Werk

Titel: Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts
Jahr: 1873
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN252457072_1873
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN252457072_1873

LOG Id: LOG_0085
LOG Titel: Periodical issue
LOG Typ: issue

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN252457072
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN252457072

Terms and Conditions

Contact

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

6. August. | №. 21. | 1873.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber die Fourierschen Reihen

von

Professor Dr. **Paul du Bois-Reymond**

in Freiburg im Breisgau.

Der Kön. Gesellschaft vorgelegt von Ernst Schering.

Bei Fortsetzung seiner Untersuchungen über die allgemeine Theorie der willkürliche Functionen darstellenden Integrale und Reihen ist der Verfasser nachfolgender Mittheilung zu einigen neuen Ergebnissen gelangt, welche speciell die Fourier'schen Reihen angehen, und erlaubt sich dieselben einer hohen Societät in kurzer Uebersicht hiermit vorzulegen.

Ueber Darstelbarkeit stetiger Functionen durch Fouriersche Reihen.

1.

Im Jahre 1829 veröffentlichte [1]) Lejeune-Dirichlet seinen berühmten Beweis des Satzes, dass die Fouriersche Reihe:

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha\, f(\alpha) \cos p(\alpha - x)$$

im Intervall $-\pi < x < +p$, überall wo $f(x)$ stetig ist, den Werth $f(x)$ hat, vorausgesetzt, dass $f(x)$ im Intervall $-\pi \leqq x \leqq +\pi$ endlich ist und nur eine endliche Anzahl Maxima hat [2]).

Wenn er hierdurch schon den für die physikalischen Anwendungen störendsten Theil der Bedenken gegen die Legitimität obiger Entwickelung, deren ihr Entdecker nicht hatte Meister werden können, zerstreute, so stellte er am Schlusse seiner Abhandlung einen noch weiter gehenden Satz in bestimmte Aussicht [3]), durch dessen Beweis jene Formel zu wahrhaft philosophischer Bedeutung wäre erhoben worden, indem sie, um nur das Nächstliegende zu folgern, alle so mannigfaltigen Eigenschaften, wenigstens der stetigen Function, in einen explicirten analytischen Ausdruck vereinigt haben würde. Den Beweis hat Dirichlet nicht veröffentlicht, scheint indessen den Glauben an den von ihm angekündigten Satz nicht verloren zu haben [4]), und mehr oder weniger ist die Ueberzeugung von der erweiterten Gültigkeit der Fourier'schen Entwickelung auch in das allgemeine mathematische Bewusstsein eingedrungen.

Wenn von möglichen Ausnahmen die Rede war, so wurden sie allenfalls in dem Gebiete solcher Functionen vermuthet, welche längs endlicher Intervalle Punkt für Punkt mit Singularitäten behaftet sind, und denen man wenigstens in den Anwendungen auf physikalische Probleme sicher nicht begegnen wird. In schwerlich anders zu deutender Weise hat sich neuerdings Riemann über diese Frage geäussert[5]). Denn, wenn er sagt, dass die Functionen, auf welche die Dirichlet'sche Untersuchung sich nicht erstreckt, in der Natur nicht vorkommen, so hat er sicherlich nicht solche Functionen gemeint, die nur bei Annäherung an einzelne Argumentwerthe unendlich viele Maxima erhalten, auf welche sich allerdings die Dirichlet'sche Untersuchung auch nicht erstreckt: er kann sie nicht gemeint haben, weil solche Functionen in der Physik sehr häufig vorkommen, — jeder oscillatorische Vorgang, welcher der Ruhe asymptotisch sich nähert, und von der reciproken Zeit abhängig gedacht ist, entspricht einer Function, die bei Annäherung $\frac{1}{t} = 0$ unendlich viele Maxima erhält.

2.

Verfasser dieser Mittheilung gehört zu den Mathematikern, welche erhebliche Anstrengungen gemacht haben, um das Gültigkeitsgebiet der Fourier'schen Reihe zu erweitern und jenem in der Dirichlet'schen Behauptung gesteckten hohen Ziele sich zu nähern. Den redlich entrichteten Tribut an Zeit und Mühe lohnte Misserfolg auf Misserfolg, bis in ihm der Verdacht rege und schliesslich zur Ueberzeugung ward, dass er Unmöglichem nachstrebe, und dass jener allgemeinste Satz gar nicht existire. Nun, dieses Brechen mit der überkommenen Anschauungsweise genügte.

Einige Ueberlegung ergab bald die Bedingungen, unter welchen die Fourier'sche Reihe bei durchgängiger Endlichkeit und Stetigkeit der darzustellenden Function für einzelne Argumentwerthe keine endliche bestimmte Summe haben kann. Diese Bedingungen bestehen in einer gewissen Art der Aufeinanderfolge der Maxima einer Function $f(x)$ bei Annäherung an einen Argumentwerth x_0, bei welcher die Summe der Fourier'schen Reihe unendlich wird, auch wenn die Function durchweg, diesen Argumentwerth x_0 eingeschlossen, stetig ist, und, diesen Argumentwerth ausgenommen, ihre Differentialquotienten es ebenfalls sind. Die wirkliche Darstellung solcher in eine Fourier'sche Reihe nicht entwickelbaren Functionen ist nicht ganz einfach und muss in dieser kurzen Mittheilung fortgelassen werden. Es wird vielmehr genügen, das Princip darzulegen, nach welchem sie zu bilden sind.

3.

Man weiss, dass es dazu nur erforderlich ist, eine Function $f(x)$ zu erklären, für welche der Limes $h = \infty$ des Integrals

$$\int_0^a d\alpha\, f(\alpha)\, \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha}$$

nicht endlich und bestimmt ist, und hierbei kömmt es wieder nur auf das Verhalten von $f(x)$ in unmittelbare Nähe $x = 0$ an.

Wir wollen mit dem Ausdruck Dichtigkeit der Maxima der Function $f(x)$ an der Stelle $x = x_1$ bezeichnen die Längeneinheit, dividirt durch die Summe der Entfernungen des x_1 von den beiden nächsten Maximis von $f(x)$, bei welcher Definition die Dichtigkeit der Maxima eine stetige Function von x_1 ist.

Dies vorbemerkt, setzen wir $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \sin \psi(\alpha)$ und nehmen zunächst an, dass $\psi(\alpha)$ für $\alpha = 0$ ohne Maxima unendlich und $\varrho(\alpha)$ ebenso Null wird. Dann wird auch die Dichtigkeit der Maxima von $f(\alpha) = \varrho(\alpha) \sin \psi(\alpha)$ für $\alpha = 0$ ohne Maxima unendlich.

Betrachtet man weiter das Product $f(x) . \dfrac{\sin hx}{\sin x}$, um es in Bezug auf seine Zeichenwechsel zu prüfen, so übersieht man leicht, dass für jeden noch so grossen Werth von h zwischen $x = 0$ und einem Werth $x = x'$ die Dichtigkeit der Maxima von $f(x)$ grösser als die von $\dfrac{\sin hx}{\sin x}$, von x' bis zu einem Werth x'' nahebei gleich, von x'' ab kleiner sein wird. Im ersten Intervall finden bei zunehmenden h dauernd Zeichenwechsel statt, im zweiten periodisch wiederkehrend nahebei keine, im dritten Intervall sind wieder dauernd Zeichenwechsel.

Dies führt zu der Einsicht, dass, wenn der Limes von

$$\int_0^a d\alpha\, f(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha}$$

unendlich werden soll, man dies nur dem Theile:

$$\int_{x'}^{x''}$$

wird verdanken können, weil hier keine negativen Theile die positiven aufheben oder umgekehrt.

Es scheint nun, dass unter den obigen Annahmen über $\psi(\alpha)$ und $\varrho(\alpha)$ ein solches Unendlichwerden **nie** stattfindet[6]). Wenn aber überhaupt ein Unendlich- oder Unbestimmtwerden jenes mittleren Integrals möglich ist, so kann die Function $\varrho(\alpha)\sin\psi(\alpha)$ nur deshalb dazu nicht geeignet sein, weil die Strecke $x' - x''$ mit dem Minimum der Zeichenwechsel nicht lang genug ist. Wir müssen sie also vergrössern.

4.

Ich führe zunächst gewisse Intervalle $\varDelta$ des Arguments x ein, mit folgender Bestimmung. Das erste gehe von $x = a$ bis $x = a - \varDelta_1 = x_1$, das zweite von x_1 bis $x_1 - \varDelta_2 = x_2$, u. s. f. und es sei:

$$\varDelta_1 > \varDelta_2 > \ldots,\ \varDelta_\infty = 0,\ \varDelta_1 + \varDelta_2 + \ldots = a$$

Ferner seien k_1, k_2, ... Grössen, welche die Bedingung

$$k_1 > k_2 > \ldots,\ k_\infty = \infty$$

erfüllen.

Da die Dichtigkeit der Maxima von $\sin kx$ für jeden Werth von k constant ist, so wird eine Function $f(x)$, welche in den Intervallen Δ_1, Δ_2, ... resp. die Werthe $\sin k_1 x$, $\sin k_2 x$, ... erhält, in jedem dieser Intervalle constante Dichtigkeit ihrer Maxima haben, und diese Dichtigkeit wird von Intervall zu Intervall springen, bis zu schliesslich unendlichen Werthen.

Setzt man also die unstetige Function, die in den Intervallen Δ_1, Δ_2, ... die Werthe $k_1 x$, $k_2 x$, ... annimmt, gleich $\psi(x)$, so wird $f(x) = \varrho(x) \sin \psi(x)$, bei zweckmässiger Verfügung über die Intervalle Δ und die Grössen k, das möglichst grosse Stück ohne Zeichenwechsel:

$$\int_{x_p}^{x_{p-1}}$$

des Integrals:

$$\int_0^a d(\alpha)\, \varrho(\alpha) \sin \psi(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha}$$

ergeben müssen. Nunmehr findet denn allerdings ein Unendlichwerden des Integrals:

$$\int_{x_p}^{x_{p-1}} d\alpha\, \varrho(\alpha) \sin \psi(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha}$$

statt, z. B. wenn:

$$x_p = \frac{a}{\prod\limits_0^{p-1} (2^q + 1)}, \quad k_p = \frac{1}{x_{p-1} x_p}$$

angenommen wird.

Noch ist die Function sin $\psi'\alpha)$ mit $\psi(\alpha)$ zugleich unstetig. Mann kann zunächst die Function sin $\psi(\alpha)$ selbst stetig machen, indem man dafür sorgt, dass die an den Sprungstellen von $\psi(x)$ aneinanderstossenden Werthe $k_p x_p$ und $k_p x_{p+1}$ Vielfache von π sind, worauf ich durch Hrn. W e i e r s t r a s s aufmerksam gemacht worden bin. Dann kann man aber auch $f(x)$ mit allen seinen Differentialquotienten stetig erhalten, indem man für $\psi(x)$ eine mit allen ihren Differentialquotienten stetige Function $\Psi(\alpha)$ einführt, die sich ihr beliebig nahe anschliesst, was auf verschiedene Arten möglich ist.

Der Verlauf von $\psi(x)$ ist eine gebrochene Linie, welche mit unendlich vielen Maximis (Spitzen) unendlich wird. D i e n i c h t d a r s t e l l b a r e n s t e t i g e n F u n c t i o n e n s i n d a l s o i n d i e s e r i h r e r e i n f a c h s t e n E r s c h e i n u n g F u n c t i o n e n d e r F o r m

$$f(x) = \varrho(x) \sin \Psi(x)$$

w o $\varrho(x)$ m i t x o h n e M a x i m a v e r s c h w i n d e t, u n d $\Psi(x)$ b e i g e g e n N u l l a b n e h m e n d e m x m i t u n e n d l i c h v i e l e n M a x i m i s s t e t i g u n e n d l i c h w i r d.

Ueber die Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Function durch Fouriersche Reihen.

5.

Dieses Resultat hat die sehr unerfreuliche Seite, dass fortan für Beweise, welche die Entwickelung unbekannter Functionen nach Fourier'schen Reihen benutzen, nicht allein deren Stetigkeit festzustellen ist, wie man dies bisher fast immer für genügend hielt, sondern, dass auch über den Differentialquotienten etwas bekannt sein muss, woraus erhebliche Schwierigkeiten erwachsen können. Auf alle Fälle, da der Fourier'schen Entwickelung schon innerhalb des Gebietes der gewöhnlichen Functionen die Grenzen ihrer Gültigkeit gezogen sind, so erhält das Problem, ihr Legitimitätsgebiet genau festzustellen, erhöhte Wichtigkeit.

6.

Herr Lipschütz[7]) hat bereits die Untersuchung erledigt, wie weit die Beschränkungen der darzustellenden Function, welche der eingangs angeführte Satz enthält, durch den Gang des Dirichlet'schen Beweises geboten sind, und ist zu der neuen Bedingung gelangt, dass es für die Gültigkeit der Formel

$$F \; \ldots \; \frac{\pi}{2} f(0) = \lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \, f(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\sin \alpha}$$

genügt, wenn in irgend einem noch so kleinen Intervall $0 \leqq x \leqq x_0$ die Differenz $f(x+\delta)-f(x)$ nicht langsamer wie eine Potenz von δ Null wird. Wenn diese Bedingung in einer Beziehung auch über die Dirichlet'sche hinausgeht, so hat sie doch den doppelten Uebelstand, erstens nicht einmal alle durch die Dirichlet'sche Bedingung gestatteten Fälle zu umfassen, und zweitens eine gewiss nicht im Wesen der Sache begründete Clausel zu enthalten. Die Dirichlet'sche Bedingung enthält nämlich gar keine Voraussetzung über das Nullwerden der Differenz $f(x+\delta)-f(x)$ in den Strecken, wo die Function nicht wächst oder nicht abnimmt. Ferner ist die Forderung, dass die Differenz nicht allein für $x = 0$, sondern innerhalb einer an $x = 0$ anstossenden Strecke gewisse Eigenschaften habe, eine Clausel, die nothwendiger Weise überflüssig ist, da man von jeder solchen Strecke, aus welcher der Werth $x = 0$ ausgeschlossen ist, beweisen kann, dass sie ohne Einfluss auf den Limes des Intervalls bleibt.

7.

Man erhält eine andere Bedingung durch eine sehr einfache Anwendung der ursprünglichen Dirichlet'schen, welche die Dirichlet'sche einschliesst, und für den Argumentwerth $x = 0$ weiteren Spielraum, wie die Lipschütz'sche gewährt, aber ihrerseits wieder den Uebelstand hat, von der Function $f(x)$ einen Differentialquotienten zu verlangen.

Sie lautet: die Formel F gilt, wenn das Integral

$$\int_0^a f'(\alpha)\, d\alpha$$

absolut convergent ist.

Da die Einschränkung von $f(x)$, einen Differentialquotienten zu besitzen, sicherlich auch nicht der Natur der Fourier'schen Reihen eigenthümlich ist, indem Hr. Weierstrass gerade mit ihnen seine Functionen ohne Differentialquotienten darstellt, so konnte ich bei dieser Bedingung nicht stehen bleiben, und stellte, auf demselben Wege vorgehend, schliesslich eine Bedingung dar, bei der ich mich beruhigt habe, welche keinen Differentialquotienten enthält, und einen viel grösseren Spielraum der darzustellenden Function gewährt, als die drei vorigen. Diese Bedingung ist folgende. Die Formel F gilt, wenn das Integral

$$\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta\, f(\beta)$$

absolut convergent ist.

Dies ist z. B. der Fall, wenn sich $f(x)$ auf die Form bringen lässt:

$$\text{constans} + \frac{\varphi(x)}{x\, l_0 \frac{1}{x}\, l_1 \frac{1}{x} \cdots l_r^\mu \frac{1}{x}},$$

$$l_0 \frac{1}{x} = \frac{1}{x}, \quad l_1 \frac{1}{x} = \log \frac{1}{x}, \quad l_2 \frac{1}{x} = \log\log \frac{1}{x}, \ \ldots,$$

$$\mu > 1$$

in der $\varphi(x)$ endlich sei, und r eine der Zahlen 0, 1, 2, ... vorstellt, in welcher Form die Lipschütz'sche Bedingung enthalten ist. Jenes Integral convergirt aber auch in unzähligen andern Fällen absolut, da die Bedingung der absoluten Convergenz Nichts über die Stärke des Unendlichwerdens der Maxima der Function unter dem Integralzeichen vorschreibt.

Uebrigens finden die beiden von mir aufgestellten, die Integrale

$$\int_0^a d\alpha\, f'(\alpha), \quad \int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta\, f(\beta)$$

betreffenden Bedingungen in der allgemeinen Theorie der darstellenden Integrale und Reihen ihre wahre Deutung und und Bedeutung, worauf ich hier indessen nicht weiter eingehe.

Für die Fourier'sche Reihe ist die vorstehende Bedingung allerdings noch nicht die nothwendige, wie ich durch Beispiele festgestellt habe, sie kommt ihr aber sehr nahe, wie ich ebenfalls an Beispielen erkannte, u. A. an den nicht darstellbaren Functionen, von denen in dieser Mittheilung die Rede war.

Anmerkungen.

1) Crelle Journal 4. Bd. p. 157.

2) Kürzerem Ausdruck zu Liebe, wollen wir den Begriff des Maximums auf unstetige Functionen ausdehnen, indem wir sagen, eine Function $f(x)$ hat für $x = a$ ein Maximum, wenn die ersten Functionalwerthe für $x < a$

und $x > a$, die von $f(a)$ verschieden sind, kleiner als $f(a)$ sind.

3) Die Stelle (l. c. p. 169) lautet:

Il nous resterait à considérer les cas ou les suppositions que nous avons faites sur le nombre des solutions de continuité et sur celui des valeurs maxima et minima cessent d'avoir lieu. Ces cas singuliers peuvent être ramenés à ceux que nous venons de considérer. Il faut seulement pour que la série (8) présente un sens, lorsque les solutions de continuité sont en nombre infini, que la fonction $\varphi(x)$ remplisse la condition suivante. Il est nécessaire qu'alors la fonction $\varphi(x)$ soit telle que, si l'on désigne par a et b deux quantités quelconques comprises entre $-\pi$ et $+\pi$, on puisse toujours placer entre a et b d'autres quantités r et s assez rapprochées pour que la fonction reste continue dans l'intervalle de r à s. On sentira facilement la necessité de cette restriction, en considérant que les differents termes de la série sont des integrales définies et en remontant à la notion fondamentale des intégrales. On verra alors que l'intégrale d'une fonction ne signifie quelque chose, qu'autant que la fonction satisfait à la condition précédemment ènoncée. On aurait un exemple d'une fonction qui ne remplit pas cette condition, si l'on supposait $\varphi(x)$ égale à une constante déterminée c, lorsque la variable obtient une valeur rationelle, et égale à une autre constante d, lorsque cette variable est irrationelle. La fonction ainsi définie a des valeurs finïes et déterminées pour toute valeur de x, et cependant on ne pourrait la substituer dans la série, attendu que les differentes intégrales, qui entrent dans cette série, perdraient toute signification dans ce cas. La restriction que je viens de préciser et celle de ne pas devenir infinie, sont les seules auxquelles la fonction $\varphi(x)$ soit sujette, et tous les cas qu'elles n'excluent pas peuvent être ramenés à ceux que nous avons considérés dans ce qui précède.

4) Nach einer mündlichen Mittheilung des Herrn Weierstrass.

5) Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, pag. 16. Die Stelle lautet:

In der That für alle Fälle der Natur, um welche es sich allein handelte, war sie (die Frage nach der Convergenz der Fourierschen Reihen) vollkommen erledigt;

denn so gross auch unsere Unwissenheit darüber ist, wie sich die Kräfte und Zustände der Materie nach Ort und Zeit im Unendlichkleinen ändern, so können wir doch sicher annehmen, dass die Functionen, auf welche sich die Dirichlet'sche Untersuchung nicht erstreckt, in der Natur nicht vorkommen.

6) Es gelingt zu zeigen, dass die Strecke, in welcher die Zeichenwechsel periodisch wiederkehrend beinahe aufhören, kein Unendlichwerden des Integrals bedingen kann. Schwierig ist aber der Nachweis, dass der Rest des Integrals endlich bleibt.

7) Borchardts Journal 63. Bd. p. 286.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

Mai und Juni 1873.

(Fortsetzung).

Resumé des observations sur la Metéòrologie et sur la Physique du globe. 1871.

Martyn Paine, physiology of the soul and instinct. New York 1872. 8.

— the institutes of medicine. Ebd. 1870. 8.

G. E. Ellis, memoir of Sir Benjamin Thompson Count Rumford. Published by the American Academy of Arts and Sciences, Boston. Philadelphia. 8.

The American Ephemeris and Nautical Almanac. 1875. Washington 1872. gr. 8.

Archives of Science and Transactions of the Orleans County Society of Natural Sciences. Vol. I. July 1871. Nr. IV. Vol. I. October 1872. Nr. V. 8.

Bulletin de la Société Ouralienne d'amateurs des Sciences Naturelles. T. I. 1er cahier. Ekaterinenburg 1873. gr. 8.

Juli 1873.

Nature 189. 190. 191.
Monatsbericht der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften. Februar 1873.
Bulletin of the Buffalo Society of Natural Sciences. Vol. I. Nr. 1. Buffalo 1873. 8.
Proceedings of the London Mathematical Society. Nos. 54. 55. 8.
Jahres-Bericht der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten zu Prag. Vereinsjahr 1872—73. Prag 1873. 8.
Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. Nr. 3. 1873. 8.
Bulletin de l'Académie R. des Sciences etc. de Belgique. 42e année, 2e série, tome 35. Nr. 5. Bruxelles 1873 8.
Extrait du Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques par M. R. Lipschitz. Paris 1873. 8.
ТРУДБI. ТОМБ I. ВБIПУСКВ II. САНКТНЕТЕРБУРГВ. T. II. — B. I. 1872. 73. gr. 8.
Nature 192. 194. 195. 196.
Mémoires de l'Académie Imp. des Sciences de St.-Pétersbourg. VIIe série. T. XVIII. Nr. 8. 9. 10 et dernier. T. XIX. Nr. 1. 2. St.-Pétersbourg 1872. 4.
Bulletin de l'Académie Imp. de St.-Pétersbourg. T. XVII. Nr. 4. 5 et dernier. T. XVIII. Nr. 1. 2. Ebd. 4.
Bulletin de la Société Imp. des Naturalistes de Moscou. Année 1872. Nr 4. Moscou 1873. 8.
Transactions of the R. Society of Edinburgh. Vol. XXVI. Part IV. For the Session 1871—72. Edinburgh. 4.
Proceedings of the R. Society of Edinburgh. Session 1871—1872. Ebd. 8.
Transactions of the Zoological Society of London. Vol. VIII. Part. 4. 5. London 1873. 4.
Proceedings of the Scientific Meetings of the Zoological Society of London. For the year 1872. Part III. June December. London 8.
Bulletin et Mémoires de l'Université Imp. de Kazan 1873. Nr. 1 (en russe). Kazan 1872. 8.
Académie des Sciences et Lettres de Montpellier:
Mémoires de la Section de Médecine. T. IV. — III. IV. V. Fascicule. Année 1865—69.
Mémoires de la Section des Sciences. T. VI. — II. III. Fasc. Année 1865. 56. T. VII. — I., II., III.,

IV. Fasc. Année 1867—70. — T. VIII. — 1er Fasc. Année 1871. Montpellier 1865—72. 4.
Mémoires de la Section des Lettres. T. IV. — II., III., IV. Fasc. Année 1865-68. — T. V. — I., II. et IIIe Fasc. Année 1869-71. Ebd. 1866—72. 4.

Nederlandsch Kruidkundig Archief. Verslagen en Mededeelingen der Nederlandsche Botanische Vereeniging. Nijmwegen 1873. 8.

Jahrbuch der k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1873. Bd. XXIII. Nr. 1. Jänner, Februar, März. Wien. gr. 8.

Verhandlungen der k. k. geolog. Reichsanstalt. Nr. 1—6. 1873. 8.

Dr. A. Kornhuber, über einen neuen fossilen Saurier aus Lesina. Ebd. 1873. gr. 8.

F. de Mueller, fragmenta phytographiae Australiae. Vol. VI. Melbourne 1867—68. 8.

General-Bericht über die Europäische Gradmessung für das Jahr 1872. Berlin 1873. 4.

XXII. Jahresbericht der Naturhistor. Gesellschaft zu Hannover von Michaelis 1871—72. 8.

Dr. Kriechbaumer, Bemerkungen und Berichtigungen zu Kittels und Kriechbaumers systematischer Uebersicht der Fliegen etc. Nachtrag zum V. Band der Abh. der Naturhistor. Gesellsch. zu Nürnberg.

R. Claudius, über einen neuen mechanischen Satz in Bezug auf stationäre Bewegungen. 8.

Sitzungsberichte der königl. böhm. Gesellschaft der Wissensch. in Prag. Nr. 4. 1873. 8.

Berichte des naturwissensch.-medic. Vereins in Innsbruck. Jahrg. III. Heft 1. Innsbruck 1873. 8.

Gustav Rose. Nekrolog von G. vom Rath. 4.

In ungarischer Sprache.

A Mag. tudom. Akad. Értesítöje. Berichterstatter der Ungarischen Akademie der Wissenschaften. 5. Jahrg. Lief. 10—17. Pest 1871. — 6. Jahrg. Lief. 1—8. Das. 1872.

Szarvas, Gáb., a Magyar igeidök (die ungarischen Tempora). Pest 1872.

(Fortsetzung folgt).