SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Ph
Jahr: 1900
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN252457811_1900
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN252457811_1900

LOG Id: LOG_0044
LOG Titel: Ueber raumgleiche Polyeder
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN252457811
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN252457811
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=252457811

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Ueber raumgleiche Polyeder.

Von

M. Dehn in Karlsruhe.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 27. October 1900.

Raumgleich wollen wir, wie üblich, zwei inhaltsgleiche Polyeder, Π_1 und Π_2 dann nennen, wenn sie in respective congruente Polyeder zerlegt werden können. Dabei ist die Inhaltsgleichheit in bekannter Weise mittels eines Grenzprozesses definirt zu denken. Im Folgenden wollen wir uns damit beschäftigen, eine allgemeine Bedingung für die Raumgleichheit zweier Polyeder aufzustellen. Um zu zeigen, daß diese Bedingung nicht stets bei inhaltsgleichen Polyedern erfüllt, also trivial ist, sollen einige specielle Fälle untersucht werden, von denen der eine die Verwandlung eines regulären Tetraeders in ein Prisma behandelt. Es wird sich das, wegen der analogen Verhältnisse in der Ebene auf den ersten Blick vielleicht überraschende, Resultat ergeben, daß *ein reguläres Tetraeder keinem Prisma raumgleich sein kann, daß also Tetraeder und Prisma auf keine Weise in respective congruente Teile zerlegt werden können.*

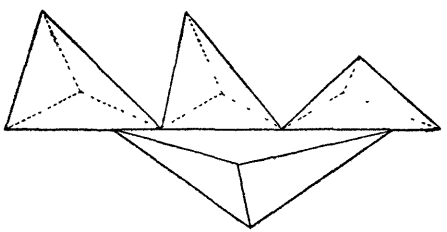
Als *Teilung* zweier inhaltsgleicher Polyeder Π_1, Π_2 wollen wir kurz eine solche Zerlegung von Π_1 und Π_2 bezeichnen, bei der diese in beziehungsweise congruente Teilpolyeder zerfallen. Aus einer Teilung von Π_1 und Π_2 können wir leicht beliebig viele andere Teilungen gewinnen. Wir brauchen nur irgend welche Teilpolyeder von Π_1 wieder zu zerlegen und genau dieselbe Zerlegung an den entsprechenden, congruenten Teilpolyedern von Π_2 anzubringen. Eine besonders einfache derartige Abänderung ist die, daß man Kanten von Teilpolyedern in eine Anzahl von Teilen zerlegt. Wir werden dies Verfahren im Folgenden häufig anwenden.

Unsere Hauptaufgabe besteht nun darin, nachzuweisen, daß aus einer beliebigen Teilung stets eine *Normalteilung* hervorgeht, die wegen ihrer besonderen, leicht zu übersehenden Eigenschaften, es uns ermöglicht, die gewünschte Bedingung für die Raumgleichheit von Π_1 und Π_2, beinahe mühelos, abzuleiten.

Wir definieren:

Normalteilung von Π_1 und Π_2 ist eine solche Teilung, bei der sich die Kanten der Teilpolyeder sowohl in Π_1 wie in Π_2 so in einzelne Gruppen ordnen lassen, daß die Summe der Flächenwinkel an den Kanten einer Gruppe gleich $2R$ oder $4R$ oder gleich einem Flächenwinkel des betreffenden Polyeders, Π_1 resp. Π_2 ist.

Die vorgelegte beliebige Teilung von Π_1 und Π_2 vereinfachen wir zunächst in folgender Weise: Auf einer Kante eines Teilpolyeders von Π_2 werden im Allgemeinen Endpunkte anderer „Teilkanten" liegen, die zum Teil mit der ersten Kante zusammenfallen — s. Fig. 1. In jedem solchen Punkte teilen wir die betreffende Kante und machen dieselbe Operation bei allen Kanten der Teil-Polyeder von Π_2. Zerlegen wir die Teilpolyeder von Π_1 genau so, wie die entsprechenden congruenten Teilpolyedern von Π_2, so haben wir eine neue Teilung von Π_1 und Π_2 gewonnen, die in Bezug auf Π_2 eine Normalteilung ist: die gesamten Teilkanten von Π_2 ordnen sich in einzelne Gruppen von lauter gleichen und zusammenfallenden Kanten ein und die Summe der Flächenwinkel in jeder Gruppe ist wie erforderlich gleich $4R$, $2R$ oder gleich einem Flächenwinkel von Π_2.



Figur 1.

Wir wollen nun versuchen, solche Aenderungen an der Π_1-Teilung anzubringen, die einerseits durch die dadurch nötig gewordenen, entsprechenden Veränderungen der Π_2-Teilung dieser nicht den Charakter der Normalteilung nehmen, anderseits aber die Π_1-Teilung in eine Normalteilung umwandeln.

Wir betrachten eine beliebige Kante eines Teilpolyeders von Π_1 — eine Teilkante, wie wir kurz sagen wollen. Ihre beiden Endpunkte seien P_n und P_{n+1}. Im Allgemeinen wird es eine Teilkante geben, welche, mit $P_n P_{n+1}$ teilweise zusammenfallend, zum

Teil über P_{n+1} hinausragt. In diesem Falle giebt es stets[1]) eine Kante $P_{n+1}P_{n+2}$, wo P_{n+2} mit P_{n+1} und P_n in gerader Linie liegt. Ebenso finden wir weiter eine Kante $P_{n+2}P_{n+3}$ (P_n, P_{n+1}, P_{n+2}, P_{n+3} auf einer Geraden), sofern nicht alle Kanten, welche mit dem Ende von $P_{n+1}P_{n+2}$ zusammenfallen, in P_{n+2} endigen. So fortfahrend gelangen wir endlich zu einer Teilkante $P_{n+m}Q$ ($P_nP_{n+1}\ldots P_{n+m}Q$ in gerader Linie), wo alle Teilkanten, welche mit dem Ende von $P_{n+m}Q$ zusammenfallen, in Q endigen. In derselben setzen wir P_nP_{n+1} über P_n hinaus fort bis P. Aus dem Verfahren geht hervor, daß eine Teilkante mit PQ nicht teilweise sondern nur ihrer ganzen Ausdehnung nach zusammenfallen kann. Die Gesamtheit aller mit PQ zusammenfallenden Teilkanten wollen wir kurz als den *Kantenzug* PQ bezeichnen. Greifen wir nun eine beliebige nicht zu diesem zugehörige Kante $P'_nP'_{n+1}$ heraus und wenden auf diese denselben „Verlängerungsproceß" an, so gelangen wir zu einem neuen Zuge $P'Q'$ u. s. w. Das Resultat ist: *Die Gesamtheit aller Kanten ordnet sich in einzelne Kantenzüge ein.*

Betrachten wir wieder einen einzelnen Kantenzug PQ. Es ist möglich, daß ein Teil von PQ in die Seitenfläche eines Teilpolyeders von Π_1 fällt (s. Fig. 2). In diesem Falle fügen wir dem betreffenden Polyeder das mit einer seiner Begrenzungsflächen zusammenfallende Stück von PQ als neue Kante hinzu. Dieselbe Operation haben wir nun an dem entsprechenden congruenten Teilpolyeder von Π_2 zu machen. Es ist klar, daß hierdurch die Teilung von Π_2 eine Normalteilung bleibt, da ja nur eine Kante mit einem Flächenwinkel $= 2R$ hinzukommt. Wenden wir dieses Verfahren in allen analogen Fällen bei PQ und den anderen Kantenzügen an, so kommen wir zu dem Resultat: Die Summe der Flächenwinkel an jeder Stelle eines Zuges ist gleich einem Flächenwinkel π_i^1 von Π_1, wenn die Zugkante mit einer Kante p_i^1 von Π_1 zusammenfällt, $= 2R$, wenn die Zugkante mit einer Seitenfläche von

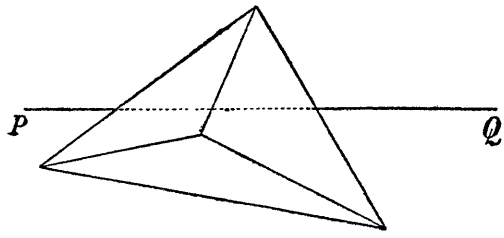


Fig. 2.

1) Es kann (bei nicht überall convexen Polyedern) vorkommen, daß $P_{n+1}P_{n+2}$ eine Polygonkante und keine Teilkante ist. Um dies zu vermeiden, wollen wir bei der vorgelegten Teilung von Π_1 und Π_2 zunächst die Teilkanten in den Eckpunkten von Π_1 resp. Π_2 teilen.

Π_1 zusammenfällt, $= 4R$ in allen übrigen Fällen. Wir sagen kurz: ein Kantenzug mit der Winkelsumme $4R$, $2R$ oder π_i^1.

Jetzt wollen wir ganz von dem Zusammenhang der Teilkanten durch die Teilpolyeder absehen und uns nur jede Kante mit dem zu ihr gehörigen Flächenwinkel verknüpft denken. Wir vereinigen alle Kantenzüge mit den daran hängenden Flächenwinkeln zu *einem* in gerader Linie verlaufenden *Gesamt-Kantenzug AO*. Diese Vereinigung soll nun so geschehen, daß je eine der beiden Begrenzungsflächen mit der Winkelsumme π_i^1 und die Begrenzungsflächen der Züge mit der Winkelsumme $2R$ in eine Ebene **E** fallen, so zwar, daß die an jene Begrenzungsfläche sich anschließenden Flächenwinkel alle auf ein und derselben Seite der Ebene **E** liegen.

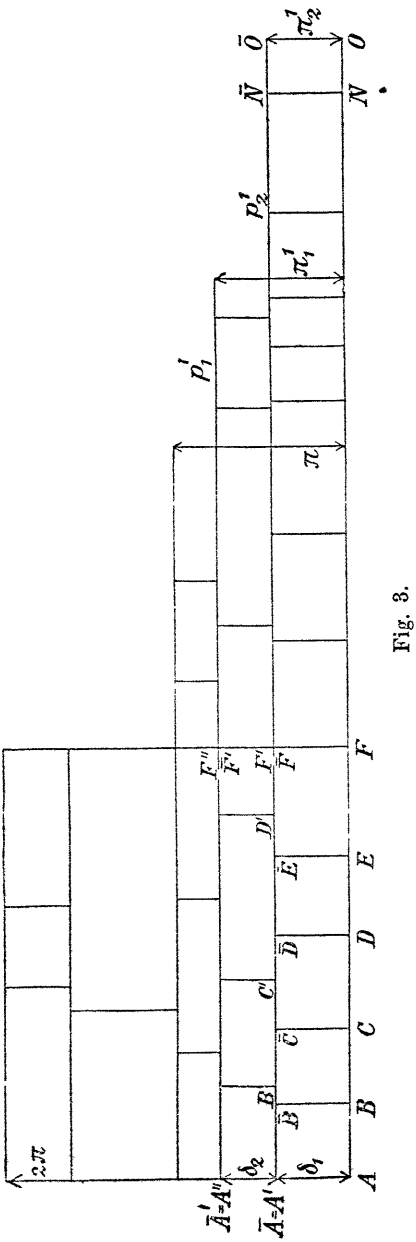


Fig. 3.

Durch AO und sämtliche die Flächenwinkel bildenden Flächen legen wir Halbebenen. Wird ein Flächenwinkel durch diese Halbebenen in n Teile geteilt, so denken wir uns die dazugehörige Kante n-fach vorhanden und ordnen den n Kanten die n Teile des Winkels eindeutig zu. Dieselbe Operation vollführen wir auch in Π_2, das ersichtlich auch nach dieser Aenderung noch eine Normalteilung besitzt. Betrachten wir nun von jenen Halbebenen die Halbebene h_1, die in die Ebene **E** fällt,

und die darauffolgende, h_2, welche mit allen Zügen Flächen gemeinsam hat. Diese beiden Halbebenen mögen den Winkel δ_1 bilden. Seien nun AB, BC, CD ..... NO die Kanten, deren Flächenwinkel mit δ_1 zusammenfallen, dann tragen wir AB, BC .... NO auf einer geraden Linie von A bis 0 ab und errichten über jeder Strecke ein Rechteck mit der Höhe $= \delta_1$ (s. Fig. 3). Die Halbebene h_1 und die darauffolgende h_2 mögen den Winkel δ_2 bilden und A_1B_1, B_1C_1, ... N_1O_1 die Kanten sein, deren Flächenwinkel mit δ_2 zusammenfallen. Wir errichten über den vorher construirten Rechtecken $AB\overline{B}\overline{A}$ ..... $NO\overline{O}\overline{N}$ neue Rechtecke $A_1(\overline{A})B\,\overline{B}\,\overline{A}_1$, ... $N_1O_1(\overline{O})\overline{O}_1\overline{N}_1$ mit den respectiven Grundlinien A_1B_1, B_1C_1 .... N_1O_1 und den Höhen $= \delta_2$. Wir fahren so fort und erhalten das in Figur 3 schematisch dargestellte Bild des Gesamt-Kantenzuges.

Seien unsere Teilkanten respective gleich a_1, a_2 .... a_n. Dann möge

$$\mathbf{A}\begin{cases} l_1(a_1 \ldots\ldots a_n) = 0 \\ l_2(a_1 \ldots\ldots a_n) = 0 \\ \vdots \\ l_m(a_1 \ldots\ldots a_n) = 0 \end{cases}$$

das System der von einander unabhängigen in a_1 .... a_n linearen und homogenen Gleichungen mit rationalen Coefficienten sein. Wir können durch $m-n$ dieser Größen, etwa a_{i_1} ..... $a_{i_{n-m}}$ die übrigen m Größen a_{d_1} ..... a_{d_m} linear mit rationalen Coefficienten ausdrücken.

Sei:

$$\mathbf{B}\begin{cases} a_{d_1} = L_1(a_{i_1} \ldots\ldots a_{i_{n-m}}) \\ a_{d_2} = L_2(a_{i_1} \ldots\ldots a_{i_{n-m}}) \\ \vdots \\ a_{d_m} = L_m(a_{i_1} \ldots\ldots a_{i_{n-m}}) \end{cases}$$

Wir setzen:

$$a_1 = \alpha_1+\varepsilon_1, \qquad a_2 = \alpha_2+\varepsilon_2 \ldots\ldots a_n = \alpha_n+\varepsilon_n$$

und:

$$\mathbf{C}\begin{cases} \alpha_{d_1} = L_1(\alpha_{i_1} \ldots\ldots \alpha_{i_{n-m}}) \\ \alpha_{d_1} = L_2(\alpha_{i_1} \ldots\ldots \alpha_{i_{n-m}}) \\ \vdots \\ \alpha_{d_m} = L_m(\alpha_{i_1} \ldots\ldots \alpha_{i_{n-m}}) \end{cases}$$

Da nun $L_1, L_2 \ldots\ldots L_m$ stetige Funktionen der a_{i_k} sind, so kann stets eine Größe ε so finden, daß, wenn

$$|\varepsilon_{i_1}| \ldots\ldots |\varepsilon_{i_{n-m}}| < |\varepsilon|$$

sind,

$$|\varepsilon_{d_1}| < a_{d_1}, \qquad |\varepsilon_{d_2}| < \alpha_{d_2} \ldots\ldots |\varepsilon_{d_m}| < a_{d_m}$$

ist, daß folglich, da $a_{d_1} \ldots\ldots a_{d_m}$ sämtlich positive Größen sind, auch $\alpha_{\alpha_1} \ldots\ldots \alpha_{\alpha_m}$ sämtlich positiv sind. Dann ergiebt sich leicht, daß wir die Größen $a_1 \ldots\ldots a_n$ durch positive rationale Größen $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n$ ersetzen können, die das Gleichungssystem **C** und deshalb auch, an die Stelle von $a_1 \ldots\ldots a_n$ gesetzt, *das Gleichungssystem* **A** *befriedigen.*

Wir bringen $\alpha_1 \ldots\ldots \alpha_n$ auf denselben Nenner, und es sei

$$\alpha_1 = \frac{r_1}{q}, \qquad \alpha_2 = \frac{r_2}{q}, \ldots\ldots \alpha_n = \frac{r_n}{q} \ldots\ldots \textbf{D.}$$

Und nun wollen wir wieder eine Aenderung in der Π_1-Teilung ausführen, welche der Π_2-Teilung den Charakter der Normalteilung nicht nehmen kann. Wir teilen nämlich die Kante a_1 in r_1, die Kante a_2 in $r_2 \ldots\ldots$, die Kante a_n in r_n Teile. Da, wenn $a_i = a_l$ wegen **A** und **C** auch $\alpha_k = \alpha_l$ und also $r_k = r_l$ ist, so werden alle gleichen Kanten in eine gleiche Anzahl von gleichen Teilen geteilt. Führen wir die entsprechende Teilung in Π_2 aus, so kann dadurch die Normalteilung von Π_2 nicht zerstört werden. Wir behaupten aber, daß durch diese Teilung auch die Π_1-Teilung in eine Normalteilung übergeführt ist.

In der That, jedes der den Kantenzug mit der Winkelsumme $4R$ bildenden Rechtecke (s. Fig. 3) $AB \ldots\ldots F\overline{F}(F') \ldots\ldots \overline{B}\,\overline{A}$, $A'(\overline{A})B' \ldots\ldots F'(\overline{F})\overline{F}' \ldots\ldots \overline{B}'\,\overline{A}'$ u. s. w. wird durch den obigen Proceß in eine gleiche Anzahl von Teilen zerlegt. Denn wenn

$$AB = a_{k_1}, BC = a_{k_2} \ldots\ldots EF = a_{k_f}$$
$$A'B' = a_{k'_1} B'C' = a_{k'_2} \ldots\ldots E'F' = a_{k'_f}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ist, so ist, wie aus der Figur ersichtlich:

$$a_{k_1} + a_{k'_2} \ldots\ldots a_{k_f} = a_{k'_1} + a_{k'_2} + \cdots\cdots a_{k'_f} = \cdots\cdots$$

Folglich nach **A** und **C** auch:

$$\alpha_{k_1} + \alpha_{k_2} + \cdots\cdots \alpha_{k_f} = \alpha_{k'_1} + \alpha_{k'_2} + \cdots\cdots \alpha_{k'_f} = \cdots\cdots$$

und nach **D**:

$$r_{k_1}+r_{k_2}+\cdots\cdots r_{k_f} = r_{k'_1}+r_{k'_2}+\cdots\cdots r_{k'_f} = \cdots\cdots$$

Ordnen wir also den ersten Abschnitt von AB, den ersten Abschnitt von $A'B'$, den ersten Abschnitt von $A''B''$ etc. einander zu, ebenso die zweiten Abschnitte, und fahren so fort, so gelangen wir zu einer Ordnung sämtlicher den Kantenzug mit der Winkelsumme $4R$ bildenden Kanten in Gruppen von Kanten. Daß die Summe der Flächenwinkel der Kanten einer Gruppe jedesmal gleich $4R$ ist, ergiebt sich unmittelbar aus der Figur. Behandeln wir in derselben Weise die übrigen Kantenzüge mit der Winkelsumme gleich $2R$ oder gleich π_i^1, so sehen wir, daß sämtliche Kanten von Π_1 in einzelne Gruppen mit der Winkelsumme gleich $4R$, gleich $2R$ oder gleich Π_i^1 zerfallen, womit bewiesen ist, daß auch die Teilung von Π_1 eine Normalteilung ist. Wir haben also den

Satz: Aus jeder Teilung zweier raumgleicher Polyeder geht eine Normalteilung (in Bezug auf *beide* Polyeder) *hervor.*

Ist eine Teilung eines Polyeders Π eine Normalteilung, so ist die Summe sämtlicher Flächenwinkel der Teilpolyeder, wie sich unmittelbar aus der Definition der Normalteilung oder auch aus Fig. 3 ergiebt, in der Form enthalten (π_i = Flächenwinkel von Π):

$$n_1\pi_1+n_2\pi_2+\cdots\cdots 2mR.$$

Giebt es also eine Teilung von Π_1 und Π_2 und deshalb, wie eben bewiesen, auch eine Normalteilung derselben, so muß

$$n_1^1\pi_1^1+n_2^1\pi_2^1+\cdots\cdots 2m^1R = n_1^2\pi_1^2+n_2^2\pi_2^2+\cdots\cdots 2m^2R$$

sein. (π_i^1 sind Flächenwinkel von Π_1, π_i^2 Flächenwinkel von Π_2). Wir haben also den

Satz: Sind Π_1 und Π_2 raumgleich, so muß

$$n_1^1\pi_1^1+n_2^1\pi_2^1+\cdots\cdots \equiv n_1^2\pi_1^2+n_2^2\pi_2^2+\cdots\cdots \pmod{2R}$$

sein, wo die Größen n_i^1 und n_i^2 ganze positive Zahlen sind.

Beispiele.

1) *Reguläres Tetraeder.*

Ist das reguläre Tetraeder einem rechtwinkligen Parallepipede raumgleich, so muß, wenn der Winkel des Tetraeder mit τ bezeichnet wird, nach dem Vorhergehenden entweder

$$\sin n\tau = 0$$

sein oder

$$\cos n\tau = 0$$

sein.

Erster Fall: n gerade. Wir entwickeln $\sin(n\tau)$ und $\cos(n\tau)$ nach den bekannten Formeln:

$$\sin n\tau = \cos\tau\left[n\sin\tau - \frac{n(n^2-2^2)}{3!}\sin^3\tau + \frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{5!}\sin^5\tau - \cdots\right]$$

$$\cos n\tau = 1 - \frac{n^2}{2!}\sin^2\tau + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}\sin^4\tau - \cdots$$

Setzen wir hierin für $\sin\tau$ und $\cos\tau$ ihre Werte $\sqrt{\frac{8}{9}}$ und $\frac{1}{3}$, für $\sin(n\tau)$ und $\cos(n\tau)$ 0 ein, so erhalten wir die beiden Gleichungen:

$$(n-1)!\,9^{n-2} =$$

$$\frac{(n+2)(n-2)(n-1)!\,8.9^{n-3}}{3!} - \frac{(n+4)(n+2)(n-2)(n-4)(n-1)!\,8^2 9^{n-4}}{5!} + \cdots$$

$$n!\,9^{n-2} = \frac{n\cdot n\cdot n!\,8\cdot 9^{n-3}}{2!} - \frac{n\cdot n(n+2)(n-2)\cdot 8^2\cdot 9^{n-4}}{4!} + \cdots$$

Eine von diesen beiden Gleichungen müßte nun eine Lösung haben, wenn unsere Annahme richtig wäre. Aber keine ganze Zahl n kann eine von diesen Gleichungen befriedigen. Ist nämlich der Ausdruck auf der rechten Seite durch 2^p aber nicht durch 2^{p+1} teilbar, so ist der Ausdruck auf der linken Seite nicht durch 2^{p-1} teilbar.

Zweiter Fall: n ungerade. Die analogen Formeln lauten:

$$\sin n\tau = n\sin\tau - \frac{n(n^2-1)}{3!}\sin^3\tau + \frac{n(n^2-1)(n^2-3^2)}{5!}\sin^5\tau - \cdots$$

$$\cos n\tau = \cos\tau\left[1 - \frac{n^2-1}{2!}\sin^2\tau + \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{4!}\sin^4\tau - \cdots\right]$$

Sezten wir die speciellen Werte ein, so erhalten wir:

$$n!\,9^{n-1} =$$
$$\frac{(n+1)(n-1)n!8\cdot 9^{n-2}}{3!} - \frac{(n+3)(n+1)(n-1)(n-3)n!\,8^2 9^{n-3}}{5!} + \cdots\cdots$$

$$(n-1)!\,9^{n-1} =$$
$$\frac{(n+1)(n-1)(n-1)!\,8\cdot 9^{n-2}}{2!} - \frac{(n+3)(n+1)(n-1)(n-3)(n-1)!8^2 9^{n-3}}{4!} + \cdots\cdots$$

Aus demselben Grunde wie im ersten Falle sind auch diese beiden Gleichungen nicht durch eine ganze Zahl n erfüllbar. Wir haben deshalb das Resultat gewonnen.

Ein reguläres Tetraeder kann keinem rechtwinkligem Parallepipede raumgleich sein.

Es läßt sich leicht zeigen, daß jedes Prisma einer Anzahl rechtwinkliger Parallepipede raumgleich ist. Andererseits geht aus dem Vorhergehenden hervor, daß ein reguläres Tetraeder und eine Gesamtheit von rechtwinkligen Parallepipeden nicht raumgleich sein kann. Endlich besteht der Satz: Sind zwei Polyeder einem dritten raumgleich, so sind sie selbst raumgleich. Wir haben deshalb einen Satz gewonnen, dem wir gleich die folgende allgemeinste Form geben:

Eine Gesamtheit von regulären Tetraedern und eine Gesamtheit von Prismen sind niemals raumgleich.

2) *Tetraeder mit drei auf einander rechtwinklig stehenden Kanten (gleichschenklig-rechtwinkliges Tetraeder).*

Genau so wie beim ersten Beispiel ergiebt sich der Satz:

Eine Gesamtheit von gleichschenklig-rechtwinkligen Tetraedern und eine Gesamtheit von Prismen sind niemals raumgleich.

3) *Reguläres und gleichschenklig-rechtwinkliges Tetraeder.*

Die nicht rechten Winkel des letzteren seien gleich ϱ. Dann ist

$$2\varrho = 2R - \tau.$$

Denn es ist

$$\cos\varrho = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

und deshalb:

$$\cos 2\varrho = -\tfrac{1}{3} = -\cos\tau = \cos(2R-\tau).$$

Wenn nun die beiden Tetraeder einander raumgleich wären, so müßte

$$n\tau \equiv n'\varrho \pmod{R}\ (n \text{ und } n' > 0)$$

sein; nun ist aber gleichzeitig nach dem Vorhergehenden

$$\tau \equiv -2\varrho \pmod{R}$$

Folglich:

$$(2n+n')\tau \equiv 0 \pmod{R},$$

eine Gleichung, die nach dem im Beispiel 1 Bewiesenen unmöglich ist. Folglich haben wir den Satz:

Eine Gesamtheit von regulären und eine Gesamtheit von gleichschenklig rechtwinkligen Tetraedern sind niemals raumgleich [1]).

1) Das im Vorstehenden behandelte Problem ist schon von Gauß angeregt worden und gehört zu den 23 Problemen, die von D. Hilbert in seinem Pariser Vortrag (Gött. Nachr. 1900 Heft 31) aufgestellt sind. Der Beweis, daß im Allgemeinen auch die „égalité par soustraction" unmoglich ist, wird in einem Artikel in den Math. Annalen behandelt werden.