SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik
Verlag: de Gruyter
Jahr: 1969
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN243919689_0239_0240
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0239_0240

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

fortgeführt von

C. W. Borchardt, K. Weierstrass, L. Kronecker,
L. Fuchs, K. Hensel, L. Schlesinger

gegenwärtig herausgegeben von

Helmut Hasse und Hans Rohrbach

unter Mitwirkung von

W. Brödel, M. Deuring, A. Grothendieck, P. R. Halmos, O. Haupt, F. Hirzebruch, E. Hopf,
M. Kneser, G. Köthe, K. Krickeberg, H. Leptin, R. Lingenberg, K. Prachar, H. Reichardt,
P. Roquette, F. W. Schäfke, L. Schmetterer, E. Stiefel, B. Volkmann

Band 239/240

Mit einem Bild von W. Krull

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1969

Die in diesem Band gesammelten Arbeiten sind

Herrn Professor Dr. Dr. h. c. Wolfgang Krull

von Schülern, Freunden und Bewunderern

in aller Welt

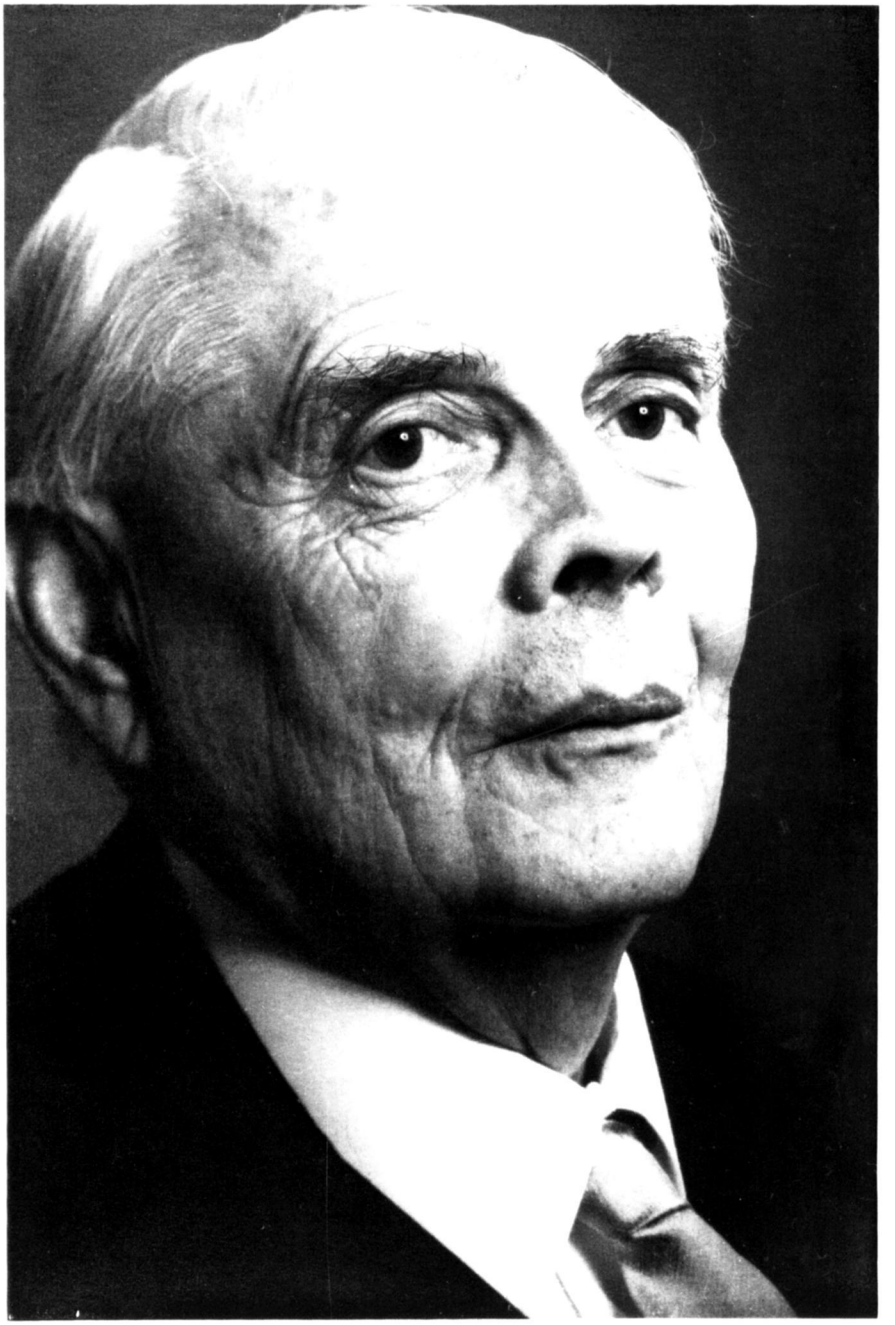
zu seinem 70. Geburtstag, 26. August 1969, gewidmet

Eine große Zahl weiterer dem Jubilar gewidmeten Arbeiten werden in den folgenden Bänden erscheinen.

Archiv-Nr. 18 03 69 5

Satz und Druck: Walter de Gruyter & Co., Berlin 30

Printed in Germany



Wolfgang Kraft

Foto: Belling, Bonn

Inhaltsverzeichnis des Bandes 239/240

Seite

Baer, Reinhold, Lokal endlich-auflösbare Gruppen mit endlichen Sylowuntergruppen 109

Berger, Robert, Eine Charakterisierung des Verzweigungsindex diskreter Bewertungen mittels höherer Differentiale 201

Brauer, Wilfried, Einige Endlichkeitsbedingungen für Gruppen 321

Cohn, P. M., Factorization in general rings and strictly cyclic modules 185

Endler, Otto, Über henselsche Erweiterungen bewerteter Körper und die Fortsetzung von Bewertungen 306

Fuchs, L., Torsion preradicals and ascending Loewy series of modules 169

Gallagher, P. X., The conjugacy classes in a finite simple group 363

Gilmer, Robert, Two constructions of Prüfer domains 153

Griffin, Malcolm, Prüfer rings with zero divisors 55

Gröbner, Wolfgang, Über das Reduzibilitätsideal eines Polynoms 214

Hallet, J. T. und **Hirsch, K. A.,** Die Konstruktion von Gruppen mit vorgeschriebenen Automorphismengruppen 32

Haupt, Otto, Verallgemeinerung eines Satzes von R. C. Bose über die Anzahl der Schmiegkreise eines Ovals, die vom Oval umschlossen werden oder das Oval umschließen 339

Hirsch, K. A., siehe Hallett, J. T.

Hofmann, J. E., Über Kreisquadrupel und Heronische Dreiecke 220

Kaplansky, Irving, Fröhlich's local quadratic forms 74

Kunz, Ernst, Über gewisse singuläre Punkte algebraischer Mannigfaltigkeiten 300

Lafon, Jean Pierre, Idéaux maximaux de l'anneau des endomorphismes d'un idéal 88

Leptin, H., Die symmetrische Algebra eines Banachschen Raumes 163

Maruyama, Masaki, siehe Nagato, Masayoshi

Michler, Gerhard, Primringe mit Krull-Dimension Eins 366

Nagata, Masayoshi and **Maruyama, Masaki,** Note on the structure of a ruled surface 68

Seite

Northcott, D. G., Generalized R-sequences 7

Novák, Vitězslav and **Schmidt, J.**, Direct decompositions of partially ordered sets with zero 97

Ostrowski, A. M., On the remainder term of the Euler-Maclaurin Formula . . 268

Pinl, M., Minimalmannigfaltigkeiten und analytische Funktionen 145

Reich, L., Zur Majorantenmethode im Normalformenproblem für analytische Differentialgleichungssysteme 78

Scharf, Volkmar, Über eine Verallgemeinerung des Anfangswertproblems bei linearen Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen 287

Scharlau, Winfried, Über die Brauer-Gruppe eines algebraischen Funktionenkörpers in einer Variablen 1

Schiffels, Gerhard, Analytische Mannigfaltigkeiten und lokale Ringe von algebraischen Funktionenkörpern 382

Schmidt, J., siehe Novák, Vitězsláv

Schock, Eberhard, Montel-Räume von Hölder-stetigen Funktionen 20

Seidenberg, A., On k-constructable sets, k-elementary formulae, and elimination theory 256

Stöhr, K. O., Dualitäten in der Kategorie der lokal kompakten Moduln über einem Dedekindschen Ring 239

Taussky, Olga, A remark concerning Hilbert's Theorem 94 435

Timm, Jürgen, Über die additiven Gruppen spezieller Fastringe 47

Warnecke, Gerhard, Über einige Probleme bei einer nichtlinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung im Komplexen 353

Weier, Josef, Über die verallgemeinerten Koordinaten eines Flüssigkeitströpfchens 24

Werner, Peter, Bemerkungen zur Theorie der L_p-Räume 401

Wille, Rudolf, Subdirekte Produkte und konjunkte Summen 333

Windelberg, Dirk, Zur additiven Idealtheorie in nichtassoziativen (τ)-Algebren 180

Inhaltsverzeichnis der Bände 231—240 439

Ausgabedatum des Bandes 239/240

15. Dezember 1969

Über die Brauer-Gruppe eines algebraischen Funktionenkörpers in einer Variablen

Von *Winfried Scharlau* z. Z. in Kingston, Ont.

Herrn Professor Dr. Wolfgang Krull zum 70. Geburtstag

In dieser Arbeit untersuchen wir die Brauer-Gruppe eines algebraischen Funktionenkörpers F in einer Variablen über einem Konstantenkörper K. Die Grundlagen dieser Theorie sind von Faddeev [3] entwickelt worden. Insbesondere definiert Faddeev — ganz analog wie im Fall eines algebraischen Zahlkörpers — lokale Invarianten, die eine Produktformel erfüllen.

Im ersten Teil der Arbeit leiten wir die Ergebnisse von Faddeev mit Hilfe von Galois-Cohomologie ohne Mühe ab. Dazu verwenden wir eine Methode, die einer Arbeit von Roquette [7] entnommen ist. Es zeigt sich ferner, daß die Brauer-Gruppe von F eng mit der Cohomologie der Divisorenklassen-Gruppe, also der Cohomologie einer abelschen Varietät, verknüpft ist. Im zweiten Teil machen wir vereinfachende Annahmen und leiten u. a. das Resultat von Faddeev über die Brauer-Gruppe eines rationalen Funktionenkörpers ab. Im dritten Teil spezialisieren wir den Konstantenkörper: Aus einem Satz von Lang ergibt sich das aus der Klassenkörpertheorie bekannte Resultat über algebraische Funktionenkörper mit endlichem Konstantenkörper. Aus Sätzen von Tate ergibt sich die Struktur für p-adische Konstantenkörper.

Der Bequemlichkeit halber nehmen wir an, daß der Konstantenkörper vollkommen ist. Die Resultate bleiben im allgemeinen Fall richtig, wenn man die p-primären Komponenten ignoriert ($p = \mathrm{char}\,(F)$).

1. Die Brauer-Gruppe und die Cohomologie der Divisorenklassen

Voraussetzungen und Bezeichnungen:

Für einen beliebigen Körper k bezeichne k^* die multiplikative Gruppe und $Br(k)$ die Brauer-Gruppe von k. Es sei K ein Körper und F ein algebraischer Funktionenkörper in einer Variablen über K. Es sei K algebraisch abgeschlossen in F. Es sei

g Geschlecht von F/K

d der kleinste positive Divisorgrad von F/K

$\bar{K}$ separabel abgeschlossene Hülle von K

$v_\mathfrak{p}$ zu der Primstelle $\mathfrak{p}$ von F/K gehörige diskrete Bewertung

$F_\mathfrak{p}$ Komplettierung von F bzgl. $v_\mathfrak{p}$

$K_\mathfrak{p}$ Restklassenkörper von $F_\mathfrak{p}$

$U_\mathfrak{p}$ Einheitengruppe von $F_\mathfrak{p}$

J Idelgruppe von F/K

CJ Idelklassen-Gruppen von F/K

D Divisorengruppe von F/K

C Divisorenklassen-Gruppe von F/K

C_0 Divisorenklassen vom Grad 0

U Einheiten der Idelgruppe

CU Einheitenklassen der Idelklassen

H Hauptdivisoren von F/K

$\overline{F} = F\overline{K}$

G Galois-Gruppe von $\overline{F}/F$ bzw. $\overline{K}/K$

$G_\mathfrak{p}$ Galois-Gruppe von $\overline{K}/K_\mathfrak{p}$

Es ist $G_\mathfrak{p}$ eine offene Untergruppe von G. Die entsprechenden Objekte des Funktionenkörpers $\overline{F}/\overline{K}$ werden jeweils durch ein $^-$ unterschieden, also $\overline{J}$, $\overline{C}$ usw.

Man hat nun folgendes kommutative Diagramm von G-Moduln und G-Homomorphismen mit exakten Zeilen und Spalten (vgl. [7]):

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \overline{K}^* & \longrightarrow & \overline{U} & \longrightarrow & \overline{CU} & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \overline{F}^* & \longrightarrow & \overline{J} & \longrightarrow & \overline{CJ} & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \overline{H} & \longrightarrow & \overline{D} & \longrightarrow & \overline{C} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Ist A ein G-Modul, so schreiben wir im folgenden zur Abkürzung immer

$$H^n(G, A) = H^n(A).$$

Aus dem Satz von Tsen folgt:

$$Br(F) \cong H^2(\overline{F}^*).$$

Aus der linken Spalte des Diagramms ergibt sich dann mit Hilbert 90 eine exakte Cohomologie-Sequenz

$$(1) \quad 0 \longrightarrow H^1(\overline{H}) \longrightarrow Br(K) \xrightarrow{\varrho} Br(F) \xrightarrow{\alpha} H^2(\overline{H}) \longrightarrow H^3(\overline{K}^*) \longrightarrow H^3(\overline{F}^*).$$

Aus Shapiro's Lemma folgt:

$$H^n(\bar{D}) = \coprod_{\mathfrak{p}} H^n(G_{\mathfrak{p}}, \boldsymbol{Z}),$$

insbesondere

$$H^1(\bar{D}) = 0$$

$$H^2(\bar{D}) \cong \coprod_{\mathfrak{p}} \chi(G_{\mathfrak{p}}),$$

wobei $\chi(G_{\mathfrak{p}})$ die Charakter-Gruppe von $G_{\mathfrak{p}}$ bezeichnet. Damit erhält man von der unteren Zeile des Diagrammes die exakte Cohomologie-Sequenz

$$(2) \qquad 0 \to H^1(\bar{C}) \xrightarrow{\delta} H^2(\bar{H}) \xrightarrow{\beta} \coprod \chi(G_{\mathfrak{p}}) \xrightarrow{\sigma} H^2(\bar{C}) \longrightarrow H^3(\bar{H}).$$

Wir fügen nun (1) und (2) zusammen zu einem Komplex

$$(3) \quad 0 \longrightarrow H^1(\bar{H}) \xrightarrow{\delta} Br(K) \xrightarrow{\varrho} Br(F) \xrightarrow{\beta \circ \alpha} \coprod_{\mathfrak{p}} \chi(G_{\mathfrak{p}}) \xrightarrow{\sigma} H^2(\bar{C}) \longrightarrow H^3(\bar{H}).$$

Wir wollen nun die Homomorphismen $\beta \circ \alpha$ und σ untersuchen. Nach Witt (vgl. [9], Chap. XII) hat man eine kanonische, durch die Bewertung $v_{\mathfrak{p}}$ gelieferte exakte Sequenz

$$(4) \qquad 0 \longrightarrow Br(K_{\mathfrak{p}}) \longrightarrow Br(F_{\mathfrak{p}}) \xrightarrow{v_{\mathfrak{p}}^*} \chi(G_{\mathfrak{p}}) \longrightarrow 0.$$

Man sieht leicht: $\beta \circ \alpha$ *ist die Summe der „lokalen Invarianten-Homomorphismen"*

$$\mathrm{inv}_{\mathfrak{p}} : Br(F) \longrightarrow Br(F_{\mathfrak{p}}) \longrightarrow \chi(G_{\mathfrak{p}}).$$

Der G-Homomorphismus

$$\deg : \bar{C} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$$

induziert einen Homomorphismus

$$H^2(\bar{C}) \longrightarrow H^2(Z) \cong \chi(G).$$

Komposition mit σ ergibt

$$\sigma' : \coprod \chi(G_{\mathfrak{p}}) \longrightarrow \chi(G),$$

und es folgt aus dem Lemma von Shapiro: σ' *ist die Summe der durch die Verlagerung* $Ver : G^{ab} \longrightarrow G_{\mathfrak{p}}^{ab}$ *induzierten Homomorphismen.*

Der wesentliche Teil von (3) sieht also ganz analog aus wie bei der klassischen Beschreibung der Brauer-Gruppe eines Zahlkörpers durch lokale Invarianten.

Im allgemeinen ist (3) nicht exakt, sondern es liegen Abweichungen von der Exaktheit vor bei $Br(F)$ und $\coprod \chi(G_{\mathfrak{p}})$. Wir haben also folgende beiden Gruppen zu untersuchen:

$$\boldsymbol{X} = \text{Kern } (\beta \circ \alpha)/\text{Bild } (\varrho)$$

$$\boldsymbol{Y} = \text{Kern } (\sigma)/\text{Bild } (\beta \circ \alpha).$$

Von Interesse ist auch

$$\boldsymbol{Z} = \text{Kern } (\sigma')/\text{Bild } (\beta \circ \alpha).$$

Aus (1), (2) und (3) ergibt sich leicht:

Proposition 1. 1. $\boldsymbol{X} \cong \alpha(Br(F)) \cap H^1(\bar{C})$

$$\boldsymbol{Y} \cong H^2(\bar{H})/(H^1(\bar{C}) + \alpha(Br(F))).$$

Dabei betrachten wir $H^1(\bar{C})$ als Untergruppe von $H^2(\bar{H})$.

Ein anderes allgemeines Resultat findet sich in der Arbeit von Roquette [7]. Es betrifft Kern $(\varrho) = Br(F/K) = H^1(\bar{H})$. Roquette definiert

$$\widetilde{Br}(F/K) = \bigcap_{\mathfrak{p}} Br(K_{\mathfrak{p}}/K)$$

und beweist:

Satz 2. 1. $Br(F/K) < \widetilde{Br}(F/K)$

und

$$\widetilde{Br}(F/K)/Br(F/K) \cong \text{Kern}\,(H^1(\overline{CJ}) \to H^1(\bar{C})).$$

(Der Beweis ergibt sich aus der Untersuchung der Cohomologie von $\bar{U}$ und ausgedehntem „diagram chasing".)

2. Untersuchung von Spezialfällen

Für das folgende machen wir eine Voraussetzung, die oft erfüllt ist:

Annahme (A): Kern $(\beta) <$ Bild (α).

Gleichbedeutend damit ist z. B.: der zusammengesetzte Homomorphismus

$$H^1(\bar{C}) \longrightarrow H^2(\bar{H}) \longrightarrow H^3(\bar{K}^*)$$

ist der Null-Homomorphismus.

Aus 1. 1. folgt sofort:

Ist (A) *erfüllt, so ist*

$$\boldsymbol{X} \cong H^1(\bar{C}), \quad \boldsymbol{Y} \cong \text{Kern}\,(H^3(\bar{K}^*) \longrightarrow H^3(\bar{F}^*)).$$

Lemma 2. 1. *Existiert ein Divisor vom Grad* $d = 1$, *so ist* (A) *erfüllt und* $\boldsymbol{Y} = 0$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, $H^n(\bar{K}^*) \longrightarrow H^n(\bar{F}^*)$ ist injektiv, denn für $n = 3$ ergibt sich dann $\boldsymbol{Y} = 0$ und $H^2(\bar{H}) \longrightarrow H^3(\bar{K}^*)$ ist 0. Statt (4) gilt allgemeiner

$$0 \longrightarrow H^n(G_{\mathfrak{p}}, \bar{K}^*) \longrightarrow H^n(G_{\mathfrak{p}}, \bar{F}^*) \xrightarrow{v_{\mathfrak{p}}^*} H^n(G_{\mathfrak{p}}, \boldsymbol{Z}) \longrightarrow 0$$

ist exakt. Der Kern von

$$H^n(\bar{K}^*) \longrightarrow H^n(G_{\mathfrak{p}}, \bar{K}^*) < H^n(G_{\mathfrak{p}}, \bar{F}^*)$$

wird von $(G : G_{\mathfrak{p}}) = \deg(\mathfrak{p})$ annulliert. Wegen $d = ggT(\deg \mathfrak{p}) = 1$ ist

$$H^n(\bar{K}^*) \to H^n(\bar{F}^*) \longrightarrow \boldsymbol{\Pi}\, H^n(G_{\mathfrak{p}}, \bar{F}^*)$$

injektiv.

Aus der zu $0 \longrightarrow \bar{C}_0 \longrightarrow \bar{C} \longrightarrow \boldsymbol{Z} \longrightarrow 0$ gehörigen Cohomologie-Sequenz ergibt sich ferner in diesem Fall sofort

$$\boldsymbol{X} \cong H^1(\bar{C}_0), \quad \boldsymbol{Z} \cong H^2(\bar{C}_0).$$

Korollar 2. 2 ([13], vgl. auch [1], Prop. 4. 1). *Ist* F/K *rationaler Funktionenkörper, so hat man eine kanonische exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow Br(K) \longrightarrow Br(F) \longrightarrow \boldsymbol{\Pi}_{\mathfrak{p}}\, \chi(G_{\mathfrak{p}}) \xrightarrow{\sigma} \chi(G) \longrightarrow 0,$$

wobei σ *durch die Verlagerungs-Homomorphismen induziert wird.*

Etwas allgemeiner als 2. 2. ist:

Korollar 2. 3. *Sei F/K ein Funktionenkörper vom Geschlecht 0. Dann hat man eine kanonische Sequenz*

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{Z}/d\boldsymbol{Z} \longrightarrow Br(K) \longrightarrow Br(F) \longrightarrow \boldsymbol{II}\, \chi(G_\mathfrak{p}) \longrightarrow \chi(G) \longrightarrow H^3(\bar{H}),$$

die überall exakt ist außer eventuell bei $\boldsymbol{II}\, \chi(G_\mathfrak{p})$. Ferner gilt $d \leqq 2$ und $d\boldsymbol{Y} = 0$.

Beweis. Wegen $g = 0$ gilt $\bar{C} \cong \boldsymbol{Z}$, also $H^1(\bar{C}) = 0$ und (A) ist erfüllt. Es ist wohlbekannt, daß aus $g = 0$ folgt $d \leqq 2$ ([2], Chap. II, § 6). Wie beim Beweis von Lemma 2. 1. sieht man $d\boldsymbol{Y} = 0$.

Bemerkung. Der exakte linke Teil dieser Sequenz geht schon auf Witt [13] zurück. Ist (a, b) eine nicht-zerfällte Quaternionen-Algebra über K ($\mathrm{char}(K) \neq 2$), so sei der Funktionenkörper $F_{a,b}$ durch die Gleichung $ax^2 + by^2 = 1$ definiert. Offensichtlich ist $F_{a,b}$ ein Zerfällungskörper von (a, b). Ferner ist $F_{a,b}$ vom Geschlecht 0, und deshalb ist nach 2. 3. (a, b) das einzige nicht-triviale Element von $Br(F/K)$.

3. Spezielle Konstantenkörper

Wir spezialisieren nun den Konstantenkörper und wenden bekannte Sätze über die Cohomologie abelscher Varietäten (vgl. [12]) auf $\bar{C}_0$ an.

Satz 3. 1. *Es habe K cohomologische Dimension 1. Dann hat man eine kanonische exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow H^1(\bar{C}) \longrightarrow Br(F) \longrightarrow \underset{\mathfrak{p}}{\boldsymbol{II}}\, \chi(G_\mathfrak{p}) \longrightarrow \chi(G) \longrightarrow 0.$$

Beweis. Wegen $\mathrm{cdm}(K) = 1$ gilt $Br(K) = 0$, $H^2(\bar{C}_0) = 0$ und K hat strikt cohomologische Dimension 2, also gilt (A). Damit ist alles bewiesen.

Beispiel. Es sei K endlich. Nach Lang [4] ist H^1 von jeder zusammenhängenden algebraischen Gruppe $= 0$, also $H^1(\bar{C}) = 0$, und man hat das aus der Klassenkörpertheorie bekannte Resultat.

Bemerkung. Ist K ein lokaler Körper mit algebraisch abgeschlossenem Restklassenkörper oder ein Funktionenkörper mit algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörper, so ist nach Resultaten von Ogg und Schafarewitsch [6], [8] (vgl. auch [12]) $H^1(\bar{C}_0)$ bekannt. Im ersten Fall z. B. ist $H^1(\bar{C}_0)$ isomorph zu einer endlichen direkten Summe von $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$. Natürlich sind $H^1(\bar{C}_0)$ und $H^1(\bar{C})$ durch die exakte Sequenz

$$\bar{C}^G \longrightarrow \boldsymbol{Z} \longrightarrow H^1(\bar{C}_0) \longrightarrow H^1(\bar{C}) \longrightarrow 0$$

verbunden.

Satz 3. 2. *Es sei K ein $\mathfrak{p}$-adischer Körper. Dann hat man eine kanonische Sequenz*

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{Z}/d\boldsymbol{Z} \longrightarrow \underset{\substack{\| \\ Q/Z}}{Br(K)} \longrightarrow Br(F) \longrightarrow \underset{\mathfrak{p}}{\boldsymbol{II}}\, \chi(G_\mathfrak{p}) \longrightarrow \chi(G) \longrightarrow 0,$$

die überall exakt ist, außer eventuell bei $Br(F)$. Dort ist die Abweichung von der Exaktheit $\boldsymbol{X} \cong H^1(\bar{C})$.

Beweis. Nach Tate [11] gilt $H^1(\overline{CJ}) = 1$, also nach 1. 2. $\tilde{Br}(F/K) = Br(F/K)$. Aus der lokalen Klassenkörpertheorie weiß man, daß

$$Br(K_\mathfrak{p}/K) \cong \boldsymbol{Z}/d_\mathfrak{p}\boldsymbol{Z}, \quad d_\mathfrak{p} = [K_\mathfrak{p} : K].$$

Damit haben wir den linken Teil unserer Sequenz. (Dieser Teil des Satzes und seines Beweises ist der Arbeit von Roquette [7] entnommen.) Ferner hat nach Tate G strikte cohomologische Dimension 2 ([10], II Prop. 15), also ist (A) erfüllt. Es ist dann nur noch zu zeigen, daß $H^2(\bar{C}) \cong \chi(G)$. Dies ergibt sich ebenfalls aus einem Resultat von Tate ([10], II Prop. 16): Es gilt, H^2 von jeder abelschen Varietät ist 0, und das Resultat folgt unmittelbar.

Bemerkung. Nach einem weiteren Satz von Tate [11] ist auch $H^1(\bar{C}_0)$ bekannt:

$$H^1(\bar{C}_0) \cong \chi(H^0(\bar{C}_0)),$$

denn die abelsche Varietät $\bar{C}_0$ ist isomorph zu ihrer dualen.

Sei z. B. $g = 1$ und $d = 1$. Dann ist $\bar{C}_0$ isomorph zu einer elliptischen Kurve $\mathfrak{E}$ mit Funktionenkörper F. Nach dem eben formulierten Ergebnis ist $H^1(\bar{C}_0)$ isomorph zum Dual der Gruppe der K-rationalen Punkte von $\mathfrak{E}$: $H^1(\bar{C}_0) \cong \chi(\mathfrak{E}(K))$. Nach Lutz [5] ist $\mathfrak{E}(K)$ isomorph zu einer Erweiterung der additiven Gruppe K durch eine endliche Gruppe. Man kennt also in diesem Fall X recht explizit.

Bemerkung. Nach Schafarewitsch kann als d jede positive ganze Zahl auftreten. Dieses Ergebnis kann mit Hilfe des eben benutzten Satzes von Tate bewiesen werden.

Zusatz bei der Korrektur. Beim Beweis von 3. 2. wird wesentlich das Verschwinden der Idelklassen-Cohomologie benutzt. Dies wurde von Tate [11] nur für den Fall $d = 0$ bewiesen. Inzwischen ist jedoch von *S. Lichtenbaum*, Duality theorems for Curves over P-adic Fields, Invent. math. **7**, 120—136, auch ein Beweis für $d > 0$ erbracht worden.

Literatur

[1] *M. Auslander* and *A. Brumer*, The Brauer group of discrete valuation rings, Proc. Kon. Nederl. Akad. v. Wetenschapen, Series A, **71** (1968), 286—296.

[2] *Cl. Chevalley*, Introduction to the theory of algebraic functions of one variable, New York 1951.

[3] *D. K. Faddeev*, Simple algebras over a field of algebraic functions of one variable, Trudy Mat. Inst. Steklov, **38** (1951), 321—344; Amer. Math. Soc. Translat. Ser. II **3** (1956), 15—38.

[4] *S. Lang*, Algebraic groups over finite fields, Am. J. of Math. **78** (1956), 555—563.

[5] *E. Lutz*, Sur l'équation $y^2 = x^3 - Ax - B$ dans les corps p-adiques, J. Reine Angew. Math. **177** (1937), 238—247.

[6] *A. P. Ogg*, Cohomology of abelian varieties over function fields, Ann. of Math. **76** (1962), 185—212.

[7] *P. Roquette*, Splitting of algebras by function fields of one variable, Nagoya Math. J. **27** (1966), 625—642.

[8] *I. Schafarewitsch*, Trudy Math. Inst. Steklov, **64** (1961), 316—346.

[9] *J.-P. Serre*, Corps locaux, Paris 1962.

[10] *J.-P. Serre*, Cohomologie galoisienne, lecture notes in mathematics **5** (1965).

[11] *J. Tate*, WC-groups over p-adic fields, Sém. Bourbaki **156** (1957).

[12] *J. Tate*, Principal homogeneous spaces for Abelian varieties, J. Reine Angew. Math. **209** (1962), 98—99.

[13] *E. Witt*, Über ein Gegenbeispiel zum Normensatz, Math. Zeitschrift **39** (1935).

Mathematisches Institut der Universität Bonn, 53 Bonn, Wegelerstraße 10

Eingegangen 2. Oktober 1968

Generalized R-sequences

By *D. G. Northcott* at Sheffield

To Wolfgang Krull on his seventieth birthday

Introduction

Let R be a commutative ring with an identity element and E a (unitary) R-module. A sequence $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ of elements of R is said to be an *R-sequence* on E if, for each i $(1 \leqq i \leqq s)$, the element γ_i is a non-zerodivisor on the module $E/(\gamma_1 E + \gamma_2 E + \cdots + \gamma_{i-1} E)$. Sometimes the condition $E \neq \gamma_1 E + \gamma_2 E + \cdots + \gamma_s E$ is added to the definition, but it is noticeable that there are disadvantages as well as advantages attached to this refinement.

The notion of an R-sequence has many applications. Here we shall be concerned with its use in Multiplicity Theory and in the study of the Koszul Complex. It will be shown [1]) that, in both these contexts, the concept is more appropriate and more useful if it is suitably modified. The modified version is here called a *generalized R-sequence* and the definition is given in § 2 after some preliminary discussion.

In the account which follows, consideration is not restricted to modules over *commutative* rings. This fact may need some comment. In [3], the present author has shown that much of what is customarily regarded as Commutative Algebra can be developed in a more general setting in which non-commutative rings are allowed but special attention is paid to the properties of elements that belong to the centre of the ring. This extended theory may be termed Quasi-commutative Algebra. Now it was demonstrated in [3] that a great deal of Multiplicity Theory is valid within this larger framework. There was, however, one particular result ([3], Theorem 17, p. 336) known to be true in the commutative case and still meaningful in the more general setting, which proved intractable. The difficulty was that the known proofs [2]) involved techniques which do not seem capable of adaptation. It was the desire to find alternative methods of wider applicability that produced the ideas set out here. I have therefore included a solution (see Theorem 5) of the problem which provided the original motivation.

Some of the properties of generalized R-sequences can be established with the aid of techniques based on a suitable theory of completions. However the kind of arguments used here seem to the author to be more elementary in character and also more flexible.

---

[1]) See, in particular, Theorems 1 and 3.

[2]) See, for example, Nagata ([2] Theorem 25. 5, p. 84).

1. Preliminary considerations

This section is intended to facilitate the discussion of generalized R-sequences which are introduced in § 2.

Let R be a ring with an identity element and E a (unitary) R-module. By a *central element* of R we mean an element belonging to its centre and by a *central ideal* we mean an ideal (necessarily two-sided) which can be generated by central elements. Note that any product of central ideals is again a central ideal. In particular, any power of a central ideal is a central ideal.

Let Ω be a central ideal of R.

Definition. *An element e, of E, is said to be 'Ω-trivial' if $(1 - \omega)e = 0$ for some $\omega \in \Omega$. The module E is said to be Ω-trivial if all its elements are Ω-trivial.*

It is important to note that, in the above definition, the element ω is not required to be central though it has to belong to the central ideal Ω. Again, if $(1 - \omega)e = 0$, then $(1 - \omega^n)e = 0$ for every $n > 0$. Thus *if e is Ω-trivial, then it is Ω^n-trivial for every positive integer n.* It follows that *if E is Ω-trivial, then it is also Ω^n-trivial for every $n > 0$.*

The next two lemmas are immediate consequences of the fact that the set of elements of the form $1 - \omega$, where $\omega \in \Omega$, is multiplicatively closed.

Lemma 1. *Let $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ be an exact sequence of R-modules. Then E is Ω-trivial if and only if E' and E'' are both Ω-trivial.*

Lemma 2. *An arbitrary direct sum of Ω-trivial modules is again Ω-trivial.*

The next lemma is also obvious.

Lemma 3. *Let the R-module E be Ω-trivial and suppose that $\Omega E = 0$. Then $E = 0$.*

The following notation will be useful. Suppose that K is a submodule of E. It may be that the factor module E/K is Ω-trivial in which case we shall write

$$E \overset{\Omega}{=} K.$$

This will be convenient in situations in which E and K are given by expressions that are typographically cumbersome. Observe that

$$E \overset{\Omega}{=} K \text{ implies that } E \overset{\Omega^n}{=} K.$$

for all $n > 0$.

We recall that an R-module E is said to be *Noetherian* if all its submodules are finitely generated. For such modules we have the following key result concerning Ω-triviality.

Proposition 1. *Let E be a Noetherian R-module and Ω a central ideal of R. If now e belongs to E, then e is Ω-trivial if and only if it belongs to all the submodules $\Omega^n E$ $(n = 1, 2, \ldots)$.*

For a proof see ([3], Theorem 2, p. 291).

Corollary. *Let E be a Noetherian R-module and Ω a central ideal of R. Then E is Ω-trivial if and only if $E = \Omega E$.*

Proposition 2. *Let Ω' and Ω be central ideals and let E be a Noetherian R-module such that $\Omega' E \leqq \Omega E$. Further let K be a factor module of a submodule of E. If now $x \in K$ and x is Ω'-trivial, then x is Ω-trivial. Hence if K is Ω'-trivial, then it is Ω-trivial.*

Proof. Let K be a factor module of L, where L is a submodule of E. Now $\Omega' E \leqq \Omega E$ and therefore $\Omega'^s E \leqq \Omega^s E$ for all $s > 0$. It follows that $\Omega'^s L \leqq \Omega^s E \cap L$ for all $s > 0$ and so, by the Artin-Rees theorem ([3] Theorem 1, p. 292), we can choose s to satisfy $\Omega'^s L \leqq \Omega L$. For such an s we have $\Omega'^{ns} L \leqq \Omega^n L$ for all $n > 0$ which in turn yields $\Omega'^{ns} K \leqq \Omega^n K$ for all $n > 0$. Finally

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega'^n K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega'^{ns} K \leqq \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega^n K.$$

Since K itself is a Noetherian R-module, the desired result follows from Proposition 1.

Let K be a submodule of E and α a central element of R. We use $K :_E \alpha$ to denote the submodule of E consisting of all elements $e \in E$ such that $\alpha e \in K$. Note that when L is a submodule of E containing K we have

$$(L :_E \alpha)/K = (L/K) :_{E/K} \alpha$$

which yields

$$(K :_E \alpha)/K = 0 :_{E/K} \alpha$$

on taking $L = K$. We also make frequent use of the isomorphism

$$E/(K + \alpha E) \approx (E/K)/\alpha(E/K)$$

without further comment.

Now suppose that $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ is a sequence of central elements of R.

Definition. *We shall say that $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ is an '(R, Ω)-sequence on E' if*

$$(\gamma_1 E + \cdots + \gamma_{i-1} E) :_E \gamma_i \overset{\Omega}{=} \gamma_1 E + \gamma_2 E + \cdots + \gamma_{i-1} E$$

for $i = 1, 2, \ldots, s$.

When $\Omega = (0)$ we recover the usual definition of an R-sequence. It is convenient to make the convention that an empty sequence ($s = 0$) of central elements is an (R, Ω)-sequence on E whatever Ω and E happen to be. Note that if $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ is an (R, Ω)-sequence on E, then it is also an (R, Ω^n)-sequence on E for every positive integer n.

Lemma 4. *Suppose that $0 \leqq m \leqq s$. Then in order that $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ be an (R, Ω)-sequence on E it is necessary and sufficient that $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ be an (R, Ω)-sequence on E and $\gamma_{m+1}, \gamma_{m+2}, \ldots, \gamma_s$ an (R, Ω)-sequence on $E/(\gamma_1 E + \cdots + \gamma_m E)$.*

The proof is obvious. The assertion has been stated as a lemma to simplify the making of references.

Lemma 5. *Let γ be a central element and suppose that $0 :_E \gamma$ is Ω-trivial. Then $0 :_E \gamma^n$ is Ω-trivial for all $n > 0$.*

Proof. Suppose that $\gamma^n e = 0$, where $e \in E$. Then $\gamma^{n-1} e$ is in $0 :_E \gamma$ and therefore $\gamma^{n-1}(1 - \omega_1) e = 0$ for some $\omega_1 \in \Omega$. Similarly $\gamma^{n-2}(1 - \omega_2)(1 - \omega_1) e = 0$ with $\omega_2 \in \Omega$. Finally

$$(1 - \omega_n)(1 - \omega_{n-1}) \cdots (1 - \omega_1) e = 0,$$

where $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ are all in Ω. The lemma follows.

If $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ are central elements of R, then we shall use $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s)$ to denote the (central) ideal which they generate.

Lemma 6. *Let $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ be an (R, Ω)-sequence on E and suppose that $s \geqq 2$. Then*

$$(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-2}, \gamma_s)E :_E \gamma_{s-1} \overset{\Omega}{=} (\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-2}, \gamma_s)E.$$

Consequently $\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-2}, \gamma_s, \gamma_{s-1}$ is an (R, Ω)-sequence on E if and only if

$$(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-2})E :_E \gamma_s \overset{\Omega}{=} (\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-2})E.$$

Proof. Let e belong to $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-2}, \gamma_s)E :_E \gamma_{s-1}$. Then

$$\gamma_{s-1}e = \gamma_1 e_1 + \cdots + \gamma_{s-2}e_{s-2} + \gamma_s e_s$$

for suitable elements $e_1, \ldots, e_{s-2}, e_s$ in E. Accordingly e_s is in $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-2}, \gamma_{s-1})E :_E \gamma_s$ and therefore there exists $\omega \in \Omega$ such that

$$(1 - \omega)e_s = \gamma_1 e_1' + \cdots + \gamma_{s-2}e_{s-2}' + \gamma_{s-1}e_{s-1}'$$

where $e_1', \ldots, e_{s-2}', e_{s-1}'$ are certain elements in E. Accordingly

$$\gamma_{s-1}((1 - \omega)e' - \gamma_s e_{s-1}') \in (\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-2})E$$

and therefore there exists $\omega_1 \in \Omega$ such that

$$(1 - \omega_1)\left((1 - \omega)e - \gamma_s e_{s-1}'\right) \in (\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-2})E.$$

Finally we see that $(1 - \omega_1)(1 - \omega)e$ belongs to $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-2}, \gamma_s)E$ and now the lemma follows.

Lemma 7. *Let E be a Noetherian R-module and let the central elements α, β form an (R, Ω)-sequence on E. If now $\alpha^k \in \Omega$ for some positive integer k, then β, α is an (R, Ω)-sequence on E.*

Proof. By Lemma 6, it is enough to show $0 :_E \beta$ is Ω-trivial. Let e belong to $0 :_E \beta$. Then $\beta e \in \alpha E$. It follows that there exists $\omega_1 \in \Omega$ such that $(1 - \omega_1)e$ is in αE, say $(1 - \omega_1)e = \alpha e_1$. Next $\beta(1 - \omega_1)e = 0$, because β is a central element, and therefore $\alpha\beta e_1 = 0$. It follows that there exists $\omega_1' \in \Omega$ so that $\beta(1 - \omega_1')e_1 = 0$. Arguing as before, we obtain a relation

$$(1 - \omega_1'')(1 - \omega_1')e_1 = \alpha e_2$$

with $\omega_1'' \in \Omega$ and $e_2 \in E$. This yields $(1 - \omega_2)e = \alpha^2 e_2$ with $\omega_2 \in \Omega$. We next see that $\alpha^2\beta e_2 = 0$. But, by Lemma 5, $0 :_E \alpha^2$ is Ω-trivial and so $\beta(1 - \omega_2')e_2 = 0$ for some $\omega_2' \in \Omega$. It will now be clear how the argument continues. What emerges is that for each positive integer s there exists $\omega_s \in \Omega$ and $e_s \in E$ such that

$$(1 - \omega_s)e = \alpha^s e_s. \tag{1.1}$$

At this point we make a fresh start. Let e belong to $0 :_E \beta$ and let $n > 0$ be an integer. Now α, β is an (R, Ω^n)-sequence on E. We use (1.1) with Ω^n replacing Ω and with $s = nk$. This shows that

$$(1 - \eta)e \in \alpha^{nk}E,$$

where $\eta \in \Omega^n$. But $\alpha^{nk} \in \Omega^n$. Consequently $e \in \Omega^n E$ and this holds for all $n > 0$. Accordingly, by Proposition 1, the element e, which was a typical element of $0 :_E \beta$, is Ω-trivial. The lemma follows.

Proposition 3. *Let the central elements $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ form an (R, Ω)-sequence on the Noetherian R-module E and suppose that, for each i $(1 \leqq i \leqq s)$, some power of γ_i belongs*

to Ω. Then, for each permutation $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ of $\{1, 2, \ldots, s\}$, $\gamma_{v_1}, \gamma_{v_2}, \ldots, \gamma_{v_s}$ is an (R, Ω)-sequence on E.

Proof. It is enough to show that we can interchange γ_j and γ_{j+1} without upsetting the property of being an (R, Ω)-sequence on E. Now $\gamma_1, \ldots, \gamma_{j-1}$ is an (R, Ω)-sequence on E and $\gamma_j, \gamma_{j+1}, \ldots, \gamma_s$ an (R, Ω)-sequence on $E' = E/(\gamma_1, \ldots, \gamma_{j-1})E$. Also Lemma 7 shows that γ_{j+1}, γ_j is an (R, Ω)-sequence on E'; consequently $\gamma_{j+1}, \gamma_j, \gamma_{j+2}, \ldots, \gamma_s$ is an (R, Ω)-sequence on E'. The proposition now follows by virtue of Lemma 4.

Corollary. *Let the hypotheses be as in the statement of the proposition and, in addition, let $n_1, n_2, \ldots, n_s$ be positive integers. Then $\gamma_1^{n_1}, \gamma_2^{n_2}, \ldots, \gamma_s^{n_s}$ is also an (R, Ω)-sequence on E.*

Proof. Let $n > 0$ be an integer. It is enough to show that $\gamma_1, \ldots, \gamma_i^n, \ldots, \gamma_s$ is an (R, Ω)-sequence on E. By the proposition, we may suppose that $i = s$ in which case all we have to prove is that $0 :_F \gamma_s^n$ is Ω-trivial, where $F = E/(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1})E$. But $0 :_F \gamma_s$ is Ω-trivial by hypothesis. The desired result therefore follows from Lemma 5.

2. Generalized R-sequences and the Koszul complex

As before, let R be a ring with an identity element, E an R-module, and $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ a sequence of central elements of R.

Definition. *We say that $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ is a 'generalized R-sequence on E' if it is an (R, A)-sequence on E, where $A = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s)$.*

Let $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ be a generalized R-sequence on E and suppose that $1 \leqq p < s$. It is important to note that the subsequence $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$ need not be a generalized R-sequence on E. However we do have

Lemma 8. *Let $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ be a generalized R-sequence on E. Then, for each i $(0 \leqq i \leqq s)$, $\gamma_{i+1}, \gamma_{i+2}, \ldots, \gamma_s$ is a generalized R-sequence on $E/(\gamma_1 E + \cdots + \gamma_i E)$.*

Proof. We can suppose that $1 \leqq i < s$. Put $E' = E/(\gamma_1 E + \cdots + \gamma_i E)$, $A = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s)$ and $A' = (\gamma_{i+1}, \gamma_{i+2}, \ldots, \gamma_s)$. If now $i + 1 \leqq j \leqq s$, then the factor modules

$$\frac{(\gamma_{i+1}E' + \cdots + \gamma_{j-1}E') :_{E'} \gamma_j}{\gamma_{i+1}E' + \cdots + \gamma_{j-1}E'}$$

and

$$\frac{(\gamma_1 E + \cdots + \gamma_i E + \cdots + \gamma_{j-1}E) :_E \gamma_j}{\gamma_1 E + \cdots + \gamma_i E + \cdots + \gamma_{j-1}E}$$

are isomorphic. Accordingly if x belongs to the former, then there exists $\omega \in A$ such that $(1 - \omega)x = 0$. But $\omega = \lambda + \omega'$, where $\lambda \in (\gamma_1, \ldots, \gamma_i)$ and $\omega' \in A'$. Since $\lambda E' = 0$, we have $\lambda x = 0$ and therefore $(1 - \omega')x = 0$. Thus x is A'-trivial and not merely A-trivial. This completes the proof.

Proposition 4. *Let E be a Noetherian R-module and $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ a generalized R-sequence on E. If now $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ is a permutation of $\{1, 2, \ldots, s\}$, then $\gamma_{v_1}, \gamma_{v_2}, \ldots, \gamma_{v_s}$ is also a generalized R-sequence on E.*

This is a special case of Proposition 3.

Proposition 5. *Let E be a Noetherian R-module and $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ a generalized R-sequence on E. Further let $n_1, n_2, \ldots, n_s$ be positive integers. Then $\gamma_1^{n_1}, \gamma_2^{n_2}, \ldots, \gamma_s^{n_s}$ is a generalized R-sequence on E.*

Proof. Put $A = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s)$, $A' = (\gamma_1^{n_1}, \gamma_2^{n_2}, \ldots, \gamma_s^{n_s})$ and choose n so that $A^n \subseteq A'$. By Proposition 3 Cor., $\gamma_1^{n_1}, \gamma_2^{n_2}, \ldots, \gamma_s^{n_s}$ is an (R, A)-sequence on E and hence an (R, A^n)-sequence on E. It follows that $\gamma_1^{n_1}, \gamma_2^{n_2}, \ldots, \gamma_s^{n_s}$ is an (R, A')-sequence on E which is what we have to prove.

If E is an R-module and $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ are central elements of R, then it is possible to construct the *Koszul complex* of E with respect to $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$. For the definition of this complex, which will be denoted by $K(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E)$, and an elementary account of its basic properties, the reader is referred to ([3], Chapter 8). It is recalled that the μth component module, $K_\mu(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E)$, of the complex is isomorphic to the direct sum of $\binom{s}{\mu}$ copies of E, where $\binom{s}{\mu}$ denotes the usual binomial coefficient. In particular, $K_\mu(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = 0$ if either $\mu < 0$ or $\mu > s$. Again, the central elements $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ play their part solely through the definition of the boundary homomorphisms

$$d_\mu \colon K_\mu(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) \longrightarrow K_{\mu-1}(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E).$$

The reader will find the details set out in ([3], p. 359).

We use $H_\mu K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E)$ to denote the μth homology module of $K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E)$. An important property[3]) of the Koszul complex states that, for each μ, $H_\mu K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E)$ is annihilated by the ideal $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s)$. In fact it is this property which makes *generalized* R-sequences particularly relevant. Note that if $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s) = R$, then, as a consequence of the property in question, $H_\mu K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = 0$ for all μ.

Lemma 9. *Suppose that* $0 :_E \gamma_s$ *is* A*-trivial, where* $A = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s)$. *Then, for each* μ, *the modules* $H_\mu K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1}, \gamma_s \mid E)$ *and* $H_\mu K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1} \mid E/\gamma_s E)$ *are isomorphic.*

Proof. Let X be the complex whose μth component module is

$$X_\mu = K_{\mu-1}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1} \mid E/\gamma_s E)$$

and for which the boundary homomorphism $X_\mu \to X_{\mu-1}$ coincides with the boundary homomorphism

$$K_{\mu-1}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1} \mid E/\gamma_s E) \longrightarrow K_{\mu-2}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1} \mid E/\gamma_s E)$$

of $K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1} \mid E/\gamma_s E)$. (In other words, X is $K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1} \mid E/\gamma_s E)$ with all degrees raised by one.) Then

$$H_\mu(X) = H_{\mu-1} K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1} \mid E/\gamma_s E), \tag{2. 1}$$

where $H_\mu(X)$ denotes the μth homology module of X. In addition to X, we also require the complex $K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1}, 1 \mid E)$ which differs from $K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1}, \gamma_s \mid E)$ by having the element γ_s replaced by the identity element of R.

The three complexes under consideration are connected by an exact sequence

$$K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1}, \gamma_s \mid E) \xrightarrow{f} K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1}, 1 \mid E) \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0. \tag{2. 2}$$

The details will be found in ([3], p. p. 367—368) but they need not all concern us here. We must note, however, that each of $K_\mu(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1}, \gamma_s \mid E)$ and $K_\mu(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1}, 1 \mid E)$ consists of a direct sum of $\binom{s}{\mu}$ copies of E and that f_μ, as constructed, consists in applying the identity mapping to some of the summands and in multiplying the remainder by γ_s.

[3]) See ([3] Theorem 3, p. 364).

Thus when $0 :_E \gamma_s = 0$ the mapping f_μ is monic, but, under the weaker hypotheses of our lemma, all we can say is that *Ker* f_μ *is A-trivial* (see Lemma 2).

From (2. 2) we obtain the exact sequences

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \longrightarrow K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1}, \gamma_s \mid E) \longrightarrow \operatorname{Im} f \longrightarrow 0 \tag{2. 3}$$

and

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} f \longrightarrow K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1}, 1 \mid E) \longrightarrow X \longrightarrow 0 \tag{2. 4}$$

of complexes. But $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1}, 1) = R$ and therefore all the homology modules of $K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1}, 1 \mid E)$ are zero. Accordingly the homology sequence of (2. 4) yields an isomorphism $H_{\mu+1}(X) \approx H_\mu(\operatorname{Im} f)$ which, in view of (2. 1), can be written as

$$H_\mu K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1} \mid E/\gamma_s E) \approx H_\mu(\operatorname{Im} f). \tag{2. 5}$$

On the other hand, the homology sequence of (2. 3) yields an exact sequence

$$H_\mu(\operatorname{Ker} f) \longrightarrow H_\mu K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) \xrightarrow{\varphi} H_\mu(\operatorname{Im} f) \longrightarrow H_{\mu-1}(\operatorname{Ker} f)$$

and now the lemma will follow if we show that φ is an isomorphism.

To this end we observe that $H_\mu(\operatorname{Ker} f)$ and $H_{\mu-1}(\operatorname{Ker} f)$ are A-trivial, because they are factor modules of submodules of $\operatorname{Ker} f_\mu$ and $\operatorname{Ker} f_{\mu-1}$ respectively. This shows that $\operatorname{Ker} \varphi$ and $\operatorname{Coker} \varphi$ are A-trivial. But $\operatorname{Ker} \varphi$ is a submodule of $H_\mu K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E)$ which we know is annihilated by A. It follows, from Lemma 3, that $\operatorname{Ker} \varphi = 0$. Next, by the properties of the Koszul complex, $H_\mu K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1} \mid E/\gamma_s E)$ is annihilated by $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1})$ and it is also annihilated by γ_s because $\gamma_s(E/\gamma_s E) = 0$. Thus A annihilates $H_\mu K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1} \mid E/\gamma_s E)$ and therefore $AH_\mu(\operatorname{Im} f) = 0$ by (2. 5). It follows that $A(\operatorname{Coker} \varphi) = 0$. Lemma 3 now shows that $\operatorname{Coker} \varphi = 0$ and with this the proof is complete.

Before stating the next result, we recall ([3] Proposition 1 Cor., p. 361) that $H_\mu K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E)$ is unchanged to within isomorphism if we permute the γ_i in any way.

Proposition 6. *Let E be an R-module and $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ a generalized R-sequence on E. Then $H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E) = 0$ for all $\mu \neq 0$.*

Proof. We use induction on s. The case $s = 0$ is trivial so we suppose that $s \geqq 1$ and assume the result for generalized R-sequences with $s - 1$ terms. Now $0 :_E \gamma_1$ is $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s)$-trivial. Hence, by Lemma 9 and the above remark, we have isomorphisms

$$H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E) \approx H_\mu K(\gamma_2, \ldots, \gamma_s, \gamma_1 \mid E) \approx H_\mu K(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E/\gamma_1 E)$$

for all μ. Next, by Lemma 8, $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_s$ is a generalized R-sequence on $E/\gamma_1 E$. Consequently the proposition follows by virtue of the inductive hypothesis.

Lemma 10. *Let E be a Noetherian R-module and $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ $(s \geqq 1)$ central elements of R. Put $A = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s)$ and suppose $1 < i \leqq s$. If now*

$$H_p K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}, \gamma_i \mid E)$$

is A-trivial, then $H_p K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1} \mid E)$ is A-trivial as well.

Proof. By a standard property of the Koszul complex ([3], Proposition 2, p. 365) we have an exact sequence

$$H_p K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1} \mid E) \longrightarrow H_p K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1} \mid E) \longrightarrow H_p K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}, \gamma_i \mid E)$$

where the first mapping consists in multiplication by $(-1)^p \gamma_i$. It follows that the factor module

$$H_p K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1} \mid E)/\gamma_i H_p K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1} \mid E)$$

is A-trivial. Moreover, the factor module is Noetherian. Accordingly, by Proposition 1 Cor.

$$H_p K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1} \mid E) = \gamma_i H_p K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1} \mid E) + AH_p K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1} \mid E)$$
$$= AH_p K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1} \mid E).$$

A second application of Proposition 1 Cor. now shows that $H_p K(\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1} \mid E)$ is A-trivial.

Theorem 1[4]). *Let E be a Noetherian R-module and $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ central elements of R. Then the following statements are equivalent:*

(1) *$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ is a generalized R-sequence on E;*

(2) *$H_\mu K(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E) = 0$ for all $\mu \neq 0$;*

(3) *$H_1 K(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E) = 0$.*

Proof. Proposition 6 shows that (1) implies (2) and it is evident that (2) implies (3). We shall therefore limit ourselves to showing that (3) implies (1). This will be achieved by using induction on s. Note that we may suppose that $s \geqq 1$.

If $H_1 K(\gamma_1 \mid E) = 0$ this means that $0 :_E \gamma_1 = 0$ and therefore γ_1 is a generalized R-sequence on E. We may therefore assume that $s > 1$ and that the desired implication has been established when only $s - 1$ central elements are involved.

From $H_1 K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = 0$ it follows, by Lemma 10, that for each i $(1 \leqq i \leqq s)$ the module $H_1 K(\gamma_1, \ldots, \gamma_i \mid E)$ is A-trivial, where $A = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s)$. In particular $H_1 K(\gamma_1 \mid E)$, that is to say $0 :_E \gamma_1$, is A-trivial. It now follows, from Lemma 9, that we have isomorphisms

$$H_1 K(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E) \approx H_1 K(\gamma_2, \ldots, \gamma_s, \gamma_1 \mid E) \approx H_1 K(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E/\gamma_1 E)$$

which show that $H_1 K(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E/\gamma_1 E) = 0$. Hence, by the inductive hypothesis, $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_s$ is a generalized R-sequence on $E/\gamma_1 E$ and hence an (R, A')-sequence on $E/\gamma_1 E$, where $A' = (\gamma_2, \ldots, \gamma_s)$. Thus, a fortiori, $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_s$ is an (R, A)-sequence on $E/\gamma_1 E$ and, as we already know that γ_1 by itself is an (R, A)-sequence on E, Lemma 4 shows that $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ is an (R, A)-sequence on E. But this is precisely what we wish to prove.

We proceed to establish two lemmas which will help us to exploit this theorem.

Lemma 11. *Let $\alpha, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ be central elements and E a Noetherian R-module. Suppose that $\alpha E \leqq AE$, where $A = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s)$, and that $0 :_E \alpha$ is A-trivial. If now $H_\mu K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E/\alpha E) = 0$ for a particular value of μ, then $H_{\mu-1} K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = 0$ as well.*

Proof. We make use of the fact that each exact sequence

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$$

of R-modules gives rise to an exact sequence of the corresponding Koszul complexes and hence to an exact sequence involving their homology modules ([3], Theorem 2, p. 362). In the present instance we use the exact sequences

$$0 \longrightarrow 0 :_E \alpha \longrightarrow E \xrightarrow{f} \alpha E \longrightarrow 0 \tag{2. 6}$$

and

$$0 \longrightarrow \alpha E \xrightarrow{g} E \longrightarrow E/\alpha E \longrightarrow 0 \tag{2. 7}$$

---

[4]) Cf. ([3] Theorem 8, p. 374) and ([1] Proposition 2. 8, p. 632).

where f satisfies $f(e) = \alpha e$ and g is an inclusion mapping. From (2. 6) we obtain an exact sequence

$$H_{\mu-1}K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid 0 :_E \alpha) \longrightarrow H_{\mu-1}K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) \xrightarrow{\varphi} H_{\mu-1}K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid \alpha E).$$

Now A annihilates the first term which is also A-trivial because $0 :_E \alpha$ is A-trivial. Hence, by Lemma 3, the first term is zero and therefore

$$\varphi : H_{\mu-1}K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) \longrightarrow H_{\mu-1}K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid \alpha E)$$

is monic. Next, from (2. 7), we obtain an exact sequence

$$H_{\mu}K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E/\alpha E) \longrightarrow H_{\mu-1}K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid \alpha E) \xrightarrow{\psi} H_{\mu-1}K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E).$$

But $H_{\mu}K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E/\alpha E) = 0$ by hypothesis. Thus

$$\psi : H_{\mu-1}K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid \alpha E) \longrightarrow H_{\mu-1}K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E)$$

is also monic. Consider $\psi\varphi$. This is monic and it is simply the homomorphism

$$H_{\mu-1}K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) \to H_{\mu-1}K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E)$$

induced by gf. It follows that $\psi\varphi$ is the mapping of $H_{\mu-1}K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E)$ into itself produced by multiplication by the element α. This shows that α is not a zerodivisor on $H_{\mu-1}K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E)$. We shall complete the proof by showing that

$$\alpha^n H_{\mu-1}K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = 0$$

for some positive integer n.

Put $X_\nu = K_\nu(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E)$ and let Z_ν denote the kernel of the boundary homomorphism

$$K_\nu(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E) \longrightarrow K_{\nu-1}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E).$$

Then $Z_{\mu-1}$ is a submodule of $X_{\mu-1}$ and $X_{\mu-1}$ is a finite direct sum of copies of E. Since $\alpha E \subseteq AE$, we now see that $\alpha X_{\mu-1} \subseteq A X_{\mu-1}$ and therefore $\alpha^n X_{\mu-1} \subseteq A^n X_{\mu-1}$ for all $n > 0$. It follows that $\alpha^n Z_{\mu-1} \subseteq A^n X_{\mu-1} \cap Z_{\mu-1}$ and so, by the Artin-Rees Theorem ([3], Theorem 1, p. 292),

$$\alpha^n Z_{\mu-1} \subseteq A Z_{\mu-1}$$

provided that n is taken sufficiently large. For such an n

$$\alpha^n H_{\mu-1}K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) \subseteq A H_{\mu-1}(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E)$$

and now the lemma follows because we know that $AH_{\mu-1}K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = 0$.

Lemma 12. *Let $A = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s)$, where the γ_i are central elements, and suppose that E is a Noetherian R-module. Further let $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ be central elements such that $\alpha_1 E + \alpha_2 E + \cdots + \alpha_p E$ is contained in AE. If now $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ is an (R, A)-sequence on E, then $H_{\mu}K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = 0$ for all $\mu > s - p$.*

Proof. For $0 \leqq \nu \leqq p$, put $E_\nu = E/(\alpha_1 E + \cdots + \alpha_\nu E)$. If now $0 \leqq \nu < p$, then $E_{\nu+1} = E_\nu/\alpha_{\nu+1}E_\nu$, $0 :_E \alpha_{\nu+1}$ is A-trivial, and $\alpha_{\nu+1}E_\nu \subseteq AE_\nu$ because $\alpha_{\nu+1}E \subseteq AE$. Moreover, $H_{\mu}K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E_{p-1}/\alpha_p E_{p-1}) = 0$ for all $\mu > s$. Hence, by Lemma 11,

$$H_{\mu}K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E_{p-1}) = 0$$

that is $H_{\mu}K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E_{p-2}/\alpha_{p-1}E_{p-2}) = 0$ for all $\mu > s - 1$. Another application of Lemma 11 shows that $H_{\mu}K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E_{p-2}) = 0$ that is

$$H_{\mu}K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E_{p-3}/\alpha_{p-2}E_{p-3}) = 0$$

for all $\mu > s - 2$. Proceeding in this way we finally obtain the desired result.

Theorem 2. *Let E be a Noetherian R-module and $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ a generalized R-sequence on E. Further let $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ be central elements such that, for some positive integer n, $\alpha_1^n E + \alpha_2^n E + \cdots + \alpha_s^n E$ is contained in $\gamma_1 E + \gamma_2 E + \cdots + \gamma_s E$. Then $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ is also a generalized R-sequence on E.*

Proof. By Proposition 5, $\alpha_1^n, \alpha_2^n, \ldots, \alpha_s^n$ is a generalized R-sequence on E and therefore

$$(\alpha_1^n E + \cdots + \alpha_{i-1}^n E) :_E \alpha_i^n \overset{\Omega}{=} \alpha_1^n E + \alpha_2^n E + \cdots + \alpha_{i-1}^n E,$$

where $\Omega = (\alpha_1^n, \alpha_2^n, \ldots, \alpha_s^n)$. It follows, by Proposition 2, that

$$(\alpha_1^n E + \cdots + \alpha_{i-1}^n E) :_E \alpha_1^n \overset{A}{=} \alpha_1^n E + \alpha_2^n E + \cdots + \alpha_{i-1}^n E,$$

where $A = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s)$. Thus $\alpha_1^n, \alpha_2^n, \ldots, \alpha_s^n$ is an (R, A)-sequence on E and therefore, by Lemma 12, $H_\mu K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = 0$ for all $\mu > 0$. In particular, $H_1 K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = 0$. Theorem 2 now follows from Theorem 1.

3. Applications to Multiplicity Theory.

If M is an R-module, then we shall denote the length of M, as defined in terms of composition series of submodules, by $L_R(M)$. This is either a non-negative integer or plus infinity. Suppose now that E is an R-module and that $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ ($s \geqq 0$) are central elements of R. These elements are said to form a *multiplicity system* on E if $L^R\{E/(\gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E)\}$ is finite. If this is the case and if, in addition, E is Noetherian, then the integer-valued multiplicity symbol $e_R(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E)$ may be defined. For the details the reader is referred to ([3], Chapter 7). In the next paragraph we recall some of the properties of the multiplicity symbol that are relevant to the present discussion.

Suppose that $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ is a multiplicity system on the Noetherian R-module E. Then ([3], Theorem 6, p. 308)

$$(3.1) \qquad 0 \leqq e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) \leqq L_R\{E/(\gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E)\}.$$

Hence if E is $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s)$-trivial and therefore (Proposition 1 Cor.) $E = \gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E$, we have $e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) = 0$. Next, if $s = 0$, then

$$(3.2) \qquad e_R(\cdot \mid E) = L_R(E);$$

whereas if $s \geqq 1$, then $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_s$ is a multiplicity system on both $E/\gamma_1 E$ and $0 :_E \gamma_1$, and

$$(3.3) \qquad e_R(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E) = e_R(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E/\gamma_1 E) - e_R(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid 0 :_E \gamma_1).$$

In fact (3.2) and (3.3) together constitute an inductive definition of the multiplicity symbol. Again, for arbitrary positive integers $n_1, n_2, \ldots, n_s$ we have the inequality ([3], Proposition 2, p. 296)

$$(3.4) \qquad L_R\{E/(\gamma_1^{n_1} E + \cdots + \gamma_s^{n_s} E)\} \leqq n_1 n_2 \cdots n_s L_R\{E/(\gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E)\}.$$

This shows that $\gamma_1^{n_1}, \gamma_2^{n_2}, \ldots, \gamma_s^{n_s}$ is also a multiplicity system on E. Moreover the multiplicities associated with $\gamma_1^{n_1}, \gamma_2^{n_2}, \ldots, \gamma_s^{n_s}$ and $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ are connected by the relation ([3] Theorem 7 Cor. 1, p. 311).

$$(3.5) \qquad e_R(\gamma_1^{n_1}, \gamma_2^{n_2}, \ldots, \gamma_s^{n_s} \mid E) = n_1 n_2 \cdots n_s e_R(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E).$$

Lemma 13. *Let $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ be a multiplicity system on the Noetherian R-module E. If $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ is a generalized R-sequence on E, then*

$$e_R(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E) = L_R\{E/(\gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E)\}.$$

Proof. We may suppose that $s \geqq 1$. Put $A = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s)$. Then

$$0 :_E \gamma_1 = A(0 :_E \gamma_1) = (\gamma_2, \ldots, \gamma_s)(0 :_E \gamma_1)$$

because $0 :_E \gamma_1$ is A-trivial and Noetherian. Accordingly

$$e_R(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid 0 :_E \gamma_1) = 0$$

by (3. 1) and therefore

$$e_R(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E) = e_R(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E/\gamma_1 E)$$

by virtue of (3. 3). But (Lemma 8) $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_s$ is a generalized R-sequence on $E/\gamma_1 E$ and therefore we can repeat the argument provided that $s \geqq 2$. This yields

$$e_R(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E) = e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E/(\gamma_1 E + \gamma_2 E))$$

Proceeding in this way the desired result is obtained after s steps.

Theorem 3. *Let $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ $(s \geqq 0)$ be a multiplicity system on the Noetherian R-module E. Then*

$$e_R(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E) = L_R\{E/(\gamma_1 E + \gamma_2 E + \cdots + \gamma_s E)\} \tag{3. 6}$$

if and only if $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ is a generalized R-sequence on E.

Proof. In view of Lemma 13, we may confine our efforts to showing that, when (3. 6) holds, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ is a generalized R-sequence on E. This will be done by using induction on s. Evidently we may restrict our attention to strictly positive values of s.

Suppose first that $s = 1$. Since

$$e_R(\gamma_1 \mid E) = L_R(E/\gamma_1 E) - L_R(0 :_E \gamma_1)$$

by definition, (3. 6) shows that we must have $L_R(0 :_E \gamma_1) = 0$ and therefore $0 :_E \gamma_1 = 0$. Hence the result to be proved is true in the case $s = 1$.

We now assume that $s > 1$ and make the obvious inductive hypothesis. Let $n_1, n_2, \ldots, n_s$ be positive integers. Then, using (3. 1), (3. 4) and (3. 5) in that order, we deduce from (3. 6) that

$$\begin{aligned} e_R(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s} \mid E) &\leqq L_R\{E/(\gamma_1^{n_1} E + \cdots + \gamma_s^{n_s} E)\} \\ &\leqq n_1 n_2 \cdots n_s L_R\{E/(\gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E)\} \\ &= n_1 n_2 \cdots n_s e_R(\gamma_1, \ldots, \gamma_s \mid E) \\ &= e_R(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s} \mid E) \end{aligned}$$

which shows that

$$e_R(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s} \mid E) = L_R\{E/(\gamma_1^{n_1} E + \cdots + \gamma_s^{n_s} E)\}.$$

Put $K = E/(0 :_E \gamma_1)$. Then, by the additive property of the multiplicity symbol ([3], Theorem 5, p. 302),

$$e_R(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s} \mid E) = e_R(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s} \mid K) + e_R(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s} \mid 0 :_E \gamma_1)$$

and the second term on the right hand side is zero because $\gamma_1^{n_1}(0:_E \gamma_1) = 0$ (see [3], Proposition 5, p. 307). Thus

$$e_R(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s} \mid E) = e_R(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s} \mid K).$$

Accordingly, by (3. 7) and (3. 1),

$$\begin{aligned} L_R\{E/(\gamma_1^{n_1}E + \cdots + \gamma_s^{n_s}E)\} &= e_R(\gamma_1^{n_1}, \ldots, \gamma_s^{n_s} \mid K) \\ &\leqq L_R\{K/(\gamma_1^{n_1}K + \cdots + \gamma_s^{n_s}K)\} \\ &= L_R\{E/((0:_E \gamma_1) + \gamma_1^{n_1}E + \cdots + \gamma_s^{n_s}E)\}. \end{aligned}$$

But $\gamma_1^{n_1}E + \cdots + \gamma_s^{n_s}E$ is contained in $(0:_E \gamma_1) + \gamma_1^{n_1}E + \cdots + \gamma_s^{n_s}E$ and the lengths involved are finite. It follows that the two modules coincide and therefore

$$0:_E \gamma_1 \leqq \gamma_1^{n_1}E + \gamma_2^{n_2}E + \cdots + \gamma_s^{n_s}E. \tag{3. 8}$$

Thus, to recapitulate, when (3. 6) holds we have (3. 8) for arbitrary positive integers $n_1, n_2, \ldots, n_s$. Hence if $A = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s)$, then $0:_E \gamma_1$ is contained in A^nE for all $n > 0$. Accordingly, by Proposition 1, $0:_E \gamma_1$ *is* A*-trivial.*

It now follows, as in the proof of Lemma 13, that

$$e_R(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E) = e_R(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E/\gamma_1 E).$$

Hence, if we write $\bar{E} = E/\gamma_1 E$ and use (3. 6), we obtain

$$e_R(\gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid \bar{E}) = L_R\{\bar{E}/(\gamma_2\bar{E} + \cdots + \gamma_s\bar{E})\}.$$

We can now apply the induction hypothesis. This tells us that if $\bar{A} = (\gamma_2, \ldots, \gamma_s)$, then $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_s$ is an $(R, \bar{A})$-sequence on $\bar{E} = E/\gamma_1 E$. Thus, a fortiori, $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_s$ is an (R, A)-sequence on $E/\gamma_1 E$. But we have seen earlier that $0:_E \gamma_1$ is A-trivial. Accordingly, by Lemma 4, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ is an (R, A)-sequence on E and now the proof is complete.

Theorem 4. *Let E be a Noetherian R-module and let $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ and $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ be sequences of central elements having the same number of terms. Assume that $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ is a multiplicity system on E and that*

$$e_R(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s \mid E) = L_R\{E/(\alpha_1 E + \cdots + \alpha_s E)\}.$$

If now $\alpha_1^n E + \alpha_2^n E + \cdots + \alpha_s^n E$ is contained in $\gamma_1 E + \gamma_2 E + \cdots + \gamma_s E$ for some positive integer n, then $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ is a multiplicity system on E and

$$e_R(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E) = L_R\{E/(\gamma_1 E + \cdots + \gamma_s E)\}.$$

Proof. The first assertion follows from the fact that $\alpha_1^n, \alpha_2^n, \ldots, \alpha_s^n$ is a multiplicity system on E. To obtain the second we simply combine Theorems 2 and 3.

Theorem 5[5]**).** *Let $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ and $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ be multiplicity systems on the Noetherian R-module E and suppose that each of the ideals $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s)$ and $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$ contains a power of the other. Then*

$$e_R(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s \mid E) = L_R\{E/(\alpha_1 E + \alpha_2 E + \cdots + \alpha_s E)\}$$

[5]) Cf. ([3] Theorem 17, p. 336) and ([1] Theorem 25. 5, p. 84).

if and only if

$$e_R(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s \mid E) = L_R\{E/(\gamma_1 E + \gamma_2 E + \cdots + \gamma_s E)\}.$$

This now follows from Theorem 4. As remarked in the introduction, it was the desire to prove a theorem of this kind within the framework of Quasi-commutative Algebra, that led to the consideration of generalized R-sequences.

References

[1] *M. Auslander* and *D. A. Buchsbaum*, Codimension and Multiplicity, Annals of Mathematics **68** (1958), 625—657.

[2] *M. Nagata*, Local Rings, Tracts in Mathematics No. 13, New York 1962.

[3] *D. G. Northcott*, Lessons on Rings, Modules and Multiplicities, Cambridge 1968.

The University, Department of Pure Mathematics, Hicks Buildings, Hounsfield Road, Sheffield, S 3, 7 RH, England

Eingegangen 21. November 1968

Montel-Räume von Hölder-stetigen Funktionen

Von *Eberhard Schock* in Bonn

Herrn Professor Dr. Wolfgang Krull zum 70. Geburtstag

Eine stetige Funktion $f: [0, 1] \to \boldsymbol{R}$ heißt *α-Hölder-stetig* ($0 < \alpha \leqq 1$), wenn gilt:

$$\| f \|_\alpha := \sup \left\{ \frac{| f(s) - f(t) |}{| s - t |^\alpha}, s, t \in [0, 1] \right\} < \infty.$$

Der lineare Raum $C_\alpha[0, 1]$ aller α-Hölder-stetigen Funktionen mit $f(0) = 0$ ist, versehen mit der Norm $\| \ \|_\alpha$, ein Banachraum. Wie Pelczynski [4] für $\alpha = 1$ und Ciesielski [1] für $\alpha < 1$ gezeigt haben, ist $C_\alpha[0, 1]$ isomorph dem Folgenraum l^∞, mithin weder separabel noch reflexiv und ohne Schauder-Basis.

Wir werden hier die projektiven und induktiven Limites der Räume C_α bezüglich ihrer Einbettungen $C_\alpha \to C_\beta$ für $\alpha \geqq \beta$ untersuchen. Dabei zeigt sich, daß diese Räume Montel-Räume sind (d. h. tonnelierte Räume, in denen jede beschränkte Teilmenge relativkompakt ist). Ferner geben wir Isomorphismen zu gewissen Folgenräumen und Schauder-Basen an. Definition und Eigenschaften des projektiven und des induktiven Limes sowie der Montel-Räume findet man z. B. bei Floret-Wloka [3].

Es sei $\alpha \in (0, 1]$ und

$$H_{\alpha-}[0, 1] := \operatorname*{proj}_{\beta < \alpha} C_\beta[0, 1] = \bigcap_{\beta < \alpha} C_\beta[0, 1]$$

der projektive Limes der Banachräume C_β bezüglich ihrer Einbettungen. Dann gilt

Satz 1. *Der lokalkonvexe Raum $H_{\alpha-}[0, 1]$ ist ein vollständiger metrisierbarer Montel-Raum.*

Beweis. Da sich $H_{\alpha-}$ auch als abzählbarer projektiver Limes von Räumen C_{β_n} mit $\beta_n < \alpha$, $\beta_n \to \alpha$ darstellen läßt, ist $H_{\alpha-}$ metrisierbar. Ferner ist $H_{\alpha-}$ als projektiver Limes von Banachräumen vollständig. Also ist $H_{\alpha-}$ ein (F)-Raum. Jeder (F)-Raum ist tonneliert. Schließlich erhält man aus der Tatsache, daß die Einbettungen $C_\beta \to C_\gamma$ für $\beta > \gamma$ kompakt sind (vgl. Cronin [2], S. 159), die Aussage, daß alle beschränkten Teilmengen von $H_{\alpha-}$ relativkompakt sind. Damit ist $H_{\alpha-}$ als Montel-Raum nachgewiesen.

$H_{\alpha-}[0, 1]$ besteht also aus allen Funktionen $f: [0, 1] \to R$ mit $f(0) = 0$ und $\| f \|_\beta < \infty$ für alle $\beta < \alpha$. Die Menge

$$\mathfrak{U} = \{U_{\beta,\varepsilon} := \{f \in H_{\alpha-}, \| f \|_\beta \leqq \varepsilon\}, \varepsilon > 0, 0 < \beta < \alpha\}$$

ist eine Nullumgebungsbasis von $H_{\alpha-}[0, 1]$.

Wir bezeichnen mit (s_α) den linearen Raum aller (reellen) Zahlenfolgen $\zeta = \{\zeta_n, n \in \boldsymbol{N}\}$

$$p_\beta(\zeta) := \sup \{| \zeta_n | n^\beta, n \in \boldsymbol{N}\} < \infty$$

für alle $\beta < \alpha$. (s_α) ist für $\alpha < \infty$ ein nicht nuklearer Montel-Raum.

Satz 2. *Die Räume $H_{\alpha-}[0, 1]$ und (s_α) sind topologisch isomorph.*

Beweis. Wir verwenden die Methode von Ciesielski. Sei $\{\chi_n, n \in \boldsymbol{N}\}$ das Haarsche Orthonormalsystem:

$$\chi_1(t) = 1 \text{ für } t \in [0, 1]$$

$$\chi_{2^n+k}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^n} & t \in \left[\frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) \\ -\sqrt{2^n} & t \in \left[\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}}\right) \\ 0 \text{ sonst in } [0, 1] \end{cases}$$

für $k \in \{1, 2, \ldots, 2^n\}$, $n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$.

Wir setzen

$$\varphi_n(t) := \int_0^t \chi_n(\tau)\, d\tau$$

und

$$\chi_1^{(\alpha)} = \chi_1,\ \varphi_1^{(\alpha)} = \varphi_1,\quad \chi_{2^n+k}^{(\alpha)} = \frac{2^{(n+1)\alpha}}{2\sqrt{2^n}}\, \chi_{2^n+k},\ \varphi_{2^n+k}^{(\alpha)} = \frac{2\sqrt{2^n}}{2^{(n+1)\alpha}}\, \varphi_{2^n+k}.$$

Dann ist durch

$$P_\alpha : H_{\alpha-} \longrightarrow (s_\alpha)$$

$$f \longrightarrow \left\{n^{-\alpha} \int_0^1 \chi_n^{(\alpha)}(t)\, df(t),\ n \in \boldsymbol{N}\right\}$$

eine Abbildung von $H_{\alpha-}$ in (s_α) gegeben. P_α ist stetig: Sei $\beta < \alpha$. Dann ist

$$p_\beta(P_\alpha f) = \sup \left\{n^\beta \left| n^{-\alpha} \int_0^1 \chi_n^{(\alpha)}\, df \right|,\ n \in \boldsymbol{N}\right\}$$

$$= \sup \left\{\left| n^{\beta-\alpha} \int_0^1 \chi_n^{(\alpha)}\, df \right|,\ n \in \boldsymbol{N}\right\}.$$

Wegen

$$\left| \int_0^1 \chi_{2^n+k}\, df \right| = \sqrt{2^n} \left| \left[2f\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right) - f\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right) - f\left(\frac{2k-2}{2^{n+1}}\right)\right] \right|$$

$$\leqq 2\sqrt{2^n}\, 2^{-(n+1)\beta} \,||\, f \,||_\beta$$

gilt

$$\left| \int_0^1 \chi_{2^n+k}^{(\alpha)}\, df \right| \leqq 2^{(n+1)(\alpha-\beta)} \,||\, f \,||_\beta.$$

Somit haben wir

$$p_\beta(P_\alpha f) = \sup_n \left| n^{\beta-\alpha} \int_0^1 \chi_n^{(\alpha)}\, df \right| \leqq \sup_n\ (2^n + k)^{\beta-\alpha} 2^{(n+1)(\alpha-\beta)} \,||\, f \,||_\beta \leqq \,||\, f \,||_\beta,$$

also

$$p_\beta(P_\alpha f) \leqq \,||\, f \,||_\beta. \tag{1}$$

P_α ist surjektiv und P_α^{-1} ist stetig: Um die Surjektivität von P_α zu zeigen, müssen wir zu $\zeta \in (s_\alpha)$ ein $f \in H_{\alpha-}$ finden mit $P_\alpha f = \zeta$. Sei also $\zeta \in (s_\alpha)$. Wir setzen

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} n^a \zeta_n \varphi_n^{(\alpha)}$$

und berechnen für $\beta < \alpha$ den Wert von $\| f \|_\beta$

$$| f(s) - f(t) | \leqq \sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha | \zeta_n | \cdot | \varphi_n^{(\alpha)}(s) - \varphi_n^{(\alpha)}(t) |$$

$$\leqq \sup | \zeta_n | n^\beta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-\beta} | \varphi_n^{(\alpha)}(s) - \varphi_n^{(\alpha)}(t) |$$

$$\leqq p_\beta(\zeta) \cdot \left[| s - t | + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} (2^n + k)^{\alpha-\beta} \cdot | \varphi_{2^n+k}^{(\alpha)}(s) - \varphi_{2^n+k}^{(\alpha)}(t) | \right]$$

Bestimmt man ν_0 so, daß gilt $2^{-\nu_0-1} \leqq | s - t | < 2^{-\nu_0}$, so erhalten wir (vgl. [1], (11))

$$\sum_{k=1}^{2^n} | \varphi_{2^n+k}^{(\alpha)}(s) - \varphi_{2^n+k}^{(\alpha)}(t) | \leqq \begin{cases} 2^{(1-\alpha)(n+1)} | s - t |, & 0 \leqq n < \nu_0 \\ 2^{1-\alpha} 2^{-n\alpha} & \nu_0 \leqq n \end{cases}$$

Damit wird

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} (2^n + k)^{\alpha-\beta} | \varphi_{2^n+k}^{(\alpha)}(s) - \varphi_{2^n+k}^{(\alpha)}(t) |$$

$$\leqq \sum_{n=0}^{\nu_0-1} 2^{(n+1)(\alpha-\beta)} 2^{(1-\alpha)(n+1)} | s - t | + \sum_{n=\nu_0}^{\infty} 2^{(n+1)(\alpha-\beta)} 2^{1-\alpha} 2^{-n\alpha}.$$

Also ist

$$\frac{| f(s) - f(t) |}{| s - t |^\beta} \leqq p_\beta(\zeta) \left\{ | s - t |^{1-\beta} + \sum_{n=0}^{\nu_0-1} 2^{(1-\beta)(n+1)} | s - t |^{1-\beta} \right.$$

$$\left. + 2^{1-\beta} \sum_{n=\nu_0}^{\infty} 2^{-\beta n} | s - t |^{-\beta} \right\} =: p_\beta(\zeta) M_\beta(| s - t |).$$

Durch einfache Umformung erhält man $M_\beta = \sup \{M_\beta(| s - t |), s, t \in [0, 1]\} < \infty$. Daher gilt

$$\| f \|_\beta \leqq M_\beta p_\beta(\zeta). \tag{2}$$

Also ist P_α surjektiv und P_α^{-1} ist stetig.

Als einfache Folgerung erhalten wir den

Satz 3. *Das Funktionensystem* $\{\varphi_n^{(\alpha)}, n \in \boldsymbol{N}\}$ *bildet eine unbedingte Basis in* $H_{\alpha-}[0, 1]$. *Jede Funktion* $f \in H_{\alpha-}[0, 1]$ *läßt sich darstellen in der Form*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n \varphi_n^{(\alpha)}$$

mit

$$\zeta_n = \int_0^1 \chi_n^{(\alpha)}(t)\, df(t).$$

Satz 4. *Der lokalkonvexe Raum*

$$H_{\alpha+}[0, 1] := \operatorname{ind}_{\beta>\alpha} C_\beta[0, 1] = \bigcup_{\beta>\alpha} C_\beta[0, 1]$$

ist ein vollständiger Montel-Raum ($0 \leqq \alpha < 1$).

Beweis. Da die Einbettungen $C_\beta \to C_\gamma$ für $\beta > \gamma$ kompakt sind, ist $H_{\alpha+}$ ein abzählbarer kompakter induktiver Limes von Banachräumen, also ein Montel-Raum (vgl. [3]).

$H_{\alpha+}[0, 1]$ besteht aus allen Funktionen $f: [0, 1] \to \boldsymbol{R}$ mit $f(0) = 0$, die für ein $\beta > \alpha$ β-Hölder-stetig sind. Die Menge

$\mathcal{U} = \{U < H_{\alpha+}, U$ absolutkonvex, $U \cap C_\beta$ Nullumgebung in C_β für alle $\beta > \alpha\}$

ist eine Nullumgebungsbasis von $H_{\alpha+}$.

Wir bezeichnen mit $l^\infty(n^\beta)$ den Raum

$$l^\infty(n^\beta) := \{\zeta : p_\beta(\zeta) := \sup \{| \zeta_n | n^\beta, n \in \boldsymbol{N}\} < \infty\}$$

und mit

$$\sigma_\alpha := \operatorname{ind}_{\beta>\alpha} l^\infty(n^\beta) = \bigcup_{\beta>\alpha} l^\infty(n^\beta),$$

wobei der induktive Limes bezüglich der Einbettungen $l^\infty(n^\beta) \to l^\infty(n^\gamma)$ für $\beta > \gamma$ gebildet wird. σ_α ist ein nicht nuklearer Montel-Raum.

Satz 5. *Die lokalkonvexen Räume σ_α und $H_{\alpha+}[0, 1]$ sind topologisch isomorph.*

Beweis. Mit den gleichen Bezeichnungen wie im Beweis von Satz 3 definieren wir die Abbildung

$$Q_\alpha : H_{\alpha+}[0, 1] \longrightarrow \sigma_\alpha$$
$$f \longrightarrow \left\{\{n^{-\alpha} \int_0^1 \chi_n^{(\alpha)}(t)\, df(t),\ n \in N\right\},$$

Die Abbildung Q_α ist stetig, wenn für alle $\beta > \alpha$ die Abbildungen $Q_\alpha|_{C_\beta} : C_\beta \to \sigma_\alpha$ stetig sind, d. h. wenn für alle $\beta > \alpha$ die Abbildungen $Q_\alpha|_{C_\beta} : C_\beta \to l^\infty(n^\beta)$ stetig sind. Da sich aber der Beweis für die Relation (1) in gleicher Weise für $\beta > \alpha$ wie für $\beta < \alpha$ durchführen läßt, ergibt sich sofort die Stetigkeit von Q_α. Ebenso zeigt man die Stetigkeit von Q_α^{-1}.

Satz 6. *Das Funktionensystem $\{\varphi_n^{(\alpha)}, n \in N\}$ bildet eine unbedingte Basis im Raume $H_{\alpha+}[0, 1]$. Jede Funktion $f \in H_{\alpha+}$ läßt sich darstellen in der Form*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n \varphi_n^{(\alpha)}$$

mit

$$\zeta_n = \int_0^1 \chi_n^{(\alpha)}(t)\, df(t).$$

Durch die Diagonaltransformation

$$\{\zeta_n, n \in N\} \longrightarrow \{n^{\gamma-\alpha}\zeta_n n \in N\}$$

ist ein Isomorphismus von (s_α) auf (s_γ) bzw. von σ_α auf σ_γ gegeben. Daher gilt

Satz 7. *Die Räume $H_{\alpha-}[0, 1]$ bzw. $H_{\alpha+}[0, 1]$ sind für alle α mit $0 < \alpha \leqq 1$ bzw. $0 \leqq \alpha < 1$ isomorph.*

Literatur

[1] *Z. Ciesielski*, On the Isomorphisms of the spaces H_α and m, Bull. Acad. Polon. Sci. 8 (1960), 217—222.

[2] *J. Cronin*, Fixed points and topological degree in nonlinear analysis, AMS Surveys Providence 1964.

[3] *K. Floret* und *J. Wloka*, Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Räume, Lecture Notes in Mathematics 56, 1968.

[4] *A. Pelczynski*, On the isomorphisms of the spaces H and m, Bull. Acad. Polon. Sci. **6** (1958), 695—696.

Institut für Angewandte Mathematik, 53 Bonn, Wegelerstr. 6

Eingegangen 13. Dezember 1968

Über die verallgemeinerten Koordinaten eines Flüssigkeitströpfchens

Von *Josef Weier* in Bonn

Herrn Professor Dr. Wolfgang Krull zum 70. Geburtstag

Die Gestalt des betrachteten Flüssigkeitströpfchens zum Zeitpunkt t sei wie üblich durch $\eta = \sum \alpha_{lm} Y_{lm}$, genauer $\eta(\theta, \varphi, t) = \sum \alpha_{lm}(t) Y_{lm}(\theta, \varphi)$, beschrieben. Dabei ist ein sphärisches Koordinatensystem zugrunde gelegt. Bei nicht verformter sphärischer Gestalt des Tröpfchens ist überall $\eta(\theta, \varphi, t) = 0$. Sonst bedeutet $\eta(\theta, \varphi, t)$ die Abweichung von der Kugelgestalt in Richtung (θ, φ) zum Zeitpunkt t. Bisweilen werden die Koeffizienten α_{lm} als verallgemeinerte Koordinaten des Tröpfchens bezeichnet. Von der Geschwindigkeit v wird weiterhin vorausgesetzt, daß sie ein Potential Φ besitzt. Die Funktionen $\beta_{lm}(t)$ sind dann durch $\Phi = \sum \beta_{lm} r^l Y_{lm}$ bestimmt, wobei r der Abstand des laufenden Punktes vom Nullpunkt.

Die bekannten Formeln, die Oberflächenspannung, kinetische Energie, Drehimpuls usw. des Tröpfchens durch die α_{lm} und ihre Ableitungen ausdrücken, sind nur Näherungsformeln. So findet man für den Drehimpuls die Näherungsformel

$$L = R_0^6 \varrho \sum \sum \sum \sum l^{-1} \alpha_{lm} \alpha_{\lambda\mu} \int d\omega \, Y_{\lambda\mu} q \times \operatorname{grad} Y_{lm}. \tag{1}$$

Dabei ist R_0 der Radius des nicht verformten Tröpfchens und ϱ die als konstant angenommene Flüssigkeitsdichte, es ist $q = (x_1, x_2, x_3)$ der laufende Punkt des euklidischen 3-Raumes E_3. Strenger gilt aber

$$L = \sum \sum \sum c_{lv} \beta_{lm} \int d\omega (q \times \operatorname{grad} Y_{lm}) \eta^v \tag{2}$$

mit

$$c_{lv} = R_0^{l+4} \varrho (l+4)^{-1} \binom{l+4}{v},$$

wie unten gezeigt wird. In (2) ist über $l = 1, 2, \ldots, m = -l, \ldots, l$ und $v = 0, \ldots, l+4$ zu summieren. Es geht (2) in (1) über, wenn man (2) nach der ersten Potenz von η abbricht und überdies

$$\beta_{lm} = l^{-1} R_0^{-l+2} \dot{\alpha}_{lm}$$

setzt. Aber auch die letzte Gleichung ist nur eine Näherungsformel. Die Gleichung (2) ist im vierten Abschnitt bewiesen.

Im zweiten Abschnitt finden sich einige Bemerkungen über das Verhalten der α_{lm} bei Drehungen des Koordinatensystems. Sind α'_{lm} die dort erklärten transformierten Koordinaten, so gilt beispielsweise

$$\sum_m |\alpha_{lm}|^2 = \sum_m |\alpha'_{lm}|^2 \tag{3}$$

für jedes einzelne l. Im dritten Abschnitt sind die bekannten Coriolisterme angegeben, wenn das Koordinatensystem der α'_{lm} gegen das der α_{lm} bewegt wird. Schreibt man L als $L = \sum \Lambda_j$, wobei in Λ_j alle Glieder mit η^j zusammengefaßt sind, und ist $(\Lambda_1)_3$ die dritte Komponente von Λ_1, so wird im fünften Abschnitt eine bekannte Näherungsformel für $(\Lambda_1)_3$, die man gewöhnlich als die dritte Komponente von L bezeichnet, etwas modifiziert.

Sind exaktere Formeln neben den Näherungsformeln uninteressant? Die exakten Formeln verhalten sich zu den gebräuchlichen Näherungen etwa wie die Summe der Multipolterme zum Quadrupolmoment im Falle der Coulombenergie. Bekanntlich stellt man die Coulombenergie als Reihe dar, deren praktisch wichtigstes Glied das Quadrupolmoment ist. Doch werden gelegentlich auch höherstufige Terme diskutiert. Die bekannten Näherungsformeln finden im mikroskopischen Bereiche Anwendung. Betrachtet man makroskopische Tröpfchen, wie es hier geschieht, so kann man Glieder in η^2, η^3 usw., die mikroskopisch gegen η fast verschwinden, nicht mehr unberücksichtigt lassen. Von dieser mikroskopischen Vereinfachung wird also im folgenden abgesehen. Dagegen werden, wie schon oben bemerkt, die beiden Standartannahmen $\varrho = \text{const}$ und $v = \operatorname{grad} \Phi$, wonach die Dichte ϱ konstant und die Geschwindigkeit v ein Potential besitzt, nicht aufgegeben.

1. Reihenentwicklung von Deformation und Potential

Seien $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, $m = -l, \ldots, +l$, die üblichen Kugelfunktionen. Unter anderem ist dann

$$Y^*_{lm} = (-1)^m Y_{l,-m}, \tag{1}$$

$$\int d\omega\, Y^*_{lm} Y_{\lambda\mu} = \delta_{l\lambda}\delta_{m\mu}. \tag{2}$$

Das weiterhin betrachtete Flüssigkeitströpfchen sei im nichtdeformierten Zustand die Vollkugel im euklidischen 3-Raume E_3 mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und R_0 als Radius. Bei festem t sei $\eta(\theta, \varphi, t)$ eine stetig differenzierbare reelle Funktion über der Einheitssphäre derart, daß

$$R_0\eta(\theta, \varphi, t)$$

für jeden Punkt (θ, φ) der Einheitssphäre angibt, wieviel sich der entsprechende Punkt an der Oberfläche des Flüssigkeitströpfchens von der sphärischen Lage entfernt hat.

Mit $\eta = \sum \alpha_{lm} Y_{lm}$ ist dann α_{lm} eine Funktion von t. Die Gleichung

$$\alpha_{lm} = (-1)^m \alpha^*_{l,-m} \tag{3}$$

ergibt sich wie folgt. Da η reell, ist $\eta = \eta^*$, also

$$\sum \alpha_{lm} Y_{lm} = \sum \alpha^*_{lm} Y^*_{lm},$$

wegen (1) daher

$$\sum \alpha_{lm} Y_{lm} = \sum \alpha^*_{lm} (-1)^m Y_{l,-m} = \sum (-1)^m \alpha^*_{l,-m} Y_{lm}.$$

Koeffizientenvergleich ergibt dann die Behauptung. Weiter ist

$$\int \eta^2 d\omega = \sum |\alpha_{lm}|^2. \tag{4}$$

Da η reell, ist $\eta = \sum \alpha^*_{lm} Y^*_{lm}$, also

$$\eta^2 = (\sum \alpha_{lm} Y_{lm})(\sum \alpha^*_{lm} Y^*_{lm}) = \sum \alpha_{lm}\alpha^*_{\lambda\mu} Y_{lm} Y^*_{\lambda\mu},$$

also $\int \eta^2 d\omega = \sum \alpha_{lm}\alpha^*_{\lambda\mu}\delta_{l\lambda}\delta_{m\mu}$, woraus (4) folgt.

Wie oben sei Φ das Geschwindigkeitspotential, also $v = \operatorname{grad} \Phi$. Die zeitabhängigen Funktionen β_{lm} seien wieder durch $\Phi = \sum \beta_{lm} r^l Y_{lm}$ bestimmt. Die bekannte Relation

$$\beta_{lm} = l^{-1} R_0^{-l+2} \dot{\alpha}_{lm} \tag{5}$$

ist nicht streng richtig. Der übliche Beweis verläuft so. Mit der Abkürzung $R = R_0(1 + \eta)$ ist die Radialkomponente der Geschwindigkeit an der Oberfläche des Tröpfchens einerseits dR/dt, andererseits $\partial\Phi/\partial r$. Also

$$dR/dt = \partial\Phi/\partial r, \text{ daher } \sum R_0 \dot{\alpha}_{lm} Y_{lm} = \sum \beta_{lm} l R_0^{l-1} Y_{lm},$$

wobei $l r^{l-1}$ an der Stelle R_0 genommen ist. Koeffizientenvergleich ergibt dann die Behauptung. Dabei wird aber die linke Seite von $dR/dt = \partial\Phi/\partial r$ an der Stelle R, die rechte an der Stelle R_0 genommen. Dies ist nur zulässig, weil sich im mikroskopischen Anwendungsbereich R und R_0 sehr wenig voneinander unterscheiden.

Die Gleichung

$$\beta_{lm} = (-1)^m \beta^*_{l,-m}, \tag{6}$$

die sich wie (3) ergibt, ist streng richtig. Es ist nämlich Φ reell, daher einerseits

$$\Phi = \sum \beta^*_{lm} r^l Y^*_{lm} = \sum \beta^*_{lm} r^l (-1)^m Y_{l,-m} = \sum (-1)^m \beta^*_{l,-m} Y_{lm},$$

andererseits $\Phi = \sum \beta_{lm} r^l Y_{lm}$. Jetzt ergibt wieder Koeffizientenvergleich die Behauptung.

2. Drehungsinvarianten

Wie oben sei E_3 der euklidische 3-Raum. Sei D eine Drehung von E_3. Ist dann ψ eine über E_3 erklärte komplexwertige Funktion, so ist „die aus ψ vermöge der Drehung D hervorgehende Funktion" die durch

$$\psi'(x) = \psi D^{-1}(x)$$

erklärte Funktion ψ'. Wir wollen auch $\psi' = \Delta\psi$ schreiben. Dann ist also

$$\Delta\psi = \psi D^{-1}. \tag{1}$$

Ist φ eine weitere komplexwertige Funktion über E_3, so ist definitionsgemäß $\varphi \cdot \psi = \int \varphi(x)\psi^*(x)\,dx$. Also

$$\Delta\varphi \cdot \Delta\psi = \int \varphi D^{-1}(x)\psi^* D^{-1}(x)\,dx = \int \varphi(y)\psi^*(y)\,(dy/dx)\,dx.$$

Da D orthogonal, ist $dy/dx = \pm 1$, also $\Delta\varphi \cdot \Delta\psi = \varphi \cdot \psi$. Somit ist Δ eine Unitärtransformation des Funktionenraumes.

Sei Y'_{lm} die durch $Y'_{lm}(\theta, \varphi) = Y_{lm} D^{-1}(\theta, \varphi)$ bestimmte Funktion. Dann besagt ein bekannter Satz: es gibt Zahlen $D^l_{\mu m}$ derart, daß

$$Y'_{lm}(\theta, \varphi) = \sum_\mu D^l_{\mu m} Y_{l\mu}(\theta, \varphi) \tag{2}$$

für alle (θ, φ).

Man beweist die Existenz der $D^l_{\mu m}$ häufig so. Sei $w = (\alpha, \beta, \gamma)$ der Einheitsvektor in der Drehachse und ϑ der Drehwinkel. Sei $M = (M_1, M_2, M_3)$ der übliche Drehimpulsoperator, also $M_1 = -i(x_2\partial_3 - x_3\partial_2)$, $M_2 = -i(x_3\partial_1 - x_1\partial_3)$ und $M_3 = -i(x_1\partial_2 - x_2\partial_1)$. Dann ist zunächst

$$\Delta = \exp(-i\vartheta(w \cdot M))$$

eine bekannte Reihenentwicklung des Operators Δ. Für $k = 1, 2, 3$ ist bekanntlich

$$[M^2, M_k]_- \equiv M^2 M_k - M_k M^2 = 0.$$

Also ist

$$[M^2, \exp(-i\vartheta(w \cdot M))]_- = \left[M^2, \sum \frac{1}{\nu!}(-i\vartheta(w \cdot M))^\nu\right]_-$$

$$= \sum \frac{1}{\nu!}(-i\vartheta)^\nu [M^2, (w \cdot M)^\nu]_- = 0.$$

Mithin sind M^2 und Δ miteinander vertauschbar. Also

$$M^2 \Delta Y_{lm} = \Delta M^2 Y_{lm}.$$

Wegen $M^2 Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm}$ folgt dann $M^2 Y'_{lm} = l(l+1) Y'_{lm}$. Danach ist auch Y'_{lm} für $m = -l, \ldots, l$ Eigenvektor von M^2 zum Eigenwert $l(l+1)$. Der Eigenraum von M^2 zum Eigenwert $l(l+1)$ wird aber von den Vektoren $Y_{l\mu}$, $\mu = -l, \ldots, l$, aufgespannt. Es läßt sich daher Y'_{lm} als Linearkombination der $Y_{l\mu}$ darstellen.

Wie oben sei $\eta = \sum \alpha_{lm} Y_{lm}$. Die Funktionen α'_{lm} seien durch $\eta = \sum \alpha'_{lm} Y'_{lm}$ bestimmt. Dann ist

$$\sum_m |\alpha_{lm}|^2 = \sum_m |\alpha'_{lm}|^2 \tag{3}$$

für jedes einzelne l. Beweis von (3). Aus $\sum \alpha_{lm} Y_{lm} = \sum \alpha'_{lm} Y'_{lm}$ und $Y'_{lm} = \sum D^l_{\mu m} Y_{l}$ folgt

$$\sum \alpha_{lm} Y_{lm} = \sum \alpha'_{lm} D^l_{\mu m} Y_{l\mu} = \sum \alpha'_{l\mu} D^l_{m\mu} Y_{lm},$$

daher $\alpha_{lm} = \sum D^l_{m\mu} \alpha'_{l\mu}$. Somit

$$\sum_m |\alpha_{lm}|^2 = \sum_{m\mu\nu} (D^l_{m\mu} \alpha'_{l\mu})(D^{l*}_{m\nu} \alpha'^*_{l\nu}) = \sum_{\mu\nu} \alpha'_{l\mu} \alpha'^*_{l\nu} \sum_m (D^l_{m\mu} D^{l*}_{m\nu}).$$

Es genügt also zu zeigen, daß $\sum_m D_{m\mu} D^{l*}_{m\nu} = \delta_{\mu\nu}$. Das folgt aus (2) und der Orthogonalitätsrelation der Y'_{lm}.

3. Coriolisterme im bewegten Bezugssystem

Seien $\bar{e}_\nu(t)$, $\nu = 1, 2, 3$, die Hauptträgheitsachsen des Tröpfchens zum Zeitpunkt t Sei (e_1, e_2, e_3) das raumfeste Koordinatensystem. Dann gibt es eine Drehung D von E_3, die das System (e_ν) in das System $(\bar{e}_\nu(t))$ überführt. Wie oben sei Y'_{jm} die vermöge D aus Y_{jm} hervorgehende Funktion. Wie oben sei $\eta = \sum \alpha_{lm} Y_{lm} = \sum \alpha'_{lm} Y'_{lm}$ und $\alpha_{lm} = \sum D^l_{m\mu} \alpha'_{l\mu}$. Wird die Drehung $e_\nu \to \bar{e}_\nu(t)$ durch die drei Eulerschen Winkel $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ bestimmt, so ist

$$D^l_{m\mu}(t) = D^l_{m\mu}(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)), \text{ also } \dot{D}^l_{m\mu} = \sum (\partial D^l_{m\mu}/\partial\gamma_\nu)\dot{\gamma}_\nu.$$

Ist $v(t)$ ein zeitabhängiger Vektor in E_3, so ist bekanntlich

$$dv/dt = \underline{dv}/\underline{dt} + \vec{\omega} \times v,$$

wobei $\underline{d}/\underline{dt}$ die Ableitung im körperfesten und d/dt die Ableitung im raumfesten System, ferner $\vec{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit bedeuten. In Analogie zu dieser häufig benutzten, elementaren Formel gilt

$$\dot{\alpha}_{lm} = \sum_{\mu} D^{l}_{m\mu}\dot{\alpha}'_{l\mu} + \sum_{\nu} E^{\nu}_{lm}\omega_{\nu},$$

wobei die Koeffizienten E^{ν}_{lm} durch

$$E^{\nu}_{lm} = \sum_{\mu}\sum_{r} \alpha'_{l\mu}(\partial D^{l}_{m\mu}/\partial\gamma_r)\gamma_{r\nu},$$

die γ_{rs} durch

$$\dot{\gamma}_r = \sum \gamma_{r\nu}\omega_{\nu}$$

bestimmt sind: Aus $\alpha_{lm} = \sum_{\mu} D^{l}_{m\mu}\alpha'_{l\mu}$ folgt nämlich

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_{lm} &= \sum_{\mu} D_{m\mu}\dot{\alpha}'_{l\mu} + \sum_{\mu}\sum_{r} \alpha'_{l\mu}(\partial D^{l}_{m\mu}/\partial\gamma_r)\dot{\gamma}_r \\ &= \sum_{\mu} D^{l}_{m\mu}\dot{\alpha}'_{l\mu} + \sum_{\nu}\Big(\sum_{\mu}\sum_{r} \alpha'_{l\mu}(\partial D^{l}_{m\mu}/\partial\gamma_r)\gamma_{r\nu}\Big)\,\omega_{\nu};\end{aligned}$$

woraus bereits die Behauptung folgt.

4. Reihenentwicklung des Drehimpulses

Der klassische Drehimpuls $L = (L_1, L_2, L_3)$ ist der durch $\int \varrho(q \times v)dx_1dx_2dx_3$ mit $q = (x_1, x_2, x_3)$ bestimmte Vektor. Eine bekannte Näherungsformel für L, die bei sehr kleinen Deformationen brauchbar wird, ist

$$L = R_0^6\varrho \sum l^{-1}\dot{\alpha}_{lm}\alpha_{\lambda\mu} \int d\omega\, Y_{\lambda\mu} q \times \operatorname{grad} Y_{lm}. \tag{1}$$

Setzt man abkürzend

$$c_{l\nu} = R_0^{l+4}\varrho(l+4)^{-1}\binom{l+4}{\nu} \tag{2}$$

für $l = 1, 2, \ldots$ und $\nu = 0, \ldots, l+4$, so gilt schärfer

$$L = \sum c_{l\nu}\beta_{lm} \int d\omega(q \times \operatorname{grad} Y_{lm})\eta^{\nu}, \tag{3}$$

wie unten gezeigt ist. Dabei ist über $l = 1, 2, \ldots$, $m = -l, \ldots, l$ und $\nu = 0, \ldots, l+4$ zu summieren.

Für $j = 0, 1, \ldots$ sei Λ_j die Summe derjenigen Glieder in (3), die die j-te Potenz von η enthalten. Dann ist

$$L = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda_j. \tag{4}$$

Ist etwa $j = 7$, so gibt es kein Glied mit $l = 2$, das η^7 enthält. Es gibt also kein Glied mit $l = 2$, das in Λ_7 vorkommt. Es ist nämlich

$$\Lambda_7 = \sum_{l=3}^{\infty}\sum_{m} c_{l7}\beta_{lm}\int d\omega(q \times \operatorname{grad} Y_{lm})\eta^7.$$

Daß

$$\Lambda_0 = 0, \tag{5}$$

ergibt sich aus dem Stokesschen Integralsatz. Danach ist

$$\int d\omega\, q \times \operatorname{grad} Y = \int dV \operatorname{rot}\operatorname{grad} Y.$$

Andererseits ist rot grad $= 0$.

Beweis von (3). Wegen $\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum \beta_{lm} r^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$ ist

$$L = \int dV \varrho (q \times v) = \int dV \varrho (q \times \operatorname{grad} \Phi)$$
$$= \varrho \sum \beta_{lm} \int dV q \times \operatorname{grad} (r^l Y_{lm}).$$

Nun ist $(q \times \operatorname{grad})_1 = x_2 \partial_3 - x_3 \partial_2$. Andererseits ist

$$(x_2 \partial_3 - x_3 \partial_2) r^l = x_2 l r^{l-1} \frac{x_3}{r} - x_3 l r^{l-1} \frac{x_2}{r} = 0,$$

wobei $r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}$ benutzt ist. Entsprechend ist

$$(q \times \operatorname{grad})_2 r^l = 0 \text{ und } (q \times \operatorname{grad})_3 r^l = 0.$$

Also

$$L = \varrho \sum \beta_{lm} \int dV r^l q \times \operatorname{grad} Y_{lm}.$$

Mit dem Flächenelement $d\omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ ist $dx_1 dx_2 dx_3 = dV = r^2 d\omega$, also

$$L = \varrho \sum \beta_{lm} \int d\omega \int_0^R r^{l+2} q \times \operatorname{grad} Y_{lm}.$$

Sei $q = ry$ mit dem Einheitsvektor y. Dann hängt y nur noch von θ und φ ab. Auch Y_{lm} hängt nur von θ und φ ab. Also

$$L = \varrho \sum \beta_{lm} \int d\omega (y \times \operatorname{grad} Y_{lm}) \int_0^R dr r^{l+3}.$$

Nun ist

$$\int_0^R dr r^{l+3} = (l+4)^{-1} R^{l+4} = (l+4)^{-1} (R_0(1+\eta))^{l+4}$$
$$= (l+4)^{-1} R_0^{l+4} (1+\eta)^4 = (l+4)^{-1} R_0^{l+4} \sum_{\nu=0}^{l+4} \binom{l+4}{\nu} \eta^\nu,$$

woraus die Behauptung folgt.

5. Die verallgemeinerten Impulse

Von der Normierung abgesehen setzt man gewöhnlich $p_{lm} = l^{-1} \dot{\alpha}^*_{lm}$ für $l = 1, 2, \ldots$ und $m = -l, \ldots, +l$. Wir benutzen hier nicht die obige Näherungsformel $\beta_{lm} = l^{-1} R_0^{-l+2} \dot{\alpha}_{lm}$ und setzen deshalb

(1) $$p_{lm} = R_0^{l-2} \beta^*_{lm}.$$

Durch $\alpha_{lm} = (-1)^m \alpha^*_{l,-m}$ wird die Anzahl der voneinander unabhängigen α_{lm} halbiert, entsprechend durch $\beta_{lm} = (-1)^m \beta^*_{l,-m}$ die Anzahl der unabhängigen β_{lm}. Es gibt daher komplexe Funktionen A_{lm} mit

(2) $$\alpha_{lm} = A_{lm} + (-1)^m A^*_{l,-m},$$
$$p_{lm} = i(A^*_{lm} - (-1)^m A_{l,-m}).$$

Wie nachstehend gezeigt wird, ist $\sum m p_{lm} \alpha_{lm}$ bis auf einen konstanten Faktor die dritte Komponente von A_1, die übliche Näherung für die dritte Komponente des Drehimpulses. Von Interesse ist deshalb die Gleichung

(3) $$\sum m p_{lm} \alpha_{lm} = 2i \sum m A^*_{lm} A_{lm}.$$

Beweis von (3). Es ist

$$-i \sum m p_{lm}\alpha_{lm} = \sum m(A^*_{lm} - (-1)^m A_{l,-m})(A_{lm} + (-1)^m A^*_{l,-m})$$
$$= \sum m A^*_{lm} A_{lm} + \sum m(-1)^m A^*_{lm} A^*_{l,-m} - \sum m(-1)^m A_{l,-m} A_{lm}$$
$$- \sum m A_{l,-m} A^*_{l,-m}.$$

Nun ist

$$\sum_{m=-l}^{+l} m(-1)^m A_{l,-m} A_{lm} = (-A_{l,-1}A_{l1} + A_{l1}A_{l,-1})$$
$$+ 2(A_{l,-2}A_{l2} - A_{l2}A_{l,-2}) - 3(A_{l,-3}A_{l3} - A_{l3}A_{l,-3}) \pm \cdots = 0.$$

Ebenso ist $\sum m(-1)^m A^*_{lm} A^*_{l,-m} = 0$. Schließlich ist

$$\sum (-m) A_{l,-m} A^*_{l,-m} = \sum m A_{lm} A^*_{lm} = \sum m A^*_{lm} A_{lm},$$

woraus (3) folgt.

Mit der obigen Abkürzung (1) ist

$$(4) \qquad (\Lambda_1)_3 = -im R_0^6 \varrho \sum_{l=1}^{\infty} \sum_m p_{lm}\alpha_{lm}$$

eine bekannte Näherung für die dritte Komponente des Drehimpulses. Man kann (4) wie folgt beweisen. Nach dem letzten Abschnitt ist

$$\Lambda_1 = \sum c_{l1}\beta_{lm} \int d\omega (q \times \operatorname{grad} Y_{lm})\eta,$$

also

$$= \sum c_{l1}\beta_{lm}\alpha_{\lambda\mu} \int d\omega Y_{\lambda\mu} q \times \operatorname{grad} Y_{lm}$$
$$= \sum R_0^{l+4} \varrho \beta_{lm}\alpha_{\lambda\mu} \int d\omega Y_{\lambda\mu} q \times \operatorname{grad} Y_{lm}.$$

Nun ist $\beta_{lm} = (-1)^m \beta^*_{l,-m}$ und $Y_{lm} = (-1)^m Y^*_{l,-m}$. Also

$$\Lambda_1 = R_0^6 \varrho \sum R_0^{l-2} \beta^*_{lm}\alpha_{\lambda\mu} \int d\omega Y_{\lambda\mu} q \times \operatorname{grad} Y^*_{lm}$$
$$= R_0^6 \varrho \sum p_{lm}\alpha_{\lambda\mu} \int d\omega Y_{\lambda\mu} q \times \operatorname{grad} Y^*_{lm}.$$

Zum Beweis von (4) genügt es also zu zeigen, daß

$$(*) \qquad \int d\omega Y_{\lambda\mu} (q \times \operatorname{grad})_3 Y^*_{lm} = -im\delta_{\lambda l}\delta_{\mu m}.$$

Nun ist $(q \times \operatorname{grad})_3 = x_1\partial_2 - x_2\partial_1 = -iM_3$ die dritte Komponente des Drehimpulsoperators. Weiter ist $M_3 Y_{lm} = m Y_{lm}$. Schließlich ist $\int d\omega Y^*_{lm} Y_{\lambda\mu} = \delta_{l\lambda}\delta_{m\mu}$, woraus $(*)$ folgt.

6. Vergleichsformeln und Anmerkungen

Seien $x = (x_\nu)$ und $x' = (x'_\nu)$ laufende Punkte im euklidischen 3-Raume, ferner r, θ, φ die Polarkoordinaten von x und r', θ', φ' die von x'. Bekannte Formeln sind dann

$$|x - x'|^{-1} = (r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\vartheta)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\vartheta),$$

die Definitionsgleichung für die Kugelfunktionen, und

$$P_l(\cos\vartheta) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y^*_{lm}(\theta', \varphi'),$$

das Additionstheorem. Mit der Coulombenergie $C = \int\int \varrho(x)\varrho'(x') \mid x - x' \mid^{-1} dV dV'$ ist $C = \sum_{l=0}^{\infty} C_l$ und

$$C_2 = \frac{4\pi}{5} \sum_{m=-2}^{+2} \int\int \frac{\varrho(\dot{x})\varrho'(x')}{r} \left(\frac{r'}{r}\right)^2 Y_{2m}(\theta, \varphi) Y^*_{2m}(\theta', \varphi') dV dV'$$

das Quadrupolmoment. Im mikroskopischen Bereich zeigt man, daß $C_1 = 0$. Die C_l mit $l \geqq 3$ sind die üblichen Multipolterme und bei feineren Untersuchungen nicht uninteressant.

Es ist $C = \varrho^2 \int\int \mid x - x' \mid^{-1} dV dV'$ bei konstantem ϱ. Eine bekannte Näherungsformel ist jetzt

$$\int \mid x - x' \mid^{-1} dV = -\frac{4\pi}{3} R_0^5 \sum \mid \alpha_{lm} \mid^2 + 4\pi R_0^5 \sum \frac{1}{2l+1} \mid \alpha_{lm} \mid^2.$$

Versucht man, wie es oben für den Drehimpuls geschehen ist, den Ausdruck $\int \mid x - x' \mid^{-1} dV$ exakt durch die α_{lm} zu beschreiben, so gelangt man zu einer Formel, die wesentlich komplizierter als die letzte Gleichung ist. Es erhebt sich deshalb die Frage, ob die α_{lm} im makroskopischen Bereich überhaupt eine vorteilhafte Beschreibungsform für das Tröpfchen liefern. Ein Vergleich mit Formeln aus [1] und [2], die inhaltlich verwandte Fragen betreffen, aber eine andere Beschreibungsform zugrunde legen, zeigt jedoch, daß die komplizierte Gestalt nicht überraschen darf. Literatur zum mikroskopischen Fall ist nachstehend nicht aufgezählt, da die obigen Rechnungen keine echten Bestandteile aus diesem Bereiche enthalten.

Literatur

[1] *V. Garten*, Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper, Mathem. Zeitschr. **35** (1932), 684—745.

[2] *W. Macke*, Mechanik der Teilchen, Leipzig 1962, 543—549.

---

64 Fulda, Marienstr. 63

Eingegangen 9. Januar 1969

Die Konstruktion von Gruppen mit vorgeschriebenen Automorphismengruppen

Von *J. T. Hallett* in Reno, Nevada (USA) und *K. A. Hirsch* in Canberra (Australien)

Herrn Professor Dr. Wolfgang Krull zum 70. Geburtstag

Einleitung

An anderer Stelle [4] haben wir notwendige Bedingungen N_0 bis N_5 dafür abgeleitet, daß eine endliche Gruppe A zu der vollen Automorphismengruppe einer torsionsfreien (abelschen) Gruppe G isomorph ist. Diese Bedingungen führten dann zu dem Hauptsatz[1]), der besagt, daß eine solche Gruppe A ein subdirektes Produkt von Gruppen der folgenden sechs Typen ist:

Zyklische Gruppen C_2, C_4, C_6	der Ordnungen 2, 4, 6
Quaternionengruppen Q_8	der Ordnung 8
Dizyklische Gruppen DC_{12}	der Ordnung 12
Binäre Tetraedergruppen BT_{24}	der Ordnung 24.

Wir wenden uns jetzt der Frage zu, ob die Bedingungen N_0 bis N_5 auch hinreichend sind, mit anderen Worten, wir beschäftigen uns mit der Konstruktion von Gruppen mit vorgeschriebenen endlichen Automorphismengruppen. Der Vollständigkeit halber wiederholen wir zunächst die Bedingungen N_0 bis N_4 (N_5 wird in dieser Arbeit nicht gebraucht).

N_0. Das Zentrum von A enthält ein Element der Ordnung 2.

N_1. Die Ordnungen aller Elemente von A sind Teiler von 12.

N_2. Nicht jedes Element von A der Ordnung 2 ist sechste Potenz eines Elementes der Ordnung 12.

N_3. Alle Elemente von A der Ordnung 2 liegen im Zentrum von A.

N_4. Die Sylow 3-Gruppen von A sind abelsch.

Alle unsere Beispiele sind abzählbar von endlichem Rang und folgen einem gemeinsamen Muster: Jedes G ist Untergruppe der additiven Gruppe eines endlich-dimensionalen Vektorraums über den rationalen Zahlen. Aber es erweist sich als bequemer, die Gruppen durch Erzeugende und Relationen darzustellen. Jedes G erscheint dann als Erweiterung

[1]) Ein anderer Beweis dieses Hauptsatzes steht in der Arbeit [5].

einer freien abelschen Gruppe F von geeignetem endlichen Rang r durch eine elementare[2]) abelsche Gruppe. Genauer ausgedrückt,

$$F = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$$

ist frei abelsch, und

$$G = \langle F, g_i, i = 1, 2, \ldots \mid\mid p_i g_i = l_i(f_1, \ldots, f_r) \rangle,$$

wobei die p_i ausgewählte Primzahlen und die l_i ausgewählte Linearformen mit ganzzahligen Koeffizienten sind. Relationen, die anzeigen, daß G abelsch ist, schreiben wir nicht hin.

Unsere Konstruktionen beruhen auf der folgenden Idee. Die Automorphismengruppe von F ist die unimodulare Gruppe $\mathrm{GL}(r, \boldsymbol{Z})$ der ganzzahligen $r \times r$ Matrizen mit der Determinante ± 1. Die zuzüglichen Erzeugenden g_i und die definierenden Relationen bewirken, daß gewissen Elementen von F Teilbarkeitsbedingungen auferlegt sind, durch die die möglichen Automorphismen von G eingeschränkt werden. In der Tat ist ein Automorphismus γ von G schon bekannt, wofern nur die Bilder der f_ϱ, $\varrho = 1, \ldots, r$, unter γ bekannt sind. Denn dann ist

$$(p_i g_i)\gamma = l_i(f_1, \ldots, f_r)\gamma = l_i(f_1\gamma, \ldots, f_r\gamma),$$

und dieses Element muß durch p_i teilbar sein, etwa $(p_i g_i)\gamma = p_i h_i$. Nun ist aber in einer torsionsfreien Gruppe die Division, wenn überhaupt möglich, dann eindeutig, und daher

$$g_i\gamma = h_i,$$

so daß die Bilder aller Erzeugenden und damit aller Elemente von G unter γ vollständig bestimmt sind. Dieses Argument zeigt auch, daß wir dem Automorphismus γ eine $r \times r$ Matrix Γ mit *rationalen* Elementen zuordnen können, deren quadratfreie Nenner nur die Primzahlen p_i enthalten. Diese Darstellung von $\mathrm{Aut}\,(G)$ ist treu, da wir aus der Matrix Γ den Automorphismus γ durch Partialbruchzerlegung wiedergewinnen können. Es ist nämlich für $\varrho = 1, \ldots, r$:

$$f_\varrho\gamma = \sum_{\sigma=1}^{r} x_{\varrho\sigma} f_\sigma + \sum_{i=1}^{\infty} y_{\varrho i} g_i,$$

wobei die $x_{\varrho\sigma}$ und $y_{\varrho i}$ ganze Zahlen und fast alle $y_{\varrho i} = 0$ sind. Wenn wir hier in unmißverständlicher Weise $g_i = \dfrac{1}{p_i} l_i(f_1, \ldots, f_r)$ schreiben, erhalten wir

$$f_\varrho\gamma = \sum_{\sigma=1}^{r} x_{\varrho\sigma} f_\sigma + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_{\varrho i}}{p_i} l_i(f_1, \ldots, f_r) = \sum_{\sigma=1}^{r} a_{\varrho\sigma} f_\sigma$$

mit rationalen $a_{\varrho\sigma}$, und demgemäß

$$\gamma \leftrightarrow \Gamma = (a_{\varrho\sigma}).$$

Nun werden wir es in unseren Konstruktionen sogar so einrichten, daß F *eine charakteristische Untergruppe von* G ist, und dann sind alle $y_{\varrho i} = 0$, und daher ist die dem Element $\gamma \in \mathrm{Aut}\,(G)$ entsprechende Matrix Γ *ganzzahlig*. Dies ist die Form, als endliche Untergruppen von $\mathrm{GL}\,(r, \boldsymbol{Z})$, in der wir unsere endlichen Automorphismengruppen erhalten. Bei all unseren Konstruktionen müssen wir also darauf achten:

1. daß G tatsächlich torsionsfrei ist,
2. daß F charakteristisch in G ist,

[2]) Das heißt, eine periodische Gruppe, in der die Ordnungen aller Elemente quadratfrei sind.

und im Hinblick auf weitere Konstruktionen (von direkten Produkten oder Untergruppen von Automorphismengruppen, usw.)

3. daß jede Primzahl p nur einmal bei einer Konstruktion benutzt wird und wir jederzeit ein Reservoir von unendlich vielen noch unverwendeten Primzahlen zur Verfügung haben, besonders in den arithmetischen Progressionen $p \equiv 1 \pmod 4$ und $p \equiv 1 \pmod 6$. Wir können dies dadurch erreichen, daß wir die Menge aller Primzahlen von vornherein in die drei Untermengen $p \equiv 1 \pmod 4$, $p \equiv 7 \pmod{12}$ und den Rest zerlegen, dann jede der Untermengen in unendlich viele unendliche Untermengen, und zusätzlich verlangen, daß bei jeder Konstruktion nur endlich viele dieser Untermengen herangezogen werden.

Wenn eine Gruppe G von der oben beschriebenen Art den Bedingungen 1.—3. genügt, dann sagen wir, daß G „vom Standard Typus" ist.

In § 1 stellen wir die sechs fundamentalen Gruppen C_2, C_4, C_6, Q_8, DC_{12} und BT_{24} als Automorphismengruppen dar. Wir geben die Einzelheiten nur für C_4 — die anderen Fälle sind Variationen über dasselbe Thema von wachsender Komplikation[3]).

In § 2 beweisen wir, daß, wenn zwei endliche Gruppen A und B als Automorphismengruppen vor Gruppen vom Standard Typus auftreten, dann auch ihr direktes Produkt $A \times B$. Dieser Satz wird dazu benutzt, zu zeigen, daß für abelsche Automorphismengruppen die einschlägigen Bedingungen N_0, N_1 und N_2 auch hinreichend sind. Da Gruppen vom Exponenten 6, falls sie N_3 und N_4 erfüllen, abelsch sind, kann eine nicht-abelsche endliche Automorphismengruppe nur vom Exponenten 4 oder 12 sein. Wir werden in einer weiteren Arbeit die nicht-abelschen Automorphismengruppen behandeln.

In jeder Konstruktion einer Gruppe G nehmen wir einmal oder mehrmals eine beliebige Auswahl einer unendlichen Menge von Primzahlen vor. Es ist klar, daß hierbei verschiedene Wahlen zu nicht-isomorphen Gruppen führen. Daher gibt es sogar schon unter den torsionsfreien Gruppen endlichen Ranges, die eine gegebene endliche Gruppe zur Automorphismengruppe haben, immer unabzählbar viele nicht-isomorphe Gruppen.

§ 1

1. C_2 als Automorphismengruppe. Hier können wir uns ganz kurz fassen. Bekanntlich ist die Automorphismengruppe einer torsionsfreien Gruppe von Rang 1 dann und nur dann zyklisch von der Ordnung 2, wenn der Typus von G (Äquivalenzklasse von Charakteristiken der Elemente) keine Komponente ∞ enthält; sonst ist Aut (G) unendlich. Unser Standard Beispiel ist

$$G = \langle f, c_i, i = 1, 2, \ldots \mid\mid p_i c_i = f \rangle,$$

wobei $\{p_i\}$ eine unendliche Menge von verschiedenen Primzahlen ist[4]).

[3]) Was diese sechs Gruppen betrifft, so könnten wir natürlich auch auf die additiven Gruppen der Ordnungen mit endlichen Einheitengruppen in rationalen Algebren hinweisen, die in dem alternativen Beweis [5] des Hauptsatzes die entscheidende Rolle spielen. Aber das würde uns bei den komplizierteren Konstruktionen in § 2, und besonders später bei der Diskussion von nicht-abelschen Automorphismengruppen, nichts helfen, weil wir dabei die explizite Form des § 1 benötigen.

Für C_4 ist unsere Konstruktion ähnlich wie die von de Vries und de Miranda [6] angegebene, aber für C_6 und Q_8 sind die Methoden verschieden.

[4]) Die zusätzlichen Erzeugenden g_i in (1) werden je nach der Funktion, die sie erfüllen, von jetzt ab durch die Buchstaben c, d und e mit Indizes bezeichnet. (Die c sind mit einem einzigen f, die d mit je zwei f, und die e mit mehreren f verbunden. Die c und d treten immer in unendlichen Mengen auf und erfordern unendlich viele Primzahlen; wenn die e überhaupt auftreten, dann nur in endlicher Anzahl, und die zugehörigen Primzahlen sind 2 oder 3.)

Übrigens gibt es in der Literatur[5]) eine Fülle von Beispielen von Gruppen G aller Ränge, bis zu der ersten „stark unzugänglichen" Kardinalzahl, mit Aut $(G) \cong C_2$.

2. C_4 als Automorphismengruppe. Sei $\{p_i\}$ eine unendliche Menge von verschiedenen Primzahlen $p_i \equiv 1 \pmod 4$, und

$$p_i = x_i^2 + y_i^2, \quad x_i > y_i > 0,$$

die eindeutige Darstellung von p_i als Summe von zwei Quadraten. Wir nehmen eine freie Gruppe von Rang 2

$$F = \langle f_1, f_2 \rangle$$

und definieren

$$G = \langle F, d_i, i = 1, 2, \ldots \| \; p_i d_i = x_i f_1 + y_i f_2 \rangle.$$

Wir behaupten nun, daß Aut $(G) \cong C_4$ ist.

(i) G ist torsionsfrei. Für jedes Element $g \in G$ gibt es eine natürliche Zahl n, so daß $ng \in F$ ist und die Primteiler von n der Menge $\{p_i\}$ angehören. Wir zeigen: aus $ng = 0$ und $n \neq 0$ folgt $g = 0$, und wir dürfen uns natürlich auf den Fall $n = p_i$ beschränken. Nun wird G/F von den Bildern der d_i unter dem Homomorphismus $\varphi : G \to G/F$ erzeugt. Wenn also $g\varphi$ von der Ordnung p_i ist, dann muß g von der Form $g = f + bd_i$ sein, wobei $f = a_1 f_1 + a_2 f_2 \in F$ und b eine ganze Zahl ist, von der wir $0 \leqq b < p_i$ annehmen dürfen, weil $p_i d_i$ in F liegt. Dann ergibt sich

$$p_i g = (a_1 p_i + b x_i) f_1 + (a_2 p_i + b y_i) f_2,$$

und dies zeigt, daß $p_i g = 0$ dann und nur dann, wenn $f = 0$ und $b = 0$, also $g = 0$ ist.

(ii) Die Automorphismen von G. Wir bestimmen zunächst, welche Elemente von F durch ein gegebenes p_i teilbar sind. Der Einfachheit halber lassen wir den Index i in p, d, x und y fort, wenn das zu keiner Unklarheit führt. Sei also $f = a_1 f_1 + a_2 f_2$ durch p teilbar, $f = pg$ mit $g \in G$. Wenn dieses g unter $\varphi : G \to G/F$ auf Null abgebildet wird, dann liegt g in F, und ein direkter Vergleich der Koeffizienten zeigt, daß

$$a_1 \equiv a_2 \equiv 0 \pmod p.$$

Wenn aber $g\varphi \neq 0$, dann ist

$$g = f' + \sum_j b_j d_j,$$

wobei $f' \in F$ ist und von den ganzen Zahlen b_j fast alle $= 0$ sind. Nun folgt aus $pg \in F$, daß für jedes $j \neq i$ der Koeffizient b_j durch das zugehörige p_j teilbar ist. Daher ist

$$g = f^* + bd, \quad f^* \in F,$$

wobei $b \not\equiv 0 \pmod p$ ist wegen $g \notin F$. Also

$$pg = f = a_1 f_1 + a_2 f_2 = pf^* + b(x f_1 + y f_2).$$

Daher ist $a_1 \equiv bx$ und $a_2 \equiv by \pmod p$, oder aber

$$(*) \qquad y a_1 \equiv x a_2 \pmod p.$$

Umgekehrt, wenn die Koeffizienten von f diese Kongruenz $(*)$ erfüllen, dann ist

$$xf = x a_1 f + (y a_1 + kp) f_2 = a_1 (x f_1 + y f_2) + kp f_2$$

durch p teilbar. Aber $(x, p) = 1$ und daher ist f durch p teilbar.

[5]) Siehe z. B. Fuchs [3] oder Corner [1].

Also sehen wir: *Die Bedingung* (∗) *ist notwendig und hinreichend dafür, daß das Element* $f = a_1 f_1 + a_2 f_2 \in F$ *durch* p *teilbar ist.*

Nun sei γ ein Automorphismus von G. Dann haben wir

$$f_1\gamma = a'_{11}f_1 + a'_{12}f_2$$
$$f_2\gamma = a'_{21}f_1 + a'_{22}f_2,$$

mit rationalen Koeffizienten $a'_{\varrho\sigma}$, deren verbindende Relationen wir jetzt bestimmen wollen. Sei m das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner, also $a_{\varrho\sigma} = m a'_{\varrho\sigma}$ ganze Zahlen. Dann ist $mf\gamma \in F$ für alle $f \in F$. Insbesondere gilt für jedes p in $\{p_i\}$ und die dazugehörigen x und y, daß $m(xf_1 + yf_2)\gamma$ in F liegt und durch p teilbar ist. Aber

$$m(xf_1 + yf_2)\gamma = (xa_{11} + ya_{21})f_1 + (xa_{12} + ya_{22})f_2.$$

Daher ist aufgrund des obigen Kriteriums (∗)

$$y(xa_{11} + ya_{12}) \equiv x(xa_{12} + ya_{22}) \pmod{p},$$

oder wenn wir $y^2 \equiv -x^2 \pmod{p}$ benutzen und den zu p teilerfremden Faktor x kürzen,

$$y(a_{11} - a_{22}) \equiv x(a_{12} + a_{21}) \pmod{p}.$$

Hieraus ergibt sich sofort, daß

$$(a_{11} - a_{22})^2 + (a_{12} + a_{21})^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Nun steht aber links eine feste Zahl, während p beliebig groß sein kann. Daher muß $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = -a_{21}$ sein und die zugeordnete Matrix ist

$$\Gamma = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

mit ganzen Zahlen a, b, m.

(iii) F ist charakteristische Untergruppe von G. Wir wollen zeigen, daß $m = 1$ ist. Nun ist m der Exponent von $(F + F\gamma)/F \leqq G/F$, daher sind die einzig möglichen Primteiler von m die p_i. Nehmen wir an, daß $m > 1$ und daß m durch $p = x^2 + y^2$ teilbar ist. Dann ist auch

$$mf_1\gamma = af_1 + bf_2$$

durch p teilbar, und aus (∗) entnehmen wir, daß

$$ya \equiv xb \pmod{p}.$$

Außerdem ist $m(xf_1 + yf_2)$ durch p^2 teilbar, sagen wir

$$m(xf_1 + yf_2)\gamma = p^2 g$$

mit $pg \in F$. Aber

$$m(xf_1 + yf_2)\gamma = x(af_1 + bf_2) + y(-bf_1 + af_2) = (xa - yb)f_1 + (xb + ya)f_2,$$

also

$$xa - yb \equiv xb + ya \equiv 0 \pmod{p}.$$

Daraus ergibt sich

$$a \equiv b \equiv 0 \pmod{p},$$

im Widerspruch zu $(m, a, b) = 1$. Daher ist $m = 1$, wie zu beweisen war.

Jetzt haben wir die ganzzahlige unimodulare Matrixdarstellung von Aut (G) gewonnen:

$$\gamma \leftrightarrow \Gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Die Gleichung $a^2 + b^2 = 1$ hat 4 Lösungen, die eine zyklische Gruppe der Ordnung 4 bilden, erzeugt durch die Wahl $a = 0$, $b = 1$, und umgekehrt führt jede Lösung zu einem Automorphismus von G. Also ist Aut $(G) \cong C_4$.

3. C_6 als Automorphismengruppe. Dieser Fall ist ganz ähnlich wie der vorige. Dieses Mal sei $\{p_i\}$ eine unendliche Menge von verschiedenen Primzahlen $p_i \equiv 1 \pmod 6$, und

$$p_i = x_i^2 + x_i y_i + y_i^2, \quad x_i > y_i > 0.$$

Wir nehmen wieder eine freie abelsche Gruppe $F = \langle f_1, f_2 \rangle$ von Rang 2 und definieren

$$G = \langle F, d_i, i = 1, 2, \ldots \mid\mid p_i d_i = x_i f_1 + y_i f_2 \rangle.$$

Daß (i) G torsionsfrei und (iii) F charakteristisch in G ist, wird wie oben bewiesen.

(ii) Die Automorphismen von G. Das Kriterium für die Teilbarkeit von $f = a_1 f_1 + a_2 f_2$ durch $p_i = p$ ist

$$y a_1 \equiv x a_2 \pmod p.$$

In derselben Bezeichnung wie bisher führt die Matrixdarstellung eines Automorphismus γ von G wieder zu der Beziehung

$$y(x a_{11} + y a_{12}) \equiv x(x a_{12} + y a_{22}) \pmod p.$$

Aber dieses Mal müssen wir $y^2 + xy \equiv x^2 \pmod p$ einsetzen und kommen nach Kürzung des Faktors x zu der Kongruenz

$$y(a_{11} - a_{22} - a_{21}) \equiv x(a_{12} + a_{21}) \pmod p.$$

Da p beliebig groß sein kann, führt dies zu den Relationen $a_{21} = -a_{12}$, $a_{22} = a_{11} + a_{12}$, so daß die dem Automorphismus zugeordnete Matrix Γ die Gestalt

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+b \end{pmatrix}$$

mit ganzen Zahlen a und b annimmt. Die Gleichung $a^2 + ab + b^2 = 1$ hat sechs Lösungen, die eine zyklische Gruppe Aut $(G) \cong C_6$ bilden; ein erzeugendes Element ist $a = 0$, $b = 1$.

4. Die Quaternionengruppe $Q_8 = \langle \alpha, \beta \mid\mid \alpha^2 = \beta^2 = (\alpha\beta)^2 \rangle$ als Automorphismengruppe. Wir zeigen zunächst, daß der Rang einer torsionsfreien Gruppe G mit Aut $(G) \cong Q_8$, falls er endlich ist, ein Vielfaches von 4 sein muß[6]).

Da $\alpha^2 = \beta^2 = (\alpha\beta)^2$ das einzige Element der Ordnung 2 ist, muß es als Inversion $\mu = -1$ in G wirken. Für jedes $g \neq 0$ in G sind die vier Elemente g, $g\alpha$, $g\beta$, $g\alpha\beta$ linear unabhängig. Denn eine Beziehung

$$g(a + b\alpha + c\beta + d\alpha\beta) = 0$$

mit ganzen Zahlen a, b, c, d führt nach Anwendung der Automorphismen α, β und $\alpha\beta$ zu den weiteren Gleichungen

$$g(-b + a\alpha + a\beta - c\alpha\beta) = 0$$
$$g(-c - d\alpha + a\beta + b\alpha\beta) = 0$$
$$g(-d + c\alpha - b\beta + a\alpha\beta) = 0,$$

[6]) Die Rangbeziehungen für die drei Fälle Q_8 und später DC_{12} und BT_{24} können auch ohne Rechnung dadurch abgeleitet werden, daß wir die entsprechende Gruppe G in ihre „teilbare Hülle" einbetten und nach treuen rationalen Darstellungen der Automorphismengruppe fragen. Da in einer irreduziblen Darstellung dem einzigen Zentrumselement der Ordnung 2 die skalare Matrix -1 zugeordnet sein muß, finden wie wieder, daß der Grad für Q_8 und BT_{24} ein Vielfaches von 4 sein muß, für DC_{12} aber gerade und mindestens 4. Andererseits brauchen wir die im Text angegebenen expliziten Formen der Matrizen Γ, um zu verifizieren, daß wir jeweils die richtigen Automorphismengruppen erhalten.

so daß die Matrix

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & d & a & b \\ -d & -c & -b & a \end{pmatrix}$$

singulär ist. Aber $\det \Gamma = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$, also $a = b = c = d = 0$.

Wenn nun für ein Element $g_1 \in G$ die Gruppe $G_1 = \langle g_1, g_1\alpha, g_1\beta, g_1\alpha\beta\rangle$ eine periodische Faktorgruppe G/G_1 hat, dann ist G von Rang 4. Sonst aber sei g_2 ein Element von G, das nicht in der von G_1 erzeugten *reinen* Untergruppe von G enthalten ist. Dann ist $G_2 = \langle G_1, g_2, g_2\alpha, g_2\beta, g_2\alpha\beta\rangle$ vom Rang 8, und der Prozeß geht gegebenenfalls weiter, wobei der Rang jedesmal um 4 wächst.

Wir konstruieren jetzt eine torsionsfreie Gruppe G vom Rang 4 mit $\mathrm{Aut}\,(G) \cong Q_8$. Es seien $\{p_i\}$ und $\{q_j\}$ zwei elementfremde unendliche Mengen von Primzahlen, $p_i, q_j \equiv 1 \pmod 4$, und

$$p_i = x_i^2 + y_i^2, \quad x_i > y_i > 0, \quad q_j = z_j^2 + w_j^2, \quad z_j > w_j > 0$$

ihre eindeutigen Darstellungen als Summen von zwei Quadraten. Wir nehmen eine freie abelsche Gruppe des Ranges 4

$$F = \langle f_1, f_2, f_3, f_4\rangle$$

und definieren

$$G = \langle F, d_{i1}, d_{i2}, d_{j1}, d_{j2}, i, j = 1, 2, \ldots\rangle$$

mit den Relationen

$$p_i d_{i1} = x_i f_1 + y_i f_2, \quad p_i d_{i2} = x_i f_4 + y_i f_3,$$
$$q_j d_{j1} = z_j f_1 + w_j f_3, \quad q_j d_{j2} = z_j f_2 + w_j f_3.$$

Ein Blick auf die Ergebnisse unter 2. zeigt, daß die Automorphismengruppen der von $\langle f_1, f_2\rangle$, $\langle f_3, f_4\rangle$, $\langle f_1, f_3\rangle$, und $\langle f_2, f_4\rangle$ erzeugten reinen Untergruppen von G jeweils zyklisch der Ordnung 4 sind. Dies gibt uns schon genügend Information über die Beziehungen zwischen den Elementen der Matrix Γ, die einem Automorphismus γ von G zugeordnet ist.

(i) G ist torsionsfrei. Der Beweis ist jetzt Routine. Es genügt zu zeigen, daß aus $p_i g = 0$ oder $q_j g = 0$ folgt, daß $g = 0$ ist, und dies geschieht durch Vergleich der Koeffizienten von g und $g\varphi$, wobei $\varphi : G \to G/F$ der natürliche Homomorphismus ist.

(ii) Die Automorphismen von G. Das Kriterium für Teilbarkeit des Elementes $f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + a_4 f_4$ durch p_i lautet dieses Mal

$$y_i a_1 \equiv x_i a_2 \text{ und } y_i a_4 \equiv x_i a_3 \,(\mathrm{mod}\, p_i);$$

für Teilbarkeit durch q_j ist es

$$w_j a_1 \equiv z_j a_3 \text{ und } w_j a_2 \equiv z_j a_4 \,(\mathrm{mod}\, q_j).$$

Es sei nun

$$\gamma \leftrightarrow \Gamma = \frac{1}{m}(a_{\varrho\sigma})$$

die *rationale* Matrixdarstellung von $\gamma \in \mathrm{Aut}\,(G)$, wobei m das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner ist. Genau wie in 2. gibt uns die Analyse des Elementes $m(x_i f_1 + y_i f_2)\gamma$,

das in F liegt und durch p_i teilbar ist, zunächst Kongruenzen und dann Gleichungen zwischen den Elementen der ersten beiden Zeilen, nämlich:

$$a_{22} = a_{11}, \quad a_{21} = -a_{12}, \quad a_{24} = -a_{13}, \quad a_{23} = a_{14};$$

und ebenso finden wir durch Betrachtung von $m(x_i f_4 + y_i f_3)\gamma$

$$a_{42} = -a_{31}, \quad a_{41} = a_{32}, \quad a_{44} = a_{33}, \quad a_{43} = -a_{34}.$$

Schließlich erhalten wir aus $m(w_j f_1 + z_j f_3)\gamma$ noch weitere Relationen zwischen den Elementen der ersten und dritten Zeile und damit

$$\Gamma = \overset{\perp}{m}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}.$$

(iii) F ist charakteristische Untergruppe von G. Um zu zeigen, daß $m = 1$ ist, gehen wir wie in 2. vor und betrachten der Reihe nach die Elemente

$$mf_1\gamma, \; m(x_i f_1 + y_i f_2)\gamma, \text{ und } m(w_j f_1 + z_j f_3)\gamma.$$

Es erweist sich dann, daß Γ ganzzahlig und unimodular ist, mit der Determinante

$$\det \Gamma = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = 1.$$

Die acht Lösungen dieser Gleichungen werden zum Beispiel durch

$$\alpha : b = 1, \quad a = c = d = 0,$$
$$\beta : c = 1, \quad a = b = d = 0$$

erzeugt, und man verifiziert unmittelbar, daß $\mathrm{Aut}\,(G) \cong Q_8$ ist.

5. Die dizyklische Gruppe $DC_{12} = \langle \alpha, \beta \,||\, \alpha^2 = \beta^3 = (\alpha\beta)^2 \rangle$ als Automorphismengruppe. Hier müssen wir die Struktur der Gruppe etwas genauer heranziehen. Wieder ist $\alpha^2 = \beta^3 = (\alpha\beta)^2$ das einzige Element der Ordnung 2, also der Inversionsautomorphismus $\mu = -1$. Für jedes $g \in G$, $g \neq 0$, sind g und $g\alpha$ linear unabhängig, so daß der (endliche) Rang einer torsionsfreien Gruppe G mit $\mathrm{Aut}\,(G) \cong DC_{12}$ gerade sein muß: es sei $G_1 = \langle g_1, g_1\alpha \rangle$. Falls G/G_1 periodisch wäre (aber wir werden sofort sehen, daß dies nicht möglich ist!), dann wäre G vom Rang 2. Sonst wählen wir ein Element g_2, das nicht in der von G_1 erzeugten reinen Untergruppe liegt, und setzen $G_2 = \langle G_1, g_2, g_2\alpha \rangle$. Dieser Prozeß geht weiter, solange die Faktorgruppe nicht periodisch ist, und der Rang wächst jedesmal um 2.

Wir zeigen nun, daß der Rang von G mindestens 4 sein muß. Da $\beta^3 + 1 = 0$ ist, haben wir $(\beta + 1)(\beta^2 - \beta + 1) = 0$, aber $\beta + 1 \neq 0$. Daher gibt es ein $g \neq 0$ in G, für das $g(\beta^2 - \beta + 1) = 0$. Ferner ist

$$-\alpha\beta^2 = -\alpha^2\beta\alpha = \beta\alpha = (\beta^2 + 1)\alpha = \alpha\beta + \alpha$$

Diese Information reicht aus, um zu zeigen, daß g, $g\beta$, $g\alpha$ und $g\alpha\beta$ linear unabhängig sind. Denn eine Relation

$$g(a + b\beta + c\alpha + d\alpha\beta) = 0$$

mit ganzen Zahlen a, b, c, d führt nach Anwendung von β, α und $\alpha\beta$ der Reihe nach zu den weiteren Gleichungen

$$\begin{aligned} g(&-b + (a + b)\beta &&- d\alpha + (c + d)\alpha\beta) = 0, \\ g(&-(c + d) + d\beta + (a + b)\alpha &&- b\alpha\beta) = 0, \\ g(&-d &&- c\beta + b\alpha + a\alpha\beta) = 0, \end{aligned}$$

so daß die Matrix

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a+b & -d & c+d \\ -(c+d) & d & a+b & -b \\ -d & c & b & a \end{pmatrix}$$

singulär ist. Also

$$\det \Gamma = (a^2 + ab + b^2 + c^2 + cd + d^2)^2 = 0$$

oder $a = b = c = d = 0$.

Wir konstruieren jetzt eine torsionsfreie Gruppe G des Ranges 4 mit $\mathrm{Aut}(G) \cong DC_{12}$. Es seien $\{p_i\}$ und $\{q_j\}$ zwei elementfremde unendliche Mengen von Primzahlen $p_i \equiv 1 \pmod 4$ $q_j \equiv 1 \pmod 6$, und

$$p_i = x_i^2 + y_i^2, \quad x_i > y_i > 0, \quad q_j = z_j^2 + z_j w_j + w_j^2, \quad w_j > z_j > 0$$

ihre eindeutigen Darstellungen. Wir nehmen die freie abelsche Gruppe $F = \langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle$ des Ranges 4 und definieren wieder,

$$G = \langle F, d_{i1}, d_{i2}, d_{j1}, d_{j2}, i, j = 1, 2, \ldots \rangle,$$

aber dieses Mal mit den Relationen

$$p_i d_{i1} = x_i f_1 + y_i f_4, \quad p_i d_{i2} = x_i f_2 + y_i f_3,$$
$$q_j d_{j1} = z_j f_1 + w_j f_2, \quad q_j d_{j2} = z_j f_3 + w_j f_4.$$

Die Ergebnisse von 2. und 3. zeigen, daß die Automorphismengruppen der von $\langle f_1, f_4 \rangle$ und von $\langle f_2, f_3 \rangle$ erzeugten reinen Untergruppen zyklisch der Ordnung 4 sind, und die der von $\langle f_1, f_2 \rangle$ und von $\langle f_3, f_4 \rangle$ erzeugten zyklisch der Ordnung 6.

(i) G ist torsionsfrei und (iii) F ist charakteristisch in G. Wir lassen die Beweise fort, da sie nichts Neues bieten.

(ii) Die Automorphismen von G. Das Kriterium für die Teilbarkeit des Elementes $f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + a_4 f_4$ durch p_i hat dieses Mal die Form

$$y_i a_1 \equiv x_i a_4 \text{ und } y_i a_2 \equiv x_i a_3 \pmod{p_i};$$

für die Teilbarkeit durch q_j ist es

$$w_j a_1 \equiv z_j a_2 \text{ und } w_j a_3 \equiv z_j a_4 \pmod{q_j}.$$

Die ganzzahlige Matrixdarstellung eines Automorphismus γ von G ist

$$\gamma \leftrightarrow \Gamma,$$

wobei Γ wie oben ist, und die Unimodularitätsbedingung ist

$$\det \Gamma = (a^2 + ab + b^2 + c^2 + cd + d^2)^2 = 1.$$

Die 12 Lösungen dieser Gleichung bilden die Gruppe $\mathrm{Aut}(G) \cong DC_{12}$, erzeugt durch

$$\alpha : c = 1, \quad a = b = d = 0,$$

$$\beta : b = 1, \quad a = c = d = 0.$$

6. Die binäre Tetraedergruppe $BT_{24} = \langle \alpha, \beta \,||\, \alpha^3 = \beta^3 = (\alpha\beta)^2 \rangle$ als Automorphismengruppe. Wir lassen die etwas langwierigen rechnerischen Details fort und beschränken

uns darauf, die Beziehungen anzugeben, die unsere Konstruktion einer Gruppe G mit Aut $(G) \cong BT_{24}$ motivieren.

Wieder ist $\alpha^3 = \beta^3 = (\alpha\beta)^2 = -1$, also $g(\alpha^3 + 1) = g(\beta^3 + 1) = 0$ für alle $g \in G$. Der in G durch $\varepsilon = (\alpha^2 - \alpha + 1)\beta(\alpha + 1)$ induzierte Endomorphismus muß Null sein, da $\varepsilon^2 = 0$ ist (siehe [4], Seite 290, P 2.). Nehmen wir einmal an, daß $g(\alpha + 1) = 0$ ist für ein $g \in G$. Dann ist $0 = g(\alpha^2 - \alpha + 1)\beta(\alpha + 1) = 3g\beta(\alpha + 1)$, daher

$$g\beta = -g\beta\alpha = g\alpha^2\beta^2 = g\beta^2 \quad .$$

Also ist $g\beta$ unter β^3 invariant, daher $g\beta = 0$ und so $g = 0$. Andererseits, da $g(\alpha^3 + 1) = 0$ ist für alle $g \in G$, sehen wir, daß $g(\alpha^2 - \alpha + 1) = 0$ für alle $g \in G$ ist; ähnlich ergibt sich, daß $g(\beta^2 - \beta + 1) = 0$ ist.

Jetzt haben wir wieder genügend Information, um zu sehen, daß für jedes $g \in G$, $g \neq 0$, die Elemente g, $g\alpha$, $g\beta$ und $g\alpha\beta$ linear unabhängig sind. Denn wenn wir auf eine Relation

$$g(a + b\alpha + c\beta + d\alpha\beta) = 0$$

mit ganzen Zahlen a, b, c, d der Reihe nach die Automorphismen α, β und $\alpha\beta$ anwenden, finden wir

$$\begin{aligned} &g(-(b + c + d) + (a + b + c)\alpha + (c + d)\beta \quad -- \; c\alpha\beta) = 0, \\ &g(-c \quad - d\alpha + (a + c)\beta + (b + d)\alpha\beta) = 0, \\ &g(-(c + d) \quad + c\alpha \quad - b\beta + (a + b)\alpha\beta) = 0. \end{aligned}$$

Die Matrix

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -(b + c + d) & a + b + c & c + d & -c \\ -c & -d & a + c & b + d \\ -(c + d) & c & -b & a + b \end{pmatrix}$$

ist also singulär. Nun läßt sich die Determinante in der Form

$$\det \Gamma = A^2 + B^2 + C^2 + D^2$$

$$A = a^2 + ab + b^2 + ac + bc + bd, \quad B = c^2 + cd + d^2 + ac + bc + bd$$

$$C = ac + ad + bd \quad D = bc - ad$$

auswerten, und dies führt zu der einzigen Lösung $a = b = c = d = 0$. Wie vorher schließen wir, daß der (endliche) Rang einer torsionsfreien Gruppe G mit Aut $(G) \cong BT_{24}$ ein Vielfaches von 4 sein muß.

Die Konstruktion einer solchen Gruppe folgt demselben Muster wie bisher. Wir wählen zwei elementfremde unendliche Mengen von Primzahlen $\{p_i\}$ und $\{q_j\}$, $p_i \equiv 1 \pmod 6$, $q_j \equiv 1 \pmod 4$, mit den eindeutigen Darstellungen

$$p_i = x_i^2 + x_i y_i + y_i^2, \quad x_i > y_i > 0, \quad q_j = z_j^2 + w_j^2, \quad z_j > w_j > 0.$$

$F = \langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle$ ist frei abelsch von Rang 4, und

$$G = \langle F, d_{i1}, d_{i2}, d_{j1}, d_{j2}, i, j = 1, 2, \ldots \rangle,$$

aber mit den Relationen

$$\begin{aligned} p_i d_{i1} &= x_i f_1 + y_i f_3, \quad p_i d_{i2} = x_i f_2 + y_i f_4 \\ q_j d_{j1} &= z_j f_1 + w_j f_4, \quad q_j d_{j2} = z_j f_2 + w_j (f_4 - f_3). \end{aligned}$$

Den Nachweis, daß (i) G torsionsfrei und (iii) F charakteristisch in G ist, lassen wir fort, ebenfalls die Überlegungen, die zu der ganzzahligen Matrixdarstellung

$$\gamma \leftrightarrow \Gamma$$

eines Automorphismus γ von G führen.

Die Unimodularitätsbedingung ist in der obigen Bezeichnung

$$\det \Gamma = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1.$$

Nun brauchen wir nur noch nachzuweisen, daß diese Gleichung 24 Lösungen hat, die eine Gruppe Aut $(G) \cong BT_{24}$ bilden; zwei Erzeugende sind zum Beispiel

$$\alpha : b = 1, \quad a = c = d = 0,$$
$$\beta : c = 1, \quad a = b = d = 0.$$

§ 2

Wir wollen jetzt den Satz vom direkten Produkt beweisen und ihn dazu verwenden, alle möglichen endlichen abelschen Automorphismengruppen zu konstruieren.

1. Es sei G eine beliebige torsionsfreie Gruppe mit endlicher Automorphismengruppe Aut $(G) \cong A$, von unserem Standard Typus:

$$G = \langle F, g_i, i = 1, 2, \ldots \mid\mid p_i g_i = l_i(f_1, \ldots, f_r)\rangle,$$

wobei $F = \langle f_1, \ldots, f_r\rangle$ frei abelsch von Rang r ist.

Es ist wichtig zu bemerken, daß in allen Konstruktionen, die wir bisher vorgenommen haben und weiter vornehmen werden, die Linearformen l_i den Elementen von F Teilbarkeitsbedingungen auferlegen: $f = a_1 f_1 + \cdots + a_r f_r$ ist in G durch eine der Primzahlen p_i dann und nur dann teilbar, wenn gewisse Kongruenzen zwischen den Koeffizienten $a_i, \ldots, a_r$ bestehen; und f ist durch eine von den p_i verschiedene Primzahl q dann und nur dann teilbar, wenn jedes a_ϱ durch q teilbar ist.

Lemma. *G kann in eine torsionsfreie Gruppe G^* desselben Ranges r und mit derselben Automorphismengruppe* Aut $(G^*) \cong A$ *so eingebettet werden, daß jedes Element von G in G^* teilbar wird durch jede Primzahl q_j einer unendlichen zu $\{p_i\}$ elementfremden Menge $\{q_j\}$.*

Beweis. Es genügt, jedes f_ϱ, $\varrho = 1, \ldots, r$, in G^* durch jedes q_j teilbar zu machen. Denn dann ist $p_i g_i = l_i(f_1, \ldots, f_r)$ ebenfalls durch q_j teilbar, sagen wir $p_i g_i = q_j h_i$, und hier muß h_i durch p_i teilbar sein, $h_i = p_i k_i$, also $g_i = q_j k_i$.

Wir nehmen jetzt r unendliche Mengen von weiteren Erzeugenden

$$c_{j\varrho},\ j = 1, 2, \ldots,\ \varrho = 1, \ldots, r,$$

und fügen die Relationen $q_j c_{j\varrho} = f_\varrho$ hinzu. Also:

$$G^* = \langle G, c_{j\varrho}, j = 1, 2, \ldots, \varrho = 1, \ldots, r \mid\mid q_j c_{j\varrho} = f_\varrho\rangle.$$

Es ist evident, daß der Rang von G^* wieder r ist und daß die Sylow q_j-Gruppe von G^*/G von den Bildern von $c_{j1}, \ldots, c_{jr}$ erzeugt ist.

(i) G^* ist torsionsfrei. Da G^*/G periodisch ist, gibt es für jedes $g^* \in G^*$ eine natürliche Zahl n mit $ng^* \in G^*$. Wir zeigen, daß $ng^* = 0$, $n \neq 0$, auf $g^* = 0$ führt. Natürlich dürfen wir annehmen, daß n eine der Primzahlen q_j ist, und dann können wir schreiben

$$g^* = g + \sum_{\varrho=1}^{r} a_\varrho c_{j\varrho}$$

mit $g \in G$ und $0 \leqq a_\varrho < q_j$. Nun ist

$$0 = q_j g^* = q_j g + \sum_{\varrho=1}^{r} a_\varrho q_j c_{j\varrho} = q_j g + \sum_{\varrho=1}^{r} a_\varrho f_\varrho,$$

und dies zeigt, daß $\sum_{\varrho=1}^{r} a_\varrho f_\varrho$ durch q_j teilbar ist. Da aber $q_j \notin \{p_i\}$, kann das nur der Fall sein, wenn jedes a_ϱ durch q_j teilbar, also $x_\varrho = 0$, ist. Daher ist $g^* \in G$, und da G torsionsfrei ist, folgt aus $q_j g^* = q_j g = 0$, daß $g^* = 0$ ist.

(ii) F ist charakteristisch in G^*. Sei q_k eine feste Primzahl in $\{q_j\}$. Jedes f_ϱ und daher jedes g_i ist durch q_k teilbar. Aber auch die $c_{j\varrho}$ mit $j \neq k$, weil nämlich $q_j c_{j\varrho} = q_k c_{k\varrho} = f_\varrho$ ist. Es sei γ^* ein beliebiger Automorphismus von G^*. Wir können schreiben:

$$f_1\gamma^* = g + \sum_{j\neq k}{}' a_{j\varrho} c_{j\varrho} + \sum_{\varrho=1}^{r} a_{k\varrho} c_{k\varrho},$$

wobei $g \in G$ und alle a_j ganze Zahlen sind, $0 \leqq a_{k\varrho} < q_k$.

Nach der oben gemachten Bemerkung sind die linke Seite und die beiden ersten Summanden auf der rechten Seite in G^* durch q_k teilbar, also auch der letzte Summand $\sum_{\varrho=1}^{r} a_{k\varrho} c_{k\varrho}$. Dann ist aber

$$q_k \sum a_{k\varrho} c_{k\varrho} = \sum_{\varrho=1}^{r} a_{k\varrho} f_\varrho$$

sogar in G durch q_k teilbar. Daher ist $a_{k\varrho} = 0$, $\varrho = 1, \ldots, r$. Wenn wir der Reihe nach jede Primzahl in $\{q_j\}$ in der gleichen Weise behandeln, sehen wir, daß $f_1\gamma^*$ in G liegt. Genauso ist $f_2\gamma^*, \ldots, f_r\gamma^* \in G$, das heißt, $F\gamma^* \leqq G$ und sogar $G\gamma^* \in G$. Daher ist G, und als charakteristische Untergruppe von G auch F, charakteristisch in G^*.

(iii) Die Automorphismen von G^*. Jeder Automorphismus γ von G kann in eindeutiger Weise zu einem Automorphismus γ^* von G^* erweitert werden: da nämlich jedes f_ϱ für alle j durch q_j teilbar ist, haben wir $f_\varrho\gamma = f_\varrho\gamma^* = q_j g_\varrho$ für ein geeignetes g, und nun

$$(q_j c_{j\varrho})\gamma^* = q_j g_\varrho$$

oder

$$c_{j\varrho}\gamma^* = g_\varrho,$$

weil G^* torsionsfrei ist. Also ist γ^* für alle Erzeugenden von G^* erklärt.

Umgekehrt gibt jeder Automorphismus von G^* durch Beschränkung einen Automorphismus von G, und verschiedene Automorphismen von G^* müssen sogar schon auf F verschiedene Wirkungen haben, da der Identitätsautomorphismus von F zu dem Identitätsautomorphismus von G^* erweitert wird.

Also ist in der Tat Aut $(G^*) \cong$ Aut (G), und der Beweis des Lemmas ist vollständig.

2. Satz. *Wenn zwei endliche Gruppen A und B als Automorphismengruppen von torsionsfreien Gruppen vom Standard Typus auftreten, dann auch ihr direktes Produkt $A \times B$.*

Beweis. Es sei $A =$ Aut (G) und $B =$ Aut (H), wobei G und H torsionsfrei und von unserem Standard Typus sind. Wie in dem vorangehenden Lemma, betten wir G in G^* und H in H^* ein, aber so, daß die zwei Mengen von Primzahlen $\{q_j^{(G)}\}$ und $\{q_j^{(H)}\}$ in den Definitionen von G^* und H^* voneinander und von allen Primzahlen in den Definitionen von G und H verschieden sind.

Nun setzen wir $K = G^* \oplus H^*$ und zeigen, daß

$$\mathrm{Aut}\,(K) \cong A \times B$$

ist.

Die Charakteristik eines jeden Elementes von G hat in G^* von Null verschiedene Komponenten an allen Stellen, die den Primzahlen q_j entsprechen, während kein einziges Element von H^* unendlich viele solche von Null verschiedene Komponenten haben kann. Genauso hat die Charakteristik jedes Elementes von H in H^* von Null verschiedene Komponenten an allen Stellen, die den Primzahlen $\bar{q}_k$ entsprechen, und kein Element von G^* hat unendlich viele solche von Null verschiedenen Komponenten. Aber unter einem Homomorphismus können die Komponenten einer Charakteristik nicht kleiner werden. Das bedeutet, daß $\mathrm{Hom}\,(G^*, H^*) = \mathrm{Hom}\,(H^*, G^*) = 0$ ist, oder aber, daß G^* und H^* charakteristische Untergruppen von K sind. Daher ist

$$\mathrm{Aut}\,(K) \cong \mathrm{Aut}\,(G^*) \times \mathrm{Aut}\,(H^*) = \mathrm{Aut}\,(G) \times \mathrm{Aut}\,(H) = A \times B,$$

wie zu beweisen war.

3. Wir sind jetzt in der Lage zu zeigen, daß für endliche abelsche Gruppen die einschlägigen Bedingungen N_0, N_1 und N_2 auch hinreichend sind (N_3 und N_4 sind ohne Bedeutung).

Eine endliche abelsche Gruppe A, die N_1 erfüllt, ist ein direktes Produkt von zyklischen Gruppen, sagen wir k der Ordnung 2, l der Ordnung 3 und m der Ordnung 4. Wir schreiben $A = [k, l, m]$. Die nicht-negativen ganzen Zahlen k, l und m sind nur den folgenden beiden Einschränkungen unterworfen: 1. $k + m > 0$, denn sonst wäre A von ungerader Ordnung, im Widerspruch zu N_0; 2. $k > 0$ falls $l > 0$, denn sonst wäre jedes Element der Ordnung 2 in A sechste Potenz, im Widerspruch zu N_2.

In § 1 haben wir $C_2 = [1, 0, 0]$, $C_4 = [0, 0, 1]$ und $C_6 = [1, 1, 0]$ als Automorphismengruppen konstruiert. Mehrfache Anwendung des Satzes vom direkten Produkt erlaubt es uns, $[k, l, m]$ aus einfacheren Gruppen aufzubauen: nämlich für $l \leqq k$ aus $k - l$ Exemplaren von $[1, 0, 0]$, l Exemplaren von $[1, 1, 0]$ und m Exemplaren von $[0, 0, 1]$; und für $l > k$ aus $k - 1$ Exemplaren von $[1, 0, 0]$, m Exemplaren von $[0, 0, 1]$ und einer einzigen Gruppe $[1, l, 0]$.

Es bleibt jetzt nur noch übrig, diese Gruppe $[1, l, 0]$ als Automorphismengruppe darzustellen. Wir tun dies, indem wir erst aufgrund des Satzes vom direkten Produkt einer Gruppe $\bar{G}$ mit $[l, l, 0]$ als Automorphismengruppe konstruieren und dann weitere Erzeugende, vom Typus e, und weitere definierende Relationen hinzufügen, die die Wirkung haben, die Automorphismen von den einzelnen direkten Faktoren so zu koppeln, daß nur in einem Faktor alle sechs zulässig bleiben, in allen übrigen Faktoren aber nur drei. Wir geben die Einzelheiten für den Fall $l = 2$, an dem die Methode klar ersichtlich ist; der allgemeine Fall führt nur zu einer Anhäufung von Indizes.

Es seien G' und G'' zwei Gruppen von unserer Standard Form des § 1. 3, jede mit C_6 als Automorphismengruppe, und jede schon erweitert wie in dem vorangehenden Lemma, so daß die Charakteristiken der Elemente von G' und G'' „unverträglich" sind:

$$G' = \langle f_1', f_2', g_i' \rangle, \quad G'' = \langle f_1'', f_2'', g_i'' \rangle,$$

wobei wir die definierenden Relationen weggelassen haben.

Dann ist die Automorphismengruppe von

$$\bar{G} = G' \oplus G''$$

die Gruppe $[2, 2, 0]$ der Ordnung 36.

Wir definieren jetzt

$$G = \langle \bar{G}, e_1, e_2, e \,||\, 3e_1 = f_1' + f_1'', 3e_2 = f_2' + f_2'', 3e = f_1' + f_2' \rangle$$

und behaupten, daß Aut $(G) = [1, 2, 0]$ ist. Man beachte, daß

$$f_1'' + f_2'' = 3(e_1 + e_2 - e).$$

(i) Wir zeigen zunächst, daß G torsionsfrei ist. Jedes Element $g \in G$ hat die Form

$$g = \bar{g} + a_1 e_1 + a_2 e_2 + ae,$$

wobei $\bar{g} \notin \bar{G}$ ist und die ganzen Zahlen a_1, a_2 und a (mod 3) reduziert sind. Ersichtlich ist $3g \in \bar{G}$. Wenn nun g von der endlichen Ordnung n ist, dann ist $3ng = 0$, und da $\bar{G}$ torsionsfrei ist, $3g = 0$. Nun ist aber

$$3g = 3\bar{g} + (a_1 + a)f_1' + (a_2 + a)f_2' + a_1 f_1'' + a_2 f_2''.$$

Daher ist die Summe der letzten vier Glieder, die in $F = F' \oplus F''$ liegt, durch 3 teilbar. Wir wissen aber, daß dies nur dann der Fall sein kann, wenn alle Koeffizienten durch 3 teilbar sind, das heißt, wegen der auferlegten Beschränkungen $a_1 = a_2 = a = 0$.

(iii) Die Tatsache, daß G' und G'', also auch $\bar{G}$, charakteristische Untergruppen von G sind, kann wie in früheren Fällen dadurch erwiesen werden, daß man die Teilbarkeitseigenschaften einiger ausgewählter Elemente heranzieht.

(ii) Nun untersuchen wir die Automorphismen von G. Sei $\gamma \in$ Aut (G). Es genügt, die Bilder von e_1, e_2, und e unter γ zu kennen. Aus § 1. 3 wissen wir, daß

$$(3e_1)\gamma = (f_1' + f_1'')\gamma = (a'f_1' + b'f_2') + (a''f_1'' + b''f_2''),$$

wobei

$$a'^2 + a'b' + b'^2 = 1 \text{ und } a''^2 + a''b'' + b''^2 = 1.$$

Da unter dem Homomorphismus $G \to G/F$ das Element $(3e_1)\gamma$ auf Null abgebildet wird, ist $e_1\gamma$ von der Ordnung 3 (mod F). Aber die Elemente der Ordnung 3 in G/F werden von den Bildern von e_1, e_2, und e erzeugt. Daher

$$e_1 \equiv x_1 e_1 + x_2 e_2 + xe \pmod{F},$$

und nun

$$3e_1\gamma \equiv (x_1 + x)f_1' + (x_2 + x)f_2' + x_1 f_1'' + x_2 f_2'' \pmod{F}.$$

Ein Vergleich mit dem obigen Ausdruck zeigt, daß

$$a' \equiv x_1' + x, \quad b' \equiv x_2' + x, \quad a'' \equiv x_1, \quad b'' \equiv x_2 \pmod 3.$$

Dies ergibt die Bedingung

$$a' - b' \equiv a'' - b'' \pmod 3.$$

Die entsprechende Untersuchung von $e_2\gamma$ und $e\gamma$ führt zu keinen weiteren Einschränkungen. Jetzt ist es klar, daß von den 36 möglichen Auswahlen von a', b', a'', b'' nur 18 übrigbleiben, und daß diese 18 in der Tat Automorphismen von G liefern, die die erwünschte Gruppe $[1, 2, 0]$ bilden. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Man beachte, daß wir unsere Konstruktion der Automorphismengruppe $[k, l, m]$ von der Ordnung $2^k 3^l 4^m$ mit einer Gruppe G des Ranges $k + l + 2m$ für $l \leqq k$ und des Ranges $k + 2l + 2m - 1$ für $l > k$ erreicht haben. Corner [2] (siehe auch Zassenhaus [7]) hat den folgenden Satz bewiesen: Wenn eine endliche Gruppe der Ordnung n die

Automorphismengruppe einer torsionsfreien Gruppe ist, dann kann der Rang der letzteren so gewählt werden, daß er $2n$ nicht übersteigt. Unsere Konstruktion ist also sehr viel vorteilhafter.

Noch eine letzte Bemerkung: Die Bedingungen N_0, N_1 und N_2 sind für das Auftreten nicht nur endlicher, sondern auch beliebiger *periodischer* abelscher Gruppen als Automorphismengruppen notwendig. Und alle Überlegungen dieses Paragraphen sind anwendbar, wenn die Zahlen k, l und m auch den Wert $\aleph_0$ annehmen dürfen. (Natürlich muß man bei dem „Verdünnungs"-Prozeß in der Auswahl unendlich vieler unendlicher Mengen von Primzahlen die nötige Vorsicht anwenden.) Wir haben also gleichzeitig einen vollständigen Überblick über alle abzählbaren periodischen abelschen Automorphismengruppen von torsionsfreien Gruppen gewonnen.

Literatur

[1] *A. L. S. Corner*, Ph. D. Thesis, Cambridge 1961 und J. of Algebra **11** (1969), 155—185.

[2] *A. L. S. Corner*, Every countable reduced torsion-free ring is an endomorphism ring, Proc. London Math. Soc. (3) **13** (1963), 687—710.

[3] *L. Fuchs*, The existence of indecomposable abelian groups of arbitrary power, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **10** (1959), 453—457.

[4] *J. T. Hallett* and *K. A. Hirsch*, Torsion-free groups having finite automorphism groups, J. of Algebra **2** (1965), 287—298.

[5] *K. A. Hirsch* and *H. Zassenhaus*, Finite automorphism groups of torsion-free groups, J. London Math. Soc. **41** (1966), 545—549.

[6] *H. de Vries* and *A. B. de Miranda*, Groups with a small number of automorphisms, Math. Z. **68** (1958), 450—464.

[7] *H. Zassenhaus*, Orders as endomorphism rings of modules of the same rank, J. London Math. Soc. **42** (1967), 180—182.

Department of Mathematics, Queen Mary College, University of London, Mile End Road, London E. 1

Eingegangen 9. Januar 1969

Über die additiven Gruppen spezieller Fastringe

Von *Jürgen Timm* in Hamburg

Herrn Professor Dr. Wolfgang Krull zum 70. Geburtstag

Unter einem Fastring verstehen wir hier eine doppelte binäre Struktur $F(+, .)$, die bezüglich „$+$" eine (nicht notwendig abelsche) Gruppe bildet und das eine Distributivgesetz $(\mathsf{A}\, a, b, c \in F : a(b + c) = ab + ac)$ erfüllt. Bei der Untersuchung der Addition von Fastringen entstehen zwei Fragen:

a) Was läßt sich über die Struktur der additiven Gruppen von Fastringen mit vorgegebenen Eigenschaften sagen?

b) Kann man umgekehrt zu additiven Gruppen mit vorgegebenen Eigenschaften Fastringe mit gewissen (ebenfalls vorgegebenen) Eigenschaften angeben?

Während die erste dieser Fragen insbesondere im Hinblick auf die Kommutativität für einige Fastringklassen z. B. in [4], [6], [7] und [9] untersucht wurde, fehlt bis auf wenige Ansätze (z. B. in [9] für den Fall, daß $F(+, .)$ nullsymmetrisch (vgl. Def. 1), $F(.)$ eine Loop und $F(+)$ abelsch ist) eine Antwort auf die zweite Frage. Greift man a) und b) gleichzeitig an, so gelangt man zu Kennzeichnungssätzen für die additiven Gruppen spezieller Fastringklassen. Einige solcher Kennzeichnungen werden in dieser Note gegeben. Insbesondere im Falle der linkslösbaren Fastringe mit endlicher (Satz 1) oder abelscher additiver Gruppe (Satz 2) kommt man so zu einem gewissen Abschluß.

Wir beginnen die Überlegungen mit der Auszeichnung spezieller Eigenschaften von Fastringen:

Definition 1. Ist $F(+, .)$ ein Fastring, so bezeichnet 0 das neutrale Element von $F(+)$ und $F^* := F \setminus \{0\}$. $F(+, .)$ heißt *assoziativ*, wenn $F(.)$ eine Halbgruppe ist und *nullsymmetrisch*, wenn die 0 in $F(.)$ mit jedem Element kommutiert.

$F(+, .)$ heißt *links(rechts)lösbar*, wenn $xa = b (ax = b)$ für $a \in F^*$ und $b \in F$ eine Lösung x in F besitzt. $F(+, .)$ heißt *links(rechts)regulär*, wenn für $a \in F^*$ aus $xa = ya$ $(ax = ay)$ die Gleichung $x = y$ folgt. $F(+, .)$ heißt *links(rechts)eindeutig-lösbar*, wenn $xa = b$ $(ax = b)$ für $a \in F^*$ in F genau eine Lösung x besitzt. Der Zusatz „links" (bzw. „rechts") wird genau dann weggelassen, wenn die entsprechende Eigenschaft sowohl links als auch rechts erfüllt ist.

Die Frage der Existenz von Fastringen $F(+, .)$ zu vorgegebener Gruppe $F(+)$ beantwortet:

(1) *Zu jeder Gruppe $F(+)$ existiert ein nullsymmetrischer, assoziativer und rechtseindeutig-lösbarer Fastring $F(+, .)$.*

Beweis. Man definiert in F eine zweite Operation „." gemäß

$$ab := \begin{cases} 0 & \text{falls } a = 0 \\ b & \text{sonst} \end{cases}$$

und überzeugt sich leicht davon, daß $F(+, .)$ ein Fastring mit den behaupteten Eigenschaften ist.

Bevor wir uns den folgenden Kennzeichnungssätzen für spezielle Fastringklassen zuwenden definieren wir noch:

Definition 2. Ist E eine Menge von Abbildungen einer Menge M in sich, so heißt E *transitiv* (auf M), falls $\forall\, a,\ b \in M\ \exists\, x \in E : x(a) = b$. E heißt *regulär*, falls $\forall\, a \in M \wedge x, y \in E : x(a) = y(a) \Rightarrow x = y$. Während (1) lehrt, daß es zu beliebigen Gruppen rechtseindeutig-lösbare Fastringe $F(+, .)$ gibt, sind die Verhältnisse bei den linkslösbaren und linksregulären Fastringen komplizierter:

Voraussetzung. *$F(+)$ sei im folgenden stets eine Gruppe.*

(2) *$F(+)$ ist genau dann die additive Gruppe eines linkslösbaren Fastrings $F(+, .)$, wenn* End $(F(+))$[1] *transitiv auf F^* operiert.*

Beweis. Die eine Richtung ist klar, denn die Translationen $a^* : x \to ax$ eines linkslösbaren Fastrings $F(+, .)$ sind natürlich Endomorphismen und operieren transitiv auf F^*. Für die Umkehrung benötigt man das Auswahlaxiom: Sei End $(F(+))$ transitiv auf F^* und e ein beliebiges Element von F^*. Dann wähle man aus der Menge der Endomorphismen φ mit $\varphi(e) = a$ für jedes Element $a \in F^*$ einen Repräsentanten φ_a aus und ordne speziell dem Element e die Identität zu. Mit diesen Abbildungen definiere man schließlich

$$ab := \begin{cases} 0 & \text{falls } a = 0 \\ \varphi_a(b) & \text{sonst.} \end{cases}$$

$F(+, .)$ bildet dann einen linkslösbaren Fastring und es ist $\varphi_a(e) = a$, d. h. e ist rechtsneutral und wegen $\varphi_e = \mathrm{id}.$ auch linksneutral in $F(+, .)$. Definitionsgemäß ist schließlich $F(+, .)$ nullsymmetrisch, so daß wir in dieser Beweisrichtung sogar die etwas stärkere Aussage:

(2)* *Erfüllt $F(+)$ die Bedingungen von* (2), *so existiert sogar ein nullsymmetrischer, unitärer und linkslösbarer Fastring $F(+, .)$.*

bewiesen haben.

Definition 3. *Wir sagen, die Gruppe $F(+)$ besitzt eine Charakteristik, wenn $F(+)$ torsionsfrei oder die Ordnung aller Elemente eine feste Primzahl p ist. (Im ersten Fall wird* Char $F(+) = 0$, *im zweiten Fall* Char $F(+) = p$ *geschrieben).*

(3) *Die additive Gruppe eines linkslösbaren Fastrings besitzt eine Charakteristik und enthält keine echte, vollinvariante Untergruppe.*

Beweis. Ist $F(+)$ die additive Gruppe eines solchen Fastringes, so existieren nach (2) zu $a, b \in F^*\varphi, \psi \in$ End $(F(+))$ mit $\varphi(a) = b$ und $\psi(b) = a$. Es kann also keine echte, vollinvariante Untergruppe geben und man erhält ord $a =$ ord $b\ \forall\, a, b \in F^*$. Entweder ist also $F(+)$ torsionsfrei oder es existiert eine natürliche Zahl n mit ord $a = n\ \forall\, a \in F^*$. Sei $n = km$, so gilt $\forall\, a \in F^* : a(km) = 0$[2]), woraus $(ak)m = 0$ folgt. Entweder ist also $ak = 0$ und $k =$ ord $a = n$ oder ord $(ak) = m = n$. Es muß also n eine Primzahl sein.

[1]) End $(F(+))$ bezeichnet die Halbgruppe der Endomorphismen von $F(+)$, Mon $(F(+))$ die der Monomorphismen und Aut $(F(+))$ die Automorphismengruppe von $F(+)$.

[2]) an wird hier stets (für positive n) als Abkürzung für $\sum_{\nu=1}^{n} a$ bzw. (für negative n), als Abkürzung für $\sum_{\nu=1}^{-n} -a$ benutzt.

Im endlichen Fall läßt sich (3) auch umkehren:

Satz 1. *Eine endliche Gruppe $F(+)$ ist genau dann die additive Gruppe eines linkslösbaren Fastrings, wenn $F(+)$ eine Charakteristik besitzt und keine (echte) vollinvariante Untergruppe enthält.*

Beweis. Wegen (2) und (3) genügt es zu zeigen, daß End $(F(+))$ auf F^* transitiv operiert, wenn $F(+)$ die Bedingungen aus Satz 1 erfüllt. Wir beweisen deshalb das folgende

Lemma 1. *Ist* Char $F(+) = p$ *(Primzahl),* $|F| = p^n$ *und keine echte Untergruppe von F vollinvariant, so operiert* End $(F(+))$ *transitiv auf F^*.*

Beweis. Für $n = 0, 1$ ist dies trivial. Wir nehmen an, daß $n > 1$ und die Behauptung für $k < n$ richtig ist. $F(+)$ sei wie verlangt gegeben und $a, b \in F^*$. Nach [10], 3. 22 oder [3], 4. 3 existieren echte Normalteiler von $F(+)$.

Fall 1. Gibt es einen echten Normalteiler N von F, der a nicht enthält, so existiert ein Homomorphismus

$$\varphi_1 : \begin{cases} F \to F/N, \\ x \to x + N, \end{cases}$$

der a nicht annulliert. Wegen Char $F/N(+) = p$ existiert ein Normalteiler vom Index p in F/N (vgl. [10], 3. 2. 2) und damit ein Homomorphismus φ_2 von F/N auf $\{\bar{b}\}$. Sei $d + N$ eine Restklasse von F/N mit $\varphi_2(d + N) = b$. Wegen $|F/N| = p^k$ mit $k < n$ existiert (nach Induktionsvoraussetzung) ein $\varphi_3 \in \text{End}\,(F(+))$ mit $\varphi_3 = (a + N) = d + N$. Durch Zusammensetzen erhält man einen Endomorphismus $\varphi := \varphi_2\varphi_3\varphi_1$, der $\varphi(a) = b$ erfüllt.

Fall 2. Ist a in jedem echten Normalteiler von $F(+)$ enthalten, so ist $\{\bar{a}\}$ selbst ein Normalteiler von $F(+)$ (nach [3] 4. 3. 1 ist wenigstens eine Untergruppe der Form $\{\bar{x}\}$ $(x \neq 0)$ im Zentrum von F enthalten. $\{\bar{x}\}$ ist also echter Normalteiler von F und $\{\bar{a}\} = \{\bar{x}\}$). Dann existiert ein $\alpha \in \text{Aut}\,(F(+))$ und ein $c \in F \setminus \{\bar{a}\}$ mit $\alpha(a) = c$. (Wäre nämlich $\forall\, \alpha \in \text{Aut}\,(F(+)) : \alpha(a) \in \{\bar{a}\}$, so wäre $\{\bar{a}\}$ vollinvariant, da der Kern jedes

$$\psi \in \text{End}\,(F(+)) \setminus \text{Aut}\,(F(+)),$$

als echter Normalteiler von F, $\{\bar{a}\}$ enthält, d. h. durch jedes solche ψ wird a in 0 abgebildet.) Das so gefundene c erfüllt mit dem echten Normalteiler $\{\bar{a}\}$ die Voraussetzungen von Fall 1, es existiert also ein $\eta \in \text{End}\,(F(+))$ mit $\eta(c) = b$. Dann ist $\varphi := \eta\alpha$ ein Endomorphismus, der a in b abbildet.

(4) *$F(+)$ ist genau dann die additive Gruppe eines linksregulären Fastrings $F(+, .)$, wenn es eine zu F gleichmächtige Menge $E \subseteq \text{End}\,(F(+))$ gibt, die auf F^* regulär operiert.*

Beweis. Ist $F(+, .)$ ein linksregulärer Fastring, so sei $E = \{a^* \mid a \in F\}$. Ist $F = \{0\}$, so ist die Behauptung trivialerweise erfüllt, existiert ein $x \in F^*$, so folgt aus $a^* = b^*$ speziell $ax = bx$ und $a = b$. Es ist also $|E| = |F|$.

Ist umgekehrt

$$\Phi : \begin{cases} F \to \text{End}\,(F(+)) \\ a \to \varphi_a \end{cases}$$

eine Injektion, so definiert $ab := \varphi_a(b)$ einen linksregulären Fastring.

(5) *$F(+)$ ist genau dann die additive Gruppe eines nullsymmetrischen linksregulären Fastrings $F(+, .)$, wenn es eine zu F^* gleichmächtige Menge $M \subseteq \text{Mon}\,(F(+))$ gibt, die auf F^* regulär operiert.*

Beweis. Ist $F(+,.)$ ein solcher Fastring, so operieren die Translationen ohne 0^* regulär auf F^* und sind zu F^* gleichmächtig (s. (4)). Aus $a^*(x) = 0$ folgt $ax = 0 = 0x$, d. h. die Translationen sind jetzt sogar Monomorphismen von $F(+)$. Geht man umgekehrt von einer Injektion

$$\Phi: \begin{cases} F \to \mathrm{Mon}\,(F(+)) \\ a \to \varphi_a \end{cases}$$

aus, so definiert man $\varphi_0(x) = 0$ und erhält durch $ab := \varphi_a(b)$ einen nullsymmetrischen und linksregulären Fastring.

Korollar. *Jeder nullsymmetrische linksreguläre Fastring ist auch rechtsregulär.*

Für die Formulierung der folgenden Aussagen benötigen wir noch die

Definition 4. $F(+)$ heißt *teilbar*, wenn für jedes $n \neq 0$ aus $\boldsymbol{Z}$[3]) und jedes $a \in F$ die Gleichung $xn = a$ in F eindeutig lösbar ist. $F(+)$ heißt *halbierbar*, wenn dies speziell für $n = 2$ gilt. Ein Element e eines Fastrings $F(+,.)$ heißt *semilinksneutral*, wenn $\forall\, x, y \in F$ gilt $e(ex) = x$ und $e(xy) = (ex)y$. Ein e heißt *echt semilinksneutral*, wenn es außerdem nicht linksneutral in einem echten Unterfastring von $F(+,.)$ ist.

Neumann [6] bewies, daß jeder assoziative, halbierbare, linksreguläre Fastring mit einem echten ($\neq 0$) Idempotenten abelsche Addition besitzt. Der Satz läßt sich noch etwas verschärfen:

(6) *Eine halbierbare Gruppe $F(+)$ ist genau dann die additive Gruppe eines Fastrings mit echten Semilinksneutralen, wenn $F(+)$ abelsch und $|F| \geqq 2$ ist.*

Beweis. Ist e ein echtes Semilinksneutrales eines Fastrings $F(+,.)$, so gilt für die Abbildung e^* die Gleichung $e^{*2} = \mathrm{id.}$, d. h. e^* ist eine Bijektion und wie wir oben sahen damit sogar ein Automorphismus von $F(+)$. Die Elemente $x \in F$ mit $ex = x$ bilden dann einen Unterfastring von $F(+,.)$, denn mit $ea = a$, $eb = b$ folgt $e(a-b) = ea - eb = a - b$ und $e(ab) = (ea)b = ab$. Dieser Fastring muß also $\{0\}$ sein, d. h. der Automorphismus e^* besitzt kein Fixelement in F^*. Nach dem Satz von Neumann (siehe [6]) ist also $F(+)$ abelsch.

Gehen wir umgekehrt von einer abelschen Gruppe $F(+)$ aus, so enthält F^* kein Element von gerader Ordnung, da wir $F(+)$ als halbierbar voraussetzen. (Wäre nämlich $\mathrm{ord}\, a = 2n$, so wäre $an + an = 0 + 0 = 0$ ein Widerspruch zur Eindeutigkeit der Zerlegung von 0). Also ist $x \neq -x$ für jedes $x \in F^*$, und man kann F disjunkt zerlegen in $F = P \cup \{0\} - P$. Dann definiert

$$ab := \begin{cases} 0 \text{ für } a = 0 \\ b \text{ für } a \in P \\ -b \text{ sonst} \end{cases}$$

einen nullsymmetrischen, rechtseindeutig lösbaren und sogar assoziativen Fastring $F(+,.)$, in dem jedes Element von $-P$ echt semilinksneutral und jedes Element aus P linksneutral ist.

Wir haben damit wieder den etwas weitergehenden Satz

(6)* *Erfüllt $F(+)$ die Voraussetzungen von* (6), *so existiert sogar ein nullsymmetrischer, assoziativer, rechtseindeutig lösbarer Fastring $F(+,.)$ mit echten Semilinksneutralen und linksneutralen Elementen.*

bewiesen.

[3]) In dieser Note bedeutet $\boldsymbol{N}$ die Menge der natürlichen, $\boldsymbol{Z}$ die der ganzen und $\boldsymbol{Q}$ die der rationalen Zahlen.

Mit diesen Ergebnissen läßt sich nun die Aussage von Schulte am Hülse [9] über die additiven Gruppen von nullsymmetrischen (beidseitig), eindeutig lösbaren Fastringen mit kommutativer Addition und vollem Einselement wie folgt verallgemeinern:

Satz 2. *Die folgenden Aussagen über eine Gruppe* $F(+)$ *sind äquivalent:*

A 1: $F(+)$ *ist abelsch und besitzt eine transitive Endomorphismenhalbgruppe.*

A 2: $F(+)$ *ist abelsch und besitzt eine transitive Automorphismengruppe.*

A 3: $F(+)$ *ist abelsche Gruppe mit Primzahlcharakteristik oder teilbare abelsche Gruppe der Charakteristik* 0.

A 4: $F(+)$ *ist die direkte Summe von Untergruppen, die entweder sämtlich zu einer einfachen zyklischen Gruppe oder zu* $\mathfrak{Q}(+)$ *isomorph sind.*

A 5: $F(+)$ *ist die additive Gruppe eines Vektorraums über einem Schiefkörper.*

A 6: $F(+)$ *ist die additive Gruppe eines kommutativen Körpers.*

A 7: $F(+)$ *ist die additive Gruppe eines Schiefkörpers.*

A 8: $F(+)$ *ist die additive Gruppe eines Fastkörpers*[4]).

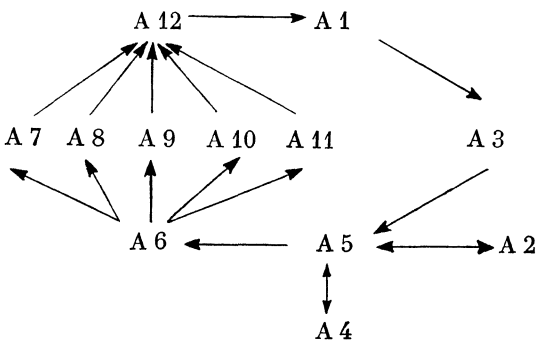
A 9: $F(+)$ *ist die additive Gruppe eines Alternativkörpers*[4]).

A 10: $F(+)$ *ist die additive Gruppe eines Quasikörpers*[4]).

A 11: $F(+)$ *ist die additive Gruppe eines linkslösbaren Fastrings, der die Charakteristik* 2 *besitzt oder halbierbar ist und ein echtes Semilinksneutral enthält.*

A 12: $F(+)$ *ist die additive Gruppe eines linkslösbaren Fastrings und abelsch.*

Beweisschema.



A 1 → A 3: Nach (3) folgt, daß $F(+)$ eine Charakteristik besitzt. Sei Char $F(+) = 0$, $a \in F^*$ und $0 \neq n \in Z$. Dann ist $an \neq 0$, es existiert also ein $\varphi \in \mathrm{End}\,(F(+))$ mit $\varphi(an) = a \Rightarrow x := \varphi(a)$ löst die Gleichung $xn = a$. Aus $xn = yn = a$ folgt weiter $yn - xn = 0 = (y - x)n$, da $F(+)$ abelsch ist. Wegen Char $F(+) = 0$ und $n \neq 0$ erhält man $y = x$. $F(+)$ ist in diesem Fall also sogar teilbar.

A 3 → A 5: Sei zunächst Char $F(+) = p$ (Primzahl), $[n]$ die Kongruenzklasse von $n \bmod p$ $(n \in Z)$ und $P := Z/(p) = \{[n] \mid n \in Z\}$ der Primkörper der Charakteristik p. Dann wird $F(+)$ durch die Definition $(\forall\, a \in F\ \forall\, [n] \in P{:})\ a \circ [n] := an$ zum Vektorraum über P. Die Vektorraum-Eigenschaften prüft man durch simple Rechnung nach. Das Produkt $a \circ [n]$ ist wohldefiniert, weil

$$[n] = [m] \Rightarrow \exists\, k \in Z{:}\ n = m + kp \Rightarrow an = a(m + kp) = am + (ak)p = am.$$

[4]) Zur Definition der Fastkörper sei auf [4], der Alternativ- und Quasikörper auf [8] verwiesen.

Ist dagegen Char $F(+) = 0$ und $F(+)$ teilbar, so bezeichnen wir (zu $a \in F^*$ und $0 + n \in \boldsymbol{Z}$) die eindeutig bestimmte Lösung x von $xn = a$ mit $\frac{a}{n}$. Für dieses Symbol gelten die „Bruchregeln"

$$\frac{am}{n} = \frac{a}{n}m, \quad \frac{ak}{nk} = \frac{a}{n}, \quad \frac{a}{1} = a, \quad \frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}, \quad \frac{am}{n} + \frac{ak}{l} = \frac{a(ml+kn)}{nl}$$

sowie $\frac{\left(\frac{a}{n}\right)}{k} = \frac{a}{nk}$, die man leicht aus der Definition der Symbole ableitet. Aus diesen Regeln folgt, daß die Vorschrift $a \circ \frac{m}{n} = \frac{am}{n}$ wohldefiniert ist und die Vektorraumgesetze erfüllt, wenn $\frac{m}{n} \in \boldsymbol{Q}$ ist. $F(+)$ ist in diesem Fall also Vektorraum über dem Körper der rationalen Zahlen $\boldsymbol{Q}(+, .)$.

A 5 → A 2: Sind $a, b \in F^*$ (Rechtsvektorraum über dem Schiefkörper K) linear abhängig, so ist $b = ak$ mit $k \in K$ und die Abbildung $\begin{cases} F \to F \\ x \to xk \end{cases}$ bekanntlich ein Automorphismus von $F(+)$. Sind a, b linear unabhängig, so lassen sie sich zu einer Basis von F ergänzen, so daß man $aK \oplus bK \oplus M = F$ erhält. Es gibt also einen Automorphismus, der aK und bK vertauscht und M festhält. Mit dem obigen Schluß erhält man dann auch einen Automorphismus von $F(+)$, der a in b überführt.

A 2 → A 5: Folgt aus dem Lemma von Schur (vgl. [2] Kap. IV, § 8).

A 5 → A 4: Ein Vektorraum über einem Schiefkörper ist auch Vektorraum über dem zugehörigen Primkörper P. Es existiert also eine P-Basis B von F, woraus $F = \sum_{b \in B} \oplus bP$ und $bP \cong P$ folgt.

A 4 → A 5: P sei ein Primkörper, φ_i Isomorphismen von $P(+)$ auf gewisse Gruppen $K_i(+)$ und $F = \sum_{i \in I} \oplus \varphi_i(P)$. Dann erhält man durch die Festsetzung

$$\langle \varphi_i(\alpha_i) \mid i \in I \rangle \circ \alpha := \langle \varphi_i(\alpha_i \alpha) \mid i \in I \rangle \quad (\alpha_i, \alpha \in P)$$

einen Vektorraum über P, der $F(+)$ als additive Gruppe besitzt.

A 5 → A 6: Wie oben bemerkt können wir annehmen, daß F ein Vektorraum über einem Primkörper P ist. Die Dimension von F über P wird mit $[F : P]$ bezeichnet. Zum Beweis werden wir einen kommutativen Körper $K(+, .)$ konstruieren, der P als Primkörper enthält und $[K : P] = [F : P]$ erfüllt. Dann sind nach [5] (Kap. V, § 3. 7) F und K isomorphe Vektorräume und man kann mit Hilfe dieses Isomorphismus die Multiplikation von K auf F übertragen. $F(+, .)$ wird dann ein kommutativer Körper und wir haben A 6 bewiesen. Bei der Durchführung dieses Konzepts ist eine Fallunterscheidung angebracht:

Fall 1. Sei $|P| = p$ (Primzahl) und $[F : P] = n \in \boldsymbol{N}$. Dann existiert nach [11] ein Körper K mit p^n Elementen, der P enthält. Es ist also $[K : P] = [F : P]$.

Fall 2. Sei $P = \boldsymbol{Q}$ und $[F : P] = n \in \boldsymbol{N}$. Für $n = 1$ ist $\boldsymbol{Q}$ selbst der gesuchte Körper K. Für $n \geqq 2$ ist das Polynom $f(x) = x^n - 2$ in $\boldsymbol{Q}[x]$ irreduzibel und deshalb $K = \boldsymbol{Q}[x]/(x^n - 2)$ ein Körper mit $[K : \boldsymbol{Q}] = n$. (Vgl. [11].)

Vor der Behandlung der unendlichdimensionalen Vektorräume F beweisen wir das folgende

Lemma 2. *Ist M eine unendliche Menge, B eine Menge mit $2 \leqq |B| \leqq \aleph_0$ und A die Menge aller Abbildungen $\varphi: M \to B$ mit $\varphi(m) = b$ für fast alle $m \in M$. Dann gilt $|A| = |M|$.*

Beweis. $\mathfrak{M}$ sei die Menge aller endlichen und $\mathfrak{M}_n$ die Menge aller n-elementigen ($n \in N$) Teilmengen von M. Dann ist

$$|A| = |\text{Menge aller Abbildungen von Mengen } E \in \mathfrak{M} \text{ in } \cdot\, B| = \sum_{E \in \mathfrak{M}} |B|^{|E|}.$$

Wir berechnen zunächst $|\mathfrak{M}|$: Es ist $|\mathfrak{M}_n| \leqq |M|^n$ und $|M|^n = |M|$, weil M unendlich ist (vgl. [1] § 27. 1). Also ist

$$|\mathfrak{M}| = \sum_{n \in N} |\mathfrak{M}_n| \leqq \sum_{n \in N} |M| = \aleph_0 |M| = |M|$$

nach dem Satz von Hessenberg (vgl. [1] § 28. 2). Andererseits ist $|\mathfrak{M}_1| = |M|$, also $|\mathfrak{M}| = |M|$. Damit folgt $|A| \leqq \sum_{E \in \mathfrak{M}} \aleph_0^{|E|}$, da $|B| \leqq \aleph_0$ ist, und

$$|A| \leqq \sum_{E \in \mathfrak{M}} \aleph_0 = |\mathfrak{M}| \aleph_0 = |M| \aleph_0 = |M|.$$

Voraussetzungsgemäß enthält aber B ein Element $b_1 \neq b_0$ und A die „Charakteristische Funktion"

$$\varphi_m: \begin{cases} M \to B \\ x \to \begin{cases} b_1, \text{ falls } m = x \\ b_0 \text{ sonst} \end{cases} \end{cases}$$

für jedes $m \in M$. Damit ist

$$|M| \leqq |A| \text{ und zusammen } |M| = |A|.$$

Wir setzen nun den Beweis für A 5 → A 6 fort mit dem

Fall 3. $[F: P] \geqq \aleph_0$.

I sei eine Indexmenge mit $|I| = |F: P|$ und $X = \{x_i\}_{i \in I}$ eine Familie verschiedener Symbole. Wie Zariski und Samuel (in [12] § 18) konstruieren wir den Polynomring $R := P[X]$. Die Menge M der Monome $x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots x_{i_n}^{\alpha_n}$ ($n \in N$, $\alpha_\nu \in N$, $i_\nu \in I$, $\nu = 1, \ldots, n$) bildet eine P-Basis von R. Die Dimension $[R: P]$ ist also gerade $|M|$, und dies ist gleich der Kardinalzahl der Menge aller Abbildungen von I in N, die an fast allen Stellen 0 sind. Nach Lemma 2 ist $|M| = |I|$. Weiter ist

$$|R| = |\text{Menge aller Abbildungen von } M \text{ in } P, \text{ die an fast allen Stellen 0 sind}|,$$

und wegen $2 \leqq |P| \leqq \aleph_0$ kann man erneut das Lemma anwenden, das jetzt $|R| = |I|$ liefert. R ist ein Integritätsbereich. Dann ist der Quotientenring $K := R_{R^*}$ ein kommutativer Körper, der (nach Konstruktion des Quotientenrings) $|K| \leqq |R|^2 = |R| = |I|$ erfüllt. R läßt sich isomorph in K einbetten, so daß $|R| \leqq |K|$ und $[R: P] \leqq [K: P]$ sein muß. Hieraus folgt $|K| = |I|$ und K ist ein unendlichdimensionaler Vektorraum über P. Aus Lemma 2 folgt wieder, daß dann $[K: P] = |K| = |I| = [F: P]$ sein muß.

A 6 → A 7, . . ., A 11, weil ein kommutativer Körper ein Spezialfall der dort genannten Strukturen ist. Für den Schluß

$A_\nu \to$ A 12 ($\nu = 7, \ldots, 11$) hat man nur zu zeigen, daß für die vorkommenden Strukturen die Addition abelsch ist. Für Fastkörper (und damit auch für Schiefkörper) bewies dies Karzel in [4][5]), für Quasikörper (und damit auch für Alternativkörper) Pickert in [7]. Für die in A 11 genannten Fastringe folgt es aus (6).

A 12 → A 1: folgt aus (2).

[5]) Oder kann aus [6] bzw. (6) geschlossen werden.

Literatur

[1] *H. Bachmann*, Transfinite Zahlen, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.

[2] *R. H. Bruck*, A survey of binary systems, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958.

[3] *M. Hall jr.*, The theory of groups, New York 1959.

[4] *H. Karzel*, Bericht über projektive Inzidenzgruppen, Jahresber. DMV **67** (1965), 58–92.

[5] *A. G. Kurosch*, Vorlesungen über allgemeine Algebra, Zürich, Frankfurt/M., 1964.

[6] *B. H. Neumann*, On the commutativity of addition, J. London Math. Soc. **15** (1940), 203—208.

[7] *G. Pickert*, Nichtkommutative cartesische Gruppen, Archiv d. Math. **3** (1952), 335—342.

[8] *G. Pickert*, Projektive Ebenen, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.

[9] *J. Schulte am Hülse*, Gruppenpartitionen und zugehörige schwach affine Räume, Staatsexamensarbeit Hamburg 1967.

[10] *W. Specht*, Gruppentheorie, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.

[11] *B. L. v. d. Waerden*, Algebra I, 7. Auflage, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1966.

[12] *O. Zariski* and *P. Samuel*, Commutative Algebra, Toronto-London-New York 1958.

Mathematisches Seminar der Universität, 2 Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 67/69

Eingegangen 13. Januar 1969

Prüfer rings with zero divisors

By *Malcolm Griffin* at Wellington, New Zealand

To Wolfgang Krull on his seventieth birthday

---

1. Introduction

Just as valuation theory may be used to study Prüfer domains (Krull [8]), so the extended valuation theory of Manis [11] may be used to study Prüfer rings which contain zero divisors. For these generalized valuations Krull's theorem [9] that every integrally closed domain is the intersection of valuation rings can be extended to those rings which either have few zero divisors or have von Neumann regular rings as total quotient rings.

There are at least fourteen different characterizations of Prüfer domains which may be generalized to commutative rings with unity; some of these may be generalized in several different ways. Such generalizations have been studied in [2—6] and [10]. We show that thirteen of these definitions may be stated in such a way that they are equivalent to the property: *every finitely generated regular ideal is invertible.* We call such rings Prüfer rings. The relationship between them and their total quotient rings is similar to the relationship between Prüfer domains and their quotient fields. Among the Prüfer rings, we characterize those rings which generalize Dedekind domains in a similar direction.

Arithmetical rings and commutative semi-hereditary rings, which are also generalizations of Prüfer Domains, are shown to be obtained by placing restrictions on the total quotient ring of the Prüfer ring.

We shall use the word ring to mean commutative ring with non zero unit. An element is called regular if it is not a zero divisor; an ideal is called regular if it contains a regular element. The complement of P in A is denoted $A \setminus P$. An upper index ^{e} will be used to denote extended ideals in the ring of quotients A_P. K will always denote the total quotient ring of the ring A. A is integrally closed will mean that A is integrally closed in K.

2. Manis valuations

We recall some results of Manis [11]. A valuation is a map v from a ring K onto a totally ordered group Γ and a symbol ∞, such that for all x, y in K,

1. $v(xy) = v(x) + v(y)$
2. $v(x + y) \geqq \min \{v(x), v(y)\}$.

Proposition 1. *Let A be a subring of K. Let P be a prime ideal of A. The following conditions are equivalent:*

1. *if B is a subring of K containing A and M is a prime ideal of B, with $M \cap A = P$, then $A = B$;*
2. *for all x in $K \setminus A$, there exists y in P such that xy is in $A \setminus P$;*
3. *there is a valuation (v, Γ) on K such that:*

$$A = \{x \in K \mid v(x) \geqq 0\},$$

$$P = \{x \in K \mid v(x) > 0\}.$$

If the above conditions hold between a ring A, its total quotient ring K and a prime P, then (A, P) (or A, if there is no ambiguity) is called a *Manis valuation ring.*

A ring is said to have *few zero divisors* if it has only finitely many maximal prime ideals of zero. The principal property of a ring A with few zero divisors is: for any element z in the total quotient ring of A, and any regular element a of A there exists an element u in A such that $z + au$ is regular, (choose u in all maximal 0-primes not containing z and in no 0-primes containing z). Davis [3] has studied valuation theory for rings with few zero divisors. Davis defines a *quasi-valuation ring* to be a ring with few zero divisors such that if x is a regular element of K then either x or its inverse lies in A.

Lemma 2. *Let A be a ring with few zero divisors. Then A is a Manis valuation if and only if it is a quasi-valuation ring.*

Proof. If A is quasi-valuation and $\frac{x}{y}$ is in $K \setminus A$ with x and y in A, then $x + uy$ is regular for some u in A, so that $t = \frac{x + uy}{y} = \frac{x}{y} + u$ is regular. Since t is not in A, $s = \frac{1}{t}$ belongs to P, and thus $\frac{sx}{y} = 1 - su$ belongs to $A \setminus P$. The converse is straight forward.

Let S be a multiplicatively closed set in a ring A. The following three types of quotient rings will be used repeatedly:

1. The *ring of quotients* with respect to S denoted A_S (which is not necessarily a subring of K).
2. The *quotient ring* with respect to S denoted $A_{(S)}$, a subring of K equal to A_T where T is the set of regular elements in S.
3. The *large quotient ring* with respect to S denoted $A_{[S]}$ with

$$A_{[S]} = \{x \in K \mid xs \text{ is in } A \text{ for some } s \text{ in } S\}.$$

If P is a prime ideal with $S = A \setminus P$, $A_{[P]}$ and $A_{(P)}$ will be used for $A_{[S]}$ and $A_{(S)}$ respectively.

A ring in which all the regular non units are contained in a prime ideal P, with $A_{[P]}$ a Manis valuation ring is called a *premanis ring.*

Lemma 3. *Let S be any multiplicatively closed set of the ring A. If A is integrally closed then so is $A_{[S]}$.*

Proof. Let $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ be an integral equation over $A_{[S]}$. Since for each a_i there exists an s in S such that sa_i is in A, it follows multiplying by s^n for a suitable s in S that $(sx)^n + b_1(sx)^{n-1} + \cdots + b_n = 0$, with b_i in A. Since A is integrally closed, sx is in A and consequently x is in $A_{[S]}$.

Lemma 4. *Let A be a ring with few zero divisors. If P is a prime ideal of A, then $A_{[P]} = A_{(P)}$.*

Proof. Clearly $A_{(P)} \subseteq A_{[P]}$. Let x belong to $A_{[P]}$ so that, for some y in $A \setminus P$, xy is in A. There exists a regular element b in P such that bx is in A. Let u in A be such that $z = y + bu$ is regular. Since z is in $A \setminus P$, and xy and xb are in A, $\frac{xy}{z}$ and $\frac{xbu}{z}$ belong to $A_{(P)}$. Hence $x = \frac{x(y+bu)}{y+bu}$ is in $A_{(P)}$.

Let P be a prime ideal of the ring A. The *core of* P is the set of all elements b in A such that, for each regular r in A there exists an element e in $A \setminus P$ such that $\frac{be}{r}$ is in A. For a Manis valuation ring (A, P) the core of P is the prime ideal of zero for which the valuation is infinite.

Let P be a prime ideal of A. If the images in A_P of every pair of ideals of A, one at least of which is regular, are totally ordered by inclusion, then (A, P) is said to have the *regular total order property.*

Lemma 5. *The following conditions are equivalent for a ring A with a maximal ideal P:*

1. *$(A_{[P]}, PA_{[P]})$ is a Manis valuation ring;*
2. *$(A_{(P)}, PA_{(P)})$ is a premanis ring;*
3. *for all a, b in A either both are in the core of P, or there exist s and t in A but not both in P, such that $sa = bt$;*
4. *the images in A_P of any pair of ideals of A not both contained in the core of P are ordered by inclusion;*
5. *(A, P) has the regular total order property.*

Proof. The equivalence of the first two conditions follows by noting that $A_{[P]}$ is the large quotient ring of $A_{(P)}$ with respect to $PA_{(P)}$.

1. $\Rightarrow$ 3. Let v be the valuation of $A_{[P]}$. We may suppose that $v(a) \geqq v(b)$. If $v(b) = \infty$, then both a and b are in the core of P. If $v(b)$ is finite, then for some t in K, $v(tb) = 0$, $v(ta) \geqq 0$, that is tb is in $A_{[P]} \setminus PA_{[P]}$. Thus for suitable e and f in $A \setminus P$, atf is in A and $btfe$ is in $A \setminus P$, so that $(btfe)a = (eaft)b$.

3. $\Rightarrow$ 1. Let y belong to $K \setminus A_{[P]}$; then ay is in A for some regular a, and since ey is not contained in A for any e in $A \setminus P$, it follows from 3. that $ays = at$, with s or t in the complement of P. Since a is regular, $ys = t$, and because y is not in $A_{[P]}$, s is not in the complement of P, so t must be in $A \setminus P$.

3. $\Rightarrow$ 4. Let L, M be ideals of A. Let Q be the core of P. Let a belong to $M \setminus Q$. If $M^e \nsubseteq L^e$, then there exists d in M such that de is not contained in L for any e in $A \setminus P$. d may be chosen in $M \setminus Q$. If a itself is not suitable as d, then since a is not in Q, it follows by 3. that for some g in $A \setminus P$, $ag = ds$. Because a is not in the core of P there exists a regular r in A such that $ab = rt$ implies b is in P; consequently if ed is in (r), then $sed = gea$ is in (r), so ge is in P, that is, e is in P. Thus

d is not in the core of P. Since de is not in L for any e in $A \setminus P$, if follows by 3. that for b in L there exists e in $A \setminus P$ such that eb is in (d). Thus $L^e \subseteq M^e$.

4. $\Rightarrow$ 5. This is trivial since the core consists of zero divisors.

5. $\Rightarrow$ 3. Let f be the map from A to A_P. First note that if $(a)^e \subseteq (r)^e$, then for some e in $A \setminus P$, ea is in (r); (this follows since $f(a)f(g) = f(r)f(t)$, so that $ag = rt + n$ with n in the kernel of f and g in $A \setminus P$; there exists h in $A \setminus P$, such that $hn = 0$, so that $hag = hrt$). If a is not in the core of P, then there exists a regular r in A with ae not in (r) for any e in $A \setminus P$, and consequently $(a)^e$ is not properly contained in $(r)^e$. Since r is regular, it follows from 5. that $(a)^e \supseteq (r)^e$ and $(a)^e = (a, r)^e$. Since $(a)^e$ is the extension of the regular ideal (a, r), it follows that either $(a)^e \subseteq (b)^e$ and so for some e in $A \setminus P$, ea is contained in (b), or $(b)^e \subseteq (a)^e$ and be is contained in (a) for some e in $A \setminus P$.

Note that if the conditions of Lemma 5 hold then the semigroup formed by those ideals in A_P which are images both of regular ideals and of principal ideals of A are isomorphic to the positive elements of the totally ordered group of $A_{[P]}$.

3. Integral Closure and Manis Valuation Rings

In this section we deal with generalizations to some classes of rings with zero divisors of Krull's theorem that every integrally closed integral domain is the intersection of valuation rings.

Let A be a ring with total quotient ring K. Let P be a prime ideal of A. If B is a ring and $A \subseteq B \subseteq K$, then B is called an *A-overring*. If B is an A-overring and has prime ideal Q, with $Q \cap A = P$, (B, Q) is said to *dominate* (A, P).

Lemma 6. *Let A be a ring with total quotient ring K. Let x be an element of K not integral over A.*

1. *If z in K is such that zx is in A, then x is not integral over $A[z]$.*
2. *If P is a prime ideal of A such that for all y in K, xy in A implies that y is in P, then x is not integral over $A_{[P]}$.*

Proof. 1. If x is integral over $A[z]$, then,

$$x^m + p_0(x)z^n + p_1(x)z^{n-1} + \cdots + p_n(x) = 0.$$

Multiplying this equation by x^n, and using the fact that xz is in A, x is integrally dependent on A.

2. If x is integral over $A_{[P]}$ then on multiplying the equation of integral dependence by a suitable b in $A \setminus P$, obtain the equation, $bx^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, with a_i in A. Thus bx is integral over A. Let t be an element of $A \setminus P$ for which tx has equation of integral dependence of lowest degree over A. Let that equation be

$$(xt)^n + p_n(xt)xt + a_n = 0.$$

Then $x\big(t(xt)^{n-1} + p_n(xt)t\big) = -a_n$. So that $t(xt)^{n-1} + p_n(xt)t$ is in P, and t^2x has an equation of integral dependence of degree $n-1$, and by the minimality of the equation $n = 1$. Thus $xt = -a_1$ is in A, a contradiction since t is in $A \setminus P$.

Lemma 7. *Let A be a ring with total quotient ring K. Let P be a prime ideal of A. If there exists y in $A[x]$ such that, for some b in P, by is in $A \setminus P$, then there exists a Manis valuation ring containing A but not containing x.*

Proof. Let (D, Q) be a maximal ring dominating (A, P). If x is in D, then since y belongs to $A[x]$, y belongs to D. However, yb is in $A \setminus P \subseteq D \setminus Q$, and this contradicts the hypothesis that b is in $P \subseteq Q$. It follows that x is not in D.

Lemma 8. *Let A be a ring with total quotient ring K. Let x be an element of K not integral over A. If all Manis valuation rings containing A also contain x, then there exists an integrally closed overring B of A, with all regular non units contained in a maximal ideal M, such that*

1. *if z is in $K \setminus B$, then x is integrally dependent on $B[z]$;*
2. *for all y in K, xy is in B if (and only if) y is (and xy are) in M;*
3. *if y is in $K \setminus B$ and z is in $B \setminus M$, then zy is in $K \setminus B$;*
4. *if y is in M then $x + y$ is a divisor of zero.*

Proof. Let B be a maximal overring of A subject to the condition that x is not integrally dependent on B. Let z in K be such that zx is in B. Then by Lemma 6, x is not integral over $B[z]$, and so z is in B. Thus those elements z in K such that zx is contained in B, form an ideal of B which is contained in a maximal ideal M. By Lemma 6, x is not integral over $B_{[M]}$, and hence $B_{[M]} = B$, and M is a maximal prime ideal containing all the non units of B. Let z be an element which is integral over B. If x is integral over $B[z]$ then x is integral over B, and thus $B[z] = B$, and B is integrally closed.

1. This follows immediately from the definition of B.

2. By definition of M, if xy is in B, then y is in M; by Lemma 7 it follows that xy is in M. Let q be an element of M. Suppose that x is integral over $B[qx]$. Let the integral equation of minimum degree satisfied by x over $B[qx]$ be

$$x^n + p_1(qx)x^{n-1} + \cdots + p_n(qx)qx + a_n = 0.$$

This may be rewritten $x(x^{n-1} + p_1(qx)x^{n-2} + \cdots + p_n(qx)q) = -a_n$. It follows by the above that the term in brackets belongs to M, and hence by minimality that $n = 1$. Thus $1 + p_1(qx)q = b$ is in M, so that $qp_1(qx) = b - 1$ is in $A \setminus M$. Since $p_1(qx)$ is in $B[x]$, it follows by Lemma 7 that there is a Manis valuation ring containing A but not containing x, a contradiction. Thus x is not integrally dependent on $B[qx]$, and it follows that qx is in B.

3. Since y is in $K \setminus B$, x is integral over $B[y]$. Thus if zy is in B, then multiplying the equation of integral dependence by a suitable power of z, deduce that xz^n is integral over B, and thus belongs to B. Since z^n is in $B \setminus M$ this is in contradiction to 2.

4. Suppose that for some y in M, $x + y$ is regular. Let $z = (x + y)^{-1}$. Since x is not in B it follows that $x + y$ is not in B. If z is in B, then it is a regular non unit and so must be in M. Hence it follows by 2. that zx is in M, and that zx^2 is in M. Thus $x = x(x + y)z$ is in M, a contradiction. Since z is not in B, x is integral over $B[z]$. Let the equation of integral dependence be

$$x^n + p_0(x)\,(x + y)^{-m} + p_1(x)\,(x + y)^{-m+1} + \cdots + p_m(x) = 0.$$

Multiplying by $(x + y)^m$, deduce that x is integral over B, a contradiction. Thus $x + y$ must be a divisor of zero.

A ring A is called a *von Neumann regular ring* if for every element a in A there exists an element b in A such that $aba = a$.

Proposition 9. *Let A be a ring with total quotient ring K. Let K be either a von Neumann regular ring or a ring with few zero divisors. Then A is integrally closed if and only if it is the intersection of Manis valuation rings.*

Proof. Let B be the intersection of all Manis valuation rings containing A. Since a Manis valuation ring is integrally closed, B is integrally closed. It is necessary to show that if x is not in A then there exists a Manis valuation ring containing A but not containing x.

K is a von Neumann regular ring. Suppose that for some element x no such Manis valuation ring exists. Then there exists an overring B of A for which the conclusions of Lemma 8 hold. Since K is regular there exists z in K such that $xzx = x$. Let $y = zx - 1$. Then $xy = 0$, so that y is in M. Since $y - zx = 1$, zx is not in M, and it follows that z is not in B. Hence x is integral over $B[z]$. Thus

$$x^n + p_0(x)z^m + \cdots + p_{m-1}(x)z + p_m(x) = 0.$$

Multiplying this equation by x^{2m} and using $xzx = x$ it follows that x is integral over B, a contradiction.

K has few zero divisors. This follows immediately from the preceeding lemma part 4. for if b is a regular element of A such that bx is in A, then there exists u in A such that $x + ub$ is regular.

4. Flat Overrings

This section follows closely that of Richman [12] for integral domains.

Proposition 10. *Let B be an overring of the ring A. Then the following conditions are equivalent:*

1. *B is a flat A-module.*
2. *if z is an element of B, then for the A-ideal $(A : (z))$, $(A : (z))B = B$;*
3. *for any prime ideal P of A, either $PB = B$, or $A_{[P]} \supseteq B$;*
4. *for all maximal ideals M of B, $B_{[M]} = A_{[M \cap A]}$.*

Proof. Richman's proof that 1. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 1. in the case of integral domains, may be used without modification except for replacing the quotient ring with the large quotient ring.

3. $\Rightarrow$ 4. Let $P = M \cap A$. Since $B(A \cap M) = M + B$, $A_{[P]} \supseteq B$. Let x be an element of $B_{[M]}$. Suppose b in $B \setminus M$ is such that $xb = a$ is in B; then for suitable e, f in $A \setminus P$, eb, fa belong to A, so that $xefb = aef$ is in A and x belongs to $A_{[P]}$. Thus $A_{[P]} \supseteq B_{[M]}$. The opposite inclusion follows from $A \subseteq B$.

4. $\Rightarrow$ 3. Let P be a prime ideal of A. If there is no maximal prime ideal M of B with $P \subseteq A \cap M$, then $PB = B$. If $P \subseteq M \cap A$ then $A_{[P]} \supseteq A_{[M \cap A]} = B_{[M]} \supseteq B$.

Proposition 11. *If B is a flat A overring and $*$ denotes integral closure, then $B^* = A^* B$ is A^*-flat.*

Proof. Again the proof is identical to Richman's for the case of integral domains.

Proposition 12. *If B is a flat A overring which is integral over A, then $A = B$.*

Proof. Let z be an element of B; then $(A : (z))B = B$; so, by the lying over theorem for integral extensions $(A : (z)) = A$.

5. Prüfer Rings

Several conditions in the following theorem have been shown to be equivalent by Butts and Smith [2], and almost all have been shown to be equivalent in the case of rings with few zero divisors by Davis [3] and Larsen [10].

Theorem 13. *The following conditions are equivalent for a ring A.*

1. $A_{[P]}$ *is a Manis valuation ring for every maximal ideal P.*
2. $A_{(P)}$ *is a premanis valuation ring for every maximal ideal P.*
3. (A, P) *has the regular total order property for every maximal ideal P.*
4. *Every overring of A is A-flat.*
5. *Every overring of A is integrally closed.*
6. *If L, M, N are ideals of A with M or N regular, then $L(M \cap N) = LM \cap LN$.*
7. *If L and M are ideals of A, one of which is regular, then $(L + M)(L \cap M) = LM$.*
8. *If L, M, N are ideals of A, with L finitely generated and regular, then $LM = LN$ implies that $M = N$.*
9. *Every regular finitely generated ideal of A is invertible.*
10. *Every regular ideal generated by two elements is invertible.*
11. *A is integrally closed and for any elements a, b of A with a regular, there exists an integer n for which $(a, b)^n = (a^n, b^n)$.*
12. *If $M \subseteqq N$ with N regular and finitely generated, then there exists an ideal L such that $M = LN$.*
13. *If L, M, N are ideals of A with L regular and N finitely generated, then*

$$(L + M) : N = L : N + M : N.$$

14. *If L, M, N are ideals of A with N regular and M and N finitely generated, then*

$$L : (M \cap N) = L : M + L : N.$$

15. *If L, M, N are ideals of A, one of which is regular, then*

$$L \cap (M + N) = L \cap M + L \cap N.$$

Proof. 1. $=$ 2. $=$ 3. The equivalence of 1., 2. and 3. follows from Lemma 5.

1. $\Rightarrow$ 4. Let B be an overring of A. Let M be any maximal ideal of B, with $P = M \cap A$, and Q a maximal ideal containing P. Then $A_{[Q]} \subseteqq A_{[P]} \subseteqq B_{[M]}$. Let x belong to $K \setminus A_{[P]}$; then x is not in $A_{[Q]}$ so that there exists b in Q such that bx is in $A \setminus Q$. Thus $A_{[P]}$ is a Manis valuation ring. Since b is in M but bx is in $B \setminus M$, it follows that x is not in $B_{[M]}$; that is that $A_{[P]} = B_{[M]}$. Since this holds for all maximal ideals of B, B is A-flat by Proposition 10.

4. $\Rightarrow$ 5. Let B an overring of A with integral closure C. Since C is A-flat, for any z in C, $(A : z)C = C$; so a fortiori, $(B : z)C = C$ and C is B-flat. Thus it follows by Proposition 12 that $B = C$.

5. $\Rightarrow$ 1. For any maximal ideal P, let $B = A_{[P]}$. Let z belong to $K \setminus B$. Then since $B[z^2]$ is integrally closed, z is in $B[z^2]$. Let the equation of lowest degree satisfied by z be $z = a_n + a_{n-1}z^2 + \cdots + a_0 z^{2n}$. Then $a_0 z$ satisfies an integral equation over B and so must belong to B. Since the same statement holds for $a_0 z^2$ provided that $n \neq 1$, and this would contradict the minimality of the equation for z, it follows that $z = a_1 + a_0 z^2$ with $a_0 z$ in $A_{[P]}$. Since $z(1 - a_0 z) = a_1$ and z is not in $A_{[P]}$ it follows that $1 - a_0 z$ is in $PA_{[P]}$, so that $a_0 z$ is in $A_{[P]} \setminus PA_{[P]}$. Consequently $A_{[P]}$ is a Manis valuation ring.

3. $\Rightarrow$ 6., 13., 14., 15. Because of the regular total order property of (A, P), 6., 13., 14., and 15. all hold for the extended ideals in A_P. Since the ideals of A are uniquely determined by their local components ([1] p. 112), and since passage to quotient rings preserves sums and intersections of ideals and quotients of finitely generated ideals, condition 3. implies each of 6., 13. and 15. To complete the proof in the case of 14. note that:

$$(L : (M \cap N))^e \subseteq L^e : (M \cap N)^e = L^e : M^e + L^e : N^e = (L : M + L : N)^e \subseteq (L : (M \cap N))^e.$$

6. $=$ 7. $=$ 8. $=$ 9. The equivalence of 6., 7., 8., and 9. have already been shown by Butts and Smith [2].

9. $\Rightarrow$ 10. Trivial.

10. $\Rightarrow$ 1. Let M be a maximal ideal of A with x in $K \setminus A_{[M]}$. There exists some regular element a of A with ax in A. Since (a, ax) is a regular ideal generated by two elements, there exists some fractionary ideal L such that $L(a, ax) = A$. For each b in L, ba belongs to M, for otherwise since bax belongs to A, x belongs to $A_{[M]}$. Consequently for some b in L, bax belongs to $A \setminus M$. Thus $A_{[M]}$ is a Manis valuation ring.

5., 8 $\Rightarrow$ 11. If 5. holds, then A is integrally closed. Since $(a, b)\,(a, b)^2 = (a, b)\,(a^2, b^2)$ it follows by 8. that $(a, b)^2 = (a^2, b^2)$.

11. $\Rightarrow$ 10. Let $(a, b)^n = (a^n, b^n)$, with a regular. Then $a^{n-1}b = xa^n + yb^n$ with x and y in A. Let m be the smallest integer greater than one for which $a^{m-1}b = xa^m + yb^m$ for some x, y in A. Since $y^{m-1}b/a = xy^{m-1} + y^m b^m/a^m$, and A is integrally closed, $yb/a = z$ is in A. Consequently $a^{m-1}b = xa^m + zab^{m-1}$, and by minimality, since a is regular, $m = 2$, and $b = xa + zb$. Thus

$$(a, b)\,(y, 1 - z) = (ay, by, a(1 - z), b(1 - z)) = (ay, za, a(1 - z), xa) = (a),$$

so that (a, b) has inverse $a^{-1}(y, 1 - z)$.

9. $=$ 12. To show 9. implies 12. take $L = N^{-1}M$. To show that the regular finitely generated ideal N has an inverse, take L such that $(r) = LN$ where r is a regular element in N. Then $LNr^{-1} = A$.

Each of 13., 14. and 15. implies 1. Let P be a maximal ideal of A. We use the third condition of Lemma 5 to show that $A_{[P]}$ is a Manis valuation ring. Let a, b, c be in A with c regular and such that ea/c is not contained in A for any e in $A \setminus P$.

In the case of 13. and 14. first show that there exists e in $A \setminus P$ such that ec is in (a).

13. $A = ((a) + (c)) : ((a) + (c)) = (a) : ((a) + (c)) + (c) : ((a) + (c)) = (a) : (c) + (c) : (a)$;

14. $A = ((a) \cap (c)) : ((a) \cap (c)) = ((a) \cap (c)) : (c) + ((a) \cap (c)) : (a) = (a) : (c) + (c) : (a)$.

It follows in both cases that $1 = e + y$, with ec in (a) and ya in (c). Since ya is in (c), it follows that y is in P so that e is in $A \setminus P$. Complete the proof as follows:

13. $A = ((b) + (a, c)) : ((b) + (a, c)) = (a, c) : (b) + (b) : (a, c)$;

14. $A = ((a, c) \cap (b)) : ((a, c) \cap (b)) = (a, c) : (b) + (b) : (a, c)$.

So that in both cases $1 = x + z$, with xb in (a, c) and za in (b). If z is in $A \setminus P$ then this part is finished, otherwise x is in $A \setminus P$, and exb is in $(a, ec) = (a)$.

In the case of 15. since

$$(a) = (a) \cap \big((b, c) + (a - b)\big) = (a) \cap (b, c) + (a) \cap (b - a)$$
$$= (a) \cap (b) + (a) \cap (c) + (a) \cap (b - a),$$

it follows that $a = xa + yc + za$ with xa in (b) and $za = t(b - a)$. Since $a(1 - x - z) = yc$, it follows by the choice of c that $1 - x - z$ is in P, so that either x is in $A \setminus P$, in which case the result follows because xa is in (b), or z is in $A \setminus P$. In the latter case $(z + t)a = tb$. If t is in $A \setminus P$, then tb is in (a) gives the result, otherwise $z + t$ is in $A \setminus P$ and $(z + t)a$ is contained in (b).

Those rings which satisfy the conditions of the above theorem are called *Prüfer rings*.

Note that in condition 1., 2. and 3. in Theorem 13 the word maximal may be replaced by prime.

Note that if A is a Prüfer ring and B is a Manis valuation overring of A, then $B = A_{[P]}$ where P is the prime ideal consisting of those elements of A which have positive values for B.

Let A be a Prüfer ring with total quotient ring K. Let K be either a ring with few zero divisors, or a von Neumann regular ring. By Proposition 9, A is an intersection of Manis valuation rings. It follows from the above remark that each of these Manis valuation rings may be taken to be of the form $A_{[P]}$, where P is a maximal ideal of A. In the case where K has few zero divisors, it follows from Lemma 4 that each Manis valuation ring is of the form $A_{(P)}$, where P is a maximal ideal of A.

Proposition 14. *Let A be a Prüfer ring with total quotient ring K. Let L be any ring which is integral over K. If B is the integral closure or A in L, then B is a Prüfer ring.*

Proof. Let M be any maximal ideal of B; we show that $B_{[M]}$ is a Manis valuation ring. Let $M \cap A = P$. Let y be an element of L not in $B_{[M]}$. Since y is integral over K, $y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, with a_i in K. If all elements a_i have positive values for the valuation of $A_{[P]}$ then y is integral over $A_{[P]}$, but $A_{[P]} \leqq B_{[M]}$, and by Lemma 3, $B_{[M]}$ is integrally closed, so y is in $B_{[M]}$, a contradiction. It follows that the valuation of $A_{[P]}$ takes a minimum value, which is negative, at some a_i; hence by multiplying by a suitable element of $A_{[P]}$, $b_0 y^n + b_1 y^{n-1} + \cdots + b_n = 0$, with b_i in $A_{[P]}$ for all i, and b_i not contained in $PA_{[P]}$ for some i. Since b_i is in $B_{[M]}$ for all i, and b_i is not in $MB_{[M]}$ for some i, y satisfies an equation over $B_{[M]}$ which has at least one coefficient not in $MB_{[M]}$. Assume that the equation displayed above is such an equation of the lowest possible degree. $B_{[M]}$ is integrally closed and $b_0 y$ is integral over $B_{[M]}$, so that $b_0 y$ is in $B_{[M]}$. If b_0 is not in $MB_{[M]}$, then y is in $B_{[M]}$, a contradiction. Since

$$(b_0 y + b_1) y^{n-1} + \cdots + b_n = 0$$

is an equation of degree $n - 1$, it follows that $n = 1$. Thus $b_0 y = -b_1$ is in $B_{[M]} \setminus MB_{[M]}$ and $B_{[M]}$ is a Manis valuation ring.

A Manis valuation ring is said to be a *discrete rank one* Manis valuation ring if it has value group isomorphic to the integers.

Theorem 15. *The following conditions are equivalent for a ring A.*

1. *If L, M, N are ideals of A with L regular, then $LM = LN$ implies that $L = M$.*

2. *A is a Prüfer ring and if P is a regular prime ideal of A, then P is maximal and $P^2 \neq P$.*
3. *If P is any maximal regular ideal, then $A_{[P]}$ is a discrete rank one Manis valuation ring.*
4. *The semigroup of regular ideals of A may be embedded in a direct product of ordered cyclic groups.*
5. *A has the following two properties:*
   (a) *if Q is a regular ideal with prime radical, then Q is irreducible;*
   (b) *if for any ideal M of A, x is in M^n for all positive integers n, then x is a divisor of zero.*
6. *A is a Prüfer ring in which condition* 5. (b) *holds.*

Proof. The proof, which is of the form $1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3. \Rightarrow 4. \Rightarrow 1.$, $3. \Rightarrow 5. \Rightarrow 2.$, $3. = 6.$, exploits conditions 1., 3. and 8. of Theorem 13 and the remark following Lemma 5, and resembles closely the proof of the equivalent theorem for integral domains by Jensen [7], to which the reader is referred.

Proposition 16. *The following conditions are equivalent for a ring A.*

1. *Every strictly ascending chain of regular ideals is finite.*
2. *In every non empty family of regular ideals there exists a maximal element.*
3. *Every regular ideal is finitely generated.*
4. *Every regular prime ideal is finitely generated.*

Proof. The proof is similar to the proof in the case of Noetherian rings (where the word regular is dropped from the enunciation), which is well known.

Theorem 17. *For a ring A the following conditions are equivalent.*

1. *All regular prime ideals are invertible.*
2. *A is a Prüfer ring in which the ascending chain condition holds for all regular ideals.*
3. *All regular ideals of A are invertible.*
4. *Every regular ideal of A is a product of prime ideals.*
5. *The conditions of Theorem* 15 *hold, and no regular element of A is contained in more than a finite number of prime ideals.*

Proof. $1. \Rightarrow 2.$ Since the regular prime ideals are invertible they are finitely generated. The ascending chain condition follows from Proposition 16. Let P be any maximal regular ideal. Let x be an element of $K \setminus A_{[P]}$. By the maximal condition there exists a maximal regular ideal Q of A such that xQ is in A. If $A_{[P]}$ is not a Manis valuation ring then xQ is contained in P, so that $P^{-1}Qx \subseteq A$. Since Q is finitely generated and is regular $PQ \neq Q$ (see [13] p. 215), so $P^{-1}Q \neq Q$ and Q is not maximal, a contradiction. If P is a non regular maximal ideal then $A_{[P]} = \mathrm{K}$. It follows that A is a Prüfer ring.

$2. \Rightarrow 3.$ A is a Prüfer ring in which every regular ideal is finitely generated, so every regular ideal is invertible.

$3. \Rightarrow 4.$ Every regular ideal has a finite basis since it is invertible, so the maximal condition holds for regular ideals. Thus there exists a maximal regular ideal M which is not a product of prime ideals. Let this ideal be contained in the maximal ideal P; then as above $M \neq P^{-1}M$, so that $P^{-1}M$ is a product of primes and hence M is a product of primes.

4. $\Rightarrow$ 5. We need to show that if 4. holds, then any invertible prime ideal is maximal. This is identical to the proof for Dedekind domains ([13] p. 273) and is omitted. Let a be any regular element of A. Then $(a) = P_1 P_2 \cdots P_n$, so that $a^{-1} P_1 P_2 \cdots P_n = A$ and each P_i is invertible and hence maximal. Since a in P implies that $P_i \leqq P$ for some i, a is contained in only a finite number of prime ideals. In addition this shows that every prime ideal is invertible. Since every prime ideal is invertible the factorization into prime ideals is unique, so that condition 4. of Theorem 15 holds.

5. $\Rightarrow$ 1. Let P be any regular prime ideal. Let x_1 be a regular element of P. Since x_1 is contained in only a finite number of prime ideals, there exist $x_2, \ldots, x_n$ in P such that $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ is contained in no prime ideal other than P. Since the ideals of A are uniquely determined by their local components, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P^m$ and this ideal is invertible since it is finitely generated. Thus P is invertible.

6. Arithmetical Rings

An *arithmetical ring* is one in which the ideals form a distributive lattice for sum and intersection (Fuchs [5]). Such rings have been characterized by Jensen [6] and by Butts and Smith [2] as satisfying any of the conditions 12., 13., 14. or 15. of Theorem 9 with the condition that one ideal must be regular, omitted, or by having the ideals of A_M totally ordered by inclusion for any maximal ideal M of A.

A ring is said to have *arithmetical zero divisors* if, for every maximal prime ideal of zero P, A_P has its ideals totally ordered by inclusion.

Lemma 18. *Let A be a ring with total quotient ring K. A has arithmetical zero divisors if and only if K has arithmetical zero divisors.*

Proof. Let P be any zero dividing prime of A, with Q the corresponding prime of K. Let A have arithmetical zero divisors. Let a, b belong to K. There exist regular d, e in A such that da, eb belong to A. Since A has arithmetical zero divisors, there exist s, t in A with s or t in $A \setminus P$ such that $sda = teb$; then clearly sd or te belongs to $K \setminus P$; that is K has arithmetical zero divisors.

Let K have arithmetical zero divisors. Let a, b be elements of A. There exist s, t in K, with s or t in $K \setminus Q$, such that $sa = tb$. Let d, e be regular elements of A with sd, te in A. Then sd or te belongs to $A \setminus P$ and $sda = teb$.

Theorem 19. *Let A be a ring with total quotient ring K. A is Arithmetical if and only if A is Prüfer and K has arithmetical zero divisors.*

Proof. Let A be arithmetical. Then for each maximal prime ideal P, A_P has ideals totally ordered by inclusion. Let Q be a maximal zero dividing ideal contained in P. By the universal property of the ring of quotients A_P, there is a homomorphism from A_P onto A_Q, and it follows that the ideals of A_Q are totally ordered by inclusion. Clearly (A, P) has the regular total order property.

Let P be any prime ideal of A. Let v be the valuation corresponding to $A_{[P]}$. Let Q be the core of P. The total ordering of the ideals in A_P follows from Theorem 13 except in the case where the ideals are images of ideals contained in Q. Let L, M be ideals of A contained in Q. Consider extensions to the ring of quotients A_Q. We may assume that $L^e \leqq M^e$. We show that for any x in L there exists y in M and a, b in A such that $ax = by$ with $v(b) \geqq v(a) \neq \infty$. Assume that x in L is such that this condition does not hold. It follows that for each y in M, $(y)^e \leqq (x)^e$, for otherwise $(x)^e < (y)^e$, and

$ax = by$ with $v(b) = \infty$ and $v(a)$ finite. Thus $(x)^e = L^e = M^e$, and for each y in M, $by = ax$ with $v(a) > v(b) \neq \infty$, so that we may interchange L and M to get the required condition.

Let x be any element of L. By the above there exist a, b in A and y in M such that $ax = by$ with $v(b) \geqq v(a) \neq \infty$. Let z in K be such that $v(az) = 0$. Since $A_{[P]}$ is a Manis valuation ring, there exists e in $A \setminus P$ such that eaz is in $A \setminus P$, and there exists f in $A \setminus P$ such that fbz is in A. Then $feazx = febzy$ with $feaz$ in $A \setminus P$, and it follows that if h is the map from A into A_P, then $h((x)) \leqq h((y))$, and consequently that

$$h(L) \leqq h(M)$$

and the ideals of A_P are totally ordered by inclusion.

7. Commutative Semi-hereditary Rings

A commutative ring A is called *semi-hereditary* if every finitely generated ideal of A is projective.

Endo [4] proves the following theorem on semi-hereditary rings.

Let A be a ring with total quotient ring K. A is semi-hereditary if and only if A_P is a valuation domain for every maximal ideal P of A, and K is a von Neumann regular ring.

Theorem 20. *Let A be a ring with total quotient ring K. A is semi-hereditary if and only if K is a von Neumann regular ring and A is a Prüfer ring.*

Proof. Let A be a semi-hereditary ring; then by the above result, K is a von Neumann regular ring, and for any maximal ideal P, A_P is a valuation domain and hence (A, P) has the regular total order property.

Let Q be a maximal ideal of K. Let b be any element of Q; then for some a in K, $(1 - ab)b = 0$. Since $1 - ab$ is in $K \setminus Q$, K_Q is a field, and K has arithmetical zero divisors. Thus A is an arithmetical ring. It remains only to show that for every maximal ideal P of A, A_P is a domain. Let M be the core of P, with Q the corresponding prime ideal of K. Let b belong to M. For some a in K,

$$(1 - ab)b = 0, \text{ with } 1 - ab \text{ in } K \setminus Q.$$

Since $A_{[P]}$ is a Manis valuation ring, there exists some d in K such that $d(1 - ab)$ is in $A \setminus P$. It now follows from $d(1 - ab)b = 0$ that b is in the kernel of the homomorphism from A onto A_P, so the kernel is a prime ideal and A_P is an integral domain.

Added in proof.

1. Larsen [16] has independently proved Proposition 9 in the case of few zero divisors.

2. Akiba [14] has noted that Richman's results [12] may be extended to commutative rings.

3. That 11. implies 10. in Theorem 13 follows immediately from a result of Gilmer [15].

4. Maranda has obtained the first condition of Theorem 17 together with three equivalent conditions [17].

References

[1] *N. Bourbaki*, Algèbre Commutative, Chapitres 1—2, Paris 1961.
[2] *H. S. Butts* and *W. Smith*, Prüfer Rings, Math. Zeit. **95** (1967), 196—211.
[3] *E. D. Davis*, Overrings of Commutative Rings, Trans. Am. Math. Soc. **110** (1964), 196—212.
[4] *S. Endo*, On Semi-hereditary Rings, J. Math. Soc. Japan, **13** (1961), 109—119.
[5] *L. Fuchs*, Über die Ideale arithmetischer Ringe, Comment. Math. Helv. **23** (1949), 334—341.
[6] *C. U. Jensen*, Arithmetical Rings, Acta. Math. Hungr. **17** (1966), 115—123.
[7] *C. U. Jensen*, On Characterizations of Prüfer Rings, Math. Scand. **13** (1963), 90—98.
[8] *W. Krull*, Beiträge zur Arithmetik Commutativer Integritätsbereiche, Math. Zeit. **41** (1936), 545—577.
[9] *W. Krull*, Allgemeine Bewertungstheorie, J. reine angew. Math. **167** (1931), 160—196.
[10] *M. D. Larsen*, Equivalent Conditions for a Ring to be a P-ring, Duke Math. J. **34** (1967), 273—280.
[11] *M. E. Manis*, Extension of Valuation Theory, Bull. Am. Math. Soc. **73** (1967), 735—736.
[12] *F. Richman*, Generalized Quotient Rings, Proc. Am. Math. Soc. **16** (1965), 794—799.
[13] *O. Zariski* and *P. Samuel*, Commutative Algebra, Volume 1, New York 1958.
[14] *T. Akiba*, Remarks on Generalized Rings of Quotients, Proc. Japan Acad. **40** (1964), 801—806.
[15] *R. W. Gilmer*, A condition of J. Ohm for Integral Domains, Can. J. Math. **20** (1968), 970—983.
[16] *M. D. Larsen*, Harrison Primes in a Ring with few zero divisors, to appear in Proc. Am. Math. Soc.
[17] *J.-M. Maranda*, Factorization Rings, Can. J. Math. **9** (1957), 597—623.

Applied Mathematics Division, D. S. I. R., Box 196. Wellington, New Zealand

Eingegangen 24. Januar 1969

Note on the structure of a ruled surface

By *Masayoshi Nagata* and *Masaki Maruyama* at Kyoto

To Wolfgang Krull on his seventieth birthday

Let E be a non-singular projective curve of genus g and let $\boldsymbol{P}$ be the projective line. Set $F_0 = E \times \boldsymbol{P}$. Then a ruled surface F which is birational to F_0 is biregular to $\mathrm{elm}_{P_1 \cdots P_n} F_0$ for suitable points $P_1, \ldots, P_n$ of F_0[1] [2] [3].

Main purpose of the present article is to prove the following

Main Theorem. *For any given such surface F, there are points $P_1, \ldots, P_n$ of F_0 such that F is biregular to $\mathrm{elm}_{P_1 \cdots P_n} F_0$ and such that either* (i) *there is an $E \times P$ ($P \in \boldsymbol{P}$) which goes through all the $P_1, \ldots, P_n$ or* (ii) *the number n is at most $2g + 1$.*

We give here a remark on the statement of the theorem. Since F is a ruled surface, there is a natural projection $\pi : F \to E$. A birational correspondence $T : F_0 \to F$ may not be compatible with such projections. Let us call a birational correspondence $T^* : F^* \to F$ between two ruled surfaces F^* and F a birational correspondence *as ruled surfaces* if T^* is compatible with the natural projections. Under the definition, we have

(1) If $T^* : F^* \to F$ is a birational correspondence as ruled surfaces, then $T^* = \mathrm{elm}_{P_1 \cdots P_n}$ with suitable points $P_1, \ldots, P_n$.

(2) On the other hand, in our Main Theorem, we do not mean that a birational correspondence $T : F_0 \to F$ as ruled surface is obtained as $\mathrm{elm}_{P_1 \cdots P_n}$ with P_i satisfying the condition in the Main Theorem, but we mean that $T = \mathrm{elm}_{P_1 \cdots P_n} \cdot T_0$ with a biregular correspondence $T_0 : F_0 \to F_0$ and with P_i as required.

In order to prove our Main Theorem, it is enough to prove (2) above.

---

[1]) In this article, a point of a surface may be an infinitely near point of some point (see [2]). A point in usual sense is called an ordinary point.

[2]) When F is a ruled surface and P is an ordinary point of F, then $\mathrm{elm}_P F$ is the ruled surface obtained as follows: Let $\mathrm{dil}_P F$ be the quadratic dilatation of F with center P. Then the proper transform l of the fibre which goes through P is an exceptional curve of the first kind, whence l is contracted to a simple point and we obtain a new ruled surface $\mathrm{elm}_P F$. This birational correspondence $F \to \mathrm{elm}_P F$ is called the elementary transformation with center P. $\mathrm{elm}_{P_1 \cdots P_n}$ is defined to be $\mathrm{elm}_{P_n} \cdot \mathrm{elm}_{P_1 \cdots P_{n-1}}$. Therefore $\mathrm{elm}_{P_1 \cdots P_n}$ is well defined on F if and only if each P_i is an ordinary point of $\mathrm{elm}_{P_1 \cdots P_{i-1}} F$.

[3]) Consider an arbitrary birational correspondence $T : F_0 \to F$. If $g = 0$, then the image of a fibre $Q \times \boldsymbol{P}$ ($Q \in E$) may not be a fibre of F. Therefore, it is not easy to prove that F is biregular to $\mathrm{elm}_{P_1 \cdots P_n} F_0$ for suitable P_i. But, if $g > 0$, then the image of a fibre of F_0 is a fibre of F, hence it is quite easy to prove the biregularity.

On the other hand, classification of rational ruled surface is well known and our main theorem is included in it. Therefore we may assume that $g > 0$ in our article. As for the rational case, see for instance [2].

We recall here some terms. A *section* of a ruled surface F is an irreducible curve C on F such that its intersection number with a fibre is one. On a non-singular surface F', a point P is said to *lie* on a curve C if, after suitable successive quadratic dilatations, P becomes an ordinary point lying on the proper transforme of C; A positive cycle *goes through* points $P_1, \ldots, P_n$ if, after suitable successive quadratic dilatations, $C - \sum P_i$ becomes a positive cycle. Therefore the condition that a point P lies on C is stronger than the condition that C goes through P. When C and D are curves (which may be reducible) on F', we mean in this article by $C \cap D$ the set of common points, including infinitely near points, of C and D. Then the number of points of $C \cap D$ coincides with the intersection number (C, D), as is well known.

1. Some preliminary results

We maintain the meanings of F_0, F, E, $\boldsymbol{P}$, g, etc. as before.

Lemma 1. *For $R_1, \ldots, R_r \in E$ and $P \in \boldsymbol{P}$, we have the following formula on dimensions of complete linear systems:*

$$\dim \left| E \times P + \sum_{i=1}^{r} R_i \times \boldsymbol{P} \right| = 2 \dim | \sum R_i | + 1.$$

Proof. This follows from

$$\begin{aligned} &\dim (Tr_{E \times P} | E \times P + \sum R_i \times \boldsymbol{P} |) \\ &\quad = \dim | \sum R_i | = \dim (| E \times P + \sum R_i \times \boldsymbol{P} | - E \times P). \end{aligned}$$

Lemma 2. *Let k be a field of definition for E. Let Q_i, R_j, S_l, T_m be points of E such that*

(i) $\sum_{i=1}^{q} Q_i + \sum_{j=1}^{r} R_j$ *is linearly equivalent to* $\sum_{l=1}^{s} S_l + \sum_{m=1}^{q+r-s} T_m$,

(ii) $s \geqq g$ *and* $r + s \geqq 2g$,

(iii) $R_1, \ldots, R_r$ *are independent generic points of E over k and all of Q_i and T_m are k-rational points. Then* $\sum_{l=1}^{s} S_l$ *is non-special in the sense of Riemann-Roch theorem.*

Proof. If $r > g$, then considering $k(R_1, \ldots, R_{r-g})$ instead of k and $q + r - g$ instead of q, we may assume that $r = g$. Thus, in general, we may assume that $r \leqq g$. We may assume that $\sum S_l$ is a generic member of $| \sum S_l |$ over $k(R_1, \ldots, R_r)$. Since $r \leqq g$, we have $\dim | \sum R_j | = 0$. This, that the Q_i are k-rational and that $| \sum Q_i + \sum R_j | = | \sum S_l + \sum T_m |$ is defined over $k(S_1, \ldots, S_s)$ show that $R_1, \ldots, R_r$ are algebraic over $k(S_1, \ldots, S_s)$. Therefore

$$\begin{aligned} &\text{trans. deg}_k\, k(S_1, \ldots, S_s) = \text{trans. deg}_k\, k(R_1, \ldots, R_r, S_1, \ldots, S_s) \\ &\quad = \text{trans. deg}_k\, k(R_1, \ldots, R_r) + \text{trans. deg}_{k(R_1, \ldots, R_r)}\, k(R_1, \ldots, R_r, S_1, \ldots, S_s) \\ &\quad \geqq r + \dim | \sum S_l | \geqq r + s - g \geqq g. \end{aligned}$$

Thus, among $S_1, \ldots, S_s$, there are at least g independent generic points of E over k, whence $\sum S_l$ is non-special. This completes the proof of Lemma 2.

Next we give a sufficient condition for $\text{elm}_{P_1 \cdots P_n} F_0$ to be biregular to F_0.

Let C_1 and C_2 be mutually distinct sections of F_0. Assume that

$$D_1 = C_1 + \sum_i m_i (Q_i \times \boldsymbol{P})$$

is linearly equivalent to $D_2 = C_2 + \sum_j n_j(R_j \times \boldsymbol{P})$, where (i) m_i and n_j are natural numbers, (ii) Q_i and R_j are points of E such that $Q_i \neq R_j$ for any i, j. Set $Q_i^* = (Q_i \times \boldsymbol{P}) \cap C_2$ and $R_j^* = (R_j \times \boldsymbol{P}) \cap C_1$. We consider sets of points as follows: For each Q_i^* or R_j^* (1) if $Q_i^* \in C_1 \cap C_2$ (or, if $R_j^* \in C_1 \cap C_2$, respectively), then let Q_i^* (or, R_j^{**}, resp.) be the infinitely near point of Q_i^* (or, R_j^*, resp.) of highest order among points in $C_1 \cap C_2$, and let M_i (or, N_j, resp.) be the set of infinitely near points of orders $1, 2, \ldots, m_i$ (or, of orders $1, 2, \ldots, n_j$, resp.) of Q_i^{**} (or, R_j^{**}, resp.) such that they lie on C_2 (or, C_1, resp.); (2) if $Q_i^* \notin C_1 \cap C_2$ (or, if $R_j^* \notin C_1 \cap C_2$, resp.), then let M_i (or, N_j, resp.) be the set of infinitely near points of orders $0, 1, \ldots, m_i - 1$ (or, of orders $0, 1, \ldots, n_j - 1$, resp.) of Q_i^* (or, R_j^*, resp.) such that they lie on C_2 (or, C_1, resp.). Then rename points of $(C_1 \cap C_2) \cup (\cup M_i) \cup (\cup N_j)$, say $P_1, \ldots, P_u$, in such a way that if P_i is an infinitely near point of P_j then $i \geqq j$. Now we have

Lemma 3. $\mathrm{elm}_{P_1 \cdots P_u} F_0$ *is biregular to* F_0.

Proof. Consider the linear system $L = |D_1| - \sum P_i$. Then D_1 and D_2 are members of L. Since $u = (D_1, D_2)$, the transform L^* of L in $\mathrm{elm}_{P_1 \cdots P_u} F_0$ has zero as its self-intersection number. Thus L^* and fibres of $\mathrm{elm}_{P_1 \cdots P_u} F_0$ defines a structure of this surface as the product variety $E \times \boldsymbol{P}$, which proves the assertion.

Corollary 4. *Let* $Q_1, \ldots, Q_n$ *and* $Q_1', \ldots, Q_n'$ *be points of* E *such that* $\sum Q_i$ *is linearly equivalent to* $\sum Q_i'$ *and* $Q_i \neq Q_j'$ *for any* i, j. *Take* $P, P' \in \boldsymbol{P}$ $(P \neq P')$. *Then, letting* P_i *and* P_{n+j} *be an infinitely near points of* $Q_i \times P$ *and* $Q_j' \times P'$ *which lie on* $E \times P$ *and* $E' \times P'$, *respectively, of suitable orders (which may be zero), we have that* $\mathrm{elm}_{P_1 \cdots P_{2n}} F_0$ *is biregular to* F_0.

Lemma 5. *Let* P *be an ordinary point of* F *and let* l *be the fibre of* F *which goes through* P. *Let* P^* *be the point of* $\mathrm{elm}_P F$ *which corresponds to* l. *Then* $\mathrm{elm}_{P^*} \cdot \mathrm{elm}_P$ *is the identity on* F.

Proof is obvious.

Lemma 6. *Let* $P_1, \ldots, P_n$ *be points of* F *such that* $\mathrm{elm}_{P_1 \cdots P_n}$ *is defined on* F. *Then any fibre of* F *cannot go through any two of these* P_i.

Proof. Assume that a fibre l goes through P_α and P_β $(\alpha < \beta)$. Considering $\mathrm{elm}_{P_1 \cdots P_{\alpha-1}} F$ instead of F, we may assume that $\alpha = 1$. In $\mathrm{elm}_{P_1} F$, P_β becomes an infinitely near point of the point, say Q, which corresponds to l. Therefore Q must be among the P_i. But, since Q corresponds to l, Q is not a point of F, which is a contradiction.

2. Proof of the main theorem

Consider sets of points $P_1, \ldots, P_n$ of F_0 such that $\mathrm{elm}_{P_1 \cdots P_n} F_0$ is biregular to F. We choose one of such set with smallest n. Then it is enough to show that either $n \leqq 2g + 1$ or every P_i lies on $E \times P$ with a common $P \in \boldsymbol{P}$. Therefore we assume the contrary, and we shall show a contradiction.

First step. Our assumption that n is the smallest implies:

(1) If $R_1, \ldots, R_t \in E$, $L_t = |E \times P + \sum_i R_i \times \boldsymbol{P}|$,
and if $D_1, D_2 \in L - \sum_{i=1}^{t+1} P_{\alpha_i}$ $(\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{t+1})$,
then D_1 and D_2 contain a common section of F_0.

Proof. Assume the contrary. If D_1 and D_2 have some $R \times \boldsymbol{P}$ in common, then we can reduce to the case where t is one less. Thus we may assume that D_1 and D_2 have no common components. We may assume that $P_{\alpha_i} = P_i$. Then, by Lemma 3, there are points $Q_1, \ldots, Q_{t-1}$ of F_0 such that $\mathrm{elm}_{P_1 \cdots P_{t+1} Q_1 \cdots Q_{t-1}} F_0$ is biregular to F_0. Then, considering inverse of $\mathrm{elm}_{Q_1 \cdots Q_{t-1}}$, we see that $\mathrm{elm}_{P_1 \cdots P_{t+1}} F_0$ is biregular to $\mathrm{elm}_{Q_1^* \cdots Q_{t-1}^*} F_0$. Thus we have a contradiction to the smallestness of n.

Second step. For $R_1, \ldots, R_{n-1} \in E$, we consider $L_{n-1} = \left| E \times P + \sum_i R_i \times \boldsymbol{P} \right|$. We note that, since $n \geqq 2g+2$, $\dim \left| \sum_i R_i \right| = n-1-g$, whence $\dim L_{n-1} = 2n-2g-1$ by Lemma 1. Therefore

$$\dim \left(L_{n-1} - \sum_{i=1}^{n} P_i \right) \geqq n - 2g - 1 \geqq 1, \tag{2}$$

independently on the choice of the points $R_1, \ldots, R_{n-1}$.

Let $P \in \boldsymbol{P}$ be such that $P_1 \in E \times P$. Let $Q_1, \ldots, Q_n \in E$ be such that $Q_i \times \boldsymbol{P}$ goes through P_i for each i. We may assume that $P_1, \ldots, P_s$ lies on $E \times P$, but none of $P_{s+1}, \ldots, P_n$ does. By our assumption on the P_i, we have $s \leqq n-1$. Now we consider several choices of the R_i.

Third step. We take $R_1, \ldots, R_{s-1}$ to be independent generic points and $R_{s+i} = Q_{s+i+1}$ for $i \geqq 0$. Then $L_{n-1} - \sum P_i$ contains a member $D_1 = E \times P + \sum_i R_i \times \boldsymbol{P}$. By our assumption and by (1) above, every member D of $L_{n-1} - \sum P_i$ contains $E \times P$, whence $L_{n-1} - \sum P_i = \left\{ E \times P + \sum_{i=s+1}^{n} Q_i \times \boldsymbol{P} + \sum_{i=1}^{s-1} S_i \times \boldsymbol{P} \;\middle|\; \sum S_i \in \left| \sum_{i=1}^{s-1} R_i \right| \right\}$. Since $\dim (L_{n-1} - \sum P_i) \geqq 1$ by (2) above, we have $\dim \left| \sum_{i=1}^{s-1} R_i \right| \geqq 1$. Since $R_1, \ldots, R_{s-1}$ are independent generic points, we have

$$s \geqq g + 2. \tag{3}$$

Fourth step. We may assume that the fixed points of $\sum_{i=1}^{s} Q_i$ are $Q_{u+1}, \ldots, Q_s$. Then we want to show that

(4) Every P_{s+i} $(i = 1, \ldots, n-s)$ is an infinitely near point of some P_j with $u+1 \leqq j \leqq s$.

Proof. Assume for instance that P_{s+1} is not an infinitely near point of any of such P_j.

Case 1. Assume that P_{s+1} is an ordinary point of F_0 lying on $E \times P'$. Consider $\left| \sum_{i=1}^{u} Q_i \right|$. Since $\dim \left| \sum_{i=1}^{u} Q_i \right| = \dim \left| \sum_{i=1}^{s} Q_i \right| \geqq s-g \geqq 2$, $\left| \sum_{i=1}^{u} Q_i \right|$ contains a member $Q_{s+1} + \sum_{j=2}^{u} Q_j^*$ for some $Q_j^* \in E$. Consider $L_u = \left| E \times P + \sum_{i=1}^{u} Q_i \times \boldsymbol{P} \right|$. Then

$$L_u - \left(\sum_{i=1}^{u} P_i + P_{s+1} \right)$$

contains $D_1 = E \times P + Q_{s+1} \times \boldsymbol{P} + \sum_{j=2}^{u} Q_j^* \times \boldsymbol{P}$ and $D_2 = E \times P' + \sum_{i=1}^{u} Q_i \times \boldsymbol{P}$. This gives a contradiction by (1) above.

Case 2. Assume now that P_{s+1} is an infinitely near point of some P_i with $i \leqq u$. Take a general member $\sum_{i=1}^{u} Q_i^*$ of $\left|\sum_{i=1}^{u} Q_i\right|$, and let P_i' be $Q_i^* \times P'$ $(P \neq P' \in \boldsymbol{P})$. Then $\mathrm{elm}_{P_1 \cdots P_u P_1' \cdots P_u'} F_0$ is biregular to F_0. Consider the inverse of $\mathrm{elm}_{P_1' \cdots P_u'}$. It is of the form $\mathrm{elm}_{P_1^* \cdots P_u^*}$ with points P_i^* which lie on the proper transform of $E \times P$. Since P_{s+1} does not lie on $E \times P$, we have Case 1 on $\mathrm{elm}_{P_1 \cdots P_u P_1' \cdots P_u'} F_0$ with respect to $P_1^*, \ldots, P_u^*, P_{u+1}, \ldots, P_n$. Thus we get a contradiction, and we complete the proof of (4).

The last step. We may assume that $P_1, \ldots, P_n$ are k-rational points. We consider another L_{n-1} as follows:

$$L = \left| E \times P + \sum_{i=1}^{s} Q_i \times \boldsymbol{P} + \sum_{i=1}^{n-s-1} R_i \times \boldsymbol{P} \right|$$

where $R_1, \ldots, R_{n-s-1}$ are independent generic points of E. Since $s \geqq g+2$, we have $\dim \left| \sum_{i=1}^{s} Q_i + \sum_{i=1}^{n-s-1} R_i \right| \geqq n-s$, whence $\sum_{i=1}^{s} Q_i + \sum R_j \sim \sum_{i>s} Q_i + \sum_{i=1}^{s-1} S_i$ for some $S_i \in E$. Then $L - \sum P_i$ contains $D_1 = E \times P + \sum_{i>s} Q_i \times \boldsymbol{P} + \sum S_j \times \boldsymbol{P}$. Therefore (1) implies that every member of $L - \sum P_i$ contains $E \times P$.

On the other hand, apply Lemma 2 to

$$\sum_{i=1}^{s} Q_i + \sum_{j=1}^{n-s-1} R_j \sim \sum_{i>s} Q_i + \sum_{i=1}^{s-1} S_i.$$

Since $s-1 \geqq g+1$ and $n-2 \geqq 2g$, we see that $\sum S_i$ is non-special. This implies that

$$\dim \left| \sum_{i=1}^{s} Q_i + \sum R_j \right| - \dim \left(\left| \sum_{i \leqq s} Q_i + \sum R_j \right| - \sum_{i=s+1}^{s+\alpha} Q_i \right) = \alpha \quad \text{for every } \alpha = 1, 2, \ldots, n-s. \tag{5}$$

Set $L_\alpha^* = L - \sum_{i=1}^{\alpha} P_i$ for $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n$. If $\alpha \leqq s$ and if Q_α is a fixed point of $\left| \sum_{i=\alpha}^{s} Q_i + \sum R_j \right|$, then P_α is a fixed point of $L_{\alpha-1}^*$. Thus we have

$$\dim L - \dim L_s^* = \dim \left| \sum_{i \leqq s} Q_i + \sum R_j \right| - \dim | \sum R_j |. \tag{6.1}$$

On the other hand, we have

$$\dim L_\alpha^* = \dim (Tr_{E \times P} L_\alpha^*) + \dim (L_\alpha^* - E \times P) + 1. \tag{6.2}$$

$L = L_0^*$ and $L_s^* - E \times P = L - E \times P$. Hence (6.1) and (6.2) for $\alpha = 0, s$ imply that $\dim Tr_{E \times P} L_s^* = \dim | \sum R_i |$.

Now we consider the case where $\alpha > s$. Then $L_\alpha^* - E \times P$ fixes $\sum_{i=s+1}^{\alpha} Q_i \times \boldsymbol{P}$, therefore $\dim (L_\alpha^* - E \times P) = \dim \left(\left| \sum R_j + \sum_{i \leqq s} Q_i \right| - \sum_{i=s+1}^{\alpha} Q_i \right)$. Thus, by virtue of (5), we have

$$\dim (L_s^* - E \times P) - \dim (L_\alpha^* - E \times P) = \alpha - s \quad (\text{for } \alpha > s). \tag{6.3}$$

Since $\dim L_s^* - \dim L_\alpha^* \leqq \alpha - s$, (6. 3) and (6. 2) for $\alpha = s$ and for $\alpha > s$ imply that $\dim (Tr_{E\times P}\ L_\alpha^*) = \dim (Tr_{E\times P}\ L_s^*) \geqq 0$. Thus, for $\alpha = n$, we see that

$$\dim L_n^* = \dim (Tr_{E\times P}\ L_n^*) + \dim (L_n^* - E \times P) + 1 > \dim (L_n^* - E \times P).$$

This is a contradiction to our assumption that every member of L_n^* contains $E \times P$. Thus our proof of the main theorem is completed.

References

[1] *M. Maruyama*, On classification of ruled surfaces, forthcoming in Lect. Notes, Dept. Math. Kyoto Univ.

[2] *M. Nagata*, On rational surfaces. I, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto (A Math.) **32—33** (1960), 351—370.

Department of Mathematics, Kyoto University, Kyoto, Japan

Eingegangen 6. Februar 1969

Fröhlich's local quadratic forms

By *Irving Kaplansky* at Chicago

To Wolfgang Krull on his seventieth birthday

1. Introduction

In [1] Fröhlich assumed as an axiom a property shared by real closed fields and p-adic fields, and showed that this widened class of fields (he called them *Hilbert fields*) retained the crucial features of local quadratic form theory. His axiom can be stated as follows: for any discriminant d other than -1 there are precisely 2 two-dimensional quadratic forms with discriminant d.

In [2] there is a somewhat similar investigation, resulting in the "local theorem" of § 2 of that paper. Stated for fields, rather than the "abstract quadratic forms" of [2], the assumption is that there are precisely 2 three-dimensional quadratic forms of any fixed discriminant. An equivalent statement is that there are exactly two quaternion algebras: the total matrix algebra, and a unique division algebra. This assumption is stronger than Fröhlich's (to be precise, it is stronger than the slightly weaker version we shall use in this paper). So Fröhlich has the better theorem.

On examining the matter more closely, however, I was surprised (and needless to say pleased) to notice that the abstract quadratic forms of [2] are flexible enough so that they can be adapted to Fröhlich's setup as well. It is the purpose of this note to record the details. While I am at it, I extend Fröhlich's theorem a trifle, and add some related remarks.

2. Some notation

K is a field of characteristic $\neq 2$, K^* its multiplicative group of non-zero elements. We consider finite-dimensional non-singular quadratic forms over K, and when they are diagonalized we use the notation $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ to record the diagonal entries. We use $\sim$ for equivalence.

We proceed to introduce some notation. It is excessively elaborate for the present purpose, but may be useful in future investigations.

Let $N(n, d)$ denote the number of n-dimensional forms of discriminant d. More precisely, we mean equivalence classes of forms, and d should really be thought of as an element of $K^*/(K^*)^2$. For odd n, we have that N is independent of d and we simply write $N(n)$. We note that $N(n, d) \leqq N(n+1, d_1)$. (Proof: adjoin an element of length d_1/d and use Witt cancellation.) Also $N(2, -1) = 1$ (all hyperbolic planes are equivalent). The following completes the list of trivial remarks: if $N(2, d) = 1$ for all d then $N(n, d) = 1$ for all n and all d.

Fröhlich called K a Hilbert field if $K^* \neq (K^*)^2$, and $N(2, d) = 2$ for any d such that $-d$ is not a square. (To switch to Fröhlich's language, just observe that when $-d$ is not a square, $N(2, d)$ is equal to the index in K^* of the subgroup of norms of non-zero elements of $K(\sqrt{-d})$.)

Let us call K a *generalized Hilbert field* if $N(2, d) \leqq 2$ and (in order to go beyond the trivial case mentioned above) equality holds for at least one value of d. Again there is some influence on higher values of N; for instance, $N(3) = 2$, as we prove below. Query: do there exist further theorems of this kind?

3. The Hilbert-symbol

I join Fröhlich in avoiding quaternion algebras and the Brauer group. For $a, b \in K^*$ define $\{a, b\} = 1$ if $(a, b) \sim (1, ab)$ and $\{a, b\} = -1$ otherwise. (I have switched to braces, since ordinary parentheses are reserved for diagonalized forms.) For the reader's convenience we record some properties of the brace symbol.

(1) $\{a, b\} = \{b, a\}$,

(2) $\{a, b\}$ depends only on the classes of a and b mod $(K^*)^2$,

(3) $\{a, b\} = 1$ if a is a square,

(4) $\{a, -a\} = 1$,

(5) $\{a, a\} = 1$ if and only if a is a sum of two squares,

(6) $\{a, b\} = \{a, c\} = 1$ implies $\{a, bc\} = 1$

(7) If $\{a, b\} = 1$, then $\{a, bc\} = \{a, c\}$.

Of these, (1) — (5) are obvious, (7) is a consequence of (6), and (6) follows from the observation that, for a not a square, $\{a, b\} = 1$ if and only if b is the norm of an element in the field $K(\sqrt{a})$.

4. The radical

Let R be the set of all $a \in K^*$ satisfying $\{a, b\} = 1$ for all $b \in K^*$. R is a subgroup of K^* containing $(K^*)^2$. It does not seem to have a name in the literature. I propose to call R the *radical* of K. (Since any conventional concept of radical is ridiculous for a field, I trust there will be no confusion.)

If $a \in R$ then $\{a, a\} = 1$ so that a is a sum of two squares. More is true.

Lemma 1. *Any sum of two radical elements is expressible as a sum of two squares.*

Proof. Let $a = r_1 + r_2$, $r_i \in R$. If $a = 0$, no activity is needed. Otherwise, we note that the form (r_1, r_2) represents a, so that $(r_1, r_2) \sim (a, r_1 r_2 a)$. Since $\{r_1, r_2\}$ and $\{a, r_1 r_2\}$ both equal 1, we get $\{a, a\} = 1$, whence a is a sum of two squares.

If $R = K^*$, we are in the trivial case of § 2, where $N(n, d)$ always equal 1. The next case is $[K^* : R] = 2$.

Lemma 2. *Let K be a field whose radical R is of index 2 in K^*. Then K is an ordered field in which every positive element is a sum of two squares, and R coincides with the set of positive elements.*

Proof. We first prove, as a converse to Lemma 1, that if a is a non-zero sum of two squares, then $a \in R$. Suppose on the contrary that $a \notin R$. Then, since $[K^* : R] = 2$, any element of K^* is expressible as r or ar for $r \in R$. We have $\{a, r\} = 1$. Also $\{a, a\} = 1$ since a is a sum of two squares. Hence $\{a, ar\} = 1$. This proves $a \in R$, a contradiction; and it is the amusing kind of contradiction that shows us that a lies in R after all.

At this point we know that R is the set of all non-zero sums of squares in K. If -1 were a sum of squares, then every element would be, contrary to $R \neq K^*$. Thus K is formally real. Plainly, R coincides with the positive elements, and thus every positive element is a sum of two squares.

The verification of Theorem 1 is now quite routine, and is left to the reader.

Theorem 1. *The following statements are equivalent:*

(a) *K is a generalized Hilbert field whose radical has index 2 in K^*,*

(b) *K is an ordered field where $\{a, b\} = 1$ for any positive elements a and b.*

Quadratic form theory over such a field is transparent: the discriminant and index constitute a complete set of invariants. It follows that $N(2k+1) = k+1$, $N(2k, d) = k+1$ for d positive and k for d negative. In particular, $N(3) = 2$.

Comment. I have very few examples to illustrate the material in this section.

5. Generalized Hilbert fields

There is an eighth property of the brace symbol.

(8) Suppose that K is a generalized Hilbert field and that $\{a, b\} = \{a, c\} = -1$. Then $\{a, bc\} = 1$.

This is immediate from the observation that the index in K^* of the group of norms of non-zero elements of $K(\sqrt{a})$ is at most 2.

Let K be a generalized Hilbert field, and write $G = K^*/(K^*)^2$. Properties (6), (7), and (8) combine to show that the map $a, b \to \{a, b\}$ induces a symmetric bilinear map of $G \times G$ into the two-element group consisting of 1 and -1, i. e. we have a V-form, say φ, in the sense of [2]. This is not the official V-form (say ψ) attached to the field K; ψ sends a, b into the quaternion algebra defined by a and b. However, it is clear from the definitions that the abstract quadratic form theory created by φ coincides exactly with concrete quadratic form theory over K, just as it does for ψ.

In any event φ is a V-form with image consisting of two elements. Hence the local theorem of ([2], § 2) applies to φ, and yields all the information in Theorem 2. Since, incidentally, one of the conclusions is that there are just 2 three-dimensional forms of a given discriminant, it follows as an afterthought that ψ also is two-valued, so that φ and ψ are in fact the same V-form.

Theorem 2. *Let K be a generalized Hilbert field, R its radical. Assume $[K^* : R] > 2$ (for $[K^* : R] = 2$, see Theorem 1). Then $N(n, d) = 2$ for all d and all $n \geq 3$. Every four-dimensional form is universal (i. e. represents all of K^*). Every form of dimension five or more is isotropic. Two forms are equivalent if and only if they have the same discriminant and Witt invariant.*

6. The same theorem for abstract quadratic forms

If abstract quadratic forms are abstract enough, we should be able to present the key idea entirely in that framework. To get the argument to work, we need an element playing the role that -1 does for fields, and Theorem 3 is the result.

As in [2], for a V-form $G \times G \to W$ we write G and W additively and denote the map by multiplication.

Theorem 3. *Assume that for a given V-form $G \times G \to W$ there exists an element t in G satisfying $a(t + a) = 0$ for all $a \in G$. Assume further that for each fixed d and variable b in G the set of all $b(d + b)$ has at most two elements (i. e. there are at most two abstract 2-forms with a given discriminant). Then GG has at most two elements.*

The *proof* is essentially the same. We check first that for all b, bG has at most two elements, by writing $bc = b(t + b + c)$ and using our hypothesis with $d = t + c$. Now collapse all the non-zero elements of W to a single element. What we have just shown implies that the map from $G \times G$ is still bilinear; thus we have a new V-form. The hypothesis of the theorem assures us that the new V-form determines the same abstract quadratic form theory as the old. We can apply the local theorem of [2, § 2] to the new V-form. Now take e, f, g, h in G with $ef \neq 0$, $gh \neq 0$. We have to prove $ef = gh$. The abstract forms

$$(e, f, t + e + f) \text{ and } (g, h, t + g + h)$$

both have discriminant t and have the same Witt invariant relative to the new V-form. Hence they are equivalent. Hence they have the same Witt invariant relative to the old V-form. Since these Witt invariants are, respectively, ef and gh, the theorem is proved.

Remark. Theorem 3 is a bizarre but entirely elementary piece of linear algebra. Very likely there is some simple direct proof; I confess I have not tried to find one.

Added in proof, July 25, 1969. There is indeed such a proof.

Query. Does there exist a generalization of Theorem 3 in which one does not postulate an element t?

7. Hermitian forms

We discuss Hermitian forms only in the commutative case. Characteristic 2 is admissible.

We have no suitable analogue of quaternion algebras, the Brauer group, or the Witt invariant, and there is no standard V-form. However, assume that the number of two-dimensional Hermitian forms of a given discriminant is 1 or 2. Then, just as for quadratic forms, a V-form with one-dimensional range await us, and we can apply the theorem of [2] to obtain perfect analogues of Theorems 1 and 2.

8. Characteristic two

For non-defective quadratic forms over a field K of characteristic two, the following question appears to be a reasonable analogue. Assume that for each given Arf invariant, there are one or two two-dimensional forms. Is there at most one quaternion division algebra over K? I leave this as an open question.

If instead we choose to study symmetric non-alternate bilinear forms over K, there are two possibilities. If we stick to actual equivalence, the problem is vacuous: if $K = K^2$, all forms are equivalent, while if $K \neq K^2$, $[K^* : (K^*)^2]$ is infinite and we have infinitely many non-equivalent forms (a, a). If we switch to the new (i. e. stable) equivalence of [2], this is given by a V-form; thus Theorem 3 of the present paper can be applied to yield a good analogue of Theorem 2.

Bibliography

[1] *A. Fröhlich*, Quadratic forms, "à la" local theory, Proc. Camb. Phil. Soc. **63** (1967), 579—586.

[2] *I. Kaplansky* and *R. J. Shaker*, Abstract quadratic forms, to appear in Can. Math. J.

University of Chicago, Department of Mathematics, Chicago, Il. 60637 USA

Eingegangen 7. Februar 1969

Zur Majorantenmethode im Normalformenproblem für analytische Differentialgleichungssysteme

Von *L. Reich* in Bonn

Herrn Professor Dr. Wolfgang Krull zum 70. Geburtstag

---

§ 1. Einleitung

Vorgelegt sei das System analytischer Differentialgleichungen

$$\frac{dw_k}{dt} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} w_l + \mathfrak{f}_k(w_1, \ldots, w_n), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

mit $a_{ik} \in \boldsymbol{C}$, $|\, a_{ik} \,| \neq 0$, und mit Potenzreihen $\mathfrak{f}_k$ in Variablen $w_1, \ldots, w_n$ über $\boldsymbol{C}$, die mit quadratischen Gliedern beginnen und in Nähe des Ursprungs konvergieren. Wir werden abkürzend schreiben: $w = {}^t(w_1, \ldots, w_n)$, $\mathfrak{f}(w)$ für die Spalte mit den Komponenten $\mathfrak{f}_k$, $\dot{w}$ für ${}^t\left(\frac{dw_1}{dt}, \ldots, \frac{dw_n}{dt}\right)$, und $A = \| a_{ik} \|$. Dann schreibt sich (1) als:

$$\dot{w} = A w + \mathfrak{f}(w), \text{ det } A \neq 0, \text{ ord } \mathfrak{f}(w) \geqq 2. \tag{1}$$

Ferner bezeichne Γ die Gruppe der biholomorphen Koordinatentransformationen

$$T: w = B\omega + \mathfrak{T}(\omega) \tag{2}$$

mit det $B \neq 0$, und in Umgebung von $\omega = 0$ konvergenten Potenzreihen $\mathfrak{T}_k(\omega)$ einer Ordnung $\geqq 2$. Jede Transformation $T \in \Gamma$ führt ein System (1) wieder in ein System vom Typus (1) in den neuen Variablen ω anstelle der w über. Die natürliche und für viele Anwendungen und weiterführende Untersuchungen wichtige Frage lautet: *Wie lauten die Invarianten von* (1) *gegenüber* Γ, *wie sehen einfache Normalformen von* (1) *gegenüber* Γ *aus*?

In [2] wurde eine Majorantenmethode beim Konvergenzbeweis für die Transformation T von (1) auf eine Normalform skizziert, aus Raummangel jedoch nur für den Fall eines Systems von zwei Gleichungen dargestellt. Es wurde dabei jedoch schon der Punkt hervorgehoben, welcher den wesentlichen Fortschritt über die alten Untersuchungen von Poincaré [3], Dulac [4], vgl. auch Bieberbach [5], darstellt, nämlich, daß die Jordansche Normalform von A nicht als Diagonalmatrix vorausgesetzt wird. K.-J. Wirths, [6], hat den Fall von n Gleichungen studiert unter der Annahme, daß keine sog. Zusatzmonome auftreten. Die generelle Voraussetzung über die Eigenwerte λ_i von $\| a_{kl} \|$ ist folgende:

(3) *Es gibt eine Gerade g durch den Ursprung* $\lambda = 0$ *der* λ*-Ebene, so daß alle* λ_i *auf einer Seite von g liegen.*

In [7] habe ich dann das Normalformenproblem für (1) unter der Voraussetzung (3) dadurch gelöst, daß ich es auf das Normalformenproblem für kontrahierende biholomorphe Abbildungen, dessen Lösung in übersichtlicher Form vorliegt, zurückführte. Schließlich wies mich Herr Prof. C. L. Siegel freundlicherweise darauf hin, daß er in seinen Vorlesungen [1] im Zusammenhang mit Stabilitätsuntersuchungen ein noch etwas allgemeineres Normalformenproblem mittels einer Majorantenmethode gelöst habe. Daraufhin versuchte ich, meine Entwicklung des Calcul des limites in diesem Falle auch anzuwenden. Mittels meines Aufbaus des Calcul des limites läßt sich tatsächlich eine Vereinfachung der Majorantenmethode von [1], wo mehrmals partielle Differentialgleichungssysteme als majorante Probleme herangezogen werden, erreichen. Die Beweisidee ist folgende: Zunächst wird in der fundamentalen Abschätzung (20), (vgl. § 3),

$$| \nu_1\lambda_1 + \cdots + (\nu_l - 1)\lambda_l + \cdots + \nu_n\lambda_n | \geqq \sigma(\nu_1 + \cdots + \nu_n)$$

mit einem $\sigma > 0$, die für fast alle Vektoren $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $\nu_j \geqq 0$, ganz, $\sum_{j=1}^{n} \nu_j \geqq 2$, gilt, angenommen, daß $\sigma > 2$. Für diesen Fall ist eine Majorantenmethode, die sich auf den Satz über die impliziten Funktionen stützt, in kurzer Form leicht zu entwickeln. Der Fall $0 < \sigma \leqq 2$ wird durch eine Parametertransformation auf den ersten zurückgeführt. (Dabei ist zu beachten, daß solche Parametertransformationen in der Gruppe Γ der zulässigen Koordinatentransformationen nicht enthalten sind. Dies ist jedoch kein Widerspruch zu unserer Voraussetzung, sondern nur ein Kunstgriff im Beweis.) Das wird in dieser Arbeit dargestellt.

Es sei am Abschluß dieser Einleitung darauf hingewiesen, daß die dargestellte Majorantenmethode auch zum Beweis der Existenz holomorpher Integrale partieller Differentialgleichungen, die an sehr allgemeinen Singularitäten holomorph münden, brauchbar ist. Dies soll Inhalt einer eigenen Untersuchung sein.

§ 2. Formale Normalformen

Unter der Voraussetzung (3), die wir, wenn wir mit $d(g, \lambda_i)$ den orientierten Abstand des Punktes λ_i von g bezeichnen, bei geeigneter Numerierung (also nach einer linearen Koordinatentransformation) in der Form

$$(3') \qquad 0 < d(g, \lambda_1) \leqq d(g, \lambda_2) \leqq \cdots \leqq d(g, \lambda_n)$$

schreiben können, gilt folgender

Hilfssatz. (i) *Unter der Voraussetzung* (3) *gibt es höchstens endlich viele Relationen*

$$(4) \qquad \lambda_k = \alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_n\lambda_n,$$
$$\alpha_i \geqq 0, \text{ ganz}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geqq 2.$$

(ii) *Unter der Voraussetzung* (3') *hat jede Relation* (4) *die Gestalt*

$$(5) \qquad \lambda_k = \alpha_1\lambda_1 + \cdots + \alpha_{k-1}\lambda_{k-1},$$

d. h.

$$\alpha_k = \alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = 0.$$

(Beweis in [1], [7].)

Nehmen wir nun zunächst an, daß die $\mathfrak{f}_k$ in (1) formale Potenzreihen seien. Außerdem können wir (vgl. [1], [7]) durch geeignete lineare Koordinatentransformation erreichen, daß A in (1) in Jordanscher Normalform J vorliegt, also

$$\dot{w} = Jw + \mathfrak{f}(w). \tag{1}$$

J zerfalle in μ Kästchen der Länge $r_1, \ldots, r_\mu$, mit $r_1 + \cdots + r_\mu = n$, der Gestalt

$$\begin{matrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{matrix}$$

Ich bezeichne nun abweichend von oben nur diese Eigenwerte, die zu verschiedenen Kästchen gehören, mit verschiedenen Indizes: Wir unterscheiden also $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$. Für die Transformation T genügt es folgende spezielle Form zu nehmen:

$$w = \omega + \mathfrak{T}(\omega). \tag{6}$$

Wir setzen

$$\mathfrak{T}_k = \sum_{|\nu| \geqq 2} t^{(k)}_{\nu_1, \ldots, \nu_n}\, \omega_1^{\nu_1} \cdots \omega_n^{\nu_n} = \sum_{|\nu| \geqq 2} t^{(k)}_{\nu}\, \omega^{\nu}, \tag{7}$$

mit den Abkürzungen $\nu := (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $\omega_1^{\nu_1} \cdots \omega_n^{\nu_n} := \omega^{\nu}$, $|\nu| := \sum_{j=1}^{n} \nu_j$. Dann kann man beweisen:

Satz 1. *Unter der Voraussetzung* (3) *gibt es eine formale Koordinatentransformation T, d. h. eine Substitution mit formalen $\mathfrak{T}_k(\omega)$, welche* (1) *auf folgende Gestalt transformiert*:

$$\dot{w} = J\omega + Z(\omega), \tag{8}$$

wobei J die Jordansche Normalform von A, und $Z(\omega)$ polynomial ist, d. h. alle $Z_k(\omega)$ sind Polynome, und es gilt genauer:

$$\frac{dw_k}{dt} = \varepsilon_k \omega_{k-1} + \lambda_{j_k} \omega_k + \sum_l C_l^{(k)}\, B_l^{(jk)}, \tag{9}$$

wobei $\varepsilon_k = 0$, für die erste Zeile eines Kästchens, sonst $+1$, λ_{j_k} der Eigenwert des Kästchens ist, zu dem die k-te Zeile gehört, und entweder $B_l^{(jk)}$ alle Monome

$$y_1^{\nu_1} \cdots y_{r_1}^{\nu_{r_1}} y_{r_1+1}^{\nu_{r_1+1}} \cdots y_{r_1+r_2}^{\nu_{r_1+r_2}} \cdots y_n^{\nu_n}$$

durchläuft, für deren Exponentenvektor $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{r_1}, \nu_{r_1+1}, \ldots, \nu_{r_1+r_2}, \ldots, \nu_n)$ mit den Festsetzungen

$$\begin{aligned} n_1 &= \nu_1 + \cdots + \nu_{r_1} \\ n_2 &= \nu_{r_1+1} + \cdots + \nu_{r_1+r_2} \\ &\vdots \\ n_\mu &= \nu_{r_1+\cdots+r_{\mu-1}+1} + \cdots + \nu_n \end{aligned} \tag{10}$$

eine Relation (4) *für λ_{j_k}*

$$\lambda_{jk} = n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + \cdots + n_\mu\lambda_\mu$$

besteht; oder wobei $B_l^{(jk)} = 0$, falls keine Relationen (4) *für λ_{j_k} bestehen.*

Die in (8) auftretenden Monome heißen„ Zusatzmonome".

Über die möglichen Transformationen T auf diese „halbkanonischen Formen" gilt noch genauer:

Satz 2. *Die Koeffizienten $t_\nu^{(k)}$ der Potenzreihen $\mathfrak{T}_k$ können beliebig gewählt werden, falls der ν gemäß (10) zugeordnete Vektor $n = (n_1, \ldots, n_\mu)$ als Koeffizientenvektor in einer Relation (4) für den Eigenwert λ_{j_k} der k-ten Zeile auftritt. Die übrigen $t_\nu^{(k)}$ sind dadurch eindeutig festgelegt. Alle so gewonnenen $\mathfrak{T}_k$ sind konvergent.*

Der Beweis dieser Sätze wird anschließend gegeben. Es muß gelten

$$\frac{dw_k}{dt} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial w_k}{\partial \omega_l} \frac{d\omega_l}{dt} . \tag{11}$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned} &\sum_{l=1}^{n} \left(\delta_{kl} + \frac{\partial \mathfrak{T}_k}{\partial \omega_l}\right)(\varepsilon_l \omega_{l-1} + \lambda_{j_l}\omega_l + Z_l(\omega)) \\ &= \varepsilon_k(\omega_{k-1} + \mathfrak{T}_{k-1}(\omega)) + \lambda_{j_k}(\omega_k + \mathfrak{T}_k(\omega)) + \mathfrak{f}_k(\omega + \mathfrak{T}(\omega)),\ k = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{12}$$

also ein partielles Differentialgleichungssystem für die $\mathfrak{T}_k$, in dem allerdings auch noch die Summen der Zusatzmonome, $Z_k(\omega)$, so zu bestimmen sind, daß die Relation (11) als Identitäten in $\boldsymbol{C}[\![\omega_1, \ldots, \omega_n]\!]$ überhaupt möglich sind. Wir halten außerdem noch fest, daß in $Z_k(\omega)$ nur die Variablen auftreten, deren Indizes zugleich Indizes der Zeilen der Kästchen sind, die dem Kästchen der k-ten Zeile vorangehen. Wir setzen nun (7) in (12) ein. Wir betrachten etwa die $t_\nu^{(j)}$ des 2. Kästchens ($j = r_1 + 1, \ldots, r_1 + r_2$) und erhalten wenn $\eta_j = (\delta_{j1}, \ldots, \delta_{jn})$ gesetzt wird, und $\varepsilon_k = 0$ für die erste Zeile eines Kästchens, sonst $\varepsilon_k = 1$ ist, für $r_1 + k$, $1 \leqq k \leqq r_2$:

$$\begin{aligned} &\sum_{|\nu| \geqq 2} (n_1\lambda_1 + (n_2 - 1)\lambda_2 + \cdots + n_\mu\lambda_\mu) t_\nu^{(r_1+k)} \omega^\nu \\ &+ \sum_{|\nu| \geqq 2} \sum_{j=1}^{\mu} \varepsilon_j \nu_j t_\nu^{(r_1+k)} \omega^{\nu+\eta_j-\eta_j} \\ &= \varepsilon_k \sum_{|\nu| \geqq 2} t_\nu^{(r_1+k-1)} \omega^\nu + \mathfrak{f}_{r_1+k}(\omega + \mathfrak{T}(\omega)) - Z_{r_1+k}(\omega) \\ &- \sum_{|\nu| \geqq 2} \sum_{j=1}^{\mu} \varepsilon_j \nu_j t_\nu^{(r_1+k)} \omega^{\nu-\eta_j} Z_j(\omega). \end{aligned} \tag{13}$$

Wir führen nun wie in [7] beim analogen Problem für kontrahierende biholomorphe Abbildungen in der Menge der Vektoren $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, deren Komponenten (10) mit beliebigen, aber festen $n_1, \ldots, n_\mu$, $n_i \geqq 0$, ganz, $\sum_{i=1}^{\mu} n_i \geqq 2$ erfüllen, die lexikographische Ordnung ein. Dann erhalten wir für alle $t_\nu^{(r_1+k)}$, $k = 1, \ldots, r_2$, für die ν diese speziellen Relationen (10) erfüllt, ein System von Bestimmungsgleichungen, dessen linke Seite als Koeffizientenmatrix eine obere Dreiecksmatrix hat. Wir schreiben dieses System zunächst für $t_\nu^{(r_1+k)}$ an und nehmen an:

$$\lambda_2 \neq n_1\lambda_1 + \cdots + n_\mu\lambda_\mu. \tag{14}$$

Die $t_\nu^{(r_1+k)}$ numerieren wir entsprechend ihrer Anordnung durch: $t_1^{(r_1+k)}, \ldots, t_\varrho^{(r_1+k)}$. Wir erhalten mit den Abkürzungen $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_\mu)$ und

$$\begin{aligned} &n_1\lambda_1 + \cdots + (n_l - 1)\lambda_l + \cdots + n_\mu\lambda_\mu = N_l(\underline{n}): \\ &N_2(\underline{n}) t_1^{(r_1+k)} + D_2^{(1)} t_2^{(r_1+k)} + \cdots = \varepsilon_k t_1^{(r_1+k-1)} + f_1^{(r_1+k)}(t_\mu^{(\alpha)}, \vartheta, -C) \\ &N_2(\underline{n}) t_2^{(r_1+k)} + D_3^{(2)} t_2^{(r_1+k)} + \cdots = \varepsilon_k t_2^{(r_1+k-1)} + f_2^{(r_1+k)}(t_\mu^{(\alpha)}, \vartheta, -C) \\ &N_2(\underline{n}) t_L^{(r_1+k)} = \varepsilon_k t_L^{(r_1+k-1)} + f_L^{(r_1+k)}(t_\mu^{(\alpha)}, \vartheta, -C). \end{aligned} \tag{15}$$

Dabei sind die $D_k^{(j)}$ nicht-negative ganze Zahlen, und die $f_k^{(r_1+1)}$ bezeichnen Polynome mit positiven Koeffizienten in $t_\mu^{(\alpha)}$ mit $|\mu| < |\nu|$, gewissen nicht näher spezifizierten

Koeffizienten ϑ der $\mathfrak{f}_k$ und gewissen negativen Koeffizienten $(-C_\mu)$ von Zusatzmonomen, deren Exponentenvektor einen Betrag $< |\nu|$ aufweist.

Ist also (14) erfüllt, und sind schon alle Argumente der f festgelegt, so ergeben sich zunächst die $t_\nu^{(r_1+1)}$ aus (16) (wegen $\varepsilon_1 = 0$), und dann der Reihe nach die $t_\nu^{(r_1+k)}$. Es sei nun

$$N_2(\underline{n}) = 0. \tag{16}$$

Dann lauten die zu (15) analogen Systeme:

$$\begin{aligned} C_1^{(r_1+k)} + N_2(\underline{n}) t_1^{(r_1+k)} + D_2^{(1)} t_2^{(r_1+k)} + \cdots &= \varepsilon_k t_1^{(r_1+k-1)} + f_1^{(r_1+k)}(t_\mu^{(\alpha)}, \vartheta, -C) \\ C_2^{(r_1+k)} + N_2(\underline{n}) t_2^{(r_1+k)} + D_3^{(2)} t_3^{(r_1+k)} + \cdots &= \varepsilon_k t_2^{(r_1+k-1)} + f_2^{(r_1+k)}(t_\mu^{(\alpha)}, \vartheta, -C) \\ C_L^{(r_1+k)} + N_2(\underline{n}) t_L^{(r_1+k)} &= \varepsilon_k t_L^{(r_1+k-1)} + f_L^{(r_1+k)}(t_\mu^{(\alpha)}, \vartheta, -C), \end{aligned} \tag{17}$$

wobei die $C_j^{(r_1+k)}$ die ebenso wie die $t_j^{(r_1+k)}$ angeordneten Koeffizienten der Zusatzmonome bezeichnen. Man sieht, daß sich wegen (16) die $t_\nu^{(r_1+k)}$ nicht aus dem System (17) bestimmen lassen, wohl aber die $C_\nu^{(r_1+1)}$, falls die Argumente rechts schon bekannt sind. Die $t_\nu^{(r_1+1)}$ wählen wir beliebig. Dann ergeben sich aus dem 2. System die $C_\nu^{(r_1+2)}$, die $t_\nu^{(r_1+2)}$ sind wieder völlig frei wählbar, usw. Man sieht nun leicht, daß sich die $t_\nu^{(k)}$ und die $C_\nu^{(k)}$ wirklich rekursiv bestimmen lassen, wie es in Satz 1 und Satz 2 angegeben ist. Dazu genügt es, die ν mit $|\nu| = 2$ zu betrachten. In den zugehörigen Systemen treten in den f weder $t_\nu^{(k)}$ noch $C_\nu^{(k)}$ auf; sie sind also bekannt. Im übrigen sind die vorstehenden Überlegungen anwendbar, und man geht mittels vollständiger Induktion vor.

§ 3. Der Konvergenzbeweis für die Transformation auf die Normalform

Wir nehmen zunächst an, es lasse sich ein $\sigma > 2$ so bestimmen, daß

$$|N_1(\underline{n})| \geqq \sigma(\nu_1 + \cdots + \nu_n) = \sigma|\nu|, \quad \sigma > 2, \tag{18}$$

falls nicht $N_1(\underline{n}) = 0$. Unter der Voraussetzung (3) gibt es stets ein $\sigma > 0$, so daß (18) gilt, $N_1(\underline{n}) = 0$ tritt aufgrund des Hilfssatzes höchstens endlich oft ein. Wir werden uns später von der Voraussetzung $\sigma > 2$ wieder befreien. $\mathfrak{f}_k^*(w)$ sei eine konvergente Majorante von $\mathfrak{f}_k(w)$, mit ord $\mathfrak{f}_k$ = ord $\mathfrak{f}_k^*$, beliebig bis auf endlich viele Koeffizienten, die wir im folgenden geeignet bestimmen werden. $Z_j^*(\omega)$ sei ein majorantes *Polynom* von $Z_j(\omega)$, aus denselben Zusatzmonomen linear kombiniert. Wir setzen

$$\tau_\nu = \sum_{l=1}^{n} (\sigma - \varepsilon_l)\nu_l. \tag{19}$$

Wir halten fest:

$$\begin{gathered} |N_j(\underline{n})| \geqq \sigma|\nu| \geqq |\nu| \geqq \tau_\nu > 1 \text{ für } |\nu| \geqq 2, \quad j = 1, \ldots, \mu. \\ \tau_\nu \geqq \nu_1 + \cdots + \nu_n \geqq \nu_j, \quad j = 1, \ldots, n, \\ \text{(wegen } \sigma > 2.) \end{gathered}$$

Wir werden nun die $\mathfrak{f}_k^*$ so wählen, daß die Potenzreihe $\sum_{|\nu|\geqq 2} s_\nu^{(k)} \omega^\nu$, deren Koeffizienten $s_\nu^{(k)}$ aus den folgenden Identitäten (21) in $\boldsymbol{C}[\![\omega_1, \ldots, \omega_n]\!]$ bestimmt werden, eine Majorante der fest gewählten Potenzreihe $\sum_{|\nu|\geqq 2} t_\nu^{(k)} \omega^\nu$ ist:

$$\begin{aligned} \sum_{|\nu|\geqq 2} \sigma s_\nu^{(r_1+k)} \omega^\nu &= \varepsilon_k \sum_{|\nu|\geqq 2} \tau_\nu s_\nu^{(r_1+k-1)} \omega^\nu + \sum_{|\nu|\geqq 2} \sum_{j=1}^{\mu} \varepsilon_j \nu_j \, s_\nu^{(r_1+k)} \omega^{\nu+\eta_{j-1}-\eta_j} \\ &+ \mathfrak{f}_{r_1+k}^*\Big(\omega_1 + \sum_{|\nu|\geqq 2} \tau_\nu s_\nu^{(1)} \omega^\nu, \ldots, \omega_n + \sum_{|\nu|\geqq 2} \tau_\nu s_\nu^{(n)} \omega^\nu\Big) \\ &+ Z_{r_1+k}^*(\omega_1, \ldots, \omega_{r_1}) \Big(1 + \sum_{|\nu|\geqq 2} \sum_{j=1}^{\mu} \tau_\nu s_\nu^{(r_1+k)} \omega^{\nu-\eta_j}\Big), \end{aligned} \tag{21}$$

wobei wieder die den Zeilen des 2. Kästchens entsprechenden Gleichungen des majoranten Systems angeschrieben sind. Falls $s_\nu^{(r_1+k)}$ nicht Koeffizient eines Zusatzmonoms ist, so ergeben sich die $s_\nu^{(r_1+k)}$, deren ν (10) erfüllen, aus folgendem linearen Gleichungssystem, in dem die τ_ν wieder gemäß der lexikographischen Ordnung als $\tau_1, \ldots, \tau_L$ geordnet sind:

$$
\begin{aligned}
&\sigma \mid \nu \mid s_1^{(r_1+k)} - D_2^{(1)} s_2^{(r_1+k)} - \cdots = \varepsilon_{r_1+k}\tau_1 s_1^{(r_1+k-1)} + f_1^{(r_1+k)}(\tau_\mu s_\mu^{(\alpha)}, \vartheta^*, C_\mu^*)\\
(22)\quad &\sigma \mid \nu \mid s_2^{(r_1+1)} - D_3^{(2)} s_3^{(r_1+1)} - \cdots = \varepsilon_{r_1+k}\tau_2 s_2^{(r_1+k-1)} + f_2^{(r_1+k)}(\tau_\mu s_\mu^{(\alpha)}, \vartheta^*, C_\mu^*)\\
&\qquad\qquad \cdots \quad \sigma \mid \nu \mid s_L^{(r_1+1)} = \varepsilon_{r_1+k}\tau_L s_L^{(r_1+k-1)} + f_L^{(r_1+k)}(\tau_\mu s_\mu^{(\alpha)}, \vartheta^*, C_\mu^*).
\end{aligned}
$$

Die $f_k^{(r_1+k)}$ sind dieselben Polynome mit nicht-negativen Koeffizienten wie in (15), in denen $t_\mu^{(\alpha)}$ anstelle der $\tau_\mu s_\mu^{(\alpha)}$, anstelle der ϑ die entsprechenden Koeffizienten ϑ^* der $\mathfrak{f}_k^*$, anstelle der $-C_\mu$ die Koeffizienten C_μ^* der Z_k^* substituiert werden. Wir halten fest, daß die Koeffizienten in (22), abgesehen von den $\sigma \mid \nu \mid$, gerade das Negative derjenigen von (15) sind. Wenn man nun schon weiß, daß

$$s_\mu^{(j)} \geqq \mid t_\mu^{(j)} \mid$$

für $\mid \mu \mid < \mid \nu \mid$, so folgt mit Hilfe von (22)

$$\mid t_\nu^{(r_1+k)} \mid \leqq s_\nu^{(r_1+k)}, \tag{23}$$

falls schon $\mid t_\nu^{(r_1+k-1)} \mid \leqq s_\nu^{(r_1+k-1)}$ bewiesen ist. Die Behauptung (23) für $k = 1$ ergibt sich aber aus (22) direkt.

Wir haben noch den schwierigeren Fall zu studieren, daß $s_\nu^{(r_1+k)}$ Koeffizient eines Zusatzmonoms ist. Wir erhalten z. B.:

$$
\begin{aligned}
&\sigma \mid \nu \mid s_1^{(r_1+1)} - D_2^{(1)} s_2^{(r_1+1)} - \cdots = C_1^{*(r_1+1)} + f_1^{(r_1+1)}(\tau_\mu s_\mu^{(\alpha)}, \vartheta^*, C_\mu^*)\\
(24)\quad &\sigma \mid \nu \mid s_2^{(r_1+1)} - D_3^{(2)} s_3^{(r_1+1)} - \cdots = C_2^{*(r_1+1)} + f_2^{(r_1+1)}(\tau_\mu s_\mu^{(\alpha)}, \vartheta^*, C_\mu^*)\\
&\qquad\qquad \cdots \quad \sigma \mid \nu \mid s_L^{(r_1+1)} = C_L^{*(r_1+1)} + f_L^{(r_1+1)}(\tau_\mu s_\mu^{(\alpha)}, \vartheta^*, C_\mu^*).
\end{aligned}
$$

Hier muß erreicht werden:

$$s_j^{(r_1+1)} \geqq \mid t_j^{(r_1+1)} \mid,$$

wobei bekanntlich $t_j^{(r_1+1)}$ beliebig gewählt werden kann. Dazu beachten wir, daß das Polynom $f_j^{(r_1+1)}$ auf der rechten Seite von (24) folgendermaßen gebaut ist:

$$f_j^{(r_1+1)} = \vartheta_j^{*(r_1+1)} + g_j^{(r_1+1)}.$$

Dabei ist $\vartheta_j^{*(r_1+1)}$ der Koeffizient desjenigen Monoms in $\mathfrak{f}_{r_1+1}^*$, das in $\mathfrak{T}_{r_1+1}$ mit $t_j^{(r_1+1)}$ multipliziert ist, während $g_j^{(r_1+1)}$ nicht von $\vartheta_j^{*(r_1+1)}$ abhängt. Wenn wir die $\vartheta_j^{*(r_1+1)}$ hinreichend groß wählen, so können wir die Abschätzung sukzessive aus (24) erreichen, ebenso in den Systemen für $\mathfrak{T}_j^{(r_1+k)}$. Da diese Einschränkung für die $\vartheta_\nu^*(k)$ nur an endlich vielen Stellen gemacht werden muß, haben wir die Existenz einer zulässigen konvergenten Majoranten von $\mathfrak{f}_k$ gezeigt. In diesem Punkt sind wir allgemeiner als alle früheren Untersuchungen zu diesem Gegenstand, die nur die spezielle Transformation T mit $t_\nu^{(k)} = 0$ für $N_j(\underline{n}) = 0$ betrachteten. Wir führen nun den Konvergenzbeweis unter der Annahme (18). Die Substitution

$$\omega_1 = \cdots = \omega_n = \zeta,$$

d. h. der Homomorphismus $C[\![\omega_1, \ldots, \omega_n]\!] \to C[\![\zeta]\!]$, der dadurch induziert wird, ergibt aus (21) mit der Abkürzung:

$$\sum_{\nu_1+\cdots+\nu_n=m} \tau_\nu s_\nu^{(j)} = \Theta_m^{(j)}: \tag{25}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{m=2}^{\infty} \Theta_m^{(r_1+k)} \zeta^m - \varepsilon_{r_1+k} \sum_{m=2}^{\infty} \Theta_m^{(r_1+k-1)} \zeta^m \\ &\quad = f_{r_1+k}^*\Big(\zeta + \sum_{m=2}^{\infty} \Theta_m^{(1)} \zeta^m, \ldots, \zeta + \sum_{m=2}^{\infty} \Theta_m^{(n)} \zeta^m\Big) \\ &\qquad + Z_{r_1+k}^*(\zeta, \ldots, \zeta) + \sum_{m=2}^{\infty} \Theta_m^{(r_1+k)} \zeta^m \cdot \big(\zeta^{-1} Z_{r_1+k}^*(\zeta, \ldots, \zeta)\big), \end{aligned} \tag{26}$$

wobei nochmals (22) verwendet wurde, und $\zeta^{-1} Z_{r_1+k}^*(\zeta, \ldots, \zeta)$ eine ganze Potenzreihe in ζ ohne absolutes Glied ist. Ergänzt man diese analytischen Gleichungen für die $\zeta + \sum_{m=2} \Theta_m^{(r_1+k)} \zeta^m$ durch die entsprechenden aus den anderen Kästchen, so sieht man, daß die $\zeta + \sum_{m=2} \Theta_m^{(k)} \zeta^m$ nach dem Hauptsatz über die impliziten Funktionen konvergent sind. Daraus folgt sofort die Konvergenz der Reihen $\sum_{|\nu| \geqq 2} t_\nu^{(j)} \omega^\nu$. Wir wählen ein $\omega^0 = (\zeta_0, \ldots, \zeta_0)$, $\zeta_0 > 0$, so daß die $\sum_{m=2}^{\infty} \Theta_m^{(j)} \zeta^m$ gleichmäßig und absolut für $|\zeta| \leqq \zeta_0$ konvergieren. Dann folgt für alle $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ mit $|\omega_j| \leqq \zeta_0$, und alle m:

$$\Big| \sum_{\nu 1+\cdots+\nu n=m} t_\nu^{(k)} \omega^\nu \Big| \leqq \sum_{|\nu|=m} |t_\nu^{(k)}| \, |\omega|^\nu \leqq \sum_{|\nu|=m} s_\nu^{(k)} \zeta_0^m \leqq \sum_{|\nu|=m} \tau_\nu s_\nu^{(k)} \zeta_0^m = \Theta_m^{(k)} \zeta_0^m.$$

Daraus ergibt sich aus einfachen Sätzen über Reihen mit positiven Gliedern die gleichmäßige und absolute Konvergenz von $\sum_{|\nu| \geqq 2} t_\nu^{(k)} \omega^\nu$ für $|\omega_j| \leqq \zeta_0$. Wir haben uns noch von der Voraussetzung (18) zu befreien. Bekanntlich (vgl. etwa [1]), läßt sich unter der Voraussetzung (3) (18) mit einem $\sigma > 0$ immer erreichen. Wir führen wie in [2] die folgende Transformation des Parameters t in (1) durch:

$$t = \frac{1}{\alpha} t^*, \alpha \neq 0. \tag{27}$$

Dadurch folgt aus (1), worin wir $A = \| a_{kl} \|$ in Jordanscher Normalform J annehmen:

$$\frac{dw}{dt^*} = \alpha J w + \alpha f(w), \tag{28}$$

für die Normalform

$$\frac{d\omega}{dt^*} = \alpha J \omega + \alpha Z(\omega). \tag{29}$$

Ferner gilt $\frac{dw_k}{dt^*} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial w_k}{\partial \omega_l} \frac{d\omega_l}{dt^*}$ genau dann, wenn $\frac{dw_k}{dt} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \omega_k}{\partial \omega_l} \frac{d\omega_l}{dt}$. Folglich führt T (aus (2)) (28) genau dann in (29) über, wenn es (1) in (8) überführt. Wenn wir nun $\alpha > 0$ hinreichend groß nehmen, so hat αJ die Eigenwerte $\alpha \lambda_j$ eines so großen Betrages, daß aus einer Ungleichung

$$|N_j(\underline{n})| \geqq \sigma_0 |\nu|, \quad \sigma_0 > 0,$$

folgt:

$$|n_1(\alpha\lambda_1) + \cdots + (n_j - 1)(\alpha\lambda_j) + \cdots + n_\mu(\alpha\lambda_\mu)| \geqq \alpha\sigma_0$$

mit $\alpha\sigma_0 = \sigma > 2$. Es muß noch gezeigt werden, daß (29) schon durch eine lineare Transformation L in die Normalform übergeführt werden kann. Man erkennt sofort (vgl. etwa [7]), daß eine lineare Transformation L mit einer Matrix der Gestalt diag $(a_1, \ldots, a_n)$ und geeigneten $a_i \in \boldsymbol{C}$, $a_i \neq 0$, J in seine Jordansche Normalform überführt. Dieses L wirkt aber auf die $Z_k(\omega)$ nur so, daß es diejenigen eines Kästchens linear kombiniert. Die Transformation L führt also (29) in die Normalform über. Also folgt nach dem, was wir soeben gezeigt haben: $L \cdot T$ ist konvergent, da ja $\sigma > 2$ für (28), (29). Somit ist T konvergent. Da $L \cdot T$ mit T alle Transformationen von (28) auf Normalform durchläuft, so sind auch alle Transformationen von (1) auf (8) konvergent.

§ 4. Die Konvergenz der Transformation auf Normalform im Stabilitätsproblem

Für die Problemstellung verweise ich auf [1]. Ich schließe mich in den formalen Untersuchungen an diese Darstellung an.

Vorgelegt sei ein Differentialgleichungssystem (1). Wir nehmen an, sein Linearteil liege schon in Normalform vor. Allgemeiner als bei (3) nehmen wir an, daß von $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$ nur $\lambda_1, \ldots, \lambda_\varkappa$ auf einer Seite der Geraden g, $\lambda_{\varkappa+1}, \ldots, \lambda_m$ auf der anderen Seite von g liegen. Also gilt für den orientierten Abstand $d(g, \lambda)$ bei geeigneter Normierung:

$$(30)\quad d(g, \lambda_\varkappa) \leqq d(g, \lambda_{\varkappa-1}) \leqq \cdots \leqq d(g, \lambda_1) < 0 < d(g, \lambda_{\varkappa+j}), \quad 1 \leqq j \leqq \mu - \varkappa.$$

Wir setzen $r_1 + \cdots + r_\varkappa = m$. (Es kann $\varkappa = 0$ oder $\varkappa = m$ sein). Dann wird behauptet:

Satz 3. *Es existiert eine konvergente Transformation S*

$$(31)\qquad \omega_k = w_k + \mathfrak{S}_k(w_1, w_2, \ldots, w_m), \quad k = 1, \ldots, n, \text{ mit } \operatorname{ord} \mathfrak{S}_k \geqq 2,$$

von (1) *auf die Gestalt*

$$(32)\qquad \dot{\omega} = J\omega + Z(\omega) + \mathfrak{R}(\omega),$$

wobei für eine Zeile

$$\frac{d\omega_k}{dt} = \varepsilon_k \omega_{k-1} + \lambda_{j_k}\omega_k + Z_k(\omega_1, \ldots, \omega_{r_1} + \cdots + r_{j_k-1}) + \mathfrak{R}_k(\omega_1, \ldots, \omega_n)$$

gilt:

In den Polynomen $Z_k(\omega_1, \ldots, \omega_{r_1+\cdots+r_{j_k-1}})$, $k = 1, \ldots, m$, treten nur die zu den Relationen

$$(33)\qquad \lambda_{j_k} = n_1\lambda_1 + \cdots + n_{j_k-1}\lambda_{j_k-1}, \quad j_k \leqq \varkappa,$$

gehörigen Zusatzmonome auf, $Z_k = 0$ für $k \geqq m$, während für die Potenzreihen $\mathfrak{R}_k$

$$(34)\qquad \mathfrak{R}_k(\omega_1, \ldots, \omega_m, 0, \ldots, 0) = 0, \quad k = 1, \ldots, n$$

gilt.

Beweis. Gemäß (31) haben wir:

$$\frac{d\omega_k}{dt} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial\omega_k}{\partial w_l}\frac{dw_l}{dt} = \sum_{l=1}^{n}\left(\delta_{kl} + \frac{\partial\mathfrak{S}_k}{dw_1}\right)(\varepsilon_l w_{l-1} + \lambda_{j_l} w_l + \mathfrak{f}_l(w_1, \ldots, w_n)).$$

Andererseits gilt

$$(35)\quad \frac{d\omega_k}{dt} = \varepsilon_k(w_{k-1} + \mathfrak{S}_{k-1}(w_1, \ldots, w_m)) + \lambda_{j_k}(w_k + \mathfrak{S}_k(w_1, \ldots, w_m)) + Z_k(w + \mathfrak{S}(w))\,\mathfrak{R}_k(w + \mathfrak{S}(w)),$$

also

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \mathfrak{S}_k}{\partial w_l}(\varepsilon_l w_{l-1} + \lambda_{j_l} w_l + \mathfrak{f}_l(w_1, \ldots, w_n)) = \varepsilon_k \mathfrak{S}_{k-1}(w_1, \ldots, w_m) + \lambda_{j_k} \mathfrak{S}_k(w_1, \ldots, w_m) + Z_k(w + \mathfrak{S}(w))\, \mathfrak{R}_k(w + \mathfrak{S}(w)). \tag{36}$$

Nun ist $\omega_{m+1} = \cdots = \omega_n = 0$ gleichbedeutend mit

$$w_j = -\mathfrak{S}_j(w_1, \ldots, w_m), \quad j = m+1, \ldots, n. \tag{37}$$

Die Substitution (37) in (36) und die Forderung

$$\mathfrak{R}_k(\omega_1, \ldots, \omega_m, 0, 0, \ldots, 0) \equiv 0 \text{ in } \omega_1, \ldots, \omega_m, \tag{34}$$

liefert das System partieller Differentialgleichungen

$$\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial \mathfrak{S}_k}{\partial w_j}(\varepsilon_l w_{l-1} + \lambda_{j_l} w_l + \mathfrak{f}_l(w_1, \ldots, w_m, -\mathfrak{S}_{m+1}(w_1, \ldots, w_m), \ldots, -\mathfrak{S}_n(w_1, \ldots, w_m)) = \varepsilon_k \mathfrak{S}_{k-1}(w_1, \ldots, w_m) + \lambda_{j_k} \mathfrak{S}_k(w_1, \ldots, w_m) + Z_k(w_1 + \mathfrak{S}_1(w_1, \ldots, w_m), \ldots,)).$$

(Bemerkung: In der Summe links genügt es, von $l = 1$ bis $l = m$ zu summieren, da ja $\frac{\partial \mathfrak{S}_k}{\partial w_j} = 0$, $j > m$, sein soll.)

Wir setzen ferner

$$\mathfrak{S}_k = \sum_{|\nu| \geqq 2} s^{(k)}_{\nu_1, \ldots, \nu_m} w_1^{\nu_1} \cdots w_m^{\nu_m} = \sum_{|\nu| \geqq 2} s^{(k)}_{\nu} w^{\nu}. \tag{38}$$

Dann folgt ähnlich wie in § 3, wenn wir wieder die Zeilen des 2. Kästchens herausfassen und die Abkürzungen

$$N_j(\underline{n}) = n_1 \lambda_1 + \cdots + (n_j - 1)\lambda_j + \cdots + n_\varkappa \lambda_\varkappa, \; j = 1, \ldots, \varkappa, \tag{39}$$

und

$$\nu_1 + \cdots + \nu_{r_1} = n_1, \ldots, \nu_{r_1 + \cdots r_{\varkappa - 1}} + \cdots + \nu_m = n$$

einführen:

$$\begin{aligned} &\sum_{|\nu| \geqq 2} N_2(\underline{n}) s^{(r_1+k)}_{\nu} w^{\nu} + \sum_{|\nu| \geqq 2} \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \nu_j s^{(r_1+k)}_{j} w^{\nu + \eta_{j-1} - \eta_j} \\ &= \varepsilon_{r_1+k} \sum_{|\nu| \geqq 2} s^{(r_1+k-1)}_{\nu} w^{\nu} - \mathfrak{f}_{r_1+k}(w_1, \ldots, w_m, -\sum_{\nu} s^{(m+1)}_{\nu} w^{\nu}, \ldots) \\ &\quad + Z_{r_1+k}(w_1 + \sum_{\nu} s^{(1)}_{\nu} w^{\nu}, \ldots, w_{r_1} + \sum_{\nu} s^{(r_1)}_{\nu} w^{\nu}) \\ &\quad - \sum_{|\nu| \geqq 2} \sum_{j=1}^{m} \nu_j s^{(r_1+k)}_{\nu} \omega^{\nu - \eta_j} \mathfrak{f}_j(w_1, \ldots, w_m, -\sum_{\nu} s^{(m+1)}_{\nu} w^{\nu}, \ldots, -\sum s^{(n)}_{\nu} w^{\nu}). \end{aligned} \tag{40}$$

Genau so wie in § 2 verlaufen die formalen Betrachtungen und die Aufstellung eines majoranten Problems. Man kann wieder die $s^{(k)}_{\nu}$, die Koeffizienten von Zusatzmonomen sind, willkürlich wählen; wie in § 2 ergibt sich stets ein majorantes Problem mit konvergenten Potenzreihen. Wir können uns wieder auf den Fall der Abschätzungen:

$$|N_j(\underline{n})| \geqq \sigma(\nu_1 + \cdots + \nu_m), \text{ mit } \sigma > 2,$$

beschränken. $\mathfrak{f}^*(w_1, \ldots, w_n)$ sei eine im Sinne des formalen Problems *geeignet* gewählte Majorante aller $\mathfrak{f}_k(w_1, \ldots, w_n)$, $Z^*_k(w_1, \ldots, w_m)$ ein majorantes Polynom von $Z_k(w_1, \ldots, w_m)$, das ebenfalls nur Zusatzmonome zu λ_{j_k} enthält. Wir setzen wieder

$$\tau_\nu = \sum_{j=1}^{m} (\sigma - \varepsilon_j)\nu_j. \tag{41}$$

Dann ergibt sich als majorantes Problem zu (42), wobei wieder die zum zweiten Kästchen gehörigen Zeilen hingeschrieben sind:

$$
\begin{aligned}
(42)\quad \sum_{|\nu|\geqq 2} \sigma \mid n \mid S^{(r_1+k)} w^\nu &= \varepsilon_{r_1+k} \sum_{|\nu|\geqq 2} \tau_\nu S_\nu^{(r_1+k-1)} w^\nu + \sum_{|\nu|\geqq 2} \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j \nu_j S_j^{(r_1+k)} w^{\nu+\eta_j-\eta_{j-1}} \\
&+ \mathfrak{f}^*(w_1, \ldots, w_m, \sum_\nu \tau_\nu S_\nu^{(m+1)} w^\nu, \ldots, \sum_\nu \tau_\nu S_\nu^{(n)} w^\nu) \\
&+ Z_{r_1+k}(w_1 + \sum_\nu \tau_\nu S_\nu^{(1)} w^\nu, \ldots, w_{r_1} + \sum_\nu \tau_\nu S_\nu^{(r_1+1)} w^\nu) \\
&+ \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{|\nu|\geqq 2} \tau_\nu S_\nu^{(r_1+k)} w^{\nu-\eta_j} \Big) \mathfrak{f}^*(w_1, \ldots, w_m, \sum_\nu \tau_\nu S_\nu^{(m+1)} w^\nu, \ldots, \sum_\nu \tau_\nu S^{(n)} w^\nu).
\end{aligned}
$$

Wir setzen wieder $w_1 = \cdots = w_m = \zeta$,

$$
(43)\qquad \sum_{|\nu|=1} \tau_\nu S_\nu^{(j)} = \dot{\Theta}_l^{(j)},
$$

$$
(44)\qquad \Phi_j(\zeta) = \sum_{l=2}^{\infty} \Theta_l^{(j)} \zeta^{l-1},
$$

Es ist also $\operatorname{ord}_\zeta \Phi_j(\zeta) \geqq 1$. Dann ergibt (42):

$$
\begin{aligned}
0 = &- \zeta \Phi_{r_1+k}(\zeta) + \varepsilon_{r_1+k} \zeta \Phi_{r_1+k-1}(\zeta) + \mathfrak{f}^*(\zeta, \ldots, \zeta, \zeta\Phi_{m+1}(\zeta), \ldots, \zeta\Phi_n(\zeta)) \\
&+ Z^*_{r_1+k}(\zeta + \zeta\Phi_1(\zeta), \ldots, \zeta + \zeta\Phi_{r_1}(\zeta)) \\
&+ \Phi(\zeta)\mathfrak{f}^*(\zeta, \ldots, \zeta, \zeta\Phi_{m+1}, \ldots, \zeta\Phi_n(\zeta)).
\end{aligned}
$$

Diese analytischen Gleichungen denken wir uns durch die von den übrigen Kästchen herrührenden Gleichungen zu einem System von n analytischen Gleichungen für die Potenzreihen $\Phi_1(\zeta), \ldots, \Phi_n(\zeta)$ mit ord $\Phi_j(\zeta) \geqq 1$ hinzugefügt. Da in $\mathfrak{f}^*$ und in $Z^*_{r_1+k}$ nur Glieder einer Ordnung $\geqq 2$ auftreten, so können wir aus allen Gleichungen ζ herausheben. Dadurch erhalten wir ein Gleichungssystem, dessen Lösung Φ nach dem Hauptsatz über die impliziten Funktionen eindeutig bestimmt und konvergent ist: denn $\zeta^{-1}\mathfrak{f}^*(\zeta, \ldots, \zeta, \zeta\Phi_{m+1}, \ldots, \zeta\Phi_n)$ und $\zeta^{-1} Z^*_{r_1+k}(\zeta + \zeta\Phi_1(\zeta), \ldots, \zeta + \zeta\Phi_{r_1}(\zeta))$ enthalten nur Monome der Bauart ζ^j, $j \geqq 1$, $\zeta^{\alpha_0}\Phi_1^{\alpha_1} \cdots \Phi_n^{\alpha_n}$ mit $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \geqq 2$; und die Determinante des linearen Teils ist nicht 0, wie sofort nachzurechnen ist. Damit ist der Beweis von Satz 3 geführt.

Literatur

[1] *C. L. Siegel*, Lectures on the Singularities of the Three Body Problem, (Chapter III, § 5), Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1967.

[2] *L. Reich*, Typen analytischer Differentialgleichungssysteme in der Nähe einer Gleichgewichtslage im Falle mehrfacher Eigenwerte des linearen Anteils, Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. Math. — naturw. Kl., Abt. II, **176**, (1968) 465—472.

[3] *H. Poincaré*, Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux differences partielles (Thèse), Dans les Oeuvres de H. Poincaré, Tome I, Paris 1951.

[4] *H. Dulac*, Solutions d'un systeme d'équations differentielles dans le voisenage de valeurs singuliers, Bull. Soc. Math. France **40** (1912), 324—383.

[5] *L. Bieberbach*, Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Auf funktionentheoretischer Grundlage dargestellt, 2. Auflage, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1965.

[6] *K.-J. Wirths*, Normalformen analytischer Differentialgleichungssysteme in der Umgebung einer Gleichgewichtslage, Staatsexamensarbeit, Bonn 1967.

[7] *L. Reich*, Biholomorphe Abbildungen mit Fixpunkt und Normalformen analytischer Differentialgleichungssysteme in Nähe einer Gleichgewichtslage, Erscheint in den Math. Ann.

Mathematisches Institut der Universität, 53 Bonn, Wegelerstraße 10

Eingegangen 7. Februar 1969

Ideaux maximaux de l'anneau des endomorphismes d'un ideal

Par *Jean Pierre Lafon* à Toulouse

À monsieur le professeur Wolfgang Krull en respectueux hommage

---

Soit A un anneau local commutatif noethérien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel k. On se propose dans ce travail l'étude des idéaux maximaux de la A-algèbre $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r)$ des A-endomorphismes de l'idéal $\mathfrak{m}^r$ pour tout entier r supérieur ou égal à 1.

Les résultats essentiels sont l'obtention d'un critère maniable permettant d'affirmer que l'algèbre $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r)$ est locale, non nécessairement commutative, d'idéal maximal $\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}^r, \mathfrak{m}^{r+1})$ et de corps résiduel k (prop. III. 2) et la classification complète dans le cas où A est l'anneau local d'un point d'une hypersurface et particuliérement d'une courbe plane.

I. Sur quelques invariants numériques d'un anneau local

I. 1. Soient k un corps, V un k-espace vectoriel, $\mathrm{Sym}_k(V)$ l'algèbre symétrique de V, $\mathrm{Sym}_k^r(V)$ le sous groupe additif de $\mathrm{Sym}_k(V)$ des éléments homogènes de degré r. On note $u \cdot v$ le produit des éléments u et v de $\mathrm{Sym}_k(V)$ [5]. Un élément non nul θ de $\mathrm{Sym}_k^r(V)$ est une somme finie de monômes $u_1 \cdots u_r$ où u_i appartient à V $(i = 1, \ldots, r)$. Soit $\varrho_r(\theta)$ le nombre minimum de tels monômes dont la somme soit θ. Il est commode de poser $\varrho_r(0) = +\infty$. Si W est un sous espace vectoriel de $\mathrm{Sym}_k^r(V)$, on pose

$$\varrho_r(W) = \begin{cases} +\infty \text{ si } W = (0) \\ \inf\left(\varrho_r(\theta)\right) \text{ si } W \neq (0) \text{ où } \theta \text{ parcourt les éléments non nuls de } W. \end{cases}$$

I. 2. Soit A un anneau local (commutatif) d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel k. On pose $V = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

Soit φ l'homomorphisme gradué de $\mathrm{Sym}_k(V)$ dans l'algèbre graduée $\mathrm{Grad}_{\mathfrak{m}}(A)$ égale à $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}$ défini comme suit:

si $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r$ sont des éléments de V de représentants $x_1, \ldots, x_r$ dans $\mathfrak{m}$, on pose

$$\varphi(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_r) = \text{classe de } x_1 \cdots x_r \text{ modulo } \mathfrak{m}^{r+1}.$$

Soit φ_r la composante de degré r de φ, $\mathfrak{N}_r$ le sous espace vectoriel de $\mathrm{Sym}_k^r(V)$ noyau de φ_r. On pose

$$\varrho_r(A) = \varrho_r(\mathfrak{N}_r).$$

I. 3. Il est clair que l'anneau A est local *régulier* si et seulement si il est noethérien et si $\varrho_r(A) = +\infty$ pour tout entier r.

D'autre part, la fonction $r \mapsto \varrho_r(A)$ de $\{1, 2, \ldots\}$ dans $\{1, 2, \ldots, +\infty\}$ est *décroissante.*

I. 4. Il est utile d'expliciter $\mathfrak{N}_r$ dans le cas où l'anneau local A est donné par générateurs et relations.

Proposition. *On suppose que* $A = k[[x_1, \ldots, x_n]]$ *avec* n *minimal en sorte que la* k*-algèbre* $\mathrm{Sym}_k(V)$ *soit* k*-isomorphe à la* k*-algèbre* $k[X_1, \ldots, X_n]$ *des polynômes en* n *indéterminées* $X_1, \ldots, X_n$ *à coefficients dans* k.

Soit I *le noyau de l'homomorphisme surjectif de l'anneau* $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ *des séries formelles sur* A *qui applique* X_i *sur* x_i.

Une forme homogène $f_r(X_1, \ldots, X_n)$ *de degré* r *appartient à* $\mathfrak{N}_r$ *si et seulement si il existe un élément* $F(X_1, \ldots, X_n)$ *de* $\mathfrak{I}$ *dont* $f_r(X_1, \ldots, X_n)$ *soit la forme initiale.*

Preuve. Dire que $f_r(x_1, \ldots, x_n)$ appartient à $\mathfrak{m}^{r+1}$ revient, en effet, à dire qu'il existe un élément $g(X_1, \ldots, X_n)$ d'ordre $r + 1$ de $k[[X_1, \ldots, X_n]]$ tel que

$$f_r(x_1, \ldots, x_n) - g(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Ceci signifie que f_r est la forme initiale de l'élément

$$F(X_1, \ldots, X_n) = f_r(X_1, \ldots, X_n) - g(X_1, \ldots, X_n) \text{ de } \mathfrak{I}.$$

II. Généralités sur les idéaux maximaux de l'anneau $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r)$

II. 1. **Proposition.** *Soient* R *un anneau commutatif,* $\mathfrak{m}$ *un idéal de* R *contenu dans le radical de* R, M *un* R*-module de type fini.*

L'idéal bilatère $\mathrm{Hom}_R(M, \mathfrak{m}M)$ *de l'anneau* $\mathrm{End}_R(M)$ *est contenu dans le radical de* $\mathrm{End}_R(M)$.

En conséquence, l'application

$$\mathfrak{n} \mapsto \mathfrak{n}/\mathrm{Hom}_R(M, \mathfrak{m}M)$$

est une bijection de l'ensemble des idéaux maximaux (bilatères, à droite, à gauche) de l'anneau $\mathrm{End}_R(M)$ *sur celui analogue de l'anneau quotient* $\mathrm{End}_R(M)/\mathrm{Hom}_R(M, \mathfrak{m}M)$ [3].

Preuve. Le fait que l'idéal bilatère $\mathrm{Hom}_R(M, \mathfrak{m}M)$ soit contenu dans le radical de $\mathrm{End}_R(M)$ est clair si M est un R-module libre ayant une base finie. On vérifie, en effet, que si u appartient à $\mathrm{Hom}_R(M, \mathfrak{m}M)$ le déterminant de $1 + u$ est inversible puisque de la forme $1 + x$ où x appartient à $\mathfrak{m}$. Il résulte alors du théorème d'Hamilton Cayley que $1 + u$ admet un inverse dans $\mathrm{End}_R(\mathfrak{m})$ et que cet inverse est un polynôme en u à coefficients dans R.

Dans le cas général, on considère M comme quotient d'un module libre de type fini L par un sous module N. Un endomorphisme u appartenant à $\mathrm{Hom}_R(M, \mathfrak{m}M)$ se relève en un endomorphisme v appartenant à $\mathrm{Hom}_R(L, \mathfrak{m}L)$, tel que $v(N) \subset N$. L'inverse w de $1 + v$ dans $\mathrm{End}_R(L)$ est tel que $w(N) \subset N$ puisque c'est un polynôme en v à coefficients dans R. Il induit un élément de $\mathrm{End}_R(M)$ qui est l'inverse de $1 + u$.

La dernière assertion résulte de ce que tout idéal bilatère maximal contient le radical.

II. 2. **Corollaire.** *Soient* A *un anneau local noethérien d'idéal maximal* $\mathfrak{m}$, $f: A \to B$ *un homomorphisme local plat à extension résiduelle triviale et tel que l'idéal maximal de* B *soit* $\mathfrak{m}B$.

L'application: $\mathfrak{n} \mapsto \mathfrak{n}\,\mathrm{End}_B(\mathfrak{m}^r B)$ *est une bijection de l'ensemble des idéaux maximaux de l'anneau* $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r)$ *sur l'ensemble des idéaux maximaux de l'anneau* $\mathrm{End}_B(\mathfrak{m}^r B)$.

Preuve. Le fait que A et B aient même corps résiduel et la A-platitude de B impliquent que l'homomorphisme naturel

$$\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r)/\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}^r, \mathfrak{m}^{r+1}) \to (\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r) \underset{A}{\otimes} B)/(\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}^r, \mathfrak{m}^{r+1}) \underset{A}{\otimes} B)$$

est un isomorphisme.

Les hypothèses noethériennes et la A-platitude de B montrent que l'homomorphisme naturel de $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r) \underset{A}{\otimes} B$ (resp. $\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}^r, \mathfrak{m}^{r+1}) \underset{A}{\otimes} B$) dans $\mathrm{End}_B(\mathfrak{m}^r B)$ (resp. $\mathrm{Hom}_B(\mathfrak{m}^r B, \mathfrak{m}^{r+1} B)$) est un isomorphisme.

II. 3. La proposition qui suit ramène sous des hypothèses assez peu restrictives (ref. remarque 1) l'étude des idéaux maximaux de l'anneau $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r)$ à celle des décompositions de $\mathfrak{m}^r$ en somme directe d'idéaux indécomposables en tant que A-modules.

Proposition. *Soient A un anneau local noethérien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, r un entier $\geqq 1$. On suppose vérifiée l'une des conditions suivantes*:

l'anneau $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r)$ *est commutatif.*

l'idéal $\mathfrak{m}\,\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r)$ *est le radical de l'anneau* $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r)$.

Soit A' l'hensélisé ou le complété de A [4].

Si $\mathfrak{n}$ est un idéal bilatère maximal de l'anneau $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r)$, *il existe un idempotent central $e_\mathfrak{n}$ de l'anneau* $\mathrm{End}_{A'}(\mathfrak{m}^r A')$ *tel que*

$$\mathrm{End}_{A'}(\mathfrak{n} A') = e_\mathfrak{n}\,\mathrm{End}_{A'}(\mathfrak{m}^r A').$$

L'application

$$\mathfrak{n} \mapsto e_\mathfrak{n}(\mathfrak{m}^r A')$$

est une bijection de l'ensemble des idéaux bilatères maximaux de l'anneau $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r)$ *sur l'ensemble des facteurs directs indécomposables du A'-module* $\mathfrak{m}^r A'$.

Preuve. Le corollaire II. 2 permet de supposer $A = A'$.

L'anneau quotient $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r)/\mathrm{rad}(\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r))$ est artinien et se décompose donc de manière unique en une somme directe d'idéaux bilatères $\bar{R}_1, \ldots, \bar{R}_s$ indécomposables. L'une quelconque des hypothèses faites permet de relever les idempotents centraux correspondants à cette décomposition en des idempotents $e_1, \ldots, e_s$ *centraux* deux à deux orthogonaux et de somme 1. On vérifie alors que si l'on pose

$$\mathfrak{n}_i = e_i(\mathfrak{m}^r) \text{ et } R_i = e_i\,\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r).$$

$\mathrm{End}_A(\mathfrak{n}_i)$ est isomorphe à R_i en sorte que $\mathfrak{n}_i$ est un A-module indécomposable. Il est d'autre part clair que

$$\mathfrak{m}^r = \mathfrak{n}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{n}_s.$$

II. 4. **Exemple.** *Anneau local d'un point double à tangentes distinctes d'une courbe plane* (algébrique, analytique, formelle).

On peut se limiter au cas formel en sorte que

$$A = k[[X, Y]]/(f(X, Y))$$

où $f(X, Y)$ peut être choisi de la forme $XY + g(X, Y)$ où $g(X, Y)$ est une série formelle d'ordre total supérieur ou égal à 3.

On sait alors qu'il existe des séries formelles $a(X, Y)$ et $b(X, Y)$ d'ordre total supérieur ou égal à 2 telles que

$$f(X, Y) = (X + a(X, Y))(Y + b(X, Y))$$

Les formules

$$Z = X + a(X, Y)$$

$$T = Y + b(X, Y)$$

définissent alors un k-isomorphisme de $k[[X, Y]]$ sur $k[[Z, T]]$.

Ainsi $A = k[[Z, T]]/(ZT)$. Si z et t sont les classes de Z et T modulo (ZT), on voit que $\mathfrak{m} = (z, t) = (z) \oplus (t)$ et que $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}) = k[[z]] \oplus k[[t]]$.

II. 5. **Proposition.** *Soient R un anneau commutatif, $\mathfrak{J}$ un idéal de R.*

i) *On suppose qu'il existe un élément x de $\mathfrak{J}$ régulier.*

La R-algèbre $\mathrm{End}_R(\mathfrak{J})$ *est alors isomorphe à la sous algèbre des éléments λ de l'anneau total des fractions K de R tels que $\lambda\mathfrak{J} < \mathfrak{J}$.*

Si, en outre, l'anneau R est intégralement clos, l'homomorphisme naturel de R dans $\mathrm{End}_R(\mathfrak{J})$ *est un isomorphisme si $\mathfrak{J}$ est de type fini.*

ii) *On suppose que $\mathfrak{J}$ contienne une R-suite de longueur 2. L'homomorphisme naturel de R dans* $\mathrm{End}_R(\mathfrak{J})$ *est un isomorphisme* [5]. (ref. remarque 2).

Preuve. i) L'égalité $xu(y) = yu(x) = u(xy)$ pour un élément y de $\mathfrak{J}$ implique l'égalité $u(y) = (u(x)/x)y$.

L'application $u \mapsto u(x)/x$ est l'isomorphisme cherché.

Si $\mathfrak{J}$ est de type fini, la R-algèbre $\mathrm{End}_R(\mathfrak{J})$ est entière sur R et contenue dans l'anneau total des fractions K. Si R est intégralement clos, elle coïncide avec R.

ii) Soit (x, y) une R-suite où x, y appartiennent à $\mathfrak{J}$. L'élément u de $\mathrm{End}_R(\mathfrak{J})$ est l'homothétie de rapport $u(x)/x$. L'égalité $xu(y) = yu(x)$ et le fait que y ne soit pas diviseur de 0 modulo (x) montrent que $u(x)$ appartient à l'idéal (x) et donc que $u(x)/x$ appartient à R.

II. 6. **Corollaire.** *Soient A un anneau local noethérien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et r un entier $\geqq 1$.*

i) *Si la profondeur de A est supérieure ou égale à 1, la A-algèbre* $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r)$ *est isomorphe à la sous algèbre des éléments λ de l'anneau total des fractions K de A tels que $\lambda\mathfrak{m}^r < \mathfrak{m}^r$.*

Si, en outre, A est intégralement clos, $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r)$ *est isomorphe à A.*

ii) *Si la profondeur de A est supérieure ou égale à 2,* $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r)$ *est isomorphe à A.*

Preuve. Il suffit de remarquer que si l'élément x de $\mathfrak{m}$ est régulier (resp. si (x, y) est une A-suite) l'élément x^r de $\mathfrak{m}^r$ est régulier (resp. la suite (x^r, y^r) est une A-suite).

III. Un critère pour que l'anneau $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r)$ soit local d'idéal maximal $\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}^r, \mathfrak{m}^{r-1})$ et de corps résiduel k

III. 1. On rappelle qu'un anneau R non nécessairement commutatif est dit *local* si l'ensemble des éléments non inversibles à gauche est un idéal. Cet idéal est aussi celui des éléments non inversibles à droite. C'est le radical de R. L'anneau quotient de R par cet idéal est un corps non nécessairement commutatif appelé *corps résiduel* de R.

III. 2. **Proposition.** *Soient A un anneau local noethérien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel k, r un entier $\geqq 1$.*

On suppose $\varrho_{r+1}(A)$ (ref. I. 2.) *supérieur ou égal à* 3.

L'anneau $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r)$ *est local* (non nécessairement commutatif) *d'idéal maximal* $\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}^r, \mathfrak{m}^{r+1})$ *et de corps résiduel k.*

Preuve. On va donner la preuve in extenso dans le cas $r = 1$, indiquant la méthode dans le cas général.

Soient u un élément de l'anneau $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m})$, x et y des éléments de $\mathfrak{m}$. L'égalité

$$xu(y) - yu(x) = 0$$

dans $\mathfrak{m}^2$ implique l'égalité

$$\overline{(xu(y) - yu(x))} = 0 \text{ dans } \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3$$

si $\bar{z}$ désigne la classe modulo $\mathfrak{m}^3$ de l'élément z de $\mathfrak{m}^2$.

Or, désignant par $\bar{x}$ et $\bar{y}$ les classes de x et y modulo $\mathfrak{m}^2$ et par $\bar{u}$ l'élément de $\mathrm{End}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ induit par u, i. e. tel que $\bar{u}(\bar{x})$ soit la classe de $u(x)$ modulo $\mathfrak{m}^2$, on a l'égalité

$$\overline{(xu(y) - yu(x))} = \bar{x}\bar{u}(\bar{y}) - \bar{y}\bar{u}(\bar{x}) = 0.$$

Cette condition se traduit par l'appartenance de l'élément

$$\bar{x} \cdot \bar{u}(\bar{y}) - \bar{y} \cdot \bar{u}(\bar{x})$$

au sous espace vectoriel $\mathfrak{N}_2$ de $\mathrm{Sym}_k^2(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ (ref. I. 2.).

Or, $\varrho_2(\bar{x} \cdot \bar{u}(\bar{y}) - \bar{y} \cdot \bar{u}(\bar{x}))$ est soit $\leqq 2$ soit $+\infty$. L'hypothèse «$\varrho_2(A) \geqq 3$» montre que

$$\bar{x} \cdot \bar{u}(\bar{y}) - \bar{y} \cdot \bar{u}(\bar{x}) = 0.$$

Le cas $\mathfrak{m}$ monogène se traitant directement, on peut supposer $[\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 : k] \geqq 2$. On obtient dans le corps des fractions de l'anneau $\mathrm{Sym}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ l'égalité

$$\bar{u}(\bar{y}) = (\bar{u}(\bar{x})/\bar{x}) \cdot \bar{y}$$

si $\bar{x} \neq 0$, où $\bar{u}(\bar{x})$ et $\bar{x}$ sont des éléments de $\mathrm{Sym}_k^1(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$. Le fait que $(\bar{u}(\bar{x})/\bar{x}) \cdot \bar{y}$ soit homogène de degré 1 pour tout élément $\bar{y}$ homogène de degré 1 implique, évidemment, que $\bar{u}(\bar{x})/\bar{x}$ appartient à k: il suffit de prendre pour $\bar{y}$ un élément de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ linéairement indépendant de $\bar{x}$.

Ainsi la k-algèbre $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m})/\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^2)$ est contenue dans k. Elle est donc égale à k. Comme $\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^2)$ est contenu dans le radical de $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m})$, la preuve est achevée.

Cas r quelconque. Si $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ est une base du k-espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, la condition $\varrho_{r+1}(A) \geqq 3$ implique, pour un élément $\bar{u}$ de $\mathrm{End}_k(\mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1})$ induit par un élément u de $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r)$, l'égalité

$$\bar{u}(\bar{x}_1^{a_1} \cdots \bar{x}_n^{a_n}) = (\bar{u}(\bar{x}_1^r)/\bar{x}_1^r) \cdot \bar{x}_1^{a_1} \cdots \bar{x}_n^{a_n}$$

dans le corps des fractions de $\mathrm{Sym}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$, si $a_1 + \cdots + a_n = r$. (confer. remarque 3.)

IV. Cas d'un point sur une hypersurface

IV. 1. Soit A l'anneau local d'un point fermé sur une hypersurface, i. e. $A = B/(f)$ où B est local régulier et f appartient à l'idéal maximal de B. La profondeur de A, égale à $\dim(B) - 1$, est strictement supérieure à 1 si et seulement si $\dim(B)$ est strictement supérieure à 2. On sait alors que l'anneau $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r)$ est isomorphe à A.

IV. 2. Il reste donc à traiter le cas où dim $(B) = 2$, i. e. *le cas d'une courbe plane.* Ce cas est traité ci dessous dans le *cas équicaractéristique.*

Proposition. *Soient k un corps, X et Y des indéterminées, $f(X, Y) \in k[[X, Y]]$ où $f(X, Y) = f_{r+1}(X, Y) + g(X, Y)$, $f_{r+1}(X, Y)$ étant une forme homogène de degré $r + 1$ que l'on supposera de la forme $Y^{r+1} + Xh(X, Y)$* (ce qui n'est pas restrictif) *et $g(X, Y)$ une série d'ordre total strictement supérieur* à $r + 1$. *Soit $A = k[[X, Y]]/(f(X, Y))$.*

1. *Si $i < r$, l'anneau* $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^i)$ *est local d'idéal maximal* $\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}^i, \mathfrak{m}^{i+1})$ *et de corps résiduel k.*

2. *L'anneau* $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r)/\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}^r, \mathfrak{m}^{r+1})$ *est isomorphe à l'anneau* $k[T]/(f_{r+1}(1, T))$ *où T est une indéterminée. En conséquence, les idéaux maximaux de* $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r)$ *sont en bijection avec les facteurs irréductibles de $f_{r+1}(X, Y)$. Si le corps k est algébriquement clos, ils sont donc en bijection avec les tangentes distinctes à l'origine.*

3. *Si $i > r$, le A-module $\mathfrak{m}^i$ est isomorphe à $\mathfrak{m}^r$ et par conséquent* $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^i)$ *est égal à* $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r)$ (après identification à des sous algèbres de l'anneau total des fractions de A).

Preuve. L'assertion 1. résulte de la proposition III. 2. et de la proposition I. 4. L'assertion 3. résulte de ce que l'on peut écrire

$$y^{r+1} = b_r x y^r + \cdots + b_0 x^{r+1} - g(x, y)$$

où $g(x, y) \in \mathfrak{m}^{r+1}$, si x et y sont les classes de X et Y et donc de l'égalité

$$\mathfrak{m}^{r+1} = x\mathfrak{m}^r + \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}^{r+1}$$

qui conduit, en vertu du lemme de Nakayama, à l'égalité $\mathfrak{m}^{r+1} = x\mathfrak{m}^r$. (confer. remarque 4.)

Preuve de 2. Les monômes $x^{r-i}y^i$ forment une base de $\mathfrak{m}^r$ $(i = 0, \ldots, r)$. Les formules

$$u(x^{r-i}y^j) = \sum a_{ij} x^{r-j} y^j \qquad (i = 0, \ldots, r) \tag{1}$$

où $a_{ij} \in A$ définissent un élément u de $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r)$ *si* et seulement si les égalités

$$x\,u(x^{r-i}y^i) = y\,u(x^{r-i+1}y^{i+1}) \qquad (i = 1, \ldots, r) \tag{2}$$

sont satisfaites.

Il résulte, en effet, de la forme choisie pour f_{r+1} que l'élément x est régulier dans A. Soit alors

$$\sum_{i=0}^{r} m_i(x, y) x^{r-i} y^i = 0 \tag{3}$$

une relation entre les monômes $x^{r-i}y^i$. Multipliant (3) par $u(x^r)$ et tenant compte des égalités

$$x^{r-i}y^i u(x^r) = x^r u(x^{r-i}y^i) \tag{4}$$

déduites de (2), on obtient par simplification par x^r l'égalité

$$\sum_{i=0}^{r} m_i(x, y)\, u(x^{r-i}y^i) = 0. \tag{5}$$

Les conditions (2) se traduisent par les conditions

$$\sum a_{ij} x^{r-j+1} y^j = \sum a_{i-1,j} x^{r-j} y^{j+1} + a_{i-1,r}(-b_r y^r x - \cdots - b_0 x^{r+1} - g(x, y)) = 0 \tag{6}$$

soit, en désigant par A_{ij} un représentant de a_{ij} dans $k[[X, Y]]$ par les conditions

$$(7)\quad \Sigma A_{ij}X^{r-j+1}Y^j - \Sigma A_{i-1,j}X^{r-j}Y^{j+1} - A_{i-1,r}(b_rY^rX + \cdots + b_0X^{r+1}) = h_i(X, Y)g(X, Y).$$

Si $\overline{A}_{ij}$ est le terme constant de A_{ij}, i. e. la classe de a_{ij} modulo $\mathfrak{m}$, on obtient les relations

$$(8)\quad \begin{aligned} \overline{A}_{i,0} &= \overline{A}_{i-1,r}b_0 \\ \overline{A}_{i,1} &= \overline{A}_{i-1,0} + \overline{A}_{i-1,r}b_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overline{A}_{i,r} &= \overline{A}_{i-1,r-1} + \overline{A}_{i-1,r}b_r \end{aligned}$$

On vérifie sans difficultés que l'algèbre des matrices $(\overline{A}_{ij})$ à éléments dans k vérifiant ces égalités est la *représentation régulière* de la k-algèbre $k[T]/(f_{r+1}(1, T))$: si z est un élément de cette algèbre et si t est la classe de T, il suffit de calculer zt^i à partir de zt^{i-1}. La k-algèbre $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r)/\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}^r, \mathfrak{m}^{r+1})$ est isomorphe à l'algèbre des telles matrices. Il suffit, en effet, de remarquer que si la matrice (A_{ij}) satisfait aux relations (7), la matrice $(\overline{A}_{ij})$ satisfait à des relations analogues avec $h_i(X, Y) = 0$ et, d'autre part, que si (A_{ij}) est à éléments dans k, les relations (8) sont équivalentes aux relations (7).

IV. 3. *Exemples* (*Cas d'une courbe plane*).

Point simple.

$\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r)$ est isomorphe à A pour tout entier $r \geqq 1$.

Point double

1. *Tangentes distinctes*: $f_2(X, Y) = Y^2 - X^2$. L'anneau $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m})$ a deux idéaux maximaux de corps résiduels k. L'anneau quotient par $\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^2)$ est isomorphe à k^2.

2. *Tangentes confondues*: $f_2(X, Y) = Y^2$. L'anneau $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m})$ est local de corps résiduel k. L'anneau quotient par $\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^2)$ est l'algèbre $k[T]/(T^2)$ des nombres duaux sur k.

Point triple

L'anneau $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m})$ est local d'idéal maximal $\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^2)$ et de corps résiduel k.

1. *Tangentes distinctes*: $f_3(X, Y) = Y^3 - X^2Y$. L'anneau $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^2)$ a trois idéaux maximaux de corps résiduels k. L'anneau quotient par $\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}^2, \mathfrak{m}^3)$ est isomorphe à k^3.

2. *Une tangente double et une tangente simple*: $f_2(X, Y) = Y^3 - Y^2X$. L'anneau $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^2)$ a deux idéaux maximaux de corps résiduels k. L'anneau quotient par $\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}^2, \mathfrak{m}^3)$ est isomorphe à $k[T]/(T^3 - T^2)$. Il est le produit de l'algèbre des nombres duaux sur k, correspondant à la tangente double, par k, correspondant à la tangente simple.

3. *Une tangente triple*: $f_2(X, Y) = Y^3$. L'anneau $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^2)$ est local de corps résiduel k. L'anneau quotient par $\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}^2, \mathfrak{m}^3)$ est isomorphe à $k[T]/(T^3)$.

V. Remarques

V. 1. La proposition II. 3. pose le problème de la commutativité de l'anneau $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r)$. La proposition qui suit donne des conditions suffisantes.

Proposition. *Soient R un anneau commutatif, $\mathfrak{J}$ un idéal de R.*

L'homomorphisme naturel de l'anneau $\mathrm{End}_R(\mathfrak{J})$ *dans l'anneau* $\mathrm{End}_R(\mathfrak{J}^2)$ *a une image commutative. Son noyau est l'idéal des éléments u de* $\mathrm{End}_R(\mathfrak{J})$ *tels que* $u(\mathfrak{J}^2) = 0$. *Il est isomorphe en tant que R-module à* $\mathrm{Hom}_R(\mathfrak{J}, \mathfrak{J} \cap \mathrm{Ann}(\mathfrak{J}))$ *où* $\mathrm{Ann}(\mathfrak{J})$ *est l'annulateur de $\mathfrak{J}$ ou encore à* $\mathrm{Hom}_R(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2, \mathfrak{J})$.

Preuve. La commutativité de l'image résulte de ce que si u, v appartiennent à $\mathrm{End}_R(\mathfrak{J})$ et x, y à $\mathfrak{J}$, on a les égalités

$$(uov)(xy) = u(x)\,v(y) = u(y)\,v(x) = (vou)(xy).$$

On en déduit des conditions suffisantes de *commutativité* de moins en moins générales de $\mathrm{End}_R(\mathfrak{J})$:

C 1) $\mathrm{Hom}_R(\mathfrak{J}, \mathfrak{J} \cap \mathrm{Ann}(\mathfrak{J})) = (0)$

C 2) $\mathfrak{J} \cap \mathrm{Ann}(\mathfrak{J}) = (0)$

C 3) $\mathrm{Ann}(\mathfrak{J}) = (0)$

C 4) *la profondeur de $\mathfrak{J}$ est supérieure ou égale à* 1.

Il est facile de voir que *la condition* C i) ($i = 1, 2, 3, 4$) *n'est pas nécessaire*: il suffit, en effet, de prendre pour R un anneau local quasi-frobeniusien et pour $\mathfrak{J}$ son idéal maximal. Si R n'est pas un corps $\mathfrak{J} \cap \mathrm{Ann}(\mathfrak{J})$ est un espace vectoriel de dimension 1 sur le corps résiduel de R et la profondeur de $\mathfrak{J}$ est 0. Pourtant, comme R est l'enveloppe injective de I, les seuls endomorphismes de $\mathfrak{J}$ sont les homothéties et $\mathrm{End}_R(\mathfrak{J})$ est donc commutatif.

V. 2. La condition ii) de la proposition II. 5 m'a été signalée par *Daniel Ferrand* ainsi que des réciproques non utilisées ici dans le cas où R est *local noethérien* et où $\mathfrak{J}$ est son *idéal maximal*: *si l'homomorphisme naturel de R dans* $\mathrm{End}_R(\mathfrak{J})$ *est un isomorphisme, R est soit un anneau de valuation discrète soit un anneau de profondeur supérieure ou égale à* 2.

V. 3. Dans la preuve de la proposition III. 2, la forme particulière de l'élément $\bar{x} \cdot \bar{u}(\bar{y}) - \bar{y} \cdot \bar{u}(\bar{x})$ pourrait suggérer une amélioration de la condition $\varrho_2(A) \geqq 3$.

Un calcul facile montre que si $\bar{y} \neq \bar{x}$, tout élément de $\mathrm{Sym}^2_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ est de la forme $\bar{x} \cdot \bar{v}(\bar{y}) - \bar{y} \cdot \bar{v}(\bar{x})$ où $\bar{v}$ est un élément convenable de l'anneau $\mathrm{End}_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$. Comme on doit se limiter aux éléments $\bar{v}$ appartenant à la sous algèbre $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m})/\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^2)$, il semble naturel de se poser le problème suivant.

Problème. *Soient k un corps, V un k-espace vectoriel de dimension finie, S une sous algèbre contenant l'élément unité de* $\mathrm{End}_k(V)$.

Peut-on trouver un anneau local noethérien A d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel k tel que le k-espace vectoriel $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ soit isomorphe à V et que la k-algèbre $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m})/\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^2)$ *soit isomorphe à S?*

V. 4. L'assertion 3. de la proposition IV. 2. pourrait suggérer que si $i \geqq r$, $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^i)$ est la clôture intégrale $\bar{A}$ de A. Il n'en est rien. Si, en effet, $f(X, Y) = Y^2 - X^5$, on voit que l'élément y/x^2 appartient à $\bar{A}$; or, $(y/x^2) \cdot x = y/x$ n'appartient pas à $\mathfrak{m}$ et donc l'élément y/x^2 n'appartient pas à $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^i)$.

V. 5. L'assertion ii) de la proposition II. 5. montre que l'étude des anneaux $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^r)$ ne présente d'intérêt que pour les anneaux locaux de dimension 1 ou pour des anneaux de dimension supérieure à 1 assez pathologiques L'étude de quelques courbes de l'espace à trois dimensions ne nous a pas encore fourni d'indications précises:

C'est ainsi que si $A = k[[x, y, z]]$ où $x^2 = y^2 = 0$, on trouve que

$$\mathrm{End}_A(\mathfrak{m})/\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^2)$$

est isomorphe à k tandis que $\mathrm{End}_A(\mathfrak{m}^2)/\mathrm{Hom}_A(\mathfrak{m}^2, \mathfrak{m}^3)$ est isomorphe à $k[t]^2$ où $k[t]$ est l'algèbre des nombres duaux.

Bibliographie

[1] *D. Ferrand*, Résultats non publiés.

[2] *W. Krull*, Idealtheorie, Ergebnisse 1935.

[3] *J. P. Lafon*, Annales Inst. Fourier **11** (1961), 313—384.

[4] *M. Nagata*, Local rings, New York, London 1960.

[5] *J. P. Serre*, Algèbre locale, Multiplicités. Berlin-Heidelberg-New York 1965.

[6] *Zariski-Samuel*, Commutative Algebra, I et II, New York 1958.

Université de Toulouse 1, rue Jean Racine, 31, Toulouse, France

Eingegangen 7. Februar 1969

Direct decompositions of partially ordered sets with zero

By *Vítězslav Novák* in Brno, at present in Bonn[1]),
and *J. Schmidt* in Bonn, at present in Houston[2])

To Wolfgang Krull on his seventieth birthday

---

1. The category of (partially) ordered sets $(A, \leqq)$ with all isotonic (monotonic, order-preserving) mappings admits direct products. One, the standard model for the direct product of the ordered sets $(A_t, \leqq)$, $t \in T$, is the ordinary cartesian ("cardinal") product XA_t, ordered argumentwise:

$$a \leqq b \text{ iff } pr_t(a) \leqq pr_t(b), \text{ for all } t \in T, \tag{1}$$

the pr_t being the natural mappings, i. e., $pr_t(a) = a(t)$.

Given an arbitrary "coinitial" family of isotonic mappings

$$p_t\colon A \to A_t,$$

we may ask for the conditions for this family to be some model for the direct product, in the general category sense. The easy answer is obtained by comparison with the cartesian standard model:

Theorem 1. *The family of isotonic mappings $p_t\colon A \to A_t$ is a direct product of the ordered sets A_t if and only if the following conditions hold:*

I. *for each $a, b \in A$, if $p_t(a) \leqq p_t(b)$, for all $t \in T$, then $a \leqq b$ (isotonicity);*

II. *for any choice of elements $a_t \in A_t$, for all $t \in T$, there is an $a \in A$ such that $p_t(a) = a_t$, for all $t \in T$ (representability).*

In the terminology due to Bourbaki [4], one can restate condition I together with the isotonicity of mappings p_t (the converse of condition I): The order $\leqq$ of A is the initial structure with respect to the mappings p_t of abstract set A into the ordered sets $(A_t, \leqq)$. By anti-symmetry, the p_t then separate set A:

$$\text{if } p_t(a) = p_t(b), \text{ for all } t \in T, \text{ then } a = b. \tag{2}$$

By that reason, representability II may be strengthened to

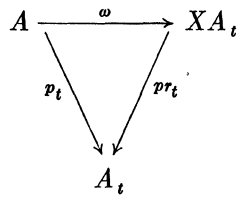
II*. *for any choice of elements $a_t \in A_t$, there is exactly one element $a \in A$ such that $p_t(a) = a_t$, for all $t \in T$ (unique representability).*

---

[1]) Exchange Scholar of the Deutscher Akademischer Austauschdienst.

[2]) Fulbright-Hayes Scholar.

We may say that in the commutative diagram



the mapping ω is bijective; by I, it is even an isomorphism. Hence, if I and II hold, the $p_t\colon A \to A_t$ constitute a direct product. Conversely, if the $p_t\colon A \to A_t$ constitute a direct product, then $\omega\colon A \to XA_t$ must be an isomorphism, hence I and II, holding for the natural mappings $pr_t\colon A_t \to XA_t$, must hold for the $p_t\colon A \to A_t$ also.

Let us observe that, for any subset $M \subset A$, for any element $a \in A$:

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{l} a = \sup_A M \text{ iff, for each } t \in T,\ p_t(a) = \sup_{A_t} p_t(M); \\ a = \inf_A M \text{ iff, for each } t \in T,\ p_t(a) = \inf_{A_t} p_t(M). \end{array}\right\}$$

This is an easy consequence of I, II, and the isotonicity of the p_t.

In the special cases of upper or lower semilattices, I becomes superfluous. Note that in a direct product, A is an upper (lower) semilattice if and only if all factors A_t are; by (3), the $p_t\colon A \to A_t$ then are upper (lower) semilattice homomorphisms. We now have the

Corollary. *The upper (lower) semilattice homomorphisms $p_t\colon A \to A_t$, between upper (lower) semilattices A and A_t, form a direct product if and only if unique representability* II* *holds.*

Actually, this is only a special case of an analoguous statement for general algebraic systems. Still, we can easily derive I from II*. For let $p_t(a) \leqq p_t(b)$, for all $t \in T$. In the case of upper semilattices, e. g., then $p_t(b) = p_t(a) \vee p_t(b) = p_t(a \vee b)$, whence $b = a \vee b$, i. e., $a \leqq b$, by II*.

2. In the sequel, we restrict considerations to the full subcategory of ordered sets with zero (least element). I. e., we still admit all isotonic mappings, whether they preserve zero or not. Evidently, this subcategory (like that of upper or lower semilattices) is again closed with respect to direct products: If the ordered sets A_t have zeros 0_t, then each direct product A has a zero, 0, which is, as a special case of (3) (take $M = \emptyset$!), determined by the equations

$$(4) \qquad p_t(0) = 0_t,$$

for all $t \in T$.

We are facing a situation similar, in many respects, to that in the category of modules: One can define a family of isotonic mappings

$$i_s\colon A_s \to A$$

by the "orthogonality relations"

$$0. \qquad p_t \circ i_s = \delta_{ts} \qquad (s, t \in T).$$

Here $\delta_{ss}\colon A_s \to A_s$ is the identical mapping of A_s, $\delta_{ts}\colon A_s \to A_t$, where $t \neq s$, is the zero mapping, i. e., the mapping with constant value 0_t. I. e., for each $a_s \in A_s$,

$$0_a. \qquad p_s i_s a_s = a_s,$$

$$0_b. \qquad p_t i_s a_s = 0_t \qquad (t \neq s).$$

Under these conditions I, II, and 0 (or 0_a and 0_b), we call

$$A_s \xrightarrow{i_s} A \xrightarrow{p_t} A_t$$

a *complete product diagram.* And we will call $p_t: A \to A_t$ a *right product diagram*, once conditions I and II hold; $i_s: A_s \to A$ as defined by 0 may then be called the *associated left product diagram.*

Clearly, the i_s are completely determined by the p_t. Even more than that: either of the two mappings i_s and p_s is completely determined by the other. For that purpose, note that 0_b can be restated equivalently by

0_c. $$i_s p_s a \leqq a,$$

for all $a \in A$. In fact, 0_c is an immediate consequence of 0 and I, 0_b an immediate consequence of II and 0_c. Weakening 0_a, we also have

0_d. $$p_s i_s a_s \geqq a_s,$$

for all $a_s \in A_s$. This together with 0_c — and the isotonicity of i_s and p_s — makes the pair (i_s, p_s) a *Galois connexion of mixed type* in the sense of Benado [2] and J. Schmidt [10], i. e., a Galois connexion in the sense of Ore [9] between the ordered sets A_s and the dual, A^*, of the ordered set A. Or, in the language of categories, if we consider p_s as a functor from category A into category A_s, i_s as a functor in the opposite direction, 0_c and 0_d make i_s the *adjoint functor of* p_s, p_s the *coadjoint functor of* i_s. Note that, due to anti-symmetry, i. e., since isomorphic objects are equal in our categories, adjoint and coadjoint are unique:

(5) $$i_s a_s = \min \{a \mid a_s \leqq p_s a\}, \quad p_s a = \max \{a_s \mid i_s a_s \leqq a\}.$$

(In [10], i_s was called the *lower final conjugate of* p_s, p_s the *upper initial conjugate of* i_s.) Actually, (5) is an equivalent for 0_c and 0_d (and the isotonicity, i. e., functor property, of both i_s and p_s). Let us mention the shortest possible equivalent (Benado [2], Schmidt [10]):

(6) $$i_s a_s \leqq a \text{ iff } a_s \leqq p_s a,$$

for each $a_s \in A_s$, each $a \in A$.

3. As for any Galois connexion of mixed type, $i_s \circ p_s$ is a *kernel operator*, i. e., the dual of a *closure operator*, in A, i. e., $i_s \circ p_s$ is isotonic, "intensive" (property 0_c), and idempotent. Hence, $i_s p_s A_s$ is a *kernel subset of* A, i. e., admits, for each $a \in A$, the maximum of all elements $x \leqq a$, $x \in i_s p_s A_s$; in fact, $i_s p_s a$ is that maximum. Dually, $p_s \circ i_s$ should be a closure operator in A_s, with the associated *closure subset* $p_s i_s A_s < A_s$. Actually, this is here trivial since $p_s i_s A_s = A_s$ by 0_a. Hence, by the general theory of Galois connexions, $i_s: A_s \to i_s p_s A$ is an isomorphism, in particular, $i_s A_s = i_s p_s A$; note that

(7) $$a \in i_s A_s \text{ iff } a = i_s p_s a.$$

The converse isomorphism is the restriction $p_s \mid i_s A_s$, in particular, $p_s A = p_s i_s A_s = A_s$.

As for any Galois connexion, $i_s: A_s \to A$ is (*completely*) *join-preserving*: for each $M_s < A_s$, $a_s \in A_s$,

(8) $$\text{if } a_s = \sup_{A_s} M_s, \text{ then } i_s a_s = \sup_A i_s M_s.$$

Taking $M = \emptyset$, we get

$$i_s 0_s = 0. \tag{9}$$

The dual statement, that $p_s: A \to A_s$ is (*completely*) *meet-preserving*, is already contained in (3).

As any kernel subset, $i_s A_s$ is (*completely*) *join-closed in* A: for any $M < i_s A_s$, $a \in A$,

$$\text{if } a = \sup_A M, \text{ then } a \in i_s A_s, \text{ whence } a = \sup_{i_s A_s} M. \tag{10}$$

(This can also be derived from (3) and (8)!) As for any kernel subset, also the converse of (10) is true: for any $M < i_s A_s$, $a \in A$,

$$\text{if } a = \sup_{i_s A_s} M, \text{ then } a = \sup_A M. \tag{11}$$

I. e., the inclusion of $i_s A_s$ into A is (completely) join-preserving. We will say that $i_s A_s$ is (*completely*) *join-faithful in* A. (This can also be derived from the isomorphism property of $p_s \mid i_s A_s$, and (8); in fact, it is essentially a restatement of (8).)

One also has

$$a \in i_s A_s \text{ iff } p_t a = 0_t, \text{ for each } t \neq s. \tag{12}$$

The conclusion from the left to the right is a trivial consequence of 0_b. For the converse, one proves $a = i_s p_s a$, using 0_c, the isotonicity of the mappings p_t ($t \neq s$), 0_a (for $a_s = p_s a$), and (2). As an immediate consequence of (12), $i_s A_s$ is a *lower end* ("semi-ideal", "M-closed set") of A, i. e.,

$$\text{if } a \in i_s A_s \text{ and } b \leqq a, \text{ then } b \in i_s A_s. \tag{13}$$

Consequently, one may replace the joins in (8), (10), and (11) by meets, provided that one assumes the set M_s, or M respectively, to be non-empty. Note that the lower ends $i_s A_s$ are *pairwise disjoint*, in the sense that

$$i_s A_s \cap i_t A_t = \{0\}, \text{ for all } s \neq t. \tag{14}$$

This follows from (9), (7), and (12).

Collecting the most important statements in this section, we obtain

Theorem 2. *Let* $A_s \xrightarrow{i_s} A \xrightarrow{p_t} A_t$ *be a complete product diagram. Then, for each* $s \in T$, $i_s: A_s \to i_s A_s = i_s p_s A$ *is an isomorphism, with the restriction* $p_s \mid i_s A_s$ *as its converse. Moreover,*

II^0. *the sets* $i_s A_s$ *are pairwise disjoint lower ends of* A;

III. *each* $i_s A_s$ *is a kernel subset of* A,

hence (*completely*) *join-closed and join-faithful in* A, *with* $i_s \circ p_s$ *as the associated kernel operator.*

Curiously enough, we have not used representability II in the above proof of condition II^0 [even (9), used in the proof of (14), can be derived from (13) and the isotonicity of i_s, the latter being derivable from 0 and I, without use of II]. However, in an important special case to be considered later (cf. **7**), condition II^0 (or what will then be left of it) will appear as an immediate consequence of condition II alone.

4. The product situation as originally characterized in terms of the mappings $p_t: A \to A_t$ alone (Theorem 1, conditions I and II), then by just adding the mappings $i_s: A_s \to A$ (definition 0), can be described in a more symmetric fashion:

Theorem 3. *The isotonic mappings* $i_s: A_s \to A$ *together with the isotonic mappings* $p_t: A \to A_t$ *form a complete product diagram if and only if the following equations hold*:

IV. *for any choice of elements* $a_s \in A_s$, $p_t\left(\bigvee_s i_s a_s\right) = a_t$, *for all* t;

V. *for any element* $a \in A$, $\bigvee_s i_s p_s a = a$.

Proof. V follows from 0_c, the isotonicity of p_s, 0_a, and I. V and II yield IV. Conversely, I is an immediate consequence of V and the isotonicity of i_t. II is a weakening of IV, 0_c a weakening of V. For the proof of 0_a, one derives first (9), $i_s 0_s = 0$, from IV and I. 0_a then follows from (9) and IV.

We are now ready to describe the product situation in terms of the mappings $i_s: A_s \to A$ alone:

Theorem 4. *The isotonic mappings* $i_s: A_s \to A$ *form a left product diagram if and only if the following conditions hold*:

VI. *for any choice of elements* $a_s \in A_s$, $\bigvee_s i_s a_s$ *exists* (*completeness*);

VII. *for any element* $a \in A$, $a = \bigvee_s i_s a_s$, *for suitable elements* $a_s \in A_s$ (*representability*);

VIII. *for any choice of elements* $a_s, b_s \in A_s$, *if* $\bigvee_s i_s a_s \leqq \bigvee_s i_s b_s$, *then* $a_t \leqq b_t$, *for each* t (*isotonicity*).

Note that VII and VIII imply

VII*. *for any element* $a \in A$, $a = \bigvee_s i_s a_s$, *for uniquely determined elements* $a_s \in A_s$ (*unique representability*).

Proof of Theorem 4. The existence condition VI is a part of equation IV, VII is a weakening of V, and VIII follows from IV and the isotonicity of the mapping p_t. Conversely, if VI, VII, and VIII hold, define $p_s a$ to be the component a_s in the unique representation VII*. Then V holds by definition, moreover IV holds, as a consequence of VI. The isotonicity of p_s follows from V and VIII.

Note that the isotonicity condition VIII may be replaced, for convenience, by

VIII′. *for any element* $a_t \in A_t$, *for any choice of elements* $b_s \in A_s$, *if* $i_t a_t \leqq \bigvee_s i_s b_s$, *then* $a_t \leqq b_t$.

In fact, VIII is a trivial consequence of VIII′. Conversely, if the hypothesis of VIII′ holds, one defines $a_s := 0_s$, for all $s \neq t$. Assuming VI, VII, and VIII, we then have $i_s a_s = 0$ for all $s \neq t$, hence

$$\bigvee_s i_s a_s = i_t a_t \leqq \bigvee_s i_s b_s,$$

whence $a_t \leqq b_t$ by VIII.

In the special case of upper semilattices, again the isotonicity condition, VIII, becomes superfluous. Note that by Theorem 2, if A is an upper semilattice, then so is each $i_s A_s$, the latter being join-closed in, in particular an upper subsemilattice of, A. Moreover, $i_s: A_s \to A$ must be an upper semilattice homomorphism. We thus get an analogue of the Corollary of Theorem 1:

Corollary. *The upper semilattice homomorphisms* $i_s: A_s \to A$, *between upper semilattices* A_s *and* A, *form a left product diagram if and only if conditions* VI *and* VII* *hold.*

Proof. In fact, VIII follows from VII* (even without use of VI). For let $\bigvee_s i_s a_s \leqq \bigvee_s i_s b_s$, where $a_s, b_s \in A_s$. Then

$$\bigvee_s i_s b_s = \bigvee_s i_s a_s \vee \bigvee_s i_s b_s = \bigvee_s (i_s a_s \vee i_s b_s) = \bigvee_s i_s (a_s \vee b_s),$$

whence $b_s = a_s \vee b_s$, i. e., $a_s \leqq b_s$, by VII*.

5. Since in a left product diagram, the mappings $i_s : A_s \to A$ are isomorphisms onto their images, we may pass to the latter, certain subsets of A. In other words, following the example given by Kaplansky [6] for abelian groups, we may call the left product diagram $i_s : A_s \to A$ an *internal left product diagram* provided that $A_s < A$, and i_s is the *inclusion mapping*,

$$i_s = id_{A_s},$$

for each s. We may then call the sequence of subsets A_s a *direct decomposition of ordered set* (*with zero*) A. For the subsets A_s to constitute a direct decomposition, the conditions VI, VII, and VIII, with "i_s" omitted, are necessary and sufficient; note that VII implies

$$0 \in A_s. \tag{15}$$

An arbitrary (*external*) *left product diagram* $i_s : A_s \to A$ is then characterized by the conditions that the $i_s : A_s \to i_s A_s$ are isomorphisms and the subsets $i_s A_s$ form a direct decomposition of A.

Among the necessary and sufficient conditions as listed so far (Theorems 1, 3, 4), no individual property of the single subsets $i_s A_s$ (A_s in the internal case) has occurred, with the exception, we may say, of the last Corollary[3]). By that Corollary, subsets A_s form a direct decomposition of upper semilattice A if and only if VI and VII* hold and if, in addition, each A_s is a subsemilattice of A.

This, is, for the special case of upper semilattices, a stronger form of the following general

Theorem 5. *The subsets A_s form a direct decomposition of ordered set A if and only if conditions* III, VI, *and* VII* (*with "i_s" omitted*) *hold.*

Proof. The necessity of III has been stated in Theorem 2. For sufficiency, we practically prove IV, taking p_s to be the kernel operator associated with kernel subset A_s. Namely, we prove

$$\text{if } a = \bigvee_s a_s, \text{ where } a_s \in A_s, \text{ then } p_s a = a_s. \tag{16}$$

In other words, p_s associates, with each a, its s-th component in the unique representation VII*. In fact, from $a_s \leqq a$, $a_s \in A_s$, we get $a_s \leqq p_s a \leqq a$, whence $a = \bigvee_s p_s a$, whence $a_s = p_s a$ by VII*. VIII is an immediate consequence of (16) and the isotonicity of kernel operator p_s (cf. the proof of Theorem 4).

As became apparent in this proof (and might have been observed earlier), the right product diagram associated with a direct decomposition consists of the associated kernel operators.

For some purposes, also the following list of necessary and sufficient conditions can be useful:

Theorem 6. *The subsets A_s form a direct decomposition of ordered set A if and only if the following conditions hold*:

---

[3]) Note that condition IV is a property of each individual p_t.

VI. *as before: for any choice of elements* $a_s \in A_s$, $\bigvee_s a_s$ *exists (completeness)*;

VII^0. *for any element* $a \in A$, $a \leqq \bigvee_s b_s$, *for suitable elements* $b_s \in A_s$ *(covering condition)*;

II^0. *as before: the subsets* A_s *are pairwise disjoint lower ends of* A,

D. *for any element* $a \in A$, *any choice of elements* $b_s \in A_s$ *such that* $a \leqq \bigvee_s b_s$, *there are elements* $a_s \leqq b_s$ *such that* $a = \bigvee_s a_s$ *(distributivity)*.

Proof. The necessity of II^0 has been stated in Theorem 2. Covering condition VII^0 is a weakening of representability VII. D follows from VII and VIII.

Conversely, representability VII is an immediate consequence of covering condition VII^0 and distributivity D. For the proof of isotonicity VIII′, let $a_t \leqq \bigvee_s b_s$, $a_t \in A_t$, $b_s \in A_s$. By D, $a_t = \bigvee_s a_s^*$, where $a_s^* \leqq b_s$. Since also $a_s^* \leqq a_t$, $a_s^* \in A_s \cap A_t$ by II^0, whence $a_s^* = 0$ for all $s \neq t$. Therefore, $a_t = a_t^* \leqq b_t$, completing the proof.

6. An important special case: Assume that A, or what amounts to the same, that all decomposition factors A_s are bounded, i. e., have also greatest (one) elements e and e_s respectively. Since the factors A_s have to be lower ends, they will be completely determined as the principal lower ends (principal ideals) generated by the elements e_s,

$$A_s = (e_s] = \{x \mid x \leqq e_s\}. \tag{17}$$

Therefore, we can replace the subsets $A_s < A$ by the elements $e_s \in A$. And we will say that the *elements* e_s form a *direct decomposition of bounded ordered set* A once the associated principal ideals $(e_s]$ do.

If this is the case, by virtue of III, each $(e_s]$ is a kernel subset of A; we may say that each e_s is a *kernel element* of A. The associated kernel operator $p_s: A \to (e_s]$ then, as a special case of (5), has the explicit meaning

$$p_s a = a \wedge e_s, \tag{18}$$

for each $a \in A$.

We now have the following special of Theorem 1:

Theorem 1$_e$. *The elements* e_s *form a direct decomposition of bounded ordered set* A *if and only if the following conditions hold:*

I$_e$. *for each* $a, b \in A$, *if* $e_s \wedge a \leqq e_s \wedge b$, *for all* s, *then* $a \leqq b$ *(isotonicity)*;

II$_e$. *for any choice of elements* $a_s \leqq e_s$, *there is an* $a \in A$ *such that* $a \wedge e_s = a_s$, *for all* s *(representability)*;

III$_e$. *for each* $a \in A$, $a \wedge e_s$ *exists, for all* s *(completeness)*.

Here, completeness condition III$_e$, trivial in lower semilattices, is nothing but condition III for the special case $A_s = (e_s]$. Note that III$_e$ is by no means superfluous in general. First, it cannot be derived from I$_e$ and II$_e$; moreover, it is only III$_e$ that enables us to talk about the isotonic mappings $a \to a \wedge e_s$ from the whole of A onto $(e_s]$.

On the other hand, the "orthogonality relations" 0 linking right and left product diagrams are actually trivial here. For 0_a states that $a_s \wedge e_s = a_s$, for each $a_s \leqq e_s$, and 0_c, the equivalent of 0_b under the above conditions, states that $a \wedge e_s \leqq a$, for each $a \in A$.

Note that, by virtue of III$_e$, isotonicity I$_e$ can be conveniently replaced by

I′$_e$. *for each* $a, b \in A$, *if* $a \wedge e_s \leqq b$, *for all* s, *then* $a \leqq b$.

And representability II$_e$ can be strengthened:

II$_e^*$. *for any choice of elements* $a_s \leqq e_s$, $a \wedge e_s = a_s$, *for a uniquely determined element* $a \in A$ (*unique representability*).

By the Corollary of Theorem 1, unique representability II$_e^*$ suffices in a bounded lower semilattice, due to the fact that the mappings $a \to a \wedge e_s$ are lower semilattice homomorphisms. For upper semilattices, one would have to add III$_e$ and an obvious distributivity condition for those mappings to become upper semilattice homomorphisms.

We also have the following special case of Theorem 4:

Theorem 4$_e$. *The elements* e_s *form a direct decomposition of bounded ordered set* A *if and only if the following conditions hold*:

VIII$_e$. *for any choice of elements* a_s, $b_s \leqq e_s$, *if* $\bigvee_s a_s \leqq \bigvee_s b_s$, *then* $a_s \leqq b_s$, *for all* s (*isotonicity*);

VII$_e$. *for each* $a \in A$, $\bigvee_s a_s = a$, *for suitable elements* $a_s \leqq e_s$ (*representability*);

VI$_e$. *for any choice of elements* $a_s \leqq e_s$, $\bigvee_s a_s$ *exists* (*completeness*).

The analogy between Theorems 1$_e$ and 2$_e$ is obvious. Again, we can modify isotonicity, VIII$_e$:

VIII$'_e$. *for any element* $a_t \leqq e_t$, *any choice of elements* $b_s \leqq e_s$, *if* $a_t \leqq \bigvee_s b_s$, *then* $a_t \leqq b_t$.

Again, we can strengthen representability, VII$_e$:

VII$_e^*$. *for each* $a \in A$, $\bigvee_s a_s = a$, *for uniquely determined elements* $a_s \leqq e_s$ (*unique representability*).

By the Corollary of Theorem 4, VII$_e^*$ and VI$_e$ are sufficient in an upper semilattice, due to the fact that each principal ideal $(e_s]$ is a subsemilettice. Hence in a complete lattice, VII$_e^*$ alone suffices, as did II$_e^*$ above.

Let us add now the special case of Theorem 3:

Theorem 3$_e$. *The elements* e_s *form a direct decomposition of bounded ordered set* A *if and only if the following equations hold*:

IV$_e$. *for any choice of elements* $a_s \leqq e_s$, $e_t \wedge \bigvee_s a_s = a_t$, *for all* t;

V$_e$. *for any element* $a \in A$, $\bigvee (a \wedge e_s) = a$.

Note that completeness condition III$_e$, which was indispensable in Theorem 1$_e$, is implicitly contained in equation V$_e$, as is VI$_e$ in IV$_e$ (as was VI in IV). Actually, also representability VII$_e$ (II$_e$) and isotonicity I$_e$ (VIII$_e$) are trivial consequences of equation V$_e$ (IV$_e$). Hence, equation V$_e$ covers all conditions with odd numbers, i. e., those concerning elements of A. "Dually", equation IV$_e$ covers all conditions with even numbers, i. e., those concerning families of elements $a_s \leqq e_s$. By that remark, Theorem 3$_e$ is a trivial consequence of Theorem 4$_e$ as well as of 1$_e$.

Conversely, equation V$_e$ (IV$_e$) is implied by completeness III$_e$ (VI$_e$) and either isotonicity I$_e$ (VIII$_e$) or representability VII$_e$ (II$_e$); the proofs are left to the reader. Since, in addition, completeness VI$_e$ (III$_e$) is a trivial consequence of equation V$_e$ (IV$_e$) together with representability II$_e$ (VII$_e$), Theorems 1$_e$ and 4$_e$ are also consequences of Theorem 3$_e$.

Note that Theorems 1$_e$ and 4$_e$ are "duals" of each other, whereas Theorem 3$_e$ is "self-dual".

As a special case of Theorem 5, we now have

Theorem 5_e. *The elements e_s form a direct decomposition of bounded ordered set A if and only if both completeness conditions* III_e *and* VI_e, *moreover unique representability* VII_e^* *hold.*

As stated above, III_e becomes superfluous in upper and — trivially — in lower semilattices. Again in the complete case, VII_e^* suffices.

Replacing VII_e^* by II_e^*, we obtain the "dual" Theorem, which, having no convenient counterpart in the previous sections since II* involved the mappings p_t, is true here, the proof being left to the reader. Recall that in a lower semilattice, the more in a complete lattice, II_e^* was sufficient.

7. We are passing to the special case of Theorem 6:

Theorem 6_e. *The elements e_s form a direct decomposition of bounded ordered set A if and only if the following conditions hold*:

VI_e. (*completeness*) *as above*;

VII_e^0. $\bigvee_s e_s = e$ (*covering condition*);

II_e^0. $e_s \wedge e_t = 0$, *for all* $s \neq t$ (*disjointness*);

D_e. *for any element* $a \in A$, *any choice of elements* $b_s \geqq e_s$, *if* $a \leqq \bigvee_s b_s$, *then* $a = \bigvee_s a_s$, *for suitable elements* $a_s \leqq b_s$ (*distributivity*).

Since $A_s = (e_s]$ is a lower end anyway, nothing is left of the former condition II^0 in the bounded case but disjointness II_e^0. Note that the latter can now easily be derived from representability II_e, as could, dually, covering condition VII_e^0 (VII^0) from representability VII_e (VII); note that VII_e is exactly covering condition VII_e^0 in the bounded case. One may call the family (e_s) a *direct decomposition of element e.* More generally, this notion applies to any element e (not necessarily the unit) of any ordered set with zero, A. Observe, however, that the joins occurring in our considerations, in particular in Theorem 6_e, should then be taken in $B = (e]$, not in the whole of A; for in general a principal ideal $(e]$, though completely join-closed, is not joinfaithful in A. But this is true if e is a kernel element of A, i. e., if all meets $a \wedge e$ ($a \in A$) exist. In this case, the conditions of Theorem 6_e — all joins conveniently taken in A — are necessary and sufficient for the elements e_s to form a direct decomposition of element e, i. e., of ordered set $(e] < A$. One should remark that this notion of a direct decomposition of an element is considerably stronger than others to be found in a fairly extensive literature (cf., e. g., P. Crawley [5]). Those weaker notions reproduce within lattices the classical decomposition theory for ring ideals etc. as due to Emmy Noether and Wolfgang Krull, thus leading to a decomposition theory *within* (P. Crawley: *for*), rather than our decomposition theory *of*, lattices.

There is a nice interpretation of "distributivity" condition D_e — kind of a substitute for our former isotonicity $VIII'_e$ or $VIII_e$ — in a complete lattice A. Let us call a family of elements $b_s \in A$ *join-distributive* provided that, for each $a \leqq \bigvee_s b_s$, elements $a_s \leqq b_s$ exist such that $a = \bigvee_s a_s$. One can show that then $a = \bigvee_s (a \wedge b_s)$, for each $a \leqq \bigvee_s b_s$. One can show even more, namely that the distributive law

$$a \wedge \bigvee_s b_s = \bigvee_s (a \wedge b_s) \tag{19}$$

holds, for each $a \in A$. Or, in a terminology due to MacNeille [7]; the elements b_s have a *distributive join.* This, e. g., is the case if there are only finitely many elements b_s (or rather indices s), each of them, with the possible exeption of one, being *neutral* in the sense of G. Birkhoff [3], i. e., generating, together with any two elements $x, y \in A$, a distributive sublattice of A. Infinitely many neutral elements b_s have a distributive join once A is *meet- (upper) continuous* (cf. Maeda [8], Hilfssatz 3. 6, p. 29), in particular, if A is *algebraic*, i. e., the lattice of all subalgebras of an algebra with finitary operations, or equivalently, *compactly generated* (cf. Birkhoff [3] p. 187).

Axiom D_e now states (in the complete case) that not only the family (e_s), but each minorant $(b_s) \leqq (e_s) - b_s \leqq e_s$, for all s — is distributive; we may say that the family (e_s) is *hereditarily distributive.*

Note that the simple distributivity of (e_s), i. e.,

V_e^0. *for any element* $a \in A$, $a \wedge \bigvee_s e_s = \bigvee_s (a \wedge e_s)$,

is an immediate consequence of equation V_e. Actually, this equation (which, in a lower semilattice, is equivalent with either isotonicity I_e or representability VII_e) can be split into distributivity V_e^0 and covering condition VII_e^0. There is a dual splitting of equation IV_e (which, in a complete lattice, is equivalent with either isotonicity $VIII_e$ or representability II_e). Namely, IV_e is immediately equivalent with disjointness II_e^0 and the distributivity condition

IV_e^0. *for any choice of elements* $a_s \leqq e_s$, $e_t \wedge \bigvee_s a_s = \bigvee_s (e_t \wedge a_s)$, *for all* t.

Hence, as a Corollary of Theorem 3_e, the law of hereditary distributivity, D_e (involving both elements $a \in A$ and choices of elements $b_s \leqq e_s$), can be replaced in Theorem 6_e by the pair of "dual" distributive laws IV_e^0 and V_e^0. (Note that D alone implies the latter, but not conversely.) As has been stated above, V_e^0 holds if the family (e_s) is finite and each e_s neutral; it is easily seen that then IV_e^0 also follows. On the other hand, each element in the *center* of a complete lattice, i. e., occurring in some direct decomposition, must be neutral (cf. Birkhoff [3]). Thus for finitely many elements e_s of a complete lattice A, condition D_e of Theorem 6_e may be replaced by the postulate that each e_s has to be neutral (cf. Birkhoff [3], Lemma 4, p. 68).

Note that in a direct decomposition, IV_e^0 holds in a much stronger form. Observe that, for any direct decomposition (A_s) of any ordered set with zero, A, $p_t : A \to A$ is completely join-preserving since by (3), $p_t : A \to A_t$ is, and so is $id_{A_t} : A_t \to A$ by (11). I. e., for any family of elements $a_k \in A$ $(k \in K)$, for any element $a \in A$,

$$\text{if } a = \bigvee_k a_k, \text{ then } p_t a = \bigvee_k p_t a_k, \tag{20}$$

where both joins are taken in A. Passing to the special case of a bounded ordered set A and using (8), we get:

$$\text{if } a = \bigvee_k a_k, \text{ then } e_t \wedge a = \bigvee_k (e_t \wedge a_k). \tag{21}$$

In the complete case, this is just the infinite distributive law

$$e_t \wedge \bigvee_k a_k = \bigvee_k (e_t \wedge a_k), \tag{22}$$

holding for any element e_t in the center. But if e_t is in the center, it is in a direct decomposition into two components, by an obvious associative law for direct decompositions (direct products in most general categories). Hence, belonging to the center, can be

described in terms of the finitary lattice operations (cf. Birkhoff [3]), but implies the infinitary law (22).

In summary, we may extend Birkhoff's mentioned result for finite decompositions to the infinite case as follows:

Theorem 7_e. *The elements e_s form a direct decomposition of complete lattice A if and only if disjointness II_e^0 and representability VII_e hold and if, in addition, each e_s is in the center. If the family (e_s) is finite or if A is algebraic, representability VII_e may be weakened to covering condition VII_e^0.*

For if e_t is in the center, the distributive law IV_e^0 holds, as a special case of (22). But IV_e^0 together with disjointness II_e^0 yields equation IV_e. Representability VII_e being equivalent with equation V_e, the elements e_s form a direct decomposition according to Theorem 3_e. If the family (e_s) is finite or if A is algebraic, the distributive law V_e^0 holds since the elements e_s are neutral. But V_e^0 together with covering condition VII_e^0 yields equation V_e, completing the proof.

8. Disjointness as stated in II^0 can be strengthened considerably, as a consequence of hereditary distributivity D and unique representability VII*:

Theorem 8. *Let (A_t) be a direct decomposition of ordered set with zero A, let $a_t \in A_t$, for each $t \in T$. Then, for each subset $S < T$, the "partial" join*

$$a_S := \bigvee_{s \in S} a_s \tag{23}$$

exists. Moreover, if S is the intersection of subsets $S_k < T$ ($k \in K$, K an arbitrary non-empty set), then

$$a_S = \bigwedge_{k \in K} a_{S_k}. \tag{24}$$

Proof. For the existence of a_S, it is sufficient to add new components 0, for each $t \in T - S$ (as has been done before in the special case $S = \{s\}$). The existence of a_S thus results from completeness VI. If $S = \bigcap S_k$, trivially $a_S \leqq a_{S_k}$, for each k. Let now $c \leqq a_{S_k}$, for each k. By D, for each $k \in K$,

$$c = \bigvee_{s \in S_k} c_{sk},$$

for suitable elements $c_{sk} \leqq a_s$, $s \in S_k$. By VII*, $c_{sk} = c_{sl}$, for any $k, l \in K$ and $s \in S_k \cap S_l$, and $c_{sk} = 0$ for any $s \in S_k - S_l$. Thus, actually

$$c = \bigvee_{s \in S} c_s,$$

where $c_s \leqq a_s$, whence $c \leqq a_S$, completing the proof.

As a corollary, we have

$$a_t \wedge \bigvee_{s \neq t} a_s = 0, \tag{25}$$

for each $t \in T$. In a complete lattice A, a family of elements with that property [which is actually much weaker than (24)] is usually called *independent*, a notion that goes back to J. v. Neumanns lectures on continuous geometries (for the most extensive study of the latter, cf. Maeda [8]). If a is the join of the independent family (a_t), a is also called the *direct join* (cf., e. g., P. Crawley [5]) of the family (a_t), and the latter a *direct decomposition* of a, no distributivity property like D being required.

Returning to direct decompositions in the stronger sense of our paper, we conclude with

Theorem 9_e. *The elements e_s form a direct decomposition of complete modular lattice A if and only if they are independent, distributive* (V_e^0), *and cover the unit* (VII_e^0).

For as remarked above, the last two conditions imply, and are implied by, equality V_e. For the proof of equality IV_e, let $a_s \leqq e_s$, for all s. Then, by modularity and independence,

$$e_t \wedge \bigvee_s a_s = e_t \wedge \Big(a_t \vee \bigvee_{s \neq t} a_s\Big) = a_t \vee \Big(e_t \wedge \bigvee_{s \neq t} a_s\Big) = a_t \vee 0 = a_t,$$

completing the proof.

Note that independence as used in this proof is essential; disjointness II_e^0 would not be enough. For look at the modular, non-distributive 5-lattice, the three non-extremal elements of which are pairwise disjoint and distributive, but not independent, hence not hereditarily distributive either. Note that any two of these three elements, being disjoint, are independent, but no longer distributive, thus illustrating the lack of hereditariness of the full triple's distributivity.

This example can be generalized. Note that this 5-lattice is the lattice of subvectorspaces of the 2-dimensional vectorspace E over the prime field $\boldsymbol{Z}_2$. Considering an arbitrary module E over an arbitrary ring Λ, it is well-known (cf. Kaplansky [6]) that the representations of E as a direct sum of Λ-modules are internally characterized as the families of submodules E_s, independent in the modular lattice $A = S(E)$ of submodules, with module E as their lattice-join. In general, such a direct sum splitting of the module E will not be distributive, hence not a direct product splitting of the lattice $S(E)$. But if, e. g., Λ is a principal domain and E a torsion-module on Λ, the splitting into primary components is distributive, hence a direct decomposition in the sense of this paper (for detailed information about the interrelations between splittings of an algebraic system E and of its associated subalgebra lattice $S(E)$ or congruence lattice $C(E)$, cf. the thesis of M. Armbrust [1]).

(To be continued.)

References

[1] *M. Armbrust*, Die fastdirekten Zerlegungen einer allgemeinen Algebra. I—II, Coll. Math. **14** (1966), 39—62 and **17** (1967), 1—22.

[2] *M. Benado*, La notion de normalité et les theorèmes de décomposition de l'algèbre, Acad. Repub. Pop. Române, Stud. Cerc. Mat. **1** (1951), 282—317.

[3] *G. Birkhoff*, Lattice Theory, Third edition, Providence 1967.

[4] *N. Bourbaki*, Théorie des ensembles, Chap. IV, Structures, Second edition, Paris 1966.

[5] *P. Crawley*, Direct decompositions with finite dimensional factors, Pacific J. Math. **12** (1962), 457—468.

[6] *I. Kaplansky*, Infinite abelian groups, Ann Arbor 1954.

[7] *H. M. MacNeille*, Partially ordered sets, Trans. Amer. Math. Soc. **42** (1937), 416—460.

[8] *F. Maeda*, Kontinuierliche Geometrien, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1958.

[9] *O. Ore*, Galois connexions, Trans. Amer. Math. Soc. **55** (1944), 493—513.

[10] *J. Schmidt*, Beiträge zur Filtertheorie. II, Math. Nachr. **10** (1953), 197—232.

[11] *G. Szasz*, Introduction to lattice theory, Third edition, Budapest-New York-London 1963.

Prof. Dr. Jürgen Schmidt, Mathematisches Institut der Universität Bonn, Beringstraße 1

Dr. Vítězslav Novák, Mathematisches Institut der Universität Brno, Janáčkovo nám. 2a, ČSSR

Eingegangen 7. Februar 1969

Lokal endlich-auflösbare Gruppen mit endlichen Sylowuntergruppen

Von *Reinhold Baer*[1]) in Frankfurt

Herrn Professor Dr. Wolfgang Krull zum 70. Geburtstag

Die Klasse der lokal endlichen Gruppen ist besonders dadurch interessant, daß es häufig möglich ist, Sätze aus der Theorie der endlichen Gruppen durch „Grenzübergang" auch für lokal endliche Gruppen zu beweisen, und daß es für diesen „Grenzübergang" oft nötig ist, die Sätze über endliche Gruppen zu verschärfen. Insbesondere wird man hoffen, Resultate aus der Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen auf diese Weise auch auf die lokal endlich-auflösbaren Gruppen zu übertragen. Dem ist nun freilich nicht so: es entstehen neue Probleme; es zeigen sich neue Phänomene — sogar schon in der engeren Klasse, die wir in dieser Arbeit ein wenig untersuchen wollen.

Bekanntlich sind alle Sylowgruppen einer lokal endlichen Gruppe mit endlichen Sylowuntergruppen konjugiert; und eine jede lokal endlich-auflösbare, abzählbare Gruppe läßt sich als Produkt paarweise vertauschbarer Sylowuntergruppen darstellen. Diese beiden Eigenschaften legen es nahe, die folgende Gruppenklasse zu untersuchen, die wir der Kürze halber mit Σ bezeichnen werden: eine Gruppe ist eine Σ-Gruppe, wenn ihre endlich erzeugbaren Untergruppen endlich und auflösbar sind, und wenn außerdem ihre Sylowuntergruppen sämtlich endlich sind. Eine Σ-Gruppe läßt sich dann und nur dann als Produkt paarweise vertauschbarer Sylowuntergruppen darstellen, wenn sie abzählbar ist; aber es gibt überabzählbar unendliche Σ-Gruppen, wie sich aus der Folgerung 5. 4 [oder auch Folgerung 6. 7] ergibt. Um diese Phänomene genauer zu analysieren, nennen wir eine Untergruppe B einer Σ-Gruppe eine Basisuntergruppe von G, wenn B erstens abzählbar ist und zweitens für jede Primzahl p eine p-Sylowuntergruppe von G enthält. Alle Σ-Gruppen enthalten Basisuntergruppen und alle Basisuntergruppen einer Σ-Gruppe sind isomorph [Satz 3. 6]; und eine abzählbare Σ-Gruppe ist dann und nur dann Basisuntergruppe einer überabzählbaren Σ-Gruppe, wenn sie einer echten Untergruppe isomorph ist [Satz 4. 2]. Daß diese Klasse von Σ-Gruppen nicht leer ist, haben wir schon eingangs erwähnt; andererseits ist jede im Sinne von Plotkin radikale Σ-Gruppe abzählbar und keiner echten Untergruppe isomorph [Folgerung 4. 6]. Weiter ist jede Σ-Gruppe Basisuntergruppe einer Σ-Gruppe, die keiner echten Untergruppe isomorph ist [Folgerung 6. 6].

[1]) Der Verfasser dankt dem Mathematischen Forschungsinstitut der Zürcher ETH und besonders seinem Leiter, Herrn Professor Dr. B. Eckmann, für die während der Niederschrift dieser Arbeit gewährte großzügige Gastfreundschaft.

Schließlich sei noch auf Satz 7. 9 hingewiesen: dann und nur dann sind die sämtlichen Sylowsysteme der Σ-Gruppe G konjugiert, wenn G nur abzählbar viele Sylowsysteme besitzt; Σ-Gruppen G mit diesen Eigenschaften sind abzählbar und keiner echten Untergruppe isomorph.

Bezeichnungen

$o(x)$ = Ordnung des Gruppenelements x

$o(G)$ = Ordnung der Gruppe G

$[G: U]$ = Index der Untergruppe U in der Gruppe G

$\mathfrak{C}G$ = Charakteristik von G = Menge der Primzahlen, die Ordnungen von Elementen aus G sind

$x \circ y = x^{-1}x^y = x^{-1}y^{-1}xy$

G' = Kommutatorgruppe von G

$G^{(0)} = G$, $G^{(i+1)} = [G^{(i)}]'$

$U_G = \bigcap_{g \in G} U^g$ = Produkt aller in der Untergruppe U enthaltenen Normalteiler von G

$\mathfrak{C}_X Y$ = Zentralisator von Y in X

$\mathfrak{N}_X Y$ = Normalisator von Y in X

$\mathfrak{F}G$ = Hirsch-Plotkinsches Radikal von G = Produkt aller lokal nilpotenten Normalteiler von G

$X < Y$: =: X ist eine von Y verschiedene Untergruppe von Y

Faktor der Gruppe G: =: epimorphes Bild einer Untergruppe von G

p-Element: =: Gruppenelement, dessen Ordnung eine Potenz der Primzahl p ist

p-Gruppe: =: Gruppe, deren sämtliche Elemente p-Elemente sind

p-Sylowuntergruppe: =: maximale p-Untergruppe

p-Komponente der Gruppe G: =: Menge der p-Elemente aus G

1. In diesem Abschnitt werden wir einige nützliche und mehr oder weniger wohlbekannte Resultate aus der Sylowtheorie der lokal endlichen Gruppen zusammenstellen.

Lemma 1. 1. *Ist p eine Primzahl und G eine lokal endliche Gruppe, von deren p-Sylowuntergruppen wenigstens eine endlich ist, so gilt:*

(a) *Alle p-Sylowuntergruppen von G sind in G konjugiert.*

(b) *Alle p-Faktoren von G sind endlich.*

(c) *Die Untergruppe U von G ist dann und nur dann eine p-Sylowuntergruppe von G, wenn es eine zu U isomorphe p-Sylowuntergruppe von G gibt.*

(d) *Ist N ein Normalteiler von G und S eine p-Sylowuntergruppe von G, so ist NS/N eine p-Sylowuntergruppe von G/N und $S \cap N$ ist eine p-Sylowuntergruppe von N.*

(e) *Ist X ein Normalteiler der Untergruppe Y von G mit p-Faktorgruppe Y/X, so ist $Y = SX$ für jede p-Sylowuntergruppe S von Y.*

(f) *Ist N ein Normalteiler von G und U eine Untergruppe von G mit $N \leqq U$ und p-Faktorgruppe U/N, so ist U/N dann und nur dann ein Normalteiler von G/N, wenn $G = N\mathfrak{N}_G S$ für jede p-Sylowuntergruppe S von U gilt.*

Beweis. Für den einfachen Beweis von (a) vgl. Baer [p. 37, Lemma A. 1].

Ist U eine Untergruppe von G, ist S eine p-Sylowuntergruppe von G mit $U \cong S$, so ist U eine p-Untergruppe von G. Also gibt es eine p-Sylowuntergruppe V von G mit $U \leqq V$. Wegen (a) sind S und V konjugiert, so daß $U \cong S \cong V$ gilt. Nach Voraussetzung

sind wegen (a) alle p-Sylowuntergruppen von G endlich, so daß U, S, V endliche Gruppen gleicher Ordnung sind. Aus $U \leqq V$ folgt also $U = V$; und hieraus folgt (c).

Aus (a) folgt, daß alle p-Sylowuntergruppen von G endliche Gruppen gleicher p-Potenzordnung q sind. Da jede p-Untergruppe von G in einer p-Sylowuntergruppe von G enthalten ist, ergibt sich:

(b′) Jede p-Untergruppe von G ist endlich mit q teilender Ordnung.

Ist Y ein Normalteiler der Untergruppe X von G, ist X/Y eine endlich erzeugbare p-Gruppe, so gibt es eine endlich erzeugbare Untergruppe D mit $X = DY$. Aus der lokalen Endlichkeit von G folgt die Endlichkeit von D und

$$D/(D \cap Y) \cong DY/Y = X/Y$$

ist eine p-Gruppe. Anwendung der Sylowschen Sätze auf die endliche Gruppe D zeigt $D = S(D \cap Y)$ für jede p-Sylowuntergruppe S von D. Dann wird

$$X = DY = SY;$$

und wegen $X/Y \cong S/(S \cap Y)$ folgt aus (b′), daß X/Y endlich mit q teilender Ordnung ist.

Ist T eine S enthaltende p-Sylowuntergruppe von X, so wird

$$X = SY = TY;$$

und aus (a), angewandt auf X, folgt nun:

(b″) Ist Y ein Normalteiler der Untergruppe X mit endlich erzeugbarer p-Faktorgruppe X/Y, so ist $X = PY$ für jede p-Sylowuntergruppe P von X; und X/Y ist endlich mit q teilender Ordnung.

Ist F ein p-Faktor von G, so folgt aus (b″), daß jede endlich erzeugbare Untergruppe von F endlich mit q teilender Ordnung ist. Also gibt es unter den endlich erzeugbaren Untergruppen von F eine V maximaler Ordnung. Ist f ein Element aus F, so ist auch $\{V, f\}$ endlich erzeugbar, wegen (b″) also endlich, so daß $V = \{V, f\}$ aus der Maximalität von $o(V)$ und $o(V) = o(\{V, f\})$ folgt. Dann gehört jedes Element f aus F zu V, so daß $F = V$ endlich ist: wir haben die Gültigkeit von (b) dargetan.

Sei N ein Normalteiler von G und S eine p-Sylowuntergruppe von G. Dann ist $NS/N \cong S/(N \cap S)$ eine p-Gruppe, die in einer p-Sylowuntergruppe T/N von G/N enthalten ist. Wegen (b) ist T/N endlich; und aus $S \leqq NS \leqq T$ folgt, daß S auch eine p-Sylowuntergruppe von T ist. Anwendung von (b″) zeigt $T = NS$, so daß $NS/N = T/N$ eine p-Sylowuntergruppe von G/N ist. Wegen (a) und (b) haben alle p-Sylowuntergruppen von G/N die gleiche Ordnung p^*, so daß

$$[S : S \cap N] = [T : N] = p^*$$

ist. Wegen (a) haben auch alle p-Sylowuntergruppen von N die gleiche Ordnung p^{**}; und es haben alle p-Sylowuntergruppen von G die gleiche Ordnung q. Also folgt

$$\text{(d′)} \qquad q = o(S) = [S : S \cap N]\, o(S \cap N) = p^* o(S \cap N)$$

für alle p-Sylowuntergruppen S von G.

Ist U eine p-Sylowuntergruppe von N, so ist U in einer p-Sylowuntergruppe V von G enthalten, die natürlich der Bedingung $U = N \cap V$ genügt. Anwendung von (d′) zeigt

$$q = o(V) = p^* o(V \cap N) = p^* o(U) = p^* p^{**}.$$

Ist S irgend eine p-Sylowuntergruppe von G, so folgt hieraus und aus (d')

$$p^* p^{**} = q = p^* o(S \cap N),$$

so daß $o(S \cap N) = p^{**}$ ist. Natürlich ist $S \cap N$ in einer p-Sylowuntergruppe J von N enthalten; und es folgt

$$o(S \cap N) = p^{**} = o(J),$$

so daß $J = S \cap N$ aus der Endlichkeit von J folgt. Also ist $S \cap N$ eine p-Sylowuntergruppe von N; und wir haben (d) verifiziert.

Bedenken wir, daß jede Untergruppe von G wegen (b) lokal-endlich mit endlichen Sylowuntergruppen ist, so folgt (e) aus (d).

Wir betrachten einen Normalteiler N von G und eine Untergruppe U von G mit $N \leqq U$ und p-Faktorgruppe U/N. Aus (d) folgt $U = NS$ für jede p-Sylowuntergruppe S von U. Gilt überdies $G = N\mathfrak{N}_G S$, so ist U offensichtlich ein Normalteiler von G. Ist umgekehrt U ein Normalteiler von G und g ein Element aus G, so ist S^g mit S eine p-Sylowuntergruppe von U. Wegen (b) können wir (a) auf die Untergruppe U von G anwenden. Also gibt es ein Element u in U mit $S^u = S^g$. Es folgt, daß $g = (gu^{-1})u$ in $U\mathfrak{N}_G S = NS\mathfrak{N}_G S = N\mathfrak{N}_G S$ liegt; und damit ist auch (f) bewiesen.

Die folgende wohl bekannte Tatsache sei der Bequemlichkeit des Lesers wegen mit Beweis eingefügt.

Lemma 1. 2. *Die Gruppe G ist dann und nur dann endlich, wenn G lokal endlich ist, wenn es für jede Primzahl p eine endliche p-Sylowuntergruppe von G gibt und wenn die Anzahl der Primzahlen, die Ordnungen von Elementen aus G sind, endlich ist.*

Beweis. Die Notwendigkeit der drei Bedingungen ist klar. Gelten die drei Bedingungen, so folgt zunächst aus Lemma 1. 1, (a), daß alle p-Sylowuntergruppen von G die gleiche [endliche] Ordnung $p^{e(p)}$ haben. Da aus der letzten Bedingung folgt, daß fast alle $p^{e(p)} = 1$ sind, ist

$$e = \prod_p p^{e(p)}$$

eine wohlbestimmte ganze Zahl. Bedenken wir, daß jede p-Untergruppe von G in einer p-Sylowuntergruppe von G enthalten ist, so folgt, daß jede p-Untergruppe von G eine $p^{e(p)}$ teilende Ordnung hat. Hieraus ergibt sich, daß die Ordnung einer jeden endlichen Untergruppe von G ein Teiler von e ist. Also gibt es eine endliche Untergruppe M von G, deren Ordnung maximal ist. Ist g ein Element aus G, so ist $\{M, g\}$ als endlich erzeugbare Untergruppe der lokal endlichen Gruppe G endlich; und aus der Maximalität der Ordnung von M folgt $M = \{M, g\}$ für jedes Element g aus G, so daß $G = M$ endlich ist.

2. Ist S_p für jede Primzahl p eine p-Sylowuntergruppe der Gruppe G, ist $S_p S_q = S_q S_p$ für jedes Primzahlpaar p, q, so bezeichnen wir diese Menge S_p als *Sylowsystem von G*. Es ist klar, daß dann das Komplexprodukt

$$\prod_p S_p$$

eine von der Reihenfolge der Faktoren unabhängige, wohlbestimmte Untergruppe von G ist. Wir wollen in diesem Abschnitt ein Existenzkriterium für Sylowsysteme beweisen.

Lemma 2. 1. *Ist G eine abzählbare Gruppe, deren endlich erzeugbare Untergruppen endlich und auflösbar sind, so gibt es ein Sylowsystem von G, dessen Produkt G ist.*

Bemerkung. Dieses Resultat ist wohl bekannt; ein Beweis sei der Bequemlichkeit des Lesers wegen hier angefügt.

Beweis. Aus der Abzählbarkeit von G folgt die Existenz endlich erzeugbarer Untergruppen U_i von G mit $U_0 = 1$ und

$$U_i \leqq U_{i+1} \text{ für jede positive ganze Zahl } i \text{ und } G = \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i.$$

Aus unserer zweiten Voraussetzung folgt dann:

$$\text{jedes } U_i \text{ ist endlich und auflösbar.}$$

Ist X eine Untergruppe der endlichen auflösbaren Gruppe Y, bilden die Sylowuntergruppen X_p ein Sylowsystem von X, so folgt aus Huppert [p. 666, 2. 5 Satz a)] die Existenz eines Sylowsystems Y_p von Y mit

$$X_p = X \cap Y_p \text{ für jede Primzahl } p.$$

Hieraus folgert man durch eine naheliegende vollständige Induktion [wegen $U_0 = 1$] die Existenz von Sylowsystemen U_{ip} von U_i mit

$$U_{ip} = U_{i+1p} \cap U_i \text{ für } 0 \leqq i \text{ und alle Primzahlen } p.$$

Aus dieser letzten Bedingung leitet man mühelos ab, daß

$$U_{ip} = U_{jp} \cap U_i \text{ für } i < j \text{ und alle Primzahlen } p$$

gilt. Da die U_{ip} ein Sylowsystem der endlichen auflösbaren Gruppe U_i bilden, gilt

$$U_i = \prod_p U_{ip} \text{ für } 0 < i.$$

Ist p eine Primzahl, so ist $U_{ip} \leqq U_{jp}$ für $i < j$, so daß die Vereinigungsmenge

$$G_p = \bigcup_{i=0}^{\infty} U_{ip}$$

eine wohlbestimmte Untergruppe von G ist. Es ist klar, daß jedes G_p eine p-Gruppe ist. Ist p, q ein Paar verschiedener Primzahlen, ist x ein Element in G_p und y ein Element in G_q, so gibt es eine positive ganze Zahl n derart, daß x zu U_{np} und y zu U_{nq} gehört. Aus

$$U_{np}U_{nq} = U_{nq}U_{np} \text{ folgt die Existenz von Elementen } x', x'' \text{ in } U_{np}$$

und y', y'' in U_{nq} mit $xy = y'x'$ und $yx = x''y''$. Hieraus folgt

$$G_pG_q = G_qG_p \text{ für jedes Primzahlpaar } p, q.$$

Natürlich ist

$$U_i = \prod_p U_{ip} \leqq \prod_p G_p,$$

so daß

$$G = \prod_p G_p$$

aus $G = \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i$ folgt. Ist P eine p-Untergruppe von G mit $G_p \leqq P$, so ergibt der auch in unserer Situation anwendbare Dedekindsche Modulsatz

$$P = G_p[P \cap \prod_{p \neq q} G_q] = G_p,$$

da ja

$$U_{ip} \cap \prod_{p \neq q} U_{iq} = 1 \text{ für jedes } i$$

aus den bekannten Eigenschaften der Sylowsysteme endlicher auflösbarer Gruppen folgt; vgl. etwa Huppert [p. 664, 2. 2 Satz]. Also bilden die G_p ein Sylowsystem von G, dessen Produkt G ist.

Die Untergruppe H der Torsionsgruppe G heiße *Halluntergruppe von G, wenn jede von 1 verschiedene p-Sylowuntergruppe von H auch eine p-Sylowuntergruppe von G ist.* Ist insbesondere G endlich, so ist H dann und nur dann eine Halluntergruppe von G, wenn die Ordnung $o(H)$ und der Index $[G:H]$ teilerfremd sind: unsere Definition der Halluntergruppen stimmt also im Bereich der endlichen Gruppen mit der dort üblichen überein. Hieraus folgt noch die folgende für uns wichtige Tatsache: die endliche Gruppe G ist dann und nur dann eine Halluntergruppe von G, wenn H für jede endliche Teilmenge E von G eine Halluntergruppe von $\{H, E\}$ ist — es genügt sogar, dies für einelementige Teilmengen E zu fordern.

Lemma 2. 2. *Ist jede endlich erzeugbare Untergruppe des Normalteilers N der Gruppe G endlich und auflösbar, ist H eine endliche Halluntergruppe von N, so ist $G = N\mathfrak{N}_G H$.*

Bemerkungen. Die Untergruppe H des Normalteilers N von G ist sicher dann eine Halluntergruppe von N, wenn sie eine Halluntergruppe von G ist. Bei den meisten Anwendungen dieses Lemma wird es sich genau um diese Situation handeln.

Das Lemma 2. 2 ist wohl bekannt. Sein Beweis, eine zweckmäßige Modifikation der Frattinischen Schlußweise, werde der Bequemlichkeit des Lesers wegen angeführt.

Beweis. Ist g ein Element aus G, so ist mit H auch H^g eine endliche Halluntergruppe des Normalteilers N von G. Nach Voraussetzung ist $E = \{H, H^g\}$ eine endliche, auflösbare Untergruppe von N. Da H und H^g Halluntergruppen von E sind, sind H und H^g in E konjugiert; vgl. Huppert [p. 665, 2. 4 Satz und p. 666, 2. 5 Satz a)]. Ist e ein Element aus E mit $H^e = H^g$, so liegt e in N und ge^{-1} in $\mathfrak{N}_G H$, so daß $g = (ge^{-1})e$ in $N\mathfrak{N}_G H$ liegt, woraus $G = N\mathfrak{N}_G H$ folgt.

Lemma 2. 3. *Ist jede endlich erzeugbare Untergruppe der Gruppe G endlich und auflösbar, so sind die beiden endlichen Halluntergruppen A und B von G dann und nur dann in $\{A, B\}$ konjugiert, wenn ihre Ordnungen die gleichen Primteiler haben.*

Beweis. Konjugierte endliche Untergruppen sind isomorph und haben also die gleiche Ordnung, so daß ihre Ordnungen insbesondere von denselben Primzahlen geteilt werden.

Wir nehmen umgekehrt an, daß die Ordnungen von A und B die gleichen Primteiler haben. Nach Voraussetzung ist $U = \{A, B\}$ endlich und auflösbar. Weiter sind die Halluntergruppen A und B von G auch Halluntergruppen von U. Aus der Auflösbarkeit der endlichen Untergruppe A von U folgt nach dem Hallschen Satze die Existenz eines Sylowsystems $\boldsymbol{A}$ von A; vgl. Huppert [p. 665, 2. 3 Satz]. Anwendung von Huppert [p. 666, 2. 5 Satz a)] zeigt die Existenz eines Sylowsystems $\boldsymbol{A}_0$ von U, das A in $\boldsymbol{A}$ schneidet. Da aber A eine Halluntergruppe von U ist, ist jede von 1 verschiedene Sylowuntergruppe von A auch eine Sylowuntergruppe von U, so daß die von 1 verschiedenen Sylowuntergruppen aus $\boldsymbol{A}$ auch in $\boldsymbol{A}_0$ enthalten sind: kurz $\boldsymbol{A}$ ist in $\boldsymbol{A}_0$ enthalten. Ebenso zeigen wir die Existenz eines $\boldsymbol{B}$ enthaltenden Sylowsystems $\boldsymbol{B}_0$ von U. Anwendung eines Hallschen Satzes zeigt die Existenz eines inneren Automorphismus von U, der $\boldsymbol{A}_0$ auf $\boldsymbol{B}_0$ abbildet; vgl. Huppert [p. 665, 2. 4 Satz]. Da dieselben Primzahlen die Ordnungen von A und B teilen, kommen in $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ Sylowuntergruppen derselben Charakteristiken vor, so daß der $\boldsymbol{A}_0$ auf $\boldsymbol{B}_0$ abbildende innere Automorphismus von U auch $\boldsymbol{A}$ auf $\boldsymbol{B}$ und also das Produkt A von $\boldsymbol{A}$ auf das Produkt B von $\boldsymbol{B}$ abbildet: A und B sind konjugiert in U.

Bemerkung. Daß die geforderte Endlichkeit von A und B unentbehrlich ist, werden wir weiter unten zeigen; vgl. die Diskussion von Satz 4. 2.

3. Wir kommen nun zum eigentlichen Thema unserer Überlegungen: den Gruppen, deren endlich erzeugbare Untergruppen endlich und auflösbar sind, und deren sämtliche Sylowuntergruppen endlich sind. Wir wollen sie der Kürze halber als *Σ-Gruppen* bezeichnen. Es ist klar, daß die Gruppe G dann und nur dann eine Σ-Gruppe ist, wenn jede abzählbare Untergruppe von G eine Σ-Gruppe ist: die Eigenschaft Σ ist abzählbar erkennbar.

(3. 1) *Faktoren von Σ-Gruppen und Erweiterungen von Σ-Gruppen durch Σ-Gruppen sind Σ-Gruppen.*

Dies folgt mühelos aus Lemma 1. 1, (b), wenn man nur bedenkt, daß Erweiterungen lokal endlicher Gruppen durch lokal endliche wegen Specht [p. 141, Satz 40*] wieder lokal endlich sind.

(3. 2) *Eine Σ-Gruppe ist dann und nur dann abzählbar, wenn sie ein Sylowsystem besitzt, dessen Produkt sie ist.*

Dies folgt sofort aus Lemma 2. 1 und der Endlichkeit der Sylowuntergruppen der Σ-Gruppen.

(3. 3) *Ist G eine abzählbare Σ-Gruppe, so ist G residuell endlich und* $\bigcap_{i=1}^{\infty} G^{(i)} = 1$.

Bemerkung. Diese Aussage dürfte bekannt sein. Der in unserm Zusammenhang sehr einfache Beweis sei der Bequemlichkeit des Lesers wegen eingefügt.

Beweis. Aus (3. 2) folgt die Existenz eines Sylowsystems S_p von G mit $G = \prod_p S_p$. Dann ist aber der Index

$$[G : \prod_{p \neq q} S_q] = o(S_p)$$

eine positive ganze Zahl und

$$1 = \bigcap_p \prod_{p \neq q} S_q,$$

woraus die residuelle Endlichkeit von G folgt. Hieraus folgt auch, daß 1 der Durchschnitt aller Normalteiler mit endlicher Faktorgruppe ist. Da aber endliche epimorphe Bilder von G auflösbar sind, ergibt sich hieraus, daß $\bigcap_{i=1}^{\infty} G^{(i)} = 1$ ist.

Die Untergruppe B der Σ-Gruppe G heiße Basisuntergruppe von G, wenn B erstens abzählbar ist und B zweitens für jede Primzahl p eine zu einer p-Sylowuntergruppe von G isomorphe Untergruppe enthält. Aus dieser vergleichsweise schwachen definierenden Eigenschaft der Basisuntergruppen folgt eine sehr viel stärkere, wodurch dieser Begriff sehr viel leichter zu benutzen ist.

(3. 4) *Sei G eine Σ-Gruppe.*

(1) *Die Untergruppe B von G ist dann und nur dann eine Basisuntergruppe von G, wenn B abzählbar ist und für jede Primzahl p jede p-Sylowuntergruppe von B auch eine p-Sylowuntergruppe von G ist.*

(2) *Basisuntergruppen von G sind Hallsche Untergruppen von G.*

(3) *Ist N ein Normalteiler von G und B eine Basisuntergruppe von G, so ist $B \cap N$ eine Basisuntergruppe von N und BN/N ist eine Basisuntergruppe von G/N.*

Beweis. Es ist klar, daß die ad (1) angegebene Bedingung hinreichend dafür ist, daß B eine Basisuntergruppe von G ist. Nehmen wir umgekehrt an, daß B eine Basis-

untergruppe von G ist, so ist B sicherlich abzählbar. Sei weiter S eine p-Sylowuntergruppe von B. Nach Voraussetzung gibt es eine zu einer p-Sylowuntergruppe T von G isomorphe Untergruppe U von B. Aus Lemma 1. 1, (c) folgt, daß U eine p-Sylowuntergruppe von G und also auch eine von B ist. Da G eine Σ-Gruppe ist, sind U und T endlich. Anwendung von Lemma 1. 1, (a) auf die lokal endliche Gruppe B zeigt, daß S und U in B konjugiert sind. Insbesondere gilt $S \cong U \cong T$; und eine zweite Anwendung von Lemma 1. 1, (c) zeigt, daß auch S eine p-Sylowuntergruppe von G ist. Damit haben wir (1) bewiesen; und (2) folgt unmittelbar aus (1).

Ist N ein Normalteiler von G und B eine Basisuntergruppe von G, so ist jede p-Sylowuntergruppe S von B wegen (1) eine p-Sylowuntergruppe von G. Aus Lemma 1. 1, (d) folgt dann, daß $N \cap S$ eine p-Sylowuntergruppe von N und SN/N eine p-Sylowuntergruppe von G/N ist. Also ist $N \cap B$ eine Basisuntergruppe von N; und BN/N ist eine Basisuntergruppe von G/N.

Lemma 3. 5. *Ist $p_1, p_2, \ldots, p_i, p_{i+1}, \ldots$ eine unendliche Folge von Primzahlen, ist G eine Σ-Gruppe und A_i, B_i für jedes i ein Paar von p_i-Sylowuntergruppen von G mit $A_iA_j = A_jA_i$ und $B_iB_j = B_jB_i$ für jedes Zahlenpaar i, j, so gibt es einen Isomorphismus σ der Untergruppe*

$$A = \prod_{i=1}^{\infty} A_i$$

auf die Untergruppe

$$B = \prod_{i=1}^{\infty} B_i$$

mit $A_i^\sigma = B_i$ für alle i.

Beweis. Setzen wir

$$A_i^* = \prod_{j=1}^{i} A_j \text{ und } B_i^* = \prod_{j=1}^{i} B_j,$$

so sind diese Komplexprodukte wegen der vorausgesetzten paarweisen Vertauschbarkeit ihrer Faktoren Untergruppen von G. Da Sylowuntergruppen von Σ-Gruppen endlich sind, ist jedes A_i^* und B_i^* endlich und auflösbar. Schließlich wird

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^* \text{ und } B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^*.$$

Unter Λ_i sei die Menge aller Isomorphismen λ von A_i^* auf B_i^* mit folgenden Eigenschaften verstanden:

(a) Es gibt einen inneren Automorphismus von G, der auf A_i^* mit λ übereinstimmt.

(b) $A_j^\lambda = B_j$ für $0 < j \leqq i$.

Aus der Endlichkeit von A_i^* und B_i^* folgt die Endlichkeit von Λ_i. Es folgt weiter, daß $\{A_i^*, B_i^*\} = X$ endlich und auflösbar ist, da ja endliche Teilmengen von Σ-Gruppen endliche und auflösbare Untergruppen erzeugen. Da $A_1, \ldots, A_i$ und $B_1, \ldots, B_i$ Systeme paarweise vertauschbarer Sylowuntergruppen von G und also auch von X bilden, sind A_i^* und B_i^* zwei $[p_1, \ldots, p_i]$-Halluntergruppen der endlichen auflösbaren Gruppe X; und aus den Hallschen Sätzen folgt die Existenz eines Elementes x in X mit

$$A_j^x = B_j \text{ für } 0 < j \leqq i;$$

vgl. Huppert [p. 665, 2. 4 Satz]. Der von x induzierte innere Automorphismus von G induziert einen Isomorphismus in Λ_i. Damit haben wir gezeigt:

(c) Jedes Λ_i ist endlich und nicht leer.

Ist $i \leqq k$ und λ ein Isomorphismus aus Λ_k, so ergibt sich aus (b) daß λ einen Isomorphismus von A_i^* auf B_i^* induziert, der offenbar auch zu Λ_i gehört. Bezeichnen wir diesen induzierten Isomorphismus mit $\lambda^{(k,i)}$, so folgt:

(d) Ist $i \leqq k$, so ist (k, i) eine eindeutige Abbildung von Λ_k in Λ_i, die den Bedingungen

$$(i, i) = 1 \text{ und } (k, i)(i, j) = (k, j) \text{ für } j < i < k \text{ genügt.}$$

Wir können also Kurosh [II; p. 167, Theorem und die Bemerkung auf p. 168 am Ende des Beweises] anwenden. Folglich gibt es für jedes n ein λ_n in Λ_n mit

$$\lambda_k^{(k,i)} = \lambda_i \text{ für } i < k.$$

Dies besagt aber, daß für $0 < i < k$ der Isomorphismus λ_k von A_k^* auf der Untergruppe $A_i^* \leqq A_k^*$ mit λ_i übereinstimmt. Folglich gibt es einen und nur einen Isomorphismus σ von A, der auf A_n^* mit λ_n übereinstimmt. Dann ist aber

$$A_n^\sigma = A_n^{\lambda_n} = B_n;$$

und hieraus folgt noch, daß σ ein Isomorphismus von A auf B ist.

Satz 3. 6. *Jede Σ-Gruppe besitzt Basisuntergruppen; und alle Basisuntergruppen einer Σ-Gruppe sind isomorph.*

Beweis. Ist S_p für jede Primzahl p eine p-Sylowuntergruppe der Σ-Gruppe G, so ist jedes S_p endlich. Also ist das Kompositum B der S_p abzählbar; und B ist offenbar eine Basisuntergruppe von G.

Sind A und B Basisuntergruppen von G, so sind A und B abzählbare Σ-Gruppen. Aus (3. 2) folgt die Existenz von Sylowsystemen von A und B, deren Produkt A bzw. B ist. Anwendung von Lemma 3. 5 zeigt die Isomorphie von A und B.

(3. 7) *Basisuntergruppen von Σ-Gruppen sind normalisatorgleich.*

Beweis. Ist B eine Basisuntergruppe der Σ-Gruppe G, so ist B auch eine Basisuntergruppe seines Normalisators $\mathfrak{N}_G B$, der mit G eine Σ-Gruppe ist. Jede p-Sylowuntergruppe von B ist wegen (3. 4) eine p-Sylowuntergruppe von G und also auch eine von $\mathfrak{N}_G B$. Da irgendzwei p-Sylowuntergruppen der Σ-Gruppe $\mathfrak{N}_G B$ wegen Lemma 1. 1, (a) in $\mathfrak{N}_G B$ konjugiert sind, und da B ein Normalteiler von $\mathfrak{N}_G B$ ist, enthält B alle Sylowuntergruppen der Torsionsgruppe $\mathfrak{N}_G B$, woraus $B = \mathfrak{N}_G B$ folgt.

Folgerung 3. 8. *Die folgenden Eigenschaften der Basisuntergruppe B der Σ-Gruppe G sind äquivalent:*

(i) $B = G$.

(ii) *Der Index $[G : B]$ ist endlich.*

(iii) *Die Klasse B^G der zu B in G konjugierten Untergruppen ist endlich.*

Beweis. Es ist klar, daß (ii) aus (i) folgt; und wegen $B \leqq \mathfrak{N}_G B$ folgt (iii) aus (ii). Gilt (iii), so folgt aus (3. 7) die Endlichkeit von $[G : B]$, so daß aus dem Satz von Poincaré auch die Endlichkeit von G/B_G [mit $B_G = \bigcap_{g \in G} B^g$] folgt. Wegen (3. 4, 3) bilden Epimorphismen von Σ-Gruppen Basisuntergruppen auf Basisuntergruppen ab. Es folgt, daß B/B_G eine Basisuntergruppe der endlichen [auflösbaren] Gruppe G/B_G ist, woraus $G/B_G = B/B_G$ und $G = B$ folgen. Also folgt (i) aus (iii), womit die Äquivalenz von (i) bis (iii) dargetan ist.

Folgerung 3. 9. *Ist B eine Basisuntergruppe der Σ-Gruppe $G \neq B$, so ist die Anzahl der zu B in G konjugierten Untergruppen von G gleich der unendlichen Mächtigkeit von G.*

Beweis. Wäre B endlich, so folgte $G = B$ aus Lemma 1. 2. Also ist B unendlich; und da B als Basisuntergruppe abzählbar ist, ist B abzählbar unendlich.

Aus Folgerung 3. 8 und $B \neq G$ folgern wir die Unendlichkeit von B^G. Aus (3. 7) ergibt sich, daß der Index $[G : B]$ die Mächtigkeit der Menge B^G ist. Aus der abzählbaren Unendlichkeit von B und der Unendlichkeit von B^G folgern wir, daß die Mächtigkeit von G genau $\aleph_0[G : B] = [G : B]$ und also gleich der Mächtigkeit der Menge B^G ist.

Aus Satz 3. 6 ergibt sich, daß die Basisuntergruppen einer Σ-Gruppe eine nicht leere Klasse isomorpher Gruppen bilden, daß also ihr Isomorphietyp eindeutig bestimmt ist. Es hat folglich Sinn zu sagen, daß *die Σ-Gruppen A und B den gleichen Basistyp haben, wenn jede Basisuntergruppe von A zu jeder Basisuntergruppe von B isomorph ist.* Wegen Satz 3. 6 ist dies dann und nur dann der Fall, wenn es eine Basisuntergruppe U von A und eine Basisuntergruppe V von B mit $U \cong V$ gibt. Für unsere späteren Anwendungen wird das folgende Kriterium sich als nützlich erweisen.

(3. 10) *Die folgenden Eigenschaften der Untergruppe U der Σ-Gruppe G sind äquivalent:*

(i) *U und G haben den gleichen Basistyp.*

(ii) *Ist p eine Primzahl, so ist jede p-Sylowuntergruppe von U eine p-Sylowuntergruppe von G.*

(iii) *Ist p eine Primzahl, so gibt es eine p-Sylowuntergruppe S von U und eine p-Sylowuntergruppe T von G mit $S \cong T$.*

(iv) *Jede Basisuntergruppe von U ist eine Basisuntergruppe von G.*

Beweis. Haben erstens U und G den gleichen Basistyp, so folgern wir aus Satz 3. 6 die Existenz einer Basisuntergruppe A von U und einer Basisuntergruppe B von G, die dann natürlich $A \cong B$ erfüllen. Ist p eine Primzahl, so gibt es eine p-Sylowuntergruppe P von A. Aus $A \cong B$ folgt die Existenz einer p-Sylowuntergruppe Q von B mit $P \cong Q$. Aus (3. 4) folgern wir, daß P eine p-Sylowuntergruppe von U und Q eine p-Sylowuntergruppe von G ist: (iii) folgt aus (i).

Aus (iii) und Lemma 1. 1, (a) folgt (ii).

Wir nehmen die Gültigkeit von (ii) an und betrachten eine Basisuntergruppe B von U. Es folgt sofort aus der Definition der Basisuntergruppen, daß B auch eine Basisuntergruppe von G ist: (iv) folgt aus (ii).

Gilt schließlich (iv), so folgt aus Satz 3. 6, daß alle Basisuntergruppen von U als Basisuntergruppen von G mit allen Basisuntergruppen von G isomorph sind: (i) folgt aus (iv); und damit ist die Äquivalenz von (i) bis (iv) dargetan.

4. Dem Hauptresultat dieses Abschnitts sei der Beweis einer Abgeschlossenheitseigenschaft der Klasse der Σ-Gruppen vorausgeschickt.

Lemma 4. 1. *Es sei θ eine Menge von Untergruppen der Gruppe G mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *$X \leqq Y$ oder $Y \leqq X$ für X, Y in θ.*

(b) $G = \bigcup_{X \in \theta} X$.

(c) *Alle Untergruppen in θ sind abzählbare Σ-Gruppen.*

(d) *$X \cong Y$ für X, Y in θ.*

Dann ist G eine Σ-Gruppe und jede Untergruppe in θ ist eine Basisuntergruppe von G.

Beweis. Ist E eine endliche Teilmenge von G, so folgt aus (a), (b) die Existenz einer E enthaltenden Untergruppe X aus θ. Da X wegen (c) eine Σ-Gruppe ist, ist die endlich erzeugbare Untergruppe $\{E\} \leqq X$ endlich und auflösbar:

(1) G ist lokal endlich-auflösbar.

Ist p eine Primzahl, so folgt aus (c), (d) [und Lemma 1. 1, (a)], daß die p-Sylowuntergruppen aller X aus θ isomorphe endliche Gruppen sind, deren gemeinsame Ordnung wir mit p^* bezeichnen wollen. Hieraus folgt noch:

(2) Ist P eine p-Untergruppe eines X aus θ, so ist P endlich mit p^* teilender Ordnung.

Ist S eine p-Sylowuntergruppe von G, so ist $S \cap X$ für X aus θ wegen (2) eine endliche p-Gruppe mit p^* teilender Ordnung. Es gibt also unter den $S \cap X$ mit X aus θ eines $S \cap M$ mit maximaler Ordnung. Ist nun Y eine Untergruppe aus θ mit $M \leqq Y$, so folgt aus der Maximalität von $S \cap M$, daß die endlichen Gruppen $S \cap M \leqq S \cap Y$ gleiche Ordnung haben und also gleich sind. Aus (b) folgt nun

$$S = \bigcup_{M \leqq Y \in \theta} S \cap Y = S \cap M \leqq M;$$

und hieraus ergibt sich:

(3) Alle Sylowuntergruppen von G sind endlich; und jede Sylowuntergruppe von G ist in einer Untergruppe von θ enthalten.

Aus (1) und der ersten Hälfte von (3) folgern wir, daß G eine Σ-Gruppe ist. Aus (d) und der zweiten Hälfte von (3) folgt, daß jede Untergruppe aus θ eine zu einer p-Sylowuntergruppe von G isomorphe Untergruppe enthält [für jede Primzahl p]. Da aber die Untergruppen aus θ wegen (c) sämtlich abzählbar sind, sind sie alle Basisuntergruppen von G.

Satz 4. 2. *Die folgenden Eigenschaften der abzählbaren Σ-Gruppe G sind äquivalent:*

(a) *Es gibt eine Untergruppe U mit $G \cong U < G$.*

(b) *Es gibt eine von G verschiedene Basisuntergruppe von G.*

(c) *G ist Basisuntergruppe einer überabzählbar unendlichen Σ-Gruppe.*

Beweis. Abzählbare Σ-Gruppen sind Basisuntergruppen ihrer selbst. Also ist jede zu G isomorphe Untergruppe von G eine Basisuntergruppe von G, so daß die Äquivalenz von (a) und (b) aus Satz 3. 6 folgt.

Ist G Basisuntergruppe der überabzählbar unendlichen Σ-Gruppe H, so ist $G < H$. Es gibt also ein nicht in G enthaltenes Element h in H. Mit G ist auch $\{G, h\}$ abzählbar. Da G eine Basisuntergruppe der Σ-Gruppe H ist, folgt aus (3. 4), daß jede p-Sylowuntergruppe von G auch eine p-Sylowuntergruppe von H ist. Dann enthält $\{G, h\}$ für jedes p eine p-Sylowuntergruppe von H, ist folglich eine Basisuntergruppe von H. Anwendung von Satz 3. 6 zeigt $G < \{G, h\} \cong G$; und hieraus folgt die Gültigkeit von (a), das also aus (c) folgt.

Wir nehmen schließlich die Gültigkeit von (a) an. Sei Ω wie üblich die erste überabzählbar unendliche Ordinalzahl. Wir wollen dann durch transfinite Induktion für jede Ordinalzahl $\sigma < \Omega$ eine Gruppe G_σ mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

(1) $G = G_1 \cong G_\sigma$.

(2) $G_\sigma < G_{\sigma+1}$.

(3) $G_\lambda = \bigcup_{\sigma<\lambda} G_\sigma$ für Limeszahlen λ.

Da $G = G_1$ ist, können wir o. B. d. A. annehmen, daß β eine Ordinalzahl mit $1 < \beta < \Omega$ ist, und daß Gruppen G_σ mit den Eigenschaften (1) bis (3) für $\sigma < \beta$ bereits konstruiert sind.

Fall 1. $\beta = \sigma + 1$ ist keine Limeszahl.

Aus (1) folgt dann insbesondere $G_\sigma \cong G$. Da G nach Voraussetzung (a) einer echten Untergruppe isomorph ist, ist auch G_σ einer echten Untergruppe isomorph. Dies ist äquivalent mit der Existenz einer echten Obergruppe $G_{\sigma+1}$ von G_σ mit

$$G_\sigma < G_{\sigma+1} \cong G_\sigma \cong G,$$

so daß die so erweiterte Reihe G_ν mit $\nu \leqq \beta = \sigma + 1$ ebenfalls den Bedingungen (1) bis (3) genügt.

Fall 2. β ist eine Limeszahl.

Aus (2) folgt sofort

$$G_{\sigma'} < G_{\sigma''} \text{ für } \sigma' < \sigma'' < \beta;$$

und hieraus ergibt sich die Existenz einer eindeutig bestimmten Vereinigungsgruppe

$$G_\beta = \bigcup_{\sigma<\beta} G_\sigma.$$

Aus $\beta < \Omega$ folgt die Abzählbarkeit der Ordinalzahl β, so daß aus der Abzählbarkeit aller G_σ mit $\sigma < \beta$ auch die Abzählbarkeit von G_β folgt. Aus Lemma 4. 1 folgt dann, daß G_β eine abzählbare Σ-Gruppe ist, da ja G und also alle G_σ mit $\sigma \leqq \beta$ abzählbare Σ-Gruppen sind; und weiter folgt, daß alle G_σ mit $\sigma \leqq \beta$ Basisuntergruppen von G_β sind, da ja abzählbare Σ-Gruppen Basisgruppen ihrer selbst sind. Anwendung von Satz 3. 6 zeigt dann noch $G_\beta \cong G_1 = G$, so daß die so erweiterte Reihe G_ν mit $\nu \leqq \beta$ ebenfalls den Bedingungen (1) bis (3) genügt.

Damit ist die induktive Konstruktion der Gruppen G_σ mit $\sigma < \Omega$ vollständig durchgeführt; und diese Gruppenreihe G_σ genügt den Bedingungen (1) bis (3). Daraus folgt

$$G_{\sigma'} < G_{\sigma''} \text{ für } \sigma' < \sigma'' < \Omega.$$

Wir können also die Vereinigungsgruppe

$$H = \bigcup_{\sigma<\Omega} G_\sigma$$

bilden. Aus (2) und der überabzählbaren Unendlichkeit von Ω folgt die überabzählbare Unendlichkeit von H. Aus Lemma 4. 1 folgern wir schließlich, daß H eine Σ-Gruppe ist und daß alle G_σ Basisuntergruppen von H sind. Insbesondere ist also $G = G_1$ eine Basisuntergruppe der überabzählbar unendlichen Σ-Gruppe H: die Eigenschaften (a) bis (c) von G sind äquivalent.

Diskussion *von Satz* 4. 2. **A.** Die in diesem Satz behandelte Klasse von Gruppen ist nicht leer, wie in Satz 5. 3 bewiesen werden wird.

B. Aus Folgerung 5. 4 ergibt sich die Existenz einer überabzählbar unendlichen Σ-Gruppe G. Diese besitzt wegen Satz 3. 6 eine Basisuntergruppe B. Dann sind B und G Halluntergruppen von G und dieselben Primzahlen sind Ordnungen von Elementen in B und in G. Aber B ist abzählbar, so daß B und G nicht gleich mächtig und also erst recht nicht [isomorph und] konjugiert sind.

Es liegt nahe, eine Gruppe G *ko-hopfisch* zu nennen, wenn G die einzige zu G isomorphe Untergruppe von G ist. Satz 4. 2 besagt dann, daß eine abzählbare Σ-Gruppe dann und nur dann ko-hopfisch ist, wenn sie nicht Basisuntergruppe einer überabzählbar unendlichen Σ-Gruppe ist.

Satz 4. 3. *Die folgenden Eigenschaften der abzählbaren Σ-Gruppe G sind äquivalent:*

(A) *G ist ko-hopfisch.*

(B) *Jedes epimorphe Bild von G ist ko-hopfisch.*

(C) *Jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild von G besitzt einen von 1 verschiedenen ko-hopfischen Normalteiler.*

Beweis. Sei N ein Normalteiler von G und G/N nicht ko-hopfisch. Dann gibt es eine Untergruppe U von G mit $N \leqq U < G$ und $U/N \cong G/N$. Aus (3. 1) folgern wir, daß N, U, G/N, U/N abzählbare Σ-Gruppen sind, so daß alle p-Sylowuntergruppen von N die gleiche endliche Ordnung p^* und alle p-Sylowuntergruppen von G/N wie von U/N die gleiche endliche Ordnung p^{**} haben.

Ist S eine p-Sylowuntergruppe von G bzw. U, so ist $S \cap N$ eine p-Sylowuntergruppe von N und NS/N ist eine p-Sylowuntergruppe von G/N bzw. U/N, wie sich aus Lemma 1. 1, (d) ergibt. Es folgt:

$$o(S) = [S : S \cap N]o(S \cap N) = [NS : N]o(S \cap N) = o(NS/N)o(S \cap N) = p^*p^{**}.$$

Ist insbesondere S eine p-Sylowuntergruppe von U, so ist S in einer p-Sylowuntergruppe T von G enthalten; und es folgt, daß S und T endliche Gruppen gleicher Ordnung p^*p^{**}, also gleich sind: alle p-Sylowuntergruppen von U sind p-Sylowuntergruppen von G. Anwendung von (3. 4) zeigt, daß U eine Basisuntergruppe von G mit $U < G$ ist. Anwendung von Satz 4. 2 zeigt, daß G nicht ko-hopfisch ist, wenn G/N nicht ko-hopfisch ist: (B) folgt aus (A).

Es ist klar, daß (C) aus (B) folgt. — Wir nehmen schließlich die Gültigkeit von (C) an und betrachten eine Basisuntergruppe B von G. Sei B_G das Produkt aller in B enthaltenen Normalteiler von G: der umfassendste in B enthaltene Normalteiler von G. Wäre $B < G$, so wäre G/B_G ein von 1 verschiedenes epimorphes Bild von G; und es folgte aus (C) die Existenz eines Normalteilers W von G mit $B_G < W$ und ko-hopfischem W/B_G. Da W ein Normalteiler von G ist, folgt $W \nleqq B$ aus $B_G < W$, so daß

$$B_G \leqq W \cap B < W$$

ist. Da W/B_G ko-hopfisch und wegen (3. 1) eine Σ-Gruppe ist, folgt aus Satz 4. 2, daß $(W \cap B)/B_G$ keine Basisuntergruppe von W/B_G ist. Es gibt also eine Primzahl p derart, daß keine p-Sylowuntergruppe von $(W \cap B)/B_G$ eine p-Sylowuntergruppe von W/B_G ist. Ist S eine p-Sylowuntergruppe von $W \cap B$, so ist SB_G/B_G wegen Lemma 1. 1, (d) eine p-Sylowuntergruppe von $(W \cap B)/B_G$; und es folgt, daß SB_G/B_G keine p-Sylowuntergruppe von W/B_G ist. Dann ergibt sich aus Lemma 1. 1, (d) und $S \leqq W$, daß S keine p-Sylowuntergruppe von W ist. Andererseits ist S in einer p-Sylowuntergruppe T von W enthalten und es ist dann sogar $S < T$. Weiter ist S wegen $S \leqq W \cap B \leqq B$ in einer p-Sylowuntergruppe P von B enthalten. Da B eine Basisuntergruppe von G ist, ist P wegen (3. 4) auch eine p-Sylowuntergruppe von G; und es folgt aus Lemma 1. 1, (a), daß T zu einer Untergruppe von P in G konjugiert ist. Folglich gibt es ein Element g in G mit $T^g \leqq P$. Aus $T \leqq W$ folgt $T^g \leqq W^g = W$, so daß

$$T^g \leqq W \cap P \leqq W \cap B.$$

Wegen Lemma 1. 1, (a) haben alle p-Sylowuntergruppen von $W \cap B$ die gleiche Ordnung wie S. Da T^g eine p-Untergruppe von $W \cap B$ ist, ergibt sich, daß $o(T) = o(T^g)$ ein Teiler von $o(S)$ ist. Aus $S < T$ und der Endlichkeit aller p-Untergruppen von G folgt aber, daß $o(S)$ ein echter Teiler von $o(T)$ ist. Dies ist ein Widerspruch, aus dem $B = G$

folgt: G ist seine einzige Basisuntergruppe. Anwendung von Satz 4. 2 zeigt, daß G ko-hopfisch ist: die Bedingungen (A) bis (C) sind als äquivalent erwiesen.

Zusatz 4. 4. *Die folgenden Eigenschaften der Σ-Gruppe G sind äquivalent:*

(1) *G ist abzählbar und ko-hopfisch.*

(2) *Echte Untergruppen von G sind keine Basisuntergruppen von G.*

(3) *G ist die einzige Basisuntergruppe von G.*

(4) *Alle Basisuntergruppen von G sind ko-hopfisch.*

(5) *Es gibt nur endlich viele Klassen in G konjugierter Basisuntergruppen von G.*

(6) *Jede Basisuntergruppe von G besitzt nur endlich viele konjugierte in G.*

Beweis. Gilt (1), so ist G eine Basisuntergruppe von G. Ist U irgendeine Basisuntergruppe von G, so sind G und U als Basisuntergruppen der Σ-Gruppe G isomorph [Satz 3. 6]. Da aber G ko-hopfisch ist, folgt $G = U$ aus $G \cong U \leqq G$; und wir haben (2) aus (1) hergeleitet.

Da G als Σ-Gruppe wegen Satz 3. 6 Basisuntergruppen besitzt, folgt (3) aus (2). — Gilt (3), so ist G abzählbar als Basisuntergruppe von G; und jede zu G isomorphe Untergruppe von G ist per definitionem eine Basisuntergruppe von G, also gleich G, so daß G ko-hopfisch ist: (1) folgt aus (3), womit die Äquivalenz von (1) bis (3) dargetan ist.

Gelten die äquivalenten Bedingungen (1) bis (3), so ergibt sich (4) durch eine naheliegende Kombination von (1) und (3). — Gilt umgekehrt (4), ist U eine Basisuntergruppe von G und g ein Element aus G, so folgt aus der Definition der Basisuntergruppen, daß auch $\{U, g\}$ eine Basisuntergruppe von G ist. Aus Satz 3. 6 folgt $U \cong \{U, g\}$, so daß $U = \{U, g\}$ sich aus (4) ergibt. Es folgt $U = G$; und wir haben (2) aus (4) hergeleitet, die Äquivalenz von (1) bis (4) dargetan.

Es ist klar, daß (5) aus (3) folgt. Gilt umgekehrt (5), so betrachten wir eine Basisuntergruppe B von G und einen Isomorphismus σ von B auf eine Untergruppe $B^\sigma \leqq B$. Dann gilt

$$\cdots \leqq B^{\sigma^{i+1}} \leqq B^{\sigma^i} \leqq \cdots \leqq B^\sigma \leqq B;$$

und aus (5) folgt die Existenz einer positiven ganzen Zahl n und eines Elements g in G mit

$$B^g = B^{\sigma^n} \leqq B^\sigma \leqq B.$$

Dann gilt aber auch

$$\cdots \leqq B^{g^{i+1}} \leqq B^{g^i} \leqq \cdots \leqq B^g \leqq B.$$

Da G eine Torsionsgruppe ist, gibt es eine positive ganze Zahl e mit $g^e = 1$, so daß

$$B = B^{g^e} \leqq B^g = B^{\sigma^n} \leqq B^\sigma \leqq B$$

und also $B = B^\sigma$ wird: alle Basisuntergruppen von G sind ko-hopfisch. Wir haben (4) aus (5) abgeleitet und die Äquivalenz von (1) bis (5) dargetan.

Es ist klar, daß (6) aus (3) folgt. Gilt umgekehrt (6), so genügt jede Basisuntergruppe B von G der Bedingung (iii) der Folgerung 3. 8, woraus $B = G$ folgt: wir haben (3) aus (6) hergeleitet und die Äquivalenz von (1) bis (6) dargetan.

Hilfssatz 4. 5. *Ist die Σ-Gruppe G lokal nilpotent, so ist G abzählbar und ko-hopfisch.*

Beweis. Die Σ-Gruppe G ist lokal nilpotent und lokal endlich. Da endliche nilpotente Gruppen direkte Produkte ihrer Primärkomponenten sind, ist auch G das direkte

Produkt seiner Primärkomponenten. Diese sind endlich, da die Sylowuntergruppen von Σ-Gruppen endlich sind. Also ist G abzählbar und jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild besitzt einen von 1 verschiedenen endlichen Normalteiler. Anwendung von Satz 4. 3 zeigt, daß G auch ko-hopfisch ist.

Bemerkung. Daß lokal nilpotente Σ-Gruppen nicht auflösbar zu sein brauchen, kann man sich an einfachsten Beispielen klar machen.

Wir erinnern daran, daß eine Gruppe *radikal* [im Sinne von Plotkin] ist, wenn jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild einen von 1 verschiedenen, lokal nilpotenten Normalteiler besitzt.

Folgerung 4. 6. *Ist die Σ-Gruppe G radikal, so ist G abzählbar und ko-hopfisch; und jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild von G besitzt eine von 1 verschiedene, endliche, elementar abelsche, primäre charakteristische Untergruppe.*

Beweis. Jede Untergruppe von G ist eine radikale Σ-Gruppe. Ist also U eine abzählbare Untergruppe von G, so ergibt sich aus (3. 1) und Hilfssatz 4. 5 die Gültigkeit der Bedingung (C) des Satzes 4. 3 und seine Anwendbarkeit auf U, so daß U ko-hopfisch ist. Da alle Basisuntergruppen von G abzählbar sind, sind sie folglich auch ko-hopfisch: es gilt Bedingung (4) des Zusatzes 4. 4, so daß G abzählbar und ko-hopfisch ist.

Ist weiter $H \neq 1$ ein epimorphes Bild von G, so folgt aus der Radikalität von G, daß H einen von 1 verschiedenen, lokal nilpotenten Normalteiler besitzt. Folglich ist auch das Hirsch-Plotkinsche Radikal H^* von H von 1 verschieden. Nun ist H^* eine lokal nilpotente charakteristische Untergruppe von H; vgl. Schenkman [p. 205, 6. 7. b. Theorem]. Wegen (3. 1) ist auch H^* eine Σ-Gruppe, also das direkte Produkt seiner endlichen Primärkomponenten. Von diesen ist eine $P \neq 1$, so daß auch ihr Zentrum und der Sockel des Zentrums von 1 verschiedene, endliche, charakteristische Untergruppen von H^* und also von H sind. Der Sockel des Zentrums von P ist aber eine elementar abelsche Primärgruppe, q. e. d.

Ist G eine beliebige Gruppe, so sei die *Charakteristik* $\mathfrak{C}G$ die Menge der Primzahlen, die Ordnung von Elementen aus G sind. Natürlich ist die Charakteristik einer Untergruppe in der Charakteristik der Obergruppe enthalten; und die Charakteristik eines epimorphen Bildes einer Torsionsgruppe T ist in der Charakteristik von T enthalten.

Folgerung 4. 7. *Ist $\mathfrak{M}$ eine unendliche Menge endlicher, von 1 verschiedener Halluntergruppen der Σ-Gruppe G, sind die Ordnungen der Untergruppen aus $\mathfrak{M}$ paarweise teilerfremd, gibt es zu jedem X aus $\mathfrak{M}$ ein Y in $\mathfrak{M}$ derart, daß $\mathfrak{C}(\mathfrak{N}_G X)$ und $\mathfrak{C}Y$ keine Primzahl gemein haben, so gibt es einen Normalteiler K von G mit folgenden Eigenschaften:*

(*) *$HK/K \neq 1$ für jedes H aus $\mathfrak{M}$.*

(a) *$\mathfrak{C}(G/K) \cap \mathfrak{C}H$ ist für kein H aus $\mathfrak{M}$ leer.*

(b) *G/K ist unendlich.*

(c) *1 ist der einzige radikale Normalteiler von G/K.*

Beweis. Sei $\mathfrak{N}$ die Menge aller Normalteiler X von G mit folgender Eigenschaft:

$$\mathfrak{N}: H \not\leqq X \text{ für jedes } H \text{ aus } \mathfrak{M}.$$

Da jedes H aus $\mathfrak{M}$ von 1 verschieden ist, gehört der Normalteiler 1 zu $\mathfrak{N}$. Ist $\mathfrak{T}$ eine nicht leere Teilmenge von $\mathfrak{N}$ derart, daß $X \leqq Y$ oder $Y < X$ für jedes Paar X, Y von Untergruppen aus $\mathfrak{N}$ gilt, so folgt aus der Endlichkeit aller Untergruppen aus $\mathfrak{M}$, daß die Vereinigungsmenge der Untergruppen aus $\mathfrak{T}$ ein zu $\mathfrak{N}$ gehöriger Normalteiler von G ist. Das Maximumprinzip der Mengenlehre kann also auf $\mathfrak{N}$ angewandt werden: es gibt einen maximalen Normalteiler K in $\mathfrak{N}$.

Ist H eine Untergruppe aus $\mathfrak{M}$, so ist $H \not\leqq K$, so daß HK/K eine von 1 verschiedene Untergruppe von G/K ist: es gilt (*). Jeder Primteiler von $[HK : K] = [H : H \cap K] \neq 1$ gehört zu $\mathfrak{C}(G/K) \cap \mathfrak{C}H$, womit (a) bewiesen ist. Hieraus folgt (b), da $\mathfrak{M}$ unendlich ist und die Ordnungen der Untergruppen aus $\mathfrak{M}$ paarweise teilerfremd sind.

Ist $R \neq 1$ ein radikaler Normalteiler von G/K, so ist R wegen (3. 1) eine Σ-Gruppe. Anwendung der Folgerung 4. 6 ergibt die Existenz einer von 1 verschiedenen, endlichen, elementar abelschen, primären charakteristischen Untergruppe P von R. Charakteristische Untergruppen von Normalteilern sind Normalteiler. Also ist P ein Normalteiler von G/K. Folglich gibt es einen Normalteiler J von G mit $K < J$ und $J/K = P$, so daß insbesondere J/K eine elementar abelsche p-Gruppe ist. Aus der Maximalität von K folgt, daß J nicht zu $\mathfrak{N}$ gehört. Also gibt es ein H in $\mathfrak{M}$ mit $H \leqq J$. Da H eine endliche Halluntergruppe von G und also von J ist, und da [G und also auch] J eine Σ-Gruppe ist, können wir Lemma 2. 2 anwenden:

$$(+) \qquad G = J\mathfrak{N}_G H.$$

Da K in $\mathfrak{N}$ liegt, gilt $H \not\leqq K$, so daß

$$1 < H/(K \cap H) \cong HK/K \leqq J/K$$

ist. Hieraus folgt, daß die Primzahl p zur Charakteristik von $H \leqq \mathfrak{N}_G H$ gehört. Da J/K eine p-Gruppe ist und $G/J \cong \mathfrak{N}_G H/[J \cap \mathfrak{N}_G H]$ aus (+) folgt, ergibt sich

$$(++) \qquad \mathfrak{C}(G/K) \leqq \mathfrak{C}(\mathfrak{N}_G H).$$

Nach Voraussetzung gibt es eine Untergruppe W in $\mathfrak{M}$ derart, daß $\mathfrak{C}(\mathfrak{N}_G H)$ und $\mathfrak{C}W$ keine Primzahl gemein haben. Dies widerspricht (++) und dem bereits bewiesenen (a), und aus diesem Widerspruch folgt (c).

Diskussion *der Folgerung* 4. 7. **A.** Aus (b) und (c) folgt insbesondere, daß die Σ-Gruppe G nicht radikal ist.

B. Wegen der Unendlichkeit von $\mathfrak{M}$ und der zweiten Voraussetzung über $\mathfrak{M}$ ist die dritte Voraussetzung über $\mathfrak{M}$ sicher dann erfüllt, wenn $\mathfrak{N}_G H$ für jedes H aus $\mathfrak{M}$ endlich ist.

C. Von den im Abschnitt **5** konstruierten Gruppen $G(\tilde{\omega})$ — siehe Satz 5. 3 — läßt sich zeigen, daß sie der in Folgerung 4. 7 behandelten Gruppenklasse angehören.

5. In diesem Abschnitt wollen wir die Existenz verschiedener merkwürdiger Σ-Gruppen zeigen. Dabei werden Kranzprodukte eine wesentliche Rolle spielen. Wir beginnen mit ihrer Beschreibung in einer für uns zweckmäßigen Form.

Sind A und $B \neq 1$ Gruppen, so sei (A, B) die Gruppe aller eindeutigen, auf A definierten, B-wertigen Funktionen. Ist a ein Element aus A und f eine Funktion aus (A, B), so werde die Funktion f^a durch die Regel

$$f^a(x) = f(ax) \text{ für jedes } x \text{ aus } A$$

definiert. Mit f gehört auch f^a zu (A, B); und die Abbildung $f \to f^a$ ist ein Automorphismus a^* von (A, B). Die Abbildung $a \to a^*$ erweist sich weiter als Isomorphismus von A in die Automorphismengruppe von (A, B), so daß wir a und a^* identifizieren können. Damit ist A zu einer Gruppe von Automorphismen von (A, B) geworden: wir können also im Holomorph von (A, B) das Produkt $A(A, B)$ bilden. Dies ist das Kranzprodukt $B \wr A$; es ist eine zerfallende Erweiterung seines Normalteilers (A, B) mit A als Komplement

von (A, B) in $B \bar{\imes} A$. Im folgenden wird diese Einbettung von A in $B \bar{\imes} A$ für uns von besonderer Wichtigkeit sein.

Hilfssatz 5. 1. *Ist N ein Normalteiler der Gruppe A und C ein Komplement von N in A, ist $B \neq 1$, so gibt es eine zu A in $B \bar{\imes} A$ konjugierte Untergruppe A^* mit $A \cap A^* = C$.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es ein Element $b \neq 1$ in B. Sei f die durch die Regel

$$f(x) = \begin{cases} b & \text{wenn } x \text{ zu } C \text{ gehört} \\ 1 & \text{wenn } x \text{ nicht zu } C \text{ gehört} \end{cases}$$

definierte Funktion aus (A, B). Wir setzen $A^* = f^{-1}Af$.

Ist c ein Element aus C, so ist

$$f^c(x) = f(cx) = \begin{cases} b & \text{für } x \text{ aus } C \\ 1 & \text{für } x \text{ nicht aus } C, \end{cases}$$

da ja cx dann und nur dann in der Untergruppe C von A liegt, wenn x zu C gehört. Also wird $f = f^c$; und dies ist mit $fc = cf$ äquivalent, woraus wir folgern:

(a) C wird von f zentralisiert.

Sei weiter a ein Element aus A, das nicht zu C gehört. Ist dann c irgendein Element aus C, so liegt ac ebenfalls nicht in C; und es wird

$$([f^a]^{-1}f)(c) = f(ac)^{-1}f(c) = b \neq 1,$$

so daß $f^{-a}f$ eine von 1 verschiedene Funktion aus (A, B) ist, die insbesondere nicht zu A gehört. Also gehört auch

$$a(f^{-a}f) = a(a^{-1}f^{-1}a)f = f^{-1}af$$

nicht zu A; und wir haben gezeigt:

(b) Ist a ein nicht in C liegendes Element aus A, so gehört $f^{-1}af$ nicht zu A.

Kombination von (a) und (b) ergibt das gewünschte $A \cap A^* = C$.

Lemma 5. 2. *Die Gruppe G ist eine abzählbare, nicht ko-hopfische Σ-Gruppe, wenn eine Untergruppenfolge U_i von G mit folgenden Eigenschaften existiert:*

(a) *Jedes U_i ist endlich, nilpotent und von 1 verschieden.*

(b) *Die Untergruppen U_i sind paarweise vertauschbar und paarweise teilerfremder Ordnung.*

(c) $G = \prod_{i=0}^{\infty} U_i$.

(d) $V_i = \prod_{j=0}^{i} U_j$ *ist für jedes i der Durchschnitt aller Untergruppen X mit $V_i \leqq X \leqq V_{i+2}$ und $o(X) = o(V_{i+1})$.*

Beweis. Wir weisen zunächst darauf hin, daß wegen der paarweisen Vertauschbarkeit der U_i jedes aus irgendwelchen Untergruppen U_i gebildete Komplexprodukt eine Untergruppe ist. Insbesondere folgt aus (a) und dem Satz von Kegel-Wielandt; vgl. Schenkman [p. 273, IX. 2. f. Theorem]:

(e) V_i ist endlich und auflösbar.

Kombination von (e) und (c) ergibt:

(f) G ist abzählbar und lokal endlich-auflösbar.

Ist p eine Primzahl aus der Charakteristik von G, so folgt aus (b) die Existenz eines und nur eines i derart, daß die Ordnung $o(U_i)$ durch p teilbar ist. Sei S eine p-Sylowuntergruppe von U_i. Ist $i < j$, so ist

$$V_j = V_{i-1} U_i \prod_{k=i+1}^{j} U_k;$$

und die drei Faktoren V_{i-1}, U_i, $\prod_{k=i+1}^{j} U_k$ sind endlich, auflösbar und von paarweise teilerfremder Ordnung, so daß S auch eine p-Sylowuntergruppe von V_j ist. Hieraus folgt zunächst, daß S eine p-Sylowuntergruppe von G ist. Aus der Endlichkeit von S folgt wegen (f) und Lemma 1. 1, (a) die Endlichkeit aller p-Sylowuntergruppen von G. Damit haben wir wegen (f) gezeigt:

(g) G ist eine abzählbare $\mathfrak{Z}$-Gruppe.

Sei wieder $i < j$ und X eine Untergruppe von V_j mit $o(X) = o(V_i)$. Dann sind X und V_i Halluntergruppen gleicher Ordnung von V_j [wegen (b)]; und Anwendung eines Hallschen Satzes zeigt, daß V_i und X in V_j konjugiert sind; siehe Huppert [p. 662, 1. 8 Hauptsatz]. Wir notieren:

(h) Ist $i < j$ und $X \leqq V_j$ mit $o(X) = o(V_i)$, so sind X und V_i in V_j konjugiert.

Da $U_1 \neq 1$ wegen (a) ist, gibt es in $V_1 = U_0 U_1$ ein nicht in U_0 gelegenes Element w. Wir werden durch vollständige Induktion Untergruppen W_i von G mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

(1) w liegt in keinem W_i.

(2) $o(V_i) = o(W_i)$ und $W_i \leqq W_{i+1} \cap V_{i+1}$ für $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Wir wählen $W_0 = V_0$. Wegen $V_0 = U_0$ gelten dann die Bedingungen (1) und (2). Wir können also die Induktionsannahme machen, daß $0 \leqq n$ ist und daß den Bedingungen (1) und (2) genügende Untergruppen W_i für $0 \leqq i \leqq n$ bereits konstruiert sind. Insbesondere liegt w nicht in W_n; und es gilt $o(V_n) = o(W_n)$, $W_n \leqq V_{n+1} \leqq V_{n+2}$. Anwendung von (h) ergibt, daß V_n und W_n in V_{n+2} konjugiert sind. Wegen Bedingung (d) ist also W_n der Durchschnitt aller Untergruppen X mit $W_n \leqq X \leqq V_{n+2}$ und $o(X) = o(V_{n+1})$. Da das Element w zwar in $V_i \leqq V_{n+2}$, aber nicht in W_n liegt, gibt es folglich eine w nicht enthaltende Untergruppe W_{n+1} mit $W_n \leqq W_{n+1} \leqq V_{n+2}$ und $o(W_{n+1}) = o(V_{n+1})$. Es folgt, daß auch die Untergruppen $W_0, \ldots, W_{n+1}$ den Bedingungen (1), (2) genügen, womit die induktive Konstruktion der Untergruppen W_i vollständig durchgeführt ist.

Wegen (2) ist die Vereinigungsmenge $W = \bigcup_{i=0}^{\infty} W_i$ eine Untergruppe von G. Da W wegen (1) das Element w nicht enthält, ist $W < G$. Ist S eine Sylowuntergruppe von G, so ist S wegen (g) endlich. Aus (c) folgt also die Existenz einer positiven ganzen Zahl h mit $S \leqq V_h$. Aus (2) [und (h)] folgt dann, daß S einer Untergruppe von $W_h \leqq W$ isomorph ist. Damit haben wir gezeigt, daß W den die Basisuntergruppen von $\mathfrak{Z}$-Gruppen definierenden Bedingungen genügt. Damit haben wir gezeigt:

(k) W ist eine von G verschiedene Basisuntergruppe von G.

Verbindung von (g), (k) mit Zusatz 4. 4 zeigt, daß G nicht ko-hopfisch, aber eine abzählbare $\mathfrak{Z}$-Gruppe ist.

Bemerkung. Wegen (3. 2) besitzt jede abzählbare $\mathfrak{Z}$-Gruppe eine den Bedingungen (a) bis (c) genügende Untergruppenfolge.

Satz 5. 3. *Ist $\tilde{\omega}$ eine unendliche Menge von Primzahlen, ist P_p für jede Primzahl p in $\tilde{\omega}$ eine endliche, von 1 verschiedene p-Gruppe, so gibt es eine abzählbare, nicht ko-hopfische Σ-Gruppe G mit $\mathfrak{C}G = \tilde{\omega}$, deren p-Sylowuntergruppen für jedes p aus $\tilde{\omega}$ direkte Produkte endlich vieler zu P_p isomorpher Gruppen sind.*

Beweis. Sei $p_1, \ldots, p_i, p_{i+1}, \ldots$ irgendeine Abzählung der unendlichen Primzahlmenge $\tilde{\omega}$. Dann definieren wir durch vollständige Induktion:

$V_0 = 1$,

$U_{i+1} = (V_i, P_{p_{i+1}}) =$ Gruppe aller auf V_i definierten, eindeutigen $P_{p_{i+1}}$-wertigen Funktionen,

$V_{i+1} = P_{p_{i+1}} \bar{\imath}\, V_i = U_{i+1} V_i$.

Man beweist dann durch naheliegende induktive Schlüsse, daß

$$V_i = \prod_{j=1}^{i} U_j,$$

U_i eine endliche p_i-Gruppe und genauer ein direktes Produkt endlich vieler zu P_{p_i} isomorpher Gruppen ist.

Weiter ist U_{i+1} ein Normalteiler von V_{i+1} und V_i ein Komplement von U_{i+1} in V_{i+1}. Es folgt, daß jedes U_i endlich, auflösbar und von 1 verschieden ist, und daß die U_i paarweise vertauschbar und paarweise teilerfremder Ordnung sind. Aus $V_i \leqq V_{i+1}$ folgt weiter, daß wir die Vereinigungsgruppe

$$G = \bigcup_{i=0}^{\infty} V_i$$

bilden können; und wegen $V_i = \prod_{j=1}^{i} U_j$ wird

$$G = \prod_{i=1}^{\infty} U_j.$$

Die Gruppe G und ihre Untergruppen U_i genügen also den Bedingungen (a), (b), (c) des Lemma 5. 2. Ist weiter $0 < i$, so substituieren wir in Hilfssatz 5. 1 nach dem Schema

N	A	B	C	$B \bar{\imath} A$
U_i	V_i	$P_{p_{i+1}}$	V_{i-1}	$P_{p_{i+1}} \bar{\imath}\, V_i = V_{i+1}$

Es folgt die Existenz einer zu V_i in V_{i+1} konjugierten Untergruppe X mit $V_i \cap X = V_{i-1}$; und damit haben wir gezeigt, daß die Gruppe G und die Untergruppen U_i von G auch der Bedingung (d) des Lemma 5. 2 genügen. Also ist G eine abzählbare, nicht ko-hopfische Σ-Gruppe. Weiter sieht man ein, daß jedes U_i eine p_i-Sylowuntergruppe von G ist, und daß die Charakteristik $\mathfrak{C}G$ genau die Menge $\tilde{\omega}$ der Primzahlen p_i ist: die Gruppe G hat alle gewünschten Eigenschaften.

Diskussion *des Satzes* 5. 3: **A.** Die in Satz 5. 3 konstruierten Gruppen können als Sylowturmgruppen — allerdings mit einem „invertierten" Sylowturm — angesprochen werden.

B. Da es $2^{\aleph_0}$ unendliche Teilmengen der Menge aller Primzahlen gibt, enthält die im Satz 5. 3 angegebene Familie von abzählbaren, nicht ko-hopfischen Σ-Gruppen $2^{\aleph_0}$ nicht-isomorphe Individuen.

C. Vergleich der im Beweis des Satzes 5. 3 durchgeführten Konstruktion mit Lemma 5. 2 zeigt, daß wir die gebotenen Freiheitsgrade nicht voll ausgenutzt haben.

Folgerung 5. 4. *Es gibt überabzählbar unendliche Σ-Gruppen.*

Dies folgt sofort durch Kombination von Satz 5. 3 und Satz 4. 2.

Wir wollen zeigen, daß die hyperabelschen Σ-Gruppen im Rahmen der durch Folgerung 4. 6 gezogenen Grenzen beliebig kompliziert sein können. Dies zu tun, seien die folgenden Begriffe eingeführt.

Ist G eine Gruppe, so ist *das Hirsch-Plotkinsche Radikal von* G das Produkt $\mathfrak{F}G$ aller lokal nilpotenten Normalteiler von G; diese charakteristische Untergruppe von G ist bekanntlich selbst lokal nilpotent; siehe etwa Schenkman [p. 205, 4. 7. b. Theorem]. Die *Radikalreihe* $\mathfrak{F}_\sigma G$ *von* G wird dann induktiv durch die folgenden Regeln für alle Ordinalzahlen σ definiert:

$$\mathfrak{F}_0 G = 1,\ \mathfrak{F}_{\sigma+1} G/\mathfrak{F}_\sigma G = \mathfrak{F}[G/\mathfrak{F}_\sigma G],$$

$$\mathfrak{F}_\lambda G = \bigcup_{\sigma<\lambda} \mathfrak{F}_\sigma G \text{ für Limeszahlen } \lambda.$$

Natürlich ist die Gruppe G dann und nur dann radikal im Plotkinschen Sinne, wenn $G = \mathfrak{F}_\beta G$ für geeignetes β gilt. Es gibt dann auch eine eindeutig bestimmte kleinste Ordinalzahl mit dieser Eigenschaft, die wir als den *Radikalitätsindex* ϱG *von* G bezeichnen wollen.

Satz 5. 5. *Ist β eine abzählbare Ordinalzahl und $\mathfrak{C}$ eine unendliche Menge von Primzahlen, so gibt es eine radikale Σ-Gruppe G mit $\mathfrak{C}G = \mathfrak{C}$ und $\varrho G = \beta$.*

Beweis. Der Konstruktion der gesuchten Gruppen seien zwei einfache Hilfssätze vorausgeschickt:

(5. 5. a) *Ist $\mathfrak{M}$ eine abzählbare Menge radikaler Σ-Gruppen, ist $\mathfrak{C}X \cap \mathfrak{C}Y$ leer für $X \neq Y$ in $\mathfrak{M}$, so ist das direkte Produkt G der Gruppen in $\mathfrak{M}$ eine radikale Σ-Gruppe, deren Charakteristik die Vereinigungsmenge der Charakteristiken der Gruppen in $\mathfrak{M}$ und deren Radikalitätsindex die obere Grenze der Radikalitätsindices der Gruppen in $\mathfrak{M}$ ist.*

Hierbei werde unter einem direkten Produkt das klassische direkte Produkt [= beschränktes direktes Produkt, also nicht das cartesische Produkt] verstanden, das also als Produkt von unabhängigen Normalteilern der vorgegebenen Struktur dargestellt werden kann. — Der einfache Beweis dieses Hilfssatzes sei dem Leser überlassen.

(5. 5. b) *Ist G eine radikale Σ-Gruppe und N eine endliche nilpotente Gruppe mit leerem $\mathfrak{C}N \cap \mathfrak{C}G$, so ist das Kranzprodukt $G \wr N$ eine radikale Σ-Gruppe, deren Charakteristik die Vereinigungsmenge der Charakteristiken von N und G und deren Radikalitätsindex $= \varrho G + 1$ ist.*

Der einfache Beweis sei ebenfalls dem Leser überlassen.

Wir wenden uns nun dem Beweis unseres Satzes zu. Das direkte Produkt der zyklischen Gruppen $Z(p)$ mit Primzahlordnung p aus der Menge $\mathfrak{C}$ ist offenbar eine radikale Σ-Gruppe vom Radikalitätsindex 1, deren Charakteristik genau die Menge $\mathfrak{C}$ ist; natürlich können wir an die Stelle von $Z(p)$ irgendeine endliche, von 1 verschiedene p-Gruppe setzen. Damit haben wir die Verankerung der vorgesehenen transfiniten Induktion vorgenommen und können also die Induktionsannahme machen:

(+) Es sei β eine Ordinalzahl mit $1 \leqq \beta < \Omega$ und für jede unendliche Primzahlmenge $\mathfrak{C}$ und jede Ordinalzahl σ mit $0 < \sigma < \beta$ gebe es eine radikale Σ-Gruppe X mit $\mathfrak{C}X = \mathfrak{C}$ und $\varrho X = \sigma$.

Fall 1. $\beta = \lambda + 1$.

Die unendliche Primzahlmenge $\mathfrak{C}$ werde irgendwie in unendlich viele unendliche Teilmengen zerlegt, die paarweise keine Primzahlen gemein haben. Eine dieser Mengen

nennen wir $\mathfrak{E}_0$ und die übrigen nennen wir $\mathfrak{E}_p$ mit den Primzahlen p aus $\mathfrak{E}_0$ als Indices. Nach Induktionsannahme gibt es für jedes p in $\mathfrak{E}_0$ eine radikale $\mathfrak{Z}$-Gruppe $G(p)$ mit $\mathfrak{E}G(p) = \mathfrak{E}_p$ und $\varrho G(p) = \lambda$. Weiter sei für jedes p aus $\mathfrak{E}_0$ eine endliche, von 1 verschiedene p-Gruppe $N(p)$ gegeben.

Aus (5. 3. b) folgern wir, daß das Kranzprodukt $G(p) \bar{\imath} N(p)$ für jedes p aus $\mathfrak{E}_0$ eine radikale $\mathfrak{Z}$-Gruppe ist, deren Charakteristik aus $\mathfrak{E}_p$ und p besteht, und deren Radikalitätsindex $\lambda + 1 = \beta$ ist.

Aus (5. 3. a) folgern wir, daß das direkte Produkt der Kranzprodukte $G(p) \bar{\imath} N(p)$ ebenfalls eine radikale $\mathfrak{Z}$-Gruppe ist, deren Charakteristik genau $\mathfrak{E}$ und deren Radikalitätsindex β ist.

Fall 2. β ist eine Limeszahl.

Aus der Abzählbarkeit von β folgt die Existenz von Ordinalzahlen β_i für ganzes positives i mit $0 < \beta_i < \beta$, deren obere Grenze β ist. Die unendliche Primzahlmenge $\mathfrak{E}$ werde irgendwie in unendlich viele unendliche Teilmengen $\mathfrak{E}_i$ für ganzes positives i zerlegt, die paarweise keine Primzahlen gemein haben. Nach Induktionsannahme gibt es für jedes i eine radikale $\mathfrak{Z}$-Gruppe $G(i)$ mit $\mathfrak{E}G(i) = \mathfrak{E}_i$ und $\varrho G(i) = \beta_i$. Aus (5. 3. a) folgt dann, daß das direkte Produkt der Gruppen $G(i)$ eine radikale $\mathfrak{Z}$-Gruppe ist, deren Charakteristik genau $\mathfrak{E}$ und deren Radikalitätsindex die obere Grenze β der β_i ist.

Damit ist die transfinite Induktion vollständig durchgeführt und unser Satz bewiesen.

Diskussion *der Freiheitsgrade der vorstehenden Gruppenkonstruktionen.* **A.** Da alle radikalen $\mathfrak{Z}$-Gruppen wegen Folgerung 4. 6 abzählbar sind, ist auch ihr Radikalitätsindex abzählbar. Man bemerke, daß wir von der Abzählbarkeit des Radikalitätsindex im Limesschritt unseres Beweises Gebrauch gemacht haben.

B. Aus der Konstruktion im Falle $\beta = \lambda + 1$ wird ersichtlich, daß wir die Faktoren der Radikalreihe ziemlich frei vorschreiben können — freilich in dem durch Hilfssatz 4. 5 gezogenen Rahmen als direkte Produkte endlicher p-Gruppen. Insbesondere können wir sie abelsch wählen oder aber sogar nicht-auflösbar.

C. Kombination unseres Satzes mit der Diskussionsbemerkung **B** zeigt, daß man auch die Länge der Loewyreihe [und manch anderer Reihe] beliebig von abzählbarem Ordnungstyp vorschreiben kann.

D. Lemma 1. 2 zeigt die Unentbehrlichkeit der Voraussetzung, daß die Primzahlmenge $\mathfrak{E}$ unendlich sei.

6. Wir haben bisher vorwiegend die Eigenschaften abzählbarer $\mathfrak{Z}$-Gruppen analysiert. Im Abschnitt **5** haben wir aber die Existenz überabzählbar unendlicher $\mathfrak{Z}$-Gruppen bewiesen. Wir wollen deshalb jetzt einige der bisher nur für abzählbare $\mathfrak{Z}$-Gruppen bewiesenen Eigenschaften auf beliebige $\mathfrak{Z}$-Gruppen ausdehnen.

Satz 6. 1. *Ist G eine $\mathfrak{Z}$-Gruppe, so ist*

(a) $\bigcap_{i=0}^{\infty} G^{(i)} = 1$;

(b) *G residuell endlich-auflösbar.*

Bemerkung. Dieses Resultat findet sich schon bei Černikov [Satz 1]; der Beweis sei der Bequemlichkeit des Lesers wegen ausgeführt.

Beweis. Wir erinnern zunächst an die folgende leicht durch vollständige Induktion beweisbare Eigenschaft:

(1) Ist x ein Element aus $X^{(i)}$, so gibt es eine endlich erzeugbare Untergruppe E der Gruppe X derart, daß x zu $E^{(i)}$ gehört.

Sei nun J eine Gruppe derart, daß $\bigcap_{i=0}^{\infty} U^{(i)} = 1$ für jede abzählbare Untergruppe U von J gilt. Ist dann d ein Element aus $\bigcap_{i=0}^{\infty} J^{(i)}$, so folgt aus (1), daß es zu jedem positiven ganzen i eine endlich erzeugbare Untergruppe E_i von J derart gibt, daß d in $E_i^{(i)}$ liegt. Das Erzeugnis A aller E_i ist eine abzählbare Untergruppe von J. Aus der Zugehörigkeit von d zu $E_i^{(i)} \leqq A^{(i)}$ folgt die Zugehörigkeit von d zu $\bigcap_{i=0}^{\infty} A^{(i)}$. Aus der Abzählbarkeit der Untergruppe A von J und unserer Voraussetzung folgt $\bigcap_{i=0}^{\infty} A^{(i)} = 1$. Also ist auch $d = 1$; und wir haben $\bigcap_{i=0}^{\infty} J^{(i)} = 1$ gezeigt. Wir notieren:

(2) Ist J eine Gruppe derart, daß $\bigcap_{i=0}^{\infty} U^{(i)} = 1$ für jede abzählbare Untergruppe U von J gilt, so ist auch $\bigcap_{i=0}^{\infty} J^{(i)} = 1$.

Ist nun U eine abzählbare Untergruppe unserer Σ-Gruppe G, so ist U eine Σ-Gruppe [wegen (3. 1)], so daß $\bigcap_{i=0}^{\infty} U^{(i)} = 1$ aus (3. 3) folgt. Also können wir (2) anwenden, um (a) zu beweisen.

$G/G^{(i)}$ ist für jedes i auflösbar und eine Σ-Gruppe wegen (3. 1). Es folgt aus Folgerung 4. 6, (3. 3), Zusatz 4. 4:

(3) $G/G^{(i)}$ ist für jedes i residuell endlich, abzählbar und ko-hopfisch, seine einzige Basisuntergruppe.

Aus (a) und (3) folgt (b).

Folgerung 6. 2. *Die folgenden Eigenschaften der Untergruppe U der Σ-Gruppe G sind äquivalent:*

(i) *U und G haben den gleichen Basistyp.*

(ii) *Ist σ ein Epimorphismus von G auf die abzählbare, ko-hopfische Gruppe E, so ist $U^\sigma = E$.*

(iii) *Ist σ ein Epimorphismus von G auf die radikale Gruppe E, so ist $U^\sigma = E$.*

(iv) *$G = UG^{(i)}$ für alle i.*

(v) *Ist N ein Normalteiler von G mit endlichem G/N, so ist $G = UN$.*

Beweis. Wir nehmen zuerst an, daß U und G den gleichen Basistyp haben. Sei σ ein Epimorphismus von G auf die abzählbare, ko-hopfische Gruppe E. Wegen Satz 3. 6 besitzt die Σ-Gruppe U eine Basisuntergruppe B; und B ist wegen (3. 10) eine Basisuntergruppe von G. Aus (3. 4, 3) folgt, daß B^σ eine Basisuntergruppe von $G^\sigma = E$ ist. Da E eine abzählbare Σ-Gruppe ist, ist E eine Basisuntergruppe von E; und wir folgern $B^\sigma \cong E$ aus Satz 3. 6. Da $B^\sigma \leqq E$ und E ko-hopfisch ist, folgt $B^\sigma = E$. Aus $B \leqq U$ folgern wir schließlich $E = B^\sigma \leqq U^\sigma \leqq G^\sigma = E$, so daß $U^\sigma = E$ wird. Damit haben wir (ii) aus (i) abgeleitet.

Radikale Σ-Gruppen sind wegen Folgerung 4. 6 abzählbar und ko-hopfisch. Also folgt (iii) aus (ii).

Gilt (iii), so liefert der kanonische Epimorphismus von G auf die auflösbare und also a fortiori radikale Gruppe $G/G^{(i)}$ die Gleichung $UG^{(i)}/G^{(i)} = G/G^{(i)}$, woraus $UG^{(i)} = G$ folgt: (iv) folgt aus (iii).

Wir nehmen die Gültigkeit von (iv) an und betrachten einen Normalteiler N mit endlichem G/N. Da G lokal endlich-auflösbar ist, ist G/N auflösbar. Also gibt es eine positive ganze Zahl n mit $G^{(n)} \leqq N$. Aus (iv) folgt dann

$$G = UG^{(n)} \leqq UN \leqq G \text{ und also } G = UN;$$

und damit haben wir (v) aus (iv) hergeleitet.

Wir nehmen schließlich die Gültigkeit von (v) an. Ist p eine Primzahl und S eine p-Sylowuntergruppe von G, so ist S endlich, da G eine $\mathfrak{L}$-Gruppe ist. Bedenken wir, daß jede Untergruppe von endlichem Index einen Normalteiler von endlichem Index enthält, und daß der Durchschnitt endlich vieler Untergruppen von endlichem Index [nach Poincaré's Satz] ebenfalls eine Untergruppe von endlichem Index ist, so folgt aus Satz 6. 1, (b) die Existenz eines Normalteilers N mit endlichem G/N und $N \cap S = 1$. Anwendung von Lemma 1. 1, (d) zeigt, daß 1 eine p-Sylowuntergruppe von N ist und daß also 1 die einzige p-Untergruppe von N ist. Weiter wird

$$S = S/(N \cap S) \cong SN/N;$$

und aus Lemma 1. 1, (d) folgt, daß SN/N eine p-Sylowuntergruppe von G/N ist. Aus Lemma 1. 1, (a) folgt also, daß S zu allen p-Sylowuntergruppen von G/N isomorph ist. Ist weiter T eine p-Sylowuntergruppe von U, so ist

$$T(U \cap N)/(U \cap N) \cong T/(T \cap U \cap N) = T,$$

da ja 1 die einzige p-Untergruppe von N ist. Aus Lemma 1. 1, (d) folgt, daß $T(U \cap N)/(U \cap N)$ eine p-Sylowuntergruppe von

$$U/(U \cap N) \cong UN/N = G/N$$

[wegen (v)] ist. Wir haben aber vorher gezeigt, daß die p-Sylowuntergruppen von G/N sämtlich zu S isomorph sind. Also wird $T \cong S$; und wir haben gezeigt, daß die Untergruppe U der $\mathfrak{L}$-Gruppe G der Bedingung (iii) von (3. 10) genügt: U und G haben den gleichen Basistyp, womit die Äquivalenz der Bedingungen (i) bis (v) dargetan ist.

Folgerung 6. 3. *Die Mächtigkeit einer $\mathfrak{L}$-Gruppe ist höchstens $2^{\aleph_0}$.*

Beweis. Ist G eine $\mathfrak{L}$-Gruppe, so ergibt sich aus Satz 6. 1, (a), daß G einer Untergruppe des cartesischen Produkts der Gruppen $G/G^{(i)}$ isomorph ist. Jedes $G/G^{(i)}$ ist als auflösbare $\mathfrak{L}$-Gruppe wegen Folgerung 4. 6 abzählbar. Ein cartesisches Produkt abzählbar vieler, abzählbarer Gruppen hat aber höchstens die Mächtigkeit des Kontinuums, so daß die Mächtigkeit von G höchstens $2^{\aleph_0}$ ist.

Die $\mathfrak{L}$-Gruppe G möge *maximal* heißen, wenn sie der folgenden Bedingung genügt:

Ist X eine $\mathfrak{L}$-Gruppe mit $G \leqq X$, haben die $\mathfrak{L}$-Gruppen G und X den gleichen Basistyp, so ist $G = X$.

Zur Definition der Gleichheit des Basistyps von $\mathfrak{L}$-Gruppen vgl. besonders (3. 10); siehe auch Folgerung 6. 2.

Satz 6. 4. *Maximale $\mathfrak{L}$-Gruppen sind ko-hopfisch.*

Beweis. Ist die $\mathfrak{L}$-Gruppe G nicht ko-hopfisch, so ist G einer echten Untergruppe isomorph; und dies ist äquivalent mit der Existenz einer Gruppe X mit $G < X \cong G$. Dann ist X auch eine $\mathfrak{L}$-Gruppe und jede Basisuntergruppe von X ist einer Basisuntergruppe von G isomorph. Wegen Satz 3. 6 sind alle Basisuntergruppen von G und X einander isomorph: die $\mathfrak{L}$-Gruppen G und X haben den gleichen Basistyp. Wegen $G < X$ ist also G nicht maximal. Es folgt, daß maximale $\mathfrak{L}$-Gruppen auch ko-hopfisch sind.

Satz 6. 5. *Jede Σ-Gruppe ist in einer maximalen Σ-Gruppe vom gleichen Basistyp enthalten.*

Beweis. Wäre dies nicht wahr, so gäbe es eine Σ-Gruppe G, die in keiner maximalen Σ-Gruppe vom gleichen Basistyp enthalten ist. G hätte also die folgende Eigenschaft:

(1) Ist G Untergruppe der Σ-Gruppe X, sind G und X vom gleichen Basistyp, so ist X nicht maximal.

Ist X eine nicht-maximale Σ-Gruppe, so gibt es eine Σ-Gruppe Y mit $X < Y$ derart, daß X und Y vom gleichen Basistyp sind. Anwendung von (3. 10) zeigt, daß jede Basisuntergruppe von X auch eine Basisuntergruppe von Y ist. Also ergibt sich aus (1):

(2) Ist G Untergruppe der Σ-Gruppe X, ist jede Basisuntergruppe von G auch eine Basisuntergruppe von X, so gibt es eine Σ-Gruppe Y mit $X < Y$ derart, daß jede Basisuntergruppe von G eine Basisuntergruppe von Y ist.

Sei Δ irgendeine Ordinalzahl, deren Mächtigkeit größer [mit Ausschluß der Gleichheit] als $2^{\aleph_0}$ ist. Wir wollen durch transfinite Induktion eine Folge von Gruppen G_σ mit $0 \leqq \sigma \leqq \Delta$ konstruieren, die den folgenden Bedingungen genügen:

(a) $G_0 = G$.

(b) $G_\sigma < G_{\sigma+1}$.

(c) $G_\lambda = \bigcup_{\sigma<\lambda} G_\sigma$ für Limeszahlen λ.

(d) Jedes G_σ ist eine Σ-Gruppe: und G und G_σ haben den gleichen Basistyp.

Da die aus der Σ-Gruppe $G_0 = G$ bestehende Reihe offenbar den Bedingungen (a) bis (d) genügt, können wir die folgende Induktionsannahme machen:

(+) Es sei λ eine Ordinalzahl mit $0 < \lambda \leqq \Delta$ derart, daß den Bedingungen (a) bis (d) genügende Gruppen G_σ für $0 \leqq \sigma < \lambda$ bereits konstruiert sind.

Dann folgt aus (b) und (c) mühelos:

(e) $G_{\sigma'} < G_{\sigma''}$ für $0 \leqq \sigma' < \sigma'' < \lambda$.

Um G_λ zu konstruieren, unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem λ eine Limeszahl ist oder nicht.

Fall 1. $\lambda = \beta + 1$.

Dann ist G_β bereits konstruiert; und aus (a), (e) folgt $G = G_0 \leqq G_\beta$. Wegen (d) ist G_β eine Σ-Gruppe vom gleichen Basistyp wie G. Wegen (3. 10) ist dann jede Basisuntergruppe von G auch eine Basisuntergruppe von G_β. Also folgt aus (2) die Existenz einer Σ-Gruppe G_λ mit $G_\beta < G_\lambda$ derart, daß jede Basisuntergruppe von G eine Basisuntergruppe von G_λ ist. Aus (3. 10) folgt dann, daß die Σ-Gruppen G und G_λ den gleichen Basistyp haben. Also genügt auch die verlängerte Reihe der G_σ mit $0 \leqq \sigma \leqq \lambda = \beta + 1$ den Bedingungen (a) bis (d).

Fall 2. λ ist eine Limeszahl.

Wegen (e) können wir dann die Vereinigungsgruppe

$$G_\lambda = \bigcup_{\sigma<\lambda} G_\sigma$$

bilden; und es ist klar, daß auch die verlängerte Reihe der G_σ mit $0 \leqq \sigma \leqq \lambda$ den Bedingungen (a), (b), (c) genügt. Um (d) zu verifizieren, genügt es [wegen (+)] zu zeigen, daß G_λ selbst der Bedingung (d) genügt.

Jede endliche Teilmenge E von G_λ ist bereits in einem G_σ mit $\sigma < \lambda$ enthalten, so daß wegen der Induktionsannahme (+) und $\{E\} \leqq G_\sigma$ die endlich erzeugbare Untergruppe $\{E\}$ der Σ-Gruppe G_σ endlich und auflösbar ist: G_λ ist lokal endlich-auflösbar.

Sei weiter p eine Primzahl und q die [wegen Lemma 1. 1, (a)] gemeinsame endliche Ordnung aller p-Sylowuntergruppen von G. Aus (d) und (3. 10) folgern wir, daß jede p-Sylowuntergruppe von G_σ mit $\sigma < \lambda$ endlich der Ordnung q ist. Also ist für $\sigma < \lambda$ jede p-Untergruppe von G_σ endlich mit q teilender Ordnung. Wir betrachten eine p-Sylowuntergruppe S von G_λ. Ist $\sigma < \lambda$, so ist $S \cap G_\sigma$ als p-Untergruppe von G_σ endlich mit q teilender [also beschränkter] Ordnung. Folglich gibt es unter diesen Durchschnitten $S \cap G_\sigma$ mit $\sigma < \lambda$ einen $S \cap G_\beta$ mit maximaler Ordnung. Aus (e) folgt dann

$$S \cap G_\beta = S \cap G_\sigma \text{ für } \beta \leqq \sigma < \lambda$$

und also

$$S = \bigcup_{\beta \leqq \sigma < \lambda} (S \cap G_\sigma) = S \cap G_\beta \leqq G_\beta \text{ mit } \beta < \lambda.$$

Damit haben wir aber gezeigt: jede Sylowuntergruppe S von G_λ ist endlich und in einem G_λ mit $\beta < \lambda$ enthalten; und aus (d) und (3. 10) folgt, daß die p-Sylowuntergruppe S von G_λ mit einer p-Sylowuntergruppe von $G = G_0$ isomorph ist. Damit haben wir aber gezeigt, daß G_λ eine $\mathfrak{Z}$-Gruppe ist, und daß die $\mathfrak{Z}$-Gruppen G und G_λ wegen (3. 10) den gleichen Basistyp haben: G_λ genügt der Bedingung (d).

Damit haben wir den Bedingungen (a) bis (d) genügende Gruppen G_σ für $0 \leqq \sigma \leqq \Delta$ [durch transfinite Induktion] konstruiert. Aus (b) folgern wir, daß die Mächtigkeit von G_Δ wenigstens so groß wie die von Δ und also größer [mit Ausschluß der Gleichheit] als $2^{\aleph_0}$ ist. Dies widerspricht (d) und Folgerung 6. 3; und aus diesem Widerspruch folgt die Gültigkeit unseres Satzes 6. 5.

Folgerung 6. 6. *Jede abzählbare $\mathfrak{Z}$-Gruppe ist Basisuntergruppe einer ko-hopfischen $\mathfrak{Z}$-Gruppe.*

Dies ergibt sich sofort aus Satz 6. 5 und 6. 4, da ja abzählbare $\mathfrak{Z}$-Gruppen stets Basisuntergruppen von sich selbst sind.

Folgerung 6. 7. *Es gibt überabzählbar unendliche, ko-hopfische $\mathfrak{Z}$-Gruppen.*

Beweis. Aus Satz 5. 3 folgt die Existenz abzählbarer, aber nicht ko-hopfischer $\mathfrak{Z}$-Gruppen G. Eine solche Gruppe G ist wegen Folgerung 6. 6 Basisuntergruppe einer ko-hopfischen $\mathfrak{Z}$-Gruppe H. Wäre H abzählbar, so wäre H Basisuntergruppe von H, so daß $H \cong G$ aus Satz 3. 6 folgen würde. Dann wäre aber G ko-hopfisch, ein Widerspruch aus dem die Überabzählbarkeit der ko-hopfischen $\mathfrak{Z}$-Gruppe H folgt.

Bemerkung 6. 8. A. Folgerung 4. 6 besagt, daß radikale $\mathfrak{Z}$-Gruppen abzählbar und ko-hopfisch sind. Also zeigt Folgerung 6. 7 die Existenz nicht-radikaler, aber ko-hopfischer $\mathfrak{Z}$-Gruppen.

B. Ist G eine der wegen Folgerung 6. 7 existierenden überabzählbar unendlichen, ko-hopfischen $\mathfrak{Z}$-Gruppen, so folgt aus Satz 4. 2, daß die Basisuntergruppen von G nicht ko-hopfisch sind.

Folgerung 6. 9. *Die folgenden Eigenschaften der $\mathfrak{Z}$-Gruppe G sind äquivalent:*

(i) *G ist abzählbar und ko-hopfisch.*

(ii) *G ist abzählbar und maximal.*

(iii) *Ist die $\mathfrak{Z}$-Gruppe X vom gleichen Basistyp wie G, so ist $G \cong X$.*

(iv) *Ist die $\mathfrak{Z}$-Gruppe X vom gleichen Basistyp wie G, so sind G und X gleichmächtig.*

(v) *Ist die $\mathfrak{Z}$-Gruppe X vom gleichen Basistyp wie G, so ist X maximal.*

Beweis. Wegen Satz 6. 4 folgt (i) aus (ii). — Ist weiter G abzählbar und ko-hopfisch, so ist insbesondere G eine Basisuntergruppe von G. Ist weiter X eine Σ-Gruppe vom gleichen Basistyp wie G, so folgt, daß G mit allen Basisuntergruppen von X isomorph ist. Also sind die Basisuntergruppen von X ko-hopfisch; und Anwendung von Satz 4. 2 zeigt, daß X abzählbar ist. Folglich ist X eine Basisuntergruppe von X, woraus $G \cong X$ folgt. Damit haben wir (iii) aus (i) hergeleitet. — Es ist klar, daß (iv) aus (iii) folgt. — Wir nehmen die Gültigkeit von (iv) an. Aus Satz 6. 5 folgt die Existenz einer maximalen Σ-Gruppe M mit $G \leqq M$, die vom gleichen Basistyp wie G ist. Ist B eine Basisuntergruppe von G, so ist B natürlich auch vom gleichen Basistyp wie G. Aus (iv) folgt die Gleichmächtigkeit von B, G und M, so daß insbesondere B, G und M abzählbar sind. Also ist M eine Basisuntergruppe von M und G ist eine Basisuntergruppe von $G \leqq M$. Da G und M vom gleichen Basistyp sind, ist G eine Basisuntergruppe von M; und aus (3. 10) folgt $G \cong M$. Also ist G abzählbar und maximal: (ii) folgt aus (iv) und wir haben die Äquivalenz von (i) bis (iv) dargetan.

Gelten die äquivalenten Bedingungen (i) bis (iv), ist die Σ-Gruppe X vom gleichen Basistyp wie G, so folgt $G \cong X$ aus (iii); und die Maximalität von X folgt aus (ii). Damit haben wir (v) aus den äquivalenten Bedingungen (i) bis (iv) hergeleitet. — Gilt umgekehrt (v), so ist jede Basisuntergruppe B von G vom gleichen Basistyp wie G und also maximal, so daß $B = G$ aus $B \leqq G$ folgt. Also ist G selbst maximal und abzählbar: wir haben (ii) aus (v) hergeleitet und die Äquivalenz von (i) bis (v) dargetan.

Bemerkung 6. 10. A. Aus Folgerung 6. 7 und Satz 6. 5 ergibt sich die Existenz überabzählbar unendlicher, maximaler Σ-Gruppen. Das zeigt insbesondere, daß wir in Folgerung 6. 9, (ii) die Abzählbarkeitsforderung nicht entbehren können.

B. Die Frage, ob ko-hopfische Σ-Gruppen stets maximal sind, haben wir nicht entscheiden können.

7. Für das Studium einer Unterklasse der Klasse der Σ-Gruppen, dem dieser Abschnitt gewidmet ist, benötigen wir Verallgemeinerungen einiger unserer Resultate über Sylowsysteme. Hierzu benötigen wir den Begriff des Hallsystems, dessen Definition wir an den Anfang unserer Überlegungen stellen wollen.

Ein Hallsystem der Torsionsgruppe G ist eine Menge $\mathfrak{H}$ von Untergruppen $\neq 1$ von G mit folgenden Eigenschaften:

(7. I) Jede Untergruppe in $\mathfrak{H}$ ist eine Halluntergruppe von G.

(7. II) Sind X und Y verschiedene Untergruppen aus $\mathfrak{H}$, so ist $\mathfrak{C}X \cap \mathfrak{C}Y$ leer und $XY = YX$.

(7. III) Zu jeder Primzahl p aus $\mathfrak{C}G$ gibt es eine [und nur eine] Untergruppe in $\mathfrak{H}$, die eine p-Sylowuntergruppe von G enthält.

Die eingeklammerte Einzigkeitsforderung in (7. III) ist mit der ersten Hälfte der Bedingung (7. II) äquivalent.

Ist $\mathfrak{H}$ ein Hallsystem der Torsionsgruppe G, so bilden die Charakteristiken $\mathfrak{C}X$ mit X in $\mathfrak{H}$ wegen (7. II) und (7. III) eine Partition $\boldsymbol{p}\mathfrak{H}$ der Charakteristik $\mathfrak{C}G$, die wir auch als *Typus des Hallsystems* $\mathfrak{H}$ bezeichnen werden.

Ist $\mathfrak{S}$ ein Sylowsystem der Torsionsgruppe G und $\boldsymbol{p}$ eine Partition der Charakteristik $\mathfrak{C}G$, so sei für jede Komponente $\mathfrak{X}$ von $\boldsymbol{p}$

$G_{\mathfrak{S},\mathfrak{X}}$ das Produkt der p-Sylowuntergruppen aus $\mathfrak{S}$ mit p in $\mathfrak{X}$.

Man überzeugt sich mühelos davon, daß die $G_{\mathfrak{S},\mathfrak{X}}$ mit $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{p}$ ein Hallsystem von G bilden, dessen Typus genau $\mathfrak{p}$ ist: *das von dem Sylowsystem* $\mathfrak{S}$ *abgeleitete Hallsystem* $\mathfrak{H}(\mathfrak{S},\mathfrak{p})$ *des Typus* $\mathfrak{p}$.

Lemma 7. 1. *Ist U eine Untergruppe der Σ-Gruppe G und $\mathfrak{p}$ eine Partition der Charakteristik $\mathfrak{C}G$, deren Komponenten endlich sind, so ist U dann und nur dann eine Basisuntergruppe von G, wenn U Produkt eines Hallsystems von G mit Typus $\mathfrak{p}$ ist.*

Beweis. Ist erstens U Produkt eines Hallsystems von G, dessen Typus $\mathfrak{p}$ ist, so sind die Komponenten dieses Hallsystems [wegen (3. 1)] Σ-Gruppen endlicher Charakteristik, die wegen Lemma 1. 2 endlich sind. Als Komplexprodukt abzählbar vieler endlicher Untergruppen ist U eine abzählbare Untergruppe, die für jede Primzahl p eine p-Sylowuntergruppe von G enthält und also eine Basisuntergruppe von G ist. — Ist umgekehrt U eine Basisuntergruppe von G, so ist U eine abzählbare Σ-Gruppe, die wegen Lemma 2. 1 Produkt eines seiner Sylowsysteme $\mathfrak{S}$ ist. Wegen (3. 4) ist $\mathfrak{S}$ auch ein Sylowsystem von G. Wir leiten von $\mathfrak{S}$ das Hallsystem $\mathfrak{H}(\mathfrak{S},\mathfrak{p})$ des Typus $\mathfrak{p}$ ab. Natürlich ist U auch das Produkt dieses Hallsystems von G.

Bemerkung 7. 2. A. Die Voraussetzung, daß die Komponenten der Partition $\mathfrak{p}$ endlich sind, wurde nur beim Beweis des Hinreichens unserer Bedingung benutzt.

B. Nach Satz 3. 6 besitzt jede Σ-Gruppe Basisuntergruppen. Diese sind wie wir gerade bewiesen haben, Produkte von Hallsystemen von beliebigem vorgegebenen Typus. Damit ist gezeigt, daß Σ-Gruppen Hallsysteme beliebigen Typs besitzen.

Satz 7. 3. *Ist G eine Σ-Gruppe und $\mathfrak{H}$ ein aus endlichen Halluntergruppen bestehendes Hallsystem von G, so gibt es ein Sylowsystem $\mathfrak{S}$ von G mit $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\mathfrak{S},\mathfrak{p}\mathfrak{H})$.*

Beweis. Wir betrachten zunächst endlich viele, paarweise vertauschbare, von 1 verschiedene, endliche Halluntergruppen $H_1, \ldots, H_n$ der Σ-Gruppe G. Ist $i \neq j$, so ist $H_iH_j = H_jH_i$ eine endliche Untergruppe der Ordnung $o(H_i)o(H_j)$. Da H_i wie auch H_j eine Halluntergruppe von G und also auch von H_iH_j ist, folgt die Teilerfremdheit der Ordnungen $o(H_i)$ und $o(H_j)$. Also ist das Komplexprodukt

$$U = \prod_{i=1}^{n} H_i$$

eine endliche auflösbare Halluntergruppe von G. Weiter sei

$$U_j = \prod_{i \neq j} H_i \text{ für } 1 \leqq j \leqq n.$$

Dann sind auch die U_j Halluntergruppen von G mit

$$U = U_jH_j \text{ für } 1 \leqq j \leqq n.$$

Ist p ein Primteiler von $o(H_i) = [U : U_i]$, so folgt aus Huppert [p. 660, 1. 7 Hauptsatz c)] die Existenz eines U_i enthaltenden Sylowkomplements C_p von U, dessen Ordnung $o(C_p)$ zu p teilerfremd und dessen **Index** $[U : C_p]$ eine Potenz von p ist. Diese C_p bilden ein Komplementsystem von U, aus dem man durch Durchschnittsbildung nach Huppert [p. 664, 2. 2 Satz] ein Sylowsystem von U ableitet, das für jedes i ein Sylowsystem von H_i enthält. Damit haben wir gezeigt:

(+) Zu jeder endlichen Menge von 1 verschiedener, endlicher, paarweise vertauschbarer Halluntergruppen $H_1, \ldots, H_n$ von G gibt es ein Sylowsystem von $\prod_{i=1}^{n} H_i$, das für jedes i ein Sylowsystem von H_i enthält.

Wir betrachten ein aus endlichen Halluntergruppen bestehendes Hallsystem $\mathfrak{H}$ von G. Ist $\mathfrak{H}$ endlich, so folgt die Behauptung unseres Satzes aus (+). Wir nehmen also an,

daß $\mathfrak{H}$ unendlich ist. Natürlich ist $\mathfrak{H}$ abzählbar. Wir können also eine Abzählung der Glieder von $\mathfrak{H}$ vornehmen:

$$\mathfrak{H} = [H_1, H_2, \ldots, H_i, H_{i+1}, \ldots].$$

Wir bilden die Komplexprodukte

$$U_n = \prod_{i=1}^{n} H_i \text{ für } n = 1, 2, \ldots.$$

Da G eine Σ-Gruppe und jedes H_i endlich ist, ist jedes U_n eine endliche auflösbare Untergruppe von G mit

$$U_{n+1} = U_n H_{n+1} \text{ für } n = 1, 2, \ldots.$$

Ist $\boldsymbol{S}_n$ die Menge aller Sylowsysteme von U_n, die für jedes i mit $1 \leqq i \leqq n$ ein Sylowsystem von H_i umfassen, so folgt aus der Endlichkeit von U_n die Endlichkeit von $\boldsymbol{S}_n$; und wir folgern aus (+), daß $\boldsymbol{S}_n$ nicht leer ist. Ist $m \leqq n$ und $\mathfrak{S}$ ein Sylowsystem von U_n, so umfaßt $\mathfrak{S}$ insbesondere Sylowsysteme von $H_1, \ldots, H_m$ und also auch ein eindeutig bestimmtes Sylowsystem $\mathfrak{S}^{(n,m)}$ aus $\boldsymbol{S}_m$. Diese Projektion (n, m) von $\boldsymbol{S}_n$ in $\boldsymbol{S}_m$ ist eine eindeutige Abbildung von $\boldsymbol{S}_n$ in $\boldsymbol{S}_m$, die den Regeln

$$(n, n) = 1 \text{ und } (n, m)(m, k) = (n, k) \text{ für } k \leqq m \leqq n$$

genügt. Wir können also Kurosh [II; p. 167, Theorem und p. 168, vorletzter Absatz] auf das Projektionssystem $\boldsymbol{S}_n$, (n, m) anwenden. Folglich gibt es zu jedem n ein Sylowsystem $\mathfrak{S}_n$ in $\boldsymbol{S}_n$ derart, daß $\mathfrak{S}_m$ für $m < n$ ein Teilsystem von $\mathfrak{S}_n$ ist. Wir können also auch die Vereinigungsmenge dieser aufsteigenden Folge von Mengen $\mathfrak{S}_n$ bilden. Diese ist offenbar ein Sylowsystem von G, das für jedes n ein Sylowsystem von H_n umfaßt; und das ist genau die Behauptung unseres Satzes.

Die Hallsysteme $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ der Torsionsgruppe G heißen *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus σ des Produktes $\prod_{X \in \mathfrak{H}} X$ auf das Produkt $\prod_{Y \in \mathfrak{K}} Y$ gibt, der die Menge $\mathfrak{H}$ auf die Menge $\mathfrak{K}$ abbildet.

Folgerung 7. 4. *Sind $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ aus endlichen Halluntergruppen bestehende Hallsysteme der Σ-Gruppe G mit gleichem Typus $\boldsymbol{p}\mathfrak{H} = \boldsymbol{p}\mathfrak{K}$, so sind $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ isomorph.*

Beweis. Wir setzen $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}\mathfrak{H} = \boldsymbol{p}\mathfrak{K}$. Aus Satz 7. 3 folgt die Existenz von Sylowsystemen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ von G mit

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\mathfrak{S}, \boldsymbol{p}) \text{ und } \mathfrak{K} = \mathfrak{H}(\mathfrak{T}, \boldsymbol{p}).$$

Wegen Lemma 2. 1 sind alle Sylowsysteme der Σ-Gruppe G isomorph. Jeder Isomorphismus von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{T}$ bewirkt einen Isomorphismus von $\mathfrak{H}(\mathfrak{S}, \boldsymbol{p}) = \mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{H}(\mathfrak{T}, \boldsymbol{p}) = \mathfrak{K}$. Also sind $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K}$ isomorph.

Zwei Mengen von Teilmengen einer Gruppe G heißen konjugiert in G, wenn sie durch innere Automorphismen von G ineinander übergeführt werden können.

Folgerung 7. 5. *Hallsysteme gleichen Typs endlicher, auflösbarer Gruppen sind konjugiert.*

Dies folgt sofort aus Satz 7. 3, wenn man nur bedenkt, daß Sylowsysteme endlicher auflösbarer Gruppen nach Huppert [p. 665, 2. 4 Satz] konjugiert sind.

Folgerung 7. 6. *Sind A_i, B_i endlich viele endliche Halluntergruppen der Σ-Gruppe G mit $\mathfrak{C}A_i = \mathfrak{C}B_i$ für alle i und $A_iA_j = A_jA_i$, $B_iB_j = B_jB_i$ für alle Paare i, j, so gibt es ein Element g in G mit $A_i^g = B_i$ für alle i.*

Beweis. Die Komplexprodukte

$$A = \prod_{i=1}^{n} A_i \text{ und } B = \prod_{i=1}^{n} B_i$$

sind nach Voraussetzung endliche Halluntergruppen gleicher Charakteristik. Wegen Lemma 2. 3 gibt es also ein Element u in $\{A, B\}$ mit $A^u = B$. Da die A_i und B_i Halluntergruppen von G sind, sind auch die A_i^u und B_i Halluntergruppen von B, so daß sowohl die A_i^u wie auch die B_i ein Hallsystem von B bilden. Wegen $\mathfrak{C}A_i^u = \mathfrak{C}A_i = \mathfrak{C}B_i$ für alle i sind auch die Typen dieser beiden Hallsysteme der endlichen auflösbaren Gruppe B gleich. Also folgt aus Folgerung 7. 5 die Existenz eines Elements v in B mit $A_i^{uv} = B_i$ für alle i. — Man bemerke, daß das Element $g = uv$ sogar in $\{A, B\}$ gelegen ist.

Folgerung 7. 7. *Ist $H_1, \ldots, H_n$ ein endliches System endlicher, paarweise verschiedener und paarweise vertauschbarer Halluntergruppen der Σ-Gruppe G, ist $\mathfrak{x}$ eine endliche Menge von Primzahlen, die keine der Ordnungen $o(H_i)$ teilen, so sind die folgenden beiden Eigenschaften äquivalent*:

(a) *Es gibt höchstens eine mit allen H_i vertauschbare Halluntergruppe der Charakteristik $\mathfrak{X}$ von G.*

(b) *Ist X eine mit allen H_i vertauschbare Halluntergruppe der Charakteristik $\mathfrak{X}$ von G, so ist $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{N}_G H_i \leqq \mathfrak{N}_G X$.*

Beweis. Gilt (a), ist X eine mit allen H_i vertauschbare Halluntergruppe der Charakteristik $\mathfrak{X}$ von G, wird jedes H_i von dem Element g in G normalisiert, so ist X^g ebenfalls eine mit allen H_i vertauschbare Halluntergruppe der Charakteristik $\mathfrak{X}$ von G, so daß $X = X^g$ aus (a) folgt. Also ist (b) eine Folge von (a).

Gilt umgekehrt (b), sind A und B mit allen H_i vertauschbare Halluntergruppen von G mit $\mathfrak{C}A = \mathfrak{X} = \mathfrak{C}B$, so ergibt Anwendung der Folgerung 7. 6 die Existenz eines Elements g in G mit

$$H_i^g = H_i \text{ für } i = 1, \ldots, n \text{ und } A^g = B.$$

Aus (b) folgt dann die Zugehörigkeit von g zu $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{N}_G H_i \leqq \mathfrak{N}_G A$, so daß $A = A^g = B$ wird: (a) folgt aus (b).

Ist $\mathfrak{M}$ eine Menge von Untergruppen der Gruppe G, so ist der *Systemnormalisator* $\mathfrak{N}_G \mathfrak{M} = \bigcap_{X \in \mathfrak{M}} \mathfrak{N}_G X$.

(7. 8) *Ist $\mathfrak{H}$ ein aus endlichen Halluntergruppen bestehendes Hallsystem der Σ-Gruppe G, so ist der Systemnormalisator $\mathfrak{N}_G \mathfrak{H} = \bigcap_{X \in \mathfrak{H}} \mathfrak{N}_G X$ das direkte Produkt endlicher charakteristischer Untergruppen X^* mit $\mathfrak{C}X^* \leqq \mathfrak{C}X$ für X in $\mathfrak{H}$. Insbesondere ist $\mathfrak{N}_G \mathfrak{H}$ ko-hopfisch.*

Beweis. Sei erstens X aus $\mathfrak{H}$ und Y eine Untergruppe von $\mathfrak{N}_G \mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{C}Y \leqq \mathfrak{C}X$. Dann wird X von Y normalisiert, so daß XY eine Untergruppe von G ist, deren Charakteristik gleich der Vereinigungsmenge von $\mathfrak{C}X$ und $\mathfrak{C}Y$ ist. Also ist $\mathfrak{C}(XY) = \mathfrak{C}X$; und hieraus folgt $Y \leqq XY = X$, da X ja eine Halluntergruppe von G ist:

(1) $X \cap \mathfrak{N}_G \mathfrak{H}$ ist für jedes X in $\mathfrak{H}$ genau die Gesamtheit der Elemente aus $\mathfrak{N}_G \mathfrak{H}$, deren Ordnung nur durch Primzahlen aus $\mathfrak{C}X$ teilbar ist.

Sei zweitens X, Y ein Paar verschiedener Untergruppen aus $\mathfrak{H}$. Ist dann x ein Element aus $X \cap \mathfrak{N}_G \mathfrak{H}$ und y ein Element aus $Y \cap \mathfrak{N}_G \mathfrak{H}$, so wird X von y und Y von x normalisiert. Der Kommutator $x \circ y$ gehört also zu $X \cap Y = 1$; und wir haben gezeigt:

(2) Sind X und Y verschiedene Halluntergruppen aus $\mathfrak{H}$, so ist

$$[X \cap \mathfrak{N}_G\mathfrak{H}] \circ [Y \cap \mathfrak{N}_G\mathfrak{H}] = 1;$$

diese beiden Komponenten von $\mathfrak{N}_G\mathfrak{H}$ zentralisieren sich gegenseitig.

Durch Verbindung von (1) und (2) ergibt sich sofort, daß $\mathfrak{N}_G\mathfrak{H}$ das direkte Produkt seiner endlichen und charakteristischen Untergruppen $X \cap \mathfrak{N}_G\mathfrak{H}$ mit X in $\mathfrak{H}$ ist, und daß der direkte Faktor $X \cap \mathfrak{N}_G\mathfrak{H}$ für jedes X aus $\mathfrak{H}$ genau die $\mathfrak{C}X$-Komponente von $\mathfrak{N}_G\mathfrak{H}$ ist. Damit ist unsere erste Aussage bewiesen.

Ist σ ein Isomorphismus von $\mathfrak{N}_G\mathfrak{H}$ in sich, so bildet σ die $\mathfrak{C}X$-Komponente $X \cap \mathfrak{N}_G\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{N}_G\mathfrak{H}$ für jedes X aus $\mathfrak{H}$ in sich ab. Dieser Isomorphismus von $X \cap \mathfrak{N}_G\mathfrak{H}$ ist aber wegen der Endlichkeit von X ein Automorphismus; und hieraus ergibt sich, daß σ ein Automorphismus des direkten Produkts $\mathfrak{N}_G\mathfrak{H}$ der $X \cap \mathfrak{N}_G\mathfrak{H}$ mit X in $\mathfrak{H}$ und also $\mathfrak{N}_G\mathfrak{H}$ ko-hopfisch ist.

Satz 7. 9. *Die folgenden Eigenschaften der Σ-Gruppe G und der Partition $\mathfrak{p}$ der Charakteristik $\mathfrak{C}G$ in endliche Komponenten sind äquivalent:*

(i) *Irgendzwei Hallsysteme des Typus $\mathfrak{p}$ von G sind konjugiert.*

(ii) *Es gibt nur abzählbar viele Hallsysteme des Typus $\mathfrak{p}$ von G.*

(iii) *Es gibt ein endliches System $H_1, \ldots, H_n$ endlicher, paarweise verschiedener und paarweise vertauschbarer Halluntergruppen von G, deren Charakteristiken zu $\mathfrak{p}$ gehören und die der folgenden Bedingung genügen:*

(+) *Ist die Komponente $\mathfrak{X}$ von $\mathfrak{p}$ nicht Charakteristik eines der H_i, so gibt es höchstens eine mit allen H_i vertauschbare Halluntergruppe der Charakteristik $\mathfrak{X}$ von G.*

(iv) *Jedes Hallsystem $\mathfrak{H}$ des Typus $\mathfrak{p}$ von G besitzt eine endliche Teilmenge $\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{N}_G\mathfrak{E} = \mathfrak{N}_G\mathfrak{H}$.*

(v) *Es gibt eine endliche Menge $\mathfrak{E}$ endlicher, paarweise verschiedener und paarweise vertauschbarer Halluntergruppen von G, deren Charakteristiken zu $\mathfrak{p}$ gehören und die der folgenden Bedingung genügen:*

(+) *Ist die Komponente $\mathfrak{X}$ von $\mathfrak{p}$ von den Charakteristiken aller X aus $\mathfrak{E}$ verschieden, ist Y eine mit allen X aus $\mathfrak{E}$ vertauschbare Halluntergruppe der Charakteristik $\mathfrak{X}$ von G, so ist*

$$\mathfrak{N}_G\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{N}_G Y.$$

(vi) *Unter den endlichen Mengen endlicher, paarweise verschiedener und paarweise vertauschbarer Halluntergruppen von G, deren Charakteristiken zu $\mathfrak{p}$ gehören, gibt es eine $\mathfrak{E}$ mit minimalem $\mathfrak{N}_G\mathfrak{E}$.*

Beweis. Wir nehmen zunächst die Gültigkeit von (i) an. Sind A und B Basisuntergruppen von G, so ergibt sich aus Lemma 7. 1 die Existenz von Hallsystemen von G, deren Typus $\mathfrak{p}$ ist, und deren Produkt A bzw. B ist. Diese beiden Hallsysteme sind wegen (i) konjugiert, so daß auch A und B in G konjugiert sind. Damit haben wir gezeigt, daß die Σ-Gruppe G der Bedingung (5) des Zusatzes 4. 4 genügt. Also gilt:

(i*) *G ist abzählbar und ko-hopfisch.*

Aus (i) und der Abzählbarkeit von G folgt aber sofort die Abzählbarkeit der Menge der Hallsysteme des Typus $\mathfrak{p}$ von G: es folgt (ii) aus (i).

Wir nehmen als nächstes die Ungültigkeit von (iii) an. Dies ist gleichwertig mit der Gültigkeit der folgenden Eigenschaft von G:

(1) Sind $H_1, \ldots, H_n$ endlich viele, paarweise verschiedene und paarweise vertauschbare Halluntergruppen von G, deren Charakteristiken zu $\mathfrak{p}$ gehören, so gibt es

eine Komponente $\mathfrak{X}$ von $\boldsymbol{p}$, die nicht Charakteristik einer der Untergruppen H_i ist, derart, daß es wenigstens zwei verschiedene, mit allen H_i vertauschbare Halluntergruppen der Charakteristik $\mathfrak{X}$ in G gibt.

Wir vermerken, daß sich aus der Endlichkeit der Komponenten von $\boldsymbol{p}$ und Lemma 1. 2 folgendes ergibt:

(2) Jede Untergruppe von G, deren Charakteristik eine Komponente von $\boldsymbol{p}$ ist, ist endlich.

Wir betrachten endlich viele, paarweise verschiedene und paarweise vertauschbare Halluntergruppen $H_1, \ldots, H_n$ von G, deren Charakteristiken Komponenten von $\boldsymbol{p}$ sind. Aus (2) folgt, daß jedes H_i endlich ist. Also ist auch $H_iH_j = H_jH_i$ eine endliche Untergruppe von G. Wären die Ordnungen von H_i und H_j nicht teilerfremd, so wären die Charakteristiken von H_i und H_j als Komponenten der Partition $\boldsymbol{p}$ identisch, so daß auch $\mathfrak{C}H_i = \mathfrak{C}H_j = \mathfrak{C}(H_iH_j)$ wird. Da aber H_i und H_j Halluntergruppen von G sind, folgt $H_i = H_iH_j = H_j$, so daß aus $i \neq j$ auch die Teilerfremdheit der Ordnung von H_i und H_j folgt. Die H_i bilden insbesondere ein Hallsystem der endlichen und auflösbaren Untergruppe

$$U = \prod_{i=1}^{n} H_i$$

von G. Anwendung von Satz 7. 3 zeigt die Existenz eines Sylowsystems $\mathfrak{S}$ von U, das nur aus von 1 verschiedenen Sylowuntergruppen besteht, derart, daß jedes H_i Produkt der in H_i enthaltenen Sylowuntergruppen aus $\mathfrak{S}$ ist. Sei weiter $\mathfrak{X}$ eine Komponente von $\boldsymbol{p}$, die nicht Charakteristik eines H_i ist. Da $\mathfrak{C}U$ die Vereinigungsmenge der $\mathfrak{C}H_i$ ist, ist keine Primzahl aus $\mathfrak{X}$ Teiler der Ordnung von U. Aus Lemma 7. 1 [und Satz 3. 6] folgt die Existenz einer Halluntergruppe X von G mit $\mathfrak{C}X = \mathfrak{X}$. Wegen (2) ist X endlich. Da G als Σ-Gruppe lokal endlich-auflösbar ist, ist auch

$$V = \{U, X\}$$

endlich und auflösbar. Aus Huppert [p. 662, 2. 5 Satz a)] folgt die Existenz eines Sylowsystems $\mathfrak{H}$ von V, das nur aus von 1 verschiedenen Sylowuntergruppen bestehen möge, derart, daß jede Sylowuntergruppe aus $\mathfrak{S}$ in einer und nur einer Sylowuntergruppe aus $\mathfrak{T}$ enthalten ist. Da U als Produkt von Halluntergruppen teilerfremder Ordnung selbst eine Halluntergruppe von G ist, ergibt sich hieraus, daß $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{T}$ enthalten ist. Sei nun T das Produkt der p-Sylowuntergruppen aus $\mathfrak{T}$ mit p in $\mathfrak{X}$. Aus $X \leqq V$ ergibt sich, daß V für jedes p aus $\mathfrak{X}$ eine p-Sylowuntergruppe von G enthält. Also enthält auch $\mathfrak{T}$ für jedes p aus $\mathfrak{X}$ eine p-Sylowuntergruppe von G. Es folgt, daß T eine Halluntergruppe der Charakteristik $\mathfrak{X}$ von G ist. Da T ebenso wie die H_i Produkt von Sylowuntergruppen aus dem Sylowsystem $\mathfrak{T}$ von V ist, ist T mit allen H_i vertauschbar. Damit haben wir gezeigt:

(3) Sind $H_1, \ldots, H_n$ endlich viele, paarweise verschiedene und paarweise vertauschbare Halluntergruppen von G, deren Charakteristiken Komponenten von $\boldsymbol{p}$ sind, so gilt:

(a) Jedes H_i ist endlich und die Ordnungen von H_i und H_j sind für $i \neq j$ teilerfremd.

(b) Ist die Komponente $\mathfrak{X}$ von $\boldsymbol{p}$ nicht Charakteristik einer der Untergruppen H_i, so gibt es eine mit allen H_i vertauschbare Halluntergruppe der Charakteristik $\mathfrak{X}$ in G.

Aus (1) bis (3) folgert man, daß weder G noch $\mathfrak{C}G$ endlich sein können. Da die Komponenten der Partition $\boldsymbol{p}$ von $\mathfrak{C}G$ endlich sind, ist auch $\boldsymbol{p}$ eine unendliche Menge, die natürlich abzählbar ist. Also können wir die Komponenten von $\boldsymbol{p}$ irgendwie abzählen:

$$\boldsymbol{p} = [\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_{i+1}, \ldots].$$

Wir betrachten abzählbar viele [nicht notwendig verschiedene] Hallsysteme

$$\mathfrak{H}(1), \ldots, \mathfrak{H}(n), \mathfrak{H}(n+1), \ldots$$

des Typus $\boldsymbol{p}$ von G. Es gibt eine Halluntergruppe X der Charakteristik $\mathfrak{x}_1$ von G, wie man etwa aus Satz 3. 6 und Lemma 7. 1 folgern kann. Ist X nicht in $\mathfrak{H}(1)$ enthalten, so setzen wir $\mathfrak{X}(1) = [X]$. Ist aber X in $\mathfrak{H}(1)$ enthalten, so folgern wir aus (1) die Existenz einer Komponente $\mathfrak{x}_i$ mit $i \neq 1$ von $\boldsymbol{p}$ derart, daß es wenigstens zwei verschiedene, mit X_1 vertauschbare Halluntergruppen der Charakteristik $\mathfrak{x}_i$ von G gibt. Eine von ihnen, etwa Y, liegt nicht in $\mathfrak{H}(1)$; und wir setzen in diesem Falle $\mathfrak{X}(1) = [X, Y]$. Diese Menge $\mathfrak{X}(1)$ hat also die folgenden Eigenschaften:

(4) $\mathfrak{X}(1)$ ist eine endliche Menge paarweise verschiedener und paarweise vertauschbarer Halluntergruppen von G, deren Charakteristiken in $\boldsymbol{p}$ liegen. $\mathfrak{X}(1)$ enthält eine Halluntergruppe der Charakteristik $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{X}(1)$ enthält eine nicht in $\mathfrak{H}(1)$ vorkommende Halluntergruppe.

Wir können also die folgende Induktionsannahme machen:

(5) $1 < i$ und zu jedem j mit $0 < j < i$ gibt es eine endliche Menge $\mathfrak{X}(j)$ paarweise vertauschbarer und paarweise verschiedener Halluntergruppen von G, deren Charakteristiken in $\boldsymbol{p}$ liegen. $\mathfrak{X}(j)$ enthält für jedes k mit $0 < k \leqq j$ eine Halluntergruppe der Charakteristik $\mathfrak{x}_k$ und eine nicht in $\mathfrak{H}(k)$ vorkommende Halluntergruppe. Weiter ist $\mathfrak{X}(j-1)$ in $\mathfrak{X}(j)$ enthalten.

Enthält die nach Induktionsannahme bereits definierte Menge $\mathfrak{X}(i-1)$ eine Halluntergruppe der Charakteristik $\mathfrak{x}_i$, so setzen wir $\mathfrak{X}_0(i) = \mathfrak{X}(i-1)$. Enthält aber $\mathfrak{X}(i-1)$ keine Halluntergruppe der Charakteristik $\mathfrak{x}_i$, so folgern wir aus (3) die Existenz einer mit allen Halluntergruppen aus $\mathfrak{X}(i-1)$ vertauschbaren und von ihnen allen verschiedenen Halluntergruppe A der Charakteristik $\mathfrak{x}_i$. In diesem Falle bestehe $\mathfrak{X}_0(i)$ aus A und den Halluntergruppen in $\mathfrak{X}(i-1)$.

Enthält $\mathfrak{X}_0(i)$ eine nicht in $\mathfrak{H}(i)$ vorkommende Halluntergruppe, so setzen wir $\mathfrak{X}(i) = X_0(i)$. Ist aber $\mathfrak{X}_0(i)$ in $\mathfrak{H}(i)$ enthalten, so ergibt Anwendung von (1) auf die endliche Menge $\mathfrak{X}_0(i)$ paarweise verschiedener und paarweise vertauschbarer Halluntergruppen von G mit Charakteristik in $\boldsymbol{p}$ die Existenz einer Komponente $\mathfrak{x}$ von $\boldsymbol{p}$, die nicht Charakteristik einer der Untergruppen in $\mathfrak{X}_0(i)$ ist, derart, daß es wenigstens zwei verschiedene, mit allen Untergruppen in $\mathfrak{X}_0(i)$ vertauschbare Halluntergruppen U, V der Charakteristik $\mathfrak{x}$ in G gibt. Natürlich ist es unmöglich, daß U und V gleichzeitig zu $\mathfrak{H}(i)$ gehören; und wir können o. B. d. A. annehmen, daß U nicht zu $\mathfrak{H}(i)$ gehört. In diesem Falle bestehe $\mathfrak{X}(i)$ aus U und den Halluntergruppen in $\mathfrak{X}_0(i)$.

Damit ist aber die induktive Konstruktion der Mengen $\mathfrak{X}(i)$ für $0 < i$ vollständig durchgeführt.

Schließlich bilden wir die Vereinigungsmenge $\mathfrak{H}$ der aufsteigenden Folge endlicher Mengen $\mathfrak{X}(i)$. Aus der Konstruktion der $\mathfrak{X}(i)$ folgt, daß ihre Vereinigungsmenge $\mathfrak{H}$ aus paarweise vertauschbaren Halluntergruppen von G besteht, deren Charakteristik in $\boldsymbol{p}$ liegt, und daß es zu jeder Komponente $\mathfrak{x}$ von $\boldsymbol{p}$ eine [und nur eine] Halluntergruppe der Charakteristik $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{H}$ gibt. Also ist $\mathfrak{H}$ ein Hallsystem vom Typus $\boldsymbol{p}$ von G. Da $\mathfrak{X}(i)$ eine nicht in $\mathfrak{H}(i)$ liegende Halluntergruppe enthält, enthält auch $\mathfrak{H}$ eine nicht in $\mathfrak{H}(i)$ liegende Halluntergruppe: $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{H}(i)$ für alle i. Damit haben wir gezeigt, daß es zu jeder abzählbaren Menge von Hallsystemen des Typus $\boldsymbol{p}$ von G ein von all diesen Hallsystemen verschiedenes Hallsystem des Typus $\boldsymbol{p}$ von G gibt:

(6) Die Menge der Hallsysteme des Typus $\boldsymbol{p}$ von G ist überabzählbar unendlich.

Mit anderen Worten: gilt (iii) nicht, so gilt auch (ii) nicht; (iii) folgt aus (ii).

Als nächstes wollen wir (i) aus (iii) herleiten und nehmen dazu die Gültigkeit von (iii) an. Es gibt also ein endliches System $H_1, \ldots, H_n$ paarweise verschiedener und paarweise vertauschbarer Halluntergruppen von G mit den folgenden beiden Eigenschaften:

(a) $\mathfrak{C}H_i = \mathfrak{x}_i$ gehört für $i = 1, \ldots, n$ zu $\boldsymbol{p}$.

(b) Ist $\mathfrak{x}$ eine Komponente von $\boldsymbol{p}$ mit $\mathfrak{x} + \mathfrak{x}_i$ für $i = 1, \ldots, n$, so gibt es höchstens eine mit allen H_i vertauschbare Halluntergruppe der Charakteristik $\mathfrak{x}$ in G.

Wir betrachten zwei Hallsysteme $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von G, die beide den Typus p haben. Dann enthält $\mathfrak{A}$ für jedes i eine und nur eine Halluntergruppe A_i der Charakteristik $\mathfrak{x}_i$ und ebenso enthält $\mathfrak{B}$ für jedes i eine und nur eine Halluntergruppe B_i der Charakteristik $\mathfrak{x}_i$. Wir schließen aus Lemma 1. 2, daß jedes H_i, A_i, B_i endlich und auflösbar ist. Anwendung der Folgerung 7. 6 zeigt die Existenz von Elementen a und b in G mit

$$H_i^a = A_i, \; H_i^b = B_i \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Da die Eigenschaft (b) unter Automorphismen von G invariant ist, gilt weiter:

(b*) Ist $\mathfrak{x}$ eine Komponente von $\boldsymbol{p}$ mit $\mathfrak{x} + \mathfrak{x}_i$ für $i = 1, \ldots, n$, so gibt es höchstens eine mit allen B_i vertauschbare Halluntergruppe der Charakteristik $\mathfrak{x}$ in G.

Wir setzen $g = a^{-1}b$. Dann wird $A_i^g = H_i^b = B_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Ist H irgendeine Halluntergruppe aus dem Hallsystem $\mathfrak{A}$ vom Typus $\boldsymbol{p}$, so ist entweder $H = A_i$ für ein i und $H^g = B_i$ gehört zu $\mathfrak{B}$; oder H ist von allen A_i verschieden. In diesem Fall ist $\mathfrak{C}H$ von allen $\mathfrak{x}_i$ verschieden; und H ist mit $A_1, \ldots, A_n$ vertauschbar. Dann ist aber auch $\mathfrak{C}H^g$ von allen $\mathfrak{x}_i$ verschieden; und H^g ist mit allen $A_i^g = B_i$ vertauschbar. Nun enthält das Hallsystem $\mathfrak{B}$ vom Typus $\boldsymbol{p}$ eine und nur eine Halluntergruppe J der Charakteristik $\mathfrak{C}H = \mathfrak{C}H^g$, die ja eine Komponente von $\boldsymbol{p}$ ist; und J ist ebenfalls mit allen B_i vertauschbar. Anwendung von (b*) zeigt, daß $H^g = J$ ist; und damit haben wir $\mathfrak{A}^g = \mathfrak{B}$ bewiesen:

(i) folgt aus (iii) und wir haben die Äquivalenz von (i) bis (iii) dargetan.

Wir nehmen die Gültigkeit der äquivalenten Bedingungen (i) bis (iii) an. Aus (iii) folgern wir die Existenz einer endlichen Menge $\mathfrak{E}$ endlicher, paarweise verschiedener und paarweise vertauschbarer Halluntergruppen von G, deren Charakteristiken in $\boldsymbol{p}$ liegen und die der folgenden Bedingung genügen:

(+) Ist die Komponente $\mathfrak{x}$ von $\boldsymbol{p}$ nicht Charakteristik eines der X in $\mathfrak{E}$, so gibt es höchstens eine Halluntergruppe von G, deren Charakteristik $\mathfrak{x}$ ist und die mit allen X in $\mathfrak{E}$ vertauschbar ist.

Anwendung der Folgerung 7. 7 zeigt die Äquivalenz von (+) mit folgender Bedingung:

(++) Ist die Komponente $\mathfrak{x}$ von $\boldsymbol{p}$ von den Charakteristiken aller X in $\mathfrak{E}$ verschieden, ist Y eine mit allen X in $\mathfrak{E}$ vertauschbare Halluntergruppe der Charakteristik $\mathfrak{x}$ von G, so ist

$$\mathfrak{N}_G\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{N}_G Y.$$

Aus Satz 3. 6 und Lemma 7. 1 folgt die Existenz eines Hallsystems $\mathfrak{H}$ des Typus $\boldsymbol{p}$ von G. Zu jedem X in $\mathfrak{E}$ gibt es eine und nur eine $\mathfrak{C}X = \mathfrak{C}X^*$ erfüllende Halluntergruppe X^* in $\mathfrak{H}$. Aus der Endlichkeit von $\mathfrak{E}$ und Folgerung 7. 6 ergibt sich, daß $\mathfrak{E}$ und die Menge $\mathfrak{E}^*$ der X^* mit X in $\mathfrak{E}$ konjugiert sind; und damit haben wir gezeigt, daß $\mathfrak{E}$ in einem Hallsystem $\mathfrak{F}$ des Typus $\boldsymbol{p}$ von G enthalten ist. Wir betrachten eine Halluntergruppe X aus $\mathfrak{F}$. Gehört erstens X zu $\mathfrak{E}$, so gilt gewiß $\mathfrak{N}_G\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{N}_G X$. Gehört zweitens X nicht zu $\mathfrak{E}$, so folgt $\mathfrak{N}_G\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{N}_G X$ aus (++). Damit haben wir $\mathfrak{N}_G\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{N}_G\mathfrak{F}$ bewiesen. Da $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{F}$ enthalten ist, gilt auch $\mathfrak{N}_G\mathfrak{F} \leqq \mathfrak{N}_G\mathfrak{E}$, woraus $\mathfrak{N}_G\mathfrak{E} = \mathfrak{N}_G\mathfrak{F}$ folgt. Damit haben wir gezeigt:

(iv*) Es gibt ein Hallsystem $\mathfrak{F}$ des Typus $\boldsymbol{p}$ von G und eine endliche Teilmenge $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{N}_G\mathfrak{E} = \mathfrak{N}_G\mathfrak{F}$.

Da aber wegen (i) alle Hallsysteme des Typus $\mathfrak{p}$ von G konjugiert sind, ergibt sich (iv) aus (iv*).

Wir nehmen die Gültigkeit von (iv) an. Aus Satz 3. 6 und Lemma 7. 1 folgt die Existenz eines Hallsystems $\mathfrak{H}$ des Typus $\mathfrak{p}$ von G. Aus (iv) ergibt sich die Existenz einer endlichen Teilmenge $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{N}_G\mathfrak{E} = \mathfrak{N}_G\mathfrak{H}$. Die Komponente $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{p}$ sei von den Charakteristiken aller Y in $\mathfrak{E}$ verschieden; und es sei X eine mit allen Halluntergruppen aus $\mathfrak{E}$ vertauschbare Halluntergruppe der Charakteristik $\mathfrak{x}$ von G. Das Hallsystem $\mathfrak{H}$ des Typus $\mathfrak{p}$ enthält dann eine und nur eine Halluntergruppe X^* der Charakteristik $\mathfrak{x}$, die dann natürlich auch mit allen Y aus $\mathfrak{E}$ vertauschbar ist. Wegen der Endlichkeit von $\mathfrak{E}$ ergibt Anwendung der Folgerung 7. 6 die Existenz eines Elements g in G mit

$$X^g = X^* \text{ und } Y^g = Y \text{ für alle } Y \text{ aus } \mathfrak{E}.$$

Dieses Element g gehört also zu $\mathfrak{N}_G\mathfrak{E} = \mathfrak{N}_G\mathfrak{H} \leqq \mathfrak{N}_G X^*$, woraus

$$X = X^{*g^{-1}} = X^* \text{ und } \mathfrak{N}_G\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{N}_G X$$

folgen. Damit haben wir gezeigt:

Es gibt eine endliche Menge $\mathfrak{E}$ endlicher, paarweise verschiedener und paarweise vertauschbarer Halluntergruppen von G, deren Charakteristiken zu $\mathfrak{p}$ gehören und die der folgenden Bedingung genügen:

(*) Ist die Komponente $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{p}$ von den Charakteristiken aller Halluntergruppen aus $\mathfrak{E}$ verschieden, ist X eine mit allen Halluntergruppen aus $\mathfrak{E}$ vertauschbare Halluntergruppe der Charakteristik $\mathfrak{X}$ von G, so ist $\mathfrak{N}_G\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{N}_G X$.

Damit haben wir (v) aus (iv) hergeleitet. — Die Äquivalenz der Bedingungen (v) und (iii) ist in Folgerung 7. 7 enthalten; und damit haben wir die Äquivalenz der Bedingungen (i) bis (v) dargetan.

Wir nehmen als nächstes die Gültigkeit der äquivalenten Bedingungen (i) bis (v) an. Aus Satz 3. 6 und Lemma 7. 1 folgt die Existenz eines Hallsystems $\mathfrak{H}$ des Typus $\mathfrak{p}$ von G. Aus (iv) folgt die Existenz einer endlichen Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{H}$ mit

$$\mathfrak{N}_G\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_G\mathfrak{H}.$$

Sei nun $\mathfrak{E}$ eine endliche Menge endlicher, paarweise verschiedener und paarweise vertauschbarer Halluntergruppen von G, deren Charakteristiken zu $\mathfrak{p}$ gehören; und sei

$$\mathfrak{N}_G\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{N}_G\mathfrak{M}.$$

Zu jeder Halluntergruppe X aus $\mathfrak{E}$ gibt es eine und nur eine Halluntergruppe X^* aus dem Hallsystem $\mathfrak{H}$ des Typus $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{C}X^* = \mathfrak{C}X$. Aus der Endlichkeit von $\mathfrak{E}$ und Folgerung 7. 6 ergibt sich die Existenz eines Elements g in G mit

$$X^g = X^* \text{ für alle } X \text{ aus } \mathfrak{E}.$$

Es folgt

$$\mathfrak{N}_G\mathfrak{H} \leqq \bigcap_{X\in\mathfrak{E}} \mathfrak{N}_G X^* = \bigcap_{X\in\mathfrak{E}} \mathfrak{N}_G X^g = [\mathfrak{N}_G\mathfrak{E}]^g,$$

so daß

$$[\mathfrak{N}_G\mathfrak{H}]^{g^{-1}} \leqq \mathfrak{N}_G\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{N}_G\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_G\mathfrak{H}$$

wird. Wegen (7. 8) ist $\mathfrak{N}_G\mathfrak{H}$ ko-hopfisch, so daß aus dieser Ungleichung

$$[\mathfrak{N}_G\mathfrak{H}]^{g^{-1}} = \mathfrak{N}_G\mathfrak{E} = \mathfrak{N}_G\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_G\mathfrak{H}$$

folgt. Damit ist die Minimalität von $\mathfrak{N}_G\mathfrak{M}$ dargetan; und wir haben (vi) aus den äquivalenten Bedingungen (i) bis (v) [genauer aus (iv)] abgeleitet.

Wir nehmen schließlich die Gültigkeit von (vi) an. Dann gibt es unter den endlichen Mengen endlicher, paarweise verschiedener und paarweise vertauschbarer Halluntergruppen von G mit Charakteristik in $\mathfrak{p}$ eine, $\mathfrak{M}$, mit minimalem $\mathfrak{N}_G\mathfrak{M}$. Ist dann $\mathfrak{x}$ eine Komponente von $\mathfrak{p}$, die von den Charakteristiken aller X in $\mathfrak{M}$ verschieden ist, ist Y eine Halluntergruppe der Charakteristik $\mathfrak{x}$, die mit allen X in $\mathfrak{M}$ vertauschbar ist, so ist auch das aus Y und $\mathfrak{M}$ bestehende System eine endliche Menge endlicher, paarweise verschiedener und paarweise vertauschbarer Halluntergruppen von G mit Charakteristik in $\mathfrak{p}$. Aus der Minimalität von $\mathfrak{M}$ folgt also

$$\mathfrak{N}_G\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_G\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_G Y \leqq \mathfrak{N}_G Y;$$

und wir haben (v) aus (vi) hergeleitet, die Äquivalenz von (i) bis (vi) bewiesen.

Zusatz 7. 10. *Genügen die Σ-Gruppe G und die Partition $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{C}G$ in endliche Komponenten den äquivalenten Bedingungen des Satzes* 7. 9, *so ist G abzählbar und ko-hopfisch.*

Dies wurde im Laufe des Beweises von Satz 7. 9 mitbewiesen [Ableitung von (i*) aus (i)].

Diskussion von Satz 7. 9. *A.* Sei G eine Σ-Gruppe und $\mathfrak{p}$ eine Partition von $\mathfrak{C}G$ in endliche Komponenten. Weiter nehmen wir an, daß es eine Komponente $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{p}$ derart gibt, daß $\mathfrak{N}_G X$ endlich ist für jede Halluntergruppe X von G mit $\mathfrak{C}X = \mathfrak{x}$. Wegen Satz 3. 6 und Lemma 7. 1 gibt es ein Hallsystem $\mathfrak{H}$ des Typus $\mathfrak{p}$ von G. Dann enthält $\mathfrak{H}$ eine und nur eine Halluntergruppe X der Charakteristik $\mathfrak{x}$; und nach Voraussetzung ist $\mathfrak{N}_G X$ endlich. Wir betrachten alle endlichen Teilmengen $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{H}$, die X enthalten. Aus $\mathfrak{N}_G\mathfrak{E} \leqq \mathfrak{N}_G X$ und der Endlichkeit von $\mathfrak{N}_G X$ folgt, daß es unter diesen $\mathfrak{E}$ eines, $\mathfrak{M}$, mit minimalem $\mathfrak{N}_G\mathfrak{M}$ gibt. Dann ist $\mathfrak{N}_G\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_G\mathfrak{H}$; und wir haben die Gültigkeit der Bedingung (iv) des Satzes 7. 9 dargetan. Insbesondere ist dann wegen Zusatz 7. 10 die Σ-Gruppe G abzählbar und ko-hopfisch.

B. Sei G eine Σ-Gruppe mit unendlicher Charakteristik und $\mathfrak{p}$ eine Partition von $\mathfrak{C}G$ in unendlich viele, endliche Komponenten. Weiter sei $\mathfrak{N}_G H$ endlich für jede Halluntergruppe H von G, deren Charakteristik eine Komponente von $\mathfrak{p}$ ist. Dann folgt aus dem ad **A** bewiesenen, daß G abzählbar und ko-hopfisch ist, während wir aus Folgerung 4. 7, Diskussionsbemerkung **B** erschließen, daß G nicht radikal ist. — Ob diese Gruppenklasse leer ist oder nicht, haben wir nicht entscheiden können. Allgemeiner haben wir nicht entscheiden können, ob jede abzählbare, ko-hopfische Σ-Gruppe radikal ist.

C. Es sei A eine unendliche, abelsche Torsionsgruppe ohne Elemente der Ordnung 2, deren Primärkomponenten sämtlich endlich sind. Die Gruppe G entstehe aus A durch Adjunktion eines Elementes g, das den Bedingungen

$$g^2 = 1,\ g^{-1}ag = a^{-1} \text{ für } a \text{ in } A$$

genügt. Man überzeugt sich sofort davon, daß G eine Σ-Gruppe mit abzählbar unendlich vielen Sylowsystemen ist. G genügt also den Bedingungen des Satzes 7. 9; aber Bedingung (ii) läßt sich nicht dahin verschärfen, daß es nur endlich viele Hallsysteme des Typus $\mathfrak{p}$ gibt.

D. Die Gruppe G sei das direkte Produkt $G = \prod_{i=1}^{\infty} A_i$ von [abzählbar unendlich vielen] endlichen auflösbaren Gruppen A_i, deren Ordnungen paarweise teilerfremd seien. Weiter seien p_i und q_i zwei verschiedene Primzahlen derart, daß A_i Erweiterung eines p_i-Normalteilers P_i durch die q_i-Gruppe A_i/P_i ist; und schließlich sei A_i nicht nilpotent, so daß die q_i-Sylowuntergruppen von A_i keine Normalteiler sind.

D. 1. Sei $\mathfrak{p}$ die Partition von $\mathfrak{C}G$, deren Komponenten genau die Paare p_i, q_i sind. Dann gibt es ein und nur ein Hallsystem des Typus $\mathfrak{p}$; es besteht aus den A_i. Insbesondere ist G abzählbar und ko-hopfisch.

D. 2. Da man bei beliebiger Wahl der q_i-Sylowuntergruppen Q_i von A_i zusammen mit den P_i ein Sylowsystem von G erhält, besitzt diese Gruppe G überabzählbar unendlich viele Sylowsysteme. — Ebenso kann man zeigen: Ist $\mathfrak{p}$ die Partition von $\mathfrak{C}G$ mit den Komponenten:

$$q_1; p_1, q_2; \ldots; p_i, q_{i+1}; \ldots,$$

so gibt es wieder überabzählbar unendlich viele Hallsysteme des Typus $\mathfrak{p}$.

Literatur

[1] *R. Baer*, Gruppen mit Minimalbedingung Math. Annalen **150** (1963), 1—44.

[2] *B. Huppert*, Endliche Gruppen. I, Berlin-Heidelberg-New York 1967.

[3] *A. G. Kurosh*, The Theory of Groups. II, Second english edition, New York 1960.

[4] *E. Schenkman*, Group Theory, Princeton, N. Y. 1965.

[5] *W. Specht*, Gruppentheorie, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.

[6] *S. N. Černikov*, Über unendliche, lokal endliche Gruppen mit endlichen Sylowuntergruppen, Mat. Sbornik **52** (1960), 647—652.

6243 Falkenstein im Taunus, Gartenstraße 11

Eingegangen 8. Februar 1969

Minimalmannigfaltigkeiten und analytische Funktionen

Von *M. Pinl* in Köln

Herrn Professor Dr. Wolfgang Krull zum 70. Geburtstag

Ist $\mathfrak{y}(t)$ der analytische Ortsvektor einer auf den komplexen Parameter $t = u_1 + iu_2$ bezogenen isotropen Kurve des euklidischen komplexen Raumes R_n, $n \geqq 3$, so ist bekanntlich $\mathfrak{x} = \Re\mathfrak{y}(t) = \mathfrak{x}(u_1, u_2)$ der Ortsvektor einer reellen Minimalfläche in R_n. Diese Zuordnung benutzt lediglich den Realteil $\Re\mathfrak{y}(t)$ der analytischen Vektorfunktion und gilt für alle Dimensionen $n \geqq 3$ des Einbettungsraumes. Im Falle gerader Dimensionen $\geqq 4$ des Einbettungsraumes kann man $2n$-dimensionale reelle Mannigfaltigkeiten V_{2n} im euklidischen R_{2n+2} konstruieren, in deren Darstellung

$$(1)\qquad \mathfrak{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2n}, u(x_1, \ldots, x_{2n}), v(x_1, \ldots, x_{2n})\},\ u = \Re f(z_1, \ldots, z_n),\ v = \Im f(z_1, \ldots, z_n)$$

Real- und Imaginärteil u und v einer analytischen Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ von n komplexen Veränderlichen

$$z_1 = x_1 + ix_2,\ z_2 = x_3 + ix_4, \ldots, z_{n-1} = x_{2n-3} + ix_{2n-2},\ z_n = x_{2n-1} + ix_{2n}$$

eingehen. Wir nennen die Mannigfaltigkeiten (1) verallgemeinerte Kommerellsche Mannigfaltigkeiten, da K. Kommerell [2] den nächstliegenden Fall $n = 1$ derartiger V_2 in R_4 behandelt hat. Wir ergänzen zunächst Kommerell's Ergebnisse für den Fall V_2 in R_4 (§ 1) und behandeln dann den für alle höheren Dimensionen typischen Fall V_4 in R_6 (§ 2).

§ 1. $n = 1$, V_2 in R_4

Indem wir Ableitungen durch Indizes bezeichnen, erhalten wir im Falle $n = 1$ aus dem Ortsvektor $\mathfrak{x}$ die Komponenten der ersten Ableitungen und die Komponenten $g_{\alpha\beta}$ der metrischen Fundamentalform:

$$\begin{Vmatrix} 1, & 0, & u_{x_1}, & v_{x_1} \\ 0, & 1, & u_{x_2}, & v_{x_2} \end{Vmatrix}, \quad \begin{matrix} g_{11} = 1 + u_{x_1}^2 + v_{x_1}^2, \\ g_{22} = 1 + u_{x_2}^2 + v_{x_2}^2, \end{matrix} \quad g_{12} = u_{x_1}u_{x_2} + v_{x_1}v_{x_2}.$$

Für u und v bestehen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, welche die Metrik $g_{\alpha\beta}(x_1, x_2)$ der $V_2(1)$ auf die isotherme Form

$$ds^2 = \lambda(x_1x_2)\,(dx_1^2 + dx_2^2),\ \lambda = g_{11} = g_{22},\ g_{12} = 0,\ g = |g_{\alpha\beta}| = \lambda^2$$

reduzieren. Als Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion sind u und v notwendig Potentialfunktionen und genügen der Laplaceschen Gleichung

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0. \tag{2}$$

Da das Bestehen der Laplaceschen Gleichung den stationären Charakter der Oberfläche

$$O = \int\int_{(B)} \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, dx_1 dx_2 = \int\int_{(B)} \lambda(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \frac{1}{2}\int\int_{(B)} (\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_2^2)\, dx_1 dx_2$$

garantiert, ist damit das Ergebnis von K. Kommerell bestätigt: *Die Flächen*

$$\begin{aligned} &x_1 = x_1,\ x_2 = x_2,\ x_3 = u(x_1, x_2),\ x_4 = v(x_1, x_2);\ u = \Re f(z),\ v = \Im f(z), \\ &z = x_1 + ix_2 \end{aligned} \tag{3}$$

sind reelle Minimalflächen des R_4.

Um weitere Eigenschaften der Minimalflächen (3) aufzudecken, transformieren wir die Darstellung der Minimal-V_2 auf konjugiert komplexe isotrope Parameter gemäß

$$x_1 = \frac{1}{2}(\xi_1 + \bar{\xi}_1),\ x_2 = -\frac{i}{2}(\xi_1 - \bar{\xi}_1),\ \xi_1 = x_1 + ix_2,\ \bar{\xi}_1 = x_1 - ix_2, \tag{4}$$

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\xi_1, \bar{\xi}_1)} \equiv \frac{i}{2} \neq 0.$$

Die Potentialgleichungen (2) transformieren sich dabei in die Differentialgleichungen

$$u_{\xi_1\bar{\xi}_0} = 0, \quad v_{\xi_1\bar{\xi}_1} = 0$$

und die Darstellung (3) verwandelt sich in

$$x_1 = \frac{1}{2}(\xi_1 + \bar{\xi}_1),\ x_2 = -\frac{i}{2}(\xi_1 - \bar{\xi}_1),\ x_3 = \varphi(\xi_1) + \psi(\bar{\xi}_1),\ x_4 = \chi(\xi_1) + \omega(\bar{\xi}_1). \tag{5}$$

Vektoriell können wir dafür schreiben

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y}(\xi_1) + \mathfrak{z}(\bar{\xi}_1);\ \mathfrak{y}(\xi_1) = \left\{\frac{1}{2}\xi_1, -\frac{i}{2}\xi_1, \varphi(\xi_1), \chi(\xi_1)\right\}; \tag{6}$$

$$\mathfrak{z}(\bar{\xi}_1) = \left\{\frac{1}{2}\bar{\xi}_1, \frac{i}{2}\bar{\xi}_1, \psi(\bar{\xi}_1), \omega(\bar{\xi}_1)\right\},$$

und erhalten so insbesondere die isotropen Tangentenvektoren

$$\mathfrak{y}' = \frac{d\mathfrak{y}}{d\xi_1} = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{i}{2}, \varphi', \chi'\right\},\ \dot{\mathfrak{z}} = \frac{d\mathfrak{z}}{d\bar{\xi}_1} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{i}{2}, \dot{\psi}, \dot{\omega}\right\},\ \mathfrak{y}'^2 = \varphi'^2 + \chi'^2 \tag{7}$$

$$= \frac{1}{4}(u_{x_1}^2 - v_{x_1}^2) + \frac{1}{4}(v_{x_1}^2 - u_{x_1}^2) - \frac{i}{2}(u_{x_1}u_{x_2} + v_{x_1}v_{x_2}) = 0;\ \dot{\mathfrak{z}}^2 = \dot{\psi}^2 + \dot{\omega}^2 = 0.$$

Aber auch die höheren Ableitungen der Vektoren $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ sind isotrope Vektoren (eventuell auch Nullvektoren). Denn es gilt

$$\mathfrak{y}'' = \{0, 0, \varphi'', \chi''\}, \quad \mathfrak{y}''' = \{0, 0, \varphi''', \chi'''\}, \ldots$$

$$\ddot{\mathfrak{z}} = \{0, 0, , \ddot{\psi}\ \ddot{\omega}\}, \quad \dddot{\mathfrak{z}} = \{0, 0, \dddot{\psi}, \dddot{\omega}\}, \ldots$$

und daher mit Rücksicht auf die Identitäten $\varphi' = \pm i\chi'$ und $\dot{\psi} = \pm i\dot{\omega}$ auch

$$\mathfrak{y}''^2 = \mathfrak{y}'''^2 = \cdots = 0, \quad \ddot{\mathfrak{z}}^2 = \dddot{\mathfrak{z}}^2 = \cdots = 0.$$

Das bedeutet: *Die isotropen Erzeugenden der Kommerellschen Minimalflächen bestehen aus unbeschränkt isotropen Kurven.*

Ist $\mathfrak{v}$ ein beliebiger Vektor in R_4, so verschwinden die Determinantenquadrate $(\mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \mathfrak{y}''', \mathfrak{v})^2$ und $(\dot{\mathfrak{z}}, \ddot{\mathfrak{z}}, \dddot{\mathfrak{z}}, \mathfrak{v})^2$ identisch in $\mathfrak{v}$. Der Rang der Matrizen $\| \mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \mathfrak{y}''', \mathfrak{y}'''' \|$ und $\| \dot{\mathfrak{z}}, \ddot{\mathfrak{z}}, \dddot{\mathfrak{z}}, \ddddot{\mathfrak{z}} \|$ ist daher $\leqq 2$. Bezeichnen wir den Rang dieser Matrizen mit r und s, so ergeben sich für die Kommerellschen Minimal-V_2 in R_4 drei Klassen:

(I) $r = s = 2$; (II) $r = 2, s = 1$ (oder $r = 1, s = 2$); (III) $r = s = 1$

Im ersten Falle liegen beide Scharen Erzeugender in totalisotropen Ebenen des R_4; im Falle (II) *gilt dies nur für die eine Schar, während die andere aus isotropen Geraden besteht; im Fall* (III) *schließlich sind alle Erzeugenden isotrope Gerade.*

Für die Komponenten $g_{\alpha\beta}$ des metrischen Fundamentaltensors der Kommerellschen Minimalflächen gilt nach (6) und (7)

$$g_{11} = \mathfrak{y}'^2 = 0, \quad g_{12} = \mathfrak{y}'\dot{\mathfrak{z}} = \frac{1}{2} + \varphi'\dot{\psi} + \chi'\dot{\omega}, \quad g_{22} = \dot{\mathfrak{z}}^2 = 0.$$

Für g_{12} bestehen zwei verschiedene Möglichkeiten, je nachdem φ' und $\dot{\psi}$ durch $\pm i\chi'$ und $\pm i\dot{\omega}$ oder z. B. durch $\pm i\chi'$ und $\mp i\dot{\omega}$ ersetzt wird. Im ersten Fall verschwindet $\varphi'\dot{\psi} + \chi'\dot{\omega}$, im zweiten nicht. Im ersten Falle reduziert sich die Metrik der V_2 auf die Konstanten $g_{11} = g_{22} = 0$, $g_{12} = \frac{1}{2}$, im zweiten bleibt sie variabel. Im ersten Falle muß daher die Gaußsche Krümmung K der V_2 verschwinden, im zweiten nicht. In isotropen Parametern schreibt sich die Gaußsche Krümmung K bekanntlich in der Gestalt:

$$(8) \qquad K = -\frac{1}{g_{12}^3}\left(g_{12}\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial\xi_1\partial\bar{\xi}_1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial\xi_1}\cdot\frac{\partial g_{12}}{\partial\bar{\xi}_1}\right) = -\frac{1}{(\mathfrak{y}'\dot{\mathfrak{z}})^3}[(\mathfrak{y}'\dot{\mathfrak{z}})(\mathfrak{y}''\ddot{\mathfrak{z}}) - (\mathfrak{y}''\dot{\mathfrak{z}})(\mathfrak{y}'\ddot{\mathfrak{z}})].$$

Andererseits ergibt sich für das Quadrat der Determinanten $(\mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \dot{\mathfrak{z}}, \ddot{\mathfrak{z}})$ der Vektoren, welche die Schmiegebenen der isotropen Erzeugenden und damit auch den ersten Schmiegraum der V_2 in R_4 aufspannen, mit Rücksicht auf (8)

$$(\mathfrak{y}', \mathfrak{y}'', \dot{\mathfrak{z}}, \ddot{\mathfrak{z}})^2 = g_{12}^6 K^2.$$

Da g_{12} nach Voraussetzung nicht verschwindet, folgt: *Die Gaußsche Krümmung der Kommerellschen Minimalflächen in R_4 verschwindet genau dann, wenn die Minimalfläche in einem dreidimensionalen Unterraum des R_4 liegt. Dieser Fall liegt für die Flächen der Klassen* (II) *und* (III) *stets vor.*

Die in totalisotropen Ebenen gelegenen (nichtlinearen) isotropen Erzeugenden der Kommerellschen Minimalflächen gestatten wie alle Kurven in totalisotropen Ebenen eine affindifferentialgeometrische Deutung in einer geeignet zugeordneten euklidischen Ebene des R_4, die etwa durch die Vektoren

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{e}_3 = \{0, 0, 1, 0\} \text{ und } \mathfrak{w} = \mathfrak{e}_4 = \{0, 0, 0, 1\}$$

gegeben werden kann [3]. Ist $\mathfrak{r}(t)$ der Ortsvektor einer (nichtlinearen) Kurve in einer totalisotropen Ebene des R_4, so kann die absolute Integralkovariante

$$q(t; \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = \int_{t_0}^{t} (\mathfrak{r}', \mathfrak{r}'', \mathfrak{v}, \mathfrak{w})^{\frac{1}{2}}\, d\tau$$

als „Quasibogenlänge" der Kurve eingeführt werden. Wird $q(t; \mathfrak{v}, \mathfrak{w})$ als natürlicher Kurvenparameter verwendet und werden die Ableitungen nach q durch kleine Kreise bezeichnet, so entsteht zunächst die Identität

$$(\mathring{\mathfrak{r}}, \mathring{\mathfrak{r}}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) \equiv 1\{q\}$$

und die Ableitungsgleichung

$$\mathring{\mathfrak{x}}^{\circ} = \alpha \mathfrak{x}.$$

Der Koeffizient

$$\alpha = k(q, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}) = (\mathring{\mathfrak{x}}, , \mathring{\mathfrak{x}}^{\circ} \mathfrak{v}, \mathfrak{w})$$

heißt die Quasikrümmung der isotropen Kurve $\mathfrak{x}(q)$. Für die Erzeugenden der Kommerellschen Minimalflächen sind die Ableitungen $\mathfrak{y}''$, $\mathfrak{y}'''$ bzw. $\ddot{\mathfrak{d}}$, $\dddot{\mathfrak{d}}$ linear abhängig. Daher verschwindet die Quasikrümmung auf den Erzeugenden und wir bekommen die affindifferentialgeometrische Deutung: *Die isotropen Erzeugenden der Kommerellschen Minimalflächen allgemeiner Art sind isotrope Parabeln von der euklidischen Länge Null* (vgl. [3], S. 261).

§ 2. $n = 2$; V_4 in R_6

Für $n = 2$ erhalten wir aus (1) die Komponentenmatrix

$$(9) \qquad \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & u_{x_1} & v_{x_1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & u_{x_2} & v_{x_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & u_{x_3} & v_{x_3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & u_{x_4} & v_{x_4} \end{matrix} \right\|$$

der ersten Ableitungen $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$, $\mathfrak{x}_4$ des Ortsvektors $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ der V_4 in R_6. Da u und v Real- und Imaginärteil der analytischen Funktion $f(z_1, z_2)$ darstellen, sind sie durch die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$(10) \qquad \begin{aligned} u_{x_1} &= v_{x_2}, & u_{x_3} &= v_{x_4} \\ u_{x_2} &= -v_{x_1}, & u_{x_4} &= -v_{x_3} \end{aligned}$$

verknüpft und genügen einzeln je einem überbestimmten System zweiter Ordnung (vgl. [1])

$$(11) \qquad \begin{aligned} &u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} = 0,\ u_{x_1x_3} + u_{x_2x_4} = 0; \quad v_{x_1x_1} + v_{x_2x_2} = 0,\ v_{x_2x_1} + v_{x_1x_4} = 0. \\ &u_{x_2x_3} + u_{x_4x_4} = 0,\ u_{x_1x_4} - u_{x_2x_3} = 0; \quad v_{x_2x_3} + v_{x_4x_4} = 0,\ v_{x_1x_4} - v_{x_2x_3} = 0. \end{aligned}$$

Aus (9) und (10) ergeben sich die metrischen Fundamentalkomponenten der V_4 in „halbisothermer" Form

$$(12) \qquad \begin{aligned} &g_{11} = g_{22} = 1 + u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2, && g_{12} = 0;\ g_{33} = g_{44} = 1 + u_{x_3}^2 + u_{x_4}^2,\ g_{34} = 0, \\ &g_{13} = g_{24} = u_{x_1}u_{x_3} + u_{x_2}u_{x_4}, && g_{14} = -g_{23} = u_{x_1}u_{x_4} - u_{x_2}u_{x_3}, \ (g_{\alpha\beta} = \mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_\beta). \end{aligned}$$

Analog zu (4) transformieren wir wieder auf konjugiert-komplexe Parameter

$$(13) \qquad \begin{aligned} &\xi_1 = x_1 + ix_2,\ \bar{\xi}_1 = x_1 - ix_2,\ \xi_3 = x_3 + ix_4,\ \bar{\xi}_3 = x_3 - ix_4; \\ &x_1 = \frac{1}{2}(\xi_1 + \bar{\xi}_1),\ x_2 = -\frac{i}{2}(\xi_1 - \bar{\xi}_1),\ x_3 = \frac{1}{2}(\xi_3 + \bar{\xi}_3),\ x_4 = -\frac{i}{2}(\xi_3 - \bar{\xi}_3) \end{aligned}$$

und gewinnen in diesen damit für die V_4 in R_6 die Darstellung

$$(14) \qquad \begin{aligned} &x_1 = \frac{1}{2}(\xi_1 + \bar{\xi}_1),\ x_2 = -\frac{i}{2}(\xi_1 - \bar{\xi}_1),\ x_3 = \frac{1}{2}(\xi_3 + \bar{\xi}_3),\ x_4 = -\frac{i}{2}(\xi_3 - \bar{\xi}_3), \\ &x_5 = u(\xi_1, \xi_1, \xi_3, \bar{\xi}_3),\ x_6 = v(\xi_1, \bar{\xi}_1, \xi_3, \bar{\xi}_3): \end{aligned}$$

Aus (13) erhalten wir die Tangentenvektoren

$$\mathfrak{x}_{\xi_1} = \frac{1}{2}(\mathfrak{x}_1 - i\mathfrak{x}_2),\ \mathfrak{x}_{\bar{\xi}_1} = \frac{1}{2}(\mathfrak{x}_1 + i\mathfrak{x}_2),\ \mathfrak{x}_{\xi_3} = \frac{1}{2}(\mathfrak{x}_3 - i\mathfrak{x}_4),\ \mathfrak{x}_{\bar{\xi}_3} = \frac{1}{2}(\mathfrak{x}_3 + i\mathfrak{x}_4)$$

und mit Rücksicht auf (12) die Skalarprodukte

$$\mathfrak{x}_{\xi_1}^2 = 0,\quad \mathfrak{x}_{\xi_1}\mathfrak{x}_{\xi_3} = 0,\quad \mathfrak{x}_{\xi_1}\mathfrak{x}_{\bar{\xi}_1} = \frac{\lambda}{2},\quad \mathfrak{x}_{\xi_1}\mathfrak{x}_{\bar{\xi}_3} = \frac{1}{2}(g_{13} + ig_{14})$$

$$\mathfrak{x}_{\xi_3}\mathfrak{x}_{\xi_1} = 0,\quad \mathfrak{x}_{\xi_3}^2 = 0,\quad \mathfrak{x}_{\xi_3}\mathfrak{x}_{\bar{\xi}_1} = \frac{1}{2}(g_{13} - ig_{14}),\quad \mathfrak{x}_{\xi_3}\mathfrak{x}_{\bar{\xi}_3} = \frac{\mu}{2},$$

$$\mathfrak{x}_{\bar{\xi}_1}\mathfrak{x}_{\xi_1} = \frac{\lambda}{2},\quad \mathfrak{x}_{\bar{\xi}_1}\mathfrak{x}_{\xi_3} = \frac{1}{2}(g_{13} - ig_{14}),\quad \mathfrak{x}_{\bar{\xi}_1}^2 = 0,\quad \mathfrak{x}_{\bar{\xi}_1}\mathfrak{x}_{\bar{\xi}_3} = 0,$$

$$\mathfrak{x}_{\bar{\xi}_3}\mathfrak{x}_{\xi_1} = \frac{1}{2}(g_{13} + ig_{14}),\quad \mathfrak{x}_{\bar{\xi}_3}\mathfrak{x}_{\xi_3} = \frac{\mu}{2},\quad \mathfrak{x}_{\bar{\xi}_3}\mathfrak{x}_{\bar{\xi}_1} = 0,\quad \mathfrak{x}_{\bar{\xi}_3}^2 = 0.$$

Demnach sind die Parameterlinien $\bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_1^{(0)}$, $\xi_3 = \xi_3^{(0)}$, $\bar{\xi}_3 = \bar{\xi}_3^{(0)}$; ... isotrope Kurven auf V_4 und die Parameterflächen $\bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_1^{(0)}$, $\bar{\xi}_3 = \bar{\xi}_3^{(0)}$ bzw. $\xi_1 = \xi_1^{(0)}$, $\xi_3 = \xi_3^{(0)}$ totalisotrope Flächen. Bilden sie, in Analogie zu (6) auf V_2, Imprimitivitätssysteme auf V_4? Um diese Frage zu entscheiden, müssen wir vorerst das System (11) gemäß (13) transformieren. Man erhält zunächst

$$u_{\xi_1\bar{\xi}_1} = 0,\ u_{\xi_1\bar{\xi}_3} + u_{\bar{\xi}_1\xi_3} = 0;\quad v_{\xi_1\bar{\xi}_1} = 0,\quad v_{\xi_1\bar{\xi}_3} + v_{\bar{\xi}_1\xi_3} = 0$$
$$u_{\xi_3\bar{\xi}_3} = 0,\ u_{\xi_1\bar{\xi}_3} - u_{\bar{\xi}_1\xi_3} = 0;\quad v_{\xi_3\bar{\xi}_3} = 0,\quad v_{\xi_1\bar{\xi}_3} - v_{\bar{\xi}_1\xi_3} = 0$$

oder auch

$$\begin{aligned} &u_{\xi_1\bar{\xi}_1} = 0,\ u_{\xi_1\bar{\xi}_3} = 0,\ u_{\xi_3\bar{\xi}_1} = 0,\ u_{\xi_3\bar{\xi}_3} = 0 \\ &v_{\xi_1\bar{\xi}_1} = 0,\ v_{\xi_1\bar{\xi}_3} = 0,\ v_{\xi_3\bar{\xi}_1} = 0,\ v_{\xi_3\bar{\xi}_3} = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

und damit notwendig

$$u = \varphi(\xi_1\xi_3) + \psi(\bar{\xi}_1\bar{\xi}_3),\quad v = \chi(\xi_1\xi_3) + \omega(\bar{\xi}_1\bar{\xi}_3).$$

Damit ist gezeigt: *Die beiden Scharen von je ∞^2 totalisotropen Parameterflächen $\bar{\xi}_1 = \bar{\xi}_1^{(0)}$, $\bar{\xi}_3 = \bar{\xi}_3^{(0)}$ bzw. $\xi_1 = \xi_1^{(0)}$, $\xi_3 = \xi_3^{(0)}$ sind Imprimitivitätssysteme der Kommerellschen V_4 gegenüber der Gruppe der Translationen in R_6. Die Kommerellschen V_4 in R_6 gestatten die kanonische Darstellung*

$$\mathfrak{x}(\xi_1, \bar{\xi}_1, \xi_3, \bar{\xi}_3) = \mathfrak{y}(\xi_1, \xi_3) + \mathfrak{z}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_3). \tag{16}$$

Zur Vereinfachung der weiteren Rechnung ändern wir jetzt die Bezeichnungen gemäß der Festsetzung

$$\xi_1 = \eta_1,\ \bar{\xi}_1 = \eta_3,\ \xi_3 = \eta_2,\ \bar{\xi}_3 = \eta_4.$$

An Stelle von (16) tritt dann die Darstellung

$$\boxed{\mathfrak{x}(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = \mathfrak{y}(\eta_1, \eta_2) + \mathfrak{z}(\eta_3, \eta_4)} \tag{17}$$

Jetzt berechnen wir den Krümmungsaffinor $\mathfrak{h}_{\alpha\beta}$ der V_4 (17) und erhalten nach Definition (vgl. [4], S. 86—87ff.):

$$\mathfrak{h}_{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{x}_{\alpha\beta} - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \mathfrak{x}_\lambda,\ \alpha, \beta, \lambda = 1, 2, 3, 4;\ \mathfrak{x}_\lambda = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial \eta_\lambda},\ \mathfrak{x}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial \eta_\alpha \partial \eta_\beta}. \tag{18}$$

Dabei sind die Christoffelklammern $\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\}$ gemäß $\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} = g^{\sigma\lambda}[\sigma, \alpha\beta] = g^{\sigma\lambda}(\mathfrak{x}_\sigma \mathfrak{x}_{\alpha\beta})$ aus den ko- und kontravarianten Komponenten des metrischen Tensors der V_4 (17) zu berechnen. Bezeichnen wir diese Komponenten mit $\tilde{g}_{\alpha\beta}(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$, so gilt:

$$(19)\quad \| \tilde{g}_{\alpha\beta} \| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \tilde{g}_{13} & \tilde{g}_{14} \\ 0 & 0 & \tilde{g}_{23} & \tilde{g}_{24} \\ \tilde{g}_{31} & \tilde{g}_{32} & 0 & 0 \\ \tilde{g}_{41} & \tilde{g}_{42} & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \| \tilde{g}^{\alpha\beta} \| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \tilde{g}^{13} & \tilde{g}^{14} \\ 0 & 0 & \tilde{g}^{23} & \tilde{g}^{24} \\ \tilde{g}^{31} & \tilde{g}^{32} & 0 & 0 \\ \tilde{g}^{41} & \tilde{g}^{42} & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Überschieben wir (18) mit $\tilde{g}^{\alpha\beta}$, so entsteht der mittlere Krümmungsvektor $\mathfrak{h}$ der V_4 in R_6

$$(20)\qquad \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\alpha\beta}\tilde{g}^{\alpha\beta} = \mathfrak{x}_{\alpha\beta}\tilde{g}^{\alpha\beta} - \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \alpha\beta \end{matrix} \right\} \tilde{g}^{\alpha\beta}\mathfrak{x}_\lambda = \mathfrak{x}_{\alpha\beta}\tilde{g}^{\alpha\beta} - \tilde{g}^{\sigma\lambda}(\mathfrak{x}_\sigma \mathfrak{x}_{\alpha\beta})\tilde{g}^{\alpha\beta}\mathfrak{x}_\lambda.$$

Im ersten Term rechts in (20) verschwinden nach (17) die Ableitungen $\mathfrak{x}_{\alpha\beta}$ gerade für jene Indexpaare, für welche nach (19) die entsprechenden $\tilde{g}^{\alpha\beta}$ nicht verschwinden und umgekehrt. Daher fällt die erste Doppelsumme in (20) rechts weg. Dasselbe gilt jedoch und aus den gleichen Gründen auch für den zweiten Term rechts in (20). Das Verschwinden des mittleren Krümmungsvektors bedeutet: *die Kommerellschen V_4 (17) sind Minimalmannigfaltigkeiten in R_6.*

Ähnlich wie die isotropen Erzeugenden der Kommerellschen Minimal-V_2 in R_4 aus speziellen isotropen Kurven bestehen, ist auch für die totalisotropen Erzeugenden $\mathfrak{y}(\eta_1, \eta_2)$ und $\mathfrak{z}(\eta_3, \eta_4)$ der Kommerellschen Minimal-V_4 in R_6 ein besonderes Verhalten zu erwarten. Für die Erzeugenden $\mathfrak{y}(\eta_1, \eta_2)$ und $\mathfrak{z}(\eta_3, \eta_4)$ gilt in den Parametern $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$:

$$(21)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{y}(\eta_1, \eta_2) &= \left\{ \frac{1}{2}\eta_1, \frac{-i}{2}\eta_1, \frac{1}{2}\eta_2, \frac{-i}{2}\eta_2, \varphi(\eta_1, \eta_2), \chi(\eta_1\eta_2) \right\}, \\ \mathfrak{z}(\eta_3, \eta_4) &= \left\{ \frac{1}{2}\eta_3, \frac{i}{2}\eta_3, \frac{1}{2}\eta_4, \frac{i}{2}\eta_4, \psi(\eta_3, \eta_4), \omega(\eta_3, \eta_4) \right\}. \end{aligned}$$

Die Wahl der Funktionen φ und χ bzw. ψ und ω wird durch den totalisotropen Charakter ($\tilde{g}_{11} = \tilde{g}_{12} = \tilde{g}_{22} = 0$ bzw. $\tilde{g}_{33} = \tilde{g}_{34} = \tilde{g}_{44} = 0$) der Parameterflächen eingeschränkt:

$$\varphi_1^2 + \chi_1^2 = 0,\ \varphi_1\varphi_2 + \chi_1\chi_2 = 0,\ \varphi_2^2 + \chi_2^2 = 0,$$

$$\psi_3^2 + \omega_3^2 = 0,\ \psi_3\psi_4 + \omega_3\omega_4 = 0,\ \psi_4^2 + \omega_4^2 = 0.$$

Die quadratischen dieser Gleichungen bedingen:

$$(22)\qquad \text{entweder } \varphi_1 = \pm i\chi_1,\ \varphi_2 = \pm i\chi_2 \text{ oder } \varphi_1 = \pm i\chi_1,\ \varphi_2 = \mp i\chi_2$$

und ebenso

$$(23)\qquad \text{entweder } \psi_3 = \pm i\omega_3,\ \psi_4 = \pm i\omega_4 \text{ oder } \psi_3 = \pm i\omega_3,\ \psi_4 = \mp i\omega_4.$$

Werden für φ_1, φ_2 die gleichen Vorzeichen zugeordnet, so ist die bilineare Bedingung für $\varphi_1, \varphi_2, \chi_1, \chi_2$ bereits erfüllt. Werden jedoch ungleiche Vorzeichen zugeordnet, so entsteht die Forderung $2\chi_1\chi_2 = 0$ und ebenso $2\omega_3\omega_4 = 0$ bei verschiedener Zuordnung der Vorzeichen für ψ_3 und ψ_4. Auf jeden Fall ziehen jedoch die Bedingungen (22) und (23) die weiteren

$$\varphi_{11} = \pm i\chi_{11},\ \varphi_{12} = \pm i\chi_{12},\ \varphi_{22} = \pm i\chi_{22},\ \psi_{33} = \pm i\omega_{33},\ \psi_{34} = \pm i\omega_{34},\ \psi_{44} = \pm i\omega_{44}, \ldots$$

nach sich. Daher sind nicht nur die ersten Ableitungen des Ortsvektors $\mathfrak{y}(\eta_1, \eta_2)$ isotrop sondern auch alle höheren Ableitungen und dasselbe gilt für $\mathfrak{z}(\eta_3\eta_4)$. Das bedeutet: *Die totalisotropen Erzeugenden der Kommerellschen Minimal-V_4 in R_6 sind unbeschränkt totalisotrope Flächen also entweder totalisotrope Ebenen oder nichtlineare totalisotrope Flächen in totalisotropen dreidimensionalen Räumen des R_6.*

Im ersten Falle ist die Komponentenmatrix der Vektoren $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{y}_2$, $\mathfrak{y}_{11}$, $\mathfrak{y}_{12}$, $\mathfrak{y}_{22}$ bzw. $\mathfrak{z}_3$, $\mathfrak{z}_4$, $\mathfrak{z}_{33}$, $\mathfrak{z}_{34}$, $\mathfrak{z}_{44}$ notwendig vom Rang 2 und die Funktionen φ, χ, ψ, ω sind notwendig linear. Allgemein erhalten wir aus (21) für $\| \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4 \|$ die Komponenten und inneren Produkte

$$\left\| \begin{matrix} \mathfrak{y}_1 \\ \mathfrak{y}_2 \\ \mathfrak{z}_3 \\ \mathfrak{z}_4 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} & 0 & 0 & \varphi_1 & \chi_1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} & \varphi_2 & \chi_2 \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} & 0 & 0 & \psi_3 & \omega_3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{i}{2} & \psi_4 & \omega_4 \end{matrix} \right\|,$$

$$\mathfrak{y}_1^2 = 0,\ \mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2 = 0,\ \mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_3 = \frac{1}{2} + \varphi_1\psi_3 + \chi_1\omega_3,\ \mathfrak{y}_1\mathfrak{z}_4 = \varphi_1\psi_4 + \chi_1\omega_4.$$

$$\mathfrak{y}_2^2 = 0,\ \mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_3 = \varphi_2\psi_3 + \chi_2\omega_3, \qquad \mathfrak{y}_2\mathfrak{z}_4 = \frac{1}{2} + \varphi_2\psi_4 + \chi_2\omega_4,$$

$$\mathfrak{z}_3^2 = 0, \qquad \mathfrak{z}_3\mathfrak{z}_4 = 0,$$

$$\mathfrak{z}_4^2 = 0.$$

Von den Zuordnungsmöglichkeiten der Vorzeichen behandeln wir zunächst $\varphi_1 = \pm i\chi_1$, $\varphi_2 = \pm i\chi_2$, $\psi_3 = \pm i\omega_3$, $\psi_4 = \pm i\omega_4$. Die Kommerellschen Minimal-V_4 dieser Zuordnung tragen die Metrik

$$\| \tilde{g}_{\alpha\beta} \| = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \tilde{g} = | \tilde{g}_{\alpha\beta} | = \frac{1}{16} \neq 0.$$

Der Riemann-Christoffelsche Krümmungstensor $\tilde{\mathfrak{R}}_{\alpha\beta\chi\sigma}$ dieser Metrik verschwindet. Alle anderen Zuordnungen führen im allgemeinen auf nichtkonstante Komponenten $\tilde{g}_{13}$, $\tilde{g}_{14}$, $\tilde{g}_{23}$, $\tilde{g}_{24}$. Als Beispiel wählen wir die Zuordnung $\varphi_1 = \pm i\chi_1$, $\varphi_2 = \pm i\chi_2$, $\psi_3 = \mp i\omega_3$, $\psi_4 = \mp i\omega_4$ und bekommen die Metrik

$$(24) \quad \| \tilde{g}_{\alpha\beta} \| = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} + 2\chi_1\omega_3 & 2\chi_1\omega_4 \\ 0 & 0 & 2\chi_2\omega_3 & \frac{1}{2} + 2\chi_2\omega_4 \\ \frac{1}{2} + 2\chi_1\omega_3 & 2\chi_2\omega_3 & 0 & 0 \\ 2\chi_1\omega_4 & \frac{1}{2} + 2\chi_2\omega_4 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad \tilde{g} = \left(\frac{1}{4} + \chi_1\omega_3 + \chi_2\omega_4 \right)^2.$$

Um die Krümmungsverhältnisse der Metrik (24) zu prüfen, berechnen wir die Komponente $\widetilde{R}_{13}$ ihres verjüngten Riemann-Christoffelschen Tensors. Es gilt

$$\widetilde{R}_{13} = \widetilde{R}^{\lambda}_{13\lambda} = \frac{\partial^2 \lg\sqrt{\tilde{g}}}{\partial\eta_1\partial\eta_3} - \frac{\partial}{\partial\eta_\lambda}\left\{\begin{matrix}\lambda\\13\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\mu\\1\lambda\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\lambda\\\mu 3\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\mu\\13\end{matrix}\right\}\frac{\partial \lg\sqrt{\tilde{g}}}{\partial\eta_\mu} = \frac{\partial^2 \lg\left(\frac{1}{4} + \chi_1\omega_3 + \chi_2\omega_4\right)}{\partial\eta_1\partial\eta_3},$$

da die Christoffelklammern $\left\{\begin{matrix}\lambda\\13\end{matrix}\right\}$ und $\left\{\begin{matrix}\mu\\13\end{matrix}\right\}$ ebenso wie auch die Christoffelklammern $\left\{\begin{matrix}3\\11\end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix}4\\11\end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix}3\\12\end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix}4\\12\end{matrix}\right\}$ verschwinden. Setzen wir z. B. $\chi = \eta_1^2 + \eta_2^2$, $\omega = \eta_3^2 + \eta_4^2$, so ergibt sich

$$\widetilde{R}_{13} = \frac{\partial^2 \lg\left(\frac{1}{4} + \chi_1\omega_3 + \chi_2\omega_4\right)}{\partial\eta_1\partial\eta_3} = \frac{\partial}{\partial\eta_3}\,\frac{\eta_3}{\frac{1}{16} + \eta_1\eta_3 + \eta_2\eta_4} = \frac{\frac{1}{16} + \eta_2\eta_4}{\left(\frac{1}{16} + \eta_1\eta_3 + \eta_2\eta_4\right)^2}$$

und insbesondere $\widetilde{R}_{13}(0, 0, 0, 0) = 16 \neq 0$. Der verjüngte Riemann-Christoffelsche Krümmungstensor der Metrik (24) verschwindet demnach im allgemeinen nicht und daher ebensowenig $\widetilde{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ selbst. Das bedeutet: *Die Kommerellschen Minimal-V_4 des R_6 sind im allgemeinen nicht abwickelbar.*

Mit Hilfe dreier konstanter linear unabhängiger nichtisotroper Vektoren $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$ kann man auch den totalisotropen Flächen $\mathfrak{y}(\eta_1, \eta_2)$ und $\mathfrak{z}(\eta_3, \eta_4)$ die Komponenten

$$h^{(1)}_{\alpha\beta} = (\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_{\alpha\beta}, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3) \text{ bzw. } h^{(2)}_{\varrho\sigma} = (\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4, \mathfrak{z}_{\varrho\sigma}, \mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2, \mathfrak{v}_3),\ \alpha, \beta = 1, 2;\ \varrho, \sigma = 3, 4$$

relativ invarianter quadratischer Differentialformen zuordnen und eine affine Differentialgeometrie der totalisotropen Erzeugenden der Kommerellschen V_4 in R_6 entwickeln (vgl. [3], § 3).

Literatur

[1] *Courant* und *Hilbert*, Methoden der mathematischen Physik II, 13; Berlin 1937.

[2] *K. Kommerell*, Riemannsche Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen, Math. Ann. **60** (1905), 548—596.

[3] *M. Pinl*, Zur Differentialgeometrie in totalisotropen R_2 und R_3 eines komplexen euklidischen R_4 und R_6, Monatshefte für Mathematik **63** (1959), 256—264.

[4] *Schouten* und *Struik*, Einführung II, Groningen 1938.

---

5 Köln-Riehl, Stammheimer Straße 34—36

Eingegangen 10. Februar 1969

Two constructions of Prüfer domains

By *Robert Gilmer*[1]) at Tallahassee, USA

To Wolfgang Krull on his seventieth birthday

1. Introduction and summary

One of the most active and fruitful areas of research in multiplicative ideal theory in recent years has been the theory of Prüfer domains, where an integral domain D with identity is a Prüfer domain if each nonzero finitely generated ideal of D is invertible, or equivalently, if each localization of D is a valuation ring. Evidence of activity in this area are several papers on the subject; [1], [3], [5], [6], [9], [15], and [19] are such recent papers concerning Prüfer domains.

Prüfer domains arise in the following ways: Any Dedekind domain is Prüfer; if D is Prüfer, then any overring of D (that is, any domain between D and its quotient field) is Prüfer ([6], p. 333), D/P is Prüfer for each proper prime ideal P of D ([7], p. 259), and the integral closure of D in any extension field of its quotient field is Prüfer ([20], p. 31). In particular, any integrally closed domain of algebraic integers is a one-dimensional Prüfer domain. If $\{V_i\}_1^n$ is a finite family of valuation rings on a field K, then $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ is a Prüfer domain with quotient field K [17], ([18], p. 38). Moreover, if J is any integrally closed domain and if $\{X_\lambda\}$ is a set of indeterminates over J, then the Kronecker function ring of J with respect to $\{X_\lambda\}$ and any arithmetisch brauchbar $'$-operation on J is a Prüfer domain ([16], p. 559). Finally, the ring of entire functions is a Prüfer domain [14].

In this paper we give two new constructions of Prüfer domains and we investigate, rather thoroughly in the second case, Prüfer domains constructed in these manners. The first of these constructions is as follows: Let K be a field with prime subring π and let K_0 be the integral closure of π in K. If $f(X) \in K_0[X]$ is a monic polynomial of positive degree having no root in K, then the integral closure of the subring of K generated by $\{1/f(t)\}_{t\in K}$ is a Prüfer domain with quotient field K. For the second construction, let $\{V_i\}_1^n$ be a finite family of valuation rings on a field L, where each V_i is of the form $K + M_i$, with K a fixed subfield of L and M_i the maximal ideal of V_i. If for $1 \leqq i \leqq n$, D_i is a Prüfer domain with quotient field K, then $\bigcap_{i=1}^{n} (D_i + M_i)$ is a Prüfer domain with quotient field L. Thus this second construction is a generalization of both that of Nagata in [17] and that of Gilmer in ([7], App. 2).

[1]) During the writing of this paper, the author received support from National Science Foundation Grant GP-8424.

2. A construction by means of polynomials

In this section we use the following notation. K denotes a field with prime subring π; K_0 is the integral closure of π in K. $f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ is a monic polynomial of positive degree n having no root in K. $S = \{1/f(t)\}_{t\in K}$, D is the subring of K generated by S, and D' is the integral closure of D in K.

Theorem 2.1. *If $t \in K$ and $g(X) \in K_0[X]$ is such that $\deg g(X) \leqq n$, then $g(t)/f(t) \in D'$ The quotient field of D' is K.*

Proof. We use induction on $\deg g(X)$. If $\deg g(X) = 0$, then $g(X) = g_0 \in K_0$. But $K_0 \leqq D'$ (since $\pi \leqq D'$ and K_0 is a subring of K integral over π) and $1/f(t) \in D'$ so that $g_0(1/f(t)) = g(t)/f(t) \in D'$.

Assume that the theorem is true for $\deg g(X) < r$, where $r \leqq n$, and let $u(X) = \sum_{i=0}^{r} u_i X^i \in K_0[X]$, where $u_r \neq 0$. Then

$$u(t)/f(t) = (u(t) - u_r t^r)/f(t) + u_r t^r/f(t) \equiv u_r t^r/f(t)\ (D').$$

Therefore, to show that $g(t)/f(t)$ is in D', we need only show that $t^r/f(t) \in D'$. We can write $[f(X)]^r$ in the form $X^{nr} + h_1(X)X^{(n-1)r} + \cdots + h_{n-1}(X)X^r + h_n(X)$, where each $h_i(X)$ is in $K_0[X]$ and is either 0 or a polynomial of degree less than r. Then

$$\begin{aligned} 1/(f(t))^{n-r} &= f(t)^r/f(t)^n = (t^{nr} + \cdots + h_{n-1}(t)t^r + h_n(t))/[f(t)]^n \\ &= [t^r/f(t)]^n + (h_1(t)/f(t))[t^r/f(t)]^{n-1} + \cdots + (1/f(t))^{n-i-1}(h_i(t)/f(t))[t^r/f(t)]^i \\ &\quad + \cdots + (1/f(t))^{n-1}(h_n(t)/f(t)). \end{aligned}$$

By the induction hypothesis, each $h_i(t)/f(t)$ is in D' for $1 \leqq i \leqq n$. And $1/f(t) \in D'$ so that $(1/f(t))^j \in D'$ for $0 \leqq j \leqq n-1$. The equality above therefore yields an integral dependence relation for $t^r/f(t)$ over D'. Since $t^r/f(t) \in K$ and D' is integrally closed in K, it follows that $t^r/f(t) \in D'$.

If $t \in K$, then $t/f(t)$ and $1/f(t)$ are in D' so that $t = (t/f(t))/(1/f(t))$ is in the quotient field of D'.

Proposition 2.1. *If $t \in K$, then $f(t)D' = \{1, t, \ldots, t^n\}D'$. If $r > 0$, then $t^{n+r} \in f(t)D'$ if and only if $t \in D'$.*

Proof. Theorem 2.1 shows that $\{1, t, \ldots, t^n\}D' \leqq f(t)D'$, and the reverse containment is clear, $f(X)$ being a polynomial over $K_0 (\leqq D')$ of degree n.

If $t \in D'$, then $t^{n+r} = t^n t^r \in \{1, t, \ldots, t^n\}D' = f(t)D'$. And if for some $r > 0$, $t^{n+r} \in f(t)D' = \{1, t, \ldots, t^n\}D'$, then for some $d_0, d_1, \ldots, d_n \in D'$,

$$t^{n+r} = d_0 + d_1 t + \cdots + d_n t^n,$$

t is integral over D', and consequently, $t \in D'$.

Theorem 2.2. *If $t_1, t_2, \ldots, t_s \in K$, where $s \leqq 2^k$, and if F is the fractional ideal of D' generated by $\{t_i\}_1^s$, then F^{n^k} is principal. Hence D' is a Prüfer domain and the class group of D' is a torsion group.*

Proof. If $s = 1$, then F^{n^k} is principal for any $k \geqq 0$. If $s = 2$ and if t_1 or t_2 is zero, then F is principal and F^{n^k} is principal for any $k \geqq 0$. If $t_1 \neq 0 \neq t_2$, let $t = t_2/t_1$. Then $F = t_1 D' \cdot \{1, t\}D'$, and $F^n = t_1^n D' \cdot \{1, t, \ldots, t^n\}D' = t_1^n D' \cdot f(t)D' = t_1^n f(t)D'$. Therefore, F^n is principal and F^{n^k} is principal for any $k \geqq 1$. In particular, each nonzero ideal of D' with a basis of two elements is invertible so that D' is a Prüfer domain ([20], p. 6). We

assume that for $s \leqq 2^v$, F^{n^v} is principal, and we consider the case when $2^v < s \leqq 2^{v+1}$. Then if F_1 is the fractional ideal of D' generated by $t_1, \ldots, t_2 v$ and if F_2 is generated by $t_{2^v+1}, \ldots, t_s$, then $F = F_1 + F_2$ and each F_i has a basis of at most 2^v elements. Since D' is Prüfer, $F^{n^v} = F_1^{n^v} + F_2^{n^v}$ ([7], p. 60), and the induction hypothesis implies that $F_1^{n^v}$ and $F_2^{n^v}$ are principal. Thus F^{n^v} has a basis of two elements, and the case of Theorem 2 when $s = 2$ shows that $(F^{n^v})^n = F^{n^{v+1}}$ is principal.

In [13], Gilmer and Ohm call an integral domain J a *domain with the QR-property* if each overring of J is a quotient ring of J. A Prüfer domain with torsion class group has the QR-property; the status of the converse is unknown, but it is known that if J has the QR-property, then J is a Prüfer domain. At any rate, Theorem 2 yields

Corollary 2. 1. *Each overring of D' is a quotient ring of D'.*

It is often difficult to determine necessary and sufficient conditions on a given element t of K in order that t be in D'. It is easier to determine certain overrings of D'; any such overring J of D' is a domain with the QR-property ([13], p. 98) having torsion class group. (The class group of J is a homomorphic image of the class group of D' ([7], p. 473).) The valuation overrings of D' are particularly easy to identify, as our next result shows.

Proposition 2. 2. *Let V be a valuation ring on K with maximal ideal M. These conditions are equivalent:*

a) $D' \leqq V$.

b) *The congruence $f(x) \equiv 0(M)$ has no solution in V.*

c) *The congruence $f(x) \equiv 0(M)$ has no solution in K.*

Proof. That c) implies b) is clear. However, since $f(X) \in V[X]$ and $f(X)$ is monic, any solution of $f(x) \equiv 0(M)$ in K is an element of K integral over V, and hence is in V. Consequently, b) implies c).

a) $\rightarrow$ c): If c) fails and if $t \in K$ is such that $f(t) \in M$, then $f(t)$ is a nonunit of V so that $1/f(t) \notin V$ and $D' \nleqq V$.

c) $\rightarrow$ a): c) implies that for any t in K, $f(t) \notin M$ so that $1/f(t) \notin K - V$. Thus, $1/f(t) \in V$ for each t in K and $D' \leqq V$.

Consider now a set $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ of indeterminates over K. If $X_\lambda \rightarrow g_\lambda$ is a mapping of $\{X_\lambda\}$ into a totally ordered abelian group G, then this mapping induces a valuation v on $K(\{X_\lambda\})$ trivial on K; v is determined on any nonzero monomial by its value on the X_λ's, and $v(f)$, where $f \in K[\{X_\lambda\}] - \{0\}$, is defined to be the minimum of the v-values of the nonzero monomials in f ([7], p. 193). For valuations on $K(\{X_\lambda\})$ defined in this way, we prove some useful results. First we note

Lemma 2. 1. *The polynomial $f(X)$ has no root in $K(\{X_\lambda\})$.*

Proof. This follows since K is integrally closed in $K(\{X_\lambda\})$ and $f(X)$ has no root in K.

Theorem 2. 3. *If V is the valuation ring of v, and if M is the maximal ideal of V, then $f(x) \equiv 0(M)$ has no solution in V.*

Proof. Since $f(X) \in V[X]$ and since $f(0)$ is a unit of V, $f(x) \equiv 0(M)$ has no solution in M. We choose $\xi \in V - M$, where $\xi = s/t$, $s, t \in K[X_1, \ldots, X_n]$. Given nonzero monomials $p = a X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$ and $q = b X_1^{j_1} \cdots X_n^{j_n}$ in $K[X_1, \ldots, X_n]$ with $i_k \neq j_k$ for some k between 1 and n, we write $p < q$ if and only if $v(p) < v(q)$ or $v(p) = v(q)$ and p precedes q in the lexicographic ordering $<$ of the nonzero monomials of $K[X_1, \ldots, X_n]$. This order relation is compatible with multiplication — that is, if p, q, r are nonzero monomials

with $p < q$, then $pr < qr$, for if $v(p) < v(q)$, then $v(pr) = v(p) + v(r) < v(q) + v(r) = v(qr)$ so that $pr < qr$, and if $v(p) = v(q)$ while $p < q$, then $v(pr) = v(qr)$ while $pr < qr$. Thus we can write s as the sum of nonzero monomials $s_1, s_2, \ldots, s_g$, where $s_1 < s_2 < \cdots < s_g$, and t as a sum of nonzero monomials $t_1, \ldots, t_h$, where $t_1 < \cdots < t_h$. To show that $f(\xi) \notin M$, we must show that $v(f(\xi)) = v((s^n + a_{n-1}s^{n-1}t + \cdots + a_0t^n)/t^n) = 0$. Hence we must show that $v(s^n + \cdots + a_0t^n) = v(t^n) = nv(t_1)$. It is clear that s_1^n is the smallest nonzero monomial in s^n (since $<$ is compatible with multiplication) and that for $a_i \neq 0$, $a_is_1^it_1^{n-i}$ is the smallest nonzero monomial in $a_is^it^{n-i}$. Now if $s_1 < t_1$, s_1^n is the smallest nonzero monomial in $s^n + a_{n-1}s^{n-1}t + \cdots + a_0t^n$ and

$$v(s^n + a_{n-1}s^{n-1}t + \cdots + a_0t^n) = v(s_1^n) = nv(s_1) = nv(t_1).$$

Similarly, if $s_1 > t_1$, the desired conclusion holds. And if $s_1 \geqq t_1$ and $s_1 \leqq t_1$, then $s_1/t_1 \in K$. Hence $t_1^nf(s_1/t_1) = s_1^n + a_{n-1}s_1^{n-1}t_1 + \cdots + a_0t_1^n \neq 0$ and $s_1^n + \cdots + a_0t_1^n$ is the smallest nonzero monomial in $s^n + \cdots + a_0t^n$. It follows that

$$v(s^n + \cdots + a_0t^n) = v(s_1^n + \cdots + a_0t_1^n) = nv(t_1)$$

in this case also.

Theorem 2.4. *Let p be a nonunit prime of $K[\{X_\lambda\}]$ and consider the valuation ring $W = K[\{X_\lambda\}]_{(p)}$. If P is the maximal ideal of W, then the congruence $f(x) \equiv 0\ (P)$ has a solution in W if and only if there exist relatively prime elements a and b of $K[\{X_\lambda\}] - \{0\}$ such that p divides $b^nf(a/b)$.*

Proof. If the congruence $f(x) \equiv 0(P)$ has a solution ξ in W, then ξ must be a unit of W since $K \subseteq W$ so that the constant term of $f(X)$ is not in P. Hence we can write $\xi = s/t$ where $s, t \in K[\{X_\lambda\}] - \{0\}$, s and t are relatively prime, and p divides neither s nor t. Then $f(\xi) \in P$ implies that $t^nf(\xi) \in P \cap K[\{X_\lambda\}] = (p)$.

Conversely, if there exist relatively prime elements a, b of $K[\{X_\lambda\}]$ such that p divides $b^nf(a/b) = a^n + a_{n-1}a^{n-1}b + \cdots + a_0b^n$, then p does not divide b, for otherwise, p would also divide a, contrary to the assumption that a and b are relatively prime. Therefore, $b \notin (p)$ and $f(a/b) = b^nf(a/b)/b^n \in P$. It follows that a/b is a solution to the congruence $f(x) \equiv 0(P)$ in W.

3. A construction using a finite set of valuation rings

We introduce a uniform notation for § 3. K denotes a subfield of a field L, and $\{V_i\}_{i=1}^n$ is a finite family of valuation rings on L such that 1) $V_i \not\subseteq V_j$ for $i \neq j$, and 2) each V_i is of the form $K + M_i$, where M_i is the maximal ideal of V_i. (It would be sufficient to assume that the V_i's have a common residue field, but our assumption here greatly simplifies the notation.) For $1 \leqq i \leqq n$, v_i is a valuation on L associated with V_i and D_i is a domain with identity which is a subring of K. We set $J_i = D_i + M_i$ for $1 \leqq i \leqq n$, $J = \bigcap_{i=1}^n J_i$, and $V = \bigcap_{i=1}^n V_i$. If N_i is the center of V_i on V, it is known that V is a semi-quasi-local Prüfer domain with quotient field K having maximal ideals $N_1, N_2, \ldots, N_n$; further $V_i = N_{N_i}$ for $1 \leqq i \leqq n$ ([18], p. 38). We denote by H_i the center of V_i on J. Note that if $M = \bigcap_{i=1}^n H_i$, then

$$M = \bigcap_{i=1}^n (J \cap M_i) = J \cap \left(\bigcap_{n=1}^n M_i\right) = \bigcap_{i=1}^n M_i;$$

also, $M = \bigcap_{i=1}^n N_i$. We begin with some basic results concerning the domain J.

Proposition 3. 1. *J is a domain with quotient field L. The complete integral closure of J is $\bigcap_{i=1}^{n} T_i$, where for $1 \leqq i \leqq n$, T_i is the rank one valuation ring on L containing V_i if such a valuation ring exists, and $T_i = L$ otherwise. If W is any valuation overring of J, then W contains, or is contained in, some V_i.*

Proof. M is a common ideal of the domains V and J. Hence M, J, and V have the same quotient field. But we have already remarked that V has quotient field L. Since the conductor of J in V is nonzero, J and V have the same complete integral closure ([10], p. 358). But since V is the intersection of a family of valuation rings having finite character, $\bigcap_{1}^{n} T_i$ is the complete integral closure of V ([10], p. 359; [2], p. 121). Any valuation overring W of J contains $M = \bigcap_{i=1}^{n} M_i$, and by a result of Gilmer and. Heinzer ([12], p. 159), this implies that W compares with some V_i under $\leqq$.

Proposition 3. 2. *Suppose that $\{A_i\}_1^n \cup \{B_i\}_1^n$ is a collection of additive subgroups of K. Then $\bigcap_{i=1}^{n} (A_i + M_i) \leqq \bigcap_{i=1}^{n} (B_i + M_i)$ if and only if $A_i \leqq B_i$ for each i.*

Proof. It suffices to prove that $\bigcap_{i=1}^{n} (A_i + M_i) \leqq B_1 + M_1$ implies that $A_1 \leqq B_1$. Thus, let $x \in A_1$. Since $N_1, \ldots, N_n$ are distinct maximal ideals of V and $x \in K$, the system of congruence $y \equiv x(N_1)$, $y \equiv 0\left(\bigcap_{2}^{n} N_i\right)$ has a solution y_0 in V. Then since $N_i \leqq M_i$ for each i, it follows that $y_0 \in \bigcap_{1}^{n} (A_i + M_i) \leqq B_1 + M_1$. But $y_0 - x \in N_1 \leqq M_1$ so that $y_0 - x \in B_1 + M_1$ also. It follows that $x = y_0 - (y_0 - x)$ is in $B_1 + M_1$. Since the sum $K + M_1$ is direct, it follows that $x \in B_1$, and $A_1 \leqq B_1$ as we wished to show

Proposition 3. 3. *If for $1 \leqq i \leqq n$, $\{V_\alpha^{(i)}\}$ is the family of valuation rings on K which contain D_i, then $\{V_\alpha^{(i)} + M_i\}$ is the family of valuation overrings of J which are contained in V_i.*

Proof. Each $V_\alpha^{(i)} + M_i$ is a valuation overring of J contained in V_i ([18], p. 35). And if W is a valuation overring of J contained in V_i, then $M_i \leqq W$ and

$$W = W \cap V_i = W \cap (K + M_i) = (W \cap K) + M_i,$$

where $W \cap K$ is a valuation ring on K. Since $J = \bigcap_{j=1}^{n} (D_j + M_j) \leqq (W \cap K) + M_i$, Proposition 3. 2 shows that $D_i \leqq W \cap K$ so that $W \cap K = V_\alpha^{(i)}$ for some α and $W = V_\alpha^{(i)} + M_i$.

Proposition 3. 4. *Denote by D_i' the integral closure of D_i in K for $1 \leqq i \leqq n$. Then $\bigcap_{i=1}^{n} (D_i' + M_i)$ is the integral closure of J. J is integrally closed if and only if each D_i is integrally closed in K.*

Proof. The integral closure of J is the intersection of the set of valuation overrings of J. Since each valuation overring of J compares with some V_i under $\leqq$ by Proposition 3. 1, we see by Proposition 3. 3 that the following is true: If for $1 \leqq i \leqq n$, $\{V_\alpha^{(i)}\}$ is the family of valuation rings on K which contain D_i, then the integral closure of J is $\bigcap_{i=1}^{n} \left(\bigcap_{\alpha} (V_\alpha^{(i)} + M_i)\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \left(\left(\bigcap_{\alpha} V_\alpha^{(i)}\right) + M_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} (D_i' + M_i)$, the first equality holding because the sum $K + M_i$ is direct.

Hence it is clear that J is integrally closed if each D_i is integrally closed in K. And if J is integrally closed, then $J = \bigcap_{i=1}^{n} (D_i + M_i) = \bigcap_{i=1}^{n} (D_i' + M_i)$ so that $D_i = D_i'$ for $1 \leqq i \leqq n$ by Proposition 3. 2 — that is, each D_i is integrally closed in K.

Lemma 3. 1. *If W is a valuation overring of J which properly contains some V_i, then W is a quotient ring of J.*

Proof. This is immediate from the fact that W is a quotient ring of M ([12], p. 160), and $M \leqq J$.

Our next two results use this notation: C_1 denotes the set of prime ideals of J which are properly contained in some H_i, and C_2 denotes the set of primes of J which contain some H_i.

Theorem 3. 1. *$C_1 \cup C_2$ is the set of prime ideals of J. If $P \in C_1$, then J_P is a valuation ring. If $P \in C_2$, $P \neq J$, then P is of the form $(P_i + M_i) \cap \left(\bigcap_{k \neq i} J_k\right)$ for some prime ideal P_i of D_i, $P_i \neq D_i$; the converse also holds, and the prime ideals of J obtained in this way from distinct D_i' s or from distinct prime ideals of the same D_i are distinct. The ideals $\{H_i\}_1^n$ are pairwise comaximal.*

Proof. If P is prime in J, there is a valuation overring W of J with maximal ideal Q such that $Q \cap J = P$. By Proposition 3. 1, W contains some V_i or W is contained in some V_i. Therefore $M_i \leqq Q$ or $M_i \geqq Q$ for some i, and either $H_i = M_i \cap J \leqq Q \cap J = P$ or $H_i \geqq P$ for some i. Therefore $P \in C_1 \cup C_2$. If $P \in C_1$, then $W \supset V_i$, say. Then by Lemma 3. 1, W is a quotient ring of J, and hence W is the localization of J with respect to P, the center of W on J. Therefore, $J_P = W$ is a valuation ring.

If $P \in C_2$, then $W \leqq V_i$ for some i, and hence $W = W_\alpha + M_i$, where W_α is a valuation ring on K containing D_i. If Q_α is the maximal ideal of W_α, then $Q_\alpha + M_i$ is the maximal ideal of W so that

$$P = (Q_\alpha + M_i) \cap J = (Q_\alpha + M_i) \cap \left(\bigcap_1^n (D_k + M_k)\right)$$

$$= (Q_\alpha + M_i) \cap (D_i + M_i) \cap \left(\bigcap_{k \neq i} (D_k + M_k)\right) = [(Q_\alpha \cap D_i) + M_i] \cap \left(\bigcap_{k \neq i} J_k\right),$$

and here $Q_\alpha \cap D_i$ is a prime ideal of D_i. If P_i is a prime ideal of D_i, then $P_i + M_i$ is prime in $J_i = D_i + M_i$ so that $(P_i + M_i) \cap J = (P_i + M_i) \cap \left(\bigcap_{k \neq i} J_k\right)$ is prime in J.

If A and B are distinct genuine (that is, $\neq D_i$) ideals of D_i, then Proposition 3. 2 shows that $\left(\bigcap_{k \neq i} J_k\right) \cap (A + M_i) \neq \left(\bigcap_{k \neq i} J_k\right) \cap (B + M_i)$. By the same token, Proposition 3. 2 also shows that if A is a genuine ideal of D_i and if B is an ideal of D_j, where $j \neq i$, then $(A + M_i) \cap \left(\bigcap_{k \neq i} J_k\right) \neq (B + M_j) \cap \left(\bigcap_{k \neq j} J_k\right)$. Therefore, the prime ideals of J in C_2 obtained from the process just described are distinct.

From the preceding, we see that each maximal ideal of J is of the form $(A + M_i) \cap \left(\bigcap_{k \neq i} J_k\right)$, where A is a maximal ideal of D_i and $1 \leqq i \leqq n$. It is clear that $H_i \leqq (A + M_i) \cap \left(\bigcap_{k \neq i} J_k\right)$, and Proposition 3. 2 shows that $H_j \nleqq (A + M_i) \cap \left(\bigcap_{k \neq i} J_k\right)$ for $j \neq i$. Hence H_i and H_j, for $i \neq j$, are contained in no common maximal ideal of J; that is, H_i and H_j are comaximal.

Theorem 3. 2. *J is a Prüfer domain if and only if each D_i is a Prüfer domain with quotient field K.*

Proof. If J is Prüfer, then each overring of J is Prüfer. In particular, each $J_i = D_i + M_i$ is Prüfer, and this implies ([7], p. 561) that D_i is a Prüfer domain with quotient field K.

To prove the converse, we use the following characterization of Prüfer domains: The integrally closed domain D is a Prüfer domain if and only if for each prime ideal P of D, there is a unique valuation overring of D having center P on D ([7], p. 218). Thus we suppose that each D_i is a Prüfer domain with quotient field K. Then by Proposition 3. 4, J is integrally closed. Hence we can show that J is Prüfer by showing that each proper prime ideal P of J is the center of a unique valuation overring of J. Let W be a valuation overring of J centered on P. If $P \in C_1$, then J_P is a valuation ring contained in W. Thus W is a quotient ring of J_P, and therefore a quotient ring of J. It follows that $W = J_P$ in this case. If $P \in C_2$, then for some i between 1 and n, and for some prime ideal P_i of D_i, $P = (P_i + M_i) \cap \left(\bigcap_{k \neq i} J_k\right)$. By assumption, there is a unique valuation overring U of D_i with center P_i on D_i. Then our proof of Theorem 3. 1 shows that $U + M_i$ is a valuation overring of J with center P on J. By Theorem 3. 1 also, W is necessarily of the form $W_0 + M_i$, where W_0 is a valuation overring of D_i with center P_i on D_i. Therefore $W_0 = U$, $W = U + M_i$, and $U + M_i$ is the unique valuation overring of J with center P on J.

Lemma 3. 2. *If for $1 \leqq i \leqq n$, $d_i \in D_i$, then there is an element x in J such that $x \equiv d_i (N_i)$ for $1 \leqq i \leqq n$.*

Proof. Since $N_1, \ldots, N_n$ are distinct maximal ideals of V, there is an element y in V such that $y \equiv d_i (N_i)$ for $1 \leqq i \leqq n$. Thus, $y = d_i + (y - d_i) \in \bigcap_{j=1}^{n} (D_i + N_i) \leqq J$. Therefore, y is a solution to the system of congruences $x \equiv d_i (N_i)$, $1 \leqq i \leqq n$, in J.

Lemma 3. 3. *Suppose that R is a ring which is a subring of the commutative ring S, and suppose that $Sr \leqq R$ for some element r of R regular in S. If R is Noetherian, then each ideal of S is a finite R-module; in particular, S is Noetherian.*

Proof. Let A be an ideal of S. Then Ar is an ideal of R, and hence has a finite basis $\{a_1 r, \ldots, a_p r\}$ as an ideal of R. If $a \in A$, then there exist elements $t_1, \ldots, t_p$ of R and integers $k_1, k_2, \ldots, k_p$ such that $ar = \sum_1^p t_i a_i r + \sum_1^p k_i a_i r = \left(\sum_1^p t_i a_i + \sum_1^p k_i a_i\right) r$. Since r is regular in S, it follows that $a = \sum_1^p t_i a_i + \sum_1^p k_i a_i$, and $\{a_1, \ldots, a_p\}$ is a finite R-module basis for A.

Theorem 3. 4. *J is Noetherian if and only if each V_i is rank one discrete, each D_i is a field, and $[K : D_i] < \infty$ for $1 \leqq i \leqq n$.*

Proof. If J is Noetherian, then Lemma 3. 3 shows that V is a finite R-module and V is Noetherian, for the conductor of J in V contains the nonzero ideal M. Since V is a Prüfer domain, V must be a Dedekind domain, and each overring is also Dedekind. In particular, each V_i is a rank one discrete valuation ring. We let $\{u_i\}_1^s$ be a J-module basis for V. For a fixed j between 1 and n, we write $u_i = d_{ij} + m_{ij}$, where $d_{ij} \in K$ and $m_{ij} \in M_j$ for $1 \leqq i \leqq s$. Then if $a \in K$, $a \in V$ so that $a = \sum_{i=1}^{s} h_i u_i = \sum_{i=1}^{s} h_i d_{ij} + \sum_{i=1}^{s} h_i m_{ij}$ for some $h_1, h_2, \ldots, h_s \in J$. Each h_i is expressible in the form $h_i' + b_i$ for some $h_i' \in D_j$, $b_i \in M_j$. Then modulo M_j we have $a \equiv \sum_1^s h_i' d_{ij}$. Thus $a - \sum_1^s h_i' d_{ij} \in K \cap M_j = (0)$, and $\{d_{ij}\}_{i=1}^s$ is a finite D_j-module basis for K. Therefore K is integral over D_j, and since K is a field, D_j is also a field. From what we have just observed, $[K : D_j] \leqq s < \infty$.

Conversely, if each V_i is rank one discrete, if each D_i is a field, and if $[K : D_i] < \infty$ for $1 \leqq i \leqq n$, then $V = \bigcap_1^n V_i$ is a semi-local principal ideal domain. A theorem due to Eakin [4] then shows that J is Noetherian if V is a finite J-module; we show that this is indeed the case. Let $v \in V$. Then there exist elements $y_1, \ldots, y_n \in K$ such that $v - y_i \in M_i$ *for* $1 \leqq i \leqq n$. Let $\{u_{j1}, u_{j2}, \ldots, u_{jr_j}\}$ be a finite D_j-module basis for K. We can write $y_j = \sum_{i=1}^{r_j} d_{ji}u_{ji}$ for some $d_{j1}, d_{j2}, \ldots, d_{jr_j} \in D_j$. By Lemma 3. 2, there exist elements $z_{j1}, \ldots, z_{jr_j}$ in J such that $z_{ji} \equiv d_{ji}(N_j)$, $z_{ji} \equiv 0\left(\bigcap_{k \neq j} N_k\right)$. We consider $v - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{r_j} z_{ji}u_{ji}$ modulo any M_k. We have

$$v - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{r_j} z_{ji}u_{ji} \equiv v - \sum_{i=1}^{r_k} z_{ki}u_{ki} \equiv v - \sum_{i=1}^{r_k} d_{ki}u_{ki} \equiv v - y_k \equiv 0(M_k).$$

It follows that $v - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{r_j} z_{ji}u_{ji} \in \left(\bigcap_1^n M_g\right) \subseteq J$, so that $\{1\} \cup \{u_{ji}\}_{1 \leqq i \leqq r_j}^{i \leqq j \leqq n}$ is a finite J-module basis for V.

Lemma 3. 4. *Let F be a field and let $\{R\} \cap \{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ be a collection of subrings of F with identity such that $R = \bigcap_\lambda R_\lambda$. If A is an invertible ideal of R, then $A = \bigcap_\lambda AR_\lambda$.*

Proof. We need to establish the containment $\bigcap_\lambda AR_\lambda \subseteq A$. If $x \in \bigcap_\lambda AR_\lambda$, then for any λ, $x \in AR_\lambda$ so that $A^{-1}x \subseteq \bigcap_\lambda A^{-1}AR_\lambda = \bigcap_\lambda R_\lambda = R$, and this implies that $Rx = AA^{-1}x \subseteq AR = A$ so that $x \in A$ as we wished to show.

If D is a Prüfer domain and if r is a positive integer, we say that D *has the r-generator property* if each finitely generated ideal of D has a basis of r elements. It is well-known that a Dedekind domain has the 2-generator property; whether each Prüfer domain has the 2-generator property is an open question (in this connection, see [11]). Our next result implies that for a fixed positive integer r, J has the r-generator property if and only if each D_i has the r-generator property. The proof of Theorem 3. 5 uses strongly the structure of the set of finitely generated ideals of the domain $J_i = D_i + M_i$, for $1 \leqq i \leqq n$, as developed in ([7], p. 562) and in [8]. That structure is as follows. If A is a finitely generated ideal of J_i, then either A contains, or is contained in, M_i. If $A \supseteq M_i$, then $A = A_i + M_i$ for some finitely generated ideal A_i of D_i, and any basis for A_i as an ideal of D_i is also a basis for A as an ideal of J. If $A \subset M_i$, then for some element m of A and some finitely generated D_i-submodule W of K, $A = Wm + M_im$; here m can be chosen to be any element of A having minimal v_i-value.

Theorem 3. 5. *Let r be a fixed positive integer.*

a) *If for some i between 1 and n there is a finitely generated ideal of D_i with no basis of r elements, then there is a finitely generated ideal of J with no basis of r elements.*

b) *Suppose that J is a Prüfer domain and that A is a finitely generated ideal of J. If for each i between 1 and n, AJ_i has a basis of r elements in J_i, then A has a basis of r elements.*

Proof. a) Suppose that $a_1, \ldots, a_{r+1}$ are elements of D_1 such that $(a_1, a_2, \ldots, a_{r+1})$ has no basis of r elements. Then $(a_1, a_2, \ldots, a_{r+1}) + M_1$, the ideal of J_1 generated by $\{a_1, a_2, \ldots, a_{r+1}\}$ has no basis of r elements. By Lemma 3. 2, there exist elements $x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}$ of J such that $x_k \equiv a_k(N_1)$, while $x_k \equiv 0(N_j)$ for $j \neq 1$; this being true

for $1 \leqq k \leqq r+1$. Then $\{x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}\}J \cdot J_1 = \{x_1, \ldots, x_{r+1}\}J_1 = (a_1, a_2, \ldots, a_{r+1}) + M_1$ has no basis of r elements, and consequently, $\{x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}\}J$ has no basis of r elements.

b): Let $A = (y_1, \ldots, y_t)$; we prove that A has a basis of r elements. Given any r nonzero elements $u_1, \ldots, u_r$ of A, A and $B = (u_1, \ldots, u_r)$ are invertible since J is Prüfer. Thus by Lemma 3. 4, A and B are equal if and only if $AJ_i = BJ_i$ for $1 \leqq i \leqq n$. Thus to show that A has a basis of r elements, we exhibit elements $u_1, u_2, \ldots, u_r$ in A such that $AJ_i = \{u_1, \ldots, u_r\}D_i$ for $1 \leqq i \leqq n$. Now $AJ_i = \{y_1, \ldots, y_t\}J_i$ is a finitely generated ideal of J_i. Therefore, there is an element c_i of J_i and a finitely generated fractional ideal Q_i of D_i such that $AJ_i = (Q_i + M_i)c_i$; here we use the fact that J Prüfer implies that D_i has quotient field K so that any finitely generated D_i-submodule of K is a fractional ideal of D_i. By assumption, Q_i has a basis $\{q_{i1}, \ldots, q_{ir}\}$ of r elements. Now $y_j/c_i \in Q_i + M_i$ for $1 \leqq j \leqq t$. We write $y_j/c_i = a_{ji} + m_{ji}$, where $a_{ji} \in Q_i$ and $m_{ji} \in M_i$ for $1 \leqq j \leqq t$. Then

$$\begin{aligned}(A/c_i)J_i &= Q_i + M_i = (y_1/c_i, \ldots, y_t/c_i)J_i \\ &= (a_{1i} + m_{1i}, \ldots, a_{ti} + m_{ti})J_i = \{a_{1i}, \ldots, a_{ti}\}D_i + M_i.\end{aligned}$$

We write $q_{is} = \sum_{j=1}^{t} c_{isj}a_{ji}$ where the c_{isj}'s are in D_i. There exist elements $\{u_{sj}\}_{\substack{1 \leqq s \leqq r \\ 1 \leqq j \leqq t}}$ in J such that $u_{sj} \equiv c_{isj}(N_i)$ for each i, s, and j. We define elements $u_1, u_2, \ldots, u_r$ of A as follows: $u_1 = \sum_{j=1}^{t} u_{1j}y_j, \ldots, u_r = \sum_{j=1}^{t} u_{rj}y_j$. For $1 \leqq k \leqq n$, we have

$$u_i/c_k = \sum_{j=1}^{t} u_{ij}(y_j/c_k) \equiv \sum_{j=1}^{t} c_{kij}a_{jk} = q_{ki},$$

modulo M_k. Therefore, $\{u_i/c_k, \ldots, u_r/c_k\}J_k = \{q_{k1}, \ldots, q_{kr}\}D_k + M_k = Q_k + M_k$. It follows that $\{u_1, \ldots, u_r\}J_k = (Q_k + M_k)c_k = AJ_k$ for $1 \leqq k \leqq n$, and $A = (u_1, u_2, \ldots, u_r)$ as we wished to show.

Remark 3. 1. In proving a) of Theorem 3. 5, note that we have actually applied the contrapositive of the following valid statement: If D is an integral domain with identity and if each finitely generated ideal of D has a basis of r elements, then each overring of D has this same property — that is, if J is an overring of D, then each finitely generated ideal of J has a basis of r elements.

Lemma 3. 5. *If for $1 \leqq i \leqq n$, A_i is a finitely generated ideal of D_i, then there is a finitely generated ideal A of J such that $AJ_i = A_i + M_i$ for each i.*

Proof. The proof is essentially given in the proof of part b) of Theorem 3. 5. In fact, there is a fixed integer r such that each A_i has a basis of r elements; say $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ir}\}D_i$. By Lemma 3. 2, there are elements $x_1, \ldots, x_r$ in J such that $x_i \equiv a_{ji}(N_j)$ for $1 \leqq i \leqq r$ and $1 \leqq j \leqq n$. Then $A = \{x_1, \ldots, x_r\}J$ is a finitely generated ideal of J such that $AJ_i = A_i + M_i$ for $1 \leqq i \leqq n$.

Theorem 3. 6. *Suppose that J is a Prüfer domain. The class group of J is isomorphic to the direct product of the class groups of the J_i's.*

Proof. Let $\boldsymbol{F}_i$ be the group of invertible fractional ideals of J_i and let $\boldsymbol{P}_i$ be the subgroup of $\boldsymbol{F}_i$ consisting of all nonzero principal fractional ideals of J_i; the class group of J_i is $\boldsymbol{G}_i = \boldsymbol{F}_i/\boldsymbol{P}_i$. Let $\boldsymbol{F}$ be the group of invertible fractional ideals of J, and define $\mu: \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G} = \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{G}_i$ by $\mu(F) = (FJ_1\boldsymbol{P}_1, \ldots, FJ_n\boldsymbol{P}_n)$. μ is a homomorphism from $\boldsymbol{F}$ into $\boldsymbol{G}$. Any element α of $\boldsymbol{G}$ is of the form $((A_1 + M_1)\boldsymbol{P}_1, \ldots, (A_n + M_n)\boldsymbol{P}_n)$ for some $A_1, \ldots, A_n$, where A_i is a nonzero finitely generated ideal of D_i for $1 \leqq i \leqq n$. By

Lemma 3. 5, there is a nonzero finitely generated ideal of J such that $AJ_i = A_i + M_i$ for each i. Hence $\mu(A) = \alpha$ and μ is onto. If $\boldsymbol{P}$ is the subgroup of $\boldsymbol{F}$ consisting of nonzero principal fractional ideals of J, then it is clear that $\boldsymbol{P} \subseteq \ker \mu$. However, if $F \in \ker \mu$, then choose a nonzero element d of J such that $dF = B$ is an integral ideal of J. Then $BJ_i = d \cdot FJ_i$ is principal in J_i for each i. By Theorem 3. 5 b), it follows that B, and hence F, is principal. Thus $\ker \mu = \boldsymbol{P}$ and $\boldsymbol{F}/\boldsymbol{P}$, the class group of J, is isomorphic to $\boldsymbol{G}$ as asserted.

We remark that in case D_i is Prüfer with quotient field K, D_i and J_i have the same class group ([7], p. 562).

Acknowledgement. The author's investigation of the construction in § 2 was motivated by a remark of W. Heinzer, who reported to the author that A. Dress, during a visit to Louisiana State University, had stated that if K is a field in which -1 is not a square, then the subring of K generated by $\{1/(1 + t^2)\}_{t \in K}$ is a Prüfer domain whose set of valuation overrings is the set of valuation rings on K for which -1 is not a square in the residue field.

References

[1] *H. S. Butts* and *W. W. Smith*, Prüfer rings, Math. Zeit. **95** (1967), 196—211.

[2] *H. S. Butts* and *W. W. Smith*, On the integral closure of a domain, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A—I, **30** (1966), 117—122.

[3] *E. D. Davis*, Overrings of commutative rings. II. Integrally closed overrings, Trans. Amer. Math. Soc. **110** (1964), 196—212.

[4] *P. Eakin*, The converse to a well-known theorem on Noetherian rings, Math. Ann. **177** (1968), 278—282.

[5] *D. Estes* and *J. Ohm*, Stable range in commutative rings, J. Algebra **7** (1967), 343—362.

[6] *R. Gilmer*, Overrings of Prüfer domains, J. Algebra **4** (1966), 331—340.

[7] *R. Gilmer*, Multiplicative ideal theory, Queen's Papers on Pure and Applied Mathematics, No. 12, Kingston, Ontario, Canada 1968.

[8] *R. Gilmer*, On a condition of J. Ohm's for integral domains, Canad. J. Math. **20** (1968), 970—983.

[9] *R. Gilmer* and *W. Heinzer*, Overrings of Prüfer domains. II, J. Algebra **7** (1967), 281—302.

[10] *R. Gilmer* and *W. Heinzer*, On the complete integral closure of a domain, J. Austral. Math. Soc. **6** (1966), 351—361.

[11] *R. Gilmer* and *W. Heinzer*, On the number of generators of an invertible ideal, to appear in J. Algebra.

[12] *R. Gilmer* and *W. Heinzer*, Primary ideals and valuation ideals. II, Trans. Amer. Math. Soc. **131** (1968), 149—162.

[13] *R. Gilmer* and *J. Ohm*, Integral domains with quotient overrings, Math. Ann. **153** (1964), 97—103.

[14] *O. Helmer*, Divisibility properties of integral functions, Duke Math. J. **6** (1940), 345—356.

[15] *C. U. Jensen*, On characterizations of Prüfer rings, Math. Scand. **13** (1963), 90—98.

[16] *W. Krull*, Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche, Math. Z. **41** (1936), 545—577.

[17] *M. Nagata*, On the theory of Henselian rings, Nagoya Math. J. **5** (1953), 45—57.

[18] *M. Nagata*, Local rings, New York 1962.

[19] *J. Ohm*, Primary ideals in Prüfer domains, Canad. J. Math. **18** (1966), 1024—1030.

[20] *H. Prüfer*, Untersuchungen über Teilbarkeitseigenschaften in Körpern, J. Reine Angew. Math. **168** (1932), 1—36.

Florida State University, Department of Mathematics, Tallahassee, FL 32306, USA

Eingegangen 11. Februar 1969

Die symmetrische Algebra eines Banachschen Raumes

Von *H. Leptin* in Heidelberg

Herrn Professor Dr. Wolfgang Krull zum 70. Geburtstag

Wie N. Varopoulos gezeigt hat [2], enthält die Algebra $\mathscr{M}_c(G)$ der stetigen beschränkten Radonschen Maße auf einer lokal kompakten, nicht diskreten abelschen Gruppe G stets einen Banachschen Unterraum E unendlicher Dimension mit folgenden Eigenschaften: Ist I die kleinste abgeschlossene und translationsinvariante Oberalgebra von E in $\mathscr{M}_c(G)$, so ist $\boldsymbol{I} = \mathscr{M}_d(G) \hat{\otimes} \Sigma_1(E)$ das projektive Tensorprodukt der Algebra $\mathscr{M}_d(G)$ der diskreten Maße und der von E erzeugten „symmetrischen Banachschen Algebra" $\Sigma_1(E)$. Ferner ist I ein Band in $\mathscr{M}_c$ und das zu I komplementäre Band $I^\perp$ ist ein Ideal in $\mathscr{M}_c$. Da folglich, grob gesagt, große „symmetrische" Banachsche Algebren stets als Quotientenalgebren von $\mathscr{M}_c$ auftreten, gibt dieser Satz u. a. Aufschluß über die Idealtheorie von $\mathscr{M}_c$ und den Gelfandschen Raum der maximalen Ideale von $\mathscr{M}_c$. Das, was hier als „symmetrische Banachsche Algebra $\Sigma_1(E)$" bezeichnet ist, wird in [2] nicht explizit definiert, sondern wird dort mehr oder weniger implizit durch seine Haupteigenschaften beschrieben. Wir wollen hier nun, unabhängig von harmonischer Analyse, Tensoralgebren und symmetrische Algebren Banachscher Räume untersuchen. Die Konstruktion der Tensoralgebra $\mathscr{T}(E)$ eines Banachschen Raumes E als l_1-Summe der projektiven Tensorpotenzen $E^{\hat{n}}$ von E ist nur scheinbar willkürlich, da $\mathscr{T}(E)$ wie üblich durch eine universelle Eigenschaft als Banachsche Algebra eindeutig gekennzeichnet ist. Ist $\mathscr{K}$ das von den Kommutatoren $x \otimes y - y \otimes x, x, y \in E$, erzeugte abgeschlossene zweiseitige Ideal in $\mathscr{T}(E)$, so wird die *symmetrische Algebra* $\Sigma(E)$ als die Faktoralgebra $\mathscr{T}(E)/\mathscr{K}$ definiert. $\Sigma(E)$ ist also die größte kommutative Banachsche Faktoralgebra von $\mathscr{T}(E)$. Unser einziges und somit Hauptergebnis: Genügt E der Banachschen Approximationseigenschaft, so ist $\Sigma(E)$ halbeinfach, m. a. W. $\mathscr{K}$ ist der Durchschnitt aller Kerne $\ker \varphi$ stetiger Homomorphismen φ von $\mathscr{T}(E)$ auf den Körper $\boldsymbol{C}$ der komplexen Zahlen.

Sind E und F komplexe Banachsche Räume, so bezeichnen wir mit $E \otimes F$ ihr *algebraisches* Tensorprodukt und mit $E \hat{\otimes} F$ ihr *projektives* Tensorprodukt, also die vollständige Hülle von $E \otimes F$ bezüglich der Norm

$$|z| = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,|y_i| \,\middle|\, z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right\}.$$

Ist $\{x_i\}_{i\in N}$ eine in der Norm beschränkte Folge aus E und $\{y_i\}_{i\in N}$ eine Folge in F mit $\boldsymbol{\Sigma}\,|y_i| < \infty$, so ist $z = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i$ aus $E \hat{\otimes} F$ und $|z| \leqq \boldsymbol{\Sigma}\,|x_i|\,|y_i|$. Umgekehrt gibt es zu $a \in E \hat{\otimes} F$ und $\varepsilon > 0$ Folgen $\{x_i\}$ in E und $\{y_i\}$ in F mit

$$\lim x_i = 0, \quad \boldsymbol{\Sigma}\,|y_i| \leqq 1, \quad a = \boldsymbol{\Sigma}\, x_i \otimes y_i, \quad \boldsymbol{\Sigma}\,|x_i|\,|y_i| < |a| + \varepsilon.$$

Der *duale Raum* $(E \hat{\otimes} F)'$ läßt sich kanonisch identifizieren mit dem Raum $B(E, F)$ der stetigen Bilinearformen φ auf $E \times F$ mit der Norm $|\varphi| = \sup_{|x|\leq 1, |y|\leq 1} |\varphi(x, y)|$ und dem Banachschen Raum $L(E, F')$ der beschränkten linearen Abbildungen von E in den dualen Raum F' von F.

Wir setzen im folgenden stets voraus, daß E die Banachsche Approximationseigenschaft besitzt, d. h., daß jeder kompakte Endomorphismus von E in der Norm durch endlichdimensionale Endomorphismen beliebig genau approximiert werden kann. Es ist bekanntlich ein offenes Problem, ob es Räume ohne diese Eigenschaft gibt. Hierzu und zu allen anderen in dieser Arbeit vorkommenden Begriffen und Sätzen aus der Theorie der Banachschen Räume siehe [1].

Im dualen Raum F' von F sei σ die Topologie der einfachen Konvergenz und τ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Nullfolgen. Offenbar ist τ feiner als σ. Die folgenden beiden Hilfssätze werden später entscheidend sein.

Hilfssatz 1. *Ist G ein τ-dichter Teilraum von F', so ist $E' \otimes G$ τ-dicht in $B(E, F) = (E \hat{\otimes} F)'$.*

Beweis. Sei $\{z_n\}$ eine Nullfolge aus $E \hat{\otimes} F$. Für jedes n gibt es dann eine Folge $\{x_i^n\}_i$ in E und eine Folge $\{y_i^n\}_i$ in F mit $z_n = \sum_i x_i^n \otimes y_i^n$, $|x_i^n| \leqq 2\,|z_n|$, $\lim_{i\to\infty} x_i^n = 0$, $\sum_i |y_i^n| = 1$.

Sei $\beta \in (E \hat{\otimes} F)'$ und $\tilde{\beta}$ die durch β definierte Transformation von E in F', also $\tilde{\beta}(x)(y) = \beta(x \otimes y)$. Da die *Menge* $\{x_i^n\}_{i,n\in N}$ in E kompakt ist, existiert (s. [1], Satz 9. 1 (c), p. 109) zu $\varepsilon > 0$ ein $\gamma \in E' \otimes F'$ mit

$$|\tilde{\beta}(x_i^n) - \tilde{\gamma}(x_i^n)| \leqq \varepsilon$$

für alle i und n. Es folgt

$$|\beta(x_i^n \otimes y_i^n) - \gamma(x_i^n \otimes y_i^n)| = |(\tilde{\beta}(x_i^n) - \tilde{\gamma}(x_i^n))(y_i^n)| \leqq \varepsilon\,|y_i^n|$$

und weiter

$$|\beta(z_n) - \gamma(z_n)| \leqq \sum_i |\beta(x_i^n \otimes y_i^n) - \gamma(x_i^n \otimes y_i^n)| \leqq \varepsilon \sum_i |y_i^n| = \varepsilon,$$

also $|\beta(z_n) - \gamma(z_n)| \leqq \varepsilon$ für alle n.

Wir wählen nun für die z_n andere Darstellungen, und zwar sei jetzt $z_n = \sum u_i^n \otimes v_i^n$, so daß $\sum_i |u_i^n| = 1$ für alle n und $\{v_i^n\}_{i,n\in N}$ bei geeigneter Numerierung eine Nullfolge ist. Das ist möglich, da wir wieder $|v_i^n| \leqq 2\,|z_n|$ und $\lim_{i\to\infty} v_i^n = 0$ annehmen dürfen.

Sei $\gamma = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \otimes \beta_j$ mit $0 \neq \alpha_j \in E'$, $\beta_j \in F'$. Da G in F' τ-dicht ist, gibt es k Elemente $\bar{\beta}_j$ in G mit

$$|\beta_j(v_i^n) - \bar{\beta}_j(v_i^n)| \leqq \frac{\varepsilon}{k\,|\alpha_j|},\quad j = 1, \ldots, k,\ \text{alle } i \text{ und } n.$$

Es folgt

$$|(\alpha_j \otimes \beta_j)(z_n) - (\alpha_j \otimes \bar{\beta}_j)(z_n)| \leqq \sum_i |\alpha_j(u_i^n)\,(\beta_j(v_i^n) - \bar{\beta}_j(v_i^n))|$$

$$\leqq \sum_i \left(|\alpha_j|\,|u_i^n|\,\frac{\varepsilon}{k\,|\alpha_j|}\right) = \frac{\varepsilon}{k}.$$

Setzen wir $\bar{\gamma} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \otimes \bar{\beta}_j$, so ist also $\bar{\gamma} \in E' \otimes G$ und es gilt

$$|(\beta - \bar{\gamma})(z_n)| \leqq |(\beta - \gamma)(z_n)| + |(\gamma - \bar{\gamma})(z_n)|$$

$$\leqq \varepsilon + \sum_{j=1}^{k} |(\alpha_j \otimes \beta_j - \alpha_j \otimes \bar{\beta}_j)(z_n)| \leqq 2\varepsilon.$$

Damit ist Hilfssatz 1 bewiesen.

Weiter brauchen wir einen Hilfssatz aus der multilinearen Algebra. Sei k ein Körper der Charakteristik 0 und E ein k-Vektorraum der Dimension d. Mit $S_n(E)$ bezeichnen wir den Raum der *symmetrischen* n-Linearformen auf E. Für eine Linearform ϑ auf E sei ϑ^n definiert durch

$$\vartheta^n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \vartheta(x_i).$$

Hilfssatz 2. *Die Formen* ϑ^n, $\vartheta \in E' = \mathrm{Hom}\,(E, k)$, *erzeugen* $S_n(E)$.

Beweis. Zunächst ist klar, daß eine n-Linearform φ aus $S_n(E)$ durch die zugehörige n-Form $\tilde{\varphi}$, definiert durch $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x, x, \ldots, x)$, eindeutig bestimmt ist, wir beweisen den Hilfssatz also für die n-Formen $\tilde{\varphi}$, und zwar durch Induktion nach $d = \dim E$.

Für $d = 1$ ist alles klar. Für $d = 2$ bestehe E aus den Vektoren $\{x, y\}$, $x, y \in k$. Der Raum S_n der n-Formen hat dann die Dimension $n + 1$, eine Basis bilden die Formen $x^i y^{n-i}$, $i = 0, \ldots, n$. Wir wählen nun $n + 1$ paarweise verschiedene Elemente a_i aus k und setzen $\vartheta_i(\{x, y\}) = x + a_i y$. Dann ist

$$\tilde{\vartheta}_i^n(\{x, y\}) = (x + a_i y)^n = \sum_{j=0}^{n} a_i^j \binom{n}{j} x^{n-j} y^j.$$

Da die Formen $\binom{n}{j} x^{n-j} y^j$, $j = 0$ bis n, eine Basis von S_n bilden und

$$\det(a_i^j) = \prod_{i>k} (a_i - a_k) \neq 0$$

ist, bilden dann auch die $\tilde{\vartheta}_i^n$ eine Basis und die Behauptung ist für $d = 2$ bewiesen.

Wir nehmen nun an, die Behauptung sei für alle n und für Dimensionen $< d$ bewiesen. E sei der Raum der Vektoren $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_d\}$, $x_i \in k$. Die Monome $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_d^{i_d}$ mit $\sum i_\nu = n$ bilden wieder eine Basis von S_n. Nach Voraussetzung lassen sich die Monome $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_{d-1}^{i_{d-1}}$ linear aus Formen $\tilde{\vartheta}^{n-i_d}(\{x_1, \ldots, x_{d-1}\})$ kombinieren, S^n wird also erzeugt von Formen der Gestalt

$$\tilde{\vartheta}^{n-i}(x) x_d^i = (\vartheta(x))^{n-i} x_d^i$$

Wir führen $z = \vartheta(x)$ als neue Koordinate ein. Im Fall $d = 2$ haben wir aber gezeigt, daß die Form $z^{n-i} x_d^i$ Kombination von Formen $(\lambda(z, x_d))^n$ ist. Da $\lambda(z, x_d) = \lambda(\vartheta(x), x_d) = \mu(x)$ ist, $\mu \in E'$, kann man also $\tilde{\vartheta}^{n-i}(x) x_d^i$ und damit alle $\tilde{\varphi}$ aus $S_n(E)$ aus den $\tilde{\mu}^n$, $\mu \in E'$, linear kombinieren. Damit ist auch Hilfssatz 2 bewiesen.

Wir werden Hilfssatz 2 nur für $k = \boldsymbol{C}$ gebrauchen.

Um die Tensoralgebra von E zu definieren, erklären wir zunächst die projektiven Potenzen $E^{\hat{n}}$ induktiv durch $E^{\hat{0}} = \boldsymbol{C}$, $E^{(n+1)\hat{}} = E^{\hat{n}} \hat{\otimes} E$. Für beliebige natürliche Zahlen n und m haben wir dann kanonische bilineare durch 1 beschränkte Abbildungen $E^{\hat{m}} \times E^{\hat{n}} \to E^{(m+n)\hat{}}$. Sei

$$\mathscr{T}(E) = \sum_{n=0}^{\infty}{}^{\oplus} E^{\hat{n}} = \boldsymbol{C} \oplus E \oplus E \hat{\otimes} E \oplus \cdots$$

die l^1-Summe der $E^{\hat{n}}$, also der Banachsche Raum der Folgen $x = \{x_n\}$, $x_n \in E^{\hat{n}}$, mit der Norm $|x| = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$. Es ist klar, daß durch die erwähnten bilinearen Abbildungen in $\mathscr{T}(E)$ eine stetige Multiplikation erklärt werden kann und daß hierdurch $\mathscr{T}(E)$ zu einer Banachschen Algebra mit Einselement wird. Die Teile

$$\mathscr{T}_k(E) = \{x = \{x_n\} \in \mathscr{T}(E) \mid x_n = 0 \text{ für } n < k\}$$

sind abgeschlossene zweiseitige Ideale in $\mathscr{T}(E)$. Wir fassen die $E^{\hat{n}}$, insbesondere $\boldsymbol{C}$ und E, als Unterräume von $\mathscr{T}(E)$ auf.

Sei $\mathscr{A}$ eine Banachsche Algebra und ω eine beschränkte lineare Abbildung von E in $\mathscr{A}$. Ist $z = \sum x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n$ ein Element der n-ten algebraischen Tensorpotenz E^n von E, $n \geqq 1$, so ist

$$\omega_n(z) = \sum \omega(x_1)\omega(x_2)\cdots\omega(x_n)$$

ein wohldefiniertes Element aus $\mathscr{A}$ und $\omega_n : z \to \omega_n(z)$ ist linear von E^n in $\mathscr{A}$. Hat ω die Norm $|\omega|$, so ist

$$|\omega_n(z)| \leqq \sum |\omega(x_1)\omega(x_2)\cdots\omega(x_n)| \leqq |\omega|^n \sum |x_1|\,|x_2|\cdots|x_n|,$$

woraus $|\omega_n(z)| \leqq |\omega|^n |z|$ folgt. Folglich ist ω_n beschränkt, $|\omega_n| \leqq |\omega|^n$, und kann zu einer linearen Abbildung von $E^{\hat{n}}$ in $\mathscr{A}$ fortgesetzt werden.

Nun sei $|\omega| \leqq 1$. Dann ist also $|\omega_n| \leqq 1$ für alle n und somit konvergiert jede Reihe

$$\hat{\omega}\left(\sum_{n=1}^{\infty}{}^{\oplus} z_n\right) = \sum \omega_n(z_n), \quad z = \sum_{1}^{\infty \oplus} z_n \in \mathscr{T}_1(E), \tag{1}$$

in $\mathscr{A}$ absolut: $\sum_n |\omega_n(z_n)| \leqq \sum_n |z_n| = |z|$. Es ist nun unschwer zu sehen, daß

$$\hat{\omega} : z \to \hat{\omega}(z) = \sum_n \omega_n(z_n)$$

ein *multiplikativer Homomorphismus* von $\mathscr{T}_1(E)$ in $\mathscr{A}$ ist mit $|\hat{\omega}| = |\omega|$.

Ist umgekehrt Φ ein Homomorphismus von $\mathscr{T}_1(E)$ in $\mathscr{A}$ und $|\Phi| \leqq 1$, so ist die Einschränkung φ von Φ auf E linear mit $|\varphi| \leqq 1$. Folglich ist der Homomorphismus $\hat{\varphi}$ von $\mathscr{T}_1(E)$ wohldefiniert. Da $\hat{\varphi}$ und Φ auf E übereinstimmen, muß $\hat{\varphi} = \Phi$ sein. Damit ist gezeigt:

Satz 1. *Sei $\mathscr{A}$ eine Banachsche Algebra. Jede lineare Abbildung $\varphi : E \to \mathscr{A}$ mit $|\varphi| \leqq 1$ läßt sich eindeutig zu einem stetigen Homomorphismus $\hat{\varphi} : \mathscr{T}_1(E) \to \mathscr{A}$ fortsetzen. Es ist $|\hat{\varphi}| = |\varphi|$ und $\varphi \to \hat{\varphi}$ ist eine Bijektion von der Einheitskugel des Raumes $L(E, \mathscr{A})$ aller beschränkten linearen Abbildungen von E in $\mathscr{A}$ auf die Menge aller Homomorphismen Φ von $\mathscr{T}_1(E)$ in $\mathscr{A}$ mit $|\Phi| \leqq 1$.*

Als *Gelfandschen Raum* der Algebra $\mathscr{T}(E)$ bezeichnen wir die Menge Γ_E aller Homomorphismen von $\mathscr{T}(E)$ *auf* $\boldsymbol{C}$, versehen mit der Topologie der einfachen Konvergenz. Da $\mathscr{T}(E)$ die 1 enthält, ist Γ_E ein kompakter Hausdorff'scher Raum. Als Folge aus Satz 1 erhalten wir

Satz 2. *Γ_E ist kanonisch homöomorph zur schwach kompakten Einheitskugel E_1' des dualen Raumes E' von E.*

Beweis. Sei $\chi \in \Gamma_E$. Ist $x \in \mathscr{T}(E)$ und $|x| < 1$, so ist $\lim x^n = 0$, also $\lim \chi(x)^n = \lim \chi(x^n) = 0$, also $|\chi(x)| < 1$. Es folgt $|\chi| \leqq 1$ (wegen $\chi(1) = 1$ dann

natürlich $|\chi| = 1$). Ist $\chi_1 = \chi \mid \mathscr{T}_1(E)$ und $\chi_0 = \chi \mid E$, so folgt also $|\chi_1| \leqq 1$ und deshalb $\chi_1 = \hat{\chi}_0$ nach und im Sinne von Satz 1. Ist φ_1 ein Homomorphismus von $\mathscr{T}_1(E)$ in $\boldsymbol{C}$, so können wir ihn durch $\varphi(\xi 1 + z) = \xi + \varphi_1(z)$ zu einem Homomorphismus $\varphi \in \Gamma_E$ erweitern. Es folgt, daß $\chi \to \chi_0$ bijektiv von Γ_E auf E_1' ist. Wegen $E < \mathscr{T}(E)$ ist die Abbildung auch stetig und wegen der Kompaktheit beider Räume also ein Homöomorphismus.

Wir setzen

$$\mathscr{R} = \bigcap_{\chi \in \Gamma_E} \ker \chi, \quad \mathscr{R}_n = \mathscr{R} \cap E^{\hat{n}}.$$

Offenbar ist $\mathscr{R}$ das kleinste abgeschlossene zweiseitige Ideal mit kommutativer *halbeinfacher* Faktoralgebra.

Weiter definieren wir: Sei $\mathscr{K}$ das kleinste abgeschlossene zweiseitige Ideal in $\mathscr{T}(E)$ mit (nicht notwendig halbeinfacher) kommutativer Faktoralgebra.

Es ist klar, daß $\mathscr{K}$ genau das von den Elementen $x \otimes y - y \otimes x$, $x, y \in E$, erzeugte abgeschlossene Ideal ist und daß $\mathscr{K} < \mathscr{R}$ ist. Nicht trivial dagegen scheint

Satz 3. *Es ist $\mathscr{R} = \mathscr{K}$, d. h. die Faktoralgebra $\mathscr{T}(E)/\mathscr{K}$ ist halbeinfach.*

Beweis. Wir zeigen zunächst

$$\mathscr{R} = \sum_{n=0}^{\infty}{}^{\oplus} \mathscr{R}_n. \tag{2}$$

Die rechte Seite, also der von den $\mathscr{R}_n$ erzeugte abgeschlossene Unterraum, liegt sicher in $\mathscr{R}$. Nun sei umgekehrt $x = \sum x_n \in \mathscr{R}$, $x_n \in E^{\hat{n}}$. Es muß gezeigt werden, daß $x_n \in \mathscr{R}$ ist für jedes n, d. h. daß $\chi(x_n) = 0$ ist für jedes n und alle $\chi \in \Gamma_E$. Trivialerweise ist $x_0 = 0$, wir können also $x \in \mathscr{T}_1(E)$, $n \geqq 1$, annehmen. Ist φ aus E_1', so auch $z\varphi$ für alle $z \in \boldsymbol{C}$ mit $|z| \leqq 1$. Es folgt $\hat{z\varphi}(x) = 0$. Da (siehe Formel (1)) $(z\varphi)_n = z^n \varphi_n$ ist, erhalten wir also

$$0 = \hat{z\varphi}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \varphi_n(x_n)$$

für alle z mit $|z| \leqq 1$. Das bedeutet $\varphi_n(x_n) = \hat{\varphi}(x_n) = 0$ für alle $n \geqq 1$ und alle $\varphi \in E_1'$, d. h. $\chi(x_n) = 0$ für alle n und alle $\chi \in \Gamma_E$.

Damit ist die Formel (2) bewiesen.

Da $\mathscr{R}_0 = \mathscr{R}_1 = 0$ ist, genügt es nun zum Beweis von Satz 3 zu zeigen, daß $\mathscr{R}_n < \mathscr{K}$ ist für jedes $n \geqq 2$.

Die Vertauschung von x_i mit x_{i+1} in $x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n$ läßt sich offenbar zu einem isometrischen Automorphismus π_i von $E^{\hat{n}}$ fortsetzen (es ist also etwa

$$\pi_1(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3) = x_2 \otimes x_1 \otimes x_3, \quad n = 3).$$

Setzen wir

$$\varepsilon_i = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \pi_i), \quad i = 1, \ldots, n-1$$

mit der identischen Abbildung $\mathbf{1}$ von $E^{\hat{n}}$, so ist $\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i$ und $\varepsilon_i E^{\hat{n}} = \{\varepsilon_i z \mid z \in E^{\hat{n}}\}$ liegt in $\mathscr{K} \cap E^{\hat{n}}$. Setzen wir

$$\mathscr{S}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i E^{\hat{n}}$$

(d. h. $\mathscr{S}_n$ ist der von den $\varepsilon_i E^{\hat{n}}$ erzeugte abgeschlossene Unterraum von $E^{\hat{n}}$), so ist also $\mathscr{S}_n < \mathscr{K}$ und somit genügt es zu zeigen, daß

$$\mathscr{R}_n < \mathscr{S}_n.$$

Der duale Raum von $E^{\hat{n}}$ ist der Raum $M_n = M_n(E)$ der beschränkten n-Linearformen auf E. Auf M_n wirkt, ebenso wie auf $E^{\hat{n}}$, in natürlicher Weise die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$. Ist α ein stetiger Endomorphismus von $E^{\hat{n}}$, so sei ${}^t\alpha$ der transponierte Endomorphismus von M_n. Für eine Transposition π aus $\mathfrak{S}_n$ ist dann ${}^t\pi = \pi$. Bekanntlich gilt für den orthogonalen Raum $(\alpha E^{\hat{n}})^\perp$ des Bildraumes eines Endomorphismus α die Formel $(\alpha E^{\hat{n}})^\perp = \ker({}^t\alpha)$. Es folgt

$$\mathscr{S}_n^\perp = \bigcap_{i=1}^{n-1} (\varepsilon_i E^{\hat{n}})^\perp = \bigcap_{i=1}^{n-1} \ker {}^t\varepsilon_i.$$

Da ${}^t\varepsilon_i = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - {}^t\pi_i) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \pi_i)$ ist, liegt φ genau dann in $\mathscr{S}_n^\perp$, wenn $\varphi = \pi_i\varphi$ gilt für $i = 1, \ldots, n-1$. Da die π_i die $\mathfrak{S}_n$ erzeugen, besteht $\mathscr{S}_n^\perp$ also genau aus den *symmetrischen* n-Linearformen.

Ist

$$\sigma = \frac{1}{n!} \sum_{\varrho \in \mathfrak{S}_n} \varrho,$$

so ist $\sigma^2 = \sigma$ und

$$\mathscr{S}_n^\perp = \sigma M_n,$$

denn $\varphi \in M_n$ ist dann und nur dann symmetrisch, wenn $\sigma\varphi = \varphi$ ist.

Aus Hilfssatz 1 folgt durch Induktion leicht, daß das algebraische Tensorprodukt $(E')^n$ schwach dicht in M_n ist, somit ist $\sigma(E')^n$ schwach dicht in $\mathscr{S}_n^\perp$ und zu $q \in E^{\hat{n}}$ mit $q \notin \mathscr{S}_n$ gibt es eine symmetrische Form ψ aus $(E')^n$, die q nicht annulliert. Es gibt dann bereits einen endlichdimensionalen Teilraum F von E' mit $\psi \in F^n$. Da F^n der Raum der n-Linearformen auf dem endlichdimensionalen Raum $E/F^\perp$ ist, folgt aus Hilfssatz 2, daß ψ Linearkombination von Formen ϑ^n mit $\vartheta \in F < E'$ ist, es gibt dann also ein $\vartheta \in (E')_1$ und deshalb nach Satz 2 ein $\chi \in \Gamma_E$ mit $\chi \mid E^{\hat{n}} = \vartheta^n$, $\chi(q) = \vartheta^n(q) \neq 0$. Folglich liegt q nicht in $\mathscr{R}_n$, d. h. wir haben $\mathscr{R}_n < \mathscr{S}_n$. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Literatur

[1] *H. H. Schaefer*, Topological vector spaces, New York 1966.

[2] *N. Th. Varopoulos*. A direct decomposition of the measure algebra of a locally compact abelian group, Annales Inst. Fourier **16** (1966), 121—143.

Institut für Angewandte Mathematik, 69 Heidelberg, Berliner Straße 17

Eingegangen 12. Februar 1969

Torsion preradicals and ascending Loewy series of modules

By *L. Fuchs* at New Orleans

To Wolfgang Krull on his seventieth birthday

In his paper [10] W. Krull pointed out that certain facts in the ideal theory of commutative Noetherian rings can be better understood in the light of the ascending Loewy series and the associated Loewy invariants. This fruitful idea was further developed in his subsequent paper [11]. Even in non-commutative ring theory, especially in the presence of minimum condition, the Loewy series turned out quite useful[1]). The Loewy series of modules over rings with minimum condition modulo their radicals were discussed by Dauns [4]. As an example of his torsion theory, Dickson [5] also considered the ascending Loewy series of modules; his main interest lay in the direct decompositions (see also [6]).

The primary aim of this paper is to get complete information about the lengths of the ascending Loewy series of modules. Some of our results will be formulated in terms of Maranda's torsion preradicals of modules (see [13] and also Gabriel [8]), since they are valid in more general situations. [Actually, with not much extra effort we could have stated some of these results for certain abelian categories, but this would have led us too far away from our present goal.]

In Part I we collect some basic facts on preradicals and in particular, on torsion preradicals F of modules which are relevant in our discussions. In contrast to the descending Loewy series whose lengths are unbounded even for abelian groups, there is an upper bound for the lengths of the F-series of submodules[2]) $0 < F_1(M) < F_2(M) < \cdots < F_\lambda(M)$ of modules M over a fixed ring R (cf. Theorem 1). In general, our estimate is the best possible one (as is clear from Theorem 5), but for modules over Artinian or Noetherian rings a better estimate can be given (Corollary 1 and Theorem 2). We shall briefly mention a sort of injectivity which is closely related to torsion preradicals (see Theorem 3). Theorem 4 points out that torsion preradicals F preserve some of the properties of torsion abelian groups, namely, both the tensor and the torsion products carry F-series into F-series so that the length λ never increases.

Part II is devoted to the study of the ascending Loewy series, i. e. when $F(M)$ is the socle of M. Examples 3 and 4 exhibit remarkable modules (over non-commutative polynomial rings) whose submodule lattices are arbitrarily long well-ordered chains which are at the same time their ascending Loewy series. Moreover, the factors in this

---

[1]) See e. g. Artin-Nesbitt-Thrall [1]. In particular, for the socle we refer to Michler [14].

[2]) For the definition of F-series see **2**.

chain can be all isomorphic to each other or pairwise non-isomorphic. The case of modules over commutative rings is more difficult, but the existence of arbitrarily long Loewy series can be established (Example 5). Our main result (Theorem 6) states that to every ordinal λ there exists a ring R with 1 such that the supremum of the lengths of ascending Loewy series of R-modules is exactly λ.

I. Torsion preradicals

1. Our setting is the category ${}_R\mathcal{M}$ of unital left R-modules where R is always a ring with identity. Following Maranda [13], by a *preradical*[3]) of ${}_R\mathcal{M}$ we mean a functor F on ${}_R\mathcal{M}$ to itself which assigns to each $M \in {}_R\mathcal{M}$ a submodule $F(M)$ of M such that if $\alpha: M \to N$ is a morphism in ${}_R\mathcal{M}$, then $F(\alpha): F(M) \to F(N)$ is the restriction of α to $F(M)$. Evidently, this simply means that every R-homomorphism $\alpha: M \to N$ maps $F(M)$ into $F(N)$. In case $F(M) = M$ we shall call M an *F-module.* A preradical F is called a *radical* if $F(M/F(M)) = 0$ for all $M \in {}_R\mathcal{M}$, and a *torsion preradical* if $F(N) = N \cap F(M)$ for all submodules N of M.

If F_1 and F_2 are preradicals of ${}_R\mathcal{M}$, then their product F_1F_2, defined as $F_1F_2(M) = F_1(F_2(M))$, is again a preradical. This multiplication is associative, but not commutative in general. Clearly, a torsion preradical F satisfies $F^2 = F$ because of $F(F(M)) = F(M) \cap F(M)$.

There is a natural partial order among the preradicals of ${}_R\mathcal{M}$, namely, $F_1 \leqq F_2$ if $F_1(M)$ is a submodule of $F_2(M)$ for every $M \in {}_R\mathcal{M}$. This is a lattice-order on the preradicals which is compatible with the multiplication.

It follows easily (see e. g. Charles [3]):

Lemma 1. *A preradical F commutes with direct sums:*

$$F(\bigoplus_i M_i) = \bigoplus_i F(M_i).$$

A preradical can be defined in the following way. Start with a class $\mathfrak{X}$ of R-modules and define $F_{\mathfrak{X}}(M)$ as the join of all $\operatorname{Im}\eta$ where η ranges over all R-homomorphisms $\eta: X \to M$ with all $X \in \mathfrak{X}$. It is clear that the same preradical is obtained if we close the class $\mathfrak{X}$ under direct sums and epimorphisms; thus there is no loss of generality in assuming $\mathfrak{X}$ closed under direct sums and epimorphisms[4]). In this case $\mathfrak{X}$ is closed under taking joins and $F_{\mathfrak{X}}(M)$ is simply the maximum submodule of M that belongs to $\mathfrak{X}$. On the other hand, $\mathfrak{X}$ consists of all $F(M)$ with $M \in {}_R\mathcal{M}$. In view of the inclusion $F(N) \leqq N \cap F(M)$, valid for every preradical F and for every submodule N of M, we have the immediate

Lemma 2. *$F_{\mathfrak{X}}$ is a torsion preradical if and only if the class $\mathfrak{X}$ is closed under taking submodules too.*

From the definition of radicals we obtain at once:

Lemma 3. *$F_{\mathfrak{X}}$ is a radical exactly if $\mathfrak{X}$ is closed under extensions.*

Thus for a preradical $F_{\mathfrak{X}}$ to be a torsion radical it is necessary and sufficient that if $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ is an exact sequence in ${}_R\mathcal{M}$, then $M \in \mathfrak{X}$ is equivalent to $M', M'' \in \mathfrak{X}$.

Let $F_{\mathfrak{X}}$ be a torsion preradical where the class $\mathfrak{X}$ is closed under submodules, epimorphisms and direct sums. The subclass $\mathfrak{Y}$ of $\mathfrak{X}$ consisting of all cyclic R-modules in the class $\mathfrak{X}$ defines the same preradical: $F_{\mathfrak{Y}} = F_{\mathfrak{X}}$, as is easily seen. To $\mathfrak{Y}$ there corresponds

[3]) It is also called a *subfunctor of the identity.*

[4]) This will be tacitly assumed in the sequel, in particular, in Lemmas 2 and 3.

a filter Φ (satisfying the additional condition (iii)) of left ideals L of R such that $L \in \Phi$ if and only if $R/L \in \mathfrak{Y}$. Namely, Φ satisfies the following conditions:

(i) $L_1 \leqq L_2$ and $L_1 \in \Phi$ imply $L_2 \in \Phi$;

(ii) $L_1, L_2 \in \Phi$ implies $L_1 \cap L_2 \in \Phi$;

(iii)[5]) $L \in \Phi$ and $a \in R$ imply $L : a = \{r \in R \mid ra \in L\} \in \Phi$.

Gabriel [8] calls such a Φ *a topologising family* of left ideals of R. Given Φ satisfying (i)—(iii), the set $\mathfrak{Y} = \{R/L \mid L \in \Phi\}$ defines a torsion preradical $F_{\mathfrak{Y}}$ such that the annihilator left ideals $\operatorname{Ann} a = \{r \in R \mid ra = 0\}$ of the elements $a \in F_{\mathfrak{Y}}(M)$ where $M \in {}_R\mathscr{M}$ are exactly those in Φ. For the next result see Gabriel [8] or Maranda [13].

Lemma 4. *The torsion preradicals on ${}_R\mathscr{M}$ are in a one-to-one correspondence with the topologising families of left ideals of R.*

Examples for torsion preradicals are the following.

1^0. The socle L, i. e. $L(M)$ is defined as the join of all simple submodules of M. The corresponding class $\mathfrak{X}$ consists of all semisimple R-modules and the associated topologising family is generated by finite intersections of maximal left ideals of R.

2^0. Let S be a simple R-module and $S(M)$ the join of all simple submodules of M isomorphic to S. Clearly, $S \leqq L$.

3^0. Let $N(M)$ denote the join of all locally Noetherian submodules of M (i. e. finitely generated submodules satisfy the maximum condition on submodules). The corresponding topologising family Φ is the set of all left ideals L of R such that R/L is a Noetherian R-module.

4^0. If $A(M)$ is the join of all locally Artinian submodules of M, then the corresponding Φ consists of all L with R/L Artinian.

Evidently, both $L \leqq N$ and $L \leqq A$ hold.

2. Suppose we are given a torsion preradical F of ${}_R\mathscr{M}$. We set $F_0 = 0$, the zero functor. If σ is an ordinal number and if F_ϱ has been defined for all ordinals $\varrho < \sigma$, then we define F_σ by $F_\sigma(M)/F_{\sigma-1}(M) = F\big(M/F_{\sigma-1}(M)\big)$ or by $F_\sigma(M) = \bigcup_{\varrho<\sigma} F_\varrho(M)$, for every $M \in {}_R\mathscr{M}$, according as σ is an isolated or a limit ordinal. In this way functors F_σ on ${}_R\mathscr{M}$ arise which are easily seen to be again torsion preradicals of ${}_R\mathscr{M}$.

For $M \in {}_R\mathscr{M}$, there is a smallest ordinal λ, not exceeding the cardinality of M, such that $F_\lambda(M) = F_{\lambda+1}(M)$. The properly ascending chain of fully invariant submodules of M,

$$0 = F_0(M) < F_1(M) < \cdots < F_\sigma(M) < \cdots < F_\lambda(M),$$

is called the *F-series* of M. Its length λ is the F-length $\lambda_F(M)$ [or simply $\lambda(M)$] of M. The functor $\overline{F}$ on ${}_R\mathscr{M}$ defined as

$$\overline{F}(M) = F_{\lambda(M)}(M)$$

is the smallest (torsion) radical[6]) such that $F \leqq \overline{F}$. We list some useful properties:

1. If $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ is an exact sequence in ${}_R\mathscr{M}$ with M an $\overline{F}$-module, then $\max\big(\lambda(M'), \lambda(M'')\big) \leqq \lambda(M) \leqq \lambda(M') + \lambda(M'')$;

---

[5]) Condition (iii) is a consequence of the fact that the coset $a + L$ (as an element of R/L) has the annihilator $L : a$.

[6]) The class $\overline{\mathfrak{X}}$ and the topologising family $\overline{\Phi}$ corresponding to $\overline{F}$ can be described in terms of $\mathfrak{X}$, Φ corresponding to F.

2. if $M = \bigoplus_i M_i$ is a direct sum, $\lambda(M) = \sup_i \lambda(M_i)$;

3. $M \in {}_R\mathfrak{M}$ is an $\bar{F}$-module if and only if, for every proper submodule N of M, $F(M/N) \neq 0$.

We turn to the proof of

Theorem 1. *Let F be a torsion preradical of ${}_R\mathfrak{M}$ and Φ the corresponding topologising family of left ideals of R. If every left ideal in Φ can be generated by less than $\aleph_\tau$ elements, and if Ω is the first ordinal of cardinality $\aleph_\tau$, then $\bar{F} = F_\Omega$.*

Contrary to our assertion, suppose there exists an $M \in {}_R\mathfrak{M}$ such that $F_\Omega(M) < F_{\Omega+1}(M)$. Select an $a \in F_{\Omega+1}(M)F_\Omega\backslash(M)$, and let $L \in \Phi$ satisfy $La \leqq F_\Omega(M)$. Choose a system $\{r_i \mid i \in I\}$ of generators of L such that the cardinality of I is less than $\aleph_\tau$. For each $i \in I$, there is an ordinal $\sigma(i) < \Omega$ such that $r_i a \in F_{\sigma(i)}(M)$. By the choice of Ω, the supremum σ of the $\sigma(i)$ is still less than Ω, thus $La \leqq F_\sigma(M)$. Consequently, $a \in F_{\sigma+1}(M) \leqq F_\Omega(M)$, and the contradiction completes the proof.

The smallest ordinal λ such that $\bar{F} = F_\lambda$ will be called the *global F-length of R*. This is clearly the supremum of all F-lengths of R-modules; actually, it is their maximum, for there is always an R-module whose F-length is the global F-length of R. By the preceding theorem, $\lambda \leqq \Omega$; that this estimate cannot be improved in general, will be shown by Theorem 5 infra. In special cases, however, better estimates may be given.

Corollary 1. *If the topologising family Φ associated with the torsion preradical F contains only left ideals which are finitely generated, then*[7] *$\bar{F} = F_\omega$.*

Just as in the proof of Theorem 1, it follows that $F_{\omega+1} = F_\omega$. — Therefore, if R is left Noetherian, the global length for every torsion preradical of ${}_R\mathfrak{M}$ is at most ω.

If the topologising family Φ corresponding to the torsion preradical F contains left ideals $\neq R$, then the global F-length of R is at least 1. It is exactly 1 if and only if F is a radical $\neq 0$. We shall exhibit an example (see Example 1) where $F = L$ is the socle, R is not Noetherian and the global L-length of R is 1.

Theorem 2. *Let R be a left Artinian ring and e the exponent of nilpotency of its radical J. The global F-length of R for any torsion preradical F of ${}_R\mathfrak{M}$ is at most e. In particular, the global L-length of R is exactly e.*

Let $M \in {}_R\mathfrak{M}$ be an $\bar{F}$-module and Φ the topologising family corresponding to F. Then $L(M) \leqq F(M)$, and by a simple induction, we obtain $L_m(M) \leqq F_m(M)$ for every positive m. Dauns [4] has shown (under more general hypotheses than ours) that the submodules $L_0(M) = 0 \leqq L_1(M) \leqq \cdots \leqq L_e(M) = M$ are exactly the annihilators of the descending chain $R > J > J^2 > \cdots > J^e = 0$. Hence $L_e(M) = M$, and a fortiori $F_e(M) = M$. The second assertion follows from $L_{e-1}(R) \neq L_e(R) = R$.

For the sake of future reference we state the following generalization of the last result on L:

Lemma 5. *If F is a torsion preradical of ${}_R\mathfrak{M}$ and R is an $\bar{F}$-module over itself, then the global F-length of R is equal to the F-length of R (as a left R-module).*

Hypothesis implies that every free R-module is an $\bar{F}$-module (see Lemma 1) whose F-length is $\lambda(R)$. Epimorphic images of $\bar{F}$-modules are likewise $\bar{F}$-modules and their F-lengths are evidently bounded by $\lambda(R)$.

Notice that the existence of 1 in R implies that $\lambda(R)$ must be then an isolated ordinal.

[7]) ω will always denote the first infinite ordinal number. — That ω is the best result in Corollary 1 is shown e. g. by ordinary abelian groups.

3. Next we consider briefly a notion of injectivity closely related to a torsion preradical F[8]).

An F-module M is said to be *F-injective* if, for every monomorphism $\mu: A \to B$ between F-modules A, B and for every homomorphism $\alpha: A \to M$, there exists a $\beta: B \to M$ such that $\beta\mu = \alpha$.

Theorem 3. *Let F be a torsion preradical of ${}_R\mathcal{M}$ and Φ the corresponding topologising family of left ideals of R. The following conditions on $M \in {}_R\mathcal{M}$ are equivalent:*

(1) *M is F-injective;*

(2) *$M = F(\hat{M})$ where $\hat{M}$ is the injective hull of M;*

(3) *every homomorphism $\xi: L \to M$ of left ideals L of R where $\operatorname{Ker}\xi \in \Phi$ can be extended to an $\eta: R \to M$;*

(4) *M is quasi-injective*[9]) *and if L, L' are left ideals in Φ such that L/L' is isomorphic to a submodule of M, then $L \cap \operatorname{Ann} a = L'$ for some $a \in M$.*

First we argue as is indicated by (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1). The first implication is straightforward, and so is the second. The third can be proved by using the standard argument to show that if A is a submodule of an F-module B, then a maximal extension of $\alpha: A \to M$ must be some $\beta: B \to M$.

Next we show that (2) and (3) imply (4). By (2), M is fully invariant in $\hat{M}$, and hence quasi-injective. If L/L' is isomorphic to a submodule of M (with L, $L' \in \Phi$), then there is a map $\xi: L \to M$ with $\operatorname{Ker}\xi = L'$. By (3), ξ has an extension $\eta: R \to M$, and $\operatorname{Ker}\eta = \operatorname{Ann}\eta(1)$ obviously intersects L in L'. To show that (3) follows from (4), let $\xi: L \to M$ have the kernel $L' \in \Phi$. Then L/L' is isomorphic to a submodule of M, hence by hypothesis $L \cap \operatorname{Ann} a = L'$ for some $a \in M$. Clearly ξ has an extension $\xi': L + \operatorname{Ann} a \to M$ such that $\xi' \mid L = \xi$ and $\operatorname{Ker}\xi' = \operatorname{Ann} a$. From the quasi-injectivity of M we infer[10]) there is an extension $\eta: R \to M$ of ξ' and hence of ξ.

Let us notice, without proof, that if F is moreover a radical, then the following three conditions are equivalent to those above:

(5) *for every monomorphism $\mu: A \to B$ such that* $\operatorname{Coker}\mu$ *is an F-module and for every $\alpha: A \to M$ there is a $\beta: B \to M$ such that $\beta\mu = \alpha$;*

(6) $\operatorname{Ext}^1_R(R/L, M) = 0$ *for all $L \in \Phi$;*

(7) $\operatorname{Ext}^1_R(C, M) = 0$ *for all $C \in {}_R\mathcal{M}$ satisfying $F(C) = C$.*

4. Since $\bar{F}$-modules are, in a sense, generalizations of torsion abelian groups, it is natural to ask to what extent they preserve properties of torsion groups. We know, for instance, that $\operatorname{Tor}^Z_1(C, A)$ is always a torsion group whatever the abelian groups A and C are. Naturally, it cannot be expected that $\operatorname{Tor}^R_1(M, N)$ is always as F-module for commutative[11]) rings R; as a matter of fact, this does not hold even if $F = L$ is the socle. There is, however, a weak analogy to torsion groups, namely, both $M \otimes_R N$ and $\operatorname{Tor}^R_n(M, N)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ are $\bar{F}$-modules if either M or N is an $\bar{F}$-module and R is commutative. More generally, we have:

---

[8]) A similar notion for radicals was studied by Gabriel [8] and Maranda [13].

[9]) A module M is called *quasi-injective* if every homomorphism of any submodule N of M into M is induced by an endomorphism of M. M is quasi-injective exactly if it is fully invariant in its injective hull.

[10]) Cf. Fuchs [7].

[11]) Recall that the tensor and torsion products of R-modules are again R-modules whenever R is commutative.

Theorem 4. *Let M and N be right and left R-modules, respectively, and assume M is a left module over a ring T such that $\bar{F}(M) = M$ for a torsion preradical F of ${}_T\mathscr{M}$. Then $M \otimes_R N$ and $\mathrm{Tor}_n^R(M, N)$, for every n, are $\bar{F}$-modules in ${}_T\mathscr{M}$ and their F-lengths do not exceed the F-length of M.*

Let X be a free module in ${}_R\mathscr{M}$ and $\eta: X \to N$ an epimorphism. Since $M \otimes_R X$ can be regarded as a direct sum of modules T-isomorphic to M, it is clear that, for every ordinal σ, $F_\sigma(M \otimes_R X)$ is a direct sum of copies of $F_\sigma(M)$. Tensor product preserves epimorphisms, therefore $1 \otimes \eta: M \otimes_R X \to M \otimes_R N$ is an epimorphism and the assertion concerning $M \otimes_R N$ follows. Recall that $\mathrm{Tor}_1^R(M, N) \cong \mathrm{Ker}\,(1 \otimes \eta')$, where η' is the injection $\eta': X' = \mathrm{Ker}\,\eta \to X$. Hence $\mathrm{Tor}_1^R(M, N)$ is isomorphic to a submodule of $M \otimes_R X'$ which proves the assertion for $\mathrm{Tor}_1^R(M, N)$. The rest is a consequence of the fact that $\mathrm{Tor}_n^R(M, N) \cong \mathrm{Tor}_1^R(M, N_n)$ for an R-module N_n in a projective resolution of N.

It is perhaps worth while pointing out that if R is commutative and both M and N are $\bar{F}$-modules, then Theorem 4 implies $M \otimes_R N$ and $\mathrm{Tor}_n^R(M, N)$ are $\bar{F}$-modules over R and their lengths are $\leqq \min(\lambda(M), \lambda(N))$.

II. The ascending Loewy series

5. There is an important special case of torsion preradicals, namely, if $L(M)$ is the socle of M. In this case

$$0 = L_0(M) < L_1(M) < \cdots < L_\sigma(M) < \cdots < L_\lambda(M) = L_{\lambda+1}(M)$$

is called the *ascending Loewy series* of M. Its length, i. e. the L-length of M, is also called the *Loewy length* $\lambda(M)$ of M. If $L_\lambda(M) = M$, we shall say M is a *Loewy module*[12]). The quotient module $L_{\sigma+1}(M)/L_\sigma(M)$ will be called the *σth Loewy factor* of M. It is semisimple, thus it is a direct sum of simple R-modules S; the cardinality $\mu_\sigma(M)$ $[\mu_\sigma(S, M)]$ of the set of simple summands [isomorphic to S] is an invariant of M, called the *σth Loewy invariant* [*associated with S*].

A Loewy module M is *S-primary* (where S is a simple R-module) if $\mu_\sigma(S', M) = 0$ for all simple R-modules S' not isomorphic to S and for all σ, and *antiprimary* if $\sum_\sigma \mu_\sigma(S, M) \leqq 1$ for every simple S.

The global L-length of R will also be called the *global Loewy length of R*, gl. $\lambda(R)$. In accordance with our standing hypothesis, this is the *left* global Loewy length which is, in general, different from the *right* global Loewy length, as is shown e. g. by the following example (see Small [15]). Let Q_2 be the ring of all rational numbers with odd denominators, Q the rational number field, and R the ring of all 2×2 matrices

$$\begin{bmatrix} x & a \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad \text{with } x \in Q_2,\ a, b \in Q.$$

This is a right Noetherian ring, hence by Corollary 1, its right global Loewy length is $\leqq \omega$. The set U_i of all matrices in R such that $b = 0$ and $a = 2^{-i}y$ with $y \in Q_2$ is a left ideal of R and U_{i+1}/U_i is of order 2, for $i = 0, 1, 2, \ldots$. Now $M = R/U_0$ is a left Loewy module for which $L_i(M) = U_i/U_0$ if $i < \omega$, $L_\omega(M)$ is the set of all matrices in R with $b = 0 \bmod U_0$, and $R/L_\omega(M)$ is simple. Hence $\lambda(M) = \omega + 1$, and the left global Loewy length of R is larger than the right one[13]).

---

[12]) Thus a Loewy module is exactly what we have called an $\bar{L}$-module.

[13]) For an example of a Loewy module of length $\omega + 1$ see Dauns [4].

From Theorem 2 we know that if R is a left Artinian ring, then the global Loewy length of R is equal to the exponent of nilpotency of its radical. The following two examples are commutative non-Noetherian (and hence non-Artinian) rings with small global Loewy lengths. — First we prove a lemma.

Lemma 6. *Let R be a commutative ring, P a maximal ideal of R, and denote by d the dimension of P/P^2 as an R/P-vector space. Then for the simple R-modules $S \cong R/P$ and S' the following holds:*

$$\mathrm{Ext}^1_R(S, S') = \begin{cases} 0 & \text{if } S' \not\cong S, \\ \prod_d S & \text{if } S' \cong S. \end{cases}$$

Let $S' \cong R/P'$ be non-isomorphic to S, i. e. $P' \neq P$. By commutativity, Ext is an R-module which is now annihilated by P and P' (because S and S', respectively, are). Since $P + P' = R$, the first assertion follows. To find $\mathrm{Ext}^1_R(S, S)$, notice that from the exact sequence $0 \to P \to R \to S \to 0$ we obtain the exact sequence

$$\mathrm{Hom}_R(R, S) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}_R(P, S) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(S, S) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_R(R, S) = 0.$$

Since for any R-homomorphism $\eta: R \to S$, $\mathrm{Ker}\,\eta$ must contain P, the image of φ must be 0. Hence $\mathrm{Ext}^1_R(S, S) \cong \mathrm{Hom}_R(P, S)$. The last module is isomorphic to $\mathrm{Hom}_R(P/P^2, S)$. Therefore, if we write P/P^2 as a direct sum of d copies of S, we obtain

$$\mathrm{Hom}_R(P/P^2, S) \cong \prod_d \mathrm{Hom}_R(S, S)$$

as asserted.

Example 1. Let R be a valuation ring in the sense of Krull [12] such that its value group Γ does not contain any smallest element > 0[14]). Then the valuation ideal P is equal to its square P^2, hence $\mathrm{Ext}^1_R(S, S) = 0$ holds for the only simple R-module $S = R/P$. This implies $\mathrm{Ext}^1_R(S, \Pi S) = 0$ for any product of copies of S. For commutative rings R, ΠS is semisimple, thus the direct sum $\oplus S$ is a summand of ΠS which shows $\mathrm{Ext}^1_R(S, \oplus S) = 0$ and hence $\mathrm{Ext}^1_R(S, M) = 0$ for every semisimple R-module M. We conclude: gl. $\lambda(R) = 1$.

Example 2. Let $\bar{R}$ be the direct product of the prime fields K_p of prime characteristic p, one factor for every prime. The quotient $\bar{R}/\oplus_p K_p$ contains a subring isomorphic to the rational number field Q, and let R be the inverse image of Q in $\bar{R}$ under the canonical homomorphism $\bar{R} \to \bar{R}/\oplus K_p$. Notice that every K_p is a simple R-module and $\oplus K_p$ is the socle of R. Since $\oplus_p K_p$ is a maximal ideal of R, we conclude $\lambda(R) = 2$. This already implies gl. $\lambda(R) = 2$, as is immediate from Lemma 5.

6. Our next goal is to show that there is no upper bound for the global Loewy lengths of rings.

Example 3. Let R be the ring of all polynomials over a field K in non-commuting indeterminates x_σ where σ ranges over all *non-limit* ordinals not exceeding a given ordinal λ. Let M be a K-vectorspace with a basis v_σ indexed in the same way as the x_σ. We turn M into an R-module by defining

$$x_\sigma v_\varrho = \begin{cases} v_\sigma & \text{if } \sigma < \varrho, \\ 0 & \text{if } \sigma \geqq \varrho; \end{cases} \tag{1}$$

[14]) We can choose, for instance, Γ as the group of rationals. — Let us note that if the value group Γ of R is discrete, then the global Loewy length of R is ω.

in fact, fv is well-defined for all $f \in R$ and $v \in M$ and the requisite postulates hold. For an ordinal $\varrho \leqq \lambda$ let M_ϱ be the K-subspace spanned by all v_σ with $\sigma \leqq \varrho$. Clearly,

$$M_\varrho = \begin{cases} Rv_\varrho \text{ if } \varrho \text{ is an isolated ordinal,} \\ \bigcup_{\sigma<\varrho} Rv_\sigma \text{ if } \varrho \text{ is a limit ordinal.} \end{cases}$$

M has no submodules $N \neq 0$ other than these M_ϱ. For if $v_\sigma \notin N$ with the smallest index σ, then evidently $v_\varrho \notin N$ for $\varrho \geqq \sigma$ and $M_{\sigma-1} \leqq N$. If the last inclusion were proper and if $w = c_1 v_{\sigma(1)} + \cdots + c_k v_{\sigma(k)} \in N \setminus M_{\sigma-1}$ with $0 \neq c_i \in F$ and $\sigma(1) > \sigma(2) > \cdots > \sigma(k) \geqq \sigma$, then obviously $k \geqq 2$ and $x_{\sigma(2)} w = c_1 v_{\sigma(2)} \in N$ would be a contradiction.

Let P denote the maximal ideal of R generated by all the indeterminates x_σ; i. e. $f \in P$ if and only if f has no constant term. From the definition we obtain at once

$$PM_\varrho \leqq M_{\varrho-1}$$

for every isolated ordinal ϱ, and so $M_\varrho/M_{\varrho-1} \cong R/P = S$ is a simple R-module. From the fact that the submodule lattice of M is a chain consisting of the M_ϱ we infer by a trivial transfinite induction on ϱ that $L_\varrho(M) = M_\varrho$ for *every* ordinal $\varrho \leqq \lambda$. Consequently, M is an S-primary Loewy module such that $\lambda(M) = \lambda$ and $\mu_\varrho(M) = 1$ for every $\varrho < \lambda$.

Example 4. The definition (1) can be slightly modified in order to obtain an antiprimary rather than an S-primary module with the same properties[15]). Setting

$$x_\sigma v_\varrho = \begin{cases} v_\sigma \text{ if } \sigma \leqq \varrho, \\ 0 \text{ if } \sigma > \varrho, \end{cases} \tag{2}$$

we still get the chain $0 < M_1 < \cdots < M_\varrho < \cdots < M_\lambda = M$ both for the submodule lattice and for the ascending Loewy series of M, but here $M_{\varrho+1}/M_\varrho \cong R/P_{\varrho+1}$ where $P_{\varrho+1}$ is generated by all $x_\sigma (\sigma \neq \varrho + 1)$ and $1 - x_{\varrho+1}$.

Notice that the ring R of polynomials in Examples 3 and 4 can be replaced by suitable rings of linear transformations of the K-vectorspace M or by suitable matrix rings[16]).

We can now conclude that the estimate given in Theorem 1 is sharp:

Theorem 5. *Let R be the polynomial ring over a field K in non-commuting indeterminates x_i $(i \in I)$*[17]). *If I is not empty and if Ω is the first infinite ordinal whose cardinality exceeds that of I, then* gl. $\lambda(R) = \Omega$.

If I is an infinite set, then Example 3 (or 4) shows that (after suitably reindexing the indeterminates) we can construct an R-module of any length σ less than Ω. If I is finite, then the K-vector space spanned by $v_1, \ldots, v_m, \ldots$ $(m < \omega)$ and subject to the rules $x_1 v_1 = 0$, $x_1 v_{m+1} = v_m$ $(m \geqq 1)$ and $x_i v_m = 0$ (for all $i \neq 1$ in I and all m) becomes an R-module of length ω.

7. In Examples 3 and 4 the fact that the x_σ did not commute was essential; indeed Lemma 6 implies that the submodules of an antiprimary module can not form a chain whenever R is commutative[18]). The next example shows that even over commutative rings arbitrarily long Loewy series exist.

---

[15]) A suitable combination of Examples 3 and 4 yields a module which is neither primary nor antiprimary. Notice that these modules satisfy the minimum condition on submodules.

[16]) If $N(M)$ is the join of all locally Noetherian submodules of M, then in Examples 3 and 4 the submodules in the ascending N-series are $N_\sigma(M) = L_{\omega\sigma}(M)$ as is easy to verify. Theorem 5 holds also for the global N-length of R.

[17]) To avoid argument on cardinalities, we may assume that the cardinality of K does not exceed that of I.

[18]) It is not known what ordinals occur as lengths of S-primary modules with linearly ordered submodule lattices if R is commutative.

Example 5. Given the ordinal λ, let R be the ring of polynomials over a commutative field K in commuting indeterminates x_σ indexed by all ordinals $\sigma < \omega^\lambda$. Let M be the vector space over K with a basis v_σ ($\sigma < \omega^\lambda$) and define

$$x_\sigma v_\varrho = v_{\min(\sigma,\varrho)}.$$

Then $x_\sigma x_\tau v_\varrho = v_{\min(\sigma,\tau,\varrho)}$ is independent of the order of x_σ, x_τ, hence fv is well-defined for all $f \in R$ and $v \in M$, and M becomes an R-module. We show that $\lambda(M) = \lambda$.

To begin with, notice that $P_\sigma = (x_1, \ldots, x_\varrho, \ldots, 1 - x_\sigma, 1 - x_{\sigma+1}, \ldots)$ is a maximal ideal of R ($\varrho < \sigma$). Since Ann $v_1 = P_1$ and Ann $(v_\sigma - v_{\sigma+1}) = P_{\sigma+1}$, it is clear that the socle of M contains the submodule (set $v_0 = 0$)

$$L_1 = \bigoplus_\sigma R(v_\sigma - v_{\sigma+1}) \qquad (0 \leqq \sigma < \omega^\lambda). \tag{3}$$

Observe that all v_n with $n < \omega$ belong to L_1. To verify that L_1 is exactly the socle of M, suppose $w = c_1 v_{\varrho(1)} + \cdots + c_k v_{\varrho(k)} \notin L_1$ generates a simple submodule S of M where $0 \neq c_i \in F$ and $\varrho(1) < \cdots < \varrho(k)$. Since $x_1 w = \left(\sum_i c_i\right) v_1 \in S \cap L_1 = 0$, we have $\sum c_i = 0$. But then $x_{\varrho(1)+1} w = c_1 v_{\varrho(1)} + (c_2 + \cdots + c_k) v_{\varrho(1)+1} \in S \cap L_1 = 0$, which is absurd in view of $c_1 \neq 0$. Consequently, L_1 is the socle of M. The simple modules in (3) are isomorphic to R/P_ϱ and every ϱ occurs which is not a limit ordinal, i. e. not of the form $\varrho = \omega\varrho'$ for any ϱ'.

In order to find the socle of M/L_1, all that we have to do is to observe that M/L_1 is isomorphic to the R-module M' which is constructed in exactly the same way as M, but in M', v_σ and $v_{\sigma+n}$ collapse and x_σ, $x_{\sigma+n}$ act in the same way, for all $n < \omega$ and all σ. Hence, by analogy,

$$L_2(M) \equiv \bigoplus_\sigma R(v_{\omega\sigma} - v_{\omega(\sigma+1)}) \bmod L_1$$

where the simple modules are annihilated by $P_{\omega(\sigma+1)}$. Here $v_{\sigma+\tau} - v_\sigma \in L_2(M)$ for all $\tau < \omega^2$, but not for $\tau = \omega^2$, and for all σ. As a basis of induction, let us assume that for an isolated ordinal $\varrho < \lambda$

$$L_\varrho(M) \equiv \bigoplus_\sigma R(v_{\omega^{\varrho-1}\sigma} - v_{\omega^{\varrho-1}(\sigma+1)}) \bmod L_{\varrho-1}(M)$$

with $v_{\sigma+\tau} - v_\sigma \in L_\varrho(M)$ for all $\tau < \omega^\varrho$, but not for $\tau = \omega^\varrho$, and for all ordinals $\sigma + \tau < \omega^\lambda$. On using analogy again, we infer that $L_{\varrho+1}(M)$ will have the analogous form. The case of limit ordinals being evident, we conclude that M is a Loewy module of length λ. The annihilator ideals of the simple modules will be the maximal ideals P_σ ($1 \leqq \sigma < \omega^\lambda$), thus M is antiprimary [19]).

8. We turn our attention to the global Loewy lengths of rings and intend to show that every ordinal is the global Loewy length of some ring.

Theorem 6. *Given an ordinal λ, there exists a (commutative) ring R such that* gl. $\lambda(R) = \lambda$. *If λ is an isolated ordinal, then R can be chosen to be a Loewy module over itself.*

First let λ be an isolated ordinal, $\lambda = \nu + 1$. Let Σ be the semigroup with elements a_σ ($\sigma < \omega^\nu$) where the multiplication is defined by

$$a_\sigma a_\varrho = a_{\min(\sigma,\varrho)}.$$

Let Σ^1 be the semigroup Σ with an identity e adjoined; then define R as the semigroup algebra of Σ^1 over a (commutative) field K. The maximal ideal P generated (or equivalently, the K-subspace spanned) by all $a_\sigma \in \Sigma$ is an R-module like the one in Example 5

[19]) In Example 5 we have $N_\sigma(M) = L_\sigma(M)$ for every σ.

with the a_σ playing the roles of both x_σ and v_σ. Notice that our semigroup algebra is isomorphic to the polynomial ring in Example 5 modulo the ideal A generated by all $x_\varrho(1 - x_\sigma)$ with $\varrho \leqq \sigma$ where A is contained in all P_σ. Hence we infer that P is an (antiprimary) Loewy module over R satisfying $\lambda(P) = \nu$. Therefore R — as an extension of P by R/P — is an (antiprimary) Loewy module whose length is evidently either ν or $\nu + 1$. The first alternative cannot occur if ν is a limit ordinal, since $R = Re$. Assuming $\nu - 1$ exists, $L_\nu(P)$ is the direct sum of infinitely many simple modules

$$R(v_{\omega^{\nu-1}n} - v_{\omega^{\nu-1}(n+1)}) \bmod L_{\nu-1}(P) = L_{\nu-1}(R),$$

and therefore $L_\nu(R)/L_{\nu-1}(R)$ cannot be generated by e. Consequently, $L_\nu(R) = P$ and $\lambda(R) = \lambda$. By Lemma 5, gl. $\lambda(R) = \lambda$.

If λ is a limit ordinal, then let $\lambda_i (i \in I)$ be a set of isolated ordinals whose supremum is λ. By what has been proved we may choose, for each $i \in I$, an algebra R_i over the rational number field Q which is a Loewy module over itself and has Loewy length λ_i. Let p be a prime and Q_p the ring of rational numbers with denominators prime to p. Define the ring R as the subring of the direct product ΠR_i consisting of all $(\ldots, r_i, \ldots) \in \Pi R_i$ such that almost all of r_i are equal to the same number of Q_p. Then $(\ldots, 1, \ldots, 1, \ldots)$ is the identity of R, every R_i is a ring direct summand of R, say $R = R_i \oplus T_i$ for some ideal T_i of R, and $R/\oplus R_i \cong Q_p$. A maximal ideal of R is either of the form $P_i \oplus T_i$ with P_i maximal in R_i or it contains $\oplus R_i$. In the latter case it must correspond to the unique maximal ideal pQ_p of Q_p, and it is easy to check that it is then equal to $P = pR$. We claim that the global Loewy length of this R is exactly λ. First it is clear that R_i is a Loewy module over R too (annihilated by T_i) and $\lambda(R_i) = \lambda_i$, hence $\oplus R_i$ is a Loewy R-module of length λ. Next assume M is an R-module of Loewy length $\lambda + 1$. There is an epimorphism $\eta: \oplus R \to M$ with sufficiently many summands where η certainly sends the direct sum of the $\oplus R_i$ into $L_\lambda(M)$. Thus η induces an epimorphism $\bar{\eta}: \oplus Q_p \to M/L_\lambda(M)$ where the last module may be assumed to be simple, and hence isomorphic to R/pR. If x is a generator of this simple module, then $pRx \leqq L_\lambda(M)$ which is equivalent to $px \in L_\lambda(M)$, and so $px \in L_\sigma(M)$ for some $\sigma < \lambda$. We infer $x \in L_{\sigma+1}(M)$ where $\sigma + 1 < \lambda$, and the arising contradiction shows that the Loewy length of M cannot exceed λ. That is, gl. $\lambda(R) = \lambda$, as we wished to show[20]).

Let us call attention to an interesting feature of the rings R constructed in the first part of the last proof. Every ideal $\neq 0$ of R contains an idempotent $\neq 0$ (namely, either some a_ϱ or some $a_\sigma - a_\varrho$ with $\sigma > \varrho$), thus the Jacobson radical of R is 0. Consequently, the descending Loewy series of R has length 1. This shows that the length of the ascending Loewy series is absolutely independent of that of the descending Loewy series.

9. Finally, a few remarks may be inserted here on the projective dimensions of Loewy modules.

Lemma 7. *Let M be a Loewy module. Then*

$$\text{proj. dim. } M \leqq \sup \text{ proj. dim. } S$$

where S ranges over all simple modules such that $\sum_\sigma \mu_\sigma(S, M) \neq 0$.

The assertion is evident whenever $\lambda(M) = 1$. The general case is an immediate consequence of a theorem of Auslander [2].

[20]) Theorem 6 holds verbatim for the global N-lengths of rings R. The first part of the proof is the same (cf. footnote 19). while in the second part, Q_p and Q are to be replaced by a valuation ring and its field of quotients, respectively, where the value group Γ is discrete and of rank > 1 in the sense of Krull [12].

For S-primary modules the last result can be improved:

Theorem 7. *If M is an S-primary module and if* proj. dim. S *is finite, then*

$$\text{proj. dim. } M = \text{proj. dim. } S.$$

It suffices to show that $<$ is absurd. If we had strict inequality, then[21]) proj. dim. M/N, for any simple submodule N of M would be equal to proj. dim. $S + 1$. But M/N is likewise S-primary, so this would contradict Lemma 7.

If the global Loewy projective dimension of a ring R is defined, in the obvious way, as the supremum of projective dimensions of Loewy R-modules, then from Lemma 7 we infer that this is equal to the supremum of projective dimensions of simple R-modules. In particular, if R is a Loewy left module over itself (like in the case of Artinian rings), then its global dimension is the supremum of projective dimensions of simple R-modules.

[21]) See e. g. Kaplansky [9].

References

[1] *E. Artin, C. J. Nesbitt* and *R. M. Thrall*, Rings with minimum condition, University of Michigan Press, Ann Arbor 1955.

[2] *M. Auslander*, On the dimension of modules and algebras (III), Global dimension, Nagoya Math. J. **9** (1955), 67—77.

[3] *B. Charles*, Sous-groupes fonctoriels et topologies, Études sur les groupes abéliens, Colloque sur la Théorie des Groupes Abéliens, Montpellier 1967, 75—92.

[4] *J. Dauns*, Chains of modules with completely reducible quotients, Pac. J. Math. **17** (1966), 235—242.

[5] *S. E. Dickson*, Decomposition of modules. I: Classical rings, Math. Z. **90** (1965), 9—13; II: Rings without chain conditions, ibid. **104** (1968), 349—357.

[6] *S. Dickson*, Direct decompositions of radicals, Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla 1965, 366—374.

[7] *L. Fuchs*, On quasi-injective modules (to appear).

[8] *P. Gabriel*, Des catégories abéliennes, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 323—448.

[9] *I. Kaplansky*, Homological dimension of rings and modules, University of Chicago Lecture Notes.

[10] *W. Krull*, Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Abelschen Gruppen, 1. Abh., S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 1926.

[11] *W. Krull*, Zur Theorie der allgemeinen Zahlringe, Math. Ann. **99** (1928), 51—70.

[12] *W. Krull*, Allgemeine Bewertungstheorie, J. reine angew. Math. **167** (1931), 160—196.

[13] *J. M. Maranda*, Injective structures, Trans. Amer. Math. Soc. **110** (1964), 98—135.

[14] *G. Michler*, Radikale und Sockel, Math. Ann. **167** (1966), 1—48.

[15] *L. W. Small*, An example in Noetherian rings, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **54** (1965), 1035—1036.

Tulane University, Mathematics Department, New Orleans, Louisiana 70118, USA

Eingegangen 15. Februar 1969

Zur additiven Idealtheorie in nicht-assoziativen (τ)-Algebren

Von *Dirk Windelberg* in Hannover

Herrn Professor Dr. Wolfgang Krull zum 70. Geburtstag

Aus der noetherschen Idealtheorie ist bekannt, daß sich jedes Ideal eines noetherschen (kommutativen) Ringes R als Durchschnitt endlich vieler primärer Ideale aus R darstellen läßt. Bereits 1927 konnte W. Krull in [2] zeigen, daß diese Aussage in nicht-kommutativen „Bereichen", die z. B. die Maximalbedingung für Linksideale erfüllen, nicht mehr gilt.

Y. Kurata hat 1965 in ([3]; theorem 3. 6) in einem nicht-kommutativen und nicht-assoziativen Ring R, der die Maximalbedingung für zweiseitige Ideale erfüllt, vier zu der Aussage: „Jedes zweiseitige Ideal in R kann als Durchschnitt endlich vieler rechtsprimärer zweiseitiger Ideale aus R dargestellt werden" äquivalente Aussagen angegeben.

Andererseits hatten L. Lesieur und R. Croisot in den Jahren 1956 bis 1963 in [4], [5] und [6] die additive noethersche nicht-kommutative Idealtheorie über den Krullschen Begriff des „Bereiches" zu einer Theorie von (τ)-*Algebren* verallgemeinert.

Hier soll nun gezeigt werden, daß sich die Ergebnisse von Kurata auch in der Theorie der (τ)-Algebren beschreiben lassen, die zu diesem Zweck zu (nicht-assoziativen) *n a*-(τ)-*Algebren* verallgemeinert werden (§ 1). In diesen *n a*-(τ)-Algebren werden wie in [1] und [6] linksprimäre und linkstertiäre Elemente definiert (§ 2), über deren Zusammenhang dann die verallgemeinerte Äquivalenzaussage Kuratas Aufschluß gibt (§ 3).

§ 1. (τ)-Algebren

Der in ([5]; I) und [6] definierte Begriff einer semimodularen, noetherschen (τ)-Algebra wird hier für den nicht-assoziativen Fall eingeführt:

Definition 1. 1. Ein Verband (L) heißt *semimodular*, falls zu je drei Elementen $X, Y, Z \in (L)$ mit $Y \cap Z < X < Z < Y \cap Z$ stets ein $T \in (L)$ existiert mit $Y \cap Z < T \leqq Y$ und $X = (X \cup T) \cap Z$[1] [2]).

Nach [5; I] gilt in einem semimodularen Verband (L):

Sind $R, S \in (L)$ mit $R < S$, so sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(I) *Für jedes $X \in (L)$ mit $S \cap X = R$ gilt $X = R$.*

(II) *Für jedes $X' \in (L)$ mit $S \cap X' \leqq R$ gilt $X' \leqq R$.*

---

[1]) Die in [9] gewählte Definition eines „halbmodularen" Verbandes stimmt mit dieser Definition überein.

[2]) Schreibweise: „$A < B$" für $A \leqq B$ und $A \neq B$.

Definition 1. 2. In einem Verband (L) sei noch zusätzlich eine Multiplikation definiert, so daß (L) bezüglich dieser Multiplikation ein Gruppoid bildet. Gelten dann die beiden folgenden Distributivgesetze:

$$X \cdot (Y \cup Z) = X \cdot Y \cup X \cdot Z \text{ und } (X \cup Y) \cdot Z = X \cdot Z \cup Y \cdot Z$$

für jedes Elementetripel $X, Y, Z \in (L)$, so nennt man (L) ein *Verbandsgruppoid*[3]).

Definition 1. 3. Ein Verbandsgruppoid (L) heißt *quasi-ganz*, falls für jedes Paar X, Y von Elementen aus (L) gilt: $X \cdot Y \leqq X \cap Y$ und *vollständig*, falls der Verband (L) vollständig ist.

Definition 1. 4. Eine Menge zweier Verbände (τ) und (L) heißt *n a-(τ)-Algebra* (L), falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(A) (τ) ist ein quasi-ganzes und vollständiges Verbandsgruppoid.

(B) (L) ist ein vollständiges Verbandsgruppoid; U sei das größte, 0 das kleinste Element von (L).

(C) Zwischen (τ) und (L) sei eine Operation

$$\cdot : (\tau) \times (L) \to (L)$$

erklärt mit:

$$(\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}) \cdot X = \mathfrak{A}\ (\mathfrak{B}\ X) \quad \forall\ \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in (\tau),\ X \in (L).$$

$$\mathfrak{A}\ X \leqq X \quad \forall\ \mathfrak{A} \in (\tau),\ X \in (L).$$

$$\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{A}_i\right) \cdot \left(\bigcup_{j \in J} X_j\right) = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \mathfrak{A}_i\, X_j.$$

(I, J Indexmengen)

Definition 1. 5. Sind (L) eine *n a-(τ)*-Algebra, $X \in (L)$ und $\mathfrak{A} \in (\tau)$, so nennt man das größte Element der Menge $\{Y \in (L);\ \mathfrak{A}\ Y \leqq X\}$ das *Rechtsresiduum von* X (bezüglich $\mathfrak{A}$). Dieses existiert, da (L) vollständig ist. Schreibweise für dieses Element: $r(X, \mathfrak{A})$.

Definition 1. 6. Eine *n a-(τ)*-Algebra (L) heißt *semimodular*, wenn der Verband (L) semimodular ist, und *noethersch*, wenn der Verband (L) die aufsteigende Kettenbedingung erfüllt.

Definition 1. 7. Ein Element X einer *n a-(τ)*-Algebra (L) heißt *$\cap$-irreduzibel*, falls aus $X = Y \cap Z$ mit $Y, Z \in (L)$ und $X \neq Y$ stets $X = Z$ folgt.

§ 2. Linkstertiäre und linksprimäre Elemente

Wie in [6] für (τ)-Algebren sollen hier linkstertiäre und linksprimäre Elemente in *n a-(τ)*-Algebren definiert und einige Eigenschaften gezeigt werden.

Definition 2. 1. Ein Element T einer *n a-(τ)*-Algebra (L) heißt *linkstertiär*, falls aus $r(T, \mathfrak{A}) \cap X = T$ und $T < r(T, \mathfrak{A})$ mit $X \in (L)$ und $\mathfrak{A} \in (\tau)$ folgt: $X = T$.

Nach dem im § 1 Gesagten ist es klar, daß in einer semimodularen *n a-(τ)*-Algebra (L) die Definition 2. 1 äquivalent ist mit der folgenden

Definition 2. 1'. Ein Element T einer semimodularen *n a-(τ)*-Algebra (L) heißt *linkstertiär*, falls aus $\mathrm{r}(\mathrm{T}, \mathfrak{A}) \cap X \leqq T$ und $T < \mathrm{r}(T, \mathfrak{A})$ mit $X \in (L)$ und $\mathfrak{A} \in (\tau)$ folgt: $X \leqq T$.

Bemerkung 2 . 1. Aus der Definition 2. 1 kann man sofort ersehen, daß jedes $\cap$-irreduzibles Element einer *n a-(τ)*-Algebra linkstertiär ist.

[3]) Ist die Multiplikation in einem Verbandsgruppoid (L) assoziativ, so nennt man (L) „Verbandshalbgruppe".

E.-A. Behrens hat zur Charakterisierung einer festen Beklammerung die Bezeichnung

$$A_n^{(\nu)}(\mathfrak{A})$$

eingeführt für $\mathfrak{A}^n$ bei einer *Beklammerung vom Typ ν*. Jeder Beklammerung wird ein Typ μ zugeordnet. Diese Bezeichnung soll auch hier Verwendung finden.

Definition 2. 2. Ein Element P einer n a-(τ)-Algebra (L) heißt *linksprimär*, wenn für jedes $\mathfrak{A} \in (\tau)$ und jedes $X \in (L)$ mit $\mathfrak{A}\, X \leqq P$ und $X \nleqq P$ ein $n \in IN$ und ein Typ ν existieren, so daß gilt: $A_n^{(\nu)}(\mathfrak{A}) \cdot U \leqq P$.

Satz 2. 1. *Sei (L) eine n a-(τ)-Algebra und P ein beliebiges Element aus (L). Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(A) *P ist linksprimär.*

(B) *Für jedes $\mathfrak{A} \in (\tau)$ mit $P < r(P, \mathfrak{A})$ gibt es ein $n \in IN$ und einen Typ ν mit*

$$A_n^{(\nu)}(\mathfrak{A}) \cdot U \leqq P.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß die beiden Mengen $(\mathfrak{C})$ und $(\mathfrak{D})$ gleich sind:

$$(\mathfrak{C}) = \{\mathfrak{A} \in (\tau);\ \exists\, X \in (L),\ X \nleqq P \text{ mit } \mathfrak{A}\, X \leqq P\}.$$
$$(\mathfrak{D}) = \{\mathfrak{A} \in (\tau);\ P < r(P, \mathfrak{A})\}.$$

Sei zunächst $\mathfrak{A} \in (\mathfrak{C})$. Man betrachte zu $\mathfrak{A}$ die Menge $(M) = \{Y \in (L);\ \mathfrak{A}\, Y \leqq P\}$. Da (L) vollständig ist, besitzt (M) ein größtes Element, nämlich $r(P, \mathfrak{A})$. Da $\mathfrak{A}\, P \leqq P$ ist, gilt $P \in (M)$. Wegen $\mathfrak{A} \in (\mathfrak{C})$ gibt es außerdem ein $X \in (L)$, $X \nleqq P$, mit $X \in (M)$. Aus $X \nleqq P$ folgt dann $P < r(P, \mathfrak{A})$; denn wäre $P = r(P, \mathfrak{A})$, so wäre auch $X \leqq r(P, \mathfrak{A}) = P$ wegen $X \in (M)$. Also ist in diesem Fall auch $\mathfrak{A} \in (\mathfrak{D})$. Sei nun umgekehrt $\mathfrak{A} \in (\mathfrak{D})$. Dann ist also $P < r(P, \mathfrak{A})$. Setzt man $X = r(P, \mathfrak{A})$, so ist zwar $\mathfrak{A}\, X = \mathfrak{A} \cdot r(P, \mathfrak{A}) \leqq P$, aber $X = r(P, \mathfrak{A}) \nleqq P$, d. h. $\mathfrak{A} \in (\mathfrak{C})$.

§ 3. Der Satz von Kurata

In diesem Paragraphen soll die Äquivalenz folgender fünf Aussagen in einer semimodulare, noetherschen n a-(τ)-Algebra (L) bewiesen werden:

(I) *Jedes Element aus (L) besitzt eine linksprimäre Darstellung, d. h. jedes Element aus (L) läßt sich als Durchschnitt endlich vieler linksprimärer Elemente aus (L) darstellen.*

(II) (L) ist eine n a-A-R = (τ)-Algebra.

(III) *(L) ist eine na-quasi-A-R = (τ)-Algebra.*

(IV) *Jedes linkstertiäre Element aus (L) ist linksprimär.*

(V) *Jedes $\cap$-irreduzible Element aus (L) ist linksprimär.*

Nach Bemerkung 2. 1 kann sofort „(IV) $\Rightarrow$ (V)" bewiesen werden: Gäbe es nämlich ein $\cap$-irreduzibles Element aus (L), das nicht linksprimär ist, so müßte es auch ein linkstertiäres Element aus (L) geben, das nicht linksprimär ist — im Widerspruch zur Voraussetzung (IV).

Da sich auch in einer noetherschen n a-(τ)-Algebra (L) jedes Element $X \in (L)$ als Durchschnitt endlich vieler $\cap$-irreduzibler Elemente aus (L) darstellen läßt, ist auch der Schluß „(V) $\Rightarrow$ (I)" sofort einzusehen.

In [7] wird für speziellere (τ)-Algebren die Aussage „(II) $\Rightarrow$ (IV)", in [4; théorème 7 . 1.] wird unter bestimmten Bedingungen „(III) $\Rightarrow$ (I)" in einer auch hier anwendbaren Weise bewiesen. In [8; theorem 1] wird ein Beweis für die Äquivalenz von (I) und (III) in einem multiplikativen, quasi-ganzen Verband geführt.

Für den Beweis der Aussage „(I) $\Rightarrow$ (II)" wird hier die Schlußweise von Kurata verwandt.

Definition 3. 1. Man nennt eine *n a-*(τ)-Algebra (L) eine *n a-A-R* $=$ (τ)*-Algebra*, wenn für jedes $\mathfrak{A} \in (\tau)$, jedes $X \in (L)$, jedes $n \in IN$ und jeden Typ ν einer Beklammerung eine natürliche Zahl m und ein Typ μ existieren, so daß gilt: $A_m^{(\mu)}(\mathfrak{A}) \cdot U \cap X \leqq A_n^{(\nu)}(\mathfrak{A}) \cdot X$.

Satz 3. 1. *Besitzt jedes Element einer n a-*(τ)*-Algebra* (L) *eine linksprimäre Darstellung, so ist* (L) *eine n a-A-R* $=$ (τ)*-Algebra* („(I) $\Rightarrow$ (II)").

Beweis. Seien $\mathfrak{A} \in (\tau)$, $X \in (L)$, $n \in IN$ und ein Typ ν beliebig gewählt. Nach Definition ist dann $A_n^{(\nu)}(\mathfrak{A}) \cdot X \in (L)$, besitzt also eine linksprimäre Darstellung in (L):

$$(*) \qquad A_n^{(\nu)}(\mathfrak{A}) \cdot X = P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_r.$$

Zu zeigen ist, daß ein $m \in IN$ und ein Typ μ existieren mit

$$A_m^{(\mu)}(\mathfrak{A}) \cdot U \cap X \leqq P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_r = A_n^{(\nu)}(\mathfrak{A}) \cdot X.$$

Ist nun $X \leqq P_i$ für jedes i mit $1 \leqq i \leqq r$, so gilt auch

$$X \leqq P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_r = A_n^{(\nu)}(\mathfrak{A}) \cdot X$$

und folglich auch $A_m^{(\mu)}(\mathfrak{A}) \cdot U \cap X \leqq A_n^{(\nu)}(\mathfrak{A}) \cdot X$ für jedes $m \in IN$ und jeden Typ μ. Gibt es jedoch ein i mit $X \nleqq P_i$, so gibt es auch wegen der Unabhängigkeit der Darstellung von der Reihenfolge der P_j ein s mit $1 \leqq s \leqq r$, so daß gilt $X \nleqq P_i$ für $1 \leqq i \leqq s$ und $X \leqq P_i$ für $s < i \leqq r$, falls $s < r$. Dann gilt:

$$(P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_s) \cap X \leqq P_1 \cap \cdots \cap P_s \cap \cdots \cap P_r = A_n^{(\nu)}(\mathfrak{A}) \cdot X.$$

Nach $(*)$ gilt für jedes i mit $1 \leqq i \leqq s$ zwar $A_n^{(\nu)}(\mathfrak{A}) \cdot X \leqq P_i$, aber es ist $X \nleqq P_i$. Da die Elemente P_i linksprimär sind, gibt es daher natürliche Zahlen m_i und Typen μ_i mit $A_{m_i}^{(\mu_i)}\left(A_n^{(\nu)}(\mathfrak{A})\right) \cdot U \leqq P_i$ für $1 \leqq i \leqq s$. Also gibt es Typen λ_i, für die gilt $A_{nm_i}^{(\lambda_i)}(\mathfrak{A}) \cdot U \leqq P_i$ für $1 \leqq i \leqq s$. Setzt man nun doch $m = \sum_{i=1}^{s} n m_i$, so gibt es einen Typ μ mit $A_m^{(\mu)}(\mathfrak{A}) \cdot U \leqq P_i$ für $1 \leqq i \leqq s$, also $A_m^{(\mu)}(\mathfrak{A}) \cdot U \leqq P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_s$. Folglich hat man:

$$A_m^{(\mu)}(\mathfrak{A}) \cdot U \cap X \leqq P_1 \cap \cdots \cap P_s \cap \cdots \cap P_r = A_n^{(\nu)}(\mathfrak{A}) \cdot X.$$

Definition 3. 2. Eine *n a-*(τ)-Algebra (L) heißt *n a-quasi-A-R* $=$ (τ)*-Algebra*, wenn für jedes $\mathfrak{A} \in (\tau)$ und jedes $X \in (L)$ ein $m \in IN$ und ein Typ μ existieren mit $A_m^{(\mu)}(\mathfrak{A}) \cdot U \cap X \leqq \mathfrak{A} \cdot X$.

Jede *n a-A-R* $=$ (τ)-Algebra ist folglich eine *n a*-quasi-*A-R* $=$ (τ)-Algebra, d. h. „(II) $\Rightarrow$ III)" gilt.

Es bleibt nur noch der folgende Satz zu zeigen:

Satz 3. 2. *Jedes linkstertiäre Element einer semimodularen n a-quasi-A-R* $=$ (τ)*-Algebra ist linksprimär, d. h.* „(III) $\Rightarrow$ (IV)".

Beweis. Sei T ein linkstertiäres Element einer *n a*-quasi-*A-R* $=$ (τ)-Algebra (L). Es soll gezeigt werden, daß T die Aussage (B) in Satz 2. 1 erfüllt. —

Ist $T = U$, so ist T bereits linksprimär. Sei also $T \neq U$. Dann kann man ein $\mathfrak{A} \in (\tau)$ wählen mit $T < r(T, \mathfrak{A})$. Da (L) eine *n a*-quasi-*A-R* $=$ (τ)-Algebra ist, gibt es zu $\mathfrak{A} \in (\tau)$ und $r(T, \mathfrak{A}) \in (L)$ ein $m \in IN$ und einen Typ μ mit

$$A_m^{(\mu)}(\mathfrak{A}) \cdot U \cap r(T, \mathfrak{A}) \leqq \mathfrak{A} \cdot r(T, \mathfrak{A}) \leqq T.$$

Da T linkstertiär und (L) semimodular ist, folgt nach der Bemerkung zur Definition 1. 1 aus $A_m^{(\mu)}(\mathfrak{A}) \cdot U \cap r(T, \mathfrak{A}) \leqq T$ und aus $T < r(T, \mathfrak{A})$ bereits $A_m^{(\mu)}(\mathfrak{A}) \cdot U \leqq T$, d. h. T ist linksprimär.

Literatur

[1] *E.-A. Behrens*, Zur additiven Idealtheorie in nicht-assoziativen Ringen, Math. Zeit. **64** (1956), 169—182.

[2] *W. Krull*, Zur Theorie der zweiseitigen Ideale in nichtkommutativen Bereichen, Math. Zeit. **28** (1927), 481—503.

[3] *Y. Kurata*, On an additive ideal theory in a non-associative ring, Math. Zeit. 88 (1965), 129—135.

[4] *L. Lesieur*, Sur les demi-groupes réticulés satisfaisant a une condition de chaine, Bull. Soc. Math. France **83** (1955), 161—193.

[5] *L. Lesieur* et *R. Croisot*, Algèbre noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif, I: Colloque d'Algèbre Supérieure, CBRM, Bruxelles 1956, 79—121.

[6] *L. Lesieur* et *R. Croisot*, Algèbre noethérienne non commutative. Mémorial des Sciences mathématiques, Paris 1963.

[7] *L. Lesieur* et *R. Croisot*, Extension au cas non commutatif d'un théorème de Krull et d'un lemme d'Artin-Rees, J. reine angew. Math. **204** (1960), 216—220.

[8] *P. J. McCarthy*, Primary decomposition in multiplicative lattices, Math. Zeit. **90** (1965), 185—189.

[9] *G. Szasz*, Einführung in die Verbandstheorie, Budapest 1962.

Technische Universität Hannover, Lehrstuhl für Geometrie, 3 Hannover, Welfengarten 1

Eingegangen 16. Februar 1969

Factorization in general rings and strictly cyclic modules

By *P. M. Cohn* in London

To Wolfgang Krull on his seventieth birthday

1. Introduction

The problem of factorization in noncommutative rings first arose in analysis, where the solution of a linear differential equation was reduced to the factorization of a linear differential operator $\Sigma g_i D^i$. The unique factorization property of the ring of linear differential operators was established by Landau [19] and Loewy [20]; a simpler and more general algebraic theory, applicable to any Euclidean domain (but still specifically intended for differential operators) was developed by Ore [23], and this was extended to arbitrary principal ideal domains by Asano ([2], cf. also the account by Jacobson [17]). In [8] noncommutative unique factorization domains (UFDs for short) were formally defined and it was shown that any atomic weak Bezout ring (cf. § 2 below) satisfies the definition. This extends the class of UFDs to include rings that are far from being principal ideal domains, examples being free associative algebras and free group algebras (over fields), as well as free products of skew fields. Nevertheless, many properties of principal ideal domains, though false for general UFDs, do carry over to weak Bezout rings. Further, the condition of being a weak Bezout ring turns out to be only one of an infinite series of conditions; the rings defined in this way are the *n-firs* ($n = 1, 2, \ldots$), cf. [5] and § 2 below. 1-firs are integral domains, 2-firs are weak Bezout rings and for higher n, the n-firs form smaller classes, until we get to *semifirs*, the rings that are n-firs for all n (cf. [10] or [9], where they were called local firs). Thus the results proved here about 2-firs hold in particular for the known examples of firs such as free algebras and free group algebras over fields.

In any study of factorization in a ring R it is a natural step to replace the element c by the module R/cR. When R is commutative, this is not so important, because the isomorphism $R/aR \cong R/bR$ can be expressed as a rather simple condition on a, b: they are associated. In the noncommutative case the corresponding condition is far more complicated and a considerable simplification results by considering modules rather than elements. For a smooth development one has to exclude zero-divisors. In this way one obtains the category $\mathscr{C}_R$ of strictly cyclic right R-modules, whose basic properties are described in § 4 for the case of 2-firs (and more generally, $n \times n$ total matrix rings over $2n$-firs).

In the rest of the paper these notions are applied to develop properties of factorizations in the context of 2-firs. In this sense the paper may be regarded as a sequel to [8]. Where properties of principal ideal domains are generalized, this often leads to shorter

proofs of known results. Thus § 5 is devoted to a brief treatment of full reducibility, which was studied in Euclidean domains by Loewy and Ore (cf. also Johnson [18]), and § 8 shows how the theory (for principal ideal domains) may be used to rederive some recent results of Gordon and Motzkin [15] on the solution of equations over skew fields, and place them in a wider context. The necessary facts on eigenrings (valid in any ring) are collected in § 3, while § 2 recalls the facts needed about 2-firs.

In §§ 6—7 we look at the possible extensions of the notion of UFD, to take account of such rings as free algebras and free group algebras over the integers, which are not covered by the existing definition. An interesting definition was proposed by Brungs [7], who proves an analogue of Nagata's theorem [21] and uses this to show that his definition includes free algebras and free group algebras over $\boldsymbol{Z}$. Brung's method was based on a somewhat involved definition of prime element, difficult to verify in particular instances. In § 7 we adapt his idea: using a natural concept of prime element, we define a rather more symmetric notion of UFD and obtain conditions for Nagata's theorem to hold, which can again be applied to free algebras and free group algebras over $\boldsymbol{Z}$.

I am indebted to G. M. Bergman for suggesting a number of improvements.

2. Generalities on 2-firs

Throughout, all rings are associative, with 1, all homomorphisms preserve 1 and subrings have the same 1.

We begin with a brief review of the facts needed about 2-firs. These are either well known or to be described in detail elsewhere, but are summarized here for convenience.

Let n be a positive integer. By an *n-fir* we understand a ring R in which every right ideal on at most n generators is free, of unique rank (cf. [5]). This notion is left-right symmetric; 1-firs are just integral domains (not necessarily commutative) while rings that are n-firs for all n are *semifirs* (cf. [9, 5]). If *all* left and all right ideals are free, of unique rank, we have the *firs* introduced in [9].

We shall mainly be concerned with 2-firs; a 2-fir may be described as an integral domain in which any two principal right ideals with non-zero intersection have a principal sum. It follows (cf. [4], [6], [24]) that their intersection is also principal. Thus a 2-fir is nothing other than a *weak Bezout ring*, in the terminology of [8], but we shall use the shorter name.

Two elements a, a' of a ring R are said to be *right similar* if $R/aR \cong R/a'R$. In an integral domain this holds if and only if $R/Ra \cong R/Ra'$ (cf. Fitting [14]. See also [8] and § 4 below), so that we can omit the qualifier "right". By an *atom* one understands a non-unit which cannot be written as a product of two non-units. If every element of R not zero or a unit can be written as a product of atoms, R is said to be *atomic*. If R is an atomic integral domain and any two factorizations of the same element have the same number of factors and these factors can be paired off into similar ones, R is called a *unique factorization domain* or UFD for short. This reduces to the usual definition in the commutative case (cf. [8]). For us it is of importance that every atomic 2-fir is a UFD ([8]). In such a ring one can therefore define the *length* of a non-zero element c, $l(c)$, as the number of terms in an atomic factorization.

Two elements a, b of a ring R are said to be *right comaximal* if

$$aR + bR = R.$$

Clearly such elements are *left coprime*, i. e. they have no common left factor, apart from units. The converse need not hold, even in commutative rings (in fact the property that

left coprime elements are right comaximal characterizes *right Bezout rings* among integral domains). In a 2-fir, any two left coprime elements which have a common non-zero right multiple are right comaximal. Of course left comaximal and right coprime elements are defined analogously.

A relation

$$ab' = ba'$$

in a ring R is called *comaximal* if a, b are right and a', b' left comaximal. Such a relation is *coprime*, in the sense that a, b are left and a', b' right coprime. Again the converse is false in general, but it is true in 2-firs; this follows easily from the definition. In 2-firs one has the following useful criterion for similarity (cf. [8]):

Two elements a, a' of a 2-fir R are similar if and only if there is a coprime relation $ab' = ba'$.

The corresponding assertion, with "coprime" replaced by "comaximal" holds in any ring R in which R^2 is not isomorphic to a proper direct summand of itself (cf. Bergman [4]), but we shall not need this fact.

If we examine the proof that an atomic 2-fir is a UFD, we find that in the last resort this depends on the Jordan-Hölder theorem. In order to pass from one atomic factorization $c = a_1 \cdots a_r$ to another, $c = b_1 \cdots b_r$, we interchange a pair of adjacent factors by means of a comaximal relation

$$a_i a_{i+1} = a'_{i+1} a'_i,$$

where a'_i, a'_{i+1} are similar to a_i, a_{i+1} respectively, by the above criterion. We shall call such a modification of factorizations a *comaximal transposition* (following Bergman). Now the usual proof of the Jordan-Hölder theorem shows that in an atomic 2-fir, we can pass from any one atomic factorization of an element c to any other by a series of comaximal transpositions.

3. Eigenrings and centralizers

Let R be a ring and $a \in R$. We recall that the *idealizer* $\boldsymbol{I}(aR)$ of aR in R is the largest subring containing aR as two-sided ideal, i. e.

$$\boldsymbol{I}(aR) = \{x \in R \mid xa \in aR\}.$$

The quotient ring $\boldsymbol{E}(aR) = \boldsymbol{I}(aR)/aR$ is called the *eigenring* of aR; it is isomorphic to $\mathrm{End}_R(R/aR)$ (cf. Fitting [13]). More generally, given $a, b \in R$, put

$$\boldsymbol{I}(aR, bR) = \{x \in R \mid xa \in bR\},$$

then

$$\mathrm{Hom}_R(R/aR, R/bR) \cong \boldsymbol{I}(aR, bR)/bR, \tag{1}$$

regarded as isomorphism of abelian groups, or also as isomorphism of $(\boldsymbol{E}(bR), \boldsymbol{E}(aR))$-bimodules.

The eigenring of an element (i. e. of the right ideal generated by it) is closely related to the notion of centralizer and may be studied by the same method, by adjoining indeterminates. While isolated cases of this fact have been observed before (cf. e. g. Amitsur [1]), the theorems below are quite general in their application.

Theorem 3. 1. *Let R be any ring and $S = R[t]$ the ring obtained by adjoining a commuting indeterminate to R. Given $a, b \in R$, write*

$$C = C(a, b) = \{x \in R \mid xa = bx\},$$

$$I = \boldsymbol{I}((t - a)S, (t - b)S) = \{s \in S \mid s(t - a) \in (t - b)S\}.$$

Then

$$I = C + (t - b)S, \tag{2}$$

and hence

$$C(a, b) \cong \mathrm{Hom}_S\,(S/(t - a)S,\ S/(t - b)S). \tag{3}$$

Proof. Any $f \in S$ admits the decomposition

$$f = f_b + (t - b)h \qquad (h \in S), \tag{4}$$

where for any $f = \Sigma t^i c_i$ we write $f_b = \Sigma b^i c_i$. This follows from division by the monic polynomial $t - b$, and the decomposition (4) is clearly unique. To establish (2) it only remains to show that $f \in I$ if and only if $f_b \in C$. Assume that $f_b \in C$; then $f \in I$ by (4), because $C \subseteq I$. Conversely, let $f \in I$, then since $(t - b)h \in I$, it follows that $f_b \in I$, i. e. $f_b(t - a) = (t - b)g$ for some $g \in S$. By comparing degrees in t we see that $g \in R$ and equating coefficients, we find $g = f_b$, $f_b a = b f_b$, whence $f_b \in C$. Now (3) follows from (2) on dividing by $(t - b)S$ and applying the isomorphism (1).

To express the centralizer of an element as an eigenring we put $b = a$ in this result and get the

Corollary. *The centralizer of an element $a \in R$ is isomorphic to the eigenring of $t - a$ in the polynomial ring $R[t]$.*

We also have the following related result, well known in the special case, where R is a matrix ring over a field. Two elements a, b of a ring R are said to be *conjugate* if $ua = bu$ for some unit u of R.

Proposition 3. 2. *Let R be a ring and t a commuting indeterminate. Then two elements a, b of R are conjugate if and only if $t - a$ and $t - b$ satisfy a comaximal relation*

$$f(t - a) = (t - b)g \tag{5}$$

in $R[t]$. Moreover, in any comaximal relation (5), f, g may be taken to be units in R.

Proof. If a, b are conjugate, say $ua = bu$, then clearly

$$u(t - a) = (t - b)u$$

is a comaximal relation. Conversely, assume a comaximal relation (5). By subtracting an expression $(t - b)h(t - a)$ from both sides, we get an equation

$$u(t - a) = (t - b)v, \tag{6}$$

where $u = f - (t - b)h$, $v = g - h(t - a)$. Choose h so that u has degree 0 in t, i. e. $u \in R$. Then on comparing degrees in (6) we find that $v \in R$, while a comparison of highest terms shows that $v = u$ and so

$$ua = bu. \tag{7}$$

Further, since $u \equiv f \pmod{(t - b)R[t]}$, u and $t - b$ are still right comaximal, say

$$up + (t - b)q = 1 \qquad (p, q \in R[t]). \tag{8}$$

Subtracting an appropriate right multiple of (6), we can reduce (8) to the case where p has degree 0. Then $q = 0$, by comparing degrees, and (8) shows p to be a right inverse of u. By the symmetry of (7), u also has a left inverse and so is a unit. Now (7) shows a and b to be conjugate, as asserted.

As an illustration let K be a skew field, then $K[t]$ is a principal ideal domain and hence a 2-fir. From the criterion given earlier we see that for any $a, b \in K$, the elements $t - a$, $t - b$ are similar in $K[t]$ if and only if a, b are conjugate in K. Of course this can also be verified directly.

4. The category of strictly cyclic modules

We now take a closer look at the factorizations of an element c, by means of the module R/cR. We shall want to exclude zero-divisors and therefore define an element of a ring R to be *regular* if no factor of it is a left or right zero-divisor. Clearly any factor of a regular element is again regular; a product of regular elements is not necessarily regular, though it will be so in most of the rings we shall consider later. In particular, in an integral domain the regular elements are just the non-zero elements.

Given any ring R, an R-module M is said to be *strictly cyclic*, or a *$\mathscr{C}$-module*, if it has a presentation of the form

$$M \cong R/cR, \qquad \text{where } c \text{ is regular.} \tag{1}$$

A cyclic presentation of a $\mathscr{C}$-module need not have the form (1), even when R is an integral domain. E. g., let R be generated by x, y over a field F subject to the relation $xy - yx = 1$. Then $xR + yR = 1$, while $xR \cap yR = xy^2R + yx^2R = y((xy + 1)R + x^2R)$ is non-principal. By applying [10], Prop. 6. 1, we see that the strictly cyclic module R/xR also has the cyclic presentation $R/((xy + 1)R + x^2R)$ which requires at least two defining relations. However, if R is such that

$$R \oplus P \cong R^2 \text{ implies } P \cong R, \tag{2}$$

then an easy application of Schanuel's Lemma shows that every cyclic presentation of a $\mathscr{C}$-module has the form (1). In particular this is true for 2-firs.

For any ring R, let us denote by $\mathscr{C}_R$ the category of strictly cyclic right R-modules and all homomorphisms between them, and by ${}_R\mathscr{C}$ the corresponding category of left R-modules. The objects of $\mathscr{C}_R$ and ${}_R\mathscr{C}$ will also be called $\mathscr{C}_R$-modules and ${}_R\mathscr{C}$-modules respectively. The following observation is a special case of a result obtained independently by Bergman [4] and the author [12, 10].

Theorem 4. 1. *Over any ring R, the categories $\mathscr{C}_R$ and ${}_R\mathscr{C}$ are dual, i. e. there exist contravariant functors $\boldsymbol{D}_1 : \mathscr{C}_R \to {}_R\mathscr{C}$, $\boldsymbol{D}_2 : {}_R\mathscr{C} \to \mathscr{C}_R$ such that $\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_2$ and $\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_1$ are each naturally equivalent to the identity functor.*

We shall not repeat the (easy) proof, but merely note that an R-homomorphism $: R/aR \to R/bR$ between $\mathscr{C}_R$-modules is determined by an element $c \in R$ such that

$$ca = bc' \tag{3}$$

for some $c' \in R$, and this element c' then determines an R-homomorphism

$$\boldsymbol{D}_1(f) : R/Rb \to R/Ra.$$

As a consequence of Th. 4. 1 we obtain the well known fact that for regular elements (e. g. non-zero elements in an integral domain) left and right similarity coincide. Since this property does not extend to arbitrary elements (cf. Fitting [14] for counter-examples), the restriction to regular elements cannot be omitted in Th. 4. 1.

Let us now restrict R to be a 2-fir. Then R satisfies (2) and so if M is a $\mathscr{C}$-module, any cyclic presentation of M leads to a single defining relation. Moreover, the $\mathscr{C}$-submodules

of M then form a sublattice $\mathrm{Lat}_{\mathscr{C}}(M)$ say, of the lattice $\mathrm{Lat}\,(M)$ of all its submodules. For if we take M in the form R/cR (where c is regular), any $\mathscr{C}$-submodule has the form aR/cR where $aR \geqq cR$, hence $\mathrm{Lat}_{\mathscr{C}}\,(M)$ is isomorphic to the lattice of principal right ideals of R containing cR, and by the definition of a 2-fir, this is a sublattice of the lattice of all right ideals of R. More generally, $\mathrm{Lat}_{\mathscr{C}}\,(M)$ is a sublattice of $\mathrm{Lat}\,(M)$ whenever R is the $n \times n$ total matrix ring over a $2n$-fir (for some $n \geqq 1$).

In general, not every cyclic submodule of a strictly cyclic module is strict, even over a 2-fir. E. g., if R is the free algebra on x, y over a field F (an atomic 2-fir by [8]), then $xR \cap yR = 0$, hence the $\mathscr{C}$-module R/xR has the submodule

$$(xR + yR)/xR \cong yR/(xR \cap yR) \cong R,$$

which is cyclic but not strictly so. To describe the situation, let us call an element c of a ring R *right large* if cR meets every non-zero right ideal of R non-trivially. Then we have

Proposition 4. 2. *Let R be a 2-fir and $M = R/cR$ a $\mathscr{C}_R$-module. Then every finitely generated submodule of M is again in $\mathscr{C}_R$ if and only if c is right large.*

Proof. Assume that c is right large. Since the $\mathscr{C}_R$-submodules of $M = R/cR$ form a lattice, it is enough to show that every cyclic submodule of M is in $\mathscr{C}_R$. Now any cyclic submodule has the form

$$(aR + cR)/cR \cong aR/(aR \cap cR) \qquad (a \neq 0), \tag{4}$$

and this is in $\mathscr{C}_R$ because $aR \cap cR \neq 0$. Conversely, if c is not right large, we can find $a \neq 0$ such that $aR \cap cR = 0$ and then (4) represents a cyclic submodule isomorphic to R and hence not in $\mathscr{C}_R$.

The hypothesis that the submodule of M be finitely generated can be omitted from Prop. 4. 2 if R is an *atomic* 2-fir, but not in general. We also note the following

Corollary. *Any element similar to a right large element in a 2-fir is again right large.*

Although neither a submodule nor a quotient of a $\mathscr{C}_R$-module need be in $\mathscr{C}_R$, if M is a $\mathscr{C}_R$-module with a submodule M' then M' is in $\mathscr{C}_R$ if and only if M/M' is. In fact we have a more precise statement for $n \times n$ total matrix rings over firs: Here $\mathscr{C}_R$ just consists of the cyclic torsion modules, as defined in [10], and since torsion modules form an abelian category, $\mathscr{C}_R$ is then a category with kernels and cokernels. This result holds more generally for $n \times n$ total matrix rings over $2n$-firs, with a corresponding proof, which we therefore omit (cf. also Bergman [4]):

Proposition 4. 3. *Let R be the $n \times n$ total matrix ring over a $2n$-fir, and let $f\colon M \to N$ be a $\mathscr{C}_R$-homomorphism. Then* $\ker f$, $\mathrm{im}\, f$, $\mathrm{coker}\, f$ *are again $\mathscr{C}_R$-modules.*

This result has many applications, e. g. we have analogues of Schur's and Fitting's Lemmas, using the notion of a $\mathscr{C}$-simple module (i. e. a simple object in $\mathscr{C}_R$) and a $\mathscr{C}$-indecomposable module respectively (cf. [10] and [12]).

We conclude this section with a result on the number of similar right factors of an element of a 2-fir, which includes a number of known results. In fact it can be traced back to a theorem in Noether and Schmeidler [22].

Theorem 4. 4. *Let R be a 2-fir, a an atom of R and write $\alpha = \mathrm{card}\,(\boldsymbol{E}(aR))$. If m is an element of R with a as right factor, then the number of pairwise non-associated right factors of m similar to a is either 1 or at least α.*

Proof. Write $m = ca$, then

$$R/mR \geqq cR/caR \cong R/aR.$$

Thus a right factor of m similar to a corresponds to a submodule of $M = R/mR$ isomorphic to $N = cR/mR$. If m has two right factors similar to a but not left associated, then M has two different submodules isomorphic to N, say N_1 and N_2. Let u_i be a generator of N_i such that u_1 corresponds to u_2 under the isomorphism. For any $\lambda \in \mathrm{End}\,(N_2)$ consider the submodule P_λ generated by $u_1 + \lambda u_2$. Since $u_1 x = 0$ implies $u_2 x = 0$, the mapping $u_1 x \mapsto (u_1 + \lambda u_2)x$ is well-defined and is a non-zero R-homomorphism

$$N_1 \to M.$$

The image is a non-zero $\mathscr{C}$-module P_λ, hence isomorphic to N_1, because N_1 was $\mathscr{C}$-simple. If $P_\lambda = P_\mu$, we have

$$u_1 + \lambda u_2 = (u_1 + \mu u_2)x,$$

hence $u_1(1 - x) = -\lambda u_2 + \mu u_2 x$, where both sides vanish because $N_1 \cap N_2 = 0$. Thus $u_1(1 - x) = 0$, hence $u_2(1 - x) = 0$, i. e. $\lambda u_2 = \mu u_2 x = \mu u_2$. Since λ, μ are determined by their effect on u_2, we have $\lambda = \mu$. Therefore the mapping $\lambda \mapsto P_\lambda$ is injective and we have found α distinct submodules of R/mR isomorphic to R/aR, which proves the result.

The conclusion of Th. 4. 4 remains true if R is the $n \times n$ total matrix ring over a $2n$-fir and m is taken to be a regular element. This is proved in the same way as Th. 4. 4 itself.

5. Fully reducible elements of 2-firs

Apart from the multiplicative decomposition of elements there are certain forms of "primary decomposition" valid in principal ideal domains and it was noted in [8] that these carry over to atomic 2-firs. Another type of decomposition ("full reducibility") has been described in a number of special cases by Loewy and Ore (cf. the treatment for principal right ideal domains by Johnson [18]). By working in the category $\mathscr{C}_R$ we can give a very brief treatment of full reducibility, valid as usual for any atomic 2-fir.

An element c of a 2-fir R is said to be *fully reducible* if

$$cR = \bigcap p_i R, \tag{1}$$

where the p_i are atoms. When R is atomic it is clearly enough to take finitely many atoms on the right of (1). In that case, taking the number of terms to be minimal, we obtain R/cR as a subdirect sum of the $R/p_i R$ and by minimality the sum is actually direct (being a direct sum of $\mathscr{C}$-simple terms):

$$R/cR \cong R/p_1 R \oplus \cdots \oplus R/p_n R. \tag{2}$$

Thus c is fully reducible if and only if R/cR is a direct sum of $\mathscr{C}$-simple modules. This shows that being fully reducible depends only on the similarity class. Applying the duality of Th. 4. 1 we see that being fully reducible is a left-right symmetric property. Moreover, any factor of a fully reducible element is again fully reducible, as the representation (2) shows.

In order to describe fully reducible elements in terms of factorizations, let $c \in R$, $c \neq 0$, then a factorization

$$c = b_1 b_2 \cdots b_k \tag{3}$$

is called a *cleavage*, if every atomic factorization of c can be obtained by refining (3), after modifying it by unit factors, if necessary. A non-unit with no cleavage into more

than one non-unit is said to be *uncleft*; if c and all its factors are uncleft, c is said to be *totally uncleft*. The connexion with fully reducible elements is now established by

Proposition 5. 1. *Let R be an atomic 2-fir, then the following three conditions on a non-zero element c of R are equivalent*:

(i) *c is totally uncleft,*

(ii) *c is fully reducible,*

(iii) *any two neighbouring atomic factors in an atomic factorization of c can be comaximally transposed.*

Proof. (*i*) $\Rightarrow$ (ii). Assume that c is totally uncleft, then not every complete factorization of c ends in the same atom, say we have $c = c_1 p_1 = c_2 p_2$, where $Rp_1 \neq Rp_2$. Then $cR = c_1 R \cap c_2 R$; now c_1, c_2 as factors of c are again totally uncleft and by induction on the length of c, each c_i is fully reducible, say $c_i R = \bigcap_j p_{ij} R$. Hence $cR = \bigcap_{ij} p_{ij} R$, which shows c to be fully reducible.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Assume c fully reducible, take a complete factorization

$$c = a_1 \cdots a_n$$

and fix i in the range $2 \leqq i \leqq n$. Then $a_{i-1} a_i$ is fully reducible, as factor of c, hence there is a comaximal relation $a_{i-1} a_i = a_i' a_{i-1}'$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). This follows because a cleavage of any factor of c, on being refined to a complete factorization, leads to a pair of neighbouring atomic factors which cannot be comaximally transposed. This completes the proof.

As an illustration consider a commutative principal ideal domain. Here the totally uncleft elements are just the "squarefree" elements; thus $p^2(p + 1)$ (where p is an atom) is uncleft, but not totally.

It is not hard to show that any element in an atomic 2-fir admits a factorization into maximal uncleft factors, and this is essentially unique (cf. Johnson [18] for the case of principal right ideal domains). A factorization of a certain type (e. g. into maximal uncleft factors) is said to be *rigidly unique*, if any other factorization of this type differs from it only by unit factors, i. e. if the two factorizations are

$$c = a_1 \cdots a_r = b_1 \cdots b_s$$

then $r = s$ and $b_i = u_{i-1}^{-1} a_i u_i$ (u_i units, $u_0 = u_r = 1$).

Theorem 5. 2. *Let R be an atomic 2-fir. Then every non-zero element c of R admits a factorization*

$$c = a_1 \cdots a_r \tag{4}$$

into maximal uncleft factors, and this is rigidly unique.

Proof. Let a_1 be an uncleft left factor of c of maximal length. If a_1' is another maximal uncleft left factor of c, say $c = a_1 b = a_1' b'$, let

$$a_1 d = a_1' d' \tag{5}$$

be a least common right multiple of a_1 and a_1'. If d is not a unit, then $a_1 d$ is cleft, say $a_1 d = uv$, and every complete factorization is obtained by refining uv, whence either $a_1 = ue$, $v = ed$, or $u = a_1 e$, $d = ev$. In the former case $a_1 = ue$ is a cleavage, contradicting the fact a_1 is uncleft, hence this case is ruled out and $u = a_1 e$, $d = ev$. Similarly,

$u = a_1'e'$, $d' = e'v$, but by (5) d, d' are right coprime, so v is a unit, again a contradiction. This shows d to be a unit, similarly d' is a unit and $a_1R = a_1'R$. Thus a_1 in (4) is determined up to a right unit factor, and an induction on the length of c completes the proof.

Of course it is not generally possible to obtain a rigidly unique factorization into *totally* uncleft factors, as the example of a nonlocal commutative principal ideal domain shows.

When the factors on the right of (4) are atoms, (4) is itself a cleavage, and this will be the case when no two neighbouring factors in (4) are comaximally transposable. In terms of lattices this means that the lattice $\mathscr{L}(cR, R)$ of principal right ideals between cR and R is a chain. Thus we have the

Corollary. *The element c of an atomic 2-fir R has a cleavage into atomic factors if and only if the lattice $\mathscr{L}(cR, R)$ of its factors is a chain, or equivalently, if its atomic factorization is rigidly unique.*

In a commutative principal ideal domain the situation of the Corollary just applies to powers of atoms, but in general it may apply more widely; e. g. in a rigid UFD (cf. [8]) it applies to all non-units.

6. Unique factorization in subcommutative semigroups

For commutative UFD's there is a useful permanence theorem due to Nagata [21]; we wish to extend this to general UFD's (in § 7) and shall therefore review Nagata's result here. In fact, unique factorization in commutative rings can be defined in terms of the multiplicative semigroup structure alone — in contrast to the general case, where the ring structure is needed in the definition of similar elements. It is therefore appropriate to express Nagata's theorem in terms of semigroups. We do this below (in Th. 6. 2) with two modifications: (i) Where Nagata has a Noetherian hypothesis, we use a (weaker) local finiteness condition, as in [7], and (ii) the result is stated for subcommutative semigroups, a class including all commutative semigroups. We begin by recalling several equivalent ways of defining unique factorization semigroups.

An element x of a semigroup S is said to be *invariant* if

$$xS = Sx.$$

If every element of S is invariant, S is said to be *invariant* or *subcommutative* (cf. Barbilian [3]). Clearly this includes commutative semigroups, and it shares with them the property that the preorderings defined (on any semigroup) by left and right divisibility coincide. More precisely, if c is an invariant element of S then left and right divisibility by c mean the same thing; if S is a cancellation semigroup, then moreover being a right factor of an invariant element c is the same as being a left factor. For if $c = ab$, then $cb = b'c$, hence $cb = b'ab$ and by cancellation $c = b'a$. We shall almost exclusively deal with cancellation semigroups and we may therefore write $a \mid b$ to indicate divisibility of b by a, provided either a or b is invariant. In any semigroup we define a *prime* as an invariant element p such that

$$p \mid ab \text{ implies } p \mid a \text{ or } p \mid b.$$

Any associate of a prime is again a prime. Further, a prime in a cancellation semigroup is necessarily an atom. For if $p = ab$, then $p \mid a$ or $p \mid b$ say the former, so $a = pq$, $p = ab = pqb$ and by cancellation $qb = 1$, i. e. b is a unit. The converse is false: an atom need not be prime, even in the commutative case. In fact the converse, together

with a finiteness condition, describes unique factorization semigroups (UF-semigroups for short) in the sense of the following definition.

A subcommutative cancellation semigroup is said to be a *UF-semigroup* if every element is a product of atoms, unique up to order and unit factors. If we observe that in a subcommutative semigroup S the classes of associated elements again form a semigroup under the multiplication induced from S, we can restate this definition by saying that S is a UF-semigroup if the classes of associated elements form a free commutative semigroup.

In a subcommutative semigroup there is no need to distinguish between left and right ideals, and we can define the *highest common factor* (HCF) and *least common multiple* (LCM) as in the commutative case; of course the HCF and LCM need not exist, though when they do they are unique up to unit factors (in any subcommutative cancellation semigroup). In analogy to the conditions for UFD's we have

Theorem 6. 1. *Let S be a subcommutative cancellation semigroup. Then S is a UF-semigroup if and only if S satisfies ACC on principal ideals, together with one of the following conditions (equivalent when ACC on principal ideals holds):*

(i) *every atom of S is prime,*

(ii) *any two elements of S have an HCF,*

(iii) *any two elements of S have an LCM.*

This result is analogous to the corresponding theorem for rings, for which the proof is well known (cf. Brungs [7], also Barbilian [3]). We therefore omit the proof; it shows that the fact that S is atomic follows from ACC on principal ideals. In general the converse will not hold, even in rings (contrary to what is asserted in Prop. 1. 1 of [11]; however the converse does hold for Bezout rings which form the subject of [11]).

There is a certain asymmetry between LCM and HCF, in that the former, but not the latter can be expressed entirely in terms of ideals (without using ring or even semigroup operations). Thus in a subcommutative semigroup S, if a, b have an LCM, m say, then

$$aS \cap bS = mS. \tag{1}$$

Conversely, if (1) holds, then m is an LCM of a and b. It follows that we have the

Corollary. *A subcommutative cancellation semigroup is a UF-semigroup if and only if it satisfies ACC on principal ideals and the intersection of any two principal ideals is again principal.*

We shall want to apply Th. 6. 1 to localization in rings. Again we begin by setting out the problem in terms of semigroups. Let S be a cancellation semigroup and T a subsemigroup of S consisting of invariant elements. We define a relation on S by putting

$$a \equiv b \pmod{T} \text{ if and only if } ar = bs \text{ for some } r, s \in T. \tag{2}$$

It is easily checked that this is a congruence on S; the semigroup of congruence classes is called the *localization of S by T* and is written S^*. The following criterion for S to be a UF-semigroup generalizes a theorem of Nagata for commutative Noetherian rings (cf. Nagata [21]).

Theorem 6. 2. *Let S be an atomic subcommutative cancellation semigroup and T a subsemigroup of S generated by primes. Moreover, assume thatthe localization S_T is a UF-semigroup. Then S is itself a UF-semigroup.*

Proof. In order to apply Th. 6. 1 we need only verify that every atom of S is prime. Denote the canonical mapping $S \to S_T$ by $x \mapsto x'$ and let p be an atom of S. Clearly p' is either an atom of S_T and hence a prime, or it is a unit. We treat these cases separately:

(α) p' is a prime. If $p \mid ab$ in S, say $pc = ab$, then $p'c' = a'b'$, hence $p' \mid a'$ or $p' \mid b'$, say the former: $p'e' = a'$. This means that

$$per = as \qquad (r, s \in T).$$

No prime factor of s can be an associate of p, otherwise p' would be a unit. Hence the prime factors of s divide e or r, and on cancelling them one by one we obtain an equation $pe_1r_1 = a$, i. e. $p \mid a$.

(β) p' is a unit. Then $pr = us$, where $r, s \in T$ and u is a unit in S. Again we can cancel the prime factors of s one by one, but this time we find that one of them is associated to p, for u is a unit, while p is not. Hence p is a prime. This completes the proof.

7. Mono-UFDs and epi-UFDs

In any ring R an element c is said to be *invariant* if c is not a zero-divisor and $cR = Rc$. The invariant elements of R form a subsemigroup of R which will be denoted by $I = I(R)$. It contains $U(R)$, the group of units of R as subsemigroup; the units of R are said to be *trivially invariant.* From Th. 6. 2 we now obtain the following generalization of Nagata's theorem (cf. Brungs [7]):

Theorem 7. 1. *Let R be any ring, $I = I(R)$ the set of invariant elements, and T a subsemigroup of I generated by primes of I. If R satisfies ACC on invariant principal ideals (or is atomic) and the image of I in the localization R_T is a UF-semigroup, then I is itself a UF-semigroup.*

In particular, if R consists entirely of invariant elements (apart from 0) we call R a *subcommutative ring.* Then we have the

Corollary. *Let R be a subcommutative ring with ACC on principal ideals. If T is a subsemigroup generated by primes and the localization R_T is a UFD, then R is a UFD.*

It is natural to look for an analogue of this result in the general case. The following example shows that the obvious generalization does not hold. Let R be the free associative algebra on x and y over the ring $\boldsymbol{Z}$ of integers. If we localize by $\boldsymbol{Z}^*$ ($= \boldsymbol{Z} \setminus \{0\}$) we obtain the free algebra on x, y over the rationals $\boldsymbol{Q}$, which we know to be a UFD. Clearly $\boldsymbol{Z}^*$ is generated by primes and R is atomic; nevertheless R is not a UFD. For the element $xyx + 2x$ has the factorizations

$$xyx + 2x = x(yx + 2) = (xy + 2)x,$$

and $xy + 2$ is not similar to $yx + 2$ in R, as is easily checked.

If we examine the proof of Th. 6. 2 we find that the following property is needed for a useful generalization:

If $a, a' \in R$ and a, a' are similar in a localization R_S (where S is generated by primes), then a, a' are similar in R.

It is precisely this property which fails in the example of the free $\boldsymbol{Z}$-algebra. In order to overcome this difficulty Brungs [7] proposed a modification of the notion of similarity, which enabled him to prove an analogue of Th. 7. 1. Thus in effect he enlarges the concept uf UFD so as to include the free $\boldsymbol{Z}$-algebra. Based on his idea we shall below carry out another modification leading to an even wider notion of UFD. Although this

represents a weaker property, it has a greater symmetry, and while the conditions needed in the final theorem (Th. 7. 7) appear more stringent than those imposed by Brungs, they are roughly comparable since they operate with a simpler notion of prime element.

Let R be any integral domain and consider the category $\mathscr{C}_R$ of strictly cyclic right R-modules. Given $a, a' \in R$, we shall say that a is *right monosimilar* to a' if there exist monomorphisms (i. e. right cancellative mappings in $\mathscr{C}_R$)

$$f: R/aR \to R/a'R, \quad g: R/a'R \to R/aR. \tag{1}$$

Analogously, if epimorphisms (i. e. left cancellative mappings in $\mathscr{C}_R$) (1) exist, a is said to be *right episimilar* to a'. *Left* mono- and episimilarity are defined correspondingly.

It is immediate that right (or left) mono- (or epi-)similarity is an equivalence relation. Further, the duality between $\mathscr{C}_R$ and ${}_R\mathscr{C}$ (Th. 4. 1) shows the truth of

Proposition 7. 2. *Two elements of an integral domain are right monosimilar if and only if they are left episimilar.*

Clearly similar elements are both left and right mono- and episimilar. In atomic 2-firs the converse is true:

Proposition 7. 3. *Let R be an atomic 2-fir. If a, a' are right mono- or episimilar, they are similar.*

Proof. Let a, a' be right monosimilar, then we have monomorphisms (1). By Prop. 4. 3, $\ker f$, $\ker g$ are again strictly cyclic and hence must be zero. Thus by composing f, g we obtain an injection $R/aR \to R/aR$. The image is a strictly cyclic submodule of R/aR, and since all maximal chains of strictly cyclic submodules of R/aR are finite of the same length, the image is the whole of R/aR. Hence both f and g are isomorphisms and a is similar to a'. If a, a' are right episimilar, then by Prop. 7. 2 they are left monosimilar and the result follows by symmetry.

We now define a *right mono-UFD* as an atomic integral domain in which any two factorizations of a given element have the same length, and given two such factorizations:

$$c = a_1 \cdots a_r = b_1 \cdots b_r,$$

there is a permutation $i \mapsto i'$ such that a_i is right monosimilar to $b_{i'}$. Analogous definitions of *left mono-UFD* and *right* or *left epi-UFD* are obtained by replacing right by left or mono by epi or both. From Prop. 7. 2 we see immediately

Proposition 7. 4. *A left mono-UFD is the same as a right epi-UFD, and a left epi-UFD is the same as a right mono-UFD.*

It is clear that these definitions extend the notion of UFD described in § 2. Their introduction is justified by the fact that a form of Nagata's theorem holds for them. For the proof we need a description of monomorphisms in the category $\mathscr{C}_R$.

Lemma 7. 5. *Let R be an integral domain and $\mathscr{C}_R$ the category of strictly cyclic R-modules. Then a homomorphism $f: M \to N$ in $\mathscr{C}_R$ is monic (i. e. a monomorphism) if and only if $\ker f$ is torsionfree.*

We recall that a module M is torsionfree if $x \in M$, $a \in R$ and $xa = 0$ implies $x = 0$ or $a = 0$.

Proof. To say that f is monic means that $f\alpha = f\beta$ implies $\alpha = \beta$, for any $\alpha, \beta: P \to M$ in $\mathscr{C}_R$. Writing $\gamma = \alpha - \beta$, we can express this as: $f\gamma = 0$ implies $\gamma = 0$, i. e. $\ker f \geqq \operatorname{im} \gamma$ implies $\operatorname{im} \gamma = 0$. Now $\operatorname{im} \gamma$ can be any proper homomorphic image of R. Thus if $\ker f$ is torsionfree, no non-zero $\operatorname{im} \gamma$ can lie in $\ker f$ and conversely. This completes the proof.

The condition for an epimorphism is less easy to interpret: If $f: R/a'R \to R/aR$ is a homomorphism, given by an equation $ba' = ab'$, then f is epic if and only if, for all $x, y \in R$

$$xa, xb \in yR \text{ implies } x \in yR.$$

We omit the proof, as we shall not need to use this result, thanks to the duality of Th. 4. 1.

Suppose that R is subcommutative. Then no non-zero $\mathscr{C}_R$-module is torsionfree and it follows that every monomorphism in $\mathscr{C}_R$ is an injection. Hence if a, a' are right monosimilar, they are subsimilar in Brungs' sense and therefore associated (cf. [7]). By symmetry the same holds for left monosimilar elements, and by duality (Prop. 7. 2) it holds for episimilar elements. Thus we obtain the

Corollary. *If R is a subcommutative integral domain, any two left (or right) mono- (or epi-)similar elements are associated.*

In particular, in the commutative case all four notions of UFD coincide.

Let R be any ring and S any set of invariant elements of R.

An element a of R is said to be *prime to S*, if there is no non-trivial invariant element which divides both a and an element of S. We can now show that monosimilarity has the property necessary for generalizing Th. 6. 2, when the semigroup S is suitably restricted.

Lemma 7. 6. *Let R be an atomic integral domain and S a subsemigroup generated by primes each of which divides a central element of R lying in S. Given $a, a' \in R$ such that a and a' are prime to S, if a and a' are right monosimilar in R_S then they are right monosimilar in R.*

Proof. We put $T = R_S$ and recall that a homomorphism $f: T/a'T \to T/aT$ is given by an element $b \in T$ such that $ba' \in aT$, and

$$\ker f = (aT \cap bT)/ba'T.$$

We assume that f is monic and show that it is induced by a monomorphism from $R/a'R$ to R/aR.

Write $b = b_1 s_1^{-1}$, where $b_1 \in R$, $s_1 \in S$. By hypothesis there is a central element $c_1 = s_1 d_1$ in S, hence $b = b_1 d_1 (s_1 d_1)^{-1} = b_2 c_1^{-1}$. Now $(aT \cap bT)/ba'T = (aT \cap b_2 T)/b_2 a'T$, and it remains to obtain a monomorphism $R/a'R \to R/aR$. If b_2 has a prime factor p in S, this may be taken to be a right-hand factor, say $b_2 = b_3 p$. Since p is invariant, we have an equation

$$pa' = a_1' p. \tag{2}$$

Now if $p \mid a_1'$, we could cancel p on the left of (2) and would find that $p \mid a'$ against the hypothesis. This shows that $p \nmid a_1'$, hence any element of $a_1'R \cap pR$ is a right multiple of $a_1'p = pa'$, i. e. $a_1'R \cap pR = pa'R$, which shows that there is a monomorphism (in fact an injection)

$$R/a'R \to R/a_1'R. \tag{3}$$

Since $b_2 a' = b_3 p a' = b_3 a_1' p$, we have

$$(aT \cap bT)/ba'T = (aT \cap b_2 T)/b_2 a'T = (aT \cap b_3 T)/b_3 a_1' T.$$

If we can find a monomorphism $R/a_1'R \to R/a'R$, we can combine this with (3) to solve the problem. An induction on the number of prime factors of b in S now reduces the problem to the case where b is prime to S. Thus we are given that $(aT \cap bT)/ba'T$ is torsionfree, where a, a', b are in R and prime to S, and we have to show that $(aR \cap bR)/ba'R$ is torsionfree.

If this were not so, there would exist $au = bv$ such that $v \notin a'R$ but $aux = bvx = ba'y$ for some $x \in R$, $x \neq 0$. From the hypothesis, $bv = ba'rs^{-1}$, where $r, s \in S$. Hence

$$vs = a'r. \tag{4}$$

Consider any prime factor of s. This divides $a'r$ but not a'. Hence it divides r and we can cancel it in (4). By induction we can cancel all of s against r and obtain $v = a'r_1$. This is a contradiction and it shows that $(aR \cap bR)/ba'R$ is torsionfree. Hence there is a monomorphism $R/a'R \to R/aR$. By symmetry the monomorphism $T/aT \to T/a'T$ comes from a monomorphism $R/aR \to R/a'R$, so a and a' are right monosimilar in R, as asserted.

We can now state the main theorem of this section:

Theorem 7. 7. *Let R be an atomic integral domain and S a subsemigroup of R generated by primes, each of which divides a central element of R lying in S. If the localization R_S is a right mono-UFD, then so is R itself.*

Proof. By hypothesis any element c of R (not zero or a unit) has an atomic factorization, and in any two atomic factorizations of c the atomic factors belonging to S correspond to each other. For if p is a prime occurring in one factorization of c, it must occur in every factorization of c (up to associates). To pair off the factors not in S we pass to R_S; then all factors in S become units and the remaining atomic factors can be paired off into pairwise right monosimilar ones. By Lemma 7. 6, this relation is preserved in R, hence we have a right mono-UFD.

Corollary. *Let R be an atomic integral domain and S a subsemigroup of R generated by central primes. If the localization R_S is a right mono-UFD, so is R itself.*

By Prop. 7. 2 and symmetry, a corresponding result holds if we replace right by left or mono by epi or both. The free algebra over $\boldsymbol{Z}$ (on more than one generator) is an example of a right (and left) mono- and epi-UFD which is not a UFD. To see this we need only use Th. 7. 7, Cor. and the remarks made at the beginning of this section. Another example is the group ring of a free group over $\boldsymbol{Z}$ (or more generally, over any commutative UFD); this follows since by [9] the group algebra of a free group over the rationals (or over any field) is a UFD.

We conclude with an example to show that some restriction on the semigroup S is necessary. Consider the F-algebra R (where F is a field) generated by x, y with the relation $xy - yx = 1$, and let S be the set of non-zero elements of $F[y]$. The elements of S are not all invariant, but they are right large and satisfy an analogue of the primeness condition. We can therefore form the localization R_S which is a principal ideal domain, being the ring of skew polynomials in x over $K = F(y)$ with commutation rule $fx = xf + df/dy$. But R is not a UFD in any reasonable sense, since we have factorizations like $y(1 + xy) = xy^2$.

8. Equations over skew fields

The results of §§ 3—4 may be applied to equations over skew fields, using the well known fact that for any skew field K, the ring $K[x]$ of polynomials is a principal ideal domain. We shall illustrate this by giving a brief derivation of some results of Gordon and Motzkin [15]. As we shall mainly be dealing with skew fields, we omit the prefix "skew"; thus a field need not be commutative, unless this is expressly stated.

Proposition 8. 1. *Let L be a field and K a subfield. Then for any $c \in L$ the following three conditions are equivalent:*

(i) *the right K-space spanned by the powers of c is finite-dimensional over K,*

(ii) *there is a monic polynomial $f = \Sigma x^i a_i$ with coefficients in K such that $\Sigma c^i a_i = 0$,*

(iii) *there is a monic polynomial in $K[x]$ which when considered over L, has $x - c$ as a left factor.*

The proof is as in the commutative case and may be omitted; in fact L may be any ring with K as subring. We shall call c *right algebraic* over K if these equivalent conditions are satisfied, and if f is as in (ii), c is said to be a *left zero* of f. Clearly the left zeros of f are the elements c such that $x - c$ is a left factor of f. Now $L[x]$ is a principal ideal domain and if we take an atomic factorization of f in $L[x]$,

$$f = p_1 \cdots p_k, \tag{1}$$

we know that $k \leqq \deg f$. Moreover, any atomic left factor of f is similar to one of the atomic factors on the right of (1), because $L[x]$ is a UFD. Now two similar elements in $L[x]$ have the same degree in x. This follows from the Euclidean algorithm, or simply from the fact that the degree of any $f \in R = K[x]$ is characterized as the dimension of the right K-space R/fR. We recall (§ 3) that two linear polynomials $x - a$, $x - b$ are similar if and only if a, b are conjugate. If we apply this result to a polynomial of degree n over K, we obtain a result proved by Gordon and Motzkin [15]:

Theorem 8. 2. *The left zeros of a polynomial of degree n, in any field L, lie in at most n different conjugacy classes of L.*

Let f be a polynomial with coefficients in the centre C of K; of course here we do not need to distinguish between left and right zeros in K. Thus f is a central element of $K[x]$. Now the semigroup I of invariant elements of $K[x]$ just consists of associates of central elements, as is easily verified. Hence if f is an atom in $C[x]$, i. e. irreducible over C, then f is an atom in I (though not necessarily an atom in $K[x]$). Now the quotient ring $K[x]/(f)$ is simple Artinian, so all its simple modules are isomorphic, whence all atoms dividing f are similar (see also [17], p. 45). Hence if f has a zero in K, all its zeros in K are conjugate and we obtain a result going back to L. E. Dickson:

Proposition 8. 3. *Let K be a field with centre C, and f any irreducible polynomial over C. Then all zeros of f in K (if any) are conjugate.*

We now return to the general situation. In order to determine the number of left zeros of f in a given conjugacy class, we use Th. 4. 6, which tells us that the number of left factors of f similar to $x - a$ (up to associates) is 0, 1 or at least α, where α is the cardinality of the eigenring of $x - a$ in $K[x]$. But the latter is just the centralizer of a in K (Th. 3. 1, Cor.). Thus we obtain

Theorem 8. 4. *Let f be a polynomial over a field K and let a be a left zero of f in some extension L of K. Denote by α the cardinality of the centralizer of a in L. Then the number of left zeros of f conjugate to a in L is either 1 or at least α.*

From this theorem we easily obtain another result of Gordon and Motzkin [15], namely that the number of conjugates of a, if greater than 1, is infinite. For this it is only necessary to show that in a field that is *not* commutative, every element has an infinite centralizer. We adapt the proof from [15] of this fact to obtain the following more general result, itself of independent interest:

Proposition 8. 5. *In a noncommutative field K, every element is contained in an infinite commutative subfield.*

Proof. Let C be the centre of K, then $C \neq K$ and for any $a \in K$, $C(a)$ is a commutative subfield containing both C and a. Clearly it will be enough to find an infinite subfield containing $C(a)$ when $a \notin C$. Suppose that $C(a)$ is finite, then so is C, say $|C| = q$, $|C(a)| = q^f$, where $f > 1$. The mapping $x \mapsto x^q$ is an automorphism of $C(a)$ over C, hence a and a^q satisfy the same irreducible equation over C. By Prop. 8. 3 they are conjugate in K, i. e. there exists $b \in K$, $b \neq 0$, such that

$$b^{-1}ab = a^q. \tag{2}$$

Consider the field $A = C(a, b^f)$. By (2) b^f induces the mapping $x \mapsto x^{q^f}$ on $C(a)$; this is the identity, so A is commutative. We assert that A is infinite; for if not, then $A(b)$ would be a finite extension of A, and skew by (2). But this contradicts Wedderburn's theorem.

Combining this result with Th. 8. 4, we obtain the result of Gordon and Motzkin mentioned earlier:

Corollary. *Let f be a polynomial over a field K, and let a be a left zero of f in some extension L of K. Then the number of left zeros of f in L conjugate to a is 1 or infinite.*

Together with Th. 8. 2 this includes an earlier result of Herstein's [16], which asserted that a central polynomial of degree n, if it has more than n zeros, then it has infinitely many.

References

[1] *S. A. Amitsur*, Commutative linear differential operators, Pacif. J. Math. **8** (1958), 1—10.

[2] *K. Asano*, Nichtkommutative Hauptidealringe, Paris 1938.

[3] *D. Barbilian*, Teoria Aritmetica a idealelor (în inele necomutative), Bucarest 1956.

[4] *G. M. Bergman*, Commuting elements in free algebras and related topics in ring theory, Thesis Harvard University 1967, cf. also: Centralizers in free associative algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **137** (1969) 327—344.

[5] *G. M. Bergman* and *P. M. Cohn*, Dependence in rings. I. To appear.

[6] *A. J. Bowtell*, unpublished.

[7] *H.-H. Brungs*, Ringe mit eindeutiger Faktorzerlegung, J. reine angew. Math. **236** (1969), 43—66.

[8] *P. M. Cohn*, Noncommutative unique factorization domains, Trans. Amer. Math. Soc. **109** (1963), 313—331.

[9] *P. M. Cohn*, Free ideal rings, J. Algebra **1** (1964), 47—69.

[10] *P. M. Cohn*, Torsion modules over free ideal rings, Proc. London Math. Soc. (3) **17** (1967), 577—599.

[11] *P. M. Cohn*, Bezout rings and their subrings, Proc. Cambridge Phil. Soc. **64** (1968), 251—264.

[12] *P. M. Cohn*, Free associative algebras, Bull. London Math. Soc. **1** (1969), 1—39.

[13] *H. Fitting*, Primärkomponentenzerlegung in nichtkommutativen Ringen, Math. Ann. **111** (1935), 19—41.

[14] *H. Fitting*, Über den Zusammenhang zwischen dem Begriff der Gleichartigkeit zweier Ideale und dem Äquivalenzbegriff der Elementarteilertheorie, Math. Ann. **112** (1936), 572—582.

[15] *B. Gordon* and *T. S. Motzkin*, On the zeros of polynomials over division rings, Trans. Amer. Math. Soc. **116** (1965), 218—226.

[16] *I. N. Herstein*, Conjugates in division rings, Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 1021—1022.

[17] *N. Jacobson*, Theory of rings, New York 1943.

[18] *R. E. Johnson*, Unique factorization in a principal right ideal domain, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 526—528.

[19] *E. Landau*, Ein Satz über die Zerlegung homogener linearer Differentialausdrücke in irreduzible Faktoren, J. reine angew. Math. **124** (1902), 115—120.

[20] *A. Loewy*, Über irreduzible homogene Differentialausdrücke, Math. Ann. **56** (1903), 549—584.

[21] *M. Nagata*, A remark on the unique factorization theorem, J. Math. Soc. Japan **9** (1957), 143—145.

[22] *E. Noether* und *W. Schmeidler*, Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differential- und Differenzenausdrücken, Math. Zeits. **8** (1920), 1—35.

[23] *O. Ore*, Formale Theorie der linearen Differentialgleichungen, J. reine angew. Math. **167** (1932), 221—234, **168** (1932), 233—252.

[24] *R. E. Williams*, A note on weak Bezout rings, Proc. Amer. Math. Soc. **19** (1968), 951—952.

Bedford College, Department of Mathematics, University of London, Regent's Park, London N. W. 1

Eingegangen 21. Februar 1969

Eine Charakterisierung des Verzweigungsindex diskreter Bewertungen mittels höherer Differentiale

Von *Robert Berger* in Saarbrücken

Herrn Professor Dr. Wolfgang Krull zum 70. Geburtstag

Einleitung

Es seien $R > P$ diskrete Bewertungsringe, so daß der Restklassenkörper von R separabel algebraisch über dem Restklassenkörper von P ist, e der Verzweigungsindex von R über P. Für $e > 1$ heißt R verzweigt über P, und es gibt mannigfache Kriterien dafür, wann dies der Fall ist. Ein solches ist, wenn R durch Lokalisieren aus dem ganzen Abschluß von P in einer separabel algebraischen endlichen Körpererweiterung hervorgeht, die von Dedekind eingeführte Differente $\mathfrak{D}(R, P)$. Sie ist ein mittels der Spur der Quotientenkörpererweiterung definiertes Ideal in R, das genau dann von R verschieden ist, wenn R über P verzweigt ist. Darüber hinaus liefert die Differente aber auch noch eine quantitative Aussage über e. Es gilt nämlich stets, wenn $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von R ist, $\mathfrak{D}(R, P) \leqq \mathfrak{m}^{e-1}$ und Gleichheit hat genau dann statt, wenn die Charakteristik p des Restklassenkörpers von R kein Teiler von e ist (sogenannte „zahme Verzweigung", vgl. [3]). Falls hingegen p ein Teiler von e ist, kann man im allgemeinen den Verzweigungsindex nicht aus der Differente zurückgewinnen.

Ein anderer Zugang zur Theorie der Differente als der bei Dedekind ist die Verwendung des Differentialmoduls von R über P. Die mit seiner Hilfe definierte Kählersche Differente stimmt in dem oben betrachteten Falle mit der von Dedekind überein, liefert jedoch auch in viel allgemeineren Situationen qualitative Kriterien für Verzweigtheit (vgl. [1], [5]). Im Falle nicht zahmer Verzweigung läßt sich jedoch auch aus dem Differentialmodul der Verzweigungsindex e im allgemeinen nicht berechnen.

Es ist das Ziel dieser Arbeit zu zeigen, wie sich durch den Einsatz höherer Differentiale anstelle des Differentialmoduls ein Verzweigungskriterium gewinnen läßt, daß auch bei nicht zahmer Verzweigung den genauen Wert von e angibt, solange nur die Restklassenkörpererweiterung separabel ist. Diese Voraussetzung ist z. B. in den in der algebraischen Zahlentheorie und in der Theorie der algebraischen Funktionenkörper in einer Variablen über vollkommenem Konstantenkörper auftretenden Fällen stets erfüllt.

Bei der Definition der höheren Differentiale verwenden wir nach dem Vorbild von Hasse und F. K. Schmidt [4] höhere Derivationen mit einer gegenüber dem klassischen Fall etwas modifizierten Produktregel, die dem Fall der Primzahlcharakteristik Rechnung trägt. Anstatt jedoch höhere Derivationen von R in sich zu betrachten, bilden wir für jeden Abschnitt $N = \{0, 1, \ldots, n\}$ die nichtnegativen ganzen Zahlen eine universelle

Differentialalgebra $\mathfrak{D}_N(R, P)$, aus der sich jede Derivation der Ordnung N durch Spezialisierung gewinnen läßt. Die Beziehungen der $\mathfrak{D}_N(R, P)$ für verschiedene N untereinander liefern eine große Anzahl von Invarianten der Ringerweiterung $R \geqq P$, die sich schon im Falle von inseparablen Körpererweiterungen als nützlich erwiesen haben [2]. Wir betrachten hier speziell den sogenannten „Stabilitätsindex" (Definition (2. 2)). Dieser ist eine der möglichen Verallgemeinerungen des in [2] betrachteten Verkürzungsindex.

Die allgemeine Theorie der universellen höheren Derivationen wurde in [2] ausführlich dargestellt. Wir geben im ersten Abschnitt dieser Arbeit nochmals einen kurzen Abriß der Theorie, soweit sie im folgenden gebraucht wird, um die Arbeit leichter lesbar zu machen. Durch ausführlichere Verwendung der verallgemeinerten Taylorreihen sind die hier gegebenen Beweise zum Teil erheblich kürzer als die in [2]. Es folgt im zweiten Abschnitt die Definition des Stabilitätsindex einer lokalen Ringerweiterung $R \geqq P$ als der kleinsten natürlichen Zahl n, so daß der natürliche Homomorphismus

$$\tilde{\eta}_1^m : \mathfrak{D}_{\{0,1\}}(R, P)/\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{D}_{\{0,1\}}(R, P) \to \mathfrak{D}_{\{0,1,\ldots,m\}}(R, P)/\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{D}_{\{0,1,\ldots,m\}}(R, P)$$

für alle $m \geqq n$ „stabil" bleibt. In naheliegender Weise lassen sich auch „höhere" Stabilitätsindizes definieren, jedoch scheint in den betrachteten Fällen diskreter Bewertungsringe nur der hier studierte „erste" Stabilitätsindex eine einfach zu interpretierende Bedeutung zu haben. (Im Falle von Körpererweiterungen hat man in Satz (2. 5. 3) von [2] und Satz (4. 1) dieser Arbeit auch Informationen über höhere Stabilitätsindizes). Abschnitt 3 enthält die wichtige Reduktion der Berechnung des Stabilitätsindex auf den Fall eines lokalen Ringes über einem Körper. Im 4. Abschnitt wird der Fall einer separablen Körpererweiterung betrachtet und gezeigt, daß hier der Stabilitätsindex stets gleich 1 ist. Abschnitt 5 enthält den Beweis des Hauptsatzes: Im Falle diskreter Bewertungsringe mit separabler Restklassenkörpererweiterung ist der Stabilitätsindex gleich dem Verzweigungsindex. Die Arbeit schließt im 6. Abschnitt mit einigen Bemerkungen zum Fall inseparabler Restklassenkörper. Auf die genauere Behandlung dieser Fälle sowie allgemeinerer lokaler Ringe beabsichtigen wir an anderer Stelle zurückzukommen.

1. Höhere Differentiale einer Ringerweiterung

In diesem Abschnitt stellen wir die wichtigsten Definitionen und Sätze der allgemeinen Theorie der höheren Differentiale zusammen, soweit sie im folgenden gebraucht werden. Bezüglich weiterer Einzelheiten sei auf [2] verwiesen.

Alle im folgenden vorkommenden Ringe sind kommutativ mit Einselement, alle Ringhomomorphismen sind unitär. Mit $N = \{0, 1, \ldots, n\}$, $M = \{0, 1, \ldots, m\}$ bezeichnen wir Abschnitte der nichtnegativen ganzen Zahlen. Dabei ist auch der Fall zugelassen, daß N oder M die Menge aller nichtnegativen ganzen Zahlen ist. In diesem Falle setzen wir formal n bzw. m gleich ∞. P, R, S, T, A, B bezeichnen Ringe.

(1. 1. 1) Definition. *Eine Derivation der Ordnung N von R in A ist eine Familie $\boldsymbol{D} = \{D^\nu \mid \nu \in N\}$ von Abbildungen $D^\nu : R \to A$ mit*

1. $D^\nu(x + y) = D^\nu x + D^\nu y$
2. $D^\nu(x \cdot y) = \sum_{i+j=\nu} D^i x \cdot D^j y$

für alle $x, y \in R$ und $\nu \in N$.

(1. 1. 2) Anmerkung. *D^0 ist ein Ringhomomorphismus. Vermöge D^0 wird A als R-Algebra aufgefaßt.*

(1. 1. 3) Triviale Derivation. Setzt man $D^0 = id_R$, $D^\nu = 0$ für alle $\nu \in N$, $\nu > 0$, so erhält man eine Derivation der Ordnung N von R in sich, die wir als die triviale Derivation der Ordnung N von R bezeichnen. (In [2] fasttriviale Derivation genannt).

(1. 1. 4) Ist $\boldsymbol{D} = \{D^\nu\}$ eine Derivation von R in A, H ein Ringhomomorphismus von A in einen Ring A', G ein Ringhomomorphismus von einem Ring R' in R, so sind auch $\{H \circ D^\nu\}$ und $\{D^\nu \circ G\}$ Derivationen von derselben Ordnung wie $\boldsymbol{D}$. Wir bezeichnen diese mit $H \circ \boldsymbol{D}$ bzw. $\boldsymbol{D} \circ G$.

(1. 2) Taylorreihen ([4] Satz 1 und 2, [2] (1. 1. 11)).

(1. 2. 1) Sei $\boldsymbol{D} = \{D^\nu \mid \nu \in N\}$ eine Familie von Abbildungen von R in A, $\mathfrak{T}(\boldsymbol{D}) = A[\![T]\!]/T^{n+1} = A[\![t]\!]$, wobei $A[\![T]\!]$ den formalen Potenzreihenring in T über A und t die Restklasse von T mod T^{n+1} bezeichnen. Dabei setzen wir formal $T^{\infty+1} = 0$. Sei ferner $\chi(\boldsymbol{D}) : R \to \mathfrak{T}(\boldsymbol{D})$ definiert durch

$$\chi(\boldsymbol{D})(x) = \sum_{\nu \in N} (D^\nu x) \cdot t^\nu \qquad \text{für alle } x \in R.$$

Dann gilt, wie man unmittelbar an den Definitionen sieht:

(1. 2. 1) Satz. *Es sind äquivalent:*

1. *$\boldsymbol{D}$ ist eine Derivation der Ordnung N von R in A.*

2. *$\chi(\boldsymbol{D})$ ist ein Ringhomomorphismus.*

(1. 2. 2) Korollar. *Sei $\mathsf{H} : R \to A[\![t]\!] = A[\![T]\!]/T^{n+1}$ ein Ringhomomorphismus. Dann gibt es genau eine Derivation $\boldsymbol{D}$ von R in A mit $\mathsf{H} = \chi(\boldsymbol{D})$.*

Beweis. Definiere $D^\nu x =$ Koeffizient von t^ν in $H(x)$.

(1. 2. 3) Sei $\pi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Dann gibt es genau eine Fortsetzung $\Pi : A[\![t]\!] \to B[\![t]\!]$ von π mit $\Pi(t) = t$. Π heißt die kanonische Ausdehnung von π.

(1. 3) Universelle Ausdehnung einer Derivation (vgl. [2] (1. 2)).

(1. 3. 1) Definition. Sei $\lambda : R \to S$ ein Ringhomomorphismus, $\boldsymbol{D}$ eine Derivation der Ordnung N von R in A.

Ein Paar $(\boldsymbol{d}, \pi)$, $\boldsymbol{d}$ eine Derivation der Ordnung N von S in einen Ring B, π ein Ringhomomorphismus von A in B heißt „λ-Ausdehnung von $\boldsymbol{D}$", wenn gilt $\boldsymbol{d} \circ \lambda = \pi \circ \boldsymbol{D}$.

(1. 3. 2) Satz. *Es sind äquivalent:*

1. *$(\boldsymbol{d}, \pi)$ ist λ-Ausdehnung von $\boldsymbol{D}$.*

2. *Für die kanonische Ausdehnung $\Pi : \mathfrak{T}(\boldsymbol{D}) \to \mathfrak{T}(\boldsymbol{d})$ von π gilt $\chi(\boldsymbol{d}) \circ \lambda = \Pi \circ \chi(\boldsymbol{D})$.*

Beweis. Klar, da $\big(\chi(\boldsymbol{d}) \circ \lambda\big)(x) = \sum_{\varepsilon \in N} (d^\nu \circ \lambda)(x) \cdot t^\nu$ und $\big(\Pi \circ \chi(\boldsymbol{D})\big)(x) = \sum_{\nu \in N} (\pi \circ D^\nu)(x) \cdot t^\nu$.

(1. 3. 3) Universelle Ausdehnung.

Definition. *Eine λ-Ausdehnung $(\boldsymbol{d}, \pi)$ von $\boldsymbol{D}$ heißt „universell", wenn gilt: Für jede λ-Ausdehnung $(\boldsymbol{d}', \pi')$ von $\boldsymbol{D}$ existiert genau ein Ringhomomorphismus ψ mit $\boldsymbol{d}' = \psi \circ \boldsymbol{d}$ und $\pi' = \psi \circ \pi$.*

Anmerkung. Die universelle λ-Ausdehnung von $\boldsymbol{D}$ ist bis auf kanonische R-Isomorphie eindeutig bestimmt.

(1. 3. 4) Satz. *Sei* $\boldsymbol{D}$ *eine Derivation von* R, $(\boldsymbol{d}, \pi)$ *eine* λ*-Ausdehnung von* $\boldsymbol{D}$. *Es sind äquivalent*:

1. $(\boldsymbol{d}, \pi)$ *ist universelle* λ*-Ausdehnung von* $\boldsymbol{D}$.

2. *Für jede* λ*-Ausdehnung* $(\boldsymbol{d}', \pi')$ *von* $\boldsymbol{D}$ *existiert genau ein Ringhomomorphismus* ψ, *so daß für die kanonischen Ausdehnungen* Π, Π', Ψ *von* π, π', ψ *gilt* $\chi(\boldsymbol{d}') = \Psi \circ \chi(\boldsymbol{d})$ *und* $\Pi' = \Psi \circ \Pi$.

Beweis. Die angegebenen Bedingungen für die kanonischen Ausdehnungen der Homomorphismen bedeuten nach Definition gerade $\boldsymbol{d}' = \psi \circ \boldsymbol{d}$ und $\pi' = \psi \circ \pi$, also ist 2. nach Definition der universellen Ausdehnung äquivalent zu 1. q. e. d.

(1. 3. 5) Transitivität der universellen Ausdehnung.

Satz. *Seien* $\lambda: R \to S$ *und* $\mu: S \to T$ *Ringhomomorphismen,* $\boldsymbol{D}$ *eine Derivation von* R *in* A, $(\boldsymbol{d}, \pi)$ *die universelle* λ*-Ausdehnung von* $\boldsymbol{D}$ *und* $(\boldsymbol{\delta}, \varphi)$ *die universelle* μ*-Ausdehnung von* $\boldsymbol{d}$. *Dann ist* $(\boldsymbol{\delta}, \varphi \circ \pi)$ *die universelle* $\mu \circ \lambda$*-Ausdehnung von* $\boldsymbol{D}$.

Beweis. Sei $(\boldsymbol{\delta}', \sigma)$ eine beliebige $\mu \circ \lambda$-Ausdehnung von $\boldsymbol{D}$. Dann ist $(\delta' \circ \mu, \sigma)$ eine λ-Ausdehnung von $\boldsymbol{D}$. Also existiert genau ein ψ mit $\boldsymbol{\delta}' \circ \mu = \psi \circ \boldsymbol{d}$ und $\sigma = \psi \circ \pi$. $(\boldsymbol{\delta}', \psi)$ ist dann eine μ-Ausdehnung von $\boldsymbol{d}$. Also existiert genau ein χ mit $\boldsymbol{\delta}' = \chi \circ \boldsymbol{\delta}$ und $\psi = \chi \circ \varphi$. Also ist auch $\sigma = \psi \circ \pi = \chi \circ (\varphi \circ \pi)$. Ist ferner χ' ein beliebiger Homomorphismus mit $\boldsymbol{\delta}' = \chi' \circ \boldsymbol{\delta}$ und $\sigma = \chi' \circ \varphi \circ \pi$, so folgt zunächst $(\chi' \circ \varphi) \circ \pi = \sigma$ und $(\chi' \circ \varphi) \circ \boldsymbol{d} = \chi' \circ \boldsymbol{\delta} \circ \mu = \boldsymbol{\delta}' \circ \mu$. Aus der Eindeutigkeit von ψ folgt daher $\chi' \circ \varphi = \psi$, und da $\boldsymbol{\delta}' = \chi' \circ \boldsymbol{\delta}$ gilt, folgt aus der Eindeutigkeit von χ weiter $\chi' = \chi$. q. e. d.

(1. 3. 6) Universelle Ausdehnung auf ein homomorphes Bild.

Satz. *Sei* $\mu: S \to T$ *ein surjektiver Ringhomomorphismus,* $\mathfrak{n} = \operatorname{Ker}(\mu)$, $\boldsymbol{d}$ *eine Derivation der Ordnung* N *von* S *in* B. *Sei ferner* $\mathfrak{N}$ *das von* $\{d^\nu y \mid y \in \mathfrak{n}, \nu \in N\}$ *erzeugte Ideal in* B, $C = B/\mathfrak{N}$, $\eta: B \to C$ *der kanonische Homomorphismus auf den Restklassenring, ferner für alle* $\nu \in N$ $\delta^\nu: T \to C$ *die durch* $\eta \circ d^\nu$ *induzierte Abbildung mit* $\delta^\nu \circ \mu = \eta \circ d^\nu$ *und* $\boldsymbol{\delta} = \{\delta^\nu \mid \nu \in N\}$. *Dann ist* $(\boldsymbol{\delta}, \eta)$ *universelle* μ*-Ausdehnung von* $\boldsymbol{d}$.

Zusatz. *Ist* $\{f_i \mid i \in I\}$ *ein Erzeugendensystem von* $\mathfrak{n}$ *als* S*-Ideal, so ist* $\{d^\nu f_i \mid \nu \in N, i \in I\}$ *ein Erzeugendensystem von* $\mathfrak{N}$ *als* B*-Ideal.*

Beweis. Wegen $\eta(d^\nu \mathfrak{n}) \leqq \eta(\mathfrak{N}) = (0)$ und μ surjektiv ist δ^ν wohldefiniert für alle $\nu \in N$ und $\boldsymbol{\delta}$ offenbar eine Derivation der Ordnung N von T in C. Nach Definition gilt ferner $\eta \circ \boldsymbol{d} = \boldsymbol{\delta} \circ \mu$, also ist $(\boldsymbol{\delta}, \eta)$ eine μ-Ausdehnung von $\boldsymbol{d}$. Ist $(\boldsymbol{\delta}', \eta')$ eine beliebige μ-Ausdehnung von $\boldsymbol{d}$, so gilt jedenfalls $\eta'(\mathfrak{N}) = (\eta' \circ d^\nu(\mathfrak{n}) \mid \nu \in N) = (\delta'^\nu \circ \mu(\mathfrak{n}) \mid \nu \in N) = (0)$, so daß η' eindeutig ein ψ induziert mit $\eta' = \psi \circ \eta$. Ferner gilt

$$\psi \circ \delta^\nu \circ \mu = \psi \circ \eta \circ d^\nu = \eta' \circ d^\nu = \delta'^\nu \circ \mu$$

also, da μ surjektiv ist, $\psi \circ \delta^\nu = \delta'^\nu$ für alle $\nu \in N$, d. h. $(\boldsymbol{\delta}, \eta)$ ist universelle μ-Ausdehnung von $\boldsymbol{d}$.

Beweis des Zusatzes. Nach Definition von $\mathfrak{N}$ liegen die angegebenen Elemente in $\mathfrak{N}$. Umgekehrt wird $\mathfrak{N}$ erzeugt von den Elementen der Gestalt

$$d^\nu\Big(\sum_{i \in I} x_i f_i\Big) = \sum_{j+k=\nu} d^j x_i \cdot d^k f_i, \quad x_i \in S, \ \nu \in N$$

also liegt $\mathfrak{N}$ in dem von den $\{d^\nu f_i \mid \nu \in N\, i \in I\}$ in B erzeugten Ideal. q. e. d.

(1. 3. 7) Universelle Ausdehnung auf einen Polynomring.

Satz. *Sei* $S = R[X_i \mid i \in I]$ *Polynomring über* R *in den Unbestimmten* X_i, $\lambda: R \to S$ *die Inklusionsabbildung,* $\boldsymbol{D}$ *eine Derivation der Ordnung* N *von* R *in* A. *Seien*

$\{X_i^{(\nu)} \mid i \in I, \nu \in N\}$ *neue Unbestimmte,* $B = A[\{X_i^{(\nu)}\}]$ *der Polynomring in diesen über* A, $\pi : A \to B$ *die Inklusionsabbildung* $\mathsf{H} : S \to B[\![t]\!] = B[\![T]\!]/T^{n+1}$ *der durch* $\mathsf{H}(X_i) = \sum_{\nu \in N} X_i^{(\nu)} t^\nu$ *und* $\mathsf{H} \circ \lambda = \Pi \circ \chi(\boldsymbol{D})$ *eindeutig bestimmte Homomorphismus, wobei* $\Pi : A[\![t]\!] \to B[\![t]\!]$ *die kanonische Ausdehnung von* π *bedeutet, und* $\boldsymbol{d} = \{d^\nu \mid \nu \in N\}$ *die nach* (1. 2. 2) *zu* H *gehörige Derivation von* S *in* B *mit* $\mathsf{H} = \chi(\boldsymbol{d})$ *ist. Dann ist* $(\boldsymbol{d}, \pi)$ *universelle* λ*-Ausdehnung von* $\boldsymbol{D}$.

Beweis. Nach Definition hat man $\chi(\boldsymbol{d}) \circ \lambda = \Pi \circ \chi(\boldsymbol{D})$, also ist $(\boldsymbol{d}, \pi)$ nach (1. 3. 2) eine λ-Ausdehnung von $\boldsymbol{D}$. Sei nun $(\boldsymbol{d}', \pi')$ eine beliebige λ-Ausdehnung von $\boldsymbol{D}$. Falls es einen Homomorphismus ψ mit $\Psi \circ \Pi = \Pi'$ und $\chi(\boldsymbol{d}') = \Psi \circ \chi(\boldsymbol{d})$ gibt, Π', Ψ die kanonischen Ausdehnungen von π, ψ, gilt für dieses $\psi : \psi \circ \pi = \pi'$ und $d'^\nu X_i = \psi(X_i^{(\nu)})$. Dadurch ist ψ schon eindeutig bestimmt. Definiere also ψ durch $\psi \circ \pi = \pi'$ und $\psi(X_i^{(\nu)}) = d'^\nu X_i$. Dann gilt umgekehrt auch $\Psi \circ \Pi = \Pi'$ und

$$\Psi \circ \chi(\boldsymbol{d})\,(X_i) = \sum_{\nu \in N} \psi(X_i^{(\nu)}) \cdot t^\nu = \sum_{\nu \in N} d'^\nu X_i \cdot t^\nu = \chi(\boldsymbol{d}')\,(X_i)$$

und $\Psi \circ \chi(\boldsymbol{d}) \circ \lambda = \Psi \circ \Pi \circ \chi(\boldsymbol{D}) = \Pi' \circ \chi(\boldsymbol{D}) = \chi(\boldsymbol{d}') \circ \lambda$. Wegen $S = R[\{X_i\}]$ folgt $\Psi \circ \chi(\boldsymbol{d}) = \chi(\boldsymbol{d}')$. Nach (1. 3. 4) ist also $(\boldsymbol{d}, \pi)$ universelle λ-Ausdehnung von $\boldsymbol{D}$. q. e. d.

Anmerkung. *Man hat die kanonische Isomorphie*

$$B = A[X_i^{(\nu)} \mid \nu \in N, i \in I] \cong R[X_i^{(0)} \mid i \in I] \underset{R}{\otimes} A[X_i^{(\nu)} \mid \nu \in N, \nu \geqq 1, i \in I]$$
$$\cong (S \underset{R}{\otimes} A)\,[X_i^{(\nu)} \mid \nu \in N, \nu \geqq 1, i \in I].$$

Identifiziert man vermöge dieser Isomorphie B *und* $(S \underset{R}{\otimes} A)\,[\{X_i^{(\nu)}\}]$, *so gilt für alle* $s \in S$ $d^0 s = s \otimes 1$, *für alle* $\nu \in N$, $\nu \geqq 1$, $i \in I$, $d^\nu X_i = X_i^{(\nu)}$ *und für alle* $a \in A$ $\pi(a) = 1 \otimes a$.

(1. 3. 8) Existenz und Konstruktion der universellen Ausdehnung. Da sich jeder beliebige Ringhomomorphismus $\omega : R \to T$ in der Art $\omega = \mu \circ \lambda$ faktorisieren läßt, wobei $\lambda : R \to S$ die Injektion von R in einen Polynomring S über R und μ surjektiv ist, folgt aus (1. 3. 7) und (1. 3. 6) unter Beachtung der Transitivität (1. 3. 5), daß die universelle Ausdehnung stets existiert. Außerdem hat man ein explizites Konstruktionsverfahren. Dabei zerlegt man die Restklassenbildung nach $\mathfrak{N}$ in (1. 3. 6) zweckmäßigerweise noch in zwei Schritte, entsprechend der Aufspaltung von B in der Anmerkung zu (1. 3. 7). Man erhält so:

Konstruktionsverfahren. Sei $\omega : R \to T$ ein Ringhomomorphismus, $\boldsymbol{D}$ eine Derivation der Ordnung N von R in A, $\{x_i \mid i \in I\}$ eine Familie von Elementen von T mit $T = \omega(R)\,[\{x_i\}]$, $\{X_i \mid i \in I\}$ und $\{X_i^{(\nu)}\, i \in I, 1 \leqq \nu \in N\}$ Familien von Unbestimmten, $S = R[X_i \mid i \in I]$ Polynomring in den X_i über R, $\lambda : R \to S$ die Inklusionsabbildung, $\mu : S \to T$ der Homomorphismus mit $\mu \circ \lambda = \omega$ und $\mu(X_i) = x_i$ für alle $i \in I$. Dann ist μ surjektiv und $\omega = \mu \circ \lambda$. Sei ferner $\mathfrak{n} = \mathrm{Ker}\,(\mu)$ und $\{f_k \mid k \in K\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{n}$ als Ideal in S, $B = S \underset{R}{\otimes} A[X_i^{(\nu)} \mid \nu \in N, \nu \geqq 1, i \in I\}$, $(\boldsymbol{d}, \pi)$ die nach (1. 3. 7) gebildete universelle λ-Ausdehnung von $\boldsymbol{D}$,

$$B' = T \underset{R}{\otimes} A[X_i^{(\nu)} \mid \nu \in N, \nu \geqq 1, i \in I] \cong B/\mathfrak{n} \otimes 1 = B/(d^0 f_i \mid i \in I),$$

$\beta : B \to B'$ der kanonische Homomorphismus auf den Restklassenring, $\boldsymbol{\Delta} = \beta \circ \boldsymbol{d}$. Dann ist $\boldsymbol{\Delta} \circ \lambda = \beta \circ \pi \circ \boldsymbol{D}$, $\Delta^0 X_i = x_i \otimes 1$, $\Delta^\nu X_i = X_i^{(\nu)}$ für alle $i \in I$, $1 \leqq \nu \in N$. Sei $\mathfrak{N}'$ das von $\{\Delta^\nu f_i \mid \nu \in N, \nu \geqq 1, i \in I\}$ in B' erzeugte Ideal, $C = B'/\mathfrak{N}'$ und $\gamma : B' \to C$ der kanonische Homomorphismus.

Dann ist nach (1. 3. 5) und (1. 3. 6) $(\boldsymbol{\delta}, \gamma \circ \beta \circ \pi)$ universelle ω-Ausdehnung von $\boldsymbol{D}$, wobei $\boldsymbol{\delta}$ gegeben ist durch $\boldsymbol{\delta} \circ \mu = \gamma \circ \beta \circ \boldsymbol{d} = \gamma \circ \boldsymbol{\Delta}$.

(1. 3. 9) Vertauschbarkeit mit Quotientenringbildung.

Satz. *Sei E ein multiplikativ abgeschlossenes System von Elementen von R, $E \neq \emptyset$, $S = R_E$ mit dem kanonischen Homomorphismus $\lambda: R \to R_E$ der Quotientenring von R bezüglich E, $\boldsymbol{D}$ eine Derivation der Ordnung N von R in A, $B = A_{D^0(E)}$ mit dem kanonischen Homomorphismus $\pi: A \to B$ der Quotientenring von A bezüglich $D^0(E)$, $\Pi: \mathfrak{T}(\boldsymbol{D}) = A[\![t]\!] \to B[\![t]\!]$ die kanonische Ausdehnung von π. Für ein $x \in E$ gilt dann $\Pi \circ \chi(\boldsymbol{D})(x) = \pi \circ D^0 x \cdot t^0 +$ höhere Potenzen in t. Da nach Definition des Quotientenrings $\pi \circ D^0 x$ in B invertierbar ist, ist $\Pi \circ \chi(\boldsymbol{D})(x)$ in $B[\![t]\!]$ invertierbar. Daher gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\mathsf{H}: B \to B[\![t]\!]$ mit $\mathsf{H} \circ \lambda = \Pi \circ \chi(\boldsymbol{D})$.*

Sei $\boldsymbol{d}$ die nach (1. 2. 2) *zu H gehörige Derivation von S in B mit $\chi(\boldsymbol{d}) = \mathsf{H}$. Dann ist $(\boldsymbol{d}, \pi)$ die universelle λ-Ausdehnung von $\boldsymbol{D}$.*

Beweis. Nach (1. 3. 2) ist $(\boldsymbol{d}, \pi)$ eine λ-Ausdehnung von $\boldsymbol{D}$. Sei $(\boldsymbol{d}', \pi')$ eine beliebige λ-Ausdehnung von $\boldsymbol{D}$. $\pi'(D^0(E))$ besteht dann aus invertierbaren Elementen. Also gibt es genau einen Homomorphismus ψ mit $\pi' = \psi \circ \pi$. Für die kanonischen Ausdehnungen gilt dann $\Pi' = \Psi \circ \Pi$. Ferner ist $\Psi \circ \chi(\boldsymbol{d}) \circ \lambda = \Psi \circ \Pi \circ \chi(\boldsymbol{D}) = \Pi' \circ \chi(\boldsymbol{D}) = \chi(\boldsymbol{d}') \circ \lambda$. Da S vermöge λ Quotientenring von R ist, folgt $\Psi \circ \chi(\boldsymbol{d}) = \chi(\boldsymbol{d}')$. Also ist nach (1. 3. 4) $(\boldsymbol{d}, \pi)$ universelle λ-Ausdehnung von $\boldsymbol{D}$. q. e. d.

(1. 4) Differentiationen einer Ringerweiterung.

Es sei im folgenden $\varrho: P \to R$ ein Ringhomomorphismus, $\boldsymbol{D}$ eine Derivation von R in einen Ring A.

(1. 4. 1) Definition. *$\boldsymbol{D}$ heißt ϱ-Derivation, oder auch Derivation von R über P, wenn für alle $\nu \in N$, $\nu \geqq 1$, gilt $D^\nu \circ \varrho = 0$.*

(1. 4. 2) Definition. *$\boldsymbol{D}$ heißt universelle ϱ-Derivation der Ordnung N, oder ϱ-Differentiation der Ordnung N, oder auch universelle Derivation bzw. Differentiation der Ordnung N von R über P, wenn gilt:*

1. *$\boldsymbol{D}$ ist eine ϱ-Derivation der Ordnung N.*

2. *Ist $\boldsymbol{\delta}$ eine beliebige ϱ-Derivation der Ordnung N, so existiert genau ein Ringhomomorphismus ψ mit $\boldsymbol{\delta} = \psi \circ \boldsymbol{D}$.*

(1. 4. 3) Satz. *Es sind äquivalent:*

1. *$\boldsymbol{D}$ ist universelle ϱ-Derivation der Ordnung N.*

2. *$(\boldsymbol{D}, D^0 \circ \varrho)$ ist universelle ϱ-Ausdehnung der Ordnung N der trivialen Derivation von P.*

Beweis. Es gelte 1. Offenbar ist $(\boldsymbol{D}, D^0 \circ \varrho)$ eine ϱ-Ausdehnung der Ordnung N der trivialen Derivation von P. Es sei $(\boldsymbol{\delta}, \varphi)$ eine beliebige ϱ-Ausdehnung der Ordnung N dieser trivialen Derivation. Dann ist also $\delta^0 \circ \varrho = \varphi \circ \mathrm{id}_P = \varphi$ und $\delta^\nu \circ \varrho = \varphi \circ 0 = 0$ für alle $\nu \in N$, $\nu \geqq 1$. Also ist $\boldsymbol{\delta}$ eine ϱ-Derivation der Ordnung N, und es gibt folglich genau einen Homomorphismus ψ mit $\boldsymbol{\delta} = \psi \circ \boldsymbol{D}$. Für diesen gilt dann auch $\psi \circ D^0 \circ \varrho = \delta^0 \circ \varrho = \varphi$, also gilt 2.

Sei umgekehrt 2. erfüllt. Es ist klar, daß $\boldsymbol{D}$ eine ϱ-Derivation der Ordnung N ist. Ist $\boldsymbol{\delta}$ eine beliebige ϱ-Derivation der Ordnung N, so ist $\delta^0 \circ \varrho = \delta^0 \circ \varrho \circ id_P$ und $\delta^\nu \circ \varrho = 0 = \delta^0 \circ \varrho \circ 0$ für alle $\nu \geqq 1$, d. h. $(\boldsymbol{\delta}, \delta^0 \circ \varrho)$ ist eine ϱ-Ausdehnung der Ordnung N der trivialen Derivation von P. Daher gibt es genau einen Homomorphismus ψ mit $\boldsymbol{\delta} = \psi \circ \boldsymbol{D}$ und $\delta^0 \circ \varrho = \psi \circ D^0 \circ \varrho$. Die zweite Bedingung ist aber eine Folge der ersten, also gibt es genau einen Homomorphismus ψ mit $\boldsymbol{\delta} = \psi \circ \boldsymbol{D}$ und es gilt 1. q. e. d.

(1. 4. 4) Auf Grund von (1. 4. 3) lassen sich alle Sätze über universelle Ausdehnungen sofort zu Sätzen über universelle Derivationen spezialisieren. Man erhält so insbesondere

die Existenz, Eindeutigkeit bis auf kanonische Isomorphie und aus (1. 3. 8) ein Konstruktionsverfahren.

(1. 4. 5) Bezeichnung. Ist $\boldsymbol{D}$ universelle ϱ-Derivation der Ordnung N von R, $\boldsymbol{D}: R \to A$, so ist nach dem vorstehend bemerkten A bis auf kanonische R-Algebrenisomorphie eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen diesen Ring mit $\mathfrak{D}_N(\varrho)$ oder auch $\mathfrak{D}_N(R, P)$ und nennen ihn die Differentialalgebra der Ordnung N von ϱ oder auch von R über P. Die R-Algebrastruktur ist dabei die durch D^0 gegebene.

(1. 4. 6) Satz. *Seien $\varrho: P \longrightarrow R$ und $\lambda: R \to S$ Ringhomomorphismen, $\sigma = \lambda \circ \varrho$, $\boldsymbol{d}$ die universelle σ-Derivation der Ordnung N, $\mathfrak{N}$ das von $\{d^\nu \circ \lambda(r) \mid r \in R, \nu \in N, \nu \geqq 1\}$ in $\mathfrak{D}_N(S, P)$ erzeugte Ideal und $\eta: \mathfrak{D}_N(S, P) \to \mathfrak{D}_N(S, P)/\mathfrak{N}$ der kanonische Restklassenhomomorphismus. Dann ist $\boldsymbol{d}' = \eta \circ \boldsymbol{d}$ die universelle λ-Derivation der Ordnung N und folglich*

$$\mathfrak{D}_N(S, R) = \mathfrak{D}_N(S, P)/\mathfrak{N}.$$

Beweis. Zunächst ist $\eta \circ d^\nu \circ \lambda = 0$ für alle $\nu \in N$, $\nu \geqq 1$, also ist $\boldsymbol{d}'$ eine λ-Derivation der Ordnung N. Ist $\boldsymbol{\delta}$ eine beliebige λ-Derivation der Ordnung N, so ist $\delta^\nu \circ \sigma = (\delta^\nu \circ \lambda) \circ \varrho = 0$ für alle $\nu \geqq 1$, d. h. $\boldsymbol{\delta}$ ist auch eine σ-Derivation der Ordnung N. Daher gibt es genau einen Ringhomomorphismus ψ mit $\boldsymbol{\delta} = \psi \circ \boldsymbol{d}$. Es ist $0 = \delta^\nu(\lambda(R)) = \psi(d^\nu \circ \lambda(R))$ für alle $\nu \geqq 1$, also ist $\psi(\mathfrak{N}) = (0)$ und ψ induziert genau einen Homomorphismus ψ' mit $\psi = \psi' \circ \eta$. Es gilt dann $\boldsymbol{\delta} = \psi \circ \boldsymbol{d} = \psi' \circ (\eta \circ \boldsymbol{d}) = \psi' \circ \boldsymbol{d}'$. Hat man ferner einen weiteren Homomorphismus ψ'' mit $\boldsymbol{\delta} = \psi'' \circ \boldsymbol{d}'$, so gilt $\boldsymbol{\delta} = (\psi'' \circ \eta) \circ \boldsymbol{d}$, also $\psi'' \circ \eta = \psi = \psi' \circ \eta$ und folglich $\psi'' = \psi'$. q. e. d.

(1. 4. 7) Die Homomorphismen η_N^M. Sei $N \leqq M$, $\boldsymbol{D}_N$ und $\boldsymbol{D}_M$ die universellen ϱ-Derivationen der Ordnungen N bzw. M. Die Familie $\boldsymbol{D}_{M|N} = \{D_M^\mu \mid \mu \in N\}$ ist dann eine ϱ-Derivation der Ordnung N von R in $\mathfrak{D}_M(R, P)$. Nach Definition der universellen Derivation der Ordnung N gibt es also genau einen Ringhomomorphismus

$$\eta_N^M = \eta_N^M(\varrho): \mathfrak{D}_N(R, P) \to \mathfrak{D}_M(R, P)$$

mit $\boldsymbol{D}_{M|N} = \eta_N^M \circ \boldsymbol{D}_N$, d. h. $D_M^\mu = \eta_N^M \circ D_N^\mu$ für alle $\mu \in N$. η_N^M ist ein R-Algebrenhomomorphismus. Ist $L \geqq M$ ein dritter Abschnitt, so folgt unmittelbar aus den Definitionen: $\eta_N^L = \eta_M^L \circ \eta_N^M$.

Bezeichnung. Für $\eta_N^M(\varrho)$ schreiben wir gelegentlich auch η_n^m oder $\eta_N^M(R, P)$.

2. Der Stabilitätsindex eines lokalen Homomorphismus

(2. 1) Es sei R ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$, P ein beliebiger Ring, $\varrho: P \to R$ ein Ringhomomorphismus, $N = \{0, 1, \ldots, n\}$ ein Abschnitt der nichtnegativen ganzen Zahlen, $\boldsymbol{D}_N = \boldsymbol{D}_N(\varrho)$ die universelle ϱ-Derivation der Ordnung N.

Bezeichnung. Mit $\mathfrak{M}_N = \mathfrak{M}_N(\varrho)$ bezeichnen wir das von $D_N^0(\mathfrak{m})$ in $\mathfrak{D}_N(\varrho)$ erzeugte Ideal, also $\mathfrak{M}_N = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{D}_N(\varrho)$. $\varphi_N = \varphi_N(\varrho): \mathfrak{D}_N(\varrho) \to \mathfrak{D}_N(\varrho)/\mathfrak{M}_M$ bezeichne den Restklassenhomomorphismus. Sei $M = \{0, 1, \ldots, m\}$ ein weiterer Abschnitt, $m \geqq n$ und $\eta_n^m: \mathfrak{D}_N(\varrho) \to \mathfrak{D}_M(\varrho)$ der Homomorphismus von (1. 4. 7). Dann gilt

$$\eta_n^m(D_N^0(\mathfrak{m})) = D_M^0(\mathfrak{m}) \leqq \mathfrak{M}_M,$$

also $\eta_n^m(\mathfrak{M}_N) \leqq \mathfrak{M}_M$. Daher induziert $\eta_n^m(\varrho)$ genau einen Homomorphismus

$$\tilde{\eta}_n^m = \tilde{\eta}_n^m(\varrho): \mathfrak{D}_N(\varrho)/\mathfrak{M}_N \to \mathfrak{D}_M(\varrho)/\mathfrak{M}_M$$

mit $\tilde{\eta}_n^m \circ \varphi_N = \varphi_M \circ \eta_n^m$.

(2. 2) Definition.

$$\operatorname{stab}(\varrho) = \operatorname{Min}\{n \mid \operatorname{Ker}(\tilde{\eta}_1^n) = \operatorname{Ker}(\tilde{\eta}_1^m) \text{ für alle } m \geqq n\}$$

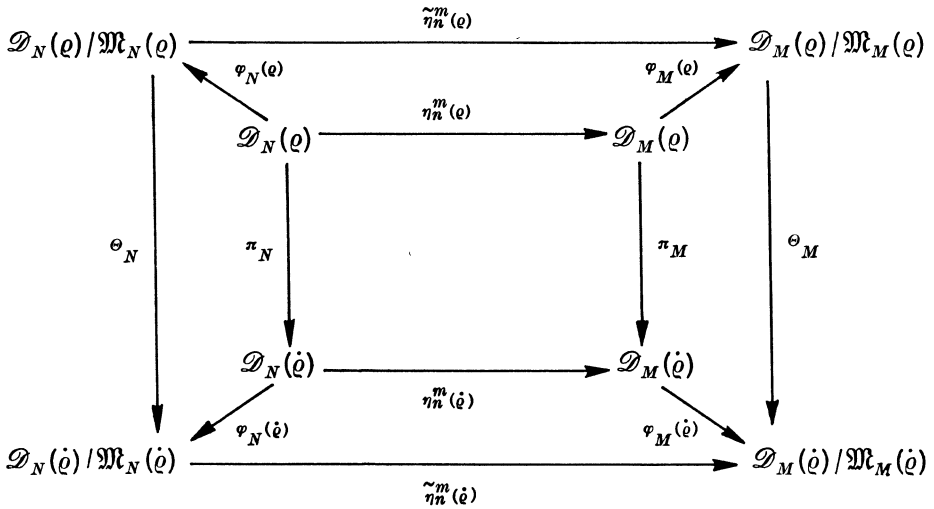
heißt der Stabilitätsindex von ϱ oder auch von R über P. Wir schreiben dafür auch stab (ϱ) oder stab (R, P). Wegen $\tilde{\eta}_n^m = \tilde{\eta}_1^m \circ \tilde{\eta}_1^n$ gilt stets Ker $(\tilde{\eta}_1^n) \subseteq$ Ker $(\tilde{\eta}_1^m)$. Falls für alle $n \leqq m$ stets Ker $(\tilde{\eta}_1^n) \neq$ Ker $(\tilde{\eta}_1^m)$ ist, setzen wir formal stab $(\varrho) = \infty$. Es ist das Ziel dieser Arbeit, den Stabilitätsindex in einigen wichtigen Fällen zu bestimmen. Dabei wird sich eine enge Verbindung zu bekannten arithmetischen Daten ergeben.

3. Reduktion auf den Fall, daß P ein Körper ist

(3. 1) Sei mit den Bezeichnungen von 2. $\mathfrak{p} = \varrho^{-1}(\mathfrak{m})$ und $\alpha: P \to P_{\mathfrak{p}}$ die Lokalisierung von P nach $\mathfrak{p}$. Die Bilder unter ϱ der Elemente von P, die nicht in $\mathfrak{p}$ liegen, sind Einheiten in R. Also gibt es genau einen Homomorphismus $\beta: P_{\mathfrak{p}} \to R$ mit $\varrho = \beta \circ \alpha$. Nach (1. 4. 3) und (1. 3. 5) erhält man die universelle ϱ-Derivation, indem man von der trivialen Derivation von P zunächst die universelle α-Ausdehnung und von dieser dann die universelle β-Ausdehnung bildet. Nach der Konstruktion in (1. 3. 9) sieht man aber, daß die universelle α-Ausdehnung der trivialen Derivation von P die triviale Derivation von $P_{\mathfrak{p}}$ ist. Also ist die universelle ϱ-Derivation der Ordnung N gleich der universellen β-Derivation der Ordnung N. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir daher im folgenden P als lokal mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{p} = \varrho^{-1}(\mathfrak{m})$ voraus.

(3. 2) Satz. *Sei* $\mathfrak{a}$ *ein Ideal in* P *mit* $\varrho(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{m}$, $\dot{P} = P/\mathfrak{a}$, $\dot{R} = R/R \cdot \varrho(\mathfrak{a})$, $\sigma: P \to \dot{P}$ *und* $\tau: R \to \dot{R}$ *die kanonischen Restklassenhomomorphismen,* $\dot{\varrho}: \dot{P} \to \dot{R}$ *der von* ϱ *induzierte Homomorphismus mit* $\tau \circ \varrho = \dot{\varrho} \circ \sigma$. *Dann gilt* stab $(\varrho) =$ stab $(\dot{\varrho})$.

Beweis. Sei $\boldsymbol{D}: R \to \mathscr{D}_N(\varrho)$ die universelle ϱ-Derivation der Ordnung N, $(\dot{\boldsymbol{D}}_N, \pi_N)$ die universelle τ-Ausdehnung von $\boldsymbol{D}$. Dann ist nach (1. 3. 5) und (1. 4. 3) $\dot{\boldsymbol{D}}_N$ universelle $\tau \circ \varrho$-Derivation der Ordnung N. Wegen $\tau \circ \varrho = \dot{\varrho} \circ \sigma$ kann man $\dot{\boldsymbol{D}}_N$ auch erhalten, indem man zunächst die triviale Derivation von P vermöge σ universell ausdehnt und dann die universelle $\dot{\varrho}$-Ausdehnung davon bildet. Die universelle σ-Ausdehnung der trivialen Derivation von P ergibt nach der Konstruktion (1. 3. 6) aber die triviale Derivation von $\dot{P}$. Mit (1. 4. 3) folgt: $\dot{\boldsymbol{D}}_N$ ist auch die universelle $\dot{\varrho}$-Derivation der Ordnung N. $\varphi_N(\varrho)$ und $\varphi_N(\dot{\varrho})$ seien die in (2. 1) erklärten Homomorphismen. Dann induziert π_N genau einen Homomorphismus $\theta_N: \mathscr{D}_N(\varrho)/\mathfrak{M}_N(\varrho) \to \mathscr{D}_N(\dot{\varrho})/\mathfrak{M}_N(\dot{\varrho})$ mit $\theta_N \circ \varphi_N(\varrho) = \varphi_N(\dot{\varrho}) \circ \pi_N$; denn es gilt $\pi_N\big(\text{Ker}\,(\varphi_N(\varrho)) = \pi_N(\mathfrak{M}_N(\varrho)) = \pi_N(\mathfrak{m} \cdot \mathscr{D}_N(\varrho)) = \mathfrak{m} \cdot \mathscr{D}_N(\dot{\varrho}) = \mathfrak{M}_N(\dot{\varrho}) = \text{Ker}\,(\varphi_N(\dot{\varrho}))\big)$. Mit den analogen Bezeichnungen für M hat man so für alle $M \geqq N$ das folgende kommutative Diagramm kanonischer Homomorphismen, in dem alle kleinen Vierecke kommutativ sind:



Da $\varphi_N(\varrho)$ surjektiv ist, ist dann auch das äußere Viereck kommutativ, d. h. es gilt $\theta_M \circ \tilde{\eta}_n^m(\varrho) = \tilde{\eta}_n^m(\dot{\varrho}) \circ \theta_N$. Wir zeigen nun, daß θ_N und θ_M Isomorphismen sind. Aus der Definition des Stabilitätsindex ergibt sich auf Grund dieser Tatsache dann sofort stab (ϱ) = stab $(\dot{\varrho})$. Zunächst ist θ_N (und analog θ_M) surjektiv, da π_N und $\varphi_N(\dot{\varrho})$ surjektiv sind. Um zu zeigen, daß θ_N (und analog θ_M) auch injektiv ist, benutzen wir die Konstruktion von π_N aus (1. 3. 6): π_N ist der kanonische Homomorphismus von $\mathfrak{D}_N(\varrho)$ modulo $\mathfrak{N}$, wobei $\mathfrak{N}$ nach dem Zusatz in (1. 3. 6) erzeugt wird von

$$\{D^\nu(\varrho(y)) \mid y \in \mathfrak{a}, \nu \in N\} = D^0(\varrho(\mathfrak{a})),$$

da $D^\nu \circ \varrho = 0$ für alle $\nu \geqq 1$. Außerdem gilt nach Voraussetzung $\varrho(\mathfrak{a}) \leqq \mathfrak{m}$, also ist Ker $(\pi_N) \leqq \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{D}_N(\varrho) = \mathfrak{M}_N(\varrho)$. Da ferner $\pi_N(\mathfrak{M}_N(\varrho)) = \mathfrak{M}_N(\dot{\varrho})$ ist, wie oben gezeigt, folgt $\pi^{-1}(\text{Ker}\,(\varphi_N(\dot{\varrho}))) = \mathfrak{M}_N(\varrho) = \text{Ker}\,(\varphi_N(\varrho))$.

Sei nun $x \in \mathfrak{D}_N(\varrho)$ und $\theta_N \circ \varphi_N(\varrho)\,(x) = 0$, so hat man $\varphi_N(\dot{\varrho}) \circ \pi_N(x) = 0$, d. h. $x \in \pi_N^{-1}\,\text{Ker}\,(\varphi_N(\dot{\varrho})) = \text{Ker}\,(\varphi_N(\varrho))$. Also ist $\varphi_N(\varrho)\,(x) = 0$, d. h. θ_N ist injektiv. q. e. d.

(3. 3) Wählt man speziell $\mathfrak{a} = \varrho^{-1}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{p}$, so ist $\dot{P}$ ein Körper und daher $\dot{\varrho}$ injektiv. Man sieht daraus, daß man die Berechnung von stab (ϱ) stets auf folgenden Fall zurückführen kann:

P ist ein Körper, R ein lokaler Ring, der P enthält und ϱ die Inklusionsabbildung. (Insbesondere ist das der charakteristikgleiche Fall!) Als bemerkenswerten Spezialfall erhält man

(3. 4) Korollar. *Seien $P \leqq R$ lokale Ringe mit den Restklassenkörpern $\dot{P}$ und $\dot{R}$, $\mathfrak{p}$ das maximale Ideal von P und $\mathfrak{p} \cdot R$ das maximale Ideal von R. Dann gilt:* stab (R, P) = stab $(\dot{R}, \dot{P})$.

Man hat in diesem („schwach unverzweigten") Fall also alles auf den Fall einer Körpererweiterung reduziert.

4. Separable Körpererweiterungen

(4. 1) Satz. *Sei $k \leqq K$ eine separable Körpererweiterung. Dann gilt: Für alle endlichen $N \leqq M$ ist $\eta_N^M : \mathfrak{D}_N(K, k) \to \mathfrak{D}_M(K, k)$ injektiv.* (Dabei sind die Differentiationen bezüglich der Inklusionsabbildung $k \hookrightarrow K$ gemeint.)

Beweis. 1. Fall: K endlich erzeugt über k. Sei $\{X_1, \ldots, X_r\}$ eine separierende Transzendenzbasis von K über k, $K' = k(X_1, \ldots, X_r)$. Dann ist K endliche separabel algebraische Erweiterung von K', also $K = K'[z] \cong K'[Z]/f(Z)$ mit $f'(z) \neq 0$, wobei $f'(Z)$ die formale Ableitung des Polynoms $f(Z)$ nach Z bezeichnet.

Nach (1. 3. 7) und (1. 3. 9) hat man zunächst

$$\mathfrak{D}_N(K', k) = K'[X_i^{(\nu)} \mid i = 1, \ldots, r, \nu \in N, \nu \geqq 1]$$

Polynomring über K' in Unbestimmten $X_i^{(\nu)}$, und für die universelle Derivation $\boldsymbol{D}$ der Ordnung N von K' über k gilt $D^0 X_i = X_i$ und $D^\nu X_i = X_i^{(\nu)}$ für alle $i = 1, \ldots, r$, $\nu \in N$, $\nu \geqq 1$.

Die universelle Derivation $\boldsymbol{\delta}_N$ der Ordnung N von K über k ist die universelle Ausdehnung von $\boldsymbol{D}$ bezüglich der Inklusionsabbildung. Nach (1. 3. 8) erhält man sie folgendermaßen:

$\mathfrak{D}_N(K, k) = K \underset{K'}{\otimes} \mathfrak{D}_N(K', k)\,[Z^{(\nu)} \mid \nu \in N, \nu \geqq 1]/(\Delta^\nu f \mid \nu \in N, \nu \geqq 1)$ mit Unbestimmten $Z^{(\nu)}$. Sei $f(Z) = \sum_j a_j \cdot Z^j$. Aus der Produktregel folgt

$$\Delta^\nu(a_j \cdot Z^j) = j \cdot a_j z^{j-1} \cdot Z^{(\nu)} + \text{Polynom in } Z^{(l)} \text{ mit } l < \nu.$$

Das ergibt $\Delta^\nu f = f'(z) \cdot Z^{(\nu)} +$ Polynom in $Z^{(l)}$ mit $l < \nu$.

Wegen $f'(z) \neq 0$ folgt daraus durch Induktion nach der Anzahl der $Z^{(\nu)}$:

1. $(\Delta^\nu f \mid \nu \in N, \nu \geqq 1) \cap K \underset{K'}{\otimes} \mathfrak{D}_N(K', k) = (0)$

2. $\mathfrak{D}_N(K, k) = K \underset{K'}{\otimes} \mathfrak{D}_N(K', k)$, da jedes $Z^{(\nu)}$ modulo den angegebenen Relationen einem Element von $K \underset{K'}{\otimes} \mathfrak{D}_N(K', k)$ kongruent ist (vgl. [2] (2. 1)).

Man hat somit für alle N

$$\mathfrak{D}_N(K, k) = K \underset{K'}{\otimes} \mathfrak{D}_N(K', k) \cong K[X_i^{(\nu)} \mid i = 1, \ldots, r, \nu \in N, \nu \geqq 1]$$

Polynomring in den $X_i^{(\nu)}$ über K, $\delta_N^\nu(X_i) = X_i^{(\nu)}$ für $\nu \geqq 1$ und δ_N^0 die Inklusionsabbildung von K nach $K[X_i^{(\nu)}]$. Sei nun $M \geqq N$. η_N^M ist ein K-Algebrahomomorphismus mit $\eta_N^M \circ \delta_N^\nu = \delta_M^\nu$ für alle $\nu \in N$. Es folgt:

η_N^M ist die kanonische Injektion des Polynomrings $K[X_i^{(\nu)} \mid i = 1, \ldots, r, \nu \in N, \nu \geqq 1]$ in den Polynomring $K[X_i^{(\mu)} \mid i = 1, \ldots, r, \mu \in M, \mu \geqq 1]$ und daher injektiv. q. e. d.

2. Fall: K nicht notwendig endlich erzeugt über k.

Wähle für jedes $y \in K$ eine Unbestimmte X_y und stelle K als Restklassenring des Polynomrings $S = k[X_y \mid y \in K]$ vermöge des kanonischen k-Homomorphismus ω mit $\omega(X_y) = y$ dar. Sei $\mathfrak{n} = \mathrm{Ker}\,(\omega)$. Seien $\boldsymbol{D}_N$ und $\boldsymbol{D}_M$ die universellen Derivationen der Ordnungen N und M von S über k. Nach (1. 3. 6), (1. 3. 7) und der Definition von η_N^M hat man dann für alle $N \subseteqq M$ das kommutative Diagramm kanonischer Homomorphismen:

$$\begin{array}{ccc}
k[X_y^{(\nu)} \mid y \in K, \nu \in N] = \mathfrak{D}_N(S, k) & \xrightarrow{\eta_N^M(S,k)} & \mathfrak{D}_M(S, k) = k[X_y^{(\mu)} \mid y \in K, \mu \in M] \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathfrak{D}_N(K, k) & \xrightarrow{\eta_N^M(K,k)} & \mathfrak{D}_M(K, k) \\
\| & & \| \\
k[X_y^{(\nu)} \mid y \in K, \nu \in N]/(D_N^\nu(\mathfrak{n}) \mid \nu \in N) & & k[X_y^{(\mu)} \mid y \in K, \mu \in M]/(D_M^\mu(\mathfrak{n}) \mid \mu \in M)
\end{array}$$

$\eta_N^M(S, k)$ ist die kanonische Injektion der Polynomringe. Wäre $\eta_N^M(K, k)$ nicht injektiv, so gäbe es ein Polynom $f \in \mathfrak{D}_N(S, k)$ und endlich viele Polynome $n_j \in \mathfrak{n}$, $g_{\mu j} \in \mathfrak{D}_M(S, k)$ mit $f \notin (D_N^\nu(\mathfrak{n}), \nu \in N)$, aber $f = \sum_{\substack{\mu \in M \\ j}} g_{\mu j} D_M^\mu n_j \in (D_M^\mu(\mathfrak{n}) \mid \mu \in M)$.

Wähle eine endliche Teilmenge I von K, so daß gilt: $f \in k[X_y^{(\nu)} \mid y \in I, \nu \in N]$, $n_j \in k[X_y \mid y \in I]$, $g_{\mu j} \in k[X_y^{(\mu)} \mid y \in I, \mu \in M]$ für alle j. Sei $K' = k(I)$. Dann ist K' endlich erzeugt über k. Andererseits folgt aus dem analogen Diagramm für $S' = k[X_y \mid y \in K']$ und K' statt S und K, daß $\mathrm{Ker}\,(\eta_N^M(K', k)] \neq 0$ ist. Nach Voraussetzung ist aber K separabel über k, also ist K' separabel und endlich erzeugt über k. Nach dem 1. Fall also $\eta_N^M(K', k)$ injektiv. Das ist ein Widerspruch, also war schon $\eta_N^M(K, k)$ injektiv. q. e. d.

Unter Benutzung von [2] (1. 3. 3) läßt sich dieser Beweis etwas kürzer führen: Es ist $K = \varinjlim K'$, wobei K' alle über k endlich erzeugten Teilkörper von K durchläuft und der direkte Limes bezüglich der Inklusionsabbildungen gebildet ist. Nach [2] (1. 3. 3) hat man $\mathfrak{D}_N(K, k) = \varinjlim \mathfrak{D}_N(K', k)$ bezüglich der kanonischen Abbildungen. Auf Grund der Charakterisierung der η_N^M durch $\eta_N^M \circ D_N^\nu = D_M^\nu$ für alle $\nu \in N$ erhält man daraus $\eta_N^M(K, k) = \varinjlim \eta_N^M(K', k)$, und da nach dem 1. Fall alle $\eta_N^M(K', k)$ injektiv sind, ist auch $\eta_N^M(K, k)$ injektiv. q. e. d.

Aus (4. 1) und (3. 4) folgt noch:

(4. 2.) Korollar. *Seien $P \subseteq R$ lokale Ringe mit den Restklassenkörpern $\dot{P}$ und $\dot{R}$, $\mathfrak{p}$ das maximale Ideal von P, $\mathfrak{p} \cdot R$ das maximale Ideal von R. Ferner sei $\dot{R}$ separabel über $\dot{P}$. Dann gilt* stab $(R, P) = 1$.

5. Diskrete Bewertungsringe mit separablen Restklassenkörpern

(5. 1) Hauptsatz. *Es sei R ein diskreter einrangiger Bewertungsring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$, P ein lokaler Unterring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \cap P \neq (0)$. Ferner sei $R/\mathfrak{m}$ separabel über $P/\mathfrak{p}$ und $e = e(R, P)$ definiert durch $\mathfrak{p} \cdot R = \mathfrak{m}^e$. Dann gilt: $e(R, P) =$* stab (R, P).

(Falls auch P ein diskreter Bewertungsring ist, ist e der übliche Verzweigungsindex von R über P, vgl. [3] dort Verzweigungsordnung genannt).

Beweis. Indem man von $R \supseteq P$ zu $R/\mathfrak{p} \cdot R \supseteq P/\mathfrak{p}$ übergeht, genügt es nach der Reduktion (3. 2), den folgenden Satz zu beweisen.

(5. 2) Satz. *Sei R mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ ein lokaler Ring, $\mathfrak{m}$ nilpotentes Hauptideal, $e = e(R) =$ Min $\{l \mid \mathfrak{m}^l = (0)\}$, P ein in R enthaltener Körper, so daß $R/\mathfrak{m}$ separabel über P ist. (P dabei mit $P + \mathfrak{m}/\mathfrak{m}$ identifiziert.) Dann gilt: $e(R) =$* stab (R, P).

Beweis. Zunächst sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $e > 1$ vorausgesetzt, da für $e = 1$ die Behauptung in (4. 2) enthalten ist.

Wegen $\mathfrak{m}^e = (0)$ ist R komplett. Da $R/\mathfrak{m}$ separabel über P ist, gibt es also einen Vertreterkörper K von $R/\mathfrak{m}$ in R mit $K \supseteq P$ (vgl. [6]). Ferner ist $R = K + \mathfrak{m} = K[u]$, wobei u ein Element mit $\mathfrak{m} = R \cdot u$ bezeichnet.

Sei $\mu : K[X] \to K[u] = R$ der kanonische Homomorphismus des Polynomrings $K[X]$ mit $\mu(X) = u$. Dann ist Ker $(\mu) = (X^e)$; denn Ker (μ) ist jedenfalls ein Hauptideal (f), und wegen $u^e = 0$ ist f ein Teiler von X^e. Dann ist aber $(f) = (X^l)$ mit $l \leqq e$, also $l = e$ nach Wahl von e.

Sei nun mit analogen Bezeichnungen wie (1. 3. 8):

$\boldsymbol{D}_N$ die universelle Derivation der Ordnung N von K über P, $\boldsymbol{\delta}_N$ die universelle Derivation der Ordnung N von R über P, $B'_N = R \underset{K}{\otimes} \mathscr{D}_N(K, P)\,[X^{(\nu)} \mid \nu = 1, \ldots, n]$, $\boldsymbol{\Delta}_N : K[X] \to B'_N$ die Derivation mit $\Delta^0_N X = u \otimes 1$, $\Delta^\nu_N X = X^{(\nu)}$ für $\nu \geqq 1$ und $\Delta^\nu_N(y) = 1 \otimes D^\nu y$ für alle $y \in K$, $\nu \in N$; $\gamma_N : B'_N \to B'_N/(\Delta^1_N X^e, \ldots, \Delta^n_N X^e) = \mathscr{D}_N(R, P)$ der kanonische Homomorphismus. Dann ist $\delta_N \circ \mu = \gamma_N \circ \Delta_N$.

Sei ferner

$$\Phi_N : B' \to \mathscr{D}_N(K, P)\,[X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}] \cong R/\mathfrak{m} \underset{K}{\otimes} \mathscr{D}_N(K, P)\,[X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}] \cong B'/\mathfrak{m} \cdot B'$$

der kanonische Homomorphismus und $\bar{\boldsymbol{\Delta}}_N = \Phi_N \circ \boldsymbol{\Delta}_N$. Dann ist $\bar{\boldsymbol{\Delta}}_N$ eine Derivation der Ordnung N von $K[X]$ mit $\bar{\Delta}^0_N X = 0$, $\bar{\Delta}^\nu_N X = X^{(\nu)}$ für $\nu \geqq 1$ und $\bar{\Delta}^\nu_N(y) = D^\nu_N y$ für alle $y \in K$, $\nu \in N$. Sei wie in (2. 1) $\varphi_N : \mathscr{D}_N(R, P) \to \mathscr{D}_N(R/P)/\mathfrak{M}_N$. Dann induziert γ_N ein $\bar{\gamma}_N$ mit $\bar{\gamma}_N \circ \Phi_N = \varphi_N \circ \gamma_N$. Mit φ_N und γ_N ist auch $\bar{\gamma}_N$ surjektiv. $\bar{\gamma}_N$ ist der kanonische Homomorphismus

$$\bar{\gamma}_N : \mathscr{D}_N(K, P)\,[X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}] \to \mathscr{D}_N(K, P)\,[X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}]/(\bar{\Delta}^1_N X^e, \ldots, \bar{\Delta}^n_N X^e).$$

Sei nun $M \supseteq N$. Wir definieren einen Homomorphismus

$$\mathsf{H}^M_N : \mathscr{D}_N(K, P)\,[X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}] \to \mathscr{D}_M(K, P)\,[X^{(1)}, \ldots, X^{(m)}]$$

durch $\mathsf{H}_N^M \mid \mathscr{D}_N(K, P) = \eta_N^M(K, P)$ und $\mathsf{H}_N^M(X^{(\nu)}) = X^{(\nu)}$ für alle $\nu \in N$. Man hat dann das kommutative Diagramm kanonischer Homomorphismen:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{D}_N(K,P)[X^{(1)},\ldots,X^{(n)}] & \xrightarrow{\mathsf{H}_N^M} & \mathscr{D}_M(K,P)[X^{(1)},\ldots,X^{(m)}] \\ \downarrow{\scriptstyle \bar{\gamma}_N} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\gamma}_M} \\ \mathscr{D}_N(K,P)[X^{(1)},\ldots,X^{(n)}]/(\bar{\Delta}_N^1 X^e,\ldots,\bar{\Delta}_N^n X^e) & \xrightarrow[\tilde{\eta}_N^M]{} & \mathscr{D}_M(K,P)[X^{(1)},\ldots,X^{(m)}]/(\bar{\Delta}_M^1 X^e,\ldots,\bar{\Delta}_M^m X^e) \\ \| & & \| \\ \mathscr{D}_N(R,P)/\mathfrak{M}_N & & \mathscr{D}_M(R,P)/\mathfrak{M}_M. \end{array}$$

Dabei ist H_N^M injektiv, weil nach (4. 1) wegen der Separabilität von K über P η_N^M injektiv ist. Auf Grund der Produktregel der Derivationen folgt ferner für jeden Abschnitt $L = \{0, 1, \ldots, l\}$

$$\bar{\Delta}_L^\nu X^e = \sum_{i_1+\cdots+i_e=\nu} \bar{\Delta}_L^{i_1} X \cdots \bar{\Delta}_L^{i_e} X \begin{cases} = 0 \text{ für } 1 \leqq \nu < e, \text{ da in jedem Summanden der Faktor } \bar{\Delta}^0 X = 0 \text{ auftritt.} \\ = (\bar{\Delta}_L^1 X)^e = X^{(1)e} \text{ für } \nu = e, \text{ da in allen anderen Summanden der Faktor } \bar{\Delta}_L^0 X = 0 \text{ auftritt.} \\ \in (X^{(2)}, \ldots, X^{(l)}) \text{ für } \nu > e, \text{ da jeder Summand einen Faktor } \bar{\Delta}_L^j X = X^{(j)} \text{ mit } j \geqq 2 \text{ enthält.} \end{cases}$$

Da wir $e > 1$ vorausgesetzt haben, ergibt das im Falle $L = \{0, 1\}$, daß

$$(0) = (\bar{\Delta}_L^1 X^e) = \operatorname{Ker}(\gamma_{\{0,1\}})$$

ist, also ist $\bar{\gamma}_{\{0,1\}}$ injektiv, also ein Isomorphismus.

Ferner folgt aus der obigen Formel für $\bar{\Delta}_L^\nu X^e$ für $L = M$:

$$\mathsf{H}_{\{0,1\}}^M(\mathscr{D}_{\{0,1\}}(K,P)[X^{(1)}]) \cap \operatorname{Ker}(\bar{\gamma}_M) \leqq \mathscr{D}_M(K,P)[X^{(1)}] \cap \begin{cases} (0) \text{ für } m < e \\ (X^{(1)e}, X^{(2)}, \ldots, X^{(m)}) \text{ für } \nu \geqq e \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (0) \text{ für } m < e \\ (X^{(1)e}) \text{ für } \nu \geqq e. \end{cases} \leqq \mathit{Ker}(\bar{\gamma}_M)$$

Da $\bar{\gamma}_{\{0,1\}}$ ein Isomorphismus und $\mathsf{H}_{\{0,1\}}^M$ injektiv ist, erhält man daraus

$$\operatorname{Ker}(\tilde{\eta}_1^m) = \begin{cases} (0) \text{ für } m < e \\ (\varphi_{\{0,1\}}(\delta_{\{0,1\}}^1 u)^e) = (\bar{\gamma}_{\{0,1\}}(X^{(1)e})) \neq (0) \text{ für } \nu \geqq e. \end{cases}$$

Nach Definition des Stabilitätsindex folgt daraus $\operatorname{stab}(R, P) = e$. q. e. d.

6. Bemerkungen zum Fall inseparabler Restklassenkörper

(6. 1) Sei $K \geqq k$ eine endlich erzeugte Körpererweiterung, $p > 0$ die Charakteristik von K. Für alle nichtnegativen ganzen Zahlen n bezeichne K_n das Körperkompositum von k und K^{p^n}. Da K über k endlich erzeugt ist, gibt es ein r mit K_r separabel über k.

Definition. $\operatorname{inex}(K, k) = \operatorname{Min}\{n \mid K_n$ *separabel über* $k\}$ *heißt der Inseparabilitätsexponent von* K *über* k (vgl. [2] (2. 5. 2)).

Aus [2], Satz (2. 5. 3) folgt:

(6. 2) Satz. $\operatorname{stab}(K, k) = p^r$, *wobei* $r = \operatorname{inex}(K, k)$ *ist.*

Im Falle einer schwach unverzweigten lokalen Ringerweiterung ergibt das zusammen mit (3. 2):

(6. 3) Korollar. *Seien $R \geqq P$ lokale Ringe mit den Restklassenkörpern $\dot{R}$ und $\dot{P}$, $\mathfrak{p}$ das maximale Ideal von P und $\mathfrak{p} \cdot R$ das maximale Ideal von R. Ferner sei $\dot{R}$ endlich erzeugt über $\dot{P}$, $p > 0$ die Charakteristik von $\dot{R}$ und $r = \operatorname{inex}(R, P)$. Dann gilt:* $\operatorname{stab}(R, P) = p^r$.

Auf allgemeinere Fälle, in denen sowohl eine inseparable Restklassenerweiterung als auch eine Verzweigung im maximalen Ideal auftritt, beabsichtigen wir an anderer Stelle zurückzukommen.

Literatur

[1] *R. Berger*, Über verschiedene Differentenbegriffe, Sitz.-Ber. Heidelberger Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. 1. Abh. 1960.

[2] *R. Berger*, Differentiale höherer Ordnung und Körpererweiterungen bei Primzahlcharakteristik, Sitz.-Ber. Heidelberger Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. 3. Abh. 1966.

[3] *H. Hasse*, Zahlentheorie, Berlin 1963.

[4] *H. Hasse* und *F. K. Schmidt*, Noch eine Begründung der Theorie der höheren Differentialquotienten in einem algebraischen Funktionenkörper einer Unbestimmten, insbes. Zusatz bei der Korrektur von F. K. Schmidt, J. reine angew. Math. **177** (1937), 215—237.

[5] *E. Kunz*, Die Primidealteiler der Differenten in allgemeinen Ringen, J. reine angew. Math. **204** (1960), 165—182.

[6] *P. Roquette*, Abspaltung des Radikals in vollständigen lokalen Ringen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **23** (1959), 75—113.

Mathematisches Institut der Universität des Saarlandes, 6600 Saarbrücken

Eingegangen 24. Februar 1969

Über das Reduzibilitätsideal eines Polynoms

Von *Wolfgang Gröbner* in Innsbruck

Herrn Professor Dr. Wolfgang Krull zum 70. Geburtstag

In einer Annalenarbeit des Jahres 1922 hat Emmy Noether [1] den Begriff „Reduzibilitätsform" eingeführt und den folgenden Satz bewiesen: „Jedem Polynom von $n \geqq 2$ Veränderlichen mit unbestimmten Koeffizienten läßt sich eine ganze rationale, ganzzahlige Funktion dieser Koeffizienten und weiterer Unbestimmten zuordnen, die Reduzibilitätsform; derart, daß für jedes spezielle Polynom gleichen Grades die notwendige und hinreichende Bedingung für absolute Irreduzibilität im Nichtverschwinden der Reduzibilitätsform gegeben ist."

Dieser Satz wurde von W. Krull in einer wichtigen Arbeit [2] wieder aufgegriffen und verwendet. Auch L. Reich hat vor kurzem in einigen neueren Arbeiten der algebraischen Geometrie einen analogen Satz neu eingeführt und bewiesen [4]. Bei der Bearbeitung des zweiten Teiles meines Hochschultaschenbuches über algebraische Geometrie war ich veranlaßt, den Satz von Emmy Noether neu zu bearbeiten und in ein mehr idealtheoretisches Gewand zu kleiden. Dabei tritt an die Stelle der *Reduzibilitätsform* ein *Reduzibilitätsideal* und dessen Nullstellengebilde.

Die etwas geänderte Ableitung und einige Anwendungen sollen nachfolgend mitgeteilt werden.

I. Herleitung der Relationen, welche die Reduzibilität einer Form anzeigen

Es ist für die formale Überlegung einfacher, wenn wir alles homogen formulieren. Es bedeute also $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, eine Form des Grades m im homogenen Polynomring $R[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ über einem Integritätsbereich R mit Einselement, dessen Quotientenkörper $K = \frac{R}{R}$ sei. Wir fragen zunächst darnach, ob f sich als Produkt von zwei Formen g und h der (positiven) Grade μ und ν darstellen läßt ($m = \mu + \nu$). Dann müssen die Koeffizienten von f gewissen Relationen genügen; zu deren Herleitung legen wir jetzt entsprechende Formen F, G, H mit unbestimmten Koeffizienten zugrunde:

$$
\begin{aligned}
(1)\quad F(x_0, x_1, \ldots, x_n) &= \Sigma\, a_{(i)} x^{(i)} \quad \text{mit } (i) = (i_0, i_1, \ldots, i_n), \\
&\qquad i_0 + i_1 + \cdots + i_n = m, \quad x^{(i)} = x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}, \\
G(x_0, x_1, \ldots, x_n) &= \Sigma\, b_{(j)} x^{(j)} \quad \text{mit } (j) = (j_0, j_1, \ldots, j_n), \\
&\qquad j_0 + j_1 + \cdots + j_n = \mu, \\
H(x_0, x_1, \ldots, x_n) &= \Sigma\, c_{(k)} x^{(k)} \quad \text{mit } (k) = (k_0, k_1, \ldots, k_n), \\
&\qquad k_0 + k_1 + \cdots + k_n = \nu.
\end{aligned}
$$

Die Koeffizienten $a_{(i)}$, $b_{(j)}$, $c_{(k)}$ seien Unbestimmte. Wir nehmen an, es gelte $F = GH$, also $m = \mu + \nu$, und erhalten durch Koeffizientenvergleich das folgende System von $\binom{m+n}{n}$ Relationen:

$$a_{(i)} = \Sigma\, b_{(j)} c_{(k)} \quad \text{(Summe über } (j) + (k) = (i)\text{).} \tag{2}$$

Das Erfülltsein dieser Gleichungen ist *notwendig und hinreichend* für das Bestehen von $F = GH$, d. h. dafür, daß die Form F in das Produkt von zwei Formen G und H der Grade μ bzw. ν zerfällt. Wir müssen daraus aber noch ein Kriterium ableiten, das nur die Koeffizienten $a_{(i)}$ von F enthält.

Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir die folgenden Bezeichnungen für die von den Unbestimmten $a_{(i)}$, $b_{(j)}$, $c_{(k)}$ erzeugten Polynomringe ein:

$$\begin{aligned} \Omega_a &= R[\ldots, a_{(i)}, \ldots], \\ \Omega_{bc} &= R[\ldots, b_{(j)}, \ldots, c_{(k)}, \ldots], \\ \Omega_{abc} &= R[\ldots, a_{(i)}, \ldots, b_{(j)}, \ldots, c_{(k)}, \ldots] \end{aligned} \tag{3}$$

und für die Relationen (2) die Abkürzungen:

$$a_{(i)} = \varphi_{(i)} \text{ mit } \varphi_{(i)} = \Sigma\, b_{(j)} c_{(k)} \quad \text{(Summe wie in (2)).} \tag{4}$$

Diese Formeln vermitteln eine Abbildung der Elemente des Polynomringes Ω_a in Ω_{bc}, und umgekehrt eine Abbildung der Ideale von Ω_{bc} auf Ideale in Ω_a. Insbesondere wird das Nullideal von Ω_{bc} auf das Ideal

$$\mathfrak{a}_1 = \{\Phi \in \Omega_a \text{ mit } \Phi^* = 0\} \text{ in } \Omega_a \tag{5}$$

abgebildet, wenn Φ^* die nach der Substitution (4) resultierende Form in Ω_{bc} ist. Wir bemerken sofort, daß $\mathfrak{a}_1$ Primideal ist, weil aus $\Phi_1\Phi_2 \in \mathfrak{a}_1$ folgt $\Phi_1^*\Phi_2^* = 0$, also $\Phi_1^* = 0 \vee \Phi_2^* = 0$, also $\Phi_1 \in \mathfrak{a}_1 \vee \Phi_2 \in \mathfrak{a}_1$, w. z. b. w.

Ferner bedeute $\mathfrak{A}$ das von den Relationen (2) bzw. (4) erzeugte Ideal:

$$\mathfrak{A} = (\ldots, a_{(i)} - \varphi_{(i)}, \ldots) \text{ in } \Omega_{abc}. \tag{6}$$

Das Verschwinden von $\mathfrak{A}$ für spezielle Werte der Koeffizienten $a_{(i)}$, $b_{(j)}$, $c_{(k)}$ ist, wie wir gesehen haben, *notwendig und hinreichend* dafür, daß die spezialisierte Form f gleich dem Produkt der spezialisierten Formen g und h sei.

Aus diesem Ideal $\mathfrak{A}$ leiten wir das *Eliminationsideal*

$$\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{A} \cap \Omega_a \tag{7}$$

ab und beweisen:

(i) $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$ ist Primideal in Ω_a; daher schreiben wir von nun an dafür $\mathfrak{a}$ ohne Index;

(ii) $\mathfrak{a} \neq (0)$;

(iii) Jede Nullstelle von $\mathfrak{a}$ läßt sich auf wenigstens eine Weise zu einer Nullstelle von $\mathfrak{A}$ in K oder in einem passenden Erweiterungskörper von K ergänzen;

Daraus folgt der Satz:

Das Verschwinden von $\mathfrak{a}$ für spezielle Werte der Koeffizienten einer Form f des Grades m ist notwendig und hinreichend dafür, daß f in einem passenden Erweiterungskörper von K in das Produkt zweier Formen der Grade m und $m - \mu$ zerfalle.

II. Beweis von (i)

Ist $\Phi \in \mathfrak{a}_2$, so hat man $\Phi = \sum \Psi_{(i)}(a_{(i)} - \varphi_{(i)})$ mit $\Psi_{(i)} \in \Omega_{abc}$, also $\Phi^* = 0$ und daher $\Phi \in \mathfrak{a}_1$, d. h. es gilt $\mathfrak{a}_2 \leqq \mathfrak{a}_1$.

Ist umgekehrt $\Phi \in \mathfrak{a}_1$, so hat man $\Phi^* = \Phi(\varphi_{(i)}) = 0$, daher

$$\Phi(a_{(i)}) = \Phi(a_{(i)}) - \Phi(\varphi_{(i)}) = \sum \Psi_{(i)}(a_{(i)} - \varphi_{(i)}) \text{ mit } \Psi_{(i)} \in \Omega_{abc}$$

auf Grund des nachfolgenden Hilfssatzes. Daraus folgt $\mathfrak{a}_1 \leqq \mathfrak{a}_2$ und damit die Behauptung. Daß $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1$ Primideal ist, wurde oben schon begründet.

Hilfssatz. *Es bedeute $\Phi(y_1, \ldots, y_n)$ ein Polynom in $R[y_1, \ldots, y_n]$; dann gilt eine Identität*

$$(8) \quad \Phi(y_1, \ldots, y_n) - \Phi(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)\Psi_i \text{ mit } \Psi_i \in R[y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n].$$

In der Tat hat man im Falle $n = 1$, $\Phi(y) = \sum_{i=0}^{m} a_i y^i$ sofort

$$\Phi(y) - \Phi(z) = \sum_{i=1}^{m} a_i(y^i - z^i) = (y - z) \sum_{i=1}^{m} a_i(y^{i-1} + y^{i-2}z + \cdots + z^{i-1}).$$

Nun schließe man sukzessive:

$$\begin{aligned}
&\Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n) - \Phi(z_1, y_2, \ldots, y_n) = (y_1 - z_1)\Psi_1 \text{ mit } \Psi_1 \in R[y, z],\\
&\Phi(z_1, y_2, \ldots, y_n) - \Phi(z_1, z_2, \ldots, y_n) = (y_2 - z_2)\Psi_2 \text{ mit } \Psi_2 \in R[y, z],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\Phi(z_1, z_2, \ldots, y_n) - \Phi(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (y_n - z_n)\Psi_n \text{ mit } \Psi_n \in R[y, z];
\end{aligned}$$

Addition aller dieser Gleichungen liefert die zu beweisende Relation (8)[1]).

III. Beweise von (ii) und (iii)

Wäre $\mathfrak{a} = (0)$ in Ω_a, so besäße nach einem bekannten Satz[2]) das Ideal $\mathfrak{A}$ in Ω_{abc} eine Nullstelle, in welcher die Werte der Variablen $a_{(i)}$ unabhängige Unbestimmte wären; das bedeutete, daß die Form $F(x)$, mit allgemeinen Koeffizienten angesetzt, immer reduzibel wäre; sie müßte unter allen Umständen in das Produkt von zwei Formen der Grade μ und $m - \mu$ zerfallen, deren Koeffizienten gewisse algebraische Funktionen der $a_{(i)}$ wären. Das widerspricht aber der Tatsache, daß absolut irreduzible Formen eines jeden Grades m existieren, sobald $n \geqq 2$ ist[3]).

Beim Beweise von (iii) beachte man, daß die rechten Seiten von (2) bihomogen vom Grade 1 in den Variablen $b_{(j)}$ und $c_{(k)}$ sind; jedes $b_{(j)}$ kommt mit jedem $c_{(k)}$ multipliziert in genau einer Relation einmal vor. Insbesondere haben wir die Relation

$$(9) \qquad a_{m,0,\ldots,0} = b_{\mu,0,\ldots,0}c_{\nu,0,\ldots,0}.$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, daß $a_{m,0,\ldots,0} \neq 0$ ist, und daß daher auch $b_{\mu,0,\ldots,0}$ und $c_{\nu,0,\ldots,0}$ nicht verschwindende Werte haben müssen.

---

[1]) Dieser Satz gilt auch, wenn die Polynome und Polynomringe durch formale beziehungsweise holomorphe Potenzreihen und Potenzreihenringe ersetzt werden.

[2]) Vgl. Hochschultaschenbuch „Algebraische Geometrie 2. Teil", Kapitel I, § 5, Satz 8.

[3]) Das kann mit Hilfe des Eisensteinschen Kriteriums (vgl. [3], I, S. 196) gezeigt werden. So ist z. B. jede Form $x_0^m + x_1^m + \cdots + x_n^m$ irreduzibel, wenn m nicht durch die Körpercharakteristik teilbar ist.

Wir können diese auch der Relation (9) entsprechend frei wählen. Dann ist das Ideal $\mathfrak{A}$ in bezug auf jede Variable $b_{(j)}$ und $c_{(k)}$ *normiert* und wir dürfen nach einem bekannten Satz[4]) unmittelbar auf die Aussage (iii) schließen.

Wenn daher die Koeffizienten $a_{(j)}$ spezielle Werte besitzen, die eine Nullstelle von $\mathfrak{a}$ darstellen, so kann diese Nullstelle immer auf wenigstens eine Weise zu einer solchen von $\mathfrak{A}$ ergänzt werden. Das heißt, es lassen sich zugehörige Werte $b_{(j)}$ und $c_{(k)}$ in dem von den Koeffizienten $a_{(i)}$ erzeugten Körper K oder einem passenden algebraischen Erweiterungskörper desselben berechnen, die alle Relationen (2) erfüllen. Die damit hergestellten Formen g und h genügen der Gleichung $f = gh$. Die Umkehrung ist ohne weiteres klar.

IV. Das Reduzibilitätsideal

Wir haben soeben ein Ideal $\mathfrak{a}$ in Ω_a konstruiert, dessen Nullstellengebilde genau den Koeffizienten derjenigen Formen $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ entspricht, welche in das Produkt zweier Formen zerfallen, von denen die erste den Grad μ, die zweite den Grad $m - \mu$ besitzt. Ist der Grad m von f gegeben, so gibt es nur endlich viele Möglichkeiten für μ, nämlich $\mu = 1, 2, \ldots, m-1$; da aber beide Formen noch vertauscht werden dürfen, genügt bereits die Hälfte: $\mu = 1, 2, \ldots, \left[\frac{m}{2}\right]$. Für jede dieser Möglichkeiten können wir die entsprechenden Ideale $\mathfrak{a}$ — wir wollen sie der Reihe nach mit $\mathfrak{a}_\mu\left(\mu = 1, 2, \ldots, \left[\frac{m}{2}\right]\right)$ bezeichnen — konstruieren, deren Nullstellen genau die entsprechend zerfallenden Formen liefern.

Will man ein Kriterium dafür, daß die Form $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *absolut irreduzibel*[5]) ist (d. h. auch in keinem Erweiterungskörper von K in das Produkt von zwei Formen positiven Grades zerfällt), so besteht dieses darin, daß die Koeffizienten dieser Form in keinem Nullstellengebilde $NG(\mathfrak{a}_\mu)$, d. h. nicht in

$$(10) \qquad NG(\mathfrak{a}_1) \cup NG(\mathfrak{a}_2) \cup \cdots \cup NG(\mathfrak{a}_r) = NG(\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_r), \quad r = \left[\frac{m}{2}\right]$$

enthalten sein dürfen. Wir nennen daher den Durchschnitt aller Ideale $\mathfrak{a}_\mu$ *das Reduzibilitätsideal der Form* $f(x)$ des Grades m und können sagen:

1. Satz. *Eine Form $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ des Grades m in $R[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ist genau dann absolut irreduzibel*[6]), *wenn die Koeffizienten $a_{(i)}$ von $f(x)$ nicht eine Nullstelle des Reduzibilitätsideals*

$$(11) \qquad \text{Red}\,(f) = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_r \qquad \left(r = \left[\frac{m}{2}\right]\right)$$

bestimmen. Jedes Ideal $\mathfrak{a}_\mu$ ist nach der in I *gezeigten Methode konstruiert und enthält als Nullstellen die Koeffizienten derjenigen Formen $f(x)$, welche in zwei Faktoren der Grade μ und $m - \mu$ zerfallen*[7]).

Die effektive Konstruktion einer Basis für das Reduzibilitätsideal ist im allgemeinen beschwerlich und umfangreich. Für manche Schlüsse allerdings genügt bereits das Wissen

---

[4]) Vgl. Hochschultaschenbuch „Algebraische Geometrie 2. Teil", Kapitel I, § 3, Satz 2.

[5]) Kriterien für relative Irreduzibilität über einem algebraisch nicht abgeschlossenen Körper sind viel schwieriger und kaum bekannt.

[6]) D. h. irreduzibel über jedem Erweiterungskörper K^* von $K = \frac{R}{R}$.

[7]) Wir bevorzugen hier die homogene Schreibweise; alle Sätze können natürlich ohne Schwierigkeit auf inhomogene Polynome übertragen werden.

um die Existenz dieses Reduzibilitätsideals. Nur im Falle $m = 2$, $n \geqq 2$, d. h. für eine quadratische Form

$$f(x) = \sum a_{ik} x_i x_k \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, n)$$

kann das Reduzibilitätsideal sofort angegeben werden: es ist ein Ideal in Ω_α, welches von allen 3-reihigen Unterdeterminanten der Matrix (a_{ik}) erzeugt wird[8]).

V. Spezialisierungen

Aus diesem Ergebnis können wir mit Hilfe des Satzes über Spezialisierungen eines Polynoms wichtige Folgerungen ziehen. Oft ist es nämlich erwünscht, etwas darüber zu wissen, ob ein durch Spezialisierung aus einem irreduziblen Polynom hervorgehendes Polynom wieder irreduzibel ist. Dafür wollen wir den folgenden Satz beweisen:

2. Satz. *Es bedeute $f(x)$ eine absolut irreduzible Form aus dem Polynomring $R[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ über $R = K[y_1, \ldots, y_s]$; der Grundkörper K sei unendlich und $n \geqq 2$. Dann sind fast alle Spezialisierungen $y_1 = \lambda_1, \ldots, y_s = \lambda_s$ $(\lambda_i \in K)$ derart, daß auch die spezialisierte Form $f^*(x) = [f(x)]_{y_i = \lambda_i}$ in $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ absolut irreduzibel ist.*

Zum Beweise bilden wir das Reduzibilitätsideal $\mathrm{Red}(f) = \mathfrak{a}$ *in* $\Omega_a = K[\ldots, a_{(i)}, \ldots]$, wo $a_{(i)}$ die unbestimmten Koeffizienten von $f(x)$ sind. Dann spezialisieren wir diese $a_{(i)}$ zu den in $f(x)$ vorliegenden Werten in $K[y_1, \ldots, y_s]$; dabei geht $\mathfrak{a}$ über in ein Ideal $\mathfrak{a}^*$ in $K[y_1, \ldots, y_s]$, das sicher nicht das Nullideal ist, weil $f(x)$ absolut irreduzibel über $K(y_1, \ldots, y_s)$ vorausgesetzt wurde. Nun wählen wir ein Polynom $G(y)$ aus $\mathfrak{a}^*$, das nicht identisch null ist, und lassen alle Spezialisierungen $y_i = \lambda_i (\in K)$ zu, bei denen $G(\lambda) \neq 0$ bleibt. Bedeutet $f^*(x)$ die bei einer solchen Spezialisierung aus $f(x)$ hervorgehende Form, so folgt, daß die Koeffizienten von $f^*(x)$ keine Nullstelle des Reduzibilitätsideals darstellen, d. h. daß $f^*(x)$ wieder absolut irreduzibel ist. Nur diejenigen Spezialisierungen sind auszuschließen, die a^* in das Nullideal überführen.

Das Ergebnis kann auch in der folgenden Weise ausgedrückt werden:

Korollar. *Ist $f(x)$ sowohl als Polynom in $K[x_1, \ldots, x_n]$, wie auch als Polynom in $R[x_1, \ldots, x_r]$ mit $R = K[x_{r+1}, \ldots, x_n]$ betrachtet $(2 \leqq r < n)$ absolut irreduzibel, so können die Variablen $x_{r+1}, \ldots, x_n$ in K (oder in einer passenden Erweiterung von K, falls K endlich ist) so spezialisiert werden: $x_i = \lambda_i$ $(i = r+1, \ldots, n)$, daß das spezialisierte Polynom $f(x_1, \ldots, x_r, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n)$ absolut irreduzibel in $K[x_1, \ldots, x_r]$ ist.*

Das ist eine unmittelbare Folge aus dem vorausgehenden Satz. Hier kommt aber eine unangenehme Voraussetzung deutlich zum Vorschein, nämlich, daß $f(x)$ auch in $R[x_1, \ldots, x_r]$ *absolut* irreduzibel sei, was in konkreten Fällen schwer festzustellen ist. Sie kann aber in der vorliegenden Formulierung nicht unterdrückt werden, wie die folgenden Beispiele zeigen:

1. *Beispiel*: $f(x) = \sum g_{ik} \Phi_1^i \Phi_2^k$ (Summe über $i + k = m$) mit $\Phi_1, \Phi_2 \in K[x_1, \ldots, x_r]$; $g_{ik} \in K[x_{r+1}, \ldots, x_n]$. Man sieht leicht, daß bei *jeder* Spezialisierung der Variablen $x_{r+1}, \ldots, x_n$ in K eine in Φ_1, Φ_2 homogene Form des Grades m über K entsteht, die (falls $m \geqq 2$) in K oder einer passenden algebraischen Erweiterung von K reduzibel ist.

2. *Beispiel*: $f(x) = \Phi_1^3 + g(\Phi_2^3 - 3\Phi_1\Phi_2\Phi_3) + g^2\Phi_3^3$ mit $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \in K[x_1, \ldots, x_r]$; $g \in K[x_{r+1}, \ldots, x_n]$. $f(x)$ ist im allgemeinen irreduzibel, außer wenn Φ_1, Φ_2, Φ_3 einen

[8]) Vgl. etwa: Matrizenrechnung, B. I. Hochschultaschenbuch Nr. 103/103a, S. 133.

gemeinsamen Teiler besitzen oder wenn g gerade die dritte Potenz eines Polynoms aus $K[x_{r+1}, \ldots, x_n]$ ist; dagegen zerfällt $f(x)$ bei *jeder* Spezialisierung $g \to \gamma^3$ in das Produkt

$$f(x) = (\Phi_1 + \gamma\Phi_2 + \gamma^2\Phi_3)\,(\Phi_1^2 - \gamma\Phi_1\Phi_2 - \gamma^2\Phi_1\Phi_3 + \gamma^2\Phi_2^2 - \gamma^3\Phi_2\Phi_3 + \gamma^4\Phi_3^2)$$

über dem Körper $K(\gamma)$.

Man wird aber erwarten dürfen, daß die genannte Voraussetzung wegbleiben darf, wenn die Variablen vorher einer allgemeinen linearen Transformation unterworfen werden. Dann kann unser Resultat auch darauf angewendet werden, um folgenden wichtigen Satz von A. Seidenberg [5] neu zu beweisen: *Ist* $\mathfrak{p}$ *ein normales Primideal der Dimension* $d(\geqq 2)$ *in* $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, *und* $\Phi = t_0x_0 + t_1x_1 + \cdots + t_nx_n$, *so ist bei genügend allgemeiner Wahl der Koeffizienten* t *auch* $(\mathfrak{p}, \Phi)$ *wieder Primideal.*

Der Beweis wird in meinem demnächst erscheinenden Hochschultaschenbuch über algebraische Geometrie (2. Teil) ausgeführt. Der Satz ist auf *normale* Primideale eingeschränkt. Er gilt sicher nicht für allgemeine Primideale, wie Beispiele von *nicht perfekten Primidealen* $\mathfrak{p}$ zeigen[9]), bei denen $(\mathfrak{p}, \Phi)$ bei *jeder beliebigen* Auswahl der Form Φ $(\notin \mathfrak{p})$ eine triviale Komponente aufweist und also sicher nicht prim ist.

[9]) Vgl. hierzu meine Arbeit: Über Veronesesche Varietäten und deren Projektionen, Arch. d. Math. **16** (1965), 257—264.

Literatur

[1] *Emmy Noether*, Ein algebraisches Kriterium für absolute Irreduzibilität, Math. Ann. **85** (1922), 26—33.

[2] *W. Krull*, Parameterspezialisierungen in Polynomringen, Arch. d. Math. **1** (1948/49), 56—64, 129—137.

[3] *O. Perron*, Algebra, Berlin 1951.

[4] *L. Reich*, Über unirationale Scharen auf algebraischen Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. **167** (1966), 259—270; Verallgemeinerung eines Satzes von Bertini, Math. Ann. **171** (1967), 104—109.

[5] *A. Seidenberg*, The Hyperplane Sections of Normal Varieties, Trans. Amer. Math. Soc. **69** (1950), 357—386.

Institut für Mathematik, Innrain 52, A-6020 Innsbruck

Eingegangen 25. Februar 1969

Über Kreisquadrupel und Heronische Dreiecke

Von *J. E. Hofmann* in Ichenhausen

Herrn Professor Dr. Wolfgang Krull zum 70. Geburtstag

I. Das allgemeine Apollonische Berührungsproblem

1. Zur Problemstellung; Arten geometrischer Lösungen

Das sog. *ebene Berührungsproblem* fordert die *Bestimmung jener Kreise, von denen drei gegebene berührt werden* (Ausartungen zu Geraden und Punkten sind zulässig).

Es wird in der *Collectio*[1]) des Pappos von Alexandria an zwei Stellen behandelt: in der Einleitung zu Buch VII wird über die einschlägige Schrift des Apollonios berichtet[2]). In den nachfolgenden Einzelausführungen[3]) werden 23 Hilfssätze aufgestellt und bewiesen, die Pappos zum Verständnis der Apollonischen Ausführungen für nötig ansieht. Auch in Buch IV werden einschlägige Sätze wiedergegeben[4]). Hier wird angenommen, daß sich die drei Ausgangskreise je zu zweit berühren, daß also nach Hinzufügen eines der lösenden Kreise ein Quadrupel mit gewissen Symmetrie-Eigenschaften entsteht.

Die Andeutungen in Buch VII haben eine Reihe von Lösungen und Wiederherstellungen veranlaßt. Zunächst muß die Aufforderung erwähnt werden, mit der Fr. Viète seinen anfänglichen Rivalen und späteren Freund A. van Roomen herausgefordert hat[5]): *Einen Kreis zu bestimmen, der drei gegebene Kreise (in der Ebene) berührt.*

Roomen gab alsbald eine Lösung[6]). Er bestimmte die Mittelpunkte der gesuchten Kreise als Schnittpunkte von Hyperbeln. Dies entsprach nicht den Hinweisen bei Pappos und stellte daher Viète nicht zufrieden. Dieser gab jene allgemein bekannte wundervolle Konstruktion unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal[7]). Eine (unwesentliche)

---

[1]) *Collectio mathematica*, ed. Fr. Hultsch, Berlin 1876/78 (3 Bände). Vorausgegangen ist die lateinische Übersetzung von F. Commandino, Pesaro 1588 mit Titelauflagen, [2]ed. mit Zusätzen von C. Manolesse, Bologna 1660. Eine französische Übersetzung nach der griechischen Ausgabe stammt von P. Ver Eecke, Paris/Brügge 1932 mit Nachdruck Paris 1959.

[2]) Hultsch[1]), 1877, S. 644/48.

[3]) Hultsch[1]), 1877, S. 820/52.

[4]) Hultsch[1]), 1876, S. 194/232.

[5]) *Ad problema, quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus*, Paris 1595 = *Opera mathematica*, ed. Fr. van Schooten, Leiden 1646, S. 305/24, insbes. S. 324.

[6]) *Problema Apolloniacum*, Würzburg 1596. Zum Inhalt vgl. H. Bosmans, in: *Ann. Soc. sci. Brüssel* **29** (1905), S. 68/79.

[7]) *Apollonius Gallus*, Paris 1600 = *Opera*[5]), S. 325/38. Über Vorgeschichte, Einzelheiten und Nachwirken befindet sich eine *Thèse* von J. Grisard, Paris, in Vorbereitung.

Ergänzung stammt von M. Ghetaldi[8]). Tiefer dringt E. Torricelli in einem erst aus dem Nachlaß bekannt gewordenen Manuskript[9]) aus dem Jahr 1642. Hier werden zunächst jene Kegelschnitte (oder ihre Ausartungen zu Kreisen und Geraden) bestimmt, deren Punkte Mittelpunkte jener Kreise sind, von denen zwei Kreise (oder ihre Ausartungen zu Geraden und Punkten) berührt werden. Hieraus ergeben sich dann die Mittelpunkte jener Kreise, von denen die drei gegebenen Kreise berührt werden, als Schnittpunkte von Kegelschnitten. Alsdann folgen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal (sie sind jenen von Viète verwandt) und zahlreiche ergänzende Sätze. Offenkundig hatte Torricelli keine Kenntnis von Viète und Ghetaldi; er stützt sich nur auf die Angaben bei Pappos.

2. Der algebraische Lösungsgedanke von Descartes

Aus einer Bemerkung Viètes geht hervor, daß dieser auch an eine *algebraische* Behandlung des Problems gedacht hat[10]). Diese Anregung nimmt R. Descartes auf, nämlich im Brief an die Pfalzgräfin Elisabeth[11]) vom November 1643. Sein Verfahren ist zwar spezieller Natur, jedoch außerordentlich geschickt durchgeführt (Abb. 1).

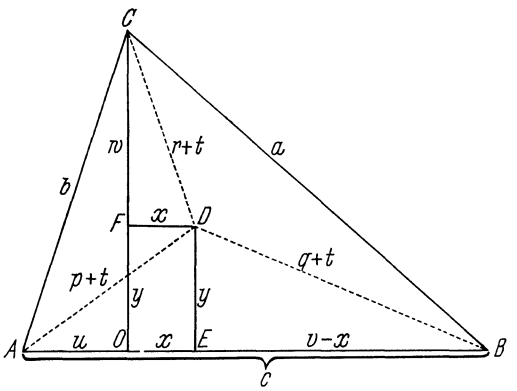


Abb. 1

Descartes geht aus vom Mittelpunktdreieck ABC (Seiten a, b, c) der drei gegebenen Kreise mit den Halbmessern p, q, r; auf die Ausartungen der gegebenen Kreise wird nicht eingegangen. Ist D der Mittelpunkt des gesuchten Kreises (Halbmesser t), dann haben wir im Fall der Figur, worin die sämtlichen der eingeführten Strecken als positiv angesehen werden, die drei Dreiecke BCD, CAD, ABD im Dreieck ABC. Descartes weiß, was damals bereits allgemein bekannt war, wie man die Fläche eines Dreiecks aus den Seiten bestimmen kann. Er sagt, folglich könne man aus der Flächensumme der Teildreiecke die Fläche des ganzen Dreiecks bestimmen und erhalte auf diesem Wege eine Gleichung für t; dies sei jedoch kompliziert und der benötigte Rechenaufwand beträchtlich. Deshalb bedient er sich im Anschluß an die Figur eines Verfahrens, das in modernisierter Form so ausgedrückt werden kann:

Der Fußpunkt der Höhe aus C auf AB wird Ursprung eines Koordinatensystems, worin $A(-u; 0)$ $B(v; 0)$, $C(0; w + y)$, $D(x; y)$ bestimmt sind. Nun ist

$$(p + t)^2 = (u + x)^2 + y^2, \tag{2. 1}$$

$$(q + t)^2 = (v - x)^2 + y^2, \tag{2. 2}$$

$$(r + t)^2 = w^2 + x^2. \tag{2. 3}$$

Wird (2. 2) von (2. 1) seitenweise subtrahiert, dann ist x aus t linear ausdrückbar; durch Einsetzen in (2. 3) ergibt sich eine quadratische Gleichung für t. Seiner Gewohnheit nach beläßt es Descartes mit dieser Andeutung; auch auf die verschiedenen Fälle, die sich aus möglichen Zeichen-Kombinationen vor p, q, r ergeben, geht er nicht ein.

[8]) *Supplementum Apollonii Galli*, Venedig 1607 = *Opera omnia*, ed. Z. Dadić, Zagreb 1968, S. 173/90. Die Ergänzung bezieht sich darauf, daß der Halbmesser eines Kreises gegeben wird, der durch zwei Punkte geht oder zwei Gerade oder zwei Kreise berührt oder durch einen Punkt geht und einen Kreis oder eine Gerade berührt oder eine Gerade und einen Kreis berührt.

[9]) *Opere* I, 1, ed. G. Loria, Faënza 1919, S. 239/92.

[10]) *Opera*[5]), S. 324: *Non dubito, quin algebristae idipsum in formulam δεδομένου conceptum absolvent, ut pote: Datis semidiametris singulis trium quorumlibet circulorum, una cum centrorum distantia, semidiameter quarti circuli eos contingentis, ac sui centri a reliquis centris distantia erit data.*

[11]) Der Brief ist erstmals abgedruckt in den *Lettres* III, ed. Cl. Clerselier, Paris 1667, S. 461/65 = *Œuvres* IV, ed. Ch. Adam-P. Tannery, Paris 1901, S. 37/42 = *Correspondance* VI, ed. Ch. Adam-G. S. Milhaud, Paris 1956, S. 52/56, lateinische Fassung in den *Epistolae* III, Amsterdam 1683, S. 296/99.

In einem zweiten Brief an die Pfalzgräfin[12]) vom Ende November 1643 wendet sich Descartes dem Sonderfall zu, daß sich je zwei der Ausgangskreise berühren[13]).

Jetzt ist

(2. 4) $$a = q + r, \quad b = r + p, \quad c = p + q.$$

Die Einzelrechnung wird wiederum nur angedeutet. Das mitgeteilte Schlußergebnis sieht in formal etwas vereinfachter Form so aus:

(2. 5) $$\{q^2r^2 + r^2p^2 + p^2q^2 - 2pqr(p + q + r)\}x^2 - 2pqr(qr + rp + pq)x + p^2q^2r^2 = 0.$$

Was diese Beziehung bedeutet, wird in Abschnitt 6 gesagt werden.

3. Newtons algebraisches Vorgehen

Auch I. Newton hat sich mit dem Berührungsproblem befaßt, und zwar an zwei im Druck zugänglichen Stellen: zunächst in den algebraischen Vorlesungen der Jahre 1673/83, die später unter dem Titel *Arithmetica universalis* an die Öffentlichkeit gekommen sind[14]), außerdem in den *Philosophiae naturalis principia mathematica*[15]) von 1687.

In den *Vorlesungen* will Newton zeigen, wie man Aufgaben verschiedener Art auf algebraischem Wege ansetzen und behandeln kann. In der letzten Vorlesung vom Sommer 1678 (Problem 43) wird die Aufgabe gelöst:

Einen Kreis zu bestimmen, der durch zwei Punkte A, B geht und eine Gerade g berührt (Abb. 2). Ich gebe nur den Hauptgedanken in verkürzter Form und etwas abgeänderten Bezeichnungen wieder.

C sei Mittelpunkt von $AB = 2c$. Das Mittellot $CE = b$ zu AB treffe g in E; $CD = d$ sei das Lot aus C auf g. Der Mittelpunkt M des gesuchten Kreises habe den Abstand $MC = x$ von AB; also ist $MA = MB = \sqrt{c^2 + x^2}$ der Kreishalbmesser, somit

(3. 1) $$\sqrt{c^2 + x^2} : (b - x) = d : b, \text{ usw.}$$

Offensichtlich ist diese Lösung aus der des nicht näher erwähnten Sonderfalles hervorgegangen, bei dem $AB \parallel g$ ist. Im Grunde wird C als Ursprung eines Koordinatensystems angesehen, dessen X-Achse auf die Gerade CE fällt.

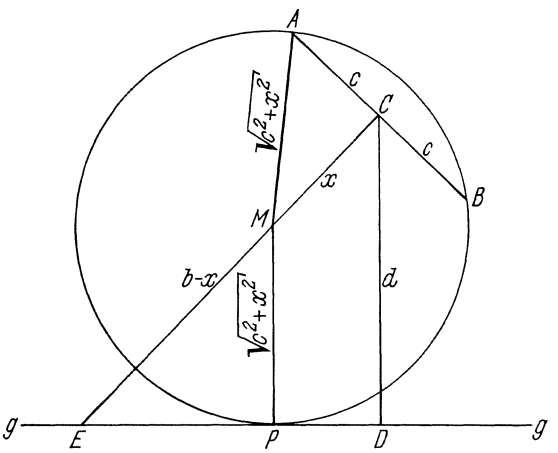


Abb. 2

[12]) *Lettres* III (1667), S. 465/68 = *Œuvres* IV (1901), S. 45/50 = *Correspondance* VI, S. 70/73 = *Epistolae* III, 299/301. — Nur am Rande sei vermerkt, daß sich in der *Introduction à la geometrie*, die wahrscheinlich von Godefroid de Haestrecht stammt, ein Stück auf die Bestimmung des Halbmessers einer Kugel bezieht, die vier sich paarweise von außen berührende Kugeln berührend umschließt. Die beste einschlägige Darstellung findet sich in M. Mersenne: *Correspondance* VII, ed. C. de Waard, Paris 1962, S. 453/62. Hier erscheint übrigens bereits die Formel für den Rauminhalt einer Pyramide, ausgedrückt aus den Halbmessern von vier Kugeln, die einander berühren und die Ecken der Pyramide zu Mittelpunkten haben. Dies ist jedoch nur dann möglich, wenn die drei Gegenkantenpaare der Pyramide die nämliche Summe haben.

[13]) Pappos[1]), *prop.* 10 und 15.

[14]) Diese Vorlesungen wurden ohne Zustimmung Newtons von seinem Nachfolger W. Whiston auf Grund des Manuskripts in der Universitätsbibliothek Cambridge veröffentlicht (Cambridge 1707), von Newton selbst in erweiterter und verbesserter Form London 1722, englisch in Verbesserung der von J. Raphson nach der Erstausgabe besorgten Übersetzung (London 1720) London 1728. Diese Ausgabe ist im Faksimile wiedergegeben in *The mathematical works of I. Newton* II, ed. D. Th. Whiteside, New York/London 1967, S. 1/256. Dort lesen wir in der *Introduction*, S. XXII/XXV Näheres über weitere Ausgaben.

[15]) Erstausgabe London 1687, [2]ed. R. Cotes, Cambridge 1713, [3]ed. H. Pemberton, London 1726, deutsch von J. Ph. Wolfers, Berlin 1872 mit Nachdruck Darmstadt 1963.

Im Herbst 1678 setzt Newton die begonnene Untersuchung fort. Zunächst sucht er (Problem 44) *einen Kreis, der durch den Punkt A geht und zwei Gerade f und g berührt* (Abb. 3).

Diesmal wird sozusagen der Schnittpunkt E der Geraden f und g als Ursprung angesehen und die Halbierende jenes Winkels als X-Achse eingeführt, in dessen Winkelfeld A liegt. Newton fällt das Lot $AC = a$ auf die Winkelhalbierende $EC = b$ und ergänzt das Lot $CD = d$ auf f. Hier haben wir eine unvermeidliche Asymmetrie vor uns. Ist M Mittelpunkt des gesuchten Kreises und $ME = x$ sein Abstand von E, dann ist $AM = FM = \sqrt{a^2 + (b - x)^2}$ der zugehörige Halbmesser. Folglich ist

(3. 2) $\sqrt{a^2 + (b - x)^2} : x = d : b$, usw.

Newton bemerkt zusätzlich, falls x durch $b - x$ ersetzt werde, habe man die vorhergehende Gleichung vor sich. Die Möglichkeit, daß f und g parallel sind, bleibt unerwähnt.

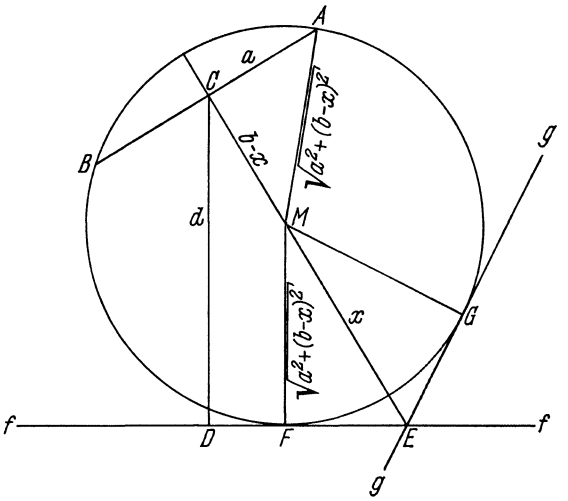


Abb. 3

In Problem 45 wird *ein Kreis gesucht, der durch die Punkte A und B geht und den Kreis des Halbmessers c um C berührt* (Abb. 4).

Newton fällt das Lot $CD = d$ auf die Gerade AB, fügt das Mittellot EF zu $AB = 2a$ hinzu, ergänzt zum Rechteck $CDEF$ und setzt $DE \# CF = b$. Wiederum wird sozusagen E als Ursprung eines Koordinatensystems angesehen, dessen X-Achse auf EF fällt. Mittelpunkt eines der gesuchten Kreise sei M, Abstand von ED sei

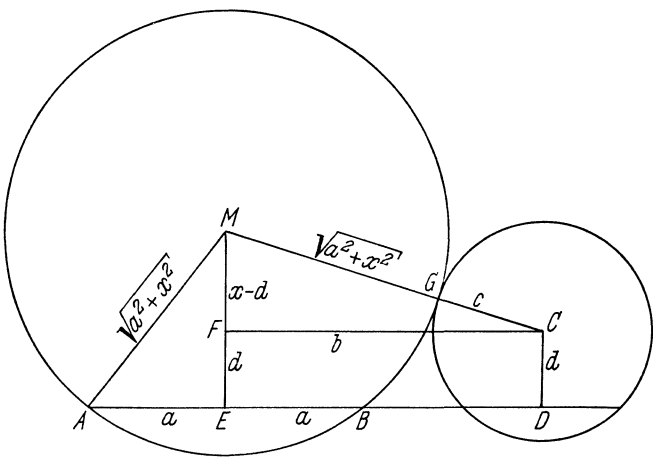


Abb. 4

$EM = x$, Berührpunkt des gegebenen Kreises mit dem gesuchten G. Jetzt ist $AM = GM = \sqrt{a^2 + x^2}$ der Halbmesser des gesuchten Kreises; also folgt aus Dreieck CFM:

(3. 3) $$b^2 + (x - d)^2 = (c + \sqrt{a^2 + x^2})^2.$$

Beim Ausrechnen fällt x^2 weg; es entsteht eine quadratische Gleichung für x, usw.

Etwas umständlicher wird in Problem 46 *ein Kreis* bestimmt, *der durch einen gegebenen Punkt A geht und eine Gerade g und einen Kreis (Mittelpunkt B, Halbmesser b) berührt* (Abb. 5).

Auf g wird aus A das Lot $AE = a$ und aus B das Lot $BC = c$ gefällt, ferner $CE = d$ gesetzt. E ist sozusagen der Ursprung eines Koordinatensystems, dessen X-Achse auf EC und dessen Y-Achse auf EA fällt; Koordinatenpaar des gesuchten Kreismittelpunktes M ist $EF = x$, und $FM = y$ = Kreishalbmesser. Aus den

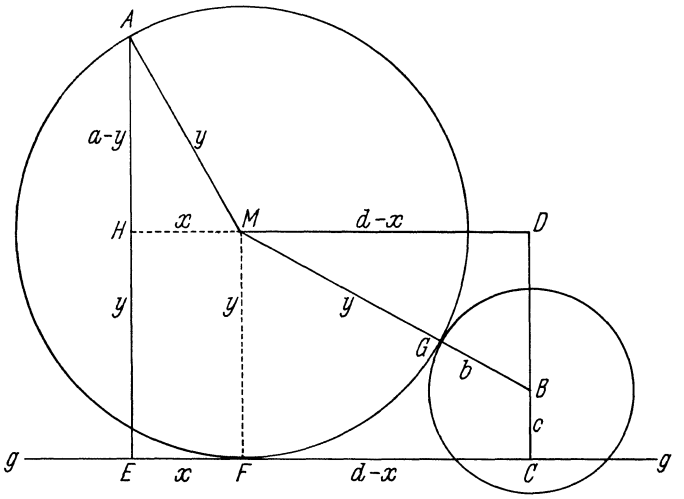


Abb. 5

beiden rechtwinkligen Dreiecken AHM (Seiten $x, a - y; y$) und BDM (Seiten $d - x, y - c; y + b$) folgt nach leichter Rechnung:

$$y = \frac{a^2 + x^2}{2a} = \frac{(d-x)^2 - b^2 + c^2}{2(b+c)}. \tag{3.4}$$

Hieraus folgert Newton vermittels der auch von Viète verwendeten „Parallelverschiebung", daß man auch *jene Kreise* bestimmen kann, *die zwei Kreise und eine Gerade berühren.*

In Problem 47 beschließt Newton diese Untersuchung mit der Bestimmung *eines Kreises, der durch einen gegebenen Punkt A geht und zwei gegebene Kreise berührt.* Die Lösung ist asymmetrisch und beruht auf komplizierten Überlegungen unter ausgiebiger Verwendung der Potenzsätze, vermittels deren ein weiterer Punkt des gesuchten Kreises gefunden wird. Auf diesen Fall wird dann die Bestimmung *eines Kreises, der drei gegebene Kreise berührt,* durch die übliche „Parallelverschiebung" zurückgeführt.

Newtons Darlegungen, die kaum bekannt geworden sind, scheinen in Unkenntnis der Vièteschen Konstruktionen und der Ausführungen in den Descartesschen Briefen entstanden zu sein. Sie sind *vielleicht* angeregt durch das, was bei Pappos im VII. Buch steht. Die eigenartige Behandlung macht es jedoch wahrscheinlich, daß Newton damals weder die lateinische Ausgabe der *Collectio* von 1588 noch jene von 1660 vor Augen gehabt hat. Nur so läßt sich die überraschend umständliche Behandlung des Problems 47 erklären. Die Stelle in Buch IV der *Collectio* (*prop.* 8; siehe unten Abschnitt 4) hätte den Weg zu einer wesentlich kürzeren Konstruktion eröffnet.

In den *Principia*[16]) wird das Berührungsproblem nur kurz erwähnt. Newton verweist nunmehr ausdrücklich auf Viètes *Apollonius Gallus*[7]) und bezieht sich ausschließlich auf den Fall von drei gegebenen Kreisen. Deren Mittelpunkte werden als Schnittpunkte von Hyperbeln bestimmt. Ob Newton auch Roomens Schrift[6]) kennengelernt hat, wissen wir nicht.

[16]) Buch I, 4. Abschnitt, Lemma 16.

Über spätere Verfahren zur Behandlung des Berührungsproblems gibt es ausgedehnte Literaturzusammenstellungen. Erwähnt sei vor allem M. Simon[17]). Ergänzungen werden von L. Bieberbach[18]) und H. S. M. Coxeter[19]) beigebracht.

II. Das spezielle Berührungsproblem

4. Die einleitenden Sätze in Collectio IV

Ich wende mich nunmehr eingehender zu den schon oben erwähnten Sätzen in Buch IV der *Collectio*. An den Anfang stelle ich die in *prop.* 8 enthaltene Aufgabe:
Einen Kreis durch einen gegebenen Punkt C zu bestimmen, der zwei kongruente Kreise (Mittelpunkte A, B) berührt (Abb. 6).

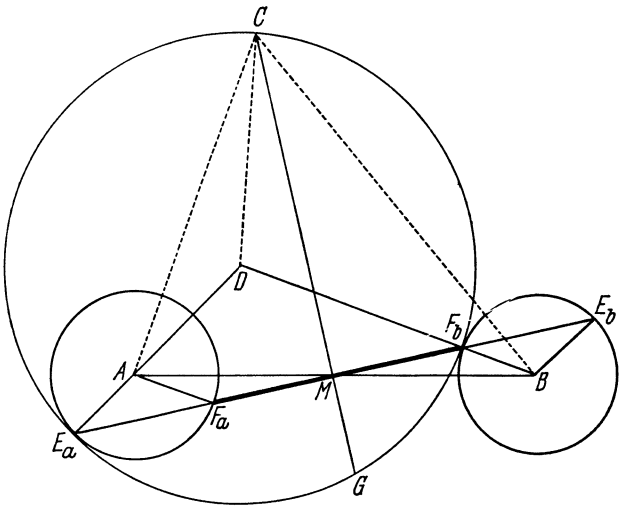


Abb. 6

Diese Aufgabe folgt unvermittelt auf drei Sätze, mit denen sie in keinerlei innerem Zusammenhang steht. Die Lösung bezieht sich auf den Kreis (Mittelpunkt D), der den Kreis um A von innen in E_a und den Kreis um B von außen in F_b berührt. Die Gerade E_aF_b schneidet den Kreis um A nochmals in F_a und den Kreis um B nochmals in E_b. Die Dreiecke E_aAF_a und E_bBF_b sind zum Dreieck E_aDF_b ähnlich, also gleichsinnig kongruent (das eine könnte durch Drehen um den Mittelpunkt M von AB um 180° auf das andere gelegt werden). Schneidet CM den gesuchten Kreis nochmals in G, dann ist nach dem Sehnensatz $CM \cdot MG = E_aM \cdot MF_b = E_aM \cdot F_aM$ (= Potenz des Punktes M hinsichtlich des Kreises um A). Also ist G bestimmbar und das Problem auf die Ermittlung eines Kreises zurückgeführt, der z. B. den Kreis um B berührt und durch die Punkte C und G geht.

Entscheidend ist hier das Auftreten des *inneren* Ähnlichkeitspunktes M der Kreise um A und B. Der Text ist zwar (bis auf eine Kleinigkeit) allgemein gehalten, jedoch wird C unnötigerweise auf dem Mittellot zu AB angenommen; es wird sogar vom Lot aus C auf AB gesprochen. Dies deutet darauf hin, daß die fragliche Stelle verderbt ist; denn daß der wohlbewanderte Pappos den Zusammenhang nicht richtig erkannt haben sollte, ist unglaubhaft.

Als Anwendung erscheint *prop.* 9:

In einem Dreieck ABC einen Punkt D so zu bestimmen, daß $CD - AD = BD - CD$ *gleich einer bekannten Strecke ist.*

[17]) *Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert*, Leipzig 1906 (*Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Ergänzungsband I), S. 87/88 und 97/105.

[18]) *Zum Apollonischen Berührungsproblem*, in: *Praxis der Mathematik* **8** (1961), S. 141/47.

[19]) *The problem of Apollonius*, in: *American mathematical Monthly* **75** (1968), S. 5—15.

Wichtigste weitere Forderung ist die in *prop.* 10 enthaltene Aufgabe, *jenen Kreis (Mittelpunkt D) zu bestimmen, der drei sich paarweise berührende Kreise (Mittelpunkte A, B, C) umschließend berührt.* Wie diese Aufgabe gelöst wird, erfahren wir erst an späterer Stelle, nämlich in *prop.* 15 (s. unten Abschnitt 5).

Daß Pappos auch den *äußeren* Ähnlichkeitspunkt zweier Kreise kennt und verwendet, geht aus den sich ergänzenden Sätzen in *prop.* 13 hervor. Hier wird folgendes gezeigt:

Werden zwei sich berührende Kreise von einer Geraden durch den äußeren Ähnlichkeitspunkt geschnitten, dann sind die näher beisammen liegenden Schnittpunkte auf beiden Kreisen die Berührpunkte eines dritten von außen berührenden Kreises (Abb. 7).

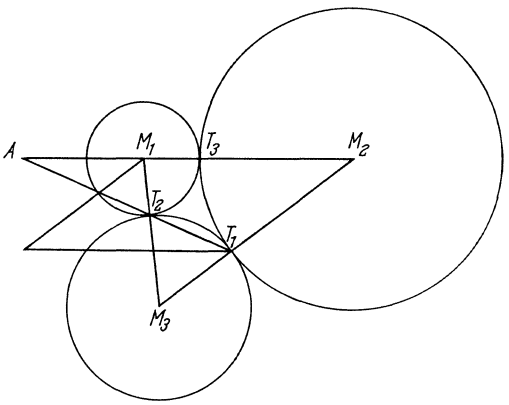


Abb. 7

Natürlich ist hier die einschränkende Bedingung überflüssig, daß sich die beiden Ausgangskreise *berühren* sollen. Wie der für uns selbstverständliche Beweis aussieht, ist aus der Figur unmittelbar zu erkennen. Unerwähnt bleibt, daß man auch die voneinander *entfernteren* Schnittpunkte verwenden könnte; das würde auf einen *umschließenden* Kreis führen. Ebensowenig wird gesagt, daß der äußere Ähnlichkeitspunkt außerdem Schnittpunkt der „äußeren" Tangenten an die beiden Kreise ist.

Prop. 14 bezieht sich auf die aus Abb. 8 hervorgehende Entsprechung zwischen den Endpunkten der parallelen Durchmesser $B_1M_1T_3$, $B_2M_2T_3$ und $C_1M_3C_2$ der Kreise aus Abb. 7. Sie läßt sich unmittelbar aus der Figur ablesen. Hier ist Pappos dicht an den zeichnerisch wichtigen Zusammenhang hingekommen, der aus den von mir punktiert hinzugefügten Geraden hervorgeht:

Die Winkel $B_1T_1T_3$ und $B_2T_2T_3$ sind Rechte. Also sind T_1C_1 und T_2C_2 Höhen im Dreieck $C_1C_2T_3$ und schneiden sich in N auf der gemeinsamen Tangente der beiden Ausgangskreise. Wird N auf dieser Geraden

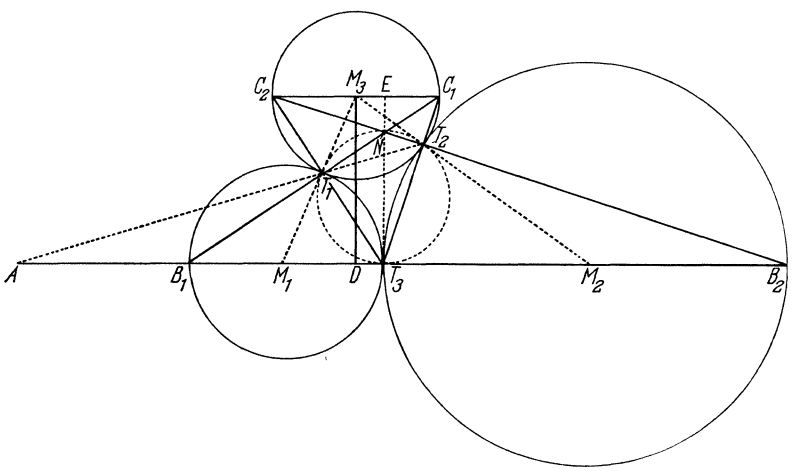


Abb. 8

gewählt, dann sind die Berührpunkte T_1 und T_2 des dritten Kreises mitbestimmt; außerdem geht auch der Kreis über Durchmesser NT_3 durch T_1 und T_2. Weil er die Kreise um M_1 und M_2 in T_1 und T_2 senkrecht schneidet, berührt er M_1M_3 und M_2M_3, ist also der Inkreis des Dreiecks $M_1M_2M_3$. Diese zusätzliche Bemerkung läuft auf

die Verwendung des Höhenschnittpunktes hinaus, der den antiken Mathematikern erstaunlicherweise nicht bekannt war.

Pappos zeichnet nur die Halbkreise und machte entsprechend den für ihn im Vordergrund stehenden gestaltlichen Verhältnissen drei verschiedene Figuren. An diesen führt er seine Betrachtungen völlig gleichartig durch. Für ihn steht die Verhältnisgleichung im Vordergrund:

$$r_3 : DT_3 = (r_2 + r_1) : (r_2 - r_1). \tag{4.1}$$

Dabei ist D der Fußpunkt des Lotes aus M_3 auf M_1M_2; r_1 und r_2 sind die Halbmesser der Kreise um M_1 und M_2. Der Beweis folgt mit Leichtigkeit aus der Ähnlichkeit der Dreiecke B_1B_2N und C_1C_2N.

5. Über Kreisketten

Satz 15 bringt eine wichtige Ergänzung zum bisherigen, nämlich die Beziehung zwischen dem Kreishalbmesser r_3 der Abb. 8 und der Entfernung M_3D des Mittelpunktes von der Zentralen M_1M_2. Zunächst aber erscheint *die Konstruktion eines Kreises K_4 (Mittelpunkt M_4, Halbmesser r_4), der drei sich paarweise berührende Kreise K_1, K_2, K_3 (Mittelpunkte M_k, Halbmesser r_k) berührt.*

Pappos macht wiederum drei Figuren, die gleichartig behandelt werden. Abb. 9 ist eine davon, die (nach der unvermeidlichen Abänderung der Bezeichnungen gegenüber der Vorlage) möglichst günstig zu überblicken ist. Bei ihr berühren sich $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$, $\mathfrak{K}_4$ paarweise von außen und werden von $\mathfrak{K}_1$ berührend umschlossen. Aufgrund des Zusammenspiels von Verhältnisgleichungen findet Pappos eine einfache Konstruktion für die Berührpunkte T_{k4} des gesuchten Kreises $\mathfrak{K}_4$ mit den gegebenen Kreisen $\mathfrak{K}_k$. Sie lautet etwa für T_{34} so:

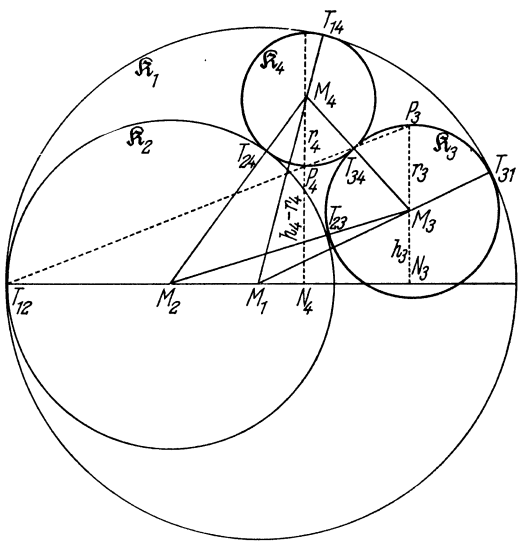


Abb. 9

Ist P_3 der Punkt größten Abstandes auf $\mathfrak{K}_3$ von M_1M_2, dann ist T_{34} der weitere Schnittpunkt der Geraden $T_{12}P_3$ mit $\mathfrak{K}_3$.

Sinngemäß auf die anderen Zentralen übertragen, liefert diese Konstruktion auch T_{14} und T_{24}, also auch den Mittelpunkt M_4 von $\mathfrak{K}_4$. Den *Beweis* führe ich in Abweichung von Pappos auf möglichst einfache Weise[20]:

Ich verwende nämlich die Inversion an jenem (der besseren Übersicht halber nicht gezeichneten) Kreis $\mathfrak{J}$ um T_{12}, der $\mathfrak{K}_3$ senkrecht schneidet. Sie führt den Bogen von $\mathfrak{K}_3$ außerhalb $\mathfrak{J}$ in den Bogen innerhalb $\mathfrak{J}$ über und umgekehrt, ferner die Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ in jene Lote zu M_1M_2, von denen $\mathfrak{K}_3$ berührt wird. Der gesuchte Kreis $\mathfrak{K}_4$ geht in einen Kreis $\mathfrak{K}$ über, der diese beiden Lote und $\mathfrak{K}_3$ berührt, also zu $\mathfrak{K}_3$ kongruent ist. Er berührt $\mathfrak{K}_3$ entweder im Punkt P_3 größten oder im Punkt Q_3 kleinsten Abstandes von M_1M_2. In der Figur habe ich mich für P_3 als Inversionsbild von T_{34} entschieden; dieser Punkt muß also einerseits auf $\mathfrak{K}_3$, andererseits auf der Geraden $T_{12}P_3$ liegen, die ja bei der Inversion als Ganzes unverändert bleibt. In einem Zusatz zu *prop.* 15 wird das Entsprechende auch für den Fall ausgeführt, daß einer der Ausgangskreise zu einer *Geraden* geworden ist.

Pappos fügt nun (Abb. 9) die Lote $M_3N_3 = h_3$ und $M_4N_4 = h_4$ aus M_3 und M_4 auf M_1 und M_2 bei und beweist unter Verwendung von (4.1), daß

$$(h_4 - r_4) : r_4 = (h_3 + r_3) : r_3, \text{ also } \frac{h_4}{2r_4} = \frac{h_3}{2r_3} + 1. \tag{5.1}$$

[20] Diesen Beweis habe ich auch in der Abhandlung: *Geistreiche geometrische Konstruktionen im Wandel der Zeiten*, in: *Der Mathematikunterricht* **10**, Heft 3 (1964), S. 7/47, insbes. S. 36/37 gegeben.

Damit ist die Unterlage für das hübsche Ergebnis geschaffen, das schon in *prop.* 12 angekündigt und in *prop.* 16 bewiesen wird (Abb. 10):

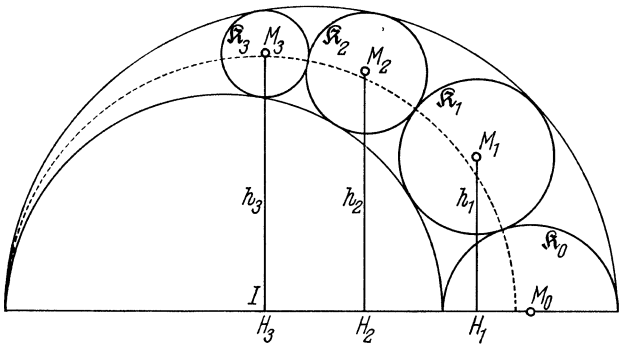


Abb. 10

Zwischen zwei sich berührenden Halbkreisen ist, ausgehend vom Halbkreis $\mathfrak{K}_0$*, eine Kette sich paarweise berührender Kreise* $\mathfrak{K}_k$ *(Mittelpunkte* M_k*, Durchmesser* d_k*) gelegt. Werden die Lote* $M_kH_k = h_k$ *aus den Mittelpunkten* M_k *auf den abschließenden Durchmesser der ursprünglichen Halbkreise gefällt, dann ist*

$$h_k = k \cdot d_k. \tag{5. 2}$$

Dieser Satz ist natürlich auch dann richtig, wenn die beiden Halbkreise in zwei Parallele übergegangen sind. Die weiteren Ergebnisse in den nachfolgenden Sätzen 17—18 enthalten einfache Folgerungen aus dem bisherigen und können daher übergangen werden.

Eine Vorankündigung des Satzes 16 am Ende der hier nicht wiedergegebenen *prop.* 12 enthält die Bemerkung, es handle sich um ein „altes" Ergebnis. Wir kennen seinen Entdecker nicht; verwiesen sei jedoch auf ähnliche Figuren in den Sätzen 5 und 6 des Archimedischen *liber assumptorum*[21]). Womöglich haben wir auch in den vorangegangenen Sätzen Ergebnisse von Archimedes vor uns, die zur Zeit des Pappos nicht mehr als solche bekannt und wohl nur verstümmelt überliefert worden sind.

6. Zur Bedeutung der Satzgruppe in Buch IV der Collectio

Aus diesen Sätzen läßt sich unter Beschränkung auf das wesentliche eine Parameterdarstellung für die sich paarweise berührenden Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ herauslesen. Abb. 11 entspricht der Abb. 8; es handelt sich um drei Kreise, die sich von außen berühren.

Im Mittelpunktdreieck $\lceil M_1M_2M_3$ werden die Radien r_1, r_2 und der Inkreishalbmesser ϱ (dieser ist der Parameter) als gegeben angesehen; r_3 ist gesucht. Der Berührpunkt T_3 gilt als Ursprung, T_3M_2 als positive X-Achse. Leichte Rechnung liefert die Koordinatenpaare von T_1, T_2 und M_3:

(6. 1)

	T_1	T_2	M_3
x	$\dfrac{2r_2\varrho^2}{r_2^2+\varrho^2}$	$-\dfrac{2r_1\varrho^2}{r_1^2+\varrho^2}$	$\dfrac{(r_1-r_2)\varrho^2}{r_1r_2-\varrho^2}$
y	$\dfrac{2r_2^2\varrho^2}{r_2^2+\varrho^2}$	$\dfrac{2r_1^2\varrho}{r_1^2+\varrho^2}$	$\dfrac{2r_1r_2\varrho}{r_1r_2-\varrho^2}$

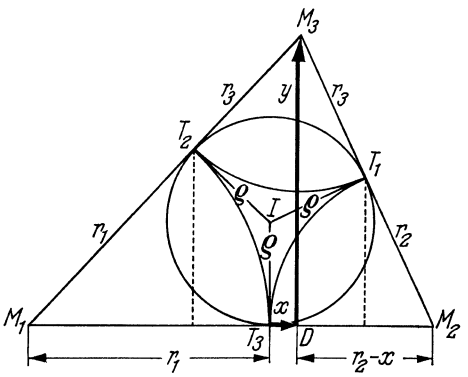


Abb. 11

[21]) Diese Schrift (deutscher Titel: Wahlsätze) ist nur in arabischer Redaktion erhalten und erstmals in lateinischer Übersetzung von S. Foster, London 1659 an die Öffentlichkeit gekommen.

Daraus folgt

$$r_3 = \frac{(r_1 + r_2)\varrho^2}{r_1 r_2 - \varrho^2} \tag{6.2}$$

oder

$$\varrho^2 = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3}\,. \tag{6.3}$$

Aus dieser wichtigen Beziehung ergäbe sich die Dreiecksfläche in der besonders einfachen und zweckmäßigen Form

$$\Delta = \sqrt{r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3)}. \tag{6.4}$$

Das Koordinatenpaar von M_3 kann auch so geschrieben werden:

$$x_3 = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} \cdot r_3;\quad y_3 = \frac{2 r_1 r_1 r_3}{(r_1 + r_2)\varrho}\,. \tag{6.5}$$

Indem wir r_1 durch $-r_1$ ersetzen, erhalten wir aus (6. 1) die entsprechenden Ergebnisse, falls $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ von innen berühren wie in Abb. 9. Schließlich geht aus der oben verwendeten Inversion hervor, daß es einen Kreis gibt, der die sämtlichen Kreise $\mathfrak{K}_k$ der Kette senkrecht schneidet. Er geht durch T_3 und hat den inneren Ähnlichkeitspunkt I der Ausgangskreise zum Mittelpunkt. Dies ist in Abb. 10 angedeutet.

Zusammenfassend stellen wir fest: Die Satzgruppe in Buch IV ist entweder schlecht redigiert oder stark verderbt. Der gedankliche Inhalt erweist sich als Vorform einer umfassenderen Theorie, auf die im nachfolgenden näher eingegangen werden soll. Einen ersten bedeutungsvollen Versuch stellt die Formel (2. 5) von Descartes dar. Wird dort $p = r_1$, $q = r_2$, $r = r_3$, $x = r_4$ gesetzt, dann entsteht nach Division mit $(r_1 r_2 r_3 r_4)^2$ die in den r_k symmetrische und leicht überblickbare Formel

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{r_k^2} = 2 \sum_{p,q} \frac{1}{r_p r_q} \quad \text{oder} \quad \sum_{p,q} \frac{1}{r_p r_q} = \left(\sum_{n} \frac{1}{2 r_k} \right)^2. \tag{6.6}$$

Sie soll Ausgangspunkt der nachfolgenden Betrachtungen werden. Zunächst schiebe ich jedoch einen kurzen Bericht über bereits früher mitgeteilte Ergebnisse ein[22]).

III. Von zusammengehörigen Paaren von Kreisquadrupeln

7. Das Gefüge zusammengehöriger Kreisquadrupel

Haben wir vier Kreise $\mathfrak{K}_p$ (Mittelpunkte M_p, Radien r_p), die sich je paarweise berühren, dann sprechen wir von einem *Kreisquadrupel.* Die Berührpunkte mögen etwa unter Verwendung des Zeichens $\circ$ für die Berührung wie folgt bezeichnet werden:

$$(7.1)\quad \left\{\begin{array}{l|l} \mathfrak{K}_1 \circ \mathfrak{K}_4 = 1 & \mathfrak{K}_2 \circ \mathfrak{K}_3 = \bar{1} \\ \mathfrak{K}_2 \circ \mathfrak{K}_4 = 2 & \mathfrak{K}_3 \circ \mathfrak{K}_1 = \bar{2} \\ \mathfrak{K}_3 \circ \mathfrak{K}_4 = 3 & \mathfrak{K}_1 \circ \mathfrak{K}_2 = \bar{3} \end{array}\right\}$$

Folglich geht $\mathfrak{K}_1$ durch 1, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\mathfrak{K}_2$ durch $\bar{1}$, 2, $\bar{3}$, $\mathfrak{K}_3$ durch $\bar{1}$, $\bar{2}$, 3 und $\mathfrak{K}_4$ durch 1, 2, 3. Zwischen je dreien dieser Kreise entstehen immer zwei Bogendreiecke (wobei Ausartungen zu Geraden zugelassen sind), gekennzeichnet durch die gemeinsamen Berührpunkte wie $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$. In Abb. 12 sind die Seiten eines dieser Bogendreiecke kräftiger gezeichnet. Das zugehörige Mittelpunktdreieck $M_1 M_2 M_3$ hat den Kreis $\mathfrak{K}_4$ (Mittelpunkt N_4, Radius ϱ_4) zum Inkreis; er schneidet die Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ senkrecht. Entsprechendes gilt für *irgend* drei Kreise des

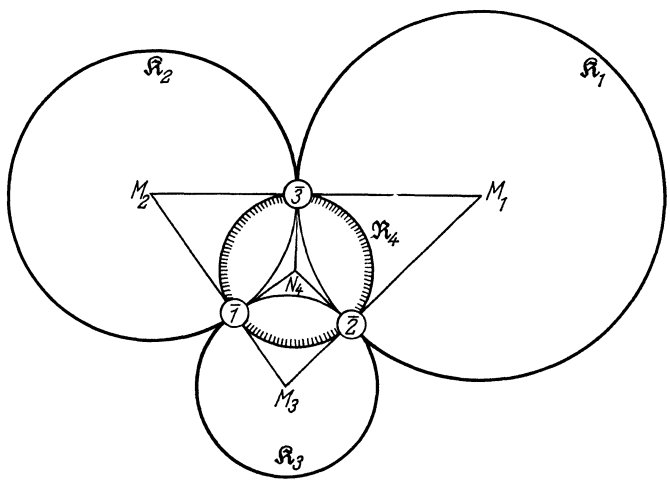


Abb. 12

[22]) Zum nachfolgenden vgl. Hofmann[20]), S. 36/46.

Quadrupels. Wir erhalten also aus den sechs gemeinsamen Berührpunkten vier weitere Kreise $\mathfrak{R}_q$ (Mittelpunkte N_q, Radien ϱ_q), die sich je zu zweit berühren und die $\mathfrak{R}_p$ jeweils senkrecht schneiden:

$$(7.2) \qquad \left\{\begin{array}{l|l} \mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_4 = \bar{1} & \mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_3 = 1 \\ \mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_4 = \bar{2} & \mathfrak{R}_3 \circ \mathfrak{R}_1 = 2 \\ \mathfrak{R}_3 \circ \mathfrak{R}_4 = \bar{3} & \mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_2 = 3 \end{array}\right\}$$

Also bilden die Kreise $\mathfrak{R}_q$ ebenfalls ein Quadrupel. Die Quadrupel $\mathfrak{R}_p$ und $\mathfrak{R}_q$ sind einander eindeutig umkehrbar zugeordnet.

Durch Inversion (als Mittelpunkt werde etwa $\bar{1}$ gewählt) lassen sich die Kreise $\mathfrak{R}_p$ überführen in zwei kongruente Kreise $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_4$ und deren gemeinsame Tangenten, nämlich in die zu Geraden gewordenen Kreise $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{R}_3$. Dabei gehen auch die Kreise $\mathfrak{R}_q$ in zwei kongruente Kreise und deren Paralleltangenten über.

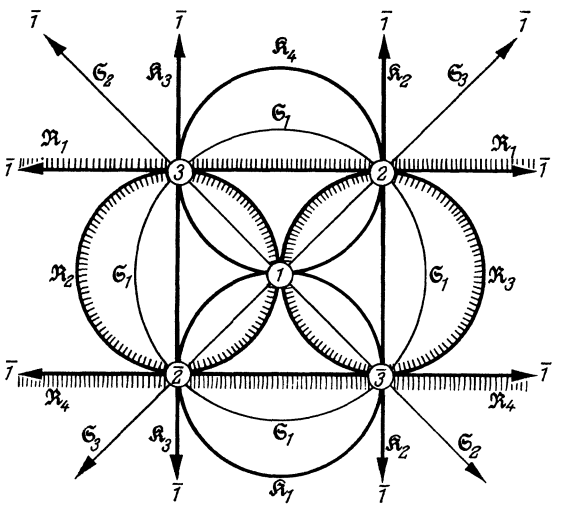


Abb. 13

Abb. 13 gibt diesen ausgezeichneten Fall wieder. Sie läßt außerdem erkennen, daß die Punktepaare $2, 3, \bar{2}, \bar{3}$ auf einem Kreis $\mathfrak{S}_1$ liegen, die Punktepaare $3, 1, \bar{3}, \bar{1}$ auf dem zu einer Geraden gewordenen Kreis $\mathfrak{S}_2$, und die Punktepaare $1, 2, \bar{1}, \bar{2}$ auf dem zu einer Geraden gewordenen Kreis $\mathfrak{S}_3$. Die Kreise $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_3$ schneiden sich in $1, \bar{1}$; $\mathfrak{S}_3$ und $\mathfrak{S}_1$ schneiden sich in $2, \bar{2}$, und $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ schneiden sich in $3, \bar{3}$. Die Kreise $\mathfrak{S}_r$ schneiden sich je zu zweit senkrecht und können als Träger der beiden Kreisquadrupel angesehen werden, von deren Exemplaren sie jeweils unter 45° getroffen werden.

Nun machen wir die ausgeführte Inversion wieder rückgängig. Dann schneiden sich die drei Geraden $(1, 1), (2, \bar{2}), (3, \bar{3})$ in *einem* Punkt, nämlich dem Potenzpunkt der drei Kreise $\mathfrak{S}_r$. Er liegt notwendig im *Innern* dieser Kreise. Also gibt es einen weiteren Kreis $\mathfrak{S}$, der von jedem der Kreise $\mathfrak{S}_r$ nach einem seiner Durchmesser geschnitten wird. Diesen Kreis machen wir zum Äquator einer Kugel und projizieren die Figur der Äquatorebene aus einem der Pole des Äquators auf die Kugeloberfläche. Jetzt sind die Kreise $\mathfrak{S}_r$ die stereographischen Bilder von drei Größtkreisen auf der Kugeloberfläche, die sich paarweise senkrecht schneiden, also die Kugeloberfläche in acht gleichseitig-rechtwinklige Dreiecke zerlegen. Die Umkreise dieser Dreicke sind die stereographischen Bilder der in den Quadrupeln $\mathfrak{R}_p$ und $\mathfrak{R}_q$ enthaltenen Kreise. Bilden wir diese Figur aus dem Mittelpunkt eines der sphärischen Dreiecke stereographisch auf die zum Gegenpunkt des Pols gehörende Tangentialebene ab, dann erhalten wir die dreifach symmetrische Abb. 14. Hier sind die $\mathfrak{S}_r$ dünn, die Kreise $\mathfrak{R}_p$ und $\mathfrak{R}_q$ etwas kräftiger gezeichnet; die Kreise $\mathfrak{R}_q$ sind durch kleine Senkrechtstriche an den Kreisumfängen kenntlich gemacht.

Aus den drei sich senkrecht durchschneidenden Kreisen $\mathfrak{S}_r$ läßt sich die Konfiguration der beiden Kreisquadrupel gut überblicken. Abb. 15 zeigt die $2 \cdot 4$ Kreisbogendreiecke, deren Umkreise die beiden Quadrupel bilden. Das eine wird von den Umkreisen der getönten Dreiecksflächen gebildet, das andere von den Umkreisen der weiß gelassenen. Die Mittelpunkte der $2 \cdot 4$ Kreise liegen auf jenen sich jeweils zu dritt schneidenden Geraden (sie sind ebensowenig wie die Kreise selbst eingezeichnet), von denen die Kreise $\mathfrak{S}_r$ in ihren Schnittpunkten jeweils unter 45° geschnitten werden[23]).

[23]) Über die transformierende Wirkung der Inversion der Quadrupel an den Kreisen $\mathfrak{S}_r$ vgl. Hofmann[20]), S. 40/41.

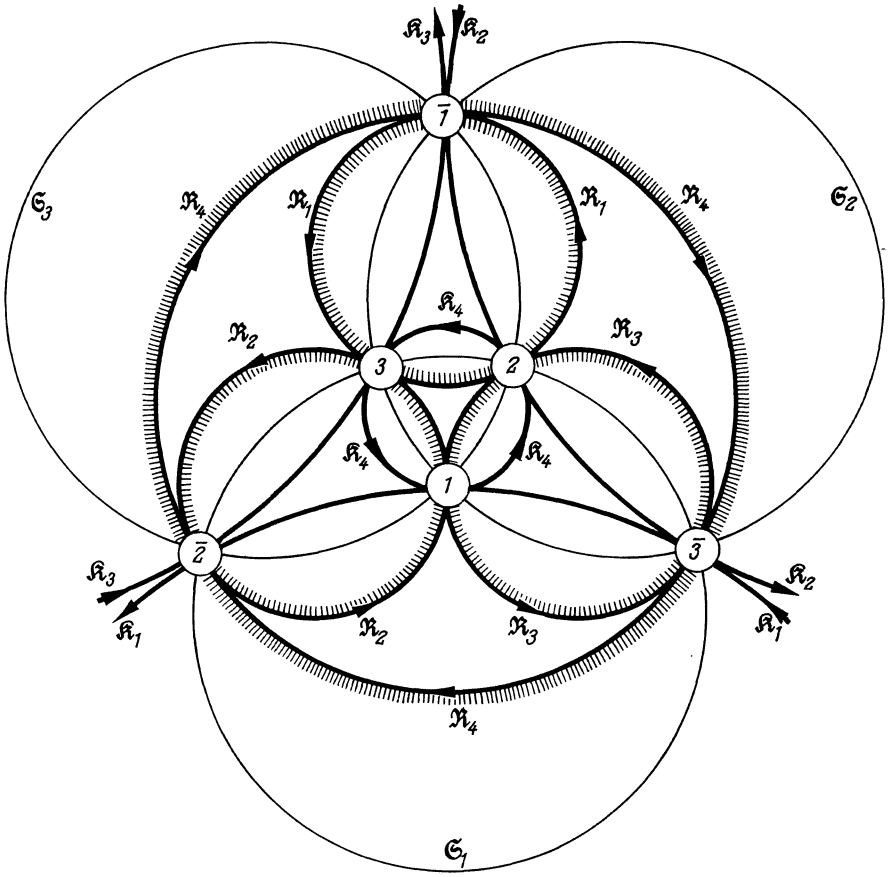


Abb. 14

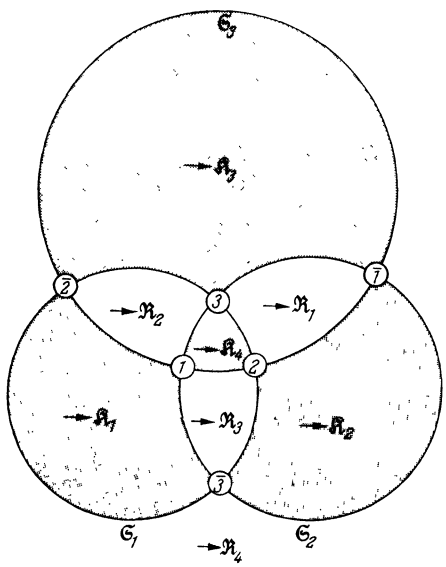


Abb. 15

8. Zugehörige Rechnungen

Nun kehren wir zu (6. 6) zurück. Aus dieser Gleichung ergibt sich

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}\right)^2 = 4\cdot\frac{r_1+r_2+r_3}{r_1r_2r_3}\,. \tag{8. 1}$$

Bilden die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 der zugehörigen Kreise $\mathfrak{K}_p$ ein Dreieck, dann hat dieses die Seiten r_2+r_3, r_3+r_1, r_1+r_2 und den halben Umfang $r_1+r_2+r_3$, folglich die Fläche $\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}$. Sein Inkreis schneidet die Kreise $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ senkrecht, ist also $\mathfrak{K}_4$. Der zugehörige Radius ϱ_4 ergibt sich aus

$$\varrho_4^2 = \frac{r_1r_2r_3}{r_1+r_2+r_3}, \tag{8. 2}$$

also

$$\frac{1}{r_4} = \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\pm\frac{2}{\varrho_4}\,. \tag{8. 3}$$

Um die weitere Rechnung zu vereinfachen, setzen wir

$$\frac{1}{r_p} = R_p,\ \frac{1}{\varrho_q} = P_q. \tag{8. 4}$$

Dabei sollen die Krümmungen R_p und P_q als mit Vorzeichen behaftete Größen angesehen werden. Gehen wir etwa aus von drei Kreisen $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$, die sich von außen berühren, dann sollen die zugehörigen Krümmungen R_p positiv sein, und die zugehörigen Kreise sollen im positiven, d. h. im Gegenuhrzeigersinn umlaufen werden. Dies ist in Abb. 14 durch die hinzugefügten Pfeile angedeutet. Der Drehsinn ist für die Kreise $\mathfrak{K}_p$ durch die zyklische Aufeinanderfolge (1, 2, 3, 1) der das Geflecht tragenden Punkte bestimmt, wobei auch je zwei Überstreichungen auftreten können. Für die Kreise R_q wird der Drehsinn durch die zyklische Aufeinanderfolge (1, 3, 2, 1) der Trägerpunkte bestimmt; dabei tritt entweder *eine* Überstreichung auf oder *alle* Ziffern müssen überstrichen werden.

Entscheiden wir uns in (8. 3) für das negative Zeichen vor $\frac{2}{\varrho_4}$, dann entstehen die folgenden symmetrischen Wechselbeziehungen zwischen R_p und P_q:

$$\left.\begin{array}{l|l} 2P_1 = -R_1+R_2+R_3+R_4 & 2R_1 = -P_1+P_2+P_3+P_4 \\ 2P_2 = +R_1-R_2+R_3+R_4 & 2R_2 = +P_1-P_2+P_3+P_4 \\ 2P_3 = +R_1+R_2-R_3+R_4 & 2R_3 = +P_1+P_2-P_3+P_4 \\ 2P_4 = +R_1+R_2+R_3-R_4 & 2R_4 = +P_1+P_2+P_3-P_4 \end{array}\right\}, \tag{8. 5}$$

also

$$\left.\begin{array}{l} P_1+P_4 = R_2+R_3,\ P_2+P_4 = R_3+R_1,\ P_3+P_4 = R_1+R_2 \\ R_1+R_4 = P_2+P_3,\ R_2+R_4 = P_3+P_1,\ R_3+R_4 = P_1+P_2 \end{array}\right\} \tag{8. 6}$$

und

$$\begin{aligned} P_1+R_1 = P_2+R_2 = P_3+R_3 = P_4+R_4 &= \frac{1}{2}(P_1+P_2+P_3+P_4) \\ &= \frac{1}{2}(R_1+R_2+R_3+R_4). \end{aligned} \tag{8. 7}$$

Außerdem ist, wie schon aus (6. 6) folgt:

$$\Sigma\, R_pR_q = \left(\frac{1}{2}\Sigma R_p\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\Sigma P_q\right)^2 = \Sigma P_pP_q. \tag{8. 8}$$

Gestaltliche Sonderfälle ergeben sich daraus, daß Kreise zu Geraden entarten[24]).

[24]) Vgl. Hofmann[20]), S. 42/43.

9. Kreisketten

Haben wir ein Quadrupel R_p vor uns, dann können wir den Kreisen $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ durch Wechsel des Zeichens vor $\frac{2}{\varrho_4}$ in (8. 3) einen weiteren Kreis $\mathfrak{K}_5$ zuordnen, wobei R_5 bestimmt wird aus

$$R_5 = 2(R_1 + R_2 + R_3) - R_4. \tag{9. 1}$$

Nun gehen wir zu den Krümmungen P'_q der Kreise $\mathfrak{K}_q$ über, die den Kreisen $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$, $\mathfrak{K}_5$ zugeordnet sind und diese senkrecht schneiden:

$$\left.\begin{aligned} P'_1 &= \frac{1}{2}(R_1 + 3R_2 + 3R_3 - R_4) = P_1 + 2P_4 \\ P'_2 &= \frac{1}{2}(3R_1 + R_2 + 3R_3 - R_4) = P_2 + 2P_4 \\ P'_3 &= \frac{1}{2}(3R_1 + 3R_2 + R_3 - R_4) = P_3 + 2P_4 \\ P'_5 &= \frac{1}{2}(-R_1 - R_2 - R_3 + R_4) = \quad - P_4 \end{aligned}\right\}. \tag{9. 2}$$

Da uns die Numerierung der Kreise freisteht, können wir auf diesem Wege zu *irgend* drei Kreisen des Quadrupels stets einen weiteren quadrupel-erzeugenden Kreis hinzufügen. Somit lassen sich aus den beiden zugeordneten Quadrupeln acht neue Quadrupel herstellen. Dieses Verfahren kann beliebig fortgesetzt werden: stets sind die neu entstehenden Größen R_p bzw. P_q aus Aggregaten von ganzzahligen Vielfachen der „Grundgrößen" R_1, R_2, R_3, R_4 bzw. P_1, P_2, P_2, P_4 zusammengesetzt.

Halten wir etwa die Kreise $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ fest, dann bilden $\mathfrak{K}_3$ und $\mathfrak{K}_4$ den Anfang einer Kette, die so fortgesetzt werden kann: $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3, \mathfrak{K}_4$; $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_4, \mathfrak{K}_5$; $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_5, \mathfrak{K}_6$; ...; $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_n, \mathfrak{K}_{n+1}$. Durch vollständige Induktion läßt sich leicht zeigen, daß alsdann folgende Formeln statthaben:

$$\left.\begin{aligned} R_1 \\ R_2 \\ R_{n+3} &= (n-1)n(R_1 + R_2) - (n-1)R_3 + nR_4 \\ R_{n+4} &= n(n+1)(R_1 + R_2) - nR_3 + (n+1)R_4 \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} P'_1 &= P_1 + n(n+1)P_3 + (n-1)nP_4 \\ P'_2 &= P_2 + n(n+1)P_3 + (n-1)nP_4 \\ P'_{n+3} &= (n+1)P_3 + nP_4 \\ P'_{n+4} &= -nP_3 - (n-1)P_4 \end{aligned}\right\} \tag{9. 3}$$

Dies ist die Fortsetzung der in Abb. 10 angedeuteten Kette.

10. Die Mittelpunktfigur

Wir betrachten nunmehr die Konfiguration der Mittelpunkte M_p eines Kreisquadrupels $\mathfrak{K}_p$. Um die Mittelpunkte N_q des zugeordneten Quadrupels $\mathfrak{K}_q$ zu ermitteln, müssen wir die Lote durch die Berührpunkte der Kreise $\mathfrak{K}_p$ zu den zugehörigen Zentralen zum Schnitt bringen. Im Grunde kommt es nur auf die *Gestalt* dieser Figur an. Ersetzen wir etwa die Berührpunkte T_{23}, T_{31}, T_{12} zwischen den Kreisen $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ unter Maßstabs-Änderung durch die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3, dann müssen wir die bezüglich zu M_1M_4, M_2M_4, M_3M_4 durch M_1, M_2, M_3 gelegten Lote zum Schnitt bringen. Die so erhaltenen Punkte bezeichnen wir mit N_1, N_2, N_3.

Dann treffen sich die Lote zu M_2M_3 durch N_1 usw. genau in einem Punkt N_4.

Dies gilt nicht nur für das Punktequadrupel M_p, vielmehr für jedes beliebige Punktequadrupel in der Ebene. Abb. 16 bezieht sich auf diesen allgemeineren Fall.

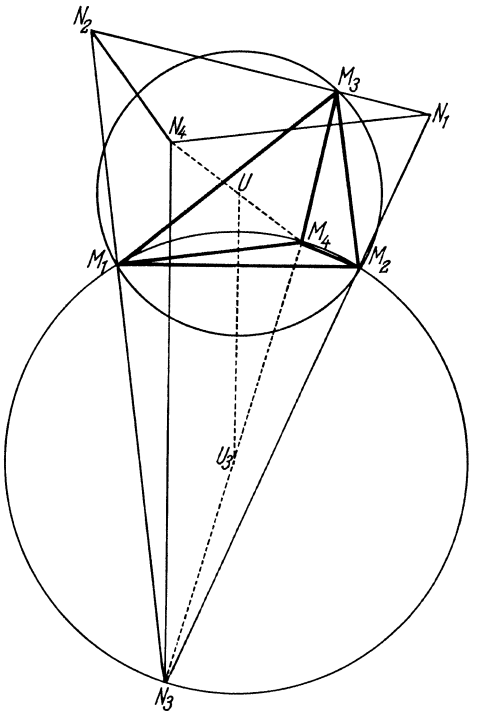


Abb. 16

Zunächst bestimmen wir den Umkreismittelpunkt U des Dreiecks $M_1M_2M_3$. Dann legen wir etwa durch $M_1M_2M_4$ den Umkreis $\mathfrak{U}_3$ (Mittelpunkt U_3); er geht auch durch N_3. Folglich ist das Lot zu M_1M_2 durch N_3 parallel zu U_3U und geht durch den Spiegelpunkt von M_4 an U. Entsprechendes gilt auch für die Umkreise der anderen Dreiecke $M_2M_3M_4$ und $M_3M_1M_4$. Folglich treffen sich die Lote zu M_1M_2 durch N_3 usw. genau in *einem* Punkt, nämlich N_4.

Sehen wir also das Dreieck $M_1M_2M_3$ als feste Grundfigur an, dann gehört zu jedem beliebig gewählten Punkt M_4 ein zugeordneter Punkt N_4, der Spiegelpunkt M_4 an U. Diese Zuordnung ist involutorisch.

IV. Kreisquadrupel und Heronische Dreiecke

11. Den Kreisquadrupeln zugeordnete Quadratsummen

Sind die Zahlen R_p rational, dann auch die Zahlen P_q und die Maßzahlen der Seiten und Flächen der Mittelpunktdreiecke. Wir haben also zwei zusammengehörige Quadrupel Heronischer Dreiecke vor uns. Sie sind schon aus einem einzigen dieser Dreiecke bestimmt, z. B. aus $M_1M_2M_3$; denn dann stehen ja R_1, R_2, R_3 und P_4 in rationalem Verhältnis.

Nun betrachten wir die Beziehung

$$(11.1)\quad \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{\varrho_4}\right)^2-\left(\frac{1}{\varrho_4}-\frac{1}{r_1}\right)^2-\left(\frac{1}{\varrho_4}-\frac{1}{r_2}\right)^2-\left(\frac{1}{\varrho_4}-\frac{1}{r_3}\right)^2\\&=2\cdot\left\{\frac{r_1+r_2+r_3}{r_1r_2r_3}-\frac{1}{\varrho_4^2}\right\}=0.\end{aligned}\right\}.$$

Es ist also unter Mitverwendung von (8. 6)

$$(11.2)\quad (P_4-R_1)^2+(P_4-R_2)^2+(P_4-R_3)^2=(R_1+R_2+R_3-P_4)^2\equiv(R_4+P_4)^2.$$

Damit ist die Bestimmung Heronischer Dreiecke auf die Ermittlung von vier rationalen bzw. (nach passender Multiplikation) ganzer Zahlen ohne gemeinsamen Teiler zurückgeführt. Dabei ist die Quadratsumme der drei kleineren Zahlen gleich dem Quadrat der größten von ihnen. Diese vier Zahlen mögen mit S_1, S_2, S_3 und S bezeichnet werden, so daß also

$$(11.3)\quad S_1^2+S_2^2+S_3^2=S^2 \text{ mit } \left\{\begin{aligned}&S_1=P_4-R_1=P_1-R_4,\ S_2=P_4-R_2=P_2-R_4,\\&S_3=P_4-R_3=P_3-R_4,\ S=R_4+P_4\end{aligned}\right\}.$$

Folglich ist

$$(11.4)\quad \left\{\begin{aligned}S_1&=\frac{1}{2}(-R_1+R_2+R_3-R_4)=\frac{1}{2}(+P_1-P_2-P_3+P_4)\\S_2&=\frac{1}{2}(+R_1-R_2+R_3-R_4)=\frac{1}{2}(-P_1+P_2-P_3+P_4)\\S_3&=\frac{1}{2}(+R_1+R_2-R_3-R_4)=\frac{1}{2}(-P_1-P_2+P_3+P_4)\\S_4&=\frac{1}{2}(+R_1+R_2+R_3+R_4)=\frac{1}{2}(+P_1+P_2+P_3+P_4)\end{aligned}\right\}$$

und

$$(11.5)\qquad \left\{\begin{array}{l|l} R_1=\frac{1}{2}(-S_1+S_2+S_3+S) & P_1=\frac{1}{2}(+S_1-S_2-S_3+S)\\ R_2=\frac{1}{2}(+S_1-S_2+S_3+S) & P_2=\frac{1}{2}(-S_1+S_2-S_3+S)\\ R_3=\frac{1}{2}(+S_1+S_2-S_3+S) & P_3=\frac{1}{2}(-S_1-S_2+S_3+S)\\ R_4=\frac{1}{2}(-S_1-S_2-S_3+S) & P_4=\frac{1}{2}(+S_1+S_2+S_3+S) \end{array}\right\}.$$

Wir beginnen mit der Annahme, daß alle S_k das *positive* Zeichen haben. Wird *einer* der Zahlen S_k das negative Zeichen vorangestellt, dann geht das Quadrupel der R_p in das Quadrupel P_q über und umgekehrt:

(11.6)

	$-S_1$	$-S_2$	$-S_3$
R_1	P_4	P_3	P_2
R_2	P_3	P_4	P_1
R_3	P_2	P_1	P_4
R_4	P_1	P_2	P_3

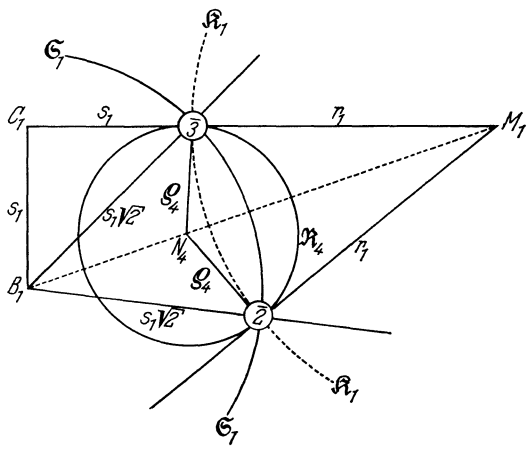


Abb. 17

Wechseln *zwei* der S_k ihr Zeichen, dann gehen die Quadrupel R_p bzw. P_q in anderer Anordnung in sich selbst über. Wechseln jedoch *alle* S_k ihr Zeichen, dann geht das Quadrupel der R_p wiederum in anderer Anordnung in das Quadrupel der P_q über und umgekehrt. Es genügt also, sich auf die Annahme ausschließlich *positiver* Zeichen vor den S_k zu beschränken:

Hierbei werden nur die beiden zugeordneten Quadrupel R_p und P_q erzeugt. Was hier angedeutet ist, läßt sich auch als Ergebnis von Inversionen an den Kreisen $\mathfrak{S}_r$ deuten [25]).

Um die Größen S_k auch geometrisch zu deuten, betrachten wir Abb. 17. Hier ist durch $\bar{2}$ und $\bar{3}$, die Berührpunkte der Kreise $\mathfrak{K}_3$, $\mathfrak{K}_1$ bzw. $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, der Kreis $\mathfrak{K}_4$ (Mittelpunkt N_4, Radius ϱ_4) gelegt, ferner der Kreis $\mathfrak{K}_1$ (Mittelpunkt M_1, Radius r_1) und der Kreis $\mathfrak{S}_1$ (Mittelpunkt B_1, Radius $s_1\sqrt{2}$). Wir fällen das Lot B_1C_1 auf $\bar{3}M_1$ und erhalten aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $\bar{3}\,M_1N_4$ und $C_1M_1B_1$

$$(11.7)\qquad r_1:\varrho_4=(r_1+s_1):s_1,\ \text{d. h.}\ \frac{1}{\varrho_4}=\frac{1}{s_1}+\frac{1}{r_1}.$$

Setzen wir $S_1=\dfrac{1}{s_1}$, dann ist

$$(11.8)\qquad S_1=P_4-R_1$$

usw. *Die S_k sind also als reziproke Strecken erklärt, die zu den Krümmungen der Kreise $\mathfrak{S}_k$ proportional sind.*

Hier sei eingeschoben, wie man zusammengehörige Kreise $\mathfrak{S}_k$ einfach konstruieren kann (Abb. 18). Wir gehen aus von einem spitzwinkligen Dreieck $B_1B_2B_3$, legen über den Seiten als Durchmesser die Kreise und schneiden sie in den Punktepaaren $1,\bar{1}$; $2,\bar{2}$; $3,\bar{3}$ mit den Höhen B_1H_1, B_2H_2, B_3H_3 des Dreiecks $B_1B_2B_3$. Dann legen wir die Kreise $\mathfrak{S}_1$ (Mittelpunkt B_1) durch $2, 3, \bar{2}, \bar{3}$ usw.

[25]) Vgl. Hofmann[20]), S. 40/41.

Diese Kreise schneiden sich paarweise rechtwinklig.

Der Beweis ist leicht zu erbringen. Aus dieser Figur ist die Konfiguration der 2 · 4 Mittelpunkte der Kreisquadrupel besonders einfach herstellbar.

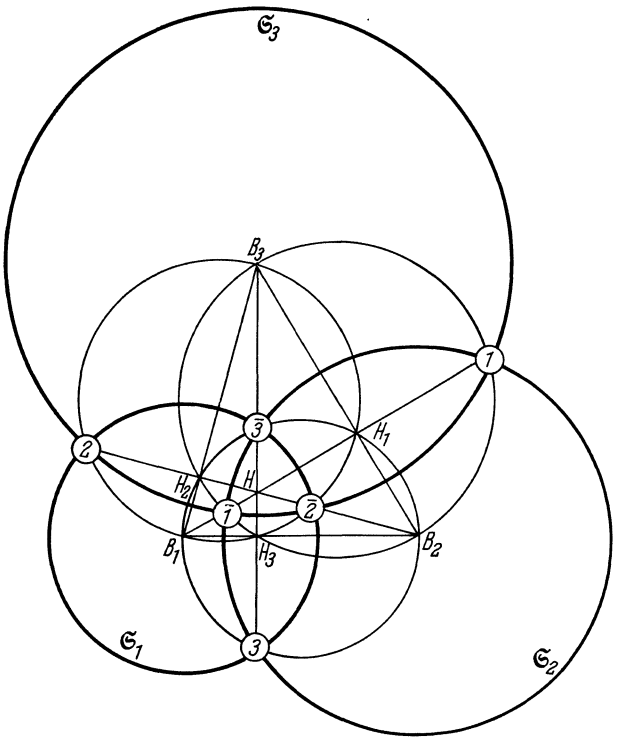


Abb. 18

12. Das Reduktionsverfahren

Haben wir ein Quadrupel $(S_k; S)$ in ganzen Zahlen ohne gemeinsamen Teiler, das der Bedingung (11. 3) genügt, dann erhalten wir vermöge des Ansatzes

$$(12.\,1) \qquad (S_1 - T)^2 + (S_2 - T)^2 + (S_3 - T)^2 = (S - T)^2$$

ein neues Quadrupel der nämlichen Eigenschaft. Aus

$$(12.\,2) \qquad T = S_1 + S_2 + S_3 - S$$

entsteht

$$(12.\,3) \quad \begin{aligned} &S_1' = S_2 + S_3 - S;\ S_2' = S_1 + S_3 - S;\ S_3' = S_1 + S_2 - S;\\ &S' = -S_1 - S_2 - S_3 + 2S. \end{aligned}$$

Hieraus lassen sich die zugehörigen Zahlen R_p', P_q' berechnen und aus R_p, R_q ausdrücken:

$$(12.\,4) \quad \left\{ \begin{aligned} R_1' &= \frac{1}{2}(+S_1 - S_2 - S_3 + S) = P_1\\ R_2' &= \frac{1}{2}(-S_1 + S_2 - S_3 + S) = P_2\\ R_3' &= \frac{1}{2}(-S_1 - S_2 + S_3 + S) = P_3\\ R_4' &= \frac{1}{2}(-3S_1 - 3S_2 - 3S_3 + 5S) = 2P_1 + 2P_2 + 2P_3 - P_4 \end{aligned} \right\}$$

und

$$(12.5)\qquad \left\{\begin{aligned} P_1' &= \frac{1}{2}(-3S_1 - S_2 - S_3 + 3S) = R_1 + 2R_4 \\ P_2' &= \frac{1}{2}(-S_1 - 3S_2 - S_3 + 3S) = R_2 + 2R_4 \\ P_3' &= \frac{1}{2}(-S_1 - S_2 - 3S_3 + 3S) = R_3 + 2R_4 \\ P_4' &= \frac{1}{2}(S_1 + S_2 + S_3 - S) \quad = \quad -R_4 \end{aligned}\right\}.$$

Das sind (nach Vertauschen von R_p und P_q) genau die Transformationsformeln (9. 2).

Die Transformation (12. 3) *bedeutet also im wesentlichen das Weiterschreiten von* $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$ *nach* $\mathfrak{R}_5$ *statt nach* $\mathfrak{R}_4$.

Diese Transformation kann als Grundlage einer interessanten *descente* verwendet werden. Haben alle S_k positive Zeichen, dann ist wegen (11. 3)

$$(12.6)\qquad \begin{aligned}(S_1 + S_2 + S_3)^2 &= S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + 2(S_2S_3 + S_3S_1 + S_1S_2) \\ &> S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S^2,\end{aligned}$$

also

$$(12.7)\qquad S_1 + S_2 + S_3 > S.$$

Andererseits ist auch

$$(12.8)\qquad \begin{aligned}(S_2 - S_3)^2 + (S_3 - S_1)^2 + (S_1 - S_2)^2 \\ = 3(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) - (S_1 + S_2 + S_3)^2 > 0,\end{aligned}$$

also

$$(12.9)\qquad \left\{\begin{aligned} &S < S_1 + S_2 + S_3 < S\sqrt{3} \text{ und} \\ &(2 - \sqrt{3})S < -S_1 - S_2 - S_3 + 2S < S \end{aligned}\right\}.$$

Gehen wir also unter Annahme positiver S_k von (11. 3) zu (12. 3) über, dann ist $S' < S$. Folglich haben wir den Beginn einer *descente* innerhalb der Zahlenquadrupel vor uns, die (11. 3) erfüllen. Sie endet notwendig mit dem letztmöglichen Quadrupel $0^2 + 0^2 + 1^2 = 1^2$ dieser Art.

Die Quadrupel $(S_r; S)$ *und folglich auch die Tripel* $\mathfrak{S}_r$ *und die mit diesen verbundenen Quadrupel* $\mathfrak{R}_p$ *und* $\mathfrak{R}_q$ *sind Elemente einer Menge, die von* $S(0, 0, 1; 1)$ *als Ausgangselement ausgeht und als Verknüpfung die Transformation* (12. 3) *aufweist. Sie ordnet jedem Element acht weitere im allgemeinen verschiedene neue Elemente zu. Diese unterscheiden sich durch die Zeichen vor den* S_r, *während S stets als positiv angesehen werden soll. Innerhalb dieser Menge gibt es ein eindeutiges Reduktionsverfahren, vermittels dessen man von jedem Element zum Ausgangselement zurückgeführt wird, falls innerhalb der descente auftretende negative Zeichen vor einer der Zahlen* S_r *durch positive ersetzt werden. Entsprechendes gilt auch für die Gesamtheit der mitverbundenen Heronischen Dreiecke.*

Hier ein Reduktionsbeispiel[26]). Negative Zahlen R_p und P_q sind durch Überstreichen gekennzeichnet, Zeichenänderungen bei den S_r durch Anfügen eines Asterisk.

---

[26]) Über die mit diesem und anderen Verfahren möglichen Transformationen Heronischer Dreiecke vgl. J. E. Hofmann: *Über Heronische Dreiecke*, in: *Der Mathematikunterricht* **11**, Heft 5 (1965), S. 5—32, insbesondere die schematischen Darstellungen S. 12/16.

S_1	S_2	S_3	S	T	R_1	R_2	R_3	R_4	P_1	P_2	P_3	P_4
714	630	73	955	462	472	556	1113	$\overline{231}$	483	399	$\overline{158}$	1186
252	168	389*	493	316	399	483	262	$\overline{158}$	94	10	231	651
64*	148*	73	177	108	167	83	158	$\overline{54}$	10	94	19	231
44*	40	35*	69	50	50	54	59	$\overline{25}$	19	15	10	94
6*	10*	15*	19	12	19	15	10	$\overline{6}$	0	4	9	25
6*	2*	3	7	4	3	7	6	$\overline{2}$	4	0	1	9
2	2*	1*	3	2	2	2	3	$\overline{1}$	1	1	0	4
0	0	1*	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1

Auf weitere Einzelheiten, die sich bei Betrachtung numerischer Beispiele ergeben, und die zugehörigen zahlentheoretischen Eigenschaften soll hier nicht mehr eingegangen werden.

Zusammenfassend: *Die von Pappos in Buch IV der Collectio angeführten Sätze sind nicht glücklich redigiert. Mancherlei deutet darauf hin, daß sie aus einer größeren in sich geschlossenen Abhandlung stammen, die Pappos wohl nur verderbt und lückenhaft bekannt geworden ist. Als Verfasser dieses Satzkomplexes käme vielleicht Archimedes in Frage; womöglich war er Stück einer größeren Abhandlung, aus der nur drei (in unrichtiger Reihenfolge stehende) Sätze unter dem Titel circuli dimensio erhalten sind. Die Zuordnung der beiden miteinander verbundenen Kreisquadrupel und der tragenden Kreistripel ist Beifügung im heutigen Sinn, ebenso die Beziehung zu Heronischen Dreiecken und die zugehörige descente.*

Wir haben also eines der vielen Beispiele dafür vor uns, daß sich bei erneutem Durchdenken der Arbeiten früherer Autoren noch mancherlei Interessantes ergeben kann.

8873 Ichenhausen, Heinrich-Sinz-Straße 15

Eingegangen 26. Februar 1969

Dualitäten in der Kategorie der lokal kompakten Moduln über einem Dedekindschen Ring

Von *K. O. Stöhr* in Bonn

Herrn Professor Dr. Wolfgang Krull zum 70. Geburtstag

Für lokal kompakte abelsche Gruppen hat Pontrjagin [6] eine Dualitätstheorie entwickelt. Von Krull wurde die Frage aufgeworfen, ob sich diese Dualitätstheorie auf lokal kompakte Moduln über einem Ring $\mathfrak{o}$ verallgemeinern läßt. Für den Fall, daß $\mathfrak{o}$ die Hauptordnung eines algebraischen Zahlkörpers K ist, schlug Krull als Bezugsmodul für diese Dualitätstheorie den Modul $(\Pi K_{p\infty})/\mathfrak{o}$ vor ($\Pi K_{p\infty}$ = direktes Produkt aller Komplettierungen von K nach den unendlichen Primstellen), der eine natürliche Verallgemeinerung des Pontrjaginschen Bezugsmoduls $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ darstellt. Für den Spezialfall eines quadratischen Zahlkörpers wurde diese Vermutung von Peters bewiesen.

Wir werden hier im Rahmen einer allgemeinen Theorie die Krullsche Vermutung beweisen; die Beweisführung wird durch das Phänomen erschwert, daß algebraische Zahlkörper gemeinsame außerwesentliche Teiler der Absolutdiskriminante besitzen können. Neben dem von Krull vorgeschlagenen Bezugsmodul werden noch weitere Bezugsmoduln konstruiert.

Wir gehen zunächst so vor, daß wir das Problem in die Sprache der Kategorientheorie übersetzen. Zu diesem Zweck werden in § 1 Dualitätsfunktoren definiert. Wir decken einen merkwürdigen Zusammenhang zwischen Dualität und Klassenzahl auf: Ist $\mathfrak{o}$ ein beliebiger Dedekindscher Ring, so entsprechen die lokal kompakten Moduln, die sich als Bezugsmoduln für eine Dualitätstheorie eignen, bis auf topologische Isomorphie umkehrbar eindeutig den Elementen der Idealklassengruppe. Der Beweis erfordert u. a. Spezialuntersuchungen über das Tensorprodukt in der Kategorie der lokal kompakten Moduln. Aus unseren allgemeinen Ergebnissen über Dualitäten in der Kategorie der lokal kompakten Moduln über einem Dedekindschen Ring können wir unter Heranziehung der Dedekindschen Differententheorie die Krullsche Vermutung beweisen. Analoge Betrachtungen werden für Funktionenkörper einer Variablen mit endlichem Konstantenkörper durchgeführt.

§ 1. Dualitätsfunktoren

Es sei $\mathfrak{o}$ ein kommutativer Ring mit Einselement. Wir fassen $\mathfrak{o}$ auch als topologischen $\mathfrak{o}$-Modul auf, der mit der diskreten Topologie ausgestattet ist. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{R}$ die Kategorie aller topologischen $\mathfrak{o}$-Moduln mit den stetigen $\mathfrak{o}$-Homomorphismen als Morphismen. Es seien $\mathfrak{R}_d$, $\mathfrak{R}_k$ bzw. $\mathfrak{R}_{lk}$ die Unterkategorien der diskreten, kompakten bzw. lokal kompakten $\mathfrak{o}$-Moduln.

Sind M und N zwei topologische $\mathfrak{o}$-Moduln, so bezeichnen wir mit $\mathrm{Hom}(M, N)$ den $\mathfrak{o}$-Modul aller Morphismen (= stetige $\mathfrak{o}$-Homomorphismen) von M in N. Wir machen $\mathrm{Hom}(M, N)$ zu einem topologischen $\mathfrak{o}$-Modul, indem wir ihn mit der Topologie der kompakten Konvergenz ausstatten. Eine Umgebungsbasis des Nullelementes von $\mathrm{Hom}(M, N)$ bilden die Mengen

$$W(K, U) := \{f \in \mathrm{Hom}(M, N) \mid f(K) < U\},$$

wobei K alle kompakten Teilmengen von M und U eine Umgebungsbasis des Nullelementes von N durchläuft.

Definition 1. 1. Wir nennen einen lokal kompakten Modul T dualisierend, wenn gilt:

(i) Es besteht die folgende Reziprozität: Für alle $M \in \mathfrak{R}_{lk}$ ist die Abbildung $\omega: M \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(M, T), T)$, definiert durch $\omega(m)(f) := f(m)$, ein topologischer Isomorphismus.

(ii) Für jeden lokal kompakten Modul M ist auch $\mathrm{Hom}(M, T)$ lokal kompakt.

Wir werden in dieser Arbeit alle dualisierenden Moduln bestimmen, wenn $\mathfrak{o}$ ein Dedekindscher Ring ist. Für den Fall, daß $\mathfrak{o}$ gleich dem Ring $\boldsymbol{Z}$ der ganz-rationalen Zahlen ist, wurde dieses Problem bereits von Pontrjagin [6] gelöst. Die wesentliche Aussage der Pontrjaginschen Dualitätstheorie beinhaltet folgenden Satz.

Satz 1. 2. *Ist* $\mathfrak{o} = \boldsymbol{Z}$, *so ist der Torus* $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ *ein dualisierender Modul* ($\boldsymbol{R}$:= *Körper der reellen Zahlen*). *Ist* M *diskret bzw. kompakt, so ist* $\mathrm{Hom}(M, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$ *kompakt bzw. diskret.*

Wir formulieren nun die Dualitätstheorie in der Sprache der Kategorientheorie:

Definition 1. 3. Unter einem Dualitätsfunktor verstehen wir einen kontravarianten Funktor $D: \mathfrak{R}_{lk} \to \mathfrak{R}_{lk}$ mit den Eigenschaften:

(i) Der Funktor $D^2: \mathfrak{R}_{lk} \to \mathfrak{R}_{lk}$ ist zum identischen Funktor natürlich äquivalent.

(ii) Für alle $M, N \in \mathfrak{R}_{lk}$ ist die kanonische Abbildung

$$\mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(D(N), D(M))$$

ein topologischer Isomorphismus.

Der folgende Satz vermittelt einen engen Zusammenhang zwischen den dualisierenden Moduln und den Dualitätsfunktoren.

Satz 1. 4. (i) *Ist* T *ein dualisierender Modul, so ist* $\mathrm{Hom}(\ , T): \mathfrak{R}_{lk} \to \mathfrak{R}_{lk}$ *ein Dualitätsfunktor.*

(ii) *Sei* $D: \mathfrak{R}_{lk} \to \mathfrak{R}_{lk}$ *ein Dualitätsfunktor. Dann ist* D *natürlich äquivalent zu* $\mathrm{Hom}(\ , D(\mathfrak{o}))$ *und* $D(\mathfrak{o})$ *ist ein dualisierender Modul.*

Die Klassen der dualisierenden Moduln (Klassenbildung bezüglich der topologischen Isomorphie) entsprechen also umkehrbar eindeutig den Klassen der Dualitätsfunktoren (Klassenbildung bezüglich der natürlichen Äquivalenz). Dieser Zusammenhang zwischen den dualisierenden Moduln und den Dualitätsfunktoren ist äußerst nützlich, da es in vielen Fällen leichter ist, Dualitätsfunktoren als dualisierende Moduln anzugeben. Bei der Konstruktion von Dualitätsfunktoren stehen uns die Techniken der homologischen und kategorischen Algebra zur Verfügung.

Zum Beweis des Satzes benötigen wir das folgende

Lemma 1. 5. *Seien* M, N *und* T *topologische Moduln und sei außerdem* N *lokal kompakt. Dann ist der kanonische Homomorphismus*

$$\mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(N, T), \mathrm{Hom}(M, T))$$

stetig.

Beweis des Lemmas. Sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathrm{Hom}(N, T)$, K_M eine kompakte Teilmenge von M und U_T eine Umgebung des Nullelementes von T. Es ist zu zeigen, daß die Menge $\{f \in \mathrm{Hom}(M, N) \mid (g \circ f)(K_M) < U_T \text{ für alle } g \in K\}$ offen ist. Dazu genügt es die Existenz einer Umgebung U_N des Nullelementes von N nachzuweisen, so daß

$$g(U_N) < U_T \text{ für alle } g \in K.$$

Da N lokal kompakt ist, existiert eine Umgebung V_N des Nullelementes von N, deren abgeschlossene Hülle $\overline{V}_N$ kompakt ist. Wegen der Stetigkeit der Addition existiert eine Umgebung V_T des Nullelementes von T, so daß $V_T + V_T < U_T$. $W := W(\overline{V}_N, V_T)$ ist eine offene Teilmenge von $\mathrm{Hom}(N, T)$. Das System der offenen Mengen $\{g + W\}_{g \in K}$ überdeckt die kompakte Menge K. Es gibt bereits eine endliche Überdeckung von K durch offene Mengen $g_1 + W, \ldots, g_n + W$. $U_N := V_N \cap g_1^{-1}(V_T) \cap \cdots \cap g_n^{-1}(V_T)$ ist eine Umgebung des Nullelementes von N. Für jedes $g \in K$ existiert ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ und ein $w \in W$, so daß $g = g_i + w$ und daher $g(U_N) < g_i(U_N) + w(U_N) < V_T + V_T < U_T$. Damit ist das Lemma bewiesen.

Beweis des Satzes. Sei T ein dualisierender Modul und $D := \mathrm{Hom}(\ , T)$. Dann ist offensichtlich $D: \mathfrak{R}_{lk} \to \mathfrak{R}_{lk}$ ein kontravarianter Funktor und der Funktor $D^2: \mathfrak{R}_{lk} \to \mathfrak{R}_{lk}$ ist zum identischen Funktor natürlich äquivalent. Daher ist der zusammengesetzte Homomorphismus $\mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(D(N), D(M)) \to \mathrm{Hom}(D^2(M), D^2(N))$ ein topologischer Isomorphismus. Der nach Lemma 1. 5 stetige Homomorphismus

$$\mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(D(N), D(M))$$

ist daher injektiv. Indem wir M durch $D(N)$ und N durch $D(M)$ ersetzen, folgt, daß auch $\mathrm{Hom}(D(N), D(M)) \to \mathrm{Hom}(D^2(M), D^2(N))$ ein injektiver, stetiger Homomorphismus ist. Daher ist $\mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(D(N), D(M))$ sogar ein topologischer Isomorphismus.

Zu (ii): Sei $D: \mathfrak{R}_{lk} \to \mathfrak{R}_{lk}$ ein Dualitätsfunktor. Der Funktor $\mathrm{Hom}(\mathfrak{o}, \ )$ ist offensichtlich natürlich äquivalent zum identischen Funktor. Für alle $M \in \mathfrak{R}_{lk}$ bestehen die topologischen Isomorphismen:

$$D(M) \cong \mathrm{Hom}(\mathfrak{o}, D(M)) \cong \mathrm{Hom}(D^2(M), D(\mathfrak{o})) \cong \mathrm{Hom}(M, D(\mathfrak{o})).$$

Daher ist der Funktor $D: \mathfrak{R}_{lk} \to \mathfrak{R}_{lk}$ natürlich äquivalent zum Funktor $\mathrm{Hom}(\ , D(\mathfrak{o}))$.

Für alle $M \in \mathfrak{R}_{lk}$ ist die Reziprozitätsabbildung $M \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(M, D(\mathfrak{o}), D(\mathfrak{o}))$ ein topologischer Isomorphismus, da sie sich offensichtlich aus den folgenden Isomorphismen zusammensetzt:

$$M \cong \mathrm{Hom}(\mathfrak{o}, M) \cong \mathrm{Hom}(D(M), D(\mathfrak{o})) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(M, D(\mathfrak{o})), D(\mathfrak{o})).$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Die Dualitätstheorie, die Pontrjagin für lokal kompakte abelsche Gruppen d. h. für lokal kompakte $\boldsymbol{Z}$-Moduln entwickelt hat, überträgt sich nun leicht auf lokal kompakte $\mathfrak{o}$-Moduln. Wir formulieren diese Dualität in der Sprache der Kategorientheorie:

Es sei $D_{\mathfrak{o}}$ der kontravariante Funktor, der jedem topologischen $\mathfrak{o}$-Modul M den topologischen $\mathfrak{o}$-Modul $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(M, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$ zuordnet. Dabei sei $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(M, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$ die additive Gruppe aller stetigen $\boldsymbol{Z}$-Homomorphismen von M in $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$, die mit der Topologie der kompakten Konvergenz ausgestattet ist, und auf der wie folgt eine $\mathfrak{o}$-Modulstruktur erklärt ist:

$${}^{r}f(m) := f(rm), \text{ wobei } r \in \mathfrak{o},\ f \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(M, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}) \text{ und } m \in M.$$

Satz 1. 6. $D_\mathfrak{o} = \mathrm{Hom}_Z(\ , \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}) : \mathfrak{K}_{lk} \to \mathfrak{K}_{lk}$ *ist ein Dualitätsfunktor, der diskrete bzw. kompakte in kompakte bzw. diskrete Moduln überführt.*

Beweis. Für $\mathfrak{o} = \boldsymbol{Z}$ folgt dies unmittelbar aus den Sätzen 1. 2 und 1. 4.

$D_\mathfrak{o}$ ist ein kontravarianter Funktor von $\mathfrak{K}_{lk}$ in $\mathfrak{K}_{lk}$, der diskrete bzw. kompakte Moduln in kompakte bzw. diskrete Moduln abbildet. Für alle $M \in \mathfrak{K}_{lk}$ ist die Reziprozitätsabbildung $\omega : M \to \mathrm{Hom}_Z(\mathrm{Hom}_Z(M, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}), \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$ einerseits ein $\mathfrak{o}$-Homomorphismus, denn $\omega(rm)(f) = f(rm) = {}^r f(m) = \omega(m)({}^r f) = {}^r(\omega(m))(f)$, und andererseits nach Satz 1.2 ein topologischer $\boldsymbol{Z}$-Isomorphismus, also ein topologischer $\mathfrak{o}$-Isomorphismus. Daher ist $D_\mathfrak{o}^2$ natürlich äquivalent zum identischen Funktor.

Für alle $M, N \in \mathfrak{K}_{lk}$ ist $\mathrm{Hom}_Z(M, N) \to \mathrm{Hom}_Z(D_\mathfrak{o} N, D_\mathfrak{o} M)$ ein topologischer $\boldsymbol{Z}$-Isomorphismus, der $\mathrm{Hom}(M, N)$ auf $\mathrm{Hom}(D_\mathfrak{o} N, D_\mathfrak{o} M)$ abbildet, und daher ist der $\mathfrak{o}$-Homomorphismus $\mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(D_\mathfrak{o} N, D_\mathfrak{o} M)$ ein topologischer Isomorphismus.

Nach dem gerade bewiesenen Satz ist die Kategorie $\mathfrak{K}_{lk}$ autodual. $\mathfrak{K}_k$ ist die Dualkategorie von $\mathfrak{K}_d$. Der Dualitätsfunktor $\mathrm{Hom}_Z(\ , \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$ ist nach Satz 1. 4 natürlich äquivalent zu dem Funktor $\mathrm{Hom}(\ , \mathrm{Hom}_Z(\mathfrak{o}, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}))$ und es gilt:

Korollar 1. 7. $T_\mathfrak{o} := \mathrm{Hom}_Z(\mathfrak{o}, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$ *ist ein dualisierender Modul.* $\mathrm{Hom}(M, T_\mathfrak{o})$ *ist diskret bzw. kompakt, wenn* M *kompakt bzw. diskret ist.*

Unser Ziel ist es, weitere Dualitätsfunktoren anzugeben. Wir werden dazu kovariante Funktoren F konstruieren, so daß die zusammengesetzten Funktoren $FD_\mathfrak{o}$ Dualitätsfunktoren sind.

§ 2. Das Dual von Untermoduln und Faktormoduln

Die Kategorie $\mathfrak{K}$ der topologischen $\mathfrak{o}$-Moduln mit den stetigen Homomorphismen als Morphismen ist keine abelsche Kategorie; denn es existieren stetige Isomorphismen, die nicht topologisch sind. Um eine abelsche Kategorie zu erhalten, wollen wir die Morphismen in anderer Weise definieren. Unter einem $*$-Morphismus wollen wir einen $\mathfrak{o}$-Homomorphismus $M \to L$ verstehen, der M stetig und offen auf einen abgeschlossenen Untermodul von L abbildet.

Es sei N ein abgeschlossener Untermodul von M. Der Faktormodul M/N hat die folgenden Eigenschaften:

(i) Der Projektionshomomorphismus $M \to M/N$ ist stetig und offen (also ein $*$-Morphismus) und bildet den Verband der abgeschlossenen Untermoduln von M auf den Verband der abgeschlossenen Untermoduln von M/N ab.

(ii) Ist $f : M \to L$ ein stetiger $\mathfrak{o}$-Homomorphismus bzw. ein $*$-Morphismus und gilt $f(N) = 0$, so ist die durch f induzierte Abbildung $M/N \to L$ ein stetiger $\mathfrak{o}$-Homomorphismus bzw. ein $*$-Morphismus.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{K}^*$ die Kategorie der topologischen $\mathfrak{o}$-Moduln mit den $*$-Morphismen als Morphismen. $\mathfrak{K}_{lk}^*$, $\mathfrak{K}_k^*$ bzw. $\mathfrak{K}_d^*$ seien die Unterkategorien der lokal kompakten, kompakten bzw. diskreten Moduln.

Satz 2. 1. *Die Kategorien* $\mathfrak{K}^*$, $\mathfrak{K}_{lk}^*$, $\mathfrak{K}_k^*$ *und* $\mathfrak{K}_d^*$ *sind abelsche Kategorien.*

Beweis. Man sieht unmittelbar, daß dies additive Kategorien sind.

Jeder $*$-Morphismus $M \xrightarrow{f} N$ läßt sich in die Sequenz

$$f^{-1}(0) \xrightarrow{f_1} M \xrightarrow{f_2} M/f^{-1}(0) \xrightarrow{f_3} N \xrightarrow{f_4} N/f(M)$$

von $*$-Morphismen einbetten. In der Kategorie gilt: f_1 ist Kern von f, f_4 ist Cokern von f, f_3 ist Kern von f_4, f_2 ist Cokern von f_1. Die Aussagen, die die Kerne betreffen, sind

unmittelbar einzusehen; die Aussagen, die die Cokerne betreffen, folgen aus den Eigenschaften der Faktormoduln. Sind M und N Objekte der Kategorie, so ist das Tychonoff-Produkt $M \times N$ offensichtlich direktes Produkt von M und N in der Kategorie.

Daher sind die Kategorien $\mathfrak{K}^*$, $\mathfrak{K}_{lk}^*$, $\mathfrak{K}_k^*$ und $\mathfrak{K}_d^*$ abelsche Kategorien.

Ist N ein abgeschlossener Untermodul von M, so erhalten wir eine kurze exakte Sequenz $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ von $*$-Morphismen.

Ist umgekehrt $0 \to N \to M \to L \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von $*$-Morphismen, so können wir N bis auf topologische Isomorphie als abgeschlossenen Untermodul von M auffassen und L ist topologisch isomorph zu dem Faktormodul M/N.

Satz 2. 2. *Jeder Dualitätsfunktor $D: \mathfrak{K}_{lk} \to \mathfrak{K}_{lk}$ induziert einen additiven kontravarianten exakten Funktor von $\mathfrak{K}_{lk}^*$ in $\mathfrak{K}_{lk}^*$.*

Beweis. Sei $0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} L \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von lokal kompakten Moduln und $*$-Morphismen. Wir haben zu zeigen, daß auch

$$0 \to D(L) \to D(M) \to D(N) \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von $*$-Morphismen ist.

Sei $T := D(\mathfrak{o})$ der dem Dualitätsfunktor D zugeordnete dualisierende Modul. Die beiden Homomorphismen $\mathrm{Hom}(L, T) \to \mathrm{Hom}(M, T) \to \mathrm{Hom}(N, T)$ sind stetig. L ist topologisch isomorph zu $M/i(N)$ und aus den Eigenschaften der Faktormoduln folgt, daß $\mathrm{Hom}(L, T) \to \mathrm{Hom}(M, T)$ ein injektiver Homomorphismus auf den abgeschlossenen Modul $B := \mathrm{Kern}\big(\mathrm{Hom}(M, T) \to \mathrm{Hom}(N, T)\big)$ ist. Wir zeigen, daß diese Abbildung sogar offen ist. Sei dazu K_L eine kompakte Teilmenge von L und U_T eine offene Teilmenge von T. Wir zeigen, daß das Bild von $W(K_L, U_T) := \{f \in \mathrm{Hom}(L, T) \mid f(K_L) \subset U_T\}$ offen in B ist. Dazu zeigen wir zunächst, daß K_L im Bild einer kompakten Teilmenge von M enthalten ist. Da M lokal kompakt ist, existiert eine offene Umgebung U_M des Nullelementes, deren abgeschlossene Hülle $\bar{U}_M$ kompakt ist. $\{p(m) + p(U_M)\}_{m \in M}$ ist eine offene Überdeckung der kompakten Menge K_L. Sei $\{p(m_i) + p(U_M)\}$ eine endliche Teilüberdeckung. Dann ist K_L im Bild der kompakten Menge $K_M := \bigcup_i (m_i + \bar{U}_M)$ enthalten: $K_L \subset p(K_M)$. Sei nun $f \in W(K_M, U_T) \cap B$. Da

$$f \in B = \mathrm{Bild}\big(\mathrm{Hom}(L, T) \to \mathrm{Hom}(M, T)\big),$$

existiert ein $g \in \mathrm{Hom}(L, T)$, so daß $f = g \circ p$. Es ist $g \in W(K_L, U_T)$, denn

$$g(K_L) \subset (g \circ p)(K_M) = f(K_M) \subset U_T.$$

Folglich enthält das Bild von $W(K_L, U_T)$ in $\mathrm{Hom}(M, T)$ die Menge $W(K_M, U_T) \cap B$ und ist daher offen in B.

Damit ist gezeigt, daß die Abbildung $D(L) \to D(M)$ ein injektiver $*$-Morphismus auf $\mathrm{Kern}\big(D(M) \to D(N)\big)$ ist. Diese Abbildung kann daher in eine kurze exakte Sequenz $0 \to D(L) \to D(M) \to A \to 0$ von $*$-Morphismen eingebettet werden. Es besteht ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & D(L) & \longrightarrow & D(M) & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow\downarrow & & \uparrow\downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & D(L) & \longrightarrow & D(M) & \longrightarrow & D(N) \longrightarrow 0, \end{array}$$

in dem die Abbildungen stetige Homomorphismen sind. Durch Anwendung des Funktors D erhalten wir das kommutative Diagramm mit stetigen Homomorphismen:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & D(A) & \longrightarrow & D^2(M) & \longrightarrow & D^2(L) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & D^2(N) & \longrightarrow & D^2(M) & \longrightarrow & D^2(L) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Da der Funktor D^2 natürlich äquivalent zu dem identischen Funktor ist, ist die untere Zeile dieses Diagramms eine exakte Sequenz von $\ast$-Morphismen. Andererseits folgt aus den vorausgegangenen Überlegungen, daß $D(A) \to D^2(M)$ ein injektiver $\ast$-Morphismus auf den Kern von $D^2(M) \to D^2(L)$ ist. Folglich ist die vertikale Abbildung $D^2(N) \to D(A)$ ein topologischer Isomorphismus. Daher ist auch im ersten Diagramm die Abbildung $A \to D(N)$ ein topologischer Isomorphismus. Mit der oberen Zeile ist daher auch die untere Zeile $0 \to D(L) \to D(M) \to D(N) \to 0$ dieses Diagramms eine kurze exakte Sequenz von $\ast$-Morphismen. q. e. d.

Aus diesem Satz ergeben sich eine Reihe von Folgerungen, die entsprechende Sätze von Pontrjagin [6] verallgemeinern.

Korollar 2. 3. *Sei T ein dualisierender Modul, M ein lokal kompakter Modul und N ein abgeschlossener Untermodul von M. Dann gilt*:

(i) $\mathrm{Hom}\,(M/N, T) \cong \{f \in \mathrm{Hom}\,(M, T) \mid f(N) = 0\} =: $ *Annulator von* N

(ii) $\mathrm{Hom}\,(N, T) \cong \mathrm{Hom}\,(M, T)/\mathrm{Ann}\,(N)$

Beweis. Mit $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ ist nach Satz 2. 2 auch

$$0 \to \mathrm{Hom}\,(M/N, T) \to \mathrm{Hom}\,(M, T) \to \mathrm{Hom}\,(N, T) \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von $\ast$-Morphismen. Hieraus folgen unmittelbar die Aussagen (i) und (ii).

Korollar 2. 4. *Die Zuordnung $N \mapsto \mathrm{Ann}\,(N)$ liefert eine antimonotone Bijektion zwischen dem Verband der abgeschlossenen Untermoduln von M und dem Verband der abgeschlossenen Untermoduln von* $\mathrm{Hom}\,(M, T)$.

Das folgende Korollar befaßt sich mit der Fortsetzung von Charakteren. Es steht in Analogie zum Satz von Hahn-Banach aus der Theorie der linearen normierten Räume.

Korollar 2. 5. *Sei T ein dualisierender Modul, N ein abgeschlossener Untermodul des lokal kompakten Moduls M und m ein Element von M, das nicht zu N gehört. Dann läßt sich jeder Charakter $g \in \mathrm{Hom}\,(N, T)$ zu einem Charakter $f \in \mathrm{Hom}\,(M, T)$ mit $f(m) \neq 0$ fortsetzen.*

Beweis. Nach 2. 3 (ii) läßt sich $g \in \mathrm{Hom}\,(N, T)$ zu einem $f_1 \in \mathrm{Hom}\,(M, T)$ fortsetzen. Ist $f_1(m) \neq 0$, so hat f_1 die geforderten Eigenschaften. Wir nehmen nun $f_1(m) = 0$ an. Wegen der Injektivität der Reziprozitätsabbildung $M/N \to D^2(M/N)$ existiert ein Charakter $h \in \mathrm{Hom}\,(M/N, T)$, der auf dem Bild von m in M/N nicht verschwindet. h induziert einen Charakter $f_2 \in \mathrm{Hom}\,(M, T)$ mit $f_2(N) = 0$ und $f_2(m) \neq 0$. Der Charakter $f := f_1 + f_2$ hat die geforderten Eigenschaften.

Korollar 2. 6. *$M_1, \ldots, M_n$ seien endlich viele lokal kompakte Moduln. Dann besteht der topologische Isomorphismus*:

$$D(M_1 \times \cdots \times M_n) \cong D(M_1) \times \cdots \times D(M_n).$$

Sind die Moduln M und N diskret, so ist jeder stetige Homomorphismus $M \to N$ ein $\ast$-Morphismus. Mittels Dualitätstheorie kommt man zu dem gleichen Resultat, wenn M und N kompakt sind. Daher gilt:

$$\mathfrak{K}_d^* = \mathfrak{K}_d$$
$$\mathfrak{K}_k^* = \mathfrak{K}_k$$

Sei D ein Dualitätsfunktor, der diskrete bzw. kompakte Moduln in kompakte bzw. diskrete Moduln überführt (etwa $D = D_0$). Dann liefert D ein Dualität zwischen der Kategorie $\mathfrak{K}_d$ der diskreten und der Kategorie $\mathfrak{K}_k$ der kompakten Moduln. Wie bei jeder Dualität gehen dabei die projektiven bzw. injektiven Objekte von $\mathfrak{K}_d$ über. Aus Satz 2. 2 folgt:

Korollar 2. 7. *Sei M ein diskreter Modul. M ist genau dann torsionsfrei bzw. dividierbar, wenn $D(M)$ dividierbar bzw. torsionsfrei ist.*

Beweis. Man hat nur zu beachten, daß ein Modul genau dann torsionsfrei bzw. dividierbar ist, wenn die durch die Ringelemente induzierten Endomorphismen injektiv bzw. surjektiv sind.

§ 3. Die Funktoren $F_\mathfrak{a}$

In diesem Paragraphen sei $\mathfrak{o}$ ein Integritätsring. Unter der Idealgruppe von $\mathfrak{o}$ wollen wir die multiplikative Gruppe aller invertierbaren gebrochenen Ideale verstehen. Die Gruppe der gebrochenen Hauptideale ist eine Untergruppe der Idealgruppe. Die zugehörige Faktorgruppe heißt die Idealklassengruppe von $\mathfrak{o}$.

Lemma 3. 1. *Sei $\mathfrak{a}$ ein invertierbares $\mathfrak{o}$-Ideal und M ein diskreter $\mathfrak{o}$-Modul.*

(i) *Die Abbildung* $\mathfrak{a} \otimes M \to \mathrm{Hom}\,(\mathfrak{a}^{-1}, M)$, *definiert durch*

$$\sum_i a_i \otimes m_i \mapsto (q \mapsto \sum_i (q a_i(m_i)),$$

ist ein Isomorphismus.

(ii) *Ist M torsionsfrei, so ist die Abbildung* $\mathfrak{a} \otimes M \to \mathfrak{a} M$, *definiert durch*

$$\sum_i a_i \otimes m_i \mapsto \sum_i a_i m_i,$$

ein Isomorphismus.

(iii) *Ist M torsionsfrei, so ist die Abbildung* $\mathfrak{a} M \to \mathrm{Hom}\,(\mathfrak{a}^{-1}, M)$, *definiert durch* $m \mapsto (q \mapsto qm)$, *ein Isomorphismus.*

Beweis. Zu (i): Es existieren Elemente $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{a}$ und $q_1, \ldots, q_n \in \mathfrak{a}^{-1}$, so daß $1 = a_1 + \cdots + a_n q_n$. Wir definieren einen Homomorphismus $\mathrm{Hom}\,(\mathfrak{a}^{-1}, M) \to \mathfrak{a} \otimes M$ durch $h \mapsto \sum_i a_i \otimes h(q_i)$. Der zusammengesetzte Homomorphismus

$$\mathrm{Hom}\,(\mathfrak{a}^{-1}, M) \to \mathfrak{a} \otimes M \to \mathrm{Hom}\,(\mathfrak{a}^{-1}, M)$$

ist die Identität, denn $h \mapsto (\sum_i a_i \otimes h(q_i)) \mapsto (q \mapsto \sum q a_i h(q_i) = h(\sum q a_i q_i) = h(q))$. Desgleichen ist der zusammengesetzte Homomorphismus $\mathfrak{a} \otimes M \to \mathrm{Hom}\,(\mathfrak{a}^{-1}, M) \to \mathfrak{a} \otimes M$ die Identität, denn $a \otimes m \mapsto (q \mapsto (qa)m) \mapsto \sum a_i \otimes (q_i a)m = \sum a_i q_i a \otimes m = a \otimes m$. Folglich ist $\mathfrak{a} \otimes M \to \mathrm{Hom}\,(\mathfrak{a}^{-1}, M)$ ein Isomorphismus.

Zu (ii): Da M torsionsfrei ist, können wir M in den dividierbaren torsionsfreien Modul $K \otimes M$ einbetten ($K :=$ Quotientenkörper von $\mathfrak{o}$). Wir definieren einen Homo-

morphismus $\mathfrak{a}M \to \mathfrak{a} \otimes M$ durch die Zuordnung $m \mapsto \sum a_k \otimes q_k m$. Man überzeugt sich nun wieder leicht, daß die Homomorphismen $\mathfrak{a} \otimes M \to \mathfrak{a}M$ und $\mathfrak{a}M \to \mathfrak{a} \otimes M$ zueinander invers und daher Isomorphismen sind.

(iii) folgt unmittelbar aus (i) und (ii).

Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ invertierbare Ideale, so bestehen insbesondere die Isomorphismen:

$$\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b} \cong \mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

$$\mathrm{Hom}\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \cong \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}$$

Aus der zweiten Isomorphie folgt, daß zwei invertierbare Ideale genau dann isomorph sind, wenn sie sich um ein Hauptideal unterscheiden, d. h. wenn sie in der gleichen Idealklassengruppe liegen. Die Multiplikation zweier Idealklassen wird durch das Tensorprodukt geliefert.

Es sei nun M ein topologischer Modul. $\mathrm{Hom}\,(\mathfrak{a}^{-1}, M)$ ist mit der Topologie der kompakten Konvergenz ausgestattet (die hier mit der Topologie der punktweisen Konvergenz zusammenfällt). Wir machen den Modul $\mathfrak{a} \otimes M$ zu einem topologischen Modul, indem wir fordern, daß der Isomorphismus

$$\mathfrak{a} \otimes M \cong \mathrm{Hom}\,(\mathfrak{a}^{-1}, M)$$

ein topologischer Isomorphismus ist. Wir wollen nun die Topologie von $\mathfrak{a} \otimes M$ bestimmen.

Satz 3. 2. *Sei $a_1, \ldots, a_n$ eine Idealbasis des invertierbaren Ideals $\mathfrak{a}$. Dann ist die Abbildung $M^n \to \mathfrak{a} \otimes M$, definiert durch $(m_1, \ldots, m_n) \mapsto a_1 \otimes m_1 + \cdots + a_n \otimes m_n$ ein surjektiver, stetiger, offener Homomorphismus. Die kompakten Teilmengen von $\mathfrak{a} \otimes M$ sind gerade die Bilder der kompakten Teilmengen von M^n.*

Beweis. Zum Beweis der Stetigkeit ist zu zeigen, daß für alle $a \in \mathfrak{a}$ die Abbildung $M \to \mathfrak{a} \otimes M = \mathrm{Hom}\,(\mathfrak{a}^{-1}, M)$, definiert durch $m \mapsto a \otimes m$, stetig ist. Sei dazu E eine kompakte, d. h. endliche Teilmenge von $\mathfrak{a}^{-1}$ und U eine offene Teilmenge von M. Dann ist $\{m \in M \mid (aq)m \in U \text{ für alle } q \in E\} = \bigcap_{q \in E} \{m \in M \mid (aq)m \in U\}$ offen, da die durch die Ringelemente induzierten Endomorphismen von M stetig sind. Damit ist die Stetigkeit des Homomorphismus $M^n \to \mathfrak{a} \otimes M$ gezeigt.

Es seien $q_1, \ldots, q_n$ Elemente von $\mathfrak{a}^{-1}$, so daß $1 = a_1 q_1 + \cdots + a_n q_n$. Die Abbildung $\mathfrak{a} \otimes M \to M^n$, die jedem Element $f \in \mathrm{Hom}\,(\mathfrak{a}^{-1}, M) = \mathfrak{a} \otimes M$ das n-tupel $(f(q_1), \ldots, f(q_n)) \in M^n$ zuordnet, ist offensichtlich stetig. Man sieht unmittelbar, daß das Kompositum der beiden stetigen Homomorphismen $\mathfrak{a} \otimes M \to M^n \to \mathfrak{a} \otimes M$ die identische Abbildung ist. Daher ist $M^n \to \mathfrak{a} \otimes M$ ein stetiger, surjektiver, offener Homomorphismus und die kompakten Teilmengen von $\mathfrak{a} \otimes M$ sind gerade die Bilder der kompakten Teilmengen von M^n.

Die Eigenschaften der topologischen Moduln, die bei Bildung von Faktormoduln und endlichen direkten Produkten erhalten bleiben, bleiben daher beim Übergang von M zu $\mathfrak{a} \otimes M$ erhalten. Insbesondere ist $\mathfrak{a} \otimes M \cong \mathrm{Hom}\,(\mathfrak{a}^{-1}, M)$ diskret, kompakt bzw. lokal kompakt, wenn M diskret, kompakt bzw. lokal kompakt ist.

Satz 3. 3. *Seien M und N topologische Moduln. Dann ist die Abbildung*

$$\mathrm{Hom}\,(\mathfrak{a} \otimes M, N) \to \mathrm{Hom}\,(\mathfrak{a}, \mathrm{Hom}\,(M, N)),$$

definiert durch $f \mapsto (a \mapsto (m \mapsto f(a \otimes m)))$, ein topologischer Isomorphismus.

Beweis. Für diskrete Moduln M und N ist diese Aussage sicher richtig (universelle Eigenschaft des Tensorproduktes).

Zum Beweis, daß der Homomorphismus $\mathrm{Hom}(\mathfrak{a} \otimes M, N) \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, \mathrm{Hom}(M, N))$ bijektiv ist, haben wir zu zeigen, daß ein Homomorphismus $f: \mathfrak{a} \otimes M \to N$ genau dann stetig ist, wenn für alle $a \in \mathfrak{a}$ die Homomorphismen $M \to N$, definiert durch $m \mapsto f(a \otimes m)$, stetig sind. Ist f stetig, so ist für jedes $a \in \mathfrak{a}$ der Homomorphismus $(m \mapsto f(a \otimes m))$ stetig, da er sich aus zwei stetigen Homomorphismen zusammensetzt: $m \mapsto a \otimes m \mapsto f(a \otimes m)$. Sind umgekehrt für alle $a \in \mathfrak{a}$ die Homomorphismen $(m \mapsto f(a \otimes m))$ stetig, so ist auch der Homomorphismus $M^n \to N$, definiert durch $(m_1, \ldots, m_n) \mapsto \sum_i f(a_i \otimes m_i)$, stetig. Dieser Homomorphismus setzt sich aus den Homomorphismen $M^n \longrightarrow \mathfrak{a} \otimes M \xrightarrow{f} N$ zusammen. Da die Abbildung $M^n \to \mathfrak{a} \otimes M$ surjektiv und offen ist (vgl. Satz 3. 2), folgt somit die Stetigkeit von $\mathfrak{a} \otimes M \xrightarrow{f} N$ aus der Stetigkeit von $M^n \longrightarrow N$.

Zum Beweis, daß der Isomorphismus $\mathrm{Hom}(\mathfrak{a} \otimes M, N) \cong \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, \mathrm{Hom}(M, N))$ sogar ein topologischer Isomorphismus ist, zeigen wir, daß unter dieser Isomorphie eine Umgebungsbasis des Nullelementes von $\mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, \mathrm{Hom}(M, N))$ in eine Umgebungsbasis des Nullelementes von $\mathrm{Hom}(\mathfrak{a} \otimes M, N)$ übergeht. Wir haben also zu zeigen, daß

$$\{f \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{a} \otimes M, N) \mid f(a \otimes m) \in U \text{ für alle } a \in E \text{ und } m \in K_M\}$$

eine Umgebungsbasis des Nullelementes ist, wenn E alle endlichen Teilmengen von $\mathfrak{a}$, K_M alle kompakten Teilmengen von M und U alle Umgebungen des Nullelementes von N durchläuft. Die Mengen $\{a \otimes m \mid a \in E \text{ und } m \in K_M\}$ sind kompakte Teilmengen von $\mathfrak{a} \otimes M$ und umgekehrt ist nach Satz 3. 2 jede kompakte Teilmenge von $\mathfrak{a} \otimes M$ in einer solchen Menge enthalten. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 3. 4. *Für jedes invertierbare Ideal* $\mathfrak{a}$ *ist* $F_\mathfrak{a} := \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, \ )$ *ein kovarianter Funktor von* $\mathfrak{R}$ *in* $\mathfrak{R}$, *der diskrete, kompakte bzw. lokal kompakte Moduln in diskrete, kompakte bzw. lokal kompakte Moduln überführt. Außerdem gilt*:

(i) $F_\mathfrak{a}$ *ist genau dann natürlich äquivalent zum identischen Funktor, wenn* $\mathfrak{a}$ *ein Hauptideal ist.*

(ii) *Die Funktoren* $F_\mathfrak{a}$ *und* $F_\mathfrak{b}$ *sind genau dann natürlich äquivalent, wenn* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *in derselben Idealklassengruppe liegen.*

(iii) *Der zusammengesetzte Funktor* $F_\mathfrak{a} F_\mathfrak{b}$ *ist natürlich äquivalent zum Funktor* $F_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$.

Beweis. Zu (ii): Sind die Funktoren $F_\mathfrak{a}$ und $F_\mathfrak{b}$ natürlich äquivalent, so ist $F_\mathfrak{a}(\mathfrak{b}) \cong F_\mathfrak{b}(\mathfrak{b})$, d. h. $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b} \cong \mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$, d. h. $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}$ ist ein Hauptideal. Ist umgekehrt $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}$ ein Hauptideal, so sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ isomorph und daher $F_\mathfrak{a}$ und $F_\mathfrak{b}$ natürlich äquivalent.

Zu (i): Folgt unmittelbar aus (ii), da $F_\mathfrak{o}$ natürlich äquivalent zum identischen Funktor ist.

Zu (iii): Sei M ein topologischer Modul. Nach Satz 3. 3 gilt:

$$F_\mathfrak{a} F_\mathfrak{b}(M) = \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, \mathrm{Hom}(\mathfrak{b}, M)) \cong \mathrm{Hom}(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}, M) \cong \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}, M) = F_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(M)$$

Satz 3. 5. *Für alle topologischen Moduln* M *und* N *ist die kanonische Abbildung* $\mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(F_\mathfrak{a} M, F_\mathfrak{a} N)$ *ein topologischer Isomorphismus.*

Zum Beweis des Satzes benötigen wir das folgende

Lemma 3. 6. *Seien* L, M *und* N *topologische Moduln und sei außerdem* L *lokal kompakt. Dann ist der kanonische Homomorphismus*

$$\mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(L, M), \mathrm{Hom}(L, N))$$

stetig.

Beweis des Lemmas. Sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathrm{Hom}(L, M)$, K_L eine kompakte Teilmenge von L und U_N eine offene Teilmenge von N. Es ist zu zeigen, daß die Menge $\{f \in \mathrm{Hom}(M, N) \mid (f \circ g)(K_L) \subset U_N \text{ für alle } g \in K\}$ offen ist. Dazu genügt der Nachweis, daß $\bigcup_{g \in K} g(K_L)$ eine kompakte Teilmenge von M ist. $\bigcup_{g \in K} g(K_L)$ ist das Bild der kompakten Menge $K \times K_L$ unter der Abbildung $\mathrm{Hom}(L, M) \times L \to M$. Es genügt daher die Stetigkeit dieser Abbildung zu zeigen. Sei dazu U_M eine offene Teilmenge von M. Da L lokal kompakt ist, existiert eine offene Teilmenge U_L von L, deren abgeschlossene Hülle $\bar{U}_L$ kompakt ist. Die Elemente der offenen Menge $W(\bar{U}_L, U_M) \times U_L$ werden in U_M abgebildet. Damit ist das Lemma bewiesen.

Beweis des Satzes. Da der Funktor $F_{\mathfrak{a}^{-1}} F_{\mathfrak{a}}$ natürlich äquivalent zum identischen Funktor ist, ist die zusammengesetzte Abbildung

$$\mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(F_{\mathfrak{a}} M, F_{\mathfrak{a}} N) \to \mathrm{Hom}(F_{\mathfrak{a}^{-1}} F_{\mathfrak{a}} M, F_{\mathfrak{a}^{-1}} F_{\mathfrak{a}} N)$$

ein topologischer Isomorphismus. Der nach Lemma 3. 6 stetige Homomorphismus $\mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(F_{\mathfrak{a}} M, F_{\mathfrak{a}} N)$ ist daher injektiv. Indem wir M durch $F_{\mathfrak{a}} M$ und N durch $F_{\mathfrak{a}} N$ ersetzen, folgt, daß auch $\mathrm{Hom}(F_{\mathfrak{a}} M, F_{\mathfrak{a}} N) \to \mathrm{Hom}(F_{\mathfrak{a}^{-1}} F_{\mathfrak{a}} M, F_{\mathfrak{a}^{-1}} F_{\mathfrak{a}} N)$ ein injektiver, stetiger Homomorphismus ist. Daher ist $\mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}(F_{\mathfrak{a}} M, F_{\mathfrak{a}} N)$ sogar ein topologischer Isomorphismus.

§ 4. Die Dualitätsfunktoren $D_{\mathfrak{b}}$

Es sei wieder $\mathfrak{o}$ ein Integritätsring; $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ seien im Folgenden immer invertierbare $\mathfrak{o}$-Ideale. Für jeden topologischen $\mathfrak{o}$-Modul M sei wieder $\mathrm{Hom}_Z(M, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$ der topologische $\mathfrak{o}$-Modul aller stetigen $\boldsymbol{Z}$-Homomorphismen von M in $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$.

Definition 4. 1. *$T_{\mathfrak{b}}$ sei der kompakte $\mathfrak{o}$-Modul* $\mathrm{Hom}_Z(\mathfrak{b}, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$. *$D_{\mathfrak{b}} : \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}$ sei der kontravariante Funktor* $\mathrm{Hom}(\ , T_{\mathfrak{b}})$.

Lemma 4. 2. *$F_{\mathfrak{a}}(T_{\mathfrak{b}}) = D_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a}) \cong T_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ (topologisch isomorph).*

Beweis. $\mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, \mathrm{Hom}_Z(\mathfrak{b}, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})) \cong \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, \mathrm{Hom}(\mathfrak{b}, T_{\mathfrak{o}})) \cong \mathrm{Hom}(\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b}, T_{\mathfrak{o}}) \cong \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}, T_{\mathfrak{o}}) \cong \mathrm{Hom}_Z(\mathfrak{a}\mathfrak{b}, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}) \cong T_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$.

Zwischen den Funktoren $F_{\mathfrak{a}}$ und $D_{\mathfrak{b}}$ besteht der folgende Zusammenhang:

Satz 4. 3. *Es bestehen die natürlichen Äquivalenzen:* $F_{\mathfrak{a}} D_{\mathfrak{b}} \sim D_{\mathfrak{b}} F_{\mathfrak{a}^{-1}} \sim D_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$.

Beweis. Nach den Sätzen 3. 3 und 3. 5 gilt für jeden topologischen Modul M:

$$\begin{aligned} F_{\mathfrak{a}} D_{\mathfrak{b}}(M) &= \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, \mathrm{Hom}(M, T_{\mathfrak{b}})) \cong \mathrm{Hom}(\mathfrak{a} \otimes M, T_{\mathfrak{b}}) \cong D_{\mathfrak{b}}(\mathfrak{a} \otimes M) \\ &\cong D_{\mathfrak{b}}(\mathrm{Hom}(\mathfrak{a}^{-1}, M)) = D_{\mathfrak{b}} F_{\mathfrak{a}^{-1}}(M) = \mathrm{Hom}(F_{\mathfrak{a}^{-1}} M, T_{\mathfrak{b}}) \\ &\cong \mathrm{Hom}(F_{\mathfrak{a}} F_{\mathfrak{a}^{-1}} M, F_{\mathfrak{a}} T_{\mathfrak{b}}) \cong \mathrm{Hom}(M, T_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}) = D_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(M). \end{aligned}$$

Satz 4. 4. *$D_{\mathfrak{b}} : \mathfrak{R}_{lk} \to \mathfrak{R}_{lk}$ ist ein Dualitätsfunktor, der diskrete bzw. kompakte Moduln in kompakte bzw. diskrete Moduln überführt. $D_{\mathfrak{a}}$ und $D_{\mathfrak{b}}$ sind genau dann natürlich äquivalent, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zur selben Idealklasse gehören.*

Beweis. Nach (1. 7) ist $D_{\mathfrak{o}}$ ein Dualitätsfunktor.

Ist M diskret, kompakt bzw. lokal kompakt, so ist nach (1. 7) $D_{\mathfrak{o}}(M)$ und damit nach Satz 3. 4 $D_{\mathfrak{b}}(M) \cong F_{\mathfrak{b}}(D_{\mathfrak{o}} M)$ kompakt, diskret bzw. lokal kompakt. Folglich ist $D_{\mathfrak{b}}$ ein kontravarianter Funktor von $\mathfrak{R}_{lk}$ in $\mathfrak{R}_{lk}$, der diskrete bzw. kompakte Moduln in kompakte bzw. diskrete Moduln überführt.

Der Funktor $D_{\mathfrak{b}}^2$ ist zum identischen Funktor natürlich äquivalent, denn

$$D_{\mathfrak{b}}^2 \sim (D_{\mathfrak{o}} F_{\mathfrak{b}^{-1}})(F_{\mathfrak{b}} D_{\mathfrak{o}}) \sim D_{\mathfrak{o}}(F_{\mathfrak{b}^{-1}} F_{\mathfrak{b}}) D_{\mathfrak{o}} \sim D_{\mathfrak{o}}^2.$$

Seien M und N lokal kompakte Moduln. Da $D_{\mathfrak{b}} \sim F_{\mathfrak{b}} D_{\mathfrak{o}}$ und da die Abbildungen

$$\mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}\left(D_{\mathfrak{o}}(N), D_{\mathfrak{o}}(M)\right) \to \mathrm{Hom}\left(F_{\mathfrak{b}} D_{\mathfrak{o}}(N), F_{\mathfrak{b}} D_{\mathfrak{o}}(M)\right)$$

topologische Isomorphismen sind, ist auch $\mathrm{Hom}(M, N) \to \mathrm{Hom}\left(D_{\mathfrak{b}}(N), D_{\mathfrak{b}}(M)\right)$ ein topologischer Isomorphismus. Folglich ist $D_{\mathfrak{b}}$ ein Dualitätsfunktor.

Die Funktoren $D_{\mathfrak{a}}$ und $D_{\mathfrak{b}}$ sind genau dann natürlich äquivalent, wenn $F_{\mathfrak{a}} D_{\mathfrak{o}}$ und $F_{\mathfrak{b}} D_{\mathfrak{o}}$ und damit $F_{\mathfrak{a}}$ und $F_{\mathfrak{b}}$ natürlich äquivalent sind, d. h. (vgl. Satz 3. 4. (ii)) wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ in derselben Idealklasse liegen.

Korollar 4. 5. *Die Moduln $T_{\mathfrak{b}}$ sind dualisierende Moduln. $T_{\mathfrak{a}}$ und $T_{\mathfrak{b}}$ sind genau dann topologisch isomorph, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zur selben Idealklasse gehören.*

Wir werden nun zeigen, daß es keine weiteren dualisierenden Moduln gibt, wenn $\mathfrak{o}$ ein Dedekindscher Ring ist. Ein Integritätsring ist genau dann ein Dedekindscher Ring, wenn alle von Null verschiedenen Ideale invertierbar sind. Man beachte, daß in einem Integritätsring ein von Null verschiedenes Ideal genau dann invertierbar ist, wenn es ein projektiver Modul ist.

Satz 4. 6. *Sei $\mathfrak{o}$ ein Dedekindscher Ring. Dann ist ein lokal kompakter Modul T genau dann ein dualisierender Modul, wenn ein von Null verschiedenes Ideal $\mathfrak{b}$ existiert, so daß T topologisch isomorph zu $T_{\mathfrak{b}}$ ist.*

Die Klassen der dualisierenden Moduln (Klassenbildung bezüglich der topologischen Isomorphie) entsprechen also umkehrbar eindeutig den Idealklassen.

Beweis. Sei T ein dualisierender Modul. Dann ist für jeden lokal kompakten Modul M die Reziprozitätsabbildung $M \to \mathrm{Hom}\left(\mathrm{Hom}(M, T), T\right)$ ein topologischer Isomorphismus.

Speziell für $M = \mathfrak{o}$ ergibt sich hieraus

$$\mathfrak{o} \cong \mathrm{Hom}\left(\mathrm{Hom}(\mathfrak{o}, T), T\right) \cong \mathrm{Hom}(T, T) \cong \mathrm{Hom}\left(D_{\mathfrak{o}}(T), D_{\mathfrak{o}}(T)\right).$$

Aus diesen Isomorphismen folgt, daß die stetigen Endomorphismen von $D_{\mathfrak{o}}(T)$ gerade die durch die Ringelemente induzierten Endomorphismen sind:

$$\mathrm{Hom}\left(D_{\mathfrak{o}}(T), D_{\mathfrak{o}}(T)\right) = \{r\, id_{D_{\mathfrak{o}}(T)} \mid r \in \mathfrak{o}\}.$$

Im Falle $M = T_{\mathfrak{o}}$ haben wir $T_{\mathfrak{o}} \cong \mathrm{Hom}\left(\mathrm{Hom}(T_{\mathfrak{o}}, T), T\right)$ und damit insbesondere $\mathrm{Hom}(T_{\mathfrak{o}}, T) \neq 0$. Andererseits gilt $\mathrm{Hom}(T_{\mathfrak{o}}, T) \cong \mathrm{Hom}\left(D_{\mathfrak{o}}(T), D_{\mathfrak{o}}(T_{\mathfrak{o}})\right) \cong \mathrm{Hom}\left(D_{\mathfrak{o}}(T), \mathfrak{o}\right)$. Es existiert daher ein von Null verschiedener stetiger Homomorphismus $f: D_{\mathfrak{o}}(T) \to \mathfrak{o}$. $\mathfrak{b} := \mathrm{Bild}\, f$ ist ein von Null verschiedenes Ideal und daher projektiv, da $\mathfrak{o}$ ein Dedekindscher Ring ist. Folglich existiert ein Homomorphismus $g: \mathfrak{b} \to D_{\mathfrak{o}}(T)$ mit $f \circ g = id_{\mathfrak{b}}$. Insbesondere ist g injektiv. Da $\mathfrak{b}$ mit der diskreten Topologie ausgestattet ist, ist g stetig. $g \circ f$ ist ein stetiger Endomorphismus von $D_{\mathfrak{o}}(T)$ und daher existiert nach den Vorüberlegungen ein Element $r \in \mathfrak{o}$, so daß $g \circ f = r\, id_{D_{\mathfrak{o}}(T)}$. Für alle $b \in \mathfrak{b}$ gilt

$$g(b) = \left(g \circ (f \circ g)\right)(b) = (g \circ f)\left(g(b)\right) = rg(b) = g(rb),$$

d. h. $b = rb$ und daher $r = 1$. Folglich ist $f: D_{\mathfrak{o}}(T) \to \mathfrak{b}$ ein topologischer Isomorphismus und daher $T \cong D_{\mathfrak{o}}(D_{\mathfrak{o}} T) \cong D_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{b}) \cong T_{\mathfrak{b}}$.

Wir formulieren nun den vorangegangenen Satz in der Sprache der Dualitätsfunktoren.

Satz 4. 7. *Ein kontravarianter Funktor* $D: \mathfrak{K}_{lk} \to \mathfrak{K}_{lk}$ *ist genau dann ein Dualitätsfunktor, wenn ein Ideal* $\mathfrak{b} \neq 0$ *existiert, so daß* D *natürlich äquivalent zu* $D_{\mathfrak{b}}$ *ist.*

Die Elemente der Idealklassengruppe entsprechen also umkehrbar eindeutig den Klassen der Dualitätsfunktoren (Klassenbildung bezüglich der natürlichen Äquivalenz).

Wir wollen nun die dualisierenden Moduln für spezielle Dedekindsche Ringe berechnen, und zwar für den Fall, daß $\mathfrak{o}$ die Hauptordnung eines algebraischen Zahlkörpers ist. Analoge Betrachtungen gelten für Funktionenkörper einer Variablen mit endlichem Konstantenkörper.

§ 5. Dualitäten in der Kategorie der lokal kompakten Moduln über der Hauptordnung eines algebraischen Zahlkörpers

In diesem Paragraphen sei $\mathfrak{o}$ die Hauptordnung (Ring der ganzen algebraischen Zahlen) eines algebraischen Zahlkörpers K. $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ seien im Folgenden immer von Null verschiedene gebrochene Ideale von K. K habe über dem Körper $\boldsymbol{Q}$ der rationalen Zahlen den Körpergrad n.

Aus der algebraischen Zahlentheorie ist bekannt, daß $\mathfrak{o}$ ein Dedekindscher Ring ist und daß die additive Gruppe jedes $\mathfrak{o}$-Ideals $\mathfrak{a} \neq 0$ eine freie abelsche Gruppe vom Range n ist.

Wir betrachten die additive Gruppe $\mathfrak{a} \underset{\boldsymbol{Z}}{\otimes} \boldsymbol{R/Z}$, in der durch $r(a \otimes t) := ra \otimes t$ ($r \in \mathfrak{o}$, $a \in \mathfrak{a}$, $t \in \boldsymbol{R/Z}$) eine Modul-Operation erklärt ist. Nach Wahl einer $\boldsymbol{Z}$-freien Basis $\{a_1, \ldots, a_n\}$ von $\mathfrak{a}$ erhalten wir einen $\boldsymbol{Z}$-Isomorphismus von

$$\mathfrak{a} \underset{\boldsymbol{Z}}{\otimes} \boldsymbol{R/Z} = a_1 \underset{\boldsymbol{Z}}{\otimes} \boldsymbol{R/Z} \oplus \cdots \oplus a_n \underset{\boldsymbol{Z}}{\otimes} \boldsymbol{R/Z}$$

auf $(\boldsymbol{R/Z})^n$. Wir erklären auf $\mathfrak{a} \underset{\boldsymbol{Z}}{\otimes} \boldsymbol{R/Z}$ eine Topologie, indem wir fordern, daß dies ein topologischer $\boldsymbol{Z}$-Isomorphismus ist. Man sieht unmittelbar, daß diese Topologie nicht von der speziellen Wahl der Ganzheitsbasis von $\mathfrak{a}$ abhängt. Somit ist $\mathfrak{a} \underset{\boldsymbol{Z}}{\otimes} \boldsymbol{R/Z}$ in kanonischer Weise ein kompakter topologischer $\mathfrak{o}$-Modul.

Lemma 5. 1. *Es besteht ein topologischer Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}\,(\mathfrak{a} \underset{\boldsymbol{Z}}{\otimes} \boldsymbol{R/Z}, \mathfrak{b} \underset{\boldsymbol{Z}}{\otimes} \boldsymbol{R/Z}) \cong \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}.$$

Beweis. Seien $\{a_1, \ldots, a_n\}$ und $\{b_1, \ldots, b_n\}$ Ganzheitsbasen von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$. Dann gilt:

$$\mathfrak{a} = a_1\boldsymbol{Z} \oplus \cdots \oplus a_n\boldsymbol{Z} \underset{\boldsymbol{Z}}{\cong} \boldsymbol{Z}^n$$

$$\mathfrak{a} \underset{\boldsymbol{Z}}{\otimes} \boldsymbol{R/Z} = a_1 \otimes \boldsymbol{R/Z} \oplus \cdots \oplus a_n \otimes \boldsymbol{R/Z} \underset{\boldsymbol{Z}}{\cong} (\boldsymbol{R/Z})^n$$

$$\mathfrak{b} = b_1\boldsymbol{Z} \oplus \cdots \oplus b_n\boldsymbol{Z} \underset{\boldsymbol{Z}}{\cong} \boldsymbol{Z}^n$$

$$\mathfrak{b} \underset{\boldsymbol{Z}}{\otimes} \boldsymbol{R/Z} = b_1 \otimes \boldsymbol{R/Z} \oplus \cdots \oplus b_n \otimes \boldsymbol{R/Z} \underset{\boldsymbol{Z}}{\cong} (\boldsymbol{R/Z})^n.$$

Nach der Pontrjaginschen Theorie (vgl. Satz 1. 2) gilt $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{R/Z}, \boldsymbol{R/Z}) \underset{\boldsymbol{Z}}{\cong} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z})$ und damit auch $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}((\boldsymbol{R/Z})^n, (\boldsymbol{R/Z})^n) \cong \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{Z}^n, \boldsymbol{Z}^n)$. Daher entsprechen die stetigen $\boldsymbol{Z}$-Homomorphismen von $\mathfrak{a} \underset{\boldsymbol{Z}}{\otimes} \boldsymbol{R/Z}$ in $\mathfrak{b} \underset{\boldsymbol{Z}}{\otimes} \boldsymbol{R/Z}$ umkehrbar eindeutig den $\boldsymbol{Z}$-Homomorphismen von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{b}$. Man sieht leicht, daß sich unter dieser Bijektion die stetigen

$\mathfrak{o}$-Homomorphismen von $\mathfrak{a} \underset{Z}{\otimes} \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ in $\mathfrak{b} \underset{Z}{\otimes} \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ und die $\mathfrak{o}$-Homomorphismen von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{b}$ entsprechen. Daher sind die Moduln $\mathrm{Hom}\left(\mathfrak{a} \underset{Z}{\otimes} \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}, \mathfrak{b} \underset{Z}{\otimes} \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}\right)$ und $\mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ topologisch isomorph. Nach (3. 1) gilt: $\mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \cong \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}$.

Satz 5. 2. *Die dualisierenden Moduln entsprechen bis auf topologische Isomorphie umkehrbar eindeutig den Moduln* $\mathfrak{a} \underset{Z}{\otimes} \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$. *Zwei Moduln* $\mathfrak{a} \underset{Z}{\otimes} \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ *und* $\mathfrak{b} \underset{Z}{\otimes} \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ *sind genau dann topologisch isomorph, wenn* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zur selben Idealklasse gehören.*

Beweis. Nach Lemma 5. 1 sind die Moduln $\mathfrak{a} \underset{Z}{\otimes} \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ und $\mathfrak{b} \underset{Z}{\otimes} \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ genau dann topologisch isomorph, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ isomorph sind, d. h. (vgl. 3. 1), wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zur selben Idealklasse gehören.

Nach Satz 4. 6 entsprechen die Klassen der dualisierenden Moduln (Klassenbildung bezüglich der topologischen Isomorphie) umkehrbar eindeutig den Moduln $\mathrm{Hom}_Z(\mathfrak{b}, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$ und diese entsprechen wiederum umkehrbar eindeutig den Elementen der Idealklassengruppe.

Da $\mathfrak{b}$ als $\boldsymbol{Z}$-Modul frei-abelsch vom Range n ist, ist auch $\mathrm{Hom}_Z(\mathfrak{b}, \boldsymbol{Z})$ frei-abelsch vom Range n und $\mathrm{Hom}_Z(\mathfrak{b}, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$ ist topologisch isomorph zu $\mathrm{Hom}_Z(\mathfrak{b}, \boldsymbol{Z}) \underset{Z}{\otimes} \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$. Als endlich erzeugter Modul über dem Dedekindschen Ring $\mathfrak{o}$ ist $\mathrm{Hom}_Z(\mathfrak{b}, \boldsymbol{Z})$ isomorph zu einer endlichen direkten Summe von Idealen und Restklassenringen von $\mathfrak{o}$ (vgl. Krull [4]). Da $\mathrm{Hom}_Z(\mathfrak{b}, \boldsymbol{Z})$ und alle von Null verschiedenen $\mathfrak{o}$-Ideale freie $\boldsymbol{Z}$-Moduln vom Range $\boldsymbol{n}$ sind und da die Restklassenringe von $\mathfrak{o}$ endlich sind, ist $\mathrm{Hom}_Z(\mathfrak{b}, \boldsymbol{Z})$ sogar isomorph zu einem Ideal $\mathfrak{a} \neq 0$. Daher ist $\mathrm{Hom}_Z(\mathfrak{b}, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$ topologisch isomorph zu $\mathfrak{a} \underset{Z}{\otimes} \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$. Daß auch umgekehrt alle Moduln vom Typ $\mathfrak{a} \underset{Z}{\otimes} \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ zu einem Modul $\mathrm{Hom}_Z(\mathfrak{b}, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$ topologisch isomorph sind, folgt nun unmittelbar aus der Endlichkeit der Klassenzahl.

Wir geben für Satz 5. 2 nun einen zweiten Beweis an, der auf der Dedekindschen Differententheorie basiert, und zwar zeigen wir:

Satz 5. 3. *Sei* $Sp: K \to \boldsymbol{Q}$ *die Absolutspur und* ϑ *die Absolutdifferente von* K. *Dann ist die Abbildung* $\mathfrak{a} \underset{Z}{\otimes} \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} \to \mathrm{Hom}_Z(\vartheta^{-1}\mathfrak{a}^{-1}, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$, *definiert durch* $a \otimes t \mapsto (b \mapsto Sp(ab)t)$, *ein topologischer Isomorphismus.*

Beweis. Die Absolutdifferente ϑ ist definiert als das kleinste aller Ideale $\mathfrak{c}$ mit der Eigenschaft $Sp(\mathfrak{c}^{-1}) \subset \boldsymbol{Z}$. Die Codifferente ϑ^{-1} berechnet sich bekanntlich folgendermaßen:

$$\vartheta^{-1} = \{x \in K \mid Sp(\mathfrak{o}x) \subset \boldsymbol{Z}\}.$$

Allgemein gilt für das zu $\mathfrak{a}$ komplementäre Ideal:

$$\vartheta^{-1}\mathfrak{a}^{-1} = \{x \in K \mid Sp(\mathfrak{a}x) \subset \boldsymbol{Z}\}.$$

Da die Körpererweiterung $K/\boldsymbol{Q}$ separabel ist, ist die $\boldsymbol{Q}$-bilineare Form $K \times K \to \boldsymbol{Q}$' definiert durch $(a, b) \to Sp(ab)$, nicht entartet. Sei $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine Ganzheitsbasis von $\mathfrak{a}$, d. h. $\mathfrak{a} = \boldsymbol{Z}a_1 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{Z}a_n$. Dann ist $\{a_1, \ldots, a_n\}$ auch eine Basis des $\boldsymbol{Q}$-Vektorraumes K. Sei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ ihre Komplementärbasis, d. h. ihre Dualbasis bezüglich der obigen nicht entarteten $\boldsymbol{Q}$-bilinearen Form, d. h. $Sp(a_i b_k) = \delta_{ik}$. Für jedes Element $x \in K$ gilt: $x = \sum_k Sp(xa_k)b_k$ und entsprechend $x = \sum_k Sp(xb_k)a_k$. Insbesondere ist $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Ganzheitsbasis des Ideals $\vartheta^{-1}\mathfrak{a}^{-1}$. Wir betrachten nun die beiden stetigen Homomorphismen $\mathfrak{a} \underset{Z}{\otimes} \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} \to \mathrm{Hom}(\vartheta^{-1}\mathfrak{a}^{-1}, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$, definiert durch $a \otimes t \mapsto (b \mapsto Sp(ab)t)$, und $\mathrm{Hom}(\vartheta^{-1}\mathfrak{a}^{-1}, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}) \to \mathfrak{a} \underset{Z}{\otimes} \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$, definiert durch $f \mapsto \sum_k a_k \otimes f(b_k)$. Diese Homomorphis-

men sind zueinander invers; denn

$$a \otimes t \mid\!\to (b \mid\!\to Sp(ab)t) \mid\!\to \sum_i a_i \otimes Sp(ab_i)t = \sum_i Sp(ab_i)a_i \otimes t = a \otimes t$$

und $f \mid\!\to \sum_i a_i \otimes f(b_i) \mid\!\to (b \mid\!\to \sum_i Sp(a_i b) f(b_i) = f(\sum_i Sp(a_i b) b_i) = f(b))$. Daher ist die Abbildung $\mathrm{Hom}_Z(\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{a}^{-1}, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}) \to \mathfrak{a} \underset{Z}{\otimes} \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ ein topologischer Isomorphismus.

Wir betrachten nun die additive Gruppe $K \underset{Q}{\otimes} \boldsymbol{R}$, auf der durch $s(k \otimes t) := sk \otimes t$ ($s \in \mathfrak{o}$, $k \in K$, $t \in \boldsymbol{R}$) eine $\mathfrak{o}$-Modulstruktur erklärt ist. Nach Wahl einer Basis $\{a_1, \ldots, a_n\}$ des $\boldsymbol{Q}$-Vektorraumes K erhalten wir einen $\boldsymbol{Z}$-Isomorphismus von $K \underset{Q}{\otimes} \boldsymbol{R}$ auf $\boldsymbol{R}^n$. Wir erklären auf $K \underset{Q}{\otimes} \boldsymbol{R}$ eine Topologie, indem wir fordern, daß dies ein topologischer $\boldsymbol{Z}$-Isomorphismus ist. Diese Topologie hängt nicht von der speziellen Wahl der Basis ab. Auf diese Weise wird $K \underset{Q}{\otimes} \boldsymbol{R}$ zu einem lokal kompakten torsionsfreien dividierbaren $\mathfrak{o}$-Modul.

Nach einem Satz der Bewertungstheorie ist $K \underset{Q}{\otimes} \boldsymbol{R}$ topologisch isomorph zu dem direkten Produkt der Komplettierungen $K_{\mathfrak{p}\infty}$ von K nach den unendlichen Primstellen $\mathfrak{p}_\infty$.

$$K \underset{Q}{\otimes} \boldsymbol{R} \cong \prod K_{\mathfrak{p}\infty}.$$

Wir können K auch als Untermodul von $K \underset{Q}{\otimes} \boldsymbol{R}$ auffassen: $K \leftrightarrow K \underset{Q}{\otimes} \boldsymbol{Q} \to K \underset{Q}{\otimes} \boldsymbol{R}$. In der Sprache der Zahlengeometrie sind die von Null verschiedenen Ideale von K gerade die vollständigen Gitter von $K \underset{Q}{\otimes} \boldsymbol{R}$, auf denen $\mathfrak{o}$ operiert, d. h. die abgeschlossenen diskreten Untermoduln von $K \underset{Q}{\otimes} \boldsymbol{R}$ mit kompakter Faktorgruppe.

Satz 5. 4. *Die dualisierenden Moduln* $\mathfrak{a} \underset{Z}{\otimes} \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ *sind topologisch isomorph zu den Faktormoduln* $(K \underset{Q}{\otimes} \boldsymbol{R})/\mathfrak{a}$.

Beweis. Da $\mathfrak{a}$ $\boldsymbol{Z}$-frei ist, liefert die kurze exakte Sequenz $0 \to \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von $*$-Morphismen $0 \to \mathfrak{a} \underset{Z}{\otimes} \boldsymbol{Z} \to \mathfrak{a} \underset{Z}{\otimes} \boldsymbol{R} \to \mathfrak{a} \underset{Z}{\otimes} \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} \to 0$, d. h. es besteht ein topologischer Isomorphismus:

$$\mathfrak{a} \underset{Z}{\otimes} \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} \cong (\mathfrak{a} \underset{Z}{\otimes} \boldsymbol{R})/(\mathfrak{a} \underset{Z}{\otimes} \boldsymbol{Z}).$$

Da eine $\boldsymbol{Z}$-freie Basis von $\mathfrak{a}$ auch eine Basis des $\boldsymbol{Q}$-Vektorraumes K ist, ist $\mathfrak{a} \underset{Z}{\otimes} \boldsymbol{R}$ topologisch isomorph zu $K \underset{Q}{\otimes} \boldsymbol{R}$. Bei dieser Isomorphie geht $\mathfrak{a} \underset{Z}{\otimes} \boldsymbol{Z}$ in $\mathfrak{a}$ über.

Damit haben wir insbesondere die Krullsche Vermutung bewiesen, wonach sich der Modul $(\prod K_{\mathfrak{p}\infty})/\mathfrak{o}$ als Bezugsmodul für eine Dualitätstheorie eignet. Dieser Modul $(\prod K_{\mathfrak{p}\infty})/\mathfrak{o}$ ist genau dann topologisch isomorph zu $\mathrm{Hom}_Z(\mathfrak{o}, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$, wenn die Absolutdifferente von K ein Hauptideal ist. Für Körper mit dieser Eigenschaft kann die Krullsche Vermutung bereits ohne das Studium der kovarianten Funktoren $F_\mathfrak{a}$ bewiesen werden. Zu den Körpern, deren Absolutdifferente ein Hauptideal ist, gehören die Körper ohne gemeinsame außerwesentliche Diskriminantenteiler; das sind die Körper, deren Hauptordnung eine Ganzheitsbasis der Gestalt $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$ besitzt. Hierunter fallen insbesondere die quadratischen Zahlkörper.

Wir wollen nun noch das Dual einiger ausgezeichneter Moduln bezüglich des Dualitätsfunktors $D := \mathrm{Hom}(\ , (K \underset{Q}{\otimes} \boldsymbol{R})/\mathfrak{o})$ angeben:

(i) $D(K \underset{Q}{\otimes} \boldsymbol{R})/\mathfrak{a}) \cong \mathfrak{a}^{-1}$

$D(\mathfrak{a}) \cong (K \underset{Q}{\otimes} \boldsymbol{R})/\mathfrak{a}^{-1}$

(ii) $D(K \underset{Q}{\otimes} \boldsymbol{R}) \cong K \underset{Q}{\otimes} \boldsymbol{R}$

(iii) $D(\mathfrak{o}/\mathfrak{a}) \cong \mathfrak{a}^{-1}/\mathfrak{o}$

(iv) Sei $\hat{\mathfrak{o}} := \varprojlim \mathfrak{o}/\mathfrak{a}$, wobei $\mathfrak{a}$ alle ganzen Ideale durchlaufe.

$D(\hat{\mathfrak{o}}) \cong K/\mathfrak{o}$

$D(K/\mathfrak{o}) \cong \hat{\mathfrak{o}}$

(v) Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal und $\mathfrak{o}_\mathfrak{p} := \varprojlim \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^i$.

$D(\mathfrak{o}_\mathfrak{p}) \cong K_\mathfrak{p}/\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$

$D(K_\mathfrak{p}/\mathfrak{o}_\mathfrak{p}) \cong \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$

(vi) Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal und $K_\mathfrak{p}$ die Komplettierung von K bezüglich $\mathfrak{p}$.

$D(K_\mathfrak{p}) \cong K_\mathfrak{p}$.

Beweise. Zu (i): $D((K \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \boldsymbol{R})/\mathfrak{a}) \cong \mathrm{Hom}\,(\mathfrak{a} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}, \mathfrak{o} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$. Dieser Modul ist nach Lemma 5. 1 topologisch isomorph zu $\mathfrak{a}^{-1} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ und damit nach Satz 5. 4 topologisch isomorph zu $(K \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \boldsymbol{R})/\mathfrak{a}^{-1}$.

Zu (ii): $D(K \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \boldsymbol{R}) = \mathrm{Hom}\,(\mathfrak{o} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \boldsymbol{R}, \mathfrak{o} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$. Nach Pontrjagin [6], § 36 ist $\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$ topologisch isomorph zu $\boldsymbol{R}$. Hieraus folgt durch einen ganz entsprechenden Schluß wie beim Beweis von Lemma 5. 1, daß $\mathrm{Hom}\,(\mathfrak{o} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \boldsymbol{R}, \mathfrak{o} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$ topologisch isomorph zu $\mathfrak{o} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \boldsymbol{R} \cong K \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \boldsymbol{R}$ ist.

Zu (iii): Nach Satz 2. 2 gilt:

$$D(\mathfrak{o}/\mathfrak{a}) \cong \mathrm{Kern}\,(D(\mathfrak{o}) \to D(\mathfrak{a})) \cong \mathrm{Kern}\,((K \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \boldsymbol{R})/\mathfrak{o} \to (K \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \boldsymbol{R})/\mathfrak{a}^{-1}) \cong \mathfrak{a}^{-1}/\mathfrak{o}.$$

Zu (iv): $D(\hat{\mathfrak{o}}) = D(\varprojlim \mathfrak{o}/\mathfrak{a}) \cong \varinjlim D(\mathfrak{o}/\mathfrak{a}) \cong \varinjlim \mathfrak{a}^{-1}/\mathfrak{o} \cong K/\mathfrak{o}$.

Zu (v): $D(\mathfrak{o}_\mathfrak{p}) = D(\varprojlim \mathfrak{o}/\mathfrak{p}^i) \cong \varinjlim D(\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^i) \cong \varinjlim \mathfrak{p}^{-i}/\mathfrak{o} \cong \varinjlim \mathfrak{p}^{-i}\mathfrak{o}_\mathfrak{p}/\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = K_\mathfrak{p}/\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$.

Unter dem Dualitätsfunktor D geht übrigens die Isomorphie $\hat{\mathfrak{o}} \cong \boldsymbol{\Pi}\, \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p}$ durchlaufe alle Primideale) in die Isomorphie $K/\mathfrak{o} \cong \boldsymbol{\Pi}\, K_\mathfrak{p}/\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ über.

Zu (vi): Wir fassen $K_\mathfrak{p}/\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ als Untermodul von $K/\mathfrak{o}$ und damit als Untermodul von $(K \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \boldsymbol{R})/\mathfrak{o}$ auf. Wir betrachten das Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{o}_\mathfrak{p} & \longrightarrow & K_\mathfrak{p} & \longrightarrow & K_\mathfrak{p}/\mathfrak{o}_\mathfrak{p} & \longrightarrow & 0, \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & D(K_\mathfrak{p}/\mathfrak{o}_\mathfrak{p}) & \longrightarrow & D(K_\mathfrak{p}) & \longrightarrow & D(\mathfrak{o}_\mathfrak{p}) & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

in dem die vertikalen Abbildungen folgendermaßen definiert sind:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{o}_\mathfrak{p} \to D(K_\mathfrak{p}/\mathfrak{o}_\mathfrak{p}), && r \mapsto (k + \mathfrak{o}_\mathfrak{p} \mapsto rk + \mathfrak{o}_\mathfrak{p}) \\ &K_\mathfrak{p}/\mathfrak{o}_\mathfrak{p} \to D(\mathfrak{o}_\mathfrak{p}), && r + \mathfrak{o}_\mathfrak{p} \mapsto (r \mapsto rk + \mathfrak{o}_\mathfrak{p}) \\ &K_\mathfrak{p} \to D(K_\mathfrak{p}), && a \mapsto (b \mapsto ab + \mathfrak{o}_\mathfrak{p}). \end{aligned}$$

Das Diagramm ist kommutativ und nach (v) sind die linke und die rechte Abbildung Isomorphismen. Daher ist auch die mittlere Abbildung ein Isomorphismus. Da die kompakten Teilmengen von $K_\mathfrak{p}$ in kompakten Teilmengen vom Typ $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ enthalten sind, ist die Abbildung $K_\mathfrak{p} \to D(K_\mathfrak{p})$ sogar ein topologischer Isomorphismus.

§ 6. Funktionenkörper einer Variablen mit endlichem Konstantenkörper

Sei K ein Funktionenkörper einer Variablen t mit dem endlichen Konstantenkörper k; d. h. k ist algebraisch abgeschlossen in K, t ist transzendent über k und K ist endlich algebraisch über $k(t)$. Nach dem Satz von der separablen Erzeugung können wir uns die Variable t so gewählt denken, daß die Erweiterung $K/k(t)$ separabel ist.

Der unendlichen Primstelle von $k(t)$ entspricht die Bewertung v_∞, definiert durch $v_\infty\left(\frac{f}{g}\right) = \operatorname{grad}(g) - \operatorname{grad}(f)$ $(f, g \in k[t])$. Die Komplettierung von $k(t)$ bezüglich v_∞ ist der Körper $k((t^{-1}))$ der formalen Laurentreihen in der Unbestimmten t^{-1}. Die übrigen (d. h. die endlichen) Primstellen von $k(t)$ entsprechen umkehrbar eindeutig den normierten Primpolynomen von $k[t]$).

Mit $\mathfrak{o}_t$ bezeichnen wir den Ring der in t ganzen Elemente von K, d. h. $\mathfrak{o}_t := \{a \in K \mid v_\mathfrak{p}(a) \geqq 0$ für alle endlichen Primstellen $\mathfrak{p}$ von $K\}$. Hieraus folgt nach allgemeinen Sätzen der Idealtheorie, daß $\mathfrak{o}_t$ ein Dedekindscher Ring ist und daß für jedes gebrochene $\mathfrak{o}_t$-Ideal $\mathfrak{a}$ eine $k[t]$-freie Basis $\{a_1, \ldots, a_n\}$ existiert:

$$\mathfrak{a} = k[t]a_1 \oplus \cdots \oplus k[t]a_n.$$

Es sei ϑ_t die t-Diskriminante von K, d. h. die Diskriminante der Ringerweiterung $\mathfrak{o}_t/k[t]$.

Satz 6. 1. *Es sei $\mathfrak{b}$ ein gebrochenes $\mathfrak{o}_t$-Ideal und $\mathfrak{a} := \vartheta_t^{-1}\mathfrak{b}^{-1}$. Dann bestehen die topologischen $\mathfrak{o}_t$-Isomorphismen:*

$$\operatorname{Hom}_Z(\mathfrak{b}, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}) \cong \mathfrak{a} \underset{k[t]}{\otimes} k((t^{-1}))/k[t] \cong \left(K \underset{k[t]}{\otimes} k((t^{-1}))\right)/\mathfrak{a} \cong \left(\prod K_{\mathfrak{p}\infty}\right)/\mathfrak{a}.$$

Dabei sei $\prod K_{\mathfrak{p}\infty}$ das direkte Produkt der Komplettierungen von K nach den unendlichen Primstellen, d. h. den Primstellen von K, die über v_∞ liegen.

Beweis. Wir zeigen den Satz zunächst für den Ring $k[t]$.

$$\operatorname{Hom}_Z(k[t], \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}) \cong \operatorname{Hom}_Z\left(\prod_{i=0}^{\infty} kt^i, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}\right) \cong \prod_{i=0}^{\infty} \operatorname{Hom}_Z(k, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}).$$

Bei dieser topologischen Isomorphie entsprechen sich die Elemente $f \in \operatorname{Hom}_Z(k[t], \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$ und $\prod_{i=0}^{\infty} f_i \in \prod_{i=0}^{\infty} \operatorname{Hom}_Z(k, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$ genau dann, wenn für alle Elemente $\sum a_i t^i \in k[t]$ gilt: $f(\sum a_i t^i) = \sum f_i(a_i)$. Wir überlegen uns nun, wie ein Element $r = \sum r_k t^k \in k[t]$ auf $\prod_{i=0}^{\infty} \operatorname{Hom}_Z(k[t], \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$ operiert. Es gilt

$$(rf)(\sum a_i t^i) = f\left((\sum r_k t^k)(\sum a_i t^i)\right) = f\left(\sum_{i,k} r_k a_i t^{k+i}\right) = \sum_{i,k} f_{k+i}(r_k a_i) = \sum_{i,k} r_k f_{k+i}(a_i)$$

und daher $r\left(\prod_i f_i\right) = \prod_i \left(\sum_k r_k f_{k+i}\right)$. $\operatorname{Hom}_Z(k, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$ ist einerseits Z-isomorph zu k, da k endlich ist, und andererseits ein k-Vektorraum und daher sogar k-isomorph zu k. Daher gilt $\operatorname{Hom}_Z(k[t], \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}) \cong \prod_{i=0}^{\infty} k$. Durch die Zuordnung $\prod f_i \mapsto \sum f_i t^{-i} + k[t]$ wird ein topologischer Z-Isomorphismus von $\prod_{i=0}^{\infty} k$ auf $k((t^{-1}))/k[t]$ definiert. Wir zeigen, daß dies sogar ein $k[t]$-Isomorphismus ist:

$$r\left(\prod_i f_i\right) = \prod_i \left(\sum_k r_k f_{k+i}\right) \mapsto \sum_{i,k=0}^{\infty} r_k f_{k+i} t^{-i} + k[t] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} r_k f_j t^{k-j} + k[t]$$

$$= \sum_{k,j=0}^{\infty} r_k f_j t^{k-j} + k[t] = \left(\sum_k r_k t^k\right)\left(\sum_j f_j t^{-j} + k[t]\right) = r\left(\sum_j f_j t^{-j} + k[t]\right).$$

Damit haben wir bewiesen, daß $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(k[t], \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$ topologisch $k[t]$-isomorph zu $k((t^{-1}))/k[t]$ ist.

$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(\mathfrak{b}, \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$ ist nach § 1 topologisch isomorph zu $\mathrm{Hom}_{k[t]}(\mathfrak{b}, \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(k[t], \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}))$ und damit nach den Vorüberlegungen topologisch isomorph zu $\mathrm{Hom}_{k[t]}(\mathfrak{b}, k((t^{-1}))/k[t])$. Mit der Theorie der t-Differente ergibt sich ganz analog wie in § 5, daß dieser Modul topologisch isomorph zu $\mathfrak{a} \underset{k[t]}{\otimes} k((t^{-1}))/k[t]$ ist. Ganz entsprechend wie bei den algebraischen Zahlkörpern folgt, daß dieser Modul topologisch isomorph zu den Moduln $\left(K \underset{k[t]}{\otimes} k((t^{-1}))\right)/\mathfrak{a}$ und $(\boldsymbol{\Pi}\, K_{\mathfrak{p}\infty})/\mathfrak{a}$ ist.

Aus den Sätzen (4. 6) und (6. 1) ergibt sich:

Satz 6. 2. *Die dualisierenden Moduln entsprechen bis auf topologische Isomorphie umkehrbar eindeutig den Moduln* $(\boldsymbol{\Pi}\, K_{\mathfrak{p}\infty})/\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a}$ *von Null verschiedenes* $\mathfrak{o}_t$*-Ideal*). *Zwei Moduln* $(\boldsymbol{\Pi}\, K_{\mathfrak{p}\infty})/\mathfrak{a}$ *und* $(\boldsymbol{\Pi}\, K_{\mathfrak{p}\infty})/\mathfrak{b}$ *sind genau dann topologisch isomorph, wenn* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *zur selben Idealklasse gehören.*

Literatur

[1] *H. Cartan* and *S. Eilenberg*, Homological algebra, Princeton 1956.

[2] *R. Dedekind*, Über die Diskriminanten endlicher Körper, Abh. der Königl. Ges. Wiss. Göttingen **29** (1882).

[3] *A. Grothendieck*, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku Math. J. **9** (1957).

[4] *W. Krull*, Matrizen, Moduln und verallgemeinerte Abelsche Gruppen im Bereich der ganzen algebraischen Zahlen, Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss., Beiträge zur Algebra, Nr. 18—19.

[5] *F. E. Peters*, Dualität und Reflexivität, Diplomarbeit, Bonn 1966.

[6] *L. S. Pontrjagin*, Topologische Gruppen, Leipzig 1957.

Mathematisches Institut der Universität, 53 Bonn, Wegelerstraße 10

Eingegangen 10. März 1969

On k-constructable sets, k-elementary formulae, and elimination theory

By *A. Seidenberg*[1]) at Berkeley

To Wolfgang Krull on his seventieth birthday

1. The Projection Theorem

Using the terminology of Weil's *Foundations* [6], we define a subset of an abstract variety V to be *constructable* if it is the finite union of sets each of which is the intersection of a closed set and an open set; the k-constructable subsets of a variety V defined over k are similarly defined. The complement in V of a k-constructable set and the finite union and finite intersection of k-constructable sets are k-constructable: these are rather immediate assertions. The main additional property of the class of k-constructable sets is that *the set-theoretic projection of a k-constructable subset of a product $V \times W$ on a factor is k-constructable.*

We first prove this as rapidly as possible with references to the literature; afterwards, we will go over the ground once more in order to get a more direct proof. The reasons we proceed this way are, first, that we wish to secure our results, as well as to show how little we have added; and second, that we wish to disengage this simple but very useful theorem (especially when it is combined with the notion of a k-elementary formula) from its setting in Chevalley's profound work [1], as well as to free ourselves from the necessity of collating Chevalley's work and the two editions of Weil's *Foundations*.

We owe the notion of constructable sets (at least for abstract varieties) to Chevalley (though he does not mention k-constructable ones). His definition of constructable sets is not the same as ours, nor does he stick to Weil's terminology, but his Proposition 5 ([1], p. 36) says that a subset of a variety is constructable if and only if it is the finite union of sets each of which is the intersection of a closed set and an open set; and his definitions of variety and of its closed and open subsets coincide with those of Weil. It is true that in giving these definitions Chevalley was referring to the first edition of Weil's *Foundations*, but as a variety and a closed subset of it in the sense of the second edition are also such in the sense of the first edition, we see that the class of subsets of a variety V which are constructable according to our definition is the same as the class of subsets of V which are constructable according to Chevalley's. Now his Theorem 3, Corollary ([1], p. 38), which says that the projection of a constructable set is constructable, gives us the desired conclusion except for the reference to k.

[1]) Supported in part by National Science Foundation grant GP-8623. Written in Rome, Italy, Autumn 1968.

It remains to insert the k. First we establish:

Theorem A 1. *A constructable subset C of a variety V defined over k is k-constructable if and only if it is invariant under every automorphism of the universal domain Ω over k.*

Proof. Let V be defined via affine varieties V_α (and birational transformations $T_{\alpha\beta}$) and let D_α be the set of points on V having a representative on V_α. By ([6], p. 188, Prop. 10), the D_α form a k-open cover of V. We shall allow ourselves to say, by an abuse of language since the V_α are not subsets of V, that the V_α themselves form a k-open cover of V; this should not cause confusion since the k-topology V_α gets from D_α by this abuse is the same as its original k-topology; and the transform of a point P in D_α is determined by the transform of its representative P_α on V_α. More strictly, one should introduce the k-isomorphisms $\varphi_\alpha\colon P_\alpha \mid\!\to P$; in this connection see ([6], p. 198, Prop. 16). Let S be a set of points on V, let S_α be its intersection with D_α, and let S'_α be the set of representatives on V_α of the points of S_α; as explained, we sometimes identify S_α and S'_α. If S is closed, then by ([6], p. 187, Th. 5) each S'_α is closed and, conversely, if each S'_α is closed, then S is closed; similarly for S open. Hence if S is constructable, so is each S'_α. Conversely, let each S'_α be constructable; then S'_α is a finite union of sets $F_\alpha \cap G_\alpha$ with F_α closed and G_α open in V_α. Let F''_α be the closure of F_α (i. e., of $\varphi_\alpha(F_\alpha)$) in V; then $F_\alpha \cap G_\alpha = F''_\alpha \cap D_\alpha \cap G_\alpha$ (with identifications as explained) is constructable relative to V, and as S is the union of a finite number of such sets, S is constructable. Thus *S is constructable if and only if each S'_α is constructable.* The corresponding statements hold if reference is made to k. And S is invariant under an automorphism of Ω over k if and only if each S'_α is so. Hence the theorem is reduced to the case that V is affine.

Now first assume that C is k-constructable. Then C is a finite union of sets $F_i \cap G_i$ with F_i k-closed and G_i k-open. In the case that V is affine (which we now assume), F_i is given by a set of polynomial equations over k, whence the invariance of F_i (and of G_i and of C) is obvious.

For the converse, we first make some remarks for an arbitrary (i. e., not necessarily invariant) constructable set C (on an abstract variety V). By the *dimension of C* we mean the dimension of its closure. Let F be a closed set and G an open set. Then $F \cap G = F - (F \cap \operatorname{comp} G)$, where comp abbreviates complement (in V), so $F \cap G$ is a closed set minus a closed subset. Let $F_1, \ldots, F_s$ be the components of the closed set F; and let $G' = F \cap \operatorname{comp} G$. Then

$$(F_1 \cup \cdots \cup F_s) - G' = (F_1 - (F_1 \cap G')) \cup \cdots \cup (F_s - (F_s \cap G')).$$

Therefore in writing a constructable set C as a finite union of sets $F_\alpha - F'_\alpha$ with F_α, F'_α closed and $F'_\alpha < F_\alpha$, we may assume that the F_α are irreducible; and, unless C is empty, that F'_α is a proper subset of F_α (whence $\dim F_\alpha > \dim F'_\alpha$). Let C be written as $(F_1 - F'_1) \cup \cdots \cup (F_t - F'_t)$ with F_i irreducible, F'_i closed, $F'_i < F_i$, and, unless C is empty, $F'_i \neq F_i$. Then the closure of $F_i - F'_i$ is F_i and the closure F of C is $F_1 \cup \cdots \cup F_t$. Let $C = F - C_1$; then F (= closure of C) and C_1 are uniquely determined (we write $A - B$ only if B is a subset of A). It is clear that $C_1 < F'_1 \cup \cdots \cup F'_t$. Hence $\dim C_1 < \dim F$. Moreover $C_1 = F \cap \operatorname{comp} C$ is also constructable. Writing F_1 for the closure of C, we see that every constructable set C is a finite alternating series $C = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + F_5 - \cdots$ of monotonically decreasing closed sets F_i — more strictly, $C = F_1 - (F_2 - (F_3 - (\cdots)))$ — with $\dim F_{i+1} < \dim F_i$ and with F_i as closure of $F_i - F_{i+1} + \cdots$; and this representation is unique subject to the requirement that each F_i be the closure of $F_i - F_{i+1} + \cdots$. All of these remarks hold, with the same explanations, if reference is made at each point to a given field of definition

k of V. Now let C be k-constructable. Then C is a finite union of sets $F_i - F_i'$ with F_i k-irreducible and, unless C is empty, F_i' a proper k-closed subset of F_i; then the k-closure of $F_i - F_i'$ is F_i. Let $F_{i1}, \ldots, F_{is}$ be the components of F_i. All these have the same dimension as F_i (in this connection, see [6], p. 167, Th. 1, Cor. 2). We have $F_i - F_i' = (F_{i1} - (F_{i1} \cap F_i')) \cup \cdots \cup (F_{is} - F_{is} \cap F_i'))$. Here $F_{ij} \cap F_i'$ is a proper subset of F_{ij} since $\dim F_i' < \dim F_i = \dim F_{ij}$. Hence the closure of $F_i - F_i'$ is $F_{i1} \cup \cdots \cup F_{is} = F_i$, i. e., the same as its k-closure. Hence *the closure of a k-constructable set C is the same as its k-closure.*

Now let C be constructable and invariant (under all the automorphisms of Ω/k). The closure of any invariant set S is itself invariant, and in particular the closure F of C is invariant. By the reduction mentioned, let V be affine and let K be a field containing k and such that every component of F is defined over K; such fields exist. Every isomorphism of K/k (into Ω) can be extended to an automorphism of Ω/k. Hence F is invariant under all isomorphisms of K/k. Then by ([6], p. 168, Prop. 2, Cor. 1), F is k-closed. We have $C = F - C_1$. Here C_1 is constructable and obviously invariant, and, unless C is empty, $\dim C_1 < \dim F$. Making an induction on $\dim C$ we see that C_1 is k-constructable whence also $C = F - C_1$ is k-constructable. The proof is complete.

As a *Corollary* to the theorem we keep the third paragraph of the proof.

Going back to the projection theorem, let C be a k-constructable set of a product $V \times W$. We are given that k is a field of definition of $V \times W$, and by ([W], p. 189, line 34) it is also a field of definition of the factors V and W. It is obvious that the set theoretic projection of any invariant set S on either factor is also invariant. Hence the set theoretic projections of C, which is invariant, are also invariant. Hence, by Theorem A1, these projections are k-constructable.

Even without Theorem A1, a familiarity with the kind of argument whereby Chevalley establishes his result ([1], p. 38, Th. 3, Cor.) would make it clear that the same result but with reference to k also holds, as one merely has to keep the field k in the foreground instead of in the background. In any event, we now have:

Theorem A 2 (*The Projection Theorem*). *The set-theoretic projection of a k-constructable subset of a product $V \times W$ on a factor is k-constructable.*

Let us consider the affine case of Theorem A2; by this we mean the case that V, W are affine spaces. V, W are products of affine lines: $V = L_1 \times \cdots \times L_r$, $W = L_{r+1} \times \cdots \times L_n$; and $V \times W$ is the product of n affine lines. Let $m = n - r$; $r > 0$ and $m > 0$. A k-closed subset F of $V \times W$ is given by a finite conjunction of polynomial equations over k:

$$F: f_1(X_1, \ldots, X_r, Y_1, \ldots, Y_m) = 0 \text{ and } \cdots \text{ and } f_s(X_1, \ldots, X_r, Y_1, \ldots, Y_m) = 0, \quad s > 0.$$

A k-open set G is given by a finite disjunction of polynomial inequalities over k:

$$G: g_1(X_1, \ldots, X_r, Y_1, \ldots, Y_m) \neq 0 \text{ or } \cdots \text{ or } g_t(X_1, \ldots, X_r, Y_1, \ldots, Y_m) \neq 0, \quad t > 0.$$

The intersection $F \cap G$ is given by the conjunction of these two systems. Therefore $F \cap G$ is given by the disjunction of the t conjunctions:

$$f_1(X; Y) = 0 \text{ and } \cdots \text{ and } f_s(X, Y) = 0 \text{ and } g_i(X, Y) \neq 0 \ (i = 1, \ldots, t).$$

Therefore, *every k-constructable set in $V \times W$ is given by a finite disjunction of finite conjunctions of polynomial equations and inequalities over k of the form*:

$$f_1(X; Y) = 0 \text{ and } \cdots \text{ and } f_s(X; Y) = 0 \text{ and } g(X; Y) \neq 0 \ (s > 0).$$

Conversely, *any finite disjunction of finite conjunctions of polynomial equations and inequalities over* k:

$$f_1(X, Y) = 0 \text{ and } \cdots \text{ and } f_s(X; Y) = 0 \text{ and } g_1(X; Y) \neq 0 \text{ and } \cdots \text{ and } g_t(X; Y) \neq 0 \quad (s \geqq 0, t \geqq 0, s + t > 0)$$

(obviously) *gives a k-constructable subset of* $V \times W$. We may suppose $s > 0$ and $t > 0$ as we can always adjoin $0 = 0$ to the equations and $1 \neq 0$ to the inequalities to get an equivalent system; by *equivalent*, we mean a system having the same solutions. Then with $t > 0$, we may suppose $t = 1$, as we may replace the g_i by their product.

Now we may state the following corollary of the projection theorem:

Corollary (*The Theorem of Elimination Theory, Affine Case*). *Let* $F^{(i)}(X; Y)$, $i = 1, \ldots, p$, *be a finite conjunction of polynomial equations and inequalities over* k (*in the indicated variables* $(X, Y) = (X_1, \ldots, X_r, Y_1, \ldots, Y_m)$). *Then there is a finite set of* $G^{(j)}(X)$ *each one of which is a finite conjunction of polynomial equations and inequalities over* k *having the following property: for every point* $a = (a_1, \ldots, a_r)$ *of the affine space* V (*and with coordinates in* Ω) *there is a point* $b = (b_1, \ldots, b_m)$ *of the affine space* W *such that* (a, b) *satisfies at least one of the* $F^{(i)}(X, Y)$ *if and only if* a *satisfies one of the* $G^{(j)}(X)$.

The *proof* is immediate: the set of points each of which satisfies at least one $F^{(i)}$ is a k-constructable set S, and for any point a of V there is a point b of W satisfying at least one $F^{(i)}$, i. e., there is a point (a, b) in S, if and only if a is in the projection T of S into V. Since T is k-constructable it is the set of points satisfying a finite disjunction of finite conjunctions $G^{(j)}(X)$ of polynomial equations and inequalities over k.

It is equally immediate that the projection theorem in the affine case follows from the corollary, and even the case $p = 1$ of the corollary as if $G_i^{(j)}$ is a set for $F^{(i)}$, then the $G_i^{(j)}$ taken together form a set $G^{(j)}$ for the $F^{(i)}$ taken together; that is, the disjunction of the $G_i^{(j)}$ is a set $G^{(j)}$ for the disjunction of the $F^{(i)}$. Moreover the projection $V \times W \to V$ can be written as a product of projections

$$L_1 \times \cdots \times L_n \to L_1 \times \cdots \times L_{n-1} \to \cdots \to L_1 \times \cdots \times L_r$$

each of which is a projection from an affine space to an affine space of dimension 1 less. Thus the projection theorem would also follow from the corollary in the case $p = 1$ and dimension $W = 1$. It is for this reduced form that we propose to give another proof of the corollary, basing ourselves on the following remarks:

Let x be a point of an (abstract) variety V having k as field of definition and let π be a property which can be asserted or denied for each point of V. We say that *almost all k-specializations of x have the property* π if all the points of the k-closure of x except perhaps those in a proper k-closed subset have the property π. Since the k-closure of a point is k-irreducible, the union of two proper k-closed subsets of the k-closure of x is also a proper k-closed subset, whence if almost all k-specializations of x have property π_1 and almost all have property π_2, they almost all simultaneously have properties π_1 and π_2. Hence also it cannot be that almost all have property π and almost all do not have property π.

Theorem A 3. *A set* S *on a variety* V *defined over* k *is* k*-constructable if and only if for every* x *in* S *almost all* k*-specializations of* x *are in* S *and for every* x *not in* S *almost all* k*-specializations of* x *are not in* S.

Proof. First assume that $S = C$ is k-constructable. We dismiss the trivial case that $C = \emptyset$. Then $C = F - C_1$, where F is the k-closure of C and $\dim C_1 < \dim C$. We make

an induction on $\dim C = \dim F$. Let x be in C. Then x is in F and not in C_1. Almost all, in fact all, k-specializations of x are in F and by induction almost all are not in C_1, so almost all are in C. Let x be not in C. If x is not in F and G is the k-closure of x, then all the k-specializations of x except perhaps those in $G \cap F$, which is a proper k-closed subset of G, are not in F and hence also not in C. If x is in F, then it must also be in C_1. By induction almost all k-specializations of x are in C_1, and all are in F, so almost all are not in C. This proves the *only if* part. For the converse, we make an induction on the dimension of the k-closure F of S. Dismissing the trivial case that $S = \emptyset$, let $F_1, \ldots, F_s$ be the k-components of F. Each F_i is the k-closure of a point. Let F_1, say, be the k-closure of the point x. Then we say, first, that x is in S. For if not, all the points of F_1 except perhaps those lying in a proper k-closed subset F_1' of F_1 would not be in S, by assumption. Then S would be contained in $F_1' \cup F_2 \cup \cdots \cup F_s$; since x is not in it, it is a proper subset of F and we have a contradiction. So we have that x is in S, and hence all the points of F_1 except perhaps those lying in a k-closed subset F_1' of F are in S. Let $S = F - S_1$; then we have just shown that the k-closure of S_1 is of dimension $< \dim S$. We will show now that S_1 has the property in question, the defining property of S; by induction this will make S_1, and hence $S = F - S_1$ k-constructable. Let, then, x be a point of S_1. Then x is in F and hence not in S. All of its k-specializations are in F, but almost all not in S, hence almost all are in S_1. Let x be not in S_1. The point x may also not be in F; in that case, almost all k-specializations of x are not in F and *a fortiori* not in S_1. If x is in F, then x is in S. Then almost all specializations of x are in S, by assumption, and hence almost all are not in S_1. By induction, S_1 is k-constructable, and hence also $S = F - S_1$ is k-constructable. The proof is complete.

We find it convenient to think of Theorem A 3 in the following way:

Method 1. To show that a set S is k-constructable, show that if x is in S, then almost all k-specializations of x are in S, and that if x is not in S, then almost all k-specializations of x are not in S.

There is an allied method for showing that a set S is k-closed: *Let S be k-constructable; then S is k-closed if and only with any x it also contains all the k-specializations of x.* In fact, the *only if* is immediate, and does not depend on the hypothesis that S is k-constructable. Conversely, let $S = F - C_1$ be k-constructable, where F is the k-closure of S. Dismissing the trivial case $S = \emptyset$, let $F_1, \ldots, F_s$ be the k-components of F and let x_i be a point whose k-closure is F_i, $i = 1, \ldots, s$. These points belong to S and every point of C_1 is a k-specialization of at least one of them. Hence $C_1 = \emptyset$ and $S = F$ is k-closed. Thus we have:

Method 2. To show that a set S is k-closed, first show that it is k-constructable, and then show that it contains with any x all the k-specializations of x.

Now we come to *our* proof of the projection theorem. First we establish the following:

Let S be the set of solutions of a system of (simultaneous) polynomial equations and inequalities over k of the form:

$$f_1(X_1, \ldots, X_r, Y) = 0, \ldots, f_s(X_1, \ldots, X_r, Y) = 0,$$
$$g(X_1, \ldots, X_r, Y) \neq 0 \qquad (s > 0).$$

Then the projection T of S into the affine space of $(X_1, \ldots, X_r)$ is k-constructable.

In fact, let $x = (x_1, \ldots, x_r)$ be a point *not* in T. Then the system: $f_1(x, Y) = 0, \ldots, f_s(x, Y) = 0$, $g(x, Y) \neq 0$, has no solution, whence by Hilbert's Nullstellensatz there is an integer $\varrho > 0$ and elements $A_1(x, Y), \ldots, A_s(x, Y)$ in $k(x)[Y]$

and an element $d(x) \neq 0$ in $k[x]$ (in fact, $d(x) = 1$) such that

$$d(x)\,(g(x, Y))^e = A_1(x, Y)f_1(x, Y) + \cdots + A_s(x, Y)f_s(x, Y);$$

and clearing by a common denominator of the $A_i(x, Y)$ and $d(x)$, we may suppose the $A_i(X, Y)$ are in $k[X, Y]$ and $d(X)$ is in $k[X]$. We have $d(x) \neq 0$, whence for almost all k-specializations $\bar{x}$ of x, $d(\bar{x}) \neq 0$. For any such k-specialization $\bar{x}$, there is no point $(\bar{x}, \bar{y})$ in S, as $f_1(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \ldots, f_s(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ implies $g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Hence almost all k-specializations of x are *not* in T. Now let x be a point *in* T. Then there is a y satisfying $f_1(x, Y) = 0, \ldots, f_s(x, Y) = 0$, $g(x, Y) \neq 0$. Note that at least one coefficient $c(X)$ of $g(X, Y)$ regarded as a polynomial in Y over $k[X]$ is such that $c(x) \neq 0$. In the case that y is transcendental over $k(x)$, for any k-specialization $\bar{x}$ of x and any $\bar{y}$, we have $f_i(\bar{x}, \bar{y}) = 0$; and for any $\bar{x}$ with $c(\bar{x}) \neq 0$ and any $\bar{y}$ different from the finite number ($\geqq 0$) of solutions of $g(\bar{x}, Y) = 0$, the point $(\bar{x}, \bar{y})$ is in S, i. e., almost all $\bar{x}$ are in T. If y is algebraic over $k(x)$, let $f(x, Y) = 0$ be a minimal equation for y over $k(x)$; we may suppose $f(X, Y)$ is in $k[X, Y]$. Since $f_i(x, y) = 0$, we have relations $d_i(x)f_i(x, Y) = A_i(x, Y)f(x, Y)$ with $A_i(X, Y)$ in $k[X, Y]$, $d_i(X)$ in $k[X]$ and $d_i(x) \neq 0$; and since $g(x, y) \neq 0$, we have a relation $d_0(x) = A(x, Y)f(x, Y) + B(x, Y)g(x, Y)$ with $A(X, Y)$, $B(X, Y)$ in $k[X, Y]$, $d_0(X)$ in $k[X]$ and $d_0(x) \neq 0$. Let $c_0(x)$, with $c_0[X]$ in $k[X]$, be the leading coefficient of $f(x, Y)$; and let $d(X) = c_0(X)d_0(X)d_1(X) \cdots d_s(X)$, so that $d(X)$ is in $k[X]$ and $d(x) \neq 0$. Then for any k-specialization $\bar{x}$ of x for which $d(\bar{x}) \neq 0$ (hence for almost all k-specializations $\bar{x}$ of x), the equation $f(\bar{x}, Y) = 0$ has at least one solution $\bar{y}$, and, from the mentioned relations, $f_1(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \ldots, f_s(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, $g(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$, so that $\bar{x}$ is in T, and the proof is complete. (The last point could have been argued a bit more quickly, using, say, Krull's Lying-over Theorem, but we preferred not to quote a theorem to cover such an easy point.)

By a previous remark, then, we have the projection theorem in the affine case. We can extend this (slightly) to the case that V, W are affine varieties defined over k, since a k-closed subset of an affine variety U is k-closed in its ambient space, and, conversely, a k-closed subset of the ambient space, if it is in U, is a k-closed subset of U (a variety having k as field of definition).

Now let V, W be (abstract) varieties defined over k. Let V be defined via the affine varieties $V_1, \ldots, V_r$ (and certain birational transformations); and let W be defined via $W_1, \ldots, W_s$. Let S be a k-constructable subset of $V \times W$, let $T = \mathrm{proj}_V S$, and let S_{ij} be the subset of S having representatives in $V_i \times W_j$, which we identify with a set D_{ij} on $V \times W$. Since D_{ij} is k-open on $V \times W$, the sets S_{ij} are k-constructable, and hence so are their projections T_{ij} into V_i. Hence T, which is the union of the T_{ij}, is also k-constructable. Thus a simple "patching-together" gives us the projection theorem also in the abstract case.

In this way we have disengaged the projection theorem from Chevalley's work [1] (and also from Weil's *Foundations* except for the definition and first properties of abstract varieties).

Remark. Let $f_1(X_1, \ldots, X_r; Y_0, Y_1, \ldots, Y_m), \ldots, f_s(X_1, \ldots, X_r; Y_0, Y_1, \ldots, Y_m)$ be polynomials over k in the indicated letters and *let the* f_i *be homogeneous in* $Y_0, Y_1, \ldots, Y_m$ *and of positive degree in* $Y_0, Y_1, \ldots, Y_m$. For any x, the system of equations $f_1(x; Y) = 0, \ldots, f_s(x; Y) = 0$ has $y_0 = 0, y_1 = 0, \ldots, y_m = 0$ as a solution; for this reason the solution $(0, 0, \ldots, 0)$ is called *the trivial solution.* Usually it is to be disregarded as a solution; hence we consider the system:

$$(*)\quad f_1(x; y) = 0 \text{ and } \cdots \text{ and } f_s(x; y) = 0 \text{ and } (y_0 \neq 0 \text{ or } y_1 \neq 0 \text{ or } \cdots \text{ or } y_m \neq 0).$$

Let S be the set of solutions of $(*)$ and let T be the projection of S into the space of the letters X. Using Method 2, we are going *to show that T is k-closed.* First, we know that T is k-constructable. Let, then, x be a point of T, so that there exists y with not all $y_i = 0$ such that (x, y) is in S. Let $x \to \bar{x}$ be a k-specialization. Then by ([6], p. 34, Prop. 10) there is at least one $y_i \neq 0$ such that $x \to \bar{x}$ can be extended to a (finite) k-specialization $(x; y_0/y_i, y_1/y_i, \ldots, y_m/y_i) \to (\bar{x}; \bar{y}_0, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m)$. Since $(x; y_0/y_i, \ldots, y_m/y_i)$ is, along with $(x; y_0, \ldots, y_m)$, a solution of $(*)$ and since at least one of the $\bar{y}_j$ equals 1, $(\bar{x}; \bar{y}_0, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_m)$ is a point of S and $\bar{x}$ is a point of T. Q. E. D.

Now let

$$f_1(X_0, X_1, \ldots, X_r; Y_0, Y_1, \ldots, Y_m), \ldots, f_s(X_0, X_1, \ldots, X_r; Y_0, Y_1, \ldots, Y_m)$$

be *doubly homogeneous* polynomials over k, i. e., homogeneous in the X_i and homogeneous in the Y_j, not necessarily of positive degree in the X_i or in the Y_j, though we dismiss the cases of degree zero as trivial in what follows. Consider the system:

$$(*)_0 \quad f_1(x; y) = 0 \text{ and } \cdots \text{ and } f_s(x; y) = 0 \text{ and } (y_0 \neq 0 \text{ or } y_1 \neq 0 \text{ or } \cdots \text{ or } y_m \neq 0),$$

let S be the set of solutions of $(*)_0$, and let T be the projection of S into the space of the X_i. (T contains $(x_0, \ldots, x_r) = (0, 0, \ldots, 0)$ if, as we are assuming, the f_i are of positive degree in the X_i.) Since T is k-closed, it is given by a set $G_1(X) = 0, \ldots, G_t(X) = 0$ of polynomial equations over k. Moreover, we may take the $G_j(X)$ to be homogeneous. In fact, let $G_j(X) = G_{j0}(X) + G_{j1}(X) + \ldots$, where $G_{jk}(X)$ is the sum of the terms of degree k in $G_j(X)$. Let x be in T, so that there is a y with $(x; y)$ in S. Let λ be any element of Ω. Then $(\lambda x, y)$ is also in S, and λx is in T. Now take λ transcendental over $k(x)$. From $G_{j0}(x) + G_{j1}(x)\lambda + G_{j2}(x)\lambda^2 + \cdots = 0$, we deduce $G_{jk}(x) = 0$. Hence the $G_j(X)$ can be replaced by the $G_{jk}(X)$. Hence:

The set of points x for which there is a y satisfying $(*)_0$ *is given by a system*:

$$(**)_0 \qquad g_1(x) = 0 \text{ and } \cdots \text{ and } g_t(x) = 0,$$

where the g_j *are homogeneous polynomials over k.*

In the literature, a system $(**)_0$ is called a *resultant system* of the system $(*)_0$.

We call the contents of the present Remark, *The Theorem of Elimination Theory, Projective Case* (cf. Theorem A2, Corollary and, below, Theorem A5).

2. *k*-elementary formulae

We are now going to explain what we mean by a k-elementary formula. This is a notion relative to a given (abstract) variety having k as a field of definition, though, of course, any variety defined over k is allowed. In particular V may itself be a product of varieties.

Let $x_1, \ldots, x_n$ be a finite sequence of letters with $n \geqq 1$ and for each i with $1 \leqq i \leqq n$ let there be given a variety V_i defined over k. The x_i, since they are mere letters, are, of course, distinct for distinct subscripts, but the V_i need not be distinct. The variety V mentioned will be $V_1 \times \cdots \times V_n$. We also call $x_1, \ldots, x_n$ *variables.* The variable x_i is thought of as ranging over V_i. As long as the reference is soley to V or its factors and their products, no other variables will appear.

By a *k-atomic formula* we mean a formula of the form $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}) \in F$, where $1 \leqq i_j \leqq n$ for $j = 1, \ldots, s$, $i_j \neq i_k$ for $j \neq k$, and F is a k-closed subset of $V_{i_1} \times \cdots \times V_{i_s}$.

By a *k-elementary formula* we mean a formula built up in a finite number of steps from k-atomic formulae by negation ($\sim$), conjunction ($\wedge$), disjunction ($\vee$), and quantification of the form $\exists x_i(A)$, where A is a formula already constructed [2]).

Atomic formulae and *elementary formulae* can be defined similarly by dropping the reference to k. Every elementary formula is, of course, a k-elementary formula for some k. With given k, we shall, for the present, have no occasion to consider elementary formulae except over k.

For the moment we introduce no notion of equivalence for k-elementary formulae. Thus two k-elementary formulae are the same if and only if they have the same appearance or structure, i. e., involve the same k-atomic formulae and the same *operations* (of negation, conjunction, disjunction, and quantification), in the same order (as indicated by parentheses). Every k-elementary formula involves a certain number λ of operations, which we call its *length*. Proofs and definitions about k-elementary formulae are frequently by induction on the length. This understood, we give the following definition.

Definition. The letter x_i is *free* in the k-atomic formula $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}) \in F$ if and only if x_i is one of the $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$. It is *free* in $\sim A$ if and only if it is free in A. It is *free* in $A \wedge B$ if and only if it is free in A or free in B. It is *free* in $A \vee B$ if and only if it is free in A or free in B. It is *free* in $\exists x_j(A)$ if and only if $j \neq i$ and it is free in A.

The letter x_i is said to be *bound* in A if and only if it is not free in A. A k-elementary formula involving no free variables is called a *k-elementary sentence.*

For every k-elementary formula A and every letter x_i, x_i is free or bound in A. but not both.

In the same way we can define the i^{th} *operation* in a formula of length λ, $1 \leqq i \leqq \lambda$. (An atomic formula has length 0.) In $\sim A$, the prefix $\sim$ is the last operation, and otherwise the i^{th} operation in $\sim A$ is the same as the i^{th} operation in A. In $A \wedge B$ we count the operations in A first, then those in B, and finally $\wedge$; likewise for $A \vee B$. In $\exists x_j(A)$, $\exists x_j$ is the last operation and otherwise the i^{th} operation in $\exists x_j(A)$ is the i^{th} operation in A. If there are any $\exists$ signs in A, we can speak of *the first occurrence* of $\exists$ sign in A.

By a k-elementary formula *relative to* $V_{i_1} \times \cdots \times V_{i_s}$ we mean one built up using only the letters $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ (though we are still concerned with which of the letters x_i, $i = 1, \ldots, n$, are free in A). If we wish to disregard the other letters entirely, we speak of the formula as *relative to the theory of* $V_{i_1} \times \cdots \times V_{i_s}$.

Let $W = V_{j_1} \times \cdots \times V_{j_t}$ be a partial product of V and let $W' = V_{i_1} \times \cdots \times V_{i_s}$ be a partial product of W. Let S be a subset of $V_{i_1} \times \cdots \times V_{i_s}$. By the *cylinder on* S *with respect to* W we mean the set of points in W which project into S. The cylinder on a k-closed set is k-closed, the cylinder on the complement (in W') of S is the complement of the cylinder on S, and the cylinders on the union and intersection of sets S and T (on $V_{i_1} \times \cdots \times V_{i_s}$) are the union and intersection, respectively, of the corresponding cylinders. Hence *the cylinder on a k-constructable set is k-constructable.*

A subset S of $V_1 \times \cdots \times V_n$ is said to be *a cylinder in the* n^{th} *direction* if and only if it contains with any of its points $(P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n)$ also the points $(P_1, \ldots, P_{n-1}, P'_n)$,

---

[2]) We owe the notion of elementary formula to Tarski [5], who in essence has considered the affine case (i. e., the case that the V_i are affine spaces); see ([5], p. 39, Th. 31; p. 54, note 16; and p. 53, note 15). Our main contribution has been in the idea of using elementary formulae for arbitrary abstract varieties and in the finding of the atoms. Associated works are [2] (see especially p. 370, Th. 3, the immediately following remarks, and p. 373, Remark (c)) and (especially in connection with the Remark (c) just mentioned) [3]. For some applications, see our paper *On the Variety of Orbits* [4].

where P_n' is arbitrary on V_n; *similarly for any subscript i.* It is said to be a *cylinder in the direction* $(i_1, \ldots, i_s)$, $s \geqq 0$, if and only if it is a cylinder in each of the directions $i_1, \ldots, i_s$. If S is a cylinder in the direction $(1, 2, \ldots, n)$, then it is the empty set $\emptyset$ or the whole space $V_1 \times \cdots \times V_n$.

For a set of points on a partial product, we *denote the cylinder on S with respect to V by* S^c. If S is a subset of $W = V_{j_1} \times \cdots \times V_{j_t}$ and W' is a partial product of W, then *we denote the projection of S on W' by* $\mathrm{proj}_{W'} S$.

Consider a k-atomic formula $(x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}) \in F$, which is relative to

$$W = V_{j_1} \times \cdots \times V_{j_t}.$$

If we consider it relative to the theory of $V_{j_1} \times \cdots \times V_{j_t}$, we would say that the set of points satisfying it is F. However, we are considering matters relative to the theory of V, and so would say that $(a_1, \ldots, a_n)$ satisfies the formula if and only if $\mathrm{proj}_W (a_1, \ldots, a_n)$ is in F. Now we add (for any k-elementary formulae A, B, C):

The set of points satisfying a k-atomic formula $(x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}) \in F$ is F^c. The set of points satisfying $A = \sim B$ is the complement (in V) of the set of points satisfying B. The set of points satisfying $A = B \wedge C$ is the intersection of the set of points satisfying B and the set of points satisfying C. The set of points satisfying $A = B \vee C$ is the union of the set of points satisfying B and the set of points satisfying C. The set of points satisfying $A = \exists x_i(B)$ is, in the case $n > 1$, the cylinder on the projection of the set of points satisfying B on $V_1 \times \cdots \times V_{i-1} \times V_{i+1} \times \cdots \times V_n$; if $n = 1$, it is $\emptyset$ or V according as the set of points satisfying B is empty or not.

The last paragraph hardly constitutes a definition, as it merely makes explicit the ordinary usage of the word *satisfy* (keeping in mind that the reference is to V).

Remark. We can analyze this usage in more general terms as follows. Let $X_1, \ldots, X_n$ be arbitrary non-empty sets $(n \geqq 1)$ and let f be a subset of $(X_1 \times \cdots \times X_n) \times \{\text{truth, falsity}\}$ having projection $X_1 \times \cdots \times X_n$ on the first factor. Thus f is a function having $X_1 \times \cdots \times X_n$ as domain and having image in {truth, falsity}. We call f a *sentential function of n variables.* If $x_1, \ldots, x_n$ are free variables ranging over $X_1, \ldots, X_n$, respectively, we also denote f (in the usual way) as $f(x_1, \ldots, x_n)$. Each such function f determines a set S such that f is truth (or, adjectively said, true) at a point $(a_1, \ldots, a_n)$ of $X_1 \times \cdots \times X_n$ if and only if $(a_1, \ldots, a_n)$ is in S; and conversely, every subset S of $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ determines a sentential function which is true precisely at the points of S. We write $S(f)$ for the set determined by f, and $f(S)$ for the function determined by S. For any f let f' denote the function which is true where f is false and false where f is true; $f' = f(\mathrm{comp}\, S(f))$. To the expression: (not f), we *assign* (as may be expected) the function f'. To the expression: (f and g), we *assign* the function which is true precisely on $S(f) \cap S(g)$. Making {truth, falsity} into a field with truth $= 1$ and falsity $= 0$, we can multiply and add sentential functions in the usual way, i. e., $f \cdot g$ is the function which is true at $(a_1, \ldots, a_n)$ if and only if both f and g are true at $(a_1, \ldots, a_n)$, and $f + g$ is the function which is true at $(a_1, \ldots, a_n)$ if and only if f is true and g is false or f is false and g is true at $(a_1, \ldots, a_n)$. Thus the function assigned to (f and g) is $f \cdot g$. Denoting also by 1 the function which $= 1$ everywhere (as usual), and similarly for 0, the function assigned to (not f) is $f' = f + 1$. To the expression: (f or g) we *assign* the function which is true precisely on $S(f) \cup S(g)$; it is the function $(f' \cdot g')'$, which we also denote as $f \circ g$. The expression: (there is an x_i such that f), determines, at least for $n > 1$, a sentential function $g_i^{(2)}$ on

$$X(i) = X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n$$

as follows: $g_i^{(2)}$ is true at $(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ if and only if there is an a_i in X_i such that f is true at $(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$. It also determines a function $g_i^{(1)}$ on $X_1 \times \cdots \times X_n$ as follows: $g_i^{(1)}$ is true at $(a_1, \ldots, a_n)$ if and only if for some a_i' in X_i $f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i', a_{i+1}, \ldots, a_n)$ is true. We call *this* function *the first function determined by i and f*, and *assign* it to the expression: (there is an x_i such that f); the other one, if $n > 1$, the *second*. The first function is defined in every case, i. e., for $n \geqq 1$; the second, at least if one sticks to Weil's notion that no partial product is to be defined for the empty set of subscripts $\{1, 2, \ldots, n\}$, is not defined for $n = 1$. If $n > 1$, the relation between the two functions is clear: $S(g_i^{(1)})$ is the cylinder on $S(g_i^{(2)})$. Note that if $n > 1$, then $S(f(\text{there exists an } x_i \text{ such that } f)) = (\text{proj}_{X(i)} S(f))^c$, with obvious notation; for $n = 1$, $S(g_i^{(1)}) = \emptyset$ or X according as $S(f)$ is empty or not.

Now coming back to k-elementary formulae, we *assign* a sentential function $f(A)$ on V to each k-elementary formula A as follows: if $A = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}) \in F$ and $W = V_{j_1} \times \cdots \times V_{j_t}$, then $f(A)$ is the function which is true at $(a_1, \ldots, a_n)$ if and only if $\text{proj}_W (a_1, \ldots, a_n)$ is in F. If $A = \sim B$, then $f(A) = (f(B))'$; if $A = B \wedge C$, then $f(A) = f(B) \cdot f(C)$; if $A = B \vee C$, then $f(A) = f(B) \circ f(C)$; if $A = \exists x_i(B)$, then $f(A) = g_i^{(1)}(B)$, where $g_i^{(1)}(B)$ is the first function determined by i and $f(B)$; thus $S(f(A)) = (\text{proj}_{V(i)} S(f(B)))^c$, in the case $n > 1$; if $n = 1$, then $S(f(A)) = \emptyset$ or V according as $S(f(B))$ is empty or not. By a simple induction on $\lambda(A)$, one now sees that what was said to be the set of points satisfying A is just the set $S(f(A))$, i. e., the set of points where $f(A)$ is true. *We define*, then, *the set of points satisfying A to be* $S(f(A))$.

We *denote* the set of points satisfying A, or the *locus of* A, *by* $L(A)$. Thus if $A = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}) \in F$, then $L(A) = F^c$; if $A = \sim B$, then $L(A) = \text{comp } L(B)$, where comp *abbreviates* complement; if $A = B \wedge C$, then $L(A) = L(B) \cap L(C)$; if $A = B \vee C$, then $L(A) = L(B) \cup L(C)$; if $A = \exists x_i(B)$ and $n > 1$, then

$$L(A) = (\text{proj}_{V_1 \times \cdots \times V_{i-1} \times V_{i+1} \times \cdots \times V_n} L(B))^c;$$

if $n = 1$, then $L(A) = \emptyset$ or V according as $L(B)$ is empty or not.

Let A be a k-elementary formula. *If* x_i *is not free in* A, *then* $L(A)$ *is a cylinder in direction* i. The proof is by induction on $\lambda(A)$. It is immediate in the case that A is atomic, as it is in the cases that A is of the form $\sim B$, $B \wedge C$, or $B \vee C$. Consider, then, the case that $A = \exists x_j(B)$. If $j = i$, the proof is again immediate, whether $n > 1$ or $n = 1$. If $j \neq i$, then $n > 1$; let $V(j)$ be the partial product obtained from V by deleting the j^{th} factor (and not disturbing the order of the other factors). Now x_i is not free in B, so $L(B)$ is a cylinder in direction i (by induction). Then $\text{proj}_{V(j)} L(B)$ is also a cylinder (in $V(j)$) in direction i, and so is $(\text{proj}_{V(j)} L(B))^c = L(A)$.

If $A = \exists x_i(B)$, *and* x_i *is not free in* B, *then* $L(A) = L(B)$. In fact, $L(B)$, as we have seen, is a cylinder in direction i, so, at least if $n > 1$, $L(B) = (\text{proj}_{V(i)} L(B))^c = L(A)$. In the case $n = 1$, B is a sentence and $L(B)$ is a cylinder in direction 1, hence is $\emptyset$ or V; $L(A)$ is $\emptyset$ or V, according as $L(B)$ is $\emptyset$ or not. So $L(A) = L(B)$ in this case, too.

Ordinarily one does not quantify a bound variable: the last paragraph shows why — such quantification has no effect; but it is not nonsense. In every case a k-elementary formula makes sense and describes a definite locus.

If A *is a* k*-elementary sentence, then* $L(A) = V$ *or* $\emptyset$, *and* A *is true or false according as* $L(A) = V$ *or* $\emptyset$. In fact, $L(A)$ is a cylinder in every direction, so $L(A) = V$ or $\emptyset$, and the first point is proved. To prove the second, we makes an induction on $\lambda(A)$. A cannot be atomic, as every atomic formula has at least one free variable; thus the assertion is vacuously true if A is atomic. If $A = \sim B$, then B is also a sentence. Then

A is true $\Leftrightarrow B$ is false $\Leftrightarrow L(B) = \emptyset \Leftrightarrow L(A) = V$. If $A = B \wedge C$, then B and C are sentences, and

$$A \text{ is true} \Leftrightarrow (B \text{ is true and } C \text{ true}) \Leftrightarrow \big(L(B) = V \text{ and } L(C) = V\big)$$
$$\Leftrightarrow L(B) \cap L(C) = V \Leftrightarrow L(B \wedge C) = V \Leftrightarrow L(A) = V.$$

The case $A = B \vee C$ is similar. If $A = \exists x_i(B)$, then A is true $\Leftrightarrow L(B) \neq \emptyset \Leftrightarrow L(A) = V$.

Let S be a k-constructable set on $V_1 \times \cdots \times V_n$ and let S be the union of s sets $F_i \cap G_i$ with F_i k-closed and G_i k-open; let G_i' be the complement of G_i in V. Then $F_i \cap G_i$ is the set of points satisfying: $\big((x_1, \ldots, x_n) \in F) \wedge (\sim ((x_1, \ldots, x_n) \in G_i')\big)$. Thus *we can write down a k-elementary formula* A free of $\exists$ signs *such that* S *is the set of points satisfying* A, at least if $s > 0$; we may suppose $s > 0$, as the union of $s = 0$ sets is $\emptyset$, and $\emptyset = \emptyset \cap \emptyset$. The same assertion holds for a partial product $W = V_{i_1} \times \cdots \times V_{i_s}$ of V, provided we consider the formulae relative to W; as, however, we agreed to consider the formulae relative to V we can only say that *the cylinder on a k-constructable subset* S *of* W *is the set of points satisfying some k-elementary formula free of* $\exists$ *signs.* Conversely, *the set of points satisfying a k-elementary formula* A *free of* $\exists$ *signs is k-constructable.* The proof is immediate by induction on $\lambda(A)$.

Now we come to the main theorem:

Theorem A 4. *The set of points satisfying a k-elementary formula* A *is k-constructable* (*and conversely — we have just seen the converse*).

Proof. The proof is by induction on $\lambda(A)$. If A is atomic, the proof is immediate, as it is (inductively) if A is of the form $\sim B$, $B \wedge C$, or $B \vee C$. Let, then, $A = \exists x_i(B)$. Then, if $n > 1$, $L(A) = \big(\text{proj}_{V(i)} L(B)\big)^c$, which is k-constructable since by the projection theorem $\text{proj}_{V(i)} L(B)$ is, and since the cylinder on a k-constructable set is k-constructable; if $n = 1$, then A is a sentence and $L(A) = \emptyset$ or V, and both of these sets are k-constructable. The proof is complete.

Theorem A 5 (*Theorem of Elimination Theory*). *Let* A *be a k-elementary formula which is not a sentence, and let* $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ *be the free variables in it. Then there is a k-elementary formula* B *free of* $\exists$ *signs having the same free variables and such that* $L(B) = L(A)$.

Proof. Let $x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}$ be the other letters, $s + t = n$, and let $W = V_{i_1} \times \cdots \times V_{i_s}$. Then $L(A)$ is a cylinder in direction $(j_1, \ldots, j_t)$ and $L(A) = \big(\text{proj}_W L(A)\big)^c$. The set $\text{proj}_W L(A)$ is a k-constructable set S on W. In the theory of W, there is a formula B free of $\exists$ signs such that S is the set of points satisfying B. If not all $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ are already free in B, replace B by $B \wedge \big((x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}) \in V_{i_1} \times \cdots \times V_{i_s}\big)$. The (new) B is free of $\exists$ signs, is satisfied precisely by the set of points S, and is such that each of $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ is free in B. If now B is regarded in the theory of V, then

$$L(B) = S^c = \big(\text{proj}_W L(A)\big)^c = L(A).$$

We obviously cannot get Theorem A 5 for sentences, as every formula free of $\exists$ signs has at least one free variable. We could get it if we drop the condition that A and B have the same free variables, but we wish to regard two k-elementary formulae C, D as *equivalent* if and only if $L(C) = L(D)$ *and* C, D have the same free variables (so that A, B would be equivalent); if we drop the condition on the free variables, a sentence could be equivalent to a formula not a sentence. Thus we cannot get Theorem A 5 for sentences without some change in our theory. The simplest change that occurs to us is to add some trivial sentence, for example, $0 = 0$ or $0 \in \Omega$; that is, $0 = 0$ (or $0 \in \Omega$) is

included in our definition of k-atomic formula, the definition of k-atomic formula and k-elementary formula remaining otherwise (verbally) unchanged; and the definition of *free variable* is so extended that no x_i is free in the new formula, so that the new formula is a k-elementary sentence. *The rest of our considerations can then be extended with minor changes to yield a Theorem A* 5 *in which the restriction to formulae which are not sentences is dropped.*

Let x_{n+1} be a letter, associated with a variety V_{n+1} defined over k, and let $V' = V \times V_{n+1}$. Let A be a k-elementary formula in the theory of V. It remains a k-elementary formula in the theory of V'; the letter x_{n+1} is not free in A relative to the theory of V', no assertion is made about x_{n+1} in the theory of V, and any of the other letters $x_1, \ldots, x_n$ is free in A relative to the theory of V' if and only if it is so relative to the theory of V. Let $L^{V'}(A)$ denote the locus of A in the theory of V'; and similarly for $L^V(A)$. If A is free of $\exists$ signs, one checks that $L^{V'}(A)$ is the cylinder on $L^V(A)$ with respect to V' (indeed, we have already used this); and if W is any partial product of V, then $\mathrm{proj}_W L^{V'}(A) = \mathrm{proj}_W L^V(A)$. By a simple induction on $\lambda(A)$, one now shows that $L^{V'}(A)$ is the cylinder on $L^V(A)$ with respect to V' (whether A is free of $\exists$ signs or not). Defining two k-elementary formulae A, B of the theory of V to be *equivalent* if and only if $L(A) = L(B)$ and A, B have the same free variables, we see that two k-elementary formulae A, B equivalent in the theory of V remain such in the theory of V'. In particular, a sentence remains a sentence, and a true one remains true.

Thus we see that we can add variables to our theory without changing the results in any essential way. For the same reason, we can subtract superfluous variables.

Let A be a k-elementary formula and let $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ be the free variables in A if there are any. Let $x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}$ be the other variables, $s + t = n$. The variables $x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}$ are usually, or frequently, or sometimes, regarded as "apparent", and if they are and if $s > 0$, then A is considered to describe a locus in $V_{i_1} \times \cdots \times V_{i_s}$ (with, say, $i_1 < \cdots < i_s$). This is $\mathrm{proj}_W L(A)$ and is also, of course, k-constructable.

We need hardly add that $A \Rightarrow B$ can be rewritten as $B \vee (\sim A)$, $A \Leftrightarrow B$ as $(B \vee (\sim A)) \wedge (A \vee (\sim B))$, and $\forall x_i(A)$ as $\sim \exists x_i \sim (A)$, so that in writing k-elementary formulae we may feel free to use these additional logical notions.

References

[1] *C. Chevalley*, Sur la théorie des variétés algébriques, Nagoya Math. J. **8** (1955), 1—44.

[2] *A. Seidenberg*, A new decision method for elementary algebra, Ann. Math. **60** (1954), 365—374.

[3] *A. Seidenberg*, Some remarks on Hilbert's Nullstellensatz, Arch. Math. **7** (1956), 235—240.

[4] *A. Seidenberg*, On the variety of orbits, to appear in Ill. J. Math.

[5] *A. Tarski*, A decision method for elementary algebra and geometry, Santa Monica, California 1948, 2nd. ed., Berkeley 1951.

[6] *A. Weil*, Foundations of Algebraic Geometry, 2nd edition Am. Math. Soc. Coll. Publications **29** (1962).

University of California Berkeley, Department of Mathematics, Berkeley, CA 94720, USA

Eingegangen 13. März 1969

On the remainder term of the Euler-Maclaurin Formula

By *A. M. Ostrowski* in Basel[1])

To Wolfgang Krull on his seventieth birthday

I. Introduction

1. The starting point of this paper was the observation that in the Euler-Maclaurin Formula

$$\text{(I, 1)} \qquad \sum_{\mu=p}^{q}{}' f(\mu) = \int_p^q f(t)\,dt + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!}\left(f^{(2\nu-1)}(q) - f^{(2\nu-1)}(p)\right) + R_n \quad (n \geqq 1),$$

$$\text{(I, 2)} \qquad R_n = \frac{-1}{(2n)!}\int_0^1 B_{2n}(t) \sum_{\nu=p}^{q-1} f^{(2n)}(\nu + t)\,dt,$$

there exists the estimate

$$\text{(I, 3)} \qquad |R_n(p, q)| \leqq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\right)\frac{|B_{2n}|}{(2n)!}\,|f^{(2n)}(q) - f^{(2n}(p)| \quad (f^{(2n)}(x) \text{ monotonic}),$$

valid whenever $f^{(2n)}(x)$ is continuous and monotonic in the interval $\langle p, q\rangle$. (It is contained in the formula (VI, 5) of this paper.) Since this formula presents in some cases considerable advantages as compared with the classical estimates for R_n (see the example in sec. 37) and appeared, on the other hand, to be unknown, I had to check the relevant literature. The formula (I, 3) appears indeed to be new. Further, checking the literature on R_n, I found that many classical results could be still more or less considerably improved. One of the drawbacks of the classical estimates of R_n is that they often use too high order of differentiability, which goes up to C^{2n+2} and even to C^{2n+4}. The use of the *convexity* concept allows, in particular, to streamline and generalize these discussions.

2. Checking the literature about R_n turned out to be rather cumbersome, as not one couple of authors used the same notations, so that the whole material had to be worked through almost in all details. Further, the references, beginning with Jacobi [5], turned out to be rather inadequate and contradictory.

I will give, after having introduced in the section II the standard notations and some general formulas to be used in the following, in the section III an account of the essential results found in the literature. In the section IV, I collect some lemmas to be

[1]) This investigation was carried out under the contract DAJA 37-67-C-0628 of the Institute of Mathematics, University of Basel, with the US Department of the Army.

used later. In the sections V—VII, I discuss different estimates of R_n, according to the differentiability order of f, beginning in the section V with the differentiability order $2n-1$ and discussing in the sections VI and VII the differentiability orders $2n$ and $2n+1$ [2]).

II. Notations and Definitions

3. We will discuss different papers about our subject, using one set of standard notations. In many papers, the step is taken as an arbitrary positive number h, while it is sufficient to consider the case $h = 1$. The limits of summation can therefore be assumed as integers p, q, $p < q$. The Bernoulli number $B_1 = -\frac{1}{2}$ is used by different authors in different ways. Its use can be obviously avoided, if the formula is written in the form (I, 1), where $\sum_{\mu=p}^{q}{}'$ signifies that both terms $f(p)$ and $f(q)$ have to be multiplied by $\frac{1}{2}$. In some papers the formula is written not in terms of the function $f(x)$, but in terms of its integral $\int^x f(x)\,dx$. In some cases, the authors consider only one step of the formula, that is $q = p + 1$. Further, the notations of Bernoulli numbers differ from one author to another. Finally, some of the authors use the symbol R_n for what in our standard notation would be denoted by R_{n-1}.

In discussing different papers we will always rewrite the results, corresponding to our notations.

We use for Bernoulli numbers and polynomials the notation which can be considered today as standard. The Bernoulli numbers B_ν are defined by the symbolic iteration formula

$$(B+1)^\nu - B^\nu = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots), \quad B_0 = 1,$$

where in the binomial development each B^k is to be replaced with B_k. The Bernoulli polynomials $B_\nu(x)$ are defined, using the same convention, by

$$B_\nu(x) = (x+B)^\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots), \quad B_0(x) \equiv 1.$$

4. We collect in this section different classical properties of Bernoullian numbers and polynomials, which are proved e. g. in Milne-Thompson [9], Nörlund [10], and Ostrowski [11].

(a) $(-1)^\nu B_{2\nu} < 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$,

(b) $B_{2\nu+1}(0) = B_{2\nu+1}(1) = B_{2\nu+1}\left(\frac{1}{2}\right) = B_{2\nu+1} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$,

(c) $\frac{B_{2\nu+1}(t)}{B_{2\nu}} > 0 \quad (0 < t < \frac{1}{2}\,;\ \nu = 1, 2, \ldots)$,

(d) $B_{2\nu}(0) = B_{2\nu}(1) = B_{2\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$,

(e) $B_{2\nu}\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(1 - \frac{2}{2^{2\nu}}\right) B_{2\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$,

(f) $B_\nu(1-t) = (-1)^\nu B_\nu(t) \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$,

(g) $B'_\nu(t) = \nu B_{\nu-1}(t) \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$.

---

[2]) We treat here only functions of a *real variable*. In the case of an analitic function of a complex variable, there exist representations of the remainder term by integrals in the complex domain. The reader will find accounts of such representations in the book of Lindelöf [7] and in the paper by Barnes [1].

The expression $\frac{B_{2\nu}(t) - B_{2\nu}}{B_{2\nu}}$ is monotonically decreasing in $\left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$ for $\nu \geqq 0$ and we have therefore in particular:

(h) $\underset{\langle 0,1/2\rangle}{\operatorname{Max}} \frac{B_{2\nu}(t) - B_{2\nu}}{B_{2\nu}} = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$

(i) $\underset{\langle 0,1/2\rangle}{\operatorname{Min}} \frac{B_{2\nu}(t) - B_{2\nu}}{B_{2\nu}} = -2\left(1 - \frac{1}{2^{2\nu}}\right) \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$

5. We introduce first some further notations. We write for the general terms of the right hand sum in (I, 1)

$$G_\nu = \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!}\left(f^{(2\nu-1)}(q) - f^{(2\nu-1)}(p)\right) = \frac{B_{2\nu}}{(2\nu)!}\int_p^q f^{(2\nu)}(t)\,dt. \tag{II, 1}$$

We put further

$$D_\mu(t) = \sum_{\nu=p}^{q-1} f^{(\mu)}(\nu + t), \tag{II, 2}$$

$$S_\mu(t) = D_\mu(t) + (-1)^\mu D_\mu(1 - t). \tag{II, 3}$$

The formula (I, 2) can then be written as

$$R_n = \frac{-1}{(2n)!}\int_0^1 B_{2n}(t)\,D_{2n}(t)\,dt, \tag{II, 4}$$

and, using (II, 3), in the form

$$R_n = \frac{-1}{(2n)!}\int_0^{\frac{1}{2}} B_{2n}(t)\,S_{2n}(t)\,dt. \tag{II, 5}$$

(II, 5) can be brought by partial integration, if $f^{(2n+1)}$ is continuous, into the forms

$$R_n = \frac{1}{(2n+1)!}\int_0^1 B_{2n+1}(t)\,D_{2n+1}(t)\,dt, \tag{II, 6}$$

$$R_n = \frac{1}{(2n+1)!}\int_0^{\frac{1}{2}} B_{2n+1}(t)\,S_{2n+1}(t)\,dt. \tag{II, 7}$$

If $f^{(2n+2)}$ is continuous, we have again by partial integration

$$R_n = \frac{-1}{(2n+2)!}\int_0^1 (B_{2n+2}(t) - B_{2n+2})\,D_{2n+2}(t)\,dt, \tag{II, 8}$$

$$R_n = \frac{-1}{(2n+2)!}\int_0^{\frac{1}{2}} (B_{2n+2}(t) - B_{2n+2})\,S_{2n+2}(t)\,dt, \tag{II, 9}$$

and, by (I, 1) and (II, 1),

$$R_n = G_{n+1} + R_{n+1}\,(n \geqq 1). \tag{II, 10}$$

Further, if we denote generally by $\overline{B_\nu}(x)$ the function with the period 1, which is $= B_\nu(x)$ in the interval $\langle 0, 1\rangle$, the formula (I, 2) can be written as

$$R_n(p, q) = \frac{-1}{(2n)!}\int_p^q \overline{B_{2n}}(t) f^{(2n)}(t)\, dt. \tag{II, 11}$$

Finally, we have from (II, 3), as $S_{2\nu-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$,

$$f^{(2\nu-1)}(q) - f^{(2\nu-1)}(p) = -S_{2\nu-1}(0) = \int_0^{\frac{1}{2}} S_{2\nu}(t)\, dt. \tag{II, 12}$$

6. We will, in what follows, speak of not-decreasing functions as *increasing* and of not-increasing functions as *decreasing*.

We will denote the *total variation* of a function $f(x)$ in the interval $\langle a, b\rangle$ by the symbol $\underset{\langle a,b\rangle}{TV}(f)$.

If a function $f(x)$ is in a certain interval increasing or decreasing, we will say that it has resp. the *monotony type* $+1$ or -1. For a $\delta = \pm 1$, if we pass from $f(x)$ to $\delta f(x)$, the monotony type of $f(x)$ is multiplied by δ. To state in the formulas the condition that $f(x)$ has in a certain interval the monotony type $+1$ or the monotony type -1 or is monotonic without specification of the monotony type, we will use resp. the symbols

$$(f\uparrow), \quad (f\downarrow), \quad (f\uparrow\downarrow).$$

If a function $f(x)$ is $\geqq 0$ in an interval, without vanishing everywhere in this interval, we will say that $\operatorname{sgn} f(x) = 1$ in this interval. If $\operatorname{sgn}(-f(x)) = 1$ in an interval, we will say that $\operatorname{sgn} f(x) = -1$ in that interval.

III. Survey of the litterature from Poisson to Schlömilch

7. The formula (I, 1) with the remainder in the form (II, 11) has been first discovered and published by Poisson in 1827 [13][3]). Poisson obtained $\overline{B_{2n}}(t)$ as a trigonometric development, but did not apparently notice the polynomial character of $B_{2n}(t)$. He obtained from this formula the estimate

$$|R_n(p, q)| \leqq (q-p)\frac{|B_{2n}|}{(2n)!}\operatorname*{Max}_{\langle p,q\rangle}|f^{(2n)}(t)| \tag{III, 1}$$

(cf. our sec. 29).

Poisson obtains further from the formula (II, 11) by partial integration the formula

$$R_n = \frac{1}{(2n+1)!}\int_p^q \overline{B_{2n+1}}(t) f^{(2n+1)}(t)\, dt \tag{III, 2}$$

and, using (III, 2),

$$|R_n| \leqq (q-p)\cdot A_n' \cdot \operatorname*{Max}_{\langle p,q\rangle}|f^{(2n+1)}(t)|, \tag{III, 3}$$

[3]) As a matter of fact, he derived it explicitely for *even* values of $q-p$, which is, however, not essential, if his method is used. To (I, 1) corresponds Poisson's formula (6) on p. 583 of his paper and to (II, 11) and (III, 2) his formulas (7) and (8).

where A'_n is given by

(III, 4) $$A'_n = \frac{2}{(2\pi)^{2n+1}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2n+1}}$$ [4]).

(For an improvement of (III, 3) see Ostrowski [12].)

8. The second publication treating the remainder term R_n is Jacobi's paper "De usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinianae", 1834, ([5]). Jacobi derives the formula (I, 1) with the expression (II, 8) of R_n and derives from this expression combined with the formula (II, 10) the two theorems [5]):

A. *If* $f^{(2n+2)}$ *exists and is continuous in* $\langle p, q\rangle$ *and if there exists a* $\operatorname{sign}\varepsilon = \pm 1$ *such that*

(III, 5) $$\varepsilon D_{2n+2}(t) \geqq 0 \quad (0 \leqq t \leqq 1),$$

then

(III, 6) $$\operatorname{sgn} R_n = (-1)^n \varepsilon = \operatorname{sgn} G_{n+1}.$$

(This is contained in our result (VII, 6).)

B. *If* $f^{(2n+2)}$ *exists and is continuous in* $\langle p, q\rangle$ *and if there exists a* $\operatorname{sign}\varepsilon = \pm 1$ *such that*

(III, 7) $$\varepsilon D_{2n}(t) \geqq 0, \quad \varepsilon D_{2n+2}(t) \geqq 0 \quad (0 \leqq t \leqq 1),$$

then we have

(III, 8) $$R_n = -\theta G_n, \quad 0 \leqq \theta \leqq 1.$$

(This is contained in our result (VI, 8).)

Methodically, Jacobi's paper represents a very considerable advance in the whole discussion. Jacobi recognizes the polynomial nature of $B_\nu(t)$. He introduces the functions (II, 2) and for an even index the functions (II, 3). He realizes the symmetry of $B_{2\nu}(t)$ with respect to the point $t = \frac{1}{2}$ and obtains the formula (II, 9), without, however, using the functions $S_\mu(t)$ in his formulations.

9. The manner, in which Jacobi in his paper refers to the preceding paper by Poisson has been considered by Kronecker as grossly unfair. Kronecker says in ([6], pp. 153—154): „Mit Unrecht hat Jacobi geringschätzig von der Poisson'schen Abhandlung gesprochen, als er sie ... in wenigen Zeilen erwähnte und von ihr sagte, die Frage sei dort in ganz anderer Weise behandelt .... Wahrscheinlich hatte Jacobi ohne Kenntnis der Poisson'schen Arbeit die Jahrhunderte alte Frage selbständig und gründlich gelöst und erfuhr erst während des Druckes seiner Arbeit durch Crelle von jenem Aufsatz ....“ As a matter of fact, it is, in the first line, the title of Jacobi's paper, which could be

[4]) Cf. p. 584 of Poisson's paper. To translate Poisson's formulas into our notation, his ω and m have to be replaced respectively with 1 and n, and his A_n with $\frac{|B_{2n}|}{(2n)!}$.

[5]) The theorems formulated as A and B are equivalent to the theorems given on pp. 72, 73 in Jacobi's paper. To translate Jacobi's formulas into our standard notation, we must replace in Jacobi's paper a, x, h, m resp. with p, q, l, n and T_n with $\frac{1}{(2n+2)!}(B_{2n+2}(t) - B_{2n+2})$. The expression (II, 8) of R_n corresponds to the formula (25) in Jacobi's paper. — The argument used by Jacobi to prove his theorem B has been rediscovered by J. F. Steffensen and repeatedly used, under the name of "Error-Test", in his book [16].

considered as unfair to Poisson. For such a title suggests that Jacobi's treatment is *the first really rigorous* treatment[6]).

10. The third publication about our problem is that by Malmstén 1847 [8][7]). Malmstén treats the Euler-Maclaurin-Formula in terms of $u(x) = \int^x f(t)\,dt$ and considers usually only one summation term, so that his formulas correspond to ours for $p = 0$, $q = 1$. He considers explicitely the obviously positive step h which has to be replaced with 1, going over to our standard notations. He denotes $|B_{2n}|$ with the symbol B_n, while his m usually has to be replaced with $n + 1$, in order to make his R equal to our R_n[8]). If we further replace Malmstén's function $\varphi(z)$ with $\frac{B_{2n+2}(z) - B_{2n+2}}{(2n+2)!}$, Malmstén's starting formula (41) on p. 68 of his paper becomes our formula (II, 8).

Malmstén obtains first from Poisson's formula corresponding to our formula (I, 2) the two estimates which can be formulated in the following way:

If $f^{(2n)}$ exists and does not change its sign in $\langle p, q\rangle$, then we have

$$|R_n| \leqq \frac{|B_{2n}|}{(2n)!}\,|f^{(2c-1)}(q) - f^{(2n-1)}(p)| = |G_n|, \tag{III, 9}$$

$$|R_n| \leqq 2\,\frac{|B_{2n}|}{(2n)!}\,\operatorname*{Max}_{\langle p,q\rangle}|f^{(2n-1)}(x)|. \tag{III, 10}$$

These formulas correspond to Malmstén's formulas (5) and (6)[9]).

11. From the formula (II, 8), Malmstén derives his formula (47):

$$R_n = \frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!}\,D_{2n+2}(\theta),\ 0 \leqq \theta \leqq 1, \tag{III, 11}$$

and from this further

$$|R_n| \leqq (q-p)\,\frac{|B_{2n+2}|}{(2n+2)!}\,\operatorname*{Max}_{\langle p,q\rangle}|f^{(2n+2)}(x)|. \tag{III, 12}$$

Malmstén makes further the assumption which corresponds in our notation to assuming that $f^{(2n+2)}$ exists and does not change its sign in $\langle p, q\rangle$, and obtains under

---

[6]) The situation appears, however, in a different light, if considered in the adequate historical perspective. Poisson uses a convergent Fourier development. It was 1827 clear that Fourier's convergence proof was unsufficient, although it was not usually stated. Even Dirichlet in his famous paper, 1829, uses an obviously very carefully thought out diplomatic formulation (Fourier died 1830). Poisson does not even mention Fourier's name and tries to give a proof for the (false) theorem, that the Fourier series of a continuous function is always convergent. But what he really (and very well) proves is, in modern terminology, the Poisson summability of the Fourier series of a continuous function.

It can be assumed that the real situation was very clear to Jacobi in 1834. Insofar it is very possible that Jacobi wanted to avoid the critical discussion of Poisson's paper and considered the manner in which he mentionned Poisson's work as a particularly friendly gesture!

[7]) There exists a paper by Ostrogradski (Berichte Akademie Petersburg) on our problem, which appeared 1839, obviously without knowledge of Jacobi's paper. It contains a part of Jacobi's results. However, Ostrogradski develops there also corresponding results for another formula related to that by Euler-Maclaurin.

[8]) Malmstén considers also the summation formula in terms of $f(x)$ on pp. 57 and 69—74 of his paper, where the notations have to be again changed correspondingly. Altogether, the complication of notations and the unusually great number of printing errors makes the study of Malmsténs paper rather cumbersome.

[9]) As a matter of fact, in Malmstén's paper these formulas are so completely deformed by obvious printing errors and less obvious writing errors and omissions, that they had to be reconstructed anew.

this assumption the formula which he denotes by (51) and which corresponds to

$$R_n = \theta\left(2 - \frac{1}{2^{2n+1}}\right) G_{n+1},\ 0 \leqq \theta \leqq 1. \tag{III, 13}$$

(This is contained in our result (VII, 5).)

Combining this formula with (II, 10) he obtains further (commenting his formula (57))

$$|R_{n+1}| \leqq |G_{n+1}|. \tag{III, 14}$$

More precisely, it follows from his discussion that

$$R_{n+1} = \theta^* G_{n+1},\ 1 - \frac{1}{2^{2n+1}} \geqq \theta^* \geqq -1. \tag{III, 15}$$

(This is contained in our result (V, 2).)

12. Malmstén's derivation of the above formula (III, 13) uses the properties of $B_{2n+2}(t)$ better out than was done in Jacobi's preceding paper, and the result (III, 13) is obviously an important improvement of Jacobi's corresponding formula (III, 6).

Finally, Malmstén derives Jacobi's final results anew and considers also the case not discussed at all by Jacobi that the derivatives $f^{(2n)}(x)$ and $f^{(2n+2)}(x)$ exist and do not change there signs in the interal $\langle p, q\rangle$, while their product remains $\leqq 0$ in this interval. In this case, Malmstén obtains his formulas (51) and (61), which can be written as

$$\operatorname{sgn} G_n = \operatorname{sgn} R_n = \operatorname{sgn} R_{n-1}, \tag{III, 16}$$

$$\operatorname{sgn} G_{n+1} = \operatorname{sgn} R_n, \tag{III, 17}$$

$$R_n = \Theta\left(1 - \frac{2}{2^{2n}}\right) G_n,\ 0 \leqq \Theta \leqq 1. \tag{III, 18}$$

This is contained in our formulas (VI, 9), (VII, 6) and (VI, 10). However, Malmstén completely overlooked the implications of these formulas (see sec. 35—36).

13. Malmstén's references to his two predecessors Poisson and Jacobi show a very distinct tendency not only to underline, but also to exaggerate Poisson's achievements. Thus, in the introduction to Malmstén's paper, the reader who does not check with Poisson's paper, has the distinct impression, that Malmsténs formulas (5) and (6) (our formulas (III, 9) and (III, 10)) are due to Poisson. Immediately after that, discussing Jacobi's result, Malmstén expresses himself in such a way, that the reader assumes, that the monotony conditions for $f^{(2n)}$ and $f^{(2n+2)}$ are due to Poisson, while Jacobi's conditions use D_{2m} and D_{2m+2}. He says at the end of this paragraph that Jacobi's condition can be satisfied, "sans que la condition de M. Poisson soit satisfaite".

On p. 72, at the end of his section 10, Malmstén speaks about Jacobi's result that under Jacobi's condition "the value of the remainder is less than that of the last term" and finishes: "ce qui est précisément la proposition de M. Poisson." All these references are as a matter of fact completely false. Poisson has not considered any monotony conditions at all.

As to the references to Jacobi's paper, Malmstén says on p. 59 that Jacobi did not recognize the symmetry of $B_{2\nu}(x)$ with respect to the point $\frac{1}{2}$. This is false; this property is equivalent to the formula (22) in Jacobi's paper and it is even used by Jacobi in deriving his formula (25) (our formula (II, 9)).

14. The next paper to be discussed is that by Schlömilch, 1856, [14]. If in Schlömilch's formulas $F(x)$ is replaced with $\int^x f(x)dx$, h with 1, n with $n+1$, x with 0 and A_ν with $\frac{B_\nu}{\nu!}$, $B_{2\nu-1}$ with $|B_{2\nu}|$ and $U_{2n}(t)$ with $\frac{1}{(2n)!}[B_{2n}(t) - B_{2n}]$, his formulas (27) and (30) correspond to our formula (II, 8) and Malmstén's result (III, 11). Further, Schlömilch is the first to use the formula (II, 6), although only for a single term development. His result corresponds to the following formula, in which p is assumed $= 0$ and $q = 1$:

$$\text{(III, 19)} \qquad R_n = \frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!}\left(2 - \frac{1}{2^{2n+1}}\right)\left(f^{(2n+1)}\left(1 - \frac{\theta}{2}\right) - f^{(2n+1)}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right).$$

Assuming $f^{(2n+1)}$ monotonic in $\langle 0, 1\rangle$, he obtains Malmstén's formula (III, 13). This is, however, in so far better than Malmstén's result, as Schlömilch's assumption of the monotony of $f^{(2n+1)}$ is more general than Malmstén's assumption that $f^{(2n+2)}$ does not change its sign. On the other hand, Schlömilch makes only a half-hearted attempt to generalize his result to the case of the complete summation formula; here, he essentially only derives Jacobi's final theorem.

Finally, there exists a paper on our subject by Sonin [15]. Since, however, Sonin's results have only a loose connection with the results discussed above, we propose to discuss them in a separate publication.

IV. Lemmas

15. We collect in this section some observations and lemmas which we will use later on. We have immediately from the definition (II, 2) and (II, 3):

$$\text{(IV, 1)} \quad D_\nu'(t) = D_{\nu+1}(t),\ S_\nu'(t) = S_{\nu+1}(t)\ (0 \leqq t \leqq 1),$$

$$\text{(IV, 2)} \quad S_{2\nu}(0) = D_{2\nu}(0) + D_{2\nu}(1),\ S_\nu(1-t) = (-1)^\nu S_\nu(t)\ (0 \leqq t \leqq 1).$$

Assume that there exists an $\varepsilon = \pm 1$ so that $\varepsilon f^{(\nu)}(t) \geqq 0$ for $p \leqq t \leqq q$. Then it is clear that we have also $\varepsilon D_\nu(t) \geqq 0$ $(0 \leqq t \leqq 1)$. If we assume that $\varepsilon D_\nu(t) \geqq 0$ $(0 \leqq t \leqq 1)$, then, if ν is even, $= 2\mu$, $\varepsilon S_{2\mu}(t) \geqq 0$ $(0 \leqq t \leqq 1)$.

If $\varepsilon f^{(\nu)}(t)$ monotonically increases in $\langle 0, 1\rangle$, then the same is true for $\varepsilon D_\nu(t)$.

If we assume that $\varepsilon D_\nu(t)$ monotonically increases in $\langle 0, 1\rangle$, then, *if ν is odd*, $= 2\mu - 1$, $S_{2\mu-1}(t)$ is monotonically increasing in $\left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle$, since $-\varepsilon D_{2\mu-1}(1-t)$ is also monotonically increasing.

16. In our discussion we will make use of the hypothesis that $S_{2n}(t)$ is *convex* in $\langle 0, 1\rangle$. $S_{2n}(t)$ is certainly convex in $\langle 0, 1\rangle$ if $D_{2n}(t)$ is there convex and this is certainly true if $f^{(2n)}(t)$ is convex in $\langle p, q\rangle$. Similarly, we will use the hypothesis that $S_{2n+1}(t)$ is *convex* in $\left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle$.

If $S_{2n}(t)$ is continuous and convex in $\langle 0, 1\rangle$, then it is monotonically decreasing in $\left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle$.

Indeed, using the symmetry of $S_{2n}(t)$ with respect to $\frac{1}{2}$ we have from the convexity relation

$$S_{2n}\left(\frac{1}{2}\right) \leqq \frac{1}{2}\left[S_{2n}\left(\frac{1}{2} - t\right) + S_{2n}\left(\frac{1}{2} + t\right)\right] = S_{2n}\left(\frac{1}{2} - t\right) \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}\right).$$

But then, for any two points t_1, t_2 such that $0 \leqq t_1 < t_2 \leqq \frac{1}{2}$, we have from the convexity relation

$$S_{2n}(t_2) \leqq \left[\left(\frac{1}{2} - t_2\right) S_{2n}(t_1) + (t_2 - t_1) S_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)\right] \Big/ \left(\frac{1}{2} - t_1\right) \leqq S_{2n}(t_1).$$

17. The formula (II, 5) can be written with a Stieltjes integral as

$$R_n = \frac{-1}{(2n)!} \int_{t=0}^{\frac{1}{2}} B_{2n}(t)\, dS_{2n-1}(t). \tag{IV, 4}$$

It is therefore only reasonable to expect that this formula is true even without the assumption that $f^{(2n)}(x)$ exists in $\langle p, q\rangle$. Indeed, we are going to prove:

Lemma 1. *If $f^{(2n-1)}(x)$ exists in $\langle p, q\rangle$ and if $S_{2n-1}(t)$ is continuous in $\langle 0, 1\rangle$, then we have in the formula* (I, 1) *for R_n the representation* (IV, 4).

18. *Proof.* The integral in (IV, 4) exists in any case, since $B_{2n}(t)$ is of bounded variation. Denoting this integral by R^*, we have by partial integration

$$R^* = \frac{-1}{(2n)!}\left[B_{2n}(t) S_{2n-1}(t) \Big|_0^{\frac{1}{2}} - 2n \int_0^{\frac{1}{2}} B_{2n-1}(t) S_{2n-1}(t)\, dt\right]. \tag{IV, 5}$$

Assuming first $n > 1$, we obtain, applying again integration by parts,

$$R^* = \frac{-1}{(2n)!}\left[B_{2n}(t) S_{2n-1}(t) \Big|_0^{\frac{1}{2}} - 2n\, B_{2n-1}(t) S_{2n-2}(t) \Big|_0^{\frac{1}{2}}\right] - \frac{1}{(2n-2)!} \int_0^{\frac{1}{2}} B_{2n-2}(t) S_{2n-2}(t) dt,$$

and therefore, by (II, 12), since $B_{2n-1}(0) = B_{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $B_{2n}(0) = B_{2n}$, $S_{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$:

$$R^* = \frac{-B_{2n}}{(2n)!}\left(f^{(2n-1)}(q) - f^{(2n-1)}(p)\right) - \frac{1}{(2n-2)!} \int_0^{\frac{1}{2}} B_{2n-2}(t) S_{2n-2}(t)\, dt.$$

The right hand expression is, however, by (II, 5), in our notations $= R_{n-1} - G_n$. Using now for R_{n-1} the formula (I, 1) written for $n - 1$, we obtain the formula (I, 1) for n with R^* instead of R_n.

To deal now with *the case $n = 1$*, observe that (IV, 5) becomes in this case

$$R^* = -\frac{1}{12}\left(f'(q) - f'(p)\right) + \int_0^{\frac{1}{2}} B_1(t) S_1(t)\, dt.$$

Here we obtain by partial integration, using $B_1(t) = t - \frac{1}{2}$ and introducing $S_0(t)$, the formula (I, 1) for $n = 1$ with R^* instead of R_1. Lemma 1 is proved.

19. Lemma 2. *Let $\varphi(t)$ be monotonically decreasing and convex in $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$. Then we have, for $n \geqq 1$,*

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{B_{2n}(t)}{B_{2n}} \varphi(t)\, dt \geqq 0. \tag{IV, 6}$$

Proof. By the general properties of convex functions (see [3] p. 91) $\varphi(t)$ is continuous in the open interval $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ and has there the right hand derivative, $\varphi'_+(t)$, which is monotonically increasing in $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ and coincides with $\varphi'(t)$ save in an enumerable set. Further, in our case $\varphi'_+(t) \leqq 0 \left(0 < t < \frac{1}{2}\right)$.

20. *We assume first that, for a constant* C,

$$\varphi'_+(t) \geqq C \qquad \left(0 < t < \frac{1}{2}\right). \tag{IV, 7}$$

Then $\varphi(t)$ is absolutely continuous in $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ and we can apply the partial integration formula and obtain (see for instance [4], p. 616)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{B_{2n}(t)}{B_{2n}} \varphi(t)\, dt = \frac{-1}{2n+1} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{B_{2n+1}(t)}{B_{2n}} \varphi'_+(t)\, dt. \tag{IV, 8}$$

Put now

$$\psi(t) = \begin{cases} C, & t = 0 \\ \varphi'_+(t), & 0 < t < \frac{1}{2} \\ 0, & t = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Then $\psi(t)$ is, by (IV, 7), increasing and we have further

$$\frac{-1}{2n+1} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{B_{2n+1}(t)}{B_{2n}} \varphi'_+(t)\, dt = \frac{-1}{2n+1} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{B_{2n+1}(t)}{B_{2n}} \psi(t)\, dt;$$

this is, by partial integration,

$$\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \frac{B_{2n+2}}{B_{2n}} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{B_{2n+2}(t) - B_{2n+2}}{B_{2n+2}}\, d\psi(t).$$

Here, however, we have $\frac{B_{2n+2}(t) - B_{2n+2}}{B_{2n+2}} \leqq 0$, $\frac{B_{2n+2}}{B_{2n}} < 0$, and (IV, 6) follows, *under the assumption* (IV, 7).

21. We let drop the assumption (IV, 7). There exists a sufficiently small $\varepsilon > 0$ such that $\varphi'(\varepsilon)$ exists and that $\frac{B_{2n}(t)}{B_{2n}}$ remains positive in $\langle 0, \varepsilon \rangle$. Put then

$$\Phi(t) = \begin{cases} \varphi'(\varepsilon)\,(t - \varepsilon) + \varphi(\varepsilon), & 0 \leqq t \leqq \varepsilon \\ \varphi(t), & \varepsilon \leqq t \leqq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Then $\Phi(t)$ is still monotonically decreasing and convex in $\left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$, and we have therefore

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{B_{2n}(t)}{B_{2n}} \Phi(t)\, dt \geqq 0.$$

On the other hand, for $0 < t < \varepsilon$, as $\varphi'_+(t)$ is increasing,

$$\varphi(t) = \int_{\varepsilon}^{t} \varphi'(t)\,dt + \varphi(\varepsilon) \geqq \int_{\varepsilon}^{t} \varphi'(\varepsilon)\,dt + \varphi(\varepsilon) = \Phi(t).$$

Therefore

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{B_{2n}(t)}{B_{2n}} \varphi\,dt = \int_0^{\varepsilon} \frac{B_{2n}(t)}{B_{2n}} \varphi\,dt + \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{B_{2n}(t)}{B_{2n}} \Phi\,dt \geqq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{B_{2n}(t)}{B_{2n}} \Phi\,dt \geqq 0\,^{10}).$$

22. Lemma 3. *If $f(x)$ is a derivative in the interval $a < x < b$, $f(x) = g'(x)$, and if $f(x)$ is of bounded variation in any closed subinterval of this interval, then $f(x)$ is continuous in (a, b).*

Since a function of bounded variation in an interval can only have jump discontinuities, assume that $f(x)$ has a jump discontinuity at x_0, $a < x_0 < b$. Without loss of generality, we can then assume that:

$$\alpha = f(x_0 - 0) < \beta = f(x_0 + 0).$$

Take then a γ with

$$\alpha < \gamma < \beta, \quad \gamma \neq f(x_0).$$

Then there exists a neighbourhood U of x_0, in which $f(x)$ does not assume the value γ, but assumes the values α_0, β_0 such that $\alpha_0 < \gamma < \beta_0$. This contradicts however Darboux's mean value theorem.

23. We give now a lemma which will be used in the proof of the formula (I, 3).

Lemma 4. *Assume $F(x)$ measurable and bounded in $a \leqq x \leqq b$ and such that*

$$\text{(IV, 9)} \qquad \int_a^b F(x)\,dx = 0.$$

Let $f(x)$ be measurable and bounded in $\langle a, b\rangle$ and denote by Ω, ω resp. the oscillations of $F(x)$, $f(x)$ in $\langle a, b\rangle$. Then we have

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b F(x)\,f(x)\,dx \right| \leqq \frac{\Omega\omega}{4}.$$

This Lemma is due to Grüss, 1934, [2], where the reader finds a simple proof.

24. Lemma 5. *We have*

$$\text{(IV, 10)} \qquad \operatorname*{Max}_{0 \leqq \theta \leqq 1} \operatorname{Min}\left(1 - \frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2-\theta}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = .618\ldots.$$

Indeed, as θ grows from 0 to 1, $1 - \theta/2$ decreases from 1 to $\frac{1}{2}$ and $\frac{\theta}{2-\theta}$ increases from 0 to 1. It follows that $\operatorname{Min}\left(1 - \frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2-\theta}\right)$ first increases from 0 up to the common

[10]) We could have used for the proof of Lemma 2 the following theorem due to V. I. Levine and given by him in the appendix 8 to the Russian translation of Hardy-Littlewood-Polya's book [3], Moscow 1948, pp. 364—366: Let $p(x)$ be monotonically increasing in $\left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$ and defined in $\langle 0, 1\rangle$ by $p(x) = p(1-x)$; let $\varphi(x)$ be convex on $\langle 0, 1\rangle$. Then we have

$$\int_0^1 p(x)\varphi(x)\,dx \leqq \int_0^1 p(x)\,dx \int_0^1 \varphi(x)\,dx.$$

value of $1-\frac{\theta}{2}$ and $\frac{\theta}{2-\theta}$, and then decreases again. Our maximum corresponds therefore to $\theta = t$ with

$$1-\frac{t}{2}=\frac{t}{2-t},\quad t^2-6t+4=0,\quad 0<t<1,\quad t=3-\sqrt{5},$$

$$1-\frac{t}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=.618\ldots.$$

V. The class C^{2n-1}

25. We assume in this section that f belongs in $\langle 0, 1\rangle$ to the class C^{2n-1}. Then we can use (IV, 4). If we assume here that $S_{2n-1}(t)$ is *monotonic in* $\left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle$, then, by the mean value theorem, for a θ, $0 \leqq \theta \leqq \frac{1}{2}$, and by (II, 12):

$$\text{(V, 1)}\qquad R_n = -\frac{B_{2n}(\theta)}{(2n)!}\int_0^{\frac{1}{2}} dS_{2n-1}(t) = -\frac{B_{2n}(\theta)}{(2n)!}\left(f^{(2n-1)}(q)-f^{(2n-1)}(p)\right).$$

On the other hand, the function $-\frac{B_{2n}(t)}{B_{2n}}$ increases monotonically in the interval $\left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle$ from -1 to $1-\frac{1}{2^{2n-1}}$ and has there the oscillation $2\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)$. Using (II, 1) we obtain therefore from (V, 1):

$$\text{(V, 2)}\qquad R_n = \theta^* G_n,\ 1-\frac{1}{2^{2n-1}} \geqq \theta^* \geqq -1.\quad (S_{2n-1}\uparrow\downarrow),$$

and (V, 2) holds a fortiori if $D_{2n-1}(t)$ or $f^{(2n-1)}(t)$ are monotonic, the first in $(0, 1)$, the second in (p, q).

26. If we now assume that $S_{2n-1}(t)$ is of *bounded variation* in $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, we have from (IV, 4) in notation of sec. 6

$$\text{(V, 3)}\qquad |R_n| \leqq \frac{|B_{2n}|}{(2n)!}\underset{(0,\frac{1}{2})}{TV}(S_{2n-1}).$$

If we further assume that $D_{2n-1}(t)$ is of bounded variation in $(0, 1)$, we have, as $D_{2n-1}(t)$ is continuous at $\frac{1}{2}$,

$$\text{(V, 4)}\qquad \underset{(0,\frac{1}{2})}{TV}(S_{2n-1}) \leqq \underset{(0,\frac{1}{2})}{TV}(D_{2n-1}) + \underset{(\frac{1}{2},1)}{TV}(D_{2n-1}) = \underset{(0,1)}{TV}(D_{2n-1}),$$

$$|R_n| \leqq \frac{|B_{2n}|}{(2n)!}\underset{(0,1)}{TV}(D_{2n-1}).$$

If we finally assume that $f^{(2n-1)}(t)$ is of bounded variation in (p, q), we have

$$\text{(V, 5)}\qquad \underset{(0,1)}{TV}(D_{2n-1}) \leqq \sum_{\nu=p}^{q-1}\underset{(\nu,\nu+1)}{TV}(f^{(2n-1)}) = \underset{(p,q)}{TV}(f^{(2n-1)}),$$

$$|R_n| \leqq \frac{|B_{2n}|}{(2n)!}\underset{(p,q)}{TV}(f^{(2n-1)}).$$

27. We will now derive some estimates for R_{n-1}, depending on the behaviour of $S_{2n-1}(t)$, which we will need later.

Observe first that, if $S_{2n-1}(t)$ does not change its sign in $\left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$, we can make a definite statement about the sign of R_{n-1}. Indeed, applying (II, 7) to $n-1$ instead of n, we have

$$R_{n-1} = \frac{B_{2n-2}}{(2n-1)!} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{B_{2n-1}(t)}{B_{2n-2}} S_{2n-1}(t)\, dt.$$

Here, however, $\frac{B_{2n-1}(t)}{B_{2n-2}}$ temains > 0 in $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, so that, *if* $\varepsilon = \operatorname{sgn} S_{2n-1}(t)$ *in* $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ *exists*, we have

(V, 6) $$\operatorname{sgn} R_{n-1} = (-1)^n \varepsilon.$$

28. Further, using (II, 7) and observing that $B_{2n-1}(t)$ does not change its sign in $\left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$, it follows, by the mean value theorem, for a θ with $0 < \theta < 1$:

$$R_{n-1} = \frac{S_{2n-1}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{(2n-1)!} \int_0^{\frac{1}{2}} B_{2n-1}(t)\, dt = \frac{S_{2n-1}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{(2n)!} B_{2n}(t) \Big|_0^{\frac{1}{2}},$$

(V, 7) $$R_{n-1} = -\left(2 - \frac{2}{2^{2n}}\right) \frac{B_{2n}}{(2n)!} S_{2n-1}\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad 0 < \theta < 1.$$

Assume now that $S_{2n-1}(t)$ is *monotonic in* $\left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$ *with the monotony type* ε'. Since $S_{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, it follows that in (V, 7) $\varepsilon' S_{2n-1}(0) \leqq \varepsilon' S_{2n-1}\left(\frac{\theta}{2}\right) \leqq 0$, and therefore, for a θ_1, $0 \leqq \theta_1 \leqq 1$,

$$S_{2n-1}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \theta_1 S_{2n-1}(0) = -\theta_1 (f^{(2n-1)}(q) - f^{(2n-1)}(p)).$$

Introducing this into (V, 7), we obtain

(V, 8) $$R_{n-1} = \theta \left(2 - \frac{2}{2^{2n}}\right) G_n, \qquad 0 \leqq \theta \leqq 1 \quad (\varepsilon' S_{2n-1} \uparrow).$$

It follows further from $\varepsilon' S_{2n-1}\left(\frac{\theta}{2}\right) \leqq 0$, by (V, 7), as follows also from (V, 6),

(V, 9) $$\operatorname{sgn} R_{n-1} = (-1)^{n-1} \varepsilon' = \operatorname{sgn} G_n \qquad (\varepsilon' S_{2n-1} \uparrow).$$

It follows now in particular that if $S_{2n}(t) = S'_{2n-1}(t)$ has a constant sign in $\langle 0, 1 \rangle$, we have (V, 9). Applying this to n and $n+1$ we obtain Malmstén's formula (III, 16) if $S_{2n}(t)$ and $S_{2n+2}(t)$ have in $\langle 0, 1 \rangle$ constant and contrary signs, and, in particular, under Malmstén's conditions.

VI. The class C^{2n}

29. We assume in this section that f belongs in $\langle 0, 1 \rangle$ to the class C^{2n}. Here we make use of the formula (II, 5) and obtain by direct application of the mean value theorem, since $| B_{2n}(t) | \leqq | B_{2n} |$ in $\left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$:

(VI, 1) $$| R_n | \leqq \frac{| B_{2n} |}{(2n)!} \int_0^{\frac{1}{2}} | S_{2n}(t) |\, dt.$$

This formula is obviously equivalent to (V, 3)[11]) and contains Poisson's estimate (III, 1), since, by (II, 3)

$$\underset{\langle 0,\frac{1}{2}\rangle}{\operatorname{Max}} \mid S_{2n}(t) \mid \leqq 2 \underset{\langle 0,1\rangle}{\operatorname{Max}} \mid D_{2n}(t) \mid \leqq 2(q-p) \underset{\langle p,q\rangle}{\operatorname{Max}} \mid f^{(2n)}(t) \mid .$$

30. It is not without interest to obtain from (II, 5) an estimate of R_n under the *assumption that* $S_{2n}(t)$ *is of bounded variation in* $\left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$. Indeed, under this assumption, we obtain by partial integration of the Stieltjesintegral

$$R_n = \frac{-1}{(2n+1)!} B_{2n+1}(t) S_{2n}(t) \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^{\frac{1}{2}} B_{2n+1}(t)\, dS_{2n}(t),$$

or since $B_{2n+1}(0) = B_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$,

$$R_n = \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^{\frac{1}{2}} B_{2n+1}(t)\, dS_{2n}(t) \tag{VI, 2}$$

and therefore

$$\mid R_n \mid \leqq \frac{1}{(2n+1)!} \underset{\langle 0,\frac{1}{2}\rangle}{\operatorname{Max}} \mid B_{2n+1}(t) \mid \underset{(0,\frac{1}{2})}{TV}(S_{2n}). \tag{VI, 3}$$

On the other hand, if $S_{2n}(t)$ is assumed to be *monotonic* in $\left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$, the mean value theorem gives from (VI, 2)

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{B_{2n+1}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{(2n+1)!} \int_0^{\frac{1}{2}} dS_{2n}(t), \\ R_n &= \frac{B_{2n+1}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{(2n+1)!} \left(2 D_{2n}\left(\frac{1}{2}\right) - D_{2n}(0) - D_{2n}(1)\right), \quad 0 \leqq \theta \leqq 1. \end{aligned} \tag{VI, 4}$$

31. Further, in the integral (II, 5) we have $\int_0^{\frac{1}{2}} B_{2n}(t)\, dt = 0$, and the lemma 4 can be applied. We obtain from this lemma, assuming only $S_{2n}(t)$ (and $D_{2n}(t)$) to be continuous in $\left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$,

$$\mid R_n \mid \leqq \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\right) \frac{\mid B_{2n} \mid}{(2n)!} \underset{\langle 0,\frac{1}{2}\rangle}{OSC}\, S_{2n}(t) \leqq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\right) \frac{\mid B_{2n} \mid}{(2n)!} \underset{\langle 0,1\rangle}{OSC}\, D_{2n}(t). \tag{VI, 5}$$

If we assume here that $f^{(2n)}$ is *monotonic* in $\langle p, q \rangle$, then obviously

$$\underset{\langle 0,1\rangle}{OSC}\, D_{2n}(t) = \mid f^{(2n)}(q) - f^{(2n)}(p) \mid ,$$

---

[11]) This can be also applied if $f(t)$ does not belong to C^{2n}, but $S_{2n-1}(t)$ is absolutely continuous in $\left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$ as then still

$$S_{2n-1}(b) - S_{2n-1}(a) = \int_a^b S'_{2n-1}(t)\, dt \quad \left(0 \leqq a < b \leqq \frac{1}{2}\right).$$

This is for instance the case, if $f^{(2n-1)}(t)$ satisfies a Lipschitz condition with the exponent 1 in $\langle p, q \rangle$.

and we obtain from (VI, 5) the formula (I, 3). If $f^{(2n)}$ is not monotonic, but is of bounded variation in the interval $\langle p, q\rangle$, then obviously the last factor in (VI, 5) is $\leqq \underset{(p,q)}{TV}(f^{(2n)})$ and we obtain

$$|R_n| \leqq \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)\frac{|B_{2n}|}{(2n)!}\underset{(p,q)}{TV}(f^{(2n)}). \tag{VI, 6}$$

32. We are going to prove two results containing and generalizing Jacobi's theorem B referred to in sec. 8.

(a) *Assume that* $S_{2n}(t)$ *is convex in* $\left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle$. *Then*

$$(-1)^n R_n \geqq 0. \tag{VI, 7}$$

This follows at once from the lemma 2 in sec. 19, replacing there $\varphi(t)$ with $S_{2n}(t)$, since, by sec. 16, $S_{2n}(t)$ is decreasing in $\left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle$,

$$R_n = \frac{-B_{2n}}{(2n)!}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{B_{2n}(t)}{B_{2n}} S_{2n}(t)\,dt$$

and $\operatorname{sgn} B_{2n} = (-1)^{n-1}$.

33. (b) *Assume that, for* $n > 1$ *and an* $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon S_{2n}(t)$ *is* $\geqq 0$ *and convex in* $\langle 0, 1\rangle$. *Then we have*

$$R_n = -\theta G_n,\ R_{n-1} = (1-\theta)\,G_n \qquad (0 \leqq \theta \leqq 1). \tag{VI, 8}$$

Indeed, we can assume without loss of generality that $\varepsilon = 1$. It follows then that both $S_{2n}(t)$ and $S_{2n-2}(t)$ are convex in $\left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle$ and (a) can be applied to R_n and R_{n-1}. But then (VI, 8) immediately follows from the relation $R_{n-1} = G_n + R_n$ (this is (II, 10) written for $n-1$ instead of n), as here R_{n-1} and R_n have different signs.

34. We shall now assume that for an $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon S_{2n}(t)$ is $\leqq 0$ and convex in $\langle 0, 1\rangle$. We shall then say that "the M-situation holds" for the corresponding value of n. We will obtain under this condition a result generalizing the formula (III, 16) and (III, 18) by Malmstén. We are going to prove:

(c) If for an n the M-situation holds, then, for the corresponding ε,

$$\operatorname{sgn} R_{n-1} = \operatorname{sgn} R_n = \operatorname{sgn} G_n = (-1)^n\varepsilon, \tag{VI, 9}$$

$$\left(R_n = \Theta\left(1-\frac{2}{2^{2n}}\right)G_n,\ 0 \leqq \Theta \leqq 1\right). \tag{VI, 10}$$

Proof. Without loss of generality we can assume $\varepsilon = 1$. Then $S_{2n-1}(t)$ is decreasing in $\left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle$. But then if follows from (V, 9) with $\varepsilon' = -1$ that $\operatorname{sgn} R_{n-1} = (-1)^n$. On the other hand, since $S_{2n}(t)$ is convex, we have, by (VI, 7), $\operatorname{sgn} R_n = (-1)^n$. As, by (V, 9), $\operatorname{sgn} R_{n-1} = \operatorname{sgn} G_n$, (VI, 9) follows. But now (VI, 10) follows from $R_n = R_{n-1} - G_n$, since, using (V, 8) together with $\operatorname{sgn} R_n = \operatorname{sgn} G_n$:

$$R_n = \left[\theta\left(2-\frac{2}{2^{2n}}\right)-1\right]G_n = \theta'\left(1-\frac{2}{2^{2n}}\right)G_n, \qquad 0 \leqq \theta' \leqq 1.$$

35. If we put in (VI, 10) $G_n = R_{n-1} - R_n$ we obtain, solving with respect to R_n:

$$R_n = \frac{\theta\left(1 - \frac{2}{2^n}\right)}{1 + \theta\left(1 - \frac{2}{2^n}\right)} R_{n-1}.$$

Here we easily see that the coefficient of R_{n-1} is $\leqq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n - 1}\right)$ and we obtain

(VI, 11) $$R_n = \frac{\theta_0}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n - 1}\right) R_{n-1} = \frac{\Theta}{2} R_{n-1},\ 0 \leqq \Theta < \theta_0 < 1.$$

If (VI, 10) holds both for n and $n+1$ we obtain, together with (VI, 11), also $R_{n+1} = \frac{\Theta'}{2} R_n$, $0 \leqq \Theta' < 1$, and it follows further

$$\frac{G_{n+1}}{G_n} = \frac{R_n - R_{n+1}}{R_{n-1} - R_n} = \frac{R_n}{R_{n-1}} \frac{1 - \frac{\Theta'}{2}}{1 - \frac{\Theta}{2}}.$$

Using again (VI, 11) we obtain

$$\frac{G_{n+1}}{G_n} = \frac{\Theta}{2} \frac{1 - \frac{\Theta'}{2}}{1 - \frac{\Theta}{2}} = \left(1 - \frac{\Theta'}{2}\right) \frac{\Theta}{2 - \Theta},$$

and it follows now

(VI, 12) $$\frac{G_{n+1}}{G_n} \leqq \operatorname{Min}\left(1 - \frac{\Theta'}{2},\ \frac{\Theta}{2 - \Theta}\right),$$

(VI, 13) $$0 \leqq \frac{G_{n+1}}{G_n} < 1.$$

36. If now (VI, 12) holds not only for n and $n+1$ but also for $n+2$, it follows from (VI, 12) that we have

$$\frac{G_{n+2}}{G_{n+1}} \leqq \frac{\Theta'}{2 - \Theta'}$$

and, combining this with (VI, 10),

$$\operatorname{Min}\left(\frac{G_{n+2}}{G_{n+1}},\ \frac{G_{n+1}}{G_n}\right) \leqq \operatorname{Min}\left(\frac{1 - \Theta'}{2},\ \frac{\Theta'}{2 - \Theta'}\right).$$

But the right hand expression is, by Lemma 5, $\leqq \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2}$. Therefore and in virtue of (VI, 13) we obtain

(VI, 14) $$\frac{G_{n+2}}{G_n} < \operatorname{Min}\left(\frac{G_{n+2}}{G_{n+1}},\ \frac{G_{n+1}}{G_n}\right) \leqq \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = .681\ldots.$$

Collecting our results, we have

If the M-situation holds for n, the relations (VI, 9), (VI, 10) *and* (VI, 11) *follow. If the M-situation holds for n and n + 1, the relations* (VI, 12) *and* (VI, 13) *follow. If the M-situation holds for n, n + 1 and n + 2, the relation* (VI, 14) *follows.*

From (VI, 11) it follows in particular:

If the M-situation holds for all n from a certain n on, the infinite Euler-Maclaurin series converges. This is in particular true, if all expressions $(-1)^n f^{(2n)}(t)$ have in $\langle p, q\rangle$ a constant and the same sign, from an n on.

37. We will compare in this section Jacobi's estimate with our new estimate (I, 3) on the example of $f(x) = \frac{1}{x^2}$ in an intervall $0 < p \leqq x \leqq q$. Here we have

$$f^{(m)}(x) = (-1)^m (m+1)!\, x^{-m-2}.$$

$f^{(2n)}(x)$ is positive and both Jacobi's condition and the monotony condition in (I, 3) are satisfied. Applying (III, 8),

$$\text{(VI, 15)} \qquad \begin{aligned} G_n &= \frac{B_{2n}}{(2n)!}(2n)!\left(\frac{1}{q^{2n+1}} - \frac{1}{p^{2n+1}}\right), \\ R_n &= \Theta B_{2n}\left(\frac{1}{p^{2n+1}} - \frac{1}{q^{2n+1}}\right),\ 0 \leqq \Theta \leqq 1. \end{aligned}$$

On the other hand, from (I, 3) follows

$$\text{(VI, 16)} \qquad R_n = \Theta'\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\right) B_{2n}\left(\frac{1}{p^{2n+2}} - \frac{1}{q^{2n+2}}\right),\ 0 \leqq \Theta' \leqq 1.$$

For large n and small p, (VI, 15) is better, while for large p and not too large n, (VI, 16) gives a better estimate.

VII. The class C^{2n+1}

38. In this section we assume that f belongs in $\langle p, q\rangle$ to the class C^{2n+1}. We can then use the formula (II, 7) and obtain

$$\text{(VII, 1)} \qquad |R_n| \leqq \frac{1}{(2n+1)!} \operatorname*{Max}_{\langle 0, \frac{1}{2}\rangle} |B_{2n+1}(t)| \int_0^{\frac{1}{2}} |S_{2n+1}(t)|\, dt.$$

(This is, however, the same as (VI, 3).) Since we have, by (II, 2) and (II, 3),

$$|S_{2n+1}(t)| \leqq \operatorname*{Max}_{\langle 0, \frac{1}{2}\rangle} |D_{2n+1}(t)| + \operatorname*{Max}_{\langle \frac{1}{2}, 1\rangle} |D_{2n+1}(t)| \leqq 2(q-p) \operatorname*{Max}_{\langle p, q\rangle} |f^{(2n+1)}(t)|,$$

it follows

$$\text{(VII, 2)} \qquad |R_n| \leqq \frac{q-p}{(2n+1)!} \operatorname*{Max}_{\langle 0, \frac{1}{2}\rangle} |B_{2n+1}(t)| \operatorname*{Max}_{\langle p, q\rangle} |f^{(2n+1)}(t)|.$$

This contains the estimates (III, 3), (III, 4) due to Poisson.

39. Applying (V, 7) to R_n we obtain a formula containing Schlömilch's formula (III, 19):

$$\text{(VII, 3)} \qquad R_n = -\left(2 - \frac{1}{2^{2n+1}}\right) \frac{B_{2n+2}}{(2n+2)!} S_{2n+1}(\theta/2),\ 0 < \theta < 1.$$

Further, applying (V, 6) to R_n we obtain:

If $\varepsilon = \operatorname{sgn} S_{2n+1}(t)$ *exists in* $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, *then*

$$\operatorname{sgn} R_n = (-1)^{n-1}\varepsilon. \tag{VII, 4}$$

40. Assume now that $S_{2n+1}(t)$ is *monotonic* in $\left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$ with the monotony type ε'. Then we can apply (V, 8) and (V, 9), replacing there n with $n+1$, and obtain

$$R_n = \theta\left(2 - \frac{1}{2^{2n+1}}\right) G_{n+1}, \quad 0 \leqq \theta \leqq 1, \quad (S_{2n+1}(t) \uparrow\downarrow), \tag{VII, 5}$$

$$\operatorname{sgn} R_n = (-1)^n \varepsilon' = \operatorname{sgn} G_{n+1} \qquad (\varepsilon' S_{2n+1} \uparrow). \tag{VII, 6}$$

The assumption of the monotony of S_{2n+1} in $\left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$ is satisfied, if $f^{(2n+1)}(t)$ is monotonic in $\langle p, q \rangle$. Under the assumption that $f^{(2n+2)}$ does not change its sign in $\langle p, q \rangle$ the formula (VII, 5) has been given by Malmstén see (III, 13); on the other hand, (VII, 6) generalizes considerably Jacobi's formula (III, 6) and Malmstén's formula (III, 17).

41. Assume finally, that $S_{2n+1}(t)$ is *of bounded variation* in $\left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$. We obtain from (II, 7), by partial integration, similarly as (II, 9) is obtained:

$$R_n = \frac{-1}{(2n+2)!} \int_0^{\frac{1}{2}} (B_{2n+2}(t) - B_{2n+2}) dS_{2n+1}(t). \tag{VII, 7}$$

It follows then

$$|R_n| \leqq \frac{|B_{2n+2}|}{(2n+2)!} \left(2 - \frac{1}{2^{2n+1}}\right) \underset{\langle 0, \frac{1}{2} \rangle}{TV} (S_{2n+1}). \tag{VII, 8}$$

If $D_{2n+1}(t)$ is assumed to be of bounded variation in $\langle 0, 1 \rangle$, we can replace $\underset{\langle 0, \frac{1}{2} \rangle}{TV} (S_{2n+1})$ in the formula (VII, 8) with $\underset{\langle 0, 1 \rangle}{TV} (D_{2n+1})$. If finally $f^{(2n+1)}(t)$ is of bounded variation in $\langle p, q \rangle$, we can replace $\underset{\langle 0, \frac{1}{2} \rangle}{TV} (S_{2n+1})$ in (VII, 8) with $\underset{\langle p, q \rangle}{TV} (f^{(2n+1)})$.

Bibliography

[1] *E. W. Barnes*, The Maclaurin Sum-Formula, Proc. L. M. S. (2) **3** (1905), 253—272.

[2] *G. Grüss*, Über das Maximum des absoluten Betrages von

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx,$$

Math. Zeit. **39** (1934), 214—226.

[3] *Hardy, Littlewood* and *Polya*, Inequalities, Cambridge 1934.

[4] *E. W. Hobson*, The Theory of Functions of a Real Variable etc., vol. 1, 3rd edition, Cambridge 1927.

[5] *C. G. J. Jacobi*, De usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinianae, J. reine angew. Math. **12** (1834), 263—272. Our quotations refer to the reprint of this paper in: C. G. J. Jacobi's Gesammelte Werke, vol. 6, Berlin 1891, 64—75.

[6] *L. Kronecker*, Vorlesungen über die Theorie der einfachen und vielfachen Integrale, herausgegeben von E. Netto, Leipzig 1894.

[7] *E. Lindelöf*, Le calcul des résidues et ses applications à la théorie des fonctions, Paris 1905.

[8] *C. J. Malmstén*, Sur la formule

$$hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2}\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1\cdot 2}\Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{1\cdots 4}\Delta u^{IV}_x + \text{etc.},$$

J. reine angew. Math. **35** (1847), 55—82.

[9] *L. M. Milne-Thompson*, The calculus of finite differences, London 1934.

[10] *N. E. Nörlund*, Vorlesungen über die Differenzenrechnung, Berlin 1924.

[11] *A. M. Ostrowski*, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung **2**, 2. Auflage, Basel 1961.

[12] *A. M. Ostrowski*, Note on Poisson's treatement of the Euler-Maclaurin formula, Comm. Math. Helv. **44** (1969), 202—206.

[13] *S. D. Poisson*, Sur le calcul numérique des intégrales définies, Mémoires Acad. Paris **6** (1827), 571—602.

[14] *O. Schlömilch*, Über die Bernoullische Funktion und deren Gebrauch bei der Entwicklung halbkonvergenter Reihen, Z. Math. und Phys. **1**, 193—211, in part. 206.

[15] *M. N. Sonin*, Sur les termes complémentaires de la formule sommatoire d'Euler et de celle de Stirling, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure **3** (1889), 257—262.

[16] *J. F. Steffensen*, Interpolation, Baltimore 1927.

Mathematisches Institut der Universität, CH 4000 Basel

Eingegangen 15. März 1969

Über eine Verallgemeinerung des Anfangswertproblems bei linearen Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen

Von *Volkmar Scharf* in Bonn

Herrn Professor Dr. Wolfgang Krull zum 70. Geburtstag

I. Problemstellung

Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall, in dem die komplexwertigen Funktionen $m_{ik}(t)$, $b_i(t)$ für $i, k = 1(1)n$ stetig sind, außerdem enthalte $[a, b]$ die n vorgegebenen Punkte $t_1, \ldots, t_n$. Gegeben sei ferner eine n-reihige quadratische Matrix $\alpha = (\alpha_{ik})$ sowie der Vektor $\varrho = \begin{pmatrix} \varrho_1 \\ \vdots \\ \varrho_n \end{pmatrix}$, $\alpha_{ik}, \varrho_i \in \boldsymbol{C}$ für $i, k = 1(1)n$. Mit den Bezeichnungen

$$\mathfrak{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{v}(t_1, \ldots, t_n) := \begin{pmatrix} v_1(t_1) \\ \vdots \\ v_n(t_n) \end{pmatrix}, \quad M(t) = (m_{ik}(t)), \quad \mathfrak{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

können wir das folgende Problem formulieren:

$$\mathfrak{v}'(t) = M(t)\mathfrak{v}(t) + \mathfrak{b}(t) \wedge (\alpha\mathfrak{v})(t_1, \ldots, t_n) = \varrho. \tag{1}$$

Man sieht, daß Aufgabe (1) die gewöhnliche Anfangswertaufgabe

$$\mathfrak{v}'(t) = M(t)\mathfrak{v}(t) + \mathfrak{b}(t) \wedge \mathfrak{v}(t_0) = \varrho$$

als Spezialfall enthält, indem man $\alpha = E$ (Einheitsmatrix) und $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = t_0$ setzt.

Aus diesem Grunde soll die Aufgabe (1) als verallgemeinertes Anfangswertproblem aufgefaßt werden.

Ein für die Anwendungen ebenfalls interessanter Spezialfall des Problems (1) ist die folgende Sturmsche Randwertaufgabe:

$$\begin{gathered} u^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\, u^{(i-1)}(t) + c(t) \wedge \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} u^{(k-1)}(t_i) = \varrho_i \\ t_1 = \cdots = t_m = a \qquad t_{m+1} = \cdots = t_n = b. \end{gathered} \tag{2}$$

Setzt man $v_i(t) := u^{(i-1)}(t)$, so erhält man eine der Form (1) entsprechende äquivalente Formulierung der Aufgabe (2) mit

$$M(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ 0 & & & & & & 1 \\ a_1(t) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ c(t) \end{pmatrix}, \quad \alpha = (\alpha_{ik}).$$

Bei den folgenden Betrachtungen soll vorausgesetzt werden, daß für die Matrix α gilt:

(3) $$\alpha = (\alpha_{ik}) \text{ regulär.}$$

Unter dieser Bedingung läßt sich eine vollständige theoretische Lösung der Aufgabe (1) gewinnen, welche in dem Sinne konstruktiv ist, als im Falle der Existenz und Eindeutigkeit eine Konstruktionsvorschrift für den Vektor $\mathfrak{v}(t)$ angegeben wird. Neben dem Problem (1) wird auch die folgende Eigenwertaufgabe behandelt:

Sei $\mathfrak{D}$ eine Menge komplexer Zahlen, so daß die Funktionen $m_{ik}(t, \lambda)$ für jedes $\lambda \in \mathfrak{D}$ definiert und in $[a, b]$ stetig sind. Ferner sei $\alpha(\lambda)$ für $\lambda \in \mathfrak{D}$ regulär. Gesucht sind die Eigenwerte, d. h. diejenigen Zahlen $\lambda \in \mathfrak{D}$, für die nichttriviale Lösungen der Aufgabe

$$\mathfrak{v}'(t) = M(t, \lambda)\mathfrak{v}(t) \wedge \big(\alpha(\lambda)\mathfrak{v}\big)(t_1, \ldots, t_n) = \theta$$

existieren.

Dem Spezialfall der Aufgabe (2) entspricht hier das Sturm-Liouvillsche Eigenwertproblem. Dieses Problem sowie die Sturmsche Randwertaufgabe (2) sind natürlich von besonderem praktischem Interesse. Aber auch darüber hinausgehende verallgemeinerte Aufgabenstellungen sind bereits in theoretischen Untersuchungen behandelt worden. Erwähnt seien hier etwa die Arbeiten von Toyoda [6].

Im abschließenden Kapitel dieser Untersuchung soll ein numerisches Verfahren beschrieben werden, welches unter Ausnutzung der im folgenden gewonnenen Darstellung der Lösung der Aufgabe (1) und unter Verwendung von Methoden der Intervallrechnung eine Einschließung des Lösungsvektors in Schranken ermöglicht. Diese Einschließung der Lösung in Intervalle kann durch eine elektronische Rechenanlage in der Weise geleistet werden, daß sämtliche Rundungseffekte automatisch erfaßt werden. Das bedeutet, daß mit der Angabe eines Intervalles, welches die exakte Lösung enthält, gleichzeitig eine Kontrolle der Rundungsfehler verbunden ist.

II. Lösung der Aufgabe (1)

Sei $\widetilde{M}(t) := \alpha M(t)\alpha^{-1}$. Ist $M(t) = (m_{ik}(t))$, $\mathfrak{v}(t) = (v_i(t))$, $i, k = 1(1)n$, so definieren wir

(4a) $$\int_{t_1 \cdots t_n}^{t} M(\tau)\, d\tau := \left(\int_{t_i}^{t} m_{ik}(\tau)\, d\tau \right)$$

(4b) $$\int_{t_1 \cdots t_n}^{t} \mathfrak{v}(\tau)\, d\tau := \left(\int_{t_i}^{t} v_i(\tau)\, d\tau \right), \quad t \in [a, b].$$

Nach (4a) bilden wir die Matrizenfolge $\{M_\nu(t)\}_{\nu = 0,1,\ldots}$ mit

(5) $$M_0(t) \equiv E \text{ (Einheitsmatrix)}$$

$$M_\nu(t) := \int_{t_1 \cdots t_n}^{t} M_{\nu-1}(\tau)\, \widetilde{M}(\tau)\, d\tau$$

und betrachten die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} M_{\nu}(t). \tag{6}$$

Sei

$$| M(t) | := (| m_{ik}(t) |)$$

$$|| M(t) || := \sup_{t\in[a,b]} \max_{i=1(1)n} \sum_{k=1}^{n} | m_{ik}(t) |.$$

Es gilt, wie durch Induktion leicht nachzuweisen ist, für $\nu \geqq 1$

$$| M_{\nu}(t) | \leqq \frac{1}{n} \left(\frac{(|| \tilde{M}(t) || \cdot n \cdot | t - t_i |)^{\nu}}{\nu!} \right) \leftarrow i\text{-te Zeile}. \tag{7}$$

Aus dieser Abschätzung folgt die gleichmäßige elementweise Konvergenz der Reihe (6) im Intervall $[a, b]$ gegen die daselbst stetig differenzierbare Matrix $Y(t) = (y_{ik}(t))$.

Aus der Konstruktion der Matrix $Y(t)$ folgt unmittelbar:

$$Y'(t) = -Y(t)\,\tilde{M}(t) \wedge Y(t_1, \ldots, t_n) := (y_{ik}(t_i)) = E. \tag{8}$$

Die Lösung des Problems (1) wird geliefert durch

Satz 1. *$Y(t)$ regulär für $t \in [a, b]$ $\Leftrightarrow$ Es existiert eine eindeutige Lösung der Aufgabe (1) für jeden Vektor ϱ und jeden stetigen Vektor $\mathfrak{b}(t)$. Ist $Y(t)$ regulär in $[a, b]$, so lautet die Lösung:*

$$\mathfrak{v}(t) = \alpha^{-1} Y(t)^{-1} \left(\varrho + \int_{t_1 \cdots t_n}^{t} Y(\tau) \alpha \mathfrak{b}(\tau)\, d\tau \right). \tag{9}$$

Beweis. Für $Z(t) = Y(t)^{-1}$ gilt:

$$Z'(t) = \tilde{M}(t)\, Z(t) \wedge Z(t_1, \ldots, t_n) = E, \tag{10}$$

denn $Z(t)$ ist in $[a, b]$ stetig differenzierbar und es folgt

$$\frac{d(Y(t)\, Z(t))}{dt} = 0 = -Y(t)\, \tilde{M}(t)\, Z(t) + Y(t)\, Z'(t).$$

Durch Multiplikation dieser Gleichung von links mit $Y(t)^{-1}$ erhält man den ersten Teil der Aussage (10). Außerdem ist $(Y \cdot Z)(t_1, \ldots, t_n) = E = Z(t_1, \ldots, t_n)$, denn

$$E = (Y \cdot Z)(t_1, \ldots, t_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} y_{ij}(t_i) z_{jk}(t_i) \right) = (z_{ik}(t_i)).$$

Aus (9) und (10) folgt nun

$$\mathfrak{v}'(t) = \alpha^{-1} \alpha\, M(t) \alpha^{-1} Y(t)^{-1} \left(\varrho + \int_{t_1 \cdots t_n}^{t} Y(\tau) \alpha \mathfrak{b}(\tau)\, d\tau \right)$$
$$+ \alpha^{-1} Y(t)^{-1} Y(t) \alpha \mathfrak{b}(t) = M(t)\, \mathfrak{v}(t) + \mathfrak{b}(t).$$

Ferner gilt:

$$(\alpha \mathfrak{v})(t_1, \ldots, t_n) = \left(\varrho + \int_{t_1 \cdots t_n}^{t} Y(\tau) \alpha \mathfrak{b}(\tau)\, d\tau \right)(t_1, \ldots, t_n) = \varrho,$$

denn für jeden Vektor $\mathfrak{c}(t) = (c_i(t))$ ist wegen $Z(t_1, \ldots, t_n) = E$

$$(Z \cdot \mathfrak{c})(t_1, \ldots, t_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} z_{ij}(t_i) c_j(t_i) \right) = (c_i(t_i)) = \mathfrak{c}(t_1, \ldots, t_n).$$

Die durch Formel (9) dargestellte Lösung ist eindeutig bestimmt, denn gäbe es zwei Lösungen $\mathfrak{v}_1(t)$ und $\mathfrak{v}_2(t)$ des Problems (1), so wäre die Differenz $\mathfrak{w}(t) = \mathfrak{v}_2(t) - \mathfrak{v}_1(t)$ Lösung der homogenen Aufgabe $(\mathfrak{b}(t) \equiv \theta, \varrho = \theta)$.

Daraus folgt aber, daß für $t \in [a, b]$ der Vektor $\alpha\mathfrak{w}(t)$ im Kern von $Y(t)$ enthalten ist, denn es gilt:

$$\mathfrak{w}'(t) = M(t)\mathfrak{w}(t) \Leftrightarrow \frac{d\alpha\mathfrak{w}(t)}{dt} = \alpha M(t)\mathfrak{w}(t) = \alpha M(t)\alpha^{-1}\alpha\mathfrak{w}(t) = \tilde{M}(t)\alpha\mathfrak{w}(t).$$

Außerdem ist $(\alpha\mathfrak{w})(t_1, \ldots, t_n) = \theta$.

Hieraus ergibt sich nun

$$\frac{dY(t)\alpha\mathfrak{w}(t)}{dt} = -Y(t)\tilde{M}(t)\alpha\mathfrak{w}(t) + Y(t)\tilde{M}(t)\alpha\mathfrak{w}(t) = \theta,$$

d. h. $Y(t)\alpha\mathfrak{w}(t) =$ konstant.

Wegen $(Y\alpha\mathfrak{w})(t_1, \ldots, t_n) = (\alpha\mathfrak{w})(t_1, \ldots, t_n) = \theta$ folgt $Y(t)\alpha\mathfrak{w}(t) = \theta$. Da $Y(t)$ nach Voraussetzung für $t \in [a, b]$ regulär ist, so ergibt sich $\alpha\mathfrak{w}(t) = \theta$ und wegen Voraussetzung (3) ist demnach $\mathfrak{w}(t) = \theta$ für $t \in [a, b]$.

Umgekehrt möge nun für jedes ϱ und $\mathfrak{b}(t)$ eine eindeutige Lösung $\mathfrak{v}(t)$ der Aufgabe (1) existieren, d. h. insbesondere existiert für jedes $\varrho \in \boldsymbol{C}^n$ eine eindeutig bestimmte Lösung der Aufgabe $\mathfrak{w}'(t) = \tilde{M}(t)\mathfrak{w}(t) \wedge \mathfrak{w}(t_1, \ldots, t_n) = \varrho$.

(Ist $\mathfrak{v}(t)$ die Lösung von $\mathfrak{v}'(t) = M(t)\mathfrak{v}(t) \wedge (\alpha\mathfrak{v})(t_1, \ldots, t_n) = \varrho$, so ist $\mathfrak{w}(t) = \alpha\mathfrak{v}(t)$).

Jedem $\varrho \in \boldsymbol{C}^n$ werde diese eindeutig bestimmte Lösung zugeordnet, wofür wir schreiben

$$\mathfrak{w}(t) = Z(t) \cdot \varrho.$$

($Z(t)$ ist eine lineare Abbildung des $\boldsymbol{C}^n$ in sich, d. h. also eine Matrix, deren Elemente stetig differenzierbar sind, denn wählt man für ϱ den i-ten Einheitsvektor e_i, so ist die i-te Spalte $Z(t)e_i$ stetig differenzierbar).

Es folgt $\mathfrak{w}'(t) = Z'(t) \cdot \varrho = \tilde{M}(t)Z(t)\varrho \wedge (Z \cdot \varrho)(t_1, \ldots, t_n) = \varrho$ für jedes $\varrho \in \boldsymbol{C}^n$ bzw. $Z'(t) = \tilde{M}(t)Z(t) \wedge Z(t_1, \ldots, t_n) = E$.

(Es ist $(Z\varrho)(t_1, \ldots, t_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} z_{ik}(t_i)\varrho_k\right) \Rightarrow (Z\varrho)(t_1, \ldots, t_n)$

$= Z(t_1, \ldots, t_n)\varrho = \varrho \Rightarrow Z(t_1, \ldots, t_n) = E$).

Es ergibt sich $\frac{dY(t)\,Z(t)}{dt} = -Y(t)\tilde{M}(t)Z(t) + Y(t)\tilde{M}(t)Z(t) = 0$ bzw. $Y(t)Z(t) = C$ (konst. Matrix).

Wegen $(YZ)(t_1, \ldots, t_n) = Z(t_1, \ldots, t_n) = E$ folgt $Y(t)Z(t) = E$ in $[a, b]$ bzw. $Y(t)$ regulär und $Z(t) = Y(t)^{-1}$.

Wir betrachten nun statt (6) die folgende Matrizenreihe:

$$(11) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} N_\nu(t) \text{ mit } N_0(t) \equiv E$$

$$N_\nu(t) = \int_{t_1 \cdots t_n}^{t} \tilde{M}(\tau)N_{\nu-1}(\tau)\,d\tau, \quad t \in [a, b].$$

Im Gegensatz zur Reihe (6) konvergiert diese Matrizenreihe nicht notwendig. Der Grund für diese etwas merkwürdige Tatsache ist, daß man statt der Abschätzung (7) für die Matrizen $N_\nu(t)$ im allgemeinen nur die folgende Abschätzung erhält:

$$(12)\quad |N_\nu(t)| \leqq n^{\nu-1}\cdot(b-a)^{\nu-1}\cdot \|\widetilde{M}(t)\|^\nu\cdot(\cdots|t-t_i|\cdots)$$
$$\leqq \frac{1}{n}\cdot(n\cdot(b-a)\,\|\widetilde{M}(t)\|)^\nu\mathfrak{E} \text{ mit } \mathfrak{E}=\begin{pmatrix}1\cdots 1\\ \vdots\quad\ \vdots\\ 1\cdots 1\end{pmatrix},\ \nu\geqq 1.$$

Aus (12) läßt sich die gleichmäßige elementweise Konvergenz der Reihe (11) nur für den Fall schließen, daß

$$(13)\qquad \|\widetilde{M}(t)\| < \frac{1}{(b-a)\cdot n}.$$

Weitere hinreichende Kriterien für die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (11) sind z. B.

$$(14)\qquad t_1 = t_2 = \cdots = t_n \text{ (Anfangswertproblem)}$$

$$(15)\qquad \widetilde{M}(t) \text{ besitzt Diagonalgestalt für } t\in[a,b].$$

Ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} N_\nu(t)$ elementweise gleichmäßig konvergent in $[a,b]$, so gilt die leicht zu beweisende Beziehung

$$(16)\qquad Z(t) = Y(t)^{-1} \text{ mit } Z(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} N_\nu(t).$$

III. Das Eigenwertproblem

Das in I. formulierte Eigenwertproblem wird durch die folgenden Sätze gelöst.

Satz 2. *Sei* $\lambda\in\mathfrak{D}$, *nach den Formeln* (5) *und* (6) *werde bezüglich der Matrix* $\widetilde{M}(t,\lambda)$ *die Matrix* $Y(t,\lambda)$ *konstruiert. Dann gilt:* λ *Eigenwert* $\Leftrightarrow$ $Y(t_0,\lambda)$ *singulär für mindestens ein* $t_0\in[a,b]$.

Beweis. Ist $Y(t,\lambda)$ für alle $t\in[a,b]$ nicht singulär, so folgt nach Satz 1, daß λ kein Eigenwert ist.

Zum Beweis der Umkehrung gehen wir davon aus, daß man das Problem

$$(*)\qquad \mathfrak{v}'(t) = M(t,\lambda)\mathfrak{v}(t) + b(t) \wedge (\alpha(\lambda)\mathfrak{v})(t_1,\ldots,t_n) = \varrho$$

auch in der äquivalenten Form

$$(17)\qquad \mathfrak{v}(t) = \alpha(\lambda)^{-1}\int_{t_1\cdots t_n}^{t}\alpha(\lambda)\,M(\tau,\lambda)\mathfrak{v}(\tau)\,d\tau + \alpha(\lambda)^{-1}\int_{t_1\cdots t_n}^{t}\alpha(\lambda)\mathfrak{b}(\tau)\,d\tau + \alpha(\lambda)^{-1}\varrho$$

schreiben kann.

Sei $C_C[a,b]$ die Menge der im Intervall $[a,b]$ stetigen komplexwertigen Funktionen.

Der Operator $K(\lambda)$, der definiert ist durch die Vorschrift

$$K(\lambda)\mathfrak{v}(t) := \alpha(\lambda)^{-1}\int_{t_1\cdots t_n}^{t}\alpha(\lambda)\,M(\tau,\lambda)\mathfrak{v}(\tau)\,d\tau$$

ist kompakt als Abbildung des Banachraumes $(C_C[a,b])^n$ mit der Norm

$$\|\mathfrak{v}(t)\| := \sup_{t\in[a,b]}\max_{i=1(1)n}|v_i(t)|$$

in sich, da die Abbildung

$$\mathfrak{v}(t) \to \int_{t_1 \cdots t_n}^{t} \mathfrak{v}(\tau)\, d\tau$$

kompakt ist.

Ist λ kein Eigenwert, d. h. besitzt das Problem

$$\mathfrak{v}'(t) = M(t, \lambda)\mathfrak{v}(t) \wedge (\alpha(\lambda)\mathfrak{v})(t_1, \ldots, t_n) = \theta$$

nur die triviale Lösung, so folgt, daß die Gleichung

$$\mathfrak{v}(t) - K(\lambda)\mathfrak{v}(t) = \theta$$

ebenfalls nur die triviale Lösung besitzt. Nach der Fredholmschen Alternative ergibt sich daraus, daß Gleichung (17) und damit das Problem $(*)$ für jedes $\varrho \in \boldsymbol{C}^n$ und jeden Vektor $\mathfrak{b}(t)$ eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt, woraus nach Satz 1 folgt, daß $Y(t, \lambda)$ für alle $t \in [a, b]$ regulär ist.

Sei $\Omega_{t_0}^{t}(\widetilde{M})$ die eindeutig bestimmte Matrix, die im Intervall $[a, b]$ mit $t_0 \in [a, b]$ Lösung des folgenden Matrizenanfangswertproblems ist:

$$\frac{d\Omega_{t_0}^{t}(\widetilde{M})}{dt} = \widetilde{M}(t)\Omega_{t_0}^{t}(\widetilde{M}) \wedge \Omega_{t_0}^{t_0}(\widetilde{M}) = E. \tag{18}$$

$\Omega_{t_0}^{t}(\widetilde{M})$, welche „Matrizant" von $\widetilde{M}(t)$ genannt wird, ist die lineare Abbildung, die jedem Vektor $\varrho \in \boldsymbol{C}^n$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\mathfrak{v}'(t) = \widetilde{M}(t)\mathfrak{v}(t) \wedge \mathfrak{v}(t_0) = \varrho$$

zuordnet, d. h. es ist: $\mathfrak{v}(t) = \Omega_{t_0}^{t}(\widetilde{M})\varrho$. Es gilt ([1], S. 28) $(\Omega_{t_0}^{t}(\widetilde{M}))^{-1} = \Omega_{t}^{t_0}(\widetilde{M})$.

Unter Verwendung der Matrix $\Omega_{t_0}^{t}(\widetilde{M})$ beweisen wir den

Satz 3. *Die Matrix $Y(t)$ besitzt für alle $t \in [a, b]$ den gleichen Rang. Ist $t_0 \in [a, b]$, so läßt sich $Y(t)$ darstellen durch*

$$Y(t) = Y(t_0)\Omega_{t}^{t_0}(\widetilde{M}) = Y(t_0)\,(\Omega_{t_0}^{t}(\widetilde{M}))^{-1}. \tag{19}$$

Beweis. Sei

$$R(t) := Y(t) - Y(t_0)\Omega_{t}^{t_0}(\widetilde{M}),$$

es folgt

$$R(t_0) = 0$$

und

$$R'(t) = -\left(Y(t)\widetilde{M}(t) - Y(t_0)\Omega_{t}^{t_0}(\widetilde{M})\widetilde{M}(t)\right) = -R(t)\widetilde{M}(t).$$

Damit ist aber $R(t) \equiv 0$ in $[a, b]$, womit die Gleichung (19) bewiesen ist. Da ferner $\Omega_{t}^{t_0}(\widetilde{M})$ regulär im Intervall $[a, b]$ ist, so folgt, daß $Y(t)$ für alle $t \in [a, b]$ den gleichen Rang wie $Y(t_0)$ besitzt.

Bezüglich des Eigenwertproblems folgt aus Satz 3, daß für jedes $\lambda \in \mathfrak{D}$ die Determinante $\operatorname{Det} Y(t, \lambda)$ im Intervall $[a, b]$ entweder identisch verschwindet oder für alle $t \in [a, b]$ von Null verschieden ist. Zur Bestimmung der Eigenwerte genügt es also, die Determinante von $Y(t, \lambda)$ für ein frei wählbares $t_0 \in [a, b]$ auf Nullstellen zu untersuchen.

Da die Matrix $Y(t, \lambda)$ durch eine unendliche Reihe gegeben ist, so erhält man für die Eigenwerte die im allgemeinen transzendente Gleichung

$$\operatorname{Det} Y(t_0, \lambda) = 0.$$

In der Praxis kann man Näherungen für die Eigenwerte dadurch bestimmen, daß man die Reihe für $Y(t, \lambda)$ nach Berechnung endlich vieler Matrizen $M_\nu(t)$ abbricht und die Determinante

$$\operatorname{Det}\left(\sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu M_\nu(t_0, \lambda)\right)$$

auf Nullstellen untersucht.

Hängen die Elemente von $\alpha(\lambda)$ und $M(t, \lambda)$ polynomial von λ ab, so erhält man auf diese Weise eine algebraische Gleichung in λ, deren Lösungen Näherungswerte für die Eigenwerte sind. Aus Formel (19) folgt

$$Y(t_0, \lambda) = Y(t, \lambda)\Omega_{t_0}^{t}(\widetilde{M}(\lambda))$$

und wegen $Y(t_1, \ldots, t_n, \lambda) = E$ gilt:

$$Y(t_0, \lambda) = (\Omega_{t_0}^{t}(\widetilde{M}(\lambda)))(t_1, \ldots, t_n). \tag{20}$$

Beispiel 1. $y''(t) = -\lambda y(t) \wedge y(0) = y'(l) = 0$. In diesem Fall ist

$$\alpha(\lambda) = E, \quad \widetilde{M}(t, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = l.$$

Für $t_0 = 0$ erhält man die Reihenentwicklung

$$(\Omega_0^t(\widetilde{M}))(0, l) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\lambda l & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\lambda l^2}{2!} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\lambda^2 l^3}{3!} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda^2 l^4}{4!} \end{pmatrix} + \cdots$$

Die Determinante lautet

$$1 - \frac{\lambda l^2}{2!} + \frac{\lambda^2 l^4}{4!} - \frac{\lambda^3 l^6}{6!} + \cdots = \cos(\sqrt{\lambda} \cdot l)$$

mit den Nullstellen

$$\lambda_m = \left(\frac{(2m-1)}{2l} \cdot \pi\right)^2.$$

Beispiel 2. $y'' = -\lambda t^2 y$, $y'(0) = y(1) = 0$.

$$\alpha(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{M}(t, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda t^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Omega_0^t(\widetilde{M}) \approx E + \begin{pmatrix} 0 & -\lambda t^3 \\ t & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda t^4 & 0 \\ 0 & \frac{-\lambda t^4}{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda^2 t^7}{84} \\ \frac{-\lambda t^5}{20} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2 t^8}{160} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda^2 t^8}{672} \end{pmatrix} + \cdots$$

$$\operatorname{Det}(\Omega_0^t(\widetilde{M}))(0, 1) \approx 1 - \frac{\lambda}{12} + \frac{\lambda^2}{672} \Rightarrow \lambda_1 \approx 17{,}417, \sqrt{\lambda_1} \approx 4{,}17$$

Exakter Wert (nach Weinhold, ZAMM 14, S. 380) lautet $\sqrt{\lambda_1} = 4{,}0126$. Entwickelt man die Reihe für $\Omega_{t_0}^t(\widetilde{M})$ weiter, bis man eine Gleichung 4. Grades, nämlich

$$\lambda^4 - 16 \cdot 15\lambda^3 + 30 \cdot 1056\lambda^2 - 16 \cdot 15 \cdot 7392\lambda + 16 \cdot 15 \cdot 12 \cdot 7392 = 0$$

erhält, so ergibt sich für den kleinsten Eigenwert

$$\lambda_1 \approx 16{,}104 \text{ bzw. } \sqrt{\lambda_1} \approx 4{,}013.$$

IV. Numerische Auswertung

Zunächst seien einige wichtige Begriffe der Intervallrechnung erläutert. (Näheres findet sich etwa in [2], [4], [5].) Gegeben sei eine Menge $\tilde{\mathfrak{G}}$ reeller Zahlen mit der Eigenschaft, daß entweder $\tilde{\mathfrak{G}} = \boldsymbol{R}$ oder $\tilde{\mathfrak{G}}$ endlich ist.

Wir bilden:

$$\mathfrak{G} = \begin{cases} \tilde{\mathfrak{G}}, & \tilde{\mathfrak{G}} = \boldsymbol{R} \\ \tilde{\mathfrak{G}} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}, & \tilde{\mathfrak{G}} \text{ endlich.} \end{cases}$$

Für die zu $\tilde{\mathfrak{G}}$ hinzugefügten Elemente $+\infty$ und $-\infty$ soll gelten:

$$-\infty < r < +\infty \text{ für jede Zahl } r \in \boldsymbol{R}.$$

Über $\mathfrak{G}$ bilden wir die Menge der „Intervallzahlen“

$$\mathfrak{I}_{\mathfrak{G}} := \{ {}_{|}\underline{a}_{|} \mid {}_{|}\underline{a}_{|} := [{}_{|}\underline{a}, \underline{a}_{|}], {}_{|}\underline{a} \leqq \underline{a}_{|}, {}_{|}\underline{a} \wedge \underline{a}_{|} \in \mathfrak{G} \}$$

Jeder beliebigen reellen Zahl r läßt sich in eindeutiger Weise eine Intervallzahl ${}_{|}\underline{r}_{|}$ zuordnen vermöge der Abbildung:

$$r \to {}_{|}\underline{r}_{|} := [\max \{s \mid s \in \mathfrak{G} \wedge s \leqq r\}, \min \{s \mid s \in \mathfrak{G} \wedge s \geqq r\}].$$

Ist $r \in \mathfrak{G}$, so wird nach dieser Vorschrift r das Punktintervall $\dot{r} = [r, r]$ zugeordnet, so daß man die Elemente des Gitters $\mathfrak{G}$ als spezielle Intervallzahlen interpretieren kann. Mit den Abbildungen

$$r \to {}_{|}\underline{r} := \max \{s \mid s \in \mathfrak{G} \wedge s \geqq r\} \text{ (Linksrundung)}$$

$$r \to \underline{r}_{|} := \min \{s \mid s \in \mathfrak{G} \wedge s \geqq r\} \text{ (Rechtsrundung)}$$

definieren wir nun die vier arithmetischen Grundoperationen der Intervallrechnung wie folgt:

1. Addition

$$\begin{aligned} {}_{|}\underline{a}_{|} + {}_{|}\underline{b}_{|} = {}_{|}\underline{c}_{|}, \quad {}_{|}\underline{c} &= {}_{|}\underline{(}{}_{|}\underline{a} + {}_{|}\underline{b}), \\ \underline{c}_{|} &= (\underline{a}_{|} + \underline{b}_{|})\underline{}_{|} \end{aligned}$$

2. Subtraktion

$$\begin{aligned} {}_{|}\underline{a}_{|} - {}_{|}\underline{b}_{|} = {}_{|}\underline{c}_{|}, \quad {}_{|}\underline{c} &= {}_{|}\underline{(}{}_{|}\underline{a} - \underline{b}_{|}), \\ \underline{c}_{|} &= (\underline{a}_{|} - {}_{|}\underline{b})\underline{}_{|} \end{aligned}$$

3. Multiplikation

$$g_1 := \min \{{}_{|}\underline{a}\,{}_{|}\underline{b}, \underline{a}_{|}\,{}_{|}\underline{b}, {}_{|}\underline{a}\underline{b}_{|}, \underline{a}_{|}\,\underline{b}_{|}\}$$

$$g_2 := \max \{{}_{|}\underline{a}\,{}_{|}\underline{b}, \underline{a}_{|}\,{}_{|}\underline{b}, {}_{|}\underline{a}\underline{b}_{|}, \underline{a}_{|}\,\underline{b}_{|}\}$$

$${}_{|}\underline{a}_{|} \cdot {}_{|}\underline{b}_{|} = {}_{|}\underline{c}_{|}, \quad {}_{|}\underline{c} = {}_{|}\underline{g}_1, \underline{c}_{|} = \underline{g}_{2|}.$$

4. Division

$$\text{sei } 0 \notin {}_{|}\underline{b}_{|}$$

$$h_1 := \min \{{}_{|}\underline{a}/{}_{|}\underline{b}, \underline{a}_{|}/{}_{|}\underline{b}, {}_{|}\underline{a}/\underline{b}_{|}, \underline{a}_{|}/\underline{b}_{|}\}$$

$$h_2 := \max \{{}_{|}\underline{a}/{}_{|}\underline{b}, \underline{a}_{|}/{}_{|}\underline{b}, {}_{|}\underline{a}/\underline{b}_{|}, \underline{a}_{|}/\underline{b}_{|}\}$$

$${}_{|}\underline{a}_{|}/{}_{|}\underline{b}_{|} = {}_{|}\underline{c}_{|}, \quad {}_{|}\underline{c} = {}_{|}\underline{h}_1, \underline{c}_{|} = \underline{h}_{2|}.$$

Für den Fall, daß eine der Zahlen $\underline{|a}$, $\underline{|b}$ gleich $-\infty$ bzw. $\underline{a|}$, $\underline{b|}$ gleich $+\infty$ ist, müssen zusätzliche Vereinbarungen getroffen werden, wie z. B. für die Addition

$$\underline{|c} = -\infty \text{ für } \underline{|a} = -\infty \vee \underline{|b} = -\infty$$
$$\underline{c|} = +\infty \text{ für } \underline{a|} = +\infty \vee \underline{b|} = +\infty$$

bzw. Subtraktion

$$\underline{|c} = -\infty \text{ für } \underline{|a} = -\infty \vee \underline{b|} = +\infty$$
$$\underline{c|} = +\infty \text{ für } \underline{a|} = +\infty \vee \underline{|b} = -\infty.$$

Für Multiplikation und Division können in ähnlich naheliegender Weise die entsprechenden Verknüpfungen definiert werden. In der Praxis wird stets mit einem endlichen Zahlgitter $\tilde{\mathfrak{G}}$ gerechnet. Die Erweiterung dieses Gitters um die Elemente $+\infty$ und $-\infty$ mit den soeben erklärten Verknüpfungen hat den Vorteil, daß die Erscheinungen des „Überlaufs" bzw. „Unterlaufs" formal erfaßt werden, so daß der Rechengang bei Auftreten eines dieser Effekte prinzipiell weiterlaufen kann. Die Verknüpfungen von Intervallzahlen sind so gewählt, daß stets gilt:

$$a \in \underline{|a|} \wedge b \in \underline{|b|} \Rightarrow a * b \in \underline{|a|} * \underline{|b|}.$$

Dabei ist zu bemerken, daß die Aussage $a * b \in \underline{|a|} * \underline{|b|}$ eine Erfassung des Rundungsfehlers bedeutet, da ja bei der Ausführung der Operation $\underline{|a|} * \underline{|b|}$ von der Maschine eine Außenrundung vorgenommen wird. (Diese entfällt natürlich bei Verwendung des Gitters $\mathfrak{G} = \boldsymbol{R}$, weshalb man in diesem Fall von exakter Intervallrechnung im Gegensatz zur gerundeten oder Maschinenintervallrechnung spricht.)

Die Durchführung eines numerischen Prozesses in Intervallrechnung liefert in jedem Fall sichere Einschließungen des Resultates in Intervalle, d. h. Einschließungen unter Berücksichtigung der vorgenommenen Rundungen. Damit wird eine der Hauptforderungen an ein numerisches Verfahren, nämlich die Angabe einer Fehlerabschätzung, automatisch erfüllt.

Im folgenden sei vorausgesetzt, daß alle im Problem (1) gegebenen Zahlen und Funktionen reell sind.

Unter einem „Intervallpolynom" werde ein Ausdruck der folgenden Art verstanden

$$\underline{|P|}(x) = \sum_{\nu=0}^{m} \underline{|a_\nu|} x^\nu, \quad \underline{|a_\nu|} \in \mathfrak{I}_{\mathfrak{G}}, \quad \mathfrak{G} = \boldsymbol{R},$$

wobei x zunächst als Unbestimmte aufzufassen ist. Die Verknüpfung zweier Intervallpolynome $\underline{|P|}(x)$ und $\underline{|Q|}(x)$ zu $\underline{|P|}(x) * \underline{|Q|}(x)$ mit $* \in \{+, -, \cdot\}$ erfolgt analog zur Verknüpfung gewöhnlicher Polynome, wobei die entsprechenden Koeffizientenoperationen intervallarithmetisch auszuführen sind. Dem Intervallpolynom $\underline{|P|}(x)$ lassen sich zwei sogenannte „zusammengesetzte Polynome" wie folgt zuordnen

(21)

$$\underline{|P}(x) := \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{m} \underline{|a_\nu} x^\nu, & x \geqq 0 \\ \sum_{\nu=0}^{m} \underline{|a_\nu^*} x^\nu, & x < 0, \ \underline{|a_\nu^*} = \begin{cases} \underline{|a_\nu}, & \nu \equiv 0 \bmod 2 \\ \underline{a_\nu|}, & \nu \equiv 1 \bmod 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\underline{P|}(x) := \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{m} \underline{a_\nu|} x^\nu, & x \geqq 0 \\ \sum_{\nu=0}^{m} \underline{a_\nu^*|} x^\nu, & x < 0, \ \underline{a_\nu^*|} = \begin{cases} \underline{a_\nu|}, & \nu \equiv 0 \bmod 2 \\ \underline{|a_\nu}, & \nu \equiv 1 \bmod 2 \end{cases} \end{cases}$$

Für jede reelle Zahl x gilt nach Konstruktion

$$\underline{|P|}(x) \leqq \underline{P}_{|}(x).$$

Ist $f(x)$ in $[a, b]$ stetig, so definieren wir

$$f(x) \in \underline{|P|}(x) :\Leftrightarrow \underline{|P|}(x) \leqq f(x) \leqq \underline{P}_{|}(x) \text{ für } x \in [a, b]. \tag{22}$$

Ist $f(x) \in \underline{|P|}(x) \wedge x \in \underline{|x|}$, so folgt $f(x) \in \underline{|P|}(\underline{|x|}) = \sum_{\nu=0}^{m} \underline{|a_\nu|}(\underline{|x|})^\nu$. (Es ist ja nach (21) $f(x) \in \underline{|P|}(x)$ für $x \in [a, b]$, ist $x \in \underline{|x|} \Rightarrow \underline{|P|}(x) \leqq \underline{|P|}(\underline{|x|})$).

Aus $f(x) \in \underline{|P|}(x) \wedge g(x) \in \underline{|Q|}(x)$ für $x \in [a, b]$ folgt $f(x) * g(x) \in \underline{|P|}(x) * \underline{|Q|}(x)$ für $x \in [a, b]$.

Definition. Sei t_0 eine feste reelle Zahl (aufzufassen als Punktintervall in $\mathfrak{I}_{\mathfrak{G}}$, $\mathfrak{G} = \boldsymbol{R}$), und t eine Unbestimmte.

$$\int_{t_0}^{t} \underline{|P|}(x)\,dx := \sum_{\nu=0}^{m} \underline{|a_\nu|} \cdot \frac{1}{\nu+1} t^{\nu+1} - \sum_{\nu=0}^{m} \underline{|a_\nu|} \cdot \frac{1}{\nu+1} t_0^{\nu+1}. \tag{23}$$

(Dies ist ein Intervallpolynom in t.)

Es gilt: $f(x) \in \underline{|P|}(x)$ in $[a, b]$, $t_0, t \in [a, b]$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} f(x)\,dx \in \int_{t_0}^{t} \underline{|P|}(x)\,dx. \tag{24}$$

(Der Beweis folgt unmittelbar aus den Definitionen (21) und (23).)

Betrachten wir nun die Matrix $\alpha M(t)\alpha^{-1} = \widetilde{M}(t)$ und nehmen an, daß deren Elemente $\tilde{m}_{ik}(t)$ ebenso wie die Komponenten $\tilde{b}_i(t)$ des Vektors $\alpha \mathfrak{b}(t) = \tilde{\mathfrak{b}}(t)$ nach (22) im Intervall $[a, b]$ durch Intervallpolynome erfaßt sind, d. h. es gelte

$$\tilde{m}_{ik}(t) \in \underline{|\tilde{m}_{ik}|}(t),\ i, k = 1(1)n, :\Leftrightarrow \widetilde{M}(t) \in \underline{|\widetilde{M}|}(t) \tag{25}$$

$$\tilde{b}_i(t) \in \underline{|\tilde{b}_i|}(t),\ i = 1(1)n, :\Leftrightarrow \tilde{\mathfrak{b}}(t) \in \underline{|\tilde{\mathfrak{b}}|}(t). \tag{26}$$

(Derartige Einschließungen lassen sich z. B. bei analytischen Funktionen durch Taylorentwicklung erreichen.)

Die Glieder $M_\nu(t)$ der Reihe $Y(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu M_\nu(t)$ werden nach (24) ebenfalls leicht durch Intervallpolynome erfaßt, denn es gilt

$$M_1(t) \in \left(\int_{t_i}^{t} \underline{|\tilde{m}_{ik}|}(\tau)\,d\tau \right) := \int_{t_1 \cdots t_n}^{t} \underline{|\widetilde{M}|}(\tau)\,d\tau := \underline{|M_1|}(t).$$

Da $M_1(t)\,\widetilde{M}(t) \in \underline{|M_1|}(t)\,\underline{|\widetilde{M}|}(t)$, so folgt analog

$$M_2(t) \in \int_{t_1 \cdots t_n}^{t} \underline{|M_1|}(\tau)\,\underline{|\widetilde{M}|}(\tau)\,d\tau := \underline{|M_2|}(t).$$

Entsprechend erfolgt die Konstruktion weiterer Glieder $\underline{|M_\nu|}(t)$. Nach Formel (7) gilt ferner

$$\left| \sum_{\nu=l+1}^{\infty} (-1)^\nu M_\nu(t) \right| \leqq \frac{1}{n} \left(\frac{(b-a)\,\|\widetilde{M}\|\,n}{(l+1)!} \right)^{l+1} e^{(b-a)n\|\widetilde{M}(t)\|} \cdot \mathfrak{E} \text{ mit } \mathfrak{E} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Bedeutet die Schreibweise $[\ ]_I$, daß der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck nach oben abgeschätzt ist, so erhalten wir mit

$$\underline{|R(l)|} := \left[\frac{1}{n}\, e^{(b-a)n\|\tilde{M}\|}\, \frac{((b-a)\,\|\,\tilde{M}\,\|\,n)^{l+1}}{(l+1)!}\right]_I \begin{pmatrix} [-1,1] \cdots [-1,1] \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ [-1,1] \cdots [-1,1] \end{pmatrix}$$

insgesamt

$$Y(t) \in \sum_{\nu=0}^{l} (-1)^{\nu} \underline{|M_{\nu}|}(t) + \underline{|R(l)|} := \underline{|Y|}(t). \tag{27}$$

Für jedes feste $t \in [a, b]$ ist $\underline{|Y|}(t)$ eine Intervallmatrix, deren Inverse mit $(\underline{|Y|}(t))^{-1}$ bezeichnet werde.

Darunter wird eine Intervallmatrix $\underline{|Z(t)|}$ verstanden mit der Eigenschaft

$$\underline{|Z(t)|} \supseteq \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}^{-1} \in \underline{|Y|}(t)\}.$$

Für die so definierte Inversion von Intervallmatrizen existieren erprobte Verfahren, wie etwa die in [3] beschriebene Methode von F. Krückeberg.

Insgesamt erhält man auf diese Weise für den durch (9) dargestellten Lösungsvektor der Aufgabe (1) die Einschließung

$$\mathfrak{v}(t) \in (\underline{|\alpha|})^{-1} \cdot (\underline{|Y|}(t))^{-1} \left(\underline{|\varrho|} + \int_{t_1 \cdots t_n}^{t} \underline{|Y|}(\tau)\, \underline{|\tilde{b}|}(\tau)\, d\tau\right). \tag{28}$$

(Bei Auswertung des rechts stehenden intervallarithmetischen Ausdrucks in gerundeter Intervallrechnung ergibt sich eine gewisse durch die Rundungen bewirkte Vergröberung der Resultatintervalle.)

Die Qualität der durch (28) gegebenen Einschließung hängt natürlich entscheidend von der Größenordnung des Ausdrucks $(b-a)\,\|\,\tilde{M}\,\|\,n$ ab. Sofern dieser Term zu groß ist, benötigt man zu viele Matrizen $\underline{|M_{\nu}|}(t)$ der Reihe $\underline{|Y|}(t)$ ehe der Rest $\underline{|R(l)|}$ aus hinreichend schmalen Intervallen besteht. Deshalb wird man besonders dann gute Resultate erwarten können, wenn etwa $(b-a)\,\|\,\tilde{M}\,\|\,n < 1$ ist.

Es besteht nun die Möglichkeit, das Intervall $[a, b]$ in hinreichend kleine Teilintervalle so zu zerlegen, daß in jedem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ die Bedingung $(x_{i+1} - x_i)\,\|\,\tilde{M}\,\|\,n < 1$ erfüllt ist. Berücksichtigt man, daß sich $Y(t)$ darstellen läßt durch

$$Y(t) = (\Omega_{t_0}^{t}(\tilde{M}))\,(t_1, \ldots, t_n)\,\Omega_{t}^{t_0}(\tilde{M})$$

und daß ferner für $t, t_0, t_1 \in [a, b]$ stets

$$\Omega_{t_1}^{t_0}(\tilde{M}) \cdot \Omega_{t}^{t_1}(\tilde{M}) = \Omega_{t}^{t_0}(\tilde{M})$$

gilt, so läßt sich die Matrix $Y(t)$ für jedes t aus einem der Teilintervalle mit beliebiger Genauigkeit in Schranken einschließen, wenn man die Matrizen $\Omega_{t}^{t_i}(\tilde{M})$, ganz analog wie dies für $Y(t)$ zuvor beschrieben wurde, durch Intervallmatrizen einschließt. Hat man etwa das Intervall $[a, b]$ zerlegt durch $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k = b$, so gilt für $t \in [x_{i-1}, x_i]$:

$$Y(t) \in \underline{|(\Omega_{x_0}^{t}(\tilde{M}))\,(t_1, \ldots, t_n)|}\ \underline{|\Omega_{x_1}^{x_0}(\tilde{M})|} \cdots \underline{|\Omega_{x_{i-1}}^{x_{i-2}}(\tilde{M})|}\ \underline{|\Omega_{t}^{x_{i-1}}(\tilde{M})|}.$$

Die j-te Zeile von

$$\underline{|(\Omega^t_{x_0}(\tilde{M}))(t_1, \ldots, t_n)|}$$

erhält man dadurch, daß von den Intervallmatrizen

$$\underline{|\Omega^t_{x_0}(\tilde{M})|} = \underline{|\Omega^t_{x_{i-1}}(\tilde{M})|}\ \underline{|\Omega^{x_{i-1}}_{x_{i-2}}(\tilde{M})|} \cdots \underline{|\Omega^{x_1}_{x_0}(\tilde{M})|}$$

für $t = t_j \in [x_{i-1}, x_i]$ jeweils die j-te Zeile gewählt wird. Die Zerlegung von $[a, b]$ in Teilintervalle hat zudem den Vorteil, daß die Einschließung der Funktionen $\tilde{b}_i(t)$ und $\tilde{m}_{ik}(t)$ in Intervallpolynome möglichst niedrigen Grades um so genauer erfolgen kann, je kleiner die Teilintervalle gewählt werden.

Die folgenden Beispiele sind auf der Rechenanlage IBM 7090 an der Universität Bonn unter Verwendung eines speziell für Intervallrechnung entwickelten Programmsystems gerechnet worden.

Beispiel 1.

$$y'' = (0.2x^3 + 0.1x^2)y + (0.1x^4 - 0.2x^2 + 0.1x)y' + 2.5x^6 - 1.7x^5 - 2.7x^4 + 2.7x^3 - 0.6x^2 - 30x + 6.$$

Randbedingungen: $y(0) = 0$, $y'(0.5) = -0.75$.

Die Lösung nebst ihrer Ableitung wurde an Stützstellen im Abstand von 0.05 ermittelt. Das Intervall für die Lösung lautete an den Stellen

0.10

[0.2499911608 E-01, 0.2500088640 E-01]

0.25

[0.1093720989 E00, 0.1093779061 E00]

0.40

[0.1599941290 E00, 0.1600058684 E00]

0.50

[0.1249911636 E00, 0.1250088708 E00]

Für die Ableitung ergab sich z. B. an der Stelle 0.50 das Intervall

[—0.7500142790 E00, —0.7499855905 E00].

Wäre die Differentialgleichung mit „ungenauen" Koeffizienten, d. h. in folgender Form

$$y'' = (0.2x^3 + [0.099999, 0.1000001]x^2)y + (0.1x^4 - 0.2x^2 + 0.1x)y' + 2.5x^6 - 1.7x^5 + [-2.70001, -2.69999]x^4 + 2.7x^3 - 0.6x^2 - 30x + [5.99999, 6.00001]$$

bei gleichen Randbedingungen gestellt worden, so läge die exakte Lösung für jeden Satz von Koeffizienten aus den entsprechenden Intervallen ebenfalls in den angegebenen Schranken. Die Rechenzeit zur Bestimmung der Lösung nebst ihrer Ableitung an 10 Stützstellen betrug 28 sec.

Beispiel 2.

$$y'' = \frac{1}{x+10}y + e^{-x}y' + (x + 11)(e^x - 1)$$

$$y(0.5) = 17.31157$$

$$y'(1.0) = 32.61938.$$

Für dieses Beispiel wurde das Intervall in 5 äquidistante Teilintervalle zerlegt. Es ergaben sich für die Lösung die folgenden Schranken an den Stützstellen:

0.50

[0.1730223560 E02, 0.1732091557 E02]

0.67

[0.2075592422 E02, 0.2079575026 E02]

0.83

[0.2488593411 E02, 0.2496861040 E02]

1.00

[0.2982977485 E02, 0.2997260797 E02]

Für die Ableitung wurde an der Stelle 1.00 das Intervall

[0.3255236387 E02, 0.3268651175 E02]

ermittelt. Die Rechenzeit zur Bestimmung der Lösung nebst ihrer Ableitung an 4 Stützstellen betrug bei diesem Beispiel 88 sec.

Literatur

[1] *N. Bourbaki*, Livre IV. Fonctions d'une Variable rêelle, Kap. IV.—VII, Act. scient. et industr. 1132 (Paris 1951).

[2] *F. Krückeberg*, Numerische Intervallrechnung und deren Anwendung, Ber. Rheinisch-Westfälischen Inst. f. Instrument. Math., Bonn 1966.

[3] *F. Krückeberg*, Inversion von Matrizen mit Fehlererfassung, Vortrag GAMM-Tagung Darmstadt 1966. Z. Angew. Math. u. Mech. **46** (1966).

[4] *R. E. Moore*, Interval Analysis, Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, N. J. 1966.

[5] *K. Nickel*, Über die Notwendigkeit einer Fehlerschranken-Arithmetik für Rechenautomaten, Numerische Math. **9** (1966).

[6] *Toyoda*, Tohoku Math. Yourn. Nr. 38 und 39.

3501 Weimar bei Kassel, Am Eichhölzchen 26

Eingegangen 17. März 1969

Über gewisse singuläre Punkte algebraischer Mannigfaltigkeiten

Von *Ernst Kunz* in Baton Rouge, Louisiana

Herrn Professor Dr. Wolfgang Krull zum 70. Geburtstag

In den folgenden Vorbemerkungen bezieht sich der Autor auf (bisher unveröffentlichte) Vorlesungen von O. Zariski über Stratifikation algebraischer Mannigfaltigkeiten, die er im Sommer 1968 an der Purdue-Universität gehalten hat. In dieser Theorie spielt eine Bedingung an einen Punkt auf einer algebraischen Mannigfaltigkeit eine Rolle, die anschaulich wie folgt formuliert werden kann:

Es sei V eine irreduzible affine algebraische Mannigfaltigkeit über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k, die in den n-dimensionalen affinen Raum $\boldsymbol{A}^n$ eingebettet ist. W sei eine irreduzible abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von V und P ein regulärer Punkt von W, der jedoch singulär auf V sein darf.

Bedingung A ist im Punkt P erfüllt, wenn für jede Folge $\{P_n\}$ von regulären Punkten auf V, die sich „längs eines Bogens dem Punkt P nähert", der Tangentialraum von W in P enthalten ist im Limes der Folge der Tangentialräume an V in den Punkten P_n[1]).

Um eine präzise Formulierung dieses Sachverhalts zu geben, ist es bequem, sich auf den Standpunkt der algebraischen Geometrie A. Weils zu stellen; die Koordinaten der Punkte unserer Mannigfaltigkeiten entstammen also einem Universalkörper über k.

V habe die Dimension r, W die Dimension s. Mit $G_{n,r}$ werde die Grassmann-Mannigfaltigkeit bezeichnet; ihre Punkte sind die r-dimensionalen Unterräume von $\boldsymbol{A}^n$.

$G_{n,r}$ ist eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des projektiven Raums $\boldsymbol{P}^N$, $N = \binom{n}{r} - 1$.

Es seien nun $A \in V$, $B \in W$ unabhängige allgemeine Punkte von V bzw. W. $T(A, V)$ sei der Tangentialraum von V in A, $T(B, W)$ der Tangentialraum von W in B. Es sei

$$Y \subseteq V \times W \times G_{n,r} \times G_{n,s}$$

die abgeschlossene Hülle des Punktes $(A, B, T(A, V), T(B, W))$. Die Punkte von Y sind die Spezialisierungen dieses Punktes, Y enthält daher insbesondere die Punkte

$$(P, P, T, T(P, W)),$$

wobei T die „Grenzlagen" in P der Folgen von Tangentialräumen von V durchläuft.

---

[1]) Bedingung A tritt auch im Zusammenhang mit dem Begriff der Äquisingularität algebraischer Mannigfaltigkeiten auf, vgl. O. Zariski, Studies in Equisingularity. II, Am. J. Math. **87** (1965), 972—1006, Theorem 8.1, und H. Hironaka, Normal Cones in Analytic Whitney Stratifications, erscheint in Publ. math., IHES.

Es sei $Z = \Delta \times Z_0$, wobei $\Delta \subseteq W \times W \subseteq V \times W$ die Diagonale und $Z_0 \subseteq G_{n,r} \times G_{n,s}$ die Menge aller Punkte (T_r, T_s) ist, für die der s-dimensionale Vektorraum T_s im r-dimensionalen Vektorraum T_r enthalten ist. Schließlich sei $p: Y \to V \times W$ die durch die Projektion $V \times W \times G_{n,r} \times G_{n,s} \to V \times W$ auf Y induzierte Abbildung.

Definition. Ein einfacher Punkt P von W erfüllt Bedingung A, wenn gilt

$$p^{-1}(P, P) \subseteq Y \cap Z.$$

Eine äquivalente Formulierung für Bedingung A läßt sich wie folgt angeben: Es sei $k[V] = k[X_1, \ldots, X_n]/(F_1, \ldots, F_m) = k[x_1, \ldots, x_n]$ der affine Ring von V über k, $k(V)$ sein Quotientenkörper. Wir wählen aus der Jacobischen Matrix

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ k=1,\ldots,n}}, \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_k} = \frac{\partial F_i}{\partial X_k}(x_1, \ldots, x_n) \in k[V]$$

$n - r$ linear unabhängige Zeilen aus, o. B. d. A. die ersten $n - r$, und bilden damit die Grassmann-Koordinaten

$$\left|\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right|_{\substack{i=1,\ldots,n-r \\ k \in \{k_1 < \cdots < k_{n-r}\}}}.$$

Setzen wir $A = (x_1, \ldots, x_n)$, so sind dies die homogenen Koordinaten von $T(A, V)$, aufgefaßt als ein Punkt von $G_{n,r}$.

Es sei R ein Primdivisor von $k(V)/k$ mit dem Zentrum P, d. h. ein Bewertungsring von $k(V)/k$, der $k[V]$ enthält, dessen maximales Ideal über dem Primideal von P in $k[V]$ liegt und dessen Restklassenkörper den Transzendenzgrad $r - 1$ über k besitzt. Bekanntlich ist R diskret und eine Lokalisierung eines affinen Rings über k.

Die Spezialisierung von $T(A, V) \in G_{n,r}$ bzgl. R erhält man, wenn man die homogenen Koordinaten von $T(A, V)$ durch die Koordinate kleinsten Wertes dividiert und dann in allen Koordinaten zum Restklassenkörper übergeht. Der resultierende Punkt auf $G_{n,r}$ bestimmt einen linearen Raum $L(R) \subseteq A^n$ durch P. Bedingung A ist äquivalent mit

Bedingung A'. Für jeden Primdivisor R von $k(V)/k$ mit dem Zentrum P ist

$$T(P, W) \subseteq L(R).$$

Im folgenden soll eine weitere Formulierung für Bedingung A gegeben werden. In dieser Formulierung werden nur der lokale Ring O von P auf V, der lokale Ring o von P auf W und die Differentialmoduln dieser Ringe eingehen. Aus dieser Fassung ersieht man dann unmittelbar, daß Bedingung A eine innere Eigenschaft des Tripels $P \in W \subseteq V$ ist, d. h. unabhängig von der Einbettung in einen speziellen affinen Raum. Als weitere Anwendung kann ein einfacher Beweis gegeben werden, daß Bedingung A, wenn char. $k = 0$ ist, stets im allgemeinen Punkt von W erfüllt ist, folglich auf einer nichtleeren offenen Menge von W. Zariski zeigte in seiner Vorlesung, daß die Menge aller Punkte von W, in denen Bedingung A erfüllt ist, konstruierbar ist, sie braucht jedoch nicht offen zu sein.

Satz 1. *Es sei O der lokale Ring von P auf V, o der lokale Ring von P auf W und $D_k(\ )$ bezeichne den Differentialmodul über k. Genau dann ist Bedingung A im Punkt P erfüllt, wenn gilt: Ist R ein beliebiger Primdivisor von $k(V)/k$ mit dem Zentrum P, $\mathfrak{R}$ der Restklassenkörper von R und $T(R/O)$ der Torsionsmodul von $R \otimes D_k(O)$[2]), dann wird*

[2]) $T(R/O)$ kann identifiziert werden mit $T_1(R, O; R)$, wobei T_1 der erste abgeleitete Funktor des Differentialmoduls ist im Sinne der Theorie von Lichtenbaum-Schlessinger, The Cotangent Complex of a Morphism, Trans. A. M. S. **128** (1967), and M. André, Méthode simpliciale en algèbre homologique et algèbre commutative, Lecture Notes in Math. **32** (1967), Springer-Verlag.

$T(R/O)$ bei der natürlichen Abbildung

$$R \underset{O}{\otimes} D_k(O) \to \mathfrak{R} \underset{o}{\otimes} D_k(o)$$

in Null abgebildet.

Beweis. Wir zeigen, daß die Bedingung in Satz 1 mit Bedingung A' äquivalent ist. Es sei $\mathfrak{P} \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$ das vollständige Urbild des P entsprechenden Primideals in $k[V]$. Dann ist

$$O = k[X_1, \ldots, X_n]_{\mathfrak{P}}/(F_1, \ldots, F_m) \cdot k[X_1, \ldots, X_n]_{\mathfrak{P}}$$

und $R \underset{O}{\otimes} D_k(O)$ schreibt sich

$$R \underset{O}{\otimes} D_k(O) = RdX_1 \oplus \ldots \oplus RdX_n/U,$$

wobei U der Untermodul von $\overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}} RdX_k$ ist, der von den Elementen $\overset{n}{\underset{k=1}{\sum}} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} dX_k$ $(i = 1, \ldots, m)$ erzeugt wird.

Wir schreiben $F = \overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}} RdX_k$ und bezeichnen mit $T(U)$ den Untermodul von F, der aus allen $w \in F$ besteht, für die es ein $r \in R$, $r \neq 0$ mit $rw \in U$ gibt. Offensichtlich ist $T(U)$ das vollständige Urbild von $T(R/O)$ beim kanonischen Epimorphismus $F \to R \underset{O}{\otimes} D_k(O)$.

Da $D_k(k(V)) = k(V) \underset{O}{\otimes} D_k(O)$ ein $k(V)$-Vektorraum der Dimension $r = \dim V$ ist und $T(R/O)$ der Kern der kanonischen Abbildung $R \underset{O}{\otimes} D_k(O) \to D_k(k(V))$, ergibt sich, daß $T(U)$ ein freier R-Modul vom Rang $n - r$ ist. Da $T(U)/U$ ein Torsionsmodul ist, hat U ebenfalls den Rang $n - r$. Andererseits ist $R \underset{O}{\otimes} D_k(O)/T(R/O)$ ein freier R-Modul; hieraus folgt, daß $T(U)$ ein direkter Summand von F ist.

Wir können eine Basis von U aus dem Erzeugendensystem $u_i = \overset{n}{\underset{k=1}{\sum}} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} dX_k$ $(i = 1, \ldots, m)$ auswählen, wobei wir annehmen dürfen, daß etwa $\{u_1, \ldots, u_{n-r}\}$ eine solche Basis ist. Dann sind die Vektoren

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F_i}{\partial x_n}\right) \quad (i = 1, \ldots, n - r)$$

linear unabhängig über $k(V) = k(x_1, \ldots, x_n)$ und sie bestimmen den Tangentialraum an V im allgemeinen Punkt A von V.

Es sei $u_i' = \overset{n}{\underset{k=1}{\sum}} \alpha_{ik} dX_k$ $(i = 1, \ldots, n - r, \alpha_{ik} \in R)$ eine Basis von $T(U)$. Schreibt man dann

$$u_i = \overset{n-r}{\underset{k=1}{\sum}} s_{ik} u_k' \quad (i = 1, \ldots, n - r, s_{ik} \in R),$$

so ist

$$u_1 \wedge \ldots \wedge u_{n-r} = \det(s_{ik}) \cdot u_1' \wedge \ldots \wedge u_{n-r}', \det(s_{ik}) \neq 0.$$

Das System der $(n - r)$-reihigen Unterdeterminanten der Matrix

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)_{\substack{i=1,\ldots,n-r \\ k=1,\ldots,n}}$$

unterscheidet sich von dem entsprechenden System der Matrix (α_{ik}) nur um den Faktor

$\det(s_{ik}) \neq 0$. Dies bedeutet, daß die Matrizen $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)$ und (α_{ik}) denselben Punkt auf der Grassmann-Mannigfaltigkeit $G_{n,r}$ bestimmen, nämlich $T(A, V)$.

Es sei M das maximale Ideal von R. Da $T(U)$ ein direkter Summand von F ist, sind die Basiselemente $u'_1, \ldots, u'_{n-r}$ auch modulo $M \cdot F$ linear unabhängig. Bezeichnet $a_{ik} \in R/M$ die Restklasse von α_{ik}, so muß in der Matrix (a_{ik}) mindestens eine $(n-r)$-reihige Unterdeterminante von 0 verschieden sein. Die entsprechende Unterdeterminante von (α_{ik}) ist dann eine Einheit in R.

Nach Definition der Spezialisierung $L(R)$ von $T(A, V)$ bzgl. R ergibt sich nun, daß $L(R)$ durch die Matrix

$$(a_{ik})_{\substack{i=1,\ldots,n-r \\ k=1,\ldots,n}}$$

gegeben wird.

Es sei nun $k[W] = k[X_1, \ldots, X_n]/(G_1, \ldots, G_e) = k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ der affine Ring von W über k. Dann ist $(F_1, \ldots, F_m) \subseteqq (G_1, \ldots, G_e)$. Ferner ist

$$o = k[X_1, \ldots, X_n]_{\mathfrak{P}}/(G_1, \ldots, G_e) \cdot k[X_1, \ldots, X_n]_{\mathfrak{P}}$$

und

$$D_k(o) = o dX_1 \oplus \cdots \oplus o dX_n/N,$$

wobei N der von den Elementen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial G_i}{\partial \xi_k} dX_k \quad \left(i = 1, \ldots, e; \ \frac{\partial G_i}{\partial \xi_k} = \frac{\partial G_i}{\partial X_k}(\xi_1, \ldots, \xi_n)\right)$$

erzeugte Untermodul von $\bigoplus_{k=1}^{n} o dX_k$ ist.

Da P als regulär auf W vorausgesetzt ist, ist $D_k(o)$ ein freier o-Modul vom Rang s. N besitzt daher eine Basis, bestehend aus $n-s$ der Elemente $\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial G_i}{\partial \xi_k} dX_k$, etwa die Elemente mit $i = 1, \ldots, n-s$. Sind $(y_1, \ldots, y_n)$ die Koordinaten von P, dann bestimmt die Matrix

$$\left(\frac{\partial G_i}{\partial y_k}\right)_{\substack{i=1,\ldots,n-s \\ k=1,\ldots,n}}$$

den Tangentialraum $T(P, W)$.

Da nach Voraussetzung R das Zentrum P auf V hat, ist der Restklassenkörper $k(y_1, \ldots, y_n)$ von O enthalten im Restklassenkörper $\mathfrak{K}$ von R, also $\frac{\partial G_i}{\partial y_k} \in \mathfrak{K}$.

Durch Übergang zu den Dualräumen ergibt sich nun, daß die Bedingung $T(P, W) \subseteqq L(R)$ äquivalent ist mit der folgenden Bedingung:

$(*)$ Im Vektorraum $\mathfrak{K} dX_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{K} dX_n$ ist der von den Elementen $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} dX_k$ $(i = 1, \ldots, n-r)$ erzeugte Unterraum U_1 enthalten im Unterraum U_2, der von den Elementen $\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial G_i}{\partial y_k} dX_k$ $(i = 1, \ldots, n-s)$ erzeugt wird.

Wir betrachten nun das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{k=1}^{n} R dX_k & \xrightarrow{\varepsilon} & R \underset{O}{\otimes} D_k(O) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ \bigoplus_{k=1}^{n} \mathfrak{K} dX_k & \xrightarrow{\beta} & \mathfrak{K} \underset{O}{\otimes} D_k(o). \end{array}$$

U_2 ist der Kern von β und U_1 das Bild von $T(U)$ bei α. Bedingung $(*)$ ist daher äquivalent mit der Bedingung $\beta\alpha(T(U)) = 0$. Da andererseits $T(U) = \varepsilon^{-1}(T(R/O))$ ist, ist dies äquivalent mit $\gamma(T(R/O)) = 0$, q. e. d.

Um zu prüfen, ob Bedingung A im allgemeinen Punkt von W erfüllt ist, beweisen wir

Satz 2. *Es sei k ein vollkommener Körper und $O \to R$ eine lokale Injektion eines lokalen Rings der Form $O = k[x_1, \ldots, x_n]_\mathfrak{p}$ in einen regulären lokalen Ring $R = k[y_1, \ldots, y_m]_\mathfrak{q}$. O und R mögen den gleichen Quotientenkörper K haben und der Restklassenkörper $\mathfrak{R}$ von R sei separabel über dem Restklassenkörper $\mathfrak{k}$ von O. Es sei $T(R/O)$ der Torsionsmodul von $R \underset{O}{\otimes} D_k(O)$. Dann wird $T(R/O)$ bei der natürlichen Abbildung $R \underset{O}{\otimes} D_k(O) \to \mathfrak{R} \underset{\mathfrak{k}}{\otimes} D_k(\mathfrak{k})$ in Null abgebildet.*

Beweis. $T(R/O)$ ist der Kern der kanonischen Abbildung

$$R \underset{O}{\otimes} D_k(O) \to K \underset{O}{\otimes} D_k(O) = D_k(K).$$

Diese Abbildung ist auch die Zusammensetzung

$$R \underset{O}{\otimes} D_k(O) \to D_k(R) \to D_k(K)$$

und $D_k(R)$ ist ein freier R-Modul, weil R regulär vorausgesetzt ist. Somit ist $T(R/O)$ auch der Kern von $R \underset{O}{\otimes} D_k(O) \to D_k(R)$. Benutzt man noch die Separabilität von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{k}$, so erhält man ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & T(R/O) & \longrightarrow & R \underset{O}{\otimes} D_k(O) & \longrightarrow & D_k(R) & \longrightarrow & D_0(R) \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & \longrightarrow & \mathfrak{R} \underset{\mathfrak{k}}{\otimes} D_k(\mathfrak{k}) & \longrightarrow & D_k(\mathfrak{R}) & \longrightarrow & D_\mathfrak{k}(\mathfrak{R}) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Mithin ist die Zusammensetzung $T(R/O) \to R \underset{O}{\otimes} D_k(O) \to \mathfrak{R} \underset{\mathfrak{k}}{\otimes} D_k(\mathfrak{k})$ die Nullabbildung.

Korollar. *Mit den Bezeichnungen von Satz 1 sei P der allgemeine Punkt von W. Ist für jeden Primdivisor R von $k(V)/k$ mit dem Zentrum P der Restklassenkörper von R separabel über dem Restklassenkörper von O, dann gilt Bedingung A in P. Dies ist immer der Fall, wenn Char. $k = 0$ ist.*

Beweis. Da P allgemeiner Punkt von W ist, ist der lokale Ring o von P auf W gleich dem Restklassenkörper $\mathfrak{k}$ von O. Die Behauptung folgt daher aus Satz 2 und Satz 1.

Bemerkung. Satz 2 gilt nicht mehr allgemein, wenn $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{k}$ nicht separabel ist. Als Beispiel nehme man $k[V] = k[X, Y, Z]/(X^p - YZ^p)$ über einem Körper k der Charakteristik $p > 0$. W werde durch $X = Z = 0$ gegeben. Der lokale Ring auf V des allgemeinen Punktes von W ist

$$O = k[X, Y, Z]_{(X, Z)}/(X^p - YZ^p) \cdot k[X, Y, Z]_{(X, Z)}.$$

Sein ganzer Abschluß im Quotientenkörper ist $R = k(\sqrt[p]{Y})\,[X]_{(x)}$, ein diskreter Bewertungsring. Wenn $x, y, z \in O$ die Restklassen von X, Y, Z bedeuten, dann ist

$$R \underset{O}{\otimes} D_k(O) = R\,dX \oplus R\,dY \oplus R\,dZ/\langle z^p\,dY\rangle,$$

und $T(R/O)$ ist somit der von dy erzeugte R-Untermodul von $R \underset{O}{\otimes} D_k(O)$. Andererseits

ist $\mathfrak{k} = k(\eta)$, wenn η die Restklasse von y in $\mathfrak{k}$ ist und daher

$$\mathfrak{R} \underset{\mathfrak{k}}{\otimes} D_k(\mathfrak{k}) = \mathfrak{R}\, d\eta.$$

Mithin geht $T(R/O)$ bei $R \underset{O}{\otimes} D_k(O) \to \mathfrak{R} \underset{\mathfrak{k}}{\otimes} D_k(\mathfrak{k})$ nicht in Null über, Satz 2 und sein Korollar sind hier also nicht richtig.

Wählt man dagegen im obigen Beispiel k als ein Körper der Charakteristik 0, so zeigt man mit Hilfe von Satz 1 leicht, daß Bedingung A in allen Punkten von W außer dem Ursprung erfüllt ist.

Fachbereich Mathematik der Universität, 84 Regensburg

Eingegangen 18. März 1969

Über henselsche Erweiterungen bewerteter Körper und die Fortsetzung von Bewertungen

Von *Otto Endler* in Bonn

Herrn Professor Dr. Wolfgang Krull zum 70. Geburtstag

Um die Fortsetzungen einer allgemeinen Bewertung v eines Körpers K auf eine einfache algebraische Erweiterung $L = K(y)$ zu bestimmen, benutzt man gewöhnlich die Komplettierung $(\hat{K}, \hat{v})$ von (K, v). Bekanntlich gilt (vgl. [10] und [1], § 8): Die verschiedenen Primfaktoren $\hat{P}_i$ in $\hat{K}[X]$ des Minimalpolynoms von y über K entsprechen eineindeutig den Klassen $\mathfrak{W}_i$ paarweise abhängiger Bewertungsfortsetzungen, während die einzelnen $w_i \in \mathfrak{W}_i$ eineindeutig den verschiedenen Fortsetzungen $\hat{w}_i$ von $\hat{v}$ auf $\hat{K}(\hat{y}_i)$ zugeordnet sind, wobei $\hat{y}_i$ eine Nullstelle von $\hat{P}_i$ bezeichnet. In diesem Falle kann $(\hat{K}(\hat{y}_i), \hat{w}_i)$ als Komplettierung von (L, w_i) aufgefaßt werden.

Dieses Resultat ist besonders dann nützlich, wenn v einrangig ist, denn in diesem Falle ist $(\hat{K}, \hat{v})$ henselsch, und die $\hat{P}_i$ entsprechen daher eineindeutig den verschiedenen Bewertungsfortsetzungen w_i von v auf L. Dagegen wird für höherrangige Bewertungen v die Bestimmung der Fortsetzungen von v auf L nur auf die Bestimmung der Fortsetzungen von $\hat{v}$ auf $\hat{K}(\hat{y}_i)$ zurückgeführt.

In der vorliegenden Arbeit wird anstelle der Komplettierung eine beliebige henselsche Erweiterung $(\overline{K}, \overline{v})$ von (K, v) zur Bestimmung der Bewertungsfortsetzungen von v benutzt. Im „Fortsetzungssatz" wird gezeigt, daß hier die Primfaktoren $\overline{P}_i$ in $\overline{K}[X]$ des Minimalpolynoms den einzelnen Fortsetzungen w_i von v auf L entsprechen, die allerdings im allgemeinen nicht verschieden sind. Falls sie paarweise verschieden sind, nennen wir $(\overline{K}, \overline{v})$ eine L-zulässige Erweiterung von (K, v). Beispielsweise ist die Henselisierung von (K, v) zulässig (d. h. L-zulässig für jedes L)[0]).

Man wird aber nicht nur nach der Verschiedenheit der Bewertungsfortsetzungen w_i, sondern auch nach dem Grad ihrer gegenseitigen Abhängigkeit fragen. Wir messen diese Abhängigkeit mit Hilfe der von Null verschiedenen Primideale $\mathfrak{p}$ des Bewertungsrings B von v und zeigen in Verschärfung des Fortsetzungssatzes, daß w_i, w_j stets dann $\mathfrak{p}$-unabhängig sind, wenn $\overline{P}_i$, $\overline{P}_j$ sich durch Polynome aus

$$B[X] \text{ modulo Res } (\overline{P}_i, \overline{P}_j) \cdot \mathfrak{p} \cdot \overline{B}[X]$$

---

[0]) Der Fortsetzungssatz wird in § 1 zunächst allgemeiner für beliebige über K algebraische Körper L bewiesen; an die Stelle der Primfaktoren $\overline{P}_i$ treten dabei die Klassen $\overline{K}$-äquivalenter Einbettungen von L in einen algebraisch-abgeschlossenen Oberkörper Ω von $\overline{K}$. Auch „L-zulässig" und später „L-ausgezeichnet" werden für beliebige über K algebraische L definiert.

approximieren lassen. Diese Tatsache werden wir in einer späteren Arbeit zur Verschärfung des Existenzsatzes von [3] benutzen.

Wir nennen die henselsche Erweiterung $(\bar{K}, \bar{v})$ von (K, v) L-ausgezeichnet, wenn die Erweiterung $(\bar{K}(\bar{y}_i), \bar{w}_i)$ von (L, w_i) für jedes i unmittelbar ist. Insbesondere sind die Henselisierung und im einrangigen Falle die Komplettierung ausgezeichnet (d. h. L-ausgezeichnet für jedes über K endlich-separable L). Andererseits vermuten wir, daß nicht jede unmittelbare henselsche Erweiterung ausgezeichnet ist, können aber kein Gegenbeispiel angeben.

Aus dem Fortsetzungssatz erhält man einen einfachen Beweis der bekannten fundamentalen Ungleichung $\sum e_i \cdot f_i \leqq [L : K]$ und Bedingungen dafür, daß (K, v) L-defektfrei („well-behaved" in der Terminologie von S. Lang) ist, d. h. daß in der Ungleichung das Gleichheitszeichen gilt. Insbesondere wird gezeigt: (K, v) ist genau dann defektfrei (d. h. L-defektfrei für jedes über K endlich-separable L), wenn die Henselisierung von (K, v) defektfrei ist, und dies trifft genau dann zu, wenn eine maximale unmittelbare (notwendig henselsche) Erweiterung von (K, B) zulässig und ausgezeichnet ist.

Im letzten Abschnitt charakterisieren wir die bewerteten Körper (K, v) derart, daß eine mit der separabel-abgeschlossenen Hülle $S(K)$ von K gebildete, notwendig henselsche Erweiterung $(S(K), w)$ von (K, v) 1. unmittelbar bzw. 2. ausgezeichnet bzw. 3. zulässig bzw. 4. eine Henselisierung ist. Wir zeigen: Sowohl 1. als auch 2. ist gleichbedeutend damit, daß (K, v) abgesättigt ist, d. h. eine Divisionsgruppe als Wertgruppe und einen algebraisch-abgeschlossenen Körper als Restklassenkörper besitzt. Sowohl 3. als auch 4. ist gleichwertig damit, daß (K, v) antihenselsch ist, d. h. daß v für jeden über K endlich-separablen Körper L genau $[L : K]$ Fortsetzungen auf L besitzt. Schließlich ist „antihenselsch" äquivalent mit „abgesättigt und defektfrei".

Wir ziehen es vor, im folgenden mit Bewertungsringen statt mit allgemeinen Bewertungen zu arbeiten.

§ 1. Henselsche Erweiterungen. Henselisierung

Es sei Ω ein algebraisch-abgeschlossener Körper. Für jeden Teilkörper K von Ω sei $A(K)$ (bzw. $S(K)$) die algebraisch- (bzw. separabel-)abgeschlossene Hülle von K in Ω. Für jede algebraische Erweiterung L von K sei $\mathfrak{E}(L \mid K)$ die Menge aller K-Einbettungen (d. h. die identische Abbildung ι_K von K induzierenden Homomorphismen) λ von L in Ω. Ist insbesondere L ein über K normaler Teilkörper von Ω, so ist $\mathfrak{E}(L \mid K)$ gleich der Gruppe $\mathfrak{G}(L \mid K)$ aller K-Automorphismen von L. Für jeden Körper $\bar{K}$ zwischen K und Ω definieren wir in $\mathfrak{E}(L \mid K)$ eine Äquivalenzrelation $\sim_{\bar{K}}$ durch die Vorschrift

$$\lambda \sim_{\bar{K}} \lambda' \Leftrightarrow [\lambda' = \bar{\sigma} \circ \lambda \text{ für passendes } \bar{\sigma} \in \mathfrak{G}(\Omega \mid K)]$$

und setzen $\mathfrak{E}_{\bar{K}}(L \mid K) = \mathfrak{E}(L \mid K)/\sim_{\bar{K}}$.

(1. 1) *Es sei* $K \leqq \bar{K}_i \leqq \Omega$ $(i = 1, 2)$. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent*:

(i) *Für jeden über* K *algebraischen Körper* L *gilt* $\mathfrak{E}_{\bar{K}_1}(L \mid K) = \mathfrak{E}_{\bar{K}_2}(L \mid K)$.

(ii) *Für jeden über* K *endlich-separablen Körper* L *gilt* $\mathfrak{E}_{\bar{K}_1}(L \mid K) = \mathfrak{E}_{\bar{K}_2}(L \mid K)$.

(iii) $\bar{K}_1 \cap S(K) = \bar{K}_2 \cap S(K)$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) ist trivial. — (ii) $\Rightarrow$ (iii): Ist $y \in \bar{K}_1 \cap S(K)$, aber $y \notin \bar{K}_2$, so gibt es ein $\bar{\sigma} \in \mathfrak{G}(\Omega \mid \bar{K}_2)$ mit $\bar{\sigma} y \neq y$, und die Einschränkung $\bar{\sigma} \mid K(y)$ von $\bar{\sigma}$ auf $K(y)$ ist zu $\iota_{K(y)} \sim_{\bar{K}_2}$- aber nicht $\sim_{\bar{K}_1}$-äquivalent. — (iii) $\Rightarrow$ (i): Wir setzen

$$M = \bar{K}_1 \cap S(K) = \bar{K}_2 \cap S(K);$$

wegen $M = (\bar{K}_1 \cap \bar{K}_2) \cap S(K)$ können wir o. B. d. A. $\bar{K}_1 \subseteq \bar{K}_2$ annehmen. Es seien $\lambda, \lambda' \in \mathscr{E}(L \mid K)$; ist $\lambda \sim_{\bar{K}_1} \lambda'$, so gibt es ein $\sigma \in \mathscr{G}(A(K) \mid M)$ mit $\lambda' = \sigma \circ \lambda$, und wegen $\bar{K}_2 \cap S(K) = M$ läßt sich σ zu einem $\bar{\sigma} \in \mathscr{G}(\Omega \mid \bar{K}_2)$ fortsetzen; also gilt $\lambda \sim_{\bar{K}_2} \lambda'$.

Es sei (K, B) ein *bewerteter Körper*, d. h. B sei ein Bewertungsring von K. Für jede Erweiterung L von K bezeichnen wir mit $\mathscr{F}(L; B)$ die Menge aller über B liegenden (d. h. der Gleichung $C \cap K = B$ genügenden) Bewertungsringe C von L. Bekanntlich ist der Durchschnitt aller $C \in \mathscr{F}(L; B)$ gleich der ganz-abgeschlossenen Hülle $I_L(B)$ von B in L. Insbesondere ist $\mathscr{F}(L; B) = \{I_L(B)\}$ falls $\# \mathscr{F}(L; B) = 1$; in diesem Falle schreiben wir statt $(L, I_L(B))$ kurz (L, B). Ist L normal über K, so ist bekanntlich $\mathscr{F}(L; B) = \{\sigma C \mid \sigma \in \mathscr{G}(L \mid K)\}$ für jedes $C \in \mathscr{F}(L; B)$.

Wir nennen den bewerteten Körper (K, B) *henselsch*, wenn $\# \mathscr{F}(L; B) = 1$ für jeden über K algebraischen Körper L gilt. Bekanntlich ist jede der folgenden Bedingungen hierzu äquivalent (vgl. [2], (23. 1), und [9], F, Th. 4):

(i) $\# \mathscr{F}(S(K); B) = 1$;

(ii) $\# \mathscr{F}(A(K); B) = 1$;

(iii) $\# \mathscr{F}(L; B) = 1$ für jeden über K endlich-galoisschen Körper L;

(iv) für (K, B) gilt das Henselsche Lemma.

Insbesondere ist (K, B) stets dann henselsch, wenn K separabel-abgeschlossen ist.

Der bewertete Körper (L, C) heißt eine *Erweiterung* von (K, B) (in Zeichen: $(K, B) \subseteq (L, C)$), wenn $C \in \mathscr{F}(L; B)$. Für $L' \subseteq L$ schreiben wir statt $(L', C \cap L')$ oft (L', C).

Für das Folgende bezeichne $(\bar{K}, \bar{B})$ stets eine *henselsche Erweiterung* von (K, B), und es sei stets $\Omega = A(\bar{K})$. Der folgende „Fortsetzungssatz" zeigt, wie man mit Hilfe von $(\bar{K}, \bar{B})$ die über B liegenden Bewertungen C einer beliebigen algebraischen Erweiterung L von K (oder, mit anderen Worten, die Fortsetzungen der zu B gehörigen Bewertung v auf den Körper L) gewinnen kann.

(1. 2) Satz. *Es sei L algebraisch über K. Für jedes $\lambda \in \mathscr{E}(L \mid K)$ ist $C_\lambda = \lambda^{-1}(I_\Omega(\bar{B}))$ ein Bewertungsring von L, und $(\lambda L \cdot \bar{K}, \bar{B})$ ist eine henselsche Erweiterung von $(\lambda L, \lambda C_\lambda)$. Durch $\lambda \mapsto C_\lambda$ wird eine Abbildung von $\mathscr{E}_{\bar{K}}(L \mid K)$ auf $\mathscr{F}(L; B)$ induziert.*

Beweis. Für jedes $\lambda \in \mathscr{E}(L \mid K)$ ist $\bar{C}_\lambda = I_{\lambda L \cdot \bar{K}}(\bar{B})$ der einzige über $\bar{B}$ liegende Bewertungsring von $\lambda L \cdot \bar{K}$, also ist $(\lambda L \cdot \bar{K}, \bar{C}_\lambda) = (\lambda L \cdot \bar{K}, \bar{B})$, und dies ist eine henselsche Erweiterung von $(\lambda L, \bar{C}_\lambda \cap \lambda L)$. Ferner haben wir $\lambda C_\lambda = I_\Omega(\bar{B}) \cap \lambda L = \bar{C}_\lambda \cap \lambda L$ und $C_\lambda \cap K = \lambda C_\lambda \cap K = \bar{C}_\lambda \cap K = \bar{B} \cap K = B$, also ist $C_\lambda \in \mathscr{F}(L; B)$. Aus $\lambda \sim_{\bar{K}} \lambda'$ folgt $C_\lambda = C_{\lambda'}$, da $\bar{\sigma}(I_\Omega(\bar{B})) = I_\Omega(\bar{B})$ für alle $\bar{\sigma} \in \mathscr{G}(\Omega \mid \bar{K})$ gilt. Zu jedem $C \in \mathscr{F}(L; B)$ und $\lambda \in \mathscr{E}(L \mid K)$ gibt es ein $D \in \mathscr{F}(A(K); \lambda C)$ und ein $\bar{\sigma} \in \mathscr{G}(\Omega \mid K)$ mit $\bar{\sigma} D = I_\Omega(\bar{B}) \cap A(K)$; ersichtlich ist $\lambda' = \bar{\sigma} \circ \lambda \in \mathscr{E}(L \mid K)$ und $\lambda' C = \bar{\sigma}(D \cap \lambda L) = I_\Omega(\bar{B}) \cap \lambda' L = \lambda' C_{\lambda'}$, also $C = C_{\lambda'}$.

Wenn die im Satz (1. 2) angegebene surjektive Abbildung $\mathscr{E}_{\bar{K}}(L \mid K) \to \mathscr{F}(L; B)$ bijektiv ist, d. h. wenn die über B liegenden Bewertungsringe von L eineindeutig den Elementen von $\mathscr{E}_{\bar{K}}(L \mid K)$ entsprechen, dann nennen wir die henselsche Erweiterung $(\bar{K}, \bar{B})$ von (K, B) *L-zulässig*. In diesem Falle ist ersichtlich auch jede henselsche Erweiterung $(\bar{K}_1, \bar{B}_1)$ von (K, B) mit $(\bar{K}_1, \bar{B}_1) \subseteq (\bar{K}, \bar{B})$ L-zulässig.

(1. 3) Hilfssatz. *Ist die Erweiterung* $(\bar{K}, \bar{B})$ *von* (K, B) *L-zulässig, so ist sie auch L'-zulässig, falls* $K \subseteq L' \subseteq L$ *oder* L' *total inseparabel über* K *ist.*

Beweis. Es seien $\lambda_1', \lambda_2' \in \mathscr{E}(L' \mid K)$ mit der Eigenschaft $C' = \lambda_i'^{-1}(I_\Omega(\bar{B}))$ $(i = 1, 2)$. a) Im Falle $K \subseteq L' \subseteq L$ sei $C \in \mathscr{F}(L; C')$, und $\lambda_i \in \mathscr{E}(L \mid K)$ sei eine Fortsetzung von λ_i' $(i = 1, 2)$. Dann ist $(\lambda_i' L' \cdot \bar{K}, \bar{B})$ eine henselsche Erweiterung von $(\lambda_i' L', \lambda_i' C')$, und nach (1. 2) ist daher $\lambda_i C = \mu_i^{-1}(I_\Omega(\bar{B}))$ für passendes $\mu_i \in \mathscr{E}(\lambda_i L \mid \lambda_i' L')$, also $C = \nu_i^{-1}(I_\Omega(\bar{B}))$ für $\nu_i = \mu_i \circ \lambda_i \in \mathscr{E}(L \mid K)$ $(i = 1, 2)$. Nach Voraussetzung ist $\nu_1 = \bar{\sigma} \circ \nu_2$ für passendes $\bar{\sigma} \in \mathscr{G}(\Omega \mid \bar{K})$, und hieraus folgt $\lambda_1' = \bar{\sigma} \circ \lambda_2'$, also $\lambda_1' \sim_{\bar{K}} \lambda_2'$. — b) Im Falle einer total inseparablen Erweiterung L' von L ist λ_i' die einzige Fortsetzung von $\lambda_i = \lambda_i' \mid L \in \mathscr{E}(L \mid K)$ auf L' $(i = 1, 2)$. Wegen $C' \cap L = \lambda_i^{-1}(I_\Omega(\bar{B}))$ $(i = 1, 2)$ existiert ein $\bar{\sigma} \in \mathscr{G}(\Omega \mid \bar{K})$ mit $\lambda_1 = \bar{\sigma} \circ \lambda_2$, und daraus folgt $\lambda_1' = \bar{\sigma} \circ \lambda_2'$, also $\lambda_1' \sim_{\bar{K}} \lambda_2'$.

(1. 4) Hilfssatz. *Es sei* $\mathscr{L}$ *eine nach oben gerichtete Menge von algebraischen Erweiterungen von* K, *und es sei* $M = \bigcup_{L \in \mathscr{L}} L$. *Ist die Erweiterung* $(\bar{K}, \bar{B})$ *von* (K, B) *L-zulässig für jedes* $L \in \mathscr{L}$, *so ist sie auch M-zulässig.*

Beweis. Es seien $\mu_1, \mu_2 \in \mathscr{E}(M \mid K)$ mit der Eigenschaft $D = \mu_i^{-1}(I_\Omega(\bar{B}))$ $(i = 1, 2)$. Für jedes $L \in \mathscr{L}$ ist dann $D \cap L = (\mu_i \mid L)^{-1}(I_\Omega(\bar{B})) \in \mathscr{F}(L; B)$ $(i = 1, 2)$, und nach Voraussetzung gilt $\mu_1 \mid L \sim_{\bar{K}} \mu_2 \mid L$. Zur Abkürzung setzen wir $\mathscr{G} = \mathscr{G}(\Omega \mid \bar{K})$, $\mathscr{H} = \mathscr{G}(\Omega \mid \mu_1 M \cdot \bar{K})$, $\mathscr{H}_L = \mathscr{G}(\Omega \mid \mu_1 L \cdot \bar{K})$. Für jedes $L \in \mathscr{L}$ ist $\{\bar{\sigma} \in \mathscr{G} \mid \bar{\sigma} \circ \mu_1 \mid L = \mu_2 \mid L\}$ eine Linksnebenklasse $\Sigma_L \in \mathscr{G}/\mathscr{H}_L$, und ersichtlich ist $(\Sigma_L)_{L \in \mathscr{L}} \in \varprojlim (\mathscr{G}/\mathscr{H}_L)_{L \in \mathscr{L}}$. Da $\mathscr{G}$ kompakt und $(\mathscr{H}_L)_{L \in \mathscr{L}}$ eine nach unten gerichtete Familie von abgeschlossenen Untergruppen von $\mathscr{G}$ mit $\mathscr{H} = \bigcap_{L \in \mathscr{L}} \mathscr{H}_L$ ist (vgl. [2], § 15), ist $(\Sigma_L)_{L \in \mathscr{L}}$ das kanonische Bild eines $\Sigma \in \mathscr{G}/\mathscr{H}$ (vgl. [11], Ch. I, Lemme 1). Für $\bar{\varrho} \in \Sigma$ ist $\bar{\varrho} \circ \mu_1 = \mu_2$, also $\mu_1 \sim_{\bar{K}} \mu_2$.

Aus den Hilfssätzen (1. 3) und (1. 4) folgt unmittelbar:

(1. 5) Korollar. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent: Die Erweiterung* $(\bar{K}, \bar{B})$ *von* (K, B) *ist*

(i) *L-zulässig für jeden über K algebraischen Körper L,*

(ii) *L-zulässig für jeden über K endlich-separablen Körper L,*

(iii) *S(K)-zulässig,*

(iv) *A(K)-zulässig.*

Sind diese Bedingungen erfüllt, so nennen wir die Erweiterung $(\bar{K}, \bar{B})$ von (K, B) *zulässig.*

(1. 6) Hilfssatz. $(\bar{K} \cap S(K), \bar{B})$ *ist henselsch, und* $(\bar{K}, \bar{B})$ *ist eine zulässige Erweiterung von* $(\bar{K} \cap S(K), \bar{B})$.

Beweis. Jedes $\lambda \in \mathscr{E}(S(K) \mid \bar{K} \cap S(K))$ läßt sich zu einem $\bar{\sigma} \in \mathscr{G}(\Omega \mid \bar{K})$ fortsetzen; daher ist $\# \mathscr{E}_{\bar{K}}(S(K) \mid \bar{K} \cap S(K)) = 1$. Nach (1. 2) ist daher auch $\# \mathscr{F}(S(K); \bar{B} \cap S(K)) = 1$, also $(\bar{K} \cap S(K), \bar{B})$ henselsch und $(\bar{K}, \bar{B})$ eine zulässige Erweiterung von $(\bar{K} \cap S(K), \bar{B})$.

Es sei $Z(D; K)$ der Zerlegungskörper von $D \in \mathscr{F}(S(K); B)$ über K; bekanntlich ist $(Z(D; K), D)$ eine henselsche Erweiterung von (K, B) und wird als eine *Henselisierung* von (K, B) bezeichnet. Diese ist bis auf K-Isomorphie eindeutig bestimmt, denn für jedes $\sigma \in \mathscr{G}(S(K) \mid K)$ ist $Z(\sigma D; K) = \sigma Z(D; K)$ (vgl. [2], (20. 2)). Ferner gilt

$$Z(D; L) = L \cdot Z(D; K)$$

für jeden zwischen K und $S(K)$ liegenden Körper L (vgl. [2], (20. 3)), und daraus folgt unmittelbar:

(1. 7) *Es sei* $(\hat{K}, \hat{B})$ *eine Henselisierung von* (K, B), *und* L *sei separabel über* K. *Für jedes* $\lambda \in \mathfrak{E}(L \mid K)$ *ist dann* $(\lambda L \cdot \hat{K}, \hat{B})$ *eine Henselisierung von* $(\lambda L, \lambda C_\lambda)$.

(1. 8) Satz. *Die Henselisierung von* (K, B) *ist eine zulässige Erweiterung von* (K, B).

Beweis. Wir setzen $(\overline{K}, \overline{B}) = \big(Z(D; K), D\big)$ und $L = S(K)$. Mit den Bezeichnungen von (1. 2) gilt $\lambda C_\lambda = I_\Omega(\overline{B}) \cap \lambda L = D$ für jedes $\lambda \in \mathfrak{E}(L \mid K)$. Es seien $\lambda, \lambda' \in \mathfrak{E}(L \mid K)$ mit $C_\lambda = C_{\lambda'}$; dann ist $\lambda'(\lambda^{-1}D) = D$ und somit $\lambda' = \sigma \circ \lambda$ für ein

$$\sigma \in \{\varrho \in \mathfrak{G}(L \mid K) \mid \varrho D = D\} = \mathfrak{G}(L \mid \overline{K})$$

(vgl. [2], (20. 1)), also $\lambda' \sim_{\overline{K}} \lambda$.

Der folgende Satz zeigt, daß die Henselisierung die kleinste henselsche Erweiterung von (K, B) ist, und daß mit ihrer Hilfe die zulässigen Erweiterungen unter den henselschen Erweiterungen von (K, B) charakterisiert werden können.

(1. 9) Satz. *Es gibt genau eine Henselisierung* $(\hat{K}, \hat{B})$ *von* (K, B) *mit* $(\hat{K}, \hat{B}) \leqq (\overline{K}, \overline{B})$, *und es gilt* $\hat{K} \leqq \overline{K} \cap S(K)$. *Insbesondere gilt* $\hat{K} = \overline{K} \cap S(K)$ *genau dann, wenn die Erweiterung* $(\overline{K}, \overline{B})$ *von* (K, B) *zulässig ist.*

Beweis. Für $D = I_\Omega(\overline{B}) \cap S(K)$ ist $\big(Z(D; K), D\big)$ eine Henselisierung von (K, B). Da $(K, B) \leqq \big(\overline{K} \cap S(K), \overline{B}\big) \leqq \big(S(K), D\big)$ gilt und nach (1. 6) $\big(\overline{K} \cap S(K), \overline{B}\big)$ henselsch ist, haben wir $\big(Z(D; K), D\big) \leqq \big(\overline{K} \cap S(K), \overline{B}\big) \leqq (\overline{K}, \overline{B})$ (vgl. [2], (20. 6)). Ist andererseits $(\hat{K}, \hat{B})$ eine Henselisierung von (K, B) mit $(\hat{K}, \hat{B}) \leqq (\overline{K}, \overline{B})$, so haben wir $\hat{K} \leqq S(K)$ und $\hat{B} = \overline{B} \cap \hat{K} = I_\Omega(\overline{B}) \cap \hat{K} = D \cap \hat{K}$, und daraus folgt $(\hat{K}, \hat{B}) = \big(Z(D; K), D\big)$. — Wegen (1. 8) ist $(\overline{K}, \overline{B})$ genau dann zulässig, wenn $\mathfrak{E}_{\overline{K}}(L \mid K) = \mathfrak{E}_{\hat{K}}(L \mid K)$ für jedes über K algebraische L gilt, und dies ist nach (1. 1) gleichbedeutend mit $\overline{K} \cap S(K) = \hat{K}$.

Für die Komplettierung $(\hat{K}, \hat{B})$ eines beliebigen bewerteten Körpers (K, B) läßt sich bekanntlich mit Hilfe des Krasnerschen Lemmas die Inklusion

$$\big(\hat{K} \cap S(K), \hat{B}\big) \leqq \big(Z(D; K), D\big)$$

für $D = I_\Omega(\hat{B}) \cap S(K)$ beweisen (vgl. [9], p. 190). Hieraus und aus (1. 9) folgt unmittelbar:

(1. 10) *Ist die Komplettierung* $(\hat{K}, \hat{B})$ *von* (K, B) *henselsch, so ist sie eine zulässige Erweiterung von* (K, B).

Bekanntlich ist die Voraussetzung von (1. 10) stets dann erfüllt, wenn B einrangig ist, und in diesem Falle sind (1. 10) und die folgende Aussage wohlbekannt (vgl. [12], Ch. 2, oder auch [7], § 4).

(1. 11) *Es sei* B *einrangig. Für jede endlich-algebraische Erweiterung* L *von* K *und jedes* $\lambda \in \mathfrak{E}(L \mid K)$ *ist* $(\lambda L \cdot \hat{K}, \hat{B})$ *eine Komplettierung von* $(\lambda L, \lambda C_\lambda)$.

Ist $\overline{K}$ total inseparabel über K, so ist mit $(\overline{K}, \overline{B})$ auch (K, B) henselsch, wie sich sofort aus (1. 6) ergibt. Für einrangige Bewertungsringe B gilt sogar: Ist $\overline{K}$ algebraisch über K von endlichem Separabilitätsgrad $[\overline{K} : K]_s$ und ist K nicht reell abgeschlossen, so ist (K, B) henselsch (vgl. [4], Th. 2. Cor.). Ist dagegen K reell abgeschlossen mit archimedischer Totalordnung (z. B. $= \boldsymbol{R}$ oder $= \boldsymbol{R} \cap A(\boldsymbol{Q})$), so ist (K, B) nicht henselsch, obwohl $\big(A(K), I_{A(K)}(B)\big)$ henselsch und $[A(K) : K] = 2$ ist (vgl. [5], Kor. zu Satz 6).

§ 2. Eine Verschärfung des Fortsetzungssatzes

Wie in § 1 seien (K, B) ein bewerteter Körper und $(\overline{K}, \overline{B})$ eine henselsche Erweiterung von (K, B); ferner sei $L = K(y)$ eine einfache algebraische Erweiterung von K. Mit P (bzw. $\overline{P}_\lambda$) bezeichnen wir das Minimalpolynom von y über K (bzw. von λy über $\overline{K}$, wobei $\lambda \in \mathscr{E}(L \mid K)$). Ersichtlich wird durch $\lambda \mapsto \overline{P}_\lambda$ eine Bijektion von $\mathscr{E}_{\overline{K}}(L \mid K)$ auf die Menge aller irreduziblen Faktoren von P in $\overline{K}[X]$ induziert. Deshalb läßt sich für den hier betrachteten Fall $L = K(y)$ der Fortsetzungssatz folgendermaßen formulieren:

(2. 1) Satz. *Es seien $\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_r$ die verschiedenen irreduziblen Faktoren von P in $\overline{K}[X]$; ferner sei $\bar{y}_i \in \Omega$ eine Nullstelle von $\overline{P}_i$, und λ_i sei die durch $\lambda_i y = \bar{y}_i$ bestimmte K-Einbettung von L in Ω $(i = 1, \ldots, r)$. Dann existieren (nicht notwendig verschiedene) Bewertungsringe $C_1, \ldots, C_r$ von L mit der Eigenschaft $(\lambda_i L, \lambda_i C_i) \leqq (\overline{K}(\bar{y}_i), \overline{B})$ $(i=1, \ldots, r)$, und es ist $\mathscr{F}(L; B) = \{C_1, \ldots, C_r\}$.*

Genau dann sind $C_1, \ldots, C_r$ paarweise verschieden, wenn $(\overline{K}, \overline{B})$ L-zulässig ist.

Dieser Satz ist insofern noch unbefriedigend, als er nichts über den Grad der gegenseitigen Abhängigkeit der über B liegenden Bewertungsringe von L aussagt. Wir werden ihn verschärfen durch die Angabe hinreichender Bedingungen dafür, daß $C_1, \ldots, C_r$ paarweise „$\mathfrak{p}$-unabhängig" sind, wobei wir als Maß für die gegenseitige Abhängigkeit die von Null verschiedenen Primideale $\mathfrak{p}$ von B wählen. Mit $\mathfrak{m}(B)$ bezeichnen wir das Bewertungsideal (d. h. das einzige maximale Ideal) von B.

(2. 2) *Es seien $C_1, C_2 \in \mathscr{F}(L; B)$ und $\mathfrak{p}$ ein Primideal von B. Dann gilt*[1]*:*

$$\mathfrak{p} \leqq \mathfrak{m}(C_1 \cdot C_2 \cap K) \Leftrightarrow C_1 \cdot C_2 \cap K \leqq B_\mathfrak{p}.$$

Beweis. $B' = C_1 \cdot C_2 \cap K$ ist ein B enthaltender Bewertungsring von K. Nach [2], (4. 5), ist $\mathfrak{m}(B')$ ein Primideal von B mit $B' = B_{\mathfrak{m}(B')}$, und $\mathfrak{p} \leqq \mathfrak{m}(B')$ ist gleichwertig mit $B' \leqq B_\mathfrak{p}$.

Sind die in (2. 2) angegebenen äquivalenten Bedingungen erfüllt, so nennen wir C_1, C_2 (voneinander) $\mathfrak{p}$-*abhängig*, anderenfalls $\mathfrak{p}$-*unabhängig*. Wir erinnern daran, daß die Bewertungsringe C_1, C_2 unabhängig (im üblichen Sinne) heißen, wenn $C_1 \cdot C_2 = L$ ist; falls sie einrangig sind, ist dies mit jeder der folgenden Bedingungen äquivalent: $C_1 \not\leqq C_2$; $C_2 \not\leqq C_1$; $C_1 \neq C_2$. Zwischen der $\mathfrak{p}$-Unabhängigkeit und der üblichen Unabhängigkeit besteht folgender Zusammenhang:

(2. 3) *Es seien $C_1, C_2 \in \mathscr{F}(L; B)$. Dann gelten*[1]*:*

a) *C_1, C_2 sind genau dann unabhängig, wenn sie $\mathfrak{p}$-unabhängig für jedes von Null verschiedene Primideal $\mathfrak{p}$ von B sind.*

b) *$C_1 \neq C_2$ gilt genau dann, wenn C_1, C_2 $\mathfrak{m}(B)$-unabhängig sind.*

Beweis. a) Genau dann gilt $C_1 \cdot C_2 \cap K \not\leqq B_\mathfrak{p}$ für jedes von Null verschiedene Primideal $\mathfrak{p}$ von B, wenn $C_1 \cdot C_2 \cap K = K$ ist, und diese Gleichung ist äquivalent mit $C_1 \cdot C_2 = L$. — b) Wegen $B_{\mathfrak{m}(B)} = B = C_1 \cap K$ gilt $C_1 \cdot C_2 \cap K \leqq B_{\mathfrak{m}(B)}$ genau dann, wenn $C_1 \cdot C_2 \cap K = C_1 \cap K$ gilt, und diese Gleichung ist äquivalent mit $C_1 \cdot C_2 = C_1$, also auch mit $C_1 = C_2$.

Falls B ein (von Null verschiedenes) minimales Primideal $\mathfrak{p}_0$ besitzt, ist die Unabhängigkeit von C_1, C_2 ersichtlich gleichbedeutend mit ihrer $\mathfrak{p}_0$-Unabhängigkeit. Dies trifft insbesondere dann zu, wenn B endlichen Rang hat.

[1]) (2. 2) (bzw. (2. 3)) gilt übrigens für beliebige (bzw. beliebige algebraische) Erweiterungen L von K,

Um die gewünschte hinreichende Bedingung formulieren zu können, benötigen wir noch einige Vorbereitungen. Wir bezeichnen mit Res (F, G) die Resultante der normierten Polynome $F, G \in B[X]$ und bemerken, daß für normierte Polynome $F_1, G_1 \in B[X]$ aus $F_1 \equiv F$ und $G_1 \equiv G \bmod \text{Res}\,(F, G) \cdot \mathfrak{m}(B)\,[X]$ stets

$$\text{Res}\,(F_1, G_1) \equiv \text{Res}\,(F, G) \bmod \text{Res}\,(F, G) \cdot \mathfrak{m}(B)$$

und somit $\text{Res}\,(F_1, G_1) \cdot B = \text{Res}\,(F, G) \cdot B$ folgt.

Es sei $(\widetilde{K}, \widetilde{B})$ eine Erweiterung von (K, B), und $\mathfrak{p}$ sei ein Primideal von B. Ein Paar normierter Polynome $\widetilde{F}, \widetilde{G} \in \widetilde{B}[X]$ soll $\mathfrak{p}$-*approximierbar* heißen, wenn normierte Polynome $F, G \in B[X]$ existieren derart, daß $F \equiv \widetilde{F}$ und $G \equiv \widetilde{G} \bmod \text{Res}\,(\widetilde{F}, \widetilde{G}) \cdot \mathfrak{p} \cdot \widetilde{B}[X]$; in diesem Falle ist $\text{Res}\,(F, G) \cdot \widetilde{B} = \text{Res}\,(\widetilde{F}, \widetilde{G}) \cdot \widetilde{B}$. Insbesondere ist das Paar $\widetilde{F}, \widetilde{G}$ genau dann (0)-approximierbar, wenn $\widetilde{F}, \widetilde{G} \in B[X]$.

Wir nennen die Erweiterung $(\widetilde{K}, \widetilde{B})$ von (K, B) *ranggleich*, wenn $\widetilde{B}$ und B denselben Rang haben. Dies trifft stets dann zu, wenn die Faktorgruppe $\widetilde{\Gamma}/\Gamma$ der zugehörigen Wertgruppen eine Torsionsgruppe ist und insbesondere dann, wenn $\widetilde{K}$ algebraisch über K ist (vgl. [2], § 10). Bekanntlich gilt (vgl. [8], Lemme 1):

(2. 4) *Für jede ranggleiche Erweiterung $(\widetilde{K}, \widetilde{B})$ von (K, B) entsprechen die Primideale $\mathfrak{p}$ von B eineindeutig den Primidealen $\tilde{\mathfrak{p}}$ von $\widetilde{B}$ durch die Vorschriften*:

$$\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} \cdot \widetilde{B}, \quad \mathfrak{p} = \tilde{\mathfrak{p}} \cap B.$$

Wir beweisen nun die angekündigte Verschärfung des Fortsetzungssatzes (2. 1):

(2. 5) Satz. *Die Erweiterung $(\overline{K}, \overline{B})$ von (K, B) sei ranggleich, und es sei $L = K(y)$ mit $y \in I_L(B)$*[2]*. Mit den Bezeichnungen von* (2. 1) *gilt dann für jedes von Null verschiedene Primideal $\mathfrak{p}$ von B und jedes Paar $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ mit $i \neq j$: Ist das Paar $\overline{P}_i, \overline{P}_j$ $\mathfrak{p}$-approximierbar, so sind C_i, C_j $\mathfrak{p}$-unabhängig.*

Beweis. Das Paar $\overline{P}_1, \overline{P}_2$ sei $\mathfrak{p}$-approximierbar, und die normierten Polynome $F_1, F_2 \in B[X]$ seien so gewählt, daß $F_h \equiv \overline{P}_h \bmod \text{Res}\,(\overline{P}_1, \overline{P}_2) \cdot \mathfrak{p} \cdot \overline{B}[X]$ $(h = 1, 2)$. Für $s = \text{Res}\,(F_1, F_2) \in B$ gilt dann $s \cdot \overline{B} = \text{Res}\,(\overline{P}_1, \overline{P}_2) \cdot \overline{B} \neq (0)$ und $s^{-1} \cdot (F_h - \overline{P}_h) \in \mathfrak{p} \cdot \overline{B}[X]$, und wegen $\overline{y}_h = \lambda_h y \in I_\Omega(\overline{B})$, $\overline{P}_h(\overline{y}_h) = 0$ folgt daraus $s^{-1} \cdot F_h(\overline{y}_h) \in \mathfrak{p} \cdot I_\Omega(\overline{B}) \cap K(\overline{y}_h)$ $(h = 1, 2)$. Wegen (2. 4) ist $\mathfrak{p} \cdot I_\Omega(\overline{B}) \cap K = \mathfrak{p} = \lambda_h(\mathfrak{p} \cdot C_h) \cap K$, und die Primideale $\mathfrak{p} \cdot I_\Omega(\overline{B}) \cap K(\lambda_h y)$ und $\lambda_h(\mathfrak{p} \cdot C_h)$ von $I_\Omega(\overline{B}) \cap K(\lambda_h y) = \lambda_h C_h$ stimmen deshalb überein; daher ist $s^{-1} \cdot F_h(y) = \lambda_h^{-1}(s^{-1} \cdot F_h(\overline{y}_h)) \in \mathfrak{p} \cdot C_h$ $(h = 1, 2)$. Angenommen, C_1, C_2 seien $\mathfrak{p}$-abhängig; dann ist $\mathfrak{p}$ in dem gemeinsamen Primideal $\mathfrak{m}(C_1 \cdot C_2)$ von C_1 und C_2 enthalten. Aus der für passende $H_1, H_2 \in B[X]$ gültigen Gleichung $s = F_1 \cdot H_1 + F_2 \cdot H_2$ und $y \in I_L(B) \subseteq C_1 \cap C_2$ folgt $1 = s^{-1} \cdot F_1(y) \cdot H_1(y) + s^{-1} \cdot F_2(y) \cdot H_2(y) \in \mathfrak{m}(C_1 \cdot C_2)$, was unmöglich ist.

Wir werden Satz (2. 5) in einer späteren Arbeit[3]) dazu benutzen, den in [3] bewiesenen Satz 3 über die Existenz von Körpererweiterungen mit vorgeschriebenen Bewertungsfortsetzungen zu verschärfen. Das folgende Korollar findet sich im wesentlichen bereits in [3], Satz 2.

---

[2]) Diese Voraussetzung läßt sich stets durch Multiplikation eines beliebigen primitiven Elementes mit einem passenden $c \in \mathfrak{m}(B)$ erzwingen.

[3]) Endliche separable Körpererweiterungen mit vorgeschriebenen Bewertungsfortsetzungen. II (In Vorbereitung).

(2. 6) Korollar. *Ist für jedes Paar* $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ *mit* $i \neq j$ *das Polynompaar* $\overline{P}_i$, $\overline{P}_j$ $\mathfrak{m}(B)$*-approximierbar, so ist die Erweiterung* $(\overline{K}, \overline{B})$ *von* (K, B) *L-zulässig.*

Wir bemerken noch, daß im Falle eines einrangigen Bewertungsringes B die in (2. 6) angegebene Approximierbarkeitsbedingung stets dann erfüllt ist, wenn man für $(\overline{K}, \overline{B})$ die Komplettierung $(\hat{K}, \hat{B})$ von (K, B) wählt. Für diesen Fall liefert also (2. 6), zusammen mit (1. 5), einen anderen Beweis für (1. 10).

Inwieweit die hinreichende Bedingung des Satzes (2. 5) von der Wahl der henselschen Erweiterung (K, B) abhängt, zeigt die folgende Bemerkung.

(2. 7) *Es sei* $(\overline{K}_i, \overline{B}_i)$ *eine henselsche Erweiterung von* (K, B) *mit* $\overline{K}_i \subseteq \Omega$ $(i = 1, 2)$. *Ist* $\overline{K}_1 \cap A(K) = \overline{K}_2 \cap A(K)$ *(bzw.* $\overline{K}_1 \cap S(K) = \overline{K}_2 \cap S(K)$*), so stimmen für jedes über* K *algebraische (bzw. separable)* y *die Zerlegungen des Minimalpolynoms von* y *über* K *in irreduzible Faktoren in* $\overline{K}_1[X]$ *und* $\overline{K}_2[X]$ *überein.*

Beweis. Die genannten Zerlegungen stimmen mit der Zerlegung des Minimalpolynoms in irreduzible Faktoren in $(\overline{K}_i \cap A(K))[X]$ (bzw. $(\overline{K}_i \cap S(K))[X]$) überein.

Es liegt nahe, in Satz (2. 5) für $(\overline{K}, \overline{B})$ die Henselisierung von (K, B) zu benutzen. Es ist aber möglich, daß man bei der Wahl einer anderen henselschen Erweiterung eine Zerlegung des Minimalpolynoms in irreduzible Polynome $\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_r \in \overline{K}[X]$ kleineren Grades und damit eine bessere Approximierbarkeit erreichen kann.

§ 3. Ausgezeichnete henselsche Erweiterungen

Es sei wieder $(\overline{K}, \overline{B})$ eine henselsche Erweiterung des bewerteten Körpers (K, B), und L sei algebraisch über K. Jedes $\lambda \in \mathfrak{E}(L \mid K)$ induziert ersichtlich eine Einbettung der Wertgruppe (bzw. des Restklassenkörpers) von C_λ in die Wertgruppe (bzw. den Restklassenkörper) von $I_{\lambda L \cdot \overline{K}}(\overline{B})$. Von besonderem Interesse ist der Fall, daß diese Einbettungen surjektiv (d. h. Isomorphismen) sind, und dies trifft offenbar genau dann zu, wenn für jedes $\lambda \in \mathfrak{E}(L \mid K)$ die henselsche Erweiterung $(\lambda L \cdot \overline{K}, \overline{B})$ von $(\lambda L, \lambda C_\lambda)$ unmittelbar ist[4]). In diesem Falle nennen wir die Erweiterung $(\overline{K}, \overline{B})$ von (K, B) *L-ausgezeichnet.* Trifft dies für jeden über K separablen (bzw. algebraischen) Körper L zu, so nennen wir diese Erweiterung *ausgezeichnet* (bzw. *stark ausgezeichnet*)[5]).

Bekanntlich ist die Henselisierung eines beliebigen bewerteten Körpers eine unmittelbare Erweiterung (vgl. [9], F). Wegen (1. 7) gilt daher:

(3. 1) *Die Henselisierung von* (K, B) *ist eine ausgezeichnete Erweiterung von* (K, B).

In Analogie zu (1. 4) zeigen wir:

(3. 2) *Es seien* $\mathfrak{L}$ *und* M *wie in* (1. 4). *Ist die Erweiterung* $(\overline{K}, \overline{B})$ *von* (K, B) *L-ausgezeichnet für jedes* $L \in \mathfrak{L}$, *so ist sie auch M-ausgezeichnet.*

Beweis. Es sei $\mu \in \mathfrak{E}(M \mid K)$. Für jedes $L \in \mathfrak{L}$ ist $(\mu L \cdot \overline{K}, \overline{B})$ eine unmittelbare Erweiterung von $(\mu L, I_\Omega(\overline{B}) \cap \mu L)$. Daraus folgt wegen

$$\mu M = \bigcup_{L \in \mathfrak{L}} \mu L, \quad \mu M \cdot \overline{K} = \bigcup_{L \in \mathfrak{L}} \mu L \cdot \overline{K},$$

daß auch $(\mu M \cdot \overline{K}, \overline{B})$ eine unmittelbare Erweiterung von $(\mu M, I_\Omega(\overline{B}) \cap \mu L)$ ist.

[4]) Die Erweiterung (K', B') von (K, B) heißt *unmittelbar*, wenn der Verzweigungsindex $e(B' \mid B)$ und der Trägheitsgrad $f(B' \mid B)$ gleich 1 sind.

[5]) Die hier gegebene Definition von „ausgezeichnet" stimmt nicht genau mit der in [3] überein.

Bekanntlich ist die Komplettierung eines bewerteten Körpers eine unmittelbare Erweiterung (vgl. [1], § 5, Prop. 5). Wegen (1. 11) und (3. 2) gilt daher:

(3. 3) *Ist B einrangig, so ist $(\hat{K}, \hat{B})$ eine stark ausgezeichnete Erweiterung von (K, B).*

Wir vermuten, daß nicht jede unmittelbare henselsche Erweiterung ausgezeichnet ist, kennen aber kein Gegenbeispiel. Wir wissen nicht einmal, ob jede unmittelbare henselsche Erweiterung eines *henselschen* bewerteten Körpers (K, B) ausgezeichnet ist oder, damit gleichbedeutend, ob die Bedingung (ii) des folgenden Hilfssatzes stets erfüllt ist.

(3. 4) Hilfssatz. *Ist (K, B) henselsch, so sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(i) *$(\overline{K}, \overline{B})$ ist eine ausgezeichnete Erweiterung von (K, B).*

(ii) *Für jeden über K separablen Teilkörper L von Ω ist $(L \cdot \overline{K}, \overline{B})$ eine unmittelbare Erweiterung von (L, B).*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) ist trivial. — (ii) $\Rightarrow$ (i): Für jedes über K separable L und jedes $\lambda \in \mathfrak{E}(L \mid K)$ ist λL separabel über K und $\lambda L \subseteq \Omega$; also ist $(\lambda L \cdot \overline{K}, \overline{B})$ eine unmittelbare Erweiterung von $(\lambda L, \lambda C_\lambda) = (\lambda L, B)$.

In diesem Zusammenhang bemerken wir noch, daß nicht jede unmittelbare henselsche Erweiterung eines henselschen bewerteten Körpers zulässig ist (vgl. das in [9], G, Ex. 2, angegebene Beispiel).

(3. 5) Hilfssatz. *Es sei $(\overline{K}_i, \overline{B}_i)$ eine henselsche Erweiterung von (K, B) $(i = 1, 2)$ mit $(\overline{K}_1, \overline{B}_1) \subseteq (\overline{K}_2, \overline{B}_2)$. Dann gelten die Implikationen* (i) $\Rightarrow$ (ii) *und* (ii) & (iii) $\Rightarrow$ (i) *zwischen den folgenden Bedingungen:*

(i) *Die Erweiterung $(\overline{K}_2, \overline{B}_2)$ von (K, B) ist ausgezeichnet.*

(ii) *Die Erweiterung $(\overline{K}_1, \overline{B}_1)$ von (K, B) ist ausgezeichnet.*

(iii) *Die Erweiterung $(\overline{K}_2, \overline{B}_2)$ von $(\overline{K}_1, \overline{B}_1)$ ist ausgezeichnet.*

Ist $\overline{K}_1$ separabel über K, so gilt sogar (ii) & (iii) $\Leftrightarrow$ (i).

Beweis. Für jeden über K separablen Körper L und jedes $\lambda \in \mathfrak{E}(L \mid K)$ gilt $(\lambda L, \lambda C_\lambda) \subseteq (\lambda L \cdot \overline{K}_1, \overline{B}_1) \subseteq (\lambda L \cdot \overline{K}_2, \overline{B}_2)$. Genau dann ist $(\lambda L \cdot \overline{K}_2, \overline{B}_2)$ eine unmittelbare Erweiterung von $(\lambda L, \lambda C_\lambda)$, wenn $(\lambda L \cdot \overline{K}_2, \overline{B}_2)$ eine unmittelbare Erweiterung von $(\lambda L \cdot \overline{K}_1, \overline{B}_1)$ und $(\lambda L \cdot \overline{K}_1, \overline{B}_1)$ eine unmittelbare Erweiterung von $(\lambda L, \lambda C_\lambda)$ ist. Daraus folgen sofort die Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii) und (ii) & (iii) $\Rightarrow$ (i). — (i) $\Rightarrow$ (iii) (unter der Voraussetzung, daß $\overline{K}_1$ separabel über K ist): Jeder über $\overline{K}_1$ separable Teilkörper L' von Ω ist separabel über K, und wegen (i) ist $(L' \cdot \overline{K}_2, \overline{B}_2)$ eine unmittelbare Erweiterung von $(L', I_{L'}(\overline{B}_1)) = (L', \overline{B}_1)$; daher gilt (iii) wegen (3. 4).

Wir bemerken noch, daß (3. 4) und (3. 5) gültig bleiben, wenn man zugleich „ausgezeichnet" durch „stark ausgezeichnet" und „separabel" durch „algebraisch" ersetzt.

§ 4. Defektfreie bewertete Körper

Es sei L eine endlich-algebraische Erweiterung von K. Bekanntlich gilt für jeden Bewertungsring B von K die fundamentale Ungleichung

$$[L : K] \geqq \sum_{C \in \mathfrak{F}(L; B)} e(C \mid B) \cdot f(C \mid B)$$

(vgl. [1], § 8, Th. 1). Einen einfachen Beweis dieser Ungleichung kann man mit Hilfe von Satz (1. 2) erhalten. In der Tat, es sei $(\overline{K}, \overline{B})$ eine unmittelbare henselsche Erweite-

rung von (K, B) und $\mathscr{E}' \subseteq \mathscr{E}(L \mid K)$ ein Repräsentantensystem von $\mathscr{E}_{\bar{K}}(L \mid K)$, und es seien $e_\lambda = e(C_\lambda \mid B)$, $f_\lambda = f(C_\lambda \mid B)$, $\bar{e}_\lambda = e(\bar{C}_\lambda \mid \bar{B})$, $\bar{f}_\lambda = f(\bar{C}_\lambda \mid \bar{B})$, wobei $\bar{C}_\lambda = I_{\lambda L \cdot \bar{K}}(\bar{B})$. Dann haben wir $[\lambda L \cdot \bar{K} : \bar{K}] \geqq \bar{e}_\lambda \cdot \bar{f}_\lambda$ (vgl. [2], (10. 8)) $\bar{e}_\lambda \geqq e_\lambda$, $\bar{f}_\lambda \geqq f_\lambda$, wegen (1. 2) gilt $\mathscr{F}(L; B) = \{C_\lambda \mid \lambda \in \mathscr{E}'\}$, und die fundamentale Ungleichung folgt somit aus

$$[L : K] = \sum_{\lambda \in \mathscr{E}'} h \cdot \bar{h}_\lambda^{-1} \cdot [\lambda L \cdot \bar{K} : \bar{K}] \geqq \sum_{\lambda \in \mathscr{E}'} [\lambda L \cdot \bar{K} : \bar{K}]$$

(vgl. [12], 2-4-4), wobei h (bzw. $\bar{h}_\lambda$) den Inseparabilitätsgrad der Erweiterung $L \mid K$ (bzw. $\lambda L \cdot \bar{K} \mid \bar{K}$) bezeichnet.

Wir nennen (K, B) *L-defektfrei*, wenn in der fundamentalen Ungleichung das Gleichheitszeichen gilt. Trifft dies für jedes über K endlich-separable (bzw. -algebraische) L zu, so nennen wir (K, B) *defektfrei* (bzw. *stark defektfrei*).

(4. 1) Satz. *$(\bar{K}, \bar{B})$ sei eine unmittelbare henselsche Erweiterung von (K, B), und L sei endlich-algebraisch über K.*

Genau dann ist (K, B) L-defektfrei, wenn

a) *die Erweiterung $(\bar{K}, \bar{B})$ von (K, B) L-zulässig und L-ausgezeichnet ist,*

b) *$(\bar{K}, \bar{B})$ $(\lambda L \cdot \bar{K})$-defektfrei für jedes $\lambda \in \mathscr{E}(L \mid K)$ ist und*

c) *$\bar{h}_\lambda = h$ für jedes $\lambda \in \mathscr{E}(L \mid K)$ gilt.*

Beweis. (K, B) ist L-defektfrei genau dann, wenn in der Ungleichung

$$[L : K] \geqq \sum_{\lambda \in \mathscr{E}'} [\lambda L \cdot \bar{K} : \bar{K}] \geqq \sum_{\lambda \in \mathscr{E}'} \bar{e}_\lambda \cdot \bar{f}_\lambda \geqq \sum_{\lambda \in \mathscr{E}'} e_\lambda \cdot f_\lambda \geqq \sum_{C \in \mathscr{F}(L; B)} e(C \mid B) \cdot f(C \mid B)$$

überall das Gleichheitszeichen gilt. Anstelle des ersten (bzw. zweiten) Ungleichheitszeichen gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn die Bedingung c) (bzw. b))) erfüllt ist. Anstelle des dritten (bzw. vierten) Ungleichheitszeichen gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn die Erweiterung $(\bar{K}, \bar{B})$ von (K, B) L-ausgezeichnet (bzw. L-zulässig) ist.

Andere Bedingungen für die L-Defektfreiheit von (K, B) findet man unter anderem in [1], § 8, und [2], § 21.

Die Bedingung b) des Satzes (4. 1) ist für jeden über K endlich-separablen (bzw. -algebraischen) Körper L sicher dann erfüllt, wenn $(\bar{K}, \bar{B})$ defektfrei (bzw. stark defektfrei) ist. Daß $(\bar{K}, \bar{B})$ stets so gewählt werden kann, ergibt sich aus der folgenden bekannten Tatsache (vgl. [9], D, Th. 1, und G, Th. 1): Jeder bewertete Körper besitzt eine maximale unmittelbare Erweiterung; diese ist henselsch und stark defektfrei[6]).

Für das Folgende bezeichne $(\breve{K}, \breve{B})$ stets eine *defektfrei, henselsche, unmittelbare* Erweiterung von (K, B). Aus (4. 1) ergeben sich sofort die beiden folgenden Korollare.

(4. 2) Korollar. *Für jeden über K endlich-separablen Körper L sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(i) *(K, B) ist L-defektfrei.*

(ii) *Die Erweiterung $(\breve{K}, \breve{B})$ von (K, B) ist L-zulässig und L-ausgezeichnet.*

(4. 3) Korollar. *Genau dann ist (K, B) defektfrei, wenn die Erweiterung $(\breve{K}, \breve{B})$ von (K, B) zulässig und ausgezeichnet ist.*

Man beachte, daß es nicht-defektfreie bewertete Körper (K, B) gibt (vgl. das oben erwähnte Beispiel in [9], G); eine maximale Erweiterung eines solchen bewerteten Körpers

[6]) Zur Frage der eindeutigen Bestimmtheit der unmittelbaren maximalen Erweiterung vgl. [6].

kann also nicht gleichzeitig zulässig und ausgezeichnet sein. Sie ist sicher nicht zulässig, wenn (K, B) außerdem der Kaplanskyschen Hypothese A genügt (vgl. [6]), denn es gilt:

(4. 4) Satz. *Genügt (K, B) der Kaplanskyschen Hypothese A und ist die (bis auf K-Isomorphie eindeutig bestimmte)*[6]) *maximale Erweiterung $(\tilde{K}, \tilde{B})$ von (K, B) zulässig, so ist sie auch ausgezeichnet.*

Beweis. Für jedes über K endlich-separable L und jedes $C \in \mathscr{F}(L; B)$ folgt aus [3], Lemma 5, die Existenz eines $\lambda_C \in \mathscr{E}(L \mid K)$ derart, daß $(\lambda_C L \cdot \tilde{K}, \tilde{B})$ eine unmittelbare Erweiterung von $(\lambda_C L, \lambda_C C)$ und somit $C = C_{\lambda_C}$ ist, und dasselbe gilt ersichtlich auch für alle zu $\lambda_C \sim_{\hat{K}}$-äquivalenten $\lambda \in \mathscr{E}(L \mid K)$. Ist die Erweiterung $(\tilde{K}, \tilde{B})$ von (K, B) L-zulässig, so gibt es zu jedem $\lambda \in \mathscr{E}(L \mid K)$ ein $C \in \mathscr{F}(L; B)$ mit $\lambda \sim_{\tilde{K}} \lambda_C$, also ist $(\tilde{K}, \tilde{B})$ eine L-ausgezeichnete Erweiterung von (K, B).

Wir fragen noch nach Bedingungen für die Defektfreiheit von $(\check{K} \cap S(K), \check{B})$ sowie der Henselisierung von (K, B). Hierzu zeigen wir zunächst:

(4. 5) Hilfssatz. *Es sei L endlich-separabel über K und $\lambda \in \mathscr{E}(L \mid K)$. Dann gelten die Äquivalenzen* (i) & (iii) $\Leftrightarrow$ (i) & (iv) $\Leftrightarrow$ (ii) & (iv) *für die folgenden Bedingungen*:

(i) *(K, B) ist L-defektfrei.*

(ii) *Die Erweiterung $(\check{K}, \check{B})$ von (K, B) ist L-ausgezeichnet.*

(iii) $\# \mathscr{F}(L; B) = 1$.

(iv) *λL, $\bar{K}$ sind linear disjunkt über K.*

Beweis. (i) & (iii) $\Rightarrow$ (iv) folgt aus $[\lambda L \cdot \check{K} : \check{K}] = \check{e}_\lambda \cdot \check{f}_\lambda \geqq e_\lambda \cdot f_\lambda = [L : K] \geqq [L \cdot \check{K} : \check{K}]$. — (i) $\Rightarrow$ (ii) gilt nach (4. 2). — (ii) & (iv) $\Rightarrow$ (i) & (iii) folgt aus

$$e_\lambda \cdot f_\lambda = \check{e}_\lambda \cdot \check{f}_\lambda = [\lambda L \cdot \check{K} : \check{K}] = [L : K] \geqq \sum_{C \in \mathscr{F}(L; B)} e(C \mid B) \cdot f(C \mid B) \geqq e_\lambda \cdot f_\lambda .$$

Beachtet man, daß die Gleichung $\check{K} \cap S(K) = K$ genau dann gilt, wenn jeder über K endlich-separable Teilkörper L von Ω zu $\check{K}$ linear disjunkt über K ist, so erhält man aus Hilfssatz (4. 5) unmittelbar das erste der folgenden Korollare.

(4. 6) Korollar. *Es gelten die Äquivalenzen* (i) & (iii) $\Leftrightarrow$ (i) & (iv) $\Leftrightarrow$ (ii) & (iv) *für die folgenden Bedingungen*:

(i) *(K, B) ist defektfrei.*

(ii) *Die Erweiterung $(\check{K}, \check{B})$ von (K, B) ist ausgezeichnet.*

(iii) *(K, B) ist henselsch.*

(iv) $\check{K} \cap S(K) = K$.

(4. 7) Korollar. *Es sei $(K, B) \leqq (K', B') \leqq (\check{K}, B)$ mit $K' \leqq S(K)$. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent*:

(i) *(K', B') ist henselsch, defektfrei und eine ausgezeichnete Erweiterung von (K, B).*

(ii) *$K' = \check{K} \cap S(K)$, und $(\check{K}, \check{B})$ ist eine ausgezeichnete Erweiterung von (K, B).*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Nach (4. 6) ist $K' = \check{K} \cap S(K') = \check{K} \cap S(K)$, und $(\check{K}, \check{B})$ ist eine ausgezeichnete Erweiterung von (K', B'); wegen (3. 5) ist $(\check{K}, \check{B})$ auch eine ausgezeichnete Erweiterung von (K, B). — (ii) $\Rightarrow$ (i): Wegen $K' = \check{K} \cap S(K) = \check{K} \cap S(K')$ ist nach (1. 6) $(\check{K}, \check{B})$ eine zulässige Erweiterung von (K', B'), und (K', B') ist henselsch.

Nach (3. 5) ist $(\check{K}, \check{B})$ eine ausgezeichnete Erweiterung von (K', B') und (K', B') eine ausgezeichnete Erweiterung von (K, B). Nach (4. 6) ist (K', B') defektfrei.

Wendet man (4. 7) auf die henselsche Erweiterung $(K', B') = (\check{K} \cap S(K), \check{B})$ von (K, B) an, so erhält man unmittelbar:

(4. 8) Korollar. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent*:

(i) $(\check{K} \cap S(K), \check{B})$ *ist defektfrei und eine ausgezeichnete Erweiterung von* (K, B).

(ii) $(\check{K}, \check{B})$ *ist eine ausgezeichnete Erweiterung von* (K, B).

Die Anwendung von (4. 7) auf die in $(\check{K}, \check{B})$ enthaltene Henselisierung von (K, B) ergibt das folgende Korollar.

(4. 9) Korollar. *Genau dann ist* (K, B) *defektfrei, wenn die Henselisierung von* (K, B) *defektfrei ist.*

Beweis. Nach (1. 9) existiert eine Henselisierung $(\hat{K}, \hat{B})$ von (K, B) mit $(\hat{K}, \hat{B}) \leqq (\check{K}, \check{B})$ und $\hat{K} \leqq \check{K} \cap S(K)$. Da $(\hat{K}, \hat{B})$ henselsch und eine ausgezeichnete Erweiterung von (K, B) ist, ist nach (4. 7) und (1. 9) $(\hat{K}, \hat{B})$ genau dann defektfrei, wenn die Erweiterung $(\check{K}, \check{B})$ von (K, B) zulässig und ausgezeichnet ist. Nach (4. 3) trifft dies genau dann zu, wenn (K, B) defektfrei ist.

§ 5. Abgesättigte bewertete Körper. Antihenselsche bewertete Körper

Ist (K, B) ein bewerteter Körper und $D \in \mathfrak{F}(S(K); B)$, so ist $(S(K), D)$ eine henselsche Erweiterung von (K, B). Als Anwendung der vorhergehenden Untersuchungen wollen wir diejenigen (K, B) charakterisieren, für die diese Erweiterung unmittelbar bzw. ausgezeichnet bzw. zulässig bzw. eine Henselisierung ist.

(K, B) heißt *abgesättigt*, wenn die Wertgruppe Γ von B eine Divisionsgruppe und der Restklassenkörper Λ von B algebraisch-abgeschlossen ist.

(5. 1) Hilfssatz. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent*:

(i) (K, B) *ist abgesättigt.*

(ii) *Jede Erweiterung* (L, C) *von* (K, B) *derart, daß* L *endlich-separabel über* K *ist, ist unmittelbar.*

(iii) *Für jeden über* K *endlich-separablen Körper* L *derart, daß* $L \neq K$ *und* (K, B) L*-defektfrei ist, gilt* $\# \mathfrak{F}(L; B) > 1$.

In diesem Falle gilt (ii) (*bzw.* (iii)) *auch für jeden über* K *algebraischen* (*bzw. endlich-algebraischen*) *Körper* L.

Beweis. Ist (L, C) eine Erweiterung von (K, B) mit über K algebraischem L und bezeichnet Δ (bzw. M) die Wertgruppe (bzw. den Restklassenkörper) von C, so ist Δ/Γ eine Torsionsgruppe und $\mathsf{M} \mid \Lambda$ algebraisch (vgl. [2], § 10). Ist Γ eine Divisionsgruppe, so gilt $\Delta = \Gamma$, also $e(C \mid B) = 1$; ist Λ algebraisch-abgeschlossen, so gilt $\mathsf{M} = \Lambda$, also $f(C \mid B) = 1$. Daher impliziert (i) die Bedingungen (ii) und (iii) mit den am Schluß des Hilfssatzes angegebenen Verschärfungen. — Ist (K, B) nicht abgesättigt, so gibt es eine totalgeordnete Obergruppe Δ von Γ und einen Oberkörper M von Λ derart, daß $n = (\Delta : \Gamma) \cdot [\mathsf{M} : \Lambda] > 1$. Nach [3], Satz 1[7]), existiert eine Erweiterung (L, C) von (K, B)

[7]) Vgl. auch [2], (22. 6). Einen einfacheren Beweis dieses Existenzsatzes findet man in [5], Hilfssatz 12, der dort allerdings nur für einrangige Bewertungen formuliert ist.

mit den folgenden Eigenschaften: L ist separabel über K, $[L:K]=n$, $e(C\mid B)=(\Delta:\Gamma)$, $f(C\mid B)=[\mathsf{M}:\Lambda]$, $\mathscr{F}(L;B)=\{C\}$, und (K,B) ist L-defektfrei. Daher gelten (ii) $\Rightarrow$ (i) und (iii) $\Rightarrow$ (i).

Aus (5. 1) folgt sofort:

(5. 2) Korollar. *(K,B) ist abgesättigt, wenn K separabel-abgeschlossen ist.*

Es sei wieder $(\overline{K},\overline{B})$ eine henselsche Erweiterung von (K,B), und $\Omega=A(\overline{K})$. Wir bemerken, daß für „ausgezeichnet" keine zu (1. 5) analoge Aussage gilt. In der Tat, aus „$A(K)$-ausgezeichnet" kann man nicht einmal auf „K-ausgezeichnet" (= „unmittelbar") schließen, wie der folgende Hilfssatz zeigt. Wir verwenden dabei die folgenden Bezeichnungen: Γ, $\overline{\Gamma}$, $\overline{\Delta}$, Δ_λ, $\overline{\Delta}_\lambda$ (bzw. Λ, $\overline{\Lambda}$, $\overline{\mathsf{M}}$, M_λ, $\overline{\mathsf{M}}_\lambda$) bezeichnen die Wertgruppe (bzw. den Restklassenkörper) von B, $\overline{B}$, $I_\Omega(\overline{B})$, λC_λ, $\overline{C}_\lambda=I_{\lambda L\cdot\overline{K}}(\overline{B})$.

(5. 3) Hilfssatz. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

(i) *Die Erweiterung $(\overline{K},\overline{B})$ von (K,B) ist $A(K)$-ausgezeichnet.*

(ii) *Die Erweiterung $(\overline{K},\overline{B})$ von (K,B) ist $S(K)$-ausgezeichnet.*

(iii) *Die Erweiterung $(\overline{K},\overline{B})$ von (K,B) ist L-ausgezeichnet für einen über K algebraischen Körper L.*

(iv) *$\overline{\Gamma}/\Gamma$ ist eine Torsionsgruppe, und $\overline{\Lambda}$ ist algebraisch über Λ.*

Sie sind insbesondere dann erfüllt, wenn $(\overline{K},\overline{B})$ eine unmittelbare Erweiterung von (K,B) oder $\overline{K}$ algebraisch über K ist.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (iii) und (ii) $\Rightarrow$ (iii) sind trivial. — (iii) $\Rightarrow$ (iv): Für jedes $\lambda\in\mathscr{E}(L\mid K)$ haben wir $\Gamma\subseteq\overline{\Gamma}\subseteq\overline{\Delta}_\lambda=\Delta_\lambda$ und $\Lambda\subseteq\overline{\Lambda}\subseteq\overline{\mathsf{M}}_\lambda=\mathsf{M}_\lambda$. Da Δ_λ/Γ eine Torsionsgruppe und M_λ algebraisch über Λ ist, gilt (iv). — (iv) $\Rightarrow$ (ii): Wir setzen $L=S(K)$. Für jedes $\lambda\in\mathscr{E}(L\mid K)$ haben wir $\Gamma\subseteq\Delta_\lambda\subseteq\overline{\Delta}\supseteq\overline{\Gamma}\supseteq\Gamma$ und $\Lambda\subseteq\mathsf{M}_\lambda\subseteq\overline{\mathsf{M}}\supseteq\overline{\Lambda}\supseteq\Lambda$. Da $\overline{\Delta}/\overline{\Gamma}$ eine Torsionsgruppe (bzw. $\overline{\mathsf{M}}\mid\overline{\Lambda}$ algebraisch) ist, gilt wegen (iv) dasselbe für $\overline{\Delta}/\Gamma$ (bzw. $\overline{\mathsf{M}}\mid\Lambda$), und da $(\lambda L,\lambda C_\lambda)$ nach (5. 2) abgesättigt ist, folgt daraus $\Delta_\lambda=\overline{\Delta}$, $\mathsf{M}_\lambda=\overline{\mathsf{M}}$. — (iv) $\Rightarrow$ (i) beweist man analog.

(5. 4) Korollar. *Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

(i) *(K,B) ist abgesättigt, und die Erweiterung $(\overline{K},\overline{B})$ von (K,B) ist $A(K)$-ausgezeichnet.*

(ii) *$(\overline{K},\overline{B})$ ist abgesättigt, und die Erweiterung $(\overline{K},\overline{B})$ von (K,B) ist unmittelbar.*

In diesem Falle ist die genannte Erweiterung sogar stark ausgezeichnet.

Beweis. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) folgt unmittelbar aus (5. 3). — Für jedes über K algebraische L und jedes $\lambda\in\mathscr{E}(L\mid K)$ haben wir $(K,B)\subseteq(\lambda L,\lambda C_\lambda)\subseteq(\lambda L\cdot\overline{K},\overline{B})\subseteq(\Omega,I_\Omega(\overline{B}))$. Aus (ii) folgt $\overline{\Delta}=\overline{\Gamma}=\Gamma$, $\overline{\mathsf{M}}=\overline{\Lambda}=\Lambda$, also ist $(\lambda L\cdot\overline{K},\overline{B})$ eine unmittelbare Erweiterung von $(\lambda L,\lambda C_\lambda)$. Daher gilt die letzte Behauptung des Korollars.

Wendet man das Korollar (5. 4) auf die henselsche Erweiterung $(S(K),D)$ von (K,B) an, so erhält man die folgenden Charakterisierungen der abgesättigten bewerteten Körper.

(5. 5) Korollar. *Es sei $D\in\mathscr{F}(S(K);B)$. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

(i) *(K,B) ist abgesättigt.*

(ii) *Die Erweiterung $(S(K),D)$ von (K,B) ist stark ausgezeichnet.*

(iii) *Die Erweiterung $(S(K),D)$ von (K,B) ist unmittelbar.*

Der bewertete Körper (K, B) soll *antihenselsch* heißen, wenn $\# \mathfrak{F}(L; B) = [L: K]$ für jeden über K endlich-separablen Körper L gilt. Diese Forderung ist schärfer als die Abgesättigtkeit, wie der folgende Hilfssatz zeigt:

(5. 6) Hilfssatz. *Es gelten die Implikationen* (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) *für die folgenden Bedingungen*:

(i) (K, B) *ist antihenselsch.*

(ii) *Für jeden über K endlich-separablen Körper L mit $L \neq K$ gilt* $\# \mathfrak{F}(L; B) > 1$.

(iii) (K, B) *ist abgesättigt.*

Falls B einrangig ist, gilt sogar (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) ist trivial. — (ii) $\Rightarrow$ (iii) folgt aus (5. 1). — Einen Beweis von (ii) $\Rightarrow$ (i) im Falle eines einrangigen Bewertungsringes B findet man in [5], Korollar zu Satz 3.

Der folgende Satz gibt verschiedene Charakterisierungen der antihenselschen bewerteten Körper an.

(5. 7) Satz. *Es sei $D \in \mathfrak{F}(S(K); B)$. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent*:

(i) (K, B) *ist antihenselsch.*

(ii) $S(K) \subseteq \overline{K}$, *und die Erweiterung* $(\overline{K}, \overline{B})$ *von* (K, B) *ist zulässig.*

(iii) $Z(D; K) = S(K)$.

(iv) $(S(K), D)$ *ist eine Henselisierung von* (K, B).

(v) *Die Erweiterung* $(S(K), D)$ *von* (K, B) *ist zulässig.*

(vi) (K, B) *ist abgesättigt und defektfrei.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Für jedes über K endlich-separable L gilt nach (1. 2) $\# \mathfrak{F}(L; B) \leqq \# \mathfrak{E}_{\overline{K}}(L \mid K) \leqq \# \mathfrak{E}_{\Omega}(L \mid K) = \# \mathfrak{E}(L \mid K) = [L: K]$, und nach Voraussetzung ist $[L: K] = \# \mathfrak{F}(L; B)$. Daher ist $(\overline{K}, \overline{B})$ L-zulässig, und nach (1. 1) gilt

$$S(K) \subseteq \Omega \cap S(K) = \overline{K} \cap S(K) \subseteq \overline{K}. \text{ —}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Nach (1. 9) ist $(S(K), \overline{B})$ eine Henselisierung von (K, B), also ist $S(K) = Z(\overline{B} \cap S(K); K)$. Es gibt ein $\sigma \in \mathfrak{G}(S(K) \mid K)$ mit $D = \sigma(\overline{B} \cap S(K))$, also ist $Z(D; K) = \sigma S(K) = S(K)$. — (iii) $\Rightarrow$ (iv) ist trivial. — (iv) $\Rightarrow$ (v) gilt nach (1. 8). — (v) $\Rightarrow$ (i): Für jedes über K endlich-separable L gilt nach (1. 1)

$$\mathfrak{E}_{S(K)}(L \mid K) = \mathfrak{E}_{\Omega}(L \mid K) = \mathfrak{E}(L \mid K)$$

und somit $\# \mathfrak{E}_{S(K)}(L \mid K) = \# \mathfrak{E}(L \mid K) = [L: K]$, und nach Voraussetzung ist $\# \mathfrak{F}(L; B) = \# \mathfrak{E}_{S(K)}(L \mid K)$. — (iv) $\Rightarrow$ (vi): Wegen (3. 1) und (5. 5) ist (K, B) abgesättigt, und da $(S(K), D)$ trivialerweise defektfrei ist, ist nach (4. 9) auch (K, B) defektfrei. — (vi) $\Rightarrow$ (v): Nach (5. 5) ist $(S(K), D)$ eine unmittelbare Erweiterung von (K, B). Nach (4. 3), angewandt auf $(\check{K}, \check{B}) = (S(K), D)$, folgt (v) aus der Defektfreiheit von (K, B).

Wir bemerken noch, daß man die Äquivalenz (i) $\Leftrightarrow$ (vi) auch direkt mit Hilfe der fundamentalen Ungleichung beweisen kann.

Wir vermuten, daß nicht jeder abgesättigte bewertete Körper defektfrei und somit antihenselsch ist, kennen aber kein Gegenbeispiel.

Der Vollständigkeit halber erwähnen wir noch: Ist (K, B) henselsch mit einrangigem Bewertungsring B, so ist (K, B') antihenselsch für jeden von B verschiedenen einrangigen Bewertungsring B' von K (vgl. [2], (27. 10), oder [5], Korollar 2 zu Satz 5). Insbesondere kann ein nicht separabel-abgeschlossener Körper höchstens einen einrangigen henselschen Bewertungsring besitzen.

Literatur

[1] *N. Bourbaki*, Algèbre Commutative, chap. 6. Paris 1964.

[2] *O. Endler*, Bewertungstheorie. Unter Benutzung einer Vorlesung von W. Krull. Bonner Math. Schriften Nr. 15, Bde. 1—2 (1963).

[3] *O. Endler*, Über einen Existenzsatz der Bewertungstheorie. Math. Ann. **150** (1963), 54—65.

[4] *O. Endler*, A note on henselian valuation rings. Canad. Math. Bull. **11** (1968), 185—189.

[5] *O. Endler*, Endliche separable Körpererweiterungen mit vorgeschriebenen Bewertungsfortsetzungen. I. Abhandl. Math. Sem. Univ. Hamburg **33** (1969), 80—101.

[6] *I. Kaplansky*, Maximal fields with valuations. Duke Math. J. **9** (1942), 303—321.

[7] *A. Ostrowski*, Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper. (Die Theorie der Teilbarkeit in allgemeinen Körpern). Teile I—III. Math. Z. **39** (1934), 269—404.

[8] *P. Ribenboim*, Corps Maximaux et Complets par des Valuations de Krull. Math. Z. **69** (1958), 466—479.

[9] *P. Ribenboim*, Théorie des valuations. Les Presses de l'Université de Montréal, 1964.

[10] *P. Roquette*, On the prolongation of valuations. Trans. Am. Math. Soc. **88** (1958), 42—56.

[11] *J.-P. Serre*, Cohomologie Galoisienne. Lecture Notes in Mathematics **5**, Berlin-Heidelberg-New York 1964.

[12] *E. Weiss*, Algebraic Number Theory. New York 1963.

Mathematisches Institut der Universität Bonn, 53 Bonn, Wegelerstraße 10

Eingegangen 20. März 1969

Einige Endlichkeitsbedingungen für Gruppen

Von *Wilfried Brauer* in Bonn

Herrn Professor Dr. Wolfgang Krull zum 70. Geburtstag

P. Vámos führte in [9] den Begriff des endlich eingebetteten Moduls als dualen Begriff zum endlich erzeugten Modul ein. Damit ist auch für abelsche Gruppen der duale Begriff zu „endlich erzeugt" erklärt; jedoch ergibt sich aus [9] (Theorem 2) (siehe auch Satz 12 der vorliegenden Arbeit), daß eine abelsche Gruppe genau dann endlich eingebettet ist, wenn sie die Minimalbedingung für Untergruppen erfüllt, so daß dieser Begriff hier nichts Neues liefert. Auf beliebige (nicht abelsche) Gruppen läßt sich jedoch die Definition von Vámos nicht übertragen, wohl aber eine (für Moduln) dazu äquivalente (vgl. [9], Prop. 1*). Es handelt sich dabei um eine abgeschwächte Minimalbedingung für Untermoduln; für Gruppen ergeben sich daraus mehrere Endlichkeitsbedingungen, die zum Begriff „endlich erzeugt" in gewissem Sinne dual sind. Zuerst führen wir drei Endlichkeitsbedingungen ein, später (Abschnitt 1 und 5) geben wir noch weitere an.

Zunächst vereinbaren wir noch: Eine Familie $\{H_i \mid I\}$ von Untergruppen der Gruppe G heiße *invers*, wenn jedes $H_i \neq 1$ ist und zu je endlich vielen $i_1, \ldots, i_n$ aus I ein i_0 aus I so existiert, daß

$$H_{i_0} \leqq H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_n}$$

ist; die inverse Familie $\{H_i \mid I\}$ heiße beschränkt durch die Untergruppe H von G, wenn $H \leqq H_i$ für alle $i \in I$ gilt.

Wir definieren nun:

1. Die Gruppe G heiße invers beschränkt (i. b.), wenn jede inverse Familie von Untergruppen von G durch eine nichttriviale Untergruppe von G beschränkt ist.

2. Die Gruppe G heiße invers subnormal beschränkt (i. s. b.), wenn jede inverse Familie von Subnormalteilern von G durch einen nichttrivialen Subnormalteiler von G beschränkt ist.

3. Die Gruppe G heiße invers normal beschränkt (i. n. b.), wenn jede inverse Familie von Normalteilern von G durch einen nichttrivialen Normalteiler von G beschränkt ist.

In den Abschnitten 1, 2 und 6 werden Beziehungen dieser Endlichkeitsbedingungen zueinander und zu den entsprechenden Minimalbedingungen untersucht; dabei ergibt sich unter anderem,

daß die Gruppe G i. b. (bzw. i. s. b. bzw. i. n. b.) ist, wenn sie einen Normalteiler N besitzt, so daß G/N und N beide i. b. (bzw. i. s. b. bzw. i. n. b.) sind,

daß eine Gruppe genau dann die Minimalbedingung für Normalteiler erfüllt, wenn jede ihrer Faktorgruppen i. n. b. ist (was der bekannten Aussage entspricht, daß eine Gruppe genau dann die Maximalbedingung für Untergruppen erfüllt, wenn jede ihrer Untergruppen endlich erzeugt ist),

daß nicht nur abelsche, sondern auch fast abelsche und auflösbare Gruppen, die i. b. sind, die Minimalbedingung für Untergruppen erfüllen und daß eine fast abelsche Gruppe der Minimalbedingung für Untergruppen genügt, wenn sie und jede ihrer Faktorgruppen nach einem endlichen Normalteiler i. n. b. ist (was einen Satz von Baer [2], Prop. 4. 1 verschärft).

In den Abschnitten 4 und 5 befassen wir uns mit dem Sockel von Gruppen, die i. n. b., i. s. b. oder i. b. sind, und zeigen unter anderem in Verschärfung des Satzes von Remak über den Sockel von Gruppen mit Minimalbedingung für Untergruppen (vgl. [7], Kap. 2. 3, Satz 29): Jeder Normalteiler der Gruppe G ist i. n. b. genau dann, wenn für jeden Normalteiler $N \neq 1$ von G gilt: der Sockel $S(N)$ von G ist direkte Summe endlich vieler einfacher Untergruppen und für jeden Normalteiler $M \neq 1$ von N ist $S(N) \cap M \neq 1$. Ferner ergibt sich entsprechend dem bekannten Satz, daß eine endlich erzeugte Gruppe für jede natürliche Zahl n nur endlich viele Untergruppen vom Index n besitzt, daß eine Gruppe, deren jeder Normalteiler i. n. b. ist, nur endlich viele minimale Normalteiler besitzt; unter einer etwas verschärften Voraussetzung gilt auch, daß G für jede natürliche Zahl n nur endlich viele Normalteiler der Ordnung n besitzt.

Bezeichnungen. G bedeute stets eine (im allgemeinen unendliche) Gruppe (multiplikativ geschrieben); mit 1 wird sowohl das Einselement einer Gruppe als auch die nur aus dem Einselement bestehende Gruppe bezeichnet.

$U < G$ bedeute: U ist Untergruppe von G.

$N \lhd G$ bedeute: N ist Normalteiler von G.

$T \lhd\lhd G$ bedeute: T ist Subnormalteiler von G, d. h. es gibt eine (endliche) Normalreihe $T = N_0 \lhd N_1 \lhd \cdots \lhd N_n = G$ von T nach G.

$H < G$ heißt minimale Untergruppe (bzw. Subnormalteiler bzw. Normalteiler) von G, wenn $H \neq 1$ ist und keine von 1 und H verschiedene Untergruppe (bzw. Subnormalteiler bzw. Normalteiler) von G enthält. Offenbar ist eine minimale Untergruppe von G primzyklisch und ein minimaler Subnormalteiler von G einfach.

G erfüllt die Minimalbedingung (bzw. Maximalbedingung) für Untergruppen (bzw. Subnormalteiler bzw. Normalteiler), wenn jede nichtleere Menge von Untergruppen (bzw. Subnormalteilern bzw. Normalteilern) von G ein minimales (bzw. maximales) Element besitzt. Eine Gruppe mit Minimalbedingung für Untergruppen (bzw. Subnormalteiler bzw. Normalteiler) ist natürlich i. b. (bzw. i. s. b. bzw. i. n. b.).

$\langle X_i \mid I \rangle$ bezeichne die von den Teilmengen X_i von G erzeugte Untergruppe von G.

$G = H + F$ bedeute: G ist direkte Summe der Untergruppen H und F, d. h. es ist $H \cap F = 1$, $H \lhd G$, $F \lhd G$ und $G = \langle H, F \rangle$ (vgl. hierzu und bzgl. der folgenden Bezeichnungen [7]).

$\sum \{H_i \mid I\}$ sei die direkte Summe der Untergruppen H_i von G.

$\bigcap \{M_i \mid I\}$ sei der Durchschnitt aller Mengen M_i, $i \in I$; analog wird die Vereinigung bezeichnet.

1. In diesem Abschnitt werden einige einfache Eigenschaften invers beschränkter (bzw. i. s. b. bzw. i. n. b.) Gruppen angegeben.

Es ist klar: Ist G i. b. (bzw. i. s. b.), so auch jede Untergruppe (bzw. Subnormalteiler). Der Durchschnitt der Untergruppen (bzw. Normalteiler) einer inversen Familie einer i. b. (bzw. i. n. b.) Gruppe ist eine nichttriviale Untergruppe (bzw. Normalteiler).

Satz 1. *Ist G i. b. (bzw. i. s. b. bzw. i. n. b.), so enthält jede nichttriviale Untergruppe (bzw. Subnormalteiler bzw. Normalteiler) von G eine minimale Untergruppe (bzw. Subnormalteiler bzw. Normalteiler) von G.*

Beweis. Wir betrachten nur i. b. Gruppen (die anderen Fälle beweist man analog) und brauchen wegen der obigen Bemerkung nur zu zeigen, daß sie minimale Untergruppen besitzen. Da jede fallende Folge nichttrivialer Untergruppen der i. b. Gruppe G als inverse Familie durch eine nichttriviale Untergruppe beschränkt ist, besitzt aufgrund des Zornschen Lemmas die Menge aller nichttrivialen Untergruppen von G ein minimales Element, d. h. G eine minimale Untergruppe.

Korollar. *Eine i. b. Gruppe ist periodisch.*

Eine periodische Gruppe braucht jedoch nicht i. b. zu sein, denn es gibt bekanntlich unendliche periodische Gruppen, die endlich approximierbar sind und deshalb, wie sich gleich ergeben wird (siehe Satz 2), nicht i. n. b. und damit auch nicht i. b. sein können (siehe Lemma 1).

Bezeichnen wir mit $J(G)$ den Durchschnitt von G mit allen Normalteilern von endlichem Index in G, so heißt G bekanntlich *endlich approximierbar*, wenn $J(G) = 1$ ist, und es gilt in Verallgemeinerung der bekannten Tatsache, daß für Gruppen G mit Minimalbedingung für Normalteiler $J(G)$ endlichen Index in G hat:

Satz 2. *Ist G i. n. b. und endlich approximierbar, so ist G endlich.*

Beweis. Da der Durchschnitt endlich vieler Normalteiler von endlichem Index in G endlichen Index in G hat, ist für unendliches G die Menge aller Normalteiler von endlichem Index in G eine inverse Familie von G; da G i. n. b. ist, müßte deshalb $J(G) \neq 1$ sein, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist G endlich.

Lemma 1. *Ist G i. b. (bzw. i. s. b.), so ist jede nichttriviale Untergruppe (bzw. Subnormalteiler) von G i. n. b.*

Beweis. Wir betrachten wieder nur den Fall, daß G i. b. ist. Dann ist aufgrund obiger Bemerkung nur zu zeigen, daß G i. n. b. ist. Eine inverse Familie von Normalteilern von G ist nach Voraussetzung durch eine Untergruppe $H \neq 1$ beschränkt, so daß der Durchschnitt aller Normalteiler der Familie ein nichttrivialer Normalteiler von G ist. Deshalb ist G i. n. b.

Daß eine i. b. Gruppe auch i. s. b. ist, kann man wohl nur unter der Voraussetzung zeigen, daß der Durchschnitt einer fallenden Folge von Subnormalteilern von G ein Subnormalteiler von G ist.

Korollar. *Sei G i. b. (bzw. i. s. b.). Dann enthält jede nichttriviale Untergruppe (bzw. Subnormalteiler) H von G einen minimalen Normalteiler von H.*

Ist G i. n. b., so enthält jeder nichttriviale Normalteiler von G aber im allgemeinen nur einen minimalen Normalteiler von G. Es liegt daher nahe, noch folgende Verschärfung des Begriffs der i. n. b. Gruppe einzuführen.

Definition 1. G heiße stark i. n. b. (s. i. n. b.), wenn jeder nichttriviale Normalteiler von G i. n. b. ist.

Aufgrund von Satz 1 liegt in jedem nichttrivialen Normalteiler $N \neq 1$ einer s. i. n. b. Gruppe ein minimaler Normalteiler von N, und nach Lemma 1 ist eine Gruppe s. i. n. b., wenn sie i. b. oder i. s. b. ist.

2. Entsprechend dem bekannten Satz, daß eine Gruppe G mit dem Normalteiler N endlich erzeugt ist, falls N und G/N es sind, erhalten wir (vgl. auch [9], Prop. 3*):

Satz 3. *Sei $N \lhd G$ sowie N und G/N i. b. (bzw. i. s. b. bzw. s. i. n. b. bzw. i. n. b.). Dann ist auch G i. b. (bzw. i. s. b. bzw. s. i. n. b. bzw. i. n. b.).*

Beweis. Sei G i. b. und $\{H_i \mid I\}$ eine inverse Familie von Untergruppen von G. Ist $H_i \cap N \neq 1$ für alle i aus I, so ist $\{H_i \cap N \mid I\}$ eine inverse Familie von Untergruppen von N, also durch eine nichttriviale Untergruppe H von N beschränkt, so daß auch die Familie der H_i durch H beschränkt ist. Gibt es dagegen ein i in I mit $H_i \cap N = 1$, dann ist mit $J = I \setminus \{i\}$ und $H_j' = H_i \cap H_j$ für j aus J die Familie $\{H_j' \mid J\}$ eine inverse Familie von Untergruppen von H_i. Wegen $H_i \cap N = 1$ ist H_i zu einer Untergruppe der i. b. Gruppe G/N isomorph, also selbst i. b., so daß die Familie der H_j' und damit auch die der H_i durch eine Untergruppe $\neq 1$ von G beschränkt ist. Eine inverse Untergruppenfamilie von G ist also stets durch eine nichttriviale Untergruppe beschränkt, d. h. G ist i. b.

Für die anderen Eigenschaften läuft der Beweis analog; nur bei der Eigenschaft i. n. b. muß man im zweiten Fall des Beweises beachten, daß H_i nicht i. n. b. zu sein braucht. Da in diesem Fall $\{H_j' N/N \mid J\}$ eine in $H_i N/N$ liegende inverse Familie von Normalteilern von G/N ist, ist sie durch einen nichttrivialen Normalteiler von G/N beschränkt, und wegen $H_i \cong H_i N/N$ ist dann auch die Familie der $H_j' \cong H_j' N/N$ durch einen nichttrivialen Normalteiler von G beschränkt.

Korollar. *Sei $T \lhd\lhd G$ und $T = N_0 \lhd N_1 \lhd \cdots \lhd G = N_n$ eine Normalreihe von T nach G. Sind dann T und N_i/N_{i-1} für $i = 1, \ldots, n$ i. s. b., so ist auch G i. s. b.*

Für die Eigenschaft i. n. b. gilt eine der Tatsache entsprechende Aussage, daß eine Gruppe genau dann die Maximalbedingung für Untergruppen erfüllt, wenn jede ihrer Untergruppen endlich erzeugt ist (vgl. auch [9], Prop. 2*).

Satz 4. *G erfüllt genau dann die Minimalbedingung für Normalteiler, wenn jede Faktorgruppe von G i. n. b. ist.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß G die Minimalbedingung für Normalteiler erfüllt, wenn jede Faktorgruppe von G i. n. b. ist, und das geht mit dem gleichen Schluß wie in [9]. Sei nämlich $N_1 > N_2 > \cdots$ eine fallende Folge von Normalteilern von G und $N = \bigcap \{N_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$. Dann ist $\bigcap \{N_i/N \mid i = 1, 2, \ldots\} = 1$, und da G/N i. n. b. ist, muß also ein k so existieren, daß $N = N_k$ ist, d. h. die Folge nach endlich vielen Gliedern abbricht. Aus dem Abbrechen sämtlicher fallender Folgen von Normalteilern von G folgt bekanntlich die Gültigkeit der Minimalbedingung für Normalteiler.

Die analoge Aussage für Gruppen mit Minimalbedingung für Subnormalteiler können wir nur unter einer allerdings notwendigen Zusatzvoraussetzung beweisen.

Satz 5. *G erfüllt genau dann die Minimalbedingung für Subnormalteiler, wenn der Durchschnitt jeder fallenden Folge von Subnormalteilern von G subnormal in G und jede Faktorgruppe jedes Subnormalteilers von G i. s. b. ist.*

Beweis. Es genügt wieder, nur den „dann-Teil" der Behauptung zu beweisen. Sei also $T_1 > T_2 > \cdots$ eine fallende Folge von Subnormalteilern von G. Dann ist nach Voraussetzung $T = \bigcap \{T_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ ein Subnormalteiler von G, so daß es eine Normal-

reihe $T \lhd N_1 \lhd \cdots \lhd N_n = G$ von T nach G gibt. $\{N_1 \cap T_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ ist eine inverse Familie von Subnormalteilern von N_1 mit dem Durchschnitt T, und da nach Voraussetzung N_1/T i. s. b. ist, schließt man wie beim Beweis von Satz 4, daß ein k mit $N_1 \cap T_k = T$ existieren muß. Es ist dann $T \lhd N_2 \cap T_k$, und $\{N_2 \cap T_i \mid i = k, k+1, \ldots\}$ ist eine inverse Familie von Subnormalteilern von $N_2 \cap T_k$ mit dem Durchschnitt T, so daß man aus der Voraussetzung, daß $(N_2 \cap T_k)/T$ i. s. b. ist, die Existenz eines $m \geqq k$ mit $N_2 \cap T_m = T$ folgern kann usw., was den Satz beweist.

3. Die folgenden Lemmata sind wichtig für die weiteren Untersuchungen.

Lemma 2. *Sei G i. n. b. und $\{N_i \mid I\}$ eine Familie von Normalteilern von G so, daß die direkte Summe $\sum \{N_i \mid I\}$ existiert. Dann ist I endlich.*

Beweis. Sei $N^i = \sum \{N_j \mid j \neq i, j \in I\}$ für jedes i aus I. Ist I nicht endlich, dann ist für je endlich viele $i_1, \ldots, i_n$ aus I offenbar

$$N^{i_1} \cap \cdots \cap N^{i_n} = \sum \{N_i \mid i \in I \setminus \{i_1, \ldots, i_n\}\} \neq 1.$$

Also ist $\{\bigcap \{N^i \mid i \in E\} \mid E \text{ endlich}, E \subseteqq I\}$ eine inverse Familie von Normalteilern von G und somit durch einen Normalteiler $N \neq 1$ beschränkt. Andererseits ist aber $N \subseteqq \bigcap \{N^i \mid I\} = 1$, so daß I nicht unendlich sein kann.

Aus diesem Lemma erhalten wir sofort eine Verallgemeinerung eines für Gruppen mit Minimalbedingung für Untergruppen geltenden Satzes (vgl. [7], 4. 7. 1).

Korollar. *Ist G s. i. n. b. (oder i. s. b. oder i. b.), so ist jeder minimale Normalteiler von G direkte Summe endlich vieler einfacher, untereinander in G konjugierter Untergruppen.*

Beweis. Ein minimaler Normalteiler N von G enthält nach Abschnitt 1 stets einen minimalen Normalteiler T von N. Dann ist bekanntlich T einfach, und N direkte Summe von zu T konjugierten Untergruppen (vgl. [7], 4. 4. 3); nach Lemma 2 muß diese Summe endlich sein.

Das folgende bekannte Lemma (vgl. [7], 4. 4. 1) werden wir des öfteren benutzen.

Lemma 3. *Sei $\mathfrak{M}$ eine Menge von Untergruppen von G und $H < G$. Dann existiert eine Teilmenge $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{M}$, die maximal ist bezüglich der Existenz von $H + \sum \{U \mid U \in \mathfrak{T}\}$.*

Mit Hilfe dieses Lemmas erhalten wir eine für das folgende recht wichtige und wohl auch an sich interessante Aussage.

Lemma 4. *Sei H eine direkte Summe minimaler Normalteiler von G, $N \lhd G$, $N \subseteqq H$, und jeder in N liegende Normalteiler von G enthalte einen minimalen Normalteiler von G. Dann ist N ein direkter Summand von H, d. h. $H = N + M$, und N und M sind beide direkte Summen minimaler Normalteiler von G.*

Beweis. Nach Lemma 3 gibt es eine maximale Menge $\mathfrak{M}$ von in H enthaltenen minimalen Normalteilern von G so, daß $S = N + \sum \{T \mid T \in \mathfrak{M}\}$ existiert. Gäbe es einen in H liegenden minimalen Normalteiler T' von G mit $T' \nsubseteqq S$, so müßte wegen $S \lhd G$ dann $T' \cap S = 1$ sein, so daß $S + T'$ existierte, im Widerspruch zur Maximalität von $\mathfrak{M}$. Deshalb ist $H = S$. Zum Beweis des Lemmas fehlt nun doch der Nachweis, daß N eine direkte Summe minimaler Normalteiler von G ist. Sei also R der von allen in N liegenden minimalen Normalteilern von G erzeugte Normalteiler. Wie oben schließt man mit Hilfe von Lemma 3, daß R direkte Summe minimaler Normalteiler von G ist. Aus dem oben Bewiesenen folgt auch, daß R direkter Summand von H, d. h. $H = R + M$ und $M \lhd G$ ist. Wäre $N \cap M \neq 1$, so müßte $N \cap M$ nach Voraussetzung einen minimalen Normalteiler von G enthalten, der dann in M und R liegen müßte, was wegen

$R \cap M = 1$ nicht möglich ist. Also existiert $N + M$, und wegen $R \leqq N$ ist $N + M = H$. Daraus folgt $N = R$, womit das Lemma bewiesen ist.

Die Voraussetzung über N in Lemma 4 ist sicher erfüllt, wenn G i. n. b. ist.

Schließlich brauchen wir noch eine Verschärfung von Lemma 3 und eines bekannten Satzes über direkte Summen einfacher nichtabelscher Gruppen (vgl. [7], 4. 4. 6).

Lemma 5. *Sei $\{M_i \mid I\}$ eine (beliebige) Familie nichtabelscher minimaler Normalteiler von G. Dann existiert die direkte Summe $S = \sum \{M_i \mid I\}$, und jeder in S liegende nichttriviale Normalteiler von G ist direkte Summe gewisser der M_i.*

Beweis. Sei $H = \langle M_i \mid I \rangle$. Aus Lemma 3 ergibt sich mit dem bekannten (beim Beweis von Lemma 4 angewandten) Schluß, daß eine Teilmenge J von I so existiert, daß $H = \sum \{M_j \mid J\}$ ist. Wir zeigen, daß jeder in H liegende Normalteiler $N \neq 1$ von G direkte Summe gewisser M_j mit j aus J ist (in Analogie zum Beweis von [7], 4. 4. 6).

Sei $K = \{j \mid j \in J,\ M_j \leqq N\}$ und $S' = \sum \{M_k \mid k \in K\}$. Angenommen, es sei $N \neq S'$. Dann gibt es ein $x \neq 1$ in $N \setminus S'$. Als Element von H hat x die Darstellung $x = x_1 \cdots x_r$ mit $1 \neq x_n \in M_{j_n}$ und $j_n \notin K$ für $n = 1, \ldots, r$. Da das Zentrum $Z(M_{j_1})$ von M_{j_1} trivial sein muß, existiert ein y_1 in M_{j_1} mit $y_1 x_1 \neq x_1 y_1$, d. h. mit $[x_1, y_1] = x_1^{-1} y_1^{-1} x_1 y_1 \neq 1$. Weil M_{j_1} direkter Summand von H ist, gilt $[x, y_1] = x^{-1} y_1^{-1} x y_1 = x_1^{-1} y_1^{-1} x_1 y_1 = [x_1, y_1]$, und wegen $x \in N \lhd G$ ist $[x, y_1] \in N$. Daraus folgt $[x_1, y_1] \in M_{j_1} \cap N$, so daß $M_{j_1} \cap N \neq 1$ im Widerspruch zur Minimalität von M_{j_1} ist. Also ist $S' = N$.

Ist speziell $N = M_i$ für i aus I, so muß aufgrund des eben Bewiesenen $i \in J$ sein; somit ist $J = I$ und das Lemma bewiesen.

4. Wir werden uns jetzt mit dem Sockel von i. n. b. Gruppen beschäftigen. Der *Sockel* $S(G)$ einer Gruppe G ist definiert als das Erzeugnis aller minimalen Normalteiler von G und deshalb (nach Lemma 3) direkte Summe gewisser minimaler Normalteiler von G (vgl. [7], 7. 4. 11). Daraus ergibt sich mit Satz 1 und den Lemmata 2 und 4 eine Verschärfung des Satzes von Remak über den Sockel von Gruppen mit Minimalbedingung für Untergruppen (vgl. [8], Kap. 2. 3, Satz 29).

Satz 6. *Ist G i. n. b., so gilt für jeden Normalteiler $N \neq 1$ von G: $N \cap S(G) \neq 1$, $S(G) = (N \cap S(G)) + R$, und $N \cap S(G)$ und R sind direkte Summen endlich vieler minimaler Normalteiler von G.*

Aufgrund von Lemma 1 und des Korollars zu Lemma 2 folgt aus Satz 6 für s. i. n. b. Gruppen sogar

Korollar 1. *Ist G s. i. n. b. (oder i. s. b. oder i. b.), so gilt die Aussage von Satz 6 mit der Verschärfung, daß $N \cap S(G)$ und R auch direkte Summen endlich vieler einfacher Untergruppen sind.*

Aus diesem Korollar ergibt sich gleich noch eine Beziehung zwischen $S(N)$ und $S(G)$ für einen beliebigen Normalteiler N einer s. i. n. b. Gruppe G.

Korollar 2. *Sei G s. i. n. b. und $1 \neq N \lhd G$. Dann ist*

$$S(N) \geqq N \cap S(G) \neq 1.$$

Beweis. Aufgrund des Korollars 1 ist $N \cap S(G) \neq 1$ und direkte Summe minimaler Normalteiler von G. Sei M einer von diesen. Wegen $M \lhd N$ enthält M einen minimalen Normalteiler T von N, und aufgrund der Minimalität von M ist $\langle g^{-1} T g \mid g \in G \rangle = M$, so daß $N \cap S(G)$ von minimalen Normalteilern von N erzeugt wird.

Insbesondere gilt also: Ist G s. i. n. b. und $N \lhd G$ mit $1 \neq N \leqq S(G)$, dann ist $S(N) = N$.

In Analogie zu einem Begriff aus der Theorie der Moduln (vgl. [5]) geben wir folgende

Definition 2. *Ist $N \lhd G$, d. h. ist G eine Erweiterung von N, so heißt G eine wesentliche (bzw. s-wesentliche bzw. n-wesentliche) Erweiterung von N, wenn für jede Untergruppe (bzw. Subnormalteiler bzw. Normalteiler) H von G gilt $H \cap N \neq 1$.*

Wir wollen hier nur darauf hinweisen, daß sich einige Sätze aus [5] auf die soeben definierten Begriffe übertragen lassen, so daß z. B. eine Gruppe N genau dann keine n-wesentliche Erweiterung besitzt, wenn sie direkter Summand in jeder Erweiterung ist — bekanntlich haben vollständige Gruppen diese Eigenschaft.

Mit Hilfe des Begriffs der n-wesentlichen Erweiterung können wir eine abgeschwächte Form von Satz 6 auch so formulieren: Ist G i. n. b., so ist $S(G)$ i. n. b., und G ist n-wesentliche Erweiterung von $S(G)$. Von dieser Aussage gilt auch die Umkehrung, denn ist $\{N_i \mid I\}$ eine inverse Familie von Normalteilern von G, so ist $\{N_i \cap S(G) \mid I\}$ nach Voraussetzung eine inverse Familie von Normalteilern von $S(G)$ und also beschränkt, so daß auch die Familie der N_i durch einen nichttrivialen Normalteiler von G beschränkt ist; damit ist G i. n. b., und wir haben:

Korollar 3. *G ist genau dann i. n. b., wenn $S(G)$ i. n. b. und G n-wesentliche Erweiterung von $S(G)$ ist.*

Die obige Überlegung zeigt auch, daß jede n-wesentliche Erweiterung einer i. n. b. Gruppe wieder i. n. b. ist; genau so zeigt man, daß jede s-wesentliche (bzw. wesentliche) Erweiterung einer i. s. b. (bzw. i. b.) Gruppe wieder i. s. b. (bzw. i. b.) ist.

Für die Eigenschaft s. i. n. b. können wir die Aussage von Korollar 3 beträchtlich verbessern und zu einer Charakterisierung der s. i. n. b. Gruppen kommen, die analog ist zu einem Resultat in [9] (Lemma 1 in Verbindung mit Proposition 1*); in diesem Abschnitt beweisen wir nur eine Hälfte der Aussage, die andere ergibt sich erst im nächsten Abschnitt.

Satz 7. *G ist s. i. n. b., wenn für jeden Normalteiler $N \neq 1$ von G gilt: $S(N)$ ist nichtleere direkte Summe endlich vieler einfacher Untergruppen, und N ist eine n-wesentliche Erweiterung von $S(N)$.*

Beweis. Sei $1 \neq N \lhd G$. Mit $S(N)$ ist bekanntlich auch jeder Normalteiler T von N mit $1 \neq T \leqq S(N)$ direkte Summe endlich vieler einfacher Untergruppen. Wir zeigen als erstes, daß in jeder Darstellung von T als direkte Summe einfacher Untergruppen, die Anzahl der direkten Summanden die gleiche ist; diese Zahl nennen wir die Länge $l(T)$ von T.

Sei $T = H_1 + \cdots + H_m$ und jedes H_i einfach. Die Numerierung sei dabei so gewählt, daß H_i für $1 \leqq i \leqq k$ abelsch, also primzyklisch, und H_i für $k+1 \leqq i \leqq m$ nichtabelsch ist. Ferner sei $T_a = H_1 + \cdots + H_k$ und $T_n = H_{k+1} + \cdots + H_m$. Dann liegt jeder einfache Normalteiler H von T entweder in T_a oder in T_n, denn ist etwa H abelsch und wäre $H \nleqq T_a$, so existierte $T_a + H$, was unmöglich ist, da $T/T_a \cong T_n$ als direkte Summe nichtabelscher einfacher Gruppen bekanntlich (vgl. [7], 4. 4. 6) keinen abelschen Normalteiler enthalten kann — analog schließt man, daß $H \leqq T_n$ ist, wenn H nichtabelsch ist. Nach Lemma 5 ist daher $m - k = l(T_n)$ die Anzahl aller nichtabelschen einfachen Normalteiler von T, und weil T_a eine endliche elementarabelsche

Gruppe ist, ist $k = l(T_a)$ die eindeutig bestimmte Anzahl der primzyklischen Summanden von T_a. Also ist $m = l(T_a) + l(T_n) = l(T)$ eindeutig bestimmt.

Nun läßt sich der Beweis mit einer ähnlichen Überlegung wie in [9] (im Beweis von Proposition 1*) zu Ende bringen. Sei $\{T_i \mid I\}$ eine inverse Familie von Normalteilern von N. Dann ist nach Voraussetzung stets $T_i \cap S(N) \neq 1$, also ist wegen Lemma 4 $l(T_i \cap S(N))$ immer endlich, und aus den obigen Überlegungen folgt, daß für $T_i < T_j$ stets $l(T_i \cap S(N)) < l(T_j \cap S(N))$ ist. Sei nun j so gewählt, daß $l(T_j \cap S(N))$ minimal ist. Zu jedem k aus I existiert dann ein k' mit $T_{k'} \leqq T_k \cap T_j$. Damit ist

$$T_{k'} \cap S(N) \leqq (T_k \cap S(N)) \cap (T_j \cap S(N)),$$

woraus $T_{k'} \cap S(N) = T_j \cap S(N)$ und daher $T_j \cap S(N) \leqq T_k \cap S(N)$ für jedes k aus I folgt. Also ist die Familie der $T_i \cap S(N)$ und damit auch die Familie der T_i durch $T_j \cap S(N)$ ($\neq 1$ nach Voraussetzung) beschränkt. N ist somit i. n. b., und der Satz ist bewiesen.

Analog beweist man

Satz 8. *G ist i. s. b., wenn $S(G)$ nichtleere direkte Summe endlich vieler einfacher Untergruppen und G s-wesentliche Erweiterung von $S(G)$ ist.*

Zum Beweis des Satzes ist noch folgendes Lemma nötig:

Lemma 6. *Ist H eine direkte Summe einfacher Untergruppen von G und $T \lhd\lhd G$ mit $T \cap H \neq 1$, so ist $T \cap H$ ein direkter Summand von H.*

Beweis. Sei $T = N_n \lhd \cdots \lhd N_1 \lhd N_0 = G$ eine Normalreihe von G nach T. Wegen $T \cap H \neq 1$ ist dann $N_1 \cap H$ bekanntlich ein direkter Summand von H, also selbst direkte Summe einfacher Untergruppen, so daß $N_2 \cap H$ direkter Summand von $N_1 \cap H$ wird usw. Also ist $T \cap H$ direkter Summand von H.

Die Umkehrung von Satz 8 gilt nicht, weil nicht jeder minimale Subnormalteiler von G in $S(G)$ liegt (man betrachte dazu etwa die Diedergruppe D_4 der Ordnung 8; siehe auch die Bemerkung zu Satz 9). Eine zum Korollar 3 zu Satz 6 analoge Aussage für die Eigenschaft i. b. (bzw. i. s. b.) erhält man, wenn man statt $S(G)$ das Erzeugnis aller minimalen Untergruppen (bzw. Subnormalteiler) von G betrachtet — darauf und auf damit zusammenhängende Fragen soll hier jedoch nicht noch eingegangen werden.

5. Bekanntlich (vgl. [7], 7. 4. 13) ist der Sockel von G die direkte Summe des Erzeugnisses $S_a(G)$ aller abelschen minimalen Normalteiler von G (*abelscher Sockel* genannt) und des Erzeugnisses $S_n(G)$ aller nichtabelschen minimalen Normalteiler von G (*nichtabelscher Sockel* genannt). Aus dem Korollar 1 zu Satz 6 ergibt sich dann: Ist G s. i. n. b. (oder i. s. b. oder i. b.), so ist $S_a(G)$ eine endliche elementarabelsche Gruppe.

Mit Hilfe von Lemma 5 erhalten wir eine Aussage darüber, wie $S_n(N)$ für einen Normalteiler N von G bezüglich $S_n(G)$ liegt.

Satz 9. *Ist $N \lhd G$, so gilt $S_n(N) \leqq N \cap S_n(G)$.*

Beweis. Sei $S_n(N) \neq 1$. Dann ist bekanntlich (aufgrund von Lemma 3) $S_n(N)$ direkte Summe nichtabelscher minimaler Normalteiler von N. Sei M einer von diesen und $T = \langle g^{-1}Mg \mid \in G\rangle$. Wir behaupten, T ist nichtabelscher minimaler Normalteiler von G — daraus folgt dann, daß $S_n(N)$ eine Vereinigung nichtabelscher minimaler Normalteiler von G ist, d. h. die Behauptung des Satzes. Nach Lemma 5 ist T die direkte Summe aller verschiedenen Konjugierten von M, und ein in T enthaltener nichttrivialer Normalteiler von G ist direkte Summe gewisser dieser Konjugierten, muß also alle Konjugierten von M enthalten, so daß T ein minimaler Normalteiler von G ist.

$S_a(N) \leqq S_a(G)$ für $N \lhd G$ gilt aber im allgemeinen nicht — man betrachte z. B. als G die Diedergruppe D_4 mit einer Kleinschen Vierergruppe als N.

Ähnlich wie das Korollar 2 zu Satz 6 beweist man für s. i. n. b. Gruppen folgende Verschärfung von Satz 9.

Korollar 1. *Sei G s. i. n. b. und $1 \neq N \lhd G$. Dann gilt $S_n(N) = N \cap S_n(G)$.*

Ist G s. i. n. b. und ohne nichttrivialen endlichen abelschen Normalteiler, so ist für $N \lhd G$ daher stets $S(N) = N \cap S(G)$; diese Gleichheit gilt ebenfalls, wenn G s. i. n. b. und abelsch ist, weil G dann i. b. ist — allgemein gilt sie jedoch nicht (s. o.).

Für i. b. oder i. s. b. Gruppen folgt aus dem Korollar noch etwas mehr.

Korollar 2. *Ist G i. b. oder i. s. b. und $1 \neq T \lhd\lhd G$, so gilt $S(T) \geqq T \cap S(G)$ und $S_n(T) = T \cap S_n(G)$. Ferner ist $T \cap S(G)$ (bzw. $T \cap S_n(G)$) direkter Summand von $S(G)$ (bzw. $S_n(G)$).*

Beweis. Sei $T = N_0 \lhd N_1 \lhd \cdots \lhd N_k = G$. Da mit G auch jedes der N_i i. b. oder i. s. b. und somit nach Lemma 1 s. i. n. b. ist, folgt aus dem Korollar 2 zu Satz 6

$$S(T) \geqq T \cap S(N_1) \geqq T \cap (N_1 \cap S(N_2)) = T \cap S(N_2) \geqq \cdots \geqq T \cap S(G),$$

und aus dem Korollar 1 zu Satz 9

$$S_n(T) = T \cap S_n(N_1) = T \cap (N_1 \cap S_n(N_2)) = T \cap S_n(N_2) = \cdots = T \cap S_n(G).$$

Der Rest der Behauptung folgt aus dem Korollar 1 zu Satz 6 und Lemma 6.

In Verschärfung der Bemerkung zum Korollar 2 zu Satz 6 folgt hieraus insbesondere auch: Ist G i. b. oder i. s. b. und $T \lhd\lhd G$ mit $1 \neq T \leqq S(G)$, so gilt $S(T) = T$.

Wie schon erwähnt, gilt $T \cap S(G) \neq 1$ nicht für jedes $1 \neq T \lhd\lhd G$, aber aus dem Korollar folgt, daß jeder nichtabelsche minimale Subnormalteiler einer i. b. oder i. s. b. Gruppe G in $S(G)$ liegt, so daß dann $S_n(G)$ auch das Erzeugnis — und aufgrund des Korollars und wegen Lemma 5 sogar direkte Summe — aller nichtabelschen minimalen Subnormalteiler von G ist.

Aufgrund der Bemerkungen zu den Korollaren 1 und 2 zu Satz 9 erscheint es sinnvoll, auch noch die folgenden Begriffe einzuführen: G heiße invers nichtabelsch normal beschränkt (i. n. n. b.) bzw. invers nichtabelsch subnormal beschränkt (i. n. s. b.), wenn jede inverse Familie von nichtabelschen Normalteilern bzw. Subnormalteilern von G durch einen nichttrivialen nichtabelschen Normalteiler bzw. Subnormalteiler von G beschränkt ist, und G heiße stark i. n. n. b. (s. i. n. n. b.), wenn jeder Normalteiler von G i. n. n. b. ist. Dann lassen sich für diese Begriffe die den obigen Resultaten entsprechenden Aussagen herleiten, und es ist darüber hinaus z. B. G genau dann i. n. n. b. (bzw. i. n. s. b.), wenn $S_n(G)$ endliche direkte Summe minimaler Normalteiler (bzw. Subnormalteiler) von G und G n-wesentliche (bzw. s-wesentliche) Erweiterung von $S_n(G)$ ist. Darauf wollen wir hier nicht weiter eingehen.

Man könnte nun auch zu diesen Begriffen analoge einführen, wenn man in der Definition stets „nichtabelsch" durch „abelsch" ersetzt; daß das zu nichts wesentlich Neuem führt, ergibt sich in Abschnitt 6.

Mit Hilfe des Korollars 1 zu Satz 9 ist auch möglich, die Umkehrung von Satz 7 zu beweisen.

Satz 10. *Ist G s. i. n. b., so gilt für jeden Normalteiler $N \neq 1$ von G:*

$S(N)$ ist direkte Summe endlich vieler einfacher Untergruppen, und N ist eine n-wesentliche Erweiterung von $S(N)$.

Beweis. Wegen Satz 6 brauchen wir nur zu zeigen, daß $S(N)$ für $1 \neq N \lhd G$ eine direkte Summe endlich vieler einfacher Untergruppen ist. Da $S_n(N) = N \cap S_n(G)$ ist, gilt das aufgrund der Korollars 1 zu Satz 6 für $S_n(N)$. Ferner ist $S_a(N) \lhd G$, also i. n. b. und deshalb sogar i. b. Jeder minimale abelsche Normalteiler M von N enthält daher eine minimale (normale) Untergruppe und ist deshalb direkte Summe einfacher Untergruppen (siehe [7], 4. 4. 3); die Summe muß nach Lemma 2 endlich sein, da mit $S_a(N)$ auch M i. b. ist. Also ist auch $S_a(N)$ endliche direkte Summe einfacher Gruppen und der Satz bewiesen.

Eine endlich erzeugte Gruppe besitzt für jede natürliche Zahl n nur endlich viele Untergruppen vom Index n; wir erhalten hier nur:

Satz 11. (i) *Ist G i. n. b. (bzw. i. s. b.), so besitzt es nur endlich viele nichtabelsche minimale Normalteiler (bzw. Subnormalteiler).*

(ii) *Ist G s. i. n. b., so besitzt es nur endlich viele minimale Normalteiler.*

Beweis. (i) Sei G i. n. b. (bzw. i. s. b.). Nach Lemma 5 (bzw. der Bemerkung zu Korollar 2 zu Satz 9) ist $S_n(G)$ die direkte Summe aller nichtabelschen minimalen Normalteiler (bzw. Subnormalteiler) von G, und diese Summe ist nach Lemma 2 endlich.

Zum Beweis von (ii) hat man nur noch zu beachten, daß, wie schon bemerkt, $S_a(G)$ endlich ist, wenn G s. i. n. b. ist.

Eine dem Resultat über endlich erzeugte Gruppen mehr entsprechende Aussage erhalten wir nur unter einer Zusatzvoraussetzung.

Korollar. (i) *Ist G und jede Faktorgruppe von G nach einem nichtabelschen endlichen Normalteiler i. n. b., so besitzt G für jede natürliche Zahl n nur endlich viele nichtabelsche Normalteiler der Ordnung n.*

(ii) *Ist G und jede Faktorgruppe von G nach einem endlichen Normalteiler s. i. n. b., so besitzt G für jede natürliche Zahl n nur endlich viele Normalteiler der Ordnung n.*

Beweis. Zum Beweis von (i) ist wegen Satz 11, (i) nur zu zeigen, daß ein endlicher nichtabelscher minimaler Normalteiler T von G in höchstens endlich vielen Normalteilern der festen Ordnung n von G liegen kann. Das aber ist klar, denn hat T die Ordnung $|T| = n$, so ist nichts zu beweisen, und andernfalls betrachtet man statt G die Faktorgruppe G/T (die wieder nur endlich viele nichtabelsche minimale Normalteiler besitzt) und statt n den Quotienten $n/|T|$ usw. Die Behauptung (ii) beweist man ebenso.

Obwohl eine Untergruppe von endlichem Index einer endlich erzeugten Gruppe wieder endlich erzeugt ist, ist nicht klar, ob eine Faktorgruppe nach einem endlichen Normalteiler einer i. n. b. Gruppe wieder eine i. n. b. Gruppe ist — es scheint nicht der Fall zu sein.

6. Wir wollen uns nun noch kurz mit abelschen, fast abelschen und auflösbaren Gruppen beschäftigen, die i. b. (oder i. s. b. oder i. n. b.) sind.

Dual zu dem Satz, daß eine endlich erzeugte abelsche Gruppe die Maximalbedingung für Untergruppen erfüllt, gilt

Satz 12. *Eine i. b. abelsche Gruppe erfüllt die Minimalbedingung für Untergruppen.*

Beweis. Ist G abelsch und i. b., so ist G aufgrund des Korollars zu Satz 1 periodisch und hat nach Lemma 2 endlichen Rang (besitzt nur endlich viele p-Komponenten, und jede dieser p-Komponenten besitzt nur endlich viele Elemente der Ordnung p — vgl. [6], § 8). Daraus folgt bekanntlich, daß G die Minimalbedingung für Untergruppen erfüllt (vgl. [6], Ex. 18. (a) zu § 20).

Diesen Satz hätte man auch aus dem allgemeineren modultheoretischen Theorem 2 in [9] folgern können.

Korollar 1. *G sei i. s. b. oder i. b. und besitze einen abelschen Normalteiler A so, daß G/A die Minimalbedingung für Subnormalteiler (bzw. Untergruppen) erfüllt. Dann genügt G der Minimalbedingung für Subnormalteiler (bzw. Untergruppen).*

Zum Beweis hat man nur zu beachten, daß mit G auch A i. s. b. oder i. b. ist; dann folgt die Behauptung aus Satz 12, weil G die Minimalbedingung für Subnormalteiler oder Untergruppen erfüllt, wenn sie von G/A und A erfüllt wird.

Nach Baer (vgl. etwa [2]) nennt man eine Gruppe *fast abelsch*, wenn sie einen abelschen Normalteiler von endlichem Index besitzt. Aus dem Korollar folgt dann insbesondere, daß eine i. b. (bzw. i. s. b.) fast abelsche Gruppe die Minimalbedingung für Untergruppen (bzw. Subnormalteiler) erfüllt.

Eine häufig benutzte Endlichkeitsbedingung für Gruppen ist die Minimalbedingung für abelsche Untergruppen; deshalb folgern wir aus Satz 12 das

Korollar 2. *G sei invers abelsch beschränkt (bzw. invers abelsch subnormal beschränkt), d. h. jede inverse Familie abelscher Untergruppen (bzw. Subnormalteiler) von G sei durch eine abelsche nichttriviale Untergruppe (bzw. Subnormalteiler) beschränkt. Dann erfüllt G die Minimalbedingung für abelsche Untergruppen (bzw. Subnormalteiler).*

Beweis. Wir betrachten nur den Fall, daß G invers abelsch beschränkt ist. Sei dann $A_1 \geqq A_2 \geqq \cdots$ eine fallende Folge abelscher Untergruppen von G. Nach Voraussetzung ist A_1 i. b., genügt also nach Satz 12 der Minimalbedingung für Untergruppen, so daß die Folge der A_i abbrechen muß.

In neueren Arbeiten von Baer (z. B. [3], [4]) werden auflösbare Gruppen mit Minimalbedingung für Untergruppen behandelt. In diesem Zusammenhang ist eine weitere Folgerung aus Satz 12 von Interesse. Mit $G^{(i)}$ sei die Kommutatorgruppe von $G^{(i-1)}$ für $i = 1, 2, \ldots$ bezeichnet ($G^{(0)} = G$).

Korollar 3. *Sei G i. b. und $\bigcap \{G^{(i)} \mid i = 1, 2, \ldots\} = 1$. Dann erfüllt G die Minimalbedingung für Untergruppen, und es ist $G^{(i)} = 1$ für $i \geqq k$.*

Beweis. Da die $G^{(i)}$ eine inverse Familie bilden, existiert ein k mit $G^{(i)} = 1$ für $i \geqq k$. Daraus folgt, daß jede Faktorgruppe von G einen nichttrivialen abelschen Subnormalteiler besitzt. Ferner ist G aufgrund des Korollars zu Satz 1 periodisch, und nach Satz 12 erfüllt jeder abelsche Subnormalteiler von G als i. b. Gruppe die Minimalbedingung für Untergruppen. Nach [3], Satz 6. 1 gilt daher die Behauptung.

In diesem Korollar ist auch die duale Aussage zu dem bekannten Satz enthalten, daß eine nilpotente Gruppe genau dann die Maximalbedingung für Untergruppen erfüllt, wenn sie endlich erzeugt ist (vgl. etwa [7], 8. 4. 35).

Nach Baer ([2], Prop. 4. 1) genügt eine fast abelsche Gruppe der Minimalbedingung für Untergruppen, wenn sie die Minimalbedingung für Normalteiler erfüllt. Wir können diese Aussage verschärfen.

Satz 13. *Sei G fast abelsch und G sowie jede Faktorgruppe von G nach einem endlichen abelschen Normalteiler i. n. b. Dann erfüllt G die Minimalbedingung für Untergruppen.*

Beweis. Da G fast abelsch ist, existiert ein abelscher Normalteiler A von endlichem Index in G. Wir brauchen nur zu zeigen, daß A die Minimalbedingung für Untergruppen erfüllt. Bei diesem Beweis richten wir uns etwas nach dem Beweis von Lemma 1 in [1].

Sei Γ die Gruppe der durch die inneren Automorphismen von G erzeugten Automorphismen von A. Mit G/A ist auch Γ endlich, und eine Untergruppe von A ist genau dann normal in G, wenn sie invariant unter Γ ist. Für a aus A sei a^* die von allen Bildern von a unter den Automorphismen aus Γ erzeugte Untergruppe von A; sie ist offenbar endlich erzeugt und normal in G — Untergruppen von A der Form a^* nennen wir Γ-zyklisch.

Als erstes zeigen wir, daß A periodisch ist. Angenommen, A sei nicht periodisch und a ein Element unendlicher Ordnung von A. Als endlich erzeugte Gruppe ist a^* bekanntlich (vgl. [8], Kap. 2. 4, Satz 17*) direkte Summe einer endlichen abelschen Gruppe H und einer freien abelschen Gruppe F endlichen Ranges. Sei h die Ordnung von H, dann ist $(a^*)^h = F^h$ [1]), und da natürlich $(a^*)^h = (a^h)^*$ ist, gilt $F^h \lhd G$. Also enthält F^h einen minimalen Normalteiler M von G. Da für jede natürliche Zahl k gilt $M^k < M$ und $M^k \lhd G$, ist entweder stets $M^k = M$, oder es gibt ein k mit $M^k = 1$. Beides ist jedoch nicht möglich, da M als Untergruppe einer freien abelschen Gruppe eine freie abelsche Gruppe ist (vgl. [8], Kap. 2. 4, Satz 13). Also ist die Annahme falsch und A periodisch.

Als periodische abelsche Gruppe ist A die direkte Summe ihrer p-Komponenten; da die p-Komponenten von A normal in G sind, ist ihre Anzahl nach Lemma 2 endlich.

Nun zeigen wir noch, daß es für jede feste Primzahl p nur endlich viele Elemente der Ordnung p in A gibt. Sei P das Erzeugnis aller Elemente der Ordnung p von A. Dann ist $P \lhd G$, und nach Satz 6 ist $D = P \cap S(G)$ direkte Summe endlich vieler minimaler Normalteiler von G. Ist $M < P$ ein minimaler Normalteiler von G und $x \in M$, so muß $x^* = M$, also M endlich sein. Daher ist D endlich, und nach Voraussetzung erfüllt dann auch G/D die Voraussetzungen des Satzes. Da jede Γ-zyklische Untergruppe von P höchstens p^m Elemente enthält (wobei m die Ordnung von Γ sei), besitzt jede Γ'-zyklische Untergruppe von P/D (Γ' sei die Γ entsprechende Automorphismengruppe von A/D) nur höchstens p^{m-1} Elemente, denn nach Satz 6 ist $x^* \cap S(G) \neq 1$ für jedes x aus A. Auf G/D können wir wiederum die obige Überlegung anwenden, und nach höchstens m-maliger Anwendung dieses Schlusses enthält das Bild von P nur noch die 1, so daß P eine endliche Normalreihe mit endlichen Faktoren besitzt, also endlich ist.

Damit ist nachgewiesen, daß A periodisch und von endlichem Rang ist, was bekanntlich zur Folge hat, daß A die Minimalbedingung für Untergruppen erfüllt (vgl. [6], Ex. 18. (a) zu § 20).

[1]) X^n sei die Menge der n-ten Potenzen der Elemente von X.

Literatur

[1] *R. Baer*, Groups with descending chain condition for normal subgroups, Duke Math. J. **16** (1949), 1—22.

[2] *R. Baer*, Groups with minimum condition, Acta Arith. **9** (1964), 117—132.

[3] *R. Baer*, Auflösbare, artinsche, noethersche Gruppen, Math. Annalen **168** (1967), 325—363.

[4] *R. Baer*, Soluble artinian groups, Canad. J. Math. **19** (1967), 904—923.

[5] *B. Eckmann* und *A. Schopf*, Über injektive Moduln, Arch. Math. **4** (1953), 75—78.

[6] *L. Fuchs*, Abelian groups, Oxford 1960.

[7] *W. R. Scott*, Group theory, Englewood Cliffs, N. J. 1964.

[8] *W. Specht*, Gruppentheorie, Berlin 1956.

[9] *P. Vámos*, The dual of the notion of "finitely generated", J. London Math. Soc. **43** (1968), 643—646.

Institut für Angewandte Mathematik der Universität, 53 Bonn, Wegelerstraße 6

Eingegangen 22. März 1969

Subdirekte Produkte und konjunkte Summen

Von *Rudolf Wille* in Bonn

Herrn Professor Dr. Wolfgang Krull zum 70. Geburtstag

In der Algebra gibt es eine Reihe nützlicher Zerlegungssätze mit *subdirekten Produkten*, denen jedoch allen als Makel anhaftet, daß ein subdirektes Produkt nicht eindeutig durch seine Faktoren bestimmt ist. Es ist somit eine wichtige Frage, ob man durch geeignete Zusätze Eindeutigkeit bei subdirekten Produkten erreichen kann. Ist man mit einer Eindeutigkeit bis auf Isomorphie zufrieden, so kann man die Frage auch kategorisch formulieren: Lassen sich Kategorien angeben, in denen die subdirekten Produkte Produkte im kategorischen Sinne sind? Zu diesem Fragenkomplex will die vorliegende Note eine Antwort geben. Die verschiedenartigen Anwendungsmöglichkeiten (auf primitive Klassen, relativ freie Algebren, Anzahl- und Klassifikationsprobleme), die die Begriffsbildungen und Ergebnisse dieser Note haben, sollen in nachfolgenden Arbeiten ausgeführt werden.

Im folgenden werden Kategorien von Algebren beschrieben, in denen nicht nur jedes subdirekte Produkt Produkt ist, sondern auch umgekehrt jedes Produkt zu einem subdirekten Produkt isomorph ist. Bezüglich dieser Kategorien erhält man einen zum subdirekten Produkt dualen Begriff: die *konjunkte Summe*. Alle Ergebnisse über subdirekte Produkte in dieser Note lassen sich auch dual für konjunkte Summen beweisen.

Da die Beschränkung auf vollständige Algebren bei den Begriffsbildungen und Beweisen dieser Note keine nennenswerten Vereinfachungen bringt, soll allgemein von partiellen Algebren ausgegangen werden. Allerdings wird das subdirekte Produkt für partielle Algebren anders als in Schmidt [4] definiert. Ein Grund dafür ist, daß ein subdirektes Produkt von vollständigen Algebren selbst wieder vollständig sein soll (vgl. Cohn [1], S. 99).

Eine (*partielle*) *Algebra vom Typus* $(K_i)_{i\in I}$, wobei I und die K_i irgendwelche Mengen sind, ist eine Menge A zusammen mit einer Familie von Abbildungen (Operationen) $f_i: D_i(A) \to A$ mit $D_i(A) \subseteq A^{K_i}$ und $i \in I$. Der Einfachheit halber soll in dieser Arbeit bei jeder Algebra vom Typus $(K_i)_{i\in I}$ die i-te Operation mit f_i bezeichnet werden. Im Fall, daß $D_i(A) = A^{K_i}$ für alle $i \in I$ ist, spricht man von A als einer *vollständigen Algebra*. Ist B Teilmenge einer Algebra A vom Typus $(K_i)_{i\in I}$ und induzieren die Operationen f_i Abbildungen von $D_i(A) \cap B^{K_i}$ in B, so heißt B zusammen mit den induzierten Operationen *Unteralgebra* von A. Da der Durchschnitt von Unteralgebren von A wieder Unteralgebra ist, gibt es zu jeder Teilmenge M von A eine kleinste M umfassende Unteralgebra; sie wird die *von M erzeugte Unteralgebra* genannt und mit $\langle M \rangle$ bezeichnet.

Für Algebren A und B vom Typus $(K_i)_{i\in I}$ heißt eine Abbildung φ von A in B *Homomorphismus*, wenn für alle $i \in I$, $(a_k \mid k \in K_i) \in D_i(A)$ und $a \in A$ aus $f_i(a_k \mid k \in K_i) = a$ stets $(\varphi a_k \mid k \in K_i) \in D_i(B)$ und $f_i(\varphi a_k \mid k \in K_i) = \varphi a$ folgt. Ist φ darüber hinaus injektiv und surjektiv und ist auch φ^{-1} ein Homomorphismus, dann nennt man φ einen *Isomorphismus*. Jeder Homomorphismus $\varphi: A \to B$ induziert in A eine Kongruenzrelation Θ_φ; dabei versteht man unter einer *Kongruenzrelation* Θ von A eine Äquivalenzrelation derart, daß aus $(a_k, a'_k) \in \Theta$ für $k \in K_i$, $f_i(a_k \mid k \in K_i) = a$ und $f_i(a'_k \mid k \in K_i) = a'$ stets $(a, a') \in \Theta$ folgt. Da der Durchschnitt von Kongruenzrelationen von A wieder Kongruenzrelation ist, gibt es zu jeder Relation R von A eine kleinste R umfassende Kongruenzrelation; sie wird die *von R erzeugte Kongruenzrelation* genannt und mit $[R]$ bezeichnet. Ist Θ eine Kongruenzrelation der Algebra A, so kann man die Faktormenge A/Θ durch repräsentantenweises Übertragen der Operationen zu einer Algebra, der *Faktoralgebra*, machen. Die kanonische Projektion π_Θ von A auf A/Θ ist dann ein Homomorphismus.

Unter dem *direkten Produkt* $\mathsf{X} A_t$ von Algebren $A_t (t \in T)$ gleichen Typus versteht man das kartesische Produkt der Mengen A_t zusammen mit den komponentenweise definierten Operationen. Bekanntlich ist das direkte Produkt auch im kategorischen Sinne ein Produkt, d. h. zu jeder Familie von Homomorphismen $\varphi_t: B \to A_t (t \in T)$ gibt es genau einen Homomorphismus $\varphi: B \to \mathsf{X} A_t$ mit $\varphi_t = \pi_t \varphi$, wobei π_t die kanonische Projektion von $\mathsf{X} A_t$ auf A_t ist. Eine Unteralgebra A des direkten Produktes $\mathsf{X} A_t$ heiße *subdirektes Produkt*, wenn jeweils $A_t = \langle \pi_t A \rangle$ gilt.

Die (partielle) direkte Summe von Algebren $A_t (t \in T)$ vom Typus $(K_i)_{i\in I}$ definiert man folgendermaßen (vgl. Schmidt [4]): Zunächst werden auf die disjunkte Vereinigung $\bigcup_{t\in T} \{t\} \mathsf{X} A_t$ nur die Operationen f_i mit $K_i \neq \emptyset$ kanonisch übertragen. Mit der so entstandenen Algebra bildet man die Faktoralgebra nach der Kongruenzrelation, die von der Menge aller Paare $((t, a_t^i), (t', a_{t'}^i))$ mit $K_i = \emptyset, f_i(D_i(A_t)) = \{a_t^i\}$ und $f_i(D_i(A_{t'})) = \{a_{t'}^i\}$ erzeugt wird. Diese Faktoralgebra (mit den kanonisch übertragenen Operationen f_i für alle $i \in I$) heißt die (*partielle*) *direkte Summe* der Algebren A_t und wird mit $\mathsf{S} A_t$ bezeichnet. Die so definierte direkte Summe ist auch im kategorischen Sinne eine Summe, d. h. zu jeder Familie von Homomorphismen $\varphi_t: A_t \to B (t \in T)$ gibt es genau einen Homomorphismus $\varphi: \mathsf{S} A_t \to B$ mit $\varphi_t = \varphi \iota_t$, wobei ι_t der kanonische Homomorphismus von A_t in $\mathsf{S} A_t$ ist. Eine Faktoralgebra A der direkten Summe $\mathsf{S} A_t$ nach einer Kongruenzrelation Δ heiße *konjunkte Summe*, wenn gilt $A = \langle \bigcup_{t\in T} \pi_\Delta \iota_t A_t \rangle$ und $A \cong A_t$, falls $\mid T \mid = 1$.

Im folgenden sollen nun Kategorien definiert werden, in denen die subdirekten Produkte und konjunkten Summen Produkte und Summen im kategorischen Sinne sind. Es wird sich zeigen, daß in diesen Kategorien sogar umgekehrt jedes Produkt bzw. jede Summe zu einem subdirekten Produkt bzw. einer konjunkten Summe isomorph ist.

Zunächst gebe man sich eine (partielle) Algebra M vom Typus $(K_i)_{i\in I}$ vor. Es sei betont, daß insbesondere für M alle $D_i(M)$ leer sein können, d. h. daß für M auch eine Menge stehen kann. Unter einer *M-Algebra* soll nun ein Paar (A, α) verstanden werden, wobei A eine Algebra vom Typus $(K_i)_{i\in I}$ und α ein Homomorphismus von M in A mit $A = \langle \alpha M \rangle$ ist. Ein *M-Homomorphismus* $\varphi: (A, \alpha) \to (B, \beta)$ sei ein Homomorphismus $\varphi: A \to B$ mit $\beta = \varphi \alpha$. Entsprechend sei ein *M-Isomorphismus* erklärt. Ist nun $\mathfrak{A}$ eine Klasse von Algebren vom Typus $(K_i)_{i\in I}$, dann bezeichne $\mathfrak{A}_M$ die Kategorie aller M-Algebren (A, α) mit $A \in \mathfrak{A}$ und aller M-Homomorphismen zwischen solchen M-Algebren. Für die Darstellung der subdirekten Produkte und konjunkten Summen genügt es, nur die Kategorien $\mathfrak{A}_M$ zu betrachten, wo $\mathfrak{A}$ die Klasse aller Algebren eines bestimmten Typus

und M irgendeine Menge ist. Da sich jedoch die Beweise durch eine solche Beschränkung nicht vereinfachen, werden im folgenden die Sätze für beliebige $\mathfrak{A}_M$ formuliert.

Wichtig für das Studium der Kategorien $\mathfrak{A}_M$ sind noch folgende Begriffe: Eine Algebra A aus $\mathfrak{A}$ heiße *M-frei* (*M-kofrei*) in $\mathfrak{A}$, wenn für alle (A, α) und (B, β) aus $\mathfrak{A}_M$ ein M-Homomorphismus φ existiert mit $\varphi : (A, \alpha) \to (B, \beta)$ $(\varphi : (B, \beta) \to (A, \alpha))$. Die Klasse aller zu (A, α) M-isomorphen M-Algebren aus $\mathfrak{A}_M$ werde mit $\mathfrak{F}(A, \alpha)$ bezeichnet; $\mathfrak{F}(A, \alpha) \leqq \mathfrak{F}(B, \beta)$ soll bedeuten, daß es einen M-Homomorphismus $\varphi : (B, \beta) \to (A, \alpha)$ gibt.

Satz 1. *Die Klassen M-isomorpher M-Algebren aus der Kategorie $\mathfrak{A}_M$ bilden mit der Relation $\leqq$ eine halbgeordnete Menge $\mathfrak{F}\mathfrak{A}_M$; dabei ist $\mathfrak{F}(A, \alpha)$ genau dann das Supremum (Infimum) der $\mathfrak{F}(A_t, \alpha_t)$ in $\mathfrak{A}_M$, wenn (A, α) Produkt (Summe) der (A_t, α_t) in $\mathfrak{A}_M$ ist. Weiterhin ist $\mathfrak{F}(A, \alpha)$ genau dann das größte (kleinste) Element von $\mathfrak{F}\mathfrak{A}_M$, wenn die Algebra A M-frei (M-kofrei) in $\mathfrak{A}$ ist.*

Beweis. Daß die Klassen M-isomorpher M-Algebren aus $\mathfrak{A}_M$ eine Menge bilden, folgt aus der Tatsache, daß die Mächtigkeiten aller Algebren eines bestimmten Typus mit höchstens $|M|$ Erzeugenden beschränkt sind (s. Schmidt [2]). Die Reflexivität und Transsivität der Relation $\leqq$ sieht man sofort. Die Antisymmetrie ergibt sich daraus, daß es zu zwei beliebigen M-Algebren (A, α) und (B, β) höchstens einen M-Homomorphismus von (A, α) in (B, β) gibt (für M-Homomorphismen $\varphi, \varphi' : (A, \alpha) \to (B, \beta)$ ist $\{a \in A \mid \varphi a = \varphi' a\}$ eine αM enthaltende Unteralgebra von A und damit identisch mit A, also $\varphi = \varphi'$). Die Aussage „$\mathfrak{F}(A, \alpha)$ ist das Supremum (Infimum) der $\mathfrak{F}(A_t, \alpha_t)$ in $\mathfrak{F}\mathfrak{A}_M$" ist nach der Definition der Halbordnung äquivalent mit der Aussage „Es gibt M-Homomorphismen $\varphi_t : (A, \alpha) \to (A_t, \alpha_t)$ $(\varphi_t : (A_t, \alpha_t) \to (A, \alpha))$, so daß zu jeder Familie von M-Homomorphismen $\chi_t : (B, \beta) \to (A_t, \alpha_t)$ $(\chi_t : (A_t, \alpha_t) \to (B, \beta))$ ein M-Homomorphismus

$$\chi : (B, \beta) \to (A, \alpha) \; (\chi : (A, \alpha) \to (B, \beta))$$

existiert"; dabei ist χ eindeutig bestimmt und $\chi_t = \varphi_t \chi$ $(\chi_t = \chi \varphi_t)$, denn es gibt ja nur höchstens einen M-Homomorphismus von einer M-Algebra in eine andere. Somit hat man als weitere äquivalente Aussage „(A, α) ist Produkt (Summe) der (A_t, α_t) in $\mathfrak{A}_M$". Die letzte Behauptung des Satzes folgt unmittelbar aus der Definition einer M-freien (M-kofreien) Algebra. Es sei noch bemerkt, daß Satz 1 beinhaltet: Sind A und B M-frei (M-kofrei) in $\mathfrak{A}$, dann sind (A, α) und (B, β) M-isomorph.

Korollar 1. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) *$\mathfrak{F}\mathfrak{A}_M$ ist ein vollständiger Verband.*

(2) *$\mathfrak{A}_M$ hat Produkte und Summen.*

(3) *$\mathfrak{A}_M$ hat Produkte, und es gibt eine M-kofreie Algebra in $\mathfrak{A}$.*

(4) *$\mathfrak{A}_M$ hat Summen, und es gibt eine M-freie Algebra in $\mathfrak{A}$.*

Die folgenden beiden Sätze behandeln den Zusammenhang zwischen den Produkten bzw. Summen in der Kategorie $\mathfrak{A}_M$ und den subdirekten Produkten bzw. konjunkten Summen in $\mathfrak{A}$.

Satz 2. *(A, α) und (A_t, α_t) mit $t \in T \neq \emptyset$ seien M-Algebren aus der Kategorie $\mathfrak{A}_M$; weiterhin sei jedes subdirekte Produkt B der A_t in $\mathfrak{A}$, für das ein Homomorphismus $\varphi : A \to B$ existiert mit $B = \langle \varphi A \rangle$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *(A, α) ist Produkt der (A_t, α_t) in $\mathfrak{A}_M$.*

(2) *$\mathfrak{F}(A, \alpha)$ ist das Supremum der $\mathfrak{F}(A_t, \alpha_t)$ in $\mathfrak{F}\mathfrak{A}_M$.*

(3) *Es gibt M-Homomorphismen $\varphi_t\colon (A,\alpha)\to(A_t,\alpha_t)$ derart, daß zu jedem Paar $a \neq a'$ in A ein φ_t existiert mit $\varphi_t a \neq \varphi_t a'$ und daß $(a_k \mid k\in K_t)\in D_t(A)$, falls $(\varphi_t a_k \mid k\in K_t)\in D_t(A_t)$ für alle $t\in T$.*

(4) *Es gibt einen Isomorphismus ψ von A auf ein subdirektes Produkt der A_t mit $\alpha_t = \pi_t\psi\alpha$.*

(5) *Es gibt einen Isomorphismus ψ von A auf die Unteralgebra des direkten Produktes der A_t, die von den $(\alpha_t m \mid t\in T)$ mit $m\in M$ erzeugt wird, so daß*

$$\alpha m = \psi^{-1}(\alpha_t m \mid t\in T) \text{ für } m\in M$$

ist.

Beweis. (1) $\Leftrightarrow$ (2) wurde allgemein in Satz 1 gezeigt.

(2) $\Rightarrow$ (4): Wegen $\mathfrak{S}(A_t,\alpha_t)\leqq\mathfrak{S}(A,\alpha)$ existieren M-Homomorphismen

$$\varphi_t\colon (A,\alpha)\to(A_t,\alpha_t).$$

Es gibt somit einen Homomorphismus $\psi\colon A\to \mathsf{X}A_t$ mit $\varphi_t=\pi_t\psi$. ψ ist trivialerweise ein M-Homomorphismus von (A,α) in $(\langle\psi A\rangle,\psi\alpha)$. Aus $\alpha_t=\varphi_t\alpha$ und $\varphi_t=\pi_t\psi$ folgt $\alpha_t=\pi_t\psi\alpha$. Daher sind die π_t M-Homomorphismen von $(\langle\psi A\rangle,\psi\alpha)$ in die (A_t,α_t) d. h. es gilt insbesondere $A_t=\langle\pi_t\langle\psi A\rangle\rangle$. $\langle\psi A\rangle$ ist also subdirektes Produkt der A_t und damit nach Voraussetzung in $\mathfrak{A}$. Weiterhin hat man $\mathfrak{S}(A_t,\alpha_t)\leqq\mathfrak{S}(\langle\psi A\rangle,\psi\alpha)\leqq\mathfrak{S}(A,\alpha)$ in $\mathfrak{S}\mathfrak{A}_M$, also $\mathfrak{S}(\langle\psi A\rangle,\psi\alpha)=\mathfrak{S}(A,\alpha)$. ψ ist daher der M-Isomorphismus von (A,α) auf $(\langle\psi A\rangle,\psi\alpha)=(\psi A,\psi\alpha)$.

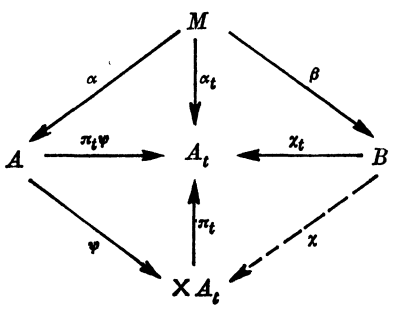
(4) $\Rightarrow$ (3): Durch $\varphi_t:=\pi_t\psi$ werden M-Homomorphismen φ_t von (A,α) in die (A_t,α_t) definiert. Die Zusatzbedingungen an die φ_t ergeben sich sofort daraus, daß ψ ein Isomorphismus und ψA subdirektes Produkt der A_t ist.

(3) $\Rightarrow$ (5): Durch $\psi a:=(\varphi_t a \mid t\in T)$ für $a\in A$ wird ein Homomorphismus ψ von A in $\mathsf{X}A_t$ definiert. Da zu $a\neq a'$ in A ein φ_t existiert mit $\varphi_t a\neq\varphi_t a'$, ist ψ injektiv. Wegen $(a_k\mid k\in K_t)\in D_t(A)$, falls $(\varphi_t a_k\mid k\in K_t)\in D_t(A_t)$ für alle $t\in T$ (d. h. $((\varphi_t a_k\mid t\in T)\mid k\in K_t)\in D_t(\mathsf{X}A_t)$), ist ψA Unteralgebra von $\mathsf{X}A_t$ und ψ^{-1} ein Homomorphismus von ψA auf A. Folglich ist ψ ein Isomorphismus von A auf ψA. $\alpha m=\psi^{-1}(\alpha_t m\mid t\in T)$ und $\psi A=\langle\psi\alpha M\rangle$ gilt, weil die φ_t M-Homomorphismen sind.

(5) $\Rightarrow$ (1): Gegeben seien M-Homomorphismen $\chi_t\colon(B,\beta)\to(A_t,\alpha_t)$. Dann gibt es einen Homomorphismus χ von B in das direkte Produkt $\mathsf{X}A_t$ mit $\chi_t=\pi_t\chi$. Da

$$\pi_t\psi\alpha=\alpha_t=\chi_t\beta=\pi_t\chi\beta$$

für alle $t\in T$, ist $\psi\alpha=\chi\beta$. Weiterhin ist $\{b\in B\mid \chi b\in\psi A\}$ eine βM enthaltende Unteralgebra von B und damit identisch mit B. Man erhält also, daß $\psi^{-1}\chi$ ein M-Homomorphismus von (B,β) in (A,α) ist. Somit ist (A,α) Produkt der (A_t,α_t) in $\mathfrak{A}_M$.



Korollar 2. *Zu jedem subdirekten Produkt A von Algebren A_t, wobei A und die A_t aus einer Klasse $\mathfrak{A}$ von Algebren gleichen Typus sind, gibt es eine Menge M und Abbildungen $\alpha: M \to A$ und $\alpha_t: M \to A_t$ derart, daß (A, α) und die (A_t, α_t) M-Algebren sind und daß (A, α) Produkt der (A_t, α_t) in der Kategorie $\mathfrak{A}_M$ ist.*

Satz 2*. *(A, α) und (A_t, α_t) mit $t \in T \neq \emptyset$ seien M-Algebren aus der Kategorie $\mathfrak{A}_M$; weiterhin sei jede konjunkte Summe B der A_t in $\mathfrak{A}$, für die ein Homomorphismus $\psi: B \to A$ existiert mit $A = \langle \varphi B \rangle$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *(A, α) ist Summe der (A_t, α_t) in $\mathfrak{A}_M$.*

(2) *$\mathfrak{F}(A, \alpha)$ ist das Infimum der (A_t, α_t) in $\mathfrak{F}\mathfrak{A}_M$.*

(3) *Es gibt M-Homomorphismen $\varphi_t: (A_t, \alpha_t) \to (A, \alpha)$ derart, daß aus $\varphi_{\iota_1} a_1 = \varphi_{\iota_2} a_2$ folgt $(\iota_{\iota_1} a_1, \iota_{\iota_2} a_2) \in [(\iota_t \alpha_t m, \iota_{t'} \alpha_{t'} m) \mid t, t' \in T, m \in M]$ und daß zu jedem $(a_k \mid k \in K_i) \in D_i(A)$ ein A_t und ein $(a_k^t \mid k \in K_i) \in D_i(A_t)$ existiert mit $\varphi_t \alpha_k^t = a_k$ für $k \in K_i$.*

(4) *Es gibt einen Isomorphismus ψ von einer konjunkten Summe der A_t auf A mit $\Delta = [(\iota_t \alpha_t m, b_m) \mid t \in T, m \in M, b_m \in \pi_\Delta^{-1} \psi^{-1} \alpha m]$.*

(5) *Es gibt einen Isomorphismus ψ von der Faktoralgebra der direkten Summe der A_t, die nach der Kongruenzrelation $\Delta := [(\iota_t \alpha_t m, \iota_{t'} \alpha_{t'} m) \mid t, t' \in T, m \in M]$ gebildet ist, so daß $\alpha = \psi \pi_\Delta \iota_t \alpha_t$ ist.*

Beweis. (1) $\Leftrightarrow$ (2) wurde allgemein in Satz 1 gezeigt.

(2) $\Rightarrow$ (4): Wegen $\mathfrak{F}(A, \alpha) \leqq \mathfrak{F}(A_t, \alpha_t)$ existieren M-Homomorphismen

$$\varphi_t: (A_t, \alpha_t) \to (A, \alpha).$$

Es gibt somit einen Homomorphismus $\varphi: \mathsf{S} A_t \to A$ mit $\varphi_t = \varphi \iota_t$. Aus $\alpha = \varphi_t \alpha_t$ und $\varphi_t = \varphi \iota_t$ folgt $\alpha = \varphi \iota_t \alpha_t$ und daraus $\pi_{\Theta_\varphi} \iota_t \alpha_t = \pi_{\Theta_\varphi} \iota_{t'} \alpha_{t'}$ für beliebige $t, t' \in T$. Daher sind die $\pi_{\Theta_\varphi} \iota_t$ M-Homomorphismen von den (A_t, α_t) in $\big((\mathsf{S} A_t)/\Theta_\varphi, \pi_{\Theta_\varphi} \iota_t \alpha_t\big)$; d. h. es gilt insbesondere $(\mathsf{S} A_t)/\Theta_\varphi = \langle \bigcap \pi_{\Theta_\varphi} \iota_t A_t \rangle$. $(\mathsf{S} A_t)/\Theta_\varphi$ ist also konjunkte Summe der A_t und damit nach Voraussetzung in $\mathfrak{A}$, denn φ induziert kanonisch einen Homomorphismus

$$\psi: (\mathsf{S} A_t)/\Theta_\varphi \to A.$$

Wegen $\alpha = \varphi \iota_t \alpha_t = \psi \pi_{\Theta_\varphi} \iota_t \alpha_t$ ist ψ sogar ein M-Homomorphismus von $\big((\mathsf{S} A_t)/\Theta_\varphi, \pi_{\Theta_\varphi} \iota_t \alpha_t\big)$ in (A, α). Somit hat man $\mathfrak{F}(A, \alpha) \leqq \mathfrak{F}\big((\mathsf{S} A_t)/\Theta_\varphi, \pi_{\Theta_\varphi} \iota_t \alpha_t\big) \leqq \mathfrak{F}(A_t \alpha_t)$, also

$$\mathfrak{F}(A, \alpha) = \mathfrak{F}\big((\mathsf{S} A_t)/\Theta_\varphi, \pi_{\Theta_\varphi} \iota_t \alpha_t\big).$$

ψ ist daher der M-Isomorphismus von $\big((\mathsf{S} A_t)/\Theta_\varphi, \pi_{\Theta_\varphi} \iota_t \alpha_t\big)$ auf (A, α). Darüber hinaus ist $\Theta_\varphi = [(\iota_t \alpha_t m, b_m) \mid t \in T, m \in M, b_m \in \pi_{\Theta_\varphi}^{-1} \psi^{-1} \alpha m]$.

(4) $\Rightarrow$ (3): Durch $\varphi_t := \psi \pi_\Delta \iota_t$ werden M-Homomorphismen φ_t von (A_t, α_t) in (A, α) definiert. Die Zusatzbedingungen an die φ_t ergeben sich sofort daraus, daß ψ ein Isomorphismus und $\psi^{-1} A$ konjunkte Summe der A_t mit

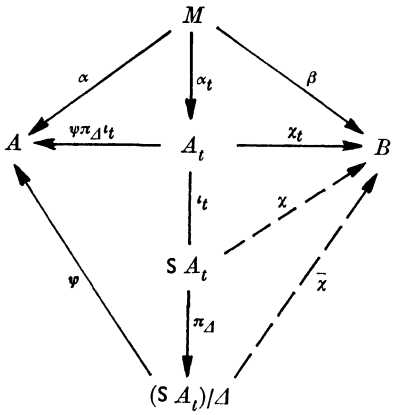
$$\Delta = [(\iota_t \alpha_t m, \iota_{t'} \alpha_{t'} m) \mid t, t' \in T, m \in M]$$

ist.

(3) $\Rightarrow$ (5): Es gibt einen Homomorphismus $\varphi: \mathsf{S} A_t \to A$ mit $\varphi_t = \varphi \iota_t$. Wegen $\varphi \iota_t \alpha_t = \varphi_t \alpha_t = \alpha = \varphi_{t'} \alpha_{t'} = \varphi \iota_{t'} \alpha_{t'}$ für beliebige $t, t' \in T$ induziert φ kanonisch einen Homomorphismus ψ von $(\mathsf{S} A_t)/\Delta$ in A, für den gilt $\alpha = \psi \pi_\Delta \iota_t \alpha_t$. Aus $\psi b_1 = \psi b_2$ mit $b_1 = \pi_\Delta \iota_{t_1} a_1$ und $b_2 = \pi_\Delta \iota_{t_2} a_2$ folgt $\varphi_{t_1} a_1 = \varphi \iota_{t_1} a_1 = \psi b_1 = \psi b_2 = \varphi \iota_{t_2} a_2 = \varphi_{t_2} a_2$ und damit $(\iota_{t_1} a_1, \iota_{t_2} a_2) \in \Delta$, also $b_1 = b_2$. Demnach ist ψ injektiv. Ist $(a_k \mid k \in K_i) \in D_i(A)$

und $a_k \in \psi((\mathsf{S}A_t)/\Delta)$ für $k \in K_i$, dann gibt es ein A_t und $(a_k^t \mid k \in K_i) \in D_i(A_t)$ mit $\varphi_t a_k^t = a_k$ für $k \in K_i$, also $(\pi_\Delta \iota_t a_k^t \mid k \in K_i) \in D_i((\mathsf{S}A_t)/\Delta)$ mit $\psi\pi_\Delta \iota_t a_k^t = a_k$ für $k \in K_i$. Daher ist $\psi((\mathsf{S}A_t)/\Delta)$ Unteralgebra von A. Wegen $\alpha M \subseteq \psi((\mathsf{S}A_t)/\Delta)$ gilt $\psi((\mathsf{S}A_t)/\Delta) = A$. Ähnlich wie die Surjektivität von ψ beweist man, daß auch ψ^{-1} Homomorphismus ist. Somit ist ψ ein Isomorphismus von $(\mathsf{S}A_t)/\Delta$ auf A.

(5) $\Rightarrow$ (1): Gegeben seien M-Homomorphismen $\chi_t: (A_t, \alpha_t) \to (B, \beta)$. Dann gibt es einen Homomorphismus χ von B in die direkte Summe $\mathsf{S}A_t$ mit $\chi_t = \chi\iota_t$. Wegen $\beta = \chi_t\alpha_t = \chi\iota_t\alpha_t$ für alle $t \in T$ induziert χ kanonisch einen M-Homomorphismus $\bar{\chi}: ((\mathsf{S}A_t)/\Delta, \pi_\Delta\iota_t\alpha_t) \to (B, \beta)$. Da $\alpha = \psi\pi_\Delta\iota_t\alpha_t$, ist dann $\bar{\chi}\psi^{-1}$ ein M-Homomorphismus von (A, α) in (B, β). Somit ist (A, α) Summe der (A_t, α_t) in $\mathfrak{A}_M$.



Korollar 2*. *Zu jeder konjunkten Summe A von Algebren A_t, wobei A und die A_t aus einer Klasse $\mathfrak{A}$ von Algebren gleichen Typus sind, gibt es eine Menge M und Abbildungen $\alpha: M \to A$ und $\alpha_t: M \to A_t$ derart, daß (A, α) und die (A_t, α_t) M-Algebren sind und daß (A, α) Summe der (A_t, α_t) in der Kategorie $\mathfrak{A}_M$ ist.*

Beweis. Man setze $M := \bigcup_{t \in T} \{t\} \times A_t$ und wähle Abbildungen $\chi_t: A \to A_t$ derart, daß $\pi_\Delta \iota_t \chi_t$ die Identität von A ist. Durch $\alpha_t(t', a_{t'}) := \chi_t \pi_\Delta \iota_{t'} a_{t'}$ für $a_{t'} \in A_{t'}$ und $t, t' \in T$ werden dann Abbildungen $\alpha_t: M \to A_t$ definiert mit $A_t = \langle \alpha_t M \rangle$ (sogar $A_t = \alpha_t M$). Für $\alpha := \pi_\Delta \iota_t \alpha_t = \pi_\Delta \iota_{t'} \alpha_{t'}$ hat man auch $A = \langle \alpha M \rangle$ (sogar $A = \alpha M$). Aus (4) $\Rightarrow$ (1) in Satz 2* folgt nun unmittelbar, daß (A, α) Summe der (A_t, α_t) in $\mathfrak{A}_M$ ist.

Literatur

[1] *P. M. Cohn*, Universal algebra, London 1965.

[2] *J. Schmidt*, Über die Dimension einer partiellen Algebra, Zeitschrift f. Math. Logik u. Grundl. d. Math. **11** (1965), 227—239.

[3] *J. Schmidt*, A general existence theorem on partial algebras and its special cases, Coll. Math. **14** (1966), 73—87.

[4] *J. Schmidt*, Allgemeine Algebra, Vorlesungsausarbeitung, Bonn 1966.

Mathematisches Institut der Universität, 53 Bonn, Wegelerstraße 10

Eingegangen 22. März 1969

Verallgemeinerung eines Satzes von R. C. Bose über die Anzahl der Schmiegkreise eines Ovals, die vom Oval umschlossen werden oder das Oval umschließen

Von *Otto Haupt* in Erlangen

Herrn Professor Dr. Wolfgang Krull zum 70. Geburtstag

Einleitung

Von R. C. Bose [1] wurde gezeigt, daß für ein stetig gekrümmtes Oval C mit nur endlich vielen Scheiteln olg endes gilt: Unter einem J-Scheitel werde ein Scheitel von C verstanden, dessen zugehöriger Schmiegkreis (bis auf den Berührpunkt) im Innern von C liegt; ferner werde als J-Kreis bezeichnet jeder Kreis, der das Oval in (endlich vielen und zwar in) mindestens 3 Punkten stützt und der fremd ist zum Äußeren des Ovals. Zählt man einen J-Kreis mit n Stützpunkten für $n - 2$ in genau 3 Punkten stützende J-Kreise und ist t die Gesamtzahl der entsprechend gezählten J-Kreise, so besteht zwischen der Anzahl s der J-Scheitel und zwischen t die Beziehung $s = 2 + t$. — Das Gleiche gilt, wenn man in den obigen Definitionen das Innere des Ovals durch dessen Äußeres ersetzt.

In der vorliegenden Note soll gezeigt werden, daß der *Satz von Bose topologischer Natur* ist im folgenden Sinne: Der Satz bleibt richtig, wenn an Stelle eines Ovals eine Jordankurve C tritt und an Stelle des Systems der Kreise irgendein System $\mathfrak{k}$ von Kurven, sogen. Ordnungscharakteristiken (kurz OCh) K, d. h. Kurven, deren jede — kurz gesagt — durch irgend drei ihrer Punkte eindeutig bestimmt ist und stetig von ihnen abhängt. An Stelle der Forderung bei Bose, daß C stetig gekrümmt und Oval sei, treten gewisse Forderungen, die sich auf die Existenz und Eindeutigkeit der Schmieg-OCh in jedem Punkt von C, ferner auf die Büschel von OCh beziehen, von denen C in einem Punkt gestützt wird, sowie auf das lokale Verhalten von C in den Scheiteln bezüglich $\mathfrak{k}$ (vgl. Nr. 1. 1). Der Beweis ist wesentlich verschieden von dem von Bose [1] gegebenen. — Auf Anwendungen etwa in der hyperbolischen (ebenen) Geometrie hoffen wir später zurückzukommen.

In diesem Zusammenhang sei noch bemerkt, daß (vgl. [2], Nr. 4. 3. (S. 202)) für den Fall eines stetig gekrümmten Ovals C die folgenden beiden Aussagen (a) und (b) gleichwertig sind: (a) Es wird C von keinem Kreis in mehr als zwei Punkten berührt. — (b) Es besitzt C die zyklische Ordnung vier. — Nach dem Satz von Bose ist damit noch gleichwertig: (c) Es gibt genau zwei Scheitel des Ovals, in denen die Schmiegkreise (bis auf den Berührpunkt) im Innern des Ovals liegen. (Daß (b) aus (c) folgt, ist bei Bose

[1] gezeigt. Die Gleichwertigkeit von (a) und (b) gilt auch unter allgemeineren Voraussetzungen (vgl. [2], a. a. O.).) In Nr. 3. 5. wird hierauf eingegangen.

Herzlich zu danken habe ich wieder Herrn H. Künneth für kritische Bemerkungen zum Manuskript vorliegender Note.

§ 1. Voraussetzungen, Bezeichnungen

1. 1. Voraussetzungen.

(I) Es sei $\mathfrak{k}$ ein System von Ordnungscharakteristiken (kurz OCh) mit der Grundzahl $k = k(\mathfrak{k}) = 3$ in einem Grundbereich $G = \overline{G}$. (Vgl. Genaueres in [2], Nr. 1. 1. ff.).

(II) Der Limes jeder konvergenten Folge von OCh mit positiver unterer Schranke der Durchmesser (oder mit mehrpunktigem Limes) ist eine (mehrpunktige) Ordnungscharakteristik.

(III) Es sei $C < \overline{G}$ eine (stets einfache) Kurve mit beschränktem *Punktordnungswert* POW $(C; \mathfrak{k})$, d. h. es existiert eine natürliche Zahl t derart, daß $t = \max(\text{kard}\,(C \cap K) : K \in \mathfrak{k})$ ist.

(III) (1) Ferner besitze C nur *endlich viele*, also nur isolierte, $\mathfrak{k}$-Scheitel; dabei heißt $x \in C$ $\mathfrak{k}$-Scheitel, wenn POW $(x; C; \mathfrak{k}) = \min\{\text{POW}\,(U; \mathfrak{k})$ für alle Umgebungen U von x auf $C\} \geqq 4$ ist. Falls x kein $\mathfrak{k}$-Scheitel ist, gilt POW $(x; C; \mathfrak{k}) = 3$.

(III) (2) Jeder $\mathfrak{k}$-Scheitel sei *normal*; d. h. es existiere eine Umgebung U von x auf C vor folgender Art: Ist $U \cap K = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \cdots \cup \{x_n\}$ mit $n \geqq 3$, und entspricht die Reihenfolge $x_1, x_2, \ldots, x_n$ auf C einer Orientierung von C, so entspricht diese Reihenfolge auch einer Orientierung von K; und dies gilt für jedes solche $K \in \mathfrak{k}$. Man sagt dafür auch: der $\mathfrak{k}$-Scheitel x besitze eine Umgebung U auf C derart, daß U und $\mathfrak{k}$ *normal* (zueinander) sind.

(III) (3) In jedem Punkt $x \in C$ existiert *genau eine* $\mathfrak{k}$-*Paratingente* $P(x)$ in C, wobei $P(x)$ mehrpunktig ist. Hier ist $P(x)$ erklärt als Limes aller $K(x', x'', x''') \in \mathfrak{k}$ mit gegen x auf C konvergierenden $x', x'', x''' \in C$; dabei besagt $K(x', x'', x''')$, daß

$$x', x'', x''' \in K(x', x'', x''').$$

Gemäß (II) ist also $P(x)$ eine OCh. — Ist x ein $\mathfrak{k}$-Scheitel, so wird $P(x) = \lim K(z_1, \ldots, z_4)$ für geeignete, gegen x konvergierende $z_1, \ldots, z_4 \in C$.

(III) (4) Für jedes $x \in C$ und jedes $y \notin P(x)$ existiert eindeutig

$$K(x, x; y) = \lim K(x', x'', y)$$

für beliebig gegen x konvergierende Punkte $x', x'' \in C$. Dabei ist $K(x, x; y) \in \mathfrak{k}$.

(III) (5) Bezeichnet $\mathfrak{b}(x)$ das System der $K(x, x; y)$ für alle $y \notin P(x)$, so enthält $\mathfrak{b}(x)$ OCh K sowohl mit $K \setminus \{x\} < J(C)$ als solche mit $K \setminus \{x\} < A(C)$, wobei $J(C)$ bzw. $A(C)$ das Innere bzw. das Äußere von C bezeichnet.

(IV) Es seien $x_i, x_{in} \in C$, $i = 1, 2, 3$; $n = 1, 2, \ldots$, mit $x_i = \lim x_{in}$, $i = 1, 2, 3$. Ferner seien die x_i also auch schließlich alle x_{in} verschieden und es existiere $K(x_{1n}, x_{2n}, x_{3n})$ für alle n. Dann existiert auch $\lim K(x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}) = L$ (mit $L \in \mathfrak{k}$ gemäß (II)).

1. *Anmerkung.* Aus der Normalität eines $\mathfrak{k}$-Scheitels $x \in C$ und der Eindeutigkeit von $P(x)$ folgt, daß POW $(x; C; \mathfrak{k}) = 4$ (vgl. [3], Nr. 3. 2., Satz, Beh. (b)).

2. *Anmerkung.* Daß POW $(C; \mathfrak{k})$ beschränkt ist (vgl. (III)) folgt aus (III) (1) und (III) (2) sowie (III) (3). In der Tat: gemäß Anmerkung 1. ist C überdeckbar mit endlich vielen Teilbogen, deren jeder den POW 3 oder 4 besitzt.

3. *Anmerkung.* Betr. (III) (3), (4). Es ist $P(x) = \lim_{y \to x} K(x, x; y)$, wenn $y \in C \setminus \{x\}$.

4. *Anmerkung.* Die oben aufgezählten Postulate (I) bis (IV) werden auf ihre Unabhängigkeit hin nicht untersucht; sie sind verträglich, weil erfüllt für den Fall, daß $\mathfrak{k}$ das System der Kreise und daß C ein stetig gekrümmtes Oval ist.

1. 2. Definition. Durch jede OCh K wird G in zwei fremde Gebiete zerlegt, von denen das eine als Inneres $J(K)$, das andere als Äußeres $A(K)$ von K bezeichnet werde. Als Inneres $J(C)$ von C werde das nur von C begrenzte Gebiet (in G) bezeichnet. Ist $K', K'' \in \mathfrak{k}$, so sagt man, es werde K' in $x \in K' \cap K''$ durch K'' von *innen* bzw. von *außen* (lokal) *gestützt*, wenn eine Umgebung U'' von x auf K'' existiert mit $U'' \setminus \{x\} < J(K')$ bzw. $< A(K')$. Dann ist sogar $K'' \setminus \{x\} < J(K')$ bzw. $< A(K')$, d. h. es stützt K'' das K' *global* in x (Nr. 2. 1., (2)). Entsprechend wenn C an Stelle von K' oder von K'' tritt.

1. 3. Definition. Es sei $J(C)$ wieder (vgl. Nr. 1. 2.) das zur Begrenzung von G fremde, von C begrenzte Innere von C. Ein $\mathfrak{k}$-Scheitel $s \in C$ werde als *J-Scheitel* (bezüglich $\mathfrak{k}$) von C bezeichnet und die $\mathfrak{k}$-Paratingente $P(s)$ an C in s als *J-Paratingente*, wenn C in s von $P(s)$ global gestützt wird, d. h. wenn $P(s) \setminus \{s\} < J(C)$. Weiter bezeichne man eine OCh K als *J-Ordnungscharakteristik*, kurz *JOCh*, (bezüglich C), wenn $K \setminus C \cap K < J(C)$ und $C \cap K = \{q_1\} \cup \cdots \cup \{q_n\}$ mit $n \geqq 2$; es soll also C von K global und zwar in mindestens 2 Punkten $q_1, \ldots, q_n$ je lokal von innen gestützt werden; man bezeichnet n auch als die (*Stütz-*)*Ordnung* der J-OCh K und K selbst kurz als eine *n-J-OCh* $I(q_1, \ldots, q_n)$. Wegen der Beschränktheit von POW $(C; \mathfrak{k})$ sind auch die Ordnungen der J-OCh beschränkt.

Ersetzt man in den vorstehenden Definitionen $J(C)$ durch $A(C)$, so ergeben sich die Begriffe A-Scheitel, A-Paratingente, sowie der, die Kurve C von außen global stützenden A-OCh $A(q_1, \ldots, q_n)$ der Ordnungen $n \geqq 2$.

Anmerkung. Jede J-OCh ist eine in G enthaltene Kurve, ebenso jede J-Paratingente.

§ 2. Sätze über OCh, von denen C (lokal oder global) gestützt wird

In diesem Paragraphen werden stets die Vor. der Nr. 1. 1. gemacht.

2. 1. Satz. (1) *Ist* $\mathfrak{s}(x)$ *das System derjenigen OCh, von welchem C in x (von innen oder von außen) lokal gestützt wird, so gilt*

$$\mathfrak{b}(x) = \mathfrak{s}'(x) = \mathfrak{s}(x) \setminus \{P(x)\},$$

wobei $\mathfrak{s}(x) = \mathfrak{b}(x) \cup \{P(x)\}$ *bzw.* $\mathfrak{s}(x) = \mathfrak{b}(x)$ *je nachdem x ein* $\mathfrak{k}$*-Scheitel ist oder nicht.*

(2) *Für jedes* $x \in C$ *sind die* $K \in \mathfrak{b}(x)$ *paarweise fremd bis auf x und stützen sich gegenseitig global.*

(3) *Es wird* $P(x)$ *von allen* $K \in \mathfrak{b}(x)$ *global in x gestützt, für alle* $x \in C$. *Es ist also insbesondere* $P(x)$ *fremd bis auf x zu jedem* $K \in \mathfrak{b}(x)$.

(4) *Im System* $\mathfrak{b}(x) < \mathfrak{k}$ *wird durch* $P(x)$ *jede OCh (aus* $\mathfrak{b}(x)$*), durch welche C in x (lokal) von außen gestützt wird, getrennt von jeder OCh (aus* $\mathfrak{b}(x)$*), durch welche C (lokal) in x von innen gestützt wird.*

(5) *Durch jeden Punkt von* $\underset{\sim}{G}\setminus\{x\}$ *geht genau ein* $K \in \mathfrak{b}'(x) = \mathfrak{b}(x) \cup \{P(x)\}$. *Ist* $K = K(x, x; y) \in \mathfrak{b}(x)$, *so hängt* K *bei festem* x *stetig von* y *ab*; *ferner ist* $P(x)$ *Limes von* $K \in \mathfrak{b}(x)$.

(6) *Es enthält* $\mathfrak{b}(x)$ *OCh von beliebig kleinen Durchmessern und zwar sowohl solche, durch die* C *in* x *global von innen, als solche, durch die* C *in* x *global von außen gestützt wird.*

Zusatz. *Zu jedem* $K(x, x; y) \in \mathfrak{b}(x)$ *bzw. zu jedem* $y \in P(x)\setminus\{x\}$ *gibt es OCh* T *mit einem Teilbogen*[1]) $\underset{\sim}{T}(x \mid y)$, *der ganz auf der einen Seite von* $K(x, x; y)$ *bzw. von* $P(x)$ *liegt.*

Beweis. Betr. Beh. (1). **(a)** Es sei $K \in \mathfrak{s}'(x)$, also $K \neq P(x)$, so daß $y', y'' \in K\setminus K \cap P(x)$ existieren.

(a) *(I)* Es gibt nun (beliebig kleine, zu y', y'' fremde) Umgebungen W von x in G der folgenden Art: Es ist $\mathrm{POW}\left(C \cap W \cap K(y', y'', z)\right) \leqq 2$ für jedes $z \in W$; existierte nämlich in jeder beliebig kleinen Umgebung W von x ein z mit $\mathrm{POW}\left(C \cap W \cap K(y', y'', z)\right) \geqq 3$, so existierten Umgebungen W_n von x mit $\{x\} = \lim W_n$ und es existierten dazu $z_n \in W_n$ mit $\mathrm{POW}\left(C \cap W_n \cap K(y', y'', z_n)\right) \geqq 3$, derart, daß $L = \lim K(y', y'', z_n)$ existiert, also $L \in \mathfrak{k}$ und daher $L = K = P(x)$ ist, im Widerspruch zu $y', y'', \notin P(x)$.

(a) *(II)* Da nach Vor. C in x von K (lokal) gestützt wird, gibt es in jedem W ein z' mit $p = \mathrm{POW}\left(C \cap W \cap K(y', y'', z')\right) \geqq 2$, gemäß Ziff. (I) also mit $p = 2$. Daher ist $K = \lim K(y', y'', z') \in \mathfrak{b}(x)$, also $\mathfrak{s}'(x) < \mathfrak{b}(x)$.

(b) Umgekehrt. Es sei $K = K(x, x; y) \in \mathfrak{b}(x)$, also $K \neq P(x)$ und $K = \lim K(x', x'', y)$ mit $x = \lim x' = \lim x''$; $x', x'' \in C$, $x' \neq x''$.

(b) *(I)* Wegen $K \neq P(x)$ gibt es eine zu y fremde Umgebung W von x in G so, daß für zu x beliebig benachbarte $x', x'' \in C \cap W$ gilt: $C \cap W \cap K(x', x'', y) = \{x'\} \cup \{x''\}$. Andernfalls nämlich gibt es beliebig kleine W derart, daß

$$C \cap W \cap K(x', x'', y) > \{x'\} \cup \{x''\} \cup \{z\},$$

so daß $P(x) = \lim K(x', x'', y)$ wäre.

(b) *(II)* Für zu x hinreichend benachbarte $x', x'' \in C$ hat nun der zu y fremde Teilbogen $\underset{\sim}{K}(x' \mid x'')$ von K beliebig kleinen Durchmesser und liegt ganz auf der einen Seite von C, während $\left(K\setminus K(x' \mid x'')\right) \cap W$ auf der anderen Seite von C liegt. Daher ist $\lim K(x' \mid x'') = \{x\}$ und x ist Stützpunkt von K auf C. Somit gilt $K \in \mathfrak{s}'(x)$, also $\mathfrak{b}(x) < \mathfrak{s}'(x)$.

Betr. Beh. (2). Zu zeigen ist: **(A)** Wenn $K' = K(x, x; y') \in \mathfrak{b}(x)$ und

$$K'' = K(x, x; y'') \in \mathfrak{b}(x)$$

mit $K' \neq K''$, so gilt $K' \cap K'' = \{x\}$, wobei $y' \neq y''$ (gemäß Nr. 1. 1., (III) (4)). Andernfalls nämlich existierte ein $z \in K' \cap K''\setminus\{x\}$, so daß $K(x, x; z) = K' = K''$ (Nr. 1. 1., (III) (4)). — **(B)** Es ist x Stützpunkt von K' auf K''. Denn gemäß (A) ist $K' \cap K'' = \lim K(x', x'', y') \cap K(x', x'', y'') = \lim (\{x'\} \cup \{x''\}) = \{x\}$ für $x = \lim x' = \lim x''$, so daß wie beim Bew. betr. Beh. (1), Buchstabe **(b)**, auf $\lim K'(x' \mid x'') = \{x\}$ und damit auf x als Stützpunkt von K' auf K'' geschlossen werden kann; dabei ist $K'(x' \mid x'') < K(x', x'', y')\setminus\{y'\}$ angenommen.

Betr. Beh. (3). **(I)** Es sei $K = K(x, x; y) \in \mathfrak{b}(x)$, also $K = \lim K(x', x'', y)$ und $K \neq P(x) = \lim K(x', x'', x''')$, wenn $x = \lim x' = \lim x'' = \lim x'''$ auf C. Wegen

---

[1]) Ein abgeschlossener Bogen B mit den Endpunkten a, b wird auch mit $B(a \mid b)$ bezeichnet und der größte offene Teilbogen von B, also $B\setminus\{a\}\setminus\{b\}$, mit $\underset{\sim}{B}$.

$P(x) \neq K$ kann dabei $y \notin P(x)$ angenommen werden. Wegen $P(x)$, $K \in \mathfrak{k}$ ist

$$K(x', x'', y) \cap K(x', x'', x''') = \{x'\} \cup \{x''\}.$$

(II) Zufolge der Definition von $P(x)$ gibt es Umgebungen W von x in G und dazu beliebig kleine Umgebungen U mit $\bar{U} \subset W$ derart, daß für gewisse zu $P(x)$ (hinreichend und) beliebig benachbarte $K(x', x'', x''') = K'$ gilt: $C \cap W \cap K' = C \cap U \cap K'$; dies folgt daraus, daß POW $(C; \mathfrak{k})$ beschränkt (vgl. Nr. 1. 1., (III) sowie Anmerkung 2.), also x isolierter Punkt von $C \cap P(x)$ ist. Falls $\bar{K}'(\bar{x}' \mid \bar{x}'')$ der, alle Punkte von $C \cap U \cap K'$ enthaltende Teilbogen von K' ist, gilt $\{x\} = \lim \bar{K}'(\bar{x}' \mid \bar{x}'')$ für gegen $P(x)$ konvergierende K'; dabei ist $x = \lim \bar{x}' = \lim \bar{x}''$ für $P(x) = \lim K'$. Betrachtet man jetzt $K'' = K(\bar{x}', \bar{x}'', y)$, so liegt $\bar{K}''(\bar{x}' \mid \bar{x}'')$ ganz auf der einen Seite von K'' und man schließt wie beim Bew. betr. Beh. (1) Buchstabe (b) (II), daß $P(x)$ und $K(x, x; y)$ einander in x stützen.

(III) Daß jedes $y \in G \setminus \{x\}$ in einem $K \in \mathfrak{b}'(x) = \mathfrak{b}(x) \cup \{P(x)\}$ (vgl. Beh. (5)) enthalten ist, folgt jetzt aus Nr. 1. 1., (III) (4).

Betr. Beh. (4). Es seien W und U Umgebungen von x in G, wobei vorbehalten bleibt, daß U beliebig klein angenommen werden kann, und wobei

$$C \cap W \cap K' = C \cap U \cap K' = \{x_1\} \cup \cdots \cup \{x_t\}$$

für gewisse (vgl. unten) zu $P(x)$ beliebig benachbarte $K' = K(x_1, \ldots, x_t) \in \mathfrak{k}$ gilt (vgl. Bew. betr. Beh. (3), Ziff. (II)). Dabei ist $t = 3$ oder $t = 4$ (vgl. Nr. 1. 1., Anmerkung 1.). Ist $t = 3$ und entspricht die Reihenfolge x_1, x_2, x_3 einer Orientierung von C, so auch einer (passenden) Orientierung von K'; ist aber $t = 4$ für beliebig kleine U, so ist x ein $\mathfrak{k}$-Scheitel und daher voraussetzungsgemäß (vgl. Nr. 1. 1., (III) (2)) ein W normal bezüglich aller $K \in \mathfrak{k}$ (mit POW $(W \cap K) \geqq 3$). Die im Falle $t = 3$ bzw. $t = 4$ im vorstehend erwähnten Sinne zu einer (festen) Orientierung von C gehörigen Orientierungen der K', die sogen. *natürlichen* Orientierungen der K', übertragen sich vermöge Grenzübergang auf $P(x)$ und liefern die (bezüglich der festen Orientierung von C) natürliche Orientierung von $P(x)$.

Je nachdem x ein $\mathfrak{k}$-Scheitel ist oder nicht wird C von $P(x)$ in x gestützt ($t = 4$) oder geschnitten ($t = 3$). Im Falle des Stützens genügt es, anzunehmen, daß C in x durch $P(x)$ von *innen* gestützt wird. In jedem Falle (d. h. gleichgültig ob C von $P(x)$ in x geschnitten oder gestützt wird) kann C so orientiert werden, daß bei natürlich orientiertem $P(x)$ eine vordere Umgebung P_v von x auf $P(x) \setminus \{x\}$ in $J(C)$ liegt. Bei passender Wahl der Bezeichnung $J(P(x))$ und $A(P(x))$ liegt dann eine vordere Umgebung C_v von x auf $C \setminus \{x\}$ in $A(P(x))$. In $A(P(x))$ liegt nun auch ein von $C_v \cup P_v \cup W_v$ begrenztes Gebiet V, wobei W_v Teil der Begrenzung von W ist und W o. B. d. A. als von einer einfachen Kurve begrenzt angenommen wird. Es ist also $V \subset J(C) \cap A(P(x)) \cap W$. Für beliebig kleine U und geeignete, zu $P(x)$ beliebig benachbarte $K' = K(x_1, \ldots, x_t)$, wobei die x_τ sämtlich Schnittpunkte von K' mit C sind (betr. K' und die Reihenfolge $x_1, \ldots, x_t$ vgl. oben), gilt dann $x_1 \in C_v \cap U \cap K'$; das natürlich orientierte K' tritt in x_1 von $J(C)$ nach $A(C)$ über und K' verläßt $A(C)$ wieder in x_2. Man wähle jetzt beliebig ein $y \in V \setminus (U \cap V \cap K')$ und betrachte $K = K(y, x_1, x_3) = K(x_1, x_3, y) \in \mathfrak{k}$; bei hinreichend kleinem U ist $C \cap U \cap K = \{x_1\} \cup \{x_3\}$ (vgl. Bew. betr. Beh. (1) (a), Ziff. (I)). Es kann und soll K so orientiert werden, daß y auf K *vor* x_1 (und x_1 vor x_3) liegt.

Dann liegt eine vordere Umgebung von x_1 auf $K \setminus \{x_1\}$ in $A(C)$. In der Tat: Andernfalls tritt K im Schnittpunkt x_1 mit C von $J(C)$ nach $A(C)$ über; da aber x_1 auch Schnitt-

punkt von K und K' ist, tritt K in x_1 von etwa $A(K')$ nach $J(K')$ über und muß daher wegen $x_2 \notin K$ das $A(C)$ zwischen x_1 und x_2 wieder verlassen, etwa in $x_1' \in \boldsymbol{C}(x_1 \mid x_2)$. Bei diesem Schlusse ist benutzt: Sind die $x_1, \ldots, x_t$ hinreichend benachbart zu x, also K' hinreichend benachbart zu $P(x)$ und sind C_v^*, K_v, K_v' vordere Umgebungen von x_1 auf C und den (natürlich orientierten) K und K', so liegt $\boldsymbol{K}_v$ „zwischen" C_v^* und K_v', d. h. in einem, y enthaltenden Gebiet, in dessen Begrenzung $C_v^* \cup K_v'$ enthalten ist; es verläuft daher eine hintere Umgebung von x_1 auf K ebenfalls zwischen hinteren Umgebungen von x_1 auf C und auf K'. Zufolge der Existenz von x_1' ist $\mathrm{POW}(C \frown U \frown K) \geqq 3$ für zu $K(x, x; y)$ hinreichend benachbarte $K(x_1, x_3, y)$, d. h. $\lim K(x_1, x_3, y) = P(x)$ im Widerspruch zu $y \notin P(x)$.

Es liegt also eine vordere Umgebung von x_1 auf $K \setminus \{x_1\}$ in $A(C)$. Läßt man x_1 und x_3 bei festem y auf C gegen x konvergieren, so konvergiert K gegen $K(x, x; y) \neq P(x)$; dabei wird C in x durch $K(x, x; y)$ von außen gestützt. Weil nun $y \in V \setminus V \frown U \frown K'$ beliebig gewählt war und dabei K' beliebig benachbart zu $P(x)$ sowie U beliebig klein angenommen werden konnte, folgt: Jedes, zu V nicht fremde $K \in \mathfrak{b}(x)$ stützt C in x von außen. Gemäß Beh. (3) wird $P(x)$ in x durch jedes $K \in \mathfrak{b}(x)$ global gestützt, also durch jedes zu $A(P(x))$ nicht fremde $K \in \mathfrak{b}(x)$ global von außen. Andererseits wäre jedes $K \in \mathfrak{b}(x)$, welches nicht fremd zu $A(P(x))$ ist und von welchem C in x von innen gestützt wird, nicht fremd zu V. Daher wird C in x von außen gestützt durch jedes $K \in \mathfrak{b}(x)$, welches nicht fremd ist zu $A(P(x)) = A(P(x)) \frown (J(C) \cup C \cup A(C))$. Wegen $V < J(C) \frown A(P(x))$ folgt weiter, daß C durch jedes zu $J(P(x))$ nicht fremde $K \in \mathfrak{b}(x)$ von innen gestützt wird. Da diese Schlüsse gelten, gleichgültig ob x ein $\mathfrak{k}$-Scheitel ist oder nicht, ist die Beh. (4) bewiesen.

Betr. Beh. (5). Der erste Teil der Beh. folgt aus Nr. 1. 1., (III) (4) zusammen mit Nr. 2. 1., Beh. (3) und (2). — Der zweite Teil werde indirekt bewiesen.

Betr. *Stetigkeit von* $K(x, x; y)$ bei festem x (als Funktion von y). Es sei also $y = \lim y_n$ mit $y \notin P(x)$ und es konvergiere $(K(x, x; y_n))_n$ zum Limes H; da H mehrpunktig ist, gilt $H \in \mathfrak{k}$. Es ist $y \in H$. Ist nun $H \neq K(x, x; y)$, so kann C in x nicht von H gestützt werden, weil (gemäß Beh. (1) und (5) erster Teil) nur $K(x, x; y)$ unter den x und y enthaltenden OCh diese Eigenschaft besitzt. Daher ist x (isolierter) *Schnitt*punkt von H mit C. Folglich existiert zu jeder Umgebung W_0 von x in G und zu jeder Umgebung U von x in G mit $\overline{U} < W_0$ eine Nachbarschaft $\mathfrak{u}$ von H in $\mathfrak{k}$ von folgender Art: Zu jedem $K \in \mathfrak{u}$ gibt es beliebig benachbarte $K' \in \mathfrak{u}$ derart, daß $C \frown W \frown K' = C \frown U \frown K'$ aus einer ungeraden Anzahl u von Punkten besteht und daß diese sämtlich Schnittpunkte von C mit K' sind. Es kann aber nicht $u \geqq 3$ sein für beliebig kleine U und zu H beliebig benachbarte K'; denn anderenfalls gibt es eine gegen H konvergente Folge solcher K', etwa $(K_n')_n$, mit $C \frown W_0 \frown K' > \{x_n'\} \cup \{x_n''\} \cup \{x_n'''\} \cup \ldots$, wobei die x_n' usw. schließlich beliebig benachbart zu x sind. Dann wäre aber H eine $\mathfrak{k}$-Paratingente an C in x, also $H = P(x)$ (gemäß Nr. 1. 1., (III) (3)) im Widerspruch zu $y \notin P(x)$. Mithin gibt es ein U und $\mathfrak{u}$, so daß $C \frown W_0 \frown K = C \frown U \frown K$ für jedes $K \in \mathfrak{u}$ genau einen Punkt enthält (der Schnittpunkt ist). Andererseits ist $H = \lim K(x, x; y_n)$ und es gibt zu jedem $K(x, x; y_n)$ ein beliebig benachbartes $K(x_n', x_n'', y_n)$ mit zu x beliebig benachbarten x_n', x_n''. Dann ist aber $C \frown W_0 \frown K(x_n', x_n'', y_n) = \{x_n'\} \cup \{x_n''\}$, wobei $K(x_n', x_n'', y_n) \in \mathfrak{u}$. Widerspruch.

Betr. $P(x) = \lim K(x, x; y_n)$. Es sei also $K_n = K(x, x; y_n)$ mit $y_n \notin P(x)$ und $y = \lim y_n \in P(x) \setminus \{x\}$. Es existiere $H = \lim K_n$. Gemäß Nr. 1. 1., (II), ist $H \in \mathfrak{k}$. Außerdem ist $x, y \in H$. Falls $H \neq P(x)$, gibt es $z \in H \setminus P(x) \frown H$. Wegen $H = \lim K_n$ existieren

$z_n \in K_n$ mit $z = \lim z_n$. Gemäß der Stetigkeit von $K(x, x; y)$ folgt wegen $K_n = K(x, x; z_n)$ und $z = \lim z_n \notin P(x)$ sowie $H = \lim K_n$, daß $H = K(x, x; z) \in \mathfrak{b}(x)$ und daß

$$y \in P(x) \cap K(x, x; z)$$

im Widerspruch zu Beh. (3).

Betr. Beh. (6). Gemäß Nr. 1. 1., (III) (5), genügt es, Ordnungscharakteristiken $K \in \mathfrak{b}(x)$ mit $K \setminus \{x\} < J(C)$ bzw. $K \setminus \{x\} < A(C)$ zu betrachten, wobei wir uns auf $J(C)$ beschränken können. Wir schließen indirekt, nehmen also an, das Infimum d der Durchmesser $d(K)$ aller dieser $K < J(C) \cup \{x\}$ sei positiv. Es existiert dann eine konvergente Folge $(K_n)_n$ mit $K_n \in \mathfrak{b}(x)$ und $K_n \setminus \{x\} < J(C)$ derart, daß $0 < d = \lim d(K_n) \leqq d(K_n)$. Bei passender Wahl der Bezeichnung $J(K_n)$, $A(K_n)$ kann gemäß Beh. (2) sogar $J(K_{n+1}) < J(K_n) < J(C)$ angenommen werden; $n = 1, 2, \ldots$. Nach Annahme existiert $K_0 = \lim K_n$, wobei dann $d(K_0) \geqq d$. Gemäß Nr. 1. 1., (II), ist K_0 eine mehrpunktige OCh. Wegen $J(K_n) < J(C)$ und $K_0 \setminus \{x\} < \bigcap_n J(K_n)$ ist $K_0 \setminus \{x\} < J(C)$, also entweder $K_0 \in \mathfrak{b}(x)$ oder $K_0 = P(x)$ (gemäß Beh. (1)). In jedem Fall ist $J(K_0) \neq \emptyset$ und gibt es $y' \in J(K_0) \setminus P(x) \cap J(K_0)$ (weil $P(x)$ nirgends dicht in $J(K_0)$ ist). Es ist dann $K' = K(x, x; y') \in \mathfrak{b}(x)$ und $K' \neq P(x)$. Außerdem gilt $K' \setminus \{x\} < J(K_0)$, also $d(J(K')) \leqq d$ und damit $d(J(K')) = d$. Im Widerspruch dazu ergibt sich $d(J(K')) < d$. In der Tat: Es existiert $M = \{t'\} \cup \{t''\} < K'$ mit $d(M) = d$. Ist S die größte, von Punkten aus K_0 begrenzte Strecke auf der Verbindungsgeraden von t' und t'', so liegt mindestens eines der t', t'' im Innern von S, weil $K' \setminus \{x\} < J(K_0)$. Somit ist $d(M) < d(S)$. Widerspruch. Mithin gilt $d = 0$.

Betr. Zusatz. Es sei $z' \in K(x, x; y) \setminus \{x\} \setminus \{y\}$ und z zu z' hinreichend benachbart auf der in Betracht kommenden Seite von $K(x, x; y)$. Gemäß Nr. 1. 1., (I), bzw. H.-K. [2], Nr. 1. 1. ff. existiert die OCh $K(x, z, y)$ und der von y und x begrenzte, z enthaltende Teilbogen $T(x \mid y)$ von $K(x, z, y)$ hat die gewünschte Eigenschaft.

2. 2. In dieser und den folgenden Nr. behandeln wir Eigenschaften der in Nr. 1. 3. definierten J-OCh und A-OCh.

Satz. (1) *Es sei C orientiert. Ist $I(q_1, \ldots, q_n)$ eine J-OCh der Ordnung $n \geqq 3$ und entspricht die Reihenfolge $q_1, \ldots, q_n$, auf C einer Orientierung von C, so gibt es eine Orientierung von $I(q_1, \ldots, q_n)$, welcher die Reihenfolge $q_1, \ldots, q_n$ auf $I(q_1, \ldots, q_n)$ entspricht. Diese Orientierung von $I(q_1, \ldots, q_n)$ kann als die (bezüglich C) natürliche bezeichnet werden.*

(2) *Eine n-J-OCh $I = I(q_1, \ldots, q_n)$, $n \geqq 2$, ist durch jeden einzelnen ihrer n Stützpunkte q_ν (auf C) eindeutig bestimmt, in Zeichen $I(q_1, \ldots, q_n) = I(q_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, n$.*

(3) *Ist x nicht J-Scheitel, so existiert eindeutig $I(x) = I(x, p_1, \ldots, p_r)$ mit $r \geqq 1$.*

(4) *Ist dagegen x ein J-Scheitel, so existiert $I(x)$ nicht, d. h. kein J-Scheitel gehört einer n-J-OCh an mit $n \geqq 2$.*

Zusatz. *Die Beh. bleiben richtig, wenn man $J(C)$ durch $A(C)$ ersetzt.*

Beweis betr. Beh. (1). Wir schreiben ν statt q_ν und I statt $I(1, \ldots, n)$. Wir schließen indirekt O. B. d. A. können wir annehmen, daß $1, \ldots, n$ bzw. $1, r_1, \ldots, r_{n-1}$ die Reihenfolge auf C bzw. auf I bei einer Orientierung von I sei, für die $3 \leqq r_1 \leqq n - 1$. Mit $C(1 \mid r_1)$ bzw. $I(1, r_1)$ werde der von 1 und r_1 begrenzte, 2 enthaltende bzw. zu 2 fremde Teilbogen von C bzw. von I bezeichnet. Mindestens einer der beiden, offenen, von 2 und r_1 begrenzten Teilbogen von I ist dann nicht fremd zu $I(1 \mid r_1)$, also I keine einfache Kurve. Widerspruch.

Betr. Beh. (2). Folgt aus $\mathfrak{b}(x) = \mathfrak{s}'(x)$ (Nr. 2. 1., Satz, Beh. (1)) und daraus, daß $K(x, x; y)$ eindeutig durch x und y bestimmt ist (Nr. 1. 1., (III) (4)), also z. B. $I(q_1, \ldots, q_n) = K(q_r, q_r; q_t)$, $t \neq r$; $r, t = 1, \ldots, n$.

Betr. Beh. (3). Es gibt *höchstens ein* $I(x)$. Existieren nämlich zwei J-OCh $I'(x)$, $I''(x)$ (die verschieden sind), so stützen sich $I'(x)$ und $I''(x)$ global in x, es gilt also $I''(x) \setminus \{x\} < J(I'(x))$ oder $I'(x) \setminus \{x\} < J(I''(x))$ (vgl. Nr. 2. 1., (2)). Daher ist entweder $I''(x)$ oder $I'(x)$ keine J-OCh entgegen der Annahme. — Die *Existenz* eines $I(x)$ bei gegebenem $x \in C$, wobei x nicht J-Scheitel ist, kann so gezeigt werden: Mit $J(P) = J(P(x))$ sei diejenige Seite von $P(x)$ bezeichnet, auf der, bis auf x, solche (gemäß Nr. 2. 1., Satz, Beh. (4), (6) existierende) $K(x, x; y) \in \mathfrak{b}(x)$ liegen, die C von innen stützen und in $J(C)$ enthalten sind (bis auf x). Bezüglich $P(x)$ gilt entweder $P(x) < \bar{J}(C)$; da aber x kein J-Scheitel ist, muß dann $(C \setminus \{x\}) \cap P(x) \neq \emptyset$, also $P(x)$ selbst eine J-OCh sein. Oder es ist $D(P) = A(C) \cap J(P) \neq \emptyset$. Zu jedem $y \in D(P)$ existiert $K(x, x; y) = K(y) \in \mathfrak{b}(x)$ (Nr. 1. 1., (III) (4)); dabei ist dann $K(y) \setminus \{x\} < J(P)$. Mit $J(y) = J(K(y))$ werde diejenige Seite von $K(y)$ bezeichnet, die in $J(P)$ liegt. Für jedes $y \in D(P)$ ist die (gemäß Nr. 1. 1., Anmerkung (2)) endliche Menge $E(y) = (C \setminus \{x\}) \cap K(y)$ enthalten in einem kleinsten, abgeschlossenen Bogen $T(y) = C(a(y) \mid b(y))$ von C, wobei $a(y), b(y) \in E(y)$ und $T(y) \cap P(x) = \emptyset$ ist; außerdem hat man $E(y) \cap E(y') = \emptyset$ für $K(y) \neq K(y')$, also $a(y) \neq b(y')$ und $b(y) \neq b(y')$ für solche y, y'. Nun ist $T = \bar{T} = \bigcap_{y \in D(P)} T(y) \neq \emptyset$ und $T \cap P(x) = \emptyset$ sowie entweder $T = \{a\}$ oder $T = C(a \mid b)$. Es ist $a(y) \notin T$ für alle $y \in D(P)$ und daher in beiden Fällen (nämlich den Fällen eines ein- oder mehrpunktigen T) a ein Häufungspunkt der $E(y)$ (und verschieden von allen $a(y)$). Mithin ist $J(K(a)) < \bar{J}(C)$; denn anderenfalls existierte ein $z \in J(K(a)) \cap D(P)$ so, daß $K(a) = K(z)$, also $a \in E(z)$ und daher $a \notin T$; Widerspruch. Somit gilt $K(a) < \bar{J}(C)$ und $a \in K(a) \cap C \neq \emptyset$. Daher ist $K(a)$ die gesuchte J-OCh $I(x)$ an C in x.

Betr. Beh. (4). Ist x ein J-Scheitel, so ist etwa $J(P(x)) < J(C)$. Gemäß Nr. 2. 1., Satz, Beh. (4), sind dann die in $\bar{J}(P(x))$ gelegenen $K \in \mathfrak{b}(x)$ identisch mit denjenigen $K \in \mathfrak{b}(x)$, von denen C in x von innen gestützt wird. Wegen $P(x) \setminus \{x\} < J(C)$ kann daher keines dieser $K \in \mathfrak{b}(x)$ ein $I(x)$ sein. Andererseits wird (wieder gemäß Nr. 2. 1., Satz, Beh. (4)) C in x von allen, nicht in $\bar{J}(P(x))$ gelegenen $K \in \mathfrak{b}(x)$ von außen gestützt. Somit gibt es kein $I(x)$.

2. 3. Wichtig für das Folgende ist der

Hilfssatz. *Vor. Es seien* $X = I(x_1, \ldots, x_m)$ *und* $Y = I(y_1, \ldots, y_n)$, $X \neq Y$, $m \geqq 2$, $n \geqq 2$, *J-Ordnungscharakteristiken. Ferner sei C orientiert und es entspreche die Reihenfolge* $x_1, \ldots, x_m$ *bzw.* $y_1, \ldots, y_n$ *je dieser Orientierung von C (und damit (gemäß Nr. 2. 2., Satz, Beh. (1)) der natürlichen Orientierung von X bzw. von Y, falls* $m \geqq 3$, *bzw.* $n \geqq 3$).

Beh. (1). *Es gibt fremde Teilbogen* $C(X)$ *und* $C(Y)$ *von C mit* $x_1, \ldots, x_m \in C(X)$ *und* $y_1, \ldots, y_n \in C(Y)$. — (2) *Ist* $\underset{\sim}{C}(\mu) = \underset{\sim}{C}(x_\mu \mid x_{\mu+1})$; $\mu = 1, \ldots, m$; $x_{m+1} = x_1$, *ein zu allen* $x_1, \ldots, x_m$ *fremder Teilbogen von* $\tilde{C}$, *so gilt* $C \cap I(z) = \underset{\sim}{C}(\mu) \cap I(z)$ *für jedes* $z \in \underset{\sim}{C}(\mu)$.

Beweis Betr. Beh. (2). Andernfalls wäre die Beh. (1) für X und $I(z)$ nicht erfüllt. — *Betr. Beh.* (1). Andernfalls gibt es ein μ mit $1 \leqq \mu \leqq m-1$ und dazu ν', ν'' mit $1 \leqq \nu' < \nu'' \leqq n$ sowie Bogen $C(\mu) = C(x_\mu \mid x_{\mu+1}) < C$ der folgenden Art: Es ist $y_{\nu'} \in \underset{\sim}{C}(\mu)$ und $y_{\nu''} \in C \setminus C(\mu)$, wobei $\underset{\sim}{C}(\mu)$ keines der $x_1, \ldots, x_m$ enthält. Ferner sei $\underset{\sim}{X}(\mu) = \underset{\sim}{X}(x_\mu \mid x_{\mu+1})$ der zu allen $x_1, \ldots, x_m$ fremde Teilbogen von X; es werde

$X'(\mu) = X \setminus X(\mu)$ gesetzt. Da Y durch $y_{\nu'}$ und $y_{\nu''}$ in zwei Teilbogen Y' und Y'' zerlegt wird, deren einer Endpunkt $y_{\nu'}$ in $\underset{\sim}{C}(\mu)$, deren anderer in $C \setminus C(\mu)$ liegt, enthält $X \cap Y$ mindestens vier Punkte, im Widerspruch damit, daß $X, Y \in \mathfrak{k}$ und $X \neq Y$ ist und daß $\mathfrak{k}$ die Grundzahl Drei besitzt.

2. 4. Daß eine J-OCh stetig von ihren Stützpunkten abhängt, zeigt der

Satz. (1). *Es seien* $I_n = I(q_{1n}, \ldots, q_{r_n}) = I(q_{1n}, q_{2n})$, $n = 1, 2, \ldots$, *J-OCh mit* $q_1 = \lim q_{1n}$, $q_2 = \lim q_{2n}$, $q_1 \neq q_2$. *Dann existiert*

$$I(q_1) = I(q_1, q_2) = \lim I(q_{1n}, q_{2n}) = \lim I(q_{1n}),$$

wobei $I(q_1, q_2)$ *wieder eine J-OCh ist.*

(2) *Eine J-OCh* $I(p, q)$ *ändert sich stetig mit* p (*und* q) *im folgenden Sinne: Es sei* $C \cap I(p, q) = \{p\} \cup \{t_1\} \cup \cdots \cup \{t_n\} \cup \{q\}$, $n \geqq 0$, *wobei die Reihenfolge* $p, t_1, \ldots, t_n, q$ *einer Orientierung von* C *und von* $I(p, q)$ *entspricht* (vgl. Nr. 2. 2., Satz, Beh. (1)). *Ist* $C(p \mid q)$ *der zu den* $t_1, \ldots, t_n$ *fremde, von* p *und* q *begrenzte Teilbogen von* C (*falls* $n = 0$, *falls also kein* $t_1, \ldots$, *auftritt, kann* $C(p \mid q)$ *jeder der beiden Teilbogen von* C *sein*) *und ist* $p' \in \underset{\sim}{C}(p \mid q)$ *hinreichend benachbart zu* p, *so existiert* $q' \in \underset{\sim}{C}(p \mid q)$ *bzw.* $I(p', q')$ *beliebig benachbart zu* q *bzw. zu* $I(p, q)$. Entsprechendes gilt für $C \setminus \underset{\sim}{C}(p \mid q)$.

Zusatz. *Die entsprechenden Behauptungen gelten für A-OCh.*

Beweis Betr. Beh. (1). Es gibt konvergente Teilfolgen von $(I_n)_n$; wir können also $H = \lim I_n$ als vorhanden ansehen, wobei dann $q_1 = \lim q_{1n}$ und $q_2 = \lim q_{2n}$ mit $q_1, q_2 \in H$ gilt sowie $H \in \mathfrak{k}$. Wegen $I_n < \bar{J}(C)$ ist auch $H < \bar{J}(C)$ mit q_1, q_2 als lokalen Stützpunkten (die wegen der Beschränkheit von POW $(C; \mathfrak{k})$ isoliert auf C sind). Somit ist $H = I(q_1, q_2)$ für alle konvergenten Teilfolgen von $(I_n)_n$ und damit auch für $(I_n)_n$ selbst.

Betr. Beh. (2). Gemäß Nr. 2. 2, Satz, Beh. (3) und (4), ist p kein J-Scheitel; und da die $\mathfrak{k}$-Scheitel nach Vor. isoliert sind auf C, ist eine Umgebung U_p von p auf $\underset{\sim}{C}(p \mid q)$ frei von $\mathfrak{k}$-Scheiteln, also von J-Scheiteln. Daher existiert zu jedem $p' \in U_p$ eindeutig $I(p')$. Und gemäß Nr. 2. 3., Hilfssatz, existiert bei hinreichend kleinem U_p ein $q' \in \underset{\sim}{C}(p, q)$ mit $p' \neq q'$, wobei die Reihenfolge p, p', q', q einer Orientierung von C entspricht. Mit q' sei der am nächsten bei q auf $\underset{\sim}{C}(p \mid q)$ gelegene Stützpunkt von $I(p') = I(p', q')$ bezeichnet. Wir betrachten eine Folge $(p'_n)_n$ mit $p = \lim p'_n$; $p'_n \in \underset{\sim}{C}(p \mid q)$. Dann existiert (ev. für eine wieder mit $(p'_n)_n$ zu bezeichnende Teilfolge) $K = \lim I(p'_n, q'_n)$, wobei noch die Existenz von $q' = \lim q'_n$ angenommen werden kann. Gemäß Beh. (1) folgt aus $p = \lim p'_n$, $q' = \lim q'_n$, daß $K = I(p, q)$, wobei $q = q'$. Da dies, wie gesagt, für jede Teilfolge von $(I(p'_n))_n$ gilt, folgt die behauptete Stetigkeit von $I(p)$.

2. 5. Eine Kennzeichnung der J-Scheitel enthält der folgende

Satz. (1). *Zu jedem J-Scheitel* $x \in C$ *und jeder* (*beliebig kleinen*) *Umgebung* W *von* x *auf* C *gibt es J-OCh* $I(y, z)$ *der* (*Stütz-*)*Ordnung* 2 *derart, daß die beiden Stützpunkte* y, z *von* $I(y, z)$ *mit* C *in* W *liegen und* x *auf* W *zwischen* y *und* z. (*Es ist also* $C \cap I(y, z) = \{y\} \cup \{z\}$).

(2) *Es sei* $I = I(q_1, \ldots, q_n)$, $n \geqq 2$, *eine n-J-OCh. Die Reihenfolge* $q_1, \ldots, q_n$ *der Stützpunkte von* I *mit* C *entspreche einer Orientierung von* C (*und von* I, gemäß Nr. 2. 2., Satz, Beh. (1)). *Es sei* $\underset{\sim}{C}(v) = \underset{\sim}{C}(q_v \mid q_{v+1})$ *der von* q_v *und von* q_{v+1} *begrenzte, zu allen* $q_1, \ldots, q_n$ *fremde Teilbogen von* C; $v = 1, \ldots, n$; $q_{n+1} = q_1$. *Dann enthält jedes* $\underset{\sim}{C}(v)$ *mindestens einen J-Scheitel*

Zusatz. *Entsprechende Behauptungen* (1) *und* (2) *gelten für A-Scheitel.*

Beweis. Es sei C orientiert.

Betr. Beh. (1). — **(I)** Da jeder $\mathfrak{k}$-Scheitel x isoliert sowie normal und da die $\mathfrak{k}$-Paratingente $P(x)$ an C in x eindeutig bestimmt ist, so gilt POW $(x; C; \mathfrak{k}) = 4$ (vgl. Nr. 1. 1., Anmerkung 1.). Daher gibt es beliebig kleine Umgebungen W von x auf C von folgender Art (vgl. [2], Nr. 4. 1. 2. 1. sowie 4. 1. 3, 1, 1., Satz 1 (S. 177)): Es ist POW $(W; \mathfrak{k}) = 4$ und $W = V \cup H$, wobei V bzw. H eine vordere bzw. hintere Umgebung von x auf C mit POW $(V; \mathfrak{k}) =$ POW $(H; \mathfrak{k}) = 3$ ist. Und es gibt in beliebig kleiner Umgebung U von x (mit $\overline{U} < W$) vier Punkte $x_1, \ldots, x_4$, die auf einer OCh $K = K(x_1, \ldots, x_4)$ liegen. Wegen POW $(V; \mathfrak{k}) = 3 =$ POW $(H; \mathfrak{k})$ ist dabei stets $x_1 \in \underset{\sim}{V}$ und $x_4 \in \underset{\sim}{H}$, falls die Reihenfolge x_1, x_2, x_3, x_4 der Orientierung von C und von K entspricht. Es sind nun folgende vier Möglichkeiten zu unterscheiden: Fall (a) $x_1 \in \underset{\sim}{V}$, $x_2, x_3, x_4 \in \underset{\sim}{H}$; Fall (b) $x_1, x_2 \in V$, $x_3, x_4 \in \underset{\sim}{H}$; Fall (c) $x_1, x_2 \in \underset{\sim}{V}$, $x_3, x_4 \in H$; Fall (d) $x_1, x_2, x_3 \in \underset{\sim}{V}$, $x_4 \in \underset{\sim}{H}$. — Dabei gehen Fall (a) und (d) bzw. Fall (b) und (c) bei Vertauschung von V und H ineinander über. Es genügt daher, die Fälle (a) und (b) zu betrachten.

(II) Zur Weiterführung des Beweises für Beh. (1) reduzieren wir den Fall (a) auf den Fall (b) und sogar auf $x_1, x_2 \in \underset{\sim}{V}$, $x_3, x_4 \in \underset{\sim}{H}$ vermöge folgender Überlegung: Wir halten x_4 fest und betrachten das System $\mathfrak{k}(x_4) = \mathfrak{k}'$ aller OCh K, für die $x_4 \in K$; bezüglich $\mathfrak{k}'$ ist jeder abgeschlossene, x_4 nicht enthaltende Teilbogen W' von W normal, so daß wir auf das Tripel (x_1, x_2, x_3) den Kontraktionssatz bezüglich $\mathfrak{k}'$ anwenden können (vgl. [2], Nr. 2. 4. 4.); die Grundzahl von $\mathfrak{k}'$ ist hierbei gleich Zwei. Dabei ändern sich die x_1, x_2, x_3 stetig, bleiben stets getrennt und es finden in W' weder Gewinne noch Verluste statt (weil nur OCh K mit POW $(W \frown K) = 4$ auftreten). Nach dem Kontraktionssatz existiert nun ein $x' \in W'$ derart, daß — bei hinreichend langer Fortsetzung des Kontraktionsprozesses — die x_1, x_2, x_3 in beliebige Nähe von x' kommen. Dabei gilt $x' \in V$, weil andernfalls $x_1, x_2, x_3, x_4 \in H$ wäre (im Widerspruch zu POW $(H; \mathfrak{k}) = 3$). Es ist aber, für hinreichend kleine W, sogar $x' \in \underset{\sim}{V}$. Zum Beweis hierfür beachte man, daß bei festem x_4 und bei gegen x' konvergierenden x_1, x_2, x_3 gilt: $P(x') = \lim K(x_1, x_2, x_3)$ mit $x_4 \in P(x')$; dabei ist $P(x')$ (gemäß Nr. 1. 1., (III) (3)) eindeutig bestimmt und unabhängig von x_4. Ist nun $x' = x$ für ein bestimmtes $x_4 \in W'$ mit $W' \frown \underset{\sim}{V} \neq \emptyset$ und $W' \frown \underset{\sim}{H} \neq \emptyset$ (W' Umgebung von x in W), so wird für genügend kleines W bzw. W' jedenfalls $P(x) \frown (W \setminus \{x\}) = \emptyset$ und folglich auch $x_4 \notin P(x)$ für zu x hinreichend benachbartes $x_4 \in \underset{\sim}{H}$. Somit kann für alle hinreichend kleinen W bzw. W' angenommen werden, daß $x' \in \underset{\sim}{V}$. Und da bei der Kontraktion die x_1, x_2, x_3 sich stetig unter Erhaltung ihrer Reihenfolge ändern, wird im Laufe des Prozesses schließlich eine Situation $x_1, x_2 \in \underset{\sim}{V}$ und $x_3, x_4 \in \underset{\sim}{H}$ eintreten, womit der Fall (b) erreicht ist.

(III) Es sei also $x_1, x_2 \in \underset{\sim}{V}$ und $x_3, x_4 \in \underset{\sim}{H}$. Das System aller OCh K mit $x_3, x_4 \in K$ bei festen x_3, x_4 sei mit $\mathfrak{k}''$ bezeichnet; es ist $\mathfrak{k}''$ ein System von OCh mit der Grundzahl 1 und es ist V normal bezüglich $\mathfrak{k}''$. Daher kann auf x_1, x_2 wieder der Kontraktionssatz angewandt werden. Ist $V'' = C(x_1 \mid x_2) < W$, der von den x_1, x_2 in ihrer Anfangslage begrenzte Teilbogen von W, so existiert also ein $y'' \in \underset{\sim}{V''}$, in dessen beliebige Nähe sich x_1 und x_2 zusammenziehen lassen. Hat man ein solches, wieder mit x_1, x_2 zu bezeichnendes Paar erreicht, so wird dieses festgehalten und nun entsprechend x_3, x_4 in beliebige Nähe eines $z'' \in \underset{\sim}{H''} = \underset{\sim}{C}(x_3 \mid x_4)$ zusammengezogen. Fortsetzung dieses Prozesses führt zu einer konvergenten Folge von OCh K_n derart, daß $W \frown K_n = \{x_{1n}\} \cup \cdots \cup \{x_{4n}\}$, daß $y = \lim x_{1n} = \lim x_{2n}$ und $z = \lim x_{3n} = \lim x_{4n}$ existiert mit $y \in \underset{\sim}{V}$, $z \in \underset{\sim}{H}$, ferner daß $S(W) = \lim K_n$ existiert mit $W \frown S(W) = \{y\} \cup \{z\}$, wobei W, also C, von $S(W)$ in y und z von innen gestützt wird. Man kann daher schreiben $S(W) = K(y, y; z) = K(z, z; y)$; es ist $S(W) \in \mathfrak{b}(y) \frown \mathfrak{b}(z)$.

(IV) Die in Ziff. (III) angegebene Konstruktion eines $S(W) \in \mathfrak{b}(y) \cap \mathfrak{b}(z)$ ist für beliebig kleine Umgebungen W von x ausführbar. Aber für zu x hinreichend benachbarte $y \in \underset{\sim}{V}$, $z \in \underset{\sim}{H}$ wird $S(W)$ beliebig benachbart zu $P(x)$; denn es ist ja $S(W)$ Limes von $K(x_1, \ldots, x_4)$ mit gegen y bzw. z konvergenten x_1, x_2 bzw. x_3, x_4; und diese $K(x_1, \ldots, x_4)$ sind für zu x hinreichend benachbarte $x_1, \ldots, x_4$ beliebig benachbart zu $P(x)$. — Es sei nun W_0 eine feste Umgebung von x auf C mit $\mathrm{POW}(W_0; \mathfrak{k}) = 4$. Dann ist $W_0 \cap S(W) = \{y(S)\} \cup \{z(S)\}$ für alle W mit $\overline{W} < W_0$. Andererseits ist $(C \setminus \overline{W}) \cap P(x) = \emptyset$ und daher für hinreichend kleine W auch $(C \setminus W_0) \cap S(W) = \emptyset$. Daher ist

$$C \cap S(W) = \{y(S)\} \cup \{z(S)\}$$

für hinreichend kleines W und folglich $S(W)$ eine J-OCh der Ordnung 2 mit zu x beliebig benachbarten, x einschließenden Stützpunkten.

Betr. Beh. (2). Der Beweis für die Existenz mindestens eines J-Scheitels in $\underset{\sim}{C}(v)$ werde indirekt geführt. Dabei kann $v = 1$, also $B = C(1) = C(q_1 \mid q_2)$ zu Grunde gelegt werden.

(I) Enthält $\underset{\sim}{B}$ keinen J-Scheitel, so existiert $I(x)$ für jedes $x \in \underset{\sim}{B}$ eindeutig (Nr. 2. 2., Satz, Beh. (3)). Dabei ist stets $C \cap I(x) = \underset{\sim}{B} \cap I(x)$ (gemäß Nr. 2. 3., Hilfssatz, Beh. (2)), weil $B = C(q_1 \mid q_2)$ mit $q_1, q_2 \in I(q_1)$. Definitionsgemäß gibt es topologische Abbildungen f von B auf $[0; 1]$. Zu $t_1 = 2^{-1} \in [0; 1]$ existiert, wie bemerkt, $I(q_1')$, wobei $q_1' = f(t_1)$, und $q_1'' = f(t_1'') \in I(q') \cap \underset{\sim}{B}$, wobei $t_1'' \in (0; 2^{-1})$ oder $t_1'' \in (2^{-1}; 1)$. Auf den, von q', q'' begrenzten Teilbogen $B_1 = B(q_1' \mid q_1'')$ von $\underset{\sim}{B}$ läßt sich das gleiche Verfahren anwenden wie soeben auf B. Die Fortführung dieser Konstruktion liefert eine streng fallende Folge $(B_n)_n$ von Teilbogen $B_n = \overline{B}_n$ von B derart, daß $B_{n+1} < B_n$ und daß die Durchmesser der $B_n = B(q_n' \mid q_n'')$ gegen Null konvergieren; daher gibt es ein $z \in \underset{\sim}{B}$ mit $\{z\} = \bigcap_n \underset{\sim}{B}_n = \bigcap_n B_n$. Dabei sind q_n', q_n'' Stützpunkte der J-OCh $I_n = I(q_n') = I(q_n'')$ auf $\underset{\sim}{B}_n$. Nun gibt es aber $K_n \in \mathfrak{k}$ mit $\mathrm{POW}(\underset{\sim}{B}_n \cap K_n) \geqq 4$, die zu I_n beliebig benachbart sind. Daher folgt aus $\{z\} = \lim B_n$, daß z ein $\mathfrak{k}$-Scheitel ist.

(II) Es ist aber z sogar ein J-Scheitel. In der Tat: Wegen $z = \lim q_n' = \lim q_n''$ existiert $P(z) = \lim I_n$ (vgl. Bew. betr. Beh. (1), Ziff. (IV) sowie Nr. 1. 1., (III) (3)). Es sei G_n das Gebiet, welches keinen Teilbogen von I_n enthält und begrenzt ist von B_n und einem der beiden Teilbogen $T_n = I_n(q_n' \mid q_n'')$ von I_n. Es ist dann $\underset{\sim}{T}_{n+1} < G_n$ (weil $q_{n+1}', q_{n+1}'' \in \underset{\sim}{B}_n$), also (wegen $B_{n+1} < \underset{\sim}{B}_n$) auch $G_{n+1} < G_n$ und (wegen $P(z) = \lim I_n$) auch $\{z\} = \lim G_n = \bigcap_n G_n$. Ferner gilt $I_{n+1} \setminus \overline{G}_n \cap I_{n+1} < J(C)$ (gemäß Nr. 2. 3., Hilfssatz), also sogar $I_r \setminus \overline{G}_n \cap I_r < J(C)$ für alle $r > n$ (wegen $G_r < G_n$). Durch Grenzübergang ergibt sich daraus $P(z) \setminus \overline{G}_n \cap P(z) < J(C)$, also $P(z) \setminus \{z\} < J(C)$, w. z. z. w.

§ 3. Die Anzahl der J-Scheitel ist um zwei größer als die der, geeignet gezählten, mindestens dreifach von innen stützenden OCh

3. 1. Die Menge der J-Scheitel (bezüglich C und $\mathfrak{k}$) sei $\mathfrak{S}$ und die Anzahl der J-Scheitel sei $s \geqq 2$. In der einer Orientierung von C entsprechenden Reihenfolge seien die J-Scheitel $a, a+1, \ldots, a+s-1$. Man setze $\mathfrak{A} = (a, \ldots, a+s-1)$; durch zyklische Vertauschung erhält man aus $\mathfrak{A}$ Folgen $\mathfrak{g} = (c, \ldots, c+s-1)$, wobei (in leicht verständlicher Abkürzung) $c + \sigma = a + t + \sigma$; $\sigma = 0, 1, \ldots, s-1$; $t = 0, 1, \ldots$; und $a + t + \sigma = a + t' + \sigma$ für $t \equiv t' \pmod{s}$. Unter einer *Teilfolge* $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{g}$ der Länge m

verstehe man ein $\mathfrak{B} = (b, b+1, \ldots, b+m-1)$ mit

$$1 \leqq m \leqq s-1 \text{ und } b+\mu = a+t+\mu \in \mathfrak{g}.$$

Weiter werde als eine *r-Teilung* $\mathfrak{t} = (\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_r)$ von $\mathfrak{B}$ jede Zerlegung von $\mathfrak{B}$ in $r \geqq 1$ Teilfolgen $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_r$ bezeichnet, wobei $\mathfrak{B}_\varrho = (b_{n_\varrho}, b_{n_\varrho+1}, \ldots, b_{n_{\varrho+1}-1})$, $n_{n_1} = b$, $b_{n_{r+1}-1} = b+m-1$ ist; $\varrho = 1, \ldots, r$; diese $\mathfrak{B}_\varrho$ heißen auch *Teile* von $\mathfrak{B}$ bei $\mathfrak{t}$. Von den einzelnen Teilen $\mathfrak{B}_\varrho$ kann man sagen, sie bleiben bei $\mathfrak{t}$ *ungeteilt.*

3. 2. Es sei $I = I(q_1, \ldots, q_r)$, $r \geqq 2$, wobei $C \cap I = \bigcup_{\varrho=1}^{r} \{q_\varrho\}$ ist und die Reihenfolge $q_1, \ldots, q_r$ (für $r \geqq 3$ die natürliche, für $r = 2$ irgendeine) der Orientierung von C entspricht; in Zeichen $q_\varrho < q_{\varrho+1}$, $\varrho = 1, \ldots, r$; $q_{r+1} = q_1$. Es sei $\mathfrak{B}_\varrho$ die Folge der „zwischen q_ϱ und $q_{\varrho+1}$ auf C" (oder I) (d. h. die im orientierten Teilbogen $\underset{\sim}{C}(q_\varrho \mid q_{\varrho+1})$ von C mit q_ϱ als Anfangspunkt) gelegenen J-Scheitel ($\mathfrak{B}_\varrho \neq \emptyset$, Nr. 2. 3., Beh. (2)). Wir sagen, die *Teilung* $\mathfrak{t} = (\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_r)$ von $\mathfrak{g}$ werde *durch I erzeugt* (*bestimmt*) und behaupten:

Jede r-Teilung $\mathfrak{t}$ mit $r \geqq 3$ eines $\mathfrak{g}$ wird, wenn überhaupt, dann nur durch eine einzige J-OCh I erzeugt (in dem Sinne also, daß die zwischen je zwei benachbarten Stützpunkten von I gelegenen J-Scheitel je einen Teil von $\mathfrak{t}$ bestimmen).

Beweis. Für z. B. $\mathfrak{B}_1$ gilt

$$q_r < c-1 < q_1 < c < \cdots < c+n_2-1 < q_2 < c+n_2 < q_3;\ 2 \leqq n_2 \leqq s-1.$$

Es sei nun $I' = I(q_1', \ldots, q_r')$ eine J-OCh, durch welche ebenfalls $\mathfrak{t}$ erzeugt wird. Behauptet wird, daß $I = I'$. Andernfalls gilt gemäß Nr. 2. 3., Hilfssatz, entweder

$$q_r < c-1 < q_1' < q_1 < c < q_2 < q_2' < c+n_2 < q_3$$

oder $q_r' < c-1 < q_1 < q_1' < c < q_2' < q_2 < c+n_2 < q_3'$, wobei $q_r = q_3$ bzw. $q_r' = q_3'$ sein kann. Dann ist aber $q_1' \in \underset{\sim}{C}(q_r \mid q_1)$ und $q_2' \in \underset{\sim}{C}(q_2 \mid q_3)$ oder $q_1 \in \underset{\sim}{C}(q_r' \mid q_1')$ und $q_2 \in \underset{\sim}{C}(q_2' \mid q_3')$, beides im Widerspruch zu Nr. 2. 3., Hilfssatz.

Folgerung. *Es gibt nur endlich viele J-OCh der Ordnungen $n \geqq 3$.*

Denn es gibt nur endlich viele Teilungen der endlichen Menge $\mathfrak{S}$ der J-Scheitel.

3. 3. Entscheidend für die Abzählung in Nr. 3. 4. ist der folgende

Satz. *Vor. Es sei gegeben eine r-J-OCh $I = I(q_1, \ldots, q_r)$, $r \geqq 2$. Es sei $\mathfrak{S} \cap C(q_1 \mid q_2) = \{b, \ldots, b+t-1\} = \{\mathfrak{B}\}$, $t \geqq 1$, wobei $\mathfrak{B}$ Teilfolge eines $\mathfrak{g}$ ist, es sei also $\mathfrak{B}$ Teil der durch I erzeugten Teilung von $\mathfrak{S}$. Dabei entspreche die Reihenfolge $q_1, \ldots, q_r$ der natürlichen bzw. (irgend) einer Orientierung von I (bezüglich der Orientierung von C) je nachdem $r > 2$ bzw. $r = 2$.*

Beh. (1) *Es gibt eine natürliche Zahl $r' \geqq 1$ und eine $(r'+1)$-J-OCh $I(\mathfrak{B})$, durch welche eine r'-Teilung von $\mathfrak{B}$ geliefert wird, während $\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{B}$ bei $I(\mathfrak{B})$ ungeteilt bleibt.*

(2) *Es enthält $\underset{\sim}{C}(q_r \mid q_{r+1})$ genau einen J-Scheitel, wenn und nur wenn keine J-OCh von höherer Ordnung als Zwei existiert, deren sämtliche Stützpunkte mit C in $\underset{\sim}{C}(q_r \mid q_{r+1})$ liegen (aber (mindestens) eine J-OCh mit genau zwei Stützpunkten in $\underset{\sim}{C}(q_r \mid q_{r+1})$ existiert).*

Beweis. Betr. Beh. (1). Nach Vor. enthält $\underset{\sim}{C}(1) = \underset{\sim}{C}(q_1 \mid q_2)$ die J-Scheitel $b, \ldots, b+t-1$, wobei $t \geqq 1$. Wir lassen einen Punkt q_1', ausgehend von q_1, monoton und stetig nach $\underset{\sim}{C}(1)$ hinein wandern, also gegen b hin. Da $\underset{\sim}{C}(q_1 \mid b) < C(1)$ keinen J-Scheitel enthält, existiert eindeutig $I(q_1')$ für alle $q_1' \in \underset{\sim}{C}(q_1 \mid b)$. Wegen der Stetigkeit von $I(q_1')$ in q_1' (vgl. Nr. 2. 4., Satz. Beh. (2)) und wegen $\underset{\sim}{C}(b+t-1 \mid q_2) \cap \mathfrak{S} = \emptyset$ ist zunächst, d. h. für zu q_1 hinreichend benachbarte q_1', $\{q_2'\} = \underset{\sim}{C}(b+t-1 \mid q_2) \cap I(q_1')$

einpunktig (vgl. Nr. 2. 5., Satz, Beh. (2)); dabei ist $C(b+t-1 \mid q_2) < C(1)$. Ist aber q_1' hinreichend nahe bei b angelangt, so ist (gemäß Nr. 2. 5., Satz, Beh. (1)) $\underset{\sim}{C}(b \mid b+1) \cap I(q_1') \neq \emptyset$, falls $t \geqq 2$, sonst $\underset{\sim}{C}(b \mid q_2) \cap I(q_1') \neq \emptyset$. Im Fall $t = 1$ liefert also $I(q_1') = I(q_1', q_2')$ eine 2-Teilung von $\mathfrak{B}$ derart, daß der eine Teil als einzigen Punkt den J-Scheitel $b \in \underset{\sim}{C}(1)$ enthält. Dagegen gibt es im Fall $t \geqq 2$ (bei der stetigen Änderung von q_1' bzw. $I(q_1')$) ein am nächsten bei q_1 gelegenes $p' = q_1'$ derart, daß

$$\underset{\sim}{C}(b \mid b+t-1) \cap I(p') \neq \emptyset;$$

d. h. es besitzt $I(p')$ zwischen den zu $\mathfrak{B}$ gehörigen J-Scheiteln b und $b+t-1$ mindestens einen Stützpunkt $\bar{p}$ und außerdem noch ein $q_2' \in \underset{\sim}{C}(b+t-1 \mid q_2)$ (sowie $p' \in \underset{\sim}{C}(q_1 \mid b)$). Somit wird durch $I(p')$ eine r'-Teilung von $\mathfrak{B}$ mit $r' \geqq 2$ erzeugt. — Zu zeigen ist noch, daß $(C \setminus C(1)) \cap I(p') = \emptyset$ ist für derartige p'; andernfalls würden aber die Stützpunkte q_1, q_2 von $I(q_1)$ durch Stützpunkte $p' \in \underset{\sim}{C}(1) \cap I(p')$ und $p'' \in (C \setminus C(1)) \cap I(p')$ von $I(p')$ auf C voneinander getrennt, im Widerspruch zu Nr. 2. 3., Hilfssatz.

Betr. Beh. (2). Gemäß Nr. 2. 5., Satz, Beh. (2), liegt in $\underset{\sim}{C}(1)$ mindestens ein J-Scheitel. Enthält aber $C(1)$ mehr als einen J-Scheitel, so gibt es gemäß der Beh. (1) unseres Satzes (Nr. 3. 3.) mindestens eine r''-J-OCh mit $r'' \geqq 3$, welche eine $(r''-1)$-Teilung von $\mathfrak{S} \cap \underset{\sim}{C}(1)$ erzeugt.

3. 4. Nunmehr kann gezeigt werden:

Satz. *Vor. Es seien die Vor. in Nr. 1. 1. erfüllt. Ferner sei s die (nach Vor. endliche) Anzahl der J-Scheitel von C bezüglich* $\mathfrak{k}$ *und* $m_\nu \geqq 0$ *die (gemäß* Nr. 3. 2., *Folgerung, endliche) Anzahl der ν-J-OCh mit* $3 \leqq \nu \leqq n \,(< 1 + 2^{-1}\,\mathrm{POW}\,(C; \mathfrak{k}))$.

Beh. Es ist $s = 2 + \sum_{\nu=3}^{n} (\nu - 2) m_\nu$.

Anmerkung. Die Anzahl aller J-OCh von mindestens der Ordnung 3 ist $m = \sum_{\nu=3}^{n} m_\nu$ (Einzelne der m_ν können Null sein).

Beweis. Es seien $I_1, \ldots, I_m$ die J-OCh (mit Ordnungen $\geqq 3$) in irgend einer Reihenfolge, wobei I_μ die Ordnung $n_\mu \geqq 3$ besitze; $\mu = 1, \ldots, m$. Durch I_1 wird eine n_1-Teilung $\mathfrak{t}$ einer Folge $\mathfrak{g}$ der J-Scheitel erzeugt; es sei etwa $\mathfrak{t} = (\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_{n_1})$. Sind die Längen aller dieser $\mathfrak{B}_1, \ldots$ gleich 1, so ist die Anzahl n_1 gleich s, also $s = 2 + (n_1 - 2)$; wir haben dann $m_\nu = 0$ für $\nu \neq n_1$ und $m_{n_1} = 1 = m$. Andernfalls besitzt etwa $\mathfrak{B}_1$ eine Länge $t_1 \geqq 2$. Gemäß Nr. 3. 3., Satz, Beh. (1), existiert dann ein I_μ, etwa I_2, so daß durch I_2 eine $(n_2 - 1)$-Teilung von $\mathfrak{B}_1$ erzeugt wird $(n_2 - 1 \geqq 2)$, während $\mathfrak{g} \setminus \mathfrak{B}_1$ ungeteilt bleibt. Die Anzahl der Teile, in die $\mathfrak{g}$ durch I_1 und I_2 geteilt wird, ist dann $s_2 = (n_1 - 1) + (n_2 - 1) = 2 + (n_1 - 2) + (n_2 - 2)$. Wir wenden jetzt Induktion an: Es sei schon für ein $h \geqq 2$ bewiesen: Durch die $I_1, \ldots, I_h$ ist eine Teilung von $\mathfrak{g}$ in $s_h = 2 + (n_1 - 2) + \cdots + (n_h - 2)$ Teile erzeugt. Sind alle Teile einelementig, so ist $s_h = s$ und die Beh. ist bewiesen. Andernfalls wird einer der Teile durch I_{h+1} in $n_{h+1} - 1$ Teile geteilt, so daß $s_{h+1} = s_h - 1 + (n_{h+1} - 1) = s_h + (n_{h+1} - 2)$ wird. Da bei der durch I_{h+1} erzeugten Teilung die Länge keines der Teile zugenommen hat, da ferner die Anzahl der Teile für alle Teilungen beschränkt ist, ergibt sich nach endlich vielen Schritten eine Teilung von $\mathfrak{g}$ mit lauter einelementigen Teilen und damit für s die behauptete Darstellung.

Anmerkung. Bei der Konstruktion der Teilung von $\mathfrak{g}$ in lauter einelementige Teile tritt jede J-OCh einer Ordnung $\geqq 3$ genau einmal auf.

Zusatz. *Der vorstehende Satz bleibt richtig, wenn darin J-Scheitel bzw. J-OCh ersetzt wird durch A-Scheitel bzw. A-OCh.*

3. 5. Als Folgerung aus dem Satz der Nr. 3. 4. sei Nachstehendes angemerkt. Ist POW $(C; \mathfrak{k}) = 4$, so besitzt C genau zwei J-Scheitel und genau zwei A-Scheitel (d. h. es sind keine J-OCh und keine A-OCh mit Ordnungen größer als 2 vorhanden). Existierte nämlich z. B. eine J-OCh $I(q_1, q_2, \ldots, q_r)$ mit $r \geqq 3$, so wähle man in $A(C)$ hinreichend nahe bei q_i ein q_i', $i = 1, 2, 3$. Gemäß der Vor. über $\mathfrak{k}$, nämlich der Stetigkeit von $K(q_1', q_2', q_3')$ in Abhängigkeit von den q_i' (vgl. dazu [2], Nr. 1. 1. 1.), ist dann $K(q_1', q_2', q_3')$ benachbart zu $I(q_1, \ldots, q_r)$ und daher wegen $r \geqq 3$ POW $(C \cap K(q_1', q_2', q_3')) \geqq 6$, im Widerspruch zu POW $(C; \mathfrak{k}) = 4$. Weiter sind (bei POW $(C; \mathfrak{k}) = 4$) C und $\mathfrak{k}$ normal (vgl. [2], Nr. 4. 6., Bemerkungen (1), auch Nr. 4. 5. 2., Satz 2.). Und schließlich gilt unter den Vor. in Nr. 1. 1., die folgende Infinitesimalbedingung (EP_3) (vgl. [2], Nr. 4. 1. 4.): Es sei $0 \leqq t \leqq 2$, ferner seien $y_i \in C$, $i = 1, \ldots, t$, beliebig aber verschieden gewählt; hat ein $x \in C$ mit $x \neq y_i$, $i = 1, \ldots, t$, die Eigenschaft, daß beliebig nahe bei x auf C Punkte $x_1, \ldots, x_{4-t}$ existieren, die mit den y_i auf der gleichen OCh liegen, so existiert eindeutig $\lim K(y_1, \ldots, y_t, x_1, \ldots, x_{4-t}) \in \mathfrak{k}$, falls $x = \lim x_1 = \cdots = \lim x_{4-t}$. In der Tat ist (EP_3) erfüllt. Denn für $0 \leqq t \leqq 1$ folgt (EP_3) daraus, daß die $\mathfrak{k}$-Paratingente in x an C eindeutig bestimmt ist (vgl. Nr. 1. 1., (III) (3)); und für $t = 2$ folgt (EP_3) aus der Eindeutigkeit von $K(x, x; y_1)$ bzw. $K(x, x; y_2)$ (vgl. Nr. 1. 1., (III) (4)).

Gemäß [2], Nr. 4. 1. 4. 3. 1. folgt nun der

Satz. *Vor. Wie in Nr. 1. 1. Außerdem seien C und $\mathfrak{k}$ normal.*

Beh. Folgende drei Aussagen sind gleichwertig: (1) *Es ist* POW $(C; \mathfrak{k}) = 4$. — (2) *Es besitzt C genau vier $\mathfrak{k}$-Scheitel.* — (3) *Es besitzt C keine J-OCh und keine A-OCh von mindestens der Ordnung Drei und an $\mathfrak{k}$-Scheiteln nur J- und A-Scheitel.*

Zusatz. *Aus* (1) *folgt sowohl* (2) *als* (3) *auch ohne die Vor., daß C und $\mathfrak{k}$ normal seien.* — *Es sind* (1) *und* (3) *auch dann gleichwertig, wenn in* (3) *der zweite Teil „und an $\mathfrak{k}$-Scheiteln nur J- und A-Scheitel" wegbleibt. Dies folgt aus* [2], Nr. 4. 3.

Zusatz bei der Korrektur. Herrn G. Ewald verdanke ich den Hinweis auf (weitere) Beispiele von Systemen von Ordnungscharakteristiken, wie sie in vorstehender Note eine Rolle spielen. Vgl. G. Ewald: Aus konvexen Kurven bestehende Möbiusebenen. Abh. math. Seminar Univ. Hamburg **30**, 179—187 (1967), sowie dort zitierte Literatur.

Literaturverzeichnis

[1] *R. C. Bose*, On the number of circles of cuvature perfectly enclosing or perfectly enclosed by a closed convex Oval, Math. Zeitschr. **35** (1932), 16—24.

[2] *Haupt* und *Künneth*, Geometrische Ordnungen. Berlin-Heidelberg-New York 1967.

[3] *Haupt*, Bemerkungen zum Kneserschen Vierscheitelsatz, Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **31** (1967), 218—238.

---

852 Erlangen, Spardorfer Str. 45

Eingegangen 24. März 1969

Über einige Probleme bei einer nichtlinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung im Komplexen

Von *Gerhard Warnecke* in Bonn

Herrn Professor Dr. Wolfgang Krull zum 70. Geburtstag

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung
2. Bestätigung eines Prinzips von F. Rellich bei (1) durch Ermittlung aller Lösungen in einfach zusammenhängenden Gebieten
3. Die Beweismethode
4. Beweis des Darstellungssatzes
5. Der Fall der Veränderlichen $z_1, z_2 = \bar{z}_1$
6. Literaturverzeichnis

1. Einleitung

In [1] spricht F. Rellich als ein *Prinzip* aus, daß *eine nichtlineare Differentialgleichung ohne Singularitäten im allgemeinen keine ganzen Lösungen besitzt.* Dabei sind „Singularität" und „ganz" im Sinne der Funktionentheorie im Komplexen gemeint. Bei einer Reihe von gewöhnlichen Differentialgleichungen wurde diese Vermutung durch F. Rellich [2], [3] und H. Wittich [6] bestätigt. Ein abschließendes Ergebnis steht noch aus.

Bei partiellen Differentialgleichungen hat H. Wittich in [7] die reelle Gleichung $\Delta u = f(u)$ betrachtet. „Ganz" heißt hier eine Lösung $u(x, y)$, wenn sie in allen Punkten der offenen z-Ebene, $z = x + iy$, zweimal stetig differenzierbar ist. Unter stark einschränkenden Bedingungen für $f(u)$ hat diese Gleichung keine ganzen Lösungen.

Für partielle nichtlineare Differentialgleichungen im Komplexen hat man meines Wissens bisher bei keiner Gleichung überprüft, ob die obige Vermutung zutrifft. Im Fall der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$w_{z_1 z_2} = E e^{2w}, \quad E = e^{i\alpha}, \quad \alpha \in \boldsymbol{R}^{1}) \tag{1}$$

— z_1, z_2 sind unabhängige komplexe Veränderliche — läßt sie sich jedoch bestätigen. Es gelingt nämlich, *alle holomorphen Lösungen* von (1) *global* darzustellen. Aus dieser Darstellung (Satz 2) folgert man nicht nur die Nichtexistenz ganzer Lösungen von (1), sondern gewinnt für den wichtigen Fall der Veränderlichen $z_1, z_2 = \bar{z}_1$ globale Darstel-

[1]) Mit $\boldsymbol{R}$ wird die Menge der reellen Zahlen bezeichnet.

lungen für die reell- und komplexwertigen Lösungen $w(z_1, \bar{z}_1)$ der Differentialgleichung

$$\Delta w = 4Ee^{2w}.$$

Für $E = 1$ liegt der interessante Fall der Gleichung

$$\Delta w = 4e^{2w}$$

vor. Bekanntlich ergibt die Integration dieser Gleichung den zweiten Hauptsatz der Werteverteilungstheorie. Den Darstellungssatz für reellwertige Lösungen dieser Gleichung haben wir mitgeteilt. Er wurde in anderer Weise in [4] bewiesen.

Abschließend behandeln wir die Frage nach ganzen Lösungen bei diesen Gleichungen, „ganz" wie bei Wittich definiert, und stellen damit eine Verbindung zu der Untersuchung in [7] her.

Unter *Lösung* von (1) wollen wir im folgenden stets eine *holomorphe Funktion* $w(z_1, z_2)$ der beiden komplexen Veränderlichen z_1, z_2 verstehen, die (1) erfüllt. Meromorphe Lösungen werden in [5] betrachtet.

2. Bestätigung eines Prinzips von F. Rellich bei (1) durch Ermittlung aller Lösungen in einfach zusammenhängenden Gebieten

Es gilt folgender dieses Prinzip bei der Differentialgleichung (1) bestätigender

Satz 1. *Die Differentialgleichung*

$$w_{z_1 z_2} = Ee^{2w}, \quad E = e^{i\alpha}, \quad \alpha \in \boldsymbol{R} \tag{1}$$

hat keine ganzen Lösungen.

Der Beweis erfolgt über den folgenden **Darstellungssatz** für die Lösungen von (1).

Satz 2. *Sei $F_k, k = 1, 2$ ein endliches Gebiet der z_k-Ebene und $F = F_1 \times F_2$. Sei $G_k, k = 1, 2$ ein einfach zusammenhängendes kompakt in F_k liegendes Gebiet und $G = G_1 \times G_2$.*

Zu jeder in dem Zylindergebiet F erklärten Lösung $w(z_1, z_2)$ von (1) gibt es in G_k definierte Funktionen $\varphi_k(z_k)$, so daß in G

$$w(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \log \frac{\varphi_1'(z_1)\varphi_2'(z_2)}{(\varphi_2(z_2) + E\varphi_1(z_1))^2} \tag{2}$$

gilt. Die Funktionen $\varphi_k(z_k)$ haben die Eigenschaften:

a. *Entweder ist $\varphi_1(z_1)$ in G_1 holomorph und $\varphi_2(z_2)$ meromorph mit endlich vielen Polen von höchstens 1. Ordnung in G_2 oder das Umgekehrte gilt.*

b. *Es ist in G_k, $k = 1, 2$*

$$\varphi_k'(z_k) \neq 0. \tag{3}$$

In G ist

$$\varphi_2(z_2) + E\varphi_1(z_1) \neq 0. \tag{4}$$

Die folgende Definition soll die Sprechweise vereinfachen. Die Gebiete G_k, $k = 1, 2$ sollen endlich und einfach zusammenhängend sein; $G = G_1 \times G_2$.

Definition. Die in G_k definierten nicht konstanten Funktionen $\varphi_k(z_k)$, $k = 1, 2$ sollen Erzeugende einer in G erklärten Lösung $w(z_1, z_2)$ von (1) heißen, wenn die $\varphi_k(z_k)$ w in G gemäß (2) erzeugen und die Eigenschaften **a.** und **b.** aus Satz 2 haben.

Beweis von Satz 1. Ich nehme an, (1) habe eine ganze Lösung $w(z_1, z_2)$. In Satz 2 wähle ich $F_k = \{z_k \mid |z_k| < \infty\}$, also $F = \boldsymbol{C}^2$[2]) und $G_k = \{z_k \mid |z_k| < \varrho_1,\ 0 < \varrho_1 < \infty\}$, also $G = \{(z_1, z_2) \mid |z_k| < \varrho_1,\ 0 < \varrho_1 < \infty,\ k = 1, 2\}$. In jedem Dizylinder G läßt sich $w(z_1, z_2)$ gemäß Satz 2 darstellen. Deswegen gibt es in $|z_k| < \infty$ erklärte Funktionen $\varphi_k(z_k)$, die $w(z_1, z_2)$ in jedem G gemäß (2) erzeugen und die Eigenschaften **a.**, (3) in $|z_k| < \infty$ und (4) in $\boldsymbol{C}^2$ haben. Das widerspricht dem folgenden Hilfssatz 1. Also gibt es keine ganze Lösung $w(z_1, z_2)$.

Hilfssatz 1. *Sei $\varphi_k(z_k)$, $k = 1, 2$ in $|z_k| < \infty$ meromorph und nicht identisch konstant. Dann gibt es mindestens ein $z_k^* \neq \infty$, so daß*

$$\varphi_2(z_2^*) + E\varphi_1(z_1^*) = 0 \tag{5}$$

und

$$\varphi_k(z_k') \neq 0,\ k = 1, 2 \tag{6}$$

sind.

Beweis. Unter M_k verstehe ich die Menge, die übrig bleibt, wenn aus $|z_k| < \infty$

1. die Nullstellen $z_k^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ von $\varphi_k'(z_k)$
2. die Polstellen von $\varphi_k(z_k)$

und bei $k = 2$

3. auch noch die Punkte z_2 herausgenommen werden, in denen $-\frac{1}{E}\varphi_2(z_2)$ die beiden möglichen Ausnahmewerte a und b von $\varphi_1(z_1)$ annimmt.

Auf M_2 nimmt $-\frac{1}{E}\varphi_2(z_2)$ alle Werte an, ausgenommen zwei mögliche Ausnahmewerte c, d, ferner ∞, a, b, und möglicherweise $-\frac{1}{E}\varphi_2(z_2^{(\nu)})$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Die Menge der angenommenen Werte ist also überabzählbar. Daher kann $z_2^* \in M_2$ so gewählt werden, daß

$$-\frac{1}{E}\varphi_2(z_2^*) \neq \varphi_1(z_1^{(\nu)}),\ \nu = 1, 2, \ldots$$

ausfällt. Weil nun $\varphi_1(z_1)$ alle Werte mit Ausnahme von a, b, ∞ und möglicherweise $\varphi_1(z_1^{(\nu)})$, $\nu = 1, 2, \ldots$ auf M_1 annimmt, gibt es ein $z_1^* \in M_1$, so daß (5)

$$\varphi_1(z_1^*) = -\frac{1}{E}\varphi_2(z_2^*)$$

ist. Da $z_k^* \neq z_k^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ ist, gilt auch (6) $\varphi_k'(z_k^*) \neq 0$, $k = 1, 2$.

3. Die Beweismethode

In diesem Paragraphen werden drei Sätze bewiesen, welche geeignet kombiniert den Darstellungssatz beweisen. Darüber hinaus sind sie für weitere Untersuchungen von selbständigem Interesse.

Ich beweise zuerst eine lokale Darstellung für alle Lösungen.

Hilfssatz 2. *Zu jeder in einem Dizylinder*

$$P_{r_1 r_2} = \{(z_1, z_2) \mid |z_k - a_k| < r_k,\ r_k > 0,\ k = 1, 2\}$$

erklärten Lösung $w(z_1, z_2)$ von (1) gibt es eine in der z_k-Ebene gelegene Umgebung $|z_k - a_k| < \varrho_k \leqq r_k$ und eine dort holomorphe Funktion $\varphi_k(z_k)$ mit $\varphi_k'(z_k) \neq 0$,

[2]) Wie üblich bezeichnet $\boldsymbol{C}^2$ den Raum zweier komplexer Veränderlicher.

$\varphi_2(z_2) + E\varphi_1(z_1) \neq 0$, *so daß in* $\mathsf{P}_{\varrho_1\varrho_2} = \{(z_1, z_2) \mid\mid z_k - a_k \mid < \varrho_k\}$

$$w(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \log \frac{\varphi_1'(z_1)\varphi_2'(z_2)}{(\varphi_2(z_2) + E\varphi_1(z_1))^2} \tag{7}$$

gilt.

Beweis. Mit $w(z_1, z_2)$ ist e^{2w} und die gemäß

$$I_{z_2} = e^{2w} \tag{8}$$

eingeführte Funktion $I(z_1, z_2)$ holomorph. Durch Einsetzen von (1) in (8) folgt über eine Integration

$$w_{z_1} - EI = p(z_1) \tag{9}$$

mit $p(z_1)$ holomorph in $| z_1 - a_1 | < r_1$.

Mit der Beziehung

$$I_{z_2 z_1} = 2 w_{z_1} I_{z_2},$$

die durch Differenzieren aus (8) folgt, ergibt sich aus (9) über eine Integration

$$I_{z_1} - EI^2 - 2p(z_1) I = q(z_1) \tag{10}$$

mit $q(z_1)$ holomorph in $| z_1 - a_1 | < r_1$.

Weil $I(z_1, z_2)$ in $\mathsf{P}_{r_1 r_2}$ holomorph ist, gibt es ein $M > 0$, so daß

$$| I | < M \tag{11}$$

in $\mathsf{P}_{\varrho_1\varrho_2}$ mit

$$0 < \varrho_k \leqq r_k, \quad k = 1, 2 \tag{12}$$

ist. Ich denke mir in (12) ϱ_1 gleich so gewählt, daß die Lösung $\vartheta(z_1)$ der Riccatischen Differentialgleichung

$$\vartheta' = E\vartheta^2 + p(z_1)\vartheta + q(z_1), \tag{13}$$

welche an der Stelle $z_1 = a_1$ die Anfangsbedingungen $\vartheta(a_1) = M + 1$ erfüllt, in $| z_1 - a_1 | < \varrho_1$ die Ungleichung

$$M < | \vartheta | \tag{14}$$

befriedigt.

Werde $S(z_1, z_2)$ gemäß

$$I(z_1, z_2) = \vartheta(z_1) - S^{-1}(z_1, z_2) \tag{15}$$

eingeführt. Zufolge (11) und (14) ist

$$S(z_1, z_2) \neq 0 \tag{16}$$

in $\mathsf{P}_{\varrho_1\varrho_2}$, also dort auch holomorph.

Ich setze (15) in (10) ein und beachte (13). Damit ergibt sich für S eine lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{\partial S}{\partial z_1} + 2(p(z_1) + E\vartheta(z_1))S - E = 0. \tag{17}$$

Diese Gleichung kann als gewöhnliche lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit der unabhängigen Veränderlichen z_1 und dem Parameter z_2 behandelt werden. An Stelle einer Integrationskonstanten tritt dann eine willkürliche holomorphe Funktion $\varphi_2(z_2)$ auf.

Die Lösungen von (17) lassen sich also durch die Lösungsformel gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung beschreiben. Es ist im vorliegenden Fall zweckmäßig in diese Formel die in $|z_1 - a_1| < \varrho_1$ holomorphe Funktion

$$\varphi_1(z_1) = \int_{z_1^{(0)}}^{z_1} \exp\left[2 \int_{\eta_1^{(0)}}^{\eta_1} (p(\zeta_1) + E\vartheta(\zeta_1))d\zeta_1\right] d\eta_1$$

einzuführen.

Die Integrationsgrenzen sind Anfangs- und Endpunkte ganz in $|z_1 - a_1| < \varrho_1$ verlaufender Wege.

Da $p(z_1)$, $\vartheta(z_1)$ in dieser Umgebung holomorph sind, ist dort

$$\varphi_1'(z_1) \neq 0. \tag{18}$$

Also kann S in der Form

$$S(z_1, z_2) = \frac{\varphi_2(z_2) + E\varphi_1(z_1)}{\varphi_1'(z_1)} \tag{19}$$

in $\mathsf{P}_{\varrho_1\varrho_2}$ dargestellt werden. Aus der Holomorphie von S, φ_1 folgt, daß $\varphi_2(z_2)$ in $|z_2 - a_2| < \varrho_2$ ebenfalls holomorph ist. Aus (16) und (18) ergibt sich $S\varphi_1' \neq 0$ und damit aus (19)

$$\varphi_2(z_2) + E\varphi_1(z_1) \neq 0$$

in $\mathsf{P}_{\varrho_1\varrho_2}$.

Wird in (19) und (15) partiell nach z_2 abgeleitet, so gewinnt man die Ausdrücke

$$\frac{\partial S}{\partial z_2} = \frac{\varphi_2'(z_2)}{\varphi_1'(z_1)} \tag{20}$$

und

$$\frac{\partial I}{\partial z_2} = S^{-2}\frac{\partial S}{\partial z_2}. \tag{21}$$

Daraus folgt in $\mathsf{P}_{\varrho_1\varrho_2}$

$$\frac{\partial S}{\partial z_2} = S^2 e^{2w}.$$

Die rechte Seite ist von Null verschieden. Wegen (18) folgt aus (20), daß

$$\varphi_2'(z_2) \neq 0 \text{ in } |z_2 - a_2| < \varrho_2$$

ist.

Die behauptete Darstellung für die Lösung $w(z_1, z_2)$ in $\mathsf{P}_{\varrho_1\varrho_2}$ ergibt sich durch Einsetzen von (19) und (20) in (21) und von (21) in (8).

Der folgende Satz ist außer als Hilfssatz für den Beweis von Satz 2 noch von selbständigem Interesse. Er verschafft uns den Zugang zu den Singularitäten der Lösungen $w(z_1, z_2)$. Fragen dieser Art werden in [5] behandelt.

Satz 3. *Sei G_k, $k = 1, 2$ ein endliches, einfach zusammenhängendes Gebiet der z_k-Ebene und $G = G_1 \times G_2$.*

Für jede in dem Zylindergebiet G erklärte Lösung $w(z_1, z_2)$ von (1) *ist*

$$w_{z_k z_k} - w_{z_k}^2 = h_k(z_k),\ k = 1, 2 \tag{22a, b}$$

eine in G_k eindeutig bestimmte holomorphe Funktion. Für die Erzeugenden $\varphi_k(z_k)$, $k = 1, 2$ von $w(z_1, z_2)$ gilt

$$[\varphi_k]_{z_k} = h_k(z_k), \quad k = 1, 2 \text{ [3]}). \tag{23a, b}$$

Beweis. Es ist

$$(w_{z_1 z_1} - w_{z_1}^2)_{z_2} = w_{z_1 z_1 z_2} - 2 w_{z_1} \cdot w_{z_1 z_2} \equiv 0,$$

wenn rechts (1) eingesetzt wird.

Deswegen ist $w_{z_1 z_1} - w_{z_1}^2$ eine nur von z_1 abhängige holomorphe Funktion in G_1. Entsprechend wird (22b) bewiesen. Die Formel (23a, b) folgt, wenn man die Darstellung für w in (22a, b) einsetzt.

Bereits Formel (23a, b) läßt vermuten, daß die Erzeugenden nicht eindeutig bestimmt sind. Alle Erzeugenden einer Lösung beschreibt

Satz 4. *Seien $\varphi_k(z_k)$, $k = 1, 2$ Erzeugende einer Lösung $w(z_1, z_2)$ von (1) und α_{mn}, $m, n = 1, 2$ komplexe Zahlen, dann werden die allgemeinsten Erzeugenden $\Phi_k(z_k)$ von w durch*

$$\Phi_k(z_k) = \frac{\alpha_{11}\varphi_k(z_k) + (-E)^{k-1}\alpha_{12}}{(-\bar{E})^{k-1}\alpha_{21}\varphi_k(z_k) + \alpha_{22}}, \quad k = 1, 2 \tag{24a, b, c}$$

$$\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = 1$$

gegeben.

Beweis. Die Erzeugenden $\varphi_k(z_k)$ erfüllen (23a, b), wobei $h_k(z_k)$ bei gegebenen w eindeutig bestimmt ist. Alle weiteren Lösungen von (23a, b) lassen sich bekanntlich mittels $\varphi_k(z_k)$ in der Form

$$\Phi_k(z_k) = \frac{\alpha_{11}^{(k)}\varphi_k(z_k) + \alpha_{12}^{(k)}}{\alpha_{21}^{(k)}\varphi_k(z_k) + \alpha_{22}^{(k)}}, \quad k = 1, 2 \tag{25a, b, c}$$

$$\alpha_{11}^{(k)}\alpha_{22}^{(k)} - \alpha_{12}^{(k)}\alpha_{21}^{(k)} \neq 0$$

schreiben.

Ich nehme an, es wäre bereits bewiesen, daß die $\Phi_k(z_k)$ Erzeugende von w seien. Dann erfüllen sie die Beziehung

$$\frac{\Phi_1'(z_1)\Phi_2'(z_2)}{(\Phi_2(z_2) + E\Phi_1(z_1))^2} = \frac{\varphi_1'(z_1)\varphi_2'(z_2)}{(\varphi_2(z_2) + E\varphi_1(z_1))^2}. \tag{26}$$

Setzt man links die rechten Seiten von (25a, b) ein, so bestimmt man die Koeffizienten. Man berechnet unschwer, daß zwischen $\alpha_{pq}^{(2)}$ und $\alpha_{ij}^{(1)}$ die Beziehung

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(2)} & \alpha_{12}^{(2)} \\ \alpha_{21}^{(2)} & \alpha_{22}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(1)} & -E\alpha_{12}^{(1)} \\ -\bar{E}\alpha_{21}^{(1)} & \alpha_{22}^{(1)} \end{pmatrix} \tag{27}$$

mit

$$\alpha_{11}^{(1)}\alpha_{22}^{(1)} - \alpha_{12}^{(1)}\alpha_{21}^{(1)} = 1$$

besteht. Ich setze noch $\alpha_{ij}^{(1)} = \alpha_{ij}$. Wird (27) in (25a, b, c) eingeführt, ergibt sich (24a, b, c).

Nun zeige ich, daß (24a, b, c) tatsächlich Erzeugende sind. Die $\varphi_k(z_k)$ seien in dem einfach zusammenhängenden Gebiet G_k erklärt. Wegen Satz 3 sind die $h_k(z_k) = [\varphi_k]_{z_k}$ in

[3]) Mit $[\varphi_k]_{z_k}$ wird die Schwarzsche Derivierte der Funktion φ_k bezüglich z_k bezeichnet.

G_k holomorph. Dann können die $\Phi_k(z_k)$ wegen $[\Phi_k]_{z_k} = h_k(z_k)$ in G_k bekanntlich noch Pole von höchstens erster Ordnung haben.

Zunächst untersuche ich

$$\Phi_k'(z_k) = \frac{\varphi_k'(z_k)}{[(-\bar{E})^{k-1}\alpha_{21}\varphi_k(z_k) + \alpha_{22}]^2} \tag{28a, b}$$

und

$$\Phi_2(z_2) + E\Phi_1(z_1) = \frac{\varphi_2(z_2) + E\varphi_1(z_1)}{(\alpha_{21}\varphi_1(z_1) + \alpha_{22})\,(-\bar{E}\alpha_{21}\varphi_2(z_2) + \alpha_{22})}. \tag{29}$$

Die möglichen isoliert liegenden Nullstellen und Pole der Nenner bewirken, weil die $\varphi_k(z_k)$ Erzeugende sind, kein Verschwinden der rechten Seiten von (28a, b) und (29). Daher sind $\Phi_k'(z_k) \neq 0$, $\Phi_2(z_2) + E\Phi_1(z_1) \neq 0$ in G_k bzw. $G = G_1 \times G_2$.

Ich führe nun den Beweis zu Behauptung:

(A) Entweder ist $\Phi_1(z_1)$ in G_1 holomorph und $\Phi_2(z_2)$ meromorph mit endlich vielen Polen von höchstens 1. Ordnung in G_2 oder es gilt das Umgekehrte.

Die $\varphi_k(z_k)$ sind Erzeugende. Daher haben Zähler und Nenner in (24a, b) nur endlich viele Nullstellen und Pole von höchstens 1. Ordnung in G_k, also auch $\Phi_k(z_k)$.

Zum weiteren Beweis nehme ich an,

(B) daß $\Phi_1(z_1)$ und $\Phi_2(z_2)$ in z_1^* bzw. z_2^* einen Pol von 1. Ordnung haben.

Aus dieser Annahme ergeben sich Konsequenzen für $\varphi_k(z_k)$. Ich unterscheide zwei Fälle.

$\alpha_{22} = 0$. Dann folgt $\varphi_k(z_k^*) = 0$, $k = 1, 2$ und das widerspricht der Beziehung $\varphi_2(z_k^*) + E\varphi_1(z_1^*) \neq 0$.

$\alpha_{22} \neq 0$. In diesem Fall folgt $\varphi_k(z_k^*) \neq 0$ und endlich. Weil zudem $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = 1$ ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}\varphi_k(z_k^*) + (-E)^{k-1}\alpha_{12} = a_k \neq 0 \\ &(-\bar{E})^{k-1}\alpha_{21}\varphi_k(z_k^*) + \alpha_{22} = 0 \end{aligned} \qquad k = 1, 2; \tag{30a, b}$$

a_k sei der Wert, den die linke Seite für $z_k = z_k^*$ annimmt. Zur Diskussion von (30a, b) ist es zweckmäßig, zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Die Werte von $\varphi_k(z_k^*)$ seien so beschaffen, daß

$$a_1 = -\frac{1}{\alpha_{21}}, \quad a_2 = \frac{E}{\alpha_{21}} \tag{31a, b}$$

ist. Es ist $\alpha_{21} \neq 0$, weil $\alpha_{22}\varphi_k(z_k^*) \neq 0$ ist. Dann berechnet man aus (30a, b)

$$\varphi_1(z_1^*) = -\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}, \quad \varphi_2(z_2^*) = E\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{21}}$$

und das widerspricht $\varphi_2(z_2^*) + E\varphi_1(z_1^*) \neq 0$.

2. Die Werte von $\varphi_k(z_k^*)$ seien so, daß mindestens eine der beiden Beziehungen (31a, b) nicht erfüllt ist. Sei z. B. $a_1 \neq -\frac{1}{\alpha_{21}}$. Dann widersprechen sich die beiden Gleichungen (30a).

Die Annahme **(B)** kann folglich nicht bestehen. Daher kann nur noch eine der beiden $\Phi_k(z_k)$ Pole höchstens 1. Ordnung haben, und daß für diesen Fall (26) holomorph ausfällt, davon überzeugt man sich durch eine leichte Rechnung. Damit ist **(A)** bewiesen und auch Satz 4.

4. Beweis des Darstellungssatzes

Nach diesen Vorbereitungen kann Satz 2 wie folgt bewiesen werden.

Sei $w(z_1, z_2)$ eine in F erklärte Lösung von (1). Dann kann w aufgrund von Hilfssatz 2 lokal dargestellt werden. Die Erzeugenden $\varphi_k^*(z_k)$ seien in

$$A_k = \{z_k \mid |z_k - a_k| < \varrho_k, \varrho_k > 0\} < G_k$$

erklärt, w somit in $A = A_1 \times A_2$ dargestellt. Die Erzeugenden $\psi_k^*(z_k)$ einer weiteren lokalen Darstellung von w mögen in

$$B_k = \{z_k \mid |z_k - b_k| < r_k, r_k > 0\} < G_k$$

definiert sein, also w in $B = B_1 \times B_2$ dargestellt. Diese weitere Darstellung sei so gewählt, daß

$$D_k = A_k \cap B_k \neq \emptyset, \quad k = 1, 2$$

ausfällt. Es ist

$$D = A \cap B.$$

Die auf D_k beschränkten Erzeugenden φ_k^* und ψ_k^* erzeugen in D die Lösung $w(z_1, z_2)$. Wegen Satz 4 ist also

$$\psi_k^*(z_k) = \frac{\alpha_{11}\varphi_k^*(z_k) + (-E)^{k-1}\alpha_{12}}{(-\bar{E})^{k-1}\alpha_{21}\varphi_k^*(z_k) + \alpha_{22}}$$

mit $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = 1$ in D_k.

Ich bilde in

$$V_k = A_k \cup B_k$$

die Funktion

$$\psi_k(z_k) = \begin{cases} \psi^*(z_k) & \text{in } B_k \cap D_k \\ \psi_k^*(z_k) = \dfrac{\alpha_{11}\varphi_k^*(z_k) + (-E)^{k-1}\alpha_{12}}{(-\bar{E})^{k-1}\alpha_{21}\varphi_k^*(z_k) + \alpha_{22}} & \text{in } D_k \\ \dfrac{\alpha_{11}\varphi_k^*(z_k) + (-E)^{k-1}\alpha_{12}}{(-\bar{E})^{k-1}\alpha_{21}\varphi_k^*(z_k) + \alpha_{22}} & \text{in } A_k \cap D_k. \end{cases}$$

Diese Funktion hat in V_k folgende Eigenschaften: Es ist offensichtlich $\psi_k'(z_k) \neq 0$. Die Eigenschaft **a.** aus Satz 2 ist in diesem Gebiet für $\psi_k(z_k)$ erfüllt, weil die Erzeugenden $\psi_k^*(z_k)$ holomorph sind. In V ist $\psi_2(z_2) + E\psi_1(z_1) \neq 0$. Denn angenommen, es wäre

$$\psi_2(z_2^*) + E\psi_1(z_1^*) = 0 \text{ in } (z_1^*, z_2^*) \in V, \tag{32}$$

so gäbe es sogar eine ganze Umgebung $N < V$ von (z_1^*, z_2^*), so daß

$$\psi_2(z_2) + E\psi_1(z_1) \equiv 0 \text{ für alle } (z_1, z_2) \in N \tag{33}$$

gelten würde. Denn $\psi_k(z_k)$ sind in z_k^* holomorph. Aus der Gebietstreue dieser Abbildungen und der Unabhängigkeit der Veränderlichen z_1, z_2 folgt sofort (33). Wird in (33) partiell nach z_2 bzw. z_1 differenziert, ergibt sich der Widerspruch $\psi_k'(z_k) \equiv 0$.

Die $\psi_k(z_k)$ erzeugen also in V eine gewisse Lösung w^*, wie man leicht nachrechnet. w^* ist aber in D identisch mit w, also auch in V. Wir können nun $\psi_k(z_k)$ in der angegebenen Weise weiter fortsetzen. Wir erhalten so gewisse in G_k erklärte Funktionen $\varphi_k(z_k)$, welche wegen des einfachen Zusammenhanges der G_k dort eindeutig sind und alle Eigenschaften der $\varphi_k(z_k)$ in Satz 2 haben, also $w(z_1, z_2)$ in $G = G_1 \times G_2$ erzeugen.

5. Der Fall der Veränderlichen $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2 = \bar{\mathfrak{z}}_1$ [4])

Die Wahl dieser Veränderlichen bewirkt, daß wir unsere weiteren Überlegungen statt im C^2 in der z_1-Ebene durchführen können. Die partiellen Ableitungen nach z_1, $\bar{z}_1$ sind als formale Ableitungen zu interpretieren, die wie folgt erklärt sind:

$$(\ )_{z_1} = \frac{\partial}{\partial z_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial y_1}\right), \quad (\ )_{\bar{z}_1} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial y_1}\right)$$

mit $z_1 = x_1 + iy$. Hieraus gewinnt man in üblicher Weise die höheren Ableitungen. Es ist $4w_{z_1\bar{z}_1} = \Delta w$, wo $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}$ den Laplace-Operator bedeutet.

Die Differentialgleichung (1) kann folglich in der Form

$$\Delta w = 4Ee^{2w}, \quad E = e^{i\alpha}, \quad \alpha \in \boldsymbol{R} \tag{34}$$

geschrieben werden. Für $\alpha = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ liegt die für die Funktionentheorie einer komplexen Veränderlichen wichtige Gleichung

$$\Delta w = 4e^{2w} \tag{35}$$

vor.

Wir schreiben, je nachdem wie es zweckmäßig ist, die Lösungen von (34) als Funktionen der reellen Veränderlichen x_1, y_1 oder als Funktionen von z_1, $\bar{z}_1$.

Lösung von (34) soll im folgenden jede zweimal stetig differenzierbare Funktion heißen, die die Differentialgleichung erfüllt[5]). „Ganz" heiße eine solche Lösung, wenn sie überall in der offenen z_1-Ebene erklärt ist.

Für jedes $\alpha \in \boldsymbol{R}$ wird im folgenden angegeben, ob (34) ganze Lösungen hat oder nicht. Man unterscheidet zweckmäßig vier Fälle.

1. $\alpha = 2k\pi$. Es gibt keine reellwertigen ganzen Lösungen wie H. Wittich [7] mit Mitteln der reellen Analysis bewiesen hat und G. Warnecke [4] aus dem folgenden Satz 5 folgert. Die Sätze 2, 3, 4 und der Beweis von Satz 1 sind im gewissen Sinne eine Verallgemeinerung von Satz 5, Aussage a, c und jener Folgerung. Zur Veranschaulichung des Gesagten soll beides mitgeteilt werden.

Satz 5. *Sei $w(z_1\bar{z}_1)$ eine in F definierte, reellwertige Lösung von* (35) *und G ein einfach zusammenhängendes kompakt in F liegendes Gebiet*[6]).

a. *Dann läßt sich $w(z_1, \bar{z}_1)$ in G gemäß*

$$w(z_1, \bar{z}_1) = \frac{1}{2}\log\frac{\varphi'(z_1)\overline{\varphi'(z_1)}}{(1 - \varphi(z_1)\overline{\varphi(z_1)})^2} \tag{36}$$

mit geeigneter in G holomorpher Erzeugender $\varphi(z_1)$ darstellen, die dort die Eigenschaften

$$1 - \varphi(z_1)\overline{\varphi(z_1)} > 0, \quad \varphi'(z_1) \neq 0 \tag{37 a, b}$$

hat.

b. *Umgekehrt stellt* (36) *für jede in G holomorphe Funktion $\varphi(z_1)$, welche die Eigenschaften* (37 a, b) *hat, eine in G erklärte Lösung von* (35) *dar.*

c. *Ist eine Lösung der Form* (36) *gegeben, so ist die holomorphe Funktion*

$$[\varphi]_{z_1} = h(z_1)$$

---

[4]) $\bar{\mathfrak{z}}_1$ ist konjugiert komplex zu $\mathfrak{z}_1$.

[5]) Die Lösung ist dann auch reell analytisch.

[6]) F und G sind Gebiete der z_1-Ebene.

eindeutig bestimmt und folgt gemäß

$$w_{z_1 z_1} - w_{z_1}^2 = h(z_1).$$

Die Erzeugende $\varphi(z_1)$ ist nicht eindeutig bestimmt. Man erhält die allgemeinste Erzeugende $\Phi(z_1)$, wenn β reell und b komplex mit $|b| < 1$ sind, durch

$$\Phi(z_1) = e^{i\beta} \frac{\varphi(z_1) - b}{1 - \bar{b}\varphi(z_1)}. \tag{38}$$

Folgerung. Hätte die Gleichung (35) eine reellwertige ganze Lösung, so folgte aus (37a, b), daß die Erzeugende $\varphi(z_1)$ eine nicht konstante, ganze, beschränkte Funktion sein müßte. Die gibt es nach dem Satz von Liouville nicht.

2. $\alpha = (2k + 1)\pi$. In diesem Fall ist

$$w(z_1, \bar{z}_1) = \Re z_1 - \log(1 + e^{2\Re z_1})^{7}) \tag{35}$$

eine reelle ganze Lösung.

3. Für alle übrigen $\alpha \in \boldsymbol{R}$ hat (34) keine reellen Lösungen, weil die rechte Seite Ee^{2w} dieser Gleichung komplex, die linke Δw bei rellen Lösungen reellwertig ist.

4. Für alle $\alpha \in \boldsymbol{R}$ ist

$$w(z_1, \bar{z}_1) = -\log(a + 2\Re z_1) + \log\left(-i\frac{\alpha}{2}\right) \tag{36}$$

mit $\Im a \neq 0$[8]) eine komplexwertige ganze Lösung.

Die Lösungen (35) und (36) folgert man aus Satz 2.

---

[7]) $\Re z_1$ bezeichnet den Realteil von z_1.

[8]) $\Im a$ bezeichnet den Imaginärteil von a.

Literaturverzeichnis

[1] *F. Rellich*, Über Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen, Festschrift zur Feier des zweihundertjährigen Bestehens der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, I. Math.-Phys. Kl., pp. 168—174. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1951.

[2] *F. Rellich*, Über die ganzen Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung, Math. Ann. **117** (1940), 587—589.

[3] *F. Rellich*, Elliptische Funktionen und die ganzen Lösungen von $y'' = f(y)$, Math. Z. **47** (1941), 153—160.

[4] *G. Warnecke*, Über die Darstellung von Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$(1 + \delta z\bar{z})^2 w_{z\bar{z}} = \delta - \varepsilon e^{2w},$$

Bonner Math. Schr. **34** (1968).

[5] *G. Warnecke*, Über isolierte Singularitäten bei einer nichtlinearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, erscheint demnächst.

[6] *H. Wittich*, Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen, 2. Aufl., Berlin-Heidelberg-New York 1968.

[7] *H. Wittich*, Ganze Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$, Math. Z. **49** (1944), 579—582.

5334 Ittenbach, Mühlenweg 20

Eingegangen 27. März 1969

The conjugacy classes in a finite simple group

By *P. X. Gallagher* at New York

To Wolfgang Krull on his seventieth birthday

Let G be a finite simple group with nontrivial conjugacy classes R, S of relatively prime size. Tchunikhin ([5], p. 41) has conjectured that such a group does not exist. If true, this would contain Burnside's result ([3], p. 322) that a simple group can have no nontrivial class of prime-power size. It would also lead to a short proof of Wielandt's theorem [8] on the solvability of groups with nilpotent complementary Hall subgroups.

Tchunikhin proved [6] that no nontrivial class of G has size prime to both $|R|$ and $|S|$. He also showed [7] that there is a third class with size prime to neither $|R|$ nor $|S|$, *provided G has odd order.* In this note we show (without the odd order assumption) that RS is an integral multiple of a third class T with this property. We then give some relations between the orders of the elements in R, S, T.

Notation. We use Greek letters, and the corresponding lower and upper case Roman letters, to denote the elements of G, their orders, and the classes to which they belong. The group $\mathscr{G}$ of invertible residue classes $(n) \bmod |G|$ acts on the set of elements of G and on the set of classes of G. If λ is an element of order l, then the isotropy group of λ is the subgroup $\mathscr{G}_l$ of residue classes (n) with $n \equiv 1 \bmod l$. We have $|\mathscr{G}/\mathscr{G}_l| = \varphi(l)$, for each divisor l of $|G|$. If L is the class of λ, then $L^{(n)}$ is the class of λ^n. If $\mathscr{G}_L$ is the stability group of L, then $\mathscr{G}_L/\mathscr{G}_l \cong N(\langle\lambda\rangle)/C(\lambda)$. Therefore $|L| = i(L) \cdot j(L)$, where $i(L) = |\mathscr{G}_L/\mathscr{G}_l|$, and $j(L) = |G/N(\langle\lambda\rangle)|$.

1. Let $\varrho \in R$, $\sigma \in S$. Then $C(\varrho)$ and $C(\sigma)$ have relatively prime indices, so

$$C(\varrho)C(\sigma) = G. \tag{1}$$

Let $H = \langle\sigma, C(\varrho)\rangle$. Then $|H/C_H(\sigma)| = HC(\sigma)/C(\sigma)| = |S|$, by (1), showing $S < H$. By simplicity, S generates G. Hence $H = G$. It follows that

$$\sigma \notin N(\langle\varrho\rangle). \tag{2}$$

For each integer n, $C(\sigma) < C(\sigma^n)$, so the class of σ^n also has size prime to $|R|$. Hence $\langle\sigma\rangle \cap N(\langle\varrho\rangle) = 1$. Thus the action of $\langle\sigma\rangle$ by conjugation on the set of subgroups $\langle\varrho\rangle$ with $\varrho \in R$ is fixed-point-free. If r and s are the orders of ϱ and σ, it follows that

$$s \mid j(R), \quad r \mid j(S); \quad (r, s) = 1. \tag{3}$$

If λ belongs to a class with size prime to both $|R|$ and $|S|$, then l divides both $j(R)$ and $j(S)$, from which $l = 1$. This proves

Theorem 1 (Tchunikhin). *No finite simple group has three nontrivial conjugacy classes of pairwise relatively prime size.*

2. Let $\varrho\sigma = \tau$ and let T be the class of τ. For each $\alpha, \beta \in G$ there are elements $\mu, \nu \in C(\varrho), C(\sigma)$ for which $\alpha^{-1}\beta = \mu\nu^{-1}$, by (1). Putting $\alpha\mu = \beta\nu = \gamma$, we have $\varrho^{\alpha}\sigma^{\beta} = \varrho^{\alpha\mu}\sigma^{\beta\nu} = \tau^{\gamma}$. Thus

$$RS = cT. \tag{4}$$

The multiplicity is given by $c = |\, C(\tau)/C(\varrho) \cap C(\sigma)\,|$. If $c = 1$, then $\tau \in C(\varrho)$, which implies $\sigma \in C(\varrho)$, contrary to (2). Hence $c \neq 1$.

For each irreducible character χ of G, we have

$$\frac{\chi(\varrho)\chi(\sigma)}{f_\chi} = \frac{1}{|\, G\,|} \sum_{\lambda \in G} \chi(\varrho\lambda\sigma\lambda^{-1})$$

where f_χ is the degree of χ. Using (4), this becomes

$$\chi(R)\chi(S) = f_\chi \chi(T). \tag{5}$$

Hence $|\, \chi(T)\,| \leqq |\, \chi(R)\,|$, with equality only if $\chi(R) = 0$ or $|\, \chi(S)\,| = f_\chi$. By simplicity, the second alternative holds only for the principal character. Since there is at least one nonprincipal character χ with $\chi(R) \neq 0$, we get

$$|\, C(\tau)\,| = \sum_{\chi} |\, \chi(T)\,|^2 < \sum_{\chi} |\, \chi(R)\,|^2 = |\, C(\varrho)\,|,$$

showing

$$|\, R\,| < |\, T\,|, \quad |\, S\,| < |\, T\,|. \tag{6}$$

By (4), $|\, T\,|$ divides $|\, R\,| \cdot |\, S\,|$; by (6) $|\, T\,|$ divides neither $|\, R\,|$ nor $|\, S\,|$. Since $(|\, R\,|, |\, S\,|) = 1$, it follows that $|\, T\,|$ is prime to neither $|\, R\,|$ nor $|\, S\,|$. This proves

Theorem 2. *$RS = cT$ with $c \neq 1$; $|\, T\,|$ is prime to neither $|\, R\,|$ nor $|\, S\,|$.*

3. By a theorem of Burnside ([3], p. 317), the action of $\mathscr{G}$ on the classes of G extends to an action of $\mathscr{G}$ as a group of automorphisms of the integral class ring of G. It follows from (4) that

$$R^{(n)}S^{(n)} = cT^{(n)}, \text{ for } (n) \in \mathscr{G}. \tag{7}$$

Using (3) and (7),

$$\mathscr{G}_{rs} = \mathscr{G}_r \cap \mathscr{G}_s < \mathscr{G}_R \cap \mathscr{G}_S < \mathscr{G}_T$$

so

$$\mathscr{G}_{rs}/\mathscr{G}_{[rs,t]} = \mathscr{G}_{rs}/\mathscr{G}_{rs} \cap \mathscr{G}_t \cong \mathscr{G}_{rs}\mathscr{G}_t/\mathscr{G}_t < \mathscr{G}_T/\mathscr{G}_t.$$

It follows that $\varphi([rs, t])/\varphi(rs)$ divides $i(T)$. Let d be the largest divisor of t which is prime to rs. Then

$$\frac{\varphi([rs,t])}{\varphi(rs)} = \frac{[rs,t]}{rs} \cdot \frac{\varphi(d)}{d} = \frac{t}{(rs,t)\cdot d} \cdot \varphi(d).$$

Since the first factor on the right is an integer, we get

$$\varphi(d) \text{ divides } i(T). \tag{8}$$

Theorem 3. *If $i(T)$ is odd, then each odd prime factor of t divides rs. If in addition rs is odd, then $4 \nmid t$.*

Remark. Both hypotheses are fulfilled if $|\, R\,|$ and $|\, S\,|$ are odd, since $i(T)$ divides $|\, T\,|$, which divides $|\, R\,| \cdot |\, S\,|$, and rs divides $j(S)j(R)$, which divides $|\, S\,| \cdot |\, R\,|$.

4. Following Glauberman ([4], p. 409), we apply a result of Brauer [1].

Theorem 4. *If $\langle \varrho \rangle$ is a Sylow subgroup of prime order r, then $r \nmid t$.*

Proof. Assume $r \mid t$. Let $\chi \in B_0(r)$, the principal r-block for the prime r. By [1], p. 159, we have $\chi(\tau) = \chi(\tau_r)$ where τ_r is the r-part of τ. By Sylow's theorem, τ_r is conjugate to ϱ^n with $(n) \in \mathscr{G}$. Hence $\chi(T)$ is an algebraic conjugate of $\chi(R)$. Taking norm of (5) we get $N(\chi(S)/f_\chi) = 1$ or $\chi(R) = 0$. Since $\chi \in B_0(r)$, the second alternative is excluded ([2], p. 585). Hence $|\chi(S)| = f_\chi$, and therefore χ is the principal character, by simplicity. Thus $B_0(r)$ consists of the principal character. Hence $\langle \varrho \rangle$ is trivial ([1], p. 155), contrary to assumption.

Corollary. *If $\langle \varrho \rangle$ and $\langle \sigma \rangle$ are Sylow subgroups of prime order, then $(rs, t) = 1$, $i(T) = \varphi(t)$, and $|R| \cdot |S|$ is even.*

Proof. By Burnside's theorem, r and s are odd primes. Theorem 4 gives $(rs, t) = 1$, and (8) implies $i(T) = \varphi(t)$. Assume $|R| \cdot |S|$ is odd. Theorem 3 implies $t = 2$. Similarly $\sigma^{-1}\varrho = \tau'$ has order 2. From $\varrho^2 = \tau\tau'$, we get

$$\sigma^{-1}\varrho^2\sigma = \tau^{-1}\varrho^2\tau = \tau'\tau = (\tau\tau')^{-1} = \varrho^{-2},$$

so $\sigma \in N(\langle \varrho \rangle)$, contrary to (2).

References

[1] *R. Brauer*, Some applications of the theory of blocks of characters of finite groups. I, J. of Algebra **1** (1964), 152—167.

[2] *R. Brauer* and *C. Nesbitt*, On the modular characters of groups, Ann. Math. **42** (1941), 556—590.

[3] *W. Burnside*, Theory of Groups, Cambridge 1911.

[4] *G. Glauberman*, Central elements in core free groups J. of Algebra **4** (1966), 403—420.

[5] *S. A. Tchunikhin*, Some trends in the development of the theory of groups, Russ. Math. Surveys **16** (1961), 26—46.

[6] *S. A. Tchunikhin*, Simplicité du groupe fini et les ordres de ses classes d'eléments conjugués, C. R. Acad. Sci. Paris **191** (1930), 397—399.

[7] *S. A. Tchunikhin*, Sur le problem des deux classes d'un groupe fini, C. R. Acad. Sci. Paris **198** (1934), 531—532.

[8] *H. Wielandt*, Über Produkte von nilpotenten Gruppen, Ill. J. Math. **2** (1958), 611—618.

Barnard College, Columbia University, New York, N. Y. (10027)

Eingegangen 28. März 1969

Primringe mit Krull-Dimension Eins

Von *Gerhard Michler* in Tübingen

Herrn Professor Dr. Wolfgang Krull zum 70. Geburtstag

Einleitung

Die von Gabriel und Rentschler in [2] eingeführte Krull-Dimension eines nicht notwendig kommutativen Ringes fällt für kommutative Ringe mit der klassischen, durch absteigende Primidealketten definierten Krull-Dimension zusammen. In den Abschnitten 2 und 3 dieser Arbeit wird gezeigt, daß mehrere Resultate der Idealtheorie eindimensionaler, kommutativer Ringe für nicht notwendig kommutative Ringe mit Krull-Dimension Eins im Sinne von [2] gelten. Hierzu gehört der Satz von Krull-Akizuki; denn nach Satz 3. 2 ist jeder Oberring S eines beschränkten Primringes R mit Krull-Dimension Eins ein noetherscher Ring mit Krull-Dimension Eins. Dabei ist $S \geqq R$ ein Oberring von R, wenn S in dem einfachen, artinschen (klassischen) Quotientenring Q von R enthalten ist.

In Abschnitt 4 werden die Beziehungen zwischen der Krull-Dimension und der globalen projektiven Dimension untersucht. Im Gegensatz zur kommutativen Ringtheorie besteht für nicht notwendig kommutative, noethersche Ringe im allgemeinen keine Gleichheit oder Ungleichung zwischen diesen Dimensionen. Jedoch ist die Krull-Dimension eines halblokalen, erblichen Ringes R mit Maximalbedingung für Rechts- und für Linksideale kleiner oder gleich eins (Satz 4. 8). Hierbei ist R halblokal, wenn das Jacobson-Radikal J von R Durchschnitt von endlich vielen maximalen, zweiseitigen Idealen ist. Als Anwendung dieses Satzes wird in Abschnitt 5 der Krullsche Durchschnittssatz für halblokale, erbliche, noethersche Ringe R bewiesen (Satz 5. 5). Ist R ein Primring, dann gilt für J sogar das Lemma von Artin-Rees, d. h. zu jedem Rechtsideal E von R gibt es eine natürliche Zahl t derart, daß $E \cap J^n = (E \cap J^t) J^{n-t}$ für alle $n > t$ ist (Satz 5. 1). Aus dem Satz von Krull-Akizuki (Satz 3. 2) folgt dann, daß die Sätze 4. 8, 5. 1 und 5. 5 auch für jeden Oberring S von R gelten (Bemerkung 5. 3). Andererseits zeigen die Beispiele von P. M. Cohn, Herstein und Jategaonkar [8], daß im allgemeinen keiner dieser Sätze gilt, wenn in R die Maximalbedingung auch nur auf einer Seite verletzt ist.

1. Bezeichnungen und Definitionen

In dieser Arbeit werden nur assoziative Ringe mit Einselement untersucht. Jeder R-Modul M ist unitär. Der Ring R heißt *noethersch* (artinsch), wenn R der Maximalbedingung (Minimalbedingung) für Rechts- und für Linksideale genügt. Der Ring R erfüllt die *eingeschränkte Minimalbedingung*, wenn R nicht artinsch ist, aber R/A für

jedes zweiseitige Ideal $A \neq 0$ von R artinsch ist. Das *Radikal* des Ringes R ist stets das Jacobson-Radikal von R; es wird mit J oder $J(R)$ bezeichnet.

Nach Jacobson [7] ist der Primring R *beschränkt*, wenn jedes große Rechtsideal von R ein von Null verschiedenes zweiseitiges Ideal enthält. Nach Amitsur [1] ist jeder Primring R, der eine nichttriviale Polynomidentität erfüllt, beschränkt. Nach Hilfssatz 3. 3 dieser Arbeit ist jeder halblokale, noethersche, nicht-einfache Primring mit Krull-Dimension Eins beschränkt. Dabei ist der Ring R *halblokal*, wenn sein Radikal J (wie im Kommutativen) Durchschnitt von endlich vielen maximalen Idealen ist. Dies ist die allgemeinste Definition eines „halblokalen Ringes" und enthält im Gegensatz zu dem Begriff „halblokaler Ring", wie er in [4] definiert ist, alle einfachen Ringe. R ist *lokal*, wenn R/J ein (nicht notwendig kommutativer) Körper ist. Ein *diskreter Bewertungsring* ist ein lokaler, noetherscher Bewertungsring. R ist *streng halblokal*, wenn R/J artinsch ist.

R ist ein *erblicher* Ring, wenn jedes Rechts- und jedes Linksideal von R ein projektiver R-Modul ist.

dim R bezeichnet das Maximum der Gliederzahl einer direkten Summe von uniformen Rechtsidealen $U \neq 0$ von R. Ringe R mit dim $R < \infty$ heißen *rechts-endlich dimensional*. Ist $X \neq 0$ ein Rechtsideal eines rechts-endlich-dimensionalen Ringes R, dann ist dim X, womit das Maximum der Gliederanzahl einer direkten Summe von uniformen Rechtsidealen $0 \neq U < X$ von R bezeichnet wird, nach Goldie [3] eindeutig durch X bestimmt.

Bezüglich der Terminologie wird auf Goldie [3] und Jacobson [7] verwiesen.

2. Krull-Dimension und eingeschränkte Minimalbedingung

Bekanntlich folgt aus dem Krullschen Hauptidealsatz, daß jeder kommutative, noethersche Ring R die Minimalbedingung für Primideale erfüllt. Wenn jede echt absteigende Kette von Primidealen von R höchstens $n+1$ Glieder besitzt, und es eine echt absteigende Kette $P_0 > P_1 > \cdots > P_{n-1} > P_n$ von $n+1$ Primidealen von R gibt, dann ist R ein Ring mit Krull-Dimension n. In ihrer Arbeit [2] haben Gabriel und Rentschler gezeigt, daß ein kommutativer, noetherscher Ring R genau dann die Krull-Dimension n besitzt, wenn R die Krull-Dimension n im Sinne der nun folgenden Definition von Gabriel besitzt; und diese Definition eignet sich für die Theorie der nicht notwendig kommutativen Ringe besser, weil ein nicht kommutativer Ring im allgemeinen nicht genügend viele zweiseitige Primideale hat.

Sei $\mathfrak{S}$ eine Menge von Rechtsidealen des (nicht notwendig kommutativen) Ringes R, zu der die Rechtsideale A und B gehören. Ist $A \geqq B$, dann sei

$$[A, B] = \{C \in \mathfrak{S} \mid A \geqq C \geqq B\}.$$

$\mathfrak{S}$ heißt *artinsch*, wenn jede echt absteigende Kette $A_1 > A_2 > \cdots$ von Rechtsidealen $A_i \in \mathfrak{S}$ nur endlich viele Glieder besitzt.

Definition. (Vgl. [2].) $\mathfrak{S}$ besitzt die Krull-Dimension

K-dim $\mathfrak{S} = 0$, wenn $\mathfrak{S}$ artinsch ist.

K-dim $\mathfrak{S} = n$, wenn K-dim $\mathfrak{S} \neq 0, 1, \ldots, n-1$, und wenn jede echt absteigende Kette $A_1 > A_2 > \cdots$ mit $A_i \in \mathfrak{S}$ und K-dim $[A_i, A_{i+1}] > n-1$ für $i = 1, 2, \ldots$ nur endlich viele Glieder besitzt.

K-dim $\mathfrak{S} = \infty$, wenn K-dim $\mathfrak{S} \neq n$ für jede natürliche Zahl n ist.

Definition. Ist $\mathfrak{S}$ der Verband aller Rechtsideale des Ringes R, dann wird die *rechts Krull-Dimension* $r.K\text{-dim}\ R$ von R definiert durch $r.K\text{-dim}\ R = K\text{-dim}\ \mathfrak{S}$. Analog definiert man die links Krull-Dimension $l.K\text{-dim}\ R$. Ist $r.K\text{-dim}\ R = l.K\text{-dim}\ R = n$ (oder ∞), dann besitzt R die *Krull-Dimension* $K\text{-dim}\ R = n$ (oder ∞).

Hilfssatz 2. 1. *Ist R ein Primring mit der Eigenschaft, daß $K\text{-dim}\ [R, E] = 0$ is für jedes große Rechtsideal E von R, dann sind äquivalent:*

(1) *R ist rechts-endlich-dimensional.*

(2) $r.K\text{-dim}\ R \leqq 1$.

Beweis. Es gelte (1). Sei $\dim R = n < \infty$. Wäre die rechts Krull-Dimension $r.K\text{-dim}\ R > 1$, dann gäbe es eine unendliche, echt absteigende Kette

$$A_1 > A_2 > \cdots > A_n > A_{n+1} > \cdots$$

von Rechtsidealen A_i von R mit $K\text{-dim}\ [A_i, A_{i+1}] > 0$ für $i = 1, 2, \ldots$ Sicherlich ist $0 < \dim A_i \leqq \dim R = n$ für jedes i. Also existiert eine kleinste natürliche Zahl s mit

$$\dim A_s = \dim A_h \text{ für alle } h \geqq s.$$

Nach Lemma 1. 2 von Goldie [3] gibt es ein Rechtsideal C von R mit $A_s \cap C = 0$ und $\dim (A_h \oplus C) = n$ für alle $h \geqq s$. Daher ist $A_{s+1} \oplus C$ ein großes Rechtsideal von R, woraus folgt

$$0 \leqq K\text{-dim}\ [A_s \oplus C, A_{s+1} \oplus C] \leqq K\text{-dim}\ [R, A_{s+1} \oplus C] = 0$$

Hieraus ergibt sich $K\text{-dim}\ [A_s, A_{s+1}] = 0$. Widerspruch!

Umgekehrt sei nun $r.K\text{-dim}\ R \leqq 1$. Falls $r.K\text{-dim}\ R = 0$ ist, ist R ein einfacher Artin-Ring, und (1) ist trivialerweise erfüllt. O. B. d. A. sei also $r.K\text{-dim}\ R = 1$. Wäre R nicht rechts-endlich-dimensional, dann gäbe es eine direkte Summe $\sum_{i=1}^{\infty} \oplus A_i$ von unendlich vielen Rechtsidealen $A_i \neq 0$ von R. Für jede natürliche Zahl i sei $B_i = \sum_{j=i}^{\infty} \oplus A_j$. Dann ist

$$B_1 > B_2 > \cdots > B_i > B_{i+1} > \cdots$$

eine unendliche, echt absteigende Kette von Rechtsidealen von R. Wegen $r.K\text{-dim}\ R = 1$ existiert eine natürliche Zahl s derart, daß

$$K\text{-dim}\ [B_i, B_{i+1}] = 0 \text{ für alle } i \geqq s.$$

Hieraus folgt $K\text{-dim}\ [A_i, 0] = 0$. Also besitzt R ein minimales Rechtsideal $M \neq 0$, Sei H die Summe aller zu M isomorphen Rechtsideale Y von R. Da R ein Primring ist. ist H ein zweiseitiges Ideal von R, das eine direkte Summe von minimalen Rechtsidealen Y von R ist. Wäre H direkte Summe von endlich vielen solchen Rechtsidealen Y von R, dann wäre $H = R$, woraus folgte, daß R artinsch wäre. Widerspruch! Also gibt es abzählbar unendlich viele minimale Rechtsideale $Y_i\ (i = 1, 2, \ldots)$ von R, deren Summe direkt ist. Sei p_i für $i = 1, 2, \ldots$ eine Primzahl $\neq 1$ derart, daß $p_i < p_j$ für $i < j$ ist. Setze $D_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \oplus Y_j$, und für $n = 1, 2, \ldots$ sei

$$D_n = \sum_{j} \oplus Y_j \text{ mit } d_n \nmid j$$

wobei $d_n = \prod_{k=1}^{n} p_k$ ist.

Dann ist

$$D_0 > D_1 > D_2 > \cdots > D_n > D_{n+1} > \cdots$$

eine unendliche, echt absteigende Kette von Rechtsidealen von R mit

$$K\text{-dim}\,[D_n, D_{n+1}] > 0 \text{ für } n = 0, 1, 2, \ldots,$$

weil der vollständig reduzible R-Modul D_n/D_{n+1} nach Konstruktion nicht artinsch ist. Also ist $r.K\text{-dim}\ R > 1$. Widerspruch! Hiermit ist Hilfssatz 2. 1 bewiesen.

Der folgende Satz ist das nicht kommutative Analogon zu einem Satz von I. S. Cohen, der besagt, daß ein kommutativer, noetherscher, nullteilerfreier Ring genau dann die eingeschränkte Minimalbedingung erfüllt, wenn R die Krull-Dimension Eins besitzt.

Satz 2. 2. *Die folgenden Eigenschaften des beschränkten Primringes sind äquivalent:*

(1) $r.K\text{-dim}\ R = 1$

(2) *R ist rechts-noethersch, und R/P ist für jedes Primideal $P \neq 0$ von R ein einfacher, artinscher Ring.*

(3) *R ist rechts-noethersch und erfüllt die eingeschränkte Minimalbedingung für Rechtsideale.*

Beweis. Nach dem Satz von Ornstein ([12], Theorem 2) ist (3) eine Folge von (2).

Gilt (3), dann erfüllt R sicherlich die Voraussetzungen von Hilfssatz 2. 1, weil R ein beschränkter Primring ist. Daher ist $r.K\text{-dim}\ R = 1$.

Es bleibt zu zeigen, daß (2) aus (1) folgt. Da R ein beschränkter Primring mit $r.K\text{-dim}\ R = 1$ ist, ist R nicht artinsch, und es gilt

$$Z(R) = \{x \in R \mid x_r \text{ ist ein großes Rechtsideal von } R\} = 0.$$

Hieraus folgt nach dem Satz von Goldie für Primringe, daß R einen einfachen, artinschen, klassischen Rechtsquotientenring Q besitzt, weil R nach Hilfssatz 2. 1 rechts-endlich-dimensional ist. Ist $0 \neq A$ ein zweiseitiges Ideal, dann ist A ein großes Rechtsideal von R. Also gibt es einen Nichtnullteiler c von R in A. Wegen $r.K\text{-dim}\ R = 1$ existiert eine natürliche Zahl s derart, daß

$$K\text{-dim}\,[c^h R, c^{h+1} R] = 0 \text{ für alle } h \geqq s.$$

Aus $R/cR \cong c^h R/c^{h+1} R$ folgt $K\text{-dim}\,[R, cR] = 0$. Daher ist R/A rechtsartinsch.

Um zu zeigen, daß jedes Rechtsideal X von R endlich erzeugt ist, genügt es zu zeigen, daß jedes große Rechtsideal E von R endlich erzeugt ist. Da R beschränkt ist, enthält E ein Ideal $L \neq 0$ von R mit $L \leqq cR$, wobei c ein reguläres Element von E ist. Weil R/L rechtsartinsch ist, ist E/L nach dem Satz von Hopkins ein endlich erzeugter R/L-Modul. Also existieren $e_i \in E$, $i = 1, 2, \ldots, n < \infty$, mit

$$E = e_1 R + e_2 R + \cdots + e_n R + L \leqq e_1 R + e_2 R + \cdots + e_n R + cR \leqq E,$$

woraus folgt, daß E endlich erzeugt ist. Hiermit ist Satz 2. 2 bewiesen.

Folgerung 2. 3. Die folgenden Eigenschaften des Primringes R, der eine nicht-triviale Polynomidentität erfüllt, sind äquivalent:

(1) $r.K\text{-dim}\ R = 1$

(2) R ist ein rechts-noetherscher Ring, in dem jedes Primideal $P \neq 0$ maximal ist.

(3) R erfüllt die eingeschränkte Minimalbedingung für Rechtsideale.

Beweis. Nach Theorem 9 von Amitsur [1] ist R ein beschränkter Primring, der einen einfachen artinschen Quotientenring Q besitzt. Weiter ist R/M für jedes maximale Ideal $M \neq 0$ von R ein einfacher, artinscher Ring. Also folgt Folgerung 2. 3 unmittelbar aus Satz 2. 2.

Folgerung 2. 4. Für einen noetherschen, beschränkten Primring R gilt $r.K\text{-dim } R = 1$ genau dann, wenn $l.K\text{-dim } R = 1$.

Der *Beweis* folgt sofort aus Satz 2. 2, weil die Bedingung (2) von Satz 2. 2 unter den Voraussetzungen von Folgerung 2. 4 rechts-links-symmetrisch ist.

Bemerkung 2. 5. In Bedingung (3) von Satz 2. 2 kann die Forderung, daß R rechtsnoethersch ist, nicht weggelassen werden, denn es gibt beschränkte Primringe R mit eingeschränkter Minimalbedingung für Rechtsideale, für die $r.K\text{-dim } R > 1$ ist (vgl. Theorem 11 von Ornstein [12]).

3. Der Satz von Krull und Akizuki

Ist R ein beschränkter Primring mit Krull-Dimension Eins, dann besitzt R nach Satz 2. 2 und dem Satz von Goldie für Primringe einen einfachen, artinschen Quotientenring Q. Ein Ring S mit $R \leqq S < Q$ ist ein *Oberring* von R. Falls R kommutativ ist, dann besitzt nach dem Satz von Krull und Akizuki jeder Oberring S von R die Krull-Dimension Eins. In diesem Abschnitt wird dieser Satz für nicht notwendig kommutative Primringe bewiesen.

Hilfssatz 3. 1. *Sei R ein beschränkter Primring mit Krull-Dimension Eins. Ist S ein Oberring von R, dann ist S/A für jedes große Rechtsideal A von S ein artinscher und noetherscher R-Modul.*

Beweis. Aus $R \leqq S < Q$ folgt, daß S ebenfalls eine Ordnung in dem einfachen, artinschen Quotientenring Q von R ist. Also enthält das große Rechtsideal A von S ein reguläres Element $x = ad^{-1}$, wobei a und d reguläre Elemente von R sind. Für jedes $i = 1, 2, \ldots$ sei

$$A_i = a^i S \cap R.$$

Da a ein reguläres Element von R ist, und $K\text{-dim } R = 1$ ist, existiert eine natürliche Zahl n derart, daß

$$(*) \qquad aR + A_n = aR + A_{n+1} = aR + A_{n+2} = \cdots$$

Sicherlich ist $a^{-n}A_n + aS \leqq S$. Wäre $S \neq a^{-n}A_n + aS$, dann existierte ein $s \in S$ mit $s \notin a^{-n}A_n + aS$. Da Q auch ein klassischer Linksquotientenring von R ist, hat s die Form $s = c^{-1}b$, wobei $b, c \in R$ und c regulär ist. Also ist Rc ein großes Linksideal von R. Da R beschränkt ist, enthält Rc ein zweiseitiges Ideal $D \neq 0$ von R. Nach Satz 2. 2 erfüllt der Ring R/D die Minimalbedingung für Rechtsideale. Daher existiert eine natürliche Zahl $k > 0$ derart, daß

$$a^k R + D = a^{k+1}R + D = a^{k+2}R + D = \cdots$$

Hieraus folgt

$$a^k R + Rc = a^{k+1}R + Rc.$$

Deshalb existieren Elemente $u, v \in R$ derart, daß

$$a^k = a^{k+1}u + vc$$

Multipliziert man diese Gleichung von rechts mit s, und setzt man $w = vb$, dann gilt

$$a^k s = a^{k+1} us + vcc^{-1}b = a^{k+1} us + w.$$

Ist $s_1 = us$, dann ist $s_1 \in S$ und $w \in a^k S \cap R = A_k$. Also gilt

$$s = as_1 + a^{-k} w \in aS + a^{-k} A_k.$$

Sei k die kleinste natürliche Zahl, für die $s \in aS + a^{-k} A_k$ gilt, d. h. für die es ein $w \in A_k$ und ein $s_1 \in S$ mit $s = as_1 + a^{-k} w$ gibt. Wäre $k \leqq n$, dann wäre $s \in aS + a^{-n} A_n$, weil

$$a^{-k} A_k = a^{-n}[a^{n-k}(a^k S \cap R)] \leqq a^{-n}(a^n S \cap R) = a^{-n} A_n$$

ist, was $s \notin aS + a^{-n} A_n$ widerspricht. Also ist $k > n$. Wegen $(*)$ gilt daher

$$aR + A_n = aR + A_k = aR + A_{k+1}.$$

Hieraus folgt die Existenz eines $s_2 \in S$ und eines $r \in R$ mit

$$w = a^k s - a^{k+1} s_1 = a^{k+1} s_2 + ar.$$

Ist $s_3 = s_1 + s_2$, dann ist $a^k(s - as_3) = ar$, woraus folgt

$$r = a^{k-1}(s - as_3) \in R \cap a^{k-1} S = A_{k-1}.$$

Dann wäre aber $s \in aS + a^{-(k-1)} A_{k-1}$. Widerspruch! Daher gilt

$$S = a^{-n} A_n + aS.$$

Da R nach Satz 2. 2 noethersch ist, folgt hieraus, daß

$$S/aS \cong a^{-n} A_n / a^{-n} A_n \cap aS$$

ein noetherscher R-Modul ist. Wegen $aS \leqq A$ ist S/A ein noetherscher R-Modul. Sicherlich ist

$$a^{-n} A_n / a^{-n} A_n \cap aS \cong A_n / A_n \cap a^{n+1} S = A_n / A_{n+1}.$$

Aus $a^{n+1} \in A_{n+1}$ ergibt sich, daß A_{n+1} ein großes Rechtsideal von R ist. Da R beschränkt ist, existiert ein zweiseitiges Ideal $E \neq 0$ von R mit $E \leqq A_{n+1}$. Nach Satz 2. 2 ist R/E artinsch. Also ist K-dim $[A_n, A_{n+1}] = 0$, und S/aS ist ein artinscher R-Modul. Hiermit ist Hilfssatz 3. 1 bewiesen.

Satz 3. 2. *Ist R ein beschränkter Primring mit Krull-Dimension Eins, dann ist jeder Oberring S von R ein noetherscher Ring mit Krull-Dimension Eins.*

Beweis. Aus $R \leqq S < Q$ folgt, daß S eine Ordnung in dem einfachen artinschen Quotientenring Q von R ist. Nach dem Satz von Goldie für Primringe ist daher dim S = dim $R = n < \infty$. Ist A ein großes Rechtsideal von S, dann ist K-dim $[S, A] = 0$ nach Hilfssatz 3. 1. Hieraus folgt $r.K$-dim $S = 1$ nach Hilfssatz 2. 1. Analog zeigt man, daß $l.K$-dim $S = 1$ ist. Daß der Ring S die Maximalbedingung für Rechts- und für Linksideale erfüllt, ist ebenfalls eine einfache Folgerung von Hilfssatz 3. 1.

Hilfssatz 3. 3. *Der halblokale Primring R mit Krull-Dimension Eins ist dann und nur dann beschränkt, wenn R noethersch und nicht einfach ist.*

Beweis. Daß ein beschränkter Primring mit Krull-Dimension Eins noethersch ist, besagt Satz 2. 2. Deshalb sei R noethersch und nicht einfach. Sei E ein großes Rechtsideal von R mit $E \neq R$. Da R nicht einfach ist, ist das Jacobson-Radikal J von R von Null verschieden. Sei $A_n = E + J^n$ für $n = 1, 2, \ldots$ Sicherlich gilt $A_n \geqq A_{n+1}$ für jede

natürliche Zahl n. Als großes Rechtsideal von R besitzt E ein reguläres Element c von R. Hieraus folgt:

$$(*) \qquad A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \cdots \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq \cdots$$

ist eine absteigende Kette von Rechtsidealen von R, die sämtlich cR enthalten. Da c keine Einheit von R ist, ist

$$R > cR > c^2R > \cdots > c^nR > c^{n+1}R > \cdots$$

eine unendliche echt absteigende Kette von Rechtsidealen von R. Hätte die Kette $(*)$ unendlich viele Glieder, dann wäre

$$K\text{-dim}\,[c^nR, c^{n+1}R] > 0 \text{ für } n = 1, 2, \ldots,$$

woraus $r.K\text{-dim}\ R \neq 1$ folgte. Widerspruch! Also existiert eine natürliche Zahl $k > 0$ mit

$$E + J^k = E + J^{k+1} = \cdots$$

Ist $T = E + J^k$, dann ist

$$E + TJ = (E + J^k)J + E \supseteq J^{k+1} + E = T,$$

und so $T = E + TJ$. Da R noethersch ist, folgt hieraus $T = E$ nach dem Lemma von Nakayama. Daher ist $0 \neq J^k \subseteq E$, und R ist beschränkt.

Folgerung 3. 4. Ist R ein halblokaler, noetherscher, nicht einfacher Primring mit Krull-Dimension Eins, dann ist jeder Oberring S von R ein noetherscher Primring mit Krull-Dimension Eins.

Beweis. Nach Hilfssatz 3. 3 ist R ein beschränkter Primring. Daher ist S nach Satz 3. 2 ein noetherscher Primring mit Krull-Dimension Eins.

Folgerung 3. 5. Ist R ein halblokaler Primring mit Krull-Dimension Eins, der eine nicht-triviale Polynomidentität erfüllt, dann ist jeder Oberring S von R ein halblokaler, noetherscher, beschränkter Primring mit eingeschränkter Minimalbedingung für Rechts- und für Linksideale.

Beweis. Nach Folgerung 2. 3 ist R noethersch. Also ist S ein noetherscher Primring mit Krull-Dimension Eins. Nach Theorem 9 von Amitsur [1] ist S beschränkt. Also erfüllt S die eingeschränkte Minimalbedingung für Rechts- und für Linksideale nach Satz 2. 2. Daher ist S halblokal, wenn gezeigt ist, daß das Jacobson-Radikal $J(S)$ von S von Null verschieden ist.

Da R halblokal und $K\text{-dim}\ R \neq 0$ ist, ist das Jacobson-Radikal J von R ungleich Null. Also ist SJ ein großes Linksideal von S. Da S beschränkt ist, enthält SJ ein zweiseitiges Ideal $A \neq 0$ von S. Wäre $J(S) = 0$, dann gäbe es ein maximales Rechtsideal M von S mit $S = A + M$. Hieraus folgt $S = SJ + M$, und damit

$$(*) \qquad S/M = (S/M)J.$$

Ist Q der klassische Quotientenring von R, dann ist $S \neq Q$. Also ist M ein großes Rechtsideal von S. Nach Hilfssatz 3. 1 ist S/M daher ein endlich erzeugter R-Modul. Wegen $(*)$ ist dann aber $S = M$ nach dem Lemma von Nakayama. Widerspruch! Hiermit ist Folgerung 3. 5 bewiesen.

4. Krull-Dimension erblicher Ringe

Ist R ein kommutativer noetherscher Ring mit globaler Dimension $gl.\dim R = n < \infty$, dann ist die Krull-Dimension $K\text{-dim } R = n$ nach einem wohlbekannten Satz von Auslander und Buchsbaum. Für nicht kommutative Ringe R gilt diese Gleichheit nicht mehr; denn zu jeder natürlichen Zahl n gibt es einen halblokalen, noetherschen Primring R mit $gl.\dim R = n$, aber $K\text{-dim } R = 1$ (vgl. [11] Remark 6. 6). Umgekehrt zeigen die Beispiele von Jategaonkar [8], daß es zu jeder natürlichen Zahl n einen nullteilerfreien, lokalen Hauptrechtsidealring R gibt mit $r.K\text{-dim } R = n$. Diese Beispiele erfüllen allerdings nicht die Maximalbedingung für Linksideale, und in diesem Abschnitt wird nun gezeigt, daß jeder halblokale, erbliche Ring mit Maximalbedingung für Rechts- und für Linksideale die Krull-Dimension Null oder Eins besitzt.

Da sämtliche Ergebnisse dieses und des nächsten Abschnittes für einfache, artinsche Ringe trivial sind, wird von nun an angenommen, daß R nicht der Minimalbedingung genügt.

Definition (Vgl. [7].) Das Ideal X des Ringes R, der einen Quotientenring Q besitzt, ist (in Q) *umkehrbar*, wenn $XX^{-1} = R = X^{-1}X$ für $X^{-1} = \{y \in Q \mid yX \leqq R\}$ gilt.

Hilfssatz 4. 1. *Ist M ein umkehrbares, maximales zweiseitiges Ideal des erblichen noetherschen Primringes R, dann ist R/M ein einfacher Ring mit Minimalbedingung für Rechtsideale.*

Beweis. Es ist zu zeigen, daß jede echt absteigende Kette

$$(*) \qquad Y_1 > Y_2 > \cdots > Y_k > Y_{k+1} > \cdots$$

von Rechtsidealen Y_i von R mit $Y_i > M$ endlich ist. Sei $Y_i^{-1} = \{x \in Q \mid xY_i \leqq R\}$, wobei Q der Quotientenring von R ist. Dann ist

$$M \leqq Y_i^{-1} M \leqq Y_i^{-1} Y_i \leqq R \text{ für } i = 1, 2, \ldots$$

Also ist $Y_i^{-1} M = M$ oder $Y_i^{-1} Y_i = R$. Ist $Y_i^{-1} M = M$, dann ist $Y_i^{-1} = R$, woraus wiederum $Y_i^{-1} Y_i = R$ folgt. Daher ist $Y_i^{-1} Y_i = R$ für $i = 1, 2, \ldots$ Sicherlich ist

$$Y_1^{-1} \leqq Y_2^{-1} \leqq \cdots \leqq Y_k^{-1} \leqq \cdots \leqq M^{-1},$$

$$MY_1^{-1} \leqq MY_2^{-1} \leqq \cdots \leqq MY_k^{-1} \leqq \cdots \leqq MM^{-1} = R.$$

Da R noethersch ist, gilt

$$MY_m^{-1} = MY_{m+1}^{-1} = MY_{m+2}^{-1} = \cdots$$

für eine natürliche Zahl m. Also ist

$$Y_m^{-1} = Y_{m+1}^{-1} = Y_{m+2}^{-1} = \cdots$$

Hieraus folgt $R = Y_m^{-1} Y_m = Y_{m+1}^{-1} Y_m$. Da Y_{m+1} ein projektiver R-Modul ist, existieren nach Lemma 3. 8 von L. Levy [9] in Y_{m+1}^{-1} Elemente $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, für die es Elemente $y_1, y_2, \ldots, y_k$ in Y_{m+1} gibt, derart daß $1 = \sum_{i=1}^{k} y_i \beta_i \in Y_{m+1} Y_{m+1}^{-1}$. Daher gilt

$$Y_{m+1} = Y_{m+1} Y_{m+1}^{-1} Y \geqq 1\, Y_m = Y_m,$$

womit gezeigt ist, daß die Kette $(*)$ nur endlich viele Glieder besitzt.

Der nun folgende Hilfssatz 4. 2 ist eine Verallgemeinerung des folgenden, noch nicht erschienenen Ergebnisses von Herrn Dr. J. C. Robson: Eine erbliche, halblokale Asano Ordnung R in einem einfachen artinschen Ring Q ist ein beschränkter Haupt-

rechts- und Hauptlinksidealring. Dabei ist die Ordnung R in dem einfachen, artinschen Ring Q nach [13] eine *Asano Ordnung*, wenn die gebrochenen Ideale von R eine Gruppe bilden. Im Beweis von Hilfssatz 4. 2 werden zum Teil Methoden der erwähnten Arbeit von Herrn Dr. Robson angewandt.

Hilfssatz 4. 2. *Die folgenden Eigenschaften des halblokalen, noetherschen, erblichen Primringes R sind äquivalent*:

(1) *Die maximalen zweiseitigen Ideale von R sind invertierbar.*

(2) *R ist ein beschränkter Hauptrechts- und Hauptlinksidealring.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß (2) aus (1) folgt. Sind M_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, die maximalen zweiseitigen Ideale von R, dann ist $M_i M_j = M_j M_i$, weil jedes M_i ein umkehrbares Primideal von R ist. Also ist J das Produkt der M_i. Hieraus folgt, daß J invertierbar ist, und daß der Ring $R/J = \sum_{i=1}^{n} \oplus R/M_i$ nach Hilfssatz 4. 1 die Minimalbedingung erfüllt. Sicherlich ist J ein Hauptrechts- und Hauptlinksideal von R, wenn jedes maximale zweiseitige Ideal es ist. Sei $A = M_1 J$. Dann ist

$$R/A \cong R/M_1^2 \oplus R/M_2 \oplus \cdots \oplus R/M_n,$$

und R/M_1^2 ist ein primärer, artinscher Ring, weil R/J artinsch ist. Ist X ein Rechtsideal von R mit $M_1^2 \leqq X \leqq M_1$, dann ist $C = X M_1^{-1}$ ein Rechtsideal von R, für das $X \neq C$ und $X = C M_1$ gilt. Daher ist R/M_1^2 ein Hauptrechtsidealring nach Theorem 23 von Jacobson ([7]), S. 128). Da die Ringe R/M_i für $i = 2, \ldots, n$ einfach und artinsch sind, ist deshalb R/A ein Hauptrechtsidealring. Also ist

$$M_1 = xR + M_1 J \text{ für ein } x \in M_1,$$

woraus $M_1 = xR$ nach dem Lemma von Nakayama folgt. Daher ist $J = aR = Ra$ für ein $a \in J$.

Sei $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} J^n$. Wäre $D \neq 0$, dann wäre

$$D < DJ^{-1} < DJ^{-2} < \cdots DJ^{-n} < DJ^{-(n+1)} < \cdots$$

nach dem Lemma von Nakayama eine unendliche echt aufsteigende Kette von Idealen von R. Dann wäre R aber nicht noethersch. Also ist $D = 0$. Sei $\hat{R}$ die vollständige Hülle von R bezüglich der J-adischen Topologie. Da $\hat{R}$ der inverse Limes der Ringe R/J^m für $m = 1, 2, \ldots$ ist, und

$$R/J^m \cong R/M_1^m \oplus R/M_2^m \oplus \cdots \oplus R/M_n^m$$

ist, besitzt R bekanntlich n orthogonale, zentrale Idempotente e_i mit

$$\hat{R} = \hat{R}e_1 \oplus \hat{R}e_2 \oplus \cdots \oplus \hat{R}e_n.$$

Nach Goldie ([4], S. 97, Beweis von Theorem 4. 5) folgt, daß $\hat{R}e_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ ein Ring von $k_i \times k_i$ Matrizen über einem vollständigen lokalen Ring $\hat{D}_i$ ist. Da

$$e_i \hat{J} e_i = e_i a e_i e_i \hat{R} e_i = e_i \hat{R} e_i e_i a e_i$$

das Jacobson-Radikal von $e_i \hat{R}$ ist, ist das Jacobson-Radikal $J(\hat{D}_i)$ von $\hat{D}_i$ ein Hauptrechts- und ein Hauptlinksideal. Weil R ein Primring ist, ist $J(\hat{D}_i)$ nicht nilpotent. Also ist $\hat{D}_i$ ein diskreter Bewertungsring vom Range Eins. Daher ist $\hat{R}$ und somit auch R ein

Hauptrechts- und ein Hauptlinksidealring. Also ist $K\text{-dim}\, R = 1$, woraus nach Hilfssatz 3. 3 folgt, daß R beschränkt ist. Hiermit ist Hilfssatz 4. 2 bewiesen.

Hilfssatz 4. 3. *Sei R ein halblokaler, noetherscher, erblicher Primring mit k maximalen Idealen. Ist P ein idempotentes, maximales Ideal von R, dann ist $T = End_R P$ ein halblokaler, erblicher, noetherscher Primring mit $k - 1$ maximalen Idealen.*

Beweis. Seien M_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, die maximalen Ideale von R. Sei $P = M_1$. Da P projektiv ist, ist

$$\mathrm{Hom}_R(P, P/PJ) \cong \sum_{i=2}^{k} \oplus \mathrm{Hom}_R(P, P/M_i);$$

denn $R/J \cong R/P \oplus R/M_1 \oplus \cdots \oplus R/M_k$.

Andererseits gilt

$$\mathrm{Hom}_R(P, P/PJ) \cong \mathrm{Hom}_R(P, P)/\mathrm{Hom}_R(P, PJ).$$

Nach Corollary 2. 5 von [14] ist $\mathrm{Hom}_R(P, PJ)$ das Jacobson-Radikal $J(T)$ des Ringes $T = \mathrm{Hom}_R(P, P)$. Also gilt

$$(*) \qquad T/J(T) \cong \sum_{i=2}^{k} \oplus \mathrm{Hom}_R(P, P/PM_i).$$

Wird P als Rechtsideal von R von n Elementen erzeugt, dann existiert ein R-Rechtsmodul X derart, daß $P \oplus X \cong R^n$, wobei R^n die n-fache direkte Summe von R_R mit sich selbst ist. Im Ring R_n aller $n \times n$ Matrizen über R gibt es ein Idempotent e mit $eR_ne \cong T$ und $P \cong eR^n$. Hieraus folgt

$$\mathrm{Hom}_R(P, P/PM_i) \cong \mathrm{Hom}_R(eR^n, eR^n/e(M_i)^n) \cong eR_ne/e(M_i)_ne$$

für $i = 2, 3, \ldots, k$. Da M_i ein maximales Ideal von R ist, ist $e(M_i)_ne$ ein maximales Ideal von eR_ne. Wegen $(*)$ ist T daher ein Ring mit $k - 1$ maximalen Idealen.

Nach Lemma 1 von [6] gilt $T = \{x \in Q \mid xP \leqq P\}$. Also ist T ein Primring mit $R < T < Q$, der nach Lemma 4. 4 von [13] erblich und noethersch ist.

Hilfssatz 4. 4. *Der halblokale, noethersche, erbliche Primring R ist entweder einfach oder eine beschränkte Ordnung in dem Quotientenring Q von R, die zu einer Asano Ordnung S in Q äquivalent ist.*

Beweis. Seien M_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, die maximalen zweiseitigen Ideale von R. Ist $k = 1$, dann ist R nach Proposition 2. 3 von [10] und Hilfssatz 4. 2 eine beschränkte Asano Ordnung in Q.

Angenommen, die Behauptung von Hilfssatz 4. 4 gilt für die Zahl $k - 1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann wegen Hilfssatz 4. 2 angenommen werden, daß $P = M_1$ nicht invertierbar ist. Nach Lemma 5 von [6] ist dann $P = P^2$. Sei $T = \mathrm{End}_R P$. Dann ist T nach Hilfssatz 4. 3 ein erblicher, halblokaler, noetherscher Primring mit genau $k - 1$ maximalen zweiseitigen Idealen. Nach Induktionsvoraussetzung folgt hieraus, daß T eine beschränkte Ordnung in Q ist, die zu einer Asano Ordnung S in Q äquivalent ist. Da P ein reguläres Element c von R besitzt, gilt $Tc \leqq TP = P < R$. Also ist R ebenfalls äquivalent zu S. Hieraus ergibt sich sofort, daß R beschränkt ist.

Satz 4. 5. *Ist R ein halblokaler, erblicher, noetherscher Primring, dann gilt:*

a) *R ist entweder einfach oder das Radikal J von R ist umkehrbar in dem Quotientenring Q von R.*

b) *R besitzt die Krull-Dimension Eins.*

Beweis. Da R halblokal ist, ist R entweder einfach oder es gilt $J \neq 0$. Ist R einfach, und ist E ein großes Rechtsideal von R, dann ist $K\text{-dim}\,[R, E] = 0$ nach Theorem 3. 4 von [13]. Daher ist $K\text{-dim}\,R = 1$ nach Hilfssatz 2. 1. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann deshalb angenommen werden, daß $J \neq 0$ ist.

Seien M_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, die maximalen zweiseitigen Ideale von R. Die Behauptungen a) und b) von Satz 4. 5 werden zugleich durch vollständige Induktion nach der Zahl k bewiesen.

Ist $k = 1$, dann ist R nach Proposition 2. 3 von [10] eine Asano Ordnung in Q. Also gilt a). Nach Theorem 3. 4 von [13] ist $K\text{-dim}\,[R, E] = 0$ für jedes große einseitige Ideal E von R. Daher ist $K\text{-dim}\,R = 1$ nach Hilfssatz 2. 1.

Angenommen, die Behauptungen a) und b) gelten für die natürliche Zahl $k - 1$. Wegen Hilfssatz 4. 2 kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß $P = M_1$ in Q nicht invertierbar ist. Nach Lemma 5 von [6] ist dann $P = P^2$. Sei $T = \mathrm{End}_R P$. Dann ist T nach Hilfssatz 4. 3 ein halblokaler, noetherscher, erblicher Primring mit $k - 1$ maximalen Idealen. Also ist $K\text{-dim}\,T = 1$ nach Induktionsvoraussetzung.

Sei M ein umkehrbares, maximales Ideal von R derart, daß $X = \bigcap_{h=1}^{\infty} M^h \neq 0$. ist. Weil M nach Lemma 5 von [6] nicht idempotent ist, gilt $X = M$. Da P ein projektiver R-Rechtsmodul ist, gibt es einen R-Rechtsmodul Y mit $P \oplus Y \cong R^n$, wobei R^n die n-fache direkte Summe von R_R mit sich selbst ist, und n die Anzahl der Elemente eines minimalen Erzeugendensystems von P_R ist. Hieraus folgt $T \cong eR_ne$. Da M invertierbar ist, ist X ein Primideal von R. Also ist eX_ne ein Primideal von eR_ne, das im maximalen Ideal eM_ne von eR_ne enthalten ist. Wegen $K\text{-dim}\,eR_ne = K\text{-dim}\,T = 1$ folgt hieraus, es gilt entweder $eX_ne = 0$ oder $eX_ne = eM_ne$. Wäre $eX_ne = eM_ne$, dann wäre entweder $e \in X_n$ oder $M_n = X_n$. Da e das Einselement des Ringes eR_ne ist, und $eX_ne \neq eR_ne$ ist, wäre dann $M_n = X_n$, woraus $M = X \neq M$ folgte. Widerspruch! Also ist $eX_ne = 0$. Da R_n ein Primring ist, folgt hieraus schließlich $X_n = 0$ und somit $X = 0$. Widerspruch! Hiermit ist gezeigt: Ist M ein maximales und umkehrbares Ideal von R, dann ist $\bigcap_{h=1}^{\infty} M^h = 0$.

Da nach Lemma 5 von [6] ein maximales zweiseitiges Ideal von R entweder idempotent oder invertierbar ist, kann angenommen werden, daß die maximalen Ideale $M_1, M_2, \ldots, M_t$ idempotent sind, und die maximalen Ideale $M_{t+1}, M_{t+2}, \ldots, M_k$ invertierbar sind. Ist $A = \bigcap_{j=1}^{t} M_j$, dann sind die Ideale $A, M_{t+1}, M_{t+2}, \ldots, M_k$ teilerfremd. Da die maximalen Ideale M_u, $u = t + 1, \ldots, k$, umkehrbar sind, ergibt sich hieraus $M_u A = A M_u$ für alle u. Also ist

$$J = M_1 \cap \cdots \cap M_t \cap M_{t+1} \cap \cdots \cap M_k = A \cdot M_{t+1} \cdot M_{t+2} \cdot \cdots \cdot M_k.$$

Um zu zeigen, daß J in Q umkehrbar ist, genügt es deshalb zu beweisen, daß A umkehrbar ist.

Für $i = 1, 2, \ldots, t$ sei

$$T_i = \{x \in Q \mid x M_i \leqq M_i\} \text{ und } S_i = \{y \in Q \mid M_i y \leqq M_i\}.$$

Nach Corollary 1. 9 von Harada [5] gilt dann $T_i \neq S_i$. Sei

$$C_i = \{z \in Q \mid z T_i \leqq R\} \text{ für } i = 1, 2, \ldots, t.$$

Da R nach Hilfssatz 4. 4 beschränkt ist, ist C_i nach Theorem 2 von Harada [6] ein idempotentes Ideal von R, und es gilt

$$T_i = \{v \in Q \mid C_i v \subseteq C_i\} \text{ für } i = 1, 2, \ldots, t.$$

Sei $M_{k_i} \supseteq C_i$ ein maximales zweiseitiges Ideal von R. Wäre M_{k_i} nicht idempotent, dann wäre M_{k_i} umkehrbar. Dann wäre aber

$$0 \neq C_i \subseteq \bigcap_{h=1}^{\infty} (M_{k_i})^h = 0.$$

Aus diesem Widerspruch folgt, daß M_{k_i} idempotent ist. Da R nach Lemma 3. 3 von [11] und Theorem 2 von Harada [6] ein maximaler Unterring von T_i ist, ergibt sich hieraus nach erneuter Anwendung von Theorem 2 von [6], daß $C_i = M_k$ ist. Hiermit ist gezeigt: Zu jeder natürlichen Zahl i existiert eine natürliche Zahl k_i mit $1 \subseteq k_i \subseteq t$ derart, daß $T_i = S_{k_i}$ ist. Wäre $T_i = S_{k_i}$ und $T_i = S_{k_i'}$, aber $k_i' \neq k_i$ für eine Zahl i, dann wäre

$$S_{k_i'} = S_{k_i}, \text{ und somit } M_{k_i'} = M_{k_i}$$

nach Theorem 2 von [6]. Widerspruch! Also ist die Abbildung $\sigma: i \to k_i$ eine Permutation der Zahlenmenge $\{1, 2, \ldots, t\}$. Durch Anwendung des Beweises von Proposition 4. 4 der Arbeit [11] ergibt sich hieraus, daß A ein umkehrbares Ideal von R ist. Hiermit ist gezeigt, daß die Behauptung a) von Satz 4. 5 gilt.

Die Aussage b) wird nun unter Benutzung von a) bewiesen. Das Jacobson-Radikal $J(T)$ des Ringes $T = T_1 = \mathrm{End}_R(P)$, wobei $P = M_1$ ist, ist nach Corollary 2. 5 von [14] gerade die Menge $\mathrm{Hom}_R(P, PJ)$. Also ist

$$J(T)J \subseteq J(T)P \subseteq PJ.$$

Da J nach a) invertierbar ist, ergibt sich hieraus, daß $J(T)$ in P enthalten ist. Ist G eines der maximalen Ideale M_i mit $i = 2, 3, \ldots, k$ von R, dann ist

$$J(T) = J(T)(P + G) \subseteq J(T)P + J(T)G \subseteq J + G = G.$$

Hieraus folgt $J(T) \subseteq J$, weil R halblokal ist.

Im Beweis von a) war gezeigt worden, daß $C_1 = \{z \in Q \mid zT \subseteq R\}$ ein maximales, idempotentes Ideal von R ist. Wäre $C_1 = M_1 = P$, dann wäre $S_1 = T_1$, was aber ein Widerspruch zu Corollary 1. 9 von Harada [5] ist. Wegen $C_1 T = C_1$ ist daher $C_1 T \not\subseteq P$. Also gibt es ein Element $d \in C_1$ mit $dT \not\subseteq P$. Hieraus und aus $J(T) < J$ folgt

$$(*) \qquad \bar{d}\bar{T} < \bar{R} < \bar{T}, \text{ und } \bar{d}\bar{T} \not\subseteq \bar{P},$$

wobei $\bar{T} = T/J(T)$, $\bar{R} = R/J(T)$, $\bar{P} = P/J(T)$ und $\bar{d} = d + J(T)$ ist. Da der Ring T nach dem Beweis von a) die Krull-Dimension Eins besitzt, ist $\bar{T}$ ein halbeinfacher, artinscher Ring. Also enthält wegen $(*)$ das Rechtsideal $\bar{d}\bar{T}$ von $\bar{T}$ ein primitives Idempotent $\bar{e}$ von $\bar{T}$ mit $\bar{e} \notin \bar{P}$. Aus $\bar{e}\bar{T} < \bar{R} < \bar{T}$ ergibt sich $\bar{e}\bar{T}\bar{e} = \bar{e}\bar{R}\bar{e}$. Daher ist der Schiefkörper $\bar{e}\bar{R}\bar{e}$ nicht in $\bar{P}$ enthalten. Da $R/P \cong \bar{R}/\bar{P}$ ein einfacher, noetherscher Ring ist, folgt hieraus, daß R/P artinsch ist. Analog zeigt man, daß R/M_i auch für jedes idempotente und maximales Ideal M_i, wobei $i = 2, \ldots, t$ ist, ein artinscher Ring ist. Da R/M_u für $u = t + 1, t + 2, \ldots, k$ nach Hilfssatz 4. 1 artinsch ist, ist R/M für jedes maximale Ideal M von R ein artinscher, einfacher Ring. Wenn gezeigt ist, daß jedes Primideal B von R maximal ist, folgt hieraus nach Satz 2. 2 und Hilfssatz 4. 4, daß R ein noetherscher Primring mit Krull-Dimension Eins ist.

Wäre das Primideal B von R nicht maximal, dann gäbe es ein maximales Ideal M von R mit $B < M$. Nach Hilfssatz 4. 2 besitzt R dann ein idempotentes und maximales Ideal P. Ist

$$T = \{x \in Q \mid xP \leqq P\} \text{ und } C = \{v \in Q \mid vT \leqq R\},$$

dann ist C nach dem Beweis von a) ein maximales und idempotentes Ideal von R mit $C \neq P$. Deshalb kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß $M \neq P$ ist. Ist n die Anzahl der Elemente eines minimalen Erzeugendensystems des projektiven R-Rechtsmoduls P_R, dann existiert in R_n ein Idempotent e mit $T \cong eR_ne$. Also ist $0 \neq eB_ne \leqq eM_ne < eR_ne$ eine Kette von Primidealen des Primringes eR_ne. Nach Hilfssatz 4. 3 besitzt der Ring eR_ne die Krull-Dimension Eins. Also ist $eB_ne = eM_ne$. Wegen $e \notin eB_ne$ folgt hieraus $B_n = M_n$, weil B_n ein Primideal des Primringes R_n ist. Dann ist aber $B = M$, was $B \neq M$ widerspricht. Hiermit ist Satz 4. 5 bewiesen.

Folgerung 4. 6. Ist R ein nicht einfacher, halblokaler, erblicher Primring mit Maximalbedingung für Rechts- und für Linksideale, dann besitzt jeder Oberring S von R die Krull-Dimension Eins.

Beweis. Nach Satz 4. 5 ist K-dim $R = 1$. Also gilt Folgerung 4. 6 nach Folgerung 3. 4.

Ebenso einfach folgt aus Satz 4. 5 und Folgerung 3. 5 das folgende Ergebnis.

Folgerung 4. 7. Ist R ein halblokaler, erblicher Primring, der eine nicht-triviale Polynomidentität erfüllt, dann besitzt jeder Oberring S von R die Krull-Dimension Eins.

Mit Hilfe von Satz 4. 5 ist es leicht, den Hauptsatz dieses Abschnittes zu beweisen.

Satz 4. 8. *Die Krull-Dimension des erblichen, halblokalen, noetherschen Ringes R ist entweder Null oder Eins.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei R nicht artinsch, d. h. K-dim $R \neq 0$. Nach Theorem 2. 2 der Arbeit [11] ist R eine zerfallende Erweiterung eines nilpotenten Ringes B durch einen halbprimen, erblichen, halblokalen, noetherschen Ring S derart, daß R ein endlich erzeugter, projektiver S-Rechtsmodul ist. Nach Gabriel und Rentschler [2] ist daher K-dim $R = 1$, wenn K-dim $S = 1$ ist. Wegen Theorem 4. 3 von Levy [9] ist S eine direkte Summe von endlich vielen erblichen, halblokalen noetherschen Primringen S_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Ist S_i ein einfacher Ring, dann ist K-dim $S_i \leqq 1$ nach Theorem 3. 4 von Robson [13] und Hilfssatz 2. 1. Ist S_i nicht einfach, dann ist K-dim $S_i = 1$ nach Satz 4. 5 b). Nach Gabriel und Rentschler [2] folgt hieraus K-dim $S = 1$, weil S nicht artinsch ist.

5. Krullscher Durchschnittssatz und das Lemma von Artin-Rees

Mit Hilfe von Satz 4. 5 ist es leicht einzusehen, daß der Durchschnitt $\bigcap_{n=1}^{\infty} J^n$ der Potenzen des Jacobson-Radikals J des erblichen, halblokalen Primringes R mit Maximalbedingung für Rechts- und für Linksideale das Nullideal ist. In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß J sogar die Behauptung des Lemmas von Artin-Rees erfüllt. Als weitere Anwendung des Satzes 4. 5 erhalten wir schließlich, daß der Krullsche Durchschnittssatz für streng halblokale, erbliche Ringe R mit Maximalbedingung für Rechts- und für Linksideale gilt. Dabei ist zu bemerken, daß er im allgemeinen *nicht* gültig ist, wenn die

Maximalbedingung in R nur auf einer Seite verletzt ist; denn die Beispiele von P. M. Cohn und Jategaonkar [8] zeigen, daß es sogar nullteilerfreie, lokale Hauptrechtsidealringe mit $\bigcap_{n=1}^{\infty} J^n \neq 0$ gibt.

Satz 5. 1. *Ist J das Radikal des erblichen, halblokalen Primringes R mit Maximalbedingung für Rechts- und für Linksideale, dann gibt es zu jedem Rechtsideal E eine natürliche Zahl t derart, daß*

$$E \cap J^n = (E \cap J^t) J^{n-t} \text{ für alle } n > t.$$

Beweis. Falls R einfach ist, ist $J = 0$, und Satz 5. 1 gilt sicherlich. Sei also $J \neq 0$.

Zu dem Rechtsideal E existiert nach dem Lemma von Zorn ein Rechtsideal K derart, daß $E \cap K = 0$ und $E + K$ ein großes Rechtsideal von R ist. Nach Hilfssatz 4. 4 ist R eine beschränkte Ordnung in dem einfachen, artinschen Quotientenring Q von R. Also existiert ein zweiseitiges Ideal $A \neq 0$ von R mit $A \leqq E + K$. Da R nach Satz 4. 5 und Satz 2. 2 die eingeschränkte Minimalbedingung für einseitige Ideale erfüllt, folgt hieraus die Existenz einer natürlichen Zahl $t > 0$ derart, daß

$$J^t \leqq A \leqq E + K.$$

Für jede natürliche Zahl $n > t$ gilt daher

$$(*) \qquad E \cap J^n \leqq [(E + K) \cap J^t] J^{n-t}.$$

Deshalb existieren zu jedem Element $x \in E \cap J^n$ Elemente $e_i \in E$, $k_i \in K$, $h_i \in J^{n-t}$, $i = 1, 2, \ldots, s$, derart, daß

$$x = \sum_{i=1}^{s} (e_i + k_i) h_i.$$

Hieraus folgt $\sum_{i=l}^{s} k_i h_i = x - \sum_{i=l}^{s} e_i h_i \in E \cap K = 0$. Also ist $x = \sum_{i=l}^{s} e_i h_i \in E J^{n-t}$. Daher ist

$$E \cap J^n \leqq E J^{n-t} \text{ für alle } n > t.$$

Nach Satz 4. 5 ist J ein umkehrbares Ideal von R. Deshalb gilt

$$(E \cap J^n) [J^{n-t}]^{-1} \leqq E.$$

Ebenso ergibt sich aus $(*)$, daß

$$(E \cap J^n) [J^{n-t}]^{-1} \leqq (E + K) \cap J^t.$$

Hieraus folgt schließlich,

$$E \cap J^n \leqq (E \cap J^t) J^{n-t} \leqq E \cap J^n,$$

womit Satz 5. 1 bewiesen ist.

Folgerung 5. 2. Jedes Rechtsideal E des erblichen, halblokalen, noetherschen Primringes R mit Jacobson-Radikal J ist abgeschlossen in der J-adischen Topologie.

Beweis. Nach Satz 5. 1 existiert eine natürliche Zahl t derart, daß

$$E \cap J^{t+1} = (E \cap J^t) J \leqq E J$$

ist. Daher folgt die Behauptung von Folgerung 5. 2 sofort aus Theorem 5. 3 von [4].

Bemerkung 5. 3. Da jeder halbprime, erbliche, noethersche Ring nach Theorem 4. 3 von Levy [9] eine direkte Summe von endlich vielen erblichen, noetherschen Primringen

ist, und da sich die Eigenschaft „halblokaler Ring" auf direkte Summanden vererbt, ist es einfach einzusehen, daß der Satz 5. 1 und die Folgerung 5. 2 für halbprime, erbliche, halblokale Ringe mit Maximalbedingung für Rechts- und für Linksideale gelten.

Ist R ein erblicher, halblokaler Primring, der eine nicht triviale Polynomidentität erfüllt, dann ergibt sich aus den Folgerungen 3. 5 und 4. 7, daß der Satz 5. 1 und die Folgerung 5. 2 auch für jeden Oberring S von R gelten; denn S ist ein erblicher Ring, weil S_R und ${}_RS$ flache R-Moduln sind.

Zum Beweis des Krullschen Durchschnittssatzes wird das folgende notwendige und hinreichende Kriterium für die Invertierbarkeit des Radikals eines halblokalen, erblichen, noetherschen Ringes benötigt.

Folgerung 5. 4. Das Radikal J des halblokalen, erblichen Ringes R mit Maximalbedingung für Rechts- und für Linksideale ist dann und nur dann in dem artinschen Quotientenring Q von R umkehrbar, wenn kein minimales Primideal von R ein maximales Ideal ist.

Beweis. Nach Theorem 2 von Small [15] besitzt R einen klassischen artinschen Quotientenring $Q = Q(R)$, und nach Theorem 2. 2 von [11] ist R eine zerfallende Erweiterung eines nilpotenten Ringes B durch einen halbprimen, erblichen, noetherschen Ring S. Ist $Q(S)$ der Quotientenring von S, und ist $N = BQ$ das Radikal von Q, dann ist nach Theorem 4 von Small [15] das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & Q \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & Q(S) \cong Q/N \end{array}$$

kommutativ, wobei alle Abbildungen die natürlichen Monomorphismen bzw. die natürlichen Epimorphismen sind. Hieraus folgt, $J = B + J(S)$ ist dann und nur dann invertierbar in Q, wenn das Radikal $J(S)$ von S in $Q(S)$ umkehrbar ist. Das ist aber nach Theorem 4. 3 von Levy [9] und Satz 4. 5 dann nur und dann der Fall, wenn kein minimales Primideal von R maximal ist.

Satz 5. 5. *Ist J das Jacobson-Radikal des streng halblokalen, erblichen Ringes R mit Maximalbedingung für Rechts- und für Linksideale, dann gilt*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} J^n = 0.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß J nicht nilpotent ist. Nach Theorem 2. 2 der Arbeit [11] ist R eine zerfallende Erweiterung eines nilpotenten Ringes B durch einen halbprimen, halblokalen, erblichen, noetherschen Ring S derart, daß R ein endlich erzeugter S-Rechts- und S-Linksmodul ist. Der Ring S ist wegen Theorem 4. 3 von [9] eine direkte Summe von $n < \infty$ erblichen, noetherschen Primringen T_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, die entweder einfach und artinsch sind oder deren Jacobson-Radikal von Null verschieden ist. Sei $J(T_i) = 0$ für $i = 1, 2, \ldots, t \leqq n$. Ist X die direkte Summe der Ringe T_i mit $i = 1, 2, \ldots, t$, und ist Y die direkte Summe der Ringe T_i mit $i = t + 1, t + 2, \ldots, n$, dann ist

$$S = X \oplus Y.$$

Sei e_1 die Eins von X und e_2 die Eins von Y. Dann sind e_1 und e_2 orthogonale Idempotente von R, für die gilt

$$R = Re_1 \oplus Re_2, \text{ bzw. } R = e_1R \oplus e_2R.$$

Da R ein endlich erzeugter S-Linksmodul ist, ist e_1R ein endlich erzeugter X-Linksmodul. Daher ist e_1R ein artinscher X-Linksmodul, weil X ein halbeinfacher Ring mit Minimalbedingung ist. Deshalb wird die Kette

$$e_1J \geqq e_1J^2 \geqq \cdots \geqq e_1J^k \geqq e_1J^{k+1} \geqq \cdots$$

nach endlich vielen Gliedern stationär, d. h. es existiert eine natürliche Zahl k_1 mit

$$e_1J^{k_1} = e_1J^{k_1+1} = \cdots$$

Nach dem Lemma von Nakayama ist daher $e_1J^{k_1} = 0$. Analog folgt die Existenz einer natürlichen Zahl k_2 mit $J^{k_2}e_1 = 0$. Sei k das Maximum von k_1 und k_2. Dann gilt

$$J^h = e_1J^he_1 + e_1J^he_2 + e_2J^he_1 + e_2J^he_2 = e_2J^he_2$$

für alle $h \geqq k$. Hieraus folgt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} J^n \leqq \bigcap_{h \geqq k}^{\infty} J^h \leqq \bigcap_{n=1}^{\infty} J^{kn} \leqq \bigcap_{n=1}^{\infty} [e_2Je_2]^n.$$

Nun ist $D = e_2Je_2$ das Jacobson-Radikal des halblokalen, erblichen, noetherschen Ringes $A = e_2Re_2$. Da die minimalen Primideale des Ringes A nach Konstruktion von A nicht maximal sind, ist D nach Folgerung 5. 4 ein umkehrbares Ideal von A. Wäre

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} D^n \neq 0,$$

dann wäre nach dem Lemma von Nakayama

$$F < FD^{-1} < FD^{-2} < \cdots$$

eine unendliche, echt aufsteigende Kette von Idealen von A, was ein Widerspruch zur Maximalbedingung für Ideale von A ist. Hiermit ist Satz 5. 5 bewiesen.

Literatur

[1] *S. A. Amitsur*, Prime rings having polynomial identities with arbitrary coefficients, Proc. London Math. Soc. (3) **17** (1967), 470—486.

[2] *P. Gabriel* et *R. Rentschler*, Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnés, C. R. Acad. Sci. Paris **265** (1967), 712—715.

[3] *A. W. Goldie*, Semi-prime rings with maximum condition, Proc. London Math. Soc. (3) **10** (1960), 201—220.

[4] *A. W. Goldie*, Localisation in non-commutative noetherian rings, J. Algebra **5** (1967), 89—105.

[5] *M. Harada*, Hereditary orders, Trans. Amer. Math. Soc. **107** (1963), 272—290.

[6] *M. Harada*, On generalization of Asano's maximal orders in a ring, Osaka J. Math. **1** (1964), 61—68.

[7] *N. Jacobson*, Theory of rings, Amer. Math. Soc. Surveys No. 2, New York 1943.

[8] *A. V. Jategaonkar*, A counter-example in ring theory and homological algebra, J.Algebra **12** (1969),418—440.

[9] *L. Levy*, Torsion-free and divisible modules over non-integral domains, Canad. J. Math. **15** (1963), 132—151.

[10] *G. Michler*, Asano orders, Proc. London Math. Soc. (3) **19** (1969), 421—443.

[11] *G. Michler*, Structure of semi-perfect hereditary noetherian rings, erscheint im J. Algebra.

[12] *A. Ornstein*, Rings with restricted minimum condition, Proc. Amer. Math. Soc. **19** (1968), 1145—1150.

[13] *J. C. Robson*, Non-commutative Dedekind rings, J. Algebra **9** (1968), 249—265.

[14] *A. Rosenberg* and *D. Zelinsky*, Annihilators, Portugaliae Math. **20** (1961), 53—65.

[15] *L. Small*, Hereditary rings, Proc. Nat. Acad. Sciences USA **55** (1966), 25—27.

Mathematisches Institut der Universität, 74 Tübingen, Wilhelmstraße 7

Eingegangen 30. März 1969

Analytische Mannigfaltigkeiten und lokale Ringe von algebraischen Funktionenkörpern

Von *Gerhard Schiffels* in Berlin

Herrn Professor Dr. Wolfgang Krull zum 70. Geburtstag

Inhalt

§ 1. Lokale k-Algebren
§ 2. Darstellungen durch Potenzreihenquotienten
§ 3. Die geometrischen lokalen Ringe $Q(a, \eta)$
§ 4. Die analytischen Mannigfaltigkeiten $S_n(K)$ $(1 \leqq n \leqq r)$
§ 5. Vergleich mit den analytischen Gebilden
§ 6. Arithmetische und topologische Eigenschaften der $S_n(K)$
§ 7. Kennzeichnung von $S_r(K)$ durch algebraische Varietäten

Einleitung

Wie zuerst von Dedekind und Weber in ihrer im Jahre 1882 in diesem Journal erschienenen Arbeit [10] bemerkt wurde (vgl. auch B. L. van der Waerden [16], § 81—82; C. Chevalley [8], Chap. VII, § 1—2), hat die *Riemannsche Fläche* S einer algebraischen Funktion $w = f(z)$ der komplexen Veränderlichen z neben ihrer funktionentheoretischen Bedeutung auch einen rein algebraischen Aspekt: Die Punkte von S können durch die *Bewertungen* (oder die „Stellen") des *algebraischen Funktionenkörpers* $K = \boldsymbol{C}(z, w)$ charakterisiert werden. Darüber hinaus hängt S auch als Mannigfaltigkeit nur von K ab. In der vorliegenden Arbeit soll nun nach einem von Herrn Professor Krull angeregten und durch viele Diskussionen mit dem Verfasser entscheidend geförderten Programm die Frage untersucht werden, inwieweit man auch einem algebraischen Funktionenkörper von *mehreren* Veränderlichen „auf funktionentheoretische Weise" Mannigfaltigkeiten zuordnen kann, die eine ähnliche „algebraische" Charakterisierung haben. Dabei soll der Begriff des *Stellenrings* (W. Krull [12]; heute ist die Bezeichnung „lokaler Ring" üblich) die Rolle des Bewertungsbegriffs übernehmen.

Zur Präzisierung der Problemstellung und zur Erläuterung der wichtigsten Resultate wollen wir zunächst die klassische Theorie in geeigneter Weise genauer darlegen: Es sei $F(z, w) = 0$ die irreduzible algebraische Gleichung, welche die Funktion $w = f(z)$ festlegt. $\boldsymbol{C}[\langle X \rangle]$ sei der Ring der konvergenten Potenzreihen in einer Unbestimmten über dem Körper $\boldsymbol{C}$ der komplexen Zahlen, und $\boldsymbol{C}(\langle X \rangle)$ sei der Quotientenkörper von $\boldsymbol{C}[\langle X \rangle]$. Nach Weierstraß (vgl. H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, § 2 und

§ 19; für eine neuere Darstellung vgl. auch M. Heins [11], Chap. XVIII) kann man dann zunächst die folgende funktionentheoretische Konstruktion durchführen: Es sei $\mathfrak{S}$ die Menge aller Paare

$$E = (E_1, E_2) \quad (E_i \in \boldsymbol{C}(\langle X \rangle)), \tag{1}$$

welche die Gleichung $F(E_1, E_2) = 0$ erfüllen und welche bei Beschränkung auf hinreichend kleine $x \in \boldsymbol{C}\,(x \neq 0)$ eine injektive Abbildung $x \mapsto E(x)$ in den $\boldsymbol{C}^2$ vermitteln. Diese Paare werden zu Äquivalenzklassen bezüglich „analytischer Parametertransformationen" $X \to c_1 X + c_2 X^2 + \cdots (c_1 \neq 0)$ zusammengefaßt; man erhält dann eine Menge S von „Funktionselementen" $\tilde{E}$. Auf S kann man mit Hilfe eines analytischen Fortsetzungsprozesses (durch „Umbildung" von Potenzreihen nach dem Kreiskettenverfahren) die Struktur einer (kompakten) 1-dimensionalen komplex-analytischen Mannigfaltigkeit erklären. S ist dann ein *analytisches Gebilde* im Sinne von Weierstraß und wird als die Riemannsche Fläche der Funktion $w = f(z)$ aufgefaßt. Weiter ergibt sich (a. a. O.), daß S (bis auf analytische Isomorphie) nicht vom Erzeugendensystem (z, w), sondern nur vom Körper $K = \boldsymbol{C}(z, w)$ abhängt, und daß K aus S zurückgewonnen werden kann, nämlich als der Körper der auf S meromorphen Funktionen.

Der Tatsache, daß S nur von K abhängt, kann man unmittelbar durch eine Abänderung der geschilderten Konstruktion Rechnung tragen, indem man die Paare $E = (E_1, E_2)$ durch die ihnen zugeordneten Körpereinbettungen (über $\boldsymbol{C}$)

$$\varphi : K \to \boldsymbol{C}(\langle X \rangle) \tag{2}$$

ersetzt. Dabei kann man sich außerdem (vgl. im folgenden § 5) auf solche Einbettungen φ beschränken, bei denen der Bildkörper $\varphi(K)$ das Element X enthält. Man erhält dann eine Riemannsche Fläche $S_1(K)$, die aus den Äquivalenzklassen $\bar{\varphi}$ der genannten Abbildungen φ besteht. Die eingangs erwähnte algebraische Kennzeichnung der Punkte von $S_1(K)$ kann nun so formuliert werden: Ist $R_1(K)$ die Menge aller (nichttrivialen) Bewertungsringe von K, die den Grundkörper $\boldsymbol{C}$ enthalten, so liefert die Vorschrift $\bar{\beta}_1(\bar{\varphi}) = \varphi^{-1}(\boldsymbol{C}[\langle X \rangle])$ eine Bijektion

$$\bar{\beta}_1 : S_1(K) \to R_1(K). \tag{3}$$

Dabei sind die genannten Bewertungsringe sämtlich diskret, d. h. es handelt sich um 1-dimensionale reguläre lokale Ringe.

Es sei nun k ein Körper mit einem nicht-diskreten vollständigen Absolutbetrag (vgl. § 4), und K sei allgemeiner als bisher ein algebraischer Funktionenkörper von einem Transzendenzgrad $r \geqq 1$ über k. Wir wählen ein n mit $1 \leqq n \leqq r$ und stellen die Frage, ob man auch jetzt dem Körper K durch eine ähnliche funktionentheoretische Konstruktion (mit Hilfe von Potenzreihenentwicklungen nach n Variablen) eine n-dimensionale analytische k-Mannigfaltigkeit zuordnen kann, die durch eine Klasse von Unterringen von K algebraisch gekennzeichnet ist. Als Ansatz dient die Menge $\mathfrak{S}_n(K)$ aller Einbettungen (über k)

$$\varphi : K \to k(\langle X^{(n)} \rangle) \quad (X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)), \tag{2'}$$

die der Bedingung $X_i \in \varphi(K)$ $(i = 1, \ldots, n)$ genügen[1]). Man zeigt durch eine völlig elementare Rechnung, daß sich die oben skizzierte Weierstraß-Weylsche Konstruktion übertragen läßt und eine *n-dimensionale analytische k-Mannigfaltigkeit* $S_n(K)$ liefert (§ 4).

[1]) Eine etwas allgemeinere „Jacobische" Bedingung würde später zum selben Resultat führen, vgl. § 5, Bemerkung.

Dabei ist allerdings der Mannigfaltigkeitsbegriff so zu fassen, daß keine topologischen Zusatzvoraussetzungen eingehen (vgl. N. Bourbaki [6], (5. 1. 5)). Die topologischen Eigenschaften Riemannscher Flächen gehen nämlich fast durchweg verloren: Für $n > 1$ (und $S_n(K) \neq \emptyset$) ist $S_n(K)$ z. B. nicht Hausdorffsch und nicht von abzählbarer Topologiebasis (§ 6, Bemerkung 1).

Was die algebraische Kennzeichnung von $S_n(K)$ betrifft, so kann man zwar jedem Punkt $\bar{\varphi} \in S_n(K)$ in natürlicher Weise einen Unterring $\bar{\beta}_n(\bar{\varphi})$ von K zuordnen (nämlich $\varphi^{-1}(k[\langle X^{(n)} \rangle])$), doch gibt es Beispiele (§ 6, Bemerkung 2), in denen die Abbildung $\bar{\beta}_n$ nicht injektiv ist und somit sicher keine Kennzeichnung der Punkte von $S_n(K)$ liefert. Andererseits kann man im Körper K (in naheliegender Verallgemeinerung der Menge der Bewertungsringe des klassischen Falles) eine bestimmte, rein algebraisch definierte Menge $R_n(K)$ von *n-dimensionalen regulären lokalen Ringen* betrachten (§ 2). Einem Ring $Q \in R_n(K)$ ist vermöge der Potenzreihenentwicklungen nach seinen regulären Parametersystemen ein Punkt $\bar{\varphi} = \bar{\alpha}_n(Q) \in S_n(K)$ zugeordnet, falls diese Potenzreihenentwicklungen konvergieren. Man erhält aber auf diese Weise i. a. nicht alle Punkte von $S_n(K)$.

Positive Resultate ergeben sich im Falle $n = 1$ (§ 6), und besonders im „Hauptfall" $n = r$ (§ 7 in Verbindung mit § 3). Wir beweisen hier, daß $\bar{\beta}_r$ eine Bijektion von $S_r(K)$ auf $R_r(K)$ mit der Umkehrung $\bar{\alpha}_r$ ist. Der entscheidende Schritt für diesen Beweis wird bei den „formalen" Betrachtungen von § 3 vollzogen (vgl. (3. 1)); er besteht in einer Anwendung des *Zariskischen* Satzes von der analytischen Irreduzibilität normaler geometrischer lokaler Ringe (Zariski-Samuel [20], Chap. VIII, § 13; unter den Voraussetzungen von § 3 wird sogar eine von M. Nagata [13] gegebene sehr allgemeine Fassung benötigt). $S_r(K)$ kann somit als eine Mannigfaltigkeit aufgefaßt werden, die aus einer Klasse $R_r(K)$ regulärer lokaler Ringe besteht und deren analytische Struktur durch „Umbildung" der mit diesen Ringen verknüpften Potenzreihenentwicklungen gewonnen wird. Bei der Untersuchung von $\bar{\beta}_r$ zeigt sich außerdem, daß $R_r(K)$ aus der Menge aller regulären lokalen Ringe besteht, die im Sinne der algebraischen Geometrie den über k rationalen einfachen Punkten der (affinen) Modelle des Körpers K zugeordnet werden können. Hieraus ergibt sich, daß die Mannigfaltigkeit $S_r(K)$ mit Hilfe dieser Modelle (durch einen Verleimungsprozeß) gekennzeichnet werden kann (vgl. (7. 1)). Eine Anwendung allgemeiner Sätze über algebraische und analytische Mengen liefert dann weitere Aussagen über $S_r(K)$; z. B. ist im komplexen Fall auch für $r > 1$ der Körper K isomorph zum Körper aller auf $S_r(K)$ meromorphen Funktionen ((7. 6)).

Zum Aufbau der Arbeit sei bemerkt, daß wir zunächst (§ 1—§ 3) die „formalen" Aspekte behandeln und dabei einen ganz beliebigen Grundkörper k verwenden. Später wird k zunehmend (abgesehen von den eingefügten Beispielen und Gegenbeispielen) immer mehr spezialisiert.

Für die Anregung und Förderung dieser Arbeit möchte ich Herrn Professor Krull meinen herzlichen Dank aussprechen.

§ 1. Lokale k-Algebren

Unter einem Ring verstehen wir stets einen kommutativen Ring mit Einselement. Ringe, die ineinander enthalten sind, sollen dasselbe Einselement haben. Unter einem *lokalen Ring* Q verstehen wir einen Noetherschen Ring, der ein einziges maximales Ideal $\mathfrak{m}(Q)$ hat und mit der $\mathfrak{m}(Q)$-adischen Topologie versehen ist (vgl. etwa [20], Chap. VIII).

Die (Krullsche) *Dimension* dim Q des lokalen Ringes Q ist definiert als das Maximum der Längen der Primidealketten in Q; sie kann auch charakterisiert werden als die Minimalzahl von Elementen, die man benötigt, um ein geeignetes $\mathfrak{m}(Q)$-primäres Ideal zu erzeugen (vgl. [19], Chap. IV, § 14; hierbei soll die leere Menge das Nullideal erzeugen). Unter einem *Parametersystem* von Q versteht man ein System $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ aus $n = \dim Q$ Elementen von Q, welches ein $\mathfrak{m}(Q)$-primäres Ideal erzeugt. Q heißt *regulär*, wenn es in Q ein reguläres Parametersystem gibt, d. h. ein Parametersystem, welches das maximale Ideal $\mathfrak{m}(Q)$ selbst erzeugt. Wir werden es in dieser Arbeit nur mit regulären Parametersystemen zu tun haben und verstehen deshalb im folgenden unter einem Parametersystem stets ein reguläres Parametersystem. Die (bis auf Isomorphie über Q eindeutig bestimmte) *Vervollständigung* $\hat{Q}$ des lokalen Ringes Q ist ebenfalls ein lokaler Ring, und es gilt $\mathfrak{m}(\hat{Q}) = \hat{Q} \cdot \mathfrak{m}(Q)$, $\dim \hat{Q} = \dim Q$ ([20], Chap. VIII, § 4, § 9).

Es sei k ein Körper. Unter einer *k-Algebra* (bzw. einem *k-Homomorphismus*) verstehen wir einen Oberring von k (bzw. einen Ringhomomorphismus zwischen k-Algebren, der auf k die Identität induziert). In diesem Sinne sprechen wir auch von k-Monomorphismen (oder k-Einbettungen), k-Automorphismen usw. Mit $\mathfrak{L}(k)$ bezeichnen wir die Klasse aller lokalen k-Algebren Q, die einen k-Homomorphismus π_Q auf k gestatten. π_Q ist durch Q eindeutig festgelegt und wird im folgenden auch kurz als *Resthomomorphismus* von Q bezeichnet. Wie man sofort sieht, lassen sich die Elemente eines Ringes $Q \in \mathfrak{L}(k)$ bei gegebenem Erzeugendensystem $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ von $\mathfrak{m}(Q)$ in der Form

$$\text{(1)} \qquad \sum_{\nu \in N^n} a_\nu \tau^\nu \qquad \begin{pmatrix} N = \{0, 1, \ldots\}, & a_\nu \in k, \\ \tau^\nu = \tau_1^{\nu_1} \cdots \tau_n^{\nu_n} & \\ \text{für } \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in N^n & \end{pmatrix}$$

entwickeln. Ist andererseits Q eine beliebige vollständige lokale k-Algebra und $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ ein System von Elementen aus $\mathfrak{m}(Q)$, so konvergiert in Q jede Reihe der Form (1).

(1. 1) Lemma. *Es seien P und Q Ringe aus $\mathfrak{L}(k)$, $f: P \to Q$ ein k-Homomorphismus, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ ein System von Elementen aus $\mathfrak{m}(P)$ und $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ das Bild $f(\sigma)$ des Systems σ unter f. Dann ist f stetig, und es gilt die Formel*

$$\text{(2)} \qquad f\left(\sum_\nu a_\nu \sigma^\nu\right) = \sum_\nu a_\nu \tau^\nu \quad (a_\nu \in k).$$

Ist P vollständig und ist τ Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}(Q)$, so ist f surjektiv. Ist außerdem P nullteilerfrei und gilt dim $P =$ dim Q, *so ist f bijektiv.*

Beweis. Zunächst gilt $\pi_Q \circ f = \pi_P$ und damit $f(\mathfrak{m}(P)) \subseteqq \mathfrak{m}(Q)$. Daraus folgt die Stetigkeit von f und damit die Formel (2). Die nächste Behauptung ergibt sich dann unter den angegebenen Voraussetzungen aus der Existenz von Darstellungen (1) für die Elemente von Q, während die letzte Behauptung anschließend durch Vergleich der Primidealketten in P und seinem homomorphen Bild Q folgt.

Aus dem ersten Teil des Lemmas folgt insbesondere, daß sich f stetig zu einem k-Homomorphismus $\hat{f}: \hat{P} \to \hat{Q}$ fortsetzen läßt. Im Spezialfall $Q = \hat{Q} = k$, $f = \pi_P$ ergibt sich daraus, daß mit P auch $\hat{P}$ zu $\mathfrak{L}(k)$ gehört. Ist σ Erzeugendensystem von $\mathfrak{m}(P)$, so bedeutet (2), daß f durch die „Substitution" $\sigma \to \tau$ erzeugt wird.

Es sei nun P ein regulärer Ring aus $\mathfrak{L}(k)$ mit dem Parametersystem $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Dann gilt $\dim \hat{P} = n$, $\mathfrak{m}(\hat{P}) = \hat{P} \cdot \sigma$, folglich ist auch $\hat{P}$ regulär, und σ ist ein Parametersystem von $\hat{P}$. Andererseits ist der Ring $k[[X]] = k[[X_1, \ldots, X_n]]$ aller formalen Potenz-

reihen in den n Unbestimmten $X_1, \ldots, X_n$ über k ein n-dimensionaler regulärer Ring aus $\mathfrak{L}(k)$, und $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ist ein Parametersystem von $k[[X]]$ ([20], Chap. VII, § 1). $\hat{P}$ ist k-isomorph zu $k[[X]]$, denn durch die Substitution $X \to \sigma$ wird ein k-Homomorphismus g von $k[[X]]$ in $\hat{P}$ geliefert, und g ist nach (1. 1) bijektiv. Insbesondere sind die Entwicklungen $\sum a_\nu \sigma^\nu$ der Elemente von P eindeutig bestimmt, folglich läßt sich bei gegebenem vollständigem $Q \in \mathfrak{L}(k)$ und gegebenem System $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ von Elementen aus $\mathfrak{m}(Q)$ durch die Substitution $\sigma \to \tau$ ein k-Homomorphismus von P in Q definieren. Wir notieren noch (vgl. [20], S. 302, Cor. 2), daß ein System $\sum a_{i\nu} \sigma^\nu$ $(i = 1, \ldots, n)$ von Elementen aus $\mathfrak{m}(P)$ genau dann Parametersystem von P ist, wenn gilt

(3) $\det (a_{i\varepsilon_j})_{i,j=1,\ldots,n} \neq 0$ $(\varepsilon_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ mit der 1 an der j-ten Stelle).

§ 2. Darstellungen durch Potenzreihenquotienten

Es sei k wieder ein beliebiger Körper. Bei den folgenden Konstruktionen ist es zweckmäßig, für jede Dimensionszahl $n \geqq 1$ einen festen, nur von n und k abhängigen Potenzreihenring zur Verfügung zu haben. Wir wählen deshalb ein festes System $X_1, X_2, \ldots$ von Unbestimmten, setzen jeweils $X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n)$ und identifizieren die Potenzreihen $\sum a_\nu (X^{(n)})^\nu$ aus $k[[X^{(n)}]]$ mit ihren Koeffizientenschemata $(a_\nu)_{\nu \in N^n}$. Mit $k((X^{(n)}))$ bezeichnen wir den Quotientenkörper von $k[[X^{(n)}]]$. Wo keine Verwechslungen zu befürchten sind, schreiben wir wieder X statt $X^{(n)}$.

Es sei K ein algebraischer Funktionenkörper von r Veränderlichen über k, d. h. ein endlich erzeugter Erweiterungskörper von k vom Transzendenzgrad r über k. Dabei sei $r \geqq 1$, und k sei algebraisch abgeschlossen in K. Wir wählen ein n mit $1 \leqq n \leqq r$ und setzen $X = X^{(n)}$. Mit $\mathfrak{S}_n^*$ bezeichnen wir die Menge aller k-Einbettungen

(1) $$\varphi : K \to k((X)),$$

die der Bedingung $X_i \in \varphi(K)$ $(i = 1, \ldots, n)$ genügen. Der Deutlichkeit halber schreiben wir manchmal statt $\mathfrak{S}_n^*$ auch $\mathfrak{S}_n^*(K)$; entsprechend bei den folgenden von K abhängigen Objekten. Jedem $\varphi \in \mathfrak{S}_n^*$ ordnen wir den Ring

(2) $$\bar{\beta}_n(\varphi) = \varphi^{-1}(k[[X]])$$

sowie das Paar

(3) $$\beta_n(\varphi) = (\bar{\beta}_n(\varphi), \varphi^{-1}(X))$$

zu, wobei $\varphi^{-1}(X)$ das n-Tupel $(\varphi^{-1}(X_i))_{i=1,\ldots,n}$ bezeichnet. Andererseits sei L_n (oder $L_n(K)$) die Menge aller Ringe aus $\mathfrak{L}(k)$, welche in K enthalten sind und den Quotientenkörper K sowie die Dimension n haben. R_n sei die Menge der regulären Ringe aus L_n. Mit $\mathfrak{R}_n$ bezeichnen wir die Menge aller Paare (Q, τ), wobei Q ein Ring aus R_n und $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ ein Parametersystem von Q ist. Jedem $(Q, \tau) \in \mathfrak{R}_n$ ordnen wir ein $\varphi = \alpha_n(Q, \tau) \in \mathfrak{S}_n^*$ zu: Nach § 1 ist durch die Substitution $\tau \to X$ eine k-Einbettung $\varphi_0 : Q \to k[[X]]$ definiert; φ sei die Erweiterung von φ_0 zu einer Einbettung des Quotientenkörpers K von Q in den Körper $k((X))$. Wir erhalten so eine Abbildung

(4) $$\alpha_n : \mathfrak{R}_n \to \mathfrak{S}_n^*.$$

(2. 1) Lemma. *Für jedes* $(Q, \tau) \in \mathfrak{R}_n$ *gilt* $\beta_n(\alpha_n(Q, \tau)) = (Q, \tau)$.

Beweis. Verwendet man die oben eingeführten Bezeichnungen, so ist die stetige Fortsetzung $\hat{\varphi}_0 : \hat{Q} \to k[[X]]$ bijektiv. $k[[X]]$ stellt also eine Vervollständigung von $\varphi(Q)$

dar, und deshalb gilt $\varphi(K) \cap k[[X]] = \varphi(Q)$ (vgl. [3], S. 73, Cor. 4). Es folgt $\beta_n(\varphi) = Q$ und damit die Behauptung.

Umgekehrt beweisen wir zunächst

(2. 2) Lemma. *Sei* $\varphi \in \mathfrak{S}_n^*$, $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) = \varphi^{-1}(X)$, $Q \in L_n$. *Ist dann* $\hat{Q}$ *nullteilerfrei und gilt* $\tau_i \in Q$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\varphi(Q) \subseteq k[[X]]$, *so folgt* $(Q, \tau) \in \mathfrak{R}_n$, $\varphi = \alpha_n(Q, \tau)$.

Beweis. φ induziert einen k-Homomorphismus $\varphi_0 : Q \to k[[X]]$ mit $\varphi_0(\tau) = X$. Wegen der vorausgesetzten Nullteilerfreiheit von $\hat{Q}$ ist die stetige Fortsetzung $\hat{\varphi}_0 : \hat{Q} \to k[[X]]$ nach (1. 1) bijektiv. Folglich ist $\hat{Q}$ ein regulärer Ring mit dem Parametersystem τ. Dann ist aber auch Q regulär, und τ ist ein Parametersystem von Q (vgl. [20], Chap. VIII, § 11). Es gilt also $(Q, \tau) \in \mathfrak{R}_n$, und die zweite Behauptung folgt jetzt unmittelbar aus der Definition von α_n.

(2. 3) Korollar. *Sei* $\varphi \in \mathfrak{S}_n^*$. *Ist dann* $\bar{\beta}_n(\varphi) \in R_n$, *so gilt* $\beta_n(\varphi) \in \mathfrak{R}_n$, $\varphi = \alpha_n(\beta_n(\varphi))$.

Im Falle $1 < n < r$ gibt es Beispiele für Körper K und Abbildungen $\varphi \in \mathfrak{S}_n^*(K)$ mit $\bar{\beta}_n(\varphi) \notin R_n(K)$ (vgl. § 6, Bemerkung 2). Dagegen gilt zunächst für $n = 1$ allgemein

(2. 4) α_1 *ist eine Bijektion von* $\mathfrak{R}_1$ *auf* $\mathfrak{S}_1^*$ *mit der Umkehrung* β_1.

Beweis. Wegen (2. 1) und (2. 3) genügt es, zu zeigen, daß für gegebenes $\varphi \in \mathfrak{S}_1^*$ der Ring $Q = \bar{\beta}_1(\varphi)$ in R_1 liegt. Nun ist Q ebenso wie $\varphi[[X^{(1)}]]$ ein diskreter Bewertungsring und folglich ein eindimensionaler regulärer lokaler Ring mit dem Quotientenkörper K. Ferner liefert $\omega \mapsto (\varphi(\omega))(0)$ einen k-Homomorphismus von Q auf k; es gilt also tatsächlich $Q \in R_1$.

§ 3. Die geometrischen lokalen Ringe $Q(a, \eta)$

Unter den Voraussetzungen von § 2 wollen wir jetzt den Fall $n = r$ untersuchen. Hierzu verwenden wir einige Begriffe aus der algebraischen Geometrie. Es sei $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ $(m \geqq r)$ ein endliches Erzeugendensystem von K über k, $Y = (Y_1, \ldots, Y_m)$ ein System von Unbestimmten, H_η der durch die Substitution $Y \to \eta$ gegebene k-Homomorphismus von $k[Y]$ auf $k[\eta]$ und $\mathfrak{P}_\eta$ der Kern von H_η. Ist dann $\bar{k}$ ein algebraisch-abgeschlossener Oberkörper von k, so bezeichnen wir mit $\bar{V}(\eta)$ die Menge („algebraische k-Varietät", vgl. [15], Chap. I, § 1) der Bilder $a = (a_1, \ldots, a_m) \in \bar{k}^m$ von η unter den k-Homomorphismen von $k[\eta]$ in $\bar{k}$, d. h. die Menge aller $a \in \bar{k}^m$ mit $F(a) = 0$ für alle $F(Y) \in \mathfrak{P}_\eta$. Wir setzen $V(\eta) = \bar{V}(\eta) \cap k^m$; $V(\eta)$ besteht also aus den über k rationalen Punkten aus $\bar{V}(\eta)$ und wird im folgenden ebenfalls als *algebraische Varietät* bezeichnet. Jedes $a \in V(\eta)$ ist Bild von η unter einem eindeutig bestimmten k-Homomorphismus $h_a : k[\eta] \to k$, und h_a hat den Kern $\mathfrak{p}_a = k[\eta] \cdot (\eta_1 - a_1, \ldots, \eta_m - a_m)$. Mit $Q(a, \eta)$ bezeichnen wir die *Lokalisierung* von $k[\eta]$ bez. $\mathfrak{p}_a$, d. h. den („geometrischen", vgl. [13], S. 127) lokalen Ring aller Quotienten $\omega_1 \omega_2^{-1}$ $(\omega_i \in k[\eta]$, $\omega_2 \notin \mathfrak{p}_a)$. Nach der Dimensionstheorie endlich erzeugter nullteilerfreier k-Algebren ([20], Chap. VII, § 7) hat das maximale $k[\eta]$-Ideal $\mathfrak{p}_a$ die Höhe r, folglich hat $Q(a, \eta)$ die Dimension r. Da sich h_a zu einem k-Homomorphismus $Q(a, \eta) \to k$ erweitern läßt, folgt damit insbesondere, daß $Q(a, \eta)$ zu der in § 2 eingeführten Ringklasse $L_r = L_r(K)$ gehört. a heißt k-einfach (auf $\bar{V}(\eta)$), wenn $Q(a, \eta)$ regulär ist. Nach dem Jacobischen Kriterium für die k-Einfachheit rationaler Punkte ([15], S. 71, b)) ist dies genau dann der Fall, wenn es in $\mathfrak{P}_\eta$ Polynome

$P_1, \ldots, P_{m-r}$ gibt, so daß die Matrix

$$\left(\frac{\partial P_i}{\partial Y_j}\right)_{\substack{i=1,\ldots,m-r \\ j=1,\ldots,m}} \tag{1}$$

im Punkte $Y = a$ den Rang $m - r$ hat. Mit $V'(\eta)$ bezeichnen wir die Menge aller k-einfachen Punkte aus $V(\eta)$.

Es sei nun Γ die Menge aller endlichen Erzeugendensysteme von K über k. Mit $\mathfrak{G}$ bezeichnen wir die Menge aller Ringe der Form $Q(a, \eta)$ $(\eta \in \Gamma, a \in V(\eta))$. Für jedes $\eta \in \Gamma$ sei $\varkappa_\eta$ die durch $a \mapsto Q(a, \eta)$ gegebene Abbildung von $V(\eta)$ in $\mathfrak{G}$. Diese Abbildung ist injektiv, da jeweils der Punkt $a \in V(\eta)$ das Bild von η unter dem Resthomomorphismus von $Q(a, \eta)$ ist. $\mathfrak{G}'$ sei die Menge der regulären Ringe aus $\mathfrak{G}$. Es gilt $\mathfrak{G} \subseteq L_r$, $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G} \cap R_r$. — Wir beweisen nun das folgende, grundlegende Resultat:

(3. 1) Satz. *Es gilt $\mathfrak{G}' = R_r$, und α_r ist eine Bijektion von $\mathfrak{R}_r$ auf $\mathfrak{S}_r^*$ mit der Umkehrung β_r.*

Beweis. Wegen (2. 1) ist zum Beweis beider Behauptungen nur zu zeigen, daß ein beliebig vorgegebenes $\varphi \in \mathfrak{S}_r^*$ die Form $\varphi = \alpha_r(Q, \tau)$ hat, wobei Q ein Ring aus $\mathfrak{G}'$ und τ ein Parametersystem von Q ist. Es sei $X = X^{(r)}$, $\eta_i = \varphi^{-1}(X_i)$, $\tau = (\eta_1, \ldots, \eta_r)$. Dann ist τ eine Transzendenzbasis von K über k, folglich gibt es Elemente $\eta_{r+1}, \ldots, \eta_m \in K$ derart, daß für $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ der Ring $k[\eta]$ die ganze Hülle von $k[\tau]$ in K darstellt ([19], S. 267, Th. 9). K ist der Quotientenkörper von $k[\eta]$, es gilt also $\eta \in \Gamma$. Der Ring $\varphi(k[\tau])$ ist in $k[[X]]$ enthalten, und $k[[X]]$ ist ganz-abgeschlossen in seinem Quotientenkörper $k((X))$. Folglich ist auch $\varphi(k[\eta])$ in $k[[X]]$ enthalten. Es sei $a_j = (\varphi(\eta_j))(0)$ $(j = 1, \ldots, m)$. Dann ist $a = (a_1, \ldots, a_m)$ ein Punkt aus $V(\eta)$, und $Q = Q(a, \eta)$ ist ein Ring aus $\mathfrak{G}$. Ferner bildet φ die nicht in $\mathfrak{p}_a = k[\eta] \cdot (\eta - a)$ enthaltenen Elemente von $k[\eta]$ auf Einheiten von $k[[X]]$ ab, und damit gilt $\varphi(Q) \subseteq k[[X]]$. Schließlich ist Q als Lokalisierung des ganz-abgeschlossenen Ringes $k[\eta]$ selbst ganz-abgeschlossen, folglich ist $\hat{Q}$ *nullteilerfrei* ([13], (37. 5)). Wir können nun Lemma (2. 2) anwenden und erhalten $(Q, \tau) \in \mathfrak{R}_r$, $Q \in R_r \cap \mathfrak{G} = \mathfrak{G}'$, $\varphi = \alpha_r(Q, \tau)$, was zu beweisen war.

Wir führen jetzt auf den affinen Räumen k^m $(m = 1, 2, \ldots)$, den Varietäten $V(\eta)$ $(\eta \in \Gamma)$ und auf $\mathfrak{G}$ die *k-Topologie* ein (vgl. etwa [17], Chap. VII). Ist $Y = (Y_1, \ldots, Y_m)$, so bilden also die Mengen

$$D(P) = \{a \in k^m \mid P(a) \neq 0\} \quad (P(Y) \in k[Y]) \tag{2}$$

eine Basis der offenen Mengen von k^m. Ist $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$, so verstehen wir unter der k-Topologie von $V(\eta)$ die Spur der k-Topologie von k^m. Auf $\mathfrak{G}$ definieren wir dann die k-Topologie als die finale Topologie des Systems $(V(\eta), \varkappa_\eta)_{\eta \in \Gamma}$; eine Untermenge $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ ist also genau dann offen in $\mathfrak{G}$, wenn für jedes $\eta \in \Gamma$ die Menge $\varkappa_\eta^{-1}(\mathfrak{U})$ offen in $V(\eta)$ ist (vgl. [5], S. 33). Dies entspricht einer „Verleimung" der Räume $V(\eta)$, $V(\zeta), \ldots$ bez. der durch $Q(a, \eta) = Q(b, \zeta) = \cdots$ definierten Äquivalenz von Punkten $a \in V(\eta)$, $b \in V(\zeta), \ldots$ ([5], S. 36ff.). Nach dem Jacobischen Kriterium ist jedes $V'(\eta)$ offen in $V(\eta)$, folglich ist $\mathfrak{G}'$ offen in $\mathfrak{G}$.

(3. 2) Lemma. *Es seien $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$, $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_p)$ zwei Systeme aus Γ, und $Y = (Y_1, \ldots, Y_m)$, $Z = (Z_1, \ldots, Z_p)$ seien Systeme von Unbestimmten. Ist dann $a \in V(\eta)$, $b \in V(\zeta)$, $Q(a, \eta) = Q(b, \zeta)$, so existieren in $k(Y)$ bzw. $k(Z)$ Systeme von Polynomquotienten*

$$\begin{aligned} F(Y) &= (F_j(Y) \cdot (F_0(Y))^{-1})_{j=1,\ldots,p} \\ G(Z) &= (G_i(Z) \cdot (G_0(Z))^{-1})_{i=1,\ldots,m} \end{aligned} \tag{3}$$

mit

$$F_0(\eta) \cdot G_0(\zeta) \neq 0, \quad \zeta = F(\eta), \quad \eta = G(\zeta), \tag{4}$$

$$F_0(a) \cdot G_0(b) \neq 0, \quad b = F(a), \quad a = G(b). \tag{5}$$

Sind umgekehrt Systeme (3) *mit* (4) *gegeben, so sind die Mengen*

$$\begin{aligned} W(F, G) &= \{a \in V(\eta) \mid F_0(a) \neq 0,\ G_0(F(a)) \neq 0\}, \\ W(G, F) &= \{b \in V(\zeta) \mid G_0(b) \neq 0,\ F_0(G(b)) \neq 0\} \end{aligned} \tag{6}$$

offen in $V(\eta)$ *bzw.* $V(\zeta)$, *und durch*

$$a \mapsto F(a), \quad b \mapsto G(b) \tag{7}$$

sind zueinander inverse stetige Abbildungen zwischen ihnen gegeben. Für einander zugeordnete Punkte $a \in W(F, G)$, $b \in W(G, F)$ *gilt* $Q(a, \eta) = Q(b, \zeta)$.

Beweis. Im ersten Teil des Lemmas ist die Existenz von Systemen (3) mit (4) und $F_0(a) \cdot G_0(b) \neq 0$ klar. Die Gleichungen $b = F(a)$, $a = G(b)$ ergeben sich dann, indem man den Resthomomorphismus von $Q(a, \eta) = Q(b, \zeta)$ auf die Gleichungen $\zeta = F(\eta)$, $\eta = G(\zeta)$ anwendet. Im zweiten Teil des Lemmas ist die Offenheit von $W(F, G)$ und $W(G, F)$ klar. Ferner rechnet man sofort nach, daß durch $a \mapsto F(a)$ eine stetige Abbildung von $D(F_0)$ (vgl. (2)) in den k^p geliefert wird; entsprechendes gilt für $b \mapsto G(b)$. Ist nun ein $a \in W(F, G)$ gegeben und setzt man $b = F(a)$, so folgt aus $\zeta = F(\eta)$ der Reihe nach $k[\zeta] \leqq Q(a, \eta)$, $b \in V(\zeta)$, $Q(b, \zeta) \leqq Q(a, \eta)$; und aus $\eta = G(\zeta)$ folgt anschließend $a = G(b)$ und damit auch $b \in W(G, F)$. Ist umgekehrt $b \in W(G, F)$ vorgegeben und setzt man $a = G(b)$, so erhält man ebenso die Beziehungen $a \in W(F, G)$, $b = F(a)$, $Q(a, \eta) \leqq Q(b, \zeta)$. Jetzt ergeben sich sofort die noch ausstehenden Behauptungen des Lemmas.

(3. 3) Korollar. *Für jedes* $\eta \in \Gamma$ *ist* $\varkappa_\eta$ *ein Homöomorphismus von* $V(\eta)$ *auf eine offene Untermenge von* $\mathfrak{G}$.

Bemerkung. Der Grundkörper k sei *algebraisch abgeschlossen.* Dann ist K separabel erzeugbar über k ([17], S. 18), folglich gibt es zu jedem $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m) \in \Gamma$ ein System $P_1, \ldots, P_{m-r} \in \mathfrak{P}_\eta$ derart, daß die Matrix (1) im Punkte $Y = \eta$ den Rang $m - r$ hat ([17], S. 14, Th. 2), daß also eine geeignete $(m - r)$-reihige Unterdeterminante $D(Y)$ dieser Matrix nicht in $\mathfrak{P}_\eta$ liegt. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz gibt es dann ein $a \in V(\eta)$ mit $D(a) \neq 0$, und nach dem Jacobi-Kriterium liegt ein derartiger Punkt a in $V'(\eta)$, *insbesondere ist* $V'(\eta)$ *nicht leer.* Ist dann weiter $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_r)$ ein Parametersystem von $Q(a, \eta)$, so ist $\varphi = \alpha_r(Q(a, \eta), \tau)$ eine Abbildung aus $\mathfrak{S}_r^*$. Mit Hilfe von φ kann man leicht *zu vorgegebenem* $n < r$ *ein* $\psi \in \mathfrak{S}_n^*$ *konstruieren*: Im maximalen Ideal des Potenzreihenringes $k[[X^{(n)}]]$ gibt es sicher $p = r - n$ Potenzreihen $f_1, \ldots, f_p$, die über dem Körper $k(X_1, \ldots, X_n)$ algebraisch unabhängig sind, z. B. die „Lückenreihen"

$$\sum_{s=0}^{\infty} X_1^{(ps+j)!} \qquad (j = 1, \ldots, p). \tag{8}$$

Dies folgt leicht durch Verallgemeinerung einer in [20], S. 220 durchgeführten Rechnung. Die Substitution $X_i \to X_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, $X_{n+j} \to f_j$ $(j = 1, \ldots, p)$ erzeugt einen k-Homomorphismus $h: k[[X^{(r)}]] \to k[[X^{(n)}]]$. Ist $\varphi_0: Q(a, \eta) \to k[[X^{(r)}]]$ die durch φ induzierte Abbildung, so ist $h \circ \varphi_0$ nach Wahl der f_j injektiv ([19], S. 101, Th. 29) und läßt sich folglich zu einer k-Einbettung $\psi: K \to k((X^{(n)}))$ erweitern. Nach Konstruktion gilt $\psi(\tau_i) = X_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ und damit $\psi \in \mathfrak{S}_n^*$.

§ 4. Die analytischen Mannigfaltigkeiten $S_n(K)$ $(1 \leqq n \leqq r)$

Von jetzt ab sei k stets ein Körper mit einem nicht-diskreten vollständigen Absolutbetrag $a \mapsto |a| \in \boldsymbol{R}$ (vgl. [1], (1. 5) und § 9; [4], Chap. VI, § 6). Ist k zusammenhängend, so kann nach dem Satz von Ostrowski k mit $\boldsymbol{C}$ oder $\boldsymbol{R}$ und $|a|$ mit dem gewöhnlichen Absolutbetrag von a identifiziert werden („archimedischer Fall"). Auf k^n $(n \geqq 1)$ führen wir die Norm $\|(a_1, \ldots, a_n)\| = \max(|a_1|, \ldots, |a_n|)$ ein. Wir bezeichnen die zugehörige Topologie im Unterschied zur k-Topologie (§ 3) als Betragstopologie. Topologische Begriffe beziehen sich in diesem und in den beiden folgenden Paragraphen stets auf die Betragstopologie. Für positives reelles σ setzen wir $B_\sigma^n = \{a \in k^n \mid \|a\| < \sigma\}$. Es sei $X = X^{(n)}$. Die Potenzreihe $\sum a_\nu X^\nu \in k[[X]]$ heißt konvergent in B_σ^n, wenn $\sum a_\nu x^\nu$ für jedes $x \in B_\sigma^n$ konvergiert. Ist $\varrho \geqq 0$, so bezeichnen wir mit $k[\langle X\rangle]_\varrho$ den Ring aller Potenzreihen aus $k[[X]]$, die für geeignetes (von der Potenzreihe abhängiges) $\sigma > \varrho$ in B_σ^n konvergieren. $k(\langle X\rangle)_\varrho$ sei der Quotientenkörper von $k[\langle X\rangle]_\varrho$. Im Falle $\varrho = 0$ schreiben wir wie üblich einfacher $k[\langle X\rangle]$ bzw. $k(\langle X\rangle)$. — Eine auf der offenen Untermenge U des k^n definierte k-wertige Funktion f heißt analytisch, wenn sie in jedem Punkt $a \in U$ in eine Potenzreihe entwickelt werden kann: $f(a + x) = \sum a_\nu x^\nu$. Eine Abbildung von U in einen k^m heißt analytisch, wenn ihre Komponenten analytisch sind. Analytische Funktionen und Abbildungen sind stetig.

Ist $a \in k^n$ gegeben, so existiert (nach dem Identitätssatz für Potenzreihen und nach elementaren Sätzen über die „Umbildung" von Potenzreihen, vgl. [1], § 2B) zu jedem $\sum a_\nu X^\nu \in k[\langle X\rangle]_{\|a\|}$ genau ein $\sum b_\nu X^\nu \in k[\langle X\rangle]$ derart, daß bei hinreichend kleinem $\|x\|$ die Beziehung $\sum a_\nu (a + x)^\nu = \sum b_\nu x^\nu$ gilt, und man erhält so einen k-Monomorphismus von $k[\langle X\rangle]_{\|a\|}$ in $k[\langle X\rangle]$ ([1], (9. 3)). Mit δ_a bezeichnen wir die Erweiterung dieser Abbildung zu einem k-Monomorphismus von $k(\langle X\rangle)_{\|a\|}$ in $k(\langle X\rangle)$. Ist $\varrho > 0$, $F \in k(\langle X\rangle)_\varrho$, $a \in B_\varrho^n$, $\sigma = \varrho - \|a\|$, so gilt $\delta_a(F) \in k(\langle X\rangle)_\sigma$ ([1], § 2B), und daraus folgt für jedes $x \in B_\sigma^n$

$$\delta_x(\delta_a(F)) = \delta_{a+x}(F). \tag{1}$$

Bekanntlich ist $k[\langle X\rangle]$ ein regulärer Ring aus $\mathfrak{L}(k)$, und $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ist ein Parametersystem von $k[\langle X\rangle]$ (vgl. [1], (10. 7)). Die Systeme der Form

$$T = (T_1, \ldots, T_n) \qquad \begin{pmatrix} T_i = T_i(X) \in k[\langle X\rangle] \\ T_i(0) = 0, \ \det\left(\dfrac{\partial T_i}{\partial X_j}(0)\right) \neq 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

stellen also gerade die sämtlichen Parametersysteme von $k[\langle X\rangle]$ dar (vgl. § 1, (3)). Mit $\mathfrak{S}_n$ bezeichnen wir die Gruppe aller k-Automorphismen des Körpers $k(\langle X\rangle)$, welche Erweiterungen von k-Automorphismen von $k[\langle X\rangle]$ sind. Ist $\Phi \in \mathfrak{S}_n$, so ist $\Phi(X)$ genau wie X Parametersystem von $k[\langle X\rangle]$. Andererseits ergibt sich aus den elementaren Regeln über das Einsetzen von konvergenten Potenzreihen in konvergente Potenzreihen, und aus dem „Umkehrsatz" für Systeme konvergenter Potenzreihen ([1], (10. 10)), daß für jedes Parametersystem (2) von $k[\langle X\rangle]$ durch die Substitution $X \to T$ ein k-Automorphismus von $k[\langle X\rangle]$ und damit ein $\Phi \in \mathfrak{S}_n$ bestimmt ist, und daß es dabei zu jedem $\varrho > 0$ ein $\sigma > 0$ gibt mit $\Phi(k[\langle X\rangle]_\varrho) \leqq k[\langle X\rangle]_\sigma$. Ist σ hinreichend klein gewählt, so gibt es außerdem (wie man unter Verwendung der Einsetzungsregeln sofort nachprüft) zu jedem $b \in B_\sigma^n$ ein $\Phi_b \in \mathfrak{S}_n$, so daß für jedes $F \in k(\langle X\rangle)_\varrho$ gilt

$$\delta_b(\Phi(F)) = \Phi_b(\delta_{T(b)}(F)). \tag{3}$$

Wie in § 2 und § 3 sei nun K ein algebraischer Funktionenkörper vom Transzendenzgrad

$r \geqq 1$ über k, und es sei $n \leqq r$, $X = X^{(n)}$. Die k-Einbettung $\varphi: K \to k((X))$ aus $\mathfrak{S}_n^*$ (vgl. § 2) heißt *konvergent*, wenn $\varphi(K)$ in $k(\langle X\rangle)$ enthalten ist. In diesem Falle fassen wir φ auch als Abbildung von K in $k(\langle X\rangle)$ auf. Mit $\mathfrak{S}_n$ bezeichnen wir die Menge aller konvergenten $\varphi \in \mathfrak{S}_n^*$. Zwei Abbildungen φ und ψ aus $\mathfrak{S}_n$ heißen *äquivalent*, wenn es ein $\Phi \in \mathfrak{F}_n$ gibt mit $\psi = \Phi \circ \varphi$. Mit $\bar{\varphi}$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse von φ, und S_n (oder $S_n(K)$) sei die Menge aller $\bar{\varphi}(\varphi \in \mathfrak{S}_n)$. Ist $\varphi \in \mathfrak{S}_n$, so hängt der Ring $\bar{\beta}_n(\varphi) = \varphi^{-1}(k[[X]])$ (vgl. § 2) offenbar nur von $\bar{\varphi}$ ab; wir setzen $\bar{\beta}_n(\bar{\varphi}) = \bar{\beta}_n(\varphi)$ und können somit $\bar{\beta}_n$ auch als Abbildung von S_n in die Menge der Unterringe von K auffassen. Da $k[[X]]$ eine Vervollständigung von $k[\langle X\rangle]$ ist, gilt $k(\langle X\rangle) \cap k[[X]] = k[\langle X\rangle]$ ([3], S. 73, Cor. 4) und deshalb

$$\bar{\beta}_n(\bar{\varphi}) = \varphi^{-1}(k[\langle X\rangle]). \tag{4}$$

Es sei nun ein $\varphi \in \mathfrak{S}_n$ vorgegeben. Da K über k endlich erzeugt ist, gibt es zu φ ein $\varrho > 0$ mit $\varphi(K) \leqq k(\langle X\rangle)_\varrho$. Wir nennen ϱ einen *zulässigen Radius* von φ. Es sei $\tau = \varphi^{-1}(X)$. Ist dann $a \in B_\varrho^n$, so ist die Abbildung $\delta_a \circ \varphi$ definiert, und es gilt $(\delta_a \circ \varphi)(\tau_i) = a_i + X_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Daraus folgt, daß auch $\delta_a \circ \varphi$ zu $\mathfrak{S}_n$ gehört und daß für $a' \neq a$ $(a' \in B_\varrho^n)$ die Abbildung $\delta_{a'} \circ \varphi$ nicht äquivalent zu $\delta_a \circ \varphi$ ist. Durch $a \mapsto \overline{\delta_a \circ \varphi}$ wird also eine Bijektion $\varkappa_{(\varphi,\varrho)}$ von B_ϱ^n auf eine Untermenge $U_{(\varphi,\varrho)}$ von S_n geliefert. — Mit Λ_n bezeichnen wir die Menge aller Paare $\lambda = (\varphi, \varrho)$, wobei φ eine Abbildung aus $\mathfrak{S}_n$ und ϱ ein zulässiger Radius von φ ist. Für jedes $\lambda \in \Lambda_n$ ist $\varkappa_\lambda$ (nach der üblichen Konvention genauer: die Umkehrung von $\varkappa_\lambda$) eine *n-dimensionale Karte* von S_n (vgl. [6], (5. 1. 1.)).

(4. 1) Lemma. *Sei $\lambda, \mu \in \Lambda_n$. Dann sind die Karten $\varkappa_\lambda$ und $\varkappa_\mu$ analytisch verträglich.*

Beweis. Es sei $\lambda = (\varphi, \varrho)$, $\mu = (\psi, \sigma)$, $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$, $a \in B_\varrho^n$, $b \in B_\sigma^n$, $\varkappa_\lambda(a) = \varkappa_\mu(b)$. Dann gilt $\delta_a \circ \varphi = \Phi \circ \delta_b \circ \psi (\Phi \in \mathfrak{F}_n)$, und daraus ergibt sich für kleine $\| x \|$ nach (1) und (3) die Beziehung

$$\delta_{a+x} \circ \varphi = \delta_x \circ \delta_a \circ \varphi = \delta_x \circ \Phi \circ \delta_b \circ \psi = \Phi_x \circ \delta_{T(x)} \circ \delta_b \circ \psi = \Phi_x \circ \delta_{b+T(x)} \circ \psi$$

$(T = \Phi(X), \Phi_x \in \mathfrak{F}_n)$, und somit $(\varkappa_\mu^{-1} \circ \varkappa_\lambda)(a + x) = b + T(x)$. Es gibt also eine Umgebung von a in k^n, die ganz in $\varkappa_\lambda^{-1}(U_\lambda \cap U_\mu)$ liegt und auf der die Übergangsfunktion $\varkappa_\lambda^{-1} \circ \varkappa_\lambda$ analytisch ist. Das liefert aber nach Definition der Verträglichkeit ([6], (5. 1. 2)) die Behauptung.

Da jedes $\varphi \in \mathfrak{S}_n$ einen zulässigen Radius ϱ besitzt, überdecken die Mengen $U_\lambda (\lambda \in \Lambda_n)$ ganz S_n. Die Karten $\varkappa_\lambda$ bilden also einen analytischen Atlas von S_n und definieren damit auf S_n die Struktur einer *n-dimensionalen analytischen k-Mannigfaltigkeit* ([6], 5. 1. 5). Im folgenden sei S_n immer mit dieser Struktur versehen. Dann ist $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_n}$ eine Topologiebasis von S_n.

Bemerkung 1. Es ist unter den bisherigen Voraussetzungen nicht ausgeschlossen, daß S_n leer ist (Beispiel: $r = n = 1$, $k = \boldsymbol{R}$, $K = \boldsymbol{R}(\eta_1, \eta_2)$ mit $\eta_1^2 + \eta_2^2 + 1 = 0$). Ist dagegen der Grundkörper k algebraisch abgeschlossen, so ergibt sich aus der Beziehung $\mathfrak{S}_r = \mathfrak{S}_r^*$ (vgl. § 7) und aus der Bemerkung von § 3 (bei Berücksichtigung der Konvergenz der dort verwendeten Reihen (8)), daß die Mannigfaltigkeiten $S_n (1 \leqq n \leqq r)$ nicht leer sind.

Bemerkung 2. Die Elemente $\omega \in K$ können in folgender Weise als *meromorphe Funktionen* auf der Mannigfaltigkeit $S_n = S_n(K)$ interpretiert werden: Mit Hilfe der Karten von S_n läßt sich zunächst der Begriff einer auf S_n meromorphen „Funktion" auf den entsprechenden Begriff für offene Untermengen des k^n zurückführen. Dies läuft bei Verwendung der Konstruktionselemente von S_n darauf hinaus, daß eine auf S_n

meromorphe Funktion festgelegt werden kann als eine Familie

$$f = (f(\varphi))_{\varphi \in \mathfrak{S}_n} \qquad (f(\varphi) \in k(\langle X \rangle)) \tag{5}$$

mit folgenden beiden Eigenschaften: 1. Ist $\varphi \in \mathfrak{S}_n$, $\Phi \in \mathfrak{F}_n$, $\Phi \circ \varphi \in \mathfrak{S}_n$, so gilt $f(\Phi \circ \varphi) = \Phi(f(\varphi))$. 2. Ist $(\varphi, \varrho) \in \Lambda_n$, $f(\varphi) \in k(\langle X \rangle)_\varrho$, $x \in B_\varrho^n$, so gilt $f(\delta_x \circ \varphi) = \delta_x(f(\varphi))$. — Der Punkt $\overline{\varphi} \in S_n$ heißt „Regularitätsstelle" der meromorphen Funktion f, wenn $f(\varphi)$ in $k[\langle X \rangle]$ enthalten ist. In diesem Falle kann man durch $f(\overline{\varphi}) = (f(\varphi))(0)$ einen Funktionswert festlegen. Wählt man dann ein $\varrho > 0$ mit $(\varphi, \varrho) \in \Lambda_n$ und $f(\varphi) \in k[\langle X \rangle]_\varrho$, so sind alle Punkte aus $U_{(\varphi,\varrho)}$ Regularitätsstellen von f, und es gilt

$$f(\varkappa_{(\varphi,\varrho)}(x)) = (f(\varphi))(x) \qquad (x \in B_\varrho^n). \tag{6}$$

Die auf S_n meromorphen Funktionen bilden in natürlicher Weise eine k-Algebra $\mathfrak{M}(S_n)$, und nach den angegebenen Definitionen ist durch die Vorschrift

$$\vartheta_n(\omega) = (\varphi(\omega))_{\varphi \in \mathfrak{S}_n} \qquad (\omega \in K) \tag{7}$$

eine k-Einbettung $\vartheta_n : K \to \mathfrak{M}(S_n)$ definiert. Der Ring $\bar{\beta}_n(\overline{\varphi})$ besteht aus allen Elementen $\omega \in K$, für welche die Funktion $\vartheta_n(\omega)$ im Punkte $\overline{\varphi} \in S_n$ eine Regularitätsstelle hat.

§ 5. Vergleich mit den analytischen Gebilden

Es soll nun der Zusammenhang zwischen den in § 4 konstruierten Mannigfaltigkeiten $S_n(K)$ und den analytischen Gebilden im Sinne von Weierstraß dargelegt werden. Zu diesem Zwecke sei im folgenden $k = \boldsymbol{C}$, $n = 1$, $X = X^{(1)}$. Zur Definition der analytischen Gebilde betrachtet man nach H. Weyl ([18], § 2) die Menge $\mathfrak{W}$ aller Paare

$$E(X) = (E_1(X), E_2(X)) \qquad (E_i(X) \in \boldsymbol{C}(\langle X \rangle)), \tag{1}$$

für welche die Abbildung $x \mapsto E(x)$ bei Beschränkung auf hinreichend kleine $x \neq 0$ injektiv ist (kurz: lokal-injektiv ist). Zwei derartige Paare werden als äquivalent angesehen, wenn sie durch die Anwendung einer Abbildung $\Phi \in \mathfrak{F}_1$ auseinander hervorgehen. Die zugehörigen Äquivalenzklassen $\widetilde{E}$ heißen *Funktionselemente.* Man führt nun auf der Menge $W = \{\widetilde{E} \mid E \in \mathfrak{W}\}$ aller Funktionselemente durch Potenzreihenumbildungen eine analytische Struktur ein, und nennt dann die Zusammenhangskomponenten von W *analytische Gebilde.*

(5. 1) Lemma. *Es sei K ein algebraischer Funktionenkörper über $\boldsymbol{C}$ mit einem Erzeugendensystem der Form $\eta = (\eta_1, \eta_2)$. Ist dann $\psi : K \to \boldsymbol{C}(\langle X \rangle)$ eine $\boldsymbol{C}$-Einbettung, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Es gibt ein $\Phi \in \mathfrak{F}_1$ mit $\Phi \circ \psi \in \mathfrak{S}_1(K)$.*
2. *$\psi(K)$ enthält eine Potenzreihe vom Anfangsgrad 1 (also einen Parameter von $k[\langle X \rangle]$).*
3. *$E = \psi(\eta)$ liegt in $\mathfrak{W}$.*

Beweis. Die Äquivalenz von 1. und 2. ist klar. Ist dann q die kleinste positive ganze Zahl, die als Anfangsgrad einer Potenzreihe aus $\psi(K)$ auftritt, so bleibt zu zeigen, daß $q = 1$ äquivalent zu 3. ist. Es sei $F = a_q X^q + \cdots$ $(a_q \neq 0)$ eine Potenzreihe vom Anfangsgrad q aus $\psi(K)$. Dann liegt $\psi(K)$ im Bild von $\boldsymbol{C}(\langle X \rangle)$ unter der Substitution $X \to F$, denn anderenfalls könnte man mit Hilfe von F leicht eine Potenzreihe aus $\psi(K)$ konstruieren, die einen kleineren positiven Anfangsgrad als q hat. Ist also $q > 1$, so ist $x \mapsto E(x) = E^{\varrho}(F(x))$ ebenso wie $x \mapsto F(x) = (\sqrt[q]{a_q} \cdot x + \cdots)^q$ nicht lokal-injektiv. Ist

umgekehrt $x \mapsto E(x)$ nicht lokal-injektiv, so gilt dies wegen $F \in \psi\ (K) = \boldsymbol{C}(E_1, E_2)$ auch für $x \mapsto F(x)$, folglich ist $q > 1$.

Aus (5. 1) und der Definition der Mannigfaltigkeiten $S_1(K)$ bzw. W ergibt sich nun, daß durch die Zuordnung $\bar{\varphi} \mapsto \varphi\widetilde{(\eta)}$ $(\varphi \in \mathfrak{S}_1(K))$ jede Zusammenhangskomponente von $S_1(K)$ isomorph auf ein analytisches Gebilde abgebildet wird. Hat K den Transzendenzgrad $r = 1$, so ist $S_1(K)$ zusammenhängend, und man hat die in der Einleitung beschriebene Situation (vgl. auch § 7). Im Falle $r = 2$ dagegen ist $S_1(K)$ nicht zusammenhängend, vielmehr entspricht jeder Zusammenhangskomponente von $S_1(K)$ das analytische Gebilde einer transzendenten Funktion einer komplexen Veränderlichen und umgekehrt. Insbesondere gibt es in diesem Falle in $S_1(K)$ z. B. überabzählbar viele Zusammenhangskomponenten, die zur komplexen Ebene isomorph sind.

Bemerkung. Der angegebene Vergleich mit den analytischen Gebilden legt es nahe, auch unter den allgemeinen Voraussetzungen von § 4 für die dortige Konstruktion anstelle von $\mathfrak{S}_n(K)$ die größere Menge $\mathfrak{T}_n(K)$ aller k-Einbettungen $\psi: K \to k(\langle X^{(n)}\rangle)$ zu verwenden, bei denen $\psi(K)$ ein Parametersystem von $k[\langle X^{(n)}\rangle]$ (vgl. § 4, (2)) enthält. Wegen $\mathfrak{T}_n(K) = \{\Phi \circ \varphi \mid \Phi \in \mathfrak{H}_n, \varphi \in \mathfrak{S}_n(K)\}$ würde man dann (bis auf eine Auffüllung $\bar{\varphi} \mapsto \tilde{\varphi}$ der Äquivalenzklassen) dieselben Mannigfaltigkeiten erhalten, nur wäre die technische Durchführung der Konstruktion von § 4 etwas umständlicher.

§ 6. Arithmetische und topologische Eigenschaften der $S_n(K)$

Es sei k ein Körper mit einem nicht-diskreten vollständigen Absolutbetrag und K ein algebraischer Funktionenkörper vom Transzendenzgrad $r \geqq 1$ über k. Mit den in § 2 und § 4 eingeführten Bezeichnungen gilt für jedes $n \leqq r$:

(6. 1) Lemma. *Sei $Q \in R_n$. Durchläuft dann τ die Parametersysteme von Q, so sind entweder alle $\alpha_n(Q, \tau)$ divergent oder sie bilden ein $\bar{\varphi} \in S_n$.*

Beweis. Für ein spezielles τ sei $\varphi = \alpha_n(Q, \tau)$ konvergent. Ist dann σ ein weiteres Parametersystem von Q, so gilt $\sigma_i = \sum a_{i\nu}\tau^\nu$ $(i = 1, \ldots, n;\ a_{i\nu} \in k,\ \det(a_{ij}) \neq 0$, vgl. § 1, (3)) und $\varphi(\sigma_i) = \sum a_{i\nu} X^\nu$. Folglich ist $\varphi(\sigma)$ ein Parametersystem von $k[\langle X\rangle]$. Wie in § 4 bemerkt, gibt es dann ein $\Phi \in \mathfrak{H}_n$ mit $\Phi(\varphi(\sigma)) = X$, und nach Definition von α_n gilt nun $\Phi \circ \varphi = \alpha_n(Q, \sigma)$ und damit $\alpha_n(Q, \sigma) \in \bar{\varphi}$. Ist andererseits ein $\psi \in \bar{\varphi}$ gegeben, so gilt $\bar{\beta}_n(\bar{\psi}) = \bar{\beta}_n(\bar{\varphi}) = Q$ (vgl. (2. 1)); nach (2. 3) ist also $\sigma = \psi^{-1}(X)$ ein Parametersystem von Q, und es gilt $\psi = \alpha_n(Q, \sigma)$. Damit ist aber das Lemma bewiesen.

Bezeichnet man nun mit $R_n^{(0)}$ die Menge aller $Q \in R_n$, welche konvergente $\alpha_n(Q, \tau)$ liefern, so ist also durch $\bar{\alpha}_n(Q) = \overline{\alpha_n(Q, \tau)}$ eine Abbildung

$$\bar{\alpha}_n: R_n^{(0)} \to S_n \tag{1}$$

definiert, und nach (2. 1) gilt

$$\bar{\beta}_n(\bar{\alpha}_n(Q)) = Q \qquad (Q \in R_n^{(0)}). \tag{2}$$

Nach (2. 4) ist die Abbildung (1) im Falle $n = 1$ bijektiv. Ist k algebraisch-abgeschlossen und $r > 1$, so kann man unter Verwendung divergenter Potenzreihen leicht ein divergentes $\varphi \in \mathfrak{S}_1^*$ konstruieren. In diesem Falle gilt also $R_1^{(0)} \neq R_1$.

Im folgenden sollen zwei Punkte eines topologischen Raumes kurz *trennbar* heißen, wenn sie im Sinne des Hausdorffaxioms getrennt werden können. Es gilt zunächst

(6. 2) Satz. *S_1 ist Hausdorffsch.*

Beweis. Es seien P_1 und P_2 zwei beliebige Punkte aus S_1. Wie soeben bemerkt, gibt es dann Ringe $Q_i \in R_1^{(0)}$ mit $P_i = \bar{\alpha}_1(Q_i)$ $(i = 1, 2)$. Die diskreten Bewertungsringe Q_1 und Q_2 haben aber nach dem Approximationssatz für diskrete Bewertungen ([20], S. 45, Th. 18) einen gemeinsamen Parameter τ. Es sei $\varphi_i = \alpha_1(Q_i, \tau)$, und ϱ_i sei ein zulässiger Radius von φ_i $(i = 1, 2)$. Sind nun P_1 und P_2 nicht trennbar, so gibt es nach Definition der analytischen Struktur von S_1 Elemente $x_i \in B^1_{\varrho_i}$ $(i = 1, 2)$ und ein $\Phi \in \mathfrak{F}_1$ mit $\delta_{x_1} \circ \varphi_1 = \Phi \circ \delta_{x_2} \circ \varphi_2$. Wendet man beide Seiten dieser Gleichung auf τ an, so folgt $x_1 + X = \Phi(x_2 + X) = x_2 + \Phi(X)$ (mit $X = X^{(1)}$), also $x_1 = x_2$, $\Phi(X) = X$. Man hat also $\delta_{x_1} \circ \varphi_1 = \delta_{x_1} \circ \varphi_2$ und damit $\varphi_1 = \varphi_2$, $P_1 = P_2$. Punkte aus S_1, die nicht trennbar sind, stimmen also überein, d. h. S_1 ist Hausdorffsch.

Bemerkung 1. (6. 2) *überträgt sich nicht auf den Fall $n > 1$ (und $S_n \neq \emptyset$), vielmehr kann man in diesem Falle z. B. zu jedem Punkt $P_0 \in S_n$ eine unendliche Folge $(P_q)_{q \in N}$ voneinander verschiedener Punkte aus S_n konstruieren, von denen je zwei nicht trennbar sind*:

Sei $m \in N$, $m > 0$, $s \in k$, $|s| \leqq 1$. Dann wird durch die Substitution $X_1 \to X_1 X_2^m$ (und $X_i \to X_i$ für $i = 2, \ldots, n$) ein k-Monomorphismus von $k[\langle X \rangle]$ $(X = X^{(n)})$ in sich selbst erzeugt, dessen Erweiterung auf $k(\langle X \rangle)$ mit h_m bezeichnet werden soll. h_m bildet den Ring $k[\langle X \rangle]_{|s|}$ und damit den Körper $k(\langle X \rangle)_{|s|}$ in sich ab. Bezeichnet $h_m^{|s|}$ die Einschränkung von h_m auf $k(\langle X \rangle)_{|s|}$ und setzt man $d_s = \delta_{(0,s,0,\ldots,0)}$, so ist die Abbildung $d_s \circ h_m^{|s|}$ definiert und wird durch die Substitution

$$X_1 \to X_1(s + X_2)^m, \quad X_2 \to s + X_2 \tag{3}$$

geliefert. Ist $s \neq 0$, so folgt aus (3)

$$d_s \circ h_m^{|s|} = \Phi_{m,s} \circ d_s \text{ mit } \Phi_{m,s} \in \mathfrak{F}_n. \tag{4}$$

Es sei nun $(\varphi_0, \varrho) \in \Lambda_n$ mit $\bar{\varphi}_0 = P_0$, $\varrho \leqq 1$. Ferner sei $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n) = \varphi_0^{-1}(X)$. Setzt man

$$\varphi_m = h_m \circ \varphi_0, \tag{5}$$

so gilt $\varphi_m(\tau_1 \tau_2^{-m}) = X_1$, $\varphi_m(\tau_i) = X_i$ $(i = 2, \ldots, m)$, und damit $\varphi_m \in \mathfrak{S}_n$. Wegen $\varrho \leqq 1$ bildet aber h_m den Körper $k(\langle X \rangle)_\varrho$ in sich ab, folglich gilt sogar $(\varphi_m, \varrho) \in \Lambda_n$. Andererseits liegt $\varphi_0(\tau_1 \tau_2^{-m}) = X_1 X_2^{-m}$ (wegen $m > 0$) nicht in $k[\langle X \rangle]$, folglich gilt $\bar{\varphi}_m \neq \bar{\varphi}_0$. Aus (4) und (5) folgt

$$d_s \circ \varphi_m = \Phi_{m,s} \circ d_s \circ \varphi_0 \qquad (s \in B^1_\varrho,\ s \neq 0), \tag{6}$$

und daraus ergibt sich wegen $\Phi_{m,s} \in \mathfrak{F}_n$, daß $\bar{\varphi}_m$ und $\bar{\varphi}_0$ nicht trennbar sind. Für ein beliebiges $q \in N$ erhält man wegen $\varphi_{q+m} = h_m \circ \varphi_q$ durch dieselben Überlegungen, daß die Punkte $\bar{\varphi}_{q+m}$ und $\bar{\varphi}_q$ voneinander verschieden, aber nicht trennbar sind. Damit ist zu $P_0 = \bar{\varphi}_0$ eine Folge $(\bar{\varphi}_q)_{q \in N}$ des gesuchten Typs konstruiert. Es folgt weiter, daß sich aus der Überdeckung $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_n\}$ von S_n durch die offenen Hausdorffschen Räume U_λ keine endliche Überdeckung auswählen läßt, d. h. *S_n ist auch nicht quasi-kompakt.* — Es sei wie oben $(\varphi_0, \varrho) \in \Lambda_n$, $\varrho \leqq 1$. Wir setzen

$$\chi_s = d_s \circ \varphi_0, \quad \psi_s = h_1 \circ \chi_s \qquad (s \in B^1_\varrho). \tag{7}$$

Es sei $\varepsilon = \frac{1}{3}\varrho$. Ist dann $|s| < \varepsilon$, so ist 2ε zulässiger Radius von χ_s und ψ_s, und es gilt (vgl. (5), (6))

$$d_t \circ \psi_s = \Phi_{1,t} \circ \chi_{s+t} \qquad (0 < |t| < 2\varepsilon). \tag{8}$$

Da sich jedes $v \in B_\varepsilon^1$ mit $v \neq s$ in der Form $v = s + t$ $(0 < |t| < 2\varepsilon)$ darstellen läßt, folgt aus (8), daß für diese v der Punkt $\bar{\chi}_v$ in $U_{(\psi_s, 2\varepsilon)}$ liegt. Da jeweils $\bar{\chi}_v$ und $\bar{\psi}_v$ nicht trennbar sind, folgt

$$\bar{\psi}_v \notin U_{(\psi_s, 2\varepsilon)} \qquad (v \in B_\varepsilon^1,\ v \neq s). \tag{9}$$

Durch $s \mapsto \bar{\psi}_s$ ist also eine Bijektion von B_ε^1 auf eine diskrete Untermenge von S_n gegeben. Nun enthält B_ε^1 aber genau wie der nicht-diskrete vollständige Körper k selbst überabzählbar viele Elemente. *Daraus folgt, daß die Topologie von S_n keine abzählbare Basis hat*[2]).

Bemerkung 2. *Wir wollen jetzt ein Beispiel konstruieren, welches zeigt, daß es im Falle $1 < n < r$ (im Gegensatz zu $n = 1$ (s. o.) und $n = r$ (s. (7. 1))) auf der Mannigfaltigkeit $S_n(K)$ (und sogar schon auf einer festen Zusammenhangskomponente von $S_n(K)$) zwei verschiedene Punkte $\bar{\varphi}$ und $\bar{\psi}$ geben kann mit $\bar{\beta}_n(\bar{\varphi}) = \bar{\beta}_n(\bar{\psi})$.*

Hierzu sei $k = \boldsymbol{C}$, und K werde vom algebraisch unabhängigen System $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ über $\boldsymbol{C}$ erzeugt. Im Potenzreihenring $\boldsymbol{C}[\langle X^{(2)}\rangle] = \boldsymbol{C}[\langle X_1, X_2\rangle]$ setzen wir zur Vereinfachung der Schreibweise $X_1 = X$, $X_2 = Y$. Es sei

$$g(X) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} X^{p!}, \quad h(Y) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} Y^p, \quad l(Y) = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{p} Y^p$$

und

$$f(X, Y) = g(X) \cdot h(Y) \cdot l(Y) - 1. \tag{10}$$

Es gilt also $h(y) = \exp(y)$ $(y \in \boldsymbol{C})$, $(l(y))^2 = 1 + y$ $(|y| < 1)$, $f(0, 0) = 0$. Ferner gilt

(6. 3) Lemma. *$F_i(\eta)$ $(i = 1, 2)$ seien nicht-verschwindende teilerfremde Polynome aus $\boldsymbol{C}[\eta]$. Dann sind die Potenzreihen $F_i^*(X, Y) = F_i(X, Y, f(X, Y))$ $(i = 1, 2)$ teilerfremd in $\boldsymbol{C}[\langle X, Y\rangle]$.*

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß in $\boldsymbol{C}[\eta]$ nach der elementaren Teilbarkeitslehre eine Beziehung der Form

$$R(\eta_1, \eta_2) = A_1(\eta) \cdot F_1(\eta) + A_2(\eta) \cdot F_2(\eta) \tag{11}$$

mit $R(\eta_1, \eta_2) \neq 0$ besteht. Im Widerspruch zur Behauptung sei nun $H(X, Y)$ eine Nicht-Einheit in $\boldsymbol{C}[\langle X, Y\rangle]$, die beide Potenzreihen $F_i^*(X, Y)$ $(i = 1, 2)$ teilt. Nach der Nullstellentheorie der konvergenten Potenzreihen von zwei Veränderlichen gibt es dann entweder eine konvergente Potenzreihe $q(X) = c_1 X + c_2 X^2 + \cdots$ und eine natürliche Zahl $s \geqq 1$ mit $H(X^s, q(X)) = 0$, oder es gilt $H(0, Y) = 0$. Wir betrachten zunächst den ersten Fall. Dann ist $F_i(X^s, q(X), f(X^s, q(X))) = 0$ $(i = 1, 2)$, jedoch gilt wegen der vorausgesetzten Teilerfremdheit der $F_i(\eta)$ $(i = 1, 2)$ für wenigstens ein i die Beziehung $F_i(X^s, q(X), \eta_3) \neq 0$. Nach (11) ist ferner $R(X^s, q(X)) = 0$; andererseits gilt $R(X^s, Y) \neq 0$. Es folgt zunächst, daß $q(X)$ algebraisch über dem Körper $\boldsymbol{C}(X)$ ist, und sodann, daß auch

$$f(X^s, q(X)) = g(X^s) \cdot h(q(X)) \cdot l(q(X)) - 1$$

algebraisch über $\boldsymbol{C}(X)$ ist. Insbesondere sind die in einer Umgebung von $x = 0$ definierten Funktionen $f(x^s, q(x))$, $h(q(x))$ und $l(q(x))$ über den Einheitskreis der x-Ebene hinaus fortsetzbar. Wegen $h(q(X)) \cdot l(q(X)) \neq 0$ steht dies aber im Widerspruch zu

[2]) Vgl. zu dem vorstehenden Beweis auch die Konstruktion von Hausdorffschen Mannigfaltigkeiten ohne abzählbare Basis bei Calabi und Rosenlicht [7].

der Tatsache, daß die durch eine Lückenreihe definierte Funktion $g(x^s)$ nicht über den Einheitskreis hinaus fortsetzbar ist (vgl. etwa [2], S. 182). — Wir haben jetzt noch den Fall $H(0, Y) = 0$ zu betrachten. Hier ergibt sich in ähnlicher Weise, daß

$$f(0, Y) = h(Y) \cdot l(Y) - 1$$

algebraisch über $\boldsymbol{C}(Y)$ ist, im Widerspruch zur Wahl von $h(Y)$ und $l(Y)$. Damit ist das Lemma bewiesen.

Nun ist (wie sich auch aus (6. 3) ergibt) die Potenzreihe $f(X, Y)$ transzendent über $\boldsymbol{C}(X, Y)$. Folglich liefert die Substitution $\eta_1 \to X$, $\eta_2 \to Y$, $\eta_3 \to f(X, Y)$ ein $\varphi \in \mathfrak{S}_2(K)$. Ist dann $Q = \bar{\beta}_2(\bar{\varphi})$, so gilt (bei Verwendung der in § 3 eingeführten Bezeichnungen) die Beziehung $Q \supseteq Q(0, \eta)$. Andererseits ergibt sich aus (6. 3) und der Gleichung $f(0, 0) = 0$, daß kein Element aus $K - Q(0, \eta)$ zu Q gehört. Es gilt also $\bar{\beta}_2(\bar{\varphi}) = Q(0, \eta)$ (und damit $\bar{\beta}_2(\bar{\varphi}) \notin R_2(K)$, vgl. mit (2. 3)). Dieselbe Überlegung kann man mit der durch $\eta_1 \to X$, $\eta_2 \to Y$, $\eta_3 \to -f(X, Y)$ bestimmten Abbildung $\psi \in \mathfrak{S}_2(K)$ durchführen; insbesondere gilt ebenfalls $\bar{\beta}_2(\bar{\psi}) = Q(0, \eta)$. Dagegen ist offenbar $\bar{\varphi} \neq \bar{\psi}$. Nach Wahl von $g(X)$, $h(Y)$ und $l(Y)$ läßt sich außerdem das Funktionentripel $(x, y, f(x, y))$ ($|x| < 1, |y| < 1$) durch analytische Fortsetzung längs des Kreises $x = 0$, $|y + 1| = 1$ in das Funktionentripel $(x, y, -f(x, y))$ überführen. Nach Definition der Mannigfaltigkeit $S_2(K)$ liegen also $\bar{\varphi}$ und $\bar{\psi}$ auf derselben Zusammenhangskomponente von $S_2(K)$.

§ 7. Kennzeichnung von $S_r(K)$ durch algebraische Varietäten

Es sei k ein Körper mit einem nicht-diskreten vollständigen Absolutbetrag und K ein algebraischer Funktionenkörper vom Transzendenzgrad $r \geqq 1$ über k. Es soll dann die Mannigfaltigkeit $S_r = S_r(K)$ untersucht werden.

Zur Vorbereitung vergleichen wir zunächst die in § 3 betrachtete k-Topologie (von k^m, $V(\eta)$, $\mathfrak{G}$) mit der Betragstopologie (§ 4), welche in derselben Weise wie die k-Topologie von den affinen Räumen auf die Varietäten $V(\eta)$ und auf $\mathfrak{G}$ übertragen werde. Zur Unterscheidung sprechen wir im folgenden im Falle der k-Topologie von k-offen, k-stetig usw., während sich topologische Ausdrücke ohne Zusatz auf die Betragstopologie beziehen sollen. Die k-offenen Basismengen $D(P)$ (§ 3, (2)) sind auch offen, folglich ist die Betragstopologie feiner als die k-Topologie. Da außerdem rationale Abbildungen $a \mapsto F(a) \in k^p$ ($a \in D(F_0) \subseteq k^m$, vgl. (3. 2)) auch stetig sind, übertragen sich alle topologischen Resultate von § 3 (insbesondere (3. 2) und (3. 3)) auf die Betragstopologie.

Es ist unser Ziel, auf dem offenen Unterraum $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$ eine analytische Struktur zu erklären und zu zeigen, daß $\mathfrak{G}'$ dann im wesentlichen mit der Mannigfaltigkeit S_r übereinstimmt. Zu diesem Zweck betrachten wir zunächst ein festes $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m) \in \Gamma$. Wir zeigen, daß $V'(\eta)$ eine r-dimensionale Untermannigfaltigkeit von k^m ist (vgl. [6], (5. 8. 11)) und konstruieren dabei gleichzeitig gewisse Karten $\varkappa_\lambda (\lambda \in \Lambda_r$; vgl. § 4): Y, H_η und $\mathfrak{P}_\eta$ mögen die zu Beginn von § 3 angegebene Bedeutung haben. Ferner sei $a = (a_1, \ldots, a_m)$ ein Punkt aus $V'(\eta)$ und $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_r)$ ein Parametersystem von $Q(a, \eta)$. Wir führen nun den Ring $Q(a, Y) = \{P_1(Y) \cdot (P_2(Y))^{-1} \mid P_2(a) \neq 0\}$ ein; $Q(a, Y)$ ist ein regulärer lokaler Ring mit dem Parametersystem $Y - a = (Y_1 - a_1, \ldots, Y_m - a_m)$. Die Substitution $Y \to \eta$ bestimmt einen k-Homomorphismus H von $Q(a, Y)$ auf $Q(a, \eta)$ mit dem Kern $Q(a, Y) \cdot \mathfrak{P}_\eta$. Wie aus [20], S. 303, Th. 26 folgt, gibt es in $Q(a, Y)$ ein Parametersystem $T = (T_1, \ldots, T_m)$, so daß H durch die Substitution

$$(1) \qquad T_i \to \tau_i \ (i = 1, \ldots, r), \quad T_i \to 0 \ (i = r + 1, \ldots, m)$$

geliefert wird. Es seien $T_h(Y-a) = \sum_\mu c_{h\mu}(Y-a)^\mu$ (bzw. $Y_j(T) = \sum_\mu d_{j\mu} T^\mu$) die Potenzreihendarstellungen der T_h durch die $Y_j - a_j$ (bzw. der Y_j durch die T_h; $h, j = 1, \ldots, m$). Dann gilt zunächst

$$\eta_j = H(Y_j) = Y_j(\tau_1, \ldots, \tau_r, 0, \ldots, 0). \tag{2}$$

Die Potenzreihen $T_h(Y-a)$ sind rational in $Y-a$ und deshalb konvergent. Folglich gibt es nach [1], (10. 10) ein $\varrho > 0$ und eine Umgebung U_ϱ von a in k^m, so daß (bei sinngemäßer Übertragung der zu Beginn von § 4 eingeführten Bezeichnungen)

$$Y_j(T) \in k[\langle T\rangle]_\varrho \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{3}$$

gilt, und daß durch

$$t \mapsto Y(t), \quad y \mapsto T(y-a) \qquad (t \in B_\varrho^m, y \in U_\varrho) \tag{4}$$

zueinander inverse analytische Abbildungen gegeben sind. Nach Wahl von T erzeugen $\mathfrak{P}_\eta$ und $(T_{r+1}, \ldots, T_m)$ in $k[\langle Y-a\rangle] = k[\langle T\rangle]$ dasselbe Ideal, folglich gilt (da außerdem $V'(\eta)$ offen in $V(\eta)$ ist) bei hinreichend kleinem ϱ

$$V'(\eta) \cap U_\varrho = \{y \in U_\varrho \mid T_{r+1}(y-a) = \cdots = T_m(y-a) = 0\}. \tag{5}$$

Wir setzen nun

$$\varphi = \alpha_r(Q(a, \eta), \tau), \tag{6}$$

$$E_j = \varphi(\eta_j)\ (j = 1, \ldots, m), \quad E = (E_1, \ldots, E_m). \tag{7}$$

Nach (2) gilt dann $E_j(X) = Y_j(X_1, \ldots, X_r, 0, \ldots, 0)$ (mit $X = (X_1, \ldots, X_r)$); aus (3) ergibt sich also

$$E_j(X) \in k[\langle X\rangle]_\varrho \tag{8}$$

und damit

$$\varphi(K) \subseteq k(\langle X\rangle)_\varrho. \tag{9}$$

Insbesondere gilt

$$\lambda = (\varphi, \varrho) \in \Lambda_n. \tag{10}$$

Nach (4) und (5) ist ferner durch

$$x \mapsto E(x) \qquad (x \in B_\varrho^r) \tag{11}$$

ein Homöomorphismus von B_ϱ^r auf $V'(\eta) \cap U_\varrho$ gegeben. Nach Konstruktion gilt $a_j = Y_j(0) = E_j(0)$ und damit

$$E(0) = a. \tag{12}$$

Wegen $((\delta_x \circ \varphi)(\eta))(0) = E(x)$ bildet $\delta_x \circ \varphi$ den regulären lokalen Ring $Q(E(x), \eta)$ in den Ring $k[\langle X\rangle]$ ab (vgl. den Beweis von (3. 1)), ferner gilt $(\delta_x \circ \varphi)(\tau - x) = X$. Man erhält also nach (2. 2)

$$\delta_x \circ \varphi = \alpha_r(Q(E(x), \eta), \tau - x). \tag{13}$$

Dies liefert aber nach Definition von $\varkappa_\lambda$, $\varkappa_\eta$ und $\bar{\alpha}_r$

$$\varkappa_\lambda(x) = \bar{\alpha}_r(\varkappa_\eta(E(x))) \qquad (x \in B_\varrho^r). \tag{14}$$

Durchläuft nun a ganz $V'(\eta)$, so ergibt sich nach (4) und (5), daß $V'(\eta)$ tatsächlich eine r-dimensionale Untermannigfaltigkeit von k^m ist ([6], (5. 8. 3)) und daß dann die (zu

den verschiedenen in Frage kommenden Tripeln (a, τ, ϱ) gehörigen) Abbildungen (11) einen Atlas von $V'(\eta)$ liefern. Vermöge $\varkappa_\eta$ (vgl. (3. 3)) transportieren wir die analytische Struktur von $V'(\eta)$ auf die offene Untermenge $\mathfrak{V}'(\eta) = \varkappa_\eta(V'(\eta))$ von $\mathfrak{G}'$. Ist auch $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_p) \in \Gamma$, so induzieren $\varkappa_\eta$ und $\varkappa_\zeta$ auf dem Durchschnitt $\mathfrak{V}'(\eta) \cap \mathfrak{V}'(\zeta)$ dieselbe analytische Struktur, da die (k-lokal definierten) Übergangsfunktionen (7) von § 3 rational und damit analytisch sind. Die $\mathfrak{V}'(\eta)$ $(\eta \in \Gamma)$ fügen sich also auf $\mathfrak{G}'$ zu einer r-dimensionalen analytischen Mannigfaltigkeit zusammen ([6], (5. 2. 4)), und dann liefern die (jeweils zu η, a, τ, ϱ gehörigen) Abbildungen vom Typ

$$x \mapsto \varkappa_\eta(E(x)) \qquad (x \in B_\varrho^r) \tag{15}$$

einen Atlas von $\mathfrak{G}'$.

Andererseits ergibt sich nun (wegen (9)) aus (3. 1), daß

$$R_r^{(0)} = \mathfrak{G}', \quad \mathfrak{S}_r = \mathfrak{S}_r^* \tag{16}$$

gilt und daß damit (vgl. § 6, (1), (2)) $\bar{\alpha}_r$ eine Bijektion von $\mathfrak{G}'$ auf S_r mit der Umkehrung $\bar{\beta}_r$ ist. Formel (14) liefert jetzt nach Definition der analytischen Struktur von $\mathfrak{G}'$ die gesuchte Kennzeichnung der Mannigfaltigkeit S_r:

(7. 1) Satz. *$\bar{\alpha}_r$ ist ein analytischer Isomorphismus von $\mathfrak{G}'$ auf S_r mit der Umkehrung $\bar{\beta}_r$.*

Im folgenden nehmen wir an, daß der (nicht-diskrete vollständige) Grundkörper k *algebraisch abgeschlossen* ist. Wir beweisen zunächst einige Hilfssätze über $V(\eta)$ und $\mathfrak{G}$, die wir später vermöge (7. 1) auf S_r anwenden.

(7. 2) Lemma. *Sei $\eta \in \Gamma$, $a \in V(\eta)$, $P \in k[Y]$, $P(\eta) \neq 0$. Dann gibt es auf $V(\eta)$ in jeder Umgebung U von a einen Punkt y mit $P(y) \neq 0$.*

Beweis. Mit den weiter oben eingeführten Bezeichnungen gilt

$$\mathfrak{P}_\eta \subseteq k[Y] \cdot (Y - a) \quad P \notin \mathfrak{P}_\eta,$$

und deshalb $P \notin Q(a, Y) \cdot \mathfrak{P}_\eta$. Folglich liegt P auch nicht im Radikal von $k[\langle Y - a\rangle] \cdot \mathfrak{P}_\eta$ (vgl. etwa [20], S. 269, Cor. 1). Ist nun U^* eine Umgebung von a in k^m mit $U^* \cap V(\eta) \subseteq U$, so gibt es nach dem Hilbert-Rückertschen Nullstellensatz ([1], (30. 12)) in U^* ein y mit $P(y) \neq 0$ und $F(y) = 0$ für alle $F \in \mathfrak{P}_\eta$. Die letztere Eigenschaft bedeutet, daß y in $V(\eta)$ und damit in U liegt.

(7. 3) *In $\mathfrak{G}$ ist jede nicht-leere k-offene Teilmenge $\mathfrak{H}$ dicht. Insbesondere ist $\mathfrak{G}'$ dicht in $\mathfrak{G}$.*

Zum Beweis der ersten Behauptung kann man annehmen, daß $\mathfrak{H}$ in einem geeigneten $\varkappa_\zeta(V(\zeta))$ liegt. Sodann zeigt man mit Hilfe von (3.2) und (7. 2) leicht, daß ein beliebig vorgegebener Punkt $Q(a, \eta) \in \mathfrak{G}$ Berührungspunkt von $\mathfrak{H}$ ist. Die zweite Behauptung folgt anschließend aus der Bemerkung von § 3.

(7. 4) *Sei $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{G}$. Dann sind äquivalent:*

1. *Es gibt ein $Q \in \mathfrak{G}$ mit $Q \supseteq Q_1$, $Q \supseteq Q_2$.*
2. *Es gibt eine Stelle von K mit Werten in k, welche die Resthomomorphismen $Q_1 \to k$ und $Q_2 \to k$ fortsetzt.*
3. *Q_1 und Q_2 sind nicht trennbar in $\mathfrak{G}$.*

Beweis. Mit den Bezeichnungen von (3. 2) sei $Q_1 = Q(a, \eta)$, $Q_2 = Q(b, \zeta)$. Gilt dann für die zum $(m + p)$-Tupel $(\eta, \zeta) \in \Gamma$ gehörige Varietät $V(\eta, \zeta)$ die Beziehung

4. $(a, b) \in V(\eta, \zeta)$,

so folgt die Aussage 1. mit $Q = Q((a, b), (\eta, \zeta))$. Ist 1. erfüllt, so setzt der Resthomo-

morphismus von Q die Resthomomorphismen von Q_1 und Q_2 fort, und dann folgt 2. aus [20], S. 14, Cor. 3. Aus 2. folgt offenbar wieder 4.; es bleibt also zu zeigen, daß 3. und 4. äquivalent sind. Zunächst sei 4. erfüllt, und es sei $\mathfrak{U}_1$ (bzw. $\mathfrak{U}_2$) eine beliebige Umgebung von Q_1 (bzw. Q_2) in $\mathfrak{G}$. Dann ist $U_1 = \varkappa_\eta^{-1}(\mathfrak{U}_1)$ (bzw. $U_2 = \varkappa_\zeta^{-1}(\mathfrak{U}_2)$) eine Umgebung von a in $V(\eta)$ (bzw. von b in $V(\zeta)$). $V(\eta, \zeta)$ ist im Unterraum $V(\eta) \times V(\zeta)$ von k^{m+p} enthalten, folglich ist $W = (U_1 \times U_2) \cap V(\eta, \zeta)$ eine Umgebung von (a, b) in $V(\eta, \zeta)$. Wir wählen nun Systeme der Form (3) und (4) von § 3. Nach (7. 2) gibt es dann ein $(a', b') \in W$ mit $F_0(a') \cdot G_0(b') \neq 0$. Es folgt $b' = F(a'), a' = G(b')$ und damit nach (3. 2) $Q(a', \eta) = Q(b', \zeta)$. Dieser Ring liegt aber nach Konstruktion in $\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2$, und daraus folgt nach Wahl der $\mathfrak{U}_i$, daß 3. erfüllt ist. — Es sei nun umgekehrt 4. nicht erfüllt. Wir bemerken zunächst, daß die Varietät $V(\eta, \zeta)$ k-abgeschlossen und deshalb abgeschlossen in k^{m+p} (und in $V(\eta) \times V(\zeta)$) ist. Folglich gibt es Umgebungen U_1 von a in $V(\eta)$ und U_2 von b in $V(\zeta)$, so daß für alle $(a', b') \in U_1 \times U_2$ die Beziehung $(a', b') \notin V(\eta, \zeta)$ und damit erst recht die Beziehung $Q(a', \eta) \neq Q(b', \zeta)$ erfüllt ist. Die Umgebungen (vgl. (3. 3)) $\mathfrak{U}_1 = \varkappa_\eta(U_1)$ und $\mathfrak{U}_2 = \varkappa_\zeta(U_2)$ von Q_1 und Q_2 haben also einen leeren Durchschnitt, d. h. 3. ist nicht erfüllt. Damit ist (7. 4) vollständig bewiesen.

Da $\mathfrak{G}'$ offener Unterraum von $\mathfrak{G}$ ist, ergibt sich aus (7. 4), (7. 1) und der Bemerkung 2 von § 4:

(7. 5) Satz. *Die Punkte $\bar{\varphi}$ und $\bar{\psi}$ aus $S_r(K)$ sind genau dann nicht trennbar, wenn es eine Stelle von $\vartheta_r(K)$ mit Werten in k gibt, welche die k-Homomorphismen*

$$f \mapsto f(\bar{\varphi}) \quad (f \in \vartheta_r(\bar{\beta}_r(\bar{\varphi})))$$

und

$$g \mapsto g(\bar{\psi}) \quad (g \in \vartheta_r(\bar{\beta}_r(\bar{\psi})))$$

fortsetzt.

Im Falle $k = \boldsymbol{C}$ können wir schließlich unter Verwendung stärkerer Hilfsmittel aus der Theorie der analytischen Mengen beweisen:

(7. 6) Satz. *K sei ein algebraischer Funktionenkörper von r Veränderlichen über $\boldsymbol{C}$. Dann ist $S_r = S_r(K)$ zusammenhängend, und ϑ_r ist ein Isomorphismus von K auf den Körper $\mathfrak{M}(S_r)$ aller auf S_r meromorphen Funktionen.*

Beweis. Es sei $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ ein zunächst beliebiges System aus Γ. Dann ist $V'(\eta)$ nicht-leer (§ 3, Bemerkung) und zusammenhängend ([1], (37. 5)), und $\varkappa_\eta(V'(\eta))$ ist dicht in $\mathfrak{G}'$ ((3. 3), (7. 3)). Folglich ist $\mathfrak{G}'$ und damit nach (7. 1) auch S_r zusammenhängend. — Zum Beweis der zweiten Behauptung ist zu zeigen, daß es zu jedem $f = (f(\varphi))_{\varphi \in \mathfrak{S}_r}$ aus $\mathfrak{M}(S_r)$ ein $\omega \in K$ gibt mit $f = \vartheta_r(\omega)$ (vgl. § 4, Bemerkung 2). Nun induziert f nach (7. 1) und nach der Definition der analytischen Struktur von $\mathfrak{G}'$ auf $V'(\eta)$ eine meromorphe Funktion f'_η. Ist $V(\eta)$ normal (d. h. sind alle Ringe aus $\varkappa_\eta(V(\eta))$ normal), so ist $V(\eta)$ auch analytisch normal ([20], Chap. VIII, § 13; [1], (36. 7)), folglich läßt sich f'_η zu einer auf ganz $V(\eta)$ meromorphen Funktion f_η fortsetzen ([14], S. 133, Th. 3 in Verbindung mit S. 115, Th. 2). Nun kann man η so wählen, daß auch der projektive Abschluß W von $V(\eta)$ normal ist (also durch Verleimen von $V(\eta)$ mit m weiteren normalen affinen Varietäten der Form $V(\eta^{(i)})$ $(\eta^{(i)} \in \Gamma,\ i = 1, \ldots, m)$ aufgebaut werden kann, vgl. [20], S. 128). Die Funktionen $f_\eta, f_{\eta(1)}, \ldots, f_{\eta(m)}$ setzen sich zu einer auf ganz W meromorphen Funktion g zusammen, und g ist nach einem Satz von Chow ([9], Th. VII, Cor.) *rational*. Kehrt man zum affinen $V(\eta)$ zurück, so gibt es insbesondere ein $a \in V'(\eta)$, ein $P(Y) \in Q(a, Y)$ und eine Umgebung U von a in $V'(\eta)$, derart, daß f_η und

P in U nur Regularitätsstellen haben und daß die Beziehung

$$f_\eta(y) = P(y) \qquad (y \in U) \tag{17}$$

gilt. Wir wählen nun ein Parametersystem τ von $Q(a, \eta)$ und stellen die durch (6) bis (14) beschriebene Situation her. Bei hinreichend kleinem ϱ folgt dann aus (17)

$$f_\eta(E(x)) = P(E(x)) \qquad (x \in B_\varrho^r). \tag{18}$$

Die linke Seite von (18) ist nach Definition von f_η gleich $f(\bar{\alpha}_r[\varkappa_\eta(E(x))])$ und damit nach (14) gleich $f(\varkappa_\lambda(x))$ und damit schließlich nach § 4, (6) gleich $(f(\varphi))(x)$. Der Identitätssatz für Potenzreihen liefert dann

$$f(\varphi) = P(E). \tag{19}$$

Setzt man $\omega = P(\eta)$, so gilt andererseits $\varphi(\omega) = P(\varphi(\eta)) = P(E)$ (vgl. (7)); man erhält also

$$f(\varphi) = \varphi(\omega). \tag{20}$$

Da S_r zusammenhängend ist, gilt dann aber die Beziehung (20) für alle $\varphi \in \mathfrak{S}_r$, d. h. es ist tatsächlich $f = \vartheta_r(\omega)$.

Literatur

[1] *S. S. Abhyankar*, Local analytic geometry, New York-London 1964.

[2] *H. Behnke* und *F. Sommer*, Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, 2. Aufl., Berlin-Göttingen-Heidelberg 1962.

[3] *N. Bourbaki*, Algèbre commutative, Chap. 3/4, Paris 1961.

[4] *N. Bourbaki*, Algèbre commutative, Chap. 5/6, 1964.

[5] *N. Bourbaki*, Topologie générale, Chap. 1/2, 3. Aufl., Paris 1961.

[6] *N. Bourbaki*, Variétés différentielles et analytiques, Fasc. de rés. Paris 1967.

[7] *E. Calabi* and *M. Rosenlicht*, Complex analytic manifolds without countable base. Proc. Amer. Soc. **4** (1953), 335—340.

[8] *C. Chevalley*, Introduction to the theory of algebraic functions of one variable. New York, Amer. Math. Soc. 1951.

[9] *W. L. Chow*, On compact complex analytic varieties. Amer. J. Math. **71** (1949), 893—914.

[10] *R. Dedekind* und *H. Weber*, Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen. J. reine ang. Math. **92** (1882), 181—290 oder Dedekind, Gesammelte math. Werke, Bd. I, Braunschweig 1930, S. 239—350 (mit Erläuterungen von *E. Noether*).

[11] *M. Heins*, Complex function theory. New York-London 1968.

[12] *W. Krull*, Dimensionstheorie in Stellenringen, J. reine angew. Math. **179** (1938), 204—226.

[13] *M. Nagata*, Local rings, New York-London 1962.

[14] *R. Narasimhan*, Introduction to the theory of analytic spaces, Berlin-Heidelberg-New York 1966.

[15] *P. Samuel*, Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.

[16] *B. L. van der Waerden*, Algebra, Bd. I, 5. Aufl., Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960.

[17] *A. Weil*, Foundations of algebraic geometry, 2. Aufl., Providence, Amer. Math. Soc. 1962.

[18] *H. Weyl*, Die Idee der Riemannschen Fläche, 3. Aufl., Stuttgart 1955.

[19] *O. Zariski* and *P. Samuel*, Commutative algebra, Bd. I, Princeton 1958.

[20] *O. Zariski* and *P. Samuel*, Commutative algebra, Bd. II, 1960.

II. Mathematisches Institut der Freien Universität, 1 Berlin 33, Königin-Luise-Straße 24—26

Eingegangen 2. April 1969

Bemerkungen zur Theorie der L_p-Räume

Von *Peter Werner* in Stuttgart

Herrn Professor Dr. Wolfgang Krull zum 70. Geburtstag

---

§ 1. Einleitung

Eine wichtige Anwendung der zu Beginn dieses Jahrhunderts von Henri Lebesgue entwickelten Integrationstheorie [8] besteht darin, daß die Normen

$$\|f\|_p = [\int |f|^p \, dx]^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \leqq p < \infty) \tag{1.1}$$

zu vollständigen Funktionenräumen, den sogenannten L_p-Räumen, führen, falls man die im Mittelpunkt der klassischen Analysis stehende Menge der stetigen Funktionen zum Bereich der Lebesgue-integrierbaren Funktionen erweitert und das in (1.1) auftretende Integral im Lebesgueschen Sinn interpretiert. Hieraus ergaben sich bedeutende Konsequenzen für verschiedene Zweige der Analysis, zum Beispiel für die Theorie der Fourierreihen und Fourierintegrale, die Theorie der partiellen Differentialgleichungen und die Spektraltheorie.

Die um 1940 von Laurent Schwartz entwickelte Theorie der Distributionen [12] führte zu einer einheitlichen Methode zur Erweiterung klassischer Funktionenbereiche. Ihr Grundgedanke besteht darin, neben den klassischen Funktionen auch gewisse lineare Funktionale auf einem geeigneten, aus klassischen Funktionen bestehenden Testraum, etwa auf dem Raum C_0^∞ aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Support zu untersuchen. Wie L. Schwartz zeigte, lassen sich die Grundoperationen der klassischen Analysis in natürlicher Weise auf Distributionen ausdehnen.

Aus der Schwartzschen Theorie der Distributionen ergeben sich neue Gesichtspunkte für die Theorie der Lebesgue-integrierbaren Funktionen. Jede Lebesgue-integrierbare Funktion u erzeugt ein lineares Funktional F_u auf C_0^∞ durch

$$F_u\varphi = \int u\varphi \, dx. \tag{1.2}$$

Es zeigt sich, daß F_u eine Distribution im Schwartzschen Sinn ist und daß zwei Lebesgue-integrierbare Funktionen genau dann die gleiche Distribution erzeugen, falls sich ihre Werte höchstens auf einer Menge vom Lebesgueschen Maß 0 unterscheiden, d. h. falls sie äquivalent im Sinn der Theorie von Lebesgue sind. Dieser Sachverhalt legt die Frage nahe, ob es nicht möglich ist, gewisse Teile der Lebesgueschen Theorie mit den Methoden der durch ihre begriffliche Einfachheit besonders bestechenden Distributionentheorie zu behandeln. Einen ersten Schritt in dieser Richtung habe ich in [14] unternommen.

Dort wurden die Grundzüge der Theorie des Hilbert-Raumes L_2 unter distributionentheoretischen Gesichtspunkten diskutiert. Insbesondere wurden die Elemente von L_2 nicht als Äquivalenzklassen Lebesgue-integrierbarer Funktionen wie in der klassischen Lebesgueschen Theorie, sondern als lineare Funktionale auf C_0^∞ eingeführt. Die Definition der Grundoperationen in L_2 (wie Differentiation, Fourier-Transformation, Translation) erfolgte nach dem Vorbild der Distributionentheorie. Es zeigte sich, daß man unter diesem Gesichtspunkt wesentliche Teile der Theorie des Raumes L_2 und der zugehörigen Sobolev-Räume entwickeln kann, ohne Ergebnisse und Methoden der Lebesgueschen Maß- und Integrationstheorie heranzuziehen. Ein solcher Aufbau erweist sich vor allem bei Anwendungen auf Existenzfragen und spektraltheoretische Untersuchungen in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen als zweckmäßig.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß sich die Theorie der Banach-Räume L_p für $1 \leqq p \leqq \infty$ in entsprechender Weise distributionentheoretisch entwickeln läßt. Nach einigen elementaren Vorbereitungen in § 2 wird in § 3 der Raum L_p für $1 < p < \infty$ als Menge aller linearen Funktionale auf C_0^∞ eingeführt, die bezüglich der Norm $\| f \|_q$ mit $1/p + 1/q = 1$ beschränkt sind. Aus dieser Definition folgt unmittelbar, daß L_p — als konjugierter Raum eines normierten linearen Raumes — vollständig ist. Der wesentliche Schritt in unserem Aufbau besteht in dem Nachweis, daß der durch (1. 1) normierte Raum C_0^∞ isometrisch in L_p eingebettet werden kann und dicht in L_p ist. Aus dieser Aussage folgt, daß die Banach-Räume L_p und L_q für $1 < p < \infty$ und $1/p + 1/q = 1$ zueinander konjugiert sind. Unser Beweis ist eine Variante des auf den Clarksonschen Ungleichungen beruhenden klassischen Beweises dieser Dualitätsaussage und lehnt sich eng an die von E. Bishop in [1] gegebene konstruktive Beweisanordnung an. Die distributionentheoretische Diskussion der Räume L_1 und L_∞ erfordert einige Modifikationen, die in § 4 besprochen werden. In § 5 bringen wir verschiedene Ergänzungen; insbesondere wird die Inklusion $L_p < L_{p'}$ für $p > p'$ im Fall eines beschränkten Grundgebietes nachgewiesen.

Die Betrachtungen in § 3 und § 4 ermöglichen es, die meisten der in [14] für den Raum L_2 gewonnenen Ergebnisse (mit Ausnahme der Resultate in [14], § 6 und § 7) auf die Räume L_p zu übertragen. Da die Übertragung der Methoden äußerst naheliegend ist, sobald die Dichtheit von C_0^∞ in L_p nachgewiesen ist, verzichten wir hier auf eine systematische Darstellung. Statt dessen wollen wir im zweiten Teil dieser Arbeit (§ 6—9) die Anwendung der hier dargestellten distributionentheoretischen Methode am Beispiel der Fourier-Transformation im Raum $L_1(-\infty, \infty)$ erläutern. Wir werden die Grundtatsachen der Theorie der Fourier-Transformation in L_1 — unter Einschluß des Wienerschen Taubersatzes — im Rahmen des hier entwickelten Aufbaus ohne Benutzung des Lebesgueschen Integralbegriffs herleiten. Unsere Darstellung berücksichtigt die algebraischen Gesichtspunkte, die von I. M. Gelfand [3] eingeführt worden sind und sich als überaus fruchtbar für die Theorie der Banach-Algebren erwiesen haben. Es sei jedoch bemerkt, daß sich auch der klassische Beweis von N. Wiener [15] und die von R. R. Goldberg [5] dargestellte Beweisanordnung, die von der Theorie der Banach-Algebren unabhängig sind, in ähnlicher Weise distributionentheoretisch modifizieren lassen.

§ 2. Vorbereitungen

Im folgenden sei Ω eine nichtleere, offene Teilmenge des n-dimensionalen Euklidischen Raumes R_n. Unter $C_0(\Omega)$ bzw. $C_0^\infty(\Omega)$ verstehen wir wie üblich den linearen Raum aller stetigen bzw. beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem, in Ω enthaltenem Support. Alle im folgenden auftretenden Integrale sind im Riemannschen

Sinn zu verstehen und über den ganzen R_n zu erstrecken, falls der Integrationsbereich nicht besonders spezifiziert ist. Für $f \in C_0(\Omega)$ sei $\| f \|_p$ durch (1. 1) erklärt. Ferner setzen wir

$$\| f \|_\infty = \operatorname{Sup} \{ | f(x) | : x \in \Omega \}. \tag{2. 1}$$

Für $u, v \in C_0(\Omega)$ und $1/p + 1/q = 1$ gelten die folgenden von Hölder, Minkowski und Clarkson stammenden Ungleichungen:

$$| \int u v dx | \leqq \| u \|_p \cdot \| v \|_q \qquad (1 \leqq p \leqq \infty), \tag{2. 2}$$

$$\| u + v \|_p \leqq \| u \|_p + \| v \|_p \qquad (1 \leqq p \leqq \infty), \tag{2. 3}$$

$$\| u + v \|_q^q + \| u - v \|_q^q \leqq 2 (\| u \|_q^p + \| v \|_q^p)^{q-1} \qquad (1 < p \leqq 2), \tag{2. 4}$$

$$\| u + v \|_q^p + \| u - v \|_q^p \leqq 2 (\| u \|_q^q + \| v \|_q^q)^{p-1} \qquad (2 \leqq p < \infty). \tag{2. 5}$$

Die Beweise sind elementar und finden sich zum Beispiel in [1] und [10].

Aus der Minkowskischen Ungleichung (2. 3) folgt, daß sich die linearen Räume $C_0^\infty(\Omega)$ und $C_0(\Omega)$ durch (1. 1) und (2. 1) normieren lassen. Die normierten linearen Räume, die sich ergeben, falls man in $C_0^\infty(\Omega)$ und $C_0(\Omega)$ die durch (1. 1) und (2. 1) definierte Norm $\| f \|_p$ einführt, bezeichnen wir mit $C_{0,p}^\infty(\Omega)$ und $C_{0,p}(\Omega)$. Wir werden mehrfach die folgende elementare Aussage benutzen:

Lemma 2. 1. *$C_{0,p}^\infty(\Omega)$ ist für $1 \leqq p \leqq \infty$ dicht in $C_{0,p}(\Omega)$, d. h. zu jedem $u \in C_0(\Omega)$ gibt es eine Folge $\{u_k\}$ aus $C_0^\infty(\Omega)$ mit $\| u - u_k \|_p \to 0$ für $k \to \infty$.*

Der Beweis läßt sich etwa in folgender wohlbekannter Weise führen: Man wählt ein $h \in C_0^\infty(R_n)$ mit

$$h \geqq 0, \quad \int h dx = 1, \quad \operatorname{supp} h = \{ x : | x | \leqq 1 \}. \tag{2. 6}$$

Die Funktion

$$h(x) = \begin{cases} c e^{\frac{1}{|x|^2 - 1}} & \text{für } | x | < 1, \\ 0 & \text{für } | x | \geqq 1 \end{cases} \tag{2. 7}$$

besitzt z. B. bei geeigneter Wahl des Faktors c die Eigenschaften (2. 6). Wegen $u \in C_0(\Omega)$ gilt $\delta = \operatorname{dist} (\operatorname{supp} u, R_n - \Omega) > 0$. Für $k > 1/\delta$ gehört

$$u_k(x) = k^n \int u(y) h(k(y - x)) dy = \int u(x + y/k) h(y) dy \tag{2. 8}$$

zu $C_0^\infty(\Omega)$, und wegen

$$u_k(x) - u(x) = \int [u(x + y/k) - u(x)] h(y) dy \tag{2. 9}$$

konvergiert die Folge $\{u_k\}$ gleichmäßig gegen u. Da supp u und supp u_k für $k \geqq 1$ in der beschränkten Menge $\{x : \operatorname{dist} (x, \operatorname{supp} u) \leqq 1\}$ enthalten sind, konvergiert $\{u_k\}$ auch bezüglich der Normen (1. 1) gegen u.

§ 3. Die Räume L_p, $1 < p < \infty$

Definition 3. 1. *Es sei $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Unter $L_p(\Omega)$ verstehen wir den konjugierten Raum des normierten linearen Raumes $C_{0,p}^\infty(\Omega)$, d. h. $L_p(\Omega)$ ist der lineare Raum aller beschränkten linearen komplexwertigen Funktionale F auf $C_{0,q}^\infty(\Omega)$, und die Norm in $L_p(\Omega)$ ist durch*

$$\| F \|_p = \operatorname{Sup} \{ | F\varphi | : \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \| \varphi \|_q = 1 \} \tag{3. 1}$$

gegeben.

Als konjugierter Raum eines normierten linearen Raumes ist $L_p(\Omega)$ vollständig. In der Tat: Ist $\{F_k\}$ eine bezüglich der Norm (3. 1) konvergente Folge aus $L_p(\Omega)$, so gehört das durch

$$F\varphi = \lim_{k\to\infty} F_k\varphi \text{ für } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{3. 2}$$

definierte Funktional zu $L_p(\Omega)$, und es gilt $\| F_k - F \|_p \to 0$ für $k \to \infty$. $L_p(\Omega)$ ist also ein Banach-Raum.

Wir zeigen zunächst, daß sich die normierten linearen Räume $C_{0,p}^\infty(\Omega)$ und $C_{0,p}(\Omega)$ isometrisch in $L_p(\Omega)$ einbetten lassen. Hierzu beweisen wir:

Lemma 3. 1. *Für $u \in C_0(\Omega)$ gehört das durch*

$$F_u\varphi = \int u\varphi dx \text{ für } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{3. 3}$$

erklärte Funktional F_u zu $L_p(\Omega)$, und es gilt $\| F_u \|_p = \| u \|_p$.

Beweis. Aus der Hölderschen Ungleichung (2. 2) folgt $| F_u\varphi | \leqq \| u \|_p \cdot \| \varphi \|_q$ und somit $F_u \in L_p(\Omega)$ und

$$\| F_u \|_p \leqq \| u \|_p. \tag{3. 4}$$

Zum Nachweis, daß in (3. 4) das Gleichheitszeichen gilt, setzen wir

$$v(x) = | u(x) |^{p-1} \operatorname{sign} \overline{u(x)} \text{ mit } \operatorname{sign} z = \begin{cases} \dfrac{z}{|z|} & \text{für } z \neq 0, \\ 0 & \text{für } z = 0. \end{cases} \tag{3. 5}$$

Wegen $p > 1$ gehört mit u auch v zu $C_0(\Omega)$. Lemma 3. 1 ist trivial für $u = 0$. Wir können daher voraussetzen, daß u und damit auch v nicht identisch verschwindet. Nach Lemma 2. 1 gibt es eine Folge $\{v_k\}$ aus $C_0^\infty(\Omega)$ mit $\| v - v_k \|_q \to 0$ für $k \to \infty$. Wegen $v \neq 0$ kann $\| v_k \|_q \geqq \alpha > 0$ angenommen werden. Nach (2. 2) gilt

$$F_u v_k = \int u v_k dx \to \int uv dx \text{ für } k \to \infty. \tag{3. 6}$$

Wegen (3. 5) und $q(p-1) = p$ gilt

$$\int uv dx = \int | u |^p dx = \int | u |^{q(p-1)} dx = \int | v |^q dx = \| v \|_q^q. \tag{3. 7}$$

Wegen $\| v - v_k \|_q \to 0$ und der Dreiecksungleichung gilt $\| v_k \|_q \to \| v \|_q$ für $k \to \infty$. Hieraus und aus (3. 5) bis (3. 7) folgt

$$F_u\left(\frac{v_k}{\| v_k \|_q}\right) = \frac{F_u v_k}{\| v_k \|_q} \to \| v \|_q^{q-1} = [\int | v |^q dx]^{\frac{1}{p}}$$
$$= [\int | u |^p dx]^{\frac{1}{p}} = \| u \|_p \text{ für } k \to \infty$$

und somit nach (3. 1) $\| F_u \|_p \geqq \| u \|_p$. In (3. 4) gilt also das Gleichheitszeichen. Damit ist Lemma 3. 1 bewiesen.

Nach Lemma 3. 1 ist die Abbildung $u \to F_u$ von $C_{0,p}(\Omega)$ in $L_p(\Omega)$ linear und isometrisch und somit eindeutig umkehrbar. Wir können daher jede Funktion u aus $C_0(\Omega)$ mit dem durch sie erzeugten Funktional F_u identifizieren. Hierdurch wird $C_{0,p}(\Omega)$ und damit auch $C_{0,p}^\infty(\Omega)$ zu einem Teilraum des Banach-Raumes $L_p(\Omega)$. Insbesondere werden Bildungen wie $F - u$ und $\| F - u \|_p$ für $F \in L_p(\Omega)$ und $u \in C_0(\Omega)$ sinnvoll. Zum Beispiel ist

$$\| F - u \|_p = \operatorname{Sup} \{ | F\varphi - \int u\varphi dx | : \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \| \varphi \|_q = 1 \}. \tag{3. 8}$$

Wir zeigen nun, daß $C^\infty_{0,p}(\Omega)$ und damit auch $C_{0,p}(\Omega)$ ein dichter Teilraum von $L_p(\Omega)$ ist:

Satz 3. 1. *Zu jedem $F \in L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$ gibt es eine Folge $\{f_k\}$ aus $C^\infty_0(\Omega)$ mit $\| F - f_k \|_p \to 0$ für $k \to \infty$.*

Beweis. Es sei $F \in L_p(\Omega)$. Nach der Definition der Norm $\| F \|_p$ läßt sich zu jedem ε mit $0 < \varepsilon < 1$ ein $\varphi_\varepsilon \in C^\infty_0(\Omega)$ mit

$$| F\varphi_\varepsilon | \geqq \| F \|_p - \varepsilon^2 \text{ und } \| \varphi_\varepsilon \|_q = 1 \tag{3. 9}$$

wählen. Es sei $F\varphi_\varepsilon = re^{i\vartheta}$ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \vartheta < 2\pi)$. Setzen wir $\psi_\varepsilon = e^{-i\vartheta}\varphi_\varepsilon$, so gilt $F\psi_\varepsilon = r \geqq 0$ und somit

$$F\psi_\varepsilon \geqq \| F \|_p - \varepsilon^2 \text{ und } \| \psi_\varepsilon \|_q = 1. \tag{3. 10}$$

Wir setzen

$$v_\varepsilon = | \psi_\varepsilon |^{q-1} \operatorname{sign} \bar{\psi}. \tag{3. 11}$$

Wegen $q > 1$ gilt $v_\varepsilon \in C_0(\Omega)$. Wegen $p(q-1) = q$ gilt

$$\| v_\varepsilon \|_p = [\int | \psi_\varepsilon |^{p(q-1)} dx]^{\frac{1}{p}} = \| \psi_\varepsilon \|_q^{\frac{q}{p}} = 1. \tag{3. 12}$$

Wir zeigen:

Lemma 3. 2. *Es gibt eine von ε unabhängige Konstante $c > 0$ mit folgender Eigenschaft: Ist $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$ und gilt $\int v_\varepsilon \varphi dx = 0$ für ein ε mit $0 < \varepsilon < 1$, so gilt*

$$| F\varphi | \leqq (c\varepsilon^{t-1} \| F \|_p + \varepsilon) \| \varphi \|_q \tag{3. 13}$$

mit $t = \operatorname{Min}(p, q) > 1$.

Beweis. Ist $\varphi = 0$, so gilt (3. 13) für jedes $c > 0$. Wir können daher $\varphi \neq 0$ voraussetzen. Es sei $F\varphi = re^{i\vartheta}$ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \vartheta < 2\pi)$. Für

$$\chi = e^{-i\vartheta} \frac{\varphi}{\| \varphi \|_q} \tag{3. 14}$$

gilt dann

$$\chi \in C^\infty_0(\Omega),\quad \| \chi \|_q = 1,\quad F\chi \geqq 0,\quad \int v_\varepsilon \chi dx = 0. \tag{3. 15}$$

Nach (3. 10), (3. 11) und (3. 15) gilt

$$\int v_\varepsilon(\psi_\varepsilon - \varepsilon\chi)dx = \int v_\varepsilon \psi_\varepsilon dx = \int | \psi_\varepsilon |^q dx = \| \psi_\varepsilon \|_q^q = 1. \tag{3. 16}$$

Andererseits folgt aus (2. 2) und (3. 12)

$$\int v_\varepsilon(\psi_\varepsilon - \varepsilon\chi)dx \leqq \| v_\varepsilon \|_p \cdot \| \psi_\varepsilon - \varepsilon\chi \|_q = \| \psi_\varepsilon - \varepsilon\chi \|_q. \tag{3. 17}$$

Durch Kombination von (3. 16) und (3. 17) folgt

$$\| \psi_\varepsilon - \varepsilon\chi \|_q \geqq 1. \tag{3. 18}$$

Wenden wir die Clarksonschen Ungleichungen (2. 4) und (2. 5) auf $u = \psi_\varepsilon$ und $v = \varepsilon\chi$ an, so erhalten wir wegen $\| \psi_\varepsilon \|_q = 1$, $\| \chi \|_q = 1$ und (3. 18)

$$\| \psi_\varepsilon + \varepsilon\chi \|_q^q \leqq 2(1 + \varepsilon^p)^{q-1} - 1 \text{ für } 1 < p \leqq 2, \tag{3. 19}$$

$$\| \psi_\varepsilon + \varepsilon\chi \|_q^p \leqq 2(1 + \varepsilon^q)^{p-1} - 1 \text{ für } 2 \leqq p < \infty. \tag{3. 20}$$

Aus diesen beiden Abschätzungen folgt elementar, indem man etwa den Mittelwertsatz auf die Funktion $[2(1+x)^{q-1}-1]^{\frac{1}{q}}$ und das Intervall $[0, \varepsilon^p]$ anwendet, daß es für jedes q mit $1 < q < \infty$ ein $c > 0$ gibt, so daß für alle ε mit $0 < \varepsilon < 1$

$$\| \psi_\varepsilon + \varepsilon\chi \|_q \leqq 1 + c\varepsilon^t \tag{3. 21}$$

mit $t = \operatorname{Min}(p, q)$ gilt. Aus (3. 21) folgt

$$| F(\psi_\varepsilon + \varepsilon\chi) | \leqq (1 + c\varepsilon^t) \| F \|_p \tag{3. 22}$$

und somit unter Berücksichtigung von (3. 10)

$$\begin{aligned} F\chi = \frac{1}{\varepsilon}[F(\psi_\varepsilon + \varepsilon\chi) - F\psi_\varepsilon] &\leqq \frac{1}{\varepsilon}[(1 + c\varepsilon^t) \| F \|_p - F\psi_\varepsilon] \\ &\leqq \frac{1}{\varepsilon}[(1 + c\varepsilon^t) \| F \|_p - \| F \|_p + \varepsilon^2] = c\varepsilon^{t-1} \| F \|_p + \varepsilon. \end{aligned} \tag{3. 23}$$

Wegen (3. 14) und $F\chi \geqq 0$ folgt hieraus

$$| F\varphi | = | F(e^{-i\vartheta}\varphi) | = \| \varphi \|_q | F\chi | = \| \varphi \|_q F\chi \leqq (c\varepsilon^{t-1} \| F \|_p + \varepsilon) \| \varphi \|_q. \tag{3. 24}$$

Damit ist Lemma 3. 2 bewiesen.

Abschluß des Beweises von Satz 3. 1. Für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ setzen wir

$$\varphi_0 = \varphi - \psi_\varepsilon \int v_\varepsilon \varphi dx. \tag{3. 25}$$

Nach (3. 16) gilt

$$\int v_\varepsilon \psi_\varepsilon dx = 1. \tag{3. 26}$$

Hieraus und aus (3. 25) folgt

$$\int v_\varepsilon \varphi_0 dx = 0. \tag{3. 27}$$

Nach Lemma 3. 2 gilt daher für $0 < \varepsilon < 1$

$$| F\varphi_0 | \leqq (c\varepsilon^{t-1} \| F \|_p + \varepsilon) \| \varphi_0 \|_q. \tag{3. 28}$$

Andererseits folgt aus (3. 25) und den Ungleichungen (2. 2) und (2. 3) wegen $\| \psi_\varepsilon \|_q = 1$ und $\| v_\varepsilon \|_p = 1$ (vgl. (3. 10) und (3. 12))

$$\| \varphi_0 \|_q \leqq \| \varphi \|_q + | \int v_\varepsilon \varphi dx | \leqq 2 \| \varphi \|_q. \tag{3. 29}$$

Insgesamt erhalten wir aus (3. 25), (3. 28) und (3. 29), daß für jedes $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\| \varphi \|_q = 1$ und $0 < \varepsilon < 1$

$$| F\varphi - F\psi_\varepsilon \int v_\varepsilon \varphi dx | \leqq 2(c\varepsilon^{t-1} \| F \|_q + \varepsilon) \tag{3. 30}$$

gilt. (3. 30) besagt, daß für die zu $C_0(\Omega)$ gehörende Funktion

$$g_\varepsilon = (F\psi_\varepsilon) v_\varepsilon \tag{3. 31}$$

die Relation

$$\| F - g_\varepsilon \|_p \leqq 2(c\varepsilon^{t-1} \| F \|_p + \varepsilon) \tag{3. 32}$$

gilt. Da die rechte Seite wegen $t = \operatorname{Min}(p, q) > 1$ für $\varepsilon \to 0$ gegen 0 konvergiert, zeigt (3. 32), daß $C_{0,p}(\Omega)$ dicht in $L_p(\Omega)$ ist. Nach Lemma 2. 1 ist daher auch $C_{0,p}^\infty(\Omega)$ dicht in $L_p(\Omega)$. Damit ist Satz 3. 1 bewiesen.

Als Anwendung von Satz 3. 1 diskutieren wir den konjugierten Raum $L_p(\Omega)^*$ von $L_p(\Omega)$ für $1 < p < \infty$. Es sei F ein beschränktes lineares Funktional auf $L_p(\Omega)$. Dann ist die Restriktion F^r von F auf $C_0^\infty(\Omega)$ ein beschränktes lineares Funktional auf $C_{0,p}^\infty(\Omega)$ und somit nach Definition 3. 1 ein Element von $L_q(\Omega)$. Da $C_{0,p}^\infty(\Omega)$ nach Satz 3. 1 dicht in $L_p(\Omega)$ ist, ist jedes beschränkte lineare Funktional auf $L_p(\Omega)$ bereits durch seine Werte auf $C_0^\infty(\Omega)$ bestimmt. Die Abbildung $F \to F^r$ von $L_p(\Omega)^*$ in $L_q(\Omega)$ ist also eindeutig umkehrbar. Umgekehrt läßt sich nach Satz 3. 1 jedes beschränkte lineare Funktional H auf $C_{0,p}^\infty(\Omega)$ durch

$$H^*(G) = \lim_{k \to \infty} H g_k \tag{3. 33}$$

mit $G \in L_p(\Omega)$, $g_k \in C_0^\infty(\Omega)$ und $\| G - g_k \|_p \to 0$ für $k \to \infty$ zu einem beschränkten linearen Funktional H^* auf $L_p(\Omega)$ fortsetzen. Hieraus folgt, daß $F \to F^r$ eine Abbildung von $L_p(\Omega)^*$ *auf* $L_q(\Omega)$ ist. Für jedes $G \in L_p(\Omega)$ gilt nach (3. 33)

$$| H^*(G) | \leqq \| H \|_q \overline{\lim_{k \to \infty}} \| g_k \|_p = \| H \|_q \| G \|_p. \tag{3. 34}$$

Da H^* eine Fortsetzung von H ist, gilt nach der Definition von $\| H \|_q$

$$\operatorname{Sup} \{ | H^*(G) | : G \in L_p(\Omega), \| G \|_p = 1 \} \geqq \| H \|_q. \tag{3. 35}$$

Wegen (3. 34) gilt in (3. 35) das Gleichheitszeichen. Die Abbildung $H \to H^*$ von $L_q(\Omega)$ auf $L_p(\Omega)^*$ und die Umkehrabbildung sind also norminvariant. Damit erhalten wir:

Satz 3. 2. *Es sei* $1 < p < \infty$ *und* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Ferner sei* F *ein beschränktes lineares Funktional auf* $L_p(\Omega)$ *und* F^r *die Restriktion von* F *auf* $C_{0,p}^\infty(\Omega)$. *Dann ist* $F \to F^r$ *eine eindeutig umkehrbare, isometrische, lineare Abbildung des konjugierten Raumes* $L_p(\Omega)^*$ *auf* $L_q(\Omega)$. *Identifiziert man insbesondere* F *mit* F^r, *so gilt* $L_p(\Omega)^* = L_q(\Omega)$.

Damit haben wir die klassische Dualitätsbeziehung zwischen den Räumen L_p und L_q in unserem Aufbau gewonnen. Die beschränkten linearen Funktionale auf $L_p(\Omega)$ sind also gerade die durch (3. 34) gegebenen Fortsetzungen der zu $L_q(\Omega)$ gehörenden Funktionale von $C_{0,p}^\infty(\Omega)$ auf $L_p(\Omega)$.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einigen ergänzenden Bemerkungen. Da $C_{0,p}^\infty(\Omega)$ dicht in $C_{0,p}(\Omega)$ ist, wäre es ebenfalls möglich gewesen, $L_p(\Omega)$ als konjugierten Raum von $C_{0,p}(\Omega)$ einzuführen. Ich halte es jedoch für zweckmäßiger, von dem in der Theorie der Distributionen benutzten Testraum $C_0^\infty(\Omega)$ auszugehen, da aus der von uns gewählten Definition unmittelbar folgt, daß sich die Grundoperationen der Distributionentheorie auf die Elemente von $L_p(\Omega)$ anwenden lassen. Es ist leicht zu sehen, daß jedes Funktional aus $L_p(\Omega)$ eine Distribution im Sinn von L. Schwartz ist. In der Tat: Ist $\{\varphi_k\}$ eine Folge von Funktionen aus $C_0^\infty(\Omega)$, die im Sinn der von L. Schwartz im Testraum betrachteten Konvergenz gegen 0 konvergiert, so gilt auch $\| \varphi_k \|_q \to 0$ und damit $| F\varphi_k | \to 0$ für jedes $F \in L_p$. F erfüllt daher die in der Distributionendefinition verlangte Stetigkeitseigenschaft.

Für den weiteren Ausbau der Theorie der L_p-Räume ist es besonders wichtig, daß $C_{0,p}^\infty(\Omega)$ nach Satz 3. 1 dicht in $L_p(\Omega)$ ist. Es ist daher möglich, die in [14] für den Raum $L_2(\Omega)$ durchgeführten Untersuchungen (mit Ausnahme der Abschnitte über Fourierreihen und Fourier-Transformation) nach naheliegenden Modifikationen auf die Räume $L_p(\Omega)$ zu übertragen. Die gleiche Schlußweise wie in [14], § 3 ergibt zum Beispiel das folgende Analogon zu einer klassischen Aussage von F. Riesz (vgl. [11], S. 75): *Ist* Ω *ein beschränktes offenes Intervall der reellen Achse, so ist jedes Funktional* F *aus* $L_p(\Omega)$ *Distributionenableitung einer in* $\bar{\Omega}$ *stetigen Funktion u. Die Distributionenableitung einer im Intervall*

$\bar{\Omega} = [a, b]$ *stetigen Funktion* u *gehört genau dann zu* $L_p(\Omega)$, *wenn es eine Konstante* $A \geqq 0$ *gibt, so daß für jede Unterteilung* $a \leqq x_0 < x_1 < \cdots < x_m \leqq b$ *von* $[a, b]$

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{|u(x_j) - u(x_{j-1})|^p}{(x_j - x_{j-1})^p} \leqq A \tag{3. 36}$$

gilt. Ist (3. 36) *für ein* $A > 0$ *erfüllt und ist* F *die (zu* $L_p(\Omega)$ *gehörende) Distributionenableitung von* u, *so ist die kleinste Konstante* A, *für die* (3. 36) *gültig ist, durch* $A = \| F \|_p^p$ *gegeben.*

Entsprechend läßt sich auch die in [14] behandelte Theorie der Sobolevschen Räume auf den Fall $p \neq 2$ ausdehnen.

§ 4. Die Räume L_1 und L_∞

Der distributionentheoretische Aufbau der Räume L_1 und L_∞ erfordert einige Modifikationen, die wir in diesem Abschnitt besprechen wollen. Wir beginnen mit der Diskussion des Raumes L_1. Hierzu betrachten wir den normierten linearen Raum $C^\infty_{0,\infty}(\Omega)$, der entsteht, wenn man in $C_0^\infty(\Omega)$ die Norm (2. 1) einführt, und bilden den konjugierten Raum $B = C^\infty_{0,\infty}(\Omega)^*$ von $C^\infty_{0,\infty}(\Omega)$. B ist also der Banach-Raum aller beschränkten linearen Funktionale F auf $C^\infty_{0,\infty}(\Omega)$, und die Norm in B ist durch

$$\| F \|_1 = \operatorname{Sup} \{ | F\varphi | : \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \| \varphi \|_\infty = 1 \} \tag{4. 1}$$

gegeben. Ist der Nullpunkt in Ω enthalten, so gehört zum Beispiel das durch

$$F_\delta \varphi = \varphi(0) \text{ für } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{4. 2}$$

definierte δ-Funktional F_δ zu B. Offensichtlich gilt $\| F_\delta \|_1 = 1$.

Wir zeigen nun, daß sich $C_{0,1}(\Omega)$ isometrisch in B einbetten läßt, und beweisen in Analogie zu Lemma 3. 1:

Lemma 4. 1. *Für* $u \in C_0(\Omega)$ *gehört das durch* (3. 3) *definierte Funktional* F_u *zu* $B = C^\infty_{0,\infty}(\Omega)^*$, *und es gilt* $\| F_u \|_1 = \| u \|_1$.

Beweis. Wegen $| F_u \varphi | \leqq \| u \|_1 \cdot \| \varphi \|_\infty$ gilt $F_u \in B$ und $\| F_u \|_1 \leqq \| u \|_1$. Zum Nachweis, daß sogar $\| F_u \|_1 = \| u \|_1$ gilt, gehen wir von der Relation

$$\lim_{\delta \to 0} \int | u |^{1+\delta} dx = \int | u | \, dx = \| u \|_1 \tag{4. 3}$$

aus. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein $\delta > 0$ mit

$$\left| \int | u |^{1+\delta} dx - \| u \|_1 \right| < \varepsilon \tag{4. 4}$$

und

$$\| u \|_\infty^\delta < 1 + \varepsilon. \tag{4. 5}$$

Wir setzen

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{für alle } x \text{ mit } u(x) = 0, \\ \dfrac{|u(x)|^{1+\delta}}{u(x)} & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4. 6}$$

Wegen $\delta > 0$ gehört v zu $C_0(\Omega)$, und nach (4. 4) und (4. 5) gilt

$$\left| \int u v \, dx - \| u \|_1 \right| < \varepsilon \tag{4. 7}$$

und

$$\| v \|_\infty = \| u \|_\infty^\delta < 1 + \varepsilon. \tag{4. 8}$$

Nach Lemma 2. 1 gibt es ein $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit

$$\| v - \varphi \|_\infty < \varepsilon. \tag{4. 9}$$

Aus (4. 7) bis (4. 9) folgt

$$\| \varphi \|_\infty \leqq \| v \|_\infty + \| \varphi - v \|_\infty < 1 + 2\varepsilon \tag{4. 10}$$

und

$$\begin{aligned} | F_u \varphi | &= | \int u \varphi dx | \geqq | \int u v dx | - | \int u(\varphi - v) dx | \\ &> \| u \|_1 - \varepsilon - \| u \|_1 \cdot \| \varphi - v \|_\infty > \| u \|_1 - \varepsilon(1 + \| u \|_1). \end{aligned} \tag{4. 11}$$

Lemma 4. 1 ist trivial für $u = 0$. Wir setzen daher im folgenden $u \neq 0$ voraus. Nach (4. 6) und (4. 9) gilt dann auch $\varphi \neq 0$, falls ε genügend klein ist. Aus (4. 10) und (4. 11) folgt dann

$$\left| F_u\left(\frac{\varphi}{\| \varphi \|_\infty}\right) \right| = \frac{| F_u \varphi |}{\| \varphi \|_\infty} > \frac{\| u \|_1 - \varepsilon(1 + \| u \|_1)}{1 + 2\varepsilon}. \tag{4. 12}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben werden kann und die rechte Seite in (4. 12) für $\varepsilon \to 0$ gegen $\| u \|_1$ konvergiert, folgt $\| F_u \|_1 \geqq \| u \|_1$ und somit $\| F_u \|_1 = \| u \|_1$. Damit ist Lemma 4. 1 bewiesen.

Nach Lemma 4. 1 kann $C_{0,1}(\Omega)$ und damit auch $C_{0,1}^\infty(\Omega)$ als Teilraum von $B = C_{0,\infty}^\infty(\Omega)^*$ aufgefaßt werden, falls man jedes $u \in C_0(\Omega)$ mit dem durch u erzeugten Funktional F_u identifiziert. Im Gegensatz zum Fall $1 < p < \infty$ sind jedoch $C_{0,1}^\infty(\Omega)$ und $C_{0,1}(\Omega)$ nicht dicht in B. Hierzu betrachten wir das in (4. 2) eingeführte δ-Funktional F_δ. Angenommen, es gäbe eine Folge $\{f_k\}$ aus $C_0(\Omega)$ mit $\| F_\delta - f_k \|_1 \to 0$ für $k \to \infty$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $f \in C_0(\Omega)$ mit

$$| \varphi(0) - \int f \varphi dx | < \varepsilon \tag{4. 13}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $| \varphi(x) | \leqq 1$, im Widerspruch dazu, daß man φ in (4. 13) so abändern kann, daß $\varphi(0)$ zwischen -1 und 1 variiert und $\int f \varphi dx$ sich höchstens um ε verändert. F_δ kann daher nicht beliebig genau durch Elemente aus $C_{0,1}(\Omega)$ approximiert werden. Damit ist gezeigt, daß $C_{0,1}(\Omega)$ nicht dicht in B ist.

Nach diesen Vorbereitungen führen wir $L_1(\Omega)$ als die Vervollständigung von $C_{0,1}^\infty(\Omega)$ innerhalb B ein:

Definition 4. 1. *Unter $L_1(\Omega)$ verstehen wir den linearen Raum aller linearen Funktionale F aus $B = C_{0,\infty}^\infty(\Omega)^*$ mit der Eigenschaft, daß es eine Folge $\{f_k\}$ aus $C_0^\infty(\Omega)$ mit $\| F - f_k \|_1 \to 0$ gibt.*

Lemma 4. 2. *$L_1(\Omega)$ ist ein echter, vollständiger Teilraum von $B = C_{0,\infty}^\infty(\Omega)^*$, und $C_{0,1}^\infty(\Omega)$ ist dicht in $L_1(\Omega)$.*

Beweis. Daß $C_{0,1}^\infty(\Omega)$ dicht in $L_1(\Omega)$ ist, folgt unmittelbar aus Definition 4. 1. Wie oben gezeigt wurde, gehört F_δ nicht zu $L_1(\Omega)$, so daß $L_1(\Omega)$ ein echter Teilraum von B ist. Zum Nachweis der Vollständigkeit betrachten wir eine Folge $\{F_k\}$ aus $L_1(\Omega)$ mit $\| F_k - F_j \|_1 \to 0$ für $k, j \to \infty$. Nach Definition 4. 1 gibt es eine Folge $\{f_k\}$ aus $C_0^\infty(\Omega)$ mit $\| F_k - f_k \| < 1/k$ für alle k. Aus der Dreiecksungleichung folgt $\| f_k - f_j \|_1 \to 0$ für $k, j \to \infty$. Da B als konjugierter Raum von $C_{0,\infty}^\infty(\Omega)$ vollständig ist, gibt es ein $F \in B$ mit $\| F - f_k \|_1 \to 0$ für $k \to \infty$. Nach Definition 4. 1 gehört F zu $L_1(\Omega)$, und nach der Dreiecksungleichung gilt $\| F - F_k \|_1 \to 0$ für $k \to \infty$. $L_1(\Omega)$ ist also vollständig. Damit ist Lemma 4. 2 bewiesen.

Das folgende Lemma gibt eine von der Betrachtung des Raumes B unabhängige Kennzeichnung der Funktionale aus $L_1(\Omega)$:

Lemma 4. 3. *$L_1(\Omega)$ ist die Menge aller Funktionale F auf $C_0^\infty(\Omega)$, die in der Form*

$$F\varphi = \lim_{k\to\infty} \int f_k \varphi\, dx \tag{4. 14}$$

mit $f_k \in C_0^\infty(\Omega)$ und $\| f_k - f_j \|_1 \to 0$ für $k, j \to \infty$ darstellbar sind. Es gilt

$$\| F \|_1 = \lim_{k\to\infty} \| f_k \|_1. \tag{4. 15}$$

Beweis. Ist $F \in L_1$, so gibt es nach Definition 4. 1 eine Folge $\{f_k\}$ aus $C_0^\infty(\Omega)$ mit $\| F - f_k \|_1 \to 0$ für $k \to \infty$. Für diese Folge $\{f_k\}$ gelten die Relationen (4. 14) und (4. 15). Ist umgekehrt F mit Hilfe einer Folge $\{f_k\}$ aus $C_0^\infty(\Omega)$ in der in Lemma 4. 3 verlangten Form darstellbar, so gilt für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\| \varphi \|_\infty = 1$

$$| F\varphi - \int f_k \varphi\, dx | = \lim_{j\to\infty} | \int (f_j - f_k)\varphi\, dx | \leqq \overline{\lim_{j\to\infty}} \| f_j - f_k \|_1 \to 0 \text{ für } k \to \infty,$$

also $\| F - f_k \|_1 \to 0$. Hieraus folgt $F \in L_1(\Omega)$ und $\| F \|_1 = \lim_{k\to\infty} \| f_k \|_1$. Damit ist Lemma 4. 3 bewiesen. Insbesondere zeigt unsere Argumentation, daß der in (4. 15) auftretende Grenzwert unabhängig von der speziellen Wahl der Folge $\{f_k\}$ ist, die zur Darstellung des Funktionals F im Sinn von Lemma 4. 3 benutzt wird.

Wir führen nun $L_\infty(\Omega)$ als konjugierten Raum von $C_{0,1}^\infty(\Omega)$ ein:

Definition 4. 2. *Unter $L_\infty(\Omega)$ verstehen wir den Banach-Raum aller beschränkten linearen Funktionale auf $C_{0,1}^\infty(\Omega)$ mit der Norm*

$$\| F \|_\infty = \operatorname{Sup} \{ | F\varphi | : \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \| \varphi \|_1 = 1 \}. \tag{4. 16}$$

Wir zeigen, daß sich der Banach-Raum $C(\Omega)$ aller in Ω stetigen und beschränkten Funktionen f mit der Norm (2. 1) isometrisch in $L_\infty(\Omega)$ einbetten läßt:

Lemma 4. 4. *Für jede in Ω stetige und beschränkte Funktion u gehört das durch* (3. 3) *definierte Funktional F_u zu $L_\infty(\Omega)$, und es gilt*

$$\| F_u \|_\infty = \| u \|_\infty = \operatorname{Sup} \{ | u(x) | : x \in \Omega \}. \tag{4. 17}$$

Beweis. Wegen $| F_u\varphi | \leqq \| u \|_\infty \cdot \| \varphi \|_1$ gilt $F_u \in L_\infty(\Omega)$ und $\| F_u \|_\infty \leqq \| u \|_\infty$. Zum Nachweis, daß das Gleichheitszeichen gilt, beachten wir, daß sich zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x_0 \in \Omega$ mit

$$| u(x_0) | > \| u \|_\infty - \varepsilon \tag{4. 18}$$

wählen läßt. Da Ω offen ist, gibt es ein $\delta_0 > 0$, so daß die Kugel $\{x : | x - x_0 | \leqq \delta_0\}$ in Ω liegt. Ist h die in (2. 6) und (2. 7) eingeführte Funktion, so gehört die Funktion

$$h_\delta(x) = \frac{1}{\delta^n} h\left(\frac{x - x_0}{\delta}\right) \tag{4. 19}$$

für $\delta < \delta_0$ zu $C_0^\infty(\Omega)$, und es gilt mit $x = x_0 + \delta y$

$$\| h_\delta \|_1 = \int h_\delta(x)\, dx = \int h(y)\, dy = 1. \tag{4. 20}$$

Ferner gilt

$$F_u h_\delta = \frac{1}{\delta^n} \int u(x) h\left(\frac{x - x_0}{\delta}\right) dx = \int\limits_{|y|\leqq 1} u(x_0 + \delta y) h(y)\, dy \tag{4. 21}$$

und somit

$$F_u h_\delta \to u(x_0) \int h(y)\,dy = u(x_0) \text{ für } \delta \to 0. \tag{4. 22}$$

Aus (4. 20) und (4. 22) folgt $\| F_u \|_\infty \geqq | u(x_0) |$ und daher nach (4. 18)

$$\| F_u \|_\infty > \| u \|_\infty - \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben werden kann, gilt $\| F_u \|_\infty = \| u \|_\infty$. Damit ist Lemma 4. 4 bewiesen.

Da auch durch stückweise stetige, beschränkte Funktionen u mit Hilfe von (3. 3) beschränkte Funktionale auf $C^\infty_{0,1}(\Omega)$ erzeugt werden, ist $C(\Omega)$ ein echter Teilraum von $L_\infty(\Omega)$. Da $C(\Omega)$ vollständig ist, sind somit $C^\infty_{0,\infty}(\Omega)$ und $C_{0,\infty}(\Omega)$ nicht dicht in $L_\infty(\Omega)$.

Da $C^\infty_{0,1}(\Omega)$ nach Lemma 4. 2 dicht in $L_1(\Omega)$ ist, läßt sich jedes Funktional aus $L_\infty(\Omega)$ in eindeutiger Weise zu einem beschränkten Funktional auf $L_1(\Omega)$ fortsetzen. Die gleiche Argumentation wie im Beweis von Satz 3. 2 ergibt daher:

Lemma 4. 5. *Die Aussage von Satz* 3. 2 *ist auch für* $p = 1$ *und* $q = \infty$ *gültig. Insbesondere gilt (in dem in Satz* 3. 2 *präzisierten Sinn)* $L_1(\Omega)^* = L_\infty(\Omega)$.

Wir wollen nun ein spezielles Funktional aus $L_\infty(\Omega)$ diskutieren, das in enger Beziehung zum Lebesgueschen Integral steht. Nach Lemma 4. 4 gehört das durch die Funktion $u(x) = 1$ für $x \in \Omega$ erzeugte Funktional

$$F_1\varphi = \int \varphi\,dx \text{ für } \varphi \in C^\infty_0(\Omega) \tag{4. 23}$$

zu $L_\infty(\Omega)$. Nach den obigen Bemerkungen läßt sich F_1 in eindeutiger Weise zu einem Funktional $\Im$ auf $L_1(\Omega)$ fortsetzen, und zwar gilt für jedes $F \in L_1(\Omega)$ und jede Folge $\{f_k\}$ aus $C^\infty_0(\Omega)$ mit $\| F - f_k \|_1 \to 0$

$$\Im F = \lim_{k\to\infty} \int f_k\,dx. \tag{4. 24}$$

Wir wollen den Wert $\Im F$ als das *Lebesguesche Integral* des Funktionals F aus $L_1(\Omega)$ bezeichnen. Diese Bezeichnung ist in folgendem Sinn berechtigt: Ist u Lebesgue-integrierbar, so folgt aus einfachen Sätzen der Lebesgueschen Theorie, daß das durch u nach (1. 2) erzeugte Funktional F_u zu $L_1(\Omega)$ gehört und daß

$$\Im F_u = \int_\Omega u\,dx \tag{4. 25}$$

gilt, wobei das Integral im Lebesgueschen Sinn zu verstehen ist. Ist $u \in C_0(\Omega)$, so folgt (4. 25) ohne Bezugnahme auf die Lebesguesche Theorie unmittelbar aus Lemma 2. 1.

Zum Abschluß dieses Abschnitts zeigen wir, daß der Banach-Raum $L_1(\Omega)$ nicht reflexiv ist. Bekanntlich heißt ein Banach-Raum B reflexiv, wenn es zu jedem beschränkten linearen Funktional F auf dem konjugierten Raum B^* von B ein Element $H \in B$ mit

$$F(G) = G(H) \text{ für alle } G \in B^* \tag{4. 26}$$

gibt. In diesem Fall folgt aus dem Satz von Hahn und Banach, daß $F \to H$ eine isometrische lineare Abbildung von $B^{**} = (B^*)^*$ auf B ist, so daß die Elemente von B und B^{**} nach (4. 26) miteinander identifiziert werden können. Zum Nachweis, daß $L_1(\Omega)$ nicht reflexiv ist, nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß Ω den Nullpunkt enthält, und gehen von dem in (4. 2) eingeführten δ-Funktional F_δ auf $C^\infty_{0,\infty}(\Omega)$ aus. Da $C^\infty_{0,\infty}(\Omega)$ nach Lemma 4. 4 ein Teilraum von $L_\infty(\Omega)$ ist, läßt sich F_δ nach dem Satz von Hahn und Banach zu einem beschränkten linearen Funktional $\tilde{F}_\delta$ auf $L_\infty(\Omega)$ fortsetzen. Nach Lemma 4. 5 gehört für jedes $G \in L_1(\Omega)^*$ die Restriktion

G^r von G auf $C^\infty_{0,1}(\Omega)$ zu $L_\infty(\Omega)$, und $G \to G^r$ ist eine isometrische lineare Abbildung von $L_1(\Omega)^*$ auf $L_\infty(\Omega)$. Durch

$$F(G) = \tilde{F}_\delta(G^r) \text{ für } G \in L_1(\Omega)^* \tag{4. 27}$$

wird daher ein beschränktes lineares Funktional auf $L_1(\Omega)^*$ erklärt. Angenommen, es gäbe ein $H \in L_1(\Omega)$, so daß (4. 26) für alle $G \in L_1(\Omega)^*$ gültig ist. Dann gilt (4. 26) insbesondere für alle Funktionale G_φ der Form

$$G_\varphi(J) = J\varphi \text{ für } J \in L_1(\Omega) \tag{4. 28}$$

mit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Hierbei beachte man, daß G_φ wegen $|G_\varphi(J)| = |J_\varphi| \leqq \|\varphi\|_\infty \|J\|_1$ zu $L_1(\Omega)^*$ gehört. Die Restriktion G^r_φ von G_φ ist das durch φ auf $C_0^\infty(\Omega)$ erzeugte Funktional:

$$G^r_\varphi \psi = \int \varphi\psi dx \text{ für } \psi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{4. 29}$$

Im Sinn der von uns benutzten Einbettung von $C^\infty_{0,1}(\Omega)$ in $L_1(\Omega)$ gilt daher $G^r_\varphi = \varphi$ und somit nach (4. 27)

$$F(G_\varphi) = \tilde{F}_\delta(G^r_\varphi) = \tilde{F}_\delta(\varphi) = F_\delta\varphi = \varphi(0) \text{ für } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{4. 30}$$

Setzen wir daher in (4. 26) $G = G_\varphi$, so folgt aus (4. 28) und (4. 30) $F_\delta\varphi = H\varphi$ für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, also $F_\delta = H \in L_1(\Omega)$ im Widerspruch zu dem im Anschluß an Lemma 4. 1 geführten Nachweis, daß F_δ nicht zu $L_1(\Omega)$ gehört. Damit ist gezeigt, daß $L_1(\Omega)$ nicht reflexiv ist. In ähnlicher Weise folgt aus Satz 3. 2, daß die Räume $L_p(\Omega)$ für $1 < p < \infty$ reflexiv sind.

§ 5. Beziehungen zwischen den Räumen L_p

In diesem Abschnitt bringen wir einige Ergänzungen zu der in § 3 und § 4 entwickelten Theorie der L_p-Räume. Wir nehmen zunächst an, daß Ω beschränkt ist. Dann läßt sich das Volumen $\|\Omega\|$ von Ω in üblicher Weise durch

$$\|\Omega\| = \sup_{(W_1, \ldots, W_m)} \sum_{i=1}^m \|W_i\| \tag{5. 1}$$

definieren, wobei $(W_1, \ldots, W_m)$ alle endlichen Systeme von halboffenen Würfeln

$$W = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : a_k \leqq x_k < a_k + \delta\}, \quad \|W\| = \delta^n \tag{5. 2}$$

mit $W_i \subset \Omega$ und $W_i \cap W_k = \emptyset$ für $i \neq k$ durchläuft. Wir zeigen:

Lemma 5. 1. *Ist Ω beschränkt, so gilt für jedes $\varphi \in C_0(\Omega)$*

$$\int |\varphi| dx \leqq \|\varphi\|_p \cdot \|\Omega\|^{\frac{1}{q}} \tag{5. 3}$$

mit $1 \leqq p \leqq \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Beweis. Da supp φ eine kompakte Teilmenge von Ω ist, gilt dist (supp φ, $R_n - \Omega$) > 0. Es gibt daher endlich viele Würfel $W_1, \ldots, W_m$ der Form (5. 2) mit $W_i \subset \Omega$, $W_i \cap W_k = \emptyset$ für $i \neq k$ und supp $\varphi \subset W_1 \cup \cdots \cup W_m$. Nach (2. 2) und (5. 1) gilt daher

$$\begin{aligned} \int |\varphi| dx &= \int_{W_1 + \cdots + W_m} |\varphi| dx \leqq \left[\int_{W_1 + \cdots + W_m} |\varphi|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int_{W_1 + \cdots + W_m} dx\right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \|\varphi\|_p \left[\sum_{i=1}^m \|W_i\|\right]^{\frac{1}{q}} \leqq \|\varphi\|_p \cdot \|\Omega\|^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Damit ist Lemma 5. 1 bewiesen. Mit Hilfe von Lemma 5. 1 beweisen wir nun die bekannte Inklusionsbeziehung zwischen den L_p-Räumen:

Lemma 5. 2. *Für $1 \leqq p < p' \leqq \infty$ und beschränktes Ω gilt $L_{p'}(\Omega) \subset L_p(\Omega)$. Ferner gilt für jedes $F \in L_{p'}(\Omega)$*

$$\| F \|_p \leqq \| \Omega \|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} \cdot \| F \|_{p'}. \tag{5. 4}$$

Beweis. Es sei $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ und $\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}=1$. Dann gilt $1 \leqq q' < q \leqq \infty$. Wir setzen $r=\frac{q}{q'}>1$ und $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$. Nach Lemma 5. 1 und wegen $q' \cdot r = q$ gilt für $F \in L_{p'}(\Omega)$ und $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} | F\varphi | &\leqq \| F \|_{p'} \cdot \| \varphi \|_{q'} = \| F \|_{p'} \left[\int | \varphi |^{q'} dx\right]^{\frac{1}{q'}} \\ &\leqq \| F \|_{p'} \left\{\left[\int | \varphi |^{q'r} dx\right]^{\frac{1}{r}} \cdot \| \Omega \|^{\frac{1}{s}}\right\}^{\frac{1}{q'}} = \| F \|_{p'} \cdot \| \varphi \|_q \cdot \| \Omega \|^{\frac{1}{s \cdot q'}}. \end{aligned}$$

Wegen $\frac{1}{s \cdot q'} = \frac{1}{q'}\left(1-\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{q'}\left(1-\frac{q'}{q}\right) = \frac{1}{q'}-\frac{1}{q} = \frac{1}{p}-\frac{1}{p'}$ folgt hieraus

$$| F\varphi | \leqq \| \Omega \|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}} \cdot \| F \|_{p'} \cdot \| \varphi \|_q \text{ für } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{5. 5}$$

F ist also ein beschränktes lineares Funktional auf $C_{0,q}^\infty(\Omega)$. Für $p > 1$ gilt daher nach Definition 3. 1 und Definition 4. 2 $F \in L_p(\Omega)$. Um zu zeigen, daß F auch für $p = 1$ zu $L_p(\Omega)$ gehört, beachten wir, daß es nach Satz 3. 1 im Fall $1 < p' < \infty$ eine Folge $\{f_k\}$ aus $C_0^\infty(\Omega)$ mit $\| F - f_k \|_{p'} \to 0$ für $k \to \infty$ gibt. Insbesondere gilt

$$F\varphi = \lim_{k \to \infty} \int f_k \varphi dx \text{ für } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{5. 6}$$

und

$$\| f_k - f_j \|_{p'} \to 0 \text{ für } k, j \to \infty. \tag{5. 7}$$

Aus (5. 7) und Lemma 5. 1 folgt

$$\| f_k - f_j \|_1 \leqq \| \Omega \|^{\frac{1}{q'}} \cdot \| f_k - f_j \|_{p'} \to 0 \text{ für } k, j \to \infty. \tag{5. 8}$$

Hieraus und aus (5. 6) folgt nach Lemma 4. 3, daß F zu $L_1(\Omega)$ gehört. Damit ist die Aussage $L_{p'}(\Omega) \subset L_p(\Omega)$ für die Fälle $1 < p < p' \leqq \infty$ und $1 \leqq p < p' < \infty$ nachgewiesen. Hieraus folgt $L_\infty(\Omega) \subset L_2(\Omega) \subset L_1(\Omega)$, so daß die Inklusion auch für $p = 1$ und $p' = \infty$ gilt. Die Abschätzung (5. 4) folgt unmittelbar aus (5. 5). Damit ist Lemma 5. 2 bewiesen.

In Ergänzung zu Lemma 5. 2 gilt:

Lemma 5. 3. *Ist Ω beschränkt und gilt $F \in L_{p_0}(\Omega)$ mit $1 \leqq p_0 < \infty$, so hängt $\| Ft \|_p$ für $1 \leqq p \leqq p_0$ stetig von p ab. Für $F \in L_\infty(\Omega)$ gilt zusätzlich*

$$\lim_{p \to \infty} \| F \|_p = \| F \|_\infty. \tag{5. 9}$$

Beweis. Nach Lemma 5. 2 gilt $F \in L_p(\Omega)$ für $1 \leqq p \leqq p_0$. Es gibt daher zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $f \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\| F - f \|_1 < \varepsilon$. Nach Lemma 5. 2 folgt hieraus

$$\| F - f \|_p \leqq \| \Omega \|^{1-\frac{1}{p}} \varepsilon \leqq \varepsilon \operatorname{Max}(1, \| \Omega \|) \text{ für } 1 \leqq p \leqq p_0. \tag{5. 10}$$

Da $\| f \|_p$ stetig von p abhängt, gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle p, p' mit $1 \leqq p \leqq p_0$, $1 \leqq p' \leqq p_0$ und $| p - p' | < \delta$ die Relation $| \| f \|_{p'} - \| f \|_p | < \varepsilon$ und somit nach (5. 10)

$$| \| F \|_{p'} - \| F \|_p | \leqq \varepsilon(1 + 2 \operatorname{Max}(1, \| \Omega \|)) \tag{5. 11}$$

gilt. Damit ist die Stetigkeit von $\| F \|_p$ nachgewiesen.

Zum Nachweis von (5. 9) für $F \in L_\infty(\Omega)$ beachten wir, daß nach Lemma 5. 2 für $1 \leqq p \leqq \infty$ die Ungleichung $\| F \|_p \leqq \| \Omega \|^{\frac{1}{p}} \| F \|_\infty$ gilt. Hieraus folgt

$$\overline{\lim_{p \to \infty}} \| F \|_p \leqq \| F \|_\infty . \tag{5. 12}$$

Nach Definition von $\| F \|_\infty$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\| \varphi \|_1 = 1$ und $| F\varphi | > \| F \|_\infty - \varepsilon$. Wegen $\| \varphi \|_q \to \| \varphi \|_1$ für $q \to 1 + 0$ gibt es ein $p_1 > 1$ mit $\| \varphi \|_q < \| \varphi \|_1 + \varepsilon = 1 + \varepsilon$ für $p > p_1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Hieraus und aus

$$| F\varphi | \leqq \| F \|_p \cdot \| \varphi \|_q$$

folgt für $p > p_1$

$$\| F \|_p \geqq \frac{| F\varphi |}{\| \varphi \|_q} > \frac{| F\varphi |}{1 + \varepsilon} > \frac{\| F \|_\infty - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \tag{5. 13}$$

und somit

$$\lim_{p \to \infty} \| F \|_p \geqq \frac{\| F \|_\infty - \varepsilon}{1 + \varepsilon} . \tag{5. 14}$$

Da diese Abschätzung für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $\underline{\lim} \| F \|_p \geqq \| F \|_\infty$ und somit nach (5. 12) $\| F \|_p \to \| F \|_\infty$ für $p \to \infty$. Damit ist der Beweis von Lemma 5. 3 abgeschlossen.

Ist Ω nicht beschränkt, so gilt die Inklusion $L_{p'}(\Omega) \subset L_p(\Omega)$ für $p < p'$ nicht. Es gilt jedoch:

Lemma 5. 4. *Es sei Ω eine nichtleere, offene (nicht notwendig beschränkte) Teilmenge des R_n. Ferner gelte $F \in L_r(\Omega) \cap L_s(\Omega)$ mit $1 \leqq r < s < \infty$. Dann gehört F für $r \leqq p \leqq s$ zu $L_p(\Omega)$, und es gilt*

$$\| F \|_p \leqq \| F \|_r^{\frac{s/p-1}{s/r-1}} \cdot \| F \|_s^{\frac{1-r/p}{1-r/s}} . \tag{5. 15}$$

Ferner gibt es eine Folge $\{f_k\}$ aus $C_0^\infty(\Omega)$ mit $\| F - f_k \|_p \to 0$ für $k \to \infty$ und $r \leqq p \leqq s$.

Beweis. Wir weisen zunächst (5. 15) für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ nach. Für $u = \frac{s-r}{s-p}$ und $v = \frac{s-r}{p-r}$ gilt $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 1$ und $u \geqq 1$. Hieraus folgt nach (2. 2)

$$\begin{aligned} \int | \varphi |^p dx &= \int | \varphi |^{\frac{r}{u}} \cdot | \varphi |^{p - \frac{r}{u}} dx \leqq \left\| | \varphi |^{\frac{r}{u}} \right\|_u \cdot \left\| | \varphi |^{p - \frac{r}{u}} \right\|_v \\ &= \left[\int | \varphi |^r dx \right]^{\frac{1}{u}} \cdot \left[\int | \varphi |^{v\left(p - \frac{r}{u}\right)} dx \right]^{\frac{1}{v}} . \end{aligned}$$

Wegen

$$v\left(p - \frac{r}{u}\right) = \frac{s-r}{p-r}\left(p - r\frac{s-p}{s-r}\right) = p\frac{s-r}{p-r} - r\frac{s-p}{p-r} = s$$

gilt somit

$$\| \varphi \|_p \leqq \left(\| \varphi \|_r^{\frac{r}{u}} \cdot \| \varphi \|_s^{\frac{s}{v}} \right)^{\frac{1}{p}},$$

also nach Definition von u und v

$$\| \varphi \|_p \leqq \| \varphi \|_r^{\frac{s/p-1}{s/r-1}} \cdot \| \varphi \|_s^{\frac{1-r/p}{1-r/s}} . \tag{5. 16}$$

Für die weiteren Beweisschritte ist es zweckmäßig, das in der Distributionentheorie übliche Produkt χF zwischen einer Funktion χ aus $C^\infty(R_n)$ und einem linearen Funktional F auf $C_0^\infty(\Omega)$ zu benutzen. Das Produktfunktional χF wird durch

$$(\chi F)\varphi = F(\chi\varphi) \text{ für } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{5. 17}$$

definiert. Gilt $F \in L_p(\Omega)$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ und ist χ beschränkt, so gilt

$$|(\chi F)\varphi| = |F(\chi\varphi)| \leqq \|F\|_p \cdot \|\chi\varphi\|_q \leqq \|\chi\|_\infty \cdot \|F\|_p \cdot \|\varphi\|_q$$

und somit $\chi F \in L_p(\Omega)$ und

$$\|\chi F\|_p \leqq \|\chi\|_\infty \cdot \|F\|_p. \tag{5. 18}$$

Zum Abschluß des Beweises von Lemma 5. 4 benötigen wir die folgenden beiden Aussagen:

Lemma 5. 5. *Es sei $\chi \in C_0^\infty(R_n)$ und $F \in L_s(\Omega)$ mit $1 < s < \infty$. Dann gehört χF für $1 \leqq r < s$ zu $L_r(\Omega)$, und es gilt*

$$\|\chi F\|_r \leqq \|\chi\|_\alpha \|F\|_s \text{ mit } \alpha = r \cdot \frac{s}{s-r} > 1. \tag{5. 19}$$

Lemma 5. 6. *Die Funktion χ besitze die Eigenschaften*

$$\chi \in C_0^\infty(R_n), \quad 0 \leqq \chi \leqq 1, \quad \chi(x) = 1 \text{ für } |x| \leqq 1. \tag{5. 20}$$

Ferner gelte

$$\chi_k(x) = \chi\left(\frac{x}{k}\right). \tag{5. 21}$$

Dann gilt für jedes $F \in L_p(\Omega)$ mit $1 \leqq p < \infty$

$$\|F - \chi_k F\|_p \to 0 \text{ für } k \to \infty. \tag{5. 22}$$

Beweis von Lemma 5. 5. Nach Satz 3. 1 gibt es eine Folge $\{f_k\}$ mit $\|F - f_k\|_s \to 0$ für $k \to \infty$. Hieraus folgt für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$(\chi F)\varphi = F(\chi\varphi) = \lim_{k\to\infty} f_k \chi\varphi dx. \tag{5. 23}$$

Andererseits gilt mit $u = \frac{s}{r} > 1$ und $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 1$ nach (2. 2)

$$\|(f_k - f_j)\chi\|_r \leqq [\| |f_k - f_j|^r \|_u \cdot \| |\chi|^r \|_v]^{\frac{1}{r}} = \|\chi\|_{rv} \|f_k - f_j\|_{ru},$$

also wegen $ru = s$ und $rv = \dfrac{r}{1-\frac{1}{u}} = \dfrac{r}{1-\frac{r}{s}} = \dfrac{rs}{s-r}$

$$\|f_k\chi - f_j\chi\|_r \leqq \|\chi\|_\alpha \cdot \|f_k - f_j\|_s \text{ mit } \alpha = r \cdot \frac{s}{s-r}. \tag{5. 24}$$

Die Folge $\{f_k\chi\}$ konvergiert also in $L_r(\Omega)$. Wegen der Vollständigkeit von $L_r(\Omega)$ gibt es ein $G \in L_r(\Omega)$ mit $\|G - f_k\chi\|_r \to 0$ für $k \to \infty$. Nach (5. 23) gilt $G = \chi F$. Hieraus folgt $\chi F \in L_r(\Omega)$ und $\|\chi F - \chi f_k\|_r \to 0$ für $k \to \infty$. Analog zu (5. 24) gilt $\|\chi f_k\|_r \leqq \|\chi\|_\alpha \cdot \|f_k\|_s$ und somit $\|\chi F\|_r = \lim \|\chi f_k\|_r \leqq \|\chi\|_\alpha \cdot \lim \|f_k\|_s = \|\chi\|_\alpha \|F\|_s$. Damit ist Lemma 5. 5 bewiesen.

Beweis von Lemma 5. 6. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es nach Satz 3. 1 bzw. Lemma 4. 2 ein $f \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|F - f\|_p < \varepsilon/2$. Für $k > \operatorname{Sup}\{|x| : x \in \operatorname{supp} f\}$ gilt $f - \chi_k f = 0$ und somit wegen (5. 18) und $\|\chi\|_\infty = 1$

$$\|F - \chi_k F\|_p \leqq \|F - f\|_p + \|f - \chi_k f\|_p + \|\chi_k(f - F)\|_p < \varepsilon.$$

Damit ist Lemma 5. 6 bewiesen.

Es sei noch bemerkt, daß Lemma 5. 6 nicht für $p = \infty$ gilt, wie man etwa am Beispiel des durch $u = 1$ erzeugten Funktionals (4. 23) sieht. Dagegen läßt sich der Beweis von Lemma 5. 5 so modifizieren, daß auch noch der Fall $s = \infty$ eingeschlossen werden kann.

Abschluß des Beweises von Lemma 5. 4. Es sei $F \in L_r(\Omega) \cap L_s(\Omega)$ mit $1 \leqq r < s < \infty$. Wir zeigen zunächst, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $f \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\| F - f \|_r < \varepsilon$ und $\| F - f \|_s < \varepsilon$ gibt. Hierzu wählen wir nach Lemma 5. 6 ein $k \geqq 1$ mit

$$\| F - \chi_k F \|_r < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } \| F - \chi_k F \|_s < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5. 25}$$

Anschließend wählen wir nach Satz 3. 1 ein $g \in C_0^\infty(\Omega)$ mit

$$\| F - g \|_s < \frac{\varepsilon}{2 \| \chi_k \|_a} \| \chi_k \|_\alpha \quad \left(\text{mit } \alpha = r \cdot \frac{s}{s - r} > 1 \right). \tag{5. 26}$$

Nach Lemma 5. 5 und (5. 26) gilt $\| \chi_k F - \chi_k g \|_r < \varepsilon/2$. Hieraus und aus der ersten Relation in (5. 25) folgt $\| F - \chi_k g \|_r < \varepsilon$. Wegen $\chi_k(x) = 1$ für $| x | \leqq k$ gilt $\| \chi_k \|_\alpha > 1$ und somit nach (5. 26) und (5. 18) $\| \chi_k F - \chi_k g \|_s \leqq \| F - g \|_s < \varepsilon/2$. Hieraus und aus der zweiten Relation in (5. 25) folgt, daß auch $\| F - \chi_k g \|_s < \varepsilon$ gilt. Die Funktion $f = \chi_k g$ besitzt daher die gewünschten Eigenschaften. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, gibt es somit eine Folge $\{f_j\}$ aus $C_0^\infty(\Omega)$ mit

$$\| F - f_j \|_r \to 0 \text{ und } \| F - f_j \|_s \to 0 \text{ für } j \to \infty. \tag{5. 27}$$

Aus (5. 27) folgt

$$\| F - f_j \|_p \to 0 \text{ für } j \to \infty \text{ und } r \leqq p \leqq s. \tag{5. 28}$$

In der Tat: Nach (5. 16) gilt

$$\| f_j - f_k \|_p \leqq \| f_j - f_k \|_r^{\frac{s/p-1}{s/r-1}} \cdot \| f_j - f_k \|^{\frac{1-r/p}{1-r/s}}. \tag{5. 29}$$

Nach (5. 27) konvergiert daher $\{f_j\}$ auch in $L_p(\Omega)$. Ferner gilt nach (5. 27) für jedes $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$F\varphi = \lim_{j \to \infty} \int f_j \varphi \, dx. \tag{5. 30}$$

Wie im Beweis zu Lemma 5. 5 folgt hieraus $F \in L_p(\Omega)$ und $\| F - f_j \|_p \to 0$ für $r \leqq p \leqq s$. Die Relation (5. 15) ergibt sich, indem man in (5. 16) $\varphi = f_j$ setzt und den Grenzübergang $j \to \infty$ durchführt. Damit ist der Beweis von Lemma 5. 4 abgeschlossen.

Aus (5. 16) läßt sich mit Hilfe der gleichen Argumentation wie im ersten Teil des Beweises von Lemma 5. 3 folgern, daß $\| F \|_p$ für $r \leqq p \leqq s$ stetig von p abhängt.

§ 6. Grundoperationen im Raum $L_1(-\infty, \infty)$

Im zweiten Teil dieser Arbeit wollen wir die Anwendung der in den vorangegangenen Abschnitten entwickelten Methoden am Beispiel der Fourier-Transformation im Raum $L_1(-\infty, \infty)$ erläutern. Es zeigt sich, daß sich die Hauptergebnisse der klassischen Theorie der Fourier-Transformation im Rahmen der hier dargestellten Theorie des Raumes L_1 ohne Benutzung des Lebesgueschen Integralbegriffs gewinnen lassen. In diesem Abschnitt besprechen wir zunächst die zur Diskussion der Fourier-Transformation erforderlichen Grundoperationen. Im folgenden ist stets $n = 1$ und $\Omega = R_1$, und wir schreiben $C_0^\infty, L_1, \ldots$ statt $C_0^\infty(R_1), L_1(R_1), \ldots$.

Wir beginnen mit einigen Bemerkungen über die Einbettung klassischer Funktionen in L_1. Wir bezeichnen u als stückweise stetig in $(-\infty, \infty)$, wenn alle Unstetigkeitspunkte von u Sprungstellen (endlicher Höhe) sind und wenn in jedem beschränkten Intervall höchstens endlich viele Sprungstellen liegen. Die Menge aller in $(-\infty, \infty)$ stückweise stetigen Funktionen u mit

$$\|u\|_1 = \int |u| \, dx < \infty \tag{6.1}$$

bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}$. Zu jedem $u \in \mathfrak{R}$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $v \in C_0$ mit $\|u - v\|_1 = \int |u - v| \, dx < \varepsilon$. Hieraus und aus Lemma 2.1 folgt, daß es zu jedem $u \in \mathfrak{R}$ eine Folge $\{u_k\}$ aus C_0^∞ mit

$$\|u - u_k\|_1 = \int |u - u_k| \, dx \to 0 \text{ für } k \to \infty \tag{6.2}$$

gibt. Hieraus folgt nach Lemma 4.3, daß das durch u nach (1.2) erzeugte Funktional F_u zu L_1 gehört und daß

$$\|F_u\|_1 = \lim_{k\to\infty} \|u_k\|_1 = \|u\|_1 \tag{6.3}$$

gilt. Durch $u \to F_u$ ist also eine isometrische, lineare Abbildung des durch (6.1) normierten linearen Raumes $\mathfrak{R}$ in L_1 gegeben. Wir können daher $\mathfrak{R}$ als Teilraum von L_1 auffassen.

Neben $\mathfrak{R}$ betrachten wir noch die Menge $\mathfrak{R}'$ aller in $(-\infty, \infty)$ stückweise stetigen Funktionen u mit

$$\|u\|_\infty = \operatorname{Sup}\{|u(x)| : x \text{ reell}\} < \infty. \tag{6.4}$$

Durch eine geringfügige Modifikation des Beweises von Lemma 4.4 folgt, daß sich $\mathfrak{R}'$ durch $u \to F_u$ isometrisch und linear in L_∞ einbetten läßt.

Nach diesen Vorbemerkungen führen wir den *Translationsoperator* τ_h in L_1 ein. Für $u \in \mathfrak{R}$ ist τ_h klassisch durch

$$(\tau_h u)(x) = u(x + h) \tag{6.5}$$

definiert. Analog zur Distributionentheorie definieren wir $\tau_h F$ für $F \in L_1$ als das durch

$$(\tau_h F)\varphi = F(\tau_{-h}\varphi) \text{ für } \varphi \in C_0^\infty \tag{6.6}$$

gegebene Funktional. Für jede Folge $\{f_k\}$ aus C_0^∞ mit $\|F - f_k\|_1 \to 0$ gilt

$$(\tau_h F)\varphi = \lim_{k\to\infty} \int f_k \tau_{-h}\varphi \, dx = \lim_{k\to\infty} \int \varphi \tau_h f_k \, dx \tag{6.7}$$

und

$$\|\tau_h f_k - \tau_h f_j\|_1 = \|f_k - f_j\|_1 \to 0 \text{ für } k, j \to \infty. \tag{6.8}$$

Nach Lemma 4.3 gilt daher $\tau_h F \in L_1$ und

$$\|\tau_h F\|_1 = \lim_{k\to\infty} \|\tau_h f_k\|_1 = \lim_{k\to\infty} \|f_k\|_1 = \|F\|_1. \tag{6.9}$$

Wegen $\tau_h(\tau_{-h}F) = F$ und (6.9) ist $F \to \tau_h F$ eine eindeutig umkehrbare isometrische Abbildung von L_1 auf sich. Für $u \in \mathfrak{R}$ und $\varphi \in C_0^\infty$ gilt nach (6.6)

$$(\tau_h F_u)\varphi = F_u(\tau_{-h}\varphi) = \int u(x)\varphi(x - h)\, dx = \int u(x + h)\varphi(x)\, dx = F_{\tau_h u}\varphi,$$

d. h. die Operationen (6.5) und (6.6) sind verträglich, falls wir u und F_u miteinander identifizieren. Insgesamt erhalten wir damit:

Lemma 6. 1. *Der durch* (6. 6) *definierte Translationsoperator* τ_h *bildet* L_1 *eindeutig umkehrbar, linear und norminvariant auf sich ab. Für* $u \in \mathfrak{R} < L_1$ *ist* τ_h *mit dem durch* (6. 5) *gegebenen klassischen Operator identisch.*

Da $\mathfrak{R}$ dicht in L_1 ist, ist der Operator τ_h durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt. In Analogie zu dem bekannten Satz der Lebesgueschen Theorie über die Stetigkeit im Mittel gilt:

Lemma 6. 2. *Für* $h \to 0$ *und* $F \in L_1$ *gilt* $\| \tau_h F - F \|_1 \to 0$.

Beweis. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ läßt sich nach Definition 4. 1 ein $f \in C_0^\infty$ mit $\| F - f \|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$ und anschließend ein $\delta > 0$ mit $\| \tau_h f - f \|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$ für $| h | < \delta$ wählen. Hieraus und aus der Norminvarianz von τ_h folgt für $| h | < \delta$

$$\| \tau_h F - F \|_1 \leqq \| \tau_h (F - f) \|_1 + \| \tau_h f - f \|_1 + \| f - F \|_1 < \varepsilon.$$

Damit ist Lemma 6. 2 bewiesen.

Als nächste Operation diskutieren wir das Faltungsprodukt in L_1. Für $f, g \in C_0^\infty$ ist die Faltung $f * g$ durch

$$(f * g)(x) = \int f(x - t) g(t)\, dt \tag{6. 10}$$

erklärt. Mit f und g hat auch $f * g$ kompakten Support. Hieraus folgt $f * g \in C_0^\infty$. Ferner gilt

$$\begin{cases} \| f * g \|_1 = \int | \int f(x - t) g(t)\, dt |\, dx \\ \qquad\quad \leqq \int | g(t) | \cdot [\int | f(x - t) |\, dx]\, dt = \| f \|_1 \cdot \| g \|_1. \end{cases} \tag{6. 11}$$

Zur Übertragung der Faltungsdefinition auf Elemente $F, G \in L_1$ betrachten wir Folgen $\{f_k\}$, $\{g_k\}$ aus C_0^∞ mit $\| F - f_k \|_1 \to 0$ und $\| G - g_k \|_1 \to 0$ für $k \to \infty$. Nach (6. 11) gilt

$$\begin{cases} \| f_k * g_k - f_j * g_j \|_1 \leqq \| f_k * (g_k - g_j) \|_1 + \| (f_k - f_j) * g_j \|_1 \\ \quad \leqq \| f_k \|_1 \cdot \| g_k - g_j \|_1 + \| g_j \|_1 \cdot \| f_k - f_j \|_1 \to 0 \text{ für } k, j \to \infty. \end{cases} \tag{6. 12}$$

Sind $\{f_k'\}$, $\{g_k'\}$ zwei weitere Folgen aus C_0^∞ mit $\| F - f_k' \|_1 \to 0$ und $\| G - g_k' \|_1 \to 0$, so folgt entsprechend

$$\begin{cases} \| f_k * g_k - f_k' * g_k' \|_1 \leqq \| f_k \|_1 \cdot \| g_k - g_k' \|_1 + \| g_k' \|_1 \cdot \| f_k - f_k' \|_1 \to 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } k, j \to \infty. \end{cases} \tag{6. 13}$$

Aus (6. 12) folgt wegen der Vollständigkeit von L_1, daß es ein Element $F * G$ aus L_1 mit $\| F * G - f_k * g_k \|_1 \to 0$ für $k \to \infty$ gibt. Nach (6. 13) ist $F * G$ unabhängig von der speziellen Wahl der zur Approximation von F und G benutzten Folgen $\{f_k\}$ und $\{g_k\}$. Wir bezeichnen $F * G$ als die *Faltung* der Funktionale F, G aus L_1. Setzen wir in (6. 11) $f = f_k$ und $g = g_k$, so folgt für $k \to \infty$

$$\| F * G \|_1 \leqq \| F \|_1 \cdot \| G \|_1. \tag{6. 14}$$

Entsprechend lassen sich die weiteren elementaren Eigenschaften der Faltung von C_0^∞ auf L_1 übertragen. Insbesondere erhalten wir das Kommutativgesetz

$$F * G = G * F \tag{6. 15}$$

und das Assoziativgesetz

$$F * (G * H) = (F * G) * H. \tag{6. 16}$$

Ferner ist die Faltung in beiden Faktoren linear. Hieraus und aus (6. 14) bis (6. 16) folgt, daß L_1 eine kommutative Banach-Algebra bildet, falls man die Faltung als multiplikative

Operation einführt. Für $u, v \in \mathfrak{R}$ folgt aus (6. 11), daß die durch (6. 10) definierte Funktion $u * v$ ebenfalls zu $\mathfrak{R}$ gehört. Sind ferner $\{u_k\}$ und $\{v_k\}$ Folgen aus C_0^∞ mit $\| u - u_k \|_1 \to 0$ und $\| v - v_k \|_1 \to 0$, so gilt für die durch u, v erzeugten Funktionale F_u, F_v nach Definition der Faltung in L_1 auch $\| F_u * F_v - u_k * v_k \|_1 \to 0$. Andererseits folgt analog zu (6. 12) $\| u * v - u_k * v_k \|_1 \to 0$. Wegen der Isometrie der Einbettung $u \to F_u$ von $\mathfrak{R}$ in L_1 gilt somit $F_u * F_v = F_{u*v}$, d. h. für $u, v \in \mathfrak{R}$ ist die Faltungsdefinition in L_1 mit der klassischen Definition (6. 10) verträglich. Wir fassen unsere Ergebnisse in folgendem Lemma zusammen:

Lemma 6. 3. *Es seien F, G zwei Funktionale aus L_1 und $\{f_k\}, \{g_k\}$ zwei (nach Lemma 4. 2 existierende) Folgen aus C_0^∞ mit $\| F - f_k \|_1 \to 0$ und $\| G - g_k \|_1 \to 0$. Ferner sei $f_k * g_k$ durch (6. 10) erklärt. Dann ist die Faltung $F * G$ als das durch $\| F * G - f_k * g_k \|_1 \to 0$ gegebene Funktional aus L_1 definiert. $F * G$ ist von der speziellen Wahl der Folgen $\{f_k\}$ und $\{g_k\}$ unabhängig. Es gelten die Relationen (6. 14) bis (6. 16), d. h. L_1 bildet mit der Faltung als multiplikativer Operation eine kommutative Banach-Algebra. Für $u, v \in \mathfrak{R}$ ist diese Definition mit der klassischen Definition (6. 10) verträglich.*

Neben der in Lemma 6. 3 betrachteten Faltung zwischen zwei Funktionalen aus L_1 wollen wir noch eine Faltungsoperation zwischen einem Funktional F aus L_1 und einem Funktional G aus L_∞ einführen:

Definition 6. 1. *Für $F \in L_1$ und $G \in L_\infty$ wird die Faltung $F * G$ als die durch*

$$(F * G)(x) = \lim_{k \to \infty} G_y f_k(x - y) \tag{6. 17}$$

gegebene Funktion erklärt. Hierbei ist $\{f_k\}$ eine Folge aus C_0^∞ mit $\| F - f_k \|_1 \to 0$; der Index y besagt, daß G auf $f_k(x - y)$ als Funktion von y bei festem x anzuwenden ist.

Da G als Funktional aus L_∞ auf $C_{0,1}^\infty$ beschränkt ist, folgt unmittelbar, daß der Grenzwert (6. 17) existiert und von der Wahl der Folge $\{f_k\}$ unabhängig ist. Da $C_{0,1}^\infty$ dicht in L_1 ist, läßt sich G in eindeutiger Weise ohne Abänderung der Norm zu einem beschränkten linearen Funktional auf L_1 fortsetzen. Erklären wir $\breve{F}$ als das durch

$$\| \breve{F} - \breve{f}_k \|_1 \to 0 \text{ für } k \to \infty \text{ mit } \breve{f}_k(x) = f_k(-x) \tag{6. 18}$$

definierte Funktional aus L_1, so gilt

$$(F * G)(x) = \lim_{k \to \infty} G_y \breve{f}_k(y - x) = \lim_{k \to \infty} G(\tau_{-x} \breve{f}_k) = G(\tau_{-x} \breve{F}). \tag{6. 19}$$

Hieraus und aus $\| \breve{F} \|_1 = \| F \|_1$ folgt nach (6. 9) und Lemma 6. 2

$$| (F * G)(x) | \leqq \| G \|_\infty \cdot \| F \|_1 \tag{6. 20}$$

und

$$\begin{cases} | (F * G)(x + h) - (F * G)(x) | \\ \leqq \| G \|_\infty \| (\tau_{-h} - 1) \tau_{-x} \breve{F} \|_1 \to 0 \text{ für } h \to 0, \end{cases} \tag{6. 21}$$

d. h. $F * G$ ist stetig und beschränkt, und es gilt

$$\| F * G \|_\infty \leqq \| F \|_1 \cdot \| G \|_\infty. \tag{6. 22}$$

Für $u \in \mathfrak{R}$ und $v \in \mathfrak{R}'$ ist Definition 6. 1 mit der klassischen Definition (6. 10) verträglich. In der Tat: Nach (6. 19) gilt

$$(F_u * F_v)(x) = F_v(\tau_{-x} \breve{F}_u) = \int u(x - y) v(y) dy = (u * v)(x). \tag{6. 23}$$

Als letzte Grundoperation in L_1 besprechen wir die Fourier-Transformation. In der klassischen Analysis wird die Fourier-Transformierte $\hat{u}$ einer Funktion $u \in \mathfrak{R}$ durch

$$\hat{u}(x) = \int e^{ixt} u(t)\, dt \tag{6. 24}$$

definiert. Hierdurch wird folgende Definition nahegelegt:

Definition 6. 2. *Es sei $F \in L_1$ und $\{f_k\}$ eine Folge aus C_0^∞ mit $\| F - f_k \|_1 \to 0$ für $k \to \infty$. Dann wird die durch*

$$\hat{F}(x) = \lim_{k\to\infty} \hat{f}_k(x) = \lim_{k\to\infty} \int e^{ixt} f_k(t)\, dt \qquad (x \text{ reell}) \tag{6. 25}$$

erklärte Funktion $\hat{F}$ als die Fourier-Transformierte von F bezeichnet.

Der Grenzwert (6. 25) existiert wegen $\| f_k - f_j \|_1 \to 0$ für $k, j \to \infty$ und ist unabhängig von der Wahl der Folge $\{f_k\}$. $\hat{F}$ ist stetig und beschränkt. Die Stetigkeit ergibt sich aus der Bemerkung, daß $\hat{f}_k$ wegen $f_k \in C_0^\infty$ stetig ist und daß die Folge $\{\hat{f}_k\}$ wegen $| \hat{f}_k(x) - \hat{f}_j(x) | \leqq \| f_k - f_j \|_1$ gleichmäßig konvergiert. Die Beschränktheit folgt aus $| \hat{F}(x) | \leqq \overline{\lim} \| f_k \|_1 = \| F \|_1$. Insbesondere gilt

$$\| \hat{F} \|_\infty \leqq \| F \|_1. \tag{6. 26}$$

Für $u \in \mathfrak{R}$ sind die Definitionen (6. 24) und (6. 25) miteinander verträglich. In der Tat: Ist $\{u_k\}$ eine Folge aus C_0^∞ mit $\| u - u_k \|_1 \to 0$, so gilt wegen $| \hat{u}(x) - \hat{u}_k(x) | \leqq \| u - u_k \|_1$

$$\hat{F}_u(x) = \lim_{k\to\infty} \hat{u}_k(x) = \hat{u}(x). \tag{6. 27}$$

Es gelten folgende Regeln:

$$(F * G)\hat{}(x) = \hat{F}(x) \cdot \hat{G}(x), \tag{6. 28}$$

$$(\tau_h F)\hat{}\,(x) = e^{-ihx} \cdot \hat{F}(x), \tag{6. 29}$$

$$(e^{ihx} \cdot F)\hat{}\,(x) = \hat{F}(x + h). \tag{6. 30}$$

Das in (6. 30) auftretende Produkt zwischen der Funktion e^{ihx} aus C^∞ und dem Funktional F ist hierbei im Sinn von (5. 17) zu verstehen. Zum Beweis von (6. 28) bis (6. 30) beachte man, daß für alle Folgen $\{f_k\}$ und $\{g_k\}$ aus C_0^∞ mit $\| F - f_k \|_1 \to 0$ und $\| G - g_k \|_1 \to 0$ die Beziehungen $\| F * G - f_k * g_k \|_1 \to 0$, $\| \tau_h F - \tau_h f_k \|_1 \to 0$ und $\| e^{ihx} F - e^{ihx} f_k \|_1 \to 0$ gelten. Die Regeln (6. 28) bis (6. 30) folgen daher unmittelbar aus Definition 6. 2 und den entsprechenden elementaren Regeln für $f_k, g_k \in C_0^\infty$. Wir zeigen nun, daß das Lemma von Riemann-Lebesgue für Funktionale $F \in L_1$ gültig ist:

Lemma 6. 4. *Für $F \in L_1$ gilt $\hat{F}(x) \to 0$ für $| x | \to \infty$.*

Beweis. Wir wählen zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $f \in C_0^\infty$ mit $\| F - f \|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Durch partielle Integration folgt

$$\hat{f}(x) = -\frac{1}{ix} \int f'(t) e^{ixt} dt \to 0 \text{ für } | x | \to \infty. \tag{6. 31}$$

Es gibt daher ein $A > 0$ mit $| \hat{f}(x) | < \frac{\varepsilon}{2}$ für $| x | > A$. Hieraus und aus (6. 26) folgt für $| x | > A$

$$| \hat{F}(x) | \leqq | \hat{F}(x) - \hat{f}(x) | + | \hat{f}(x) | \leqq \| F - f \|_1 + | \hat{f}(x) | < \varepsilon.$$

Damit ist Lemma 6. 4 bewiesen.

Corollar. *Die Banach-Algebra L_1 besitzt kein Einselement.*

Beweis. Ist E ein Einselement in L_1, so folgt aus (6. 28) $\hat{E}(x) \equiv 1$ im Widerspruch zu Lemma 6. 4.

Zum Abschluß wollen wir die Definition 6. 2 mit der in [14] gegebenen Definition der Fourier-Transformierten eines L_2-Funktionals und mit der in der Distributionentheorie üblichen Definition der Fourier-Transformierten einer temperierten Distribution vergleichen. Zur Unterscheidung von der in Definition 6. 2 eingeführten Fourier-Transformierten $\hat{F}$ bezeichnen wir die in [14] diskutierte Fourier-Transformierte eines Funktionals F aus L_2 mit $\tilde{F}$. Es sei kurz an die Definition von $\tilde{F}$ erinnert: Zu jedem $F \in L_2$ gibt es nach Satz 3. 1 eine Folge $\{f_k\}$ aus C_0^∞ mit $\| F - f_k \|_2 \to 0$. Nach der (klassischen) Parsevalschen Gleichung gilt $\| \hat{f}_k - \hat{f}_j \|_2 = \sqrt{2\pi} \| f_k - f_j \|_2 \to 0$ für $k, j \to \infty$. Der Grenzwert

$$\tilde{F}\varphi = \lim_{k\to\infty} \int \hat{f}_k \varphi \, dx \text{ für } \varphi \in C_0^\infty \tag{6. 32}$$

existiert daher und ist von der Wahl von $\{f_k\}$ unabhängig. Es gilt $\tilde{F} \in L_2$ und $\| \tilde{F} \|_2 = \sqrt{2\pi} \| F \|_2$. $\tilde{F}$ wird als die L_2-Fourier-Transformierte von $F \in L_2$ bezeichnet. Wir zeigen:

Lemma 6. 5. *Es sei $F \in L_1 \cap L_2$. Dann gilt*

$$\tilde{F}\varphi = \int \hat{F}(x)\varphi(x)\,dx \text{ für } \varphi \in C_0^\infty. \tag{6. 33}$$

(6. 33) besagt, daß das Funktional $\tilde{F}$ durch die stetige Funktion $\hat{F}$ erzeugt wird. Identifizieren wir daher wie üblich stetige Funktionen mit den durch sie erzeugten Funktionalen, so gilt $\tilde{F} = \hat{F}$ für jedes $F \in L_1 \cap L_2$. Damit ist die Verträglichkeit der Definition 6. 2 mit der Definition der L_2-Fourier-Transformierten nachgewiesen.

Zum Beweis von Lemma 6. 5 wählen wir nach Lemma 5. 4 eine Folge $\{f_k\}$ aus C_0^∞ mit $\| F - f_k \|_1 \to 0$ und $\| F - f_k \|_2 \to 0$. Nach (6. 26) gilt $| \hat{F}(x) - \hat{f}_k(x) | \leqq \| F - f_k \|_1 \to 0$. Die Folge $\{\hat{f}_k\}$ konvergiert also gleichmäßig gegen $\hat{F}$. Hieraus und aus (6. 32) folgt für jedes $\varphi \in C_0^\infty$

$$\tilde{F}\varphi = \lim_{k\to\infty} \int \hat{f}_k \varphi \, dx = \int \hat{F}\varphi \, dx.$$

Damit ist Lemma 6. 5 bewiesen.

Zur Definition der Fourier-Transformierten $\overset{*}{F}$ von F im Distributionensinn betrachten wir die Menge $\mathfrak{S}$ aller Funktionen φ aus C^∞ mit

$$\operatorname{Sup} \{ | x |^p \cdot | \varphi^{(q)}(x) | : x \in R_1 \} < \infty \tag{6. 34}$$

für alle Paare (p, q) nichtnegativer ganzer Zahlen. Mit φ gehört auch $\hat{\varphi}$ zu $\mathfrak{S}$, und es gilt die elementar beweisbare Beziehung

$$\int \varphi \hat{\psi} \, dx = \int \hat{\varphi} \psi \, dx \text{ für } \varphi, \psi \in \mathfrak{S}. \tag{6. 35}$$

Wir verwenden die Schreibweise $\varphi_k \xrightarrow{\mathfrak{S}} 0$, wenn die Folge $\{\varphi_k\}$ und ihre sämtlichen Ableitungen $\{\varphi_k^{(p)}\}$ gleichmäßig gegen 0 konvergieren und wenn es für jedes Paar (p, q) nichtnegativer ganzer Zahlen eine Konstante $C_{p,q}$ mit

$$| x |^p \cdot | \varphi_k^{(q)}(x) | < C_{p,q} \text{ für alle } x \in R_1 \text{ und alle } k \tag{6. 36}$$

gibt. Unter einer temperierten Distribution versteht man bekanntlich ein lineares Funktional F auf $\mathfrak{S}$ mit $F\varphi_k \to 0$ für $\varphi_k \xrightarrow{\mathfrak{S}} 0$. Die Fourier-Transformierte $\overset{\bullet}{F}$ einer temperierten Distribution F ist das durch

$$\overset{\bullet}{F}\varphi = F\hat{\varphi} \text{ für } \varphi \in \mathfrak{S} \tag{6. 37}$$

erklärte lineare Funktional. Mit F ist auch $\overset{\bullet}{F}$ eine temperierte Distribution (vgl. etwa [12]).

Ist $F \in L_1$ und $\{f_k\}$ eine Folge aus C_0^∞ mit $\| F - f_k \|_1 \to 0$, so läßt sich F durch

$$F\varphi = \lim_{k\to\infty} \int f_k \varphi dx \text{ für } \varphi \in \mathfrak{S} \tag{6. 38}$$

zu einem linearen Funktional auf $\mathfrak{S}$ fortsetzen. Eine einfache Überlegung zeigt, daß die Fortsetzung von der speziellen Wahl der Folge $\{f_k\}$ unabhängig ist und eine temperierte Distribution bildet. Nach (6. 35) und (6. 37) gilt für das durch (6. 38) definierte Funktional F und für $\varphi \in \mathfrak{S}$

$$\overset{\bullet}{F}\varphi = F\hat{\varphi} = \lim_{k\to\infty} \int f_k \hat{\varphi} dx = \lim_{k\to\infty} \int \hat{f}_k \varphi dx = \int \hat{F}\varphi dx, \tag{6. 39}$$

da $\{\hat{f}_k\}$ gleichmäßig gegen $\hat{F}$ konvergiert. Die Fourier-Transformierte $\overset{\bullet}{F}$ von F im Distributionensinn ist also mit dem durch die stetige Funktion $\hat{F}$ erzeugten linearen Funktional auf $\mathfrak{S}$ identisch.

§ 7. Die Umkehrformel für die Fourier-Transformation

Die klassische Umkehrformel für die Fourier-Transformation in L_1 lautet: Ist $|u|$ im Lebesgueschen Sinn integrierbar und ist $\hat{u}$ die durch (6. 24) definierte Fourier-Transformierte von u, so gilt für fast alle x

$$u(x) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \left(1 - \frac{|y|}{R}\right) e^{-ixy} \hat{u}(y)\, dy. \tag{7. 1}$$

Hierbei sind die in (6. 24) und (7. 1) auftretenden Integrale im Lebesgueschen Sinn zu verstehen. Die Ausnahmepunkte x, für die (7. 1) nicht gilt, liegen außerhalb der Lebesgue-Menge $\mathfrak{L}$ von u,

$$\mathfrak{L} = \left\{ x : \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - f(x)|\, dt = 0 \right\}. \tag{7. 2}$$

In unserem Aufbau gilt der folgende analoge Umkehrsatz:

Satz 7. 1. *Für $F \in L_1$ sei u_R durch*

$$u_R(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \left(1 - \frac{|y|}{R}\right) e^{-ixy} \hat{F}(y)\, dy \tag{7. 3}$$

definiert. Dann gilt für jedes $\varphi \in C_0^\infty$

$$F\varphi = \lim_{R\to\infty} \int u_R \cdot \varphi dx. \tag{7. 4}$$

Aus Satz 7. 1 folgt unmittelbar der Eindeutigkeitssatz für die Fourier-Transformation in L_1:

Satz 7. 2. *Aus $F \in L_1$ und $\hat{F}(x) = 0$ für alle (reellen) x folgt $F = 0$.*

Zum Beweis von Satz 7. 1 verwenden wir die folgende Aussage, die auch unabhängig von Interesse ist:

Lemma 7. 1. *Es sei*

$$q_R(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1 - \cos Rx}{Rx^2}. \tag{7. 5}$$

Dann gilt für jedes $F \in L_1$

$$\| F - q_R * F \|_1 \to 0 \text{ für } R \to \infty. \tag{7. 6}$$

Man beachte, daß q_R zu $\mathfrak{R}$ gehört und somit nach den Bemerkungen am Anfang von § 6 als Element von L_1 aufgefaßt werden kann. Die Formel (7. 6) ist also sinnvoll.

Beweis von Lemma 7. 1. Es gilt (etwa nach dem Residuensatz)

$$\| q_R \|_1 = \frac{1}{\pi} \int \frac{1 - \cos Rx}{Rx^2} dx = \frac{1}{\pi} \int \frac{1 - \cos t}{t^2} dt = 1. \tag{7. 7}$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $F \in L_1$ gibt es ein $f \in C_0^\infty$ mit $\| F - f \|_1 < \varepsilon$. Hieraus folgt nach (6. 14) und (7. 7)

$$\begin{cases} \| F - q_R * F \|_1 \leqq \| F - f \|_1 + \| f - q_R * f \|_1 + \| q_R * (f - F) \|_1 \\ \qquad \leqq \| f - q_R * f \|_1 + 2\varepsilon. \end{cases} \tag{7. 8}$$

Nach (7. 7) gilt

$$\begin{cases} \| f - q_R * f \|_1 = \frac{1}{\pi} \int \left| \int [f(x) - f(x - t)] \frac{1 - \cos Rt}{Rt^2} dt \right| dx \\ \qquad \leqq \frac{1}{\pi} \int \frac{1 - \cos t}{t^2} \left[\int \left| f(x) - f\left(x - \frac{t}{R}\right) \right| dx \right] dt. \end{cases} \tag{7. 9}$$

Wegen $f \in C_0^\infty$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $\| \tau_h f - f \|_1 < \varepsilon$ für $| h | < \delta$. Für jedes $R > 0$ gilt dann nach (7. 7)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-R\delta}^{R\delta} \frac{1 - \cos t}{t^2} \left[\int \left| f(x) - f\left(x - \frac{t}{R}\right) \right| dx \right] dt < \varepsilon. \tag{7. 10}$$

Hieraus und aus (7. 9) folgt

$$\| f - q_R * f \|_1 < \varepsilon + \frac{2}{\pi} \| f \|_1 \int_{|t| > R\delta} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt. \tag{7. 11}$$

Wählen wir ein R_0, so daß der letzte Summand in (7. 11) für $R > R_0$ kleiner als ε ist, so gilt nach (7. 8) und (7. 11) $\| F - q_R * F \|_1 < 4\varepsilon$ für $R > R_0$. Damit ist Lemma 7. 1 bewiesen.

Beweis von Satz 7. 1. Wir wählen eine Folge $\{f_k\}$ aus C_0^∞ mit $\| F - f_k \|_1 \to 0$ für $k \to \infty$. Da $\hat{f}_k$ wegen (6. 26) gleichmäßig gegen $\hat{F}$ konvergiert, folgt aus (7. 3) und (6. 24)

$$\begin{cases} u_R(x) = \lim\limits_{k \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-R}^{R} \left(1 - \frac{|y|}{R}\right) e^{-ixy} \hat{f}_k(y)\, dy \\ \qquad = \lim\limits_{k \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int f_k(t) \left[\int\limits_{-R}^{R} \left(1 - \frac{|y|}{R}\right) e^{iy(t-x)} dy \right] dt. \end{cases} \tag{7. 12}$$

Die Vertauschung der Integrationsreihenfolge ist zulässig, da die Integranden stetig von y und t abhängen und die Integrationsbereiche wegen $f_k \in C_0^\infty$ beschränkt sind. Durch partielle Integration ergibt sich elementar

$$\int_{-R}^{R} \left(1 - \frac{|y|}{R}\right) e^{i\alpha y} dy = 2\,\frac{1 - \cos R\alpha}{R\alpha^2}. \tag{7.13}$$

Nach (7.12), (7.13) und (7.5) gilt

$$u_R(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\pi} \int f_k(t)\,\frac{1 - \cos R(x-t)}{R(x-t)^2}\,dt = \lim_{k\to\infty} (q_R * f_k)(x). \tag{7.14}$$

Wegen $\| q_R * (f_k - f_j) \|_\infty \leqq \| q_R \|_\infty \cdot \| f_k - f_j \|_1$ ist die Konvergenz gleichmäßig in x. Für jedes $\varphi \in C_0^\infty$ gilt daher

$$\int u_R \cdot \varphi\,dx = \lim_{k\to\infty} \int (q_R * f_k)(x)\varphi(x)\,dx. \tag{7.15}$$

Andererseits gilt nach (6.14)

$$\| q_R * F - q_R * f_k \|_1 \to 0 \text{ für } k \to \infty. \tag{7.16}$$

Aus (7.15) folgt daher

$$\int u_R \cdot \varphi\,dx = (q_R * F)\varphi \text{ für } \varphi \in C_0^\infty. \tag{7.17}$$

Hieraus ergibt sich für $R \to \infty$ nach Lemma 7.1 die Relation (7.4). Damit ist Satz 7.1 bewiesen.

Nach (7.17) ist das durch u_R erzeugte Funktional mit dem zu L_1 gehörenden Funktional $q_R * F$ identisch. Aus Lemma 7.1 ergibt sich daher die folgende Verschärfung der Konvergenzaussage in Satz 7.1:

Corollar 1 zu Satz 7.1. *Es sei u_R die durch* (7.3) *gegebene stetige Funktion und F_R das durch u_R erzeugte Funktional*:

$$F_R\varphi = \int u_R \cdot \varphi\,dx \text{ für } \varphi \in C_0^\infty. \tag{7.18}$$

Dann gilt $F_R \in L_1$ und $\| F - F_R \|_1 \to 0$ für $R \to \infty$.

Aus Satz 7.1 ergibt sich leicht die bekannte klassische Umkehrformel:

Corollar 2 zu Satz 7.1. *Gehören u und $\hat{u}$ zu $\mathfrak{R}$, so ist u stetig, und es gilt für alle x*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ixy} \hat{u}(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\,\hat{\hat{u}}(-x). \tag{7.19}$$

Beweis. Es sei F_u das durch u erzeugte Funktional und u_R die durch (7.3) mit $F = F_u$ erklärte Funktion. Nach (6.27) gilt

$$u_R(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \left(1 - \frac{|y|}{R}\right) e^{-ixy} \hat{u}(y)\,dy. \tag{7.20}$$

Für $R \to \infty$ konvergiert u_R gleichmäßig in x gegen die rechte Seite von (7.19). In der Tat: Wählen wir zu vorgegebenem ε mit $0 < \varepsilon < 1$ ein $A > 0$ mit

$$\int_{|y|>A} |\hat{u}(y)|\,dy < \varepsilon,$$

so gilt für $R > A/\varepsilon$ und für alle x (wegen $R > A$)

$$\left| \int e^{-ixy}\hat{u}(y)\,dy - \int_{-R}^{R} \left(1 - \frac{|y|}{R}\right) e^{-ixy}\hat{u}(y)\,dy \right| < 2\varepsilon + \int_{-A}^{A} \frac{|y|}{R} |\hat{u}(y)|\,dy \leqq \varepsilon(2 + \|\hat{u}\|_1).$$

Nach Satz 7. 1 gilt daher für jedes $\varphi \in C_0^\infty$

$$F_u\varphi = \lim_{R\to\infty} \int u_R \cdot \varphi\,dx = \frac{1}{2\pi} \int \hat{\hat{u}}(-x) \cdot \varphi(x)\,dx, \tag{7. 21}$$

d. h. F_u wird durch die stetige Funktion $\hat{\hat{u}}(-x)$ erzeugt. Nach den Bemerkungen zu Beginn von § 6 (vgl. auch den Beweis von Lemma 4. 4) gilt daher (7. 19) in jedem Stetigkeitspunkt von u. Mit $\hat{\hat{u}}$ ist somit auch u stetig. Damit ist Corollar 2 bewiesen. — Aus Corollar 2 folgt:

Lemma 7. 2. *Jede zweimal stetig differenzierbare Funktion u mit kompaktem Support ist Fourier-Transformierte eines Funktionals F aus L_1.*

Beweis. Durch zweimalige partielle Integration folgt analog zu (6. 31) $\hat{u}(x) = O(1/|x|^2)$ für $|x| \to \infty$ und somit $\hat{u} \in \mathfrak{R}$. Nach Corollar 2 gilt daher $u = \hat{v} = \hat{F}_v$ mit $v(x) = \hat{u}(-x)$. — Als weitere Folgerung aus Corollar 2 ergibt sich mit Hilfe von (7. 13), daß die durch (7. 5) definierte Funktion q_R die Fourier-Transformierte

$$\hat{q}_R(x) = \begin{cases} 1 - |x|/R & \text{für } |x| < R, \\ 0 & \text{für } |x| \geqq R \end{cases} \tag{7. 22}$$

besitzt.

§ 8. Die regulären maximalen Ideale der Banach-Algebra L_1

Im letzten Teil dieser Arbeit wollen wir die Hauptsätze der Wienerschen Theorie der Fourier-Transformation im Rahmen der in den vorangegangenen Abschnitten entwickelten distributionentheoretischen Fassung der L_1-Theorie diskutieren. Ein besonders eleganter Zugang zu den Wienerschen Sätzen ergibt sich mit Hilfe der Gelfandschen Theorie der Banach-Algebren. Es sei auf die Darstellungen in [9] und [17] und auf die dort angegebene Literatur verwiesen. Im folgenden zeigen wir, daß sich der analytische Teil des auf der Gelfandschen Theorie beruhenden Beweises des Wienerschen Tauber-satzes unter den Gesichtspunkten dieser Arbeit ohne Benutzung des Lebesgueschen Integralbegriffs behandeln läßt.

Wie die Gelfandsche Theorie zeigt, ist für die Untersuchung der Struktur einer kommutativen Banach-Algebra B die Kenntnis der regulären maximalen Ideale von B von entscheidender Bedeutung. Hierbei heißt ein Ideal $\mathfrak{S}$ von B regulär, wenn der Restklassenring $B/\mathfrak{S}$ ein Einselement besitzt. Der Restklassenring $B/\mathfrak{M}$ nach einem regulären maximalen Ideal ist also ein Körper. Von der Gelfandschen Theorie benötigen wir nur die folgende Aussage:

Lemma 8. 1. *Ist B eine kommutative Banach-Algebra und $\mathfrak{M}$ ein reguläres maximales Ideal von B, so ist der Restklassenring $B/\mathfrak{M}$ isomorph zum Körper C der komplexen Zahlen. Ist also E die Einsklasse von $B/\mathfrak{M}$, so gibt es zu jedem $x \in B$ eine komplexe Zahl $h(x)$ mit $x \in h(x) \cdot E$. Die Zuordnung $x \to h(x)$ ist ein Homomorphismus von B auf C, d. h. es gilt $h(\lambda x + \mu y) = \lambda h(x) + \mu h(y)$ und $h(x \cdot y) = h(x) \cdot h(y)$ für alle $x, y \in B$ und alle $\lambda, \mu \in C$. Ferner gilt $|h(x)| \leqq \|x\|$ für alle $x \in B$. Umgekehrt läßt sich jeder Homomorphismus h*

von B auf C in der beschriebenen Weise durch ein reguläres maximales Ideal $\mathfrak{M}$ von B erzeugen. Insbesondere gilt für jeden Homomorphismus h von B auf C die Ungleichung $|h(x)| \leqq \|x\|$ für alle $x \in B$.

Für den einfachen Beweis, der auf elementaren funktionalanalytischen Schlüssen beruht, sei auf [9], insbesondere auf die Abschnitte 22 A, 22 D—F und den Anfang von 23 A verwiesen.

Im folgenden wenden wir Lemma 8. 1 auf die Banach-Algebra L_1 mit der Faltung als multiplikativer Operation an. Nach (6. 28) ist für jedes reelle λ die Zuordnung $F \to \hat{F}(\lambda)$ ein Homomorphismus h_λ von L_1 auf C. Der analytische Teil des Beweises des Wienerschen Taubersatzes im Rahmen der Gelfandschen Theorie besteht im wesentlichen in dem Nachweis, daß es keine weiteren Homomorphismen von L_1 auf C gibt:

Satz 8. 1. *Sämtliche Homomorphismen der Banach-Algebra L_1 auf den Körper C der komplexen Zahlen sind durch*

$$h_\lambda(F) = \hat{F}(\lambda) \quad (\lambda \text{ reell}) \tag{8. 1}$$

gegeben.

Das zu h_λ gehörende maximale Ideal $\mathfrak{M}_\lambda$ besteht aus allen F mit $\hat{F}(\lambda) = 0$. Nach Lemma 8. 1 folgt daher aus Satz 8. 1:

Satz 8. 2. *Sämtliche regulären maximalen Ideale von L_1 sind durch*

$$\mathfrak{M}_\lambda = \{F \in L_1 : \hat{F}(\lambda) = 0\} \quad (\lambda \text{ reell}) \tag{8. 2}$$

gegeben.

Der Beweis dieser Sätze stammt von I. M. Gelfand und D. Raikov [4]. Man vergleiche auch die Darstellung in [17], XI, § 16. Im folgenden geben wir eine Variante des Beweises von Gelfand und Raikov, die die Anwendung der Lebesgueschen Integrationstheorie vermeidet.

Beweis von Satz 8. 1. Es sei h ein Homomorphismus von L_1 auf C. Nach Lemma 8. 1 gilt

$$|h(F)| \leqq \|F\|_1 \text{ für } F \in L_1. \tag{8. 3}$$

Wir wählen ein $G \in L_1$ mit $h(G) = 1$ und setzen für reelles α

$$\chi(\alpha) = h(\tau_\alpha G), \tag{8. 4}$$

wobei τ_α der in (6. 6) eingeführte Translationsoperator ist. Wegen (8. 3), (6. 9) und Lemma 6. 2 gilt $|\chi(\alpha)| \leqq \|G\|_1$ und

$$|\chi(\alpha + h) - \chi(\alpha)| \leqq \|\tau_h(\tau_\alpha G) - \tau_\alpha G\|_1 \to 0 \text{ für } h \to 0. \tag{8. 5}$$

Die Funktion χ ist also in $(-\infty, \infty)$ stetig und beschränkt. Da h ein Homomorphismus ist, gilt wegen $h(G) = 1$

$$\chi(\alpha + \beta) = \chi(\alpha + \beta)h(G) = h(\tau_{\alpha+\beta} G) \cdot h(G) = h\big((\tau_{\alpha+\beta} G) * G\big). \tag{8. 6}$$

Für $f, g \in C_0^\infty$ gilt

$$\begin{cases} \big((\tau_{\alpha+\beta} f) * g\big)(x) = \int f(y + \alpha + \beta) g(x - y)\, dy \\ \qquad\qquad = \int f(y + \alpha) g(x + \beta - y)\, dy = \big((\tau_\alpha f) * (\tau_\beta g)\big)(x). \end{cases} \tag{8. 7}$$

Da C_0^∞ dicht in L_1 ist, läßt sich diese Relation wegen $\| \tau_\alpha F \|_1 = \| F \|_1$ und $\| F * G \|_1 \leqq \| F \|_1 \cdot \| G \|_1$ auf L_1 ausdehnen:

$$(\tau_{\alpha+\beta} F) * G = (\tau_\alpha F) * (\tau_\beta G). \tag{8. 8}$$

Damit ergibt sich nach (8. 6) $\chi(\alpha + \beta) = h\big((\tau_\alpha G) * (\tau_\beta G)\big) = h(\tau_\alpha G) \cdot h(\tau_\beta G)$, also

$$\chi(\alpha + \beta) = \chi(\alpha) \cdot \chi(\beta). \tag{8. 9}$$

Wegen $\chi(0) = h(G) = 1$ folgt aus (8. 9) $\chi(\alpha) \cdot \chi(-\alpha) = 1$, also $\chi(\alpha) \neq 0$ für alle reellen α. Da wegen der Beschränktheit von χ die Folgen $\chi(n) = \chi(1)^n$ und $\chi(-n) = 1/\chi(n)$ beschränkt sind, gilt $|\chi(1)| = 1$, d. h. es gibt ein reelles λ mit

$$\chi(1) = e^{-i\lambda}. \tag{8. 10}$$

Aus dem Additionstheorem (8. 9) folgt

$$\chi(\alpha) = e^{-i\lambda\alpha} \tag{8. 11}$$

zunächst für alle rationalen α. Da χ stetig ist, gilt (8. 11) für alle reellen α. Damit ist gezeigt, daß es ein reelles λ mit

$$h(\tau_\alpha G) = e^{-i\lambda\alpha} \text{ für alle reellen } \alpha \tag{8. 12}$$

gibt. Diese Kenntnis genügt, um $h(F)$ für alle $F \in L_1$ zu bestimmen. Wir berechnen zunächst $h(f)$ für $f \in C_0^\infty$. Hierzu wählen wir eine Folge $\{g_k\}$ aus C_0^∞ mit $\| G - g_k \|_1 \to 0$ für $k \to \infty$. Wegen (8. 3), (6. 14) und $h(G) = 1$ gilt

$$h(f) = h(f) \cdot h(G) = h(f * G) = \lim_{k\to\infty} h(f * g_k). \tag{8. 13}$$

Um (8. 12) anwenden zu können, schreiben wir das Faltungsintegral $f * g_k$ als Grenzwert Riemannscher Summen: Für $f, g \in C_0^\infty$ gilt

$$(f * g)(x) = \int f(y) g(x - y)\, dy = \lim_{\delta\to 0} \delta \sum_{n \text{ ganz}} f(n\delta) g(x - n\delta). \tag{8. 14}$$

Wegen $f, g \in C_0^\infty$ gibt es ein $A > 0$, so daß $f(y) \cdot g(x - y)$ verschwindet, falls entweder $|x| > A$ oder $|y| > A$ gilt. Nach dem Mittelwertsatz gilt daher

$$\begin{aligned}
&\| f * g - \delta \sum_n f(n\delta) \tau_{-n\delta} g \|_1 \\
&= \int \Big| \int f(y) g(x - y)\, dy - \delta \sum_n f(n\delta) g(x - n\delta) \Big|\, dx \\
&\leqq \int \left[\sum_n \int_{n\delta}^{(n+1)\delta} |f(y) g(x - y) - f(n\delta) g(x - n\delta)|\, dy \right] dx \\
&\leqq 2A(2A + 2\delta)\delta \operatorname*{Sup}_{x,y} \left\{ \left| \frac{d}{dy} [f(y) g(x - y)] \right| \right\} \to 0 \text{ für } \delta \to 0.
\end{aligned}$$

Hieraus und aus (8. 3) folgt

$$h(f * g) = \lim_{\delta\to 0} \delta \sum_n f(n\delta) h(\tau_{-n\delta} g). \tag{8. 15}$$

Da $h(\tau_{-y} g)$ stetig von y abhängt, läßt sich dieser Grenzwert als Riemannsches Integral schreiben. Für $g = g_k$ ergibt sich daher nach (8. 13)

$$h(f) = \lim_{k\to\infty} h(f * g_k) = \lim_{k\to\infty} \int f(y) h(\tau_{-y} g_k)\, dy. \tag{8. 16}$$

Wegen (8. 3) und (6. 9) gilt $|h(\tau_{-y}g_k) - h(\tau_{-y}G)| \leqq \| G - g_k \|_1$. Der Integrand in (8. 16) konvergiert also für $k \to \infty$ gleichmäßig gegen $f(y) \cdot h(\tau_{-y}G)$. Hieraus folgt nach (8. 12)

$$h(f) = \int f(y)h(\tau_{-y}G)dy = \int f(y)e^{i\lambda y}dy = \hat{f}(\lambda). \tag{8. 17}$$

Ist $F \in L_1$ und $\{f_k\}$ eine Folge aus C_0^∞ mit $\| F - f_k \|_1 \to 0$, so gilt nach (8. 3) $h(f_k) \to h(F)$ und nach (6. 26) $\hat{f}_k(\lambda) \to \hat{F}(\lambda)$. Aus (8. 17) folgt daher $h(F) = \hat{F}(\lambda)$ für alle $F \in L_1$. Damit ist Satz 8. 1 bewiesen.

§ 9. Anwendungen auf die Wienersche Theorie der Fourier-Transformation

Es ist wohlbekannt, daß die Kenntnis der regulären maximalen Ideale von L_1 in einfacher Weise die Herleitung der Hauptsätze der Wienerschen Theorie der Fourier-Transformation ermöglicht (vgl. [2], [13] und die Darstellungen in [9] und [17]). In diesem Abschnitt zeigen wir, wie sich der Wienersche Taubersatz und einige verwandte Sätze im Rahmen der von uns benutzten distributionentheoretischen Betrachtungsweise gewinnen lassen. Wir beweisen zunächst die folgende bekannte Aussage:

Satz 9. 1. *Es sei K ein kompakter Teilbereich der reellen Achse. Dann gibt es zu jedem $F \in L_1$ mit $\hat{F}(x) \neq 0$ für $x \in K$ ein $G \in L_1$ mit $\hat{G}(x) = 1/\hat{F}(x)$ für $x \in K$.*

Zum Beweis betrachten wir das Ideal

$$\mathfrak{J} = \{F \in L_1 : \hat{F}(x) = 0 \text{ für } x \in K\} \tag{9. 1}$$

und bilden den Restklassenring $A = L_1/\mathfrak{J}$. $\mathfrak{J}$ ist als Teilraum von L_1 abgeschlossen. In der Tat: Aus $F_k \in \mathfrak{J}$ und $\| F_k - F \|_1 \to 0$ folgt nach (6. 26) $\hat{F}(x) = \lim \hat{F}_k(x) = 0$ für $x \in K$, also $F \in \mathfrak{J}$. Da $\mathfrak{J}$ abgeschlossen ist, ist A vollständig bezüglich der Norm

$$\| X \| = \mathrm{Inf}\{\| F \|_1 : F \in X\}. \tag{9. 2}$$

Nach Lemma 7. 2 gibt es ein $E \in L_1$ mit $\hat{E}(x) = 1$ für $x \in K$. Wegen (6. 28) ist die E enthaltende Restklasse $\tilde{E}$ von $L_1/\mathfrak{J}$ ein Einselement von A. A ist also eine Banach-Algebra mit Einselement. Wir bestimmen nun mit Hilfe von Satz 8. 2 die maximalen Ideale von A. Ist $\mathfrak{N}$ ein maximales Ideal von A, so bildet die Menge $\mathfrak{M}$ aller Elemente von L_1, die in zu $\mathfrak{N}$ gehörenden Restklassen nach $\mathfrak{J}$ liegen, ein maximales Ideal von L_1 mit $\mathfrak{J} \subseteqq \mathfrak{M} < L_1$. Wegen $\hat{E}(x) = 1$ für $x \in K$ gilt für jedes $F \in L_1$ die Beziehung $\hat{E}(x) \cdot \hat{F}(x) - \hat{F}(x) = 0$ für $x \in K$ und damit $E * F - F \in \mathfrak{J} \subseteqq \mathfrak{M}$. Der Restklassenring $L_1/\mathfrak{M}$ besitzt also ein Einselement. $\mathfrak{M}$ ist somit ein reguläres maximales Ideal von L_1 und besitzt nach Satz 8. 2 die Form $\mathfrak{M}_\lambda$. Damit ist gezeigt, daß jedes maximale Ideal von A die Form $\mathfrak{M}_\lambda/\mathfrak{J}$ mit $\mathfrak{J} \subseteqq \mathfrak{M}_\lambda$ hat. Die Bedingung $\mathfrak{J} \subseteqq \mathfrak{M}_\lambda$ ist nur für $\lambda \in K$ erfüllt. Für $\lambda_0 \notin K$ gibt es nämlich nach Lemma 7. 2 ein $F \in L_1$ mit $\hat{F}(\lambda_0) = 0$ und $\hat{F}(\lambda) \neq 0$ für $\lambda \in K$, so daß F zu $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$, aber nicht zu $\mathfrak{J}$ gehört. Alle maximalen Ideale von A haben also die Form $\mathfrak{M}_\lambda/\mathfrak{J}$ mit $\lambda \in K$. Es sei nun F ein Element von L_1 mit $\hat{F}(x) \neq 0$ für alle $x \in K$. Dann ist die Restklasse $\tilde{F}$ von F nach $\mathfrak{J}$ in keinem maximalen Ideal von A enthalten. Das von $\tilde{F}$ erzeugte Hauptideal $(\tilde{F})$ ist daher mit dem ganzen Ring A identisch. Insbesondere ist die Restklasse $\tilde{E}$ des oben eingeführten Elements E in der Form $\tilde{E} = X \cdot \tilde{F}$ mit $X \in A$ darstellbar. Ist G ein Element der Restklasse X, so gilt $F * G - E \in \mathfrak{J}$, also $\hat{F}(x) \cdot \hat{G}(x) = \hat{E}(x) = 1$ für $x \in K$. Damit ist Satz 8. 1 bewiesen. —

Aus Satz 8. 1 folgt:

Satz 9. 2. *Es sei $F \in L_1$ und $\hat{F}(x) \neq 0$ für alle reellen x. Dann ist das von F erzeugte Hauptideal $(F) = \{F * G : G \in L_1\}$ dicht in L_1: $\overline{(F)} = L_1$.*

Wir zeigen zunächst: Ist $H \in L_1$ und besitzt $\hat{H}$ kompakten Support, so liegt H im Hauptideal (F). Nach Satz 9. 1 gibt es ein $G \in L_1$ mit $\hat{F}(x) \cdot \hat{G}(x) = 1$ für alle $x \in \operatorname{supp} \hat{H}$. Hieraus folgt $\hat{H}(x) = \hat{F}(x) \cdot \hat{G}(x) \cdot \hat{H}(x)$ für alle reellen x, also nach Satz 7. 2 $H = F * (G * H) \in (F)$. Ist q_k die durch (7. 5) erklärte Funktion (mit $R = k$), so besitzt $\hat{q}_k$ nach (7. 22) für jedes k kompakten Support. Die Funktionen q_k gehören daher zu (F). Es sei nun J ein beliebiges Element aus L_1. Mit q_k gehört auch $q_k * J$ zu (F). Nach Satz 7. 2 gilt jedoch $\| J - q_k * J \|_1 \to 0$ für $k \to \infty$. J gehört daher zu $\overline{(F)}$. Damit ist Satz 9. 2 bewiesen. —

Als Folgerung aus Satz 9. 2 sei erwähnt:

Corollar zu Satz 9. 2. *Es sei (P) eine Aussage über Elemente von L_1 mit folgenden Eigenschaften:*

(α) Gilt (P) für $F, G \in L_1$, so gilt (P) auch für alle Linearkombinationen $\lambda F + \mu G$. Gilt (P) für F und ist G ein beliebiges Element aus L_1, so gilt (P) auch für $F * G$ (Invarianz gegenüber Idealoperationen).

(β) Gilt (P) für alle F_k einer Folge $\{F_k\}$ aus L_1 mit $\| F - F_k \|_1 \to 0$ für $k \to \infty$, so gilt (P) auch für F. (Invarianz gegenüber Grenzwertbildung.)

Gilt dann (P) für ein Element $F \in L_1$ mit $\hat{F}(x) \neq 0$ für alle reellen x, so gilt (P) für jedes Element aus L_1.

Der Wienersche Taubersatz ergibt sich hieraus durch Betrachtung einer speziellen Aussage (P) mit den Eigenschaften (α), (β).

Wir zeigen:

Lemma 9. 1. *Es sei $J \in L_\infty$ und C eine komplexe Zahl. Dann genügt die Aussage*

$$(P_C) \qquad \lim_{x \to \infty} (F * J)(x) = C \cdot \Im F$$

den Eigenschaften (α) und (β). Hierbei ist $\Im F$ das in (4. 24) eingeführte Lebesguesche Integral von $F \in L_1$, während $F * J$ die in Definition 6. 1 erklärte Faltung zwischen Elementen aus L_1 und L_∞ bedeutet.

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $C = 0$. Zum Nachweis von (β) gelte für jedes k $(F_k * J)(x) \to 0$ für $x \to \infty$ und ferner $\| F - F_k \|_1 \to 0$ für $k \to \infty$. Dann läßt sich zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein F_k mit $\| F - F_k \|_1 < \varepsilon$ und anschließend ein x_0 mit $| (F_k * J)(x) | < \varepsilon$ für $x > x_0$ wählen. Für $x > x_0$ folgt hieraus nach (6. 22)

$$(9.\ 3) \qquad | (F * J)(x) | \leqq | [(F - F_k) * J](x) | + | (F_k * J)(x) | < \varepsilon(1 + \| J \|_\infty),$$

also $(F * J)(x) \to 0$ für $x \to \infty$. Damit ist (β) für die Aussage (P_0) nachgewiesen. Der Nachweis von (α) stützt sich auf das folgende Assoziativgesetz:

Lemma 9. 2. *Für $F, G \in L_1$ und $J \in L_\infty$ gilt*

$$(9.\ 4) \qquad (F * G) * J = F * (G * J).$$

Man beachte, daß $G * J$ nach (6. 20) und (6. 22) stetig und beschränkt ist und somit nach Lemma 4. 4 zu L_∞ gehört. Die Bildung $F * (G * J)$ ist daher sinnvoll (vgl. Definition 6. 1).

Beweis von Lemma 9. 2. Es sei zunächst $f, g \in C_0^\infty$. Nach Definition 6. 1 gilt

$$[(f * g) * J](x) = J_y[(f * g)(x - y)] = J_y[\int f(z) g(x - y - z)\, dz].$$

J ist als Element von L_∞ ein beschränktes lineares Funktional auf $C^\infty_{0,1}$. Stellt man daher das letzte Integral wie in (8. 14) als Grenzwert Riemannscher Summen dar, so folgt durch die gleiche Überlegung, die zu (8. 15) führte, daß die Anwendung von J_y mit der Integration nach z vertauscht werden kann. Damit erhalten wir nach Definition 6. 1

$$(9.\,5)\quad \begin{cases} [(f * g) * J](x) = \int f(z)\, J_y g(x-y-z)\,dz \\ \qquad\qquad = \int f(z)\,(g * J)(x-z)\,dz = [f * (g * J)](x). \end{cases}$$

Gehören F und G zu L_1 und sind $\{f_k\}$ und $\{g_k\}$ Folgen aus C_0^∞ mit $\| F - f_k \|_1 \to 0$ und $\| G - g_k \|_1 \to 0$, so gilt nach (6. 14), (6. 22) und (9. 5)

$$(9.\,6)\quad \begin{cases} [(F * G) * J](x) = \lim\limits_{k\to\infty} [(f_k * g_k) * J](x) \\ \qquad\qquad = \lim\limits_{k\to\infty} [f_k * (g_k * J)](x) = [F * (G * J)](x). \end{cases}$$

Damit ist Lemma 9. 2 bewiesen.

Abschluß des Beweises von Lemma 9. 1. Es gelte $F, G \in L_1$, $J \in L_\infty$ und $(F * J)(x) \to 0$ für $x \to \infty$. Zu vorgegebenem $\varepsilon \to 0$ wählen wir ein $g \in C_0^\infty$ mit $\| G - g \|_1 < \varepsilon$. Wegen $(F * J)(x) \to 0$ und $g \in C_0^\infty$ gilt nach (6. 15), Lemma 9. 2 und Definition 6. 1

$$(9.\,7)\quad \begin{cases} [(F * g) * J](x) = [(g * F) * J](x) = [g * (F * J)](x) \\ \qquad\qquad = \int g(y)\,(F * J)(x-y)\,dy \to 0 \text{ für } x \to \infty. \end{cases}$$

Es gibt daher ein x_0 mit $|\,[(F * g) * J](x)\,| < \varepsilon$ für alle $x > x_0$. Nach (6. 14) und (6. 22) gilt $|\,[(F * (G - g)) * J](x)\,| < \| F \|_1 \| J \|_\infty \cdot \varepsilon$ und somit

$$|\,[(F * G) * J](x)\,| < \varepsilon(1 + \| F \|_1 \cdot \| J \|_\infty)$$

für $x > x_0$, also $[(F * G) * J](x) \to 0$ für $x \to \infty$. Die Eigenschaft (P_0) ist also invariant gegenüber der Multiplikation mit einem beliebigen $G \in L_1$. Die Invarianz von (P_0) gegenüber Linearkombinationenbildung ist trivial. (P_0) erfüllt also auch (α). Damit ist Lemma 9. 1 für $C = 0$ bewiesen.

Ist $C \neq 0$, so gehört das durch die Konstante C erzeugte Funktional

$$(9.\,8)\qquad H_C\varphi = C \int \varphi\,dx \text{ für } \varphi \in C_0^\infty$$

nach Lemma 4. 4 zu L_∞. Ist ferner $F \in L_1$ und $\{f_k\}$ eine Folge aus C_0^∞ mit $\| F - f_k \|_1 \to 0$, so gilt nach Definition 6. 1 und (4. 24)

$$(9.\,9)\quad \begin{cases} (F * H_C)(x) = \lim\limits_{k\to\infty} (H_C)_y f_k(x-y) = \lim\limits_{k\to\infty} C \int f_k(x-y)\,dy \\ \qquad\qquad = \lim\limits_{k\to\infty} C \int f_k\,dx = C \cdot \Im F. \end{cases}$$

Die Aussage (P_C) ist daher zu $[F * (J - H_C)](x) \to 0$ für $x \to \infty$ äquivalent und läßt sich somit auf die Aussage (P_0) (mit $J - H_C$ statt J) zurückführen. Damit ist der Beweis von Lemma 9. 1 abgeschlossen.

Aus dem Corollar zu Satz 9. 2 und aus Lemma 9. 1 ergibt sich unmittelbar der Wienersche Taubersatz in folgender Fassung:

Satz 9. 3. *Es sei $J \in L_\infty$ und C eine komplexe Zahl. Ferner gebe es ein $F \in L_1$ mit $\hat{F}(x) \neq 0$ für alle reellen x und*

$$\lim_{x \to \infty} (F * J)(x) = C \cdot \Im F,$$

wobei $\Im F$ das in (4. 24) *eingeführte Lebesguesche Integral von F ist. Dann gilt für jedes $G \in L_1$*

$$\lim_{x \to \infty} (G * J)(x) = C \cdot \Im G.$$

„ Man beachte, daß nach den Bemerkungen am Ende von § 4 und zu Beginn von § 6 die auftretenden Faltungen und Integralbildungen die übliche klassische Bedeutung haben, falls die Funktionale F, G und J durch Funktionen aus $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{R}'$ erzeugt werden. In diesem Fall geht Satz 6. 3 in die klassische Formulierung des Wienerschen Taubersatzes über (vgl. [16], Theorem VIII). Zahlreiche spezielle Taubersätze ergeben sich, falls man für F, G und J geeignete Funktionen aus $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ einsetzt. Als Beispiel sei auf die in [17] dargestellte Herleitung eines von J. E. Littlewood stammenden speziellen Taubersatzes aus dem Wienerschen Taubersatz hingewiesen. Ferner sei auf die Anwendungen auf den Primzahlsatz, insbesondere auf die Untersuchungen von A. E. Ingham [7] und die Darstellung in [6], Kapitel XII erinnert.

Wir wollen nun die folgende Verallgemeinerung von Satz 9. 2 beweisen:

Satz 9. 4. *Es sei Σ eine Teilmenge von L_1 mit der Eigenschaft, daß es zu jedem reellen x ein $F \in \Sigma$ mit $\hat{F}(x) \neq 0$ gibt. Dann ist das von Σ erzeugte Ideal (Σ) dicht in L_1: $\overline{(\Sigma)} = L_1$.*

Zum Beweis zeigen wir: Ist $H \in L_1$ und besitzt $\hat{H}$ kompakten Support, so gehört H zum Ideal (Σ). Zu jedem reellen x gibt es ein $F_x \in \Sigma$ und ein $\delta_x > 0$ mit $\hat{F}_x(y) \neq 0$ für $|y - x| \leqq \delta_x$. Nach Lemma 7. 2 gibt es ein $E_x \in L_1$ mit $\hat{E}_x \geqq 0$, $\hat{E}_x(y) = 1$ für $|y - x| \leqq \delta_x/2$ und $\hat{E}_x(y) = 0$ für $|y - x| \geqq \delta_x$. Ferner gibt es nach Satz 9. 1 ein $G_x \in L_1$ mit $\hat{F}_x(y) \cdot \hat{G}_x(y) = 1$ für $|y - x| \leqq \delta_x$. Es folgt $\hat{E}_x(y) = \hat{F}_x(y) \cdot \hat{G}_x(y) \cdot \hat{E}_x(y)$ für alle reellen y und somit nach Satz 7. 2 $E_x = F_x * (G_x * E_x)$, also $E_x \in (\Sigma)$. Nach dem Satz von Heine-Borel genügen endlich viele Intervalle $[x_i - \delta_{x_i}/2, x_i + \delta_{x_i}/2]$ $(i = 1, \ldots, n)$ zur Überdeckung der kompakten Menge supp $\hat{H}$. Für $F = E_{x_1} + \cdots + E_{x_n}$ gilt $F \in (\Sigma)$ und $\hat{F}(x) \neq 0$ für $x \in \operatorname{supp} \hat{H}$. Nach Satz 9. 1 gibt es ein $G \in L_1$ mit $\hat{F}(x) \cdot \hat{G}(x) = 1$ für $x \in \operatorname{supp} \hat{H}$. Hieraus folgt wie oben $\hat{H}(x) = \hat{F}(x) \cdot \hat{G}(x) \cdot \hat{H}(x)$ für alle reellen x, also $H = F * (G * H) \in (\Sigma)$. Hieraus folgt Satz 9. 4 durch die gleiche Argumentation wie im Beweis von Satz 9. 2. Analog zum Corollar zu Satz 9. 2 erhalten wir:

Corollar 1 zu Satz 9. 4. *Es sei Σ eine Teilmenge von L_1 mit der Eigenschaft, daß es zu jedem reellen x ein $F \in \Sigma$ mit $\hat{F}(x) \neq 0$ gibt. Ferner sei (P) eine Aussage mit den Eigenschaften (α) und (β) (vgl. Corollar zu Satz* 9. 2). *Gilt dann (P) für jedes Element aus Σ, so gilt (P) sogar für jedes Element aus L_1.*

Wenden wir dieses Resultat auf die Aussage (P_C) in Lemma 9. 1 an, so ergibt sich eine analoge Verallgemeinerung des Wienerschen Taubersatzes, die sich in klassischer Formulierung ebenfalls bei Wiener findet [16]. — Als weitere Folge aus Satz 9. 4 erwähnen wir:

Corollar 2 zu Satz 9. 4. *Jedes echte abgeschlossene Ideal $\mathfrak{I}$ von L_1 ist in mindestens einem der durch* (8. 2) *gegebenen regulären maximalen Ideale $\mathfrak{M}_\lambda$ enthalten.*

Beweis. Angenommen, $\mathfrak{I}$ sei in keinem $\mathfrak{M}_\lambda$ enthalten. Dann gibt es zu jedem reellen λ ein $F \in \mathfrak{I}$ mit $\hat{F}(\lambda) \neq 0$. Hieraus folgt nach Satz 9. 4 $\overline{\mathfrak{I}} = L_1$ und somit, da $\mathfrak{I}$ abgeschlossen ist, $\mathfrak{I} = L_1$.

Zum Abschluß sei noch gezeigt, wie sich in unserem Aufbau der Wienersche Translationssatz ergibt, der von Wiener als Ausgangspunkt für seine Theorie der Taubersätze benutzt wurde:

Satz 9. 5. *Es sei $F \in L_1$ und $\hat{F}(x) \neq 0$ für alle reellen x. Dann ist die Menge T_F aller endlichen Linearkombinationen der Form*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \tau_{h_k} F \quad (n = 1, 2, \ldots;\ a_k \text{ komplex};\ h_k \text{ reell})$$

dicht in L_1: $\overline{T}_F = L_1$.

Beweis. Zu vorgegebenem $H \in L_1$ und $\varepsilon > 0$ gibt es nach Satz 9. 2 ein $G \in L_1$ mit

$$\| H - F * G \|_1 < \varepsilon. \tag{9. 10}$$

Da C_0^∞ dicht in L_1 ist, können wir ein $g \in C_0^\infty$ mit

$$\| F * G - F * g \|_1 \leqq \| F \|_1 \cdot \| G - g \|_1 < \varepsilon \tag{9. 11}$$

und anschließend ein $f \in C_0^\infty$ mit

$$\| F * g - f * g \|_1 \leqq \| g \|_1 \cdot \| F - f \|_1 < \varepsilon \tag{9. 12}$$

wählen. Aus (9. 10) bis (9. 12) folgt

$$\| H - f * g \|_1 \leqq 3\varepsilon. \tag{9. 13}$$

Nach (6. 10) gibt es endlich viele reelle Zahlen $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ mit

$$\int \left| (f * g)(x) - \sum_{k=1}^{n} f(x - t_k) \int_{t_{k-1}}^{t_k} g(t)\, dt \right| dx < \varepsilon$$

bzw.

$$\left\| f * g - \sum_{k=1}^{n} a_k \tau_{-t_k} f \right\|_1 < \varepsilon \tag{9. 14}$$

mit

$$a_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} g(t)\, dt. \tag{9. 15}$$

Andererseits gilt nach (6. 9), (9. 12) und (9. 15)

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \tau_{-t_k} F - \sum_{k=1}^{n} a_k \tau_{-t_k} f \right\|_1 \\ &\quad \leqq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot \| \tau_{-t_k}(F - f) \|_1 = \| F - f \|_1 \sum_{k=1}^{n} |a_k| \\ &\quad \leqq \| F - f \|_1 \cdot \int |g(t)|\, dt = \| F - f \|_1 \cdot \| g \|_1 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Hieraus und aus (9. 13) und (9. 14) folgt

$$\left\| H - \sum_{k=1}^{n} a_k \tau_{-t_k} F \right\|_1 < 5\varepsilon. \tag{9. 16}$$

Damit ist Satz 9. 5 bewiesen.

§ 10. Abschließende Bemerkungen

In der vorliegenden Arbeit wurde angestrebt, einen von der Lebesgueschen Maß- und Integrationstheorie unabhängigen Aufbau der Theorie der L_p-Räume zu geben, der durch die Schwartzsche Theorie der Distributionen nahegelegt wird und auf einfachen funktionalanalytischen Operationen (wie der Bildung konjugierter Räume und der Vervollständigung normierter linearer Räume) beruht. Es zeigt sich, daß zahlreiche Fragestellungen der Analysis, zu deren Untersuchung bisher die Theorie von Lebesgue herangezogen wurde, auch im Rahmen der hier dargestellten, funktionalanalytisch begründeten Theorie in sehr natürlicher Weise behandelt werden können. Als Beispiel wurde im zweiten Teil dieser Arbeit die Theorie der Fourier-Transformation im Raum L_1 nach diesen Gesichtspunkten „ab ovo" entwickelt. Ich hielt es für zweckmäßig, die Anwendung der in dieser Arbeit entwickelten Methoden an einem klassischen Beispiel zu erläutern, da hierbei die typischen Modifikationen besonders deutlich werden, die erforderlich sind, um Schlußweisen der Lebesgueschen Theorie durch funktionalanalytisch orientierte Argumentationen zu ersetzen. Hierbei wurde immer wieder entscheidend benutzt, daß $C^\infty_{0,1}$ dicht in L_1 ist. Hierdurch gelang es einerseits in § 6, die benötigten Grundoperationen (Translation, Faltung und Fourier-Transformation) in einfacher Weise zu definieren, ohne die Elemente von L_1 als Äquivalenzklassen Lebesgue-integrierbarer Funktionen zu interpretieren. Andererseits erwies es sich als möglich, die in den Beweisen von Satz 7. 1, Satz 8. 1 und Lemma 9. 1 auftretenden analytischen Untersuchungen ausschließlich im Grundraum C^∞_0 durchzuführen. In diesem Zusammenhang sind die folgenden Worte von N. Wiener von Interesse: "It is totally impossible to establish a reasonably complete and symmetrical theory of the Fourier integral except on the basis of Lebesgue integration." ([15], S. 5.) Diese Bemerkung ist insofern berechtigt, als erst die Erweiterung des klassischen Raumes der Riemann-integrierbaren Funktionen zu den Lebesgueschen Räumen L_p zu vollständigen Funktionenräumen führt. Andererseits lassen die hier durchgeführten Untersuchungen erkennen, daß zu einer angemessenen Theorie der L_p-Räume nicht unbedingt der Weg von Lebesgue beschritten werden muß, sondern daß wesentliche Teile der Theorie in besonders natürlicher und begrifflich einfacher Weise im Rahmen distributionentheoretischer Überlegungen diskutiert werden können.

Die Untersuchungen dieser Arbeit lassen sich in verschiedener Richtung erweitern. Zum Beispiel ist zu erwarten, daß sich die Integrationstheorie in lokal-kompakten topologischen Gruppen G nach ähnlichen Gesichtspunkten diskutieren läßt. Hierzu ist zunächst nach einer der üblichen Methoden (vgl. etwa [9], § 29) das (eindeutig bestimmte) translationsinvariante Integral auf dem linearen Raum $C_0(G)$ aller auf G erklärten stetigen Funktionen mit kompaktem Support zu konstruieren. Anschließend kann man den Raum $L_1(G)$ ähnlich wie in § 4 einführen und das zunächst auf $C_0(G)$ definierte Integral analog zu (4. 24) auf $L_1(G)$ fortsetzen. Insbesondere ist zu erwarten, daß sich auch die bekannte Erweiterung der Wienerschen Theorie auf lokal-kompakte Gruppen (vgl. [2], [9] und [13]) im Rahmen der hier diskutierten Methoden behandeln läßt. — Anwendungen der hier und in [14] entwickelten Methoden auf Existenzuntersuchungen für partielle Differentialgleichungen sollen in zwei späteren Arbeiten diskutiert werden.

Literatur

[1] *E. Bishop*, Foundations of constructive analysis, New York 1967.

[2] *M. Fukamiya*, Topological methods for Tauberian theorems, Tohoku Math. J. (2) **1**, 77—87 (1949/50).

[3] *I. M. Gelfand*, Normierte Ringe, Rec. Math. (Mat. Sbornik) N. S. **9** (1941), 3—24.

[4] *I. M. Gelfand* and *D. Raikov*, On the theory of characters of commutative topological groups, Doklady Akad. Nauk SSSR **28** (1940), 195—198.

[5] *R. R. Goldberg*, Fourier transforms, Cambridge 1961.

[6] *G. H. Hardy*, Divergent series, Oxford 1949.

[7] *A. E. Ingham*, Some Tauberian theorems connected with the prime number theorem, Journ. London Math. Soc. **20** (1945), 171—180.

[8] *H. Lebesgue*, Intégrale, longueur, aire, Annali di Mat. (3) **7** (1902), 231—359.

[9] *L. H. Loomis*, An introduction to abstract harmonic analysis, Princeton 1953.

[10] *S. L. Sobolev*, Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik, Berlin 1964.

[11] *F. Riesz* and *B. Sz. Nagy*, Functional Analysis, New York 1955.

[12] *L. Schwartz*, Théorie des Distributions, vol. I et II, Paris 1950, 1951.

[13] *I. E. Segal*, The span of the translations of a function in a Lebesgue space, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **30** (1944), 165—169.

[14] *P. Werner*, A distribution-theoretical approach to the Hilbert space L_2 and certain related Sobolev spaces, Technical Summary Report, MRC, U. of Wisconsin 1969. Erscheint auch in Journ. Math. Anal. Appl.

[15] *N. Wiener*, The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge 1933.

[16] *N. Wiener*, Tauberian theorems, Ann. of Math. **33** (1932), 1—100.

[17] *K. Yosida*, Functional analysis, Berlin-Heidelberg-New York 1966.

Mathematisches Institut A, Universität Stuttgart, 7 Stuttgart, Herdweg 23

Eingegangen 10. April 1969

A remark concerning Hilbert's Theorem 94

By *Olga Taussky*[1]) at Pasadena, Cal.

To Wolfgang Krull on his seventieth birthday

This paper concerns algebraic number fields k with absolute p-class group[2]) of type (p, p) where p is an odd prime.

Such a field has $\frac{p^2-1}{p-1}$ unramified cyclic extension fields K_i of degree p. From Hilbert's Theorem 94 in his Zahlbericht it follows that at least one ideal class of k (and its powers) become principal in each K_i. In general it is not known which class will come in question or how many. This paper is another contribution to this question. By class field theory each K_i corresponds to a subgroup H_i of the class group of k. We then distinguish between the following two cases (which have meaning for larger class groups):

(A) The subgroup H_i becomes principal in K_i.

(B) The subgroup H_i does not become principal in K_i.

For $p = 3$ and k an imaginary quadratic field (the latter condition implies that exactly one class and its powers become principal) it was shown by A. Scholz and O. Taussky [4] that it cannot happen that all K_i belong to case (A). This was shown by group theoretic methods using the Galois group G of the second 3-class field of k with respect to k. In contrast to this it will be shown here that for $p > 3$ no group theoretic contradictions arise.

The group theoretic ideas involved will now be outlined briefly: The group G has an abelian commutator subgroup G' with quotient group G/G' of type (p, p). Let S_1, S_2 be representatives of the two generators of G/G'. Then it can be shown that G' consists of the powers $T^{f(S_1,S_2)}$ where T is the commutator

$$T = S_1^{-1} S_2^{-1} S_1 S_2 \tag{1}$$

and T^S stands for $S^{-1}TS$ and f is a polynomial (see Furtwängler [3]). In what follows the polynomials which occur as exponents will be expressed as polynomials in Δ_1, Δ_2 where

$$\Delta_i = S_i - 1. \tag{2}$$

The group G is completely determined if the ideal $\mathfrak{M}$ of all polynomials $f(\Delta_1, \Delta_2)$ for which $T^f = 1$ is known. Among these are the necessary relations found by Schreier (see [5], [6]):

$$(S_i^p)^{\Delta_i} = 1 \tag{3}$$

$$(S_1^p)^{\Delta_2} = T^{1+S_1+\cdots+S_1^{p-1}}, \quad (S_2^p)^{\Delta_1} = T^{-\left(1+S_2+\cdots+S_2^{p-1}\right)}. \tag{4}$$

[1]) This research was supported (in part) by NSF Grant 3909.

[2]) This will be referred to as class group in this paper.

The main theorem can now be formulated.

Theorem 1. *Let $p > 3$. Let k be an algebraic number field with class group of type (p, p). Assume that in each unramified cyclic extension field K_i of k exactly one cyclic subgroup of the class group of k becomes principal. Let G be the Galois group with respect to k of the second class field of k and assume that*

$$S_1^p = T^{\Delta_1}, \quad S_2^p = T^{\Delta_2}. \tag{5}$$

Then H_i becomes principal in K_i, i. e. each K_i is of type (A).

This theorem is obtained as a consequence of the following group theoretic theorem.

Theorem 2. *Let G be a p-group of order p^5 with abelian commutator subgroup of order p^3. In the notation explained above let* (5) *hold and assume that the ideal $\mathfrak{M}$ is generated by p, Δ_1^2, Δ_2^2, $\Delta_1\Delta_2$. If this G is the Galois group with respect to k of the second class field of k then all K_i are of type* (A) *and only one class of k becomes principal in each of them.*

We begin by showing that Theorem 2 implies Theorem 1.

The above relations define a group of order p^5, firstly, because the Schreier relations are satisfied since $\Delta_i\Delta_k \equiv 0(\mathfrak{M})$ and since $T^{1+S_i+\cdots+S_i^{p-1}} = T^{\Delta_i^{p-1}} = 1$ under our assumptions on $\mathfrak{M}$. Secondly, the Schreier relations do not imply, in our case, any relation between T, T^{Δ_1}, T^{Δ_2}.

If then G is extended to a larger group by increasing the power of p in $\mathfrak{M}$ or the degrees of the polynomials in $\mathfrak{M}$ then Theorem 2 will remain true. For, Theorem 2 implies that certain classes do not become principal, which means that certain relations do not hold. The latter statement would certainly be true for the extended group. On the other hand, no relation between 1 and Δ_1, Δ_2 can be added to $\mathfrak{M}$ without destroying the fact that only one class becomes principal in each K_i.

Proof of Theorem 2. (I) Some group theoretic relations. Under the assumptions (5) and the assumptions concerning $\mathfrak{M}$ we show that

$$(S_1S_2^r)^p = T^{\Delta_1+r\Delta_2}, \quad r = 1, \ldots, p-1. \tag{6}$$

We first show that

$$\begin{aligned} (S_1S_2)^n &= S_1^nS_2^n\,T^{-g_n(S_1,S_2)} \\ g(S_1, S_2) &= \sum_{r=0}^{n-2} S_i^r(S_2^{r+1} + \cdots + S_2^{n-1}). \end{aligned} \tag{7}$$

In order to prove this we require the commutator $S_2^{-r}S_1^{-1}S_2^rS_1$ and we show that this is equal to $T^{-\left(1+S_2+\cdots+S_2^{r-1}\right)}$: this being true for $r = 1$ we use induction and we are establishing it for $r+1$:

$$S_2^{-(r+1)}S_1^{-1}S_2^{r+1}S_1 = S_2^{-1}S_2^{-r}S_1^{-1}S_2^rS_1S_2\,T^{-1} = T^{-\left(1+S_2+\cdots+S_2^{r-1}\right)S_2-1} = T^{-\left(1+S_2+\cdots+S_2^r\right)}.$$

Return to $(S_1S_2)^n$. Again, (7) is true for $n = 1$ and we now establish it for $n+1$:

$$\begin{aligned} (S_1S_2)^{n+1} &= (S_1S_2)^nS_1S_2 = S_1^nS_2^n\,T^{-g_n(S_1,S_2)}S_1S_2 \\ &= S_1^nS_2^nS_1S_2\,T^{-g_n(S_1,S_2)S_1S_2} \\ &= S_1^{n+1}S_2^n\,T^{-\left(1+S_2+\cdots+S_2^{n-1}\right)}\,S_2\,T^{-g_n(S_1,S_2)S_1S_2} \\ &= S_1^{n+1}S_2^{n+1}\,T^{-S_2\left(1+S_2+\cdots+S_2^{n-1}\right)-g_n(S_1,S_2)S_1S_2} \\ &= S_1^{n+1}S_2^{n+1}\,T^{-g_{n+1}(S_1,S_2)}. \end{aligned}$$

We now rewrite this for $n = p$ in terms of Δ_1, Δ_2 making use of our module $\mathfrak{M}$:

$$(S_1 S_2)^p = S_1^p S_2^p \, T^{-\bar{g}(\Delta_1, \Delta_2)}$$

where $\bar{g} = \sum_{r=0}^{p-2} (\Delta_1 + 1)^r [(\Delta_2 + 1)^{r+1} + \cdots + (\Delta_2 + 1)^{p-1}]$. In virtue of our module $\mathfrak{M}$ we only need to compute the constant term and the coefficients of Δ_1 and of Δ_2:

the constant term is equal to $\sum_1^{p-1} n \equiv 0(p)$,

the coefficient of Δ_2 is $\sum_{i=1}^{p-1} \sum_{r=i}^{p-1} r = \sum_1^{p-1} n^2 \equiv 0(p)$ for $p > 3$[3]),

the coefficient of Δ_1 is $\sum_{r=1}^{p-1} (p - r)(r + 1) \equiv 0(p)$.

Hence we have shown that

$$(S_1 S_2)^p = S_1^p S_2^p = T^{\Delta_1 + \Delta_2} \tag{8}$$

and similarly

$$(S_1 S_2^r)^p = S_1^p S_2^{rp} = T^{\Delta_1 + r\Delta_2}. \tag{9}$$

We come now to the two deeper parts of the proof.

(II) Here we treat K_i as a subfield of the first and second class field of k and its own first class field, all from the Galois group theoretic angle. Let C_1 be the first class field of k and C_2 its second class field. C_2 is normal with respect to k and we denote its Galois group with respect to k by G. The Galois group of C_1 with respect to k is isomorphic with the class group of k, hence abelian of type (p, p). It is known that the Galois group of C_2 with respect to C_1 is G' (hence $G'' = 1$) and it follows that G/G' is of type (p, p). Now to K_i. This field is the fixed field of a normal subgroup H^i of G of index p in G. The class field $C(K_i)$ of K_i is also normal with respect to k, it is contained in C_2 and it is the fixed field of $(H^i)'$.

We now construct H^i and $(H^i)'$. Denote the ideal classes (and the representatives of G/G', in virtue of the isomorphism) by

$$S_1^{x_1} S_2^{x_2}, \; 0 \leqq x_i < p. \tag{10}$$

The group H_i (introduced earlier) acts as the principal class in k when K_i is considered as a class field and its quotient group in (10) is the Galois group of K_i with respect to k, which is also the quotient group of H^i in G. Hence H^i is $\{H_i, G'\}$ and $(H^i)'$ consists of the commutators of the elements of G' and the elements of H_i.

Since H_i is a subgroup of order p of (10) it is either $\{S_2\}$ or $\{S_1 S_2^r\}$, $r = 0, \ldots, p - 1$, since these are $p + 1$ different subgroups. Hence the corresponding groups $(H^i)'$ are

$$\{T^{\Delta_2}\} \tag{a}$$

or

$$\{T^{S_1 S_2^r - 1}\}. \tag{b}$$

Since $S_1 S_2^r - 1 = (\Delta_1 + 1)(\Delta_2 + 1)^r - 1 \equiv \Delta_1 + r\Delta_2 (\mathfrak{M})$ the groups (b) can be written as

$$\{T^{\Delta_1 + r\Delta_2}\}.$$

[3]) This is a decisive point in the proof.

(III) Here we discuss the group theoretic interpretation of the fact that a class of k becomes principal in K_i. This goes back to Artin [1], [2]. For earlier applications of this theory for fields of degree p see Taussky ([7], p. 199) and Scholz and Taussky ([4], p. 33).

The classes of k fall into two cases, namely those which lie in H_i and those outside of H_i. Assume that the class is in H_i. In case (a) the element to which this class corresponds in K_i is

$$S_2^{1+S_1+\cdots+S_1^{p-1}} = S_2^p T^{-\Delta_1^{p-2}} = T^{\Delta_2} \in (H^i)'.$$

In case (b) the element to which the class corresponds in K_i is

$$(S_1 S_2^r)^{1+S_2+\cdots+S_2^{p-1}} = (S_1 S_2^r)^p T^{\Delta_2^{p-2}} = T^{\Delta_1+r\Delta_2} \in (H^i)'.$$

Hence in all cases the element of the Galois group of $C(K_i)$ with respect to K_i is the unit element, because the group is isomorphic with $H^i/(H^i)'$. This means that the class becomes principal.

Finally, we show that the classes outside of H_i do not become principal. These classes are simply raised to the p-th power when considered in K_i. In case (a) this concerns $S_1^p = T^{\Delta_1}$ which is not in $(H^i)'$. In case (b) this concerns the class S_2 whose p-th power is T^{Δ_2} which is not in $(H^i)'$.

Remarks. 1. It is not known whether the groups G considered can occur as Galois groups of a second class field.

2. Alternative proofs for Theorem 94 were found in the meantime. M. Hall gave a proof by finite p-group theory (private communication). Iwasawa studied the classes which become principal in unramified extensions in the language of cohomology. Work by Brumer and Rosen and Rosen separately implies Theorem 94. Hall's proof suggested to the author the following question: given a finite p-group G and a subgroup H of index p. Under what circumstances does Hilbert's theorem 90 hold for H/H' in the following sense: every element $h \in H/H'$ for which $h^{1+S+\cdots+S^{p-1}} = 1$ is of the form k^{1-S}, $k \in H/H'$, where S is a representative of the generator of G/H. H. Kisilevsky (to be published) showed that the two cases $H'(G/H, H/H') \neq 0$, $H'(G/H, H/H') = 0$ coincide with the two cases (A), (B) which form the main subject of this investigation.

References

[1] *E. Artin*, Beweis des allgemeinen Reziprozitätsgesetzes, Hamb. Sem. Abh. **5** (1927), 353—363.
[2] *E. Artin*, Idealklassen in Oberkörpern und allgemeines Reziprozitätsgesetz, Hamb. Sem. Abh. **7** (1929), 46—51.
[3] *P. Furtwängler*, Beweis des Hauptidealsatzes für den Klassenkörper algebraischer Zahlkörper, Hamb. Sem. Abh. **7** (1930), 14—36.
[4] *A. Scholz* und *O. Taussky*, Die Hauptideale der kubischen Klassenkörper imaginär-quadratischer Zahlkörper, J. f. Math. **171** (1934), 19—41.
[5] *O. Schreier*, Über die Erweiterung von Gruppen. I, Monatsh. f. Math. und Phys. **34** (1926), 165—180.
[6] *O. Schreier*, Über die Erweiterung von Gruppen. II, Hamb. Sem. Abh. **4** (1926), 321—346.
[7] *O. Taussky*, Über eine Verschärfung des Hauptidealsatzes für algebraische Zahlkörper, J. f. Math. **168** (1932), 193—210.

Prof. Dr. Olga Taussky-Todd, California Institute of Technology, Mathematics Department, Pasadena, CA 91109, USA

Eingegangen 5. April 1969