

Werk

Titel: Mathematische Zeitschrift

Ort: Berlin

Jahr: 1920

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN266833020_0006

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN266833020_0006

LOG Id: LOG_0008

LOG Titel: Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. (Zweite Mitteilung.)

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN266833020

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN266833020>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen.

(Zweite Mitteilung.)

Von

E. Hecke in Hamburg.

In einer ersten Mitteilung gleichen Titels in Bd. 1 dieser Zeitschrift habe ich gezeigt, wie in jedem algebraischen Zahlkörper, der unendlich viele Einheiten enthält, sich außer den bekannten Zetafunktionen noch unendlich viele andere definieren lassen, welche alle auch eine Produktdarstellung zulassen. Sie liefern neue Sätze über die Verteilung der Primzahlen in Körpern bzw. den Formen n -ten Grades.

Wenn der betrachtete Körper nebst allen Konjugierten reell ist, erschöpfen die dort definierten Zetafunktionen im wesentlichen alle dieser Art. Für andere Körper dagegen, z. B. für imaginäre quadratische Körper, bedarf das dort zugrunde liegende Bildungsprinzip noch einer Verallgemeinerung, wie ich in der Einleitung schon andeutete. Auf diese Art entsteht dann für jeden Körper n -ten Grades eine Schar von Zetafunktionen

$$\zeta(s; \lambda) = \sum_{\alpha} \frac{\lambda(\alpha)}{N(\alpha)^s},$$

worin die Koeffizienten $\lambda(\alpha)$ Funktionen des Ideals α sind, welche von $n - 1$ ganzzahligen Parametern abhängen, nicht nur von $r = r_1 + r_2 - 1$ Parametern, wie in der früheren Arbeit.

Die bisher bekannten Sätze über Verteilung der Primideale oder überhaupt der Ideale oder Zahlen in algebraischen Körpern faßten nur eine Anordnung nach wachsender Norm ins Auge, also eine eindimensionale, während die Menge der Zahlen eines Körpers n -ten Grades ihrer Herkunft nach richtiger auf einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit verteilt werden mußte. Diese „analytische Zahlentheorie in n Dimensionen“ wird nun in der Tat durch die $\zeta(s; \lambda)$ möglich. Man kann sie, wenn man an die Kleinsche Definition der Geometrien denkt, geradezu als die Invarianten-

theorie einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit gegenüber einer unendlichen diskontinuierlichen (Abelschen) Gruppe kennzeichnen, welche durch die Einheiten des Körpers bestimmt wird. Von dieser Mannigfaltigkeit interessiert sodann die diskrete Teilmannigfaltigkeit, welche den algebraischen Zahlen des Körpers entspricht.

Um den Charakter der Sätze anzudeuten, welche sich so für die Verteilung der Primzahlen ergeben, führe ich als Beispiel an: Jede der Formen $x^2 + y^2$ oder $x^2 - 2y^2$ stellt unendlich viele Primzahlen dar, wenn man die ganzzahligen Variablen x, y auf einen beliebigen Winkelraum einschränkt, der durch zwei vom Nullpunkt ausgehende Halbstrahlen begrenzt wird. Überdies ist die Anzahl dieser Primzahlen unterhalb t asymptotisch proportional der Größe dieses Winkels, gemessen in einer auf die betreffende Form gegründeten Klein-Cayleyschen Maßbestimmung. Dieses asymptotische Gesetz zu beweisen, war mir früher auch nicht für die indefinite Form $x^2 - 2y^2$ gelungen; ich habe erst jetzt einen überraschend einfachen Beweis gefunden (§ 7), indem ich der Frage eine andere Wendung gab.

Die Funktionen λ setzen sich im allgemeinen aus zwei Bestandteilen zusammen, welche einzeln bei den quadratischen Körpern vorkommen. Für Hauptideale (α) , d. h. für Körperzahlen α , haben sie folgenden Bau:

1. Im reellen quadratischen Körper mit der Grundeinheit ε :

$$\lambda(\alpha) = \exp \left\{ \frac{\pi i}{\log |\varepsilon|} \log \left| \frac{\alpha}{\varepsilon'} \right| \right\} \quad (\exp x = e^x).$$

2. Im imaginären quadratischen Körper mit der Diskriminante $-d$ ($d > 4$):

$$\lambda(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{|\alpha|} \right)^2.$$

Beide Funktionen hängen nur von dem Ideale (α) ab, d. h. sie haben für assoziierte Zahlen den gleichen Wert; und es gilt die Produktregel

$$\lambda(\alpha \cdot \beta) = \lambda(\alpha) \cdot \lambda(\beta).$$

Im § 1 dieser Arbeit gebe ich nun die allgemeinste Bestimmung der Funktionen λ , welche gewissen zwei Bedingungen genügen. Hat man einmal diesen Ansatz, so ist die weitere Entwicklung (Aufstellung der $\zeta(s; \lambda)$, Zusammenhang mit den Thetafunktionen, Funktionalgleichung) fast von selbst gegeben. Die wirkliche Durchführung verlangt allerdings ziemlich erhebliche Rechnungen. Ich habe nun versucht, hier durch eine methodische Neuerung etwas mehr Durchsichtigkeit zu schaffen. Der Zahlkörper k wird in § 2 nämlich *erweitert zu dem Bereich idealer Zahlen*, der sich durch Multiplikation und Division reproduziert, und worin jedes Ideal ein Hauptideal ist. Die Möglichkeit, eine solche Erweiterung vornehmen zu können, dürfte jedem Zahlentheoretiker bekannt sein; trotzdem

hat sich bisher kein Anlaß ergeben, davon Gebrauch zu machen. Hier ist ein solcher vorhanden; die Formeln und die Ausdrucksweise vereinfachen sich wesentlich, wenn man in der Lage ist, jedes Ideal durch eine wirkliche algebraische Zahl repräsentieren zu können. Charakteristisch für diese Untersuchung ist gerade, daß die Ideale nicht als Systeme von Zahlen, wie bei Dedekind, auftreten, sondern als wirkliche Zahlindividuen, die allerdings höheren Körpern angehören, denen aber jedenfalls eine Größe zukommt. Mit Rücksicht darauf habe ich die Funktionen $\lambda(\alpha)$ als „Größencharaktere“ von α bezeichnet und den weniger passenden Namen „Charaktere nach den Einheiten“ aus der ersten Arbeit fallen gelassen; § 3 enthält die Bestimmung aller Größencharaktere für Ideale. Im § 4 bringe ich die schon mehrfach behandelte Theorie der Restklassencharaktere und gewisser, den Gaußschen analogen Summen, welche damit zusammenhängen. Diese Sätze vereinfachen sich bei Benutzung der idealen Zahlen, ebenso wie § 5, worin die fundamentale Transformationsformel der Thetafunktionen, die in den früheren Untersuchungen die Hauptsache war, erheblich verallgemeinert wird; § 6 endlich enthält die Darstellung der Zeta durch die Thetafunktionen und ihre Funktionalgleichung. Ich erwähne noch, daß die analogen Sätze für alle früheren Zeta- und L-Funktionen, auch die für den engsten Äquivalenzbegriff, wo Herr Landau die Rechnung durchgeführt hat, in diesem § 6 miterledigt werden.

Etwas Neues enthält § 7, wo ich durch Kombination der bekannten Methoden mit einem Satze von H. Weyl über Gleichverteilung von Zahlen mod 1 den oben erwähnten Satz über die asymptotische Verteilung von Primzahlen für einen beliebigen Körper beweise. In den folgenden Paragraphen ist dann nur von quadratischen Körpern die Rede. Im § 8 handelt es sich um die Zahlen, welche durch eine binäre Linearform des Körpers oder des Bereiches idealer Zahlen dargestellt werden, sowie um den Zusammenhang zwischen diesen und den quadratischen Formen; § 9 spezialisiert alle Resultate für den imaginären quadratischen Körper bzw. definite Formen, § 10 für den reellen quadratischen Körper und die indefiniten Formen.

§ 1.

Größencharaktere einer Zahl mod $\mathfrak{f}$.

Es bedeute $\mathfrak{f}$ ein ganzes von Null verschiedenes Ideal des Körpers k . Die Gesamtheit derjenigen Einheiten von k , welche

total positiv und kongruent 1 mod $\mathfrak{f}$

sind, lassen sich auf Grund der allgemeinen Theorie der Einheiten durch $r = r_1 + r_2 - 1$ „Grundeinheiten mod $\mathfrak{f}$ “ $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ und erforderlichenfalls noch einer Einheitswurzel ξ in der Form

$$(1) \quad \eta = \xi^a \eta_1^{n_1} \eta_2^{n_2} \dots \eta_r^{n_r}$$

darstellen, wo $n_1, \dots, n_r$ sämtliche ganzen rationalen Zahlen, a dagegen die Zahlen $0, 1, \dots, g-1$ ($\xi^g = 1$) durchlaufen. Ein solches System $\eta_1, \dots, \eta_r$ heiße ein System von *Grundeinheiten mod f*, die Zahlen (1) kurz *Einheiten mod f*. Beliebige Einheiten von k sollen immer mit ε bezeichnet werden. Einheiten mod 1 heißen demzufolge die total positiven Einheiten.

Wir ordnen jetzt jedem der konjugierten Körper $k^{(p)}$ eine Variable x_p zu, mit der Einschränkung

$$x_p > 0, \quad (p = 1, 2, \dots, r_1)$$

$$0 \neq x_{p+r_2} \text{ konjugiert imaginär mit } x_p. \quad (p = r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2)$$

(Die konjugiert imaginäre Zahl zu einer Zahl x soll mit $\bar{x}$ bezeichnet werden.) Nunmehr fragen wir nach der allgemeinsten für diese Argumente *stetigen* Funktion F , welche folgende beide Eigenschaften hat:

1. $F(x_1, x_2, \dots) F(y_1, y_2, \dots) = F(x_1 y_1, x_2 y_2, \dots)$,
2. $F(\eta^{(1)} x_1, \eta^{(2)} x_2, \dots) = F(x_1, x_2, \dots)$ für jede Einheit η mod f .

Gibt es außer 1 keine Einheit mod f , was nur in imaginär quadratischen Körpern zutreffen kann, so wird die zweite Forderung inhaltlos.

Als allgemeinste stetige Lösung von 1. ergibt sich bekanntlich

$$F = \prod_{p=1}^{r+1} |x_p|^{s_p} \prod_{p=r_1+1}^n \left(\frac{x_p}{|x_p|} \right)^{a_p},$$

wo $s_1, s_2, \dots, s_{r+1}$ willkürlich reell oder komplex, die a dagegen ganze rationale Zahlen. Vermehren wir zwei Exponenten a_p , deren Indizes konjugiert imaginären Körpern entsprechen, gleichzeitig um dieselbe Zahl c , so bleibt F unverändert. Wir verabreden nun folgende eindeutige Wahl der a_p :

$$a_p \geq 0,$$

$$a_p a_{p+r_2} = 0. \quad (p = r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2)$$

D. h. von zwei konjugiert imaginären Faktoren $\frac{x_p}{|x_p|}$ tritt in F stets nur einer auf, und zwar mit positivem ganzem Exponenten.

Um die Forderung 2. zu erfüllen, gehen wir von den x zu den Logarithmen über und führen das mit Hilfe der Einheiten $\eta_1, \dots, \eta_r$ gebildete Schema $e_p, e_p^{(q)}$ ein (wie in § 1 der ersten Mitteilung), definiert durch die Gleichungen

$$\frac{e_q}{n} + \sum_{k=1}^r e_q^{(k)} \log |\eta_k^{(p)}| = \delta_{pq}, \quad (p, q = 1, 2, \dots, r+1)$$

oder auch durch

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{q=1}^{r+1} e_q &= 1, & \sum_{q=1}^{r+1} e_q^{(p)} &= 0, \\ & & (p = 1, 2, \dots, r) \\ \sum_{q=1}^{r+1} e_q \log |\eta_p^{(q)}| &= 0, \\ \sum_{p=1}^{r+1} e_p^{(q)} \log |\eta_k^{(p)}| &= \delta_{kq}. & (k, q = 1, 2, \dots, r) \end{aligned}$$

Falls $r_2 > 0$, brauchen wir aber jetzt auch noch die Amplituden der η . Wir setzen

$$\eta_k^{(p)} = |\eta_k^{(p)}| e^{i\vartheta_k^{(p)}} \quad (k = 1, \dots, r, \quad p = 1, 2, \dots, n)$$

mit den Bestimmungen

$$\vartheta_k^{(p)} = 0 \quad \text{für } p = 1, 2, \dots, r_1,$$

$$\vartheta_k^{(p)} = -\vartheta_k^{(p+r_2)} \quad \text{für } p = r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2.$$

Die Vielfachen von 2π , welche alsdann noch in den ϑ unbestimmt bleiben, wählen wir beliebig, aber fest. Durch Einführung von

$$N(x) = x_1 x_2 \dots x_n, \quad (N(x) > 0)$$

$$c_q(x) = \sum_{p=1}^{r+1} e_p^{(q)} \log |x_p| \quad (q = 1, \dots, r)$$

verwandelt sich F unter Abänderung der Bedeutung der s in

$$F = N(x)^s \prod_{q=1}^r e^{s_q c_q(x)} \prod_{p=r_1+1}^n \left(\frac{x_p}{|x_p|} \right)^{a_p}.$$

Damit dann

$$F(\eta_k x) = F(x),$$

ist notwendig und hinreichend, daß

$$s_k + i \sum_{p=r_1+1}^n a_p \vartheta_k^{(p)} = 2\pi i m_k,$$

wo m_k eine ganze rationale Zahl. Falls noch eine Einheitswurzel $\xi \bmod f$ existiert, müssen überdies, wenn

$$F(\xi x) = F(x),$$

die a nach einer gewissen Kongruenz

$$(2) \quad \sum_{p=r_1+1}^n A_p a_p \equiv 0 \pmod{g}$$

genügen, deren Koeffizienten A ganze rationale, nur vom Körper abhängige Zahlen (übrigens zu g prim) sind.

Somit folgt als allgemeinste Lösung von 1. und 2.:

$$F(x) = N(x)^s \prod_{q=1}^r e^{2\pi i m_q c_q(x)} \cdot \prod_{p=r_1+1}^n \left(\frac{x_p}{|x_p|} e^{i \sum_{k=1}^r \phi_k^{(p)} c_k(x)} \right)^{a_p},$$

wo

$$(2a) \quad \left\{ \begin{array}{l} s \text{ beliebig komplex,} \\ m_1, \dots, m_r \text{ beliebig ganz rational,} \\ a_{r_1+1}, \dots, a_n \text{ ganz rational, } a_p \geq 0, \quad a_p a_{p+r_2} = 0, \\ \text{und für die } a \text{ (falls } g > 1 \text{) noch die Kongruenz (2) besteht.} \end{array} \right.$$

Wir betrachten insbesondere diejenigen dieser Funktionen, welche von $N(x)$ unabhängig sind, d. h. $s = 0$ haben. Sie sind dadurch ausgezeichnet, daß sie sich nicht ändern, wenn $x_1, x_2, \dots, x_n$ mit demselben positiven Faktor multipliziert werden. Eine jede dieser Funktionen

$$(3) \quad \lambda(x) = \prod_{q=1}^r e^{2\pi i m_q c_q(x)} \prod_{p=r_1+1}^n \left(\frac{x_p}{|x_p|} e^{i \sum_{k=1}^r \phi_k^{(p)} c_k(x)} \right)^{a_p}$$

mit den Bedingungen (2) und (2a) heiße ein *Größencharakter von $x \bmod f$* .

Die Größencharaktere $\bmod f$ bilden offenbar bei Komposition durch Multiplikation eine unendliche Abelsche Gruppe von $n - 1$ Basiselementen

$$\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_{n-1}(x),$$

welche *Grundcharaktere* $\bmod f$ heißen mögen. Durch die Werte dieser $n - 1$ Funktionen und die Angabe von $N(x)$ werden die Argumente $x_1, \dots, x_n$ bis auf eine Einheit $\bmod f$ als Faktor eindeutig festgelegt. Der in § 1 der ersten Mitteilung am Schluß angegebene Satz ist in der dortigen Formulierung nur für $r_2 = 0$ richtig.

Wir erweitern jetzt die Definition der $\lambda(x)$ auf solche Argumente, wo die ersten $x_1, \dots, x_{r_1}$ beliebig komplex (aber $\neq 0$), die übrigen aber immer noch paarweise konjugiert imaginär sind, indem wir setzen

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = \lambda(|x_1|, \dots, |x_{r_1}|, x_{r_1+1}, \dots, x_n).$$

Insbesondere treten im folgenden solche Argumente auf, welche die n Konjugierten einer Zahl μ aus k sind. Die entsprechende Funktion werde kurz $\lambda(\mu)$ geschrieben. Es ist also

$$1. \quad \lambda(\alpha) \cdot \lambda(\beta) = \lambda(\alpha\beta),$$

$$2. \quad \lambda(\eta\alpha) = \lambda(\alpha),$$

$$3. \quad |\lambda(\alpha)| = 1.$$

für irgendzwei von Null verschiedene Zahlen α, β aus k .

§ 2.

Einführung idealer Zahlen.

Um die eben eingeführten Größencharaktere auch für *Ideale* zu erklären, ist es zweckmäßig, den Bereich k zu einem solchen Zahlbereich zu erweitern, in welchem alle Ideale durch Zahlen repräsentiert werden. Die Möglichkeit einer solchen Erweiterung ist wohlbekannt und beruht im wesentlichen auf der Endlichkeit der Klassenzahl h . Man hat bisher, soviel mir bekannt, nur selten davon Gebrauch gemacht¹⁾; für den vorliegenden Zweck bedeutet aber die Einführung idealer Zahlen an Stelle der Ideale eine erhebliche Vereinfachung des Formelapparates.

Einen *Bereich idealer Zahlen zu k* — er werde durch $\mathfrak{J}$ bezeichnet — definieren wir durch folgende Postulate:

1. Wenn α und β zu $\mathfrak{J}$ gehören, dann auch $\alpha \cdot \beta$,
2. Zu jedem Ideal α aus k gibt es eine Zahl α aus $\mathfrak{J}$ derart, daß

$$\alpha = (\alpha)$$

und umgekehrt,

3. Wenn α, β zu $\mathfrak{J}$ gehören und $(\alpha) = (\beta)$, dann ist

$$\alpha = \varepsilon \beta,$$

wo ε eine *Einheit aus k* bedeutet.

Wir zeigen, daß sich stets ein solcher Bereich $\mathfrak{J}$ konstruieren läßt, und zwar nur auf endlich viele Arten. Wir betrachten zu diesem Zwecke die Gruppe der Idealklassen in k (Klasse im üblichen weitesten Sinne genommen), denken sie uns durch eine Basis dargestellt, und aus jeder Basisklasse ein Ideal $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \dots, \mathfrak{b}_e$ ausgewählt. Es läßt sich daher jedes (ganze oder gebrochene) Ideal aus k in der Form

$$(4) \quad \alpha = \varrho \mathfrak{b}_1^{a_1} \mathfrak{b}_2^{a_2} \dots \mathfrak{b}_e^{a_e}$$

darstellen, wo ϱ eine Zahl aus k ist, jeder der ganzen rationalen Exponenten $a_i \bmod h_i$ eindeutig bestimmt ist und h_i die kleinste positive ganze Zahl, wofür

$$\mathfrak{b}_i^{h_i} = (\beta_i)$$

ein Hauptideal in k , d. h. β_i eine Zahl in k ist. Offenbar ist der Bereich $\mathfrak{J}$ eindeutig bestimmt, wenn man weiß, durch welche Zahlen aus $\mathfrak{J}$ die e Ideale $\mathfrak{b}_1, \dots, \mathfrak{b}_e$ repräsentiert werden. Soll etwa $\mathfrak{b}_i$ durch $\hat{\beta}_i$ repräsentiert werden, so muß sein

$$\hat{\beta}_i^{h_i} = \varepsilon_i \beta_i,$$

¹⁾ Siehe etwa F. Klein, Zahlentheorie (autogr. Vorlesung), Göttingen 1896/97, gelegentlich der Kompositionstheorie quadratischer Formen.

wo ε_i eine Einheit in k . $\hat{\beta}_i$ und die zugehörige Reihe assoziierter Zahlen ist daher endlich-vieldeutig bestimmt. Umgekehrt, setzen wir

$$(5) \quad \hat{\beta}_i = \sqrt[h_i]{\beta_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, e)$$

wo die Wurzel irgendwie gewählt wird, so erhalten wir offenbar ein System idealer Zahlen $\mathfrak{B}$ zu k in der Form

$$\varrho \hat{\beta}_1^{a_1} \hat{\beta}_2^{a_2} \dots \hat{\beta}_e^{a_e},$$

worin ϱ alle ganzen und gebrochenen Zahlen aus k , die $a_1, \dots, a_e$ alle ganzen rationalen Zahlen bzw. mod $h_1, h_2, \dots, h_e$ durchlaufen.

Der Bereich $\mathfrak{B}$ ist eine Zahlgruppe im Sinne von H. Weber (Zahlstrahl nach Herrn Fueter), unterscheidet sich aber von den sonst betrachteten Zahlgruppen dadurch, daß er den Körper k enthält.

Offenbar kann $\mathfrak{B}$ auch definiert werden als ein kleinster Bereich, der k enthält, in dem außer Multiplikation und Division die Operation des größten-gemeinsamen-Teiler-Bildens unbeschränkt ausführbar ist, mit der Nebenbedingung, daß alle in ihm enthaltenen Einheiten zu k gehören.

Wir verabreden nach Definition der $\hat{\beta}_i$ aus (5) gleichzeitig die Definition von n Konjugierten

$$\hat{\beta}_i^{(p)} = \sqrt[h_i]{\beta_i^{(p)}}, \quad (p = 1, 2, \dots, n)$$

indem wir die Wurzeln aus den konjugierten Zahlen $\beta_i^{(p)}$ beliebig, aber fest so wählen, daß

$$\hat{\beta}_i^{(p)} \text{ konjugiert imaginär zu } \hat{\beta}_i^{(q)},$$

wenn

$$k^{(p)} \text{ konjugiert imaginär zu } k^{(q)}.$$

Ein so definierter Bereich $\mathfrak{B}$ und die Reihe seiner Konjugierten $\mathfrak{B}^{(1)}, \dots, \mathfrak{B}^{(n)}$ werden nun als fest der weiteren Untersuchung zugrunde gelegt. Die in ihm enthaltenen Zahlen sollen durch ein darübergesetztes $\wedge$ markiert werden.

Auf den Bereich $\mathfrak{B}$ überträgt sich nun sogleich die Klasseneinteilung der Ideale. $\mathfrak{B}$ zerfällt in h Klassen von Zahlen. Die Zahlen ein und derselben Klasse reproduzieren sich durch Addition und Subtraktion. Die Hauptklasse besteht aus allen Zahlen von k . Die Zahlen einer Klasse besitzen eine Basis, d. h. es gibt ein System von n ganzen Zahlen der Klasse $\hat{\omega}_1, \dots, \hat{\omega}_n$ derart, daß jede ganze Zahl dieser Klasse in der Gestalt

$$x_1 \hat{\omega}_1 + \dots + x_n \hat{\omega}_n$$

mit ganzen rationalen $x_1, \dots, x_n$ darstellbar ist. Die Determinante der $\hat{\omega}$

und ihrer Konjugierten ist (als Ideal) gleich der Quadratwurzel aus der Körperdiskriminante. Zu jeder Zahl $\hat{\mu}$ definieren wir

$$N(\hat{\mu}) = \hat{\mu}^{(1)} \hat{\mu}^{(2)} \dots \hat{\mu}^{(n)}.$$

Der Betrag von $N(\hat{\mu})$ ist eine rationale Zahl, für ganze $\hat{\mu}$ eine ganze rationale Zahl.

Die Kongruenz

$$\hat{\alpha} \equiv \hat{\beta} \pmod{\hat{\varphi}}$$

soll bedeuten: $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ gehören derselben Klasse an und $\hat{\alpha} - \hat{\beta}$ ist durch $\hat{\varphi}$ teilbar. Die Anzahl aller inkongruenten ganzen Zahlen mod φ , welche ein und derselben Klasse angehören, ist $|N(\hat{\varphi})|$. Auch übertragen sich die Sätze über Lösbarkeit einer oder mehrerer linearer Kongruenzen ohne Schwierigkeit auf den Bereich $\mathfrak{J}$.

Nach dem ganzen Modul $\mathfrak{f} = (\hat{\varphi})$ teilen wir die ganzen zu $\mathfrak{f}$ primen Zahlen aus $\mathfrak{J}$ in Klassen ein:

a) *Weiterer Klassenbegriff*: $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ kommen in dieselbe Klasse mod $\hat{\varphi}$, wenn

$$\hat{\alpha} \equiv \hat{\beta} \pmod{\mathfrak{f}}.$$

Diese Klassen bilden eine Abelsche Gruppe vom Grade $h\varphi(\mathfrak{f})$, die mit $\mathfrak{J}(\mathfrak{f})$ bezeichnet sei.

b) *Engerer Klassenbegriff*: $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ kommen in dieselbe Klasse, wenn

$$\hat{\alpha} \equiv \hat{\beta} \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \text{ total positiv.}$$

Diese Klassen bilden eine Abelsche Gruppe vom Grade $2^r h\varphi(\mathfrak{f})$, die mit $\mathfrak{J}_0(\mathfrak{f})$ bezeichnet sei.

Jeder Klasse kommen dann im Sinne der Gruppentheorie innerhalb ihrer Gruppe gewisse Gruppencharaktere zu. Ist $\hat{\alpha}$ eine ganze zu $\mathfrak{f}$ prime Zahl, so werde der Gruppencharakter der Klasse von $\hat{\alpha}$

im Falle a) mit $\chi(\hat{\alpha})$, im Falle b) mit $\chi_0(\hat{\alpha})$

bezeichnet. Es ist also, wenn $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ zu $\mathfrak{f}$ prim,

$$\chi(\hat{\alpha}) = \chi(\hat{\beta}), \text{ wenn } \hat{\alpha} \equiv \hat{\beta} \pmod{\mathfrak{f}},$$

$$\chi_0(\hat{\alpha}) = \chi_0(\hat{\beta}), \text{ wenn } \hat{\alpha} \equiv \hat{\beta} \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \text{ total positiv,}$$

$$\chi(\hat{\alpha})\chi(\hat{\beta}) = \chi(\hat{\alpha}\hat{\beta}); \quad \chi_0(\hat{\alpha})\chi_0(\hat{\beta}) = \chi_0(\hat{\alpha}\hat{\beta}).$$

Diese Gleichungen enthalten bekanntlich die vollständige Definition aller möglichen Gruppencharaktere. Jedes χ ist ein χ_0 , aber nicht umgekehrt. Wir setzen weiter

$$\chi_0\left(\frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}\right) = \frac{\chi_0(\hat{\alpha})}{\chi_0(\hat{\beta})}.$$

Zwischen den χ und χ_0 besteht folgender Zusammenhang: Für die Zahlen

$$\alpha \equiv 1 \pmod{f}$$

ist $\chi_0(\alpha)^2 = \chi_0(\alpha^2) = 1$, daher $\chi_0(\alpha) = \pm 1$. Daraus folgt, daß (immer nur für $\alpha \equiv 1 \pmod{f}$)

$$\chi_0(\alpha) = (\operatorname{sgn} \alpha^{(1)})^{a_1} (\operatorname{sgn} \alpha^{(2)})^{a_2} \dots (\operatorname{sgn} \alpha^{(r_1)})^{a_{r_1}}$$

ist, wo $a_1, \dots, a_{r_1}$ die Werte 0 oder 1 haben. Für reelle α ist dabei

$$\operatorname{sgn} \alpha = \frac{\alpha}{|\alpha|}.$$

Folglich ist

$$g(\hat{\alpha}) = \chi_0(\hat{\alpha}) \left(\frac{\hat{\alpha}^{(1)}}{|\hat{\alpha}^{(1)}|} \right)^{-a_1} \dots \left(\frac{\hat{\alpha}^{(r_1)}}{|\hat{\alpha}^{(r_1)}|} \right)^{-a_{r_1}}$$

ein Charakter der Gruppe $\mathfrak{Z}(f)$, also mit einem $\chi(\hat{\alpha})$ identisch, denn er erfüllt die Definitionsgleichungen. Es gibt daher zu jedem $\chi_0(\hat{\alpha})$ ein $\chi(\alpha)$, derart, daß

$$(6) \quad \chi_0(\hat{\alpha}) = v(\hat{\alpha}) \chi(\hat{\alpha}),$$

wobei

$$(7) \quad v(\hat{\alpha}) = \left(\frac{\hat{\alpha}^{(1)}}{|\hat{\alpha}^{(1)}|} \right)^{a_1} \dots \left(\frac{\hat{\alpha}^{(r_1)}}{|\hat{\alpha}^{(r_1)}|} \right)^{a_{r_1}} \quad (a_i = 0 \text{ oder } 1)$$

eine Funktion von $\hat{\alpha}$ ist, die zweckmäßig als *Vorzeichencharakter* von $\hat{\alpha}$ bezeichnet wird. $v^2(\hat{\alpha})$ ist offenbar ein Charakter von $\mathfrak{Z}(1)$, unabhängig von f . Die Zerlegung von χ_0 liefert daher dasselbe v , aber $\frac{\chi}{v^2}$ an Stelle von χ .

§ 3.

Gruppen- und Größencharaktere für Ideale.

Analog wie die Einteilung der *Zahlen* von $\mathfrak{Z}$ nach dem Modul f läßt sich auch eine Einteilung der *Ideale* ($\hat{\alpha}$) von $\mathfrak{Z} \bmod f$ definieren:

a) *Weiterer Klassenbegriff* für Ideale $\bmod f$. Zwei ganze zu f prime Ideale ($\hat{\alpha}$) und ($\hat{\beta}$) heißen äquivalent $\bmod f$, wenn es eine Einheit ε in k gibt, so daß

$$\hat{\alpha} \equiv \varepsilon \hat{\beta} \pmod{f}.$$

Äquivalente Ideale bilden eine Klasse $\bmod f$, das System dieser endlich vielen Klassen bildet eine Abelsche Gruppe $\mathfrak{S}(f)$ vom Grade $h(f)$.

b) *Engerer Klassenbegriff*: ($\hat{\alpha}$) und ($\hat{\beta}$) heißen äquivalent $\bmod f$, wenn für irgend eine Einheit ε in k

$$\hat{\alpha} \equiv \hat{\beta} \varepsilon \pmod{f}, \quad \frac{\hat{\alpha}}{\varepsilon \hat{\beta}} \text{ total positiv.}$$

Die so bestimmte Gruppe von Idealklassen werde $\mathfrak{S}_0(f)$ genannt, ihr Grad $h_0(f)$. Die entsprechenden Gruppencharaktere bezeichnen wir mit

$$\chi((\hat{a})) \text{ bzw. } \chi_0((\hat{a})).$$

und nennen sie *Klassen- oder Gruppencharaktere von $(\hat{a})$* . Jeder dieser Charaktere kommt natürlich bereits unter den in § 2 genannten Charakteren $\chi(\hat{a})$ bzw. $\chi_0(\hat{a})$ vor.

Neben diese bekannten Klassencharaktere von Idealen treten nun aber als etwas Neues die *Größencharaktere* von Idealen, welche aus den Funktionen $\lambda(\hat{a})$ entspringen. Aus einem Größencharakter der Zahl $\hat{a} \bmod f$, $\lambda(\hat{a})$, soll ein Größencharakter $\lambda((\hat{a}))$ des Ideals $(\hat{a}) \bmod f$ hergeleitet werden durch die Forderungen:

- 1) $\lambda((\varepsilon \hat{a})) = \lambda((\hat{a}))$ für jede Einheit ε in k ,
- 2) $\lambda((\hat{a})) = \lambda(\hat{a})$, wenn $\hat{a} \equiv 1 \pmod{f}$ und total positiv,
- 3) $\lambda((\hat{a}))\lambda((\hat{\beta})) = \lambda((\hat{a}\hat{\beta}))$

für irgendwelche ganze Zahlen $\hat{a}, \hat{\beta}$, die zu f prim sind.

Daß überhaupt ein solches $\lambda((\hat{a}))$ existiert, läßt sich sofort beweisen, indem man die Gruppe $\mathfrak{S}_0(f)$ durch eine Basis darstellt und ähnlich wie im § 2 schließt. Mit $\lambda((\hat{a}))$ hat gleichzeitig auch

$$\lambda((\hat{a}))\chi_0((\hat{a}))$$

die Eigenschaften 1. bis 3., unter $\chi((\hat{a}))$ einem beliebigen Klassencharakter von $\mathfrak{S}_0(f)$ verstanden. Zu jedem $\lambda((\hat{a}))$ gibt es im übrigen ein $\chi_0(\hat{a})$, derart daß

$$\lambda((\hat{a})) = \lambda(\hat{a})\chi_0(\hat{a}).$$

Denn der Quotient

$$\frac{\lambda((\hat{a}))}{\lambda(\hat{a})} = g(\hat{a})$$

erfüllt ja die Definitionsgleichungen eines χ_0 . Das χ_0 bestimmt nun nach (6) einen Vorzeichencharakter $v(\hat{a})$ von der Form (7) und damit gewisse r_1 Exponenten $a_1, \dots, a_{r_1}$ ($= 0$ oder 1).

Jeder Größencharakter des Ideals $(\hat{a}) \bmod f$ hat daher die Gestalt

$$(8) \quad \lambda((\hat{a})) = \lambda(\hat{a})\chi(\hat{a})v(\hat{a})$$

und bestimmt dadurch eindeutig gewisse n nicht negative ganze Zahlen $a_1, \dots, a_n$, nämlich

$$a_1, a_2, \dots, a_{r_1},$$

die Exponenten in $v(\hat{a})$, (0 oder 1) und

$$a_{r_1+1}, \dots, a_n,$$

die so bezeichneten in $\lambda(\hat{a})$ vorkommenden Exponenten, von denen die

Hälfte stets den Wert Null hat. Das System dieser n Zahlen heiße das *Exponentensystem von* $\lambda((\hat{a}))$. Die reziproke Funktion

$$(9) \quad \bar{\lambda}((\hat{a})) = \frac{1}{\lambda((\hat{a}))} = \bar{\lambda}(\hat{a}) \frac{\bar{\lambda}((\hat{a}))}{v^2(\hat{a})} \cdot v(\hat{a})$$

ist offenbar auch ein Grencharakter des Ideals $(\hat{a}) \bmod \mathfrak{f}$. Ihr Exponentensystem sei $a'_1, \dots, a'_n$. Dann ist offenbar

$$\begin{aligned} a'_p &= a_p, & (1 \leq p \leq r_1) \\ a'_{p+r_1} &= a_p, & a'_p = a_{p+r_1}, \quad (r_1 + 1 \leq p \leq r_2). \end{aligned}$$

Um den Ausnahmefall, daß $\lambda(\hat{a})$ identisch 1 ist, kurz bezeichnen zu können, reden wir von einem *echten Grencharakter* $\lambda((\hat{a}))$, falls das zugehörige $\lambda(\hat{a})$ nicht identisch 1 ist.

§ 4.

Eigentliche und uneigentliche Charaktere.

Ein Charakter $\chi(\hat{a})$ der Gruppe $\mathfrak{Z}(\mathfrak{f})$ heiße ein *eigentlicher* Charakter $\bmod \mathfrak{f}$, wenn er nicht übereinstimmt mit einem Charakter von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{f}_1)$, wo $\mathfrak{f}_1$ ein Teiler von $\mathfrak{f}$ ist. D. h. es soll keinen echten Teiler $\mathfrak{f}_1$ von $\mathfrak{f}$ geben, so daß aus

$$\hat{a} \equiv \hat{\beta} \pmod{\mathfrak{f}_1}$$

schon folgt

$$\chi(\hat{a}) = \chi(\hat{\beta}).$$

Existiert andererseits ein echter, d. h. von $\mathfrak{f}$ verschiedener Teiler $\mathfrak{f}_1$ von $\mathfrak{f}$ derart, daß aus

$$\hat{a} \equiv \hat{\beta} \pmod{\mathfrak{f}_1}$$

folgt

$$\chi(\hat{a}) = \chi(\hat{\beta}),$$

so heiße χ ein *uneigentlicher* Charakter $\bmod \mathfrak{f}$. Ein solcher definiert auf folgende Art einen Charakter χ' von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{f}_1)$: Sei $\hat{a}$ zu $\mathfrak{f}_1$ prim, so wähle man ein $\hat{\beta}$ mit

$$\hat{a} \equiv \hat{\beta} \pmod{\mathfrak{f}_1},$$

wo aber

$$(\hat{\beta}, \mathfrak{f}) = 1.$$

Alsdann setzen wir

$$\chi'(\hat{a}) = \chi(\hat{\beta}).$$

Diese Funktion $\chi'(\hat{a})$ ist ersichtlich ein Charakter von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{f}_1)$. Er ist durch χ eindeutig bestimmt. Wir nennen χ' den durch χ erzeugten Charakter nach $\mathfrak{f}_1$.

Wenn χ einen Charakter nach $\mathfrak{f}_1$ und einen nach $\mathfrak{f}_2$ erzeugt, so erzeugt es auch einen nach $\mathfrak{f}_3$, wo $\mathfrak{f}_3 = (\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2)$.

Ist nämlich

$$\hat{\alpha} \equiv \hat{\beta} \pmod{\mathfrak{f}_3}$$

und $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ zu $\mathfrak{f}$ prim, so läßt sich eine Zahl $\hat{\mu}$ bestimmen, wofür

$$\hat{\mu} \equiv \hat{\alpha} \pmod{\mathfrak{f}_1},$$

$$\hat{\mu} \equiv \hat{\beta} \pmod{\mathfrak{f}_2}.$$

Nach Voraussetzung ist also $\chi(\hat{\mu}) = \chi(\hat{\alpha})$ und $\chi(\hat{\mu}) = \chi(\hat{\beta})$, daher auch

$$\chi(\hat{\alpha}) = \chi(\hat{\beta})$$

d. h. χ erzeugt einen Charakter mod $\mathfrak{f}_3$.

Hieraus folgt: Wenn χ ein uneigentlicher Charakter nach $\mathfrak{f}$ ist, und alle von ihm erzeugten Charaktere solche nach $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots$ sind, so erzeugt χ nach einem ganz bestimmten $\mathfrak{f}'$ einen eigentlichen Charakter χ' und zwar ist

$$\mathfrak{f}' = (\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots).$$

Nach dem vorhergehenden Satz erzeugt nämlich χ sicher einen Charakter χ' nach $\mathfrak{f}'$. Wäre dieser uneigentlich nach $\mathfrak{f}'$ so würde er wiederum einen Charakter nach einem echten Teiler $\mathfrak{f}'_0$ von $\mathfrak{f}'$ erzeugen, und dieser müßte dann auch bereits durch χ erzeugt werden. Nach Voraussetzung ginge dann $\mathfrak{f}'$ in $\mathfrak{f}'_0$ auf, was nicht der Fall ist.

Wir ergänzen jetzt die Definition der $\chi(\hat{\alpha})$, indem wir

$$\chi(\hat{\alpha}) = 0$$

setzen, falls $\hat{\alpha}$ und $\mathfrak{f}$ nicht teilerfremd sind.

Mit Hilfe der eigentlichen Charaktere bilden wir jetzt gewisse Summen über vollständige Restsysteme einer Klasse idealer Zahlen, die eine Verallgemeinerung der Lagrangeschen Wurzelzahlen vorstellen.

Sei

$$\mathfrak{f} = (\hat{\varphi})$$

und

$$\mathfrak{d} = (\hat{\delta})$$

die Differente des Körpers k . Die Zahlen $\hat{\varphi}, \hat{\delta}$ sind bis auf Einheiten bestimmt und sollen irgendwie fest gewählt werden. Unter $S(\alpha)$ verstehen wir die Spur der Körperzahl α

$$S(\alpha) = \sum_{\mathfrak{p}=1}^n \alpha^{(\mathfrak{p})}.$$

Diese ist nach dem Dedekindschen Satze eine ganze rationale Zahl, wenn

$$\alpha \cdot \hat{\delta}$$

ganz. Ist $\hat{\varrho}$ eine ideale ganze Zahl aus der Klasse $\hat{\varphi} \hat{\delta}$, so ist daher

$$e^{2\pi i S\left(\frac{\hat{\varrho}}{\hat{\varphi}\hat{\delta}}\right)}$$

eine Zahl, welche nur von der Restklasse abhängt, der $\hat{\varrho} \bmod f$ angehört.

Es bedeute $\hat{\nu}$ eine beliebige ideale ganze Zahl, $\hat{\varrho}$ durchlaufe ein vollständiges System $\bmod f$ inkongruenter Zahlen aus einer solchen Klasse $\mathfrak{R}$, daß

$$\frac{\hat{\nu}\hat{\varrho}}{\hat{\varphi}\hat{\delta}}$$

eine Körperzahl ist; $\mathfrak{R}$ hängt also von $\hat{\nu}$ ab. Die Summe von $N(f)$ Gliedern

$$(10) \quad G(\hat{\nu}, \chi) = \sum_{\hat{\varrho}} \chi(\hat{\varrho}) e^{2\pi i S\left(\frac{\hat{\nu}\hat{\varrho}}{\hat{\varphi}\hat{\delta}}\right)}$$

hängt daher, da $\hat{\varphi}, \hat{\delta}$ als fest gelten, nur von $\hat{\nu}, \chi$ ab. Sie hat folgende Eigenschaften:

$$(11) \quad G(\hat{\nu}_1, \chi) = G(\hat{\nu}_2, \chi),$$

wenn

$$\hat{\nu}_1 \equiv \hat{\nu}_2 \pmod{f}.$$

Wenn

$$(\hat{\alpha}, f) = 1,$$

so ist

$$(12) \quad G(\hat{\alpha}\hat{\nu}, \chi) = \bar{\chi}(\hat{\alpha}) G(\hat{\nu}, \chi).$$

Hier ist $\bar{\chi}$ der konjugiert imaginäre d. h. reziproke Wert von χ , der auch ein Charakter von $\mathfrak{B}(f)$ ist.

Es ist nämlich

$$(13) \quad \chi(\hat{\alpha}) G(\hat{\alpha}\hat{\nu}, \chi) = \sum_{\hat{\varrho}} \chi(\hat{\alpha}\hat{\varrho}) e^{2\pi i S\left(\frac{\hat{\nu}\hat{\alpha}\hat{\varrho}}{\hat{\varphi}\hat{\delta}}\right)};$$

$\hat{\varrho}$ durchläuft hier die inkongruenten Zahlen derart, daß

$$\frac{\hat{\nu}\hat{\alpha}\hat{\varrho}}{\hat{\varphi}\hat{\delta}} = \text{Körperzahl}.$$

Also durchläuft

$$\hat{\sigma} = \hat{\alpha}\hat{\varrho}$$

ein System inkongruenter Zahlen, wo

$$\frac{\hat{\nu}\hat{\sigma}}{\hat{\varphi}\hat{\delta}} = \text{Körperzahl}.$$

Die Summe rechts in (13) ist daher wirklich $G(\hat{\nu}, \chi)$.

Ist jetzt $(\hat{\nu}, f) = 1$, so bestimme man $\hat{\alpha}$ aus

$$\hat{\alpha}\hat{\nu} \equiv 1 \pmod{f}.$$

Daher

$$\chi(\hat{\alpha}) \cdot \chi(\hat{\nu}) = 1,$$

worin

$$G(\hat{v}, \chi) = \chi(\hat{a}) G(\hat{a}\hat{v}, \chi) = \bar{\chi}(\hat{v}) G(1, \chi) = \bar{\chi}(\hat{v}) C(\chi \hat{\varphi} \hat{\delta})$$

$$C(\chi, \hat{\varphi} \hat{\delta}) = \sum_{\hat{e}} \chi(\hat{e}) e^{2\pi i s \left(\frac{\hat{e}}{\hat{\varphi} \hat{\delta}} \right)} \quad \left(\frac{\hat{e}}{\hat{\varphi} \hat{\delta}} = \text{Körperzahl} \right)$$

nur noch von $\chi, \hat{\varphi} \hat{\delta}$, aber nicht von $\hat{v}$ abhängt.

Ist aber $(\hat{v}, \mathfrak{f}) \neq 1$, und χ ein eigentlicher Charakter mod $\mathfrak{f}$, so ist, wie gezeigt werden soll,

$$G(\hat{v}, \chi) = 0.$$

Sei nämlich

$$(14) \quad (\hat{v}, \mathfrak{f}) = \mathfrak{f}_1 \neq 1; \quad \hat{a} \equiv 1 \left(\text{mod } \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}_1} \right), \quad (\hat{a}, \mathfrak{f}) = 1,$$

dann ist

$$(15) \quad \hat{a}\hat{v} \equiv \hat{v} \pmod{\mathfrak{f}}$$

und wegen (12)

$$G(\hat{a}\hat{v}, \chi) = \bar{\chi}(\hat{a}) G(\hat{v}, \chi),$$

wegen (11)

$$G(\hat{a}\hat{v}, \chi) = G(\hat{v}, \chi),$$

folglich

$$(16) \quad G(\hat{v}, \chi)(1 - \chi(\hat{a})) = 0,$$

Durchläuft $\hat{a}$ alle Zahlen mit der Bedingung (14), so muß mindestens einmal $\chi(\hat{a}) \neq 1$ sein, weil sonst χ einen Charakter mod $\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{f}_1}$ erzeugen würde, im Widerspruch mit der Voraussetzung, χ sei ein eigentlicher Charakter mod $\mathfrak{f}$. Also ist in (16) $G(\hat{v}, \chi) = 0$.

Für einen eigentlichen Charakter χ mod $\mathfrak{f}$ ist daher für alle ganzzahligen $\hat{v}$

$$(17) \quad G(\hat{v}, \chi) = \bar{\chi}(\hat{v}) C(\chi, \hat{\varphi} \hat{\delta}).$$

Ist ferner

$$\lambda((\hat{\mu})) = \lambda(\hat{\mu}) \chi(\hat{\mu}) v(\hat{\mu})$$

ein Charakter des Ideals $(\hat{\mu})$, also für jede Einheit ε

$$\lambda(\varepsilon) \chi(\varepsilon) v(\varepsilon) = 1,$$

so folgt sogleich, daß

$$(18) \quad \lambda(\hat{\varphi} \hat{\delta}) v(\hat{\varphi} \hat{\delta}) C(\chi, \hat{\varphi} \hat{\delta})$$

nur von χ und dem Ideal $(\hat{\varphi}) = \mathfrak{f}$, dagegen nicht von $\hat{\varphi}$ selbst abhängt.

Die Unterscheidung zwischen eigentlichen und uneigentlichen Charakteren χ überträgt sich auf die Größencharaktere λ . Sei

$$\lambda((\hat{\mu})) = \lambda(\hat{\mu}) \chi(\hat{\mu}) v(\hat{\mu})$$

ein Größencharakter mod $\mathfrak{f}$. Das hierin auftretende χ ist ein Charakter

mod $\mathfrak{f}$. Wenn χ ein eigentlicher (bzw. uneigentlicher) Charakter mod $\mathfrak{f}$ ist, heiße auch λ ein ebensolcher Charakter mod $\mathfrak{f}$.

Sei nun χ ein uneigentlicher Charakter mod $\mathfrak{f}$, aber ein eigentlicher mod $\mathfrak{f}_1$, wo dann $\mathfrak{f}_1$ in $\mathfrak{f}$ aufgeht. Dann ist λ bereits ein Größencharakter mod $\mathfrak{f}_1$. Denn ist η irgend eine Einheit mod $\mathfrak{f}_1$ (§ 1), so ist

$$\nu(\eta) = 1,$$

$$\chi(\eta) = 1,$$

also

$$1 = \lambda((1)) = \lambda(\eta),$$

daher hat $\lambda(x)$ die Eigenschaft

$$\lambda(\eta x) = \lambda(x)$$

für jede Einheit η mod $\mathfrak{f}_1$ und ist nach § 1 also ein Größencharakter mod $\mathfrak{f}_1$. Es gibt also einen eigentlichen Größencharakter $\lambda_1((\hat{\mu}))$ mod $\mathfrak{f}_1$, derart, daß

$$\lambda_1((\hat{\mu})) = \lambda((\hat{\mu}))$$

für alle zu $\mathfrak{f}$ primen $\hat{\mu}$.

§ 5.

Eine Thetaformel.

Eine früher von mir bewiesene Thetaformel soll jetzt erheblich verallgemeinert und unter Benutzung der idealen Zahlen vereinfacht dargestellt werden. An der zitierten Stelle bewies ich folgende Formel:

$$(19) \left\{ \begin{aligned} & \sum_{\mu} \exp \left\{ -\pi \sum_{p=1}^n |\mu^{(p)} + u^{(p)}|^2 t_p \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{d} N^2(\alpha) t_1 t_2 \dots t_n} \sum_{\nu} \exp \left\{ -\pi \sum_{p=1}^n |\nu^{(p)}|^2 \frac{1}{t_p} + 2\pi i \sum_{p=1}^n \nu^{(p)} u^{(p)} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Hierin haben die Zeichen folgende Bedeutung:

$$t_1, t_2, \dots, t_n > 0, \quad t_{p+r_2} = t_p, \quad (p = r_1 + 1, \dots, r_1 + r_2)$$

d ist der Betrag der Krperdiskriminante,

μ durchläuft alle Zahlen des Ideals α ,

ν diejenigen des Ideals $\frac{1}{\alpha b}$,

$$u^{(p)} = \sum_{q=1}^p \alpha_q^{(p)} x_q,$$

$x_1, \dots, x_n$ reelle Veränderliche,

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ eine Basis von α .

Schreiben wir

$$(20) \quad \sum_{p=1}^{r_1} (\mu^{(p)} + u^{(p)})^2 t_p + 2 \sum_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} (\mu^{(p)} + u^{(p)}) (u^{(p+r_2)} + \mu^{(p+r_2)}) t_p$$

an Stelle von

$$\sum_{p=1}^n |\mu^{(p)} + u^{(p)}|^2 t_p,$$

so gilt die entsprechende Formel als analytische Formel natürlich für beliebige komplexe Werte der unabhängigen Veränderlichen $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(n)}$.

Wir setzen jetzt, unter ϱ eine beliebige Körperzahl verstanden, in (19)

$$u^{(p)} = v_p + \varrho^{(p)}, \quad (p = 1, 2, \dots, n)$$

wo die v wieder neue Variable sind, und erhalten für (20)

$$(21) \quad \sum_{p=1}^n |\mu^{(p)} + \varrho^{(p)}|^2 t_p + 2 \sum_{p=1}^n v_p t_p (\bar{\mu}^{(p)} + \bar{\varrho}^{(p)}) + \sum_{p=1}^{r_1} v_p^2 t_p + 2 \sum_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} v_p v_{p+r_2} t_p.$$

Sodann verstehen wir wie früher unter

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

das Exponentensystem eines Größencharakters $\lambda((\hat{\mu})) \bmod f$, und unter

$$a'_1, a'_2, \dots, a'_n$$

das des reziproken $\bar{\lambda}((\hat{\mu}))$. Die a, a' sind nicht negative ganze Zahlen.

Wir spezialisieren jetzt in (21) die v , indem wir setzen

$$v_p = 0, \quad \text{wenn} \quad a'_p = 0.$$

Dadurch fällt der letzte Term im Exponenten jedenfalls weg. Die sich so aus (19) ergebende Formel differenzieren wir alsdann

$$a'_1, a'_2, \dots, a'_n\text{-mal}$$

resp. nach den Variablen $v_1, v_2, \dots, v_n$ und setzen hernach alle $v_p = 0$.

So kommt

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} & \prod_{p=1}^n (-2\pi t_p)^{a'_p} \sum_{\mu} \prod_{p=1}^n (\bar{\mu}^{(p)} + \bar{\varrho}^{(p)})^{a'_p} \exp \left\{ -\pi \sum_{p=1}^n |\mu^{(p)} + \varrho^{(p)}|^2 t_p \right\} \\ & \frac{\prod_{p=1}^n (2\pi i)^{a'_p}}{\sqrt{d} N^2(a) t_1 \dots t_n} \sum_{\nu} \prod_{p=1}^n (\nu^{(p)})^{a'_p} \exp \left\{ -\pi \sum_{p=1}^n |\nu^{(p)}|^2 \frac{1}{t_p} + 2\pi i S(\nu \varrho) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Auf der linken Seite können wir hier noch ersetzen

$$\begin{aligned} \prod_{p=1}^n (-2\pi t_p)^{a'_p} &= \prod_{p=1}^n (-2\pi t_p)^{a_p}, \\ \prod_{p=1}^n (\bar{\mu}^{(p)} + \bar{\varrho}^{(p)})^{a'_p} &= \prod_{p=1}^n (\mu^{(p)} + \varrho^{(p)})^{a_p}. \end{aligned}$$

Unter Heranziehung der idealen Zahlen aus § 3 werde endlich diese Gleichung umgeformt. Sei wie im § 4

$$\mathfrak{f} = (\hat{\varphi}), \quad \mathfrak{b} = (\hat{\delta}), \quad \mathfrak{a} = (\hat{\alpha}),$$

also

$$|N(\hat{\varphi})| = N(\mathfrak{f}), \quad |N(\hat{\delta})| = N(\mathfrak{b}) = d, \quad |N(\hat{\alpha})| = N(\mathfrak{a}).$$

Ferner nehmen wir

$$\varrho = \frac{\hat{\varrho} \hat{\alpha}}{\hat{\varphi}},$$

wo die ganze Zahl $\hat{\varrho}$ der Klasse $\frac{\hat{\varphi}}{\hat{\alpha}}$ angehört, und setzen

$$\mu + \varrho = \frac{\hat{\mu} \hat{\alpha}}{\hat{\varphi}}, \quad \nu = \frac{\hat{\nu}}{\hat{\alpha} \hat{\delta}}.$$

Es durchläuft dann $\hat{\mu}$ alle ganzen Zahlen der Klasse $\frac{\hat{\varphi}}{\hat{\alpha}}$, welche $\equiv \hat{\varrho} \pmod{\mathfrak{f}}$, $\hat{\nu}$ alle ganzen Zahlen der Klasse $\hat{\alpha} \hat{\delta}$.

Endlich nehmen wir

$$\frac{t_p}{|\hat{\alpha}^{(p)}|^2} \left| \frac{\hat{\varphi}^{(p)}}{\hat{\delta}^{(p)}} \right| \text{ an Stelle von } t_p \quad (p = 1, 2, \dots, n).$$

Aus der Gleichung (22) wird so die folgende:

$$(23) \left\{ \begin{aligned} & v^2(\hat{\alpha} \hat{\delta}) \prod_{p=1}^n \left(\frac{\hat{\varphi}^{(p)} \hat{\delta}^{(p)}}{|\hat{\varphi}^{(p)} \hat{\delta}^{(p)}|} \right)^{-a_p} \sum_{\hat{\mu} \equiv \hat{\varrho} \pmod{\mathfrak{f}}} \prod_{p=1}^n (\hat{\mu}^{(p)})^{a_p} \exp \left\{ -\pi \sum_{p=1}^n \frac{|\hat{\mu}^{(p)}|^2}{|\hat{\varphi}^{(p)} \hat{\delta}^{(p)}|} t_p \right\} \\ &= \frac{(-i)^{\sum a_p}}{\sqrt{N(\mathfrak{f})}} \prod_{p=1}^n t_p^{-\frac{1}{2} - a_p} \sum_{\hat{\nu}} \prod_{p=1}^n (\hat{\nu}^{(p)})^{a'_p} \exp \left\{ -\pi \sum_{p=1}^n \frac{|\hat{\nu}^{(p)}|^2}{|\hat{\varphi}^{(p)} \hat{\delta}^{(p)}|} \frac{1}{t_p} + 2\pi i S \left(\frac{\hat{\nu} \hat{\delta}}{\hat{\varphi} \hat{\delta}} \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Hieraus endlich folgt die in Aussicht genommene Thetaformel. Es sei $\lambda((\hat{\mu}))$ ein *eigentlicher* Größencharakter mod $\hat{\varphi}$, wozu nach § 3 eindeutig ein χ, ν gehört:

$$\lambda((\hat{\mu})) = \lambda(\hat{\mu}) \chi(\hat{\mu}) \nu(\hat{\mu}),$$

und $a_1, a_2, \dots, a_n$ die nach § 3 dazugehörigen Exponenten. Die Zerlegung des reziproken Charakters ist nach (9)

$$\bar{\lambda}((\hat{\mu})) = \bar{\lambda}(\hat{\mu}) \frac{\bar{\chi}(\hat{\mu})}{v^2(\hat{\mu})} \cdot \nu(\hat{\mu}).$$

Es werde gesetzt

$$(24) \quad \vartheta(t; \mathfrak{R}, \lambda, \hat{\varphi} \hat{\delta}) = \sum_{\hat{\mu} \in \mathfrak{R}} \chi(\hat{\mu}) \prod_{p=1}^n \left(\frac{\hat{\mu}^{(p)}}{|\hat{\varphi}^{(p)} \hat{\delta}^{(p)}|} \right)^{a_p} \exp \left\{ -\pi \sum_{p=1}^n \frac{|\hat{\mu}^{(p)}|^2}{|\hat{\varphi}^{(p)} \hat{\delta}^{(p)}|} t_p \right\}.$$

Darin soll $\hat{\mu}$ alle ganzen Zahlen der Klasse $\mathfrak{R}$ von § (1) durchlaufen. Multiplizieren wir (23) mit $\chi(\hat{\varrho}) = \chi(\hat{\mu})$ und summieren über alle inkongruenten Zahlen $\hat{\varrho}$ von $\mathfrak{R}$, wenden auf der rechten Seite die Gleichung (17) an und bedenken, daß für jede Körperzahl ν

$$v^2(\nu) = 1,$$

also $v^2(\hat{\nu}) = v^2(\hat{\alpha}\hat{\delta})$ für jedes $\hat{\nu}$ der rechten Seite,

so ergibt sich

$$(25) \quad \vartheta(t; \mathfrak{R}, \lambda, \hat{\varphi}\hat{\delta}) = H(\lambda, \hat{\varphi}\hat{\delta}) \prod_{p=1}^n t_p^{-\frac{1}{2} - a_p} \vartheta\left(\frac{1}{t}; \mathfrak{R}', \bar{\lambda}, \hat{\varphi}\hat{\delta}\right).$$

Dabei ist

$\mathfrak{R}\mathfrak{R}'$ die Klasse von $\hat{\varphi}\hat{\delta}$,

$$H(\lambda, \hat{\varphi}\hat{\delta}) = (-i)^{\sum a_p} \frac{C(\chi, \hat{\varphi}\hat{\delta})}{\sqrt{N(\bar{f})}} \prod_{p=1}^n \left(\frac{\hat{\varphi}^{(p)} \hat{\delta}^{(p)}}{|\hat{\varphi}^{(p)} \hat{\delta}^{(p)}|} \right)^{a_p}.$$

Berücksichtigen wir, daß nach § 1 und 3

$$\prod_{p=1}^n \left(\frac{\hat{\alpha}^{(p)}}{|\hat{\alpha}^{(p)}|} \right)^{a_p} = \frac{\lambda(\hat{\alpha})}{\lambda(|\hat{\alpha}|)} \cdot \frac{v(\hat{\alpha})}{v(|\hat{\alpha}|)},$$

so ist

$$H(\lambda, \hat{\varphi}\hat{\delta}) = (-i)^{\sum a_p} \frac{\lambda(\hat{\varphi}\hat{\delta}) v(\hat{\varphi}\hat{\delta}) C(\chi, \hat{\varphi}\hat{\delta})}{\lambda(|\hat{\varphi}\hat{\delta}|) \sqrt{N(\bar{f})}},$$

und das Produkt

$$W(\lambda) = (-i)^{\sum a_p} \frac{\lambda(\hat{\varphi}\hat{\delta}) v(\hat{\varphi}\hat{\delta})}{\sqrt{N(\bar{f})}} \sum_{\hat{\varrho}} \chi(\hat{\varrho}) e^{2\pi i S\left(\frac{\hat{\varrho}}{\hat{\varphi}\hat{\delta}}\right)}$$

ist dann nach (18) nur von λ , nicht von λ und $\hat{\varphi}\hat{\delta}$ abhängig. Die Formel (25) geht daher in folgende über:

$$(26) \quad \vartheta(t; \mathfrak{R}, \lambda, \hat{\varphi}\hat{\delta}) = \frac{W(\lambda)}{\lambda(|\hat{\varphi}\hat{\delta}|)} \prod_{p=1}^n t_p^{-\frac{1}{2} - a_p} \vartheta\left(\frac{1}{t}; \mathfrak{R}', \bar{\lambda}, \hat{\varphi}\hat{\delta}\right).$$

Es läßt sich zeigen, daß von diesen Funktionen ϑ keine identisch in t verschwindet. Also ist auch $W(\lambda) \neq 0$ und

$$(27) \quad W(\lambda) W(\bar{\lambda}) = 1.$$

Andrerseits ist die konjugiert imaginäre Größe zu $W(\lambda)$

$$\begin{aligned} \overline{W(\lambda)} &= (-i)^{-\sum a_p} \frac{\bar{\lambda}(\hat{\varphi}\hat{\delta}) \bar{v}(\hat{\varphi}\hat{\delta})}{\sqrt{N(\bar{f})}} \sum_{\hat{\varrho}} \bar{\chi}(\hat{\varrho}) e^{-2\pi i S\left(\frac{\hat{\varrho}}{\hat{\varphi}\hat{\delta}}\right)} \\ &= \chi(-1)(-1)^{\sum a_p} W(\bar{\lambda}) = \lambda(-1) \chi(-1) v(-1) W(\bar{\lambda}) = W(\bar{\lambda}). \end{aligned}$$

Aus (27) folgt daher

$$(28) \quad |W(\lambda)| = 1.$$

Die Gleichung (27) und damit (28) werden wir später aus dem Nichtverschwinden der Funktionen $\zeta(s; \lambda)$ folgern, ohne zu benutzen, daß die ϑ -Reihen nicht identisch verschwinden.

Aus (26) und der konjugiert imaginären Formel ergibt sich noch, daß die Reihe der absoluten Beträge, wenn die t gegen Null konvergieren,

$$< M \prod_{p=1}^n t_p^{-\frac{1}{2} - a_p},$$

wo M von den t unabhängig ist.

§ 6.

Zetafunktionen mit Größencharakteren und ihre Funktionalgleichung.

Sei $\lambda((\hat{a}))$ ein Größencharakter des Ideals $(\hat{a}) \bmod \mathfrak{f}$. Durch

$$(29) \quad \zeta(s, \lambda) = \sum_{\hat{a}} \frac{\lambda((\hat{a}))}{|N(\hat{a})|^s},$$

summiert über alle ganzen nicht assoziierten idealen Zahlen $\hat{a}$, ist, wenn der reelle Teil der komplexen Variablen $s > 1$ ist, eine analytische Funktion von s definiert, welche wegen der Produktregel für λ auch die Produktdarstellung

$$(30) \quad \zeta(s, \lambda) = \prod_{\hat{\pi}} \frac{1}{1 - \lambda((\hat{\pi})) |N(\hat{\pi})|^{-s}}$$

gestattet, wobei $(\hat{\pi})$ sämtliche verschiedenen Primideale in $\mathfrak{J}$ durchläuft.

Ist λ ein uneigentlicher Charakter nach $\mathfrak{f}$, so erzeugt nach § 5 λ einen eigentlichen Charakter λ' nach einem Teiler $\mathfrak{f}_1$ von $\mathfrak{f}$. λ und λ' unterscheiden sich nur für solche Ideale, die zu $\mathfrak{f}_1$, aber nicht zu $\mathfrak{f}$ prim sind. Offenbar ist

$$(31) \quad \zeta(s, \lambda) = \zeta(s, \lambda') \prod_{(\hat{\pi})/\mathfrak{f}} (1 - \lambda'((\hat{\pi})) |N(\hat{\pi})|^{-s}),$$

wo das Produkt über die endlich vielen Primfaktoren $(\hat{\pi})$ von $\mathfrak{f}$ zu erstrecken ist.

Wir beschränken uns daher im folgenden auf *eigentliche* Charaktere λ und wollen jetzt die entsprechenden $\zeta(s, \lambda)$ in die ganze komplexe s -Ebene fortsetzen und ihre Funktionalgleichung aufstellen.

Zunächst ist nach (8)

$$\lambda((\hat{\mu})) = \lambda(\hat{\mu}) \chi(\hat{\mu}) v(\hat{\mu})$$

und nach § 1

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda(y) v(y) &= \prod_{p=1}^{r+1} |y_p|^{\sum_{q=1}^r e_p^{(q)} (2\pi i m_q^{-i} \sum_{k=r_1+1}^n a_k \vartheta_q^{(k)})} \prod_{p=1}^n \left(\frac{y_p}{|y_p|} \right)^{a_p}, \\ \frac{\lambda(y) v(y)}{|N(y)|^s} &= \prod_{p=1}^n (y_p)^{a_p} \prod_{p=1}^{r+1} |y_p|^{-x_p}, \end{aligned} \right.$$

wo

$$z_p = e_p \left(s + \frac{a_p + a'_p}{2} \right) - \sum_{q=1}^r e_p^{(q)} (2\pi i m_q - i \sum_{k=1}^n a_k \vartheta_q^{(k)}).$$

Zur Umformung des zweiten Produktes in (32) benutzen wir die Formel

$$\Gamma\left(\frac{z_p}{2}\right) |y_p|^{-z_p} = \int_0^\infty e^{-t_p |y_p|^2} t_p^{\frac{z_p}{2}-1} dt_p.$$

So ergibt sich

$$(33) \quad \prod_{p=1}^{r+1} \Gamma\left(\frac{z_p}{2}\right) |y_p|^{-z_p} = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\sum_{p=1}^{r+1} |y_p|^2 t_p} \prod_{p=1}^{r+1} t_p^{\frac{z_p}{2}} \frac{dt_1 \dots dt_{r+1}}{t_1 \dots t_{r+1}}.$$

In diesem $(r+1)$ -fachen Integral führen wir neue Veränderliche $u, x_1, \dots, x_r$ durch die Gleichungen ein

$$(34) \quad t_p = u e^{\frac{2}{r+1} \sum_{q=1}^r x_q \log |\eta_q^{(p)}|}, \quad (p=1, \dots, r+1)$$

worin die η wie bisher ein System von Grundeinheiten mod $\mathfrak{f}$ bedeuten. Die Funktionaldeterminante der t nach den u, x ist

$$\frac{t_1 \cdot t_2 \cdot \dots \cdot t_{r+1}}{u} 2^{r_1-1} n R(\mathfrak{f}),$$

worin $R(\mathfrak{f})$ der Regulator der Einheiten η ist. Ferner wird

$$\prod_{p=1}^{r+1} t_p^{\frac{z_p}{2}} = u^{\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{r+1} z_p} \exp \left\{ \sum_{q=1}^r x_q \sum_{p=1}^{r+1} z_p \log |\eta_q^{(p)}| \right\}.$$

Wegen des Zusammenhanges zwischen dem System $e_p^{(q)}$ und $\log |\eta_q^{(p)}|$ nach § 1 ist

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ \sum_{q=1}^r x_q \sum_{p=1}^{r+1} z_p \log |\eta_q^{(p)}| \right\} \\ &= \exp \left\{ \sum_{q=1}^r x_q \left[-2\pi i m_q + \sum_{p=1}^n a_p (\log |\eta_q^{(p)}| + i \vartheta_q^{(p)}) \right] \right\} \end{aligned}$$

und

$$u^{\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{r+1} z_p} = u^{\frac{ns}{2} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n a_p}.$$

In dieser Weise ergibt sich für das einzelne Glied unserer ζ -Reihe, indem wir in (33)

$$(35) \quad y_p = \frac{\hat{\mu}^{(p)}}{|\sqrt{\hat{\varphi}^{(p)} \hat{\delta}^{(p)}}|} \sqrt{e_p} \pi \quad (p=1, \dots, n)$$

einsetzen,

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} \prod_{p=1}^n y_p^{a_p} \prod_{p=1}^{r+1} |y_p|^{-z_p} &= \prod_{p=1}^n |V_{e_p} \pi|^{a_p} \prod_{p=1}^{r+1} |V_{e_p} \pi|^{-z_p} \cdot \frac{\lambda \left(\frac{\hat{\mu}}{V \hat{\varphi} \hat{\delta}} \right) v \left(\frac{\hat{\mu}}{V \hat{\varphi} \hat{\delta}} \right)}{\left| N \left(\frac{\hat{\mu}}{V \hat{\varphi} \hat{\delta}} \right) \right|^s} \\ &= \gamma(\lambda) A^s \frac{\lambda(\hat{\mu}) v(\hat{\mu})}{|N(\hat{\mu})|^s} \cdot \bar{\lambda}(|V \hat{\varphi} \hat{\delta}|) \end{aligned} \right.$$

mit

$$\gamma(\lambda) = \prod_{p=1}^{r+1} |V_{e_p}|^{\sum_{q=1}^r e_p^{(q)} (2\pi i m_q - i \sum_{k=1}^n a_k \vartheta_q^{(k)})},$$

$$A = \left| \sqrt{\frac{dN(\mathfrak{f})}{\pi^n}} \right| 2^{-r_2}.$$

Endlich sei

$$\Gamma(s, \lambda) = \prod_{p=1}^{r+1} \Gamma\left(\frac{z_p}{2}\right) = \prod_{p=1}^{r+1} \Gamma\left[\frac{e_p}{2} \left(s + \frac{a_p + a'_p}{2}\right) - \sum_{q=1}^r e_p^{(q)} (\pi i m_q - \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n a_k \vartheta_q^{(k)})\right].$$

Aus (32), (33), (36) folgt

$$\begin{aligned} \Gamma(s, \lambda) \gamma(\lambda) A^s \frac{\lambda(\hat{\mu}) v(\hat{\mu})}{|N(\hat{\mu})|^s} \bar{\lambda}(|V \hat{\varphi} \hat{\delta}|) &= \prod_{p=1}^n \left(\frac{\hat{\mu}^{(p)}}{|V \hat{\varphi}^{(p)} \hat{\delta}^{(p)}|} \right)^{a_p} \prod_{p=1}^{r+1} |y_p|^{-z_p} \cdot \Gamma(s, \lambda) = \\ &= 2^{r_1-1} n R(\mathfrak{f}) \int_0^\infty \int_{x_q=-\infty}^{+\infty} \dots \int F(u, \hat{\mu}, x_1, \dots, x_r) u^{\frac{ns}{2} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n a_p} \frac{du}{u} dX \end{aligned}$$

mit

$$dX = dx_1 dx_2 \dots dx_r,$$

$$F(u, \hat{\mu}, x_1, \dots, x_r)$$

$$= \prod_{p=1}^n \left(\frac{\hat{\mu}^{(p)}}{|V \hat{\varphi}^{(p)} \hat{\delta}^{(p)}|} \right)^{a_p} \cdot \exp \left\{ -\pi \sum_{p=1}^n t_p |\hat{\mu}^{(p)}|^2 - \sum_{q=1}^r x_q \left[2\pi i m_q - \sum_{p=1}^n a_p (\log |\eta_q^{(p)}| + i \vartheta_q^{(p)}) \right] \right\}$$

Diese Funktion hat die Eigenschaft:

$$(37) \quad F(u, \hat{\mu}, x_1, \dots, x_l + 1, x_{l+1}, \dots, x_r) = F(u, \eta_l \hat{\mu}, x_1, \dots, x_r), \quad (l=1, \dots, r)$$

und, wenn ξ eine beliebige der $w(\mathfrak{f})$ Einheitswurzeln mod $\mathfrak{f}$ ist, überdies nach (2)

$$(38) \quad F(u, \xi \hat{\mu}, x_1, \dots, x_r) = F(u, \hat{\mu}, x_1, \dots, x_r).$$

Daher ist, wenn η die sämtlichen Einheiten mod $\mathfrak{f}$ durchläuft,

$$\begin{aligned} \int_{x_q=-\infty}^{+\infty} \dots \int F dX &= \frac{1}{w(\mathfrak{f})} \sum_{\eta} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \dots \int F(\eta \hat{\mu}, x_1, \dots, x_r) dX \\ &= \frac{1}{w(\mathfrak{f})} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \dots \int \sum_{\eta} F(\eta \hat{\mu}, x_1, \dots, x_r) dX, \end{aligned}$$

da die Reihe (als Bestandteil der Thetareihe) für $u > 0$ im Bereiche $|x_q| \leq \frac{1}{2}$ gleichmäßig in x konvergiert. Ist schließlich

$$\varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, e(\mathfrak{f}))$$

ein solches System von Einheiten des Körpers, daß

$$\varepsilon_i \eta, \quad (i = 1, 2, \dots, e(\mathfrak{f}))$$

wo η alle Einheiten mod $\mathfrak{f}$ durchläuft, jede Einheit des Körpers genau einmal darstellt, so ist

$$\frac{\lambda(\hat{\mu}) v(\hat{\mu}) \chi(\hat{\mu})}{|N(\hat{\mu})|^s} = \frac{1}{e(\mathfrak{f})} \sum_{i=1}^{e(\mathfrak{f})} \frac{\lambda(\varepsilon_i \hat{\mu}) v(\varepsilon_i \hat{\mu}) \chi(\varepsilon_i \hat{\mu})}{|N(\varepsilon_i \hat{\mu})|^s}$$

und folglich

$$(39) \quad \gamma(\lambda) \Gamma(s, \lambda) A^s \frac{\lambda((\hat{\mu}))}{|N(\hat{\mu})|^s} \bar{\lambda}(|\sqrt{\hat{\varphi} \hat{\delta}}|)$$

$$= \frac{2^{r_1-1} n R(\mathfrak{f})}{w(\mathfrak{f}) e(\mathfrak{f})} \int_{u=0}^{\infty} \int_{x_q=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \dots \int_x \sum F(\varepsilon \hat{\mu}, x_1, \dots, x_r) u^{\frac{ns}{2} + \frac{1}{2} \sum a_p} \chi(\varepsilon \mu) \frac{du}{u} dX,$$

worin ε sämtliche Einheiten des Körpers durchläuft. Den Faktor vor den Integralzeichen nennen wir

$$M(\mathfrak{f}) = \frac{2^{r_1-1} n R(\mathfrak{f})}{w(\mathfrak{f}) e(\mathfrak{f})}.$$

Summieren wir endlich über alle verschiedenen Ideale $(\hat{\mu})$ einer Klasse $\mathfrak{K}$, vertauschen rechts diese Summation mit den Integrationen, so erhalten wir rechts unsere Thetareihe (24) ohne das Glied mit $\hat{\mu} = 0$. Die Vertauschung rechtfertigt sich leicht, da auf Grund der Bemerkung am Schlusse von § 5 die Reihe

$$\sum_{(\hat{\mu})} \sum_s F u^{\frac{ns}{2} + \frac{1}{2} \sum a_p}$$

eine für alle $u \geq 0$ gleichmäßig konvergente Majorante hat, wenn $\Re(s) > 1$, die im Unendlichen auch noch hinreichend stark verschwindet.

Wir haben nun angenommen, daß $\lambda((\hat{\mu}))$ ein *eigentlicher* Charakter mod $\mathfrak{f}$ ist. Ist $\mathfrak{f} \neq 1$, so fällt in der Thetareihe das Glied mit $\hat{\mu} = 0$ wegen des Faktors $\chi(\hat{\mu})$ von selbst heraus. Ist $\mathfrak{f} = 1$, so bleibt das Glied dann und nur dann stehen, wenn alle Exponenten m_q und a_p gleich Null sind; in diesem Falle ist λ kein echter Größencharakter, sondern ein Klassencharakter von $\mathfrak{B}(1)$ und diese $\zeta(s, \lambda)$ sind von mir bereits früher²⁾ vollständig erledigt.

²⁾ Vgl. meine Noten in den Göttinger Nachrichten 1917, ebenso die folgende Anmerkung.

Wir nehmen also an, daß dieser besondere Fall nicht vorliegt, d. h. $\mathfrak{f} \neq 1$, oder, wenn $\mathfrak{f} = 1$, mindestens ein m_q oder α_p von Null verschieden ist. Setzen wir

$$(40) \quad \zeta(s; \lambda, \mathfrak{R}) = \sum_{\hat{\mu} \in \mathfrak{R}} \frac{\lambda((\hat{\mu}))}{N(\hat{\mu})^s}, \quad \xi(s; \lambda, \mathfrak{R}) = \gamma(\lambda) \Gamma(s; \lambda) A^s \zeta(s; \lambda, \mathfrak{R}),$$

so erhalten wir folgende Darstellung von ξ durch die Thetareihe:

$$(41) \quad \xi(s; \lambda, \mathfrak{R}) \bar{\lambda}(|\sqrt{\hat{\varphi} \hat{\delta}}|) =$$

$$M(\mathfrak{f}) \int_{u=0}^{\infty} \int_{x_q=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \dots \int \vartheta(t, \mathfrak{R}, \lambda, \hat{\varphi} \hat{\delta}) u^{\frac{ns}{2} + \frac{1}{2} \sum \alpha_p} \exp \left\{ - \sum_{q=1}^r x_q \left[2\pi i m_q - \sum_{p=1}^n a_p (\log |\eta_q^{(p)}| + i \vartheta_q^{(p)}) \right] \right\} \frac{du}{u} d\lambda$$

Wir teilen das Integral über u in ein solches von $u = 0$ bis 1 und eines von $u = 1$ bis ∞ , führen im ersteren $\frac{1}{u}$, $-x_1, \dots, -x_r$ als neue Variable ein, wenden die Transformationsformel für ϑ (26) an und erhalten nach einer kleinen Rechnung

$$(42) \quad \xi(s; \lambda, \mathfrak{R}) = \lambda(|\sqrt{\hat{\varphi} \hat{\delta}}|) g(s; \lambda, \mathfrak{R}) + W(\lambda) \bar{\lambda}(|\sqrt{\hat{\varphi} \hat{\delta}}|) g(1-s; \bar{\lambda}, \mathfrak{R}'),$$

worin gesetzt ist

$$(43) \quad \frac{g(s; \lambda, \mathfrak{R})}{M(\mathfrak{f})} =$$

$$\int_{u=1}^{\infty} \int_{x_q=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \dots \int \vartheta(t; \mathfrak{R}, \lambda, \hat{\varphi} \hat{\delta}) u^{\frac{ns}{2} + \frac{1}{2} \sum \alpha_p} \exp \left\{ - \sum_{q=1}^r x_q \left[2\pi i m_q - \sum_{p=1}^n a_p (\log |\eta_p^{(p)}| + i \vartheta_q^{(p)}) \right] \right\} \frac{du}{u} d\lambda$$

Dieses g ist offenbar eine ganze Funktion von s ; daher ist ξ und also ζ ebenfalls eine ganze Funktion von s . Sodann aber ergibt sich aus (42) die *Funktionalgleichung*

$$(44) \quad \xi(1-s; \bar{\lambda}, \mathfrak{R}') = W(\bar{\lambda}) \xi(s; \lambda, \mathfrak{R}), \quad \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{R}' \text{ die Klasse von } (\hat{\varphi} \hat{\delta}) = \mathfrak{f} \mathfrak{d}.$$

Ist nämlich die Thetareihe in (43) nicht identisch Null, so ist nach § 4 $W(\lambda) W(\bar{\lambda}) = 1$. Ist sie aber Null, so ist auch die transformierte Thetareihe, also auch g identisch Null, also beide Seiten in (44) identisch in s gleich Null.

Summieren wir endlich die Gleichungen (44) über alle Klassen $\mathfrak{R}$, wobei dann auch $\mathfrak{R}'$ alle Klassen durchläuft, so ergibt sich, wenn wir das schon bekannte Resultat (bei $\lambda(\hat{\mu}) = 1$) hinzunehmen, der folgende Hauptsatz³⁾:

Die Funktion

$$\xi(s; \lambda) = \gamma(\lambda) \Gamma(s; \lambda) A^s \zeta(s; \lambda)$$

³⁾ Für den Fall, daß λ ein Charakter χ_0 von $\mathfrak{Z}_0(\mathfrak{f})$ ist, findet sich die Rechnung schon durchgeführt bei Landau, Über Ideale und Primideale in Idealklassen. (Diese Zeitschrift Bd. II (1918), S. 52–154.)

ist eine ganze Funktion von s für jeden Charakter

$$\lambda((\hat{\mu})) = \lambda(\hat{\mu}) \chi(\hat{\mu}) v(\hat{\mu}),$$

wo nicht gleichzeitig

$$\lambda(\hat{\mu}) v(\hat{\mu}) \equiv 1, \chi \text{ der Hauptcharakter mod } \mathfrak{f}.$$

Ist χ überdies ein eigentlicher Restklassencharakter mod. $\mathfrak{f}$, so genügt ξ der Funktionalgleichung

$$(45) \quad \begin{cases} \xi(1-s; \bar{\lambda}) = W(\bar{\lambda}) \xi(s; \lambda), \\ W(\lambda) = \frac{(-i)^{\sum a_p}}{\sqrt{N(\mathfrak{f})}} \lambda(\hat{\varphi} \hat{\delta}) v(\hat{\varphi} \hat{\delta}) \sum_{\hat{e}} \chi(\hat{e}) e^{2\pi i S\left(\frac{\hat{e}}{\hat{\varphi} \hat{\delta}}\right)}. \end{cases}$$

Da die Funktion ξ , wie aus der Produktdarstellung folgt, nicht identisch verschwindet, so ist $W(\lambda) \neq 0$, und da nach § 4

$$W(\lambda) \text{ konjugiert imaginär zu } W(\bar{\lambda}),$$

so folgt aus (45)

$$|W(\lambda)| = 1.$$

§ 7.

Die asymptotische Verteilung der Charaktere für Primideale.

Auf Grund der Ergebnisse des vorigen Paragraphen läßt sich nun auf die Funktionen $\zeta(s; \lambda)$ die ganze Theorie fast wörtlich übertragen, welche von Herrn Landau für die Dedekindsche Funktion $\zeta_K(s)$ sowie für die mit *Klassencharakteren* gebildeten $\zeta(s; \chi) = L(s, \chi)$ entwickelt worden ist. Eine ausführliche Darstellung findet sich in seiner Schrift *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale* (bei Teubner, 1918) sowie in der Anm.³⁾ genannten Abhandlung.

Ich beschränke mich hier darauf, das Schlußresultat anzuführen, welches die Anwendung seiner Methoden auf meine $\zeta(s; \lambda)$ in der uns interessierenden Richtung liefert:

$\lambda((\hat{\mu}))$ sei ein beliebiger Klassen- oder Größencharakter der Ideale $\hat{\mu}$, nur nicht der Hauptcharakter. Dann gilt

$$(46) \quad \sum_{N(\mathfrak{p}) < x} \lambda((\mathfrak{p})) = O(x e^{-c \sqrt{\log x}}).$$

Hierin ist die Summe über die verschiedenen Primideale $\mathfrak{p}$ zu erstrecken, deren Norm kleiner als x ist; c bedeutet eine positive nur vom Charakter λ abhängige Konstante. Für den Hauptcharakter ist, wie schon bekannt,

$$(47) \quad \pi(x) = \sum_{N(\mathfrak{p}) < x} 1 = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(x e^{-c \sqrt{\log x}}).$$

Es ist nun meine Absicht, in diesem Paragraphen zu zeigen, daß die Werte der Grundcharaktere $\lambda((p)) \bmod f$ auf den $(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten $|\lambda| = 1$ überall *gleichmäßig dicht* liegen. Daß sie überall dicht liegen, läßt sich ziemlich einfach mit der in meiner 1. Mitteilung angewandten Methode durch die Divergenz gewisser Dirichletscher Reihen zeigen, wenn man nur weiß, daß die $\zeta(s; \lambda)$ im Punkte $s = 1$ stetig und von Null verschieden sind. (Hierzu ist weder die Funktionalgleichung, noch die Fortsetzbarkeit der $\zeta(s; \lambda)$, soweit sie mit echten Größencharakteren gebildet sind, erforderlich.) Der Nachweis der *gleichmäßig* dichten Verteilung, zu dem mir die üblichen Methoden der analytischen Zahlentheorie allein nicht ausreichten, ist mir inzwischen durch eine andere Wendung auf folgendem Wege gelungen: Es sei jetzt λ ein echter Größencharakter der Ideale $\bmod f$, $\hat{q}$ eine ganze zu f teilerfremde Zahl. Für jeden echten Idealcharakter

$$\lambda((\hat{\mu})) \chi_0((\hat{\mu}))$$

gilt dann Gl. (46). Wird nun diese Gleichung mit $\bar{\chi}_0((\hat{q}))$ multipliziert und über sämtliche Charaktere $\chi_0 \bmod f$ summiert, so ergibt sich auf der linken Seite

$$\sum_{\chi_0} \bar{\chi}_0((\hat{q})) \sum_{N(p) \leq x} \lambda((p)) \chi_0((p)) = \sum_{N(p) \leq x} \lambda((p)) \sum_{\chi_0} \bar{\chi}_0((\hat{q})) \chi_0((p)).$$

Die innere Summe über χ_0 ist aber nur dann von Null verschieden und hat dann den Wert $h_0(f)$, wenn p und $(\hat{q})$ zur selben Klasse von $\mathfrak{S}_0(f)$ gehören. Ist dies der Fall, so kann man

$$(p) = (\hat{\pi})$$

setzen, und $\hat{\pi}$ so wählen, daß

$$(48) \quad \hat{q} \equiv \hat{\pi} \pmod{f}, \quad \frac{\hat{\pi}}{\hat{q}} \text{ total positiv.}$$

Und hierfür ist dann

$$\lambda((p)) = \lambda((\hat{\pi})) = \lambda(\hat{\pi}) \chi_0(\hat{\pi}) = \lambda(\hat{\pi}) \bar{\chi}_0(\hat{q}).$$

So ergibt sich:

Ist $\lambda(\hat{a})$ ein echter Größencharakter der Zahl $\hat{a} \bmod f$, und durchläuft $(\hat{\pi})$ alle verschiedenen Primideale mit den Bedingungen (48) und $|N(\hat{\pi})| \leq x$, so ist

$$(49) \quad \sum_{\hat{\pi}} \lambda(\hat{\pi}) = O(xe^{-c\sqrt{\log x}}).$$

Die Anzahl dieser $\hat{\pi}$ ist

$$(50) \quad \frac{1}{h_0(f)} \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}).$$

Wir denken uns jetzt diese $\hat{\pi}$ irgendwie nach wachsender Größe der Normen geordnet und dann entsprechend numeriert

$$\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2, \dots$$

Aus (49), (50) folgt dann:

Für jeden echten Größencharakter mod $\mathfrak{f}$ ist

$$(51) \quad \lim_{N=\infty} \frac{1}{N} \sum_{h=1}^N \lambda(\hat{\pi}_h) = 0.$$

Wir bedenken nun, daß sich jeder echte Größencharakter mod $\mathfrak{f}$ in der Form

$$\lambda(\hat{\alpha}) = e^{2\pi i w(\hat{\alpha})}$$

darstellen läßt, worin $w(\hat{\alpha})$ eine mod 1 vollkommen bestimmte reelle (stetige) Funktion der n konjugierten Größen $\hat{\alpha}^{(p)}$ ist. Ebenso gestattet $\lambda(\hat{\alpha})$ eine Darstellung durch $n-1$ Grundcharaktere

$$\begin{aligned} \lambda_k(\hat{\alpha}) &= e^{2\pi i w_k(\hat{\alpha})}, & (k = 1, 2, \dots, n-1) \\ \lambda(\hat{\alpha}) &= \lambda_1^{m_1} \cdot \lambda_2^{m_2} \dots \lambda_{n-1}^{m_{n-1}} \end{aligned}$$

mit ganzen rationalen $m_1, \dots, m_{n-1}$.

Die Limes-Gleichung (51) geht daher in folgende über:

$$\lim_{N=\infty} \frac{1}{N} \sum_{h=1}^N e^{2\pi i [m_1 w_1(\hat{\pi}_h) + m_2 w_2(\hat{\pi}_h) + \dots + m_{n-1} w_{n-1}(\hat{\pi}_h)]} = 0$$

gültig für jedes ganze rationale Exponentensystem $m_1, \dots$, das nicht aus lauter Nullen besteht.

Nun hat Herr Weyl⁴⁾ gezeigt, daß das Bestehen dieser Gleichungen die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß im $(n-1)$ -dimensionalen Raume die unendlich vielen Punkte P_h mit den Koordinaten

$$P_h : (w_1(\hat{\pi}_h), \dots, w_{n-1}(\hat{\pi}_h)) \quad (h = 1, 2, \dots)$$

mod 1 gleichmäßig dicht verteilt liegen.

Daher gilt der Satz: Im Raume von $(n-1)$ Dimensionen sei $\mathfrak{S}$ ein Gebiet vom Volumen $\mathfrak{S}$, das dem Einheitswürfel

$$0 \leq x_q \leq 1 \quad (q = 1, 2, \dots, n-1)$$

angehört. Sei ferner $z(N)$ die Anzahl derjenigen $\hat{\pi}_h$ für $h = 1, 2, \dots, N$, deren zugehörige Punkte P_h mit den Koordinaten

$$x_q = w_q(\hat{\pi}_h) \quad (q = 1, 2, \dots, n-1)$$

⁴⁾ H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins. Math. Ann. Bd. 77 (1916), S. 319.

dem Bereich $\mathfrak{S}$ angehören. Dann ist

$$\lim_{N=\infty} \frac{z(N)}{N} = \mathfrak{S}.$$

Berücksichtigt man für N Formel (50), so folgt endlich:

Sei $\pi_{\mathfrak{S}}(x; \hat{q}, \mathfrak{f})$ die Anzahl derjenigen verschiedenen Primideale ($\hat{\pi}$),
wofür

$$\hat{\pi} \equiv \hat{q} \pmod{\mathfrak{f}}, \quad \frac{\hat{\pi}}{\hat{q}} \text{ total positiv,} \quad |N(\hat{\pi})| \leq x,$$

während die Punkte mit den Koordinaten

$$x_q = w_q(\hat{\pi}) \quad (q = 1, 2, \dots, n-1)$$

mod 1 zu $\mathfrak{S}$ gehören, so ist

$$(52) \quad \lim_{x=\infty} \frac{\pi_{\mathfrak{S}}(x, \hat{q}, \mathfrak{f})}{\frac{x}{\log x}} = \frac{\mathfrak{S}}{h_0(\mathfrak{f})}.$$

Die Grundcharaktere bestimmen, wie in § 1 ausgeführt, die n Zahlen

$$\frac{\hat{\alpha}^{(p)}}{|\sqrt[n]{N(\hat{\alpha})}|} \quad (p = 1, 2, \dots, n)$$

eindeutig bis auf Einheiten mod $\mathfrak{f}$ als Faktoren, wenn man noch weiß, daß $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_r$ positiv sind. Verstehen wir unter $\hat{\alpha}$ eine solche ganze Zahl, daß $(\hat{\alpha}) = \alpha$

$$\hat{\alpha} \hat{\pi} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}} \text{ und total positiv,}$$

so sind in der obigen Bezeichnung $\hat{\alpha} \hat{\pi}$ total positive durch α teilbare Körperzahlen, welche die Zerlegung $\alpha \mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p}$ Primideal) haben. Durch eine Basis $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des Ideals α lassen sie sich also in der Form

$$\mu = z_1 \alpha_1 + z_2 \alpha_2 + \dots + \alpha_n z_n$$

darstellen und die Zahlen

$$\frac{\mu^{(p)}}{|\sqrt[n]{N(\mu)}|} \quad (p = 1, 2, \dots, n)$$

legen die Verhältnisse der rationalen ganzen Zahlen $z_1, \dots, z_n$ eindeutig fest. Die primitive ganzzahlige Form in n Variablen

$$\frac{1}{N(\alpha)} \prod_{p=1}^n (\alpha_1^{(p)} z_1 + \alpha_2^{(p)} z_2 + \dots + \alpha_n^{(p)} z_n) = F(z_1, \dots, z_n)$$

stellt daher unendlich viele positive Primzahlen dar, auch wenn man für die Verhältnisse der ganzen rationalen Variablen z einen beliebig kleinen Spielraum vorschreibt.

Wie sich die genaueren Sätze aus der Sprache der Idealtheorie in die der rationalen Formentheorie übersetzen lassen, soll im nächsten Para-

graphen am Beispiel der quadratischen Körper erörtert werden. Das Ergebnis wird sich sehr einfach durch die Begriffe der Klein-Cayleyschen Winkelmaßbestimmung ausdrücken.

§ 8.

Lineare Formen in quadratischen Körpern.

Wir betrachten in diesem Paragraphen binäre lineare Formen

$$L(x) = \hat{a}_1 x_1 + \hat{a}_2 x_2.$$

Die Koeffizienten $\hat{a}$ sollen ganze ideale Zahlen aus einer bestimmten Klasse $\mathfrak{R}$ eines *quadratischen Körpers* k sein, die Variablen x durchlaufen unabhängig alle *rationalen ganzen* Zahlen. L stellt — die Beschränkung auf diese x -Werte soll als selbstverständlich nicht mehr hervorgehoben werden — nur Zahlen der Klasse $\mathfrak{R}$ dar. Wir setzen weiter voraus, daß $L = 0$ nur für $x_1 = x_2 = 0$ und die Koeffizienten ohne gemeinschaftlichen Teiler. Eine Form mit diesen Eigenschaften heiße *primitive Form* aus $\mathfrak{R}$.

Wir wollen zeigen:

Zu jeder primitiven Form $L(x)$ aus $\mathfrak{R}$ gibt es eine ganze rationale Zahl Q und eine ganze ideale Zahl $\hat{q}$ aus $\mathfrak{R}$, derart, daß alle und nur die ganzen Zahlen $\hat{\omega}$ durch L dargestellt werden, wofür mit irgendeinem ganzen rationalen r

$$\hat{\omega} \equiv r \hat{q} \pmod{Q}$$

gilt.

$\hat{q}$ ist im übrigen prim zu Q , und Q bestimmt sich aus der Idealgleichung

$$(53) \quad (Q\sqrt{d}) = (\hat{a}_1 \hat{a}'_2 - \hat{a}_2 \hat{a}'_1).$$

Sei $\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2$ eine Basis für die Zahlen aus $\mathfrak{R}$. Es gibt dann ganze rationale a_{ik} , wofür

$$\hat{a}_i = a_{i1} \hat{\omega}_1 + a_{i2} \hat{\omega}_2 \quad (i = 1, 2)$$

und hierbei ist, weil nach Voraussetzung der Quotient von $\hat{a}_1, \hat{a}_2$ nicht rational, die Determinante

$$(54) \quad Q = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Da die Determinante der ω als Ideal $=(\sqrt{d})$ ist, so besteht für dieses Q die Gl. (53).

Ist $\hat{\mu}$ eine beliebige ganze Zahl aus $\mathfrak{R}$, so ist $Q\hat{\mu}$ durch L darstellbar.

Denn $\hat{\mu} = \frac{x_1 \hat{a}_1 + x_2 \hat{a}_2}{Q}$ mit ganzen rationalen x , wie sich durch Ausrechnung ergibt.

Daraus folgt: Ist $\hat{\mu}$ durch L darstellbar und r beliebig ganz rational, so sind auch alle Zahlen $\hat{\omega}$ darstellbar, wofür

$$\hat{\omega} \equiv r \hat{\mu} \pmod{Q}.$$

Denn ist $\hat{\mu} = L(x)$, so ist $r \hat{\mu} = L(rx)$; nach dem Vorangehenden ist $\hat{\omega} = L(rx)$ als Multiplum von Q durch L darstellbar, etwa gleich $L(y)$, daher $\hat{\omega} = L(rx + y)$.

L ist fähig, auch solche Zahlen $\hat{\omega}$ darzustellen, welche mit Q keinen rationalen Teiler gemein haben. Wir haben dazu nur die ganzen rationalen Zahlen u_1, u_2 so zu bestimmen, daß

$$\hat{\omega} = u_1 \hat{\alpha}_1 + u_2 \hat{\alpha}_2 = (u_1 a_{11} + u_2 a_{21}) \hat{\omega}_1 + (u_1 a_{12} + u_2 a_{22}) \hat{\omega}_2$$

und hierin die drei Zahlen

$$(55) \quad Q \text{ und } U_i = u_1 a_{1i} + u_2 a_{2i} \quad (i = 1, 2)$$

ohne gemeinschaftlichen Teiler sind. Diese Bestimmung ist möglich. Denn ist p irgendeine in Q genau zur m -ten Potenz ($m > 0$) aufgehende Primzahl, so muß mindestens eine der vier Größen a_{ik} zu p prim sein, weil sonst p in $\hat{\alpha}_1$ und $\hat{\alpha}_2$ aufginge. Ist etwa a_{11} zu p prim, so wähle man

$$u_1 \equiv 1 \pmod{p^m}, \quad u_2 \equiv 0 \pmod{p^m}.$$

Die so resultierenden Größen U haben dann mit p keinen gemeinschaftlichen Teiler. Verfährt man analog in bezug auf die übrigen Primfaktoren von Q , so erhält man eine Reihe von Kongruenzen für u_1, u_2 nach den übrigen p , deren simultane Befriedigung Gewähr leistet, daß die damit gebildeten U_1, U_2 einen gemeinschaftlichen Teiler haben, der durch keines der p teilbar, also zu Q prim ist.

Es sei nun $\hat{\omega}$ eine so durch L dargestellte Zahl. Dann gibt es ein ganzes rationales r_1 mit

$$\hat{\alpha}_1 \equiv r_1 \hat{\omega} \pmod{Q}.$$

Diese Kongruenz ist identisch mit folgenden beiden:

$$(56) \quad \begin{aligned} a_{11} &\equiv r_1 U_1 \\ a_{12} &\equiv r_1 U_2 \end{aligned} \pmod{Q}.$$

Um r_1 zu finden, nehme man N_1, N_2, N so, als ganze rationale Zahlen, daß

$$(57) \quad N_1 U_1 + N_2 U_2 + N Q = 1,$$

was wegen $(U_1, U_2, Q) = 1$ möglich ist. Aus (56) folgt dann

$$r_1 \equiv N_1 a_{11} + N_2 a_{12} \pmod{Q}.$$

Wählt man dann r_1 irgendwie gemäß dieser Kongruenz, so folgt wegen (55), (57)

$$\begin{aligned} r_1 U_1 &\equiv N_1 U_1 a_{11} + N_2 U_1 a_{12} \equiv (1 - N_2 U_2) a_{11} + N_2 U_1 a_{12} \\ &\equiv a_{11} + N_2 (U_1 a_{11} - U_2 a_{11}) \equiv a_{11} \pmod{Q}, \end{aligned}$$

und analog die zweite Kongruenz (56).

Ebenso gibt es ein ganzes rationales r_2 mit

$$(58) \quad \hat{a}_2 \equiv r_2 \hat{q} \pmod{Q}.$$

Daher ist jede Zahl $L(x)$ kongruent dem Produkt von $\hat{q}$ und einer ganzen rationalen Zahl $\pmod{Q}$ und da $\hat{q}$ selbst durch L darstellbar, ist jede derartige Zahl auch umgekehrt wirklich durch L darstellbar. Der ausgesprochene Satz ist damit vollständig bewiesen; $\hat{q}$ ist offenbar auch prim zu Q , da L primitiv ist.

Die Umkehrung ist leicht zu beweisen:

Wenn Q ganz rational, $\hat{q}$ eine ganze zu Q teilerfremde Zahl einer Klasse $\mathfrak{R}$, so ist die Gesamtheit der ganzen $\hat{\omega}$ aus $\mathfrak{R}$, welche für irgend ein ganzes rationales r eine Kongruenz

$$\hat{\omega} \equiv r \hat{q} \pmod{Q}$$

erfüllen, identisch mit denjenigen Zahlen, welche durch eine gewisse primitive lineare Form aus $\mathfrak{R}$ dargestellt werden.

Die Zahlen $\hat{\omega}$ bilden nämlich offenbar einen Modul. Er besitzt daher nach bekannten Sätzen eine Basis $\hat{a}_1, \hat{a}_2$, d. h. seine sämtlichen Zahlen und nur diese erhält man mit ganzen rationalen x_1, x_2 durch

$$L(x) = \hat{a}_1 x_1 + \hat{a}_2 x_2.$$

Hierbei sind $\hat{a}_1, \hat{a}_2$ prim zueinander, weil die dargestellten Zahlen $\hat{\omega}$ nach ihrer Definition keinen gemeinschaftlichen Teiler haben.

Jede Form $L(x)$ gibt nun Anlaß zu einer *quadratischen Form* mit ganzen rationalen Koeffizienten und der Determinante $\pm Q^2 d$. Es sei nämlich $\hat{\omega}$ irgendeine mit rationalem x durch L darstellbare Zahl. Der Ausdruck

$$(59) \quad F(x) = \left(\frac{\hat{\omega}}{|\hat{\omega}|} \frac{\hat{\omega}'}{|\hat{\omega}'|} \right)^{-1} (\hat{a}_1 x_1 + \hat{a}_2 x_2)(\hat{a}'_1 x_1 + \hat{a}'_2 x_2) = a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_2^2$$

ist dann eine primitive quadratische Form mit ganzen rationalen Koeffizienten. Um das einzusehen, müssen wir den Fall reeller und imaginärer Körper trennen.

a) Ist der Körper k imaginär, so ist die Einführung der ω überflüssig, da der erste Faktor in F offenbar stets den Wert $+1$ hat.

Die Koeffizienten von F sind

$$(60) \quad a = \hat{a}_1 \bar{\hat{a}}_1, \quad b = \hat{a}_1 \bar{\hat{a}}_2 + \hat{a}_2 \bar{\hat{a}}_1, \quad c = \hat{a}_2 \bar{\hat{a}}_2.$$

Sie sind ganz, weil die $\hat{a}$ ganz sind, und rational, weil

$$\hat{a} \bar{\hat{a}} = |N(\hat{a})|.$$

Endlich sind a, b, c ohne gemeinsamen Teiler, weil L primitiv ist. Die Diskriminante von F ist

$$b^2 - 4ac = (\hat{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_2 \hat{\alpha}_1)^2 < 0$$

und $a, c > 0$.

b) Ist k reell, so ist nach Definition der idealen Zahlen

$$\frac{\hat{\omega}}{|\hat{\omega}|} \quad \text{und} \quad \frac{\hat{\omega}'}{|\hat{\omega}'|}$$

eine Einheitswurzel. Die Koeffizienten von F sind

$$a = \frac{\hat{\alpha}_1}{\hat{\omega}} \frac{\hat{\alpha}'_1}{\hat{\omega}'} |\hat{\omega} \hat{\omega}'|,$$

$$b = \left(\frac{\hat{\alpha}_1}{\hat{\omega}} \frac{\hat{\alpha}'_2}{\hat{\omega}'} + \frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\omega}} \frac{\hat{\alpha}'_1}{\hat{\omega}'} \right) |\hat{\omega} \hat{\omega}'|,$$

$$c = \frac{\hat{\alpha}_2}{\hat{\omega}} \frac{\hat{\alpha}'_2}{\hat{\omega}'} |\hat{\omega} \hat{\omega}'|.$$

Da

$$|\hat{\omega} \hat{\omega}'| = |N(\hat{\omega})|$$

rational und die $\frac{\hat{\alpha}_i}{\hat{\omega}}$ Körperzahlen, so sind die a, b, c rational und, wie oben, ganz und ohne gemeinsamen Teiler. Die Diskriminante $b^2 - 4ac$ ist positiv und als Ideal

$$(b^2 - 4ac) = (\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}'_2 - \hat{\alpha}_2 \hat{\alpha}'_1)^2 = (Q^2 d).$$

Umgekehrt gibt es zu jeder primitiven ganzzahligen Form F mit der Diskriminante $b^2 - 4ac = \pm Q^2 d$ eine Form L und ein $\hat{\omega}$, so daß (59) besteht, wenn noch $a > 0$, falls $b^2 - 4ac < 0$.

a) Sei $b^2 - 4ac = -Q^2 d < 0$, $a > 0$. Zur Bestimmung der $\hat{a}$ dient (60), woraus sich ergibt

$$\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 = \frac{b + Q\sqrt{-d}}{2}, \quad \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 = \frac{b - Q\sqrt{-d}}{2}$$

($\sqrt{-d}$ hat beide Male dieselbe Bedeutung). Es sei nun $\hat{\tau}$ eine solche ideale Zahl, daß

$$(\hat{\tau}) = \left(\frac{b + Q\sqrt{-d}}{2}, c \right).$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} (\hat{\tau} \bar{\tau}) &= \left(\frac{b + Q\sqrt{-d}}{2}, c \right) \left(\frac{b - Q\sqrt{-d}}{2}, c \right) = \left(\frac{b^2 + Q^2 d}{4}, c \frac{b + Q\sqrt{-d}}{2}, c \frac{b - Q\sqrt{-d}}{2}, c^2 \right) \\ &= (c) \left(a, \frac{b + Q\sqrt{-d}}{2}, \frac{b - Q\sqrt{-d}}{2}, c \right). \end{aligned}$$

Der letzte Idealfaktor ist aber 1, da er die teilerfremden Zahlen a, b, c enthält. Also

$$(\hat{\tau} \bar{\tau}) = (c)$$

und daher

$$\hat{\tau} \bar{\tau} = c,$$

weil $c > 0$. Die so bestimmten Zahlen

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{b + Q\sqrt{-d}}{2\hat{\tau}}, \quad \hat{\alpha}_2 = \frac{c}{\hat{\tau}} = \bar{\hat{\tau}}$$

sind daher ganze teilerfremde Zahlen und erzeugen eine Form L mit den behaupteten Eigenschaften.

b) k sei reell. Wir setzen wieder

$$(\hat{\tau}) = \left(\frac{b + Q\sqrt{d}}{2}, c \right),$$

also

$$(\hat{\tau} \hat{\tau}') = (c).$$

Hier können wir aber nur schließen

$$|\hat{\tau} \hat{\tau}'| = |N(\hat{\tau})| = |c|.$$

Also

$$\hat{\tau} \hat{\tau}' = \zeta^{-1} c,$$

wo ζ eine Einheitswurzel. Setzen wir wieder

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{b + Q\sqrt{d}}{2\hat{\tau}}, \quad \hat{\alpha}_2 = \frac{c}{\hat{\tau}},$$

so ist

$$L(x) = \hat{\alpha}_1 x_1 + \hat{\alpha}_2 x_2$$

eine primitive ganzzahlige Form und das Produkt von L und der Konjugierten ist eine quadratische Form mit den Koeffizienten

$$\zeta a, \quad \zeta b, \quad \zeta c.$$

Ist $c > 0$, so setzen wir

$$\hat{\omega} = \hat{\alpha}_2;$$

ist $c < 0$, so setzen wir

$$\hat{\omega} = \hat{\alpha}_2 \sqrt{d}.$$

In beiden Fällen ist

$$\frac{\hat{\omega} \hat{\omega}'}{|\hat{\omega} \hat{\omega}'|} = \operatorname{sgn} c \cdot \frac{\hat{\alpha}_2 \hat{\alpha}_2'}{|\hat{\alpha}_2 \hat{\alpha}_2'|} = \zeta,$$

also besteht mit diesem $\hat{\omega}$, $\hat{\alpha}$ die Gleichung (59).

Durch verschiedene Wahl der $\hat{\omega}$ enthält man bei demselben L offenbar nur zwei verschiedene Formen F , diese unterscheiden sich im Vorzeichen.

§ 9.

Imaginäre quadratische Körper.

Im imaginären quadratischen Körper der Diskriminante $-d$ gibt es nur endlich viele Einheiten mod f , ihre Anzahl g ist im allgemeinen $= 1$.

Jeder Zahlcharakter mod f hat die Form

$$\lambda^a(\hat{\mu}) = \left(\frac{\hat{\mu}}{|\hat{\mu}|}\right)^{ga} \quad (a = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Die Zetafunktionen sind

$$\zeta(s; \lambda^a \chi) = \frac{1}{g'} \sum_{\hat{\mu}} \left(\frac{\hat{\mu}}{|\hat{\mu}|}\right)^{ga} \frac{\chi(\langle \hat{\mu} \rangle)}{|N(\hat{\mu})|^s},$$

worin jetzt $\hat{\mu}$ sämtliche ganzen, dem Körper zugeordneten idealen Zahlen außer Null durchläuft. (Jedes Ideal $(\hat{\mu})$ kommt in der Summe dann ja g' -mal vor, wenn g' die Anzahl aller Einheiten in k ist.) Der Γ -Faktor in der Funktionalgleichung ist

$$\Gamma(s; \lambda^a \chi) = \Gamma\left(s + \frac{|ga|}{2}\right); \quad \gamma(\lambda) = 1, \quad A = \frac{1}{2\pi} |\sqrt{d} N(f)|.$$

Die Summen über die einzelnen Klassen $\zeta(s; \lambda, \mathfrak{R})$ sind in einem andern Zusammenhang zuerst bei Herrn Herglotz⁵⁾ aufgetreten, sodann besonders mit Rücksicht auf ihre Funktionalgleichung erst von Herrn Epstein⁶⁾ behandelt worden, der auch eine Verallgemeinerung auf mehrere Variable gibt. An beiden Stellen bleibt übrigens die im vorhergehenden entwickelte zahlentheoretische Bedeutung dieser Funktionen unbemerkt. Nun sei F eine positiv definite ganzzahlige primitive quadratische Form mit der Diskriminante $-Q^2 d$. Nach § 7 gibt es im Körper $k(\sqrt{-d})$ eine Klasse $\mathfrak{R}$ und eine primitive lineare Form aus $\mathfrak{R}$,

$$L(x) = \hat{a}_1 x_1 + \hat{a}_2 x_2,$$

derart, daß

$$L(x) \cdot \bar{L}(x) = (\hat{a}_1 x_1 + \hat{a}_2 x_2) (\bar{\hat{a}}_1 x_1 + \bar{\hat{a}}_2 x_2) = ax_1^2 + bx_1 x_2 + cx_2^2 = F(x_1, x_2).$$

Wie weit die $\hat{a}$ durch F bestimmt sind, kommt weiter nicht in Betracht. Ferner existiert ein ganzes (zu Q teilerfremdes) $\hat{\rho}$ aus $\mathfrak{R}$, derart daß durch die quadratische Form F alle und nur die ganzen rationalen n dargestellt werden, wofür

$$n = N(\hat{\mu}) \\ \hat{\mu} \equiv r \hat{\rho} \pmod{Q}$$

mit irgendeinem ganzen rationalen r . Jedes Wertepaar x_1, x_2 mit $F(x_1, x_2) = n$ führt eindeutig zu einem $\hat{\mu}$ dieser Art und umgekehrt.

Ist $\hat{\mu} = L(x)$, $\hat{\nu} = L(y)$, und sind $\hat{\mu}$ und $\hat{\nu}$ assoziiert, so nennen wir auch die beiden rationalen Zahlenpaare x_1, x_2 und y_1, y_2 assoziiert.

Wir denken uns jetzt in der Ebene x_1, x_2 als rechtwinkelige Cartesische Koordinaten und konstruieren sodann das Gitter aller Punkte mit

⁵⁾ Herglotz, Über die analytische Fortsetzung gewisser Dirichletscher Reihen, Math. Ann. 61 (1905), S. 551–560.

⁶⁾ P. Epstein, Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen II, Math. Ann. 63 (1906), S. 205–216.

ganzzahligen x_1, x_2 . Jedem Gitterpunkt entspricht genau ein $\hat{\mu} = L(x)$ und umgekehrt. Wir sprechen vom „Punkte $\hat{\mu}$ “ und übertragen die auf die Zahlen $\hat{\mu}$ bezüglichen Termini einfach auf die Punkte $\hat{\mu}$.

Sei jetzt

$$\lambda(\hat{\mu}) = \left(\frac{\hat{\mu}}{|\hat{\mu}|} \right)^g = e^{2\pi i w(\hat{\mu})}$$

der Grundcharakter mod Q . Diese Funktionen $\lambda(\hat{\mu})$ und $w(\hat{\mu})$ sind Funktionen des Ortes in der x_1 - x_2 -Ebene; sie haben den gleichen Wert für alle Punkte, welche derselben vom Nullpunkt aus gezogenen Halbgeraden angehören, denn für jedes positive A ist

$$\lambda(t\hat{\mu}) = \lambda(\hat{\mu}).$$

Unter diesen Halbgeraden gibt es g verschiedene (und nicht mehr), denen der Wert $\lambda = 1$ zukommt, d. h. $w = 0$ oder einer ganzen rationalen Zahl. Wir verabreden, den Punkten derjenigen Halbgeraden, welche reelle positive $\hat{\mu}$ -Werte entsprechen, den Wert $w = 0$ zuzuordnen, diese Halbgerade heiße die Null-Linie. Den $g - 1$ zur Null-Linie mod Q assoziierten Halbgeraden, welche auch $\lambda = 1$ haben, ordnen sich dann in bestimmter Weise die Werte $w = 1, 2, \dots, g - 1$ zu, derart, daß $w(\hat{\mu})$ eine eindeutige und stetige Funktion des Ortes in der längs der Null-Linie aufgeschnittenen x_1 - x_2 -Ebene ist, deren Werte an den beiden Ufern des Schnittes um g differieren.

Zwei vom Nullpunkt durch $\hat{\mu}$ und $\hat{\nu}$ gezogenen Halbgeraden kommt dann eine bestimmte Zahl $w(\hat{\mu}) - w(\hat{\nu})$ zu, und diese Differenz ist nichts anderes als der (im allgemeinen) *Nicht-Euklidische Winkel*, welchen diese Halbgeraden in einer auf die Form $F(x_1, x_2)$ gegründeten Cayley-Kleinschen Maßbestimmung miteinander bilden. Im Sinne der projektiven Geometrie definiert nämlich $F = 0$ ein Paar konjugiert imaginärer Punkte auf der unendlich fernen Geraden $x_3 = 0$, also einen ausgearteten Kegelschnitt. Der Winkel zweier vom Nullpunkt durch die beiden Punkte x_1, x_2 und y_1, y_2 gezogenen Halbgeraden in der entsprechenden auf F gegründeten (parabolischen) Maßbestimmung ist bekanntlich

$$\begin{aligned} \frac{c}{i} \log \left(\frac{\hat{\alpha}_1 x_1 + \hat{\alpha}_2 x_2}{\bar{\hat{\alpha}}_1 x_1 + \bar{\hat{\alpha}}_2 x_2} \cdot \frac{\bar{\hat{\alpha}}_1 y_1 + \bar{\hat{\alpha}}_2 y_2}{\hat{\alpha}_1 y_1 + \hat{\alpha}_2 y_2} \right) &= \frac{c}{i} \log \left(\frac{\hat{\mu}}{\bar{\hat{\mu}}} : \frac{\hat{\nu}}{\bar{\hat{\nu}}} \right) = \frac{2c}{g i} \log \left\{ \left(\frac{\hat{\mu}}{|\hat{\mu}|} \right)^g : \left(\frac{\hat{\nu}}{|\hat{\nu}|} \right)^g \right\} \\ &= \frac{2c}{g i} (w(\hat{\mu}) - w(\hat{\nu})) \cdot 2\pi i = \frac{4\pi c}{g} (w(\hat{\mu}) - w(\hat{\nu})). \end{aligned}$$

Wird der reelle Proportionalitätsfaktor $c = \frac{g}{4\pi}$ gesetzt, so haben wir als Winkelmaß gerade $w(\hat{\mu}) - w(\hat{\nu})$, es bedeutet, daß der Vollwinkel die Maßzahl g erhält.

Wir nehmen jetzt zwei beliebige vom Nullpunkt ausgehende Halbgeraden, welche einen N.-E.-Winkel $\vartheta < 1$ miteinander bilden. Der

Winkelraum werde J genannt. Er enthält keine zwei mod Q assoziierten Punkte. Die Aussage: $\hat{\mu}$ liegt in J , ist also gleichbedeutend damit, daß $w(\hat{\mu})$ einem gewissen Intervall von der Größe ϑ angehört. Der Satz von § 6 Gleichung (52) lautet daher in diesem Fall:

Durchläuft

$$\hat{\pi} = \hat{\alpha}_1 x_1 + \hat{\alpha}_2 x_2$$

sämtliche Primzahlen, wofür $\hat{\pi}$ dem Bereich J von der Größe $\vartheta < 1$ angehört und

$$\hat{\pi} \equiv \hat{\varrho} \pmod{Q}, \quad N(\hat{\pi}) \leq t,$$

so ist für die Anzahl $z(t; \hat{\varrho}, Q)$ dieser $\hat{\pi}$

$$\lim_{t=\infty} \frac{z(t; \hat{\varrho}, Q)}{t} = \frac{\vartheta}{hQ}.$$

Ist weiter $r_1, r_2, \dots, r_m$ ein vollständiges reduziertes Restsystem rationaler Zahlen mod Q ($m = \varphi(Q)$), so ist daher die Anzahl aller $\hat{\pi}$, wofür bei irgendeinem k

$$\hat{\pi} \equiv \hat{\varrho} r_k \pmod{Q}, \quad N(\hat{\pi}) \leq t$$

und $\hat{\pi}$ in J gelegen, asymptotisch $= \frac{\vartheta \cdot \varphi(Q)}{h(Q)} \frac{t}{\log t}$. Alle und nur diese Primzahlen werden durch die lineare Form $L(x) = \hat{\alpha}_1 x_1 + \hat{\alpha}_2 x_2$ dargestellt (abgesehen von den endlich vielen in Q aufgehenden Primzahlen). Ihre Normen und nur diese liefern die Primzahlen p , welche durch $F(x_1, x_2)$ dargestellt werden und dabei kommt jede dieser Primzahlen p möglicherweise bei mehreren x_1, x_2 in Frage. Somit ergibt sich schließlich:

Die Anzahl der (x_1, x_2) , welche dem Winkelraum J von der Größe ϑ angehören und wofür die quadratische Form

$$F(x_1, x_2) = \text{Primzahl} \leq t,$$

ist asymptotisch gleich

$$\vartheta \frac{\varphi(Q)}{h(Q)} \frac{t}{\log t}.$$

Der Winkel ϑ ist dabei in der oben angegebenen allein durch die Form F bestimmten Nicht-Euklidischen Art zu messen. In der obigen Formulierung ist der Satz ersichtlich auch für beliebige Winkelräume kleiner als der Vollwinkel richtig.

Folglich ist die Anzahl der Primzahlpunkte $\hat{\pi}$, wofür bei festem $k_1, k_2, \vartheta_1, \vartheta_2$

$$\vartheta_1 \leq w(\hat{\pi}) \leq \vartheta_2,$$

$$k_1 t \leq N(\hat{\pi}) \leq k_2 t$$

asymptotisch gleich

$$(61) \quad (\vartheta_2 - \vartheta_1)(k_2 - k_1) \frac{\varphi(Q)}{h(Q)} \frac{t}{\log t}.$$

Dabei ist $(\vartheta_2 - \vartheta_1)(k_2 - k_1)$ der Nicht-Euklidische (mit Bezug auf F) gemessene Flächeninhalt des Gebietes

$$(62) \quad \begin{cases} \vartheta_1 \leq w(\hat{\alpha}_1 x_1 + \hat{\alpha}_2 x_2) \leq \vartheta_2, \\ k_1 \leq F(x_1, x_2) \leq k_2, \end{cases}$$

der wiederum gleich

$$\frac{|g\sqrt{D}|}{2\pi} \iint dx_1 dx_2,$$

erstreckt über das Gebiet (62), ist.

Nach bekannten Prinzipien gilt daher eine zu (61) analoge Formel für ein *beliebig gestaltetes* Gebiet. Wir sprechen sie so aus:

Sei V ein endliches zweidimensionales Gebiet der x_1 - x_2 -Ebene, dessen Euklidischer Flächeninhalt auch mit V bezeichnet werde. V_t bezeichne das entsprechende, durch Streckung vom Nullpunkt im Verhältnis $1:t$ entstehende Gebiet. Die Anzahl $\pi(t)$ der Punkte x_1, x_2 aus V_t , wofür $F(x_1, x_2)$ eine Primzahl, ist dann asymptotisch

$$\pi(t) \sim V \cdot \frac{t^2}{\log t^2} \cdot \frac{|g\sqrt{D}|}{2\pi} \frac{\varphi(Q)}{h(Q)}.$$

Die Anzahl aller Gitterpunkte in V_t sei $z(t)$. Hierfür ist

$$z(t) \sim V \cdot t^2.$$

Schließlich also

$$(63) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi(t)}{z(t)} = \frac{|g\sqrt{D}|}{2\pi} \frac{\varphi(Q)}{h(Q)}.$$

Die Konstante rechts läßt sich unter Einsetzen von $h(Q)$ in die Form setzen:

$$\frac{1}{\kappa h} \cdot \frac{1}{\prod_{q|Q} \left\{ 1 - \left(\frac{-d}{q} \right) \frac{1}{q} \right\}}.$$

Hier ist $\kappa \cdot h$ der Koeffizient von $\frac{1}{s-1}$ in der Entwicklung der Zetafunktion des Körpers, also unabhängig von Q . Das Produkt ist über die verschiedenen rationalen Primzahlen q zu erstrecken, welche in Q aufgehen.

Wir wollen noch die Anzahl der Primzahlen untersuchen, welche durch die quadratische Form dargestellt werden, wenn x_1, x_2 nur die Zahlen gewisser arithmetischer Reihen durchlaufen.

Sei k eine ganze rationale Zahl,

$$\hat{\sigma} = m_1 \hat{\alpha}_1 + m_2 \hat{\alpha}_2 = L(m_1, m_2)$$

eine durch L darstellbare Zahl; wir betrachten die Zahlen, die für ganzes x_1, x_2 durch

$$\hat{\mu} = L(kx_1 + m_1, kx_2 + m_2)$$

dargestellt werden. Nach dem Vorhergehenden sind es diejenigen Zahlen, wofür

$$(64) \quad \frac{\hat{\mu} - \hat{\sigma}}{k} \text{ durch } L \text{ darstellbar,}$$

d. h.

$$(65) \quad \hat{\mu} \equiv \hat{\sigma} + kr\hat{\varrho} \pmod{kQ}$$

mit irgendeinem ganzen rationalen r . Bei festem r , $\hat{\sigma}$ haben die durch (65) definierten $\hat{\mu}$ entweder einen gemeinschaftlichen Teiler — dieser geht alsdann in kQ auf — oder das ist nicht der Fall, und dann kommen nach § 6 unter den $\hat{\mu}$ auch unendlich viele Primzahlen vor. Damit dies der Fall, ist notwendig und hinreichend, daß

$$(66) \quad \begin{cases} \hat{\sigma} \text{ prim zu } k, & s + kr \text{ prim zu } Q, \\ \text{wobei } \sigma \equiv s\hat{\varrho} \pmod{Q}. \end{cases}$$

Wir nehmen an, diese Bedingungen seien für ein r erfüllt. Durch elementare Betrachtungen findet man, daß dann die Anzahl aller mod Q inkongruenten r , wofür $s + kr$ prim zu Q , gleich

$$(67) \quad Q \prod_{\substack{p|Q \\ p, k=1}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

p durchläuft alle Primteiler von Q , die nicht in k aufgehen. Gibt es unter den Zahlen $\hat{\mu}$ solche, die zu kQ prim sind, was wir ja voraussetzen, so können wir von vornherein $\hat{\sigma}$ gleich einer solchen Zahl nehmen; die Gesamtheit der alsdann durch $L(kx_1 + m_1, kx_2 + m_2)$ dargestellten Zahlen bleibt dabei unverändert.

Die Anzahl der Primzahlen $\hat{\pi} \equiv \hat{\sigma} + kr\hat{\varrho} \pmod{kQ}$, wobei die Punkte $(kx_1 + m_1, kx_2 + m_2)$ einem Winkelraum von der Größe ϑ (wie, früher gemessen) angehören, während ihre Norm $\leq t$ ist, ist daher asymptotisch

$$\frac{\vartheta}{g} \frac{w}{h} \cdot k^2 Q^2 \prod_{p|Qk} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 - \left(\frac{-d}{p}\right) \frac{1}{p}\right) \cdot \frac{t}{\log t}.$$

w ist die Anzahl aller Einheiten des Körpers.

Da die lineare Funktion $L(kx_1 + m_1, kx_2 + m_2)$ soviel verschiedene Kongruenzen erzeugt, als (67) angibt, so ist endlich wie auf S. 47:

Die Anzahl der Punkte $kx_1 + m_1, kx_2 + m_2$, welche in einem Bereich V_t liegen, der aus V durch Dehnung im Verhältniß $1:t$ entsteht, und wofür

$$F(kx_1 + m_1, kx_2 + m_2) = \text{Primzahl,}$$

ist asymptotisch gleich

$$\frac{1}{\pi h} \cdot \frac{1}{k^2 \prod_{\substack{p/k \\ p+Q}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{q/Qk} \left(1 - \left(\frac{-d}{q}\right) \frac{1}{q}\right)} \frac{V \cdot t^2}{\log t^2}.$$

Voraussetzung ist nur, daß es überhaupt ein ganzes x_1, x_2 gibt, wobei $F(kx_1 + m_1, kx_2 + m_2)$ zu kQ teilerfremd ist.

Im Zusammenhang mit diesen Untersuchungen erhebt sich gleich die Frage, welchen Wert die Funktionen $\xi(s; \lambda)$ im Punkte $s = 1$ haben. Es ist nun sehr bemerkenswert, daß es dabei zwei ganz verschiedene Arten numerischer Werte gibt. Die eine Art entspricht denjenigen λ , wo der Exponent ga eine gerade Zahl ist. Diese lassen sich alle durch elliptische Modulfunktionen, deren Argument eine Zahl aus k ist, ausdrücken. Die andere Art, wo ga eine ungerade Zahl ist, führt dagegen auf neue Transzendenten, und zwar auf solche, welche mir inzwischen bei einer ganz anderen Gelegenheit, bei der Klassenzahlbestimmung gewisser höherer Zahlkörper, entgegengetreten sind. Diese Untersuchungen habe ich jedoch noch nicht zum Abschluß bringen können.

§ 10.

Reelle quadratische Körper.

Im reellen quadratischen Körper der Diskriminante d sind die Größencharaktere mod $\mathfrak{f}$

$$(68) \quad \begin{aligned} \lambda^m(\hat{\mu}) &= e^{2\pi i w(\hat{\mu})m} & (m = \pm 1, \pm 2, \dots) \\ w(\hat{\mu}) &= \frac{1}{2 \log |\eta|} \log \left| \frac{\hat{\mu}}{\hat{\mu}'} \right|, \end{aligned}$$

worin η ($\eta > 1$) die Grundeinheit mod $\mathfrak{f}$ ist. Die Anzahl g der Einheitswurzeln mod $\mathfrak{f}$ ist 1. Hier gibt es aber noch Vorzeichencharaktere

$$v(\hat{\mu}) = \left(\frac{\hat{\mu}}{|\hat{\mu}|} \right)^{a_1} \left(\frac{\hat{\mu}'}{|\hat{\mu}'|} \right)^{a_2} \quad (a_1, a_2 = 0, 1).$$

Jeder Idealcharakter von $\mathfrak{S}_0(\mathfrak{f})$ hat die Form

$$\lambda^m \cdot v \cdot \chi = \lambda((\hat{\mu})),$$

wo χ ein Klassencharakter von $\mathfrak{S}(\mathfrak{f})$ ist. Der Γ -Faktor, der in der Funktionalgleichung von $\zeta(s; \lambda)$ auftritt, ist

$$\Gamma(s; \lambda) = \Gamma\left(\frac{s+a_1}{2} + \frac{\pi i m}{2 \log |\eta|}\right) \Gamma\left(\frac{s+a_2}{2} - \frac{\pi i m}{2 \log |\eta|}\right),$$

$$\gamma(\lambda) = 1,$$

$$A = \frac{1}{\pi} |\sqrt{dN(\mathfrak{f})}|.$$

Sei jetzt F eine ganzzahlige primitive quadratische Form mit der Diskriminante $Q^2 d > 0$. Nach § 7 gibt es zu F im Körper $k(\sqrt{d})$ eine primitive Linearform L und eine ganze Zahl $\hat{\omega}$ aus L derart, daß

$$L = \hat{\alpha}_1 x_1 + \hat{\alpha}_2 x_2,$$

$$F = LL' \left(\frac{N(\hat{\omega})}{|N(\hat{\omega})|} \right)^{-1}.$$

Die durch L darstellbaren Zahlen $\hat{\mu}$ sind genau diejenigen, welche für irgendein ganzes rationales r die Kongruenz

$$\hat{\mu} \equiv r \hat{\omega} \pmod{Q}$$

befriedigen, wobei $\hat{\omega}$ eine beliebige durch L darstellbare, zu Q teilerfremde Zahl bedeutet. Es ist offenbar keine Einschränkung, die Zahlen $\hat{\omega}$ und $\hat{\omega}$ als identisch anzunehmen.

Die Größe $w(\hat{\mu})$, welche nach (68) in den Charakteren mod Q auftritt, hat nun die Bedeutung eines *Nicht-Euklidischen Winkelmaßes* in einer auf $F = 0$ gegründeten Maßbestimmung. Durch die Form F werden nämlich in der (x_1, x_2) -Ebene zwei verschiedene Geraden $F = 0$ bestimmt, die Asymptoten der Hyperbelschar $F = \text{const.}$ Wir wollen die Variablen x_1, x_2 auf einen ganz bestimmten der durch das Asymptotenpaar gegebenen Quadranten beschränken, nämlich auf denjenigen, wo

$$\frac{\hat{\mu}}{\hat{\omega}} > 0, \quad \frac{\hat{\mu}'}{\hat{\omega}'} > 0.$$

Er heiße der Quadrant $(\hat{\omega})$. Berechnen wir jetzt für zwei von Null ausgehende, nach den Punkten $\hat{\mu}, \hat{\nu}$ dieses Quadranten gezogene Halbgeraden den Winkel! Dabei legen wir als absolutes Gebilde den ausgearteten Kegelschnitt $F = 0, x_3 = 0$, d. h. ein Paar reelle Punkte der unendlich fernen Geraden zugrunde. (Diese parabolische Maßbestimmung ist übrigens die gleiche, welche der alten Einstein-Minkowskischen Relativitätstheorie zugrunde liegt, definiert durch die Lorentzgruppe in zwei Variablen.)

Als Maß für den Winkel findet sich dann

$$k \log \left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\nu}} : \frac{\hat{\mu}'}{\hat{\nu}'} \right).$$

Wählen wir den Faktor k so, daß der Winkel $= 1$ wird für die Strahlen nach $\hat{\mu}$ und $\eta \hat{\mu}$, so erhalten wir als Winkelmaß gerade

$$w(\hat{\mu}) - w(\eta \hat{\mu}).$$

Das asymptotische Gesetz, welches in § 6 bewiesen wurde, lautet also hier:

Die Anzahl der Punkte (x_1, x_2) , welche im Quadranten $(\hat{\rho})$ liegen, und dem Winkelraum J von der Größe ϑ angehören, und wofür

$\hat{\mu} = \hat{\alpha}_1 x_1 + \hat{\alpha}_2 x_2 \equiv \hat{\rho} \pmod{Q}$, $|N(\hat{\mu})| = F(x_1, x_2) = \text{Primzahl} \leq t$
ist asymptotisch gleich

$$\frac{\vartheta}{h_0(Q)} \frac{t}{\log t};$$

ϑt ist der Nicht-Euklidische Flächeninhalt des Stückes von J , das dem Bereich $F \leq t$ angehört, dieser ist aber wieder

$$\frac{Q\sqrt{d}}{\log|\eta|} \times \text{Euklidischer Flächeninhalt.}$$

Hieraus folgt endlich wie in § 8:

Sei V ein endliches zweidimensionales Gebiet der x_1 - x_2 -Ebene, vom Euklidischen Inhalt V . V_t bedeute das aus V durch Streckung vom Nullpunkt aus im Verhältniß $1:t$ entstehende Gebiet. Überdies gehöre V dem Quadranten $(\hat{\rho})$ an. Die Anzahl der Punkte x_1, x_2 in V_t , wofür

$$\hat{\mu} = \hat{\alpha}_1 x_1 + \hat{\alpha}_2 x_2 \equiv \hat{\rho} \pmod{Q} \text{ und } \hat{\mu} \text{ Primzahl,}$$

ist asymptotisch

$$\frac{Q\sqrt{d}}{h_0(Q)\log|\eta|} \frac{V_t}{\log V_t}.$$

Die Anzahl der x_1, x_2 in V_t , wofür

$$N(\hat{\mu}) = F(x_1, x_2) = \text{Primzahl}$$

(F ist dann > 0 , weil wir im Quadranten $(\hat{\rho})$ sind), ist asymptotisch

$$\frac{Q\sqrt{d}}{h_0(Q)\log|\eta|} \cdot \varphi(Q) \frac{V_t}{\log V_t}.$$

An Stelle von V_t können wir auch $z(t)$ schreiben, wenn $z(t)$ die Anzahl aller Gitterpunkte in V_t bedeutet.

Göttingen, April 1919.

(Eingegangen am 29. April 1919.)