SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik
Verlag: de Gruyter
Jahr: 1971
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN243919689_0246
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689_0246

LOG Id: LOG_0011
LOG Titel: Optimale Schranken zu einem Satz über Nullstellen Hermitescher Trinome.
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN243919689
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN243919689

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Optimale Schranken zu einem Satz über Nullstellen Hermitescher Trinome

Von *Gerhard Schmeißer* in Erlangen

---

1. Die Hermiteschen Polynome $H_n(z)$, erklärt durch die Gleichung

$$H_n(z) := (-1)^n e^{z^2} (e^{-z^2})^{(n)} \tag{1}$$

genügen bekanntlich der zweigliedrigen Rekursionsgleichung

$$H_n(z) = 2zH_{n-1}(z) - 2(n-1)H_{n-2}(z) \tag{2}$$

mit den Anfangsgliedern

$$H_0(z) \equiv 1 \text{ und } H_1(z) = 2z;$$

ferner besteht die Beziehung

$$H_n'(z) = 2nH_{n-1}(z). \tag{3}$$

E. Makai und P. Turán [4] haben in Analogie zu einem Satz von E. Landau [2] gezeigt, daß das Hermitesche Trinom

$$T_n(z; \zeta) := H_0(z) + H_1(z) + \zeta H_n(z) \qquad (n \geqq 2)$$

für jede komplexe Konstante ζ mindestens eine Nullstelle in einem Streifen

$$|\operatorname{Im} z| \leqq K_n \leqq K < \infty$$

besitzt. Außer der Abschätzung $K_n < 3$ für $n \geqq 36$[1]) wurden jedoch in [4] keine Schranken für K_n und K angegeben. Diese Lücke soll der folgende Satz schließen.

Satz. *Das Hermitesche Trinom*

$$T_n(z; \zeta) := H_0(z) + H_1(z) + \zeta H_n(z) \qquad (n \geqq 2)$$

besitzt für jede komplexe Konstante ζ mindestens eine Nullstelle in einem Streifen

$$|\operatorname{Im} z| \leqq K_n \leqq K < \infty.$$

Für die optimalen Schranken K_n und K bestehen die folgenden Aussagen:

1) $$K_2 = \frac{1}{2}.$$

[1]) In [4] steht die schlechtere Abschätzung $K_n < e^3$ für $n \geqq 36$, jedoch zeigt der Beweis sofort, daß offensichtlich durch ein Versehen e^3 anstelle von 3 geschrieben wurde.

Die Schranke $\frac{1}{2}$ *wird unter den Polynomen* $T_2(z;\zeta)$ *nur von*

$$H_0(z) + H_1(z) + \frac{1}{4}(1 \pm i)H_2(z)$$

erreicht.

2) *Bezeichnet* ϱ *die positive Nullstelle der Gleichung*

$$8192x^6 + 2304x^4 + 162x^2 - 405 = 0, \tag{4}$$

und setzen wir

$$\zeta_1 := \frac{-256\varrho^4 + 468\varrho^2 - 27 + i\,297\varrho}{3072\varrho^4 + 3888\varrho^2 + 324}, \qquad \zeta_2 := \bar{\zeta}_1, \tag{5}$$

so gilt

$$K_3 = K = \varrho = 0{,}52891952\ldots.$$

Die Schranke K *wird nur von den Polynomen*

$$T_3(z;\zeta_\nu) = H_0(z) + H_1(z) + \zeta_\nu H_3(z) \qquad (\nu = 1, 2)$$

erreicht.

3) *Bezeichnet* ξ_n *die größte Nullstelle des Hermiteschen Polynoms* $H_n(x)$, *so gilt*

$$K_n < \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } 4 \leqq n \leqq 6, \\ \xi_n - \xi_{n-1} < \min\left(0{,}302,\, n^{-\frac{1}{2}}\right) & \text{für } n \geqq 7. \end{cases} \tag{6}$$

Zum Beweis dieses Satzes stellen wir in Abschnitt 2 einige Lemmata zusammen. In Abschnitt 3 skizzieren wir die Methode von Makai und Turán und zeigen, wie man nunmehr mit den Ergebnissen des vorherigen Abschnitts schon auf einfache Weise Schranken für K gewinnen kann. In Abschnitt 4 verfeinern wir diese Untersuchungen für $n \geqq 8$ hauptsächlich unter Heranziehung numerischer Rechnungen. Für die Fälle $5 \leqq n \leqq 7$ sind besonders diffizile Betrachtungen notwendig, die wir in den Abschnitten 5 bis 7 durchführen. Schließlich brauchen wir in Abschnitt 8 die optimale Schranke K nur noch unter den Schranken K_2 und K_3 zu suchen, wobei wir K_3 als Lösung eines Optimierungsproblems gewinnen.

2. Lemma 1. *Bezeichnet* ξ_n *die größte Nullstelle des Hermiteschen Polynoms* $H_n(x)$, *so gilt*

$$\xi_{n+1} - \xi_n < \xi_n - \xi_{n-1} \qquad n = 2, 3, \ldots \tag{7}$$

und

$$\frac{1}{2}(2n+1)^{-\frac{1}{2}} < \xi_n - \xi_{n-1} < n^{-\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Beweis. Unter Beachtung von (3) bekommt man die Ungleichung (7) sofort mit Hilfe eines Satzes von I. Schur [6].

Setzen wir im folgenden $\delta_n := \xi_n - \xi_{n-1}$ $(n \geqq 2)$, so gilt nach dem Satz von Taylor

$$0 = H_{n-1}(\xi_{n-1}) = H_{n-1}(\xi_n) - \delta_n H'_{n-1}(\xi_n) + \frac{\delta_n^2}{2} H''_{n-1}(\xi_{n-1} + \vartheta\delta_n) \quad (0 < \vartheta < 1).$$

Anwendung von (2) und (3) liefert

$$\delta_n > \frac{H_{n-1}(\xi_n)}{H'_{n-1}(\xi_n)} = \frac{1}{2\xi_n}.$$

Mit Hilfe der Ungleichung von G. Szegö (siehe [8], S. 131)

$$\xi_n < (2n+1)^{\frac{1}{2}} - 1{,}8(2n+1)^{-\frac{1}{6}} \tag{9}$$

bekommen wir schließlich die linke Seite von (8).

Zum Beweis der rechten Seite von (8) gehen wir von der Gleichung

$$0 = H_n(\xi_n) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{H_n^{(\nu)}(\xi_{n-1})}{\nu!}\,\delta_n^{\nu}$$

aus. Da $H_n^{(\nu)}(\xi_{n-1}) > 0$ für $\nu \geqq 2$, gilt

$$H_n(\xi_{n-1}) + \delta_n H_n'(\xi_{n-1}) + \frac{\delta_n^2}{2} H_n''(\xi_{n-1}) < 0;$$

ferner liefern die Gleichungen (2) und (3)

$$H_n'(\xi_{n-1}) = 0 \text{ und } H_n''(\xi_{n-1}) = -2nH_n(\xi_{n-1}).$$

Wegen $H_n(\xi_{n-1}) < 0$ ergibt sich damit die rechte Seite der Ungleichung (8).

Lemma 2. *Das Polynom*

$$T_n(z;\zeta) := H_0(z) + H_1(z) + \zeta H_n(z)$$

besitzt mindestens eine Nullstelle im Streifen

$$|\operatorname{Im} z| \leqq \frac{1}{2}\left|H_n\left(-\frac{1}{2}\right)\right|^{\frac{1}{n}}. \tag{10}$$

Das Gleichheitszeichen wird dabei nur für die Polynome

$$H_0(z) + H_1(z) + \frac{1}{4}(1 \pm i)\,H_2(z) \tag{11}$$

angenommen.

Beweis. Bezeichnen $z_\nu = x_\nu + iy_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ die Nullstellen von $T_n(z;\zeta)$, so gilt

$$\left|\frac{T_n\left(-\frac{1}{2};\zeta\right)}{2^n\zeta}\right| = \prod_{\nu=1}^{n}\left|\frac{1}{2} + x_\nu + iy_\nu\right| \geqq \prod_{\nu=1}^{n}|y_\nu|. \tag{12}$$

Da ferner

$$T_n\left(-\frac{1}{2};\zeta\right) = \zeta H_n\left(-\frac{1}{2}\right),$$

bekommen wir

$$\min_{1\leqq\nu\leqq n}|y_\nu| \leqq \frac{1}{2}\left|H_n\left(-\frac{1}{2}\right)\right|^{\frac{1}{n}}.$$

Für $n \geqq 3$ verschwindet der Koeffizient von z^{n-1} des Polynoms $T_n(z;\zeta)$, d. h.

$$\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu = 0.$$

Deshalb können nicht sämtliche Größen $\frac{1}{2} + x_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ verschwinden, so daß für $n \geqq 3$ in (12) und damit in (10) das Gleichheitszeichen nicht eintritt. Für $n = 2$ prüft man leicht nach, daß das Gleichheitszeichen genau für die Polynome (11) eintritt.

Mit Hilfe der Rekursionsgleichung (2) bekommt man sofort

$$\frac{1}{2}\left|H_n\left(-\frac{1}{2}\right)\right|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \text{ für } n = 2 \text{ und } n = 4. \tag{13}$$

Wir benötigen weiter das folgende, elementar verifizierbare

Lemma 3.

1) *Die Funktion*

$$p(x) := \sqrt{\left((a-x)^2+\frac{1}{4}\right)\left((a+x)^2+\frac{1}{4}\right)} \qquad (a > 0)$$

nimmt für $a \leqq \frac{1}{2}$ *im Punkte* $x = 0$ *das Minimum* $p(0) = a^2 + \frac{1}{4}$ *an und ist mit* $|x|$ *monoton wachsend.*

Für $a > \frac{1}{2}$ *besitzt* $p(x)$ *ein absolutes Minimum vom Wert* a *in den Punkten* $x = \pm\sqrt{a^2-\frac{1}{4}}$, *ein lokales Maximum im Punkte* $x = 0$ *und verläuft sonst monoton.*

2) *Die Funktion*

$$q(x) := \sqrt{\frac{(a+x)^2+\frac{1}{4}}{(a-x)^2+\frac{1}{4}}} \qquad (a > 0)$$

besitzt für $x = \sqrt{a^2+\frac{1}{4}}$ *ein absolutes Maximum, für* $x = -\sqrt{a^2+\frac{1}{4}}$ *ein absolutes Minimum und verläuft sonst monoton.*

3. Nun sei kurz die Methode von Makai und Turán [4] skizziert, die wir im Beweis unseres Satzes mit benutzen.

Mit Hilfe des Satzes von Rouché gewinnt man das folgende Ergebnis:

Für

$$|\zeta| < \frac{2\delta}{\max\limits_{\left|z+\frac{1}{2}\right|=\delta} |H_n(z)|} \qquad (\delta > 0) \tag{14}$$

besitzt $T_n(z;\zeta)$ wenigstens eine Nullstelle im Kreisbereich

$$\left|z+\frac{1}{2}\right| < \delta; \tag{15}$$

weiter liegt mit den Bezeichnungen von Lemma 1 für

$$|\zeta| > \left|\frac{2(2\xi_n - \xi_{n-1})+1}{H_n(\xi_{n-1})}\right| \tag{16}$$

wenigstens eine Nullstelle von $T_n(z;\zeta)$ im Kreisbereich

$$|z-\xi_n| < \xi_n - \xi_{n-1}. \tag{17}$$

Die rechten Seiten der Ungleichung (14) und (16) werden nun folgendermaßen abgeschätzt: Auf dem Kreis $\left|z+\frac{1}{2}\right| = \delta$ gilt

$$|H_n(z)| = \left|\sum_{\nu=0}^{n}\frac{1}{\nu!}H_n^{(\nu)}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)^{\nu}\right| \leqq \sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}(2\delta)^{\nu}\left|H_{n-\nu}\left(-\frac{1}{2}\right)\right|. \tag{18}$$

Mit Hilfe der für $-\sqrt{2n+1} \leqq x \leqq \sqrt{2n+1}$ gültigen Ungleichung von Makai [3]

$$|H_n(x)| \leqq \frac{n!}{\left[\frac{n}{2}\right]!}\left(\frac{2n+1}{2n+1-x^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{x^2}{2}} \tag{19}$$

wird (18) weiter majorisiert zu

$$|H_n(z)| \leqq \frac{n!}{\left[\frac{n}{2}\right]!}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{8}}\, e^{2n\delta} \text{ für } \left|z+\frac{1}{2}\right| = \delta, \tag{20}$$

und es wird $\delta = \frac{1}{2n}$ gewählt.

Schranken für ξ_n gewinnt man aus der Ungleichung (9) und einer Ungleichung von Van Veen [9]

$$\xi_n \geqq \left(2(n+1) - 6{,}1(n+1)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (n \geqq 2). \tag{21}$$

Schließlich wird $H_n(\xi_{n-1})$ mit Hilfe der aus (2) folgenden Beziehung

$$H_n(\xi_{n-1}) = -2(n-1)H_{n-2}(\xi_{n-1})$$

und der Ungleichung von Makai [3]

$$|H_{n-1}(\xi_n)| \geqq \frac{(n-1)!}{2\left[\frac{n+1}{2}\right]!}\sqrt{2n+1-\xi_n^2}\, e^{\frac{\xi_n^2}{2}} \tag{22}$$

abgeschätzt. Zusammen mit den Ungleichungen (9) und (21) wird nach einigen Vereinfachungen eine Abschätzung für die rechte Seite von (16) gewonnen, die erkennen läßt, daß für $n \geqq 36$ die Kreisbereiche (14) und (16) die ζ-Ebene überdecken. Daher besitzt $T_n(z;\zeta)$ für $n \geqq 36$ wenigstens eine Nullstelle im Streifen

$$|\operatorname{Im} z| < \max_{n \geqq 36}\left(\frac{1}{2n}, \xi_n - \xi_{n-1}\right) < 3. \tag{23}$$

Mit Hilfe von Lemma 1 findet man anstelle von (23) sofort die schärfere Abschätzung

$$|\operatorname{Im} z| < \max_{n \geqq 36}\left(\frac{1}{2n}, \xi_n - \xi_{n-1}\right) = \xi_{36} - \xi_{35} < \frac{1}{6}.$$

Für $2 \leqq n \leqq 35$ benutzen wir Lemma 2 und die Ungleichung (19). Es gilt

$$\frac{n!}{\left[\frac{n}{2}\right]!} = \left\{\begin{array}{ll} \left(\frac{n}{2}\right)!\binom{n}{\frac{n}{2}} & \text{für } n \equiv 0\,(2) \\ n\left[\frac{n}{2}\right]!\binom{n-1}{\left[\frac{n}{2}\right]} & \text{für } n \equiv 1\,(2) \end{array}\right\} \leqq 2^n \frac{n}{2}\left[\frac{n-1}{2}\right]!$$

und

$$\left(\frac{2n+1}{2n+1-\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{8}} \leqq \left(\frac{20}{19}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{8}} \qquad \text{für } 2 \leqq n \leqq 35.$$

Deshalb liegt nach Lemma 2 für $2 \leqq n \leqq 35$ wenigstens eine Nullstelle von $T_n(z;\zeta)$ im Streifen

$$|\operatorname{Im} z| \leqq \left(\left(\frac{20}{19}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{8}} 17! \frac{35}{2}\right)^{\frac{1}{35}} < 3.$$

Damit haben wir bereits für K die Schranke 3 gewonnen.

4. Unser Ziel ist zunächst, durch Verfeinerungen in den Abschätzungen, verbunden mit einigen numerischen Rechnungen, die Methode von Makai und Turán bis zu einem möglichst kleinen Grad des Polynoms $T_n(z;\zeta)$ auszudehnen. Wir führen solche Verfeinerungen nur soweit nötig durch, um den Rechenaufwand möglichst klein zu halten.

Sämtliche erwähnten Rechnungen wurden mit den Funktionstabellen [1] und einer Tischrechenmaschine durchgeführt. Dabei wurden Rundungen stets so vorgenommen, daß die zu berechnende obere bzw. untere Schranke höchstens vergrößert bzw. verkleinert wird.

Zunächst behalten wir die Abschätzung des Kreisbereichs (14) mit Hilfe von (20) und $\delta = \delta(n) = \frac{1}{2n}$ bei. Zur Abschätzung des Kreisbereichs (16) mit Hilfe von (22) gewinnen wir obere bzw. untere Schranken für ξ_n, indem wir die in [7] mit 29 Stellen angegebenen Dezimalentwicklungen der Nullstellen der Hermiteschen Polynome nach der vierten Dezimalstelle auf- bzw. abrunden. Es zeigt sich dann, daß die Kreisbereiche (14) und (16) bereits für $n \geqq 12$ die ζ-Ebene überdecken. Somit besitzt $T_n(z;\zeta)$ für $n \geqq 12$ wenigstens eine Nullstelle im Streifen

$$|\operatorname{Im} z| < \max\left(\frac{1}{2n}, \xi_n - \xi_{n-1}\right) = \xi_n - \xi_{n-1}.$$

Zur Fortsetzung der Methode schätzen wir den Kreisbereich (14) direkt mittels (18) ab. Zur Abschätzung des Kreisbereichs (16) berechnen wir eine untere Schranke für $|H_n(\xi_{n-1})|$ mit Hilfe von (2) und der Taylorentwicklung des Hermiteschen Polynoms $H_{n-2}(x)$. Wählen wir $\delta = \delta(n) = \frac{1}{5}$ für $9 \leqq n \leqq 11$ und $\delta(n) = \frac{1}{4}$ für $n = 8$, so zeigt die numerische Rechnung, daß die Kreisbereiche (14) und (16) auch für diese Werte von n die ζ-Ebene überdecken. Somit haben wir unter Beachtung der Tafeln in [7]

$$K_n < \max\left(\delta(n), \xi_n - \xi_{n-1}\right) = \xi_n - \xi_{n-1} \quad \text{für } 8 \leqq n \leqq 11.$$

5. Im Falle $n = 7$ und $\delta = \frac{1}{4}$ folgt aus der Ungleichung (18)

$$\frac{1}{2\delta} \max_{\left|z+\frac{1}{2}\right|=\delta} |H_7(z)| \leqq \frac{1}{2\delta} \sum_{\nu=0}^{7} \binom{7}{\nu} (2\delta)^\nu \left| H_{7-\nu}\left(-\frac{1}{2}\right)\right| < 1533.$$

Damit ergibt (14), daß $T_7(z;\zeta)$ für

$$|\zeta| < 1533^{-1} > 6{,}5 \cdot 10^{-4} \tag{24}$$

eine Nullstelle im Kreisbereich $\left|z + \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4}$ besitzt.

Für $|\zeta| > 6{,}5 \cdot 10^{-4}$ kommen wir mit dem Satz von Rouché nicht mehr aus. Hier werden uns einfache geometrische Überlegungen helfen. Betrachten wir das Polynom

$$T_7(z; re^{i\varphi}) = H_0(z) + H_1(z) + re^{i\varphi} H_7(z) \qquad (r > 0). \tag{25}$$

Für

$$r > \frac{2\xi_6 - 1}{H_7(-\xi_6)} < 6{,}2 \cdot 10^{-4} \tag{26}$$

besitzt $T_7(z; r)$ eine einfache reelle Nullstelle u^* mit

$$-\xi_7 < u^* < -\xi_6.$$

Ändert man unter Gültigkeit von (26) φ von 0 ausgehend stetig, so bewegt sich eine Nullstelle von (25) auf einer Kurve

$$z^*(\varphi) = x^*(\varphi) + iy^*(\varphi) \qquad (x^*(\varphi), y^*(\varphi) \text{ reell})$$

mit $z^*(0) = x^*(0) = u^*$; dabei wählen wir beim eventuellen Durchgang durch eine mehrfache Nullstelle von (25) beliebig eine stetige Fortsetzung von $z^*(\varphi)$. Durch Differentiation stellt man leicht fest, daß $z^*(\varphi)$ für $\varphi = 0$ eine Tangente parallel zur imaginären Achse besitzt. Wir wollen nun zeigen, daß die Nullstelle $z^*(\varphi)$ die Halbebene $\operatorname{Re} z \leqq u^*$ nicht verläßt. Andernfalls gäbe es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein φ_0 mit $0 \leqq \varphi_0 \leqq 2\pi$, so daß $0 < x^*(\varphi_0) - u^* < \varepsilon$. Wir wählen $\varepsilon < -\xi_6 - u^*$. Beachten wir nur zur groben Orientierung für ξ_6 und die nach ihrer Größe geordneten Nullstellen x_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, 7$) von $H_7(x)$ die Dezimalentwicklungen (siehe [7])

$$\begin{aligned} &x_1 = -2{,}6519\ldots, \quad x_2 = -1{,}6735\ldots, \quad x_3 = -0{,}8162\ldots, \\ &x_4 = 0, \qquad x_5 = -x_3, \qquad x_6 = -x_2, \qquad x_7 = \xi_7 = -x_1, \\ &\xi_6 = 2{,}3506\ldots, \end{aligned} \tag{27}$$

so gilt

$$1 = \left| \frac{r\, e^{i\varphi_0} H_7(z^*(\varphi_0))}{H_0(z^*(\varphi_0)) + H_1(z^*(\varphi_0))} \right| = \frac{2^7 r \prod_{\nu=1}^{7} |\, x^*(\varphi_0) + i\, y^*(\varphi_0) - x_\nu \,|}{2\left| x^*(\varphi_0) + i\, y^*(\varphi_0) + \frac{1}{2} \right|}$$

$$\geqq 2^6 r \frac{\prod_{\nu=1}^{7} |\, x^*(\varphi_0) - x_\nu \,|}{|\, x^*(\varphi_0) - x_2 \,|} \cdot \frac{|\, x^*(\varphi_0) + i\, y^*(\varphi_0) - x_2 \,|}{\left| x^*(\varphi_0) + i\, y^*(\varphi_0) + \frac{1}{2} \right|}$$

$$\geqq 2^6 r \frac{\prod_{\nu=1}^{7} |\, x^*(\varphi_0) - x_\nu \,|}{\left| x^*(\varphi_0) + \frac{1}{2} \right|} > 2^6 r \frac{\prod_{\nu=1}^{7} |\, u^* - x_\nu \,|}{\left| u^* + \frac{1}{2} \right|} = \left| \frac{r\, H_7(u^*)}{H_0(u^*) + H_1(u^*)} \right| = 1.$$

Dies ist ein Widerspruch.

Wir wollen weiter zeigen, daß die Nullstelle $z^*(\varphi)$ die Geraden $|\operatorname{Im} z| = \xi_7 - \xi_6$ nicht überschreiten kann. Andernfalls gäbe es ein φ_1 mit $0 \leqq \varphi_1 \leqq 2\pi$, so daß

$$x^*(\varphi_1) \leqq u^* \text{ und } |\, y^*(\varphi_1) \,| = \xi_7 - \xi_6.$$

Wie geometrische Überlegungen unter Deutung der Faktoren von $H_7(z^*(\varphi_1))$ als Strecken zeigen, bestünden dann die Ungleichungen

$$1 = \left| \frac{r\, e^{i\varphi_1} H_7(z^*(\varphi_1))}{H_0(z^*(\varphi_1)) + H_1(z^*(\varphi_1))} \right| > \frac{2^7 r \prod_{\nu=1}^{7} |\, u^* - x_\nu \,|}{|\, u^* - x_3 \,|} \cdot \frac{|\, x^*(\varphi_1) + i\, y^*(\varphi_1) - x_3 \,|}{2\left| x^*(\varphi_1) + i\, y^*(\varphi_1) + \frac{1}{2} \right|}$$

$$> \frac{2^7 r \prod_{\nu=1}^{7} |\, u^* - x_\nu \,|}{2\left| u^* + \frac{1}{2} \right|} = 1.$$

Abermals haben wir einen Widerspruch. Also gilt

$$K_7 < \max\left(\frac{1}{4}, \xi_7 - \xi_6\right) = \xi_7 - \xi_6 < 0{,}302.$$

Unter Beachtung von Lemma 1 und der Ergebnisse des vorherigen Abschnitts haben wir

$$K_n < \xi_n - \xi_{n-1} < \min\left(0{,}302, n^{-\frac{1}{2}}\right) \text{ für } n \geqq 7.$$

6. Im Falle $n = 6$ zeigt man zunächst mit den selben Abschätzungen wie zu Beginn des vorherigen Abschnitts, daß $T_6(z; \zeta)$ für

$$|\zeta| < 2{,}9 \cdot 10^{-3}$$

eine Nullstelle im Kreisbereich $\left|z + \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4}$ besitzt.

Bezeichnen wir diesmal mit x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, 6)$ die nach ihrer Größe geordneten Nullstellen von $H_6(x)$, so bestehen nach [7] die Dezimalentwicklungen

$$\begin{aligned} &x_1 = -2{,}35060\ldots, \quad x_2 = -1{,}33584\ldots, \quad x_3 = -0{,}43607\ldots, \\ &x_4 = -x_3, \quad x_5 = -x_2, \quad x_6 = \xi_6 = -x_1. \end{aligned} \tag{28}$$

Schließlich sei ξ_5^* diejenige Nullstelle von $H_5(x)$, die zwischen x_2 und x_3 liegt. Es gilt

$$\xi_5^* = -0{,}95857\ldots. \tag{29}$$

Man sieht sofort, daß

$$T_6(z; re^{i\varphi}) = H_0(z) + H_1(z) + re^{i\varphi}H_6(z) \qquad (r > 0) \tag{30}$$

für

$$r > \frac{-2\xi_5^* - 1}{H_6(\xi_5^*)} < 2{,}16 \cdot 10^{-3} \tag{31}$$

und $\varphi = 0$ eine einfache reelle Nullstelle u^* besitzt mit

$$x_2 < u^* < \xi_5^*. \tag{32}$$

Durchläuft φ in (30) das Intervall $[0, 2\pi]$, so überlegt man sich ganz analog zum Fall $n = 7$ unter Beachtung der aus (28), (29) und (32) folgenden Ungleichung

$$|u^* - x_2| < \left|u^* + \frac{1}{2}\right|,$$

daß (30) stets eine Nullstelle $z^*(\varphi)$ in der Halbebene $\operatorname{Re} z \leqq u^*$ besitzt, wenn nur (31) erfüllt ist.

Setzen wir

$$g(z) := \left|\frac{r\,e^{i\varphi}H_6(z)}{H_0(z) + H_1(z)}\right|,$$

so gilt $g(z^*(\varphi)) = 1$. Wir wollen zeigen, daß $z^*(\varphi)$ die Geraden $|\operatorname{Im} z| = \frac{1}{2}$ nicht erreichen kann (vgl. Fig. 1).

Falls

$$x_2 \leqq \operatorname{Re} z \leqq u^* \text{ und } |\operatorname{Im} z| = \frac{1}{2},$$

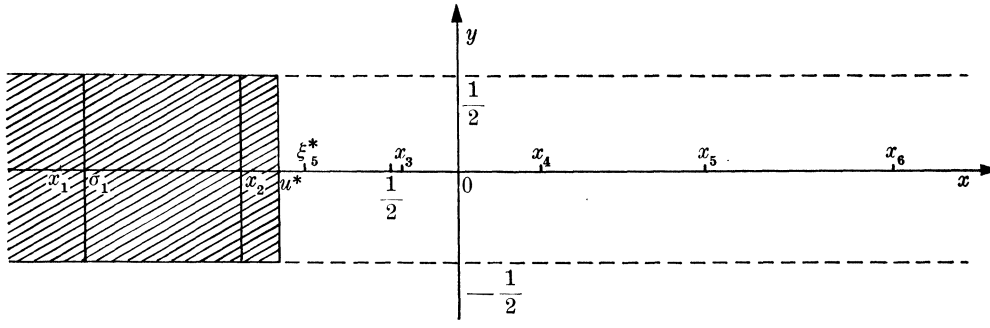


Abb. 1

so gilt unter Beachtung von Lemma 3 und der Ungleichung

$$|z-x_\nu| > |\xi_5^*-x_\nu| \frac{\left|x_2+\frac{i}{2}-x_\nu\right|}{|x_2-x_\nu|} \qquad (\nu=4,5)$$

$$g(z) > \frac{g(z)}{g(\xi_5^*)} > \frac{\left|x_2+\frac{i}{2}-x_1\right| \cdot \left|x_2+\frac{i}{2}-x_6\right|}{|\xi_5^*-x_1| \cdot |\xi_5^*-x_6|} \cdot \frac{1}{2|\xi_5^*-x_2|} \cdot \frac{\left|x_2+\frac{i}{2}-x_3\right|}{\left|x_2+\frac{i}{2}+\frac{1}{2}\right|}$$

$$\times \frac{\left|\xi_5^*+\frac{1}{2}\right|}{|\xi_5^*-x_3|} \cdot \prod_{\nu=4}^{5} \left|\frac{x_2+\frac{i}{2}-x_\nu}{x_2-x_\nu}\right|.$$

Numerische Auswertung dieser Ungleichung ergibt

$$g(z) > 1{,}3885^{\frac{1}{2}}. \tag{33}$$

Mit den Bezeichnungen

$$\sigma_1 := \frac{x_1+x_3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_3)^2-1},$$

$$-2{,}20965 < \sigma_1 < -2{,}20962 \tag{34}$$

und

$$\sigma_2 := \frac{x_1+x_2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2-1},$$

$$-1{,}9295 < \sigma_2 < -1{,}9294 \tag{35}$$

bekommen wir auf den Strecken

$$\sigma_1 \leqq \operatorname{Re} z \leqq x_2, \quad |\operatorname{Im} z| = \frac{1}{2}$$

unter Beachtung von Lemma 3 die Ungleichung

$$g(z) > g\left(x_2+\frac{i}{2}\right) \left|\frac{\sigma_2+\frac{i}{2}-x_1}{x_2+\frac{i}{2}-x_1}\right| \cdot \frac{\left|\sigma_2+\frac{i}{2}-x_2\right|}{\frac{1}{2}} \cdot \left|\frac{\sigma_1+\frac{i}{2}-x_3}{\sigma_1+\frac{i}{2}-\frac{1}{2}}\right| \cdot \left|\frac{x_2+\frac{i}{2}+\frac{1}{2}}{x_2+\frac{i}{2}-x_3}\right|.$$

Numerische Auswertung dieser Ungleichung mit Hilfe der Werte (28), (34) und (35) ergibt

$$g(z) > (1{,}3885 \cdot 0{,}77028)^{\frac{1}{2}} > 1.$$

Schließlich bestehen nach Lemma 3 auf den beiden Halbgeraden

$$\operatorname{Re} z \leqq \sigma_1, \quad |\operatorname{Im} z| = \frac{1}{2}$$

die Ungleichungen

$$|z - x_1| \cdot |z - x_3| > \left|\sigma_1 + \frac{i}{2} - x_1\right| \cdot \left|\sigma_1 + \frac{i}{2} - x_3\right|$$

und

$$\left|\frac{z - x_2}{z + \frac{1}{2}}\right| > \left|\frac{\sigma_1 + \frac{i}{2} - x_2}{\sigma_1 + \frac{i}{2} + \frac{1}{2}}\right|,$$

so daß

$$g(z) > g\left(\sigma_1 + \frac{i}{2}\right) > 1.$$

Damit ist insgesamt gezeigt, daß $K_6 < \frac{1}{2}$.

7. Im Falle $n = 5$ gehen wir ähnlich wie in den vorherigen Abschnitten vor, jedoch sind hier besonders diffizile Betrachtungen notwendig. Ein Hilfsmittel ist der folgende, mit Standardmethoden beweisbare

Hilfssatz 1. *Sei*

$$f(z) := a_0 + a_1 z + a_2 z^2$$

ein reelles Polynom mit $a_0 a_2 \neq 0$. *Dann gilt*

$$\max_{|z|=1} |f(z)| = \max\left(|a_0 + a_1 + a_2|, |a_0 - a_1 + a_2|, c(a_0, a_1, a_2)\right),$$

wobei

$$c(a_0, a_1, a_2) = \begin{cases} |a_0 - a_2|\left(1 - \dfrac{a_1^2}{4 a_0 a_2}\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{falls } |a_1(a_0 + a_2)| \leqq 4 |a_0 a_2|, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Setzen wir

$$z = \frac{3}{8} w - \frac{1}{2}$$

und

$$h(w) = 243\left(\frac{w}{4}\right)^5 - 405\left(\frac{w}{4}\right)^4 - 270\left(\frac{w}{4}\right)^3 + 450\left(\frac{w}{4}\right)^2 + 15\left(\frac{w}{4}\right) - 41,$$

so gilt

$$T_5(z; \zeta) = \frac{3}{4} w + \zeta h(w). \tag{36}$$

Nun schätzen wir ab:

$$\max_{|w|=1} |h(w)| \leqq \frac{1}{4^3} \max_{|w|=1} \left|243\left(\frac{w}{4}\right)^2 - 405\frac{w}{4} - 270\right| + \max_{|w|=1} \left|450\left(\frac{w}{4}\right)^2 + 15\frac{w}{4} - 41\right|.$$

Auswertung dieser Ungleichung unter Beachtung von Hilfssatz 1 ergibt

$$\max_{|w|=1} |h(w)| \leqq \frac{1}{4^3}\left|\frac{243}{16} - \frac{405}{4} - 270\right| + \left(41 + \frac{225}{8}\right)\left(1 + \frac{1}{328}\right)^{\frac{1}{2}} < 75.$$

Damit liefert der Satz von Rouché, angewandt auf (36), daß für $|\zeta| < \frac{1}{100}$ wenigstens eine Nullstelle von $T_5(z;\zeta)$ im Kreisbereich $\left|z + \frac{1}{2}\right| < \frac{3}{8}$ liegt.

Wir benötigen weiter den

Hilfssatz 2. *Das Polynom $T_5(z;\zeta)$ besitzt für $\zeta \neq 0$ wenigstens eine Nullstelle in der Halbebene* $\operatorname{Re} z \leqq -\frac{3}{2}$.

Beweis. Es sei zunächst $\zeta = t \neq 0$ mit t reell. Dann gilt mit $w = z + \frac{3}{2}$

$$\frac{1}{t} T_5(z;t) =: 32 \sum_{\nu=0}^{5} A_\nu w^{5-\nu}$$

$$= 32w^5 - 240\, w^4 + 560\, w^3 - 360\, w^2 + \left(\frac{2}{t} - 150\right) w - \left(\frac{2}{t} - 117\right).$$

Nach einer bekannten Regel von Bilharz und Frank (siehe [5], S. 141) kann man mit Hilfe der Vorzeichen der Determinanten

$$\delta_\nu = \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & A_5 & \cdots & A_{2\nu-1} \\ 1 & A_2 & A_4 & \cdots & A_{2\nu-2} \\ 0 & A_1 & A_3 & \cdots & A_{2\nu-3} \\ 0 & 1 & A_2 & \cdots & A_{2\nu-4} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_\nu \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} (\nu = 1, 2, \ldots, 5), \\ (A_\nu = 0 \text{ für } \nu > 5) \end{matrix}$$

die Anzahl der Nullstellen von $T_5(z;t)$ in der Halbebene $\operatorname{Re} z \leqq -\frac{3}{2}$ bestimmen. Man findet nach einiger Rechnung, daß für $t^{-1} < \frac{117}{2}$ stets eine und für $t^{-1} \geqq \frac{117}{2}$ stets zwei Nullstellen in dieser Halbebene liegen.

Betrachten wir nun das komplexe Polynom $T_5(z; re^{i\varphi})$ mit $r > 0$, $-\pi < \varphi < \pi$ und $z = x + iy$ (x, y reell). Die ihrer Größe nach geordneten Nullstellen x_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, 5$) von $H_5(x)$ besitzen die Dezimalentwicklungen (siehe [7])

$$\begin{aligned} &x_1 = -2{,}02018\ldots, \quad x_2 = -0{,}95857\ldots, \\ &x_3 = 0, \quad x_4 = -x_2, \quad x_5 = -x_1. \end{aligned} \tag{37}$$

Wegen $-\frac{3}{2} < x_2 < -\frac{1}{2}$ sieht man sofort, daß für $x = -\frac{3}{2}$ der Ausdruck

$$\left|\frac{r\, H_5(z)}{2\left(z + \frac{1}{2}\right)}\right| \qquad (z = x + iy)$$

mit $|y|$ monoton wachsend ist. Zu vorgegebenem $r > 0$ gibt es also höchstens eine komplexe Zahl $z^* = -\frac{3}{2} + iy^*$, derart daß ein φ mit $0 < \varphi < \pi$ existiert, so daß $T_5(z^*, re^{i\varphi}) = 0$. Falls es ein solches z^* gibt, so ist dazu φ im Intervall $(0, \pi)$ eindeutig bestimmt. Da nach den vorangegangenen Untersuchungen mit Hilfe der Regel von Bilharz und Frank für $\varphi = 0$ mindestens eine und für $\varphi = \pi$ genau eine Nullstelle von $T_5(z, re^{i\varphi})$ in der Halbebene $\operatorname{Re} z \leqq -\frac{3}{2}$ liegt, muß, wenn φ das Intervall $[0, \pi]$ durchläuft immer eine Nullstelle in dieser Halbebene bleiben. Für das Intervall $[-\pi, 0]$ gewinnt man dieselbe Aussage durch Konjugiertenbildung. Q. e. d.

Es sei nun $|\zeta| \geqq \frac{1}{100}$ und $z^* = x^* + iy^*$ eine nach Hilfssatz 2 garantierte Nullstelle von $T_5(z; \zeta)$ mit $x^* \leqq -\frac{3}{2}$. Wir wollen die Annahme $|y^*| \geqq \frac{1}{2}$ zu einem Widerspruch führen. Da nach (37) $x^* < x_2 < -\frac{1}{2}$, sieht man sofort, daß

$$1 = \left| \frac{\zeta H_5(z^*)}{2z^* + 1} \right| \geqq \frac{1}{200} \left| \frac{H_5\left(x^* + \frac{i}{2}\right)}{x^* + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}} \right| =: g(x^*). \tag{38}$$

Setzen wir

$$\sigma_1 := \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(x_1 - x_2)^2 - 1}\,,$$

$$(-1{,}66760 < \sigma_1 < -1{,}66755),$$

so gilt, falls $\sigma_1 \leqq x^* \leqq -\frac{3}{2}$ unter Beachtung von Lemma 3

$$g(x^*) > \frac{4}{25} \left|\sigma_1 - x_1 + \frac{i}{2}\right| \cdot \left|\sigma_1 - x_2 + \frac{i}{2}\right| \cdot \left| \frac{\sigma_1 - x_3 + \frac{i}{2}}{\sigma_1 + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}} \right| \cdot \left| -\frac{3}{2} - x_4 + \frac{i}{2} \right|$$
$$\times \left| -\frac{3}{2} - x_5 + \frac{i}{2} \right|.$$

Numerische Auswertung der rechten Seite ergibt $g(x^*) > 1{,}03$. Dies ist ein Widerspruch zu (38). Falls $x^* < \sigma_1$, so setzen wir

$$\sigma_2 := \frac{x_1 + x_3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(x_1 - x_3)^2 - 1}\,,$$

$$(-1{,}88776 < \sigma_2 < -1{,}88774)$$

und bekommen

$$g(x^*) > \frac{4}{25} \left|\sigma_2 - x_1 + \frac{i}{2}\right| \cdot \left|\sigma_2 - x_3 + \frac{i}{2}\right| \cdot \left| \frac{\sigma_1 - x_2 + \frac{i}{2}}{\sigma_1 + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}} \right| \cdot \left| \sigma_1 - x_4 + \frac{i}{2} \right|$$
$$\times \left| \sigma_1 - x_5 + \frac{i}{2} \right| > 1{,}06.$$

Dies ist ebenfalls ein Widerspruch zu (38). Damit zeigt dieser Abschnitt, daß $K_5 < \frac{1}{2}$.

8. Unter Beachtung von Lemma 2 müssen wir für den Beweis unseres Satzes nur noch den Fall $n = 3$ untersuchen.

Man kann die optimale Schranke K_n als Lösung eines Optimierungsproblems gewinnen, das für $n = 3$, d. h. für das Polynom

$$T_3(z;\zeta) = H_0(z) + H_1(z) + \zeta H_3(z) = 1 + (2 - 12\zeta)z + 8\zeta z^3 \tag{39}$$

folgendermaßen lautet:

Man maximiere

$$F(z_1, z_2, z_3) := \min_{\nu=1,2,3} |\operatorname{Im} z_\nu| \tag{40}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{\nu=1}^{3} z_\nu = 0, \tag{41}$$

$$2 \sum_{1\leq\mu<\nu\leq 3} z_\nu z_\mu = -3 - 4 \prod_{\nu=1}^{3} z_\nu, \tag{42}$$

$$z_\nu \in \boldsymbol{C} \qquad (\nu = 1, 2, 3). \tag{43}$$

Die Nullstellen z_ν ($\nu = 1, 2, 3$) des Polynoms (39) sind für $\zeta \neq 0$ stetige Funktionen von ζ. Ferner gibt es zu jeder vorgegebenen nichtreellen Zahl z^* genau ein ζ^*, so daß $T_3(z^*; \zeta^*) = 0$, und ζ^* hängt stetig von z^* ab. Daher sieht man sofort, daß für die Lösung unseres Optimierungsproblems bei geeigneter Numerierung gilt

$$K_3 = |\operatorname{Im} z_1| = |\operatorname{Im} z_2| < |\operatorname{Im} z_3|. \tag{44}$$

Unter Beachtung von (41) und (44) können wir nun unserem Optimierungsproblem folgende einfachere Gestalt geben:

Man maximiere $|y|$ unter den Nebenbedingungen

$$2\big((x_1 + iy)(x_2 + iy) - (x_1 + x_2 + 2iy)^2\big) = -3 + 4(x_1 + iy)(x_2 + iy)(x_1 + x_2 + 2iy), \tag{42*}$$

$$x_1, x_2, y \in \boldsymbol{R}. \tag{43*}$$

Trennt man die Gleichung (42*) in Real- und Imaginärteil und setzt

$$\sigma := x_1 x_2, \quad \tau := x_1 + x_2, \tag{45}$$

so bekommt man

$$\begin{aligned} -3\tau &= 2(\tau^2 + 2(\sigma - y^2)), \\ 2(3y^2 - \tau^2 + \sigma) &= -3 + 4\tau(\sigma - 3y^2). \end{aligned} \tag{46}$$

Elimination von $\sigma - y^2$ ergibt

$$16(1 + \tau)y^2 = -4\tau^3 + 3\tau - 6. \tag{47}$$

Wir müssen noch die Bedingung (43*) erfüllen. Da x_1 und x_2 Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 - \tau x + \sigma = 0$$

sind, muß gelten

$$\tau^2 - 4\sigma \geqq 0 \tag{48}$$

und wegen (47)

$$\text{sign}\,(1+\tau) = \text{sign}\,(-4\tau^3 + 3\tau - 6). \tag{49}$$

Das Polynom auf der rechten Seite von (47) besitzt genau eine reelle Nullstelle τ_0 mit

$$\tau_0 = -1{,}360946\ldots$$

und ist für $\tau > \tau_0$ negativ. Daher bedeutet (49)

$$\tau_0 \leqq \tau \leqq -1. \tag{50}$$

Unter Ausnutzung der ersten Gleichung unter (46) erweist sich (48) als äquivalent mit

$$4y^2 \leqq 3\tau^2 + 3\tau.$$

Elimination von y^2 mit Hilfe von (47) liefert

$$16\tau^3 + 24\tau^2 + 9\tau + 6 \leqq 0. \tag{51}$$

Das links stehende Polynom besitzt genau eine reelle Nullstelle τ_1 mit

$$\tau_1 = -1{,}289308\ldots.$$

Somit ergeben (50) und (51) zusammen

$$\tau_0 \leqq \tau \leqq \tau_1.$$

Man erkennt nun sofort von (47), daß $|y|$ genau dann maximal wird, wenn $\tau = \tau_1$. In diesem Fall besitzt das Polynom (39) die doppelte Nullstelle $\frac{\tau_1}{2} + iy_0$, sowie die Nullstelle $-\tau_1 - 2iy_0$, wobei

$$y_0 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3\tau_1^2 + 3\tau_1}\,.$$

Numerische Rechnung ergibt

$$|y_0| = 0{,}52891952\ldots;$$

somit haben wir $K = K_3 = |y_0|$. Als Minimalpolynom von $|y_0|$ findet man (4) und berechnet aus (39) weiter, daß die optimale Schranke K_3 genau für die unter (5) stehenden ζ-Werte erreicht wird. Damit ist unser Satz vollständig bewiesen.

Literatur

[1] *M. Abramowitz* and *I. A. Stegun*, Handbook of mathematical functions. Nat. Bur. Standards, Appl. Math. Series, **55**, Washington D. C. 1964.

[2] *E. Landau*, Über den Picardschen Satz. Vierteljahrschr. Naturf. Gesellsch. Zürich **51** (1906), 252—318.

[3] *E. Makai*, An estimation in the theory of diophantine approximations. Acta Math. Hung. **9** (1958), 299—307.

[4] *E. Makai* and *P. Turán*, Hermite expansions and distribution of zeros of polynomials. Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. **8**, Ser. A (1963), 157—163.

[5] *M. Marden*, The geometry of the zeros. Amer. Math. Soc. Math. Surveys **3**, New York 1949.

[6] *I. Schur*, Zwei Sätze über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln. J. reine angew. Math. **144** (1914), 75—88.

[7] *A. H. Stroud* and *D. Secrest*, Gaussian quadrature formulas. Englewood Cliffs, N. J. 1966.

[8] *G. Szegö*, Orthogonal polynomials. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **23**, Providence, R. I. 1959.

[9] *T. L. van Veen*, Asymptotische Entwicklungen der Hermiteschen Funktionen. Math. Ann. **105** (1931), 408 bis 436.

Mathematisches Seminar der Universität, 852 Erlangen, Bismarckstraße $1\frac{1}{2}$

Eingegangen 13. August 1969