

Werk

Titel: Journal für die reine und angewandte Mathematik

Verlag: de Gruyter

Jahr: 1984

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN243919689_0352

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN243919689_0352|LOG_0010

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Darstellungsmaße von Spinorgeschlechtern ternärer quadratischer Formen

Von *Rainer Schulze-Pillot* in Berlin (West)

Einleitung

Ist q eine positiv definite quadratische Form über $\mathbb{Q}$, so kann man nach Siegel [16] ein gewichtetes Mittel der Anzahlen der ganzzahligen Darstellungen von a durch die Formen im Geschlecht von q als Produkt lokaler Darstellungsdichten α_p (p Primzahl) berechnen. Ebenfalls nach Siegel [16] gilt eine analoge Formel für die Darstellungsmaße von beliebigen nichtausgearteten quadratischen Formen mit Koeffizienten in einem algebraischen Zahlkörper F und Variablen im Ring $\mathfrak{o}$ der ganzen Zahlen von F . Mit funktionentheoretischen Methoden zeigte Siegel in [17], daß man für eine indefinite quadratische Form in wenigstens vier Veränderlichen schon das Darstellungsmaß von a durch die Form q selbst auf die gleiche Weise berechnen kann. Eichler [3] (in einem Spezialfall), Kneser [8] und Weil [18] erreichten das gleiche Ergebnis mit arithmetischen Methoden. Dabei zeigte Kneser zusätzlich, daß (außer für a in endlich vielen genau bestimmbarren Quadratklassen) auch für eine indefinite Form in drei Variablen das Darstellungsmaß von a durch alle Formen im Geschlecht von q den gleichen Wert hat. Daß für Zahlen a , die in keiner dieser Ausnahmequadratklassen liegen, das Darstellungsmaß von a durch q nur dann gleich Null sein kann, wenn es für alle Formen im Geschlecht gleich Null ist (wenn also die Kongruenz $q(x) \equiv a \pmod{m}$ nicht für alle ganzen m ganzzahlig lösbar ist), war schon von Jones und Watson [6] mit elementaren Methoden gezeigt worden. Für jede Ausnahmequadratklasse zerfällt nach [8] das Geschlecht der Form in zwei Halbgeschlechter H_1 und H_2 , die gleich viele Klassen enthalten, so daß für Formen im gleichen Halbgeschlecht das Darstellungsmaß von a den gleichen Wert (das Darstellungsmaß von a durch das Halbgeschlecht) hat. Der Beweis von Kneser überträgt sich auf definite Formen, wenn man die Klasse der Form durch ihr Spinorgeschlecht ersetzt [4] (im indefiniten Fall fallen Klasse und Spinorgeschlecht zusammen).

In dieser Arbeit wird jetzt die Differenz $r(a, H_1) - r(a, H_2)$ der Darstellungsmaße von a durch die beiden Halbgeschlechter berechnet. Wir erhalten in Abschnitt 2 eine Art Siegelsche Maßformel mit Charakter, die diese Differenz als Produkt lokaler Faktoren $\alpha_p^+ - \alpha_p^-$ (mit $\alpha_p^+ + \alpha_p^- = \alpha_p$) über die endlichen Primstellen p von F darstellt. Während die α_p durch die Bestimmung der Lösungsanzahl der Kongruenz $q(x) \equiv a \pmod{p^k}$ für große k berechnet werden, wird die Berechnung der lokalen Faktoren $\alpha_p^+ - \alpha_p^-$ dadurch erschwert, daß man in ihnen einen Teil der Lösungen dieser Kongruenz mit negativem

Vorzeichen zählen muß. In Abschnitt 3 und 4 wird gezeigt, daß $\alpha_p^+ - \alpha_p^-$ in einem großen Teil der Fälle entweder gleich Null ist oder durch Zurückführung auf einige Standardfälle berechnet werden kann. Ist die Absolutdiskriminante des Zahlkörpers F ungerade, so erhält man damit alle Fälle, in denen $\alpha_p^- \neq 0$ ist (siehe Hilfssatz 6). Mit Hilfe der in Abschnitt 5 durchgeführten Berechnung von $\alpha_p^+ - \alpha_p^-$ in den Standardfällen gewinnt man so eine weitgehende (für ungerade Absolutdiskriminante von F sogar vollständige) Kenntnis von $r(a, H_1) - r(a, H_2)$ und damit auch der Darstellungsmaße von a durch die Spinorgeschlechter. Die wichtigsten Folgerungen werden in Satz 2 und für $F = \mathbb{Q}$ in den darauffolgenden Korollaren gezogen.

Unter anderem ergibt sich, daß das Darstellungsmaß von a für alle Spinorgeschlechter im Geschlecht den gleichen Wert hat, wenn a durch gewisse Primteiler der Stufe der Form wenigstens zum gleichen Exponenten wie die Stufe teilbar ist. Ferner findet man, daß

$$r(am^2, H_1) - r(am^2, H_2) = |N_{F/\mathbb{Q}}(m)| \psi_a(m)$$

ist mit einer Funktion $\psi_a(m)$, die nur vom Wert von m modulo einem gewissen Zykel $\bar{h}$ abhängt. Für positiv definite Formen stellen die gefundenen Ergebnisse eine Verschärfung der Ergebnisse dar, die in [15], Korollar 2 mit analytischen Methoden bewiesen worden sind.

1. Bezeichnungen und Grundlagen

Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen: F ist ein algebraischer Zahlkörper, Σ die Menge seiner Primstellen, ∞ die Menge seiner archimedischen Primstellen, $\mathfrak{o}$ der Ring der ganzen Zahlen in F , $I(F)$ die Gruppe der F -Idele, F_p und $\mathfrak{o}_p$ sind Komplettierungen bezüglich der Primstelle p . Ebenfalls mit p bezeichnen wir das Primideal in $\mathfrak{o}_p$, π ist ein Primelement in $\mathfrak{o}_p$, $(,)_p$ das Hilbert-Symbol bezüglich der Stelle p , N_p die Anzahl der Elemente des Restklassenkörpers $\mathfrak{o}_p/p$. V ist ein Vektorraum der Dimension 3 über F , q eine nicht ausgeartete quadratische Form auf V mit zugehöriger Bilinearform

$$B(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y),$$

$\det V$ ein beliebiges Element der Quadratklasse $\det(B(e_i, e_j)) (F^\times)^2$ ($\{e_i\}$ eine Basis von V), $O(V)$ die orthogonale Gruppe von V bezüglich q , $O^+(V) = \{u \in O(V) | \det u = 1\}$, $\theta: O^+(V) \rightarrow F^\times / (F^\times)^2$ die Spinornorm. L bezeichnet ein $\mathfrak{o}$ -Gitter auf V (d.h. einen in V enthaltenen endlich erzeugten $\mathfrak{o}$ -Modul vom Rang 3),

$$L^* = \{y \in V | B(y, L) \subseteq \mathfrak{o}\}$$

das zu L duale Gitter,

$$O(L) = \{u \in O(V) | uL = L\}$$

die Gruppe der Einheiten von L und $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(L) = \prod_{p \neq \infty} p^{n(L_p)} = (q(L^*)\mathfrak{o})^{-1}$ die Stufe von L . Für $x \neq 0$ aus V ist

$$O(V, x) = \{u \in O(V) | ux = x\},$$

entsprechend sind $O^+(V, x)$, $O(L, x)$ etc. definiert. Mit V_p , L_p etc. werden Komplettierungen bezeichnet (für $p \in \infty$ ist $L_p = V_p$), $O_A(V)$ ist die Adelisierung von $O(V)$,

$$O_\infty(V) = \prod_{p \in \infty} O(V_p).$$

Eine Darstellung (x, L) der Zahl a durch das Gitter L wird gegeben durch einen Vektor $x \in L$ mit $q(x) = a$. Zwei Darstellungen (x, L) und (y, K) heißen eigentlich äquivalent oder zur gleichen eigentlichen Darstellungsklasse gehörig $((x, L) \cong (y, K))$, wenn es ein $u \in O^+(V)$ gibt mit $ux = y$ und $uL = K$. Analog sind lokale eigentliche Darstellungsklassen definiert. Ist $x \in V$ und (y, K) eine Darstellung von $q(x)$, so folgt aus dem Wittschen Satz, daß es eine Darstellung (x, K') gibt, die zu (y, K) eigentlich äquivalent ist. Interessieren wir uns nur für eigentliche Klassen von Darstellungen einer Zahl a , so können wir uns daher auf Darstellungen mit einem fest vorgegebenen darstellenden Vektor beschränken. (x, L) und (y, K) gehören zum gleichen eigentlichen Darstellungsgeschlecht $((x, L) \sim (y, K))$, wenn (x, L_p) und (y, K_p) für jedes $p \in \Sigma$ (lokal) eigentlich äquivalente Darstellungen sind. Für eine (lokale) Darstellung (x, L_p) entsprechen die (lokalen) eigentlichen Klassen von Darstellungen von $q(x)$ durch Gitter, die zu L_p isomorph sind, den Doppelklassen $O^+(V_p, x) u O^+(L_p)$ mit $u \in O^+(V_p)$, $x \in uL_p$. Ebenso entsprechen für eine Darstellung (x, L) die eigentlichen Klassen von Darstellungen von $q(x)$ durch Gitter im Geschlecht von L den Doppelklassen $O^+(V, x) u O_A^+(L)$ mit $u \in O_A^+(V)$, $x \in uL$. Wir betrachten ein Haarsches Maß μ auf $O_A^+(V, x)$ und eines λ auf $O_A^+(V)$. Um die Endlichkeit aller auftretenden Maßzahlen zu gewährleisten, setzen wir im folgenden stets voraus, daß das orthogonale Komplement von x in V anisotrop ist. μ und λ zerlegen sich in Produkte lokaler Maße μ_p bzw. λ_p , die Faktoren für $p \in \infty$ fassen wir zusammen zu μ_∞ bzw. λ_∞ . Das Maß $r(x, L)$ der Darstellung (x, L) ist definiert als

$$r(x, L) = \mu_\infty (O_\infty^+(V, x) / O^+(M, x)).$$

Die Normierung der Haarschen Maße (und damit von $r(x, L)$) ist hier gleichgültig, da wir nur Maßzahlen verschiedener Mengen miteinander vergleichen wollen. Wir benötigen nur, daß sie so vorgenommen werden kann, daß unter $u \in O^+(V)$ das Maß auf $O_\infty^+(V, x)$ in das auf $O_\infty^+(V, ux)$ übergeht. Das Maß stimmt dann für eigentlich äquivalente Darstellungen überein und wird auch als Darstellungsmaß der eigentlichen Darstellungsklasse bezeichnet. Summiert man die Maße $r(x, M)$ aller eigentlichen Darstellungsklassen (x, M) im eigentlichen Geschlecht der Darstellung (x, L) , so erhält man das Maß $r(\text{gen}(x, L))$ des eigentlichen Darstellungsgeschlechts von (x, L) . Der Beweis des Satzes von Siegel mit Hilfe des Haarschen Maßes liefert ([8], [9], [11], [18]):

$$(1) \quad r(\text{gen}(x, L)) = \mu(O_A^+(V, x) / O^+(V, x)) \prod_{p \notin \infty} \frac{1}{\mu_p(O^+(L_p, x))}$$

und

$$(2) \quad \sum_{M \in \text{gen} L} \lambda_\infty(O_\infty^+(V) / O^+(M)) = \lambda(O_A^+(V) / O^+(V)) \prod_{p \notin \infty} \frac{1}{\lambda_p(O^+(L_p))}.$$

Das Darstellungsmaß $r(a, L)$ von a durch L ist definiert durch

$$r(a, L) = \left(\sum r(x, L) \right) \lambda_{\infty}(O_{\infty}^+(V)/O^+(L))^{-1},$$

wobei die Summation über ein Vertretersystem der eigentlichen Klassen von Darstellungen (x, L) von a durch L läuft. Ist F total reell und q total definit, so ist $r(a, L)$ proportional zur (dann endlichen) Anzahl der Darstellungen von a durch L . Das Darstellungsmaß $r(a, \text{spn } L)$ von a durch das Spinorgeschlecht von L und das Darstellungsmaß $r(a, \text{gen } L)$ von a durch das Geschlecht von L sind analog definiert durch

$$r(a, \text{spn } L) = \left(\sum_{K \in \text{spn } L} r(x, K) \right) \left(\sum_{K \in \text{spn } L} \lambda_{\infty}(O_{\infty}^+(V)/O^+(K)) \right)^{-1}$$

und

$$r(a, \text{gen } L) = \left(\sum_{K \in \text{gen } L} r(x, K) \right) \left(\sum_{K \in \text{gen } L} \lambda_{\infty}(O_{\infty}^+(V)/O^+(K)) \right)^{-1}.$$

Dabei läuft die Summation über ein Vertretersystem der eigentlichen Klassen von Darstellungen (x, K) mit K im Spinorgeschlecht bzw. im Geschlecht von L . Der Nenner $\left(\sum_{K \in \text{spn } L} \lambda_{\infty}(O_{\infty}^+(V)/O^+(K)) \right)$ (das Gewicht des Spinorgeschlechts) hat für alle Spinorgeschlechter in einem Geschlecht den gleichen Wert.

Schließlich muß noch die Normierung der lokalen Maße μ_p bzw. λ_p vorgenommen werden. Sei hierfür $q(L_p) \mathfrak{o}_p = \mathfrak{o}_p$, $\{e_i\}$ eine Basis von L_p , $\mathfrak{p}^k q(L_p^*) \subseteq \mathfrak{p}$, x primitiv in L_p ,

$$j := \frac{1}{2} \text{ord}_p(2q(x)) + \frac{1}{2} \text{ord}_p(\det(B(e_i, e_j))),$$

$$\beta_k(x, L_p) = \# \{ \bar{y} \in L_p/\mathfrak{p}^k L_p^* \mid (y, L_p) \cong (x, L_p) \}$$

$$(\bar{y} \text{ die Reduktion von } y \text{ modulo } \mathfrak{p}^k L_p^*).$$

Dann sollen μ_p und λ_p so normiert sein, daß für $\alpha_p(x, L_p) := \frac{\lambda_p(O^+(L_p))}{\mu_p(O^+(L_p, x))}$ gilt:

$$\alpha_p(x, L_p) = (Np)^{-2k+j} \beta_k(x, L_p)$$

(dabei ist die rechte Seite wegen [11], 14.3, von k unabhängig). Den Beweis, daß eine solche Normierung möglich ist, findet man für $F = \mathbb{Q}$ etwa in §33 von [11], im allgemeinen Fall geht er genauso.

Mit dieser Normierung erhält man für fast alle p

$$\alpha_p(x, L_p) = 1 - \left(\frac{E_x/F}{\mathfrak{p}} \right) (Np)^{-1}$$

$$\left(E_x = F(\sqrt{-2q(x) \det V}), \left(\frac{E_x/F}{\cdot} \right) \text{ das Artin-Symbol} \right),$$

so daß die bedingte Konvergenz des Produkts der α_p gesichert ist.

2. Berechnung der Differenz der Darstellungsmaße der Halbgeschlechter als ein Produkt lokaler Faktoren

Wir wollen in diesem Abschnitt die Darstellungsmaße einer Zahl a durch die Spinorgeschlechter im Geschlecht des Gitters L untersuchen. Hierfür erinnern wir zunächst noch einmal an das bereits in der Einleitung erwähnte Ergebnis von Kneser ([8], Satz 2, für den Fall eines nicht total indefiniten q siehe [4]):

Ist $a \neq 0$ und $-2a \det V \notin (F^\times)^2$, so ist entweder $r(a, \text{spn } L) = r(a, \text{spn } K)$ für jedes K aus dem Geschlecht von L , oder das Geschlecht von L zerfällt in zwei Halbgeschlechter aus gleich vielen Spinorgeschlechtern, so daß zwei Spinorgeschlechter aus dem gleichen Halbgeschlecht das gleiche Darstellungsmaß liefern. Der zweite Fall kann nur eintreten, wenn mit $E_a = F(\sqrt{-2a \det V})$ gilt:

$$(4) \quad \theta(O_A^+(L)) \subseteq N_{E_a/F}(I(E_a)).$$

Bedingung (4) ist nur für a in endlich vielen Quadratklassen erfüllt. Zwei Gitter K und M liegen genau dann im gleichen Halbgeschlecht bezüglich eines solchen a , wenn $K = uM$ gilt für ein $u \in O_A^+(V)$ mit

$$\theta(u) \in \theta(O^+(V)) \theta(O_A^+(V, x)) = \theta(O^+(V)) N_{E_a/F}(I(E_a))$$

($x \in V$ mit $q(x) = a$ beliebig).

Der zitierte Satz macht keine Aussage darüber, wie sich im zweiten Fall (dem Ausnahmefall) die Darstellungsmaße von a durch Spinorgeschlechter in verschiedenen Halbgeschlechtern zueinander verhalten. Diese Frage soll jetzt untersucht werden. Der folgende Satz — eine Art Siegelsche Maßformel mit Charakter — reduziert das Problem auf lokale Berechnungen.

Satz 1. Sei $a \neq 0$, $-2a \det V \notin (F^\times)^2$, $E_a = F(\sqrt{-2a \det V})$,

$$N_{\mathfrak{p}}(E_a) = N_{(E_a)_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}}((E_a)_{\mathfrak{p}}^\times)$$

für eine Primstelle $\mathfrak{p} | \mathfrak{p}$ von E_a , $\theta(O_A^+(L)) \subseteq N_{E_a/F}(I(E_a))$, $x \in L$ mit $q(x) = a$. Für $m \in F^\times$ sei

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathfrak{p}}^+(am^2, x, L_{\mathfrak{p}}) &= \sum_{\theta(u) \in N_{\mathfrak{p}}(E_a)} \alpha_{\mathfrak{p}}(mx, uL_{\mathfrak{p}}), \\ \alpha_{\mathfrak{p}}^-(am^2, x, L_{\mathfrak{p}}) &= \sum_{\theta(u) \notin N_{\mathfrak{p}}(E_a)} \alpha_{\mathfrak{p}}(mx, uL_{\mathfrak{p}}), \end{aligned}$$

wo die Summation über ein Vertretersystem der Doppelklassen $O^+(V_{\mathfrak{p}}, x) u O^+(L_{\mathfrak{p}})$ mit $u \in O^+(V_{\mathfrak{p}})$, $mx \in uL_{\mathfrak{p}}$ und $\theta(u)$ mit der jeweils angegebenen Eigenschaft läuft. Sei K ein Gitter aus dem Geschlecht von L , das nicht im gleichen Halbgeschlecht bezüglich a liegt wie L . Dann gilt mit einer nur von der Normierung der Haarschen Maße abhängigen Konstanten A :

$$\begin{aligned} r(am^2, \text{spn } L) - r(am^2, \text{spn } K) &= A \prod_{\mathfrak{p} \notin \infty} \left(\sum_{\substack{u \in O^+(V_{\mathfrak{p}}) \\ mx \in uL_{\mathfrak{p}}}} (-2a \det V, \theta(u))_{\mathfrak{p}} \alpha_{\mathfrak{p}}(mx, uL_{\mathfrak{p}}) \right) \\ &= A \prod_{\mathfrak{p} \notin \infty} (\alpha_{\mathfrak{p}}^+(am^2, x, L_{\mathfrak{p}}) - \alpha_{\mathfrak{p}}^-(am^2, x, L_{\mathfrak{p}})). \end{aligned}$$

Beweis. Seien H_1 und H_2 die beiden Halbgeschlechter bezüglich a , $L \in H_1$ und $K \in H_2$. Definiert man das Darstellungsmaß von a durch H_i als

$$r(a, H_i) = \left(\sum_{M \in H_i} r(x, M) \right) \left(\sum_{M \in H_i} \lambda_\infty(O_\infty^+(V)/O^+(M)) \right)^{-1}$$

(wo (x, M) ein Vertretersystem der eigentlichen Klassen von Darstellungen von a durch Gitter in H_i durchläuft), so gilt $r(a, H_1) = r(a, \text{spn } L)$ und $r(a, H_2) = r(a, \text{spn } K)$ nach Satz 2 von [8]. Wir können uns daher im folgenden auf die Betrachtung der $r(a, H_i)$ beschränken. Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir $E_a = E$. Wir stellen zunächst fest, daß $\theta(u) \in \theta(O^+(V)) N_{E/F}(I(E))$ für $u \in O_A^+(V)$ äquivalent ist zu $\theta(u) \in F^\times N_{E/F}(I(E))$. Denn $b \in F^\times$ ist in $\theta(O^+(V))$ genau dann, wenn b positiv ist für alle $\mathfrak{p}$ mit $F_{\mathfrak{p}} \cong \mathbb{R}$ und $V_{\mathfrak{p}}$ definit ([12], 101:8). Für alle solchen $\mathfrak{p}$ ist $-2a \det V$ negativ und daher

$$N_{\mathfrak{p}}(E) := N_{E_{\mathbb{Q}/F_{\mathfrak{p}}}}(E_{\mathfrak{p}}^\times) = \mathbb{R}^+,$$

also ist $b \in \theta(O^+(V))$ genau dann, wenn $(b, -2a \det L)_{\mathfrak{p}} = 1$ für alle $\mathfrak{p} \in \infty$ gilt. Da nach Voraussetzung $\theta(O^+(V_{\mathfrak{p}})) \subseteq N_{\mathfrak{p}}(E)$ für alle $\mathfrak{p} \in \infty$ gilt, folgt aus

$$\theta(u) = bi \ (b \in F^\times, i \in N_{E/F}(I(E)))$$

wie behauptet $b \in \theta(O^+(V))$. Ist $M = uL$ ($u \in O_A^+(V)$) ein Gitter im Geschlecht von L , so ist also nach dem Hilbertschen Reziprozitätsgesetz M genau dann im gleichen Halbgeschlecht wie L , wenn

$$\prod_{\mathfrak{p} \in \Sigma} (\theta(u_{\mathfrak{p}}), -2a \det L)_{\mathfrak{p}} = \prod_{\mathfrak{p} \notin \infty} (\theta(u_{\mathfrak{p}}), -2a \det L)_{\mathfrak{p}} = 1$$

gilt. Man hat also

$$\begin{aligned} & (r(am^2, H_1) - r(am^2, H_2)) \left(\sum_{M \in H_1} \lambda_\infty(O_\infty^+(V)/O^+(M)) \right) \\ &= \sum \prod_{\mathfrak{p} \notin \infty} (\theta(u_{\mathfrak{p}}), -2a \det L)_{\mathfrak{p}} \cdot r(mx, uL), \end{aligned}$$

wo die Summation über ein Vertretersystem der Doppelklassen $O^+(V, x) u O_A^+(L)$ mit $u \in O_A^+(V)$, $mx \in uL$ geht. Faßt man die Summanden zusammen, die zur gleichen Doppelklasse $O_A^+(V, x) u O_A^+(L)$ gehören, so liefern (1) und (2) die Behauptung des Satzes.

Während man zum Beweis der Siegelschen Maßformel die Maße der Darstellungs-klassen aufsummiert, wird hier das Maß der Darstellungsklasse (mx, uL) mit einem Faktor $\chi(\theta(u))$ gewichtet (wo χ der zur Erweiterung E_a/F gehörige quadratische Charakter auf der Idelgruppe von F ist) und ausgenutzt, daß dieser Charakter in ein Produkt lokaler Charaktere zerfällt.

3. Zurückführung auf Untergitter

Zur Berechnung der lokalen Darstellungsdichten $\alpha_{\mathfrak{p}}(a, L_{\mathfrak{p}})$ in der Siegelschen Maßformel für $r(a, \text{gen } L)$ genügt es bekanntlich, die Anzahl der primitiven Lösungen der Kongruenzen $q(y) \equiv \pi^{-2i} a \pmod{\mathfrak{p}^k}$ ($2i \leq \text{ord}_{\mathfrak{p}} a$) in $L_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^k L_{\mathfrak{p}}^*$ für hinreichend großes k zu bestimmen, wobei für fast alle Primstellen $k=1$ gewählt werden kann. Die Berechnung der $\alpha_{\mathfrak{p}}^+(am^2, x, L_{\mathfrak{p}}) - \alpha_{\mathfrak{p}}^-(am^2, x, L_{\mathfrak{p}})$ gestaltet sich dagegen wegen des Auftretens der

Spinornormen in der Definition dieser Faktoren etwas schwieriger. Wir beweisen dafür in den folgenden Abschnitten einige Hilfssätze. Dabei ist stets $a \neq 0$, $-2a \det V \notin (F^\times)^2$, $E = E_a = F(\sqrt{-2a \det V})$, $\theta(O_A^+(L)) \subseteq N_{E/F}(I(E))$, $N_p(E) := N_{E_p/F_p}(E_p^\times)$, $x \in L$ mit $q(x) = a$, $L_p^{(t)} = \{y \in L_p \mid q(y) \in \mathfrak{p}^t\}$.

Hilfssatz 1. Sei $\mathfrak{p} \in \Sigma - \infty$ und $t \in \mathbb{Z}$ so, daß $L_p^{(t)}$ ein Untergitter von L_p mit $\theta(O^+(L_p^{(t)})) \not\subseteq N_p(E)$ ist. Dann gilt für alle $m \in F^\times$ mit $am^2 \in \mathfrak{p}^t$:

$$\alpha_p^+(am^2, x, L_p) = \alpha_p^-(am^2, x, L_p).$$

Beweis. Zu einer Darstellung (mx, uL_p) ($u \in O^+(V_p)$) betrachten wir diejenigen Doppelklassen $O^+(V_p, x) v O^+(L_p)$ mit $v \in u O^+(L_p^{(t)})$ (offensichtlich gilt $O(L_p) \subseteq O(L_p^{(t)})$). Wir setzen

$$\tilde{O}^+(L_p^{(t)}) = \{w \in O^+(L_p^{(t)}) \mid \theta(w) \in N_p(E)\},$$

wählen $w_0 \in O^+(L_p^{(t)})$ mit $\theta(w_0) \notin N_p(E)$ und erhalten

$$O^+(V_p, x) u O^+(L_p^{(t)}) = O^+(V_p, x) u \tilde{O}^+(L_p^{(t)}) \cup O^+(V_p, x) u \tilde{O}^+(L_p^{(t)}) w_0$$

sowie

$$O^+(V_p, x) u \tilde{O}^+(L_p^{(t)}) = \bigcup_{i=1}^s O^+(V_p, x) v_i O^+(L_p)$$

$$O^+(V_p, x) u \tilde{O}^+(L_p^{(t)}) w_0 = \bigcup_{i=s+1}^{s'} O^+(V_p, x) v_i O^+(L_p)$$

mit $\theta(v_i) \in N_p(E)$ für $i = 1, \dots, s$ und $\theta(v_i) \notin N_p(E)$ für $i = s+1, \dots, s'$. Das biinvariante Haarsche Maß λ_p auf $O^+(V_p)$ induziert ein rechtsinvariantes Maß $\bar{\lambda}_p$ auf dem homogenen Raum $O^+(V_p, x) \backslash O^+(V_p)$ mit der Eigenschaft:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_p(O^+(V_p, x) \backslash O^+(V_p, x) v_i O^+(L_p)) &= \bar{\lambda}_p(O^+(V_p, x) \backslash O^+(V_p, x) O^+(v_i L_p)) \\ &= \frac{\lambda_p(O^+(v_i L_p))}{\mu_p(O^+(v_i L_p, x))}. \end{aligned}$$

Wegen der Rechtsinvarianz von $\bar{\lambda}_p$ gilt

$$\bar{\lambda}_p(O^+(V_p, x) \backslash O^+(V_p, x) u O^+(L_p^{(t)})) = \bar{\lambda}_p(O^+(V_p, x) \backslash O^+(V_p, x) u O^+(L_p^{(t)}) w_0)$$

und wegen der Biinvarianz von λ_p ist $\lambda_p(O^+(v_i L_p)) = \lambda_p(O^+(L_p))$. Man hat daher

$$\sum_{i=1}^s \frac{\lambda_p(O^+(L_p))}{\mu_p(O^+(v_i L_p, x))} = \sum_{i=s+1}^{s'} \frac{\lambda_p(O^+(L_p))}{\mu_p(O^+(v_i L_p, x))}.$$

Die eine Seite dieser Gleichung ist der Beitrag der in $O^+(V_p, x) u O^+(L_p^{(t)})$ enthaltenen Doppelklassen $O^+(V_p, x) v O^+(L_p)$ zu $\alpha_p^+(am^2, x, L_p)$, die andere Seite ist der Beitrag dieser Doppelklassen zu $\alpha_p^-(am^2, x, L_p)$. Summiert man über alle Doppelklassen $O^+(V_p, x) u O^+(L_p^{(t)})$ mit $mx \in uL_p$, so erhält man die Behauptung des Hilfssatzes.

Hilfssatz 2. Sei $\mathfrak{p} \in \Sigma - \infty$ und $t \in \mathbb{Z}$ so, daß $L_p^{(t)}$ ein Untergitter von L_p mit $\theta(O^+(L_p^{(t)})) \subseteq N_p(E)$ ist. Dann gilt für $m \in F^\times$ mit $am^2 \in \mathfrak{p}^t$:

$$\alpha_p^\pm(am^2, x, L_p) = \alpha_p^\pm(am^2, x, L_p^{(t)}).$$

Beweis. Zu einer Darstellung (mx, uL_p) ($u \in O^+(V_p)$) betrachten wir wieder die Zerlegung der Doppelklasse $O^+(V_p, x)uO^+(L_p^{(i)})$ in Doppelklassen $O^+(V_p, x)v_iO^+(L_p)$ ($i = 1, \dots, s$). Da $\theta(v_i) \in \theta(u)N_p(E)$ gilt, tragen diese Doppelklassen alle nur zu einer der Zahlen $\alpha_p^+(am^2, x, L_p)$ und $\alpha_p^-(am^2, x, L_p)$ bei, und ihr Beitrag ist

$$\sum_{i=1}^s \frac{\lambda_p(O^+(L_p^{(i)}))}{\mu_p(O^+(v_iL_p, x))}.$$

Mit dem gleichen Argument wie beim Beweis von Hilfssatz 1 erhält man

$$\sum_{i=1}^s \frac{\lambda_p(O^+(L_p^{(i)}))}{\mu_p(O^+(v_iL_p, x))} = \frac{\lambda_p(O^+(L_p^{(i)}))}{\mu_p(O^+(uL_p^{(i)}, x))},$$

und das ist der Beitrag der Doppelklasse $O^+(V_p, x)uO^+(L_p^{(i)})$ zu $\alpha_p^+(am^2, x, L_p^{(i)})$ bzw. $\alpha_p^-(am^2, x, L_p^{(i)})$. Summiert man über alle Doppelklassen $O^+(V_p, x)uO^+(L_p^{(i)})$ mit $mx \in uL_p$, so erhält man die Behauptung des Hilfssatzes.

4. Konstruktion geeigneter Untergitter

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß man für genügend großes $\text{ord}_p(am^2)$ entweder mit Hilfssatz 1 zeigen kann, daß $\alpha_p^+(am^2, x, L_p) - \alpha_p^-(am^2, x, L_p) = 0$ gilt oder mit Hilfssatz 2 die Berechnung dieser Differenz auf einen Standardfall reduzieren kann.

Wie früher ist $p^{n(L_p)}$ die Stufe von L_p . Unter einer p^j -maximalen hyperbolischen Ebene verstehen wir im folgenden stets ein p^j -maximales Gitter auf einem zweidimensionalen isotropen Raum.

Proposition. Sei $p \in \Sigma - \infty$. Dann gibt es ein $j \leq n(L_p)$, so daß $L_p^{(j)}$ ein Untergitter von L_p mit $q(L_p^{(j)})\mathfrak{o}_p = p^j$ ist und

$$\text{i) } \theta(O^+(L_p^{(j)})) \not\subseteq N_p(E)$$

gilt oder

$$\text{ii) } L_p^{(j)} \text{ spaltet eine } p^j\text{-maximale hyperbolische Ebene ab.}$$

Das kleinste solche j bezeichnen wir mit $t(L_p, a)$.

Beweis. Ist 2 Einheit oder Primelement in $\mathfrak{o}_p$, so läßt sich $t(L_p, a)$ mit Hilfe der Ergebnisse von [7] für $2 \notin p$, von [1] und [5] für $p = 2\mathfrak{o}_p$ durch Diskussion der möglichen Jordanzerlegungen für L_p berechnen. Diese Berechnung liegt den Sätzen 3 und 4 in [14] zugrunde. Aus Platzgründen verzichten wir darauf, die Ergebnisse und ihre Beweise hier aufzuführen und bemerken nur, daß sich in jedem Fall $t(L_p, a) \leq n(L_p)$ ergibt (wobei die Ungleichung in vielen Fällen streng ist). Im Fall, daß F_p eine verzweigte Erweiterung von $\mathbb{Q}_2$ ist, gibt es zu viele Ähnlichkeitsklassen zweidimensionaler modularer Gitter, um diese Einzelfalldiskussion durchzuführen. Um zu einem Beweis der Abschätzung $t(L_p, a) \leq n(L_p)$ zu kommen, der auch in diesem Fall gültig ist, benötigen wir einige Hilfssätze. Auch die Beweise dieser Hilfssätze vereinfachen sich für $2 \notin p$ oder $p = 2\mathfrak{o}_p$, doch geben wir die möglichen Vereinfachungen nicht im einzelnen an, da man in diesen Fällen durch die Einzelfalldiskussion ohnehin ein besseres Ergebnis erhält.

Hilfssatz 3. Sei $\mathfrak{p} \in \Sigma - \infty$. Ist $L_{\mathfrak{p}}^{(t)}$ für alle $t \in \mathbb{Z}$ ein Untergitter von $L_{\mathfrak{p}}$, so ist $V_{\mathfrak{p}}$ anisotrop. Ist $t \in \mathbb{Z}$ so, daß $L_{\mathfrak{p}}^{(t)}$ ein Untergitter von $L_{\mathfrak{p}}$ ist und $L_{\mathfrak{p}}^{(t+1)}$ kein Gitter ist, so ist $L_{\mathfrak{p}}^{(t)} = H \perp \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} z$ mit einer $\mathfrak{p}^t$ -maximalen hyperbolischen Ebene H .

Beweis. Ist $L_{\mathfrak{p}}^{(t)}$ für alle $t \in \mathbb{Z}$ ein Gitter, so ist auch $L_{\mathfrak{p}}^{(\infty)} = \bigcap_{t \in \mathbb{Z}} L_{\mathfrak{p}}^{(t)}$ ein Gitter.

$L_{\mathfrak{p}}^{(\infty)}$ besteht aus allen $y \in L_{\mathfrak{p}}$ mit $q(y) = 0$, und falls $L_{\mathfrak{p}}^{(\infty)} \neq \{0\}$ ist, gibt es $y_1, y_2 \in L_{\mathfrak{p}}^{(\infty)}$ mit $B(y_1, y_2) \neq 0$, da $V_{\mathfrak{p}}$ nicht-ausgeartet ist. Dann ist aber $q(y_1 + y_2) \neq 0$, also $L_{\mathfrak{p}}^{(\infty)}$ kein Untergitter. Das zeigt den ersten Teil der Behauptung. Sei jetzt $t \in \mathbb{Z}$ so, daß $L_{\mathfrak{p}}^{(t)}$ ein Untergitter von $L_{\mathfrak{p}}$ ist und $L_{\mathfrak{p}}^{(t+1)}$ kein Gitter ist. Wir können o.E. annehmen, daß $t = 0$ und $L_{\mathfrak{p}} = L_{\mathfrak{p}}^{(0)}$ gilt. Dann gibt es also $y_1, y_2 \in L_{\mathfrak{p}}$ mit $q(y_i) \in \mathfrak{p}$ und

$$q(y_1 + y_2) = q(y_1) + q(y_2) + B(y_1, y_2) \notin \mathfrak{p},$$

also $B(y_1, y_2) \notin \mathfrak{p}$. Ohne Einschränkung sei $B(y_1, y_2) = 1$. Dann ist

$$-\det(B(y_1, y_2)) \in 1 + 4\mathfrak{p} \subseteq (F_{\mathfrak{p}}^{\times})^2.$$

Das von y_1 und y_2 aufgespannte Gitter ist also eine unimodulare hyperbolische Ebene und spaltet daher orthogonal ab.

Ist $\mathfrak{p}^{d(L_{\mathfrak{p}})}$ die reduzierte Determinante von $L_{\mathfrak{p}}$ (siehe [2], § 9), so kann man leicht zeigen, daß entweder $L_{\mathfrak{p}}^{(j)}$ für ein $j \leq d$ kein Gitter ist oder $L_{\mathfrak{p}}^{(d)}$ ein $\mathfrak{p}^d$ -maximales Gitter ist. Der folgende Hilfssatz, dessen Beweis recht technisch ist, liefert eine Verschärfung dieser Schranke.

Hilfssatz 4. Sei $\mathfrak{p} \in \Sigma - \infty$. Dann gilt:

i) Es gibt ein $j \leq n(L_{\mathfrak{p}})$ mit $L_{\mathfrak{p}}^{(j)} = K \perp \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} z$, K ein zweidimensionales modulares $\mathfrak{p}^j$ -maximales Gitter.

ii) Ist $V_{\mathfrak{p}}$ isotrop, so kann K als hyperbolische Ebene gewählt werden.

iii) Ist $V_{\mathfrak{p}}$ anisotrop, so gibt es für ein $j \leq n(L_{\mathfrak{p}})$ eine Zerlegung von $L_{\mathfrak{p}}^{(j)}$ wie in i) mit $q(z)\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \supseteq \mathfrak{p}^{j+1}$. $L_{\mathfrak{p}}^{(j)}$ ist dann $\mathfrak{p}^j$ -maximal.

Beweis. Wir zeigen Behauptung i) zunächst in dem Spezialfall, daß $L_{\mathfrak{p}} = K \perp \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} z$ mit einem zweidimensionalen $\mathfrak{p}^r$ -modularen Gitter K und $\text{ord}_{\mathfrak{p}} q(z) = s$ gilt. Wir schreiben dann $r = r(L_{\mathfrak{p}})$ und definieren $\bar{r}(L_{\mathfrak{p}})$ durch $q(L_{\mathfrak{p}})\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^{r(L_{\mathfrak{p}}) - \bar{r}(L_{\mathfrak{p}})}$. Mit $k(L_{\mathfrak{p}})$ bezeichnen wir die kleinste Zahl k , so daß es eine Zerlegung $L_{\mathfrak{p}} = K \perp \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} z$ mit $q(K)\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^{r-k}$ und K zweidimensional $\mathfrak{p}^r$ -modular gibt. Dann gilt $r(L_{\mathfrak{p}}) + k(L_{\mathfrak{p}}) \leq n(L_{\mathfrak{p}})$, und wir zeigen:

Behauptung i) ist sogar richtig für ein $t \leq r(L_{\mathfrak{p}}) + k(L_{\mathfrak{p}})$. Wir führen den Beweis durch Induktion nach $k(L_{\mathfrak{p}}) + \bar{r}(L_{\mathfrak{p}})$. Für $k(L_{\mathfrak{p}}) + \bar{r}(L_{\mathfrak{p}}) = 0$ folgt die Behauptung aus Satz 9.3. von [2]. Sei jetzt also $L_{\mathfrak{p}}$ gegeben mit $\bar{r}(L_{\mathfrak{p}}) > 0$. O.E. sei $q(L_{\mathfrak{p}})\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$, also $r(L_{\mathfrak{p}}) = \bar{r}(L_{\mathfrak{p}})$. $L_{\mathfrak{p}} = K \perp \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} z$ sei eine Zerlegung von $L_{\mathfrak{p}}$ mit $q(K)\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^{r(L_{\mathfrak{p}}) - k(L_{\mathfrak{p}})}$. Ist $k(L_{\mathfrak{p}}) < r(L_{\mathfrak{p}})$, also $q(K)\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \neq \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$, so ist $q(z) \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^{\times}$ und $L_{\mathfrak{p}}^{(1)} = K \perp \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}(\pi z_3)$. Es gilt also $k(L_{\mathfrak{p}}^{(1)}) + \bar{r}(L_{\mathfrak{p}}^{(1)}) \leq k(L_{\mathfrak{p}}) + r(L_{\mathfrak{p}}) - 1$, und aus der Induktionsannahme folgt die Behauptung i) für $L_{\mathfrak{p}}$ wegen $k(L_{\mathfrak{p}}^{(1)}) + r(L_{\mathfrak{p}}^{(1)}) \leq k(L_{\mathfrak{p}}) + r(L_{\mathfrak{p}})$.

Wir können also $k(L_p) = r(L_p)$ annehmen und bemerken noch, daß daraus $B(K, K) = B(L_p, L_p)$ folgt und daher jedes p' -modulare Gitter in L_p orthogonal absplattet (siehe etwa [12], 82:15). Ist $L_p^{(2)} \neq K_p^{(2)} \perp (\mathfrak{o}_p z)^{(2)}$, so gibt es $y \in K$ mit $q(y) \notin p^2$ und $q(y+z) \in p^2$. Wir setzen $z_1 = y+z$ und wählen $z_2 \in K$ mit $B(z_2, z_1) = B(z_2, y) = \pi^{r(L_p)}$. Das von z_1 und z_2 aufgespannte Gitter K' ist dann $p^{r(L_p)}$ -modular und splattet daher orthogonal ab, $L_p = K' \perp \mathfrak{o}_p z'$. Wäre $L_p^{(2)} \neq K'^{(2)} \perp (\mathfrak{o}_p z')^{(2)}$, so gäbe es $y' \in K'$ mit $q(y') \notin p^2$, $q(y' + z') \in p^2$. Ist $y' = b_1 z_1 + b_2 z_2$ ($b_i \in \mathfrak{o}_p$), so ist

$$q(y') = b_1^2 q(z_1) + b_2^2 q(z_2) + b_1 b_2 \pi^{r(L_p)},$$

und wegen $r(L_p) > 0$ und $q(y') \notin p^2$ folgt $b_2 \in \mathfrak{o}_p^\times$. Also ist

$$\text{ord}_p B(y' + z', z_1) = \text{ord}_p B(y', z_1) = r(L_p),$$

d.h. $y' + z'$ und z_1 spannen ein $p^{r(L_p)}$ -modulares Untergitter K'' von L_p auf mit $q(K'') \subseteq p$, und das ist ein Widerspruch zu $k(L_p) = r(L_p)$. Also ist $L_p^{(2)} = K'^{(2)} \perp (\mathfrak{o}_p z')^{(2)}$, und indem wir nötigenfalls K durch K' und z durch z' ersetzen, können wir $L_p^{(2)} = K^{(2)} \perp (\mathfrak{o}_p z)^{(2)}$ annehmen. Ist K ein $\mathfrak{o}_p$ -maximales Gitter, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls ist $K \supsetneq K^{(2)} \supsetneq \pi K$, es gibt also eine Basis $\{y_1, y_2\}$ von K , so daß $\{y_1, \pi y_2\}$ eine Basis von $K^{(2)}$ ist. Es folgt, daß $K^{(2)}$ ein $p^{r(L_p)+1}$ -modulares Gitter ist. Also ist $k(L_p^{(2)}) \leq k(L_p) - 1$, $\bar{r}(L_p^{(2)}) = \bar{r}(L_p) - 1$. Nach der Induktionsannahme gilt also die Behauptung i) für $L_p^{(2)}$. Da $r(L_p^{(2)}) + k(L_p^{(2)}) \leq r(L_p) + k(L_p)$ gilt, folgt i) für L_p . Der Beweis zeigt, daß man für die Zerlegung von $L_p^{(j)}$ zusätzlich zu i) fordern kann:

$$\bar{r}(L_p^{(j)}) = 0 \quad \text{oder} \quad L_p^{(j+2)} = K^{(j+2)} \perp (\mathfrak{o}_p z)^{(j+2)}.$$

Hat L_p keine 2-dimensionale modulare Komponente, so ist also $L_p = \mathfrak{o}_p z_1 \perp \mathfrak{o}_p z_2 \perp \mathfrak{o}_p z_3$, $q(z_i) \in \pi^{s_i} \mathfrak{o}_p^\times$ ($s_1 < s_2 < s_3$) und $n(L_p) = \text{ord}_p 4 + s_3$. Für ein $s \leq s_3$ hat $L_p^{(j)}$ eine zweidimensionale, $p^{s+\text{ord}_p 2}$ -modulare Komponente. Da $r(L_p^{(s)}) + k(L_p^{(s)}) \leq s_3 + \text{ord}_p 4$ gilt, folgt die Behauptung i) für L_p aus der soeben bewiesenen Behauptung i) für $L_p^{(s)}$.

Zu ii) und iii). Sei $L_p^{(j)} = K \perp \mathfrak{o}_p z$ eine Zerlegung wie in i) gefordert, $s = \text{ord}_p q(z)$. Ist $F_p K$ isotrop, so ist K eine hyperbolische Ebene, und es ist nichts zu zeigen. Ist $F_p K$ anisotrop und $\text{ord}_p q(z) = s \geq j+2$, so hat auch L_p eine eindimensionale $2p^s$ -modulare Komponente.

Setzt man

$$j' = \begin{cases} s & s \equiv j \pmod{2}, \\ s-1 & s \not\equiv j \pmod{2}, \end{cases}$$

so ist also $j' \leq n(L_p)$ und $L_p^{(j')} = \pi^{\lfloor \frac{s-j}{2} \rfloor} K \perp \mathfrak{o}_p z$. Ist V_p anisotrop, so zeigt dies iii). Ist V_p isotrop, so gibt es nach der Bemerkung am Ende des Beweises von i) ein

$$j'' \leq r(L_p^{(j')}) + k(L_p^{(j')}) \leq n(L_p),$$

so daß $L_p^{(j'')}$ entweder eine hyperbolische Ebene absplattet oder eine Zerlegung $L_p^{(j'')} = K' \perp \mathfrak{o}_p z'$ mit $q(z') \mathfrak{o}_p \supseteq p^{j''+1}$ und $L_p^{(j''+2)} = K'^{(j''+2)} \perp (\mathfrak{o}_p z')^{(j''+2)} = \pi K' \perp \mathfrak{o}_p (\pi z')$ (K' zweidimensional modular maximal) hat. Im zweiten Fall wäre aber $L_p^{(i)}$ für alle i ein Gitter, was nach Hilfssatz 3 ein Widerspruch zur Annahme ist, daß V_p isotrop ist. Damit ist auch ii) gezeigt.

Hilfssatz 5. Sei V_p anisotrop, sei $L_p = K \perp \mathfrak{o}_p z$ mit einem zweidimensionalen $\mathfrak{o}_p$ -maximalen modularen Gitter K und $q(z)\mathfrak{o}_p \supseteq \mathfrak{p}$. Dann ist $\theta(O^+(L_p)) = F_p^\times$.

Beweis. Da $q(K)\mathfrak{o}_p = \mathfrak{o}_p$ gilt und $\theta(O^+(L_p))$ durch Dehnung (scaling) nicht geändert wird, können wir ohne Einschränkung $1 \in q(K)$ annehmen. $\theta(O^+(K))$ ist dann die Normengruppe einer quadratischen Erweiterung $E' = F_p(\sqrt{u})$ ($u \in \mathfrak{o}_p^\times$) von F_p . Ist die Erweiterung unverzweigt, so gilt $\theta(O^+(K)) \supseteq \mathfrak{o}_p^\times$. Für ungerades $\text{ord}_p q(z)$ folgt $\theta(O^+(L_p)) = F_p^\times$, und $\text{ord}_p q(z)$ gerade würde implizieren, daß V_p isotrop ist. Ist E'/F_p verzweigt, so ist $B(L_p, L_p) \subseteq \mathfrak{p}$ und es gibt $y_1, y_2 \in K$ mit $\text{ord}_p q(y_1) = 0$, $\text{ord}_p q(y_2) = 1$. Ist $\text{ord}_p q(z) = 0$, so ist $\mathfrak{o}_p z \perp \mathfrak{o}_p y_2 \subseteq L_p$ ein $\mathfrak{o}_p$ -maximales Gitter K' und $\theta(O^+(K')) \subseteq \theta(O^+(L_p))$ ist die Normengruppe einer quadratischen Erweiterung $F_p(\sqrt{u\pi})$ ($u \in \mathfrak{o}_p^\times$) von F_p . $\theta(O^+(L_p))$ enthält also zwei verschiedene Untergruppen vom Index 2 in $F_p^\times$, ist also gleich $F_p^\times$. Ebenso argumentiert man für $\text{ord}_p q(z) = 1$ mit $K'' = \mathfrak{o}_p z \perp \mathfrak{o}_p y_1$.

Die Proposition folgt jetzt sofort aus Hilfssatz 4 und Hilfssatz 5.

5. Berechnung der lokalen Faktoren

Hilfssatz 6. Sei $\mathfrak{p} \in \Sigma - \infty$, 2 sei Einheit oder Primelement in $\mathfrak{o}_p$. Dann gilt für alle $m \in F_p^\times$ mit $am^2 \notin \mathfrak{p}^{t(L_p, a)}$:

$$\alpha_p^-(am^2, x, L_p) = 0.$$

Beweis. Wie früher (§ 3) sei $E = E_a = F(\sqrt{-2a \det V})$. Ist $\mathfrak{p}$ zerlegt in E/F , so ist die Behauptung trivial. Sei also $\mathfrak{p}$ träge oder verzweigt in E/F , sei $s = \text{ord}_p(am^2) < t(L_p, a)$. $L_p^{(s)}$ ist dann ein Untergitter von L_p mit $\theta(O^+(L_p^{(s)})) \subseteq N_p(E)$, und nach Hilfssatz 2 folgt $\alpha_p^-(am^2, x, L_p) = \alpha_p^-(am^2, x, L_p^{(s)})$. Ohne Einschränkung (scaling um π^{-s}) können wir also $q(L_p)\mathfrak{o}_p = \mathfrak{o}_p$, $s = 0$ annehmen.

Ist 2 Einheit in $\mathfrak{o}_p$, so lassen sich je zwei Vektoren $y_1, y_2 \in L_p$ mit $q(y_1) = q(y_2) = am^2$ durch eine Einheit von L_p ineinander überführen, und nach Lemma 2 von [15] folgt die Behauptung. Ist 2 Primelement in $\mathfrak{o}_p$ und gibt es einen primitiven Vektor $y_1 \in L_p$ mit $B(y_1, L_p) = \mathfrak{o}_p$, so spaltet L_p ein $\mathfrak{o}_p$ -modulares 2-dimensionales Gitter K ab. Gibt es $y_2 \in L_p$ mit $q(y_2) = am^2$ und $B(y_2, L_p) = 2\mathfrak{o}_p$, so spaltet y_2 orthogonal ab. Gibt es in L_p sowohl y_1 wie auch y_2 wie oben, so ist V_p isotrop, da K alle Einheiten darstellt, und L_p ist maximal, spaltet also im Widerspruch zu $s < t(L_p, a)$ eine hyperbolische Ebene ab ([2], Satz 9.5). Daher gilt: Entweder ist $B(y, L_p) = \mathfrak{o}_p$ für alle $y \in L_p$ mit $q(y) = am^2$ oder es ist $B(y, L_p) = 2\mathfrak{o}_p$ für alle solchen y . In beiden Fällen erhält man mit dem Wittschen Satz für Gitter, daß $y_1, y_2 \in L_p$ mit $q(y_1) = q(y_2) = am^2$ durch eine Einheit von L_p ineinander überführt werden können (siehe z.B. Satz 1 von [10] für den ersten Fall, Satz 2 von [10] für den zweiten Fall). Die Behauptung folgt dann wie oben.

Der Beweis von Hilfssatz 6 schlägt offensichtlich fehl, wenn $\text{ord}_p 2 > 1$ ist. Ob die Aussage des Hilfssatzes auch in diesem Fall wahr ist, ist mir unbekannt. Für diesen Fall wird hier keine Aussage über $\alpha_p^-(am^2, x, L_p)$ für $am^2 \notin \mathfrak{p}^{t(L_p, a)}$ gemacht.

Ist $am^2 \in \mathfrak{p}^{t(L_p, a)}$, so ist die Berechnung von $\alpha_p^+(am^2, x, L_p) - \alpha_p^-(am^2, x, L_p)$ durch die Ergebnisse der vorigen Abschnitte auf den Fall zurückgeführt, daß L_p eine hyperbolische Ebene abspaltet. Wir wollen jetzt $\alpha_p^+(am^2, x, L_p) - \alpha_p^-(am^2, x, L_p)$ in diesem Fall berechnen.

Hilfssatz 7. Sei $L_p = K \perp \mathfrak{o}_p z$, K eine hyperbolische Ebene mit $q(K)\mathfrak{o}_p = \mathfrak{o}_p$. Dann gilt: Ist $\text{ord}_p q(z)$ gerade, so ist $\theta(O^+(L_p)) = \mathfrak{o}_p^\times (F_p^\times)^2$, ist $\text{ord}_p q(z)$ ungerade, so ist $\theta(O^+(L_p)) = F_p^\times$.

Beweis. Der zweite Teil der Behauptung ist klar. Ist $x = y + \alpha z$ ($y \in K$) ein primitiver Vektor aus L_p mit $\text{ord}_p(q(x)) = r > 0$, so daß die Spiegelung τ_x in $O(L_p)$ liegt (wie üblich $\tau_x(w) = w - \frac{B(x, w)}{q(x)} x$), so muß $B(x, L_p) \subseteq \mathfrak{p}^r$ gelten, also $y \in \mathfrak{p}^r K$. α muß also eine Einheit sein und $q(\alpha z) \in \mathfrak{p}^r \mathfrak{o}_p^\times$ erfüllen. Das ist für gerades $\text{ord}_p(q(z))$ unmöglich. Da die Überlegungen aus § 6 von [13] für das hier betrachtete L_p richtig bleiben, auch wenn man zuläßt, daß F_p verzweigt über $\mathbb{Q}_2$ ist, wird $\theta(O^+(L_p))$ von den $q(x)$ mit $\tau_x \in O(L_p)$ erzeugt, und die Behauptung folgt.

Hat das Gitter L_p bezüglich einer Basis die Matrix $\begin{pmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{pmatrix}$, so schreiben wir im folgenden $L_p \cong (a, b, c, d, e, f)$.

Hilfssatz 8. Sei $p \in \Sigma - \infty$ träge in E/F , $\text{ord}_p a = 0$. Ist $L_p \cong (0, 0, \pi^{2r}, 0, 0, 1)$ ($r \geq 0$) und $B(x, L_p) = \mathfrak{o}_p$, so gilt für $s \geq 0$:

$$\alpha_p^+(a\pi^{2s}, x, L_p) - \alpha_p^-(a\pi^{2s}, x, L_p) = (-1)^s (Np)^{s-r-1} (Np-1).$$

Ist $p = 2\mathfrak{o}_p$ und $L_p \cong (1, 0, 0, 4, 0, 0)$, so gilt für $s \geq 0$:

$$\alpha_p^+(a\pi^{2s}, x, L_p) - \alpha_p^-(a\pi^{2s}, x, L_p) = (-1)^s (Np)^{s-2} (Np-1).$$

Beweis. Sei zunächst $L_p \cong (0, 0, \pi^{2r}, 0, 0, 1)$; wir schreiben hierfür im folgenden $L_p = L_p(r)$. Sei $e = \text{ord}_p 2$. Für $0 \leq i \leq s+e$ sei

$$\alpha_p^{(i)}(\pi^s x, L_p) = \sum_{B(\pi^s x, uL_p) = \mathfrak{p}^i} \alpha_p(\pi^s x, uL_p) = \sum_{\substack{q(y) = a\pi^{2s} \\ B(y, L_p) = \mathfrak{p}^i}} \alpha_p(y, L_p),$$

wo die Summation über ein Vertretersystem der (lokalen) eigentlichen Darstellungs-klassen $(\pi^s x, uL_p)$ ($u \in O^+(V_p)$) bzw. (y, L_p) mit der jeweils angegebenen Eigenschaft läuft. Ist $s < r$, so ist $\alpha_p^{(i)}(a\pi^{2s}, L_p) = 0$ für $i < s$.

Ferner setzen wir

$$\overline{L_p^{(i)}} = \begin{cases} \{y \in L_p \mid B(y, L_p) \subset \mathfrak{p}^i\} & i \leq r, \\ \mathfrak{p} \overline{L_p^{(i-1)}} & r < i. \end{cases}$$

Trägt die Darstellung (y, L_p) zu $\alpha_p^{(i)}(a\pi^{2s}, L_p)$ bei, so ist $B(y, \overline{L_p^{(i)}}) = \mathfrak{p}^{2i}$ für $i \leq s$, $B(y, \overline{L_p^{(s)}}) = \mathfrak{p}^{s+i}$ für $s \leq i \leq s+e$. Tragen (y_1, L_p) und (y_2, L_p) beide zu $\alpha_p^{(i)}(a\pi^{2s}, L_p)$ bei, so folgt daher aus dem Wittschen Satz für Gitter, daß y_1 in y_2 durch eine Einheit von $\overline{L_p^{(i)}}$ für $i \leq s$ bzw. von $\overline{L_p^{(s)}}$ für $i \geq s$ überführt werden kann (siehe z.B. [10], Satz 1 für $i \leq s$, [10], Satz 3 für $i \geq s$). Wegen $\theta(O^+(\overline{L_p^{(i)}})) \subseteq N_p(E)$ folgt daraus, daß die Darstellungen, die zu $\alpha_p^{(i)}(a\pi^{2s}, L_p)$ beitragen, entweder alle zu $\alpha_p^+(a\pi^{2s}, x, L_p)$ oder alle zu $\alpha_p^-(a\pi^{2s}, x, L_p)$ beitragen, wobei für $i = s$ das $+$ -Zeichen zu wählen ist. Sei $\{z_1, z_2, z_3\}$

eine Basis von L_p , bezüglich der L_p die angegebene Matrix hat, und für die $x = az_1 + z_2$ gilt, sei $u_i \in O^+(V_p)$ gegeben durch $u_i(z_1) = \pi^{i-s} z_1$, $u_i(z_2) = \pi^{s-i} z_2$, $u_i(z_3) = z_3$ für $i \leq s$, durch

$$u_i = \tau_{z_3} \tau_{(a\pi^i - a + 1)\pi^{r-i} z_1 + (1-\pi)\pi^r z_2 - z_3}$$

für $s < i < s + e$ und durch

$$u_{s+e} = \tau_{z_3} \tau_{(a+1)2^{r-1} z_1 - 2^r z_2 - z_3}$$

(falls $e > 0$). Dann rechnet man nach, daß $\theta(u_i) \in \pi^{s-i} \mathfrak{o}_p^\times (F_p^\times)^2$ gilt und daß $(\pi^s x, u_i L_p)$ zu $\alpha_p^{(i)}(a\pi^{2s}, L_p)$ beiträgt. Also gilt:

$$\alpha_p^+(a\pi^{2s}, x, L_p) = \sum_{i \equiv s \pmod{2}} \alpha_p^{(i)}(a\pi^{2s}, L_p),$$

$$\alpha_p^-(a\pi^{2s}, x, L_p) = \sum_{i \equiv s+1 \pmod{2}} \alpha_p^{(i)}(a\pi^{2s}, L_p).$$

Zur Berechnung der $\alpha_p^{(i)}(a\pi^{2s}, L_p)$ stellen wir noch fest, daß man ganz ähnlich wie Hilfsatz 2 beweist:

$$\alpha_p^{(i)}(a\pi^{2s}, L_p) = \begin{cases} \alpha_p^{(0)}(a\pi^{2s-2i}, L_p(r-i)) & i \leq r, \\ \alpha_p^{(0)}(a\pi^{2s-2i}, L_p(0)) & r \leq i \leq s, \\ \alpha_p^{(i-s)}(a, L_p(0)) & r \leq s \leq i \leq s+e. \end{cases}$$

Hieraus folgt für $r \geq 1$:

$$\alpha_p^+(a\pi^{2s}, x, L_p) = (-1)^s \alpha_p^{(0)}(a\pi^{2s}, L_p^{(r)}) + \alpha_p^-(a\pi^{2s-2}, x, L_p(r-1)).$$

Wir setzen jetzt $k(r) = 2e + r + 1$ und erhalten nach (3):

$$\alpha_p^{(i)}(a\pi^{2s}, L_p(r)) = (Np)^{-3e-r+s-2} \cdot \# \{ \bar{y} \in L_p/\mathfrak{p}^k L_p^\# \mid B(y, L_p) = \mathfrak{p}^i, q(y) \equiv a\pi^{2s} \pmod{\mathfrak{p}^k} \}$$

($\bar{y}$ die Reduktion von y modulo $\mathfrak{p}^k L_p^\#$).

Man rechnet nach:

$$\alpha_p^{(i)}(a, L_p(0)) = (Np)^{-2-e} (Np-1) ((Np)^{1-i+e} + (Np)^{e-i}) \quad (0 \leq i < e),$$

$$\alpha_p^{(e)}(a, L_p(0)) = (Np)^{-1-e} (Np-1),$$

$$\alpha_p^{(0)}(a\pi^{2s}, L_p(r)) = \begin{cases} 2(Np-1)(Np)^{-1-r+s} & s > 0, r > 0, \\ ((Np)^2 - 1)(Np)^{-2+s} & s > 0, r = 0, \\ (Np-1)(Np)^{-1-r} & s = 0. \end{cases}$$

Zunächst folgt für $r=0$:

$$\alpha_p^+(a\pi^{2s}, x, L_p(0)) - \alpha_p^-(a\pi^{2s}, x, L_p(0)) = (Np)^{-1+s} (Np-1)$$

und für $s=0$ und beliebiges r

$$\alpha_p^+(a, x, L_p(r)) - \alpha_p^-(a, x, L_p(r)) = (Np)^{-1-r} (Np-1).$$

Rekursiv zeigt man dann:

$$\begin{aligned} \alpha_p^+(a\pi^{2s}, x, L_p(r)) - \alpha_p^-(a\pi^{2s}, x, L_p(r)) &= 2(-1)^s (Np)^{s-r} (1 - (Np)^{-1}) \\ &\quad + (-1)^{s-1} (Np)^{s-r} (1 - (Np)^{-1}) \\ &= (-1)^s (Np)^{s-r} (1 - (Np)^{-1}). \end{aligned}$$

Ist $p = 2\mathfrak{o}_p$, so gilt mit $L'_p \cong (1, 0, 0, 4, 0, 0)$:

$$\alpha_p^{(1)}(a, L_p(0)) = \alpha_p^{(1)}(a, L'_p),$$

also

$$\alpha_p^+(a, L'_p) - \alpha_p^-(a, L'_p) = (Np)^{-2} (Np-1).$$

Mit $\alpha_p^{(i)}(a\pi^{2s}, L'_p) = \alpha_p^{(i-2)}(a\pi^{2s-2}, L_p(0))$ für $i \geq 2$ folgt die Behauptung auch für diesen Fall.

Hilfssatz 9. Sei $p \in \Sigma - \infty$ zerlegt in E/F , $\text{ord}_p a = r$. Ist $L_p \cong (0, 0, \pi^r, 0, 0, 1)$ ($r \geq 0$) und $s \geq 0$, so gilt

$$\alpha_p^+(a\pi^{2s}, x, L_p) = \alpha_p^-(a\pi^{2s}, x, L_p) = (Np)^{s-1} ((r+1)Np - (r-1)).$$

Ist $p \equiv 2\mathfrak{o}_p$, $L_p \cong (1, 0, 0, \pi, 0, 0)$ und $\text{ord}_p a = 1$, so gilt $\alpha_p(a\pi^{2s}, L_p) = 2(Np)^{s-1}$.

Ist $p = 2\mathfrak{o}_p$, $L_p \cong (1, 0, 0, 4, 0, 0)$ und $\text{ord}_p a = 0$, so gilt $\alpha_p(a\pi^{2s}, L_p) = (Np+1)(Np)^{s-2}$.

Ist $p = 2\mathfrak{o}_p$, $L_p \cong (1, 0, 0, 8, 0, 0)$ oder $L_p \cong (1, 4, 0, 4, 0, 0)$ und $\text{ord}_p a = 1$, so gilt $\alpha_p(a\pi^{2s}, L_p) = 2(Np)^{s-2}$.

Beweis. Definiert man $\alpha_p^{(i)}(a\pi^{2s+r}, L_p)$ wie oben, so erhält man mit $L_p(r) \cong (0, 0, \pi^r, 0, 0, 1)$:

$$\alpha_p^{(i)}(a, L_p(0)) = (Np)^{-2-i} (Np-1) (Np+1) \quad (0 \leq i < e),$$

$$\alpha_p^{(e)}(a, L_p(0)) = (Np)^{-1-e} (Np+1),$$

$$\alpha_p^{(0)}(a\pi^{2s}, L_p(0)) = (Np)^s (Np-1) (Np+1),$$

$$\alpha_p^{(i)}(a, L_p(1)) = 2(Np)^{-1-i} (Np-1) \quad (0 \leq i \leq e),$$

$$\alpha_p^{(e+1)}(a, L_p(1)) = 2(Np)^{-1-e},$$

$$\alpha_p^{(0)}(a\pi^{2s}, L_p(r)) = 2(Np)^{s-1} (Np-1) \quad (r \geq 1, s \geq 0).$$

Auf die gleiche Weise wie beim Beweis des vorigen Hilfssatzes rechnet man nach, daß hieraus die Behauptung für $L_p(r)$ folgt. Die übrigen Fälle werden wie im vorigen Hilfssatz auf diesen Fall zurückgeführt.

Satz 2. Sei $a \in q(L)$, $a \neq 0$, $-2a \det V \notin (F^\times)^2$, $E_a = F(\sqrt{-2a \det V})$, $\theta(O_A^+(L)) \subseteq N_{E_a/F}(I(E_a))$. $\mathfrak{f}_a = \prod_{\mathfrak{p} \in \Sigma} \mathfrak{p}^{f_a}$ sei der Führer der Erweiterung E_a/F und $\left(\frac{E_a/F}{\cdot}\right) \in \{\pm 1\}$ bezeichne das Artin-Symbol. K sei ein Gitter aus dem Geschlecht von L , das nicht im gleichen a -Halbgeschlecht wie L liegt, und für $m \in F^\times$ sei $\psi_a(m)$ definiert durch

$$r(am^2, \text{spn } L) - r(am^2, \text{spn } K) = |N_{F/Q}(m)| \psi_a(m).$$

Dann gilt mit den weiter unten definierten Zahlen $h(L_{\mathfrak{p}}, a)$ und $\bar{h}(L_{\mathfrak{p}}, a)$:

- i) Ist $\text{ord}_{\mathfrak{p}} m \geq h(L_{\mathfrak{p}}, a)$ für ein in E_a/F verzweigtes $\mathfrak{p} \in \Sigma - \infty$, so ist $\psi_a(m) = 0$.
- ii) Ist $m' \in F^\times$ prim zu $\mathfrak{f}_a$ und $h(L_{\mathfrak{p}}, a) \leq \min(\text{ord}_{\mathfrak{p}} m, \text{ord}_{\mathfrak{p}} mm')$ für alle $\mathfrak{p} \in \Sigma - \infty$ mit $\text{ord}_{\mathfrak{p}} m' \neq 0$, so ist

$$\psi_a(mm') = \left(\frac{E_a/F}{(m')}\right) \psi_a(m).$$

- iii) $\psi_a(m)$ hängt nur von m modulo dem Zykel $\bar{\mathfrak{h}}(L_{\mathfrak{p}}, a) = \prod_{\mathfrak{p} \in \Sigma} \mathfrak{p}^{\bar{h}(L_{\mathfrak{p}}, a)}$ ab, das heißt, ist $\frac{m_1}{m_2}$ positiv für alle $\mathfrak{p} \in \infty$ mit $\bar{h}(L_{\mathfrak{p}}, a) = 1$ und $m_1 - m_2 \in \prod_{\mathfrak{p} \notin \infty} \mathfrak{p}^{\bar{h}(L_{\mathfrak{p}}, a)}$, so ist $\psi_a(m_1) = \psi_a(m_2)$.

Dabei sind $h(L_{\mathfrak{p}}, a)$ und $\bar{h}(L_{\mathfrak{p}}, a)$ wie folgt definiert: Ist $\mathfrak{p} \in \Sigma - \infty$ zerlegt in E_a/F , so ist

$$h(L_{\mathfrak{p}}, a) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n(L_{\mathfrak{p}}) - 2 \text{ord}_{\mathfrak{p}} 2 - \text{ord}_{\mathfrak{p}} a}{2} \right\rfloor & \text{falls } \text{ord}_{\mathfrak{p}} 2 \leq 1, \\ \left\lfloor \frac{n(L_{\mathfrak{p}}) - \text{ord}_{\mathfrak{p}} a + 1}{2} \right\rfloor & \text{sonst,} \end{cases}$$

ist $\mathfrak{p} \in \Sigma - \infty$ träge oder verzweigt in E_a/F , so ist

$$h(L_{\mathfrak{p}}, a) = \begin{cases} \min \left(\left\lfloor \frac{t(L_{\mathfrak{p}}, a) - \text{ord}_{\mathfrak{p}} a + 1}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n(L_{\mathfrak{p}}) - 2 \text{ord}_{\mathfrak{p}} 2 - \text{ord}_{\mathfrak{p}} a}{2} \right\rfloor \right) & \text{falls } \text{ord}_{\mathfrak{p}} 2 \leq 1, \\ \left\lfloor \frac{t(L_{\mathfrak{p}}, a) - \text{ord}_{\mathfrak{p}} a + 1}{2} \right\rfloor & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\bar{\mathfrak{h}}(L_{\mathfrak{p}}, a) = \prod_{\mathfrak{p} \in \Sigma} \mathfrak{p}^{\bar{h}(L_{\mathfrak{p}}, a)} = \prod_{\mathfrak{p} \in \Sigma - \infty} \mathfrak{p}^{h(L_{\mathfrak{p}}, a)} \mathfrak{f}_a \prod_{\substack{\mathfrak{p} \in \Sigma - \infty \\ \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{f}_a}} \mathfrak{p}^{-1}.$$

Ferner gilt:

$$\prod_{\mathfrak{p} \notin \infty} \mathfrak{p}^{2\bar{h}(L_{\mathfrak{p}}, a)} \cong (a)^{-1} \mathfrak{N} \prod_{\substack{\mathfrak{p} \notin \infty \\ \text{ord}_{\mathfrak{p}} 2 \leq 1}} (4\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}})^{-1} \prod_{\substack{\mathfrak{p} \notin \infty \\ \text{ord}_{\mathfrak{p}} 2 > 1}} \mathfrak{p}^{f_a + 1}.$$

Ist speziell die Absolutdiskriminante von F ungerade, so gilt

$$\prod_{\mathfrak{p} \neq \infty} \mathfrak{p}^{2\bar{h}(L_{\mathfrak{p}}, a)} \cong (4a)^{-1} \mathfrak{N}.$$

Beweis. Zunächst zum letzten Teil der Aussage des Satzes. Ist $\mathfrak{p} \in \Sigma - \infty$ mit $\text{ord}_{\mathfrak{p}} 2 > 1$, so folgt die Behauptung über $\bar{h}(L_{\mathfrak{p}}, a)$ aus der Definition von $\bar{h}(L_{\mathfrak{p}}, a)$ und $t(L_{\mathfrak{p}}, a) \leq n(L_{\mathfrak{p}})$.

Ebenfalls direkt aus der Definition von $\bar{h}(L_{\mathfrak{p}}, a)$ folgt die Behauptung für in E_a/F unverzweigtes $\mathfrak{p} \in \Sigma - \infty$. Für in E_a/F verzweigtes $\mathfrak{p} \in \Sigma - \infty$ mit $\text{ord}_{\mathfrak{p}} 2 \leq 1$ erhält man die Behauptung, wenn man für die möglichen Jordan-Zerlegungen von $L_{\mathfrak{p}}$ den genauen Wert von $t(L_{\mathfrak{p}}, a)$ berechnet (siehe die Bemerkungen nach der Proposition in Abschnitt 4). Zu i): Ist $\text{ord}_{\mathfrak{p}}(am^2) \geq t(L_{\mathfrak{p}}, a)$ für ein in E_a/F verzweigtes $\mathfrak{p} \in \Sigma - \infty$, so folgt nach Hilfssatz 1

$$\alpha_{\mathfrak{p}}^+(am^2, x, L_{\mathfrak{p}}) - \alpha_{\mathfrak{p}}^-(am^2, x, L_{\mathfrak{p}}) = 0,$$

denn nach der Proposition und Hilfssatz 7 gilt

$$\theta(O^+(L_{\mathfrak{p}}^{(t(L_{\mathfrak{p}}, a))})) \not\subseteq N_{\mathfrak{p}}(E_a).$$

Nach Satz 1 gilt dann $\psi_a(m) = 0$. Daß $\text{ord}_{\mathfrak{p}} a + 2h(L_{\mathfrak{p}}, a) \geq t(L_{\mathfrak{p}}, a)$ gilt, folgt aus der Definition von $h(L_{\mathfrak{p}}, a)$.

Zu ii). Ist $\mathfrak{p} \in \Sigma - \infty$ unverzweigt in E_a/F und $\text{ord}_{\mathfrak{p}} 2 > 1$, so gilt wieder

$$\text{ord}_{\mathfrak{p}} a + 2h(L_{\mathfrak{p}}, a) \geq t(L_{\mathfrak{p}}, a).$$

Ist $\theta(O^+(L_{\mathfrak{p}}^{(t(L_{\mathfrak{p}}, a))})) \not\subseteq N_{\mathfrak{p}}(E)$, so folgt wieder $\psi_a(m) = \psi_a(mm') = 0$, andernfalls lassen sich $\alpha_{\mathfrak{p}}^+(am^2, x, L_{\mathfrak{p}}) - \alpha_{\mathfrak{p}}^-(am^2, x, L_{\mathfrak{p}})$ und $\alpha_{\mathfrak{p}}^+(am^2 m'^2, x, L_{\mathfrak{p}}) - \alpha_{\mathfrak{p}}^-(am^2 m'^2, x, L_{\mathfrak{p}})$ nach der Proposition und Hilfssatz 2 mit Hilfssatz 8 bestimmen. Die Behauptung für $\psi_a(m)$ und $\psi_a(mm')$ folgt dann aus Satz 1. Ist $\text{ord}_{\mathfrak{p}} 2 \leq 1$, so ist $\text{ord}_{\mathfrak{p}} a + 2h(L_{\mathfrak{p}}, a) \geq t(L_{\mathfrak{p}}, a)$ nicht mehr notwendig richtig. Hier überzeugt man sich wieder durch Diskussion der möglichen Jordan-Zerlegungen von $L_{\mathfrak{p}}$ davon, daß $L_{\mathfrak{p}}^{(\text{ord}_{\mathfrak{p}} a + 2h(L_{\mathfrak{p}}, a))}$ in den Fällen mit

$$\text{ord}_{\mathfrak{p}} a + 2h(L_{\mathfrak{p}}, a) < t(L_{\mathfrak{p}}, a)$$

bis auf Dehnung (scaling) isomorph zu einem der in Hilfssatz 8 und Hilfssatz 9 diskutierten Gitter ist, und erhält dann die Behauptung genau wie im anderen Fall.

Zu iii). Seien $m_1, m_2 \in F$, $\frac{m_1}{m_2}$ positiv für alle unendlichen Primstellen, die in $\mathfrak{f}_a$ vorkommen, $\mathfrak{p} \in \Sigma - \infty$. Ist $\text{ord}_{\mathfrak{p}} m_1 \neq \text{ord}_{\mathfrak{p}} m_2$, so ist

$$h(L_{\mathfrak{p}}, a) \leq \bar{h}(L_{\mathfrak{p}}, a) \leq \min(\text{ord}_{\mathfrak{p}} m_1, \text{ord}_{\mathfrak{p}} m_2).$$

Ist p verzweigt in E_a/F , so ist daher nach ii) $\psi_a(m_1) = \psi_a(m_2) = 0$; wir können also annehmen, daß $\text{ord}_p m_1 = \text{ord}_p m_2 < h(L_p, a)$ für alle in E_a/F verzweigten $p \in \Sigma - \infty$ gilt.

Nach Definition von $\bar{h}(L_p, a)$ folgt daraus $\frac{m_1}{m_2} \equiv 1 \pmod{\times f_a}$. Nach ii) ist

$$\psi_a(m_1) = \left(\frac{E_a/F}{(m_1 m_2^{-1})} \right) \psi_a(m_2),$$

also $\psi_a(m_1) = \psi_a(m_2)$ wie behauptet.

Da das Ergebnis von Satz 2 sich im Spezialfall $F = \mathbb{Q}$ etwas übersichtlicher formulieren läßt, wollen wir es noch einmal gesondert als Korollar bringen.

Korollar 1. Sei $F = \mathbb{Q}$, a quadratfrei, $\mathfrak{N} = 4aa'h^2\mathbb{Z}$ mit quadratfreiem a' , und die Voraussetzungen von Satz 2 seien erfüllt. Ferner sei wieder ψ_a definiert durch

$$r(am^2, \text{spn } L) - r(am^2, \text{spn } K) = |m| \psi_a(m).$$

Dann gibt es ein h' mit $h'|h$, so daß gilt:

- i) Ist $m \in h'\mathbb{Z}_p$ für eine in E_a/F verzweigte Primzahl p , so ist $\psi_a(m) = 0$.
- ii) Ist $m' \in \mathbb{Z}$ prim zur Diskriminante von E_a und gilt für jede Primzahl p entweder $m' \in \mathbb{Z}_p^\times$ oder $m \in h'\mathbb{Z}_p$, so gilt

$$\psi_a(mm') = \chi_a(m') \psi_a(m).$$

Dabei bezeichnet χ_a den zur Erweiterung $E_a/\mathbb{Q}$ gehörigen quadratischen Charakter.

- iii) Für positive m hängt $\psi_a(m)$ nur von m modulo h' ab.

Vergleicht man die Ergebnisse von Korollar 1 mit denen von [15], Korollar 2 für den Spezialfall positiv definiter Formen über $\mathbb{Q}$, so sieht man, daß die arithmetischen Methoden etwas schärfere Resultate liefern. Zum einen zeigt die genaue Berechnung von $\bar{h}(L_p, a)$ in Satz 2, daß sich h' häufig als echter Teiler von h wählen läßt. Zum anderen hat man ψ_a durch Satz 1 in ein Produkt von Faktoren $\psi_{a,p}$ über alle Primzahlen zerlegt, was die schärfere Formulierung der multiplikativen Eigenschaften von ψ_a ermöglicht, die man in Korollar 1 erhält.

Zum Schluß wollen wir im Fall $F = \mathbb{Q}$ noch untersuchen, unter welchen Bedingungen an m das Darstellungsmaß von am^2 durch ein Halbgeschlecht H groß ist, das heißt, für welche m mit einer geeigneten Konstante C (die von m unabhängig ist)

$$r(am^2, H) \geq Cr(am^2, \text{gen } L)$$

gilt. Da die Situation hier für primitive Darstellungen etwas einfacher ist, wollen wir diesen Fall zuerst behandeln.

Korollar 2. Sei $r^*(am^2, H_i)$ das Maß der primitiven Darstellungen von am^2 durch das Halbgeschlecht H_i , analog sei $r^*(am^2, \text{gen } L)$ definiert. Dann gibt es eine (von L und a abhängige) Konstante C_0 , so daß für $i = 1, 2$ gilt:

$$\text{Ist } r^*(am^2, H_i) \neq 0, \text{ so ist } r^*(am^2, H_i) \geq C_0 r^*(am^2, \text{gen } L).$$

Beweis. Ist $x \in L$ primitiv mit $q(x) = a$, so gilt eine zu Satz 1 analoge Produktformel

$$r^*(am^2, H_1) - r^*(am^2, H_2) = A \prod_{p \nmid \infty} (\alpha_p^+(am^2, x, L_p)^* - \alpha_p^-(am^2, x, L_p)^*)$$

für die primitiven Darstellungsmaße. Für jedes p gilt

$$\alpha_p^\pm(ap^{2s}, x, L_p)^* = p\alpha_p^\pm(ap^{2s-2}, x, L_p)^*$$

für hinreichend großes s (wobei evtl. auf einer Seite der Gleichung α_p^+ und auf der anderen Seite α_p^- stehen kann), denn die Kongruenz, deren Lösungen gezählt werden, wird für großes s einfach $q(y) \equiv 0 \pmod{p^k}$. Für $p \nmid \det L$ sieht man aus dem Beweis von Hilfssatz 8, daß primitive Darstellungen nur entweder zu α_p^+ oder zu α_p^- beitragen, daß also entweder $\alpha_p^+(am^2, x, L_p)^*$ oder $\alpha_p^-(am^2, x, L_p)^*$ gleich Null ist. Insgesamt erkennt man, daß es für den Quotienten

$$\frac{|\alpha_p^+(am^2, x, L_p)^* - \alpha_p^-(am^2, x, L_p)^*|}{\alpha_p^+(am^2, x, L_p)^* + \alpha_p^-(am^2, x, L_p)^*}$$

nur endlich viele mögliche Werte gibt. Daher läßt sich eine Konstante $C'_0 < 1$ angeben, so daß dieser Quotient entweder $= 1$ oder $\leq C'_0$ ist. Mit $C_0 = \frac{1 - C'_0}{2}$ folgt die Behauptung des Korollars.

Daß sich Korollar 2 nicht ohne weiteres analog für $r(am^2, H_i)$ formulieren läßt, zeigt das folgende Beispiel: Ist p eine Primzahl, die in $E_a/\mathbb{Q}$ träge ist, so wird ap^2 von H_1 dargestellt, aber nicht primitiv dargestellt, also $r(ap^2, H_1) = r(a, H_1)$, während $r(ap^2, \text{gen } L)$ mit wachsendem p gegen ∞ strebt.

Korollar 3. Sei $m = \prod p_i^{s_i}$. Dann gibt es für jedes $C_1 > \det L$ ein $C_2 > 0$, so daß $r(am^2, H_i) \geq C_2 r(am^2, \text{gen } L)$ für $i = 1, 2$ gilt, falls $a \prod_{p_i \leq C_1} p_i^{s_i}$ keine Spinorausnahme ist.

Andernfalls ist

$$r(am^2, H_1) \geq \frac{1}{2} r(am^2, \text{gen } L), \text{ falls } \left(\frac{-2a \det V}{\prod_{p_i > C_1} p_i^{s_i}} \right) = 1 \text{ gilt,}$$

$$r(am^2, H_2) \geq \frac{1}{2} r(am^2, \text{gen } L), \text{ falls } \left(\frac{-2a \det V}{\prod_{p_i > C_1} p_i^{s_i}} \right) = -1 \text{ gilt.}$$

Beweis. Mit Hilfe des Beweises von Hilfssatz 8 findet man, daß für jedes p

$$|\alpha_p^+(am^2, x, L_p) - \alpha_p^-(am^2, x, L_p)| \leq \frac{p-1}{p+1-\frac{2}{p}} |\alpha_p^+(am^2, x, L_p) + \alpha_p^-(am^2, x, L_p)|$$

gilt, falls $\alpha_p^-(am^2, x, L_p)$ nicht Null ist. Wählt man $C_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{C_1 - 1}{C_1 + 1 - \frac{2}{C_1}} \right)$, so folgt

also $r(am^2, H_i) \geq C_2 r(am^2, \text{gen } L)$ für $i = 1, 2$, falls $\alpha_p^-(am^2, x, L_p) \neq 0$ für ein $p \leq C_1$ gilt.

Für $p > C_1$ mit $\left(\frac{-2a \det V}{p}\right) = 1$ ist

$$\alpha_p^+(ap^{2s}, x, L_p) - \alpha_p^-(ap^{2s}, x, L_p) \geq 0$$

genau dann, wenn s gerade ist, wie man mit Hilfe des Beweises von Hilfssatz 8 sieht.

Ist also $\left(\frac{-2a \det V}{\prod_{p_i > C_1} p_i^2}\right) = 1$ und $\alpha_p^-(am^2, x, L_p) = 0$ für alle $p \leq C_1$, so ist

$$r(am^2, H_1) - r(am^2, H_2) \geq 0$$

und daher $r(am^2, H_1) \geq \frac{1}{2} r(am^2, \text{gen } L)$. Genauso folgt $r(am^2, H_2) \geq \frac{1}{2} r(am^2, \text{gen } L)$, falls das quadratische Restsymbol -1 ist.

Literatur

- [1] A. G. Earnest und J. S. Hsia, Spinor norms of local integral rotations. II, Pacific J. Math. **61** (1975), 71—86.
- [2] M. Eichler, Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1952.
- [3] M. Eichler, Die Ähnlichkeitsklassen indefiniter Gitter, Math. Z. **55** (1952), 216—252.
- [4] J. S. Hsia, Representations by Spinor genera, Pacific J. Math. **63** (1976), 147—152.
- [5] J. S. Hsia, Spinor norms of local integral rotations. I, Pac. J. Math. **57** (1975), 199—206.
- [6] B. W. Jones und G. L. Watson, On indefinite ternary quadratic forms, Canad. J. Math. **8** (1956), 592—608.
- [7] M. Kneser, Klassenzahlen indefiniter quadratischer Formen in drei oder mehr Veränderlichen, Arch. Math. (Basel) **7** (1956), 323—332.
- [8] M. Kneser, Darstellungsmaße indefiniter quadratischer Formen, Math. Z. **77** (1961), 188—194.
- [9] M. Kneser, Semi-simple algebraic groups, Algebraic number theory, Proceedings Brighton 1965 (Hrsg. J. W. S. Cassels und A. Fröhlich), London-New York 1967, 250—265.
- [10] M. Kneser, Witts Satz für quadratische Formen über lokalen Ringen, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. II 1972, 195—203.
- [11] M. Kneser, Quadratische Formen, Vorlesungsausarbeitung Göttingen 1974.
- [12] O. T. O'Meara, Introduction to quadratic forms, Berlin-Heidelberg-New York 1973.
- [13] O. T. O'Meara und B. Pollak, Generation of local integral orthogonal groups, Math. Zeitschrift **87** (1965), 385—400.
- [14] R. Schulze-Pillot, Darstellung durch Spinorgeschlechter ternärer quadratischer Formen, J. Number Th. **12** (1980), 529—540.
- [15] R. Schulze-Pillot, Thetareihen positiv definiter quadratischer Formen, Invent. math. **75** (1984), 283—299.
- [16] C. L. Siegel, Über die analytische Theorie der quadratischen Formen. I, II, III, Ann. Math. **36** (1935), 527—606, **37** (1936), 230—263, **38** (1937), 212—291.
- [17] C. L. Siegel, Indefinite quadratische Formen und Funktionentheorie. I, II, Math. Ann. **124** (1951), 17—54, 366—387.
- [18] A. Weil, Sur la théorie des formes quadratiques, in: Colloque sur la théorie des groupes algébriques, Brüssel 1962, 9—22.

Institut für Mathematik II, Freie Universität Berlin, Arnimallee 3, D-1000 Berlin 33

Eingegangen 3. November 1983