

## Werk

**Titel:** Journal für die reine und angewandte Mathematik

**Verlag:** de Gruyter

**Jahr:** 1931

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN243919689\_0164

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689\\_0164](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0164)

**LOG Id:** LOG\_0004

**LOG Titel:** Die gruppentheoretische Struktur des Diskriminanten algebraischer Zahlkörper.

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN243919689

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

# Die gruppentheoretische Struktur der Diskriminanten algebraischer Zahlkörper.

Von *E. Artin* in Hamburg.

Zwischen der Relativdiskriminante eines relativ abelschen Körpers und den Führern der Klassenkörpertheorie besteht eine enge Beziehung. Die Kenntnis der Relativdiskriminanten aller Zwischenkörper zieht die Kenntnis der Führer dieser Körper nach sich und umgekehrt. Vermittelt wird dieser Zusammenhang durch die Führer-Diskriminanten-Formel, deren Beweis entweder analytisch mit Hilfe der Funktionalgleichung der  $L$ -Reihen geführt wird oder, wie Herr Hasse kürzlich gezeigt hat, der Normenresttheorie entnommen werden kann <sup>1)</sup>. Man wird nun erwarten, daß sich Struktursätze dieser Art auch im allgemeinen galoisschen Fall beweisen lassen. Da wir bis heute über die Zerlegungsgesetze in nicht-abelschen Körpern nichts wissen, kann ein solcher Einblick nur in formaler Weise erfolgen.

Wir werden zeigen, daß sich jedem Charakter der Gruppe eines galoisschen Körpers ein Ideal des Grundkörpers zuordnen läßt und daß dann die Diskriminante eines jeden Zwischenkörpers sich aus diesen „Führern“ in ähnlicher Weise aufbaut, wie im abelschen Fall. Ist die Gruppe abelsch, so stimmen diese Ideale mit den Führern der Charaktere im gewöhnlichen Sinn überein. Im allgemeinen Fall spielen sie in der Funktionalgleichung der  $L$ -Reihen mit Frobenius-Charakteren die gleiche Rolle, wie die Führer im abelschen Fall <sup>2)</sup>. Man wird daher mit Recht erwarten, daß auch im Fall nicht-abelscher Gruppen unsere Ideale eine ausgezeichnete Rolle bei den Zerlegungsgesetzen spielen werden. Doch vermag ich über diese Frage nichts auszusagen.

Immerhin scheinen mir diese Erwägungen die Wichtigkeit der neuen Begriffe für die künftige Entwicklung der algebraischen Zahlentheorie zu zeigen. Man wird vielleicht hinter das Geheimnis der Zerlegungsgesetze kommen, wenn man die Ergebnisse dieser Arbeit direkt zu begründen sucht. Der Sachverhalt ist nämlich dieser:

Sieht man ab von der Tatsache, daß unsere Ideale im abelschen Fall die „wirklichen“ Führer sind (hier braucht man natürlich die Klassenkörpertheorie), so lassen sich alle übrigen Sätze elementar beweisen, bis auf die Tatsache, daß unsere Führer ganze Ideale des Grundkörpers sind; dieser letzte Einblick läßt sich vorläufig nur mit Hilfe der Klassenkörpertheorie gewinnen. Ich kann aber nicht daran glauben, daß diese dazu wirklich erforderlich ist. Ein Beweis könnte zum Beispiel dadurch erbracht werden,

<sup>1)</sup> Vgl. H. Hasse, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Teil I, Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung **35** (1926), Satz 16. Teil Ia dieses Berichts in Bd. **36** (1927) gibt auch in § 8 eine Begründung der in dieser Arbeit verwendeten Begriffe aus der Theorie der galoisschen Körper. Ferner: H. Hasse, Führer, Diskriminante und Verzweigungskörper relativ-Abelscher Zahlkörper, ds. Journal **162** (1930).

<sup>2)</sup> E. Artin, Zur Theorie der  $L$ -Reihen mit allgemeinen Gruppencharakteren, Hamburger Abhandlungen **8** (1931). Die in Teil II des in Anm. 1 zitierten Berichts von Herrn Hasse, Ergänzungsband **6** (1930), Seite 193, aufgeführten Probleme über  $L$ -Reihen haben zu der vorliegenden Untersuchung den Anstoß gegeben.

daß man die Kongruenzen (15) entsprechend verallgemeinert. Mehr noch verspricht allerdings die folgende Erwägung:

Die Diskriminante eines Zwischenkörpers gestattet eine Zerlegung in Faktoren, die so aussieht, wie wenn die Diskriminante als Gruppendeterminante geschrieben werden könnte. Vielleicht kann sie in der Tat so geschrieben werden und vielleicht kann man das direkt einsehen. Aus einer solchen Schreibweise würde man alle Sätze dieser Arbeit ablesen können. Ich bin aber auch davon überzeugt, daß man aus einer solchen Schreibweise die unbekannten Zerlegungsgesetze erraten könnte. Doch muß das alles der künftigen Entwicklung vorbehalten bleiben.

Es sei noch gestattet darauf hinzuweisen, daß die explizite Formel für die Führer der Charaktere auch eine neue Ergänzung zur Klassenkörpertheorie darstellt.

### 1. Hilfsätze.

1. Zwischen den einfachen Charakteren  $\chi_i(\sigma)$  einer Gruppe  $\mathfrak{G}$  und den einfachen Charakteren  $\psi_k(\sigma)$  einer Untergruppe  $\mathfrak{H}$  bestehen bekanntlich Relationen, die von Frobenius<sup>3)</sup> herrühren:

Setzt man fest, daß unter  $\psi_k(\sigma)$  der Wert 0 zu verstehen ist, wenn  $\sigma$  nicht in der Untergruppe  $\mathfrak{H}$  liegt, durchläuft ferner  $\tau_i$  ein volles Repräsentantensystem der rechtsseitigen Nebengruppen von  $\mathfrak{H}$  nach  $\mathfrak{G}$ , so ist die Funktion

$$(1) \quad \chi_{\psi_k}(\sigma) = \sum_i \psi_k(\tau_i \sigma \tau_i^{-1})$$

ein (im allgemeinen nicht einfacher) Charakter der Gruppe  $\mathfrak{G}$ . Ist

$$(2) \quad \chi_{\psi_k}(\sigma) = \sum_{i=1}^h r_{ik} \chi_i(\sigma), \quad k = 1, 2, \dots, l$$

seine Darstellung durch die  $\chi_i(\sigma)$ , so gilt umgekehrt für die  $\chi_i(\sigma)$  innerhalb der Untergruppe  $\mathfrak{H}$  die Darstellung:

$$(3) \quad \chi_i(\sigma) = \sum_{k=1}^l r_{ik} \psi_k(\sigma), \quad \sigma \text{ aus } \mathfrak{H}, i = 1, 2, \dots, h.$$

Für die Zahlen  $r_{ik}$  findet man:

$$(4) \quad r_{ik} = \frac{1}{q} \sum_{\tau \text{ aus } \mathfrak{H}} \chi_i(\tau) \psi_k(\tau^{-1}).$$

In diesen Formeln bedeuten  $n, q$  die Ordnungen,  $h, l$  die Anzahl der Charaktere von  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{H}$ .  $\chi_{\psi_k}(\sigma)$  heißt der von  $\psi_k(\sigma)$  induzierte Charakter.

Ist  $\chi(\sigma)$  ein Charakter von  $\mathfrak{G}$ , so ist jede konjugiert algebraische Funktion auch ein Charakter. Die Summe eines Systems konjugiert algebraischer Charaktere ist ein Charakter, der nur ganz rationaler Werte fähig ist und rationaler Charakter genannt werde. Ist  $i$  eine zu  $n$  teilerfremde Zahl, so ist die Funktion  $\chi(\sigma^i)$  aus der Funktion  $\chi(\sigma)$  zu erhalten, indem man in dem Ausdruck von  $\chi(\sigma)$  als Spur die  $n$ -te Einheitswurzel durch ihre  $i$ -te Potenz ersetzt, also zu einem konjugiert algebraischen Charakter übergeht. Daraus folgt, daß die rationalen Charaktere  $\mathcal{E}_k(\sigma)$  der Gleichung genügen:

$$(5) \quad \mathcal{E}_k(\sigma^i) = \mathcal{E}_k(\sigma), \quad (i, n) = 1.$$

Sie sind also lediglich Funktionen der sogenannten Abteilungen der Gruppe.

Die von einem Element  $\varrho$  aus  $\mathfrak{G}$  erzeugte Untergruppe werde mit  $\mathfrak{H}^\varrho$  bezeichnet. Um diese verschiedenen Untergruppen zu unterscheiden, denken wir uns in den vorigen Formeln, soweit erforderlich, noch einen oberen Index  $\varrho$  angebracht. Ferner verabreden wir, daß dem Hauptcharakter einer Gruppe immer die Nummer 1 entsprechen soll. Ins-

<sup>3)</sup> G. Frobenius, Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen, Sitzungsberichte Berlin 1898. Ferner: A. Speiser, Gruppentheorie, 1. Aufl. (1923) § 52 oder 2. Aufl. (1927) § 62.

besondere setzen wir in Formel (2) für  $k$  den Wert 1 ein. Dann steht links ein rationaler Charakter. Die Darstellungen durch die einfachen Charaktere sind eindeutig, so daß also auf der rechten Seite konjugiert algebraische Charaktere die gleichen Koeffizienten  $r_{ik}^e$  erhalten. Faßt man also konjugiert algebraische Charaktere immer zusammen, so erhält man eine Formel der Gestalt:

$$(6) \quad \chi_{\nu, \varrho}(\sigma) = \sum_{i=1}^{h'} R_i^e \mathcal{E}_i(\sigma).$$

Dabei sind die  $\mathcal{E}_i(\sigma)$  die aus den einfachen Charakteren gewonnenen rationalen Charaktere,  $h'$  ihre Anzahl und  $R_i^e$  einer der alten Koeffizienten  $r_{i1}^e$  in neuer Nummerierung. Summiert man in (4) über ein System konjugiert algebraischer Charaktere  $\chi_i(\tau)$  so findet man, wenn  $p_i$  angibt, wieviel einfache Charaktere in  $\mathcal{E}_i(\sigma)$  stecken, für  $R_i^e$  den Ausdruck:

$$(7) \quad R_i^e = \frac{1}{q^e p_i} \sum_{\nu=1}^{q^e} \mathcal{E}_i(\varrho^\nu).$$

Wir lassen nun in (6) das Element  $\varrho$  die ganze Gruppe  $\mathfrak{G}$  durchlaufen und erhalten so ein System linearer Gleichungen für die als unbekannt zu betrachtenden rationalen Charaktere. Behauptet wird, daß es lösbar ist. Die Matrix des Gleichungssystems lautet  $(R_i^e)$ , wo  $i$  etwa die Nummer der Zeile,  $\varrho$  die Nummer der Spalte angibt. Die Lösbarkeit des Systems ist garantiert, wenn sich darunter  $h'$  linear unabhängige Gleichungen, d. h. in der Matrix  $h'$  linear unabhängige Spalten vorfinden. Dies ist sicher der Fall, wenn die  $h'$  Zeilen der Matrix linear unabhängig sind. Sei also

$$(8) \quad \sum_{i=1}^{h'} R_i^e x_i = 0, \quad \varrho \text{ aus } \mathfrak{G},$$

eine lineare Relation zwischen den Zeilen der Matrix. Wir setzen (7) darin ein, lassen den unwesentlichen Faktor  $q^e$  fort und ersetzen  $x_i$  durch das gleichwertige Produkt  $x_i p_i$ . So erhält man die Relation:

$$(9) \quad \sum_{\nu=1}^{q^e} \sum_{i=1}^{h'} \mathcal{E}_i(\varrho^\nu) x_i = 0 \quad \text{für alle } \varrho \text{ aus } \mathfrak{G}.$$

Es gilt aber sogar:

$$(10) \quad \sum_{i=1}^{h'} \mathcal{E}_i(\varrho) x_i = 0 \quad \text{für alle } \varrho \text{ aus } \mathfrak{G}.$$

Für das Einheitselement von  $\mathfrak{G}$  folgt dies direkt aus (9). Nimmt man an, daß (10) bewiesen ist für alle Elemente kleinerer Ordnung als  $q^e$ , so bleiben in (9) nur solche Summanden stehen, bei denen  $\nu$  teilerfremd zu  $q^e$  ist. Diese liegen aber alle in derselben Abteilung wie  $\varrho$ , die rationalen Charaktere haben für diese Potenzen also denselben Wert wie für  $\varrho$ , so daß jetzt (10) für  $\varrho$  folgt.

(10) würde besagen, daß die  $\mathcal{E}_i$  linear abhängig sind, falls auch nur ein  $x_i \neq 0$  ist. Das geht nicht, denn die  $\mathcal{E}_i$  sind aus lauter verschiedenen einfachen Charakteren zusammengesetzt. Damit ist die Lösbarkeit des Systems (16) bewiesen. Wir benötigen aber nur das folgende, etwas schwächere Resultat:

*Jeder rationale Charakter ist rationalzahlige Linearkombination von Charakteren, die ihrerseits von Hauptcharakteren von Untergruppen induziert sind.*

2. Wir gehen jetzt zu arithmetischen Betrachtungen über. Als Grundkörper  $k$  werde irgendein algebraischer Zahlkörper genommen.  $K$  sei galoissch über  $k$ ,  $\mathfrak{G}$  seine Gruppe,  $\Omega$  sei ein Zwischenkörper und  $\mathfrak{U}$  die zugehörige Untergruppe.  $\mathfrak{p}$  sei ein Primideal aus  $k$ . Wir verwenden die folgenden Bezeichnungen:

$\mathfrak{p} = q_1^{e_1} q_2^{e_2} \cdots q_g^{e_g}$  sei die Zerlegung von  $\mathfrak{p}$  in  $\Omega$ .



$\mathfrak{P}_i$  sei ein Primteiler von  $q_i$  in  $K$  und zwar sei  $\mathfrak{P}_i = \kappa_i \mathfrak{P}_1$ , wobei  $\kappa_i$  Element von  $\mathfrak{G}$  sei.  $\mathfrak{P}_i^{e_i}$  sei die höchste Potenz von  $\mathfrak{P}_i$  die in  $q_i$  aufgeht, es werde  $e = e_i e'_i$  gesetzt, so daß  $e$  die höchste Potenz von  $\mathfrak{P}_i$  ist, die in  $\mathfrak{p}$  aufgeht.  $f_i$  und  $f$  seien die Relativgrade von  $q_i$  und  $\mathfrak{P}_i$  in bezug auf  $k$ ,  $f'_i$  derjenige von  $\mathfrak{P}_i$  in bezug auf  $\Omega$ .  $\mathfrak{Z}$  und  $\mathfrak{X}$  seien Zerlegungs- bzw. Trägheitsgruppe von  $\mathfrak{P}_1$  in bezug auf  $k$ , so daß  $\mathfrak{Z}_i = \kappa_i \mathfrak{Z} \kappa_i^{-1}$  und  $\mathfrak{X}_i = \kappa_i \mathfrak{X} \kappa_i^{-1}$  die entsprechenden Gruppen von  $\mathfrak{P}_i$  sind. Der Durchschnitt irgendeiner Gruppe mit  $\mathfrak{U}$  werde durch Überstreichen gekennzeichnet. Dann sind also  $\overline{\mathfrak{Z}}_i$  und  $\overline{\mathfrak{X}}_i$  die entsprechenden Gruppen von  $\mathfrak{P}_i$  in bezug auf  $\Omega$ .  $\sigma_i$  sei eine dem Primteiler  $\mathfrak{P}_i$  zugeordnete Frobenius-Substitution in bezug auf  $k$  und  $\varrho_i$  eine Frobenius-Substitution dieses Primteilers in bezug auf  $\Omega$ . Diese Substitutionen erzeugen die zugehörigen Zerlegungsgruppen  $\mathfrak{Z}_i$  bzw.  $\overline{\mathfrak{Z}}_i$ .

Die absolute Norm irgendeines Primideals in irgendeinem Körper möge einheitlich immer mit  $N$  bezeichnet werden, da Mißverständnisse nicht zu befürchten sind. Aus der Bedeutung der Frobenius-Substitutionen  $\sigma_i$  und  $\varrho_i$  folgen dann die Kongruenzen:

$$\sigma_i^{f_i} A \equiv A^{Nq_i} \pmod{\mathfrak{P}_i} \text{ und } \varrho_i^{-1} A^{Nq_i} \equiv A \pmod{\mathfrak{P}_i}, \text{ also } \varrho_i^{-1} \sigma_i^{f_i} A \equiv A \pmod{\mathfrak{P}_i}$$

für jedes ganze  $A$  aus  $K$ . Die letzte Kongruenz besagt, daß  $\varrho_i^{-1} \sigma_i^{f_i}$  in  $\mathfrak{X}_i$  liegt, daß also  $\sigma_i^{f_i} \mathfrak{X}_i = \varrho_i \mathfrak{X}_i$  ist. Nun ist  $\mathfrak{X}_i$  ein Normalteiler von  $\mathfrak{Z}_i$  und  $\sigma_i$  und  $\varrho_i$  gehören zu dieser letzteren Gruppe. Also folgt auch:  $\sigma_i^{\mu} \mathfrak{X}_i = \varrho_i^{\mu} \mathfrak{X}_i$ . Daraus schließen wir, daß in der Nebengruppe  $\sigma_i^{\mu} \mathfrak{X}_i$  ein Element aus  $\mathfrak{U}$  liegt, nämlich  $\varrho_i^{\mu}$ .

Wir wollen uns nun umgekehrt fragen, wann in der Nebengruppe  $\sigma_i^{\mu} \mathfrak{X}_i$  ein Element  $\gamma = \sigma_i^{\mu} \tau_i$  aus  $\mathfrak{U}$  liegt. Dann gilt für alle ganzen  $A$  von  $K$  die Kongruenz:

$$\gamma A \equiv A^{Np^{\mu}} \pmod{\mathfrak{P}_i}.$$

Wählen wir für  $A$  insbesondere ein Element aus  $\Omega$ , für das ja  $\gamma A = A$  ist, so folgt:

$$A \equiv A^{Np^{\mu}} \pmod{q_i}.$$

Die Existenz einer Primitivwurzel mod  $q_i$  zeigt dann, daß  $\mu$  durch  $f_i$  teilbar sein muß, womit wir auf den vorhin behandelten Fall zurückgekommen sind. Es gilt dann:

$\sigma_i^{\mu} \mathfrak{X}_i = \varrho_i^{\frac{\mu}{f_i}} \mathfrak{X}_i$ . Damit nun  $\varrho_i^{\frac{\mu}{f_i}} \tau_i$  in  $\mathfrak{U}$  liegt, muß  $\tau_i$  in  $\mathfrak{U}$  also in  $\overline{\mathfrak{X}}_i$  liegen. Zusammengefaßt hat sich ergeben:

Der Durchschnitt von  $\sigma_i^{\mu} \mathfrak{X}_i$  mit  $\mathfrak{U}$  ist leer, wenn  $\mu$  nicht durch  $f_i$  teilbar ist; er besteht aus  $\varrho_i^{\frac{\mu}{f_i}} \overline{\mathfrak{X}}_i$ , wenn  $\mu$  durch  $f_i$  teilbar ist.

Betrachten wir zwei Nebengruppen der Form  $\mathfrak{U} \zeta_i \kappa_i$  und  $\mathfrak{U} \zeta'_k \kappa_k$ , wo  $\zeta_i$  aus  $\mathfrak{Z}_i$  und  $\zeta'_k$  aus  $\mathfrak{Z}_k$  stammt. Wann sind sie gleich? Das Element  $\gamma = \zeta'_k \kappa_k \kappa_i^{-1} \zeta_i^{-1}$  muß zu  $\mathfrak{U}$  gehören. Nun sieht man aber sofort, daß es das Primideal  $\mathfrak{P}_i$  in  $\mathfrak{P}_k$  überführt. Da nun ein Element aus  $\mathfrak{U}$  einen Primteiler von  $q_i$  nur wieder in einen Primteiler von  $q_i$  überführen kann, folgt zunächst  $i = k$ . Jetzt ist  $\gamma = \zeta'_i \zeta_i^{-1}$ . Der Form nach liegt dieses Element in  $\mathfrak{Z}_i$ ; da es zu  $\mathfrak{U}$  gehören soll, muß es in  $\overline{\mathfrak{Z}}_i$  liegen. Will man also lauter verschiedene Nebengruppen erhalten, so hat man  $\zeta_i$  ein volles Restsystem von  $\mathfrak{Z}_i$  modulo  $\overline{\mathfrak{Z}}_i$  durchlaufen zu lassen. Die Ordnung von  $\mathfrak{Z}_i$  ist  $e f$ , die von  $\overline{\mathfrak{Z}}_i$  ist  $e'_i f'_i$ , der Index von  $\mathfrak{Z}_i$  nach  $\overline{\mathfrak{Z}}_i$  demnach  $e_i f_i$ . Bezeichnet man also mit  $\zeta_{i, \nu}$  dieses volle Restsystem, so sind die Nebengruppen

$$\mathfrak{U} \zeta_{i, \nu} \kappa_i, \quad i = 1, 2, \dots, s; \quad \nu = 1, 2, \dots, e_i f_i,$$

voneinander verschieden. Ihre Anzahl beträgt  $\sum_{i=1}^s e_i f_i$ , ist also der Körpergrad von  $\Omega$  in bezug auf  $k$ , d. h. der Index von  $\mathfrak{G}$  nach  $\mathfrak{U}$ . Folglich sind dies gerade alle Nebengruppen,

und wir können das System  $\zeta_i \kappa_i$  dazu benutzen, den induzierten Charakter mit Hilfe von Formel (1) zu bilden. Sei also  $\psi$  irgendein Charakter von  $\mathfrak{U}$ . Dann gilt:

$$(11) \quad \chi_\psi(\lambda) = \sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^{e_i f_i} \psi(\zeta_{i,v} \kappa_i \lambda \kappa_i^{-1} \zeta_{i,v}^{-1}).$$

Wir wollen im Argument eines Charakters auch Komplexe von Gruppenelementen einsetzen und verstehen darunter in naheliegender Weise die Summe der einzelnen Charakterwerte. Dann gilt die Formel (11) auch dann, wenn  $\lambda$  ein Komplex ist. Aus ihr leiten wir jetzt mehrere Formeln ab:

Zunächst werde unter  $\lambda$  der Komplex  $\sigma_1^g \mathfrak{X}$  verstanden. Im Argument der rechten Seite wird er mit  $\kappa_i$  und mit  $\zeta_{i,v}$  transformiert. Die erste Transformation führt ihn in  $\sigma_i^g \mathfrak{X}_i$  über, die zweite verändert dieses Resultat nicht mehr, da  $\mathfrak{X}_i$  Normalteiler von  $\mathfrak{B}_i$  mit zyklischer Faktorgruppe ist und  $\zeta_{i,v}$  zu  $\mathfrak{B}_i$  gehört. Man erhält somit:

$$\chi_\psi(\sigma_1^g \mathfrak{X}) = \sum_{i=1}^s \sum_{v=1}^{e_i f_i} \psi(\sigma_i^g \mathfrak{X}_i) = \sum_{i=1}^s e_i f_i \psi(\sigma_i^g \mathfrak{X}_i).$$

Nun ist aber der Wert der Funktion  $\psi$  gleich 0, wenn das Argument nicht zu  $\mathfrak{U}$  gehört. Wir dürfen also noch auf der rechten Seite die Durchschnitte der Argumente mit  $\mathfrak{U}$  bilden. Aus den oben bestimmten Durchschnitten folgt jetzt:

$$(12) \quad \chi_\psi(\sigma_i^g \mathfrak{X}) = \sum_{f_i | g} e_i f_i \psi(\sigma_i^{g/f_i} \mathfrak{X}_i).$$

Zweitens sei  $\mathfrak{B}$  irgendein Normalteiler von  $\mathfrak{B}$ . Für  $\lambda$  werde in Formel (11)  $\mathfrak{B}$  eingesetzt. Bezeichnen wir die Gruppe  $\kappa_i \mathfrak{B} \kappa_i^{-1}$  mit  $\mathfrak{B}_i$  und beachten, daß auch sie Normalteiler von  $\mathfrak{B}_i$  wird, so folgt, daß die Argumente auf der rechten Seite die Werte  $\mathfrak{B}_i$  haben. Die Durchschnittsbildung führt analog wie früher auf die Formel:

$$(13) \quad \chi_\psi(\mathfrak{B}) = \sum_{i=1}^s e_i f_i \psi(\mathfrak{B}_i).$$

Setzen wir endlich in Formel (1)  $\sigma = 1$  und verstehen unter  $m$  den Index von  $\mathfrak{G}$  nach  $\mathfrak{U}$  also den Grad des Körpers  $\Omega$  in bezug auf  $k$ , so folgt:

$$(14) \quad \chi_\psi(1) = m \psi(1).$$

Die Formel (12) wird in dieser Arbeit keine Verwendung finden. Wir haben sie hier gleich mit hergeleitet, da sie gut in diesen Zusammenhang paßt. In einer weiteren Arbeit werde ich ihren Nutzen zeigen <sup>4)</sup>.

Noch einige Worte über die Bedeutung der Werte  $\chi(\mathfrak{B})$ . Es sei  $\mathfrak{B}$  irgendeine Untergruppe von  $\mathfrak{G}$  und  $v$  ihre Ordnung. Der Charakter  $\chi$  von  $\mathfrak{G}$  ist auch Charakter von  $\mathfrak{B}$ . Zerlegt man ihn in einfache Charaktere von  $\mathfrak{B}$  und beachtet die Relationen für die Charaktere, so zeigt sich, daß  $\frac{1}{v} \chi(\mathfrak{B})$  eine ganze rationale, nicht negative Zahl ist, die angibt, wie oft im Charakter  $\chi$  der Hauptcharakter von  $\mathfrak{B}$  steckt. Insbesondere ist der Wert von  $\chi(\mathfrak{B})$  stets höchstens  $v\chi(1)$  und dann und nur dann gleich dieser Zahl, wenn die zu  $\chi$  gehörige Darstellung der Gruppe  $\mathfrak{G}$  für jedes Element von  $\mathfrak{B}$  die Einheitsmatrix liefert.

3. Als letzten Hilfssatz brauchen wir noch Beziehungen zwischen der Trägheitsgruppe und den Verzweigungsgruppen. Ein Teil dieses Hilfssatzes ist schon von Herrn Speiser gewonnen worden <sup>5)</sup>.

Die  $i$ -te Verzweigungsgruppe des Primideals  $\mathfrak{P}_1$  werde mit  $\mathfrak{B}_i$  bezeichnet.  $\Pi$  sei

<sup>4)</sup> Siehe Anm. 2.

<sup>5)</sup> A. Speiser, Die Zerlegungsgruppe, ds. Journal 149 (1919).

eine genau durch die erste Potenz von  $\mathfrak{P}_1$  teilbare Zahl von  $K$ .  $\tau$  sei ein beliebiges Element der Trägheitsgruppe, und es führe  $\Pi$  über in  $A\Pi$ , wo  $A$  teilerfremd zu  $\mathfrak{P}_1$  ausfällt.  $\tau_i$  sei ein Element der  $i$ -ten Verzweigungsgruppe, lasse also  $\Pi$  modulo  $\mathfrak{P}_1^{i+1}$  fest. Seine Wirkung nach dem Modul  $\mathfrak{P}_1^{i+2}$  sei durch die Kongruenz

$$\tau_i \Pi \equiv \Pi + \Pi^{i+1} B \pmod{\mathfrak{P}_1^{i+2}}$$

beschrieben. Wegen

$$\tau_i A \equiv A \pmod{\mathfrak{P}_1^{i+1}}$$

folgt

$$\tau_i(A\Pi) \equiv A\tau_i \Pi \equiv A\Pi + (A\Pi)^{i+1} \frac{B}{A^i} \pmod{\mathfrak{P}_1^{i+2}}.$$

Wegen

$$\tau^{-1}(A\Pi) = \Pi \quad \text{und} \quad \tau^{-1}\left(\frac{B}{A^i}\right) \equiv \frac{B}{A^i} \pmod{\mathfrak{P}_1}$$

ist

$$\tau^{-1} \tau_i \tau \Pi \equiv \Pi + \Pi^{i+1} \frac{B}{A^i} \pmod{\mathfrak{P}_1^{i+2}}.$$

Daraus folgt endlich:

$$\tau_i^{-1} \tau^{-1} \tau_i \tau \Pi \equiv \Pi + \Pi^{i+1} B \left( \frac{1}{A^i} - 1 \right) \pmod{\mathfrak{P}_1^{i+2}}.$$

Das Element  $\tau_i^{-1} \tau^{-1} \tau_i \tau$  liegt also dann und nur dann in  $\mathfrak{B}_{i+1}$ , wenn entweder  $B \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}_1}$  oder  $A^i \equiv 1 \pmod{\mathfrak{P}_1}$  ist. Nehmen wir an, daß  $\tau_i$  nicht zu  $\mathfrak{B}_{i+1}$  gehört, daß also  $B \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}_1}$  und somit  $A^i \equiv 1 \pmod{\mathfrak{P}_1}$  ist, so muß demnach  $\tau^i \Pi \equiv A^i \Pi \equiv \Pi \pmod{\mathfrak{P}_1^2}$  sein, also  $\tau^i$  in  $\mathfrak{B}_1$  liegen. Wir haben also:

*Das Element  $\tau_i^{-1} \tau^{-1} \tau_i \tau$  liegt dann und nur dann in  $\mathfrak{B}_{i+1}$ , wenn entweder  $\tau_i$  zu  $\mathfrak{B}_{i+1}$  oder  $\tau^i$  zu  $\mathfrak{B}_1$  gehört.*

Als Nebenresultat erhalten wir sofort den Satz von Speiser:

Die Gruppe  $\mathfrak{B}_i/\mathfrak{B}_{i+1}$  liegt im Zentrum der Gruppe  $\mathfrak{B}_1/\mathfrak{B}_{i+1}$ .

Wir benutzen aber unser Resultat dazu, Kongruenzen zwischen den Zahlen  $\chi(\mathfrak{B}_i)$  herzuleiten. Die Trägheitsgruppe hat die Ordnung  $e$ . Zerlegen wir  $e$  in die Faktoren  $e_0 p^{R_i}$ , wo  $e_0$  zu  $p$  teilerfremd und  $p$  die zum Primideal  $\mathfrak{p}$  gehörige rationale Primzahl ist, so ist bekanntlich die Faktorgruppe  $\mathfrak{B}_1/\mathfrak{B}_1$  zyklisch von der Ordnung  $e_0$ . Unter  $\tau$  werde jetzt ein Vertreter der erzeugenden Restklasse modulo  $\mathfrak{B}_1$  verstanden.

Die Elemente  $\tau_i$  aus  $\mathfrak{B}_i$ , die nicht in  $\mathfrak{B}_{i+1}$  liegen, teilen wir jetzt in Klassen ein, indem wir alle Elemente der Form  $\tau^{-r} \tau_i \tau^r$  in ein- und dieselbe Klasse legen. Die so gewonnenen Klassen sind fremd, und die Anzahl der Elemente einer Klasse ist jedesmal die kleinste Zahl  $k$ , so daß  $\tau^{-k} \tau_i \tau^k = \tau_i$  ist. Erst recht ist dann  $\tau_i^{-1} \tau^{-k} \tau_i \tau^k$  in  $\mathfrak{B}_{i+1}$  enthalten, so daß  $\tau^{ik}$  zu  $\mathfrak{B}_1$  gehören muß. Die Zahl  $ik$  muß also durch  $e_0$  teilbar sein. Ist nun  $\chi$  ein Charakter, so haben alle Elemente derselben Klasse denselben Charakterwert, die Summe der Charakterwerte ist also eine durch  $k$  teilbare, ganze algebraische Zahl. Summieren wir jetzt über alle Klassen und multiplizieren noch mit  $i$ , so erhalten wir die Zahl  $i(\chi(\mathfrak{B}_i) - \chi(\mathfrak{B}_{i+1}))$ , deren Teilbarkeit durch  $e_0$  somit feststeht. Es gilt also die Kongruenz:

$$(15) \quad i\chi(\mathfrak{B}_i) \equiv i\chi(\mathfrak{B}_{i+1}) \pmod{e_0}.$$

Wählen wir für  $\chi$  den Hauptcharakter und bezeichnen wir die Ordnung von  $\mathfrak{B}_i$  mit  $p^{R_i}$ , so ergibt sich der Spezialfall:

$$(16) \quad ip^{R_i} \equiv ip^{R_{i+1}} \pmod{e_0}.$$

Endlich werde  $\mathfrak{G}$  als abelsch vorausgesetzt. Dann findet man:

Ist  $\mathfrak{B}_{i+1}$  von  $\mathfrak{B}_i$  verschieden, so ist  $i$  durch  $e_0$  teilbar

Dieses Resultat ist auf anderem Wege von Herrn Hasse gewonnen worden<sup>6)</sup>.

## § 2. Der Führer eines Charakters.

4. Wir geben jetzt die Definition des Führers eines Charakters im Relativkörper  $K/k$ :

$$(17) \quad \mathfrak{f}(\chi, K/k) = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\frac{1}{e} [e\chi(1) - \chi(\mathfrak{T}) + p^{R_1}\chi(1) - \chi(\mathfrak{B}_1) + p^{R_2}\chi(1) - \chi(\mathfrak{B}_2) + \dots]}$$

Dabei ist das Produkt über alle Primideale des Körpers  $k$  zu erstrecken<sup>7)</sup>. Die auftretenden Zahlen und Gruppen sind schon erklärt worden. Da für genügend große Indizes die Verzweigungsgruppe nur aus dem Einheits-element besteht, bricht die Summe im Exponenten ab. Geht ferner das Primideal nicht in der Diskriminante auf, so besteht schon die Trägheitsgruppe nur aus dem Einheits-element, und das betreffende Primideal liefert keinen Beitrag zum Führer. (17) definiert uns also in der Tat ein Ideal. Aus der Bemerkung am Schlusse von 2 geht hervor, daß der Exponent eine nicht negative rationale Zahl ist und daß wenigstens der erste Bestandteil  $\chi(1) - \frac{1}{e}\chi(\mathfrak{T})$  ganz rational ausfällt.

Wir werden zeigen, daß der volle Exponent ganz rational ist, daß also  $\mathfrak{f}(\chi, K/k)$  ein ganzes Ideal des Körpers  $k$  ist. Doch liegt diese Tatsache sehr tief. Vorläufig lassen wir es zu, daß der Führer möglicherweise nicht im Körper liegt und rechnen mit ihm in rein formaler Weise. Was dabei unter Norm zu verstehen ist, ist klar, möglicherweise ist aber die Norm auch kein Ideal des Körpers, in bezug auf den sie genommen wird.

Wir bestätigen sofort die Rechenregel:

$$(18) \quad \mathfrak{f}(\chi_1 + \chi_2, K/k) = \mathfrak{f}(\chi_1, K/k) \mathfrak{f}(\chi_2, K/k).$$

Zur Untergruppe  $\mathfrak{U}$  gehöre wie bisher der Zwischenkörper  $\Omega$ . Wir wollen die Beziehung zwischen den beiden Führern  $\mathfrak{f}(\chi_{\psi}, K/k)$  und  $\mathfrak{f}(\psi, K/\Omega)$  untersuchen.

Die Gruppe  $\kappa_v \mathfrak{B}_i \kappa_v^{-1} = \mathfrak{B}_v^i$  ist die  $i$ -te Verzweigungsgruppe des Primideals  $\mathfrak{P}_v$  in bezug auf  $k$ . Ihr Durchschnitt mit  $\mathfrak{U}$  ist die  $i$ -te Verzweigungsgruppe in bezug auf  $\Omega$ . Die Ordnung von  $\overline{\mathfrak{B}}_v^i$  werde mit  $p^{R_v^i}$  bezeichnet. Formel (13) liefert:

$$\chi_{\psi}(\mathfrak{B}_i) = \sum_{v=1}^s e_v f_v \psi(\overline{\mathfrak{B}}_v^i).$$

Das ergibt mit (14) und der Gleichung  $m = \sum_{v=1}^s e_v f_v$  zusammen nach leichten Rechnungen die Umformung:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}^{\frac{1}{e} (p^{R_i} \chi_{\psi}(1) - \chi_{\psi}(\mathfrak{B}_i))} &= \mathfrak{p}^{\frac{m}{e} (p^{R_i} - 1) \psi(1)} \cdot \mathfrak{p}^{-\frac{1}{e} \sum_{v=1}^s e_v f_v (p^{R_v^i} - 1) \psi(1)} \cdot \mathfrak{p}^{\frac{1}{e} \sum_{v=1}^s e_v f_v (p^{R_v^i} \psi(1) - \psi(\overline{\mathfrak{B}}_v^i))} \\ &= N_{\Omega/k} \left( \mathfrak{p}^{\frac{1}{e} (p^{R_i} - 1) \psi(1)} \cdot \prod_{v=1}^s \mathfrak{q}_v^{-\frac{1}{e'_v} (p^{R_v^i} - 1) \psi(1)} \cdot \mathfrak{q}_v^{\frac{1}{e'_v} (p^{R_v^i} \psi(1) - \psi(\overline{\mathfrak{B}}_v^i))} \right). \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise läßt sich auch der Beitrag der Trägheitsgruppe umformen. Nun haben die Relativedifferenten  $\mathfrak{d}_{K/k}$  und  $\mathfrak{d}_{K/\Omega}$  die Werte:

$$\mathfrak{d}_{K/k} = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\frac{1}{e} (e-1+p^{R_1}-1+\dots)}; \quad \mathfrak{d}_{K/\Omega} = \prod_{\mathfrak{p}} \prod_{v=1}^s \mathfrak{q}_v^{\frac{1}{e'_v} (e'_v-1+p^{R_v^1}-1+p^{R_v^2}-1+\dots)}.$$

Daraus folgt:

<sup>6)</sup> Vgl. die zweite der in Anm. 1 zitierten Arbeiten.

<sup>7)</sup> Damit die Formel überhaupt Sinn hat, muß man sich im Exponenten immer je zwei Glieder durch eine Klammer zusammengefaßt denken. Der Übersichtlichkeit halber wurden diese Klammern weggelassen.

$$\mathfrak{f}(\chi_\psi, K/k) = N_{\Omega/k} \left( \left( \frac{\mathfrak{d}_{K/k}}{\mathfrak{d}_{K/\Omega}} \right)^{\psi(1)} \cdot \prod_{\mathfrak{p}} \prod_{v=1}^s q_v^{\frac{1}{e_v} (e_v' \psi(1) - \psi(\mathfrak{E}_v) + p R_v^1 \psi(1) - \psi(\mathfrak{B}_v^1) + \dots)} \right).$$

Der letzte Teil in dieser Formel ist aber gerade der Führer  $\mathfrak{f}(\psi, K/\Omega)$ . Wir erhalten somit die folgende grundlegende Formel:

$$(19) \quad \mathfrak{f}(\chi_\psi, K/k) = \mathfrak{D}_{\Omega/k}^{\psi(1)} \cdot N_{\Omega/k}(\mathfrak{f}(\psi, K/\Omega)),$$

wo die Relativediskriminante von  $\Omega$  nach  $k$  mit  $\mathfrak{D}_{\Omega/k}$  bezeichnet ist.

Ist  $\chi$  der Hauptcharakter, so wird  $\mathfrak{f}(\chi, K/k) = 1$ . Dies benutzen wir, um einen besonders wichtigen Spezialfall von (19) aufzustellen. Wir setzen nämlich in (19) für  $\psi$  den Hauptcharakter  $\psi_1$  ein und erhalten die folgende Formel:

$$(20) \quad \mathfrak{D}_{\Omega/k} = \mathfrak{f}(\chi_{\psi_1}, K/k).$$

Diese Formel liefert uns die gewünschte Zerfällung der Diskriminanten aller Unterkörper von  $K$ . Man kann ja in der Tat den induzierten Charakter durch die einfachen Charaktere der Gruppe ausdrücken und erhält so wegen (18) eine Darstellung der Diskriminante durch die Führer der einfachen Charaktere. Die Führer lassen sich also als eine Verfeinerung der Diskriminantentheorie betrachten.

Eine weitere, fast triviale Eigenschaft der Führer besteht darin, daß sie für konjugiert algebraische Charaktere die gleichen Werte annehmen.

Es ist nun sehr bemerkenswert, daß sich die Führer durch diese letzte Eigenschaft sowie durch die Formeln (18) und (20) kennzeichnen lassen:

*Ist jedem Charakter  $\chi$  der Gruppe  $\mathfrak{G}$  ein Ideal  $\mathfrak{F}(\chi)$  zugeordnet für das die Formeln (18) und (20) gelten, und entsprechen konjugiert algebraischen Charakteren die gleichen Ideale, so ist das Ideal  $\mathfrak{F}(\chi)$  gleich dem Führer  $\mathfrak{f}(\chi, K/k)$ .*

Setzen wir nämlich

$$\mathfrak{F}_1(\chi) = \frac{\mathfrak{F}(\chi)}{\mathfrak{f}(\chi, K/k)},$$

so gilt noch immer (18), während an Stelle von (20) die einfachere Gleichung

$$\mathfrak{F}_1(\chi_{\psi_1}) = 1$$

tritt. Auf Grund des in 1 bewiesenen Hilfssatzes, folgt jetzt auch für jeden rationalen Charakter  $\mathcal{E}$  die Gleichung  $\mathfrak{F}_1(\mathcal{E}) = 1$ . Nun entsteht aber aus dem Ideal  $\mathfrak{F}_1(\chi)$  bereits durch Potenzieren ein Ideal der Form  $\mathfrak{F}_1(\mathcal{E})$ , so daß jetzt für jeden Charakter gilt:  $\mathfrak{F}_1(\chi) = 1$ . Damit ist unser Satz bewiesen.

Von diesem Ergebnis werden wir zweimal Gebrauch machen.

Erstens denken wir uns den Körper  $K$  zu einem umfassenderen galoisschen Körper  $K'$  erweitert. Ist  $\mathfrak{G}'$  die Gruppe von  $K'/k$  und gehört  $K$  zur Untergruppe  $\mathfrak{H}$ , so ist  $\mathfrak{G}$  mit der Faktorgruppe  $\mathfrak{G}'/\mathfrak{H}$  isomorph und kann gleich mit ihr identifiziert werden. Dabei müssen wir also die bisherigen Gruppenelemente als Nebengruppen betrachten. Jeder Charakter der Gruppe  $\mathfrak{G}$  ist dann auch Charakter in der Gruppe  $\mathfrak{G}'$  und soll im folgenden immer mit dem gleichen Buchstaben bezeichnet werden. Dies geht umso eher, als alle Charakterrelationen in  $\mathfrak{G}'$  erhalten bleiben, auch die für den induzierten Charakter. Setzen wir nun für jeden Charakter von  $\mathfrak{G}$ :

$$\mathfrak{F}(\chi) = \mathfrak{f}(\chi, K'/k),$$

so gilt für dieses Ideal wieder (18) und (20), und es hat für konjugiert algebraische Charaktere den gleichen Wert. Es folgt somit:

$$(21) \quad \mathfrak{f}(\chi, K'/k) = \mathfrak{f}(\chi, K/k).$$

Die Bedeutung der Formel ist die, daß sich die Führer in einem tieferen Sinn als bisher als Invarianten des Körpers  $K$  erweisen.

Zweitens wollen wir annehmen, daß die Gruppe  $\mathfrak{G}$  abelsch ist. Ist  $\chi$  ein einfacher Charakter von  $\mathfrak{G}$ , so setzen wir  $\mathfrak{F}(\chi)$  gleich dem Führer der Klassenkörpertheorie. Für zusammengesetzte Charaktere werde dann  $\mathfrak{F}(\chi)$  so definiert, daß (18) gilt. Dann bedeutet (20) für unsere Funktion nichts anderes, als die Führer-Diskriminanten-Formel der Klassenkörpertheorie<sup>8)</sup>. Daß  $\mathfrak{F}(\chi)$  für konjugiert algebraische Charaktere den gleichen Wert hat, ist selbstverständlich. Also hat sich ergeben:

*Ist  $K/k$  abelsch, so ist der Führer  $\mathfrak{f}(\chi, K/k)$  der bekannte Führer der Klassenkörpertheorie.*

Auf Grund dieser fundamentalen Tatsache hege ich die Hoffnung, daß  $\mathfrak{f}(\chi, K/k)$  auch im nicht-abelschen Fall zu den noch unbekannten Zerlegungsgesetzen in einer analogen Beziehung stehen wird. Doch können wir heute über diese Dinge noch nichts aussagen.

5. Wir wenden uns jetzt der Frage zu, ob  $\mathfrak{f}(\chi, K/k)$  ein ganzes Ideal von  $k$  ist. Da der Exponent schon als nicht negativ erkannt ist, hat man nur noch seine Ganzheit nachzuweisen. Wir müssen also zeigen, daß der Klammerausdruck durch  $e$  teilbar ist. Entsprechend der Zerlegung von  $e$  in  $e_0 p^{R_1}$  gliedert sich dieser Nachweis in den der Teilbarkeit durch  $e_0$  und den der Teilbarkeit durch  $p^{R_1}$ .

Wir beginnen mit der Teilbarkeit durch  $e_0$  und ersetzen im Exponenten den Ausdruck  $p^{R_i} \chi(1) - \chi(\mathfrak{B}_i)$  durch  $i(p^{R_i} \chi(1) - \chi(\mathfrak{B}_i)) - (i-1)(p^{R_i} \chi(1) - \chi(\mathfrak{B}_i))$ . Fassen wir die Glieder des Klammerausdrucks anders zusammen, so entstehen lauter Glieder der Form  $i(p^{R_i} - p^{R_{i+1}})$  und  $i(\chi(\mathfrak{B}_i) - \chi(\mathfrak{B}_{i+1}))$ . Wegen (15) und (16) sind diese Glieder durch  $e_0$  teilbar, also auch der ganze Klammerausdruck.

Die Teilbarkeit durch  $p^{R_1}$  liegt anscheinend wesentlich tiefer. Der Nachweis zerfällt in drei Schritte:

a) Reduktion auf Gruppen von Primzahlpotenzordnung.

Es sei  $V$  der erste Verzweigungskörper, also der zur Untergruppe  $\mathfrak{B}_1$  gehörige Unterkörper von  $K$ .  $\mathfrak{q}$  sei dasjenige Primideal aus  $V$ , das durch  $\mathfrak{B}_1$  teilbar ist. Um die Trägheitsgruppe sowie die Verzweigungsgruppen von  $K/V$  zu bilden, hat man den Durchschnitt von  $\mathfrak{L}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots$  mit  $\mathfrak{B}_1$  zu suchen. Es ist also die neue Trägheitsgruppe  $\mathfrak{B}_1$ , wogegen sich an den Verzweigungsgruppen nichts ändert. Die Ordnung der neuen Trägheitsgruppe ist gerade  $p^{R_1}$ . Nun ist  $\chi$  auch Charakter der Untergruppe  $\mathfrak{B}_1$ . Wir bilden jetzt den Führer  $\mathfrak{f}(\chi, K/V)$  und vergleichen den Beitrag des Primideals  $\mathfrak{q}$  mit dem Beitrag von  $\mathfrak{p}$  zu  $\mathfrak{f}(\chi, K/k)$ . Der Beitrag von  $\mathfrak{q}$  lautet:

$$\frac{1}{p^{R_1}} (p^{R_1} \chi(1) - \chi(\mathfrak{B}_1) + p^{R_1} \chi(1) - \chi(\mathfrak{B}_1) + p^{R_1} \chi(1) - \chi(\mathfrak{B}_2) + \dots).$$

Die ersten beiden Summanden sind dabei belanglos, da sie ohnehin ganz sind. Wenn wir zeigen könnten, daß  $\mathfrak{f}(\chi, K/V)$  ein ganzes Ideal von  $V$  ist, so würde auch die Teilbarkeit des alten Klammerausdrucks durch  $p^{R_1}$  folgen, da ja die Exponenten in den wesentlichen Punkten übereinstimmen.  $\mathfrak{B}_1$  aber ist eine Gruppe der Ordnung  $p^{R_1}$ .

b) Wir können also annehmen, daß  $\mathfrak{G}$  eine Gruppe von Primzahlpotenzordnung ist. Nach einem Satz von Blichfeldt<sup>9)</sup> ist dann jede Darstellung der Gruppe eine monomiale, es ist also jeder Charakter induziert von einem Charakter ersten Grades einer

<sup>8)</sup> Siehe Anm. 1.  $\chi_{v_1}$  gehört zur regulären Darstellung von  $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$ , enthält also jeden einfachen Charakter von  $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$  genau einmal.

<sup>9)</sup> A. Speiser, Gruppentheorie, 1. Aufl. Satz 130 oder 2. Aufl. Satz 169. Eine ähnliche Anwendung dieses Satzes hat Herr Hasse im zweiten Teil seines in Anm. 1 zitierten Berichts, Ergänzungsband 6 (1930), Seite 160, gegeben.

geeigneten Untergruppe. Sei  $\psi$  der Charakter der Untergruppe und  $\Omega$  der zur Untergruppe gehörige Zwischenkörper. Wir können jetzt Formel (19) anwenden und sehen: Wenn  $\mathfrak{f}(\psi, K/\Omega)$  ein ganzes Ideal des Körpers  $\Omega$  ist, so ist auch  $\mathfrak{f}(\chi, K/k)$  ein Ideal aus  $k$ .

c) Es ist also die weitere Annahme erlaubt, daß es sich bei  $\chi$  um einen Charakter ersten Grades handelt. Jeder solche Charakter aber ist schon Charakter einer zyklischen Faktorgruppe und Formel (21) lehrt, daß wir die Gruppe  $\mathfrak{G}$  als zyklische Gruppe annehmen dürfen. Wir stützen uns nun auf die Klassenkörpertheorie. Wir wissen nämlich, daß dann  $\mathfrak{f}(\chi, K/k)$  mit dem Führer der Klassenkörpertheorie übereinstimmt. Also ist unser Ideal selbstverständlich ein Ideal des Körpers.

← Damit ist gezeigt:

*Das Ideal  $\mathfrak{f}(\chi, K/k)$  ist ein ganzes Ideal aus  $k$ .*

Durch diesen Satz gewinnen die vorigen Resultate überhaupt erst Bedeutung, da man jetzt erst erkennt, daß es sich in der Tat um Aufspaltungen der Diskriminanten im Körper selbst handelt.

Wir führen noch die folgende Redeweise ein:

Ist der Charakter  $\chi$  für keinen echten galoisschen Unterkörper Charakter, so wollen wir sagen, daß der Führer  $\mathfrak{f}(\chi, K/k)$  genau zu  $K$  gehört.

Im Führer  $\mathfrak{f}(\chi, K/k)$  können nur die Teiler der Diskriminante von  $K/k$  aufgehen. Gehört  $\mathfrak{f}(\chi, K/k)$  aber genau zu  $K$ , so gehen alle Diskriminantenteiler auch wirklich auf. Da nämlich keiner der Beiträge  $\frac{1}{e} (p^{R_i} \chi(1) - \chi(\mathfrak{B}_i))$  negativ ist, kann  $\mathfrak{p}$  nur dann nicht in  $\mathfrak{f}(\chi, K/k)$  aufgehen, wenn insbesondere  $e\chi(1) - \chi(\mathfrak{T}) = 0$  ist. Aus der Bemerkung am Schlusse von 2 folgt jetzt, daß die zu  $\chi$  gehörige Darstellung sich für jedes Element von  $\mathfrak{T}$  auf eine Einheitsmatrix reduzieren muß. Nun bilden aber die Elemente von  $\mathfrak{G}$ , für die das eintritt, einen Normalteiler von  $\mathfrak{G}$  und  $\chi$  ist Charakter für die Faktorgruppe dieses Normalteilers. Nach unserer Voraussetzung muß sich also diese Gruppe auf das Einheitselement reduzieren, und ein gleiches gilt für die Gruppe  $\mathfrak{T}$ . Also geht  $\mathfrak{p}$  nicht in der Diskriminante von  $K/k$  auf. Es sei gestattet, die bisher gefundenen Eigenschaften noch einmal übersichtlich zusammenzustellen:

*Das Ideal*

$$(17) \quad \mathfrak{f}(\chi, K/k) = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\frac{1}{e} [e\chi(1) - \chi(\mathfrak{T}) + p^{R_1}\chi(1) - \chi(\mathfrak{B}_1) + p^{R_2}\chi(1) - \chi(\mathfrak{B}_2) + \dots]}$$

*ist ein ganzes Ideal aus  $k$ . Ist  $K/k$  abelsch, so ist es der Führer der Klassenkörpertheorie. Gehört es genau zu  $K/k$ , so ist es durch alle Diskriminantenteiler und nur durch diese teilbar. Es gelten die Formeln:*

$$(18) \quad \mathfrak{f}(\chi_1 + \chi_2, K/k) = \mathfrak{f}(\chi_1, K/k) \mathfrak{f}(\chi_2, K/k),$$

$$(19) \quad \mathfrak{f}(\chi_{\psi}, K/k) = \mathfrak{D}_{\Omega/k}^{v(1)} \cdot N_{\Omega/k}(\mathfrak{f}(\psi, K/\Omega)),$$

$$(21) \quad \mathfrak{f}(\chi, K/k) = \mathfrak{f}(\chi, K'/k), \text{ wenn } K' \text{ Oberkörper von } K \text{ ist.}$$

*Die Diskriminante eines Zwischenkörpers gewinnt man mit Hilfe der Formel:*

$$(20) \quad \mathfrak{D}_{\Omega/k} = \mathfrak{f}(\chi_{\psi_1}, K/k)$$

*oder, wenn  $\chi_{\psi_1} = \sum_{v=1}^h g_v \chi_v$  die Zerlegung von  $\chi_{\psi_1}$  in einfache Charaktere bedeutet,*

$$(20a) \quad \mathfrak{D}_{\Omega/k} = \prod_{v=1}^h (\mathfrak{f}(\chi_v, K/k))^{g_v}$$

*( $\chi_{\psi_1}$  ist einfach der Charakter der Permutationsgruppe zu der  $\Omega$  gehört). Speziell:*

$$(20b) \quad \mathfrak{D}_{K/k} = \prod_{v=1}^h (\mathfrak{f}(\chi_v, K/k))^{\chi_v(1)}.$$

Wir können jetzt auch leicht einige Minkowskische Sätze über Diskriminanten auf die Führer übertragen.

6. Wählen wir als Grundkörper den Körper der rationalen Zahlen, so geht im Führer sicher mindestens eine Primzahl auf, wenn  $\chi$  nicht der Hauptcharakter ist. Denn ist  $K'$  der Körper zu dem  $\mathfrak{f}(\chi)$  genau gehört, so geht in der Diskriminante von  $K'$  mindestens eine Primzahl auf.

Ist der Grundkörper  $k$  beliebig, bedeutet  $\mathfrak{f}$  ein gegebenes Ideal und  $n$  eine gegebene ganze rationale Zahl, so kann man nach allen Körpern  $K/k$  fragen, zu denen  $\mathfrak{f}$  als Führer genau gehört, wobei wir den Grad von  $K$  auf  $n$  festlegen. Da wir die Diskriminantenteiler von  $K/k$  als die Teiler von  $\mathfrak{f}$  kennen gelernt haben, können wir nun mit Hilfe von Satz 80 des Hilbertschen Zahlberichtes schließen, daß für die Diskriminante nur endlich viele Möglichkeiten in Frage kommen. Zu gegebener Relativediskriminante und gegebenem Grade gibt es aber nach Minkowski nur endlich viele Körper. Damit ist bewiesen:

*Ist  $\mathfrak{f}$  ein gegebenes Ideal aus  $k$ , so gibt es nur endlich viele relativ galoissche Oberkörper festen Grades, zu denen  $\mathfrak{f}$  als Charakter genau gehören kann. Ist der Grundkörper insbesondere der Körper der rationalen Zahlen, so kann die Zahl 1 nur als Führer für den Hauptcharakter auftreten, gehört also genau nur zum Grundkörper selbst.*

Ohne Beweis sei wenigstens noch der Umstand erwähnt, daß der eben ausgesprochene Satz noch richtig bleibt, wenn man statt dem Körpergrade nur dem Grade des Charakters die Einschränkung auferlegt. Der Nachweis dieser Tatsache ist etwas umständlich.

Endlich weise ich noch darauf hin, daß ich in einer weiteren Arbeit zeigen werde, daß die Führer in der Theorie der  $L$ -Reihen mit allgemeinen Gruppencharakteren dieselbe Rolle spielen, wie bei  $L$ -Reihen mit abelschen Charakteren <sup>10)</sup>.

<sup>10)</sup> Siehe Anm. 2.

---

Eingegangen 9. November 1930.