

Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik

Verlag: de Gruyter

Jahr: 1932

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN243919689_0167

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN243919689_0167|LOG_0021

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Normalbasis bei Körpern ohne höhere Verzweigung.

Von Emmy Noether in Göttingen.

Unter Normalbasis eines Galoisschen Zahlkörpers K/k versteht man eine aus konjugierten Elementen bestehende Basis der Hauptordnung $\mathfrak{O}$ von K in bezug auf die Hauptordnung $\mathfrak{o}$ von k . Eine notwendige Bedingung für die Existenz einer solchen Basis ist bekanntlich ¹⁾, daß in K/k keine höheren Verzweigungskörper auftreten. Das gilt auch noch, wenn man sich auf eine Stelle beschränkt, d. h. zur p -adischen Erweiterung k_p von k und der zugehörigen K_p von K übergeht. Ich zeige im folgenden die Gültigkeit der Umkehrung:

Für alle Stellen p , wo p nicht im Grad von K/k aufgeht, existiert eine Normalbasis. Insbesondere also: Besitzt K/k keine höhere Verzweigung, so existiert an jeder Verzweigungsstelle eine Normalbasis; die Diskriminante wird dort das Quadrat einer Gruppendeterminante.

Dieser letzteren Aussage ist zuzufügen, daß — entgegen einer Vermutung von E. Artin — der Übergang zu seinen Führern ²⁾ noch weitere Überlegungen notwendig macht: die Zerlegung der Gruppendeterminante nach irreduzibeln Charakteren ergibt verallgemeinerte Wurzelzahlen; eine passende Zusammenfassung ergibt eine Zerlegung in dem durch die Charaktere erweiterten Grundkörper. In den einfachsten Fällen kann ich diese neuen Faktoren mit den Artinschen Führern identifizieren, vermöge der idealtheoretischen Zerlegung der Wurzelzahlen ^{2a)}. Weiter möchte ich bemerken, daß auch im allgemeinen Fall, wo keine Normalbasis existiert, eine Aufspaltung in verallgemeinerte Wurzelzahlen immer möglich ist, vermöge einer „Kompositionsreihe nach Galoismodul“; und daß sich daraus analog wie oben eine Zerlegung im erweiterten Grundkörper ergibt; hier beginnen wieder idealtheoretische Fragen.

Der Beweis für die Existenz der Normalbasis unter den obigen Voraussetzungen beruht darauf, daß $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ aufgefaßt als Galoismodul — d. h. als $\mathfrak{o}$ -Modul mit den Substitutionen der Galoisschen Gruppe als Operatorenbereich — operatorisomorph wird

¹⁾ Vgl. A. Speiser, Gruppendeterminante und Körperdiskriminante, § 6. Math. Ann. 77 (1916), S. 546—562.

²⁾ E. Artin, Über die gruppentheoretische Struktur der Diskriminante. J. f. M. 164 (1931), S. 1—11.

^{2a)} [6. 10. 31.] Daß auch allgemein noch idealtheoretische Überlegungen notwendig sein werden, zeigt das folgende, mir von M. Deuring mitgeteilte — beliebig zu variierende — Beispiel einer *nicht maximalen* Ordnung, deren Diskriminante sich als Quadrat der Gruppendeterminante darstellen läßt, während konjugierten Charakteren *verschiedene* Idealfaktoren entsprechen:

Es sei k der Körper der fünften Einheitswurzeln, $K = k(\sqrt[5]{2})$. Betrachtet wird die Ordnung $[1, \sqrt[5]{2/2}, \sqrt[5]{2^2}, \sqrt[5]{2^3}, \sqrt[5]{2^4}]$; und zwar an der Stelle (2), wo sie nach den Betrachtungen dieser Note eine Normalbasis besitzt. Die Zerlegung nach den Charakteren ergibt für die zugehörige Gruppendeterminante gerade die obigen Basiselemente als Faktoren. Die „Führer“ werden also — außer 1 —: $2\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{2^4}$; $\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt[5]{2^3}$; $\sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[5]{2^2}$; $\sqrt[5]{2^4} \cdot 2\sqrt[5]{2}$, d. h. 4, 2, 2, 4, sind also für konjugierte Charaktere verschieden.

zu einem (einseitigen) Ideal des mit $\mathfrak{o}$ erweiterten ganzzahligen Gruppenrings. Dieser stellt an allen gewöhnlichen Verzweigungsstellen eine maximale Ordnung dar — Ideale in maximalen Ordnungen p -adischer halbeinfacher Systeme sind aber Hauptideale³⁾, entstehen also hier aus einem Element durch die Substitutionen der Gruppe bzw. des Gruppenrings. Das bedeutet, auf den Galoismodul zurückschließend, gerade die Existenz der Normalbasis. — An den höheren Verzweigungsstellen geht der ganzzahlige Gruppenring in eine nichtmaximale Ordnung, das $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ zugeordnete Ideal in ein Nichthauptideal über.

Alle diese Überlegungen bleiben offenbar erhalten, wenn es sich um Funktionskörper einer Veränderlichen handelt, derart, daß die Charakteristik des Konstantenkörpers nicht im Grad von K/k aufgeht.

§ 1. Der p -adisch erweiterte ganzzahlige Gruppenring.

$\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{o}_p$ mögen die Hauptordnungen eines algebraischen Zahlkörpers k und seiner p -adischen Erweiterung k_p bedeuten, wo p ein Primideal aus k . Weiter bedeute $(\mathfrak{G})$ den rationalzahligen, $[\mathfrak{G}]$ den ganzzahligen Gruppenring einer Gruppe $\mathfrak{G}$ von der Elementezahl n . Unter $(\mathfrak{G})_k$ bzw. $(\mathfrak{G})_{k_p}$ wird der Gruppenring mit Koeffizienten aus k bzw. k_p verstanden; entsprechend unter $[\mathfrak{G}]_{\mathfrak{o}}$ bzw. $[\mathfrak{G}]_{\mathfrak{o}_p}$ die Erweiterung des ganzzahligen Gruppenrings zu einem solchen mit Koeffizienten aus $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{o}_p$.

Es werden also $(\mathfrak{G})_k$ und $(\mathfrak{G})_{k_p}$ Systeme ohne Radikal (halbeinfache Systeme) und $[\mathfrak{G}]_{\mathfrak{o}}$ bzw. $[\mathfrak{G}]_{\mathfrak{o}_p}$ Ordnungen aus $(\mathfrak{G})_k$ bzw. $(\mathfrak{G})_{k_p}$.

Satz 1. *Geht das Primideal p nicht in der Elementezahl n von $\mathfrak{G}$ auf, so wird $[\mathfrak{G}]_{\mathfrak{o}_p}$ eine maximale Ordnung von $(\mathfrak{G})_{k_p}$; geht p in n auf, so wird $[\mathfrak{G}]_{\mathfrak{o}_p}$ nicht maximal.*

Die Diskriminante des ganzzahligen Gruppenrings, also auch diejenige von $[\mathfrak{G}]_{\mathfrak{o}}$ und von $[\mathfrak{G}]_{\mathfrak{o}_p}$, wird gleich einer Potenz der Elementezahl n ⁴⁾. Geht also p nicht in n auf, so wird die Diskriminante von $[\mathfrak{G}]_{\mathfrak{o}_p}$ eine Einheit. Das heißt aber, daß $[\mathfrak{G}]_{\mathfrak{o}_p}$ sich bei Festhaltung von $\mathfrak{o}_p$ nicht zu einer umfassenderen Ordnung erweitern läßt; denn einer solchen Erweiterung entspricht das Abspalten eines quadratischen Nichteinheitsfaktors von der Diskriminante. $\mathfrak{o}_p$ war aber schon als Hauptordnung, also als maximal in k_p , vorausgesetzt. Damit ist der — im folgenden allein benutzte — erste Teil von Satz 1 bewiesen.

Geht dagegen p in n auf, so stellt die der Einsdarstellung entsprechende direkte Summe

$$\mathfrak{C} = E^{(1)}[\mathfrak{G}]_{\mathfrak{o}_p} + (1 - E^{(1)})[\mathfrak{G}]_{\mathfrak{o}_p}$$

eine echte Erweiterung von $[\mathfrak{G}]_{\mathfrak{o}_p}$ dar. Denn wegen $E^{(1)} = \frac{1}{n} \sum S$ wird $\mathfrak{C}$ echte Erweiterung; $\mathfrak{C}$ ist Ordnung mit den (abhängigen) Erzeugenden $E^{(1)}$, $(1 - E^{(1)})S$ mit S in $\mathfrak{G}$ ($E^{(1)}S = E^{(1)}$).

Satz 2. *Geht p nicht in n auf, so wird jedes (ganze oder gebrochene) Ideal in bezug auf $[\mathfrak{G}]_{\mathfrak{o}_p}$ Hauptideal.*

³⁾ Vgl. H. Hasse, Über p -adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlensysteme, Sätze 46 und 47. Math. Ann. **104** (1931), S. 495—534. Bei kommutativen Systemen gilt die Hauptidealeigenschaft schon beim Übergang zum Quotientenring nach p in k ; man kann sich also auf diese schwächere Erweiterung zur Definition der Stelle beschränken, wenn es sich um Abelsche Gruppen und Körper handelt.

⁴⁾ Vgl. z. B. E. Noether, Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie, § 26. Math. Ztschr. **30** (1929), S. 641—692.

Denn nach Satz 1 wird $[\mathfrak{G}_{\mathfrak{o}_p}]$ maximale Ordnung eines p -adischen halbeinfachen Systems; die Ideale werden also Hauptideale ⁵⁾).

§ 2. Galoismoduln, Operatorisomorphie, Normalbasis.

Es sei K/k Galoissch, $\mathfrak{G}$ die Gruppe; z^S bedeute das aus z durch die Substitution S aus $\mathfrak{G}$ entstehende Element von K . Die Substitutionen von $\mathfrak{G}$ erzeugen auf K/k , aufgefaßt als k -Modul — also additive Abelsche Gruppe mit k als Operatorenbereich —, Operatorautomorphismen. Folglich läßt K/k sich als Modul in bezug auf $(\mathfrak{G})_k$ erklären durch die Festsetzung:

$$z(\sum S_i c_i) = \sum z^{S_i} c_i \text{ mit } z \text{ in } K, S_i \text{ in } \mathfrak{G}, c_i \text{ in } k.$$

Definition. Jeder $(\mathfrak{G})_k$ -Modul aus K/k wird als rationaler Galoismodul bezeichnet. Ebenso werden die $[\mathfrak{G}]_{\mathfrak{o}}$ -Moduln aus K/k als ganze Galoismoduln bezeichnet — insbesondere ist also $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ ein ganzer Galoismodul.

Satz 3. Als rationaler Galoismodul ist K/k zu $(\mathfrak{G})_k$ operatorisomorph.

Das folgt daraus, daß K/k stets eine Körper-Normalbasis besitzt, d. h. eine aus konjugierten Elementen z^S bestehende k -Basis ⁶⁾. Die Zuordnung

$$S \rightarrow z^S, \sum S_i c_i \rightarrow \sum z^{S_i} c_i \text{ für } c_i \text{ in } k, \text{ also } ST \rightarrow z^{ST}$$

ergibt Operatorhomomorphismus, der wegen des gleichen Rangs nach k ein Isomorphismus wird.

Satz 4. Als ganzer Galoismodul ist $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ zu einem $[\mathfrak{G}]_{\mathfrak{o}}$ -Modul aus $(\mathfrak{G})_k$ — vom Höchstrang n — operatorisomorph. Ebenso ist $\mathfrak{D}_p/\mathfrak{o}_p$ zu einem $[\mathfrak{G}]_{\mathfrak{o}_p}$ -Modul vom Rang n aus $(\mathfrak{G})_{k_p}$ operatorisomorph.

Denn der $(\mathfrak{G})_k$ -Isomorphismus $K/k \rightarrow (\mathfrak{G})_k$ ordnet dem $[\mathfrak{G}]_{\mathfrak{o}}$ -Modul $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ einen $[\mathfrak{G}]_{\mathfrak{o}}$ -Modul vom Rang n aus $(\mathfrak{G})_k$ zu. Weiter läßt sich der $(\mathfrak{G})_k$ -Isomorphismus zu einem $(\mathfrak{G})_{k_p}$ -Isomorphismus von K_p/k_p zu $(\mathfrak{G})_{k_p}$ erweitern, indem man nur die c_i in der Zuordnung von Satz 3 alle Elemente aus k_p durchlaufen läßt. Dieser Isomorphismus induziert dann den $[\mathfrak{G}]_{\mathfrak{o}_p}$ -Isomorphismus von $\mathfrak{D}_p/\mathfrak{o}_p$. Dabei ist K_p/k_p als hyperkomplexes System über k_p aufzufassen. K_p/k_p entsteht durch Koeffizientenerweiterung aus K/k ; wird im allgemeinen System mit Nullteilern, und zwar Summe von (isomorphen) Körpern, also halbeinfaches System.

Satz 5. An jeder Stelle p , die nicht im Grad n von K/k aufgeht, besitzt $\mathfrak{D}_p/\mathfrak{o}_p$ eine Normalbasis ⁷⁾.

Denn nach Satz 1 wird $[\mathfrak{G}]_{\mathfrak{o}_p}$ dort maximale Ordnung; die $[\mathfrak{G}]_{\mathfrak{o}_p}$ -Moduln vom Rang n aus $(\mathfrak{G})_{k_p}$ werden also ganze oder gebrochene Ideale, und zwar Hauptideale nach Satz 2. Wird also das $\mathfrak{D}_p/\mathfrak{o}_p$ zugeordnete Ideal gleich $W[\mathfrak{G}]_{\mathfrak{o}_p}$, so besitzt es die $\mathfrak{o}_p$ -Basis WS_i ; der Operatorisomorphismus (Satz 4) sagt aus, daß w^{S_i} eine $\mathfrak{o}_p$ -Basis von $\mathfrak{D}_p/\mathfrak{o}_p$ darstellt, wenn w das W zugeordnete Element aus $\mathfrak{D}_p/\mathfrak{o}_p$ bedeutet. Die n konjugierten Elemente w^{S_i} bilden also eine Normalbasis von $\mathfrak{D}_p/\mathfrak{o}_p$.

⁵⁾ Hasse, a. a. O. Die Hauptidealeigenschaft ist dort nur für einfache Systeme bewiesen, daraus folgt sie aber nach bekannten Schlüssen auch für halbeinfache. Denn die Komponenten einer maximalen Ordnung sind wieder maximal; die Komponenten des betrachteten Ideals werden also Hauptideale etwa mit Basis a_i . Dann wird $a = \sum a_i$ Basis des ursprünglichen Ideals. — Für Abelsche Gruppen vgl. noch Anmerkung ³⁾.

⁶⁾ Denn ist $a_1, \dots, a_n$ eine Basis von K/k und bedeuten die u_i Unbestimmte, so sind die $\sum u_i a_i^S$ linear unabhängig, wenn S die Elemente von $\mathfrak{G}$ durchläuft; folglich lassen die u_i sich auch zu Elementen aus k spezialisieren, so daß die lineare Unabhängigkeit erhalten bleibt.

⁷⁾ Im Fall Abelscher Körper kann dabei die Stelle nach Anmerkung ³⁾ und ⁵⁾ auch durch den Quotientenring definiert werden.

Geht p in n auf, so kann der $\mathfrak{D}_p/\mathfrak{o}_p$ zugeordnete Modul *nicht* Hauptmodul sein, da in diesem Fall keine Normalbasis existieren kann.

Zusätzliche Bemerkung zu Satz 3. Aus der in Satz 3 bewiesenen Operatorisomorphie von $(\mathfrak{G})_k$ zu K/k ⁸⁾ folgen die *Speiserschen Resultate über das Kleinsche Formenproblem*⁹⁾, die sich so formulieren lassen:

Jede in k irreduzible Darstellung der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{G}$ von K/k wird durch einen irreduzibeln (rationalen) Galoismodul aus K/k erzeugt; jede absolut irreduzible durch einen Galoismodul aus K_Z/Z . Dabei bedeutet Z einen k umfassenden Zerfällungskörper der entsprechenden Komponente des Gruppenrings; K_Z/Z ist als hyperkomplexes System über Z aufzufassen, entsteht durch Koeffizientenerweiterung aus K/k . Insbesondere bleibt K_Z Körper, wenn Z sich zu K in bezug auf k fremd wählen läßt, also K_Z/Z akzesorische Erweiterung wird (der von Speiser behandelte Fall).

Die Aussage selbst folgt vermöge der Operatorisomorphie aus der entsprechenden für $(\mathfrak{G})_k$ bzw. $(\mathfrak{G})_Z$, wo die irreduzibeln Ideale (in bezug auf $(\mathfrak{G})_k$ bzw. $(\mathfrak{G})_Z$) die Darstellung erzeugen.

Ist $v_1, \dots, v_t$ Basis eines solchen Galoismoduls, $S \rightarrow \bar{S}$ die entsprechende Darstellung, so gilt also: $\begin{pmatrix} \vdots \\ v_i^S \\ \vdots \end{pmatrix} = \bar{S} \begin{pmatrix} \vdots \\ v_i \\ \vdots \end{pmatrix}$. Das ist aber die Formulierung von Klein und Speiser.

§ 3. Die Diskriminante als Gruppendeterminante bei Körpern ohne höhere Verzweigung.

Zur Zerlegung der Diskriminante genügt es bekanntlich, die Zerlegung an den einzelnen Verzweigungsstellen zu betrachten; bei Körpern ohne höhere Verzweigung handelt es sich also nur um Stellen mit Normalbasis.

Satz 6. *Bei Galoiskörpern K/k ohne höhere Verzweigung wird die Diskriminante an jeder Verzweigungsstelle gleich dem Quadrat der Gruppendeterminante der Galoisschen Gruppe, die Unbestimmten durch die Normalbasis ersetzt. Den irreduzibeln Darstellungen entsprechend, zerfällt die Gruppendeterminante in verallgemeinerte Wurzelzahlen; die Diskriminante in Ideale des mit den Charakteren erweiterten Grundkörpers, wobei konjugiert-komplexen Charakteren dieselben Ideale entsprechen.*

Denn mit w^S als Normalbasis wird die Diskriminante Δ gleich dem Quadrat von

$$D = |w^{ST^{-1}}|; \quad S, T \text{ in } \mathfrak{G}.$$

D ist aber Gruppendeterminante mit den w^S an Stelle von Unbestimmten x_S .

Die Zerlegung in Wurzelzahlen ergibt sich aus Schlüssen von Speiser a. a. O. Sei

$$D = D_1^{f_1} \cdots D_t^{f_t} \quad \text{bzw.} \quad M = f_1 M_1 + \cdots + f_t M_t$$

die Zerlegung der Gruppendeterminante bzw. Gruppenmatrix entsprechend den absolut irreduzibeln Darstellungen. Bedeutet $S \rightarrow \bar{S}$ die M_λ entsprechende Darstellung, wo die

⁸⁾ Der Beweis setzt offenbar nur voraus, daß K Galoissch von erster Art über k , und daß k unendlich viele Elemente besitzt. Diese letztere Einschränkung ist unnötig: M. Deuring hat sich einen auch für Körper von endlich vielen Elementen gültigen Beweis von Satz 3 überlegt, aus dem umgekehrt die Existenz der Körper-Normalbasis folgt. Zugleich ergibt sich so ein Beweis für die Existenz des primitiven Elements, der gleichmäßig für Körper von endlich und von unendlich vielen Elementen läuft.

⁹⁾ A. a. O. Der Begriff des Galoismoduls ist von dort abstrahiert. — Geht die Charakteristik von k in n auf, so handelt es sich um Kompositionsreihen nach Galoismoduln und ihre irreduzibeln Faktoren.

$\bar{S}$ im erweiterten Grundkörper liegen, so kommt also:

$$M_\lambda = \sum_S w^S \bar{S}, \quad M_\lambda^{T^{-1}} = \sum_S w^{S^{T^{-1}}} \bar{S} = \sum_R w^R \bar{R} \bar{T} = M_\lambda \bar{T},$$

und durch Übergang zur Determinante:

$$D_\lambda^{T^{-1}} = D_\lambda |\bar{T}| = D_\lambda \varepsilon_T.$$

Damit sind die D_λ als *verallgemeinerte Wurzelzahlen* erkannt; ε_T wird als Determinante von $\bar{T}$ gleich einer Einheitswurzel (irreduzible Darstellung der Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$ nach der Kommutatorgruppe). Im Fall zyklischer Gruppen werden die D_λ einfach die Lagrangeschen Wurzelzahlen $\sum w^S \chi_\lambda(S)$.

Allgemein liegen die D_λ in dem aus K_p/k_p dadurch hervorgehenden hyperkomplexen System, daß der Koeffizientenbereich k_p mit dem entsprechenden Charakter erweitert wird; und zwar handelt es sich um *ganze* Größen dieses Systems. Denn die mit Unbestimmten x_S gebildete Determinante besitzt ganze Zahlen aus dem Körper des Charakters als Koeffizienten; die w^S aber sind ganze Elemente aus K_p .

Um von der Zerlegung der Gruppendeterminante zu derjenigen der Diskriminante überzugehen, wird jeweils eine *Darstellung mit ihrer adjungierten zusammengefaßt*. Bezeichnen $\lambda, \bar{\lambda}$ adjungierte Darstellungen, so gilt also gleichzeitig:

$$D_\lambda^{T^{-1}} = D_\lambda \varepsilon_T, \quad D_{\bar{\lambda}}^{T^{-1}} = D_{\bar{\lambda}} \varepsilon_T^{-1};$$

zugleich werden die für Unbestimmte x_S gebildeten, zu $\lambda, \bar{\lambda}$ gehörigen Determinanten konjugiert-komplex; während allgemein konjugierten Charakteren bei Unbestimmten x_S konjugierte Determinanten entsprechen.

Setzt man also $\Delta_\lambda = D_\lambda D_{\bar{\lambda}}$, so ist nur der reelle Unterkörper des λ -ten Charakters zu adjungieren, und es gilt:

$$\Delta_\lambda^T = \Delta_\lambda \text{ für alle } T \text{ aus } \mathfrak{G};$$

und damit ¹⁰⁾: Δ_λ liegt in dem mit dem reellen Unterkörper des λ -ten Charakters erweiterten Grundkörper.

Die Diskriminantenzerlegung

$$\Delta = \Delta_1^{\iota_1} \cdots \Delta_t^{\iota_t}$$

ist also eine solche in dem durch die reellen Unterkörper der Charaktere erweiterten Grundkörper, wobei konjugiert-komplexen Charakteren dieselben Faktoren entsprechen. Für die übrigen konjugierten Charaktere kann ohne weiteres nichts geschlossen werden [vgl. ^{2a)}].

Damit ist Satz 6 in allen Teilen bewiesen. Wenn sich nachweisen läßt, daß die aus den Δ_λ erzeugten Ideale in Wirklichkeit schon im Grundkörper k liegen und für konjugierte Charaktere gleich werden, stimmen sie mit den Artinschen Führern überein, sobald man nur den zusammengesetzten Charakteren die entsprechenden Potenzprodukte der Δ_λ zuordnet. Denn es gilt sowohl die Funktionalgleichung wie die — aus der Normalbasis direkt folgende (vgl. Speiser a. a. O.) — Tatsache, daß den Einsdarstellungen

¹⁰⁾ Da es sich um hyperkomplexe Koeffizientenerweiterung eines Körpers handelt, muß der übliche Schluß der Galoisschen Theorie modifiziert werden. Sei P der in Betracht kommende Erweiterungskörper von k_p und

$$(K_p)_P = (K_p)_P e^{S_1} + \cdots + (K_p)_P e^{S_r}$$

die direkte Summenzerlegung in Körper. Dann wird $(K_p)_P e^{S_i}/Pe^{S_i}$ Galoissch (die Gruppe eine Untergruppe der Zerlegungsgruppe eines Primfaktors von p) und die e^{S_i} konjugiert in bezug auf die Nebengruppen. Aus $\Delta_\lambda^T = \Delta_\lambda$ folgt zunächst, daß die i -te Komponente von Δ_λ in Pe^{S_i} liegt, also etwa gleich $\gamma_i e^{S_i}$ wird mit γ_i in P . Weiter folgt daraus wegen der Konjugiertheit der e^{S_i} , daß alle γ_i gleich sind, also tatsächlich $\Delta_\lambda = \gamma \sum e^{S_i} = \gamma$ in P liegt.

der Untergruppen die Diskriminanten der zugehörigen Unterkörper entsprechen. Aus dem Übereinstimmen an jeder Stelle folgt aber das Übereinstimmen der vollen Ideale. Beschränkt man sich auf rational irreduzible Charaktere, so ergeben die angeführten Tatsachen das Übereinstimmen. Für die absolut irreduzibeln Charaktere soll das Übereinstimmen im allereinfachsten Fall noch direkt bestätigt werden:

Satz 7. *Ist k der Körper der rationalen Zahlen, K/k zyklisch von zur Diskriminante primem Primzahlgrad l — also ohne höhere Verzweigung —, so sind die aus den Δ_λ erzeugten Ideale für die nicht-Einsdarstellungen untereinander gleich und stimmen mit dem Führer von K/k überein.*

Das folgt aus der bekannten Zerlegung der Wurzelzahlen ¹¹⁾. An einer Verzweigungsstelle p von K/k gilt nämlich für k_ϵ , den Körper der l -ten Einheitswurzeln, und für K_ϵ (K_ϵ bleibt Körper, da k_ϵ zu K fremd und die p -adische Erweiterung nach ⁷⁾ hier überflüssig):

$$(p) = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{l-1}, \quad \mathfrak{p}_i = \mathfrak{P}_i^l$$

mit $\mathfrak{p}$ in k_ϵ , $\mathfrak{P}$ in K_ϵ .

Weiter gilt für die Wurzelzahlen:

$$(\Omega_\lambda) = \mathfrak{P}_1^{r_1} \cdots \mathfrak{P}_{l-1}^{r_{l-1}}, \quad (\Omega_{\bar{\lambda}}) = \mathfrak{P}_1^{l-r_1} \cdots \mathfrak{P}_{l-1}^{l-r_{l-1}},$$

wobei $r_1, \dots, r_{l-1}$ eine Permutation der Zahlen $1, \dots, l-1$ darstellt. Die Wurzelzahlen Ω_λ sind aber hier identisch mit den Faktoren D_λ der Gruppendedeterminante; somit kommt:

$$(\Delta_\lambda) = (D_\lambda D_{\bar{\lambda}}) = (\Omega_\lambda \Omega_{\bar{\lambda}}) = \mathfrak{P}_1^l \cdots \mathfrak{P}_{l-1}^l = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_{l-1} = (p);$$

also Übereinstimmen mit dem Führer von K/k .

¹¹⁾ Hilbert, Zahlbericht, § 108. Da nach Satz 5 die Existenz der Normalbasis feststeht — die Stelle kann nach Anmerkung ⁷⁾ einfach durch den Quotientenring definiert werden — braucht die im Zahlbericht benutzte Tatsache, daß die absolut-zyklischen Körper Kreiskörper sind, nicht mehr herangezogen zu werden.