SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Ph...

Jahr: 1911

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN252457811_1911

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN252457811_1911|LOG_0023

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Ueber die asymptotische Verteilung der Eigenwerte.

Von

Hermann Weyl, Göttingen.

Vorgelegt durch Herrn D. Hilbert in der Sitzung vom 25. Februar 1911.

Im folgenden teile ich einige einfache Sätze über die Eigenwerte von Integralgleichungen mit, welche namentlich deren asymptotische Verteilung betreffen. Die Anwendung der gewonnenen Resultate auf die Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ (Satz X) liefert insbesondere die Lösung eines Problems, auf dessen Wichtigkeit neuerdings A. Sommerfeld (auf der Naturforscherversammlung zu Königsberg[1]) und H. A. Lorentz (in seinen hier in Göttingen zu Beginn dieses Semesters gehaltenen Vorträgen[2]) nachdrücklich hingewiesen haben.

Die Eigenwerte eines symmetrischen Kernes $K(s, t)$ — nur um solche Kerne handelt es sich im folgenden — bezeichne ich, indem ich sie nach der Größe ihres absoluten Betrages anordne, mit $\frac{1}{\varkappa}, \frac{1}{\varkappa_2}, \ldots$; in dieser Reihe soll natürlich jeder Eigenwert so oft vertreten sein, als seine Vielfachheit angibt. Die reziproken positiven Eigenwerte, gleichfalls nach ihrer Größe angeordnet, heißen $\overset{+}{\varkappa}_1, \overset{+}{\varkappa}_2, \cdots$, die negativen $\overset{-}{\varkappa}_1, \overset{-}{\varkappa}_2, \cdots$. In entsprechender Weise verwende ich $\varkappa'$, $\varkappa''$ u. s. w. zur Bezeichnung der reziproken Eigenwerte anderer Kerne K', K'' u. s. w.

Meine Untersuchungen basieren auf dem folgenden

---

1) Physikalische Zeitschrift, Bd. XI (1910), S. 1061.

2) Physikalische Zeitschrift, Bd. XI (1910), S. 1248.

Satz I. Ist $K(s,t)$ $[0 \leqq s, t \leqq 1]$ *ein quadratisch integrierbarer*[1]*, symmetrischer Kern und* $k_n(s,t)$ *irgendeine bilineare symmetrische Kombination*

$$\sum_{p,q=1}^{n} k_{pq} \Phi_p(s) \Phi_q(t) \qquad (k_{pq} = k_{qp})$$

aus n beliebigen quadratisch integrierbaren Funktionen $\Phi_p(s)$*, so ist der erste positive Eigenwert von* $K(s,t) - k_n(s,t)$ *nicht größer als der* $(n+1)^{te}$ *positive Eigenwert von* $K(s,t)$.

Da der Beweis dieses Satzes äußerst einfach ist, gebe ich ihn kurz an. $\overset{+}{\varphi}_1(s)$, $\overset{+}{\varphi}_2(s)$, ... mögen die zu $\overset{+}{\varkappa}_1$, $\overset{+}{\varkappa}_2$, ... gehörigen (normierten) Eigenfunktionen sein. Da der Ausdruck

$$\int_0^1 k_n(s,t)\, x(t)\, dt$$

nur n linear unabhängige Funktionen darzustellen vermag, geht die quadratische Integralform

$$k_n\langle x\rangle = \int_0^1\int_0^1 k_n(s,t)\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt$$

offenbar dadurch, daß wir

$$x(s) = x_1 \overset{+}{\varphi}_1(s) + x_2 \overset{+}{\varphi}_2(s) + \cdots + x_{n+1} \overset{+}{\varphi}_{n+1}(s)$$

setzen, in eine quadratische Form der $n+1$ Variablen $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ über, *deren Determinante* $= 0$ *ist*. Infolgedessen können wir Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ $(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1)$ so wählen, daß sie der Gleichung $k_n\langle x\rangle = 0$ Genüge leisten. Dann gilt

$$\int_0^1\int_0^1 \{K(s,t) - k_n(s,t)\}\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt = \int_0^1\int_0^1 K(s,t)\, x(s)\, x(t)\, ds\, dt$$

$$= \overset{+}{\varkappa}_1 x_1^2 + \overset{+}{\varkappa}_2 x_2^2 + \cdots + \overset{+}{\varkappa}_{n+1} x_{n+1}^2 \geqq \overset{+}{\varkappa}_{n+1}.$$

Daß es eine dieser Ungleichung genügende Funktion $x(s)$ gibt, deren Quadratintegral $= 1$ ist, beweist unsern Satz.

Aus I folgen unmittelbar die folgenden Sätze, von denen II

---

1) D. h. $\int_0^1\int_0^1 (K(s,t))^2\, ds\, dt$ soll konvergieren. Die Voraussetzung der Stetigkeit erweist sich oft als zu eng.

eine Verallgemeinerung von I, III wiederum eine Verallgemeinerung von II vorstellt.

Satz II. Der m^{te} positive Eigenwert von $K(s,t)-k_n(s,t)$ ist nicht größer als der $(n+m)^{te}$ positive Eigenwert von $K(s,t)$.

Satz III. Entsteht der Kern K durch Summation aus zwei Kernen K', K'', so ist

$$\overset{+}{\varkappa}_{m+n-1} \leqq \overset{+}{\varkappa}'_m + \overset{+}{\varkappa}''_n.$$

Satz IV. Lassen wir unter Festhaltung des Kernes $K(s,t)$ das zugrunde gelegte Intervall, das bisher $0 \leqq s \leqq 1$ war, sich zusammenziehen, so wächst der n^{te} positive Eigenwert (stetig und) monoton, während der n^{te} negative Eigenwert (stetig und) monoton abnimmt.

Die Eigenwerte λ fliehen also vom Punkte $\lambda = 0$ fort. Jeder einzelne Eigenwert konvergiert natürlich bei unbegrenzt abnehmendem Intervall gegen $\pm\infty$.

Hier ist ein spezielles Ergebnis, das der Satz III liefert und von dem wir im folgenden Gebrauch machen werden:

Satz V. Ist die asymptotische Verteilung der positiven Eigenwerte von K' durch $\lim\limits_{n=\infty} \overset{+}{n\varkappa}'_n = 1$ gegeben und gilt für die positiven und negativen Eigenwerte von K'' das Gesetz $\lim\limits_{n=\infty} \overset{\pm}{n\varkappa}''_n = 0$, so ist die asymptotische Verteilung der positiven Eigenwerte von $K = K' + K''$ dieselbe wie bei K': $\lim\limits_{n=\infty} \overset{+}{n\varkappa}_n = 1$.

Zur Untersuchung partieller Diffenentialgleichungen benötigen wir noch einen Satz, der erkennen läßt, wie die Eigenwerte von $K(s,t)$ sich ändern, wenn wir diesen Kern mit $p(s)\,p(t)$ multiplizieren, wo $p(s)$ eine stetige, im ganzen Intervall $0 \leqq s \leqq 1$ wenig von 1 abweichende Funktion bedeutet. Darüber gibt I das folgende Resultat:

Satz VI. Für den Kern $K'(s,t) = K(s,t)\,p(s)\,p(t)$ gelten, falls $|p(s)-1| \leqq \varepsilon$ ist ($\varepsilon < 1$), die Ungleichungen

$$\overset{+}{\varkappa}_n (1-\varepsilon)^2 \leqq \overset{+}{\varkappa}'_n \leqq \overset{+}{\varkappa}_n (1+\varepsilon)^2.$$

Ich nehme die Bezeichnungen von Satz I wieder auf und setze $K^* = K(s,t) - k_n(s,t)$. Bedeutet l den Trägheitsindex der quadratischen Form mit den Koeffizienten k_{pq}, so finden wir durch Anwendung von Satz III (und des analogen, für die negativen Eigenwerte gültigen Satzes) auf $K' = K^*$, $K'' = k_n$:

$$\overset{+}{\varkappa}^*_1 \geqq \overset{+}{\varkappa}_{l+1}, \quad |\overset{-}{\varkappa}^*_1| \geqq |\overset{-}{\varkappa}_{n-l+1}|.$$

Aus diesen Ungleichungen, die eine Verschärfung von Satz I bedeuten, folgt offenbar

$$|\varkappa_1^*| \geqq |\varkappa_{n+1}|,$$

und daraus wiederum das allgemeinere, zu ähnlichen Konsequenzen wie I und II Anlaß gebende Resultat:

Satz VII. Der absolute Betrag des m^{ten} Eigenwertes von $K-k_n$ ist nicht größer als der absolute Betrag des $(n+m)^{ten}$ von K.

Durch Bildung der Quadratsummen erhalten wir hieraus den schon von Herrn E. Schmidt[1]) auf anderem Wege bewiesenen

Satz VIII:

$$\int_0^1\int_0^1 \{K(s,t)-k_n(s,t)\}^2\,ds\,dt \geqq \varkappa_{n+1}^2 + \varkappa_{n+2}^2 + \cdots$$

Von dem Schmidt'schen Satze werden wir in folgender Weise Gebrauch machen. Man teile das Quadrat $0 \leqq s, t \leqq 1$ durch Parallele zu den Seiten in n^2 gleiche Quadrate. Ist $K(s,t)$ beispielsweise stetig differenzierbar, so entwickle man $K(s,t)$ im Bereiche jedes dieser kleinen Quadrate nach Taylor (d. h. nach Potenzen von $s-s_0$, $t-t_0$, wenn s_0, t_0 der Mittelpunkt des betreffenden kleinen Quadrates ist), wobei wir die Entwicklung freilich schon mit den linearen Gliedern abbrechen. Wir haben dann den Kern $K(s,t)$ durch bilineare Kombination der $2n$ Funktionen

$$\Phi_h(s) = \begin{cases} 1 \text{ für } \frac{h}{n} \leqq s \leqq \frac{h+1}{n} \\ 0 \text{ für alle andern } s, \end{cases} \qquad \Phi_{n+h}(s) = \begin{cases} s \text{ für } \frac{h}{n} \leqq s \leqq \frac{h+1}{n} \\ 0 \text{ für alle andern } s \end{cases}$$

$$(h = 0, 1, \ldots, n-1)$$

so weit angenähert, daß das Quadratintegral des Fehlers

$$= \frac{2}{n^2}\left(\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0\right)$$

wird. Und das wäre nach dem Schmidt'schen Satze ausgeschlossen, wenn nicht

$$\lim_{n=\infty} n^{3/2}\varkappa_n = 0$$

wäre.

Diese Betrachtungen übertragen sich natürlich alle von dem

1) Mathematische Annalen, Bd. 63 (1907), S. 467 ff.

eindimensionalen Fall auf den zweidimensionalen, in welchem anstelle jeder der Variablen s, t ein Variablenpaar tritt und anstelle des Intervalls $0 \leqq s \leqq 1$ irgendein endliches zweidimensionales Gebiet. Wir erhalten dann den

Satz IX. Für die asymptotische Verteilung der Eigenwerte eines h mal stetig differenzierbaren Kerns gelten, je nachdem wir es mit dem eindimensionalen oder dem zweidimensionalen Fall zu tun haben, die Gesetze:

$$\lim_{n=\infty} n^{h+\frac{1}{2}} \varkappa_n = 0, \quad \text{bezw.} \lim_{n=\infty} n^{h/2+1/2} . \varkappa_n = 0.$$

Um etwas über die Eigenwerte zu erfahren, kann man auch von der Fredholmschen Determinante $D(\lambda)$ Gebrauch machen, die diese Eigenwerte zu Nullstellen hat. Durch eine einfache direkte Abschätzung der Koeffizienten der Potenzentwicklung von $D(\lambda)$ findet man beispielsweise, daß $D(\lambda)$ im Falle eines stetig differenzierbaren Kernes $K(s,t)$ höchstens von der „Ordnung“ $2/3$ ist[1]). Hinsichtlich der Verteilung der Eigenwerte folgt daraus nach allgemeinen Sätzen von Hadamard über ganze transzendente Funktionen nur die Konvergenz der Reihe $\sum_{(n)} |\varkappa_n|^{2/3+\varepsilon}$ für jedes positive ε. Es ist aber für uns von ausschlaggebender Wichtigkeit, daß sich diese Aussage zu der in Satz IX enthaltenen verschärfen läßt.

Schließlich komme ich zu dem in der Einleitung in Aussicht gestellten, die Eigenwerte der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ betreffenden Satze. Ich formuliere das Resultat lediglich für den zweidimensionalen Fall $\left(\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$, wiewohl die Methode ohne weiteres auch für jede höhere Dimensionszahl zum Ziele führt.

Satz X. Die zu einem beliebigen Gebiet J vom Flächeninhalte J und zu der Randbedingung $u = 0$ gehörigen Eigenwerte λ_n der Differentialgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ erfüllen, wenn man sie ihrer Größe nach anordnet, die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \frac{n}{\lambda_n} = \frac{J}{4\pi}. \tag{1}$$

Ich deute den Gang des Beweises kurz an. Die Greensche Funktion von Δu, zu der die λ_n als Eigenwerte gehören, hat die Form

1) Vergl. T. Lalesco, Comptes Rendus 145 (25 nov. 1907), pag. 906/07.

$$G(xy\,\xi\eta) = \lg\frac{1}{r} + A(xy\,\xi\eta) \quad [r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}],$$

und dabei ist A stetig und stetig differenzierbar. Infolgedessen konvergiert nach IX das Produkt des reziproken n^{ten} Eigenwerts von A in die Ordnungszahl n mit wachsendem n gegen Null, und es genügt daher nach V, den Beweis von (1), statt für die Greensche Funktion, für $\lg\frac{1}{r}$ zu erbringen. Dieser Schluß bedarf freilich noch einer Ergänzung, da A und umsomehr die 1. Differentialquotienten von A keineswegs (wie das bei direkter Anwendung des Satzes IX der Fall sein müßte) endlich bleiben, wenn (xy), $(\xi\eta)$ gegen denselben Randpunkt des Bereiches J streben. Diese vom Rande herrührende Schwierigkeit läßt sich durch einen einfachen Kunstgriff (dadurch, daß man gewisse, der Potentialtheorie im 4dimensionalen Raum entspringende Ungleichungen anwendet) beseitigen, falls die Konvergenz des Integrals

$$\int_J\int\int_J\int\left\{\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\partial \eta}\right)^2\right\}d\xi\,d\eta\,.\,dx\,dy$$

sicher gestellt werden kann. Es heißt nur, den Wert dieses Integrals halbieren, wenn wir in der Quadratsumme unter dem Integralzeichen die Glieder $\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2$ streichen. Führen wir dann zunächst die innere Integration nach $\xi\eta$ aus, so kommt, wenn ds das Bogendifferential der Randkurve C und $\frac{\partial}{\partial n}$ die normale Ableitung am Rande bedeutet,

$$\int_J\int\left\{\left(\frac{\partial A}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial A}{\partial \eta}\right)^2\right\}d\xi\,d\eta = -\int_C A\frac{\partial A}{\partial n}\,ds = -\int_C \lg r\,\frac{\partial A}{\partial n}\,ds$$

$$= -\int_C \lg r\,\frac{\partial \lg r}{\partial n}\,ds - \int_C \lg r\,\frac{\partial G}{\partial n}\,ds. \tag{2}$$

Indem wir bedenken, daß $\frac{\partial G}{\partial n} > 0$ und $\int_C \frac{\partial G}{\partial n}\,ds = 2\pi$ ist, erhalten wir hieraus für den Wert des Integrals (2) eine obere Grenze von der Form

$$M\,.\,(\lg\varrho)^2,$$

wo M eine nur von der Randkurve, nicht von der Lage des inneren

Punktes xy abhängige Konstante bedeutet und ϱ der kürzeste Abstand des Punktes xy vom Rande ist. Da aber das Integral $\iint_J (\lg \varrho)^2 \, dxdy$ natürlich konvergiert, ist der zu Beginn des Beweises gezogene Schluß gerechtfertigt.

Indem wir nunmehr auf $\lg \frac{1}{r}$ Satz IV anwenden, erkennen wir, daß wir statt des beliebigen Bereiches J einen solchen nehmen können, der aus endlichvielen (N) kongruenten Quadraten $\mathfrak{q}$ von der Seitenlänge a besteht. Wir spalten jetzt wiederum $\lg \frac{1}{r}$ in zwei Teile:

$$\lg \frac{1}{r} = H + R;$$

$H(xy\,\xi\eta)$ stimmt mit $\lg \frac{1}{r}$ überein, falls (xy), $(\xi\eta)$ beide in *demselben* der Quadrate $\mathfrak{q}$ liegen; falls aber diese Punkte in verschiedenen Quadraten $\mathfrak{q}$ gelegen sind, nehmen wir $H = 0$. Von R beweisen wir nach derselben Methode wie soeben von A, daß es die asymptotische Verteilung der Eigenwerte nicht beeinflußt. Die Eigenwerte von H sind aber die nämlichen wie die Eigenwerte von $\lg \frac{1}{r}$ in einem einzelnen Quadrat $\mathfrak{q}$; nur daß, was hier ein 1-facher, dort ein N facher, was hier ein 2 facher, dort ein 2N facher (u. s. f.) Eigenwert wird. Also brauchen wir die Formel (1) nur für die zu dem Kern

$$\lg \frac{1}{r} \left(0 \leqq \begin{matrix} x, y \\ \xi, \eta \end{matrix} \leqq a \right)$$

gehörigen Eigenwerte zu beweisen. Hier aber darf, wenn wir den zu Beginn auseinandergesetzten Schluß statt auf J auf das einzelne Quadrat $\mathfrak{q}$ anwenden, $\lg \frac{1}{r}$ rückwärts wieder durch die zu dem Quadrat $0 \leqq x, y \leqq a$ gehörige Greensche Funktion ersetzt werden, deren Eigenwerte

$$\frac{\pi^2}{a^2}(m^2 + n^2) \qquad [m, n \text{ ganz und positiv}]$$

wirklich der Limesgleichung (1) [mit $J = a^2$] genügen. Indem wir, von dieser elementaren (zahlentheoretischen) Tatsache ausgehend, die einzelnen Gedankenschritte rückwärts durchlaufen, erhalten wir einen synthetischen Beweis des allgemeinen Satzes X.

Ich habe mich auch mit der Frage beschäftigt, wie rasch das Verhältnis $\frac{n}{\lambda_n}$ gegen seinen Grenzwert $\frac{J}{4\pi}$ konvergiert.

Ferner läßt sich die gleiche Methode auf die allgemeinere Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right)-qu+\lambda ku = 0 \tag{3}$$

übertragen, in der p, q, k in J (einschließlich des Randes) stetige Funktionen von xy sind und p und k überall positiv bleiben. Die neue Schwierigkeit, welche durch die Variabilität der Koeffizienten p, q, k hineinkommt, läßt sich mit Hülfe des Satzes VI leicht überwinden. Das Ergebnis lautet:

Satz XI. Die zu einem beliebigen Gebiet J gehörigen Eigenwerte λ_n der sich selbst adjungierten Differentialgleichung (3) *vom elliptischen Typus wachsen so ins Unendliche, daß*

$$\lim_{n=\infty}\frac{4\pi n}{\lambda_n} = \int\int_J \frac{k(xy)}{p(xy)}\,dxdy$$

wird.

Eine ausführlichere Darstellung dieser Untersuchungen werde ich in den Mathematischen Annalen veröffentlichen.

Göttingen, den 20. Februar 1911.