SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Mathematische Zeitschrift

Ort: Berlin

Jahr: 1922

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN266833020_0012

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN266833020_0012|LOG_0013

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Ein Mittelwertsatz in der Primzahltheorie.

Von

Harald Cramér in Stockholm.

Die Riemannsche Vermutung wird in den drei ersten Nummern von dieser Arbeit als wahr angenommen.

1. Es sei $x > 2$, und es bezeichne $\psi(x)$ die bekannte Tschebyscheffsche Primzahlfunktion

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leqq x} \log p,$$

wo p die Primzahlen, m die ganzen Zahlen durchläuft. Dann gilt nach v. Koch[1])

$$\psi(x) = x + O(\sqrt{x} \log^2 x);$$

nach Littlewood[2]) gilt aber *nicht*

$$\psi(x) = x + o(\sqrt{x} \log \log \log x).$$

In einer neulich erschienenen Arbeit[3]) habe ich bemerkt, daß die Funktion

$$\frac{\psi(x) - x}{\sqrt{x}},$$

die also jedenfalls nicht beschränkt ist, doch einen beschränkten Quadratmittelwert hat, d. h. daß

$$\frac{1}{x} \int_2^x \left(\frac{\psi(t) - t}{\sqrt{t}} \right)^2 dt = O(1)$$

[1]) Sur la distribution des nombres premiers, Acta Mathematica **24** (1901), S. 159–182.

[2]) Hardy and Littlewood, Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes, Acta Mathematica **41** (1917), S. 119–196.

[3]) Some theorems concerning prime numbers, Arkiv för Matematik **15**, Nr. 5 (1920), 33 S.

gilt. Ich habe auch daselbst die Frage aufgeworfen, ob nicht dieser Ausdruck sogar einen Limes für $x \to \infty$ hat. Daß aber diese Frage zu verneinen ist, geht aus dem zweiten Teile des folgenden jetzt zu beweisenden Satzes hervor, von dem der erste Teil gewissermaßen ein Analogon des bekannten Parsevalschen Satzes aus der Theorie der Fourierschen Reihen bildet.

Satz. *Wenn die Riemannsche Vermutung wahr ist, so gilt für* $x \to \infty$

$$\frac{1}{\log x}\int_2^x \left(\frac{\psi(t)-t}{t}\right)^2 dt \to \sum_\varrho \left|\frac{n_\varrho}{\varrho}\right|^2, \tag{1}$$

wo ϱ *die komplexen Nullstellen der Funktion* $\zeta(s)$ *durchläuft und* n_ϱ *den Grad der Vielfachheit von* ϱ *angibt. — Dagegen schwankt für jedes* $\alpha < 1$ *der Ausdruck*

$$\frac{1}{x^{2(1-\alpha)}}\int_2^x \left(\frac{\psi(t)-t}{t^\alpha}\right)^2 dt \tag{2}$$

zwischen zwei verschiedenen endlichen Unbestimmtheitsgrenzen.

Wenn wir in dieser Arbeit die Bezeichnung $\sum_\varrho$ anwenden, so denken wir uns immer die $\varrho = \frac{1}{2} + i\gamma$ nach absolut wachsenden Ordinaten geordnet und, etwas abweichend vom gewöhnlichen Gebrauche, jedes ϱ von seiner Vielfachheit abgesehen nur genau einmal gezählt.

2. Für den Beweis werden wir die v. Mangoldtsche Formel[4])

$$\psi(t) = t - \sum_\varrho n_\varrho \frac{t^\varrho}{\varrho} - \frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{t^2}\right) - \log 2\pi$$

benutzen, die für alle $t > 2$ gilt, welche nicht von der Form $t = p^m$ sind. Die hier auftretende Reihe ist in jedem endlichen abgeschlossenen Intervall solcher t-Werte gleichmäßig konvergent, und ihre „Teilsummen" $\sum_{|\gamma|<A} n_\varrho \frac{t^\varrho}{\varrho}$ sind in jedem Intervall $2 \leqq t \leqq x$ gleichmäßig beschränkt.

Schreiben wir also

$$\begin{aligned}\left(\frac{\psi(t)-t}{t}\right)^2 &= \frac{1}{t^2}\left(-\sum_\varrho n_\varrho \frac{t^\varrho}{\varrho} + O(1)\right)^2 \\ &= \sum_\varrho n_\varrho \sum_{\varrho'} n_{\varrho'} \frac{t^{\varrho+\varrho'-2}}{\varrho\,\varrho'} + O\left(\frac{1}{t^2}\right) + O\left(\left|\sum_\varrho n_\varrho \frac{t^{\varrho-2}}{\varrho}\right|\right) \\ &= \sum_\varrho n_\varrho \sum_{\varrho'} n_{\varrho'} \frac{t^{\varrho+\varrho'-2}}{\varrho\,\varrho'} + O\left(t^{-\frac{3}{2}}\log^2 t\right),\end{aligned}$$

[4]) Vgl. z. B. E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig und Berlin 1909, 1, S. 365.

so kann hier von 2 bis x gliedweise integriert werden, und wir erhalten

$$\int_2^x \left(\frac{\psi(t)-t}{t}\right)^2 dt = \sum_\varrho \frac{n_\varrho}{\varrho} \sum_{\varrho'} \frac{n_{\varrho'}}{\varrho'} \int_2^x t^{\varrho+\varrho'-2}\, dt + O(1),$$

wo, bei der angegebenen Summationsordnung, die Doppelreihe konvergent ist. Es gilt nun

$$\varrho(1-\varrho) = |\varrho|^2$$

und nach bekannten Sätzen über die Verteilung der ϱ ist die Reihe

$$\sum_\varrho \left|\frac{n_\varrho}{\varrho}\right|^2$$

konvergent. Hieraus folgt weiter

$$(3) \qquad \int_2^x \left(\frac{\psi(t)-t}{t}\right)^2 dt = \log x \sum_\varrho \left|\frac{n_\varrho}{\varrho}\right|^2 + \sum_\varrho \frac{n_\varrho}{\varrho} \sum_{\varrho' \neq 1-\varrho} \frac{n_{\varrho'}}{\varrho'} \cdot \frac{x^{\varrho+\varrho'-1} - 2^{\varrho+\varrho'-1}}{\varrho+\varrho'-1} + O(1).$$

Wir wollen beweisen, daß das erste Glied rechts für das asymptotische Verhalten des ganzen Ausdrucks ausschlaggebend ist, d. h. daß die Doppelreihe von der Form $o(\log x)$ ist.

Es sei nun η eine beliebig kleine, aber von x unabhängige, positive Zahl, kleiner als das kleinste positive γ. Dann werden wir zuerst zeigen, daß die Summe, die man erhält, wenn man in der Doppelreihe nur die Glieder mit

$$|\varrho+\varrho'-1| \geqq \eta$$

nimmt, absolut konvergent und von der Form $O(1)$ ist. Aus Symmetriegründen genügt es zu zeigen, daß die beiden Reihen

$$\sum_{\gamma>0} \frac{n_\varrho}{|\varrho|} \sum_{\gamma'>0} \frac{n_{\varrho'}}{|\varrho'|(\gamma+\gamma')}$$

und

$$(4) \qquad \sum_{\gamma>0} \frac{n_\varrho}{|\varrho|} \sum_{0<\gamma'\leqq\gamma-\eta} \frac{n_{\varrho'}}{|\varrho'|(\gamma-\gamma')}$$

konvergieren, und man findet sogar, daß es hinreichend ist, nur die letzte Reihe zu betrachten. Nach der bekannten Formel

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\left(\log\frac{T}{2\pi} - 1\right) + O(\log T),$$

wo $N(T)$ die Anzahl der $\varrho = \frac{1}{2} + i\gamma$ angibt, die der Beziehung $0 < \gamma \leqq T$ genügen [5]), findet man nun für hinreichend große γ

[5]) Vgl. E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig und Berlin 1909, **1**, S. 368.

$$\sum_{0<\gamma'\leqq\gamma-\eta}\frac{n_{\varrho'}}{|\varrho'|(\gamma-\gamma')}=\sum_{0<\gamma'\leqq\gamma^{\frac{2}{3}}}+\sum_{\gamma^{\frac{2}{3}}<\gamma'\leqq\gamma-\gamma^{\frac{2}{3}}}+\sum_{\gamma-\gamma^{\frac{2}{3}}<\gamma'\leqq\gamma-\eta}$$

$$=O\left(\frac{\gamma^{\frac{2}{3}}\log\gamma}{\gamma}+\frac{\gamma\log\gamma}{\gamma^{\frac{4}{3}}}+\frac{\gamma^{\frac{2}{3}}\log\gamma}{\gamma}\right)=O\left(\frac{\log\gamma}{\gamma^{\frac{1}{3}}}\right),$$

so daß die Reihe (4) konvergiert. Aus (3) folgt also

$$(5)\qquad \int_2^x\left(\frac{\psi(t)-t}{t}\right)^2dt=\log x\sum_\varrho\left|\frac{n_\varrho}{\varrho}\right|^2$$
$$+\sum_{0<|\gamma+\gamma'|<\eta}\sum\frac{n_\varrho n_{\varrho'}(x^{\varrho+\varrho'-1}-2^{\varrho+\varrho'-1})}{i\varrho\varrho'(\gamma+\gamma')}+O(1)$$

und es muß nur noch gezeigt werden, daß, wenn ε beliebig klein gegeben ist, η und x_0 so gewählt werden können, daß

$$\left|\sum_\varrho\sum_{0<|\gamma+\gamma'|<\eta}\frac{n_\varrho n_{\varrho'}(x^{i(\gamma+\gamma')}-2^{i(\gamma+\gamma')})}{\varrho\varrho'(\gamma+\gamma')}\right|<\varepsilon\log x$$

für $x>x_0$ gilt.

Da die Gliederzahl der inneren Summe endlich ist und in der Summe $\sum_\varrho$ die Glieder nach wachsendem $|\gamma|$ geordnet sind, kann man immer zwei Glieder $(\varrho=\frac{1}{2}+i\gamma,\ \varrho'=\frac{1}{2}+i\gamma')$ und $(\varrho=\frac{1}{2}-i\gamma,\ \varrho'=\frac{1}{2}-i\gamma')$ zusammenfassen. Es genügt also, die Ungleichung

$$\left|\sum_\varrho\sum_{0<\gamma+\gamma'<\eta}\frac{n_\varrho n_{\varrho'}}{\gamma+\gamma'}\Im\frac{x^{i(\gamma+\gamma')}-2^{i(\gamma+\gamma')}}{\varrho\varrho'}\right|<\frac{1}{2}\varepsilon\log x$$

oder sogar

$$(6)\qquad \sum_\varrho\sum_{0<\gamma+\gamma'<\eta}\frac{n_\varrho n_{\varrho'}}{|\varrho|^2|\varrho'|^2(\gamma+\gamma')}|\Im\bar\varrho\,\bar\varrho'x^{i(\gamma+\gamma')}|<\frac{1}{4}\varepsilon\log x$$

für alle $x\geqq 2$, bei zweckmäßiger Wahl von η, zu beweisen. Es gilt nun

$$|\Im\bar\varrho\,\bar\varrho'x^{i(\gamma+\gamma')}|=|-\tfrac{1}{2}(\gamma+\gamma')\cos(\gamma+\gamma')\log x+(\tfrac{1}{4}-\gamma\gamma')\sin(\gamma+\gamma')\log x|$$
$$<\gamma+\gamma'+2|\gamma\gamma'\sin(\gamma+\gamma')\log x|<3|\gamma\gamma'|(\gamma+\gamma')\log x;$$

die linke Seite von (6) ist also kleiner als

$$(7)\qquad 3\log x\sum_\varrho\sum_{0<\gamma+\gamma'<\eta}\frac{n_\varrho n_{\varrho'}}{|\gamma\gamma'|}.$$

Es sei nun K eine solche Konstante, daß für alle $T>2$ die Ungleichung $T-1<\gamma<T+1$ von höchstens $K\log T$ Nullstellen (jede mit ihrer Vielfachheit gezählt) erfüllt ist, und es sei $A>0$ so gewählt, daß

$$\sum_{\gamma>A}n_\varrho\frac{\log\gamma}{\gamma(\gamma-1)}<\frac{\varepsilon}{24K}$$

gilt. Dann wählen wir η so, daß erstens $\eta < 1$ und zweitens η kleiner als die kleinste Differenz zweier verschiedener γ im Intervalle $0 < \gamma \leqq A+1$ wird. Die Glieder der Doppelsumme in (7) können dann nur solche ϱ enthalten, für welche $|\gamma| > A$ gilt. Wir haben also

$$3\log x \sum_{\varrho} \sum_{0<\gamma+\gamma'<\eta} \frac{n_\varrho n_{\varrho'}}{|\gamma\gamma'|} < 3\log x \sum_{|\gamma|>A} \sum_{0<\gamma+\gamma'<\eta} \frac{n_\varrho n_{\varrho'}}{|\gamma|(|\gamma|-1)}$$

$$< 6\log x \sum_{\gamma>A} \frac{K\log\gamma\cdot n_\varrho}{\gamma(\gamma-1)} < \frac{\varepsilon}{4}\log x.$$

Hierdurch ist (6) bewiesen, und aus (5) folgt dann der erste Teil unseres Satzes:

$$\int_2^x \left(\frac{\psi(t)-t}{t}\right)^2 dt = \log x \sum_{\varrho} \left|\frac{n_\varrho}{\varrho}\right|^2 + o(\log x).$$

3. In gleicher Weise wie oben erhalten wir, wenn $\alpha < 1$ und von x unabhängig ist,

$$(8)\quad \frac{1}{x^{2(1-\alpha)}} \int_2^x \left(\frac{\psi(t)-t}{t^\alpha}\right)^2 dt = \sum_{\varrho} \frac{n_\varrho}{\varrho} \cdot \sum_{\varrho'} \frac{n_{\varrho'}}{\varrho'} \cdot \frac{x^{\varrho+\varrho'-1}}{\varrho+\varrho'+1-2\alpha} + o(1).$$

Die Hauptschwierigkeit bei dem soeben behandelten Falle $\alpha = 1$ lag nun darin, daß der in der Doppelreihe in (3) im Nenner auftretende Faktor $\varrho+\varrho'-1$ beliebig kleine Werte annehmen konnte. Deshalb mußte diese Reihe in zwei Teile geteilt und die beiden Teile in verschiedener Weise abgeschätzt werden. Hier aber hat der entsprechende Faktor $\varrho+\varrho'+1-2\alpha$ den reellen Teil $2(1-\alpha) > 0$, und man kann die ganze Doppelreihe in genau derselben Weise wie vorhin die Glieder mit $|\varrho+\varrho'-1| \geqq \eta$ behandeln. Man zeigt in dieser Weise, daß die Doppelreihe unbedingt konvergent und von der Form $O(1)$ ist. Hierdurch ist schon bewiesen, daß die Unbestimmtheitsgrenzen von (2) *endlich* sind, und wir haben nur noch zu zeigen, daß sie *verschieden* sind.

Zuerst bemerken wir, daß die absolut konvergente Doppelreihe

$$(9)\qquad \sum_{\varrho} \frac{n_\varrho}{\varrho} \sum_{\varrho'} \frac{n_{\varrho'}}{\varrho'} \cdot \frac{x^{\varrho+\varrho'-1}}{\varrho+\varrho'+1-2\alpha}$$

jedenfalls nicht für alle $x > 2$ konstant sein kann. Denn in diesem Falle würde man durch Multiplikation mit $x^{2(1-\alpha)}$ und Differentiation

$$\left(\sum \frac{n_\varrho}{\varrho} x^\varrho\right)^2 = 2(1-\alpha)Kx$$

für alle $x \neq p^m$ erhalten. (Für alle solche Werte von x darf man nach bekannten Sätzen gliedweise differentiieren.) Das ist aber z. B. mit dem oben zitierten Littlewoodschen Satze nicht verträglich.

Wenn wir jetzt noch beweisen können, daß die Doppelreihe (9) jedem Werte, den sie überhaupt für $x > 2$ annimmt, wieder für beliebig große Werte von x beliebig nahe kommt, so folgt daraus, daß die linke Seite von (8) keinen bestimmten Limes für $x \to \infty$ haben kann, und unser Satz ist dann vollständig bewiesen. Dies folgt aber leicht aus dem bekannten Dirichlet-Kroneckerschen Satz über diophantische Approximationen, der etwa folgendermaßen ausgesprochen werden kann[6]):

„Es seien n reelle Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ und zwei positive Zahlen t_0 (groß) und ε (klein) gegeben. Dann kann man n ganze Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ und ein $t > t_0$ bestimmen, so daß die Ungleichungen

$$\begin{aligned} |t\alpha_1 - 2\pi\mu_1| &< \varepsilon \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\ |t\alpha_n - 2\pi\mu_n| &< \varepsilon \end{aligned}$$

alle erfüllt sind."

Betrachten wir nun die Doppelreihe (9). Sie nimmt für $x = z > 2$ einen gewissen Wert A an. Wenn x_0 beliebig gegeben ist, so wollen wir zeigen, daß es oberhalb x_0 Werte von x gibt, wo die Doppelreihe dem Wert A beliebig nahe kommt. Da die Doppelreihe für alle $x > 2$ absolut und gleichmäßig konvergiert, können wir, wenn ε beliebig klein gegeben ist, n Glieder herausnehmen und dabei n so wählen, daß die Summe der übrigen Glieder für $x > 2$ absolut $< \varepsilon$ ist. Setzen wir in der Summe der n fraglichen Glieder $x = ze^t$ und wenden dann den obigen Satz an, wobei wir $t_0 = \log \frac{x_0}{z}$ nehmen und unter $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die n entsprechenden Werte von $\gamma + \gamma'$ verstehen, so ergibt sich, daß wir ein $t > t_0$, d. h. ein $x > x_0$ derart finden können, daß

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{\varrho}{}' \frac{n_\varrho}{\varrho} \sum_{\varrho'}{}' \frac{n_{\varrho'}}{\varrho'} \cdot \frac{x^{\varrho+\varrho'-1}}{\varrho+\varrho'+1-2\alpha} - A \right| \\ &< 2\varepsilon + \sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{n_\varrho n_{\varrho'}}{\varrho\varrho'(\varrho+\varrho'+1-2\alpha)} \left(e^{i(t\alpha_\nu - 2\pi\mu_\nu)} - 1\right) \right| \\ &< \varepsilon \left(2 + \sum_{\varrho}{}' \sum_{\varrho'}{}' \left| \frac{n_\varrho n_{\varrho'}}{\varrho\varrho'(\varrho+\varrho'+1-2\alpha)} \right| \right). \end{aligned}$$

Hierdurch ist die behauptete Eigenschaft unserer Doppelreihe bewiesen, und nach dem oben Gesagten folgt daraus der letzte Teil des Satzes.

4. *Wenn die Riemannsche Vermutung falsch ist, so kann weder* (1) *noch* (2) *für unendlich wachsendes x beschränkt bleiben. Aus der*

[6]) Vgl. z. B. H. Bohr und E. Landau, Über das Verhalten von $\zeta(s)$ und $\zeta_\varkappa(s)$ in der Nähe der Geraden $\sigma = 1$, Göttinger Nachrichten, 1910, S. 303–330.

Beschränktheit von (1) *oder* (2) *folgt also umgekehrt die Riemannsche Vermutung.*

Es genügt, dies für (1) zu beweisen. Es gilt nämlich, wenn wir den Ausdruck (2) gleich $f_\alpha(x)$ setzen,

$$\int_2^x \left(\frac{\psi(t)-t}{t}\right)^2 dt = f_\alpha(x) + 2(1-\alpha)\int_2^x \frac{f_\alpha(t)}{t}\,dt,$$

so daß aus der Beschränktheit von (2) auch die Beschränktheit von (1) folgt. — Aus der bekannten Schwarzschen Ungleichung erhalten wir

$$\left(\int_2^x \frac{\psi(t)-t}{t}\,dt\right)^2 \leqq (x-2)\int_2^x \left(\frac{\psi(t)-t}{t}\right)^2 dt,$$

also, wenn (1) beschränkt ist,

$$\int_2^x \frac{\psi(t)-t}{t}\,dt = O\left(\sqrt{x\log x}\right),$$

d. h.

$$\sum_{n<x} \Lambda(n)\log\frac{x}{n} = x + O\left(\sqrt{x\log x}\right),$$

wo wie gewöhnlich $\Lambda(n) = \psi(n) - \psi(n-1)$ gesetzt ist. Da nun

$$\sum_{n<x} \log\frac{x}{n} = x + O(\log x)$$

gilt, wäre also

$$\sum_{n<x} (\Lambda(n)-1)\log\frac{x}{n} = O\left(\sqrt{x\log x}\right).$$

Die Reihe $\sum_1^\infty (\Lambda(n)-1)\,n^{-\sigma-it}$ wäre also für $\sigma > \frac{1}{2}$ summierbar[7]) $(\log n, 1)$ und daraus folgt bekanntlich die Regularität der Funktion von $s = \sigma + it$

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s)$$

für $\sigma > \frac{1}{2}$, d. h. die Riemannsche Vermutung.

Mörby, Stocksund, den 7. Juni 1921.

[7]) Vgl. Hardy und Riesz, The general theory of Dirichlet's series, Cambridge 1915, Theorem **31**, S. 45.

(Eingegangen am 13. Juni 1921.)