

Werk

Titel: Mathematische Zeitschrift

Ort: Berlin

Jahr: 1934

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN266833020_0038

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN266833020_0038

LOG Id: LOG_0014

LOG Titel: Über monotone Matrixfunktionen

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN266833020

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN266833020>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Über monotone Matrixfunktionen.

Von

Karl Löwner in Prag.

Einleitung.

Es sei $\chi(\omega)$ eine reelle Funktion der reellen Veränderlichen ω . Ist ferner $C_n = (c_{ik})$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) eine reelle symmetrische Matrix n -ten Grades, deren Eigenwerte (d. h. Eigenwerte der zugehörigen quadratischen Form $C_n(x, x) = \sum_{i, k=1}^n c_{ik} x_i x_k$) dem Definitionsbereiche von $\chi(\omega)$ angehören, so verstehen wir, wie üblich, unter $\chi(C_n)$ die symmetrische Matrix, die aus C_n entsteht, indem jeder Eigenvektor v beibehalten, der zugehörige Eigenwert λ jedoch durch $\chi(\lambda)$ ersetzt wird. Ist z. B. $\chi(\omega) = \sum_{l=1}^m c_l \omega^l$ ein Polynom, so ist bekanntlich $\chi(C_n) = \sum_{l=1}^m c_l C_n^l$.

Indem man sich $\chi(X_n)$ für alle in Betracht kommenden Matrizen n -ten Grades X_n gebildet denkt, entsteht eine *Matrixfunktion* von, wie wir sagen wollen, *n-ter Stufe*. Ihr Definitionsbereich besteht also aus allen Matrizen n -ten Grades, deren Eigenwerte dem Definitionsbereiche von $\chi(\omega)$ angehören.

Liegen zwei Matrizen n -ten Grades $A_n = (a_{ik})$, $B_n = (b_{ik})$ vor und ist identisch in den x_i $\sum_{i, k=1}^n a_{ik} x_i x_k \leq \sum_{i, k=1}^n b_{ik} x_i x_k$, so soll A_n als nicht größer als B_n bezeichnet und hierfür

$$A_n \leq B_n \quad \text{oder} \quad B_n \geq A_n$$

geschrieben werden.

Wir definieren nun: Eine *Matrixfunktion n-ter Stufe* $\chi(X_n)$ heißt *monoton*, wenn für je zwei Matrizen A_n , B_n des Definitionsbereiches von $\chi(X_n)$, die in der obigen Relation zueinander stehen, stets auch

$$\chi(A_n) \leq \chi(B_n)$$

oder stets

$$\chi(A_n) \geq \chi(B_n)$$

ist. Im ersten Falle ist die Matrixfunktion *monoton wachsend*, im zweiten *monoton abnehmend*. Die Funktion $\chi(\omega)$ selbst soll dann *monoton von n-ter Stufe* genannt werden. Die Monotonie erster Stufe fällt offenbar mit der gewöhnlichen Monotonie zusammen. Im folgenden soll nur von

zunehmenden Funktionen die Rede sein, auf die man sich natürlich beschränken darf.

In der vorliegenden Arbeit wird eine Charakterisierung der monotonen Funktionen durch Differenzen- bzw. Differentialungleichungen gegeben (§ 1 bis 3). Hierauf werden Interpolationsaufgaben behandelt (§ 4 bis 5). Ein Teil der hier erhaltenen Resultate wird verwendet, um Differenzierbarkeitseigenschaften von Funktionen, die von höherer Stufe monoton sind, herzuleiten (§ 6). Es wird gezeigt, daß eine von n -ter Stufe monotone Funktion ($n \geq 2$) im Innern ihres Definitionsbereiches mindestens $(2n - 3)$ -mal stetig differenzierbar ist und in einem beschränkten abgeschlossenen Teile desselben sogar einen beschränkten $(2n - 2)$ -ten Differenzenquotienten besitzt. Endlich wird die Frage nach den Funktionen aufgeworfen, die von *beliebig hoher Stufe monoton* sind. Es zeigt sich, daß jede solche Funktion *analytisch* ist und, ins Komplexe fortgesetzt, eine in der *ganzen oberen Halbebene reguläre Funktion mit nicht negativem Imaginärteil* daselbst ergibt, und diese Eigenschaften erweisen sich als für die untersuchte Funktionenklasse *charakteristisch*¹⁾. Im Schlußparagraphen (§ 7) wird eine Verallgemeinerung der Begriffsbildung der monotonen Funktion höherer Stufe angegeben.

§ 1.

Ableitung notwendiger Bedingungen.

Den Betrachtungen seien zwei allgemeine Bemerkungen vorausgeschickt:

1. Bemerkung: *Die Beziehung zwischen der Matrix C_n und der ihr zugeordneten Matrix $\chi(C_n)$ ist orthogonal invariant.* Dies besagt: Entsteht allgemein $U_n^*(x, x) = \sum_{i, k=1}^n u_{ik}^* x_i x_k$ aus $U_n(x, x) = \sum_{i, k=1}^n u_{ik} x_i x_k$ durch eine festzuhaltende orthogonale Transformation der Variablen x_i , so gehört (wegen der Orthogonalinvarianz der Eigenwerte) mit $C_n = (c_{ik})$ auch $C_n^* = (c_{ik}^*)$ dem Definitionsbereiche von $\chi(X_n)$ an und es ist

$$\chi(C_n^*) = (\chi(C_n))^*.$$

2. Bemerkung: *Auch die Ungleichung $A_n \leq B_n$ ist eine orthogonal invariante Relation*, d. h. entstehen die Formen

$$A_n^*(x, x) = \sum_{i, k=1}^n a_{ik}^* x_i x_k, \quad B_n^*(x, x) = \sum_{i, k=1}^n b_{ik}^* x_i x_k$$

¹⁾ Der Versuch, gewisse für diese Funktionen gültige Ungleichungen begrifflich zu deuten, war der ursprüngliche Anlaß zur Entstehung dieser Arbeit. Vergleiche § 6 dieser Arbeit.

aus

$$A_n(x, x) = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} x_i x_k, \quad B_n(x, x) = \sum_{i, k=1}^n b_{ik} x_i x_k$$

durch *dieselbe* orthogonale Transformation, so ist $A_n^* \leq B_n^*$ mit $A_n \leq B_n$ gleichbedeutend.

Aus diesen einfachen Bemerkungen folgt, daß man, wenn die Monotonie einer Matrixfunktion zum Ausdruck gebracht werden soll, annehmen kann, daß von den beiden Matrizen A_n und B_n jedesmal eine, etwa A_n , auf Hauptachsen gebracht ist. Man kann also schreiben

$$(1) \quad A_n(x, x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2, \quad B_n(x, x) = \sum_{i=1}^n \mu_i (\tau_{i1} x_1 + \tau_{i2} x_2 + \dots + \tau_{in} x_n)^2.$$

Darin bedeutet $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ das System der Eigenwerte von A_n , ferner $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$ das Eigenwertsystem von B_n und

$$T = (\tau_{ik})_{i,k=1}^n$$

eine orthogonale Matrix.

Aus $A_n \leq B_n$ folgt

$$(2') \quad \lambda_i \leq \mu_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Eine weitere Aussage kann gemacht werden, wenn man weiß, aus wie vielen Quadraten von linear unabhängigen Linearformen die definite Form $(B_n - A_n)(x, x)$ zusammengesetzt ist. Ist deren Anzahl r , so gilt neben (2') die Ungleichung

$$(2'') \quad \mu_i \leq \lambda_{i+r} \quad (i = 1, 2, \dots, n-r).$$

Insbesondere ist für $r \leq 1$

$$(2''') \quad \lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \mu_n^2).$$

Für die folgenden Betrachtungen ist nun von besonderer Wichtigkeit, daß umgekehrt bei willkürlicher Wahl von $2n$ reellen Größen in der Anordnung (2''') die orthogonale Matrix T in (1) so bestimmt werden kann, daß die Differenz $B_n(x, x) - A_n(x, x)$ das Quadrat einer *einzigen* Linearform

$$A(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

wird. Wir führen den Beweis unter der Annahme, daß in (2''') lauter Ungleichheitszeichen stehen, also

$$(2) \quad \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \dots < \lambda_n < \mu_n$$

²⁾ Man beweist die Ungleichungen (2'), (2''), (2''') leicht, indem man die bekannten Minimum-Maximumeigenschaften der Eigenwerte heranzieht.

ist. Die Erweiterung auf die Grenzfälle, die übrigens im folgenden nicht auftreten werden, läßt sich durch Limesbetrachtungen, die dem Leser überlassen bleiben können, leicht erledigen.

Beweis: Setzt man

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = L (= A_n), \quad \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} = M,$$

so bedeutet die Forderung

$$(3) \quad B_n(x, x) - A_n(x, x) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right)^2$$

in Matrixform

$$T' M T - L = (\alpha_i \alpha_k)$$

oder

$$M T - T L = T (\alpha_i \alpha_k),$$

d. h.

$$(4) \quad (\mu_i - \lambda_k) \tau_{ik} = \alpha_i^* \alpha_k$$

mit

$$(5) \quad \alpha_i^* = \sum_{l=1}^n \tau_{il} \alpha_l.$$

Multipliziert man (4) mit α_k , dividiert durch $\mu_i - \lambda_k$ und summiert nachher über k , so erhält man

$$(6') \quad \alpha_i^* = \alpha_i^* \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k^2}{\mu_i - \lambda_k}.$$

Da T eine orthogonale Matrix sein soll und deshalb in jeder ihrer Zeilen ein von Null verschiedenes Element stehen muß, so kann aus (4) auf $\alpha_i^* \neq 0$ geschlossen werden und man kann (6') durch α_i^* kürzen. Man erhält so zur Bestimmung der α_k das Gleichungssystem

$$(6) \quad \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k^2}{\mu_i - \lambda_k} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ebenso ergibt sich das Gleichungssystem

$$(6^*) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i^{*2}}{\mu_i - \lambda_k} = 1 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

zur Bestimmung der α_i^* . Bekanntlich ist die Determinante der beiden Gleichungssysteme (6), (6*)

$$\left| \frac{1}{\mu_i - \lambda_k} \right|_{i,k=1}^n = (-1)^{\binom{n}{2}} \frac{\prod_{i < k} (\lambda_i - \lambda_k) (\mu_i - \mu_k)}{\prod_{i,k} (\mu_i - \lambda_k)},$$

also gewiß von Null verschieden. Durch (6) und (6*) sind also die Quadrate der α_i und α_i^* eindeutig bestimmt. Eine einfache Rechnung ergibt:

$$(7) \quad \alpha_k^2 = \frac{(\mu_1 - \lambda_k)(\mu_2 - \lambda_k) \dots (\mu_n - \lambda_k)}{(\lambda_1 - \lambda_k)(\lambda_2 - \lambda_k) \dots (\lambda_{k-1} - \lambda_k)(\lambda_{k+1} - \lambda_k) \dots (\lambda_n - \lambda_k)},$$

$$(7^*) \quad \alpha_i^{*2} = \frac{(\mu_i - \lambda_1)(\mu_i - \lambda_2) \dots (\mu_i - \lambda_n)}{(\mu_i - \mu_1)(\mu_i - \mu_2) \dots (\mu_i - \mu_{i-1})(\mu_i - \mu_{i+1}) \dots (\mu_i - \mu_n)}.$$

Da wir die Anordnung (2) voraussetzen, sind diese Größen offenbar positiv und die Wurzeln aus ihnen können reell gezogen werden. Damit ist die Matrix der τ_{ik} vermöge (4) bis auf Zeichenänderungen der Zeilen und Kolonnen (Spiegelungen im x - und Bild-Raum an Koordinatenräumen) bestimmt. Man überlegt sich nun leicht, daß tatsächlich jede Vorzeichenwahl für die α_i und α_i^* eine orthogonale Transformation ergibt, welche die Identität (3) zur Folge hat, und daß ferner die α und α^* in der Beziehung (5) zueinander stehen³).

Im folgenden sollen die α und α^* stets positiv gewählt werden, was offenbar ausreichend ist. Für bald auszuführende Überlegungen ist die Feststellung wichtig, daß bei dieser Vorzeichenfestlegung T eine eigentliche Transformation ist, daß also die Determinante von T gleich 1 ist. In der Tat ist die Determinante

$$(8) \quad |\tau_{ik}|_{i,k=1}^n = (-1)^{\binom{n}{2}} \prod_{i=1}^n \alpha_i \alpha_i^* \cdot \frac{\prod_{i < k} (\lambda_i - \lambda_k)(\mu_i - \mu_k)}{\prod_{i,k} (\mu_i - \lambda_k)}.$$

Es ist $(\lambda_i - \lambda_k)(\mu_i - \mu_k) > 0$ ($i \neq k$) und $\mu_i - \lambda_k$ negativ für $i < k$, sonst positiv. Das Vorzeichen von $\prod_{i,k} (\mu_i - \lambda_k)$ ist also gleich $(-1)^{\binom{n}{2}}$.

Alles das ergibt $|\tau_{ik}|_{i,k=1}^n > 0$.

Sei nun $\chi(\omega)$ eine monotone Funktion n -ter Stufe und die Werte λ_i und μ_i in der Anordnung (2) ihrem Definitionsbereiche entnommen⁴). Zur Abkürzung werde

$$(9) \quad \chi(\lambda_i) = \varphi_i, \quad \chi(\mu_i) = \psi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

gesetzt. Wegen der Monotonie von $\chi(X_n)$ muß bei der eben eingeführten Wahl von T die Form

$$(10) \quad \sum_{i=1}^n \psi_i (\tau_{i1} x_1 + \tau_{i2} x_2 + \dots + \tau_{in} x_n)^2 - \sum_{i=1}^n \varphi_i x_i^2 \geq 0$$

³) Wenn in (2) auch Gleichheitszeichen zugelassen werden, erhält man unter Umständen ein ganzes Kontinuum von Matrizen T .

⁴) Es wird angenommen, daß ihr Definitionsbereich aus mindestens $2n$ verschiedenen Werten besteht.

sein. Hieraus folgt bekanntlich, daß auch ihre Diskriminante D nicht negativ sein kann. Bei Einführung der Diagonalmatrizen

$$(11) \quad F = \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \varphi_n \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \psi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \psi_n \end{pmatrix}$$

schreibt sich die Koeffizientenmatrix von (10) in der Form $T'GT - F$, und es ist

$$D = |T'GT - F| = |T'| |GT - TF| = |GT - TF| \\ = \left| \frac{\psi_i - \varphi_k}{\mu_i - \lambda_k} \alpha_i^* \alpha_k \right|_{i,k=1}^n = \prod_{l=1}^n \alpha_l^* \alpha_l \cdot \left| \frac{\psi_i - \varphi_k}{\mu_i - \lambda_k} \right|_{i,k=1}^n.$$

Dividiert man durch das positive Produkt $\prod_{l=1}^n \alpha_l^* \alpha_l$, so ergibt sich das Resultat:

$$(12) \quad \left| \frac{\psi_i - \varphi_k}{\mu_i - \lambda_k} \right|_{i,k=1}^n \geq 0,$$

welches für monotone Funktionen n -ter Stufe gilt.

Zu weiteren notwendigen Bedingungen gelangt man auf Grund der einfachen Bemerkung: Ist $\chi(\omega)$ monoton von n -ter Stufe ($n \geq 2$), so ist es auch von jeder niedrigeren Stufe monoton. In der Tat ist für eine zerfallende Matrix

$$C_n = \left(\begin{array}{c|c} C_m^1 & 0 \\ \hline 0 & C_{n-m}^2 \end{array} \right)$$

offenbar

$$\chi(C_n) = \left(\begin{array}{c|c} \chi(C_m^1) & 0 \\ \hline 0 & \chi(C_{n-m}^2) \end{array} \right)$$

und für ein Paar gleichzerfallender Matrizen

$$A_n = \left(\begin{array}{c|c} A_m^1 & 0 \\ \hline 0 & A_{n-m}^2 \end{array} \right), \quad B_n = \left(\begin{array}{c|c} B_m^1 & 0 \\ \hline 0 & B_{n-m}^2 \end{array} \right)$$

die Ungleichung $A_n \leq B_n$ mit dem Paar von Ungleichungen $A_m^1 \leq B_m^1$, $A_{n-m}^2 \leq B_{n-m}^2$ gleichbedeutend.

Bildet man nun Determinanten von der Form (12), jedoch mit einem kleineren n , so muß wieder bei Festhaltung der (2) entsprechenden Reihenfolge etwas Nicht-negatives entstehen. Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{\chi(\eta) - \chi(\xi)}{\eta - \xi} = \varkappa(\eta, \xi) \quad (\xi \neq \eta),$$

so können wir den unsere Überlegungen zusammenfassenden Satz aussprechen:

Für die Monotonie n -ter Stufe von $\chi(\omega)$ ist notwendig, daß für jedes m aus der Reihe $1, 2, \dots, n$ die Determinanten

$$(13) \quad \begin{vmatrix} \kappa(\eta_1, \xi_1) & \kappa(\eta_1, \xi_2) & \dots & \kappa(\eta_1, \xi_m) \\ \kappa(\eta_2, \xi_1) & \kappa(\eta_2, \xi_2) & \dots & \kappa(\eta_2, \xi_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \kappa(\eta_m, \xi_1) & \kappa(\eta_m, \xi_2) & \dots & \kappa(\eta_m, \xi_m) \end{vmatrix} \geq 0$$

sind, wie auch die Werte $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ dem Definitionsbereiche von $\chi(\omega)$ entnommen sind, falls nur

$$(14) \quad \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \dots < \xi_m < \eta_m$$

ist.

Diese Ungleichungen lassen sich in einer etwas allgemeineren Form aussprechen, wenn man von der leicht zu beweisenden Determinantenidentität in den Unbestimmten $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ Gebrauch macht:

$$(15) \quad \frac{1}{\prod_{i,k=1}^m (\eta_i - \xi_k)} \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \dots & \xi_1^{m-1} & \varphi_1 & \varphi_1 \xi_1 & \dots & \varphi_1 \xi_1^{m-1} \\ 1 & \eta_1 & \dots & \eta_1^{m-1} & \psi_1 & \psi_1 \eta_1 & \dots & \psi_1 \eta_1^{m-1} \\ 1 & \xi_2 & \dots & \xi_2^{m-1} & \varphi_2 & \varphi_2 \xi_2 & \dots & \varphi_2 \xi_2^{m-1} \\ 1 & \eta_2 & \dots & \eta_2^{m-1} & \psi_2 & \psi_2 \eta_2 & \dots & \psi_2 \eta_2^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \xi_m & \dots & \xi_m^{m-1} & \varphi_m & \varphi_m \xi_m & \dots & \varphi_m \xi_m^{m-1} \\ 1 & \eta_m & \dots & \eta_m^{m-1} & \psi_m & \psi_m \eta_m & \dots & \psi_m \eta_m^{m-1} \end{vmatrix} = \left| \frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} \right|_{i,k=1}^m.$$

Beachtet man die leicht zu überblickenden Vorzeichenänderungen der linken Seite der Identität bei Vertauschung von zwei Größen aus der Reihe

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$$

und gleichzeitiger Vertauschung der entsprechenden Größen aus der Reihe

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m,$$

so ergibt sich: Die Ungleichungen (14) können durch die gleichbedeutende Voraussetzung ersetzt werden, daß für $m = 1$ die Werte ξ_1 und η_1 verschieden sind und für jedes weitere m die in der Determinantenungleichung auftretenden $2m$ Werte ξ_i, η_i ($i = 1, 2, \dots, m$) paarweise verschieden und so angeordnet sind, daß das Produkt

$$(16) \quad \prod_{i < k} (\xi_i - \xi_k) (\eta_i - \eta_k) > 0$$

ist.

In den folgenden Paragraphen 2 und 3 soll bewiesen werden, daß die gefundenen Ungleichungen für die Monotonie n -ter Stufe *nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend sind*. Bei $n \geq 3$ wird hierbei die Annahme gemacht, daß der Definitionsbereich von $\chi(\omega)$ ein Intervall ist.

§ 2.

Die gefundenen Bedingungen sind auch hinreichend.

Beweis für $n = 1$ und $n = 2$.

Wir betrachten zunächst die Fälle $n = 1$ und $n = 2$, die ein gesondertes Interesse verdienen.

Im Falle $n = 1$ liegt nur die eine Ungleichung $\kappa(\eta_1, \xi_1) \geq 0$ vor. Sie drückt die *gewöhnliche* Monotonie aus, die also, wie schon in der Einleitung festgestellt wurde, mit der Monotonie erster Stufe gleichbedeutend ist. Sei jetzt $n = 2$. Dann liegt das Ungleichungspaar

$$(17) \quad \begin{aligned} &\kappa(\eta_1, \xi_1) \geq 0 && (\xi_1 \neq \eta_1), \\ &\left| \begin{array}{cc} \kappa(\eta_1, \xi_1) & \kappa(\eta_1, \xi_2) \\ \kappa(\eta_2, \xi_1) & \kappa(\eta_2, \xi_2) \end{array} \right| \geq 0 && \left\{ \begin{array}{l} (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2 \text{ paarweise verschieden}) \\ \text{und } (\xi_1 - \xi_2)(\eta_1 - \eta_2) > 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

vor. Zu der gewöhnlichen Monotonie tritt eine weitere Aussage über $\chi(\omega)$ hinzu.

Es sei

$$\begin{aligned} A_2(x, x) &= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2, \\ B_2(x, x) &= \mu_1 (\cos \vartheta x_1 - \sin \vartheta x_2)^2 + \mu_2 (\sin \vartheta x_1 + \cos \vartheta x_2)^2 \\ &(\lambda_1 \leq \lambda_2, \mu_1 \leq \mu_2, \vartheta \text{ irgendein Winkel}) \end{aligned}$$

ein Paar quadratischer Formen, deren Eigenwerte λ_1, λ_2 bzw. μ_1, μ_2 dem Definitionsbereiche von $\chi(\omega)$ angehören, und es sei

$$(18) \quad A_2 \leq B_2.$$

Die Ungleichung (18) wird bekanntlich vollständig durch das Ungleichungspaar

$$(19') \quad \lambda_1 \leq \mu_1, \quad \lambda_2 \leq \mu_2$$

im Vereine mit der Determinantenungleichung

$$(19'') \quad |B_2 - A_2| = \left| \begin{array}{cc} (\mu_1 - \lambda_1) \cos \vartheta & (\mu_1 - \lambda_2) (-\sin \vartheta) \\ (\mu_2 - \lambda_1) \sin \vartheta & (\mu_2 - \lambda_2) \cos \vartheta \end{array} \right| \geq 0$$

zum Ausdruck gebracht. Wir machen nun eine Fallunterscheidung:

Fall a) $\lambda_2 \leq \mu_1$. Auf Grund der gewöhnlichen Monotonie von $\chi(\omega)$ schließt man hier: es ist

$$\chi(\lambda_1) \leq \chi(\lambda_2) \leq \chi(\mu_1) \leq \chi(\mu_2).$$

Die Eigenwerte von $\chi(B_2)$ werden von keinem Eigenwerte von $\chi(A_2)$ übertroffen, es ist also gewiß $\chi(A_2) \leq \chi(B_2)$.

Fall b) $\lambda_2 > \mu_1$ und entweder $\lambda_1 = \mu_1$ oder $\lambda_2 = \mu_2$. Aus (19'') folgt dann

$$(\mu_1 - \lambda_2)(\mu_2 - \lambda_1) \sin^2 \vartheta \geq 0$$

und hieraus wegen $(\mu_1 - \lambda_2)(\mu_2 - \lambda_1) < 0$ die Gleichung $\sin \vartheta = 0$. Es ist also $B_2(x, x) = \mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2$ und

$$\chi(A_2)(x, x) = \chi(\lambda_1)x_1^2 + \chi(\lambda_2)x_2^2, \quad \chi(B_2)(x, x) = \chi(\mu_1)x_1^2 + \chi(\mu_2)x_2^2.$$

Wiederum ist wegen der gewöhnlichen Monotonie von $\chi(\omega)$ gewiß $\chi(\lambda_1) \leq \chi(\mu_1)$ und $\chi(\lambda_2) \leq \chi(\mu_2)$, also auch $\chi(A_2) \leq \chi(B_2)$.

Fall c) $\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2$.

Das Ungleichungspaar

$$(20') \quad \chi(\lambda_1) \leq \chi(\mu_1), \quad \chi(\lambda_2) \leq \chi(\mu_2)$$

ist wieder eine Folge der gewöhnlichen Monotonie von $\chi(\omega)$. Ferner ist

$$\begin{aligned} |\chi(B_2) - \chi(A_2)| &= \begin{vmatrix} (\chi(\mu_1) - \chi(\lambda_1)) \cos \vartheta, & (\chi(\mu_1) - \chi(\lambda_2)) (-\sin \vartheta) \\ (\chi(\mu_2) - \chi(\lambda_1)) \sin \vartheta, & (\chi(\mu_2) - \chi(\lambda_2)) \cos \vartheta \end{vmatrix} \\ &= \kappa(\mu_1, \lambda_1) \kappa(\mu_2, \lambda_2) (\mu_1 - \lambda_1) (\mu_2 - \lambda_2) \cos^2 \vartheta \\ &\quad + \kappa(\mu_1, \lambda_2) \kappa(\mu_2, \lambda_1) (\mu_1 - \lambda_2) (\mu_2 - \lambda_1) \sin^2 \vartheta. \end{aligned}$$

Aus (20') im Verein mit (19'') schließt man

$$|\chi(B_2) - \chi(A_2)| \geq \begin{vmatrix} \kappa(\mu_1, \lambda_1) \kappa(\mu_1, \lambda_2) \\ \kappa(\mu_2, \lambda_1) \kappa(\mu_2, \lambda_2) \end{vmatrix} (\mu_1 - \lambda_2) (\mu_2 - \lambda_1) (-\sin^2 \vartheta),$$

also ist

$$(20'') \quad |\chi(B_2) - \chi(A_2)| \geq 0.$$

(20') und (20'') zusammen drücken aber aus, daß $\chi(B_2) \geq \chi(A_2)$ ist. Durch die Fälle a) b) c) sind alle Möglichkeiten erschöpft und damit der Fall $n = 2$ vollständig erledigt.

Wir wollen das Resultat genauer diskutieren. Die Ungleichungen (17) haben eine sehr einfache Bedeutung. Zunächst bemerken wir, daß man sich auf *streng* monotone $\chi(\omega)$ beschränken darf. Es gilt nämlich der Hilfssatz: *Nimmt eine Funktion $\chi(\omega)$, die monoton von zweiter Stufe ist, an zwei ver-*

schiedenen Stellen denselben Wert an, dann kann deren Konstanz in ihrem ganzen Definitionsbereiche behauptet werden, wenn man aus letzterem den etwa vorhandenen größten und kleinsten Wert entfernt.

Beweis: Sei $\chi(\alpha) = \chi(\beta)$ ($\alpha < \beta$). Sei ferner $\xi > \beta$ und $\eta > \xi$ und sowohl ξ als auch η im Definitionsbereiche von $\chi(\omega)$ gelegen. Setzt man in der zweiten Ungleichung (17) $\xi_1 = \alpha$, $\eta_1 = \beta$, $\xi_2 = \xi$, $\eta_2 = \eta$, so erhält man

$$(21') \quad \kappa(\beta, \xi) \kappa(\eta, \alpha) \leq 0.$$

Wegen der gewöhnlichen Monotonie von $\chi(\omega)$ ist aber $\kappa(\beta, \xi) \geq 0$ und $\kappa(\eta, \alpha) \geq 0$, also auch

$$(21'') \quad \kappa(\beta, \xi) \kappa(\eta, \alpha) \geq 0;$$

(21') und (21'') zusammen ergeben

$$(21) \quad \kappa(\beta, \xi) \kappa(\eta, \alpha) = 0.$$

Hieraus folgt $\kappa(\beta, \xi) = 0$, d. h. $\chi(\xi) = \chi(\beta)$, da $\kappa(\eta, \alpha) = 0$ nicht bestehen kann, ohne daß gleichzeitig $\kappa(\beta, \xi) = 0$ wäre. Aus der gewöhnlichen Monotonie von $\chi(\omega)$ folgt nämlich $\chi(\alpha) \leq \chi(\xi) \leq \chi(\eta)$, also aus $\chi(\alpha) = \chi(\eta)$ auch $\chi(\xi) = \chi(\alpha) = \chi(\beta)$.

Ebenso erledigt man den Fall eines $\xi < \alpha$, das nicht der kleinste Wert aus dem Definitionsbereiche von $\chi(\omega)$ ist, und damit ist, da die Konstanz von $\chi(\omega)$ im Intervall $\langle \alpha \beta \rangle$ selbst eine unmittelbare Folge der gewöhnlichen Monotonie ist, der Hilfssatz bewiesen.

Es gilt auch die Umkehrung: Ersetzt man in einer konstanten Funktion den Funktionswert in dem etwa auftretenden größten Werte des Definitionsbereiches durch einen nicht kleineren und in dem etwa auftretenden kleinsten Werte des Definitionsbereiches durch einen nicht größeren Wert, so bleibt die Funktion monoton von zweiter Stufe. Der sehr einfache Beweis kann dem Leser überlassen bleiben. (Siehe auch den Schlußsatz von § 3.)

Wir gehen jetzt zum allgemeinen Falle eines streng monotonen $\chi(\omega)$ über. Die zweite Ungleichung (17) kann dann, wenn die Annahme $\xi_1 < \xi_2 < \eta_1 < \eta_2$ gemacht wird, in der Form

$$(22') \quad \frac{(\chi(\eta_1) - \chi(\xi_1))(\chi(\eta_2) - \chi(\xi_2))}{(\chi(\eta_1) - \chi(\xi_2))(\chi(\eta_2) - \chi(\xi_1))} \geq \frac{(\eta_1 - \xi_1)(\eta_2 - \xi_2)}{(\eta_1 - \xi_2)(\eta_2 - \xi_1)}$$

geschrieben werden. Es kann also (22') in eine Ungleichung zwischen Doppelverhältnissen umgeschrieben werden:

$$(22) \quad (\chi(\xi_1) \chi(\xi_2) \chi(\eta_1) \chi(\eta_2)) \geq (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2).$$

Wir fassen unsere Überlegungen zusammen: Eine von zweiter Stufe monotone Funktion $\chi(\omega)$ ist auch im gewöhnlichen Sinne monoton. Es sind nun zwei Fälle möglich. Entweder entsteht durch Streichung der gegebenenfalls vorhandenen äußersten Werte des Definitionsbereiches eine konstante Funktion. Ist dies nicht der Fall, dann ist $\chi(\omega)$ streng monoton. Charakteristisch für die Monotonie zweiter Stufe ist dann, daß bei der durch die Funktion vermittelten Wertezuordnung die Doppelverhältnisse von natürlich angeordneten Werten nie eine Verkleinerung erfahren.

Eine unmittelbare Folgerung hieraus ist der Satz: Eine umkehrbare Funktion ist dann und nur dann gleichzeitig mit ihrer Umkehrung monoton von zweiter Stufe, wenn sie durch einen linearen Ausdruck $\chi(\omega) = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}$ mit positiver Determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ dargestellt wird und ihr Pol nicht zwischen zwei Werten des Definitionsbereiches liegt.

Eine weitere Folgerung aus der Monotonie zweiter Stufe, die bald Verwendung finden wird, ist die Existenz und Stetigkeit der ersten Ableitung von $\chi(\omega)$ im Innern des Definitionsbereiches der Funktion. Man kann sogar die Beschränktheit des zweiten Differenzenquotienten in jedem Intervalle behaupten, das mit seinen Endpunkten dem Innern des Definitionsbereiches angehört.

Beweis: Man kann annehmen, daß $\chi(\omega)$ streng monoton ist. Man beschränke die Variable ω auf ein Intervall $\alpha \leq \omega \leq \beta$, das mit seinen Endpunkten dem Definitionsbereich von $\chi(\omega)$ angehört. Setzt man in der zweiten Ungleichung (17) $\xi_1 = \alpha$, $\eta_2 = \beta$, so ergibt sich unter Beachtung der gewöhnlichen Monotonie

$$0 < \kappa(\eta_1, \xi_2) \leq \frac{\kappa(\eta_1, \alpha) \kappa(\beta, \xi_2)}{\kappa(\beta, \alpha)} \leq \frac{(\chi(\beta) - \chi(\alpha))(\beta - \alpha)}{(\eta_1 - \alpha)(\beta - \xi_2)}.$$

Diese Ungleichung zeigt zunächst, daß bei Beschränkung von ξ_2 und η_1 auf ein Intervall $\alpha' \leq \omega \leq \beta'$, das mit seinen Endpunkten dem Innern von $\langle \alpha, \beta \rangle$ angehört, der Differenzenquotient von $\chi(\omega)$ unter einer festen Schranke bleibt, $\chi(\omega)$ also jedenfalls im Innern des Definitionsbereiches stetig ist.

Setzt man nun allein $\eta_2 = \beta$ und läßt die Werte ξ_1, η_1, ξ_2 in $\langle \alpha', \beta' \rangle$ laufen, so ergibt (17)

$$\frac{\kappa(\eta_1, \xi_2)}{\kappa(\eta_1, \xi_1)} \leq \frac{\kappa(\beta, \xi_2)}{\kappa(\beta, \xi_1)} \quad (\xi_1 < \xi_2)$$

oder

$$(23') \quad \kappa(\eta_1, \xi_2) - \kappa(\eta_1, \xi_1) \leq \kappa(\eta_1, \xi_1) \frac{\kappa(\beta, \xi_2) - \kappa(\beta, \xi_1)}{\kappa(\beta, \xi_1)} \quad (\xi_1 < \xi_2).$$

Setzt man in (17) $\eta_2 = \alpha$, so erhält man entsprechend

$$(23'') \quad \kappa(\eta_1, \xi_2) - \kappa(\eta_1, \xi_1) \geq \kappa(\eta_1, \xi_1) \frac{\kappa(\alpha, \xi_2) - \kappa(\alpha, \xi_1)}{\kappa(\alpha, \xi_1)} \quad (\xi_1 < \xi_2).$$

Durch (23') und (23'') ist die Differenz $\kappa(\eta_1, \xi_2) - \kappa(\eta_1, \xi_1)$ zwischen zwei Schranken eingeschlossen. Der erste Faktor in diesen $\kappa(\eta_1, \xi_1)$ ist positiv, und, wie eben bewiesen worden ist, unter einer festen Schranke gelegen. Es ist ferner

$$\kappa(\beta, \xi_1) \geq \frac{\chi(\beta) - \chi(\beta')}{\beta - \alpha'} \quad \text{und} \quad \kappa(\alpha, \xi_1) \geq \frac{\chi(\alpha') - \chi(\alpha)}{\beta' - \alpha}.$$

Die Nenner $\kappa(\beta, \xi_1)$ und $\kappa(\alpha, \xi_1)$ der rechten Seiten von (23') und (23'') bleiben also *oberhalb* einer festen positiven Schranke. Endlich sinken die Differenzen $\kappa(\beta, \xi_2) - \kappa(\beta, \xi_1)$ und $\kappa(\alpha, \xi_2) - \kappa(\alpha, \xi_1)$ wegen der schon bewiesenen Stetigkeit von $\chi(\omega)$ *gleichmäßig* unter jede vorgegebene Schranke, falls die Differenz $\xi_2 - \xi_1$ genügend klein genommen wird. Aus allem dem folgt, daß $|\kappa(\eta_1, \xi_2) - \kappa(\eta_1, \xi_1)|$ gleichmäßig unter eine vorgeschriebene positive Schranke ε fällt, falls nur $\xi_2 - \xi_1$ genügend klein gewählt wird. Hieraus folgen in bekannter Weise *Existenz* und *Stetigkeit* der ersten Ableitung von $\chi(\omega)$ in $\langle \alpha', \beta' \rangle$, also im ganzen Innern des Definitionsbereiches.

Dividiert man (23') und (23'') durch $\xi_2 - \xi_1$, so ergeben sich für den zweiten Differenzenquotienten die Schranken

$$(24') \quad 2 \frac{\kappa(\eta_1, \xi_2) - \kappa(\eta_1, \xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} \leq 2 \frac{\kappa(\eta_1, \xi_1)}{\kappa(\beta, \xi_1)} \frac{\kappa(\beta, \xi_2) - \kappa(\beta, \xi_1)}{\xi_2 - \xi_1},$$

$$(24'') \quad 2 \frac{\kappa(\eta_1, \xi_2) - \kappa(\eta_1, \xi_1)}{\xi_2 - \xi_1} \geq 2 \frac{\kappa(\eta_1, \xi_1)}{\kappa(\alpha, \xi_1)} \frac{\kappa(\alpha, \xi_2) - \kappa(\alpha, \xi_1)}{\xi_2 - \xi_1}.$$

Hieraus ersieht man durch Benutzung des bereits Bewiesenen, daß bei Beschränkung auf $\langle \alpha', \beta' \rangle$ der zweite Differenzenquotient absolut genommen unter einer festen Schranke bleibt. Damit sind alle Differenzierbarkeitsbehauptungen bewiesen.

§ 3.

Die Bedingungen sind auch für $n \geq 3$ hinreichend.

Nun gehen wir daran, zu beweisen, daß die in § 1 gefundenen notwendigen Bedingungen (13) auch für $n \geq 3$ hinreichend sind. Über den Definitionsbereich von $\chi(\omega)$ machen wir hier die einschränkende Voraussetzung, daß er ein *Intervall* ist. Es kann endlich oder unendlich, offen, halboffen oder geschlossen sein.

Da aus den Ungleichungen (13) für $n \geq 3$ die Monotonie zweiter Stufe folgt, so sind die eben bewiesenen Differenzierbarkeitseigenschaften für jedes $n \geq 2$ vorhanden. Läßt man in (13) die Werte ξ_1 und η_1 in

$$(25) \quad \begin{vmatrix} x(\xi_1, \xi_1) & x(\xi_1, \xi_2) & \dots & x(\xi_1, \xi_m) \\ x(\xi_2, \xi_1) & x(\xi_2, \xi_2) & \dots & x(\xi_2, \xi_m) \\ . & . & . & . \\ x(\xi_m, \xi_1) & x(\xi_m, \xi_2) & \dots & x(\xi_m, \xi_m) \end{vmatrix} \geqslant 0 \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

Der Hilfssatz kann so bewiesen werden: Sei $A_n = (a_{ik})$ eine Matrix, deren Eigenwerte

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$$

$$\pi(\lambda_i) = \chi(\lambda_i), \quad \pi'(\lambda_i) = \chi'(\lambda_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$
$$\chi(\omega) = \pi(\omega) + \rho(\omega)$$
$$\xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_n.$$
$$\chi(X_n) = \pi(X_n) + \varrho(X_n).$$

⁵⁾ Im Innern des Definitionsbereiches wird diese bereits durch die erste der Ungleichungen (25) zum Ausdruck gebracht.

Da $\varrho(\omega)$ an den Stellen λ_i verschwindet und auch verschwindende Ableitungen hat, so gibt es zu jedem positiven ε ein ebensolches δ_ε derart, daß für

$$(26') \quad |\xi_i - \lambda_i| < \delta_\varepsilon$$

der Ausdruck

$$|\varrho(\xi_i)| < \varepsilon |\xi_i - \lambda_i|$$

ausfällt und zwar für jedes $i = 1, 2, \dots, n$.

Es werde jetzt angenommen, daß die Eigenwerte von X_n der Ungleichung (26') genügen. Wird $\varrho(X_n) = (\varrho_{kl})$ gesetzt, so ist dann wegen der Orthogonalinvarianz der Quadratsumme der Elemente einer quadratischen Form

$$\sum_{k,l=1}^n \varrho_{kl}^2 = \sum_{i=1}^n \varrho^2(\xi_i) < \varepsilon^2 \sum_{i=1}^n (\xi_i - \lambda_i)^2,$$

also auch

$$(27) \quad |\varrho_{kl}| < \varepsilon \sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi_i - \lambda_i)^2} \quad (k, l = 1, 2, \dots, n).$$

Eine einfache Extremalbetrachtung endlich, die dem Leser überlassen bleiben kann, zeigt, daß für ein beliebiges Matrixpaar A_n und B_n mit den Eigenwerten $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ bzw. $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$ die Abschätzung gilt:

$$\sum_{i=1}^n (\mu_i - \lambda_i)^2 \leq \sum_{k,l=1}^n (b_{kl} - a_{kl})^2.$$

In unserem Falle ist also

$$(28) \quad \sum_{i=1}^n (\xi_i - \lambda_i)^2 \leq \sum_{k,l=1}^n (x_{kl} - a_{kl})^2;$$

(27) und (28) zusammen ergeben

$$(29) \quad |\varrho_{kl}| < \varepsilon \sqrt{\sum_{k,l=1}^n (x_{kl} - a_{kl})^2},$$

gültig für Matrizen X_n , die so wenig von A_n abweichen, daß die Ungleichungen (26') bestehen. Damit ist die eigentliche Differenzierbarkeit von $\chi(X_n)$ bewiesen.

Das totale Differential von $\chi(X_n)$ (d.h. die Matrix der totalen Differentiale der Elemente von $\chi(X_n)$) läßt sich sehr einfach schreiben, wenn A_n auf die Hauptachsen gebracht ist, also

$$A_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

geschrieben werden kann. $T = (\tau_{ik})$ sei eine orthogonale Matrix, die X_n auf Hauptachsen bringt, es sei also

$$X_n = T' \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \xi_n \end{pmatrix} T.$$

Dann ist

$$\chi(X_n) = T' \begin{pmatrix} \chi(\xi_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \chi(\xi_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \chi(\xi_n) \end{pmatrix} T.$$

Faßt man jetzt T und die ξ_i als unabhängige Variable auf, so ist für $T = E$ (Einheitsmatrix) und $\xi_i = \lambda_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) offenbar

$$\begin{aligned} dX_n &= (dT)' \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} dT \\ &\quad + \begin{pmatrix} d\xi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d\xi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d\xi_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d\chi(X_n) &= (dT)' \begin{pmatrix} \chi(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \chi(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \chi(\lambda_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \chi(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \chi(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \chi(\lambda_n) \end{pmatrix} dT \\ &\quad + \begin{pmatrix} \chi'(\lambda_1) d\xi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \chi'(\lambda_2) d\xi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \chi'(\lambda_n) d\xi_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und wegen der Orthogonalität von T

$$dT + dT' = 0.$$

Aus diesen Identitäten folgt, wenn $E = (\varepsilon_{ik})$ gesetzt wird,

$$dX_n = ((\lambda_i - \lambda_k) d\tau_{ik}) + (d\xi_i \cdot \varepsilon_{ik}),$$

$$d\chi(X_n) = ((\chi(\lambda_i) - \chi(\lambda_k)) \cdot d\tau_{ik}) + (\chi'(\lambda_i) d\xi_i \varepsilon_{ik}),$$

also

$$(30) \quad d\chi(X_n) = (\kappa(\lambda_i, \lambda_k) dx_{ik}).$$

Die Formel (30) ist die Grundlage der folgenden Überlegungen. Aus ihr kann nämlich der Schluß gezogen werden: *Die Ungleichung $dX_n \geq 0$ zieht $d\chi(X_n) \geq 0$ nach sich; anders gesprochen: die Monotonie besteht im Infinitesimalen.* In der Tat: Wegen des Bestehens von (25) ist $(\kappa(\lambda_i, \lambda_k))$ Matrix einer *nicht-negativen* quadratischen Form. Dasselbe kann nach Voraussetzung von dX_n ausgesagt werden. $d\chi(X_n)$ entsteht, indem entsprechende Elemente von $(\kappa(\lambda_i, \lambda_k))$ und dX_n miteinander multipliziert werden. Aus diesem Bildungsgesetze folgt, daß auch $d\chi(X_n)$ zu einer nicht-negativen Form gehört. Man erkennt dies, indem man die zu $(\kappa(\lambda_i, \lambda_k))$ und dX_n gehörigen Formen als Summen von Quadraten reeller Linearformen ansetzt und dann die Bildung von $d\chi(X_n)$ distributiv durchführt.

Sei nun A_n und B_n ein Paar von Matrizen aus dem Definitionsbereiche von $\chi(X_n)$ und

$$A_n \leq B_n.$$

Es werde ferner zunächst angenommen, daß deren Eigenwerte dem *Innern* des Definitionsintervalls von $\chi(\omega)$ angehören. Man bilde die von einem Parameter t abhängige Matrix

$$X_n(t) = A_n + (B_n - A_n)t \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Es ist $X_n(0) = A_n$, $X_n(1) = B_n$. Ferner ist

$$(31') \quad \frac{dX_n}{dt} = B_n - A_n \geq 0.$$

Hieraus folgt, daß die Eigenwerte von $X_n(t)$

$$\xi_1(t) \leq \xi_2(t) \leq \dots \leq \xi_n(t)$$

n nichtabnehmende Funktionen von t bilden. Für $t=0$ bzw. $t=1$ erhält man die Eigenwerte von A_n bzw. B_n . Wegen der Voraussetzung über diese bleiben also auch die Eigenwerte von $X_n(t)$ im *Innern* des Definitionsintervalls von $\chi(\omega)$. Jetzt kann aus (31') auf

$$(31'') \quad \frac{d\chi(X_n)}{dt} \geq 0$$

und hieraus wieder auf

$$\chi(A_n) = \chi(X_n(0)) \leq \chi(X_n(1)) = \chi(B_n)$$

geschlossen werden.

Ein wenig Schwierigkeiten bereiten die Endpunkte α, β des Definitionsintervalls, falls sie zum Definitionsbereiche gehören, da dort $\chi(\omega)$ nicht einmal stetig zu sein braucht. Sie erledigen sich in folgender Weise. Wegen der Monotonie von $\chi(\omega)$ ist

$$(32) \quad \chi(\alpha) \leq \lim_{\omega \rightarrow \alpha + 0} \chi(\omega), \quad \chi(\beta) \geq \lim_{\omega \rightarrow \beta - 0} \chi(\omega).$$

Ersetzt man die Funktionswerte in α und β durch diese Limiten, so entsteht eine stetige Funktion $\chi^*(\omega)$. Aus der Stetigkeit von $\chi^*(\omega)$ kann offenbar auf die Stetigkeit der Matrixfunktion $\chi^*(X_n)$ geschlossen werden. Da die in Betracht kommenden Paare von Matrizen $A_n \leq B_n$, die Eigenwerte in α oder β haben, wie leicht zu sehen, Grenzfälle von solchen sind, die ebenso geordnet sind und deren Eigenwerte dem Innern von $\langle \alpha, \beta \rangle$ angehören, so folgt aus der Monotonie von $\chi^*(X_n)$ im Bereiche der letzteren und der Stetigkeit dieser Matrixfunktion ihre Monotonie im ganzen Definitionsbereiche.

Kann man nun aus der Monotonie von $\chi^*(X_n)$ im Vereine mit (32) auf die Monotonie von $\chi(X_n)$ schließen? Dies ist in der Tat der Fall. Sei A_n und B_n ein Paar von Matrizen aus dem Definitionsbereiche von $\chi(X_n)$, von denen mindestens eine einen Endpunkt von $\langle \alpha, \beta \rangle$ zum Eigenwert hat, und es sei

$$A_n \leq B_n,$$

A_n habe den Eigenwert α etwa k_1 -mal, B_n l_1 -mal und ferner A_n den Eigenwert β k_2 -mal und B_n l_2 -mal. Mindestens eine der Zahlen k_1, k_2, l_1, l_2 ist von Null verschieden. Nach Voraussetzung ist $A_n \leq B_n$ und es sind die Eigenwerte von A_n und B_n in $\langle \alpha, \beta \rangle$ gelegen. Aus diesen beiden Annahmen folgt offenbar (vgl. (2'))

$$k_1 \geq l_1, \quad k_2 \leq l_2.$$

Darüber hinaus kann behauptet werden, daß der zu α gehörige Eigenraum von A_n den entsprechenden Eigenraum von B_n enthält und daß umgekehrt der zu β gehörige Eigenraum von A_n in dem entsprechenden Eigenraume von B_n enthalten ist. Es genügt natürlich, den auf α bezüglichen Teil der Behauptung zu beweisen. Der Einfachheit der Schreibweise halber werde $\alpha = 0$ gesetzt. Es ist dann

$$(33) \quad 0 \leq A_n(x, x) \leq B_n(x, x).$$

Bei einer nicht-negativen Form sind die zum Eigenwert $\alpha = 0$ gehörigen Eigenvektoren dadurch charakterisiert, daß sie ihr den Wert Null erteilen. $A_n(x, x)$ und $B_n(x, x)$ sind nicht-negativ, und $B_n(x, x) = 0$ hat $A_n(x, x) = 0$ zur Folge. Damit ist das behauptete Verhalten der zu α gehörigen Eigenräume von A_n und B_n bewiesen. (Entsprechend verfährt man bei β .)

Im Vereine mit (32) folgt hieraus fast unmittelbar die Ungleichung

$$\chi(B_n) - \chi^*(B_n) \geq \chi(A_n) - \chi^*(A_n)$$

und hieraus

$$\chi(B_n) - \chi(A_n) \geq \chi^*(B_n) - \chi^*(A_n) \geq 0,$$

und damit ist der Beweis für die Monotonie $\chi(X_n)$ zu Ende geführt.

Zum Schluß sei bemerkt, daß man bei den vorangehenden Betrachtungen von dem Verhalten von $\chi(\omega)$ in den Grenzpunkten des Intervalls nur die Ungleichungen (32) benutzt hat. Man kann also den Satz aussprechen: *Eine in $\alpha \leq \omega \leq \beta$ von n -ter Stufe monotone Funktion behält diese Eigenschaft, wenn man den Funktionswert in α durch einen kleineren oder den in β durch einen größeren ersetzt.*

§ 4.

Zum Cauchyschen Interpolationsproblem.

Die abgeleiteten Kriterien für eine monotone Funktion stehen im engen Zusammenhange zu Fragestellungen, die das Cauchysche Interpolationsproblem betreffen. Dies soll jetzt besprochen werden. Ein Teil der gewonnenen Ergebnisse wird später benutzt werden, um die Differenzierbarkeitseigenschaften monotoner Funktionen genauer zu studieren, als es im § 2 geschehen ist.

Das Cauchysche Problem verlangt die Aufsuchung einer rationalen Funktion $\varrho(\omega) = \frac{\sigma(\omega)}{\tau(\omega)}$, deren Zähler $\sigma(\omega)$ und Nenner $\tau(\omega)$ dem Grade nach die vorgeschriebenen Werte m bzw. n nicht übersteigen und die an $m + n + 1$ gegebenen Stellen $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{m+n}$ vorgeschriebene Werte $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{m+n}$ annimmt:

$$(34) \quad \varrho(\omega_0) = \chi_0, \varrho(\omega_1) = \chi_1, \dots, \varrho(\omega_{m+n}) = \chi_{m+n}.$$

Im folgenden wird nur der Fall $m = n$ eine Rolle spielen. Um Ausnahmefälle zu vermeiden, werden wir lieber statt von $\varrho(\omega)$ von dem Polynompaare $\sigma(\omega), \tau(\omega)$ sprechen und die Forderungen (34) (im Falle $m = n$) durch

$$(35) \quad \sigma(\omega_0) = \chi_0 \tau(\omega_0), \sigma(\omega_1) = \chi_1 \tau(\omega_1), \dots, \sigma(\omega_{2n}) = \chi_{2n} \tau(\omega_{2n})$$

ersetzen. Es wird also — und das ist der wesentliche Unterschied gegenüber der früheren Formulierung — zugelassen, daß $\sigma(\omega)$ und $\tau(\omega)$ einen gemeinsamen Teiler besitzen, daß somit insbesondere ein $\varrho(\omega_i)$ in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheint. Selbstverständlich wird aber verlangt, daß $\sigma(\omega)$ und $\tau(\omega)$ nicht beide identisch verschwinden. Zwei Polynompaare $\sigma(\omega), \tau(\omega)$ und $\alpha\sigma(\omega), \alpha\tau(\omega)$, die sich um einen konstanten, von Null verschiedenen Faktor α unterscheiden, sehen wir als nicht wesentlich verschieden an. Nun beweisen wir zunächst eine Reihe einfacher Hilfsätze.

1. Hilfssatz: *Es sei $\sigma(\omega), \tau(\omega)$ ein Paar von Polynomen, deren Grad kleiner als n ist, und*

$$(36') \quad \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots, \xi_n, \eta_n$$

ein System von $2n$ paarweise verschiedenen Werten. Genügen dann die weiteren $2n$ Werte

$$(36'') \quad \varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \dots, \varphi_n, \psi_n$$

dem Gleichungssystem

$$(37) \quad \sigma(\xi_i) = \varphi_i \tau(\xi_i), \quad \sigma(\eta_i) = \psi_i \tau(\eta_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

so ist die Determinante

$$(38) \quad \left| \frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} \right|_{i,k=1}^n = 0.$$

Beweis: Die Gleichungen (37) können als ein System von $2n$ linearen homogenen Gleichungen für die $2n$ Koeffizienten der zwei Polynome $\sigma(\omega)$ und $\tau(\omega)$ als Unbekannten aufgefaßt werden. Also muß ihre Determinante verschwinden. Die letztere ist aber auf Grund der Identität (15) bis auf einen von Null verschiedenen Faktor mit der linken Seite von (38) identisch.

2. Hilfssatz: Sind $\sigma(\omega)$ und $\tau(\omega)$ zwei teilerfremde Polynome höchstens n -ten Grades, von denen mindestens eines den Grad n hat, und sind die Gleichungen (37) erfüllt, so ist

$$\left| \frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} \right|_1^n \neq 0.$$

Beweis: Wir setzen

$$(39) \quad \frac{\sigma(\eta) \tau(\xi) - \tau(\eta) \sigma(\xi)}{\eta - \xi} = \sum_{p,q=0}^{n-1} c_{pq} \eta^p \xi^q.$$

Aus (37) folgt dann

$$(40) \quad \tau(\eta_i) \tau(\xi_k) \frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} = \frac{\sigma(\eta_i) \tau(\xi_k) - \tau(\eta_i) \sigma(\xi_k)}{\eta_i - \xi_k} = \sum_{p,q=0}^{n-1} c_{pq} \eta_i^p \xi_k^q.$$

Durch Anwendung des Multiplikationssatzes der Determinantentheorie schließt man hieraus auf

$$\begin{aligned} & \prod_{l=1}^n \tau(\xi_l) \tau(\eta_l) \cdot \left| \frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} \right|_1^n \\ &= \prod_{i < k} (\xi_i - \xi_k) (\eta_i - \eta_k) \cdot \begin{vmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots & c_{0,n-1} \\ c_{10} & c_{11} & \dots & c_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,0} & c_{n-1,1} & \dots & c_{n-1,n-1} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Der letzte Faktor auf der rechten Seite dieser Relation, die Bézoutische Determinante der Polynome σ und τ , ist nun wegen der Teilerfremdheit der Polynome und der Voraussetzung über deren Grad bekanntlich von

Null verschieden, also ist die ganze rechte Seite ungleich Null und damit auch die Determinante $\left| \frac{\varphi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} \right|_1^n$.

3. Hilfssatz: Man denke sich jetzt die Wertsysteme (36') und (36'') gegeben und bilde mit ihnen die Matrix

$$M = \left(\frac{\varphi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} \right)_{i,k=1}^n.$$

Ihre Determinante sei von Null verschieden. Dann gibt es genau ein Paar von Polynomen $\sigma(\omega)$, $\tau(\omega)$ höchstens n -ten Grades, das die Forderungen (37) erfüllt und das außerdem an einer von den ξ_i und η_i verschiedenen Stelle η_0 eine Gleichung von der Form

$$(37') \quad \alpha \sigma(\eta_0) - \beta \tau(\eta_0) = 0$$

befriedigt. α und β sind gegebene Konstante, die nicht beide verschwinden.

Beweis: Man denke sich $\sigma(\omega)$ und $\tau(\omega)$ mit unbestimmten Koeffizienten angesetzt. Aus (37) und (37') erhält man zu deren Bestimmung ein System von $2n + 1$ linearen homogenen Gleichungen mit der Koeffizientenmatrix

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \eta_0 & \dots & \alpha \eta_0^n & \beta & \beta \eta_0 & \dots & \beta \eta_0^n \\ 1 & \xi_1 & \dots & \xi_1^n & \varphi_1 & \varphi_1 \xi_1 & \dots & \varphi_1 \xi_1^n \\ 1 & \eta_1 & \dots & \eta_1^n & \psi_1 & \psi_1 \eta_1 & \dots & \psi_1 \eta_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \xi_n & \dots & \xi_n^n & \varphi_n & \varphi_n \xi_n & \dots & \varphi_n \xi_n^n \\ 1 & \eta_n & \dots & \eta_n^n & \psi_n & \psi_n \eta_n & \dots & \psi_n \eta_n^n \end{pmatrix} \quad ^6).$$

Es muß bewiesen werden, daß ihr Rang genau gleich $2n + 1$ ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß $\eta_0 = 0$ ist. Ich behaupte, daß dann eine der beiden Determinanten D_1 und D_2 der Ordnung $2n + 1$, die durch Streichung der $n + 2$ -ten bzw. ersten Kolonne in C entstehen, von Null verschieden ist. In der Tat ist offenbar

$$D_1 = \alpha \prod_{l=1}^n \xi_l \eta_l \begin{vmatrix} 1 & \xi_1 & \dots & \xi_1^{n-1} & \varphi_1 & \varphi_1 \xi_1 & \dots & \varphi_1 \xi_1^{n-1} \\ 1 & \eta_1 & \dots & \eta_1^{n-1} & \psi_1 & \psi_1 \eta_1 & \dots & \psi_1 \eta_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \xi_n & \dots & \xi_n^{n-1} & \varphi_n & \varphi_n \xi_n & \dots & \varphi_n \xi_n^{n-1} \\ 1 & \eta_n & \dots & \eta_n^{n-1} & \psi_n & \psi_n \eta_n & \dots & \psi_n \eta_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

⁶⁾ In der $n + 2$ -ten bis $(2n + 2)$ -ten Kolonne sind die Vorzeichen abgeändert worden, was natürlich unwesentlich ist.

also nach der Identität (15)

$$(41') \quad D_1 = \alpha \prod_{l=1}^n \xi_l \eta_l \prod_{p,q=1}^n (\eta_p - \xi_q) \cdot \left| \frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} \right|_{i,k=1}^n.$$

Ebenso erhält man

$$(41'') \quad D_2 = (-1)^n \beta \prod_{l=1}^n \xi_l \eta_l \prod_{p,q=1}^n (\eta_p - \xi_q) \cdot \left| \frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} \right|_{i,k=1}^n.$$

D_1 und D_2 unterscheiden sich also von α bzw. β um einen von Null verschiedenen Faktor, mindestens eine von ihnen ist somit von Null verschieden. Damit ist der Hilfssatz bewiesen^{6a)}.

Die Tatsache, daß D_2 und D_1 bis auf einen gemeinsamen von Null verschiedenen Faktor mit $\sigma(0)$ und $(-1)^n \tau(0)$ übereinstimmen, führt zu folgendem

Zusatz zum 3. Hilfssatz: Mindestens eine der Größen $\sigma(\eta_0)$ und $\tau(\eta_0)$ ist von Null verschieden.

Wir ziehen nun aus dem Hilfssatz und dem Zusatze zwei wichtige Folgerungen.

1. Folgerung: *Mindestens eines der durch den Hilfssatz definierten Polynome ist vom Grade n .*

Im entgegengesetzten Falle würde nämlich durch Multiplikation von $\sigma(\omega)$ und $\tau(\omega)$ mit derselben Funktion ersten Grades ein neues, dem Hilfssatze genügendes Funktionenpaar entstehen, was der Eindeutigkeitsaussage desselben widerspricht.

2. Folgerung: *Die Nullstellen des größten gemeinsamen Teilers von $\sigma(\omega)$ und $\tau(\omega)$ sind alle einfach und gehören dem System (36') an.*

Der Zusatz lehrt, da η_0 durch jeden Wert außerhalb (36') ersetzt werden kann, daß eine solche Nullstelle (36') angehören muß. Die Weglassung eines gemeinsamen Linearfaktors von $\sigma(\omega)$ und $\tau(\omega)$, dessen Nullstelle mehrfach ist, würde aber zu einem neuen Funktionenpaar führen, das sowohl (37) als auch (37') befriedigt, was wieder zur Eindeutigkeitsaussage des Hilfssatzes im Widerspruch steht.

Das Polynom $\tau(\omega)$ kann gewiß nicht identisch verschwinden, weil dann, wie die Forderungen (37) lehren, auch $\sigma(\omega)$ identisch verschwände. Man kann also den Quotienten $\frac{\sigma(\omega)}{\tau(\omega)}$ bilden. Die zweite Folgerung lehrt, daß er an keiner von den Werten aus (36') verschiedenen Stelle in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheint.

^{6a)} Auf kürzerem Wege hätte man mit Benutzung des 1. Hilfssatzes zum dritten gelangen können. Wir haben den längeren des Textes vorgezogen, da die durchgeführten Rangbetrachtungen beim Beweise des 5. Hilfssatzes gebraucht werden.

Eine leichte Verallgemeinerung des Hilfssatzes erhält man, indem man die Werte (36') und η_0 einer linearen Transformation unterwirft, etwa

$$\omega^* = \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \left(\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \right),$$

deren Pol außerhalb des Systems (36') liegt und auch auf das System (36'') und ψ_0 eine weitere Transformation

$$\chi^* = \frac{a_1\chi + b_1}{c_1\chi + d_1} \left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \neq 0 \right),$$

deren Pol dem System (36'') nicht angehören soll, anwendet. Setzt man

$$\xi_i^* = \frac{a\xi_i + b}{c\xi_i + d}, \quad \eta_i^* = \frac{a\eta_i + b}{c\eta_i + d} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$\varphi_i^* = \frac{a_1\varphi_i + b_1}{c_1\varphi_i + d_1}, \quad \psi_i^* = \frac{a_1\psi_i + d_1}{c_1\psi_i + d_1} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

so wird, wie man leicht nachrechnet,

$$\left| \frac{\varphi_i^* - \varphi_k^*}{\eta_i^* - \xi_k^*} \right|_1^n = \left(\frac{a_1 d_1 - b_1 c_1}{a d - b c} \right)^n \prod_{l=1}^n \frac{(c \xi_l + d)(c \eta_l + d)}{(c_1 \varphi_l + d_1)(c_1 \psi_l + d_1)} \cdot \left| \frac{\varphi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} \right|_1^n.$$

Also ist $\left| \frac{\varphi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} \right| \neq 0$ mit $\left| \frac{\varphi_i^* - \varphi_k^*}{\eta_i^* - \xi_k^*} \right| \neq 0$ gleichbedeutend. Die beiden Transformationen können nun so eingerichtet werden, daß η_0 bzw. ψ_0 ins Unendliche geworfen wird. Man sieht, daß man die Voraussetzung (37') des Hilfssatzes durch die Forderung ersetzen kann, daß $\frac{\sigma(\omega)}{\tau(\omega)}$ für ein endliches oder unendliches η_0 einen vorgeschriebenen Wert annimmt, der selbst unendlich sein darf. Die Aussage des Hilfssatzes bleibt sonst wörtlich bestehen, ebenso die beiden aus ihm gezogenen Folgerungen.

Man denke sich nun in den Voraussetzungen des 3. Hilfssatzes das Zahlenpaar α, β durch ein anderes α_1, β_1 ersetzt und es sei $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} \neq 0$. Hierzu gehört dann ein neues Polynompaar $\sigma_1(\omega), \tau_1(\omega)$ höchstens n -ten Grades. Es gilt dann der

4. Hilfssatz. Die Polynome $\tau(\omega)$ und $\tau_1(\omega)$ sind teilerfremd. Mindestens eines von ihnen ist vom Grade n .

Beweis: Man bilde

$$\delta(\omega) = \begin{vmatrix} \sigma(\omega) & \tau(\omega) \\ \sigma_1(\omega) & \tau_1(\omega) \end{vmatrix}.$$

Es ist $\delta(\eta_0) \neq 0$ (vgl. den Zusatz zum 3. Hilfssatz) und $\delta(\omega)$ ist also ein nicht identisch verschwindendes Polynom höchstens $2n$ -ten Grades. Wegen

des Bestehens der Gleichungen (37) *verschwindet es an den $2n$ verschiedenen Stellen ξ_i, η_i* . Also ist

$$(42) \quad \delta(\omega) = c \prod_{i=1}^n (\omega - \xi_i)(\omega - \eta_i)$$

mit einer von Null verschiedenen Konstanten c . Eine gemeinsame Nullstelle von $\tau(\omega)$ und $\tau_1(\omega)$ könnte, so lehrt der Ausdruck (42) für $\delta(\omega)$, nur eine der Zahlen ξ_i oder η_i sein. Dort müßten aber auch $\sigma(\omega)$ und $\sigma_1(\omega)$ verschwinden, wie wieder aus den Gleichungen (37) folgt, und $\delta(\omega)$ hätte eine mehrfache Nullstelle, was nach (42) nicht der Fall ist.

Die Gradangabe des Hilfssatzes folgt sofort aus der Tatsache, daß $\delta(\omega)$ vom Grade $2n$ ist und $\sigma, \tau, \sigma_1, \tau_1$ höchstens vom Grade n sind.

5. Hilfssatz; *Es sei wieder das System der Werte (36') und (36'') gegeben. Wir setzen jedoch jetzt voraus, daß der Rang r von M kleiner als n sei. Dann gibt es genau ein Paar von Polynomen $\sigma(\omega)$ und $\tau(\omega)$ höchstens r -ten Grades, das (37) befriedigt.*

Beweis: Man kann annehmen, daß der aus den ersten r Zeilen und Kolonnen genommene Minor von Null verschieden ist. Man bilde nun die Matrix

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \dots & \xi_1^r & \varphi_1 & \varphi_1 \xi_1 & \dots & \varphi_1 \xi_1^r \\ 1 & \eta_1 & \dots & \eta_1^r & \psi_1 & \psi_1 \eta_1 & \dots & \psi_1 \eta_1^r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \xi_n & \dots & \xi_n^r & \varphi_n & \varphi_n \xi_n & \dots & \varphi_n \xi_n^r \\ 1 & \eta_n & \dots & \eta_n^r & \psi_n & \psi_n \eta_n & \dots & \psi_n \eta_n^r \end{pmatrix}.$$

Es muß gezeigt werden, daß ihr Rang gleich $2r+1$ ist. Die Rangbetrachtungen beim Beweise des 3. Hilfssatzes lehren, daß die ersten $2r$ Zeilen in C_1 , durch irgendeine weitere Zeile ergänzt, ein System von $2r+1$ unabhängigen Zeilen ergeben. Auf der anderen Seite gibt die Hinzufügung einer ξ -Zeile: $(1, \xi_k, \dots, \xi_k^r, \varphi_k, \varphi_k \xi_k, \dots, \varphi_k \xi_k^r)$ mit $k > r$ und einer η -Zeile: $(1, \eta_i, \dots, \eta_i^r, \psi_i, \psi_i \eta_i, \dots, \psi_i \eta_i^r)$ mit $i > r$ eine quadratische Matrix, deren Determinante, wie eine neuerliche Anwendung von (15) lehrt, verschwindet. Diese beiden Bemerkungen lehren offenbar, daß C_1 den Rang nicht ändert, wenn man der Reihe nach eine ξ -Zeile und dann eine η -Zeile, deren Indizes größer als r sind, streicht, bis nur eine Zeile dieser Art übrigbleibt. Aus allem dem folgt offenbar, daß C_1 tatsächlich den angegebenen Rang besitzt.

Auf Grund der beiden Folgerungen aus dem 3. Hilfssatze können wir hinzufügen:

1. Zusatz: *Mindestens eines der Polynome $\sigma(\omega)$ und $\tau(\omega)$ ist vom Grade r .*

2. Zusatz: *Die Nullstellen des größten gemeinsamen Teilers von $\sigma(\omega)$ und $\tau(\omega)$ sind einfach und gehören dem System (36') an.*

6. Hilfssatz: Ist der Rang der Matrix M gleich r , so gibt es in ihr stets einen von Null verschiedenen r -reihigen Hauptminor.

Beweis: Die ganz Zahl s ($0 \leq s \leq r$) sei durch die Eigenschaft definiert, daß ein von Null verschiedener s -reihiger Hauptminor in M vorhanden ist, während alle mehr als s -reihigen Hauptminoren Null sind. Sei etwa der aus den ersten s Zeilen und Kolonnen entnommene Hauptminor von Null verschieden. Bezeichnet man mit M_{ik} ($i > s, k > s$) den aus ihm durch Hinzufügung der i -ten Zeile und k -ten Kolonne entstehenden Minor von M , so ist wegen $M_{ll} = 0$ ($l > r$) nach Kronecker $M_{ik} M_{ki} = 0$. Hieraus folgt durch Rangbetrachtungen an der Matrix

$$C_s = \begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \dots & \xi_s^s & \varphi_1 & \varphi_1 \xi_1 & \dots & \varphi_1 \xi_s^s \\ 1 & \eta_1 & \dots & \eta_s^s & \psi_1 & \psi_1 \eta_1 & \dots & \psi_1 \eta_s^s \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \xi_s & \dots & \xi_s^s & \varphi_s & \varphi_s \xi_s & \dots & \varphi_s \xi_s^s \\ 1 & \eta_s & \dots & \eta_s^s & \psi_s & \psi_s \eta_s & \dots & \psi_s \eta_s^s \\ 1 & \xi_i & \dots & \xi_i^s & \varphi_i & \varphi_i \xi_i & \dots & \varphi_i \xi_i^s \\ 1 & \eta_i & \dots & \eta_i^s & \psi_i & \psi_i \eta_i & \dots & \psi_i \eta_i^s \\ 1 & \xi_k & \dots & \xi_k^s & \varphi_k & \varphi_k \xi_k & \dots & \varphi_k \xi_k^s \\ 1 & \eta_k & \dots & \eta_k^s & \psi_k & \psi_k \eta_k & \dots & \psi_k \eta_k^s \end{pmatrix},$$

ähnlich denjenigen, welche beim Beweise des 5. Hilfssatzes durchgeführt worden sind, daß $M_{ik} = M_{ki} = 0$ ist, daß also s mit dem Rang r von M identisch ist.

7. Hilfssatz; Über die Voraussetzungen des 5. Hilfssatzes hinaus werde gefordert, daß sämtliche r -reihigen Hauptminoren von M von Null verschieden seien. Dann ist für das durch den Hilfssatz definierte $\tau(\omega)$

$$\tau(\xi_i) \neq 0, \quad \tau(\eta_i) \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Also sind (vgl. den zweiten Zusatz zum 5. Hilfssatz) $\sigma(\omega)$ und $\tau(\omega)$ teilerfremd.

Der Satz ist eine unmittelbare Folge des Zusatzes zum 3. Hilfssatz, wenn man ihn auf alle r -reihigen Hauptminoren von M anwendet und unter η_0 jedesmal irgendeinen Wert aus der Reihe (36') versteht, der unter den beim Aufbau des gerade in Betracht gezogenen Minors verwendeten Werten nicht vorkommt.

Von nun an werde vorausgesetzt, daß die Wertsysteme (36') und (36'') reell sind und daß

$$(43) \quad \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \dots < \xi_n < \eta_n$$

ist. Wir sprechen dann von einer Grundmatrix. Wir beweisen der Reihe nach die Sätze:

1'. Satz: Es werde gefordert, daß die Matrix M den Rang $n-1$ habe und daß sämtliche $n-1$ -reihigen Hauptminoren derselben positiv

seien. Mit (α_{ik}) sei die adjungierte Matrix von M , also die Matrix der algebraischen Komplemente der Elemente von M bezeichnet. Dann ist die Funktion

$$\begin{aligned} \kappa(\omega) &= \sum_{i,k=1}^n \frac{\alpha_{ik}}{(\omega - \eta_i)(\omega - \xi_k)} \\ (44) \quad &= - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\omega - \xi_1} & \cdots & \frac{1}{\omega - \xi_n} \\ \frac{1}{\omega - \eta_1} & \frac{\psi_1 - \varphi_1}{\eta_1 - \xi_1} & \cdots & \frac{\psi_1 - \varphi_n}{\eta_1 - \xi_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\omega - \eta_n} & \frac{\psi_n - \varphi_1}{\eta_n - \xi_1} & \cdots & \frac{\psi_n - \varphi_n}{\eta_n - \xi_n} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

für ein ω , das dem Innern eines der Intervalle $\langle \xi_i, \eta_i \rangle$ angehört, nicht-positiv, und für ein ω , das außerhalb aller dieser Intervalle liegt, nicht-negativ.

Beweis: Wir wissen, daß die durch den 5. Hilfssatz gekennzeichneten Polynome teilerfremd sind und daß $\tau(\xi_i) \neq 0$, $\tau(\eta_i) \neq 0$ für $i = 1, 2, \dots, n$ ist (vgl. den 7. Hilfssatz). Nun betrachte man die Gleichungen (40), in denen hier n durch $n-1$ zu ersetzen ist. Aus ihnen folgt durch Anwendung des Multiplikationssatzes der Determinantentheorie

$$\alpha_{11} \cdot \frac{\prod_{l=1}^n \tau(\xi_l) \tau(\eta_l)}{\tau(\xi_1) \tau(\eta_1)} = |c_{pq}|_{p,q=0}^{n-2} \cdot \prod_{2 \leq i < k \leq n} (\xi_i - \xi_k)(\eta_i - \eta_k),$$

(45)

$$\alpha_{nn} \cdot \frac{\prod_{l=1}^n \tau(\xi_l) \tau(\eta_l)}{\tau(\xi_n) \tau(\eta_n)} = |c_{pq}|_{p,q=0}^{n-2} \cdot \prod_{1 \leq i < k \leq n-1} (\xi_i - \xi_k)(\eta_i - \eta_k).$$

Alle α_{ii} sind als positiv vorausgesetzt und auch die Produkte auf der rechten Seite von (45) sind es wegen der Voraussetzungen über die Anordnung der Werte ξ_i und η_i . Aus allem dem folgt, daß die Produkte $\tau(\xi_1) \tau(\eta_1)$, $\tau(\xi_2) \tau(\eta_2)$, $\dots$, $\tau(\xi_n) \tau(\eta_n)$, die sämtlich von Null verschieden sind, sogar von gleichem Vorzeichen sind. Negativ können sie nicht sein, weil dann für jedes i die Werte $\tau(\xi_i)$ und $\tau(\eta_i)$ im Vorzeichen verschieden wären, also in jedem Intervall $\langle \xi_i, \eta_i \rangle$ mindestens eine Wurzel von $\tau(\omega) = 0$ liegen müßte. Das ist ausgeschlossen, weil $\tau(\omega)$ höchstens vom $(n-1)$ -ten Grade ist. Es sind also alle $\tau(\xi_i) \tau(\eta_i)$ und auch $|c_{pq}|_0^{n-2}$ positiv. Berechnet man nun $\kappa(\omega)$ auf Grund des Gleichungssystems (40),

in dem hier n durch $n-1$ zu ersetzen ist, so erhält man nach einer einfachen Rechnung

$$(46') \quad \prod_{i=1}^n \tau(\xi_i) \tau(\eta_i) \cdot \kappa(\omega) = |c_{pq}|_0^{n-2} \sum_{i,k} \frac{\tau(\eta_i) \tau(\xi_k)}{(\omega - \eta_i)(\omega - \xi_k)} \cdot (-1)^{i+k} \Pi_{ik}.$$

Hierin bedeutet Π_{ik} das Differenzenprodukt von $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{i-1}, \eta_{i+1}, \dots, \eta_n$, multipliziert mit dem Differenzenprodukt von $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n$. Auf Grund der Lagrangeschen Interpolationsformel folgt aus (46'), falls zur Abkürzung $\prod_{i < k} (\xi_i - \xi_k)(\eta_i - \eta_k) = \delta$ gesetzt wird, die endgültige Formel

$$(46) \quad \prod_{i=1}^n \tau(\xi_i) \tau(\eta_i) \cdot \kappa(\omega) = \delta |c_{pq}|_0^{n-2} \frac{\tau^2(\omega)}{(\omega - \xi_1) \dots (\omega - \xi_n)(\omega - \eta_1) \dots (\omega - \eta_n)}.$$

Aus ihr und dem Vorzeichen der darin auftretenden Konstanten ist das im Satz behauptete Verhalten von $\kappa(\omega)$ unmittelbar ersichtlich.

1. Zusatz zum 1'. Satz: *Schließt man die Nullstellen von $\tau(\omega)$ aus, so kann in der Aussage des ersten Satzes „nicht-negativ“ bzw. „nicht-positiv“ durch „positiv“ bzw. „negativ“ ersetzt werden.*

2. Zusatz zum 1'. Satz: *Durch Grenzübergang $\omega \rightarrow \infty$ ergibt sich aus dem 1'. Satz die Ungleichung*

$$(44') \quad \sum_{i,k=1}^n \alpha_{ik} \geq 0.$$

Man bezeichne mit μ_{ik} den Minor von M , der durch Streichung der i -ten Zeile und k -ten Spalte von M entsteht. Es gilt dann der

1''. Satz: *Sei $i < n$ ein fester und k ein variabler Index aus der Reihe $1, 2, \dots, n$. Ist dann die Determinante von M gleich Null und $\mu_{i,i+1} > 0$, $\mu_{kk} > 0$ bzw. $\mu_{i+1,i} > 0$, $\mu_{kk} > 0$ für jedes $k \neq i$, so gelten die Vorzeichenaussagen des 1'. Satzes und seiner beiden Zusätze.*

Beweis: Die Funktionen $\kappa(\omega)$ und $\frac{\tau^2(\omega)}{(\omega - \xi_1) \dots (\omega - \xi_n)(\omega - \eta_1) \dots (\omega - \eta_n)}$ können bei unseren Voraussetzungen offenbar nicht identisch verschwinden. Gleichung (46), die bei verschwindender Determinante von M eine algebraische Identität darstellt, lehrt, daß sie bis auf einen konstanten Faktor übereinstimmen und dieser ist von Null verschieden. Man muß beweisen, daß er positiv ist. Die entgegengesetzte Annahme würde nach dem beim Beweise des 1'. Satzes eingeschlagenen Verfahren z. B. bei Voraussetzung der ersten Gruppe von Minorenungleichungen zu $\tau(\eta_i) \tau(\xi_{i+1}) < 0$, $\tau(\eta_k) \tau(\xi_k) < 0$ für jedes $k \neq i$ führen. Es wären also n getrennte Intervalle mit Zeichenwechsel von $\tau(\omega)$ vorhanden. Das steht aber im Widerspruch zu der Tatsache, daß $\tau(\omega)$ höchstens vom Grade $n-1$ ist, also höchstens $n-1$ Nullstellen hat.

2. Satz: Es werde jetzt angenommen, daß neben (43) die Voraussetzung erfüllt sei, daß sämtliche Grundminoren von M (siehe Definition einer Grundmatrix auf S. 200 unten) positiv seien. Dann ist die ebenso wie früher definierte Funktion $\kappa(\omega)$ im Innern der Intervalle $\langle \xi_i, \eta_i \rangle$ negativ und außerhalb derselben positiv⁷⁾.

Beweis: Für $n = 1$ ist der Satz trivial. Wir nehmen nun an, er sei für alle Werte kleiner n ($n \geq 2$) bewiesen, und wollen ihn für den Wert n selbst beweisen. Sei zunächst $\omega = \omega_0$ eine Stelle außerhalb aller Intervalle $\langle \xi_i, \eta_i \rangle$. Wir setzen mit einer zunächst noch unbestimmten Konstanten γ

$$\varphi_i^* = \varphi_i + \frac{\gamma}{\omega_0 - \xi_i}, \quad \psi_i^* = \psi_i + \frac{\gamma}{\omega_0 - \eta_i}.$$

Dann ist

$$\frac{\psi_i^* - \varphi_k^*}{\eta_i - \xi_k} = \frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} + \frac{\gamma}{(\omega_0 - \eta_i)(\omega_0 - \xi_k)}.$$

Hieraus folgt, wie eine leichte Determinantenrechnung lehrt,

$$(47') \quad \left| \frac{\psi_i^* - \varphi_k^*}{\eta_i - \xi_k} \right|_1^n = \left| \frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} \right|_1^n + \gamma \kappa(\omega_0)$$

und

$$(47'') \quad \left| \frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} \right| = \left| \frac{\psi_i^* - \varphi_k^*}{\eta_i - \xi_k} \right| - \gamma \kappa^*(\omega_0),$$

wenn die Adjungierte der Matrix $M^* = \left(\frac{\psi_i^* - \varphi_k^*}{\eta_i - \xi_k} \right)$ mit (α_{ik}^*) bezeichnet

und $\kappa^*(\omega) = \sum_{i,k=1}^n \frac{\alpha_{ik}^*}{(\omega - \eta_i)(\omega - \xi_k)}$ gesetzt wird. Nun variiere man in $\kappa(\omega_0)$

die ψ_i . Da die entstehende Funktion nicht identisch verschwindet und in jedem einzelnen ψ_i linear ist, kann man durch Abänderung der ursprünglichen ψ_i -Werte eine Verkleinerung von $\kappa(\omega_0)$ herbeiführen, und es kann dabei die Abänderung der ψ_i -Werte so klein angenommen werden, daß die Voraussetzungen des Satzes nicht zerstört werden. Wenn wir also die Unmöglichkeit von $\kappa(\omega_0) < 0$ beweisen, ist auch die Möglichkeit von $\kappa(\omega_0) = 0$ widerlegt.

Sei jetzt $\kappa(\omega_0)$ als negativ angenommen. Dann kann man nach (47') $\gamma = \gamma_0$ eindeutig so wählen, daß die Determinante von M^* verschwindet, und γ_0 ist positiv. Wenden wir nach Einsetzung dieses besonderen Wertes von γ die Formel (47') nicht auf die ganze Determinante, sondern auf ihre Hauptminoren der Ordnung $n - 1$ an^{7a)}, so erkennen wir, da wir uns

⁷⁾ Der auf die äußeren Werte bezügliche Teil der Aussage gilt, wie aus dem Beweis hervorgeht, schon unter der Voraussetzung der Positivität der Hauptminoren.

^{7a)} Natürlich ist bei jedem dieser Minoren die ihm entsprechende Funktion κ einzusetzen.

den Satz für kleinere n bereits bewiesen denken, daß M^* den Voraussetzungen des 1'. Satzes genügt. Es ist also $\kappa^*(\omega_0) \geq 0$. Aus (47'') folgt dann

$$\left| \frac{\varphi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} \right|_1^n = -\gamma_0 \kappa^*(\omega_0) \leq 0$$

im Widerspruch zu den Voraussetzungen des Satzes.

Gehört ω_0 dem Innern eines der Intervalle $\langle \xi_i, \eta_i \rangle$ an, so kann der Beweis ganz entsprechend mit Hilfe des 1''. Satzes geführt werden.

Mit Hilfe der erhaltenen Sätze kann der folgende Hilfssatz bewiesen werden:

8. Hilfssatz: *Sind alle Grundminoren der Matrix M nicht-negativ, so kann man durch eine beliebig kleine Abänderung der Werte φ_i und ψ_i erreichen, daß sämtliche Grundminoren positiv werden. (Entsprechendes gilt für die Hauptminoren und wird ebenso bewiesen.)*

Beweis: Die Zahl ϱ sei durch die Eigenschaft charakterisiert, daß alle Grundminoren von M , deren Ordnung ϱ nicht übersteigt, positiv seien, während es einen verschwindenden Grundminor von der Ordnung $\varrho + 1$ gibt. Nun sei ω_0 eine Zahl außerhalb des Intervalles $\langle \xi_0, \eta_{2n} \rangle$ und ε eine beliebig kleine positive Größe. Man setze

$$\varphi_i^* = \varphi_i + \frac{\varepsilon}{\omega_0 - \xi_i}, \quad \psi_i^* = \psi_i + \frac{\varepsilon}{\omega_0 - \eta_i}.$$

Die Minoren der Matrix $M^* = \left(\frac{\psi_i^* - \varphi_k^*}{\eta_i - \xi_k} \right)$ der Ordnung $\varrho + 1$ unterscheiden sich von den entsprechenden Minoren von M um mit ε multiplizierte Ausdrücke der Form (44), in denen $\omega = \omega_0$ und $n = \varrho + 1$ gesetzt ist. Wegen der Voraussetzung über die Lage von ω_0 und das Vorzeichen von ε ist die Änderung auf Grund unserer Sätze bei Grundminoren eine nicht-negative Größe. Vermeidet man bei der Wahl von ω_0 gewisse endlich viele Werte (vgl. den 1. Zusatz zum 1'. Satz), so ist sie bei allen Grundminoren der Ordnung $\varrho + 1$ positiv, wie klein auch ε gewählt ist. Durch Anwendung des 2. Satzes erkennt man, daß die Grundminoren niedrigerer als $(\varrho + 1)$ -ter Ordnung eine Vergrößerung erfahren haben, also positiv geblieben sind. Somit ist in der neuen Matrix an Stelle von ϱ mindestens $\varrho + 1$ getreten. Jetzt schließe man analog von $\varrho + 1$ auf $\varrho + 2$ usw.

Aus dem eben bewiesenen Hilfssatz kann man schließen: *Sind alle Grundminoren von M nicht-negativ, so gilt die Vorzeichenaussage des 1'. Satzes.*

Verallgemeinerung des 8. Hilfssatzes: *Sind aus zugeordneten Wertepaaren mehrere Matrizen der Gestalt M gebildet, deren Grundminoren alle nicht-negativ sind, so kann durch eine beliebig kleine Abänderung der Funktionswerte erreicht werden, daß alle Grundminoren in allen Matrizen positiv werden. Entsprechendes gilt für die Hauptminoren.*

Der Beweis kann ebenso geführt werden wie beim 8. Hilfssatz.

Verschärfung des 2. Satzes: *Wir führen das Polynom*

$$\lambda(\omega) = \kappa(\omega) \prod_{i=1}^n (\omega - \xi_i) (\omega - \eta_i)$$

ein. Als Verschärfung der Aussage des 2. Satzes kann behauptet werden, daß es unter den dort gemachten Voraussetzungen beständig positiv ist und daß sein Grad genau gleich $2n - 2$ ist⁸⁾.

Beweis: Der erste Teil der Aussage ist für ein ω , daß nicht dem System (36') angehört, mit dem 2. Satze gleichbedeutend. Fällt ω in das System (36') hinein, so ist zunächst gewiß $\lambda(\omega) \geq 0$. Die Möglichkeit von $\lambda(\omega) = 0$ kann aber durch eine Variation der ψ_i , ähnlich wie beim Beweise des 2. Satzes, widerlegt werden.

Ferner beweist man durch Variation der ψ_i , daß der Koeffizient von ω^{2n-2} in $\lambda(\omega)$

$$\sum_{i,k=1}^n \alpha_{ik} > 0$$

sein muß, daß also tatsächlich $\lambda(\omega)$ vom Grade $2n - 2$ ist. Dies kann übrigens auch als projektive Erweiterung des 2. Satzes auf $\omega = \infty$ angesehen werden. (Siehe die Überlegungen auf S. 198.)

Die schon bei Positivität der Hauptminoren gültige Aussage, daß $\lambda(\omega)$ an den Stellen ξ_i und η_i positiv ist, hat eine sehr einfache Bedeutung. Es ist z. B.

$$\lambda(\eta_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \eta_1 - \xi_1 & \eta_1 - \xi_2 & \cdots & \eta_1 - \xi_n \\ \psi_2 - \varphi_1 & \psi_2 - \varphi_2 & \cdots & \psi_2 - \varphi_n \\ \eta_2 - \xi_1 & \eta_2 - \xi_2 & \cdots & \eta_2 - \xi_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_n - \varphi_1 & \psi_n - \varphi_2 & \cdots & \psi_n - \varphi_n \\ \eta_n - \xi_1 & \eta_n - \xi_2 & \cdots & \eta_n - \xi_n \end{vmatrix}$$

$$(\eta_1 - \xi_1) \cdots (\eta_1 - \xi_n) (\eta_1 - \eta_2) \cdots (\eta_1 - \eta_n),$$

also

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \eta_1 - \xi_1 & \eta_1 - \xi_2 & \cdots & \eta_1 - \xi_n \\ \psi_2 - \varphi_1 & \psi_2 - \varphi_2 & \cdots & \psi_2 - \varphi_n \\ \eta_2 - \xi_1 & \eta_2 - \xi_2 & \cdots & \eta_2 - \xi_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_n - \varphi_1 & \psi_n - \varphi_2 & \cdots & \psi_n - \varphi_n \\ \eta_n - \xi_1 & \eta_n - \xi_2 & \cdots & \eta_n - \xi_n \end{vmatrix} > 0.$$

Dies besagt, daß die Determinante der Matrix M , falls darin ψ_1 durch eine Variable ersetzt wird, zu einer streng wachsenden Funktion wird.

⁸⁾ Die Positivität außerhalb der offenen Intervalle (ξ_i, η_i) und die Gradaussage fließen, wie aus dem Beweis mit Benützung der Anm. 7) leicht hervorgeht, schon aus der Positivität der Hauptminoren.

Allgemein erkennt man auf diese Art, daß bei Ersetzung eines φ_i durch eine Veränderliche stets eine wachsende, bei Ersetzung eines φ_i durch eine Veränderliche stets eine abnehmende Funktion entsteht.

Bemerkung: Nimmt man nur an, daß alle Hauptminoren nicht-negativ sind, so kann man offenbar behaupten (vgl. den 8. Hilfssatz, Klammeraussage), daß die eben abgeleiteten Aussagen richtig bleiben, falls darin „Wachsen“ durch „Nichtabnehmen“ und „Abnehmen“ durch „Nicht-zunehmen“ ersetzt wird^{8a)}.

Nun beweisen wir die wichtigen Sätze 3 bis 5.

3. Satz: Es seien die Voraussetzungen des 2. Satzes erfüllt und $\sigma(\omega)$, $\tau(\omega)$ sei eines der ∞^1 Paare von Polynomen höchstens n -ten Grades, die den Gleichungen (37) genügen. Dann ist $\tau(\omega)$ mindestens vom Grade $n-1$, und seine Wurzeln sind reell und einfach.

4. Satz: Führt man neben $\sigma(\omega)$, $\tau(\omega)$ ein weiteres davon verschiedenes Polynompaar $\sigma_1(\omega)$, $\tau_1(\omega)$ von der im vorhergehenden Satze betrachteten Art ein, so ist mindestens eines der Polynome $\tau(\omega)$ und $\tau_1(\omega)$ vom Grade n , und die Wurzeln der Gleichungen $\tau(\omega) = 0$ und $\tau_1(\omega) = 0$ trennen einander gegenseitig.

5. Satz: Die mit einem Polynompaare des 3. Satzes gebildete rationale Funktion $\varrho(\omega) = \frac{\sigma(\omega)}{\tau(\omega)}$ hat lauter reelle einfache Pole, von denen keiner dem Wertsystem (36') angehört. Das Residuum eines Pols ist positiv oder negativ, je nachdem, ob er innerhalb eines der Intervalle $\langle \xi_i, \eta_i \rangle$ liegt oder außerhalb aller.

Wir beweisen die Sätze 3 und 4 gleichzeitig. Wir gehen von der Bemerkung aus: Das allgemeinste Polynompaar, wie es der 3. Satz fordert, ist offenbar $\alpha\sigma + \alpha_1\sigma_1$, $\alpha\tau + \alpha_1\tau_1$ (α, α_1 sind Konstante, die nicht beide Null sind). Nach dem 1. Hilfssatze⁹⁾ genügt der Quotient

$\chi(\omega) = \frac{\alpha\sigma + \alpha_1\sigma_1}{\alpha\tau + \alpha_1\tau_1}$ der Riccatischen Differentialgleichung

$$\left| \begin{array}{cccc} \chi'(\omega) & \frac{\chi(\omega) - \varphi_1}{\omega - \xi_1} & \cdots & \frac{\chi(\omega) - \varphi_n}{\omega - \xi_n} \\ \frac{\varphi_1 - \chi(\omega)}{\eta_1 - \omega} & \frac{\varphi_1 - \varphi_1}{\eta_1 - \xi_1} & \cdots & \frac{\varphi_1 - \varphi_n}{\eta_1 - \xi_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varphi_n - \chi(\omega)}{\eta_n - \omega} & \frac{\varphi_n - \varphi_1}{\eta_n - \xi_1} & \cdots & \frac{\varphi_n - \varphi_n}{\eta_n - \xi_n} \end{array} \right| = 0.$$

^{8a)} Man könnte diese Monotoniesätze dazu verwenden, um die Beweise des zweiten Paragraphen durch neue zu ersetzen, die von der Differenzierbarkeit monotoner Funktionen höherer Stufe keinen Gebrauch machen.

⁹⁾ Man ersetze darin n durch $n+1$ und lasse ein Wertepaar in ω zusammenrücken.

Nach $\chi'(\omega)$ aufgelöst, lautet sie

$$(49') \quad \chi'(\omega) = \frac{\kappa(\omega)}{\left| \frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} \right|_1^n} \chi^2 + \dots$$

Die Punkte deuten die Glieder erster und nullter Ordnung in χ an. Nach einfachster Rechnung ergibt sich hieraus die Beziehung

$$\begin{vmatrix} \tau(\omega) & \tau_1(\omega) \\ \frac{d\tau(\omega)}{d\omega} & \frac{d\tau_1(\omega)}{d\omega} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma(\omega) & \tau(\omega) \\ \sigma_1(\omega) & \tau_1(\omega) \end{vmatrix} \cdot \frac{\kappa(\omega)}{\left| \frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} \right|_1^n}$$

oder unter Beachtung von (42)

$$(49) \quad \begin{vmatrix} \tau(\omega) & \tau_1(\omega) \\ \frac{d\tau(\omega)}{d\omega} & \frac{d\tau_1(\omega)}{d\omega} \end{vmatrix} = c \prod_{i=1}^n (\omega - \xi_i)(\omega - \eta_i) \cdot \frac{\kappa(\omega)}{\left| \frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} \right|_1^n} = \frac{c \lambda(\omega)}{\left| \frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} \right|_1^n},$$

$\lambda(\omega)$ ist also, abgesehen von einem von Null verschiedenen konstanten Faktor c mit der Wronskischen Determinante von $\tau(\omega)$ und $\tau_1(\omega)$ identisch. Hieraus und aus der Tatsache, daß $\lambda(\omega)$ vom Grade $2n-2$ ist, $\tau(\omega)$ und $\tau_1(\omega)$ aber höchstens vom Grade n sind, schließt man sofort auf die Richtigkeit der Gradaussagen des 3. und 4. Satzes. Wenn man ferner beachtet, daß $\lambda(\omega)$ keine reelle Nullstelle hat, so kann man in bekannter Weise aus (49) schließen, daß die reellen Nullstellen von $\tau(\omega)$ und $\tau_1(\omega)$ *einfach* sind und *einander gegenseitig trennen* und dies gilt in dem erweiterten Sinne, daß, falls eines der Polynome den Grad $n-1$ hat, ∞ als Nullstelle desselben angesehen wird und daß die Trennung der Wurzeln im projektiven Sinne aufgefaßt wird. Der 3. und 4. Satz werden also vollständig bewiesen sein, wenn noch gezeigt wird, daß $\tau(\omega)$ überhaupt keine komplexen Wurzeln haben kann. Das sieht man so ein: Man bestimme die Konstanten $\alpha, \alpha_1 \neq 0, 0$ so, daß das Polynom $\tau_2(\omega) = \alpha \tau(\omega) + \alpha_1 \tau_1(\omega)$ in $\omega = \eta_n$ verschwindet. Da $\tau(\omega)$ und $\tau_1(\omega)$ nirgends gleichzeitig verschwinden, so ist dies genau auf eine Art möglich. Mit τ_2 verschwindet auch $\sigma_2(\omega) = \alpha \sigma(\omega) + \alpha_1 \sigma_1(\omega)$ in η_n . Man kann also schreiben

$$\sigma_2(\omega) = (\omega - \eta_n) \sigma^*(\omega), \quad \tau_2(\omega) = (\omega - \eta_n) \tau^*(\omega);$$

$\sigma^*(\omega), \tau^*(\omega)$ sind Polynome höchstens $(n-1)$ -ten Grades und sie genügen dem Gleichungssystem (37), in dem die letzte Gleichung gestrichen ist. Denkt man sich nun die Behauptungen des 3. und 4. Satzes für kleinere n bereits bewiesen, so kann man schließen, daß $\tau^*(\omega)$ lauter

reelle Wurzeln hat¹⁰⁾; also ist dies auch bei $\tau_2(\omega)$ der Fall. Ist $\tau = \text{const.}$ τ_2 , so ist man fertig. Sei jetzt $\tau \neq \text{const.}$ τ_2 . Da dann auch die reellen Nullstellen von $\tau(\omega)$ und $\tau_2(\omega)$ einander gegenseitig trennen, so ist mit $\tau_2(\omega)$ offenbar auch $\tau(\omega)$ frei von komplexen Nullstellen.

Für $n = 1$ sind die Aussagen der beiden Sätze trivial. Damit ist der Beweis derselben vollständig erbracht.

Der erste Teil des 5. Satzes folgt unmittelbar aus der Einfachheit der Nullstellen von $\tau(\omega)$ in Verbindung mit den Relationen (37). Die weiteren Aussagen über die Residuen ergeben sich aus Gleichung (49'). Aus ihr folgt nämlich für das Residuum im Pole ω

$$1: \text{Res.} = - \frac{\kappa(\omega)}{\left| \frac{\psi_i - \varphi_k}{\eta_i - \xi_k} \right|_1^n}$$

und hieraus nach dem 2. Satze das behauptete Vorzeichen von Res.

Es werde jetzt vorausgesetzt, daß der Rang r von M kleiner als n sei und daß sämtliche Grundminoren, deren Ordnung r nicht übersteigt, positiv seien. Wir wissen (vgl. den 5. Hilfssatz), daß dann die Gleichungen (37) ein Paar von Polynomen höchstens r -ten Grades $\sigma(\omega)$ und $\tau(\omega)$ bestimmen, von denen eines den Grad r erreicht. Dem Hilfssatze 7 entnimmt man ferner, daß sie teilerfremd sind und daß $\tau(\xi_i) \neq 0$, $\tau(\eta_i) \neq 0$ ist. Darüber hinaus folgt nun fast unmittelbar aus dem 3. und 5. Satz, angewandt auf alle r -reihigen Hauptminoren, der

6. Satz: $\tau(\omega)$ ist mindestens von $(r-1)$ -tem Grade. Seine Nullstellen sind alle reell und einfach. Die rationale Funktion r -ten Grades $\varrho(\omega) = \frac{\sigma(\omega)}{\tau(\omega)}$ hat lauter reelle einfache Pole, die außerhalb des Intervalles $\langle \xi_0, \eta_{2n} \rangle$ liegen. Das Residuum aller Pole ist negativ. Wir betonen noch, daß wegen $\tau(\xi_i) \neq 0$, $\tau(\eta_i) \neq 0$ die Funktion an den Stellen ξ_i bzw. η_i die Werte φ_i bzw. ψ_i wirklich annimmt.

§ 5.

Interpolation durch monotone Funktionen.

Wir denken uns ein System von $2n+1$ Werten

$$(50') \quad \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{2n}$$

und eine zweite Größenreihe

$$(50'') \quad \chi_0, \chi_1, \dots, \chi_{2n}$$

¹⁰⁾ Streicht man nämlich in (36') und (36'') die beiden letzten Werte und in (37) die Gleichungen $\sigma(\xi_n) = \varphi_n \tau(\xi_n)$, $\sigma(\eta_n) = \psi_n \tau(\eta_n)$, so sind offenbar die Voraussetzungen des 3. Satzes erfüllt, nur mit einem um 1 kleineren n .

gegeben und fragen: Gibt es eine im Intervall $\langle \omega_0, \omega_{2n} \rangle$ von n -ter Stufe monotone Funktion $\chi(\omega)$, die für $\omega = \omega_i$ den Wert χ_i annimmt:

$$(51) \quad \chi(\omega_i) = \chi_i \quad (i = 0, 1, \dots, 2n).$$

Die im folgenden abgeleiteten Sätze enthalten eine Beantwortung dieser Frage.

Um zu Lösbarkeitsbedingungen zu gelangen, bilden wir die beiden Matrizen n -Grades

$$M_1 = \left(\frac{\chi_{2i-1} - \chi_{2k-2}}{\omega_{2i-1} - \omega_{2k-2}} \right)_{i,k=1}^n, \quad M_2 = \left(\frac{\chi_{2i} - \chi_{2k-1}}{\omega_{2i} - \omega_{2k-1}} \right)_{i,k=1}^n.$$

Aus den Ergebnissen von § 1 folgt, daß eine Lösung der Aufgabe nur dann existieren kann, wenn sämtliche Minoren sowohl von M_1 als auch von M_2 nicht-negativ sind. Wir werden beweisen, daß schon die Nichtnegativität ihrer Grundminoren hierfür hinreichend ist, und wir werden einfache Interpolationsfunktionen angeben.

Im folgenden werden wir es häufig mit rationalen Funktionen zu tun haben, deren Pole alle reell und einfach und mit negativen Residuen behaftet sind. Es sind bekanntlich die einzigen reellen rationalen Funktionen, die für Argumentwerte mit positivem Imaginärteil Funktionswerte liefern, deren Imaginärteil nicht negativ ist. Funktionen mit letzterer Eigenschaft sollen nach Pick hier „positive“ Funktionen genannt werden. „Positive“ reelle rationale Funktionen sind in jedem polfreien Intervall von beliebig hoher Stufe monoton, da dies ja schon für die Partialbrüche zutrifft.

Wir behandeln nun zuerst den allgemeinen Fall, daß alle Grundminoren sowohl von M_1 als auch von M_2 positiv sind, und beweisen den

1. Satz: *Es seien sämtliche Grundminoren von M_1 und von M_2 positiv. Man bilde das wohl bestimmte Paar von Polynomen $\sigma(\omega)$, $\tau(\omega)$ höchstens n -ten Grades, das die Relationen*

$$\sigma(\omega_i) = \chi_i \tau(\omega_i) \quad (i = 0, 1, \dots, 2n)$$

befriedigt. Dann ist $\tau(\omega_i) \neq 0$, die rationale Funktion $\varrho(\omega) = \frac{\sigma(\omega)}{\tau(\omega)}$ befriedigt also die Forderungen (51). Es ist eine „positive“ Funktion von genau n -tem Grade und ihre Pole liegen außerhalb von $\langle \omega_0, \omega_{2n} \rangle$. Sie stellt also eine Lösung der Interpolationsaufgabe dar.

Zum Beweise wenden wir die Sätze 3 und 5 des vorhergehenden Paragraphen zweimal an. Das eine Mal setzen wir

$\xi_i = \omega_{2i-2}, \quad \eta_i = \omega_{2i-1}, \quad \varphi_i = \chi_{2i-2}, \quad \psi_i = \chi_{2i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$
also $M = M_1$, das andere Mal

$$\xi_i = \omega_{2i-1}, \quad \eta_i = \omega_{2i}, \quad \varphi_i = \chi_{2i-1}, \quad \psi_i = \chi_{2i} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

also $M = M_2$. Man erhält so über das Vorzeichen des Residuums eines etwaigen Pols von $\varrho(\omega)$ in einem Intervall (ω_{i-1}, ω_i) *entgegengesetzte* Aussagen, *es kann dort also überhaupt kein Pol liegen*. Dem Satz 5 des vorigen Paragraphen ist ferner zu entnehmen, daß auch die ω_i keine Pole sein können. Damit ist das ganze Intervall $\langle \omega_0, \omega_{2n} \rangle$ als polfrei festgestellt. Dem eben zitierten Satze zufolge sind aber alle Pole der Funktion reell und einfach, also auf der reellen Achse außerhalb von $\langle \omega_0, \omega_{2n} \rangle$ gelegen und, der Residuenaussage des Satzes entsprechend, mit negativen Residuen behaftet.

Das einzige, was noch fehlt, ist der Nachweis von $\tau(\omega_i) \neq 0$, denn dann ist auch die Gradaussage zufolge der beiden Folgerungen aus dem 3. Hilfssatze des vorigen Paragraphen mitbewiesen. Daß $\tau(\omega_0)$ und $\tau(\omega_{2n})$ nicht verschwinden können, folgt unmittelbar aus dem Zusatze zum 3. Hilfssatze des vorigen Paragraphen, wenn man ihn auf die beiden Matrizen M_2 und M_1 anwendet. Sei jetzt i ein Index aus der Reihe $1, 2, \dots, 2n-1$. Nehmen wir entgegen der Behauptung an, daß $\tau(\omega_i) = 0$ ist! Dann kann man durch eine kleine Variation der χ_i , welche die Voraussetzungen des Satzes nicht zerstört, *da keine der Nullstellen* von $\tau(\omega)$ *hierbei festbleibt*, gewiß erreichen, daß ω_i in eine benachbarte, aber davon verschiedene Stelle des Intervalls $(\omega_{i-1}, \omega_{i+1})$ rückt. Da σ und τ außerhalb der Interpolationsstellen nicht gleichzeitig verschwinden können, widerspricht dies der bereits bewiesenen Endlichkeit von $\varrho(\omega)$ im ganzen Intervall $\langle \omega_0, \omega_{2n} \rangle$, die ja auch nach der Variation der χ_i bestehen muß. Damit ist der ganze 3. Satz bewiesen.

Unter den Voraussetzungen des 1. Satzes gibt es auch eine wohlbestimmte rationale Funktion $(n-1)$ -ten Grades $\varrho^*(\omega)$, die allein den Forderungen

$$(52) \quad \varrho^*(\omega_i) = \chi_i \quad (i = 1, 2, \dots, 2n-1)$$

genügt; denn die Matrix M_1^* , die aus M_2 durch Streichung der letzten Zeile und Spalte entsteht, erfüllt zusammen mit der Matrix M_2^* , die wiederum aus M_1 durch Weglassung der ersten Zeile und Kolonne hervorgeht, dieselben Forderungen wie M_1 mit M_2 , nur mit einem um 1 kleineren n . $\varrho^*(\omega)$ ist also zufolge des 1. Satzes eine positive Funktion und das Intervall $\langle \omega_1, \omega_{2n-1} \rangle$ gewiß polfrei. Darüber hinaus gilt aber unter den Voraussetzungen des 1. Satzes der

2. Satz: *Die eben definierte Funktion $\varrho^*(\omega)$ hat ihre Pole außerhalb des Intervalls $\langle \omega_0, \omega_{2n} \rangle$. Es ist*

$$(53) \quad \varrho^*(\omega_0) > \varrho(\omega_0) = \chi_0, \quad \varrho^*(\omega_{2n}) < \varrho(\omega_{2n}) = \chi_{2n};$$

$\varrho(\omega)$ bedeutet die durch den 1. Satz gekennzeichnete Funktion.

Beweis: Ist ω ein Wert aus dem Intervall $\omega_{2n-1} < \omega \leq \omega_{2n}$, so ist die Determinante, die aus der von M_2 durch Ersetzung von ω_{2n} durch ω entsteht,

$$(54) \quad \begin{vmatrix} \frac{\varrho(\omega_2) - \varrho(\omega_1)}{\omega_2 - \omega_1} & \dots & \frac{\varrho(\omega_2) - \varrho(\omega_{2n-1})}{\omega_2 - \omega_{2n-1}} \\ \frac{\varrho(\omega_4) - \varrho(\omega_1)}{\omega_4 - \omega_1} & \dots & \frac{\varrho(\omega_4) - \varrho(\omega_{2n-1})}{\omega_4 - \omega_{2n-1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varrho(\omega) - \varrho(\omega_1)}{\omega - \omega_1} & \dots & \frac{\varrho(\omega) - \varrho(\omega_{2n-1})}{\omega - \omega_{2n-1}} \end{vmatrix} > 0^{10a}).$$

Setzt man zunächst noch voraus, daß ω kein Pol von ϱ^* ist, so ist die (54) entsprechende Determinante, in der ϱ durch ϱ^* ersetzt ist, zufolge Hilfssatz 1 des vorigen Paragraphen gleich Null. Daher ist (vgl. den Monotoniesatz auf S. 206 oben)

$$(53') \quad \varrho(\omega) > \varrho^*(\omega) \quad (\omega_{2n-1} < \omega \leq \omega_{2n}).$$

Diese Ungleichung ist aber mit einem Pol von ϱ^* mit negativem Residuum in $(\omega_{2n-1}, \omega_{2n})$ (und andere Pole kann die Funktion überhaupt nicht haben) überhaupt unverträglich.

Analog schließt man im Intervall (ω_0, ω_1) zunächst bei endlichem $\varrho^*(\omega)$ auf

$$(53'') \quad \varrho(\omega) < \varrho^*(\omega) \quad (\omega_0 \leq \omega < \omega_1)$$

und hieraus auf die Endlichkeit von ϱ^* daselbst. In (53') und (53'') sind die Ungleichungen (53) enthalten.

Wir sind jetzt imstande, einen Interpolationssatz abzuleiten, der auch die Grenzfälle umfaßt, wo ein oder mehrere Grundminoren im Matrixpaar M_1, M_2 verschwinden.

3. Satz: Es seien die Grundminoren in M_1 und M_2 alle nicht-negativ. Dann gibt es eine einzige rationale Funktion $\varrho^{**}(\omega)$ höchstens $(n-1)$ -ten Grades, welche die Bedingungen

$$(55) \quad \varrho^{**}(\omega_i) = \chi_i \quad (i = 1, 2, \dots, 2n-1)$$

erfüllt. $\varrho^{**}(\omega)$ ist eine „positive“ Funktion und das ganze Intervall $\omega_0 \leq \omega \leq \omega_{2n}$ von Polen frei. Ferner ist

$$\chi_0 \leq \varrho^{**}(\omega_0), \quad \varrho^{**}(\omega_{2n}) \leq \chi_{2n}.$$

Ersetzt man also den Funktionswert $\varrho^{**}(\omega_0)$ durch χ_0 und $\varrho^{**}(\omega_{2n})$ durch χ_{2n} , so erhält man eine in (ω_0, ω_{2n}) von beliebig hoher Stufe monotone Funktion, welche die am Anfang dieses Paragraphen gestellte Aufgabe löst.

^{10a)} $\varrho(\omega)$ ist in (ω_0, ω_{2n}) von beliebig hoher Stufe monoton, und es sind die Voraussetzungen des 2. Hilfssatzes des vorigen Paragraphen erfüllt.

Daß es nicht mehr als eine Funktion $\varrho^{**}(\omega)$ geben kann, die (55) erfüllt, ist unmittelbar klar; denn die Differenz zweier Funktionen dieser Art wäre eine rationale Funktion vom Höchstgrade $2n-2$, die an $2n-1$ verschiedenen Stellen verschwindet.

Die Konstruktion der gewünschten Funktion und Feststellung ihrer Eigenschaften kann nun etwa in folgender Weise geschehen: Wie die Verallgemeinerung des 8. Hilfssatzes von § 4 lehrt, kann durch eine beliebig kleine Änderung der χ_i erreicht werden, daß die Voraussetzungen des 2. Satzes erfüllt sind. $\varrho^*(\omega)$ sei dann die durch den 2. Satz charakterisierte Funktion. Ich behaupte, daß sie in der ganzen komplexen ω -Ebene mit Ausschluß der Halbgeraden $\omega \leq \omega_0$, $\omega \geq \omega_{2n}$ mit gegen Null gehenden Variationen der χ_i gegen eine wohlbestimmte Grenzfunktion $\varrho^{**}(\omega)$ strebt und daß diese die gesuchte Funktion ist. Das sieht man so ein: $\varrho_1^*(\omega)$, $\varrho_2^*(\omega)$ seien die rationalen Funktionen $(n-1)$ -ten Grades, die zu zwei verschiedenen Variationen der χ_i gehören. Die Differenz

$$\delta(\omega) = \varrho_1^*(\omega) - \varrho_2^*(\omega)$$

ist dann eine rationale Funktion höchstens vom Grade $2n-2$, und ihre Pole sind reell und außerhalb von $\langle \omega_0, \omega_{2n} \rangle$ gelegen. Nun werde angenommen, daß bei beiden Funktionen $\varrho_1^*(\omega)$ und $\varrho_2^*(\omega)$ die Variationen der χ_i alle absolut genommen kleiner als die positive Zahl ε seien. Aus den angegebenen Eigenschaften von $\delta(\omega)$ ergibt sich dann leicht nach Darstellung des Zählers von δ mit Hilfe der Lagrangeschen Interpolationsformel die Abschätzungsformel

$$|\delta(\omega)| < 2 \varepsilon_{a(\omega)}^{2n-2} \sum_{i=1}^{2n-1} \left| \frac{\Pi(\omega)}{\Pi'(\omega_i)(\omega - \omega_i)} \right|.$$

Darin bedeutet $\Pi(\omega)$ das Produkt $\prod_{i=1}^{2n-1} (\omega - \omega_i)$, ferner $a(\omega)$ eine Schranke von $\left| \frac{\beta - \alpha}{\omega - \alpha} \right|$ bei Beschränkung von β auf das Intervall $\langle \omega_1, \omega_{2n-1} \rangle$ und von α auf die beiden Halbgeraden $\alpha \leq \omega_0$, $\alpha \geq \omega_{2n}$.

Aus der erhaltenen Abschätzungsformel ist zu ersehen, daß das Cauchysche Konvergenzkriterium erfüllt ist. Der Leser kann sich nun leicht allein überlegen, daß aus den im 2. Satze bewiesenen Eigenschaften von $\varrho^*(\omega)$ die im 3. Satze behaupteten der Grenzfunktion $\varrho^{**}(\omega)$ folgen.

Aus den bewiesenen drei Sätzen lassen sich interessante Eigenschaften monotoner Funktionen ableiten. Wir geben drei an und überlassen die Beweise, da sie sehr einfach sind, dem Leser:

4. Satz: Ist $\chi(\omega)$ monoton von n -ter Stufe und für ein System von $2n$ Werten des Definitionsintervalls $\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \dots < \lambda_n < \mu_n$ die Determinante

$$(56) \quad \left| \frac{\chi(\mu_i) - \chi(\lambda_k)}{\mu_i - \lambda_k} \right|_1^n = 0,$$

so ist $\chi(\omega)$ im Innern von $\langle \lambda_1, \mu_n \rangle$ rational und höchstens vom Grade $n - 1$.

5. Satz: Ist $\chi(\omega)$ monoton von $(n + 1)$ -ter Stufe und (56) erfüllt, so ist $\chi(\omega)$ im ganzen Innern des Definitionsintervalls rational.

6. Satz: Ist $\chi(\omega)$ in zwei übereinandergreifenden Intervallen monoton von n -ter Stufe, so auch in deren Vereinigung.

§ 6.

Differenzierbarkeitseigenschaften monotoner Funktionen.

Die Funktion $\chi(\omega)$ sei im Intervall $\langle \alpha, \beta \rangle$ monoton von n -ter Stufe ($n \geq 2$). Wir werden beweisen, daß sie in jedem Intervall $\langle \alpha', \beta' \rangle$, das mit seinen Endpunkten im Innern von $\langle \alpha, \beta \rangle$ liegt, einen beschränkten $(2n - 2)$ -ten Differenzenquotienten besitzt. Hieraus folgt, daß $\chi(\omega)$ im Innern von $\langle \alpha, \beta \rangle$ mindestens $(2n - 3)$ -mal stetig differenzierbar ist. Man kann sich an Hand von Beispielen überzeugen, daß die Existenz von höheren Ableitungen allgemein nicht behauptet werden kann.

Sei $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2n-1}$ ein System von $2n - 1$ verschiedenen Werten aus dem Intervall $\langle \alpha', \beta' \rangle$ und

$$\alpha' \leq \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{2n-1} \leq \beta'.$$

Wir suchen eine Abschätzung des Betrages des mit ihnen gebildeten Differenzenquotienten q von $\chi(\omega)$ zu gewinnen. Zu dem Zwecke ziehen wir den Satz 3 des vorigen Paragraphen heran, in dem wir $\omega_0 = \alpha$, $\omega_{2n} = \beta$ setzen und $\chi_i = \chi(\omega_i)$ ($i = 0, 1, \dots, 2n$). Wegen der vorausgesetzten Monotonie von $\chi(\omega)$ sind die Voraussetzungen desselben erfüllt. $\varrho(\omega)^{11})$ sei die rationale Interpolationsfunktion. Es ist also

$$\varrho(\omega_i) = \chi(\omega_i) \quad (i = 1, 2, \dots, 2n - 1),$$

und man kann den Differenzenquotienten q mit den Funktionswerten $\varrho(\omega_i)$ bilden.

Die Partialbruchzerlegung von $\varrho(\omega)$, über die Satz 3 eine Aussage enthält, erlaubt, die Funktion in der Form

$$(57) \quad \varrho(\omega) = a + a_0 \omega + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{\alpha_i - \omega} \quad ^{12)}$$

¹¹⁾ Der Einfachheit halber schreiben wir jetzt statt ϱ^{**} lieber ϱ .

¹²⁾ Mindestens eine der Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ ist Null.

anzusetzen. Die Größen $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ sind nicht-negative Zahlen und $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ reell und außerhalb von $\langle \alpha, \beta \rangle$ gelegen. Es ist

$$\frac{q}{(2n-2)!} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{(\alpha_i - \omega_1)(\alpha_i - \omega_2) \dots (\alpha_i - \omega_{2n-1})} \quad (n \geq 2).$$

Hieraus folgt, wenn mit b die kleinere der Differenzen $\beta - \beta', \alpha' - \alpha$ bezeichnet wird,

$$(58') \quad \frac{|q|}{(2n-2)!} \leq \frac{1}{b^{2n-3}} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{(\alpha_i - \omega_1)(\alpha_i - \omega_2)}.$$

Aus dem § 2 wissen wir bereits, daß der erste Differenzenquotient q_1 von $\chi(\omega)$ in $\langle \alpha', \beta' \rangle$ beschränkt ist. Bilden wir ihn mit den Werten $\omega = \omega_1$ und $\omega = \omega_2$, so erhalten wir

$$(59) \quad 0 \leq q_1 = a_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{(\alpha_i - \omega_1)(\alpha_i - \omega_2)} \leq K = \text{Const},$$

in (59) stehen lauter nicht-negative Summanden. Also ist auch

$$(60) \quad 0 \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{(\alpha_i - \omega_1)(\alpha_i - \omega_2)} \leq K.$$

(58') und (60) ergeben zusammen

$$(58'') \quad \frac{|q|}{(2n-2)!} \leq \frac{K}{b^{2n-3}},$$

womit die Beschränktheit von q bewiesen ist.

Entsprechend bekommt man offenbar für jeden Differenzenquotienten q_m der Ordnung $m \leq 2n-2$ die Abschätzung

$$(58) \quad \frac{|q_m|}{m!} \leq \frac{K}{b^{m-1}} \quad (m = 1, 2, \dots, 2n-2).$$

Wir fragen jetzt nach der Natur einer Funktion $\chi(\omega)$, die in $\langle \alpha, \beta \rangle$ von beliebig hoher Stufe monoton ist. Es liegt nahe, so vorzugehen: Wir teilen das Intervall $\langle \alpha, \beta \rangle$ in 2^p gleiche Teile und bilden mit den Teilpunkten nach Satz 3 des vorigen Paragraphen die zugehörige Interpolationsfunktion $\varrho_p(\omega)$ vom Höchstgrade 2^p-1 . Aus der gewöhnlichen Monotonie von $\chi(\omega)$ und aller $\varrho_p(\omega)$ sowie der Stetigkeit von $\chi(\omega)$ im Innern von $\langle \alpha, \beta \rangle$ ergibt sich offenbar die Limesgleichung

$$(61) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \varrho_p(\omega) = \chi(\omega) \quad (\alpha < \omega < \beta).$$

Es soll nun gezeigt werden, daß $\lim_{p \rightarrow \infty} \varrho_p(\omega)$ auch für jedes komplexe ω existiert. Wir ziehen wieder die Darstellung (57) einer Inter-

polationsfunktion heran. Aus ihr ergibt sich für die Ableitung $\varrho'(\omega)$ die Abschätzung

$$|\varrho'(\omega)| \leq a_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{|\alpha_i - \omega|^2}.$$

Kombinieren wir sie wieder mit (59), so erhalten wir die Ungleichung

$$|\varrho'(\omega)| \leq a_0 + \sum \frac{a_i}{(x_i - \omega_1)(x_i - \omega_2)} \cdot \frac{(\alpha_i - \omega_1)(\alpha_i - \omega_2)}{|\alpha_i - \omega|^2} \leq K \cdot R(\omega),$$

wenn wir unter $R(\omega)$ die größte der Zahlen

$$1, \frac{(\alpha_i - \omega_1)(\alpha_i - \omega_2)}{|\alpha_i - \omega|^2} \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

verstehen. Aus ihr ist unmittelbar zu entnehmen, daß in jedem beschränkten abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{T}$ der komplexen ω -Ebene, der keinen Punkt der beiden Halbgeraden $\omega \geq \beta$ und $\omega \leq \alpha$ enthält, $|\varrho'(\omega)|$ unter einer endlichen von n und der Wahl von $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$ unabhängigen Schranke liegt. Nach bekannten Sätzen der Funktionentheorie folgt hieraus und aus der Limesgleichung (61), daß $\varrho_p(\omega)$ in $\mathfrak{T}$ mit wachsendem p gleichmäßig gegen eine analytische Grenzfunktion $\chi(\omega)$ konvergiert. Die Funktion $\chi(\omega)$ ist also in der ganzen Ebene mit Ausnahme der Halbgeraden $\omega \geq \beta$, $\omega \leq \alpha$ erklärt, und sie fällt im Innern von $\langle \alpha, \beta \rangle$ mit $\chi(\omega)$ zusammen.

Da alle Interpolationsfunktionen „positive“ Funktionen sind, so auch die Grenzfunktionen $\chi(\omega)$. Wir fassen zusammen: Eine in $\langle \alpha, \beta \rangle$ von beliebig hoher Stufe monotone Funktion ist im Innern von $\langle \alpha, \beta \rangle$ analytisch und gibt, ins Komplexe fortgesetzt, eine „positive“ Funktion.

Es gilt aber auch die Umkehrung: Ist $\chi(\omega)$ eine „positive“ Funktion, die in einem Intervall (α, β) der reellen Achse reelle Randwerte annimmt, so ist sie dort von beliebig hoher Stufe monoton. Sind die Grenzwerte

$$\lim_{\omega \rightarrow \alpha + 0} \chi(\omega) = A \quad \text{und} \quad \lim_{\omega \rightarrow \beta - 0} \chi(\omega) = B$$

endlich, so kann sie also zu einer in ganz $\langle \alpha, \beta \rangle$ von beliebig hoher Stufe monotonen Funktion erweitert werden, indem man für $\chi(\alpha)$ einen Wert, der nicht größer als A , und für $\chi(\beta)$ einen Wert, der nicht kleiner als B ist, wählt.

Einen Beweis der Umkehrung kann man Ungleichungen entnehmen, die G. Pick¹³⁾ für positive Funktionen abgeleitet hat: Ist $\chi(\omega)$ „positiv“

¹³⁾ Math. Annalen 77, S. 7–23.

und sind $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ m Werte der oberen Halbebene (m beliebig), so ist nach Pick die Determinante

$$\left| \frac{X(\omega_i) - \overline{X(\omega_k)}}{\omega_i - \overline{\omega_k}} \right|_{i, k=1}^m \geq 0.$$

Läßt man die ω_i gegen m reelle Werte ξ_i in (α, β) rücken, so erhält man die Differentialungleichungen

$$| \kappa(\xi_i, \xi_k) |_{i, k=1}^m \geq 0 \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Diese sind aber gerade, wie wir aus § 1 bis 3 wissen, für die Monotonie von beliebig hoher Stufe in (α, β) charakteristisch.

§ 7.

Schlußbemerkungen.

Denkt man sich die Zahlenlinie durch einen Wert $\omega = \infty$ so abgeschlossen, wie es in der projektiven Geometrie üblich ist, so kann man auch von Funktionen $\chi(\omega)$ sprechen, deren Definitionsbereich $\omega = \infty$ umfaßt und die selbst des Wertes ∞ fähig sind. Erinnt man sich daran, daß die linearen Funktionen $\frac{a\omega + b}{c\omega + d}$ mit positiver Determinante gleichzeitig mit ihrer Umkehrung in jedem polfreien Intervall monoton sind, so kommt man zu folgender (provisorischen) Verallgemeinerung des Begriffs der monotonen Funktion: Eine Funktion $\chi(\omega)$ im allgemeineren Sinne soll monoton von n -ter Stufe heißen, wenn sie nach passender linearer Transformation der ω -Geraden mit positiver Determinante und einer ebensolchen Transformation der χ -Geraden zu einer monotonen Funktion n -ter Stufe im bisherigen Sinne führt. Zu einer noch stärkeren, *endgültigen* Verallgemeinerung wird man geführt, wenn man an den Satz 6 des § 5 denkt:

Endgültige Definition: Eine Funktion $\chi(\omega)$ im allgemeinen Sinne soll monoton heißen, wenn man ihren Definitionsbereich mit (im projektiven Sinne) übereinandergreifenden Intervallen derart überdecken kann, daß in jedem derselben Monotonie n -ter Stufe im provisorischen Sinne besteht.

Zum Schlusse sei bemerkt, daß die Resultate der Arbeit gültig bleiben, wenn überall statt von quadratischen, von Hermiteschen Formen gesprochen wird.

(Eingegangen am 3. Januar 1933.)