SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik
Verlag: de Gruyter
Jahr: 1911
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN243919689_0140
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0140

LOG Id: LOG_0004
LOG Titel: Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen.
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen.

Von Herrn *J. Schur* in Berlin.

In der vorliegenden Arbeit will ich eine Reihe von Einzelfragen behandeln, die sich auf die von Herrn *Hilbert**) begründete Theorie der beschränkten Bilinearformen beziehen.

Nach Zusammenstellung einiger der bis jetzt bekannten Resultate (§ 1) leite ich in §§ 2 und 3 mehrere neue (hinreichende) Kriterien für die Beschränktheit einer vorgelegten Bilinearform ab. Die Kriterien des § 2 beziehen sich vornehmlich auf absolut beschränkte, die des § 3 auf nicht absolut beschränkte Bilinearformen. Den Inhalt des § 4 bildet der Beweis eines elementaren Satzes über definite *Hermite*sche Formen und eines analogen Satzes über definite *Hermite*sche Kerne. In § 5 teile ich einen neuen einfachen Beweis für die Beschränktheit der zuerst von Herrn *Hilbert* eingeführten Bilinearformen

$$A = \sum_{\substack{p,q=1 \\ (p \neq q)}}^{\infty} \frac{x_p y_q}{p-q}, \quad S = \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{x_p y_q}{p+q}$$

mit und betrachte einige mit ihnen nahe verwandte Formen. In § 6 gebe ich ein sehr einfaches Beispiel für eine reelle quadratische Form an, die beschränkt, aber nicht absolut beschränkt ist. Als Anwendung ergibt sich

*) „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen", Vierte Mitteilung, Nachr. d. K. Ges. d. Wiss., Göttingen, math.-phys. Kl. 1906, S. 157—227. — Vgl. auch *E. Hellinger*, „Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veränderlichen", dieses Journal, Bd. 136 (1909), S. 210—271, und *E. Hellinger* und *O. Toeplitz*, „Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen", Math. Annalen, Bd. 69, S. 289—330.

ein durchaus elementarer Beweis für die in den neueren Untersuchungen über *Fourier*sche Reihen mehrfach benutzte Tatsache, daß der Ausdruck

$$\left|\frac{\sin t}{1}+\frac{\sin 2t}{2}+\cdots+\frac{\sin nt}{n}\right|$$

für alle n und alle reellen t unterhalb einer festen Schranke liegt.

Im Schlußparagraphen leite ich mit Hilfe einer Integralformel eine allgemeine Klasse von beschränkten Bilinearformen mit reellen, nicht negativen Koeffizienten ab, in der die vorhin erwähnte Form S als ganz spezieller Fall enthalten ist. Ich erhalte zugleich ein System von unendlich vielen beschränkten Bilinearformen, die dadurch bemerkenswert sind, daß sich ihre oberen Grenzen genau angeben lassen. Insbesondere ergibt sich, daß die obere Grenze der Form S genau gleich π ist.

Ich bediene mich im folgenden der Bezeichungen, die *E. Hellinger* und *O. Toeplitz* in ihrer oben zitierten Arbeit eingeführt haben.

§ 1.

Es sollen hier einige bekannte Definitionen und Resultate zusammengestellt werden, von denen in der Folge Gebrauch gemacht wird*).

Die Bilinearform

$$(1.)\qquad A=A(x,y)=\sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq}x_p y_q \text{**}),$$

deren Koeffizienten a_{pq} reelle oder komplexe Zahlen sein können, wird als *beschränkt* bezeichnet, wenn sich eine positive Zahl M angeben läßt, so daß für alle n und für alle reellen oder komplexen Zahlen $x_1, \ldots x_n$, $y_1, \ldots y_n$, die den Bedingungen

$$(2.)\qquad |x_1|^2+\cdots+|x_n|^2\leqq 1,\quad |y_1|^2+\cdots+|y_n|^2\leqq 1$$

genügen, der absolute Betrag des „n-ten Abschnittes“

$$A_n=A_n(x,y)=\sum_{p,q=1}^{n} a_{pq}x_p y_q$$

von A nicht größer als M, also

$$(3.)\qquad \left|\sum_{p,q=1}^{n} a_{pq}x_p y_q\right|\leqq M$$

---

*) Vgl. insbesondere die Arbeit von *E. Hellinger* und *O. Toeplitz*.

**) Solange über die Konvergenz dieser Doppelreihe nichts bekannt ist, soll das Summenzeichen nur zur Zusammenfassung des Koeffizientensystems (a_{pq}) dienen.

wird. Oder anders ausgedrückt: Ist μ_n das Maximum des absoluten Betrages von $|A_n(x, y)|$ unter den Nebenbedingungen (2.), so soll die obere Grenze μ der Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots$ endlich sein.

Die Zahl μ_n läßt sich folgendermaßen berechnen: Man bezeichne allgemein die zu einer Zahl u konjugiert komplexe Größe mit $\bar{u}$ und setze

$$h_{pq} = \bar{h}_{qp} = a_{1p}\bar{a}_{1q} + a_{2p}\bar{a}_{2q} + \cdots + a_{np}\bar{a}_{nq}.$$

Dann ist μ_n gleich der Quadratwurzel aus der größten unter den (sämtlich reellen, nicht negativen) Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} h_{11}-x, & h_{12}, & \ldots & h_{1n} \\ h_{21}, & h_{22}-x, & \ldots & h_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{n1}, & h_{n2}, & \ldots & h_{nn}-x \end{vmatrix} = 0.$$

Zugleich ist μ_n^2 das Maximum der definiten *Hermite*schen Form

$$\sum_{p,q=1}^{n} h_{pq} x_p \bar{x}_q = \sum_{r=1}^{n} |a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n|^2$$

unter der Nebenbedingung

$$(4.) \qquad |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 \leqq 1.$$

Hieraus folgt leicht: Ist $a_{pq} = \bar{a}_{qp}$, so ist die Bilinearform $A(x, y)$ dann und nur dann beschränkt, wenn die *Hermite*sche Form

$$A(x, \bar{x}) = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} x_p \bar{x}_q$$

beschränkt ist, d. h. wenn sich eine Zahl M angeben läßt, so daß für alle n und für alle Werte $x_1, x_2, \ldots x_n$, die der Bedingung (4.) genügen,

$$|A_n(x, \bar{x})| = \left| \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq} x_p \bar{x}_q \right| \leqq M$$

wird.

Ist A beschränkt, so *konvergiert die Reihe* (1.) *im Sinne der Konvergenz der Doppelreihen, sowie auch bei zeilen- und kolonnenweiser Summation für alle Wertsysteme* x_p, y_q, *für welche die Reihen*

$$X = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots, \quad Y = |y_1|^2 + |y_2|^2 + \cdots$$

konvergent sind. Außerdem ist für jede Zahl M, die den Bedingungen (3.) genügt, auch

$$(5.) \qquad \left| \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} x_p y_q \right| \leqq M,$$

sobald $X \leqq 1$, $Y \leqq 1$ wird, und daher für beliebige Werte von X und Y

$$\left| \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} x_p y_q \right| \leqq M\sqrt{XY} \leqq \frac{M}{2}(X + Y).$$

Umgekehrt folgen aus der Ungleichung (5.) auch die Ungleichungen (3.). Jede Zahl M, die diese Eigenschaft besitzt, heißt eine *obere Schranke* der Form A; die kleinste unter diesen Zahlen nennt man die *obere Grenze* von A. Man kann diese Zahl auch als die obere Grenze der früher betrachteten Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots$ definieren.

Die Konvergenz der Doppelreihe (1.) *für alle Wertsysteme* x_p, y_q, *für welche die Reihen* X, Y *konvergent sind, ist nicht nur eine notwendige, sondern auch hinreichende Bedingung für die Beschränktheit der Form* A. *Dasselbe gilt für die Reihen*

$$\sum_{p=1}^{\infty}\Big(\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}\, x_p\, y_q\Big), \text{ bzw. } \sum_{q=1}^{\infty}\Big(\sum_{p=1}^{\infty} a_{pq}\, x_p\, y_q\Big).^{*})$$

Für jede obere Schranke M von A wird

$$(6.) \qquad \sum_{r=1}^{n} |a_{pr}|^2 \leqq M^2, \quad \sum_{r=1}^{n} |a_{rq}|^2 \leqq M^2.$$

Eine notwendige Bedingung für die Beschränktheit der Form A *ist daher, daß die Reihen*

$$|a_{p1}|^2 + |a_{p2}|^2 + \cdots, \quad |a_{1q}|^2 + |a_{2q}|^2 + \cdots \qquad (p,q=1,2,\ldots)$$

konvergieren und daß ihre Summen unterhalb einer endlichen Grenze liegen. Eine hinreichende Bedingung ist die Konvergenz der Doppelreihe $\sum_{p,q=1}^{\infty} |a_{pq}|^2$.

Sind

$$A = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq}\, x_p\, y_q, \quad B = \sum_{p,q=1}^{\infty} b_{pq}\, x_p\, y_q$$

zwei nicht notwendig beschränkte Bilinearformen, für welche die Reihen

$$\sum_{r=1}^{\infty} |a_{pr}|^2, \quad \sum_{r=1}^{\infty} |b_{rq}|^2 \qquad (p,q=1,2,\ldots)$$

konvergent sind, so konvergieren auch die Reihen

$$f_{pq} = \sum_{r=1}^{\infty} a_{pr} b_{rq}.$$

Die mit Hilfe dieser Zahlen gebildete Bilinearform

$$F = \sum_{p,q=1}^{\infty} f_{pq}\, x_p\, y_q$$

heißt dann die aus A und B durch *Komposition* oder *Faltung* hervorgehende Form und wird mit AB bezeichnet. Sind insbesondere A und B

---

*) Während die anderen hier angeführten Resultate sich schon in der *Hilbert*schen Arbeit finden, ist dieser Satz erst von *E. Hellinger* und *O. Toeplitz* (a. a. O. § 10) ausgesprochen und bewiesen worden.

beschränkte Formen, so besitzt auch F diese Eigenschaft. *Die obere Grenze von $F=AB$ ist höchstens gleich dem Produkt der oberen Grenzen der Formen A und B.*

Sind insbesondere für die Form A die Reihen $\sum_r |a_{rq}|^2$ sämtlich konvergent, so konvergieren auch die Reihen

$$c_{pq} = \bar{c}_{qp} = \sum_{r=1}^{\infty} a_{rp}\,\bar{a}_{rq}. \qquad (p,q=1,2,\ldots)$$

Die *Hermite*sche Form

$$C = \sum_{p,q=1}^{\infty} c_{pq}\,x_p\,\bar{x}_q, \tag{7.}$$

die durch Faltung der beiden Formen

$$A' = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{qp}\,x_p\,y_q, \quad \bar{A} = \sum_{p,q=1}^{\infty} \bar{a}_{pq}\,x_p\,y_q$$

entsteht, nenne ich *die Norm $N(A)$* von A*). Von einer Bilinearform A, für welche die Reihen $\sum_r |a_{rq}|^2$ konvergieren, sage ich auch, *A sei eine Form, deren Norm existiert.* Jede beschränkte Form besitzt diese Eigenschaft. Für jedes Wertsystem $x_1, x_2, \ldots$ mit konvergenter Summe $\sum_p |x_p|^2$ ist dann auch die Reihe (7.) konvergent, und es wird zugleich

$$C = N(A) = \sum_{p=1}^{\infty} \left| \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}\,x_q \right|^2.$$

Von besonderer Wichtigkeit für das Folgende ist der (übrigens sehr leicht zu beweisende) Satz (vgl. *E. Hellinger* und *O. Toeplitz*, a. a. O., S. 304):

Hilfssatz I. *Die Bilinearform A ist dann und nur dann beschränkt, wenn die Norm von A existiert und beschränkt ist. Die obere Grenze von $N(A)$ ist genau gleich dem Quadrat der oberen Grenze von A.*

Da jeder Abschnitt der Form $N(A)$ eine nicht negativ definite *Hermite*sche Form (in endlich vielen Variabeln) ist, so erkennt man leicht auch die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Hilfssatz II. *Sind $A, B, \ldots$ endlich viele Bilinearformen, deren Normen existieren, und ist die Hermitesche Form*

$$H = N(A) + N(B) + \cdots$$

---

*) Hat man, was vielfach der Fall ist, neben der Norm von A noch die Norm von A' zu betrachten, so kann man passend $N(A)$ als die *Zeilennorm* und $N(A')$ als die *Kolonnennorm* von A bezeichnen.

beschränkt, so ist auch jede der Formen $A, B, \ldots$ beschränkt. Ist η die obere Grenze von H, so ist die obere Grenze jeder der Formen $A, B, \ldots$ höchstens gleich $\sqrt{\eta}$.

Es sei noch bemerkt, daß, wenn die Koeffizienten a_{pq} der beschränkten Form A reell sind, auch die Variabeln x_p, y_q als reell angenommen werden dürfen, ohne daß sich hierbei der Wert der oberen Grenze von A ändert. An Stelle der *Hermite*schen Form $N(A)=C(x, \bar{x})$ kann dann die quadratische Form $C(x, x)$ gesetzt werden.

§ 2.

Die Bilinearform

$$A = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} x_p y_q$$

ist jedenfalls beschränkt, wenn die Form

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} |a_{pq}| x_p y_q$$

beschränkt ist. In diesem Fall sagt man, A sei *absolut beschränkt*.

Ich will nun beweisen:

I. *Sind in einer Bilinearform A die Reihen*

$$z_p = \sum_{r=1}^{\infty} |a_{pr}|, \quad k_q = \sum_{r=1}^{\infty} |a_{rq}| \qquad (p, q = 1, 2, \ldots)$$

sämtlich konvergent und unterhalb einer endlichen Schranke gelegen, so ist A absolut beschränkt. Ist $z_p \leqq \zeta$, $k_q \leqq \varkappa$, so ist die obere Grenze von A höchstens gleich $\sqrt{\zeta\varkappa}$.

Da hier nur die absoluten Beträge der Zahlen a_{pq} eine Rolle spielen, so können wir annehmen, daß alle a_{pq} reell und nicht negativ sind. Aus der Konvergenz der Reihen k_q folgt insbesondere, daß auch die Reihen $\sum_r a_{rq}^2$ konvergieren; wir können daher die Norm

$$C = N(A) = \sum_{p,q} c_{pq} x_p x_q$$

bilden. Nun wird hier

$$c_{pq} = \sum_{r=1}^{\infty} a_{rp} a_{rq} \quad \text{und}$$

$$c_p = \sum_{q=1}^{\infty} c_{pq} = \sum_{r=1}^{\infty} a_{rp} \sum_{q=1}^{\infty} a_{rq} = \sum_{r=1}^{\infty} a_{rp} z_r \leqq \zeta \sum_{r=1}^{\infty} a_{rp} \leqq \zeta\varkappa.$$

Ist nun ω_n das Maximum von

$$C_n = \sum_{p,q=1}^{n} c_{pq} x_p x_q$$

unter der Nebenbedingung (4.) des § 1, so wird ω_n gleich der größten Wurzel der Gleichung

$$\begin{vmatrix} c_{11}-x, & c_{12}, & \dots & c_{1n} \\ c_{21}, & c_{22}-x, & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1}, & c_{n2}, & \dots & c_{nn}-x \end{vmatrix} = 0.$$

Daher lassen sich n reelle Zahlen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ bestimmen, die nicht sämtlich Null sind und den Gleichungen

$$\omega_n \xi_p = \sum_{q=1}^{n} c_{pq} \xi_q \qquad (p=1, 2, \dots n)$$

genügen. Ist $|\xi_p|$ insbesondere die größte unter den Zahlen $|\xi_1|, |\xi_2|, \dots |\xi_n|$, so wird*)

$$\omega_n |\xi_p| \leqq \sum_{q=1}^{n} c_{pq} |\xi_q| \leqq |\xi_p| \sum_{q=1}^{n} c_{pq} \leqq |\xi_p| \cdot \zeta\varkappa,$$

also $\omega_n \leqq \zeta\varkappa$. Folglich ist $N(A)$ beschränkt und die obere Grenze von $N(A)$ höchstens gleich $\zeta\varkappa$. Hieraus folgt aber auf Grund des Hilfssatzes I der zu beweisende Satz.

Es verdient noch bemerkt zu werden, daß die Form A *nicht beschränkt zu sein braucht, wenn sie nur die Eigenschaft besitzt, daß die Reihen*

$$\sum_{r=1}^{\infty} |a_{pr}|^{1+\varrho}, \quad \sum_{r=1}^{\infty} |a_{rq}|^{1+\varrho}$$

für jedes positive ϱ *konvergent sind und unterhalb einer (von* ϱ *abhängigen) Grenze liegen.* Dies erkennt man an dem Beispiel

$$A = \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{\log p \log q}{p+q} x_p y_q.$$

Die erwähnte Bedingung ist hier, wie man leicht schließt, erfüllt. Setzt man aber

$$x_1 = y_1 = 0, \quad x_p = y_p = \frac{1}{\sqrt{p} \log p}, \qquad (p \geqq 2)$$

so sind die Reihen $\sum_p x_p^2$, $\sum_p y_p^2$ konvergent, dagegen wird die Doppelreihe

$$\sum_{p,q=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{pq}(p+q)}$$

divergent. Die Form A ist also nicht beschränkt.

Die Gesamtheit $\mathfrak{A}$ der Bilinearformen, die den Bedingungen des Satzes I genügen, besitzt offenbar die Eigenschaft, daß die aus zwei Formen

*) Vgl. *G. Frobenius*, „Über Matrizen aus positiven Elementen, II.", Sitzungsberichte der K. Preuß. Akademie, Berlin, 1909, S. 514—518.

von $\mathfrak{A}$ durch Faltung hervorgehende Form wieder in $\mathfrak{A}$ enthalten ist. Man kann daher $\mathfrak{A}$ als eine Untergruppe in der Gruppe $\mathfrak{B}$ aller beschränkten Formen bezeichnen.

Aus dem Satz I ergibt sich leicht:

II. *Sind*

$$(u_{pq}),\ (v_{pq}) \qquad (p,q=1,2,\ldots)$$

zwei Koeffizientensysteme, für welche die Reihen

$$u_p=\sum_{r=1}^{\infty}|u_{pr}|^2,\ u'_q=\sum_{r=1}^{\infty}|u_{rq}|^2,$$
$$v_p=\sum_{r=1}^{\infty}|v_{pr}|^2,\ v'_q=\sum_{r=1}^{\infty}|v_{rq}|^2, \qquad (p,q=1,2,\ldots)$$

konvergent und sämtlich unterhalb einer endlichen Schranke gelegen sind, so ist die Bilinearform

$$A=\sum_{p,q=1}^{\infty}u_{pq}v_{pq}x_p y_q$$

absolut beschränkt. Ist insbesondere

$$u_p\leqq u,\ u'_q\leqq u,\ v_p\leqq v,\ v'_q\leqq v,$$

so wird die obere Schranke von A höchstens gleich $\sqrt{uv}$.

Auf Grund der bekannten Ungleichung

$$|x_1y_1+x_2y_2+\cdots|^2\leqq[|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots][|y_1|^2+|y_2|^2+\cdots]$$

erhält man nämlich

$$\sum_{r=1}^{\infty}|u_{pr}v_{pr}|\leqq\sqrt{\sum_{r=1}^{\infty}|u_{pr}|^2\cdot\sum_{r=1}^{\infty}|v_{pr}|^2}\leqq\sqrt{uv}$$

und ebenso

$$\sum_{r=1}^{\infty}|u_{rq}v_{rq}|\leqq\sqrt{uv}.$$

Daher genügt A den Bedingungen des Satzes I, wobei $\zeta=\varkappa=\sqrt{uv}$, also auch $\sqrt{\zeta\varkappa}=\sqrt{uv}$ wird.

Insbesondere ergibt sich auf Grund der Ungleichungen (6.) des § 1:

III. *Sind*

$$A=\sum_{p,q=1}^{\infty}a_{pq}x_p y_q,\ B=\sum_{p,q=1}^{\infty}b_{pq}x_p y_q$$

zwei beschränkte Bilinearformen, so ist die Form

$$P=\sum_{p,q=1}^{\infty}a_{pq}b_{pq}x_p y_q$$

absolut beschränkt. Die obere Grenze von P ist, wenn α und β die oberen Grenzen von A und B bedeuten, höchstens gleich $\alpha\beta$.

Es ist noch zu bemerken, daß der erste Teil unseres Satzes als trivial erscheint, wenn eine der Formen A oder B absolut beschränkt ist. Denn ist z. B. A absolut beschränkt und ist b die obere Grenze der Zahlen $|b_{pq}|$, so ergibt sich für alle Wertsysteme $x_1, \dots x_n$, $y_1, \dots y_n$, die den Bedingungen (2.) des § 1 genügen,

$$\left| \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq} b_{pq} x_p y_q \right| \leqq b \sum_{p,q=1}^{n} |a_{pq} x_p y_q| \leqq b\alpha',$$

wenn α' die obere Grenze der Form $\sum_{p,q} |a_{pq}| x_p y_q$ bedeutet. Die in unserem Satz gegebene Abschätzung der oberen Grenze von P kann aber unter Umständen auch in diesem Fall dem wahren Wert näher kommen als die sich auf dem zweiten Wege ergebende. Ist z. B.

$$A = B = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 - 2x_2 y_2,$$

so wird $\alpha = \beta = \sqrt{5}$, $b = 2$, $\alpha' = 3$; hier ist also $\alpha\beta < b\alpha'$.

Insbesondere ergibt sich, daß, wenn $A = \sum_{p,q} a_{pq} x_p y_q$ eine beschränkte Bilinearform mit der oberen Grenze α ist, für jedes $\nu > 1$

$$A^{(\nu)} = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq}^{\nu} x_p y_q$$

eine absolut beschränkte Form wird, deren obere Grenze höchstens gleich α^ν ist. Ist ferner α_2 die obere Grenze von $A^{(2)}$ und $a \geqq |a_{pq}|$, so wird für $\nu \geqq 2$ die obere Grenze von $A^{(\nu)}$ höchstens gleich $a^{\nu-2}\alpha_2$. Sind daher $c_1, c_2, \dots$ beliebige Zahlen, für welche die Reihe

$$c_1 a + c_2 a^2 + \cdots$$

absolut konvergiert, so wird, wenn $A_n^{(\nu)}$ der n-te Abschnitt der Form $A^{(\nu)}$ ist,

$$|c_1 A_n^{(1)} + c_2 A_n^{(2)} + \cdots| \leqq |c_1|\alpha + \alpha_2(|c_2| + |c_3| a + \cdots).$$

Hieraus folgt:

IV. *Ist*

$$A = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} x\ y_q$$

eine beschränkte Bilinearform, in der $|a_{pq}| \leqq a$ *ist, und bedeutet*

$$f(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

eine beliebige Potenzreihe, die für $x = a$ *absolut konvergiert, so ist auch die Form*

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} f(a_{pq}) x_p y_q$$

beschränkt.

Z. B. sind zugleich mit A auch die Bilinearformen

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{a_{pq}}{\xi - a_{pq}} x_p y_q, \quad \sum_{p,q=1}^{\infty} \log\left(\frac{\xi}{\xi - a_{pq}}\right) x_p y_q$$

beschränkt, sobald nur der absolute Betrag von ξ größer ist als die obere Grenze der Zahlen $|a_{pq}|$.

Der Satz IV läßt sich in naheliegender Weise verallgemeinern, indem man an Stelle einer beschränkten Bilinearform A ein System von endlich vielen beschränkten Formen $A, B, C, \ldots$ betrachtet.

§ 3.

Ähnlich wie bei einer analogen Betrachtung in der Theorie der unendlichen Reihen kann man sich die Aufgabe stellen, diejenigen Koeffizientensysteme

$$u_{pq} \qquad (p,q=1,2,\ldots)$$

zu studieren, welche die Eigenschaft besitzen, daß für *jede* beschränkte Bilinearform $\sum_{p,q} a_{pq} x_p y_q$ auch die Form $\sum_{p,q} a_{pq} u_{pq} x_p y_q$ beschränkt ist. Ein solches System u_{pq} will ich im folgenden als *ein Multiplikatorensystem für beschränkte Bilinearformen* bezeichnen.

Sind u_{pq} und v_{pq} zwei Multiplikatorensysteme, so besitzen offenbar auch die Systeme

$$au_{pq}+bv_{pq},\ u_{pq}v_{pq}$$

dieselbe Eigenschaft; hierbei können a und b zwei beliebige reelle oder komplexe Zahlen bedeuten. Ferner bilden zugleich mit den Zahlen u_{pq} auch die Zahlen u_{qp} ein Multiplikatorensystem.

Das einfachste Multiplikatorensystem u_{pq} erhält man, indem man, wenn

$$a_1, a_2, \ldots;\ b_1, b_2, \ldots$$

beliebige Größen sind, deren absolute Beträge unterhalb einer endlichen Schranke liegen, $u_{pq}=a_p b_q$ setzt. Aus dem Satz III folgt ferner, daß die Koeffizienten u_{pq} einer beliebigen beschränkten Bilinearform ein Multiplikatorensystem bilden. Allgemeiner genügt es, daß die Reihen

$$\sum_{r=1}^{\infty} |u_{pr}|^2,\quad \sum_{r=1}^{\infty} |u_{rq}|^2 \qquad (p,q=1,2,\ldots)$$

konvergent und sämtlich unterhalb einer endlichen Schranke gelegen sind (vgl. Satz II).

Auf Grund des auf S. 4 angeführten Satzes von *E. Hellinger* und *O. Toeplitz* erhält man ferner ein Multiplikatorensystem für beschränkte Bilinearformen, indem man ein System u_{pq} betrachtet, welches die Eigenschaft besitzt, daß für *jede* konvergente Doppelreihe $\sum_{p,q} a_{pq}$ auch die Doppel-

reihe $\sum_{p,q} a_{pq} u_{pq}$ konvergiert. Diese Bedingung ist z. B., wie *G. H. Hardy**) gezeigt hat, erfüllt, wenn die Zahlen

$$u_{pq},\ u_{pq}-u_{p+1,q},\ u_{pq}-u_{p,q+1},\ u_{pq}-u_{p+1,q}-u_{p,q+1}+u_{p+1,q+1}$$

reell und nicht negativ sind und

$$\lim_{q=\infty} u_{1q} = \lim_{p=\infty} u_{p1} = 0$$

ist.

Ich möchte hier aber auf zwei ganz andere Klassen von Multiplikatorensystemen aufmerksam machen, die für die Anwendungen von größerer Bedeutung zu sein scheinen.

Ist $h_{pq}=\bar{h}_{qp}$, so bezeichnet man die (formal gebildete) *Hermite*sche Form

$$H = \sum_{p,q=1}^{\infty} h_{pq} x_p \bar{x}_q$$

als *(nichtnegativ) definit*, wenn für jedes n und jedes Wertsystem $x_1, x_2, \ldots x_n$

$$H_n = \sum_{p,q=1}^{n} h_{pq} x_p \bar{x}_q \geqq 0$$

wird. Es genügt hierzu bekanntlich, daß die (sämtlich reellen) Hauptunterdeterminanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} h_{11}, h_{12}, \ldots h_{1n} \\ h_{21}, h_{22}, \ldots h_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ h_{n1}, h_{n2}, \ldots h_{nn} \end{pmatrix}$$

nicht negative Werte haben. Läßt sich insbesondere eine positive Zahl μ angeben, so daß für alle n

$$H_n \geqq \mu\left[|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2\right]$$

wird, so nennt man H *positiv definit*. In einer definiten *Hermite*schen Form ist die obere Grenze h der (nichtnegativen) Zahlen $h_{11}, h_{22}, \ldots$ zugleich auch die obere Grenze der absoluten Beträge aller Zahlen h_{pq}.

Es gilt nun der Satz:

V. *Die Koeffizienten h_{pq} jeder definiten Hermiteschen Form, für welche die obere Grenze h der Zahlen $h_{11}, h_{22}, \ldots$ endlich ist, bilden ein Multiplikatorensystem für beschränkte Bilinearformen. Ist die obere Grenze der beschränkten Bilinearform*

---

*) Proceedings of the London Mathematical Society, Serie 2, Bd. 1 (1903), S. 124—128, und Bd. 2 (1904), S. 190—191.

$$A = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} x_p y_q$$

gleich α, so ist die obere Grenze der Bilinearform

$$B = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} h_{pq} x_p y_q$$

höchstens gleich αh.

Man bestimme nämlich, was bekanntlich stets möglich ist, n Linearformen

$$z_p = \sum_{q=1}^{n} l_{pq} x_q \qquad (p=1, 2, \ldots n)$$

so, daß

$$H_n = \sum_{p,q=1}^{n} h_{pq} x_p \bar{x}_q = \sum_{r=1}^{n} z_r \bar{z}_r$$

wird. Dann erhält man

$$h_{pq} = \sum_{r=1}^{n} l_{rp} \bar{l}_{rq}.$$

Setzt man nun

$$A_n(x_p, y_q) = \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq} x_p y_q,$$

so wird

$$B_n(x_p, y_q) = \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq} h_{pq} x_p y_q = \sum_{p,q,r=1}^{n} a_{pq} l_{rp} \bar{l}_{rq} x_p y_q.$$

Dies läßt sich in der Form

$$B_n(x_p, y_q) = \sum_{r=1}^{n} A_n(l_{rp} x_p, \bar{l}_{rq} y_q)$$

schreiben. Nun ist aber, wenn α die obere Grenze von A ist,

$$|A_n(l_{rp} x_p, \bar{l}_{rq} y_q)| \leqq \alpha \sqrt{\sum_{p=1}^{n} |l_{rp} x_p|^2 \cdot \sum_{p=1}^{n} |\bar{l}_{rp} y_p|^2}$$
$$\leqq \frac{\alpha}{2} \sum_{p=1}^{n} |l_{rp}|^2 (|x_p|^2 + |y_p|^2).$$

Daher wird

$$|B_n(x_p, y_q)| \leqq \frac{\alpha}{2} \sum_{p,r=1}^{n} |l_{rp}|^2 (|x_p|^2 + |y_p|^2)$$
$$\leqq \frac{\alpha}{2} \sum_{p=1}^{n} h_{pp} (|x_p|^2 + |y_p|^2)$$
$$\leqq \frac{\alpha h}{2} \sum_{p=1}^{n} (|x_p|^2 + |y_p|^2).$$

Für alle Wertsysteme x_p, y_q, die den Bedingungen (2.) des § 1 genügen, ist also in der Tat, wie zu beweisen ist,

$$|B_n(x_p, y_q)| \leqq \alpha h.$$

Eine andere Klasse von Multiplikatorensystemen, die aber mit den eben betrachteten eng verwandt sind, liefert der folgende Satz:

VI. *Es seien*

$$f_p(t),\ g_p(t) \qquad (p=1,2,\ldots)$$

beliebige reelle oder komplexe Funktionen der reellen Variabeln t, und es mögen die absoluten Beträge der Produkte von je zweien dieser Funktionen im Intervall $a \leqq t \leqq b$ *integrabel sein*). Lassen sich dann zwei Zahlen* μ *und* ν *angeben, so daß*

$$\int_a^b |f_p|^2\,dt \leqq \mu,\quad \int_a^b |g_p|^2\,dt \leqq \nu \qquad (p=1,2,\ldots)$$

wird, so bilden die Zahlen

$$v_{pq} = \int_a^b f_p g_q\,dt \qquad (p,q=1,2,\ldots)$$

ein Multiplikatorensystem für beschränkte Bilinearformen. Ist

$$A = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} x_p y_q$$

eine beschränkte Bilinearform mit der oberen Grenze α, *so ist die obere Grenze* β *der Bilinearform*

$$B = \sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq} v_{pq} x_p y_q$$

höchstens gleich $\frac{1}{2}\alpha(\mu+\nu)$ **).

Für den n-ten Abschnitt B_n der Form B erhält man nämlich, wenn $\sum_{p=1}^{n} |x_p|^2 \leqq 1$, $\sum_{p=1}^{n} |y_p|^2 \leqq 1$ ist, ähnlich wie vorhin

$$\begin{aligned} |B_n| &= \left| \int_a^b \Big(\sum_{p,q=1}^{n} a_{pq} f_p g_q x_p y_q \Big)\,dt \right| \\ &\leqq \int_a^b \left| \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq} f_p g_q x_p y_q \right| dt \\ &\leqq \frac{\alpha}{2} \int_a^b \sum_{p=1}^{n} \left(|f_p x_p|^2 + |g_p y_p|^2\right) dt \\ &\leqq \frac{\alpha(\mu+\nu)}{2}. \end{aligned}$$

Aus dem Satz VI folgt z. B., daß die Zahlen

$$\frac{1}{a_p + b_q} \qquad (p,q=1,2,\ldots)$$

ein Multiplikatorensystem für beschränkte Bilinearformen bilden, wenn nur die reellen Bestandteile aller Größen a_p, b_p positiv sind und eine positive

*) Es kann sich hierbei auch um uneigentliche Integrale handeln.

**) Genauer kann gezeigt werden, daß $\beta \leqq \alpha\sqrt{\mu\nu}$ ist.

untere Grenze besitzen. Denn setzt man

$$f_p(t) = e^{-a_p t},\ g_p(t) = e^{-b_p t},\ a = 0,\ b = \infty,$$

so sind unter den über die Zahlen a_p, b_p gemachten Voraussetzungen die Bedingungen unseres Satzes erfüllt; es wird aber dann

$$v_{pq} = \frac{1}{a_p + b_q}.$$

§ 4.

In enger Beziehung zu dem Satze V steht folgender Satz, der trotz seiner Einfachheit nicht bekannt zu sein scheint:

VII. *Sind*

$$A = \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq} x_p \bar{x}_q,\ B = \sum_{p,q=1}^{n} b_{pq} x_p \bar{x}_q\ (a_{pq} = \bar{a}_{qp},\ b_{pq} = \bar{b}_{qp})$$

zwei (nichtnegativ) definite Hermitesche Formen, so besitzt auch die Form

$$C = \sum_{p,q=1}^{n} a_{pq} b_{pq} x_p \bar{x}_q$$

dieselbe Eigenschaft. Bezeichnet man mit α und α' die größte und die kleinste charakteristische Wurzel der Form A, ferner mit b und b' die größte und die kleinste unter den Zahlen $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn}$, so liegt jede charakteristische Wurzel der Form C zwischen $\alpha' b'$ und αb.

Man bestimme nämlich wie beim Beweise des Satzes V n^2 Zahlen l_{pq} so, daß

$$b_{pq} = \sum_{r=1}^{n} l_{rp} \bar{l}_{rq}$$

wird. Dann wird

$$C = \sum_{r=1}^{n} A(l_{r1} x_1,\ l_{r2} x_2, \ldots l_{rn} x_n).$$

Dies zeigt schon, daß C nichtnegativ definit ist. Ferner ist bekanntlich stets

$$\alpha' \sum_{p=1}^{n} |u_p|^2 \leqq A(u_1, u_2, \ldots, u_n) \leqq \alpha \sum_{p=1}^{n} |u_p|^2.$$

Daher ergibt sich

$$C \leqq \alpha \sum_{r,p=1}^{n} |l_{rp} x_p|^2 = \alpha \sum_{p=1}^{n} b_{pp} |x_p|^2 \leqq \alpha b \sum_{p=1}^{n} |x_p|^2.$$

Ebenso erhält man

$$C \geqq \alpha' b' \sum_{p=1}^{n} |x_p|^2.$$

Hieraus folgt aber die Richtigkeit des zweiten Teils unseres Satzes.

Ist insbesondere A eine positive *Hermite*sche Form, d. h. $\alpha' > 0$, so erkennt man, daß auch C diese Eigenschaft besitzt, es sei denn, daß $b' = 0$ wird. Dies tritt aber nur dann ein, wenn B eine der n Variabeln überhaupt nicht enthält, d. h. wenn in dem Koeffizientenschema von B eine Zeile und die zugehörige Kolonne lauter Nullen enthalten.

Ich will noch eine Anwendung des Satzes VII angeben.

Man bezeichne nach dem Vorgange von *Hilbert**) eine für $a \leqq s \leqq b$, $a \leqq t \leqq b$ definierte, reelle oder komplexe *stetige* Funktion $K(s,t)$ der reellen Variabeln s und t als einen *nichtnegativ definiten Hermiteschen Kern*, wenn $K(s,t)$ und $K(t,s)$ konjugiert komplexe Größen sind und das Doppelintegral

$$I(x) = \int_a^b \int_a^b K(s,t)\, x(s)\, \overline{x}(t)\, ds\, dt$$

einen nichtnegativen Wert erhält, wie auch die stetige Funktion $x(s)$ gewählt wird**). — Man beweist ohne Mühe, wie *W. H. Young****) gezeigt hat, daß der Kern $K(s,t)$ stets und nur dann nichtnegativ definit wird, wenn für jedes n und jedes System von n Zahlen $s_1 < s_2 < \cdots < s_n$ des Intervalls $a \leqq s \leqq b$ die *Hermite*sche Form

$$H = \sum_{p,q=1}^{n} K(s_p, s_q)\, x_p\, \overline{x}_q$$

nichtnegativ definit ist. Auf Grund dieses Kriteriums ergibt sich aus dem Satz VII unmittelbar der Satz:

VII*. *Sind $K(s,t)$ und $L(s,t)$ zwei nichtnegativ definite (stetige) Hermitesche Kerne, so besitzt das Produkt $K(s,t)\, L(s,t)$ dieselbe Eigenschaft.*

---

*) Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Erste Mitteilung, Nachr. d. K. Ges. d. Wiss., Göttingen, math.-phys. Kl. 1904, S. 79.

**) *Hilbert* betrachtet a. a. O. nur *positiv* definite Kerne, d. h. solche, für die das Integral $I(x)$ positiv und nur dann Null wird, wenn $x(s) = 0$ ist.

***) „A note on a class of symmetric functions and on a theorem required in the theory of integral equations", Messenger of Mathematics, Vol. XL (1910), S. 37—43. — *Young* beschränkt sich auf die Betrachtung reeller symmetrischer Kerne, doch läßt sich sein Beweis unmittelbar auch auf *Hermite*sche Kerne übertragen. Die Voraussetzung, daß $K(s,t)$ eine stetige Funktion sein soll, scheint von wesentlicher Bedeutung zu sein. Es genügt ferner keineswegs zu wissen, daß die Formen H positiv sind, um behaupten zu können, daß $K(s,t)$ ein positiv definiter Kern ist.

§ 5.

Mit Hilfe der Integralformel

$$\sum_{p,q=1}^{n}\left(\frac{1}{p+q}+\frac{1}{p-q}\right)x_p y_q=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,[\Sigma(x_p \sin pt - y_p \cos pt)]^2\,dt,$$

in der für $p=q$ das Zeichen $\frac{1}{p-q}$ durch die Null zu ersetzen ist, hat *Hilbert**) bewiesen, daß die beiden Bilinearformen

$$A=\sum_{\substack{p,q=1\\(p\neq q)}}^{\infty}\frac{x_p y_q}{p-q},\qquad S=\sum_{p,q=1}^{\infty}\frac{x_p y_q}{p+q}$$

beschränkt sind. Als obere Schranken für A und S ergeben sich hierbei die Zahlen 4π und 2π.

Ich will nun zeigen, daß *man die Beschränktheit der Formen A und S sehr einfach aus dem Hilfssatz* II *des* § 1 *folgern kann.* Man setze nämlich

$$S_0=\sum_{p,q=1}^{\infty}\frac{x_p y_q}{p+q-1}$$

und

$$N(A)=A'A=\sum_{p,q=1}^{\infty}c_{pq}x_p x_q,\quad N(S_0)=S_0'S_0=\sum_{p,q=1}^{\infty}d_{pq}x_p x_q.$$

Dann wird

$$c_{pp}+d_{pp}=\sum_{r=1}^{\infty}{}'\frac{1}{(p-r)^2}+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{(p+s-1)^2}=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}{}'\frac{1}{(p-r)^2}=2\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s^2}=\frac{\pi^2}{3}\qquad (r\neq p)$$

und für $p\neq q$

$$\begin{aligned}c_{pq}+d_{pq}&=\sum_{r=1}^{\infty}{}'\frac{1}{(p-r)(q-r)}+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{(p+s-1)(q+s-1)}\\&=\sum_{r=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{(p-r)(q-r)}=\frac{1}{q-p}\sum_{r=-\infty}^{\infty}{}'\left[\frac{1}{p-r}-\frac{1}{q-r}\right].\end{aligned}\qquad (r\neq p, r\neq q)$$

Dies ist aber, wie man leicht erkennt, gleich $\frac{2}{(q-p)^2}$. Also ergibt sich

$$(1.)\qquad N(A)+N(S_0)=\frac{\pi^2}{3}\sum_{p=1}^{\infty}x_p^2+\sum_{\substack{p,q=1\\(p\neq q)}}^{\infty}\frac{2}{(q-p)^2}x_p x_q$$

Die erste rechts auftretende Form ist gewiß beschränkt, und zwar ist ihre obere Grenze gleich $\frac{\pi^2}{3}$. Die zweite Form genügt aber den Bedingungen des Satzes I, und da hier die Reihen

*) Vgl. *H. Weyl*, „Singuläre Integralgleichungen mit besonderer Berücksichtigung des *Fourier*schen Integraltheorems", Inaugural-Dissertation, Göttingen 1908, S. 83. — Einen elementaren Beweis für die Beschränktheit der Form S hat *F. Wiener*, Math. Annalen, Bd. 68 (1910), S. 361—366, angegeben. Die Formen A und S sind, wie *O. Toeplitz*, „Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen" (Nachr. d. K. Ges. d. Wiss., Göttingen, math.-phys. Kl., 1910), gezeigt hat, in einer allgemeinen Klasse von beschränkten Bilinearformen als spezielle Fälle enthalten.

$$\sum_{r=1}^{\infty}{}' \frac{2}{(r-p)^2}, \quad \sum_{s=1}^{\infty}{}' \frac{2}{(q-s)^2} \qquad (r \neq p,\ s \neq q)$$

kleiner sind als $4 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}$, so ist ihre obere Grenze höchstens gleich $\frac{2\pi^2}{3}$. Daher ist die obere Grenze von (1.) höchstens gleich $\frac{\pi^2}{3} + \frac{2\pi^2}{3} = \pi^2$. *Die oberen Grenzen von A und S_0, und folglich auch von S, sind also höchstens gleich π.*

Allgemeiner setze man, wenn λ eine beliebige reelle Zahl ist,

$$A_\lambda = \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{x_p y_q}{p-q+\lambda}, \quad S_\lambda = \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{x_p y_q}{p+q-1+\lambda};$$

hierbei sind für ein ganzzahliges λ diejenigen Glieder, deren Nenner 0 sind, nicht mitzuschreiben. Man erhält dann leicht für ein ganzzahliges λ

$$N(A_\lambda) + N(S_\lambda) = N(A_0) + N(S_0)$$

und für ein nicht ganzzahliges λ

$$N(A_\lambda) + N(S_\lambda) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(r+\lambda)^2} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} x_p^2 = \frac{\pi^2}{\sin^2 \lambda\pi} \sum_{p=1}^{\infty} x_p^2.$$

Daher sind die Formen A_λ und S_λ für jedes λ beschränkt; ihre oberen Grenzen sind für ein ganzzahliges λ höchstens gleich π und für ein nicht ganzzahliges λ höchstens gleich $\frac{\pi}{|\sin \lambda\pi|}$.

Um eine Anwendung des Satzes V zu geben, will ich zeigen, daß die Bilinearform

$$A^{(\mu)} = \sum_{\substack{p,q=1 \\ (p \neq q)}}^{\infty} \frac{(pq)^{\frac{\mu-1}{2}}}{p^\mu - q^\mu} x_p y_q,$$

die für $\mu = 1$ in die vorhin betrachtete Form A übergeht, auch *für jedes positive $\mu > 1$ beschränkt ist, und daß ihre obere Grenze höchstens gleich $\frac{\pi}{\mu}$ wird.* — Es genügt hierzu, zu beweisen, daß die quadratische (reelle *Hermite*sche) Form

$$(2.) \qquad \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{p-q}{p^\mu - q^\mu} (pq)^{\frac{\mu-1}{2}} x_p x_q,$$

in der für $p = q$ der in der Form $\frac{0}{0}$ erscheinende Koeffizient gleich $\frac{1}{\mu}$ zu setzen ist, nichtnegativ definit ist.

Dies ergibt sich folgendermaßen. Sind $u_1, u_2, \ldots$ beliebige komplexe Zahlen mit positiven reellen Bestandteilen, so folgt aus der Formel

$$\frac{1}{u_p + \bar{u}_q} = \int_0^\infty e^{-(u_p + \bar{u}_q)t}\, dt,$$

daß die *Hermite*sche Form

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{x_p \overline{x}_q}{u_p + \overline{u}_q}$$

nichtnegativ definit ist*). Sind daher $s_1, s_2, \ldots$ beliebige positive Zahlen und bedeutet α eine beliebige komplexe Zahl, so bilden die Zahlen

$$\frac{\alpha + \overline{\alpha}}{\alpha s_p + \overline{\alpha} s_q}$$

und folglich auch, wenn ε eine Größe vom absoluten Betrage 1 ist, die Zahlen

$$\frac{1-\varepsilon}{s_p - \varepsilon s_q}$$

das Koeffizientensystem einer definiten *Hermite*schen Form. Durchläuft nun, wenn m eine positive ganze Zahl ist, ε die von 1 verschiedenen m-ten Einheitswurzeln, so wird

$$\frac{1}{m} \sum_{\varepsilon} \frac{1-\varepsilon}{s_p - \varepsilon s_q} = \frac{s_p^{m-1} - s_q^{m-1}}{s_p^m - s_q^m} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{m} \sum_{\varepsilon} \frac{1-\varepsilon}{s_p - \varepsilon s_q} = \frac{m-1}{m s_p},$$

je nachdem s_q von s_p verschieden oder gleich s_p ist. Für jede positive ganze Zahl $l < m$ erhält man daher nach Satz VII das Koeffizientensystem (h_{pq}) einer definiten quadratischen Form, indem für $s_p \neq s_q$

$$h_{pq} = \frac{s_p^l - s_q^l}{s_p^m - s_q^m} = \prod_{r=l+1}^{m} \frac{s_p^{r-1} - s_q^{r-1}}{s_p^r - s_q^r}$$

und für $s_p = s_q$

$$h_{pq} = \frac{l}{m s_p^{m-l}} = \prod_{r=l+1}^{m} \frac{r-1}{r s_p}$$

setzt. Schreibt man nun $s_p^{\frac{1}{l}}$ für s_p und μ für $\frac{m}{l}$, so erkennt man, daß der Ausdruck

$$(3.) \qquad \sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{s_p - s_q}{s_p^{\mu} - s_q^{\mu}} x_p x_q,$$

in dem für $s_p = s_q$ der Koeffizient von $x_p x_q$ gleich $\frac{1}{\mu s_p^{\mu-1}}$ zu setzen ist, für jedes System von positiven Zahlen $s_1, s_2, \ldots$ und für jedes rationale $\mu > 1$ eine nichtnegativ definite quadratische Form repräsentiert. Durch

*) Auf rein algebraischem Wege folgt dies aus der leicht zu beweisenden Determinantenrelation

$$\left| \frac{1}{u_p + v_q} \right| = \frac{\prod_{p<q} (u_p - u_q)(v_p - v_q)}{\prod_{p,q} (u_p + v_q)} \qquad (p,q = 1, 2, \ldots n)$$

Grenzübergang ergibt sich sofort, daß dies auch für ein irrationales $\mu > 1$ richtig bleibt.

Daß nun die quadratische Form (2.) definit ist, folgt hieraus als ganz spezieller Fall, indem man in (3.) für $s_1, s_2, \ldots$ die Zahlen $1, 2, \ldots$ wählt und x_r durch $r^{\frac{\mu-1}{2}} x_r$ ersetzt.

§ 6.

Schreibt man den n-ten Abschnitt A_n der alternierenden Form $A = \sum_{p \neq q} \frac{x_p y_q}{p-q}$ in der Gestalt

$$A_n = \sum_{\substack{p,q=1 \\ (q>p)}}^{n} \frac{x_p y_q - x_q y_p}{p-q}$$

und ersetzt, wenn t eine reelle Größe bedeutet, x_p und y_p durch $x_p \sin pt$, bzw. $x_p \cos pt$, so erhält man, da π eine obere Schranke von A ist, für reelle Werte x_p

$$\left| \sum_{\substack{p,q=1 \\ (q>p)}}^{n} \frac{\sin(p-q)t}{p-q} x_p x_q \right| \leqq \pi \sqrt{\sum_{p=1}^{n} (x_p \sin pt)^2 \cdot \sum_{p=1}^{n} (x_p \cos pt)^2}$$
$$\leqq \frac{\pi}{2} \sum_{p=1}^{n} x_p^2 (\sin^2 pt + \cos^2 pt) = \frac{\pi}{2} \sum_{p=1}^{n} x_p^2.$$

Hieraus folgt, daß der Ausdruck

$$F(t) = \sum_{\substack{p,q=1 \\ (p \neq q)}}^{\infty} \frac{\sin(p-q)t}{p-q} x_p x_q$$

eine reelle quadratische Form darstellt, deren obere Grenze höchstens gleich π ist.

Einen einfacheren Beweis für die Beschränktheit der Form $F(t)$ und eine genauere Abschätzung der oberen Grenze liefert die folgende Methode: Es genügt offenbar $0 \leqq t \leqq \pi$ anzunehmen. Setzt man

$$\Phi(t) = t \sum_{p=1}^{n} x_p^2 + \sum_{\substack{p,q=1 \\ (p \neq q)}}^{n} \frac{\sin(p-q)t}{p-q} x_p x_q = t \sum_{p=1}^{n} x_p^2 + F_n(t),$$

so wird

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \sum_{p,q=1}^{n} x_p x_q \cdot \cos(p-q)t = \left(\sum_{p=1}^{n} x_p \cos pt\right)^2 + \left(\sum_{p=1}^{n} x_p \sin pt\right)^2.$$

Daher ist für jedes System reeller Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Funktion $\Phi(t)$ von t monoton wachsend, also

$$\Phi(0) \leqq \Phi(t) \leqq \Phi(\pi).$$

Dies gibt aber

(1.) $$-t \sum_{p=1}^{n} x_p^2 \leqq F_n(t) \leqq (\pi - t) \sum_{p=1}^{n} x_p^2.$$

Folglich ist die Form $F(t)$ beschränkt und ihre obere Grenze (für $0 \leqq t \leqq \pi$) höchstens gleich der größeren der beiden Zahlen t und $\pi - t$.

Die Form $F(t)$ ist deshalb interessant, weil sie wohl das einfachste Beispiel für eine *reelle quadratische Form liefert, die beschränkt, aber (für jedes t, das nicht ein ganzzahliges Multiplum von π ist) nicht absolut beschränkt ist**). Dies erkennt man folgendermaßen: Wäre $F(t)$ für ein gegebenes t absolut beschränkt, so müßte sich eine Zahl M angeben lassen, so daß

$$\sum_{\substack{p,q=1 \\ (p \neq q)}}^{n} \left| \frac{\sin(p-q)t}{p-q} \right| \leqq M(1^2+1^2+\cdots+1^2) = Mn$$

oder, ausführlicher geschrieben,

$$2\sum_{\nu=1}^{n-1}(n-\nu)\left|\frac{\sin \nu t}{\nu}\right| \leqq Mn$$

wird. Dies gibt aber

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\left|\frac{\sin \nu t}{\nu}\right| \leqq \frac{M}{2} + \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n-1}|\sin \nu t| < \frac{M}{2}+1.$$

Eine solche Zahl M kann aber, wenn t nicht ein ganzzahliges Multiplum von π ist, nicht existieren, da die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{\sin \nu t}{\nu}\right|$$

alsdann bekanntlich divergent ist.

Setzt man noch in (1.) $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$, so erhält man (für $0 \leqq t \leqq \pi$)

$$-tn \leqq 2\sum_{\nu=1}^{n-1}(n-\nu)\frac{\sin \nu t}{\nu} \leqq (\pi - t)n,$$

also

$$(2.) \qquad -\frac{t}{2} + \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n-1}\sin \nu t \leqq \sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\sin \nu t}{\nu} \leqq \frac{\pi - t}{2} + \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n-1}\sin \nu t.$$

Hieraus folgt speziell, daß für alle n und alle reellen t

$$(3.) \qquad S_n(t) = \left|\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\sin \nu t}{\nu}\right| < \frac{\pi}{2} + 1 = 2{,}570\ldots$$

ist.

---

*) Ein allgemeines Verfahren zur Herstellung von quadratischen Formen, die diese Eigenschaft besitzen, hat *O. Toeplitz* in der auf S. 16 zitierten Abhandlung angegeben. — Das einfachste Beispiel einer reellen alternierenden Bilinearform, die beschränkt, aber nicht absolut beschränkt ist, repräsentiert die Form $\sum_{p \neq q}\frac{x_p y_q}{p-q}$; vgl. *E. Hellinger* und *O. Toeplitz*, a. a. O., S. 308.

Daß der Ausdruck $S_n(t)$ unterhalb einer von n und t unabhängigen Zahl M liegen muß, hat zuerst *A. Kneser**) bewiesen. Diese Tatsache spielt insbesondere in den neueren Arbeiten von *L. Fejér* über überall stetige Funktionen, deren *Fourier*sche Reihen an einzelnen Stellen divergieren, eine nicht unwichtige Rolle**). Die durch (3.) gelieferte Abschätzung von $S_n(t)$ hat *Fejér* in seiner Note „Sur les sommes partielles de la série de *Fourier*“***) mit Hilfe eines interessanten allgemeinen Satzes über *Fourier*sche Reihen gewonnen.

Schreibt man in (2.) $\pi - t$ für t, so erhält man durch Addition beider Ungleichungen (für $n = 2m$)

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{m}\sum_{\mu=1}^{m} \sin(2\mu-1)t \leqq 2\sum_{\mu=1}^{m} \frac{\sin(2\mu-1)t}{2\mu-1} \leqq \frac{\pi}{2} + \frac{1}{m}\sum_{\mu=1}^{m} \sin(2\mu-1)t.$$

Daher ist für alle m und alle reellen t

$$\left|\sum_{\mu=1}^{m} \frac{\sin(2\mu-1)t}{2\mu-1}\right| < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}. \tag{4.}$$

Beachtet man noch, daß für $0 < t < \pi$

$$\sum_{\mu=1}^{k} \sin(2\mu-1)t = \frac{\sin^2 kt}{\sin t} \geqq 0$$

ist, so erhält man wegen (4.) und

$$2\sum_{\mu=1}^{m} \frac{\sin(2\mu-1)t}{2\mu-1} - \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\sin(2\mu-1)}{\mu} = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\sin(2\mu-1)t}{\mu(2\mu-1)} \geqq 0$$

die für $0 \leqq t \leqq \pi$ geltende Formel

$$0 \leqq \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\sin(2\mu-1)t}{\mu} < 2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right).$$

Hieraus folgt zugleich, daß für alle m und alle reellen t

$$\left|\sum_{\mu=1}^{m} \frac{\sin(2\mu-1)t}{\mu}\right| < \frac{\pi}{2} + 1$$

---

*) „Beiträge zur Theorie der *Sturm-Liouville*schen Darstellung willkürlicher Funktionen“, Math. Annalen, Bd. 60 (1905), S. 402—423, § 1.

**) Vgl. vor allem die Arbeit von *L. Fejér*, „*Lebesgue*sche Konstanten und divergente *Fourier*reihen“, dieses Journal, Bd. 138 (1910), S. 22—53. — Siehe auch *A. Haar*, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme“, Inaug.-Dissertation, Göttingen, 1909, S. 17.

***) Comptes Rendus de l' Acad. des Sciences, Paris, Mai 1910, S. 1299. — Es wird hier noch gezeigt, daß die obere Grenze der Ausdrücke $S_n(t)$ nicht kleiner sein kann als $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = 1{,}85\ldots$.

wird. — Auch diese Ungleichung findet sich in der erwähnten Note von *L. Fejér*.

Ich will noch zeigen, daß man die Ungleichung (3.) durch die präzisere Ungleichung

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\sin \nu t}{\nu}\right| < \frac{\pi}{2}+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}=2{,}389\ldots$$

ersetzen kann. Wegen (2.) genügt es hierzu, zu zeigen, daß

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n-1}\sin \nu t\right| < \frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}. \tag{5.}$$

ist*). — Dies beweise ich folgendermaßen. Man betrachte die alternierende Bilinearform

$$D=\sum_{\substack{p,q=1\\(p<q)}}^{n}(x_p y_q - x_q y_p).$$

Die charakteristische Determinante dieser Form ist, wie man leicht zeigt,

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix} -x, & 1, & 1, \ldots & 1\\ -1, & -x, & 1, \ldots & 1\\ -1, & -1, & -x, \ldots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -1, & -1, & -1, \ldots & -x \end{vmatrix}=(-1)^n\frac{(x+1)^n+(x-1)^n}{2}.$$

Die Wurzeln der Gleichung $\Delta(x)=0$ sind die Größen

$$i\operatorname{cotg}\frac{(2\nu+1)\pi}{2n}. \qquad (\nu=0,1,\ldots n-1)$$

Für $\nu=0$ erhält man die dem absoluten Betrage nach größte Wurzel. Da aber

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2n} < \frac{2n}{\pi}$$

ist, so wird für reelle $x_p y_q$

$$|D| \leqq \frac{2n}{\pi}\sqrt{\sum_{p=1}^{n}x_p^2\cdot\sum_{p=1}^{n}y_p^2} \leqq \frac{n}{\pi}\sum_{p=1}^{n}(x_p^2+y_p^2).$$

Setzt man speziell $x_p=\sin pt$, $y_p=\cos pt$, so erhält man

$$\left|\sum_{\substack{p,q=1\\(p<q)}}^{n}\sin(p-q)t\right| \leqq \frac{n^2}{\pi},$$

---

*) Aus der Formel

$$\frac{2}{\pi}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}\sin\frac{\nu\pi}{n}$$

geht hervor, daß die genaue obere Grenze des in (5.) links stehenden Ausdrucks nicht kleiner als $\frac{2}{\pi}$ sein kann.

oder

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n-1}(n-\nu)\sin\nu t\right| \leqq \frac{n^2}{\pi},$$

also

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{\nu=1}^{n-1}\sin\nu t\right| \leqq \frac{1}{\pi}+\frac{1}{n^2}\left|\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu\sin\nu t\right| < \frac{1}{\pi}+\frac{n(n-1)}{2n^2} < \frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}.$$

§ 7.

Es sei $K(s,t)$ eine reelle Funktion der positiven Argumente s, t, die folgenden Bedingungen genügt:

1. *$K(s,t)$ wird niemals negativ und ist homogen vom Grade -1.*
2. *In jedem endlichen Gebiet*

$$0 < a \leqq s \leqq b,\ 0 < a \leqq t \leqq b$$

ist $K(s,t)$ (im Riemannschen Sinne) integrabel.

3. *Das Integral*

$$k = \int_0^\infty \frac{K(s,1)}{\sqrt{s}}\,ds = \int_0^\infty \frac{K(1,t)}{\sqrt{t}}\,dt = \int_1^\infty \frac{K(s,1)+K(1,s)}{\sqrt{s}}\,ds\ ^*)$$

hat einen endlichen Wert.

Sind dann $f(s)$ und $g(s)$ zwei nicht negative Funktionen des positiven Arguments s, die in jedem Intervall $0 < a \leqq s \leqq b$ integrabel sind und für die die Integrale

$$F = \int_0^\infty f^2(s)\,ds,\quad G = \int_0^\infty g^2(s)\,ds$$

endliche Werte haben, so existiert, wie ich behaupte, auch das Doppelintegral

$$I = \int_0^\infty\int_0^\infty K(s,t)\,f(s)\,g(t)\,ds\,dt,$$

und zwar ist stets

(1.) $$I \leqq k\sqrt{FG}\ ^{**}).$$

Es genügt offenbar, zu zeigen, daß für je zwei positive Zahlen $a < b$

$$I_{a,b} = \int_a^b\int_a^b K(s,t)\,f(s)\,g(t)\,ds\,dt \leqq k\sqrt{FG}$$

---

*) Das Übereinstimmen dieser drei Integrale folgt aus der vorausgesetzten Homogeneitätseigenschaft der Funktion $K(s,t)$.

**) Für $K(s,t) = \frac{1}{s+t}$ hat eine ähnliche Ungleichung bereits *H. Weyl* (a. a. O., S. 85) bewiesen.

ist. Denn die Formel (1.) wird dann erhalten, indem man a gegen 0 und b gegen ∞ konvergieren läßt. Diese Schlußweise ist gestattet, weil die zu integrierende Funktion nicht negativ ist.

Man setze nun in $I_{a,b}$

$$s = u, \quad t = uv.$$

Dann wird wegen der Homogeneität von $K(s, t)$

$$I_{a,b} = \iint K(1, v)\, f(u)\, g(uv)\, du\, dv.$$

Das Integrationsgebiet ist hierbei durch die Ungleichungen

$$a \leqq u \leqq b, \quad \frac{a}{u} \leqq v \leqq \frac{b}{u}$$

bestimmt. Da nun

$$\frac{a}{b} \leqq \frac{a}{u}, \quad \frac{b}{u} \leqq \frac{b}{a}$$

wird, so vergrößern wir das Integrationsgebiet, wenn wir es durch das Rechteck

$$a \leqq u \leqq b, \quad \frac{a}{b} \leqq v \leqq \frac{b}{a}$$

ersetzen. Folglich ist

$$I_{a,b} \leqq \int_a^b \int_{\frac{a}{b}}^{\frac{b}{a}} K(1, v)\, f(u)\, g(uv)\, du\, dv = \int_{\frac{a}{b}}^{\frac{b}{a}} K(1, v)\, dv \int_a^b f(u)\, g(uv)\, du.$$

Nun ist auf Grund einer bekannten Ungleichung

$$\left[\int_a^b f(u)\, g(uv)\, du\right]^2 \leqq \int_a^b f^2(u)\, du \cdot \int_a^b g^2(uv)\, du.$$

Ferner ist

$$\int_a^b f^2(u)\, du \leqq \int_0^\infty f^2(u)\, du = F$$

und

$$\int_a^b g^2(uv)\, du = \frac{1}{v} \int_{av}^{bv} g^2(u)\, du \leqq \frac{1}{v} \int_0^\infty g^2(u)\, du = \frac{G}{v}.$$

Daher wird

$$\int_a^b f(u)\, g(uv)\, du \leqq \frac{1}{\sqrt{v}} \sqrt{FG}$$

und also, wie zu beweisen ist,

$$I_{a,b} \leqq \sqrt{FG} \int_{\frac{a}{b}}^{\frac{b}{a}} \frac{K(1, v)}{\sqrt{v}}\, dv \leqq k \sqrt{FG}.$$

Man setze nun, wenn

$$a_1, a_2, \ldots; b_1, b_2, \ldots$$

beliebige positive Zahlen sind,

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad t_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Sind ferner $x_1, x_2, \ldots$ und $y_1, y_2, \ldots$ zwei Systeme nicht negativer Zahlen mit konvergenten Quadratsummen

$$X = \sum_{p=1}^{\infty} x_p^2, \quad Y = \sum_{p=1}^{\infty} y_p^2, \tag{2.}$$

so bestimme man die Funktionen $f(s)$ und $g(t)$ folgendermaßen: für

$$s_{n-1} < s \leqq s_n, \quad t_{n-1} < t \leqq t_n \qquad (s_0 = t_0 = 0)$$

soll

$$f(s) = \frac{x_n}{\sqrt{a_n}}, \quad g(t) = \frac{y_n}{\sqrt{b_n}}$$

sein. Ist ferner $\lim_{n=\infty} s_n = \sigma$ oder $\lim_{n=\infty} t_n = \tau$ eine endliche Zahl, so verstehe man für $s \geqq \sigma$, bzw. für $t \geqq \tau$ unter $f(s)$ oder $g(t)$ den Wert 0. Durch diese Festsetzungen sind dann $f(s)$ und $g(t)$ für alle positiven Werte des Arguments eindeutig definiert. Diese Funktionen sind jedenfalls in jedem endlichen Intervall integrabel; ferner wird

$$F = \int_0^{\infty} f^2(s)\, ds = X, \quad G = \int_0^{\infty} g^2(s)\, ds = Y.$$

Die Formel (1.) geht aber dann über in die Formel

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} \frac{x_p y_q}{\sqrt{a_p b_q}} \int_{s_{p-1}}^{s_p} \int_{t_{q-1}}^{t_q} K(s,t)\, ds\, dt \leqq k\sqrt{XY}, \tag{3.}$$

d. h. *die links stehende Bilinearform ist beschränkt und ihre obere Grenze ist höchstens gleich der Zahl k.*

Ein einfacheres Resultat erhält man, wenn man $K(s,t)$ noch folgender Bedingung unterwirft:

4. Bei festem s soll $K(s,t)$ mit wachsendem t und bei festem t mit wachsendem s nicht zunehmen.

Dann wird offenbar

$$\int_{s_{p-1}}^{s_p} \int_{t_{q-1}}^{t_q} K(s,t)\, ds\, dt \geqq K(s_p, t_q)\,(s_p - s_{p-1})\,(t_q - t_{q-1})$$
$$\geqq K(s_p, t_q)\, a_p b_q.$$

Aus der Formel (3.) ergibt sich daher, daß auch *der Ausdruck*

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} K(s_p, t_q)\sqrt{a_p b_q}\, x_p y_q \tag{4.}$$

eine beschränkte Bilinearform darstellt, deren obere Grenze höchstens gleich k ist.

Setzt man z. B., wenn m irgend eine positive Zahl bedeutet,

$$K(s,t)=\frac{1}{\sqrt[m]{s^m+t^m}},$$

so wird

$$k=\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt[m]{1+t^m}\cdot\sqrt{t}}=\frac{1}{m}\int_0^\infty (1+u)^{-\frac{1}{m}}u^{\frac{1}{2m}-1}\,du=\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2m}\right)}{m\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}$$

und speziell $k=\pi$ für $m=1$. *Daher ist für alle Wertsysteme* x_p, y_q, *für welche die Reihen* (2.) *konvergieren, und für alle Zahlen* s_n, t_n, *die den Bedingungen*

$$0<s_1<s_2<\cdots,\quad 0<t_1<t_2<\cdots$$

genügen:

$$\left|\sum_{p,q=1}^{n}\frac{\sqrt{(s_p-s_{p-1})(t_q-t_{q-1})}}{\sqrt[m]{s_p^m+t_q^m}}x_p y_q\right|\leqq\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2m}\right)}{m\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}\sqrt{\sum_{p=1}^{\infty}x_p^2\cdot\sum_{p=1}^{\infty}y_p^2}.$$

Ein anderes interessantes Beispiel erhält man, wenn man unter $K(s,t)$ den reziproken Wert der größeren der beiden Zahlen s und t versteht. Dann wird, wie man leicht erkennt, $k=4$. Für $s_n=t_n$, $x_n=y_n$ ergibt sich daher

$$\left|\sum_{p=1}^{\infty}\frac{s_p-s_{p-1}}{s_p}x_p^2+2\sum_{\substack{p,q=1\\(q>p)}}^{\infty}\frac{\sqrt{(s_p-s_{p-1})(s_q-s_{q-1})}}{s_q}x_p x_q\right|\leqq 4\sum_{p=1}^{\infty}x_p^2.$$

Wählt man in (4.) speziell $a_n=b_n=1$, also $s_n=t_n=n$, so erhält man die Bilinearform

$$(5.)\qquad A(x,y)=\sum_{p,q=1}^{\infty}K(p,q)x_p y_q.$$

Ich will nun zeigen, *daß die obere Grenze* α *dieser Form für jede Funktion* $K(s,t)$, *die den Bedingungen 1.—4. genügt, genau gleich k ist.*

Da nämlich auf Grund unseres allgemeineren Resultats $\alpha\leqq k$ sein muß, so wird für alle positiven Werte $x_1, x_2, \ldots$, für welche die Reihe $X=\sum_p x_p^2$ konvergiert,

$$(6.)\qquad Q=\frac{A(x,x)}{X}\leqq k.$$

Man setze nun speziell, wenn $\varrho>\frac{1}{2}$ ist, $x_n=\frac{1}{n^\varrho}$. Dann wird $X=\zeta(2\varrho)$ und, wie man auf Grund der Gleichung

$$K(p,p)=\frac{K(1,1)}{p}$$

leicht erkennt,

$$A(x,x)=-K(1,1)\zeta(2\varrho+1)+\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=p}^{\infty}\frac{K(p,q)}{(pq)^{\varrho}}+\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{p=q}^{\infty}\frac{K(p,q)}{(pq)^{\varrho}}.$$

Nun ist aber wegen der Eigenschaften *1.* und *4.* der Funktion $K(s,t)$

$$\sum_{q=p}^{\infty}\frac{K(p,q)}{(pq)^{\varrho}}\geqq\int_{p}^{\infty}\frac{K(p,t)}{(pt)^{\varrho}}dt=\frac{1}{p^{2\varrho}}\int_{1}^{\infty}\frac{K(1,t)}{t^{\varrho}}dt$$

und ebenso

$$\sum_{p=q}^{\infty}\frac{K(p,q)}{(pq)^{\varrho}}\geqq\frac{1}{q^{2\varrho}}\int_{1}^{\infty}\frac{K(s,1)}{s^{\varrho}}ds.$$

Daher wird

$$A(x,x)\geqq-K(1,1)\zeta(2\varrho+1)+\zeta(2\varrho)\int_{1}^{\infty}\frac{K(u,1)+K(1,u)}{u^{\varrho}}du.$$

Bezeichnet man den Quotienten (6.) in unserem Fall mit Q_{ϱ}, so ergibt sich also

$$(7.)\qquad k\geqq Q_{\varrho}\geqq-K(1,1)\frac{\zeta(2\varrho+1)}{\zeta(2\varrho)}+\int_{1}^{\infty}\frac{K(u,1)+K(1,u)}{u^{\varrho}}du.$$

Nun ist allgemein, wenn $\varphi(u)$ eine nicht negative, in jedem endlichen Intervall $1\leqq a\leqq u\leqq b$ integrable Funktion ist, für die das Integral

$$\int_{1}^{\infty}\frac{\varphi(u)}{\sqrt{u}}du$$

existiert,

$$\lim_{\varrho=\frac{1}{2}+0}\int_{1}^{\infty}\frac{\varphi(u)}{u^{\varrho}}du=\int_{1}^{\infty}\frac{\varphi(u)}{\sqrt{u}}du.$$

Läßt man daher in (7.) ϱ gegen $\frac{1}{2}$ konvergieren, so erhält man, da

$$\lim_{\varrho=\frac{1}{2}}\zeta(2\varrho+1)=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6},\quad\lim_{\varrho=\frac{1}{2}}\zeta(2\varrho)=\infty$$

und

$$\int_{1}^{\infty}\frac{K(u,1)+K(1,u)}{\sqrt{u}}du=k$$

ist,

$$\lim_{\varrho=\frac{1}{2}+0}Q_{\varrho}=k,$$

d. h. man kann, wenn ε eine beliebige positive Größe ist, ϱ so nahe bei $\frac{1}{2}$ wählen, daß $Q_{\varrho}>k-\varepsilon$ wird. Dies zeigt deutlich, daß die obere Grenze α der Form (5.) nicht kleiner als k sein kann. Da nun $\alpha\leqq k$ war, so muß $\alpha=k$ sein.

Der Vollständigkeit wegen will ich noch erwähnen, daß die Resultate dieses Paragraphen sich auch auf Funktionen von mehr als zwei Variabeln übertragen lassen. Es gilt nämlich folgender Satz:

Es sei $K(s_1, s_2, \dots s_n)$ *eine nichtnegative Funktion der positiven Variabeln* $s_1, s_2, \dots s_n$, *die homogen vom Grade* $1-n$, *in jedem endlichen Gebiet*

$$0 < a \leqq s_\nu \leqq b \qquad (\nu = 1, 2, \dots n)$$

integrabel ist, und für die das $(n-1)$*-fache Integral*

$$k_n = \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{K(1, s_2, s_3, \dots s_n)}{\sqrt[n]{s_2 s_3 \cdots s_n}} ds_2 ds_3 \cdots ds_n$$

einen endlichen Wert hat. Sind dann $f_1(s), f_2(s), \dots f_n(s)$ *beliebige nichtnegative Funktionen des positiven Arguments* s, *die in jedem endlichen Intervall* $0 < a \leqq s \leqq b$ *integrabel sind, und für die die Integrale*

$$F_\nu = \int_0^\infty f_\nu^n(s)\, ds \qquad (\nu = 1, 2, \dots n)$$

endliche Werte haben, so existiert das n-fache Integral

$$I_n = \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty K(s_1, s_2, \dots s_n) f_1(s_1) f_2(s_2) \cdots f_n(s_n)\, ds_1 ds_2 \cdots ds_n,$$

und zwar ist

$$I_n \leqq k_n \sqrt[n]{F_1 F_2 \cdots F_n}.$$

Setzt man noch voraus, daß K *für jedes* ν *bei festen* $s_1, \dots s_{\nu-1}, s_{\nu+1}, \dots s_n$ *und wachsendem* s_ν *nicht zunehmen soll, so ist, wenn*

$$a_1^{(\nu)}, a_2^{(\nu)}, \dots \qquad (\nu = 1, 2, \dots n)$$

beliebige positive Zahlen sind und

$$s_n^{(\nu)} = a_1^{(\nu)} + a_2^{(\nu)} + \cdots + a_n^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \dots n)$$

gesetzt wird, die n-fach unendliche Reihe

$$U = \sum_{p_1, \dots p_n = 1}^{\infty} K(s_{p_1}^{(1)}, s_{p_2}^{(2)}, \dots s_{p_n}^{(n)}) \left[a_{p_1}^{(1)} a_{p_2}^{(2)} \cdots a_{p_n}^{(n)}\right]^{\frac{n-1}{n}} x_{p_1}^{(1)} x_{p_2}^{(2)} \cdots x_{p_n}^{(n)}$$

für alle nichtnegativen Wertsysteme $x_p^{(1)}, x_p^{(2)}, \dots x_p^{(n)}$ *konvergent, für welche die Reihen*

$$X_\nu = \sum_{p=1}^{\infty} (x_p^{(\nu)})^n \qquad (\nu = 1, 2, \dots n)$$

konvergent sind, und zwar ist stets

$$U \leqq k_n \sqrt[n]{X_1 X_2 \cdots X_n}.$$

In dieser Ungleichung kann, wenn speziell alle $a_\mu^{(\nu)}$ *gleich* 1 *gesetzt werden, die Zahl* k_n *durch keine kleinere Zahl ersetzt werden.*