

Werk

Titel: Mathematische Zeitschrift

Jahr: 1929

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN266833020_0029

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN266833020_0029 | LOG_0041

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Zur Transzendenz von e .

Von

J. Popken in Groningen.

Bezeichnet θ irgendeine algebraische Zahl, so ist bekanntlich

$$|e - \theta| > 0.$$

Hieraus folgt: genügt θ der irreduziblen Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten

$$\sum_{h=0}^n c_h x^h = 0,$$

wo $(c_0, c_1, \dots, c_n) = 1$ ist¹⁾, so ist es möglich, eine nur von n und

$$H = |c_0| + |c_1| + \dots + |c_n|$$

abhängige positive Zahl η_1 zu finden mit der Eigenschaft

$$|e - \theta| > \eta_1.$$

H nennen wir die Höhe von θ (es ist klar, daß H eine durch θ eindeutig bestimmte ganze Zahl ≥ 1 ist). Ist $P(x) = \sum_{h=0}^n c_h x^h$ ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten, die nicht alle verschwinden, so ist auch

$$|P(e)| > 0.$$

Nennen wir $H = |c_0| + |c_1| + \dots + |c_n|$ die Höhe des Polynoms $P(x)$, dann können wir also eine nur von n und der Höhe H abhängige Zahl η_2 finden mit der Eigenschaft

$$|P(e)| > \eta_2.$$

Jetzt liegt die Frage nahe, welche Funktionen η_1 und η_2 von n und H die genannten Eigenschaften besitzen.

¹⁾ Mit $(c_0, c_1, \dots, c_n)$ wird der größte gemeinsame Teiler von $c_0, c_1, \dots, c_n$ gemeint.

Um diese Frage zu beantworten, habe ich, unterstützt durch Herrn Prof. Dr. J. G. van der Corput, die folgenden Sätze abgeleitet.

Satz I. Ist $P(x)$ ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten vom Grade n und von der Höhe $H \geq 3$, so gibt es eine nur von n abhängige Zahl λ_1 derart, daß

$$|P(e)| > H^{-n - \frac{\lambda_1}{\lg \lg H}}$$

ist.

Aus diesem Satz folgt:

1. Zu jedem positiven ε und jedem positiven ganzen n gibt es eine nur von n und ε abhängige positive Zahl C_1 derart, daß für jedes Polynom $P(x)$ vom Grade n mit ganzen rationalen Koeffizienten die Ungleichung

$$|P(e)| > C_1 H^{-n-\varepsilon}$$

gilt, wo H die Höhe des Polynoms $P(x)$ bezeichnet.

Denn wählt man $H_1 \geq 3$ so groß, daß $\frac{\lambda_1}{\lg \lg H_1} < \varepsilon$ ist, so gilt, wenn $H \geq H_1$ ist, die Beziehung

$$|P(e)| > H^{-n-\varepsilon}.$$

Bei gegebenen n und ε gibt es nur eine endliche Anzahl von Polynomen vom Grade n und von einer Höhe $< H_1$, so daß diese Polynome bei hinreichend kleinem positivem $C_1 \leq 1$ die verlangte Eigenschaft besitzen, und wegen $C_1 \leq 1$ haben auch die übrigen Polynome vom Grade n diese Eigenschaft.

2. Ist $\delta > 0$, und bezeichnet $P(x)$ ein Polynom vom Grade n mit ganzen rationalen Koeffizienten mit der Eigenschaft

$$|P(e)| < \delta,$$

so gibt es zu jedem positiven ε eine nur von n und ε abhängige positive Zahl C_2 derart, daß die Höhe H des Polynoms $P(x)$ größer als

$$C_2 \left(\frac{1}{\delta} \right)^{\frac{1}{n+\varepsilon}}$$

ist. (Man braucht nur

$$C_2 = C_1^{\frac{1}{n+\varepsilon}}$$

zu setzen.)

Auch Herr E. Borel²⁾ hat dieses Problem betrachtet. Er findet das folgende weniger scharfe Resultat:

²⁾ E. Borel, „Sur la nature arithmétique du nombre e “. Comptes Rendus 128 (1899, I), p. 596–599.

Ist $0 < \delta < \frac{1}{e}$, und bezeichnet $P(x)$ ein Polynom vom Grade n mit ganzen rationalen Koeffizienten mit der Eigenschaft

$$|P(e)| < \delta,$$

so gibt es zwei nur von n abhängige positive Zahlen C_3 und C_4 derart, daß die Höhe H des Polynoms $P(x)$ größer als

$$C_3 \left(\frac{1}{\delta} \right)^{\frac{C_4}{\lg \lg \frac{1}{\delta}}}$$

ist.

Die von mir gefundene Ungleichung ist schärfer; denn je größer der Exponent von $\frac{1}{\delta}$ ist, um so schärfer ist das Ergebnis, und aus meinem Resultat ergibt sich, daß im Borelschen Satze der Nenner $\lg \lg \frac{1}{\delta}$ im Exponent fortgelassen werden darf und daß für C_4 jede feste Zahl $< \frac{1}{n}$ gewählt werden darf.

Daß übrigens Satz I sehr scharf ist, sieht man unmittelbar, wenn man das erste Korollar von Satz I vergleicht mit

Satz II. *Zu jedem positiven ganzen n gibt es eine nur von n abhängige positive Zahl C_5 derart, daß zu jedem positiven ganzen H ein Polynom $P(x)$ vom Grade n und von einer Höhe $\leq H$ mit ganzen rationalen Koeffizienten gefunden werden kann mit der Eigenschaft*

$$|P(e)| < C_5 H^{-n}.$$

Außerdem beweise ich noch

Satz III. *Ist θ eine algebraische Zahl vom Grade n und von der Höhe $H \geq 3$, so gibt es eine nur von n abhängige Zahl λ_2 derart, daß*

$$|e - \theta| > H^{-n-1-\frac{\lambda_2}{\lg \lg H}}$$

ist.

Folglich:

1. Zu jedem positiven ε und jedem positiven ganzen n gibt es eine nur von n und ε abhängige positive Zahl C_6 derart, daß für jede algebraische Zahl θ vom Grade n und von der Höhe H die Ungleichung

$$|e - \theta| > C_6 H^{-n-1-\varepsilon}$$

gilt.

2. Ist $\delta > 0$, und bezeichnet θ eine algebraische Zahl vom Grade n und von der Höhe H mit der Eigenschaft

$$|e - \theta| < \delta,$$

so gibt es zu jedem positiven ε eine nur von n und ε abhängige positiv Zahl C_7 derart, daß die Höhe von θ größer als

$$C_7 \left(\frac{1}{\delta} \right)^{\frac{1}{n+1+\varepsilon}}$$

ist.

Ogleich die hier benutzte Beweisordnung eine gewisse Ähnlichkeit zeigt mit dem bekannten Beweis der Transzendenz von e , ist der Unterschied doch so groß, daß ich die Hilfssätze vom Anfang an formulieren und beweisen muß. (Man vergleiche die nachträgliche Bemerkung am Schluß.)

Hilfssatz 1. Für

$$B = \varrho e^{i\varphi}, \varrho > 1, \quad -\pi < \varphi \leq +\pi, \quad \lg B = \lg \varrho + i\varphi, \quad f(x) = \sum_{m=0}^n a_m x^m$$

und

$$F(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{\lg^k B}, \quad F(0) B^x - F(x) = Q(x)$$

ist

$$|Q(x)| \leq (\varrho e^{|\varphi|})^{|x|} \sum_{m=0}^n |a_m| |x|^m \leq (\varrho e^{\pi})^{|x|} \sum_{m=0}^n |a_m| |x|^m.$$

Vorbemerkung. Setzt man $B = e$, so findet man den aus der Theorie der Transzendenz von e bekannten Hilfssatz zurück³⁾.

$$\begin{aligned} \text{Beweis.} \quad F(x) &= \sum_{k=0}^n \sum_{m=k}^n \frac{a_m m! x^{m-k}}{(m-k)! \lg^k B} \\ &= \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m \frac{a_m m! x^{m-k}}{(m-k)! \lg^k B} = \sum_{m=0}^n \sum_{k'=0}^m \frac{a_m m! x^{k'}}{k'! \lg^{m-k'} B}. \end{aligned}$$

Folglich

$$\begin{aligned} (1) \quad F(0) &= \sum_{m=0}^n \frac{a_m m!}{\lg^m B}, \\ F(0) B^x &= \sum_{m=0}^n \frac{a_m m!}{\lg^m B} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{x^{k'} \lg^{k'} B}{k'!} = \sum_{m=0}^n \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{a_m m! x^{k'} \lg^{k'-m} B}{k'!}, \\ Q(x) &= F(0) B^x - F(x) = \sum_{m=0}^n \sum_{k'=m+1}^{\infty} \frac{a_m m! x^{k'} \lg^{k'-m} B}{k'!}, \\ |Q(x)| &\leq \sum_{m=0}^n |a_m| |x|^m \sum_{k'=m+1}^{\infty} \frac{|x|^{k'-m} |\lg B|^{k'-m}}{(k'-m)!} \\ &= \sum_{m=0}^n |a_m| |x|^m \sum_{k''=1}^{\infty} \frac{|x|^{k''} |\lg B|^{k''}}{k''!}. \end{aligned}$$

³⁾ Vgl. z. B. E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie III, S. 91 (Satz 741).

Es ist $\varrho > 1$, also

$$|\lg B| = |\lg \varrho + i\varphi| \leq \lg \varrho + |\varphi| = \lg(\varrho e^{|\varphi|}),$$

daher

$$|Q(x)| \leq \sum_{m=0}^n |a_m| |x|^m \sum_{k''=1}^{\infty} \frac{|x|^{k''} \{\lg(\varrho e^{|\varphi|})\}^{k''}}{k''!} \\ < (\varrho e^{|\varphi|})^{|x|} \sum_{m=0}^n |a_m| |x|^m \leq (\varrho e^{\pi})^{|x|} \sum_{m=0}^n |a_m| |x|^m.$$

Hilfssatz 2. Bezeichnet $P(x) = \sum_{h=0}^n c_h x^h$ ein Polynom vom Grade n ($n \geq 1$) und von der Höhe H mit ganzen rationalen Koeffizienten, so gibt es eine nur von n abhängige Zahl b_1 derart, daß für jede Primzahl p mit der Eigenschaft

$$\frac{(p-1)!}{b_1^p} > H$$

die Ungleichung

$$|P(e)| \{(n+1)p\}! > H$$

gilt.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $(c_0, c_1, \dots, c_n) = 1$ voraussetzen. Denn ist $(c_0, c_1, \dots, c_n) = d$, $d > 1$, so setzen wir

$$\bar{P}(x) = \sum_{h=0}^n \bar{c}_h x^h = \sum_{h=0}^n \frac{c_h}{d} x^h,$$

also

$$\bar{P}(e) = \frac{P(e)}{d}, \quad \bar{H} = \sum_{h=0}^n |\bar{c}_h| = \frac{H}{d},$$

$$(\bar{c}_0, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n) = 1.$$

Wenn daher

$$\frac{(p-1)!}{b_1^p} > H$$

ist, so ist auch

$$\frac{(p-1)!}{b_1^p} > \bar{H}.$$

Ist der Hilfssatz für den Fall $(\bar{c}_0, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n) = 1$ schon bewiesen, so erhalten wir

$$|\bar{P}(e)| \{(n+1)p\}! > \bar{H},$$

folglich

$$|P(e)| \{(n+1)p\}! > H,$$

so daß Hilfssatz 2 dann auch im allgemeinen Fall gilt.

Wir können daher $(c_0, c_1, \dots, c_n) = 1$ voraussetzen.

Ich setze im Hilfssatz 1 $B = e$ und weiter

$$(2) \quad f(x) = \frac{1}{(p-1)!(x-r)} \prod_{g=0}^n (x-g)^p,$$

wo p eine Primzahl ist, und r irgendeine ganze Zahl $0 \leq r \leq n$ bezeichnet. (Es wird also n in Hilfssatz 1 durch $np + p - 1$ ersetzt.)

$F(x)$ und $Q(x)$ seien wie in Hilfssatz 1 definiert.

Ist h eine ganze Zahl ≥ 0 und $\leq n$, so ist

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(p-1)! \{(x-h) + (h-r)\}} \prod_{g=0}^n \{(x-h) + (h-g)\}^p \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \sum_{m=p-1}^{np+p-1} A_{h,m} (x-h)^m; \end{aligned} \right.$$

$A_{h,m}$ ist ganz rational;

$$(4) \quad A_{h,p-1} = 0, \text{ wenn } h \neq r;$$

$$(5) \quad A_{r,p-1} = \{r! (-1)^{n-r} (n-r)!\}^p.$$

Aus (3) folgt weiter

$$\sum_{m=p-1}^{np+p-1} |A_{h,m}| |x-h|^m \leq \frac{1}{|x-h| + |h-r|} \prod_{g=0}^n \{|x-h| + |h-g|\}^p,$$

und hieraus ergibt sich, wenn $x = h + n$ gesetzt wird,

$$(6) \quad \sum_{m=p-1}^{np+p-1} |A_{h,m}| \leq \sum_{m=p-1}^{np+p-1} |A_{h,m}| n^m \leq \{(n+n)^p\}^{n+1} = b_0^p,$$

wo $b_0 = (2n)^{n+1}$ ist.

Nach der Definition von $Q(x)$ ist

$$(7) \quad F(0)P(e) = \sum_{h=0}^n c_h F(0) e^h = \sum_{h=0}^n c_h F(h) + \sum_{h=0}^n c_h Q(h).$$

Aus der Definition von $F(x)$ und aus (3) folgt

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^n c_h F(h) &= \sum_{h=0}^n c_h \left\{ A_{h,p-1} + p A_{h,p} + (p+1) p A_{h,p+1} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{(np+p-1)!}{(p-1)!} A_{h,np+p-1} \right\}, \end{aligned}$$

mit Rücksicht auf (4) also

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^n c_h F(h) &= c_r A_{r,p-1} + p \sum_{h=0}^n c_h \left\{ A_{h,p} + (p+1) A_{h,p+1} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{(np+p-1)!}{p!} A_{h,np+p-1} \right\}. \end{aligned}$$

Nach (5) ist daher

$$(8) \quad \sum_{h=0}^n c_h F(h) = c_r \{r! (-1)^{n-r} (n-r)!\}^p + p \cdot \Sigma\},$$

wo Σ ganz rational ist.

Unter den Koeffizienten von $P(x)$ ist mindestens einer nicht durch p teilbar wegen $(c_0, c_1, \dots, c_n) = 1$. Wir wählen r nun derart, daß $p \nmid c_r$ ist.⁴⁾ Ist $p > n$, so ist $p \nmid \{r! (-1)^{n-r} (n-r)!\}^p$, folglich wegen (8)

$$p \nmid \sum_{h=0}^n c_h F(h), \quad \text{also} \quad \sum_{h=0}^n c_h F(h) \neq 0,$$

daher

$$(9) \quad \left| \sum_{h=0}^n c_h F(h) \right| \geq 1, \quad \text{wenn } p > n \text{ ist.}$$

Es ist

$$\left| \sum_{h=0}^n c_h Q(h) \right| \leq \sum_{h=0}^n |c_h| |Q(h)|.$$

Nach Hilfssatz 1 ist

$$|Q(h)| \leq e^h \sum_{m=p-1}^{np+p-1} \left| \frac{A_{0,m}}{(p-1)!} \right| h^m \leq \frac{e^n}{(p-1)!} \sum_{m=p-1}^{np+p-1} |A_{0,m}| n^m,$$

somit wegen (6) mit $h=0$

$$|Q(h)| \leq \frac{e^n}{(p-1)!} b_0^p,$$

folglich

$$(10) \quad \left| \sum_{h=0}^n c_h Q(h) \right| \leq \frac{H e^n b_0^p}{(p-1)!}.$$

Wir wählen nun die nur von n abhängige Zahl $b_1 \geq 2eb_0$ derart, daß für jede positive ganze Zahl g , welche der Ungleichung

$$\frac{(g-1)!}{b_1^g} > 1$$

genügt, $g > n$ ist.

Genügt die Primzahl p der Ungleichung

$$(11) \quad \frac{(p-1)!}{b_1^p} > H,$$

so ist wegen $H \geq 1$ jedenfalls $p > n$, also nach (9)

$$\left| \sum_{h=0}^n c_h F(h) \right| \geq 1.$$

⁴⁾ Mit $a \nmid b$ wird gemeint: a teilt b nicht.

Außerdem ist nach (10)

$$\left| \sum_{h=0}^n c_h Q(h) \right| \leq \frac{H e^n b_0^p}{(p-1)!} < \frac{H e^p b_0^p}{(p-1)!} \leq \frac{H b_1^p}{2^p (p-1)!}.$$

Ziehen wir (11) in Betracht, so finden wir

$$\left| \sum_{h=0}^n c_h Q(h) \right| < \frac{1}{2}.$$

Wegen (7) ist daher

$$(12) \quad |F(0) \cdot P(e)| \geq \left| \sum_{h=0}^n c_h F(h) \right| - \left| \sum_{h=0}^n c_h Q(h) \right| > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Nach (3) mit $h=0$ ist aber

$$F(0) = \frac{1}{(p-1)!} \{ (np+p-1)! A_{0, np+p-1} + (np+p-2)! A_{0, np+p-2} + \dots + (p-1)! A_{0, p-1} \},$$

folglich

$$|F(0)| \leq \frac{(np+p-1)!}{(p-1)!} \{ |A_{0, np+p-1}| + |A_{0, np+p-2}| + \dots + |A_{0, p-1}| \}.$$

Nach (6) ist also

$$|F(0)| \leq \frac{(np+p-1)! b_0^p}{(p-1)!} < (np+p-1)! \frac{b_1^p}{(p-1)!}.$$

Wegen der Ungleichung (11) ist daher

$$|F(0)| < \frac{(np+p-1)!}{H},$$

so daß aus (12) folgt

$$\frac{(np+p-1)!}{H} |P(e)| > \frac{1}{2},$$

also

$$\{(n+1)p\}! |P(e)| > H.$$

Hilfssatz 3. Bezeichnet θ eine algebraische Zahl vom Grade n und von der Höhe H , so gibt es eine nur von n abhängige positive Zahl b_2 derart, daß für jede Primzahl p mit der Eigenschaft

$$\frac{(p-1)!}{b_2^p} > H$$

gilt

$$|e - \theta| \{(n+1)p\}! > 1.$$

Beweis. θ genügt der irreduziblen Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten

$$P(x) = \sum_{h=0}^n c_h x^h = 0,$$

wo $(c_0, c_1, \dots, c_n) = 1$ und $H = \sum_{h=0}^n |c_h|$ ist. Man kann

$$|e - \theta| < 1$$

voraussetzen, da sonst die Behauptung unmittelbar klar ist. Dann ist $|\theta| > 1$, so daß man im Hilfssatz 1 $B = \theta$ setzen darf.

Weiter sei, wie im Hilfssatz 2,

$$(2) \quad f(x) = \frac{1}{(p-1)!} \prod_{q=0}^n (x - g)^p,$$

wo p wieder eine Primzahl ist, und r derart gewählt wird, daß $p \nmid c_r$ ist; dieses ist wegen $(c_0, c_1, \dots, c_n) = 1$ möglich. Wie im Hilfssatz 2 ist für jedes ganze h im Intervall $0 \leq h \leq n$

$$(3) \quad f(x) = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{m=p-1}^{np+p-1} A_{h,m} (x-h)^m,$$

$$(6) \quad \sum_{m=p-1}^{np+p-1} |A_{h,m}| \leq \sum_{m=p-1}^{np+p-1} |A_{h,m}| n^m \leq b_0^p,$$

wo $b_0 = (2n)^{n+1}$ ist. Ebenso wie dort gilt auch hier, wenn $p > n$ ist, die Ungleichung

$$(13) \quad \left| \sum_{h=0}^n c_h \left\{ A_{h,p-1} + p A_{h,p} + (p+1) p A_{h,p+1} + \dots + \frac{(np+p-1)!}{(p-1)!} A_{h,np+p-1} \right\} \right| \geq 1.$$

$F(x)$ und $Q(x)$ seien wie in Hilfssatz 1 definiert.

Nach der Voraussetzung ist

$$\sum_{h=0}^n c_h \theta^h = 0,$$

daher

$$0 = \sum_{h=0}^n c_h F(0) \theta^h = \sum_{h=0}^n c_h F(h) + \sum_{h=0}^n c_h Q(h),$$

folglich

$$\left| \sum_{h=0}^n c_h F(h) \right| = \left| \sum_{h=0}^n c_h Q(h) \right|.$$

Ich setze

$$\sum_{h=0}^n c_h F(h) = U_\theta,$$

also

$$|U_\theta| = \left| \sum_{h=0}^n c_h Q(h) \right| \leq \sum_{h=0}^n |c_h| |Q(h)|.$$

Nach Hilfssatz 1 (mit $np + p - 1$ statt n) ist

$$|Q(h)| < \{|\theta| e^\pi\}^h \sum_{m=p-1}^{np+p-1} \left| \frac{A_{0,m}}{(p-1)!} \right| h^m \leq \frac{(e+1)^n e^{\pi n}}{(p-1)!} \sum_{m=p-1}^{np+p-1} |A_{0,m}| n^m;$$

wegen (6) folgt hieraus

$$|Q(h)| < \frac{(e+1)^n e^{\pi n} b_0^p}{(p-1)!},$$

also

$$|U_\theta| < \frac{H(e+1)^n e^{\pi n} b_0^p}{(p-1)!}.$$

Jetzt wählen wir die nur von n abhängige Zahl $b_2 > 2(e+1)e^\pi b_0$ und $> \frac{2b_0}{\{\lg(e-1)\}^{n+1}}$ so groß, daß für jede positive ganze Zahl g , welche der Ungleichung

$$\frac{(g-1)!}{b_2^g} > 1$$

genügt, $g > n$ ist.

Genügt die Primzahl p der Ungleichung

$$(14) \quad \frac{(p-1)!}{b_2^p} > H,$$

so ist wegen $H \geq 1$ jedenfalls $p > n$ und deshalb

$$|U_\theta| < \frac{H(e+1)^n e^{\pi n} b_0^p}{(p-1)!} < \frac{H b_2^p}{2^p (p-1)!}.$$

Nach (14) also

$$(15) \quad |U_\theta| < \frac{1}{2}.$$

Aus der Definition von $F(x)$ und aus (3) folgt

$$(16) \quad U_\theta = \sum_{h=0}^n c_h \left\{ \frac{A_{h,p-1}}{\lg^{p-1} \theta} + \frac{p A_{h,p}}{\lg^p \theta} + \dots + \frac{(np+p-1)! A_{h,np+p-1}}{(p-1)! \lg^{np+p-1} \theta} \right\}.$$

Es werde gesetzt

$$(17) \quad U = \sum_{h=0}^n c_h \left\{ A_{h,p-1} + p A_{h,p} + \dots + \frac{(np+p-1)!}{(p-1)!} A_{h,np+p-1} \right\}.$$

Wegen $p > n$ ist nach (13)

$$|U| \geq 1.$$

Nach (15) folglich

$$(18) \quad |U - U_\theta| \geq |U| - |U_\theta| > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Aus (16) und (17) folgt aber

$$19) \quad \left\{ \begin{aligned} |U - U_\theta| &= \left| \sum_{h=0}^n c_h \left\{ A_{h,p-1} \left(1 - \frac{1}{\lg^{p-1} \theta} \right) + p A_{h,p} \left(1 - \frac{1}{\lg^p \theta} \right) + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(np+p-1)!}{(p-1)!} A_{h,np+p-1} \left(1 - \frac{1}{\lg^{np+p-1} \theta} \right) \right\} \right|. \end{aligned} \right.$$

Nach unserer Annahme liegt θ im Kreise

$$|z - e| < 1;$$

hieraus folgt

$$|\lg \theta - 1| = \left| \int_e^\theta \frac{dz}{z} \right| < \left| \int_e^\theta dz \right| = |\theta - e|,$$

also für jedes ganze $k \geq p-1$ und $\leq np+p-1$

$$\begin{aligned} \left| 1 - \frac{1}{\lg^k \theta} \right| &= k \left| \int_1^{\lg \theta} \frac{dw}{w^{k+1}} \right| \leq k \left| \int_1^{\lg \theta} \frac{dw}{\{\lg(e-1)\}^{k+1}} \right| \\ &= \frac{k}{\{\lg(e-1)\}^{k+1}} |\lg \theta - 1| < \frac{k|\theta - e|}{\{\lg(e-1)\}^{k+1}} < \frac{np+p}{\{\lg(e-1)\}^{(n+1)p}} |\theta - e|, \end{aligned}$$

so daß aus (19) folgt

$$\begin{aligned} |U - U_\theta| &\leq \frac{(np+p)|\theta - e|}{\{\lg(e-1)\}^{(n+1)p}} \cdot \frac{(np+p-1)!}{(p-1)!} \\ &\quad \times \sum_{h=0}^n |c_h| \{ |A_{h,p-1}| + |A_{h,p}| + \dots + |A_{h,np+p-1}| \}. \end{aligned}$$

Wegen (6) ist daher

$$|U - U_\theta| \leq \frac{\{(n+1)p\}! |e - \theta| H b_0^p}{(p-1)! \{\lg(e-1)\}^{(n+1)p}}.$$

Nach (14) ist

$$H < \frac{(p-1)!}{b_0^p} < \frac{(p-1)!}{2^p b_0^p} \{\lg(e-1)\}^{(n+1)p}.$$

Folglich

$$|U - U_\theta| < \frac{1}{2} \{(n+1)p\}! |e - \theta|.$$

Mit Rücksicht auf (18) bekommt man hieraus

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2} \{(n+1)p\}! |e - \theta|,$$

womit Hilfssatz 3 bewiesen ist.

Hilfssatz 4. *Es gibt eine absolute Konstante g_0 derart, daß für jedes $g \geq g_0$ das Intervall*

$$(20) \quad g - \frac{g}{\lg g} < x \leq g$$

wenigstens eine Primzahl enthält.

Beweis. Dieser Hilfssatz ist natürlich bekannt und kann übrigens leicht verschärft werden.

Der Beweis geht z. B. so:

Die Anzahl der Primzahlen $\leq g$ ist

$$\int_2^g \frac{du}{\lg u} + o\left(\frac{g}{\lg^2 g}\right). \quad ^5)$$

Die Anzahl der Primzahlen $\leq g - \frac{g}{\lg g}$ ist somit

$$\int_2^{g - \frac{g}{\lg g}} \frac{du}{\lg u} + o\left(\frac{g}{\lg^2 g}\right).$$

Die Anzahl der Primzahlen im Intervall (20) ist also

$$\int_{g - \frac{g}{\lg g}}^g \frac{du}{\lg u} + o\left(\frac{g}{\lg^2 g}\right).$$

Diese Anzahl ist, wenn g_0 hinreichend groß ist, für jedes $g \geq g_0$ positiv, weil

$$\int_{g - \frac{g}{\lg g}}^g \frac{du}{\lg u} \geq \frac{g}{\lg g} \cdot \frac{1}{\lg g} = \frac{g}{\lg^2 g}$$

ist. Im Intervall (20) liegt also wenigstens eine Primzahl.

Hilfssatz 5. Bezeichnet $P(x)$ das Polynom vom Hilfssatz 2 vom Grade n und von der Höhe H , b_1 die dort genannte nur von n abhängige Zahl, und ist g_0 die im Hilfssatz 4 erwähnte absolute Konstante, so gilt für jede ganze Zahl $g \geq g_0$ mit der Eigenschaft

$$\frac{(g-1)!}{(b_1 e)^g} > H$$

die Ungleichung

$$|P(e)| \{(n+1)g\}! > H.$$

Beweis. Nach Hilfssatz 4 liegt im Intervall (20) wenigstens eine Primzahl p . Diese Primzahl p genügt folgenden Ungleichungen:

$$p(p+1) \dots (g-1) \leq g^{g-p} < g^{\frac{g}{\lg g}} = e^g$$

⁵⁾ Vgl. z. B. E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen I, S. 196.

$(p(p+1)\dots(g-1))$ bezeichnet, falls $p=g$ ist, die Zahl 1), und

$$\frac{(p-1)!}{b_1^p} = \frac{(g-1)!}{b_1^p} \cdot \frac{1}{p(p+1)\dots(g-1)} > \frac{(g-1)!}{b_1^g} \cdot \frac{1}{e^g} > H.$$

p erfüllt die Voraussetzung von Hilfssatz 2, daher

$$|P(e)|\{(n+1)g\}! \geq |P(e)|\{(n+1)p\}! > H.$$

Beweis der Sätze. $P(x) = \sum_{h=0}^n c_h x^h$ sei das betreffende Polynom vom Satz 1. — Wir wählen eine nur von n abhängige Zahl H_0 so groß, daß für jede ganze Zahl g mit der Eigenschaft

$$\frac{(g-1)!}{b_1^g} > H_0$$

auch gilt $g \geq 2$ und $g \geq g_0$, wo b_1 und g_0 die im Hilfssatz 5 genannten Zahlen sind.

Es sei H die Höhe von $P(x)$, und es werde zunächst der Fall $H \geq H_0$ betrachtet. Nach Hilfssatz 5 erfüllt jedes positive ganze g , das der Ungleichung

$$\frac{(g-1)!}{(b_1 e)^g} > H$$

genügt, auch die Beziehung

$$|P(e)|\{(n+1)g\}! > H.$$

g_1 sei die kleinste positive ganze Zahl, welche der Beziehung

$$\frac{(g_1-1)!}{(b_1 e)^{g_1}} > H$$

genügt.

Aus $H \geq H_0$ folgt $g_1 \geq 2$, also

$$(21) \quad \frac{(g_1-1)!}{(b_1 e)^{g_1}} > H \geq H_0$$

und

$$(22) \quad \frac{(g_1-2)!}{(b_1 e)^{g_1-1}} \leq H.$$

Außerdem ist nach Hilfssatz 5

$$|P(e)|\{(n+1)g_1\}! > H,$$

also, wenn wir $n+1 = \bar{n}$ setzen,

$$(23) \quad |P(e)|(\bar{n}g_1)! > H.$$

Nach der Stirlingschen Formel ist für jedes positive ganze g

$$g! = g^g e^{-g} \sqrt{2\pi g} \cdot K(g),$$

wo $K(g) \rightarrow 1$ wenn $g \rightarrow \infty$.

Wegen (23) ist somit

$$(24) \quad |P(e)| (\bar{n} g_1)^{\bar{n} g_1} e^{-\bar{n} g_1} \sqrt{2\pi \bar{n} g_1} K(\bar{n} g_1) > H.$$

Andererseits ist wegen (22)

$$(25) \quad \frac{g_1^{g_1} e^{-g_1} \sqrt{2\pi g_1} K(g_1)}{g_1(g_1-1) (b_1 e)^{g_1-1}} \leq H.$$

Also ist nach (24) und (25)

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} & |P(e)| H^n (2b_1 e \bar{n})^{\bar{n} g_1} \\ & > \frac{1}{(\bar{n} g_1)^{\bar{n} g_1} e^{-\bar{n} g_1} \sqrt{2\pi \bar{n} g_1} K(\bar{n} g_1)} \cdot \frac{g_1^{\bar{n} g_1} e^{-\bar{n} g_1} (2\pi g_1)^{\frac{1}{2} \bar{n}} (K(g_1))^{\bar{n}} (b_1 e)^{\bar{n}}}{g_1^{\bar{n}} (g_1-1)^{\bar{n}}} \cdot (2\bar{n})^{n g_1} \\ & = \frac{(2\pi g_1)^{\frac{1}{2} \bar{n}} (K(g_1))^{\bar{n}} (b_1 e)^{\bar{n}}}{\sqrt{2\pi \bar{n} g_1} \cdot K(\bar{n} g_1) g_1^{\bar{n}} (g_1-1)^{\bar{n}}} \cdot 2^{\bar{n} g_1}. \end{aligned} \right.$$

Die letzte Seite ist größer als $C_8^{g_1}$, wo C_8 eine geeignet gewählte, nur von n abhängige positive Zahl bezeichnet, da bei festem n und unbeschränkt wachsendem g der Ausdruck

$$\left\{ \frac{(2\pi g)^{\frac{1}{2} \bar{n}} (K(g))^{\bar{n}} (b_1 e)^{\bar{n}}}{\sqrt{2\pi \bar{n} g} \cdot K(\bar{n} g) g^{\bar{n}} (g-1)^{\bar{n}}} \cdot 2^{\bar{n} g} \right\}^{\frac{1}{g}}$$

nach $2^{\bar{n}}$ strebt. Setzen wir

$$C_9 = \frac{1}{C_8} (2b_1 e \bar{n})^{\bar{n}}$$

(so daß C_9 nur von n abhängt), dann finden wir wegen (26)

$$(27) \quad |P(e)| H^n C_9^{g_1} > 1.$$

Wegen (25) gibt es eine nur von n abhängige Zahl b_3 derart, daß für jedes $g_1 \geq b_3$

$$g_1^{g_1} < H^2$$

ist, und die Bedingung $g_1 \geq b_3$ ist wegen (21) bei hinreichend großem H_0 erfüllt.

Hieraus folgt

$$g_1 < \frac{3 \lg H}{\lg \lg H},$$

für jedes $H \geq H_0$ bei hinreichend großem H_0 , denn wäre

$$g_1 \geq \frac{3 \lg H}{\lg \lg H},$$

so wäre

$$\lg g_1 \geq \lg \lg H + \lg 3 - \lg \lg \lg H > \frac{2}{3} \lg \lg H$$

für jedes $H \geq H_0$ bei hinreichend großem H_0 , daher

$$g_1 \lg g_1 > \frac{3 \lg H}{\lg \lg H} \cdot \frac{2}{3} \lg \lg H = 2 \lg H,$$

also

$$g_1^{g_1} > H^2,$$

was nicht der Fall ist.

Daher ist

$$g_1 < \frac{3 \lg H}{\lg \lg H},$$

somit

$$C_9^{g_1} < C_9^{\frac{3 \lg H}{\lg \lg H}} = H^{\frac{3 \lg C_9}{\lg \lg H}} = H^{\frac{\lambda_0}{\lg \lg H}},$$

wenn $\lambda_0 = 3 \lg C_9$ gesetzt wird, also nur abhängig von n ist.

Wegen (27) ist daher

$$|P(e)| H^{n + \frac{\lambda_0}{\lg \lg H}} > 1,$$

folglich

$$|P(e)| > H^{-n - \frac{\lambda_0}{\lg \lg H}},$$

wenn $H \geq H_0$ ist.

Es gibt nur eine endliche Anzahl von Polynomen $\bar{P}(x)$ vom Grade n und von einer Höhe $H < H_0$ und ≥ 3 . Man kann deshalb die nur von n abhängige positive Zahl $\lambda_1 \geq \lambda_0$ so bestimmen, daß jedes dieser Polynome $\bar{P}(x)$ der Ungleichung

$$|\bar{P}(e)| > H^{-n - \frac{\lambda_1}{\lg \lg H}}$$

genügt.

Wegen $\lambda_1 \geq \lambda_0$ gilt daher, wenn $H \geq 3$ ist, allgemein

$$|P(e)| > H^{-n - \frac{\lambda_1}{\lg \lg H}},$$

womit Satz I bewiesen ist.

Wir können aber statt Hilfssatz 2 ebenso Hilfssatz 3 benutzen und finden dann, wenn wir nur $|P(e)|$ durch $|e - \theta| H$ und b_1 durch b_2 ersetzen, auf genau demselben Wege

$$H|e - \theta| > H^{-n - \frac{\lambda_2}{\lg \lg H}},$$

also

$$|e - \theta| > H^{-n-1 - \frac{\lambda_2}{\lg \lg H}}.$$

Satz III ist hiermit bewiesen.

Satz II beweist man z. B. so:

Die Anzahl der Polynome $Q(x)^{a_1}$ mit ganzen rationalen Koeffizienten

^{a)} Die Koeffizienten von $Q(x)$ können auch sämtlich gleich Null sein.

≥ 0 von einem Grade $\leq n$ und von einer Höhe $\leq H'$ ist, wie eine einfache Berechnung zeigt, gleich dem Binomialkoeffizient

$$C_{n+H'+1}^{n+1} \geq \frac{(H')^{n+1}}{(n+1)!} + 1.$$

Betrachten wir zunächst die Polynome $Q(x)$ von einer Höhe $\leq H' = \left[\frac{H}{2}\right]^7$, wo $H > 6$ ist. Die Anzahl der genannten Polynome $Q(x)$ ist dann

$$> \frac{\left(\frac{H}{2} - 1\right)^{n+1}}{(n+1)!} + 1 > \frac{H^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!} + 1.$$

Ist $Q_1(x)$ ein Polynom dieser Menge, so ist

$$0 \leq Q_1(e) \leq e^n H' \leq \frac{e^n H}{2}.$$

Sind $Q_2(x)$ und $Q_3(x)$ verschiedene Polynome der betrachteten Menge, so ist wegen der Transzendenz von e

$$Q_2(e) \neq Q_3(e).$$

Im Intervall $0 \leq x \leq \frac{e^n H}{2}$ gibt es also mehr als $\frac{H^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!} + 1$ verschiedene Zahlen $Q(e)$.

Immer kann man deshalb (Schubfachmethode!) zwei Polynome $Q_4(x)$ und $Q_5(x)$ finden mit der Eigenschaft

$$(28) \quad |Q_4(e) - Q_5(e)| < \frac{\frac{e^n H}{2}}{3^{n+1}(n+1)!} = C_{10} H^{-n},$$

wo $C_{10} = \frac{e^n 3^{n+1}(n+1)!}{2}$ gesetzt ist.

Wir setzen

$$P_0(x) = Q_4(x) - Q_5(x).$$

$P_0(x)$ ist daher ein Polynom von einem Grade $\leq n$ und einer Höhe $H'' \leq 2H' \leq H$. Wegen (28) ist

$$(29) \quad |P_0(e)| < C_{10} H^{-n}.$$

Wäre der Grad von $P_0(x)$ kleiner als n , dann wäre wegen Satz I (Korollar 1 mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$)

$$|P_0(e)| > C_{11} (H'')^{-(n-1)-\frac{1}{2}} \geq C_{11} H^{-n+\frac{1}{2}},$$

wo C_{11} nur von n abhängig ist, also nach (29)

$$C_{10} H^{-n} > C_{11} H^{-n+\frac{1}{2}},$$

⁷⁾ Mit $[a]$ wird gemeint: die größte ganze Zahl $\leq a$.

folglich

$$H < \left(\frac{C_{10}}{C_{11}} \right)^2 = C_{12},$$

wo C_{12} nur von n abhängt.

Beim Beweis von Satz II unterscheide ich jetzt zwei verschiedene Fälle.

1. Es sei

$$H > \text{Max}(6, C_{12})^8.$$

Dann hat nach dem Obigen das Polynom $P(x) = P_0(x)$ die verlangten Eigenschaften, und zwar für jedes $C_5 \geq C_{10}$.

2. Es sei

$$(30) \quad H \leq \text{Max}(6, C_{12}).$$

Zu jedem positiven ganzen n und jedem positiven ganzen H , das (30) erfüllt, wähle ich irgendein Polynom $P_1(x)$ vom Grade n und von einer Höhe $\leq H$. Die Anzahl dieser Polynome $P_1(x)$ ist kleiner als eine nur von n abhängige Zahl, so daß es eine nur von n abhängige Zahl C_{13} gibt mit der Eigenschaft, daß für jedes dieser Polynome

$$|P_1(e)| < C_{13} H^{-n}$$

ist. In diesem Falle hat also dieses Polynom $P_1(x)$ die verlangten Eigenschaften, und zwar für jedes $C_5 \geq C_{13}$.

Satz II gilt dann mit

$$C_5 = \text{Max}(C_{10}, C_{13}).^9)$$

⁸⁾ $\text{Max}(a, b)$ bedeutet die größte der Zahlen a und b , oder (falls sie gleich sind) den gemeinsamen Wert.

⁹⁾ Zusatz bei der Korrektur. Von Hilfssatz 1 braucht man nur den Spezialfall $B=e$, und Hilfssatz 3 ist ganz überflüssig, da der Fall $B=e$ von Hilfssatz 1 Satz I gibt und III unmittelbar aus I folgt. Denn ist $P(x)$ ein Polynom von der Höhe H , das für $x=\theta$ verschwindet, so ist, falls $|e-\theta| \leq 1$

$$|P(e)| = |P(e) - P(\theta)| = \sum_{h=0}^n c_h (e^h - \theta^h) \leq |e-\theta| n(e+1)^{n-1} H,$$

also nach I

$$|e-\theta| > \frac{1}{n(e+1)^{n-1}} \cdot H^{-n-1 - \frac{\lambda_1}{\lg \lg H}},$$

womit Satz III, der im Fall $|e-\theta| > 1$ trivial ist, bewiesen ist.

(Eingegangen am 14. April 1928.)