SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Ph
Jahr: 1909
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN252457811_1909
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN252457811_1909

LOG Id: LOG_0042
LOG Titel: Zur Theorie der konformen Abbildung
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN252457811
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN252457811
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=252457811

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Zur Theorie der konformen Abbildung[1].

Von

David Hilbert.

Vorgelegt in der Sitzung am 17. Juli 1909.

In meiner Abhandlung über das Dirichletsche Prinzip[2]) habe ich auf Grund dieses Prinzips eine strenge Methode zum Nachweise der Lösbarkeit der Randwertaufgabe in der Theorie des ebenen Potentials dargelegt; ich möchte jetzt zeigen, daß diese Methode der weitgehendsten Anwendung fähig ist und insbesondere sehr allgemeine und fundamentale Probleme aus der Theorie der konformen Abbildung zu lösen gestattet.

Die Modifikation, deren meine in der zitierten Abhandlung entwickelte Methode dabei bedarf, möchte ich des leichteren Ver-

---

1) Diese Mitteilung giebt im Wesentlichen den Inhalt eines Vortrages wieder, den ich im April dieses Jahres gelegentlich der Anwesenheit des Herrn H. Poincaré in der Göttinger mathematischen Gesellschaft gehalten habe. Hinsichtlich der genauen Durchführung der Beweise verweise ich auf die demnächst erscheinende Göttinger Dissertation von R. Courant.

2) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 8 (1900) und Festschrift zur Feier des 150 jährigen Bestehens der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen (1901), abgedruckt in Math. Ann. Bd. 59. Vgl. auch die daran anknüpfenden Abhandlungen von O. Bolza, Lectures on the Calculus of Variation, (1904), Cap. VII; C. Carathéodory, Math. Ann. Bd. 62 (1906); Ch. A. Noble, Dissertation Göttingen (1901); G. Fubini, Rendiconti del circolo matematico di Palermo Bd. 22 (1906), Bd. 23 (1907), Annali di matematica Ser. 3 Bd. 16 (1907), Atti della R. Accademia dei Lincei Ser. 5 Bd. 16 (1907), Bd. 17 (1908); Hedrick, Diss. Göttingen (1901); B. Levi, Rendiconti del circolo mat. di Palermo Bd. 22 (1906); H. Lebesgue, Comptes Rendus Bd. 144 (1907), Rendiconti del circolo mat. di Palermo Bd. 24 (1907); W. Ritz, Göttinger Nachrichten (1908), Journ. für Math. Bd. 135 (1909); E. Holmgren, Comptes Rendus Bd. 142 (1906), Arkiv för matematik, astronomi och fysik Bd. 3 (1906).

ständnisses wegen an einem der einfachsten Randwertprobleme auseinandersetzen, nämlich an folgendem Problem:

Randwertproblem. In der xy-Ebene sei ein Gebiet Ω gegeben, das von einer analytischen doppelpunktlosen Kurve begrenzt ist: gesucht wird eine Potentialfunktion $u(x,y)$ von folgender Beschaffenheit:

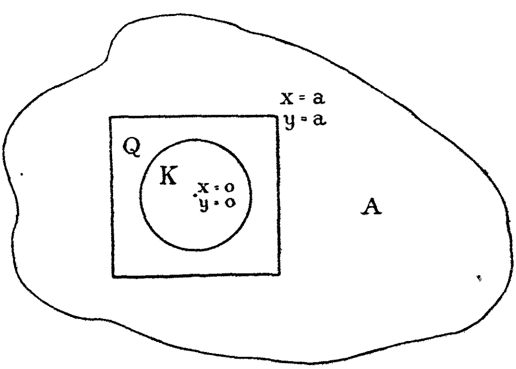
1. $u(x,y)$ soll sich innerhalb Ω überall regulär verhalten mit Ausnahme eines Punktes, etwa des Nullpunktes, der innerhalb Ω liegen möge, in dessen Umgebung

$$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + R(x,y)$$

sein möge, wo $R(x,y)$ eine im Nullpunkt reguläre Potentialfunktion bedeutet;

2. die zu $u(x,y)$ konjugierte Potentialfunktion $v(x,y)$ soll, wenn der Punkt x,y auf der Randkurve liegt, einen konstanten Wert haben.

Wir wollen nun dieses Randwertproblem durch ein Minimalproblem, wie es im Sinne unserer Methode des Dirichletschen Prinzips liegt, ersetzen. Zu dem Zwecke schlagen wir um den Nullpunkt einen Kreis, dessen Inneres wir mit K bezeichnen und konstruieren um diesen Kreis ein ebenfalls noch ganz innerhalb des gegebenen Gebietes Ω liegendes Quadrat mit den Ecken $x = \pm a$, $y = \pm a$, wo die positive Größe a den Kreisradius übertrifft. Der außerhalb des Kreises und innerhalb des Quadrates liegende Teil von Ω werde mit Q und der außerhalb des Quadrates



Figur 1.

liegende Teil von Ω mit A bezeichnet, so daß das gesamte Gebiet von Ω sich aus den drei Teilgebieten K, Q, A zusammensetzt.

Nunmehr definieren wir eine Funktion $\Phi(x,y)$ der Variabeln x, y wie folgt: wir setzen

$$\begin{aligned} \Phi(x,y) &= \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{in } K \\ &= 0 \qquad\quad\; \text{in } A \end{aligned}$$

und nehmen für Φ innerhalb und auf der Grenze von Q nämlich auf dem Rande des Kreises und des Quadrates eine zweimalstetig differenzierbare Funktion von x, y, sodaß Φ, abgesehen vom Nullpunkt, überall innerhalb Ω eine Funktion der Variabeln x, y wird, deren zweite Ableitungen nach x, y noch stetig sind.

Setzen wir ferner

$$(1) \qquad \begin{cases} C(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} - \Phi(x,y), \\ \gamma(x,y) = \Delta C \equiv \dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 C}{\partial y^2}, \end{cases}$$

so ist γ eine überall in Ω stetige Funktion, die sowohl in K, wie in A identisch verschwindet. Nach der Greenschen Formel, angewandt auf Q, ist

$$\iint\limits_{(Q)} \Delta C\,dx\,dy = -\int\limits_{(k)} \frac{\partial C}{\partial n}\,ds - \int\limits_{(q)} \frac{\partial C}{\partial n}\,ds,$$

wo die einfachen Integrale rechter Hand über k, die Peripherie des Kreises, und q, den Rand des Quadrates, zu erstrecken sind. Da nun die normalen Ableitungen von C die Werte

$$\frac{\partial C}{\partial n} = 0 \qquad\qquad \text{auf } k$$

$$\frac{\partial C}{\partial n} = \frac{\partial \dfrac{x}{x^2+y^2}}{\partial n} = \frac{\partial \dfrac{-y}{x^2+y^2}}{\partial s} \quad \text{auf } q$$

aufweisen, so folgt

$$\iint\limits_{(Q)} \Delta C\,dx\,dy = 0$$

und da

$$\gamma = \Delta C$$

in K identisch verschwindet, so ist auch

$$\int\limits_{-a}^{+a}\int\limits_{-a}^{+a} \gamma(x,y)\,dx\,dy = 0.$$

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} \xi(x) &= \frac{3}{4}\frac{1}{a^3}(a^2 - x^2) \quad \text{für } -a \leqq x \leqq a, \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad \text{für } x < -a \text{ und } x > a, \end{aligned}$$

so daß

$$\int_{-a}^{+a} \xi(x)\,dx = 1$$

wird, ferner

$$\eta(y) = \int_{-a}^{+a} \gamma(x,y)\,dx$$

$$\alpha(x,y) = \int_{-a}^{x} \{\gamma(x,y) - \xi(x)\eta(y)\}\,dx,$$

$$\beta(x,y) = \int_{-a}^{y} \xi(x)\eta(y)\,dy.$$

Die Funktionen α, β werden, wie sofort zu sehen ist, in A überall identisch null, und innerhalb des Quadrates gilt die Gleichung

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} = \gamma. \tag{2}$$

Das Minimalproblem, welches unser ursprüngliches Randwertproblem (S. 315) zu ersetzen vermag, lautet nun wie folgt:

Minimalproblem. Es soll eine innerhalb Ω überall stetig differenzierbare Funktion φ gefunden werden, für welche das über Ω zu erstreckende modifizierte Dirichletsche Integral

$$D^*(\varphi) = \iint\limits_{(\Omega)} \left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \beta\right)^2\right\} dx\,dy$$

zum Minimum wird; dabei bedeuten α, β die eben konstruierten nur innerhalb des Quadrates von Null verschiedenen Funktionen der Variabeln x, y.

Dieses Minimalproblem ist von der Art, daß die in meiner anfangs zitierten Abhandlung entwickelte Methode unmittelbar auf dasselbe anwendbar wird: dieselbe ergibt dann die Existenz einer zweimalstetigdifferenzierbaren Funktion φ, die die Minimalforderung erfüllt.

Wir wollen nun den Nachweis führen, daß

$$u(x,y) = \varphi(x,y) + \Phi(x,y)$$

diejenige Potentialfunktion ist, die unser Randwertproblem (S. 315) löst.

Zu dem Zwecke berücksichtigen wir, daß wegen der Minimaleigenschaft der Funktion φ das Verschwinden der ersten Variation d. h. die Gleichung

$$(3) \qquad \iint\limits_{(\Omega)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \alpha \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \beta \right) \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right\} dx\, dy = 0$$

statt hat, wo ζ eine willkürliche innerhalb Ω stetigdifferenzierbare Funktion der Variabeln x, y bedeutet. Nunmehr folgt aus (3) nach der Greenschen Formel

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\Delta\varphi - \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) \zeta\, dx\, dy = 0$$

und demnach

$$\Delta\varphi - \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0$$

oder mit Rücksicht auf (1), (2)

$$\Delta\varphi = \gamma = \Delta C$$

und wegen (1)

$$\Delta(\varphi + \Phi) = 0$$

oder

$$\Delta u = 0,$$

d. h. u ist eine innerhalb Ω eindeutige Potentialfunktion.

Nach den Regeln der Variationsrechnung ist auf dem Rande von Ω die normale Ableitung der Funktion φ und daher auch von u Null und mithin ist die zu u konjugierte Potentialfunktion v auf dem Rande konstant, d. h. auch die Forderung 2 des Randwertproblems ist erfüllt.

Zugleich folgt aus dem Verschwinden der ersten Variation d. h. der Gleichung (3) in bekannter Weise, daß die Funktion φ und mithin auch die Funktion u durch die auferlegten Forderungen bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt sind.

Die Potentialfunktion u ist, wie man leicht sieht, durch die Eigenschaft charakterisiert, daß für dieselbe das Dirichletsche Integral

$$\iint\limits_{(\Omega^*)} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx\, dy$$

ein Minimum wird, worin Ω^* ein Gebiet bedeutet, welches aus Ω entstanden ist, wenn man die Umgebung des Nullpunktes durch eine analytische Kurve ausschließt und nur solche Funktionen zum Vergleich zuläßt, welche auf dieser analytischen Kurve dieselben Werte wie u annehmen.

Wir betrachten nunmehr die durch die Formel

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

gegebene Funktion der komplexen Variabeln $z = x + iy$. Es sei

$$c = a + ib$$

eine Konstante, deren Imaginärteil b dem reellen Werte, den v am Rande des Gebietes Ω annimmt, nicht gleichkommt: dann ist

$$l\{f(z) - c\} = \tfrac{1}{2} l\{(u-a)^2 + (v-b)^2\} + i \operatorname{arctg} \frac{v-b}{u-a}.$$

Da nun der Quotient $\frac{v-b}{u-a}$ bei einem Umlauf des Punktes z auf dem Rande des Gebietes Ω nirgends Null werden kann, so bleibt $\operatorname{arctg} \frac{v-b}{u-a}$ und mithin auch $l\{f(z) - c\}$ nach diesem Umlaufe ungeändert d. h. die analytische Funktion $f(z) - c$ besitzt innerhalb Ω ebensoviel Pole wie Nullstellen: $f(z)$ nimmt also den Wert c innerhalb Ω einmal und nur einmal an. Wir schließen hieraus leicht, daß die komplexe Funktion $f(z)$ eine konforme Abbildung vermittelt, bei der dem Inneren von Ω die ganze uv-Ebene entspricht mit Ausnahme eines endlichen geradlinigen zur u-Achse parallelen Schlitzes.

Das ursprüngliche Randwertproblem und das Minimalproblem erweisen sich demnach als aequivalent mit dem folgenden Problem:

Problem der konformen Abbildung. Es soll das Innere von Ω auf eine von einem geradlinigen Schlitz begrenzte Ebene konform abgebildet werden.

Es ist von erheblichem Interesse, daß die sämtlichen bisher dargelegten Beweismethoden und Resultate unmittelbar auf ein beliebiges irgendwie zusammenhängendes Gebiet Ω übertragbar sind; insbesondere folgt die Existenz der Minimalfunktion für ein beliebiges Gebiet Ω ohne weiteres nach der oben dargelegten Methode des modifizierten Dirichletschen Integrals D^*. Ich fasse die sich so ergebenden Resultate, wie folgt, zusammen:

Theorem. Es sei Ω ein auf der xy-Ebene gelagertes irgendwie zusammenhängendes Gebiet von endlicher oder unendlicher Blätterzahl mit endlichvielen oder unendlichvielen Verzweigungsstellen oder Ver-

zweigungsgebieten und beliebigen Randpunkten oder Randkurven: dann gibt es stets eine Potentialfunktion u, die in einem vorgeschriebenen Punkte von Ω in vorgeschriebener Weise von der ersten Ordnung, etwa wie

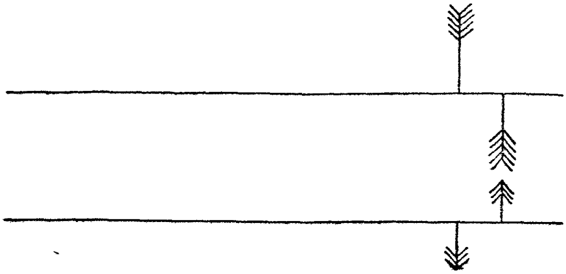
$$\frac{x}{x^2+y^2} \text{ für } x = 0,\ y = 0$$

unendlich wird und für die überdies das Dirichletsche Integral

$$\int\int_{(\Omega^*)} \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} dx\, dy$$

ein Minimum wird, wobei Ω^* ein Gebiet bedeutet, welches aus Ω entstanden ist, wenn man die Umgebung des Nullpunktes durch eine analytische Kurve ausschließt und nur solche Funktionen zum Vergleich zuläßt, welche auf dieser analytischen Kurve dieselben Werte wie u annehmen. Die Potentialfunktion u ist durch diese Eigenschaft bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

Durch Vermittlung derjenigen komplexen Funktion, deren Realteil u ist, wird das Innere des Gebietes Ω konform auf die einfache uv-Ebene abgebildet, die von endlichvielen oder unendlichvielen zur u-Achse parallelen Schlitzen begrenzt ist; die Menge dieser Schlitze ist in der uv-Ebene eine abgeschlossene und dennoch nirgends dichte d. h. eine diskrete. Die Schlitze können sich zum Teil oder sämtlich auf Punkte reduzieren; sie sind stets dann von endlicher Länge, wenn das Gebiet Ω die Eigenschaft besitzt, daß innerhalb derselben jeder in sich zurückkehrende Schnitt dies Gebiet zerstückelt; andernfalls jedoch gibt es noch gewisse Paare von Schlitzen, die von der negativen Seite her aus dem Unendlichen kommen: dabei sind die senkrecht übereinander gelegenen Punkte eines jeden Schlitzpaares Bildpunkte des nämlichen Punktes innerhalb Ω und die Umgebungen der Schlitzpaare bilden jedesmal — entsprechend dem inneren Zusammenhange von Ω — in der Weise ein zusammenhängendes Blatt, daß ein Weg, der längst eines Pfeiles in der Figur auf einen Schlitz trifft, längst des gleichgerichteten Pfeiles vom anderen Schlitz aus fortgesetzt werden muß.



Figur 2.

Zum Schlusse möchte ich auf einige spezielle Anwendungen meines Theorems hinweisen.

Erstes Beispiel. Es sei Ω ein auf der xy-Ebene gelagertes Gebiet mit beliebigvielen Blättern und Verzweigungspunkten, aber von einfachem Zusammenhange: dann sagt das vorstehende Theorem aus, daß das Innere dieses Gebietes Ω konform abbildbar ist auf die Vollebene ohne Schlitz, oder auf die Ebene mit einem Schlitze, der sich auch auf einen Punkt reduzieren kann. Da die mit einem Schlitze versehene Ebene, wenn dieser Schlitz eine von Null verschiedene Länge besitzt, sich bekanntermaßen auf die Halbebene konform abbilden läßt, so folgt, daß Ω entweder auf die Vollebene oder auf die Ebene mit Ausschluß eines Punktes oder auf die Halbebene konform abgebildet werden kann — ein Satz, der zuerst von H. Poincaré und P. Koebe bewiesen worden ist und auf Grund dessen diesen Forschern insbesondere der Nachweis für die Existenz der eine gegebene algebraische Kurve uniformisierenden automorphen Funktionen mit Grenzkreis gelang.

Zweites Beispiel. Es sei Ω eine zu einer algebraischen Funktion vom Geschlecht p gehörige Riemannsche Fläche. Da dieses Gebiet keinerlei Randpunkte oder Randkurven besitzt, so ist die uv-Ebene mit keinerlei Schlitzen von endlicher Länge versehen. Bestimmt man auf Ω diejenigen $2p$ Punkte $P_s\,(s = 1, 2, \ldots, 2p)$ für die

$$\frac{df}{dz} = 0$$

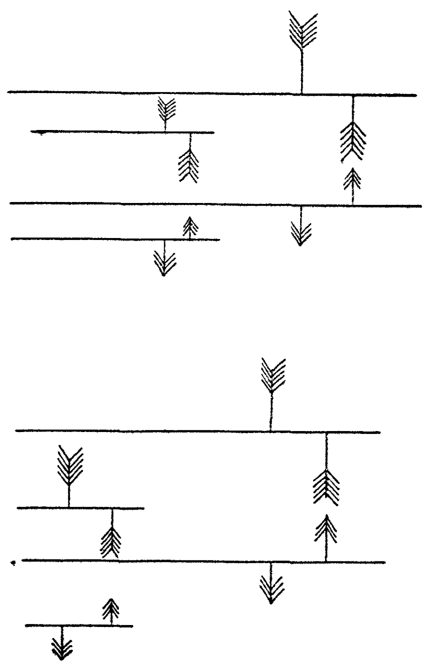
wird, so zeigt sich, daß unter allen denjenigen Kurvenstücken $v = \text{const}$, die von dem Nullpunkte in Ω aus nach der nämlichen Richtung hin laufen, immer je zwei auf einen jener $2p$ Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{2p}$ treffen und daß durch diese $4p$ Kurvenstücke $v = \text{const}$ die Riemannsche Fläche Ω in eine einfachzusammenhängende Fläche zerschnitten wird. Diese Fläche wird dem Theorem entsprechend auf die mit p Schlitzquadrupeln versehene uv-Ebene abgebildet, wobei jedes Quadrupel aus zwei Schlitzpaaren besteht, die in der durch die Figur ($p = 2$) bezeichneten Weise untereinander zusammenhängen. Es sei noch bemerkt, daß jedesmal einem Ufer der beiden in demselben Punkte P_s auf Ω endigenden Schnitte $v = \text{const}$ die beiden Ufer eines Schlitzes des betreffenden Schlitzpaares entsprechen.

Das eben gewonnene Schlitzsystem ist offenbar durch die Endpunkte der Schlitze in der uv-Ebene bestimmt und hängt demnach von $6p$ Konstanten ab. Berücksichtigen wir nun, daß in der gegebenen Riemannschen Fläche Ω noch der Nullpunkt des Koordinatensystems x, y und die Richtung der x-Achse zu wählen freisteht und uns demnach noch 3 Konstanten zur Konstruktion der Funktion $f(z)$ zur Verfügung stehen, daß ferner mit $f(z)$ offenbar zugleich auch die Funktion

$$af(z) + b + ci$$

mit den 3 weiteren reellen Konstanten a, b, c die Abbildung auf die mit einem Schlitzsystem der in Rede stehenden Art versehene

$(p = 2)$



Figur 3.

uv-Ebene vermittelt, so erkennen wir, daß es für eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht p noch eine 6-parametrige Schaar von Abbildungen auf Schlitzebenen von obiger Art gibt. Wird nun $p > 1$ vorausgesetzt, so ist eine kontinuirliche Schar konformer Abbildungen der Riemannschen Fläche in sich nicht möglich und daher müssen dann die erhaltenen Schlitzebenen ebenfalls genau eine 6-fache Schaar bilden; da aber, wie wir sahen die Schaar aller Schlitzebenen obiger Art eine $6p$-fache ist, so findet sich damit die bekannte Tatsache bestätigt, daß die Zahl der reellen Moduln einer algebraischen Funktion vom Geschlecht p, für $p > 1$ genau $6p - 6$ beträgt.

Drittes Beispiel. Es sei eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht p mit p getrennten, die Fläche nicht zerstückelnden Rückkehrschnitten vorgelegt. Ueber dieser Fläche denken wir uns unendlichviele Exemplare kongruenter Flächen aufgelagert, dann jedes Ufer der p Rückkehrschnitte stets mit dem gegenüberliegenden Ufer des entsprechenden Rückkehrschnittes je eines neuen Exemplares zusammengeheftet und dies Verfahren auch für die sämtlichen Ufer der Rückkehrschnitte der neu angehefteten Exemplare unbegrenzt fortgesetzt. Das so entstehende Gebiet Ω besitzt die Eigenschaft, daß innerhalb desselben jeder in sich zurückkehrende Schnitt das Gebiet zerstückelt, und daher ist Ω nach meinem Theorem auf die einfache uv-Ebene abbildbar, deren Schlitze sämtlich von endlicher Länge sind und eine abgeschlossene, aber dennoch nirgends dichte d. h. eine diskrete Menge bilden. In der Tat hat P. Koebe — zum Zweck des Beweises eines grundlegenden zuerst von F. Klein aufgestellten Satzes über die Existenz gewisser die algebraischen Kurven uniformisierenden automorphen Funktionen mit imaginären Transformationen — gezeigt, daß das in Rede stehende Gebiet Ω auf die schlichte Ebene abbildbar ist, wobei als Begrenzung eine Menge von nicht abzählbar unendlich vielen diskreten Punkten auftritt; darnach reduzieren sich die Schlitze meines Theorems im gegenwärtigen Beispiel sämtlich auf Punkte.