

Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik

Verlag: de Gruyter

Jahr: 1931

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN243919689_0165

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN243919689_0165|LOG_0015

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Algebraische Repräsentanten der Funktionen „bis auf eine Menge vom Maße Null“.

Von J. v. Neumann in Berlin.

Einleitung.

Wir befassen uns mit komplexwertigen, beschränkten, für alle reellen x , und nur diese, definierten Funktionen $f(x)$, die im Lebesgueschen Sinne meßbar sind. (Verallgemeinerungen auf andere Definitionsbereiche sollen am Schlusse erfolgen.) Wenn zwei Funktionen dieser Art, $f(x)$ und $g(x)$, als äquivalent bezeichnet werden, falls die Menge aller x , für die $f(x) \neq g(x)$ ist, das Lebesguesche Maß 0 hat — in Symbolen $f \sim g$ — so erkennt man: $f \sim f$, aus $f \sim g$ folgt $g \sim f$, aus $f \sim g, g \sim h$ folgt $f \sim h$. Folglich zerfällt die Gesamtheit unserer f in paarweise elementfremde Äquivalenzklassen untereinander äquivalenter f .

Unter einem „allgemeineren Polynom“ $p(u_1, \dots, u_n)$ verstehen wir ein Linearaggregat beliebiger (aber endlich vieler) Potenzprodukte der $u_1, \dots, u_n$ und ihrer komplex-konjugierten $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ (mit komplexen Zahlen als Koeffizienten). Da aus $f_1 \sim g_1, \dots, f_n \sim g_n$ $p(f_1, \dots, f_n) \sim p(g_1, \dots, g_n)$ folgt, hängt die Klasse $\mathfrak{R}$ von $p(f_1, \dots, f_n)$ nur von den Klassen $\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_n$ der $f_1, \dots, f_n$ ab. Wir nennen $\mathfrak{R}$ darum $p(\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_n)$ — insbesondere die Klasse der Konstanten a wieder a .

Im Zusammenhang mit gewissen Untersuchungen über unitäre Funktionaloperatoren, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll, hat Herr A. Haar im mündlichen Gespräch mit dem Verfasser die folgende Frage formuliert: Ist es möglich jeder Äquivalenzklasse $\mathfrak{R}$ einen Repräsentanten $f = f_{\mathfrak{R}}$ (eine Funktion aus $\mathfrak{R}$!) derart zuzuordnen, daß für jedes allgemeinere Polynom $p(u_1, \dots, u_n)$ und irgendwelche Klassen $\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_n$ aus $p(\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_n) = 0$ identisch $p(f_{\mathfrak{R}_1}(x), \dots, f_{\mathfrak{R}_n}(x)) \equiv 0$ folgt? (D. h.: Wenn für irgendwelche Funktionen $f_1(x), \dots, f_n(x)$ $p(f_1(x), \dots, f_n(x)) = 0$ mit Ausnahme einer x -Menge vom Lebesgueschen Maße 0 gilt, so gilt $p(f_{\mathfrak{R}_1}(x), \dots, f_{\mathfrak{R}_n}(x)) = 0$ für alle x ohne Ausnahme — und dabei sollen $f_{\mathfrak{R}_1}(x), \dots, f_{\mathfrak{R}_n}(x)$ nur von den bzw. Klassen $\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_n$ von $f_1(x), \dots, f_n(x)$ abhängen, und auch selbst zu diesen Klassen gehören)¹⁾).

¹⁾ Es ist erwähnenswert, daß diese Aufgabe ohne die Zusatzbedingung der Beschränktheit unlösbar ist. Sei nämlich ξ eine komplexe Zahl, und $f^*(x), g_\xi^*(x), e^*(x)$ die Repräsentanten der Klassen der Funktionen

$f(x) = x, g_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-\xi} & \text{für } x \neq \xi \\ 0 & \text{für } x = \xi \end{cases}, e(x) = 1$. Da für $x \neq \xi$ $(f(x) - \xi e(x)) g_\xi(x) - e(x) = 0$ gilt, muß für alle x $(f^*(x) - \xi e^*(x)) g_\xi^*(x) - e^*(x) = 0$ sein. Daher kann nie auf einmal $f^*(x) = \xi, e^*(x) = 1$ sein, insbesondere nicht $f^*(\xi) = \xi, e^*(\xi) = 1$.

Variieren wir nun ξ , dann müssen die Mengen der ξ mit $f^*(\xi) \neq f(\xi) (= \xi)$ und der ξ mit $e^*(\xi) \neq e(\xi) (= 1)$ zusammen alle ξ umfassen — was unmöglich ist, da beide das Lebesguesche Maß 0 haben sollten.

Ein solches Repräsentanten-System $f_{\mathfrak{M}}(x)$ wollen wir ein algebraisches Repräsentanten-System der Äquivalenzklassen nennen. Im ersten Teile der Arbeit zeigen wir, daß solche Systeme existieren, im zweiten nehmen wir einige Verallgemeinerungen vor, und beweisen einige allgemeingültige Eigenschaften dieser Systeme.

I. Beweis des Existenssatzes.

1. Wir betrachten zuerst im Lebesgueschen Sinne meßbare Mengen reeller Zahlen. Zwei solche Mengen $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ mögen äquivalent heißen, wenn ihre „Unterschiedsmenge“ $(\mathfrak{M} \dot{+} \mathfrak{N}) - (\mathfrak{M} \times \mathfrak{N})$ das Lebesguesche Maß 0 hat — in Symbolen $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$. Es ist $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}$, aus $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ folgt $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{M}$, aus $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{P}$ folgt $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{P}$. Folglich zerfällt die Gesamtheit unserer $\mathfrak{M}$ in paarweise elementfremde Äquivalenzklassen untereinander äquivalenter $\mathfrak{M}$. Da aus $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{M}_2 \sim \mathfrak{N}_2$ $\mathfrak{M}_1 \dot{+} \mathfrak{M}_2 \sim \mathfrak{N}_1 \dot{+} \mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2 \sim \mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2 \sim \mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}_2$ folgt, hängt die Klasse von $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ bzw. $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ bzw. $\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2$ nur von den Klassen $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2$ von $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ ab. Wir nennen darum diese Klasse $\mathfrak{f}_1 \dot{+} \mathfrak{f}_2$ bzw. $\mathfrak{f}_1 \times \mathfrak{f}_2$ bzw. $\mathfrak{f}_1 - \mathfrak{f}_2$ — und die Klasse der leeren Menge 0 wieder 0, die der Menge 1 aller Zahlen wieder 1.

Wir wollen nun jeder Äquivalenzklasse $\mathfrak{f}$ einen Repräsentanten $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}}$ (eine Menge aus $\mathfrak{f}$!) derart zuordnen, daß jede Klassen-Relation $\mathfrak{f}_1 \times \cdots \times \mathfrak{f}_p \times (1 - \mathfrak{f}_1) \times \cdots \times (1 - \mathfrak{f}_q) = 0$ die Mengen-Relation $\mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_1} \times \cdots \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_p} \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_1}) \times \cdots \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_q}) = 0$ nach sich zieht. (D. h.: Wenn für irgendwelche Mengen $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_p, \mathfrak{M}'_1, \dots, \mathfrak{M}'_q$ $\mathfrak{M}_1 \times \cdots \times \mathfrak{M}_p \times (1 - \mathfrak{M}'_1) \times \cdots \times (1 - \mathfrak{M}'_q)$ das Lebesguesche Maß Null hat, so ist $\mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_1} \times \cdots \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_p} \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}'_1}) \times \cdots \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}'_q})$ leer — und dabei sollen $\mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_1}, \dots, \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_p}, \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}'_1}, \dots, \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}'_q}$ nur von den bzw. Klassen der $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_p, \mathfrak{M}'_1, \dots, \mathfrak{M}'_q$ abhängen, und auch selbst zu diesen Klassen gehören.) —

Wenn $\mathfrak{M}$ eine meßbare Menge ist, und x eine reelle Zahl, so können wir für jedes $\delta > 0$ das Intervall $I_{\delta}(x) : x - \delta, x + \delta$ bilden, und den Bruch $\frac{\text{Maß}(I_{\delta}(x) \times \mathfrak{M})}{2\delta}$ betrachten. Für $\delta \rightarrow 0$ heiße sein Limes superior $\bar{\Delta}(x, \mathfrak{M})$, sein Limes inferior $\underline{\Delta}(x, \mathfrak{M})$, es ist stets $0 \leq \underline{\Delta} \leq \bar{\Delta} \leq 1$. Nach einem bekannten Satze von Lebesgue gilt in ganz $\mathfrak{M}$, mit Ausnahme einer Menge vom Maße 0, $\underline{\Delta}(x, \mathfrak{M}) = 1$ ²⁾; und da offenbar $\bar{\Delta}(x, \mathfrak{M}) = 1 - \underline{\Delta}(x, 1 - \mathfrak{M})$ ist, ergibt Anwendung auf $1 - \mathfrak{M}$: Außerhalb $\mathfrak{M}$ gilt, mit Ausnahme einer Menge vom Maße 0, $\bar{\Delta}(x, \mathfrak{M}) = 0$. Im ersteren Falle ist natürlich auch $\bar{\Delta} = 1$, im letzteren auch $\underline{\Delta} = 1$. Da aus $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ $\bar{\Delta}(x, \mathfrak{M}) = \bar{\Delta}(x, \mathfrak{N})$, $\underline{\Delta}(x, \mathfrak{M}) = \underline{\Delta}(x, \mathfrak{N})$ folgt, hängen $\bar{\Delta}, \underline{\Delta}$ nur von der Klasse $\mathfrak{f}$ von $\mathfrak{M}$ ab, wir können also auch $\bar{\Delta}(x, \mathfrak{f}), \underline{\Delta}(x, \mathfrak{f})$ schreiben. Die Menge aller x mit $\bar{\Delta}(x, \mathfrak{f}) = \underline{\Delta}(x, \mathfrak{f}) = 1$ heiße $\mathfrak{M}_{\mathfrak{f}}$, die Komplementärmenge aller x mit $\bar{\Delta}(x, \mathfrak{f}) = \underline{\Delta}(x, \mathfrak{f}) = 0$ heiße $\mathfrak{M}_{\mathfrak{f}}'$; nach dem vorhin Gesagten gehören $\mathfrak{M}_{\mathfrak{f}}, \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}}'$ beide zu $\mathfrak{f}$.

Man erkennt mühelos die folgenden Eigenschaften der $\mathfrak{M}_{\mathfrak{f}}, \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}}'$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_0 &= \mathfrak{M}_0 = 0; & \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}} &< \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}}'; & \mathfrak{M}_{1-\mathfrak{f}} &= 1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}}, \\ \mathfrak{M}_{1-\mathfrak{f}} &= 1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}}; & \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_1} \dot{+} \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_2} &< \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_1 \dot{+} \mathfrak{f}_2} < \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_1} \dot{+} \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_2} &= \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_1 \dot{+} \mathfrak{f}_2}; \\ \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_1 \times \mathfrak{f}_2} &= \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_1} \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_2} < \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_1 \times \mathfrak{f}_2}' < \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_1}' \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_2}'. & - \end{aligned}$$

Da für ein Repräsentanten-System $\mathfrak{M}_{\mathfrak{f}}$ u. a. $\mathfrak{f}_1 \times \mathfrak{f}_2 \times (1 - \mathfrak{f}_3) = 0$ $\mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_1} \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_2} \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_3}) = 0$ nach sich zieht, d. h. $\mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_1} \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_2} < \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_3}$; ferner $(1 - \mathfrak{f}_1) \times \mathfrak{f}_3 = 0$ $(1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_1}) \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_3} = 0$ und $(1 - \mathfrak{f}_2) \times \mathfrak{f}_3 = 0$ $(1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_2}) \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_3} = 0$, also $\mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_1} > \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_3}$ und $\mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_2} > \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_3}$, d. h. $\mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_1} \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_2} > \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_3}$ — so haben alle drei Klassen-Relationen $\mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_1} \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_2} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{f}_3}$ zur Folge. Da sie für $\mathfrak{f}_1 \times \mathfrak{f}_2 = \mathfrak{f}_3$

²⁾ Vgl. Lebesgue, Annales de l'École Normale (3) 27 (1910), S. 407.

wirklich alle drei bestehen, ist $\mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_1} \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_2} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_1 \times \mathfrak{t}_2}$. Durch analoge Betrachtungen zeigt man $\mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_1} \dot{+} \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_2} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_1 \dot{+} \mathfrak{t}_2}$, $\mathfrak{M}_{1-\mathfrak{t}} = 1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}}$, sowie $\mathfrak{M}_0 = 0$, $\mathfrak{M}_1 = 1$. Da nun $\mathfrak{M}_{\mathfrak{t}}$ und $\underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{t}}$ nur diese Bedingungen nicht restlos erfüllen, sind sie als Repräsentanten unbrauchbar. Wir werden aber sehen, daß die Repräsentanten-Wahl mit $\overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{t}} < \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}} < \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{t}}$ gelingt.

Hierzu berufen wir uns auf den Wohlordnungssatz: Die Menge K aller Äquivalenzklassen $\mathfrak{f}$ sei nach einem geeigneten Wohlordnungstypus α_0 wohlgeordnet, d. h. die $\mathfrak{f}$ den Ordnungszahlen $\alpha < \alpha_0$ eineindeutig zugeordnet: $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_\alpha$ entspreche α . Wir wollen die $\mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_\alpha}$ so bestimmen, daß allgemein

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\beta_1}} \times \cdots \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\beta_p}} \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\gamma_1}}) \times \cdots \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\gamma_q}}) < \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{t}_{\beta_1}} \times \cdots \times \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{t}_{\beta_p}} \times (1 - \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{t}_{\gamma_1}}) \times \cdots \times (1 - \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{t}_{\gamma_q}})$$

gilt. Dies hat die Konsequenz, daß die $\mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_\alpha}$ eine Repräsentation bilden, wie wir es w. o. wünschten; denn für $\mathfrak{f}_{\beta_1} \times \cdots \times \mathfrak{f}_{\beta_p} \times (1 - \mathfrak{f}_{\gamma_1}) \times \cdots \times (1 - \mathfrak{f}_{\gamma_q}) = 0$ ist die rechte Seite $= \underline{\mathfrak{M}}_0 = 0$, also auch die linke $= 0$. Ferner folgt daraus $\mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_\alpha} < \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{t}_\alpha}$. Ersetzen wir hierin $\mathfrak{f}_\alpha$ durch $1 - \mathfrak{f}_\alpha$ (das ja auch ein $\mathfrak{f}_\alpha$ ist), so ergibt sich $\mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_\alpha} > \overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{t}_\alpha}$ — also $\overline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{t}_\alpha} < \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_\alpha} < \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{t}_\alpha}$, d. h. das Repräsentanten-System ist von der vorher beschriebenen Art. Die Konstruktion dieser $\mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_\alpha}$ vollziehen wir durch transfinite Rekursion: Nehmen wir an, daß für ein $\alpha_1 < \alpha_0$ die Definition der $\mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_\alpha}$ mit $\alpha < \alpha_1$ bereits erfolgt sei, und daß die obige Mengen-Implikation für alle $\beta_1, \dots, \beta_p, \gamma_1, \dots, \gamma_q < \alpha_1$ erfüllt ist — es gilt dann $\mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\alpha_1}}$ so zu definieren, daß diese Beziehung auch für alle $\beta_1, \dots, \beta_p, \gamma_1, \dots, \gamma_q \leq \alpha_1$ zutrifft. Da wir keine wirklich neue Bedingung vor uns haben, solange nicht ein β oder γ tatsächlich $= \alpha_1$ ist; da ferner, wenn sowohl ein β als auch ein $\gamma = \alpha_1$ ist, auf beiden Seiten unserer Relation 0 steht, also wieder keine Bedingung vorliegt; und da schließlich, wenn mehrere β (oder γ) $= \alpha_1$ sind, alle bis auf eines fortgelassen werden können, ohne unsere Beziehung zu ändern — so dürfen wir annehmen, daß genau ein $\beta = \alpha_1$ ist, und kein γ , oder umgekehrt. Sei dies β bzw. γ das letzte, d. h. β_p bzw. γ_q , schreiben wir noch $p + 1$ bzw. $q + 1$ für p bzw. q , so lauten die für $\mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\alpha_1}}$ hinzukommenden Bedingungen so:

$$\left. \begin{aligned} &\mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\beta_1}} \times \cdots \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\beta_p}} \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\gamma_1}}) \times \cdots \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\gamma_q}}) \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\alpha_1}} \\ &< \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{t}_{\beta_1}} \times \cdots \times \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{t}_{\beta_p}} \times (1 - \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{t}_{\gamma_1}}) \times \cdots \times (1 - \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{t}_{\gamma_q}}) \times \mathfrak{f}_{\alpha_1}, \\ &\mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\beta_1}} \times \cdots \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\beta_p}} \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\gamma_1}}) \times \cdots \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\gamma_q}}) \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\alpha_1}}) \\ &< \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{t}_{\beta_1}} \times \cdots \times \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{t}_{\beta_p}} \times (1 - \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{t}_{\gamma_1}}) \times \cdots \times (1 - \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{t}_{\gamma_q}}) \times \mathfrak{f}_{\alpha_1}. \end{aligned} \right\} \beta_1, \dots, \beta_p, \gamma_1, \dots, \gamma_q < \alpha_1,$$

Diese Bedingungen können auch so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\alpha_1}} < \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{t}_{\beta_1}} \times \cdots \times \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{t}_{\beta_p}} \times (1 - \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{t}_{\gamma_1}}) \times \cdots \times (1 - \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{t}_{\gamma_q}}) \times \mathfrak{f}_{\alpha_1} \\ &\dot{+} (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\beta_1}}) \times \cdots \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\beta_p}} \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\gamma_1}}) \times \cdots \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\gamma_q}}), \\ &\mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\alpha_1}} > (1 - \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{t}_{\beta_1}} \times \cdots \times \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{t}_{\beta_p}} \times (1 - \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{t}_{\gamma_1}}) \times \cdots \times (1 - \underline{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{t}_{\gamma_q}}) \times (1 - \mathfrak{f}_{\alpha_1})) \\ &\times \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\beta_1}} \times \cdots \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\beta_p}} \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\gamma_1}}) \times \cdots \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\gamma_q}}). \end{aligned}$$

Damit diese Bedingungen durch ein $\mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\alpha_1}}$ für alle Komplexe $\beta_1, \dots, \beta_p, \gamma_1, \dots, \gamma_q < \alpha_1$ simultan befriedigt werden können, muß die rechte Seite der ersten Gleichung für jeden Komplex $\beta_1, \dots, \beta_p, \gamma_1, \dots, \gamma_q < \alpha_1$ sein, als die rechte Seite der zweiten für jeden Komplex $\beta'_1, \dots, \beta'_p, \gamma'_1, \dots, \gamma'_q < \alpha_1$. (Dann können wir $\mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\alpha_1}}$ z. B. der Vereinigungsmenge der rechten Seiten der zweiten Gleichung für alle zugelassenen β, γ -Komplexe gleichsetzen.) Die genannte Mengen-Implikation lautet:

$$\begin{aligned}
& (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\beta'_1}} \times \dots \times \mathfrak{t}_{\beta'_r} \times (1 - \mathfrak{t}_{\gamma'_1}) \times \dots \times (1 - \mathfrak{t}_{\gamma'_s}) \times (1 - \mathfrak{t}_{\alpha_1})) \\
& \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\beta'_1}} \times \dots \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\beta'_r}} \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\gamma'_1}}) \times \dots \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\gamma'_s}}) \\
& < \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\beta_1}} \times \dots \times \mathfrak{t}_{\beta_p} \times (1 - \mathfrak{t}_{\gamma_1}) \times \dots \times (1 - \mathfrak{t}_{\gamma_q}) \times \mathfrak{t}_{\alpha_1} \\
& \dot{+} (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\beta_1}} \times \dots \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\beta_p}} \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\gamma_1}}) \times \dots \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\gamma_q}})),
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\beta'_1}} \times \dots \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\beta'_r}} \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\gamma'_1}}) \times \dots \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\gamma'_s}}) \\
& \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\beta_1}} \times \dots \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\beta_p}} \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\gamma_1}}) \times \dots \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\gamma_q}}) \\
& < \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\beta'_1}} \times \dots \times \mathfrak{t}_{\beta'_r} \times (1 - \mathfrak{t}_{\gamma'_1}) \times \dots \times (1 - \mathfrak{t}_{\gamma'_s}) \times (1 - \mathfrak{t}_{\alpha_1}) \\
& \dot{+} \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\beta_1}} \times \dots \times \mathfrak{t}_{\beta_p} \times (1 - \mathfrak{t}_{\gamma_1}) \times \dots \times (1 - \mathfrak{t}_{\gamma_q}) \times \mathfrak{t}_{\alpha_1}^3).
\end{aligned}$$

Nun ist die rechte Seite

$$\begin{aligned}
& = \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\beta'_1}} \times \dots \times \mathfrak{t}_{\beta'_r} \times (1 - \mathfrak{t}_{\gamma'_1}) \times \dots \times (1 - \mathfrak{t}_{\gamma'_s}) \times (1 - \mathfrak{t}_{\alpha_1}) \dot{+} \mathfrak{t}_{\beta_1} \times \dots \times \mathfrak{t}_{\beta_p} \times (1 - \mathfrak{t}_{\gamma_1}) \times \dots \times (1 - \mathfrak{t}_{\gamma_q}) \times \mathfrak{t}_{\alpha_1} \\
& > \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\beta'_1}} \times \dots \times \mathfrak{t}_{\beta'_r} \times (1 - \mathfrak{t}_{\gamma'_1}) \times \dots \times (1 - \mathfrak{t}_{\gamma'_s}) \times \mathfrak{t}_{\beta_1} \times \dots \times \mathfrak{t}_{\beta_p} \times (1 - \mathfrak{t}_{\gamma_1}) \times \dots \times (1 - \mathfrak{t}_{\gamma_q})^4).
\end{aligned}$$

Somit genügt es, wenn

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\beta'_1}} \times \dots \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\beta'_r}} \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\beta_1}} \times \dots \times \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\beta_p}} \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\gamma'_1}}) \times \dots \\
& \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\gamma'_s}}) \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\gamma_1}}) \times \dots \times (1 - \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\gamma_q}}) \\
& < \mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_{\beta'_1}} \times \dots \times \mathfrak{t}_{\beta'_r} \times \mathfrak{t}_{\beta_1} \times \dots \times \mathfrak{t}_{\beta_p} \times (1 - \mathfrak{t}_{\gamma'_1}) \times \dots \times (1 - \mathfrak{t}_{\gamma'_s}) \times (1 - \mathfrak{t}_{\gamma_1}) \times \dots \times (1 - \mathfrak{t}_{\gamma_q})
\end{aligned}$$

gilt — aber dies folgt, da $\beta'_1, \dots, \beta'_r, \beta_1, \dots, \beta_p, \gamma'_1, \dots, \gamma'_s, \gamma_1, \dots, \gamma_q < \alpha_1$ sind, aus unserer Prämisse.

Damit ist die Konstruktion des Repräsentanten-Systems der $\mathfrak{M}_{\mathfrak{t}_\alpha}, \alpha < \alpha_0$, d. h. der $\mathfrak{M}_{\mathfrak{t}}$, durchgeführt.

2. Wir betrachten nunmehr alle reellen, beschränkten, für alle reellen x , und nur diese, definierten Funktionen $f(x)$, die im Lebesgueschen Sinne meßbar sind. Unter Beachtung dieser Realitäts-Bedingung können wir die in der Einleitung beschriebene Äquivalenzklassen-Einteilung auch für diese Funktionen vornehmen, und ein algebraisches Repräsentanten-System $f_{\mathfrak{R}}(x)$ ihrer Klassen $\mathfrak{R}$ suchen — wobei wir an Stelle der komplexen allgemeineren Polynome sinngemäß die reellen gewöhnlichen Polynome treten lassen. D. h. wir beschränken die Fragestellung der Einleitung aufs Reelle. Diese Aufgabe werden wir nun, mit Hilfe des Mengen-Repräsentanten-Systems $\mathfrak{M}_{\mathfrak{t}}$, lösen.

a sei eine reelle rationale Zahl. $\mathfrak{N}(a, f)$ sei die Menge aller x mit $f(x) < a$, $\mathfrak{f}(a, f)$ die Klasse von $\mathfrak{N}(a, f)$, wir definieren $f^*(x)$ als untere Grenze aller rationalen a , für die x zu $\mathfrak{N}(a, f)$ gehört. Da $f(x)$ beschränkt ist, also für ein festes C stets $\leq C, \geq -C$, ist für $a > C$ bzw. $a \leq -C$ $\mathfrak{N}(a, f) = 1$ bzw. $= 0$, $\mathfrak{f}(a, f) = 1$ bzw. $= 0$, $\mathfrak{M}_{\mathfrak{t}(a, f)} = 1$ bzw. $= 0$, also x sicher Element bzw. sicher nicht Element von $\mathfrak{M}_{\mathfrak{t}(a, f)}$ — somit ist $f^*(x)$ endlich und $\leq C, \geq -C$, d. h. beschränkt. Für $f \sim g$ ist $\mathfrak{f}(a, f) = \mathfrak{f}(a, g)$ für jedes a , also $f^* \equiv g^*$, d. h. f^* hängt nur von der Klasse von f ab.

Die Unterschiedsmenge von $\mathfrak{N}(a, f)$ und $\mathfrak{M}_{\mathfrak{t}(a, f)}$ ist eine Menge vom Lebesgueschen Maße 0, also auch die Vereinigungsmenge derselben für alle rationalen a (bei festem f). Gehört aber x nicht zu ihr, so gehört es $\mathfrak{M}_{\mathfrak{t}(a, f)}$ dann und nur dann an, wenn es zu $\mathfrak{N}(a, f)$

³⁾ Die Mengen-Implikationen $(1 - \mathfrak{R}) \times \mathfrak{S} < \mathfrak{R}' \dot{+} (1 - \mathfrak{S}')$ und $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}' < \mathfrak{R} \dot{+} \mathfrak{R}'$ sind, wie man leicht verifiziert, gleichwertig.

⁴⁾ Wegen der leicht verifizierbaren Mengen-Implikation $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S} \dot{+} \mathfrak{R}' \times (1 - \mathfrak{S}) > \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}'$ ist

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{R} \times \mathfrak{S} \dot{+} \mathfrak{R}' \times (1 - \mathfrak{S})} > \mathfrak{M}_{\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}'}$$

gehört, d. h. wenn $f(x) < a$ ist — also ist $f^*(x)$ dann die untere Grenze aller rationalen a mit $f(x) < a$, d. h. $f^*(x) = f(x)$. Die Menge aller x mit $f^*(x) \neq f(x)$ ist somit eine vom Lebesgueschen Maße 0, also $f^* \sim f$, d. h. f^* gehört zur Klasse von f .

Die Klasse von f sei $\mathfrak{R}$, wir nennen $f^* f_{\mathfrak{R}}: f_{\mathfrak{R}}$ hängt nur von $\mathfrak{R}$ ab, und gehört dazu. —

Sei $\varphi(u_1, \dots, u_n)$ eine (reelle) stetige Funktion, das in der Einleitung über allgemeinere Polynome Gesagte gilt wörtlich auch für $\varphi(u_1, \dots, u_n)$: Die Klasse von $\varphi(f_1, \dots, f_n)$ hängt nur von den bzw. Klassen $\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_n$ der $f_1, \dots, f_n$ ab, und möge $\varphi(\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_n)$ genannt werden. Wir nehmen nun $\varphi(\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_n) = 0$ an, und wollen zeigen, daß für alle x $\varphi(f_{\mathfrak{R}_1}, \dots, f_{\mathfrak{R}_n}) = 0$ gilt.

Sei also per Absurdum $\varphi(f_{\mathfrak{R}_1}, \dots, f_{\mathfrak{R}_n}) \neq 0$ für ein $x = x_0$. Da $\varphi(u_1, \dots, u_n)$ stetig ist, existieren n Paare rationaler Zahlen $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ mit $a_1 < f_{\mathfrak{R}_1}(x_0) < b_1, \dots, a_n < f_{\mathfrak{R}_n}(x_0) < b_n$, so daß für alle $a_1 \leq u_1 < b_1, \dots, a_n \leq u_n < b_n$ $\varphi(u_1, \dots, u_n) \neq 0$ ist. Also ist $\varphi(f_{\mathfrak{R}_1}(x), \dots, f_{\mathfrak{R}_n}(x)) \neq 0$, wenn $a_1 \leq f_{\mathfrak{R}_1}(x) < b_1, \dots, a_n \leq f_{\mathfrak{R}_n}(x) < b_n$ ist. Da nun bis auf eine Menge vom Lebesgueschen Maße 0 $f_{\mathfrak{R}_1}(x) = f_1(x), \dots, f_{\mathfrak{R}_n}(x) = f_n(x)$ ist, ist bis auf eine solche x -Menge, $\varphi(f_1(x), \dots, f_n(x)) \neq 0$ Folge von $a_1 \leq f(x) < b_1, \dots, a_n \leq f_n(x) < b_n$. Und da wegen $\varphi(\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_n) = 0$ mit Ausnahme einer ebensolchen x -Menge $\varphi(f_1(x), \dots, f_n(x)) = 0$ ist, kann $a_1 \leq f_1(x) < b_1, \dots, a_n \leq f_n(x) < b_n$ nur in einer Menge vom Lebesgueschen Maße 0 gelten. Somit hat die Menge $\mathfrak{R}(b_1, f_1) \times (1 - \mathfrak{R}(a_1, f_1)) \times \dots \times \mathfrak{R}(b_n, f_n) \times (1 - \mathfrak{R}(a_n, f_n))$ das Maß 0, es ist $\mathfrak{f}(b_1, f_1) \times (1 - \mathfrak{f}(a_1, f_1)) \times \dots \times \mathfrak{f}(b_n, f_n) \times (1 - \mathfrak{f}(a_n, f_n)) = 0$, und daher $\mathfrak{M}_{(\mathfrak{f}_1, f_1)} \times (1 - \mathfrak{M}_{(\mathfrak{f}_1, f_1)}) \times \dots \times \mathfrak{M}_{(\mathfrak{f}_n, f_n)} \times (1 - \mathfrak{M}_{(\mathfrak{f}_n, f_n)}) = 0$. Nun gehört nach Definition von $f_{\mathfrak{R}_v}(x_0)$, und wegen $a_v < f_v(x_0) < b_v$, x_0 nicht zu $\mathfrak{M}_{(\mathfrak{f}_v, f_v)}$, wohl aber zu $\mathfrak{M}_{(\mathfrak{f}_v, f_v)}$ — also gehört es zu $\mathfrak{M}_{(\mathfrak{f}_v, f_v)} \times (1 - \mathfrak{M}_{(\mathfrak{f}_v, f_v)})$. Da dies für alle $v = 1, \dots, n$ gilt, gehört x_0 auch zum oberstehenden Durchschnitt dieser Mengen, obwohl derselbe leer sein sollte. Das ist unmöglich.

Somit bilden die $f_{\mathfrak{R}}$ tatsächlich ein Repräsentanten-System von der gewünschten Art.

3. Jetzt können wir uns den in der Einleitung beschriebenen komplexwertigen, beschränkten, für alle reellen x , und nur diese, definierten $f(x)$, die im Lebesgueschen Sinne meßbar sind, zuwenden. $\Re f(x), \Im f(x)$ sind reell, also Funktionen von der in 2. diskutierten Art, ihre Klassen hängen nur von der Klasse $\mathfrak{R}$ von $f(x)$ ab ($\Re u$ und $\Im u$ sind stetig, sogar allgemeinere Polynome: $\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\bar{u}, \frac{1}{2i}u - \frac{1}{2i}\bar{u}$), sie mögen $\Re \mathfrak{R}$ bzw. $\Im \mathfrak{R}$ genannt werden. Wir definieren nunmehr: $f_{\mathfrak{R}} = f_{\Re \mathfrak{R}} + i f_{\Im \mathfrak{R}}$. $f_{\mathfrak{R}}$ hängt nur von $\mathfrak{R}$ ab, und da bis auf eine x -Menge vom Lebesgueschen Maße 0 $f_{\Re \mathfrak{R}}(x) = \Re f(x), f_{\Im \mathfrak{R}}(x) = \Im f(x)$ gilt, also $f_{\mathfrak{R}}(x) = \Re f(x) + i \Im f(x) = f(x)$, gehört $f_{\mathfrak{R}}$ zu $\mathfrak{R}$.

Schließlich sei $\varphi(u_1, \dots, u_n)$ eine (für alle Komplexen $(u_1, \dots, u_n)$ stetige Funktion. Wir definieren die Klasse $\varphi(\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_n)$ wie in der Einleitung und in 2. Seien $v_1, w_1, \dots, v_n, w_n$ $2n$ reelle Variable, wir setzen $\varphi(v_1, w_1, \dots, v_n, w_n) = \varphi(v_1 + iw_1, \dots, v_n + iw_n)$. Dann ist, wie man leicht verifiziert, $\varphi(\Re \mathfrak{R}_1, \Im \mathfrak{R}_1, \dots, \Re \mathfrak{R}_n, \Im \mathfrak{R}_n) = \varphi(\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_n)$. Aus $\varphi(\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_n) = 0$ folgt nunmehr $\varphi(\Re \mathfrak{R}_1, \Im \mathfrak{R}_1, \dots, \Re \mathfrak{R}_n, \Im \mathfrak{R}_n) = 0$, also nach 2. für alle x $\varphi(f_{\Re \mathfrak{R}_1}(x), f_{\Im \mathfrak{R}_1}(x), \dots, f_{\Re \mathfrak{R}_n}(x), f_{\Im \mathfrak{R}_n}(x)) = 0$, und daher nach Definition der $f_{\mathfrak{R}_1}(x), \dots, f_{\mathfrak{R}_n}(x)$ $\varphi(f_{\mathfrak{R}_1}(x), \dots, f_{\mathfrak{R}_n}(x)) = 0$.

Die $f_{\mathfrak{R}}(x)$ bilden also ein Repräsentanten-System von der gewünschten Art. Man

beachte, daß wir die charakteristische Eigenschaft derselben nicht nur für die allgemeineren Polynome $p(u_1, \dots, u_n)$ bewiesen haben, sondern für alle stetigen Funktionen $\varphi(u_1, \dots, u_n)$ überhaupt!

II. Eigenschaften der Repräsentanten-Systeme und Verallgemeinerungen.

1. In der Einleitung verlangten wir für die algebraischen Repräsentanten-Systeme der Äquivalenzklassen $f_{\mathfrak{R}}$ bloß für allgemeinere Polynome, daß aus $\varphi(\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_n) = 0$ $\varphi(f_{\mathfrak{R}_1}, \dots, f_{\mathfrak{R}_n}) = 0$ (für alle x !) folge — bei unserer Konstruktion erreichten wir jedoch, daß dies für alle stetigen φ galt. Dieser auffallende Umstand hat seine Erklärung darin, daß allgemein aus dem Erfülltsein unserer Bedingung für alle allgemeineren Polynome dasselbe für sämtliche stetigen Funktionen φ folgt, und dies soll jetzt bewiesen werden.

Sei nämlich $\varphi(\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_n) = 0$, und trotzdem $\varphi(f_{\mathfrak{R}_1}(x_0), \dots, f_{\mathfrak{R}_n}(x_0)) \neq 0$. Da $\varphi(u_1, \dots, u_n)$ stetig ist, gibt es also ein $\delta > 0$, so daß für $|u_1 - f_{\mathfrak{R}_1}(x_0)|^2 + \dots + |u_n - f_{\mathfrak{R}_n}(x_0)|^2 < \delta^2$ auch noch $\varphi(u_1, \dots, u_n) \neq 0$ ist. Da mit Ausnahme einer Menge vom Maße 0 $\varphi(f_{\mathfrak{R}_1}(x), \dots, f_{\mathfrak{R}_n}(x)) = 0$ ist, ist dann auch $|f_{\mathfrak{R}_1}(x) - f_{\mathfrak{R}_1}(x_0)|^2 + \dots + |f_{\mathfrak{R}_n}(x) - f_{\mathfrak{R}_n}(x_0)|^2 \geq \delta^2$. Wir setzen nun

$$g(x) = \text{Min} \left(\frac{1}{|f_{\mathfrak{R}_1}(x) - f_{\mathfrak{R}_1}(x_0)|^2 + \dots + |f_{\mathfrak{R}_n}(x) - f_{\mathfrak{R}_n}(x_0)|^2}, \frac{1}{\delta^2} \right),$$

dies ist eine beschränkte und meßbare Funktion. Nach obigem gilt, mit Ausnahme einer Menge vom Maße 0,

$$(|f_{\mathfrak{R}_1}(x) - f_{\mathfrak{R}_1}(x_0)|^2 + \dots + |f_{\mathfrak{R}_n}(x) - f_{\mathfrak{R}_n}(x_0)|^2) g(x) - 1 = 0.$$

Nun ist $(|u_1 - f_{\mathfrak{R}_1}(x_0)|^2 + \dots + |u_n - f_{\mathfrak{R}_n}(x_0)|^2) u_{n+1} - 1$ ein allgemeineres Polynom in $u_1, \dots, u_n, u_{n+1}$, und dieses ist für $u_1 = f_{\mathfrak{R}_1}(x), \dots, u_n = f_{\mathfrak{R}_n}(x), u_{n+1} = g(x)$, mit Ausnahme einer Menge vom Maße 0, gleich 0. $f_{\mathfrak{R}_1}(x), \dots, f_{\mathfrak{R}_n}(x)$ haben die Klassen $\mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_n$, $g(x)$ habe die Klasse $\mathfrak{Q}$, dann gilt für die Repräsentanten

$$(|f_{\mathfrak{R}_1}(x) - f_{\mathfrak{R}_1}(x_0)|^2 + \dots + |f_{\mathfrak{R}_n}(x) - f_{\mathfrak{R}_n}(x_0)|^2) f_{\mathfrak{Q}}(x) - 1 = 0$$

für alle x . Trotzdem ist linke Seite für $x = x_0$ offenkundig $= -1 \neq 0$. Dies ist ein Widerspruch.

2. An Stelle des Lebesgueschen Maßes, daß allen unseren bisherigen Betrachtungen zugrunde lag, können wir auch andere, verwandte Begriffsbildungen treten lassen.

So können wir z. B. eine für alle reellen x , und nur diese, definierte Funktion $\varphi(x)$ einführen, welche monoton nicht-abnehmend ist, und an die Stelle der Mengen vom Maße 0 diejenigen Mengen treten lassen, über welche erstreckt das Lebesgue-Stieltjesche Integral $\int d\varphi(x) = 0$ ist.

Unter Verwendung einer auf Lebesgue zurückgehenden Definition des Lebesgue-Stieltjeschen Integrals, können wir dies auch so machen. Sei $\psi(y)$ die Inverse von $\varphi(x)$, die, um auch streckenweise konstante oder stellenweise unstetige $\varphi(x)$ (wie sie z. B. in der Operatoretheorie vorkommen) mit zu erfassen, etwa so definiert wird: $\psi(y)$ ist die obere Grenze aller x , für die $\varphi(x) \leq y$ ist (findet dies nie oder immer statt, so sei $\psi(y) = -\infty$ bzw. $= +\infty$ — oder auch undefiniert). Das über eine Menge $\mathfrak{M}$ erstreckte Integral $\int d\varphi(x)$ ist dann gleich dem Maß der Menge $\mathfrak{M}_\varphi$ aller y , für die $\psi(y)$ zu $\mathfrak{M}$ gehört. Wir lassen also an Stelle der Mengen $\mathfrak{M}$ vom Maße 0 diejenigen $\mathfrak{M}$ treten, für welche $\mathfrak{M}_\varphi$ das Maß 0 hat.

Ferner betrachten wir, an Stelle der beschränkten, im Lebesgueschen Sinne meßbaren Funktionen $f(x)$, diejenigen beschränkten $f(x)$, für die $f(\varphi(x))$ im Lebesgueschen

Sinne meßbar ist. Und unter $f \sim_{\varphi} g$ verstehen wir, daß für die Menge $\mathfrak{M}$ aller x mit $f(x) \neq g(x)$ $\mathfrak{M}_{\varphi}$ das Maß 0 hat. Somit bedeutet $f \sim_{\varphi} g$ $f(\varphi) \sim g(\varphi)$. Für diesen neuen Äquivalenzbegriff $\sim_{\varphi}$ können wir wiederum Äquivalenzklassen bilden, und unser ursprüngliches Problem erneut formulieren.

Da jedoch das neue Problem für die f mit dem alten für die $f(\varphi)$ gleichwertig ist ⁵⁾, existieren auch jetzt die Repräsentanten. —

Eine andere Verallgemeinerungs-Möglichkeit wäre die, die f nicht von einer, sondern von mehreren reellen Variablen abhängen zu lassen. (Hierher gehört auch der Fall, daß die Variable x komplex ist.) Da es eindeutige und maßgleiche Abbildungen des n -dimensionalen Raumes auf die Zahlengerade gibt ⁶⁾, gelten unsere Resultate auch dann; übrigens gelten unsere Überlegungen ohnehin beinahe ohne jede Änderung auch im Raume.

⁵⁾ Allerdings brauchen die Repräsentanten, die nach unserem ursprünglichen Verfahren gewonnen werden, nicht in den Konstanzintervallen von φ konstant zu sein, was die $f(\varphi)$ gerade charakterisiert. Wir hätten uns aber bei unserem ursprünglichen Verfahren konsequent auf solche Funktionen beschränken können, die in den Konstanzintervallen von φ konstant sind (bzw. auf solche Mengen, die von jedem dieser Intervalle keinen oder alle Punkte enthalten), und wären genau so ans Ziel gekommen.

⁶⁾ Vgl. z. B. a. a. O. ²⁾.

Eingegangen 1. Februar 1931.