Je dis que l'ensemble (R) remplit uniformément l'espace à n dimensions.

Prenons un point arbitraire (α_i) dans l'espace à n dimensions et cherchons le polyèdre de l'ensemble (R) auquel appartient le point (α_i). A cet effet, déterminons une représentation (l_i) du minimum de la forme

$$\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j + 2 \Sigma \alpha_i x_i$$

dans l'ensemble E composé de tous les systèmes (x_i) de valeurs entières des variables $x_1, x_2, \dots x_n$.

On aura l'inégalité

$$\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j + 2\,\Sigma \alpha_i x_i \geqq \Sigma\Sigma a_{ij}\, l_i l_j + 2\,\Sigma \alpha_i l_i$$

qui subsiste dans l'ensemble E. Il en résulte que le point (α_i) appartient au polyèdre de l'ensemble (R) caractérisé par le système (l_i).

Admettons que le point (α_i) appartienne aux différents polyèdres de l'ensemble (R): $R, R', \dots R^{(\mu)}$ caractérisés par les systèmes

$$(2.) \qquad (l_i), (l_{i1}), \dots (l_{i\mu}).$$

En vertu de (1.), on obtient les égalités

$$(3.) \qquad \Sigma\Sigma a_{ij}\, l_{ik} l_{jk} + 2\,\Sigma \alpha_i l_{ik} = \Sigma\Sigma a_{ij}\, l_i l_j + 2\,\Sigma \alpha_i l_i. \qquad (k=1,2,\dots\mu)$$

Il s'ensuit qu'on aura l'inégalité

$$\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j + 2\,\Sigma \alpha_i x_i > \Sigma\Sigma a_{ij}\, l_i l_j + 2\,\Sigma \alpha_i l_i,$$

quelles que soient les valeurs entières de $x_1, x_2, \dots x_n$, les systèmes (2.) étant exclus.

On en conclut que le point (α_i) est intérieur à une face commune aux polyèdres $R, R', .. R^{(\mu)}$ et définie par les équations (3.).

Nous sommes arrivés au résultat suivant:

Chaque forme quadratique positive définit un ensemble (R) de parallé-loèdres congruents qui peuvent être primitifs ou imprimitifs.

Algorithme pour la recherche du minimum de la forme $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j + 2\,\Sigma \alpha_i x_i$ dans l'ensemble E.

50. Supposons qu'on ait déterminé les inégalités indépendantes

$$\Sigma\Sigma a_{ij}\, l_{ik} l_{jk} + 2\,\Sigma \alpha_i l_{ik} \geqq 0 \qquad (k=1,2,\dots\sigma)$$

qui définissent le parallélоèdre R correspondant à une forme quadratique positive $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$.

A l'aide des systèmes

$$(l_{i1}), (l_{i2}), \dots (l_{i\sigma})$$

de nombres entiers, on peut résoudre plusieurs problèmes de la théorie arithmétique des formes quadratiques positives.

Cherchons, par exemple, le minimum de la forme

$$(1.)\qquad \Sigma\Sigma a_{ij}\, x_i x_j + 2\,\Sigma\, \alpha_i x_i$$

dans l'ensemble E composé de tous les systèmes (x_i) de nombres entiers, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ étant des paramètres arbitraires donnés.

Les valeurs de $x_1, x_2, \ldots x_n$ qui correspondent au minimum absolu de la fonction (1.) vérifient les équations

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i + \alpha_k = 0. \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

Désignons par (ξ_i) le point vérifiant ces équations. En posant

$$\xi_i = l_i + r_i,$$

déterminons les nombres entiers $l_1, l_2, .. l_n$ d'après les conditions

$$|r_i| \leqq \frac{1}{2}. \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

Dans le cas $r_i = 0\ (i=1, 2, \ldots n,)$ le système (l_i) est celui qu'on a cherché. Admettons que tous les nombres $r_i (i=1,2,\ldots n)$ ne s'annulent pas. Posons

$$\alpha_i^{(0)} = \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, l_j$$

et examinons le point $(\alpha_i^{(0)})$. Admettons que le point $(\alpha_i^{(0)})$ appartienne au parallélloèdre R. Il en résulte que le point (α_i) appartient au parallélloèdre de l'ensemble (R) qui est caractérisé par le système (l_i), donc ce système représente le minimum de la forme (1.).

Dans le cas où le point $(\alpha_i^{(0)})$ n'appartient pas au parallélloèdre R, déterminons une valeur ϱ_0 dans l'intervalle $0 < \varrho_0 < 1$ du paramètre ϱ, de manière que le point $(\varrho_0\ \alpha_i^{(0)})$ appartienne à une face du parallélloèdre R. Supposons que cette face soit déterminée par l'équation

$$\Sigma\Sigma a_{ij}\, l_{ih}\, l_{jh} + 2\,\Sigma\, \alpha_i\, l_{ih} = 0.$$

On aura une égalité

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l_{ih} l_{jh} + 2\varrho_0 \Sigma \alpha_i^0 l_{ih} = 0 \text{ où } 0 < \varrho_0 < 1.$$

Posons

$$\alpha_i' = \alpha_i^0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} l_{jh}$$

et examinons de nouveau le point (α_i') et ainsi de suite. Je dis qu'on déterminera toujours une représentation du minimum de la forme (1.) en répétant plusieurs fois le procédé exposé. Pour le démontrer, supposons qu'on ait déterminé à l'aide de l'algorithme exposé une série de points

$$(2.)\qquad (\alpha_i^{(0)}),\ (\alpha_i'),\ \dots\ (\alpha_i^{(k)}),\ \dots$$

et une série de systèmes

$$(l_i^{(0)}),\ (l_i'),\ \dots\ (l_i^{(k)})\dots,$$

vérifiant les égalités

$$(3.)\qquad \alpha_i^{(k)} = \alpha_i^{(k-1)} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} l_j^{(k-1)}, \qquad (k = 1, 2\ \dots)$$

et les égalités

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l_i^{(k)} l_j^{(k)} + 2\Sigma \varrho_k \alpha_i^{(k)} l_i^{(k)} = 0 \text{ où } 0 < \varrho_k < 1. \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

En vertu de ces égalités, on trouve

$$(4.)\qquad \Sigma\Sigma a_{ij} l_i^{(k)} l_j^{(k)} + 2\Sigma \alpha_i^{(k)} l_i^{(k)} < 0. \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

En désignant

$$(5.)\qquad m_i^{(k)} = l_i + l_i^{(0)} + \dots + l_i^{(k-1)} \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

et

$$m_i^{(0)} = l_i,$$

on obtient, à cause de (3.),

$$(6.)\qquad \alpha_i^{(k)} = \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} m_j^{(k)}. \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

En substituant dans l'inégalité (4.), on trouve

$$\Sigma\Sigma a_{ij}(l_i^{(k)}+m_i^{(k)})(l_j^{(k)}+m_j^{(k)})+2\Sigma\alpha_i(l_i^{(k)}+m_i^{(k)})<\Sigma\Sigma a_{ij}m_i^{(k)}m_j^{(k)}+2\Sigma\alpha_i m_i^{(k)}.$$

Cette inégalité, à cause de (5.), peut s'écrire

$$\Sigma\Sigma a_{ij}m_i^{(k+1)}m_j^{(k+1)}+2\Sigma\alpha_i m_i^{(k+1)}<\Sigma\Sigma a_{ij}m_i^{(k)}m_j^{(k)}+2\Sigma\alpha_i m_i^{(k)}. \quad (k=0,1,2,\ldots)$$

Le nombre des systèmes $(m_i^{(k)})$ de nombres entiers vérifiant ces inégalités est limité. On en conclut que la série des points (2.) se terminera toujours par un point $(\alpha_i^{(k)})$ appartenant au parallélоèdre R. En vertu de l'égalité (6.), le système $(m_i^{(k)})$ représente le minimum de la forme $\Sigma\Sigma a_{ij}x_i x_j+2\Sigma\alpha_i x_i$ dans l'ensemble E.

Il reste à déterminer toutes les représentations du minimum de la forme examinée dans l'ensemble E. Le problème posé se ramène à la recherche de tous les parallélоèdres de l'ensemble (R) qui sont contigus par une face à l'intérieur de laquelle se trouve le point $(\alpha_i^{(k)})$. On déterminera tous ces parallélоèdres en examinant successivement les parallélоèdres qui sont contigus à R par les faces à $n-1$ dimensions et ainsi de suite.

Propriétés des systèmes de nombres entiers qui caractérisent les faces à $n-1$ dimensions du parallélоèdre correspondant à une forme quadratique positive.

51. Supposons que les systèmes

$$(1.) \qquad \pm(l_{i1}), \pm(l_{i2}), \ldots \pm(l_{i\tau})$$

caractérisent les faces à $n-1$ dimensions du parallélоèdre R correspondant à une forme quadratique positive $\Sigma\Sigma a_{ij}x_i x_j$.

Théorème I. *Les éléments $l_{1k}, l_{2k}, \ldots l_{nk}$ de chaque système (l_{ik}) appartenant à la série* (1.) *n'ont pas de diviseur commun.*

Nous avons vu au n° 45 que les nombres $l_{1k}, l_{2k}, \ldots l_{nk}$ vérifient l'inégalité

$$\Sigma\Sigma a_{ij}x_i x_j-\Sigma\Sigma a_{ij}x_i l_{jk}\geqq 0$$

dans l'ensemble E. En admettant que

$$l_{ik} = \delta t_i \text{ où } \delta \geqq 1$$

et en posant $x_i = t_i$ dans l'inégalité précédente, on trouve

$$\Sigma\Sigma a_{ij} t_i t_j - \delta \Sigma\Sigma a_{ij} t_i t_j \geqq 0,$$

et il est nécessaire que $\delta = 1$.

52. *Théorème* II. *Supposons que n systèmes*

$$(2.) \qquad (p_{i1}),\ (p_{i2}), \ldots (p_{in})$$

représentent n minima consécutifs

$$M_1 \leqq M_2 \leqq \ldots M_n$$

de la forme quadratique positive $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$. *Tous les systèmes* (2.) *se trouvent dans la série* (1.).

En vertu de la définition du système de n minima consécutifs, on aura une inégalité

$$M_k = \Sigma\Sigma a_{ij} p_{ik} p_{jk} \leqq \Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j, \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

tant que les nombres entiers $x_1, x_2, \ldots x_n$ ne peuvent être présentés sous la forme

$$x_i = \sum_{r=1}^{k-1} u_r p_{ir},$$

le système (0) étant exclu.

Admettons que le système (p_{ik}) n'appartienne pas à la série (1.). Dans ce cas il existe un système (t_i) de nombres entiers vérifiant l'inégalité

$$\Sigma\Sigma a_{ij} p_{ik} p_{jk} \geqq \Sigma\Sigma a_{ij} (p_{ik} - 2t_i)(p_{jk} - 2t_j)$$

ou autrement l'inégalité

$$\Sigma\Sigma a_{ij} p_{ik} t_j \geqq \Sigma\Sigma a_{ij} t_i t_j.$$

En posant

$$(3.) \qquad q_i = p_{ik} - t_i,$$

on présentera l'inégalité précédente sous la forme

$$(4.)\qquad \Sigma\Sigma a_{ij}\, t_i\, t_j + \Sigma\Sigma a_{ij}\, q_i\, q_j \leqq \Sigma\Sigma a_{ij}\, p_{ik}\, p_{jk}.$$

En supposant que les deux systèmes (t_i) et (q_i) diffèrent du système (0), on aura, en vertu de l'inégalité obtenue, les égalités

$$t_i = \sum_{r=1}^{k-1} u_r\, p_{ir},\quad q_i = \sum_{r=1}^{k-1} v_r\, p_{ir}$$

et, à cause de (3.), il vient

$$p_{ik} = \sum_{r=1}^{k-1} (u_r + v_r)\, p_{ir}.$$

Les égalités obtenues sont impossibles, puisqu'autrement le déterminant de n systèmes (2.) s'annulerait, ce qui est contre l'hypothèse.

Il en résulte que l'inégalité (4.) ne subsiste qu'à condition que

$$\text{ou } t_i = 0 \text{ ou } t_i = p_{ik}. \qquad (i=1,2,\dots n)$$

Il est donc démontré que le système (p_{ik}), $(k = 1, 2, \dots n)$ appartient à la série (1.).

Corollaire. Toutes les représentations du minimum arithmétique de la forme quadratique positive $\Sigma\Sigma a_{ij}\, x_i\, x_j$ *se trouvent dans la série* (1.).

53. *Théorème* III. *La valeur numérique du déterminant de n systèmes quelconques appartenant à la série* (1.) *est inférieure à n!.*

Choisissons dans la série (1.) n systèmes quelconques

$$(l_{i1}),\ (l_{i2}),\ \dots\ (l_{in})$$

dont le déterminant $\pm\,\omega$ ne s'annule pas. Désignons

$$(5.)\qquad \alpha_{ik}^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, l_{jk} \quad\text{et}\quad \alpha'_{ik} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, l_{jk}. \qquad (k=1,2,\dots n)$$

En vertu des inégalités

$$\Sigma\Sigma a_{ij}\, x_i\, x_j \pm \Sigma\Sigma a_{ij}\, x_i\, l_{jh} \geqq 0 \qquad (h=1,2,\dots \tau)$$

qui subsistent dans l'ensemble E, $2n$ points (5.) appartiennent au parallélloèdre R correspondant à la forme quadratique $\Sigma\Sigma a_{ij}x_i x_j$.

Choisissons n points quelconques parmi $2n$ points (5.), ayant égard à ce que les deux points correspondant à une même valeur de l'indice k ne se trouvent pas parmi les points choisis. On formera de cette manière 2^n systèmes composés de n points

$$(\alpha_{ih_1}^{(0)}), (\alpha_{ih_2}^{(0)}), \ldots (\alpha_{ih_\mu}^{(0)}), (\alpha'_{ih_{\mu+1}}), \ldots (\alpha'_{ih_n}),$$

$h_1, h_2, \ldots h_n$ étant une permutation quelconque des indices $1, 2, \ldots n$ et $\mu = 0, 1, 2, \ldots n$.

Désignons, pour abréger,

$$(6.) \qquad \alpha_{ik}^{(h)} = \alpha_{ih_k}^{(0)}, \ (k=1,2,\ldots\mu) \qquad \alpha_{ik}^{(h)} = \alpha'_{ih_k}, \quad (k=\mu+1,\ldots n;\ h=1,2,\ldots 2^n)$$

et examinons un simplexe K_h déterminé par les égalités

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \vartheta_k \alpha_{ik}^{(h)} \text{ où } \sum_{k=1}^{n} \vartheta_k \leqq 1 \text{ et } \vartheta_k \geqq 0. \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

Tous les simplexes $K_h, (h = 1, 2, \ldots 2^n)$ appartiennent au parallélloèdre R. Un point quelconque (α_i), qui est intérieur à un simplexe K_h, n'appartient à aucun autre simplexe de la série formée. Il en résulte une inégalité

$$(7.) \qquad \sum_h \int_{(K_h)} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n < \int_{(R)} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n. \qquad (h=1,2,\ldots 2^n)$$

54. En désignant par D le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

de la forme quadratique $\Sigma\Sigma a_{ij}x_i x_j$, on aura en vertu de (5.) et (6.),

$$\int_{(K_h)} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \frac{\omega}{n!} \cdot \frac{D}{2^n},$$

et l'inégalité (7.) donne

$$\frac{\omega}{n!} D < \int_{(R)} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n. \tag{8.}$$

Cela posé, observons que le groupe G de vecteurs correspondant au parallèloèdre R possède une base formée de n vecteurs

$$[a_{i1}],\ [a_{i2}],\ \ldots\ [a_{in}].$$

En vertu du théorème III du n° 11, il vient

$$\int_{(R)} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = D. \tag{9.}$$

En substituant dans l'inégalité (8.), on obtient

$$\omega < n!$$