

Werk

Titel: Mathematische Zeitschrift

Verlag: Springer

Jahr: 1951/52

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN266833020_0055

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN266833020_0055

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN266833020

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN266833020>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

H. WIELANDT
TÜBINGEN

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ

A. E. INGHAM H. KNESER O. PERRON

W. SÜSS H. WEYL

55. BAND



BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG

1951/52

DIETERICHSCHE UNIVERSITÄTS-BUCHDRUCKEREI W. FR. KAESTNER, GÖTTINGEN
PRINTED IN GERMANY



2 1952.4186

Inhalt des 55. Bandes.

	Seite
ACKERMANN, W., Widerspruchsfreier Aufbau einer typenfreien Logik	364
AUMANN, G., Alternativ-Zerlegungen in Booleschen Verbänden	109
BEHRENS, E. A., Zur Schnittmultiplizität uneigentlicher Komponenten in der algebraischen Geometrie	199
BOAS, R. P., Integrability of trigonometric series. II.	183
BÖDEWADT, U. T., Der symmetrische Kreisel bei zeitfester Drehkraft	310
EICHLER, M., Die Ähnlichkeitsklassen indefiniter Gitter	216
GROTEMEYER, K. P., Zur eindeutigen Bestimmung von Flächen durch die erste Fundamentalform	253
GRÜN, O., Über ungerade vollkommene Zahlen	353
HADWIGER, H., Ergänzungsgleichheit k -dimensionaler Polyeder	292
HELLWIG, G., Bemerkungen zu der Satzgruppe von Hilbert über Systeme elliptischer Differentialgleichungen	276
JAISWAL, J. P., On Meijer Transform	385
JURKAT, W. und PEYERIMHOFF, A., Mittelwertsätze bei Matrix- und Integral- transformationen	92
JURKAT, W., Über Rieszsche Mittel mit unstetigem Parameter	8
KANOLD, H. J., Abschätzungen bei Kreisteilungspolynomen und daraus her- geleitete Bedingungen für die kleinsten Primzahlen gewisser arith- metischer Folgen	284
KLINGENBERG, W., Über das Einspannungsproblem in der projektiven und affinen Differentialgeometrie	321
KNESER, M., Nachtrag zu der Arbeit „Abhängigkeit von Funktionen“	400
KNOCHE, H.-G., Über den Frobeniusschen Klassenbegriff in nilpotenten Gruppen	71
KY FAN, Note on a Theorem of Banach	308
LORENZEN, P., Teilbarkeitstheorie in Bereichen	269
MESCHKOWSKI, H., Beziehungen zwischen den Normalabbildungsfunktionen der Theorie der konformen Abbildung	114
NEUMER, W., Zum Beweis eines Satzes über die Polynomdarstellung der Ordnungszahlen	399
OHMANN, P., Eine Minkowskische Ungleichung für beliebige Mengen und ihre Anwendung auf Extremalprobleme	299
OHMANN, P., Extremalprobleme für konvexe Bereiche der euklidischen Ebene	346
PARTHASARATHY, M. und RAJAGOPAL, C. T., A Theorem on the Riemann- Liouville Integral	84
PICKERT, G., Zwischenkörperverbände endlicher inseparabler Erweiterungen	355
PEYERIMHOFF, A., Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren	23
PEYERIMHOFF, A., Konvergenzfaktoren beim Euler-Knoppschen Limitierungs- verfahren	288

WEYL, H., Kapazität von Strahlungsfeldern	187
WIELANDT, H., Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen	1
WUNDERLICH, W., Zur Statik der Strickleiter	13
ZELLER, K., Abschnittskonvergenz in FK-Räumen	55
ZELLER, K., Über Stetigkeit von Integraltransformationen	167
ZIMMERMANN, W., Eine Cohomologietheorie topologischer Räume	125
Prize Essay Contest of the Institute for the Unity of Science	400

Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen.

Von

Helmut Wielandt in Tübingen.

I. Inhaltsübersicht.

Sind $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_k$ paarweise vertauschbare Untergruppen einer Gruppe (also $\mathcal{G}_i \mathcal{G}_j = \mathcal{G}_j \mathcal{G}_i$), so ist das Produkt $\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \dots \mathcal{G}_k = \mathcal{G}$ bekanntlich ebenfalls eine Gruppe. Mit der Frage, was über die Struktur von \mathcal{G} ausgesagt werden kann, wenn über die Faktoren \mathcal{G}_i Näheres bekannt ist, hat sich im Falle *zweier* Faktoren in den letzten zwei Jahrzehnten eine ganze Reihe von Arbeiten beschäftigt¹⁾. Dagegen ist im Falle $k > 2$ im wesentlichen nur der grundlegende Satz von HALL²⁾ bekannt: Ist die Ordnung jedes Faktors \mathcal{G}_i eine Primzahlpotenz, so ist \mathcal{G} auflösbar. Der Wunsch, die Voraussetzungen dieses Satzes abzuschwächen, hat die vorliegende Arbeit angeregt.

Es genügt sicher nicht, von den \mathcal{G}_i Auflösbarkeit zu fordern; denn die alternierende Gruppe von fünf Symbolen ist in das Produkt zweier auflösbarer Gruppen der Ordnungen 5 und 12 zerlegbar (die dann von selbst vertauschbar sind) und ist dennoch einfach. Dagegen erscheint es denkbar, daß die folgende Voraussetzung genügt, um die Auflösbarkeit von \mathcal{G} zu sichern: Jedes \mathcal{G}_i ist nilpotent (d. h. direktes Produkt seiner SYLOW-Gruppen). In Richtung auf diese Vermutung wird im folgenden bewiesen: Sie trifft für alle k zu, wenn sie für $k = 2$ richtig ist. Vollständig formuliert lautet unser Hauptergebnis:

Satz 1. *Es seien $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_k$ paarweise vertauschbare, nilpotente Gruppen; alle Produkte $\mathcal{G}_i \mathcal{G}_j$ von je zweien unter ihnen seien auflösbar. Dann ist auch $\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \dots \mathcal{G}_k = \mathcal{G}$ auflösbar. Bezeichnet ferner \mathfrak{P}_i die p -SYLOW-Gruppe von \mathcal{G}_i (zu einer von i unabhängigen Primzahl p), so ist das Produkt $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_k = \mathfrak{P}$ von der Reihenfolge der Faktoren unabhängig und ist eine p -SYLOW-Gruppe von \mathcal{G} . Und ist schließlich \mathfrak{P}' die entsprechend gebildete SYLOW-Gruppe von \mathcal{G} zu einer anderen Primzahl p' , so sind \mathfrak{P} und \mathfrak{P}' vertauschbar.*

¹⁾ U. a. I. SCHUR 1933, H. WIELANDT 1935 und 1949, R. KOCHENDÖRFFER 1937, G. ZAPPA 1940/2, G. CASADIO 1941, J. SZÉP 1948—1951, L. RÉDEI 1950, N. ITÔ 1951. Die drei erstgenannten Verfasser benutzen die Sprechweise der Permutationsgruppen und setzen nur die Struktur eines der beiden Faktoren als bekannt voraus.

²⁾ P. HALL, A characteristic property of soluble groups. Journal London math. Soc. **12** (1937), 198—200.

Wie der Verfasser einer freundlichen Mitteilung von Herrn RÉDEI entnimmt, hat IRÔ in Verschärfung der Ergebnisse von SZÉP³⁾ soeben bewiesen, daß $\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}$ sicher dann auflösbar ist, wenn \mathcal{G}_1 nilpotent und \mathcal{G}_2 abelsch oder eine p -Gruppe ist. Zieht man diesen Satz von IRÔ⁴⁾ heran, so ergibt Satz 1 die folgende Erweiterung des Satzes von HALL:

Satz 2. *Das Produkt paarweise vertauschbarer Gruppen, von denen eine nilpotent ist und die übrigen abelsch sind, soweit sie nicht Primzahlpotenzordnung haben, ist auflösbar.*

Insbesondere ist also das Produkt mehrerer paarweise vertauschbarer abelscher Gruppen stets auflösbar. Am Schluß der Arbeit gehen wir ein wenig auf den Sonderfall ein, daß alle Faktoren \mathcal{G}_i zyklisch sind; derartige Produkte haben eine sehr spezielle Struktur:

Satz 3. *Es sei $\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \dots \mathcal{G}_k = \mathcal{G}$, \mathcal{G}_i zyklisch, $\mathcal{G}_i \mathcal{G}_j = \mathcal{G}_j \mathcal{G}_i$ ($i, j = 1, \dots, k$). Sind $p_1 > p_2 > \dots > p_r$ die sämtlichen Primteiler der Ordnung von \mathcal{G} , und ist \mathfrak{P}_e eine zu p_e gehörige SYLOW-Gruppe von \mathcal{G} , so sind $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_{k-1}$ Normalteiler von \mathcal{G} .*

2. Sylow-Gruppen des Produkts zweier vertauschbarer Gruppen.

In diesem Abschnitt betrachten wir das Produkt \mathcal{G} zweier vertauschbarer Gruppen $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ beliebiger Struktur; sie sollen nur endliche Ordnung haben, wie alle Gruppen in dieser Arbeit. Zu den p -SYLOW-Gruppen von \mathcal{G} rechnen wir als Grenzfall auch die nur aus dem Einheitsselement E bestehende Gruppe (wenn die Ordnung von \mathcal{G} nicht durch p teilbar ist).

Satz 4. *\mathcal{G}_1 und \mathcal{G}_2 seien vertauschbar; \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 seien vertauschbare SYLOW-Gruppen von \mathcal{G}_1 und \mathcal{G}_2 zur selben Primzahl p . Dann ist $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}$ eine p -SYLOW-Gruppe von $\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}$, der Durchschnitt $\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2$ ist eine p -SYLOW-Gruppe von $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 = \mathcal{D}$.*

Beweis. Für die Ordnung von \mathcal{G} gilt bekanntlich, wenn wir allgemein die Anzahl der Elemente einer Menge \mathfrak{M} mit (\mathfrak{M}) bezeichnen: $(\mathcal{G}) = (\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2) = (\mathcal{G}_1)(\mathcal{G}_2)/(\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2)$. Bezeichnen wir die höchste in der Ordnung von $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}, \mathcal{D}$ aufgehende Potenz von p mit g_1, g_2, g, d , so folgt $g = g_1 g_2 / d$. Andererseits ist

$$(\mathfrak{P}) = (\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2) = (\mathfrak{P}_1)(\mathfrak{P}_2)/(\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2) = g_1 g_2 / (\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2).$$

³⁾ J. SZÉP, On factorisable, not simple groups. Acta Sci. math., Szeged, **13** (1950), 239—241.

⁴⁾ N. IRÔ. Remarks on factorisable groups. Erscheint demnächst in Acta Sci. math., Szeged. — Den gleichen Satz hatte der Verfasser in der ersten Fassung der vorliegenden Note ohne Kenntnis der Arbeiten von SZÉP und IRÔ erhalten. Der Beweis wird hier nicht gebracht, da er sich nicht wesentlich von dem Beweis von IRÔ unterscheidet.

Zusammen mit den trivialen Beziehungen $(\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2) | d, (\mathfrak{P}) | g$ ergibt dies $(\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2) - d$ und $(\mathfrak{P}) = g$. Das sind die beiden Behauptungen von Satz 4.

Es ist bemerkenswert, daß die zweite Voraussetzung von Satz 4 durch passende Wahl der SYLOW-Gruppen stets erfüllt werden kann, wenn die erste gilt. Um dies zu zeigen, schicken wir einen einfachen Hilfssatz voraus.

Hilfssatz 5. In $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}$ sei \mathfrak{G}'_1 konjugiert zu \mathfrak{G}_1 , \mathfrak{G}'_2 konjugiert zu \mathfrak{G}_2 . Dann ist $\mathfrak{G}'_1 \mathfrak{G}'_2 = \mathfrak{G}$, und es gibt $G \in \mathfrak{G}$ mit

$$G^{-1} \mathfrak{G}_1 G = \mathfrak{G}'_1, \quad G^{-1} \mathfrak{G}_2 G = \mathfrak{G}'_2.$$

Beweis. (a) Zunächst werde $\mathfrak{G}'_2 = \mathfrak{G}_2$ vorausgesetzt. Es gibt $H \in \mathfrak{G}$ mit $H^{-1} \mathfrak{G}_1 H = \mathfrak{G}'_1$. Wir zerlegen $H = G_1 G_2$ mit $G_i \in \mathfrak{G}_i$ und setzen $G = G_2$. Dann wird

$$\begin{aligned} G^{-1} \mathfrak{G}_1 G &= G_2^{-1} \mathfrak{G}_1 G_2 = G_2^{-1} G_1^{-1} \mathfrak{G}_1 G_1 G_2 = H^{-1} \mathfrak{G}_1 H = \mathfrak{G}'_1 \\ G^{-1} \mathfrak{G}_2 G &= G_2^{-1} \mathfrak{G}_2 G_2 = \mathfrak{G}_2 \\ \mathfrak{G}'_1 \mathfrak{G}'_2 &= G^{-1} \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 G = \mathfrak{G}. \end{aligned}$$

(b) Im allgemeinen Fall wählen wir gemäß (a) ein $L \in \mathfrak{G}$ mit

$$L^{-1} \mathfrak{G}_1 L = \mathfrak{G}'_1, \quad L^{-1} \mathfrak{G}_2 L = \mathfrak{G}_2$$

und haben $\mathfrak{G}'_1 \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}$. Hieraus folgt, wieder nach (a), die Existenz eines $K \in \mathfrak{G}$ mit $K^{-1} \mathfrak{G}'_1 K = \mathfrak{G}'_1$, $K^{-1} \mathfrak{G}_2 K = \mathfrak{G}'_2$. Nun leistet $G = LK$ das Gewünschte.

Satz 6. Ist $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}$, so gibt es zu jeder Primzahl p eine SYLOW-Gruppe \mathfrak{P}_i von \mathfrak{G}_i ($i = 1, 2$) derart, daß $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}$ eine p -SYLOW-Gruppe von \mathfrak{G} ist.

Beweis. Wir wählen irgendwelche p -SYLOW-Gruppen $\mathfrak{P}_1^*, \mathfrak{P}_2^*, \mathfrak{P}^*$ von $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}$. Dann gibt es nach den SYLOWschen Sätzen zwei Elemente $A_i \in \mathfrak{G}$ mit $A_i^{-1} \mathfrak{P}_i^* A_i \subset \mathfrak{P}^*$ ($i = 1, 2$). Wir wählen nach Hilfssatz 5 ein $G \in \mathfrak{G}$ mit $G^{-1} A_i^{-1} \mathfrak{G}_i A_i G = \mathfrak{G}_i$ und setzen

$$G^{-1} A_i^{-1} \mathfrak{P}_i^* A_i G = \mathfrak{P}_i, \quad G^{-1} \mathfrak{P}^* G = \mathfrak{P}.$$

Dann gilt

$$\mathfrak{P}_i \subset G^{-1} A_i^{-1} \mathfrak{G}_i A_i G = \mathfrak{G}_i, \quad (\mathfrak{P}_i) = (\mathfrak{P}_i^*), \quad (\mathfrak{P}) = (\mathfrak{P}^*).$$

Daher sind $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}$ p -SYLOW-Gruppen von $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}$. Bezeichnen wieder g_1, g_2, g, d die beim Beweis von Satz 4 eingeführten Potenzen von p , so haben wir zur Abschätzung der Elementzahl von $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ die Beziehung

$$7. \quad (\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2) = \frac{(\mathfrak{P}_1)(\mathfrak{P}_2)}{(\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2)} \geq \frac{g_1 g_2}{d} = (\mathfrak{P}).$$

Andererseits ist

$$\mathfrak{P}_i = G^{-1} A_i^{-1} \mathfrak{P}_i^* A_i G \subset G^{-1} \mathfrak{P}^* G = \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \subset \mathfrak{P}.$$

Aus 7. folgt daher $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}$, hieraus $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_1$. Damit ist Satz 6 bewiesen. Besonders einfach ist der Fall, daß sowohl in \mathfrak{G}_1 wie in \mathfrak{G}_2 nur je eine p -SYLOW-Gruppe vorhanden ist; dann müssen diese beiden miteinander vertauschbar sein. Insbesondere gilt daher:

Satz 8. *Sind $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ vertauschbare nilpotente Gruppen, so sind die beiden SYLOW-Gruppen von \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{G}_2 , welche zur selben Primzahl p gehören, vertauschbar, und ihr Produkt ist eine p -SYLOW-Gruppe von $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2$.*

3. Sylow-Komplemente des Produkts zweier vertauschbarer Gruppen.

Unter einem p -SYLOW-Komplement der Gruppe \mathfrak{G} verstehen wir nach HALL eine Untergruppe von \mathfrak{G} , die als Ordnung den größten zu p fremden Teiler der Ordnung von \mathfrak{G} hat. Die Bedeutung dieses Begriffes beruht darauf, daß \mathfrak{G} genau dann auflösbar ist, wenn \mathfrak{G} zu jeder Primzahl p mindestens ein p -SYLOW-Komplement enthält³⁾. — In einem gewissen Ausmaß lassen sich die eben für SYLOW-Gruppen bewiesenen Sätze auf SYLOW-Komplemente übertragen.

Satz 9. *\mathfrak{G}_1 und \mathfrak{G}_2 seien vertauschbar; \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 seien vertauschbare SYLOW-Komplemente zur selben Primzahl p . Dann ist $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}$ ein p -SYLOW-Komplement von $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}$; der Durchschnitt $\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2$ ist ein p -SYLOW-Komplement von $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{D}$.*

Der Beweis verläuft wörtlich wie der von Satz 4; nur hat man jetzt unter g_1, g_2, g, d den größten p -freien Teiler der Ordnung von $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}, \mathfrak{D}$ zu verstehen.

Satz 10. *Die Gruppe $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}$ sei auflösbar. Dann gibt es zu jeder Primzahl p ein SYLOW-Komplement \mathfrak{P}_i von \mathfrak{G}_i ($i = 1, 2$) derart, daß $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}$ ein p -SYLOW-Komplement von \mathfrak{G} ist.*

Beweis. $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ sind auflösbar, enthalten also p -SYLOW-Komplemente $\mathfrak{P}^*, \mathfrak{P}_1^*, \mathfrak{P}_2^*$. Nach HALL⁵⁾ gibt es zwei Elemente $A_i \in \mathfrak{G}$ mit $A_i^{-1} \mathfrak{P}_i^* A_i < \mathfrak{P}^*$ ($i = 1, 2$). Nach derselben Vorschrift wie beim Beweis von Satz 6 wählen wir $G \in \mathfrak{G}$ und definieren wir $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}$. Dann sind diese Gruppen p -SYLOW-Komplemente von $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}$, und es ist $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 < \mathfrak{P}$. Da wieder die Abschätzung 7. gilt (mit der beim Beweis von Satz 9 eingeführten Bedeutung von g_1 usw.), folgt $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_1$, und die Behauptung über $\mathfrak{P}_1 \cap \mathfrak{P}_2$. — Wir heben den Sonderfall nilpotenter Faktoren hervor, in welchem es zu jeder Primzahl nur ein SYLOW-Komplement von \mathfrak{G}_i gibt:

Satz 11. *Sind $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ vertauschbare nilpotente Gruppen, deren Produkt \mathfrak{G} auflösbar ist, so sind die beiden SYLOW-Komplemente von \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{G}_2 , welche zur selben Primzahl p gehören, vertauschbar; ihr Produkt ist ein p -SYLOW-Komplement von \mathfrak{G} .*

⁵⁾ P. HALL, A note on soluble groups. Journal London math. Soc. 3 (1928), 98—105.

4. Beweis von Satz 1.

Es sei $\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \dots \mathcal{G}_k = \mathcal{G}$, $\mathcal{G}_i \mathcal{G}_j = \mathcal{G}_j \mathcal{G}_i$ auflösbar, \mathcal{G}_i nilpotent ($i, j = 1, 2, \dots, k$). Für eine beliebige, fest gewählte Primzahl p bezeichnen wir mit \mathfrak{P}_i die p -SYLOW-Gruppe und mit \mathfrak{Q}_i das p -SYLOW-Komplement von \mathcal{G}_i . Wir gehen schrittweise vor.

(a) Wir zeigen zunächst, daß die Gruppen

$$\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_k = \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \dots \mathfrak{Q}_k = \mathfrak{Q}$$

eine p -SYLOW-Gruppe und ein p -SYLOW-Komplement von \mathcal{G} sind, und daß je zwei Faktoren desselben Produkts miteinander vertauschbar sind. Die letzte Behauptung folgt unmittelbar aus den Sätzen 8 und 11; nach diesen ist auch der erste Teil der Behauptung richtig für $k = 2$. Wir machen einen Induktionsschluß. $\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_{k-1} = \mathfrak{P}'$ ist eine p -SYLOW-Gruppe von $\mathcal{G}_1 \dots \mathcal{G}_{k-1} = \mathcal{G}'$; \mathfrak{P}_k ist eine p -SYLOW-Gruppe der mit \mathcal{G}' vertauschbaren Gruppe \mathcal{G}_k und ist selbst mit \mathfrak{P}' vertauschbar; nach Satz 4 ist $\mathfrak{P}' \mathfrak{P}_k = \mathfrak{P}$ eine p -SYLOW-Gruppe von $\mathcal{G}' \mathcal{G}_k = \mathcal{G}$. Der Beweis für die SYLOW-Komplemente verläuft ebenso mit Hilfe von Satz 9.

(b) Aus der hiermit bewiesenen Existenz eines p -SYLOW-Komplements in \mathcal{G} für jede Primzahl p folgt, daß \mathcal{G} auflösbar ist.

(c) Bilden wir zu den verschiedenen Primteilern p, p', p'', \dots von (\mathcal{G}) nach der unter (a) angegebenen Vorschrift die SYLOW-Komplemente $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}', \mathfrak{Q}'', \dots$, so sind die aus ihnen zu bildenden Durchschnitte im Sinn von HALL die Glieder eines SYLOW-Systems \mathcal{S} von \mathcal{G} ; sie sind also paarweise vertauschbar⁶⁾. Zu \mathcal{S} gehört insbesondere der Durchschnitt $\mathfrak{Q}' \cap \mathfrak{Q}'' \cap \dots$. Er ist eine p -SYLOW-Gruppe von \mathcal{G} ⁶⁾ und enthält offensichtlich \mathfrak{P} , stimmt also mit \mathfrak{P} überein. Daher ist \mathfrak{P} in \mathcal{S} enthalten.

(d) Ist \mathfrak{P}' in bezug auf eine andere Primzahl p' ebenso gebildet wie \mathfrak{P} in bezug auf p , so gehört auch \mathfrak{P}' zu \mathcal{S} und ist daher mit \mathfrak{P} vertauschbar. Damit ist der Beweis von Satz 1 beendet. Wir wenden uns nun zum Sonderfall zyklischer Faktoren und setzen zunächst $k = 2$ voraus.

5. Produkte von zwei zyklischen Faktoren.

In diesem Abschnitt bedeuten $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ ständig zwei vertauschbare zyklische Gruppen mit dem Produkt \mathcal{G} .

Hilfssatz 12. *Es sei $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 = E$; \mathfrak{N} sei ein minimaler Normalteiler von \mathcal{G} . Dann ist $(\mathfrak{N}) = q^\alpha$, q Primzahl, $1 \leq \alpha \leq 2$. Im Falle $\alpha = 2$ ist $(\mathfrak{N} \cap \mathcal{G}_i) = q$ ($i = 1, 2$).*

Beweis. Nach allgemeinen Sätzen über minimale Normalteiler auflösbarer Gruppen ist $(\mathfrak{N}) = q^\alpha$ mit einer Primzahl q . Wir zerlegen alle Elemente $N \in \mathfrak{N}$ in der Form $N = N_1 N_2$ mit $N_i \in \mathcal{G}_i$. Der Kom-

⁶⁾ P. HALL, On the Sylow systems of a soluble group. Proceed. London math. Soc. 43 (1937), 316—323.

plex \mathfrak{N}_i aller so entstehenden Elemente N_i ist eine Gruppe, denn offenbar ist z. B. $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{N} \mathfrak{G}_2$. Für die Ordnung der Gruppe \mathfrak{N}_1 gilt wegen $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = E$

$$(\mathfrak{N}_1) = \frac{(\mathfrak{N}_1 \mathfrak{G}_2)}{(\mathfrak{G}_2)} = \frac{(\mathfrak{N} \mathfrak{G}_2)}{(\mathfrak{G}_2)} = \frac{(\mathfrak{N})}{(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}_2)}.$$

Daher ist (\mathfrak{N}_1) ein Teiler von (\mathfrak{N}) und damit eine Potenz von q . Ebenso ist \mathfrak{N}_2 eine q -Untergruppe von \mathfrak{G}_2 .

Wir bilden das Produkt $\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}^*$. Es ist eine Gruppe, denn wir haben $\mathfrak{N}^* = \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N} \mathfrak{N}_1$. \mathfrak{N}^* ist sogar Normalteiler von \mathfrak{G} ; denn da $\mathfrak{N}^* = \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2$ ist, bleibt \mathfrak{N}^* ungeändert bei Ähnlichkeitstransformation mit Elementen aus \mathfrak{G}_1 , und wegen der Symmetrie der Definition von \mathfrak{N}^* ist \mathfrak{N}^* auch invariant gegenüber \mathfrak{G}_2 . Wir haben also in \mathfrak{N}^* einen Normalteiler von \mathfrak{G} gefunden, welcher den Normalteiler \mathfrak{N} umfaßt und eine Ordnung q^2 besitzt.

Aus der allgemeinen Theorie der Gruppen von Primzahlpotenzordnung folgt, daß der Durchschnitt \mathfrak{Z} von \mathfrak{N} mit dem Zentrum von \mathfrak{N}^* nicht nur aus E besteht; \mathfrak{Z} ist, wie \mathfrak{N} und \mathfrak{N}^* , Normalteiler von \mathfrak{G} . Wegen der Minimalität von \mathfrak{N} ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{Z}$, d. h. \mathfrak{N} liegt im Zentrum von \mathfrak{N}^* . Insbesondere ist \mathfrak{N} elementweise mit \mathfrak{N}_1 vertauschbar. Hieraus folgt, daß \mathfrak{N}_1 und \mathfrak{N}_2 elementweise vertauschbar sind, daß also \mathfrak{N}^* das direkte Produkt von \mathfrak{N}_1 und \mathfrak{N}_2 ist (\mathfrak{N}_1 und \mathfrak{N}_2 sind nach Voraussetzung fremd zueinander).

Da \mathfrak{N} als minimaler Normalteiler nur Elemente N der Ordnungen q und 1 enthält, haben auch die Komponenten N_1 und N_2 in der direkten Produktzerlegung $N = N_1 N_2$ nur die Ordnungen q oder 1. Andererseits ist \mathfrak{N}_i zyklisch. Daher ist $(\mathfrak{N}_i) \leq q$. Hieraus folgt $(\mathfrak{N}) \leq (\mathfrak{N}^*) = (\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2) \leq q^2$. Der Fall $(\mathfrak{N}) = q^2$ kann nur eintreten, wenn $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \times \mathfrak{N}_2$ ist; dann ist $(\mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}_i) = (\mathfrak{N}_i) = q$.

Aus dem hiermit bewiesenen Hilfssatz 12 folgt durch einen leichten Induktionsschluß, daß in dem Produkt zweier vertauschbarer zyklischer Gruppen die Indizes einer Hauptreihe sämtlich Primzahlen oder Primzahlquadrate sind. Wichtiger ist eine andere Folgerung:

Hilfssatz 13. *Es sei p der größte Primteiler von (\mathfrak{G}) und \mathfrak{P}_i die p -SYLOW-Gruppe von \mathfrak{G}_i ($i = 1, 2$). Dann ist die p -SYLOW-Gruppe $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{P}$ ein Normalteiler von \mathfrak{G} .*

Beweis. (a) Wir setzen zunächst voraus, daß $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 \neq E$ ist. Dann enthält dieser Durchschnitt eine im Zentrum von \mathfrak{G} gelegene Untergruppe \mathfrak{N} von Primzahlordnung q . Da wir den zu beweisenden Satz 13 für die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ schon als richtig annehmen können (offenbar ist sie das Produkt der zyklischen Gruppen $\mathfrak{G}_i/\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{G}_j/\mathfrak{N}$), ist $\mathfrak{N}\mathfrak{P} = \mathfrak{H}$ ein Normalteiler von \mathfrak{G} , dessen Index in \mathfrak{G} nicht durch p teilbar ist, während der Index von \mathfrak{N} in \mathfrak{H} eine Potenz von p ist.

Ist $q = p$, so ist \mathfrak{H} eine p -Gruppe, also mit der SYLOW-Gruppe \mathfrak{P} dientisch; dann ist \mathfrak{P} ein Normalteiler von \mathfrak{G} , wie behauptet.

Ist $q \neq p$, so ist \mathfrak{P} eine p -SYLOW-Gruppe von \mathfrak{H} , und da \mathfrak{N} mit \mathfrak{P} elementweise vertauschbar ist, ist \mathfrak{P} Normalteiler von \mathfrak{H} . Hiernach ist \mathfrak{P} die einzige p -SYLOW-Gruppe von \mathfrak{H} und daher gleichzeitig mit \mathfrak{H} ein Normalteiler von \mathfrak{G} .

(b) Sei jetzt der Durchschnitt $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = E$. Nach Hilfssatz 12 enthält \mathfrak{G} einen Normalteiler \mathfrak{N} einer Ordnung q^α mit $1 \leq \alpha \leq 2$, q Primzahl. Mittels einer Induktionsvoraussetzung können wir wieder annehmen, daß das Produkt $\mathfrak{N}\mathfrak{P} = \mathfrak{H}$ Normalteiler von \mathfrak{G} ist.

Ist $q = p$, so ist \mathfrak{H} eine p -Gruppe, $\mathfrak{H} = \mathfrak{P}$, \mathfrak{P} Normalteiler von \mathfrak{G} .

Ist $q \neq p$, $\alpha = 1$, so liegt \mathfrak{N} im Zentrum von \mathfrak{H} (wegen $q < p$), und wie unter (a) ergibt sich, daß \mathfrak{P} Normalteiler von \mathfrak{G} ist.

Ist schließlich $q \neq p$, $\alpha = 2$, so enthält \mathfrak{N} genau $q + 1$ Untergruppen der Ordnung q ; diese werden bei Ähnlichkeitstransformationen mit den Elementen $P \in \mathfrak{P}$ nur untereinander permutiert. Ist aber speziell $P \in \mathfrak{P}_1$, so bleibt die nach Hilfssatz 12 in \mathfrak{N} enthaltene Gruppe $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}_1$ der Ordnung q fest, also werden die übrigen q Gruppen nur untereinander permutiert; da $q < p$ ist, bleiben sie einzeln fest, und zwar zunächst als Ganze, dann aber sogar elementweise. Demnach ist \mathfrak{N} elementweise mit \mathfrak{P}_1 vertauschbar; dasselbe gilt für \mathfrak{P}_2 , also liegt \mathfrak{N} im Zentrum von $\mathfrak{N}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{H}$, und \mathfrak{P} erweist sich wie früher als Normalteiler von \mathfrak{G} .

6. Produkte von mehreren zyklischen Gruppen.

Wir bereiten den Beweis des in der Einleitung formulierten Satzes 3 vor.

Hilfssatz 14. *Es sei $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 \dots \mathfrak{G}_k = \mathfrak{G}$, \mathfrak{G}_i zyklisch, $\mathfrak{G}_i \mathfrak{G}_j = \mathfrak{G}_j \mathfrak{G}_i$; p sei der größte Primteiler von $|\mathfrak{G}|$, \mathfrak{P}_i die p -SYLOW-Gruppe von \mathfrak{G}_i . Dann ist $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_k = \mathfrak{P}$ die einzige p -SYLOW-Gruppe von \mathfrak{G} .*

Beweis. Daß \mathfrak{P} eine p -SYLOW-Gruppe von \mathfrak{G} ist, ist uns schon aus Satz 1 bekannt. Wir brauchen nur noch zu zeigen, daß \mathfrak{P} ein Normalteiler von \mathfrak{G} ist.

Für $i \neq j$ ist $\mathfrak{P}_i \mathfrak{P}_j$ stets ein Normalteiler von $\mathfrak{G}_i \mathfrak{G}_j$ (das ist trivial, wenn p in der Ordnung von $\mathfrak{G}_i \mathfrak{G}_j$ nicht aufgeht, und gilt im andern Fall nach Hilfssatz 13). Da wir \mathfrak{P} wegen $\mathfrak{P}_i \mathfrak{P}_j = \mathfrak{P}_j \mathfrak{P}_i$ auch in der Form

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_i \mathfrak{P}_1 \cdot \mathfrak{P}_i \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_i \mathfrak{P}_k$$

schreiben können, ist \mathfrak{P} invariant gegenüber \mathfrak{G}_i ($i = 1, 2, \dots, k$), daher auch gegenüber \mathfrak{G} .

Aus dem hiermit bewiesenen Hilfssatz 14 folgt die Behauptung von Satz 3 unmittelbar durch einen Induktionsschluß, da mit \mathfrak{G} auch jede Faktorgruppe von \mathfrak{G} das Produkt paarweise vertauschbarer zyklischer Gruppen ist.

(Eingegangen am 10. Juni 1951.)

Über Riesz'sche Mittel mit unstetigem Parameter.

Von

W. Jurkat in Tübingen.

Herr M. RIESZ hat zur Summierung einer Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$ zwei Verfahren

$$\frac{1}{\omega^{\kappa}} \sum_{\nu < \omega} (\omega - \nu)^{\kappa} a_{\nu} \quad \text{und} \quad \frac{1}{n^{\kappa}} \sum_{\nu=0}^{n-1} (n - \nu)^{\kappa} a_{\nu}$$

eingeführt¹⁾, die sich dadurch unterscheiden, daß bei dem ersten der Parameter ω stetig gegen ∞ laufen soll, während bei dem zweiten statt ω nur die ganzen Zahlen n benutzt werden. Er zeigte zunächst²⁾, daß für alle $\kappa > 0$ das „stetige“ Verfahren mit dem C_{κ} -Verfahren äquivalent ist, und später³⁾, daß für $0 < \kappa < 1$ dasselbe auch für das „unstetige“ Verfahren gilt. Damit erhielt er zugleich die Äquivalenz der stetigen und unstetigen Mittel für $0 < \kappa < 1$ ⁴⁾.

Wir geben in der vorliegenden Arbeit einen direkten und einfachen Beweis dieser Äquivalenz, und zwar nicht nur für die beiden speziellen oben angeführten Mittelbildungen, sondern gleich für die allgemeinen RIESZ'schen Mittel. Das Haupthilfsmittel dabei ist eine Erweiterung des bekannten RIESZ'schen Mittelwertsatzes⁵⁾, die für die unstetigen Mittel die gleichen Dienste leistet wie jener für die stetigen. Auf weitere Anwendungen dieses Mittelwertsatzes werde ich zusammen mit Herrn A. PEYERIMHOFF später zurückkommen⁶⁾.

1. Eine Ergänzung zum Riesz'schen Mittelwertsatz.

1.1. Eine Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$ (bzw. Folge $s_n = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu}$) heißt summierbar (bzw. limitierbar) zum Wert s durch das Verfahren der RIESZ'schen Mittel $R^{\kappa}(\lambda)$, wenn

$$(1) \quad \frac{A^{\kappa}(\omega)}{\omega^{\kappa}} = \frac{1}{\omega^{\kappa}} \sum_{\lambda_{\nu} < \omega} (\omega - \lambda_{\nu})^{\kappa} a_{\nu} \rightarrow s \quad (\omega \rightarrow \infty)$$

¹⁾ RIESZ [8], [9].

²⁾ RIESZ [10].

³⁾ RIESZ [12].

⁴⁾ Die Äquivalenz der stetigen und unstetigen Mittel wurde auch für negative Ordnungen κ untersucht: AGNEW [1], FORSYTHE [4].

⁵⁾ RIESZ [10], [11], VERBLUNSKY [13], für Anwendungen siehe HARDY-RIESZ [6], S. 28 ff.

⁶⁾ JURKAT-PEYERIMHOFF [7].

gilt; dabei soll $\alpha \geq 0$ und λ_n eine monoton gegen ∞ wachsende Zahlenfolge sein:

$$(2) \quad \Delta \lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n+1} < 0, \quad 0 \leq \lambda_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

Wir schreiben $A(\tau) = A^0(\tau) = \sum_{\lambda_\nu < \tau} a_\nu$ und haben dann

$$A^\alpha(\omega) = \alpha \int_0^\omega (\omega - \tau)^{\alpha-1} A(\tau) d\tau \quad (\alpha > 0).$$

Für $0 < \alpha \leq 1$ gilt der RIESZSche Mittelwertsatz

$$(3) \quad \left| \alpha \int_0^\xi (\omega - \tau)^{\alpha-1} A(\tau) d\tau \right| \leq |A^\alpha(\xi')| \quad (0 \leq \xi' \leq \xi \leq \omega).$$

Seine Gültigkeit hängt nicht von der speziellen Bauart der Funktion $A(\tau)$ ab, so daß allgemeiner⁷⁾

$$(4) \quad \frac{\Gamma(\alpha + \mu + 1)}{\Gamma(\mu + 1) \Gamma(\alpha)} \left| \int_0^\xi (\omega - \tau)^{\alpha-1} A^\mu(\tau) d\tau \right| \leq |A^{\alpha+\mu}(\xi')|$$

ist. Wenn in (3) $\xi = \lambda_n$ ist, so läßt sich unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $A(\tau)$ eine spezielle Treppenfunktion ist, mehr aussagen.

Satz 1. Ist $\lambda_n \leq \omega$, $0 < \alpha \leq 1$, so gilt

$$(5) \quad \left| \alpha \int_0^{\lambda_n} (\omega - \tau)^{\alpha-1} A(\tau) d\tau \right| \leq |A^\alpha(\lambda_{n'})| \quad \text{mit} \quad 0 \leq n' \leq n.$$

Das Wesentliche ist, daß man für ξ' die besondere Wahl $\xi' = \lambda_{n'}$ treffen kann. Man darf nicht erwarten, daß dies für eine wesentlich größere Klasse von Funktionen $A(\tau)$ richtig bleibt, wie (4) es vielleicht nahe legen würde. Ein Beispiel wird zeigen, daß schon für lineare Funktionen die Ungleichung (5) falsch wird.

1. 2. Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned} \alpha \int_0^{\lambda_n} (\omega - \tau)^{\alpha-1} A(\tau) d\tau &= \sum_{\nu=1}^n \alpha \int_{\lambda_{\nu-1}}^{\lambda_\nu} (\omega - \tau)^{\alpha-1} s_{\nu-1} d\tau \\ &= \sum_{\nu=1}^n \frac{c(\omega, \nu)}{c(\lambda_n, \nu)} c(\lambda_n, \nu) s_{\nu-1}, \end{aligned}$$

wobei

$$c(\omega, \nu) = \alpha \int_{\lambda_{\nu-1}}^{\lambda_\nu} (\omega - \tau)^{\alpha-1} d\tau$$

gesetzt ist. Nach dem zweiten Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist

$$\frac{c(\omega, \nu)}{c(\lambda_n, \nu)} = \left(\frac{\omega - \tau_\nu}{\lambda_n - \tau_\nu} \right)^{\alpha-1} \quad \text{mit} \quad \lambda_{\nu-1} < \tau_\nu < \lambda_\nu,$$

⁷⁾ HARDY-RIESZ [6], S. 29.

und daraus erkennen wir, daß $\frac{c(\omega, \nu)}{c(\lambda_n, \nu)}$ mit ν monoton fällt und zwischen 0 und 1 liegt. Durch Anwendung des ABELSchen Lemmas finden wir

$$\left| \sum_{\nu=1}^n \frac{c(\omega, \nu)}{c(\lambda_n, \nu)} c(\lambda_n, \nu) s_{\nu-1} \right| \leq \left| \sum_{\nu=1}^{n_1} c(\lambda_n, \nu) s_{\nu-1} \right| \quad (0 \leq n_1 \leq n)$$

oder anders geschrieben

$$(6) \quad \left| \kappa \int_0^{\lambda_n} (\omega - \tau)^{\kappa-1} A(\tau) d\tau \right| \leq \left| \kappa \int_0^{\lambda_{n_1}} (\lambda_n - \tau)^{\kappa-1} A(\tau) d\tau \right| \quad (0 \leq n_1 \leq n).$$

Offenbar können wir mit der rechten Seite von (6) ebenso verfahren wie vorher mit der linken und diesen Prozeß iterieren:

$$\left| \kappa \int_0^{\lambda_{n_i}} (\lambda_{n_{i-1}} - \tau)^{\kappa-1} A(\tau) d\tau \right| \leq \left| \kappa \int_0^{\lambda_{n_{i+1}}} (\lambda_{n_i} - \tau)^{\kappa-1} A(\tau) d\tau \right|$$

$$(n \geq n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq 0).$$

Infolge der Ungleichungen für die n_i muß für mindestens ein i die Gleichheit $n_i = n_{i+1}$ bestehen und für diesen gemeinsamen Wert $n' = n_i$ gilt die behauptete Abschätzung

$$\left| \kappa \int_0^{\lambda_n} (\omega - \tau)^{\kappa-1} A(\tau) d\tau \right| \leq \left| \kappa \int_0^{\lambda_{n'}} (\lambda_{n'} - \tau)^{\kappa-1} A(\tau) d\tau \right| = |A^{\kappa}(\lambda_{n'})|.$$

Der hier gegebene Beweis von Satz 1 ist seiner Methodik nach verwandt mit einem Beweis von BOSANQUET für ein Analogon zum RIESZSchen Mittelwertsatz beim C_{κ} -Verfahren⁸⁾. Auch der Mittelwertsatz (3) läßt sich mit dieser Methode beweisen.

1. 3. Bemerkungen zu Satz 1. Für $\kappa > 1$ wird die Ungleichung (5) falsch, wie das Beispiel $A(\tau) \equiv 1$ lehrt. Für $\kappa \leq 0$ kann die rechte Seite von (5) den Wert ∞ haben. Lassen wir dies zu, so bleibt (5) trivialerweise richtig. Weiter sehen wir, daß (5) für $\kappa = 1$ richtig ist, unabhängig von der speziellen Gestalt von $A(\tau)$. Doch für $0 < \kappa < 1$ wird die Sachlage anders. *Es gibt dann eine lineare Funktion $A(\tau)$, für welche die Ungleichung (5) falsch wird:*

Es sei $A(\tau) = 1 - \tau + a$ und $\lambda_n = n$. Wir haben dann

$$m_1(a) = \int_0^1 (1 - \tau)^{\kappa-1} A(\tau) d\tau = \frac{1}{\kappa+1} + a \frac{1}{\kappa}$$

und

$$m_2(a) = \int_0^1 (2 - \tau)^{\kappa-1} A(\tau) d\tau = \frac{1}{\kappa+1} (2^{\kappa+1} - 1) - \frac{1}{\kappa} (2^{\kappa} - 1) + a \frac{1}{\kappa} (2^{\kappa} - 1).$$

⁸⁾ BOSANQUET [3], der erste Beweis bei BOSANQUET [2] verläuft anders.

m_1 und m_2 werden nur dann für den gleichen Wert a gleich Null, wenn

$$\frac{2^\kappa - 1}{\kappa + 1} = \frac{1}{\kappa + 1} (2^{\kappa+1} - 1) - \frac{1}{\kappa} (2^\kappa - 1),$$

d. h. $2^\kappa = \kappa + 1$ ist, also nur für $\kappa = 0$ oder 1 . Für $a = -\frac{\kappa}{\kappa + 1}$ ist daher $m_1 = 0$ und $m_2 \neq 0$, so daß die Ungleichung (5)

$$|m_2| \leq |m_1| \quad \text{oder} \quad |m_2| \leq 0$$

in diesem Fall falsch wird.

2. Ein Äquivalenzsatz.

Mit Hilfe von Satz 1 sind wir in der Lage, eine Aussage über das Verhältnis zwischen den stetigen und unstetigen Rieszschen Mitteln zu machen. Man weiß, daß es für $\kappa > 1$ ⁹⁾ einen Unterschied macht, ob ω in (1) stetig gegen ∞ strebt oder nur die Werte λ_n durchläuft. Für $0 < \kappa \leq 1$ ist das anders.

Satz 2. Ist $0 < \kappa \leq 1$ und

$$(7) \quad 0 < \eta(\omega) \nearrow +\infty, \quad \frac{\omega}{\eta(\omega)} \nearrow \quad (\omega \rightarrow \infty)^{10)},$$

so sind die beiden Konvergenzaussagen

$$(8) \quad A^\kappa(\omega) = o(1) \eta^\kappa(\omega)$$

und

$$(9) \quad A^\kappa(\lambda_n) = o(1) \eta^\kappa(\lambda_n)$$

äquivalent, insbesondere also auch $(\eta(\omega) = \omega)$

$$\frac{A^\kappa(\omega)}{\omega^\kappa} \rightarrow s \quad \text{und} \quad \frac{A^\kappa(\lambda_n)}{\lambda_n^\kappa} \rightarrow s.$$

Für den Beweis genügt es von (9) auf (8) zu schließen. Wir zeigen zunächst

$$(10) \quad s_n = o(1) \left(\frac{\eta(\lambda_{n+1})}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \right)^\kappa.$$

Nach Satz 1 ist

$$\left| \kappa \int_0^{\lambda_n} (\lambda_{n+1} - \tau)^{\kappa-1} A(\tau) d\tau \right| \leq \text{Max}_{0 \leq \nu \leq n} |A^\kappa(\lambda_\nu)| = o(1) \eta^\kappa(\lambda_n)$$

und folglich

$$\kappa \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} (\lambda_{n+1} - \tau)^{\kappa-1} A(\tau) d\tau = o(1) \eta^\kappa(\lambda_{n+1}) - o(1) \eta^\kappa(\lambda_n),$$

⁹⁾ Man kennt Gegenbeispiele für $\lambda_n = n$, $\kappa = 2$ und 3 : RIESZ [12], HARDY [5], S. 114.

¹⁰⁾ Das Zeichen „ \nearrow “ bedeutet monoton wachsend (im weiteren Sinne).

d. h. aber

$$(10) \quad (\lambda_{n+1} - \lambda_n)^\alpha s_n = o(1) \eta^\alpha(\lambda_{n+1}).$$

Mit Hilfe von (10) erhalten wir wieder nach Satz 1

$$\begin{aligned} A^\alpha(\omega) &= \alpha \int_0^{\lambda_n} (\omega - \tau)^{\alpha-1} A(\tau) d\tau + \alpha \int_{\lambda_n}^{\omega} (\omega - \tau)^{\alpha-1} A(\tau) d\tau \\ &= o(1) \eta^\alpha(\lambda_n) + \left(\frac{\omega - \lambda_n}{\eta(\omega)} \right)^\alpha s_n \eta^\alpha(\omega) = o(1) \eta^\alpha(\omega) \quad (\lambda_n < \omega \leq \lambda_{n+1}), \end{aligned}$$

da $\frac{\omega - \lambda_n}{\eta(\omega)}$ monoton mit ω wächst, also höchstens gleich $\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\eta(\lambda_{n+1})}$ ist.

Bemerkung zu Satz 2. Man darf in (8) und (9) die Zeichen $o(1)$ durch $O(1)$ ersetzen und Satz 2 bleibt richtig.

Literaturverzeichnis.

AGNEW, R. P.

- [1] On RIESZ and CESÀRO methods of summability, Trans. Amer. Math. Soc., 35 (1933), 532—548.

BOSANQUET, L. S.

- [2] A mean value theorem, Journ. London Math. Soc., 16 (1941), 146—148.
[3] Note on convergence and summability factors III, Proc. London Math. Soc. (2), 50 (1949), 482—496.

FORSYTHE, G. E.

- [4] RIESZ summability methods of order r , for $\Re(r) < 0$, Duke Math. Journ., 8 (1941), 346—349.

HARDY, G. H.

- [5] Divergent series, Oxford (1949).

HARDY, G. H. and RIESZ, M.

- [6] The general theory of DIRICHLET's series, Cambridge (1915).

JURKAT, W. und PEYERIMHOFF, A.

- [7] Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen, Math. Z. 55 (1951), 92—108.

RIESZ, M.

- [8] Sur la sommation des séries de DIRICHLET, Comptes rendus, 149 (1909), 18—20.
[9] Sur les séries de DIRICHLET et les séries entières, Comptes rendus, 149 (1909), 909—912.
[10] Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques, Comptes rendus, 152 (1911), 1651—1654.
[11] Sur un théorème de la moyenne et ses applications, Acta Lit. ac. Sci. SZEGED, 1 (1923), 114—126.
[12] Sur l'équivalence de certaines méthodes de sommation, Proc. London Math. Soc. (2), 22 (1923), 412—419.

VERBLUNSKY, S.

- [13] On the limit of a function at a point, Proc. London Math. Soc. (2), 32 (1931), 163—199.

(Eingegangen am 29. Mai 1951.)

Zur Statik der Strickleiter.

Von

Walter Wunderlich in Wien.

1. Der vorliegende Aufsatz ist als Beitrag zur „Differenzengeometrie“ gedacht, die sich bemüht, differentialgeometrische Beziehungen durch elementargeometrische Sachverhalte an geeigneten finiten Modellen zu veranschaulichen und zu begründen. Die Förderung dieser Arbeitsweise ist vor allem einer Reihe von einschlägigen Abhandlungen zu verdanken, die in dieser Zeitschrift erschienen sind¹⁾.

Im Sinne der genannten Bestrebungen hat der Verfasser unlängst zur Demonstration der *Schraubwendelfläche* ein Vorlesungsmodell nach dem Muster einer *Strickleiter* herstellen lassen, das aus einer Anzahl von gleich langen Holzstäben besteht, deren Enden in gleichen Abständen in zwei Schnüre eingeknüpft sind. Bei richtiger Haltung des Modells stellen sich Gleichgewichtslagen ein, bei welchen die Sprossen eine äquidistante Folge von Erzeugenden einer Wendelfläche bilden. Daneben existieren jedoch noch *unsymmetrische Gleichgewichtsformen*, und diese sollen hier näher untersucht werden. Den Schlüssel hierzu bietet die Feststellung, daß — bei Vernachlässigung des Eigengewichts — in jedem Knotenpunkt die Sprossenachse und die beiden Seilstrecken aus statischen Gründen in einer Ebene liegen müssen. — Auf die nicht uninteressanten Stabilitätsfragen, die bei dieser Gelegenheit auftreten, wird nicht eingegangen. Besonderes Augenmerk wird hingegen den *Grenzformen* zugewendet, die bei infinitesimaler Verdichtung der Sprossenfolge entstehen. — Auf die naheliegende Verallgemeinerung, die die Gleichabständigkeit der Knoten aufgibt, mag hier bloß hingewiesen sein.

2. Zur Untersuchung stehen also zwei gelenkige Streckenzüge $A_1 A_2 \dots$ und $B_1 B_2 \dots$ mit konstanter und gleicher Seitenlänge h , deren gleichbeiferte Ecken durch starre Strecken der gemeinsamen Länge $A_i B_i = c$ verbunden sind; wir wollen von „*Holmpolygonen*“ und „*Sprossen*“ reden.

Jede *Gleichgewichtslage* dieser idealisierten „Strickleiter“ ist dadurch gekennzeichnet, daß je drei von einem Knotenpunkt ausgehende Strecken in einer Ebene liegen, denn nur dann können die in dem

¹⁾ Einige diesbezügliche Hinweise enthält die Arbeit von R. SAUER: *Parallelogrammgitter als Modelle pseudosphärischer Flächen*, *Math. Z.* 52 (1950), 611—622, die auch gewisse Berührungspunkte mit dem vorliegenden Aufsatz aufweist.

Knoten angreifenden Kräfte (Zugspannungen in den Holmseiten, Stützdruck in der Sprosse) einander aufheben. Diese Bedingung sei in jedem Knoten erfüllt; die ihm solcherart zugeordnete Ebene heiße „Knotenebene“.

Fassen wir nun ein *Maschenviereck* der Leiter ins Auge: Es handelt sich wegen der paarweise gleichen Gegenseiten um ein *windschiefes Parallelogramm*, oder — nach einem besseren Vorschlag von BENNETT²⁾ — ein „*Isogramm*“. Ein solches Viereck ist achsensymmetrisch bezüglich des Gemeinlots der beiden Diagonalen. Demnach ist der (vorzeichenbegabte) Winkel zweier benachbarten (orientierten) Knotenebenen stets auch an der Gegenkante zu finden. Dieser „*Schränkwinkel*“ sei für die Holmseiten h mit ψ , für die Sprossen c mit $-\gamma$ bezeichnet; unter der „*Schränkung*“ einer Seite soll hingegen der Quotient aus dem Sinus des Schränkswinkels und der Seitenlänge verstanden werden. Nach BENNETT gilt dann die leicht zu beweisende Beziehung

$$(1) \quad \frac{\sin \psi}{h} = \frac{\sin \gamma}{c},$$

welche besagt, daß Nachbarseiten eines Isogramms entgegengesetzt gleiche Schränkungen besitzen³⁾.

Da je zwei aufeinanderfolgende Isogramme unserer Leiter eine Seite c samt dem zugehörigen Schränkswinkel $-\gamma$ gemein haben, so stimmen zufolge (1) auch sämtliche Holmschränkwinkel ψ überein. Somit gilt

Satz 1. *Die beiden Holme einer im Gleichgewicht befindlichen (regelmäßigen) Strickleiter bilden zwei gleichseitige Polygone fester und übereinstimmender Schränkung. Der von den zu einer Sprosse gehörigen Knotenebenen gebildete Winkel ist längs der ganzen Leiter konstant.*

3. Nunmehr soll der zur Leiter gehörige *Kräfteplan* nach den Regeln der graphischen Statik entwickelt werden. Bezeichne a_i die in A_i angreifende, nach A_{i+1} gerichtete und positiv gezählte Spannkraft im linken Holm, analog b_i die Kraft in der rechten Holmstrecke $B_i B_{i+1}$; c_i sei schließlich die von A_i nach B_i orientierte Sprossenkraft (Fig. 1). Im Knoten A_i wirken danach die Kräfte $-a_{i-1}$, a_i , $-c_i$, im Gegenknoten B_i die Kräfte $-b_{i-1}$, b_i , c_i . Im Hinblick auf das bestehende Gleichgewicht haben beide Vektortripel die Summe Null und die sie geometrisch repräsentierenden (und gleichbezeichneten) Strecken lassen sich in Dreiecksform aneinanderreihen. Wir ordnen die beiden Dreiecke so an, daß sie die Seite $\pm c_i$ gemeinsam haben. Die folgenden Kraftdreiecke lassen sich dann längs der Seiten a_i und b_i anschließen, so daß auf diese Weise fortfahrend ein *Kräfteplan* in Gestalt einer *Doppelpyramide* entsteht, in welcher jedem Leiterstab eine parallele

²⁾ G. T. BENNETT: *The skew isogram mechanism*, Proc. London Math. Soc. 13 (1914), 151—173.

³⁾ Man drücke den Abstand einer Ecke von der gegenüberliegenden Knotenebene auf zwei Arten aus.

Kante entspricht und jeder Leiterknoten durch eine Dreiecksfläche vertreten ist (Fig. 1): Die gemeinsame Basis wird von den aneinandergereihten Bildvektoren der Sprossenkräfte c_i gebildet, während die in je einer Spitze \mathfrak{A} bzw. \mathfrak{B} zusammenlaufenden Mantelkanten die Holmkräfte a_i bzw. b_i repräsentieren.

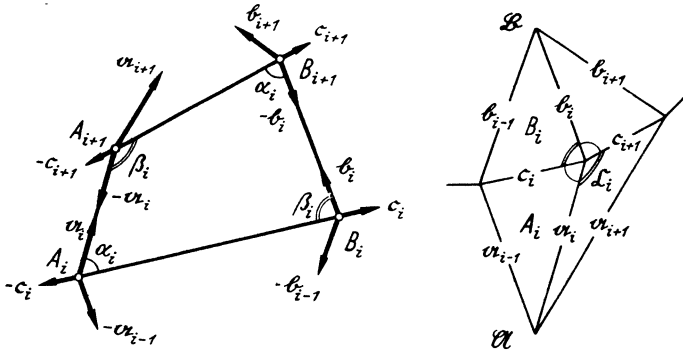


Fig. 1: Einzelmasche der Strickleiter und zugehöriger Ausschnitt des Kräfteplans.

Wir bezeichnen im i -ten Isogramm die bei A_i und B_{i+1} auftretenden Innenwinkel mit α_i , jene bei B_i und A_{i+1} mit β_i . Sie gehorchen der Beziehung ⁴⁾

$$(2) \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta_i}{2} = \cos \frac{\gamma + \psi}{2} : \cos \frac{\gamma - \psi}{2} = \text{const}$$

und ihre Summe ist $\leq 2\pi$. Dieselben Winkel stoßen in der dem Isogramm zugeordneten Ecke \mathfrak{C}_i des Kräfteplanes zusammen: Alle an der Basis der Doppelpyramide auftretenden *Vierkante* sind mithin *achsensymmetrisch*. Die längs der Kanten gemessenen Außenwinkel stimmen überdies mit den Schränk winkeln des Isogramms überein.

Satz 2. *Der zu einer im Gleichgewicht befindlichen Strickleiter gehörige Kräfteplan ist eine konvexe Doppelpyramide, deren Mäntel längs sämtlicher Kanten den gleichen Keilwinkel $\pi - \psi$ aufweisen und auch längs des Basispolygons unter einem konstanten Winkel $\pi - \gamma$ zusammenstoßen.*

4. Die Symmetrieachse des von \mathfrak{C}_i ausstrahlenden Vierkants halbiert den Winkel der Kanten a_i und b_i , fällt also mit der Normale des durch \mathfrak{C}_i gehenden *Drehellipsoids* Γ_i zusammen, das die Pyramiden spitzen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} zu Brennpunkten hat. Die Normale ist nun auf Grund der Fokaleigenschaften gemeinsame Hauptachse der ∞^1 Berührungskegel, die aus \mathfrak{C}_i an sämtliche durch die Brennpunkte \mathfrak{A} und

⁴⁾ Man berechne die Normalprojektion der Diagonale $A_i B_{i+1}$ auf die Symmetrale des Winkels $B_i A_i A_{i+1} = \alpha_i$ auf zwei Arten.

\mathfrak{B} bestimmten Flächen 2. Grades gehen. Die beiden, ebenfalls zu der Flächennormale symmetrischen Kanten c_i und c_{i+1} gehen durch Spiegelung an Γ_i auseinander hervor und sind gegenüberliegende Erzeugende auf einem der genannten Kegel: Sie berühren mithin beide ein gewisses Ellipsoid \mathcal{A}_i und ein gewisses Hyperboloid $\bar{\mathcal{A}}_i$ der durch die Brennpunkte \mathfrak{A} und \mathfrak{B} definierten konfokalen Schar. Zur nächsten Ecke \mathfrak{C}_{i+1} weiterschreitend, erkennen wir unmittelbar, daß $\mathcal{A}_{i+1} = \mathcal{A}_i$ und $\bar{\mathcal{A}}_{i+1} = \bar{\mathcal{A}}_i$: *Der Grundkantenzug c_1, c_2, \dots der Doppelpyramide ist mithin einem bestimmten Drehellipsoid \mathcal{A} und einem konfokalen Drehhyperboloid $\bar{\mathcal{A}}$ mit den Brennpunkten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ umschrieben.*

Es läßt sich nun weiter zeigen, daß auch sämtliche Ellipsoide Γ_i zusammenfallen. Zufolge (2) ist nämlich

$$(3) \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha_i}{2} : \operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha_2}{2} : \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2},$$

und der Korrespondenzsatz liefert über

$$\sin \frac{\alpha_1 - \beta_2}{2} : \sin \frac{\alpha_1 + \beta_2}{2} = \sin \frac{\alpha_2 - \beta_1}{2} : \sin \frac{\alpha_2 + \beta_1}{2}$$

nach passender Erweiterung

$$(4) \quad \frac{\sin \alpha_1 - \sin \beta_2}{\sin(\alpha_1 + \beta_2)} = \frac{\sin \alpha_2 - \sin \beta_1}{\sin(\alpha_2 + \beta_1)}.$$

Auf Grund des Sinussatzes in den Teildreiecken B_2 und A_2 haben wir dann mit $|a_i| = a_i$, $|b_i| = b_i$ und $|c_i| = c_i$

$$\frac{b_2 - b_1}{c_2} = \frac{a_1 - a_2}{c_2} \quad \text{oder} \quad a_2 + b_2 = a_1 + b_1,$$

also allgemein

$$(5) \quad a_i + b_i = \text{const.}$$

Der Grundkantenzug c_1, c_2, \dots der Doppelpyramide ist mithin einem bestimmten Drehellipsoid Γ mit den Brennpunkten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ eingeschrieben. Zusammenfassend gilt demnach

Satz 3. *Das Basispolygon der Doppelpyramide, die den Kräfteplan einer im Gleichgewicht befindlichen regelmäßigen Strickleiter darstellt, läßt sich als Weg eines Lichtstrahls auffassen, der an einem verlängerten Drehellipsoid, dessen Brennpunkte mit den Pyramiden-spitzen zusammenfallen, wiederholt reflektiert wird.*

Oder in der Sprache der Statik:

Satz 4. *Bei einer im Gleichgewicht befindlichen regelmäßigen Strickleiter ist sowohl die Vektorsumme als auch die Betragsumme gegenüberliegender Holmspannungen längs der ganzen Leiter konstant.*

Da sich die Gleichungen (2) bis (5) auch in der umgekehrten Reihenfolge entwickeln lassen, so gilt als Umkehrung der Sätze 2 und 3 der auch an sich bemerkenswerte

Satz 5. *Wird das Wegpolygon eines wiederholt an einem eiförmigen Drehellipsoid reflektierten Lichtstrahls aus den beiden Brennpunkten projiziert, so entstehen zwei Pyramiden mit durchwegs gleichen Keilwinkeln, die auch längs des Lichtpolygons unter einem konstanten Winkel zusammentreffen.*

Daß eine solche Doppelpyramide stets als Kräfteplan einer regelmäßigen Strickleiter angesehen werden kann, liegt auf der Hand. Verläuft das Grundpolygon übrigens ganz in der Äquatorebene ($\alpha_i = \beta_i = \text{const}$, $a_i = b_i = \text{const}$), dann bildet die zugehörige Leiterform das einleitend erwähnte *Wendelflächenmodell*.

5. Denken wir uns die in Satz 2 und 3 genannte Doppelpyramide unter Erhaltung ihrer Kantenlängen *verknickt* — was ja bei jeder offenen Doppelpyramide sicher möglich ist — so kommen die Basis-ecken \mathfrak{C}_i wegen (5) wiederum auf ein eiförmiges Drehellipsoid I' gleicher Hauptachsenlänge zu liegen, dessen Brennpunkte \mathfrak{A}' , \mathfrak{B}' durch die Neulagen der Pyramidenspitzen gegeben sind. Da die Seitenwinkel α_i , β_i der Basisvierkante unveränderlich sind, so bleiben die Vierkante ständig achsensymmetrisch. Die Symmetrieachsen hälften die Winkel der Brennstrahlpaare, sind also Normalen der Fläche I' , und der Grundkantenzug ist der Weg eines wiederholt an I' gespiegelten Lichtstrahls. Zuzufolge Satz 5 ist daher auch die neue Gestalt der Doppelpyramide der Kräfteplan einer regelmäßigen Strickleiter, allerdings nicht mehr der ursprünglichen.

Die Außenwinkel ψ , γ der Vierkante ändern sich gemäß der zu (2) äquivalenten Formel

$$(6) \quad \text{tg } \frac{\psi}{2} \cdot \text{tg } \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{\alpha_i + \beta_i}{2} : \cos \frac{\alpha_i - \beta_i}{2} = \text{const.}$$

Die Neuwerte ψ' , γ' lassen sich daher nach dem Vorgang von R. SAUER¹⁾ etwa mit Hilfe eines „*Knickparameters*“ λ darstellen durch

$$(7) \quad \text{tg } \frac{\psi'}{2} = \lambda \cdot \text{tg } \frac{\psi}{2}, \quad \text{tg } \frac{\gamma'}{2} = \lambda^{-1} \cdot \text{tg } \frac{\gamma}{2}.$$

Mit den Schränk winkeln ψ' und γ' ist dann aber auf Grund der BENNETT-Relation (1) auch das Abmessungsverhältnis der Leiter bekannt. Abgesehen von einem willkürlichen Maßstabsfaktor betragen die neuen Sprossenabstände und -längen dann

$$(8) \quad h' = \frac{h}{(1 + \lambda^2) + (1 - \lambda^2) \cos \psi}, \quad c' = \frac{c}{(1 + \lambda^2) - (1 - \lambda^2) \cos \gamma}.$$

6. Von besonderer Bedeutung ist die zu $\lambda = 0$ gehörige *platte Grenzform*: Hier erscheint die Doppelpyramide wegen $\psi' = 0$ und

$\gamma' = \pi$ vollständig in die Ebene ausgebreitet und das verebnete Basispolygon ist der Weg eines wiederholt an einer *Ellipse* reflektierten Lichtstrahls (Fig. 2). Diese einfach zu konstruierende Sonderform stellt das (doppelt überdeckte) *Netz* der Doppelpyramide dar und kann zur Herstellung eines verknickbaren Kartonmodells derselben dienen⁵⁾.

Satz 6. *Bei der Verebnung der Doppelpyramide aus Satz 2 und 3 geht das Basispolygon in ein ebenes Vieleck über, das einer Ellipse eingeschrieben und einer konfokalen Ellipse umgeschrieben ist. Die Verbindungen der Ecken mit dem einen oder anderen Brennpunkt entsprechen dabei den Mantellinien.*

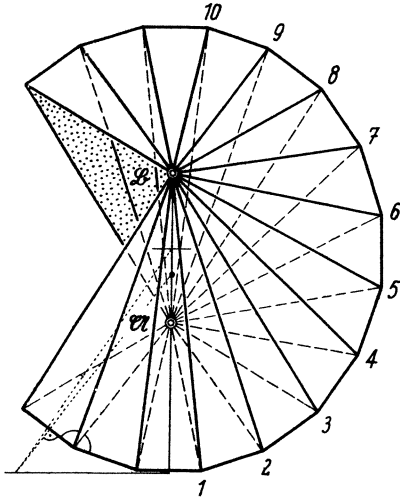


Fig. 2: Platte Grenzform als Netz der Doppelpyramide.

Es existiert übrigens noch eine zweite platte Knickform der Doppelpyramide, nämlich für $\lambda = \infty$ ($\psi'' = \pi$, $\gamma'' = 0$). Auch hier tritt ein einer Ellipse eingeschriebenes Reflexionspolygon auf, das jedoch einer konfokalen Hyperbel umschrieben ist und die Hauptachse im Zickzackwege fortwährend überschreitet. Diese Grenzlage ließe sich mit dem Kartonmodell nur nach Trennung der beiden Mäntel verwirklichen, indem man dann jeden Teil für sich „einwickelt“.

Zu den beiden platten Grenzformen der Kräftepyramide gehören natürlich auch *ebene Gleichgewichtslagen* der Strickleiter. Die Leitermaschen bilden dabei überschlagene Vierecke („Antiparallelogramme“), und zwar überkreuzen einander für $\lambda = 0$ die Sprossen ($h' < s'$), für $\lambda = \infty$ hingegen die Holme ($h'' > s''$).

Hervorgehoben sei schließlich noch, daß sich nunmehr auch ein Ausgangspunkt für eine bequeme *darstellend-geometrische Behandlung* des vorliegenden Fragenkreises bietet, denn aus der platten Grenzform läßt sich eine nicht ausgeartete Gestalt der Doppelpyramide unschwer rekonstruieren, und mit deren Hilfe ist dann auch die zugehörige Gleichgewichtsform der Strickleiter schrittweise zu entwickeln.

⁵⁾ Zur genauen Festlegung der meist schleifenden Schnitte des Lichtstrahls mit der Ellipse bediene man sich des konjugierten Durchmessers, der die betreffende Sehne halbiert. Er läßt sich mittels einer Scheiteltangente und des zugehörigen Krümmungsmittelpunktes schnell angeben, wenn man weiß, daß jedes aus zwei konjugierten Durchmessern und einer Scheiteltangente gebildete Dreieck seinen Höhenschnittpunkt im Scheitelkrümmungszentrum hat (vgl. Fig. 2).

Auf diese Weise entstand Fig. 3, die eine Abbildung in Grund- und Aufriß darstellt.

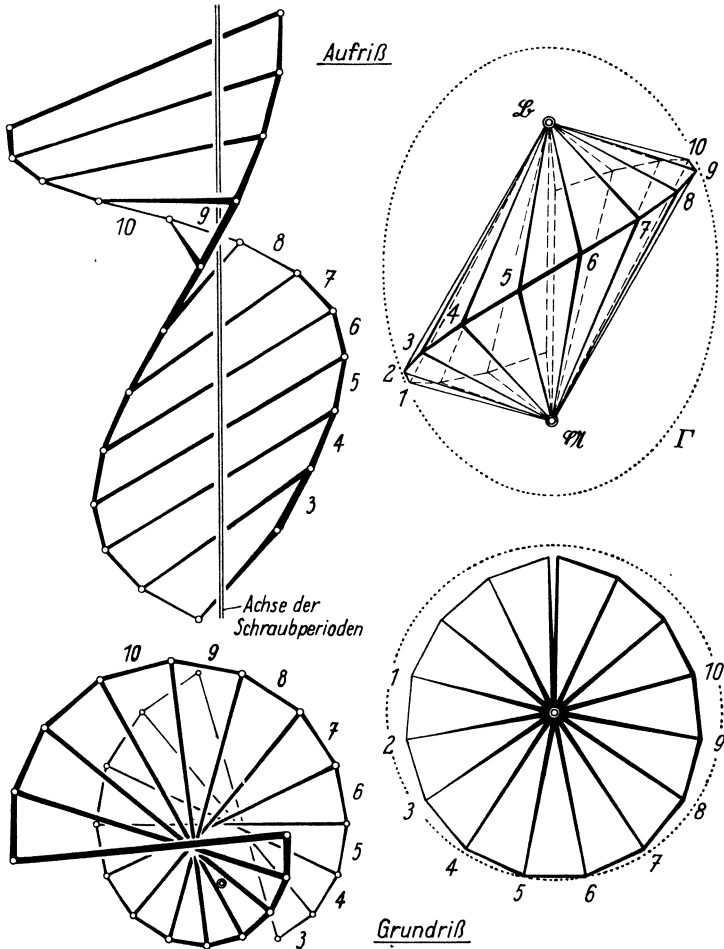


Fig. 3: Gleichgewichtslage einer (gewichtlosen) Strickleiter samt zugehöriger Kräftepyramide.

7. Abschließend vollziehen wir nunmehr — wie am Ende jeder differenzengeometrischen Untersuchung — den von vornherein beabsichtigten Grenzprozeß $h \rightarrow 0$, der bei festgehaltenem Schränkungswert (1) gleichzeitig $\psi \rightarrow 0$ bedingt. Wir gelangen damit zu einer „kontinuierlichen Strickleiter“ mit gekrümmten Holmen, bei welcher die Sprossen die Erzeugendenschar einer gewissen Strahlfläche (Regelfläche) Σ erfüllen. Da die Knotenebenen zu den Schmiegebenen der Holmkurven werden, so stellen letztere zwei im festen Abstände c ver-

laufende *Schmieglinien* (*Haupttangentenkurven*) der Fläche Σ dar; je zwei zusammengehörige Schmiegeebenen schließen den festen Winkel $-\gamma$ ein. Die beiden Holmkurven sind überdies durch *konstante Torsion* gleichen Wertes

$$(9) \quad \tau = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi}{h} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

ausgezeichnet. Sie bilden nach allem ein ganz spezielles jener Kurvenpaare fester Windung, wie sie bei der *BÄCKLUND-Transformation* der pseudosphärischen Flächen als Paare entsprechender Schmieglinien auftreten.

Da das Gemeinlot zweier Nachbarsprossen gegen die *Zentraltangente* der Strahlfläche Σ konvergiert, der *Zentralpunkt* aus Symmetriegründen in die Sprossenmitte zu liegen kommt und die Tangentialebenen in den Sprossenenden den Winkel $-\gamma$ einschließen, so besitzt die Sprossenfläche den *konstanten Drall*

$$(10) \quad p = -\frac{c}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

Die Doppelpyramide des Kräfteplans wird zu einem von den Brennpunkten eines verlängerten *Drehellipsoides* Γ ausstrahlenden *Doppelkegel*, dessen Basiskurve eine *geodätische Linie* g von Γ ist. Letzteres ist eine Folge der Achsensymmetrie der ursprünglichen Vierkante: Die Verbindungsebene aufeinanderfolgender Grundkanten wird zur Schmiegeebene von g und enthält schon vorher die mit der Symmetrieachse identische Flächennormale⁶⁾.

Zusammenfassend gilt also

Satz 7. *Die Sprossen einer kontinuierlichen, im Gleichgewicht befindlichen Strickleiter fester Breite bilden eine Strahlfläche konstanten Dralls, deren Striktionslinie die Sprossenmittten verbindet. Die Sprossen sind parallel zu den Tangenten einer gewissen geodätischen Linie auf einem eiförmigen Drehellipsoid. Die Holme der Leiter bilden ein BÄCKLUND-Paar zweier Kurven konstanter gleicher Torsion und sind Schmieglinien der Sprossenfläche. Ihre Tangentenrichtkegel werden von den Brennstrahlen des Ellipsoids erzeugt, die die Geodätische g treffen.*

Auf Grund des bekannten periodischen Verlaufs der geodätischen Linie g läßt sich auch eine gewisse *Periodizität der Strickleiter* vorhersagen. Die beiden Holmkurven werden im allgemeinen durch gewisse Schraubungen in sich bzw. ineinander transformiert. Im besonderen Fall der zu $\lambda = 0$ gehörigen ebenen Gleichgewichtsformen sind es Schiebungen.

⁶⁾ Einleuchtend wäre auch die Berufung auf das *FERMATSCHE* Prinzip, wonach das Licht im einheitlichen Medium den kürzesten Weg nimmt: Der das Basispolygon nach Satz 3 darstellende Weg des reflektierten Lichtstrahls verläuft ursprünglich zwischen zwei konfokalen Ellipsoiden Γ und Δ und wird mit $\Delta \rightarrow \Gamma$ zum kürzesten Weg auf Γ .

8. Die beiden Mäntel des vorhin besprochenen Doppelkegels stoßen nach Satz 5 längs ihrer Grundlinie g unter dem konstanten Winkel $\pi - \gamma$ zusammen, der an jeder Stelle durch die Schmiegeebene gehälftet wird: g ist mithin *pseudogeodätische Linie* auf jedem der Teilkegel, also eine „*bikonische Pseudogeodätische*“⁷⁾. Neu ist wohl auch der aus Satz 6 fließende

Satz 8. *Wird eine auf einer Drehfläche 2. Grades gezogene geodätische Linie aus einem Brennpunkt projiziert und der Projektionskegel verebnet, so geht sie in einen Kegelschnitt gleicher Hauptachsenlänge über, der die Kegelspitze zum Brennpunkt hat.*

Dieser Sachverhalt kann auch in der folgenden Form ausgesprochen werden:

Satz 9. *Rollt eine Drehfläche 2. Grades längs einer geodätischen Linie geradlinig auf einer Ebene fort, so beschreibt jeder Flächenbrennpunkt eine ebene Bahn, und zwar eine DELAUNAYSche Kurve in einer die Rollspur enthaltenden Ebene*⁸⁾.

9. Um zu den geodätischen Linien des *zweischaligen Hyperboloides* zu gelangen, hätte man Holmspannungen verschiedenen Vorzeichens zuzulassen, was natürlich nur zu *labilen* Gleichgewichtslagen führen würde. Übrigens taucht auch unter der bisherigen Voraussetzung bloßer Zugspannungen in beiden Holmen ein *Stabilitätsproblem* auf, wie ein Experiment mit dem Wendelflächenmodell ganz auffällig zeigt: Bei fortschreitender Verwindung, die die Höhe zwangsläufig verkleinert, erfolgt plötzlich ein Umschlagen in eine nahezu ebene Gleichgewichtsform, die keine Wendelfläche mehr repräsentiert.

Um zu den geodätischen Linien des *Drehparaboloides* zu gelangen, wären unendlich große Spannungen in einem der Holme zuzulassen, der unter ihrer Einwirkung eine vollkommen *geradlinige Gestalt* annehmen würde. Die zweite Holmkurve bleibt gekrümmt und ist als BÄCKLUND-Transformierte einer Geraden identisch mit der Schmiegeformenform einer jener speziellen Schraub- oder Drehflächen konstanter negativer Krümmung, die durch Verschraubung oder Drehung einer

⁷⁾ „*Pseudogeodätische Linien*“ nannte der Verfasser jene Flächenkurven, deren Schmiegeebenen gegen die Trägerfläche unter einem festen, jedoch nicht rechten Winkel geneigt sind. Von den *bikonischen Pseudogeodätischen* handelt die Arbeit: „Raumkurven, die pseudogeodätische Linien zweier Kegel sind“, Mh. Math. 54 (1950), 55–70. Daß sich unter diesen merkwürdigen Kurven auch die echten Geodätischen der Drehflächen 2. Grades finden, wurde schon früher gezeigt: „Über die Nyströmsche Strahlkongruenz und die geodätischen Linien der Flächen 2. Grades“, Soc. Sci. Fennica, Comm. phys. math. 15 (1950).

⁸⁾ Nach DELAUNAY werden bekanntlich die von den Brennpunkten eines auf einer Geraden rollenden Kegelschnittes beschriebenen Bahnkurven benannt. Im Falle der Parabel ergibt sich die Kettenlinie.

gemeinen Traktrix um die Asymptote entstehen. Diese Holmkurven lassen sich mittels hyperbolischer Funktionen noch elementar darstellen, während zur Beschreibung der allgemeinen Gleichgewichtslage der Strickleiter elliptische Integrale oder Funktionen notwendig wären, die bereits in die geodätischen Linien der zugehörigen Drehflächen 2. Grades (mit Mittelpunkt) eingehen.

(Eingegangen am 11. Juli 1951.)

Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren.

Von

Alexander Peyerimhoff in Tübingen.

Einleitung.

In seiner Arbeit „Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen“ gab I. SCHUR [20]¹⁾ ohne Beweis den folgenden Satz an:

Wenn k und l zwei gegebene, nicht negative ganze Zahlen sind, ist die Reihe $\sum_{\nu} a_{\nu} \varepsilon_{\nu}$ genau dann für alle C_k -summierbaren Reihen $\sum_{\nu} a_{\nu}$ ihrerseits C_l -summierbar, wenn die Folge $\{\varepsilon_{\nu}\}$ die Bedingungen

$$1^{\circ} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} |\Delta^{k+1} \varepsilon_n| < +\infty \quad \text{und} \quad 2^{\circ} \varepsilon_n = \begin{cases} O(n^{l-k}) & \text{für } l \leq k \\ O(1) & \text{für } l > k \end{cases}$$

erfüllt²⁾).

In der vorliegenden Arbeit soll die entsprechende Frage für zwei beliebige permanente Limitierungsverfahren A und B behandelt werden, also die Frage nach den genauen Bedingungen, die eine Folge $\{\varepsilon_{\nu}\}$ erfüllen muß, damit für jede A -summierbare Reihe $\sum a_{\nu}$ die Reihe $\sum a_{\nu} \varepsilon_{\nu}$ B -summierbar ist.

Wenn $\{\varepsilon_{\nu}\}$ eine Folge mit dieser Eigenschaft ist, sollen die ε_{ν} *Summierbarkeitsfaktoren* und speziell, wenn B konvergenzgleich ist, *Konvergenzfaktoren* genannt werden.

Gleichzeitig wollen wir die entsprechende Frage für Folgen $\{\varepsilon_{\nu}\}$ aufwerfen, die bewirken, daß für jede A -limitierbare Folge $\{s_{\nu}\}$ die Reihe $\sum s_{\nu} \varepsilon_{\nu}$ B -summierbar ist.

Zur Behandlung dieser Probleme werden Hilfsmittel der Funktionalanalysis herangezogen, durch die in § 3 eine notwendige Bedingung für die Summierbarkeitsfaktoren ε_{ν} aufgestellt wird, die wir kurz als Funktionalbedingung bezeichnen. In § 5 wird dann untersucht, in welchen Fällen diese Bedingung auch hinreichend ist. § 7 bringt Anwendungen auf die CESÁROschen Verfahren und auf die Verfahren bewichteter arithmetischer Mittel, nachdem in § 6 gezeigt ist, daß die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der allgemeinen Sätze auf diese Verfahren erfüllt sind. In den §§ 8 und 9 werden RIESZsche Ver-

¹⁾ Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

²⁾ Beweise (auch für nicht ganze k und l) haben L. S. BOSANQUET [6], [7], [8] und K. KNOPP [14] angegeben.

fahren behandelt. Ähnliche funktionalanalytische Methoden sind von K. ZELLER [22] in seiner Arbeit „Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren“ verwendet worden.

§ 1.

Bezeichnungen und Definitionen.

Alle im folgenden vorkommenden Matrizen sind von der Form $A = (a_{tv})$, wobei a_{tv} ³⁾ für alle t aus einer Zahlenmenge T mit einem Häufungspunkt t_0 ⁴⁾ und für $v = 0, 1, \dots$ erklärt ist. Wenn T aus den natürlichen Zahlen besteht (in diesem Falle ist $+\infty$ für t_0 einzusetzen), so nennen wir A eine gewöhnliche Matrix. Einer Zahlenfolge $a = \{a_v\}$ ⁵⁾ wird durch die Matrix $A = (a_{tv})$ die Funktion $A_t(a) = \sum_{v=0}^{\infty} a_{tv} a_v$ zugeordnet, vorausgesetzt, daß $\sum_{v=0}^{\infty} a_{tv} a_v$ für alle $t \in T$ konvergiert.

Die Matrix $A = (a_{tv})$ heißt FF-permanent, wenn $A_t(a)$ für alle konvergenten Folgen $a = \{a_v\}$ und alle $t \in T$ existiert, und wenn stets gilt:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} A_t(a) = \lim_{v \rightarrow \infty} a_v.$$

Die Matrix $A = (a_{tv})$ heißt RF-permanent, wenn $A_t(a)$ für alle Folgen $a = \{a_v\}$ mit konvergenter summatorischer Folge und alle $t \in T$ existiert, und wenn stets gilt:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} A_t(a) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v \text{ ⁶⁾ .}$$

Wenn im folgenden nur kurz von einer Matrix gesprochen wird, so ist darunter stets eine FF- bzw. RF-permanente Matrix zu verstehen.

Jeder FF-permanenten Matrix A ordnen wir zwei Wirkfelder zu. Das mit $A(f, c)$ bezeichnete Wirkfeld besteht aus den Folgen $a = \{a_v\}$, für die $A_t(a)$ für alle $t \in T$ und $\lim_{t \rightarrow t_0} A_t(a)$ existiert. Mit $A(f, n)$ bezeichnen wir die Teilmenge derjenigen Folgen $a = \{a_v\}$, für die $A_t(a)$ für alle $t \in T$ existiert und $\lim_{t \rightarrow t_0} A_t(a) = 0$ ist. f soll andeuten, daß A FF-per-

^{*)} Die a_{tv} sind reelle Zahlen. Wir wollen im folgenden unter Zahlen stets reelle Zahlen verstehen.

⁴⁾ t_0 darf auch $\pm \infty$ sein.

⁵⁾ Zahlenfolgen werden hier mit kleinen lat. Buchstaben bezeichnet.

⁶⁾ Eine Matrix $A = (a_{tv})$ kann nicht gleichzeitig FF- und RF-permanent sein. Für die FF-Permanenz ist notwendig, daß $\lim_{t \rightarrow t_0} a_{tv} = 0$ für $v = 0, 1, \dots$ gilt, während aus der RF-Permanenz die Bedingung $\lim_{t \rightarrow t_0} a_{tv} = 1$ für $v = 0, 1, \dots$ folgt.

manent ist, während durch c und n zum Ausdruck gebracht wird, daß $A_t(a)$ für $t \rightarrow t_0$ konvergiert bzw. gegen Null strebt.

Für RF-permanente Matrizen A besteht das mit $A(r, c)$ bezeichnete Wirkfeld aus der Gesamtheit aller Folgen $a = \{a_v\}$, für die $A_t(a)$ für alle $t \in T$ und $\lim A_t(a)$ existiert. r soll die RF-Permanenz von A andeuten.

Einem Limitierungsverfahren, das als Matrixverfahren aufgefaßt werden kann, ordnet man i. a. zwei Matrizen zu; die erste ist FF-permanent, die zweite RF-permanent. Die Unterscheidung zwischen FF- und RF-Permanenz ist für die folgenden Überlegungen wesentlich. Für eine Reihe spezieller Matrixverfahren sind nun feste Bezeichnungen im Gebrauch (C_k, H^k u. ä.). In den Symbolen für die Wirkfelder der zu diesen Verfahren gehörigen FF- bzw. RF-permanenten Matrizen wollen wir die folgenden Bezeichnungen verwenden:

V sei die für ein bestimmtes Verfahren übliche Bezeichnung. Unter $V(x, y)$ ($x = f$ oder r , $y = c$ oder n) ist dann folgendes zu verstehen: Man bildet mit der zum Verfahren V gehörigen Matrix A , die in der durch x angegebenen Form permanent ist ($x = f$: FF-Permanenz, $x = r$: RF-Permanenz), das Wirkfeld $A(x, y)$ und setzt $V(x, y) = A(x, y)$. In dieser Weise sind Ausdrücke wie $C_k(f, c)$, $H^k(r, c)$ usw. zu verstehen.

Wirkfelder können im Sinne der Funktionalanalysis als Vektorräume⁷⁾ aufgefaßt werden, wenn die Addition zweier Folgen und die Multiplikation einer Folge mit einer Zahl in natürlicher Weise erklärt wird.

Jedem Element $a = \{a_v\} \in A(f, c)$ wird durch die (FF-permanente) Matrix A als Bild eine Funktion $A_t(a)$ zugeordnet. Der Bildraum des Wirkfeldes $A(f, c)$ besteht aus den Funktionen $A_t(a)$ mit $a \in A(f, c)$. Wir wollen diesen Bildraum mit $A(A(f, c))$ und die Funktion $A_t(a)$, als Element des Bildraumes aufgefaßt, mit $A(a)$ bezeichnen. Ebenso sind die Bildräume $A(A(f, n))$ und $A(A(r, c))$ erklärt.

Wir werden in dieser ganzen Arbeit, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes vorausgesetzt wird, nur solche Matrizen betrachten, die die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

B₁) $A(A(f, c))$ bzw. $A(A(r, c))$ ist ein Vektorraum, wenn die Addition zweier Funktionen und die Multiplikation einer Funktion mit einer Zahl in natürlicher Weise erklärt wird. Dabei soll $A(a) = A(b)$ durch $A_t(a) = A_t(b)$ für alle $t \in T$ erklärt sein.

B₂) Aus $a \neq b$ folgt stets $A(a) \neq A(b)$.

B₃) Mit $\|A(a)\| = \overline{\text{fin}}_{t \in T} [A_t(a)]$ ist $A(A(f, c))$ bzw. $A(A(r, c))$ ein BANACH-

Raum.

Wenn $A(A(f, c))$ die Bedingungen B₁ und B₃ erfüllt, ist auch $A(A(f, n))$ mit der in $A(A(f, c))$ erklärten Norm ein normierter Vektorraum.

⁷⁾ S. BANACH [3], im folgenden kurz als BANACH zitiert, S. 26.

B_1, B_2 und B_3 sind insbesondere bei normalen Matrizen⁸⁾ erfüllt, denn der Raum s_c der konvergenten Folgen ist mit $\|x\| = \overline{\text{fin}} |x_n|$ für $x = \{x_n\} \in s_c$ ein BANACH-Raum⁹⁾.

Für $x = \{x_n\} \in s_c$ ist

$$f(x) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x_n \quad \text{mit} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| < +\infty$$

und beliebigem α ein lineares¹⁰⁾ Funktional in s_c und jedes lineare Funktional in s_c läßt sich so darstellen (Vgl. BANACH, S. 66—67.).

Der Raum s_n aller Nullfolgen ist mit der in s_c erklärten Norm ein BANACH-Raum. Die linearen Funktionale in s_c mit $\alpha = 0$ sind genau alle linearen Funktionale in s_n (Vgl. BANACH, Kap. 4, Satz 2, S. 55.).

Mit e bezeichnen wir die Folge, deren Glieder alle gleich 1 sind, und mit $e^{(n)}$ ($n = 0, 1, \dots$) die Folgen, deren n -tes Glied gleich 1 ist, während die anderen Glieder alle Null sind.

Einen normierten Folgenraum X mit der Eigenschaft:

Aus $x^{(n)} = \{x_v^{(n)}\} \in X$, $\|x^{(n)}\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ folgt $|x_v^{(n)}| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und jedes feste $v = 0, 1, \dots$, nennen wir einen Raum, in dem „gliedweise Konvergenz“ vorhanden ist.

§ 2.

Über Wirkfelder.

Für die Normierung der Wirkfelder benötigen wir das folgende Lemma 2. 1. Voraussetzung. X sei ein normierter Vektorraum und Y ein Vektorraum. $S(x)$ sei ein additiver, homogener und eindeutiger Operator, der X auf Y abbildet: $y = S(x)$.

Behauptung. Man erhält eine Norm in Y , wenn man für jedes $y \in Y$ als Norm die Norm des Urbildes x von y nimmt, also $\|y\| = \|x\|$ für $x = S^{-1}(y)$ setzt. Wenn X ein BANACH-Raum ist, so ist Y mit dieser Norm ebenfalls ein BANACH-Raum.

Die Behauptung ist fast selbstverständlich, wenn man beachtet, daß die Umkehrung $S^{-1}(y)$ von $S(x)$ wieder additiv und homogen ist.

Aus Lemma 2. 1 folgt unmittelbar der

Satz 2. 2. $A(f, c)$ bzw. $A(r, c)$ ist ein BANACH-Raum, wenn man für jedes $a \in A(f, c)$ bzw. $\in A(r, c)$

$$\|a\| = \overline{\text{fin}}_{t \in T} |A_t(a)|$$

setzt¹¹⁾.

⁸⁾ Das sind gewöhnliche Dreiecksmatrizen mit nicht verschwindenden Diagonalgliedern.

⁹⁾ Wenn A normal ist, ist $A(A(f, c)) = s_c$ bzw. $A(A(r, c)) = s_c$.

¹⁰⁾ Lineare Funktionale sind additive, homogene und stetige Funktionale.

¹¹⁾ Die Addition zweier Folgen und die Multiplikation einer Folge mit einer Zahl wird in natürlicher Weise erklärt.

Beweis. Die Matrix A kann als additiver, homogener und (wegen B_2) eindeutiger Operator $A(a)$ aufgefaßt werden. Wendet man Lemma 2.1 an, wobei für $S(x)$ der zu $A(a)$ inverse Operator $A^{-1}(a)$ einzusetzen ist, so folgt wegen B_1 und B_3 sofort die Behauptung.

Zusatz. Wegen $A(f, n) < A(f, c)$ ist der Raum $A(f, n)$ mit der in $A(f, c)$ erklärten Norm ein normierter Vektorraum.

Wirkfelder werden im folgenden stets so, wie in Satz 2.2 angegeben, normiert.

Lemma 2.3. *Voraussetzungen wie bei Lemma 2.1. Y sei nach Lemma 2.1 normiert. $f(x)$ sei ein lineares Funktional in X .*

Behauptung. *$h(y) = f(S^{-1}(y))$ ist ein lineares Funktional in Y , und jedes lineare Funktional in Y kann so dargestellt werden.*

Beweis. Es ist

$$|h(y)| \leq \|f\| \|S^{-1}(y)\| = \|f\| \|y\|^{12}.$$

Also ist $h(y)$ ein lineares Funktional in Y . Nun sei $h(y)$ ein beliebiges lineares Funktional in Y . Dann gilt

$$|h(S(x))| \leq \|h\| \|S(x)\| = \|h\| \|x\|.$$

Also ist $f(x) = h(S(x))$ ein lineares Funktional in X und damit

$$h(y) = f(S^{-1}(y)).$$

Wenn im Bildraum $A(A(f, c))$ bzw. $A(A(r, c))$ alle linearen Funktionale bekannt sind, dann können mit Hilfe von Lemma 2.3 alle linearen Funktionale im Wirkfeld $A(f, c)$ bzw. $A(r, c)$ angegeben werden.

Speziell für normale Matrizen gilt der

Satz 2.4. *Voraussetzung. A sei eine normale Matrix.*

Behauptung. *Im Raum $A(f, c)$ bzw. $A(r, c)$ ist*

$$f(a) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(a) + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A_n(a) \quad (a \in A(f, c) \text{ bzw. } \in A(r, c))$$

mit $\sum |\alpha_n| < +\infty$ und beliebigem α ein lineares Funktional und jedes lineare Funktional läßt sich so darstellen¹³⁾.

Beweis. In s_c kann man alle linearen Funktionale (§ 1) angeben. Lemma 2.3 liefert dann sofort die Behauptung.

Zusatz. Die linearen Funktionale in $A(f, c)$ mit $\alpha = 0$ sind genau alle linearen Funktionale in $A(f, n)$. Das folgt aus Lemma 2.3 mit den in § 1 angegebenen linearen Funktionalen in s_n .

Im folgenden § werden wir in den Wirkfeldern gliedweise Konvergenz benötigen. Bei gewöhnlichen Matrizen folgt die gliedweise Konvergenz im Wirkfeld aus B_2 und B_3 .

Satz 2.5. *Voraussetzung. A sei eine gewöhnliche Matrix.*

¹²⁾ $\|f\|$ ist die Norm des linearen Funktionals $f(x)$. Vgl. BANACH, S. 54.

¹³⁾ Vgl. auch K. ZELLER [22], Satz 5.2.

Behauptung. *Im Raume $A(f, c)$ bzw. $A(r, c)$ ist gliedweise Konvergenz vorhanden.*

Beweis. Wegen B_3 und B_4 gibt es in $A(A(f, c))$ bzw. $A(A(r, c))$ lineare Funktionale f_ν ($\nu = 0, 1, \dots$), so daß

$$a_\nu = f_\nu(A(a)) \quad (\nu = 0, 1, \dots)$$

für alle $a = \{a_\nu\} \in A(f, c)$ bzw. $\in A(r, c)$ gilt (BANACH, Kap. 3, Satz 10, S. 47.). Es sei $a^{(n)} = \{a_\nu^{(n)}\} \in A(f, c)$ ($n = 0, 1, \dots$) bzw. $\in A(r, c)$ und $\|a^{(n)}\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Dann gilt $\|A(a^{(n)})\| = \|a^{(n)}\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und deshalb $a_\nu^{(n)} = f_\nu(A(a^{(n)})) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und $\nu = 0, 1, \dots$. Das war aber nachzuweisen.

§ 3.

Die Funktionalbedingung.

In diesem § wird eine notwendige Bedingung für Summierbarkeitsfaktoren abgeleitet.

$B = (b_{\nu\sigma})$ bedeutet in diesem § stets eine RF-permanente Matrix, von der nicht gefordert wird, daß sie die Bedingungen B_1 , B_2 und B erfüllt.

Um unnötig komplizierte Formulierungen zu vermeiden, wollen wir die folgenden Bezeichnungen einführen:

Die ε_ν der Folge $\{\varepsilon_\nu\}$ heißen $(A, B)_r$ -Summierbarkeitsfaktoren, wenn für alle $\{a_\nu\} \in A(f, c)$ stets $\{a_\nu \varepsilon_\nu\} \in B(r, c)$ gilt.

Die ε_ν der Folge $\{\varepsilon_\nu\}$ heißen $(A, B)_r$ -Summierbarkeitsfaktoren, wenn für alle $\{a_\nu\} \in A(r, c)$ stets $\{a_\nu \varepsilon_\nu\} \in B(r, c)$ gilt¹⁴). In dem Spezialfall der Konvergenzgleichheit von B nennen wir die ε_ν $(A, C)_r$ - bzw. $(A, C)_r$ -Konvergenzfaktoren.

Lemma 3.1. Voraussetzung. X sei ein BANACH-Raum, Y sei ein normierter Vektorraum. Auf X sei eine Folge linearer Operatoren $S_n(x)$ mit $S_n(x) \in Y$ für jedes $x \in X$ ($n = 0, 1, \dots$) erklärt. Für jedes $x \in X$ soll $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$ existieren.

Behauptung. $S(x)$ ist ein linearer Operator.

Beweis. Dieser Satz ist ein Spezialfall von BANACH, Kap. 1, Satz 4, S. 23.

Lemma 3.2. Voraussetzung. X sei ein BANACHscher Folgenraum mit gliedweiser Konvergenz.

Behauptung. I. Für jede natürliche Zahl k und für jede fest gewählte Folge $\{\varepsilon_\nu\}$ ist

$$f_k(x) = \sum_{\nu=0}^k x_\nu \varepsilon_\nu \quad (x = \{x_\nu\} \in X)$$

ein lineares Funktional in X .

¹⁴) Der Index f bzw. r bezieht sich auf A . B ist in jedem Falle RF-permanent.

II. Wenn $f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} x_{\nu} \varepsilon_{\nu}$ für alle $x \in X$ konvergiert, dann ist $f(x)$ ein lineares Funktional in X ¹⁵⁾.

Beweis. I. Die Behauptung folgt unmittelbar aus der gliedweisen Konvergenz in X .

II. Es ist $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 3.1.

Satz 3.3. Voraussetzung. A sei eine Matrix, in deren Wirkungsfeld $A(f, c)$ bzw. $A(r, c)$ gliedweise Konvergenz vorhanden ist.

Behauptung. Damit die ε_{ν} ($\nu = 0, 1, \dots$) $(A, B)_f$ bzw. $(A, B)_r$ -Summierbarkeitsfaktoren sind, ist notwendig, daß es in $A(f, c)$ bzw. $A(r, c)$ ein lineares Funktional $f(a)$ gibt, so daß

$$(F): \quad \varepsilon_n = f(e^{(n)}) \quad \text{für } n = 0, 1, \dots$$

ist.

Beweis. Wenn die ε_{ν} $(A, B)_f$ -Summierbarkeitsfaktoren sind, existiert

$$B_t(a, \varepsilon) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (b_{t\nu} \varepsilon_{\nu}) a_{\nu} \quad \text{für jedes } t \in T \text{ und für alle } a = \{a_{\nu}\} \in A(f, c).$$

Nach Lemma 3.2 ist also $B_t(a, \varepsilon)$ für jedes $t \in T$ ein lineares Funktional in $A(f, c)$. $\lim_{t \rightarrow t_0} B_t(a, \varepsilon) = f(a)$ existiert für alle $a \in A(f, c)$ und ist nach

Lemma 3.1 ein lineares Funktional in $A(f, c)$. Mit $a = e^{(n)}$ folgt

$$f(e^{(n)}) = \lim_{t \rightarrow t_0} B_t(e^{(n)}, \varepsilon) = \lim_{t \rightarrow t_0} b_{tn} \varepsilon_n = \varepsilon_n,$$

da $\lim_{t \rightarrow t_0} b_{tn} = 1$ für $n = 0, 1, \dots$ ist.

In genau derselben Weise schließt man, wenn A RF-permanent ist.

Wir bezeichnen die Bedingung (F) als „Funktionalbedingung“.

Zusatz. Die Bedingung (F) hängt gar nicht von der Matrix B ab, insbesondere ergibt sich (F) als notwendige Bedingung für die Konvergenz

von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \varepsilon_{\nu}$ für alle $\{a_{\nu}\} \in A(f, c)$ bzw. $\in A(r, c)$, wenn man für B die

RF-permanente Matrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

wählt.

An Satz 3.3 anknüpfend können wir folgende Frage aufwerfen: Wenn die ε_{ν} ($\nu = 0, 1, \dots$) unter den Voraussetzungen von Satz 3.3 $(A, B)_f$ -Summierbarkeitsfaktoren sind, wenn es also in $A(f, c)$ ein lineares Funktional $f(a)$ mit $\varepsilon_n = f(e^{(n)})$ für $n = 0, 1, \dots$ gibt, ist dann $\lim_{t \rightarrow t_0} B_t(a, \varepsilon) = f(a)$ für alle $a \in A(f, c)$?

¹⁵⁾ Vgl. K. ZELLER [22], Satz 4.4.

Dieselbe Frage können wir für ein RF-permanentes A stellen.

Wir werden zeigen, daß diese Fragen für eine Klasse besonders wichtiger Matrizen, nämlich die perfekten Matrizen (Definition s. unten), positiv zu beantworten ist, für FF-permanente Matrizen allerdings mit folgender Einschränkung: Wenn man alle linearen Funktionale in $A(f, c)$ herausgreift, für die die Bedingung (F)¹⁶⁾ erfüllt ist, dann gibt es in dieser Gesamtheit eines — wir bezeichnen es mit $F(a)$ —, für das $\lim_{t \rightarrow t_0} B_t(a, \varepsilon) = F(a)$ für alle $a \in A(f, c)$ gilt.

Eine FF-permanente Matrix A , welche die Bedingungen B_1, B_2 und B_3 erfüllt, nennen wir perfekt, wenn die Folgen e und $e^{(n)}$ ($n = 0, 1, \dots$) in $A(f, c)$ eine Grundmenge¹⁷⁾ bilden.

Eine RF-permanente Matrix A , welche die Bedingungen B_2, B_3 und B_4 erfüllt, nennen wir perfekt, wenn die Folgen $e^{(n)}$ ($n = 0, 1, \dots$) in $A(r, c)$ eine Grundmenge bilden.

Zusatz. Bei BANACH, Kap. 5, S. 90, ist Perfektheit nur für gewöhnliche FF-permanente Matrizen mit $A(A(f, c)) = s_c$, die die Bedingung B_2 erfüllen, erklärt. Die dort angegebene Definition ist mit der hier genannten äquivalent (Vgl. Satz 4. 2.).

Nicht perfekte Matrizen sind aus verschiedenen Gründen als „pathologisch“ zu bezeichnen.

In dem folgenden Satz 3. 4 ist $\{\varepsilon_\nu\}$ eine Folge von $(A, B)_f$ -Summierbarkeitsfaktoren. Es gibt dann in $A(f, c)$ ein lineares Funktional $f(a)$ mit $\varepsilon_n = f(e^{(n)})$ für $n = 0, 1, \dots$. Es sei $g(a)$ ein lineares Funktional in $A(f, c)$ mit $g(e^{(n)}) = 0$ für $n = 0, 1, \dots$ und $g(e) = f(e) - \lim_{t \rightarrow t_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{t\nu} \varepsilon_\nu$ ¹⁸⁾.

Wenn A perfekt ist, gibt es genau ein derartiges lineares Funktional $g(a)$ in $A(f, c)$. Die Existenz folgt aus BANACH, S. 57, Lemma, wenn man — mit den dort verwendeten Bezeichnungen — für G den Raum $A(f, n)$ wählt. Die Eindeutigkeit folgt aus BANACH, Kap. 4, Satz 7, S. 58. Mit $F(a)$ bezeichnen wir das lineare Funktional $f(a) - g(a)$.

Satz 3. 4. Voraussetzung. Die Matrix A sei FF-permanent und perfekt. Die ε_ν seien $(A, B)_f$ -Summierbarkeitsfaktoren.

Behauptung. Für jedes $a = \{a_\nu\} \in A(f, c)$ ist

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{t\nu} a_\nu \varepsilon_\nu = F(a).$$

¹⁶⁾ Für eine bestimmte Folge $\{\varepsilon_\nu\}$ von Summierbarkeitsfaktoren.

¹⁷⁾ Die Menge \bar{X} bildet in dem normierten Raum X eine Grundmenge, wenn jedes Element von X durch Linearkombinationen aus Elementen von \bar{X} beliebig genau approximiert werden kann. Vgl. BANACH, S. 58. Grundmenge = ensemble fondamental.

¹⁸⁾ $\lim_{t \rightarrow t_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{t\nu} \varepsilon_\nu$ existiert, wenn die ε_ν $(A, B)_f$ -Summierbarkeitsfaktoren sind, da doch $e \in A(f, c)$ ist.

Beweis. $h(a) = F(a) - \lim_{t \rightarrow t_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{t\nu} a_{\nu} \varepsilon_{\nu}$ ist ein lineares Funktional in $A(f, c)$. Es ist $h(e^{(n)}) = \varepsilon_n - \varepsilon_n = 0$ für $n = 0, 1, \dots$ und

$$h(e) = f(e) - g(e) - \lim_{t \rightarrow t_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{t\nu} \varepsilon_{\nu} = 0.$$

$h(a)$ verschwindet auf einer Grundmenge des Raumes $A(f, c)$ und damit im ganzen Raum (BANACH, Kap. 4, Satz 7, S. 58.). Also ist $h(a) = 0$ für alle $a \in A(f, c)$.

Satz 3.5. Voraussetzung. Die Matrix A sei RF-permanent und perfekt. Die ε_{ν} seien $(A, B)_r$ -Summierbarkeitsfaktoren, so daß es also in $A(r, c)$ ein lineares Funktional $f(a)$ mit $\varepsilon_n = f(e^{(n)})$ für $n = 0, 1, \dots$ gibt.

Behauptung. Für jedes $a = \{a_{\nu}\} \in A(r, c)$ ist $\lim_{t \rightarrow t_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{t\nu} a_{\nu} \varepsilon_{\nu} = f(a)$.

Beweis. $h(a) = f(a) - \lim_{t \rightarrow t_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{t\nu} a_{\nu} \varepsilon_{\nu}$ ist ein lineares Funktional in $A(r, c)$ mit $h(e^{(n)}) = 0$ für $n = 0, 1, \dots$. Daraus schließt man ebenso wie bei Satz 3.4, daß $h(a)$ im ganzen Raum $A(r, c)$ verschwindet.

Die beiden folgenden Sätze sind Spezialisierungen der Sätze 3.3, 3.4 und 3.5 für normale Matrizen.

Satz 3.6. Voraussetzung. A sei eine normale Matrix.

Behauptung. Damit die ε_{ν} ($\nu = 0, 1, \dots$) $(A, B)_f$ - bzw. $(A, B)_r$ -Summierbarkeitsfaktoren sind, ist notwendig, daß es eine Folge $\{\alpha_n\}$ mit $\sum |\alpha_n| < +\infty$ und eine Zahl α gibt, so daß

$$\text{für } A(f, c): \quad (F_1) \quad \varepsilon_{\nu} = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} \quad (\nu = 0, 1, \dots),$$

$$\text{für } A(r, c): \quad (F_2) \quad \varepsilon_{\nu} = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} \quad (\nu = 0, 1, \dots)$$

ist.

Beweis. Die Voraussetzungen des Satzes 3.3 sind hier wegen Satz 2.5 erfüllt. Nach Satz 2.4 sind alle linearen Funktionale im Raume $A(f, c)$ bzw. $A(r, c)$ bekannt. Es ist $A_n(e^{(\nu)}) = a_{n\nu}$. Wenn die Matrix A FF-permanent ist, strebt $A_n(e^{(\nu)})$ gegen Null für $n \rightarrow \infty$ und jedes feste $\nu = 0, 1, \dots$. Wenn A dagegen RF-permanent ist, strebt $A_n(e^{(\nu)})$ gegen 1 für $n \rightarrow \infty$ und jedes feste $\nu = 0, 1, \dots$. Damit folgen aus (F) von Satz 3.3 die Bedingungen (F₁) und (F₂) unmittelbar.

Satz 3.7. Voraussetzung. Die FF-permanente Matrix A sei normal und perfekt. Die ε_{ν} ($\nu = 0, 1, \dots$) seien $(A, B)_f$ -Summierbarkeitsfaktoren, so daß es nach Satz 3.6 eine Folge $\{\alpha_n\}$ mit $\sum |\alpha_n| < +\infty$ gibt, für die

$$\varepsilon_{\nu} = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} \text{ ist.}$$

Behauptung. Für alle $a = \{a_\nu\} \in A(f, c)$ ist

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{t\nu} a_\nu \varepsilon_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A_n(a).$$

Beweis. Wir wenden Satz 3.4 an. Mit $f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A_n(a)$ ist $\varepsilon_n = f(e^{(n)})$ für $n = 0, 1, \dots$. Ferner ist

$$f(e) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sum_{\nu=0}^n a_{n\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu \quad (19).$$

Aus der Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu$ folgt $\lim_{t \rightarrow t_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{t\nu} \varepsilon_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu$. Das Funktional $g(a) = 0$ für alle $a \in A(f, c)$ erfüllt die Bedingungen des Satzes 3.4. Damit folgt $F(a) = f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A_n(a)$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Satz 3.8. Voraussetzung. Die RF-permanente Matrix A sei normal und perfekt. Die ε_ν ($\nu = 0, 1, \dots$) seien $(A, B)_r$ -Summierbarkeitsfaktoren, so daß es nach Satz 3.6 eine Folge $\{\alpha_n\}$ mit $\sum |\alpha_n| < +\infty$ und eine Zahl α gibt, für die $\varepsilon_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu}$ für $\nu = 0, 1, \dots$ ist.

Behauptung. Für alle $a = \{a_\nu\} \in A(r, c)$ ist

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{t\nu} a_\nu \varepsilon_\nu = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(a) + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A_n(a).$$

Beweis. Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 3.5.

§ 4.

Perfektheit.

Wir wollen in diesem § eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Perfektheit einer Matrix angeben und daraus hinreichende Bedingungen für Perfektheit ableiten.

Lemma 4.1. I. Die FF-permanente Matrix A ist genau dann perfekt, wenn jedes lineare Funktional $f(a)$ aus $A(f, c)$, für das $f(e^{(n)}) = 0$ ($n = 0, 1, \dots$) und $f(e) = 0$ gilt, im ganzen Raum $A(f, c)$ verschwindet.

II. Die RF-permanente Matrix A ist genau dann perfekt, wenn jedes lineare Funktional $f(a)$ aus $A(r, c)$, für das $f(e^{(n)}) = 0$ ($n = 0, 1, \dots$) gilt, im ganzen Raum $A(r, c)$ verschwindet.

Beweis. BANACH, Kap. 4, Satz 7, S. 58.

Die beiden folgenden Sätze 4.2 und 4.3 sind Spezialfälle dieses Lemmas.

¹⁹⁾ Die Vertauschung der Summation ist wegen $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^n |a_{n\nu}| < +\infty$ erlaubt.

Satz 4.2. Voraussetzung. *A* sei eine FF-permanente, normale Matrix.

Behauptung. *A* ist genau dann perfekt, wenn die Bedingungen

$$\sum |\alpha_n| < +\infty \quad \text{und} \quad \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} = 0 \quad (\nu = 0, 1, \dots)$$

stets $\alpha_n = 0$ ($n = 0, 1, \dots$) nach sich ziehen.

Beweis. Wir wenden das Lemma 4.1 auf den hier vorliegenden Spezialfall an. In $A(f, c)$ sind alle linearen Funktionale nach Satz 2.4 bekannt. Nach Lemma 4.1 ist *A* genau dann perfekt, wenn aus

$$\sum |\alpha_n| < +\infty \quad \text{und} \quad \alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sum_{\nu=0}^n a_{n\nu} = 0, \quad \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} = 0 \quad (\nu = 0, 1, \dots)$$

folgt, daß $\alpha = 0$ und $\alpha_n = 0$ ($n = 0, 1, \dots$) ist. Diese Bedingung ist aber mit der in der Behauptung angegebenen gleichwertig, denn aus $\sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} = 0$ ($\nu = 0, 1, \dots$) folgt wegen $\alpha = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu}$, daß $\alpha = 0$ ist.

Satz 4.2 wurde (in etwas anderem Zusammenhang) von S. MAZUR [17], S. 48—50, bewiesen. MAZUR beweist dort mit Hilfe dieses Satzes die Perfektheit der zu den CESÄROSCHEN- und zum EULERSCHEN Verfahren gehörigen FF-permanenten Matrizen.

Satz 4.3. Voraussetzung. *A* sei eine RF-permanente, normale Matrix.

Behauptung. *A* ist genau dann perfekt, wenn die Bedingungen

$$\sum |\alpha_n| < +\infty \quad \text{und} \quad \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} = 0 \quad (\nu = 0, 1, \dots)$$

stets $\alpha_n = 0$ ($n = 0, 1, \dots$) nach sich ziehen.

Beweis. Aus Lemma 4.1 folgt wie beim Beweis von Satz 4.2, daß *A* genau dann perfekt ist, wenn aus

$$\sum |\alpha_n| < +\infty \quad \text{und} \quad (*) \quad \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} = 0$$

für $\nu = 0, 1, \dots$ folgt, daß $\alpha = 0$ und $\alpha_n = 0$ für $n = 0, 1, \dots$ ist. Aus (*) folgt, da wegen der RF-Permanenz von *A* eine Zahl *M* mit $|a_{n\nu}| \leq M$ existiert, daß $|\alpha| \leq M \sum_{n=\nu}^{\infty} |\alpha_n| = o(1)$, also $\alpha = 0$ ist. Damit folgt die angegebene Bedingung.

Satz 4.4. Voraussetzung. *A* sei eine FF-permanente, normale Matrix.

Behauptung. *A* ist sicher perfekt, wenn die zu *A* inverse Matrix $\bar{A} = (\bar{a}_{n\nu})$ beschränkte Spalten besitzt.

Beweis. Wir wenden Satz 4.2 an. Es sei also $\sum |\alpha_n| < +\infty$ und $\sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} = 0$ für $\nu = 0, 1, \dots$. Dann ist

$$0 = \sum_{\nu=m}^{\infty} \bar{a}_{\nu m} \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} = \sum_{n=m}^{\infty} \alpha_n \sum_{\nu=m}^n a_{n\nu} \bar{a}_{\nu m} = \alpha_m,$$

da auf Grund der Voraussetzungen für jedes m

$$\sum_{n=m}^{\infty} |\alpha_n| \sum_{\nu=m}^n |a_{n\nu}| |\bar{a}_{\nu m}| < +\infty$$

ist.

Satz 4.5. Voraussetzung. A sei eine RF-permanente, normale Matrix.

Behauptung. A ist sicher perfekt, wenn für die zu A inverse Matrix $\bar{A} = (\bar{a}_{\nu\mu})$ gilt:

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} |\bar{a}_{n\nu}| < +\infty \quad \text{für } \nu = 0, 1, \dots$$

Beweis entsprechend wie bei Satz 4.4.

Mit Hilfe der Sätze 4.4 und 4.5 weist man leicht nach, daß die zum C_k -Verfahren ($k > 0$) gehörenden FF- und RF-permanenten Matrizen perfekt sind. (S. MAZUR [17], vgl. auch J. P. HILL [12].)

§ 5.

Abschnittskonvergenz.

Wir werden in diesem § untersuchen, bei welchen FF-permanenten Matrizen die Bedingung (F) aus Satz 3.3 für die Existenz von

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{t\nu} a_{\nu} \varepsilon_{\nu}$$

hinreichend ist. $B = (b_{t\nu})$ ist in diesem § eine RF-permanente Matrix, von der wir nicht voraussetzen, daß sie die Bedingungen B_1, B_2 und B_3 erfüllt.

Definition. Einen normierten Folgenraum X , in dem für jedes $x \in X$ gilt:

$$x^{(k)} = \sum_{\nu=0}^k x_{\nu} e^{(\nu)} \rightarrow x = \{x_{\nu}\} \quad \text{für } k \rightarrow \infty,$$

nennen wir einen Raum, in dem Abschnittskonvergenz (AK) vorhanden ist.

Wenn für jedes in X erklärte lineare Funktional $f(x)$ und für jedes $x \in X$ gilt: $f(x^{(k)} - x) \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$, nennen wir X einen Raum, in dem schwache Abschnittskonvergenz (SAK) vorhanden ist.

Bemerkung. Wenn in X AK vorhanden ist, dann ist wegen $|f(x^{(k)} - x)| \leq \|f\| \|x^{(k)} - x\|$ auch SAK in X vorhanden.

Man überzeugt sich leicht, daß im Raum s_n (Nullfolgen) AK und damit SAK, im Raum s_c dagegen keine SAK vorhanden ist.

Satz 5.1. Voraussetzung. Die Matrix A sei FF-permanent und in $A(f, c)$ sei gliedweise Konvergenz, in $A(f, n)$ SAK vorhanden.

Behauptung. $\lim_{t \rightarrow t_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{t\nu} a_\nu \varepsilon_\nu$ existiert genau dann für alle $a = \{a_\nu\} \in A(f, c)$, wenn es in $A(f, c)$ ein lineares Funktional $f(a)$ gibt, so daß

$$(F): \quad \varepsilon_n = f(e^{(n)}) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

ist.

Beweis. Die Bedingung (F) ist nach Satz 3.3 notwendig. Es sei nun $a = \{a_\nu\} \in A(f, n)$. Dann folgt aus (F), daß

$$\sum_{\nu=0}^n a_\nu \varepsilon_\nu = \sum_{\nu=0}^n a_\nu f(e^{(\nu)}) = f\left(\sum_{\nu=0}^n a_\nu e^{(\nu)}\right) \rightarrow f(a),$$

weil im Raum $A(f, n)$ SAK vorhanden ist. $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ konvergiert also für alle $\{a_\nu\} \in A(f, n)$. Da $A(f, n)$ alle Nullfolgen enthält, konvergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty} n_\nu \varepsilon_\nu$ für jede Nullfolge $\{n_\nu\}$. Also muß $\sum |\varepsilon_\nu| < +\infty$ sein. Daraus folgt aber, daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ für alle $a = \{a_\nu\} \in A(f, c)$ konvergiert. Natürlich ist dann $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ auch B-summierbar (Vgl. den Zusatz zu Satz 3.3).

Wir wollen nun feststellen, wie eine normale, FF-permanente Matrix A beschaffen sein muß, damit in $A(f, n)$ SAK vorhanden ist.

Satz 5.2. Voraussetzung. Die Matrix A sei FF-permanent und normal.

Behauptung. In $A(f, n)$ ist genau dann SAK vorhanden, wenn es ein für alle $a \in A(f, n)$ erklärtes Funktional $M(a)$ mit $0 \leq M(a) < +\infty$ gibt, so daß für alle n und k ($n > k$)

$$\left| \sum_{\nu=0}^k a_{n\nu} a_\nu \right| \leq M(a) \quad (a = \{a_\nu\} \in A(f, n))$$

ist²⁰⁾.

Beweis. In $A(f, n)$ ist $f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A_n(a)$ mit $\sum |\alpha_n| < \infty$ ein lineares Funktional und jedes lineare Funktional in $A(f, n)$ kann so dargestellt werden (Vgl. den Zusatz zu Satz 2.4.). In $A(f, n)$ ist also genau dann SAK vorhanden, wenn für alle $a = \{a_\nu\} \in A(f, n)$ gilt, daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A_n(a^{(k)} - a) \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty,$$

wie auch $\{\alpha_n\}$ mit $\sum |\alpha_n| < +\infty$ gewählt sei.

²⁰⁾ Vgl. auch K. ZELLER [21].

Für jedes feste k ist $\{A_n(a^{(k)} - a)\}$ eine Folge aus s_n . Also ist in $A(f, n)$ genau dann SAK vorhanden, wenn die Folgen $\{A_n(a^{(k)} - a)\}$ ($k = 0, 1, \dots$) in s_n schwach gegen Null, oder wenn die Folgen $\{A_n(a^{(k)})\}$ ($k = 0, 1, \dots$) für $k \rightarrow \infty$ schwach gegen $\{A_n(a)\}$ streben.

Bei BANACH, Kap. 9, S. 136, sind die genauen Bedingungen für schwache Konvergenz in s_c angegeben. Eine kleine Abänderung des dortigen Beweises lehrt, daß für $x^{(n)} = \{\xi_i^{(n)}\} \in s_n$ und $x = \{\xi_i\} \in s_n$ genau dann $x^{(n)}$ in s_n schwach gegen x strebt, wenn

$$1^0 \quad \|x^{(n)}\| \leq M \quad \text{und} \quad 2^0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_i^{(n)} = \xi_i \quad (i = 0, 1, \dots)$$

gilt. Für die Folgen $\{A_n(a^{(k)})\}$ ($k = 0, 1, \dots$) bedeutet dies:

$$1^0 \quad \|A_n(a^{(k)})\| = \overline{\text{fin}} \left| \sum_{\nu=0}^k a_{n\nu} a_\nu \right| \leq M \quad (a_{n\nu} = 0 \text{ für } \nu > n),$$

$$2^0 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A_n(a^{(k)}) = A_n(a).$$

1^0 ist aber gleichbedeutend mit $\overline{\text{fin}} \left| \sum_{\nu=0}^k a_{n\nu} a_\nu \right| \leq M$, da $\sum_{\nu=0}^n a_{n\nu} a_\nu \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gilt. 2^0 ist von selbst erfüllt.

Zusatz. In Satz 5.2 kann man stets für $M(a)$ das Funktional $K \|a\|$ (mit passendem $K \geq 0$) einsetzen. $\sum_{\nu=0}^k a_{n\nu} a_\nu$ ist doch nach Lemma 3.2 für jedes Zahlenpaar n, k ein lineares Funktional $f_{n,k}(a)$ in $A(f, n)$. Aus $|f_{n,k}(a)| \leq M(a)$ folgt aber, daß es eine Zahl $K \geq 0$ mit $\|f_{n,k}\| \leq K$ für alle n und k gibt (BANACH, Kap. 5, Satz 5, S. 80.). Dann ist also $|f_{n,k}(a)| \leq K \|a\| = K \overline{\text{fin}} \left| \sum_{\nu=0}^n a_{n\nu} a_\nu \right|$.

Für normale FF-permanente Matrizen folgt aus Satz 5.1 der

Satz 5.3. Voraussetzung. Die Matrix A sei FF-permanent und normal. In $A(f, n)$ sei SAK vorhanden.

Behauptung. $\lim_{t \rightarrow t_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{t\nu} a_\nu \varepsilon_\nu$ existiert genau dann für alle $a \in A(f, c)$, wenn es eine Folge $\{\alpha_n\}$ mit $\sum |\alpha_n| < +\infty$ gibt, so daß

$$(F_1): \quad \varepsilon_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} \quad (\nu = 0, 1, \dots)$$

ist.

Beweis. Die Voraussetzungen von Satz 5.1 sind wegen Satz 2.5 erfüllt. Die Bedingung (F) folgt aus (F) von Satz 5.1 ebenso wie (F₁) von Satz 3.6 aus (F) von Satz 3.3.

Satz 5.4. Voraussetzung. Die Matrix A sei FF-permanent. In $A(f, n)$ sei SAK vorhanden.

Behauptung. A ist perfekt.

Beweis. Es sei $a \in A(f, c)$ und $\lim_{t \rightarrow t_0} A_t(a) = \xi$. Die Folge

$$\xi e + \sum_{n=0}^k (a_n - \xi) e^{(n)}$$

strebt schwach gegen a , da in $A(f, n)$ SAK vorhanden ist. Daraus folgt die Behauptung nach BANACH, Kap. 9, Satz 2, S. 134.

Bei RF-permanenten Matrizen A ist die Bedingung (F) aus Satz 3.3 i. a. für die Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \varepsilon_{\nu}$ nicht hinreichend. Es gilt der

Satz 5.5. Voraussetzung. Die Matrix A sei RF-permanent und nicht konvergenzgleich.

Behauptung. Es gibt in $A(r, c)$ ein lineares Funktional $f(a)$, so daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \varepsilon_{\nu}$ mit $\varepsilon_n = f(e^{(n)})$ ($n = 0, 1, \dots$) nicht für alle $\{a_{\nu}\} \in A(r, c)$ konvergiert.

Beweis. $f(a) = \lim_{t \rightarrow t_0} A_t(a)$ ist ein lineares Funktional in $A(r, c)$ mit $f(e^{(n)}) = 1$ für $n = 0, 1, \dots$; $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$ konvergiert aber nicht für alle $\{a_{\nu}\} \in A(r, c)$, da A nicht konvergenzgleich ist.

Um notwendige und hinreichende Bedingungen für $(A, C)_r$ -Konvergenzfaktoren zu erhalten, müssen wir also zusätzlich zu (F) noch weitere notwendige Bedingungen einführen.

Zuvor sei noch angemerkt: Wenn $A = (a_{\nu\mu})$ eine normale, RF-permanente Matrix ist, dann ist $\hat{A} = (\hat{a}_{\nu\mu})$ mit $\hat{a}_{\nu\mu} = a_{\nu\mu} - a_{\nu\mu+1}$ ($a_{\nu\nu} = 0$ für $\nu > n$) eine normale, FF-permanente Matrix.

Satz 5.6. Voraussetzung. A sei eine normale, RF-permanente Matrix. In $\hat{A}(f, n)$ sei SAK vorhanden.

Behauptung. $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \varepsilon_{\nu}$ konvergiert genau dann für alle $\{a_{\nu}\} \in A(r, c)$, wenn es eine Folge $\{\alpha_n\}$ mit $\sum |\alpha_n| < +\infty$ und eine Zahl α gibt, so daß

$$(F_2): \quad \varepsilon_{\nu} = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} \quad (\nu = 0, 1, \dots)$$

ist, und wenn

$$(G_1): \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \left(\sum_{\nu=0}^n a_{\nu} \right)$$

für alle $\{a_{\nu}\} \in A(r, c)$ existiert.

Beweis. Die Bedingung (F) ist nach Satz 3.6 für die Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \varepsilon_{\nu}$ notwendig. Mit $s_n = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu}$ ist nun

$$\sum_{\nu=0}^n a_{\nu} \varepsilon_{\nu} = s_n \varepsilon_n + \sum_{\nu=0}^{n-1} s_{\nu} \Delta \varepsilon_{\nu} = I + II.$$

Es ist $\mathcal{A} \varepsilon_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \hat{a}_{n\nu}$. Ferner ist $\{s_\nu\} \in \hat{A}(f, c)$ und in $\hat{A}(f, n)$ ist SAK vorhanden. Nach Satz 5.3 konvergiert II für $n \rightarrow \infty$. $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ konvergiert also genau dann für alle $\{a_\nu\} \in A(r, c)$, wenn I für $n \rightarrow \infty$ konvergiert. Daraus folgt aber gerade die Bedingung (G_1) .

Zusatz. Wenn für die Folgen $\{s_n\}$ des Wirkfeldes $\hat{A}(f, c)$ eine genaue Größenbeschränkung der Form $o(f(n))$ ($f(n)$ unbeschränkt und monoton wachsend) vorhanden ist, wenn also für alle $\{s_n\} \in \hat{A}(f, c)$ $s_n = o(f(n))$ erfüllt, aber für keine unbeschränkte Folge $\{\lambda_n\}$ $s_n = o\left(\frac{f(n)}{\lambda_n}\right)$ für alle $\{s_n\} \in \hat{A}(f, c)$ richtig ist, so ist die Bedingung (G_1) von Satz 5.6 mit (G) : $\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{f(n)}\right)$ gleichbedeutend. Aus (G) folgt zunächst (G_1) unmittelbar. Wenn (G) nicht erfüllt ist, wenn also $\varepsilon_n = \frac{\mu_n}{f(n)}$ mit unbeschränktem μ_n gilt, dann ist auch (G_1) nicht erfüllt, denn es gibt dann eine Folge $\{s_n\} \in \hat{A}(f, c)$ mit $s_n = \frac{f(n)}{\bar{\mu}_n}$, wobei $|\bar{\mu}_n| \leq \sqrt{|\mu_n|} + 1$ ist, so daß also $|s_n \varepsilon_n| = \left|\frac{\mu_n}{\bar{\mu}_n}\right|$ unbeschränkt ist.

Auf diese Weise kann man ganz allgemein eine notwendige Konvergenzbedingung — wir nennen sie *Größenordnungsbedingung* — erhalten. Wenn in $A(f, c)$ bzw. $A(r, c)$ eine genaue Größenbeschränkung der Form $o(f(n))$ vorhanden ist, so ist zur Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ für alle $\{a_\nu\} \in A(f, c)$ bzw. $\in A(r, c)$ die Bedingung (G) : $\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{f(n)}\right)$ notwendig. Aus der Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ folgt nämlich, daß $a_n \varepsilon_n = o(1)$ ist und daraus folgt (G) .

Wenn in $B(r, c)$ eine genaue Größenbeschränkung der Form $o(g(n))$ vorhanden ist, dann erkennt man ebenso, daß für die B -Summierbarkeit der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ die Bedingung (G) : $\varepsilon_n = O\left(\frac{g(n)}{f(n)}\right)$ notwendig ist.

§ 6.

Wirkfelder mit schwacher Abschnittskonvergenz.

In diesem § werden wir für einige bekannte Wirkfelder die SAK mit Hilfe des Satzes 5.2 nachweisen.

Satz 6.1. $C_k(f, n)$ ist für jedes k mit $0 \leq k \leq 1$ ein Raum mit SAK ²¹⁾.

²¹⁾ C_k bedeutet hier das CESAROSCHE Limitierungsverfahren.

Beweis. Die k -te summatorische Folge einer Folge $a = \{a_\nu\}$ bezeichnen wir mit $\{S_n^k(a)\}$, wobei $S_n^k(a) = \sum_{\nu=0}^n \binom{-\nu+k-1}{n-\nu} a_\nu$ ist. Für jedes k mit $0 \leq k \leq 1$ und jedes $m \leq n$ gilt nun

$$\left| \sum_{\nu=0}^m \binom{n-\nu+k-1}{n-\nu} a_\nu \right| \leq \text{Max}_{0 \leq \mu \leq m} |S_\mu^k(a)|$$

nach L. S. BOSANQUET [8], Lemma 5, S. 484. (Vgl. auch BOSANQUET [4]). Daraus folgt nun

$$\left| \sum_{\nu=0}^m \frac{\binom{n-\nu+k-1}{n-\nu}}{\binom{n+k}{n}} a_\nu \right| \leq \frac{\binom{m+k}{m}}{\binom{n+k}{n}} \cdot \text{Max}_{0 \leq \mu \leq m} \left| \frac{S_\mu^k(a)}{\binom{m+k}{\mu}} \right| \leq \frac{1}{\mu} \left| \frac{S_\mu^k(a)}{\binom{m+k}{\mu}} \right| < \infty$$

für alle $\{a_\nu\} \in C_k(f, n)$ und somit nach Satz 5. 2 die SAK in $C_k(f, n)$.

Wir werden im folgenden § sehen, daß in $C_k(f, n)$ für $k > 1$ keine SAK vorhanden ist.

$\{p_\nu\}$ ($p_\nu \neq 0$, $\nu = 0, 1, \dots$) sei eine Zahlenfolge, für deren summatorische Folge $\{P_n\}$ gilt: $|P_n| \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ und $\sum_{\nu=0}^n |p_\nu| \leq K |P_n|$. Dann ist die Matrix $P = (p_{n\nu})$ mit

$$p_{n\nu} = \begin{cases} \frac{p_\nu}{P_n} & \nu \leq n \\ 0 & \nu > n \end{cases} \text{ FF-permanent.}$$

(Matrixverfahren bewichteter arithmetischer Mittel.)

Satz 6.2. In $P(f, n)$ ist SAK vorhanden.

Beweis. Es sei $\sigma_k(a) = \frac{1}{P_k} \sum_{\nu=0}^k p_\nu a_\nu$. Dann gilt für alle natürlichen Zahlen k und n ($k < n$) die Ungleichung

$$\left| \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=0}^k p_\nu a_\nu \right| = \left| \frac{P_k}{P_n} \right| |\sigma_k(a)| \leq K \frac{\sum_{\nu=0}^k |p_\nu|}{\sum_{\nu=0}^n |p_\nu|} |\sigma_k(a)| \leq K |\sigma_k(a)|.$$

Aus Satz 5.2 folgt dann die Behauptung.

§ 7.

Einige Anwendungen.

$B = (b_{\nu\mu})$ bedeutet in diesem § eine RF-permanente Matrix, von der wir nicht voraussetzen, daß sie die Bedingungen B_1 , B_2 und B_3 erfüllt.

Definition. $\{x_n\}$ sei eine Zahlenfolge und k sei eine reelle Zahl. Wenn $\sum_{n=\nu}^{\infty} \binom{n-\nu-k-1}{n-\nu} x_n$ konvergiert, so wird im folgenden für diese Summe das Symbol $\Delta^k x_\nu$ verwendet.

Lemma 7.1. Wenn $\varepsilon_n = O(1)$ ist, so existieren $\mathcal{A}^{\alpha+\beta} \varepsilon_n$ und $\mathcal{A}^\beta (\mathcal{A}^\alpha \varepsilon_n)$ für alle Zahlen $\alpha > 0$, $\beta > -1$, $\alpha + \beta > 0$ und sind einander gleich.

Beweis. A. F. ANDERSEN [1], [2] und L. S. BOSANQUET [5].

Lemma 7.2. Wenn $\varepsilon_n = o(1)$ ist, so existieren $\mathcal{A}^{\alpha+\beta} \varepsilon_n$ und $\mathcal{A}^\beta (\mathcal{A}^\alpha \varepsilon_n)$ für alle Zahlen $\alpha \geq 0$, $\beta \geq -1$, $\alpha + \beta \geq 0$ und sind einander gleich.

Beweis. A. F. ANDERSEN [1], [2] und L. S. BOSANQUET [5].

Satz 7.3. k sei reell und $0 \leq k \leq 1$. $\lim_{t \rightarrow t_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu a_\nu \varepsilon_\nu$ existiert genau dann für alle $\{a_\nu\} \in C_k(f, c)$, wenn es eine Folge $\{\alpha_n\}$ mit $\sum |\alpha_n| < +\infty$ gibt, so daß

$$(F_1): \quad \varepsilon_\nu = \mathcal{A}^{-k} \frac{\alpha_\nu}{\binom{\nu+k}{\nu}} = \sum_{n=\nu}^{\infty} \binom{n-\nu+k-1}{n-\nu} \frac{\alpha_n}{\binom{n+k}{n}} \quad (\nu = 0, 1, \dots)$$

ist.

Beweis. Nach Satz 6.1 ist in $C_k(f, n)$ SAK vorhanden. Die Behauptung folgt aus Satz 5.3.

Satz 7.4. Die Bedingung (F₁) aus Satz 7.3 ist gleichbedeutend mit den Bedingungen

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} |\mathcal{A}^k \varepsilon_n| < +\infty \quad \text{und} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \text{ konvergiert}^{22}.$$

Beweis. Für $k = 0$ ist die Behauptung selbstverständlich. Nun sei $k > 0$. Aus (1) folgt, daß für die durch $\alpha_n = \binom{n+k}{n} \mathcal{A}^k \varepsilon_n$ erklärte Folge $\{\alpha_n\}$ die Bedingung $\sum |\alpha_n| < +\infty$ erfüllt ist. Nach Lemma 7.2 folgt daraus $\mathcal{A}^{-k} \frac{\alpha_n}{\binom{n+k}{n}} = \mathcal{A}^{-k} (\mathcal{A}^k \varepsilon_n) = \varepsilon_n$, da wegen (2) $\varepsilon_n = o(1)$ ist.

Umgekehrt folgt aus (F₁)

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^r |\varepsilon_\nu| &= \sum_{\nu=0}^r \left| \mathcal{A}^{-k} \frac{\alpha_\nu}{\binom{\nu+k}{\nu}} \right| \leq \sum_{\nu=0}^r \sum_{n=\nu}^{\infty} \binom{n-\nu+k-1}{n-\nu} \frac{|\alpha_n|}{\binom{n+k}{n}} \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| \sum_{\nu=0}^n \frac{\binom{n-\nu+k-1}{n-\nu}}{\binom{n+k}{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|. \end{aligned}$$

Aus (F₁) folgt also, daß $\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n| < +\infty$ ist. Insbesondere ist dann (2) erfüllt. Man bestätigt durch direktes Ausrechnen, daß

$$\mathcal{A}^k \varepsilon_\nu = \mathcal{A}^k \left(\mathcal{A}^{-k} \frac{\alpha_\nu}{\binom{\nu+k}{\nu}} \right) = \frac{\alpha_\nu}{\binom{\nu+k}{\nu}}$$

gilt. Das ist aber gleichbedeutend mit (1).

Zusatz. Nach Satz 7.4 folgen aus (F₁) die Bedingungen

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} |\mathcal{A}^k \varepsilon_n| < +\infty \quad \text{und} \quad (2') \quad \sum_{\nu=0}^n \varepsilon_\nu = O(1).$$

²²) Satz 7.3 wurde mit den Bedingungen (1) und (2) für Konvergenzfaktoren ($B = E$; vgl. S. 29) von G. G. LORENTZ [16] bewiesen.

Umgekehrt kann man aus (1) und (2') ebenfalls wieder (F₁) ableiten. Wir wollen den Beweis hier nur andeuten. Für $k = 0$ ist die Behauptung selbstverständlich. Mit $\alpha_n = \binom{n+k}{n} \mathcal{A}^k \varepsilon_n$ ($\sum |\alpha_n| < +\infty$ wegen (1)) folgt $\mathcal{A}^{1-k} \frac{\alpha_n}{\binom{n+k}{n}} = \mathcal{A} \varepsilon_n$ nach Lemma 7.1, da wegen (2) $\varepsilon_n = O(1)$ ist.

Das Lemma 7.2 können wir hier nicht anwenden, um direkt ε_n zu erhalten, denn aus (2') folgt nur $\varepsilon_n = O(1)$. Bildet man nun $\sum_{\nu=0}^{n-1} \mathcal{A} \varepsilon_\nu$, dann folgt $\varepsilon_n = c + \mathcal{A}^{-k} \frac{\alpha_n}{\binom{n+k}{n}}$ mit $c = \varepsilon_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^{1-k} \frac{\alpha_n}{\binom{n+k}{n}}$. Der Beweis von Satz 7.4 lehrt nun, daß $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \mathcal{A}^{-k} \frac{\alpha_n}{\binom{n+k}{n}} \right| < +\infty$ ist. Damit folgt aus (2'): $O(1) = \sum_{n=0}^r \varepsilon_n = c \cdot r + O(1)$, also $c = 0$.

Wir werden mit Hilfe des folgenden Satzes 7.5 nachweisen, daß in $C_k(f, n)$ für keine Zahl $k > 1$ SAK vorhanden ist.

Satz 7.5. *Es sei $k > 1$. $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ konvergiert genau dann für alle $\{a_\nu\} \in C_k(f, c)$, wenn es eine Folge $\{\alpha_n\}$ mit $\sum |\alpha_n| < +\infty$ gibt, so daß*

$$(F_1): \quad \varepsilon_\nu = \mathcal{A}^{-k} \frac{\alpha_\nu}{\binom{\nu+k}{\nu}} = \sum_{n=\nu}^{\infty} \binom{n-\nu+k-1}{n-\nu} \frac{\alpha_n}{\binom{n+k}{n}} \quad (\nu = 0, 1, \dots)$$

und

$$(G): \quad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

ist.

Beweis. Die Bedingung (F₁) ist nach Satz 3.6 für die Konvergenz notwendig. Die genaue Größenbeschränkung²³⁾ der Folgen aus $C_k(f, c)$ ist $o(n^k)$. Daraus folgt, daß (G) ebenfalls notwendig ist. Zusammen sind sie auch hinreichend. Denn ist h eine ganze Zahl mit $k-1 \leq h < k$. Durch h -malige partielle Summation findet man, daß

$$\sum_{\nu=0}^r a_\nu \varepsilon_\nu = S_r^1(a) \varepsilon_{r+1} + S_r^2(a) \mathcal{A} \varepsilon_{r+1} \dots S_r^h(a) \mathcal{A}^{h-1} \varepsilon_{r+1} + \sum_{\nu=0}^r S_\nu^h(a) \mathcal{A}^h \varepsilon_\nu$$

ist. Wegen (G) ist $S_r^p(a) \mathcal{A}^{p-1} \varepsilon_{r+1} = o(1)$ für $p = 0, 1, \dots, h$ und aus

$$(F_1) \text{ folgt, daß } \mathcal{A}^h \varepsilon_\nu = \mathcal{A}^{h-k} \frac{\alpha_\nu}{\binom{\nu+k}{\nu}} = \sum_{n=\nu}^{\infty} \binom{n-\nu+k-h-1}{n-\nu} \frac{\alpha_n}{\binom{n+k}{n}} \text{ ist.}$$

Wir erhalten damit

$$\sum_{\nu=0}^r S_\nu^h(a) \mathcal{A}^h \varepsilon_\nu = \sum_{n=0}^r \frac{\alpha_n}{\binom{n+k}{n}} S_n^k(a) + \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\binom{n+k}{n}} \sum_{\nu=0}^r \binom{n-\nu+k-h-1}{n-\nu} S_\nu^h(a) = \text{I} + \text{II.}$$

²³⁾ Vgl. S. 38.

I strebt für $n \rightarrow \infty$ gegen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n^k(a)}{\binom{n+k}{n}}$. Aus

$$\left| \sum_{\nu=0}^r (n-r+k-h-1) S_{\nu}^k(a) \right| \leq \text{Max}_{0 \leq \mu \leq r} |S_{\mu}^k(a)|$$

(vgl. den Beweis von Satz 6.1) folgt aber $\text{II} = o(1)$ und damit die Behauptung.

Satz 7.6. Wenn $k > 1$ ist, dann ist in $C_k(f, n)$ keine SAK vorhanden.

Beweis. Wenn für eine Zahl $k_0 > 1$ in $C_{k_0}(f, n)$ SAK vorhanden wäre, so würde $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \varepsilon_{\nu}$ für alle $\{a_{\nu}\} \in C_{k_0}(f, c)$ konvergieren, wenn allein die Bedingung (F₁) des Satzes 7.5 erfüllt ist (Satz 5.3). Für keine Zahl $k > 1$ folgt aber aus (F₁) auch (G), m. a. W. es gibt zu jedem $k > 1$ eine Folge $\{\alpha_n(k)\}$, so daß $\Delta^{-k} \frac{\alpha_n(k)}{\binom{n+k}{n}} \neq O\left(\frac{1}{n^k}\right)$ ist. Zum Beweise wählen wir zu gegebenem $k > 1$ eine nicht ganze Zahl k' mit $1 < k' < k$ und setzen $\alpha_n(k) = \binom{n-k'}{n}$. Dann ist $\sum |\alpha_n(k)| < +\infty$ und für $\nu \geq 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \Delta^{-k} \frac{\alpha_{\nu}(k)}{\binom{\nu+k}{\nu}} &= \sum_{n=\nu}^{\infty} \binom{n-r+k-1}{n-\nu} \frac{\binom{n-k'}{n}}{\binom{n+k}{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k-1 \dots k)(n+\nu-k' \dots -k'+1)}{n!(n+\nu+k \dots k+1)} \\ &= \frac{\nu-k' \dots 1-k'}{\nu+k \dots 1+k} F(k, 1+\nu-k', 1+\nu+k; 1)^{24)} \\ &= \frac{\binom{\nu-k'}{\nu}}{\binom{\nu+k}{\nu}} \frac{\Gamma(k+1) \Gamma(k')}{\Gamma(k+k')} \neq O\left(\frac{1}{\nu^k}\right), \text{ da } \binom{\nu-k'}{\nu} \sim \frac{1}{\nu^{k'}} \text{ ist.} \end{aligned}$$

Bemerkung. Aus den Bedingungen (F₁) und (G) von Satz 7.5 kann man mit Hilfe des Lemmas 7.2 ähnlich wie bei Satz 7.4 die mit (F₁) und (G) gleichwertigen Bedingungen

$$1^{\circ} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} |\Delta^k \varepsilon_n| < +\infty \quad \text{und} \quad 2^{\circ} \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

ableiten.

Aus dem Satz 5.6 erhält man sofort die genauen Bedingungen für $(C_k, C)_r$ -Konvergenzfaktoren, falls $0 \leq k \leq 1$ ist. Die genauen Bedingungen für $(C_k, C)_r$ -Konvergenzfaktoren für alle $k > 0$ lassen sich mit Hilfe von Satz 7.5 angeben.

²⁴⁾ $F(a, b, c; z)$ steht als Symbol für die hypergeometrische Reihe. Vgl. etwa: MAGNUS-OBERHETTINGER „Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik“, 2. Aufl., Berlin 1948, S. 10. Wir benutzen hier die Tatsache, daß für $\text{Re}(a+b-c) < 0$: $F(a, b, c; 1) = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \Gamma(c-b)}$ ist.

Satz 7.7. $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \varepsilon_{\nu}$ konvergiert genau dann für alle $\{a_{\nu}\} \in C_k(r, c)$ ($k \geq 0$), wenn es eine Folge $\{\alpha_n\}$ mit $\sum |\alpha_n| < \infty$ gibt, so daß

$$(F_2): \quad \varepsilon_{\nu} = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \frac{\binom{\mu-1+k}{n-\nu}}{\binom{\mu+k}{n}} \quad (\nu = 0, 1, \dots)$$

und

$$(G): \quad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

ist.

Beweis. Daß die Bedingung (G) notwendig ist, erkennt man ebenso wie bei Satz 7.5. Die Notwendigkeit der Bedingung (F₂) folgt aus Satz 3.6, dabei ist wegen $\varepsilon_n = o(1)$ (nach (G)) $\alpha = 0$ zu setzen. Wenn man $\sum_{\nu=0}^r a_{\nu} \varepsilon_{\nu}$ ebenso wie beim Beweis des Satzes 5.6 durch partielle Summation umformt, dann ist sofort zu ersehen, daß die Bedingungen (F₂) und (G) wegen Satz 7.5 für die Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \varepsilon_{\nu}$ hinreichen.

Zusatz. Aus den Bedingungen (F₂) und (G) des Satzes 7.7 kann man (mit Hilfe des Lemmas 7.2) die damit gleichwertigen Bedingungen

$$1^{\circ} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{n} |\mathcal{A}^{k+1} \varepsilon_n| < +\infty \quad \text{und} \quad 2^{\circ} \quad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

ableiten. Mit den Bedingungen 1^o und 2^o wurde Satz 7.7 von S. CHAPMAN [9] (hinreichend) und T. KOJIMA [15] (notwendig) zuerst bewiesen. Der Satz 7.7 ist ein Spezialfall des in der Einleitung genannten Satzes von I. SCHUR.

In den beiden folgenden Sätzen verstehen wir unter P eine FF-permanente Matrix von der in § 6 erklärten Art.

Satz 7.8. $\lim_{t \rightarrow t_0} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} a_{\nu} \varepsilon_{\nu}$ existiert genau dann für alle $\{a_{\nu}\} \in P(f, c)$, wenn eine der beiden folgenden gleichwertigen Bedingungen erfüllt ist:

I. Es gibt eine Folge $\{\alpha_n\}$ mit $\sum |\alpha_n| < +\infty$, so daß

$$(F_1): \quad \varepsilon_{\nu} = p_{\nu} \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{\alpha_n}{P_n} \quad \text{für } \nu = 0, 1, \dots$$

ist.

II. Es ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} |P_n| \left| \mathcal{A} \left(\frac{\varepsilon_n}{P_n} \right) \right| < +\infty \quad \text{und} \quad \varepsilon_n = o(p_n).$$

Beweis. In $P(f, n)$ ist nach Satz 6.2 SAK vorhanden. Damit folgt die Behauptung mit der unter I aufgeführten Bedingung unmittelbar aus Satz 5.3. Eine ganz einfache Rechnung ergibt die Gleichwertigkeit der unter I und II genannten Bedingungen.

Wenn P eine FF-permanente Matrix der in § 6 erklärten Art ist, dann ist

$$P^* = (p_{\nu\nu}^*) \text{ mit } p_{\nu\nu}^* = \begin{cases} \frac{1}{P_n} \sum_{\mu=\nu}^n p_\mu & \text{für } \nu \leq n \\ 0 & \text{für } \nu > n \end{cases}$$

eine RF-permanente, normale Matrix. Für solche Matrizen gilt der

Satz 7.9. $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ konvergiert genau dann für alle $\{a_\nu\} \in P^*(r, c)$, wenn es eine Folge $\{\alpha_n\}$ mit $\sum |\alpha_n| < +\infty$ gibt, so daß

$$(F_2): \quad \varepsilon_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{\alpha_n}{P_n} \sum_{\mu=\nu}^n p_\mu \quad (\nu = 0, 1, \dots)$$

und

$$(G): \quad \varepsilon_n = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right)$$

ist.

Beweis. Wir wenden den Satz 5.6 an. Für \hat{P}^* erhalten wir hier die Matrix P und in $P(f, n)$ ist SAK vorhanden. (G) folgt aus (G_1) , denn die genaue Größenbeschränkung der Folgen $\{s_n\}$ aus $P(f, c)$ ist $o\left(\frac{P_n}{p_n}\right)$.

Zusatz. Wenn die Matrix P^* die Bedingung $\left|\frac{P_n}{p_n}\right| \rightarrow \infty$ (für $n \rightarrow \infty$) erfüllt (P^* ist dann sicherlich nicht konvergenzgleich), dann sind, wie man leicht nachprüft, die Bedingungen (F_2) und (G) aus Satz 7.9 mit den folgenden:

$$1^\circ \sum_{n=0}^{\infty} |P_n| \left| \mathcal{A} \left(\frac{\Delta \varepsilon_n}{p_n} \right) \right| < +\infty \quad 2^\circ \varepsilon_n = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right) \quad 3^\circ \frac{\Delta \varepsilon_n}{p_n} = o(1)$$

gleichwertig. (Vgl. W. JURKAT [13], Satz 1.)

§ 8.

Die Räume $R_{\lambda k}(f, c)$ und $R_{\lambda k}(r, c)$.

Die Sätze der §§ 3 und 5 konnten ohne weiteres auf die zum C_k -Verfahren und den Verfahren bewichteter arithmetischer Mittel gehörigen Matrizen angewandt werden. Bei diesen Matrizen war sofort ersichtlich, daß sie die nötigen Voraussetzungen erfüllen. Für Anwendungen auf die zu den RIESZSchen Verfahren ($R_{\lambda k}$) gehörigen Matrizen sind einige Vorbereitungen nötig. In diesem § werden wir zeigen:

1. Die beiden zu einem RIESZSchen Verfahren gehörigen Matrizen (FF- und RF-permanent) erfüllen die Bedingungen B_1 , B_2 und B_3 aus § 1.

2. $R_{\lambda k}(f, c)$ und $R_{\lambda k}(r, c)$ sind dann Räume mit gliedweiser Konvergenz.

3. In $R_{\lambda k}(f, n)$ ist für $0 < k \leq 1$ AK vorhanden.

Schließlich werden wir alle linearen Funktionale in den Räumen $R_{\lambda k}(f, c)$ und $R_{\lambda k}(r, c)$ angeben.

Die RIESZschen Verfahren sind folgendermaßen erklärt²⁵⁾:

$\{\lambda_\nu\}$ sei eine unbeschränkte, monoton im engeren Sinne wachsende Zahlenfolge mit $\lambda_0 \geq 0$. Genau dann ist $c = \{c_\nu\} \in R_{\lambda k}(r, c)$ ($k > 0$), wenn $\frac{C_\lambda^k(\omega)}{\omega^k}$ ($\omega > 0$) mit

$$C_\lambda^k(\omega) = \sum_{\lambda_\nu < \omega} (\omega - \lambda_\nu)^k c_\nu = \int_0^\omega (\omega - \tau)^k dC(\tau), \quad C(\tau) = \sum_{\lambda_\nu < \tau} c_\nu, \quad C(0) = 0$$

für $\omega \rightarrow \infty$ konvergiert.

Man bestätigt ohne Mühe, daß $\varphi(\omega) = \frac{C_\lambda^k(\omega)}{\omega^k}$ für alle $\omega > 0$ und, wenn $\varphi(0) = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda_0 > 0 \\ c_0 & \text{für } \lambda_0 = 0 \end{cases}$ festgesetzt wird, auch für $\omega = 0$, stetig ist²⁶⁾.

Genau dann ist $\{C_\nu\} \in R_{\lambda k}(f, c)$, wenn für die Folge $\{c_\nu\}$ mit $c_n = C_n - C_{n-1}$ für $n \geq 1$, $c_0 = C_0$ gilt: $\{c_\nu\} \in R_{\lambda k}(r, c)$.

Die Räume $R_{\lambda k}(f, c)$ und $R_{\lambda k}(r, c)$ werden durch diese Zuordnung der $\{c_\nu\}$ zu den $\{C_\nu\}$ eineindeutig aufeinander abgebildet.

Wir wollen den Raum $R_{\lambda k}(R_{\lambda k}(r, c))$ mit $C(R)$ bezeichnen²⁷⁾. $C(R)$ besteht also aus den stetigen Funktionen $\varphi(\omega)$, die für alle $\omega \geq 0$ erklärt sind, für $\omega \rightarrow \infty$ konvergieren und zu denen es eine Folge $\{c_\nu\}$ gibt, so daß $\varphi(\omega) = \frac{1}{\omega^k} \sum_{\lambda_\nu < \omega} (\omega - \lambda_\nu)^k c_\nu$ ist.

Es versteht sich von selbst, daß auch $R_{\lambda k}(R_{\lambda k}(f, c)) = C(R)$ ist.

Der Raum $C(R)$ ist ein Unterraum des Raumes C_c aller stetigen, für $\omega \geq 0$ erklärten und für $\omega \rightarrow \infty$ konvergenten Funktionen. Wenn man die Gleichheit zweier Funktionen $\psi(\omega)$ und $\bar{\psi}(\omega)$ aus C_c durch $\psi(\omega) = \bar{\psi}(\omega)$ für alle $\omega \geq 0$ erklärt, ferner die Addition zweier Funktionen und die Multiplikation einer Funktion mit einer Zahl in natürlicher Weise erklärt, dann ist C_c ein Vektorraum. Definiert man außerdem für jede Funktion $\psi \in C_c$ eine Norm durch $\|\psi\| = \overline{\lim}_{\omega \geq 0} |\psi(\omega)|$, dann ist C_c sogar ein BANACH-Raum. Daß nämlich der $\overline{\lim}_{\omega \geq 0} |\psi(\omega)|$ alle von einer Norm geforderten Eigenschaften besitzt, ist selbstverständlich. Wenn $\psi_p \in C_c$ ($p = 0, 1, \dots$) ist und wenn

$$\|\psi_p - \psi_q\| = \overline{\lim}_{\omega \geq 0} |\psi_p(\omega) - \psi_q(\omega)| \rightarrow 0 \quad \text{für } p, q \rightarrow \infty,$$

²⁵⁾ Vgl. HARDY-RIESZ [11], Kap. IV.

²⁶⁾ Bei $\omega = 0$ Stetigkeit von rechts.

²⁷⁾ $C(R)$ hängt also von λ und k ab. Unter $C(R)$ wird im folgenden immer der zu einer bestimmten (aus dem Zusammenhang hervorgehenden) Matrix gehörige Bildraum verstanden.

dann gibt es eine Funktion $\psi \in C_c$, so daß $\|\psi_p - \psi\| \rightarrow 0$. C_c ist also vollständig und damit ein BANACH-Raum.

1. $C(R)$ ist ein Unterraum des Raumes C_c und mit der in C_c erklärten Addition und Multiplikation mit Zahlen ein Vektorraum. Die Bedingung B_1 ist also für $C(R)$ erfüllt.

Um B_2 nachzuweisen, müssen wir zeigen, daß aus $\sum_{\lambda_\nu < \omega} (\omega - \lambda_\nu)^k c_\nu = 0$ für alle $\omega \geq 0$ folgt, daß $c_\nu = 0$ für $\nu = 0, 1, \dots$ ist.

Setzt man nun der Reihe nach für ω die Werte $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ ein, so zeigt es sich, daß die c_ν alle verschwinden müssen. Wir bezeichnen den eindeutigen Operator, der $R_{\lambda k}(r, c)$ auf $C(R)$ abbildet, mit $R(c)$ ($c \in R_{\lambda k}(r, c)$).

Mit der in C_c erklärten Norm ist $C(R)$ ein normierter Vektorraum. (Diese Norm ist von der in B_3 geforderten Art.) Der Raum $C(R)$ ist ein BANACH-Raum, wenn wir seine Abgeschlossenheit nachweisen können²⁸⁾.

Satz 8.1. *Der Raum $C(R)$ ist mit der Norm aus C_c abgeschlossen.*

Beweis. Es sei $\varphi_n(\omega) \in C(R)$ ($n = 0, 1, \dots$), $\varphi \in C_c$ und $\|\varphi_n - \varphi\|_{C_c} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, d. h. (*) $\overline{\lim}_{\omega \geq 0} |\varphi_n(\omega) - \varphi(\omega)| \rightarrow 0$. Nachzuweisen ist, daß es

zu $\varphi(\omega)$ eine Folge $\{c_\nu\}$ mit $\varphi(\omega) = \frac{1}{\omega^k} \sum_{\lambda_\nu < \omega} (\omega - \lambda_\nu)^k c_\nu$ gibt.

Das ist nun leicht einzusehen, wenn man (*) nur für die Intervalle $0 \leq \omega \leq \lambda_0$, $\lambda_0 < \omega \leq \lambda_1$, ..., $\lambda_\varrho < \omega \leq \lambda_{\varrho+1}$, ... anschreibt.

Wenn $\lambda_0 > 0$ ist, so ist $\varphi_n(\omega) = 0$ ($n = 0, 1, \dots$) in $0 \leq \omega \leq \lambda_0$, also auch $\varphi(\omega) = 0$. In $\lambda_0 < \omega \leq \lambda_1$ gilt gleichmäßig

$$\left| \frac{(\omega - \lambda_0)^k}{\omega^k} c_0^{(n)} - \varphi(\omega) \right| \rightarrow 0 \quad (\varphi_n(\omega) = R(\{c_\nu^{(n)}\}))$$

für $n \rightarrow \infty$ und daraus folgt, daß $c_0^{(n)} \rightarrow c_0$ für $n \rightarrow \infty$ und $\varphi(\omega) = \frac{(\omega - \lambda_0)^k}{\omega^k} c_0$ ($\lambda_0 < \omega \leq \lambda_1$) ist. Nun führt man dieselbe Überlegung für das Intervall $\lambda_1 < \omega \leq \lambda_2$ durch; dabei wird die Konvergenz von $c_0^{(n)}$ verwendet. In dieser Weise fährt man fort und beweist so die Behauptung.

Mit $\|\{c_\nu\}\| = \overline{\lim}_{\omega \geq 0} \left| \frac{C_\lambda^k(\omega)}{\omega^k} \right|$ ($\{c_\nu\} \in R_{\lambda k}(r, c)$) ist also $R_{\lambda k}(r, c)$ ein BANACH-Raum. Wenn man für jedes $\{c_\nu\} \in R_{\lambda k}(f, c)$ eine Norm $\|\{C_\nu\}\|$ durch $\|\{C_\nu\}\| = \|\{c_\nu\}\|$ mit $c_n = C_n - C_{n-1}$, $n \geq 1$, $c_0 = C_0$ erklärt, dann ist (vgl. Lemma 2.1) auch $R_{\lambda k}(f, c)$ ein BANACH-Raum.

2. Es sei $c^{(n)} = \{c_\nu^{(n)}\} \in R_{\lambda k}(r, c)$ mit $\|c^{(n)}\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Mit $\varphi_n(\omega) = R(c^{(n)})$ gilt dann $\|c^{(n)}\| = \overline{\lim}_{\omega \geq 0} |\varphi_n(\omega)| \rightarrow 0$, d. h. $\varphi_n(\omega) \rightarrow \varphi(\omega) \equiv 0$.

Zu $\varphi(\omega)$ gehört aber die Folge $\{c_\nu\}$ mit $c_\nu = 0$ ($\nu = 0, 1, \dots$). Also strebt $c_\nu^{(n)} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und jedes feste $\nu = 0, 1, \dots$

²⁸⁾ Denn C_c ist vollständig; jede Fundamentalfolge besitzt also einen Grenzwert in C_c .

Die gliedweise Konvergenz in $R_{\lambda k}(f, c)$ folgt aus der gliedweisen Konvergenz in $R_{\lambda k}(r, c)$ unmittelbar.

3. Satz 8.2. In $R_{\lambda k}(f, n)$ ist für $0 < k \leq 1$ AK vorhanden.

Beweis. Es sei $\{C_\nu\} \in R_{\lambda k}(f, n)$, d. h. es gilt $\frac{1}{\omega^k} \int_0^\omega (\omega - \tau)^k dC(\tau) \rightarrow 0$ für $\omega \rightarrow \infty$, wobei $C(\tau) = \sum_{\lambda_\nu < \tau} c_\nu$ mit $c_n = C_n - C_{n-1}$ für $n \geq 1$ und $c_0 = C_0$ ist. Ferner ist $\|\{C_\nu\}\| = \overline{\text{fin}}_{\omega \geq 0} \left| \frac{1}{\omega^k} \int_0^\omega (\omega - \tau)^k dC(\tau) \right|$. Nachzuweisen ist, daß $\|\{0, 0, \dots, 0, C_m, C_{m+1}, \dots\}\| \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$. Es ist

$$\|\{0, 0, \dots, 0, C_m, C_{m+1}, \dots\}\| = \overline{\text{fin}}_{\omega \geq 0} \left| \frac{1}{\omega^k} \int_0^\omega (\omega - \tau)^k d\hat{C}(\tau) \right|;$$

dabei ist $\hat{C}(\tau) = \sum_{\lambda_\nu < \tau} \hat{c}_\nu$ mit

$$\hat{c}_\nu = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu < m \\ C_m & \text{für } \nu = m \text{ d. h. } \hat{C}(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq \tau \leq \lambda_m \\ C(\tau) & \text{für } \lambda_m < \tau < \infty. \end{cases} \\ C_\nu - C_{\nu-1} & \text{für } \nu > m \end{cases}$$

Damit gilt

$$\int_0^\omega (\omega - \tau)^k d\hat{C}(\tau) = k \int_0^\omega (\omega - \tau)^{k-1} \hat{C}(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq \omega \leq \lambda_m \\ k \int_{\lambda_m}^\omega (\omega - \tau)^{k-1} C(\tau) d\tau & \text{für } \omega \geq \lambda_m. \end{cases}$$

Für $\omega \geq \lambda_m$ ist also $\int_0^\omega (\omega - \tau)^k d\hat{C}(\tau) = C_\lambda^k(\omega) - k \int_0^{\lambda_m} (\omega - \tau)^{k-1} C(\tau) d\tau$.

Somit ist

$$\|\{0, 0, \dots, 0, C_m, C_{m+1}, \dots\}\| \leq \overline{\text{fin}}_{\omega \geq \lambda_m} \left| \frac{k}{\omega^k} \int_0^{\lambda_m} (\omega - \tau)^{k-1} C(\tau) d\tau \right| + \overline{\text{fin}}_{\omega \geq \lambda_m} \left| \frac{C_\lambda^k(\omega)}{\omega^k} \right| = \text{I} + \text{II}.$$

Offensichtlich ist $\text{II} = o(1)$ ($m \rightarrow \infty$). Nach dem Mittelwertsatz von M. RIESZ²⁹⁾ ist nun für jedes k mit $0 < k \leq 1$

$$\left| k \int_0^{\lambda_m} (\omega - \tau)^{k-1} C(\tau) d\tau \right| \leq \text{Max}_{0 \leq \eta \leq \lambda_m} |C_\lambda^k(\eta)|.$$

Daraus folgt dann aber, daß $\text{I} \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$, also die AK.

Wir wollen nun alle linearen Funktionale in den Räumen $R_{\lambda k}(f, c)$ und $R_{\lambda k}(r, c)$ angeben. Wenn man in $C(R)$ alle linearen Funktionale

²⁹⁾ Vgl. HARDY-RIESZ [11], Kap. V, Lemma 7 und M. RIESZ [19].

kennt, dann kann man nach Lemma 2.3 alle linearen Funktionale in $R_{\lambda k}(f, c)$ und $R_{\lambda k}(r, c)$ angeben. In $C(R)$ kann man nun alle linearen Funktionale angeben, wenn man in C_c alle linearen Funktionale kennt. Jedes lineare Funktional in C_c ist nämlich auch ein lineares Funktional in $C(R)$. Wenn umgekehrt in $C(R)$ ein lineares Funktional gegeben ist, dann kann es nach dem Satz von H. HAHN über die Fortsetzung linearer Funktionale (BANACH, Kap. 4, Satz 2, S. 55. Vgl. auch H. HAHN [10], Satz III, S. 217) auf C_c fortgesetzt werden. Die Menge F aller linearen Funktionale in C_c besteht also genau aus allen linearen Funktionalen in $C(R)$. Für unsere Zwecke ist die Tatsache, daß es in F mehrere Funktionale geben kann, die auf $C(R)$ genau dieselben Werte annehmen, unwesentlich.

In C_c ist nun $f(x) = \alpha \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) + \int_0^{\infty} x(t) dg(t)$ ³⁰⁾ mit beliebigem α und $\int_0^{\infty} |dg(t)| < +\infty$ ($x = x(t) \in C_c$) ein lineares Funktional und jedes lineare Funktional in C_c kann so dargestellt werden. (Der Beweis verläuft ähnlich wie der bei BANACH, Kap. 4, S. 59–61 für die Tatsache, daß im Raum der in $\langle 0,1 \rangle$ stetigen Funktionen durch

$$f(x) = \int_0^1 x(t) dg(t) \text{ mit } \int_0^1 |dg(t)| < +\infty$$

ein lineares Funktional dargestellt wird und daß jedes lineare Funktional in diesem Raum so dargestellt werden kann.)

Damit ist nun

$$f(\{c_\nu\}) = \alpha \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{C_\lambda^k(\omega)}{\omega^k} + \int_0^{\infty} \frac{C_\lambda^k(\omega)}{\omega^k} dg(\omega), \{c_\nu\} \in R_{\lambda k}(r, c)$$

mit $\int_0^{\infty} |dg(\omega)| < +\infty$ ein lineares Funktional in $R_{\lambda k}(r, c)$, und jedes lineare Funktional in $R_{\lambda k}(r, c)$ kann so dargestellt werden (Vgl. Lemma 2.3.).

Daraus folgt nach Lemma 2.3 unmittelbar, daß in $R_{\lambda k}(f, c)$ durch

$$f(\{C_\nu\}) = \alpha \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{C_\lambda^k(\omega)}{\omega^k} + \int_0^{\infty} \frac{C_\lambda^k(\omega)}{\omega^k} dg(\omega), \int_0^{\infty} |dg(\omega)| < +\infty$$

mit $C_\lambda^k(\omega) = \sum_{\lambda_\nu \leq \omega} (\omega - \lambda_\nu)^k c_\nu$, wo $c_n = C_n - C_{n-1}$ für $n \geq 1$, $c_0 = C_0$ und $\{C_\nu\} \in R_{\lambda k}(f, c)$ ist, ein lineares Funktional dargestellt wird, und daß jedes lineare Funktional in $R_{\lambda k}(f, c)$ so dargestellt werden kann.

³⁰⁾ $\int_0^{\infty} x(t) dg(t)$ ist als $\lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^z x(t) dg(t)$ aufzufassen.

§ 9.

Anwendungen.

Wir wollen in diesem § die Sätze des § 5 auf die Räume $R_{\lambda k}(f, c)$ und $R_{\lambda k}(r, c)$ anwenden. $B = (b_{tv})$ sei wieder eine RF-permanente Matrix, von der wir nicht verlangen, daß sie die Bedingungen B_1, B_2 und B_3 erfüllt.

Satz 9.1. $R_{\lambda k}$ sei ein RIESZSCHES Verfahren und $0 < k \leq 1$. Dann existiert $\lim_{t \rightarrow t, r=0} \sum_{v=0}^{\infty} b_{tv} c_v \varepsilon_v$ genau dann für alle $\{C_v\} \in R_{\lambda k}(f, c)$, wenn es eine für $\omega \geq 0$ erklärte Funktion $g(\omega)$ mit $\int_0^{\infty} |dg(\omega)| < +\infty$ gibt, so daß

$$(F): \varepsilon_v = \int_{\lambda_v}^{\infty} \frac{(\omega - \lambda_v)^k}{\omega^k} dg(\omega) - \int_{\lambda_{v+1}}^{\infty} \frac{(\omega - \lambda_{v+1})^k}{\omega^k} dg(\omega) \quad \text{für } v = 0, 1, \dots$$

ist.

Beweis. Wir wenden den Satz 5.1 an. Die Voraussetzungen dieses Satzes sind nach § 8 erfüllt. (In $R_{\lambda k}(f, n)$ ist für $0 < k \leq 1$ AK, also auch SAK vorhanden.) Auf S. 48 ist das allgemeine lineare Funktional in $R_{\lambda k}(f, c)$ angegeben. Setzt man dort für $\{C_v\}$ die Folge $e^{(v)}$ ein, dann folgt gerade die Bedingung (F).

Zusatz. Die Funktion $g(\omega) = \frac{-\Gamma(k + \alpha + 1)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(k + 1)} \frac{1}{\alpha \omega^\alpha}$ mit $\alpha > 0$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes 9.1. Man erhält damit aus (F) die Faktoren $\varepsilon_v = \frac{1}{\lambda_v^\alpha} - \frac{1}{\lambda_{v+1}^\alpha}$ für jedes $\alpha > 0$.

Satz 9.2. $R_{\lambda k}$ sei ein RIESZSCHES Verfahren mit $0 < k \leq 1$. Dann existiert $\lim_{t \rightarrow t, r=0} \sum_{v=0}^{\infty} b_{tv} c_v \varepsilon_v$ genau dann für alle $\{c_v\} \in R_{\lambda k}(r, c)$, wenn es eine für $\omega \geq 0$ erklärte Funktion $g(\omega)$ mit $\int_0^{\infty} |dg(\omega)| < +\infty$ und eine Zahl α gibt, so daß

$$(F): \varepsilon_v = \alpha + \int_{\lambda_v}^{\infty} \frac{(\omega - \lambda_v)^k}{\omega^k} dg(\omega) \quad (v = 0, 1, \dots)$$

und

$$(G): \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{\lambda_n^k}\right) \quad \text{mit } A_n = \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$$

ist.

Beweis. Nach Satz 3.3 ist die Bedingung (F) notwendig; man hat nur in die Bedingung (F) von Satz 3.3 die linearen Funktionale in $R_{\lambda k}(r, c)$ (S. 48) einzusetzen. Nun schließt man genau so wie bei Satz 5.6. Es ist $\sum_{v=0}^n c_v \varepsilon_v = C_n \varepsilon_n + \sum_{v=0}^{n-1} C_v \mathcal{A} \varepsilon_v = \text{I} + \text{II}$. II konvergiert nach Satz 9.1. Die genaue Größenbeschränkung der Folgen

$\{C_\nu\}$ aus $R_{ik}(f, c)$ ist nach W. JURKAT [13], Satz 5, aber gerade $o(A_n^k)$. Daraus folgt dann, daß (G) mit (F) zusammen notwendig und hinreichend ist.

Wenn es sich darum handelt, festzustellen, ob eine gegebene Folge $\{\varepsilon_\nu\}$ die Bedingung (F) des Satzes 9.2 erfüllt, dann kann die folgende Bemerkung von Nutzen sein.

k -malige Integration (k nicht notwendig ganz) einer Funktion $f(t)$ kann durch $\int_x^{(k)x} f(t) dt = \frac{-1}{\Gamma(k)} \int_x^\infty (x-t)^{k-1} f(t) dt$ erklärt werden, wenn $f(t)$ bei $t = \infty$ von genügend hoher Ordnung verschwindet. Ein Integral dieser Bauart tritt gerade in (F) bei Satz 9.2 auf. Erklärt man λ_ν in (F) in passender Weise für alle (nicht ganzzahligen) ν ³¹⁾, definiert man ferner nicht ganzzahlige Differentiation durch ganzzahlige Differentiation und nachfolgende passende nicht ganzzahlige Integration, dann kann man (F) formal nach $g(\omega)$ auflösen. Dann bleibt noch übrig nachzusehen, ob für die formal erhaltene Funktion $g(\omega)$ die Bedingungen (F) und $\int_0^\infty |dg(\omega)| < +\infty$ erfüllt sind.

Schlußbemerkungen.

Wir haben in den §§ 7 und 9 verschiedene Sätze über Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren kennengelernt. Bei allen diesen Sätzen wurde die SAK ausgenützt. Damit ist aber der Anwendungsbereich der Funktionalbedingung keinesfalls erschöpft. In allgemeineren Fällen wird man zur Funktionalbedingung noch weitere notwendige Bedingungen suchen müssen, um schließlich ein System notwendiger und hinreichender Bedingungen zu erhalten. Am Schluß von § 5 wurde gezeigt, wie man eine notwendige Größenordnungsbedingung (G) finden kann. Zunächst wird man nachsehen, ob die Funktionalbedingung (F) und die Bedingung (G) hinreichend sind. Das ist z. B. bei den RF-permanenten Nörlundschen Matrizen, die von C. N. MOORE [18] untersucht worden sind, der Fall.

Die RF-permanenten Nörlundschen Matrizen erhält man folgendermaßen: $\{p_n\}$ sei eine Zahlenfolge mit den folgenden Eigenschaften:

- 1° Für die summatorische Folge $\{P_n\}$ gilt: $P_n \neq 0$ für $n = 0, 1, \dots$
- 2° Es gibt eine Zahl K , so daß $\sum_{\nu=0}^n |p_\nu| \leq K |P_n|$ für $n = 0, 1, \dots$ ist.
- 3° $\frac{p_n}{P_n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

³¹⁾ Oft ist λ_ν durch einen Ausdruck erklärt, der auch für nicht ganze ν sinnvoll ist; etwa $\lambda_n = n$, $\lambda_n = \log(n+1)$ usw.

Dann ist $N = (p_{nv})$ mit $p_{nv} = \begin{cases} \frac{P_{n-v}}{P_n} & \text{für } v \leqq n \\ 0 & \text{für } v > n \end{cases}$

eine RF-permanente Matrix. Zu jeder dieser Matrizen N erhält man die inverse Matrix $\bar{N} = (\bar{p}_{nv})$, indem man die Folge $\{k_n\}$ aus der formalen Identität $\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} k_n z^n$ bestimmt und

$$\bar{p}_{nv} = \begin{cases} k_{n-v} P_n & \text{für } v \leqq n \\ 0 & \text{für } v > n \end{cases}$$

setzt.

MOORE untersucht nur diejenigen dieser Matrizen, für die die Bedingung $\sum_{n=0}^{\infty} n|k_n| < +\infty$ erfüllt ist, und findet den folgenden Satz:

$\sum_{v=0}^{\infty} a_v \varepsilon_v$ konvergiert genau dann für alle $\{a_v\} \in N(r, c)$, wenn

$$1^0 \sum_{n=0}^{\infty} |P_n| \left| \sum_{v=0}^{\infty} k_v \varepsilon_{n+v} \right| < +\infty \quad \text{und} \quad 2^0 \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{P_n}\right)$$

ist.

Wenn man für diese Matrizen die Bedingung (F_2) nach Satz 3.6 und die Größenordnungsbedingung (G) aufstellt, findet man:

$$(F_2) \quad \varepsilon_v = \alpha + \sum_{n=v}^{\infty} \alpha_n \frac{P_{n-v}}{P_n} \quad (\sum |\alpha_n| < +\infty) \quad (v = 0, 1, \dots)$$

und $(G) \quad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{P_n}\right).$

Wenn wir noch annehmen, daß die Folge $\{P_n\}$ unbeschränkt ist, dann muß α in (F_2) den Wert 0 besitzen (wegen (G)). Aus (F_2) und (G) kann man ohne große Mühe die Bedingungen 1^0 und 2^0 wieder ableiten. (F_2) und (G) sind also notwendig und hinreichend für die Konvergenz der Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} a_v \varepsilon_v$ für alle $\{a_v\} \in N(r, c)$.

Wir wollen nun eine RF-permanente Matrix betrachten, bei der die Funktional- und Größenordnungsbedingung für Konvergenzfaktoren noch nicht hinreichend sind.

Die Matrix $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$ ist FF-permanent.

Wir erhalten für sie aus Satz 3.6 die Bedingung

$$(F_1): \quad \varepsilon_n = \frac{\alpha_n + \alpha_{n+1}}{2} \quad \text{für } n \geqq 1, \quad \varepsilon_0 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2},$$

mit $\sum |\alpha_n| < +\infty$. Die genaue Größenbeschränkung der Folgen $\{a_\nu\}$ aus $A_2(f, c)$ ist $o(n)$. Damit folgt die Größenordnungsbedingung (G) $\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Folgt aus diesen Bedingungen die Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ für alle $\{a_\nu\} \in A_2(f, c)$?

Es ist

$$\sum_{\nu=0}^n a_\nu \varepsilon_\nu = a_0 \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu \frac{a_\nu + a_{\nu-1}}{2} + \alpha_{n+1} \frac{a_n}{2}.$$

$\sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu \frac{a_\nu + a_{\nu-1}}{2}$ konvergiert für $n \rightarrow \infty$. Aus den Bedingungen (F₁) und (G) folgt aber nicht, daß $\alpha_{n+1} \frac{a_n}{2}$ für alle $\{a_\nu\} \in A_2(f, c)$ konvergiert. Zur Konvergenz wäre nämlich notwendig und hinreichend, daß $\alpha_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ist. Man kann aber Folgen $\{\alpha_n\}$ mit $\sum |\alpha_n| < +\infty$ und $\alpha_n \neq O\left(\frac{1}{n}\right)$ angeben, so daß $\frac{\alpha_n + \alpha_{n+1}}{2} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ist. Wenn man an Stelle von (G) die Bedingung (H): $\alpha_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ einführt, dann sind (F₁) und (H) offensichtlich für die Konvergenz von $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varepsilon_\nu$ für alle $\{a_\nu\} \in A_2(f, c)$ notwendig und hinreichend.

Bei einer genauen Durchsicht des Beweises zu Satz 3.3 erkennt man, daß die Funktionalbedingung (F) gerade auf perfekte Matrizen zugeschnitten ist. Dort wurde doch verlangt, daß $\lim_{t \rightarrow t_0} B_t(a, \varepsilon)$ für die Folgen $a = e^{(n)}$ ($n = 0, 1, \dots$) mit einem linearen Funktional $f(a)$ übereinstimmt. Die Folgen $e^{(n)}$ ($n = 0, 1, \dots$) bilden nun in $A(f, n)$ bzw. $A(r, c)$, wenn A perfekt ist, eine Grundmenge. Bei einer nicht perfekten Matrix A wird die in Satz 3.3 angegebene Bedingung (F) zu schwach sein; in diesem Falle muß man, um eine günstige Bedingung zu erhalten, die oben angegebene Übereinstimmung für die (die Folgen $e^{(n)}$ $n = 0, 1, \dots$ enthaltende) Grundmenge des Wirkungsfeldes der (nicht perfekten) Matrix A verlangen³²⁾.

Wir wollen zum Schluß für eine nicht perfekte, FF-permanente Matrix genaue Bedingungen für Konvergenzfaktoren angeben.

Die FF-permanente Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 2 & -1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 2 & -1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 2 & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

³²⁾ Wir haben in Satz 3.3 die Übereinstimmung für die Folge e (wenn A FF-permanent ist) nicht gefordert.

ist nicht perfekt. Setzt man nämlich $\alpha_n = \frac{1}{2^n}$ für $n \geq 1$, $\alpha_0 = -1$, so ist $\sum |\alpha_n| < +\infty$ und $\sum_{n=v}^{\infty} \alpha_n a_{nv} = 0$ für $v = 0, 1, \dots$. Nach Satz 4.2 ist dann die Matrix A nicht perfekt.

Durch A werden genau die Folgen $\{b \cdot 2^n + c_n\}$, wobei $\{c_n\} \in s_c$ ist, limitiert. („Einfolgenverfahren“, vgl. K. ZELLER [21], § 12.) Die Folgen $\{2^n\}$, $e^{(n)}$ ($n = 0, 1, \dots$) und e bilden eine Grundmenge in $A(f, c)$.

Das allgemeine lineare Funktional in $A(f, c)$ ist

$$f(a) = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(a) + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A_n(a) \quad \text{mit} \quad \sum |\alpha_n| < +\infty,$$

$a \in A(f, c)$ (Satz 2.4). Als Funktionalbedingung (\bar{F}) werden wir hier also verlangen, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^n a_v \varepsilon_v = f(a)$ gilt, wenn man für a die Folgen der oben angegebenen Grundmenge einsetzt.

Auf diese Weise erhält man die Bedingung

$$(\bar{F}): \varepsilon_v = f(e^{(v)}) \quad (v = 0, 1, \dots), \quad \sum_{v=0}^{\infty} \varepsilon_v = f(e), \quad \sum_{v=0}^{\infty} 2^v \varepsilon_v = f(\{2^n\}).$$

Die (notwendige) Bedingung $\sum_{v=0}^{\infty} 2^v \varepsilon_v = f(\{2^n\})$ ist aber bereits hinreichend. Wenn nämlich $a = \{a_n\} \in A(f, c)$ gegeben ist, so gilt, wenn man $a_n = b \cdot 2^n + c_n$ mit $\{c_n\} \in s_c$ setzt:

$$\sum_{v=0}^n a_v \varepsilon_v = b \cdot \sum_{v=0}^n 2^v \cdot \varepsilon_v + \sum_{v=0}^n c_v \varepsilon_v \rightarrow b \cdot f(\{2^n\}) + \sum_{v=0}^{\infty} c_v \varepsilon_v$$

für $n \rightarrow \infty$, denn die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} c_v \varepsilon_v$ konvergiert, weil $\varepsilon_n = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$ ist.

Literaturverzeichnis.

ANDERSEN, A. F.

- [1] Studier over Cesàro's summabilitetsmetode. Copenhagen 1921.
- [2] Comparison theorems in the theory of Cesàro summability. Proc. Lond. Math. Soc. (2), 27 (1928), 39—71.

BANACH, S.

- [3] Théorie des opérations linéaires. Warszawa 1932.

BOSANQUET, L. S.

- [4] A mean value theorem. J. Lond. Math. Soc. 16 (1941), 146—148.
- [5] Note on the Bohr-Hardy theorem. J. Lond. Math. Soc. 17 (1942), 166—173.
- [6] Note on convergence and summability factors. J. Lond. Math. Soc. 20 (1945), 39—48.

- [7] Note on convergence and summability factors (II). Proc. Lond. Math. Soc. (2), 50 (1948), 295—304.
- [8] Note on convergence and summability factors (III). Proc. Lond. Math. Soc. (2), 50 (1949), 482—496.
- CHAPMAN, S.
- [9] On non-integral orders of summability of series and integrals. Proc. Lond. Math. Soc. (2), 9 (1911), 369—409.
- HAHN, H.
- [10] Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen. J. für Math. 157 (1927), 214—229.
- HARDY, G. H. and RIESZ, M.
- [11] The general theory of Dirichlets series. Cambridge 1915.
- HILL, J. P.
- [12] On perfect methods of summability. Duke Math. J. 3 (1937), 702—714.
- JURKAT, W.
- [13] Über Konvergenzfaktoren bei Riesz'schen Mitteln. Math. Zeitschr. 54 (1951), 262—271.
- KNOPP, K.
- [14] Beweis eines von I. Schur in der Theorie der C -Summierbarkeit aufgestellten Satzes. J. für Math. 187 (1950), 70—74.
- KOJIMA, T.
- [15] On generalized Toeplitz's theorem on limit. Tôhoku Math. J. 12 (1917), 291—326.
- LORENTZ, G. G.
- [16] Eine Bemerkung über Limitierungsverfahren, die nicht schwächer als ein Cesàro-Verfahren sind. Math. Zeitschr. 51 (1949), 85—91.
- MAZUR, S.
- [17] Eine Anwendung der Theorie der Operationen bei der Untersuchung der Toeplitz'schen Limitierungsverfahren. Stud. math. 2 (1930), 40—50.
- MOORE, C. N.
- [18] Summable series and convergence factors. Americ. Math. Soc. Coll. Publ. XXII (1938).
- RIESZ, M.
- [19] Sur un théorème de la moyenne et ses applications. Acta Litt. ac Sci. Szeged 1 (1923), 114—126.
- SCHUR, I.
- [20] Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. J. für Math. 151 (1921), 79—111.
- ZELLER, K.
- [21] Allgemeine Eigenschaften von Matrixverfahren. Diss. Tübingen 1950.
- [22] Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Zeitschr. 53 (1951), 463—487.

(Eingegangen am 23. Juni 1951.)

Abschnittskonvergenz in FK-Räumen.

Von

Karl Zeller in Tübingen.

Einleitung.

Wir knüpfen an eine frühere Arbeit des Verfassers¹⁾ an und erinnern zunächst an einige dort gebrauchte Begriffe.

Der Begriff des (komplexen) *linearen Raumes* wird als bekannt vorausgesetzt. Eine *Quasinorm* $p(x)$ in einem linearen Raum \mathfrak{E} ist ein Funktional mit den Eigenschaften

$$0 \leq p(x) < \infty, \quad p(ax) = |a|p(x), \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y) \\ (x, y \in \mathfrak{E}, a \text{ komplex}).$$

Sind in \mathfrak{E} abzählbar viele Quasinormen p_j erklärt, so können wir in \mathfrak{E} einen *Konvergenzbegriff* folgendermaßen festlegen: Eine Folge $x^{(n)}$ heißt *konvergent* gegen das *Grenzelement* x (Bezeichnung: $x^{(n)} \rightarrow x[\mathfrak{E}; p_j]$ u. ä.), wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} p_j(x^{(n)} - x) = 0$ ($j = 0, 1, \dots$) gilt. Der lineare Raum \mathfrak{E} zusammen mit den p_j und diesem Konvergenzbegriff heißt ein *Q-Raum* $[\mathfrak{E}; p_j]$. Ist kein Mißverständnis zu befürchten, so schreiben wir statt $[\mathfrak{E}; p_j]$ auch kurz $[\mathfrak{E}]$ oder \mathfrak{E} .

Mit Hilfe der Konvergenz erklärt man in \mathfrak{E} Begriffe wie Stetigkeit, Berührungspunkt, Konvergenz einer Reihe usw. $[\mathfrak{E}; p_j]$ heißt *vollständig*, wenn jede Folge $x^{(n)}$ mit $\lim_{m, n \rightarrow \infty} p_j(x^{(m)} - x^{(n)}) = 0$ ($j = 0, 1, \dots$) („*konvergente Folge*“) ein Grenzelement besitzt. Ein vollständiger Q-Raum, in dem jede Folge höchstens ein Grenzelement besitzt, heißt ein *F-Raum* (wir beschränken uns also auf „lokalkonvexe“ F-Räume).

Ein *linearer Koordinatenraum* ist ein linearer Raum, dessen Elemente Stellen (Zahlenfolgen) $x = \{x_k\}$ mit komplexen Koordinaten sind und in dem die Operationen $x+y$ und ax in natürlicher Weise erklärt sind. Ein F-Raum, dem ein linearer Koordinatenraum zugrunde liegt und in dem aus $x^{(n)} \rightarrow x$ die Beziehungen $\lim_{n \rightarrow \infty} x_k^{(n)} = x_k$ ($k = 0, 1, \dots$) folgen („*koordinatenweise Konvergenz*“), heißt ein *FK-Raum*.

¹⁾ K. ZELLER, Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren, Math. Zeitschr. 53, 463–487 (1951); zitiert als AELV. Die Ergebnisse dieser und der vorliegenden Arbeit stammen größtenteils aus der Dissertation des Verfassers (Tübingen 1950).

Unter der F-Norm in einem F-Raum $[\mathfrak{E}; p_j]$ verstehen wir das Funktional $p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{p_j}{1+p_j}$. Verschwinden nur endlich viele der p_j nicht identisch, so ist \mathfrak{E} ein BANACH-Raum (B-Raum) $[\mathfrak{E}; p^*]$ mit der Norm $p^*(x) = \sum p_j \cdot x^{(n)} \rightarrow x[\mathfrak{E}]$ ist gleichbedeutend mit $p(x^{(n)} - x) \rightarrow 0$ bzw. $p^*(x^{(n)} - x) \rightarrow 0$. Die Bezeichnung „BK-Raum“ wird analog wie „FK-Raum“ erklärt.

Wir erklären nun in FK-Räumen die Eigenschaften „Abschnittsdichte“ (AD), „funktionale Abschnittskonvergenz“ (FAK), „schwache Abschnittskonvergenz“ (SAK) und „Abschnittskonvergenz“ (AK). §§ 1—5 bringen die allgemeine Theorie dieser Begriffe in FK-Räumen. Nicht alle Ergebnisse in diesen Paragraphen sind wesentlich neu, ihre Zusammenstellung erleichtert jedoch die Beweisführung in den §§ 6—9, in denen wir Anwendungen auf Probleme erhalten, die Konvergenzfaktoren (§ 6), iterierte Matrixtransformationen (§ 7), Durchschnitte von Matrixverfahren (§ 8) und Größenordnungsbedingungen (§ 9) betreffen.

Einige Definitionen und Sätze lassen sich übertragen auf andere Raumtypen, z. B. Q-Räume, denen ein linearer Koordinatenraum zugrunde liegt. Wir beschränken uns der Übersicht halber auf FK-Räume.

In der voranstehenden Arbeit hat A. PEYERIMHOFF³⁾ mit Hilfe der SAK in BK-Räumen zahlreiche Sätze über Konvergenzfaktoren bei gewissen Limitierungsverfahren aufgestellt. In § 6 werden wir einige grundlegende Sätze dieser Arbeit in verallgemeinerter Form vom Standpunkt der FK-Räume aus formulieren und beweisen. Weiter verwenden wir in § 4 einige Ergebnisse dieser Arbeit, die besagen, daß gewisse Wirkfelder von Limitierungsverfahren als BK-Räume mit SAK aufgefaßt werden können.

§ 1.

Schwache Konvergenz in F-Räumen.

$[\mathfrak{E}; p_j]$ sei ein F-Raum. Wir sagen, daß $x^{(n)}$ in \mathfrak{E} schwach gegen x konvergiert (in Zeichen $x^{(n)} \dashrightarrow x$), wenn für jedes lineare, stetige Funktional f in \mathfrak{E} gilt $f(x^{(n)}) \rightarrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty$).

Eine Folge $x^{(n)}$ kann nicht gegen zwei verschiedene Elemente schwach konvergieren (folgt aus AELV, Satz 3.5). Aus $x^{(n)} \rightarrow x$ („starker Konvergenz“) folgt offenbar $x^{(n)} \dashrightarrow x$.

Wir nennen eine Folge $x^{(n)}$ beschränkt in \mathfrak{E} , wenn $p_j(x^{(n)}) \leq M_j$ ($j = 0, 1, \dots$) gilt.

Satz 1.1. Sei $x^{(n)} \dashrightarrow x[\mathfrak{E}; p_j]$. Dann gilt: a) $x^{(n)}$ ist beschränkt. b) Es gibt eine Folge $\eta^{(n)}$ von endlichen Linearkombinationen der $x^{(n)}$, die gegen x konvergiert.

³⁾ A. PEYERIMHOFF, Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren, Math. Zeitschr. 55. 23—54 (1951); zitiert als PEYERIMHOFF.

Beweis. a) Für jedes j bilden die linearen Funktionale mit $|f(x)| \leq M p_j(x)$ einen BANACH-Raum, wobei die Norm von f das kleinste M ist, das dieser Ungleichung genügt. Der Beweis verläuft nun weiter wie bei BANACH³⁾, S. 80, Th. 6.

b) Beweis wie bei BANACH, S. 134, Th. 2, unter Verwendung von Satz 3.5 aus AELV.

\mathfrak{E} und \mathfrak{G} seien F-Räume, Φ bilde \mathfrak{E} in \mathfrak{G} ab. Wir nennen Φ *schwach stetig*, wenn aus

$$x^{(n)} \rightarrow x[\mathfrak{E}] \quad \text{folgt} \quad \Phi(x^{(n)}) \rightarrow \Phi(x)[\mathfrak{G}];$$

fehlkonvergenzfrei, wenn aus

$$x^{(n)} \rightarrow x[\mathfrak{E}], \quad \Phi(x^{(n)}) \rightarrow \eta[\mathfrak{G}] \quad \text{folgt} \quad \eta = \Phi(x);$$

schwach fehlkonvergenzfrei, wenn aus

$$x^{(n)} \rightarrow x[\mathfrak{E}], \quad \Phi(x^{(n)}) \rightarrow \eta[\mathfrak{G}] \quad \text{folgt} \quad \eta = \Phi(x).$$

Ist Φ schwach fehlkonvergenzfrei, so auch fehlkonvergenzfrei, weil ja aus starker Konvergenz die schwache folgt.

Satz 1.2. \mathfrak{E} und \mathfrak{G} seien F-Räume, Φ eine lineare Operation, die \mathfrak{E} in \mathfrak{G} abbildet. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent: a) Φ ist fehlkonvergenzfrei. b) Φ ist stetig. c) Φ ist schwach stetig. d) Φ ist schwach fehlkonvergenzfrei.

Beweis. Wir zeigen die logischen Beziehungen a) \rightsquigarrow b) \rightsquigarrow c) \rightsquigarrow d) \rightsquigarrow a). a) \rightsquigarrow b): Siehe BANACH, S. 41, Th. 7. b) \rightsquigarrow c): Beweis wie bei BANACH, S. 143, Th. 3. c) \rightsquigarrow d), d) \rightsquigarrow a): Klar.

Wir stellen nun eine Bedingung für schwache Konvergenz auf, die sich direkt aus AELV, Satz 3.4 (Zerlegung linearer Funktionale) ergibt:

Satz 1.3. In $[\mathfrak{E}; p_j]$ gilt genau dann $x^{(n)} \rightarrow x$, wenn für jedes lineare Funktional f , das für irgendein j die Bedingung $|f(x)| \leq p_j(x)$ erfüllt, $f(x^{(n)}) \rightarrow f(x)$ gilt.

§ 2.

Abschnittskonvergenz und Abschnittsdichte.

Wir definieren in diesem Abschnitt unter anderem die Eigenschaften AD, FAK, SAK, und AK und bringen einige grundlegende Sätze über diese Begriffe.

Unter einer *abbrechenden* oder *abgeschnittenen Stelle* $x = \{x_k\}$ verstehen wir eine Stelle mit nur endlich vielen nicht verschwindenden Koordinaten. Die Menge der abbrechenden Stellen nennen wir \mathfrak{A} . Jedes $x \in \mathfrak{A}$ ist also eine endliche Linearkombination $\sum x_k e_k$ der Stellen $e_k = \{0, \dots, 0, 1, 0, \dots\}$, die als k -te Koordinate eine Eins besitzen. Der r -te *Abschnitt* $\overset{r}{x}$ einer Stelle $x = \{x_k\}$ ist die Stelle $\{x_0, \dots, x_{r-1}, 0, \dots\}$.

³⁾ S. BANACH, Théorie des opérations linéaires, Warschau 1932; zitiert als BANACH.

Sei $\mathfrak{E} \supseteq \mathfrak{A}$ ein FK-Raum. Wir definieren für ein $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$ die Eigenschaften AD, AK, SAK, FAK:

AD: \mathfrak{x} ist in \mathfrak{E} Berührungspunkt von \mathfrak{A} .

AK: Die Abschnitte \mathfrak{x} konvergieren in \mathfrak{E} gegen \mathfrak{x} .

SAK: Die Abschnitte \mathfrak{x} konvergieren in \mathfrak{E} schwach gegen \mathfrak{x} .

FAK: Für jedes lineare, stetige Funktional f in \mathfrak{E} konvergiert

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k f(e_k).$$

Die vier Eigenschaften sind abhängig vom zugrunde gelegten Raum \mathfrak{E} . Bei ihrer Verwendung wird z. T. stillschweigend $\mathfrak{E} \supseteq \mathfrak{A}$ vorausgesetzt. In „ \mathfrak{x} hat in \mathfrak{E} AK“ ist also eingeschlossen, daß $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E} \supseteq \mathfrak{A}$ ist.

Wir sagen, daß \mathfrak{E} die Eigenschaft AD besitzt, wenn jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$ AD hat, usw.

Wir charakterisieren kurz diese Eigenschaften: \mathfrak{E} und \mathfrak{G} seien FK-Räume, Φ eine lineare, stetige Operation, die \mathfrak{E} in \mathfrak{G} abbildet. Für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$ mit AD ist dann $\Phi(\mathfrak{x})$ festgelegt durch die Werte $\Phi(e_k)$ ($k = 0, 1, \dots$), und für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$ mit AK gilt dann

$$\Phi(\mathfrak{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \Phi(e_k).$$

AD hat demgemäß Bedeutung für „Verträglichkeitssätze“ (vgl. AELV, § 6), AK für die Darstellung linearer Operationen. Für SAK gilt offenbar der folgende Satz:

Satz 2.1. *Ein $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$ hat genau dann SAK, wenn für jedes lineare, stetige Funktional f in \mathfrak{E} gilt $f(\mathfrak{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k f(e_k)$.*

Hat \mathfrak{x} FAK, so ist zugelassen, daß $\sum x_k f(e_k)$ gegen einen anderen Wert als $f(\mathfrak{x})$ konvergiert.

Bei der oben genannten Operation Φ sind die durch $\{y_n\} = \Phi(\mathfrak{x})$ definierten Funktionale $y_n(\mathfrak{x})$ linear und stetig, m. a. W., Φ ist eine Operation mit linearen, stetigen Funktionalen. SAK erhält damit ebenfalls Bedeutung für die Darstellung linearer Operationen. Der logische Zusammenhang der vier Eigenschaften ist evident:

Satz 2.2. $AK \rightsquigarrow SAK \rightsquigarrow \overset{AD}{FAK}$, d. h. hat ein \mathfrak{x} in \mathfrak{E} AK, so auch SAK usw.

Der nächste Satz gibt Aufschluß darüber, wie sich die vier Begriffe verhalten, wenn verschiedene Räume zugrunde gelegt werden:

Satz 2.3. \mathfrak{E} und \mathfrak{F} seien FK-Räume, $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{F}$. Hat \mathfrak{x} in \mathfrak{E} AK bzw. SAK bzw. AD bzw. FAK, so auch in \mathfrak{F} .

Beweis. Für AD und AK folgt dies aus Satz 4.5 in AELV. Auf Grund dieses Satzes ist weiter jedes lineare, stetige Funktional in \mathfrak{F} ein lineares, stetiges Funktional in \mathfrak{E} (nach Einschränkung des Definitionsbereiches), woraus sich die Behauptung für SAK und FAK ergibt.

In einem FK-Raum $[\mathfrak{E}; p_j]$ bilden die Elemente \mathfrak{x} mit AD die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{A}}$ von \mathfrak{A} (bezüglich des Konvergenzbegriffes von \mathfrak{E} ; $\overline{\mathfrak{A}}$ hat verschiedene Bedeutung je nach der Wahl von \mathfrak{E}), $\overline{\mathfrak{A}}$ ist mit den definierenden Quasinormen von \mathfrak{E} ein FK-Raum $[\overline{\mathfrak{A}}; p_j]$. Auch in \mathfrak{A} wird meistens der Konvergenzbegriff des momentan untersuchten Oberraumes $[\mathfrak{E}; p_j]$ verwendet, d. h. es wird der Q-Raum $[\mathfrak{A}; p_j]$ betrachtet. $[\mathfrak{A}; p_j]$ ist, gleichgültig, wie die p_j gewählt sind, kein FK-Raum; man überlegt sich nämlich leicht, daß $[\mathfrak{A}; p_j]$ nicht vollständig ist. In einem FK-Raum mit AK bilden die e_k eine Basis.

§ 3.

Schwache und starke Abschnittskonvergenz.

Wir stellen notwendige und hinreichende Bedingungen dafür auf, daß ein FK-Raum $[\mathfrak{E}; p_j]$ die Eigenschaft AK hat (Satz 3.3), und zeigen, daß ein FK-Raum mit SAK auch AK besitzt (Satz 3.4). Dazu beweisen wir zunächst die beiden folgenden Sätze:

Satz 3.1. $[\mathfrak{E}; p_j]$ und $[\mathfrak{G}; q_j]$ seien FK-Räume. In \mathfrak{G} gelte

(1) Aus $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z} \in \mathfrak{G}$ und $|z_k| \leq |x_k| + |y_k|$ ($k = 0, 1, \dots$) folgt

$$q_j(\mathfrak{z}) \leq q_j(\mathfrak{x}) + q_j(\mathfrak{y}) \quad (j = 0, 1, \dots).$$

Die φ_n seien stetige Quasinormen in \mathfrak{E} . Für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$ sei $\mathfrak{y} = \Phi(\mathfrak{x}) = \{\varphi_n(\mathfrak{x})\} \in \mathfrak{G}$. Dann ist die Abbildung Φ stetig.

Beweis. Wegen (1) sind die Funktionale $q_j(\Phi \mathfrak{x})$ Quasinormen in \mathfrak{E} . Die φ_n vermitteln eine fehlkonvergenzfreie Abbildung. Wir definieren nun in \mathfrak{E} einen Konvergenzbegriff durch die Quasinormen $q_j(\Phi \mathfrak{x})$ und p_j . Ähnlich wie bei BANACH, S. 41, Th. 7, stellen wir fest, daß $[\mathfrak{E}; p_j, q_j]$ vollständig und daher offenbar ein FK-Raum ist. $[\mathfrak{E}; p_j, q_j]$ und $[\mathfrak{E}; p_j]$ haben als FK-Räume denselben Konvergenzbegriff (siehe AELV, Satz 4.5b), somit sind die $q_j(\Phi \mathfrak{x})$ stetig in $[\mathfrak{E}; p_j]$ (vgl. AELV, Satz 3.3). Dies bedeutet aber die Stetigkeit der Abbildung Φ . — Für den zweiten Teil des Beweises hätten wir auch Th. 6 aus BANACH, S. 41, verwenden können.

Satz 3.2. $[\mathfrak{E}; p_j]$ sei ein FK-Raum mit AD, p seine F-Norm. Es gelte:

(2) Für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{E}$ mit den Abschnitten \mathfrak{x}^r ist

$$p(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^r) \geq p(\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^{r+1}),$$

d. h.

$$p\{0, \dots, 0, x_r, x_{r+1}, \dots\} \geq p\{0, \dots, 0, x_{r+1}, x_{r+2}, \dots\} \quad (r = 0, 1, \dots).$$

Dann hat \mathfrak{E} die Eigenschaft AK.

Beweis. Wegen AD gibt es zu jedem $\mathfrak{y} \in \mathfrak{E}$ ein $\mathfrak{y}' \in \mathfrak{A}$ mit $p(\mathfrak{y} - \mathfrak{y}') \leq \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben). Sei $y'_k = 0$ ($k > k_0$). Für $k > k_0$ ist dann wegen (2) erst recht $p(0, \dots, 0, y_k, y_{k+1}, \dots) \leq \varepsilon$, woraus AK folgt.

Satz 3.3. Ein FK-Raum $[\mathfrak{E}; p_j]$ besitzt genau dann AK, wenn er AD und folgende Eigenschaft besitzt:

(3) Für jedes $x \in \mathfrak{E}$ bilden die Abschnitte \check{x} eine beschränkte Folge.

Beweis. Aus 1. 1 a und 2. 2 folgt, daß die Bedingungen notwendig sind. Sie sind aber auch hinreichend: Die Funktionale $\varphi_{rj}(x) = p_j(x - \check{x})$ ($r, j = 0, 1, \dots$) sind stetige Quasinormen in \mathfrak{E} . Man verifiziert nämlich leicht, daß jedes φ_{rj} die Eigenschaften einer Quasinorm besitzt, und die Stetigkeit ergibt sich daraus, daß aus $x^{(n)} \rightarrow x$ für jedes feste r auch $\check{x}^{(n)} \rightarrow \check{x}$ folgt. Für jedes $x \in \mathfrak{E}$ und $j = 0, 1, \dots$ gilt nun wegen (3), daß $x_r = \varphi_{rj}(x)$ eine beschränkte Folge ist, d. h. dem BK-Raum \mathfrak{S}_B angehört. \mathfrak{S}_B hat die Norm $\overline{\text{fin}}_{k=0,1,\dots} |x_k|$ und also die Eigenschaft (1) aus

Satz 3. 1. Somit ist für jedes j die Quasinorm $\psi_j = \overline{\text{fin}}_r \varphi_{rj}(x)$ stetig in $[\mathfrak{E}; p_j]$. Daher ist \mathfrak{E} auch mit den definierenden Quasinormen p_j und ψ_j ein FK-Raum $[\mathfrak{E}; p_j, \psi_j]$. Es gilt $\varphi_{0j}(x) = p_j(x)$ und damit $\psi_j(x) \geq p_j(x)$, d. h. die Quasinormen $p_j(x)$ sind in $[\mathfrak{E}; \psi_j]$ stetig. Aus AELV, Satz 3. 3, erhalten wir, daß $[\mathfrak{E}; \psi_j]$ und $[\mathfrak{E}; p_j, \psi_j]$ denselben Konvergenzbegriff haben, d. h. daß auch $[\mathfrak{E}; \psi_j]$ ein FK-Raum ist, der nach AELV, Satz 4. 5 b, denselben Konvergenzbegriff wie $[\mathfrak{E}; p_j]$ hat. Demnach hat auch $[\mathfrak{E}; \psi_j]$ die Eigenschaft AD. Nun ist

$$\psi_j(x) = \overline{\text{fin}}_k p_j(0, \dots, 0, x_k, x_{k+1}, \dots),$$

daher

$$\psi_j(0, \dots, 0, x_r, x_{r+1}, \dots) \geq \psi_j(0, \dots, 0, x_{r+1}, x_{r+2}, \dots) \quad (j = 0, 1, \dots).$$

Daraus ergibt sich sofort, daß $[\mathfrak{E}; \psi_j]$ der Forderung (2) aus Satz 3. 2 genügt, also auf Grund dieses Satzes AK besitzt. Damit hat auch der mit demselben Konvergenzbegriff versehene Raum $[\mathfrak{E}; p_j]$ AK.

Satz 3. 4. Ein FK-Raum \mathfrak{E} hat AK, wenn er entweder SAK oder sowohl FAK als auch AD besitzt.

Beweis. Besitzt der Raum \mathfrak{E} FAK (oder SAK), so ist in ihm (3) erfüllt, wie man dem Beweis zu Satz 1. 1 a entnimmt. Hat \mathfrak{E} SAK, so nach 2. 2 auch AD. Somit ergibt 3. 3 beide Behauptungen.

Wir verwenden nun die Bezeichnung $\mathfrak{F}A$ für die Menge der von der Matrix A in den Raum \mathfrak{F} abgebildeten Stellen. Ist \mathfrak{F} ein FK-Raum, so kann auch $\mathfrak{F}A$ als FK-Raum aufgefaßt werden (vgl. AELV, Satz 4. 10). Weiter treten die FK-Räume \mathfrak{S}_N (Raum der Nullfolgen) und \mathfrak{S}_C (Raum der konvergenten Folgen) auf (vgl. AELV, Satz 4. 1). $\mathfrak{S}_C A$ ist dann das „Wirkfeld“, $\mathfrak{S}_N A$ das „Nullwirkfeld“ der Matrix bzw. des Matrixverfahrens A .

Satz 3. 5. In einem FK-Raum der Form $\mathfrak{F}A \supseteq \mathfrak{U}$ hat ein Element x genau dann AK bzw. SAK, wenn $A(\check{x})$ in \mathfrak{F} stark bzw. schwach gegen $A(x)$ konvergiert.

Beweis. Dies folgt aus der Betrachtung der die Konvergenz definierenden Quasinormen in $\mathfrak{F}A$ (AELV, Satz 4. 10) bzw. aus der Darstellung der linearen, stetigen Funktionale in $\mathfrak{F}A$ (AELV, Satz 4. 11).

Satz 3.6. In einem FK-Raum der Form $\mathfrak{S}_N A \supseteq \mathfrak{A}$ hat ein χ genau dann SAK, wenn $|\sum_{k=0}^r a_{nk} x_k| \leq M(n, r = 0, 1, \dots)$ ist. Letztere Bedingung ist z. B. erfüllt, wenn $\mathfrak{S}_N A \supseteq \mathfrak{S}_N$ und $\chi \in \mathfrak{S}_B$ ist.

Beweis. Der erste Teil des Satzes folgt aus 3.5 und den Bedingungen für schwache Konvergenz in \mathfrak{S}_N . Diese lauten: Für Stellen $\chi^{(n)}, \chi \in \mathfrak{S}_N$ gilt genau dann $\chi^{(n)} \rightarrow \chi [\mathfrak{S}_N]$, wenn $|x_k^{(n)}| \leq M(k, n = 0, 1, \dots)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_k^{(n)} = x_k (k = 0, 1, \dots)$ ist. Man vgl. hierzu BANACH, S. 136

unten, wo die entsprechenden Bedingungen für \mathfrak{S}_C aufgeführt sind. Der zweite Teil des Satzes folgt daraus, daß im Falle $\mathfrak{S}_N A \supseteq \mathfrak{S}_N$ die Matrix A die Bedingung (Zn) erfüllt (vgl. etwa AELV, § 1).

Wir schließen den Abschnitt mit einigen einfachen Bemerkungen. Hat ein χ in jedem der FK-Räume $[\mathfrak{G}^{(i)}; p_{ji}] (i = 0, 1, \dots)$ AK, so auch im FK-Raum $[\cap \mathfrak{G}^{(i)}; p_{ji}]$. Entsprechendes gilt für die Eigenschaften SAK und FAK (vgl. AELV, Satz 4.7), hingegen nicht allgemein für AD. Hat ein χ in einem FK-Raum \mathfrak{G} AK, so gilt $\lim_{m, n \rightarrow \infty} (\bar{x}^m - \bar{x}^n) = 0 [\mathfrak{G}]$,

im Falle $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_N A$ insbesondere $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \overline{\text{fin}} \left| \sum_{k=m}^n a_{sk} x_k \right| = 0$. Diese

Beziehungen geben einigen Aufschluß über die Stellen χ , die in \mathfrak{G} AK haben, und sind ein wertvolles Hilfsmittel bei der Aufstellung von Umkehrbedingungen, z. B. der Bedingung $O\left(\frac{1}{n}\right)$ für das C_1 -Verfahren.

§ 4.

Beispiele für Räume mit AD, AK bzw. FAK.

Beispiel 4.1. Folgende FK-Räume haben AK: $\mathfrak{S}_K, \mathfrak{S}_N, \mathfrak{U}_A, [x_k = o(d_k)]$ bei beliebigen $d_k \neq 0, \mathfrak{S}_K A$ für eine beliebige Matrix A .

Beweis. Die betreffenden FK-Räume sind aufgeführt in AELV, Satz 4.1 ($\mathfrak{S}_K, \mathfrak{S}_N, \mathfrak{U}_A$), Satz 4.10 ($\mathfrak{S}_K A$; man setze dort $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_K$), Satz 5.4 ($x_k = o(d_k)$). Aus der Form der definierenden Quasinormen oder auch aus der Darstellung der linearen Funktionale (wegen 3.4 genügt es ja, SAK zu beweisen) erkennt man ohne weiteres die Richtigkeit der Behauptung.

Beispiel 4.2. Ist A die Matrix eines der unten aufgeführten Limitierungsverfahren in der „Folgen-Folgen-Form“, so hat $\mathfrak{S}_N A$ (das „Null-Wirkfeld“) AK:

1. Permanente (echte) bewichtete arithmetische Mittel;
2. CESÀRO-Verfahren mit Ordnung $0 \leq k \leq 1$;
3. HÖLDER-Verfahren mit Ordnung $0 \leq k \leq 1$;
4. Unstetige RIESZSche Mittel mit Ordnung $0 \leq k \leq 1$.

Beweis. Für diese Verfahren gelten Ungleichungen der Form

$$\left| \sum_{k=0}^r a_{nk} x_k \right| \leq \overline{\text{fin}}_{0 \leq m \leq n} \left| \sum_{k=0}^m a_{mk} x_k \right| \leq \overline{\text{fin}}_{0 \leq m < \infty} \left| \sum_{k=0}^m a_{mk} x_k \right| \leq M(x) \quad (x \in \mathfrak{S}_N A),$$

woraus man mit Hilfe von 3.6 und 3.4 die Behauptung erhält. Beweise für diese Ungleichungen findet man bei PEYERIMHOFF, § 6 (Fall 1—3), und in einer Arbeit von W. JURKAT⁴⁾ (Fall 4).

Weiß man schon, daß die Behauptung von 4.2 für die CESÄRO-Verfahren richtig ist, so erhält man ihre Richtigkeit für die HÖLDER-Verfahren aus dem bekannten Äquivalenzsatz unter Verwendung von AELV, Satz 4.5.

Limitierungsverfahren, bei denen eine Ungleichung (ein „Mittelwertsatz“) der oben angegebenen Form gilt, haben besonders angenehme Eigenschaften. Die Bedeutung der Mittelwertsätze wird hier darauf zurückgeführt, daß sie in den betreffenden Null-Wirkfeldern AK ergeben. Ausführlich behandelt werden die Mittelwertsätze in einer demnächst erscheinenden Arbeit von W. JURKAT und A. PEYERIMHOFF⁵⁾.

Wir nennen ein Matrixverfahren A oder eine Matrix A *perfekt*⁶⁾, wenn A *permanent* ist (d. h. $\mathfrak{S}_C A \supseteq \mathfrak{S}_C$ ist und für $x \in \mathfrak{S}_C$ die Gleichung $A\text{-lim } x = \lim x_k$ gilt) und \mathfrak{S}_C in $[\mathfrak{S}_C A]$ (oder — was hier gleichbedeutend ist — \mathfrak{S}_N in $[\mathfrak{S}_N A]$) dicht liegt. Ist A eine *normale* Matrix (d. h. ist $a_{nk} = 0$ für $k > n$, $a_{nn} \neq 0$) und permanent, so ist die Bedingung „ \mathfrak{S}_N liegt dicht in $[\mathfrak{S}_N A]$ “ genau dann erfüllt, wenn aus $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n a_{nk} = 0$ ($k=0, 1, \dots$) und $\sum |\beta_n| < \infty$ folgt $\beta_n = 0$ ($n=0, 1, \dots$) (vgl. AELV, § 6).

Beispiel 4.3. Ist A eine perfekte Matrix, so hat der FK-Raum $\mathfrak{S}_N A$ die Eigenschaft AD.

Beweis. Es ist $\mathfrak{S}_N A \supseteq \mathfrak{S}_N$. Jedes $x \in \mathfrak{S}_N$ ist in $[\mathfrak{S}_N]$, also auch in $[\mathfrak{S}_N A]$ Berührungspunkt von \mathfrak{A} . \mathfrak{S}_N liegt in $[\mathfrak{S}_N A]$ dicht, somit liegt auch \mathfrak{A} in $[\mathfrak{S}_N A]$ dicht.

Beispiel 4.4. FAK besitzen die FK-Räume \mathfrak{S}_B , \mathfrak{S}_C und alle FK-Räume der Form $\mathfrak{S}_C A$, wo $\mathfrak{S}_N A$ AK hat und A permanent ist.

Beweis. Sei f ein lineares, stetiges Funktional in $[\mathfrak{S}_C A]$. f definiert ein lineares, stetiges Funktional g in $[\mathfrak{S}_N A]$ mit $g(x) = f(x)$ für $x \in \mathfrak{S}_N A$. $\sum x_k f(e_k) = \sum x_k g(e_k)$ konvergiert für $x \in \mathfrak{S}_N A \supseteq \mathfrak{S}_N$, daher ist $\sum |f(e_k)| < \infty$. Jedes $y \in \mathfrak{S}_C A$ ist darstellbar in der Form $y = x + a\{1, 1, \dots\}$ mit $x \in \mathfrak{S}_N A$. Es ist $\sum_{k=0}^r y_k f(e_k) = \sum_{k=0}^r x_k f(e_k) + a \sum_{k=0}^r f(e_k)$, woraus die

⁴⁾ W. JURKAT, Über Rieszsche Mittel mit unstetigem Parameter, Math. Zeitschr. 55, 8—12 (1951).

⁵⁾ W. JURKAT und A. PEYERIMHOFF, Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen, Math. Zeitschr. 55, 92—108 (1951).

⁶⁾ Vgl. hierzu J. D. HILL, On perfect methods of summability, Duke math. J. 3, 702—714 (1937).

Behauptung für die Räume $\mathfrak{S}_C A$ folgt. Ähnlich führt man den Beweis für \mathfrak{S}_B und \mathfrak{S}_C durch Vergleich mit \mathfrak{S}_N .

§ 5.

Lineare Operationen in F-Räumen.

Wir bringen einige Sätze über die Darstellung und Fortsetzung linearer Operationen, aus denen die Bedeutung der SAK erhellt.

Satz 5.1. $[\mathfrak{E}; p_j]$ sei ein Q-Raum, \mathfrak{D} ein linearer Unterraum in \mathfrak{E} , $\bar{\mathfrak{D}}$ die Menge der Berührungspunkte von \mathfrak{D} in $[\mathfrak{E}; p_j]$, $[\mathfrak{G}; q_i]$ ein F-Raum. Die Operation Φ sei in \mathfrak{D} erklärt und bilde den Q-Raum $[\mathfrak{D}; p_j]$ linear und stetig in \mathfrak{G} ab. Dann läßt sich Φ fortsetzen zu einer Operation $\bar{\Phi}$, die den Q-Raum $[\bar{\mathfrak{D}}; p_j]$ linear und stetig in \mathfrak{G} abbildet.

Beweis. Jedes $q_i(\Phi x)$ ist eine stetige Quasinorm in $[\mathfrak{D}; p_j]$ (man vgl. hierzu auch § 8). Nach AELV, Satz 3.2 gilt daher mit geeigneten Zahlen $\varrho = \varrho(i)$ und $m = m(i)$

$$q_i(\Phi x) \leq \varrho(p_0(x) + \dots + p_m(x)) \quad (x \in \mathfrak{D}).$$

Hieraus ersieht man, daß Φ jede in $[\mathfrak{D}; p_j]$ konzentrierte Folge abbildet in eine in \mathfrak{G} konzentrierte Folge. Sei $x \in \bar{\mathfrak{D}}$. Dann gibt es Elemente $x^{(n)} \in \mathfrak{D}$ mit $x^{(n)} \rightarrow x$ in $[\mathfrak{E}]$. Die $x^{(n)}$ bilden eine in $[\mathfrak{D}; p_j]$ konzentrierte Folge, somit ist die Folge $\Phi(x^{(n)})$ in \mathfrak{G} konzentriert und hat ein Grenzelement η . Dabei ist

$$\begin{aligned} q_i(\eta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} q_i(\Phi x^{(n)}) \leq \varrho \lim_{n \rightarrow \infty} (p_0(x^{(n)}) + \dots + p_m(x^{(n)})) \\ &= \varrho(p_0(x) + \dots + p_m(x)). \end{aligned}$$

Man sieht leicht ein, daß η nur von x abhängt, nicht aber von der Wahl der $x^{(n)}$. Die somit definierte Operation $\eta = \bar{\Phi}(x)$ genügt den Forderungen des Satzes.

Satz 5.2. \mathfrak{E} und \mathfrak{G} seien FK-Räume, Φ eine Operation, die \mathfrak{E} linear und stetig in \mathfrak{G} abbildet. Dann sind die durch

$$\{y_n(x)\} = \Phi(x)$$

definierten Funktionale $y_n(x)$ linear und stetig in \mathfrak{E} . Für jedes x mit SAK in \mathfrak{E} gilt

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_n(e_k).$$

Beweis. Die Behauptung über die Funktionale ist trivial. Der zweite Teil des Satzes folgt nun mit 2.1 (hier wird — vgl. § 2 — $\mathfrak{E} \geq \mathfrak{A}$ vorausgesetzt).

Satz 5.3. $[\mathfrak{E}; p_j]$ und \mathfrak{G} seien FK-Räume, $\mathfrak{E} \geq \mathfrak{A}$. Die Matrixtransformation A bilde \mathfrak{A} in \mathfrak{G} ab, d. h. die Stelle $\{y_n\}$ mit

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$$

liege für jedes $x \in \mathfrak{A}$ in \mathfrak{G} . Die Operation sei stetig als Abbildung des Q -Raumes $[\mathfrak{A}; p_j]$ in \mathfrak{G} . Dann bildet A auch jedes $x \in \mathfrak{E}$, das in \mathfrak{E} SAK hat, in \mathfrak{G} ab.

Beweis. Wir bezeichnen die Menge der Berührungspunkte (abgeschlossene Hülle) von \mathfrak{A} in $[\mathfrak{E}; p_j]$ mit $\overline{\mathfrak{A}}$. Nach 5.1 läßt sich die Operation A fortsetzen zu einer Operation \overline{A} , die den Q -Raum $[\overline{\mathfrak{A}}; p_j]$ linear und stetig in \mathfrak{G} abbildet. Nach 5.2 gilt für jedes $x \in \mathfrak{E}$, das in \mathfrak{E} SAK besitzt (jedes solche x gehört ja zu $\overline{\mathfrak{A}}$)

$$\overline{A}(x) = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k \right\},$$

da $\overline{A}(e_k) = \{a_{nk}\}$ ist für $k = 0, 1, \dots$.

Satz 5.4. $[\mathfrak{E}; p_j]$ und \mathfrak{G} seien FK-Räume, $\mathfrak{E} \supseteq \mathfrak{A}$. Die zeilenfinit Matrix A bilde den Q -Raum $[\mathfrak{A}; p_j]$ stetig in \mathfrak{G} ab. Dann bildet A auch jedes $x \in \mathfrak{E}$, das in \mathfrak{E} AD besitzt, in \mathfrak{G} ab.

Beweis. x habe AD. Dann gibt es Stellen $x^{(n)} \in \mathfrak{A}$ mit $x^{(n)} \rightarrow x [\mathfrak{E}]$. Wie in 5.1 folgt $A(x^{(n)}) \rightarrow \eta [\mathfrak{G}]$, wo η ein gewisses Element von \mathfrak{G} ist. Da A zeilenfinit ist, ist $A(x)$ erklärt und es gilt $A(x^{(n)}) \rightarrow A(x) [\mathfrak{E}_K]$. Hieraus erhält man $\eta = A(x)$ und damit die Behauptung.

§ 6.

Konvergenzfaktoren.

\mathfrak{E} sei irgendein FK-Raum, $A = \{a_{nk}\}$ eine Matrix. Zahlen ε_k mit der Eigenschaft

(1) Für jedes $x \in \mathfrak{E}$ existiert $A\text{-lim}(\varepsilon_k x_k)$

nennen wir A -Limitierbarkeitsfaktoren (bezüglich \mathfrak{E}), im Falle

$$A = S = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix} \mathbf{0}$$

auch kurz *Konvergenzfaktoren* (da dann $\sum \varepsilon_k x_k$ für $x \in \mathfrak{E}$ konvergiert).

Satz 6.1. Die ε_k sind genau dann A -Limitierbarkeitsfaktoren bezüglich \mathfrak{E} , wenn für die Matrix $B = A \text{diag } \varepsilon_k$ gilt $\mathfrak{E}_C B \supseteq \mathfrak{E}$. Ist letztere Bedingung erfüllt, so ist das Funktional $A\text{-lim}(\varepsilon_k x_k) = B\text{-lim } x$ linear und stetig in \mathfrak{E} .

Beweis. Der erste Teil ist klar, der zweite folgt mit AELV, Satz 4.4c.

Wir nennen A eine Sp-Matrix, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = a_k$ ($k = 0, 1, \dots$) existiert.

Satz 6.2. \mathfrak{E} sei ein FK-Raum, $\mathfrak{E} \supseteq \mathfrak{A}$, die Zahlen ε_k seien A -Limitierbarkeitsfaktoren, A eine Sp-Matrix. Dann gilt:

a) Es gibt ein lineares, stetiges Funktional f in \mathfrak{E} mit

$$f(e_k) = a_k \varepsilon_k \quad (k = 0, 1, \dots).$$

b) Für jedes $x \in \mathfrak{E}$ mit FAK konvergiert $\sum a_k \varepsilon_k x_k$.

c) Hat \mathfrak{E} FAK, so sind die $a_k \varepsilon_k$ Konvergenzfaktoren bezüglich \mathfrak{E} .

Beweis. a) folgt aus 6.1, b) folgt aus a) und der Definition von FAK, c) folgt aus b).

Im Anschluß an 6.2a erhebt sich die Frage, wann Zahlen ε_k mit der Eigenschaft

(2) Es gibt ein lineares, stetiges Funktional f in \mathfrak{E} mit

$$f(e_k) = \varepsilon_k \quad (k = 0, 1, \dots)$$

Konvergenzfaktoren sind.

Satz 6.3. Hat \mathfrak{E} FAK, so sind Zahlen mit der Eigenschaft (2) stets Konvergenzfaktoren. Hat \mathfrak{E} nicht FAK, so gibt es Zahlen ε_k , die (2) genügen, aber nicht Konvergenzfaktoren sind.

Beweis. Die Behauptungen folgen direkt aus der Definition der FAK.

(2) kann abgewandelt werden, wenn man für \mathfrak{E} eine Darstellung des allgemeinen linearen, stetigen Funktionals kennt (vgl. etwa die Darstellung für $\mathfrak{E} = \mathfrak{C}_c A$ in AELV, Satz 5.2).

A. PEYERIMHOFF hat in der voranstehenden Arbeit mit Hilfe derartiger allgemeiner Sätze konkrete Bedingungen für Limitierbarkeitsfaktoren bei speziellen Limitierungsverfahren gewonnen.

§ 7.

Iterierte Matrixtransformationen.

Wir benötigen einen weiteren FK-Raum:

Beispiel 7.1. Der Raum \mathfrak{U}_C der x , für die $\sum x_k$ konvergiert, ist ein FK-Raum mit der definierenden Quasinorm $\lim_{l=0,1,\dots} \left| \sum_{k=0}^l x_k \right|$. Der FK-Raum \mathfrak{U}_C hat AK.

Beweis. Es ist $\mathfrak{U}_C = \mathfrak{C}_c S$, wo S dieselbe Bedeutung wie in § 6 hat. Satz 5.1c aus AELV ergibt die erste Behauptung. Die Behauptung über AK ist evident.

Satz 7.2. \mathfrak{E} sei ein FK-Raum, $C = \{c_{nk}\}$ eine Matrix. Ist das (lineare) Funktional

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} x_k$$

für jedes $x \in \mathfrak{E}$ erklärt, so ist f in \mathfrak{E} stetig, und für jedes $x \in \mathfrak{E}$ mit SAK gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_{nk} x_k.$$

Beweis. Ist f in \mathfrak{E} erklärt, so bildet C \mathfrak{E} in \mathfrak{U}_C ab, und zwar stetig (AELV, Satz 4.4). Dies ergibt den ersten Teil der Behauptung. Im zweiten Teil wird (vgl. § 2) stillschweigend $\mathfrak{E} \supseteq \mathfrak{A}$ vorausgesetzt.

Es ist $f(e_k) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{nk}$, was mit 2.1 die Behauptung ergibt.

Satz 7.3. \mathfrak{E} und \mathfrak{G} seien FK-Räume, A und B Matrizen. Ist für jedes $x \in \mathfrak{E}$ die Abbildung $\eta = B(Ax)$ erklärt und $\eta \in \mathfrak{G}$, so ist die hierdurch vermittelte Abbildung von \mathfrak{E} in \mathfrak{G} linear und stetig; und für jedes $x \in \mathfrak{E}$ mit SAK gilt $B(Ax) = (BA)x$.

Die zweite Behauptung besagt, daß die Hintereinanderausführung (Iteration) der Abbildungen B und A dasselbe Ergebnis liefert wie die Abbildung mit der Matrix BA .

Beweis. Die Abbildung $\eta = B(Ax)$ ist nach 7.2 eine Abbildung mit linearen, stetigen Funktionalen. AELV, Satz 4.3 ergibt die erste Behauptung. Die zweite folgt direkt aus 7.2.

Es sei hingewiesen auf naheliegende Erweiterungen von 7.2 und 7.3 durch Verwendung anderer Konvergenzbegriffe für Reihen (z. B. Cesàro-Summierbarkeit). Man vergleiche hierzu 6.2.

Satz 7.4. A sei eine normale, B eine beliebige Matrix. \mathfrak{E} und \mathfrak{G} seien FK-Räume, \mathfrak{E} habe SAK. Genau dann gilt $\mathfrak{G}B \supseteq \mathfrak{E}A$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Die Operation $\eta = B(x)$ ist in $\mathfrak{E}A$ erklärt;
- (2) Die Operation $\eta = (BA^{-1})x$ bildet \mathfrak{E} in \mathfrak{G} ab.

Beweis. Es ist $\mathfrak{E}A = A^{-1}\mathfrak{E}$. Somit gilt genau dann $\mathfrak{G}B \supseteq \mathfrak{E}A$, wenn B den Raum $A^{-1}\mathfrak{E}$ in \mathfrak{G} abbildet. Dies ist gleichbedeutend damit, daß die Operation $\eta = B(A^{-1}x)$ \mathfrak{E} in \mathfrak{G} abbildet. Aus (1) folgt nach 7.3 die Gleichung $(BA^{-1})x = B(A^{-1}x)$ ($x \in \mathfrak{E}$), was leicht die Behauptung ergibt.

Zusatz. Die Bedingung (1) ist genau dann erfüllt, wenn für jedes n die Zahlen b_{nk} Konvergenzfaktoren für $\mathfrak{E}A$ sind, d. h. die

Matrix $B^{(n)}$ mit $b_{nk}^{(n)} = \begin{cases} b_{nk} & (k \leq l) \\ 0 & (k > l) \end{cases}$ $\mathfrak{E}A$ in \mathfrak{S}_C abbildet. Auf $B^{(n)}$ kann

man nun wieder 7.4 anwenden (mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_C$), wobei (1) erfüllt ist, da $B^{(n)}$ zeilenfinit ist.

7.4 leistet manchmal auch Dienste, wenn die Bedingung SAK verletzt ist:

Satz 7.5. A sei eine normale, B eine beliebige Matrix. Genau dann ist $\mathfrak{S}_C B \supseteq \mathfrak{S}_C A$, wenn (3), (4) und (5) erfüllt sind:

- (3) Die Operation $\eta = B(x)$ ist für $x \in \mathfrak{S}_N A$ erklärt;
- (4) Die Operation $\eta = (BA^{-1})x$ bildet \mathfrak{S}_N in \mathfrak{S}_C ab;
- (5) Die Operation $\eta = B(x)$ bildet irgendein $x^* \in \mathfrak{S}_C A$, $x^* \bar{\in} \mathfrak{S}_N A$ in \mathfrak{S}_C ab.

Beweis. Jedes $x \in \mathfrak{S}_C A$ läßt sich darstellen in der Form $x = \beta + \alpha x^*$ mit $\beta \in \mathfrak{S}_N A$, x^* wie oben. 7.4 liefert die Behauptung.

Zusatz. 7.5 wurde in etwas veränderter Form von MAZUR⁷⁾ bewiesen. Aus MAZURS Bedingungen 2. und 3. folgt (3), aus 2. und 4. ergibt sich (4), während umgekehrt aus (3) und (4) die Bedingungen 2., 3. und 4. folgen. Schließlich ist (5) im wesentlichen mit der Eigenschaft 1. bei MAZUR äquivalent. •

§ 8.

Durchschnitte von FK-Räumen.

Wir behandeln hier Fragen, die Darstellungsmöglichkeiten für Durchschnitte von FK-Räumen betreffen und erhalten Anwendungen auf „Durchschnitte von Limitierungsverfahren“.

Wir beginnen mit einigen einfachen Bemerkungen. $[\mathfrak{E}; p_j]$ und $[\mathfrak{G}; q_i]$ seien zwei Q-Räume. Ist Φ eine lineare Abbildung von \mathfrak{E} in \mathfrak{G} , so sind die Funktionale $q_i(\Phi x)$ Quasinormen in \mathfrak{E} . Φ ist genau dann stetig, wenn die $q_i(\Phi x)$ stetig sind. Im Falle der Stetigkeit gilt für jedes i eine Ungleichung der Form

$$(1) \quad q_i(\Phi x) \leq \varrho \sum' p_j(x) \quad (x \in \mathfrak{E}),$$

wo in \sum' nur endlich viele Glieder auftreten (vgl. AELV, Satz 3.2). Sind insbesondere \mathfrak{E} und \mathfrak{G} FK-Räume mit $\mathfrak{E} \leq \mathfrak{G}$, so gilt für jedes i eine Ungleichung der Form

$$(2) \quad q_i(x) \leq \varrho \sum' p_j(x) \quad (x \in \mathfrak{E})$$

(\sum' wie oben), wie aus AELV, Satz 4.5, folgt.

Satz 8.1. Die $[\mathfrak{E}^{(i)}; p_{ji}]$ seien FK-Räume, $\mathfrak{E}^{(i)} \supseteq \mathfrak{E}^{(i+1)} \supseteq \mathfrak{A}$ ($i = 0, 1, \dots$). Zu jedem i gebe es ein $x^* = x^*(i)$ mit

$$(3) \quad x^* \in \mathfrak{E}^{(i)}, \quad x^* \bar{\in} \bigcap_{j=0}^{\infty} \mathfrak{E}^{(j)}, \quad x^* \text{ hat SAK in } \mathfrak{E}^{(i)}.$$

Dann gilt für jeden BK-Raum $[\mathfrak{G}; q]$ und jede Matrix A die Ungleichung $\mathfrak{G}A \neq \mathfrak{E}$, wo $\mathfrak{E} = \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{E}^{(i)}$ gesetzt ist.

Beweis. Wir dürfen $\mathfrak{G}A \supseteq \mathfrak{E}$ annehmen. A bildet dann den FK-Raum $[\mathfrak{E}; p_{ji}]$ (vgl. AELV, Satz 4.7) in \mathfrak{G} ab, und zwar stetig. $q(Ax)$ ist also eine stetige Quasinorm in \mathfrak{E} und es gilt eine Ungleichung der Form (\sum' wie oben)

$$(4) \quad q(Ax) \leq \varrho \sum'_{i,j} p_{ji}(x) \quad (x \in \mathfrak{E}).$$

l sei die größte Zahl, die als zweiter Index eines p_{ji} in \sum' vorkommt. Wegen $\mathfrak{E}^{(i)} \supseteq \mathfrak{E}^{(l)} > \mathfrak{E}$ ($i = 0, \dots, l$) und der Beziehung (2) gilt nun

⁷⁾ S. MAZUR, Über lineare Limitierungsverfahren, Math. Zeitschr. 28, 599–611 (1928); Satz IV.

auch eine Ungleichung der Form

$$(5) \quad q(Ax) \leq \varrho \sum_j' p_j(x) \quad (x \in \mathfrak{G}),$$

d. h. A bildet den Q -Raum $[\mathfrak{G}; p_j]$ und wegen $\mathfrak{G} \geq \mathfrak{A}$ auch den Q -Raum $[\mathfrak{A}; p_j]$ stetig in \mathfrak{G} ab. Nach 5.3 bildet A auch das x^* , das (3) mit $i = l$ genügt, in \mathfrak{G} ab, d. h. es ist $\mathfrak{G}A > \mathfrak{G}$.

Satz 8.2. Die $[\mathfrak{G}^{(i)}; p_{ji}]$ seien FK-Räume, $\mathfrak{G}^{(i)} \geq \mathfrak{G}^{(i+1)} \geq \mathfrak{A}$ ($i = 0, 1, \dots$). Zu jedem i gebe es ein x^* mit

$$(6) \quad x^* \in \mathfrak{G}^{(i)}, \quad x^* \bar{\in} \bigcap_{j=0}^{\infty} \mathfrak{G}^{(j)}, \quad x^* \text{ hat AD in } \mathfrak{G}^{(i)}.$$

Dann gilt für jeden BK-Raum \mathfrak{G} und jede zeilenfinite Matrix A die Ungleichung $\mathfrak{G}A \neq \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{G}^{(i)}$.

Der Beweis ist fast wörtlich derselbe wie für 8.1, nur ist im letzten Satz 5.3 durch 5.4 und (3) durch (6) zu ersetzen.

Die Voraussetzung $\mathfrak{G}^{(i)} \geq \mathfrak{G}^{(i+1)}$ läßt sich in gewissem Umfang umgehen: Sind die $\mathfrak{F}^{(r)}$ irgendwelche FK-Räume, deren Durchschnitt man untersuchen will, so setzt man $\bigcap_{r=0}^i \mathfrak{F}^{(r)} = \mathfrak{G}^{(i)}$ und sieht nach, ob (3) bzw. (6) erfüllt ist. Wichtig ist der Spezialfall

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}.$$

Bei den folgenden Anwendungen beschränken wir uns der Einfachheit halber auf permanente Matrixverfahren.

Satz 8.3. Die $A^{(i)}$ seien irgendwelche permanente Matrizen, $\mathfrak{S}_C A^{(i)} \geq \mathfrak{S}_C A^{(i+1)}$ ($i = 0, 1, \dots$). Es gebe zu jedem i ein x^* mit

$$x^* \in \mathfrak{S}_C A^{(i)}, \quad x^* \bar{\in} \bigcap_{j=0}^{\infty} \mathfrak{S}_C A^{(j)}, \quad x^* \in \mathfrak{S}_B.$$

Dann gibt es keine Matrix A derart, daß $\mathfrak{S}_C A = \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{S}_C A^{(i)}$ ist.

Beweis. Wegen der Permanenz der Verfahren dürfen wir $x^* \in \mathfrak{S}_N A^{(i)}$ annehmen. x^* hat dann nach 3.6 in $\mathfrak{S}_N A^{(i)}$, also auch in $\mathfrak{S}_C A^{(i)}$ SAK. 8.1 ergibt die Behauptung.

Satz 8.4. Mit $C^{(a)}$ sei die Matrix des CESÄROSchen Limitierungsverfahrens α -ter Ordnung in der Folgen-Folgen-Form bezeichnet; es gelte $0 \leq a < 1$. Dann gibt es keine Matrix A derart, daß $\mathfrak{S}_C A = \bigcap_{a > a} \mathfrak{S}_C C^{(a)}$ gilt.

Beweis. Wegen $\mathfrak{S}_C C^{(a)} > \mathfrak{S}_C C^{(b)}$ für $a > b$ ist $\bigcap_{a > a} \mathfrak{S}_C C^{(a)} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{S}_C C^{(a_n)}$, wo die a_n eine Zahlenfolge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $a_n \leq 1$, $a_{n+1} < a_n$ ($n = 0, 1, \dots$)

bilden. Die Räume $\mathfrak{S}_N C^{(a_n)}$ haben AK (siehe 4.2), somit hat jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{S}_N C^{(a_n)}$ in $\mathfrak{S}_C C^{(a_n)}$ AK. Es gilt $\mathfrak{S}_N C^{(a_n)} > \mathfrak{S}_N C^{(a_{n+1})}$, daher ist 8.1 anwendbar.

Zusatz. Entsprechende Sätze gelten für beliebige Klassen von Matrixverfahren, bei denen die Null-Wirkfelder FK-Räume mit AK bilden.

Satz 8.5. Die $A^{(i)}$ seien irgendwelche perfekte Matrizen, $\mathfrak{S}_C A^{(i)} \supseteq \mathfrak{S}_C A^{(i+1)} > \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{S}_C A^{(i)}$. Dann gibt es keine zeilenfinite Matrix A derart, daß $\mathfrak{S}_C A = \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{S}_C A^{(i)}$ gilt.

Beweis. Auf Grund der Voraussetzung gibt es zu jedem i ein \mathfrak{x}^* mit $\mathfrak{x}^* \in \mathfrak{S}_C A^{(i)}$, $\mathfrak{x}^* \notin \bigcap_{j=0}^{\infty} \mathfrak{S}_C A^{(j)}$. Wegen der Permanenz der Verfahren dürfen wir $\mathfrak{x}^* \in \mathfrak{S}_N A^{(i)}$ annehmen. \mathfrak{x}^* hat dann wegen der Perfektheit der Verfahren die Eigenschaft AD in $\mathfrak{S}_N A^{(i)}$ und $\mathfrak{S}_C A^{(i)}$, somit ist 8.2 anwendbar.

§ 9.

Größenordnungsbedingungen.

Wir definieren einen weiteren FK-Raum. Die d_k seien irgendwelche nicht verschwindende komplexe Zahlen. Wir schreiben $x_k = O(d_k)$, wenn $\overline{\text{fin}}_{k=0,1,\dots} \left| \frac{x_k}{d_k} \right| < \infty$ ist.

Beispiel 9.1. Der Raum der \mathfrak{x} mit $x_k = O(d_k)$ ist ein BK-Raum $[x_k = O(d_k)]$ mit der Norm $\overline{\text{fin}}_{k=0,1,\dots} \left| \frac{x_k}{d_k} \right|$.

Beweis. Man zeigt dies ganz ähnlich wie Satz 5.4 aus AELV. Ebenso wie dort könnte man für die d_k auch die Werte 0 und ∞ zulassen.

Hilfssatz 9.2. Im Raume $[x_k = O(d_k)]$ hat ein \mathfrak{y} genau dann AD (und dann sogar AK), wenn $y_k = o(d_k)$ (d. h. $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_k}{d_k} = 0$) gilt.

Beweis. Gilt für ein \mathfrak{y} des Raumes $y_k \neq o(d_k)$, so gibt es eine Indexfolge $k_n \uparrow \infty$ mit $\left| \frac{y_{k_n}}{d_{k_n}} \right| \geq \varepsilon > 0$. Für jedes $\mathfrak{z} \in \mathfrak{A}$ ist dann $\overline{\text{fin}}_{k=0,1,\dots} \left| \frac{z_k - y_k}{d_k} \right| \geq \varepsilon$, d. h. \mathfrak{y} hat nicht AD. Jedes \mathfrak{y} mit $y_k = o(d_k)$ hat offenbar AK.

Satz 9.3. Sei \mathfrak{E} ein FK-Raum; die $d_k \neq 0$ seien irgendwelche komplexe Zahlen, $\mathfrak{y} \in \mathfrak{E}$ habe AD und es gelte $y_k \neq o(d_k)$. Dann gibt es ein $\mathfrak{z} \in \mathfrak{E}$ mit $z_k \neq O(d_k)$.

Beweis. Ist $y_k \neq O(d_k)$, so ist nichts zu beweisen. Nun sei $y_k = O(d_k)$. \mathfrak{y} hat in \mathfrak{E} , aber nicht in $[x_k = O(d_k)]$ AD (siehe 9.2). Somit gilt nicht $[x_k = O(d_k)] \supseteq \mathfrak{E}$ (vgl. 2.3).

Die folgenden Sätze zeigen, wie 9.3 angewandt werden kann. Wir verwenden dabei das durch $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ definierte Symbol Δ .

Satz 9.4. Für jedes $n = 0, 1, \dots$ gelte $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k^{(n)} = \infty$, $d_k^{(n)} \neq 0$, $\Delta d_k^{(n)} \geq 0$. Dann gibt es ein w mit $\lim_{k \rightarrow \infty} w_k = \infty$, $\Delta w_k \geq 0$ und $w_k = o(d_k^{(n)})$ für jedes n .

Beweis. Wir betrachten die FK-Räume $[x_k = o(d_k^{(n)})]$, die nach 4.1 AK besitzen. Der Durchschnitt \mathfrak{D} dieser Räume besitzt — aufgefaßt als FK-Raum — ebenfalls AK (vgl. § 3), also auch AD. Es ist $\{1, 1, \dots\} \in \mathfrak{D}$. Wir wenden 9.3 an mit $y_k = d_k = 1$ und finden, daß ein $\xi \in \mathfrak{D}$ vorhanden ist mit $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |z_k| = \infty$. Es gibt also eine Folge natürlicher Zahlen k_n mit $\Delta k_n > 0$, so daß $|z_{k_n}|$ monoton gegen ∞ geht. Wir setzen nun

$$w_k = \begin{cases} 0 & (k < k_0) \\ z_{k_n} & (k_n \leq k < k_{n+1}). \end{cases}$$

Die direkte Konstruktion der Folge w_k ist etwas umständlicher.

Satz 9.5. A sei eine perfekte Matrix. Für jedes $\xi \in \mathfrak{S}_N A$ gelte $x_k = O(d_k)$, wo die $d_k \neq 0$ irgendwelche komplexe Zahlen sind. Dann gilt sogar $x_k = o(d_k)$ für $\xi \in \mathfrak{S}_N A$. Ist weiter $\lim_{k \rightarrow \infty} |d_k| = \infty$, so gilt sogar $x_k = o(d_k)$ für $\xi \in \mathfrak{S}_C A$.

Beweis. Der Raum $\mathfrak{S}_N A$ hat AD, 9.3 ergibt daher die erste Behauptung. Jedes $\xi \in \mathfrak{S}_C A$ ist in der Form $\xi = \eta + a\{1, 1, \dots\}$ mit $\eta \in \mathfrak{S}_N A$ darstellbar, was die zweite Behauptung ergibt.

Zusatz. Ist A eine normale, perfekte Matrix, $B = \{b_{nk}\}$ ihre Inverse, so gilt für $l = 0, 1, \dots$

$$b_{nl} = o\left(\sum_{k=0}^n |b_{nk}|\right).$$

Beweis. Für jedes $\xi \in \mathfrak{S}_N A$ gilt $x_n = O\left(\sum_{k=0}^n |b_{nk}|\right)$ (dies ist beiläufig die beste Abschätzung dieser Art). Für jedes $l = 0, 1, \dots$ ist $\{b_{nl}\} \in \mathfrak{S}_N A$. 9.5 ergibt nun die Behauptung.

Zusatz bei der Korrektur. Einfacher beweist man Satz 3.3 so: Die Menge der beschränkten Folgen $\{\xi^{(r)}\}$ mit $\xi^{(r)} \in \mathfrak{E}$ bildet einen F-Raum \mathfrak{B} mit den Quasinormen $\overline{\lim}_{r=0,1,\dots} p_j(\xi^{(r)})$, die Menge der konvergenten Folgen $\{\xi^{(r)}\}$ einen abgeschlossenen Unterraum \mathfrak{C} in \mathfrak{B} . Durch $\xi \rightarrow \{\xi^r\}$ wird \mathfrak{C} in \mathfrak{B} abgebildet. Diese Abbildung ist linear und fehlkonvergenzfrei, also nach 1.2 stetig. Für $\xi \in \mathfrak{A}$ ist $\{\xi^r\} \in \mathfrak{C}$. \mathfrak{A} liegt wegen AD dicht in \mathfrak{C} , somit ist $\{\xi^r\} \in \mathfrak{C}$ für jedes $\xi \in \mathfrak{C}$.

Über den Frobenius'schen Klassenbegriff in nilpotenten Gruppen.

Von

Hans-Georg Knoche in Halle.

Herrn Prof. Dr. H. Brandt zum 65. Geburtstag gewidmet.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit nilpotenten endlichen Gruppen, also mit solchen, deren aufsteigende Zentralreihe die Gruppe selbst enthält, und im besonderen mit p -Gruppen, welche bekanntlich stets nilpotent sind. Sie stellt einen Versuch dar, die Theorie der endlichen Gruppen durch solche Untersuchungen weiterzuführen, die auf den FROBENIUSschen¹⁾ Begriff der Klasse konjugierter Elemente zurückgehen.

Im 1. Abschnitt wird eine Verallgemeinerung des Normalisatorbegriffes folgenden Sinnes behandelt. Der Normalisator $\mathfrak{N}(A)$ eines Elementes A einer Gruppe ist die Gesamtheit der mit A vertauschbaren Elemente der Gruppe oder aller der Elemente der Gruppe, deren Kommutatoren mit A gleich dem Einselement sind. Es zeigt sich, daß auch alle Elemente, deren Kommutator mit A in \mathfrak{Z}_i liegt, wo \mathfrak{Z}_i ein beliebiges Glied der aufsteigenden Zentralreihe einer nilpotenten Gruppe ist, eine Gruppe bilden, die wir den „Normalisator i -ter Stufe“ $\mathfrak{N}_i(A)$ von A nennen wollen. So gewinnen wir eine Reihe von Untergruppen, die durch das Element A eindeutig bestimmt ist. Eine Gruppe $\mathfrak{N}_i(A)$ umfaßt $\mathfrak{N}_{i-1}(A)$ als Normalteiler. Nachdem ich diese Reihe der verallgemeinerten Normalisatoren aufgestellt hatte, stellte ich nachträglich fest, daß sie sich auch schon bei BURNSIDE²⁾ erwähnt findet, jedoch ohne nähere Behandlung.

Mit der Verallgemeinerung des Normalisatorbegriffes ist auch eine solche des Klassenbegriffes gegeben. Der Grundgedanke dabei ist, daß die nilpotenten Gruppen in gewissem Sinne Verallgemeinerungen ABELScher Gruppen sind; sie sind direkte Produkte ihrer Sylowgruppen. Wir definieren nun i -stufig konjugierte Elemente. Und zwar heißen zwei Elemente A und $B = S^{-1}AS$ i -stufig konjugiert, wenn S in $\mathfrak{N}_i(A)$ liegt. Alle mit A i -stufig konjugierten Elemente bilden eine neue Klasse, die „Klasse i -ter Stufe“ von A . Die gewöhnliche Klasse von A zerfällt

¹⁾ Journ. f. reine u. angew. Math. **100** (1887), S. 179—181.

²⁾ The theory of groups, 2. ed., p. 123/4.

auf diese Weise eindeutig in Klassen i -ter Stufe und damit auch die ganze nilpotente Gruppe. Jede dieser Klassen i -ter Stufe ist in einer Nebengruppe von \mathfrak{Z}_i enthalten. Liegt A in \mathfrak{Z}_{i+1} , aber nicht in \mathfrak{Z}_i , so ist $\mathfrak{N}_i(A) = \mathfrak{G}$, aber $\mathfrak{N}_{i-1}(A) \neq \mathfrak{G}$. Also stimmt die Klasse i -ter Stufe noch mit der gewöhnlichen Klasse überein, während die Klasse $(i-1)$ -ter Stufe von ihr verschieden ist. Ist c die Klasse der Gruppe, also $\mathfrak{Z}_c = \mathfrak{G}$, $\mathfrak{Z}_{c-1} \neq \mathfrak{G}$, so sind alle Normalisatoren $(c-1)$ -ter Stufe gleich \mathfrak{G} , so daß alle Klassen $(c-1)$ -ter Stufe mit den gewöhnlichen Klassen zusammenfallen. Die Klassen 0. Stufe sind die Elemente selbst. Je größer c ist, um so mehr Stufen gibt es, die die gewöhnliche Klasse eines Elementes von diesem trennen. Damit ist eine Beziehung zwischen nilpotenten und ABELschen Gruppen vermittels des Klassenbegriffes hergestellt.

Im 2. Abschnitt werden nur p -Gruppen behandelt. Wir gehen dabei von folgender Überlegung aus. Die einfachsten endlichen Gruppen sind die ABELschen, also diejenigen, deren Klassen nur ein Element enthalten. Es ist zu vermuten, daß die nicht-ABELschen p -Gruppen einer bestimmten Ordnung in ihren Eigenschaften um so mehr von den ABELschen derselben Ordnung abweichen, je größer die Anzahl der Elemente sein kann, die zu einer Klasse gehören. Die nicht-ABELschen p -Gruppen mit höchstens p konjugierten Elementen in einer Klasse haben in der Tat ganz einfache Eigenschaften. Sie sind, wie wir zeigen werden, dadurch charakterisiert, daß die Kommutatorgruppe die Ordnung p hat. Bereits BURNSIDE hat einige Resultate über diese Gruppen angegeben. Wir erhalten weitere Eigenschaften dieser Gruppen, insbesondere bezüglich der Untergruppen vom Index p .

1. Verallgemeinerung des Normalisator- und Klassenbegriffes.

1. 1. Verallgemeinerte Normalisatoren. Wir betrachten in diesem Kapitel eine nilpotente Gruppe \mathfrak{G} mit der Klasse c . A sei ein beliebiges Element von \mathfrak{G} und $\mathfrak{N}(A)$ der Normalisator von A , also die Gesamtheit der Gruppenelemente, deren Kommutator mit A gleich E ist.

Wir fragen nun nach allen Elementen X aus \mathfrak{G} , deren Kommutator (X, A) mit A im Zentrum $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ liegt. (Der triviale Fall, daß A selbst im Zentrum liegt, sei hier und im folgenden nicht besonders herausgehoben, da alle Behauptungen auch für ihn gelten.)

Haben wir solche Elemente X und Y , so gilt

$$(1) \quad (X, A)(Y, A) = (XY, A).$$

Das Produkt hat also auch die gewünschte Eigenschaft. Die Elemente X bilden eine Untergruppe von \mathfrak{G} , die wir mit $\mathfrak{N}_1(A)$ bezeichnen und den *Normalisator 1. Stufe* von A nennen wollen.

Wie man leicht sieht, ist $\mathfrak{N}_1(A)/\mathfrak{B}$ der Normalisator 0. Stufe, d. h. der Normalisator im üblichen Sinne von $A\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$, also

$$(2) \quad \mathfrak{N}_1(A)/\mathfrak{B} = \mathfrak{N}_0(A\mathfrak{B}).$$

Aus der Gleichung (1) folgt, daß die Abbildung $X \rightarrow (X, A)$ der Gruppe $\mathfrak{N}_1(A)$ ein Homomorphismus von \mathfrak{N}_1 auf eine Untergruppe $\mathfrak{Z}^* = \mathfrak{Z}^*(A)$ von \mathfrak{B} ist. Die Elemente von \mathfrak{N}_0 werden auf E abgebildet und $\mathfrak{N}_0(A)$ ist daher Normalteiler von $\mathfrak{N}_1(A)$. Es gilt

$$(3) \quad \mathfrak{N}_1(A)/\mathfrak{N}_0(A) \cong \mathfrak{Z}^*(A),$$

die Faktorgruppe $\mathfrak{N}_1/\mathfrak{N}_0$ ist (einstufig) isomorph mit \mathfrak{Z}^* . $\mathfrak{Z}^*(A)$ wird durch die Kommutatoren (X, A) mit $X \in \mathfrak{N}_1(A)$ erzeugt. Nach der Bezeichnungsweise von HALL³⁾ schreiben wir dafür

$$\mathfrak{Z}^*(A) = (\mathfrak{N}_1(A), A).$$

In der Zerlegung von $\mathfrak{N}_1(A)$ nach $\mathfrak{N}_0(A)$ bewirken Elemente derselben Nebengruppe von $\mathfrak{N}_0(A)$ dieselbe Transformation von A in AZ^* , $Z^* \in \mathfrak{Z}^*(A)$. Denn ist $\mathfrak{N}_1 N_1$ eine solche Nebengruppe und $N_0 N_1$ ein Element daraus, so wird

$$N_1^{-1} N_0^{-1} A N_0 N_1 = N_1^{-1} A N_1 = AZ^*.$$

Bewirken umgekehrt zwei Elemente X, Y dieselbe Transformation von A , so gilt

$$(X, A) = (Y, A) = Z^* \quad \text{und} \quad (XY^{-1}, A) = E,$$

also liegt XY^{-1} in $\mathfrak{N}_0(A)$, und X und Y gehören derselben Nebengruppe von $\mathfrak{N}_0(A)$ an.

Hat \mathfrak{N}_0 den Index n_0 , \mathfrak{N}_1 den Index n_1 unter \mathfrak{G} , so gilt $n_1 \leq n_0$. n_0/n_1 ist die Ordnung von \mathfrak{Z}^* . \mathfrak{Z}^* ist dann und nur dann von \mathfrak{G} verschieden, wenn die Klasse von $A\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ weniger Elemente enthält als die Klasse von A in \mathfrak{G} .

Die Normalisatoren 1. Stufe zweier konjugierter Elemente sind konjugierte Untergruppen. Daraus schließen wir weiter, daß für konjugierte Elemente A und $B = S^{-1}AS$

$$(4) \quad \mathfrak{Z}^*(A) = \mathfrak{Z}^*(B)$$

gilt.

Unsere bisherigen Untersuchungen können wir weiter ausdehnen, und die nunmehr abzuleitenden Resultate enthalten die oben gewonnenen als Spezialfälle. Es sei \mathfrak{B}_i das $(i+1)$ -te Glied der aufsteigenden Zentralreihe von \mathfrak{G} . Alle Elemente von \mathfrak{G} , deren Kommutator mit einem Element A in \mathfrak{B}_i liegt, bilden eine Gruppe; sie entspricht dem Normalisator 0. Stufe $\mathfrak{N}_0(A\mathfrak{B}_i)$ von $A\mathfrak{B}_i$ in $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}_i$. Wir nennen sie den

³⁾ Proc. London math. Soc. (2) **36** (1933), p. 29–95.

Normalisator i -ter Stufe $\mathfrak{N}_i(A)$ des Elementes A . Es gilt also

$$(2a) \quad \mathfrak{N}_i(A)/\mathfrak{B}_i = \mathfrak{N}_0(A \mathfrak{B}_i).$$

Für jedes Element A aus \mathfrak{G} ist $\mathfrak{N}_{i-1}(A) = \mathfrak{G}$; denn es ist stets $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ in \mathfrak{B}_{i-1} enthalten. Nun besteht $\mathfrak{N}_i(A)$ aus allen Elementen $X \in \mathfrak{G}$, für die (X, A) in \mathfrak{B}_i liegt und $\mathfrak{N}_i(A)/\mathfrak{B}_{i-1}$ aus allen $X \mathfrak{B}_{i-1}$ aus $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}_{i-1}$, für die $(X \mathfrak{B}_{i-1}, A \mathfrak{B}_{i-1})$ in $\mathfrak{B}_i/\mathfrak{B}_{i-1}$ liegt. Also gilt

$$(2b) \quad \mathfrak{N}_i(A)/\mathfrak{B}_{i-1} = \mathfrak{N}_1(A \mathfrak{B}_{i-1}).$$

Nach (2a) ist

$$\mathfrak{N}_{i-1}(A)/\mathfrak{B}_{i-1} = \mathfrak{N}_0(A \mathfrak{B}_{i-1}).$$

Wie wir früher gesehen hatten, enthält in einer Gruppe der Normalisator 1. Stufe eines Elementes den Normalisator 0. Stufe als Normalteiler. Daher ist $\mathfrak{N}_{i-1}(A)/\mathfrak{B}_{i-1}$ Normalteiler von $\mathfrak{N}_i(A)/\mathfrak{B}_{i-1}$ und somit $\mathfrak{N}_{i-1}(A)$ Normalteiler von $\mathfrak{N}_i(A)$. In $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}_{i-1}$ gilt also die Isomorphie

$$(3a) \quad \mathfrak{N}_i(A)/\mathfrak{B}_{i-1}/\mathfrak{N}_{i-1}(A)/\mathfrak{B}_{i-1} \cong \mathfrak{B}_i^*(A)/\mathfrak{B}_{i-1},$$

wobei $\mathfrak{B}_i^*(A)$ eine Untergruppe von \mathfrak{B}_i bedeutet. Wegen

$$\mathfrak{N}_i(A)/\mathfrak{B}_i / \mathfrak{N}_{i-1}(A)/\mathfrak{B}_{i-1} \cong \mathfrak{N}_i(A)/\mathfrak{N}_{i-1}(A)$$

können wir dafür auch

$$(3b) \quad \mathfrak{N}_i(A)/\mathfrak{N}_{i-1}(A) \cong \mathfrak{B}_i^*(A)/\mathfrak{B}_{i-1}$$

schreiben.

Liegt A in \mathfrak{B}_j und nicht in \mathfrak{B}_{j-1} , so ist wegen $(\mathfrak{G}, \mathfrak{B}_j) \subseteq \mathfrak{B}_{j-1}$ stets $\mathfrak{N}_{j-1}(A) = \mathfrak{G}$. Jedoch ist $\mathfrak{N}_{j-2}(A)$ von \mathfrak{G} verschieden. Denn wäre $\mathfrak{N}_{j-2}(A) = \mathfrak{G}$, so würde $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}_{j-2} = \mathfrak{N}_0(A \mathfrak{B}_{j-2})$ gelten, was bedeutet, daß $A \mathfrak{B}_{j-2}$ im Zentrum von $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}_{j-2}$ liegt, d. h. in $\mathfrak{B}_{j-1}/\mathfrak{B}_{j-2}$. Dann läge aber A in \mathfrak{B}_{j-1} , was der Voraussetzung widerspricht.

Die Normalisatoren i -ter Stufe zweier konjugierter Elemente sind konjugierte Untergruppen.

Auch die Relation (4) läßt sich unter Benutzung der Beziehung (3b) verallgemeinern. Demnach ist

$$\mathfrak{N}_1(A \mathfrak{B}_{i-1})/\mathfrak{N}_0(A \mathfrak{B}_{i-1}) \cong \mathfrak{B}_i^*(A \mathfrak{B}_{i-1}) = \mathfrak{B}_i^*(B \mathfrak{B}_{i-1}),$$

wenn $B \mathfrak{B}_{i-1} = S^{-1} A S \mathfrak{B}_{i-1}$, also

$$(4a) \quad \mathfrak{N}_i(A)/\mathfrak{N}_{i-1}(A) \cong \mathfrak{B}_i^*(A)/\mathfrak{B}_{i-1} \cong \mathfrak{B}_i^*(B)/\mathfrak{B}_{i-1}.$$

Aus der Beziehung $(\mathfrak{G}, \mathfrak{B}_i) \subseteq \mathfrak{B}_{i-1}$ folgt, daß $\mathfrak{N}_{i-1}(A) \mathfrak{B}_i$ umfaßt. \mathfrak{B}_i liegt also im Durchschnitt aller Normalisatoren $(i-1)$ -ter Stufe von Elementen aus \mathfrak{G} . Sei D ein Element des Durchschnittes. Dann gilt $(\mathfrak{G}, D) \subseteq \mathfrak{B}_{i-1}$, und da \mathfrak{B}_i die umfassendste Gruppe ist, für die $(\mathfrak{G}, \mathfrak{B}_i) \subseteq \mathfrak{B}_{i-1}$, so liegt D in \mathfrak{B}_i . Wir haben somit gefunden, daß \mathfrak{B}_i der Durchschnitt aller Normalisatoren $(i-1)$ -ter Stufe von Elementen der Gruppe ist.

Bezeichnet n_i den Index des Normalisators i -ter Stufe von A , so gehört zu A eine Folge von Zahlen

$$n_0 \geq n_1 \geq \dots \geq n_{j-1} > n_j = 1,$$

die mit $n_j = 1$ schließt, wenn A in \mathfrak{B}_{j+1} , aber nicht in \mathfrak{B}_j liegt. Sämtliche n_i sind Teiler der Ordnung von \mathfrak{G} und jedes n_i ist Teiler aller vorhergehenden Zahlen der Folge.

Da bei einem beliebigen Automorphismus der Gruppe eine Untergruppe in eine Untergruppe derselben Ordnung übergeht, sind die n_i gegenüber allen Automorphismen von \mathfrak{G} invariant.

Wir haben damit folgenden Satz:

Satz 1. Für jedes Element A aus \mathfrak{G} existiert eine eindeutig bestimmte Reihe von Gruppen, die „Normalisatorenreihe“ von A ,

$$\mathfrak{N}_0(A) \leq \mathfrak{N}_1(A) \leq \dots \leq \mathfrak{N}_{j-1}(A) \leq \mathfrak{N}_j(A) = \mathfrak{N}_{j+1}(A) = \dots = \mathfrak{N}_{c-1}(A) = \mathfrak{G},$$

deren jede die vorhergehende als Normalteiler enthält, die aber nicht verschieden zu sein brauchen. Sie sind durch die Relation

$$(\mathfrak{N}_i(A), A) \leq \mathfrak{B}_i,$$

wobei $\mathfrak{N}_i(A)$ die umfassendste Gruppe mit dieser Eigenschaft ist, definiert. Die Reihe beginnt mit dem Normalisator 0. Stufe und schließt mit \mathfrak{G} . Liegt A in \mathfrak{B}_{j+1} , aber nicht in \mathfrak{B}_j , so ist $\mathfrak{N}_j(A) = \mathfrak{G}$, aber $\mathfrak{N}_{j-1}(A)$ von \mathfrak{G} verschieden. Die Reihe enthält c Glieder, wenn c die Klasse der Gruppe ist. Die letzten $c - j$ Glieder sind mit \mathfrak{G} identisch.

Die Faktorgruppen $\mathfrak{N}_i(A) | \mathfrak{N}_{i-1}(A)$ sind gewissen Untergruppen aus dem Zentrum von $\mathfrak{G} / \mathfrak{B}_{i-1}$ isomorph.

Der Durchschnitt der Normalisatoren i -ter Stufe aller Elemente ist \mathfrak{B}_{i+1} . Die entsprechenden Glieder der Normalisatorenreihen konjugierter Elemente sind konjugierte Untergruppen.

Korollar. Die Normalisatoren 0. Stufe von Elementen aus \mathfrak{B}_i sind Normalteiler der ganzen Gruppe.

1. 2. Verallgemeinerung des Klassenbegriffes. Die Verallgemeinerung des Normalisatorbegriffes gestattet auch eine solche des Klassenbegriffes. Die FROBENIUSsche Klasse des Elements A einer Gruppe \mathfrak{G} besteht aus allen in \mathfrak{G} zu A konjugierten Elementen $X^{-1}AX$ ($X \in \mathfrak{G}$). Nun sei \mathfrak{G} wieder eine nilpotente Gruppe der Klasse c . Dann sind in \mathfrak{G} Elemente vorhanden, deren Normalisator $(c - 2)$ -ter Stufe von \mathfrak{G} verschieden ist, während der Normalisator $(c - 1)$ -ter Stufe jedes Elementes mit \mathfrak{G} übereinstimmt. Wir definieren: Ein Element A aus \mathfrak{G} heißt mit einem anderen Element B i -stufig konjugiert, wenn eine Beziehung

$$S^{-1}AS = B$$

besteht, wo S ein Element aus dem Normalisator i -ter Stufe von A ist. Ferner soll ein Element A i -stufig invariant heißen, wenn es in \mathfrak{B}_{i+1} , aber nicht in \mathfrak{B}_i liegt, oder wenn $\mathfrak{N}_i(A) = \mathfrak{G}$, aber $\mathfrak{N}_{i-1}(A) \neq \mathfrak{G}$ ist.

Zwei i -stufig konjugierte Elemente A und $B = S^{-1}AS$ besitzen denselben Normalisator i -ter Stufe; denn es gilt

$$\mathfrak{N}_i(B) = S^{-1}\mathfrak{N}_i(A)S = \mathfrak{N}_i(A),$$

da $S \in \mathfrak{N}_i(A)$. Daher existiert in $\mathfrak{N}_i(B)$ ein Element S^{-1} , daß B in A transformiert: Der Äquivalenzbegriff ist symmetrisch.

Ist ferner A mit B und mit C i -stufig konjugiert,

$$S^{-1}AS = B, \quad T^{-1}AT = C,$$

so gibt es auch in $\mathfrak{N}_i(B)$ ein Element $S^{-1}T$, daß B in C transformiert: Der Äquivalenzbegriff ist transitiv.

Somit bilden alle mit A i -stufig konjugierten Elemente wieder eine Klasse, die wir die *Klasse i -ter Stufe* von A nennen wollen. Die Klassen $(c-1)$ -ter Stufe fallen mit den gewöhnlichen Klassen zusammen (wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind, nennen wir sie wie bisher nur „Klassen“). Es gibt aber Klassen $(c-2)$ -ter Stufe, die von der $(c-1)$ -ter Stufe verschieden sind. Die Klasse 0. Stufe ist das Element selbst.

Ist ein Element i -stufig invariant, so fallen die Klassen $(c-1)$ -ter bis i -ter Stufe des Elementes zusammen. Jedoch ist die Klasse $(i-1)$ -ter Stufe von ihnen verschieden.

Aus der Definition der Klassen höherer Stufe können wir einige ihrer Eigenschaften ablesen.

Der Normalisator i -ter Stufe eines Elementes A sei von \mathfrak{G} verschieden. Sodann entsteht bei der Transformation von A mit allen Elementen von $\mathfrak{N}_i(A)$ die Klasse i -ter Stufe von A , die von der gewöhnlichen Klasse verschieden ist.

Aus der Eigenschaft von $\mathfrak{N}_i(A)$, daß es alle Elemente umfaßt, deren Kommutator mit A in \mathfrak{Z}_i liegt, folgt, daß die Klasse i -ter Stufe von A in $A\mathfrak{Z}_i$ enthalten ist. Diese Klasse ist einfach der Komplex der mit A im gewöhnlichen Sinne konjugierten Elemente in $A\mathfrak{Z}_i$. Die Anzahl der Elemente ist n_0/n_i , wenn n_0 bzw. n_i den Index von $\mathfrak{N}_0(A)$ bzw. $\mathfrak{N}_i(A)$ unter \mathfrak{G} bezeichnet. Da n_i nach Voraussetzung von 1 verschieden ist, enthält $A\mathfrak{Z}_i$ auch nicht die ganze gewöhnliche Klasse von A , da diese n_0 Elemente enthält.

Zerlegen wir \mathfrak{G} nach $\mathfrak{N}_i(A)$,

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{N}_i(A) + \mathfrak{N}_i(A)T_2 + \cdots + \mathfrak{N}_i(A)T_{n_i},$$

so transformieren die Elemente von $\mathfrak{N}_i(A)T_k$ ($k = 2, 3, \dots, n_i$) A in die mit A konjugierten Elemente, die in der Nebengruppe

$$T_k^{-1}AT_k\mathfrak{Z}_i$$

liegen. Das Element $T_k^{-1}AT_k$ besitzt den Normalisator i -ter Stufe $T_k^{-1}\mathfrak{N}_i(A)T_k$, dessen Elemente $T_k^{-1}AT_k$ in Elemente von $T_k^{-1}AT_k\mathfrak{Z}_i$ transformieren.

Wir haben gefunden, daß die (gewöhnliche) Klasse $(c - 1)$ -ter Stufe eines Elementes eindeutig in Klassen i -ter Stufe zerfällt, und damit auch die ganze nilpotente Gruppe.

Bemerkenswert sind noch die Klassen 1. Stufe, wenn sie von denen 0. Stufe verschieden sind. Sei $\mathfrak{N}_1(A)$ umfassender als $\mathfrak{N}_0(A)$. Dann transformieren die Elemente von $\mathfrak{N}_1(A)$ A in $A\mathfrak{Z}^*(A)$, $\mathfrak{Z}^*(A) = (\mathfrak{N}_1(A), A)$. Die anderen Klassen 1. Stufe sind die Komplexe $T_k^{-1}AT_k\mathfrak{Z}^*(A)$, wo T_k nicht in $\mathfrak{N}_1(A)$ liegt. Die gewöhnliche Klasse zerfällt in die n_1 Nebengruppen

$$A\mathfrak{Z}^*, T_2^{-1}AT_2\mathfrak{Z}^*, \dots, T_{n_1}^{-1}AT_{n_1}\mathfrak{Z}^*.$$

Es ist wohl möglich, daß einmal die Klasse i -ter Stufe mit der $(i - 1)$ -ten eines Elementes zusammenfällt. Jedoch ist es unmöglich, daß dies für alle Elemente bei der gleichen Stufe eintritt; denn das wäre gleichbedeutend mit $\mathfrak{Z}_{i+1} = \mathfrak{Z}_i$.

1. 3. Beispiele. 1. Wir betrachten die p -Gruppe ($p > 2$) der Ordnung p^3 mit den definierenden Relationen

$$P^p = E, Q^p = E, R^p = E, \quad (P, R) = E, (Q, P) = E, (Q, R) = P.$$

Die Gruppe besitzt das Zentrum $\mathfrak{Z} = \{P\}$, das mit der Kommutatorgruppe identisch ist. Die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ hat die Ordnung p^2 , ist also abelsch und $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}_2$. Die Klassen 1. Stufe sind die p 0-stufig invarianten Zentrumselemente und die Nebengruppen von \mathfrak{Z} .

2. \mathfrak{G} sei die p -Gruppe ($p > 2$) der Ordnung p^4 , definiert durch

$$P^{p^2} = E, Q^p = E, R^p = E, \quad (P, R) = Q, (P, Q) = P^p, (Q, R) = E.$$

Wir sehen, daß Q und P^p die Kommutatorgruppe von \mathfrak{G} erzeugen, $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) = \{Q, P^p\}$. Das Zentrum wird durch P^p erzeugt, $\mathfrak{Z} = \{P^p\}$, während \mathfrak{Z}_2 mit $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ identisch ist. Daher hat \mathfrak{G} die Klasse $c = 3$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{Z}_3$. Da das Zentrum die Ordnung p hat, wird in jedem Falle die Gruppe \mathfrak{Z}^* , wenn von \mathfrak{G} verschieden, mit dem Zentrum übereinstimmen. Die Klassen 2. Stufe in \mathfrak{G} sind für $p = 3$ folgende.

Die Elemente E, P^3, P^6 bilden das Zentrum, jedes Element bildet für sich eine Klasse 2. (und auch 1. und 0.) Stufe. Daneben gibt es folgende Klassen 2. Stufe mit $n_0 = 3$ Elementen:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } Q, QP^3, QP^6 & \text{b) } R, RQ^2, RQP^3 & R^2P^3, R^2QP^3, R^2Q^2 \\ Q^2, Q^3P^3, Q^2P^6 & R^2, R^2Q^2, R^2Q^2P^3 & RP^6, RQ^2P^6, RQ \\ & RP^3, RQ^3P^3, RQP^6 & R^2P^6, R^2QP^6, R^2Q^2P^3. \end{array}$$

Wir sehen, daß die unter a) aufgeführten Klassen Nebengruppen von \mathfrak{Z} sind. Die Elemente Q, QP^3, QP^6 bilden die Klasse 2. und 1. Stufe von Q ; der Normalisator 0. Stufe ist $\mathfrak{N}_0(Q) = \{Q, R, \mathfrak{Z}\}$ und der 1. Stufe $\mathfrak{N}_1(Q) = \mathfrak{G}$. Q ist 1-stufig invariant.

Die unter b) aufgeführten Klassen enthalten nur noch mod \mathfrak{Z} inkongruente Elemente, woraus zu schließen ist, daß der Normalisator

1. Stufe mit dem 0. Stufe übereinstimmt. Es ist $\mathfrak{N}_0(R) = \{Q, R, \mathfrak{Z}\} = \mathfrak{N}_1(R)$. Die Klassen 1. und 0. Stufe fallen zusammen. $\mathfrak{Z}^*(R)$ ist gleich \mathfrak{G} und $n_1 = n_0 = 3$.

Schließlich gibt es noch Klassen 2. Stufe mit je 9 Elementen, z. B.

$$P, P', P'', PQ, P^4Q, P^7Q, PQ^2, P^4Q^2, P^7Q^2,$$

oder

$$P\mathfrak{Z}^*, PQ\mathfrak{Z}^*, PQ^2\mathfrak{Z}^*,$$

wo $P\mathfrak{Z}^*$ die Klasse 1. Stufe von P , $PQ\mathfrak{Z}^*$ die von PQ und $PQ^2\mathfrak{Z}^*$ die von PQ^2 bildet. Hier sind die Klassen verschiedener Stufen verschieden. Die Normalisatoren sind

$$\mathfrak{N}_0(P) = \{P\} < \mathfrak{N}_1(P) = \{Q, P\} < \mathfrak{N}_2(P) = \mathfrak{G},$$

und $n_0 = 9$, $n_1 = 3$.

2. p -Gruppen.

Wir wenden uns in diesem Kapitel den p -Gruppen zu und werden einige Eigenschaften dieser Gruppen ableiten, wobei wir uns auf den gewöhnlichen Normalisator- und Klassenbegriff stützen.

2. 1. Allgemeines⁴⁾. Es gilt für die Ordnung einer p -Gruppe \mathfrak{G} ($p > 2$) eine Gleichung

$$(1) \quad p^n = a_0 + a_1 p + \dots + a_r p^r, \quad a_r \neq 0.$$

Dabei bezeichnet a_i die Anzahl der Klassen, die p^i -Elemente enthalten. Wir nennen sie kurz p^i -Klassen. a_0 ist eine Potenz von p , $a_0 = p^z$, die Ordnung des Zentrums \mathfrak{Z} von \mathfrak{G} . Man sieht leicht ein, daß

$$(2) \quad r < n - z$$

gelten muß, da der Normalisator eines Elementes das Zentrum der Gruppe als eigentliche Untergruppe enthält. Da ferner $z \geq 1$ gilt, ist immer

$$(2a) \quad r \leq n - 2.$$

p^r ist der größte Index eines Normalisators eines Elementes, der überhaupt auftreten kann. Daher liegt jede p^r -Potenz eines Elementes in jedem Normalisator, also auch in deren Durchschnitt \mathfrak{Z} . Nun habe die Kommutatorgruppe $\mathfrak{K} = (\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ von \mathfrak{G} die Ordnung p^h . Da $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ abelsch ist, enthält eine Nebengruppe von \mathfrak{K} in \mathfrak{G} mit einem Element auch die ganze Klasse desselben. Daher kann die Anzahl der Elemente in einer Klasse die Ordnung der Kommutatorgruppe nicht übersteigen. Wir haben die Relation

$$(3) \quad r \leq h.$$

⁴⁾ Vgl. SPEISER, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 2. Auflage (1927), S. 69 ff.

Aus ihr ergibt sich ein kurzer Beweis für die folgende, schon von BURNSIDE⁵⁾ erwähnte Tatsache:

Ist in \mathcal{G} $r = n - 2$, so hat $(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ die Ordnung p^{n-2} und das Zentrum die Ordnung p .

Beweis. Da der Index von $(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ durch p^2 teilbar ist, muß wegen (3) $h = n - 2$ sein, und aus der Relation (2) folgt $z = 1$.

An dieser Gruppe ist bemerkenswert, daß die Kommutatorgruppe die größtmögliche Ordnung und das Zentrum die kleinstmögliche Ordnung besitzt und dabei die größtmögliche Anzahl von konjugierten Elementen in einer Klasse vorkommt. Wir werden im nächsten Paragraphen den entgegengesetzten Fall kennenlernen, wo die Verhältnisse genau umgekehrt liegen.

2. 2. p -Gruppen mit $r = 1$ ⁵⁾. Von nun an bedeute ständig \mathcal{G} eine p -Gruppe mit $r = 1$. Ein nicht selbstkonjugiertes Element A von \mathcal{G} hat einen Normalisator $\mathfrak{N}(A)$ vom Index p unter \mathcal{G} . \mathcal{G} kann erzeugt werden durch $\mathfrak{N}(A)$ und ein Element B , das nicht in $\mathfrak{N}(A)$ liegt:

$$(4) \quad \mathcal{G} = \{B, \mathfrak{N}(A)\} = \mathfrak{N}(A) + B\mathfrak{N}(A) + \dots + B^{p-1}\mathfrak{N}(A).$$

Das Zentrum $\mathfrak{Z}(\mathcal{G})$ von \mathcal{G} ist in jedem Normalisator enthalten, und da bei unseren Voraussetzungen jeder von \mathcal{G} verschiedene Normalisator den Index p unter \mathcal{G} hat, also maximaler Normalteiler ist, umfaßt das Zentrum als Durchschnitt mehrerer maximaler Normalteiler den Durchschnitt \mathfrak{D} aller maximalen Normalteiler. Es gilt also $\mathfrak{Z}(\mathcal{G}) \supseteq \mathfrak{D}$ und da \mathcal{G}/\mathfrak{D} abelsch ist, gilt $\mathfrak{Z}(\mathcal{G}) \supseteq \mathfrak{D} \supseteq (\mathcal{G}, \mathcal{G})$. Daher ist \mathcal{G}/\mathfrak{Z} abelsch und zwar vom Typus (p, p, \dots, p) , da jede p -te Potenz eines Elementes in \mathfrak{Z} liegt. \mathcal{G} hat die Klasse $c = 2$.

Da alle Normalisatoren von Elementen Normalteiler sind, sind konjugierte Elemente miteinander vertauschbar. Eine Klasse kann durch folgendes Verfahren gebildet werden. Sind A, B zwei nicht vertauschbare Elemente, so sind die p -Elemente

$$A, B^{-1}AB, \dots, B^{-p+1}AB^{p-1}$$

und ebenso die Elemente

$$B, A^{-1}BA, \dots, A^{-p+1}BA^{p-1}$$

alle untereinander verschieden, bilden also die Klasse von A bzw. B . Diese Tatsache benutzen wir, um den folgenden, im wesentlichen ebenfalls schon BURNSIDE⁶⁾ bekannten Satz zu beweisen:

Satz 2. *In \mathcal{G} hat $(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ die Ordnung p , und wenn umgekehrt in einer beliebigen p -Gruppe die Kommutatorgruppe die Ordnung p hat, so ist in dieser Gruppe $r = 1$.*

⁵⁾ a. a. O. ²⁾, p. 125/6.

⁶⁾ a. a. O. ²⁾, p. 126, wo nur der 1. Teil des Satzes genannt wird.

Beweis. Es sei also in \mathfrak{G} $r = 1$. $(A, B) = K \neq E$ sei ein Kommutator zweier Elemente aus \mathfrak{G} , (A', B') ein anderer von E verschiedener Kommutator mit $A', B' < \mathfrak{G}$. Dann wählen wir ein weiteres Element $A'' < \mathfrak{G}$, welches nicht in $\mathfrak{R}(B)$ und nicht in $\mathfrak{R}(B')$ liegt. Unter diesen Voraussetzungen liegt A'' in $A^i \mathfrak{R}(B)$, $i \neq 0, (p)$, so daß wegen $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) < \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$

$$(A'', B) = (A, B)^i = K^i$$

wird. Ebenso finden wir

$$(A'', B') = (A'', B)^j = K^{ij}, \quad j \neq 0, (p),$$

und schließlich

$$(A', B') = (A'', B')^k = K^{ijk}, \quad k \neq 0, (p).$$

Wir sehen, daß der Kommutator eines beliebigen Paares von Gruppenelementen als Potenz eines und desselben Elementes dargestellt werden kann. Da jede p -te Potenz in \mathfrak{Z} liegt, ist auch die p -te Potenz eines Kommutators gleich E . $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ ist also eine zyklische Gruppe der Ordnung p .

Hat andererseits in einer beliebigen p -Gruppe $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ die Ordnung $p^h = p$, so folgt aus (3) $r = 1$, da $r = 0$ bedeutet, daß die Gruppe abelsch ist.

Die p -Gruppen mit $r = 1$ sind also dadurch charakterisiert, daß ihre Kommutatorgruppe die Ordnung p hat.

Korollar. *Hat in einer p -Gruppe die Kommutatorgruppe die Ordnung p^2 , so ist $r = 2$.*

Dies folgt aus (3) und Satz 2.

Die Umkehrung gilt nicht, wie das folgende Beispiel einer Gruppe der Ordnung p^6 zeigt. Sie sei erzeugt durch

$$P_1^p = E, P_2^p = E, P_3^p = E, Q_1^p = E, Q_2^p = E, Q_3^p = E, \\ (P_1, P_2) = Q_3, (P_2, P_3) = Q_1, (P_3, P_1) = Q_2, (P_i, Q_j) = E, (Q_i, Q_j) = E.$$

Die Kommutatorgruppe ist gleich dem Zentrum, das die Ordnung p^3 besitzt. Daher muß nach (2) ein Normalisator eines Elementes wenigstens die Ordnung p^4 haben. Also ist $r = 2$. Diese Gruppe besitzt keine p -Klassen. Denn ein Normalisator vom Index p müßte die Form $\{P_i, P_k, \mathfrak{Z}\}$ haben, wo P_i, P_k beliebige Elemente sind, die den Normalisator zusammen mit \mathfrak{Z} erzeugen. Er enthält aber keine nichtinvarianten Elemente, die mit allen Elementen dieser Gruppe vertauschbar sind.

Wir sind nun auf Grund obigen Satzes in der Lage, mit Hilfe der Erweiterungstheorie von O. SCHREIER⁷⁾ die definierenden Relationen für die p -Gruppen mit $r = 1$ hinzuschreiben. Das Erweiterungsproblem lautet hier: Es sind alle nichtisomorphen p -Gruppen der Ordnung p^n

⁷⁾ Monatshefte f. Math. u. Physik 34 (1926), S. 165—180.

mit einer Kommutatorgruppe \mathfrak{K} der Ordnung p bei vorgegebener Faktorgruppe $\mathfrak{F} \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ zu konstruieren, wo \mathfrak{F} vom Typus $(p^{n_1}, p^{n_2}, \dots, p^{n_s})$ mit $\sum_{i=1}^s n_i = n - 1$ ist.

Die definierenden Relationen für eine solche Gruppe lauten:

$$H^p = E, F_i^{p^{n_i}} = H^{h_i}, (H, F_i) = E, (F_i, F_j) = H^{h_{ij}}.$$

Dabei dürfen nicht alle $h_{ij} \equiv 0, (p)$ sein, da die Gruppe dann abelsch wäre.

Es wäre nun, um alle Gruppen mit $r = 1$ der Ordnung p^n zu bestimmen, festzustellen, welche nichtisomorphen Gruppen dieser Art isomorphe Faktorkommutatorgruppen besitzen ⁸⁾.

Wir zählen einige weitere Eigenschaften der Gruppen mit $r = 1$ auf. Alle p^i -ten Potenzen in einer solchen Gruppe bilden eine Gruppe. Denn nach der bekannten Potenzregel wird für zwei Elemente A und B

$$(AB)^{p^i} = A^{p^i} B^{p^i} (B, A)^{p^i(p^i-1)2}.$$

Da p ungerade und $(B, A)^{p^i}$ nach vorigem Satz gleich E ist, folgt die Behauptung ⁹⁾.

\mathfrak{G} sei durch den Normalisator $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(A)$ von A und ein Element B erzeugt. B gehört nicht zu $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ und besitzt auch einen von $\mathfrak{N}(A)$ verschiedenen Normalisator $\mathfrak{N}'(B)$. Denn andernfalls läge B in $\mathfrak{N}(A)$. $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ sei das Zentrum von \mathfrak{N} , bestehend aus allen Elementen aus \mathfrak{N} , die in \mathfrak{N} selbstkonjugiert sind. Dann liegt der Durchschnitt $\mathfrak{N}'(B) \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$; denn diese Elemente sind sowohl mit B als auch mit allen Elementen von \mathfrak{N} vertauschbar. Andererseits enthält aber $\mathfrak{N}'(B)$ als Normalisator $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$, ebenso $\mathfrak{N}(A)$, also auch $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$. Daraus folgt die Beziehung

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{N}'(B) \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{N}).$$

Ist \mathfrak{N} ein ABELScher maximaler Normalteiler, so ist $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ Durchschnitt zweier maximaler Normalteiler, hat also den Index p^2 unter \mathfrak{G} . Da in diesem Falle jeder maximale Normalteiler, der $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ umfaßt, abelsch ist, ist also jeder Normalisator von Elementen aus p -Klassen ein ABELScher maximaler Normalteiler. Da es ferner wenigstens zwei verschiedene Normalisatoren vom Index p gibt, ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ vom Typus (p, p) , so daß es genau $p + 1$ Normalisatoren vom Index p gibt, und diese sind alle abelsch.

Ferner ist jeder ABELSche maximale Normalteiler Normalisator. Denn es gibt in ihm ein nichtinvariantes Element, mit dem die p^{n-1} -Elemente des Normalteilers vertauschbar sind. Wir haben den Satz:

⁸⁾ Vgl. H. LIERMANN, *Endliche Gruppen, deren Kommutatorgruppenordnung eine Primzahl $p \neq 2$ ist*. Schriften d. Math. Inst. u. d. Inst. f. angew. Math. d. Univ. Berlin, Bd. 4 (1938). Dort ist das Problem vollständig gelöst.

⁹⁾ HALL, a. a. O. ³⁾, p. 75.

Satz 3. *Existiert in \mathfrak{G} ein ABELScher maximaler Normalteiler, so ist dieser Normalisator von Elementen aus p -Klassen, und es sind in \mathfrak{G} dann alle Normalisatoren vom Index p abelsch. Das Zentrum hat den Index p^z unter \mathfrak{G} und es gibt genau $p + 1$ Normalisatoren von Elementen aus p -Klassen.*

Zu diesem Typ der p -Gruppen gehört die bekannte p -Gruppe mit einem zyklischen maximalen Normalteiler. Bekanntlich enthält sie dann wenigstens p solche. Aus dem oben Gesagten folgt dann, daß das Zentrum den Index p^z besitzt, so daß $r = 1$ ist. Das ist das Gegenstück zu der am Schluß von 2.1 erwähnten Gruppe.

Korollar. *Gibt es in einer beliebigen p -Gruppe zwei ABELSche maximale Normalteiler, so ist $r = 1$.*

Denn das Zentrum der Gruppe muß den Durchschnitt der beiden Normalteiler umfassen. — Ferner gilt der Satz:

Satz 4. *Ein Normalteiler \mathfrak{N} vom Index p ist Normalisator aller und nur der Elemente, die in seinem Zentrum $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ und nicht in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ liegen.*

Denn ist \mathfrak{N} Normalisator von A , so liegt A in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$. Zum anderen ist \mathfrak{N} Normalisator der Elemente aus $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$, die nicht in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ liegen, da mit diesen genau p^{n-1} -Elemente vertauschbar sind. Mit Hilfe dieses Satzes beweisen wir weiter:

Satz 5. *Hat \mathfrak{G} die Ordnung p^n und $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ die Ordnung p^z , so ist $n - z \equiv 0, \text{ mod } (2)$.*

Beweis. Der Satz gilt für alle p -Gruppen mit $r = 1$ der Ordnung p^n . Er sei nun bewiesen für alle Gruppen der Ordnung p^m , wobei $m \leq n - 1$. \mathfrak{G} habe die Ordnung p^n . \mathfrak{N} und \mathfrak{N}' seien zwei Normalisatoren von Elementen aus p -Klassen in \mathfrak{G} . Ist einer der Normalisatoren abelsch, so ist der Satz nach obigem bewiesen. Also sei kein ABELScher Normalteiler vom Index p vorhanden. Dann besitzt \mathfrak{N} ein Zentrum vom Index p^{2v} unter \mathfrak{N} , das $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ umfaßt. $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ kann nicht in \mathfrak{N}' enthalten sein, da sonst wegen $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{N}' \cap \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ folgen würde, und \mathfrak{N} wäre nach dem letzten Satz nicht Normalisator. Also erzeugt $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$ mit \mathfrak{N}' die ganze Gruppe, und es besteht die Isomorphie

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{N}' \cong \mathfrak{Z}(\mathfrak{N})/\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}),$$

woraus folgt, daß $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ den Index p unter $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$, also den Index p^{2v+2} unter \mathfrak{G} hat.

Korollar I. *Die Zentren der Normalisatoren von Elementen aus p -Klassen haben dieselbe Ordnung.*

Denn die letzte Isomorphie gilt für irgend zwei Normalisatoren \mathfrak{N} und \mathfrak{N}' .

Korollar II. *Jeder maximale Normalteiler, der $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ umfaßt, ist Normalisator.*

Denn nach dem Satz enthält das Zentrum des Normalteilers $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ eigentlich, und der Normalteiler ist Normalisator der Elemente aus $\mathfrak{Z}(\mathfrak{N})$, die nicht in $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ liegen.

Das gestattet uns, die Anzahl der Normalisatoren von Elementen aus p -Klassen zu bestimmen. Sie ist gleich der Anzahl der maximalen Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ vom Typus (p, p, \dots, p) . $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ hat die Ordnung p^{n-z} , woraus sich also die gesuchte Anzahl

$$\frac{p^{n-z} - 1}{p - 1} = p^{n-z-1} + p^{n-z-2} + \dots + p + 1$$

ergibt.

Einige Beispiele mögen das Vorhergehende erläutern.

Die beiden nicht-abelschen Gruppen der Ordnung p^3 sind

1. $P^{p^2} = E, Q^p = E, (P, Q) = P^p.$

Hier ist $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) = \{P^p\}$ von der Ordnung p . $\{P\}$ ist ein zyklischer maximaler Normalteiler.

2. $P^p = E, Q^p = E, R^p = E, (P, Q) = E, (P, R) = E, (Q, R) = P,$
mit $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) = \{P\}$. Hier existiert kein zyklischer maximaler Normalteiler.

Die nicht-abelschen Gruppen der Ordnung p^4 zerfallen in 6 Gruppen der Klasse $c = 2$ — bei ihnen ist $r = 1$ und $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ hat die Ordnung p^2 , wie es sein muß — und 4 Gruppen der Klasse $c = 3$, wo also $r = 2$, $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G})$ von der Ordnung p^2 und $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ von der Ordnung p ist.

So hat z. B. die durch

$$P^{p^3} = E, Q^p = E, (P, Q) = P^{p^2}$$

definierte Gruppe einen zyklischen maximalen Normalteiler und damit die Klasse $c = 2$. Es ist

$$(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) = \{P^{p^2}\}, \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = \{P^p\}.$$

Die durch

$$P^p = E, Q^p = E, R^p = E, S^p = E,$$

$$(R, S) = Q, (Q, S) = P, (P, S) = (Q, R) = (P, R) = (Q, P) = E$$

definierte Gruppe hat die Klasse $c = 3$. Hier ist

$$(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}) = \{P, Q\}, \mathfrak{Z}(\mathfrak{G}) = \{P\}.$$

$\{R, Q, P\}$ ist der einzige maximale ABELSche Normalteiler.

Die weiteren Gruppen der Ordnung p^4 findet man bei BURNSIDE¹⁰⁾. Gruppen der Ordnung p^5 sind bei O. SCHREIER vollständig angegeben¹¹⁾.

¹⁰⁾ a. a. O. ²⁾, p. 145.

¹¹⁾ Abh. aus d. Math. Sem. Hamburg, Bd. 4 (1926), S. 337 ff.

A Theorem on the Riemann-Liouville Integral

By

M. Parthasarathy and C. T. Rajagopal in Madras (India).

I. M. RIESZ [7, §§ 5, 6, 7]¹⁾ has proved a theorem on the RIEMANN-LIOUVILLE integral which includes the following as a useful special case.

Theorem A. *Let $\varphi(x)$ be a function of bounded variation in every finite interval of $x \geq 0$. Let*

$$\Phi_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt, \quad \alpha > 0.$$

Let $0 < \gamma < r$. Then the hypotheses (i) $\varphi(x) = O(x^l)$, $l \geq 0$, as $x \rightarrow \infty$, (ii) $\Phi_r(x) = O(x^k)$, $k \geq 0$, as $x \rightarrow \infty$, together ensure the conclusion

$$\Phi_\gamma(x) = O(x^{l(r-\gamma)+k\gamma/r}) \quad \text{as } x \rightarrow \infty.$$

In this result, O can be replaced by o in either hypothesis (i) or (ii) and the conclusion.

The object of this note is to prove the following theorem which is closely related to Theorem A and has a one-sided hypothesis instead of (i) in Theorem A.

Theorem B. *Let $\varphi(x)$, $\Phi_\alpha(x)$, $\alpha > 0$, be defined as in Theorem A. Let $1 \leq \gamma < r$. Then the hypotheses (i) $\varphi(x) = O_L(x^l)$ as $x \rightarrow \infty$, (ii) $\Phi_r(x) \sim Kx^k$ as $x \rightarrow \infty$, together lead to the conclusion*

either CASE (1): $\Phi_\gamma(x) = O(x^{l(r-\gamma)+k\gamma/r})$ when $k < l+r$,

or CASE (2): $\Phi_\gamma(x) \sim K \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-r+\gamma+1)} x^{k-r+\gamma}$ when $k \geq l+r$,

provided that, in either case, $\min(k, l+r) \geq r-1$.

An important distinction between Theorems A and B is to be found in the fact that, in CASE (2): $k \geq l+r$, Theorem A becomes trivial. For, in that case, hypothesis (i) of Theorem A, by itself, ensures

$$\Phi_\gamma(x) = O(x^{l+\gamma}) = \begin{cases} \text{either } O(x^{l(r-\gamma)+k\gamma/r}), \\ \text{or } o(x^{l(r-\gamma)+k\gamma/r}), \end{cases}$$

according as either $k = l+r$ or $k > l+r$.

It is when we pass from Theorem A to Theorem B that CASE (2) assumes a significance. A consideration of CASE (2) in the latter

¹⁾ Numbers in square brackets [] refer to the literature cited at the end.

theorem, with $\gamma = 1$ and $r = 2, 3, \dots$, leads at once to a result of DOETSCH [2] given as CASE (2) of Theorem C at the end.

2. The proof of Theorem B requires the following lemmas.

Lemma 1. Let $\varphi(x), \Phi_\alpha(x), 0 < \alpha < 1$, be defined as in Theorem A. Let $W(x)$ be a positive, monotonic increasing function for $x \geq 0$. Then

$$\Phi_\alpha(x) = o[W(x)], \quad x \rightarrow \infty,$$

implies

$$\int_0^\eta (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt = o[W(x)]$$

uniformly with respect to η in $(0, x)$.

This is a result of RIESZ [7, § 8].

Lemma 2. Let $\psi(x)$ be a function of bounded variation in every finite interval of $x \geq 0$ and let $\Psi_\alpha(x), \alpha > 0$, be related to $\psi(x)$ exactly as $\Phi_\alpha(x)$ to $\varphi(x)$. Then

$$\psi(x) > -Lx^\lambda, \quad x > 0, \quad L > 0,$$

implies that, for $0 < y \leq t \leq x$,

$$(1) \quad \Psi_1(x) - \Psi_1(t) \geq -L(x-y)\xi^2, \quad y < \xi < x,$$

where ξ is a function of x and y .

Proof.

$$\Psi_1(x) - \Psi_1(t) = \int_t^x \psi(u) du \geq -L \int_t^x u^\lambda du, \quad 0 < t \leq x.$$

Hence, for $\lambda \neq -1$,

$$(2) \quad \begin{aligned} \Psi_1(x) - \Psi_1(t) &\geq -L \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} + L \frac{t^{\lambda+1}}{\lambda+1} \\ &\geq -L \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} + L \frac{y^{\lambda+1}}{\lambda+1}, \quad 0 < y \leq t \leq x. \end{aligned}$$

The passage to (2) from the previous step is justified since

$$t^{\lambda+1} \geq \text{or} \leq y^{\lambda+1} \text{ according as } \lambda+1 > 0 \text{ or } < 0,$$

and therefore, whether $\lambda+1 > 0$ or < 0 ,

$$\frac{t^{\lambda+1}}{\lambda+1} \geq \frac{y^{\lambda+1}}{\lambda+1}.$$

Since (1) follows immediately from (2), the proof is complete for the case $\lambda \neq -1$. When $\lambda = -1$ an obvious modification is needed in (2), but this modification leads to (1) as before.

Lemma 3. For any function $F(x)$ of x , and $h > 0$, write

$$\mathcal{A}_{-h}^n F(x) = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu} F(x - \nu h), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\mathcal{A}_h^n F(x) = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu} F(x + \overline{n-\nu} h) \quad n = 1, 2, \dots$$

Then

$$(3) \quad \int_{x-h}^x F(x-t) \mathcal{A}_{-h}^n G(t) dt = \mathcal{A}_{-h}^n \int_{x-h}^x F(x-t) G(t) dt,$$

$$(3a) \quad \int_x^{x+h} F(x+h-t) \mathcal{A}_h^n G(t) dt = \mathcal{A}_h^n \int_x^{x+h} F(x+h-t) G(t) dt,$$

provided that $F(t)$, $G(t)$ are integrable for all t in question.

This lemma and the next can be easily proved by induction.

Lemma 4. If $\psi(x)$, $\Psi_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ are defined as in Lemma 2, then

$$(4) \quad \mathcal{A}_{-h}^n \Psi_{n+1}(x) = \int_{x-h}^x dt_1 \int_{t_1-h}^{t_1} dt_2 \int_{t_2-h}^{t_2} \dots \int_{t_{n-1}-h}^{t_{n-1}} \Psi_1(t) dt,$$

$$(4a) \quad \mathcal{A}_h^n \Psi_{n+1}(x) = \int_x^{x+h} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+h} dt_2 \int_{t_2}^{t_2+h} \dots \int_{t_{n-1}}^{t_{n-1}+h} \Psi_1(t) dt.$$

3. Proof of Theorem B for non-integral r .

The following proof is modelled on the reasoning employed by MINAKSHISUNDARAM and RAJAGOPAL elsewhere [4, p. 250, foot-note] and based on a technique of BOSANQUET [1].

Let p be the greatest integer less than $r - 1$. (4) gives, when $n = p$,

$$(5) \quad h^p \Psi_1(\omega) = \mathcal{A}_{-h}^p \Psi_{p+1}(x) + \int_{x-h}^x dt_1 \int_{t_1-h}^{t_1} \dots \int_{t_{p-1}-h}^{t_{p-1}} \{\Psi_1(\omega) - \Psi_1(t)\} dt.$$

Multiply both sides of (5) by $(\omega - x)^{r-p-2}$ and integrate with respect to x from $\omega - h$ to ω . Then

$$(6) \quad \frac{h^{r-1} \Psi_1(\omega)}{r-p-1} = \int_{\omega-h}^{\omega} (\omega - x)^{r-p-2} \mathcal{A}_{-h}^p \Psi_{p+1}(x) dx \\ + \int_{\omega-h}^{\omega} (\omega - x)^{r-p-2} dx \int_{x-h}^x dt_1 \int_{t_1-h}^{t_1} \dots \int_{t_{p-1}-h}^{t_{p-1}} \{\Psi_1(\omega) - \Psi_1(t)\} dt,$$

where

$$(7) \quad \omega - (p+1)h \leq x - ph \leq t_1 - (p-1)h \leq \dots \leq t_{p-1} - h \\ \leq t \leq t_{p-1} \leq \dots \leq t_1 \leq x \leq \omega.$$

We shall now choose $\psi(x)$ and h . Given ε and μ such that $0 < (p+1)\varepsilon < 1$ and $0 < \mu \leq 1$, we can choose $h = \varepsilon \omega^\mu$ ensuring that

$$(8) \quad 0 < \omega - (p+1)h \equiv \omega - (p+1)\varepsilon \omega^\mu \rightarrow \infty, \quad 1 < \omega \rightarrow \infty.$$

Let

$$(9) \quad \psi(x) = \varphi(x) - K \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-r+1)} x^{k-r}, \quad x > 0.$$

Then, by hypothesis (ii),

$$\Psi_r(x) \equiv \Phi_r(x) - Kx^k = o(x^k), \quad x \rightarrow \infty,$$

i. e.

$$\frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^x (x-t)^{r-p-2} \Psi_{p+1}(t) dt = o(x^k), \quad x \rightarrow \infty.$$

Hence, by Lemma 1 with $\alpha = r - p - 1$, $\varphi(x) = \Psi_{p+1}(x)$, $W(x) = x^k$,

$$(10) \quad \left| \int_0^\eta (x-t)^{r-p-2} \Psi_{p+1}(t) dt \right| < \varepsilon^r x^k \text{ for } \eta \text{ in } (0, x), x > x_1.$$

Now (9) and hypothesis (i) show that, for all large x ,

$$\psi(x) > -Mx^l - K \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-r+1)} x^{k-r}$$

where M is a positive constant. Hence there is a positive constant L such that

$$(11) \quad \psi(x) > \begin{cases} -Lx^l & \text{in CASE (1): } l > k-r \\ -Lx^{k-r} & \text{in CASE (2): } l \leq k-r \end{cases} x > x_2.$$

Let $0 < \omega - (p+1)h \leq t \leq \omega$ as in (7), h being chosen as in (8). Then, in consequence of (8), we can find x_3 so that

$$\omega \geq t \geq \omega - (p+1)h > x_2 > 0 \quad \text{for } \omega > x_3.$$

Further, from (11) and Lemma 2 we deduce that, for $\omega > x_3$,

$$(12) \quad \Psi_1(\omega) - \Psi_1(t) \geq \begin{cases} -L(p+1)h\xi^l & \text{in CASE (1),} \\ -L(p+1)h\xi^{k-r} & \text{in CASE (2),} \end{cases}$$

where $\omega - (p+1)h < \xi < \omega$ and ξ is a function of ω alone since h is so. Use (3) and (12) in the first and second terms respectively on the right side of (6). Then, for $\omega > x_3$,

$$(13) \quad \frac{h^{r-1} \Psi_1(\omega)}{r-p-1} \geq \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_{\omega-h}^p \int_{\omega-h}^\omega (\omega-x)^{r-p-2} \Psi_{p+1}(x) dx \\ \quad - L(p+1)h^{p+1}\xi^l \int_{\omega-h}^\omega (\omega-x)^{r-p-2} dx \text{ in CASE (1)} \\ \mathcal{A}_{\omega-h}^p \int_{\omega-h}^\omega (\omega-x)^{r-p-2} \Psi_{p+1}(x) dx \\ \quad - L(p+1)h^{p+1}\xi^{k-r} \int_{\omega-h}^\omega (\omega-x)^{r-p-2} dx \text{ in CASE (2)} \end{array} \right\}.$$

The first term on the right side of (13) is

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{-h}^p \int_{\omega-h}^{\omega} (\omega-x)^{r-p-2} \Psi_{p+1}(x) dx \\ = \sum_{v=0}^p (-1)^v \binom{p}{v} \int_{\omega-(v+1)h}^{\omega-vh} (\omega-vh-x)^{r-p-2} \Psi_{p+1}(x) dx \\ = \sum_{v=0}^p (-1)^v \binom{p}{v} \left[\int_0^{\omega-vh} - \int_0^{\omega-(v+1)h} \right]. \end{aligned}$$

Consequently, by (10),

$$(14) \quad \left| \mathcal{A}_{-h}^p \int_{\omega-h}^{\omega} (\omega-x)^{r-p-2} \Psi_{p+1}(x) dx \right| < \sum_{v=0}^p \binom{p}{v} 2 \varepsilon^r \omega^k = 2^{p+1} \varepsilon^r \omega^k, \quad \omega > x_4.$$

When $\omega > \max(x_4, x_3)$, we can use (14) in (13) and write (13) in the form

$$(15) \quad \Psi_1(\omega) \geq \begin{cases} -2^{p+1}(r-p-1) \varepsilon^r \frac{\omega^k}{h^{r-1}} - L(p+1) h \xi^l & \text{in CASE (1)} \\ -2^{p+1}(r-p-1) \varepsilon^r \frac{\omega^k}{h^{r-1}} - L(p+1) h \xi^{k-r} & \text{in CASE (2)} \end{cases}.$$

In (15) take $h = \varepsilon \omega^\mu$ with $\mu = (k-l)/r$ in CASE (1) and $\mu = 1$ in CASE (2). Then divide both sides by $\omega^{[l(r-1)+k]/r}$ in CASE (1) and ω^{k-r+1} in CASE (2). The result will be, for $\omega > \max(x_4, x_3)$,

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{\Psi_1(\omega)}{\omega^{[l(r-1)+k]/r}} \geq -2^{p+1}(r-p-1) \varepsilon - L(p+1) \left(\frac{\xi}{\omega}\right)^l \varepsilon & \text{in CASE (1)} \\ \frac{\Psi_1(\omega)}{\omega^{k-r+1}} \geq -2^{p+1}(r-p-1) \varepsilon - L(p+1) \left(\frac{\xi}{\omega}\right)^{k-r} \varepsilon & \text{in CASE (2)} \end{cases}.$$

In both CASES (1) and (2), $1 - (p+1)\varepsilon < \xi/\omega < 1$ for $\omega > 1$. Since ε can be chosen arbitrarily small, (16) gives

$$(17) \quad \begin{cases} \liminf_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\Psi_1(\omega)}{\omega^{[l(r-1)+k]/r}} \geq 0 & \text{in CASE (1)} \\ \liminf_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\Psi_1(\omega)}{\omega^{k-r+1}} \geq 0 & \text{in CASE (2)} \end{cases}.$$

As a result of the definition of ψ in (9), (17) leads at once to

$$(18) \quad \begin{cases} \liminf_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\Phi_1(\omega)}{\omega^{[l(r-1)+k]/r}} \geq 0 & \text{in CASE (1)} \\ \liminf_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\Phi_1(\omega)}{\omega^{k-r+1}} \geq K \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-r+2)} & \text{in CASE (2)} \end{cases}.$$

To establish the conclusion of Theorem B for $\Phi_\gamma(x)$, $\gamma = 1$, it is enough to supplement (18) by

$$(19) \quad \begin{cases} \limsup_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\Phi_1(\omega)}{\omega^{[l(r-1)+k]/r}} \leq 0 & \text{in CASE (1)} \\ \limsup_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\Phi_1(\omega)}{\omega^{k-r+1}} \leq K \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-r+2)} & \text{in CASE (2)} \end{cases}$$

(19) is proved by taking as our starting point (4a) rewritten in the form

$$(5a) \quad h^p \Psi_1(\omega) = \mathcal{A}_h^p \Psi_{p+1}(x) + \int_x^{x+h} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+h} \dots \int_{t_{p-1}}^{t_{p-1}+h} \{\Psi_1(\omega) - \Psi_1(t)\} dt$$

where p is the greatest integer less than $r - 1$. The two sides of (5a) are then multiplied by $(\omega + h - x)^{r-p-2}$ and integrated with respect to x from ω to $\omega + h$, with the result that

$$(6a) \quad \frac{h^{r-1} \Psi_1(\omega)}{r-p-1} = \int_{\omega}^{\omega+h} (\omega + h - x)^{r-p-2} \mathcal{A}_h^p \Psi_{p+1}(x) dx + \int_{\omega}^{\omega+h} (\omega + h - x)^{r-p-2} dx \int_x^{x+h} dt_1 \int_{t_1}^{t_1+h} \dots \int_{t_{p-1}}^{t_{p-1}+h} \{\Psi_1(\omega) - \Psi_1(t)\} dt.$$

(19) is obtained by reasoning with (6a) as with (6), but using (3a) where we formerly used (3). This line of reasoning is omitted since it is well indicated by the arguments which appear above and elsewhere [5].

To complete the proof of Theorem B, we have to indicate the transition from $\Phi_\gamma(x)$, $\gamma = 1$, to $\Phi_\gamma(x)$, $\gamma > 1$.

In CASE (1), the transition is effected by an application of Theorem A in which we replace hypothesis (i) of that theorem by

$$\Phi_1(x) = o(x^{[l(r-1)+k]/r}),$$

and hypothesis (ii) by

$$\Phi_r(x) = O(x^k).$$

The replacement is justified since, on account of our assumption $l + r > k \geq r - 1$, we have

$$[l(r-1) + k]/r > 0, \quad k > 0.$$

In CASE (2), we prove the conclusion of Theorem B for $\Phi_\gamma(x)$, $1 < \gamma < r$, by means of the formula

$$\Phi_\gamma(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma-1)} \int_0^x (x-t)^{\gamma-2} \Phi_1(t) dt.$$

In the integrand of the last integral

$$\Phi_1(x) \sim K \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-r+2)} x^{k-r+1}, \quad x \rightarrow \infty,$$

and therefore by a lemma of HARDY and RIESZ [3, p. 27, Lemma 5 with foot-note],

$$(20) \quad \Phi_\gamma(x) \sim K \frac{\Gamma(k+1) \Gamma(\gamma-2+1) \Gamma(k-r+1+1)}{\Gamma(\gamma-1) \Gamma(k-r+2) \Gamma(\gamma-2+k-r+1+2)} x^{\gamma-2+k-r+1+1}$$

since $k \geq l+r \geq r-1$ or $k-r+1 \geq 0$ and $\gamma-2 > -1$. (20) is the conclusion regarding $\Phi_\gamma(x)$ which we wished to prove.

4. Proof of Theorem B for integral r .

When r is a positive integer (≥ 2), we can base our proof of Theorem B for $\Phi_1(x)$ on the identities (5) and (5a), with $p=r-1$, $x=\omega$, avoiding (6) and (6a). This means that, we can dispense with the appeal to Lemma 1 and the condition $k > 0$ which is introduced in the first instance to justify the appeal. The condition $k > 0$ is, however, required in supplying the proof of the required result for $\Phi_\gamma(x)$, $\gamma > 1$.

In the case $r=2, 3, \dots$, we can set $\Phi_r(x) = f(x)$ and restate as under Theorem B for $\Phi_1(x)$.

Theorem C. *If, for $x \geq 0$, $f(x)$ is an r^{th} indefinite integral of a function $f^{(r)}(x)$ and if (i) $f^{(r)}(x) = O_L(x^k)$ as $x \rightarrow \infty$, (ii) $f(x) \sim Kx^k$ as $x \rightarrow \infty$, then*

either CASE (1): $f^{(r-1)}(x) = o(x^{l(r-1)+k/r})$ when $k < l+r$,

or CASE (2): $f^{(r-1)}(x) \sim Kk(k-1) \dots (k-r+2)x^{k-r+1}$ when $k \geq l+r$.

CASE (2) of Theorem C was proved by OBRECHKOFF [6] for $k = l+r$ and earlier by DOETSCH [2, p. 174, Theorem II] for $k = l+r \geq r$. When $k = l+2$, $r=2$ in CASE (2), we have a classical theorem of HARDY and LITTLEWOOD [8, p. 194, Corollary 4.4a].

Literature.

BOSANQUET, L. S.

- [1] Note on convexity theorems, Journal London Math. Soc. **18** (1943), 239–248.

DOETSCH, G.

- [2] Über die Cesàrosche Summabilität bei Reihen und eine Erweiterung des Grenzwertbegriffs bei integrierbaren Funktionen, Math. Zeitschr. **11** (1921), 161–179.

HARDY, G. H. and RIESZ, M.

- [3] The general theory of Dirichlet's series. Cambridge Tract, No. 18 (1915).

MINAKSHISUNDARAM, S. and RAJAGOPAL, C. T.

- [4] An extension of a Tauberian theorem of L. J. Mordell. Proc. Lond. Math. Soc. (2) 50 (1945), 242—255.

MINAKSHISUNDARAM, S. and RAJAGOPAL, C. T.

- [5] On a Tauberian theorem of K. Ananda Rau, Quart. J. of Math. (Oxford series) 17 (1946), 153—161.

OBRECHKOFF, N.

- [6] Sur une formule pour les différences divisées et sur les limites de fonctions et de leurs dérivées, Comptes Rendus Acad. Bulgare Sci. 2 (1949), No. 1, 5—8.

RIESZ, M.

- [7] Sur un théorème de la moyenne et ses applications, Acta Lit. Sci. Reg. Univ. Hungaricae (Sectio Sci. Math.) 1 (1923), 114—126.

WIDDER, D. V.

- [8] The Laplace transform (Princeton, 1941).

(Eingegangen am 18. Juli 1951.)

Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen.

Von

W. Jurkat in Tübingen und A. Peyerimhoff in Gießen.

In seiner Arbeit "Sur un théorème de la moyenne et ses applications" hat Herr M. RIESZ¹⁾ einen sehr anwendungsfähigen Mittelwertsatz bewiesen, auf dem viele Sätze in der Theorie der RIESZschen Verfahren und der DIRICHLET-Reihen beruhen²⁾. Später sind noch verschiedentlich Sätze ähnlicher Art aufgestellt worden³⁾. In dieser Arbeit wird nun der Versuch unternommen, alle diese Mittelwertsätze aus einem einheitlichen Prinzip abzuleiten. Dies geschieht in § 1 und 2, wo auf Grund eines bestimmten Zusammenhanges zwischen den „Zeilen“ einer Matrix- oder Integraltransformation der Mittelwertsatz gewonnen wird. Dieser Zusammenhang ist in allen bisher bekannten Fällen erfüllt (§ 3) und darüber hinaus ist eine neue Klasse von Matrixverfahren gewonnen, die sich durch viele angenehme Eigenschaften auszeichnet: Zum Beispiel läßt sich in einfacher Weise die genaue Größenbeschränkung der limitierbaren Folgen angeben (§ 4); weiter lassen sich für diese Verfahren manche Fragen über Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren vollständig beantworten, unter denen etwa die Verallgemeinerung des bekannten HARDY-BOHRschen Satzes⁴⁾ für die CESÄROschen Mittel hervorgehoben sei (§ 6, Satz 11); schließlich seien die Anwendungen auf die stetigen und unstetigen RIESZschen Mittel genannt (§ 7). Auf weitere Anwendungen wollen wir später zurückkommen.

1. Ein Mittelwertsatz für Matrixtransformationen.

Wir betrachten Matrixtransformationen der Form

$$(1) \quad \sigma_n = \sum_{\nu=0}^n a_{n\nu} s_\nu,$$

wo der Folge $\{s_n\}$ mittels der Dreiecksmatrix $(a_{n\nu})$ die Folge $\{\sigma_n\}$ zugeordnet wird.

¹⁾ RIESZ [12].

²⁾ Vgl. HARDY-RIESZ [5].

³⁾ JACOB [6], BOSANQUET [2], JURKAT [8].

⁴⁾ Vgl. die bei HARDY [4] auf S. 146 genannte Literatur.

Satz 1. *Besitzt die Matrix (a_{nv}) die Eigenschaften*

$$(M_1) \quad a_{nv} \neq 0, \quad 0 \leqq \frac{a_{mv}}{a_{nv}} \leqq K \quad (0 \leqq v \leqq n \leqq m)$$

und

$$(M_2) \quad \frac{a_{m, v-1}}{a_{n, v-1}} \geqq \frac{a_{mv}}{a_{nv}} \quad (1 \leqq v \leqq n \leqq m),$$

so gilt für jedes $n \leqq m$ die Abschätzung

$$(M) \quad \left| \sum_{v=0}^n a_{mv} s_v \right| \leqq \frac{a_{m0}}{a_{n'0}} |\sigma_{n'}| \leqq K |\sigma_{n'}| \quad (0 \leqq n' \leqq n).$$

Durch die Ungleichung (M) wird also die Möglichkeit gegeben, sozusagen ein „Stück“ der Transformation durch die ganze Transformation abzuschätzen, und diese Möglichkeit wird zu zahlreichen Anwendungen Anlaß geben.

Der Beweis beruht auf einer wiederholten Anwendung des ABELschen Lemmas. Wir schreiben

$$\sum_{v=0}^n a_{mv} s_v = \sum_{v=0}^n \frac{a_{mv}}{a_{nv}} a_{nv} s_v$$

und erhalten wegen (M₂) sofort

$$(2) \quad \left| \sum_{v=0}^n a_{mv} s_v \right| \leqq \frac{a_{m0}}{a_{n0}} \left| \sum_{v=0}^{n_1} a_{nv} s_v \right| \quad (0 \leqq n_1 \leqq n).$$

Verfahren wir jetzt mit der rechten Seite von (2) so wie vorher mit der linken und iterieren diesen Prozeß, so entstehen die Ungleichungen

$$(3) \quad \left| \sum_{v=0}^n a_{mv} s_v \right| \leqq \frac{a_{m0}}{a_{n_k 0}} \left| \sum_{v=0}^{n_{k+1}} a_{n_k v} s_v \right| \quad (n \geqq n_1 \geqq n_2 \geqq \dots \geqq 0).$$

Wegen der Beziehungen zwischen den n_k muß mindestens für einen Index k die Gleichheit $n_k = n_{k+1}$ bestehen, und für diesen gemeinsamen Wert $n' = n_k$ gilt die behauptete Abschätzung

$$(M) \quad \left| \sum_{v=0}^n a_{mv} s_v \right| \leqq \frac{a_{m0}}{a_{n'0}} \left| \sum_{v=0}^{n'} a_{n'v} s_v \right|.$$

Die hier zum Beweis von Satz 1 verwandte Methode wurde schon von L. S. BOSANQUET und W. JURKAT benutzt, um für die CESAROSCHEN und die „unstetigen“ RIESZSCHEN Verfahren Mittelwertsätze zu erhalten⁵⁾.

2. Ein Mittelwertsatz für Integraltransformationen.

Wir wenden uns jetzt den Integraltransformationen zu, wo das erste Beispiel eines Mittelwertsatzes von M. RIESZ⁶⁾ gefunden wurde.

⁵⁾ BOSANQUET [3], der erste Beweis bei BOSANQUET [2] verläuft anders; JURKAT [8]; vgl. auch § 3.

⁶⁾ RIESZ [11], [12].

Analog zu (1) ordnen wir der Funktion $s(t)$ mittels der Dreiecksmatrix $(a(x, t))$ die Funktion $\sigma(x)$ zu:

$$(4) \quad \sigma(x) = \int_0^x a(x, t) s(t) dt.$$

Dabei sollen nur solche Transformationen in Betracht gezogen werden, welche die Bedingungen (I) erfüllen:

- (I₀) $s(t)$ sei für alle $x \geq 0$ im Intervall $(0, x)$ meßbar und beschränkt;
- (I₁) $a(x, t)$ sei für alle $x \geq 0$ L -integrierbar über das Intervall $0 \leq t \leq x$;

$$(I_2) \quad \int_y^x |a(x, t)| dt \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow y + 0);$$

$$(I_3) \quad \int_0^y |a(x, t) - a(y, t)| dt \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow y + 0).$$

Die Bedingungen (I) sichern die „Stetigkeit“ der Integraltransformation (4) in dem folgenden Sinne:

$$(5) \quad \int_0^y a(x, t) s(t) dt \rightarrow \int_0^{y_0} a(x_0, t) s(t) dt$$

für

$$x \rightarrow x_0 + 0, \quad y \rightarrow y_0 \quad (0 \leq y \leq x).$$

Denn aus (I₂) und (I₃) folgt

$$\int_0^x |a(x, t) - a(x_0, t)| dt \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow x_0 + 0),$$

wobei $a(x_0, t) = 0$ für $t > x_0$ sein soll. Dann strebt aber auch

$$\int_0^y [a(x, t) - a(x_0, t)] s(t) dt \rightarrow 0,$$

und dies ist nur eine andere Form von (5).

Satz 2. *Besitzt die Matrix $(a(x, t))$ neben (I) noch die Eigenschaften*

$$(M_1) \quad a(x, t) \neq 0 \text{ und endlich, } 0 \leq \frac{a(x, t)}{a(y, t)} \leq K \quad (0 \leq t < y \leq x)$$

und

$$(M_2) \quad \frac{a(x, t)}{a(y, t)} \text{ fällt monoton, wenn } t \text{ wächst} \quad (0 \leq t < y \leq x),$$

so gilt für jedes $y \leq x$ die Abschätzung

$$(M') \quad \left| \int_0^y a(x, t) s(t) dt \right| \leq K |\sigma(y')| \quad (0 \leq y' \leq y).$$

Dieser Satz entspricht dem Satz 1 für Matrixtransformationen vollkommen, wenn man von den zusätzlichen Bedingungen (I) absieht. Auch der Beweis läßt sich ganz genau so durchführen, wobei an die Stelle des ABELSchen Lemmas der zweite Mittelwertsatz der Integralrechnung tritt: Statt (3) erhalten wir

$$(6) \quad \left| \int_0^y a(x, t) s(t) dt \right| \leq \frac{a(x, 0)}{a(y_k, 0)} \left| \int_0^{y_{k+1}} a(y_k, t) s(t) dt \right|$$

$$(y \geq y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq 0).$$

Nun streben die y_k offenbar monoton fallend gegen eine Zahl y' und für diese gilt wegen (5) die behauptete Abschätzung (M'). Hätten wir noch

$$(I_4) \quad a(y, 0) \text{ nach rechts stetig in } y$$

vorausgesetzt, so hätte sich genauer

$$(M'') \quad \left| \int_0^y a(x, t) s(t) dt \right| \leq \frac{a(x, 0)}{a(y', 0)} |\sigma(y')| \quad (0 \leq y' \leq y)$$

ergeben.

Bemerkung zu den Voraussetzungen: (I₃) und (I₄) können natürlich durch die beide enthaltende Bedingung

$$(I_5) \quad a(x, t) \rightarrow a(y, t), \quad \text{wenn } x \rightarrow y + 0 \quad (0 \leq t < y),$$

ersetzt werden. (Denn wir können wegen (M') den bekannten Satz von LEBESGUE über die Vertauschung von Integration und Grenzübergang anwenden.)

3. Beispiele für Mittelwertsätze.

3. 1. Der Mittelwertsatz von M. RIESZ ⁷⁾:

Ist $s(t)$ meßbar und beschränkt, $0 < \alpha \leq 1$, so gilt

$$(7) \quad \left| \alpha \int_0^y (x-t)^{\alpha-1} s(t) dt \right| \leq \left| \alpha \int_0^{y'} (y'-t)^{\alpha-1} s(t) dt \right| \quad (0 \leq y' \leq y \leq x).$$

Man sieht sofort, daß die Bedingungen von Satz 2 erfüllt sind. Allerdings müssen wir zugeben, daß (7) sogar für alle L -integrierbaren Funktionen $s(t)$ und nicht nur für beschränkte $s(t)$ richtig ist, was Satz 2 nicht liefert.

3. 2. Dem Mittelwertsatz von M. RIESZ hat W. JURKAT einen Mittelwertsatz für die „unstetigen“ RIESZschen Verfahren an die Seite gestellt.

Eine Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}$ (bzw. Folge $s_n = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu}$) heißt summierbar (bzw. limitierbar) zum Werte s durch das Verfahren der „stetigen“ RIESZschen

⁷⁾ Vgl. Fußnote ⁶⁾. Weitere Beweise: HARDY-RIESZ [5], S. 28, VERBLUNSKY [13].

Mittel $R^\alpha(\lambda)$, wenn

$$(8) \quad \frac{A^\alpha(\omega)}{\omega^\alpha} = \frac{1}{\omega^\alpha} \sum_{\lambda_\nu < \omega} (\omega - \lambda_\nu)^\alpha a_\nu \rightarrow s \quad (\omega \rightarrow \infty)$$

gilt, dabei soll $\alpha \geq 0$ und λ_n eine monoton gegen ∞ wachsende Zahlenfolge sein:

$$(9) \quad \Delta \lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n+1} < 0, \quad 0 \leq \lambda_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

Die „unstetigen“ RIESZSchen Mittel R_λ^α sind dadurch definiert, daß ω in (8) nicht mehr stetig, sondern nur noch durch die Werte λ_n gegen ∞ streben soll.

Wir schreiben $A(\tau) = A^0(\tau) = \sum_{\lambda_\nu < \tau} a_\nu$ und haben dann

$$(10) \quad A^\alpha(\omega) = \alpha \int_0^\omega (\omega - \tau)^{\alpha-1} A(\tau) d\tau \quad (\alpha > 0).$$

Die Gleichung (10) zeigt die Bedeutung des RIESZSchen Mittelwertsatzes für die stetigen Mittel $R^\alpha(\lambda)$. Die unstetigen Mittel R_λ^α bilden eine Matrixtransformation, die wir der Einfachheit halber auch in Integralform schreiben wollen. Der hier durch Satz 1 gegebene Mittelwertsatz (vgl. Fußnote ⁵⁾) lautet dann:

Ist $\lambda_n \leq \lambda_m$, $0 < \alpha \leq 1$, so gilt

$$(11) \quad \left| \alpha \int_0^{\lambda_n} (\lambda_m - \tau)^{\alpha-1} A(\tau) d\tau \right| \leq |A^\alpha(\lambda_{n'})| \quad (0 \leq n' \leq n).$$

Dabei ist mit den allgemeinen Bezeichnungen

$$a_{m\nu} = \alpha \int_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu+1}} (\lambda_{m+1} - \tau)^{\alpha-1} d\tau$$

und nach dem zweiten Mittelwertsatz der Differentialrechnung erhalten wir

$$\frac{a_{m\nu}}{a_{n\nu}} = \frac{(\lambda_{m+1} - \tau_\nu)^{\alpha-1}}{(\lambda_{n+1} - \tau_\nu)^{\alpha-1}} \quad \text{mit} \quad \lambda_\nu < \tau_\nu < \lambda_{\nu+1},$$

so daß die Bedingungen (M₁) und (M₂) für die unstetigen Mittel auf die entsprechenden Bedingungen (M'₁) und (M'₂) für die stetigen zurückgeführt sind. Dieser Zusammenhang zwischen Matrix- und Integraltransformationen besteht allgemein ⁸⁾, worauf wir jedoch nicht näher eingehen können.

3. 3. Für die CESAROSchen Mittel hat L. S. BOSANQUET ⁹⁾ folgenden Mittelwertsatz aufgestellt:

Ist $n \leq m$, $0 \leq \alpha \leq 1$, so gilt

$$(12) \quad \left| \sum_{\nu=0}^n \binom{m-\nu+\alpha-1}{m-\nu} s_\nu \right| \leq \left| \sum_{\nu=0}^{n'} \binom{n'-\nu+\alpha-1}{n'-\nu} s_\nu \right| \quad (0 \leq n' \leq n).$$

⁸⁾ Wenn bei festem α fast überall $a(x, t) > 0$ ist.

⁹⁾ Vgl. Fußnote ⁵⁾.

Man erkennt wieder unmittelbar, daß die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt sind. Die Ungleichung (12) ist ein Spezialfall einer allgemeineren Ungleichung für NÖRLUNDSche Verfahren:

Sind für alle μ und $\nu \geq 0$ die Bedingungen

$$p_\nu > 0, \quad \frac{p_{\nu+\mu}}{p_\nu} \text{ wächst monoton mit } \nu, \quad \frac{p_{\nu+\mu}}{p_\nu} \leq K$$

erfüllt, so gilt

$$(13) \quad \left| \sum_{\nu=0}^n p_{m-\nu} s_\nu \right| \leq \frac{p_m}{p_{n'}} \left| \sum_{\nu=0}^{n'} p_{n'-\nu} s_\nu \right| \quad (0 \leq n' \leq n \leq m).$$

3. 4. Zu dem Mittelwertsatz (7) bei dem CESÄROSchen Verfahren für Integrale hat M. JACOB¹⁰⁾ ein Analogon bei dem HÖLDERSchen Verfahren für Integrale gefunden:

Ist $s(t)$ meßbar und beschränkt, $0 < \alpha \leq 1$, so gilt

$$(14) \quad \left| \int_1^{y'} (\log x - \log t)^{\alpha-1} s(t) dt \right| \leq \left| \int_1^{y'} (\log y' - \log t)^{\alpha-1} s(t) dt \right|$$

$$(1 \leq y' \leq y \leq x).$$

Auch hier übersieht man leicht, daß die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt sind.

Mit diesen Beispielen meist bekannter Mittelwertsätze wollen wir uns begnügen, obwohl es leicht wäre, noch manchen weiteren hinzuzufügen.

4. Über die Größenordnung limitierbarer Folgen.

Wir gehen jetzt zu Anwendungen der Mittelwertsätze über, wobei wir der Einfachheit wegen Matrixtransformationen bevorzugen.

Zunächst führen wir einen Satz an, der Aufschluß darüber gibt, in welcher Weise die Transformation (1) gegen Null konvergieren kann.

Satz 3. Erfüllt die Matrix (a_{nv}) neben (M_1) und (M_2) noch die Spaltenbedingung

$$(Sp_3) \quad a_{nv} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty, \nu \text{ fest}),$$

so folgt aus $\sigma_n = o(1)$ für $n \rightarrow \infty$, daß auch

$$(15) \quad \sum_{\nu=0}^n a_{m\nu} s_\nu = o(1) \quad \text{für } m \rightarrow \infty$$

ist, und zwar gleichmäßig für alle $0 \leq n \leq m$.

Man kann diesen Sachverhalt auch kurz so aussprechen:

Mit der Transformation selbst strebt auch jedes ihrer Teilstücke gegen Null. Den Beweis entnehmen wir unmittelbar der Ungleichung

¹⁰⁾ JACOB [6].

(M), da für große n' das Glied $K|\sigma_{n'}|$ klein wird und für beschränkte n' das Glied $\frac{a_{m0}}{a_{n'0}}|\sigma_{n'}| \rightarrow 0$ strebt für $m \rightarrow \infty$.

Satz 3 ist die Grundlage zahlreicher Anwendungen, z. B. enthält er unmittelbar eine Aussage über die Größenordnung limitierbarer Folgen.

Satz 4. *Unter den Voraussetzungen von Satz 3, also (M_1) , (M_2) , (Sp_0) folgt aus $\sigma_n = o(1)$*

$$(16) \quad s_n = o(1) \frac{1}{a_{nn}} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Denn nach (15) strebt ja $\sum_{\nu=0}^{n-1} a_{n\nu} s_\nu \rightarrow 0$, und folglich gilt auch für den „Rest“ der Transformation $a_{nn} s_n = o(1)$.

Zusatz. Ist die Transformation permanent, so folgt natürlich aus $\sigma_n = s + o(1)$, daß $s_n = s + o(1) \frac{1}{a_{nn}}$ ist. Ist außerdem $\frac{1}{a_{nn}} = O(1)$, so ist die Transformation konvergenzgleich¹¹⁾.

Ergänzend zu Satz 4 zeigen wir, daß sich die Bedingung (16) nicht verschärfen läßt, so daß wir also in $\frac{1}{a_{nn}}$ die „genaue Größenbeschränkung“ der limitierbaren Folgen gefunden haben.

Satz 5. *Die Matrix $(a_{n\nu})$ erfülle die Bedingung $a_{nn} \neq 0$ und η_n sei eine positive, unbeschränkte Zahlenfolge. Es gibt dann eine Folge, die den Forderungen*

$$(17) \quad \sigma_n = o(1) \quad (n \rightarrow \infty)$$

und

$$(18) \quad s_n \neq o\left(\frac{1}{\eta_n}\right) \frac{1}{a_{nn}} \quad (n \rightarrow \infty)$$

genügt.

Beim Beweise benutzen wir die Umkehrtransformation

$$s_n = \sum_{\nu=0}^n a'_{n\nu} \sigma_\nu, \quad a'_{nn} = \frac{1}{a_{nn}}.$$

Wäre für alle Folgen der Form (17) die Bedingung

$$(19) \quad s_n = o\left(\frac{1}{\eta_n}\right) \frac{1}{a_{nn}} = o\left(\frac{1}{\eta_n}\right) a'_{nn} = o\left(\frac{1}{\eta_n}\right) \sum_{\nu=0}^n |a'_{n\nu}|$$

erfüllt, so wäre die Transformation

$$(20) \quad \eta_n \frac{\sum_{\nu=0}^n a'_{n\nu} \sigma_\nu}{\sum_{\nu=0}^n |a'_{n\nu}|} = \sum_{\nu=0}^n d_{n\nu} \sigma_\nu$$

¹¹⁾ Vgl. HARDY-RIESZ [5], theorem 36.

nulltreu und müßte folglich die Bedingung

$$(21) \quad \sum_{\nu=0}^n |d_{n\nu}| = O(1)$$

erfüllen, was aber nicht der Fall ist. Infolgedessen gibt es eine Nullfolge σ_ν , für die (18) gilt, q. e. d.

Als Beispiel können wir die unstetigen RIESZSchen Verfahren R_λ^α heranziehen, die für $0 < \alpha \leq 1$ unsere Voraussetzungen erfüllen und für diese α mit den stetigen Verfahren $R^\alpha(\lambda)$ äquivalent sind¹²⁾. Satz 4 und 5 besagt dann, daß hier die genaue Größenordnung der limitierbaren Folgen durch

$$(22) \quad s_n = o(1) \left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \right)^\alpha$$

gegeben wird. Dieses Ergebnis ist bekannt, und auch der Beweis von Satz 4 ist für diesen Spezialfall nicht neu¹³⁾.

Wir führen noch eine leichte Verallgemeinerung von Satz 4 an, deren Beweis keinerlei Schwierigkeiten bietet.

Satz 6. Die Matrix $(a_{n\nu})$ erfülle die Bedingungen (M_1) , (M_2) , (Sp_0) und η_n sei eine positive, monoton wachsende Zahlenfolge. Dann folgt aus

$$(23) \quad \sigma_n = o(\eta_n) \quad \text{bzw.} \quad \sigma_n = O(\eta_n)$$

entsprechend

$$(24) \quad s_n = o(\eta_n) \frac{1}{a_{nn}} \quad \text{bzw.} \quad s_n = O(\eta_n) \frac{1}{a_{nn}}.$$

5. Mittelwertsätze und schwache Abschnittskonvergenz.

5.1. In den folgenden §§ wollen wir Probleme über Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren bei normalen Matrixverfahren behandeln. Wir beschränken uns dabei wie bisher auf Matrixtransformationen \mathfrak{A} , die einer Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ (bzw. Folge $s_n = \sum_{\nu=0}^n a_\nu$) eine Folge $\{\sigma_n\}$ durch die Vorschrift

$$(25) \quad \sigma_n = \sum_{\nu=0}^n a_{n\nu} s_\nu = \sum_{\nu=0}^n \bar{a}_{n\nu} a_\nu$$

mit

$$(26) \quad a_{n\nu} = \bar{a}_{n\nu} = 0 \quad \text{für } \nu > n \quad \text{und} \quad a_{n\nu} = \Delta \bar{a}_{n\nu} = \bar{a}_{n\nu} - \bar{a}_{n,\nu+1}$$

zuordnen.

Die Transformation \mathfrak{A} heißt *normal*, wenn die Diagonalglieder

$$(27) \quad a_{nn} = \bar{a}_{nn} \neq 0$$

sind.

¹²⁾ Vgl. JURKAT [8].

¹³⁾ Vgl. HARDY-RIESZ [5], S. 36; JURKAT [7].

Es hat sich gezeigt, daß bei Fragen über Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren eine gewisse Eigenschaft des Nullwirkfeldes von \mathfrak{A} — mit $(\mathfrak{A})_0$ bezeichnet ¹⁴⁾ — von besonderer Wichtigkeit ist, nämlich die *schwache Abschnittskonvergenz* (SAK). Wenn \mathfrak{A} permanent und normal ist, so ist in $(\mathfrak{A})_0$ genau dann SAK vorhanden, wenn für jede Folge $\{s_v\} \in (\mathfrak{A})_0$ und für alle $m \geq n$ die Ungleichung

$$(28) \quad \text{SAK:} \quad \left| \sum_{v=0}^n a_{mv} s_v \right| \leq K \overline{\text{fin}}_r \left| \sum_{v=0}^r a_{rv} s_v \right|$$

besteht ¹⁵⁾.

Die Ungleichung (28) gilt jedenfalls dann, wenn \mathfrak{A} die Bedingungen (M_1) und (M_2) für einen Mittelwertsatz erfüllt. Wir wollen sagen, daß \mathfrak{A} die *Eigenschaft* \mathfrak{M} besitzt, wenn statt (28) für jede Folge $\{s_v\}$ und alle $m \geq n$ die Ungleichung

$$(29) \quad \mathfrak{M}: \quad \left| \sum_{v=0}^n a_{mv} s_v \right| \leq K \left| \sum_{v=0}^{n'} a_{n'v} s_v \right| \quad (0 \leq n' \leq n)$$

gilt.

Der Zusammenhang zwischen (28) und (29) wird ausgedrückt durch Satz 7. *Wenn \mathfrak{A} normal und permanent ist, dann sind die Eigenschaften SAK und \mathfrak{M} gleichzeitig erfüllt oder nicht erfüllt ¹⁶⁾.*

Beweis. Aus (29) folgt offensichtlich (28). Umgekehrt sei (28) erfüllt. Wir betrachten eine feste Zahl n ; $\{s_v\}$ sei eine gegebene Zahlenfolge. Wir ändern s_{n+1}, s_{n+2}, \dots so ab, daß $\sigma_{n+1} = \sigma_{n+2} = \dots = 0$ ist. Für diese abgeänderte Zahlenfolge gilt (28), also ist

$$(30) \quad \left| \sum_{v=0}^n a_{mv} s_v \right| \leq K \text{fin}_r |\sigma_r| = K \overline{\text{fin}}_{r \leq n} |\sigma_r|.$$

An den Zahlen s_0, s_1, \dots, s_n ; $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n$ wurde nichts geändert, deshalb ist (30) gerade die zu beweisende Ungleichung (29).

5. 2. Bei den folgenden Untersuchungen werden wir (abgesehen von Anwendungen der Sätze des § 4) von der Eigenschaft \mathfrak{M} und nicht von den konkreten Bedingungen (M_1) und (M_2) , aus denen \mathfrak{M} gewonnen werden kann, ausgehen. Die Beweise hängen nämlich von der Gültigkeit des Mittelwertsatzes allein ab. Darüber hinaus bleibt auch Satz 3 richtig, wenn \mathfrak{A} permanent und normal ist und die Eigenschaft \mathfrak{M} besitzt ¹⁷⁾, allerdings ist der Beweis nicht so einfach wie der von uns angegebene. Ohne Änderung der Beweise folgt dann aus Satz 3 die Gültigkeit der Sätze 4 und 6 unter den obigen Voraussetzungen.

Wenn wir auch im folgenden stets mit der Eigenschaft \mathfrak{M} arbeiten, so werden wir bei konkreten Anwendungen i. a. doch auf die Bedingungen (M_1) und (M_2) zurückgreifen.

¹⁴⁾ $(\mathfrak{A})_0$ besteht aus allen Folgen $\{s_v\}$, die durch \mathfrak{A} zu Null limitiert werden.

¹⁵⁾ Vgl. PEYERIMHOFF [10], Satz 5. 2; ZELLER [14].

¹⁶⁾ Dies ist eine Ergänzung zu PEYERIMHOFF [10], Satz 5. 2.

¹⁷⁾ Dies ist der wesentliche Inhalt des Satzes 3. 3 von ZELLER [14].

5. 3. Mit Hilfe der SAK konnte A. PEYERIMHOFF¹⁸⁾ zwei Sätze über Summierbarkeitsfaktoren beweisen, die wir hier zwecks späterer Anwendungen noch einmal formulieren wollen. (Wegen Satz 7 können wir statt SAK stets die Eigenschaft \mathfrak{M} voraussetzen.)

Satz 8. Das Verfahren \mathfrak{A} sei normal, permanent und besitze die Eigenschaft \mathfrak{M} . \mathfrak{B} sei ein permanentes Limitierungsverfahren.

Behauptung. Die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} s_v \varepsilon_v$ ist genau dann \mathfrak{B} -summierbar für alle \mathfrak{A} -limitierbaren Folgen $\{s_v\}$, wenn es eine Folge $\{\alpha_n\}$ mit $\sum |\alpha_n| < +\infty$ gibt, so daß

$$(F_8) \quad \varepsilon_v = \sum_{n=v}^{\infty} \alpha_n a_{nv} \quad \text{für } v = 0, 1, \dots \text{ gilt.}$$

Satz 9. Voraussetzungen wie bei Satz 8.

Behauptung. Die Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} a_v \varepsilon_v$ ist genau dann \mathfrak{B} -summierbar für alle \mathfrak{A} -summierbaren Reihen $\sum a_v$, wenn es eine Folge $\{\alpha_n\}$ mit $\sum |\alpha_n| < +\infty$ und eine Zahl α gibt, so daß

$$(F_9) \quad \varepsilon_v = \alpha + \sum_{n=v}^{\infty} \alpha_n \bar{a}_{nv} \quad \text{gilt für } v = 0, 1, \dots$$

und

(G_9) $\{s_v, \varepsilon_v\}$ \mathfrak{B} -limitierbar ist zum Werte Null für alle Folgen $\{s_v\} \in (\mathfrak{A})_0$.

Zusatz. Die Bedingungen (F_8) und (F_9) sind auch noch notwendig für die \mathfrak{B} -Summierbarkeit von $\sum_{v=0}^{\infty} s_v \varepsilon_v$ bzw. $\sum_{v=0}^{\infty} a_v \varepsilon_v$, wenn \mathfrak{A} normal und permanent ist, aber die Eigenschaft \mathfrak{M} nicht besitzt.

6. Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren.

6. 1. Während Satz 8 einen vollständigen Überblick über die Faktoren ε_v gibt, ist das bei Satz 9 wegen der Bedingung (G_9) nicht der Fall. Wir wollen in diesem Paragraphen die Bedingung (G_9) in zwei Fällen, nämlich für konvergenzgleiches \mathfrak{B} und für $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$, durch eine von $\{s_v\}$ freie Bedingung ersetzen.

Um diese Dinge bequem formulieren zu können, führen wir folgende Bezeichnungen ein:

Die in Satz 8 vorkommenden Faktoren ε_v wollen wir kurz als $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})_f$ -Faktoren und die ε_v aus Satz 9 als $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})_r$ -Faktoren bezeichnen; dabei soll f bzw. r an die Folge $\{s_v\}$ bzw. Reihe $\sum a_v$ erinnern, aus der $\sum s_v \varepsilon_v$ bzw. $\sum a_v \varepsilon_v$ gebildet wurde. Handelt es sich um die Konvergenz dieser Reihen, dann wollen wir kurz von $(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})_f$ - bzw. $(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})_r$ -Faktoren sprechen.

¹⁸⁾ PEYERIMHOFF [10], Satz 5. 3, 5. 6 und 3. 6. Der folgende Satz 9 ist eine leichte Verallgemeinerung des Satzes 5. 6.

6. 2. Satz 10. \mathfrak{A} sei normal, permanent und besitze die Eigenschaft \mathfrak{M} .

Behauptung. Die ε_ν mit

$$(F_{10}) \quad \varepsilon_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \bar{a}_{n\nu} \quad (\sum |\alpha_n| < +\infty, \alpha \text{ beliebig})$$

und

$$(G_{10}) \quad \varepsilon_n = O(a_{nn})$$

sind genau die $(\mathfrak{A}, \mathfrak{C})_r$ -Faktoren.

Beweis. Die genaue Größenbeschränkung der \mathfrak{A} -limitierbaren Folgen $\{s_\nu\}$ ist nach den Sätzen 4 und 5 gerade $o\left(\frac{1}{a_{nn}}\right)$. Die Bedingung (G_9) läßt sich daher durch (G_{10}) ersetzen.

Zusatz. Wenn \mathfrak{A} nicht konvergenzgleich ist, dann ist $\frac{1}{a_{nn}} \neq O(1)$. In diesem Falle muß in (F_{10}) $\alpha = 0$ sein. Aus (F_{10}) folgt nämlich $\varepsilon_n = \alpha + o(1)$. Andererseits gibt es wegen (G_{10}) eine Teilfolge $\{n_i\}$ der natürlichen Zahlen mit $\varepsilon_{n_i} = o(1)$. Aus diesen Gleichungen folgt aber, daß $\alpha = 0$ sein muß.

6. 3. Satz 11. \mathfrak{A} sei normal, permanent und besitze die Eigenschaft \mathfrak{M} .

Behauptung. Die ε_ν mit

$$(F_{11}) \quad \varepsilon_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \bar{a}_{n\nu} \quad (\sum |\alpha_n| < +\infty, \alpha \text{ beliebig})$$

sind genau die $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})_r$ -Faktoren.

Beweis. Nach Satz 9 haben wir nur zu zeigen, daß die Folge $\{s_\nu \varepsilon_\nu\}$ für alle $\{s_\nu\} \in (\mathfrak{A})_0$ zum Werte 0 \mathfrak{A} -limitierbar ist. Es genügt offensichtlich, dies nur für diejenigen $\{s_\nu\}$ nachzuweisen, für die $\alpha = 0$ ist.

Die \mathfrak{A} -Transformierte der Folge $\{s_\nu \varepsilon_\nu\}$ ist

$$(31) \quad \tau_n = \sum_{\nu=0}^n a_{n\nu} s_\nu \varepsilon_\nu = \sum_{\nu=0}^n a_{n\nu} s_\nu \sum_{\mu=\nu}^{\infty} \alpha_\mu \bar{a}_{\mu\nu} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha_\mu \sum_{\nu=0}^k \bar{a}_{\mu\nu} a_{n\nu} s_\nu$$

mit

$$(32) \quad k = \text{Min}(n, \mu).$$

τ_n strebt sicher gegen Null, wenn

$$(33) \quad \left| \sum_{\nu=0}^k \bar{a}_{\mu\nu} a_{n\nu} s_\nu \right| \leq M$$

für alle n und μ gilt; für jedes feste μ gilt nämlich

$$(34) \quad \sum_{\nu=0}^k \bar{a}_{\mu\nu} a_{n\nu} s_\nu \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

da $a_{n\nu} = o(1)$ ($n \rightarrow \infty$) ist.

Die Bedingung (33) folgt aber aus \mathfrak{M} und der Permanenz von \mathfrak{A} :

$$\left| \sum_{\nu=0}^k \bar{a}_{\mu\nu} a_{n\nu} s_{\nu} \right| = \left| \sum_{\nu=0}^{k-1} a_{\mu\nu} \sum_{\varrho=0}^{\nu} a_{n\varrho} s_{\varrho} + \bar{a}_{\mu k} \sum_{\varrho=0}^k a_{n\varrho} s_{\varrho} \right|$$

$$\leq \sum_{\nu=0}^{k-1} |a_{\mu\nu}| K \operatorname{fin}_{r \leq k-1} |\sigma_r| + |\bar{a}_{\mu k}| K \operatorname{fin}_{r \leq k} |\sigma_r| \leq K' \left(\sum_{\nu=0}^{k-1} |a_{\mu\nu}| + |\bar{a}_{\mu k}| \right) \leq M.$$

Zusatz. Wenn \mathfrak{B} ein permanentes Verfahren mit $\mathfrak{B} \geq \mathfrak{A}$ ist, dann ist (F_{11}) natürlich auch für die \mathfrak{B} -Summierbarkeit der Reihe $\sum a_{\nu} \varepsilon_{\nu}$ für alle \mathfrak{A} -summierbaren Reihen $\sum a_{\nu}$ notwendig und hinreichend.

7. Stetige und unstetige RIESZsche Mittel.

7. 1. Kürzlich hat W. JURKAT¹⁹⁾ nachgewiesen, daß die stetigen RIESZschen Mittel $R^{\kappa}(\lambda)$ und die unstetigen RIESZschen Mittel R_{λ}^{κ} für alle κ mit $0 < \kappa \leq 1$ äquivalent sind. Die Verfahren R_{λ}^{κ} besitzen die Eigenschaft \mathfrak{M} , wenn $0 < \kappa \leq 1$ ist, denn die Bedingungen (M_1) und (M_2) sind für die zugehörigen Matrizen erfüllt (§ 3. 2). Die Sätze 8, 10 und 11 liefern uns also genaue Bedingungen für Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren bei den Verfahren R_{λ}^{κ} und damit, wegen $R_{\lambda}^{\kappa} \approx R^{\kappa}(\lambda)$, auch bei $R^{\kappa}(\lambda)$.

7. 2. Satz 12. $(R_{\lambda}^{\kappa}, \mathfrak{B})_f$ -Faktoren.

Es sei $0 < \kappa \leq 1$ und \mathfrak{B} ein permanentes Limitierungsverfahren.

Die ε_{ν} mit

$$(F_{12}) \quad \varepsilon_{\nu} = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_{\nu}}{\lambda_{n+1}^{\kappa}} \quad (\sum |\alpha_n| < +\infty)$$

sind genau die $(R_{\lambda}^{\kappa}, \mathfrak{B})_f$ -Faktoren.

Satz 13. $(R_{\lambda}^{\kappa}, \mathfrak{C})_r$ -Faktoren.

Es sei $0 < \kappa \leq 1$. Die ε_{ν} mit

$$(F_{13}) \quad \varepsilon_{\nu} = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \frac{(\lambda_{n+1} - \lambda_{\nu})^{\kappa}}{\lambda_{n+1}^{\kappa}} \quad (\sum |\alpha_n| < +\infty, \alpha \text{ beliebig})$$

und

$$(G_{13}) \quad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{\lambda_n^{\kappa}}\right), \quad A_n = \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$$

sind genau die $(R_{\lambda}^{\kappa}, \mathfrak{C})_r$ -Faktoren. Wenn $\{A_n\}$ unbeschränkt ist, so ist $\alpha = 0$.

Satz 14. $(R_{\lambda}^{\kappa}, \mathfrak{B})_r$ -Faktoren, $\mathfrak{B} \geq R_{\lambda}^{\kappa}$.

Es sei $0 < \kappa \leq 1$ und \mathfrak{B} ein permanentes Limitierungsverfahren mit $\mathfrak{B} \geq R_{\lambda}^{\kappa}$. Die ε_{ν} mit

$$(F_{14}) \quad \varepsilon_{\nu} = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \frac{(\lambda_{n+1} - \lambda_{\nu})^{\kappa}}{\lambda_{n+1}^{\kappa}} \quad (\sum |\alpha_n| < +\infty, \alpha \text{ beliebig})$$

sind genau die $(R_{\lambda}^{\kappa}, \mathfrak{B})_r$ -Faktoren.

¹⁹⁾ JURKAT [8].

7. 3. Setzen wir in den Sätzen 12, 13 und 14 $\lambda_n = n$, so erhalten wir wegen $R_n^x \approx R^x(n) \approx C_x$ Sätze für die CESAROSCHEN Mittel. Da aber die C_x -Verfahren nach § 3. 3 selbst die Eigenschaft \mathfrak{M} besitzen, können wir auch die Sätze 8, 10 und 11 direkt anwenden und kommen so zu etwas anderen, aber natürlich äquivalenten Bedingungen:

Satz 15. Wenn $\lambda_n = n$ und $0 < x \leq 1$ ist, dann ist (F_{12}) mit

$$(F'_{12}) \quad \varepsilon_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \beta_n \frac{\binom{n-\nu+x-1}{n-\nu}}{\binom{n+x}{n}} \quad (\sum |\beta_n| < +\infty)$$

gleichwertig.

Satz 16. Wenn $\lambda_n = n$ und $0 < x \leq 1$ ist, dann ist die Bedingung $(F_{13}) = (F_{14})$ mit

$$(F'_{13}) = (F'_{14}) \quad \varepsilon_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \beta_n \frac{\binom{n-\nu+x}{n-\nu}}{\binom{n+x}{n}} \quad (\sum |\beta_n| < +\infty)$$

gleichwertig.

7. 4. Die Bedingungen (F_{12}) , (F'_{12}) , ..., (F'_{14}) liefern zwar eine Darstellung aller Faktoren ε_ν , doch wird es für konkret gegebene ε_ν oft schwierig sein, die Möglichkeit einer solchen Darstellung nachzuweisen. In den folgenden Fällen ist aber die Auflösung nach α_n bzw. β_n leicht möglich²⁰⁾:

1) Für $x = 1$:

$$(F_{12}^*) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{n+1} \left| \Delta \left(\frac{\varepsilon_n}{\Delta \lambda_n} \right) \right| < +\infty \quad \text{und} \quad \varepsilon_n = o(\Delta \lambda_n)^{21}.$$

$$(F_{13}^*) = (F_{14}^*) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{n+1} \left| \Delta \left(\frac{\Delta \varepsilon_n}{\Delta \lambda_n} \right) \right| < +\infty \quad \text{und} \quad \frac{\Delta \varepsilon_n}{\Delta \lambda_n} = o(1)^{22}.$$

2) Für alle x mit $0 < x \leq 1$:

$$(F_{12}^{*x}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+x}{n} |\Delta^x \varepsilon_n| < +\infty \quad \text{und} \quad \varepsilon_n = o(1)^{21}.$$

$$(F_{13}^{*x}) = (F_{14}^{*x}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+x}{n} |\Delta^{x+1} \varepsilon_n| < +\infty \quad \text{und} \quad \varepsilon_n = O(1).$$

(F_{14}^{*x}) stellt also eine genaue Bedingung für $(C_x, C_x)_r$ -Faktoren dar ($0 < x \leq 1$). Dieser Sachverhalt wird gewöhnlich als HARDY-BOHRSCHE Satz bezeichnet²³⁾.

²⁰⁾ Die nach α_n aufgelösten Bedingungen kennzeichnen wir durch Anhängen eines *, also (F_{12}^*) usw.

²¹⁾ Vgl. PEYERIMHOFF [10], § 7.

²²⁾ Vgl. JURKAT [7], Satz 1.

²³⁾ Vgl. hierzu BOSANQUET [3] und die dort zitierten Arbeiten; K. KNOPP [9]; die bei HARDY [4], S. 146 zitierten Arbeiten und ANDERSEN [1].

7. 5. Von Interesse ist vielleicht noch eine Bemerkung über die Bedingungen, die A. PEYERIMHOFF²⁴⁾ an Stelle von (F₁₂) und (F₁₃) erhalten hatte:

$$(\hat{F}_{12}) \quad \varepsilon_\nu = \mathcal{A}_\nu \int_{\lambda_\nu}^{\infty} \frac{(\omega - \lambda_\nu)^\kappa}{\omega^\kappa} dg(\omega) \quad \text{mit} \quad \int_0^{\infty} |dg(\omega)| < +\infty$$

$$(\hat{F}_{13}) \quad \varepsilon_\nu = \alpha + \int_{\lambda_\nu}^{\infty} \frac{(\omega - \lambda_\nu)^\kappa}{\omega^\kappa} dg(\omega) \quad \text{mit} \quad \int_0^{\infty} |dg(\omega)| < +\infty.$$

Da diese Bedingungen mit (F₁₂) und (F₁₃) äquivalent sein müssen, muß es zu jeder Funktion $g(\omega)$ mit $\int_0^{\infty} |dg(\omega)| < +\infty$ eine Folge $\{\alpha_n\}$ mit $\sum |\alpha_n| < +\infty$ geben, so daß

$$(35) \quad \mathcal{A}_\nu \int_{\lambda_\nu}^{\infty} \frac{(\omega - \lambda_\nu)^\kappa}{\omega^\kappa} dg(\omega) = \mathcal{A}_\nu \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \frac{(\lambda_{n+1} - \lambda_\nu)^\kappa}{\lambda_{n+1}^\kappa} \quad (\nu = 0, 1, \dots)$$

und

$$(36) \quad \int_{\lambda_\nu}^{\infty} \frac{(\omega - \lambda_\nu)^\kappa}{\omega^\kappa} dg(\omega) = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \frac{(\lambda_{n+1} - \lambda_\nu)^\kappa}{\lambda_{n+1}^\kappa} \quad (\nu = 0, 1, \dots)$$

ist. (Die Umkehrung ist trivial.) Einen direkten Beweis für diese Tatsache haben wir nicht finden können.

Schlußbemerkungen.

Wir haben bisher die RIESZSchen Mittel nur für $0 < \kappa \leq 1$ betrachtet, wo also der Mittelwertsatz galt und die stetigen Verfahren mit den unstetigen Verfahren äquivalent sind. Für $\kappa > 1$ herrschen andere Verhältnisse: Man weiß, daß die Äquivalenz $R_\lambda^\kappa \approx R^\kappa(\lambda)$ nicht mehr für alle $\kappa > 1$ besteht; die Bedingungen für Konvergenzfaktoren können bei R_λ^κ und $R^\kappa(\lambda)$ verschieden ausfallen.

Man wird fragen, ob z. B. die vorher erhaltene Bedingung (F₁₃) für $\kappa > 1$ noch notwendig oder hinreichend bleibt. Diese Frage soll nun in beschränktem Umfang beantwortet werden, nämlich für R_n^κ und $R^2(n)$.

Satz 17. Die ε_ν mit

$$(F_{17}) \quad \varepsilon_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \frac{(n+1-\nu)^\nu}{(n+1)^2} \quad (\sum |\alpha_n| < +\infty),$$

$$(G_{17}) \quad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

und

$$(H_{17}) \quad \alpha_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

sind genau die $(R_n^2, \mathfrak{C})_r$ -Faktoren.

²⁴⁾ PEYERIMHOFF [10], § 9.

Beweis. Die Bedingung (F_{17}) ist nach dem Zusatz zu Satz 9 notwendig. Die genaue Größenbeschränkung der Glieder derjenigen Reihen, die R_n^2 -summierbar sind, ist $o(n^3)$. Daraus folgt (G_{17}) . Mit den Abkürzungen

$$(37) \quad \sigma_n = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{\nu=0}^n (n+1-\nu)^2 a_\nu, \quad S_r^i = \sum_{\nu=0}^r \binom{r-\nu+i-1}{r-\nu} a_\nu$$

$(i = 0, 1, \dots)$

gilt

$$(38) \quad \sum_{\nu=0}^r a_\nu \varepsilon_\nu = S_r^1 \varepsilon_{r+1} + S_r^2 \mathcal{A} \varepsilon_{r+1} + S_r^3 \mathcal{A}^2 \varepsilon_{r+1} + \sum_{\nu=0}^r \alpha_\nu \sigma_\nu + \frac{\alpha_{r+1}}{(r+2)^2} S_r^3.$$

Die genaue Größenbeschränkung der Folgen $\{S_n^3\}$ ist $o(n^3)$. Daraus folgt die Behauptung.

Satz 18. Für $(R^2(n), \mathbb{C})_r$ -Faktoren sind die Bedingungen

$$(F_{18}) \quad \varepsilon_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(n+1)^2} (n+1-\nu)^2 \quad (\sum |\alpha_\nu| < +\infty)$$

$$(G_{18}) \quad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

hinreichend, aber nicht notwendig.

Beweis. Es ist $R^2(n) \approx C_2$. Die genauen Bedingungen für $(C_2, \mathbb{C})_r$ -Faktoren sind bekanntlich die folgenden:

$$(F) \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 |\mathcal{A}^3 \varepsilon_n| < +\infty \quad \text{und} \quad (G) \quad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

a) Hinreichend:

Aus (F_{18}) folgt

$$(39) \quad \mathcal{A}^3 \varepsilon_n = \frac{\alpha_n}{(n+1)^2} + \frac{\alpha_{n+1}}{(n+2)^2};$$

(F) ist also erfüllt, wenn (F_{18}) erfüllt ist.

b) Nicht notwendig:

Die Folge

$$(40) \quad \varepsilon_n = \mathcal{A}^{-3} \frac{(-1)^n}{\binom{n+2}{n} (n+1)^2} = \sum_{\varrho=n}^{\infty} \frac{\binom{\varrho-n+2}{\varrho-n}}{\binom{\varrho+2}{\varrho}} \frac{(-1)^\varrho}{(\varrho+1)^2}$$

erfüllt die Bedingungen (F) und (G) : (F) ist wegen

$$(41) \quad \mathcal{A}^3 \varepsilon_n = \frac{(-1)^n}{\binom{n+2}{n} (n+1)^2}$$

erfüllt und (G) ist wegen

$$(42) \quad |\varepsilon_\nu| = \left| \sum_{\varrho=n}^{\infty} \frac{\binom{\varrho-n+2}{\varrho-n}}{\binom{\varrho+2}{\varrho}} \frac{(-1)^\varrho}{(\varrho+1)^2} \right| \leq 3 \cdot \text{Max}_r \left| \sum_{\mu=n}^r \frac{(-1)^\mu}{(\mu+1)^2} \right| = \frac{3}{(n+1)^2}$$

richtig. Andererseits genügt die Folge (40) der Bedingung (F_{18}) nicht.

Aus (39) folgt nämlich

$$(43) \quad \alpha_n = (n+1)^2 \sum_{\nu=n}^{\infty} (-1)^{\nu-n} \Delta^3 \varepsilon_\nu;$$

setzt man hier (41) ein, so folgt

$$(44) \quad |\alpha_n| \sim (n+1)^2 \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)^4} \sim \frac{1}{(n+1)},$$

also $\sum |\alpha_n| = +\infty$.

Die Bedingungen (F_{13}) und (G_{13}) sind also für das Verfahren R_n^2 notwendige Konvergenzbedingungen, die aber schon deshalb nicht hinreichend sind, weil die genaue Größenbeschränkung der R_n^2 -limitierbaren Folgen nicht $o(n^2)$, sondern $o(n^3)$ ist. Andererseits sind die Bedingungen (F_{13}) und (G_{13}) für das Verfahren $R^2(n)$ zwar hinreichend, aber nicht notwendig. Dies zeigt, wie verschiedenartig schon die beiden Verfahren R_n^2 und $R^2(n)$ sind.

Literatur.

ANDERSEN, A. F.

- [1] Über die Anwendung von Differenzen nicht ganzer Ordnung in der Reihentheorie, Skand. Math. Kongress Stockholm 1934, 326—348.

BOSANQUET, L. S.

- [2] A mean value theorem, J. Lond. Math. Soc. **16** (1941), 146—148.
 [3] Note on convergence and summability factors (III), Proc. Lond. Math. Soc. (2), **50** (1949), 482—496.

HARDY, G. H.

- [4] Divergent series, Oxford 1949.

HARDY, G. H. — RIESZ, M.

- [5] The general theory of Dirichlet's series, Cambridge 1915.

JACOB, M.

- [6] Über die Äquivalenz der Cesàroschen und der Hölderschen Mittel für Integrale bei gleicher reeller Ordnung $k > 0$, Math. Zeitschr. **26** (1927), 672—682.

JURKAT, W.

- [7] Über Konvergenzfaktoren bei Riesz'schen Mitteln, Math. Zeitschr. **54** (1951), 262—271.
 [8] Über Riesz'sche Mittel mit unstetigem Parameter, Math. Zeitschr. **55** (1952), 8—12.

KNOPP, K.

- [9] Beweis eines von I. Schur in der Theorie der C -Summierbarkeit aufgestellten Satzes, J. f. Math. **187** (1950), 70—74.

PEYERIMHOFF, A.

- [10] Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren, Math. Zeitschr. **55** (1952), 23—54.

RIESZ, M.

- [11] Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques, *Comptus rendus* **152** (1911), 1651—1654.
- [12] Sur un théorème de la moyenne et ses applications, *Acta Sceged* **1** (1923), 114—126.

VERBLUNSKY, S.

- [13] On the limit of a function at a point, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), **32** (1931), 163—199.

ZELLER, K.

- [14] Abschnittskonvergenz in *FK*-Räumen, *Math. Zeitschr.* **55** (1952), 55—70.

(Eingegangen am 29. Juni 1951.)

Alternativ-Zerlegungen in Booleschen Verbänden.

Von

Georg Aumann in München.

1. Als Beispiel einer nicht identisch verschwindenden, nicht-negativen, additiven, aber nicht total-additiven, für alle Mengen eines σ -Mengenkörpers erklärten Mengenfunktion m dient gewöhnlich die Funktion $m|_{\mathfrak{Z}}$, erklärt auf dem System \mathfrak{Z} aller Teilmengen der Menge Z aller natürlichen Zahlen mit $m(E) = 0$ für die endlichen Teilmengen E und $m(U) = +\infty$ für die unendlichen Teilmengen U von Z . Es ist klar, daß gerade die Verwendung des uneigentlichen Zahlwertes $+\infty$ die Hauptschwierigkeit der Aufzeigung einer solchen Funktion überwindet; verlangt man jedoch nach einer *beschränkten* Funktion obiger Art, so steht eine elementare Konstruktion nicht zur Verfügung. Am einfachsten löst man diese Aufgabe, etwa in \mathfrak{Z} , durch Herstellung einer „Alternativ-Zerlegung“ $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}^0 + \mathfrak{Z}^1$ von \mathfrak{Z} , d. h. einer Zerlegung von \mathfrak{Z} in zwei fremde Teilsysteme \mathfrak{Z}^0 und \mathfrak{Z}^1 , wobei \mathfrak{Z}^0 ein Ideal in \mathfrak{Z} ist und für \mathfrak{Z}^1 gilt: $X, Y \in \mathfrak{Z}^1 \rightsquigarrow (XY \in \mathfrak{Z}^1 \text{ und } X \dagger Y \in \mathfrak{Z}^0)$ ¹⁾. Kann man eine solche Alternativ-Zerlegung angeben, wobei \mathfrak{Z}^0 etwa alle endlichen Teilmengen von Z und \mathfrak{Z}^1 die Gesamtmenge Z selbst enthält, so liefert die Festsetzung $m(X) = 0$ bzw. 1 für $X \in \mathfrak{Z}^0$ bzw. \mathfrak{Z}^1 offenbar eine nicht identisch verschwindende, nicht negative, additive, aber nicht total-additive, für alle Mengen des σ -Mengenkörpers \mathfrak{Z} definierte Mengenfunktion.

Im folgenden wird die Existenz solcher (nicht trivialer) Alternativ-Zerlegungen in beliebigen BOOLESCHEN Verbänden nachgewiesen (Erweiterungssatz in **3.** und Satz in **8.**). Das Ergebnis ist für Mengenkörper bereits von A. TARSKI²⁾ erhalten worden; die hier zur Verwendung kommende Konstruktion ist einem von ST. ULAM³⁾ benutzten Verfahren ähnlich.

2. Es sei $A = \{a, b, \dots, x, \dots\}$ ein (nicht leerer) *Somenring* (auch *B-Verband* genannt), in welchem $a \dagger b$ und ab eine Addition und Multi-

¹⁾ Den logischen Pfeil \rightsquigarrow verwenden wir im Sinne der Aussage: Immer wenn das links davon Stehende gilt, gilt auch das rechts davon Stehende; \dagger bezeichnet die Mengenunterschiedsbildung (auch symmetrische Differenz genannt) und ist etwa als „kontraplus“ zu lesen.

²⁾ A. TARSKI. Une contribution à la théorie de la mesure, Fund. Math. **15**, 42—50 (1930).

³⁾ ST. ULAM. Concerning functions of sets, Fund. Math. **14**, 231—233 (1929).

plikation bezeichnen⁴⁾; die erste Verknüpfung mache A zu einer ABELschen Gruppe mit dem neutralen Element 0 , die zweite sei assoziativ und bezüglich der ersten distributiv (in beiden Faktoren) mit der Besonderheit, daß $xx = x$ für $x \in A$. Dann ist die Multiplikation auch kommutativ und es gilt $x \dot{+} x = 0$ für $x \in A$. Statt $ab = a$ schreibt man auch $a \subset b$ („ a Teilsoma von b “ oder „ b Obersoma von a “), wodurch A teilweise geordnet wird. Dabei erweist sich ab als das „größte“ gemeinsame Teilsoma, $a \dot{+} b \dot{+} ab$ — wofür wir auch $a \dot{+} b$ („ a koplus b “) schreiben werden — als das „kleinste“ gemeinsame Obersoma von a und b . Falls $ab = 0$, schreiben wir $a \dot{+} b = a \dot{+} b = a + b$.

3. J heißt ein *Ideal* in A , wenn

- (1) $0 \in J \subset A$;
 (2) $x, y \in J \rightsquigarrow x \dot{+} y \in J$;
 (3) $(x \in J \text{ und } a \in A) \rightsquigarrow ax \in J$.

Wegen $(x \dot{+} y)(x \dot{+} y) = x \dot{+} y$ ist J ein Teilsomenring von A . Wir nennen einen Somenring B *alternativ zerlegt*, wenn

- (a) $B = B^0 + B^1$, $B^0 B^1 = 0$, $B^1 \neq 0$;
 (b) B^0 ein Ideal in B ist;
 (c) $x, y \in B^1 \rightsquigarrow xy \in B^1$ und $x \dot{+} y \in B^0$.

Zum Beispiel ist im Mengenkörper \mathfrak{Z} (siehe 1.) $\mathfrak{A} = \mathfrak{C} + \mathfrak{U}$, wo \mathfrak{C} das System der endlichen Teilmengen von Z und \mathfrak{U} das System aller Komplemente von endlichen Teilmengen von Z in Z bezeichnen, eine Alternativ-Zerlegung von \mathfrak{A} .

Es gilt nun der folgende

Erweiterungssatz. Ist $B = B^0 + B^1$ eine Alternativ-Zerlegung des Teiltringes B des Somenringes A , wobei B^1 ein Ideal in A ist, so gibt es eine Alternativ-Zerlegung $A = A^0 + A^1$ von A mit $A^0 \supset B^0$ und $A^1 \supset B^1$.

4. Zum Beweis des Erweiterungssatzes gehen wir von einer Wohlordnung von A aus:

$$(4.1) \quad a_0, a_1, \dots, a_\xi, \dots, \xi < \beta,$$

setzen $B_0^0 = B^0$, $B_0^1 = B^1$, und nehmen zur Durchführung einer transfiniten Induktion an, daß für $\xi < \alpha$ die Mengensolgen

$$(4.2) \quad \begin{aligned} B_0^0 \subset B_1^0 \subset \dots \subset B_\xi^0 \subset \dots \\ B_0^1 \subset B_1^1 \subset \dots \subset B_\xi^1 \subset \dots \end{aligned}$$

definiert sind, wobei $B_\xi = B_\xi^0 + B_\xi^1$ eine Alternativ-Zerlegung von B_ξ darstelle mit der Besonderheit, daß B_ξ^1 Ideal in A ist, und daß gelte:

⁴⁾ Indem wir Somen, d. h. Elemente von A , prinzipiell mit kleinen, Somenmengen mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnen, können wir ohne Verwechslung die Verknüpfungszeichen $\dot{+}$, \cdot , $\dot{+}$, $\dot{+}$, $-$ sowohl für Somen- als auch für Mengenverknüpfungen in der üblichen Weise verwenden.

(4.3) Ist ξ eine Limeszahl, so sei für $i = 0, 1$

$$\sum_{v < \xi} \dot{+} B_v^i = B_\xi^i;$$

(4.4) Ist ξ keine Limeszahl, also $\xi = v + 1$, und zugleich $A - B_v$ nicht leer, so bezeichne k_ξ das erste Element in (4.1), das nicht zu B_v gehöre, und es gelte:

B_ξ^0 ist die Menge aller $y \in A$, zu welchen es jeweils ein p ($= p(y)$) aus B_v gibt mit $p k_\xi y \in B^0$;

B_ξ^1 ist die Menge aller $x k_\xi \dot{+} y$, wobei x die Menge B_v^1 und y die Menge B_ξ^0 durchlaufen.

(4.5) Ist ξ keine Limeszahl, $\xi = v + 1$, aber $B_v = A$, so sei $B_\xi^0 = B_v^0$ und $B_\xi^1 = B_v^1$.

Wir zeigen, daß bei Definition von B_α^0 und B_α^1 gemäß (4.3), (4.4) und (4.5) (mit $\xi = \alpha$) wieder gilt

$$(4.6) \quad B_\xi^i \subset B_\alpha^i \text{ für } \xi < \alpha \text{ und } i = 0, 1;$$

ferner, daß

$$(4.7) \quad B_\alpha = B_\alpha^0 + B_\alpha^1$$

eine Alternativ-Zerlegung des Somenringes B_α darstellt (Nr. 5. und 6.).

5. Ist α eine Limeszahl, so ist gemäß (4.3) ($\xi = \alpha$) offenbar (4.6) erfüllt; ferner ist B_α^0 als Vereinigung einer wohlgeordneten aufsteigenden Folge von Idealen in A wieder ein solches (also auch ein Ideal in B_α); aus demselben Grunde ist auch die Eigenschaft (c) für B_α^1 erfüllt; schließlich ist B_α als Vereinigung einer wohlgeordneten aufsteigenden Folge von Somenringen wieder ein solcher.

Im Falle, daß α keine Limeszahl, also $\alpha = \tau + 1$, und $B_\tau = A$, ist die Behauptung trivial.

6. 1. Nun sei $\alpha = \tau + 1$ und $A - B_\tau \neq 0$. B_α^0 ist Ideal in A . In der Tat: Aus $y_i \in B_\alpha^0$, d. h. $p_i k_\alpha y_i \in B^0$ mit einem $p_i \in B_\tau^1$ für $i = 1, 2$ folgt, weil B^0 Ideal in A , $p_1 p_2 k_\alpha y_i \in B^0$, also $p_3 k_\alpha (y_1 \dot{+} y_2) \in B^0$ mit $p_3 = p_1 p_2 \in B_\tau^1$, somit $y_1 \dot{+} y_2 \in B_\alpha^0$. Für $a \in A$ ergibt sich analog $p_1 k_\alpha (a y_1) \in B^0$, also auch $a y_1 \in B_\alpha^0$.

6. 2. $B_\alpha^0 \supset B_\tau^1$. In der Tat: Ist $p \in B_\tau^1$, so folgt $p k_\alpha (p - p k_\alpha) = 0 \in B^0$, also $p - p k_\alpha \in B_\alpha^0$, und damit $p = p k_\alpha \dot{+} (p - p k_\alpha) \in B_\alpha^1$.

6. 3. $B_\alpha^0 B_\alpha^1 = 0$. Beweis: Im folgenden bezeichnen p, p_1, \dots jeweils passend gewählte Elemente aus B_τ^1 . Angenommen, entgegen der Behauptung gäbe es ein $z = p k_\alpha \dot{+} y$ mit $y \in B_\alpha^0$ und zugleich $p_1 k_\alpha z \in B^0$, so folgte, weil $p_2 k_\alpha y \in B^0$ und $p p_1 p_2 = p_3$, daß $p_3 k_\alpha \in B^0$.

Wenn nun τ keine Limeszahl ist, so gilt $p_3 = q k_\tau \dot{+} u$ mit $q \in B_{\tau-1}^1$ und $u \in B_\tau^0$. Daraus folgt $q k_\tau k_\alpha = p_3 k_\alpha \dot{+} u k_\alpha$. Nun ist $q_1 k_\tau u \in B^0$ mit $q_1 \in B_{\tau-1}^1$, also $q_2 k_\tau k_\alpha \in B^0$ mit $q_2 = q q_1 \in B_{\tau-1}^1$. Dies bedeutete $k_\alpha \in B_\tau^0 \subset B_\tau$, was der Definition von k_α widerspricht.

Wenn andererseits τ Limeszahl ist, so besagt $p_3 \in B_\tau^1$, daß $p_3 \in B_\sigma^1$ mit einem $\sigma < \tau$. Alsdann ist auch $p_3 \in B_{\sigma+1}^0$ und $\sigma + 1 < \tau$, und es gilt

die Darstellung $p_s = r k_{\sigma+1} \dagger v$ mit $r \in B_\sigma^1$ und $v \in B_{\sigma+1}^0$. Dies führt zu $r k_{\sigma+1} k_\alpha = p_s k_\alpha \dagger v k_\alpha$ und, ähnlich wie eben, zum Widerspruch $k_\alpha \in B_{\sigma+1}^0 \subset B_\tau$.

6. 4. Nun können wir zeigen: $B_\alpha^0 \supset B_\tau^0$. In der Tat, es sei $y \in B_\tau^0$ und σ die kleinste Ordinalzahl $\leq \tau$ mit $y \in B_\sigma^0$. Ist $\sigma = 0$, so ist die Behauptung $y \in B_\alpha^0$ trivial. Ist aber $\sigma > 0$, so kann es wegen (4. 3) keine Limeszahl sein. Daher haben wir $q k_\sigma y \in B^0$ mit $q \in B_{\sigma-1}^1$. Daraus folgt $q_1 k_\alpha y \in B^0$ mit $q_1 = q k_\sigma \dagger 0 \in B_\sigma^1 \subset B_\tau^1$, d. h. $y \in B_\alpha^0$.

6. 5. Es gilt (4. 7). In der Tat: Es sei $x_i \in B_\alpha^1$, also $x_i = p_i k_\alpha \dagger y_i$ mit $p_i \in B_\tau^1$ und $y_i \in B_\alpha^0$, $i = 1, 2$. Dann ist $(p_1 k_\alpha \dagger y_1)(p_2 k_\alpha \dagger y_2) = p_3 k_\alpha \dagger y_3$ mit $p_3 = p_1 p_2 \in B_\tau^1$ und $y_3 = y_1 x_2 \dagger y_2 (p_1 k_\alpha) \in B_\alpha^0$, also $x_1 x_2 \in B_\alpha^1$; ferner folgt $(p_1 k_\alpha \dagger y_1) \dagger (p_2 k_\alpha \dagger y_2) = w k_\alpha \dagger y_4$ mit $w = p_1 \dagger p_2 \in B_\tau^1 \subset B_\alpha^0$ und $y_4 = y_1 \dagger y_2 \in B_\alpha^0$, also $x_1 \dagger x_2 \in B_\alpha^0$. Für $z \in B_\alpha^0$ gilt schließlich noch $x_1 \dagger z = p_1 k_\alpha \dagger (y_1 \dagger z) \in B_\alpha^1$ und $x_1 z \in B_\alpha^0$ (weil B_α^0 Ideal in A). Damit ist zugleich auch die Somenringeigenschaft von B_α bewiesen.

7. Betrachtung der Abbildung $\alpha \rightarrow \alpha + 1$ von $[\xi < \beta]$ in $[\hat{v} < \beta + 1]$ lehrt, daß das obige Verfahren bereits innerhalb des Zahlabschnittes aller $\alpha < \beta + 1 = \lambda$ die Folge (4. 1) verbraucht. Damit erhalten wir mit

$$A^0 = \sum_{\xi < \lambda} \dagger B_\xi^0, \quad A^1 = \sum_{\xi < \lambda} \dagger B_\xi^1$$

eine Zerlegung $A = A^0 + A^1$ der verlangten Art.

8. Offenbar können Alternativ-Zerlegungen $A = A^0 + A^1$ überhaupt nur existieren, wenn A außer 0 noch weitere Elemente enthält; dies ist aber auch hinreichend:

Ist A nicht der triviale Somenring $\{0\}$, so gibt es stets Alternativ-Zerlegungen $A = A^0 + A^1$.

In der Tat, sei u ein von 0 verschiedenes Element von A . Setzen wir $B^0 = [\hat{x}u = 0]$ und $B^1 = [\hat{y} \supset u]$, dann ist, wie man sich leicht überzeugt, $B = B^0 + B^1$ eine Alternativ-Zerlegung, wie sie der Erweitersatz voraussetzt; seine Anwendung führt dann zur Behauptung.

9. Der Begriff der Alternativ-Zerlegung hängt aufs engste mit den Primidealen zusammen:

Die Zerlegung $A = A^0 + A^1$ des Somenringes A , worin A^0 ein Ideal bezeichnet, ist dann und nur dann eine Alternativ-Zerlegung, wenn A^0 ein von A verschiedenes Primideal ist).*

In der Tat, liegt eine Alternativ-Zerlegung vor, so ist ein gleichzeitiges Bestehen von $x \in A^1$, $y \in A^1$ und $xy \in A^0$ widerspruchsvoll. Aus $xy \in A^0$ folgt also stets $x \in A^0$ oder $y \in A^0$, d. h. das Ideal A^0 ist Primideal. Wenn andererseits A^0 in der Zerlegung $A = A^0 + A^1$ ein Primideal ist, so folgt aus $x \in A^1$ und $y \in A^1$ stets $xy \in A^1$, und weiter $x \dagger y \in A^0$; denn wäre auch $x \dagger y \in A^1$, so hätte man den Widerspruch $0 = xy(x \dagger y) \in A^1$.

*) Oder, was dasselbe ist, wenn A^1 ein „Ultrafilter“ ist.

10. Der Erweiterungssatz in **3.** liefert zugleich die Existenz nicht-trivialer Primideale, wie diese für den Beweis des STONESCHEN Darstellungssatzes benötigt wird:

Ist J ein Ideal in A und $A \ni u \notin J$, so gibt es ein Primideal P in A mit $u \notin P \supset J$.

Zum Beweis nehmen wir die Alternativ-Zerlegung $B = B^0 + B^1$, wo $B^0 = J$ und B^1 die Menge aller Elemente $u + j$ mit $j \in J$ ist. Erweiterung nach **3.** zu $A = A^0 + A^1$ mit $A^0 \supset B^0$ und $A^1 \supset B^1$ ergibt in $P = A^0$ das gewünschte Primideal.

11. Für die allgemeine Maßtheorie bedeutet die Existenz von Alternativ-Zerlegungen bzw. von Primidealen, daß jeder von $\{0\}$ verschiedene Somenring als Träger eines nicht-trivialen, beschränkten Inhalts, d. h. einer nicht identisch verschwindenden, beschränkten, additiven Somenfunktion auftreten kann.

(Eingegangen am 13. Juli 1951.)

Beziehungen zwischen den Normalabbildungsfunktionen der Theorie der konformen Abbildung.

Von

Herbert Meschkowski in Berlin.

I. Einleitung.

Vor kurzem haben GARABEDIAN und SCHIFFER Identitäten zwischen den Funktionen abgeleitet, die einen gegebenen n -fach zusammenhängenden Bereich \mathfrak{B} mit glatten Randkomponenten auf die verschiedenen Typen von Normalbereichen abbilden. (Literaturverzeichnis [2].) Damit ist ein Gedanke von R. DE POSSEL weitergeführt, der bereits 1932 eine Darstellung aller Schlitzabbildungen (mit beliebigen Richtungen) durch zwei derselben gegeben hat [1]. — Ferner hat NEHARI [3] eine Darstellung der wichtigsten Normalabbildungsfunktionen durch die BERGMANNSCHE Kernfunktion gegeben, und LEHTO [4] hat als erster einen Existenzbeweis für die Parallelschlitzabbildung mit Hilfe von Orthonormalsystemen geführt.

In dieser Arbeit werden Darstellungen der Normalabbildungsfunktionen durch die folgenden Funktionen gegeben:

$$\begin{aligned}M(z, u) &= \frac{1}{2}(A(z, u) - B(z, u)), \\N(z, u) &= \frac{1}{2}(A(z, u) + B(z, u)), \\w_\nu(z) &= \omega_\nu(z) + i\omega_\nu^*(z).\end{aligned}$$

Dabei sind $A(z, u)$ und $B(z, u)$ die Funktionen, die den gegebenen Bereich auf einen Parallelschlitzbereich mit Schlitz parallel zur reellen bzw. imaginären Achse so abbilden, daß $u \in \mathfrak{B}$ in den unendlich fernen Punkt übergeht (mit dem Residuum 1). $\omega_\nu(z)$ ist das harmonische Maß der Randkomponente C_ν , $\omega_\nu^*(z)$ die konjugierte Potentialfunktion. $w_\nu(z)$ ist im allgemeinen nicht eindeutig in \mathfrak{B} , wohl aber $w'_\nu(z)$. $w'_\nu(z)$ hat auf dem Rand $C = \sum_1^n C_\nu$ von \mathfrak{B} keine, im Innern $n - 2$ Nullstellen (vgl. [5], S. 35—37), die in der Folge als von einander verschieden angenommen werden¹⁾.

¹⁾ Daß es überhaupt Bereiche mit einfachen Nullstellen für $w'_\nu(z)$ gibt, erkennt man z. B. durch Betrachtung gewisser symmetrischer Bereiche. Die Nullstellen von $w'_\nu(z)$ sind nach [5] die Verzweigungsstellen der Niveaulinien von $\omega_\nu(z)$. Sei \mathfrak{B}_1 ein vierfach zusammenhängender Bereich, der symmetrisch zur x - und y -Achse liegt und Null nicht als inneren Punkt enthält. Dann müssen die Niveaulinien die gleiche Symmetrieeigenschaft zeigen, und die beiden Verzweigungen können nicht zusammenfallen, wenn $\omega_\nu(z)$ auf der äußeren Berandung gleich 1 gewählt

II. Die Radialschlitzabbildung.

$r(z) = r(z; z_1, z_2)$ sei die Funktion, die den gegebenen n -fach zusammenhängenden Bereich \mathfrak{B} so auf einen Radialschlitzbereich abbildet, daß z_1 in 0 , z_2 in ∞ abgebildet wird (mit dem Residuum $+1$).

Auf der Randkurve C_v gilt dann folgende Beziehung:

$$\arg r(z) = \Im \log r(z) = c_v.$$

Daraus folgt

$$\log r(z) - \overline{\log r(z)} = 2i c_v.$$

Differentiation ergibt:

$$(1) \quad \frac{r'(z)}{r(z)} dz = \frac{\overline{r'(z)}}{\overline{r(z)}} \overline{dz}.$$

Wir betrachten jetzt das Integral

$$(2) \quad J = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{r'(z; z_1, z_2)}{r(z; z_1, z_2)} \frac{P'(z; uv)}{w'_v(z)} dz.$$

Dabei ist

$$P(z; uv) = \frac{1}{2} (\log k(z; uv) - \log r(z; uv)),$$

wobei $k(z, uv)$ die Funktion ist, die \mathfrak{B} in analoger Weise auf einen Kreisschlitzbereich abbildet. — Berechnen wir J zunächst nach der Residuenmethode.

Der Quotient $\frac{r'(z; z_1, z_2)}{r(z; z_1, z_2)}$ hat für die Nullstelle z_1 von $r(z)$ einen Pol mit dem Residuum $+1$, für den Pol z_2 einen Pol mit dem Residuum -1 . $\xi_\mu^{(v)}$ seien die $n-2$ Nullstellen von $w'_v(z)$, $\varrho_\mu^{(v)} = \frac{1}{w''_v(\xi_\mu^{(v)})}$ die Residuen von $\frac{1}{w'_v(z)}$. $P'(z)$ ist in \mathfrak{B} regulär und eindeutig (vgl. [2]). — Dann wird wegen der angenommenen Verschiedenheit der $\xi_\mu^{(v)}$:

$$(3) \quad J = \frac{P'(z_1; uv)}{w'_v(z_1)} - \frac{P'(z_2; uv)}{w'_v(z_2)} + \sum_{\mu=1}^{n-2} \varrho_\mu^{(v)} \frac{r'(\xi_\mu^{(v)})}{r(\xi_\mu^{(v)})} \frac{P'(\xi_\mu^{(v)}; uv)}{r(\xi_\mu^{(v)})}.$$

Der konjugiert komplexe Wert des Integrals J wird nach (2):

$$\bar{J} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\overline{r'}}{\overline{r}} \frac{\overline{P'}}{\overline{w'_v(z)}} \overline{dz}.$$

Nun gilt folgende Randbedingung:

$$(4) \quad \overline{P'} dz = -Q' dz.$$

Dabei ist

$$Q(z) = \frac{1}{2} (\log k(z; uv) + \log r(z; uv))$$

(vgl. [2] 16). Da $w'_v(z) dz$ auf allen Randkomponenten C_v rein imaginär ist, gilt ferner:

$$(5) \quad \overline{w'_v(z) dz} = -w'_v(z) dz.$$

wird. Aus Stetigkeitsgründen sind dann die Verzweigungen auch getrennt für solche Bereiche, die sich in ihrer Begrenzung von dem symmetrischen genügend wenig unterscheiden.

Wegen (1), (4) und (5) wird dann

$$\bar{J} = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{r'}{r} \cdot Q' \cdot \frac{1}{w'_v(z)} dz.$$

Berechnung nach der Residuenmethode ergibt

$$(6) \quad \bar{J} = \left(\frac{Q'(z_1; uv)}{w'_v(z_1)} - \frac{Q'(z_2, uv)}{w'_v(z_2)} \right) + \sum_{\mu=1}^{n-2} \varrho_{\mu}^{(v)} \frac{r'(\xi_{\mu}^{(v)})}{r(\xi_{\mu}^{(v)})} \cdot Q'(\xi_{\mu}^{(v)}; uv) \\ + \frac{r'(u)}{r(u)w'_v(u)} - \frac{r'(v)}{r(v)w'_v(v)}.$$

Dabei ist zu beachten, daß Q' nicht wie P' in \mathfrak{B} regulär ist, sondern bei u und v einfache Pole mit dem Residuum $+1$ bzw. -1 hat.

Daraus folgt

$$(7) \quad \frac{r'(u)}{r(u)w'_v(u)} = \frac{Q'(z_2, uv)}{w'_v(z_2)} - \frac{Q'(z_1; uv)}{w'_v(z_1)} - \sum \varrho_{\mu}^{(v)} \frac{r'(\xi_{\mu}^{(v)})}{r(\xi_{\mu}^{(v)})} Q'(\xi_{\mu}^{(v)}) \\ + \frac{r'(v)}{r(v)w'_v(v)} - \bar{J}.$$

Aus (3) folgt unter Benutzung von [2 (63)]:

$$(8) \quad \bar{J} = \frac{M(u z_1) - M(v z_1)}{w'_v(z_1)} - \frac{M(u z_2) - M(v z_2)}{w'_v(z_2)} \\ + \sum \varrho_{\mu}^{(v)} \frac{r'(\xi_{\mu}^{(v)})}{r(\xi_{\mu}^{(v)})} (M(u \xi_{\mu}^{(v)}) - M(v \xi_{\mu}^{(v)})).$$

Formt man jetzt (7) entsprechend um unter Benutzung von [1 (61)], so folgt daraus

$$(9) \quad \frac{r'(u)}{r(u)w'_v(u)} = \left(\frac{N(u z_1)}{w'_v(z_1)} - \frac{N(u z_2)}{w'_v(z_2)} \right) - \left(\frac{M(u z_1)}{w'_v(z_1)} - \frac{M(u z_2)}{w'_v(z_2)} \right) \\ + \sum_{\mu=1}^{n-2} \frac{\varrho_{\mu}^{(v)} r'(\xi_{\mu}^{(v)})}{r(\xi_{\mu}^{(v)})} N(u \xi_{\mu}^{(v)}) - \frac{\overline{\varrho_{\mu}^{(v)}} r'(\xi_{\mu}^{(v)})}{r(\xi_{\mu}^{(v)})} M(u \xi_{\mu}^{(v)}) + C(v).$$

In (9) sind die von v abhängigen Größen in dem Symbol $C(v)$ zusammengefaßt. Wenn wir jetzt v , z_1 und z_2 als gegebene Konstanten u als eine veränderliche Größe ansehen, so haben wir folgende Beziehung:

$$(9a) \quad \frac{r'(u)}{r(u)} = w'_v(u) \left[\left(\frac{N(u z_1)}{w'_v(z_1)} - \frac{N(u z_2)}{w'_v(z_2)} \right) - \left(\frac{M(u z_1)}{w'_v(z_1)} - \frac{M(u z_2)}{w'_v(z_2)} \right) \right] \\ + \sum_{\mu=1}^{n-2} (\alpha_{\mu}^{(v)} N(u \xi_{\mu}^{(v)}) - \overline{\alpha_{\mu}^{(v)}} M(u \xi_{\mu}^{(v)})) + \text{const.}$$

Dabei ist

$$\alpha_{\mu}^{(v)} = \frac{r'(\xi_{\mu}^{(v)})}{r(\xi_{\mu}^{(v)}) w'_v(\xi_{\mu}^{(v)})}.$$

Also gilt ²⁾

$$(9b) \quad r(u) = c^{u_0} \int_0^u w'(z) \varphi(z; z_1 z_2, \xi_1, \dots, \xi_{n-2}) dz$$

²⁾ Im folgenden wird zur Vereinfachung der Index v fortgelassen. Wir denken uns eine Randkomponente fest gewählt, auf der $w_v(z) = 1$ ist.

Die Funktion φ ist so definiert:

$$\varphi = \left(\frac{N(z z_1)}{w'(z_1)} - \frac{N(z z_2)}{w'(z_2)} \right) - \left(\frac{M(z z_1)}{w'(z_1)} - \frac{M(z z_2)}{w'(z_2)} \right) + \sum_{\mu} (\alpha_{\mu} N(z \xi_{\mu}) - \overline{\alpha_{\mu}} M(z \xi_{\mu})) + \text{const.}$$

Man kann sich nun umgekehrt fragen, wann eine durch (9b) gegebene Funktion eine Radialschlitzabbildung darstellt. Gefragt ist also nach den Bedingungen für die Konstanten α_{μ} . Da $w'(z) dz$ rein imaginär ist auf dem Rand, muß es bei einer Radialschlitzabbildung auch $\frac{r'}{r} \cdot \frac{1}{w}$ sein. — Nun gilt auf dem Rand C_{ϱ} nach [2 (57)]

$$(10) \quad M(z u) = \overline{N(z u)} + l_{\varrho}(u) \quad \varrho = 1, \dots, n.$$

Setzt man das in die Bedingung

$$\arg \frac{r'}{r w'(z)} = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \Re(\varphi(z; z_1 z_2 \xi_1 \dots \xi_{n-2})) = 0$$

ein, so erhält man

$$(11) \quad \Re \left[-\frac{\overline{l_{\varrho}(z_1)}}{w'(z_1)} + \frac{\overline{l_{\varrho}(z_2)}}{w'(z_2)} + x - \sum \overline{\alpha_{\mu}} \overline{l_{\varrho}(\xi_{\mu})} \right] = 0.$$

Dabei ist für die Konstante $x + iy$ gesetzt, und die rein imaginären Differenzen konjugiert komplexer Glieder sind in der Klammer fortgelassen. — Setzt man

$$\alpha_{\mu} = \alpha_{1\mu} + i \alpha_{2\mu}, \quad l_{\varrho}(\xi_{\mu}) = l_{\varrho\mu}^{(1)} + i l_{\varrho\mu}^{(2)},$$

so kann man (11) so schreiben:

$$(11a) \quad \sum_{\mu=1}^{n-2} (\alpha_{1\mu} l_{\varrho\mu}^{(1)} - \alpha_{2\mu} l_{\varrho\mu}^{(2)}) - x = c_{\varrho}(z_1 z_2),$$

$$c_{\varrho}(z_1 z_2) = \Re \left[-\frac{\overline{l_{\varrho}(z_1)}}{w'(z_1)} + \frac{\overline{l_{\varrho}(z_2)}}{w'(z_2)} \right]. \quad \varrho = 1, \dots, n.$$

(11a) ist ein inhomogenes lineares Gleichungssystem für die Unbekannten $\alpha_{1\mu}$, $\alpha_{2\mu}$, x .

Eine durch (9b) dargestellte Funktion mit Zahlen $\alpha_{1\mu}$, $\alpha_{2\mu}$ und x , y , die dem Gleichungssystem (11a) genügen, bildet den Rand von \mathfrak{B} auf Radialschlitz ab. Die Funktion braucht aber noch nicht eindeutig zu sein. —

Zur Untersuchung der Mehrdeutigkeit betrachten wir zunächst die singulären Stellen z_1 und z_2 . Das Integral $\int w'(z) \varphi dz$ über einen kleinen Kreis um z_1 oder z_2 hat den Wert $\pm 2\pi i$. Da $e^{2\pi i} = 1$, liefert also eine Umkreisung von z_1 oder z_2 keine Mehrdeutigkeit der durch (9b) dargestellten Funktion.

Dagegen muß gesichert sein, daß für $(n - 1)$ Ränder C_{ϱ} das Integral

$$\oint_{C_{\varrho}} w'(z) \varphi dz$$

verschwindet, damit Eindeutigkeit erreicht wird. Das führt, wie man leicht sieht, wieder zu einem linearen Gleichungssystem für die Konstanten $\alpha_{1\mu}$, $\alpha_{2\mu}$, x , y .

Nimmt man die Bedingungen für das Randverhalten und für die Eindeutigkeit zusammen, so erhält man $2n - 1$ Gleichungen für die $2n - 2$ Unbekannten $\alpha_{1\mu}$, $\alpha_{2\mu}$, x , y . Der Grund für diese Tatsache liegt darin, daß die Funktionen $M(zu)$ und $N(zu)$ nur bis auf additive Konstanten bestimmt sind, so daß sich zwischen den Konstanten der Gleichungssysteme noch Beziehungen ergeben.

III. Die Kreisschlitzabbildung.

Für die auf einen Kreisschlitzbereich abbildende Funktion $k(z; z_1, z_2)$ kann eine ähnliche Beziehung gefunden werden. An Stelle von (1) tritt eine andere Randbedingung. Aus

$$k(z) \overline{k(z)} = r_0^2$$

folgt durch Differentiation:

$$(12) \quad \frac{k'}{k} dz = -\frac{\overline{k'}}{\overline{k}} \overline{dz}.$$

Die Umformung des Integrals

$$J = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{k' P' dz}{k w'(z)}$$

führt dann ähnlich wie oben zu der Beziehung:

$$(13) \quad \frac{k'(u)}{k(u)} = w'(u) \left[\left(\frac{N(u z_1)}{w'(z_1)} - \frac{N(u z_2)}{w'(z_2)} \right) + \left(\frac{M(u z_1)}{w'(z_1)} - \frac{M(u z_2)}{w'(z_2)} \right) \right. \\ \left. + \sum_{\mu} (\beta_{\mu} N(u \xi_{\mu}) + \overline{\beta}_{\mu} M(u \xi_{\mu})) + \text{const.} \right].$$

IV. Die Abbildung auf das Innere des Einheitskreises.

Für die Funktionen, die den gegebenen Bereich \mathfrak{B} auf das Innere des Einheitskreises, die Randkomponenten auf die (einfach oder mehrfach durchlaufene) Peripherie des Einheitskreises abbilden, ist in [2] bereits eine Darstellung gegeben worden [2 (131)]:

$$(14) \quad E(z) = A_1 + \sum \overline{r}_v M(z n_v).$$

Dabei sind die n_v die Nullstellen von $E(z)$.

Wir wollen zunächst eine Ableitung von (14) angeben, die kürzer ist als die in [2] gegebene und insbesondere die Verwendung der Funktionen $P(z, u)$ und $Q(z, u)$ vermeidet. — Wir gehen aus von dem Integral

$$(15) \quad J = \frac{1}{2\pi i} \int_c E(z) N'(z v) dz = -E'(v).$$

Wegen $E \cdot \bar{E} = 1$ und der aus (10) sich ergebenden Beziehung

$$\bar{M}' \bar{d}z = N' dz$$

folgt daraus

$$\bar{J} = -\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{M'(z v)}{E} dz.$$

Nach dem Residuensatz ist dann

$$-\bar{J} = \sum_v r_v M'(z_v v).$$

Dabei sind z_v die Nullstellen von E und r_v die entsprechenden Residuen von $\frac{1}{E}$. Wegen [2 (65)] folgt

$$-J = \sum_{v=1}^N \bar{r}_v \overline{M'(z_v v)} = \sum \bar{r}_v M'(v z_v).$$

Integration ergibt (wegen (15))

$$E(v) = \sum r_v M(v z_v) + \text{const.}$$

Damit ist (14) bewiesen.

Im folgenden soll für die Funktionen $E(z)$ eine Beziehung gefunden werden, in die die Nullstellen der Ableitung eingehen. Aus der Randbeziehung $E \cdot \bar{E} = 1$ folgt wie oben durch Differentiation

$$(16) \quad \frac{E' dz}{E} = -\frac{\bar{E}' \bar{d}z}{\bar{E}}.$$

Ähnlich wie oben wird jetzt das Integral

$$(17) \quad J = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{E(z) P' w'(z) dz}{E'(z)}$$

umgeformt.

Aus (4), (5) und (16) folgt

$$(18) \quad \bar{J} = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{E'(z) \bar{P}' \bar{w}'(z) \bar{d}z}{\bar{E}'} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{E Q' w' dz}{E'}.$$

Es seien jetzt z_μ die Nullstellen³⁾ von E' . $\frac{1}{E'}$ hat dann die Residuen $\frac{1}{E''(z_\mu)}$.

Aus (17) folgt nach der Residuenmethode

$$J = \sum_{\mu=1}^m r_\mu w'(z_\mu) P'(z_\mu; uv).$$

Dabei ist

$$r_\mu = \frac{E(z_\mu)}{E''(z_\mu)}.$$

Aus (18) folgt entsprechend:

$$\bar{J} = \sum r_\mu w'(z_\mu) Q'(z_\mu; uv) + w'(u) \frac{E(u)}{E'(u)} - w'(v) \frac{E(v)}{E'(v)}.$$

³⁾ Sämtlich einfach angenommen.

Unter Benutzung von [1 (61)] und [1 (63)] folgt

$$\begin{aligned}\bar{J} &= \sum r_\mu \overline{w'(z_\mu) P'(z_\mu; uv)} = \sum \overline{r_\mu w'(z_\mu)} (M(uz_\mu) - M(vz_\mu)) \\ &= \sum r_\mu w'(z_\mu) (N(vz_\mu) - N(uz_\mu)) + w'(u) \frac{E(u)}{E'(u)} - w'(v) \frac{E(v)}{E'(v)}.\end{aligned}$$

Also wird

$$(19) \quad \frac{w'(u) E(u)}{E'(u)} = \sum_{\mu=1}^m \overline{r_\mu w'(z_\mu)} M(uz_\mu) + r_\mu w'(z_\mu) N(uz_\mu) + C_1(v).$$

Für festes v folgt daraus

$$(19 a) \quad \frac{w'(u) E(u)}{E'(u)} = \sum (\varrho_\mu M(uz_\mu) + \varrho_\mu N(uz_\mu)) + \text{const.}$$

Dabei ist

$$\varrho_\mu = \frac{E(z_\mu) w'(z_\mu)}{E'(z_\mu)}.$$

Also wird

$$(19 b) \quad E(u) = c^{u_0} \int_{\Sigma} \frac{w'(z) dz}{\overline{\varrho_\mu M(uz_\mu) + \varrho_\mu N(uz_\mu)}}.$$

Interessant ist die umgekehrte Frage, wann eine durch (19 b) gegebene Funktion eine eindeutige Funktion mit den oben für $E(z)$ festgesetzten Abbildungseigenschaften darstellt. Zunächst überzeugt man sich leicht durch Differentiation, daß $E'(u)$ für $z = z_\mu$ verschwindet. Wenn das Bild des Randes C_ϱ ein Kreisbogen sein soll, so muß

$$\arg E - \arg dE = \pm \frac{\pi}{2}$$

gelten. Wegen (5) bedeutet das, daß

$$\frac{w'(u) E(u)}{E'(u)}$$

reell sein muß. Das bedeutet:

$$(20) \quad \Im_m \sum_{\mu=1}^m (\overline{\varrho_\mu} M(uz_\mu) + \varrho_\mu N(uz_\mu)) = 0.$$

Setzen wir

$$\begin{aligned}A(zu) &= \gamma_\varrho(zu) + i\alpha_\varrho(u), & B(zu) &= \beta_\varrho(u) + \delta_\varrho(zu) \\ \varrho_\mu &= \varrho_\mu^{(1)} + i\varrho_\mu^{(2)}, & & (z \in C_\varrho)\end{aligned}$$

so folgt aus (20):

$$(21) \quad \sum_{\mu=1}^m (\varrho_\mu^{(1)} \alpha_\varrho(z_\mu) + \varrho_\mu^{(2)} \beta_\varrho(z_\mu)) = 0, \quad \varrho = 1, \dots, n.$$

Wenn die Gleichungen (17) erfüllt sind, ist andererseits $\frac{w'(u) E(u)}{E'(u)}$ reell auf dem Rand, $\arg E - \arg dE = \pm \frac{\pi}{2}$. Das Bild des Randes ist ein

Kreisbogen um den Nullpunkt. Es ist damit aber noch nicht gesagt, daß der absolute Betrag gleich 1 ist und daß die Funktion in \mathfrak{B} eindeutig ist. Um diese Eigenschaften zu sichern, müssen weitere Bedingungengleichungen aufgestellt werden, die aber nicht mehr linear sind.

V. Die Vollkreisabbildung.

Die Betrachtung für die Vollkreisabbildung wird zunächst für den Fall eines zweifach zusammenhängenden Gebietes \mathfrak{B} formuliert. $K(zv)$ sei die Funktion, die \mathfrak{B} so auf einen Vollkreisbereich abbildet, daß $z = v$ in Unendlich übergeht (Residuum 1).

Wir betrachten das Integral

$$(22) \quad J = \frac{1}{2\pi i} \oint_C N(zu) K'(zv) dz, \quad (u \in \mathfrak{B}, v \in \mathfrak{B}).$$

Nach der Residuenmethode wird

$$J = -N'(vu) + K'(uv).$$

Daraus folgt nach [2 (67)]

$$(22 \text{ a}) \quad J = K'(uv) - N'(uv).$$

Setzt man $\xi = K(z, v)$, so wird andererseits

$$J = \frac{1}{2\pi i} \oint_K N(z(\xi), u) d\xi = \frac{1}{2\pi i} \sum_{K_v} \oint \mathcal{F}.$$

Dabei ist K der Rand des Vollkreisbereiches \mathfrak{R} , auf den \mathfrak{B} durch $K(zv)$ abgebildet wird⁴⁾. Für $N(z(\xi), u)$ können wir setzen

$$(23) \quad N(z(\xi), u) = \frac{1}{2}(A(zu) + B(zu)) = n(\xi w) = \frac{1}{2}(a(\xi w) + b(\xi w)).$$

Dabei ist $w = K(u)$. w ist ein im Endlichen gelegener innerer Punkt von \mathfrak{R} . Das Integral kann dann geschrieben werden

$$J = \frac{1}{2\pi i} \oint_K n(\xi w) d\xi.$$

Jetzt soll die Funktion durch Spiegelung analytisch fortgesetzt werden. — Es seien die Spiegelbilder von w an $K_1, K_2: w_1, w_2$.

Die Mittelpunkte von $K_v: m_v$.

Die Radien von $K_v: r_v$.

Das Spiegelbild von K_2 (an K_1) heiße K_3 usw.

Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} \mathcal{F} = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} \mathcal{F} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_3} \mathcal{F} + \sum \text{res.}$$

⁴⁾ Die einzelnen Kreise heißen K_v .

Es soll jetzt gezeigt werden, daß $n(\xi)$ in den Punkten w_1 und w_2 regulär ist, so daß keine Residuen auftreten.

Aus der Darstellung von $A(zu)$ in der Umgebung von u :

$$A(zu) = \frac{1}{z-u} + a_1(z-u) + \dots$$

folgt

$$(24) \quad a(\xi w) = \frac{K'(u)}{\xi-w} + \text{reg.}$$

Wenn mit ξ_1 bzw. w_1 die Spiegelpunkte von ξ , w (bei der Spiegelung an K_1) bezeichnet werden, so gilt

$$\begin{aligned} \overline{(\xi_1 - m_1)} (\xi - m_1) &= r_1^2, \\ \overline{(w_1 - m)} (w - m_1) &= r_1^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(25) \quad \xi - w = - \frac{r_1^2 \overline{(\xi_1 - w_1)}}{(\xi_1 - m_1)(w_1 - m_1)}.$$

Jetzt wird $\frac{1}{\xi_1 - m_1}$ in eine Reihe entwickelt:

$$\frac{1}{\xi_1 - m_1} = \frac{1}{w_1 - m_1} + \alpha_1(\xi_1 - w_1) + \dots$$

In (25) eingesetzt:

$$\xi - w = - \frac{r_1^2}{(w_1 - m_1)^2} \overline{(\xi_1 - w_1)} + \dots$$

Wird das in (24) eingesetzt, so erhält man

$$(25 \text{ a}) \quad a(\xi_1) = - \frac{\xi'(u) \overline{(w_1 - m_1)^2}}{r_1^2} \frac{1}{\xi_1 - w_1} + \overline{\text{reg.}}$$

Eine Spiegelung an einem Schlitz parallel zur reellen Achse kann so ausgedrückt werden:

$$(25 \text{ b}) \quad a_1(\xi_1) = \overline{a(\xi_1)} + c.$$

Also wird nach (25 a) (unter Fortlassung des Index 1 für ξ_1 und a_1)

$$(26) \quad a(\xi) = - \frac{\xi'(u) (w_1 - m_1)^2}{r_1^2} \frac{1}{\xi - w_1} + \text{reg.}$$

Für die Spiegelung an einem Schlitz parallel zur imaginären Achse gilt aber

$$(25 \text{ c}) \quad b_1(\xi_1) = - \overline{b(\xi_1)} + c_1.$$

Infolgedessen lautet die Entwicklung von $b(\xi)$ bei w_1 :

$$(26 \text{ a}) \quad b(\xi) = + \frac{\xi'(u) \overline{(w_1 - m_1)^2}}{r_1^2} \frac{1}{\xi - w_1} + \text{reg.}$$

$n(\xi) = \frac{1}{2}(a(\xi) + b(\xi))$ ist also bei w_1 und w_2 regulär. Deshalb gilt

$$J = \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{K_3} + \oint_{K_4} \right).$$

Die Spiegelung an K_3 liefert die Spiegelpunkte:

für w : w_2 ,

für w_1, w_2 : $w_{13}; w_{23}$.

Durch Wiederholung der oben durchgeführten Betrachtungen erkennt man: $n(\xi)$ hat Pole an den (durch zweimalige Spiegelung erhaltenen) Punkten w_{13}, w_{23} , nicht aber für w_3 .

Um für die Residuen eine einfache Bezeichnung zu haben, setzen wir

$$\alpha_1 = \frac{(w_1 - m_1)^2}{r_1^2}, \quad \alpha_{13} = \frac{(w_{13} - m_3)^2}{r_3^2}.$$

Dann wird das Residuum von w_{13} : $\xi'(u) \bar{\alpha}_1 \alpha_{13}$,
 von w_{23} : $\xi'(u) \bar{\alpha}_2 \alpha_{23}$.

Es wird also

$$J = \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{K_5} + \oint_{K_6} \right) + K'(uv) [\bar{\alpha}_1 \alpha_{13} + \bar{\alpha}_2 \alpha_{23} + \bar{\alpha}_1 \alpha_{14} + \alpha_2 \alpha_{24}].$$

Dabei ist allgemein

$$\alpha_{\nu\mu} = \frac{(w_{\nu\mu} - m_\mu)^2}{r_\mu^2}.$$

Die nächste Spiegelung führt auf

$$J = \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{K_7} + \oint_{K_8} \right) + K'(uv) [\alpha_1 \alpha_{13} + \bar{\alpha}_2 \alpha_{23} + \bar{\alpha}_1 \alpha_{14} + \bar{\alpha}_2 \alpha_{24} \\ + \bar{\alpha}_3 \alpha_{35} + \bar{\alpha}_4 \alpha_{45} + \bar{\alpha}_4 \alpha_{46}].$$

Allgemein wird

$$(27) \quad J = K'(uv) \alpha(w).$$

Dabei ist $\alpha(w)$ eine konvergente Reihe, deren Bildungsgesetz durch die fortgesetzten Spiegelungsprozesse gegeben ist.

Die Konvergenz ergibt sich aus der Tatsache, daß

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left(\oint_{K_{2\nu-1}} n(\xi, w) d\xi + \oint_{K_{2\nu}} n(\xi w) d\xi \right) = 0.$$

Die Länge der Integrationswege konvergiert nämlich gegen 0. Die Funktionswerte von $n(\xi w)$ auf $K_{2\nu-1}$ bzw. $K_{2\nu}$ liegen auf den Spiegelbildern der Schlitze, die den Kreisen K_1 und K_2 entsprechen. Sie sind zwar nicht beschränkt, unterscheiden sich aber von den Werten, die durch die Bilder von K_1 und K_2 gegeben sind, nur um additive Konstanten. Da das Integral über diese Konstante 0 wird, ergibt sich so die Konvergenz.

Aus (22) und (27) folgt

$$(28) \quad N'(uv) = K'(uv) [1 - \alpha(K(u))].$$

Die Funktion $\alpha(w)$ ist aus der geometrischen Konfiguration des Bereiches \mathfrak{R} bestimmt.

Aus der Ableitung folgt nebenher, daß für einfach zusammenhängende Bereiche $\alpha_1(w) = 0$ ist, also: $N(uv) = K(uv)$.

Diese Tatsache ergibt sich auch aus der in [2] erwähnten Extremaleigenschaft der Funktion $N(zu)$: Unter allen eindeutigen und das Gebiet \mathfrak{B} schlicht abbildenden Funktionen, die in u einen einfachen Pol mit dem Residuum $+1$ haben, bildet $N(zu)$ das Gebiet so ab, daß die Komplementärmenge des Bildgebietes einen maximalen Flächeninhalt hat. Es ist seit langem bekannt, daß für einfach zusammenhängende Gebiete der Vollkreisbereich diese Eigenschaft hat.

Für zweifach zusammenhängende Bereiche ist aber im allgemeinen $\alpha(w) \neq 0$. Man sieht z. B. sofort, daß für einen zur reellen Achse symmetrischen Kreisbereich für reelles w sämtliche $\alpha_{\nu\mu}$ als Quadrate reeller Zahlen positiv sind. Die Reihe für $\alpha(w)$ kann also nicht die Summe 0 haben.

Je besser die Reihe $\alpha(w)$ konvergiert, desto weniger unterscheiden sich $K(u)$ und $N(u)$. Das wird dann der Fall sein, wenn die Radien der Kreise klein sind gegen die Entfernungen der Mittelpunkte.

Für mehrfach zusammenhängende Bereiche ($n > 2$) kann die Beziehung (28) deshalb nicht allgemein ausgesprochen werden, weil die Konvergenz der Reihe für $\alpha(w)$ nicht mehr allgemein gesichert ist.

Literaturverzeichnis.

de POSSEL, R.

- [1] Sur quelques propriétés de la représentation conformes des domaines multiplement connexes, en relation avec le théorème des fentes parallèles. *Math. Annalen* 107, 1932.

GARABEDIAN and SCHIFFER.

- [2] Identities in the theory of conformal mapping. „*Transactions*“ 65, 2, March 1949.

NEHARI, Z.

- [3] The kernel function and canonical conformal maps. *Duke Math. Journal* 16, 1949, S. 165—178.

LEHTO, O.

- [4] Anwendung orthogonaler Systeme auf gewisse funktionentheoretische Extremal- und Abbildungsprobleme. — *Ann. Ac. Scient. Fenn. Series A, I.* 59 (1949).

NEVANLINNA, R.

- [5] *Eindeutige analytische Funktionen.* Berlin 1936.

(Eingegangen am 13. Juni 1951.)

Eine Cohomologietheorie topologischer Räume.

Von

Wolfhart Zimmermann in Freiburg i. Br.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
I. Einleitung	125
II. Direkte Summen von Abelschen Gruppen	131
III. Raster und Strukturgruppen	132
IV. Komplexe	135
V. Zusammenhängende Komplexe	140
VI. Cohomologiegruppen (Vorläufige Definition)	145
VII. Cohomologiegruppen (Endgültige Definition)	149
VIII. Simpliciale Abbildungen	150
IX. Äquivalente simpliciale Abbildungen	153
X. Spektren	157
XI. Überdeckungsfamilien	162
XII. Komplexe als diskrete Räume	165

I. Einleitung.

A.

In der Entwicklung der allgemeinen Topologie sind zwei Arbeiten von ČECH¹⁾ und ALEXANDER²⁾³⁾ von besonderer Bedeutung, weil in ihnen zum ersten Male die Methoden der kombinatorischen Topologie auf beliebige topologische Räume angewandt werden.

ČECH geht aus von der Gesamtheit aller endlichen offenen (bzw. abgeschlossenen) Überdeckungen \mathcal{U} eines topologischen Raumes R ⁴⁾. Eine zentrale Stellung nimmt dabei der Begriff der Überdeckungsfamilie ein. Um ihn zu formulieren, benötigen wir zuerst folgende Definitionen:

¹⁾ E. ČECH, Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque. Fundam. math. 19 (1932), S. 149—183.

²⁾ J. W. ALEXANDER, The connectivity ring of an abstract space. Annals of Math. (2) 37 (1936), S. 698—708.

³⁾ Eine zusammenfassende Darstellung der Theorien von ČECH und ALEXANDER findet sich auch bei W. HUREWICZ, J. UGUNDJI, C. H. DOWKER, Continuous connectivity groups in terms of limit groups. Annals of Math. 49, 2 (1948), S. 391—406.

⁴⁾ Zu allen Grundbegriffen der Topologie vgl. ALEXANDROFF-HOPF, Topologie I, Berlin 1935 und N. BOURBAKI, Topologie générale, Paris 1940.

Eine Überdeckung \mathfrak{U}' heißt Verfeinerung von \mathfrak{U} , wenn es zu jedem $U' \in \mathfrak{U}'$ ein $U \in \mathfrak{U}$ gibt mit $U' \subset U$.

Eine eindeutige Abbildung $U' \rightarrow U$ von \mathfrak{U}' in \mathfrak{U} , welche $U' \subset U$ für jedes U erfüllt, nennen wir eine Projektion von \mathfrak{U}' in \mathfrak{U} .

Wir können jetzt eine Familie Σ definieren als ein System von Überdeckungen, welches mit je zwei Überdeckungen eine gemeinsame Verfeinerung enthält. Unser nächstes Ziel ist dann, bei beliebigem Koeffizientenbereich \mathfrak{G} die Homologiegruppen $\mathfrak{B}_n(\Sigma)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) der Familie Σ zu erklären. (Σ , \mathfrak{G} und n sind im Folgenden festzuhalten.)

Den hierzu notwendigen Übergang von topologischen zu kombinatorischen Begriffen vollzieht man dadurch, daß man jeder Überdeckung \mathfrak{U} einen (abstrakten) Komplex — den „Nerven $N(\mathfrak{U})$ “ von \mathfrak{U} — zuordnet: $N(\mathfrak{U})$ bestehe aus allen Simplexen

$$(U_1, \dots, U_n) \quad (U_i \in \mathfrak{U}),$$

deren Durchschnitt

$$\bigcap_{i=1}^n U_i$$

nicht leer ist.

Erklärt man die n -te Homologiegruppe von $N(\mathfrak{U})$ des Koeffizientenbereichs \mathfrak{G} in der üblichen Weise, so entspricht der Familie Σ ein Schema von Komplexen und Gruppen, dessen Elemente untereinander in geeigneter Weise in Beziehung gesetzt werden können. Eine Projektion π von \mathfrak{U}' in \mathfrak{U} erzeugt nämlich, wie sich leicht zeigen läßt, stets eine simpliziale Abbildung von $N(\mathfrak{U}')$ in $N(\mathfrak{U})$. Diese definiert wiederum einen Homomorphismus von $\mathfrak{B}_n(\mathfrak{U}')$ in $\mathfrak{B}_n(\mathfrak{U})$, welcher sich als unabhängig von der speziellen Wahl der Projektion π erweist.

Auf diesem Wege gewinnen wir ein inverses System von Gruppen und Gruppenhomomorphismen, dessen Limesgruppe gerade die n -te „ČECH-Homologiegruppe“ der Familie Σ ist.

Legt man die topologisch ausgezeichnete Familie sämtlicher endlicher offener (bzw. abgeschlossener) Überdeckungen zugrunde, so ist die resultierende n -te ČECH-Homologiegruppe von R offenbar eine topologische Invariante.

Wir wollen noch für später die kombinatorischen Hilfsmittel, deren wir uns bedient haben, in folgenden vier Punkten festhalten:

1. Definition der Homologiegruppen eines Komplexes.
2. Definition des zu einer simplizialen Abbildung von $N(\mathfrak{U}')$ in $N(\mathfrak{U})$ gehörigen Homomorphismus.
3. Der Nachweis, daß die von zwei Projektionen π und π' von \mathfrak{U}' in \mathfrak{U} erzeugten simplizialen Abbildungen von $N(\mathfrak{U}')$ in $N(\mathfrak{U})$ denselben Homomorphismus erzeugen.
4. Die Verknüpfung von Homologiegruppen und Homomorphismen zu einer Limesgruppe.

Wichtig ist folgender von ČECH gefundener Satz:

Ist R ein topologischer Raum, Σ' eine vollständige Teilfamilie der Familie aller endlichen offenen (bzw. abgeschlossenen) Überdeckungen von R , d. h. gibt es zu jedem $\mathfrak{U} \in \Sigma'$ eine Verfeinerung $\mathfrak{U}' \in \Sigma'$, so ist die n -te Homologiegruppe von Σ' isomorph der n -ten Homologiegruppe von Σ .

Dieser Satz läßt nämlich die Beziehungen der Homologietheorie von ČECH zur gewöhnlichen kombinatorischen Topologie klar erkennen:

Ist P ein endliches Polyeder des R_n und \mathfrak{Z} eine simpliziale Zerlegung von P , so ist die n -te ČECH-Homologiegruppe von P isomorph der n -ten Homologiegruppe von \mathfrak{Z} :

$$\mathfrak{B}_n(P) \approx \mathfrak{B}_n(\mathfrak{Z}).$$

Wegen der Unabhängigkeit der Gruppe $\mathfrak{B}_n(\mathfrak{Z})$ von der gewählten Zerlegung \mathfrak{Z} ist damit auch die topologische Invarianz der BETTischen Gruppen erwiesen.

Das Beweisverfahren besteht darin, durch fortgesetzte baryzentrische Unterteilung von \mathfrak{Z} eine Folge

$$\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}_1, \dots, \mathfrak{Z}_n, \dots$$

simplizialer Zerlegungen von P zu erzeugen, von welchen man zu den entsprechenden offenen Überdeckungen \mathfrak{U}_i ⁵⁾ von P übergeht. Nun läßt sich zeigen, daß die Familie dieser Überdeckungen

$$\mathfrak{U}, \mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_n, \dots$$

eine vollständige Teilfamilie des Systems aller endlichen offenen Überdeckungen von P ist.

Nach einem bekannten Satz der kombinatorischen Topologie ist weiter:

$$\mathfrak{B}_n(\mathfrak{Z}_i) \approx \mathfrak{B}_n(\mathfrak{Z}_{i+1}) \quad \text{für jedes } i,$$

d. h.

$$\mathfrak{B}_n(\mathfrak{Z}) \approx \mathfrak{B}_n(\mathfrak{U}_i) \quad \text{für jedes } i$$

und somit

$$\mathfrak{B}_n(P) \approx \mathfrak{B}_n(\Sigma') \approx \mathfrak{B}_n(\mathfrak{Z}).$$

Ein ähnlicher Zusammenhang besteht zwischen der Theorie von ČECH und der Theorie der abgeschlossenen Mengen von P. ALEXANDROFF.

J. W. ALEXANDER schlägt einen etwas anderen Weg ein: Zunächst wird der Begriff des Komplexes wesentlich allgemeiner gefaßt: Ein (symbolischer) Komplex ist ein beliebiges System von Simplexen, d. h. endlichen Teilmengen einer Menge M , welches mit jedem Simplex dessen sämtliche Teilmengen enthält. ALEXANDER gibt dann für diese allgemeinen Komplexe eine Definition der n -ten Cohomologiegruppe des Koeffizientenbereiches \mathfrak{G} ($n = 1, 2, \dots$).

⁵⁾ Bekanntlich ist der Nerv von \mathfrak{U}_i dem Komplex der Zerlegung \mathfrak{Z}_i isomorph: $\mathfrak{B}_n(\mathfrak{U}_i) \approx \mathfrak{B}_n(\mathfrak{Z}_i)$.

Zur topologischen Anwendung werden nun alle offenen Überdeckungen eines topologischen Raumes R herangezogen. Um die \hbar -te Cohomologiegruppe von R zu erklären, kann man jetzt ähnlich wie in der Homologietheorie von ČECH vorgehen, wenn man nur — und hierin liegt der wesentliche Unterschied gegenüber der Theorie von ČECH — jeder Überdeckung \mathfrak{U} den Komplex entsprechen läßt, der aus allen endlichen Teilmengen von R besteht, welche in mindestens einem Element von \mathfrak{U} enthalten sind.

B.

Zur Beschreibung beliebiger topologischer Räume (insbesondere von Räumen transfiniten Dimension, z. B. Punktmengen des HILBERTSchen Raumes) erscheint in der Homologietheorie von ČECH die Beschränkung auf endliche Überdeckungen unnötig speziell. Ähnliches gilt für die ALEXANDERSche Theorie: in ihr werden ausschließlich endliche Teilmengen von R verwendet. Dieser Nachteil kommt auch darin zum Ausdruck, daß in beiden Theorien zur Charakterisierung topologischer Räume nur abzählbar unendlich viele Gruppen zur Verfügung stehen.

In der vorliegenden Arbeit soll versucht werden, eine Cohomologietheorie topologischer Räume zu begründen, in welcher derartige Endlichkeitsbeschränkungen wegfallen, und welche außerdem die Theorien von ČECH und ALEXANDER in sich schließt.

Vor der eigentlichen Inhaltsangabe werden zuerst — aufbauend auf die Homologietheorie von ČECH — die Grundgedanken der Arbeit skizziert.

Als Ausgangspunkt wählen wir die Gesamtheit aller offenen (bzw. abgeschlossenen) Überdeckungen eines topologischen Raumes R und versuchen uns zunächst möglichst eng an den Gedankengang von ČECH anzulehnen.

Die in Abschnitt A für endliche Überdeckungen gegebenen Definitionen der Begriffe Verfeinerung, Projektion, Familie und vollständige Teilfamilie lassen sich wörtlich übertragen.

Damit wir nun wieder jeder Überdeckung einen Komplex zuordnen können, müssen wir den Begriff des Komplexes erst der allgemeinen Natur der in Betracht gezogenen Überdeckungen anpassen. Wir definieren deshalb einen simplizialen Komplex als ein beliebiges System von Simplexen, d. h. Teilmengen einer Menge M , welches mit jedem Simplex dessen sämtliche Teilmengen enthält. Der Überdeckung \mathfrak{U} kann auf zwei verschiedene Arten ein simplizialer Komplex zugeordnet werden:

I. Wir bilden den Nerven $N_I(\mathfrak{U})$ von \mathfrak{U} . Seine Simplexe sollen solche Mengen s von Elementen U der Überdeckung \mathfrak{U} sein, deren Durchschnitt

$$\bigcap_{U \in s} U$$

nicht leer ist.

II. Der Komplex $N_{II}(\mathfrak{U})$ soll dagegen aus allen Teilmengen s von R bestehen, zu welchen es ein Überdeckungselement $U \in \mathfrak{U}$ gibt, in dem s enthalten ist.

Beim Verfahren I wird der zu \mathfrak{U} gehörige Komplex, was dem Vorgang von ČECH entspricht, aus den Überdeckungselementen von \mathfrak{U} konstruiert, während die zweite Art, deren Vorbild die ALEXANDERSCHE Methode ist, dem Komplex $N_{II}(\mathfrak{U})$ die Punkte des Raumes R selbst zugrundelegt.

Man könnte nun wie in der Homologietheorie von ČECH fortfahren und jedem Komplex N_I bzw. $N_{II}(\mathfrak{U})$ eine Cohomologiegruppe zuordnen; es empfiehlt sich aber — besonders weil hierdurch beide Verfahren I und II auf dieselbe Art beschrieben werden können — anders vorzugehen und zunächst dem topologischen Begriff der Familie den rein kombinatorischen Begriff eines „Spektrums“ von Komplexen gegenüberzustellen. Zu seiner Erklärung brauchen wir folgende Definitionen:

Sind K' und K Komplexe, die auf den Mengen M' und M erklärt sind, so sagen wir, die eindeutige Abbildung von M' in M erzeuge eine simpliziale Abbildung von K' in K , wenn die Bildmenge eines jeden Simplexes von K' Simplex von K ist.

Zwei simpliziale Abbildungen π_1 und π_2 von K' in K heißen äquivalent, wenn die Vereinigungsmenge der durch π_1 und π_2 erzeugten Bildsimplexe des beliebigen Simplexes s von K' als Simplex zu K gehört. (Die Bedeutung dieser Definition liegt in folgender Eigenschaft: Ist \mathfrak{U}' Verfeinerung von \mathfrak{U} , wofür wir $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{U}'$ schreiben wollen, und sind π_1 und π_2 Projektionen von \mathfrak{U}' in \mathfrak{U} , so erzeugen π_1 und π_2 äquivalente simpliziale Abbildungen von $N(\mathfrak{U}')$ in $N(\mathfrak{U})$.)

Unter einem Spektrum Σ verstehen wir nun eine beliebige, durch eine Relation \leq teilweise geordnete, gerichtete Menge⁶⁾. (Σ hat den Charakter einer Indexmenge und vertritt die Familie.) Jedem Element e von Σ ist ein Komplex $K(e)$ zugeordnet; zu je zwei Elementen $e < e'$ gehört ein System untereinander äquivalenter simplizialer Abbildungen von $K(e')$ in $K(e)$, welche Projektionen genannt werden.

Das vollständige Teilspektrum wird ganz analog der vollständigen Teilfamilie erklärt.

Gelingt uns jetzt für beliebige Spektren die geeignete Einführung von Cohomologiegruppen, so ist bis zu deren Definition für beliebige Familien nur ein Schritt. Denn dazu ist allein erforderlich, die durch die Verfeinerungsrelation \leq teilweise geordnete Familie Σ zu einem Spektrum zu ergänzen, was jetzt in doppelter Weise geschehen soll:

I. Jeder Überdeckung \mathfrak{U} von Σ wird als Komplex ihr Nerv $N_I(\mathfrak{U})$ zugeordnet. Zu je zwei Überdeckungen $\mathfrak{U} < \mathfrak{U}'$ gehöre das System der Projektionen π von \mathfrak{U}' in \mathfrak{U} . (Diese erzeugen ja äquivalente simpliziale Abbildungen von $N_I(\mathfrak{U}')$ in $N_I(\mathfrak{U})$.)

⁶⁾ „Gerichtet“ heißt: Es soll zu je zwei Elementen $e_1 \in \Sigma$ und $e_2 \in \Sigma$ ein Element $e \in \Sigma$ geben mit $e_1 \leq e$ und $e_2 \leq e$.

II. Jeder Überdeckung \mathfrak{U} wird der Komplex $N_{II}(\mathfrak{U})$ zugeordnet. Den Überdeckungen $\mathfrak{U} < \mathfrak{U}'$ entspreche die identische Abbildung von R in sich als einzige Projektion.

Als Cohomologiegruppen I und II einer Überdeckungsfamilie Σ sind dann die Cohomologiegruppen des nach I und II gebildeten Spektrums anzusprechen.

C.

Mit dem Ziel, die Cohomologiegruppen eines beliebigen Spektrums von Komplexen zu erklären, wird nun im ersten Teil der Arbeit (Abschnitt I bis IX) eine rein kombinatorische (d. h. von topologischen Begriffsbildungen freie) Cohomologietheorie simplizialer Komplexe entwickelt. Dies geschieht in vier Schritten, welche etwa den vier Punkten auf Seite 126 entsprechen:

1. Zu jedem Komplex K wird eine Cohomologiegruppe erklärt, die in eindeutiger Weise als direkte Summe einer im allgemeinen transfiniten Anzahl von Gruppen — den „Gliedern“ der direkten Summe — dargestellt ist⁷⁾. (Abschnitte I—VI.)

Der Inhalt der einzelnen Abschnitte ist:

I enthält die für das Folgende zweckmäßige Definition der direkten Summe von ABELSchen Gruppen nach N. BOURBAKI.

In II werden „Raster“ — mit einer „Nachbarrelation“ versehene Mengen — behandelt. Axiomatisch werden für Raster Strukturgruppen eingeführt, die in Abschnitt V beim Übergang zu Komplexen, welche als Sonderfälle der Raster aufzufassen sind, zu Cohomologiegruppen spezialisiert werden.

III handelt von den allgemeinen Eigenschaften der Komplexe. Diese werden dabei noch etwas allgemeiner, nämlich als beliebige Mengensysteme definiert.

In IV folgen einige Sätze über zusammenhängende Komplexe, die in V nutzbar gemacht werden: Für einen speziellen Typ von Komplexen wird die Definition der Cohomologiegruppe unter Anwendung der in II entwickelten Begriffe gegeben. (V.)

VI enthält die durch IV und V vorbereitete endgültige Definition der Cohomologiegruppe. Diese bezieht sich — in Analogie zu den LEFSCHETZschen Relativzyklen — auf Tripel $Q \subset P \subset K$ von Komplexen. Die gewöhnlichen Cohomologiegruppen von K erhält man, wenn man Q gleich der leeren Menge und $P = Q$ setzt. Diese Verallgemeinerung ist auch in den Abschnitten VII bis X durchgeführt.

2. Ist π eine simpliziale Abbildung des Komplexes K' in den Komplex K , so wird für entsprechende Glieder \mathfrak{S}' und \mathfrak{S} der Cohomologiegruppe von K' und K ein Homomorphismus von \mathfrak{S} in \mathfrak{S}' definiert. (Abschnitt VII.)

⁷⁾ Die Glieder entsprechen den einzelnen Gruppen $\mathfrak{B}_n(K)$ ($n = 1, 2, \dots$) bei endlichem Komplex K .

3. Es wird bewiesen, daß äquivalente simpliziale Abbildungen für entsprechende Glieder der Cohomologiegruppen denselben Homomorphismus erzeugen. (Abschnitt VIII.)

4. Durch Verknüpfung der Cohomologiegruppen der Komplexe eines Spektrums Σ untereinander werden die Cohomologiegruppen von Σ selbst definiert. (Abschnitt IX.) Es wird außerdem bewiesen, daß die Cohomologiegruppe eines vollständigen Teilspektrums Σ' von Σ „gliedweise“ isomorph der Cohomologiegruppe von Σ ist.

Die Abschnitte X und XI enthalten die topologischen Anwendungen. In X werden eine Reihe topologisch ausgezeichnete Überdeckungsfamilien aufgezählt. Zu jeder solchen Familie Σ gehören zwei Spektren und somit zwei Arten topologischer Invarianten.

Hervorgehoben seien:

Die Familie Σ_0 , die sich aus allen offenen Überdeckungen von R zusammensetzt.

Die Familie Γ_0 aller endlichen offenen Überdeckungen, welches, wenn man nach Art I verfährt, die Cohomologietheorie von ČECH zurückliefert.

Die Cohomologietheorie von ALEXANDER erhält man, wenn man Σ_0 nach II behandelt und nur die zur „Nullschichtung“ von Σ_0 gehörigen Glieder der Cohomologiegruppe berücksichtigt.

Weiter wird bewiesen (Satz 33): Ist Σ' vollständige Teilfamilie von Σ , so ist die Cohomologiegruppe von Σ' gliedweise isomorph der Cohomologiegruppe von Σ .

Dieser Satz der Homologietheorie von ČECH gilt also unverändert. Er wird sogleich angewandt, indem gezeigt wird, daß für bikompakte Räume Σ_0 dieselben topologischen Invarianten wie Γ_0 liefert.

In XI werden simpliziale Komplexe als diskrete Räume aufgefaßt. Mit Hilfe von Satz 33 wird bewiesen, daß die mit Σ_0 nach I definierte Cohomologiegruppe eines Komplexes mit der auf kombinatorischem Wege erklärten Cohomologiegruppe von K übereinstimmt. Ferner wird gezeigt (unter nochmaliger Anwendung von Satz 33), daß die (Co)-Homologietheorie von ČECH nur über die Struktur von K in seinen endlichen Simplexen eine Aussage machen kann.

II. Direkte Summen von Abelschen Gruppen.

Es sei W eine beliebige Menge, S eine Menge von ABELSCHEN Gruppen und \mathfrak{A} eine eindeutige Abbildung von W in S : Jedem Element $w \in W$ ist eindeutig eine Gruppe $\mathfrak{A}(w)$ zugeordnet; wir definieren eine Gruppe, nämlich die zu \mathfrak{A} gehörige *direkte Summe*: $\mathfrak{S} = \sum_{w \in W} \mathfrak{A}(w)$.

Ihre Elemente sollen die Funktionen F sein, die jedem $w \in W$ ein Gruppenelement $g \in \mathfrak{A}(w)$ zuordnen. Ordnet F dem Element w das Element g zu, so schreiben wir

$$g = Fw.$$

Wir denken uns die Gruppen von S alle additiv geschrieben und addieren zwei Funktionen $F_1 \in \mathfrak{H}$, $F_2 \in \mathfrak{H}$ zu einer Funktion $F_1 + F_2$, indem wir für jedes $w \in W$ die Relation

$$(F_1 + F_2)w = F_1w + F_2w$$

vorschreiben.

Durch diese Vorschrift haben wir \mathfrak{H} zu einer ABELSchen Gruppe gemacht, der direkten Summe $\sum_{w \in W} \mathfrak{A}(w)$.

Mit dieser Definition läßt sich ein bekannter Satz über direkte Summen ABELScher Gruppen so formulieren:

Satz 1. Sind $\sum_{w \in W} \mathfrak{A}(w)$ und $\sum_{w \in W'} \mathfrak{A}'(w)$ direkte Summen ABELScher Gruppen, und gilt für jedes $w \in W$

$$\mathfrak{A}'(w) \subset \mathfrak{A}(w),$$

so ist

$$\sum_{w \in W} \mathfrak{A}(w) / \sum_{w \in W} \mathfrak{A}'(w) \approx \sum_{w \in W} \mathfrak{A}(w) / \mathfrak{A}'(w).$$

Sind $\mathfrak{H} = \sum_{w \in W} \mathfrak{A}(w)$ und $\mathfrak{H}' = \sum_{w \in W'} \mathfrak{A}'(w)$ zwei direkte Summen und J eine ein-eindeutige Abbildung von W auf W' , dann heißt \mathfrak{H}' gliedweise isomorph mit \mathfrak{H} bezüglich J , wenn $\mathfrak{A}(w) \approx \mathfrak{A}'(w')$ ist ($w' = Jw$).

Zwei gliedweise isomorphe Summen sind natürlich isomorph.

III. Raster und Strukturgruppen.

In der Menge K sei eine Relation $|$ eingeführt: Zwischen je zwei Elementen s und t aus K soll die Relation $|$ bestehen oder nicht. $|$ sei symmetrisch: $s|t$ habe $t|s$ zur Folge. Gilt $s|t$, so sollen s und t Nachbarn heißen. $|$ nennen wir auch eine *Nachbarrelation*. In Verbindung mit der Relation $|$ bezeichnen wir die Menge K als *Raster*. Ist K' Teilmenge von K , so induziert $|$ in K' eine ebenfalls symmetrische Relation, für welche wir auch das Symbol $|$ verwenden. K' heiße zusammen mit dieser Relation ein *Unterraster* von K .

Durch den Begriff des Weges gewinnen wir eine Komponentenzerlegung des Rasters K : Die endliche geordnete Menge (s_1, s_2, \dots, s_n) mit s_i als Element von K und $n \geq 1$ heißt ein *Weg* von s bis t in K , wenn $s_1 = s$, $s_n = t$ und s_i, s_{i+1} für jedes i Nachbarn sind. Wir schreiben $s||t$ genau dann, wenn es einen Weg in K gibt, der s mit t verbindet. Diese Relation ist reflexiv, transitiv und symmetrisch. Sie definiert also eine Klasseneinteilung von K in zueinander fremde Klassen.

Jede solche Klasse heißt eine *Komponente* von K . K heißt *zusammenhängend*, wenn K selbst Komponente ist.

Die ein-eindeutige Abbildung J des Rasters K auf den Raster K' heißt eine *Isomorphie*, wenn aus

$$s|t \text{ die Beziehung } Js|Jt,$$

und umgekehrt aus

$$Js | Jt \text{ die Beziehung } s | t$$

folgt.

Wir versuchen jetzt für den Raster K den Begriff der *Kette* zu definieren. \mathfrak{G} sei eine additiv geschriebene ABELSche Gruppe. Wir ordnen jedem Element von K die Gruppe \mathfrak{G} zu und bilden die zu dieser Abbildung gehörige direkte Summe \mathfrak{L} . Ihre Elemente heißen Ketten auf K mit dem Koeffizientenbereich \mathfrak{G} . Das Nullelement von \mathfrak{L} ordnet allen Elementen von K den Wert Null zu. Es wird als Nullkette 0 auf K bezeichnet.

Unter dem Grundrastraster einer Kette A verstehen wir die Menge aller Elemente von K , für welche $As \neq 0$ ist. Ist K' Unterraster von K , so bilden alle Ketten auf K , deren Grundrastraster in K' enthalten ist, eine Untergruppe von \mathfrak{L} , die Gruppe $\mathfrak{L}_{K'}$ der Ketten von K auf K' . Jede Kette A auf K' im Koeffizientenbereich \mathfrak{G} läßt sich in trivialerer Weise zu einer Kette A^* auf K ergänzen:

Wir setzen

$$A^*s = As, \text{ wenn } s \in K',$$

und

$$A^*s = 0, \text{ wenn } s \notin K'$$

ist.

Diese Zuordnung bildet offenbar die Gruppe $\mathfrak{L}(K')$ aller Ketten auf K' im Koeffizientenbereich \mathfrak{G} isomorph auf $\mathfrak{L}_{K'}$ ab.

Wir definieren eine *allgemeine Randbildung* a auf K im Koeffizientenbereich \mathfrak{G} als einen Homomorphismus von \mathfrak{L} in \mathfrak{L} , der folgenden Bedingungen genügt:

(α) Die Bildgruppe $\mathfrak{H}(K, a)$ von \mathfrak{L} sei Untergruppe des Kerns $\mathfrak{Z}(K, a)$ von a :

$$a a A = 0 \text{ für jede Kette } A \text{ auf } K.$$

$\mathfrak{H}(K, a)$ heiße a -Rändergruppe von K , jedes Element von ihr ein a -Rand von K . $\mathfrak{Z}(K, a)$ heiße die a -Zyklengruppe, jedes Element von ihr ein a -Zyklus von K .

(β) Sind A und B Ketten auf K , dann soll die Gleichung

$$a A s = a B s$$

gelten, wenn $A s' = B s'$ für jeden Nachbar s' von s erfüllt ist.

Aus (β) kann man folgern: Es ist $a A s = 0$, wenn $A s' = 0$ für jeden Nachbar s' von s ist. Denn, da a ein Homomorphismus ist, wird die Nullkette auf sich abgebildet: $a A s = a O s = 0$.

Mit Hilfe von (α) definieren wir die zur Randbildung a gehörige *Strukturgruppe* von K als Faktorgruppe von $\mathfrak{Z}(K, a)$ nach $\mathfrak{H}(K, a)$:

$$\mathfrak{B}(K, a) = \mathfrak{Z}(K, a) / \mathfrak{H}(K, a).$$

Ist L Komponente von K , so läßt sich sofort eine allgemeine Randbildung $a(L)$ von L aus der allgemeinen Randbildung a von K gewinnen:

Ist A Kette auf L und zur Kette A^* auf K ergänzt, so setzen wir für jedes Element s von L

$$a(L)As = aA^*s.$$

$a(L)$ bildet die Gruppe $\mathfrak{Q}(L)$ in sich ab. Bedingung (α) ist erfüllt. Wir weisen Bedingung (β) nach: Ist $s \in L$, so liegt auch jeder Nachbar s' von s in L . Gilt also $As' = Bs'$ für jeden Nachbar von $s \in L$, so folgt die Beziehung $A^*s' = B^*s'$. Deshalb ist: $aA^*s = aB^*s$, und somit wird $a(L)As = a(L)Bs$.

Satz 2. $K = \bigcup_{L \in W} L$ sei die Komponentenzerlegung eines Rasters K .

Dann ist die Strukturgruppe von K bezüglich a isomorph der direkten Summe der Strukturgruppen der einzelnen Komponenten L bezüglich $a(L)$:

$$\mathfrak{B}(K, a) \approx \sum_{L \in W} \mathfrak{B}(L, a(L)).$$

(W sei die Menge aller Komponenten von K .)

Beweis. Ist A eine Kette auf K , so definieren wir eine Kette $A(L)$ auf L durch

$$A(L)s = As \quad (s \in L).$$

Für jedes $s \in L$ gilt $a(L)A(L)s = aAs$. Denn jeder Nachbar s' von s gehört zu L , d. h. $A(L)s' = As' = A(L)^*s'$, woraus nach (β)

$$a(L)A(L)s = aA(L)^*s = aAs$$

folgt.

Zu jeder Komponente L von K sei eine Kette A_L auf L vorgegeben. Wir definieren eine Kette

$$A = \sum_{L \in W} A_L$$

auf K durch die Festsetzung

$$As = A_Ls,$$

wenn $s \in L$ ist. Es ist stets $A_L = A(L)$.

1. Ist A ein a -Zyklus auf K , so ist $A(L)$ $a(L)$ -Zyklus auf L ($L \in W$). Denn es ist

$$a(L)A(L)s = aAs = 0 \quad (s \in L).$$

2. Ist in dem Ausdruck $\sum_{L \in W} A_L$ jede Kette A_L $a(L)$ -Zyklus auf L , so ist $A = \sum_{L \in W} A_L$ a -Zyklus auf K . Denn es wird

$$aAs = a(L)A(L)s = a(L)A_Ls = 0 \quad (s \in L).$$

3. Wir konstruieren einen Isomorphismus I von $\mathfrak{B}(K)$ auf $\sum_{L \in W} \mathfrak{B}(L)$:

Dem a -Zyklus A ordnen wir das durch $EL = A(L)$ ($L \in W$ beliebig gewählt) definierte Element E von $\sum_{L \in W} \mathfrak{B}(L)$ zu.

4. Ist A a -Rand, so ist für jedes $L \in \mathcal{W}$ $A(L)$ $a(L)$ -Rand auf L . Denn aus $A = aB$ folgt

$$A(L)s = As = aBs = a(L)B(L)s \quad (s \in L).$$

5. $A = \sum_{L \in \mathcal{W}} A_L$ ist a -Rand auf K , wenn jedes A_L $a(L)$ -Rand auf L ist. Ist nämlich für jedes L

$$A_L = a(L)B_L,$$

und setzen wir

$$B = \sum_{L \in \mathcal{W}} B_L,$$

so wird

$$aBs = a(L)B(L)s = a(L)B_Ls = A_Ls = As \quad (s \in L).$$

Der Isomorphismus I induziert also einen Isomorphismus I' von $\mathfrak{H}(K)$ auf $\sum_{L \in \mathcal{W}} \mathfrak{H}(L)$.

Wegen $\mathfrak{H}(L) \subset \mathfrak{Z}(L)$ und $\mathfrak{H}(K) \subset \mathfrak{Z}(K)$ folgt nach Satz 1

$$\mathfrak{Z}(K)/\mathfrak{H}(K) \approx \sum_{L \in \mathcal{W}} \mathfrak{Z}(L)/\mathfrak{H}(L).$$

Ist für jede Komponente von K eine allgemeine Randbildung a_L vorgegeben, so lassen sich diese folgendermaßen zu einer allgemeinen Randbildung $a = \sum_{L \in \mathcal{W}} a_L$ von K zusammensetzen: Für jedes Element s setzen wir $aAs = a_L A_Ls$ fest, sofern s in L liegt. Für a gilt die Beziehung $a(L) = a_L$.

J sei eine Isomorphie des Rasters K auf den Raster K' . Wir benützen sie, um sämtliche Randbildungen und zugehörige Strukturgruppen der beiden Raster aufeinander ein-eindeutig abzubilden: Zunächst entspreche jeder Kette A auf K die durch $(JA)(Js) = As$ bestimmte Kette JA auf K' . Die allgemeine Randbildung Ja sei durch

$$(Ja)(JA)(Js) = aAs$$

definiert. Es ist einfach zu zeigen, daß beide Axiome für Ja erfüllt sind. $J\mathfrak{B}(K, a) = \mathfrak{B}(K', Ja)$ ist isomorph der Gruppe $\mathfrak{B}(K, a)$.

IV. Komplexe.

M sei eine beliebige Menge. Ist Q eine beliebige nichtleere Teilmenge von M , so sei $\{Q\}$ das System aller Teilmengen von Q . Wir nennen ein beliebiges nichtleeres Teilsystem K von $\{M\}$ einen *Komplex* auf M . Die Elemente von $\{M\}$ heißen auch *Simplexe*, die Elemente von M Eckpunkte. Entsprechend trägt M auch den Namen Eckpunktbereich. Das Simplex s heißt Seite des Simplexes t , wenn $s \subset t$ ist.

Das Simplex s' von s heißt *Nachbar* von s , in Zeichen: $s|s'$, wenn die Menge $s \cup s' \vdash (s \cap s')$ ⁸⁾ genau ein Element enthält. Notwendig und hinreichend für $s|s'$ ist die Existenz eines Elementes $a \in M$, so daß

$$s = s' \cup (a), a \notin s' \text{ oder } s' = s \cup (a), a \notin s$$

ist. Diese Definition ist durch die Symmetrie von $|$ gerechtfertigt. Das *Bindeglied* der Nachbarn s und s' ist der Eckpunkt, um welchen sich s und s' unterscheiden.

Nun folgen noch einige Definitionen spezieller Komplexe: Ein Komplex heißt *endlich*, wenn er nur endlich viele Simplexe besitzt. Ein Komplex heißt *finit*, wenn alle seine Simplexe endliche Mengen sind. Ein *simplicialer Komplex* enthalte mit jedem Simplex dessen sämtliche Seiten.

Der von dem Komplex K auf M erzeugte Eckpunktbereich \mathfrak{K} soll aus allen Eckpunkten von M bestehen, die mindestens in einem Simplex von K vorkommen.

Zwei Komplexe K auf M und K' auf M' heißen *isomorph*, wenn es eine ein-eindeutige Abbildung von \mathfrak{K} auf \mathfrak{K}' gibt, so daß jedes Simplex von K auf ein Simplex von K' abgebildet wird und umgekehrt.

$\{M\}$ wird durch die Nachbarrelation $|$ zu einem Raster. Im folgenden fassen wir jeden Komplex K auf M als einen Unterraster von $\{M\}$ auf.

Sind s und t Simplexe von $\{M\}$, und gibt es einen Weg in $\{M\}$, der s und t verbindet, so heißt das

$$t = s \cup q_1 \vdash q_2, q_1 \cap s = 0 \text{ und } q_2 \subset s,$$

wobei q_1 und q_2 endliche Mengen aus $\{M\}$ sind. Ist umgekehrt

$$t = s \cup q_1 \vdash q_2, q_1 \text{ und } q_2 \text{ endlich,}$$

so folgt $s \parallel t$ in M . Daher gilt

Satz 3. Für $s \parallel t$ in $\{M\}$ ist notwendig und hinreichend, daß $s \vdash (s \cap t)$ und $t \vdash (s \cap t)$ endliche Mengen sind.

Die Komponenten von $\{M\}$ heißen auch *Schichten* von M . Jede Komponente von K ist ganz in einer Schicht von M enthalten. Die Nullschicht, d. h. diejenige Schicht von M , welche die leere Menge enthält, besteht aus allen endlichen Teilmengen von M . Sie wird mit O_M bezeichnet.

Ein Komplex heißt in der Schicht S *simplicial*, wenn er mit jedem Simplex $s \in K \cap S$ dessen sämtliche Seiten enthält, sofern sie in der Schicht S gelegen sind. Ist der Komplex K simplicial, so ist K in jeder Schicht von M simplicial.

Wir schreiben $S' \leq S$, wenn es Simplexe $s' \in S'$, $s \in S$ gibt mit $s' \subset s$. Ist $S' \leq S$, so gibt es zu jedem $s' \in S'$ ein $s \in S$ mit $s' \subset s$.

Jede Menge U von Schichten von M heißt eine *Schichtung* von M .

⁸⁾ Ist B Teilmenge von A , so bezeichne $A \vdash B$ die Differenzmenge von A und B .

Satz 4. Ist der Komplex K simplizial und S eine Schicht, so ist K in S simplizial und $K \cap S$ entweder leer oder eine Komponente von K .

Beweis. Wir machen die Annahme, $K \cap S$ sei nicht leer. Sind s_1, s_2 zwei Simplexe aus $K \cap S$, dann ist $s_1 \cap s_2 \in K$ und $s_1 \cap s_2 \in S$.

Wir ordnen die Elemente von $s_1 \dashv (s_1 \cap s_2)$ und $s_2 \dashv (s_1 \cap s_2)$ irgendwie an:

$$s_1 \dashv (s_1 \cap s_2) = (a_1, \dots, a_n)$$

$$s_2 \dashv (s_1 \cap s_2) = (b_1, \dots, b_n)$$

und setzen

$$t_i = s_1 \cap s_2 \cup (a_1, \dots, a_i)$$

$$t'_i = s_1 \cap s_2 \cup (b_1, \dots, b_i).$$

Dann ist

$$s_1 = t_n, \dots, t_1, s_1 \cap s_2, t'_1, \dots, t'_n = s_2$$

ein Weg in $K \cap S$, der s_1 mit s_2 verbindet.

Eine endliche geordnete Menge, welche mehrfache Elemente besitzen darf, heißt ein orientiertes Simplex von F , wenn die Menge aller ihrer Elemente ein Simplex von F ist. Oder genauer: Ein $(n-1)$ -dimensionales orientiertes Simplex (orientiertes $(n-1)$ -Simplex) ist eine eindeutige Abbildung der Folge $1, \dots, n$ natürlicher Zahlen in M , wenn ihre Bildmenge Simplex von F ist. Als (-1) -dimensionales Simplex von F bezeichnen wir die leere Menge.

Die Menge aller orientierten Simplexe von F nennen wir den zu F gehörigen orientierten Komplex F^* . Wir wenden folgende Schreibweise für orientierte Simplexe an: (a_1, \dots, a_n) bezeichne die Abbildung der Folge $1, \dots, n$ in die Menge M , die jeder ganzen Zahl $1 \leq i \leq n$ das Element $s_i \in M$ zuordnet.

K sei ein beliebiger Komplex. Unter einem Block B von K verstehen wir einen Teilkomplex von K , der folgende zwei Bedingungen erfüllt:

1. Zu je zwei Elementen $s \subset s'$ von B enthält B alle Zwischenelemente t von s und s' : $s \subset t \subset s'$.

2. Mit je zwei Elementen t und t' gehören Durchschnitt und Vereinigung beider Elemente B an.

Ein Block B von K heißt *Maximalblock* von K , wenn es außer B selbst keinen Komplex gibt, der B enthält und Block von K ist.

Sind q und q' beliebige Simplexe auf M ; so bildet die Menge aller Simplexe t auf M mit $q \subset t \subset q'$ einen Block des Komplexes $\{M\}$, den von den „Enden“ q und q' erzeugten Block. Ist $Q \subset M$, so ist $\{Q\}$ ein Block von $\{M\}$, der von den Enden O und Q erzeugt wird.

Satz 5. Ein Block von $\{M\}$ ist dann und nur dann simplizial, wenn er das leere Simplex enthält.

Beweis. Der Block B enthalte das leere Simplex. Ist $s \in B$ beliebig gewählt, so muß jedes Simplex t mit

$$O \subset t \subset s,$$

also jede Seite von s zu B gehören.

Wenn B simplizial und $s \in \mathfrak{B}$ ist, so ist die leere Menge Seite von s , also in B enthalten.

Im Folgenden bezeichnen wir die Vereinigungsmenge aller Simplexe eines Komplexes K mit $V(K)$, den Durchschnitt mit $D(K)$.

Satz 6. Ist Q eine Menge von Blöcken, so ist der Durchschnitt D aller Elemente von Q auch ein Block.

Beweis.

1. Ist $s' \subset s''$ und $s' \in D$, $s'' \in D$, so enthält jeder Block von Q jedes t mit $s' \subset t \subset s''$, also $t \in D$.

2. Zu s' und s'' enthält jeder Block von Q auch $s' \cap s''$ und $s' \cup s''$. Also ist

$$s' \cup s'' \in D, \quad s' \cap s'' \in D.$$

Satz 7. Q sei eine Menge von Blöcken des Komplexes K , die durch die Relation \subset vollständig geordnet ist. Dann ist die Vereinigungsmenge $V(Q)$ wieder ein Block.

Beweis. Sind s, s' beliebige Simplexe von $V(Q)$, $s \in B_1 \in Q$, $s' \in B_2 \in Q$ und etwa $B_1 \subset B_2$, also: $s \in B_2$, so heißt das:

1. Jedes Simplex t mit $s \subset t \subset s'$ liegt in $B_2 \subset V(Q)$, sofern überhaupt $s \subset s'$ ist.

2. $s \cap s'$ und $s \cup s'$ liegen in $B_2 \subset V(Q)$, w. z. b. w.

Satz 8. In einem beliebigen Komplex K gibt es zu jedem Block B wenigstens einen Maximalblock von K , in welchem B enthalten ist.

Beweis. Die Menge W aller Blöcke von K ist durch die Relation \subset nach Satz 7 induktiv teilweise geordnet. Also gibt es in der Menge W nach dem Zornschen Satz mindestens einen Maximalblock, der B enthält.

Weil jedes Simplex s von K selbst ein Block ist, folgt: Zu jedem Simplex s gibt es wenigstens einen Maximalblock, der s enthält.

Satz 9. Ist S eine Schicht von M und der Block $B \subset S$ in S simplizial, dann ist $D(B) = O$.

Beweis. Es sei a ein beliebiges Element von M , welches in einem $s \in B$ enthalten ist. Dann ist $s \vdash a$ Simplex von B und

$$a \notin D(B).$$

Satz 10. Ist der Komplex K in der Schicht S simplizial, dann ist jeder Maximalblock B von $K \cap S$ in S simplizial; nach Satz 9 ist dann also $D(B) = O$.

Beweis. B sei ein Maximalblock. Wir bilden die Menge \tilde{B} aller Simplexe von S , welche Seite irgendeines Simplexes von B sind. \tilde{B}

ist ein Block und simplizial in S . Wegen $\tilde{B} \subset K \cap S$ und der Maximalität von B gilt

$$\tilde{B} = B.$$

Satz 11. Sei B ein zusammenhängender Block, gelegen in der Schicht S , so besteht B aus allen Simplexen t , die den Relationen

$$D(B) \subset t \subset V(B), t \in S$$

genügen.

Beweis. Es sei $a \in V(B) \vdash D(B)$. Wir zeigen: Es gibt zu jedem Simplex s von B ein Nachbarsimplex, welches mit s zusammen das Bindeglied a besitzt.

Es sei $a \notin s$. Es gibt mindestens ein t in B mit $a \in t$. Aus den Relationen

$$s \subset s \cup a \subset s \cup t$$

folgt man, daß $s \cup a$ zu B gehört.

Ist aber a Element von s , so wählen wir ein $t \in B$, welches $a \notin t$ erfüllt. In diesem Falle ist

$$s \cap t \subset s \vdash a \subset s,$$

oder $s \vdash a \in B$.

Durch vollständige Induktion kann man ohne weiteres ableiten, daß mit s auch

$$t = (s \cup m) \vdash n$$

zu B gehört; wenn m und n endliche Teilmengen von $V(B) \vdash D(B)$ sind und $n \subset s$, $s \cap m = 0$ ist.

Ist t ein beliebiges Simplex, welches

$$D(B) \subset t \subset V(B), t \in S$$

erfüllt, so greifen wir aus B irgendein Simplex s heraus. Es sind $t \vdash (t \cap s)$ und $s \vdash (s \cap t)$ endliche Mengen. Ferner gilt die Gleichung

$$t = (s \vdash (s \vdash t \cap s)) \cup (t \vdash t \cap s).$$

Also muß mit s auch t Simplex von B sein.

Jedes Simplex t von B erfüllt definitionsgemäß die Relationen

$$D(B) \subset t \subset V(B), t \in S.$$

Satz 12. Ist B ein in der Schicht S simplizialer zusammenhängender Block, so ist

$$B = \{V(B)\} \cap S.$$

Dieser Satz folgt unmittelbar aus Satz 9 und 11. Mit Satz 12 folgert man: Ist Q Teilmenge von M , so gibt es höchstens einen zusammenhängenden Block B mit $V(B) = Q$, der in der Schicht S simplizial ist.

Die nun folgenden Abschnitte V und VI sollen auf den Abschnitt VII vorbereiten, in welchem die Cohomologiegruppe eines Komplexes endgültig und formal unabhängig von V und VI definiert wird.

V. Zusammenhängende Komplexe.

Eine *Bindungsisomorphie* ist eine eindeutige Abbildung J eines zusammenhängenden Komplexes L auf einen zusammenhängenden Komplex L' , die folgende Bedingungen erfüllt:

Aus $s|t$ und „ a ist Bindeglied von s und t “ soll folgen:

$s'|t'$ und „ a ist Bindeglied von s' und t' “ mit $s' = Js$, $t' = Jt$.

Ist NCL , so induziert die Bindungsisomorphie J von L auf L' eine Bindungsisomorphie von N auf die Menge JN aller Simplexe von L' , welche ein Urbild in N besitzen.

Satz 13. *Jede Bindungsisomorphie J ist ein-eindeutig. Die Abbildung J^{-1} ist ebenfalls eine Bindungsisomorphie.*

Beweis. Zunächst definieren wir zu jedem Weg

$$W = (s_1, \dots, s_n) \text{ in } M$$

und jedem Element a in M eine ganze Zahl $\gamma(W, a)$ als die Anzahl aller aufeinanderfolgenden Elementepaare s_i, s_{i+1} des Weges W , welche a als Bindeglied besitzen.

Durch vollständige Induktion beweist man den

Hilfssatz. Sind s und t beliebige Simplexe auf M , W ein Weg, der s und t verbindet, und ferner $a \in s$, $a \in t$ oder $a \notin s$, $a \notin t$, so ist $\gamma(W, a)$ gerade. Ist dagegen $a \in s$, $a \notin t$ oder $a \notin s$, $a \in t$, so ist $\gamma(W, a)$ ungerade.

Wir sind jetzt in der Lage, für zwei Simplexe s und t , die

$$s' = Js = Jt$$

befolgen, zu zeigen, daß $s = t$ ist. Zum Beweis benützen wir einen Weg W in L , der s und t verbindet:

$$W = (s_1, \dots, s_n): s_1 = s, s_n = t.$$

Infolge der Grundeigenschaft der Bindungsisomorphie ist

$$W' = (s'_1, \dots, s'_n); s'_1 = s', s'_n = s' \quad (s'_i = Js_i),$$

ein Weg, welcher s' mit sich verbindet. Ferner muß für jedes Element a von M

$$\gamma(W', a) = \gamma(W, a)$$

sein. Das heißt aber, daß $s = t$ ist; J ist somit ein-eindeutig.

Ist nun $s'|t'$, a Bindeglied von s' und t' , und $s = J^{-1}s'$, $t = J^{-1}t'$, so können wir mit derselben Schlußweise wie eben zeigen, daß s und t Nachbarn mit dem Bindeglied a sind.

Satz 14. *Notwendig und hinreichend dafür, daß der zusammenhängende Komplex B ein Block ist, ist die Existenz einer Teilmenge Q von M , die folgende Bedingungen erfüllt:*

1. *Das Bindeglied zweier beliebiger Nachbarn aus B liegt in Q .*
2. *Zu jedem $a \in Q$ und jedem $s \in B$ gibt es ein $t \in B$, so daß s und t Nachbarn mit dem Bindeglied a sind.*

Es gilt stets: $Q = V(B) \vdash D(B)$.

Beweis. Ist B ein Block, setzen wir

$$Q = V(B) \vdash D(B).$$

Sind nun s und t Nachbarn in B und etwa $t = s \cup a$, $a \notin s$, dann ist $a \in Q$ wegen $a \notin D(B)$ und $a \in V(B)$.

Ist $s \in B$ und $a \in Q$ beliebig, so gilt für $a \notin s$

$$a \in V(B)$$

und somit

$$D(B) \subset s \cup a \subset V(B).$$

Für $a \in s$ ist statt dessen

$$D(B) \subset s \vdash a \subset V(B).$$

Nach Satz 11 gehören also $s \cup a$ und $s \vdash a$ zu B , womit auch Bedingung (2) für Q nachgewiesen ist.

Nun sei B ein zusammenhängender Komplex, zu welchem eine Menge Q mit den genannten Eigenschaften existiert. Wir bilden $D(B)$ und zeigen, daß B aus allen Simplexen t besteht mit

$$(R) \quad D(B) \subset t \subset D(B) \cup Q, \quad t \in S,$$

(S ist diejenige Schicht, in welcher B liegt).

Es sei t ein Simplex von B , $a \in t$ und $a \notin D(B)$. Es gibt ein Simplex s von B , welches a nicht enthält. s und t kann man durch einen Weg $W = (s_1, \dots, s_n)$ in B verbinden, in welchem mindestens ein Paar von Nachbarn s_i, s_{i+1} vorkommt, welches a als Bindeglied hat. Denn nach dem Hilfssatz (Seite 140) ist $\gamma(W, a)$ ungerade, also von Null verschieden. Bedingung (1) ergibt somit $a \in Q$. Jedes $a \in t$ ist also Element von $D(B) \cup Q$. Es sind demnach folgende Relationen richtig:

$$(R) \quad D(B) \subset t \subset D(B) \cup Q, \quad t \in S.$$

Umgekehrt erfülle t die Relationen (R). Wir greifen aus B ein Simplex s willkürlich heraus und verbinden s und t durch einen Weg W in dem Komplex \tilde{B} , der aus allen t , die die Relation (R) erfüllen, besteht. Weil je zwei aufeinanderfolgende Simplexe von W ein Bindeglied aus Q haben, zeigt man induktiv, daß $t \in B$ ist.

Es bleibt noch zu beweisen, daß $D(B) \cup Q = V(B)$ ist. Jedes Simplex von B ist natürlich in $D(B) \cup Q$ enthalten. Ist a Element von $D(B) \cup Q$, $a \notin s$, $s \in B$, dann ist $a \in Q$ und in dem Simplex $s \cup a$ von B enthalten.

Satz 15. Ist B ein zusammenhängender Block, J eine Bindungs-*isomorphie* von B auf den Komplex B' , so ist B' ein zusammenhängender Block und

$$V(B) \vdash D(B) = V(B') \vdash D(B').$$

Beweis. Sind s' und t' Nachbarsimplexe von B' und a ihr Bindeglied, so ist a nach Satz 13 Bindeglied von $s = J^{-1}s'$ und $t = J^{-1}t'$, also $a \in V(B) \vdash D(B)$.

Ist $s' \in B'$ und $a \in V(B) \vdash D(B)$, so betrachten wir zu $s = J^{-1}s'$ das Nachbarsimplex t , welches mit s zusammen das Bindeglied a hat. Dann besitzen auch s' und $t' = Jt$ das Bindeglied a . Also ist B' nach Satz 14 ein Block und überdies

$$V(B) \vdash D(B) = V(B') \vdash D(B').$$

Satz 16. *Es sei J eine Bindungsisomorphie des zusammenhängenden Komplexes L auf den zusammenhängenden Komplex L' . Dann ist das Bild eines Maximalblocks von L ein Maximalblock von L' .*

Die Maximalblöcke von L und L' werden also durch J ein-eindeutig aufeinander abgebildet.

Beweis. Ist B ein Maximalblock von L , so wird $B' = JB$ nach Satz 15 ein Block von L' . Es sei T' ein Maximalblock von L' mit

$$B' \subset T'.$$

Dann folgt

$$B \subset J^{-1}T';$$

also

$$B = J^{-1}T'$$

und

$$B' = T'.$$

B' ist also ein Maximalblock von L' .

Wir definieren eine *Darstellung* des zusammenhängenden Komplexes L als eine Bindungsisomorphie von L auf einen finiten Komplex F . Der Komplex F heißt ein *Darstellungskomplex* von L , wenn es eine *Darstellung* von L auf F gibt.

Satz 17. *Zu jedem zusammenhängenden Block B gibt es höchstens einen simplizialen Darstellungskomplex.*

Beweis. Jeder simpliziale Darstellungskomplex muß nach den vorangegangenen Sätzen aus allen endlichen Teilmengen von $V(B) \vdash D(B)$ bestehen.

Satz 18. *Ist e ein Simplex des zusammenhängenden Blockes B , so gibt es genau eine Darstellung von B in den Darstellungskomplex von B , welche das Simplex e in das leere Simplex abbildet.*

Beweis. Jedem Simplex $s \in B$ ordnen wir die endliche Menge

$$Ds = (e \vdash e \cap s) \cup (s \vdash e \cap s)$$

zu. Wir behaupten, daß D eine Darstellung ist. Zum Beweis nehmen wir an: $t \in B$, $s \in B$ und

$$t = s \cup a, \quad a \notin s.$$

Wir untersuchen zunächst den Fall $a \in e$. Es ist

$$a \in (e \vdash e \cap s) \cup (s \vdash e \cap s)$$

$$a \notin (e \vdash e \cap t) \cup (t \vdash e \cap t).$$

Aus $a \notin e$ ergibt sich

$$\begin{aligned} a \notin (e \vdash e \cap s) \cup (s \vdash e \cap s) \\ a \in (e \vdash e \cap t) \cup (t \vdash e \cap t). \end{aligned}$$

Ist $b \in Ds$ und $b \neq a$, so folgt $b \in Dt$ und umgekehrt. In jedem Falle sind also Ds und Dt Nachbarn mit dem Bindeglied a .

Es gibt aber auch nur eine Darstellung dieser Art. Denn bilden D und D' das Simplex e auf das leere Simplex ab, und sind s, t zwei Nachbarn mit dem Bindeglied a , so folgt aus

$$Ds = D's$$

die Gleichung

$$Dt = D't.$$

Denn aus $a \in Ds$ folgt $Dt = Ds \vdash a = D's \vdash a = D't$. Genau so schließt man, wenn $a \notin Ds$ ist.

Ist t beliebiges Simplex aus B , so brauchen wir nur e und t durch einen Weg in B zu verbinden, um induktiv das Resultat $Dt = D't$ zu erhalten.

Ist L ein beliebiger zusammenhängender Komplex, so verstehen wir unter dem *Kern* von L den Durchschnitt aller Maximalblöcke von L . Die Simplexe von L , die im Kern von L liegen, heißen Kernsimplexe von L .

Satz 19. *L sei ein zusammenhängender Komplex. Ist der Kern von L nicht leer, so besitzt L genau einen simplizialen Darstellungskomplex $\mathcal{D}(L)$. Dieser hat die Gestalt*

$$\mathcal{D}(L) = \sum_{B \in Q} \{V(B) \vdash D(B)\} \cap O_M$$

(Q ist die Menge aller Maximalblöcke von L).

Gibt es zu L einen simplizialen Darstellungskomplex, so ist der Kern von L nicht leer.

Beweis.

1. Es sei e ein Kernsimplex von L . Wir konstruieren zu e eine Darstellung von L auf einen simplizialen Darstellungskomplex F . Hierzu bestimmen wir für jeden Maximalblock von L diejenige Darstellung D_B , die e auf das leere Simplex abbildet. Liegt ein Simplex s zugleich in den Maximalblöcken B und B' , so ist

$$D_B s = D_{B'} s.$$

Denn D_B und $D_{B'}$ induzieren beide für den Block $B \cap B'$ (Satz 6) diejenige Darstellung, die e in das leere Simplex abbildet. Durch die Vorschrift $J_e a = D_B a$, falls $a \in B$ ist, haben wir also eine eindeutige Abbildung J_e von L auf einen finiten Komplex F definiert. F ist dabei die Menge aller Simplexe b mit $b = J_e a$, $a \in L$.

J_e ist eine Darstellung. Denn sind s und t beliebige Nachbarsimplexe von L , so bilden s und t einen Block, der in einem Maximalblock B von L enthalten ist. Besitzen s und t das Bindeglied a , dann trifft dies natürlich auch auf $J_e s$ und $J_e t$ zu, weil $J_e s = D_B s$ und $J_e t = D_B t$ ist.

Da nach Satz 16 jeder Maximalblock von F das leere Simplex enthält, ist F nach Satz 5 simplizial.

2. Für den soeben gefundenen Komplex F gilt

$$F = \sum_{B \in Q} \{V(B) \vdash D(B)\} \cap O_M.$$

Denn für jeden Maximalblock B ist nach Definition von F und J_e der simpliziale Darstellungskomplex von B in F enthalten. Weil dieser nach Satz 17 die Form $\{V(B) \vdash D(B)\} \cap O_M$ hat, muß gelten:

$$\{V(B) \vdash D(B)\} \cap O_M \subset F.$$

Ist andererseits $b \in F$, so gibt es ein $a \in L$ mit $b = J_e a$. Ist a Element des Maximalblocks $B \in Q$, so folgt nach Satz 17 und aus $b = D_B a$

$$b \in \{V(B) \vdash D(B)\} \cap O_M.$$

3. Nun sei der zusammenhängende Komplex L durch die Darstellung D auf den simplizialen Komplex F abgebildet. Wir zeigen, daß L ein Kernsimplex hat. Ist B Maximalblock von L , dann ist $B' = DB$ Maximalblock von $F = DL$. Wenn F simplizial ist, muß nach Satz 10 auch B' simplizial sein. Folglich ist das leere Simplex O Element von B' ; es enthält also nach Satz 16 jeder Maximalblock B von L das Element $e = D^{-1}O$. Dieses ist demnach Kernsimplex von L .

4. Unter denselben Voraussetzungen wie in (3) beweisen wir für F die Beziehung

$$F = \sum_{B \in Q} \{V(B) \vdash D(B)\} \cap O_M.$$

Für jeden Maximalblock $B \in Q$ sei D_B diejenige Darstellung von B , die $e = D^{-1}O$ in das leere Simplex abbildet. Ist $a \in L$ beliebig gewählt und a Element des Maximalblocks B , so gilt

$$D a = D_B a = J_e a.$$

Denn D induziert für B eine Darstellung, welche e in das leere Simplex abbildet und somit mit D_B identisch ist (Satz 17).

Nach (1) besitzt ein zusammenhängender Komplex mit nicht leerem Kern stets einen simplizialen Darstellungskomplex $\mathcal{D}(L)$. Dieser genügt nach (4) der Beziehung

$$\mathcal{D}(L) = \sum_{B \in Q} \{V(B) \vdash D(B)\} \cap O_M$$

und ist somit eindeutig bestimmt. Aus (3) entnehmen wir, daß ein zusammenhängender Komplex, der einen simplizialen Darstellungskomplex besitzt, stets einen nicht leeren Kern hat.

VI. Cohomologiegruppen (Vorläufige Definition).

Unter allen finiten Komplexen zeichnen sich die simplizialen Komplexe durch besondere Einfachheit aus. Wir erklären jetzt eine allgemeine Randbildung, die „Corandbildung“, für einen simplizialen und finiten Komplex F . Wir denken uns eine willkürliche Eckenanzordnung α der Menge \mathfrak{F} vorgegeben.

A sei eine beliebige Kette auf F mit dem Koeffizientenbereich \mathfrak{G} . Ein Simplex s von F schreiben wir in der durch α festgelegten Reihenfolge

$$s = (a_1, \dots, a_n).$$

Ist die Anzahl der Eckpunkte von s größer als eins, so soll der Corand δA in s den Wert

$$\delta A s = \sum_{i=1}^n (-1)^i A(a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n)^9$$

haben. Das $\hat{}$ über i bedeutet, daß das Glied mit dem Index i wegzulassen ist.

Ist $s = (a)$ ein Simplex von F , so setzen wir

$$\delta A s = 0.$$

Für O selbst sei

$$\delta A O = 0.$$

δA ist in allen Simplexen von F erklärt. δ ist eine allgemeine Randbildung; denn δ ist ein Homomorphismus und es ist $\delta \delta A = O$ für jede Kette A . Ferner besteht die Gleichung $\delta A s = \delta B s$, wenn A und B in allen Nachbarn von s gleiche Werte haben.

Die zu δ gehörige Strukturgruppe heiße Cohomologiegruppe von F bezüglich α .

Wir zeigen jetzt, daß die Cohomologiegruppen des Komplexes F bezüglich der beiden beliebigen Eckenanzordnungen α und α' isomorph sind.

Zum Beweis geben wir eine Gruppe an, die jeder Cohomologiegruppe von F bezüglich irgendeiner Eckenanzordnung α isomorph ist. Wir bilden deshalb zu F den orientierten Komplex F^* , der aus allen orientierten Simplexen von F besteht.

Eine Kette A von F^* im Koeffizientenbereich \mathfrak{G} werde so definiert: Es ist eine Funktion, die jedem Simplex von F^* ein Element von \mathfrak{G} zuordnet und die Bedingung $A s = -A t$ erfüllt, wenn t aus s durch Vertauschung zweier Elemente hervorgegangen ist, d. h. ist

$$s = (a_1, \dots, a_n),$$

⁹⁾ Ist z. B. A eine n -Kette, d. h. besitzt A in allen Simplexen mit von n verschiedener Dimension den Wert Null, so ist δA eine $(n+1)$ -Kette.

so soll es zwei Zahlen $i \leq n$ und $j \leq n$ geben, so daß $t = (b_1, \dots, b_n)$ ist:

$$\begin{aligned} b_q &= a_q \text{ für } q \neq i \text{ und gleichzeitig } q \neq j; \\ b_i &= a_j \text{ und } b_j = a_i. \end{aligned}$$

Zusätzlich fordern wir, daß eine Kette in einem Simplex mit mehrfachen Elementen den Wert Null hat. Die Menge aller Ketten auf F^* machen wir zu einer Gruppe, indem wir die Summe $A + B$ zweier Ketten so definieren: Für jedes Simplex $s \in F^*$ sei $(A + B)s = As + Bs$. Die Funktion $A + B$ ist eine Kette. Denn entsteht t aus s durch Vertauschung zweier Elemente, so ist

$$(A + B)t = At + Bt = -As + (-Bs) = -(A + B)s.$$

Die so erklärte Gruppe nennen wir die Gruppe \mathfrak{L}^* der Ketten auf F^* im Koeffizientenbereich \mathfrak{G} . Die Corandbildung erklären wir wieder als einen Homomorphismus δ von \mathfrak{L}^* in sich, der $\delta\delta A = 0$ für jede Kette A erfüllt, und zwar durch die Formel

$$\delta A(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^i A(a_1, \dots, i, \dots, a_n).$$

Es ist leicht nachzuprüfen, daß die so definierte Funktion tatsächlich eine Kette ist, δ einen Homomorphismus verkörpert und $\delta\delta A$ stets Null ist. A heißt Corand, wenn es eine Kette B gibt, so daß $A = \delta B$ ist; A heißt Cozyklus, wenn $\delta A = 0$ ist; die Faktorgruppe \mathfrak{B}^* der Cozyklengruppe nach der Corändergruppe nennen wir die *Cohomologiegruppe* von F^* . Wir zeigen: Ist \mathfrak{B} die Cohomologiegruppe von F bezüglich der beliebig gewählten Eckenordnung α von F , so ist $\mathfrak{B} \approx \mathfrak{B}^*$. Ist A eine Kette auf F , so ordnen wir ihr eine Kette $\mathfrak{I}A = A^*$ auf F^* zu: Ist s ein beliebiges Simplex von F^* mit mehrfachen Elementen, so setzen wir $A^*s = 0$; ist aber s ohne mehrfache Elemente, so schreiben wir $A^*s = At$, wenn t die Menge aller Elemente von s ist und t in der durch α vorgeschriebenen Anordnung durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen aus s hervorgeht. Geht t aus s durch eine ungerade Anzahl von Vertauschungen hervor, so setzen wir $A^*s = -At$.

Diese Abbildung \mathfrak{I} ist ein Homomorphismus. Ist A^* eine Kette auf F^* , so gibt es eine und nur eine Kette auf F , deren Bild A^* ist. Ist nämlich s ein Simplex von F , t das orientierte Simplex von F , welches s im Sinne der Eckenordnung α von F anordnet, so ist $As = A^*t$ eindeutig festgelegt. \mathfrak{I} ist demnach ein Isomorphismus. Da ferner aus $A = \delta B$ die Beziehung $\mathfrak{I}A = \delta\mathfrak{I}B$ folgt, definiert \mathfrak{I} einen Isomorphismus von \mathfrak{B} auf \mathfrak{B}^* .

Die Cohomologiegruppe von F^* kann nach Dimensionszahlen aufgespalten werden: Zunächst bezeichnen wir mit F_n die Menge aller n -dimensionalen Simplexe von F^* . Entsprechend zerlegen wir jede Kette: Wir setzen $A_n s = As$, wenn s n -dimensional ist, $A_n s = 0$,

wenn s nicht n -dimensional ist. Eine Kette heißt eine n -Kette, wenn ihr Grundraaster in F_n^* enthalten ist. Die Menge \mathfrak{L}_n aller n -Ketten ist eine Untergruppe von \mathfrak{L} .

Unter einem n -Corand verstehen wir einen Corand, der zugleich n -Kette ist. Entsprechend wird der n -Cozyklus definiert. Die Menge aller n -Coränder bildet eine Untergruppe von \mathfrak{S} und \mathfrak{L}_n , wir nennen sie die n -te Corändergruppe von F^* . Der Homomorphismus δ bildet \mathfrak{L}_n auf die $n+1$ -te Corändergruppe von F^* ab. Der Kern dieses Homomorphismus ist die n -te Cozyklengruppe von F^* . Die n -te Cohomologiegruppe läßt sich als Faktorgruppe der n -ten Cozyklengruppe nach der n -ten Corändergruppe definieren, da die n -te Corändergruppe eine Untergruppe der n -ten Cozyklengruppe ist.

Satz 20. *Die Cohomologiegruppe von F^* ist isomorph der direkten Summe $\sum_{n=-1}^{\infty} \mathfrak{B}_n(F^*)$ aller n -ten Cohomologiegruppen von F^* .*

Beweis. Ordnen wir jedem Cozyklus A die Funktion $E = IA$ zu, welche jeder Zahl $n \geq -1$ den n -Cozyklus A_n entsprechen läßt, so stellt I einen Isomorphismus der Cozyklengruppe auf die direkte Summe aller n -ten Cozyklengruppen von F^* dar. I erzeugt einen Isomorphismus der Corändergruppe in die direkte Summe aller n -ten Corändergruppen von F^* . Somit folgt aus Satz 1 die Behauptung.

Wir treffen nun die Vereinbarung, als eindeutig bestimmte Cohomologiegruppe von F die direkte Summe $\sum_{n=-1}^{\infty} \mathfrak{B}_n(F^*)$ zu bezeichnen.

Ist L ein zusammenhängender Komplex, dann heißt die allgemeine Randbildung a von L eine Corandbildung, wenn es eine Darstellung D von L in den Darstellungskomplex F gibt, dessen Corandbildung bezüglich irgendeiner Eckenordnung durch die Darstellungsisomorphie D^{-1} in a übertragen wird. Ist K ein beliebiger Komplex, so nennen wir die allgemeine Randbildung a auf K eine Corandbildung, wenn für jede Komponente L von K die allgemeine Randbildung $a(L)$ eine Corandbildung ist. Die zu einer Corandbildung von K gehörige Strukturgruppe mit dem Koeffizientenbereich \mathfrak{G} heißt Cohomologiegruppe von K mit dem Koeffizientenbereich \mathfrak{G} .

Satz 21. *Der Komplex K besitzt nur dann eine Cohomologiegruppe mit dem Koeffizientenbereich \mathfrak{G} , wenn der Kern jeder Komponente von K nicht leer ist.*

Ein Komplex, für welchen jede Komponente einen nicht leeren Kern hat, besitzt bis auf Isomorphie eine und nur eine Cohomologiegruppe mit dem Koeffizientenbereich \mathfrak{G} .

Beweis. Besitzt K eine Cohomologiegruppe, so heißt das: jede Komponente hat eine simpliziale Darstellung, also einen nicht leeren Kern.

Andererseits habe jede Komponente von K einen nicht leeren Kern. Dann läßt sich jede Komponente von K simplizial darstellen, muß

also eine Corandbildung besitzen. Ist für jede Komponente L eine Corandbildung a_L ausgewählt, so lassen sich diese zu einer allgemeinen Randbildung a von K zusammensetzen. Diese erfüllt $a(L) = a_L$; a ist also eine Corandbildung.

Um die Isomorphie zu zeigen, geben wir eine Gruppe an, die jeder Cohomologiegruppe von K mit dem Koeffizientenbereich \mathfrak{G} isomorph ist. Ist L Komponente von K , so bezeichne $\mathcal{D}^*(L)$ den orientierten Darstellungskomplex von L . Die Cohomologiegruppe $\mathfrak{B}(\mathcal{D}^*(L))$ von $\mathcal{D}^*(L)$ mit dem Koeffizientenbereich \mathfrak{G} ist nach Seite 135 jeder Cohomologiegruppe von L mit dem gleichen Koeffizientenbereich isomorph.

Die direkte Summe

$$\mathfrak{B}(K) = \sum_{L \in W} \mathfrak{B}(\mathcal{D}^*(L)),$$

in welcher W die Menge aller Komponenten von K bedeutet, ist nach Satz 2 jeder Cohomologiegruppe von K isomorph.

Wir können $\mathfrak{B}(K)$ als eindeutig bestimmte Cohomologiegruppe von K festlegen und in folgender Form schreiben:

$$(B) \quad \mathfrak{B}(K) = \sum_{L \in W} \sum_{n=-1}^{\infty} \mathfrak{B}_n(\mathcal{D}^*(L)).$$

Nach dem Muster der Beziehung (B) wird im folgenden Abschnitt formal die endgültige Definition der Cohomologiegruppe eines beliebigen Komplexes gegeben.

Diese Definition wird in dreifacher Hinsicht allgemeiner sein:

1. Sie ist auf beliebige Komplexe anwendbar.

K wird statt in seine Komponenten in die Durchschnitte $K \cap S$ zerlegt:

$$K = \bigcup_{S \in W} K \cap S;$$

W bedeutet hierin die Menge aller Schichten S mit $K \cap S \neq 0$.

Die in Satz 19 angegebene Beziehung erheben wir allgemein zur Definitionsgleichung simplizialer Darstellungskomplexe:

$$\mathcal{D}(L) = \bigcup_{B \in \mathcal{Q}} \{V(B) \vdash D(B)\} \cap O_M$$

sei der simpliziale Darstellungskomplex des in der Schicht S enthaltenen Komplexes L .

Als Cohomologiegruppe von K kann man in Analogie zu (B)

$$(B') \quad \mathfrak{B}(K) = \sum_{S \in W} \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}_n(\mathcal{D}^*(K \cap S))$$

definieren.

2. Eine weitere Verallgemeinerung kommt dadurch zustande, daß man an die Stelle der Schichten S die Schichtungen U von M treten läßt.

(\mathfrak{B}') geht dann über in

$$(\mathfrak{B}'') \quad \mathfrak{B}(K) = \sum_{U \in \mathcal{W}} \sum_{n=-1}^{\infty} \mathfrak{B}_n \left(\sum_{S \in U} \mathcal{D}^*(K \cap S) \right).$$

3. In Analogie zu den LEFSCHETZ-Relativzyklen werden Relativecohomologiegruppen definiert, die sich auf Tripel $Q C P C K$ von Komplexen beziehen.

VII. Cohomologiegruppen (Endgültige Definition).

Es seien $H C G C F$ drei orientierte simpliziale finite Komplexe auf M . Wir definieren jetzt die Cohomologiegruppe von $F \bmod F \vdash G$ in $F \vdash H$.

Ist A eine Kette¹⁰⁾ im Koeffizientenbereich \mathfrak{G} , so bezeichne $\langle A \rangle$ den Grundkomplex von A , d. h. die Menge aller Simplexe, welchen A einen von Null verschiedenen Wert erteilt.

Aus $\langle A \rangle \cap X = 0$ folgt zunächst $\langle \delta A \rangle \cap X = 0$, wenn X ein simplizialer Teilkomplex von F ist.

Das beweist man so: Es sei $s \in X$, $s = (a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$, dann sind alle $(a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_{n+1})$ ebenfalls Elemente von X . Also ist $\langle \delta A \rangle \cap X = 0$.

Mit \mathfrak{S}_n bezeichnen wir diejenige Untergruppe von \mathfrak{L}_n , die aus allen Ketten A auf F im Koeffizientenbereich \mathfrak{G} besteht, welche $\langle A \rangle \cap H = 0$ erfüllen: \mathfrak{T}_n sei dagegen diejenige Untergruppe von \mathfrak{L}_n , die sich aus den Ketten auf A zusammensetzt, welche $\langle A \rangle \cap G = 0$ genügen.

Weil $\mathfrak{T}_n \subset \mathfrak{S}_n$ ist, können wir die Faktorgruppe

$$\mathfrak{L}_n = \mathfrak{S}_n / \mathfrak{T}_n$$

bilden. Die Elemente von \mathfrak{L}_n heißen n -Ketten auf $F \bmod F \vdash G$ in $F \vdash H$.

Ist $A \in \mathfrak{S}_n$ beziehungsweise $A \in \mathfrak{T}_n$, so ist $\delta A \in \mathfrak{S}_n$ bzw. $\delta A \in \mathfrak{T}_n$; denn es folgt $\langle \delta A \rangle \cap H = 0$ bzw. $\langle \delta A \rangle \cap G = 0$.

δ definiert also einen Homomorphismus von \mathfrak{L}_n in sich: Wir brauchen nur aus jeder Restklasse $\mathcal{A} \in \mathfrak{L}_n$ einen Repräsentanten A auszuwählen und der Restklasse $\delta \mathcal{A}$ die durch δA bestimmte Restklasse $\delta \mathcal{A}$ zuzuordnen. Diese Zuordnung ist unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten.

Von \mathfrak{L}_n bilden wir die Untergruppe \mathfrak{Z}_n , die aus allen Elementen A mit $\delta A = 0$ besteht; wir nennen sie die n -Cozyklengruppe von $F \bmod F \vdash G$ in $F \vdash H$. Ferner bilden wir die Untergruppe \mathfrak{H}_n von \mathfrak{L}_n . Sie bestehe aus allen $A \in \mathfrak{L}_n$, zu welchen es ein $B \in \mathfrak{L}_{n-1}$ gibt mit $A = \delta B$. \mathfrak{H}_n heißt n -Corändergruppe von $F \bmod F \vdash G$ in $F \vdash H$. Es ist $\mathfrak{H}_n \subset \mathfrak{Z}_n$.

¹⁰⁾ Zu allen Begriffen, die sich auf orientierte Komplexe beziehen, vgl. Seite 145 und 146.

Wir definieren $\mathfrak{B}_n(H, G, F) = \mathfrak{B}_n/\mathfrak{G}_n$ als die n -te, *Cohomologiegruppe* von $F \bmod F \vdash G$ in $F \vdash H$.

Ist L ein beliebiger in einer Schicht S enthaltener Komplex auf der Menge M , so verstehen wir unter dem Darstellungskomplex $\mathcal{D}(L)$ von L die Vereinigungsmenge aller Blöcke $\{V(B) \vdash D(B)\} \cap O_M$, für welche B ein Maximalblock von L ist. Aus $L_1 \subset L_2$ folgt $\mathcal{D}(L_1) \subset \mathcal{D}(L_2)$.

Nun seien $Q \subset P \subset K$ beliebige Komplexe auf der Menge M . Eine Schichtung U von M heißt zu K regulär, wenn alle ihre Schichten mit K einen nicht leeren Durchschnitt besitzen. W sei die Menge aller zu K regulären Schichtungen.

Wir definieren die Cohomologiegruppe von $K \bmod K \vdash P$ in $K \vdash Q$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{B}(Q, P, K) = \sum_{U \in W} \sum_{n=-1}^{\infty} \mathfrak{B}_n \left(\sum_{S \in U} \mathcal{D}^*(Q \cap S), \sum_{S \in U} \mathcal{D}^*(P \cap S), \sum_{S \in U} \mathcal{D}^*(K \cap S) \right).$$

Die zweite direkte Summe ist dabei über die Menge aller ganzen Zahlen $n \geq -1$ zu erstrecken.

Jedem $U \in W$ und jeder ganzen Zahl $n \geq -1$ entspricht ein Glied der direkten Summe; die n -te Cohomologiegruppe der Schichtung U von $K \bmod K \vdash P$ in $K \vdash Q$

$$\mathfrak{B}_{U,n}(Q, P, K) = \mathfrak{B}_n \left(\sum_{S \in U} \mathcal{D}^*(Q \cap S), \sum_{S \in U} \mathcal{D}^*(P \cap S), \sum_{S \in U} \mathcal{D}^*(K \cap S) \right).$$

$$\mathfrak{B}(K) = \mathfrak{B}(O, K, K)$$

heißt die Cohomologiegruppe von K im Koeffizientenbereich \mathfrak{G} . Sie ergibt sich also als Spezialfall der allgemeineren „Relativcohomologiegruppe“, wenn Q gleich der leeren Menge und P gleich dem ganzen Komplex K gesetzt wird.

VIII. Simpliziale Abbildungen.

Sind K' und K zwei Komplexe auf den Mengen M' und M , so bezeichnen wir eine eindeutige Abbildung π von M' in M als eine *Eckenzuordnung*. Ist $W' \subset M'$, so bestehe $\pi W'$ aus allen Elementen $a \in M$, für welche es ein a' mit $a = \pi a'$ gibt.

Wir sagen, π erzeugt eine *simpliziale Abbildung* von K' in K , wenn aus $s' \in K'$, $\pi s' \in K$ folgt. Wir sprechen von einer simplizialen Abbildung von K' auf K , wenn es zu jedem $s \in K$ ein $s' \in K'$ gibt mit $\pi s' = s$ und schreiben $K = \pi K'$. π sei eine Eckenzuordnung von M' in M . Die Schichtung U' heißt zu π regulär, wenn es zu jeder Schicht $S' \in U'$ mindestens ein Simplex von S' gibt, das durch π ein-eindeutig auf ein Simplex von M abgebildet wird.

Satz 22. π sei eine simpliziale Abbildung des zusammenhängenden Komplexes K' auf den Komplex K . Dann ist K zusammenhängend.

Beweis. Sind $s \in K$ und $t \in K$ beliebig gewählt und $s' \in K$, $t' \in K'$ Urbilder von s bzw. t , dann verbinden wir s' und t' durch einen Weg in K' :

$$s' = s'_1, \dots, s'_n = t'.$$

Schreiben wir identische Simplexe in der Folge

$$s = s_1, \dots, s_n = t \quad (s_i = \pi s'_i)$$

nur einmal auf, so erhalten wir einen Weg in K , der s und t verbindet.

Ist S' eine Schicht auf M' , so ist also der Komplex $\pi S'$ zusammenhängend, wenn π eine Eckenzuordnung von M' in M ist. $\pi S'$ liegt demnach in einer Schicht S von M . Da Verwechslungen ausgeschlossen sind, wollen wir künftig unter $\pi S'$ immer die ganze Schicht S verstehen

$$S = \pi S'.$$

Ist U' eine Schichtung auf M' , so bezeichne U' diejenige Schichtung auf M , die sich aus allen Schichten $\pi S'$ mit $S' \in U'$ zusammensetzt.

Satz 23. Ist der zusammenhängende Komplex LCS in der Schicht S simplizial, so besteht $\mathcal{D}(L)$ aus allen endlichen Simplexen t auf M , zu welchen es ein $s \in L$ gibt mit $t \subset s$.

Beweis. Es sei $s \in L$ und $t \subset s$ ein endliches Simplex, B sei ein Maximalblock von L , der s enthält. Dann ist wegen $D(B) = 0$ nach Satz 10

$$t \in \{V(B)\} \cap O_M = \{V(B) \vdash D(B)\} \cap O_M$$

oder

$$t \in \mathcal{D}(L).$$

Umgekehrt sei $t \in \mathcal{D}(L)$. Es gibt einen Maximalblock B von L mit $t \in \{V(B)\} \cap O_M$. Ist $s \in B$ beliebig gewählt, so ist offenbar $s \cup t \in B$ und $t \subset s \cup t$. Wegen $s \cup t \in L$ ist hiermit der Satz bewiesen.

Satz 24. K' und K seien zwei simpliziale Komplexe auf den Mengen M' bzw. M , π eine Eckenzuordnung von M' in M , die K' in K simplizial abbildet: Dann bildet π für jede Schicht S' von M' mit $S' \cap K' \neq 0$ den Komplex $\mathcal{D}(K' \cap S')$ simplizial in $\mathcal{D}(K \cap S)$ ab ($S = \pi S'$).

Beweis. Es sei $s' \in \mathcal{D}(K' \cap S')$. Es gibt ein $t' \in K' \cap S'$ mit $s' \subset t'$. Es ist $\pi s' \subset \pi t' \in K \cap S$ oder

$$\pi s' \in \mathcal{D}(K \cap S).$$

Satz 25. K' und K seien zwei simpliziale Komplexe, π eine Eckenzuordnung von M' in M , die K' in K simplizial abbildet, und U' eine Schichtung von M' mit $K' \cap S' \neq 0$ für mindestens ein $S' \in U'$.

Dann bildet π den Komplex $\sum_{S' \in U'} \mathcal{D}(K' \cap S')$ simplizial in $\sum_{S' \in U'} \mathcal{D}(K \cap S)$ ab ($U = \pi U'$).

Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem vorangegangenen.

Es seien $H \subset G \subset F$ und $H' \subset G' \subset F'$ simpliziale finite orientierte Komplexe auf M bzw. M' , π eine Eckenzuordnung von M' in M , die

simpliciale Abbildungen von H' in H , von G' in G und von F' in F hervorruft. Das Ziel der folgenden Betrachtungen ist eine geeignete Definition eines Homomorphismus h von $\mathfrak{B}_n(F, G, H)$ in $\mathfrak{B}_n(F', G', H')$.

Zuerst erklären wir einen Homomorphismus h von $\mathfrak{B}_n(F)$ in $\mathfrak{B}_n(F')$. A sei eine n -Kette auf F im Koeffizientenbereich \mathfrak{G} . Ist s' ein beliebiges n -Simplex von F' so setzen wir für hA in s' fest:

$$(hA)s' = A\pi s'.$$

Wir zeigen, daß hA tatsächlich eine n -Kette ist.

Es sei

$$\begin{aligned} s' &= (a'_1, \dots, a'_i, \dots, a'_j, \dots, a'_{n+1}), \\ t' &= (a'_1, \dots, a'_j, \dots, a'_i, \dots, a'_{n+1}). \end{aligned}$$

Das Bildsimplex von t' geht aus dem Bildsimplex von s' ebenfalls durch Vertauschung der Elemente mit den Indizes i und j hervor. Das bedeutet

$$(hA)s' = -(hA)t'.$$

Besitzt s' mehrfache Elemente, so ist das auch für das Bildsimplex der Fall:

$$(hA)s' = 0.$$

I. Wir beweisen jetzt $h\delta = \delta h$.

Es genügt zu zeigen, daß aus $B = \delta A$ stets folgt

$$B' = \delta A' \quad (A' = hA, B' = hB).$$

Für ein beliebiges $n+1$ -Simplex $s' \in F'$ mit dem Bild $s \in F$ ist

$$\begin{aligned} B's' &= Bs = \sum_{i=1}^n (-1)^i A(a_1, \dots, \hat{i}, \dots, a_n) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^i A'(a'_1, \dots, \hat{i}, \dots, a'_n) = \delta A's'. \end{aligned}$$

Weiter gilt

II. Aus $\langle A \rangle \cap H = 0$ bzw. $\langle A \rangle \cap G = 0$ folgt: $\langle hA \rangle \cap H' = 0$ bzw. $\langle hA \rangle \cap G' = 0$.

Denn ist s' ein beliebiges $n+1$ -Simplex von H' , so folgt $hAs' = A\pi s' = 0$ wegen $\pi s' \in H$.

Hieraus ergibt sich: Ist A ein Element der Untergruppe \mathfrak{I}_n bzw. \mathfrak{E}_n von \mathfrak{L}_n , so ist hA Element der Untergruppe \mathfrak{I}'_n bzw. \mathfrak{E}'_n von \mathfrak{L}'_n . \mathfrak{I}_n bzw. \mathfrak{E}_n wird durch h homomorph in \mathfrak{I}'_n bzw. \mathfrak{E}'_n abgebildet.

Demnach kann man mittels h \mathfrak{L}_n homomorph in \mathfrak{L}'_n abbilden. Denn ist $\mathcal{A} \in \mathfrak{E}_n$, und sind A, B Repräsentanten von \mathcal{A} , so folgen aus

$$A - B \in \mathfrak{I}_n, \quad A \in \mathfrak{E}_n, \quad B \in \mathfrak{E}_n$$

die Beziehungen

$$hA - hB \in \mathfrak{I}'_n, \quad hA \in \mathfrak{E}'_n, \quad hB \in \mathfrak{E}'_n.$$

hA und hB sind also Repräsentanten des gleichen Elementes von \mathfrak{L}'_n .

III. 1. Aus $A = \delta B$ folgt

$$hA = h\delta B = \delta hB.$$

Also: Die n -te Corändergruppe von $F \bmod F \vdash G$ in $F \vdash H$ wird in die n -te Corändergruppe von $F' \bmod F' \vdash G'$ in $F' \vdash H'$ homomorph abgebildet.

2. Aus $\delta B = 0$ folgt

$$\delta hB = h\delta B = 0.$$

Die n -te Cozyklengruppe von $F \bmod F \vdash G$ in $F \vdash H$ wird also durch h in die n -te Cozyklengruppe von $F' \bmod F' \vdash G'$ in $F' \vdash H'$ homomorph abgebildet.

Man kann deshalb in der üblichen Weise durch h einen ebenfalls mit h bezeichneten Homomorphismus von $\mathfrak{B}_n(F, G, H)$ in $\mathfrak{B}_n(F', G', H')$ definieren.

Es seien $Q'CP'CK'$ und $QCPCK$ zwei Tripel simplizialer Komplexe auf den Mengen M' bzw. M . Die Eckenzuordnung π von M' auf M erzeuge eine simpliziale Abbildung von Q' in Q , von P' in P und von K' in K .

Wir definieren einen Homomorphismus h von $\mathfrak{B}_{U,n}(Q, P, K)$ in $\mathfrak{B}_{U',n}(Q', P', K')$ ($U = \pi U'$).

Nach Satz 25 bildet π die Komplexe

$$\sum_{s' \in U'} \mathcal{D}(Q' \cap S'), \quad \sum_{s' \in U'} \mathcal{D}(P' \cap S'), \quad \sum_{s' \in U'} \mathcal{D}(K' \cap S')$$

in

$$\sum_{s \in U} \mathcal{D}(Q \cap S), \quad \sum_{s \in U} \mathcal{D}(P \cap S), \quad \sum_{s \in U} \mathcal{D}(K \cap S)$$

beziehungsweise simplizial ab.

π definiert also nach der soeben gegebenen Vorschrift einen Homomorphismus h von

$$\mathfrak{B}_n\left(\sum_{s \in U} \mathcal{D}^*(Q \cap S), \sum_{s \in U} \mathcal{D}^*(P \cap S), \sum_{s \in U} \mathcal{D}^*(K \cap S)\right) = \mathfrak{B}_{U,n}(Q, P, K)$$

in

$$\mathfrak{B}_n\left(\sum_{s' \in U'} \mathcal{D}^*(Q' \cap S'), \sum_{s' \in U'} \mathcal{D}^*(P' \cap S'), \sum_{s' \in U'} \mathcal{D}^*(K' \cap S')\right) = \mathfrak{B}_{U',n}(Q', P', K').$$

Wir wollen diesen durch die Eckenzuordnung π erzeugten Homomorphismus h künftig ebenfalls mit π bezeichnen.

IX. Äquivalente simpliziale Abbildungen.

K' sei ein Komplex auf der Menge M' , K ein Komplex auf der Menge M . Zwei simpliziale Abbildungen π_1 und π_2 von K' in K heißen *äquivalent*, wenn $\pi_1 s' \cup \pi_2 s' \in K$ für jedes Simplex $s' \in K'$ ist.

Satz 26. K' und K seien simpliziale Komplexe auf den Mengen M' bzw. M , S' sei eine Schicht von M' mit $K' \cap S' \neq 0$. Erzeugen die

beiden Eckpunktzuordnungen π_1 und π_2 von M' in M äquivalente simpliziale Abbildungen von K' in K , und ist $\pi_1 S' = \pi_2 S'$, so erzeugen π_1 und π_2 auch äquivalente simpliziale Abbildungen von $\mathcal{D}(K' \cap S')$ in $\mathcal{D}(K \cap S)$ ($S = \pi_1 S'$).

Beweis. Es sei $s' \in \mathcal{D}(K' \cap S')$. Es gibt ein $t' \in K' \cap S'$ mit $s' \subset t'$. Wegen

$$\pi_1 s' \cup \pi_2 s' \subset \pi_1 t' \cup \pi_2 t' \in K \cap S$$

folgt

$$\pi_1 s' \cup \pi_2 s' \in \mathcal{D}(K \cap S).$$

Weiter ergibt sich:

Satz 27. K' und K seien simpliziale Komplexe auf den Mengen M' bzw. M , U' sei eine Schichtung von M' mit $K' \cap S' \neq 0$ für mindestens ein $S' \in U'$. Erzeugen die beiden Eckpunktzuordnungen π_1 und π_2 von M' in M äquivalente simpliziale Abbildungen von K' in K und ist $\pi_1 U' = \pi_2 U'$, so erzeugen π_1 und π_2 auch äquivalente simpliziale Abbildungen von $\bigcup_{S' \in U'} \mathcal{D}(K' \cap S')$ in $\bigcup_{S \in U} \mathcal{D}(K \cap S)$. ($U = \pi_1 U'$).

$H' \subset G' \subset F'$ und $H \subset G \subset F$ seien zwei Tripel finiter simplizialer Komplexe auf den Mengen M' bzw. M , π_1 und π_2 seien zwei Eckpunktzuordnungen von M' in M , die äquivalente simpliziale Abbildungen von H' in H , von G' in G und von F' in F erzeugen.

Wir definieren eine Abbildung q der Gruppe \mathcal{L}_n aller n -Ketten auf F im Koeffizientenbereich \mathcal{G} in die Gruppe \mathcal{L}'_{n-1} aller $n-1$ -Ketten auf F' im Koeffizientenbereich \mathcal{G} . Ist A eine beliebige n -Kette auf F , so legen wir den Wert der $n-1$ -Kette qA in einem beliebigen $n-1$ -Simplex s' von K' so fest:

$$qA s' = qA(a'_1, \dots, a'_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^i A(\pi_1 a'_1, \dots, \pi_1 a'_i, \pi_2 a'_{i+1}, \dots, \pi_2 a'_n).$$

Hilfssatz 1. Ist A n -Kette auf F , so folgt aus $\langle A \rangle \cap G = 0$ bzw. $\langle A \rangle \cap H = 0$ die Gleichung $\langle qA \rangle \cap G' = 0$ bzw. $\langle qA \rangle \cap H' = 0$. Der Beweis ergibt sich unmittelbar daraus, daß π_1 und π_2 äquivalente simpliziale Abbildungen von H' in H erzeugen (bzw. von G' in G).

Hilfssatz 2. Zwischen den Operatoren δ , q , π_1 , π_2 besteht die Beziehung

$$\delta q + q \delta = \pi_2 - \pi_1.$$

Beweis. Wir haben nachzuweisen, daß für ein beliebiges $n-1$ -Simplex $s' \in F'$ und eine beliebige $n-1$ -Kette A auf F die Gleichung

$$(\delta q + q \delta) A s' = (\pi_2 - \pi_1) A s'$$

richtig ist.

Es sei $s' = (a'_1, \dots, a'_n)$ beliebig gewählt.

Formales Rechnen ergibt:

$$\begin{aligned}
 (\delta q + q \delta) A s' &= \sum_{i=1}^n (-1)^i q A(a'_1, \dots, \hat{i}, \dots, a'_n) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^n (-1)^k A(\pi_1 a'_1, \dots, \pi_1 a'_k, \pi_2 a'_k, \dots, \hat{i}, \dots, \pi_2 a'_n) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{i+k} A(\pi_1 a'_1, \dots, \pi_1 a'_k, \pi_2 a'_k, \dots, \hat{i}, \dots, \pi_2 a'_n) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{k=i+1}^n (-1)^{i+k-1} A(\pi_1 a'_1, \dots, \hat{i}, \dots, \pi_1 a'_k, \pi_2 a'_k, \dots, \pi_2 a'_n) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k (-1)^{i+k} A(\pi_1 a'_1, \dots, \hat{i}, \dots, \pi_1 a'_k, \pi_2 a'_k, \dots, \pi_2 a'_n) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{i=k}^n (-1)^{i+k+1} A(\pi_1 a'_1, \dots, \pi_1 a'_k, \pi_2 a'_k, \dots, \hat{i}, \dots, \pi_2 a'_n).
 \end{aligned}$$

Zuerst vergleichen wir die erste und die vierte Doppelsomme: \sum_1 und \sum_4 . Die erste Doppelsomme ist zu erstrecken über alle Zahlenpaare (i, k) , für welche $1 \leq i \leq n$ und $i \leq k + 1$ ist, die vierte dagegen über alle (i, k) mit $1 \leq i \leq n$ und $i \leq k$. Jedem Zahlenpaar $i \neq k$, $i \leq k$, $1 \leq i \leq n$ entspricht in \sum_1 und \sum_4 je ein Summand. Die Summe beider Summanden ist Null. $\sum_1 + \sum_4$ reduziert sich also auf eine Summe, die über sämtliche (i, k) mit $i = k$ und $1 \leq i \leq n$ zu erstrecken ist. Vergleicht man die zweite und die dritte Doppelsomme in derselben Weise, so kommt man schließlich zu dem Resultat

$$\begin{aligned}
 (\delta q + q \delta) A s' &= \sum_{i=1}^n A(\pi_1 a'_1, \dots, \pi_1 a'_{i-1}, \pi_2 a'_i, \dots, \pi_2 a'_n) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^n A(\pi_1 a'_1, \dots, \pi_1 a'_i, \pi_2 a'_{i+1}, \dots, \pi_2 a'_n) \\
 &= A(\pi_2 a'_1, \dots, \pi_2 a'_i, \dots, \pi_2 a'_n) \\
 &\quad - A(\pi_1 a'_1, \dots, \pi_1 a'_i, \dots, \pi_1 a'_n) \\
 &= \pi_2 A s' - \pi_1 A s' \\
 &= (\pi_2 - \pi_1) A s'.
 \end{aligned}$$

Satz 28. Es seien $H' C G' C F'$ und $H C G C F$ zwei Tripel simplizialer finiter orientierter Komplexe; π_1 und π_2 seien zwei Eckpunktzuordnungen, die äquivalente simpliziale Abbildungen von H' in H , von G' in G , von F' in F erzeugen. Dann definieren π_1 und π_2 denselben Homomorphismus von $\mathfrak{B}_n(H, G, F)$ in $\mathfrak{B}_n(H', G', F')$.

Beweis. Es sei $a \in \mathfrak{B}_n(H, G, F)$. Wir wählen aus a einen Repräsentanten \mathcal{A} aus. \mathcal{A} ist ein n -Cozyklus von F mod $F \vdash G$ in $F \vdash H$. Ist die n -Kette A auf F Repräsentant von \mathcal{A} , so ist $\langle A \rangle \cap H = 0$ (nach Definition von $\underline{\mathfrak{Q}}_n$) und $\langle \delta A \rangle \cap G = 0$, weil $\delta \mathcal{A} = 0$ und somit δA Repräsentant des Nullelementes T_n von $\underline{\mathfrak{Q}}_n$ ist.

Aus $\langle A \rangle \cap H = 0$ und $\langle \delta A \rangle \cap G = 0$
folgt nach Hilfssatz 1

$$\langle qA \rangle \cap H = 0 \text{ und } \langle q\delta A \rangle \cap G = 0.$$

qA ist also Repräsentant eines Elementes \mathcal{B} von $\underline{\mathcal{Q}}_n$.

$q\delta A$ ist Repräsentant des Nullelementes von $\underline{\mathcal{Q}}_n$.

Nach Hilfssatz 2 ist

$$\pi_2 A - \pi_1 A = q\delta A + \delta qA.$$

Ersetzen wir also die Ketten A , qA und $q\delta A$ durch die Elemente \mathcal{A} , \mathcal{B} und das Nullelement von $\underline{\mathcal{Q}}_n$, so geht die Gleichung über in

$$\pi_2 \mathcal{A} - \pi_1 \mathcal{A} = \delta \mathcal{B}.$$

$\pi_2 \mathcal{A} - \pi_1 \mathcal{A}$ ist demnach ein n -Corand von $F \bmod F \vdash G$ in $F \vdash H$.
Folglich sind $\pi_2 \mathcal{A}$ und $\pi_1 \mathcal{A}$ Repräsentanten des gleichen Elementes von $\mathcal{B}_n(H', G', F')$:

$$\pi_1 a = \pi_2 a, \text{ w. z. b. w.}$$

Satz 29. $Q' \subset P' \subset K'$ und $Q \subset P \subset K$ seien simpliziale Komplexe auf den Mengen M' bzw. M ; U' sei eine Schichtung von M' mit $K' \cap S' \neq 0$ für mindestens ein $S' \in U'$. Erzeugen die beiden Eckpunktzuordnungen π_1 und π_2 von M' in M äquivalente simpliziale Abbildungen von Q' in Q , von P' in P und von K' in K , und ist $\pi_1 U' = \pi_2 U' = U$, so definieren π_1 und π_2 denselben Homomorphismus von

$$\mathcal{B}_{U', n}(Q', P', K') \text{ in } \mathcal{B}_{U, n}(Q, P, K).$$

Dieser Satz folgt unmittelbar aus Satz 27 und 28.

In den folgenden Abschnitten benötigen wir ausschließlich simpliziale Komplexe. Für diese empfiehlt sich eine Vereinfachung der Cohomologiegruppe, welche, was die Klassifizierung der simplizialen Komplexe anbetrifft, keine Einschränkung bedeutet.

Ist nämlich U eine Schichtung von M , und leiten wir aus ihr die Schichtung \bar{U} ab, die aus allen Schichten \bar{S} besteht, zu welchen es ein $S \in U$ gibt mit $S < \bar{S}$, so ist

$$\sum_{\bar{S} \in \bar{U}} \mathcal{D}(K \cap \bar{S}) = \sum_{S \in U} \mathcal{D}(K \cap S).$$

Denn aus $S < \bar{S}$ folgt

$$\mathcal{D}(K \cap \bar{S}) \subset \mathcal{D}(K \cap S).$$

Wählen wir nämlich $t \in \mathcal{D}(K \cap \bar{S})$ beliebig aus, so gibt es ein $s \in K \cap \bar{S}$ mit $t \subset s$. Wegen $S < \bar{S}$ existiert ein $q \in K \cap S$ und ein $\bar{q} \in K \cap \bar{S}$ mit $q \subset \bar{q}$.

Es ist

$$q \vdash q \cap s \subset \bar{q} \vdash \bar{q} \cap s$$

eine endliche Menge.

Also $q \cap s \cup t \in S$

und $q \cap s \cup t \in K$ (wegen $q \cap s \cup t \subset s \in K$)

oder $t \subset q \cap s \cup t \in K \cap S,$

$t \in \mathcal{D}(K \cap S),$ w. z. b. w.

Wir erhalten also dieselbe Klassifizierung der simplizialen Komplexe durch ihre Cohomologiegruppe, wenn wir künftig den Begriff der Schichtung — enger als bisher — definieren als eine Menge von Schichten, welche mit jeder Schicht S alle Schichten $\bar{S} > S$ enthält.

Ist π eine Eckenzuordnung von M' in M, U' eine Schichtung von $M',$ dann haben wir unter $\pi U'$ diejenige Schichtung von M zu verstehen, die aus allen Schichten S von M besteht, zu welchen es eine Schicht $S' \subset U'$ gibt mit

$$\pi S' \leq S.$$

Es gibt nur eine Schichtung, welche O_M enthält: Es ist die Schichtung aller Schichten von $M.$ Wir bezeichnen sie ebenfalls mit $O_M.$

Die Schichtung U heißt zum Komplex K auf M regulär, wenn es zu jedem $S \in U$ ein $S' \in U$ gibt mit $S' \leq S$ und $KS' \neq \emptyset.$

Die Schichtung U von M heißt zur Eckenzuordnung π von M' in M regulär, wenn es zu jeder Schicht $S \in U$ eine Schicht $S' \in U$ mit $S' < S$ und ein Simplex $s' \in S'$ gibt, so daß s' durch π auf ein Simplex von M ein-eindeutig abgebildet wird.

X. Spektren.

Ein *Spektrum* sei definiert als eine teilweise geordnete Menge Σ mit folgenden Eigenschaften:

Zu je zwei Elementen $e_1 \in \Sigma$ und $e_2 \in \Sigma$ gibt es ein Element $e \in \Sigma$ mit $e_1 \leq e$ und $e_2 \leq e.$ Jedem Element $e \in \Sigma$ sei eine Menge $M(e)$ und drei simpliziale Komplexe $Q(e) \subset P(e) \subset K(e)$ zugeordnet. Zu je zwei Elementen $e' > e$ gehöre eine nicht leere Menge von Eckpunktzuordnungen von $M(e')$ in $M(e).$ Diese Eckpunktzuordnungen heißen Projektionen von e' in $e.$ Sind π_1 und π_2 zwei Projektionen von e' in $e,$ so sollen sie äquivalente simpliziale Abbildungen von $Q(e')$ in $Q(e),$ von $P(e')$ in $P(e)$ und von $K(e')$ in $K(e)$ erzeugen. Ist $e'' > e' > e$ und π' eine Projektion von e'' in e' und π eine Projektion von e' in $e,$ so soll $\pi'' = \pi' \pi$ eine Projektion von e'' in e sein.

T sei eine nicht leere Teilmenge von $\Sigma,$ welche für $e \leq e'$ mit jedem $e \in T$ auch $e' \in \Sigma$ enthält. Ordnen wir jedem $e \in T$ die Menge $M(e),$ die Komplexe $Q(e), P(e)$ und $K(e),$ sowie je zwei Elementen $e < e'$ die Projektionen aus Σ von e' in e zu, so erhalten wir wieder ein Spektrum, das „Teilspektrum“ T von $\Sigma.$

Satz 30. *Der Durchschnitt $T_1 \cap T_2$ zweier Teilspektren T_1 und T_2 von Σ ist wieder ein Teilspektrum von $\Sigma.$*

Beweis. $T_1 \cap T_2$ ist nicht leer. Denn ist $e_1 \in T_1$ und $e_2 \in T_2$, so gibt es ein e mit $e_1 \leq e$ und $e_2 \leq e$. Es ist $e \in T_1 \cap T_2$.

Ist $e \in T_1 \cap T_2$, beliebig und $e \leq e'$, so folgt $e' \in T_1$ und $e' \in T_2$, also $e' \in T_1 \cap T_2$.

\mathfrak{F} sei die Menge aller Funktionen F folgender Eigenschaften:

1. Der Definitionsbereich von F ist ein Teilspektrum T von Σ .
2. F ordnet jedem $e \in T$ eine Schichtung $F(e)$ von $M(e)$ zu.
3. Für $e' > e$, $e' \in T$, $e \in T$ gibt es eine Projektion von e' in e mit

$$\pi F(e') = F(e),$$

wobei $F(e')$ zu π und $K(e')$ regulär ist.

Die Funktion F_0 , die jedem e die Nullschichtung von $M(e)$ zuordnet, gehört offenbar zu \mathfrak{F} .

Es sei F ein Element von \mathfrak{F} mit dem Definitionsbereich T . Jedem $e \in T$ entspricht die Gruppe $\mathfrak{B}_{F(e), n}(Q(e), P(e), K(e))$.

Ist π eine beliebige Projektion von $e' \in T$ in $e \in T$ mit $\pi F(e') = F(e)$, so definiert diese einen Homomorphismus $h_n(F; e', e)$ von $\mathfrak{B}_{F(e), n}(Q(e), P(e), K(e))$ in $\mathfrak{B}_{F(e'), n}(Q(e'), P(e'), K(e'))$. Nach Satz 29 ist dieser Homomorphismus unabhängig von der speziellen Wahl der Projektion π .

Sind F' und F zwei Elemente von \mathfrak{F} mit den Definitionsbereichen T' und T , so schreiben wir

$$F' \subset F,$$

wenn $T' \subset T$ und für jedes $e \in T'$

$$F'(e) = F(e)$$

ist.

Wir bezeichnen zwei Elemente F' und F von \mathfrak{F} als äquivalente

$$F_1 \sim F_2,$$

wenn es ein F_1 in \mathfrak{F} gibt mit

$$F_{12} \subset F_1 \text{ und } F_{12} \subset F_2.$$

Die Relation \sim ist natürlich reflexiv und symmetrisch. Sie ist aber auch transitiv. Denn ist

$$F_1 \sim F_2 \text{ und } F_2 \sim F_3,$$

so folgt die Existenz von Elementen F_{12} und F_{23} von (die zugehörigen Definitionsbereiche seien T_{12} und T_{23}) mit

$$F_{12} \subset F_1 \text{ und } F_{12} \subset F_2;$$

$$F_{23} \subset F_2 \text{ und } F_{23} \subset F_3.$$

Wir geben eine Funktion $F_{13} \in \mathfrak{F}$ an, deren Definitionsbereich

$$T_{13} = T_{12} \cap T_{23}$$

sei, indem wir für jedes $e \in T_{13}$

$$F_{13}(e) = F_1(e) = F_{12}(e) = F_2(e) = F_{28}(e) = F_3(e)$$

setzen. Offensichtlich ist

$$F_{13} \subset F_1 \text{ und } F_{13} \subset F_3.$$

Durch die Relation \sim gewinnen wir also eine Klasseneinteilung von \mathfrak{F} in zueinander fremde Klassen. Jede Klasse heißt eine Schichtung von Σ .

Die Cohomologiegruppe von Σ werden wir in der Form

$$\mathfrak{B}(\Sigma) = \sum_{U \in W} \sum_{n=-1}^{\infty} \mathfrak{B}_{U,n}(\Sigma)$$

definieren. W ist hierin die Menge aller Schichtungen von Σ .

Wir brauchen hierzu nur zu jeder Schichtung U und jeder ganzen Zahl $n \geq -1$ das zugehörige „Glie“ der direkten Summe zu erklären. Dabei verfahren wir ähnlich wie bei der Definition der Limesgruppe eines direkten Systems von Gruppenhomomorphismen. Die Schichtung U und die ganze Zahl $n \geq -1$, sowie der zugrunde gelegte Koeffizientenbereich \mathfrak{G} sind im Folgenden unveränderlich.

\mathfrak{f} sei die Menge aller Funktionen f , zu welchen es ein $F \in U$ von folgender Beschaffenheit gibt:

1. Der Definitionsbereich von f stimmt mit dem Definitionsbereich T von F überein.

2. f ordnet jedem $e \in T$ ein

$$f(e) \in \mathfrak{B}_{F(e),n}(Q(e), P(e), K(e))$$

zu, so daß für die Elemente e und $e' > e$ von T

$$f(e') = h_n(F; e', e) f(e)$$

ist.

Sind f' und f Elemente von \mathfrak{f} mit den Definitionsbereichen T' und T , so schreiben wir

$$f' \subset f,$$

wenn $T' \subset T$ und für jedes $e \in T'$

$$f(e) = f'(e)$$

ist.

Zwei Funktionen f_1 und f_2 von \mathfrak{f} heißen äquivalent

$$f_1 \sim f_2,$$

wenn es ein $f_{12} \in \mathfrak{f}$ gibt mit

$$f_{12} \subset f_1 \text{ und } f_{12} \subset f_2.$$

Genau wie für \mathfrak{F} zeigt man, daß \sim eine Klasseneinteilung von \mathfrak{f} in zueinander fremde Klassen hervorruft.

Die Menge aller dieser Klassen machen wir zu einer ABELSchen Gruppe, welche wir zur n -ten Cohomologiegruppe $\mathfrak{B}_{U,n}(\Sigma)$ der Schichtung U des Spektrums Σ erklären.

Sind a_1 und a_2 Elemente von E , so bestimmen wir $a_1 + a_2 \in E$ folgendermaßen:

Zu a_1 und a_2 gehören nach Voraussetzung zwei Elemente $F_1 \in U$ und $F_2 \in U$ mit den Eigenschaften (1) und (2). Wir bestimmen ein $F \in U$ (Definitionsbereich \mathbb{T}) mit $F \subset F_1$ und $F \subset F_2$, und wählen aus a_1 und a_2 zwei Repräsentanten f_1 und f_2 aus. Das Element $g \in \mathfrak{f}$ mit dem Definitionsbereich \mathbb{T} sei dann durch die Relation

$$g(e) = f_1(e) + f_2(e) \quad (e \in \mathbb{T})$$

festgelegt. Die durch g bestimmte Klasse von E sei $a_1 + a_2$. Es läßt sich zeigen, daß $a_1 + a_2$ unabhängig von der Wahl der Repräsentanten ist.

Denn gehen wir von $F' \in U$ mit $F' \subset F_1$ und $F' \subset F_2$ und den Repräsentanten $f'_1 \in a_1$ und $f'_2 \in a_2$ aus, so gibt es zunächst ein $F'' \in U$ (Definitionsbereich \mathbb{T}'') mit $F'' \subset F$ und $F'' \subset F'$. Wir konstruieren ein Element $g'' \in \mathfrak{f}$ mit dem Definitionsbereich \mathbb{T}'' , indem wir

$$g''(e) = f_1(e) + f_2(e) = f'_1(e) + f'_2(e) \quad (e \in \mathbb{T}'')$$

festlegen.

Es ist dann

$$g'' \subset g, \quad g'' \subset g',$$

woraus $g \sim g'$ folgt, wie zu zeigen war.

Durch die Operation $+$ wird E zu einer ABELSchen Gruppe.

Ein Teilspektrum Σ' von Σ heißt *vollständiges* Teilspektrum von Σ , wenn es zu jedem $e \in \Sigma$ ein $e' \in \Sigma'$ gibt mit $e' \geq e$.

Wir erklären eine ein-eindeutige Abbildung J der Menge aller Schichtungen von Σ' auf die Menge aller Schichtungen von Σ . Ist U' eine beliebige Schichtung von Σ' , so wählen wir aus ihr einen Repräsentanten F' aus. Natürlich ist $F' \in \mathfrak{F}$; F' ist also Element einer Schichtung U von Σ .

Wir setzen

$$U = JU'.$$

U ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten. Denn sind F'_1 und F'_2 Repräsentanten von U' , so gibt es ein F'_{12} mit

$$F'_{12} \subset F'_1, \quad F'_{12} \subset F'_2.$$

Wegen $F'_{12} \in \mathfrak{F}$ gehören F'_1 und F'_2 derselben Schichtung von Σ an.

Ist U eine Schichtung von Σ , so gibt es eine Schichtung U' von Σ' , für welche

$$U = JU'$$

ist. Denn für einen beliebigen Repräsentanten von U mit dem Definitionsbereich \mathbb{T} setzen wir F' (Definitionsbereich Σ') durch

$$F'e = Fe \quad (e \in \mathbb{T} \cap \Sigma')$$

fest.

Aus $U = JU'_1, U = JU'_2$
folgt $U'_1 = U'_2$.

Denn sind F'_1 und F'_2 Repräsentanten von U'_1 und U'_2 , so ist $F'_1 \in U$ und $F'_2 \in U$. Es existiert also ein F'_{12} mit

$$F'_{12} \subset F'_1, F'_{12} \subset F'_2.$$

Das bedeutet aber $U'_1 = U'_2$.

Damit ist die Ein-eindeutigkeit von J bewiesen.

Satz 31. *Ist Σ' ein vollständiges Teilspektrum von Σ , so ist die Cohomologiegruppe von Σ' bezüglich der Abbildung J und der identischen Abbildung der ganzen Zahlen auf sich gliedweise isomorph der Cohomologiegruppe von Σ , wenn beidemal derselbe Koeffizientenbereich \mathfrak{G} benutzt wird.*

Beweis. Wir geben eine ein-eindeutige Abbildung I von $\mathfrak{B}_{U',n}(\Sigma')$ auf $\mathfrak{B}_{U,n}(\Sigma)$ an: Aus jedem Element $a \in \mathfrak{B}_{U',n}(\Sigma')$ wählen wir einen Repräsentanten f aus. f liegt in einem Element b von $\mathfrak{B}_{U,n}(\Sigma)$. Wir setzen

$$Ia = b.$$

Die Unabhängigkeit der Zuordnung I von der Wahl der Repräsentanten, sowie die Ein-eindeutigkeit von I wird genau so wie für die Abbildung J bewiesen.

Überdies ist I ein Isomorphismus. Denn sind a_1, a_2 und a_{12} Elemente von $\mathfrak{B}_{U',n}(\Sigma')$, f_1 und f_2 Repräsentanten von a_1 und a_2 , so folgt aus der Beziehung

$$a_1 + a_2 = a_{12},$$

daß $f_1 + f_2$ Repräsentant von a_{12} ist. Das ergibt

$$Ia_1 + Ia_2 = Ia_{12}.$$

Einen sehr einfachen Spezialfall der Spektren erhalten wir, wenn wir annehmen, daß Σ nur ein Element e enthält. Es können dann e eine beliebige Menge $M(e)$ und drei beliebige simpliziale Komplexe mit $Q(e) \subset P(e) \subset K(e)$ auf $M(e)$ zugeordnet sein. Die Schichtungen von Σ und die zu $K(e)$ regulären Schichtungen von $M(e)$ lassen sich in trivialer Weise ein-eindeutig einander zuordnen. Natürlich besteht gliedweise Isomorphie zwischen der Cohomologiegruppe von Σ und der Cohomologiegruppe von $K \bmod K \vdash P$ in $K \vdash Q$, wenn beiden derselbe Koeffizientenbereich zugrunde liegt.

Zwei Spektren Σ und Σ' heißen isomorph, wenn eine Abbildung J und zu jedem e eine Abbildung $I(e)$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

1. J ist eine ein-eindeutige Abbildung von Σ auf Σ' .
2. $I(e)$ ist eine ein-eindeutige Abbildung von $M(e)$ auf $M(Je)$.
3. $I(e)$ erzeugt einen Isomorphismus von $Q(e)$ auf $Q(Je)$, von $P(e)$ auf $P(Je)$ und von $K(e)$ auf $K(Je)$.

4. Ist $e < e'$, so soll die Abbildung Z , die jeder Projektion π von e' in e die Abbildung $I(e)^{-1}\pi I(e')$ von $M(Je')$ in $M(Je)$ zuordnet, eine ein-eindeutige Abbildung der Menge aller Projektionen von e' in e auf die Menge aller Projektionen von Je' in Je sein.

Unmittelbar aus der Definition folgt, daß diese Isomorphiebeziehung reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Die Abbildung J und die Gesamtheit der Abbildungen $I(e)$ bezeichnen wir als eine Isomorphie I von Σ auf Σ' .

Mit Hilfe von I kann man in naheliegender Weise eine ebenfalls mit I bezeichnete ein-eindeutige Abbildung der Menge aller Schichtungen von Σ auf die Menge aller Schichtungen von Σ' definieren.

Es gilt

Satz 32. Ist I eine Isomorphie des Spektrums Σ' auf das Spektrum Σ , so ist die Cohomologiegruppe von Σ' mit dem Koeffizientenbereich \mathcal{G} bezüglich I und der identischen Abbildung der ganzen Zahlen auf sich gliedweise isomorph der Cohomologiegruppe von Σ mit dem Koeffizientenbereich \mathcal{G} .

XI. Überdeckungsfamilien.

T, S, R seien drei topologische Räume¹¹⁾, die der Bedingung $TCSR$ unterworfen sind.

Sind \mathfrak{U}' und \mathfrak{U} zwei Überdeckungen von R , so heißt \mathfrak{U}' Verfeinerung von \mathfrak{U} , wenn es zu jedem $U' \in \mathfrak{U}'$ ein $U \in \mathfrak{U}$ gibt mit $U' \subset U$. Wir schreiben hierfür auch

$$\mathfrak{U} \leq \mathfrak{U}'.$$

Jedes System Σ von Überdeckungen von R wird durch die Relation \leq teilweise geordnet. Hat das System Σ die Eigenschaft, daß es zu je zwei Überdeckungen eine gemeinsame Verfeinerung enthält, so heißt Σ eine Familie von Überdeckungen von R . Eine Familie Σ läßt sich auf zweierlei Weise zu einem Spektrum erweitern, welches mit $\Sigma_I(T, S)$ bzw. $\Sigma_{II}(T, S)$ bezeichnet wird.

I. Es sei $\mathfrak{U} \in \Sigma$; wir verwenden als Menge $M(\mathfrak{U})$ die Überdeckung \mathfrak{U} selbst. Als Komplex $Q(\mathfrak{U})$ erklären wir den Nerven von \mathfrak{U} in T : Das ist die Menge aller Simplexe s auf der Menge \mathfrak{U} , für welche der Durchschnitt

$$D(s) \cap T \neq \emptyset$$

nicht leer ist. Rechnen wir zu $Q(\mathfrak{U})$ außerdem die leere Menge, so ist $Q(\mathfrak{U})$ offenbar simplizial. Analog werden die simplizialen Komplexe $P(\mathfrak{U})$ (in bezug auf S), und $K(\mathfrak{U})$ (in bezug auf R) definiert.

¹¹⁾ Definition des topologischen Raumes nach N. BOURBAKI.

Ist \mathcal{U}' Verfeinerung von $\mathcal{U} \neq \mathcal{U}'$, so soll jede eindeutige Abbildung π von \mathcal{U}' in \mathcal{U} , welche

$$U'CU = \pi U' \text{ f\"ur jedes } U' \in \mathcal{U}'$$

erf\"ullt, eine Projektion von \mathcal{U}' in \mathcal{U} sein. Nach Definition der Verfeinerung ist die Menge aller Projektionen von \mathcal{U}' in \mathcal{U} nicht leer. Das zeigt man mit Hilfe des Auswahlpostulates.

Ist π' eine Projektion von \mathcal{U}'' in \mathcal{U}' und π eine Projektion von \mathcal{U}' in \mathcal{U} , so ist $\pi'\pi$ eine Projektion von \mathcal{U}'' in \mathcal{U} . Sind ferner π_1 und π_2 zwei Projektionen von \mathcal{U}' in \mathcal{U} , und ist s ein Simplex von $Q(\mathcal{U})$ bzw. $P(\mathcal{U})$ bzw. $K(\mathcal{U})$, dann folgt

$$D(\pi_1 s) \cap T \supset D(s) \cap T \neq 0$$

und

$$D(\pi_1 s \cup \pi_2 s) \cap T \supset D(s) \cap T \neq 0.$$

(Analoge Gleichungen gelten f\"ur S und R .)

Damit ist nachgewiesen, da\B{B} zwei Projektionen von \mathcal{U}' in \mathcal{U} \u00e4quivalente simpliziale Abbildungen von $Q(\mathcal{U}')$ in $Q(\mathcal{U})$, von $P(\mathcal{U}')$ in $P(\mathcal{U})$ und von $K(\mathcal{U}')$ in $K(\mathcal{U})$ hervorrufen.

Das Spektrum $\sum_I(T, S)$ haben wir so vollst\u00e4ndig definiert.

II. Bei der zweiten Art treten in der Menge $M(\mathcal{U})$ an die Stelle der \u00dcberdeckungselemente die Punkte des Raumes R selbst. Ist $\mathcal{U} \in \Sigma$, so sei $M(\mathcal{U}) = R$. $Q(\mathcal{U})$ wird so erkl\u00e4rt: Die Teilmenge $s \subset T$ sei genau dann Simplex von $Q(\mathcal{U})$, wenn es ein $U \in \mathcal{U}$ gibt mit $s \subset U$. Analog werden $P(\mathcal{U})$ und $K(\mathcal{U})$ definiert.

Ist \mathcal{U}' Verfeinerung von $\mathcal{U} \neq \mathcal{U}'$, so soll die identische Abbildung von R auf sich und nur diese Projektion π von \mathcal{U}' in \mathcal{U} hei\B{B}en. Es ist leicht einzusehen, da\B{B} π eine simpliziale Abbildung von $Q(\mathcal{U}')$ in $Q(\mathcal{U})$, von $P(\mathcal{U}')$ in $P(\mathcal{U})$ und von $K(\mathcal{U}')$ in $K(\mathcal{U})$ erzeugt. Damit ist $\sum_{II}(S, T)$ definiert.

\mathfrak{G} sei nun eine beliebige ABELSche Gruppe und Σ eine Familie von R . Wir nennen $\mathfrak{B}(\sum_I(S, T); \mathfrak{G}; R)$ bzw. $\mathfrak{B}(\sum_{II}(S, T); \mathfrak{G}; R)$ die Cohomologiegruppe I bzw. II von $R \bmod R \vdash S$ in $R \vdash T$ bez\u00fcglich Σ mit dem Koeffizientenbereich \mathfrak{G} .

Ist $T = 0, S = R$, so schreiben wir einfach

$$\mathfrak{B}(\sum_I; \mathfrak{G}; R) \text{ und } \mathfrak{B}(\sum_{II}; \mathfrak{G}; R)$$

und sprechen von der Cohomologiegruppe I bzw. II von R bez\u00fcglich Σ mit dem Koeffizientenbereich \mathfrak{G} .

Ist Σ eine topologisch ausgezeichnete Familie von \u00dcberdeckungen, so sind die eben definierten zugeh\u00f6rigen Gruppen topologisch invariant. D. h.: Gibt es eine topologische Abbildung von R in R' , welche die R\u00e4ume $T'CS'CR'$ beziehungsweise in die R\u00e4ume $T'CS'CR'$ \u00fcberf\u00fchrt, so sind entsprechende Cohomologiegruppen bez\u00fcglich Σ gliedweise isomorph. Es sollen nun einige Typen topologisch ausgezeichneter Familien aufgez\u00e4hlt werden:

1. \mathfrak{C} und \mathfrak{C}' seien zwei Mengen von Mächtigkeiten, welche folgende Bedingungen erfüllen: Enthält \mathfrak{C} bzw. \mathfrak{C}' eine endliche Zahl, so soll \mathfrak{C} bzw. \mathfrak{C}' sämtliche endlichen Zahlen enthalten. Die Mächtigkeit von $\{R\}$ sei obere Schranke von \mathfrak{C} und \mathfrak{C}' . $\Sigma_0(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}')$ bestehe aus allen offenen Überdeckungen \mathfrak{U} , für welche

a) die Mächtigkeit von \mathfrak{U} zu \mathfrak{C} gehört
 und b) die Mächtigkeit eines jeden Simplexes $s \in K(\mathfrak{U})$ zu \mathfrak{C}' gehört.
 Sonderfälle von 1) sind:

2. Die Familie Σ_0 , die aus allen offenen Überdeckungen von R besteht.

3. Die Familie Γ_0 , zu welcher alle endlichen offenen Überdeckungen von R zählen.

4. Die Familie $\tilde{\Gamma}_0$ bestehe aus allen Überdeckungen folgender Eigenschaften:

a) \mathfrak{U} ist abzählbar;

b) höchstens endlich viele Elemente von \mathfrak{U} besitzen einen nicht leeren Durchschnitt.

Die Γ_0 und $\tilde{\Gamma}_0$ entsprechenden Spektren besitzen nur eine Schicht, nämlich ihre Nullschicht.

Ersetzt man in allen angeführten Familien die offenen Mengen durch die abgeschlossenen Mengen von R , so erhält man natürlich ebenfalls topologisch ausgezeichnete Familien. Sie sollen mit Σ_a , $\Sigma_a(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}')$ usw. bezeichnet werden.

Γ_0 ist die von E. ČECH zur Definition der Homologiegruppe eines beliebigen topologischen Raumes verwandte Überdeckungsfamilie.

Das zur Nullschichtung von Σ_0 gehörige Glied von $\mathfrak{B}(\Sigma_0; \mathfrak{G}; R)$ entspricht dem Verfahren von J. W. ALEXANDER.

Σ sei eine Familie von Überdeckungen von R . Σ' heißt eine vollständige Teilfamilie von Σ , wenn $\Sigma' \subset \Sigma$ ist, und es zu jeder Überdeckung $\mathfrak{U} \in \Sigma$ eine Verfeinerung $\mathfrak{U}' \in \Sigma'$ gibt. Die von Σ' erzeugten Spektren sind vollständige Teilspektren der entsprechenden von Σ erzeugten Spektren.

Aus Satz 31 ergibt sich

Satz 33. *Ist Σ' eine vollständige Teilfamilie von Σ , so ist die Cohomologiegruppe von R bezüglich $\Sigma \bmod R \vdash S$ in $R \vdash T$ mit dem Koeffizientenbereich \mathfrak{G} gliedweise isomorph der entsprechenden Cohomologiegruppe bezüglich Σ .*

Ist der Raum R bikompakt, dann ist Γ_0 nach Definition vollständige Teilfamilie von Σ_0 . Ist umgekehrt für den Raum R Γ_0 vollständige Teilfamilie von Σ_0 , dann muß R bikompakt sein.

Es folgt also

Satz 34. *Ist der Raum R bikompakt, so ist die Cohomologiegruppe von R bezüglich $\mathfrak{G} \bmod R \vdash S$ in $R \vdash T$ im Koeffizientenbereich \mathfrak{G} gliedweise isomorph der entsprechenden Cohomologiegruppe bezüglich Γ_0 .*

Für einen bikompakten Raum kommt es also nur auf die Nullschichtung von Σ_0 an.

XII. Komplexe als diskrete Räume.

K sei ein beliebiger simplizialer Komplex auf der Menge M . Wir machen ihn zu einem diskreten topologischen Raum¹²⁾; d. h. genauer: Wir ordnen K einen diskreten topologischen Raum \tilde{K} zu, der — abgesehen vom leeren Simplex, welches wir aus formalen Gründen ausschließen müssen — dieselben Elemente wie K enthält: Eine Teilmenge Q von \tilde{K} ist genau dann offen, wenn sie zu jedem $S \in Q$ jedes Simplex $t \in K$ mit $s \subset t$ enthält. Ist $a \in \mathfrak{R}$, so bezeichne $U(a)$ diejenige offene Menge von \tilde{K} , welche aus allen Simplexen s mit $a \in s$ besteht. Die Menge aller offenen Mengen $U(a)$ ist eine offene Überdeckung von \tilde{K} . Sie werde mit \mathfrak{U}_0 bezeichnet. Ist \mathfrak{U} eine beliebige offene Überdeckung von \tilde{K} , so ist \mathfrak{U}_0 Verfeinerung von \mathfrak{U} . Denn ist $a \in \mathfrak{R}$ beliebig gewählt, so gibt es ein $U \in \mathfrak{U}$, welches das Simplex (a) enthält. Es ist $U(a) \subset U$. Die nur aus \mathfrak{U}_0 bestehende Familie ist demnach vollständige Teilfamilie von Σ_0 . Nun ist der Nerv von \mathfrak{U}_0 dem Komplex K isomorph: Die nicht leere Teilmenge s von M gehört nämlich genau dann zu K , wenn der Durchschnitt aller $U(a)$ mit $a \in s$ nicht leer ist. Also vermittelt die Zuordnung $a \rightarrow U(a)$ einen Isomorphismus.

Wir haben somit folgenden Satz gefunden:

Satz 35. *Die Cohomologiegruppe I von \tilde{K} bezüglich Σ_0 mit dem Koeffizientenbereich \mathfrak{G} ist gliedweise isomorph der Cohomologiegruppe des Komplexes K mit dem Koeffizientenbereich \mathfrak{G} .*

Es gibt also zu jedem Komplex einen topologischen Raum mit gliedweise isomorpher Cohomologiegruppe.

Wir wenden uns jetzt der Familie Γ_0 zu. Wir wollen zeigen, daß man mit Hilfe von Γ_0 über die Struktur von K in den von der Nullschicht verschiedenen Schichten nichts aussagen kann. Genauer ausgedrückt: Stimmen zwei Komplexe, die sich sonst beliebig unterscheiden können, in der Nullschicht überein, so besitzen die zugehörigen topologischen Räume isomorphe Cohomologiegruppen bezüglich Γ_0 . So sind z. B. die Cohomologiegruppen von K und KO_M bezüglich $\tilde{\Gamma}_0$, beidemale mit demselben Koeffizientenbereich, isomorph. Bezüglich Σ_0 ist das im allgemeinen keineswegs der Fall. Wir werden also zu einer weitergehenden Klassifizierung der topologischen Räume gelangen, wenn wir Familien wie Σ_0 mit heranziehen.

Zum Beweis der aufgestellten Behauptung benötigen wir zuerst folgende Definitionen:

Ist Q eine beliebige Teilmenge von \mathfrak{R} , so bezeichnen wir mit $U(Q)$ die offene Menge von \tilde{K} , die aus allen $s \in \tilde{K}$ besteht, zu welchen es ein $a \in Q$ gibt mit $a \in s$.

¹²⁾ Nach ALEXANDROFF bezeichnet man einen topologischen Raum als diskret, wenn der Durchschnitt beliebig vieler offener Mengen offen ist.

Die Menge \mathfrak{U}^* , die aus allen offenen Mengen der Form $U(Q)$ besteht, ist natürlich eine offene Überdeckung von \tilde{K} .

\mathfrak{U} sei eine beliebige endliche offene Überdeckung von \tilde{K} . Wir bilden die Menge T aller Teilmengen Q von \mathfrak{R} folgender Eigenschaft: Es gibt ein $U \in \mathfrak{U}$, für welches Q die Menge aller $a \in \mathfrak{R}$ mit $(a) \in U$ ist.

Mit Hilfe von T geben wir eine endliche offene Überdeckung \mathfrak{B} an: Sie bestehe aus allen $U(Q)$ mit $Q \in T$. \mathfrak{B} ist Verfeinerung von \mathfrak{U} . Die Familie Γ_0^* aller endlichen offenen Überdeckungen \mathfrak{B} mit $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{U}^*$ ist also eine vollständige Teilfamilie von Γ_0 .

Satz 36. *K und K' seien zwei simpliziale Komplexe auf den Mengen M bzw. M' . Sind $K \cap O_M$ und $K' \cap O_{M'}$ isomorph, so ist die Cohomologiegruppe von \tilde{K} bezüglich Γ_0 mit dem Koeffizientenbereich \mathcal{G} isomorph der entsprechenden Cohomologiegruppe von \tilde{K}' .*

Beweis. π sei eine Eckenzuordnung, die $K \cap O_M$ auf $K' \cap O_{M'}$ isomorph abbildet. Jeder Teilmenge Q von \mathfrak{R} entspricht eine Teilmenge $Q' = \pi Q$ von \mathfrak{R}' und umgekehrt.

Der offenen Menge $U(Q)$ ordnen wir die offene Menge

$$\pi U(Q) = U(\pi Q)$$

zu. Der Überdeckung $\mathfrak{B} \in \Gamma_0^*$ ordnen wir die Überdeckung $\mathfrak{B}' = \pi \mathfrak{B}$ zu, die aus allen $U' = \pi U (U \in \mathfrak{B})$ besteht. Diese ein-eindeutige Abbildung von Γ_0^* auf $\Gamma_0^{*'}$ definiert einen Isomorphismus des zu Γ_0^* gehörigen Spektrums auf das zu $\Gamma_0^{*'}$ gehörige Spektrum. Da die Familien Γ_0^* und $\Gamma_0^{*'}$ vollständige Teilfamilien von Γ_0 und Γ_0' sind, ist der Satz bewiesen.

(Eingegangen am 31. Mai 1951.)

Über Stetigkeit von Integraltransformationen.

Von

Karl Zeller in Tübingen.

Inhaltsübersicht.

	Seite
§ 1. Einleitung	167
§ 2. Bezeichnungen	168
§ 3. F-Räume	170
§ 4. F-Systeme	170
§ 5. Die F-Systeme M und P	172
§ 6. Beispiele für Räume aus M und P	173
§ 7. Der Hauptsatz	175
§ 8. F_σ -Räume	176
§ 9. Abbildungen mit Folgen von Operationen	177
§ 10. Ein Permanenzsatz	178
§ 11. Schlußbemerkungen	180

§ 1.

Einleitung.

Wir betrachten Integraltransformationen der Form

$$(*) \quad y(s) = \gamma(s) \cdot x(s) + \int_0^{\rightarrow \infty} \Gamma(s, t) x(t) dt \quad (0 \leq s < \infty).$$

Dabei sind x, γ und Γ komplexwertige, meßbare Funktionen; und es ist $\int_0^{\rightarrow \infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T$ gesetzt, wo \int_0^T — wie auch alle später vorkommenden Integrale — im LEBESGUESCHEN Sinne aufzufassen ist. Das wichtigste Ergebnis der Arbeit (Satz 7.1) lautet nun: Ordnet die Transformation (*) jedem $x = x(t)$ aus einem F-Raum im Sinne von BANACH [3] (S. 35) ein $y = y(s)$ aus einem ebensolchen Raum zu, so ist diese Abbildung stetig. Hierbei werden noch einige Zusatzvoraussetzungen gemacht, die im wesentlichen besagen, daß die betreffenden Funktionenräume in „natürlicher“ Weise als F-Räume aufgefaßt werden.

Der Beweis von 7.1 beruht auf der Theorie der F-Systeme — das sind Mengen von „verwandten“ F-Räumen, siehe § 4 — und auf dem Begriff der „fehlkonvergenzfreien“ Abbildung (siehe § 2). Eine grundlegende Rolle spielt ein Satz aus BANACH [3] (Th. 7, S. 41, hier Satz 3.5).

Die Theorie der F-Systeme ist auch für sich allein von Interesse. Sie verallgemeinert Sätze, die vom Verfasser in einer früheren Arbeit [12] für Räume von Zahlenfolgen aufgestellt wurden.

Weiter führen wir die F_σ -Räume ein: Ein F_σ -Raum ist die mit einem geeigneten Konvergenzbegriff versehene Vereinigung abzählbar vieler F-Räume (§ 8). Satz 7. 1 wird auf F_σ -Räume verallgemeinert.

Schließlich stellen wir einen Permanenzsatz für Integraltransformationen, wobei wir die erweiterte Form von 7. 1 verwenden.

§ 2.

Bezeichnungen.

Wir gebrauchen die Symbole \rightsquigarrow (daraus folgt), \rightsquigarrow (folgt aus), \rightsquigarrow (gleichbedeutend).

Wir betrachten Mengen $\mathfrak{B}, \mathfrak{Z}, \dots$ mit Elementen ξ, η, \dots , komplexe Zahlen a, b, \dots , sowie gewisse Strukturen auf Mengen.

Eine Menge \mathfrak{B} heißt ein (*komplexer*) *linearer Raum*, wenn in \mathfrak{B} zwei Verknüpfungen $\xi + \eta$ und $a\xi$ (a komplex) erklärt sind, die noch gewissen Gesetzen genügen (siehe BANACH [3], S. 26). In bekannter Weise wird der Begriff „linearer Unterraum“ definiert.

Eine Menge \mathfrak{B} heißt ein Raum $\mathfrak{B} = [\mathfrak{B}; \mathcal{W}]$ mit einem *Konvergenzbegriff* \mathcal{W} , wenn in \mathfrak{B} eine Vorschrift definiert ist, die gewisse Folgen ξ_n in \mathfrak{B} als konvergent gegen ein eindeutig bestimmtes Grenzelement ξ auszeichnet. Bezeichnung der Konvergenz:

$$\xi_n \rightarrow \xi[\mathfrak{B}; \mathcal{W}], \quad \lim \xi_n = \xi[\mathfrak{B}], \text{ usw.}$$

Unter einer *F-Norm* φ in einem linearen Raum \mathfrak{B} verstehen wir ein Funktional mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &\geq 0, \\ \varphi(\xi) = 0 &\rightsquigarrow \xi = 0 \text{ (Nullelement)}, \\ \varphi(\xi) &= \varphi(-\xi), \\ \varphi(\xi + \eta) &\leq \varphi(\xi) + \varphi(\eta), \\ h_n \rightarrow 0 &\rightsquigarrow \varphi(h_n \xi) \rightarrow 0 \quad (\xi \in \mathfrak{B}, h_n \text{ komplex}), \\ \varphi(\xi_n) \rightarrow 0 &\rightsquigarrow \varphi(h \xi_n) \rightarrow 0 \quad (\xi_n \in \mathfrak{B}, h \text{ komplex}). \end{aligned}$$

Mit Hilfe der F-Norm definieren wir einen Konvergenzbegriff:

$$\xi_n \rightarrow \xi[\mathfrak{B}] \rightsquigarrow \varphi(\xi_n - \xi) \rightarrow 0.$$

Der lineare Raum \mathfrak{B} zusammen mit der F-Norm φ und dem durch sie definierten Konvergenzbegriff heißt ein *F-normierter Raum* $\mathfrak{B} = [\mathfrak{B}; \varphi]$.

Wir gebrauchen die Bezeichnung \mathfrak{B} sowohl für eine Menge als auch für diese Menge zusammen mit irgendwelchen auf ihr definierten

Strukturen. Nur in Zweifelsfällen werden diese Strukturen näher angegeben (z. B. $[\mathfrak{B}; \mathfrak{W}]$, $[\mathfrak{B}; \varphi]$). Soll betont werden, daß \mathfrak{B} als ein Raum mit Konvergenzbegriff aufzufassen ist, so schreiben wir auch $[\mathfrak{B}]$.

In einem F -normierten Raum $[\mathfrak{B}; \varphi]$ heißt eine Folge ξ_n *konzentriert*, wenn $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \varphi(\xi_m - \xi_n) = 0$ ist. $[\mathfrak{B}; \varphi]$ heißt *vollständig*, wenn jede konzentrierte Folge konvergent (gegen ein Grenzelement) ist; wir nennen dann $[\mathfrak{B}; \varphi]$ auch kurz einen *F-Raum*.

Wir beschränken uns also nicht auf lokalkonvexe F -Räume (für diesen Begriff vgl. man etwa [10]). Von BANACH [3] weichen wir insofern ab, als wir komplexe F -Räume betrachten. Die aus [3] übernommenen Sätze gelten auch für komplexe F -Räume.

Für den Begriff „*magere Menge*“ (= Menge I. Kategorie) verweisen wir auf BANACH [3], S. 13. Die Kenntnis dieses Begriffs ist für das Verständnis der Arbeit nicht nötig.

Die Ausdrucksweise „ Φ ist eine *Operation aus \mathfrak{B} in \mathfrak{Z}* “ bedeutet: „Der genaue Erklärungsbereich von Φ ist eine Teilmenge von \mathfrak{B} ; Φ bildet diese in \mathfrak{Z} ab. Die Aussage „ Φ bildet \mathfrak{B} in \mathfrak{Z} ab“ soll hingegen nicht ausschließen, daß Φ auch für Elemente $\xi \notin \mathfrak{B}$ erklärt ist.

Im folgenden Teil von § 2 bedeutet Φ eine Operation aus \mathfrak{B} in \mathfrak{Z} . Ist $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{Z}$, so bezeichnen wir mit $\Phi \mathfrak{X}$ die Menge der in der Form $\mathfrak{z} = \Phi \xi$ ($\xi \in \mathfrak{X}$) darstellbaren \mathfrak{z} , mit $\Phi^U \mathfrak{Y}$ ($\Phi^U \mathfrak{Y} = \Phi$ -Urbild von \mathfrak{Y}) die Menge der ξ mit $\Phi \xi \in \mathfrak{Y}$. Insbesondere ist $\Phi^U \mathfrak{Z}$ der genaue Erklärungsbereich von Φ . Ist $\Phi^U \mathfrak{Z} = \mathfrak{B}$, so heißt Φ eine Operation *von \mathfrak{B} in \mathfrak{Z}* ; ist $\Phi \mathfrak{B} = \mathfrak{Z}$, so heißt Φ eine Operation *aus (von) \mathfrak{B} auf \mathfrak{Z}* .

Sind \mathfrak{B} und \mathfrak{Z} lineare Räume, so heißt Φ *linear*, wenn $\Phi^U \mathfrak{Z}$ ein linearer Unterraum von \mathfrak{B} ist und $\Phi(\xi + \eta) = \Phi \xi + \Phi \eta$, $\Phi(a\xi) = a \cdot \Phi \xi$ gilt.

Sind \mathfrak{X} und \mathfrak{Y} zwei Räume mit Konvergenzbegriffen, so heißt Φ $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ -*stetig*, wenn $\Phi \mathfrak{X}$ in \mathfrak{Y} abbildet und aus $\xi_n \rightarrow \xi[\mathfrak{X}]$ folgt $\Phi \xi_n \rightarrow \Phi \xi[\mathfrak{Y}]$. Φ heißt $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ -*fehlkonvergenzfrei*, wenn $\Phi \mathfrak{X}$ in \mathfrak{Y} abbildet und aus $\xi_n \rightarrow \xi[\mathfrak{X}]$, $\Phi \xi_n \rightarrow \eta[\mathfrak{Y}]$ folgt $\eta = \Phi \xi$.

Sind ferner \mathfrak{W} und \mathfrak{Z} Mengen von Räumen, die Untermengen von \mathfrak{B} bzw. \mathfrak{Z} sind und irgendwelche Konvergenzbegriffe haben, so bedeutet (für die Operation Φ):

$\mathfrak{W}\mathfrak{Y}$ -stetig: Bildet Φ ein $\mathfrak{C} \in \mathfrak{W}$ in \mathfrak{Y} ab, so ist $\Phi \mathfrak{C}\mathfrak{Y}$ -stetig.

$\mathfrak{W}\mathfrak{Z}$ -stetig: Bildet Φ ein $\mathfrak{C} \in \mathfrak{W}$ in ein $\mathfrak{C} \in \mathfrak{Z}$ ab, so ist $\Phi \mathfrak{C}\mathfrak{Z}$ -stetig.

M. a. W: Ist durch Φ eine Abbildung der genannten Art überhaupt definiert, so ist sie sogar stetig. Nicht verlangt ist also dabei, daß Φ in allen Räumen $\mathfrak{F} \in \mathfrak{W}$ erklärt ist. Entsprechend definieren wir $\mathfrak{W}\mathfrak{Y}$ - und $\mathfrak{W}\mathfrak{Z}$ -fehlkonvergenzfrei. Ist Φ ein Funktional, \mathfrak{Z} also der Raum der komplexen Zahlen (versehen mit dem üblichen Konvergenzbegriff), so gebrauchen wir kürzer die Bezeichnungen \mathfrak{B} -stetig, \mathfrak{W} -stetig usw. an Stelle von $\mathfrak{B}\mathfrak{Z}$ -stetig, $\mathfrak{W}\mathfrak{Z}$ -stetig usw.

§ 3.

F-Räume.

Wir benötigen einige bekannte Hilfssätze über F-Räume und F-normierte Räume.

Hilfssatz 3.1. *Zwei F-Normen φ und ψ definieren in einem linearen Raum \mathfrak{E} genau dann denselben Konvergenzbegriff, wenn*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(x_n) = 0$$

ist. Gilt diese Beziehung, so ist auch jede in $[\mathfrak{E}; \varphi]$ konzentrierte Folge in $[\mathfrak{E}; \psi]$ konzentriert, und umgekehrt.

Hilfssatz 3.2. *Eine in dem F-normierten Raum $[\mathfrak{E}; \varphi]$ konzentrierte Folge x_n enthält eine Teilfolge y_n mit $\sum \varphi(y_n - y_{n+1}) < \infty$. $[\mathfrak{E}; \varphi]$ ist genau dann vollständig, wenn jede Folge mit letzterer Eigenschaft konvergent (gegen ein Grenzelement) ist.*

In den folgenden Sätzen bedeuten \mathfrak{E} und \mathfrak{G} F-Räume, Φ eine Operation von \mathfrak{E} in \mathfrak{G} .

Hilfssatz 3.3. *Gilt mit irgendwelchen Mengen \mathfrak{D}_p ($p = 0, 1, \dots$) die Gleichung $\mathfrak{E} = \bigcup \mathfrak{D}_p$, so ist mindestens eine der Mengen \mathfrak{D}_p nicht mager in $[\mathfrak{E}]$.*

Satz 3.4. *Φ sei linear und $\mathfrak{E}\mathfrak{G}$ -stetig. Dann ist entweder $\Phi\mathfrak{E} = \mathfrak{G}$ oder $\Phi\mathfrak{E}$ mager in $[\mathfrak{G}]$.*

Hilfssatz 3.5. *Φ sei linear und $\mathfrak{E}\mathfrak{G}$ -fehlkonvergenzfrei. Dann ist Φ $\mathfrak{E}\mathfrak{G}$ -stetig.*

Beweise. 3.1 und 3.2 sind trivial. 3.3: Folgt aus BANACH [3], S. 14, Th. 2. 3.4 und 3.5: Siehe BANACH [3], S. 38, Th. 3 bzw. S. 41, Th. 7.

3.1 wird verwendet, um F-Normen in einfachere Gestalt zu bringen: Die F-normierten Räume $[\mathfrak{E}; \varphi]$ und $[\mathfrak{E}; \psi]$ sind für unsere Zwecke gleichbedeutend. 3.2 ist ein wertvolles Mittel für Vollständigkeitsbeweise. Auf 3.3, 3.4 und 3.5 baut die folgende Theorie der F-Systeme auf. Eine zentrale Stellung nimmt 3.5 ein (vgl. § 4 und die Bemerkungen zu 8.2).

§ 4.

F-Systeme.

Sei $\mathfrak{W} = [\mathfrak{W}; \mathcal{W}]$ ein linearer Raum mit einem Konvergenzbegriff. Unter dem von \mathfrak{W} erzeugten F-System \mathfrak{W} verstehen wir die Menge der Räume $\mathfrak{E} = [\mathfrak{E}; \varphi]$ mit folgenden Eigenschaften:

\mathfrak{E} ist ein linearer Unterraum von \mathfrak{W} und (bei gleicher Erklärung der Verknüpfungen $x + y$ und αx) ein F-Raum, in dem 4.1 gilt.

Eigenschaft 4.1. *Aus $x_n \rightarrow x$ in $[\mathfrak{E}; \varphi]$ folgt $x_n \rightarrow x$ in \mathfrak{W} .*

Es wird nicht verlangt, daß \mathfrak{W} ein F-Raum ist. \mathcal{W} muß gewissen Bedingungen genügen, damit \mathfrak{W} nicht leer ist. Jeder Raum $\mathfrak{E} \in \mathfrak{W}$ erzeugt seinerseits ein i. a. weniger umfassendes System \mathfrak{E} .

Wir sagen, daß eine Menge \mathfrak{X} zu \mathbf{W} gehört, wenn sie in geeigneter Weise als F-Raum aus \mathbf{W} aufgefaßt werden kann. Die Angabe der F-Norm eines Raumes aus \mathbf{W} ist wegen 4.5 meist überflüssig.

Wir untersuchen, welche Untermengen von \mathfrak{B} zu \mathbf{W} gehören und welche Beziehungen zwischen den Räumen aus \mathbf{W} bestehen.

\mathbf{W} und \mathbf{Z} seien die von zwei Räumen \mathfrak{B} und \mathfrak{Z} erzeugten F-Systeme, Φ eine Operation aus \mathfrak{B} in \mathfrak{Z} . Dann gelten folgende Sätze:

Satz 4.2. Gilt $[\mathfrak{E}_p; \varphi_p] \in \mathbf{W}$ ($p = 0, 1, \dots$), so ist

$$\left[\bigcap \mathfrak{E}_p; \sum 2^{-p} \varphi_p \right] \in \mathbf{W}$$

und für jedes $r = 0, 1, \dots$ auch

$$\left[\bigcap_{p=0}^r \mathfrak{E}_p; \sum_{p=0}^r \varphi_p \right] \in \mathbf{W}.$$

Satz 4.3. Φ sei linear und für ein gewisses $[\mathfrak{E}; \varphi] \in \mathbf{W}$ $\mathfrak{E}\mathfrak{Z}$ -fehlkonvergenzfrei. Dann ist für jedes $[\mathfrak{G}; \psi] \in \mathbf{Z}$ der Raum $\Phi^U \mathfrak{G} \cap \mathfrak{E}$ mit der F-Norm $\psi(\Phi x) + \varphi(x)$ ein F-Raum aus \mathbf{W} .

Satz 4.4. Sei $\mathfrak{E}, \mathfrak{F} \in \mathbf{W}$, $\mathfrak{F} \leq \mathfrak{E}$. Aus $x_n \rightarrow x[\mathfrak{F}]$ folgt dann $x_n \rightarrow x[\mathfrak{E}]$.

Satz 4.5. Sei $[\mathfrak{E}; \varphi] \in \mathbf{W}$ und $[\mathfrak{E}; \psi] \in \mathbf{W}$. Dann haben $[\mathfrak{E}; \varphi]$ und $[\mathfrak{E}; \psi]$ denselben Konvergenzbegriff.

Satz 4.6. Ist $\mathfrak{E}, \mathfrak{F} \in \mathbf{W}$, $\mathfrak{F} < \mathfrak{E}$, so bildet \mathfrak{F} eine magerere Menge in $[\mathfrak{E}]$.

Satz 4.7. Gilt $\mathfrak{E}_p \in \mathbf{W}$ und $\mathfrak{E}_p \neq \bigcup_{r=0}^{\infty} \mathfrak{E}_r$ ($p = 0, 1, \dots$), so gehört $\mathbf{U}\mathfrak{E}_p$ nicht zu \mathbf{W} .

Beweise. 4.2: Vgl. [12], Satz 4.7.

4.3: Es genügt, die Vollständigkeit von $[\Phi^U \mathfrak{G} \cap \mathfrak{E}; \psi(\Phi x) + \varphi(x)]$ zu beweisen. Sei x_n in $[\Phi^U \mathfrak{G} \cap \mathfrak{E}]$ konzentriert; dann ist x_n in $[\mathfrak{E}]$ und $\Phi(x_n)$ in $[\mathfrak{G}]$ konzentriert, somit gibt es ein $x \in \mathfrak{E}$ und ein $y \in \mathfrak{G}$ mit $x_n \rightarrow x[\mathfrak{E}]$ bzw. $\Phi(x_n) \rightarrow y[\mathfrak{G}]$ (\sim Vollständigkeit der F-Räume). Weiter gilt $\Phi(x_n) \rightarrow y[\mathfrak{Z}]$ (\sim 4.1). Φ ist $\mathfrak{E}\mathfrak{Z}$ -fehlkonvergenzfrei, somit ist $y = \Phi x$. Offenbar gilt nun $x_n \rightarrow x[\Phi^U \mathfrak{G} \cap \mathfrak{E}]$.

4.4: Die durch $I(x) = x$ definierte lineare Operation I (Identität) ist $\mathfrak{F}\mathfrak{E}$ -fehlkonvergenzfrei (\sim 4.1), somit $\mathfrak{F}\mathfrak{E}$ -stetig (\sim 3.5).

4.5: Folgt aus 4.4.

4.6: Folgt wie 4.4, diesmal unter Anwendung von 3.4.

4.7: Die Annahme $\mathbf{U}\mathfrak{E}_p \in \mathbf{W}$ wird mittels 3.3 und 4.6 zum Widerspruch geführt.

Auf dem folgenden einfachen Satz beruht der Beweis des Hauptergebnisses:

Satz 4.8. Φ sei eine lineare Operation aus \mathfrak{B} in \mathfrak{Z} . a) Dann gelten folgende logische Beziehungen für Eigenschaften von Φ : $\mathfrak{B}\mathfrak{Z}$ -fehlkonvergenzfrei \sim $\mathbf{W}\mathfrak{Z}$ -fehlkonvergenzfrei \sim $\mathbf{W}\mathfrak{Z}$ -fehlkonvergenzfrei \sim $\mathbf{W}\mathfrak{Z}$ -stetig, sowie: $\mathfrak{B}\mathfrak{Z}$ -stetig \sim $\mathbf{W}\mathfrak{Z}$ -stetig \sim $\mathbf{W}\mathfrak{Z}$ -stetig. b) Ferner ist Φ $\mathbf{W}\mathfrak{Z}$ -stetig, wenn $\Phi^U \mathfrak{Z} = \mathfrak{E} \in \mathbf{W}$ und Φ $\mathfrak{E}\mathfrak{Z}$ -fehlkonvergenzfrei ist.

Beweis. a) folgt mit 4.1 und 3.5. b) Φ bilde ein $\mathfrak{F} \in \mathbf{W}$ in ein $\mathfrak{G} \in \mathbf{Z}$ ab. Dann ist $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$, somit ist $\Phi \mathfrak{F} \mathfrak{F}$ -fehlkonvergenzfrei (\approx 4.4), also $\mathfrak{F} \mathfrak{G}$ -fehlkonvergenzfrei (\approx 4.1), also $\mathfrak{F} \mathfrak{G}$ -stetig (\approx 3.5).

Im nächsten Abschnitt betrachten wir zwei spezielle Funktionsräume \mathfrak{M} und \mathfrak{P} sowie die erzeugten F-Systeme \mathbf{M} und \mathbf{P} .

§ 5.

Die F-Systeme \mathbf{M} und \mathbf{P} .

Alle im folgenden vorkommenden Funktionen sind komplexwertig.

Die Menge der Funktionen $\mathfrak{x} = x(t)$, die in $0 \leq t < \infty$ erklärt, endlich und meßbar sind, bezeichnen wir mit \mathfrak{P} . Dabei heißen zwei Funktionen \mathfrak{x} und \mathfrak{y} gleich, wenn $x(t) = y(t)$ für alle t gilt.

Mit \mathfrak{M} bezeichnen wir die Menge der Funktionen $\mathfrak{x} = x(t)$, die in $0 \leq t < \infty$ fast überall erklärt und endlich sowie meßbar sind. Dabei sollen zwei Funktionen \mathfrak{x} und \mathfrak{y} aus \mathfrak{M} gleich heißen, wenn $x(t) = y(t)$ für fast alle t gilt. Anders ausgedrückt, sind die Elemente von \mathfrak{M} Klassen „äquivalenter“ Funktionen aus \mathfrak{P} .

Mit den Funktionen \mathfrak{x} aus \mathfrak{M} nehmen wir i. a. nur solche Operationen vor, die invariant sind gegen Abänderung von $x(t)$ auf einer Nullmenge. Wir verwenden daher in \mathfrak{M} statt fin , lim usw. die in bekannter Weise definierten Ausdrücke $\overline{\text{fin}}^* x(t)$, $\overline{\text{lim}}^* x(t)$ usw. Jedem $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{P}$ ordnen wir die Menge $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{M}$ der Funktionsklassen zu, die einen Repräsentanten in \mathfrak{X} besitzen.

\mathfrak{M} und \mathfrak{P} sind lineare Räume bei „natürlicher“ Erklärung der Verknüpfungen $\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ und $\alpha \mathfrak{x}$.

Mit $m_{\varepsilon, T}(\mathfrak{x})$ bezeichnen wir das LEBESGUESCHE Maß der Menge der t mit $|x(t)| \geq \varepsilon$, $0 \leq t \leq T$. Wir nennen eine Funktionenfolge \mathfrak{x}_n maßkonvergent gegen \mathfrak{x} , wenn für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $0 \leq T < \infty$ die Zahlen $m_{\varepsilon, T}(\mathfrak{x}_n - \mathfrak{x})$ eine Nullfolge bilden.

Nun definieren wir in \mathfrak{P} bzw. \mathfrak{M} einen Konvergenzbegriff:

$\mathfrak{x}_n \rightarrow \mathfrak{x}[\mathfrak{P}] \rightsquigarrow x_n(t) \rightarrow x(t)$ für alle t („punktweise Konvergenz“).

$\mathfrak{x}_n \rightarrow \mathfrak{x}[\mathfrak{M}] \rightsquigarrow x_n(t)$ ist maßkonvergent gegen $x(t)$.

\mathfrak{M} und \mathfrak{P} (versehen mit diesen Konvergenzbegriffen und der oben genannten linearen Struktur) erzeugen zwei F-Systeme \mathbf{M} und \mathbf{P} .

Die Menge \mathfrak{D} der fast überall verschwindenden $x(t) \in \mathfrak{P}$ bildet in $[\mathfrak{P}]$ einen abgeschlossenen linearen Unterraum. Dasselbe gilt für $\mathfrak{G} \cap \mathfrak{D}$ in $[\mathfrak{G}]$, wo \mathfrak{G} irgendein Raum aus \mathbf{P} ist. Wir haben daher

Satz 5.1. Ist $[\mathfrak{G}; \varphi] \in \mathbf{P}$, so gehört der zugeordnete Raum $\overline{\mathfrak{G}}$ (vgl. o.) zu \mathbf{M} mit der F-Norm $\overline{\varphi}(\overline{\mathfrak{x}}) = \text{fin } \varphi(\mathfrak{x})$, wo \mathfrak{x} alle in \mathfrak{G} liegenden Repräsentanten von $\overline{\mathfrak{x}}$ durchläuft.

Der Beweis verläuft genau wie bei HILLE [8], S. 472, Th. 22.11.4.

Wir betrachten zwei Arten von Funktionstransformationen. $\gamma(s)$ und $\Gamma(s, t)$ seien in $0 \leq s < \infty$ bzw. $0 \leq s, t < \infty$ erklärt, endlich und meßbar. Mit γ bzw. Γ bezeichnen wir dann die Transformationen

$$y(s) = \gamma(s)x(s) \quad \text{bzw.} \quad y(s) = \int_0^{\rightarrow \infty} \Gamma(s, t)x(t) dt.$$

In anderer Schreibweise lautet (*) nun $\eta = \gamma\chi + \Gamma\chi$.

(*) kann aufgefaßt werden als Operation aus \mathfrak{P} in \mathfrak{P} , aus \mathfrak{M} in \mathfrak{P} , aus \mathfrak{M} in \mathfrak{M} , aus \mathfrak{P} in \mathfrak{M} . Je nachdem ob \mathfrak{P} oder \mathfrak{M} als Bildraum auftritt, ist die Abbildung erklärt, wenn $y(s)$ für alle bzw. fast alle s existiert ($y(s)$ ist dann nach 6.8 meßbar). Im Falle „aus \mathfrak{M} in \mathfrak{P} “ ist $\gamma(s) \equiv 0$ anzunehmen, da sonst die Abbildung mehrdeutig wäre. Es wird jeweils aus dem Zusammenhang ersichtlich sein, als was für eine Operation (*) aufgefaßt wird.

Ein erster Schritt in Richtung auf das Hauptergebnis ist

Satz 5.2. Die Operation γ ist $\mathfrak{P}\mathfrak{P}$ -, $\mathfrak{P}\mathfrak{M}$ -, $\mathfrak{M}\mathfrak{M}$ -stetig, also auch $\mathfrak{P}\mathfrak{P}$ -, $\mathfrak{P}\mathfrak{M}$ -, $\mathfrak{M}\mathfrak{M}$ -stetig.

Beweis. Der erste Teil der Behauptung folgt aus bekannten Tatsachen über punktweise bzw. Maßkonvergenz, der zweite anschließend mit 4.8.

§ 6.

Beispiel für Räume aus \mathfrak{M} und \mathfrak{P} .

Beispiel 6.1. Zu \mathfrak{P} gehört der Raum \mathfrak{C} der beschränkten Funktionen $\chi = x(t)$, für die $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ existiert. F -Norm:

$$\sup_{0 \leq t < \infty} |x(t)|.$$

Die folgenden Beispiele sind Räume aus \mathfrak{M} :

Beispiel 6.2. Der Raum \mathfrak{M} mit der F -Norm

$$\mu(\chi) = \int_0^{\infty} 2^{-t} \frac{x(t)}{1+x(t)} dt.$$

μ definiert in \mathfrak{M} wieder den in § 5 genannten Konvergenzbegriff („Maßkonvergenz“).

Beispiel 6.3. Der Raum \mathfrak{Q}_T der in $0, T$ (T fest) L^1 -integrierbaren $\chi \in \mathfrak{M}$. F -Norm: $\mu(\chi) + \int_0^T |x(t)| dt$.

Beispiel 6.4. Der Raum \mathfrak{Q} der in jedem endlichen Teilintervall L^1 -integrierbaren $\chi \in \mathfrak{M}$. F -Norm:

$$\lambda(\chi) = \sum_{p=1}^{\infty} 2^{-p} \frac{x_p}{1+x_p}; \quad x_p(\chi) = \int_0^p |x(t)| dt.$$

Beispiel 6.5. Der Raum \mathfrak{R} der $x \in \mathfrak{L}$, für die $\int_0^{\rightarrow \infty} x(t) dt$ existiert.
F-Norm:

$$\alpha(x) = \lambda(x) + \alpha_0(x); \quad \alpha_0(x) = \lim_{0 \leq T < \infty} \left| \int_0^T x(t) dt \right|.$$

Beispiel 6.6. Der Raum $\gamma^U \mathfrak{R}$ der $x \in \mathfrak{M}$, für die bei gegebenem γ das Integral $\int_0^{\rightarrow \infty} \gamma(t) x(t) dt$ existiert (die also von γ in \mathfrak{R} abgebildet werden). *F-Norm*

$$\alpha(\gamma x) + \mu(x).$$

Beispiel 6.7. Der Raum $\Gamma^U \mathfrak{M}$ der Funktionen $x \in \mathfrak{M}$, für die bei gegebenem Γ fast überall $\int_0^{\rightarrow \infty} \Gamma(s, t) x(t) dt$ existiert. *F-Norm:*

$$\mu(x) + \mu(\alpha(\gamma_s x)).$$

$\mu(\alpha(\gamma_s x))$ ist dabei so zu verstehen: Für jedes s wird von der Funktion $\gamma_s x = \Gamma(s, t) x(t)$ (mit Argument t) die *F-Norm* α gebildet, sodann von der entstandenen Funktion (mit Argument s) der Ausdruck μ . Die Berechtigung der Bezeichnung $\Gamma^U \mathfrak{M}$ ergibt sich aus 6.8 und 7.3.

Beweis: 6.1, 6.2, 6.3. Die geforderten Eigenschaften ergeben sich leicht aus bekannten Sätzen der Analysis.

6.4. Anwendung von 6.3, 4.2 und 3.1.

6.5. Anwendung von 4.3 mit $\mathfrak{E} = \mathfrak{L}$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{C}$ und $\Phi x = \int_0^s x(t) dt$.

6.6. Anwendung von 4.3 mit $\mathfrak{E} = \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{G} = \mathfrak{R}$ unter Beachtung von 5.2.

6.7. Hier benötigen wir einen Hilfssatz:

Hilfssatz 6.8. $A(s, t)$ sei (flächenhaft) meßbar. Ist $f(s) = \int_0^T A(s, t) dt$ (T fest) für fast alle s erklärt (und endlich), so ist $f(s) \in \mathfrak{M}$. Entsprechende Behauptungen gelten für $g(s) = \lim_{0 \leq T < \infty} \left| \int_0^T A(s, t) dt \right|$ und $h(s) = \int_0^{\rightarrow \infty} A(s, t) dt$.

Beweis¹⁾. Wir setzen für $n = 0, 1, \dots$

$$A_n(s, t) = \begin{cases} \frac{A(s, t)}{|A(s, t)|} \cdot n & \text{für } |A| > n \\ A(s, t) & \text{für } |A| \leq n. \end{cases}$$

$f_n(s) = \int_0^T A_n(s, t) dt$ ist meßbar (\simeq HOBSON [9], S. 629). $f_n(s)$ konvergiert für fast alle s gegen $f(s)$, also ist $f(s)$ meßbar (\simeq [9], S. 584).

¹⁾ Verf. verdankt Herrn W. JURKAT eine den Beweis betreffende Anregung.

$\int_0^T A(s, t) dt$ ist eine in T stetige Funktion, daher ist

$$g(s) = \text{fin} \int_0^{T_n} A(s, t) dt,$$

wo T_n alle rationalen Zahlen durchläuft. Nach dem vorigen ist für jedes T_n die Funktion $\int_0^{T_n} A(s, t) dt$ meßbar, somit auch $g(s)$ (\rightsquigarrow [9], S. 584).

Ähnlich verläuft der Beweis für $h(s)$.

Wir kommen zum Beweis von 6.7. $\Gamma^U \mathfrak{M}$ ist ein linearer Unterraum in \mathfrak{M} . $\mu(x) + \mu(x(\gamma_s x))$ ist eine F-Norm: Dazu muß zunächst gezeigt werden, daß $x(s) = x(\gamma_s x)$ eine Funktion aus \mathfrak{M} ist. Dies ist der Fall, wenn die Funktionen $x_n(s) = x_n(\gamma_s x)$ zu \mathfrak{M} gehören (\rightsquigarrow [9], S. 564 und 584). Letzteres ergibt sich aber aus 6.8 (man setze $A(s, t) = \Gamma(s, t) x(t)$ bzw. $A(s, t) = |\Gamma(s, t) x(t)|$). Daher ist der Ausdruck $\mu(x(\gamma_s x))$ für jedes $x \in \Gamma^U \mathfrak{M}$ erklärt. Nun gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} w(t) &\leq z(t) \text{ f. ü. } \rightsquigarrow \mu(w) \leq \mu(z), \\ z_n(t) &\rightarrow 0 \text{ f. ü. } \rightsquigarrow \mu(z_n) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Eigenschaften bestätigt man, daß $\mu(x) + \mu(x(\gamma_s x))$ eine F-Norm ist.

$[\Gamma^U \mathfrak{M}]$ ist vollständig: Sei $\sum \mu(x_n - x_{n+1}) < \infty$, $\sum \mu(x(\gamma_s(x_n - x_{n+1}))) < \infty$ (vgl. 3.2). Dann ist für fast alle s $\sum x(\gamma_s(x_n - x_{n+1})) < \infty$. Somit ist die Folge x_n in fast allen Räumen $\gamma_s^U \mathfrak{R}$ konzentriert, hat daher in diesen Räumen Grenzelemente $x^{(s)}$ (vgl. 6.6). Alle $x^{(s)}$ sind gleich (\rightsquigarrow 4.1), etwa $= x$. Offenbar gilt dann $x_n \rightarrow x$ $[\Gamma^U \mathfrak{M}]$. Daß der F-Raum $[\Gamma^U \mathfrak{M}]$ zu \mathbf{M} gehört, ist nun klar.

Damit ist der Beweis vollendet. Wir können $\Gamma^U \mathfrak{M}$ auch auffassen als „Fast-überall-Durchschnitt“ der überabzählbar vielen Räume $\gamma_s^U \mathfrak{R}$. In 6.7 steckt schon der Kern des Hauptergebnisses.

§ 7.

Das Hauptergebnis.

Satz 7.1. Die Transformation

$$(*) \quad y(s) = \gamma(s) x(s) + \int_0^{\rightarrow \infty} I(s, t) x(t) dt$$

ist $\mathbf{P}\mathfrak{P}$ -, $\mathbf{M}\mathfrak{P}$ -, $\mathbf{M}\mathfrak{M}$ -, $\mathbf{P}\mathfrak{M}$ -stetig und $\mathbf{P}\mathbf{P}$ -, $\mathbf{M}\mathbf{P}$ -, $\mathbf{M}\mathbf{M}$ -, $\mathbf{P}\mathbf{M}$ -stetig.

Anders formuliert, lautet der zweite Teil des Satzes: Bildet die Transformation (*) einen Raum aus \mathbf{M} oder \mathbf{P} in einen ebensolchen ab, so ist diese Abbildung stetig.

Beweis. Es genügt wegen 4.8, den ersten Teil der Behauptung zu beweisen. Wegen 5.2 dürfen wir $\gamma(s) \equiv 0$ annehmen, also die Operation Γ betrachten.

1. Fall ($\mathbf{P}\mathfrak{B}$). Γ sei in $\mathfrak{E} \in \mathbf{P}$ erklärt. Dann sind die Funktionale $f_s(x) = \int_0^{\rightarrow \infty} \Gamma(s, t) x(t) dt$ nach 7.2 stetig. Also ist Γ $\mathfrak{E}\mathfrak{B}$ -stetig.

2. Fall ($\mathbf{M}\mathfrak{B}$). Der Beweis verläuft wie im ersten Fall.

3. Fall ($\mathbf{M}\mathfrak{M}$). Ist Γ in $\mathfrak{E} \in \mathbf{M}$ erklärt, so ist $\mathfrak{E} \leq \Gamma^U \mathfrak{M}$. Γ bildet $\Gamma^U \mathfrak{M}$ stetig in \mathfrak{M} ab (\sim 7.3), also ist Γ erst recht $\mathfrak{E}\mathfrak{M}$ -stetig (\sim 4.4).

4. Fall ($\mathbf{P}\mathfrak{M}$). Γ sei in $\mathfrak{E} \in \mathbf{P}$ erklärt. Dann ist Γ , aufgefaßt als Operation aus \mathfrak{M} in \mathfrak{M} , auch in dem zu \mathfrak{E} gehörigen Raum $\mathfrak{E} \in \mathbf{M}$ erklärt. Γ bildet \mathfrak{E} stetig in \mathfrak{M} ab, also ist Γ erst recht $\mathfrak{E}\mathfrak{M}$ -stetig (man vgl. die F-Normen von \mathfrak{E} und \mathfrak{E} in 5.1).

Zusätze zu 7.1 finden sich in § 8 (8.6) und in § 11.

Wir tragen die beim Beweis verwendeten Sätze 7.2 und 7.3 nach:

Satz 7.2. Ein Funktional der Form $f(x) = \int_0^{\rightarrow \infty} \gamma(t) x(t) dt$ ist \mathbf{M} - und \mathbf{P} -stetig.

Beweis. f ist genau dann in einem Raum $\mathfrak{E} \in \mathbf{M}$ oder $\mathfrak{E} \in \mathbf{P}$ erklärt, wenn $\gamma \in \mathfrak{E}$ in \mathfrak{R} abbildet; nach 5.2 ist diese Abbildung stetig. Das Funktional $g(y) = \int_0^{\rightarrow \infty} y(t) dt$ ist in \mathfrak{R} stetig, woraus die Behauptung folgt.

Satz 7.3. Γ bildet den Raum $\Gamma^U \mathfrak{M}$ stetig in \mathfrak{M} ab.

Beweis. $y(s) = \int_0^{\rightarrow \infty} \Gamma(s, t) x(t) dt$ ($x \in \Gamma^U \mathfrak{M}$) ist meßbar (\sim 6.8). Es ist $|y(s)| \leq \alpha_0(\gamma_s x) \leq \alpha(\gamma_s x)$ für fast alle s , somit $\mu(y) \leq \mu(x) + \mu(\alpha(\gamma_s x))$, woraus sich die Stetigkeit ergibt.

§ 8.

F_σ -Räume.

Sei \mathfrak{B} ein linearer Raum. Die \mathfrak{E}_p seien F-Räume, die lineare Unterräume in \mathfrak{B} bilden. Es gelte $\mathfrak{E}_p \leq \mathfrak{E}_{p+1}$ ($p = 0, 1, \dots$) und

Eigenschaft 8.1. Aus $x_n \rightarrow x[\mathfrak{E}_p]$, $x_n \rightarrow y[\mathfrak{E}_q]$ folgt $x = y$.

Im linearen Raum $\mathfrak{E} = \bigcup \mathfrak{E}_p$ definieren wir einen Konvergenzbegriff:

$x_n \rightarrow x[\mathfrak{E}] \sim x_n \rightarrow x[\mathfrak{E}_p]$ für mindestens ein p .

Versehen mit diesem Konvergenzbegriff heißt \mathfrak{E} ein F_σ -Raum. Die \mathfrak{E}_p nennen wir eine *Definitionsfolge* von \mathfrak{E} und schreiben $\mathfrak{E} \sim \{\mathfrak{E}_p\}$. Offenbar kann \mathfrak{E} mittels verschiedener Definitionsfolgen bestimmt werden. Die \mathfrak{E}_p gehören alle zu dem von dem F_σ -Raum \mathfrak{E} erzeugten F-System \mathbf{E} . Ein F-Raum \mathfrak{F} ist ein F_σ -Raum $\mathfrak{F} \sim \{\mathfrak{F}_p\}$ mit $\mathfrak{F}_p = \mathfrak{F}$ ($p = 0, 1, \dots$).

8.1 ist erfüllt, wenn \mathfrak{B} einen Konvergenzbegriff hat und die \mathfrak{E}_p zum F-System \mathfrak{W} gehören. Die Menge der aus \mathfrak{W} hergeleiteten F_σ -Räume heißt das F_σ -System \mathfrak{W}_σ . \mathfrak{W}_σ enthält mehr Räume als \mathfrak{W} (\rightsquigarrow 4.7).

Wir bringen einige Sätze über F_σ -Räume, wobei u. a. 3.5 und 4.3 verallgemeinert werden. In 8.2 und 8.3 bedeuten $\mathfrak{E} \sim \{\mathfrak{E}_p\}$ und $\mathfrak{G} \sim \{\mathfrak{G}_p\}$ F_σ -Räume, Φ eine Operation von \mathfrak{E} in \mathfrak{G} .

Satz 8.2. Ist Φ linear und $\mathfrak{E}\mathfrak{G}$ -fehlkonvergenzfrei, so sogar $\mathfrak{E}\mathfrak{G}$ -stetig.

Satz 8.3. Ist Φ linear und $\mathfrak{E}\mathfrak{G}$ -stetig, so bildet Φ jedes \mathfrak{E}_p in ein \mathfrak{G}_{r_p} ab. Bildet Φ zudem \mathfrak{E} auf \mathfrak{G} ab, so ist für geeignete p_r ($r=0, 1, \dots$) $\Phi \mathfrak{E}_{p_r} \subseteq \mathfrak{G}_r$.

Beweis. In beiden Sätzen ist nach Voraussetzung Φ $\mathfrak{E}\mathfrak{G}$ -fehlkonvergenzfrei, also (für bel. p, r) $\mathfrak{E}_p \mathfrak{G}_r$ -fehlkonvergenzfrei. Somit ist $\Phi^U \mathfrak{G}_r \cap \mathfrak{E}_p \in E$ (\rightsquigarrow 4.3). Es ist $\mathfrak{E}_p = \bigcup_{r=0}^{\infty} (\Phi^U \mathfrak{G}_r \cap \mathfrak{E}_p)$, also $\mathfrak{E}_p = \Phi^U \mathfrak{G}_{r_p} \cap \mathfrak{E}_p$ für geeignetes r_p (\rightsquigarrow 3.3, 4.6). Φ bildet \mathfrak{E}_p fehlkonvergenzfrei, also stetig in \mathfrak{G}_{r_p} ab (\rightsquigarrow 3.5). Damit ist 8.2 und der erste Teil von 8.3 bewiesen. Bildet Φ zudem \mathfrak{E} auf \mathfrak{G} ab, so gilt $\mathfrak{G}_r = \bigcup_{p=0}^{\infty} \Phi(\Phi^U \mathfrak{G}_r \cap \mathfrak{E}_p) = \bigcup_{p=0}^{\infty} (\mathfrak{G}_r \cap \Phi \mathfrak{E}_p)$, also für geeignetes p_r $\mathfrak{G}_r = \mathfrak{G}_r \cap \Phi \mathfrak{E}_{p_r}$ (\rightsquigarrow 3.3, 3.4), somit $\mathfrak{G}_r \subseteq \Phi \mathfrak{E}_{p_r}$.

Nun seien $\mathfrak{W}, \mathfrak{W}_\sigma, \mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}_\sigma$ die von zwei Räumen \mathfrak{B} und \mathfrak{B} erzeugten Systeme, Φ eine Operation aus \mathfrak{B} in \mathfrak{B} .

Satz 8.4. Ist Φ linear und für ein gewisses $\mathfrak{E} \sim \{\mathfrak{E}_p\} \in \mathfrak{W}_\sigma$ $\mathfrak{E}\mathfrak{B}$ -fehlkonvergenzfrei, so ist für jedes $\mathfrak{G} \sim \{\mathfrak{G}_p\} \in \mathfrak{Z}_\sigma$ der Raum $\Phi^U \mathfrak{G} \cap \mathfrak{E}$ ein F_σ -Raum aus \mathfrak{W}_σ mit der Definitionsfolge $\Phi^U \mathfrak{G}_p \cap \mathfrak{E}_p$.

Beweis. Wie oben folgt $\Phi^U \mathfrak{G}_p \cap \mathfrak{E}_p \in \mathfrak{W}$. Es ist

$$\Phi^U \mathfrak{G}_p \cap \mathfrak{E}_p \subseteq \Phi^U \mathfrak{G}_{p+1} \cap \mathfrak{E}_{p+1} \quad \text{und} \quad \Phi^U \mathfrak{G} \cap \mathfrak{E} = \bigcup_{p=0}^{\infty} \Phi^U \mathfrak{G}_p \cap \mathfrak{E}_p.$$

Satz 8.5. Ist Φ linear und $\mathfrak{W}\mathfrak{B}$ -fehlkonvergenzfrei, so auch $\mathfrak{W}_\sigma \mathfrak{Z}_\sigma$ -stetig.

Beweis. Sei $\mathfrak{E} \in \mathfrak{W}_\sigma$, $\mathfrak{G} \in \mathfrak{Z}_\sigma$, Φ bilde \mathfrak{E} in \mathfrak{G} ab. Φ ist $\mathfrak{E}\mathfrak{B}$ -, also auch $\mathfrak{E}\mathfrak{G}$ -fehlkonvergenzfrei, somit $\mathfrak{E}\mathfrak{G}$ -stetig (\rightsquigarrow 8.2).

Damit ergibt sich unmittelbar als Zusatz zu 7.1

Satz 8.6. Die Operation (*) ist $\mathfrak{P}_\sigma \mathfrak{P}_\sigma$ -, $\mathfrak{M}_\sigma \mathfrak{P}_\sigma$ -, $\mathfrak{M}_\sigma \mathfrak{M}_\sigma$ -, $\mathfrak{P}_\sigma \mathfrak{M}_\sigma$ -stetig.

Besonders wichtig ist Satz 8.2. Mit 8.2 lassen sich 4.4 und 4.5 auf F_σ -Räume verallgemeinern. Weiter folgt aus 8.2: Ist Φ eine lineare Operation von \mathfrak{E} auf \mathfrak{G} , $\mathfrak{E}\mathfrak{G}$ -stetig und eindeutig umkehrbar, so ist die Umkehroperation Φ^{-1} „ $\mathfrak{E}\mathfrak{E}$ -stetig“; u. a.

§ 9.

Abbildungen mit Folgen von Operationen.

$\mathfrak{B}, \mathfrak{B}, \mathfrak{W}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{W}_\sigma, \mathfrak{Z}_\sigma$ seien wieder definiert wie in § 8, die Φ_q ($q=0, 1, \dots$) Operationen aus \mathfrak{B} in \mathfrak{B} ; $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{B}, \mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{B}$. Wir sagen: „Die Folge Φ_q bildet \mathfrak{X} in \mathfrak{Y} ab“, wenn es zu jedem $x \in \mathfrak{X}$ ein q gibt, so daß $\Phi_q x \in \mathfrak{Y}$ ist.

Satz 9.1. Voraussetzung: Die Φ_q seien lineare Operationen aus \mathfrak{B} in \mathfrak{B} , seien \mathfrak{W} - \mathfrak{B} -fehlkonvergenzfrei und mit folgender „Magerkeitseigenschaft“ versehen: Für jedes $\mathfrak{F} \in \mathfrak{W}$ ist entweder $\mathfrak{F} \subseteq \Phi_q^U \mathfrak{B}$ oder $\Phi_q^U \mathfrak{B} \cap \mathfrak{F}$ mager in $[\mathfrak{F}]$. Schließlich möge die Folge Φ_q den Raum $\mathfrak{E} \sim \{\mathfrak{E}_p\} \in \mathfrak{W}_\sigma$ in ein $\mathfrak{G} \sim \{\mathfrak{G}_p\} \in \mathfrak{Z}_\sigma$ abbilden.

Behauptung. Es gibt zu jedem $p = 0, 1, \dots$ ein $q = q(p)$ und ein $r = r(p)$, so daß Φ_q den Raum \mathfrak{E}_p in \mathfrak{G}_r abbildet, und zwar stetig.

Beweis. Sei $\Phi_q^U \mathfrak{G}_r \cap \mathfrak{E}_p = \mathfrak{F}_{pqr}$. Ist Φ_q nicht in ganz \mathfrak{E}_p erklärt, so ist \mathfrak{F}_{pqr} mager in $[\mathfrak{E}_p]$. Ist Φ_q in \mathfrak{E}_p erklärt, so ist $\mathfrak{F}_{pqr} \in \mathfrak{W}$ (\rightsquigarrow 4.3),

also entweder mager in $[\mathfrak{E}_p]$ oder $= \mathfrak{E}_p$ (\rightsquigarrow 4.6). Es ist $\mathfrak{E}_p = \bigcup_{q, r=0}^{\infty} \mathfrak{F}_{pqr}$.

Daher gibt es ein $q = q(p)$ und ein $r = r(p)$, so daß $\mathfrak{E}_p = \mathfrak{F}_{pqr}$ ist (\rightsquigarrow 3.3). Φ_q bildet \mathfrak{E}_p in \mathfrak{G}_r ab, und zwar stetig (\rightsquigarrow 3.5).

Die Φ_q erfüllen die Magerkeitsbedingung, wenn jedes $\Phi_q^U \mathfrak{B}$ ein Raum aus \mathfrak{W} oder \mathfrak{W}_σ ist (\rightsquigarrow 4.6, 3.3).

§ 10.

Ein Permanenzsatz.

Wir benötigen einige neue Räume und Definitionen:

Beispiel 10.1. Der Raum \mathfrak{B} der beschränkten Funktionen $x(t) \in \mathfrak{P}$ gehört zu \mathfrak{P} mit der F -Norm

$$\overline{\text{fin}}_{0 \leq t < \infty} |x(t)|.$$

Beispiel 10.2. Der Raum \mathfrak{J} der $\mathfrak{x} \in \mathfrak{L}$, für die $\lim_{t \rightarrow \infty}^* x(t)$ existiert, gehört zu \mathfrak{M}_σ mit der Definitionsfolge \mathfrak{J}_p (s. u.).

Beispiel 10.3. Für jedes $p = 0, 1, \dots$ gehört der Raum \mathfrak{J}_p der $\mathfrak{x} \in \mathfrak{J}$ mit $\overline{\text{fin}}_{t \geq p}^* |x(t)| < \infty$ zu \mathfrak{M} mit der F -Norm

$$v_p(\mathfrak{x}) = \int_0^p |x(t)| dt + \overline{\text{fin}}_{t \geq p}^* |x(t)|.$$

Wir unterdrücken die einfachen Beweise für 10.1—10.3.

Unter einer Treppenfunktion verstehen wir eine Funktion der Form

$$x(t) = a_n (b_n \leq t < b_{n+1}; n = 0, 1, \dots, r; b_0 = 0, b_{r+1} = \infty).$$

Die Menge dieser Funktionen nennen wir \mathfrak{X} .

\mathfrak{X}_T bedeute die Menge der Funktionen $x(t) \in \mathfrak{X}$ mit

$$x(t) = 0 \quad (t \geq T).$$

Wir setzen $\mathfrak{A} = \bigcup_{T \geq 0} \mathfrak{X}_T$ (Menge der abbrechenden Funktionen).

Mit \mathfrak{X} , \mathfrak{X}_T , \mathfrak{A} bezeichnen wir auch die zugehörigen Untermengen von \mathfrak{M} .

Sei \mathfrak{B} ein Raum mit einem Konvergenzbegriff, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{B}$. Ein $\mathfrak{x} \in \mathfrak{B}$ heißt *Berührungspunkt* von \mathfrak{X} in $[\mathfrak{B}]$, wenn es Elemente $\mathfrak{x}_n \in \mathfrak{X}$ gibt mit $\mathfrak{x}_n \rightarrow \mathfrak{x}[\mathfrak{X}]$. Die Menge der Berührungspunkte bezeichnen wir hier und im folgenden durch Überstreichen ($\overline{\mathfrak{X}}$). \mathfrak{X} heißt *abgeschlossen*, wenn $\mathfrak{X} = \overline{\mathfrak{X}}$ ist. Es gilt folgender einfache Satz:

Satz 10.4. \mathfrak{B} und \mathfrak{Z} seien Räume mit Konvergenzbegriffen, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{Z}$, \mathfrak{Y} abgeschlossen in $[\mathfrak{Z}]$, Φ eine $\mathfrak{B}\mathfrak{Z}$ -stetige Operation. Dann ist $\Phi\overline{\mathfrak{X}} \subseteq \overline{\Phi\mathfrak{X}}$, und im Falle $\Phi\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}$ auch $\Phi\overline{\mathfrak{X}} \subseteq \mathfrak{Y}$.

Beweis. Klar.

Wir betrachten nun eine Integraltransformation Γ und die aus ihr hergeleiteten Transformationen Γ_q ($q = 0, 1, \dots$) mit

$$\Gamma_q(s, t) = \begin{cases} \Gamma(s, t) & (s \geq q) \\ 0 & (s < q). \end{cases}$$

Satz 10.5. Sei $y(s) = \int_0^{\rightarrow \infty} \Gamma(s, t) x(t) dt$. a) Genau dann existiert für jedes $\mathfrak{x} \in \mathfrak{J}$ der Grenzwert $\lim_{s \rightarrow \infty} y(s)$ (wobei $y(s)$ für $s \geq s(\mathfrak{x})$ erklärt ist), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$(Z_n) \quad \int_0^{\infty} |\Gamma(s, t)| dt \leq M_0 \quad \text{für } s \geq q_0;$$

$$(Z_n') \quad \overline{\lim}_{0 \leq t \leq p} |\Gamma(s, t)| \leq M_p \quad \text{für } s \geq q_p \quad (p = 1, 2, \dots);$$

$$(Z_s) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \Gamma(s, t) dt = a \text{ existiert};$$

$$(S_p) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^T \Gamma(s, t) dt = a_T \text{ existiert für } 0 \leq T < \infty.$$

b) Genau dann ist überdies $\lim y(s) = \lim^* x(t)$, wenn die aufgeführten Bedingungen erfüllt sind und $a = 1$, $a_T = 0$ ($0 \leq T < \infty$) gilt.

Die Bedingungen Z_n und Z_n' sind dabei so zu verstehen: Es gibt ein q_p und ein M_p (das nicht von s abhängt), so daß die betreffenden Ungleichungen erfüllt sind. Wir dürfen dabei q_p als ganz annehmen. S_p kann noch abgeschwächt werden: Man ersetzt „ $0 \leq T < \infty$ “ durch „für alle T einer in $0, \infty$ dichten Menge“.

Beweis. a) Γ hat genau dann die gewünschten Eigenschaften, wenn die Operationenfolge Γ_q den Raum \mathfrak{J} in \mathfrak{C} abbildet.

Die Bedingungen sind notwendig: Die Γ_q , aufgefaßt als Operationen aus \mathfrak{M} in \mathfrak{B} , erfüllen die Voraussetzungen von 9.1 (\sim 7.1, 6.7). Also wird jedes \mathfrak{J}_p von einem Γ_{q_p} in \mathfrak{C} abgebildet, und zwar linear und stetig. Für die Γ_{q_p} -Transformierte η_p gilt dann

$$\overline{\lim}_{0 \leq s < \infty} |y_p(s)| \leq M_p \cdot v_p(\mathfrak{x}),$$

weil v_p eine homogene F-Norm ist (vgl. BANACH [3], S. 54, Th. 1). Hieraus folgen unter Anwendung bekannter Sätze der Analysis die Bedingungen Z_n und Z_n' ; Z_s und S_p sind trivialerweise notwendig.

Die Bedingungen sind hinreichend: Aus Z_n und Z_n' folgt, daß Γ_{q_p} \mathfrak{J}_p stetig in \mathfrak{B} abbildet. \mathfrak{C} ist eine abgeschlossene Menge in $|\mathfrak{B}|$, Γ_{q_p} bildet jedes $x \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{A}$ in \mathfrak{C} ab ($\simeq S_p$), somit ist $\Gamma_{q_p}(\overline{\mathfrak{X} \cap \mathfrak{A}}) \subseteq \mathfrak{C}$ (\simeq 10.4). Zu $\overline{\mathfrak{X} \cap \mathfrak{A}}$ gehört jedes $x \in \mathfrak{X}_p \cap \mathfrak{Q}$ (vgl. etwa BANACH [3], S. 62). Durch Betrachtung aller \mathfrak{J}_p erhält man hieraus, daß für jedes $x \in \mathfrak{Q} \cap \mathfrak{A}$ $\lim_{s \rightarrow \infty} y(s)$ existiert. Somit ist $\Gamma_{q_p}(\mathfrak{J}_p \cap \mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{C}$. $\overline{\mathfrak{J}_p \cap \mathfrak{A}}$ enthält jedes $x \in \mathfrak{J}_p$ mit $\lim_{t \rightarrow \infty}^* x(t) = 0$; jedes solche x wird also von Γ_{q_p} in \mathfrak{C} abgebildet (\simeq 10.4). Anwendung von Z_s ergibt nun die Behauptung. $\overline{\mathfrak{X} \cap \mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{J}_p \cap \mathfrak{A}}$ bedeuten jeweils die Menge der Berührungspunkte bezüglich des Konvergenzbegriffes in $[\mathfrak{J}_p]$.

b) Die Bedingungen sind offenbar notwendig. Ganz ähnlich wie oben beweist man, daß sie auch hinreichend sind.

Der Beweis für den hinreichenden Teil des Satzes ist vom Typ der bekannten „Grundmengenbeweise“. Erschwert wird die Durchführung dadurch, daß wir Operationenfolgen verwenden und daß in $[\mathfrak{J}]$ nicht allgemein gilt $\overline{\mathfrak{X}} = \overline{\mathfrak{X}}$.

Wir verzichten auf die Formulierung naheliegender Varianten von 10.5, die „nulltreue“ Transformationen usw. betreffen.

§ 11.

Schlußbemerkungen.

Satz 7.1 (und 8.6) kann in vielfacher Weise variiert werden durch Verwendung anderer Intervalle und Integralbegriffe; u. a. bleibt 7.1 richtig, wenn in (*) $\int_0^{\rightarrow \infty}$ durch \int_0^{∞} ersetzt wird. Weiter kann 7.1 verallgemeinert werden auf Funktionen mehrerer Veränderlicher; je nach dem verwendeten Integralbegriff treten dabei neue Schwierigkeiten auf. Analogia zu 8.6 für Mehrfachintegrale sind besonders wichtig, da viele geläufige Räume von Funktionen mehrerer Veränderlicher in natürlicher Weise als F_σ -Räume aufgefaßt werden können. Selbstverständlich sind in 7.1 und 8.6 entsprechende Sätze für Matrixtransformationen von Zahlenfolgen enthalten (vgl. [12], Satz 4.4).

Die Voraussetzungen über Meßbarkeit sind z. T., insbesondere bei Betrachtung des Raumes \mathfrak{B} allein, entbehrlich.

Will man ähnlich wie in [12] vernünftige Aussagen über lineare, stetige Funktionale in den benutzten Funktionenräumen erhalten, so muß man sich auf lokalkonvexe F-Räume beschränken. Man betrachtet dann etwa das von \mathfrak{Q} erzeugte F-System lokalkonvexer F-Räume und läßt nur solche Transformationen (*) zu, die \mathfrak{Q} in \mathfrak{Q} abbilden.

Die gestreiften Fragen sollen in einer späteren Arbeit ausführlicher behandelt werden.

BANACH [2] (siehe [3], S. 87) bewies ebenfalls einen Satz über die Stetigkeit der Transformation (*) (mit $\gamma(s) \equiv 0$). Er setzt voraus, daß die vorkommenden Funktionenräume BANACH-Räume sind und drei Bedingungen genügen (1., 2., 3.), während von Γ Meßbarkeit nicht gefordert wird. 1. besagt dabei, daß der Raum zu \mathbf{M} oder \mathbf{P} gehört. 3. kann weggelassen werden: Man verwendet am Schluß des Beweises statt Th. 2, S. 79, einfach Th. 7, S. 41.

Vereinigungen von abzählbar vielen F -Räumen wurden auch behandelt von KÖTHE [10] [11] und DIEUDONNÉ-SCHWARTZ [6] unter Einführung einer Topologie im Sinne von BOURBAKI [4]. Diese Autoren beschränken sich auf lokalkonvexe Räume; in [6] wird weiter vorausgesetzt, daß \mathcal{E}_p eine abgeschlossene Menge in $|\mathcal{E}_{p+1}|$ bildet. Auch bei F_σ -Räumen in unserem Sinn läßt sich eine derartige Topologie einführen; für die vorliegenden Zwecke erschien jedoch die Verwendung eines Konvergenzbegriffes einfacher.

Satz 10.5 findet sich in leicht abgeänderter Form ohne Beweis bei HARDY [7], S. 62. Für weitere Sätze dieser Art vgl. man [1] und [5].

Literaturverzeichnis.

AGNEW, R. P.

- [1] Properties of generalized definitions of limit. Bull. Amer. Math. Soc. 45, 689—730 (1939).

BANACH, S.

- [2] Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. Fund. Math. III, 133—181 (1922), insbes. S. 163 ff.

BANACH, S.

- [3] Théorie des opérations linéaires. Warschau 1932.

BOURBAKI, N.

- [4] Topologie générale. Paris, 1940—1949.

DAY, M. M.

- [5] Regularity of function-to-function transformations. Bull. Amer. Math. Soc. 45, 296—303 (1939).

DIEUDONNÉ, J. und SCHWARTZ, L.

- [6] La dualité dans les espaces (F) et (LF). Ann. Institut Fourier 1, 61—101 (1950).

HARDY, G. H.

- [7] Divergent series. Oxford 1949.

HILLE, E.

- [8] Functional analysis and semi-groups. (American Mathematical Society Colloquium Publications. Vol. 31.) New York 1948.

HOBSON, E. W.

- [9] The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series. Vol. I. 3. ed. Cambridge 1927.

KÖTHE, G.

- [10] Über die Vollständigkeit einer Klasse lokalkonvexer Räume. Math. Zeitschrift 52, 627—630 (1950).

- [11] Über zwei Sätze von BANACH. Math. Zeitschrift 53, 203—209 (1950).

ZELLER, K.

- [12] Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Zeitschrift 53, 463—487 (1951).

(Eingegangen am 24. Juli 1951.)

Integrability of trigonometric series. II.

By

R. P. Boas Jr. in Evanston, Illinois (USA).

There are many conditions which, when imposed on the coefficients of a formal trigonometric series

$$(1) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

make it a FOURIER series. A very general criterion was given by CESARI [1]. Here we obtain some sufficient conditions for (1) to be an L^p FOURIER series, $p \geq 1$; they are somewhat analogous to known results (cf. [3, chap. VI], [2]) for convergence of power sums of the FOURIER coefficients of functions satisfying LIPSCHITZ conditions.

Theorem 1. *If $1 < q \leq 2$, $q' = q/(q-1)$, $1 \leq p < q'$, and $\alpha < 1 - q/p'$, then (1) is the FOURIER series of a function of L^p if $c_n \rightarrow 0$ and*

$$(2) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_{n+m} - c_{n-m}|^q = O(m^\alpha)$$

as $m \rightarrow \infty$ through the multiples of some fixed integer. If $\alpha \geq 1 - q/p'$ the conclusion no longer holds.

Corollary. *If (2) holds with some q , $1 < q \leq 2$, and with $\alpha < 1$, then (1) is a FOURIER series.*

Theorem 2. *If $1 < q \leq 2$, $\beta < 1$, $r \geq q$ and $r > 1 + \beta$, then if $c_n \rightarrow 0$ and*

$$(3) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_{n+m} - c_{n-m}|^r = O(m^\beta)$$

and in addition $\{c_n\}$ is a sequence of bounded variation, i. e.

$$(4) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_{n+1} - c_n| < \infty,$$

then (1) is the FOURIER series of a function of L^p for

$$(5) \quad 1 \leq p < \frac{(r-1)q}{r-1+(q-1)\beta}.$$

If $r = q$, Theorem 2 is weaker than Theorem 1 since it requires $\beta < q/p - 1 < 1 - q/p'$. The relationship of the two theorems is clearer if we write (2) and (3) in the form

$$\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_{n+m} - c_{n-m}|^r \right\}^{1,r} = O(m^\beta),$$

and for simplicity take $p = 1$. We see then that Theorem 1 requires $\delta < 1/r$ while Theorem 2 requires only $\delta < 1/r'$, so that for large r the sum on the left is smaller and at the same time the exponent on the right is allowed to be larger.

Theorem 2 is a consequence of Theorem 1, as we may see as follows. We have from (4), with some constant A ,

$$\begin{aligned} \sum |c_{n+1} - c_n| &< A, \\ \sum |c_{n+1} - c_{n-1}| &\leq \sum |c_{n+1} - c_n| + \sum |c_n - c_{n-1}| < 2A, \end{aligned}$$

etc., and finally

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_{n+m} - c_{n-m}| < 2mA.$$

Hence, by HÖLDER'S inequality with index $1/\lambda$, where $\lambda = (r-q)/(r-1) \leq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_{n+m} - c_{n-m}|^q &= \sum |c_{n+m} - c_{n-m}|^\lambda |c_{n+m} - c_{n-m}|^{q-\lambda} \\ &\leq \left\{ \sum |c_{n+m} - c_{n-m}| \right\}^\lambda \left\{ \sum |c_{n+m} - c_{n-m}|^{(q-\lambda)/(1-\lambda)} \right\}^{1-\lambda} \\ &\leq (2A)^\lambda m^{\lambda\beta(1-\lambda)}, \end{aligned}$$

since $(q-\lambda)/(1-\lambda) = r$. By Theorem 1, (1) is an L^p FOURIER series if $\lambda + \beta(1-\lambda) < 1 - q/p'$, i. e. if $p < (r-1)q/\{r-1 + (q-1)\beta\}$. The condition $r > 1 + \beta$ is required to make the interval (5) nonempty.

We now prove Theorem 1. If (2) is satisfied for $m = k$, the quantities $c_{n+k} - c_{n-k}$ are the FOURIER coefficients of a function $\varphi_k(t)$ of L^q (by the HAUSDORFF-YOUNG theorem):

$$c_{n+k} - c_{n-k} = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} \varphi_k(t) dt.$$

The function $\varphi(t) = \varphi_k(t)/\sin kt$ belongs to L^q except perhaps in neighborhoods of the points $0, \pm\pi/k, \pm 2\pi/k, \dots, \pm\pi$. We have to show that $\varphi(t)$ actually belongs to L^p and has c_n as its FOURIER coefficients. Now if m is a multiple of k , $\varphi(t) \sin mt$ is integrable, and direct calculation shows that

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imt} \varphi(t) \sin mt dt &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imt} \varphi_k(t) \{\sin mt / \sin kt\} dt \\ &= 2\pi(c_{n+m} - c_{n-m}). \end{aligned}$$

Thus

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t) \sin mt|^q dt \leq A \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_{n+m} - c_{n-m}|^q \right\}^{q'/q},$$

again by the HAUSDORFF-YOUNG theorem, where A is independent of m , and so by (2) and the inequality $\sin t \geq 2t/\pi$ for $0 \leq t \leq \pi/2$ we have

$$(6) \quad \int_{\pi/k}^{\pi/k+1/m} |\varphi(t)|^q t^{q'} dt \leq A m^{(q-\delta)/(q-1)}, \quad s = 0, \pm 1, \dots, \pm k,$$

with a new A (independent of m). The case $s = 0$ of (6) is typical. Since $|\varphi(t) \sin kt|^{q'}$ is integrable, so is $t^p |\varphi(t)|^p$, $1 \leq p \leq q'$; let

$$F(t) = \int_0^t x^p |\varphi(x)|^p dx.$$

Now

$$\begin{aligned} (7) \quad \int_{1/m}^t |\varphi(t)|^p dt &= \int_{1/m}^t x^{-p} dF(x) \\ &= F(\varepsilon) \varepsilon^{-p} - F(1/m) m^p + p \int_{1/m}^t F(x) x^{-p-1} dx, \quad \varepsilon < \pi/k. \end{aligned}$$

By HÖLDER'S inequality with index q'/p we have, using (6),

$$F(1/m) \leq \left\{ \int_0^{1/m} x^{q'} |\varphi(x)|^{q'} dx \right\}^{p/q'} m^{-(q'-p)/q'} \leq A m^{(\alpha p - p - q)/q} = o(m^{-p}),$$

since $\alpha p < p + q - q p$.

Furthermore, $F(t)$ is a nondecreasing function of t , and if $m = rk$ (r an integer) and $1/((r + 1)k) \leq t \leq 1/(rk)$, we have $F(t) \leq At^u$, $u > p$, where A is another constant, and so $F(x)x^{p-1}$ is dominated by the integrable function x^{u-p-1} in a neighborhood of 0. Thus the right side of (7) approaches a limit and hence so does the left side, i. e. $|\varphi(t)|^p$ is integrable at 0. The same proof applies to the other values of s in (6) and the first part of Theorem 1 follows.

To prove the negative part of Theorem 1, we consider the series (1) with $c_n = n^{-\gamma}$, $0 < \gamma < 1/q$, for $n > 0$, and $c_{-n} = c_n$. Then [3, p. 116] $f(x)$ is of order $x^{\gamma-1}$ as $x \rightarrow 0$ and consequently belongs to L^p for $p < 1/(1 - \gamma)$ but not for $p \geq 1/(1 - \gamma)$. Now the sum on the left of (2) is

$$\begin{aligned} \sum_{n \neq m} \left| \frac{1}{(n+m)^\gamma} - \frac{1}{|n-m|^\gamma} \right|^q &= 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} \left| \frac{1}{(n+m)^\gamma} - \frac{1}{(n-m)^\gamma} \right|^q \\ &\quad + 2 \sum_{n=1}^{m-1} \left| \frac{1}{(n+m)^\gamma} - \frac{1}{(m-n)^\gamma} \right|^q \\ &= 2S_1 + 2S_2. \end{aligned}$$

Using the inequality

$$a^\gamma - b^\gamma \leq \frac{a^2 - b^2}{a^{2-\gamma} + b^{2-\gamma}},$$

where $0 < b < a$, $0 < \gamma \leq 1$, we have

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n-m}^\gamma - \frac{1}{n+m}^\gamma \right| &= \frac{(n+m)^\gamma - |n-m|^\gamma}{n^2 - m^2} \leq \frac{(n+m)^2 - (n-m)^2}{n^2 - m^2} \frac{1}{\left\{ \frac{(n+m)^{2-\gamma}}{n+m} + \frac{|n-m|^{2-\gamma}}{n-m} \right\}} \\ &\leq \frac{4nm}{(n+m)^2 |n-m|^\gamma}. \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned} S_1 &\leq 4 m^q \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{n^q}{(n+m)^{2q} (n-m)^{\gamma q}} \\ &\leq 4 \sum_{n=m+1}^{2m} \frac{1}{(n-m)^{\gamma q}} + 4 m^q \sum_{n=2m+1}^{\infty} \frac{1}{(n-m)^{q+\gamma q}} = O(m^{1-\gamma q}). \end{aligned}$$

Similarly

$$\begin{aligned} S_2 &\leq 4 m^q \sum_{n=1}^{m-1} \frac{n^q}{(n+m)^{2q} (m-n)^{\gamma q}} \\ &\leq 2^{2-\gamma q} m^{-\gamma q} \sum_{n < m/2} 1 + 4 \sum_{k \leq m/2} k^{-\gamma q} = O(m^{1-\gamma q}). \end{aligned}$$

Now let $1 < q \leq 2$, $1 < p < q'$, so that $0 < 1/p' < 1/q$. If then $\gamma = 1/p'$ we have $\gamma q < 1$ and so $f(x)$ satisfies (2) with any $\alpha \geq 1 - \gamma q = 1 - q/p'$ but does not belong to L^p . If $p = 1$, we can proceed similarly with

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\log n},$$

which does not belong to L but satisfies (2) with any $q > 1$ and $\alpha = 1$.

Theorem 1 can be generalized by replacing (2) by an order condition on

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{n-k} h_{mk} \right|^q,$$

where h_k are the FOURIER coefficients of a suitable auxiliary function $g(x)$, which is $\sin x$ in Theorem 1. For example, if $g(x) = \sin^2(x/2)$, (2) becomes

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_{n+m} + c_{n-m} - 2c_n|^q = O(m^\alpha),$$

with the same conditions on the parameters as in Theorem 1.

Literature.

CESARI, L.

- [1] Sulle condizioni sufficienti per le successioni di Fourier, Bollettino della Unione Matematica Italiana (1) 13, 100–104 (1934).

HILLE, E. and TAMARKIN, J. D.

- [2] On the summability of Fourier series. III, Mathematische Annalen 108, 525–577 (1933).

ZYGMUND, A.

- [3] Trigonometrical Series, Warszawa-Lwów, 1935.

(Eingegangen am 13. August 1951.)

Kapazität von Strahlungsfeldern.

Von

Hermann Weyl in Zürich.

Diese Arbeit behandelt in breiterer Ausführung, welche die Beweise nicht unterschlägt, denselben Gegenstand wie eine jüngst von mir in den Proceedings der National Academy of Sciences der USA. veröffentlichte Note über skalare Strahlungsfelder (vol. 37, Dezember 1951). Den Anstoß dazu gaben zwei bisher nur in vorläufiger Form vom Antenna Laboratory der University of California bekannt gegebene Mitteilungen (Nr. 175 und 176 der Serie 7, 1950/51) von Herrn W. K. SAUNDERS, die sich vor allem mit dem elektromagnetischen Strahlungsfeld befassen. Darauf ließe sich meine Theorie, bei richtigem Ansatz der „Belegungs-Potentiale“, leicht ausdehnen¹⁾, wie denn überhaupt im n -dimensionalen EUKLIDISCHEN Raum das skalare Feld durch eine lineare Differentialform beliebigen Ranges ersetzt werden könnte. Mir ist es genug, das Prinzip am skalaren Fall (Rang 0) zu erläutern.

Bezeichnungen. Ein dreidimensionaler EUKLIDISCHER Raum mit den CARTESISCHEN Koordinaten x_1, x_2, x_3 liegt zugrunde. Der vom beliebigen Punkte p' zum Punkte p führende Vektor mit den Komponenten $x_i - x'_i$ werde mit $\mathbf{r}(pp')$, seine Länge, die Distanz der beiden Punkte, mit $r = r(pp')$ bezeichnet. Σ_R ist die Kugel vom Radius R um den Ursprung $O = (0, 0, 0)$. Runde Klammern finden für das skalare Produkt zweier Vektoren Verwendung. Die Bezeichnungen grad und div werden aus der Vektoranalysis übernommen. $\Delta = \text{div grad}$ ist der LAPLACESCHE Operator $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$. Da wir im Gebiet komplexer Zahlen operieren, tritt die imaginäre Einheit i auf.

Es wird angenommen, daß der Raum in zwei komplementäre Teile, das „Innere“ V und daß „Äußere“ W , geteilt ist. V wird als beschränkt,

¹⁾ Erst nach dem Druck der Proceedings-Note (und nach Abschluß des Manuskripts dieser Arbeit) ist mir die jüngst veröffentlichte Arbeit von CLAUD MÜLLER „Über die Beugung elektromagnetischer Schwingungen an endlichen homogenen Körpern“ (Math. Annalen 123, 1951, S. 345—378) zugänglich geworden. Er verwendet, für den Fall der vollkommenen Reflexion, einen ähnlichen Kunstgriff wie Herr SAUNDERS: Modifikation der Fläche Ω . Ich glaube, daß der hier entwickelte Kapazitäts-Begriff die natürliche Lösung der Schwierigkeit liefert, welche aus der Existenz von Eigenfunktionen des Schwingungsproblems für den Innenraum entsteht.

W als zusammenhängend vorausgesetzt. Ihre gemeinsame Grenze Ω möge aus einer oder mehreren getrennt verlaufenden geschlossenen glatten Flächen bestehen. Glatt bedeutet, daß der Einheitsvektor $n = n(s)$ der äußeren Normalen im variablen Punkt s von Ω nicht nur eine stetige Funktion von s ist, sondern auch einer HÖLDER-Bedingung genügt. Die normale Ableitung eines skalaren Feldes $u(p)$ wird mit $\partial u / \partial n = (\text{grad } u, n)$, ihr Wert im Punkte s von Ω zuweilen der Deutlichkeit halber mit $\partial u / \partial n_s$ oder gar (vielleicht nicht sehr glücklich) mit $\partial u(s) / \partial n_s$ bezeichnet. Bei Integration über den Raum mit Bezug auf den variablen Raumpunkt p bedeutet dV das Volumelement, bei Integration über einen variablen Flächenpunkt s ist dS das Oberflächenelement.

Das Randwertproblem und der Eindeutigkeitssatz. k sei eine gegebene positive Konstante. Wir betrachten skalare (komplexwertige) Felder $u(p)$, welche der Schwingungsgleichung

$$(1) \quad \Delta u + k^2 u = 0$$

genügen. Für ein derartiges Feld, das außerhalb einer genügend großen Kugel Σ_{R_0} definiert ist, gilt das folgende

Lemma von RELICH. u verschwindet identisch, vorausgesetzt, daß

$$\int_{\Sigma_R} |u|^2 dS \rightarrow 0 \quad \text{für } R \rightarrow \infty$$

gleichmäßig in allen Richtungen.

Nur solche Lösungen von (1) gelten als zulässig, welche der Ausstrahlungsbedingung

$$R(\partial u / \partial n + i k u)_{\text{auf } \Sigma_R} \rightarrow 0 \quad \text{für } R \rightarrow \infty$$

gleichmäßig in allen Richtungen genügen. Die auf einen festen „Aufpunkt“ p' sich beziehende Funktion

$$Q(p, p') = Q(r) = e^{-ikr} / 2\pi r \quad [r = r(p, p')]$$

von p ist eine solche Lösung (Grundlösung), die einer punktförmigen Quelle in p' entspricht. Die Aufgabe ist, eine zulässige Lösung in W zu bestimmen, die am Rande von W , d. i. auf Ω , vorgegebene Randwerte $\gamma(s)$ annimmt. Vor der Existenz- stellt sich die Eindeutigkeitsfrage. Sie wurde von W. MAGNUS und F. RELICH auf Grund des oben erwähnten Lemmas im Jahre 1943 bejahend beantwortet, indem sie zeigten, daß $\gamma(s) = 0$ auf Ω die Gleichung $u(p) = 0$ in W impliziert²⁾.

²⁾ Jahresber. d. Deutschen Math.-Vereinigung 53, S. 57–65. — Der RELICHsche Beweis liefert, genau genommen, die Gleichung $u = 0$ nur im Außenraum einer ganz V einschließenden Kugel Σ_{R_0} um O , nicht schon in ganz W . Um sie auf ganz W auszudehnen, muß man sich des Prozesses der analytischen Fortsetzung bedienen, und hier kommt die Voraussetzung zur Geltung, daß W zusammenhängend ist. Sei σ eine samt ihrer Oberfläche ganz innerhalb W liegende

Zurückführung auf eine Fredholmsche Integralgleichung. Man kann den Gradienten von $Q(p p')$ sowohl mit Bezug auf p als p' bilden, und es ist

$$\text{grad}_p Q(p p') = \frac{d Q}{d r} \frac{\mathbf{r}(p p')}{r(p p')} = - \text{grad}_{p'} Q(p p').$$

So ist klar, was mit

$$\partial Q(p s') / \partial n_{s'} = (\text{grad}_{s'} Q(p s'), \mathbf{n}(s'))$$

für irgend einen Raumpunkt p und einen Punkt s' auf Ω gemeint ist.

In Analogie zur eigentlichen Potentialtheorie, die mit dem Fall $k = 0$ zu tun hat, bilden wir mit Hilfe einer beliebigen stetigen Funktion $\mu(s)$ auf Ω das „Potential“ der Doppelbelegung $\mu(s)$:

$$(2) \quad u(p) = \int_{\Omega} (\partial Q(p s') / \partial n_{s'}) \mu(s') d s'.$$

Es genügt sowohl in W wie in V der Gleichung (1). Es erfüllt ferner die Ausstrahlungsbedingung. Seine Randwerte sind

$$\pm \mu(s) + \int_{\Omega} K(s, s') \mu(s') d s',$$

wobei das Zeichen $+$ für Annäherung an Ω vom Äußeren W , das Zeichen $-$ für Annäherung vom Inneren V gilt. Auf den Kern

$$K(s, s') = (\text{grad}_{s'} Q(s s'), \mathbf{n}(s'))$$

ist die FREDHOLMSche Theorie anwendbar, da wegen der Glattheit von Ω das Produkt $(\mathbf{r}(s s'), \mathbf{n}(s'))$ für $s = s'$ von höherer als erster Ordnung verschwindet. Integration mit Bezug auf s oder s' erstreckt sich stets auf die ganze Fläche Ω . Das Feld (2) im Äußeren wird somit die vorgegebenen stetigen Randwerte $\gamma(s)$ annehmen, falls $\mu(s)$ eine Lösung der Integralgleichung

$$(3) \quad \mu(s) + \int_{\Omega} K(s s') \mu(s') d s' = \gamma(s)$$

ist. Diese Gleichung besitzt für beliebig vorgegebenes $\gamma(s)$ stets eine (eindeutige) Lösung $\mu(s)$, vorausgesetzt, daß die homogene Gleichung

Kugel vom Radius a um den Punkt p_0 . Für einen Punkt p' innerhalb σ erhält man in bekannter Weise die Gleichung

$$2 u(p') = \int_{\sigma} \{ (\partial Q(s p') / \partial n_s) u(s) - Q(s p') \partial u / \partial n_s \} d s.$$

Daraus ergibt sich eine Entwicklung von $u(p)$ nach Potenzen der relativen Koordinaten $x_i - x_i^0$ von p in bezug auf p_0 , die zum mindesten innerhalb der konzentrischen Kugel σ' um p_0 vom Radius $a' = a(\sqrt{2} - 1)$ Gültigkeit besitzt. Darauf fußt die kettenartige analytische Fortsetzung der Gleichung $u(p) = 0$ in alle „Buchten“ des „Meeres“ W hinein.

mit dem transponierten Kern

$$(4) \quad \eta(s') + \int_{\Omega} \eta(s) K(s s') ds = 0$$

keine andere Lösung gestattet als die triviale $\eta = 0$. Indem wir die Gleichungen (3) und (4) in der abgekürzten Form

$$(E + K) \mu = \gamma, \quad \eta(E + K) = 0$$

schreiben, ahmen wir den Symbolismus des Matrixkalküls so nach, als ob K eine quadratische Matrix wäre und die Werte von μ in einer Spalte, die von η in einer Reihe arrangiert sind. E ist der Operator „Identität“.

Aber die Möglichkeit, daß die Gleichung (4) und dann auch die Gleichung

$$(5) \quad (E + K) \varphi = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi(s) + \int K(s s') \varphi(s') ds' = 0$$

nicht-triviale Lösungen η oder φ besitzt, kann natürlich nicht ausgeschlossen werden. Die inhomogene Gleichung (3) ist dann und nur dann lösbar, wenn ihre rechte Seite $\gamma(s)$ zu allen Lösungen η von (4) orthogonal ist,

$$(\eta \gamma) = 0, \quad \text{d. i.} \quad \int \eta(s) \gamma(s) ds = 0;$$

und die Lösung $\mu(s)$ ist in dem Sinne vieldeutig, daß zu ihr eine beliebige Lösung $\varphi(s)$ von (5) addiert werden kann. Nach dem Eindeutigkeitssatz hat das freilich auf das zugehörige Doppelbelegungs-Potential (2) keinen Einfluß. Die Lösungen η von (4) bilden eine lineare Mannigfaltigkeit \mathbf{H} von endlichvielen, sagen wir h , Dimensionen; die lineare Mannigfaltigkeit Φ der Lösungen φ von (5) besitzt die gleiche Dimensionszahl. Es ist nötig, in Analogie zu dem elektrostatischen Problem der Elektrizitätsverteilung auf vorgegebenen Konduktoren zunächst diese homogenen Gleichungen zu studieren. Man gelangt aber zum Ziel nur, wenn man dabei den Kreis der Eigenfunktionen in der aus der Elementarteilertheorie geläufigen Weise überschreitet. Wir stellen zunächst die einschlägigen Tatsachen der allgemeinen Theorie kurz zusammen.

Die charakteristischen Funktionen eines Kerns. Sei also $K(ss')$ ein beliebiger „hinreichend regulärer“ Kern. [Es genügt z. B. anzunehmen, daß $K(ss')$ gleichmäßig stetig ist, falls man eine beliebig kleine Umgebung $r(s, s') < \varepsilon$ der Diagonale $s = s'$ auf der Mannigfaltigkeit der Punkte (s, s') von $\Omega \times \Omega$ ausnimmt, und daß die (uneigentlichen) Integrale

$$\int_{\Omega} |K(ss')| ds' \quad \text{und} \quad \int_{\Omega} |K(ss')| ds$$

gleichmäßig in s bzw. s' konvergieren. Die ERHARD SCHMIDTSche Methode der Approximation von $K(ss')$ durch eine endliche Produktsumme von der Gestalt $\sum f_i(s) g_i(s')$ macht es möglich, den insbesondere für

singuläre Kerne so schwerfälligen FREDHOLMSchen Determinanten-Formalismus ganz zu umgehen.] Für den Operator $E + K$ werde die Abkürzung A verwendet. Man bilde die endlichdimensionalen Mannigfaltigkeiten H_0, H_1, H_2, \dots der Lösungen η der sukzessiven Gleichungen

$$\eta = 0 \mid \eta A = 0 \mid \eta A^2 = 0 \mid \dots$$

Offenbar ist $H_0 < H_1 < H_2 < \dots$. Diese Sequenz wird stabil nach einer gewissen Anzahl l von Schritten; d. h. es ist $H_l = H_{l+1} = \dots$, während H_{l-1} noch ein echter Teil von H_l ist. Die Mannigfaltigkeit Φ_m der Lösungen φ von $A^m \varphi = 0$ hat dieselbe Dimensionszahl h_m wie H_m ($m = 0, 1, 2, \dots$). Die aus einem willkürlichen Element η von H_l und φ von Φ_l gebildete Bilinearform

$$(\eta \varphi) = \int \eta(s) \varphi(s) ds$$

ist nicht-ausgeartet; d. h. $\varphi = 0$ ist das einzige Element φ von Φ_l , das der Gleichung $(\eta \varphi) = 0$ für alle $\eta \in H_l$ genügt³⁾. Wir verwenden die Bezeichnungen H, Φ, h für H_l, Φ_l, h_l und setzen $h_l = n$. Die Elemente φ von Φ_l sind die Eigenfunktionen des Kernes K (sc. zum Eigenwert -1); die Elemente von Φ_l tragen in der Literatur verschiedene Namen, sie mögen hier charakteristische Funktionen heißen.

Unter Verwendung der Abkürzungen $\varphi' = A\varphi, \eta' = \eta A$ gilt die einfache Regel

$$(6) \quad (\eta' \varphi) = (\eta \varphi');$$

denn beide Ausdrücke sind gleich $\eta A \varphi$. Die Elemente von der Form φ' ($\varphi \in \Phi_l$) bilden eine Mannigfaltigkeit Φ'_l von $n - h$ Dimensionen. In der Tat, ergänzt man die Basis $\varphi_1, \dots, \varphi_h$ von Φ durch Hinzufügung weiterer Elemente $\varphi_{h+1}, \dots, \varphi_n$ zu einer Basis von Φ_l , so ist offenbar $\varphi'_{h+1}, \dots, \varphi'_n$ eine Basis von Φ'_l . Durch h Elemente $\varphi_1^*, \dots, \varphi_h^*$, welche linear unabhängig mod Φ'_l sind, kann man diese ihrerseits zu einer vollen Basis von Φ_l ergänzen. Es sei ferner η_1, \dots, η_h eine Basis von H . Ich behaupte, daß die Matrix

$$d_{ij} = (\eta_i \varphi_j^*) \quad (i, j = 1, \dots, h)$$

nicht-ausgeartet ist, d. h. $\det d_{ij} \neq 0$. Dies folgert man entweder aus der Tatsache, daß die Bilinearform $(\eta \varphi)$ für $\eta \in H_l, \varphi \in \Phi_l$ nicht-ausgeartet ist, oder man zeigt direkt, daß eine lineare Kombination $\varphi = \sum_{j=1}^h a_j \varphi_j^*$, welche den Gleichungen $(\eta_i \varphi) = 0$ für $i = 1, \dots, h$ genügt, Null·sein muß. In der Tat ergibt sich aus diesen Bedingungen nach dem Fundamentalsatz über die Lösung von Integralgleichungen die Existenz einer Funktion ψ , für die $A\psi = \varphi$ gilt. Da somit $A^{l+1}\psi = 0$

³⁾ Hier ist ein rascher Beweis: Nach dem Hauptsatz über Integralgleichungen hat die Gleichung $A^l \psi = \varphi$ eine Lösung ψ , falls φ orthogonal zu allen $\eta \in H_l$ ist. Liegt φ in Φ_l , so ψ in Φ_{l-1} . Es ist aber $\Phi_{l-1} = \Phi_l$, somit $\psi \in \Phi_l, A^l \psi = \varphi = 0$.

ist, liegt ψ in $\Phi_{l+1} = \Phi_l$ und darum φ in Φ'_l . Das hat aber, da $\varphi_1^*, \dots, \varphi_h^*$ linear unabhängig mod Φ'_l sind, die Gleichungen $a_1 = \dots = a_h = 0$ zur Folge.

Die Abbildung M . Wir kehren nunmehr zu unserm speziellen Kern K zurück. Neben (2) betrachten wir das Potential einer einfachen Belegung $\nu(s)$,

$$(7) \quad v(p) = \int Q(ps) \nu(s) ds.$$

Hier ist $\nu(s)$ eine beliebige stetige Funktion auf Ω ; und wie immer erstreckt sich die Integration über ganz Ω . Die Funktion $v(p)$ genügt sowohl in V als in W der Gleichung $\Delta v + k^2 v = 0$, sie erfüllt die Ausstrahlungsbedingung, und sie geht stetig über Ω hinüber. Hingegen erleidet die normale Ableitung $\partial v / \partial n$ auf Ω den Sprung $2\nu(s)$, indem dieselbe auf der Außen- und Innen-Seite im Punkte s' von Ω bzw. die Werte

$$\mp \nu(s') + \int \nu(s) K(ss') ds, \quad \text{kürzer } \nu(\mp E + K)$$

annimmt.

Man bilde das Potential (7) insbesondere für den Fall, daß $\nu(s)$ eine charakteristische Funktion η des transponierten Kernes ist:

$$(8) \quad v(p) = \int Q(ps') \eta(s') ds',$$

und bezeichne seine Randwerte mit

$$(9) \quad \varphi(s) = \int Q(ss') \eta(s') ds'.$$

Ich behaupte:

Satz 1. Die Gleichung (9) definiert eine lineare Abbildung $\eta \rightarrow \varphi = M\eta$ von H_l in Φ_l .

An Stelle dieses werde sogleich ein schärferer Satz bewiesen, in dem der Angelpunkt unserer ganzen Methode liegt:

Satz 2. Führt die Abbildung M das Element $\eta \in H_l$ in φ über, so geht durch dieselbe Abbildung $\eta' = \eta(E + K)$ in $\varphi' = (E + K)\varphi$ über.

M verwandelt also auch ηA^m in $A^m \varphi$; und wenn $\eta A^m = 0$ ist, muß $A^m \varphi = 0$ sein. So folgt Satz 1 in der Form, daß M nicht nur H_l in Φ_l verwandelt, sondern auch jede der Teilmannigfaltigkeiten H_m ($m = 1, \dots, l$) in das entsprechende Φ_m .

Beweis von Satz 2. Sei p' ein Punkt im Äußern W . Man wende GREENS Formel

$$\int_{\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \int_V \{ u(\Delta v + k^2 v) - v(\Delta u + k^2 u) \} dp$$

an auf das Innere V und die beiden folgenden daselbst regulären Funktionen von p : $Q(pp')$ und (8). Man findet

$$\int (\partial Q(sp') / \partial n_s) v(s) ds = \int Q(sp') (\partial v / \partial n)(s) \cdot ds.$$

Hier ist mit $\partial v/\partial n$ die normale Ableitung auf der *inneren* Seite von Ω gemeint, welche den Wert $\eta(E+K) = \eta A = \eta'$ besitzt. Ändert man die Bezeichnungen p', s in p, s' um, so erhält man folgende für alle Punkte $p \in W$ gültige Gleichung

$$(10) \quad \int_{\Omega} (\partial Q(p s')/\partial n_{s'}) \varphi(s') ds' = \int_{\Omega} Q(p s') \eta'(s') ds'.$$

Läßt man jetzt den Punkt p von außen in einen Randpunkt s rücken, so geht die linke Seite in $\varphi'(s)$ über, wo $\varphi' = (E+K)\varphi$, während man für die rechte Seite

$$\int Q(s s') \eta'(s') ds',$$

d. i. das Bild $M\eta'$ von η' , erhält. Darum ist, zugleich mit $\varphi = M\eta$, in der Tat

$$\varphi' = M\eta'.$$

Satz 3. Die Abbildung M ist nicht-*ausgeartet*, d. h. $\eta = 0$ ist das einzige Element von H_l , das durch M in $\varphi = 0$ übergeht.

Daraus folgt sogleich, daß die Abbildung M *eindeutig* ist.

Beweis. Für das Potential (8) bedeutet die Gleichung $M\eta = 0$, daß seine (inneren und äußeren) Randwerte verschwinden. Nach dem RELICHschen Eindeutigkeitssatz verschwindet darum $v(p)$ im ganzen Außenraum, und darum ist auch die normale Ableitung $(\partial v/\partial n)_a$ auf der Außenseite von Ω gleich Null, $\eta(-E+K) = 0$. Infolgedessen gilt

$$\eta(E+K) = 2\eta \quad \text{oder} \quad \eta = \frac{1}{2}\eta A.$$

Daraus folgt aber

$$\eta A = \frac{1}{2} \cdot \eta A^2, \quad \eta = \frac{1}{2} \eta A = \frac{1}{4} \cdot \eta A^2,$$

und durch Wiederholung dieses Verfahrens schließlich

$$\eta = 2^{-l} \cdot \eta A^l = 0,$$

q. e. d.

Wir bilden nun aus irgend zwei Elementen η, η^* von H_l die Bilinearform

$$C(\eta^*, \eta) = (\eta^*, M\eta)$$

und behaupten:

Satz 4. Die Kapazitätsform $C(\eta^*, \eta)$ ist *symmetrisch* und *nicht-*ausgeartet**.

Beweis. Die Symmetrie ergibt sich ohne weiteres aus dem expliziten Ausdruck

$$C(\eta^*, \eta) = \iint \eta^*(s) Q(s s') \eta(s') ds' ds.$$

Die zweite Behauptung, wonach $\eta = 0$ das einzige Element von H_l ist, das für alle Elemente η^* von H_l die Gleichung $C(\eta^*, \eta) = 0$ erfüllt, entspringt aus der Kombination der beiden Tatsachen, daß 1) für ein

festes $\eta \in H_l$ das Element $\varphi = M\eta$ von Φ_l der Gleichung $(\eta^* \varphi) = 0$ für alle $\eta^* \in H_l$ nur dann genügt, wenn $\varphi = 0$ ist, und daß 2) die Gleichung $M\eta = 0$ die andere $\eta = 0$ impliziert (Satz 3).

Wegen der Symmetrie genügt es, die quadratische Form $C(\eta\eta)$ statt der Bilinearform $C(\eta^*, \eta)$ zu betrachten. Mit Bezug auf eine Basis η_1, \dots, η_n von H_l läßt sich jedes $\eta \in H_l$ als eine lineare Kombination

$$\eta(s) = x_1 \eta_1(s) + \dots + x_n \eta_n(s)$$

der η_i schreiben, und $C(\eta\eta)$ geht dann in die nicht-ausgeartete quadratische Form $\sum c_{ij} x_i x_j$ der Variablen x_i über mit den symmetrischen Koeffizienten

$$(11) \quad c_{ij} = C(\eta_i, \eta_j) \quad (i, j, = 1, \dots, n).$$

Diese nennen wir die Kapazitätskoeffizienten. [Im Fall der eigentlichen Potentialtheorie, $k = 0$, ist die Form $C(\eta\eta)$ sogar nicht-ausgeartet, wenn wir uns auf die Elemente η von $H = H_1$ beschränken, da sie gleich dem über den ganzen Raum erstreckten DIRICHLETSchen Integral von (8) und darum positiv-definit ist. Dies hat übrigens, wie man sofort sieht, zur Folge, daß $l = 1$ ist⁴⁾. Im Falle der Strahlungstheorie versagt dieser Schluß, da hier an Stelle des DIRICHLET-Integrals das Integral über den indefiniten Ausdruck $(\text{grad } v)^2 - k^2 v^2$ tritt; zudem ist v komplex und das Integral von zweifelhafter Konvergenz.]

Sei η_1, \dots, η_h eine Basis von $H = H_1$. Wir wählen h Elemente $\eta_1^*, \dots, \eta_h^*$ von H_l , die linear unabhängig sind mod H_l' ; ihre Bilder $\varphi_i^* = M\eta_i^*$ ($i = 1, \dots, h$) in Φ_l sind linear unabhängig mod Φ_l' , und darum ist die quadratische Matrix der

$$(12) \quad d_{ij} = (\eta_i, \varphi_j^*) = C(\eta_i, \eta_j^*) \quad (i, j = 1, \dots, h)$$

nicht-ausgeartet. (Symmetrie kann man für sie natürlich nicht erwarten.) Wir nennen (12) die Kapazitätskoeffizienten im engeren Sinne. Wir werden sogleich noch näher analysieren, in welcher Weise diese „kleine“ h -zeilige Kapazitätsmatrix $D = ||d_{ij}||$ in der „großen“ n -zeiligen symmetrischen Matrix C der c_{ij} enthalten ist.

Lösung der Randwertaufgabe. Nunmehr sind wir in der Lage, eine zulässige Lösung u der Gleichung (1) im Außenraum W für beliebig vorgegebene stetige Randwerte $\gamma(s)$ auf Ω zu konstruieren. Wir können uns dabei entweder der „großen“ oder der „kleinen“ Matrix der Kapazitätskoeffizienten bedienen. Im ersten Falle verfährt man so: Aus einer Basis η_1, \dots, η_n von H_l bilde man die Basis $\varphi_i = M\eta_i$ von Φ_l . Die Funktion $\varphi_i(s)$ besteht aus den (inneren und äußeren) Randwerten des Potentials

$$v_i(p) = \int G(p s') \eta_i(s') d s'.$$

⁴⁾ In der Tat zeigt der erwähnte Umstand, daß ein $\eta \in H$, das zu allen η' in Φ orthogonal ist, notwendig verschwindet. Für ein η in H_2 ist aber η' ein solches Element, darum ist $\eta' = 0$, d. h. η liegt in H_1 , oder $H_2 = H_1$.

Von der vorgegebenen Randfunktion $\gamma(s)$ subtrahiere man eine solche lineare Kombination der $\varphi_j(s)$, daß die Differenz

$$\gamma^*(s) = \gamma(s) - \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(s)$$

zu allen η_i orthogonal wird. Das ergibt die n Gleichungen

$$(\eta_i \gamma) = \sum_j c_{ij} a_j \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Diese besitzen eine eindeutige Lösung a_j , da die symmetrische Matrix der Kapazitätskoeffizienten

$$c_{ij} = (\eta_i, \varphi_j) = (\eta_i, M \eta_j) = C(\eta_i, \eta_j)$$

nicht-ausgeartet ist. Für $\gamma^*(s)$ hat die Integralgleichung (3), $(E+K)\mu^* = \gamma^*$ eine Lösung $\mu^*(s)$, und diese führt mittels (2) zu einem Doppelbelegungs-Potential $u^*(p)$ in W mit den Randwerten $\gamma^*(s)$. Indem wir der Mannigfaltigkeit H_1 das Element $\eta = \sum_j a_j \eta_j$ entnehmen und zu u^* das der einfachen Belegung $\eta(s)$ entspringende Potential addieren, erhalten wir in

$$u(p) = u^*(p) + \sum_j a_j v_j(p)$$

eine zulässige Lösung in W mit den vorgegebenen Randwerten $\gamma(s)$.

Dies Verfahren ist darum unbefriedigend, weil ja zur Lösbarkeit der inhomogenen Gleichung (3) gar nicht die Orthogonalität von $\gamma(s)$ zu allen Elementen η von H_1 , sondern nur zu allen Elementen η von $H = H_1$ notwendig ist. Darum ziehe ich vor, h Elemente $\eta_1^*, \dots, \eta_h^*$ von H_1 zu wählen, die mod H_1^i linear unabhängig sind, und außerdem eine Basis η_1, \dots, η_h von $H = H_1$. Dann ist die Matrix (12) nicht-ausgeartet. Ich subtrahiere also von $\gamma(s)$ eine solche lineare Kombination $\sum_j a_j \varphi_j^*$ der h Funktionen $\varphi_j^* = M \eta_j^*$, daß die Differenz γ^* zu den Basiselementen η_1, \dots, η_h von H orthogonal wird; das ergibt die in der Tat lösbaren Gleichungen

$$(\eta_i \gamma) = \sum_{j=1}^h d_{ij} a_j \quad (i = 1, \dots, h).$$

Für γ^* bekommen wir wie vorhin ein μ^* und ein zugehöriges Doppelbelegungs-Potential $u^*(p)$ in W mit den Randwerten $\gamma^*(s)$. Wenn wir

$$\sum_{j=1}^h a_j v_j^*(p), \quad v_j^*(p) = \int G(p s') \eta_j^*(s') d s',$$

dazu addieren, resultiert eine zulässige Lösung $u(p)$ in W mit den Randwerten $\gamma(s)$.

Die Aufklärung über das Verhältnis der beiden Verfahrensweisen bringt die Gleichung (10). Sie zeigt nämlich, daß das aus einer zu H_1^i gehörigen Belegung η' entspringende einfache Potential dem von der

Doppelbelegung $\varphi = M\eta$ erzeugten Potential gleich ist. Das zweite Verfahren sondert aus H_l eine lineare Schar $\sum_j a_j \eta_j^*(s)$ von einfachen Belegungen aus, deren Potentiale sich durchaus nicht in Doppelbelegungs-Potentiale umwandeln lassen und die darum das Minimum dessen darstellen, was man zum allgemeinen Doppelbelegungs-Potential hinzufügen muß, um die Lösung der Randwertaufgabe für beliebiges $\gamma(s)$ zu erzwingen.

Genauere Analyse des Enthaltenseins der kleinen in der großen Kapazitäts-Matrix. Eine Basis („Normalbasis“) von H_l kann in folgender Weise konstruiert werden. Man fängt an mit einer Basis $\sigma_0 = \{\eta_{01}, \dots, \eta_{0r}\}$ von H_l mod H_{l-1} . Die Unabhängigkeit mod H_{l-1} hat zur Folge, daß $\eta_{01}A^{l-1}, \dots, \eta_{0r}A^{l-1}$ linear unabhängig sind, und darum sind $\sigma'_0 = \{\eta'_{01}, \dots, \eta'_{0r}\}$ Elemente in H_{l-1} , die linear unabhängig sind mod H_{l-2} , $\sigma''_0 = \{\eta''_{01}, \dots, \eta''_{0r}\}$ besteht aus Elementen von H_{l-2} , die linear unabhängig sind mod H_{l-3} , und so fort bis $\sigma_0^{(l-1)}$. So erhalten wir $r \cdot l$ linear unabhängige Elemente, welche in die Abschnitte $\sigma_0, \sigma'_0, \dots, \sigma_0^{(l-1)}$ je von der Länge $r = r_0$ zerfallen. Darauf ergänzen wir $\eta'_{01}, \dots, \eta'_{0r}$ durch Hinzufügung von r_1 weiteren Elementen $\sigma_1 = \{\eta_{11}, \dots, \eta_{1r_1}\}$ zu einer vollen Basis von H_{l-1} mod H_{l-2} und bilden wiederum $\sigma_1, \sigma'_1, \dots, \sigma_1^{(l-2)}$. In dieser Weise fortfahrend lassen wir eine Normalbasis von H_l entstehen, die aus den Abschnitten

$$\sigma_f^{(i)} \quad (i = 0, 1, \dots, l-1-f; f = 0, \dots, l-1)$$

je von der Länge r_f besteht. Die Elemente η von σ_f gehören zu H_{l-f} und genügen darum der Gleichung $\eta^{(l-f)} = 0$. Die Reihe der Indizes, durch die unsere Basiselemente voneinander unterschieden sind, zerfällt in $L = \frac{l(l+1)}{2}$ Sektionen (f, i) . Die Basis selbst besteht aus Ketten

$$\eta, \eta', \dots, \eta^{(l-1-f)}$$

verschiedener Länge $l-f$ ($f = 0, 1, \dots, l-1$); das Anfangselement η einer Kette von der Länge $l-f$ gehört zu σ_f .

Bei Wahl dieser Normalbasis steht in der aus den Kapazitätskoeffizienten (11) gebildeten „großen Matrix“ C vom Grade n dort, wo sich die Sektion (f, i) des Zeilenindex mit der Sektion (g, j) des Spaltenindex kreuzt, die rechteckige Matrix $C_{f,g}^{i,j}$ der Elemente

$$C(\eta_f^{(i)}, \eta_g^{*(j)}), \quad \text{wo } \eta_f \in \sigma_f, \eta_g^* \in \sigma_g.$$

Nach der Regel (6) und Satz 2 hängt diese Matrix nur von $i+j = \varrho$ ab und werde darum mit $C_{f,g}^\varrho$ bezeichnet. Da $\eta_f^{(\varrho)} = 0$ ist, sobald $\varrho \geq l-f$, und $\eta_g^{*(\varrho)} = 0$, sobald $\varrho \geq l-g$, verschwindet diese Matrix, wenn $\varrho \geq l - \max(f, g)$. Sie verschwindet insbesondere, wenn entweder

$$i+j \geq l-f \quad \text{oder} \quad i+j = l-1-f, g > f$$

ist. Nehmen wir für einen Augenblick in der Matrix C diejenige Umstellung der Zeilen vor, welche zustande kommt, wenn man die Num-

mern $i = 0, 1, \dots, l-1-f$ des Index der Zeilensektionen (fi) rückwärts durchläuft,

$$i' = l-1-f-i, \quad \tilde{C}_{f,g}^{i',j} = C_{f,g}^{i',j},$$

so kann man die für das Verschwinden von $C_{f,g}^{i',j}$ hinreichenden Bedingungen

$$i' + j > l-1-f \quad \text{oder} \quad i' + j = l-1-f, \quad g > f,$$

in der Form schreiben:

$$(13) \quad j > i \quad \text{oder} \quad j = i, \quad g > f.$$

Bei alphabetischer Anordnung der Sektionen (fi) nach der Regel, daß (gj) auf (fi) folgt, wenn (13) besteht, tritt also für die Matrix \tilde{C} Reduktion ein, indem alle Rechtecke von \tilde{C} , die auf einer Seite der durch $j = i, g = f$ gekennzeichneten Hauptdiagonale stehen, mit Nullen besetzt sind. Darum zerfällt die Determinante von \tilde{C} in die Determinanten der in der Hauptdiagonale von \tilde{C} stehenden Matrizen $\tilde{C}_{f,i}^{i,i} = C_{f,i}^{i,i} = C_{f,i}^{i-1-i}$. Setzen wir $C_{f,i}^{i-1-i} = C_f$, so besteht demnach die Gleichung

$$(14) \quad |C| = \pm |C_0|^l \cdots |C_{l-1}|^l.$$

Sie beruht auf dem Umstand, daß in den L „Hauptfeldern“ von C , wo sich (f, i') mit (f, i) kreuzt, die Matrizen C_f stehen, während in einer Hälfte der $L(L-1)$ Nebensektionen Nullen stehen, in solcher Verteilung, daß Reduktion eintritt. Die Regel

$$C_{f,g}^{i',j} = 0 \quad \text{für} \quad i + j \geq l - \max(f, g)$$

ergibt, wie man leicht ausrechnet, als Anzahl der leerstehenden Felder in dem Raster von C den Wert

$$N_l^* = \frac{(l-1) \cdot l \cdot (l+1)^2}{6},$$

während

$$N_l = \frac{L(L-1)}{2} = \frac{(l-1) \cdot l \cdot (l+1) \cdot (l+2)}{8}$$

ist. Also tragen noch

$$\frac{(l-2) \cdot (l-1) \cdot l \cdot (l+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

mehr Rechtecke $(fi) \times (gj)$ die Matrix 0 als für die Reduktion nötig wäre.

Die Endelemente unserer Ketten, d. i.

$$\sigma_f^{(l-1-f)} \quad (f = 0, 1, \dots, l-1);$$

bilden zusammen eine Basis η_1, \dots, η_h für $H = H_1$, während ihre Anfangselemente, d. i. die σ_f , zusammen eine Basis $\eta_1^*, \dots, \eta_h^*$ von $H_l \bmod H_1^l$ ergeben. So zerfällt die Reihe der hier einen Augenblick benutzten Indizes $1, 2, \dots, h$ in natürlicher Weise in l durch den Index $f = 0$,

1, ..., $l-1$ unterschiedene Sektionen von der Länge r_j . Für die kleine Matrix D der

$$d_{ij} = C(\eta_i, \eta_j^*) \quad (i, j = 1, \dots, h)$$

ergibt sich ein Raster, daß im Durchschnitt $f \times g$ der Sektion f mit g die Matrix $C_{f,g}^{l-1-f}$ trägt. Diese verschwindet für $g > f$, während längs der Hauptdiagonale die gleichen Matrizen C_f auftreten, die in den Hauptfeldern von C stehen. Somit

$$(15) \quad |D| = |C_0| \cdot |C_1| \cdots |C_{l-1}|.$$

Wenn man will, mag man die Formeln (14), (15) dazu benutzen, um aus $|D| \neq 0$ die Ungleichung $|C| \neq 0$ zu erschließen. Die Analyse zeigt, daß D bereits alle in C wesentlichen Bestandteile C_f enthält; während aber die Matrix C_f in den Hauptfeldern von C $(l-f)$ mal vorkommt, tritt sie in D nur einfach auf.

(Eingegangen am 22. November 1951.)

Zur Schnittmultiplizität uneigentlicher Komponenten in der algebraischen Geometrie.

Von

Ernst-August Behrens in Hamburg.

A und B seien zwei über dem Grundkörper k irreduzible algebraische Mannigfaltigkeiten (alg. Mfn.) im N -dimensionalen Raum S^N . Der Punkt P aus dem Durchschnitt $A \cap B$ von A und B ist eine *Komponente von $A \cap B$* , wenn er isoliert ist, d. h. in keiner in $A \cap B$ liegenden, höherdimensionalen alg. Mf. enthalten ist. P ist *eigentliche Komponente von $A \cap B$* , wenn die Dimensionen r und s von A^r und B^s komplementär sind, also $r + s = N$ ist. Das ist z. B. der Fall für einen Schnittpunkt einer Kurve A^1 mit einer Fläche B^2 im S^3 , falls A^1 nicht in B^2 liegt. Ein Schnittpunkt zweier Kurven im S^3 ist nun nach dieser Definition nie eigentliche Komponente. Deshalb hat man den Begriff der eigentlichen Komponente dahin verallgemeinert, daß der in $A \cap B$ isolierte Punkt P eigentliche Komponente von $A \cap B$ bzgl. einer irreduziblen alg. Mf. U^n ist, wenn A^r und B^s in dieser algebraischen Mf. U^n aus S^N eingebettet sind, A^r und B^s komplementäre Dimensionen bzgl. U^n haben ($r + s = n$) und P einfacher Punkt von U ist. Der Tangentialraum T in P an U soll also die Dimension n besitzen. Ein Beispiel dafür bildet der Schnittpunkt P zweier Geraden, die verschiedenen Scharen einer doppelpunktfreien Quadrik U^2 des S^3 angehören. Dagegen ist P nicht eigentliche Komponente des Schnittes zweier Erzeugender eines quadratischen Kegels im S^3 mit der Spitze in P , da jetzt der Kegel U^2 in P einen Doppelpunkt hat.

Für die bzgl. U eigentlichen Schnittkomponenten von A und B gibt es die Multiplizitätstheorie von A. WEIL¹⁾, die auf die Arbeiten von SEVERI²⁾ und VAN DER WAERDEN³⁾ zurückgeht. Auch zur Erfassung der Multiplizität eines isolierten Schnittpunktes P von $A \cap B$, der nicht notwendig eigentliche Komponente von $A \cap B$ ist, gibt es bei

¹⁾ WEIL, A., Foundations of Algebraic Geometry. (Am. Math. Soc. Colloq., vol. 29.) New York 1946. Zitiert mit F. so, daß z. B. F. VI₂, th. 6, bedeutet Theorem 6 aus Kap. VI, § 2.

²⁾ SEVERI, F., Über die Grundlagen der algebraischen Geometrie. (Abh. Math. Sem. Hamburg, Bd. 9, S. 335—364. 1933.)

³⁾ WAERDEN, B. L. VAN DER, Einführung in die algebraische Geometrie. Berlin, Springer 1939.

SEVERI²⁾) einen Ansatz. Er läßt sich ähnlich ausarbeiten, wie es WEIL in seinem Buche F. für die eigentlichen Komponenten getan hat, und dies soll in der vorliegenden Abhandlung geschehen.

Die Methode von WEIL besteht darin, daß er die Definition der Multiplizität $i(A \cdot B, P; U)$ des Schnittpunktes P von $A^r \cap B^s$ auf U^n im S^N zurückführt auf die Definition der Multiplizität des Schnittpunktes $P \times P$ zweier alg. Mfn. im Produktraum $S^N \times S^N$, dessen Punkte die geordneten Paare von Punkten aus dem S^N sind. Die erste alg. Mf. ist dabei $A^r \times B^s$ und die zweite ein linearer Raum A mit der zu $A^r \times B^s$ bzgl. $S^N \times S^N$ komplementären Dimension $2N - r - s$. A hängt dabei von U^n und P ab. Die Multiplizität von $P \times P$ im Schnitt von $A \times B$ mit dem linearen Raum A ist leichter zu erfassen als die von $A \cap B$ im S^N direkt. Einen andern Weg schlägt CHEVALLEY ein⁴⁾.

Den von SEVERI²⁾) gewiesenen Weg zur Definition der Multiplizität eines Schnittpunktes P von $A \cap B$, der nicht notwendig eigentliche Komponente von $A \cap B$ bzgl. einer passenden alg. Mf. U ist, macht man sich am besten wieder durch ein Beispiel im S^3 klar. Von einem allgemeinen Punkte Z des S^3 aus projiziert SEVERI die Kurve A^1 . Der dabei entstehende Kegel ist eine alg. Mf. V^2 , deren Dimension zur Dimension der Kurve B^1 bzgl. des S^3 komplementär ist. Wenn P isoliert in $A^1 \cap B^1$ ist, dann auch in $V^2 \cap B^1$, und SEVERI kann daher die Multiplizität von P in $A^1 \cap B^1$ gleich der bereits definierten Schnittmultiplizität von V^2 und B^1 in P setzen. In dem oben erwähnten Beispiel des Schnittes zweier Erzeugender eines Kegels im S^3 ist V^2 die Ebene durch die eine Erzeugende A^1 und einen allgemeinen Punkt Z des S^3 . Von der anderen Erzeugenden B^1 wird V^2 im Doppelpunkt P geschnitten, und natürlich ist die Multiplizität eins.

Im folgenden werde ich eine Definition der Multiplizität $\mu(A \cdot B, P)$ für isolierte Schnittpunkte zweier irreduzibler alg. Mfn. A^r und B^s geben (§ 2); ohne über $r + s$ oder über die Einbettung von A und B in eine alg. Mf. U Voraussetzungen zu benötigen. Ferner wird nicht wie bei SEVERI²⁾) verlangt, daß alle Komponenten von $A \cap B$ isolierte Punkte seien. — Ähnlich wie WEIL führe ich die Definition von μ zurück auf den einfacher zu behandelnden Schnitt von $A \times B$ mit einer alg. Mf. M im $S^N \times S^N$. Die Dimension von M ist dabei komplementär zur Dimension $r + s$ von $A^r \times B^s$, und für alle Paare von alg. Mfn. A^r und B^s , für die $r + s$ gleich ist, kann man dieselbe Mf. M^{2N-r-s} nehmen. Auf den isolierten Schnittpunkt $P \times P$ von $A \times B$ und M wende ich dann die Multiplizitätsdefinition von WEIL an.

Die Mf. M aus $S^N \times S^N$ ist als Mf. einer Korrespondenz im S^N oder durch Abbildung in die SEGRESche Mf. $S_{N,N}$ sehr einfach beschreibbar (§ 1). Aus den folgenden Ausführungen kann man ohne weiteres den

⁴⁾ CHEVALLEY, C.: Intersection of algebraic and algebroid varieties. (Trans. Amer. Math. Soc., Bd. 57, S. 1—85, 1945.)

Zusammenhang unserer Definition mit dem Kegel V von SEVERI herauslesen. Ich werde auch zeigen, daß in dem von WEIL behandelten Fall (A^r, B^s in U^n , $r + s = n$, P einfacher Punkt von U) unsere Definition $\mu(A \cdot B, P)$ in die Definition der Multiplizität $i(A \cdot B, P; U)$ übergeht (§ 3, Satz 1). — Die Übertragung auf Schnittkomponenten höherer Dimension bereitet keine Schwierigkeiten.

Für μ lassen sich mit einer Ausnahme die für die Multiplizität i von WEIL fundamentalen und für i sogar charakteristischen Eigenschaften¹⁾ beweisen, nämlich die Kommutativität $\mu(A \cdot B, P) = \mu(B \cdot A, P)$ (§ 4, Satz 4), das Kriterium für $\mu = 1$ (Satz 5), die Invarianz bei regulärer Projektion (Satz 6) und die Invarianz bei biregulärer, birationaler Korrespondenz (Satz 7). Dagegen gilt nicht mehr durchweg für das Assoziativgesetz, wie durch Gegenbeispiele (§ 5) gezeigt wird, sondern dazu ist die Einbettung von A^r und B^s in eine alg. Mf. U^n , $n = r + s$, die in P einen einfachen Punkt hat, nötig.

Ebenso wie bei WEIL ist auch bei uns die Schnittmultiplizität eine lokale Eigenschaft, z. B. brauchen wir über die Isoliertheit von P hinaus nicht etwa vorauszusetzen, daß alle Komponenten von $A \cap B$ die Dimension Null haben. Ferner könnten wir, genau wie WEIL, mit dem affinen Raum auskommen. Es ist aber für uns etwas bequemer, im projektiven Raum S^N zu arbeiten, so daß $S^N \times S^N$ ein doppelt projektiver Raum ist. Die Spezialisierung unserer Definition in den von WEIL behandelten Fall besteht dann einfach darin, daß wir (im oben erläuterten Sinne SEVERIS²⁾) den als allgemeinen Punkt Z im S^3 angenommenen Scheitel des Kegels V^2 zum allgemeinen Punkt der unendlich fernen Ebene spezialisieren.

§ 1.

Die algebraische Mannigfaltigkeit M .

Im projektiven N -dimensionalen Raum S^N über dem Grundkörper k sei L^m ein allgemeiner linearer, m -dimensionaler Unterraum. Mit ihm definieren wir die über k irreduzible Korrespondenz \mathfrak{K} im S^N , zu der ein Paar X, X' von Punkten $X = (x_0, \dots, x_N)$, $X' = (x'_0, \dots, x'_N)$ aus S^N gehört, wenn ihre Verbindungsgerade $\overline{XX'}$ den linearen Raum L trifft. Dieser Korrespondenz entspricht im doppelt-projektiven Produkt-raum $S^N \times S^N$ der geordneten Punktepaare aus S^N eine alg. Mf. M mit folgendem allgemeinen Punkt: $(\xi) = (1, \xi_1, \dots, \xi_N)$ sei ein allgemeiner Punkt von S^N und $(\lambda) = (1, \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ ein allgemeiner Punkt von L^m , τ sei eine Unbestimmte. Dann ist

$$(\xi; \eta) = (1, \xi_1, \dots, \xi_N; (1 - \tau)\xi_1 + \tau\lambda_1, \dots, (1 - \tau)\xi_N + \tau\lambda_N)$$

allgemeiner Punkt von M . Da als Dimensionen über dem Grundkörper k auftreten $\text{Dim}_k(\xi) = N$, $\text{Dim}_k(\lambda) = m$, ist $\text{Dim}_k M = N + m + 1$. —

Ein Gleichungssystem für M im $S^N \times S^N$ kann man aus der Forderung

$$(1) \quad \text{Rang} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_N \\ x'_0 & x'_1 & \dots & x'_N \\ z_{i0} & z_{i1} & \dots & z_{iN} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ z_{m0} & z_{m1} & \dots & z_{mN} \end{pmatrix} \leq m + 2$$

erhalten, wobei die $m + 1$ Punkte $Z_i = (z_{i0}, \dots, z_{iN})$, $i = 0, \dots, m$, allgemeine Punkte des S^N sind, also einen allgemeinen linearen Raum L^m aufspannen. Setzen wir die Determinanten aller $(m + 3)$ -reihigen Teilmatrizen gleich null, so erhalten wir ein System von in X und X' bilinearen Gleichungen für M , die natürlich nicht alle unabhängig sind. —

Bemerkung. Obgleich es im folgenden nicht gebraucht wird, sei noch eine zweite Beschreibung von M angegeben. Dazu bilden wir durch $y_{ik} = x_i \cdot x'_k$, $i, k = 0, \dots, N$, den Produktraum $S^N \times S^N$ ab auf die SEGRESche Mannigfaltigkeit $S_{N;N}$ im $S^{N(N+2)}$, die dort als Durchschnitt der Quadriken

$$(2) \quad y_{ik} \cdot y_{j1} = y_{i1} \cdot y_{jk}, \quad i \neq j, k \neq 1,$$

darstellbar ist. Das Bild M^* von M wird dann gemäß (1) aus $S_{N;N}$ ausgeschnitten durch die sich aus

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} y_{00} & y_{10} & \dots & y_{N0} \\ y_{00} & y_{01} & \dots & y_{0N} \\ z_{i0} & z_{i1} & \dots & z_{iN} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ z_{m0} & z_{m1} & \dots & z_{mN} \end{pmatrix} \leq m + 2$$

ergebenden Hyperflächen, die sich als Hyperebenen erweisen. Entwickeln wir nämlich die $(m + 3)$ -reihigen Unterdeterminanten dieser Matrix nach den ersten beiden Zeilen, so erhalten wir für die Hyperflächen Gleichungen in den $y_{i0} \cdot y_{0k} - y_{k0} \cdot y_{0i}$, deren Koeffizienten Formen in den z_{is} sind. Wegen (2) ist $y_{i0} \cdot y_{0k} - y_{k0} \cdot y_{0i} = y_{ik} \cdot y_{00} - y_{ki} \cdot y_{00} = (y_{ik} - y_{ki}) \cdot y_{00}$. Das Bild M^* von M wird also aus der SEGRESchen Mf. $S_{N;N}$ durch Hyperebenen $\sum_{0 \leq i < k \leq N} a_{ik}^t(z) (y_{ik} - y_{ki}) = 0$ ausgeschnitten,

in denen die $a_{ik}^t(z)$ Formen in den Koordinaten der L aufspannenden Punkte Z_0, \dots, Z_m aus S^N sind. Diese Hyperebenen bestimmen einen linearen Raum im $S^{N(N+2)}$, dessen Durchschnitt mit der SEGRESchen Mf. $S_{N;N}$ gerade das Bild M^* von M ist. Zur näheren Untersuchung dieser M^* stehen die Hilfsmittel bereit (W. BURAU⁵⁾), doch wollen wir das jetzt nicht weiter verfolgen. —

⁵⁾ BURAU, W., Grundmannigfaltigkeiten der projektiven Geometrie. (Collectanea Mathematica Barcelona, im Druck.)

An den Gleichungen (1) für M sieht man, daß M die Diagonalmannigfaltigkeit \mathcal{A}_0 aus $S^N \times S^N$, die aus allen Punkten $\mathcal{A}_P = P \times P$ besteht, enthält. Nun sei $P = (1, p_1, \dots, p_N)$ ein Punkt aus S^N , der nicht in der Fernhyperebene $x_0 = 0$ liegt. Die Gleichungen für den Tangentialraum T an die alg. Mf. M aus $S^N \times S^N$ im Punkte $\mathcal{A}_P = P \times P = (1, p_1, \dots, p_N; 1, p_1, \dots, p_N)$ ergeben sich aus den Gleichungen (1) für M durch partielle Differentiation, wobei zu berücksichtigen ist, daß $S^N \times S^N$ doppelt-projektiver Raum ist. Diese Gleichungen für T lassen sich wieder zusammenfassen zu

$$(3) \quad \text{Rang} \begin{pmatrix} 0 & x_1 x'_0 - x_0 x'_1 & \dots & x_N x'_0 - x_0 x'_N \\ 1 & p_1 & \dots & p_N \\ z_{00} & z_{01} & \dots & z_{0N} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ z_{m0} & z_{m1} & \dots & z_{mN} \end{pmatrix} \leq m + 2.$$

An ihnen erkennt man, daß alle diejenigen Punkte \mathcal{A}_P von M einfache Punkte von M sind, für die $P = (1, p_1, \dots, p_N)$ nicht in L liegt.

§ 2.

Die Definition der Multiplizität $\mu(A \cdot B, P)$.

Im S^N seien A^r und B^s zwei irreduzible, r - bzw. s -dimensionale alg. Mfn. und $r + s \leq N$. $(\alpha) = (\alpha_0, \dots, \alpha_N)$ und $(\beta) = (\beta_0, \dots, \beta_N)$ seien über dem Grundkörper k unabhängige allgemeine Punkte von A bzw. B . Unter $A^r \times B^s$ wollen wir, wie in F., die $(r + s)$ -dimensionale alg. Mf. im doppelt projektiven Raum $S^N \times S^N$ verstehen, die dort durch den allgemeinen Punkt $(\alpha; \beta) = (\alpha_0, \dots, \alpha_N; \beta_0, \dots, \beta_N)$ über k definiert ist. — Die Dimension m des allgemeinen linearen Raumes L^m aus S^N , der in der Definition der Korrespondenz \mathfrak{R} (§ 1) auftritt, wählen wir nun zu $m = \text{Dim } L^m = N - r - s - 1$ und erhalten für die zur Korrespondenz \mathfrak{R} gehörige alg. Mf. M aus $S^N \times S^N$ die $\text{Dim } M = N + m + 1 = 2N - r - s$. Die Dimensionen der alg. Mfn. $A^r \times B^s$ und M^{2N-r-s} sind also komplementär. —

Bemerkung. Wenn $r + s = N$, also $m = -1$ ist, muß man sinngemäß L^{-1} als leer ansetzen und wird auf $M^N = \mathcal{A}_0$ geführt. In den Gleichungen § 1, (1), fallen dann die z_{ik} fort. —

Nun sei P ein isolierter Schnittpunkt von A und B . Dann gehört $\mathcal{A}_P = P \times P$ sowohl zu $A \times B$ als auch zu M , und wir könnten die Multiplizität durch

$$(4) \quad \mu(A \cdot B, P) = i((A \times B) \cdot M, \mathcal{A}_P; S^N \times S^N)$$

definieren, da sich wegen der Komplementarität der Dimensionen auf der rechten Seite der Multiplizitätsbegriff von WEIL, F VI₁, anwenden läßt, falls wir noch zeigen, daß \mathcal{A}_P eigentliche Komponente von $(A \times B) \cap M$ im $S^N \times S^N$ ist, d. h. hier, daß \mathcal{A}_P ebenfalls isoliert ist in $(A \times B) \cap M$.

Wenn ein Punkt $Q \times R$ zum Durchschnitt von $A \times B$ mit M gehört, so bedeutet dies gemäß der Definition der Korrespondenz \mathfrak{R} im S^N , daß Q in A , R in B und überdies R auf der Verbindungsgeraden von Q mit einem Punkte aus L liegt, d. h. daß R sowohl in B als auch auf dem die alg. Mf. A aus dem linearen Raum L als Scheitel projizierenden Kegel liegt. — Darin besteht der Zusammenhang unserer Definition mit dem Ansatz von SEVERI (s. Einl.) — Die Isoliertheit von \mathcal{A}_P in $(A \times B) \cap M$ unter Voraussetzung der Isoliertheit von P in $A \cap B$ folgt sofort aus dem

Lemma. Schneidet man $A^r \times B^s$ statt mit der Diagonalmannigfaltigkeit \mathcal{A}_0^N aus $S^N \times S^N$ mit der \mathcal{A}_0 umfassenden alg. Mf. M^{2N-r-s} , so treten zu den durch \mathcal{A}_0 , Q in $A \cap B$, gegebenen Schnittpunkten von $A \times B$ mit \mathcal{A}_0 höchstens noch endlich viele Schnittpunkte $Q \times R$ hinzu.

Wäre \mathcal{A}_P nicht isoliert in $(A \times B) \cap M$, so müßte nach diesem Lemma \mathcal{A}_P in einer mindestens eindimensionalen alg. Mf. \mathcal{A}_C aus \mathcal{A}_0 enthalten sein, also wäre auch P eingebettet in C aus $A \cap B$.

Beweis des Lemmas nach einem Prinzip von VAN DER WAERDEN⁶⁾ durch Einführung einer neuen Korrespondenz $\bar{\mathfrak{R}}$ im S^N und Konstantenzählung: $\bar{\mathfrak{R}}$ ist eine Korrespondenz zwischen den Punkten von B und gewissen Punkten des S^N . Ein allgemeines Punktepaar von $\bar{\mathfrak{R}}$ bestehe aus einem allgemeinen Punkt (β) von B^s und einem allgemeinen Punkt auf der Verbindungsgeraden von (β) mit einem allgemeinen Punkt (α) von A^r . Dann ist nach dem Prinzip der Konstantenzählung

$$(5) \quad \text{Dim } \bar{\mathfrak{R}} = s + (r + 1) = a + b,$$

wobei a die Dimension der Bildmannigfaltigkeit V^a der Korrespondenz ist, also der alg. Mf. aller Punkte des S^N auf einer Verbindungsgeraden von Punkten von A und B , und b die Dimension der auf B^s gelegenen Urbildmannigfaltig U_η^b eines allgemeinen Punktes (η) von V^a ist. — Diese Korrespondenz $\bar{\mathfrak{R}}$ verengen wir nun dadurch zu einer Korrespondenz $\bar{\mathfrak{R}}_1$, daß wir V^a noch mit $r + s + 1$ allgemeinen Hyperebenen schneiden, die ihrerseits dem $L^{N-r-s-1}$ beschreiben. Das ist eine Korrespondenz zwischen gewissen Punkten von B und den in L gelegenen Punkten der obigen Verbindungsgeraden von A und B . Die Punkte $Q \times R$ aus $(A \times B) \cap M$ mit $Q \neq R$ ergeben durch $\overline{QR} \cap L = W$ Paare Q, W dieser Korrespondenz $\bar{\mathfrak{R}}_1$, und zum Beweis des Lemmas genügt es zu zeigen, daß die Urmannigfaltigkeit von $\bar{\mathfrak{R}}_1$ auf B die Dimension $d = 0$ hat. Die Bildmannigfaltigkeit von $\bar{\mathfrak{R}}_1$ ist der Schnitt von V^a mit $r + s + 1$ allgemeinen Hyperebenen, hat also die Dimension $a - r - s - 1$. Die auf B liegende Urbildmannigfaltigkeit

⁶⁾ WAERDEN, B. L. VAN DER, Zur algebraischen Geometrie XIV. Schnittpunktzahlen von algebraischen Mannigfaltigkeiten. (Math. Ann., Bd. 115, S. 619—642. 1938.)

eines allgemeinen Punktes der Bildmannigfaltigkeit $V^a \cap L$ hat wie bei $\bar{\mathfrak{K}}$ die Dimension b , weil die Hyperebenen als allgemein vorausgesetzt wurden, also ein allgemeiner Punkt von $V^a \cap L$ auch allgemeiner Punkt von V^a ist. Daher ist, wieder nach dem Prinzip der Konstantenzählung und nach (5), einerseits $\text{Dim } \bar{\mathfrak{K}}_1 = (a - r - s - 1) + b = 0$ und andererseits $\text{Dim } \bar{\mathfrak{K}}_1 = c + d$, wobei d die Dimension der Urmannigfaltigkeit von $\bar{\mathfrak{K}}_1$ war und c die Dimension der Bildmannigfaltigkeit eines allgemeinen Punktes dieser Urmannigfaltigkeit ist. Aus $c + d = 0$ folgt sogleich $d = 0$ und damit die Behauptung des Lemmas. —

Korollar. P ist in $A \cap B$ dann und nur dann isoliert, wenn \mathcal{A}_P in $(A \times B) \cap M$ isoliert ist.

Beweis. Nach dem Lemma bleibt nur noch die Notwendigkeit der Bedingung nachzuweisen. — Wenn P eingebettet ist in C aus $A \cap B$, dann ist \mathcal{A}_P eingebettet in \mathcal{A}_C aus $(A \times B) \cap \mathcal{A}_0 \subseteq (A \times B) \cap M$.

Wie bereits gezeigt, folgt aus dem Lemma, daß folgende Definition sinnvoll ist:

Definition. Die Multiplizität $\mu(A \cdot B, P)$ eines isolierten Schnittpunktes P zweier alg. Mfn. A^r und B^s des S^N mit $r + s \leq N$ ist $\mu(A \cdot B, P) = i((A \times B) \cdot M, \mathcal{A}_P; S^N \times S^N)$. Dabei ist rechts der Multiplizitätsbegriff von WEIL, F. VI₁, auf die wieder irreduziblen algebraischen Mfn. $A^r \times B^s$ und M^{2N-r-s} von bzgl. $S^N \times S^N$ komplementären Dimensionen anzuwenden.

§ 3.

Vergleich mit dem Multiplizitätsbegriff von Weil.

In dem von WEIL, F., behandelten Fall, daß A^r und B^s sich in einer über k irreduziblen alg. Mf. U^n , $r + s = n$, einbetten lassen, für die P einfacher Punkt ist, ergibt sich die Übereinstimmung seiner Multiplizität mit unserer nach folgendem

Satz 1. Die alg. Mfn. A^r und B^s seien eingebettet in die irreduzible alg. Mf. U^n aus S^N , bzgl. der A^r und B^s komplementäre Dimension haben, $r + s = n$. Wenn dann ein isolierter Schnittpunkt P von A und B einfacher Punkt von U ist, gilt $\mu(A \cdot B, P) = i(A \cdot B, P; U)$.

Zum Beweis muß man sich die Definition von WEIL näher ansehen. Er arbeitet inhomogen, also im affinen Raum R^N , und führt die Definition von i zurück auf den vorher in F VI₁ behandelten Spezialfall der Multiplizität j eines isolierten Schnittpunktes einer alg. Mf. mit einem linearen Raum A komplementärer Dimension:

$$(6) \quad i(A \cdot B, P; U) = j((A \times B) \cdot A, \mathcal{A}_P; R^N \times R^N).$$

Für A kann man jeden $(2N - n)$ -dimensionalen linearen Raum im $R^N \times R^N$ nehmen, der sich durch ein Gleichungssystem $F_i(X) = F_i(X')$, $X = (x_1, \dots, x_n)$, $X' = (x'_1, \dots, x'_n)$, $i = 1, \dots, n$, so beschreiben läßt, daß

die Linearformen $F_i(X)$ ein System U^n in P uniformisierender Linearformen sind; d. h. der durch $F_i(X) = F_i(P)$, $i = 1, \dots, n$, im R^N beschriebene lineare Raum R^{N-n} darf mit dem Tangentialraum T^n an U^n in P nur den Punkt P gemeinsam haben, F. IV₆.

In unserer Definition

$$(4) \quad \mu(A \cdot B, P) = i((A \times B) \cdot M, \mathcal{A}_P; S^N \times S^N)$$

spezialisieren wir nun M so, daß nach Inhomogenisierung M übergeht in einen linearen Raum \mathcal{A} von WEIL. Anschließend brauchen wir nur noch zu zeigen, daß bei dieser Spezialisierung die Multiplizität erhalten bleibt, also keine Schnittpunkte zusammenrücken. Dies wird daraus folgen, daß P einfacher Punkt von U ist.

M^{2N-n} aus $S^N \times S^N$ ist nach § 1 die alg. Mf. der Korrespondenz \mathfrak{K} derjenigen Punktepaare des S^N , deren Verbindungsgerade den allgemeinen linearen Raum L^{N-n-1} des S^N trifft, $m = N - n - 1$. Wir spezialisieren nun L zu dem allgemeinen m -dimensionalen linearen Raum L' in der Fernhyperebene des S^N . In den aus (1), § 1, folgenden Gleichungen für M spezialisieren wir also $z_{00}, z_{10}, \dots, z_{N-n-1,0}$ zu 0. Nach Inhomogenisierung $x_0 = x'_0 = 1$ ergeben sich die Gleichungen für die so spezialisierte Mannigfaltigkeit M' im $R^N \times R^N$ aus

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_N \\ 1 & x'_1 & \dots & x'_N \\ 0 & z_{01} & \dots & z_{0N} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & z_{m1} & \dots & z_{mN} \end{pmatrix} \leq m + 2 = N - n + 1.$$

Zur Beschreibung von M' können wir unter ihnen n Gleichungen auswählen, die sich durch Nullsetzen solcher $(m+3)$ -reihigen Unterdeterminanten ergeben, die die erste Spalte der obigen Matrix enthalten. Dann ist M' im $R^N \times R^N$ durch lineare Gleichungen

$$F_i(x_1, \dots, x_N) = F_i(x'_1, \dots, x'_N), \quad i = 1, \dots, n$$

beschrieben, kommt also nach dem oben Gesagten als linearer Raum \mathcal{A}^{2N-n} aus $R^N \times R^N$ im Sinne von WEIL in Frage.

Der Schnittpunkt $P = (1, p_1, \dots, p_N)$ von A^r und B^s im S^N geht bei der Inhomogenisierung in den Punkt (p_1, \dots, p_N) aus R^N über, der wieder P genannt sei. Dann beschreiben im R^N die sich aus

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_N \\ 1 & p_1 & \dots & p_N \\ 0 & z_{01} & \dots & z_{0N} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & z_{m1} & \dots & z_{mN} \end{pmatrix} \leq m + 2 = N - n + 1$$

ergebenden Gleichungen $F_i(X) = F_i(P)$ einen $(N-n)$ -dimensionalen Raum R^{N-n} , von dem wir zeigen müssen, daß er zum Tangentialraum

T^n an U^n in dem als einfach vorausgesetzten Punkte P von U transversal ist, d. h. ihn nur in P schneidet. Dies ist aber klar, da R^{N-n} allgemeiner linearer Raum durch P ist, denn R^{N-n} ergibt sich aus P durch Abtragen des linearen Vektorgebildes mit den Basisvektoren $\{z_{h1}, \dots, z_{hN}\}$, $h = 1, \dots, m$, deren Komponenten die Unbestimmten z_{hj} sind. Nach Inhomogenisieren kann man also M' als einen linearen Raum A^{2N-n} in der Multiplizitätsdefinition von WEIL verwenden.

Wir brauchen demnach nur noch zu zeigen, daß bei der Spezialisierung von L in L' , und damit von M in M' , die Multiplizität auf der rechten Seite von (4) erhalten bleibt, daß dabei also nicht ein von $\mathcal{A}_P = P \times P$ aus $S^N \times S^N$ verschiedener Punkt $P_1 \times P_2$ aus $(A \times B) \cap M$ in $P \times P$ übergeht. — Zunächst kann so ein Punkt $P_1 \times P_2$ nicht die Gestalt $\mathcal{A}_{P_1} = P_1 \times P_1$ haben, weil sonst P_1 in $A \cap B$ läge, also der Punkt P aus $A \cap B$ eingebettet wäre in den geometrischen Ort von P_1 über k , was der vorausgesetzten Isoliertheit von P als Schnittpunkt von A und B widerspräche. — Wenn aber $P_1 \neq P_2$ wäre im Punkte $P_1 \times P_2$ aus $(A \times B) \cap M$, dann müßte, da M die alg. Mf. der Korrespondenz \mathfrak{R} ist, P_2 im Verbindungsraum $\overline{P_1 L}$ aus S^N enthalten sein. Dieser $(N-n)$ -dimensionale lineare Raum $\overline{P_1 L}$ würde also U^n sowohl in P_1 als auch in P_2 schneiden, da $P_1 \subset A \subset U$ und $P_2 \subset B \subset U$. Bei der Spezialisierung von L in L' sollten nun P_1 und P_2 beide in P übergehen. Also schnitte der lineare Raum $\overline{P L'}$ die Mf. U^n in P mindestens mit der Vielfachheit 2. Andererseits ist aber $\overline{P L'}$ allgemeiner $(N-n)$ -dimensionaler linearer Raum durch den einfachen Punkt P von U^n , da $\overline{P L'}$ nach Inhomogenisieren in den oben diskutierten linearen Raum R^{N-n} aus R^N übergeht, q. e. a.

§ 4.

Eigenschaften von $\mu(A \cdot B, P)$.

1. Die Definition von $\mu(A' \cdot B^s, P)$ ist auch sinnvoll, wenn $r = 0$, also A' der Punkt P ist. Der Punkt $P_1 \times P_2$ gehört genau dann zu $(P \times B) \cap M$, wenn erstens $P_1 = P$ ist und zweitens (gemäß der Definition der Korrespondenz \mathfrak{R}) P_2 im Durchschnitt von B mit dem $(N-s)$ -dimensionalen Verbindungsraum $\overline{P L}$ liegt. Da L ein allgemeiner linearer Raum ist, ist $\overline{P L}$ ein allgemeiner $(N-s)$ -dimensionaler Raum durch P . Wir werden nun sogleich

$$(7) \quad i((P \times B) \cdot M, \mathcal{A}_P; S^N \times S^N) = i(B \cdot \overline{P L}, P; S^N)$$

zeigen und damit den

Satz 2. Die Schnittmultiplizität $\mu(P \cdot B, P)$ des auf der alg. Mf. B liegenden Punktes P mit B ist gleich der Vielfachheit von P als Punkt von B .

Beweis von (7) mittels des Theorems F. VI₃, th. 9; statt direkt $P \times B$ mit M zu schneiden, bilden wir zunächst den Durchschnitt $P \times \overline{PL}$ von $P \times S^N$ mit M . Dann besagt th. 9, daß die Beziehung $\mathcal{A}_P \subseteq (P \times B) \cap M = ((P \times S^N) \cap M) \cap (P \times B) = (P \times \overline{PL}) \cap (P \times B)$ nicht nur punktmengenmäßig richtig ist, sondern auch bzgl. der Vielfachheit von \mathcal{A}_P , nämlich

$$\begin{aligned} & i((P \times B) \cdot M, \mathcal{A}_P; S^N \times S^N) \\ &= i((P \times S^N) \cdot M, P \times \overline{PL}; S^N \times S^N) \cdot i((P \times B) \cdot (P \times \overline{PL}), \mathcal{A}_P; S^N \times S^N). \end{aligned}$$

Der erste Faktor auf der rechten Seite ist eins nach dem Kriterium für $i = 1$ in F. VI₂, th. 6, da $P \times S^N$ und M transversal zueinander sind in \mathcal{A}_P auf $P \times \overline{PL}$. Der zweite Faktor auf der rechten Seite läßt sich nach F. VI₃, th. 7, schreiben als ein Produkt $i(P \cdot P, P; S^N) \cdot i(B \cdot \overline{PL}, P; S^N)$, in dem der erste Faktor ebenfalls wieder eins ist.

2. Die Multiplizität $\mu(A \cdot B, P)$ ist ihrer Natur nach algebraisch. Das soll heißen: Wenn A und B sich über dem Körper k definieren lassen und durch einen Isomorphismus σ der Körper k auf k^σ , A auf A^σ und B auf B^σ abgebildet werden, dann gilt

Satz 3.

$$\mu(A^\sigma \cdot B^\sigma, P^\sigma) = \mu(A \cdot B, P).$$

Beweis. Das folgt sofort aus dem entsprechenden Satz für i in F. VI₂, th. 3, da die Gleichungen (1) in § 1 zeigen, daß M^σ gleich M über k^σ ist.

3. Satz 4. μ ist kommutativ: $\mu(A \cdot B, P) = \mu(B \cdot A, P)$.

Beweis. Wenn wir in der μ definierenden Gleichung am Ende von § 2 den ersten Faktor S^N mit dem zweiten Faktor S^N des Produktes $S^N \times S^N$ vertauschen, geht $A \times B$ in $B \times A$ über, aber M bleibt dabei erhalten, wie man wieder an den Gleichungen (1) in § 1 sieht.

4. Das Kriterium für $\mu = 1$.

Definition. Die irreduziblen alg. Mfn. A^* und B^* heißen transversal im Punkte P aus $A \cap B$, wenn P einfacher Punkt von A und von B ist und dort der Durchschnitt der beiden Tangentialräume T_1 an A und T_2 an B nur aus P besteht.

Satz 5. A und B sind dann und nur dann transversal in P , wenn $\mu(A \cdot B, P) = 1$ und P isolierter Schnittpunkt von A und B ist.

Beweis durch Zurückführung auf den entsprechenden Satz für i in F. VI₂, th. 6; nach diesem Theorem sind $A \times B$ und M dann und nur dann transversal in \mathcal{A}_P , wenn $i((A \times B) \cdot M, \mathcal{A}_P; S^N \times S^N) = 1$ und \mathcal{A}_P isoliert ist in $(A \times B) \cap M$. Nun ist nach dem Korollar des Lemmas in § 2 \mathcal{A}_P dann und nur dann isoliert in $(A \times B) \cap M$, wenn es P ist in $A \cap B$. Zunächst wollen wir zeigen, daß, falls A und B transversal sind in P , auch $A \times B$ und M transversal sind in \mathcal{A}_P .

Wenn P einfacher Punkt von A und von B , ist auch \mathcal{A}_P einfacher Punkt von $A \times B$, und der Tangentialraum in \mathcal{A}_P an $A \times B$ ist

$T_1 \times T_2$. Der Tangentialraum in \mathcal{A}_P an M werde, wie am Ende von § 1 T genannt. Zu beweisen ist $(T_1 \times T_2) \cap T = \mathcal{A}_P$. Ein Punkt $R_1 \times R_2 \neq \mathcal{A}_P$ aus $(T_1 \times T_2) \cap T$ kann nicht die Gestalt \mathcal{A}_R haben, weil sonst P und R beide in $T_1 \cap T_2$ lägen, was der Transversalität von A und B in P widerspräche. Also müßte $R_1 \neq R_2$ sein. Aus den Gleichungen (3), § 1, für T und aus $R_1 \times R_2$ in T würde dann für die Verbindungsgerade $\overline{R_1 R_2}$ des Punktepaars R_1, R_2 folgen, daß sie den linearen Raum \overline{PL} in ihrem Fernpunkte R_∞ schneite. Da $\overline{R_1 R_2}$ im Verbindungsraum $\overline{T_1 T_2}$ von T_1 und T_2 läge, würden P und R_∞ beide sowohl in $\overline{T_1 T_2}$ als auch in \overline{PL} enthalten sein. Das ist aber unmöglich, denn wegen $\text{Dim } \overline{T_1 T_2} = \text{Dim } T_1 + \text{Dim } T_2 - \text{Dim } (T_1 \cap T_2) = r + s - 0 = 2N - \text{Dim } \overline{PL}$ haben $\overline{T_1 T_2}$ und \overline{PL} komplementäre Dimensionen; außerdem ist \overline{PL} ein allgemeiner Raum durch P . Also sind $A \times B$ und M transversal in \mathcal{A}_P , womit $i = \mu = 1$ und die Isoliertheit der Schnittpunkte \mathcal{A}_P bzw. P nachgewiesen ist.

Beweis der Umkehrung. Wenn A und B im Punkte P aus $A \cap B$ nicht transversal sind, aber P isolierter Schnittpunkt von A und B ist, dann kann das a) daran liegen, daß P zwar einfacher Punkt von A und B , aber $\text{Dim } T_1 \cap T_2 \geq 1$ ist, oder b) daran, daß P mehrfacher Punkt von A oder B ist. Im Falle a) muß $T_1 \cap T_2$ mindestens eine Gerade G durch P enthalten, also auch \mathcal{A}_G sowohl in $T_1 \times T_2$ als auch in \mathcal{A}_0 und damit in T liegen. Dann folgt aus der Isoliertheit von \mathcal{A}_P in $(A \times B) \cap M$ nach F. VI₂, th. 6, daß $\mu = i \geq 2$ ist. Im Falle b) sei etwa P mehrfacher Punkt von A^r . Dann ist auch \mathcal{A}_P mehrfacher Punkt von $A \times B$, also sind $A \times B$ und M in \mathcal{A}_P nicht transversal. Zusammen mit der Isoliertheit von \mathcal{A}_P in $(A \times B) \cap M$ folgt daraus wieder nach F. VI₂, th. 6, $\mu = i \geq 2$, q. e. d.

5. *Projektionssatz.* A sei eine alg. Mf. im Produktraum $S^D \times S^N$ und habe $(\alpha'; \alpha'') = (\alpha'_0, \dots, \alpha'_D; \alpha''_0, \dots, \alpha''_N)$ als allgemeinen Punkt über dem Grundkörper k . Unter der *Projektion A' von A auf den ersten Faktor S^D in $S^D \times S^N$* versteht man diejenige alg. Mf. im S^D , die dort als Ort des allgemeinen Punktes $(\alpha') = (\alpha'_0, \dots, \alpha'_D)$ über k definiert ist, F. IV₃. Die *Projektion von A auf A'* nennt man *regulär* im Punkte P' von A' , wenn die letzten Koordinaten $(\alpha''_0, \dots, \alpha''_N)$ des obigen allgemeinen Punktes $(\alpha'; \alpha'')$ von A sich rational (genauer als Quotienten je zweier Formen gleichen Grades) durch die ersten Koordinaten $\alpha'_0, \dots, \alpha'_D$ von $(\alpha'; \alpha'')$ ausdrücken lassen und außerdem für $P' = (1, p'_1, \dots, p'_D)$ die Nenner von Null verschieden sind, F. IV₇.

Für die Multiplizität i von Wen gilt folgender Projektionssatz F. VI₃, th. 8:

$$(8) \quad i(A' \cdot B, P'; S^D) = i(A \cdot (B \times S^N), P; S^D \times S^N).$$

Hierbei liegen die alg. Mfn. A und B im $S^D \times S^N$ bzw. S^D und P in $A \cap (B \times S^N)$. Die Projektion P' von P auf den ersten Faktor S^D ist

Schnittpunkt von A' und B , und die Projektion von A auf A' ist als regulär in diesem Punkte P' vorausgesetzt. Ferner sei die rechte Seite von (8) sinnvoll, d. h. P isoliert in $A \cap (B \times S^N)$ und $\text{Dim } A + \text{Dim } (B \times S^N) = D + M$. Dann ist auch die linke Seite von (8) sinnvoll, denn, wieder nach F. VI₃, th. 8, ist P isoliert in $A \cap (B \times S^N)$ dann und nur dann, wenn P' es ist in $A' \times B$, und außerdem gilt, wegen $\text{Dim } A = \text{Dim } A'$ bei regulärer Projektion, $\text{Dim } A' + \text{Dim } B = \text{Dim } A + \text{Dim } B = (D + N) - N = D$.

Wir wollen den Projektionssatz auf unsere Vielfachheit μ übertragen. Folgende Bezeichnungswiese ist dabei praktisch: Wenn A eine alg. Mf. im vierfach projektiven Raum $S^K \times S^L \times S^M \times S^N$ ist mit dem allgemeinen Punkt $(\alpha; \lambda; \mu; \nu)$ über k , sei mit $A'_{1,3}$ bezeichnet die Projektion von A auf das Produkt $S^K \times S^M$ des ersten mit dem dritten Faktor S , also der Ort von $(\alpha; \mu)$ über k im $S^K \times S^M$, usw. Mit $A'_{1,3,2,4}$ (ohne '!') wollen wir die alg. Mf. im $S^K \times S^M \times S^L \times S^N$ bezeichnen, die der Ort von $(\alpha; \mu; \lambda; \nu)$ über k ist (Vertauschung der beiden mittleren Faktoren S^L und S^M), usw. —

Satz 6. *Der Punkt $P = P' \times P''$ sei Schnittpunkt der beiden alg. Mfn. A und $B \times S^N$ aus $S^D \times S^N$. Die Projektion A'_1 von A auf S^D sei regulär in P' . — Der Punkt P' ist isoliert in $A'_1 \cap B$ dann und nur dann, wenn P es ist in $A \cap (B \times S^N)$. Falls P isoliert ist, gilt $\mu(A'_1 \cdot B, P') = \mu(A \cdot (B \times S^N), P)$.*

Beweis. Nach Definition von μ ist

$$\mu(A \cdot (B \times S^N), P' \times P'') = i((A \times B \times S^N) \cdot M, \mathcal{A}_{P' \times P''}; S^D \times S^N \times S^D \times S^N)$$

und

$$\mu(A'_1 \cdot B, P') = i((A'_1 \times B) \cdot \bar{M}, \mathcal{A}_{P'}; S^D \times S^D).$$

Es sei $r = \text{Dim } A = \text{Dim } A'_1$ und $s = \text{Dim } B$. Wir gehen aus von der Bemerkung, daß zwar M und \bar{M} verschiedene Dimensionen haben, nämlich $\text{Dim } M = 2(D + N) - r - s - N$ und $\text{Dim } \bar{M} = 2D - r - s$, aber nicht die beiden linearen Räume L aus $S^D \times S^N$ und \bar{L} aus S^D , die in den Definitionen der von M bzw. \bar{M} beschriebenen Korrespondenzen \mathfrak{R} bzw. \mathfrak{R} auftreten. Es ist nämlich $\text{Dim } L = D + N - (r + s + N) - 1 = D - (r + s) - 1 = \text{Dim } \bar{L}$. \bar{L} wird im S^D von den Punkten $Z'_i = (z'_{i0}, \dots, z'_{iD})$, $i = 0, \dots, D - r - s - 1$, aufgespannt und L im $S^D \times S^N$ von den Punkten $Z_i = (Z'_i, Z''_i) = (z'_{i0}, \dots, z'_{iD}; z''_{i0}, \dots, z''_{iN})$, $i = 0, \dots, D - r - s - 1$, wobei die z'_{ik} und die z''_{ik} Unbestimmte sind. Wenn noch $(\xi') = (\xi'_{i0}, \dots, \xi'_{iD})$ und $(\xi'') = (\xi''_{i0}, \dots, \xi''_{iN})$ allgemeine Punkte von S^D bzw. S^N sind, kann man gemäß der Definition in § 1 als allgemeinen Punkt für M nehmen:

$$(\xi'; \xi''; \eta'; \eta'') = (\xi'; \xi''; \sum t_i Z'_i + t_{D-r-s} \cdot (\xi'); \sum t_i Z''_i + t_{D-r-s} \cdot (\xi''))$$

und für \bar{M} :

$$(\xi', \eta') = (\xi'; \sum t_i Z'_i + t_{D-r-s} \cdot (\xi')).$$

Die letzten Koordinaten η'' des allgemeinen Punktes für M lassen sich rational durch die ξ', ξ'', η' ausdrücken, weil man aus den Ausdrücken für die ξ' und η' die t_0, \dots, t_{D-r-s} rational berechnen und diese dann in die Ausdrücke für die η'' einsetzen kann. Also ist die Projektion $M'_{1,2,3}$ von M auf den $S^D \times S^N \times S^D$ regulär im allgemeinen Punkt $(\xi'; \xi''; \eta')$, aber auch in dem speziellen Punkte $P' \times P'' \times P'$, weil P' nicht in \bar{L} liegt. — Da in dem allgemeinen Punkte $(\xi'; \xi''; \eta')$ von $M'_{1,2,3}$ die ξ'' einen allgemeinen Punkt des S^N bilden, ergibt sich, nach Vertauschung des zweiten und dritten Faktors in $S^D \times S^N \times S^D$, also beim Übergang von $M'_{1,2,3}$ zu $(M'_{1,2,3})_{1,3,2}$, daß diese alg. Mf. aus $S^D \times S^D \times S^N$ gleich $\bar{M} \times S^N$ ist, denn $(\xi'; \eta')$ ist allgemeiner Punkt von \bar{M} aus $S^D \times S^D$.

Nun liegt es nahe, zweimal hintereinander das oben in (8) zitierte Theorem anzuwenden. Dabei machen die Voraussetzungen über Isoliertheit keine Schwierigkeiten, denn nach dem Korollar aus § 2 ist die Isoliertheit von $P' \times P''$ in $A \cap (B \times S^N)$ äquivalent mit der Isoliertheit von $P' \times P'' \times P' \times P''$ in $(A \times B \times S^N) \cap M$, und diese wieder äquivalent nach F. VI₃, th. 8, mit der Isoliertheit von $P' \times P'' \times P'$ in $(A \times B) \cap M'_{1,2,3}$ oder von $P' \times P' \times P''$ in $(A \times B)_{1,3,2} \cap (M'_{1,2,3})_{1,3,2} = (A \times B)_{1,3,2} \cap (\bar{M} \times S^N)$. Diese ist, wieder nach F. VI₃, th. 8, äquivalent mit der Isoliertheit von $P' \times P'$ in $(A' \times B) \cap \bar{M}$, also nach § 2 mit der Isoliertheit von P' in $A' \cap B$. Demnach gilt, wenn wir im Symbol i die Bezeichnung des Produktraumes $S \times S \times \dots$ weglassen,

$$\begin{aligned} \mu(A \cdot (B \times S^N), P' \times P'') &= i((A \times B \times S^N) \cdot M, P' \times P'' \times P' \times P'') \\ &= i((A \times B) \cdot M'_{1,2,3}, P' \times P'' \times P') = i((A \times B)_{1,3,2} \cdot (\bar{M} \times S^N), P' \times P' \times P'') \\ &= i((A' \times B) \cdot \bar{M}, P' \times P') = \mu(A' \cdot B, P'), \text{ q. e. d.} \end{aligned}$$

6. *Unter Invarianz bei biregulärer, birationaler Korrespondenz versteht man nach F. IV, folgendes: U sei eine irreduzible alg. Mf. aus $S^D \times S^N$, deren Projektion U'_1 auf S^D und U'_2 auf S^N beide regulär seien längs U'_1 und U'_2 , d. h. in deren allgemeinen Punkten. Dies bedeutet, daß sich die Koordinaten eines allgemeinen Punktes von U'_2 rational ausdrücken lassen in den Koordinaten eines passenden allgemeinen Punktes von U'_1 und umgekehrt. Man spricht dann von einer birationalen Korrespondenz T zwischen U'_1 und U'_2 . Den auf U'_1 liegenden irreduziblen alg. Mfn. A'_1 und B'_1 mögen bei T die alg. Mfn. A'_2 und B'_2 auf U'_2 entsprechen und dabei der isolierte Schnittpunkt P'_1 aus $A'_1 \cap B'_1$ übergehen in P'_2 aus $A'_2 \cap B'_2$. Die birationale Korrespondenz T sei biregulär in P'_1 und P'_2 , d. h. die Projektionen von U auf U'_1 und U'_2 seien auch noch regulär in P'_1 bzw. P'_2 . Mit diesen Bezeichnungen gilt folgender*

Satz 7. *Die birationale Korrespondenz T zwischen den alg. Mfn. A'_1, B'_1 auf U'_1 in S^D und A'_2, B'_2 auf U'_2 in S^N sei biregulär in den Punkten P'_1 aus $A'_1 \cap B'_1$ und P'_2 aus $A'_2 \cap B'_2$. Wenn P'_1 in $A'_1 \cap B'_1$ und damit auch P'_2 in $A'_2 \cap B'_2$ isoliert ist, gilt $\mu(A'_1 \cdot B'_1, P'_1) = \mu(A'_2 \cdot B'_2, P'_2)$.*

Wir können den Beweis nicht wie sonst F. VI₃, th. 10, auf das Assoziativgesetz gründen, da dies hier nicht durchweg gilt (s. die Gegenbeispiele im nächsten § 5), sondern gehen so vor: Mit A und B seien die auf U im $S^D \times S^N$ liegenden alg. Mfn. bezeichnet, die auf U'_1 die Projektionen A'_1 und B'_1 bzw. auf U'_2 die Projektionen A'_2 und B'_2 besitzen, so daß $P = P'_1 \times P'_2$ isolierter Schnittpunkt von A und B ist. Zum Beweis des Satzes genügt natürlich der Nachweis der Gleichung $\mu(A'_1 \cdot B'_1, P'_1) = \mu(A \cdot B, P)$, da die Voraussetzungen symmetrisch sind. Wieder sei $r = \text{Dim } A'_1 = \text{Dim } A = \text{Dim } A'_2$ und $s = \text{Dim } B'_1 = \text{Dim } B = \text{Dim } B'_2$.

In der Gleichung

$$(9) \quad \mu(A \cdot B, P) = i((A \times B) \cdot M, \mathcal{A}_P; S^D \times S^N \times S^D \times S^N)$$

beschreibt nach Definition von μ die $(2D + 2N - r - s)$ -dimensionale alg. Mf. M aus $S^D \times S^N \times S^D \times S^N$ eine irreduzible Korrespondenz \mathfrak{K} im $S^D \times S^N$, zu der ein Punktepaar aus $S^D \times S^N$ genau dann gehört, wenn seine Verbindungsgerade den allgemeinen $(D + N - r - s - 1)$ -dimensionalen linearen Raum L aus $S^D \times S^N$ trifft. Nun spezialisieren wir L zu $\bar{L} \times S^N$, wobei \bar{L} ein allgemeiner $(D - r - s - 1)$ -dimensionaler linearer Raum aus S^D sei. Dabei geht M über in eine alg. Mf. M^* aus $S^D \times S^N \times S^D \times S^N$, die folgende Korrespondenz \mathfrak{K}^* im $S^D \times S^N$ beschreibt: Ein Punktepaar $Q_1 \times Q_2, R_1 \times R_2$ gehört zu \mathfrak{K}^* , wenn die Verbindungsgerade der in S^D liegenden Punkte Q_1 und R_1 den allgemeinen $(D - r - s - 1)$ -dimensionalen linearen Raum \bar{L} aus S^D trifft, denn Q_2 und R_2 aus S^N sind nach der Spezialisierung von L in $\bar{L} \times S^N$ keinen Bedingungen mehr unterworfen. Mit anderen Worten, Q_1 und R_1 müssen ein Paar derjenigen Korrespondenz $\bar{\mathfrak{K}}$ des S^D sein, die von der in $\mu(A'_1 \cdot B'_1, P'_1) = i((A'_1 \times B'_1) \cdot \bar{M}, P'_1 \times P'_1; S^D \times S^D)$ auftretenden alg. Mf. \bar{M} beschrieben wird. Wenn wir daher im Produktraum $S^D \times S^N \times S^D \times S^N$ den zweiten mit dem dritten Faktor vertauschen, in der unter 5. erklärten Bezeichnung also von M^* zu M^*_{1324} übergehen, ist $M^*_{1324} = \bar{M} \times S^N \times S^N$.

Nun läßt sich der Beweis des Satzes 7 durch den Nachweis erbringen, daß erstens die rechte Seite von (9) sich nicht ändert bei der Spezialisierung von M in M^* und daß zweitens

$$(10) \quad i((A \times B) \cdot M^*, \mathcal{A}_P; S^D \times S^N \times S^D \times S^N) \\ = i((A'_1 \times B'_1) \cdot \bar{M}, P'_1 \times P'_1; S^D \times S^D)$$

gilt. Die zweite Behauptung soll zuerst bewiesen werden. Die linke Seite von (10) ist nach Vertauschung der S gleich

$$i((A \times B)_{1324} \cdot (\bar{M} \times S^N \times S^N), P'_1 \times P'_1 \times P'_2 \times P'_2; S^D \times S^D \times S^N \times S^N)$$

und dies nach dem schon in (8) zitierten Projektionssatz F. VI₃, th. 8, gleich $i((A'_1 \times B'_1) \cdot \bar{M}, P'_1 \times P'_1; S^D \times S^D)$, also gleich $\mu(A'_1 \cdot B'_1, P'_1)$. —

Zum Beweis der ersten Behauptung müssen wir zeigen, daß es kein Paar von Punkten $Q_1 \times Q_2$ aus A und $R_1 \times R_2$ aus B geben kann, dessen Verbindungsgerade L trifft und daß bei der Spezialisierung von L in $\bar{L} \times S^N$ in das Punktepaar $P'_1 \times P'_2$, $P'_1 \times P'_2$ übergeht, natürlich außer diesem Paar selbst. — Zunächst ist klar, daß $Q_1 \times Q_2 \neq R_1 \times R_2$ sein muß; andernfalls wäre der Ort von $Q_1 \times Q_2$ über k enthalten in $A \cap B$, also wäre $P = P'_1 \times P'_2$ nicht isoliert in $A \cap B$. Die daher eindeutig bestimmte Verbindungsgerade G von $Q_1 \times Q_2$ und $R_1 \times R_2$ kann nicht ganz in L liegen, weil dieser $(D + N - r - s - 1)$ -dimensionale, allgemeine lineare Raum die r -dimensionale alg. Mf. A überhaupt nicht schneidet, also $Q_1 \times Q_2$ aus A nicht in L enthalten sein kann. Der Schnittpunkt der Geraden G mit L sei der Punkt $W_1 \times W_2$. Wir spezialisieren nun L aus in den linearen Raum $\bar{\bar{L}}_{W_1} \times S^N$, wobei $\bar{\bar{L}}_{W_1}$ ein allgemeiner $(D - r - s - 1)$ -dimensionaler linearer Raum durch den obigen Punkt W_1 im S^D sei. Hierbei bleibt das noch unspezialisierte Punktepaar $Q_1 \times Q_2$, $R_1 \times R_2$ erhalten, denn auch nach der Spezialisierung schneidet seine Verbindungsgerade G den $\bar{\bar{L}}_{W_1} \times S^N$ im Punkte $W_1 \times W_2$. Die Spezialisierung von L in $\bar{\bar{L}}_{W_1} \times S^N$ können wir nun, da \bar{L} allgemeiner linearer Raum sein sollte, in folgenden beiden Schritten vornehmen: zuerst L in $\bar{L} \times S^N$ und dann $\bar{L} \times S^N$ in $\bar{\bar{L}}_{W_1} \times S^N$. Würde bereits beim ersten Schritt das Paar $Q_1 \times Q_2$, $R_1 \times R_2$ übergehen in $P'_1 \times P'_2$, $P'_1 \times P'_2$, so auch bei der zusammengesetzten Spezialisierung, q. e. a.

§ 5.

Gegenbeispiele zum Assoziativgesetz.

Dieses Gesetz, s. F. VI, th. 5, besagt, daß die für drei alg. Mfn. A , B , C im S^N selbstverständlich richtige Punktgleichung $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ auch richtig ist, wenn man die Multiplizitäten berücksichtigt. Wenn der isolierte Schnittpunkt P von $A \cap B \cap C$ enthalten ist etwa in den Komponenten H_u von $A \cap B$ sowie in den Komponenten K_v von $B \cap C$, würde in unserm Falle das Assoziativgesetz für μ so lauten:

$$\sum_u \mu(A \cdot B, H_u) \cdot \mu(H_u \cdot C, P) = \sum_v \mu(A \cdot K_v, P) \cdot \mu(B \cdot C, K_v).$$

Nun haben wir zwar in dieser Abhandlung μ nur für Schnittpunkte und noch nicht für Schnittkomponenten höherer Dimension erklärt, aber zumindest wird man doch bei dieser Ausdehnung des Definitionsbereiches von μ verlangen, daß, ebenso wie in § 3, μ mit der Multiplizität i von WEIL übereinstimmt, wenn es sich um die von WEIL allein erfaßten eigentlichen Schnittkomponenten handelt, z. B. $\mu(A \cdot B, H_u) = i(A \cdot B, H_u; S^N)$, wenn $\text{Dim } H_u = \text{Dim } A + \text{Dim } B - N$ ist.

Im folgenden werden zwei Beispiele angegeben, in denen jeweils nur eine Komponente H bzw. K den Punkt P enthält und

$$(11) \quad i(A \cdot B, H; S^N) \cdot \mu(H \cdot C, P) \neq \mu(A \cdot K, P) \cdot i(B \cdot C, K; S^N)$$

ist. Der bequemeren Rechnung wegen arbeiten wir dabei im affinen Raum R^3 bzw. R^4 .

1. Beispiel. Im R^3 sei A der Zylinder $x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = 1$ und B die Kugel $x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2 = 1$, die vom Zylinder A längs der Schnittkurve H mit den Gleichungen $x_3 = 0$, $x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = 1$ berührt wird. C sei die Gerade $x_1 = x_3 = 0$, die die Kurve H nur in $P = (0, 0, 0)$ und in $(0, 2, 0)$ schneidet. Dann ist nach dem Kriterium F. VI₂, th. 6, für $i = 1$ die Schnittmultiplizität $i(A \cdot B, H; R^3) \geq 2$, weil A und B in dem auf H liegenden Punkte $P = (0, 0, 0)$ nicht transversal sind; und nach dem Kriterium in Satz 5, § 4, ist $\mu(H \cdot C, P) = 1$, da die Gerade C nicht Tangente an H in $P = (0, 0, 0)$ ist. Also ist die linke Seite von (11) gleich $i(A \cdot B, H; R^3) \cdot \mu(H \cdot C, P) \geq 2$.

Andererseits ist die Multiplizität $i(B \cdot C, P; R^3)$, mit der die Gerade C die Kugel B im Punkte $K = P$ schneidet, gleich 1, da C dort nicht in der Tangentialebene an B liegt, und ist $\mu(A \cdot K, P) = \mu(A \cdot P, P) = 1$ nach § 4, Satz 2, weil P einfacher Punkt des Zylinders A ist. Demnach ist die rechte Seite von (11) in diesem Beispiel gleich

$$\mu(A \cdot K, P) \cdot i(B \cdot C, K; R^3) = 1$$

und damit ungleich der linken.

2. Beispiel. Im R^4 sei die Fläche A der Schnitt eines Hyperzylinders mit einer Hyperebene, B sei eine Hyperkugel und C eine Ebene, nämlich

$$\text{A) } \begin{aligned} x_1^2 + (x_2 - 1)^2 &= 1 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{B) } x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$

$$\text{C) } \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

A und B schneiden einander in der Kurve H mit den Gleichungen $x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = 1$, $x_3 = x_4 = 0$, und H und C schneiden sich in den Punkten $P = (0, 0, 0, 0)$ und $(0, 2, 0, 0)$. Hierbei ist $i(A \cdot B, H; R^4) \geq 2$, da A und B in dem auf H liegenden Punkte $P = (0, 0, 0, 0)$ nicht transversal sind; der Durchschnitt ihrer Tangentialräume dort, $x_2 = x_4 = 0$ und $x_3 = 0$, ist nämlich zweidimensional und nicht wie zur Transversalität erforderlich, eindimensional. Dagegen sind nach unserer Definition in § 4 H und C transversal in P , da die Tangente $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ an H die Ebene $x_1 = x_3 = 0$ nur in P schneidet, also ist $\mu(H \cdot C, P) = 1$ und damit in diesem Beispiel die linke Seite von (11) mindestens 2.

Andererseits schneiden einander B und C in der Kurve K mit den Gleichungen $(x_2 - 1)^2 + x_4^2 = 1$, $x_1 = x_3 = 0$, und A und K schneiden

sich in den Punkten $P = (0, 0, 0, 0)$ und $(0, 2, 0, 0)$. Jetzt ist aber $i(B \cdot C, K; R^4) = 1$, denn in dem auf K liegenden Punkte P sind B und C transversal, der Durchschnitt ihrer Tangentialräume dort ist ja die Gerade $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. — Die Fläche A und die Kurve K sind transversal in P , weil ihre Tangentialräume dort, nämlich $x_2 = x_4 = 0$ und $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, einander nur in P schneiden. Also ist $\mu(A \cdot K, P) = 1$. Daraus folgt, zusammen mit dem oben Bewiesenen, daß die rechte Seite von (11) gleich 1, also wieder ungleich der linken ist. —

Das Assoziativgesetz erleidet also Ausnahmen, die jedoch, wie § 3, Satz 1, und F. VI₂, th. 5, zeigen, nicht auftreten, wenn man sich auf eigentliche Schnittkomponenten beschränkt, da dann unsere Multiplizitätsdefinition in die von WELL übergeht.

(Eingegangen am 1. August 1951.)

Die Ähnlichkeitsklassen indefiniter Gitter.

Von

Martin Eichler in Münster.

Einleitung.

L. E. WITT hat angeregt, die Theorie der quadratischen Formen auf geometrischen Grundbegriffen aufzubauen. Eine quadratische Form

$$F = \sum_{\mu, \nu=1}^n f_{\mu\nu} x_{\mu} x_{\nu} \quad (f_{\mu\nu} = f_{\nu\mu})$$

definiert in dem n -dimensionalen Vektorraum R zwischen zwei Vektoren $\xi = (x_1, \dots, x_n)$, $\eta = (y_1, \dots, y_n)$ ein skalares Produkt

$$\xi \eta = \sum_{\mu, \nu=1}^n f_{\mu\nu} x_{\mu} y_{\nu}.$$

Dadurch wird R zu einem metrischen Raum über demjenigen Körper k , dem die Koeffizienten $f_{\mu\nu}$ von F sowie die Vektorkomponenten x_{ν} , y_{ν} angehören. In einem demnächst erscheinenden Lehrbuch der Theorie der quadratischen Formen¹⁾ habe ich diese Anregung konsequent durchgeführt. Besonders der in den drei ersten Kapiteln dargestellte elementare Teil der Theorie wird im Folgenden als bekannt vorausgesetzt, und die dort gebrauchten Bezeichnungsnormen sollen auch hier maßgeblich sein. Gleichwohl wiederholen wir einige in diesem Zusammenhang wichtige Grundgedanken ganz kurz.

Hier wird der Grundkörper k des metrischen Raumes R ein algebraischer Zahlkörper sein. Die Frage, die uns beschäftigt, ist die nach der Ähnlichkeit zweier Gitter (bezügl. der Ordnung \mathfrak{p} aller ganzen Zahlen von k) \mathfrak{F} und \mathfrak{R} : gibt es eine eigentliche²⁾ Ähnlichkeitstransformation Σ derart, daß

$$(1) \quad \mathfrak{R} = \Sigma \mathfrak{F}$$

gilt? Stehen \mathfrak{F} und \mathfrak{R} in dieser Beziehung, so heißen sie ähnlich. Die Gesamtheiten ähnlicher Gitter heißen Ähnlichkeitsklassen. Wenn es eine Ähnlichkeitstransformation Σ so gibt, daß an Stelle von (1)

$$(2) \quad \mathfrak{R}_{\mathfrak{p}} \cong \Sigma \mathfrak{F}_{\mathfrak{p}} \quad \text{für alle Primideale } \mathfrak{p}$$

¹⁾ *Quadratische Formen und orthogonale Gruppen*, Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Heidelberg. Es wird im Folgenden zitiert mit QFOG.

²⁾ Definition s. QFOG. § 4, Nr. 3. Den Zusatz „eigentlich“ wollen wir im Folgenden i. a. als selbstverständlich ansehen.

gilt, so nennt man \mathfrak{F} und \mathfrak{R} verwandt; die Gesamtheiten verwandter Gitter sind die Geschlechter. Diese umfassen stets volle Ähnlichkeitsklassen. Man kann (2) auch so formulieren: für jedes \mathfrak{p} gibt es einen eigentlichen Automorphismus $T_{\mathfrak{p}}$ von $R_{\mathfrak{p}}$ so, daß

$$(3) \quad \mathfrak{R}_{\mathfrak{p}} = \Sigma T_{\mathfrak{p}} \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$$

gilt. $T_{\mathfrak{p}}$ ist durch (3) nur bis auf eine automorphe Einheit $E_{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$ als rechtsseitigen Faktor festgelegt. Gibt es ein Σ , für welches die Gleichungen (3) erfüllbar sind, und hierzu einen Automorphismus T von R sowie für jedes \mathfrak{p} eine automorphe Einheit $E_{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$, so daß für die Spinor-Normen³⁾ die Gleichungen

$$(4) \quad t(T) = t(T_{\mathfrak{p}}) t(E_{\mathfrak{p}}) \quad \text{für alle } \mathfrak{p}$$

bestehen, so nennt man \mathfrak{F} und \mathfrak{R} Spinor-verwandt⁴⁾. Die Gesamtheiten Spinor-verwandter Gitter sind die Spinor-Geschlechter. Diese stehen zwischen den Geschlechtern und den Ähnlichkeitsklassen in dem Sinne, daß ein Spinor-Geschlecht aus vollen Ähnlichkeitsklassen und ein Geschlecht aus vollen Spinor-Geschlechtern besteht.

Wenn R ein isotroper Raum ist oder mit anderen Worten, wenn seine metrische Fundamentalform F die Zahl 0 nicht-trivial darstellt, so fallen die Spinor-Geschlechter mit den Ähnlichkeitsklassen zusammen⁵⁾. Da bekanntlich jede indefinite quadratische Form mit mehr als 4 Variablen im rationalen Zahlkörper die Null nicht-trivial darstellt, kann man diesen Satz als eine Verallgemeinerung des MEYERschen Satzes über die Äquivalenz indefiniter quadratischer Formen ansehen, sofern die Variablenzahl $n > 4$ ist. MEYERS Satz gilt aber auch für 3 und 4 Variable. Wir stellen uns hier die Aufgabe, ihn für 3- und 4-dimensionale Räume erneut zu begründen.

Dabei ist nun eine Verallgemeinerung möglich. Ein Gitter ist erklärt als ein endlicher Modul größtmöglichen Ranges bezügl. einer Ordnung \mathfrak{o} in k , deren Elemente man als ganz bezeichnet. Diese Ordnung \mathfrak{o} braucht nicht die Ordnung aller im geläufigen Sinne ganzen Zahlen zu sein, vielmehr kann man für \mathfrak{o} die Gesamtheit aller Zahlen aus k nehmen, deren Nenner Potenzprodukte von Primidealen einer vorgeschriebenen Menge $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots$ sind. Die Analogie zwischen den algebraischen Zahlen und Funktionen legt es nahe, diese Primideale als unendliche Primdivisoren von k zu bezeichnen. Unendliche Primdivisoren pflegt man ferner den archimedischen Bewertungen von k zuzuordnen. Die Ordnung \mathfrak{o} läßt sich nun beschreiben durch die Aufzählung aller Primdivisoren von k , welche man als unendlich bezeichnen will. Von der Auszeichnung der unendlichen Primdivisoren von k

³⁾ QFOG, § 4, Nr. 2. Vgl. auch unten, § 1.

⁴⁾ QFOG, § 13, Nr. 4.

⁵⁾ QFOG, Satz 15. 1.

hängen dann auch die Gitter in R ab. Wir sagen nun: Ein Gitter \mathfrak{S} in R heißt *arithmetisch indefinit*, wenn es mindestens einen unendlichen Primdivisor ∞ von k gibt, für welchen R , d. h. genau genommen der Raum $R_\infty = Rk_\infty$, über der bezügl. der zugehörigen Bewertung perfekten Hülle k_∞ von k isotrop wird. Kurz: die Gleichung

$$F = \sum f_{\mu\nu} x_\mu x_\nu = 0$$

soll in k_∞ eine nicht-triviale Lösung besitzen.

Arithmetisch indefinite Gitter haben zahlreiche Eigenschaften gemeinsam mit den Gittern in *indefiniten Räumen* im gewöhnlichen Sinne, unter denen sie offenbar enthalten sind (d. h. die metrische Fundamentalf orm F von R soll indefinit sein). Z. B. haben die Gruppen der automorphen Einheiten von Gittern (bis auf eine triviale Ausnahme) dann und nur dann unendliche Ordnungen, wenn es sich um arithmetisch indefinite Gitter handelt⁶⁾.

Wir werden im ersten Teile der vorliegenden Arbeit voraussetzen, daß \mathfrak{o} eine solchermäßen erweiterte Ordnung in k ist, für welche also nicht nur die archimedischen Primdivisoren als unendlich zu gelten brauchen. Es gilt dann

Satz 1. *Zwei arithmetisch indefinite und Spinor-verwandte Gitter \mathfrak{S} und \mathfrak{R} sind ähnlich, sofern die Dimension des Raumes R $n = 3$ oder 4 ist.*

Ist k der rationale Zahlkörper, so besitzen \mathfrak{S} und \mathfrak{R} bezügl. \mathfrak{o} Basen $[t_\nu]$ und $[x_\nu]$. Setzt man noch voraus, daß die Normen von \mathfrak{S} und \mathfrak{R} übereinstimmen, so muß die Norm einer (3) leistenden Ähnlichkeitstransformation Σ eine Einheit s von \mathfrak{o} sein. Unter den Voraussetzungen von Satz 1 sind dann die quadratischen Formen

$$\frac{s}{2} \left(\sum_\nu t_\nu x_\nu \right)^2, \quad \frac{1}{2} \left(\sum_\nu x_\nu y_\nu \right)^2$$

äquivalent. Es ist lehrreich, Satz 1 auf nicht äquivalente definite Formen anzuwenden, welche man durch Zulassung von Nennern „arithmetisch indefinit“ gemacht hat.

Ist \mathfrak{o} die hauptsächlich interessierende Ordnung aller ganzen rationalen Zahlen, so gibt es nur die Einheiten $s = \pm 1$; im Falle $n = 3$ ist sogar nur $s = 1$ möglich. Satz 1 enthält also ein (notwendiges und hinreichendes) Kriterium für die Äquivalenz indefiniter ternärer quadratischer Formen. Ein solches ist implizite in MEYERS Bestimmung der Klassenzahl solcher Formen in einem Geschlecht enthalten. Die Klassenzahl ist nach Satz 1 gleich der Anzahl der Spinor-Geschlechter. Wir verzichten auf ihre i. a. mühsame Bestimmung, obwohl sie mit elementaren Hilfsmitteln durchführbar wäre. Von diesem einen Punkt abgesehen stimmt Satz 1 in dem genannten Spezialfall mit dem MEYERschen Satze überein.

⁶⁾ QFOG, Satz 16. 1.

Zieht man noch das oben erwähnte Ergebnis über Gitter in isotropen Räumen hinzu, so ist mit Satz 1 ein Ergebnis erreicht, welches MEYERS Satz auf beliebige Variablenzahl $n > 2$ überträgt:

Satz 2. *Ist \mathfrak{o} die Ordnung aller ganzen rationalen Zahlen, so sind zwei Spinor-verwandte Gitter \mathfrak{F} und \mathfrak{R} bezügl. \mathfrak{o} in einem indefiniten Raum R über dem rationalen Zahlkörper k der Dimension $n > 2$ ähnlich.*

2. MEYERS eigene Übertragung seines Satzes auf größere Variablenzahl geht von einschränkenden Voraussetzungen über die Ordnungsvarianten der Formen bzw. Gitter aus⁷⁾. Diese haben zur Folge, daß es nur ein Spinor-Geschlecht in einem Geschlecht gibt. Etwas andere Voraussetzungen macht der folgende Satz, den wir zugleich mit Satz 1 beweisen wollen:

Satz 3. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2 über \mathfrak{o} , k und R sind zwei arithmetisch indefinite maximale Gitter desselben Geschlechts in R ähnlich.*

Im Falle $n = 3$ muß außerdem vorausgesetzt werden, daß die reduzierten Determinanten der Gitter durch keine andere Quadratzahl als 4 und nicht durch 8 teilbar sind⁸⁾.

Es genügt auch jetzt, den Beweis in den Fällen $n = 3$ und 4 zu führen, da er für $n > 4$ bereits in meinem Buch gebracht wurde⁹⁾.

Vermutlich gelten die Sätze 2 und 3 für alle im obigen Sinne erweiterten Ordnungen und für beliebige algebraische Zahlkörper. Unsere Beweise in den bisher erledigten Spezialfällen machen wesentlichen Gebrauch von gewissen Parameterdarstellungen der orthogonalen Gruppen, die nur in diesen Fällen gültig sind.

3. Der zweite Teil der vorliegenden Arbeit geht auf SIEGELS letztes mittels analytischer Methoden bewiesenes Resultat über indefinite quadratische Formen ein¹⁰⁾. Es läßt sich kurz, wenn auch sehr ungenau etwa so formulieren: die Zetafunktionen zweier verwandter indefiniter Formen sind identisch. Die exakte Formulierung folgt unten.

Wie sich sogleich zeigen wird, handelt es sich um eine Aussage, die im Gegensatz zu den meisten Ergebnissen der analytischen Zahlentheorie zu ihrer Formulierung keinerlei Begriffe der Analysis bedarf, wie etwa der Grenzwert einer unendlichen Folge oder das Volumen einer Punktmenge. Ihrer rein arithmetischen Formulierbarkeit entsprechend läßt sich auch ihr Beweis ohne Zuhilfenahme der Analysis führen. Wir können bei dieser Gelegenheit erneut beobachten, daß die

⁷⁾ Vierteljahrsschr. Naturf. Ges. Zürich **36** (1891), S. 241—250. — Noch einschneidendere Voraussetzungen macht eine Schlußweise von M. EICHLER, Comment. Math. Helvetici **21** (1948), S. 1—28.

⁸⁾ D. h. für $n = 3$ müssen die zu den Gittern gehörigen Formen Stammformen in der Terminologie von H. BRANDT sein.

⁹⁾ QFOG, Satz 15. 2.

¹⁰⁾ Annals of Maths. **45** (1944), S. 577—622; Math. Annalen **124** (1951), S. 17—54. Siehe auch H. MAASS, Sitzgsber. Heidelberger Akad. Wiss. 1949, S. 1—42.

arithmetischen Methoden oftmals schwerfälliger sind als die analytischen; sie erfordern zunächst den Aufbau eines gehörigen Apparats von Begriffen. Allerdings leisten sie dann bisweilen auch gründlichere Arbeit, indem sie noch weitere Erkenntnisse vermitteln, die das Gesamtbild in befriedigender Weise abrunden.

Wenngleich es möglich wäre, das Problem in großer Allgemeinheit anzugreifen, so scheint es doch ratsam, folgende Einschränkungen zu machen: k ist der rationale Zahlkörper und v die Ordnung aller ganzen rationalen Zahlen.

Zur Formulierung des zu beweisenden Satzes sind einige Vorbereitungen erforderlich. Ein Gitter \mathfrak{F} sei vorgelegt. $U_{\mathfrak{F}}^{\pm}$ bezeichne die Gruppe aller eigentlichen automorphen Einheiten von \mathfrak{F} . Man kann ihr in ganz elementarer Weise ein relatives Maß $u^+(\mathfrak{F})$ zuordnen¹¹⁾. Auf der anderen Seite hat SIEGEL gezeigt, daß die Gruppe $U_{\mathfrak{F}}^{\pm}$ als eigentlich diskontinuierliche Gruppe von Abbildungen eines gewissen Raumes auf sich dargestellt werden kann; es existiert ein Diskontinuitätsbereich, und der reziproke Wert seines Volumens heißt das absolute Maß $U^+(\mathfrak{F})$. Die relativen und absoluten Maße stimmen bis auf einen willkürlichen für alle Gitter von R gleichen Faktor überein¹²⁾.

Als ein Parallelotop¹³⁾ in R bezeichnen wir ein System $\mathfrak{X} = \{\tau_1, \dots, \tau_r\}$ von Vektoren in R , welche als linear unabhängig vorausgesetzt werden; r ist seine Dimension. \mathfrak{X} heiße halbeinfach, wenn die Determinante $|\tau_0 \tau_\sigma|$ nicht verschwindet. Zwei Parallelotope \mathfrak{X} und $\bar{\mathfrak{X}} = \{\bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_r\}$ heißen isomorph, wenn $\tau_0 \tau_\sigma = \bar{\tau}_0 \bar{\tau}_\sigma$ gilt. Es gibt stets einen eigentlichen oder uneigentlichen Automorphismus Γ von R , welcher $\bar{\mathfrak{X}} = \Gamma \mathfrak{X}$ oder ausführlicher $\bar{\tau}_0 = \Gamma \tau_0$ leistet¹⁴⁾. Gibt es eine eigentliche automorphe Einheit E eines Gitters \mathfrak{F} , für welche $\bar{\mathfrak{X}} = E \mathfrak{X}$ gilt, so heißen \mathfrak{X} und $\bar{\mathfrak{X}}$ bezügl. \mathfrak{F} assoziiert. Die Anzahl der Klassen bezügl. \mathfrak{F} assoziierter Parallelotope \mathfrak{X} in \mathfrak{F} , welche mit einem vorgegebenen halbeinfachen Parallelotop \mathfrak{X}_0 in R isomorph sind, ist endlich¹⁵⁾.

Die Untergruppe derjenigen eigentlichen automorphen Einheiten E von \mathfrak{F} , für welche $E \tau_\sigma = \tau_\sigma$ für $\sigma = 1, \dots, r$ gilt, werde mit $U_{\mathfrak{F}}^+(\mathfrak{X})$ bezeichnet. Auch für diese Gruppen lassen sich sowohl relative wie absolute Maße^{11), 12)} definieren, welche wieder einander proportional sind. Sie werden mit $u^+(\mathfrak{F}, \mathfrak{X})$, $U^+(\mathfrak{F}, \mathfrak{X})$ bezeichnet; es sind Invarianten der Klassen assoziierter Parallelotope.

Ein halbeinfaches Parallelotop $\mathfrak{X} = \{\tau_1, \dots, \tau_r\}$ in R spannt einen halbeinfachen Teilraum

$$T = k(\tau_1, \dots, \tau_r) = k(\mathfrak{X})$$

¹¹⁾ QFOG, § 16, s. a. hier § 5.

¹²⁾ QFOG, Satz 33. 4.

¹³⁾ QFOG, § 24, Nr. 1.

¹⁴⁾ QFOG, Satz 1. 4. Wir brauchen diesen Satz nur für halbeinfache Parallelotope.

¹⁵⁾ QFOG, Satz 24. 1.

von R auf. Der zu T senkrechte Teilraum T' von R ist ebenfalls halbeinfach, und seine Struktur ist nach WITT durch die von R und T eindeutig festgelegt, d. h. sie ist unabhängig davon, ob man \mathfrak{X} durch ein anderes mit $\bar{\mathfrak{X}}$ isomorphes Parallelotop ersetzt¹⁶⁾.

Das letzte Ziel der vorliegenden Arbeit ist

Satz 4. \mathfrak{S} und $\bar{\mathfrak{S}}$ seien zwei Gitter in R , und es gelte für sie

$$\mathfrak{S}_p \cong \bar{\mathfrak{S}}_p \quad \text{für alle } p.$$

\mathfrak{X} sei ein halbeinfaches r -dimensionales Parallelotop in R , und der soeben erklärte Teilraum T' von R (d. h. seine metrische Fundamentalform) sei indefinit. Ferner sei die Dimension $n - r$ von T' größer als 2 oder mit anderen Worten $r < n - 2$.

Dann enthalten \mathfrak{S} und $\bar{\mathfrak{S}}$ gleich viele Klassen assoziierter mit \mathfrak{X} isomorpher Parallelotope, sie seien etwa repräsentiert durch $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_f$ und $\bar{\mathfrak{X}}_1, \dots, \bar{\mathfrak{X}}_f$. Dabei gilt

$$(5) \quad u^+[\mathfrak{S}, \mathfrak{X}_\varphi] = u^+[\bar{\mathfrak{S}}, \bar{\mathfrak{X}}_\varphi], \quad \varphi = 1, \dots, f.$$

Ferner gilt

$$(6) \quad u^+(\mathfrak{S}) = u^+(\bar{\mathfrak{S}}).$$

SIEGELS Satz sagt lediglich etwas über die Summen

$$(7) \quad S(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}) = \sum_{\varphi=1}^f \frac{1}{u^+[\mathfrak{S}, \mathfrak{X}_\varphi]}$$

(und gewisse Teilsummen davon) aus, und zwar gilt

$$(8) \quad S(\mathfrak{S}, \mathfrak{X}) = S(\bar{\mathfrak{S}}, \bar{\mathfrak{X}}).$$

Die Voraussetzungen von SIEGEL sind allerdings etwas von den hier gemachten verschieden; einerseits sind sie enger, denn es wird $r < \frac{n-2}{2}$ verlangt; andererseits sind sie weiter, indem die Indefinitheit von T' nicht benutzt wird. Für unsere schärfere Aussage scheint die Indefinitheit von T' wesentlich zu sein. Wegen der Proportionalität zwischen den relativen und den absoluten Maßen bedeutet es keinen Unterschied, ob (5) und (6) für die ersteren oder die letzteren behauptet wird. Unmittelbar arithmetisch zugänglich sind die relativen Maße, analytisch zugänglich dagegen die absoluten.

Unser Beweis von Satz 4 stützt sich unter anderem auf ein Kriterium für die Assoziiertheit zweier Parallelotope, welches dem in Satz 2 gegebenen Kriterium für die Ähnlichkeit zweier Gitter nachgebildet ist und auch im gleichen Zuge bewiesen werden kann (Satz 9 in § 7). Größere Mühe macht der Nachweis der Formeln (5) und (6), und ein einfacherer Zugang, etwa durch geschickte Kombination elementarer und analytischer Schlußweisen, ist zu wünschen.

¹⁶⁾ QFOG, Satz 2. 2.

§ 1.

**Metrische Räume der Dimensionen $n = 3$ und 4
und ihre Cliffordschen Algebren.**

1. Der Beweis der Sätze 1 und 3 gründet sich auf einen wichtigen Zusammenhang zwischen einem metrischen Raum und einem ihm zugeordneten hyperkomplexen System C , der sogenannten zweiten CLIFFORDSchen Algebra. Er wurde im Falle der Dimension $n = 3$ durch H. BRANDT¹⁷⁾ für die Arithmetik der Formen nutzbar gemacht. Man ordnet den Systemen $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ von $r \geq 0$ Vektoren aus R Klammersymbole $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ zu. Diese erzeugen eine Algebra über k , welche durch die folgenden Relationen definiert wird:

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \dots, \alpha_r) (\beta_1, \dots, \beta_s) &= (\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s), \\ (\alpha, \beta) + (\alpha, \beta) &= \alpha \beta (\). \end{aligned}$$

Das leere Klammersymbol $()$ spielt die Rolle des Einselements und wird mit der Eins 1 von k identifiziert. Man erhält so die erste CLIFFORDSche Algebra. Die zweite wird erzeugt durch alle Klammersymbole von geraden Anzahlen von Vektoren. Die Ränge sind 2^n und 2^{n-1} . Wir haben es im Folgenden ausschließlich mit der zweiten CLIFFORDSchen Algebra zu tun, sie wird mit C bezeichnet¹⁸⁾.

Ist (ι_r) eine Orthogonalbasis von R , so sind

$$\begin{aligned} &1, I_1 = (\iota_2, \iota_3), I_2 = (\iota_3, \iota_1), I_3 = (\iota_1, \iota_2) && \text{für } n = 3 \\ &1, I_1 = (\iota_2, \iota_3), I_2 = (\iota_3, \iota_1), I_3 = (\iota_1, \iota_2) \left. \vphantom{\begin{matrix} 1, I_1 = (\iota_2, \iota_3), \\ I_2 = (\iota_3, \iota_1), \\ I_3 = (\iota_1, \iota_2) \end{matrix}} \right\} && \text{für } n = 4 \\ &J = (\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4), JI_1, JI_2, JI_3 && \end{aligned}$$

Basen von C . Im ersten Falle ist C eine Quaternionen-Algebra mit den Multiplikationsregeln

$$I_1^2 = -\frac{1}{4} \iota_2^2 \iota_3^2, \dots, I_1 I_2 = -I_2 I_1 = -\frac{1}{2} \iota_3^2 I_3, \dots,$$

im anderen ist C eine Quaternionen-Algebra mit denselben Multiplikationsregeln über dem kommutativen hyperkomplexen System $Z = k(J)$ als Zentrum, wobei die Quadratklasse

$$J^2 = \frac{1}{16} \iota_1^2 \iota_2^2 \iota_3^2 \iota_4^2 = \mathcal{A}(R)$$

die Diskriminante von R ist. Je nachdem ob $\mathcal{A}(R)$ ein Quadrat in k ist oder nicht, ist Z eine direkte Summe zweier mit k isomorpher Körper oder eine quadratische Körpererweiterung von k .

2. Die Automorphismen Γ von R lassen sich zu Automorphismen von C machen durch die Festsetzung

$$(9) \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_{2r})^\Gamma = (\Gamma^{-1} \alpha_1, \dots, \Gamma^{-1} \alpha_{2r}).$$

¹⁷⁾ Jahresber. Deutsche Math.-Verein. 53 (1943), S. 23—57.

¹⁸⁾ Für das Folgende s. QFOG, § 4 und § 5.

Zu jedem eigentlichen T gibt es in C ein Element $T(T)$, welches bis auf einen Faktor aus k durch T eindeutig festgelegt wird, so daß

$$(10) \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_{2r})^T = T(T)^{-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_{2r}) T(T)$$

gilt. Durch (10) wird die Gruppe \mathfrak{D}^+ der eigentlichen Automorphismen von R in die Gruppe der inneren Automorphismen von C treu abgebildet. Die Norm von $T(T) = T_0 + T_1 I_1 + T_2 I_2 + T_3 I_3$ (T_v in Z), als das Produkt von $T(T)$ mit dem konjugierten Quaternion $\bar{T}(T) = T_0 - T_1 I_1 - T_2 I_2 - T_3 I_3$ in der üblichen Weise definiert, d. h.

$$t(T(T)) = T(T) \bar{T}(T) = T_0^2 - T_1^2 I_1^2 - T_2^2 I_2^2 - T_3^2 I_3^2$$

legt gleichzeitig die Spinor-Norm von T fest, welche mit $t(T)$ bezeichnet wird. Wenn man beachtet, daß $T(T)$ nur bis auf einen Faktor in k festliegt, so muß man $t(T)$ als eine Quadratklasse in k verstehen.

Ist T ein beliebiges Element in C , für welches $T\bar{T} = t(T) \neq 0$ in k gelegen ist, so gibt es einen eigentlichen Automorphismus T von R so, daß $T = T(T)$ ist. Im Falle $n = 3$ liegt $t(T)$ stets in k , im Falle $n = 4$ dagegen nicht immer.

Für $n = 3$ erhält man alle Ähnlichkeitstransformationen Σ in der Gestalt $\Sigma = sT$, $s \neq 0$, wo T ein Automorphismus ist. Jetzt wird zwischen eigentlichen und uneigentlichen Ähnlichkeitstransformationen nicht unterschieden, obwohl ein Unterschied besteht zwischen eigentlichen und uneigentlichen Automorphismen.

Für $n = 4$ gibt es auch noch Ähnlichkeitstransformationen von weniger trivialer Bauart. Ein Teil von ihnen wird definiert durch

$$n(\Sigma)^r (\Sigma^{-1} \alpha_1, \dots, \Sigma^{-1} \alpha_{2r}) = S^{-1}(\alpha_1, \dots, \alpha_{2r}) S,$$

wobei S ein beliebiges nicht singuläres Element von C ist. Diese Ähnlichkeitstransformationen Σ sowie die daraus gebildeten $s\Sigma$, $s \neq 0$, heißen eigentlich. Alle übrigen Ähnlichkeitstransformationen heißen uneigentlich, sie sind Produkte von eigentlichen mit einem beliebigen uneigentlichen Automorphismus T von R .

3. Man bekommt in diesem Zusammenhang eine Übersicht über sämtliche Quadratklassen in k , welche als Spinor-Normen eigentlicher Automorphismen auftreten können. Dies wird sich später als bedeutungsvoll herausstellen. Es sei k ein beliebiger algebraischer Zahlkörper und Q eine Quaternionen-Algebra über k . Wir nennen einen (endlichen oder unendlichen) Primdivisor \mathfrak{p} von k für Q charakteristisch, wenn die \mathfrak{p} -adische Erweiterung $Q_{\mathfrak{p}}$ von Q über $k_{\mathfrak{p}}$ nullteilerfrei ist. Bekanntlich wird Q durch die charakteristischen Primdivisoren eindeutig gekennzeichnet; es gibt deren nur endlich viele, und ihre Anzahl ist gerade. Diejenigen für Q charakteristischen \mathfrak{p} , welche zu reellen archimedischen Bewertungen von k gehören, seien $\mathfrak{p} = \infty_1, \dots, \infty_r$. Eine Zahl t in k , welche in jedem der Erweiterungskörper $k_{\infty_1}, \dots, k_{\infty_r}$ ein Quadrat ist, tritt bekanntlich als Norm eines Elements aus Q auf,

und auch nur ein solches t . Ferner nennen wir einen Primdivisor \mathfrak{p} von k für den Raum R charakteristisch, wenn $R_{\mathfrak{p}}$ anisotrop ist.

Es sei zunächst $n = 3$. Die Normenform von C ist

$$(11) \quad x_0^2 + \frac{1}{4} \iota_2^2 \iota_3^2 x_1^2 + \frac{1}{4} \iota_3^2 \iota_1^2 x_2^2 + \frac{1}{4} \iota_1^2 \iota_2^2 x_3^2.$$

Sie stellt die 0 bekanntlich dann und nur dann nicht-trivial dar, wenn das gleiche für die Form

$$\frac{1}{4} \iota_2^2 \iota_3^2 x_1^2 + \frac{1}{4} \iota_3^2 \iota_1^2 x_2^2 + \frac{1}{4} \iota_1^2 \iota_2^2 x_3^2 = \frac{\iota_1^2 \iota_2^2 \iota_3^2}{4} \left(\iota_1^2 \left(\frac{x_1}{\iota_1^2} \right)^2 + \iota_2^2 \left(\frac{x_2}{\iota_2^2} \right)^2 + \iota_3^2 \left(\frac{x_3}{\iota_3^2} \right)^2 \right)$$

zutrifft. Daraus folgt: Ein Primdivisor \mathfrak{p} von k ist für C dann und nur dann charakteristisch, wenn \mathfrak{p} für R charakteristisch ist.

Jetzt sei $n = 4$ und $\mathcal{A}(R)$ die Einheitsquadratkategorie. C ist nach Nr. 1 die direkte Summe zweier isomorpher Quaternionen-Algebren über k . Ihre Normenformen sind wieder (11), wie oben ist ein \mathfrak{p} für die direkten Summanden von C dann und nur dann charakteristisch, wenn \mathfrak{p} für R charakteristisch ist, nämlich (11) läßt sich in k in $\iota_1^2 \iota_2^2 \iota_3^2 (\iota_1^2 x_1^2 + \dots + \iota_4^2 x_4^2)$ transformieren. In beiden Fällen gilt

Satz 5. *Notwendig und hinreichend dafür, daß eine Zahl t in k die Norm eines Quaternionen aus C ist (bzw. ihre Quadratklasse die Spinor-Norm eines eigentlichen Automorphismus \mathbb{T} von R), ist $t > 0$ in k_{∞} für alle „reellen“ für R charakteristischen Primdivisoren ∞ von k .*

Dieser Satz gilt aber auch für $n = 4$, wenn $\mathcal{A}(R)$ nicht die Einheitsquadratkategorie ist. Jetzt ist C eine Quaternionen-Algebra über der quadratischen Erweiterung $Z = k(\sqrt{\mathcal{A}(R)})$. Da die Normenform von C immer noch (11) ist, bleibt C ungeändert, wenn man den nicht identischen Automorphismus $\sqrt{\mathcal{A}(R)} \rightarrow -\sqrt{\mathcal{A}(R)}$ von Z anwendet. Dies hat zur Folge, daß mit einem Primdivisor \mathfrak{P} von Z auch der konjugierte $\overline{\mathfrak{P}}$ für C gleichzeitig charakteristisch ist bzw. nicht. Es sei ∞ ein „reeller“ Primdivisor von k , für welchen R_{∞} anisotrop ist. Dann ist $\mathcal{A}(R) > 0$ in k_{∞} , also ∞ zerfällt in Z in zwei verschiedene „reelle“ Primdivisoren $\infty_Z, \overline{\infty}_Z$, und beide sind für C charakteristisch. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Zahl t aus k die Norm eines Quaternionen aus C ist, ist $t > 0$ in Z_{∞_Z} für alle für C charakteristischen „reellen“ Primdivisoren ∞_Z von Z . Sie ist wegen $Z_{\infty_Z} = k_{\infty}$ mit $t > 0$ in k_{∞} für alle die „reellen“ Primdivisoren ∞ von k äquivalent, für welche R anisotrop ist. Das war zu beweisen.

Der folgende Zusatz kann noch gemacht werden:

Zusatz. *Im Falle $n = 4$ ist ein Element t aus Z dann und nur dann Norm eines Elements aus C , wenn $t > 0$ in Z_{∞_Z} (sofern Z ein Körper ist; es ist dann $Z_{\infty_Z} = k_{\infty_Z}(\sqrt{\mathcal{A}(R)}) = k_{\infty}$) oder wenn beide direkten Summanden von t positiv sind (sofern Z eine direkte Summe zweier mit k isomorpher Körper ist), und zwar für jeden „reellen“ Primdivisor ∞ von k bzw. ∞_Z von Z , für welchen R_{∞} bzw. R_{∞_Z} anisotrop ist.*

4. Die Definition von C durch die Klammersymbole zeigt unmittelbar: Es sei \mathfrak{F} ein Gitter in R , seine Norm sei

$$n(\mathfrak{F}) = \alpha,$$

es ist ein Ideal für die der Definition von \mathfrak{F} zu Grunde liegende Ordnung \mathfrak{o} von k . Die Gesamtheit der Klammersymbole

$$a(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad \text{mit } a \in \alpha^{-r}, \alpha_i \in \mathfrak{F}$$

erzeugt eine Ordnung $\mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}$ in C . $\mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}$ ist von \mathfrak{o} „ganz abhängig“. Für diese Ordnung gelten die folgenden Sätze¹⁹⁾: Ist für zwei Gitter \mathfrak{F} und \mathfrak{R}

$$(12) \quad \mathfrak{D}_{\mathfrak{R}} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{F}},$$

so gibt es ein Ideal \mathfrak{m} für \mathfrak{o} , so daß

$$(13) \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{m}\mathfrak{F}$$

gilt, und umgekehrt. Ist T ein eigentlicher Automorphismus von R und $T(T)$ das ihm gemäß Nr. 2 zugeordnete Element in C , so ist

$$(14) \quad \mathfrak{D}_{T\mathfrak{F}} = T(T)^{-1}\mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}T(T).$$

Dasselbe trifft im Falle $n = 4$ zu, wenn Σ eine eigentliche Ähnlichkeitstransformation ist und $T(T)$ in (14) ersetzt wird durch das Σ darstellende Element $S = S(\Sigma)$ in C .

§ 2.

Neue Formulierung der Sätze 1 und 3.

1. Nach diesen Vorbereitungen können die Sätze 1 und 3 (für $n = 3$ oder 4) als Aussagen über Ordnungen in C formuliert werden. Sollen \mathfrak{F} und \mathfrak{R} als ähnlich nachgewiesen werden, so dürfen wir zunächst einmal \mathfrak{R} durch $\Sigma^{-1}\mathfrak{R}$ ersetzen, wo Σ die in (3) auftretende Ähnlichkeitstransformation ist. Es gilt dann also

$$(15) \quad \mathfrak{R}_{\mathfrak{p}} = T_{\mathfrak{p}}\mathfrak{F}_{\mathfrak{p}} \quad \text{für alle Primideale } \mathfrak{p}$$

mit eigentlichen Automorphismen $T_{\mathfrak{p}}$ von $R_{\mathfrak{p}}$. Sind \mathfrak{F} und \mathfrak{R} Spinorverwandt, so gibt es einen Automorphismus T von R sowie für jedes \mathfrak{p} eine automorphe Einheit $E_{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{F}_{\mathfrak{p}}$ derart, daß

$$t(T) = t(T_{\mathfrak{p}}E_{\mathfrak{p}})$$

gilt. Ersetzt man noch \mathfrak{R} durch $T^{-1}\mathfrak{R}$, so darf man hier $\bar{T} = 1$, also $t(T_{\mathfrak{p}}E_{\mathfrak{p}}) = 1$ annehmen. Man darf ferner $T_{\mathfrak{p}}$ an Stelle von $T_{\mathfrak{p}}E_{\mathfrak{p}}$ schreiben und hat dann

$$(16) \quad t(T_{\mathfrak{p}}) = 1 \quad \text{für alle } \mathfrak{p}.$$

¹⁹⁾ QFOG, § 14, Nr. 2.

Die \mathfrak{I} und \mathfrak{K} gemäß § 1, Nr. 4 zugeordneten Ordnungen in C seien

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{I}}, \quad \mathfrak{D}' = \mathfrak{D}_{\mathfrak{K}}.$$

Für die $T_{\mathfrak{p}}$ darstellenden Elemente $T_{\mathfrak{p}} = T(T_{\mathfrak{p}})$ bestehen wegen (14) und (15) die Gleichungen

$$(17) \quad \mathfrak{D}'_{\mathfrak{p}} = T_{\mathfrak{p}}^{-1} \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}} T_{\mathfrak{p}}.$$

Die zunächst nur bis auf Faktoren in $k_{\mathfrak{p}}$ fest liegenden $T_{\mathfrak{p}}$ kann man wegen (16) so normieren, daß ihre Normen

$$(18) \quad t(T_{\mathfrak{p}}) = 1 \quad \text{für alle } \mathfrak{p}$$

sind.

Bis auf endlich viele Ausnahmen sind die $T_{\mathfrak{p}}$ Einheiten von $\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}}$, also die Ideale

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}} T_{\mathfrak{p}} = T_{\mathfrak{p}} \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$$

sind zweiseitig. Schließt man noch die Primteiler \mathfrak{p} der Diskriminante von \mathfrak{D} aus, so sind deshalb die $T_{\mathfrak{p}}$ Produkte von Einheiten $E_{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ mit Elementen $z_{\mathfrak{p}}$ aus dem Zentrum von $C_{\mathfrak{p}}$. Da die Normen von Einheiten von $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ Einheiten im Zentrum sind, folgt aus (18), daß auch die $z_{\mathfrak{p}}$ bis auf endlich viele Ausnahmen Einheiten sind, d. h. endlich: bis auf endlich viele Ausnahmen sind die $T_{\mathfrak{p}}$ Einheiten von $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$.

Aus diesem Grunde existiert der Durchschnitt

$$(19) \quad \mathfrak{M} = C \wedge \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_1} T_{\mathfrak{p}_1} \wedge \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_2} T_{\mathfrak{p}_2} \wedge \dots$$

($\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots$ bedeuten alle Primideale für \mathfrak{D} in irgend einer Reihenfolge) und stellt ein Linksideal für \mathfrak{D} dar. Die Rechtsordnung von \mathfrak{M} ist

$$C \wedge T_{\mathfrak{p}_1}^{-1} \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_1} T_{\mathfrak{p}_1} \wedge T_{\mathfrak{p}_2}^{-1} \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_2} T_{\mathfrak{p}_2} \wedge \dots,$$

und das ist die Ordnung \mathfrak{D}' zufolge (17). \mathfrak{D} und \mathfrak{D}' sind i. a. keine maximalen Ordnungen, wir machen hier aber auch gar nicht von einer allgemeinen Idealtheorie für nicht maximale Ordnungen Gebrauch. An dieser Stelle kommt es lediglich auf die Feststellung an, daß \mathfrak{D} und \mathfrak{D}' die Links- und Rechtsordnungen von \mathfrak{M} sind. Man braucht ferner den Begriff der Norm bezügl. des Zentrums Z . Sie wird ein Ideal für die Ordnung

$$(20) \quad \mathfrak{z} = Z \wedge \mathfrak{D} = Z \wedge \mathfrak{D}',$$

welche ebensowenig wie \mathfrak{D} und \mathfrak{D}' maximal zu sein braucht. Die Norm von \mathfrak{M} wird definiert durch

$$t(\mathfrak{M}) = Z \wedge \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}_1} t(T_{\mathfrak{p}_1}) \wedge \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}_2} t(T_{\mathfrak{p}_2}) \wedge \dots$$

und fällt wegen (18) gleich

$$(21) \quad t(\mathfrak{M}) = \mathfrak{z}$$

aus.

Der Beweis des Satzes 1 besteht in dem Nachweis, daß \mathfrak{M} ein Hauptideal

$$(22) \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{D}M$$

ist. Nach § 1, Nr. 2 definiert M eine (eigentliche) Ähnlichkeitstransformation \mathfrak{M} von R derart, daß

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}\mathfrak{S}} = M^{-1}\mathfrak{D}_{\mathfrak{S}}M = M^{-1}\mathfrak{D}M = \mathfrak{D}' = \mathfrak{D}_{\mathfrak{R}}$$

ist. Nach § 1, Nr. 4 ist also mit einem Ideal \mathfrak{m} in k :

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{m}\mathfrak{M}\mathfrak{S}.$$

Wegen (15) und (21), (22) ist $n(\mathfrak{R}) = n(\mathfrak{S}) = n(\mathfrak{M}\mathfrak{S})$, also $\mathfrak{m} = \mathfrak{o}$, und der Beweis ist erbracht.

2. Wir wollen gleich eine Reduktion des Problems vornehmen. Soll \mathfrak{M} als ein Hauptideal (22) nachgewiesen werden, so darf man \mathfrak{M} durch $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}P$ ersetzen, wo P ein beliebiges nicht singuläres Quaternion ist. Man kann P so finden, daß \mathfrak{M}' gewissen zusätzlichen Bedingungen genügt, welche den Beweis von (22) erleichtern.

Ein ganzes Hilfsideal \mathfrak{u} in k sei vorgelegt, über welches unten verfügt wird. Alle Primideale \mathfrak{p} in k teilen wir in zwei Klassen ein. Die erste enthalte die Primteiler von \mathfrak{u} sowie alle diejenigen \mathfrak{p} , für welche $T_{\mathfrak{p}}$ in (19) keine Einheit von $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ ist. Das sind zusammen nur endlich viele. Die übrigen \mathfrak{p} bilden die zweite Klasse. Die Zugehörigkeit zu einer dieser Klassen wird durch die Indizes 1 und 2 angedeutet.

Für jedes \mathfrak{p}_1 gibt es einen Exponenten $h_{\mathfrak{p}_1}$ so, daß

$$\mathfrak{p}_1^{h_{\mathfrak{p}_1}}\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_1}T_{\mathfrak{p}_1} \subset \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_1}$$

ist. Dann hat jedes der Kongruenz

$$(23) \quad P \equiv T_{\mathfrak{p}_1}^{-1} \pmod{\mathfrak{p}_1^{h_{\mathfrak{p}_1}}\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_1}}$$

genügende Element P aus C die Eigenschaft

$$T_{\mathfrak{p}_1}P \subset \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_1}.$$

Es gibt sicher ein P , welches den Kongruenzen (23) für alle \mathfrak{p}_1 genügt und außerdem für alle \mathfrak{p}_2 in $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_2}$ liegt. Dann ist

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}P \subset \mathfrak{D},$$

d. h. \mathfrak{M}' ist ein „ganzes“ Ideal, und seine Norm ist

$$t(\mathfrak{M}') = \mathfrak{z}t(P).$$

Es ist nach (23), sofern $h_{\mathfrak{p}_1}$ hinreichend groß gewählt wurde,

$$t(P) \equiv t(T_{\mathfrak{p}_1})^{-1} \pmod{\mathfrak{z}u_{\mathfrak{p}_1}}$$

und nach (18): $t(P) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{z}u_{\mathfrak{p}_1}}$, für alle \mathfrak{p}_1 , also $t(P) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{z}u}$. Wir schreiben wieder \mathfrak{M} an Stelle von \mathfrak{M}' und dürfen von jetzt ab

voraussetzen: \mathfrak{M} ist ein ganzes Linksideal für \mathfrak{D} , seine Norm ist
 (24) $t(\mathfrak{M}) = \mathfrak{z}t$ mit $t \equiv 1 \pmod{\mathfrak{z}u}$,

und t ist die Norm eines Elements aus C .

3. Die Übersetzung von Satz 3 (für $n = 3$ oder 4) in die Sprache der hyperkomplexen Arithmetik ist wegen der besonderen Voraussetzungen über k einfacher. Die $T_{\mathfrak{p}}$ in (17) können wie oben so normiert werden, daß es fast immer Einheiten in $k_{\mathfrak{p}}$ sind. Ihre Normen sind rationale Zahlen. Da in k alle Ideale Hauptideale sind, gibt es eine positive rationale Zahl t so, daß

(25) $t(\mathfrak{M}) = \mathfrak{z}t$

ist. Auch jetzt braucht man nur die Gleichung (22) zu beweisen.

Schwieriger ist aber die in Nr. 2 vorgenommene Reduktion des Problems; hierbei muß von der vorausgesetzten Maximalität von \mathfrak{F} und \mathfrak{R} Gebrauch gemacht werden. Wird zunächst das Element P in C so konstruiert wie in Nr. 2, so ist jetzt für $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}P$

$$t(\mathfrak{M}') = \mathfrak{z}t'$$

mit $t' = t \cdot t(P)$. Da $t > 0$ war, ist t' sicher die Norm eines Elements P_0 aus C . Ferner ist t' zu u teilerfremd und \mathfrak{M}' ist ein ganzes Ideal. Wir werden sogleich für jedes in u aufgehende Primideal \mathfrak{p} die Existenz eines Elements $P_{1\mathfrak{p}}$ in $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ nachweisen, dessen Norm $t(P_{1\mathfrak{p}}) = t(P_0^{-1})$ ist. Es gibt dann in \mathfrak{D} ein Element P_1 mit

$$P_1 \equiv P_{1\mathfrak{p}} \pmod{(\mathfrak{D}u)_{\mathfrak{p}}} \quad \text{für alle } \mathfrak{p}/u.$$

Jetzt erfüllt $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M}'P_1$, die am Schluß von Nr. 2 formulierten Voraussetzungen.

Es folgt der Nachweis eines Elements $P_{1\mathfrak{p}}$ in $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ der Norm $t(P_{1\mathfrak{p}}) = t(P_0)^{-1} = t'^{-1}$. Wir sahen bereits oben, daß t' , also auch t'^{-1} , eine \mathfrak{p} -adische Einheit ist. Es beschränkt nicht die Allgemeinheit, wenn $n(\mathfrak{F}) = \mathfrak{o}$ angenommen wird, denn von $n(\mathfrak{F})$ hängt die Ordnung $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}$ definitionsgemäß nicht ab. \mathfrak{F} besitzt jetzt als maximales Gitter eine Normalbasis $[\omega_{\nu}]$, deren Multiplikationstabelle $(\omega_{\mu}\omega_{\nu})$ eine der folgenden 5 Gestalten hat ²⁰⁾:

$$\begin{pmatrix} 2e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2p & 0 & 0 \\ 0 & 2e_2 & f \\ 0 & f & 2e_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2e & 0 & 0 \\ 0 & 2pe_2 & pf \\ 0 & pf & 2pe_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a_3 & b \\ 0 & 0 & b & 2a_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2e_1 & f & 0 & 0 \\ f & 2e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2pe_1 & -pf \\ 0 & 0 & -pf & -2pe_2 \end{pmatrix};$$

²⁰⁾ QFOG, Satz 9.7.

hier bedeutet p ein Primelement, e eine Einheit von k_p . Ferner ist $4e_i e_{i+1} - f^2$ eine Einheit von k_p und $e_i x^2 + fxy + e_{i+1} y^2$ eine die Null nicht nicht-triviale darstellende ganzzahlige quadratische Form, d. h. die Normenform der Hauptordnung der einzigen unverzweigten quadratischen Erweiterung von k_p . Endlich ist $a_3 x^2 + bxy + a_4 y^2$ die Normenform der Hauptordnung einer beliebigen quadratischen Erweiterung von k_p .

Im ersten Falle ist \mathfrak{D}_p isomorph mit der Ordnung aller ganzzahligen 2-reihigen Matrizen über k_p . Im zweiten ist \mathfrak{D}_p eine maximale Ordnung der einzigen nullteilerfreien Quaternionen-Algebra über k_p . Beide Male enthält \mathfrak{D}_p ein Element P_{1p} , dessen Norm eine beliebig vorgegebene Einheit in k_p ist.

In den beiden letzten Fällen enthält \mathfrak{F}_p ein dreidimensionales Teilgitter \mathfrak{F}'_p , für welches eine Basis mit einer Multiplikationstabelle der beiden ersten Arten angegeben werden kann. Die Ordnung $\mathfrak{D}_{\mathfrak{F}'_p}$ ist maximal und in $\mathfrak{D}_{\mathfrak{F}_p}$ enthalten, so daß man sich wegen der Existenz von P_{1p} auf Früheres berufen kann.

Der dritte Fall wurde in der Zusatzvoraussetzung zu Satz 3 ausgeschlossen.

§ 3.

Beweis der Sätze 1 und 3.

1. Es ist jetzt zu zeigen, daß das Ideal \mathfrak{M} ein Hauptideal (22) ist, sofern die am Schluß von § 2, Nr. 2 formulierten Voraussetzungen zutreffen. Es wird dabei das folgende Prinzip benutzt:

Das Element t in Z genüge für ein geeignetes u der Kongruenz

$$(26) \quad t \equiv 1 \pmod{\mathfrak{z}u}$$

und trete als die Norm eines Elements aus C auf.

Es gibt dann in Z ein Element s von folgender Beschaffenheit:

a) 1. Z sei ein Körper. $s^2 - 4t$ ist in keiner \mathfrak{p} -adischen Erweiterung Z_p von Z ein Quadrat, für welche C_p nullteilerfrei ist (es sind sowohl die endlichen wie die unendlichen \mathfrak{p} in Betracht zu ziehen).

2. Z sei die direkte Summe zweier mit k isomorpher Körper mit den orthogonalen Idempotenten E_1 und E_2 . Weder $(s^2 - 4t)E_1$ noch $(s^2 - 4t)E_2$ ist ein Quadrat in irgendeiner \mathfrak{p} -adischen Erweiterung $k_p E_1$ oder $k_p E_2$, für welche $C_p E_1$ oder $C_p E_2$ nullteilerfrei sind.

b) $s \equiv 2 \pmod{\mathfrak{z}u}$.

C enthält ein Element M der Norm $t(M) = t$ und der Spur $s(M) = s$. M ist in einer maximalen Ordnung \mathfrak{D}_0 von C enthalten, und für jede ganze in u zum Quadrat aufgehende Zahl h von k gilt sogar

$$(27) \quad M \equiv 1 \pmod{\mathfrak{D}_0 h}.$$

Wir weisen zunächst die gleichzeitige Erfüllbarkeit von a) und b) unter Vernachlässigung der unendlichen Primdivisoren \mathfrak{p} von Z nach, für welche $C_{\mathfrak{p}}$ nullteilerfrei ist. Die Bedingung b) wird verschärft, wenn man u durch ein ganzes Vielfaches ersetzt. Daß dabei gleichzeitig die Voraussetzung (26) verschärft wird, stört in der Anwendung nicht. Es beschränkt daher nicht die Allgemeinheit, wenn man u durch alle die endlichen Primdivisoren teilbar annimmt, für welche $C_{\mathfrak{p}}$ nullteilerfrei ist. Später machen wir dann noch von der Möglichkeit Gebrauch, die Potenz, in der ein Primideal in u aufgeht, nach Erfordernis zu erhöhen.

Es sei jetzt \mathfrak{p} ein in u aufgehendes Primideal von k , es teile u in der Potenz \mathfrak{p}^u ; p sei ein Primelement von $k_{\mathfrak{p}}$. Wegen (26) ist

$$t = 1 + p^u a$$

mit einem Element a aus $\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}$. Mit einem b aus $\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}$ setze man

$$(28) \quad s = 2 + p^u b.$$

Dann ist

$$s^2 - 4t = 4p^u(b - a + p^u b^2).$$

Im Falle $n = 3$ ist $Z = k$. Man wähle u so groß, daß p^u durch $4\mathfrak{p}$ teilbar und $4p^u$ eine ungerade Potenz von \mathfrak{p} in $k_{\mathfrak{p}}$ ist. Ferner wähle man b so, daß $b - a$ eine Einheit und s in \mathfrak{z} gelegen ist. Dann ist $s^2 - 4t$ kein Quadrat in $k_{\mathfrak{p}}$. Im Falle $n = 4$ kann entsprechend verfahren werden, wenn Z eine direkte Summe $kE_1 + kE_2$ ist, oder wenn Z eine quadratische Erweiterung von k ist, in welcher \mathfrak{p} nicht verzweigt ist. In diesem letzten Falle sei \mathfrak{q} das in \mathfrak{p} aufgehende Primideal von Z und q ein Primelement in $Z_{\mathfrak{q}}$. Man setze an Stelle von (28)

$$(29) \quad s = 2 + q^v b.$$

Es ist dann

$$s^2 - 4t = 4q^v(b - p^u q^{-v} a + q^v b^2).$$

Man mache v so groß, daß $4q^v$ eine ungerade Potenz von \mathfrak{q} enthält. Darauf mache man u so groß, daß $p^u q^{-v}$ in $\mathfrak{z}_{\mathfrak{q}}$ liegt. Endlich wähle man b so, daß $b - p^u q^{-v} a$ eine Einheit und s in \mathfrak{z} gelegen ist. Für hinreichend großes v wird gleichzeitig b) mit erfüllt.

Es ist damit die Existenz eines Elements $s = s_0$ gezeigt, welches die Bedingungen a), b) erfüllt, abgesehen von den Bedingungen a) für die unendlichen Primdivisoren \mathfrak{p} , für welche $C_{\mathfrak{p}}$ nullteilerfrei ausfällt. Ein beliebiges Element s aus Z mit der Eigenschaft

$$(30) \quad s \equiv s_0 \pmod{\mathfrak{z}u^2}$$

erfüllt ebenfalls die genannten Bedingungen.

Für die unendlichen nicht-archimedischen Primdivisoren \mathfrak{p} , für welche $C_{\mathfrak{p}}$ nullteilerfrei ist, kann man a) in der Form einer ähnlichen

Kongruenz wie (30) sicherstellen. Der Modul dieser Kongruenz wird dabei ein Potenzprodukt \mathfrak{v} dieser \mathfrak{p} , und die rechte Seite kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich s_0 annehmen. Man hat dann an Stelle von (30) die Kongruenz

$$(31) \quad s \equiv s_0 \pmod{\mathfrak{u}^2 \mathfrak{v}}.$$

Für die archimedischen Primdivisoren $\infty_1, \dots, \infty_r$, für welche C_{∞_q} nullteilerfrei bleibt, bilde man eine Größe s_1 in Z von folgender Beschaffenheit

$$(32) \quad s_1 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{u}^2 \mathfrak{v}}, \quad |s_1|_{\infty_q} < 1 \text{ bzw. } |s_1 E_1|_{\infty_q} < 1, \quad |s_1 E_2|_{\infty_q} < 1,$$

je nachdem ob Z ein Körper oder die direkte Summe zweier Körper ist. Es gibt sicher solch ein s_1 , welches sogar von den ganzen rationalen Zahlen ganz abhängt, falls nicht alle archimedischen Primdivisoren von Z unter den ∞_q auftreten. Man setze dann

$$(33) \quad s = s_0 s_1^v, \quad v \geq 0.$$

Die Kongruenzen (31) sind erfüllt. Ferner ist

$$s^2 - 4t < 0 \text{ in } k_{\infty_q}, \text{ sofern } |s|_{\infty_q}^2 = |s_0|_{\infty_q}^2 |s_1|_{\infty_q}^{2v} < 4|t|_{\infty_q}$$

bzw.

$$(s^2 - 4t)E_i < 0 \text{ in } k_{\infty_q} E_i, \text{ sofern } |s E_i|_{\infty_q}^2 = |s_0 E_i|_{\infty_q}^2 |s_1 E_i|_{\infty_q}^{2v} < 4|t E_i|_{\infty_q}.$$

Dem da t die Norm eines Elements aus C ist, muß nach dem Zusatz zu Satz 5:

$$t > 0 \text{ in } k_{\infty_q} \text{ bzw. } t E_i > 0 \text{ in } k_{\infty_q} E_i$$

gelten. Damit sind alle Bedingungen a), b) erfüllt.

Aber auch wenn C_{∞} nullteilerfrei ist für alle archimedischen Primdivisoren ∞ von Z , gibt es ein Element s_1 der Beschaffenheit (32) in Z , es wird allerdings i. a. nicht von den ganzen rationalen Zahlen ganz abhängig sein, sondern eine Potenz eines solchen unendlichen nunmehr nicht-archimedischen Primdivisors \mathfrak{r} von k im Nenner enthalten, für welchen $R_{\mathfrak{r}}$ isotrop und damit $C_{\mathfrak{r}}$ nullteilerhaltig ist. Die Existenz eines solchen \mathfrak{r} ist der Inhalt der vorausgesetzten arithmetischen Indefinitheit der Gitter \mathfrak{S} und \mathfrak{R} .

Aus a) folgt bekanntlich: es gibt ein Element M in C , dessen charakteristische Gleichung $M^2 - sM + t = 0$ ist.

Es sei nun h eine in \mathfrak{u} zum Quadrat aufgehende ganze Zahl in k . Die charakteristische Gleichung von $N = h^{-1}(M - 1)$ ist $N^2 - h^{-1}(s - 2)N + h^{-2}(t - 1) = 0$. Ihre Koeffizienten sind voraussetzungsgemäß ganz. Also ist N in einer maximalen Ordnung \mathfrak{D}_0 von C enthalten und $M = 1 + hN$. Damit ist obige Behauptung bewiesen.

2. Nach geeigneter Verfügung über das Hilfsideal \mathfrak{u} kann jetzt gezeigt werden, daß ein Element M der Norm t in dem Ideal \mathfrak{M} enthalten ist. Das geschieht in 3 Schritten. Zuerst wird gezeigt, daß es solch ein M in \mathfrak{D} gibt.

$\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_f$ sei ein Vertretersystem aller Typen maximaler Ordnungen in C . Es gibt eine ganze Zahl h in k derart, daß

$$(34) \quad h\mathfrak{D}_\varphi < \mathfrak{D} \quad (\varphi = 1, \dots, f)$$

gilt. Man wähle u so groß, daß h^2 in u aufgeht. Das Element N $N = h^{-1}(M-1)$ ist in einer maximalen Ordnung \mathfrak{D}_0 enthalten. Es gibt ein Quaternion T sowie einen Index φ aus der Reihe $1, \dots, f$, etwa $\varphi = 1$, so daß $T^{-1}\mathfrak{D}_0T = \mathfrak{D}_1$ ist. Man ersetze M durch $T^{-1}MT$. Man darf hiernach ohne Beschränkung der Allgemeinheit $N \in \mathfrak{D}_1$ voraussetzen. Wegen (34) liegt dann M in \mathfrak{D} .

3. Das Hilfsideal u sei durch die Diskriminante von \mathfrak{D} bezügl. \mathfrak{o} teilbar. Alle im Zähler von t aufgehenden Primdivisoren \mathfrak{p} von Z haben dann wegen (26) die Eigenschaft: $\mathfrak{D}_\mathfrak{p}$ ist isomorph mit der Ordnung aller zweireihigen Matrizen mit ganzen Elementen aus $Z_\mathfrak{p}$ bzw. aus $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}E_1 + \mathfrak{o}_\mathfrak{p}E_2$ (sofern Z die direkte Summe $kE_1 + kE_2$ war). Es sei $\mathfrak{q}_\mathfrak{p}$ der größte gemeinsame Teiler der Matricelemente von $\mathfrak{M}_\mathfrak{p}$; $\mathfrak{q}_\mathfrak{p}$ ist ein Ideal in der Hauptordnung von $Z_\mathfrak{p}$ bzw. in $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}E_1 + \mathfrak{o}_\mathfrak{p}E_2$. $\mathfrak{q}_\mathfrak{p}^2$ geht also in t auf. Da die $\mathfrak{q}_\mathfrak{p}$ alle zur Diskriminante von $\mathfrak{D}_\mathfrak{p}/\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, also erst recht zur Diskriminante von $\mathfrak{z}_\mathfrak{p}/\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ prim sind, sind sie Hauptideale. Es gibt jetzt ein Ideal \mathfrak{q} für die (i. a. nicht maximale) Ordnung \mathfrak{z} , dessen \mathfrak{p} -adische Erweiterungen für diese \mathfrak{p} gleich $\mathfrak{q}_\mathfrak{p}$, für alle übrigen \mathfrak{p} dagegen $\mathfrak{z}_\mathfrak{p}$ sind:

$$\mathfrak{q} = Z \wedge \mathfrak{q}_{\mathfrak{p}_1} \wedge \mathfrak{q}_{\mathfrak{p}_2} \wedge \dots \wedge \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}'_1} \wedge \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}'_2} \wedge \dots$$

Alle als Durchschnitte \mathfrak{p} -adischer Hauptideale in der Weise

$$\mathfrak{a} = Z \wedge \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}_1} a_1 \wedge \dots \wedge \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}'_1} a'_1 \wedge \dots$$

gebildeten Ideale für \mathfrak{z} bilden eine ABELSche Gruppe. Sie zerfallen ebenso wie die Ideale zu einer maximalen Ordnung in endlich viele Idealklassen. Jede Idealklasse enthält ganze Ideale, und die ganzen Ideale einer Klasse haben keinen von \mathfrak{z} verschiedenen gemeinsamen Teiler.

Wir setzen jetzt endlich voraus, daß es in jeder Idealklasse für \mathfrak{z} ein ganzes und zu der oben konstruierten Zahl h teilerfremdes Ideal gibt, dessen Quadrat in dem Hilfsideal u aufgeht. Insbesondere gibt es also ein ganzes zu h primes Ideal \mathfrak{l} für \mathfrak{z} , mit welchem $\mathfrak{q}\mathfrak{l} = \mathfrak{z}\mathfrak{l}$ ein Hauptideal ist, und dessen Quadrat in u aufgeht. Wir bestimmen nun ein Element q in \mathfrak{z} , welches den Kongruenzen

$$(35) \quad q \equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}}, \quad q \equiv 1 \pmod{u}$$

genügt, während $q\mathfrak{q}^{-1}$ zu t prim sei (gegebenenfalls sollen $q\mathfrak{q}^{-1}E_1$ und $q\mathfrak{q}^{-1}E_2$ zu tE_1 und tE_2 prim sein).

Das Ideal \mathfrak{q} ist voraussetzungsgemäß zu u prim. In Nr. 1 darf man daher außer den Bedingungen a), b) auch noch die weitere stellen:

$$(36) \quad s \equiv q \pmod{\mathfrak{z}t}.$$

Jetzt folgt, daß $N' = t^{-1}h^{-1}(M - q)$ ganz ist. Die Spur von N' ist nämlich: $t^{-1}h^{-1}(s - 2q)$, $s - 2q$ ist wegen (35), (36) durch q teilbar, wegen (35) und $l^2 h^2/u$ ist $s - 2q$ durch lh teilbar. Da $3l = q1$, ist also $t^{-1}h^{-1}(s - 2q)$ ganz. Ebenso zeigt man, daß die Norm $t^{-2}h^{-2}(t - qs + q^2)$ ganz ist.

Hierauf folgt wie oben, daß $t^{-1}(M - q) = hN'$ in \mathfrak{D} enthalten ist. Also M ist in \mathfrak{D} enthalten und durch q teilbar. Weil endlich vorausgesetzt wurde, daß qq^{-1} zu t prim sei, sowie wegen (36), ist für keinen Teiler $q' \neq 3$ von t : $q'^{-1}q^{-1}M$ in \mathfrak{D} enthalten, denn die Spur hiervon ist nicht ganz. Folglich sind \mathfrak{M} und $\mathfrak{D}M$ zwei ganze Linksideale für \mathfrak{D} der gleichen Norm und mit den gleichen Zentrumsteilern. Dieses war der zweite Beweisschritt.

4. Im dritten Teil des Beweises zeigen wir endlich: es gibt eine Einheit H der Norm 1 von \mathfrak{D} derart, daß $\mathfrak{M} = \mathfrak{D}MH$ ist. Man kann alsdann in (22) M durch MH ersetzen. Wir erinnern dazu an die Darstellung (19) des Ideals \mathfrak{M} . Die dort auftretenden Elemente T_p sind, da \mathfrak{M} jetzt ein ganzes Ideal sein soll, Einheiten von \mathfrak{D}_p , sofern $t(\mathfrak{M}_p) = 3_p t$ das Einheitsideal ist. p bedeutet hier ein Primideal von k , und unter Z_p hat man das kommutative hyperkomplexe System $k_p(\sqrt[l]{J(\bar{R})})$ zu verstehen. Für die endlich vielen Primideale der Eigenschaft $t(\mathfrak{M}_p) \neq 3_p$ dagegen ist \mathfrak{D}_p isomorph mit der Ordnung aller 2-reihigen Matrizen mit ganzen, d. h. genauer von \mathfrak{o}_p ganz abhängigen Elementen aus Z_p .

Man stelle M und T_p für diese letzteren p als zweireihige Matrizen dar. Beide haben ganze Koeffizienten, der größte gemeinsame Teiler von ihnen ist nach Nr. 3 beide Male q_p . Auf Grund der Elementarteilertheorie gibt es zwei unimodulare Matrizen U_p und E_p derart, daß

$$T_p = U_p M E_p$$

ist. Dabei darf man sogar voraussetzen, daß die Determinante von E_p gleich 1 sei. U_p und E_p dürfen als Einheiten von \mathfrak{D}_p aufgefaßt werden, und es ist $t(E_p) = 1$. Folglich gilt für alle diese p :

$$(37) \quad \mathfrak{M}_p = \mathfrak{D}_p M E_p.$$

Ist H eine andere Einheit von \mathfrak{D}_p , welche der Kongruenz

$$(38) \quad H \equiv E_p \pmod{\mathfrak{D}_p t}$$

genügt, so gilt auch

$$(39) \quad \mathfrak{M}_p = \mathfrak{D}_p M H.$$

In der Tat folgt aus (38):

$$G_p = H E_p^{-1} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{D}_p t};$$

wegen $t(\mathfrak{M}_p) = 3_p t$ ist dann auch $M G_p M^{-1}$ eine Einheit von \mathfrak{D}_p und

$$\mathfrak{D}_p M H = \mathfrak{D}_p M G_p M^{-1} \cdot M E_p = \mathfrak{D}_p M E_p,$$

d. h. aus (37) folgt (39).

Damit bleibt zu zeigen: es gibt eine Einheit H der Norm 1 von \mathfrak{D} , welche den Kongruenzen (38) für alle diejenigen \mathfrak{p} genügt, für welche M keine Einheit von $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ ist. Mit dieser Einheit H gelten die Gleichungen (39) für alle diese \mathfrak{p} . Für die übrigen \mathfrak{p} gelten sie aber a fortiori. Mithin ist

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{D}MH$$

und der Beweis ist fertig.

Die Existenz von H folgt aus dem allgemeinen Satz 6, den wir in § 4 beweisen werden, und der auch im Weiteren eine wichtige Rolle spielen wird. Man hat dort \mathfrak{f} gleich einem durch t teilbaren Ideal in k zu setzen und für A ein Element aus \mathfrak{D} zu nehmen, welches den Kongruenzen

$$A \equiv E_{\mathfrak{p}} \pmod{(\mathfrak{D}\mathfrak{f})_{\mathfrak{p}}}$$

für alle Primteiler \mathfrak{p} von \mathfrak{f} genügt. Das Element t in Satz 6 hat man in diesem Zusammenhang gleich 1 zu setzen.

§ 4.

Ein Existenzsatz für Quaternionen-Algebren.

1. Die Grundlage für alles Weitere bildet der folgende Satz, welcher gleichzeitig die Beweise der Sätze 1 und 3 abschließt.

Satz 6. *Es gebe einen unendlichen Primdivisor \mathfrak{r} , für den $C_{\mathfrak{r}}$ Nullteiler enthält. \mathfrak{D} sei eine Ordnung in C , \mathfrak{f} ein ganzes Ideal für \mathfrak{r} in k , A ein Element in \mathfrak{D} und endlich t ein Element in $\mathfrak{z} = \mathbb{Z} \cap \mathfrak{D}$ von der Beschaffenheit, daß erstens*

$$(40) \quad \frac{t(A)}{t} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}\mathfrak{z}}$$

gilt (d. h. der Zähler von $t^{-1}t(A) - 1$ sei durch \mathfrak{f} teilbar) und zweitens t die Norm eines Elements aus C ist. Dann enthält \mathfrak{D} ein Element H mit den Eigenschaften

$$(41) \quad t(H) = t, \quad AH^{-1} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{D}\mathfrak{f}}$$

(d. h. es gibt eine ganze zu \mathfrak{f} teilerfremde Zahl z in k , für welche $z(AH^{-1} - 1)$ in $\mathfrak{D}\mathfrak{f}$ liegt).

Sofern \mathfrak{D} eine maximale Ordnung ist, wurde dieser Satz bereits früher bewiesen, und zwar sogleich für beliebige halbeinfache hyperkomplexe Systeme über algebraischen Zahlkörpern²¹⁾. Allerdings wurde vorausgesetzt, daß \mathfrak{r} die Ordnung aller im üblichen Sinne ganzen Zahlen aus k ist, was aber für den Beweis nicht wesentlich ist. Da sich die zitierte Begründung durch zwei Veröffentlichungen hinzieht, soll sie hier noch einmal gebracht werden, wobei die Beschränkung auf Quaternionen-Algebren einige Vereinfachungen erlaubt.

²¹⁾ M. EICHLER, Journ. reine angew. Math. **179** (1928), S. 227—251, Satz 5.

Es wird zunächst ein Spezialfall von Satz 6 erledigt: f sei prim zu $6\mathfrak{o}$ und zur Diskriminante von \mathfrak{D} bezügl. \mathfrak{o} , es sei $t(A) \equiv 1 \pmod{f}$ und $t = 1$. Gesucht wird also eine Einheit H , welche den Kongruenzen (41) genügt.

Da f zur Diskriminante von \mathfrak{D} prim ist, ist der Restklassenring von $\mathfrak{D} \pmod{f}$ isomorph mit dem Ring der zweireihigen Matrizen, deren Koeffizienten die Restklassen von $\mathfrak{z} \pmod{f\mathfrak{z}}$ sind. A ist eine solche Matrix mit der Determinante $\equiv 1 \pmod{f\mathfrak{z}}$. Alle diese Matrizen bilden eine Gruppe, welche das direkte Produkt der entsprechenden für die einzelnen Primidealpotenzteiler \mathfrak{p}^{ν} von f gebildeten Gruppen ist. Die letzteren werden erzeugt durch die speziellen Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man schreibe für einen Primteiler \mathfrak{p} von f :

$$(42) \quad \begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = BC$$

mit

$$a' = \frac{d}{ad-bc}, \quad b' = \frac{dw-b}{ad-bc}, \quad c' = \frac{-c}{ad-bc}, \quad d' = \frac{-cw+a}{ad-bc}$$

und setze a, b, c, d in $\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}$ folgendermaßen an:

$$a = 1 + bc, \quad d = 1, \quad c = \frac{-4}{2b-w}, \quad 2b(b-w)(2b-w) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},$$

was deshalb möglich ist, weil \mathfrak{p} zu $6\mathfrak{o}$ teilerfremd angenommen wurde. Die Diskriminanten der Matrizen B und C in (42) sind übereinstimmend

$$(a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a'+d')^2 - 4(a'd' - b'c') = -16b(b-w)(2b-w)^{-2},$$

also zu \mathfrak{p} teilerfremd. Desgleichen ist die Diskriminante von $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ zu \mathfrak{p} prim. Also jede Matrix der Determinante $\equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{\nu}}$ läßt sich als ein Produkt von solchen darstellen, deren Diskriminanten zu \mathfrak{p} prim und deren Determinanten ebenfalls kongruent 1 mod \mathfrak{p}^{ν} sind.

Die zu erfüllende Kongruenz (41) läßt sich demnach so schreiben:

$$(43) \quad H \equiv A_{1\mathfrak{p}} \dots A_{m\mathfrak{p}} \pmod{\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}^{\nu}} \quad \text{für alle } \mathfrak{p}/f.$$

Die $A_{\mu\mathfrak{p}}$ sind Matrizen mit Elementen aus dem Restklassenring von $\mathfrak{o} \pmod{\mathfrak{p}^{\nu}}$, ihre Determinanten sind 1 und ihre Diskriminanten zu \mathfrak{p} prim. Die Anzahl der Faktoren in (43) hängt zwar noch von \mathfrak{p} ab.

Fügt man aber noch triviale Faktoren $A_{\mu\mathfrak{p}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ hinzu, so darf man annehmen, daß die Zahl m von \mathfrak{p} unabhängig sei. Die

Konstruktionsaufgabe läßt sich also endlich so formulieren: für jedes μ ist eine Einheit H_μ der Norm 1 anzugeben, welche den Kongruenzen

$$(44) \quad H_\mu \equiv A_{\mu\mathfrak{p}} \pmod{\mathfrak{z}_\mathfrak{p} \mathfrak{p}'^{\mathfrak{p}}}$$
 für alle $\mathfrak{p}/\mathfrak{f}$

genügt, wobei $A_{\mu\mathfrak{p}}$ die Norm 1 und entweder eine zu \mathfrak{p} prime Diskriminante hat oder $A \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}'^{\mathfrak{p}}}$ ist. Je nachdem das Erstere oder das Letztere zutrifft, wollen wir im Folgenden $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$ oder $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_2$ schreiben.

Die Lösung der Kongruenzen (44) beruht nun auf dem folgenden Umstand: ist X eine Restklasse von $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_1} \pmod{\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_1} \mathfrak{p}_1'^{\mathfrak{p}_1}}$ der Eigenschaft

$$(45) \quad s(X) \equiv s(A_{\mu\mathfrak{p}_1}), \quad t(X) \equiv t(A_{\mu\mathfrak{p}_1}) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{z}_\mathfrak{p} \mathfrak{p}_1'^{\mathfrak{p}_1}}$$

($s = \text{Spur}$), so gibt es, da die Diskriminante von $A_{\mu\mathfrak{p}_1}$ zu \mathfrak{p}_1 prim vorausgesetzt wurde, eine nicht singuläre Restklasse $T_{X, \mathfrak{p}_1} \pmod{\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_1} \mathfrak{p}_1'^{\mathfrak{p}_1}}$ derart, daß

$$(46) \quad T_{X, \mathfrak{p}_1}^{-1} X T_{X, \mathfrak{p}_1} \equiv A_{\mu\mathfrak{p}_1} \pmod{\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_1} \mathfrak{p}_1'^{\mathfrak{p}_1}}$$

gilt. Man denke sich diese Restklassen T_{X, \mathfrak{p}_1} durch ebenso bezeichnete Elemente aus \mathfrak{D} repräsentiert, deren Normen zur Diskriminante von \mathfrak{D} teilerfremd sind, und welche außerdem den Kongruenzen

$$(47) \quad T_{X, \mathfrak{p}_1} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_1'} \mathfrak{p}_1'^{\mathfrak{p}_1}}$$
 für alle $\mathfrak{p}_1' \neq \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1/\mathfrak{f}$

genügen. Das Produkt der Normen der T_{X, \mathfrak{p}_1} für alle (45) genügenden Restklassen X und ein festes \mathfrak{p}_1 heiße $v_{\mathfrak{p}_1}$. Das Produkt über die $v_{\mathfrak{p}_1}$ für alle \mathfrak{p}_1 heiße v .

Endlich sei u eine ganze durch alle \mathfrak{p}_2 $f_{\mathfrak{p}_2}$ -mal teilbare Zahl, sofern ein \mathfrak{p}_2 überhaupt auftritt, sonst sei $u = 1$.

Jetzt wird an § 3 angeknüpft. Es wird $u = (uvh)^2 \mathfrak{f}$ gesetzt, wo h die Zahl mit der Eigenschaft (34) ist. An Stelle von $s \equiv 2 \pmod{u}$ wird jetzt aber

$$(48) \quad s \equiv s(A_{\mu\mathfrak{p}}) \pmod{\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}_1} \mathfrak{p}_1'^{\mathfrak{p}_1}}$$
 für alle $\mathfrak{p}_1/\mathfrak{f}$, $s \equiv 2 \pmod{uvh \mathfrak{z}}$

verlangt. Es gibt auf Grund der Schlüsse in § 3 ein Element H in C mit $t(H) = 1$ und der Eigenschaft, daß $h^{-1}u^{-1}v^{-1}(H-1)$ ganz ist. Wie oben darf man annehmen, daß dann $u^{-1}v^{-1}(H-1)$ in \mathfrak{D} liegt oder mit anderen Worten:

$$(49) \quad H \equiv 1 \pmod{\mathfrak{D}u}, \quad H \equiv 1 \pmod{\mathfrak{D}v}.$$

Hiernach genügt H den Kongruenzen (44) für alle \mathfrak{p}_2 . Mit je einem der Elemente T_{X, \mathfrak{p}_1} gelten ferner die Kongruenzen (46). Man bilde das Produkt

$$T_H = \prod_{\mathfrak{p}_1} T_{X, \mathfrak{p}_1}$$

und hat dann wegen (46) und (47)

$$T_H^{-1} H T_H \equiv A_{\mu\mathfrak{p}_1} \pmod{\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_1} \mathfrak{p}_1'^{\mathfrak{p}_1}} \quad \text{für alle } \mathfrak{p}_1/\mathfrak{f}.$$

Nun ist aber voraussetzungsgemäß v durch die Norm von T_H teilbar, wegen der zweiten der Kongruenzen (49) ist also $T_H^{-1}HT_H$ auch ein Element aus \mathfrak{D} . Man wechsele die Bezeichnung und schreibe H an Stelle dieses Elements. Damit sind dann alle Kongruenzen (44) erfüllt; man beachte, daß durch Transformation mit T_H die erste der Kongruenzen (49) nicht ungültig gemacht wird.

2. Wir beweisen jetzt Satz 6 unter der schwächeren Einschränkung, daß nur noch $t = 1$ verlangt wird. Hierzu ersetzen wir zunächst A durch ein mod $\mathfrak{D}\mathfrak{f}$ kongruentes Element in \mathfrak{D} , dessen Norm zu $6\mathfrak{o}$ und zur Diskriminante von \mathfrak{D} prim ist; dieses ist wegen $t(A) \equiv t \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$ offenbar möglich. Mit diesem neuen Element A bilden wir das Ideal $\mathfrak{M} = \mathfrak{D}A$. Nach dem Vorgang von § 3 können wir in \mathfrak{D} ein Element M nachweisen, dessen Norm $t(M) = t(A)$ ist, welches noch der Kongruenz

$$(50) \quad M \equiv 1 \pmod{\mathfrak{D}\mathfrak{f}}$$

genügt, und welches endlich die Eigenschaft hat, daß $\mathfrak{D}M$ durch dieselben Zentrumsideale teilbar ist wie \mathfrak{M} . Es ist jetzt für alle Primideale \mathfrak{p} in k :

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}} M E_{\mathfrak{p}}$$

mit Einheiten $E_{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ der Normen 1. Man suche eine Einheit E in \mathfrak{D} auf, welche den Kongruenzen

$$E \equiv E_{\mathfrak{p}} \pmod{(\mathfrak{D}t(A))_{\mathfrak{p}}} \quad \text{für alle } \mathfrak{p}/t(A)\mathfrak{o}$$

genügt. Auf Grund des bereits bewiesenen Teils von Satz 6 sowie der Annahme, daß $t(A)$ zu $6\mathfrak{o}$ und zur Diskriminante von \mathfrak{D} prim sei, gibt es solch ein E , welches außerdem die Norm 1 hat. Dann ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{D}A = \mathfrak{D}ME$, also mit einer weiteren Einheit E' von \mathfrak{D}

$$A = E' M E.$$

Wegen (50) ist A nach dem Modul $\mathfrak{D}\mathfrak{f}$ der Einheit $E'E$ kongruent. Da ferner $t(M) = t(A)$ und $t(E) = 1$ war, ist auch $t(E'E) = 1$.

3. Der letzte Schritt des Beweises für Satz 6 ist schließlich ganz einfach. Auf Grund des Verfahrens von § 3 konstruiere man in \mathfrak{D} ein Element B der Norm t so, daß der größte in k enthaltene Teiler, welcher in einer Potenz von \mathfrak{f} aufgeht, für die beiden Ideale $\mathfrak{D}A$ und $\mathfrak{D}B$ gleich ausfällt. Dann ist für jedes $\mathfrak{p}/\mathfrak{f}$:

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}} A = \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}} B E_{\mathfrak{p}}$$

mit einer Einheit $E_{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ der Norm 1. Wie oben folgt die Existenz einer Einheit E von \mathfrak{D} der Norm 1 mit

$$(51) \quad E \equiv E_{\mathfrak{p}} \pmod{(\mathfrak{D}\mathfrak{f})_{\mathfrak{p}}} \quad \text{für alle } \mathfrak{p}/\mathfrak{f},$$

und einer beliebigen natürlichen Zahl r . Zu dieser Einheit E sowie zu jedem \mathfrak{p} gibt es dann eine Einheit $E'_{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ mit der Eigenschaft

$$(52) \quad A \equiv E'_{\mathfrak{p}} B E \pmod{(\mathfrak{D}\mathfrak{f}^r)_{\mathfrak{p}}} \quad \text{für alle } \mathfrak{p}/\mathfrak{f}.$$

Macht man r so groß, daß jedes in \mathfrak{f} aufgehende \mathfrak{p} in \mathfrak{f}^r öfter aufgeht als in $t\mathfrak{f}$, so folgt aus $t(B) = t$, (52) und (40): $t(E'_\mathfrak{p}) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$. Nach Nr. 2 gibt es eine Einheit E' von \mathfrak{D} der Norm 1, welche den Kongruenzen

$$E' \equiv E'_\mathfrak{p} \pmod{(\mathfrak{D}\mathfrak{f})_\mathfrak{p}} \quad \text{für alle } \mathfrak{p}/\mathfrak{f}$$

genügt. Dann genügt

$$H = E'BE$$

der Kongruenz (41), welche bei hinreichend großem r unmittelbar aus (52) folgt. Es ist konstruktionsgemäß $t(H) = t$.

§ 5.

Ein Existenzsatz für die Einheiten indefiniter Gitter.

1. Wir kommen zum zweiten Teil der Arbeit und setzen von jetzt ab voraus, daß k der rationale Zahlkörper und \mathfrak{o} die Ordnung aller ganzen rationalen Zahlen sei. Es darf allerdings nebenbei bemerkt werden, daß die folgenden Erörterungen nur insofern von dieser Voraussetzung Gebrauch machen, als sie sich auf die Tatsache stützen, daß jetzt ein indefiniter Raum über k einer Dimension $n > 4$ isotrop ist.

Ein Gitter \mathfrak{S} und ein Teilgitter \mathfrak{S}' von \mathfrak{S} seien vorgelegt. E und T seien lineare Operatoren in R . Gilt für jeden Vektor ι aus \mathfrak{S} :

$$E\iota \equiv T\iota \pmod{\mathfrak{S}'},$$

so führen wir die Bezeichnungsweise

$$E \equiv T \pmod{\mathfrak{S}'/\mathfrak{S}}$$

ein. Das nächste Ziel ist

Satz 7. \mathfrak{S} sei ein Gitter in einem indefiniten Raum der Dimension $n > 2$. $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m$ seien Primideale in k und $E_{\mathfrak{p}_\mu}$ eigentliche automorphe Einheiten von $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}_\mu}$ ($\mu = 1, \dots, m$). Gesucht wird eine eigentliche automorphe Einheit E von \mathfrak{S} der Eigenschaft

$$(53) \quad E \equiv E_{\mathfrak{p}_\mu} \pmod{\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}_\mu} \mathfrak{p}_\mu^{f_\mu} / \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}_\mu}} \quad (\mu = 1, \dots, m).$$

Sofern die Exponenten f_μ oberhalb gewisser allein von den \mathfrak{p}_μ und $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}_\mu}$ abhängigen Schranken liegen, ist für die Existenz eines solchen E notwendig und hinreichend: in den durch die Spinor-Normen der $E_{\mathfrak{p}_\mu}$ gegebenen Quadratklassen in $k_{\mathfrak{p}_\mu}$ gibt es Zahlen $t_{\mathfrak{p}_\mu}$ derart, daß sich die Kongruenzen

$$(54) \quad t^{-1} t_{\mathfrak{p}_\mu} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_\mu^{f_\mu}}$$

durch eine Zahl t in k lösen lassen, deren Quadratklasse in $k_\mathfrak{q}$ für jedes von den \mathfrak{p}_μ verschiedene Primideal \mathfrak{q} sowie für jeden unendlichen Primdivisor ∞ von k als Spinor-Norm einer Einheit E von $\mathfrak{S}_\mathfrak{q}$ bzw. eines Automorphismus Ω_∞ von R_∞ auftritt.

Es wird zunächst die Notwendigkeit der genannten Existenzbedingung für E nachgewiesen. Es gebe solch ein E mit der Eigenschaft (53); dividiert man (53) durch E und schreibt wieder E_{p_μ} an Stelle von $E^{-1}E_{p_\mu}$, so entsteht

$$(55) \quad 1 \equiv E_{p_\mu} \pmod{\mathfrak{S}_{p_\mu} \mathfrak{p}_\mu^{f_\mu} / \mathfrak{S}_{p_\mu}}.$$

Wir zeigen: wenn f_μ hinreichend groß ist, ist $t(E_{p_\mu})$ die Einheitsquadratklasse. Daraus folgt dann, daß $t_{p_\mu} = t = 1$ genommen werden kann.

$|\iota_\nu|$ sei eine Basis von \mathfrak{S}_p und F die Matrix

$$F = (\iota_\mu \iota_\nu).$$

Ist

$$E_p \iota_\nu = \sum_{\mu=1}^n \iota_\mu e_{\mu\nu},$$

und setzt man $(e_{\mu\nu}) = E$, so besteht die Matrixgleichung

$$(56) \quad \dot{E} F E = F \quad \text{oder} \quad \dot{E} = F E^{-1} F^{-1};$$

\dot{E} bedeutet die gespiegelte Matrix. Wegen (55) ist $E \pmod{\mathfrak{p}'}$ der Einheitsmatrix kongruent, welche wir mit dem Symbol 1 bezeichnen wollen. Folglich hat E nicht die Zahl -1 als Eigenwert, und es existiert

$$(57) \quad S = (E - 1)(E + 1)^{-1}.$$

Unter Benutzung von (56) bestätigt man leicht

$$(58) \quad F^{-1} \dot{S} F = -S.$$

Aus (57) folgt die bekannte CAYLEYSche Parameterdarstellung

$$(59) \quad E = (1 + S)(1 - S)^{-1}$$

der eigentlichen Automorphismen des Raumes R ; ist S eine beliebige (58) genügende Matrix, für welche $(1 - S)^{-1}$ existiert, so genügt (59) der Gleichung (56) und stellt daher einen eigentlichen Automorphismus von R dar.

Da $E \pmod{\mathfrak{p}'}$ der Einheitsmatrix kongruent ist, ergibt (57)

$$(60) \quad S \equiv 0 \pmod{\frac{1}{2} \mathfrak{p}'},$$

falls $\frac{1}{2} \mathfrak{p}'$ noch durch \mathfrak{p} teilbar ist, was vorausgesetzt werden soll. Umgekehrt folgt aus (59) und (60), daß E eine ganzzahlige Matrix ist und daher eine eigentliche automorphe Einheit von \mathfrak{S}_p darstellt.

Wir versuchen jetzt, die Matrix E als das Quadrat einer ähnlich gebauten Matrix

$$(61) \quad H = (1 + T)(1 - T)^{-1}$$

darzustellen, wobei auch T der Gleichung (58) genügt. Es muß gelten

$$S = ((1 + T)^2 (1 - T)^{-2} - 1) ((1 + T)^2 (1 - T)^{-2} + 1)^{-1},$$

d. h.

$$(62) \quad S = 2T(1 + T^2)^{-1}.$$

Wird f so groß angesetzt, daß $S \equiv 0 \pmod{2\mathfrak{p}}$ ist, so besitzt (62) eine ganzzahlige Lösung T , die man leicht durch Iteration berechnen kann:

$$T_0 = \frac{1}{2} S, \quad T_1 = \frac{1}{2} S(1 + \frac{1}{4} S^2), \dots, \quad T = \lim_{v \rightarrow \infty} T_v.$$

T erfüllt (58), es gilt $T \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, daher stellt (61) wieder eine eigentliche automorphe Einheit H von $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$ dar, mit welcher

$$E_{\mathfrak{p}} = H^2$$

gilt. Folglich ist $t(E_{\mathfrak{p}})$ die Einheits-Quadratklasse.

2. Jetzt ist umgekehrt zu zeigen, daß die genannten Existenzbedingungen für E auch hinreichen. Ist zunächst $n = 3$ oder 4 , so ziehen wir dazu den Satz 6 heran. Die Einheiten $E_{\mathfrak{p}_{\mu}}$ seien dargestellt durch die Elemente $T_{\mathfrak{p}_{\mu}} = T(E_{\mathfrak{p}_{\mu}})$ in $C_{\mathfrak{p}_{\mu}}$; sie können so normiert angesetzt werden, daß ihre Normen die in Satz 7 erwähnten Zahlen $t_{\mathfrak{p}_{\mu}}$ sind: $t(T_{\mathfrak{p}_{\mu}}) = t_{\mathfrak{p}_{\mu}}$. Es gebe eine Zahl t in k , welche den Kongruenzen (54) genügt, und welche als Spinor-Norm eines Automorphismus von R auftritt. Man kann die $T_{\mathfrak{p}_{\mu}}$ sämtlich mit einer Zahl t_0 von k multiplizieren, so daß die $t_0 T_{\mathfrak{p}_{\mu}}$ in $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_{\mu}}$ liegen, wenn \mathfrak{D} die \mathfrak{S} zugeordnete Ordnung $\mathfrak{D}_{\mathfrak{S}}$ bedeutet. Dadurch multiplizieren sich die $t_{\mathfrak{p}_{\mu}}$ mit t_0^2 . Wird auch noch t mit t_0^2 multipliziert, so bleiben die Kongruenzen (54) bestehen. Es beschränkt also die Allgemeinheit nicht, wenn $T_{\mathfrak{p}_{\mu}} \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_{\mu}}$ und $t(T_{\mathfrak{p}_{\mu}}) = t_{\mathfrak{p}_{\mu}}$ angenommen wird.

Nach Satz 6 gibt es ein Element T in \mathfrak{D} der Eigenschaft

$$(63) \quad T_{\mathfrak{p}_{\mu}} T^{-1} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_{\mu}} \mathfrak{p}_{\mu}^{f_{\mu}}},$$

dessen Norm t ist. Nach § 1 gehört zu T ein eigentlicher Automorphismus E von R , mit welchem $T(E) = T$ ist.

Es muß nun sichergestellt werden, daß E eine Einheit von \mathfrak{S} ist und außerdem den Kongruenzen (53) genügt. E ist dann und nur dann eine Einheit von \mathfrak{S} , wenn $T^{-1} \mathfrak{D} T = \mathfrak{D}$ oder

$$(64) \quad T^{-1} \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}} T = \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}} \text{ für alle Primideale } \mathfrak{p}$$

gilt. Ist \mathfrak{p} gleich einem der Primideale \mathfrak{p}_{μ} , so folgt (64) aus (63):

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_{\mu}} = (T_{\mathfrak{p}_{\mu}} T^{-1})^{-1} \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_{\mu}} T_{\mathfrak{p}_{\mu}} T^{-1} = T \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_{\mu}} T^{-1}.$$

Ja die Transformation von $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_{\mu}}$ mit $T_{\mathfrak{p}_{\mu}} T^{-1}$ induziert in dem Restklassenring von $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_{\mu}} \pmod{\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_{\mu}} \mathfrak{p}_{\mu}^{f_{\mu}}}$ den identischen Automorphismus. Es ist also für je zwei Vektoren ι_1, ι_2 aus $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}_{\mu}}$:

$$(E_{\mathfrak{p}_{\mu}} E^{-1} \iota_1, E_{\mathfrak{p}_{\mu}} E^{-1} \iota_2) \equiv (\iota_1, \iota_2) \pmod{\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_{\mu}} n(\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}_{\mu}}) \mathfrak{p}_{\mu}^{f_{\mu}}}$$

und folglich für alle $\iota \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}_{\mu}}$

$$E_{\mathfrak{p}_{\mu}} E^{-1} \iota \equiv \pm \iota \pmod{\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}_{\mu}} \mathfrak{p}_{\mu}^{f_{\mu}}}.$$

Hier kann nur das Zeichen + gelten. Ist nämlich $n = 3$, und gälte das Zeichen $-$, so würde die $E_{\mathfrak{p}_\mu} E^{-1}$ darstellende Matrix eine Determinante $\equiv -1 \pmod{\mathfrak{p}_\mu^f}$ haben. Das ist aber bei eigentlichen Automorphismen unmöglich, sofern \mathfrak{p}_μ^f durch \mathfrak{p}_μ öfter teilbar ist als 2. Ist $n = 4$, und gälte das Zeichen $-$, so beachte man, daß der Automorphismus Γ von R , welcher jeden Vektor ι in $-\iota$ überführt, durch das Element $T(\Gamma) = (\iota_1, \iota_2, \iota_3, \iota_4) = J$ dargestellt wird, wobei (ι_i) eine Orthogonalbasis von R darstellt. Es müßte also $T_{\mathfrak{p}_\mu} T^{-1} \equiv sJ \pmod{\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_\mu} \mathfrak{p}_\mu^f}$ mit einem gewissen s in k gelten. Wegen (63) ist diese Kongruenz unmöglich, sobald f_μ hinreichend groß ist. Es ist damit gezeigt, daß der Automorphismus E der Kongruenz (53) genügt.

Die Gleichungen (64) sind ferner richtig für alle Primideale \mathfrak{p} , welche nicht in t aufgehen; für diese ist nämlich T eine Einheit von $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$. Von den Primteilern von t , für welche (64) noch nicht bewiesen ist, brauchen wir jetzt nur noch die von den \mathfrak{p}_μ verschiedenen zu betrachten; sie seien mit $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_r$ bezeichnet. Voraussetzungsgemäß gibt es für die \mathfrak{q}_e Einheiten $E_{\mathfrak{q}_e}$ von $\mathfrak{S}_{\mathfrak{q}_e}$, deren Spinor-Normen gleich der Quadratklasse von t in $k_{\mathfrak{q}_e}$ sind. Sie seien dargestellt durch die Elemente $T(E_{\mathfrak{q}_e})$ von $C_{\mathfrak{q}_e}$, und diese kann man so normieren, daß $t(T(E_{\mathfrak{q}_e})) = t$ gilt. Man bestimme jetzt eine ganze Zahl t_1 in k , welche nur durch die \mathfrak{q}_e teilbar ist, so daß die Elemente $t_1 T(E_{\mathfrak{q}_e})$ in $\mathfrak{D}_{\mathfrak{q}_e}$ liegen. Nochmalige Anwendung von Satz 6 ergibt die Existenz eines Elements T_1 in \mathfrak{D} der Norm $t_1^2 t$, welches den Kongruenzen

$$t_1 T_{\mathfrak{p}_\mu} T_1^{-1} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}_\mu} \mathfrak{p}_\mu^f}, \quad t_1 T(E_{\mathfrak{q}_e}) T_1^{-1} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{D}_{\mathfrak{q}_e} \mathfrak{q}_e}$$

genügt. Zu T_1 gehört ein eigentlicher Automorphismus E_1 von R . E_1 ist wieder eine Einheit von $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$ für alle nicht in $t_1^2 t$, d. h. in t aufgehenden \mathfrak{p} . Für die in $t_1^2 t$ aufgehenden Primideale \mathfrak{p}_μ bzw. \mathfrak{q}_e gelten die Kongruenzen (53) mit E_1 an Stelle von E und daher (64).

3. Jetzt sei die Dimension des Raumes R größer als 4. Aus der vorausgesetzten Indefinitheit von R folgt, daß R ein isotroper Raum ist. Damit wird eine elementare Schlußweise anwendbar, welche auch den Beweis für Satz 2 in isotropen Räumen lieferte²²⁾. Wir geben im Folgenden lediglich die zum Beweis von Satz 7 notwendigen Modifikationen dieser Schlußweise an.

Man geht von einer direkten Summen-Zerlegung

$$R = R_0 + k(\iota_1, \iota_2) \quad \text{mit} \quad \iota_1^2 = \iota_2^2 = 0, \quad \iota_1 \iota_2 = 1,$$

und der darauf beruhenden Darstellung der eigentlichen Automorphismen von R und $R_{\mathfrak{p}_\mu}$ durch die Elemente $E'_\omega (i = 1, 2)$ und P_r aus. A. a. O. wurde die Darstellung der eigentlichen Automorphismen $E_{\mathfrak{p}}$

²²⁾ QFOG, § 15.

von $R_{\mathfrak{p}}$:

$$(65) \quad E_{\mathfrak{p}} = E_{\omega_1, \mathfrak{p}}^1 E_{\omega_2, \mathfrak{p}}^2 \dots E_{\omega_g, \mathfrak{p}}^g P_{r_{\mathfrak{p}}}$$

benutzt; dabei ist $r_{\mathfrak{p}}$ eine Zahl aus der Quadratklasse $t(E_{\mathfrak{p}})$, und zwar kann man die Darstellung so einrichten, daß $r_{\mathfrak{p}}$ eine beliebig vorgeschriebene Zahl aus dieser Quadratklasse ist. In diesem Zusammenhang darf $r_{\mathfrak{p}} = t$ gewählt werden. Die Anzahl g in (65) darf ferner von \mathfrak{p} unabhängig angenommen werden. Es wurden nun im Beweis für Satz 2 Vektoren $\omega_1, \dots, \omega_{2g}$ aufgesucht, welche den Kongruenzen

$$(66) \quad \begin{cases} \omega_i \equiv \omega_{i, \mathfrak{p}} \pmod{(\mathfrak{D}_0 \mathfrak{f})_{\mathfrak{p}}} & \text{für eine gewisse endliche Menge} \\ & \text{von Primidealen } \mathfrak{p} \\ \omega_i \equiv 0 \pmod{(\mathfrak{D}_0 \mathfrak{f})_{\mathfrak{q}}} & \text{für alle übrigen Primideale } \mathfrak{q} \end{cases}$$

genügen, wobei \mathfrak{D}_0 ein geeignetes Gitter in R_0 und \mathfrak{f} ein geeignetes Ideal in k ist. Aus diesen Kongruenzen folgte, daß der Automorphismus

$$(67) \quad E = E_{\omega_1}^1 E_{\omega_2}^2 \dots E_{\omega_{2g}}^{2g} P_t$$

von R eine eigentliche automorphe Einheit von $\mathfrak{S}_{\mathfrak{q}}$ für alle \mathfrak{q} ist und sich von den $E_{\mathfrak{p}}$ nur um Einheiten von $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$ als rechtsseitige Faktoren unterscheidet. In unserem jetzigen Zusammenhang sind die $E_{\mathfrak{p}}$ in (65) die in Satz 7 gegebenen Einheiten, und demnach wird E eine Einheit von \mathfrak{S} . Man nehme in das Ideal \mathfrak{f} in (66) noch die Primideale \mathfrak{p}_{μ} in gewissen Potenzen h_{μ} auf. Dann folgt aus (65)—(67) für jedes \mathfrak{p}_{μ} das Bestehen einer Kongruenz

$$E \equiv E_{\mathfrak{p}_{\mu}} \pmod{\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}_{\mu}} \mathfrak{p}_{\mu}^{h'_{\mu}} / \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}_{\mu}}},$$

wobei die Exponenten h'_{μ} mit den h_{μ} unbegrenzt anwachsen. Bei geeigneter Verfügung über die h_{μ} werden also die Kongruenzen (53) erfüllt.

4. Mittels Satz 7 können wir nun einen Teil von Satz 4 beweisen:

Satz 8. Die relativen Maße $u^+(\mathfrak{S})$ und $u^+(\mathfrak{R})$ der Einheitengruppen für zwei verwandte Gitter \mathfrak{S} und \mathfrak{R} in einem indefiniten Raum R stimmen überein.

Ist die Dimension $n = 2$, so stimmen bekanntlich bereits die Einheitengruppen $\mathfrak{U}_{\mathfrak{S}}^{\pm}$ und $\mathfrak{U}_{\mathfrak{R}}^{\pm}$ selber überein. Wir nehmen also $n > 2$ an.

Für jedes Primideal \mathfrak{p} gibt es einen Exponenten $f_{\mathfrak{p}}$ so, daß eine Einheit E von $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$ (bzw. $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}$), welche der Kongruenz

$$(68) \quad E \equiv 1 \pmod{\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{f_{\mathfrak{p}}} / \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}} \quad (\text{bzw. } \pmod{\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{f_{\mathfrak{p}}} / \mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}})$$

genügt, gleichzeitig eine Einheit von $\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}}$ (bzw. $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$) ist²³⁾. Darauf beruht die Definition der relativen Maße $u^+(\mathfrak{S})$. Es bezeichne $\mathfrak{G}_{\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}}$ die Gruppe der Restklassen der eigentlichen automorphen Einheiten von

²³⁾ QFOG, § 16, Nr. 3.

\mathfrak{I}_p nach dem Modul $\mathfrak{I}_p \mathfrak{p}'_p$ und $\mathfrak{G}'_{\mathfrak{I}_p}$ die Untergruppe von $\mathfrak{G}_{\mathfrak{I}_p}$, welche von Einheiten aus dem Durchschnitt $\mathfrak{U}_{\mathfrak{I}_p}^+ \wedge \mathfrak{U}_{\mathfrak{R}_p}^+$ geliefert wird. Entsprechend wird $\mathfrak{G}_{\mathfrak{R}_p}$ und $\mathfrak{G}'_{\mathfrak{R}_p}$ definiert. Es ist dann ²⁴⁾

$$(69) \quad \begin{aligned} u^+(\mathfrak{I}_p) &= [\mathfrak{G}_{\mathfrak{I}_p} : \mathfrak{G}'_{\mathfrak{I}_p}] \\ u^+(\mathfrak{R}_p) &= [\mathfrak{G}_{\mathfrak{R}_p} : \mathfrak{G}'_{\mathfrak{R}_p}]. \end{aligned}$$

Sind $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m$ alle die Primideale, für welche $\mathfrak{I}_{\mathfrak{p}_\mu} \neq \mathfrak{R}_{\mathfrak{p}_\mu}$ ist, und wird

$$(70) \quad \mathfrak{f} = \prod_{\mu=1}^m \mathfrak{p}'_{\mu}{}^{\mathfrak{p}_\mu}$$

gesetzt, so sind alle Einheiten E von \mathfrak{I} (bzw. \mathfrak{R}), welche der Kongruenz

$$E \equiv 1 \pmod{\mathfrak{I}\mathfrak{f}/\mathfrak{I}} \quad (\text{bzw. mod } \mathfrak{R}\mathfrak{f}/\mathfrak{R})$$

genügen, Einheiten von \mathfrak{R} (bzw. \mathfrak{I}). Wenn nun $\mathfrak{G}_{\mathfrak{I}}, \mathfrak{G}_{\mathfrak{R}}$ die Gruppen der Restklassen der eigentlichen automorphen Einheiten von $\mathfrak{I}, \mathfrak{R} \pmod{\mathfrak{I}\mathfrak{f}/\mathfrak{I}, \mathfrak{R}\mathfrak{f}/\mathfrak{R}}$ bezeichnen und $\mathfrak{G}'_{\mathfrak{I}}, \mathfrak{G}'_{\mathfrak{R}}$ deren Untergruppen, welche durch Einheiten von $\mathfrak{R}, \mathfrak{I}$ vertreten werden, so ist

$$(71) \quad \begin{aligned} u^+(\mathfrak{I}) &= \frac{[\mathfrak{G}_{\mathfrak{I}} : \mathfrak{G}'_{\mathfrak{I}}]}{[\mathfrak{G}_{\mathfrak{R}} : \mathfrak{G}'_{\mathfrak{R}}]}. \end{aligned}$$

Der Wert des Quotienten (71) ändert sich nicht, wenn in \mathfrak{f} noch weitere Faktoren aufgenommen werden. Man kann nun zeigen: die Spinor-Normen von Einheiten von \mathfrak{I}_p sind solche Quadratklassen in k_p , welche Einheiten von k_p enthalten, sofern \mathfrak{p} nicht in 2 und in der reduzierten Determinante $\mathfrak{d}(\mathfrak{I})$ von \mathfrak{I} aufgeht ²⁵⁾. Umgekehrt sieht man sofort, daß alle Quadratklassen \mathfrak{p} -adischer Einheiten als Spinor-Normen von Einheiten von \mathfrak{I}_p auftreten, falls \mathfrak{p} nicht in $2 \mathfrak{d}(\mathfrak{I})$ aufgeht, und falls ferner die Dimension $n > 2$ ist. Die endlich vielen Primteiler von $2 \mathfrak{d}(\mathfrak{I})$ und $\mathfrak{d}(\mathfrak{R})$ nehmen wir unter die \mathfrak{p}_μ auf. Die Exponenten \mathfrak{p}_μ werden so groß gewählt, wie es einerseits die Formel (71) verlangt, und daß sie andererseits den Anforderungen von Satz 7 genügen.

Wenn gezeigt werden soll, daß der Quotient (71) den Wert 1 hat, so darf man zuvor \mathfrak{I} durch ein ähnliches Gitter $\Sigma \mathfrak{I}$ ersetzen; ähnliche Gitter haben nämlich gleiche relative Gruppenmaße ²⁶⁾. Die Ähnlichkeitstransformation Σ werde gemäß (2) gewählt. Aus diesem Grunde darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$(72) \quad \mathfrak{R}_p \cong \mathfrak{I}_p \quad \text{für alle } \mathfrak{p}$$

vorausgesetzt werden.

²⁴⁾ Hier stehen die relativen Maße der Einheitengruppen von \mathfrak{I}_p und \mathfrak{R}_p . — Man erhält (69) aus der Definition unter Anwendung des zweiten Isomorphiesatzes.

²⁵⁾ Dies wurde in QFOG, § 13, Nr. 4 festgestellt.

²⁶⁾ QFOG, Satz 16.3.

Wir vergleichen jetzt die Gruppen $\mathfrak{G}_3, \mathfrak{G}_R$ mit den direkten Produkten

$$\overline{\mathfrak{G}}_3 = \mathfrak{G}_{\mathfrak{P}_{p_1}} \times \dots \times \mathfrak{G}_{\mathfrak{P}_{p_m}}, \quad \overline{\mathfrak{G}}_R = \mathfrak{G}_{\mathfrak{R}_{p_1}} \times \dots \times \mathfrak{G}_{\mathfrak{R}_{p_m}}.$$

\mathfrak{G}_3 ist eine Untergruppe von $\overline{\mathfrak{G}}_3$. Ein Element von $\overline{\mathfrak{G}}_3$ liegt in \mathfrak{G}_3 , d. h. zu einem System E_{p_1}, \dots, E_{p_m} von Einheiten von $\mathfrak{P}_{p_1}, \dots, \mathfrak{P}_{p_m}$ gehört eine Einheit E von \mathfrak{P} derart, daß

$$E \equiv E_{p_\mu} \pmod{\mathfrak{P}_{p_\mu} \mathfrak{p}_\mu^t / \mathfrak{P}_{p_\mu}} \quad (\mu = 1, \dots, m)$$

ist, wenn die folgende in Satz 7 ausgesprochene notwendige und hinreichende Bedingung erfüllt ist: In den durch die Spinor-Normen der E_{p_μ} gelieferten Quadratklassen gibt es Zahlen t_{p_μ} , für welche die Kongruenzen

$$t^{-1} t_{p_\mu} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_\mu^t}$$

durch eine Zahl t in k lösbar sind, deren Quadratklasse als Spinor-Norm einer Einheit E_q von \mathfrak{P}_q auftritt für jedes von den \mathfrak{p}_μ verschiedene Primideal q von k , und außerdem als Spinor-Norm eines Automorphismus von R . Nach unserer Verfügung über die \mathfrak{p}_μ kann man aber auch sagen: diese Kongruenzen sind durch eine Zahl t in k lösbar, welche außer den \mathfrak{p}_μ keinen weiteren Primteiler enthält, und welche Spinor-Norm eines Automorphismus ist. Entsprechendes gilt für die Gruppen $\overline{\mathfrak{G}}_R$ und \mathfrak{G}_R . Zuzufolge (72) sind die Einheitengruppen von $\mathfrak{P}_{p_\mu}, \mathfrak{R}_{p_\mu}$ isomorph; die Isomorphie erstreckt sich auf die Spinor-Normen. Es fallen also die folgenden Indizes gleich aus:

$$(73) \quad [\overline{\mathfrak{G}}_3 : \mathfrak{G}_3] = [\overline{\mathfrak{G}}_R : \mathfrak{G}_R].$$

Ferner brauchen wir die Gruppen

$$\overline{\mathfrak{G}}'_3 = \mathfrak{G}'_{\mathfrak{P}_{p_1}} \times \dots \times \mathfrak{G}'_{\mathfrak{P}_{p_m}}, \quad \overline{\mathfrak{G}}'_R = \mathfrak{G}'_{\mathfrak{R}_{p_1}} \times \dots \times \mathfrak{G}'_{\mathfrak{R}_{p_m}}$$

und müssen für sie analog zu (73) zeigen:

$$(74) \quad [\overline{\mathfrak{G}}'_3 : \mathfrak{G}'_3] = [\overline{\mathfrak{G}}'_R : \mathfrak{G}'_R].$$

Aus (73) und (74) folgt leicht die Behauptung. Wegen (72) sind die Quotienten (69) gleich 1. Man rechnet nun

$$1 = \prod_{\mu=1}^m \frac{[\mathfrak{G}_{\mathfrak{P}_{p_\mu}} : \mathfrak{G}'_{\mathfrak{P}_{p_\mu}}]}{[\mathfrak{G}_{\mathfrak{R}_{p_\mu}} : \mathfrak{G}'_{\mathfrak{R}_{p_\mu}}]} = \frac{[\overline{\mathfrak{G}}_3 : \overline{\mathfrak{G}}'_3]}{[\overline{\mathfrak{G}}_R : \overline{\mathfrak{G}}'_R]} = \frac{[\mathfrak{G}_3 : \mathfrak{G}'_3]}{[\mathfrak{G}_R : \mathfrak{G}'_R]} \frac{[\overline{\mathfrak{G}}_3 : \mathfrak{G}_3]}{[\overline{\mathfrak{G}}_R : \mathfrak{G}_R]} \frac{[\overline{\mathfrak{G}}'_R : \mathfrak{G}'_R]}{[\overline{\mathfrak{G}}'_3 : \mathfrak{G}'_3]},$$

und das ist zufolge (73), (74) gleich

$$\frac{[\mathfrak{G}_3 : \mathfrak{G}'_3]}{[\mathfrak{G}_R : \mathfrak{G}'_R]} = 1.$$

Der Beweis für (74) beruht auf dem gleichen Prinzip wie der von (73); es ist allerdings noch eine Vorbereitung erforderlich. Es sei in Präzisierung von (72)

$$\mathfrak{K}_p = T_p \mathfrak{J}_p$$

mit einem eigentlichen oder uneigentlichen Automorphismus T_p von R_p . Nach E. CARTAN²⁷⁾ läßt sich T_p als ein Produkt von Spiegelungen $\mathcal{O}_{p, \varrho}$ schreiben:

$$T_p = \mathcal{O}_{p, r_p} \dots \mathcal{O}_{p, 1}.$$

Man nehme zunächst diese Zerlegung für $p = p_1$ vor und bilde die Gitter

$$\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{J}, \quad \mathfrak{K}_\varrho = R \wedge \mathcal{O}_{p_1, \varrho} \dots \mathcal{O}_{p_1, 1} \mathfrak{J}_{p_1} \wedge \mathfrak{J}_{q_1} \wedge \mathfrak{J}_{q_2} \wedge \dots \quad (\varrho = 1, \dots, r_{p_1})$$

($q_1, q_2 \dots$ bedeute sämtliche Primideale $\neq p_1$). Die \mathfrak{K}_ϱ gehören zum selben Geschlecht wie \mathfrak{J} und \mathfrak{K} . Man zerlege weiter T_{p_2} in Spiegelungen und bilde

$$\mathfrak{K}_{r_{p_1} + \varrho} = R \wedge \mathfrak{K}_{p_1} \wedge \mathcal{O}_{p_2, \varrho} \dots \mathcal{O}_{p_2, 1} \mathfrak{J}_{p_2} \wedge \mathfrak{J}_{q_1} \wedge \mathfrak{J}_{q_2} \wedge \dots \quad (\varrho = 1, \dots, r_{p_2})$$

(q_1, q_2, \dots bedeuten sämtliche Primideale $\neq p_1, p_2$). Fortsetzung dieser Bildungen liefert eine Kette verwandter Gitter, deren erstes \mathfrak{J} und deren letztes \mathfrak{K} ist. Je zwei aufeinanderfolgende $\mathfrak{K}_\varrho, \mathfrak{K}_{\varrho+1}$ haben die Eigenschaft, daß

$$\mathfrak{K}_{\varrho+1, p} = \mathcal{O}_{\varrho, p} \mathfrak{K}_{\varrho, p}.$$

gilt, wobei jeweils $\mathcal{O}_{\varrho, p} = 1$ ist für alle Primideale p bis auf ein einziges, und in diesem Ausnahmefall ist $\mathcal{O}_{\varrho, p}$ eine Spiegelung. Wenn $u^+(\mathfrak{K}_\varrho) = u^+(\mathfrak{K}_{\varrho+1})$ gezeigt werden kann, ist damit gleichzeitig der Satz 8 bewiesen. Aus diesem Grunde beschränkt es nicht die Allgemeinheit, wenn vorausgesetzt wird, daß $\mathfrak{J}_p = \mathfrak{K}_p$ für alle Primideale $p \neq p_1$ gilt, während $\mathfrak{K}_{p_1} = \mathcal{O} \mathfrak{J}_{p_1}$ mit einer Spiegelung \mathcal{O} von R_{p_1} ist.

Unter dieser Voraussetzung ist jetzt

$$\mathcal{G}_{\mathfrak{J}_{p_\mu}} = \mathcal{G}'_{\mathfrak{J}_{p_\mu}} = \mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{p_\mu}} = \mathcal{G}'_{\mathfrak{K}_{p_\mu}} \quad (\mu \neq 1).$$

Ferner ist $\mathcal{O}^2 = 1$ und

$$u_{\mathfrak{J}_{p_1}}^+ = \mathcal{O} u_{\mathfrak{K}_{p_1}}^+ \mathcal{O}^{-1}, \quad u_{\mathfrak{K}_{p_1}}^+ = \mathcal{O} u_{\mathfrak{J}_{p_1}}^+ \mathcal{O}^{-1}$$

und daher

$$u_{\mathfrak{J}_{p_1}}^+ \wedge u_{\mathfrak{K}_{p_1}}^+ = \mathcal{O} (u_{\mathfrak{J}_{p_1}}^+ \wedge u_{\mathfrak{K}_{p_1}}^+) \mathcal{O}^{-1}.$$

Die isomorphe Abbildung $u_{\mathfrak{J}_{p_1}}^+ \rightarrow \mathcal{O} u_{\mathfrak{J}_{p_1}}^+ \mathcal{O}^{-1}$ bildet nun $\mathcal{G}_{\mathfrak{J}_{p_1}}$ isomorph auf $\mathcal{G}_{\mathfrak{K}_{p_1}}$ ab, und bei dieser Abbildung geht gleichzeitig $\mathcal{G}'_{\mathfrak{J}_{p_1}}$ in $\mathcal{G}'_{\mathfrak{K}_{p_1}}$ über. Die Elemente aus $\overline{\mathcal{G}}_{\mathfrak{J}_{p_1}}$, d. h. die Systeme E_{p_1}, \dots, E_{p_m} von Restklassen von Einheiten mod $\mathfrak{J}_{p_\mu} p_\mu^{\nu_\mu} / \mathfrak{J}_{p_\mu}$, werden auf Systeme von Einheiten $\mathcal{O} E_{p_1} \mathcal{O}^{-1}, E_{p_2}, \dots, E_{p_m}$ mod $\mathfrak{K}_{p_\mu} p_\mu^{\nu_\mu} / \mathfrak{K}_{p_\mu}$ abgebildet. Bei dieser

²⁷⁾ QFOG, Satz 1.5.

Abbildung bleiben die Spinor-Normen ungeändert und daher sind beide nach Satz 7 gleichzeitig durch Einheiten von \mathfrak{S} bzw. \mathfrak{R} vertretbar oder nicht. Mit diesem Beweis für (74) ist auch die Begründung von Satz 8 vollständig.

§ 6.

Eine Verschärfung der bisherigen Ergebnisse.

1. Bisher beruhten alle Betrachtungen im Prinzip auf dem Existenznachweis von Automorphismen, speziell von automorphen Einheiten mit gewissen vorgeschriebenen Eigenschaften. Es liegt nahe, sie dadurch zu verschärfen, daß man weiterhin verlangt, diese Automorphismen sollen ein vorgeschriebenes Parallelotop fest lassen. Es werde also ein halbeinfaches Parallelotop \mathfrak{I} in R fixiert und vorausgesetzt, daß der auf $T = k(\mathfrak{I})$ senkrechte Teilraum T' von R indefinit sei und eine Dimension $n > 2$ habe.

Zwei Gitter \mathfrak{S} und \mathfrak{R} in R heißen *verwandt bezüglich \mathfrak{I}* , wenn es für jedes Primideal \mathfrak{p} einen eigentlichen Automorphismus $T_{\mathfrak{p}}$ von $R_{\mathfrak{p}}$ mit den Eigenschaften

$$\mathfrak{R}_{\mathfrak{p}} = T_{\mathfrak{p}} \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}, \quad T_{\mathfrak{p}} \mathfrak{I} = \mathfrak{I}$$

gibt. \mathfrak{S} und \mathfrak{R} heißen *Spinor-verwandt bezüglich \mathfrak{I}* , wenn es einen eigentlichen Automorphismus T von R und für jedes \mathfrak{p} eine eigentliche automorphe Einheit $E_{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$ so gibt, daß

$$t(T) = t(T_{\mathfrak{p}} E_{\mathfrak{p}}), \quad T \mathfrak{I} = E_{\mathfrak{p}} \mathfrak{I} = \mathfrak{I}$$

gilt. Man kann natürlich gleich $T_{\mathfrak{p}}$ an Stelle von $T_{\mathfrak{p}} E_{\mathfrak{p}}$ schreiben und dann das Erfülltsein der letzteren Gleichungen mit $E_{\mathfrak{p}} = 1$ verlangen. Endlich heißen \mathfrak{S} und \mathfrak{R} *isomorph bezüglich \mathfrak{I}* , wenn es einen eigentlichen Automorphismus T von R mit

$$\mathfrak{R} = T \mathfrak{S}, \quad T \mathfrak{I} = \mathfrak{I}$$

gibt.

Über Satz 2 hinaus kann man jetzt zeigen, daß zwei bezügl. \mathfrak{I} Spinor-verwandte Gitter \mathfrak{S} und \mathfrak{R} bezügl. \mathfrak{I} isomorph sind. Zunächst folgt aus der Voraussetzung, daß $\mathfrak{S}' = T' \wedge \mathfrak{S}$ und $\mathfrak{R}' = T' \wedge \mathfrak{R}$ Spinor-verwandte Gitter in T' sind. Es gibt also für jedes Primideal \mathfrak{p} einen eigentlichen Automorphismus $T'_{\mathfrak{p}}$ von $T'_{\mathfrak{p}}$, für welchen $\mathfrak{R}'_{\mathfrak{p}} = T'_{\mathfrak{p}} \mathfrak{S}'_{\mathfrak{p}}$ gilt, wobei man annehmen darf, daß die Spinor-Normen der $T'_{\mathfrak{p}}$ für alle \mathfrak{p} übereinstimmend gleich der Spinor-Norm eines eigentlichen Automorphismus von T' sind. Nach Satz 2, angewandt auf den Raum T' , gibt es dann einen eigentlichen Automorphismus T' von T' , mit welchem $\mathfrak{R}' = T' \mathfrak{S}'$ gilt. Macht man T' durch die Festsetzung $T' \mathfrak{I} = \mathfrak{I}$ zu einem Automorphismus von R , und ersetzt

man \mathfrak{J} durch $T\mathfrak{J}$, so darf hiernach ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$(75) \quad \mathfrak{J}' = T' \wedge \mathfrak{J} = T' \wedge \mathfrak{R}$$

vorausgesetzt werden. Die Automorphismen T_p von R_p , für welche

$$(76) \quad \mathfrak{R}_p = T_p \mathfrak{J}_p, \quad T_p \mathfrak{I} = \mathfrak{I}$$

voraussetzungsgemäß gilt, sind wegen (75) Einheiten von \mathfrak{J}' .

Es gibt nun ein ganzes Ideal \mathfrak{f} in k mit folgender Eigenschaft:

$$\mathfrak{J} \subset \mathfrak{J}' + T \wedge \mathfrak{J} \subset \mathfrak{f}\mathfrak{J}. \quad (T = k(\mathfrak{I}))$$

Es sei

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{p}_1^{f_1} \dots \mathfrak{p}_m^{f_m}.$$

Ist E eine Einheit von \mathfrak{J}'_{p_μ} und

$$(77) \quad E \equiv T_{p_\mu} \pmod{\mathfrak{J}'_{p_\mu} \mathfrak{p}_\mu^{f_\mu} / \mathfrak{J}'_{p_\mu}},$$

so genügt $H_{p_\mu} = E^{-1} T_{p_\mu}$ der Kongruenz

$$H_{p_\mu} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{J}'_{p_\mu} \mathfrak{p}_\mu^{f_\mu} / \mathfrak{J}'_{p_\mu}}.$$

Macht man E und H_{p_μ} durch die Festsetzung $E\mathfrak{I} = H_{p_\mu}\mathfrak{I} = \mathfrak{I}$ zu Automorphismen von R_{p_μ} , so läßt H_{p_μ} die Restklassen von $\mathfrak{J}'_{p_\mu} + T_{p_\mu} \wedge \mathfrak{J}_{p_\mu} \pmod{(\mathfrak{f}\mathfrak{J})_{p_\mu}}$ fest und ist daher eine Einheit von $(\mathfrak{f}\mathfrak{J})_{p_\mu}$, d. h. von \mathfrak{J}'_{p_μ} . Mithin gilt wegen (76)

$$(78) \quad \mathfrak{R}_{p_\mu} = E \mathfrak{J}_{p_\mu}.$$

Wegen der vorausgesetzten Spinor-Verwandtschaft von \mathfrak{J} und \mathfrak{R} bezügl. \mathfrak{I} kann man die T_p in (76) so ansetzen, daß ihre Spinor-Normen übereinstimmend für alle p_μ gleich der Spinor-Norm eines eigentlichen Automorphismus T' von T' sind: $t(T_{p_\mu}) = t(T')$. Aus dem gleichen Grunde gibt es zu diesem T' für jedes von den p_μ verschiedene Primideal q eine Einheit E_q von \mathfrak{J}'_q mit $t(E_q) = t(T')$. Es sei t eine beliebige Zahl aus der Quadratklasse $t(T')$. Wir nehmen unter die p_μ noch die Teiler von Zähler und Nenner von t sowie alle p mit $\mathfrak{J}_p \neq \mathfrak{R}_p$ auf und setzen die Exponenten f_μ in (77) so groß an, wie es der Satz 7 verlangt, also eventuell größer als die Exponenten, mit denen sie in \mathfrak{f} aufgehen. Jetzt wenden wir Satz 7 an, indem wir die dort vorkommenden Zahlen t_{p_μ} gleich t setzen. Es gibt demnach eine Einheit E von \mathfrak{J}' , welche sämtlichen Kongruenzen (77) genügt, und deren Spinor-Norm t ist. E wird durch $E\mathfrak{I} = \mathfrak{I}$ zu einem Automorphismus von R gemacht. Es gilt (78) für alle p_μ , d. h. mindestens für alle Primteiler von \mathfrak{f} sowie für alle p mit $\mathfrak{J}_p \neq \mathfrak{R}_p$. Für die übrigen Primideale q ist aber nach Voraussetzung $\mathfrak{J}_q = \mathfrak{J}'_q + T_q \wedge \mathfrak{J}_q = \mathfrak{R}_q$ und daher ebenfalls $\mathfrak{R}_q = E \mathfrak{J}_q$. Folglich gilt $\mathfrak{R} = E \mathfrak{J}$.

2. Auch Satz 8 läßt sich in gleichem Sinne übertragen, indem man sich auf Einheiten beschränkt, welche \mathfrak{I} fest lassen: *Es mögen*

die in Nr. 1 formulierten Voraussetzungen über T' gelten. \mathfrak{S} und \mathfrak{K} seien zwei bezügl. \mathfrak{I} verwandte Gitter. Dann sind die relativen Maße $u^+[\mathfrak{S}, \mathfrak{I}]$, $u^+[\mathfrak{K}, \mathfrak{I}]$ der \mathfrak{I} fest lassenden Einheitengruppen $U_{\mathfrak{S}}^+[\mathfrak{I}]$, $U_{\mathfrak{K}}^+[\mathfrak{I}]$ gleich groß.

Zum Beweise werden die Gitter

$$\mathfrak{S}' = T' \wedge \mathfrak{S}, \quad \mathfrak{S}'' = T \wedge \mathfrak{S}, \quad \mathfrak{K}' = T' \wedge \mathfrak{K}, \quad \mathfrak{K}'' = T \wedge \mathfrak{K}$$

und

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}' + \mathfrak{S}'', \quad \mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}' + \mathfrak{K}''$$

eingeführt. Eine \mathfrak{I} fest lassende eigentliche automorphe Einheit von \mathfrak{S} ist eine eigentliche automorphe Einheit von \mathfrak{S}' und damit von \mathfrak{S}_1 . Das Gleiche gilt für \mathfrak{K} :

$$U_{\mathfrak{S}}^+[\mathfrak{I}] \subset U_{\mathfrak{S}_1}^+[\mathfrak{I}], \quad U_{\mathfrak{K}}^+[\mathfrak{I}] \subset U_{\mathfrak{K}_1}^+[\mathfrak{I}].$$

Die Indizes $[U_{\mathfrak{S}_1}^+[\mathfrak{I}] : U_{\mathfrak{S}}^+[\mathfrak{I}]]$, $[U_{\mathfrak{K}_1}^+[\mathfrak{I}] : U_{\mathfrak{K}}^+[\mathfrak{I}]]$ sind endlich. Es gibt für jedes Primideal \mathfrak{p} eine Potenz $f_{\mathfrak{p}}$ derart, daß eine Einheit $E_{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{S}_{1\mathfrak{p}}$, welche der Kongruenz

$$E_{\mathfrak{p}} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{S}_{1\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{f_{\mathfrak{p}}}/\mathfrak{S}_{1\mathfrak{p}}}$$

genügt, gleichzeitig eine Einheit von $\mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}$ ist. Dabei braucht $f_{\mathfrak{p}}$ nur für endlich viele \mathfrak{p} größer als Null zu sein (nämlich nur für die Primteiler des in Nr. 1 benutzten Ideals \mathfrak{f}), wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m$. Die Einheiten der Gruppe $U_{\mathfrak{S}_1}^+[\mathfrak{I}]$ verteilen sich auf endlich viele Restklassen nach den Moduln $\mathfrak{S}_{1\mathfrak{p}_\mu} \mathfrak{p}_\mu^{f_{\mathfrak{p}_\mu}}/\mathfrak{S}_{1\mathfrak{p}_\mu}$. Die Anzahl dieser Restklassen ist gerade der Index $[U_{\mathfrak{S}_1}^+[\mathfrak{I}] : U_{\mathfrak{S}}^+[\mathfrak{I}]]$.

Es sei nun

$$\mathfrak{K}_{\mathfrak{p}} = T_{\mathfrak{p}} \mathfrak{S}_{\mathfrak{p}}, \quad T_{\mathfrak{p}} \mathfrak{I} = \mathfrak{I} \quad \text{für alle } \mathfrak{p}.$$

Dann ist auch

$$(79) \quad \mathfrak{K}'_{\mathfrak{p}} = T_{\mathfrak{p}} \mathfrak{S}'_{\mathfrak{p}} \quad \text{für alle } \mathfrak{p}.$$

$E_{\mathfrak{p}_1}, \dots, E_{\mathfrak{p}_m}$ seien beliebige eigentliche automorphe Einheiten von $\mathfrak{S}'_{\mathfrak{p}_1}, \dots, \mathfrak{S}'_{\mathfrak{p}_m}$. Ihnen entsprechen die Einheiten $\bar{E}_{\mathfrak{p}_\mu} = T_{\mathfrak{p}_\mu} E_{\mathfrak{p}_\mu} T_{\mathfrak{p}_\mu}^{-1}$ von $\mathfrak{K}'_{\mathfrak{p}_\mu}$. Wir fragen nach der Existenz zweier eigentlicher automorpher Einheiten E von \mathfrak{S} und \bar{E} von \mathfrak{K} , welche den Kongruenzen

$$E \equiv E_{\mathfrak{p}_\mu} \pmod{\mathfrak{S}'_{\mathfrak{p}_\mu} \mathfrak{p}_\mu^{f_{\mathfrak{p}_\mu}}/\mathfrak{S}'_{\mathfrak{p}_\mu}}, \quad \bar{E} \equiv \bar{E}_{\mathfrak{p}_\mu} \pmod{\mathfrak{K}'_{\mathfrak{p}_\mu} \mathfrak{p}_\mu^{f_{\mathfrak{p}_\mu}}/\mathfrak{K}'_{\mathfrak{p}_\mu}}$$

genügen. Nimmt man die Exponenten $f_{\mathfrak{p}_\mu}$ hinreichend groß an, so sind beide Kongruenzensysteme gleichzeitig lösbar oder unlösbar. Folglich

$$(80) \quad [U_{\mathfrak{S}_1}^+[\mathfrak{I}] : U_{\mathfrak{S}}^+[\mathfrak{I}]] = [U_{\mathfrak{K}_1}^+[\mathfrak{I}] : U_{\mathfrak{K}}^+[\mathfrak{I}]].$$

Definitionsgemäß²⁸⁾ ist ferner

$$u^+[\mathfrak{S}_1, \mathfrak{I}] = u^+(\mathfrak{S}'), \quad u^+[\mathfrak{K}_1, \mathfrak{I}] = u^+(\mathfrak{K}')$$

²⁸⁾ QFOG, Formel (24.12).

und wegen (79) und Satz 8

$$u^+[\mathfrak{F}_1, \mathfrak{I}] = u^+[\mathfrak{R}_1, \mathfrak{I}].$$

Also nach (80)

$$(81) \quad u^+[\mathfrak{F}, \mathfrak{I}] = u^+[\mathfrak{R}, \mathfrak{I}],$$

wie behauptet wurde.

§ 7.

Assoziierte Parallelotope.

1. Wie in der Einleitung angekündigt wurde, soll jetzt die Bedingung diskutiert werden, unter welcher zwei isomorphe Parallelotope \mathfrak{I}_1 und \mathfrak{I}_2 in R bezügl. \mathfrak{F} assoziiert sind, d. h. daß

$$\mathfrak{I}_1 = E \mathfrak{I}_2$$

mit einer automorphen Einheit E von \mathfrak{F} gilt. Notwendig hierfür ist offenbar, daß \mathfrak{I}_1 und \mathfrak{I}_2 in $R_{\mathfrak{p}}$ bezügl. $\mathfrak{F}_{\mathfrak{p}}$ assoziiert sind für jedes Primideal \mathfrak{p} . Trifft das Letztere zu, so wollen wir \mathfrak{I}_1 und \mathfrak{I}_2 *verwandt bezüglich* \mathfrak{F} nennen.

Zwischen die Begriffe der Verwandtschaft und der Assoziertheit bezügl. \mathfrak{F} läßt sich wieder ein dritter Begriff einschalten. \mathfrak{I}_1 und \mathfrak{I}_2 seien zwei eigentlich isomorphe Parallelotope in R , d. h. es gebe einen eigentlichen Automorphismus P von R , so daß

$$(82) \quad \mathfrak{I}_2 = P \mathfrak{I}_1$$

ist. \mathfrak{I}_1 und \mathfrak{I}_2 seien bezügl. \mathfrak{F} verwandt, d. h. es gelte mit automorphen Einheiten $E_{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{F}_{\mathfrak{p}}$

$$(83) \quad \mathfrak{I}_2 = E_{\mathfrak{p}} \mathfrak{I}_1 \quad \text{für alle } \mathfrak{p}.$$

Wegen (82) und (83) gibt es dann \mathfrak{I}_1 fest lassende Automorphismen $P_{\mathfrak{p}}$ von $R_{\mathfrak{p}}$, für welche

$$(84) \quad P = E_{\mathfrak{p}} P_{\mathfrak{p}}$$

gilt. Gibt es nun einen eigentlichen \mathfrak{I}_1 fest lassenden Automorphismus T von R sowie für jedes \mathfrak{p} eine eigentliche \mathfrak{I}_1 fest lassende automorphe Einheit $H_{\mathfrak{p}}$ von $\mathfrak{F}_{\mathfrak{p}}$, so daß

$$(85) \quad t(T) = t(H_{\mathfrak{p}} P_{\mathfrak{p}}) \quad \text{für alle } \mathfrak{p}$$

gilt, so heißen \mathfrak{I}_1 und \mathfrak{I}_2 bezügl. \mathfrak{F} Spinor-verwandt. Die Spinor-Verwandtschaft ist ersichtlich eine notwendige Bedingung für die Assoziertheit bezügl. \mathfrak{F} . Es gilt auch die Umkehrung:

Satz 9. \mathfrak{I} sei ein halbeinfaches Parallelotop in R , der zu $T = k(\mathfrak{I})$ senkrechte Teilraum T' von R sei indefinit und habe eine größere Dimension als 2. Dann sind zwei mit \mathfrak{I} eigentlich isomorphe bezügl. eines Gitters \mathfrak{F} von R Spinor-verwandte Parallelotope \mathfrak{I}_1 und \mathfrak{I}_2 bezügl. \mathfrak{F} assoziiert.

Man bilde zum Beweise mit einem (82) leistenden P das Gitter

$$\mathfrak{K} = P^{-1}\mathfrak{J}.$$

Es gelte (83) und (84). Dann ist

$$(86) \quad \mathfrak{K}_p = P_p^{-1}\mathfrak{J}_p \quad \text{für alle } p.$$

Die Spinor-Verwandtschaft von \mathfrak{X}_1 und \mathfrak{X}_2 bezügl. \mathfrak{J} besagt nun gerade, daß die Gitter \mathfrak{J} und \mathfrak{K} Spinor-verwandt bezügl. \mathfrak{X}_1 sind. Nach § 6, Nr. 1 sind sie also bezügl. \mathfrak{X}_1 isomorph, d. h. es gibt einen eigentlichen Automorphismus T von R mit

$$\mathfrak{K} = T\mathfrak{J}, \quad T\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2.$$

Daraus folgt nach (86) die Existenz einer Einheit Θ_p von \mathfrak{J}_p der Eigenschaft

$$P_p^{-1}\Theta_p = T \quad \text{für alle } p.$$

Nach (84) ist jetzt

$$P = E_p\Theta_p T^{-1} \quad \text{für alle } p.$$

Also ist $E_p\Theta_p = PT$ eine Einheit von \mathfrak{J} und wegen (82)

$$PT\mathfrak{X}_1 = P\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2,$$

wie behauptet wurde.

2. Ähnlich beweist man den folgenden

Satz 10. *Gelten wieder die Voraussetzungen von Satz 9 über \mathfrak{X} , so sind für zwei mit \mathfrak{X} eigentlich isomorphe bezügl. \mathfrak{J} verwandte Parallelotope \mathfrak{X}_1 und \mathfrak{X}_2 die relativen Gruppenmaße $u^+[\mathfrak{J}, \mathfrak{X}_1]$ und $u^+[\mathfrak{J}, \mathfrak{X}_2]$ gleich.*

Man braucht nur das Gitter $\mathfrak{K} = P^{-1}\mathfrak{J}$ einzuführen, wo P der Gleichung (82) genügt. Dann kann das Resultat (81) herangezogen werden. Es ist aber definitionsgemäß²⁹⁾

$$u^+[\mathfrak{J}, \mathfrak{X}_2] = u^+[\mathfrak{J}, P\mathfrak{X}_1] = u^+[P^{-1}\mathfrak{J}, \mathfrak{X}_1] = u^+[\mathfrak{K}, \mathfrak{X}_1] = u^+[\mathfrak{J}, \mathfrak{X}_1].$$

3. Wir betrachten jetzt die Parallelotope \mathfrak{X}_1, \dots in \mathfrak{J} , welche mit \mathfrak{X} eigentlich isomorph sind. $\bar{\mathfrak{J}}$ sei ein mit \mathfrak{J} verwandtes Gitter, und zwar gelte

$$(87) \quad \bar{\mathfrak{J}}_p = T_p\mathfrak{J}_p \quad \text{für alle } p,$$

wobei die T_p Automorphismen von R_p sind. Es soll eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Klassen solcher bezügl. \mathfrak{J} assoziierter Parallelotope in \mathfrak{J} und den Klassen von bezügl. $\bar{\mathfrak{J}}$ assoziierter Parallelotope in $\bar{\mathfrak{J}}$ angegeben werden.

Ein \mathfrak{X}_1 in \mathfrak{J} sei vorgelegt. Wegen der Voraussetzungen über den zu $k(\mathfrak{X})$ senkrechten Teilraum T' von R gibt es zu jedem T_p in (87)

²⁹⁾ QFOG, § 16, Nr. 4.

einen \mathfrak{X}_1 fest lassenden Automorphismus Σ_p von R_p so, daß

$$(88) \quad t(T_p \Sigma_p) = 1 \quad \text{für alle } p$$

ist. Durch

$$(89) \quad \mathfrak{J} = R \wedge \Sigma_{p_1}^{-1} T_{p_1}^{-1} \overline{\mathfrak{S}}_{p_1} \wedge \Sigma_{p_2}^{-1} T_{p_2}^{-1} \overline{\mathfrak{S}}_{p_2} \wedge \dots$$

(die p_μ durchlaufen alle Primideale) wird ein Gitter \mathfrak{J} in R mit

$$\mathfrak{S}_p = \Sigma_p^{-1} T_p^{-1} \overline{\mathfrak{S}}_p$$

definiert. Es ist wegen (88) mit $\overline{\mathfrak{S}}$ Spinor-verwandt. Nach Satz 2 existiert dann ein Automorphismus P von R so, daß $\mathfrak{J} = P^{-1} \overline{\mathfrak{S}}$ ist. Folglich gibt es Einheiten E_p von $\overline{\mathfrak{S}}$ mit der Eigenschaft

$$E_p T_p \Sigma_p = P \quad \text{für alle } p.$$

Jetzt ist

$$(90) \quad \overline{\mathfrak{X}}_1 = P \mathfrak{X}_1$$

ein mit \mathfrak{X}_1 eigentlich isomorphes und in $\overline{\mathfrak{S}}$ enthaltenes Parallelotop.

Es sei mit einer Einheit H von $\overline{\mathfrak{S}}$:

$$\mathfrak{X}_2 = H \mathfrak{X}_1.$$

Die \mathfrak{X}_1 und \mathfrak{X}_2 vermöge (90) zugeordneten Parallelotope in $\overline{\mathfrak{S}}$ seien

$$(91) \quad \overline{\mathfrak{X}}_1 = P_1 \mathfrak{X}_1, \quad \overline{\mathfrak{X}}_2 = P_2 \mathfrak{X}_2$$

mit

$$(92) \quad P_1 = E_{1p} T_p \Sigma_{1p}, \quad P_2 = E_{2p} T_p \Sigma_{2p} \quad \text{für alle } p,$$

wobei stets $t(T_p \Sigma_{1p}) = t(T_p \Sigma_{2p}) = 1$ gilt; E_{1p} , E_{2p} sind Einheiten von $\overline{\mathfrak{S}}_p$, und Σ_{1p} , Σ_{2p} lassen \mathfrak{X}_1 , \mathfrak{X}_2 fest. Aus (91), (92) folgt

$$\overline{\mathfrak{X}}_2 = E_p \overline{\mathfrak{X}}_1 \quad \text{für alle } p;$$

dabei sind

$$E_p = E_{2p} T_p H T_p^{-1} E_{1p}^{-1}$$

Einheiten von $\overline{\mathfrak{S}}_p$. Also $\overline{\mathfrak{X}}_1$ und $\overline{\mathfrak{X}}_2$ sind wenigstens bezügl. $\overline{\mathfrak{S}}$ verwandt. Es gilt ferner

$$\overline{\mathfrak{X}}_2 = P \overline{\mathfrak{X}}_1$$

und

$$P = E_p P_p$$

mit

$$P = P_2 H P_1^{-1}, \quad P_p = E_{1p} T_p H^{-1} T_p^{-1} E_{2p}^{-1} E_{2p} T_p \Sigma_{2p} H \Sigma_{1p}^{-1} T_p^{-1} E_{1p}^{-1},$$

woraus man sofort wegen $t(T_p \Sigma_{ip}) = 1$ ($i = 1, 2$)

$$t(P_p) = 1 \quad \text{für alle } p$$

entnimmt. Mithin sind $\overline{\mathfrak{X}}_1$ und $\overline{\mathfrak{X}}_2$ sogar bezügl. $\overline{\mathfrak{S}}$ Spinor-verwandt und daher nach Satz 9 bezügl. $\overline{\mathfrak{S}}$ assoziiert.

In gleicher Weise folgt aus der Assoziiertheit von $\bar{\mathfrak{X}}_1, \bar{\mathfrak{X}}_2$ bezügl. $\bar{\mathfrak{F}}$ die von $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$ bezügl. \mathfrak{F} . Durch (90) wird also eine eindeutige Abbildung der Klassen bezügl. \mathfrak{F} assoziierter mit \mathfrak{X} eigentlich isomorpher Parallelotope in \mathfrak{F} auf die Klassen bezügl. $\bar{\mathfrak{F}}$ assoziierter mit $\bar{\mathfrak{X}}$ eigentlich isomorpher Parallelotope in $\bar{\mathfrak{F}}$ definiert.

Die relativen Gruppenmaße $u^+[\mathfrak{F}, \mathfrak{X}_1]$ sind nach Satz 10 Invarianten der Klassen bezügl. \mathfrak{F} assoziierter \mathfrak{X}_1 . Es gilt noch

$$(93) \quad u^+[\mathfrak{F}, \mathfrak{X}_1] = u^+[\bar{\mathfrak{F}}, \bar{\mathfrak{X}}_1].$$

Laut Definition der relativen Maße²⁹⁾ ist nämlich

$$u^+[\bar{\mathfrak{F}}, \mathbf{P}\bar{\mathfrak{X}}_1] = u^+[\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathfrak{F}}, \bar{\mathfrak{X}}_1].$$

$\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathfrak{F}}$ ist das durch (89) eingeführte mit $\bar{\mathfrak{F}}$ isomorphe und daher mit \mathfrak{F} verwandte Gitter \mathfrak{G} . Nach (81) ist

$$u^+[\bar{\mathfrak{F}}, \mathbf{P}\bar{\mathfrak{X}}_1] = u^+[\mathfrak{G}, \mathfrak{X}_1] = u^+[\mathfrak{F}, \mathfrak{X}_1],$$

womit (93) bewiesen ist. (93) ist aber die Gleichung (6) in Satz 4, dessen Beweis hiermit vollständig erbracht ist.

(Eingegangen am 1. September 1951.)

Zur eindeutigen Bestimmung von Flächen durch die erste Fundamentalform.

Von

K. P. Grotemeyer in Göttingen.

Zwei isometrisch aufeinander abgebildete Eiflächen sind bis auf eine Bewegung oder Spiegelung im dreidimensionalen euklidischen Raum identisch. Dieser Identitätssatz wurde von St. COHN-VOSSEN in den Göttinger Nachrichten 1927 (S. 125—135) zuerst bewiesen. Ein kürzerer Beweis stammt von G. HERGLOTZ in den Abhandlungen des Hamburger Math. Seminars, Bd. 15, 1947, S. 102 ff. Mit Hilfe der dort entwickelten Methode sollen in der vorliegenden Arbeit ähnliche Identitätssätze für positiv gekrümmte Flächenstücke mit Rändern bewiesen werden.

Wie auch der Identitätssatz für Eiflächen als Eindeutigkeitssatz für das von H. WEYL stammende Existenzproblem, der Existenz einer Eifläche zu vorgegebener erster Fundamentalform mit einer überall positiven GAUSS'schen Krümmung, aufgefaßt werden kann, so lassen sich auch die Identitätssätze für Flächen mit Rändern als Eindeutigkeitssätze zu gewissen Existenzsätzen auffassen. Die Eiflächen, wie auch die hier untersuchten positiv gekrümmten Flächenstücke mit Rändern (die gewisse Eigenschaften haben) sind also im dreidimensionalen euklidischen Raum in ihrer „Struktur“ schon durch die erste Fundamentalform festgelegt. Die Identitätssätze lassen sich natürlich auch zu Starrheitsaussagen gegenüber endlichen Verbiegungen spezialisieren.

Da bei allen Rechnungen der invariante Differentialkalkül benutzt wird, erschien es notwendig, zunächst eine kurze Zusammenstellung der Grundformeln der euklidischen Flächentheorie in invarianter Form zu geben. Wenn A_{\dots} ein beliebiger Tensor ist, so bedeutet

$A_{\dots|i}$ kovariante Ableitung nach der i -ten Variablen,

$A_{\dots,i}$ partielle Ableitung nach der i -ten Variablen.

Ist A ein Tensor nullter Stufe, so fallen beide Differentiationsprozesse zusammen, und wir lassen die Striche weg.

I. Zusammenfassung der Grundgleichungen der euklidischen Flächentheorie.

Es sei $\mathfrak{x}(u^i)$ der dreimal stetig differenzierbare Ortsvektor eines Flächenstückes im dreidimensionalen euklidischen Raum. Wir be-

zeichnen

$$(1) \quad \xi = \frac{[\xi_1 \xi_2]}{||[\xi_1 \xi_2]||}$$

als den Normaleneinheitsvektor des Flächenstückes. Als Grundtensoren der Flächentheorie werden folgende Größen bezeichnet:

$$(2) \quad g_{ik} = (\xi_i \xi_k); \quad B_{ik} = (\xi \xi_{i|k}); \quad \varepsilon_{ik} = (\xi \xi_i \xi_k).$$

g_{ik} ist der sog. Maßtensor. Das „Herunter-“ und „Heraufziehen“ von Indizes soll durch ihn geschehen. Die kovarianten Ableitungen beziehen sich auf die aus g_{ik} gebildeten Christoffelgrößen. ε_{ik} wird als Diskriminantentensor bezeichnet, da $\varepsilon_{22} = -\varepsilon_{11} = |\sqrt{g}|$; $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$ ist, wobei $||g_{ik}|| = g$ gesetzt ist. Weiter hat er folgende Eigenschaften:

$$(3) \quad \varepsilon_{ik} = -\varepsilon_{ki}; \quad \varepsilon^{ik} \varepsilon_{ik} = \delta_i^i; \quad \varepsilon_{ik} \varepsilon_{lm} = g_{il} g_{km} - g_{im} g_{kl}.$$

Wenn c_{ik} ein beliebiger Tensor ist, dann definieren wir

$$(4) \quad \underline{c}^{ik} = \varepsilon^{i\alpha} \varepsilon^{k\beta} c_{\alpha\beta}$$

und nennen \underline{c}^{ik} den zu c_{ik} „bezüglich g_{ik} “ adjungierten Tensor. Es gilt nämlich

$$(5) \quad \underline{c}^{ik} c_{kl} = \frac{||c_{ik}||}{g} \delta_l^i.$$

Aus (3c) ergibt sich

$$(6) \quad \underline{c}^{ik} = c_l^i g^{ik} - c^{ik}; \quad c_l^i = \underline{c}_r^r.$$

Falls $||c_{ik}|| \neq 0$, können wir den zu c_{ik} inversen Tensor schreiben als

$$(7) \quad \bar{c}^{ik} = \frac{g}{||c_{ik}||} \underline{c}^{ik},$$

wie man aus (5) erkennt.

Es sei noch der Tensor des sphärischen Bildes angegeben:

$$(8) \quad e_{ik} = (\xi_i \xi_k).$$

Zwischen g_{ik} ; B_{ik} ; e_{ik} besteht der bekannte Zusammenhang:

$$(9) \quad K g_{ik} - 2 H B_{ik} + e_{ik} = 0;$$

darin ist

$$(10) \quad K = \frac{1}{2} B_{ik} \underline{B}^{ik}; \quad 2 H = B_l^l.$$

K ist die GAUSS'sche und H die mittlere Krümmung.

Auf unserer Fläche bilden die drei linear unabhängigen Vektoren ξ_i ; ξ eine räumliche Basis. Die Ableitungsgleichungen haben folgende Form:

$$(11) \quad \xi_{i|k} = B_{ik} \xi; \quad \xi_i = -B_i^l \xi_l.$$

Die zugehörigen Integrabilitätsbedingungen liefern das Theorema egregium.

$$(12) \quad K = \frac{1}{4} R_{iklm} \varepsilon^{ik} \varepsilon^{lm}$$

und die Codazzigleichungen

$$(13) \quad B_{ik \cdot l} \varepsilon^{kl} = 0 \quad \text{oder} \quad \underline{B}^{ik}{}_{\cdot k} = 0.$$

In der hier gewählten Bezeichnungsweise lautet der Fundamentalsatz der Differentialgeometrie:

In einem Bereich \mathfrak{B} der u^i -Ebene seien die Funktionen

$$g_{ik} = g_{ki}; \quad B_{ik} = B_{ki}$$

mit den Bedingungen

$$\frac{|B_{ik}|}{g} = \frac{1}{4} R_{iklm} \varepsilon^{ik} \varepsilon^{lm}; \quad B_{ik \cdot l} \varepsilon^{kl} = 0$$

vorgegeben, dabei seien die g_{ik} zweimal und die B_{ik} einmal stetig differenzierbar, so ist dadurch eine und bis auf orthogonale Transformationen nur eine Fläche im dreidimensionalen euklidischen Raum bestimmt, die die g_{ik} als erste und die B_{ik} als zweite Fundamentalform besitzt.

Für manche Rechnung sind noch folgende Formeln bequem:

$$(14) \quad |\underline{x}_i \underline{x}_k| = \varepsilon_{ik} \xi; \quad |\underline{\xi} \underline{x}_k| = \varepsilon_k' \cdot \chi_l.$$

Man erhält sie sofort aus einem Ansatz der Form

$$|\underline{x}_i \underline{x}_k| = N_{ik}' \cdot \chi_l + S_{ik} \xi.$$

Durch Angabe einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $u^i(s)$ mit $\dot{u}^i(s) \neq 0$ wird auf der Fläche eine Kurve festgelegt.

Es möge s die Bogenlänge der Kurve sein:

$$g_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k = 1.$$

Der Vektor \dot{u}^i heißt intrinseker Tangentenvektor und $n_k = \varepsilon_{ik} \dot{u}^i$ heißt intrinseker Normalenvektor der Kurve. Wegen

$$g_{ik} \dot{u}^i n^k = 0; \quad \varepsilon_{ik} \dot{u}^i n^k = 1$$

sind sie orthogonal und bilden ein Rechtssystem beim Blick in die positive Flächennormalenrichtung. Die Tangentenebenen bilden längs $u^i(s)$ einen „Streifen“. Für diesen Flächenstreifen wählen wir die drei linear unabhängigen Vektoren

$$\dot{\underline{x}} = \underline{x}_i \dot{u}^i; \quad \eta = \underline{x}_i n^i; \quad \xi (\eta^i(s))$$

als begleitendes Dreibein.

$\dot{\underline{x}}$; η ; ξ sind orthogonal und normiert. Die zugehörigen Ableitungsgleichungen lauten (der Punkt bedeutet Ableitung nach der Bogenlänge s):

$$(16) \quad \begin{aligned} \ddot{\underline{x}} &= c \eta - b \xi & a &= -(\dot{\xi} \eta) \\ \dot{\eta} &= -c \dot{\underline{x}} + a \xi & b &= -(\dot{\xi} \dot{\underline{x}}) \\ \dot{\xi} &= b \dot{\underline{x}} - a \eta & c &= -(\dot{\underline{x}} \dot{\eta}). \end{aligned}$$

a heißt geodätische Windung, b ist die Normalkrümmung und c ist die geodätische Krümmung der Kurve $u^i(s)$. Für die drei „Streifeninvarianten“ gelten die Darstellungen

$$(17) \quad a(s) = B_{ik} \dot{u}^i n^k; \quad b(s) = -B_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k; \quad c(s) = g_{ik} n^i \frac{\delta \dot{u}^k}{dS},$$

wobei $\frac{\delta}{dS}$ die kovariante Ableitung längs $u^i(s)$ bedeutet: $\frac{\delta}{dS} = \dot{u}^i \nabla_i$.

Zwischen den „Ortsinvarianten“ $K; H$ und den „Richtungsinvarianten“ $a; b$ besteht die Beziehung

$$(18) \quad a^2 = -\{K + 2Hb + b^2\}.$$

Es sollen noch die Integralsätze von GAUSS und STOKES angegeben werden:

Es sei $u^i(s)$ eine geschlossene stetig differenzierbare Kurve auf der Fläche. Die Normale n^k sei nach innen gerichtet. Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $c^k(u^l)$ im Inneren von $u^i(s)$ gilt dann

$$(19) \quad \int \int^{(G)} c^k_{;k} d\sigma = - \oint c^k n_k ds$$

$$\int \int^{(G)} \varepsilon^{kl} c_{l;k} d\sigma = \oint c_l \dot{u}^l ds.$$

G ist das von $u^i(s)$ begrenzte Gebiet.

Die eindeutige Bestimmung von Flächenstücken durch die erste Fundamentalform.

Die Struktur einer infinitesimal unverbiegbaren Fläche liegt im dreidimensionalen euklidischen Raum bis auf Größen zweiter Ordnung schon durch die Metrik g_{ik} fest.

In diesem Teil sollen allgemein Flächenklassen untersucht werden, deren Struktur im dreidimensionalen Raum schon eindeutig durch die g_{ik} bestimmt ist. Das soll heißen: Zwei Flächen der Klasse mit demselben g_{ik} sind modulo der orthogonalen Transformationsgruppe identisch.

Zunächst werden die Begriffe Isometrie und endliche Verbiegbarkeit definiert.

Definition von Isometrie und endlicher Verbiegung.

Definition (Isometrie).

Zwei Flächenstücke $\mathfrak{x}(u^i); \mathfrak{y}(v^k)$ heißen isometrisch, wenn es eine Abbildung $u^i = t^i(v^k); \left\| \frac{\partial u^i}{\partial v^k} \right\| \neq 0$ gibt derart, daß

$$g_{ik}(\mathfrak{x}) = g_{ik}(\mathfrak{y})$$

wird, d. h. die Maßtensoren beider Flächen stimmen überein.

Es soll jetzt noch die endliche Verbiegung definiert werden:

Definition. Zwei isometrische, 2-mal stetig differenzierbare Flächenstücke $\varkappa(u^k)$; $\eta(u^k)$, die auf ein gemeinsames, die Isometrie vermittelndes Parametersystem bezogen sind, heißen ineinander verbiegbar, wenn es eine Flächenschar $\zeta(u^k; t)$; $0 \leq t \leq 1$ gibt, die zweimal nach den u^k und einmal nach dem t stetig differenzierbar ist, in der alle Flächen isometrisch zueinander sind und

$$\zeta(u^k; 0) = \varkappa(u^k); \quad \zeta(u^k; 1) = \eta(u^k)$$

ist.

In der älteren Literatur werden gewöhnlich isometrische Flächen ineinander verbiegbar genannt. Ob dann wirklich die eine Fläche durch eine stetige Verbiegung in die andere überführbar ist, ist eine andere Frage. In der Tat ist dieses im allgemeinen nicht der Fall. Es gibt nämlich Größen, die gegenüber der eben definierten stetigen Verbiegung invariant sind (Ordnung eines Sattelpunktes)¹⁾, doch nicht gegenüber isometrischer Abbildung. Daher sind beide Definitionen wirklich verschieden.

II. Die Eigenschaften der Größen A_{ik} .

Es seien \mathfrak{F} und \mathfrak{F}^* zwei dreimal stetig differenzierbare Flächenstücke, die isometrisch aufeinander abgebildet sind. Die Isometrie werde durch die beiden Flächen gemeinsamen Parameter u^k vermittelt. Zu den Flächen mögen die folgenden Wertepaare gehören:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} : & \varkappa(u^k); \quad \xi(u^k); \quad g_{ik}; \quad \varepsilon_{ik}; \quad B_{ik}; \quad K; \quad 2H \\ \mathfrak{F}^* : & \varkappa^*(u^k); \quad \xi^*(u^k); \quad g_{ik}; \quad \varepsilon_{ik}; \quad B_{ik}^*; \quad K; \quad 2H^*. \end{aligned}$$

Wegen der isometrischen Abbildung stimmen die Größen beider Flächen, die nur von g_{ik} abhängen, überein.

Wenn es nun gelingt zu zeigen, daß für die Flächen \mathfrak{F} und \mathfrak{F}^* auch die zweiten Fundamentalformen

$$B_{ik} = B_{ik}^*$$

übereinstimmen, dann sind die Flächen \mathfrak{F} und \mathfrak{F}^* nach dem Fundamentalsatz der Differentialgeometrie entweder kongruent oder symmetrisch. Sie sind dann identisch modulo den orthogonalen Transformationen des euklidischen Raumes.

Wir führen nun folgenden Tensor ein:

$$(1) \quad \begin{aligned} A_{ik} &= B_{ik} - B_{ik}^* \\ \underline{A}^{ik} &= \underline{B}^{ik} - \underline{B}^{*ik}. \end{aligned}$$

¹⁾ H. SCHILT, Über isolierte Nullstellen der Flächenkrümmungen und einige Verbiegbarkeitssätze. Comp. Math. 5, 1938, S. 239 ff.

Die zweite Gleichung ergibt sich aus der ersten durch Überschieben mit $\varepsilon^i \varepsilon^{km}$ nach (I, 4).

$$(2) \quad J = B_{ik} \underline{B}^{*ik} = \underline{B}^{ik} B_{ik}^*$$

ist eine Invariante beider Flächen. Das Verschwinden von J bedeutet geometrisch, daß auf den isometrischen Flächen \mathfrak{F} und \mathfrak{F}^* den Asymptotenlinien auf der einen Fläche ein konjugiertes System auf der anderen entspricht. Nach (I, 5) und (I, 10) gilt

$$2 \frac{A_{ik}}{g} = (B_{ik} \quad B_{ik}^*) (\underline{B}^{ik} - \underline{B}^{*ik}) = 2 \{2K - J\},$$

daher ist

$$(3) \quad \frac{A_{ik}}{g} = \{2K - J\}.$$

Wir bilden jetzt

$$\underline{B}^{ik} A_{ik} = B_{ik} \underline{A}^{ik} = 2K - J,$$

also wegen (3)

$$(4) \quad \frac{A_{ik}}{g} = B_{ik} \underline{A}^{ik} = A_{ik} \underline{B}^{ik}.$$

Für die beiden Flächen sind (nach (I, 13)) die Codazzigleichungen erfüllt:

$$\underline{B}_{ik}^{*ik} = 0; \quad \underline{B}_{ik}^{*ik} = 0.$$

Zusammengefaßt:

$$(5) \quad \underline{A}_{ik}^{*ik} = 0.$$

Nun soll der folgende Satz bewiesen werden:

Satz 1. *In den Gebieten der isometrischen Flächen \mathfrak{F} und \mathfrak{F}^* , in denen $K > 0$ ist, gilt*

$$\|A_{ik}\| \leq 0.$$

Beweis. Es ist

$$2 \frac{\|B_{ik} - s B_{ik}^*\|}{g} = 2 \{K - Js + s^2 K\}.$$

Setzen wir die rechte Seite gleich Null, so muß die quadratische Gleichung stets reelle, positive Nullstellen haben, da wegen $K > 0$ beide Tensoren B_{ik} und B_{ik}^* positiv definit²⁾ sind. Die Diskriminante der quadratischen Gleichung lautet

$$J^2 - 4K^2.$$

Da die Nullstellen reell sind, muß $J^2 - 4K^2 \geq 0$ sein. Die Nullstellen sind positiv, also auch ihre Summe: $J \geq 0$. Aus $K > 0$; $J \geq 0$ und $J^2 - 4K^2 \geq 0$ folgt aber $J - 2K \geq 0$ und nach (3) auch $\|A_{ik}\| \leq 0$.

²⁾ Aus $K > 0$ folgt zunächst nur, daß die Tensoren B_{ik} ; B_{ik}^* definit sind. Durch eine Spiegelung läßt es sich stets erreichen, daß sie positiv definit werden. Bei $K > 0$ sei dieses fortan vorausgesetzt.

Satz 2. In den Gebieten der isometrischen Flächen \mathfrak{F} und \mathfrak{F}^* , in denen $K > 0$ ist, folgt aus $\|A_{ik}\| = 0$ die Gleichung

$$A_{ik} = 0.$$

Beweis. $\|A_{ik}\| = 0$ liefert die Zerlegung $A_{ik} = a_i a_k$. Nun ist $\underline{B}^{ik} A_{ik} = 0$, also $\underline{B}^{ik} A_{ik} = \underline{B}^{ik} a_i a_k = 0$. Wegen $K > 0$ ist diese Form positiv definit. Es müssen daher die $a_i = 0$ sein, d. h. aber $A_{ik} = 0$.

Die eben bewiesenen Sätze 1 und 2 lassen sich auch etwas mehr geometrisch interpretieren:

Jeder Flächenrichtung \dot{u}^i mit $g_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k = 1$ auf \mathfrak{F} entspricht eine Richtung auf \mathfrak{F}^* . Es sei die Voraussetzung $K > 0$ erfüllt. Durch $A_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k = 0$ wird wegen $\|A_{ik}\| \leq 0$ auf jeder der beiden Flächen ein reelles Kurvennetz festgelegt. Schließt man den Fall $\|A_{ik}\| = 0$ zunächst aus, so gehen durch jeden Punkt der betrachteten Gebiete genau zwei Netzkurven. Welche Eigenschaften haben nun in einem Punkt diese beiden Richtungen?

$$0 = A_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k = B_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k - B_{ik}^* \dot{u}^i \dot{u}^k = -b(s) + b^*(s).$$

In den Richtungen sind also die Normalkrümmungen gleich. Nach Satz 2 lehrt $\|A_{ik}\| = 0$, daß dort die Normalkrümmungen in jeder Richtung übereinstimmen. Die geometrische Bedeutung des Kurvennetzes $\varepsilon^l_k A_i \dot{u}^i \dot{u}^k = 0$ (Netz der Winkelhalbierenden von $A_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k = 0$, und daher reell) liegt auf der Hand:

$$0 = A_{li} \varepsilon^l_k \dot{u}^i \dot{u}^k = A_{li} \dot{u}^i n^l = a(s) - a^*(s).$$

Wir wenden uns jetzt wieder den allgemeinen Eigenschaften der A_{ik} zu. Als nächstes ergibt sich die Frage: Was kann man im Fall $K = 0$ aussagen über die A_{ik} ?

Satz 3³⁾. Falls $K = 0$ auf den isometrischen Flächen \mathfrak{F} und \mathfrak{F}^* ist, so gilt

$$B_{ik} = \mu_i \mu_k; \quad B_{ik}^* = \mu_i^* \mu_k^*$$

mit reellen $\mu_i; \mu_i^*$. Weiter gilt

$$\frac{A_{ik}^i}{g} = -(\varepsilon^{ik} \mu_i \mu_k^*)^2.$$

Beweis. Nach (3), (2) gilt im Falle $K = 0$: $\frac{\|A_{ik}\|}{g} = -J$.

$$J = B_{ik}^* \underline{B}^{ik} = \mu_i \mu_k \varepsilon^{il} \varepsilon^{kr} \mu_l^* \mu_r^* = (\varepsilon^{ik} \mu_i \mu_k^*)^2.$$

Es ist also auch im Falle $K = 0$ die Determinante $\|A_{ik}\| \leq 0$.

Satz 4. Falls $K = 0$ auf den isometrischen Flächen \mathfrak{F} und \mathfrak{F}^* ist, so folgt aus $\|A_{ik}\| = 0$ die Gleichung

$$B_{ik} = \lambda B_{ik}^* \quad \lambda \geq 0.$$

³⁾ Flachpunkte (d. h. Punkte mit $B_{ik} = 0$) seien ausgeschlossen.

Beweis. $\|A_{ik}\| = 0$ bei $K = 0$ liefert nach Satz 3

$$\mu_i = \varrho \mu_i^*; \quad B_{ik} = \varrho^3 B_{ik}^*.$$

Wenn man noch nachweisen kann, daß $H = H^*$ ist in Punkten mit $K = 0$ und $\|A_{ik}\| = 0$, dann gilt dort

$$B_{ik} = B_{ik}^*,$$

da

$$2H = g^{ik} B_{ik} = \lambda g^{ik} B_{ik}^* = \lambda 2H^*$$

ist.

Sogar wenn man für eine Richtung \dot{u}^i in dem parabolischen Punkt

$$b(s) = b^*(s) \neq 0 \quad \text{oder} \quad a(s) = a^*(s) \neq 0$$

nachweisen kann, so folgt daraus schon $\lambda = 1$, d. h. $B_{ik} = B_{ik}^*$.

Es sei noch eine Bemerkung über die Invariante J gemacht. Falls $J = 0$ ist, für zwei isometrisch aufeinander abgebildete Flächen, so können sie nur dann kongruent oder symmetrisch sein, falls $K = 0$ ist. Dieses folgt sofort aus (3).

III. Integralsätze für die Kongruenzsätze.

Zwei isometrische Flächenstücke \mathfrak{F} und \mathfrak{F}^* sind kongruent oder symmetrisch, wenn wir für sie $A_{ik} = 0$ nachweisen können. Unter gewissen Voraussetzungen folgt diese Gleichung nach Satz 2 und 4 schon aus dem Verschwinden von $\|A_{ik}\|$. Um nun $\|A_{ik}\| = 0$ nachzuweisen, wird man Integralformeln benutzen. Diese Integralformeln müssen dann so beschaffen sein, daß sie unter einem Oberflächenintegral die Invariante $\frac{\|A_{ik}\|}{g}$ aufweisen.

Zunächst beschaffen wir uns eine Grundformel, aus der wir alle Integralsätze ableiten:

Die Gleichungen (II, 4) und (II, 5) liefern

$$(1) \quad \frac{\|A_{ik}\|}{g} = \underline{A}^{ik} B_{ik} \quad \text{und} \quad \underline{A}^{ik} \xi_k = 0.$$

Weiter gilt die GAUSS'sche Ableitungsgleichung (I, 11)

$$(2) \quad \xi_{i;k} = B_{ik} \xi.$$

Alle drei liefern unsere Grundformel

$$(3) \quad (\underline{A}^{ik} \xi_{i;k})_{;k} = \frac{|A_{ik}|}{g} \xi.$$

Der GAUSS'sche Integralsatz liefert sofort die erste Integralformel der gewünschten Art:

$$(4) \quad \iint \frac{\|A_{ik}\|}{g} \xi \, d\sigma = - \oint \underline{A}^{ik} \xi_i n_k \, ds.$$

Diese Gleichung darf natürlich noch mit einem konstanten Vektor multipliziert werden.

Multiplizieren wir jetzt die Grundformel (3) mit dem Ortsvektor

$$(\underline{A}^{ik} \mathfrak{x}_i \mathfrak{x})_{,k} - \underline{A}^{ik} g_{ik} = \frac{|\underline{A}^{ik}|}{g} P.$$

Darin ist $P = (\mathfrak{x} \mathfrak{x})$ die Stützfunktion der Fläche. Nach Gleichung (I, 6), (I, 10) findet man

$$\underline{A}^{ik} g_{ik} = A^{ik} g_{ik} = 2H - 2H^*.$$

Daher liefert die Integration die zweite Integralformel

$$(5) \quad \iint \frac{|\underline{A}^{ik}|}{g} P d\sigma = - \iint \{2H - 2H^*\} d\sigma - \oint \underline{A}^{ik} (\mathfrak{x} \mathfrak{x}_i) n_k ds.$$

Es sei noch eine dritte Integralformel angegeben:

$$(6) \quad \iint \frac{|\underline{A}^{ik}|}{g} \hat{P} d\sigma = - \iint (A^{ik} (\hat{\mathfrak{x}}_i \mathfrak{x}_k) d\sigma - \oint A^{ik} (\hat{\mathfrak{x}} \mathfrak{x}_i) n_k ds;$$

dabei bedeutet

$$\hat{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} - (\mathfrak{e} \mathfrak{x}) \mathfrak{e} = |\mathfrak{e} \mathfrak{x} \mathfrak{e}| \quad \mathfrak{e} = \text{const}, \quad \mathfrak{e}^2 = 1.$$

$\hat{\mathfrak{x}}$ ist der in Richtung \mathfrak{e} projizierte Vektor \mathfrak{x} . $\hat{P} = (\mathfrak{x} \hat{\mathfrak{x}})$. Nun gilt

$$(\hat{\mathfrak{x}}_i \hat{\mathfrak{x}}_k) = (\mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_k).$$

Durch Integration folgt die Formel wieder aus der Grundformel nach Multiplikation mit $\hat{\mathfrak{x}}$, d. h. aus

$$(\underline{A}^{ik} \mathfrak{x}_i)_{,k} \hat{\mathfrak{x}} = (\underline{A}^{ik} (\mathfrak{x}_i \hat{\mathfrak{x}}))_{,k} - \underline{A}^{ik} (\mathfrak{x}_i \hat{\mathfrak{x}}_k) = \frac{|\underline{A}^{ik}|}{g} \hat{P}.$$

Aus Gleichung (5) kann man noch leicht eine andere Formel gewinnen. Wir vertauschen in (5) die gesternten Größen mit den ungesternten. Dabei geht $|\underline{A}^{ik}| = |B_{ik} - B_{ik}^*|$ in sich über, und wir erhalten

$$(5^*) \quad \iint \frac{|\underline{A}^{ik}|}{g} P^* d\sigma = + \iint \{2H - 2H^*\} d\sigma + \oint \underline{A}^{ik} (\mathfrak{x}^* \mathfrak{x}_i^*) n_k ds.$$

Nun addieren wir (5) und (5*) und finden

$$(7) \quad \iint \frac{|\underline{A}^{ik}|}{g} \{P + P^*\} d\sigma = - \oint \underline{A}^{ik} \{(\mathfrak{x} \mathfrak{x}_i) - (\mathfrak{x}^* \mathfrak{x}_i^*)\} n_k ds.$$

Die Integralformeln erscheinen als sehr naturgemäß, wenn man bedenkt, daß die Integralformeln von MINKOWSKI für konvexe Flächen und andere bekannte Integralformeln aus den GAUSS'schen Ableitungsgleichungen, den Codazzigleichungen und dem Satz von RICCI, d. h. aus

$$\mathfrak{x}_{i|k} = B_{ik} \mathfrak{x}; \quad \underline{B}_{ik}^* = 0; \quad g_{ik}^* = 0$$

sich in gleicher Weise unmittelbar ergeben, wie die angegebenen Integralformeln aus

$$\mathfrak{x}_{i|k} = B_{ik} \mathfrak{x}; \quad \underline{A}_{ik}^* = 0.$$

IV. Die eindeutige Bestimmung von Flächen bei gegebenen g_{ik} .

Satz 5. (Identitätssatz für Eiflächen). *Zwei isometrisch aufeinander abgebildete Eiflächen \mathfrak{F} und \mathfrak{F}^* , die dreimal stetig differenzierbar sind mit $K > 0$, sind entweder kongruent oder symmetrisch im dreidimensionalen euklidischen Raum.*

Beweis. Da $K > 0$, besitzen \mathfrak{F} und \mathfrak{F}^* je mindestens einen Punkt im Innern. Da es auf die relative Lage der Flächen nicht ankommt, können wir die beiden Punkte in den Ursprung des Koordinatensystems legen. Wenn ξ und ξ^* die nach innen weisenden Normalen von \mathfrak{F} und \mathfrak{F}^* sind, so ist $P = (\xi \xi) \leq 0$ und $P^* = (\xi^* \xi^*) \leq 0$. Für geschlossene Flächen vom Geschlecht 0 lautet die Integralformel (III. 7)

$$\iint \frac{|A_{ik}|}{g} \{P + P^*\} d\sigma = 0.$$

Wegen $K > 0$ ist die Voraussetzung des Satzes 1 erfüllt, und $|A_{ik}| \leq 0$ auf der gesamten Eifläche \mathfrak{F} bzw. \mathfrak{F}^* . Da $P + P^* \leq 0$ ist, so ist der Integrand der vorstehenden Formel stets ≥ 0 . Da $P \neq 0$ und $P^* \neq 0$, folgt auch $P + P^* \neq 0$ (wegen $P \leq 0$; $P^* \leq 0$), also muß $A_{ik} = 0$ sein im gesamten Integrationsgebiet. Satz 2 läßt daraus aber folgen

$$A_{ik} = 0.$$

Nach dem Fundamentalsatz der Differentialgeometrie sind dann aber die Eiflächen modulo den orthogonalen Transformationen des dreidimensionalen euklidischen Raumes identisch.

Dieser Satz wurde 1927 zum ersten Male von COHN-VOSSEN in den „Göttinger Nachrichten“ 1927, Seite 125—135, bewiesen unter der Voraussetzung analytischer Eiflächen. Von HERGLOTZ stammt ein anderer Beweis dieses Satzes in den Abhandlungen des Hamburger Mathematischen Seminars von 1947, Band 15, der im wesentlichen dem hier gegebenen entspricht.

Beide Beweise haben als Voraussetzung $K > 0$. Man kann diese Voraussetzung dahin abschwächen, daß man endlich viele parabolische Punkte auf den Eiflächen zuläßt.

Der Beweis verläuft wie der angegebene. Unter Benutzung von Satz 1 und 3 folgt wieder aus der Integralformel $|A_{ik}| = 0$ auf den Eiflächen. Nach Satz 2 folgt daraus in den Punkten mit $K > 0$ die Gleichung $B_{ik} = B_{ik}^*$. In den parabolischen Punkten folgt nach Satz 4 $B_{ik} = \lambda B_{ik}^*$. Nun sind H und H^* stetige Funktionen auf den Flächen, also auch $H - H^*$. Diese letzte Funktion ist in allen Punkten mit $K > 0$ gleich Null und in den parabolischen Punkten gleich $H^* \{\lambda - 1\}$. Da Flachpunkte nicht auftreten, muß aus Stetigkeitsgründen $\lambda = 1$ sein. Also sind die Eiflächen identisch.

Es sei noch bemerkt, daß man beim Beweis der infinitesimalen Unverbiegbarkeit der Eiflächen parabolische Punkte ausschließen muß.

Wenden wir uns jetzt der Betrachtung von Flächen mit Rändern zu:

Satz 6. *Es seien zwei isometrisch aufeinander abgebildete, dreimal stetig differenzierbare Flächen mit Rändern vorgegeben, wobei die Randkurven aufeinander abgebildet werden. In den Flächenpunkten, die nicht auf den Randkurven liegen, sei $K > 0$. In den Randkurven verschwinde die GAUSS'sche Krümmung und die Normalkrümmung:*

$$K = 0; \quad b(s) = b^*(s) = 0; \quad (B_{ik} \neq 0; B_{ik}^* \neq 0)$$

d. h. die Randkurven haben die Eigenschaften:

1) Sie sind ebene Kurven,

2) Die Ebene der Randkurven ist Tangentialebene in allen Punkten der betreffenden Randkurve. Dann sind beide Flächen notwendig kongruent oder symmetrisch.

Beweis. Zunächst sei die Äquivalenz der geometrisch und analytisch formulierten Eigenschaften der Randkurven gezeigt. $K = 0$ und $b = 0$ liefern nach Gleichung (I, 18) auch $a = 0$.

Die Ableitungsgleichungen $\dot{\xi} = b\dot{\eta} - a\eta$ besagen dann $\xi = \text{const}$ längs der Randkurve. Dieses hat aber die Eigenschaft 1) und 2) zur Folge. Ebenso folgt aus $\xi = \text{const}$ $a = 0$; $b = 0$ und nach (I, 18) auch $K = 0$.

Wir wenden nun wieder die Integralformel (III, 7) an. Das auftretende Randintegral lautet

$$\oint \underline{A}^{ik} \{(\xi \dot{\xi}_i) - (\xi^* \dot{\xi}_i^*)\} n_k ds.$$

Es wird zunächst gezeigt, daß dieses Integral für alle Randkurven verschwindet.

Wegen $K = 0$ längs der Randkurve, gilt:

$$\begin{aligned} \underline{A}^{ik} n_k &= \varepsilon^{i\alpha} \varepsilon^{k,j} \{ \mu_\alpha \mu_\beta - \mu_\alpha^* \mu_\beta^* \} n_k; & n_k &= \varepsilon_{ik} \dot{u}^l \\ \underline{A}^{ik} n_k &= -\varepsilon^{i\alpha} \{ \mu_\alpha \mu_\beta - \mu_\alpha^* \mu_\beta^* \} \dot{u}^\beta \end{aligned}$$

nach (I, 17) folgt unter der Voraussetzung $K = 0$

$$b(s) = -B_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k = -(\mu_i \dot{u}^i)^2.$$

Daher

$$\underline{A}^{ik} n_k = -\{ \mu_\alpha \sqrt{-b(s)} - \mu_\alpha^* \sqrt{-b^*(s)} \} \varepsilon^{i\alpha}.$$

Nun ist aber nach Voraussetzung längs der Ränder $b = b^* = 0$, also $\underline{A}^{ik} n_k = 0$, somit auch

$$\oint \underline{A}^{ik} n_k \{(\xi \dot{\xi}_i) - (\xi^* \dot{\xi}_i^*)\} ds = 0.$$

Es ergibt sich wieder aus (III, 7) die Integralformel

$$\iint \frac{|\underline{A}_{ik}|}{g} \{P + P^*\} d\omega = 0.$$

Denken wir uns die Flächen für den Augenblick durch die von den Rändern begrenzten ebenen Flächenstücke zu einer geschlossenen Fläche ergänzt und den Nullpunkt des Koordinatensystems in das Innere gelegt (es kommt wieder auf die relative Lage der Flächen nicht an), so wird wieder, wenn ξ bzw. ξ^* die „inneren“ Flächennormalen sind, $P \leq 0$; $P^* \leq 0$. Nach Satz 1 und 3 ist auf den Flächen $\|A_{ik}\| \leq 0$. Wie eben, ist auch jetzt wieder $P + P^* \leq 0$. Da $P + P^* \neq 0$, ist $\|A_{ik}\| = 0$ auf dem gesamten Integrationsgebiet. Satz 2 lehrt jetzt für die elliptischen Flächenpunkte

$$B_{ik} = B_{ik}^*$$

und der Satz 4 für die parabolischen Randpunkte

$$B_{ik} = \lambda B_{ik}^*.$$

$H - H^*$ ist auf der gesamten Fläche stetig. In den inneren Flächenpunkten ist diese Funktion überall Null. Auf den Rändern gleich $H^* \{\lambda - 1\}$. Daher muß aus Stetigkeitsgründen $\lambda = 1$ sein⁴⁾. Dann gilt überall $B_{ik} = B_{ik}^*$. Die Flächen sind also identisch bis auf orthogonale Transformationen. Damit ist der Satz bewiesen.

Man kann natürlich, wie bei den Eiflächen, in endlich vielen inneren Flächenpunkten $K = 0$ zulassen.

Sowohl die Eiflächen, als auch die eben behandelten Flächenklassen haben eine Eigenschaft gemein; sie haben nämlich beide die gesamte Einheitskugel als sphärisches Normalenbild. Es gibt aber auch Flächen, die kein geschlossenes Normalenbild haben und dennoch bei Übereinstimmung der g_{ik} und gewissen Bedingungen der Ränder bis auf orthogonale Transformationen identisch sind.

Satz 7. *Es seien zwei isometrisch aufeinander abgebildete, dreimal stetig differenzierbare Flächen \mathfrak{F} und \mathfrak{F}^* mit geschlossenen Randkurven vorgegeben. (Die Randkurven sollen ebenfalls isometrisch aufeinander abgebildet sein.)*

Weiter sei längs den Randkurven

$$a = a^* \neq 0; \quad b = b^* \neq 0 \text{ } ^5).$$

In den Flächenpunkten, die nicht auf den Rändern liegen, sei $K > 0$. In den Randpunkten sei $K \geq 0$ ($B_{ik} \neq 0$). Es gebe zu jeder der beiden Flächen \mathfrak{F} und \mathfrak{F}^ mindestens einen Punkt α und α^* , so daß*

$$(\chi(u^k) - \alpha)\xi \leq 0 \quad \text{und} \quad (\chi^*(u^k) - \alpha^*)\xi^* \leq 0$$

ist für alle Flächenpunkte. Dann sind \mathfrak{F} und \mathfrak{F}^ notwendig kongruent oder symmetrisch.*

⁴⁾ H^* und H sind in Punkten mit $K = 0$ stets von Null verschieden, da wir Flachpunkte ausschließen.

⁵⁾ Der Fall $a = a^* = 0$; $b = b^* = 0$ wurde im Satz 6 behandelt.

Beweis. Es wird zunächst der Hilfssatz bewiesen:

Es sei $a = a^*$ und $b = b^*$ längs den Randkurven zweier isometrisch abgebildeter Flächenstücke. Dann gilt für diese Randkurven

$$A_{ik} \dot{u}^k = 0 \quad \text{oder} \quad \underline{A}^{ik} n_k = 0.$$

Wegen $a - a^* = 0$ und $b - b^* = 0$ gilt längs den Randkurven

$$A_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k = 0; \quad A_{ik} \dot{u}^i n^k = 0.$$

Setzt man $h_k = A_{ik} \dot{u}^i$, so schreiben sich die beiden Gleichungen als

$$h_k \dot{u}^k = 0; \quad h_k n^k = 0,$$

weil $\varepsilon_{ik} \dot{u}^i n^k = 1 \neq 0$, so ist $h_k = 0$, d. h.

$$A_{ik} \dot{u}^i = 0.$$

Da $\dot{u}^i = \varepsilon^{il} n_l$ ist, folgt nach Multiplikation mit ε^{kr} aus $A_{ik} \dot{u}^i = 0$ auch

$$\underline{A}^{lr} n_l = 0.$$

Wenden wir jetzt den Integralsatz (III, 7)

$$\iint_g \frac{A_{ik}}{g} \{P + P^*\} d\sigma = - \oint A^{ik} n_k \{(\chi \xi_i) - (\chi^* \xi_i^*)\} ds$$

auf unsere Flächenstücke \mathfrak{F} bzw. \mathfrak{F}^* an, so gilt nach dem bewiesenen Hilfssatz

$$\iint_g \frac{|A_{ik}|}{g} \{P + P^*\} d\sigma = 0.$$

Da es wiederum auf die relative Lage von \mathfrak{F} und \mathfrak{F}^* nicht ankommt, bringen wir \mathfrak{F} und \mathfrak{F}^* durch Bewegungen in eine solche Lage, daß $a = a^* = 0$ wird. Danach ist aber

$$P = (\chi \xi) \leq 0; \quad P^* = (\chi^* \xi^*) \leq 0.$$

Unter den gemachten Voraussetzungen ist wieder der Integrand positiv und $P + P^* \neq 0$. Es muß also wieder $|A_{ik}| = 0$ sein. Für Flächenpunkte, in denen $K > 0$ ist, zieht dies wieder $B_{ik} = B_{ik}^*$ nach sich. $K = 0$ kann nur längs Randkurven auftreten. Dort gilt dann nach Satz 4

$$B_{ik} = \lambda B_{ik}^*.$$

$a = a^* \neq 0$ und $b = b^* \neq 0$ liefern aber längs den Randkurven $\lambda = 1$, denn aus $B_{ik} = \lambda B_{ik}^*$ folgt $a = \lambda a^*$; $b = \lambda b^*$. Wie bei den Eiflächen kann man natürlich auch hier in endlich vielen Flächenpunkten, die nicht auf dem Rande liegen, $K = 0$ zulassen.

Es sei noch bemerkt, daß wegen der isometrischen Abbildung der Flächen \mathfrak{F} und \mathfrak{F}^* längs den Randstreifen auch $c = c^*$ ist. Aus $a = a^*$; $b = b^*$; $c = c^*$ folgt aber nach dem Hauptsatz der Theorie der Flächenstreifen⁶⁾ die Identität der Flächenstreifen bis auf orthogonale Transformationen.

⁶⁾ BLASCHKE: Differentialgeometrie Bd. I, 4. Aufl., S. 69.

Unter gewissen Voraussetzungen brauchen die Randstreifen von vornherein zunächst nicht kongruent oder symmetrisch zu sein, um die Identität der Flächenstücke nach sich zu ziehen.

Satz 8. *Es seien zwei isometrisch aufeinander abgebildete, dreimal stetig differenzierbare Flächen mit je einem Rand vorgegeben. (Diese werden wieder aufeinander abgebildet.) In den inneren Flächenpunkten sei $K > 0$. In den Randkurven ist $K \geq 0$ zugelassen. Die Randkurven mögen die Eigenschaft haben: Im Inneren der kleinsten konvexen Hülle jeder Fläche gibt es einen Punkt, so daß die Flächennormalen der Randkurve durch diesen Punkt gehen. Oder analytisch ausgedrückt: Längs den Randkurven muß gelten*

$$a = 0; \quad b = \text{const} \leq 0; \quad a^* = 0; \quad b^* = \text{const} \leq 0.$$

Weiter sei die Stützfunktion P (und P^*) für die eben definierten Punkte nicht positiv: $P \leq 0; P^* \leq 0$. Dann sind die beiden Flächen notwendig kongruent oder symmetrisch.

Ein einfaches Beispiel einer solchen Fläche ist ein Rotationsellipsoid, welches längs eines Breitenkreises abgeschnitten ist. Der Schnittpunkt der Flächennormalen liegt dann auf der Rotationsachse.

Beweis. Zunächst werde die Äquivalenz der Formulierungen der Eigenschaften der Randkurven nachgewiesen:

Die erste Formulierung besagt die Existenz der konstanten Vektoren a und a^* der Eigenschaft, daß die Gleichungen

$$\chi + \varrho \xi = a; \quad \chi^* + \varrho^* \xi^* = a^*; \quad \varrho \geq 0; \quad \varrho^* \geq 0$$

längs den Randkurven gelten. Durch Differentiation nach der Bogenlänge der Randkurve folgt

$$\dot{\chi} + \dot{\varrho} \xi + \varrho \dot{\xi} = 0$$

(analog für die Sterngrößen).

Die Ableitungsgleichungen (I, 16 c) liefern

$$\dot{\chi} \{1 + \varrho b\} - \eta a \varrho + \dot{\varrho} \xi = 0,$$

daher

$$a = 0; \quad \dot{\varrho} = 0; \quad 1 + \varrho b = 0.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir $b \neq 0$ annehmen, da dieser Fall im Satz 6 behandelt wurde. Dann ist aber

$$\varrho = -\frac{1}{b} = \text{const}$$

und wegen $\varrho \geq 0$ gilt $b < 0$.

Umgekehrt folgt sofort aus $a = 0$ und $b = \text{const} < 0$ über die Ableitungsgleichungen

$$\dot{\xi} = b \dot{\chi} - a \eta$$

die Beziehung

$$\chi + \varrho \xi = a = \text{const.}$$

Die gleiche Betrachtung gilt auch für die „Sterngrößen“. Wenden wir jetzt die Integralformel (III, 7) an, so wird das Randintegral

$$\oint A^{ik} n_k \{x_i - (x^* \xi_i^*)\} ds$$

verschwinden, da längs des Randes $x = -\rho \xi$ bzw. $x^* = -\rho^* \xi^*$ gilt, wenn wir die beiden Flächen so transformieren (durch orthogonale Transformationen), daß a und a^* in den Ursprung des Koordinatensystems fallen. Dieses ist möglich, da uns die gegenseitige Lage der Flächen nicht interessiert. Es verbleibt von der Integralformel wiederum nur

$$\iint \frac{\|A_{ik}\|}{g} \{P + P^*\} do = 0.$$

Wegen $K > 0$ und $P + P^* \leq 0$ ($\neq 0$) folgt daraus wie bei den beiden vorhergehenden Sätzen

$$\|A_{ik}\| = 0.$$

In den Punkten mit $K > 0$ gilt wieder $B_{ik} = B_{ik}^*$. $K = 0$ liefert längs den Randstreifen nach (I, 18)

$$2Hb + b^2 = 0.$$

Wegen $b \neq 0$ folgt $2H = -b \neq 0$ längs den Randstreifen (analog für die Sterngrößen).

$H - H^*$ ist auf der gesamten Fläche stetig und in inneren Flächenpunkten gleich Null. Aus Stetigkeitsgründen muß dann auch längs den Randkurven $H - H^* = 0$ sein. Wegen $H; H^* \neq 0$ gilt also auch hier

$$B_{ik} = B_{ik}^*.$$

Längs den Randkurven sind hier wegen $b(s) \neq 0$ Flachpunkte ausgeschlossen.

Man kann auch hier in endlich vielen Punkten $K = 0$ zulassen. Der letzte Satz gilt auch für solche Flächen, die die Voraussetzung des Satzes erfüllen und endlich viele Randkurven der geforderten Art haben. Allerdings müssen dann die Flächennormalen aller Randkurven durch denselben Punkt im Inneren der konvexen Hülle der betreffenden Fläche gehen.

Es sei noch bemerkt, daß die Randkurven mit $a = a^* = 0$ und $b = b^* = 0$ des Satzes 6, des Satzes 7 mit $a = a^*$; $b = b^*$ und des Satzes 8 mit $a = a^* = 0$; $b = \text{const}$; $b^* = \text{const}$ einer gewöhnlichen Differentialgleichung genügen:

$$A_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k \dot{u}^l = 0,$$

denn es gilt die Gleichung

$$(\dot{b} - \dot{b}^*) + 2(a - a^*)c = -A_{ikl} \dot{u}^i \dot{u}^k \dot{u}^l.$$

Alle diese Sätze über die Identität isometrischer Flächenpaare lassen sich auch im Rahmen der endlichen Flächenverbiegung aussprechen:

Der Satz 5 besagt jetzt unter den gegebenen Voraussetzungen die endliche Starrheit der Eiflächen; denn angenommen, die Eiflächen seien nicht starr, dann gäbe es eine zweite mit gleichem g_{ik} , aber anderem B_{ik} . Diesen Fall schließt aber der Satz 5 aus.

Ebenso besagen die Sätze 6, 7 und 8 die Starrheit gegenüber endlichen Verbiegungen von Flächen mit Rändern, wenn diese ihre Eigenschaft beibehalten sollen.

Zum Beispiel ist dann eine Kugel, aus der man eine Kalotte herausgeschnitten hat, solange gegenüber endlichen Verbiegungen starr, als man die Randkurven eben läßt (und die Flächennormalen längs dieser Kurve durch einen festen Punkt gehen).

Auch das „Äußere“ eines Torus mit ebenen Rändern ist gegenüber endlichen Verbiegungen starr, solange die Ränder ihre Eigenschaft behalten.

(Eingegangen am 26. Juli 1951.)

Teilbarkeitstheorie in Bereichen.

Von

Paul Lorenzen in Bonn.

Der klassische Fall der Teilbarkeitstheorie ist der Integritätsbereich der ganz-rationalen oder ganz-algebraischen Zahlen. Die Teilbarkeitsrelation R ist eine Halbordnung der multiplikativen Gruppe G des Quotientenkörpers und die (DEDEKINDSchen) Ideale bilden eine Halbverbandshalbgruppe H_d , die G enthält (wenn assoziierte Elemente identifiziert werden).

Für halbgeordnete Gruppen G , die in einer Halbverbandshalbgruppe H_r enthalten sind, gilt über die Darstellbarkeit der Halbordnung R von G als Konjunktion r -zulässiger Ordnungen von G :

Satz 1. *R ist genau dann Konjunktion r -zulässiger Ordnungen, wenn G r -abgeschlossen ist.*

Satz 2. *Ist G r -abgeschlossen, dann ist die reguläre Verbandsgruppe V die durch $a_1 \wedge \dots \wedge a_m < b_1 \vee \dots \vee b_n \leftrightarrow$ für alle r -zulässigen Ordnungen S von G :*

$$\min(a_1, \dots, a_m) S \max(b_1, \dots, b_n)$$

definiert wird, das duale v -Idealsystem des Systems der r -abgeschlossenen Ideale.

Für Verbandsgruppen G gilt über die Darstellbarkeit von R dagegen:

Satz 3. *R ist genau dann Konjunktion zulässiger Ordnungen von G , wenn G regulär ist*).*

Statt halbgeordneter Gruppen betrachtet die vorliegende Arbeit Bereiche (halbgeordnete Mengen mit Operatoren) und weist nach, daß die Sätze 1—3 (bis auf eine Modifikation von Satz 2) trotzdem gültig bleiben. Für die auf diesen Sätzen aufgebaute Teilbarkeitstheorie ist also die Voraussetzung der Gruppeneigenschaften entbehrlich. Die Abweichung in Satz 2 wird dadurch bedingt, daß für Bereiche nicht mehr — wie für Gruppen — jede Halbverbandsordnung eine Verbandsordnung sein muß.

§ 1.

Bereiche.

B sei eine Menge (Elemente a, b, \dots), R eine zweistellige Relation in B und G eine Menge von Operatoren x, y, \dots von B .

*) Vgl. P. LORENZEN, Math. Z. 52, 1949. Die obigen Sätze 1 bzw. 2 bzw. 3 ergeben sich aus Satz 26 bzw. pp. 510, 514 bzw. Satz 13, p. 503 der zitierten Arbeit.

Definition 1. B heißt ein *Bereich* (bezügl. R und G), wenn für alle a, b, c und x gilt

$$(1.1) \quad aRa$$

$$(1.2) \quad aRb, bRc \rightarrow aRc$$

$$(1.3) \quad aRb \rightarrow xaRxb.$$

Da (1.3) für den Operator 1 (definiert durch $1 \cdot a = a$) und für xy (definiert durch $(xy)a = x(ya)$) gilt, falls für x und y , sei im Folgenden stets angenommen, daß G eine Halbgruppe mit Einselement ist.

R heißt die Halbordnung von B . Statt aRb werde $a < b$ oder $b > a$ geschrieben. $a = b$ bedeute $a < b$ und $b < a$ (= braucht nicht die Identität zu sein).

Gilt $a < b$ oder $a > b$ für alle a und b , dann heißt R eine *Ordnung*.

Definition 2. Ein Bereich B heißt ein *Halbverbandsbereich*, wenn für alle a, b ein größter gemeinsamer Teiler $a \wedge b$ existiert, so daß für alle c und x gilt

$$(1.4) \quad c < a \wedge b \leftrightarrow c < a, c < b$$

$$(1.5) \quad x(a \wedge b) = xa \wedge xb.$$

Existiert auch ein kleinstes gemeinsames Vielfaches $a \vee b$ mit zu (1.4), (1.5) dualen Bedingungen, dann heißt B ein *Verbandsbereich*.

Definition 3. Eine Halbordnung S eines Halbverbandsbereiches B (bezügl. R und G) heißt *zulässig*, wenn für alle a, b, c und x gilt

$$(1.6) \quad R < S$$

$$(1.7) \quad aSb \rightarrow xaSxb$$

$$(1.8) \quad cSa, cSb \rightarrow cSa \wedge b.$$

Eine Halbordnung eines Verbandsbereiches heißt *zulässig*, wenn auch noch die zu (1.8) duale Bedingung gilt.

Die Halbordnung R eines Bereichs B induziert in jeder Unter-
menge B_0 von B eine Halbordnung R_0 von B_0 . R heißt eine *Fortsetzung* von R_0 auf B . Ist B_0 zulässig bezügl. G (d. h. $xB_0 < B_0$ für alle x), dann induziert G eine Operatorenhalbgruppe G_0 von B_0 . B heißt dann ein *Oberbereich* von B_0 (bezügl. R_0 und G_0).

§ 2.

Ideale.

B sei ein Bereich (bezügl. R und G).

Definition 4. Ein minimaler Halbverbandsoberbereich H von B heißt ein *Idealbereich* von B .

Die Idealbereiche von B bilden eine halbgeordnete Menge, falls man $H > H'$ setzt, wenn H' homomorph zu H über B ist. Obere Grenze ist H_s , der Bereich der s -Ideale, der durch

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_m < a \iff \text{für ein } \mu: a_\mu < a$$

definiert wird. Untere Grenze ist H_v , der Bereich der v -Ideale, der durch $a_1 \wedge \dots \wedge a_m < a \iff$ für alle c und $x: c < xa_1, \dots, c < xa_m \rightarrow c < xa$ definiert wird.

Die Idealbereiche H werden durch einen Kennbuchstaben unterschieden. r sei eine Variable für diese Kennbuchstaben.

Ein Bereich B mit einem Idealbereich H_r heiße ein r -Bereich.

Definition 5. Eine Halbordnung S eines r -Bereiches B heiße r -zulässig, wenn S durch eine zulässige Halbordnung von H_r induziert wird.

Zu jeder r -zulässigen Halbordnung S von B gibt es Fortsetzungen auf H_r . Die Konjunktion aller Fortsetzungen auf H_r heiße die *minimale Fortsetzung* S' . Es gilt

$$S_1 < S_2 \rightarrow S'_1 < S'_2.$$

Ist S eine r -zulässige Ordnung, dann gibt es nur die minimale Fortsetzung S' und S' ist eine Ordnung von H_r .

Definition 6. Ein r -Bereich B heißt r -Hauptbereich, wenn die Halbordnung R von B Konjunktion r -zulässiger Ordnungen von B ist.

Für einen r -Hauptbereich existiert der r_a -Idealbereich, der durch

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_m < a \iff \text{für alle } r\text{-zulässigen Ordnungen } S \text{ von } B: \\ \min(a_1, \dots, a_m) S a$$

definiert wird. H_{r_a} ist homomorph zu H_r .

Definition 7. Für ein System a_1, \dots, a_m aus B und eine r -zulässige Halbordnung S von B heißt ein Element a r -abhängig von a_1, \dots, a_m bezügl. S , wenn für alle r -zulässigen Ordnungen \bar{S} mit $\bar{S} > S$ gilt: $\min(a_1, \dots, a_m) \bar{S} a$.

Um ein Kriterium für die r -Abhängigkeit zu erhalten, werde für jede r -zulässige Halbordnung S und jedes Paar $\alpha = a_1, a_2$ aus B die r -Erweiterung $S[\alpha]$, als Konjunktion aller r -zulässigen Halbordnungen \bar{S} von B mit

$$(2.1) \quad S < \bar{S}$$

$$(2.2) \quad a_1 \bar{S} a_2$$

definiert. Zur bequemeren Formulierung sei ferner gesetzt

$$\alpha \in S \iff a_1 S a_2 \\ \alpha^{+1} = a_1, a_2, \quad \alpha^{-1} = a_2, a_1.$$

Lemma. a ist genau dann r -abhängig von a_1, \dots, a_m bezügl. S , wenn gilt:

(2.3) Es gibt Paare $\alpha_1, \dots, \alpha_\varepsilon$ aus B , so daß für jedes der 2^ε -Systeme

$$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\varepsilon (\varepsilon = \pm 1): a_1 \wedge \dots \wedge a_m S[\alpha_1^{\varepsilon_1}, \dots, \alpha_\varepsilon^{\varepsilon_\varepsilon}]_r a.$$

Beweis. Die Bedingung ist hinreichend, denn für r -zulässige Ordnungen \bar{S} mit $\bar{S} > S$ und jedes Paar α gibt es ein $\varepsilon = \pm 1$ mit $\alpha^\varepsilon \in S$, also $S[\alpha^\varepsilon]_r < \bar{S}$. Daher folgt aus (2.3) sofort $a_1 \wedge \dots \wedge a_m \bar{S}' a$, d. h. $\min(a_1, \dots, a_m) \bar{S} a$. Zum Beweis der Notwendigkeit sei (2.3) nicht gültig. Durch Abzählung („Wohlordnung“) aller r -zulässigen Halbordnungen \bar{S} läßt sich eine maximale Halbordnung \bar{S} , für die (2.3) nicht gilt, konstruieren. Aus $\alpha^{+1} \bar{S}$ und $\alpha^{-1} \bar{S}$ würde die Gültigkeit von (2.3) für $\bar{S}[\alpha^{+1}]_r$ und $\bar{S}[\alpha^{-1}]_r$ folgen, daraus aber die Gültigkeit für \bar{S} selbst. Also ist \bar{S} eine r -zulässige Ordnung, für die $\min(a_1, \dots, a_m) \bar{S} a$ nicht gilt.

Satz 1. Ein r -Bereich B (bezügl. R und G) ist genau dann ein r -Hauptbereich, wenn für alle Paare $\alpha_1, \dots, \alpha_\varepsilon$ aus B gilt:

$$\bigcap_{\varepsilon = \pm 1} \varepsilon R[\alpha_1^{\varepsilon_1}, \dots, \alpha_\varepsilon^{\varepsilon_\varepsilon}]_r < R.$$

§ 3.

Überideale.

B sei ein Bereich (bezügl. R und G).

Definition 8. Ein minimaler distributiver Verbandsobereich V von B heißt ein *Überidealbereich* von B .

Jeder Überidealbereich von B enthält einen Idealbereich H_r und ist ein dualer Idealbereich von H_r . Wegen der Bedingung der Distributivität braucht aber nicht jeder duale Idealbereich eines Idealbereichs ein Überidealbereich zu sein. $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots$ seien Variable für r -Ideale.

Die Überidealbereiche, die H_r enthalten, bilden — entsprechend zu § 2 — eine halbgeordnete Menge bezügl. der Homomorphie über H_r . Obere Grenze ist der r, s -Überidealbereich $V_{r,s}$, der durch

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{a}_1 \underset{r,s}{\vee} \dots \underset{r,s}{\vee} \mathfrak{a}_m \leftrightarrow \text{für ein } \mu: \mathfrak{a} < \mathfrak{a}_\mu$$

definiert wird.

Die untere Grenze, der r, v -Überidealbereich $V_{r,v}$ wird definiert durch

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{a}_1 \underset{r,v}{\vee} \dots \underset{r,v}{\vee} \mathfrak{a}_m \leftrightarrow \text{für alle } \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \text{ und } x:$$

$$x \mathfrak{a}_1 \wedge \mathfrak{b} < \mathfrak{c}, \dots, x \mathfrak{a}_m \wedge \mathfrak{b} < \mathfrak{c} \rightarrow x \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} < \mathfrak{c}.$$

Durch die Hinzufügung von „ $\wedge \mathfrak{b}$ “ in dieser Definition gegenüber der Definition von H_v wird die Distributivität dieser Operation bezügl. \vee erreicht, d. h. die geforderte verbandstheoretische Distributivität.

Die Überidealbereiche werden durch zwei Kennbuchstaben unterschieden. ϱ sei eine Variable für diese Kennbuchstabenpaare.

Ein Bereich B mit einem Überidealbereich V_ϱ heiße ein ϱ -Bereich.

Entsprechend zu § 2 lassen sich für ϱ -Bereiche die ϱ -zulässigen Halbordnungen S von B definieren und die *minimalen Fortsetzungen* S' auf V_ϱ . Für eine ϱ -zulässige Ordnung S gibt es nur die minimale Fortsetzung S' auf V_ϱ und S' ist eine Ordnung von V_ϱ . Die ϱ -Hauptbereiche werden entsprechend zu Definition 6 definiert. Für einen ϱ -Hauptbereich existiert der ϱ_a -Überidealbereich, der durch

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_m \underset{\varrho_a}{<} b_1 \vee \dots \vee b_n \iff \text{für alle } \varrho\text{-zulässigen Ordnungen } S:$$

$$\min(a_1, \dots, a_m) S \max(b_1, \dots, b_n)$$

definiert wird. V_{ϱ_a} ist homomorph zu V_ϱ .

Der Beweis des Lemmas aus § 2 läßt sich wörtlich auf ϱ -Bereiche übertragen. Als unmittelbare Folgerung ergibt sich

Satz 2. Für ϱ -Hauptbereiche gilt $a_1 \wedge \dots \wedge a_m \underset{\varrho_a}{<} b_1 \vee \dots \vee b_n$ genau dann, wenn es Paare $\alpha_1, \dots, \alpha_\varepsilon$ aus B gibt, so daß für jedes der 2^ε Systeme

$$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\varepsilon (\varepsilon = \pm 1) \text{ gilt: } a_1 \wedge \dots \wedge a_m R[\alpha_1^{\varepsilon_1}, \dots, \alpha_\varepsilon^{\varepsilon_\varepsilon}]'_\varrho b_1 \vee \dots \vee b_n.$$

Satz 2 liefert für ϱ -Hauptbereiche B eine „konstruktive“ Definition des ϱ_a -Überidealbereichs V_{ϱ_a} von B , d. h. eine Definition ohne Benutzung der ϱ -zulässigen Ordnungen von B . V_{ϱ_a} ist dualer Idealbereich eines Idealbereichs H von B und H ist durch Satz 2 ebenfalls konstruktiv definiert. Für halbgeordnete Gruppen entfallen die Untersuchungen über ϱ -Gruppen, denn für r -Hauptgruppen liefert schon das Lemma eine konstruktive Definition des r_a -Idealbereichs H_{r_a} und der duale v -Idealbereich von H_{r_a} ist die minimale Verbandsgruppe, die H_{r_a} enthält.

§ 4.

Reguläre Verbandsbereiche.

Die Halbordnung des ϱ -Überidealbereichs ist Konjunktion zulässiger Ordnungen. Das gilt nicht für alle distributiven Verbandsbereiche wie der 4-elementige Bereich $\{\wedge, a, b, \vee\}$ mit der durch $\wedge < a < \vee$, $\wedge < b < \vee$ definierten Halbordnung $<$ und der durch

$$x \wedge = \wedge, \quad xa = b, \quad xb = a, \quad x \vee = \vee$$

definierten Operatorengruppe $\{1, x\}$ zeigt.

Definition 9. Ein Verbandsbereich V heißt *regulär*, wenn V distributiv ist und für alle a, b und x, y gilt: $xa \wedge yb < xb \vee ya$.

Jeder geordnete Bereich ist regulär und daher auch jeder Verbandsbereich, dessen Halbordnung Konjunktion von zulässigen Ord-

nungen ist. Der obige 4-elementige Verbandsbereich ist distributiv, aber nicht regulär wegen $xa \wedge 1b = b$ und $xb \vee 1a = a$.

Für Verbandsgruppen G , in der die Elemente x, y von G selbst als Links- und Rechtsoperatoren auftreten, ist die Regularität äquivalent mit

$$(4.1) \quad xa \wedge by < xb \vee ay.$$

Diese Bedingung ist ferner äquivalent mit

$$(4.2) \quad a \wedge xax^{-1} = 1 \rightarrow a = 1.$$

Aus (4.2) folgt nämlich zunächst

$$(4.3) \quad a \wedge b < 1 \rightarrow a \wedge xbx^{-1} < 1.$$

Beweis. $a \wedge b < 1 \rightarrow 1 \vee a \wedge 1 \vee b = 1 \vee a \wedge b = 1$

$$\rightarrow 1 \vee a \wedge x(1 \vee b)x^{-1} \wedge x^{-1}(1 \vee a \wedge x(1 \vee b)x^{-1})x = 1$$

$$\rightarrow 1 \vee a \wedge 1 \vee xbx^{-1} = 1$$

$$\rightarrow a \wedge xbx^{-1} < 1.$$

Aus (4.3) folgt

$$(4.4) \quad a^{-1} \wedge xax^{-1} < 1$$

wegen $a^{-1} \wedge a < 1$ und hieraus folgt (4.1) wegen

$$(xa \wedge by)(b^{-1}x^{-1} \wedge y^{-1}a^{-1}) < xab^{-1}x^{-1} \wedge byy^{-1}a^{-1} < 1.$$

Die Äquivalenz der Bedingungen (4.1)–(4.4) läßt sich jetzt ohne Rechnung erschließen aus

Satz 3. Die Halbordnung eines Verbandsbereiches V ist genau dann Konjunktion zulässiger Ordnungen von V , wenn V regulär ist.

Beweis. Es ist nur noch zu zeigen, daß die Regularität hinreichend ist. Für jede zulässige Halbordnung S von V und jedes Paar $\beta = b_1, b_2$ aus V werde dazu eine Relation S_β durch

$$a_1 S_\beta a_2 \leftrightarrow \text{für alle } x, y: xa_1 \wedge yb_1 Sxa_2 \vee yb_2$$

definiert. Für S_β gilt

$$(4.5) \quad S < S_\beta,$$

denn

$$a_1 Sa_2 \rightarrow xa_1 Sxa_2 \\ \rightarrow xa_1 \wedge yb_1 Sxa_2 \vee yb_2,$$

(4.6)

$$a_1 S_\beta a_2, a_2 S_\beta a_2 \rightarrow a_1 S_\beta a_2,$$

denn

$$xa_1 \wedge yb_1 Sxa_2 \vee yb_2, xa_2 \wedge yb_1 Sxa_2 \vee yb_2 \\ \rightarrow xa_1 \wedge yb_1 Sxa_2 \vee yb_2 \wedge yb_1 = xa_2 \wedge yb_1 \vee yb_2 \wedge yb_1 \\ Sxa_2 \vee yb_2 \wedge yb_1 = xa_2 \vee yb_2,$$

(4.7)

$$a_1 S_\beta a_2 \rightarrow za_1 S_\beta za_2,$$

denn $(xz)a_1 \wedge yb_1 S(xz)a_2 \vee yb_2 \rightarrow x(za_1) \wedge yb_1 Sx(za_2) \vee yb_2,$
 (4. 8) $a S_\beta a_1, a S_\beta a_2 \rightarrow a S_\beta a_1 \wedge a_2,$

denn $xa \wedge yb_1 Sxa_1 \vee yb_2, xa \wedge yb_1 Sxa_2 \vee yb_2$
 $\rightarrow xa \wedge yb_1 Sxa_1 \vee yb_2 \wedge xa_2 \vee yb_2 = x(a_1 \wedge a_2) \vee yb_2,$
 (4. 9) $a_1 S_\beta a, a_2 S_\beta a \rightarrow a_1 \vee a_2 S_\beta a,$

(dual zu (4. 8)).

S_β ist also eine zulässige Halbordnung von V . Ferner gilt ersichtlich

(4. 10) $\alpha \in S_\beta \rightarrow \beta \in S_\alpha$

(4. 11) $\alpha \in S_\alpha \rightarrow \alpha \in S$

und

(4. 12) $\alpha^{-1} \in S_\alpha,$

denn aus der Regularität von V folgt auch für jede zulässige Halbordnung S von V

$$xa_2 \wedge ya_1 Sxa_1 \vee ya_2.$$

Durch Abzählung („Wohlordnung“) ist zu jedem Paar $\gamma = c_1, c_2$, für das $c_1 < c_2$ nicht gilt, eine maximale zulässige Halbordnung S mit $\gamma \bar{\in} S$ zu konstruieren. Wegen (4. 11) gilt $\gamma \bar{\in} S_\gamma$, d. h. $S_\gamma = S$. Daher ist S eine Ordnung, denn aus $\alpha^{-1} \bar{\in} S$ folgt nach (4. 12) $S \neq S_\alpha$, d. h. $\gamma \in S_\alpha$, also nach (4. 10) $\alpha \in S_\gamma = S$.

(Eingegangen am 10. September 1951.)

Bemerkungen zu der Satzgruppe von Hilbert über Systeme elliptischer Differentialgleichungen.

Herrn Professor Dr. WOLFGANG HAACK zu seinem 50. Geburtstag gewidmet.

Von

Günter Hellwig in Berlin-Charlottenburg.

Bei dem Ausbau der Theorie zum Randwertproblem allgemeiner elliptischer Systeme von Differentialgleichungen¹⁾, die Herr W. HAACK angeregt und gemeinsam mit mir in Angriff genommen hat, ergaben sich grundsätzliche Schwierigkeiten, die erst durch den Beweis der folgenden Sätze behoben werden konnten.

Die ersten Untersuchungen über das Randwertproblem eines allgemeinen elliptischen Systems von partiellen Differentialgleichungen sind von HILBERT²⁾ durchgeführt worden. In der Folgezeit wurden diese Ergebnisse immer wieder zum Ausgangspunkt von weiteren Untersuchungen gemacht. Die bei HILBERT vorliegende Problemstellung ist die folgende:

Es sei F ein von einer geschlossenen, stetig gekrümmten, doppel-punktslosen Kurve R begrenztes Gebiet der x, y -Ebene. Vorgegeben sind die zwei partiellen Differentialgleichungen

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= p(x, y)u + q(x, y)v \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= k(x, y)u + l(x, y)v. \end{aligned}$$

Es sind p, q, k, l Funktionen von x, y , die in dem durch R abgeschlossenen Gebiet $F + R$ stetig differenzierbar sind. Gesucht wird ein Funktionenpaar $u(x, y), v(x, y)$, welches in dem abgeschlossenen Gebiet $F + R$ stetig und im offenen Gebiet F stetig differenzierbar ist und dem System (1) genügt, sowie auf dem Rande R die Randbedingung erfüllt:

$$(2) \quad u(s) = f(s).$$

¹⁾ W. HAACK und G. HELLWIG: „Die Überführung des Randwertproblems für Systeme elliptischer Differentialgleichungen auf FREDHOLMSche Integralgleichungen.“ I., Math. Nachr., 4. Bd. (1950/51), S. 408—418.

²⁾ D. HILBERT: „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen.“ Leipzig-Berlin 1924, S. 213—219.

Dabei ist $f(s)$ eine willkürlich vorgegebene zweimal stetig differenzierbare Funktion der Bogenlänge s .

Für die Lösbarkeit dieses Problems gab HILBERT²⁾ den folgenden Satz:

I. Wenn die partiellen Differentialgleichungen (1) außer $u \equiv 0$, $v \equiv 0$ kein Lösungssystem u, v besitzen derart, daß u auf der Randkurve R verschwindet, so besitzen sie notwendig ein Lösungssystem u, v derart, daß u auf der Randkurve R irgend vorgeschriebene Werte $f(s)$ annimmt.

II. Wenn es ein Lösungssystem u, v der partiellen Differentialgleichung (1) derart gibt, daß u auf R verschwindet und die Funktionen u, v nicht beide in F Null sind, so existiert ein Lösungssystem u, v , wobei u auf R die vorgeschriebenen Randwerte $f(s)$ annimmt, sicher immer dann, wenn $f(s)$ gewissen linearen Integralbedingungen in endlicher Anzahl genügt³⁾.

W. A. HURWITZ⁴⁾ übertrug diese Satzgruppe auf kompliziertere Randbedingungen. Kürzlich hat H. BECKERT⁵⁾ einen analogen Alternativsatz gewonnen für das Randwertproblem eines elliptischen Systems von n Gleichungen mit n gesuchten Funktionen.

Das Ziel dieser Arbeit ist es zu zeigen, daß der von HILBERT angegebene Satz den tatsächlich vorliegenden Gegebenheiten nicht gerecht wird. Es gibt nämlich kein System der Form (1), welches bei der Vorgabe $u = 0$ auf R nur die Lösung $u \equiv 0$, $v \equiv 0$ zuläßt.

Damit wird die Aussage I leer und es verbleibt die Aussage II. Diese liefert keine genauen Aussagen über die Lösbarkeit, da die Integralbedingungen in der Literatur meines Wissens nirgends angegeben sind und wie HILBERT zuerst bemerkte, auch unter besonderen Umständen identisch von allen Funktionen $f(s)$ erfüllt sein können. Vielmehr hatte man wohl angenommen, daß die Aussage I den „allgemeinen“ Fall enthält. Man kann sich zunächst überzeugen, daß dies tatsächlich nicht der Fall sein kann.

Man teile die Systeme (1) mit $u = 0$ auf R in zwei Klassen:

1. Klasse. Es ist $\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial l}{\partial y} \equiv 0$ in F .

Wir setzen in (1) $u \equiv 0$. Dann verbleibt für v das System

$$(3) \quad -\frac{\partial v}{\partial y} = q(x, y)v, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = l(x, y)v.$$

³⁾ Die Voraussetzungen über p, q, k, l und $f(s)$ sind etwas schwächer, als die von HILBERT angegebenen, doch ist dies für das Folgende unwesentlich.

⁴⁾ W. A. HURWITZ: „Randwertaufgaben bei Systemen linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung.“ Diss. Göttingen 1910.

⁵⁾ H. BECKERT: „Über lineare elliptische Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen.“ Math. Nachrichten, 5. Bd. (1951), S. 173—208.

Wegen der obigen Integrabilitätsrelation hat (3) unendlich viele Lösungen, die von $v \equiv 0$ verschieden sind. Das Randwertproblem (1) mit $u = 0$ auf R hat daher gewiß die Lösungen

$$(4) \quad u \equiv 0, \quad v = C e^{\int_{x_0, y_0}^{x, y} \{l(\xi, \eta) d\xi - q(\xi, \eta) d\eta\}}$$

Dabei ist (x_0, y_0) eine nach Belieben angenommene feste Stelle, (x, y) eine bewegliche Stelle in F . C ist eine willkürliche Konstante. Die Lösungsmenge (4) zeigt, daß die Forderung I nicht erfüllt ist.

2. Klasse. Es ist $\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial l}{\partial y} \neq 0$ in F .

Es folgt aus dieser Forderung gewiß nicht, daß das Randwertproblem (1) mit $u = 0$ auf R nur die Lösung $u \equiv 0, v \equiv 0$ zuläßt: Es sei $F + R$ das durch den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ abgeschlossene Gebiet. Das System

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= -2xv \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= -2yv \end{aligned} \quad \text{mit } u = 0 \text{ auf } R$$

hat die Lösungen: $u = C(x^2 + y^2 - r^2), v = -C$. Dabei ist C eine willkürliche in beiden Ausdrücken gleiche Konstante. Bei (5) ist $\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial l}{\partial y} = -4$.

Um die Aussage I im allgemeinen Fall als leer zu erkennen, stellen wir zunächst einige Hilfsmittel bereit.

Hilfssatz 1. Das Randwertproblem

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= au + bv + c \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \bar{a}u + \bar{b}v + \bar{c} \end{aligned} \quad \text{mit } u = f(s) \text{ auf } R$$

und $a, b, c, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ Funktionen von x, y , die in $F + R$ stetig differenzierbar sind, ist äquivalent dem System von Integralgleichungen

$$(7) \quad \begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \iint_F \{u(x, y) K_{11}(\xi, \eta; x, y) + v(x, y) K_{12}(\xi, \eta; x, y)\} dx dy \\ &\quad + K_1(\xi, \eta) + L_1(\xi, \eta), \\ v(\xi, \eta) &= \iint_F \left\{ u(x, y) K_{21}(\xi, \eta; x, y) + v(x, y) \left(K_{22}(\xi, \eta; x, y) + \frac{1}{(F)} \right) \right\} dx dy \\ &\quad + K_2(\xi, \eta) + L_2(\xi, \eta) \end{aligned}$$

mit

$$(7a) \quad \begin{aligned} K_{11}(\xi, \eta; x, y) &= \frac{\partial G^I(x, y; \xi, \eta)}{\partial x} a(x, y) + \frac{\partial G^I(x, y; \xi, \eta)}{\partial y} \bar{a}(x, y), \\ K_{12}(\xi, \eta; x, y) &= \frac{\partial G^I}{\partial x} b + \frac{\partial G^I}{\partial y} \bar{b}, \quad K_{21}(\xi, \eta; x, y) = \frac{\partial G^{II}}{\partial x} \bar{a} - \frac{\partial G^{II}}{\partial y} a, \\ K_{22}(\xi, \eta; x, y) &= \frac{\partial G^{II}}{\partial x} \bar{b} - \frac{\partial G^{II}}{\partial y} b; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_1(\xi, \eta) &= \iint_F \left\{ \frac{\partial G^I}{\partial x} c + \frac{\partial G^I}{\partial y} \bar{c} \right\} dx dy, \\
 (7b) \quad K_2(\xi, \eta) &= \iint_F \left\{ \frac{\partial G^{II}}{\partial x} \bar{c} - \frac{\partial G^{II}}{\partial y} c \right\} dx dy, \\
 L_1(\xi, \eta) &= \oint_R f(s) \frac{\partial G^I}{\partial n} ds, \quad L_2(\xi, \eta) = \oint_R f(s) \frac{\partial G^{II}}{\partial s} ds.
 \end{aligned}$$

Dabei sind G^I, G^{II} die GREENSchen Funktionen erster Art bzw. zweiter Art im erweiterten Sinne. Sie sind Funktionen von $x, y; \xi, \eta$ und besitzen die Form

$$(8) \quad -\frac{1}{4\pi} \log \{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2\} + \gamma^{I,II}(x, y; \xi, \eta),$$

wobei $\gamma^{I,II}$ für jeden Punkt ξ, η aus F und für jeden Punkt x, y aus $F + R$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen bezüglich x, y darstellen. Sie erfüllen identisch in ξ, η die Differentialgleichungen

$$(9) \quad \frac{\partial^2 G^I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G^I}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 G^{II}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G^{II}}{\partial y^2} = 1 \quad (F)$$

und genügen bezüglich x, y den Randbedingungen

$$(10) \quad G^I(x, y; \xi, \eta) = 0, \quad \frac{\partial G^{II}(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} = 0 \quad \text{mit } x, y \text{ auf } R.$$

G^{II} genügt weiter der Bedingung

$$(11) \quad \iint_F G^{II}(x, y; \xi, \eta) dx dy = 0.$$

Mit (F) ist dabei der Flächeninhalt von $F + R$, mit n die Richtung der inneren Normalen auf R bezeichnet.

Beweis. Für die Existenz solcher G^I, G^{II} sei auf ²⁾ verwiesen. Für den Fall $c = \bar{c} \equiv 0$ in (6) ist die Äquivalenz von (6) und (7) von HILBERT ²⁾ und W. A. HURWITZ ⁴⁾ gezeigt worden. Für das inhomogene System (6) folgt die Äquivalenz analog. Insbesondere folgt, daß jede Lösung von (7) in $F + R$ stetig und in F stetig differenzierbar ist, sowie auf R die Bedingung $u = f(s)$ erfüllt. Für den Fall, daß c und \bar{c} nicht beide identisch verschwinden, ist dazu nur die aus der Potentialtheorie bekannte Bemerkung nötig, daß Integrale der Form

$$\iint_F \frac{\partial G^I(x, y; \xi, \eta)}{\partial x} c(x, y) dx dy, \quad \iint_F \frac{\partial G^{II}(x, y; \xi, \eta)}{\partial x} \bar{c}(x, y) dx dy$$

in $F + R$ stetig, in F stetig differenzierbar sind.

Wir stellen noch einen weiteren bekannten Hilfssatz bereit.

Hilfssatz 2. Ist $E(x, y)$ in $F + R$ stetig, so stellen die folgenden Integrale stetige Funktionen von x, y dar und mit $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$

gilt:

$$\begin{aligned}
 & \iint_F \left(\iint_F \frac{E(x, y)}{r} dx dy \right) d\xi d\eta = \iint_F E(x, y) \left(\iint_F \frac{1}{r} d\xi d\eta \right) dx dy, \\
 (12) \quad & \frac{\partial}{\partial \xi} \iint_F E(x, y) \log r dx dy = \iint_F \left(E(x, y) \frac{\partial}{\partial \xi} \log r \right) dx dy, \\
 & \frac{\partial}{\partial \eta} \iint_F E(x, y) \log r dx dy = \iint_F \left(E(x, y) \frac{\partial}{\partial \eta} \log r \right) dx dy.
 \end{aligned}$$

Hilfssatz 3. Das Randwertproblem mit einer Normforderung, das heißt die Bestimmung einer Lösung u, v des Systems

$$\begin{aligned}
 (13) \quad & \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = au + bv + c \\
 & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \bar{a}u + \bar{b}v + \bar{c} \quad \text{mit } u = f(s) \text{ auf } R \text{ und } \iint_F v dx dy = 0
 \end{aligned}$$

ist äquivalent dem System von Integralgleichungen:

$$\begin{aligned}
 (14) \quad & u(\xi, \eta) = \iint_F (u K_{11} + v K_{12}) dx dy + K_1 + L_1 \\
 & v(\xi, \eta) = \iint_F (u K_{21} + v K_{22}) dx dy + K_2 + L_2.
 \end{aligned}$$

Beweis. Stellt man diese Forderung für v , so fällt in (7) das Glied $\frac{1}{(F)}$ weg. Betrachtet man umgekehrt (14), so hat jede Lösung von (14) die Eigenschaft, daß $\iint_F v dx dy = 0$. Dies folgt aus (11) mit der Bemerkung, daß G^{II} symmetrisch in $(\xi, \eta), (x, y)$ ist, indem man den Hilfssatz 2 anwendet. (Vgl. auch 4^o.)

Damit sind alle Hilfsmittel bereitgestellt, um den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 1. Es gibt kein System (1), welches bei der Randvorgabe $u = 0$ auf R als einzige Lösung nur $u \equiv 0, v \equiv 0$ besitzt.

Beweis. Der Beweis wird indirekt geführt.

Gegenannahme. Es sei die Aussage von Satz 1 falsch. Dann gibt es wenigstens ein System (1), welches bei der Randvorgabe $u = 0$ auf R nur die Lösung $u \equiv 0, v \equiv 0$ zuläßt. Dieses System sei

$$\begin{aligned}
 (15) \quad & \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = au + bv \\
 & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \bar{a}u + \bar{b}v, \quad u = 0 \text{ auf } R.
 \end{aligned}$$

1. Schritt. Es darf sofort angenommen werden, daß b und \bar{b} nicht beide in F identisch verschwinden. Wenn nämlich mit $b \equiv \bar{b} \equiv 0$ (15) ein solches System sein soll, so sind wir bereits zum Widerspruch gekommen, denn dieses hätte die Lösung $u = 0, v = 1$.

2. Schritt. Jetzt wenden wir den Hilfssatz 1 auf (15) an und erhalten das zu (15) äquivalente System von Integralgleichungen

$$(16) \quad \begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \int_F \int (u K_{11} + v K_{12}) dx dy \\ v(\xi, \eta) &= \int_F \int \left(u K_{21} + v \left(K_{22} + \frac{1}{(F)} \right) \right) dx dy. \end{aligned}$$

Dieses hat nach unserer Annahme als einzige Lösung $u \equiv 0, v \equiv 0$.

3. Schritt. Es darf bei (16) noch die Normbedingung für v gestellt werden: $\int_F \int v dx dy = 0$, da das einzige Lösungssystem $u \equiv 0, v \equiv 0$ diese Forderung erfüllt.

Damit ist das Randwertproblem (15) mit der zusätzlichen Normforderung $\int_F \int v dx dy = 0$ nach Hilfssatz 3 äquivalent dem Integralgleichungssystem

$$(17) \quad \begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \int_F \int (u K_{11} + v K_{12}) dx dy \\ v(\xi, \eta) &= \int_F \int (u K_{21} + v K_{22}) dx dy. \end{aligned}$$

(17) läßt nach unserer Annahme nur die Lösung $u \equiv 0, v \equiv 0$ zu.

4. Schritt. Sei γ_0 eine von Null verschiedene reelle Zahl. Es wird das Randwertproblem (15) mit einer zusätzlichen Normforderung betrachtet:

$$(18) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= au + bv \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \bar{a}u + \bar{b}v \end{aligned}, \quad u = 0 \text{ auf } R \text{ und } \int_F \int v dx dy = \gamma_0.$$

Dieses Problem darf nach Annahme keine Lösungen besitzen, denn es wäre v gewiß von $v \equiv 0$ verschieden.

5. Schritt. Und nun zeigen wir, daß das Randnormproblem (18) gewiß eine Lösung besitzt, und damit ist gezeigt, daß die Gegenannahme falsch war.

Seien \hat{u}, \hat{v} neue gesuchte Funktionen:

$$(19) \quad \begin{aligned} \hat{u} &= u \\ \hat{v} &= v - \frac{\gamma_0}{(F)} \end{aligned} \text{ mit } (F) \text{ Flächeninhalt von } F.$$

Mit diesen geht das Rand-Normproblem (18) über in

$$(20) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} &= a\hat{u} + b\hat{v} + c \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} &= \bar{a}\hat{u} + \bar{b}\hat{v} + \bar{c} \end{aligned}, \quad \hat{u} = 0 \text{ auf } R \text{ und } \int_F \int \hat{v} dx dy = 0$$

mit

$$c = \frac{b \gamma_0}{(F)}, \quad \bar{c} = \frac{\bar{b} \gamma_0}{(F')}.$$

Nach Schritt 1 ist (20) gewiß ein inhomogenes Problem, wobei c und \bar{c} nicht beide in F identisch verschwinden.

Nach Hilfssatz 3 ist (20) äquivalent dem Integralgleichungssystem

$$(21) \quad \begin{aligned} \hat{u}(\xi, \eta) &= \iint_F (\hat{u} K_{11} + \hat{v} K_{12}) dx dy + K_1 \\ \hat{v}(\xi, \eta) &= \iint_F (\hat{u} K_{21} + \hat{v} K_{22}) dx dy + K_2. \end{aligned}$$

Das homogene Integralgleichungssystem ($K_1 \equiv 0, K_2 \equiv 0$) läßt nach Schritt 3 nur die Lösung $\hat{u} \equiv 0, \hat{v} \equiv 0$ zu. Könnten wir bei (21) die FREDHOLMSCHEN Sätze unmittelbar anwenden, so hätte (21) genau eine Lösung \hat{u}, \hat{v} und wegen der eineindeutigen Zuordnung (19) hätten wir eine Lösung des Rand-Normproblem (18) gefunden, was aber nicht der Fall sein darf.

Aus (7 a) ersieht man, daß die Kerne $K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}$ bei gleichzeitiger Annäherung der Punkte (x, y) und (ξ, η) zu einem gemeinsamen Grenzwert eine Singularität erster Ordnung besitzen. Man bringt in bekannter Weise (21) auf eine Integralgleichung. Man betrachtet dazu ein zu F kongruentes geeignet außerhalb von F liegendes Gebiet F' und bezeichnet mit ξ', η' den Punkt, der in F dem Punkt ξ, η entspricht. In der Vereinigungsmenge $F + F'$ definiert man dann Funktionen

$$(22) \quad z(\xi, \eta) = \begin{cases} \hat{u}(\xi, \eta) & \text{für } (\xi, \eta) \text{ aus } F \\ \hat{v}(\xi', \eta') & \text{für } (\xi, \eta) \text{ aus } F', \end{cases}$$

$$(22 a) \quad \mathfrak{K}(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) = \begin{cases} K_{11}(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) & \text{für } (\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2) \text{ aus } F. \\ \text{Analog für } K_{12}, K_{21}, K_{22}. \end{cases}$$

Entsprechend wie in (22) definiert man ein $K(\xi, \eta)$ aus K_1 und K_2 . (21) geht dann über in

$$(23) \quad z(\xi, \eta) = \iint_{F+F'} z(x, y) \mathfrak{K}(\xi, \eta; x, y) dx dy + K(\xi, \eta).$$

Nach zweimaliger Iteration entsteht eine Integralgleichung mit stetigem Kern. Während die homogene Integralgleichung (23) ($K \equiv 0$) als einzige Lösung nur $z \equiv 0$ besitzt, kann dies von der zweifach iterierten homogenen Gleichung nicht mehr behauptet werden. Man erschließt jedoch die Existenz einer eindeutigen Lösung von (23) durch den folgenden

Hilfssatz. Wenn bei der Integralgleichung zweiter Art

$$(24) \quad u(\xi, \eta) = \iint u(x, y) K(\xi, \eta; x, y) dx dy + f(x, y)$$

der n -fach iterierte Kern K_n stetig ist, so gelten für (24) bereits die FREDHOLMSCHEN Sätze⁶⁾.

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Schlußbemerkung. Die Formulierung von Satz 1 in Form einer Negation wurde nur zum Zwecke eines Widerspruchsbeweises gewählt. Vielmehr soll Satz 1 jetzt in positiver Form ausgesprochen werden.

Satz 2. *Jedes System (1) mit $u = 0$ auf R hat gewiß ein Lösungssystem u_H, v_H , wobei u_H auf R verschwindet und u_H, v_H nicht beide in F identisch verschwinden und damit sicher die unendlich vielen Lösungen $u = C u_H, v = C v_H$. Dabei ist C eine willkürliche Konstante.*

Es erhebt sich die Frage, wie man mit diesem Tatbestand zu einer befriedigenden Theorie des Randwertproblems eines elliptischen Systems gelangen kann. Daß dies erreicht werden kann, wird an anderer Stelle gezeigt.

⁶⁾ Man vergleiche etwa HELLINGER-TOEPLITZ: „Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten“, Encyklopädie d. math. Wiss. II 3/2, S. 1386 oder W. SCHMEIDLER: „Integralgleichungen mit Anwendung in Physik und Technik“, Leipzig 1950, S. 563. Dort ist der Satz ausgesprochen für vollstetige Kernmatrizen, doch ist diese Formulierung nach Satz 40 (S. 169) gleichwertig der oben angegebenen.

(Eingegangen am 2. August 1951.)

Abschätzungen bei Kreisteilungspolynomen und daraus hergeleitete Bedingungen für die kleinsten Primzahlen gewisser arithmetischer Folgen.

Von

Hans-Joachim Kanold in Gießen.

Wir bezeichnen mit m eine natürliche Zahl > 1 und mit $F_m(x)$ das m -te Kreisteilungspolynom, dessen nur einfache Nullstellen genau die primitiven m -ten Einheitswurzeln sind. Wir gehen aus von der bekannten Formel

$$(1) \quad F_m(x) = \prod_{t|m} (x^t - 1)^{\mu\left(\frac{m}{t}\right)}$$

und setzen

$$(2) \quad m = \prod_{\nu=1}^k p_\nu^{\alpha_\nu}; \quad x^{\frac{m}{p_1 p_2 \dots p_k}} = z.$$

Dann folgt aus (1)

$$(3) \quad F_m(x) = \prod_{d|p_1 \dots p_k} (z^d - 1)^{\mu\left(\frac{p_1 \dots p_k}{d}\right)} = \frac{\prod (1 - z^{d'})}{\prod (1 - z^{d''})} = F_{p_1 \dots p_k}(z).$$

Dabei durchlaufen d' und d'' zusammen alle Teiler von $p_1 p_2 \dots p_k$ und die Anzahl der Primteiler von d' bzw. d'' ist gleich k bzw. gleich $k - 1$ oder eine gerade Zahl weniger. Wir beachten nun, daß

$$(4) \quad F_{p_1 \dots p_k}(z) = z^{(p_1-1)\dots(p_k-1)} F_{p_1 \dots p_k}\left(\frac{1}{z}\right)$$

gilt. Wegen (2), (3) und (4) können wir uns auf quadratfreie m und auf $|z| \leq 1$ beschränken. Der Vollständigkeit halber wollen wir noch erwähnen:

$$(5) \quad F_m(0) = 1; \quad F_m(1) = \begin{cases} p_1 & \text{für } k = 1 \\ 1 & \text{für } k > 1 \end{cases}$$

Aus (3) ergibt sich

$$(6) \quad F_{p_1 \dots p_k}(z) = \prod_{d|p_1 \dots p_{k-1}} \left(\frac{(z^{p_k})^d - 1}{z^d - 1} \right)^{\mu\left(\frac{p_1 \dots p_{k-1}}{d}\right)} = \frac{F_{p_1 \dots p_{k-1}}(z^{p_k})}{F_{p_1 \dots p_{k-1}}(z)}.$$

Diese Formel wird uns zu einigen Abschätzungen dienen. Wir beweisen dazu zunächst den

Hilfssatz 1. *Es sei $0 < x \leq \frac{1}{2}$. Dann gilt*

$$(7) \quad \prod_{\nu=2}^k \frac{1 - x^{p_1 p_\nu}}{1 - x^{p_\nu}} < 1 + \frac{8x}{23}.$$

Beweis. Es ist

$$\prod_{\varkappa=2}^k (1 + x^{p_{\varkappa}} + x^{2p_{\varkappa}} + \dots + x^{(p_1-1)p_{\varkappa}}) \leq \prod_{\varkappa=2}^k (1 + (p_1 - 1) x^{p_{\varkappa}}).$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ und $p_{\varkappa} \geq p_1 + 2\varkappa - 3$ annehmen. Dann folgt

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \prod < \prod_{\varkappa=2}^k (1 + (p_1 - 1) x^{p_1-1} x^{2\varkappa-3} x) \leq \prod_{\varkappa=2}^k \left(1 + \frac{p_1-1}{2^{p_1-1}} \cdot \frac{x}{2^{2\varkappa-3}}\right) \\ \leq \prod_{\varkappa=2}^k \left(1 + \frac{x}{2^{2^{\varkappa-1}}}\right) < \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{4^{\lambda}}\right). \end{aligned} \right.$$

Bekanntlich ist

$$(9) \quad \prod_{\lambda=1}^l \left(1 + \frac{x}{4^{\lambda}}\right) = 1 + \frac{x}{4} + \sum_{\lambda=2}^l \frac{x}{2} \left(\frac{x}{4^2} + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{x}{4^3} + \frac{1}{4}\right) \dots \left(\frac{x}{4^{\lambda}} + \frac{1}{4}\right) < 1 + \frac{x}{4} + \sum_{\lambda=2}^l \frac{x}{4} \left(\frac{x}{4^2} + \frac{1}{4}\right)^{\lambda-1}.$$

Wir erhalten somit

$$(10) \quad \prod < 1 + \frac{x}{4} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left(\frac{x}{4^2} + \frac{1}{4}\right)^{\lambda-1} \leq 1 + \frac{x}{4} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \left(\frac{9}{32}\right)^{\lambda-1} = 1 + \frac{8x}{23}.$$

Hilfssatz 2. *Es sei $0 < x \leq \frac{1}{2}$. Dann ist*

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} < \frac{1-x}{1-x^{p_1}} < F_{p_1 \dots p_k}(x) < \frac{1-x}{1-x^{p_1}} \left(1 + \frac{8x}{23}\right) \leq 1 - \frac{10x}{23} \\ \text{für gerades } k \geq 2; \\ 1 + \frac{10x}{23} < \frac{1-x^{p_1}}{1-x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{8x}{23}} < F_{p_1 \dots p_k}(x) \leq \frac{1-x^{p_1}}{1-x} < 2 \text{ für ungerad. } k; \end{aligned} \right.$$

dabei ist $p_1 = \text{Min } p_{\varkappa}$ für $\varkappa = 1, \dots, k$; ($p_{\varkappa} = \text{Primzahl}$).

Beweis. Für $k = 1$ ist $F_{p_1}(x) = \frac{1-x^{p_1}}{1-x}$. Aus (6) und (7) ergibt sich

$$\frac{1-x}{1-x^{p_1}} < F_{p_1 p_2}(x) = \frac{1-x^{p_1 p_2}}{1-x^{p_1}} \cdot \frac{1-x}{1-x^{p_2}} < \frac{1-x}{1-x^{p_1}} \left(1 + \frac{8x}{23}\right) \leq \frac{1 + \frac{8x}{23}}{1+x} \leq 1 - \frac{10x}{23}.$$

Es sei nun $k - 1 \geq 2$, gerade und

$$\frac{1-x}{1-x^{p_1}} < F_{p_1 \dots p_{k-1}}(x) \leq \frac{1-x}{1-x^{p_1}} \prod_{\varkappa=2}^{k-1} \frac{1-x^{p_1 p_{\varkappa}}}{1-x^{p_{\varkappa}}}.$$

Dann folgt aus (6)

$$(12) \quad \frac{1-x^{p_1}}{1-x} \prod_{\varkappa=2}^k \frac{1-x^{p_{\varkappa}}}{1-x^{p_1 p_{\varkappa}}} < F_{p_1 \dots p_k}(x) < \frac{1-x^{p_1}}{1-x} \cdot \frac{1-x^{p_k}}{1-x^{p_1 p_k}} \prod_{\varkappa=2}^{k-1} \frac{1-x^{p_1 p_{\varkappa} p_k}}{1-x^{p_{\varkappa} p_k}}.$$

Nach (7) ist nun

$$\prod_{\kappa=2}^{k-1} \frac{1 - (x^{p_\kappa})^{p_1 p_\kappa}}{1 - (x^{p_\kappa})^{p_\kappa}} < 1 + \frac{8x^{p_k}}{2^3} < 1 + x^{p_k} + \dots + x^{(p_1-1)p_k},$$

d. h. $F_{p_1 \dots p_k}(x) < \frac{1 - x^{p_1}}{1 - x}$.

Ebenso schließen wir aus der Annahme $k - 1 \geq 3$, ungerade und

$$\frac{1 - x^{p_1}}{1 - x} \prod_{\kappa=2}^{k-1} \frac{1 - x^{p_\kappa}}{1 - x^{p_1 p_\kappa}} < F_{p_1 \dots p_k}(x) < \frac{1 - x^{p_1}}{1 - x},$$

daß

$$(13) \quad \frac{1 - x}{1 - x^{p_1}} \cdot \frac{1 - x^{p_1 p_k}}{1 - x^{p_k}} \prod_{\kappa=2}^{k-1} \frac{1 - x^{p_\kappa p_k}}{1 - x^{p_1 p_\kappa p_k}} < F_{p_1 \dots p_k}(x) < \frac{1 - x}{1 - x^{p_1}} \prod_{\kappa=2}^k \frac{1 - x^{p_1 p_\kappa}}{1 - x^{p_\kappa}}$$

gilt; daraus folgt

$$\frac{1 - x}{1 - x^{p_1}} < F_{p_1 \dots p_k}(x) < \frac{1 - x}{1 - x^{p_1}} \left(1 + \frac{8x}{2^3}\right).$$

Satz 1. Es sei $m = \prod_{\kappa=1}^k p_\kappa^{\alpha_\kappa} > 6$ und q_1 die kleinste Primzahl der Restklasse 1 (mod m). Dann ist

$$(14) \quad \begin{cases} q_1 \leq 2^{\varphi(m)} - m, & \text{wenn } m \text{ ungerade;} \\ q_1 \leq 2^{\varphi(m)} - \frac{m}{2}, & \text{wenn } m \equiv 2 \pmod{4}; \\ q_1 \leq 2^{\varphi(m)} - \frac{m}{2^{\alpha_1}}, & \text{wenn } k \text{ gerade und } p_1 = 2 \text{ ist.} \end{cases}$$

Beweis. Nach einem früheren Ergebnis¹⁾ gilt

$$(15) \quad q_1 \leq F_m(\pm 2).$$

Aus (3) und (4) erhalten wir

$$F_m(\pm 2) = F_{p_1 \dots p_k} \left((\pm 2)^{\frac{m}{p_1 \dots p_k}} \right) = 2^{\varphi(m)} F_{p_1 \dots p_k} \left((\pm 2)^{\frac{-m}{p_1 \dots p_k}} \right).$$

Ist nun k gerade, so liefert (11)

$$(16) \quad q_1 \leq 2^{\varphi(m)} F_{p_1 \dots p_k} \left(2^{\frac{-m}{p_1 \dots p_k}} \right) < 2^{\varphi(m)}.$$

Ist m ungerade, so ist $2^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$, also $q_1 \leq 2^{\varphi(m)} - m$.

Ist $m \equiv 2^{\alpha_1} \pmod{2^{\alpha_1+1}}$, so ist $2^{\varphi(m)} \equiv q_1 \equiv 1 \pmod{\frac{m}{2^{\alpha_1}}}$, also $q_1 \leq 2^{\varphi(m)} - \frac{m}{2^{\alpha_1}}$. Für ungerades k und ungerades $p_1 p_2 \dots p_k$ gilt nach (3)

$$(17) \quad F_{p_1 \dots p_k}(-z) = \frac{\prod_{d'} (1 + z^{d'})}{\prod_{d''} (1 + z^{d''})} = \prod_{d'} \frac{1 - z^{2d'}}{1 - z^{d'}} \cdot \prod_{d''} \frac{1 - z^{d''}}{1 - z^{2d''}} = F_{2p_1 \dots p_k}(z).$$

¹⁾ H.-J. KANOLD, Sätze über Kreisteilungspolynome und ihre Anwendungen auf einige zahlentheoretische Probleme I, J. f. reine u. angew. Math. 187 (1949), 169—182, Abschnitt I, (35).

Somit haben wir $q_1 \leq 2^{\varphi(m)} F_{p_1 \dots p_k} \left(-2^{-\frac{m}{p_1 \dots p_k}} \right) = 2^{\varphi(m)} F_{2p_1 \dots p_k} \left(2^{-\frac{m}{p_1 \dots p_k}} \right)$.

Daraus ergibt sich nach (11), weil die Anzahl der Primteiler von $2p_1 \dots p_k$ gleich $k + 1$ ist, daß wiederum $q_1 < 2^{\varphi(m)}$ sein muß. Für ungerades k und $m \equiv 2 \pmod{4}$ beachten wir, daß

$$2^{\varphi(m)} = 2^{\varphi\left(\frac{m}{2}\right)} \equiv 1 \pmod{\frac{m}{2}}$$

ist. $\frac{m}{2}$ ist nun ungerade, also gibt es nach dem Vorgehenden eine

Primzahl $q_1 \equiv 1 \pmod{\frac{m}{2}}$; $q_1 \leq 2^{\varphi\left(\frac{m}{2}\right)} - \frac{m}{2}$.

Für dieses q_1 muß aber auch erfüllt sein

$$(18) \quad q_1 \equiv 1 \pmod{m}; \quad q_1 \leq 2^{\varphi(m)} - \frac{m}{2}.$$

Damit ist (14) bewiesen.

Satz 2. *Es sollen m und q_1 die gleiche Bedeutung wie in Satz 1 haben. Dann ist immer $q_1 < \frac{5}{4} \cdot 2^{\varphi(m)}$.*

Beweis. Wir können $p_1 = 2, \alpha_1 > 1, k$ ungerade annehmen. Dann ist $\frac{m}{2p_2 \dots p_k}$ gerade und $F_m(2) = F_m(-2) = 2^{\varphi(m)} F_{2p_2 \dots p_k} \left(4^{-\frac{m}{4p_2 \dots p_k}} \right)$. Nach (11) und (15) erhalten wir, wenn wir zur Abkürzung $\frac{m}{4p_2 \dots p_k} = m'$ setzen

$$(19) \quad q_1 \leq 2^{\varphi(m)} \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{m'}}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{m'}} \leq \frac{5}{4} 2^{\varphi(m)}.$$

$q_1 > 6$ und $q_1 = \frac{2^{\varphi(m)}}{4} \cdot 5$ ist unmöglich, weil sonst $5 | q_1$ wäre.

Daß (14) und (19) in gewisser Weise bestmögliche Abschätzungen sind, zeigt das Beispiel $m = 8$. Wir haben dann $\varphi(8) = 4; m' = 2$. Aus (19) folgt also $q_1 \leq 2^4 \frac{1 - \frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{16}} = 17$.

(Eingegangen am 3. Oktober 1951.)

Konvergenzfaktoren beim Euler-Knoppschen Limitierungsverfahren.

Von

Alexander Peyerimhoff in Gießen.

In dieser Arbeit werden einige Fragen über Konvergenzfaktoren beim EULER-KNOPPSCHEN Limitierungsverfahren (im folgenden mit E^k bezeichnet) untersucht. Es handelt sich dabei allgemein um die Frage, wie eine Zahlenfolge $\{\varepsilon_\nu\}$ beschaffen sein muß, damit die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \varepsilon_\nu$ für alle E^k -limitierbaren Folgen $\{s_\nu\}$ konvergiert. Wenn $\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \varepsilon_\nu$ konvergiert, muß $s_\nu \varepsilon_\nu = o(1)$ sein, und aus dieser Tatsache folgt, daß für die ε_ν eine gewisse Größenbeschränkung der Form $\varepsilon_\nu = O(d_\nu)$ vorhanden ist. Wir werden im folgenden einige spezielle Folgen $\{\varepsilon_\nu\}$, und zwar insbesondere solche, welche die Größenbeschränkung erreichen, untersuchen ¹⁾.

Eine Folge $\{s_\nu\}$ ist genau dann E^k -limitierbar ($k > 0$), wenn

$$(1) \quad \sigma_n = \frac{1}{q^n} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} (q-1)^{n-\nu} s_\nu \quad (q = 2^k > 1)$$

für $n \rightarrow \infty$ konvergiert. Aus (1) folgt, daß

$$(2) \quad s_n = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} q^\nu (1-q)^{n-\nu} \sigma_\nu$$

ist ²⁾.

Die genaue Größenbeschränkung der E^k -limitierbaren Folgen ist

$$(3) \quad s_n = o((2q-1)^n),$$

¹⁾ Wenn ein permanentes Matrixverfahren $A = (a_{\mu\nu})$ einen Mittelwertsatz der Form

$$(*) \quad \left| \sum_{\nu=0}^n a_{m\nu} s_\nu \right| \leq K \max_{0 \leq \mu \leq n} \left| \sum_{\nu=0}^{\mu} a_{\mu\nu} s_\nu \right| \quad (0 \leq n \leq m, a_{nn} \neq 0, a_{n\nu} = 0 \text{ für } \nu > n)$$

erfüllt, dann kann man die Frage nach den Konvergenzfaktoren für die A -limitierbaren Folgen vollständig beantworten (vgl. A. PEYERIMHOFF [4] und K. ZELLER [5]). Die E^k -Verfahren besitzen aber keinen derartigen Mittelwertsatz (vgl. Fußnote ³⁾).

²⁾ Vgl. K. KNOPP [3], S. 525 und G. H. HARDY [1], S. 8.

d. h. (3) gilt für jede E^k -limitierbare Folge $\{s_n\}$, aber für keine unbeschränkte Folge $\{\lambda_n\}$ kann die rechte Seite von (3) durch $o\left(\frac{1}{\lambda_n}(2q-1)^n\right)$ ersetzt werden ³⁾.

Wenn $\{\varepsilon_\nu\}$ so beschaffen ist, daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \varepsilon_\nu$ für alle E^k -limitierbaren Folgen $\{s_\nu\}$ konvergiert ($k > 0$, fest), dann ist $s_\nu \varepsilon_\nu = o(1)$ für alle diese Folgen $\{s_\nu\}$. Wegen (3) muß dann

$$(4) \quad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{(2q-1)^n}\right)$$

erfüllt sein (vgl. A. PEYERIMHOFF [4], S. 38).

Aus (3) folgt zunächst die einfache Tatsache, daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \varepsilon_\nu$ für alle E^k -limitierbaren $\{s_\nu\}$ konvergiert, wenn $\varepsilon_n = \frac{\alpha_n}{(2q-1)^n}$ mit $\sum_n |\alpha_n| < +\infty$ ist.

Schwieriger ist die Frage, ob es Konvergenzfaktoren ε_ν gibt, welche die in (4) angegebene Größenordnung erreichen. Eine Antwort auf diese Frage gibt der

Satz 1. Für alle E^k -limitierbaren Folgen $\{s_\nu\}$ ($k > 0$, fest) konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{s_\nu}{(2q-1)^\nu}\right)$.

Zum Beweise benötigen wir den folgenden

Hilfssatz. Wenn $-1 < x < 0$ ist, dann gilt für alle ganzen Zahlen $\varrho \geq 0$ und $\mu \geq 0$ die Ungleichung

$$(5) \quad \left| \sum_{\nu=\varrho+1}^{\infty} \binom{\nu+\mu}{\nu} x^\nu \right| \leq \binom{\varrho+1+\mu}{\varrho+1} |x|^{\varrho+1}.$$

Beweis. $\sum_{\nu=\varrho+1}^{\infty} \binom{\nu+\mu}{\nu} x^\nu$ ist ein Reststück der Taylorentwicklung der Funktion $\frac{1}{(1-x)^{\mu+1}}$ und kann deshalb mittels der LAGRANGESCHEN Form des Restgliedes in der Gestalt

$$\sum_{\nu=\varrho+1}^{\infty} \binom{\nu+\mu}{\nu} x^\nu = \frac{x^{\varrho+1}}{(\varrho+1)!} \frac{d^{\varrho+1}}{d\xi^{\varrho+1}} \frac{1}{(1-\xi)^{\mu+1}} \Big|_{\xi=\vartheta x} \quad \text{mit } 0 < \vartheta < 1$$

dargestellt werden. Wegen

$$\frac{d^{\varrho+1}}{d\xi^{\varrho+1}} \frac{1}{(1-\xi)^{\mu+1}} = (\varrho+1)! \binom{\varrho+1+\mu}{\varrho+1} \frac{1}{(1-\xi)^{\mu+1+\varrho+1}}$$

³⁾ Wenn ein permanentes Matrixverfahren $A = (a_{nn})$ den in Fußnote ¹⁾ angegebenen Mittelwertsatz (*) erfüllt, dann wird die genaue Größenbeschränkung der durch A zu Null limitierbaren Folgen durch $o\left(\frac{1}{a_{nn}}\right)$ gegeben (vgl. JURKAT u.

PEYERIMHOFF [2]). Beim E^k -Verfahren ist $\frac{1}{a_{nn}} = q^n$. Wegen (3) kann also (*) nicht erfüllt sein.

folgt daraus, wenn man noch beachtet, daß wegen $x < 0$ die Ungleichung $\left| \frac{1}{1-\vartheta x} \right| \leq 1$ gilt, gerade die Behauptung (5).

Beweis des Satzes 1. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit genügt es (wegen der Konvergenz von $\sum_n \frac{1}{(2q-1)^n}$), E^k -limitierbare Folgen $\{s_n\}$ mit $\sigma_n = o(1)$ zu untersuchen. Wegen (2) und $\left| \frac{1-q}{2q-1} \right| < 1$ ist

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^n \frac{s_\nu}{(2q-1)^\nu} &= \sum_{\nu=0}^n \frac{1}{(2q-1)^\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} (1-q)^{\nu-\mu} q^\mu \sigma_\mu \\ &= \sum_{\mu=0}^n q^\mu \sigma_\mu \sum_{\nu=\mu}^n \binom{\nu}{\mu} \frac{(1-q)^{\nu-\mu}}{(2q-1)^\nu} \\ &= \sum_{\mu=0}^n \frac{q^\mu \sigma_\mu}{(2q-1)^\mu} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+\mu}{\nu} \left(\frac{1-q}{2q-1} \right)^\nu \\ &\quad - \sum_{\mu=0}^n \frac{q^\mu \sigma_\mu}{(2q-1)^\mu} \sum_{\nu=n-\mu+1}^{\infty} \binom{\nu+\mu}{\nu} \left(\frac{1-q}{2q-1} \right)^\nu = \text{I} + \text{II}. \end{aligned}$$

Es ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+\mu}{\nu} \left(\frac{1-q}{2q-1} \right)^\nu = \left(\frac{2q-1}{3q-2} \right)^\mu \frac{2q-1}{3q-2}$ und deshalb

$$\text{I} = \frac{2q-1}{3q-2} \sum_{\mu=0}^n \left(\frac{q}{3q-2} \right)^\mu \sigma_\mu \rightarrow \frac{2q-1}{3q-2} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{q}{3q-2} \right)^\mu \sigma_\mu$$

für $n \rightarrow \infty$, da $\left| \frac{q}{3q-2} \right| < 1$ ist.

Der Satz 1 ist bewiesen, wenn gezeigt wird, daß $\text{II} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, daß also

$$(6) \quad \overline{\lim}_n \sum_{\mu=0}^n \left| \left(\frac{q}{2q-1} \right)^\mu \right|_{\nu=n-\mu+1} \sum_{\nu=n-\mu+1}^{\infty} \binom{\nu+\mu}{\nu} \left(\frac{1-q}{2q-1} \right)^\nu < +\infty$$

ist, denn es ist $\sigma_n = o(1)$ und

$$\left(\frac{q}{2q-1} \right)^\mu \sum_{\nu=n-\mu+1}^{\infty} \binom{\nu+\mu}{\nu} \left(\frac{1-q}{2q-1} \right)^\nu \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$ und jedes feste μ .

Die Bedingung (6) ist erfüllt; nach (5) ist nämlich

$$(7) \quad \left| \sum_{\nu=n-\mu+1}^{\infty} \binom{\nu+\mu}{\nu} \left(\frac{1-q}{2q-1} \right)^\nu \right| \leq \binom{n+1}{\mu} \left| \frac{1-q}{2q-1} \right|^{n+1-\mu},$$

da $-1 < \frac{1-q}{2q-1} < 0$ ist. Wegen (7) ist (6) richtig, da

$$\sum_{\mu=0}^n \left(\frac{q}{2q-1} \right)^\mu \binom{n+1}{\mu} \left(\frac{q-1}{2q-1} \right)^{n+1-\mu} \leq \left(\frac{2q-1}{2q-1} \right)^{n+1} = 1$$

ist.

Bemerkenswert ist, daß die Zahlen $\varepsilon_n = \frac{(-1)^n}{(2q-1)^n}$ keine Konvergenzfaktoren sind. Die Folge $s_n = \frac{(-1)^n(2q-1)^n}{n+1}$ ist nämlich E^k -limitierbar. Dies folgt aus

$$\sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} (q-1)^{n-\nu} \frac{(1-2q)^\nu}{\nu+1} = \frac{1}{(n+1)} \sum_{\nu=0}^n \binom{n+1}{\nu+1} (q-1)^{n-\nu} (1-2q)^\nu = \frac{O(q^n)}{n+1}.$$

Für diese Folge gilt aber

$$\sum_{\nu=0}^n s_\nu \varepsilon_\nu = \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^\nu (2q-1)^\nu}{\nu+1} \frac{(-1)^\nu}{(2q-1)^\nu} = \sum_{\nu=0}^n \frac{1}{\nu+1} \rightarrow +\infty \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Eine Reihe $\sum a_\nu$ heißt E^k -summierbar, wenn ihre Teilsummen $s_n = \sum_{\nu=0}^n a_\nu$ E^k -limitierbar sind. Aus Satz 1 können wir über E^k -summierbare Reihen den folgenden Satz ableiten.

Satz 2. Für alle E^k -summierbaren Reihen $\sum a_\nu$ konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a_\nu}{(2q-1)^\nu}$.

$$\text{Beweis. Es ist } \sum_{\nu=0}^n \frac{a_\nu}{(2q-1)^\nu} = \frac{s_n}{(2q-1)^n} + \frac{2q-2}{2q-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{s_\nu}{(2q-1)^\nu} = \text{I+II.}$$

Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert I wegen (3) und II wegen Satz 1.

Literatur.

HARDY, G. H.

[1] Divergent series. Oxford 1949.

JURKAT, W. und PEYERIMHOFF, A.

[2] Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen. Math. Zeitschr. **55** (1952), S. 92–108.

KNOPP, K.

[3] Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Springer 1947.

PEYERIMHOFF, A.

[4] Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. Math. Zeitschr. **55** (1952), S. 23–54.

ZELLER, K.

[5] Abschnittskonvergenz in FK-Räumen. Math. Zeitschr. **55** (1952), S. 55–70.

(Eingegangen am 12. Oktober 1951.)

Ergänzungsgleichheit k -dimensionaler Polyeder.

Von

H. Hadwiger in Bern.

I. Zerlegungsgleichheit.

A, B, C, \dots sollen abgeschlossene und eigentliche¹⁾ Polyeder des k -dimensionalen euklidischen Raumes R_k bezeichnen. Unter $A + B$ wird wie üblich ein Polyeder verstanden, das sich im Sinne der Elementargeometrie in die beiden Polyeder A und B zerlegen läßt, so daß also A und B höchstens Randpunkte, jedoch keine inneren Punkte gemeinsam haben. Alle im folgenden vorkommenden Polyederadditionen sind stets stillschweigend an diese Konvention gebunden. — Es sei weiter G eine Bewegungsgruppe im R_k , die bis auf die Bedingung $T < G$, wonach die Translationsgruppe T als Untergruppe in G enthalten sein soll, beliebig gewählt werden kann. — Zwei Polyeder A und B heißen G -gleich (kongruent), geschrieben $A \cong B$, wenn B durch eine Bewegung der Gruppe G aus A hervorgeht. Die G -Gleichheit ist offenbar reflexiv, symmetrisch und transitiv. — Zwei Polyeder A und B nennen wir G -zerlegungsgleich, geschrieben $A \sim B$, wenn sie sich in paarweise G -gleiche Teilpolyeder zerlegen lassen, so daß also $A = \sum_1^n A_\nu$ und $B = \sum_1^m B_\nu$ gilt, wobei $A_\nu \cong B_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) ist. Wie sich leicht überprüfen läßt, ist die G -Zerlegungsgleichheit wieder reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Es soll noch eine für die Zerlegungstheorie der Polyeder nützliche Bezeichnungsweise eingeführt werden: Ist n eine natürliche Zahl, so bedeute $n \cdot A$ ein Polyeder, das sich in n Teilpolyeder zerlegen läßt, die alle mit A G -zerlegungsgleich sind, so daß sich also $n \cdot A = \sum_1^n A_\nu$, $A_\nu \sim A$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) aufschreiben läßt. Alle Polyeder, die sich bei vorgegebenem n und A als $n \cdot A$ darstellen lassen, sind unter sich offenbar G -zerlegungsgleich; es gilt $n \cdot (A + B) = n \cdot A + n \cdot B$, $(n + m) \cdot A = n \cdot A + m \cdot A$, $nm \cdot A = n \cdot m \cdot A$.

II. Ergänzungsgleichheit.

Zwei Polyeder A und B heißen G -ergänzungsgleich, wenn sich durch Hinzufügung zweier G -zerlegungsgleicher Polyeder C und D zwei G -

¹⁾ Ein eigentliches Polyeder sei als Vereinigungsmenge endlich vieler k -dimensionaler abgeschlossener nicht-entarteter Simplexe darstellbar.

zerlegungsgleiche Polyeder gewinnen lassen, so daß also mit $C \sim D$ sich $A + C \sim B + D$ ergibt. Es gilt nun der folgende

Satz A. *Sind zwei eigentliche Polyeder A und B des k -dimensionalen euklidischen Raumes bezogen auf eine Bewegungsgruppe G G -ergänzungsgleich, so sind sie auch G -zerlegungsgleich, d. h. aus $A + C \sim B + D$ und $C \sim D$ folgt $A \sim B$.*

Wir wollen noch besonders darauf hinweisen, daß Satz A bei Zulassung uneigentlicher oder unterdimensionaler Polyeder falsch wird. In der Tat: Es sei W ein k -dimensionaler Würfel und $k > 1$; wählt man A als (0-dim.) Ecke und B als (1-dim.) Kante von W und setzt $C = D = W$, so sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, aber die Behauptung $A \sim B$ ist natürlich unrichtig²⁾.

Für gewöhnliche Polyeder ($k = 3$) und bezogen auf Ergänzungsgleichheit und Zerlegungsgleichheit im klassischen Sinn ($G =$ volle Bewegungsgruppe) wurde unser Satz A von J. P. SYDLER³⁾ erstmals allgemein bewiesen. Damit ist die Unterscheidung von Zerlegungsgleichheit und Ergänzungsgleichheit, die man seit EUKLID stets beachten mußte, als unwesentlich erkannt; jedoch liegt diese Tatsache wesentlich tiefer, als man vor allem im Hinblick auf den elementargeometrischen Charakter der Fragestellung geneigt ist anzunehmen. — Die SYDLERSche Beweis-konstruktion kann nicht ohne weiteres auf den höher-dimensionalen Fall angewendet werden, jedoch haben wir in unserem Beweis, den wir in Abschnitt IV entwickeln, einen interessanten Gedanken des SYDLERSchen Beweises sehr wesentlich verwendet. Der Aufstieg in die höheren Dimensionen wird ermöglicht erstens durch eine neue Einteilung der Polyeder in Zylinderklassen, die in Abschnitt III näher erklärt ist, und zweitens durch einen vom Verf. kürzlich bewiesenen Satz⁴⁾, wonach inhaltsgleiche Parallelotope T -zerlegungsgleich sind.

Es gibt noch eine Ergänzungsgleichheit anderer Art, die für die weitere Entwicklung der Zerlegungstheorie der Polyeder von Bedeutung ist: Zwei Polyeder A und B wollen wir *G -selbstergänzungsgleich* nennen, wenn sie durch Hinzufügung je gleich vieler mit A und B je G -zer-

²⁾ Diese Bemerkung zeigt, daß die sich auf die Ergänzungsgleichheit beziehenden Sätze tiefer liegen müssen. Es gibt keine logisch-formalen Beweise wie sie etwa für die Verifikation der Transitivität ohne weiteres zur Verfügung stehen; die polyedrische Struktur muß in Verbindung mit der vorausgesetzten Eigentlichkeit sich an passender Stelle einschalten. In engem Zusammenhang mit diesen Schwierigkeiten steht auch die Tatsache, daß die entsprechenden Sätze für die Multikongruenz oder Endlichgleichheit von Punktmengen allgemein unrichtig sind. Vgl. z. B. hierüber A. TARSKI, Über das absolute Maß linearer Punktmengen. Fund. math. **30**, 1938, 218–234 insb. Bemerkungen zum Subtraktionsatz 1. 15.

³⁾ J. P. SYDLER, Sur la décomposition des polyèdres. Comment. math. helv. **16**, 1943/44, 266–273.

⁴⁾ H. HADWIGER, Translative Zerlegungsgleichheit k -dimensionaler Parallelotope. Collectanea math. **3**, 1951.

legungsgleicher Polyeder in G -zerlegungsgleiche Polyeder übergehen, so daß also $n \cdot A \sim n \cdot B$ gilt. Hier gilt analog der folgende

Satz B. *Sind zwei eigentliche Polyeder A und B des k -dimensionalen euklidischen Raumes bezogen auf eine Bewegungsgruppe G G -selbstergänzungsgleich, so sind sie auch G -zerlegungsgleich, d. h. aus $n \cdot A \sim n \cdot B$ folgt $A \sim B$.*

Unser Satz B hängt sehr eng mit einer Gruppe von Sätzen zusammen, die in einem allgemeinen Abbildungssatz von D. KÖNIG und S. VALKO⁵⁾ ihren Ursprung haben, und deren Beweise verwickelt sind. Die bereits oben erwähnte Einteilung in Zylinderklassen von Abschnitt III ermöglicht hier einen direkten und kurzen Beweis, den wir ebenfalls in Abschnitt IV entwickeln werden.

III. Zylinderklassen.

Um eine einfache Beschreibung einiger im folgenden zur Anwendung kommenden Operationen zu ermöglichen, charakterisieren wir die Punkte des Raumes durch ihre in einem Ursprung O angreifenden Ortsvektoren. — Eine *Dilatation* mit λ ($0 < \lambda < \infty$) führt das Polyeder A in das zu A homothetische Polyeder λA über; die Ortsvektoren der Punkte von $A' = \lambda A$ sind durch $\mathbf{a}' = \lambda \mathbf{a}$ gegeben, wobei \mathbf{a} die Ortsvektoren der Punkte von A bedeuten. — Die *MINKOWSKISCHE Addition* $A \times B$ zweier Polyeder A und B kann wie folgt erklärt werden: Die Ortsvektoren der Punkte von $C = A \times B$ ergeben sich nach Ansatz $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, wobei die Ortsvektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} der Punkte von A und B unabhängig variieren sollen. Die MINKOWSKISCHE Addition ist kommutativ, assoziativ und in Verbindung mit der Dilatation distributiv. Im Rahmen dieser Arbeit soll die Operation $A \times B$ nur in dem spezielleren Fall zur Anwendung kommen, wo beide Polyeder A und B unterdimensional sind und in den beiden eigentlichen Teilräumen R_{k_a} und R_{k_b} des R_k der Dimension k_a und k_b ($0 < k_a, k_b < k$) liegen, welche keine Parallelität aufweisen, also keine Raumrichtung gemeinsam haben sollen. Ein sich auf diese Weise ergebendes Polyeder $A \times B$ nennen wir einen *Zylinder*. Für derartige Zylinder gelten Gesetze wie $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$, $(\lambda A \times \lambda B) = \lambda(A \times B)$ usw. — Ein Polyeder A wollen wir nun einen *i -stufigen Zylinder* nennen, wenn eine Darstellung als i -stufige MINKOWSKISCHE Summe der Form $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_i$ möglich ist, wobei $A_\nu \subset R_{k_\nu}$, $k_\nu \geq 1$ ($\nu = 1, 2, \dots, i$) und $k_1 + k_2 + \dots + k_i = k$ gilt. Die Stufenzahl i stellt einen Grad zylindrischer Entartung dar. Innerhalb dieser Klassifikation ist ein 1-stufiger Zylinder (niedrigste Entartung) ein beliebiges Polyeder, also nicht notwendigerweise ein eigentlich zylindrisches Polyeder; dagegen ist ein k -stufiger Zylinder

⁵⁾ D. KÖNIG und S. VALKÓ, Über mehrdeutige Abbildungen von Mengen. Math. Ann. 95, 1925, 135—138.

(höchste Entartung) offenbar ein Parallelotop. — Nach dem soeben erörterten Gesichtspunkte wollen wir nun innerhalb der Klasse \mathfrak{R} der k -dimensionalen eigentlichen Polyeder eine Skala $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 > \mathfrak{R}_2 > \dots > \mathfrak{R}_k$ von Teilklassen fixieren: Die Klasse \mathfrak{R}_i bestehe aus allen Polyedern von \mathfrak{R} , die mit endlich vielen i -stufigen Zylindern G -zerlegungs-gleich sind.

Wir beweisen nun den folgenden

Hilfssatz. Ist $A \in \mathfrak{R}_i$, so gilt $A = A' + n^i \cdot \frac{1}{n} A$, wobei $A' \in \mathfrak{R}_{i+1}$ ausfällt; für $i = k$ ist A' leer.

Für $i = 1$ handelt es sich um die k -dimensionale Verallgemeinerung eines Lemmas von J. P. SYDLER⁶⁾; für $i = k$ ergibt sich die triviale Tatsache, daß sich ein k -dimensionales Parallelotop A in n^k homothetische Parallelotope $\frac{1}{n} A$ zerlegen läßt.

Den Beweis des Hilfssatzes führen wir zunächst für *Fall a*: Es sei $i = 1$. Es genügt offenbar, den Beweis für den spezielleren Fall zu führen, daß A ein eigentliches k -dimensionales Simplex S ist. Da G nach der Bedingung $T < G$ die Translationen enthält, darf eine Ecke von S im Ursprung 0 angenommen werden. Die Ortsvektoren \mathfrak{s} der Punkte von S bilden nun die k -parametrische Schar

$$\mathfrak{s} = \sum_1^k \alpha_\nu \mathfrak{a}_\nu \quad [1 \geq \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_k \geq 0],$$

wobei die \mathfrak{a}_ν k linear unabhängige Kantenvektoren von S bezeichnen. Es sei zunächst ein λ , $0 < \lambda < 1$, beliebig gewählt. Es gibt nun eine von λ abhängige Zerlegung von S in $k + 1$ Teile S_μ , also $S = \sum_0^k S_\mu$, deren Teile durch die Ansätze

$$\mathfrak{s}_\mu = \sum_1^k \alpha_\nu \mathfrak{a}_\nu \quad [1 \geq \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_\mu \geq \lambda \geq \alpha_{\mu+1} \geq \dots \geq \alpha_k \geq 0]$$

gegeben sind; \mathfrak{s}_μ bezeichnen die Ortsvektoren der Punkte von S_μ . Mühelos erkennt man, daß die S_μ paarweise keine inneren Punkte aufweisen können und daß sie in ihrer Vereinigung das Simplex S vollständig ausfüllen, so daß eine richtige Zerlegung vorliegt. Weiter sieht man, daß $S_0 \cong \lambda S$ und $S_k \cong (1 - \lambda) S$ gilt, wobei man wieder $T < G$ zu beachten hat. Für $0 < \mu < k$ ist dagegen $S_\mu = P_\mu \times Q_\mu$, falls P_μ bzw. Q_μ die μ - bzw. $(k - \mu)$ -dimensionalen Simplexe bezeichnen, deren Ortsvektoren durch die Ansätze $\mathfrak{p} = \sum_1^\mu \alpha_\nu \mathfrak{a}_\nu$ [$1 \geq \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_\mu \geq \lambda$] bzw. $\mathfrak{q} = \sum_{\mu+1}^k \alpha_\nu \mathfrak{a}_\nu$ [$\lambda \geq \alpha_{\mu+1} \geq \dots \geq \alpha_k \geq 0$] gegeben sind. Die S_μ sind demnach eigentliche Zylinder und gehören sicher zu Klasse \mathfrak{R}_2 .

Zusammenfassend haben wir das Ergebnis⁷⁾ $S = \lambda S + (1 - \lambda) S + S'$ mit $S' \in \mathfrak{R}_2$ gewonnen. Setzen wir der Reihe nach $\lambda = \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{2}$,

⁶⁾ loc. cit.: Fußnote ³⁾.

⁷⁾ Diese Zerlegung wurde in anderem Zusammenhang bereits beschrieben und angewendet. Vgl. H. HADWIGER, Zur Inhaltstheorie der Polyeder. Collectanea math. 3, 1950, 136—168; insb. § 4.

wobei wir das obige Ergebnis in passender Weise aufeinanderfolgend verwenden, so resultiert $S = n \cdot \frac{1}{n} S + S'$ mit $S' \in \mathfrak{R}_2$. Da sich nun ein beliebiges Polyeder A in Simplexe zerlegen läßt, gilt offenbar auch $A = n \cdot \frac{1}{n} A + A'$ mit $A' \in \mathfrak{R}_2$, w. z. b. w. Im Fall $k = 1$ ist offensichtlich A' leer.

Nun zu *Fall b*: Es sei $1 < i \leq k$. Das Polyeder A sei zunächst selbst ein eigentlicher i -stufiger Zylinder. Nach Definition gilt demnach $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_i$, wobei $A_\nu \in R_{k_\nu}$, $k_\nu \geq 1$ ($\nu = 1, 2, \dots, i$) und $k_1 + k_2 + \dots + k_i = k$ ist. Das k_ν -dim. Polyeder A_ν , gestattet nach dem soeben sichergestellten Ergebnis von Fall a in seinem Trägerraum R_{k_ν} eine Zerlegung $A_\nu = A'_\nu + n \cdot \frac{1}{n} A_\nu$, wo A'_ν für $k_\nu > 1$ einen eigentlichen Zylinder des R_{k_ν} bedeutet, für $k_\nu = 1$ aber leer ist. Für das ursprüngliche Zylinderpolyeder A resultiert nun die Darstellung

$$A = \left(A'_1 + n \cdot \frac{1}{n} A_1 \right) \times \left(A'_2 + n \cdot \frac{1}{n} A_2 \right) \times \dots \times \left(A'_i + n \cdot \frac{1}{n} A_i \right).$$

Nach den geltenden Kommutativ- und Distributivregeln läßt sich dies wie folgt entwickeln

$$A = \sum A'_{\nu_1} \times \dots \times A'_{\nu_j} \times n \cdot \frac{1}{n} A_{\mu_1} \times \dots \times n \cdot \frac{1}{n} A_{\mu_{i-j}},$$

wobei ν_1, \dots, ν_j eine Kombination der Indizes $1, 2, \dots, i$ zur Klasse j und μ_1, \dots, μ_{i-j} die komplementäre Kombination der gleichen Indizes zur Klasse $i - j$ bezeichnet; die Summation ist über alle Kombinationen zur Klasse j und über alle j von $j = 0$ bis $j = i$ zu erstrecken. Für $j = 0$ ist der einzige Summand

$$n \cdot \frac{1}{n} A_1 \times n \cdot \frac{1}{n} A_2 \times \dots \times n \cdot \frac{1}{n} A_i = n^i \cdot \frac{1}{n} A.$$

Für $j > 1$ enthält jeder nicht leere Summand in seiner Darstellung als i -stufige MINKOWSKISCHE Summe wenigstens ein Glied A'_ν , das nach Konstruktion im MINKOWSKISCHEN Sinne weiter zerfällt, da es in seinem Trägerraum R_{k_ν} ein eigentliches Zylinderpolyeder ist. Jeder derartige Summand ist somit mindestens eine $(1 + i)$ -stufige MINKOWSKISCHE Summe und stellt also einen wenigstens $(1 + i)$ -stufigen Zylinder dar. Zusammenfassend läßt sich demnach das Ergebnis $A = A' + n^i \cdot \frac{1}{n} A$ mit $A' \in \mathfrak{R}_{i+1}$ feststellen. Ist nun allgemeiner $A \in \mathfrak{R}_i$, so läßt sich nach unserer Konvention A in Teilpolyeder zerlegen, die alle mit i -stufigen Zylinderpolyedern G -zerlegungsgleich sind. Indem man das oben erzielte Ergebnis einzeln auf diese Zylinderpolyeder anwendet und dann zusammenfaßt, ergibt sich die Behauptung unseres Hilfssatzes. Der Fall $i = k$ ist in der soeben entwickelten Beweisführung formal enthalten; die A'_ν sind alle leer und so wird auch A' leer.

IV. Beweise der Sätze über die Zerlegungsgleichheit ergänzungsgleicher Polyeder.

Zunächst wenden wir uns dem Beweis von Satz A zu: Es gelte also

$$(a) \quad A + C \sim B + D \quad \text{und} \quad (b) \quad C \sim D.$$

Falls $A, B \in \mathfrak{R}_k$ gilt, so daß diese beiden als eigentlich vorausgesetzten Polyeder mit Parallelotopen G -zerlegungsgleich sind, folgt die Behauptung $A \sim B$ mit der sich aus (a) und (b) ergebenden Inhaltsgleichheit $V(A) = V(B)$ auf Grund des oben erwähnten Satzes ⁸⁾, wonach inhaltsgleiche eigentliche Parallelotope T -zerlegungsgleich, insbesondere also auch G -zerlegungsgleich sind. — Wir treffen nun die induktive Annahme, daß die Richtigkeit des Satzes A bereits unter der Nebenbedingung $A, B \in \mathfrak{R}_{i+1}$ erwiesen sei, wo $1 \leq i < k$ ist. Nach dem soeben Erwähnten trifft diese Annahme für $i = k - 1$ sicher zu. Es liege nun der Fall vor, wo $A, B \in \mathfrak{R}_i$ gilt. Nach dem im Abschnitt III bewiesenen Hilfsatz über die Zerlegung von Zylinderpolyedern läßt sich eine Zerlegung (c) $A = P + n^i \cdot \frac{1}{n} A$ vorkehren, wobei $P \in \mathfrak{R}_{i+1}$ gilt. Die hier willkürlich wählbare natürliche Zahl n genüge der Nebenbedingung $n^{k-i} > 1 + V(C)/V(A)$. Man beachte an dieser Stelle, daß die Voraussetzung der Eigentlichkeit von A in der Form $V(A) > 0$ beansprucht wird. — Wir führen nun ein Polyeder $S = n^i \cdot \frac{1}{n} C$ ein und bemerken zunächst, daß $V(S) = n^{i-k} V(C)$ ist. Im Hinblick auf die für n geforderte Nebenbedingung rechnet man mit $V(P) = (1 - n^{i-k})V(A)$ leicht aus, daß $V(P) > V(S)$ ausfällt. Nach elementaren Überlegungen ist S zu einem Teilpolyeder von P T -zerlegungsgleich, also auch G -zerlegungsgleich; dies wollen wir nunmehr wie folgt ausdrücken: (d) $P \sim T + n^i \cdot \frac{1}{n} C$. Durch Einsatz in (c) wird hieraus $A \sim T + n^i \cdot \frac{1}{n} (A + C)$ und weiter nach (a) auch $A \sim T + n^i \cdot \frac{1}{n} (B + D)$ oder wieder nach (b) schließlich $A \sim T + n^i \cdot \frac{1}{n} (B + C)$. Vergleichen wir jetzt wieder mit (d), so resultiert (x) $A \sim P + n^i \cdot \frac{1}{n} B$. Analog zu (c) hat man auch (y) $B \sim Q + n^i \cdot \frac{1}{n} B$.

Führen wir noch die beiden Hilfspolyeder $U = n^i \cdot \frac{1}{n} B + C$ und $V = n^i \cdot \frac{1}{n} B + D$ ein, so ergibt sich nach (a) aus (x) und (y) $P + U \sim Q + V$. Da aber auch $U \sim V$ gilt, und nach Konstruktion $P, Q \in \mathfrak{R}_{i+1}$ ist, folgert man auf Grund der induktiven Voraussetzung zunächst $P \sim Q$ und nach (x) und (y) somit die Behauptung $A \sim B$ für den vorgesehenen

⁸⁾ loc. cit.: Fußnote *).

Fall $A, B \in \mathfrak{R}_i$. Diese ist demnach auch für $i = 1$, d. h. auch für beliebige Polyeder richtig, w. z. b. w.

Nun zum Beweis von Satz B: Es gelte also (a) $n \cdot A \sim n \cdot B$. Falls $A, B \in \mathfrak{R}_k$ gilt, ergibt sich die Behauptung $A \sim B$ mit der aus (a) folgenden Inhaltsgleichheit $V(A) = V(B)$ in gleicher Weise wie beim vorstehenden Beweis. — Wir treffen wieder die induktive Annahme, daß die Richtigkeit von Satz B bereits unter der Nebenbedingung $A, B \in \mathfrak{R}_{i+1}$ erwiesen sei. Für $i = k - 1$ trifft diese Annahme sicher zu. Es liege nun der Fall $A, B \in \mathfrak{R}_i$ vor. Analog wie beim vorstehenden Beweis betrachten wir zwei Zerlegungen der Form (b) $A = P + n^i \cdot \frac{1}{n} A$ und ebenso (c) $B = Q + n^i \cdot \frac{1}{n} B$ mit $P, Q \in \mathfrak{R}_{i+1}$. Nach (a) folgt jetzt $n \cdot P + n^{i+1} \cdot \frac{1}{n} A \sim n \cdot Q + n^{i+1} \cdot \frac{1}{n} B$. Da nach (a) offenbar $n^{i+1} \cdot \frac{1}{n} A \sim n^{i+1} \cdot \frac{1}{n} B$ gilt, folgt nach Satz A aus der vorstehenden Relation $n \cdot P \sim n \cdot Q$ und wegen $P, Q \in \mathfrak{R}_{i+1}$ nach der induktiven Annahme also $P \sim Q$. Bedenkt man, daß wegen $i \geq 1$ nach (a) offensichtlich $n^i \cdot \frac{1}{n} A \sim n^i \cdot \frac{1}{n} B$ gilt, so resultiert nach den Darstellungen (b) und (c) $A \sim B$ für den Fall $A, B \in \mathfrak{R}_i$. Diese Behauptung ist demnach auch richtig für $i = 1$, d. h. auch für beliebige Polyeder, w. z. b. w.

(Eingegangen am 3. Oktober 1951.)

Eine Minkowskische Ungleichung für beliebige Mengen und ihre Anwendung auf Extremalprobleme.

Von

D. Ohmann in Frankfurt a. M.

Das Hauptziel dieser Arbeit ist es, die MINKOWSKISCHE Ungleichung

$$(1) \quad V(K_1, K_2 \cdot K_2)^n \geq V(K_1) V(K_2)^{n-1},$$

die zwischen den konvexen Körpern K_1 und K_2 besteht, auf beliebige Mengen zu übertragen. Wir definieren dazu in § 1 in geeigneter Weise das gemischte Maß zwischen einer Menge und einem zentral-symmetrischen konvexen Körper. Da wir von den betrachteten Mengen lediglich Beschränktheit verlangen und alle Maße im Sinne von LEBESGUE definieren, werden wir es dabei mit inneren und äußeren gemischten Maßen zu tun haben, von denen wir die einen stets klein und die anderen stets groß schreiben werden. Wenn wir die Menge mit A und den konvexen Körper mit K bezeichnen, geht (1) in das Ungleichungspaar über¹⁾:

$$\begin{aligned} I \quad (a) \quad & m(A, K \dots K)^n \geq m(A) m(K)^{n-1} \\ (b) \quad & M(A, K \dots K)^n \geq M(A) M(K)^{n-1}. \end{aligned}$$

Bei der Herleitung gehen wir so vor, daß wir erst (§ 2) Ungl. I auf eine Weise, die der Methode von G. SZEKERES¹⁾ nachgebildet ist, für Mengen beweisen, die aus endlich vielen konvexen Körpern bestehen; um dann (§ 3) mit Hilfe der einer Menge zuzuordnenden konvexen „Rumpfkörper“ die Übertragung auf beliebige Mengen vorzunehmen. Schließlich wird in § 4 der Rahmen der Betrachtungen dadurch erweitert, daß wir bei vorgegebenen gemischten Maßen mit den m festen konvexen Körpern K , denen wir noch geeignete Be-

¹⁾ In ähnlicher Richtung gehende Untersuchungen sind angestellt worden von: G. SZEKERES: Ein Problem über mehrere ebene Bereiche.

B. von SZ. NAGY: Über ein geometrisches Extremalproblem.

J. FAVARD: Sur le problème traité par G. SZEKERES et B. v. SZ. NAGY.

Acta Univ. Szeged, Acta Sci. math. **9** (1940); 247—252; 253—257 bzw. 258 bis 260.

Man beschränkt sich dort im wesentlichen auf die Betrachtung von Mengen, die aus endlich vielen konvexen Körpern bestehen, für den Fall, daß K eine Kugel darstellt.

dingungen auferlegen, nach Mengen maximalen Maßes fragen. Dabei wird allerdings die Frage nach der Einzigkeit der Extremalmengen nicht berührt.

§ 1.

Wir haben zunächst einige Definitionen an den Anfang zu stellen:

1. Unter dem linearen Normalriß $\alpha(\xi)$ einer Menge A verstehen wir die durch parallele $(n-1)$ -dim. Hyperebenen der Normalenrichtung ξ vermittelte Projektion von A auf eine Gerade der Richtung ξ . Dann bezeichnen wir das lineare innere (äußere) Maß von $\alpha(\xi)$ als lineares inneres (äußeres) Quermaß $q(\xi)$ ($Q(\xi)$) von A und die Extremalen q_1, q_2 (Q_1, Q_2) von $q(\xi)$ ($Q(\xi)$) als Haupt- bzw. Nebenquermaße:

$$(2) \quad q_1 \geq q(\xi) \geq q_2 \quad Q_1 \geq Q(\xi) \geq Q_2.$$

Ist K noch ein konvexer Körper, so definieren wir als gemischtes Maß von A mit K das über die Einheitskugel Ω_n zu erstreckende untere LEBESGUE-STIELTJES-Integral:

$$(3) \quad m(A, K \dots K) = \frac{1}{2^n} \int_{-\Omega_n} q(A, \xi) dO(K, \xi)$$

$$M(A, K \dots K) = \frac{1}{2^n} \int_{-\Omega_n} Q(A, \xi) dO(K, \xi),$$

dabei ist unter $O(K, \xi)$ die auf die äußere Normalenrichtung ξ als $(n-1)$ -faches Parameter bezogene Oberflächenfunktion von K verstanden.

2. Wie schon angedeutet, werden die Rumpfkörper einer Menge eine bedeutsame Rolle in unseren ferneren Entwicklungen spielen. Sie sind kurz folgendermaßen zu definieren: Wir deuten die Funktion $\frac{1}{2} q(A, \xi)$ als Abstand von $(n-1)$ -dim. Ebenen $E(\xi)$ der Normalenrichtung ξ von einem festen Ursprung O und bezeichnen den konvexen Durchschnitt aller durch die $E(\xi)$ definierten und O enthaltenden Halbräume als inneren Rumpfkörper R'_A . In entsprechender Weise verläuft die Konstruktion des äußeren Rumpfkörpers R''_A aus der äußeren Quermaßfunktion $Q(\xi)$. Aus den Definitionen entnehmen wir unmittelbar:

$$(4) \quad \begin{aligned} q(R'_A, \xi) &\leq q(A, \xi), & Q(R''_A, \xi) &\leq Q(A, \xi), \\ q_j(R'_A) &\leq q_j(A), & Q_j(R''_A) &\leq Q_j(A), \quad (j = 1, 2) \\ m(R'_A, K \dots K) &\leq m(A, K \dots K), & M(R''_A, K \dots K) &\leq M(A, K \dots K). \end{aligned}$$

3. Für später merken wir einen Approximationssatz an, den wir, wenn wir die in 2. zur Konstruktion der Rumpfkörper benutzten Ebenen $E(\xi)$ als „erzeugende Ebenen“ bezeichnen, so formulieren können:

Der innere (äußere) Rumpfkörper einer Menge läßt sich beliebig genau durch Polyeder mit Mittelpunkt approximieren, deren Seitenflächen in erzeugenden Ebenen enthalten sind.

Da der Beweis für den inneren und den äußeren Rumpfkörper völlig gleich verläuft, beschränken wir uns dabei auf die Betrachtung des inneren Rumpfkörpers R'_A der Menge A : Wir bezeichnen dann mit \mathfrak{R} die Menge der — offenbar R'_A enthaltenden — Polyeder mit Mittelpunkt, deren Seitenflächen in erzeugenden Ebenen liegen, und mit $S(\xi)$ den durch die erzeugenden Ebenen $E(\xi)$ und $E(-\xi)$ begrenzten Parallelstreifen. Weiter sei $PS(\xi) \in \mathfrak{R}$ der Durchschnitt des Polyeders $P \in \mathfrak{R}$ mit $S(\xi)$ und $\mu(P)$ das Minimum des von ξ abhängigen Quermaßintegrals von $PS(\xi)$:

$$u(PS(\xi)) = \frac{1}{2n} \int_{\Omega_n} q[PS(\xi); \eta] d\omega_n(\eta),$$

(ω_n = Oberfläche der n -dim. Einheitskugel Ω_n).

Alsdann werde die Folge von Polyedern $P_j \in \mathfrak{R}$ dadurch definiert, daß, von einem Grundpolyeder $P_0 \in \mathfrak{R}$ ausgehend, $P_{j+1} = P_j S(\xi_j)$ statt hat, wobei ξ_j jedesmal derart gewählt sei, daß

$$u(P_j) - u(P_{j+1}) > \frac{1}{2} (u(P_j) - \mu(P_j))$$

bestehe.

Die P_j konvergieren dann gegen ihren Durchschnitt P^* , der, wie der Konstruktion zu entnehmen ist, von keiner erzeugenden Ebene mehr geschnitten werden kann, und daher mit dem Rumpfkörper R'_A identisch sein muß. Aus der Konvergenz der $P_j \in \mathfrak{R}$ gegen R'_A folgt jedoch schon unser Approximationssatz.

§ 2.

Zur Herleitung von Ungl. I für Mengen, die aus endlich vielen konvexen Körpern bestehen, sei A eine solche Menge und umfasse die konvexen Körper K_ρ ($\rho = 1, \dots, r$). Ist dann O ein fester Bezugspunkt und \bar{K}_ρ der Vektorkörper zu K_ρ , der O zum Mittelpunkt habe, so betrachten wir die Menge A_τ , die aus den Körpern

$$K_{\rho, \tau} = K_\rho + \tau \bar{K}_\rho$$

besteht, wobei die Addition im MINKOWSKISCHEN Sinn zu verstehen ist. Für das Quermaß $q(K_{\rho, \tau}; \xi)$ von $K_{\rho, \tau}$ gilt dann bekanntlich

$$(5) \quad q(K_{\rho, \tau}; \xi) = (1 + 2\tau) q(K_\rho; \xi)$$

und für das Volumen $V(K_{\rho, \tau})$

$$(6) \quad V(K_{\rho, \tau}) \geq (1 + 2\tau)^n V(K_\rho).$$

Um die Veränderung des Quermaßes von A abzuschätzen, beachten wir, daß der Normalriß $\alpha(\xi)$ aus endlich vielen Intervallen $\alpha_\mu(\xi)$ besteht, die sich jeweils als Vereinigungsmenge der Normalrisse $\alpha_{\mu,\sigma}(\xi)$ mehrerer Körper K_ρ darstellen. Gehören etwa die Normalrisse $\alpha_{\mu,\sigma}(\xi)$ ($\sigma = 1, \dots, \gamma_\mu$) zu $\alpha_\mu(\xi)$, so ist

$$m_1(\alpha_\mu(\xi)) \geq \max m_1(\alpha_{\mu,\sigma}(\xi)), \quad (\sigma = 1, 2, \dots, \gamma_\mu).$$

Beim Übergang zu A_τ geht die Vereinigungsmenge $\alpha_\mu(\xi)$ der $\alpha_{\mu,\sigma}(\xi)$ in ein Intervall $\alpha_\mu^*(\xi)$ über, das $\alpha_\mu(\xi)$ auf jeder Seite um höchstens $\max \tau m_1(\alpha_{\mu,\sigma}(\xi))$ überragt, woraus aber

$$m_1(\alpha_\mu^*(\xi)) \leq (1 + 2\tau) m_1(\alpha_\mu(\xi))$$

folgt. Da $\alpha(\xi)$ die Vereinigungsmenge der $\alpha_\mu(\xi)$ darstellt und $\alpha_\tau(\xi)$ die Vereinigungsmenge der $\alpha_\mu^*(\xi)$, und die $\alpha_\mu(\xi)$ zudem untereinander punktfremd sind, erhalten wir für das Quermaß $q(A_\tau; \xi) = m_1(\alpha_\tau(\xi))$ von A_τ schließlich

$$(7) \quad q(A_\tau; \xi) \leq (1 + 2\tau) q(A; \xi).$$

Daraus ergibt sich sofort für das gemischte Volumen mit dem zentralsymmetrischen konvexen Körper K :

$$(7a) \quad m(A_\tau; K \dots K) \leq (1 + 2\tau) m(A; K \dots K).$$

Nun wählen wir τ so groß, daß zwar keine zwei Körper $K_{\rho,\tau}$ innere Punkte gemeinsam haben können, jedoch wenigstens zwei einander berühren. Dann folgt aus (6):

$$(8) \quad m(A_\tau) \geq (1 + 2\tau)^n m(A),$$

so daß wir für das Defizit $\Phi(A; K) = m(A; K \dots K)^n - m(A) m(K)^{n-1}$ die Beziehung

$$(9) \quad \Phi(A_\tau; K) \leq (1 + 2\tau)^n \Phi(A; K)$$

erhalten. Ersetzen wir schließlich die einander berührenden Körper $K_{\rho,\tau}$ durch ihre gemeinsame konvexe Hülle, wodurch eine Menge A' entstehe, so wird das Quermaß dadurch in keiner Richtung vergrößert, während das Maß nicht abnimmt. Wir haben demnach keine Zunahme des Defizits Φ :

$$(10) \quad \Phi(A'; K) \leq \Phi(A_\tau; K).$$

Beachten wir noch, daß die Anzahl r' der konvexen Körper, aus denen sich A' zusammensetzt, geringer ist als die Anzahl r der konvexen Körper, die A umfaßt, und führen die für $n = 1$ bekanntlich richtige Induktionsvoraussetzung ein, daß $\Phi \geq 0$ für jede Menge statt hat, die aus weniger als r konvexen Körpern besteht, so folgt aus (9) und (10): $\Phi(A; K) \geq 0$, d. h. die Richtigkeit der Ungl. I für Mengen, die sich aus konvexen Körpern zusammensetzen.

§ 3.

Die Übertragung auf beliebige Mengen vollzieht sich nun derart, daß wir zunächst für Mengen aus konvexen Körpern zeigen, daß der Rumpfkörper kein geringeres Maß besitzt als die Menge selbst, dieses Ergebnis auf beliebige Mengen übertragen und daraus die Ungleichungen I herleiten.

1. Ist A eine Menge, die aus endlich vielen konvexen Körpern besteht, so können wir aus der dann sicher statthabenden stetigen Abhängigkeit des Quermaßes von der zugehörigen Richtung folgern, daß durch jeden Punkt der Oberfläche des Rumpfkörpers wenigstens eine erzeugende Ebene hindurchgeht. Indem wir dann die Menge \mathcal{P} auf der Einheitskugel durch die Festsetzung definieren

$$(11) \quad q(R_A, \xi) < q(A, \xi) \text{ für } \xi \in \mathcal{P}; \quad q(R_A, \xi) = q(A, \xi) \text{ für } \xi \notin \mathcal{P},$$

ergibt sich, daß durch jeden Punkt der Oberfläche von R_A , in dem wenigstens eine Stütznormalenrichtung ξ_0 der Menge \mathcal{P} angehört, zumindest zwei Stützebenen hindurchgehen, nämlich eine erzeugende Ebene und die Ebene der Normalenrichtung $\xi_0 \in \mathcal{P}$, die wegen (11) keine erzeugende Ebene sein kann. Damit weisen sich alle solche Punkte als Ecken- oder Kantenpunkte aus. Da deren Gesamtheit jedoch bekanntlich das Maß null zukommt, gilt:

$$(12) \quad \int_{\mathcal{P}} dO(R_A; \xi) = 0,$$

woraus wir unmittelbar auf

$$\int_{\mathcal{P}} q(A; \xi) dO(R_A; \xi) = \int_{\mathcal{P}} q(R_A; \xi) dO(R_A; \xi) = 0$$

schließen können, dem wir wiederum

$$(13) \quad \begin{aligned} m(A, R_A \dots R_A) &= \frac{1}{2^n} \int_{\xi \notin \mathcal{P}} q(A, \xi) dO(R_A; \xi) \\ &= \frac{1}{2^n} \int_{\xi \notin \mathcal{P}} q(R_A; \xi) dO(R_A; \xi) = m(R_A) \end{aligned}$$

entnehmen können. Aus der MINKOWSKISCHEN Ungleichung zwischen A und R_A erhalten wir damit

$$(14) \quad m(R_A) \geq m(A).$$

2. Um diese Beziehung auf beliebige Mengen zu übertragen, approximieren wir vermöge unseres Approximationssatzes (§ 1, 3) den inneren Rumpfkörper R'_A der beliebigen Menge A derart durch ein Mittelpunktspolyeder P_k , dessen Seitenflächen in erzeugenden Ebenen liegen, daß bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$

$$(15) \quad m(P_k) - m(R'_A) < \frac{\varepsilon}{2}$$

bestehe. Sind dann ξ_x ($x = 1, 2, \dots, k$) die Richtungen der Seitenflächennormalen von P_k , so approximieren wir die Normalrisse $\alpha(\xi_x)$ von A durch lineare abgeschlossene Mengen $\alpha'_x \leq \alpha(\xi_x)$ und diese durch lineare Mengen $\alpha''_x \geq \alpha'_x$, die aus endlich vielen Intervallen bestehen, so daß, wenn D den Durchmesser von A angibt, statthabe:

$$(16) \quad \begin{aligned} m_1[\alpha(\xi_x)] - m_1(\alpha'_x) &< \frac{\varepsilon}{2k D^{n-1}}, \\ m_1(\alpha''_x) &= m_1(\alpha(\xi_x)). \end{aligned}$$

Die Vereinigungsmenge Σ_x der Ebenen, der Normalenrichtung ξ_x , die mit der Menge α''_x Punkte gemeinsam haben, enthält nach (16) die Menge A bis auf höchstens eine Teilmenge des inneren Maßes $\frac{\varepsilon}{2k}$. Damit wird aber A bis auf höchstens eine Teilmenge des inneren Maßes $\frac{\varepsilon}{2}$ vom Durchschnitt A^* aller Σ_x ($x = 1, \dots, k$) enthalten:

$$(17) \quad m(A^*) - m(A) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da zudem $q(A^*, \xi_x) \leq m_1[\alpha(\xi_x)]$, ist wegen (16) der Rumpfkörper R'_{A^*} von A^* im Polyeder P_k enthalten, so daß wir, indem wir noch aus der Konstruktion des Durchschnitts A^* schließen, daß er aus endlich vielen konvexen Körpern besteht und mithin (14) für ihn Gültigkeit besitzt, aus (15) und (17)

$$m(R'_A) - m(A) > -\varepsilon$$

folgern dürfen. Da hierin $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben war, ergibt sich die erste der beiden Ungleichungen:

$$(18) \quad m(R'_A) \geq m(A), \quad M(R''_A) \geq M(A).$$

Die für den äußeren Rumpfkörper maßgebende zweite Ungleichung läßt sich in völlig gleicher Weise herleiten, indem wir die entsprechenden Normalrisse zunächst durch offene Mengen und diese dann durch Mengen approximieren, die aus endlich vielen Intervallen bestehen.

3. Aus der Richtigkeit der MINKOWSKISCHEN Ungleichung für die konvexen Rumpfkörper ergibt sich schließlich mit Hilfe von (4) und (18) die Erweiterung ihres Gültigkeitsbereiches auf beliebige Mengen in der zweifachen Form I.

§ 4.

Wir wollen nun noch einen Schritt weitergehen, indem wir bei vorgegebenen gemischten Maßen mit festen konvexen Körpern nach Mengen mit maximalem Maß fragen. Zur Beschreibung der Extremalmenge erinnern wir dabei an folgende Möglichkeit, konvexe Körper

zu kombinieren: Ist $O_\mu(\xi)$ die Oberflächenfunktion des konvexen Körpers K_μ ($\mu = 1, \dots, m$), so stellt auch

$$O_\lambda(\xi) = \sum_{\mu=1}^m \lambda_\mu^{n-1} O_\mu(\xi) \quad (\lambda_\mu \geq 0)$$

die Oberflächenfunktion eines konvexen Körpers dar, den wir durch

$$K_\lambda = \lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2 + \dots + \lambda_m K_m = \sum_{\mu=1}^m \lambda_\mu K_\mu$$

symbolisch bezeichnen.

Es seien nun r zentralsymmetrische konvexe Körper K_ρ ($\rho = 1, \dots, r$) und s zentralsymmetrische konvexe Polyeder P_σ ($\sigma = 1, \dots, s$) vorgegeben, wobei kein K_ρ ein ebenes Stück positiven $(n-1)$ -dim. Volumens in seinem Rand enthalten soll, das zu einer der Seitenflächen der P_σ parallel ist. Dann fragen wir nach Mengen maximalen inneren (äußeren) Maßes, die mit den K_ρ und P_σ die vorgegebenen inneren (äußeren) gemischten Maße

$$(19) \quad m(A; K_\rho \dots K_\rho) = m'_\rho, \quad (M(A; K_\rho \dots K_\rho) = M'_\rho),$$

$$(20) \quad m(A; P_\sigma \dots P_\sigma) = m''_\sigma, \quad (M(A; P_\sigma \dots P_\sigma) = M''_\sigma)$$

haben. Dabei sollen die m'_ρ und m''_σ (M'_ρ und M''_σ) allerdings der Zusatzforderung genügen, daß eine positive Kombination $K_\lambda = \sum_{\rho=1}^r \lambda_\rho K_\rho$

($K_\lambda = \sum_{\rho=1}^r \lambda_\rho K_\rho$) existiere, die den Bedingungen (19) genüge, während ein zentralsymmetrischer konvexer Körper $K_\gamma \supseteq K_\lambda$ ($K_\gamma \supseteq K_\lambda$) die Bedingungen (20) erfülle.

Es wird sich ergeben, daß sich $K_\lambda(K_A)$ um höchstens eine Menge des Maßes null von einer abgeschlossenen Menge A^* (A^{**}) unterscheidet, die (19) und (20) genügt und maximales Maß besitzt.

Zunächst sieht man, daß $K_\lambda(K_A)$ unter allen Mengen, für die (19) gilt, maximales Maß besitzt. Es ist nämlich

$$m(A; K_\lambda \dots K_\lambda) = \Sigma \lambda_\rho^{n-1} m'_\rho, \quad (M(A; K_\lambda \dots K_\lambda) = \Sigma \lambda_\rho^{n-1} M'_\rho),$$

$$m(K_\lambda) = m(K_\lambda; K_\lambda \dots K_\lambda) = \Sigma \lambda_\rho^{n-1} m'_\rho,$$

$$(M(K_\lambda) = M(K_\lambda; K_\lambda \dots K_\lambda) = \Sigma \lambda_\rho^{n-1} M'_\rho),$$

so daß man aus der MINKOWSKISCHEN Ungl. I sofort

$$(21) \quad m(K_\lambda) \geq m(A), \quad (M(K_\lambda) \geq M(A))$$

entnehmen kann.

Zur Konstruktion der Menge $A^* \supseteq K_\lambda$ ($A^{**} \supseteq K_\lambda$), die sowohl (19) als auch (20) genügt, besitze das Polyeder P_σ die n_σ Seitenflächen $S_{\sigma, \nu}$ ($\nu = 1, \dots, n_\sigma$) mit den Normalenrichtungen $\xi_{\sigma, \nu}$ und dem Inhalt

$F_{\sigma, \nu}$, so daß sich das innere (äußere) gemischte Maß einer Menge A mit P_{σ} darstellen läßt durch

$$m(A; P_{\sigma} \dots P_{\sigma}) = \frac{1}{2^n} \sum_{\nu=1}^{n_{\sigma}} q(A, \xi_{\sigma\nu}) F_{\sigma\nu},$$

$$(M(A, P_{\sigma} \dots P_{\sigma}) = \frac{1}{2^n} \sum_{\nu=1}^{n_{\sigma}} (Q(A; \xi_{\sigma\nu}) F_{\sigma\nu}).$$

Nun sei $A_{\sigma\nu}^* (A_{\sigma\nu}^{**})$ eine abgeschlossene Menge, deren Quermaß in der Richtung $\xi_{\sigma\nu}$ die Größe

$$q(A_{\sigma\nu}; \xi_{\sigma\nu}) = q(K_{\gamma}; \xi_{\sigma\nu}) - q(K_{\lambda}; \xi_{\sigma\nu}), \quad (Q(A_{\sigma\nu}; \xi_{\sigma\nu}) = Q(K_{\gamma}; \xi_{\sigma\nu}) - Q(K_{\lambda}; \xi_{\sigma\nu}))$$

besitze, während es in allen andern Richtungen verschwinde²⁾. Setzen wir die linearen Normalrisse $\alpha_{\sigma\nu}^* (\xi_{\sigma\nu})$ ($\alpha_{\sigma\nu}^{**} (\xi_{\sigma\nu})$) der $A_{\sigma\nu}^*$, ($A_{\sigma\nu}^{**}$) untereinander und auch zu dem Normalriß $\alpha_{\lambda} (\xi_{\sigma\nu})$ ($\alpha_{\lambda} (\xi_{\sigma\nu})$) von K_{λ} (K_{λ}) als punktfremd voraus, so gilt dann für die Vereinigungsmenge $A^* (A^{**})$ von K_{λ} (K_{λ}) mit den Mengen $A_{\sigma\nu}^* (A_{\sigma\nu}^{**})$

$$m(A^*, P_{\sigma} \dots P_{\sigma}) = \frac{1}{2^n} \sum_{\nu=1}^{n_{\sigma}} q(K_{\gamma}; \xi_{\sigma\nu}) F_{\sigma\nu} = m''_{\sigma},$$

$$(M(A^{**}; P_{\sigma} \dots P_{\sigma}) = \frac{1}{2^n} \sum_{\nu=1}^{n_{\sigma}} Q(K_{\gamma}; \xi_{\sigma\nu}) F_{\sigma\nu} = M''_{\sigma},$$

während das gemischte innere (äußere) Maß von K_{λ} (K_{λ}) mit den K_{σ} durch die Hinzunahme der $A_{\sigma\nu}^* (A_{\sigma\nu}^{**})$ nicht verändert wird, so daß also $A^* (A^{**})$ beiden Bedingungen (19) und (20) genügt. Da aus (21) zudem für jede Menge A , für die (19) und (20) gilt, unmittelbar

$$m(A) \leq m(A^*) \quad (M(A) \leq M(A^{**}))$$

folgt, ist $A^* (A^{**})$ Träger der gesuchten Extremaleigenschaft.

Als Anwendung dieses allgemeinen Problems fragen wir nach der Menge maximalen Maßes bei vorgegebenem linearem Quermaß $q(\xi_0)$ ($Q(\xi_0)$) in der festen Richtung ξ_0 und Quermaßintegral

$$u = \frac{1}{2^n} \int_{-\Omega_n} q(\xi) d\omega_n, \quad U = \frac{1}{2^n} \int_{-\Omega_n} Q(\xi) d\omega_n.$$

Dabei beachten wir, daß

$$u(A) = m(A; \Omega_n \dots \Omega_n), \quad U(A) = M(A; \Omega_n \dots \Omega_n)$$

statthat und sich $q(\xi_0)$ ($Q(\xi_0)$) als gemischtes Maß mit einem ausgearteten konvexen Körper K_0 der Oberfläche n darstellen läßt, der in einer zu ξ_0 senkrechten $(n-1)$ -dim. Ebene enthalten ist:

$$q(\xi_0) = m(A; K_0 \dots K_0), \quad Q(\xi_0) = M(A; K_0 \dots K_0).$$

²⁾ Solche Mengen werden von MAZURKIEWICZ und SAKS betrachtet: Sur les projections d'un ensemble fermé (Fundamenta 8 (1926); 109—113).

Dann unterscheiden wir die beiden Fälle:

- a) $\omega_n q(\xi_0) \leq 2nu, \quad \omega_n Q(\xi_0) \leq 2nU,$
 b) $\omega_n q(\xi_0) > 2nu, \quad \omega_n Q(\xi_0) > 2nU.$

Im Fall a) haben wir unser allgemeines Problem dadurch zu spezialisieren, daß wir $r = 2$ und $s = 0$ setzen und $K_1 = K_0$ und $K_2 = \Omega_n$ wählen. Damit finden wir als Extremalmenge einen Drehkörper, der in den Richtungen ξ_0 und $-\xi_0$ durch $(n-1)$ -dim. Kugeln begrenzt wird und sonst konstantes GAUSSSches Krümmungsmaß besitzt. Im Fall b) ist $r = 1, s = 1$ und $K_1 = \Omega_n, P_1 = K_0$ zu setzen. Als Extremalmenge ergibt sich eine Menge, die sich um eine Nullmenge von einer Kugel unterscheidet.

(Eingegangen am 24. Juli 1951.)

Note on a Theorem of Banach.

By

Ky Fan, Notre Dame, Indiana (USA.).

Our purpose is to prove the following

Theorem. *Let A_1, A_2, \dots, A_n be a finite number ($n \geq 2$) of infinite sets arranged in cyclic order ($A_{n+1} = A_1$). For each $i = 1, 2, \dots, n$, let t_i be a one-to-one transformation from A_i into A_{i+1}*

$$(1) \qquad t_i(A_i) \subset A_{i+1}.$$

Then each A_i can be decomposed into the union of two disjoint subsets¹⁾ B_i, C_i

$$(2) \qquad A_i = B_i \cup C_i, \quad B_i \cap C_i = 0$$

such that t_i transforms B_i onto C_{i+1} ($C_{n+1} = C_1$)

$$(3) \qquad t_i(B_i) = C_{i+1}.$$

The case $n=2$ of this theorem is well-known. It is due to S. BANACH²⁾ and is a more complete formulation of SCHRÖDER-BERNSTEIN'S theorem on equality of cardinal numbers. The present generalization to any finite number of sets seems to be new.

Proof. We first observe that (1) implies the following infinite sequence of inclusion relations

$$(4) \quad A_1 \supset t_n(A_n) \supset t_n t_{n-1}(A_{n-1}) \supset t_n t_{n-1} t_{n-2}(A_{n-2}) \supset \dots \supset t_n t_{n-1} \dots t_2 t_1(A_1) \\ > t_n t_{n-1} \dots t_2 t_1 t_n(A_n) \supset t_n t_{n-1} \dots t_1 t_n t_{n-1}(A_{n-1}) \supset \dots$$

If a certain way of decomposing the n sets satisfies conditions (2) and (3), then it is completely determined by the choice of B_1 . In fact, once B_1 is chosen, then by (2), (3), we are forced to take successively

$$(5) \quad \begin{aligned} C_1 &= A_1 - B_1, \\ C_2 &= t_1(B_1), \quad B_2 = A_2 - C_2, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ C_n &= t_{n-1}(B_{n-1}), \quad B_n = A_n - C_n. \end{aligned}$$

¹⁾ One of the two subsets B_i, C_i may be empty.

²⁾ S. BANACH, Un théorème sur les transformations biunivoques, *Fundamenta Mathematicae*, vol. 6 (1924), pp. 236—239. See also W. SIERPINSKI, *Lçons sur les nombres transfins*, Paris 1928, pp. 90—93.

Furthermore, the choice of B_1 will meet our requirement, if and only if it satisfies

$$(6) \quad C_1 = t_n(B_n),$$

where C_1 and B_n are defined from B_1 by (5).

In order to express this condition (6) explicitly in terms of B_1 , we derive successively from (5)

$$\begin{aligned} t_2(B_2) &= [t_2(A_2) - t_2 t_1(B_1)], \\ t_3(B_3) &= [t_3(A_3) - t_3 t_2(A_2)] \cup t_3 t_2 t_1(B_1), \\ t_4(B_4) &= [t_4(A_4) - t_4 t_3(A_3)] \cup [t_4 t_3 t_2(A_2) - t_4 t_3 t_2 t_1(B_1)], \\ &\dots \end{aligned}$$

To abridge our writing, let us introduce the following notations: In case of even n , we put

$$(7) \quad D = [t_n(A_n) - t_n t_{n-1}(A_{n-1})] \cup [t_n t_{n-1} t_{n-2}(A_{n-2}) - t_n t_{n-1} t_{n-2} t_{n-3}(A_{n-3})] \\ \cup \dots \cup [t_n t_{n-1} \dots t_4(A_4) - t_n t_{n-1} \dots t_3(A_3)] \cup t_n t_{n-1} \dots t_3 t_2(A_2).$$

In case of odd n , we put

$$(8) \quad E = [t_n(A_n) - t_n t_{n-1}(A_{n-1})] \cup [t_n t_{n-1} t_{n-2}(A_{n-2}) - t_n t_{n-1} t_{n-2} t_{n-3}(A_{n-3})] \\ \cup \dots \cup [t_n t_{n-1} \dots t_4 t_3(A_3) - t_n t_{n-1} \dots t_3 t_2(A_2)].$$

Then, for B_n defined from B_1 by (5), we have

$$(9) \quad t_n(B_n) = D - t_n t_{n-1} \dots t_2 t_1(B_1), \quad \text{when } n \text{ is even;}$$

or

$$(10) \quad t_n(B_n) = E \cup t_n t_{n-1} \dots t_2 t_1(B_1), \quad \text{when } n \text{ is odd.}$$

Hence our theorem will be proved, as soon as we find a subset B_1 of A_1 such that

$$(11) \quad A_1 - B_1 = D - t_n t_{n-1} \dots t_2 t_1(B_1), \quad \text{when } n \text{ is even;}$$

or

$$(12) \quad A_1 - B_1 = E \cup t_n t_{n-1} \dots t_2 t_1(B_1), \quad \text{when } n \text{ is odd.}$$

Now, regardless of the parity of n , we define B_1 by

$$(13) \quad B_1 = [A_1 - t_n(A_n)] \cup [t_n t_{n-1}(A_{n-1}) - t_n t_{n-1} t_{n-2}(A_{n-2})] \\ \cup [t_n t_{n-1} t_{n-2} t_{n-3}(A_{n-3}) - t_n t_{n-1} t_{n-2} t_{n-3} t_{n-4}(A_{n-4})] \cup \dots$$

where the right-hand side is a union of infinitely many terms: the k -th term is obtained by subtracting the $2k$ -th term of (4) from the $(2k-1)$ -th term of (4). Clearly, B_1 is a subset of A_1 . It is also easy to verify that B_1 so defined satisfies (11) in case of even n , and (12) in case of odd n . The theorem is thus proved.

Der symmetrische Kreisel bei zeitfester Drehkraft.

Von

U. T. Bödewadt in Brunoy (Frankreich).

Einleitung.

Die einzelnen Gleichungen für den kräftefreien Kreisel lassen sich (z. B.) durch die JACOBI'schen elliptischen Funktionen lösen. Das Problem, welches vom mathematischen Standpunkt aus dann am nächsten liegt, sind die EULER'schen Gleichungen mit nicht verschwindender konstanter Drehkraft¹⁾. Diese Aufgabe ist (nach Kenntnis des Verf.) bisher nicht behandelt worden, offenbar weil man ihr keinen physikalischen Sinn zu geben hatte. Denn Unveränderlichkeit der Drehkraft in den EULER'schen Gleichungen bedeutet, da diese sich auf das körperfeste System der Hauptträgheitsachsen beziehen, daß diese Drehkraft ihre Richtung ständig entsprechend der Drehbewegung des ganzen Körpers ändert, also mit dem Körper fest verbunden ist. Das mag früher wohl unsinnig erschienen sein. Nachdem aber inzwischen Rückstoßantriebe eine übliche Vorstellung geworden sind und auch ihre Verwendung zur Beeinflussung von Drehbewegungen, etwa für die Steuerung von Raumschiffen, in das Blickfeld der Technik getreten ist, hat das oben genannte Problem durchaus seine Bedeutung. Es soll nachstehend für den (technisch auch vorläufig bedeutsamsten) Fall des symmetrischen Kreisels behandelt werden, da hier eine teilweise Entkopplung der Kreiselgleichungen eintritt, welche die Aufgabe leicht angreifen läßt. Der Fall des unsymmetrischen Kreisels bietet demgegenüber größere Schwierigkeiten.

In Abschnitt 1 wird der Zeitverlauf der Drehgeschwindigkeit ermittelt, in Abschnitt 3 dann das Gesetz der Drehbewegung selbst berechnet, nachdem in Abschnitt 2 Formeln zur Beschreibung beliebiger Drehungen zusammengestellt wurden. Bei der Integration der Bewegungsgleichungen treten die FRESNEL'schen Integrale auf.

1. Die Drehgeschwindigkeit des Kreisels.

Es seien A die äquatoriale und C die polare Drehmasse eines symmetrischen Kreisels, u , v die Drehgeschwindigkeiten um zwei (zueinander senkrechte) Äquatorachsen und w die Drehgeschwindigkeit

¹⁾ Es werden die in der letzten Auflage des Buches „Der Kreisel“ von R. GRAMMEL gewählten Ausdrücke Drehkraft, Drehmasse usw. benutzt.

um die Polachse (Figurenachse). Wenn um die gewählten Hauptträgheitsachsen nun von der Zeit t_1 an die in Bezug auf das körperfeste System unveränderlichen Drehkräfte P, Q, R wirken, so lauten die EULERSCHEN Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{aligned} A\dot{u} - (A - C)vw &= P, \\ A\dot{v} + (A - C)uw &= Q, \\ C\dot{w} &= R. \end{aligned}$$

Wir benutzen die Bezeichnungen

$$(2) \quad 1 - \frac{C}{A} = h; \quad \frac{P}{A} = p, \quad \frac{Q}{A} = q, \quad \frac{R}{C} = r; \quad \sigma = \operatorname{sgn} hr.$$

Wir setzen zunächst $A \neq C$, also $h \neq 0$ voraus. Im Fall des Kugelkreisels ($h = 0$) sind die Drehungen um die drei Achsen gänzlich entkoppelt; die dazu gehörigen Ergebnisse werden jeweils am Ende der einzelnen Abschnitte aufgeführt. Dann lauten die Gleichungen (1) jetzt

$$(3) \quad \begin{aligned} \dot{u} - h v w &= p, \\ \dot{v} + h u w &= q, \\ \dot{w} &= r. \end{aligned}$$

Die letzte dieser Gleichungen ergibt sofort die Lösung

$$(4) \quad w = w_1 + r(t - t_1).$$

Bei Einführung der komplexen Veränderlichen

$$(5) \quad \omega = u + iv; \quad \omega_1 = \omega(t_1) = u_1 + iv_1$$

lassen sich die beiden ersten Gleichungen (3) zusammenfassen:

$$(6) \quad \dot{\omega} + ihw \cdot \omega = m.$$

Dabei bedeutet

$$(7) \quad m = p + iq = (P + iQ)/A.$$

Die Gleichung (6) hat nun, wenn wir noch, unter Verwendung der Funktionsbezeichnung

$$(8) \quad \operatorname{cis} x = \exp ix = \cos x + i \sin x,$$

zur Abkürzung

$$(9) \quad \xi = \xi(t) = h \int_{t_1}^t w(\tau) d\tau,$$

$$(10) \quad \Omega = \Omega(t) = \int_{t_1}^t \operatorname{cis} \xi(\tau) d\tau$$

schreiben, die folgende Lösung:

$$(11) \quad \omega = \operatorname{cis}(-\xi) \cdot (\omega_1 + m\Omega).$$

Für die weitere Behandlung sind nun die zwei Fälle $r = 0$ und $r \neq 0$ zu unterscheiden. Jeder dieser beiden Fälle gliedert sich nochmals in zwei Unterfälle. Bei $r = 0$ gibt der Wert von w_1 Anlaß zur Unterscheidung: $w_1 = 0$ oder $w_1 \neq 0$.

Fall 1. $h \neq 0$, $r = 0$, $w_1 = 0$.

Aus (9), (10) folgen in diesem Falle

$$(12) \quad \xi \equiv 0,$$

$$(13) \quad \Omega = t - t_1,$$

so daß nach (11)

$$(14) \quad \omega = \omega_1 + m(t - t_1)$$

oder aufgespalten

$$(15) \quad \begin{aligned} u &= u_1 + p(t - t_1), \\ v &= v_1 + q(t - t_1). \end{aligned}$$

Fall 2. $h \neq 0$, $r = 0$, $w_1 \neq 0$.

Aus (4), (9), (10), (11) erhält man sofort

$$(16) \quad w \equiv w_1 \neq 0,$$

$$(17) \quad \xi = h w (t - t_1); \quad \xi_2 = h w (t_2 - t_1),$$

$$(18) \quad \Omega = \frac{1}{i h w} [\text{cis } h w (t - t_1) - 1]; \quad \Omega_2 = \frac{i}{h w} (1 - \text{cis } \xi_2),$$

$$(19) \quad \omega = \frac{m}{i h w} + \left(\omega_1 - \frac{m}{i h w} \right) \text{cis } (-\xi),$$

$$(20) \quad \begin{aligned} u &= u_1 \cos \xi + v_1 \sin \xi + (h w)^{-1} [p \sin \xi + q(1 - \cos \xi)], \\ v &= v_1 \cos \xi - u_1 \sin \xi + (h w)^{-1} [q \sin \xi - p(1 - \cos \xi)]. \end{aligned}$$

Fall 3. $h \neq 0$, $r \neq 0$.

Unter Verwendung der Konstanten

$$(21) \quad t_0 = t_1 - \frac{w}{r}$$

geht die Gleichung (4) über in

$$(22) \quad w = r(t - t_0); \quad w_2 = r(t_2 - t_0) = w_1 + r(t_2 - t_1).$$

Aus (9) wird jetzt

$$(23) \quad \xi(t) = \frac{1}{2} h r (t - t_1) (t + t_1 - 2 t_0) = \eta(t) - \eta_1,$$

wenn

$$(24) \quad \eta(t) = \frac{1}{2} h r (t - t_0)^2; \quad \eta_1 = \frac{1}{2} h r (t_1 - t_0)^2$$

benutzt werden. Die Bildung von Ω ist darauf mittels der FRESNEL'schen Integrale möglich, die hier in der Gestalt

$$(25) \quad C(x) = \int_0^x \frac{\cos y}{\sqrt{y}} dy; \quad S(x) = \int_0^x \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy$$

angenommen werden. Dazu ist in (10) als Integrationsveränderliche $y = |\eta(\tau)|$ einzuführen, wofür man nach (2) auch $y = \sigma \eta(\tau)$ schreiben kann. Es sind nun drei Fälle zu unterscheiden, da η für $\tau = t_0$ verschwindet:

$$3 \text{ a) } t_0 \leq t_1 \leq t; \quad 3 \text{ b) } t_1 \leq t_0 \leq t; \quad 3 \text{ c) } t_1 \leq t \leq t_0.$$

Der Integrand von (10) läßt sich nach (23) als $\text{cis}(-\eta_1) \text{cis} \eta$ darstellen, so daß wir wegen

$$\text{cis} \eta = \cos \eta + i \sin \eta = \cos \sigma \eta + i \sigma \sin \sigma \eta = \cos y + i \sigma \sin y$$

nur noch $\cos y$ und $\sin y$ zu betrachten haben.

Aus

$$(26) \quad y = \sigma \eta(\tau) = \frac{1}{2} \sigma h r (\tau - t_0)^2$$

folgt

$$|\tau - t_0| = \frac{2}{\sqrt{2|h r|}} \sqrt{y},$$

wo rechts die positiven Wurzelwerte zu nehmen sind. Es bleibt also, wenn wir

$$(27) \quad (2|h r|)^{-\frac{1}{2}} = k$$

schreiben,

$$(28) \quad \tau = t_0 + \text{sgn}(\tau - t_0) 2k \sqrt{y}$$

übrig, woraus folgt

$$(29) \quad d\tau = \text{sgn}(\tau - t_0) k \frac{dy}{\sqrt{y}}.$$

Im Fall 3 a) formen wir das Integral folgendermaßen um:

$$\int_{t_1}^t \cos y d\tau = \left(\int_{t_0}^t - \int_{t_0}^{t_1} \right) \cos y d\tau = k [C(\sigma \eta) - C(\sigma \eta_1)].$$

Im Fall 3 b) bekommen wir:

$$\int_{t_1}^t \cos y d\tau = \left(\int_{t_0}^t + \int_{t_1}^{t_0} \right) \cos y d\tau = k [C(\sigma \eta) + C(\sigma \eta_1)].$$

Im Fall 3 c) entsteht:

$$\int_{t_1}^t \cos y d\tau = \left(\int_{t_1}^{t_0} - \int_t^{t_0} \right) \cos y d\tau = k [C(\sigma \eta_1) - C(\sigma \eta)].$$

Alle drei Ergebnisse lassen sich, wenn wir jetzt

$$(30) \quad \varepsilon = \text{sgn}(t - t_0); \quad \varepsilon_1 = \text{sgn}(t_1 - t_0)$$

einführen, in der nachstehenden Gleichung (31) zusammenfassen. (Für $\sin y$ ist dieselbe Rechnung gültig.) Wir führen dabei nochmals neue

Abkürzungen ein:

$$(31) \quad \int_{t_1}^t \cos y \, d\tau = k[\varepsilon C(\sigma\eta) - \varepsilon_1 C(\sigma\eta_1)] = k C(\eta_1, \eta),$$

$$\int_{t_1}^t \sin y \, d\tau = k[\varepsilon S(\sigma\eta) - \varepsilon_1 S(\sigma\eta_1)] = k S(\eta_1, \eta).$$

Damit erhält man dann

$$(32) \quad \Omega = \text{cis}(-\eta_1) k [C(\eta_1, \eta) + i\sigma S(\eta_1, \eta)].$$

Setzen wir diese Formel in (11) ein, so kommt

$$(33) \quad \omega = \omega_1 \text{cis}(-\xi) + m k \text{cis}(-\eta) [C(\eta_1, \eta) + i\sigma S(\eta_1, \eta)],$$

oder nach den Komponenten u, v aufgelöst²⁾

$$(34) \quad \begin{aligned} u &= u_1 \cos \xi + v_1 \sin \xi + p k (C \cos \eta + \sigma S \sin \eta) + q k (C \sin \eta - \sigma S \cos \eta), \\ v &= v_1 \cos \xi - u_1 \sin \xi + q k (C \cos \eta + \sigma S \sin \eta) - p k (C \sin \eta - \sigma S \cos \eta). \end{aligned}$$

Fall 4. $h = 0$.

Beim Kugelkreisel fließen aus (6) sofort an Stelle von (11), wenn noch (4) hinzugenommen wird, die Gleichungen

$$(35) \quad \begin{aligned} \omega &= \omega_1 + m(t - t_1), \\ u &= u_1 + p(t - t_1), \\ v &= v_1 + q(t - t_1), \\ w &= w_1 + r(t - t_1). \end{aligned}$$

2. Formeln zur Beschreibung von Drehbewegungen.

Bisher war nur der Verlauf der Drehgeschwindigkeiten in Bezug auf das körperfeste Achsensystem untersucht worden. Es ist nunmehr die Veränderung der Stellung des Kreisels gegenüber einem raumfesten Achsensystem zu betrachten. Dazu werde zunächst eine Zusammenstellung der später benötigten Formeln zur kinematischen Beschreibung der Drehbewegung gegeben.

Nehmen wir an, daß die Bezugsachsen für die Komponenten u, v, w in der „Normallage“ des Kreisels der Reihe nach mit der x, y, z -Achse eines raumfesten Systems zusammenfallen, und denken wir den Übergang zur jeweiligen tatsächlichen Stellung durch folgende drei Drehungen um die EULERSCHEN Winkel ersetzt: 1) eine Drehung um die z -Achse um den Winkel λ , wodurch das xyz -Achsenkreuz in die Stellung $x^1 y^1 z^1$ übergeht; 2) eine Drehung um die y^1 -Achse um den Winkel ϑ , wodurch das $x^1 y^1 z^1$ -Achsenkreuz in das System $x^2 y^2 z^2$ übergeht; und schließlich eine Drehung um die z^2 -Achse um den Winkel φ , wodurch aus dem System $x^2 y^2 z^2$ das System $x^3 y^3 z^3$ der Hauptträgheitsachsen

²⁾ In (34) bedeuten C und S die durch (31) eingeführten Größen.

wird. Nennen wir den Tensor, der das raumfeste Achsensystem (xyz) in das körperfeste $(x^3y^3z^3)$ -System überführt, \mathfrak{A} , so hat dieser im xyz -System die Orthogonalmatrix (A_{mn}) ($m, n = 1, 2, 3$) mit

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \cos \varphi \cos \lambda \cos \vartheta - \sin \varphi \sin \lambda \\
 A_{12} &= \cos \varphi \sin \lambda \cos \vartheta + \sin \varphi \cos \lambda \\
 A_{13} &= -\cos \varphi \sin \vartheta \\
 A_{21} &= -\sin \varphi \cos \lambda \cos \vartheta - \cos \varphi \sin \lambda \\
 A_{22} &= -\sin \varphi \sin \lambda \cos \vartheta + \cos \varphi \cos \lambda \\
 A_{23} &= \sin \varphi \sin \vartheta \\
 A_{31} &= \cos \lambda \sin \vartheta \\
 A_{32} &= \sin \lambda \sin \vartheta \\
 A_{33} &= \cos \vartheta.
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

Ein Vektor \mathfrak{r} hat dann in Bezug auf das körperfeste System dieselben Komponenten, wie sie der Vektor $\mathfrak{r}' = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{r}$ im raumfesten System hat. Konstanz von \mathfrak{r}' bedeutet, daß \mathfrak{r} im körperfesten System konstante Komponenten hat, also ein körperfester Vektor ist. Die Veränderlichkeit von

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{A}\mathfrak{r}'
 \tag{38}$$

beruht dann nur auf der Veränderlichkeit von \mathfrak{A} , d. h. auf der Drehbewegung des Körpers; \mathfrak{A} gibt die jeweilige Stellung des Kreisels im Raum an. Nun kann man in diesem Fall die zeitliche Ableitung von \mathfrak{r} einerseits durch den Ausdruck $\dot{\mathfrak{A}}\mathfrak{r}'$ darstellen, andererseits in üblicher Weise durch das Vektorprodukt mit dem Vektor der Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{w} = (w_x, w_y, w_z)$ oder durch das Produkt mit dem infinitesimalen Drehungsaffinor \mathfrak{B} , dessen Komponenten im (xyz) -System

$$\begin{aligned}
 W_{11} = W_{22} = W_{33} &= 0, & W_{32} &= -W_{23} = w_x, \\
 W_{13} &= -W_{31} = w_y, & W_{21} &= -W_{12} = w_z
 \end{aligned}$$

sind:

$$\dot{\mathfrak{r}} = [\mathfrak{w}, \mathfrak{r}] = \mathfrak{B}\mathfrak{r} = \dot{\mathfrak{A}}\mathfrak{r}'.
 \tag{39}$$

Hier setzen wir (38) ein sowie die entsprechende Beziehung für die Drehgeschwindigkeit

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{A}\mathfrak{w}',
 \tag{40}$$

wobei \mathfrak{w}' durch Überführung des körperfesten Achsensystems in die Normallage unter Festhaltung der Komponenten (u, v, w) aus \mathfrak{w} entsteht. \mathfrak{w}' ist also nur insoweit veränderlich, als diese Komponenten (u, v, w) sich ändern, während in \mathfrak{w} auch die Änderung von \mathfrak{A} eingeht. Ferner ist zu berücksichtigen, daß der Affinor \mathfrak{B} sich gemäß der Bedingung $\mathfrak{B}\mathfrak{r} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}'\mathfrak{r}')$ transformieren, also dem Gesetz

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}'\mathfrak{A}^{-1}
 \tag{41}$$

gehörchen muß, wobei infolge der Orthogonalität von \mathfrak{A} wiederum die Beziehung $\mathfrak{B}'\mathfrak{r}' = [\mathfrak{w}'\mathfrak{r}']$ gilt. Dann folgen aus (39) bis (41) die Beziehungen zwischen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} :

$$(42) \quad \mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathfrak{A} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}', \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1}, \quad \mathfrak{B}' = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}.$$

\mathfrak{B}' ist mit \mathfrak{w}' gegeben, die Komponenten ($\Re\omega$, $\Im\omega$, w) von \mathfrak{w}' sind in Abschnitt 1 ermittelt worden. Aus der letzten der Gleichungen (42) ergibt sich, wenn wir den aus \mathfrak{B} durch Integration entstehenden gleichfalls antimetrischen Affinor

$$(43) \quad \int_{t_1}^t \mathfrak{B}' dt = \mathfrak{U}$$

und entsprechend

$$(44) \quad \int_{t_1}^t \mathfrak{w}' dt = \mathfrak{u}$$

setzen, die jeweilige Stellung \mathfrak{A} in der Gestalt

$$(45) \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{C} = \mathfrak{D}\mathfrak{A}_1 \text{ mit } \mathfrak{C} = \exp \mathfrak{U}, \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1^{-1}.$$

(Man könnte sagen; \mathfrak{u} bedeutet den Umdrehungswinkel, den die Drehgeschwindigkeitskomponenten u , v , w um die Hauptträgheitsachsen erzeugen würden, wenn diese Drehungen sich gegenseitig nicht beeinflussen würden.) Sind nun (α , β , γ) die Komponenten von \mathfrak{u} im körperfesten System und ist

$$(46) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \psi^2,$$

so finden sich für die Potenzen von \mathfrak{U} die Beziehungen ³⁾

$$(47) \quad \mathfrak{U}^2 = \{\mathfrak{u}; \mathfrak{u}\} - \psi^2\mathfrak{C}; \quad \mathfrak{U}^3 = -\psi^2\mathfrak{U}, \quad \mathfrak{U}^4 = -\psi^2\mathfrak{U}^2.$$

Aus der Potenzreihe für $\exp \mathfrak{U}$ ergibt sich infolgedessen

$$(48) \quad \begin{aligned} \mathfrak{C} = \exp \mathfrak{U} &= \mathfrak{C} + \mathfrak{U} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\psi^2)^n}{(2n+1)!} + \mathfrak{U}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\psi^2)^{n-1}}{(2n)!} \\ &= \mathfrak{C} + \mathfrak{U} \frac{\sin \psi}{\psi} + \mathfrak{U}^2 \frac{1 - \cos \psi}{\psi^2} \\ &= \mathfrak{C} \cos \psi + \mathfrak{U} \frac{\sin \psi}{\psi} + \{\mathfrak{u}; \mathfrak{u}\} \frac{1 - \cos \psi}{\psi^2} \end{aligned}$$

und somit nach (45)

$$(49) \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \cos \psi + \mathfrak{A}_1 \mathfrak{U} \frac{\sin \psi}{\psi} + \mathfrak{A}_1 \{\mathfrak{u}; \mathfrak{u}\} \frac{1 - \cos \psi}{\psi^2}.$$

Legen wir das raumfeste Achsensystem so, daß es zur Zeit $t = t_1$ mit dem Hauptachsensystem zusammenfällt, so wird $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A} = \mathfrak{D} = \mathfrak{C}$. \mathfrak{C} läßt sich als orthogonale Matrix nach (37) durch (von \mathfrak{A}_1 aus gemessene)

³⁾ $\{\mathfrak{a}; \mathfrak{b}\}$ bezeichnet die Dyade: $c\{\mathfrak{a}; \mathfrak{b}\} \mathfrak{b} = (c\mathfrak{a})(\mathfrak{b}\mathfrak{b})$; \mathfrak{C} ist der Einheitstensor.

EULERSche Winkel λ , ϑ , φ darstellen, die nach (37) am schnellsten aus den Gleichungen

$$(50) \quad \operatorname{tg} \lambda = \frac{C_{32}}{C_{31}}, \quad \cos \vartheta = C_{33}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{C_{23}}{C_{13}}$$

zu entnehmen sind. Die dazu benutzten Komponenten von \mathfrak{C} sind nach (48)

$$(51) \quad \begin{aligned} C_{13} &= +\beta \frac{\sin \psi}{\psi} + \alpha \gamma \frac{1 - \cos \psi}{\psi^2}, \\ C_{23} &= -\alpha \frac{\sin \psi}{\psi} + \beta \gamma \frac{1 - \cos \psi}{\psi^2}, \\ C_{31} &= -\beta \frac{\sin \psi}{\psi} + \alpha \gamma \frac{1 - \cos \psi}{\psi^2}, \\ C_{32} &= +\alpha \frac{\sin \psi}{\psi} + \beta \gamma \frac{1 - \cos \psi}{\psi^2}, \\ C_{33} &= +\cos \psi + \gamma^2 \frac{1 - \cos \psi}{\psi^2}. \end{aligned}$$

Für Anwendungen in einer geplanten späteren Untersuchung sei auch die Auflösung dieser Gleichungen nach α , β , γ angegeben. Dazu wird zuerst ψ berechnet. Setzt man

$$(52) \quad E = \frac{C_{13} + C_{31}}{C_{32} - C_{23}} = \frac{C_{23} + C_{32}}{C_{13} - C_{31}} = \gamma \frac{1 - \cos \psi}{\psi \sin \psi},$$

so ergibt sich

$$(C_{33} - \cos \psi) \frac{1 - \cos \psi}{\sin^2 \psi} = E^2,$$

also

$$(53) \quad \cos \psi = \frac{C_{33} - E^2}{1 + E^2}.$$

Wenn man die Komponenten von \mathfrak{C} nach (37) durch (von \mathfrak{A}_1 aus gemessene) EULERSche Winkel ausdrückt, erhält man für E aus (52)

$$(54) \quad E = -\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\lambda + \varphi).$$

Damit folgt aus (53) nach einigen Umformungen

$$(55) \quad \cos \frac{1}{2} \psi = \cos \frac{1}{2} \vartheta \cos \frac{1}{2} (\lambda + \varphi).$$

Nachdem so ψ bekannt ist, findet man α , β aus den Ausdrücken für $C_{32} - C_{23}$ und $C_{13} - C_{31}$, γ aus (52) und (54):

$$(56) \quad \begin{aligned} \alpha &= +\psi \frac{\sin \frac{1}{2} \vartheta}{\sin \frac{1}{2} \psi} \sin \frac{1}{2} (\lambda - \varphi), \\ \beta &= -\psi \frac{\sin \frac{1}{2} \vartheta}{\sin \frac{1}{2} \psi} \cos \frac{1}{2} (\lambda - \varphi), \\ \gamma &= -\psi \frac{\cos \frac{1}{2} \vartheta}{\sin \frac{1}{2} \psi} \sin \frac{1}{2} (\lambda + \varphi). \end{aligned}$$

3. Die Drehungen des Kreisels.

Die in Abschnitt 2 aufgeführten Formeln gelten als rein kinematische Beziehungen allgemein, sowohl für alle vier oben unterschiedenen Fälle wie auch für den unsymmetrischen Kreisel. Zu ihrer Auswertung kommt es nun auf die Berechnung der Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \psi$ an, wofür außer (44) nach (42) und (5) folgende Gleichungen bestehen:

$$(57) \quad \alpha + i\beta = \int_{t_1}^t \omega(\tau) d\tau; \quad \gamma = \int_{t_1}^t w(\tau) d\tau.$$

Hier sind jetzt die einzelnen Fälle zu unterscheiden. Wir geben die Formeln für α, β, γ ; für ψ hingegen bleibt die Formel (46) anzuwenden.

Fall 1. $h \neq 0, r = 0, w_1 = 0$.

$$(58) \quad \begin{aligned} \alpha + i\beta &= \omega_1(t - t_1) + \frac{1}{2} m(t - t_1)^2; \\ \alpha &= u_1(t - t_1) + \frac{1}{2} p(t - t_1)^2, \\ \beta &= v_1(t - t_1) + \frac{1}{2} q(t - t_1)^2, \\ \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Fall 2. $h \neq 0, r = 0, w = w_1 \neq 0$.

$$(59) \quad \begin{aligned} \alpha + i\beta &= \frac{m}{ihw}(t - t_1) + \left(\frac{i\omega_1}{hw} - \frac{m}{h^2w^2} \right) [\text{cis}(-\xi) - 1]; \\ \alpha &= \frac{q}{hw}(t - t_1) + (1 - \cos \xi) \left(\frac{v_1}{hw} + \frac{p}{h^2w^2} \right) + \sin \xi \left(\frac{u_1}{hw} - \frac{q}{h^2w^2} \right), \\ \beta &= -\frac{p}{hw}(t - t_1) + (1 - \cos \xi) \left(\frac{-u_1}{hw} + \frac{q}{h^2w^2} \right) + \sin \xi \left(\frac{v_1}{hw} + \frac{p}{h^2w^2} \right), \\ \gamma &= w(t - t_1). \end{aligned}$$

Fall 3. $h \neq 0, r \neq 0$.

Mit den Formeln

$$(60) \quad \begin{aligned} \int_0^x (\cos u C u + \sin u S u) \frac{du}{\sqrt{u}} &= \frac{1}{2} (C^2 x + S^2 x), \\ \int_0^x (\cos u S u - \sin u C u) \frac{du}{\sqrt{u}} &= \cos x C x + \sin x S x - 2 \sqrt{x} \end{aligned}$$

läßt sich die aus (50) und (33) zunächst erhaltene Gleichung

$$(61) \quad \begin{aligned} \alpha + i\beta &= \{ \omega_1 \text{cis} \eta_1 - m k \varepsilon_1 [C(\sigma \eta_1) + i \sigma S(\sigma \eta_1)] \} \int_{t_1}^t \text{cis}(-\eta) d\tau \\ &+ m k \varepsilon \int_{t_1}^t \text{cis}(-\eta) [C(y) + i \sigma S(y)] d\tau \end{aligned}$$

wiederum unter Benutzung von (26), (29), (31) und von

$$\text{cis}(-\eta) = \cos y - i \sigma \sin y$$

auswerten zu

$$\begin{aligned} \alpha + i\beta = & \{\omega_1 k \text{cis } \eta_1 - m k^2 \varepsilon_1 [C(\sigma \eta_1) + i \sigma S(\sigma \eta_1)]\} \cdot [C(\eta_1, \eta) - i \sigma S(\eta_1, \eta)] \\ & + m k^2 \varepsilon \left\{ \frac{\varepsilon}{2} [C^2(\sigma \eta) + S^2(\sigma \eta)] - \frac{\varepsilon_1}{2} [C^2(\sigma \eta_1) + S^2(\sigma \eta_1)] \right. \\ & + i \sigma [\varepsilon \cos \eta C(\sigma \eta) + \varepsilon \sin \eta S(\sigma \eta) - \varepsilon_1 \cos \eta_1 C(\sigma \eta_1) \\ & \left. - \varepsilon_1 \sin \eta_1 S(\sigma \eta_1) - 2 \varepsilon \sqrt{|\eta|} + 2 \varepsilon_1 \sqrt{|\eta_1|}] \right\}. \end{aligned}$$

Hierin lassen sich noch einige Zusammenfassungen vornehmen, und man erhält

$$\begin{aligned} \alpha + i\beta = & \omega_1 k \text{cis } \eta_1 [C(\eta_1, \eta) - i \sigma S(\eta_1, \eta)] \\ & + \frac{1}{2} m k^2 \{C^2(\eta_1, \eta) + S^2(\eta_1, \eta) + (1 - \varepsilon \varepsilon_1) [C^2(\sigma \eta_1) + S^2(\sigma \eta_1)]\} \\ (62) \quad & + i \sigma m k^2 \{S(\sigma \eta) [\sin \eta + \varepsilon \varepsilon_1 C(\sigma \eta_1)] + C(\sigma \eta) [\cos \eta - \varepsilon \varepsilon_1 S(\sigma \eta_1)] \\ & - \varepsilon \varepsilon_1 [\cos \eta_1 C(\sigma \eta_1) + \sin \eta_1 S(\sigma \eta_1)] - 2 (\sqrt{|\eta|} - \varepsilon \varepsilon_1 \sqrt{|\eta_1|})\}. \end{aligned}$$

Trennung in Realteil und Imaginärteil liefert

$$\begin{aligned} \alpha = & u_1 k [\cos \eta_1 C(\eta_1, \eta) + \sigma \sin \eta_1 S(\eta_1, \eta)] \\ & - v_1 k [\sin \eta_1 C(\eta_1, \eta) - \sigma \cos \eta_1 S(\eta_1, \eta)] \\ & + \frac{1}{2} p k^2 \{C^2(\eta_1, \eta) + S^2(\eta_1, \eta) + (1 - \varepsilon \varepsilon_1) [C^2(\sigma \eta_1) + S^2(\sigma \eta_1)]\} \\ & - \sigma q k^2 \{S(\sigma \eta) [\sin \eta + \varepsilon \varepsilon_1 C(\sigma \eta_1)] + C(\sigma \eta) [\cos \eta - \varepsilon \varepsilon_1 S(\sigma \eta_1)] \\ & - \varepsilon \varepsilon_1 [\cos \eta_1 C(\sigma \eta_1) + \sin \eta_1 S(\sigma \eta_1)] - 2 (\sqrt{|\eta|} - \varepsilon \varepsilon_1 \sqrt{|\eta_1|})\}, \\ (63) \quad \beta = & v_1 k [\cos \eta_1 C(\eta_1, \eta) + \sigma \sin \eta_1 S(\eta_1, \eta)] \\ & + u_1 k [\sin \eta_1 C(\eta_1, \eta) - \sigma \cos \eta_1 S(\eta_1, \eta)] \\ & + \frac{1}{2} q k^2 \{C^2(\eta_1, \eta) + S^2(\eta_1, \eta) + (1 - \varepsilon \varepsilon_1) [C^2(\sigma \eta_1) + S^2(\sigma \eta_1)]\} \\ & + \sigma p k^2 \{S(\sigma \eta) [\sin \eta + \varepsilon \varepsilon_1 C(\sigma \eta_1)] + C(\sigma \eta) [\cos \eta - \varepsilon \varepsilon_1 S(\sigma \eta_1)] \\ & - \varepsilon \varepsilon_1 [\cos \eta_1 C(\sigma \eta_1) + \sin \eta_1 S(\sigma \eta_1)] - 2 (\sqrt{|\eta|} - \varepsilon \varepsilon_1 \sqrt{|\eta_1|})\}, \\ \gamma = h^{-1} \xi = & \frac{\eta - \eta_1}{h} = \frac{r}{2} (t - t_1)(t + t_1 - 2t_0) = w_1(t - t_1) + \frac{1}{2} r(t - t_1)^2. \end{aligned}$$

Fall 4. $h = 0$.

$$\begin{aligned} \alpha = & u_1(t - t_1) + \frac{1}{2} p(t - t_1)^2, \\ (64) \quad \beta = & v_1(t - t_1) + \frac{1}{2} q(t - t_1)^2, \\ \gamma = & w_1(t - t_1) + \frac{1}{2} r(t - t_1)^2. \end{aligned}$$

Mit (58), (59), (63), (64) sind für alle vier Fälle die Winkel α, β, γ berechnet. Aus ihnen ergeben sich nach (51) fünf Komponenten des Drehungsaffinors \mathfrak{C} , mit dem die jeweilige Stellung des Kreisels \mathfrak{A}

nach (45) aus der Anfangsstellung \mathfrak{A}_1 folgt. Die EULERSchen Winkel, durch welche sich der Übergang von der Anfangsstellung \mathfrak{A}_1 zur jeweils erreichten Stellung \mathfrak{A} bewirken läßt, sind nunmehr aus (50) zu entnehmen. Damit ist die Bewegung des symmetrischen Kreisels unter der Wirkung von Drehkräften, welche bezüglich der selber beweglichen Hauptträgheitsachsen zeitfeste Komponenten haben, vollständig beschrieben.

(Eingegangen am 24. Oktober 1951.)

Über das Einspannungsproblem in der projektiven und affinen Differentialgeometrie.

Von

Wilhelm Klingenberg in Kiel.

Wir betrachten im n -dimensionalen projektiven reellen Raum P_n die p -dimensionalen Flächen F_p ($1 \leq p \leq n-1$). Bei Hyperflächen F_{n-1} und Kurven F_1 pflegt man für die Untersuchung der Eigenschaften in der Umgebung eines Punktes P ein örtliches, projektivinvariantes Basissystem festzulegen, d. h. die F_{n-1} bzw. F_1 in den P_n einzuspannen. Die Zielsetzung dieser Arbeit besteht darin, diese Einspannung für Flächen F_p mit beliebiger Dimension p zu behandeln, und zwar derart, daß für die Grenzfälle F_{n-1} und F_1 die bekannten projektiven (bzw. affinen) Basissysteme herauskommen. Hierüber gibt es meines Wissens noch keine abschließenden Untersuchungen¹⁾.

Um das Problem zu fixieren, erklären wir zunächst mit Hilfe des üblichen Begriffs von 1-tem Schmiegrau S_1 und $(i+1)$ -tem Schmiegrau S_{i+1} ($i = 1, \dots, m$; d. h. $S_{m+1} = P_n$) den i -ten Normalenraum N_i als eine lineare Mannigfaltigkeit mit den Eigenschaften $S_i \cap N_i = 0$; $S_i \cup N_i = S_{i+1}$ ²⁾. Dazu erklären wir noch einen 0-ten Normalenraum N_0 durch $P \cap N_0 = 0$; $P \cup N_0 = S_1$. N_0 ist also eine $(p-1)$ -dimensionale lineare Mannigfaltigkeit in S_1 , die nicht P enthält. — Während die S_i, S_{i+1} eindeutig mit der F_p verknüpft sind, ist dies für die N_0, N_i offenbar nicht der Fall. Unter dem Einspannungsproblem wollen wir damit jetzt die Frage nach einer eindeutigen, projektivinvarianten, nur von den inneren Eigenschaften der F_p abhängenden Festlegung der N_0, N_i verstehen.

¹⁾ Die Problemstellung findet sich schon bei G. FUBINI. Vgl. G. FUBINI-E. ČECH, Geometria proiettiva differenziale, Bologna 1926/27, Fußnote S. 631. — V. G. GROVE, A tensor analysis for a V_k in a projective space S_n , Bull. Am. Math. Soc. **45** (1939), S. 385—398, behandelt das Problem als Anfangswertproblem von Differentialgleichungen: Durch die Vorgabe eines Basissystems in einem Punkt ist es für eine ganze Umgebung festgelegt. Die Willkür bei der Wahl der Anfangsbasis kann jedoch nicht befriedigen. — V. HLAVATÝ, Affine embedding theory I, II, III Proc. Acad. Wet., Amsterdam **52** (1949), Nr. 5, 7, 9 und Projektive geometrization of a system of partial differential equations (zit. als P. G.) I, II, III, IV ib. **53** (1950), Nr. 3, 4, 6, 6 löst das Einspannungsproblem nur für spezielle Flächenklassen.

²⁾ \cup und \cap bezeichnet die Vereinigungs- und Durchschnittsbildung linearer Räume im P_n .

Wir zeigen, wie dies Problem durch m „Ampolaritätsbedingungen“ (die für F_{n-1} zu der bekannten Ampolaritätsbedingung werden) zunächst soweit reduziert wird, daß die N_i nur noch von einem beliebig vorgebbaren N_0 abhängen. Dieses „polare Basissystem“ hängt von Ableitungen bis zur $(2m+1)$ -ten Ordnung ab. Für die F_{n-1} führt es gerade auf die kürzlich von G. BOL³⁾ für die Behandlung der Hyperflächen zugrunde gelegten Normalenkongruenzen, die von einer beliebigen Normalen zweiter Art (wie G. BOL unsere N_0 nennt) abhängen. Er zeigt, daß N_0 und die von P und N_1 bestimmte Gerade polar sind bezüglich der in P erklärten Darboux-Quadriken. — Desgleichen hängt für F_1 unser polares Basissystem mit demjenigen zusammen, das G. BOL⁴⁾ seiner „halbinvarianten“ Behandlung der Kurventheorie zugrunde legt; und zwar besteht es aus den Ableitungen nach der bei einer festgehaltenen Normierung definierten Affinbogenlänge. Die Mannigfaltigkeit der polaren Basissysteme entspricht also hier den verschiedenen Normierungen.

Um auch N_0 festzulegen, geben wir eine weitere sog. 0-te Ampolaritätsbedingung an. Sie ist für F_{n-1} und F_1 von den anderen Ampolaritätsbedingungen abhängig, führt also hier nicht zu einer Festlegung von N_0 . Man kann in diesen Fällen unter Heranziehung einer weiteren Ableitung N_0 auf verschiedene Weise nach dem Vorbild von G. FUBINI, E. J. WILCZYNSKI u. a. festlegen. — Für $p \neq n-1$ und $p \neq 1$ wird die erwähnte Bedingung jedoch i. a. N_0 festlegen. Das einfachste Beispiel liefert die F_2 im P_4 , wo wir ein von Ableitungen bis zur 4. Ordnung abhängendes Basissystem erhalten (vgl. ^{4a)}). Wir hoffen, an anderer Stelle hierauf eingehen zu können ^{4a)}.

Im n -dimensionalen affinen Raum E_n ist durch den Schnitt des Tangentialraums mit der uneigentlichen Hyperebene ein N_0 ausgezeichnet. Das hierdurch festgelegte polare Basissystem stellt also eine Lösung des Einspannungsproblems für die Affingeometrie dar. Für F_1 besteht es aus den Ableitungen nach der Affinbogenlänge, für F_{n-1} führt es zu der bekannten Affinnormalen von W. BLASCHKE und L. BERWALD⁵⁾ und für den allgemeineren Fall, daß der S_2 den E_n aufspannt, ist N_1 der von K. H. WEISE⁶⁾ angegebene Affinnormalenraum. — Wir bemerken

³⁾ Zur tensoriellen Behandlung der projektiven Flächentheorie, Math. Ann. 122 (1950), S. 279—295. Vgl. auch ^{3a)}.

⁴⁾ Invarianten linearer Differentialgleichungen, Abh. Math. Sem. Hamburg 16 (1949), S. 1—29. Vgl. auch ^{3a)}.

^{4a)} Erscheint unter dem Titel „Über die 2-dimensionalen Flächen im 4-dimensionalen projektiven Raum“ im Arch. der Math.

⁵⁾ W. BLASCHKE, Differentialgeometrie Bd. 2, Berlin 1923.

⁶⁾ Der Berührungstensor zweier Flächen und die Affingeometrie der F_p im A_n , Teil I, Math. Z. 43 (1938), S. 469—480; Teil II, Math. Z. 44 (1939), S. 161—184. Eine kurze Zusammenstellung der in unserem Zusammenhang wichtigen Ergebnisse von WEISE bei W. KLINGENBERG, Zur affinen Differentialgeometrie I, Math. Z. 54 (1951), S. 65—80.

noch, daß sich unsere Überlegungen unmittelbar auf die F_p im n -dimensionalen linear-zusammenhängenden Raum L_n (wozu insbesondere der affin-zusammenhängende Raum A_n gehört) übertragen lassen und auch für diesen allgemeineren Fall das Einspannungsproblem lösen⁷⁾.

§ 1.

Allgemeine Normalensysteme.

1. Schmiegräume und Normalenräume. Wir betrachten den n -dimensionalen projektiven reellen Raum P_n . Er werde durch $(n + 1)$ homogene Koordinaten beschrieben, die wir zu dem Ortspunkt ξ zusammenfassen. Allgemein verstehen wir unter einem *kontravarianten* bzw. *kovarianten Punkt* ein $(n + 1)$ -Tupel von Elementen, das sich bei der Gruppe $\mathfrak{G}(P_n)$ der projektiven Transformation des P_n kogredient bzw. kontragredient zu ξ transformiert⁸⁾. Wir bezeichnen diese Punkte durch kleine bzw. große deutsche Buchstaben.

Ist ξ eine Funktion von p Parametern u^α ($\alpha = 1, \dots, p$)

$$(1.1) \quad \xi = \xi(u^\alpha),$$

so nennen wir die dadurch definierte Mannigfaltigkeit eine p -dimensionale Fläche F_p . Wir wollen dabei für diese Funktionen die jeweils notwendigen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen machen und nur solche Punkte P betrachten, für die der von ξ und den p Punkten $\partial_\alpha \xi$ ⁹⁾ aufgespannte Tangentialraum T p -dimensional ist. Dies wird dann auch für eine gewisse Umgebung von P der Fall sein, auf die wir unsere Untersuchungen beschränken wollen.

Durch die Gruppe der in der Umgebung von P umkehrbar-eindeutigen Parametertransformationen $u^\beta = u^\beta(\bar{u}^\alpha)$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, p$) wird in T die Gruppe $\mathfrak{G}(T)$ der Transformationen

$$(1.2) \quad \bar{\partial}_\alpha \xi = c_\alpha^\beta \partial_\beta \xi; \quad c_\alpha^\beta = \frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha}$$

induziert. Das tensorielle Verhalten gegenüber dieser Gruppe kennzeichnen wir durch die Indizes $\alpha, \beta, \gamma; \lambda, \mu$ aus dem ersten Teil des griechischen Alphabets¹⁰⁾; sie durchlaufen die Werte $1, \dots, p$.

Die homogenen Koordinaten des Ortspunkts sind nur bis auf einen gemeinsamen Faktor $\sigma = \sigma(u^\alpha)$ festgelegt. Wir kennzeichnen das Transformationsverhalten bei der durch die *Umnormierungen*

$$(1.3) \quad \bar{\xi} = \sigma \xi$$

⁷⁾ Dies bildet eine Ergänzung zu J. A. SCHOUTEN, Der Ricci-Kalkül, Berlin 1924, IV, § 18, wo die Einspannung im A_n von der Parameterwahl abhängig ist.

⁸⁾ Ein kovarianter Punkt wird durch eine $(n-1)$ -dimensionale Hyperebene repräsentiert.

⁹⁾ ∂_α bezeichnet die partielle Ableitung nach u^α .

¹⁰⁾ Falls diese Indizes kein tensorielles Transformationsverhalten anzeigen, wie z. B. bei Übertragungen, verwenden wir einen griechischen Kernbuchstaben.

definierten Gruppe $\mathfrak{G}(U)$ durch den Index \circ , der oben oder unten steht, je nachdem sich das betreffende Objekt bei einer Transformation (1.3) mit σ^{-1} oder σ multipliziert¹⁰⁾. Für \mathfrak{x} insbesondere schreiben wir damit künftig \mathfrak{x}_\circ .

Wir verstehen, wie üblich, unter dem 1-ten Schmiegraum S_1 den Tangentialraum T und unter dem $(i+1)$ -ten Schmiegraum S_{i+1} ($i=1, \dots$) die von \mathfrak{x}_\circ und den Ableitungen von \mathfrak{x}_\circ bis einschließlich zur $(i+1)$ -ten Ordnung aufgespannte lineare Mannigfaltigkeit¹¹⁾. Wir wollen nur Punkte P betrachten, für die es einen S_{m+1} gibt, der den P_n aufspannt. S_{m+1} sei der erste Schmiegraum mit dieser Eigenschaft; i soll damit künftig die Werte $1, \dots, m$ durchlaufen. Ferner soll stets S_i ein echter Teilraum von S_{i+1} sein¹²⁾. S_i hat die Dimension p ; S_{i+1} habe die Dimension $p+r_1+\dots+r_i$. Dann sollen also die $r_i > 0$ sein. Es gilt $p+r_1+\dots+r_m=n$.

Unter einem i -ten Normalenraum N_i verstehen wir eine lineare Mannigfaltigkeit mit den Eigenschaften $S_i \cap N_i = 0$; $S_i \cup N_i = S_{i+1}$. Dazu erklären wir einen 0-ten Normalenraum N_0 durch $P \cap N_0 = 0$; $P \cup N_0 = S_1$ ¹³⁾. Die Dimension der N_i ist offenbar $r_i - 1$, d. h. sie enthalten r_i l. u. Punkte. Bei einer F_2 im P_3 z. B. ist also N_0 eine Gerade in der Tangentialebene T und N_1 ein Punkt außerhalb von T .

Während die S_1, S_{i+1} , wie aus ihrer Definition hervorgeht, eindeutig festgelegt sind, ist dies für die N_0, N_i nicht der Fall. Unser Ziel ist, auch die Normalenräume festzulegen. — Betrachten wir zunächst einen beliebig vorgegebenen N_0 . N_0 muß sich jedenfalls mit Hilfe der Basispunkte \mathfrak{x}_\circ und $\partial_\alpha \mathfrak{x}_\circ$ von T durch p Punkte der Form

$$(1.4) \quad \mathfrak{x}_{\circ\alpha} = \partial_\alpha \mathfrak{x}_\circ - \Gamma_{\circ\alpha}^\circ \mathfrak{x}_\circ$$

darstellen lassen. Die Koeffizienten $\Gamma_{\circ\alpha}^\circ$ sind dabei eindeutig festgelegt. Da N_0 nicht von der Darstellung der F_p durch Parameter und homogene Koordinaten abhängt, müssen sich die Punkte $\mathfrak{x}_{\circ\alpha}$ bei $\mathfrak{G}(T)$ und $\mathfrak{G}(U)$ in der durch die Indizes angedeuteten Weise transformieren, d. h.

$$(1.5) \quad \bar{\mathfrak{x}}_{\circ\alpha} = \bar{\partial}_\alpha \mathfrak{x}_\circ - \bar{\Gamma}_{\circ\alpha}^\circ \mathfrak{x}_\circ = \sigma c_\alpha^\beta \mathfrak{x}_{\circ\beta}; \quad \bar{\Gamma}_{\circ\alpha}^\circ = \Gamma_{\circ\alpha}^\circ - \partial_\alpha \lg \sigma.$$

Daneben bilden aber auch die Punkte

$$(1.6) \quad \mathfrak{x}_{\circ\alpha}^* = \mathfrak{x}_{\circ\alpha} + a_\alpha \mathfrak{x}_\circ$$

einen N_0 und umgekehrt entspricht jedem N_0 genau eine solche Sterntransformation (1.6). — Wir beschreiben nun auch die N_i durch r_i

¹¹⁾ Vgl. zum Begriff des Schmiegraums neben G. FUBINI-E. ČECH¹⁾ S. 731 und V. HLAVATÝ²⁾ P. G. I, S. 321 auch C. BURSTIN, Mehrdimensionale projektive Differentialgeometrie, Monatsh. Math. Phys. 37 (1930), S. 41—54.

¹²⁾ Diese Voraussetzung, durch die allgemeine „Flachpunkte“ ausgeschlossen werden, läßt sich übrigens vermeiden. Man kann sich aus den folgenden Überlegungen klarmachen, daß sich unsere Methoden auch zur Einspannung solcher singulärer Punkte eignen.

¹³⁾ Bei F_{n-1} wird N_0 meist als Normale zweiter Art bezeichnet, z. B. G. BOL³⁾, S. 279. In unserem Zusammenhang ist jedoch die obige Bezeichnung vorzuziehen.

Basispunkte n_{ϱ_i} ($\varrho_i, \varrho'_i = 1, \dots, r_i$). Daneben spannen aber auch die Punkte

$$(1.7) \quad \tilde{n}_{\varrho_i} = d_{\varrho_i}^{\varrho'_i} n_{\varrho'_i} + b_{\varrho_i}^{\varrho_i-1} n_{\varrho_i-1} + \dots + b_{\varrho_i}^{\varrho_i \lambda} \varepsilon_{\circ \lambda} + b_{\varrho_i}^{\circ} \varepsilon_{\circ}; \quad \text{Det}(d_{\varrho_i}^{\varrho'_i}) \neq 0$$

einen \tilde{N}_i auf, und wir erhalten mit diesen Transformationen sogar alle möglichen \tilde{N}_i . Die Gruppe dieser Transformationen läßt sich in das direkte Produkt zweier Gruppen mit den Transformationen

$$(1.8) \quad n_{\varrho_i}^* = n_{\varrho_i} + b_{\varrho_i}^{\varrho_i-1} n_{\varrho_i-1} + \dots + b_{\varrho_i}^{\varrho_i \lambda} \varepsilon_{\circ \lambda} + b_{\varrho_i}^{\circ} \varepsilon_{\circ}$$

und

$$(1.9) \quad \bar{n}_{\varrho_i} = d_{\varrho_i}^{\varrho'_i} n_{\varrho'_i}; \quad \text{Det}(d_{\varrho_i}^{\varrho'_i}) \neq 0$$

zerlegen. Die *Sterntransformationen* (1.8) bedeuten den Übergang zu einem neuen N_i^* , und umgekehrt entspricht jedem N_i^* eindeutig eine solche Transformation. Die *Strichtransformationen* (1.9) dagegen führen den N_i in sich über; sie bedeuten eine Basistransformation innerhalb des N_i . Die durch diese Substitutionen (1.9) definierte *i-te Normalenraumgruppe* $\mathfrak{G}(N_i)$ ist auf Grund der obigen Zerlegung offensichtlich unabhängig von der Wahl der N_i , sie ist also eindeutig der gegebenen Fläche zugeordnet. Das tensorielle Verhalten gegenüber $\mathfrak{G}(N_i)$ kennzeichnen wir durch die Indizes $\varrho_i, \sigma_i, \tau_i, \varrho'_i, \sigma'_i, \tau'_i$, u. ä. ¹⁰⁾; sie durchlaufen die Werte $1, \dots, r_i$. Der Index i soll die Zugehörigkeit zu $\mathfrak{G}(N_i)$ anzeigen.

Wir haben also zweierlei Arten von Transformationen zu unterscheiden: Einmal die Strichtransformationen (1.3) (1.5) und (1.9) (zusammengefaßt zu den Gruppen $\mathfrak{G}(U)$, $\mathfrak{G}(T)$ und $\mathfrak{G}(N_i)$), die sich aus der von uns gewählten Darstellung von P , N_0 und N_i mit Hilfe von Basispunkten ergeben, und zum andern die Sterntransformationen (1.6) und (1.8), die die Willkür bei der Festlegung der N_0 und N_i kennzeichnen.

Zu einer vorgegebenen *kontravarianten Basis*

$$(1.10) \quad \varepsilon_{\circ}, \varepsilon_{\circ \alpha}, n_{\varrho_i} \quad (i = 1, \dots, m)$$

gehört nach dem Dualitätsprinzip eindeutig eine *kovariante Basis*

$$(1.11) \quad \mathfrak{X}^{\circ}, \mathfrak{X}^{\circ \alpha}, \mathfrak{N}^{\varrho_i}, \quad (i = 1, \dots, m)$$

die durch die Gleichungen ¹⁴⁾

$$(1.12) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{\circ} \circ \mathfrak{X}^{\circ} &= 1; \quad \varepsilon_{\circ \alpha} \circ \mathfrak{X}^{\circ} = 0; \quad n_{\sigma_i} \circ \mathfrak{X}^{\circ} = 0 \\ \varepsilon_{\circ} \circ \mathfrak{X}^{\circ \beta} &= 0; \quad \varepsilon_{\circ \alpha} \circ \mathfrak{X}^{\circ \beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}; \quad n_{\sigma_i} \circ \mathfrak{X}^{\circ \beta} = 0 \\ \varepsilon_{\circ} \circ \mathfrak{N}^{\varrho_i} &= 0; \quad \varepsilon_{\circ \alpha} \circ \mathfrak{N}^{\varrho_i} = 0; \quad n_{\sigma_i} \circ \mathfrak{N}^{\varrho_i} = \delta_{\sigma_i}^{\varrho_i}; \quad n_{\sigma_{i'}} \circ \mathfrak{N}^{\varrho_i} = 0 \quad (i' \neq i) \end{aligned}$$

¹⁴⁾ Das Symbol \circ bezeichnet das skalare Produkt eines kovarianten und kontravarianten Punktes.

definiert wird. Das Transformationsverhalten bei $\mathfrak{G}(U)$, $\mathfrak{G}(T)$ und $\mathfrak{G}(N_i)$ wird durch die Stellung der Indizes angezeigt:

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \bar{x} &= \sigma^{-1} x^\circ; & \bar{x}^\circ \alpha &= \sigma^{-1} \check{c}_\beta^\alpha x^\circ \beta; & \bar{\mathfrak{N}}^{q_i} &= \check{d}_{\sigma_i}^{q_i} \mathfrak{N}^{q_i} \\ & \text{mit } \check{c}_\beta^\alpha c_\alpha^\gamma &= \delta_\beta^\gamma; & \check{d}_{\sigma_i}^{q_i} d_{\sigma_i}^{r_i} &= \delta_{\sigma_i}^{r_i}. \end{aligned}$$

Die Willkür in der Auswahl der N_0, N_i steckt natürlich auch in der kovarianten Basis. Man findet aus der Forderung, daß die Beziehungen (1.12) bei den Sterntransformationen (1.6) und (1.8) gültig bleiben sollen

$$(1.14) \quad \begin{aligned} \mathfrak{X}^{*\circ} &= \mathfrak{X}^\circ + m_\alpha \mathfrak{X}^{\circ\alpha} + m_{q_1}^\circ \mathfrak{N}^{q_1} + \dots & \dots + m_{q_m}^\circ \mathfrak{N}^{q_m} \\ \mathfrak{X}^{*\circ\alpha} &= \mathfrak{X}^{\circ\alpha} + m_{q_1}^{\circ\alpha} \mathfrak{N}^{q_1} + \dots & \dots + m_{q_m}^{\circ\alpha} \mathfrak{N}^{q_m} \\ \mathfrak{N}^{*q_i} &= & \mathfrak{N}^{q_i} + m_{q_{i+1}}^{q_i} \mathfrak{N}^{q_{i+1}} + \dots + m_{q_m}^{q_i} \mathfrak{N}^{q_m} \quad (i < m) \\ \mathfrak{N}^{*q_m} &= & \mathfrak{N}^{q_m}, \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten sich sukzessive aus

$$(1.15) \quad \begin{aligned} m_{q_i}^\circ + b_{q_i}^{q_{i-1}} m_{q_{i-1}}^\circ + \dots + b_{q_i}^{\circ\alpha} m_\alpha + b_{q_i}^\circ &= 0 \\ m_{q_i}^{\circ\alpha} + b_{q_i}^{q_{i-1}} m_{q_{i-1}}^{\circ\alpha} + \dots + b_{q_i}^{q_1} m_{q_1}^{\circ\alpha} + b_{q_i}^{\circ\alpha} &= 0 \\ m_{q_{i+l}}^{q_i} + b_{q_{i+l}}^{q_{i+l-1}} m_{q_{i+l-1}}^{q_i} + \dots + b_{q_{i+l}}^{q_{i+1}} m_{q_{i+1}}^{q_i} + b_{q_{i+l}}^{q_i} &= 0 \quad (1 \leq l \leq m-i) \end{aligned}$$

berechnen. Insbesondere gilt

$$(1.16) \quad m_\alpha = -a_\alpha; \quad m_{q_1}^{\circ\alpha} = -b_{q_1}^{\circ\alpha}; \quad m_{q_i}^{q_{i-1}} = -b_{q_i}^{q_{i-1}}.$$

2. Die *B*-Tensoren. Eine geometrische Bedeutung werden nur solche Objekte haben, die nicht von den Sterntransformationen abhängen. Ein wichtiges Beispiel hierfür sind die *i*-ten *B*-Tensoren ($i = 1, \dots, m$), die wir durch

$$(1.17) \quad B_{\sigma_{\alpha_1} \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}}^{q_i} = \mathfrak{N}^{q_i} \circ \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{i+1}} \xi_\circ = B_{\sigma_{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i+1})}}^{q_i} \quad (15)$$

definieren. Für Hyperflächen werden die *B*-Tensoren die Koeffizienten der quadratischen Grundform, vgl. § 3.3. Es gilt

$$(1.18) \quad \begin{aligned} \bar{B}_{\sigma_{\alpha_1} \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}}^{q_i} &= \sigma \check{d}_{\sigma_i}^{q_i} c_{\alpha_1}^{\beta_1} c_{\alpha_2}^{\beta_2} \dots c_{\alpha_{i+1}}^{\beta_{i+1}} B_{\sigma_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{i+1}}}^{q_i} \\ \cdot B_{\sigma_{\alpha_1} \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}}^{*q_i} &= B_{\sigma_{\alpha_1} \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}}^{q_i}. \end{aligned}$$

¹⁵ Die *B*-Tensoren (1.17) entsprechen den Größen *J* und die Tensoren (1.30) den Größen *H* in der Arbeit: J. A. SCHOUTEN-E. R. VAN KAMPEN, Über die Krümmung einer V_m in V_n ; eine Revision der Krümmungstheorie, Math. Ann. **105** (1931), S. 144—159. — Die runde Klammer um die $(i + 1)$ -Indizes bezeichnet den symmetrischen Teil der gegebenen Größe, dessen Komponenten man erhält, wenn man die Summe über die $(i + 1)!$ durch Permutation der Indizes aus den gegebenen Komponenten entstehenden Elemente bildet und durch $(i + 1)!$ dividiert. (1.17) besagt also, daß der *i*-te *B*-Tensor in den Indizes von $\mathfrak{G}(T)$ symmetrisch ist.

Das folgt aus den Formeln für die Sterntransformation und aus

$$(1.19) \quad \begin{aligned} \mathfrak{N}^{\alpha_{i+l}} \circ \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{i+1}} \mathfrak{r}_o &= 0 \\ \mathfrak{N}^{\alpha_i} \circ \partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \dots \partial_{\alpha_{i+1-l}} \mathfrak{r}_o &= 0 \end{aligned} \quad \text{für } l > 0,$$

einer Folge der Definition der n_{α_i} und \mathfrak{N}^{α_i} mit Hilfe der S_{i+1} .

Wir bilden zu (1.17) die komplementären i -ten B -Tensoren $\tilde{B}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}}^{\alpha_i}$ mit den Eigenschaften

$$(1.20) \quad \begin{aligned} (a) \quad B_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}}^{\alpha_i} \tilde{B}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}}^{\alpha_i} &= p \delta_{\alpha_i}^{\alpha_i} \\ (b) \quad B_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}}^{\alpha_i} \tilde{B}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}}^{\beta} &= r_i \delta_{\alpha}^{\beta} \end{aligned} \quad (16).$$

Dazu bilden wir zunächst¹⁷⁾

$$(1.21) \quad C_{\alpha_1 \dots \alpha_{2i+2}}^{\alpha_i} = B_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}}^{\alpha_i} B_{\alpha_{i+2} \alpha_{i+3} \dots \alpha_{2i+2}}^{\alpha_i}.$$

Diese Tensoren sind auch in den Indizes α_i, σ_i symmetrisch. Hiermit wird¹⁸⁾

$$(1.22) \quad \underbrace{T_{(1 \dots p)^{2i+2} (\sigma)^{2p}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2p}}}_{(17)} = \frac{1}{p!} \underbrace{\delta_{1 \dots p}^{\alpha_1 \dots \alpha_1 p}} \dots \underbrace{\delta_{1 \dots p}^{\alpha_{2i+2} \dots \alpha_{2i+2} p}} C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2i+2} \alpha_{i+3} \dots \alpha_{2i+2} p}^{\alpha_1 \alpha_2} \dots C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2i+2} p}^{\alpha_{2p-1} \alpha_{2p}} \quad (19),$$

¹⁸⁾ Faßt man die Gleichungen (1.20) als Bedingungsgleichungen für die komplementären B -Tensoren auf, so sind diese dadurch im allg. nicht eindeutig definiert. Um uns zu fixieren, definieren wir daher in den Gleichungen (1.21) bis (1.28) explizit aus den gegebenen i -ten B -Tensoren symmetrische komplementäre B -Tensoren mit dem durch die Indizes angezeigten Transformationsverhalten. Wenn diese Definition auch nicht frei von Willkür ist (vgl. für $i = 1$ ¹⁷⁾), so wird durch sie jedoch für Punkte mit $T_{(\sigma)} \neq 0$ (vgl. (1.23)) die Existenz solcher Tensoren nachgewiesen, die im Falle der F_1 und F_{n-1} zu dem üblichen Begriff von komplementärem Tensor führen (vgl. § 3). Bei einem ersten Studium der Arbeit ist es möglich, die Existenz der komplementären B -Tensoren einfach hinzunehmen und die Ausführungen bis (1.28) zu übergehen.

¹⁷⁾ Mit der Bildung der Elemente (1.21) wollen wir zu Tensoren mit einer geraden Anzahl von Indizes von $\mathfrak{G}(T)$ gelangen. Für den Fall $i = 1$ (und ebenso $i = 2q + 1$) ist dies schon für die B -Tensoren der Fall. Hieraus ergibt sich der von unserem Ansatz verschiedene Ansatz zur Definition komplementärer B -Tensoren bei K. H. WEISE. Vgl. W. KLINGENBERG⁶⁾, S. 67 f.

¹⁸⁾ In den Formeln (1.22) bis (1.27) lassen wir der Übersichtlichkeit halber bei den Indizes von $\mathfrak{G}(N_i)$ das i fort, also z. B. statt α_i, α_{i+1} usw. α, α_2 usw. Dabei sollen sich alle Indizes auf ein festes i beziehen. Das gleiche gilt für r statt r_i .

¹⁹⁾ Der Index $1 \dots p$ [bzw. $1 \dots r$] zeigt ein p -stufiges [bzw. r -stufiges] Transformationsverhalten bei $\mathfrak{G}(T)$ [bzw. $\mathfrak{G}(N_i)$] an, also die Multiplikation oder Division mit $\text{Det}(c_{\alpha}^{\beta})$ [bzw. $\text{Det}(d_{\alpha}^{\beta})$], je nachdem der Index oben oder unten steht. — $(1 \dots p)^{\beta}$ bzw. $(1 \dots r)^{\beta}$ bzw. $(\sigma)^{\beta}$ stehen als Abkürzung für l Indizes.

$\delta_{1 \dots p}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ [bzw. $\delta_{1 \dots r}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}$] ist das verallgemeinerte KRONECKER-Symbol. Es hat den Wert 1 bzw. 0 bzw. -1 , je nachdem $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ [bzw. $\alpha_1, \dots, \alpha_r$] eine gerade bzw. keine bzw. eine ungerade Permutation der Zahlen $1, \dots, p$ [bzw. $1, \dots, r$] ist.

$\delta_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{1 \dots p}$ [bzw. $\delta_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^{1 \dots r}$] ist ebenso erklärt.

ein in allen Indizes symmetrischer Tensor. Wenn die Determinante $T_{(i)}^{20}$, die durch

$$(1.23) \quad \underbrace{T_{(1..p)}^{(1..r)^{2p}}}_{(2i+2)r} \binom{(c)^{2p}}{(c)^{2p}} = \frac{1}{r!} \delta_{\ell_1 1 \dots \ell_1 r}^{1..r} \dots \delta_{\ell_2 p 1 \dots \ell_2 p r}^{1..r} T_{(1..p)}^{\ell_1 1 \dots \ell_2 p 1} \binom{(c)^{2p}}{(c)^{2p}} \dots T_{(1..p)}^{\ell_1 r \dots \ell_2 p r} \binom{(c)^{2p}}{(c)^{2p}} \quad 19)$$

gegeben ist, nicht verschwindet, können wir die Elemente

$$(1.24) \quad \underbrace{T_{\ell_1 \dots \ell_2 p}^{(1..p)^{2i+2}}}_{(c)^{2p}} = \frac{1}{(r-1)!} \frac{1}{T_{(i)}} \delta_{\ell_1 \ell_1 2 \dots \ell_1 r}^{1..r} \dots \delta_{\ell_2 p \ell_2 p 2 \dots \ell_2 p r}^{1..r} T_{(1..p)}^{\ell_1 2 \dots \ell_2 p 2} \binom{(c)^{2p}}{(c)^{2p}} \dots T_{(1..p)}^{\ell_1 r \dots \ell_2 p r} \binom{(c)^{2p}}{(c)^{2p}}$$

bilden, die zu den Elementen (1.22) komplementär sind:

$$(1.25) \quad T_{(1..p)}^{\alpha \ell_2 \dots \ell_2 p} \underbrace{\tilde{T}_{\alpha \ell_2 \dots \ell_2 p}^{(1..p)^{2i+2}}}_{(c)^{2p}} = \delta_{\alpha}^{\ell}.$$

Hiermit bilden wir die komplementären Elemente von (1.21):

$$(1.26) \quad \tilde{C}_{\ell_1 \ell_2}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2i+2}} = \frac{1}{(p-1)!} \delta_{1 \dots p}^{\alpha_1 \alpha_1 2 \dots \alpha_1 p} \dots \delta_{1 \dots p}^{\alpha_{2i+2} \alpha_{2i+2} 2 \dots \alpha_{2i+2} p} C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2i+2}}^{\ell_3 \ell_4} \dots C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i+2}}^{\ell_{2p-1} \ell_{2p}} \tilde{T}_{\ell_1 \ell_2 \ell_3 \ell_4 \dots \ell_{2p-1} \ell_{2p}}^{(1..p)^{2i+2}} \binom{(c)^{2p}}{(c)^{2p}}$$

Diese haben die Eigenschaften

$$(1.27) \quad \begin{aligned} (a) \quad & C_{\alpha_1 \dots \alpha_{2i+2}}^{\ell_1 \ell_2} \tilde{C}_{\ell_1 \ell_2}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2i+2}} = p \delta_{\alpha}^{\ell} \\ (b) \quad & C_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2i+2}}^{\ell_1 \ell_2} \tilde{C}_{\ell_1 \ell_2}^{\beta \alpha_2 \dots \alpha_{2i+2}} = r \delta_{\alpha}^{\beta}. \end{aligned}$$

Die linke Seite von (1.27 a) läßt sich nämlich bis auf den Faktor p in der Form (1.25) schreiben, wenn man (1.22) und (1.26) benutzt. Die Symmetrie der ρ -Indizes in (1.22) gilt dabei wegen der Symmetrie von (1.24) und deshalb, weil man zwei Terme C_{\dots}^{21} vertauschen kann, ohne daß sich der Ausdruck ändert, da er sich bei einer Umbenennung der α -Summationsindizes nur mit $(-1)^{2i+2} = 1$ multipliziert. — Die Gültigkeit von (1.27 b) folgt für $\alpha \neq \beta$ daraus, daß auf der linken Seite, wenn wir (1.26) einsetzen, immer zwei C_{\dots} mit gleichem ersten Index α vorkommen müssen. Vertauscht man in einem solchen Ausdruck A diese beiden C_{\dots} , so multipliziert sich A bei einer Umbenennung der Summationsindizes mit $(-1)^{2i+1} = -1$; andererseits geht A dabei in sich über, d. h. $A = 0$. Ist dagegen $\alpha = \beta$, so sind die ersten Indizes der C_{\dots} alle untereinander verschieden; sie bilden eine Permutation der Zahlen $1, \dots, p$. Würde über $\alpha = \beta$ summiert, so käme wegen (1.27 a) rp heraus. Da dies nicht der Fall ist, nur der Bruchteil $\frac{1}{p}$ hiervon, q. e. d.

²⁰⁾ Wir benutzen $T_{(i)}$ als Abkürzung für das das Transformationsverhalten angezeigte Symbol (1.23).

²¹⁾ Dies steht in diesem Absatz als Abkürzung für (1.21).

Die komplementären B -Tensoren definieren wir jetzt durch ²²⁾

$$(1.28) \quad \check{B}_{\sigma_i}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}} = B_{\sigma_i \alpha_{i+2} \alpha_{i+3} \dots \alpha_{2i+2}}^{\sigma_i} \check{C}_{\sigma_i \sigma_i}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i+1} \alpha_{i+2} \alpha_{i+3} \dots \alpha_{2i+2}}.$$

Die Eigenschaften (1.20) folgen mit (1.21) unmittelbar aus (1.27). *Wir wollen künftig nur solche F_p betrachten, für die die Determinanten $T_{(i)}$ nicht verschwinden, für die also die komplementären B -Tensoren existieren.* — Wir erwähnen noch die Formel

$$(1.29) \quad \partial_\alpha \lg T_{(i)} = 2 \check{B}_{\sigma_i}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}} \partial_\alpha B_{\sigma_i \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}}^{\sigma_i},$$

die sich aus (1.21) bis (1.28) ergibt ²³⁾. Sie stellt eine Verallgemeinerung der bekannten Formel für die logarithmische Ableitung der Determinante eines Tensors zweiten Grades dar.

Wir führen außerdem noch die Tensoren ¹⁵⁾

$$(1.30) \quad \begin{aligned} (a) \quad B_{\sigma_{i-1} \alpha}^{\sigma_i} &= B_{\sigma_i \alpha \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}}^{\sigma_i} \check{B}_{\sigma_{i-1}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{i+1}} & (i > 1) \\ (b) \quad \check{B}_{\sigma_i}^{\alpha_1 \dots \alpha_{i+1}} &= \check{B}_{\sigma_i}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}} B_{\sigma_i \alpha_2 \dots \alpha_{i+1}}^{\sigma_{i-1}} & (i > 1) \end{aligned}$$

ein. Die $B_{\sigma_{i-1} \alpha}^{\sigma_i}$ können wir auch direkt definieren durch

$$(1.31) \quad B_{\sigma_{i-1} \alpha}^{\sigma_i} = \partial_\alpha n_{\sigma_{i-1}} \circ \mathfrak{H}^{\sigma_i}.$$

Denn jedenfalls müssen sich die $\partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_i} \xi_\sigma$ durch die $n_{\sigma_{i-1}}$ und $\xi_\sigma, \xi_{\sigma, \alpha}, n_{\sigma_{i-1} - l}$ mit $l > 0$ ausdrücken lassen. Dabei treten als Koeffizienten bei $n_{\sigma_{i-1}}$ gerade die B -Tensoren auf:

$$(1.32 a) \quad \partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_i} \xi_\sigma \equiv B_{\sigma_{i-1} \alpha_1 \dots \alpha_i}^{\sigma_i} n_{\sigma_{i-1}}(n_{\sigma_{i-2}}, \dots, \xi_\sigma) \quad (i > 1).$$

Dies können wir nach den $n_{\sigma_{i-1}}$ auflösen:

$$(1.32 b) \quad n_{\sigma_{i-1}} \equiv \frac{1}{p} \check{B}_{\sigma_{i-1}}^{\alpha_1 \dots \alpha_i} \partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_i} \xi_\sigma(n_{\sigma_{i-2}}, \dots, \xi_\sigma) \quad (i > 1).$$

Und hieraus folgt unmittelbar die Äquivalenz von (1.31) und (1.30 a).

Entsprechend gilt auf Grund von (1.31):

$$(1.33 a) \quad \partial_\alpha n_{\sigma_{i-1}} \equiv B_{\sigma_{i-1} \alpha}^{\sigma_i} n_{\sigma_i}(n_{\sigma_{i-1}}, \dots, \xi_\sigma). \quad (i > 1)$$

Die Auflösung nach den n_{σ_i} hat die Form

$$(1.33 b) \quad n_{\sigma_i} \equiv \frac{1}{r_{i-1}} \check{B}_{\sigma_{i-1}}^{\alpha_1 \dots \alpha_i} \partial_\alpha n_{\sigma_{i-1}}(n_{\sigma_{i-1}}, \dots, \xi_\sigma), \quad (i > 1)$$

wie man mit Hilfe von (1.32) erkennt. Hieraus folgt

$$(1.34) \quad B_{\sigma_{i-1} \alpha}^{\sigma_i} \check{B}_{\sigma_i}^{\alpha_1 \dots \alpha_i} = r_{i-1} \delta_{\sigma_i}^{\sigma_i}. \quad (i > 1)$$

²²⁾ Der Index i bei $\sigma_i, \sigma_i, \tau_i$ usw. kennzeichnet jetzt wieder die Zugehörigkeit zu $\mathfrak{G}(N_i)$.

²³⁾ Für $i = 1$ vgl. W. KLINGENBERG ⁶⁾, S. 71.

²⁴⁾ \equiv bezeichnet die Kongruenz nach dem von den Punkten in der Klammer aufgespannten linearen Raum.

3. Die Übertragungen. Unter einer *Größe* wollen wir ein sich bei den Gruppen $\mathfrak{G}(P_n)$, $\mathfrak{G}(T)$, $\mathfrak{G}(U)$ und $\mathfrak{G}(N_i)$ tensoriell verhaltendes Objekt verstehen²⁵⁾. Wenn wir eine Größe als Funktion der u^α differenzieren, dann erhalten wir i. a. nicht wieder eine Größe. Wir wollen deshalb statt der gewöhnlichen Ableitung eine kovariante Ableitung mit Hilfe von Übertragungen so erklären, daß durch sie einer Größe eine um einen kovarianten Index von $\mathfrak{G}(T)$ vermehrte Größe zugeordnet wird. Dabei benötigen wir aber nicht nur Übertragungen für $\mathfrak{G}(T)$, sondern auch für $\mathfrak{G}(U)$ und $\mathfrak{G}(N_i)$; denn neben den c_β^α sind auch die Transformationselemente σ und $d_{\xi_i}^{\sigma_i}$ Funktionen von u^α .

Unter einem *System Γ von Übertragungen* verstehen wir eine Menge von Funktionen $\Gamma_{\sigma\gamma}^\circ$, $\Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda$, $\Gamma_{\xi_i\gamma}^{\sigma_i}$, die sich bei $\mathfrak{G}(U)$, $\mathfrak{G}(T)$ und $\mathfrak{G}(N_i)$ in der Form

$$(1.35) \quad \begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\sigma\gamma}^\circ &= (\Gamma_{\sigma\gamma'}^\circ + \partial_{\gamma'} \lg \sigma) c_{\gamma'}^{\gamma'} \\ \bar{\Gamma}_{\alpha\gamma}^\lambda &= (\Gamma_{\alpha'\gamma'}^{\lambda'} c_{\alpha'}^{\alpha'} \tilde{c}_{\lambda'}^{\lambda} + \tilde{c}_{\alpha}^{\mu} \partial_{\gamma'} c_{\mu}^{\lambda}) c_{\gamma'}^{\gamma'} \\ \bar{\Gamma}_{\xi_i\gamma}^{\sigma_i} &= (\Gamma_{\xi_i'\gamma'}^{\sigma_i'} d_{\xi_i}^{\sigma_i'} \tilde{d}_{\sigma_i}^{\sigma_i} + \tilde{d}_{\xi_i}^{\tau_i} \partial_{\gamma'} d_{\tau_i}^{\sigma_i}) c_{\gamma'}^{\gamma'} \end{aligned}$$

transformieren. Die *kovariante Ableitung*, angezeigt durch das Symbol ∇_{γ} , erklären wir hiermit in der üblichen Weise. Als für später wichtiges Beispiel geben wir die kovariante Ableitung der Tensoren $B_{\alpha\beta}^{\xi_i}$ und $B_{\xi_i-1\alpha}^{\xi_i}$ an, mit der wir die *A-Tensoren* definieren:

$$(1.36) \quad \begin{aligned} A_{\alpha\beta\gamma}^{\sigma_1} &= \nabla_{\gamma} B_{\alpha\beta}^{\sigma_1} = \partial_{\gamma} B_{\alpha\beta}^{\sigma_1} + B_{\sigma_1\alpha\beta}^{\sigma_1} \Gamma_{\sigma_1\gamma}^{\sigma_1} - B_{\sigma_1\lambda\beta}^{\xi_1} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} - B_{\sigma_1\alpha\lambda}^{\xi_1} \Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda} - B_{\sigma_1\alpha\beta}^{\xi_1} \Gamma_{\sigma_1\gamma}^{\sigma_1} \\ A_{\xi_i-1\alpha\gamma}^{\xi_i} &= \nabla_{\gamma} B_{\xi_i-1\alpha}^{\xi_i} = \partial_{\gamma} B_{\xi_i-1\alpha}^{\xi_i} + B_{\xi_i-1\alpha}^{\xi_i} \Gamma_{\sigma_1\gamma}^{\xi_i} - B_{\sigma_1-1\alpha}^{\xi_i} \Gamma_{\xi_i-1\gamma}^{\sigma_1} - B_{\xi_i-1\lambda}^{\xi_i} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} \end{aligned} \quad (i > 1).$$

Das ∇_{γ} -Symbol hat offenbar die üblichen Eigenschaften eines Differentiationssymbols.

Wo bekommen wir nun ein System Γ her? Es gilt: *Durch eine Basis \mathfrak{B}* ²⁶⁾ *wird ein System von Übertragungen, das zu \mathfrak{B} gehörende System $\Gamma(\mathfrak{B})$, induziert:*

$$(1.37) \quad \begin{aligned} \Gamma_{\sigma\gamma}^\circ &= \partial_{\gamma} \xi_{\sigma} \circ \mathfrak{X}^{\circ} & \text{d. h. } \nabla_{\gamma} \xi_{\sigma} \circ \mathfrak{X}^{\circ} &= 0 \\ \Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda &= (\partial_{\gamma} \xi_{\sigma\alpha} - \Gamma_{\sigma\gamma}^{\circ} \xi_{\sigma\alpha}) \circ \mathfrak{X}^{\sigma\lambda} & \text{d. h. } \nabla_{\gamma} \xi_{\sigma\alpha} \circ \mathfrak{X}^{\sigma\lambda} &= 0 \\ \Gamma_{\xi_i\gamma}^{\sigma_i} &= \partial_{\gamma} n_{\sigma_i} \circ \mathfrak{R}^{\sigma_i} & \text{d. h. } \nabla_{\gamma} n_{\sigma_i} \circ \mathfrak{R}^{\sigma_i} &= 0. \end{aligned}$$

Man prüft leicht nach, daß sich diese Objekte in der Tat in der Form (1.35) transformieren. — In (1.37) sind die $\Gamma_{\sigma\gamma}^\circ$ offenbar gerade mit den ebenso bezeichneten Koeffizienten in (1.4) identisch. Daß diese

²⁵⁾ Dabei sollen auch p -stufige und τ_i -stufige Indizes von $\mathfrak{G}(T)$ und $\mathfrak{G}(N_i)$ zugelassen sein, d. h. sog. Tensordichten.

²⁶⁾ Darunter verstehen wir eine kontravariante Basis (1.10) mit der zugehörigen kovarianten Basis (1.11).

²⁷⁾ Hier werden also die vorher zu definierenden $\Gamma_{\sigma\gamma}^\circ$ verwandt.

sich wie Übertragungen für $\mathfrak{G}(U)$ transformieren, geht schon aus (1.5) hervor. Sind umgekehrt solche $\Gamma_{\circ\gamma}^{\circ}$ gegeben, so bestimmen die damit definierten Punkte $\mathfrak{x}_{\circ\gamma}$ einen N_0 . Die N_0 und die Übertragungen $\Gamma_{\circ\gamma}^{\circ}$ entsprechen sich also umkehrbar eindeutig. — Mit (1.4) können wir auch die $\Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda}$ in (1.37) in der symmetrischen Form schreiben

$$(1.38) \quad \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} = \partial_{\gamma} \partial_{\alpha} \mathfrak{x}_{\circ} \circ \mathfrak{x}^{\circ\lambda} - 2 \delta_{\alpha}^{\lambda} \Gamma_{\circ\gamma}^{\circ} = \Gamma_{\gamma\alpha}^{\lambda}.$$

Als eine gewisse Umkehrung der Zuordnung $\mathfrak{B} \rightarrow \Gamma(\mathfrak{B})$ durch (1.37) gilt, daß durch ein System Γ eine Basis, die zu Γ gehörende Basis $\mathfrak{B}(\Gamma)$, induziert wird²⁸⁾:

$$(1.39) \quad \begin{aligned} \mathfrak{x}_{\circ\alpha} &= \nabla_{\alpha} \mathfrak{x}_{\circ} = \partial_{\alpha} \mathfrak{x}_{\circ} - \Gamma_{\circ\alpha}^{\circ} \mathfrak{x}_{\circ} \\ \mathfrak{n}_{q_1} &= \frac{1}{p} \tilde{B}_{q_1}^{\alpha\gamma} \nabla_{\gamma} \mathfrak{x}_{\circ\alpha} = \frac{1}{p} \tilde{B}_{q_1}^{\alpha\gamma} (\partial_{\gamma} \mathfrak{x}_{\circ\alpha} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} \mathfrak{x}_{\circ\lambda} - \Gamma_{\circ\gamma}^{\circ} \mathfrak{x}_{\circ\alpha}) \\ \mathfrak{n}_{q_i} &= \frac{1}{r_{i-1}} \tilde{B}_{q_i}^{q_{i-1}\gamma} \nabla_{\gamma} \mathfrak{n}_{q_{i-1}} = \frac{1}{r_{i-1}} \tilde{B}_{q_i}^{q_{i-1}\gamma} (\partial_{\gamma} \mathfrak{n}_{q_{i-1}} - \Gamma_{q_{i-1}\gamma}^{\sigma_{i-1}} \mathfrak{n}_{\sigma_{i-1}}) \quad (i > 1). \end{aligned}$$

4. Die Ableitungsgleichungen. Die Ableitungsgleichungen für eine Basis \mathfrak{B} mit der zugehörigen Übertragung $\Gamma(\mathfrak{B})$ lauten

$$(1.40) \quad \begin{aligned} \nabla_{\gamma} \mathfrak{x}_{\circ} &= \mathfrak{x}_{\circ\gamma} \\ \nabla_{\gamma} \mathfrak{x}_{\circ\beta} &= B_{\circ\beta\gamma}^{q_1} \mathfrak{n}_{q_1} + C_{\beta\gamma} \mathfrak{x}_{\circ} \\ \nabla_{\gamma} \mathfrak{n}_{q_i} &= B_{q_i\gamma}^{q_{i+1}} \mathfrak{n}_{q_{i+1}} + C_{q_i\gamma}^{q_{i-1}} \mathfrak{n}_{q_{i-1}} + \dots + C_{q_i\gamma}^{\lambda} \mathfrak{x}_{\circ\lambda} + C_{q_i\gamma}^{\circ} \mathfrak{x}_{\circ} \quad (i < m) \\ \nabla_{\gamma} \mathfrak{n}_{q_m} &= C_{q_m\gamma}^{q_{m-1}} \mathfrak{n}_{q_{m-1}} + \dots + C_{q_m\gamma}^{\lambda} \mathfrak{x}_{\circ\lambda} + C_{q_m\gamma}^{\circ} \mathfrak{x}_{\circ}. \end{aligned}$$

²⁸⁾ Genau genommen wird in (1.39) die Übertragung $\Gamma_{q_m\gamma}^{\sigma_m}$ für $\mathfrak{G}(N_m)$ gar nicht benötigt. Um das Verhältnis der Zuordnungen $\mathfrak{B} \rightarrow \Gamma(\mathfrak{B})$ durch (1.37) und $\Gamma \rightarrow \mathfrak{B}(\Gamma)$ durch (1.39) zu untersuchen, wollen wir deshalb das *reduzierte System Γ_r von Übertragungen* einführen, daß aus einem System Γ ohne eine Übertragung $\Gamma_{q_m\gamma}^{\sigma_m}$ besteht. Wir nennen Γ_r und Γ'_r äquivalent, $\Gamma_r \sim \Gamma'_r$, wenn $\mathfrak{B}(\Gamma_r) = \mathfrak{B}(\Gamma'_r)$ ist. Aus (1.39) folgt, daß $\Gamma_r \sim \Gamma'_r$ gleichbedeutend ist mit

$$\Gamma_{\circ\alpha}^{\circ} = \Gamma'_{\circ\alpha}{}^{\circ}; \quad \tilde{B}_{\circ}^{\alpha\beta} (\Gamma_{\alpha,\beta}^{\lambda} - \Gamma'_{\alpha,\beta}{}^{\lambda}) = 0; \quad \tilde{B}_{q_i}^{q_{i-1}\gamma} (\Gamma_{q_{i-1}\gamma}^{\sigma_{i-1}} - \Gamma'_{q_{i-1}\gamma}{}^{\sigma_{i-1}}) = 0 \quad (i > 1).$$

Wir nennen \mathfrak{B} und \mathfrak{B}' äquivalent, $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{B}'$, wenn $\Gamma_r(\mathfrak{B}) = \Gamma_r(\mathfrak{B}')$ ist. Wie man aus (1.37) abliest, ist $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{B}'$ gleichbedeutend mit

$$\mathfrak{x}_{\circ\alpha} = \mathfrak{x}'_{\circ\alpha}; \quad \mathfrak{n}_{q_1} \equiv \mathfrak{n}'_{q_1}(\mathfrak{x}_{\circ}); \quad \mathfrak{n}_{q_i} \equiv \mathfrak{n}'_{q_i}(\mathfrak{n}_{q_{i-2}}, \dots, \mathfrak{x}_{\circ\alpha}, \mathfrak{x}_{\circ}) \quad (i > 1).$$

Bei den Zuordnungen $\mathfrak{B} \rightarrow \Gamma_r(\mathfrak{B})$ und $\Gamma_r \rightarrow \mathfrak{B}(\Gamma_r)$ gelten nun folgende Beziehungen, wie man leicht nachprüft:

$$\begin{aligned} \Gamma_r \rightarrow \mathfrak{B}(\Gamma_r) \rightarrow \Gamma'_r(\mathfrak{B}(\Gamma_r)) \sim \Gamma_r \rightarrow \mathfrak{B}'(\Gamma'_r) = \mathfrak{B}(\Gamma_r) \\ \mathfrak{B} \rightarrow \Gamma_r(\mathfrak{B}) \rightarrow \mathfrak{B}'(\Gamma_r(\mathfrak{B})) \sim \mathfrak{B} \rightarrow \Gamma'_r(\mathfrak{B}') = \Gamma_r(\mathfrak{B}). \end{aligned}$$

Hieraus lesen wir ab: Die Klassen äquivalenter Γ_r und die Klassen äquivalenter \mathfrak{B} entsprechen sich umkehrbar eindeutig. Jede Klasse äquivalenter Γ_r wird durch genau ein zu einer Basis \mathfrak{B} gehörendes System $\Gamma_r(\mathfrak{B})$ und jede Klasse äquivalenter \mathfrak{B} durch genau eine zu einer Übertragung Γ_r gehörende Basis $\mathfrak{B}(\Gamma_r)$ repräsentiert.

Die Gestalt dieser Gleichungen ergibt sich aus (1.31) und (1.37). Ist insbesondere \mathfrak{B} eine zu einer Übertragung gehörende Basis $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\Gamma')$, so gilt außerdem für die Koeffizienten

$$(1.41) \quad \begin{aligned} \tilde{B}_{\varrho_1}^{\beta\gamma} C_{\beta\gamma} &= 0; \quad \tilde{B}_{\varrho_{i+1}}^{\varrho_i\gamma} C_{\varrho_i\gamma}^{\varrho_{i-1}} = 0 \quad (1 \leq l \leq i-1); \\ \tilde{B}_{\varrho_{i+1}}^{\varrho_i\gamma} C_{\varrho_i\gamma}^{\lambda} &= \tilde{B}_{\varrho_{i+1}}^{\varrho_i\gamma} C_{\varrho_i\gamma}^{\varrho_i} = 0. \end{aligned}$$

Denn dies ist damit äquivalent, daß die n_{ϱ_i} sich in der Form (1.39) ausdrücken lassen. — Für die zugehörige kovariante Basis folgt aus (1.12)

$$(1.42) \quad \begin{aligned} \nabla_{\gamma} \mathfrak{X}^{\circ} &= -C_{i\gamma} \mathfrak{X}^{\circ\lambda} - \dots && - C_{\varrho_m\gamma}^{\circ} \mathfrak{N}^{\varrho_m} \\ \nabla_{\gamma} \mathfrak{X}^{\circ\alpha} &= -\delta_{\gamma}^{\alpha} \mathfrak{X}^{\circ} - C_{\varrho_1\gamma}^{\circ\alpha} \mathfrak{N}^{\varrho_1} - \dots && - C_{\varrho_m\gamma}^{\circ\alpha} \mathfrak{N}^{\varrho_m} \\ \nabla_{\gamma} \mathfrak{N}^{\varrho_i} &= -B_{\varrho_{i-1}\gamma}^{\varrho_i} \mathfrak{N}^{\varrho_{i-1}} - C_{\varrho_{i+1}\gamma}^{\varrho_i} \mathfrak{N}^{\varrho_{i+1}} - \dots - C_{\varrho_m\gamma}^{\varrho_i} \mathfrak{N}^{\varrho_m} && (i < m) \\ \nabla_{\gamma} \mathfrak{N}^{\varrho_m} &= -B_{\varrho_{m-1}\gamma}^{\varrho_m} \mathfrak{N}^{\varrho_{m-1}}. \end{aligned}$$

Auf die in der üblichen Weise erfolgende Aufstellung der Integrabilitätsbedingungen verzichten wir hier.

Durch die Ableitungsgleichungen (1.40) und die zugehörigen Integrabilitätsbedingungen ist die F_p gekennzeichnet. Die in den Gleichungen auftretenden Basispunkte und Koeffizienten sind jedoch im allg. von der Auswahl der Basis abhängig, d. h. sie ändern sich bei Sterntransformationen. Für die Untersuchung der inneren Eigenschaften der F_p ist es also von fundamentaler Bedeutung, eine von diesen Transformationen unabhängige Basis zu bestimmen. Dieser Aufgabe wenden wir uns jetzt zu.

§ 2.

Das polare Basissystem.

1. Das polare Basissystem. Das gemäß (1.37) zu einer Basis \mathfrak{B} gehörende System $\Gamma(\mathfrak{B})$ hängt natürlich von der Wahl von \mathfrak{B} ab. Wir untersuchen diese Abhängigkeit, indem wir durch eine Sterntransformation gemäß den Formeln (1.6), (1.8) und (1.14) (mit (1.16)) zu einer neuen Basis \mathfrak{B}^* übergehen und mit dieser $\Gamma^*(\mathfrak{B}^*)$ bestimmen:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\circ\gamma}^{*\circ} &= \partial_{\gamma} \mathfrak{E}_{\circ} \circ \mathfrak{X}^{*\circ} = \partial_{\gamma} \mathfrak{E}_{\circ} \circ (\mathfrak{X}^{\circ} - a_{\alpha} \mathfrak{X}^{\circ\alpha} - \dots) \\ \Gamma_{\alpha\gamma}^{*\lambda} &= (\partial_{\gamma} \mathfrak{E}_{\circ\alpha}^* - \Gamma_{\circ\gamma}^{*\circ} \mathfrak{E}_{\circ\alpha}^*) \circ \mathfrak{X}^{*\circ\lambda} \\ &= (\partial_{\gamma} (\mathfrak{E}_{\circ\alpha} + a_{\alpha} \mathfrak{E}_{\circ}) - \Gamma_{\circ\gamma}^{*\circ} (\mathfrak{E}_{\circ\alpha} + a_{\alpha} \mathfrak{E}_{\circ})) \circ (\mathfrak{X}^{\circ\lambda} - b_{\varrho_1}^{\lambda} \mathfrak{N}^{\varrho_1} - \dots) \\ \Gamma_{\varrho_i\gamma}^{*\sigma_i} &= \partial_{\gamma} n_{\varrho_i}^* \circ \mathfrak{N}^{*\sigma_i} = \partial_{\gamma} (n_{\varrho_i} + b_{\varrho_i}^{\tau_{i-1}} n_{\tau_{i-1}} + \dots) \circ (\mathfrak{N}^{\sigma_i} - b_{\tau_{i+1}}^{\sigma_i} \mathfrak{N}^{\tau_{i+1}} - \dots). \end{aligned}$$

Hieraus folgt wegen (1.12), (1.17), (1.19) und (1.31)

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \Gamma_{\circ\gamma}^{*\circ} &= \Gamma_{\circ\gamma}^{\circ} - a_{\gamma} \\ \Gamma_{\alpha\gamma}^{*\lambda} &= \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} - B_{\alpha\gamma}^{\varrho_1} b_{\varrho_1}^{\lambda} + 2\delta_{(\alpha}^{\lambda} a_{\gamma)} \\ \Gamma_{\varrho_i\gamma}^{*\sigma_i} &= \Gamma_{\varrho_i\gamma}^{\sigma_i} - B_{\varrho_i\gamma}^{\tau_{i+1}} b_{\tau_{i+1}}^{\sigma_i} + B_{\tau_{i-1}\gamma}^{\sigma_i} b_{\varrho_i}^{\tau_{i-1}} \text{ (29)}. \end{aligned}$$

²⁹⁾ $B_{\tau_{i-1}\gamma}^{\sigma_i} b_{\varrho_i}^{\tau_{i-1}}$ bedeute für $i=1$: $B_{\lambda\gamma}^{\sigma_1} b_{\varrho_1}^{\lambda}$; $B_{\varrho_i\gamma}^{\tau_{i+1}} b_{\tau_{i+1}}^{\sigma_i}$ bedeute für $i=m$ die Null.

In diesen Formeln treten nur die Koeffizienten a_γ , $b_{\alpha_1}^{\lambda}$, $b_{\alpha_i}^{i-1}$ der Transformationen (1. 6), (1. 8) auf. Sobald wir diese festlegen, sind auch die Übertragungen und damit die zugehörige Basis festgelegt. Das Problem, die N_\circ , N_i projektivinvariant festzulegen, ist damit auf das Problem zurückgeführt, die Koeffizienten a_γ , $b_{\alpha_1}^{\lambda}$, $b_{\alpha_i}^{i-1}$ projektivinvariant festzulegen. Dies gelingt nun mit Hilfe der in (1. 36) definierten A -Tensoren. Zuvor bemerken wir noch, daß diese in den Indizes von $\mathfrak{G}(T)$ symmetrisch sind

$$(2. 2) \quad A_{\circ\alpha\beta\gamma}^{\alpha_1} = A_{\circ(\alpha\beta\gamma)}^{\alpha_1}; \quad A_{\alpha_{i-1}\alpha\gamma}^{\alpha_i} = A_{\alpha_{i-1}(\alpha\gamma)}^{\alpha_i} \quad (i > 1),$$

vorausgesetzt, daß sie mit Hilfe eines zu einer Basis gehörenden Systems $\Gamma(\mathfrak{B})$ erklärt sind. Für Hyperflächen sind die $A_{\circ\alpha\beta\gamma}^{\alpha_1}$ damit gerade die Koeffizienten der kubischen Form, vgl. § 3. 3. Zum Beweis von (2. 2) schreiben wir die linke Seite der Ableitungsgleichungen (1. 40) mit Hilfe der Übertragungen ausführlich, differenzieren nach u^α und multiplizieren mit \mathfrak{R}^{α_i} . Dann erhalten wir

$$(2. 3) \quad \begin{aligned} (a) \quad \mathfrak{R}^{\alpha_1} \circ \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma \mathfrak{r}_\circ - B_{\circ\alpha\lambda}^{\alpha_1} \Gamma_{\gamma\lambda}^{\alpha} - 2 B_{\circ\alpha(\beta}^{\alpha_1} \Gamma_{\sigma_1\gamma)}^{\alpha} &= \partial_\alpha B_{\circ\beta\gamma}^{\alpha_1} + B_{\circ\beta\gamma}^{\sigma_1} \Gamma_{\sigma_1\alpha}^{\alpha_1} \\ (b) \quad \mathfrak{R}^{\alpha_i} \circ \partial_\alpha \partial_\gamma n_{\alpha_{i-1}} - B_{\alpha_{i-1}\gamma}^{\alpha_i} \Gamma_{\alpha_{i-1}\alpha}^{\alpha} &= \partial_\alpha B_{\alpha_{i-1}\gamma}^{\alpha_i} + B_{\alpha_{i-1}\gamma}^{\tau_i} \Gamma_{\tau_i\alpha}^{\alpha_i} \quad (i > 1). \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen wird aus (1. 36)

$$(2. 4) \quad \begin{aligned} (a) \quad A_{\circ\alpha\beta\gamma}^{\alpha_1} &= \mathfrak{R}^{\alpha_1} \circ \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma \mathfrak{r}_\circ - 3 B_{\circ\lambda(\alpha}^{\alpha_1} \Gamma_{\beta\gamma)}^{\lambda} - 3 B_{\circ(\alpha\beta}^{\alpha_1} \Gamma_{\sigma_1\gamma)}^{\alpha} \\ (b) \quad A_{\alpha_{i-1}\alpha\gamma}^{\alpha_i} &= \mathfrak{R}^{\alpha_i} \circ \partial_\alpha \partial_\gamma n_{\alpha_{i-1}} - 2 B_{\alpha_{i-1}(\alpha}^{\alpha_i} \Gamma_{|\alpha_{i-1}|\gamma)}^{\alpha} - B_{\alpha_{i-1}\lambda}^{\alpha_i} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\lambda} \end{aligned}$$

und hieraus folgt (2. 2).

Denken wir uns jetzt eine Basis \mathfrak{B} vorgegeben, damit $\Gamma(\mathfrak{B})$ bestimmt und damit auch die A -Tensoren. Bei einer Sterntransformation ändern sich die Übertragungen gemäß (2. 1) und damit auch die A -Tensoren. Wir finden mit (2. 1), (2. 2) aus (1. 36):

$$(2. 5) \quad \begin{aligned} (a) \quad A_{\circ\alpha\beta\gamma}^{\alpha_1} &= A_{\circ\alpha\beta\gamma}^{\alpha_1} + 3 B_{\circ\lambda(\alpha}^{\alpha_1} B_{\circ\beta\gamma)}^{\sigma_1} b_{\sigma_1}^{\lambda} - B_{\circ\beta\gamma}^{\sigma_1} B_{\sigma_1\alpha}^{\tau_2} b_{\alpha}^{\tau_2} - 3 B_{\circ(\alpha\beta}^{\alpha_1} a_\gamma) \\ (b) \quad A_{\alpha_{i-1}\alpha\gamma}^{\alpha_i} &= A_{\alpha_{i-1}\alpha\gamma}^{\alpha_i} + 2 B_{\alpha_{i-1}(\alpha}^{\alpha_i} B_{|\alpha_{i-1}|\gamma)}^{\tau_i} b_{\tau_i}^{\alpha_{i-1}} - B_{\alpha_{i-1}\gamma}^{\sigma_i} B_{\sigma_i\alpha}^{\tau_{i+1}} b_{\tau_{i+1}}^{\alpha} \\ &\quad - B_{\alpha_{i-1}\gamma}^{\sigma_i} B_{\tau_{i-2}\alpha}^{\alpha_{i-1}} b_{\alpha_{i-1}}^{\tau_{i-2}} + B_{\alpha_{i-1}\lambda}^{\alpha_i} B_{\sigma_1\alpha\gamma}^{\sigma_1} b_{\sigma_1}^{\lambda} - 2 B_{\alpha_{i-1}(\alpha}^{\alpha_i} a_\gamma) \quad (i > 1). \end{aligned}$$

Wir verlangen jetzt

$$(2. 6) \quad \begin{aligned} (a) \quad A_{\sigma_1}^{\alpha_1\lambda} &= \tilde{B}_{\alpha_1}^{\lambda\alpha} \tilde{B}_{\sigma_1}^{\beta\gamma} A_{\circ\alpha\beta\gamma}^{\alpha_1} = 0 \\ (b) \quad A_{\sigma_i}^{\alpha_i\sigma_{i-1}} &= \tilde{B}_{\alpha_i}^{\sigma_{i-1}\alpha} \tilde{B}_{\sigma_i}^{\alpha_{i-1}\gamma} A_{\alpha_{i-1}\alpha\gamma}^{\alpha_i} = 0 \quad (i > 1) \end{aligned}$$

und nennen (2. 6 a) bzw. (2. 6 b) die 1-te bzw. i -te Apolaritätsbedingung.

³⁰⁾ $B_{\tau_{i-2}\alpha}^{\alpha_{i-1}} b_{\alpha_{i-1}}^{\tau_{i-2}}$ bedeute für $i = 2$: $B_{\sigma_1\lambda}^{\alpha_1} b_{\alpha_1}^{\sigma_1}$; $B_{\sigma_i\alpha}^{\tau_{i+1}} b_{\tau_{i+1}}^{\alpha_i}$ bedeute für $i = m$ die Null.

Setzen wir für $A_{\circ\alpha\beta\gamma}^{*q_1}$ und $A_{q_{i-1}\alpha\gamma}^{*q_i}$ die Ausdrücke (2.5) ein, so bedeutet (2.6) ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten $b_{q_1}^{\lambda}$, $b_{q_1}^{q_{i-1}}$, wobei die a_α als lineare Parameter auftreten. Dies System läßt sich sukzessive auflösen, indem man mit Hilfe der 1-ten Apolaritätsbedingung $b_{q_1}^{\lambda}$ aus allen Gleichungen eliminiert, mit Hilfe der 2-ten Apolaritätsbedingung $b_{q_2}^{q_1}$, usw. Dazu müssen wir voraussetzen, daß die entsprechenden Determinanten (deren Elemente sich allein aus den $B_{\circ\alpha\beta}^{q_1}$, $\tilde{B}_{q_1}^{\circ\alpha\beta}$ und $B_{q_{i-1}\alpha}^{q_i}$, $\tilde{B}_{q_i}^{q_{i-1}\alpha}$ aufbauen) nicht verschwinden. Wenn dies der Fall ist, sind die $b_{q_1}^{\lambda}$, $b_{q_1}^{q_{i-1}}$ eindeutig als lineare Funktionen der a_α festgelegt. Wir nennen diesen Fall den *regulären Fall*.

Die a_α bestimmen den N_0 . Nach (2.1) ist damit durch die Apolaritätsbedingungen (2.6) im regulären Fall ein nur von N_0 abhängendes System von Übertragungen Γ^* festgelegt. Die zugehörige auch nur von N_0 abhängende Basis $\mathfrak{B}^*(\Gamma^*)$ nennen wir das *polare Basissystem*. Durch die Apolaritätsbedingungen (2.6) ist im regulären Fall eindeutig das von einer beliebig vorgegebenen 0-ten Normalen abhängende polare Basissystem definiert. Man findet es, indem man von einer beliebigen Basis \mathfrak{B} ausgeht, hiermit $\Gamma(\mathfrak{B})$ und hiermit wieder die A -Tensoren bestimmt. Durch die Apolaritätsbedingungen werden dann im regulären Fall die Koeffizienten $b_{q_1}^{\lambda}$, $b_{q_1}^{q_{i-1}}$ als lineare Funktionen der a_α , die N_0 kennzeichnen, festgelegt. Hiermit sind nach (2.1) neue Übertragungen bestimmt. Die gemäß (1.39) bestimmte zugehörige Basis ist dann das nur von N_0 abhängende polare Basissystem. Damit ist das Einspannungsproblem auf die Festlegung von N_0 zurückgeführt.

Wir verzichten hier auf die formale Durchführung der Auflösung des Gleichungssystems (2.6) und damit auf die explizite Darstellung des polaren Basissystems. Wir müssen aber auch offen lassen, wann die Forderung der Regularität erfüllt ist³¹⁾, vgl. jedoch § 3. Wir bemerken nur noch, daß das polare Basissystem von den Ableitungen bis zur $(2m+1)$ -ten Ordnung von \mathfrak{x} abhängt. Denn der Tensor $B_{q_{m-1}\alpha}^{q_m}$ wird unter Verwendung $(m+1)$ -ter Ableitungen gebildet, der A -Tensor $A_{q_{m-1}\alpha\gamma}^{q_m}$ hängt damit auch noch von $(m+2)$ -ten Ableitungen ab und bei der Bildung der n_{q_i} gemäß (1.39) kommen ab n_{q_2} insgesamt $(m-1)$ neue Ableitungen hinzu, q. e. d.

2. Über die Festlegung von N_0 . Wir versuchen, N_0 durch die 0-te Apolaritätsbedingung (unter Verwendung von (2.5a))

$$(2.7) \quad \tilde{B}_{q_1}^{\circ\beta\gamma} A_{\circ\alpha\beta\gamma}^{*q_1} = \tilde{B}_{q_1}^{\circ\beta\gamma} A_{\circ\alpha\beta\gamma}^{q_1} - p b_{q_2}^{q_1} B_{q_2}^{\tau\alpha} + (p+2r_1) B_{\circ\lambda\alpha}^{q_1} b_{q_1}^{\lambda} - r_1(p+2)a_\alpha = 0$$

³¹⁾ Da die Koeffizienten der $b_{q_1}^{\lambda}$ und $b_{q_1}^{q_{i-1}}$ sich nur aus den B -Tensoren und ihren Komplementären zusammensetzen, erscheint es nicht ausgeschlossen, daß aus der Existenz dieser Tensoren allein schon immer die Regularität folgt. Für $m=1$ vgl. ⁴²⁾.

festzulegen³²⁾. Man kann (2.7) immer nach a_α auflösen, d. h. die 0-te Apolaritätsbedingung bestimmt zu gegebenem N_1 und N_2 eindeutig einen N_0 ³³⁾. Ferner gilt: Falls die 0-te Apolaritätsbedingung (als lineare Gleichung in $a_\alpha, b_{q_i}^\lambda, b_{v_i}^{q_i-1}$) unabhängig von den anderen Apolaritätsbedingungen (2.6) ist, legt sie im regulären Fall für das polare Basissystem a_α und damit N_0 fest. In diesem Fall gibt es also ein eindeutig bestimmtes ausgezeichnetes polares Basissystem.

Wenn diese Unabhängigkeitsvoraussetzung erfüllt ist, muß offen bleiben. Für Kurven F_1 und Hyperflächen F_{n-1} ist sie nicht erfüllt, da in diesen Fällen die 0-te Apolaritätsbedingung mit der 1-ten identisch wird, vgl. § 3. In den anderen Fällen kann man die Unabhängigkeit erwarten, vgl. § 3, S. 341 ff. Wir halten diese Frage aber für von untergeordneter Bedeutung, seit G. BOL für Kurven und Hyperflächen gezeigt hat, daß man für geometrische Untersuchungen zweckmäßigerweise N_0 nicht von vornherein festlegt, sondern von Fall zu Fall den geometrischen Erfordernissen anpaßt³⁴⁾.

3. Die affine Differentialgeometrie. Wir beschränken die projektiven Transformationen des P_n auf solche, die eine $(n-1)$ -dimensionale Hyperebene E_{n-1}^∞ festlassen. Aus P_n wird damit der n -dimensionale affine Raum E_n . Wir wählen die Basis in E_n so, daß die ersten n Basispunkte in E_{n-1}^∞ liegen. Wir können die nicht in E_{n-1}^∞ gelegenen Punkte ξ_α so normieren, daß $\xi_\alpha \circ \mathfrak{A} = 1$ wird, wenn \mathfrak{A} der zu E_{n-1}^∞ gehörige kovariante Punkt ist. Diese „affinen Punkte“ werden dann durch die n ersten Koordinaten bestimmt — die $(n+1)$ -te hat den Wert 1. Die kontravarianten Punkte von E_{n-1}^∞ nennen wir *kontravariante Vektoren*, die $(n-2)$ -dimensionalen linearen Räume in E_{n-1}^∞ nennen wir *kovariante Vektoren*. Die Vektoren (die durch n Zahlen bestimmt sind) sind also dadurch gekennzeichnet, daß sie sich bei den homogenen Affinitäten (das sind die Transformationen von E_{n-1}^∞ in sich) wie Punkte eines $(n-1)$ -dimensionalen projektiven Raumes transformieren, während sie bei den Schiebungen (das sind die Transformationen des nicht in E_{n-1}^∞ gelegenen Basispunktes von E_n) invariant sind³⁵⁾.

Betrachten wir jetzt eine F_p im E_n . Wir denken uns also $\xi_\alpha(u^\alpha)$ durch $\xi_\alpha(u^\alpha) \circ \mathfrak{A} = 1$ normiert. Indem wir diese ausgezeichnete Normierung festhalten, brauchen wir den Einfluß von $\mathfrak{U}(U)$ nicht mehr

³²⁾ Andere Möglichkeiten zur Festlegung von N_0 werden durch die Bedingungen $\tilde{B}_{q_i}^{q_i-1} A_{q_i-1}^{*q_i} a_\gamma = 0$ gegeben.

³³⁾ $A_{\alpha\beta\gamma}^{*q_i}$ hängt gemäß (2.5a) außer von N_0 nur von N_1 und N_2 ab.

³⁴⁾ Neben den Arbeiten ³⁾ und ⁴⁾ vgl. auch G. BOL, Projektive Differentialgeometrie, Bd. 1, Göttingen 1950, Bd. 2 in Vorbereitung.

³⁵⁾ Im allgemeinen pflegt man sich durch die Vektoren, deren Koordinaten sich um einen Faktor unterscheiden, verschiedene Vektoren repräsentiert zu denken. Bei dieser Auffassung repräsentieren also unsere Punkte und $(n-2)$ -Ebenen in E_{n-1}^∞ die Klassen der sich um einen Skalar unterscheidenden Vektoren.

zu berücksichtigen, und wir wollen daher den Index \circ fortlassen. Außerdem legen wir in den Transformationen (1.6), (1.8) a_α und $b_{\rho_i}^\circ$ durch $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{x}_\alpha = 0$ und $\mathfrak{A} \circ n_{\rho_i} = 0$ fest, d. h. wir wählen als Basispunkte für N_0, N_i kontravariante Vektoren. Der kovariante Punkt \mathfrak{x}° aus (1.12) ist dann mit \mathfrak{A} identisch, und es wird $\Gamma_{\circ\alpha}^\circ = \partial_\alpha \mathfrak{x}_\circ \circ \mathfrak{A} = 0$. Die vorstehenden Überlegungen für die projektive Differentialgeometrie lassen sich also auf die affine Differentialgeometrie übertragen, indem man $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u^\alpha)$ als affinen „Ortsvektor“³⁶⁾ auffaßt, die Überlegungen bezüglich $\mathfrak{G}(U)$ fortläßt und damit $\Gamma_{\circ\alpha}^\circ = 0$ setzt. Ein affin-ausgezeichneter N_0 wird durch die kontravarianten Vektoren $\partial_\alpha \mathfrak{x}$ aufgespannt; es ist der Schnitt des Tangentialraumes mit E_{n-1}° . Auch die N_i wähle man in E_{n-1}° , d. h. die Basispunkte n_{ρ_i} als Vektoren. Bei den Sterntransformationen (1.6) und (1.8) ist damit $a_\alpha = b_{\rho_i}^\circ = 0$ zu setzen.

Indem wir zu unserem affin-ausgezeichneten N_0 das polare Basissystem bestimmen, haben wir das Einspannungsproblem für die Affin-geometrie gelöst: Die Apolaritätsbedingungen (2.6) bestimmen im regulären Fall eindeutig ein affinvariantes Basissystem. Man erhält es ebenso, wie wir es oben im projektiven Fall ausgeführt haben, wobei nur die dortigen Überlegungen jetzt im affinen Sinn zu interpretieren sind. Insbesondere müssen wir $a_\alpha = 0$ setzen, da wir ja N_0 festhalten.

Durch die gleichen Methoden wird auch das Einspannungsproblem für den n -dimensionalen linear-zusammenhängenden Raum L_n gelöst. Man hat jetzt nur die durch ∂_α angezeigte partielle Ableitung, wenn sie auf eine Größe des L_n angewandt wird, als kovariante Ableitung bezüglich des in L_n erklärten linearen Zusammenhangs zu interpretieren. Die B -Tensoren und A -Tensoren sind jetzt zwar nicht mehr notwendig symmetrisch, aber es genügt, ihren symmetrischen Teil zu nehmen. Dann überträgt sich alles wortwörtlich. Insbesondere gilt dies für den Raum A_n mit affinem Zusammenhang, vgl. J. A. SCHOOTEN⁷⁾.

§ 3.

Spezialisierung auf die Fälle $m = n - 1$ und $m = 1$.

1. Spezialisierung auf Kurven ($m = n - 1$). Wir betrachten jetzt wieder den P_n und wollen nachsehen, wie das polare Basissystem im Spezialfall der Kurven F_1 aussieht. Für die Dimension der N_0, N_i gilt $p - 1 = r_i - 1 = 0$ und damit wird $m = n - 1$. Die F_1 beschreiben wir durch $\mathfrak{x}_\circ = \mathfrak{x}_\circ(t)$. Für die Indizes α und ρ_i schreiben wir die Indizes 0 und i . Als Ausgangsbasis wählen wir, indem wir die k -te Ableitung nach t mit ∂_0^k bezeichnen,

$$(3.1) \quad \mathfrak{x}_\circ, \mathfrak{x}_{\circ 0} = \partial_0 \mathfrak{x}_\circ; \mathfrak{n}_i = \partial_0^{i+1} \mathfrak{x}_\circ.$$

³⁶⁾ Der „Ortsvektor“ ist kein Vektor in unserm Sinne.

Damit diese Punkte den P_n aufspannen, müssen wir

$$(3.2) \quad \mathcal{A} \equiv [\xi_0, \partial_0 \xi_0, \dots, \partial_0^n \xi_0] \neq 0$$

voraussetzen. Die zugehörige kovariante Basis ist durch

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \mathfrak{X}^0 \circ \mathfrak{v} &= \mathcal{A}^{-1} [\mathfrak{v}, \partial_0 \xi_0, \dots, \partial_0^n \xi_0]; \quad \mathfrak{X}^{\circ 0} \circ \mathfrak{v} = \mathcal{A}^{-1} [\xi_0, \mathfrak{v}, \dots, \partial_0^n \xi_0] \\ \mathfrak{N}^{i0} \circ \mathfrak{v} &= \mathcal{A}^{-1} [\xi_0, \dots, \partial_0^i \xi_0, \mathfrak{v}, \partial_0^{i+2} \xi_0, \dots, \partial_0^n \xi_0] \end{aligned}$$

(mit unbestimmtem \mathfrak{v}) gegeben. Damit wird aus (1.31) und (1.37)

$$(3.4) \quad B_{\circ 00}^i = B_{i-1 0}^i = 1 \quad (i > 1)$$

$$(3.5) \quad \Gamma_{\circ 0}^{\circ} = \Gamma_{00}^{\circ} = \Gamma_{i0}^i = 0 \quad (i < m); \quad \Gamma_{m0}^m = \partial_0 \pi_m \circ \mathfrak{N}^m = \partial_0 \lg \mathcal{A}.$$

Hiermit werden die \mathcal{A} -Tensoren gemäß (1.36):

$$(3.6) \quad A_{\circ 000}^i = A_{i-1 00}^i = 0 \quad (1 < i < m); \quad A_{m-1 00}^m = \Gamma_{m0}^m = \partial_0 \lg \mathcal{A}.$$

Die Apolaritätsbedingungen (2.6) erhalten wir für F_1 einfach durch das Nullsetzen der Gleichungen (2.5):

$$(3.6) \quad \begin{aligned} (a) \quad & -b_2^1 + 3b_1^{\circ 0} - 3a_0 = 0 \\ (b) \quad & -b_{i+1}^i + 2b_{i-1}^{i-1} - b_{i-2}^{i-2} + b_1^{\circ 0} - 2a_0 = 0^{37} \quad (1 < i < m) \\ (c) \quad & \partial_0 \lg \mathcal{A} + 2b_m^{m-1} - b_{m-1}^{m-2} + b_1^{\circ 0} - 2a_0 = 0. \end{aligned}$$

Aus (3.6 a, b) folgt durch zweimaliges Aufsummieren

$$(3.7) \quad b_{i+1}^i = \frac{(i+1)(i+2)}{2} b_1^{\circ 0} - i(i+2)a_0.$$

Setzen wir dies in (3.6 c) ein, so folgt

$$(3.8) \quad b_1^{\circ 0} = -\partial_0 \lg \bar{\mathcal{A}} + \frac{2m}{m+1} a_0; \quad \bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^{\frac{2}{(m+1)(m+2)}}.$$

Die neuen Übertragungen werden damit gemäß (2.1)

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \Gamma_{\circ 0}^{*0} &= -a_0; \quad \Gamma_{00}^{*0} = \partial_0 \lg \bar{\mathcal{A}} + \frac{2}{m+1} a_0 \\ \Gamma_{i0}^{*i} &= (i+1) \left(\partial_0 \lg \bar{\mathcal{A}} + \frac{2}{m+1} a_0 \right) - a_0. \end{aligned}$$

Hiermit können wir nach (1.39) das von N_0 abhängige polare Basissystem bestimmen. Zuvor bemerken wir aber, daß wir mit Hilfe der durch

$$(3.10) \quad \bar{\Gamma}_{\circ 0}^{*0} = \Gamma_{00}^{*0} + \partial_0 \lg \sigma = -a_0 + \partial_0 \lg \sigma = 0$$

bis auf einen konstanten Faktor festgelegten Normierung die Übertragung für $\mathfrak{G}(U)$ zu Null machen können: *Die N_0 und die bis auf einen (unwesentlichen, da nur eine Projektivität bedeutenden) konstanten Faktor festgelegten Normierungen entsprechen sich damit eineindeutig.*

³⁷⁾ b_{i-1}^{i-2} ist für $i = 2$ mit $b_1^{\circ 0}$ zu identifizieren.

Denken wir uns diese Normierung durchgeführt, also $a_0 = 0$ gesetzt. Dann ist das polare Basissystem durch

$$(3.11) \quad \xi_{\cdot 0} = \partial_0 \xi_{\cdot}; \quad \mathbf{n}_1 = \partial_0 \xi_{\cdot 0} - \xi_{\cdot 0} \partial_0 \lg \bar{J}; \quad \mathbf{n}_i = \partial_0 \mathbf{n}_{i-1} - i \mathbf{n}_{i-1} \partial_0 \lg \bar{J} \quad (i > 1)$$

gegeben. Wir erkennen, daß die kovariante Ableitung in (3.11) gerade der Ableitung nach der durch $\frac{dt^*}{dt} = \bar{J}$ definierten *Affinbogenlänge* entspricht. *Man erhält ein polares Basissystem einer F_1 , indem man bei einer beliebigen festgehaltenen Normierung von ξ_{\cdot} als Basispunkte die Ableitungen von ξ_{\cdot} nach der zugehörigen Affinbogenlänge wählt. Die Mannigfaltigkeit der polaren Basissysteme einer F_1 hängt damit von einer Funktion einer Veränderlichen ab³⁸⁾.* — Hieraus folgt insbesondere: *Für die Affingeometrie besteht das polare Basissystem einer F_1 aus den Ableitungen von ξ_{\cdot} nach der Affinbogenlänge.*

Die Ableitungsgleichungen haben die einfache Form

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \nabla_0 \xi_{\cdot} &= \xi_{\cdot a}; & \nabla_0 \xi_{\cdot 0} &= \mathbf{n}_1; & \nabla_0 \mathbf{n}_i &= \mathbf{n}_{i+1} \\ \nabla_0 \mathbf{n}_m &= C_{m \ 0}^{m-1} \mathbf{n}_{m-1} + \dots + C_{m \ 0}^0 \xi_{\cdot 0} + C_{m \ 0}^c \xi_{\cdot}. \end{aligned} \quad (1 < i < m)$$

³⁸⁾ Diese Überlegungen stehen in engem Zusammenhang mit der von G. Bor (vgl. ⁴⁾ und ³⁴⁾) angewandten Methode der „halbinvarianten Differentiation“ bei Kurven. G. Bor wählt σ so, daß

$$(*) \quad \bar{J}(\sigma \xi) = \sigma^n \bar{J}(\xi) = \text{const.}$$

wird, m. a. W. wählt er die Normierung so, daß der vorhandene Parameter gerade ein Affinbogenlängenparameter wird. Damit die Eigenschaft (*) bei Parametertransformationen $t^* = t^*(t)$ erhalten bleibt, muß bei einer solchen Transformation gleichzeitig eine Umnormierung stattfinden. Auf diese Weise sind $\mathfrak{G}(T)$ und $\mathfrak{G}(U)$ durch die Beziehung

$$(**) \quad \sigma^n \varphi = 1 \quad \left(\varphi = \frac{dt^*}{dt} \right),$$

die sich aus dem Transformationsverhalten von \bar{J} bei $\mathfrak{G}(T)$ und $\mathfrak{G}(U)$ ergibt, miteinander gekoppelt. Damit gehört nach (3.10) und (**) zu jeder Übertragung $\Gamma_{\cdot 0}^{\circ}$ oder auch zu jedem N_0 ein bis auf eine ganze lineare „affine“ Transformation festgelegter Parameter:

$$(***) \quad \partial_0 \lg \varphi = -\frac{2}{n} \partial_0 \lg \sigma = \frac{2}{n} \Gamma_{\cdot 0}^{\circ}.$$

Man sagt, daß eine Größe bei den gemäß (**) kombinierten Transformationen das Gewicht g hat, wenn sie sich dabei mit $\varphi^g = \sigma^{-\frac{2}{n}g}$ multipliziert. Insbesondere hat also ξ_{\cdot} das Gewicht $-\frac{n}{2}$, und einem kontravarianten Index von $\mathfrak{G}(U)$ entspricht das Gewicht $+\frac{n}{2}$. Die „halbinvariante Differentiation“ entspricht damit unserer kovarianten Ableitung bezüglich $\mathfrak{G}(U)$ mit der Übertragung $-\frac{n}{2} \Gamma_{\cdot 0}^{\circ}$.

Fragen wir nach einer Festlegung von N_0 , so versagt die 0-te Apolaritätsbedingung (2. 7), da sie für F_1 mit der 1-ten äquivalent ist. Man kann aber z. B. fordern, daß in (3. 12) $\nabla_\alpha \mathfrak{n}_m \circ \mathfrak{N}^{m-1} = C_{m-0}^m = 0$ gelten soll. Dies führt auf eine RICCATISCHE Differentialgleichung für Γ_α° bzw. (mit Formel (***) in ³⁸) für $\lg \frac{dt^*}{dt}$ ³⁹). Wir verzichten auf die Herleitung dieser bekannten Differentialgleichung in unserer Schreibweise und bemerken nur, daß durch sie der Parameter t bis auf gebrochene lineare Substitutionen festgelegt wird. Man nennt ihn daher auch den „projektiven“ Parameter der F_1 . N_0 ist ersichtlich hiermit bis auf einen von t unabhängigen Parameter festgelegt.

2. Der Fall $m = 1$. Wir betrachten jetzt den Fall, daß bereits der 2-te Schmiegraum S_2 den P_n aufspannt. Da S_2 höchstens die Dimension $p + \binom{p+1}{2}$ hat, gilt für p die Beschränkung $p + \binom{p+1}{2} \geq n$. Insbesondere gehören hierzu die Hyperflächen F_{n-1} . Den Index i , der jetzt nur den Wert 1 annimmt, lassen wir fort. ϱ, σ, τ durchlaufen also die Werte $1, \dots, r = n - p$. — Die Sterntransformationen (1. 6), (1. 8) einer Basis $\xi_\alpha, \xi_{\alpha\beta}, \mathfrak{n}_\varrho$ lauten jetzt

$$(3. 13) \quad \xi_\alpha^* = \xi_{\alpha\beta} + a_\alpha \xi_\beta; \quad \mathfrak{n}_\varrho^* = \mathfrak{n}_\varrho + b_\varrho^\lambda \xi_{\sigma\lambda} + b_\varrho^\sigma \xi_\sigma.$$

Von den B -Tensoren (1. 17) bleiben nur die $B_{\sigma\alpha\beta}^\varrho$ übrig und von (1. 20):

$$(3. 14) \quad B_{\sigma\alpha\beta}^\varrho \widetilde{B}_\sigma^{\alpha\beta} = p \delta_\sigma^\varrho; \quad B_{\sigma\alpha\gamma}^\varrho \widetilde{B}_\sigma^{\beta\gamma} = r \delta_\alpha^\beta \delta_\sigma^\varrho.$$

Die Elemente $B_{\varrho\alpha}^{\sigma i}$ treten gar nicht auf. (1. 39) lautet jetzt

$$(3. 15) \quad \xi_{\sigma\alpha} = \partial_\alpha \xi_\sigma - \Gamma_{\sigma\alpha}^\varrho \xi_\varrho; \quad \mathfrak{n}_\varrho = \frac{1}{p} \widetilde{B}_\varrho^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \xi_{\sigma\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \xi_{\sigma\lambda} - \Gamma_{\sigma\alpha}^\varrho \xi_{\sigma\beta}),$$

und die Ableitungsgleichungen (1. 40) reduzieren sich auf

$$(3. 16) \quad \begin{aligned} \nabla_\alpha \xi_\sigma &= \xi_{\sigma\alpha}; & \nabla_\alpha \xi_{\sigma\beta} &= B_{\sigma\alpha\beta}^\varrho \mathfrak{n}_\varrho + C_{\alpha\beta} \xi_\sigma \\ \nabla_\alpha \mathfrak{n}_\varrho &= C_{\varrho\alpha}^\lambda \xi_{\sigma\lambda} + C_{\varrho\alpha}^\sigma \xi_\sigma. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (2. 3 a) schreiben wir in der Form

$$(3. 17) \quad B_{\sigma\lambda\alpha}^\varrho \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda = \mathfrak{N}^\varrho \circ \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma \xi_\sigma - \partial_\alpha B_{\sigma\beta\gamma}^\varrho - B_{\sigma\beta\gamma}^\alpha \Gamma_{\sigma\alpha}^\varrho - 2 B_{\sigma(\alpha\beta}^\varrho \Gamma_{\sigma\gamma)}^\varrho.$$

Hiermit eliminieren wir die $\Gamma_{\beta\gamma}^\lambda$ aus (2. 4 a) und finden

$$(3. 18) \quad A_{\sigma\alpha\beta\gamma}^\varrho = -2 \mathfrak{N}^\varrho \circ \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma \xi_\sigma + 3 \partial_{(\alpha} B_{\beta\gamma)}^\varrho + 3 B_{\sigma(\alpha\beta}^\alpha \Gamma_{\sigma|\gamma)}^\varrho + 3 B_{\sigma(\alpha\beta}^\varrho \Gamma_{\sigma\gamma)}^\varrho.$$

³⁹) Vgl. G. BOL ⁴), S. 9—10.

⁴⁰) Für die entsprechenden Überlegungen im affinen Fall vgl. W. KLINGENBERG ⁶) S. 67 f. Es besteht der schon in ¹⁷) erwähnte Unterschied bei der Definition der komplementären B -Tensoren. Wir könnten jetzt im Fall $m = 1$ statt unserer für beliebiges i gültigen Definition (1. 21) bis (1. 28) auch die Definition jener Arbeit zugrunde legen. Die Äquivalenz der beiden Definitionen erscheint fraglich. Für den Fall der F_2 in P_4 besteht sie allerdings.

Eliminieren wir hiermit $\mathfrak{N}^e \circ \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma \xi_\alpha$ aus (3. 17), so wird

$$(3. 19) \quad \begin{aligned} B_{\circ\lambda\alpha}^e \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda &= \frac{1}{2} (\partial_\beta B_{\circ\gamma\alpha}^e + \partial_\gamma B_{\circ\beta\alpha}^e - \partial_\alpha B_{\circ\beta\gamma}^e) - \frac{1}{2} A_{\circ\alpha\beta\gamma}^e \\ &+ \frac{1}{2} (B_{\circ\alpha\beta}^\sigma \Gamma_{\sigma\gamma}^e + B_{\circ\alpha\gamma}^\sigma \Gamma_{\sigma\beta}^e - B_{\beta\gamma}^\sigma \Gamma_{\sigma\alpha}^e) - \frac{1}{2} (B_{\circ\alpha\beta}^e \Gamma_{\circ\gamma}^\sigma + B_{\circ\alpha\gamma}^e \Gamma_{\circ\beta}^\sigma - B_{\circ\beta\gamma}^e \Gamma_{\circ\alpha}^\sigma). \end{aligned}$$

Bei einer Sterntransformation (3. 13) gilt für ein System Γ gemäß (2. 1)

$$(3. 20) \quad \begin{aligned} \Gamma_{\circ\alpha}^{*\circ} &= \Gamma_{\circ\alpha}^\circ - a_\alpha; & \Gamma_{\beta\gamma}^{*\lambda} &= \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda - b_{\circ}^{\circ\lambda} B_{\circ\beta\gamma}^e + 2 \delta_{(\beta}^\lambda a_{\gamma)}; \\ \Gamma_{\sigma\alpha}^{*\circ} &= \Gamma_{\sigma\alpha}^e + B_{\circ\lambda\alpha}^e b_{\sigma}^{\circ\lambda}. \end{aligned}$$

Von den Apolaritätsbedingungen (2. 6) bleibt nur die 1-te übrig:

$$(3. 21) \quad A_{\sigma}^{*\circ\lambda} \widetilde{B}_{\circ}^{\lambda\alpha} \widetilde{B}_{\sigma}^{\beta\gamma} A_{\sigma\alpha\beta\gamma}^{*\circ} = 0.$$

Setzen wir in (3. 18) für die $\Gamma_{\sigma\gamma}^e$, $\Gamma_{\circ\gamma}^\sigma$ die $\Gamma_{\sigma\gamma}^{*\circ}$, $\Gamma_{\circ\gamma}^{*\circ}$ aus (3. 20) ein, so erhalten wir $A_{\sigma\alpha\beta\gamma}^{*\circ}$ ⁴¹⁾. Aus (3. 21) wird damit

$$(3. 22) \quad \widetilde{B}_{\circ}^{\lambda\alpha} \widetilde{B}_{\sigma}^{\beta\gamma} A_{\sigma\alpha\beta\gamma}^e + b_{\sigma}^{\circ\lambda'} E_{\lambda'\sigma}^{\sigma'} - (2r + p) a_\gamma \widetilde{B}_{\sigma}^{\circ\lambda\gamma} = 0$$

mit

$$(3. 23) \quad E_{\lambda'\sigma}^{\sigma'} = r p \delta_{\lambda'}^{\lambda} \delta_{\sigma}^{\sigma'} + 2 \widetilde{B}_{\circ}^{\lambda\alpha} \widetilde{B}_{\sigma}^{\beta\gamma} B_{\sigma\alpha\beta}^e B_{\lambda'\gamma}^e.$$

Wir fassen $E_{\lambda'\sigma}^{\sigma'}$ als quadratische Matrix von rp Zeilen auf. Die Forderung der Regularität besteht jetzt in $E = \text{Det}(E_{\lambda'\sigma}^{\sigma'}) \neq 0$ ⁴²⁾. Es gibt dann komplementäre Elemente $\widetilde{E}_{\lambda'\sigma}^{\sigma'}$ mit der Eigenschaft

$$(3. 24) \quad E_{\lambda'\sigma}^{\sigma'} \widetilde{E}_{\lambda\sigma''}^{\sigma\lambda''} = \delta_{\lambda'}^{\lambda''} \delta_{\sigma''}^{\sigma'}.$$

Wir können damit (3. 22) nach den $b_{\sigma}^{\circ\lambda}$ auflösen:

$$(3. 25) \quad b_{\sigma}^{\circ\lambda} = - \widetilde{E}_{\lambda'\sigma}^{\sigma'} \widetilde{B}_{\circ}^{\lambda'\alpha} \widetilde{B}_{\sigma}^{\beta\gamma} A_{\sigma\alpha\beta\gamma}^e + (2r + p) \widetilde{B}_{\sigma}^{\sigma'\gamma} \widetilde{E}_{\lambda'\sigma}^{\sigma'} a_\gamma.$$

Hiermit sind die Übertragungen (3. 20) und damit durch (3. 15) das nur von N_0 abhängende polare Basissystem festgelegt. — Wir wollen noch eine explizite Formel für $\Gamma_{\beta\gamma}^{*\lambda}$ angeben. Aus (3. 17) finden wir mit (3. 20) für $\Gamma_{\beta\gamma}^{*\lambda}$:

$$(3. 26) \quad \begin{aligned} r \Gamma_{\beta\gamma}^{*\lambda} &= \widetilde{B}_{\circ}^{\lambda\alpha} (\mathfrak{N}^e \circ \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma \xi_\alpha - \partial_\alpha B_{\circ\beta\gamma}^e) \\ &- B_{\circ\beta\gamma}^\sigma \widetilde{B}_{\circ}^{\sigma\lambda\alpha} \Gamma_{\sigma\alpha}^e - r B_{\circ\beta\gamma}^\sigma b_{\sigma}^{\circ\lambda} - 2r \delta_{(\beta}^\lambda \Gamma_{\circ\gamma)}^{*\circ}. \end{aligned}$$

Für $b_{\sigma}^{\circ\lambda}$ setzen wir den Ausdruck (3. 25) ein. Dabei drücken wir die $A_{\sigma\alpha\beta\gamma}^e$ hierin durch (2. 4a) aus, wobei für die $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ in (2. 4a) der Ausdruck (3. 26) ohne Stern (d. h. (3. 26) mit $b_{\sigma}^{\circ\lambda} = a_\alpha = 0$) einzusetzen

⁴¹⁾ Die anderen Terme in (3. 18) ändern sich für $m = 1$ bei einer Sterntransformation nicht.

⁴²⁾ Vgl. die entsprechenden Überlegungen bei K. H. WEISE⁶⁾ II, S. 170. (Die dortigen Elemente $E_{\lambda'\sigma}^{\sigma'}$ unterscheiden sich von unseren um den Faktor rp). Über das Nichtverschwinden von E vgl. ebenda S. 179—180.

ist. Wir finden damit ⁴³⁾

$$(3.27) \quad \Gamma_{\beta\gamma}^{*\lambda} = Z_{\beta\gamma}^\lambda - 2 \delta_{(\beta}^\lambda \Gamma_{\sigma\gamma)}^{*\sigma} + (p+2r) B_{\sigma\beta\gamma}^\sigma \widetilde{B}_\sigma^{\sigma\lambda\mu} \widetilde{E}_{\lambda'\sigma}^{\sigma'\lambda} \Gamma_{\sigma\mu}^{*\sigma}$$

mit

$$(3.28a) \quad Z_{\beta\gamma}^\lambda = \frac{1}{r} \widetilde{B}_\sigma^{\sigma\lambda\alpha} (\mathfrak{R}^\sigma \circ \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma \mathfrak{E}_\sigma - \partial_\alpha B_{\sigma\beta\gamma}^\sigma) \\ + B_{\sigma\beta\gamma}^\sigma \widetilde{E}_{\lambda'\sigma}^{\sigma'\lambda} \widetilde{B}_\sigma^{\sigma\lambda'\alpha} \widetilde{B}_\sigma^{\sigma\beta\gamma} \omega_{\sigma\alpha}^{\sigma'} \omega_{\sigma\beta\gamma}^{\sigma'}$$

worin

$$(3.28b) \quad \omega_{\sigma\alpha\beta\gamma}^\sigma = \mathfrak{R}^\sigma \circ \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma \mathfrak{E}_\sigma - \frac{3}{r} B_{\sigma\mu(\alpha}^\sigma \widetilde{B}_{\tau}^{\mu\lambda} (\mathfrak{R}^\tau \circ \partial_{|\lambda|} \partial_\beta \partial_\gamma) \mathfrak{E}_\sigma - \partial_{|\lambda|} B_{\sigma\beta\gamma}^\tau)$$

ist. Für $E \neq 0$ bestimmt sich mit (3.27), (3.28) aus (3.15) explizit das nur von einem (durch die a_α in $\Gamma_{\sigma\alpha}^{*\sigma}$ beschriebenen) N_0 abhängende polare Basissystem.

Nach § 2.3 gelangen wir zu den Formeln der affinen Flächentheorie, wenn wir $\Gamma_{\sigma\alpha}^\circ = a_\alpha = 0$ setzen. Nun hat K. H. WEISE ⁶⁾ für die Affingeometrie den Fall $m = 1$ behandelt und einen Affinormalenraum angegeben, der gerade mit Hilfe der Übertragungen $\Gamma_{\beta\gamma}^\lambda = Z_{\beta\gamma}^\lambda$ gebildet wird, d. h. für die Affingeometrie führt das polare Basissystem in Fall $m = 1$ auf den WEISESchen Affinormalenraum.

Zur Festlegung von N_0 ziehen wir die 0-te Apolaritätsbedingung (2.7) heran, in der wir $b_{\sigma_2}^{\sigma_1} = 0$ setzen können, da es ja keinen N_2 gibt:

$$(3.29) \quad \widetilde{B}_\sigma^{\sigma\beta\gamma} A_{\sigma\alpha\beta\gamma}^{*\sigma} = \widetilde{B}_\sigma^{\sigma\beta\gamma} A_{\sigma\alpha\beta\gamma}^\sigma + (p+2r) B_{\sigma\alpha\lambda}^\sigma b_{\sigma_2}^{\sigma_1} - r(p+2) a_\alpha = 0.$$

Eliminieren wir hiermit a_α aus (3.22), so finden wir

$$(3.30) \quad b_{\sigma_2}^{\sigma_1} H_{\lambda'\sigma}^{\sigma'\lambda} + \widetilde{B}_\sigma^{\sigma\lambda\alpha} \widetilde{B}_\sigma^{\sigma\beta\gamma} A_{\sigma\alpha\beta\gamma}^\sigma - \frac{2r+p}{r(p+2)} \widetilde{B}_\sigma^{\sigma\beta\gamma} \widetilde{B}_\sigma^{\sigma\lambda\alpha} A_{\sigma\alpha\beta\gamma}^\sigma = 0$$

mit

$$(3.31) \quad H_{\lambda'\sigma}^{\sigma'\lambda} = E_{\lambda'\sigma}^{\sigma'\lambda} - \frac{(2r+p)^2}{r(p+2)} \widetilde{B}_\sigma^{\sigma\lambda\gamma} B_{\sigma\lambda'\gamma}^{\sigma'}.$$

Wenn $H = \text{Det}(H_{\lambda'\sigma}^{\sigma'\lambda}) \neq 0$ ist, können wir ebenso wie oben für die $E_{\lambda'\sigma}^{\sigma'\lambda}$ komplementäre Elemente $\widetilde{H}_{\lambda'\sigma}^{\sigma'\lambda}$ erklären und damit (3.30) nach $b_{\sigma_2}^{\sigma_1}$ auflösen:

$$(3.32) \quad b_{\sigma_2}^{\sigma_1} = \widetilde{H}_{\lambda'\sigma}^{\sigma'\lambda} \left(\frac{2r+p}{r(p+2)} \widetilde{B}_\sigma^{\sigma\beta\gamma} \widetilde{B}_{\sigma_2}^{\sigma_1\lambda\alpha} A_{\sigma\alpha\beta\gamma}^\sigma - \widetilde{B}_\sigma^{\sigma\lambda'\alpha} \widetilde{B}_{\sigma_2}^{\sigma_1\beta\gamma} A_{\sigma\alpha\beta\gamma}^\sigma \right).$$

Hierdurch ist mit (3.29) auch a_α festgelegt und damit nach (3.20) $\Gamma_{\sigma\alpha}^{*\sigma}$ und $\Gamma_{\beta\gamma}^{*\lambda}$. Wir finden so zunächst für $\Gamma_{\sigma\alpha}^{*\sigma}$ [mit (3.28b)]

$$(3.33a) \quad \Gamma_{\sigma\alpha}^{*\sigma} = -\frac{1}{r(p+2)} \widetilde{B}_\sigma^{\sigma\beta\gamma} \omega_{\sigma\alpha\beta\gamma}^\sigma - \frac{p+2r}{r(p+2)} B_{\sigma\alpha\lambda}^\sigma \tau_\sigma^{\sigma\lambda}$$

mit

$$(3.33b) \quad \tau_\sigma^{\sigma\lambda} = \widetilde{H}_{\lambda'\sigma}^{\sigma'\lambda} \left(\frac{p+2r}{r(p+2)} \widetilde{B}_\sigma^{\sigma\beta\gamma} \widetilde{B}_{\sigma_2}^{\sigma_1\lambda\alpha} \omega_{\sigma\alpha\beta\gamma}^\sigma - \widetilde{B}_\sigma^{\sigma\lambda'\alpha} \widetilde{B}_{\sigma_2}^{\sigma_1\beta\gamma} \omega_{\sigma\alpha\beta\gamma}^\sigma \right).$$

⁴³⁾ Durch dieses wiederholte Einsetzen haben wir erreicht, daß sich die $\Gamma_{\sigma\alpha}^\sigma$ herausheben, wie man leicht bestätigt.

Aber auch für $\Gamma_{\beta\gamma}^{*\lambda}$ erhalten wir eine explizite Formel, wenn wir ebenso wie oben von (3. 26) ausgehen, (3. 32) und (3. 29) einsetzen und (2. 4 a) verwenden:

$$(3. 34) \quad \Gamma_{\beta\gamma}^{*\lambda} = \frac{1}{r} \widetilde{B}_\alpha^{\sigma\lambda\alpha} (\mathfrak{N}^\alpha \circ \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma \xi_\alpha - \partial_\alpha B_{\sigma\beta\gamma}^\alpha) - B_{\sigma\beta\gamma}^\alpha \tau_\alpha^{\sigma\lambda} - 2 \delta_{(\beta}^\lambda \Gamma_{\sigma\gamma)}^{*\alpha}.$$

Für $H \neq 0$ bestimmt sich mit (3. 33) und (3. 34) aus (3. 15) explizit ein eindeutig festgelegtes projektivinvariantes polares Basissystem, das von Ableitungen bis zur 4. Ordnung von ξ_α abhängt⁴⁴⁾.

Für F_{n-1} ist $H_{\lambda'\sigma}^{\sigma\lambda} \equiv 0$, vgl. § 3. 3. Das einfachste Beispiel mit $H \neq 0$ bilden die F_2 im P_4 , deren konjugierte Linien nicht zusammenfallen. Auf die einfache geometrische Bedeutung des Basissystems in diesem Fall können wir hier nicht eingehen, vgl. ⁴⁵⁾.

Wir wollen der 0-ten Apolaritätsbedingung noch eine andere Fassung geben. Dazu betrachten wir die von Sterntransformationen unabhängige Größe

$$(3. 35) \quad \mathcal{A}_{1\dots r \ 1\dots p}^{(r) p+1} = |\xi_\alpha, \xi_{\alpha 1}, \dots, \xi_{\alpha p}, n_1, \dots, n_r|^{45)},$$

deren durch die Indizes angezeigtes Transformationsverhalten unmittelbar aus der Definition abzulesen ist⁴⁶⁾. Hiermit erklären wir

$$(3. 36) \quad D_{(1\dots r)}^{\frac{p}{2r} + 1} \binom{p}{\alpha}^{\frac{p}{2} + 1} = \mathcal{A}_{1\dots r \ 1\dots p}^{(r) p+1} \left(T_{\binom{1\dots r}{1\dots p}}^{\binom{1\dots r}{1\dots p} 2p} \binom{2p}{\alpha}^{2rp} \right)^{-\frac{1}{4r}} \text{ }^{45)}.$$

Der letzte Term ist dabei die durch die Formeln (1. 21) bis (1. 23) mit $i = 1$ erklärte Determinante $T_{(1)}^{(40)}$; sie ist also aus den $B_{\sigma\alpha\beta}^\alpha$ gebildet. Das Transformationsverhalten von D folgt aus der Definition. Es gilt

$$(3. 37) \quad \nabla_\alpha \lg \mathcal{A} = 0; \quad \nabla_\alpha \lg T_{(1)} = 2 \widetilde{B}_\alpha^{\sigma\beta\gamma} \nabla_\alpha B_{\sigma\beta\gamma}^\alpha = 2 \widetilde{B}_\alpha^{\sigma\beta\gamma} A_{\sigma\alpha\beta\gamma}^\alpha.$$

⁴⁴⁾ Die Elemente $\Gamma_{\alpha\alpha}^{*\alpha}$ und $\Gamma_{\beta\gamma}^{*\lambda}$ hängen von Ableitungen bis zur 3. Ordnung ab. Bei der Bildung der n_α gemäß (3. 15) kommt durch das in $\partial_\alpha \xi_{\sigma\beta}$ auftretende Glied $\partial_\alpha \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha$ eine weitere Ableitung hinzu. — Bei F_{n-1} pflegt man sich bei der Frage nach einer Projektivnormalen oft mit der von dem Flächenpunkt P und N_1 aufgespannten Geraden zu begnügen. Entsprechend würde es sich im Fall $m = 1$ nur um die Festlegung des durch P und N_1 aufgespannten $(n - p)$ -dimensionalen projektiven Normalenraums handeln. Hierbei kommt man aber immer mit einer Ableitung weniger aus, als für die Festlegung von N_1 notwendig ist (im obigen Fall also mit 3. Ableitungen), indem man in (3. 15) für die Bestimmung der Punkte n_α statt $\xi_{\sigma\alpha}$ einfach $\partial_\alpha \xi_\alpha$ setzt. Die so definierten Punkte sind dann aber bei Umnormierungen offenbar nur festgelegt bis auf eine Komponente nach ξ_α .

⁴⁵⁾ Zur Abkürzung lassen wir hier i. a. künftig die Transformationsindizes fort.

⁴⁶⁾ Dabei ist \mathcal{A} bei $\mathfrak{G}(P_n)$ nicht invariant, sondern multipliziert sich mit der Transformationsdeterminante der Projektivität. Das bedeutet für das Folgende, daß die Normierungen von D (s. (3. 36)) immer nur bis auf einen von u^α unabhängigen Parameter festgelegt sind. Ein solcher Faktor induziert aber stets nur eine unwesentliche Projektivität für unser Basissystem.

Die erste Gleichung folgt aus den Ableitungsgleichungen (1.40) und die zweite aus (1.29) und (1.36)²³⁾. Die kovariante Ableitung von (3.36) wird mit (3.37)

$$(3.38) \quad \nabla_\alpha \lg D = \partial_\alpha \lg D - \left(\frac{p}{2r} + 1\right) \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha - \left(\frac{p}{2} + 1\right) \Gamma_{\cdot\alpha}^\alpha = -\frac{1}{2^r} \tilde{B}_\alpha^{\alpha\beta\gamma} A_{\alpha\beta\gamma}^\alpha.$$

Hiermit können wir die 0-te Apolaritätsbedingung (3.29) in der Form

$$(3.39) \quad (\nabla_\alpha \lg D)^* = \partial_\alpha \lg D - \left(\frac{p}{2r} + 1\right) (\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha + B_{\alpha\lambda\alpha}^\alpha \delta_\alpha^\lambda) - \left(\frac{p}{2} + 1\right) (\Gamma_{\cdot\alpha}^\alpha - a_\alpha) = 0$$

schreiben. Durch sie wird einem N_1 eindeutig ein N_0 zugeordnet. Umgekehrt wird durch (3.39) einem gegebenen N_0 ein N_1 nur soweit eindeutig zugeordnet, wie es mit der Festlegung der Übertragungen $\Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha$ für die r -stufigen Indizes $\underline{1..r}$ der Fall ist. Eine eindeutig bestimmte Zuordnung eines N_1 zu einem N_0 leistet ja vielmehr die 1-te Apolaritätsbedingung ($\text{Det}(E_{\lambda'}^{\lambda'}) \neq 0$ vorausgesetzt).

Wir bemerken noch, daß man $\mathfrak{G}(U)$ und $\mathfrak{G}(N_1)$ in ausgezeichneter Weise dadurch koppeln kann, daß man verlangt, D solle bei den simultanen Transformationen dieser Gruppen ungeändert bleiben. Dann sind sie durch

$$(3.40) \quad [\text{Det}(d_\alpha^\alpha)]^{2r+1} \sigma^{\frac{p}{2}+1} = 1$$

miteinander gekoppelt. Dadurch entspricht jeder Transformation von $\mathfrak{G}(N_1)$ eine Umnormierung; umgekehrt ist aber durch eine Umnormierung nur die Determinante der Transformation von $\mathfrak{G}(N_1)$ festgelegt.

3. Hyperflächen. Für Hyperflächen F_{n-1} wird $r = 1$. $\mathfrak{G}(N_1)$ besteht jetzt nur noch aus den Umnormierungen des einzigen Basispunktes von N_1 . Wir verwenden deshalb für $\mathfrak{G}(N_1)$ nur noch den einen Index α ⁴⁷⁾. Ferner wird

$$(3.41) \quad T_{(\underline{1..p})^4}^{\alpha^{2p}} = [\text{Det}(B_{\alpha\beta}^\alpha)]^2;$$

$$D_{(\alpha)}^{\frac{p}{2}+1} = |\xi_\alpha, \dots, \eta_\alpha| [\text{Det}(B_{\alpha\beta}^\alpha)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Die Koppelung von $\mathfrak{G}(U)$ und $\mathfrak{G}(N_1)$ in (3.40) wird jetzt umkehrbar eindeutig, da $\text{Det}(d_\alpha^\alpha)$ nur noch aus dem Element d_α^α besteht. Indem wir also $d_\alpha^\alpha \sigma = 1$ verlangen, können wir

$$(3.42) \quad \Gamma_{\cdot\alpha}^\alpha + \Gamma_{\alpha\alpha}^\alpha = 0$$

setzen. Die 0-te und 1-te Apolaritätsbedingung fallen jetzt zusammen⁴⁸⁾ (man braucht $\tilde{B}_\alpha^{\lambda\alpha} \tilde{B}_\alpha^{\beta\gamma} A_{\alpha\beta\gamma}^\alpha$ nur mit $B_{\alpha\lambda\alpha}^\alpha$ zu überschieben, um $\tilde{B}_\alpha^{\beta\gamma} A_{\alpha\alpha'\beta\gamma}^\alpha$

⁴⁷⁾ Der Index α wird jetzt mit seinem r -stufigen Index $\underline{1..r}$ gleichwertig.

⁴⁸⁾ Das äußert sich auch darin, daß $H_{\lambda'}^{\alpha\lambda}$ (3.31) mit $E_{\lambda'}^{\lambda'} = \delta_{\lambda'}^{\lambda'} (p+2)$ und $r = 1$ identisch verschwindet.

zu erhalten). Durch sie wird jedem N_0 ein N_1 zugeordnet und umgekehrt. Zur Bestimmung des polaren Basissystems normieren wir ξ_0 so, daß $D = \text{const.}$ gilt⁴⁹⁾. Dann lautet die Apolaritätsbedingung (3.39) mit (3.42)

$$(3.43) \quad -B_{\circ\lambda\alpha}^{\circ} b_{\circ}^{\lambda} + a_{\alpha} = 0.$$

Halten wir also den gegebenen N_0 fest (d. h. $a_{\alpha} = 0$), so folgt $b_{\circ}^{\lambda} = 0$ und umgekehrt. Für F_{n-1} erhält man das polare Basissystem, indem man ξ_0 so normiert, daß $D = \text{const.}$ gilt, und mit Hilfe des vorgegebenen N_0 $\Gamma_{\circ\alpha}^{\circ} = \partial_{\alpha} \xi_0 \circ \mathcal{X}^{\circ} = -\Gamma_{\alpha\circ}^{\circ}$ und damit aus (3.17) $\Gamma_{\beta\gamma}^{\lambda}$ bestimmt. N_1 wird dann durch den Punkt n_{\circ} in (3.15) beschrieben⁵⁰⁾. Ist umgekehrt ein N_1 vorgegeben, so sind damit $\Gamma_{\alpha\circ}^{\circ} = \partial_{\alpha} n_{\circ} \circ \mathcal{R}^{\circ} = -\Gamma_{\circ\alpha}^{\circ}$ bestimmt. Damit beschreiben die Punkte $\xi_{\circ\alpha}$ in (3.15) den N_0 , wobei ξ_0 so zu normieren ist, daß $D = \text{const.}$ wird.

Während die A -Tensoren $A_{\circ\alpha\beta\gamma}^{\circ}$ in (3.18) i. a. von der Wahl der N_0, N_1 abhängen, erhalten wir für F_{n-1} bei der durch $D = \text{const.}$ festgelegten Normierung von ξ_0 mit (3.43) aus (3.18) einen ausgezeichneten A -Tensor, der nicht mehr von N_0, N_1 abhängt. Seine Komponenten sind (bis auf den Faktor -2) gerade die Koeffizienten der bekannten kubischen Differentialform, die man zusammen mit der durch die $B_{\circ\alpha\beta}^{\circ}$ erklärten quadratischen Differentialform seit G. FUBINI dem Studium der F_{n-1} zugrunde zu legen pflegt⁴⁹⁾.

Die tensorielle Behandlung der Hyperflächentheorie mit Hilfe von beliebigen durch die Apolaritätsbedingung gekoppelten N_0 und N_1 wurde zum erstenmal von G. BOL⁵¹⁾ durchgeführt. Das polare Basissystem führt für F_{n-1} auf die von G. BOL untersuchten Basissysteme.

⁴⁹⁾ Man könnte $D = \text{const.}$ auch durch geeignete Normierung von n_{\circ} erreichen. In jedem Falle wird wegen (3.41) damit gelten: $\mathcal{A} = c [\text{Det} (B_{\circ\alpha\beta}^{\circ})]^{\frac{1}{2}}$. Wegen

$$B_{\circ\alpha\beta}^{\alpha} = \mathcal{R}^{\circ} \circ \partial_{\alpha} \partial_{\beta} \xi_0 = |r_{\circ}, \partial_1 \xi_0, \dots, \partial_{\alpha} \partial_{\beta} \xi_0| \mathcal{A}^{-1}$$

wird damit

$$\mathcal{A}^{n+1} = c^2 \text{Det} (|\xi_0, \partial_1 \xi_0, \dots, \partial_{\alpha} \partial_{\beta} \xi_0|).$$

Mit diesem Wert erhalten wir aus

$$\mathcal{R}^{\circ} \circ \mathbf{v} = |\xi_0, \partial_1 \xi_0, \dots, \mathbf{v}| \mathcal{A}^{-1}$$

für $\mathbf{v} = d^2 \xi$ die quadratische Grundform $\Phi_2 = \mathcal{R}^{\circ} \circ d^2 \xi$ und mit

$$\Phi_3 = \mathcal{R}^{\circ} \circ d^3 \xi - \frac{3}{2} d \Phi_2$$

die kubische Grundform der Hyperflächentheorie. Vgl. hierzu neben G. FUBINI-E. ČECH¹⁾, Kap. 12 auch L. BERWALD, Die Grundgleichungen der Hyperflächen im euklidischen Raum gegenüber inhaltstreuen Affinitäten, Monatsh. Math. Phys. 32 (1922), S. 89—106.

⁵⁰⁾ Es versteht sich, daß man auch ohne eine solche Normierung das polare Basissystem direkt aus (3.39) erhalten kann oder auch aus (3.27) und (3.28) mit den für F_{n-1} gültigen Vereinfachungen.

⁵¹⁾ Vgl. ³⁾, insbesondere die Paragraphen 3, 4 und 6.

Zur Festlegung von N_0 kann man verschiedene Wege einschlagen. Es kommt offenbar darauf an, als Ersatz für die abhängige 0-te Apolaritätsbedingung eine andere lineare invariante Gleichung für die a_α aufzustellen. Dies ist nun nur unter Zuhilfenahme vierter Ableitungen von ξ_0 möglich. Indem wir auf die verschiedenen Möglichkeiten auf G. BOL⁵¹⁾ verweisen, bemerken wir nur, daß die sog. *FUBINISCHE Normale* durch

$$(3.44) \quad (\nabla_\alpha \lg I_0^o)^* = \partial_\alpha \lg I_0^o - (\Gamma_{\circ\alpha}^o - a_\alpha) + (\Gamma_{\circ\alpha}^o + b_0^{\circ\lambda} B_{\circ\lambda\alpha}^o) = 0$$

bestimmt wird. Dabei ist

$$(3.45) \quad I_0^o = A_{\circ\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^o A_{\circ\beta_1 \beta_2 \beta_3}^o \check{B}_0^{\circ\alpha_1 \beta_1} \check{B}_0^{\circ\alpha_2 \beta_2} \check{B}_0^{\circ\alpha_3 \beta_3},$$

die sog. PICKSCHE Invariante, ungleich Null vorauszusetzen; für die $A_{\circ\alpha\beta\gamma}^o$ sind die erwähnten ausgezeichneten von N_0, N_1 unabhängigen A -Tensoren zu nehmen. (3.44) legt mit (3.42) und (3.43) die a_α und damit N_0 fest.

Für die Affingeometrie pflegt man $D = \text{const.}$ durch geeignete Normierung von η_0 zu erreichen⁵²⁾, da ja die Normierung von ξ_0 bereits in ausgezeichneter Weise festgelegt ist. Indem man diese Normierung festhält, kann man neben $\Gamma_{\circ\alpha}^o = 0$ auch $\Gamma_{\circ\alpha}^o = 0$ setzen und damit die Apolaritätsbedingung (3.39) erfüllen. Man erkennt, wie damit $\Gamma_{\beta\gamma}^\lambda$ in (3.19) sich aus den Christoffelsymbolen der quadratischen Grundform und aus der kubischen Grundform (3.18) zusammensetzt. $\Gamma_{\beta\gamma}^\lambda$ ist hier die sog. BERWALDSche Übertragung⁵³⁾. *Damit liefert das polare Basissystem im affinen Fall für eine F_{n-1} die bekannte von W. BLASCHKE und L. BERWALD angegebene Affinnormale.*

51) Man erreicht dies durch die in 49) angegebene Wahl von \mathfrak{R}^0 mit der sich aus der affinen Normierung von ξ_0 ergebenden Vereinfachung. Vgl. W. BLASCHKE⁵⁾, § 65 und L. BERWALD⁴⁹⁾.

53) Vgl. W. BLASCHKE⁵⁾, S. 169.

(Eingegangen am 10. September 1951.)

Extremalprobleme für konvexe Bereiche der euklidischen Ebene¹⁾.

Von

D. Ohmann in Frankfurt a. M.

LEBESGUE zeigte als erster, daß ein Reuleauxdreieck unter allen Bereichen gleicher konstanter Breite minimalen Inhalt besitzt²⁾. Mit einem der LEBESGUESCHEN Beweismethode nachgebildeten Verfahren soll hier gezeigt werden, daß unter allen Bereichen B , die bezüglich eines Eichbereichs B_0 gleiche konstante R -Breite ($R =$ „Relativ“)

$$b^*(\varphi) = \frac{2b(\varphi)}{b_0(\varphi)} \quad (b(\varphi), b_0(\varphi) = \text{Breite von } B, B_0 \text{ in der Richtung } \varphi)$$

besitzen, einem dem Reuleauxdreieck analogen dreiecksförmigen Bereich die entsprechende Minimaleigenschaft zukommt³⁾.

Darauf aufbauend werden dann die Bereiche minimalen Inhalts bestimmt, für welche Dicke \mathcal{A} und Umfang L bzw. Dicke \mathcal{A} und Durchmesser D unter der Bedingung $2\sqrt[3]{\mathcal{A}} \geq L \geq \pi \mathcal{A}$ ⁴⁾ bzw. $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\mathcal{A}} \geq D \geq \mathcal{A}$ vorgegeben sind.

§ 1.

Vorbetrachtungen.

1. Es beschreibe der Ortsvektor \mathbf{r} den Rand des zentralsymmetrischen konvexen Bereiches B^* , und es mögen die Vektoren $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ so gewählt sein, daß $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = 0$, so daß sie gleichsinnig aneinandergelegt ein geschlossenes Dreieck $A_1 A_2 A_3$ bilden (Fig. 1). Verbindet man dann die Eckpunkte A_j paarweise durch entsprechend gelegene Bogen von B^* , so entsteht ein dreiecksförmiger konvexer Bereich, den wir wegen seiner Verwandtschaft mit dem Reuleauxdreieck als allgemeines Reuleauxdreieck mit R bezeichnen (beim Reuleauxdreieck selbst ist B^* ein Kreis).

¹⁾ Diese Arbeit stellt eine Umarbeitung eines Teiles meiner Dissertation dar (Marburg 1948).

²⁾ H. LEBESGUE: Sur le probleme des isopérimètres et sur les domaines de largeur constante. (Bull. Soc. Math. France C. R. 1914; S. 72—76.)

³⁾ Dies bewies K. GÜNTHER gleichzeitig und unabhängig in seiner Dissertation (Marburg 1948).

⁴⁾ Für die Lösung dieses Problems liegt eine hier zu bestätigende Vermutung von M. YAMANOUTI vor. (Notes on closed convex figures; Proc. Phys.-Math. Soc. Jap. (3) Bd. 14 (1932); S. 605—609.)

Aus der Konstruktion ist sofort zu entnehmen, daß B^* den Vektorbereich zu R darstellt, so daß für die Breite zu folgern ist:

$$b(B^*; \varphi) = 2b(R, \varphi).$$

Bezeichnen wir die Summe $t = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \varphi_j$ der Richtungswinkel φ_j der bei der Konstruktion von R beteiligten Vektoren r_j als Parameter von $R = R(B^*; t)$, so ist $R(B^*; t)$ bei festem „Bezugsbereich“ B^* offenbar eindeutig und stetig auf seinen Parameter t bezogen.

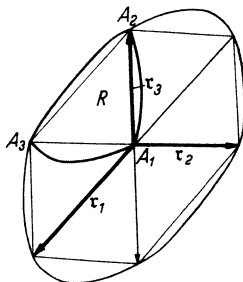


Fig. 1.

2. Aus der Konstruktion des allgemeinen Reuleauxdreiecks folgt, daß sich ihm in seinen Eckpunkten $A_1; A_2; A_3$ wenigstens ein Sechseck mit paarweise parallelen Seiten umbeschreiben läßt. Von jedem solchen Sechseck sagen wir dann, es sei R als Grundsechseck $G(R)$ zugeordnet.

Mit $\psi_j(G)$ ($j = 1, 2, 3$) bezeichnen wir nun den Richtungswinkel der bei A_j im Orientierungssinn beginnenden Seite von $G(R)$ und mit $\psi'_j(R); \psi''_j(R)$ seine Extremalwerte bei festgehaltenem R (Fig. 2):

$$\psi'_j(R) = \min \psi_j(G), \quad \psi''_j(R) = \max \psi_j(G),$$

$$(G = G(R)).$$

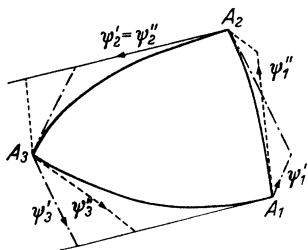


Fig. 2.

Werden dann für die Grundsechsecke $G_\lambda(R)$ die Seitenrichtungen durch

$$\psi_j(R; \lambda) = \psi'_j(R) + \lambda(\psi''_j(R) - \psi'_j(R))$$

$$(0 \leq \lambda \leq 1)$$

gegeben, so lassen sich die $G_\lambda(R)$ bei festem Bezugsbereich B^* und variablem R eindeutig und stetig auf den Parameter $s = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \psi_j(R; \lambda)$ beziehen: $G_\lambda(R) = G(B^*; s)$.

3. Die Umkehrung zu 2. stellt die gleich zu beweisende Tatsache dar, daß ein Bereich B ein allgemeines Reuleauxdreieck ist, wenn sich ihm ein konvexes Sechseck S mit paarweise parallelen Seiten derart umbeschreiben läßt, daß S mit B drei paarweise nicht benachbarte Eckpunkte gemeinsam hat.

Zum Beweis habe S die Eckpunkte A_1, A_3 und A_5 mit B gemeinsam. Da S paarweise parallele Seiten besitzt, berühren die zu Stützgeraden durch A_j ($j = 1, 3, 5$) parallelen Stützgeraden an den Bereich B diesen in Punkten des A_j gegenüberliegenden Randbogens $\widehat{A_k A_l}$ ($l, k = 1, 3, 5; l \neq k; l, k \neq j$). Damit weisen sich die Bogen $\widehat{A_k A_l}$ aber als Randbogen des zu B gehörenden Vektorbereichs B^* aus, während die Strecken $\widehat{A_k A_l}$ die gleiche Länge besitzen wie die gleichgerichteten Ortsvektoren

der auf ihren Mittelpunkt bezogenen Randkurve von B^* . Der Definition der allgemeinen Reuleauxdreiecke ist damit schon zu entnehmen, daß B ein solches darstellt, das B^* als Bezugsbereich besitzt.

4. Hilfssatz 1. Jedem konvexen Bereich läßt sich ein zentralsymmetrisches Sechseck umbeschreiben, dessen Seiten denen eines Grundsechsecks mit vorgegebenem Bezugsbereich paarweise parallel sind.

Beweis. Bezeichnet B den beliebigen konvexen Bereich und B^* den vorgegebenen zentralsymmetrischen Bezugsbereich, so möge $C(s)$ das dem Bereich B umbeschriebene Sechseck sein, dessen Seiten denen des Grundsechsecks $G(B^*; s)$ paarweise parallel sind. Da $G(B^*; s + \pi)$ aus $G(B^*; s)$ durch Drehung um π hervorgeht, ist $C(s + \pi) = C(s)$, so daß für die Länge $a_\mu(s)$ ($\mu = 1, 2, \dots 6$) der im Umlaufsinn numerierten Seiten von $C(s)$

$$a_{\mu+3}(s) = a_\mu(s + \pi)$$

gilt. Auf $(0, \pi)$ muß es daher aus Stetigkeitsgründen eine Stelle $s = s_0$ geben, an der $a_{\mu+3}(s_0) = a_\mu(s_0)$ statthat und $C(s_0)$ mithin einen Mittelpunkt besitzt.

5. Hilfssatz 2. Symmetrisiert man ein allgemeines Reuleauxdreieck parallel zu der Verbindungssehne zweier seiner Eckpunkte, so entsteht ein allgemeines Reuleauxdreieck nicht geringerer Dicke (Dicke \equiv Minimum der Breite).

Beweis. Es sei $R(A_1; A_2; A_3)$ ein allgemeines Reuleauxdreieck mit dem Bezugsbereich B^* . Durch Symmetrisierung (nach Steiner) von B^* in der Richtung $\overline{A_2 A_3}$ möge der wiederum zentralsymmetrische Bereich B^{**} entstehen. Hatten wir dabei

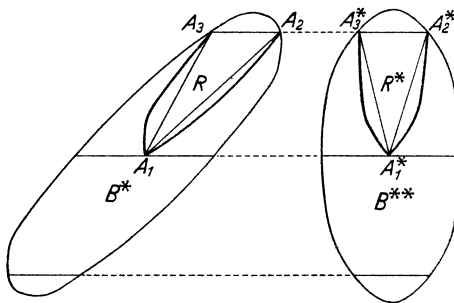


Fig. 3.

R derart auf B^* gelegt, daß A_1 mit dem Mittelpunkt von B^* zusammenfiel, so erkennt man, daß das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ bei dieser Symmetrisierung in ein Vektordreieck $A_1^* A_2^* A_3^*$ von B^{**} übergeht (Fig. 3). Das zu $A_1^* A_2^* A_3^*$ gehörige allgemeine Reuleauxdreieck R^* zum Bezugsbereich B^{**} ist dabei ersichtlich aus R durch die gleiche Symmetrisierung hervorgegangen. Beachten

wir, daß die Dicke eines zentralsymmetrischen Bereichs bei Symmetrisierung nicht abnimmt, so folgt $\mathcal{A}(B^{**}) \geq \mathcal{A}(B^*)$ und daraus schließlich

$$\mathcal{A}(R^*) \geq \mathcal{A}(R).$$

6. Hilfssatz 3. Eine konvergente Folge von allgemeinen Reuleauxdreiecken konvergiert wieder gegen ein allgemeines Reuleauxdreieck.

Beweis. Die Folge von allgemeinen Reuleauxdreiecken $R_\nu (\nu = 1, 2, \dots)$ sei gegen den Bereich R^* konvergent. Dann läßt sich aus der Folge der zugeordneten Grundsechsecke G_ν eine konvergente Teilfolge $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \dots$ aussondern (Anwendung des BLASCHKESCHEN Auswahlssatzes), die etwa gegen G^* konvergieren möge. G^* stellt dann wie die G_ν ein Sechseck mit paarweise parallelen Seiten dar, wobei man den entsprechenden Verhältnissen bei den G_ν und R_ν entnehmen darf, daß G^* dem Bereich R^* umschrieben ist, und daß drei paarweise nicht benachbarte Eckpunkte von G^* zu R^* gehören. Damit folgt aus 3., daß R^* ein allgemeines Reuleauxdreieck darstellt.

§ 2.

Die Minimaleigenschaft des allgemeinen Reuleauxdreiecks.

Es sei B ein beliebiger Bereich konstanter R -Breite bei festem Eichbereich B_0 und C das B umschriebene zentralsymmetrische Sechseck, dessen Seiten gemäß Hilfssatz 1 denen des Grundsechsecks G paarweise parallel seien. Hatten wir dabei den Vektorbereich B^* von B als Bezugsbereich für G zugrundegelegt, so besitzen dann B und das allgemeine Reuleauxdreieck R , dem G zugeordnet ist, nach § 1, 1 den gleichen Vektorbereich und mithin in gleichen Richtungen gleiche Breite. Damit weist sich aber auch R als von konstanter R -Breite bezüglich B_0 als Eichbereich aus, wie der Definition der R -Breite unmittelbar zu entnehmen ist.

Nun approximieren wir den Bereich B durch eine Folge ihm umschriebener Polygone B_1, B_2, B_3, \dots ; wobei $B_1 = C$ und $B_{\nu+1} (\nu = 1, 2, \dots)$ aus B_ν dadurch hervorgeht, daß wir durch ein Paar paralleler Stützgeraden an B_ν zwei Dreiecke β'_ν und β''_ν abtrennen. Ist dann R_ν das R umschriebene Polygon, das mit B_ν paarweise parallele Seiten besitzt, so ist

$R_1 = G$, während $R_{\nu+1}$ aus R_ν durch Abtrennung nur eines Dreiecks γ_ν hervorgeht, da eine von zwei parallelen Stützgeraden an R stets durch einen gemeinsamen Eckpunkt von R und G hindurchgehen muß (Fig. 4).

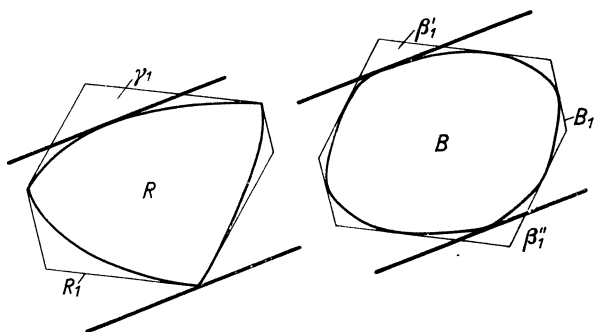


Fig. 4.

Die Eigenschaft, in gleichen Richtungen gleiche Breite zu besitzen, überträgt sich vom Bereichpaar B und R offensichtlich auf die Polygonpaare $B_\nu; R_\nu$, so daß für die Grund-

linien a und Höhen h der abgeschnittenen Dreiecke die Beziehungen bestehen

$$\begin{aligned} a(\beta'_v) + a(\beta''_v) &= a(\gamma_v), \\ h(\beta'_v) + h(\beta''_v) &= h(\gamma_v), \end{aligned}$$

aus denen auf die Ungleichung zwischen den Inhalten geschlossen werden kann

$$F(\beta'_v) + F(\beta''_v) = \frac{1}{2}(a(\beta'_v)h(\beta'_v) + a(\beta''_v)h(\beta''_v)) \leq \frac{1}{2}a(\gamma_v)h(\gamma_v) = F(\gamma_v).$$

Hieraus folgt für die Fläche der B_v und R_v

$$F(B_v) - F(B_{v+1}) \leq F(R_v) - F(R_{v+1}).$$

Wir brauchen nur noch hinzuzufügen, daß das Sechseck $C = B_1$ auf Grund seiner Zentralsymmetrie keinen geringeren Flächeninhalt besitzt als das Grundsechseck $G = R_1$, um die Ungleichung

$$F(B_v) \geq F(R_v)$$

ablesen zu können.

Da sich B beliebig genau durch die B_v approximieren läßt, folgt daraus schon die zu erweisende Beziehung

$$F(B) \geq F(R),$$

die sich als Satz so formulieren läßt:

Unter allen Bereichen konstanter R -Breite besitzt ein allgemeines Reuleauxdreieck minimalen Inhalt.

§ 3.

Bereiche minimalen Inhalts bei vorgegebenem Δ, L bzw. Δ, D .

Bei Vorgabe von Dicke Δ und Umfang L bzw. Dicke Δ und Durchmesser D erhalten wir unter der Zusatzbedingung

$$(1) \quad 2\sqrt{3}\Delta \geq L \geq \pi\Delta \quad \text{bzw.} \quad \frac{2}{3}\sqrt{3}\Delta \geq D \geq \Delta$$

die gleichen Bereiche minimalen Flächeninhalts, die sich folgendermaßen beschreiben lassen: Es bezeichne K den Kreis vom Radius ρ ($D \geq \rho \geq \frac{1}{\sqrt{3}}D$) um den Eckpunkt A_j ($j=1, 2, 3$) des regulären Dreiecks Γ des Durchmessers D , und S_j das von K_j durch die A_j gegenüberliegende Seite von Γ abgetrennte Segment. Dann stellt die konvexe Hülle der Vereinigungsmenge von Γ mit den Segmenten S_j den gesuchten Minimalbereich dar, den wir, da er von M. YAMANOUTI zuerst betrachtet wurde, als Y -Dreieck ($Y = \text{YAMANOUTI}$) bezeichnen.

Wir erweitern das Problem noch dadurch, daß wir neben Δ statt L oder D ein allgemeineres Funktional Φ vor-

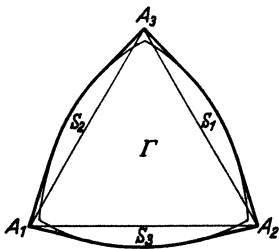


Fig. 5.

geben, das den Bedingungen genügen möge:

- (a) Φ ist additiv, d. h. für $B_1 \supset B_2$ gilt: $\Phi(B_1) \geq \Phi(B_2)$.
- (b) Φ nimmt bei Symmetrisierung nicht zu.
- (c) Unter allen Bereichen gleicher konstanter R -Breite besitzen die allgemeinen Reuleauxdreiecke minimales Funktional Φ .
- (d) Die Y -Dreiecke lassen sich eindeutig und stetig auf die Parameter \mathcal{A} und Φ beziehen, wobei ihr Inhalt $F = F(\mathcal{A}; \Phi)$ bei zunehmendem \mathcal{A} bzw. abnehmendem Φ monoton nicht ~~zunimmt~~ nimmt.

Da L und D diesen Bedingungen unterworfen sind, genügt es, die folgenden Untersuchungen für das Funktional Φ durchzuführen. An die Stelle von (1) tritt dabei als Nebenforderung für \mathcal{A} und Φ , daß ein Y -Dreieck existiere, das gerade die Funktionalwerte \mathcal{A} und Φ annimmt.

Es sei nun B ein beliebiger konvexer Bereich und Y^* das Y -Dreieck, für das

$$(3) \quad \mathcal{A}(Y^*) = \mathcal{A}(B) \quad \Phi(Y^*) = \Phi(B)$$

besteht. Dann existiert ein allgemeines Reuleauxdreieck R_0 , das bezüglich B als Eichbereich konstante R -Breite besitzt, und für das nach § 2 und (2c)

$$(4) \quad \mathcal{A}(R_0) = \mathcal{A}(B); \quad \Phi(R_0) \leq \Phi(B); \quad F(R_0) \leq F(B)$$

statt hat.

Nun erzeugen wir aus R_0 dadurch eine Folge von allgemeinen Reuleauxdreiecken $R_\nu (\nu = 1, 2 \dots)$ mit den Eckpunkten $A_{\nu j} (j = 1, 2, 3)$, daß wir $R_{\nu+1}$ aus R_ν durch Symmetrisierung in der Richtung $\overrightarrow{A_{\nu\kappa} A_{\nu\lambda}}$ hervorgehen lassen, wobei κ und λ bei vorzugebendem ν durch $\nu \equiv \kappa + 1 \pmod{3} \quad \nu \equiv \lambda + 1 \pmod{3}$ bestimmt seien. Daß dabei jeweils wieder allgemeine Reuleauxdreiecke entstehen, können wir Hilfssatz 2 entnehmen. Sondern wir von den R_ν dem BLASCHKESCHEN Auswahlssatz entsprechend eine konvergente Teilfolge aus, so strebt diese vermöge Hilfssatz 3 gegen ein mit R^* zu bezeichnendes allgemeines Reuleauxdreieck, für das wir wegen der Invarianz des Flächeninhalts bei Symmetrisierung sowie Hilfssatz 2 und (2b) die drei Aussagen machen können:

$$(5) \quad \mathcal{A}(R^*) \geq \mathcal{A}(R_0); \quad \Phi(R^*) \leq \Phi(R_0); \quad F(R^*) = F(R_0).$$

Da R^* der Konstruktion der Folge R_ν entsprechend drei Symmetrieachsen besitzen muß, wird das Y -Dreieck gleicher Dicke, dessen Eckpunkte sich mit denen von R^* decken, ganz von R^* bedeckt. Wenn

wir es mit Y_0 bezeichnen, folgt aus (3), (4) und (5) also

$$(6) \quad \mathcal{A}(Y_0) \geq \mathcal{A}(Y^*), \quad \Phi(Y_0) \leq \Phi(Y^*),$$

sowie

$$(7) \quad F(Y_0) \leq F(B).$$

Für den Inhalt von Y^* ergibt sich dann wegen (6) unter Berücksichtigung von (2 d) $F(Y^*) \leq F(Y_0)$ und daher wegen (7) die zu erweisende Ungleichung

$$F(Y^*) \leq F(B).$$

(Eingegangen am 27. Juli 1951.)

Über ungerade vollkommene Zahlen.

Herrn Prof. H. BRANDT zum 65. Geburtstag gewidmet.

Von

Otto Grün in Berlin.

Über den kleinsten Primteiler, der in einer ungeraden vollkommenen Zahl aufgeht, ist bisher als allgemeines Resultat nur bekannt:

Ist m eine ungerade vollkommene Zahl und p_1 der kleinste der n in m aufgehenden Primteiler; so ist $p_1 \leq n^1$.

Für spezielle Fälle sind allerdings genauere Aussagen gemacht worden. Weiter ist bekannt, daß $n \geq 6$ sein muß²⁾. Hier soll die oben angegebene Grenze $p_1 \leq n$ verschärft werden zu $p_1 < \frac{2}{3}n + 2$.

Es sei $m = \prod_{v=1}^n p_v^{\alpha_v}$, $p_1 < p_2 < \dots < p_n$, eine ungerade vollkommene Zahl. Dann ist

$$(1) \quad 2 = \prod_{v=1}^n \frac{p_v^{\alpha_v+1} - 1}{p_v^{\alpha_v}(p_v - 1)} < \prod_{v=1}^n \frac{p_v}{p_v - 1}.$$

Da die p_v ungerade Primzahlen sind, ist

$$p_2 \geq p_1 + 2, \quad p_3 \geq p_2 + 2 \geq p_1 + 4, \dots,$$

allgemein

$$p_v \geq p_1 + 2(v - 1). \quad v = 2, \dots, n.$$

Nun gilt für positive Zahlen $a > 1$:

$$(2) \quad \frac{a}{a-1} > \frac{a+1}{a} > \frac{a+2}{a+1} > \dots.$$

Damit erhält man aus (1):

$$2 < \prod_{v=1}^n \frac{p_1 + 2v - 2}{p_1 + 2v - 3},$$

also

$$(3) \quad 4 < \prod_{v=1}^n \left(\frac{p_1 + 2v - 2}{p_1 + 2v - 3} \right)^2.$$

Auf Grund von (2) ist aber

$$\frac{p_1 + 2v - 2}{p_1 + 2v - 3} < \frac{p_1 + 2v - 3}{p_1 + 2v - 4},$$

¹⁾ Cl. Servais, Sur les nombres parfaits, Mathesis VIII., S. 92—93, Paris 1888.

²⁾ U. Kühnel, Verschärfung der notwendigen Bedingungen für die Existenz von ungeraden vollkommenen Zahlen. Math. Zeitschr. Bd. 52 (1949), S. 202—211.

also

$$\left(\frac{p_1 + 2v - 2}{p_1 + 2v - 3}\right)^2 < \frac{p_1 + 2v - 2}{p_1 + 2v - 4}.$$

Setzt man die rechten Seiten dieser Ungleichung in (3) rechts ein, so erhält man

$$4 < \prod_{v=1}^n \frac{p_1 + 2v - 2}{p_1 + 2v - 4} = \frac{p_1 + 2n - 2}{p_1 - 2},$$

also

$$3p_1 < 2n + 6, \quad p_1 < \frac{2n}{3} + 2, \quad \text{w. z. b. w.}$$

(Eingegangen am 30. Juli 1951.)

Zwischenkörperverbände endlicher inseparabler Erweiterungen.

Von

Günter Pickert in Tübingen.

Bekanntlich bilden die Zwischenkörper Z einer Körpererweiterung $L|K$, d. h. die Körper Z mit $K \subseteq Z \subseteq L$, einen Verband¹⁾, wenn man als Verknüpfungen die *Durchschnittsbildung* ($Z \wedge Z'$) und die *Kompositumbildung* (ZZ') nimmt. Es soll im folgenden untersucht werden, wann dieser Verband bei einer endlichen inseparablen²⁾ Erweiterung *modular* ist, wann also für drei Zwischenkörper Z, Z', Z'' unter der Voraussetzung $Z \subseteq Z''$ stets $ZZ' \wedge Z'' = Z(Z' \wedge Z'')$ gilt.

Mit S als dem maximalen separablen Zwischenkörper²⁾ von $L|K$, d. h. dem Körper, welcher aus den über K separablen Elementen von L besteht, folgt aus der Modularität des Zwischenkörperverbandes von $L|K$ natürlich auch die Modularität des Unterverbandes der Zwischenkörper $\subseteq S$, welcher also der Zwischenkörperverband der separablen Erweiterung $S|K$ ist. Die somit notwendige Modularität dieses Unterverbandes will ich hier nicht untersuchen. Mittels der GALOISSchen Theorie läßt sie sich übrigens als Modularität eines gewissen Unterverbandes des Untergruppenverbandes einer endlichen Gruppe aussprechen. Es bleiben dann also nur noch die beiden Fragen zu beantworten: 1. *Wann ist der Zwischenkörperverband einer rein-inseparablen Erweiterung* (nämlich $L|S$) *modular*? 2. *Wann folgt aus der Modularität der Zwischenkörperverbände von $L|S$ und $S|K$ auch die Modularität des Zwischenkörperverbandes von $L|K$?* Damit überhaupt etwas zu untersuchen übrig bleibt, muß natürlich $L > S$ vorausgesetzt werden, so daß K ein unvollkommener Körper ist. Die Charakteristik von K muß somit eine Primzahl sein. Diese werde im folgenden stets mit p bezeichnet.

Zur Untersuchung der ersten Frage betrachte ich die endliche rein-inseparable Erweiterung $L|K$ (d. h. mit der oben verwandten Bezeichnung: ich setze $K = S$ voraus). Zu jedem $a \in L - K$ gibt es dann eine natürliche Zahl e mit $a^{p^e} \in K - K^p$, welche der *Exponent von a*

¹⁾ Zu den verbandstheoretischen Begriffen und Sätzen siehe G. BIRKHOFF: *Lattice Theory*, 2. Aufl., New York 1948, im folgenden als L zitiert.

²⁾ Zu den im folgenden verwandten Begriffen und Sätzen über inseparable Erweiterungen siehe G. PICKERT: *Inseparable Körpererweiterungen*, *Math. Zeitschr.* 52 (1949), S. 81—135, im folgenden als I zitiert.

bez. K heißt. Der zufolge der Endlichkeit von $L|K$ vorhandene größte Exponent e , für den also $L^{p^e} \subseteq K$, aber nicht $L^{p^{e-1}} \subseteq K$ gilt, heißt *Exponent der Erweiterung* $L|K$. Die kleinste natürliche Zahl m mit $L = K(a_1, \dots, a_m)$ wird — übrigens bei jeder endlichen Erweiterung — die *Vielfachheit* von $L|K$ genannt. Bei einer Vielfachheit > 1 gibt es unendlich viele Zwischenkörper³⁾, während bei $L = K(a)$ mit e als Exponent die $K(a^{p^i})$ ($i = 0, 1, \dots, e$) gerade die sämtlichen Zwischenkörper sind⁴⁾. Daraus erkennt man, daß eine rein-inseparable Erweiterung $L|K$ genau dann keine echten (d. h. von L und K verschiedenen) Zwischenkörper besitzt, wenn ihr Grad $(L:K) = p$ ist. Daher besitzt die durch

$$(1) \quad p^{d(Z)} = (Z:K)$$

für die Zwischenkörper Z einer rein-inseparablen Erweiterung $L|K$ erklärte Funktion d die Eigenschaft, daß $d(Z') = d(Z) + 1$ im Falle $Z' \supseteq Z$ dasselbe bedeutet wie: Z' ist oberer Nachbar von Z . Der Verband der Zwischenkörper ist somit *ausgeglichen*, d. h. er erfüllt die *JORDAN-DEDEKIND-Bedingung*⁵⁾, und $d(Z)$ ist wegen $d(K) = 0$ die (verbandstheoretische) Dimension von Z . Es handelt sich also bei endlicher Erweiterung $L|K$ jedenfalls um einen Verband endlicher Dimension d mit

$$(2) \quad p^d = (L:K).$$

Aus der bekannten Ungleichung

$$(3) \quad (ZZ':Z) \leq (Z':Z' \wedge Z)$$

folgt nun wegen (1)

$$d(ZZ') - d(Z) \leq d(Z') - d(Z' \wedge Z).$$

Der Verband ist also *nach oben halbmodular*, d. h. zwei Elemente, welche obere Nachbarn ihrer unteren Grenze sind, sind stets untere Nachbarn ihrer oberen Grenze. Da die Modularität bekanntlich⁶⁾ darüber hinaus

$$d(Z) + d(Z') = d(Z \wedge Z') + d(ZZ')$$

bedeutet, erkennt man noch mittels (1), daß die Modularität einfach die Gültigkeit der Gradgleichung

$$(4) \quad (ZZ':Z) = (Z':Z' \wedge Z)$$

für alle Zwischenkörper Z, Z' besagt.

Aus der oben über die Zwischenkörper einer einfachen rein-inseparablen Erweiterung gemachten Angabe folgt:

³⁾ E. STEINITZ: Algebraische Theorie der Körper, J. f. M. 137 (1910), S. 244.

⁴⁾ I, S. 87, Satz 6.

⁵⁾ L, S. 11.

⁶⁾ L, S. 68, Th. 3.

Der Zwischenkörperverband einer einfachen rein-inseparablen Erweiterung ist eine Kette.

Es gilt aber auch die Umkehrung:

Ist der Zwischenkörperverband einer endlichen rein-inseparablen Erweiterung eine Kette, so ist die Erweiterung einfach.

Denn wegen der aus (2) folgenden endlichen Dimension ist die Kette endlich, während eine mehrfache Erweiterung unendlich viele Zwischenkörper besitzt.

Nachdem ich so im einfachsten Falle die Modularität gezeigt habe, beweise ich jetzt, daß der Zwischenkörperverband bei einer Vielfachheit > 2 nicht modular ist. Es sei m die Vielfachheit von $L|K$ und $L = K(a_1, \dots, a_m)$. Mit $L^p(K) = K(a_1^p, \dots, a_m^p) = K'$ ist nun ⁷⁾ $(L:K') = p^m$. Folglich bilden die p^m Potenzprodukte $a_1^{i_1} \dots a_m^{i_m}$ ($0 \leq i_v < p$) eine Basis von $L|K'$. Ich betrachte jetzt die beiden Zwischenkörper ⁸⁾ $Z = K'(a_1, a_2)$ und $Z' = K'(a_1 + a_2, a_3, a_3)$. Offensichtlich ist $(Z:Z') = p$. Da $a_1 + a_2, a_3$ wegen der Basiseigenschaft der angegebenen Potenzprodukte nicht in $K'(a_3)$ liegt, gilt $(Z':K') = p^2$. Die Ungültigkeit von (4) und damit die Nichtmodularität des Zwischenkörperverbandes ist daher bewiesen, wenn $Z \wedge Z' = K'$ gezeigt werden kann. Sei nun $a \in Z \wedge Z'$, also

$$a = \sum_{i,k=0}^{p-1} \alpha_{ik} a_1^i a_2^k = \sum_{i,k=0}^{p-1} \beta_{ik} (a_1 + a_2, a_3)^i a_3^k \quad (\alpha_{ik}, \beta_{ik} \in K').$$

Formt man den letzten Ausdruck zu

$$\sum_{i=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{p-1-i} \binom{i+k}{i} \sum_{h=0}^{p-1} \beta_{i+k,h} a_3^{h+k} a_1^i a_2^k$$

um, so ergibt die Tatsache, daß die $a_1^i a_2^k$ eine Basis von $K'(a_1, a_2, a_3)|K'(a_3)$ bilden, die Gleichungen

$$\alpha_{ik} = \binom{i+k}{i} \sum_{h=0}^{p-1} \beta_{i+k,h} a_3^{h+k} \quad \text{für } i+k < p.$$

Da weiter bei festem Wert k die a_3^{h+k} ($h = 0, 1, \dots, p-1$) eine Basis von $K'(a_3)|K'$ bilden, folgt

$$\beta_{i+k,h} = 0 \quad \text{für } h+k \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Da bei gegebenen Werten $i+k$ und h , welche nicht beide $= 0$ sind, stets k noch so bestimmt werden kann, daß $h+k$ kein Vielfaches von p ist, sind also höchstens mit Ausnahme von β_{00} alle $\beta_{ik} = 0$, d. h. $a \in K'$, was zu zeigen war.

⁷⁾ M. T. BECKER, S. MAC LANE: The minimum number of generators for inseparable algebraic extensions, Bull. Am. Math. Soc. 46 (1940), S. 182, Th. 6; siehe auch I, S. 88.

⁸⁾ Im Grunde handelt es sich hier einfach um das Gegenbeispiel bei MAC LANE: A lattice formulation for transcendence degrees and p -bases, Duke Math. J. 4 (1938), S. 463 (unten); siehe auch I, S. 95 (unten).

Es liegt jetzt natürlich die Vermutung nahe, daß bei Vielfachheit 2 der Zwischenkörperverband modular ist. Zum Nachweis dieser Vermutung beweise ich (4), wobei offenbar die Fälle $Z' \geq Z$ und $Z \geq Z'$ als trivial außer Betracht bleiben können. Es gibt also ein Element $a \in Z - Z \wedge Z'$. Die natürliche Zahl e sei der Exponent von a bez. $Z_0 = Z \wedge Z'$. Da a^{p^e-1} nicht in Z_0 liegt, ist es auch nicht in Z' enthalten. a hat somit auch bez. Z' den Exponenten e . Aus einer Normalform⁹⁾ für die Erweiterung $Z'|Z_0$ wird somit durch Adjunktion von a eine solche für $Z'Z|Z_0$, so daß diese Erweiterung eine um 1 größere Vielfachheit besitzt als $Z'|Z_0$. Da nun $L|K$ die Vielfachheit 2 haben soll, hat natürlich $L|Z_0$ und daher auch¹⁰⁾ $ZZ'|Z_0$ höchstens diese Vielfachheit. Somit muß $Z'|Z_0$ einfach sein: $Z' = Z_0(a)$. Unter Vertauschung von Z, a mit Z', a' zeigt dann das oben gewonnene Ergebnis, daß a' bez. Z denselben Exponenten besitzt wie bez. Z_0 . Da der Grad einer einfachen Erweiterung bereits durch den Exponenten bestimmt wird, folgt aus dem letzten Ergebnis gerade die gewünschte Gleichung (4).

Es hat sich somit ergeben:

Der Zwischenkörperverband einer rein-inseparablen Erweiterung ist genau dann modular, wenn die Vielfachheit der Erweiterung < 3 ist.

Zur Untersuchung der zweiten Frage zeige ich zuerst:

Der Zwischenkörperverband einer endlichen Erweiterung $L|K$ ist genau dann nach oben halbmodular, wenn dies für den Unterverband der in ihrem maximalen separablen Zwischenkörper S enthaltenen Zwischenkörper zutrifft.

Daraus, daß der Unterverband der Zwischenkörper $\leq S$ ein Quotient ist, folgt die Notwendigkeit der Bedingung¹¹⁾. Ich brauche daher nur noch aus dieser Bedingung zu folgern, daß, wenn die Zwischenkörper Z, Z' obere Nachbarn von $Z_0 = Z \wedge Z'$ sind, ZZ' oberer Nachbar von Z und Z' ist. Sind $Z|Z_0$ und $Z'|Z_0$ separabel, so führe ich noch den maximalen separablen Zwischenkörper $S_0 = S \wedge Z_0$ von $Z_0|K$ ein. Da $SZ_0|Z_0$ separabel¹²⁾ und $L|SZ_0$ rein-inseparabel ist, erkennt man SZ_0 als den maximalen separablen Zwischenkörper von $L|Z_0$. Daher liegen Z, Z' in SZ_0 . Daß ZZ' oberer Nachbar von Z und Z' ist, folgt jetzt sofort aus der vorausgesetzten Halbmodularität nach oben des Zwischenkörperverbandes von $S|K$ und dem folgenden

Hilfssatz. *Ist $S|S_0$ separabel und $Z_0|S_0$ rein-inseparabel, so ist der Zwischenkörperverband von $SZ_0|Z_0$ isomorph zum Zwischenkörperverband von $S|S_0$.*

⁹⁾ I, § 3; siehe auch G. PICKERT: Eine Normalform für endliche rein-inseparable Körpererweiterungen, Math. Zeitschr. 53 (1950), S. 133–135.

¹⁰⁾ I, S. 103, Satz 28; übrigens muß es dort natürlich „Zwischenkörper“ statt „Zeichenkörper“ heißen.

¹¹⁾ Ein beliebiger Unterverband eines nach oben halbmodularen Verbandes braucht nicht nach oben halbmodular zu sein!

¹²⁾ I, S. 84, Satz 2.

Zum Beweis dieses Hilfssatzes sei X ein Zwischenkörper von $S|S_0$. Dann ist ¹²⁾ $XZ_0|X$ rein-inseparabel, also X der maximale separable Zwischenkörper von $XZ_0|S_0$:

$$(5) \quad X = XZ_0 \wedge S.$$

Für einen Zwischenkörper Y von $SZ_0|Z_0$ ist nun $Y' = (Y \wedge S)Z_0$ ein Zwischenkörper von $Y|Z_0$. Nach dem eben Bewiesenen hat $Y'|S_0$ denselben maximalen separablen Zwischenkörper $Y \wedge S$ wie $Y|S_0$, so daß $Y|Y'$ rein-inseparabel ist. Aus der Separabilität von $SZ_0|Z_0$ folgt daher $Y = Y'$, also

$$(6) \quad Y = (Y \wedge S)Z_0.$$

Aus (5) und (6) ergibt sich, daß die Abbildung $X \rightarrow XZ_0$ des Zwischenkörperverbandes von $S|S_0$ in den von $SZ_0|Z_0$ und die Abbildung $Y \rightarrow Y \wedge S$ des Zwischenkörperverbandes von $SZ_0|Z_0$ in den von $S|S_0$ zueinander invers (und damit Abbildungen „auf“) sind. Da aus $X_1 \subseteq X_2$ und $Y_1 \subseteq Y_2$ stets $X_1Z_0 \subseteq X_2Z_0$ und $Y_1 \wedge S_0 \subseteq Y_2 \wedge S_0$ folgt, ist damit die behauptete Isomorphie bewiesen ¹³⁾.

Ist jetzt weiter $Z'|Z_0$ rein-inseparabel, also nach einer Bemerkung von S. 356 $(Z' : Z_0) = p$, so folgt aus (3) $(ZZ' : Z) \leq p$. Das bedingt aber $(ZZ' : Z) = p$, weil aus $ZZ' = Z$ ja $Z' \subseteq Z$, also $Z' = Z_0$ folgen würde. ZZ' ist somit oberer Nachbar von Z . Ist auch noch $Z|Z_0$ rein-inseparabel, so haben wir damit ZZ' auch als oberen Nachbarn von Z' erkannt. Bei separabler Erweiterung $Z|Z_0$ folgt aber aus dem Hilfssatz und der Voraussetzung, daß $Z|Z_0$ keinen echten Zwischenkörper haben soll, dasselbe für $ZZ'|Z'$. Also ist auch in diesem Falle ZZ' oberer Nachbar von Z' . Damit habe ich den aufgestellten Satz bewiesen.

Die Zwischenkörper Z , welche denselben maximalen separablen Zwischenkörper $Z \wedge S$ für $Z|K$ liefern, sind eineindeutig den Zwischenkörpern ZS von $L|S$ zugeordnet, wobei Z aus den über $Z \wedge S$ rein-inseparablen Elementen von ZS besteht ¹⁴⁾. $Z \rightarrow (Z \wedge S, ZS)$ stellt daher eine eineindeutige und offenbar in beiden Richtungen ordnungserhaltende Abbildung des Zwischenkörperverbandes von $L|K$ in das Kardinalprodukt ¹⁵⁾ der Zwischenkörperverbände von $S|K$ und $L|S$ dar. Die Menge der Paare $(Z \wedge S, ZS)$ ist daher ein zum Zwischenkörperverband von $L|K$ isomorpher Verband mit derselben Teilordnungsbeziehung wie das erwähnte Kardinalprodukt, jedoch im allgemeinen kein Unterverband von diesem; denn aus einem im folgenden herzuleitenden Satz wird sich ergeben, daß der Zwischenkörperverband von $L|K$ nicht modular zu sein braucht, wenn die Zwischenkörperverbände von $L|S$ und $L|K$ und damit auch deren Kardinalprodukt modular sind. Jedenfalls aber folgt aus der angegebenen Zuordnung, der Endlich-

¹³⁾ *L*, S. 21.

¹⁴⁾ *I*, S. 86, Satz 4.

¹⁵⁾ *L*, S. 7 u. 25.

keit des Zwischenkörperverbandes von $S|K$ und der auf S. 356 bewiesenen endlichen Dimension des Zwischenkörperverbandes von $L|S$:

Der Zwischenkörperverband einer endlichen Erweiterung hat endliche Dimension.

Daher bedeutet die Modularität dasselbe wie die Halbmodularität nach oben zusammen mit der nach unten¹⁶⁾; dabei nenne ich einen Verband nach unten halbmodular, wenn zwei Elemente, welche untere Nachbarn ihrer oberen Grenze sind, stets obere Nachbarn ihrer unteren Grenze sind. Mit Rücksicht auf den vorletzten Satz brauche ich also den folgenden Satz, welcher meine zweite Frage beantwortet, nur noch für „nach unten halbmodular“ zu beweisen:

Der Zwischenkörperverband einer endlichen Erweiterung $L|K$ ist genau dann modular bzw. nach unten halbmodular, wenn

1. *dasselbe für den Unterverband der im maximalen separablen Zwischenkörper S enthaltenen Zwischenkörper zutrifft,*
2. *die Vielfachheit der Erweiterung < 3 ist,*
3. *jeder Zwischenkörper Z , für den $Z|K$ eine Vielfachheit > 1 besitzt, S enthält.*

Die Notwendigkeit der ersten Bedingung folgt wieder daraus, daß der Zwischenkörperverband von $S|K$ ein Quotient im Zwischenkörperverband von $L|K$ ist. Die zweite Bedingung bedeutet nach einem Satz von S. 358 die Halbmodularität nach unten für den Zwischenkörperverband von $L|S$, denn dieser ist nach S. 356 ja stets nach oben halbmodular. Somit folgt die Notwendigkeit der zweiten Bedingung wieder aus der Quotienteneigenschaft des Zwischenkörperverbandes von $L|S$.

Ist nun die dritte Bedingung nicht erfüllt, so gibt es einen Zwischenkörper M mit $S_0 = M \wedge S < S$, während $M|S_0$ eine Vielfachheit $m > 1$ hat. Mit $M = S_0(a_1, \dots, a_m)$ und $Z_0 = S_0(M^p)$, $Z = Z_0(a_1, a_2)$ ergibt sich dann wie auf S. 357 $a_1^p, a_2^p \in Z_0$, $(Z : Z_0) = p^2$. Wegen $S_0 < S$ gibt es ein über S_0 separables Element b so, daß $S_0(b)$ oberer Nachbar von S_0 ist. Ich setze $Z' = Z_0(b, a_1 b + a_2)$. Dann ist $ZZ' = Z(b) = S_0(b)Z$ nach dem Hilfssatz von S. 358 oberer Nachbar von Z . Nun liegt a_1 nicht in Z' , weil sonst $a_2 \in Z'$ und damit $Z \leq Z'$ sein würde entgegen¹⁰⁾ der Tatsache, daß $Z|Z_0$ zweifach, $Z'|Z_0$ dagegen nach dem Satz vom primitiven Element einfach ist. Aus $a_1^p \in Z'$ und $ZZ' = Z'(a_1)$ folgt daher $(ZZ' : Z') = p$, d. h. ZZ' ist auch oberer Nachbar von Z' . Kann ich jetzt noch $Z \wedge Z' = Z_0$ zeigen, so habe ich nachgewiesen, daß der Zwischenkörperverband von $L|K$ nicht nach unten halbmodular sein kann und daß demgemäß die dritte Bedingung notwendig für die Halbmodularität nach unten ist. Nun läßt sich jedes Element $a \in Z'$ in der Form

$$a = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i (a_1 b + a_2)^i = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \alpha_i b^k a_1^k a_2^{i-k}$$

¹⁶⁾ L, S. 68, Th. 3; Bedingungen (ξ) u. (ξ').

mit $\alpha_i \in Z_0(b)$ darstellen. Da die Menge der $\alpha_1^i \alpha_2^k (i, k = 0, 1, \dots, p-1)$ als eine Basis von $Z|Z_0$ auch eine solche von $ZZ'|Z_0(b)$ ist¹²⁾, folgt aus $a \in Z$ insbesondere

$$\alpha_i \in Z_0, \alpha_i b \in Z_0 \quad \text{für } i = 1, \dots, p-1.$$

Wäre nun $\alpha_i \neq 0$, so müßte $b \in Z_0$ sein, was wegen $S_0(b) \wedge Z_0 = S_0$ unmöglich ist. Also ergibt sich $a = \alpha_0$ und weiter wegen $Z_0(b) \wedge Z = Z_0$ daraus $a \in Z_0$. Damit ist $Z \wedge Z' = Z_0$ nachgewiesen.

Ich habe jetzt noch zu zeigen, daß umgekehrt aus den drei Bedingungen die Halbmodularität nach unten folgt. Ich setze also die Bedingungen als erfüllt voraus und betrachte zwei Zwischenkörper Z, Z' , welche untere Nachbarn von ZZ' sind. Nach dem auf S. 358 Bewiesenen liegen die maximalen separablen Zwischenkörper M, M' von $Z|Z_0$ bzw. $Z'|Z_0$ — wobei wieder $Z \wedge Z' = Z_0$ gesetzt ist — in $Z_0 S$, so daß nach dem Beweis des Hilfssatzes von S. 358 $M \wedge S = MM' \wedge S$ gleichbedeutend ist mit $M = MM'$, also $M' = Z_0$ — wegen $M \wedge M' = Z_0$. Die dritte Bedingung zeigt daher, daß aus $M' > Z_0$ die Einfachheit von $Z|M \wedge S$ und daher¹⁰⁾ die von $Z|Z_0$ folgt. Da Z und Z' natürlich völlig gleichberechtigt sind, gilt also: $M' = Z_0$ oder $Z|Z_0$ einfach und $M = Z_0$ oder $Z'|Z_0$ einfach. Wieder wegen der Gleichberechtigung von Z und Z' brauche ich also nur die folgenden drei Fälle zu unterscheiden: 1. $Z'|Z_0$ einfach und $M' = Z_0$, 2. $M' = M = Z_0$, 3. $Z|Z_0$ und $Z'|Z_0$ einfach. Offenbar sind ZM' und MZ' die maximalen separablen Zwischenkörper von $ZZ'|Z$ bzw. $ZZ'|Z'$, so daß — da ZZ' oberer Nachbar von Z und Z' ist — $ZM' = Z$ oder $= ZZ'$ und $MZ' = Z'$ oder $= ZZ'$ gilt und dementsprechend $ZZ'|Z$ sowohl wie $ZZ'|Z'$ entweder rein-inseparabel oder separabel ist. Ich betrachte zuerst Fall 1 unter der Annahme $MZ' = ZZ'$, also $ZZ'|Z'$ separabel. Es gilt $Z' = Z_0(a)$ mit einem über Z_0 rein-inseparablen Element a . Wegen $ZZ' = MZ' = M(a)$ ergibt sich⁴⁾ $Z = M(a^p)$, denn der Zwischenkörper Z von $ZZ'|M$ ist ja unterer Nachbar von ZZ' . Aus $a^p \in Z \wedge Z' = Z_0$ folgt nun $(Z':Z_0) = p$ und $Z = M$, so daß Z' und — mit Rücksicht auf den Hilfssatz von S. 358 — auch Z oberer Nachbar von Z_0 ist. Setze ich nun aber $MZ' = Z'$, also $ZZ'|Z'$ rein-inseparabel voraus, so ist wegen $M' = Z_0$ auch $ZZ'|Z_0$ rein-inseparabel und wegen der zweiten Bedingung von einer Vielfachheit¹⁰⁾ < 3 . Nach einem Satz von S. 358 sind daher Z, Z' obere Nachbarn von Z_0 . Im zweiten Fall sind $Z|Z_0$ sowie $Z'|Z_0$ und damit auch $ZZ'|Z_0$ rein-inseparabel, so daß sich wie eben Z, Z' als obere Nachbarn von Z_0 ergeben. Im dritten Fall nehme ich zuerst $ZM' = Z$, also $ZZ'|Z$ rein-inseparabel an. Dann ist natürlich $M' = Z_0$, so daß wieder der schon erledigte erste Fall vorliegt. Da beim dritten Fall Z und Z' gleichberechtigt sind, brauche ich also nur noch die Möglichkeit zu untersuchen, daß $ZZ' = ZM' = MZ'$ gilt, also $ZZ'|Z$ sowohl wie $ZZ'|Z'$ separabel ist. Ein über Z_0 rein-inseparables Element von Z ist natürlich auch über Z' rein-inseparabel, als Element von ZZ' aber separabel

über Z' und damit in Z' enthalten. Wegen $Z_0 = Z \wedge Z'$ enthält daher weder Z noch Z' ein über Z_0 rein-inseparables, nicht in Z_0 liegendes Element. Es sei $Z = Z_0(a)$, $Z' = Z_0(a')$ und e eine natürliche Zahl mit $a^{p^e} \in M$, $a'^{p^e} \in M'$. Nach dem Hilfssatz von S. 358 ist MM' oberer Nachbar von M und M' . Gehe ich nun zu den Zwischenkörpern $Z_0 \wedge S$, $M \wedge S$, $M' \wedge S$, $MM' \wedge S$ über, so erhalte ich — nach dem Verfahren auf S. 358 vor dem Hilfssatz — aus der ersten Bedingung meines Satzes, daß M und M' obere Nachbarn von $Z_0 = M \wedge M'$ sein müssen. Da wegen $Z > Z_0$, $Z' > Z_0$ weder a^{p^e} noch a'^{p^e} in Z_0 liegen darf, folgt daher $Z_0(a^{p^e}) = M$, $Z_0(a'^{p^e}) = M'$. Ich setze $a'^{p^e} = b$. Mit $(ZZ':Z) = n$ bilden dann die b^i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) wegen $ZZ' = ZM' = Z(b)$ eine Basis von $ZZ'|Z$ und wegen der Gradgleichung¹²⁾ $(MM':M) = (ZZ':Z)$ auch eine Basis von $MM'|M$. Wegen der Separabilität von $Z_0(b)|Z_0$ und $M(b)|M$ folgt nun $Z_0(b) = Z_0(b^{p^e})$, $M(b) = M(b^{p^e})$, so daß auch die $(b^{p^e})^i$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) eine Basis von $MM'|M$ sowohl wie von $M'|Z_0$ bilden. Aus einer wegen $a' \in ZZ'$ möglichen Darstellung $a' = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i b^i$ mit $\alpha_i \in Z$ folgt jetzt $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^{p^e} (b^{p^e})^i \in M'$ und daher wegen der bewiesenen

Basiseigenschaft $\alpha_i^{p^e} \in Z_0$. Daraus ergibt sich aber nach einer weiter oben hergeleiteten Tatsache $\alpha_i \in Z_0$, also $a' \in M'$ und damit $M' = Z'$. Infolge der Gleichberechtigung von Z und Z' ist natürlich auch $M = Z$. Damit sind Z , Z' auch im dritten Fall als obere Nachbarn von Z_0 nachgewiesen, was den Beweis des ausgesprochenen Satzes vollendet.

Die dritte Bedingung ist offenbar immer dann verletzt, wenn $L = MS$, $S > K$, $S|K$ separabel und $M|K$ rein-inseparabel von einer Vielfachheit ≥ 2 ist. Damit sind gerade die Zwischenkörperverbände der am einfachsten aufgebauten inseparablen Erweiterungen von einer Vielfachheit ≥ 2 als nichtmodular erkannt¹⁷⁾. Ferner ist die dritte Bedingung immer dann verletzt, wenn die Vielfachheit von $L|K$ gleich dem Unvollkommenheitsgrad¹⁸⁾ von K und > 1 ist; denn dann enthält¹⁹⁾ L den Körper $K^{p^{-1}}$, während $K^{p^{-1}}|K$ dieselbe Vielfachheit besitzt wie $L|K$. Ich gebe noch ein Beispiel dafür an, daß die dritte Bedingung bei $S > K$ und Vielfachheit 2 wirklich erfüllt sein kann. Nach dem eben Bemerkten muß man dazu einen Grundkörper K von einem Unvollkommenheitsgrad ≥ 3 wählen. Ich nehme der Einfachheit halber einen Körper K vom Unvollkommenheitsgrad 3, so daß also $K^{p^{-1}}|K$ die Vielfachheit 3 besitzt: $K^{p^{-1}} = K(a_0, a_1, a_2)$. Ferner setze ich K als nicht separabel-abgeschlossen voraus, so daß es also eine echte

¹⁷⁾ Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß ich versehentlich in der „Einführung in die höhere Algebra“ (Göttingen 1951) auf S. 225 ein verkehrtes Beispiel für einen nichtmodularen Zwischenkörperverband angegeben habe.

¹⁸⁾ *I*, S. 87/88.

¹⁹⁾ *I*, S. 94, Satz 19.

separable Erweiterung $K(b)|K$ ohne echten Zwischenkörper gibt. Dann betrachte ich $L = K(a_0, b, a_1 b + a_2)$. Wäre $a_0 \in K(b, a_1 b + a_2)$ oder $a_1 b + a_2 \in K(b)$, so hätte $K(b, a_0, a_1, a_2)|K$ eine Vielfachheit ≤ 2 , entgegen¹⁰⁾ der Tatsache, daß $K(a_0, a_1, a_2)|K$ die Vielfachheit 3 besitzt. Daher ist $(L : K(b)) = p^3$, so daß $L|K$ wegen $L^p \subseteq K(b)$ die Vielfachheit 2 besitzt. Durch dieselbe Rechnung wie auf S. 360 — mit $K(a_0)$ anstatt Z_0 — ergibt sich nun $L \wedge K^{p-1} = K(a_0)$. Da wegen $L^p \subseteq K(b)$ kein Element von L einen Exponenten > 1 bez. K haben kann, enthält daher $K(a_0)$ sämtliche über K rein-inseparablen Elemente von L , womit die in Frage stehende dritte Bedingung nachgewiesen ist.

(Eingegangen am 1. Oktober 1951.)

Widerspruchsfreier Aufbau einer typenfreien Logik. (Erweitertes System).

Von

Wilhelm Ackermann in Lüdenscheid.

§ 1.

Einleitung.

Das Ziel dieser Untersuchungen ist das folgende: Es soll ein typenfreies logisches System aufgestellt werden, für das der Widerspruchsfreiheitsbeweis geführt werden kann. Das System soll genügend weit sein, um daraus ohne Hinzufügung besonderer mathematischen Axiome die Zahlentheorie und in einem gewissen Umfang auch die Analysis ableiten zu können. Der Grundgedanke des Systems ist eine gewisse Revision des Aussagenkalküls, die ich bereits an anderer Stelle ausführlich diskutierte¹⁾. Das vorliegende System entsteht aus dem früheren durch eine Erweiterung, die in der Hauptsache dazu dient, eine Einbeziehung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten vorzunehmen. Die Gedanken, die der Revision des Aussagenkalküls zugrunde liegen, sind die folgenden: 1. Da der Definitionsbereich der Prädikate, d. h. der Bereich der Dinge, für die das Zutreffen eines Prädikates sinnvoller Weise als richtig oder falsch bezeichnet werden kann, im allgemeinen beschränkt ist, so kann als Grundlage nur eine positive Logik genommen werden, die den Satz vom ausgeschlossenen Dritten nicht von vorneherein zugrunde legt. 2. Die Richtigkeit von Implikationen setzt im Prinzip voraus, daß zwischen Vorder- und Hinterglied der Implikation eine gewisse Gleichheit der semantischen Stufen besteht. 3. Die Einführung der Negation geschieht in eigentümlicher Weise. Die Unverträglichkeit der Richtigkeit und Falschheit einer Aussage wird postuliert. Die Falschheit der Identität zweier Dinge läßt sich unter Umständen direkt beweisen. Im übrigen wird die Negation komplizierterer Ausdrücke auf die einfacheren zurückgeführt. 4. Es kommen nur allgemeine Dingvariable vor, für die beliebige Dinge eingesetzt werden können und (wenigstens der Idee nach) allgemeine Aussagenvariable, für die beliebige Aussagen eingesetzt werden können. Diese Einsetzung ist auch dann gestattet,

¹⁾ W. ACKERMANN, Widerspruchsfreier Aufbau der Logik I. Typenfreies System ohne tertium non datur. Journal of Symbol. Logic 15, Nr. 1 (1950), S. 33—57.

wenn z. B. das Prinzip 2. dadurch verletzt wird, da trotzdem die wesentliche Form des Schlusses gewahrt bleibt. — Überhaupt wird eine Implikationsbeziehung bei beliebigen Einsetzungen für Variable als gültig angesehen, falls sie richtig ist, wenn man die Variablen auf gewisse vernünftige Werte beschränkt. Hat man nämlich mit Formeln zu tun, die nicht notwendig richtig oder falsch sind, so kann die Implikation nur als ein rein formaler Übergang von einer Formel zur anderen aufgefaßt werden, der bei Einsetzungen für etwa vorkommende Variablen gültig bleibt.

§ 2.

Das Axiomensystem.

Das Zeichenmaterial besteht aus (a) Zeichen für freie Variable a, b, c, a_1, a_2, \dots ; (b) Zeichen für gebundene Variable x, y, z, x_1, x_2, \dots ; (c) Zeichen für Aussageverknüpfungen $\&, \vee, \bar{}, \rightarrow$; (d) den Zeichen $\hat{x}, \hat{y}, \hat{x}\hat{y}, \dots$; (e) den Zeichen $\{ \}, (\cdot), (), \dots$; (f) den Zeichen $(x), (Ex), (y), (Ey), \dots$; (g) Zeichen für spezielle n -stellige Prädikate (z. B. kleine griechische Buchstaben) α^n, β^k , evtl. auch andere Symbole wie \equiv (Zeichen für ein spezielles zweistelliges Prädikat).

Die Definition von „Formel“ und „Term“ geschieht durch simultane Rekursion nach den folgenden Regeln:

(1) Zeichen für freie Variable und für spezielle Prädikate sind Terme.

(2) Sind a_1, \dots, a_n und b Terme, so ist $\{b\}(a_1, \dots, a_n)$ eine Formel, (Statt $\{\equiv\}(a, b)$ schreiben wir $a \equiv b$).

(3) Mit \mathfrak{A} ist $\bar{\mathfrak{A}}$ Formel.

(4) Mit \mathfrak{A} und \mathfrak{B} sind $(\mathfrak{A}) \& (\mathfrak{B}), (\mathfrak{A}) \vee (\mathfrak{B}), (\mathfrak{A}) \rightarrow (\mathfrak{B})$ Formeln.

(5) Es sei $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_n)$ eine Formel mit den freien Variablen a_1, \dots, a_n , in der die gebundenen Variablen x_1, \dots, x_n nicht auftreten. $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)$ bezeichnet das formelähnliche Gebilde, das man erhält, wenn man in $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_n)$ jedes vorkommende a_i durch x_i ersetzt. $\hat{x}_1 \dots \hat{x}_n(\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n))$ ist dann ein Term. Ebenso wie für a_1, \dots, a_n und x_1, \dots, x_n gilt die Regel entsprechend auch für andere freie und gebundene Variable.

(6) Die Formel $\mathfrak{A}(a)$ enthalte die freie Variable a , aber nicht die gebundene Variable x . Dann sind auch $(x)\mathfrak{A}(x)$ und $(Ex)\mathfrak{A}(x)$ Formeln, wobei $\mathfrak{A}(x)$ aus $\mathfrak{A}(a)$ so entsteht wie $\mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)$ aus $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_n)$ bei der vorigen Regel. Die Regel gilt entsprechend für andere freie und gebundene Variable.

Beim praktischen Gebrauch der Formeln lassen wir die Klammern vielfach weg, wenn die Art der Wiederhinzufügung eindeutig ist. Statt $\{y\}(x_1, \dots, x_n)$ schreiben wir z. B. $y x_1 \dots x_n$; bei $\hat{x}_1 \dots \hat{x}_n$ lassen wir die folgende Klammer meist fort und ebenso in vielen anderen Fällen. Weitere Klammerersparnis erzielen wir dadurch, daß

wir festsetzen, daß \vee stärker bindet als $\&$ und \rightarrow , ferner $\&$ stärker als \rightarrow . Fehlen hinter (x) , (Ex) , ... die zugehörigen Klammern, so ist das so zu verstehen, daß die Zeichenkombination bis vor das nächste Zeichen \vee , $\&$, \rightarrow in Klammern einzuschließen ist, bis zu dem diese Kombination eine Formel ist, bzw. durch Ersetzung von gebundenen Variablen durch freie in eine Formel übergeht.

Wir geben das Axiomensystem in Form von Axiomenschemata, indem wir auf die explizite Einführung von Aussagevariablen verzichten. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ bedeuten dabei beliebige Formeln, $\mathfrak{A}(a)$ eine solche, die die freie Variable a enthält, usw. Der Zusammenhang von gleichzeitig auftretenden $\mathfrak{A}(a)$ und $\mathfrak{A}(x)$ ist wie bei der Regel (6) zur Bildung von Formeln und Termen. $v_1, \dots, v_n, u_1, \dots$ bedeuten irgendwelche gebundene Variable; a, b, c, \dots irgendwelche Terme.

I. Grundformeln der positiven Aussagenlogik.

- | | |
|--|---|
| (1 a) $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$ | (1 b) $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$ |
| (2 a) $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ | (2 b) $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ |
| (3) $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{B} \vee (\mathfrak{A} \& \mathfrak{C})$ | |
| (4) $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \& (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}) \rightarrow (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \& \mathfrak{C})$ | |
| (5) $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}) \& (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}) \rightarrow (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C})$ | |
| (6) $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \& (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}) \rightarrow (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C})$ | |
| (7) $(\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}) \rightarrow (\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A})$ | |
| (8) $(\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \rightarrow (\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}) \vee (\Gamma \rightarrow \mathfrak{B})$ | |
| (9) $(\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}) \rightarrow \mathfrak{A}$. | |

II. Formeln der Prädikatenlogik.

- | | |
|--|--|
| (1) $(x) \mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(a)$ | |
| (2) $\mathfrak{A}(a) \rightarrow (Ex) \mathfrak{A}(x)$ | |
| (3) $(x) (\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(x)) \rightarrow (\mathfrak{A} \rightarrow (x) \mathfrak{B}(x))$ | |
| (4) $(x) (\mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B}) \rightarrow ((Ex) \mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B})$ | |
| (5) $(x) (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}(x)) \rightarrow \mathfrak{A} \vee (x) \mathfrak{B}(x)$ | |
| (6) $\mathfrak{A} \& (Ex) \mathfrak{B}(x) \rightarrow (Ex) (\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}(x))$ | |
| (7) $(\Gamma \rightarrow (Ex) \mathfrak{A}(x)) \rightarrow (Ex) (\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}(x))$ | |
| (8 a) $(\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}(a_1, \dots, a_n)) \rightarrow \{\hat{x}_1 \dots \hat{x}_n \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)\} (a_1, \dots, a_n)$ | |
| (8 b) $\{\hat{x}_1 \dots \hat{x}_n \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)\} (a_1, \dots, a_n) \rightarrow (\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}(a_1, \dots, a_n))$. | |

III. Formeln für die Negation.

- | | |
|--|---|
| (1) $\mathfrak{A} \& \overline{\mathfrak{A}} \rightarrow \mathfrak{B}$ | |
| (2 a) $\mathfrak{A} \rightarrow \overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ | (2 b) $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \rightarrow \mathfrak{A}$ |

$$(3 a) \overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}} \rightarrow \overline{\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}}$$

$$(3 b) \overline{\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}} \rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}$$

$$(4 a) \overline{\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}} \rightarrow \overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}}$$

$$(4 b) \overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}} \rightarrow \overline{\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}}$$

$$(5 a) \overline{(\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}) \& (\mathfrak{B} \rightarrow \overline{\Gamma})} \rightarrow \overline{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}}$$

$$(5 b) \overline{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}} \rightarrow (\overline{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}}) \& (\mathfrak{B} \rightarrow \overline{\Gamma})$$

$$(6 a) \overline{(E x) \mathfrak{A}(x)} \rightarrow \overline{(x) \mathfrak{A}(x)}$$

$$(6 b) \overline{(x) \mathfrak{A}(x)} \rightarrow (E x) \mathfrak{A}(x)$$

$$(7 a) \overline{(x) \mathfrak{A}(x)} \rightarrow \overline{(E x) \mathfrak{A}(x)}$$

$$(7 b) \overline{(E x) \mathfrak{A}(x)} \rightarrow \overline{(x) \mathfrak{A}(x)}$$

$$(8 a) \overline{\{\hat{x}_1 \dots \hat{x}_n \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)\} (a_1, \dots, a_n)} \rightarrow \overline{\{\hat{x}_1 \dots \hat{x}_n \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)\} (a_1, \dots, a_n)}$$

$$(8 b) \overline{\{\hat{x}_1 \dots \hat{x}_n \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)\} (a_1, \dots, a_n)} \rightarrow \overline{\{\hat{x}_1 \dots \hat{x}_n \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n)\} (a_1, \dots, a_n)}$$

Bei II 3, II 5, II 6 darf \mathfrak{A} , bei II 4 \mathfrak{B} nicht die gebundene Variable x enthalten.

IV. Formeln für spezielle Prädikate.

$$(1) \alpha \equiv \alpha$$

$$(2) \overline{\alpha} \equiv \overline{\overline{\alpha}}$$

Bei diesen Grundformeln enthalten α und $\overline{\alpha}$ keine freie Variable. IV 2 ist dann und nur dann zulässig, wenn α und $\overline{\alpha}$ weder vollständig gleichgestaltet sind, noch durch Umbenennung der gebundenen Variablen ineinander übergehen. — Weitere Grundformeln für spezielle Prädikate können nach Analogie von IV 1 und IV 2 in der folgenden Art gebildet werden: Für die geordneten n -Tupel a_1, \dots, a_n von konstanten Termen sei eine Klasse definiert, so daß sich für jedes derartige n -Tupel angeben läßt, ob es zu der Klasse gehört oder nicht. Sei α^n ein Zeichen für ein spezielles n -stelliges Prädikat. Dann sind alle Formeln $\alpha^n a_1 \dots a_n$ und $\alpha^n \overline{b_1} \dots \overline{b_n}$ Grundformeln, falls a_1, \dots, a_n zu der Klasse gehört und $\overline{b_1}, \dots, \overline{b_n}$ nicht. Die Klasse von n -Tupeln muß dabei so definiert sein, daß mit a_1, \dots, a_n auch a'_1, \dots, a'_n dazu gehört, falls die a_i und a'_i gleich sind oder auseinander durch Umbenennung der gebundenen Variablen (entsprechend der folgenden Regel (A)) entstehen. Jedes Zeichen α^n darf nur für eine Art von Grundformeln gebraucht werden.

Ableitungsregeln.

(A) In einer Formel darf man die gebundenen Variablen umbenennen. Dies geschieht so, daß eine gebundene Variable u innerhalb eines Zeichens (u) oder $(E u)$ oder $\hat{u}, \hat{u}, \hat{u}_1$ usw. und innerhalb der zugehörigen Klammer, die den Wirkungsbereich dieses Zeichens abgrenzt, überall durch eine andere Variable v ersetzt wird, vorausgesetzt daß durch die Umbenennung überhaupt wieder eine Formel entsteht.

(B) In einer Formel darf man eine freie Variable an allen Stellen ihres Vorkommens durch den gleichen Term ersetzen.

- (C) Aus \mathfrak{A} und \mathfrak{B} erhält man $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$.
- (D) Aus \mathfrak{A} und $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ erhält man \mathfrak{B} .
- (E) Aus \mathfrak{A} erhält man $\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}$.
- (F) Aus einer Formel $\mathfrak{A}(a)$ erhält man $(x)\mathfrak{A}(x)$.

Alle Grundformeln sind nur zulässig, wenn sie wirklich Formeln im Sinne unserer früheren Definition sind. Ebenso dürfen die Ableitungsregeln nur gebraucht werden, wenn sie wieder Formeln liefern. Das Zeichen Γ , das bei der Aufstellung der Grundformeln gebraucht wurde, ist eine Abkürzung für die Formel $\equiv \equiv \equiv$, die durch Einsetzung in IV 1 beweisbar ist.

Es dürfen nun zu dem bisherigen System weitere Grundformeln hinzugefügt werden, die wir aber nicht von vorneherein angeben können, sondern bei denen die Zulässigkeit ihrer Aufstellung von einer beweistheoretischen Überlegung abhängt. Wir wollen zunächst jeder Formel, die mit Hilfe von Grundformeln I—IV und Regeln (A)—(F) abgeleitet wird, eine natürliche Zahl bezüglich dieser Herleitung zuordnen, die wir ihren Rang nennen. Eine Grundformel erhält den Rang 1 mit Ausnahme der Grundformeln I 4, I 6, II 3, III 5 a, die den Rang 3 erhalten. Außerdem erhalten diejenigen Grundformeln I 2 a, I 2 b und III 2 a, die mit $\Gamma \rightarrow$ beginnen, den Rang 2. Die Regeln A, B und F lassen den Rang unverändert. E erhöht den Rang um 1. Bei C ist der Rang der Konklusion gleich dem Maximum der Rangzahlen der Prämissen. Bei D ist der Rang der Konklusion gleich dem Rang von \mathfrak{A} , falls der Rang von $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ 1 ist. Ist im übrigen der Rang von $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ $n + 1$ und m der Rang von \mathfrak{A} , so ist der Rang von \mathfrak{B} $\text{Max}(m, n)$. — Den Rang der Endformel einer Herleitung nennen wir auch kurz den Rang der Herleitung. — Es sei nun $\mathfrak{A}(a)$ irgend eine Formel, die die freie Variable a enthält. Für jeden konstanten Term a , für den $\mathfrak{A}(a)$ überhaupt eine Formel darstellt, lasse sich eine Herleitung für $\mathfrak{A}(a)$ angeben, und zwar so, daß keine Herleitung einer Formel $\mathfrak{A}(a)$ einen größeren Rang hat als eine bestimmte Zahl k und daß dieser Rang bei einer Herleitung auch wirklich vorkommt. Dann dürfen wir $\mathfrak{A}(a)$ als weitere Grundformel hinzufügen, deren Rang übrigens k sein soll. Wir wollen derartige Grundformeln mit V 1 bezeichnen. Wir dürfen weiter Grundformeln $\mathfrak{B}(a)$ hinzufügen, wenn für jeden konstanten Term a , für den $\mathfrak{B}(a)$ überhaupt eine Formel darstellt, sich eine Herleitung für $\mathfrak{B}(a)$ aus Grundformeln I—IV und V 1 angeben läßt und zwar so, daß bei allen Herleitungen für eine Formel $\mathfrak{B}(a)$ ein bestimmter Rang nicht überschritten wird. So kommen wir zu Grundformeln V 2 und weiter entsprechend zu Grundformeln V 3, V 4 usw. Wir haben dabei von der Aufstellung neuer Grundformeln gesprochen und nicht gesagt, daß es sich bei der Gewinnung dieser Formeln V 1, V 2, . . . um eine besondere Ableitungsregel handelt. In der Tat scheint uns der Ausdruck „Ableitungsregel“ nicht ganz am Platze.

Denn einmal würde es sich um eine Ableitungsregel mit unendlich vielen Prämissen handeln, so daß keine strenge Formalisierung des Denkens erfolgt, da ja die Tatsache, daß für jede der unendlich vielen Prämissen eine formale Ableitung angegeben werden kann, ein Ergebnis inhaltlicher Überlegungen ist. Zum anderen kommt bei uns der besondere Umstand hinzu, daß bei einer Regel dieser Art die Gewinnung der Konklusion nicht nur davon abhängen würde, daß die Prämissen überhaupt gewonnen werden, sondern auch wie sie gewonnen werden. Das würde meiner Ansicht nach allein die Nichtzulässigkeit der Regel als logisches Schlußverfahren bewirken. Es kommt mir hier nun darauf an zu zeigen, daß man gewisse weitere, nach bestimmten Prinzipien gewonnenen Grundformeln zu den Formeln I—IV hinzufügen darf, ohne daß die Widerspruchsfreiheit verloren geht. Unter einem bestimmten formalen System würde das System der Grundformeln I—III und eine bestimmte Auswahl aus den Grundformeln IV, V zu verstehen sein, die sich von vorneherein beschreiben läßt. Die Gesamtheit der Grundformeln V in den Widerspruchsfreiheitsbeweis einzubeziehen, bestehen keinerlei Bedenken. Regeln von ähnlichem Charakter wie unsere Regel zur Aufstellung der Grundformeln V sind von P. LORENZEN und K. SCHÜTTE verwandt worden²⁾. Sie führen dort den Namen Regel der Induktion oder Regel der unendlichen Induktion.

Um ein Beispiel für eine Aufstellung von Grundformeln V zu geben, zeigen wir, daß die Formel $a \equiv b \vee a \equiv b$ eine Grundformel V 2 ist. Es sei nämlich b irgend ein konstanter Term. Für jeden anderen konstanten Term a ist dann entweder $a \equiv b$ nach IV 1, eventuell unter Hinzunahme der Regel (A) beweisbar, oder aber nach IV 2 $a \equiv \bar{b}$. In jedem Falle ist also mit Hilfe der Grundformel I 2a oder I 2b und der Regel (D) $a \equiv \bar{b} \vee a \equiv \bar{b}$ beweisbar und zwar durch einen Beweis vom Range 1. Demnach ist aber $a \equiv \bar{b} \vee a \equiv \bar{b}$ eine Grundformel V 1. Da dies für jeden Term b gilt; ist $a \equiv b \vee a \equiv \bar{b}$ eine Grundformel V 2. Im allgemeinen werden überhaupt die Grundformeln V in der Hauptsache dazu benutzt, den Satz vom ausgeschlossenen Dritten für besondere Fälle einzuführen.

Zum Gebrauch der Identität in unserem Kalkül bemerken wir noch: $a \equiv b$ bedeutet nicht nur, daß a und b die gleiche Bedeutung haben, sondern daß sie auch formal in gleicher Weise gebildet sind (abgesehen von der Benennung der gebundenen Variablen). Die Relation \equiv hat also einen metalogischen Charakter. Das gilt auch zum Teil für andere mit Hilfe der Grundformeln IV eingeführten spezielle

²⁾ P. LORENZEN, Konstruktive Begründung der Mathematik. Math. Zeitschrift 53 (1950), S. 162—202.

K. SCHÜTTE, Beweistheoretische Erfassung der unendlichen Induktion in der Zahlentheorie. Math. Ann. 122 (1951), S. 369—389.

Prädikate. Das entspricht übrigens ganz der Tendenz dieser Arbeit, die ein Nebeneinander von mehreren metalogischen Stufen möglichst vermeiden will.

Um die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems zu zeigen, genügt es, die Nichtableitbarkeit von \bar{I} darzutun.

§ 3.

Ein zweites Axiomensystem.

Die Durchführung des Widerspruchsfreiheitsbeweises geschieht im Prinzip nach der gleichen Methode wie in meiner in Anm. 1 zitierten Arbeit, in der ein Widerspruchsfreiheitsbeweis für das System ohne die Grundformeln V und IV angegeben wurde. Der frühere Beweis beruhte darauf, daß sich die Abtrennungsregel aus einer Beweisfigur entfernen ließ. Infolge der zusätzlichen Grundformeln V ist aber nicht mehr eine vollständige, sondern nur noch eine teilweise Entfernung der Abtrennungsregel möglich, die damit zusammenhängt, daß der intuitionistische Charakter des Axiomensystems verloren gegangen ist.

Zur Durchführung des Widerspruchsfreiheitsbeweises ist nun das in § 2 angegebene Axiomensystem weniger geeignet. Ich benutze dazu einen anderen, im folgenden zu entwickelnden Formalismus, der nur zu diesem Zwecke eingeführt wird und sonst weniger praktisch für deduktive Zwecke ist, schon weil er (absichtlich) nicht der Bedingung der Unabhängigkeit der vorhandenen Schlußweisen genügt. Um die Grundidee der teilweisen Entfernung der Abtrennungsregel durchzuführen, erweist sich eine Form des Kalküls als zweckmäßig, die in gewisser Weise an den GENTZENSCHEN Sequenzenkalkül erinnert³⁾. Doch werden keine Sequenzen benutzt, sondern statt dessen Formelreihen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}, \dots, \mathfrak{A}_n$, wobei die \mathfrak{A}_1 bis \mathfrak{A}_n Formeln im Sinne von § 2 sind. Die Nebeneinanderstellung der durch Kommata getrennten Formeln hat den Sinn einer Disjunktion, obwohl formal zwischen $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ unterschieden wird⁴⁾.

Angabe des Axiomensystems: „Formel“ und „Term“ haben die gleiche Bedeutung wie in § 2. Unter einer *Formelreihe* verstehen wir eine Reihe von durch Kommata getrennten Formeln oder auch eine einzige Formel, wenn die Formelreihe nur aus einem einzigen Glied besteht. Das Axiomensystem gibt an, wie Formelreihen abgeleitet werden.

Grundreihen sind alle Grundformeln des Systems von § 2, ferner auch alle solche Formeln, die aus Grundformeln I—III dadurch ent-

³⁾ G. GENTZEN, Untersuchungen über das logische Schließen. Math. Zeitschr. 39 (1934), 176—210 und 405—431.

⁴⁾ Disjunktionsreihen statt der GENTZENSCHEN Sequenzen werden auch von K. SCHÜTTE in der Abhandlung: Schlußweisenkalküle der Prädikatenlogik, Math. Ann. 122 (1950), 47—65, benutzt.

stehen, daß für die allgemeinen freien Variablen entsprechend der Regel B von § 2 irgendwelche Terme eingesetzt werden. Eine Ausnahme bilden die Grundformeln der Form $\Gamma \rightarrow \Gamma \vee \mathfrak{A}$; $\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \vee \Gamma$; $\Gamma \rightarrow \overline{\Gamma}$. Diese sind keine Grundreihen. Mit jeder Grundreihe ist ferner jede andere Formelreihe Grundreihe, die daraus durch Umbenennung der gebundenen Variablen entsteht.

Ableitungsregeln.

Wir bezeichnen, ähnlich wie GENTZEN, mit $\Psi, \Theta, \Psi', \Theta', \dots$ Formelreihen unbestimmter Art; leere Formelreihen sind dabei eingeschlossen. Wir geben die Ableitungsregeln in Form von Ableitungsschemata, die im allgemeinen keiner weiteren Erklärung bedürfen. Die Schemata zerfallen in drei verschiedene Gruppen, die wir durch ein vorgesetztes S, N oder U andeuten.

- | | | |
|--|--|--|
| <p>S 1. $\frac{\Psi, \Theta}{\Psi, \mathfrak{A}, \Theta}$</p> <p>N 1. $\frac{\Psi, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \Theta}$</p> <p>*N 3. $\frac{\Psi, \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}, \Theta \quad \Psi, \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}, \Theta}$</p> <p>N 5. $\frac{\Psi, \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}, \Theta \quad \Psi, \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}, \Theta}$</p> <p>N 7. $\frac{\Psi, \mathfrak{A}, \Theta}{\Psi, \overline{\mathfrak{A}}, \Theta}$</p> <p>N 9. $\frac{\Psi, \overline{\mathfrak{A}}, \Theta \quad \Psi, \overline{\mathfrak{B}}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \Theta}$</p> <p>N 11. $\frac{\Psi, \mathfrak{A}(a), \Theta}{\Psi, (E x) \mathfrak{A}(x), \Theta}$</p> <p>*N 13. $\frac{\Psi, \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}(a), \Theta}{\Psi, \mathfrak{A} \rightarrow (x) \mathfrak{B}(x), \Theta}$</p> <p>N 15. $\frac{\Psi, \mathfrak{A}(a_1, \dots, a_n), \Theta}{\Psi, \{\hat{x}_1 \dots \hat{x}_n \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n) \mid a_1, \dots, a_n\}, \Theta}$</p> <p>N 16. $\frac{\Psi, \mathfrak{A}(a_1, \dots, a_n), \Theta}{\Psi, \{\hat{x}_1 \dots \hat{x}_n \mathfrak{A}(x_1, \dots, x_n) \mid (a_1, \dots, a_n)\}, \Theta}$</p> <p>*N 17. $\frac{\Psi, \mathfrak{A}(a), \Theta}{\Psi, (E x) \mathfrak{A}(x), \Theta}$</p> | <p>S 2. $\frac{\Psi, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{A}, \Theta}$</p> <p>N 2. $\frac{\Psi, \mathfrak{A}, \Theta \quad \Psi, \mathfrak{B}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{A} \& \mathfrak{B}, \Theta}$</p> <p>*N 4. $\frac{\Psi, \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}, \Theta \quad \Psi, \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \& \mathfrak{C}, \Theta}$</p> <p>N 6. $\frac{\Psi, \mathfrak{A}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}, \Theta}$</p> <p>N 8. $\frac{\Psi, \overline{\mathfrak{A}}, \mathfrak{B}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{A} \& \mathfrak{B}, \Theta}$</p> <p>N 10. $\frac{\Psi, \mathfrak{A}, \Theta \quad \Psi, \mathfrak{B} \rightarrow \overline{\Gamma}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}, \Theta}$</p> <p>*N 12. $\frac{\Psi, \mathfrak{A}(a), \Theta}{\Psi, (x) \mathfrak{A}(x), \Theta}$</p> <p>*N 14. $\frac{\Psi, \mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{B}, \Theta}{\Psi, (E x) \mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B}, \Theta}$</p> | <p>S 3. $\frac{\Psi, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}, \Theta}$</p> <p>N 2. $\frac{\Psi, \mathfrak{A}, \Theta \quad \Psi, \mathfrak{B}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{A} \& \mathfrak{B}, \Theta}$</p> <p>*N 4. $\frac{\Psi, \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}, \Theta \quad \Psi, \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \& \mathfrak{C}, \Theta}$</p> <p>N 6. $\frac{\Psi, \mathfrak{A}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}, \Theta}$</p> <p>N 8. $\frac{\Psi, \overline{\mathfrak{A}}, \mathfrak{B}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{A} \& \mathfrak{B}, \Theta}$</p> <p>N 10. $\frac{\Psi, \mathfrak{A}, \Theta \quad \Psi, \mathfrak{B} \rightarrow \overline{\Gamma}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}, \Theta}$</p> <p>*N 12. $\frac{\Psi, \mathfrak{A}(a), \Theta}{\Psi, (x) \mathfrak{A}(x), \Theta}$</p> <p>*N 14. $\frac{\Psi, \mathfrak{A}(a) \rightarrow \mathfrak{B}, \Theta}{\Psi, (E x) \mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{B}, \Theta}$</p> |
| <p>U 1. $\frac{\Psi, \langle \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \rangle}{\Psi, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}}$</p> <p>U 4. $\frac{\Psi, \langle (E x) \mathfrak{A}(x) \rangle}{\Psi, (E x) (\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}(x))}$</p> <p>U 7. $\frac{\Psi_1, \langle \mathfrak{A}_1 \rangle \dots \Psi_n, \langle \mathfrak{A}_n \rangle \quad \Theta, \langle \mathfrak{C}_1 \rangle, \dots, \langle \mathfrak{C}_m \rangle}{\Psi_1, \dots, \Psi_n, \Theta, \mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_m}$</p> | <p>U 2. $\frac{\Psi, \langle \mathfrak{A} \rangle \quad \Theta, \langle (E x) \mathfrak{B}(x) \rangle}{\Psi, \Theta, (E x) (\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}(x))}$</p> <p>U 5. $\frac{\Psi, \langle \Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \rangle}{\Psi, \mathfrak{A}}$</p> | <p>U 3. $\frac{\Psi, \langle \overline{\Gamma} \rangle}{\Psi}$</p> <p>U 6. $\frac{\Psi, \langle \mathfrak{A} \rangle \quad \Theta, \langle \overline{\mathfrak{A}} \rangle}{\Psi, \Theta}$</p> <p>N 18. $\frac{\Psi, \overline{\mathfrak{A}(a)}, \Theta}{\Psi, (x) \mathfrak{A}(x), \Theta}$</p> |

Alle Schemata gelten natürlich nur unter der Bedingung, daß wieder eine Formelreihe herauskommt. Mit jedem Schema dürfen Umbenennungen der gebundenen Variablen verbunden werden, ohne daß dies als ein besonderer Schritt zählt. Im übrigen bedürfen die mit S und N bezeichneten Schemata im allgemeinen keiner weiteren Erklärung. Die mit einem * versehenen Schemata dürfen nur mit gewissen Einschränkungen gebraucht werden. Bei N 3, N 4, N 13 darf \mathfrak{A} nicht mit Γ identisch sein; bei N 12, N 13, N 14, N 17 dürfen Ψ und Θ , außerdem bei N 13 \mathfrak{A} und bei N 14 \mathfrak{B} nicht die freie Variable a enthalten. Bei den U-Schemata bedeutet Ψ , $\langle \mathfrak{A} \rangle$ eine der Formelreihen, die aus Ψ dadurch entstehen, daß man \mathfrak{A} einmal oder mehrere Male zwischen die Formeln der Reihe Ψ einschiebt, und zwar an beliebiger Stelle, auch am Anfang oder am Ende. Bei U 7, das $n + 1$ Prämissen enthält ($n \geq 1$), bedeutet \mathfrak{C}_i eine Formel der Gestalt $\mathfrak{A}_j \rightarrow \mathfrak{D}_i$ ($1 \leq j \leq n$; $1 \leq i \leq m$).

Jede Formel, die aus dem Axiomensystem von § 2 abgeleitet werden kann, läßt sich auch hier als Formelreihe mit einem einzigen Glied gewinnen. Denn zunächst sind sämtliche Grundformeln des früheren Systems jetzt Grundreihen mit alleiniger Ausnahme der Formeln $\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \vee \Gamma$; $\Gamma \rightarrow \Gamma \vee \mathfrak{A}$; $\Gamma \rightarrow \bar{\Gamma}$. Diese lassen sich aber aus der Grundreihe Γ mit Hilfe von S 1, N 1, N 6 bzw. N 7, N 6 gewinnen. Ferner sind die Ableitungsregeln C, D, E, F in den Regeln N 2, U 7, N 6, N 12 enthalten. Die Regel A, angewandt auf Grundformeln, gibt wieder Grundreihen; im übrigen dürfen wir ja die Umbenennungsregel mit jedem Ableitungsschema verbinden. Die Einsetzungsregel brauchen wir nicht; denn wir können, falls Einsetzungen vorkommen, diese immer weiter bis zu den Grundformeln zurückverlegen. Einsetzungen in die Grundformeln I—III ergeben aber wieder Grundreihen. Einsetzungen in die Grundformeln V sind entweder wieder selbst derartige Grundformeln oder, falls es sich um die Einsetzung von konstanten Termen für alle freien Variablen handelt, beweisbar.

Um zu zeigen, daß das System von § 2 widerspruchsfrei ist, daß also in ihm die Formel $\bar{\Gamma}$ nicht abgeleitet werden kann, genügt es zu zeigen, daß das gleiche für das vorliegende System zutrifft.

§ 4.

Ordnungszahl einer Herleitung.

Eine Herleitung für eine Formelreihe in dem System des § 3 denken wir uns immer so aufgeschrieben, daß jede Formelreihe nur einmal als Prämisse eines Schlusses benutzt wird, indem wir die benutzten Grundreihen entsprechend oft hinschreiben und eventuell Beweisketten wiederholen.

Wir führen zunächst verschiedene Hilfsbegriffe ein. Jeder Formel (nicht Formelreihe) der Herleitung ordnen wir zwei natürliche Zahlen zu, die wir ihren *Rang* und ihren *Grad* nennen.

Der Grad einer Formel ist durch ihre Gestalt allein bestimmt, nicht aber der Rang. Dieser hängt von der Stellung der Formel in der Herleitung ab. Es können auch Formeln der gleichen Formelreihe verschiedenen Rang haben, sogar wenn sie gleichgestaltet sind. Um den Rang bequemer zu definieren, wollen wir bei den Schemata S 1—S 3, N 1—N 18, U 1—U 7 zwischen *Haupt-* und *Nebenformeln* des betreffenden Schemas unterscheiden. Die Hauptformeln sind die, die mit deutschen Buchstaben bezeichnet sind, während die Reihe der Nebenformeln durch Ψ , Θ usw. angedeutet ist. Jeder Formel der Konklusion eines Schemas, mit Ausnahme der zu S 1 gehörigen Hauptformel sind Formeln der Prämissen zugeordnet, nämlich einer Hauptformel der Konklusion die Hauptformeln der Prämissen und einer Formel der Reihe Ψ oder Θ , usw. die gleiche Formel von Ψ , Θ usw. bei den Prämissen.

Der Rang der einzigen Formel einer Grundreihe I—IV ist nun 1, mit Ausnahme von I 4, I 6, II 3, III 5 a, die den Rang 3 haben. Der Rang einer Formel der Konklusion eines Schemas bestimmt sich für die Schemata S 1—S 3, N 1—N 5, N 7—N 9, N 11—N 14, N 17, N 18, U 1—U 3, U 6 dadurch, daß er der größte Rang ist, der unter den zugeordneten Formeln der Prämissen vorkommt. Das gleiche gilt für alle Nebenformeln der Konklusion eines der übrigen Schemata. Bei N 6, N 15, N 16 und U 4 ist der Rang der Hauptformel der Konklusion um eins höher, als er sich nach dieser Regel ergeben würde. Bei N 10 ist der Rang von $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ gleich der größten der beiden Zahlen $m + 1$ und n , wenn m der Rang von \mathfrak{A} und n der Rang von $\mathfrak{B} \rightarrow \bar{\Gamma}$ ist. Die Hauptformel der Konklusion von S 1 hat den Rang 1. Bei U 5 hat die Formel \mathfrak{A} den Rang δn , falls n der größte Rang ist, der bei den Formeln $\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}$ vorkommt. ($\delta n = n - 1$ für $n > 1$; $\delta 1 = 1$). Bei U 7 ist der Rang einer Formel \mathfrak{D}_i gleich $\text{Max}(m, \delta n)$, falls \mathfrak{C}_i die Gestalt $\mathfrak{A}_j \rightarrow \mathfrak{D}_i$ hat, m der maximale Rang unter den Formeln \mathfrak{A}_j in Ψ_j , $\langle \mathfrak{A}_j \rangle$ und n der maximale Rang unter den Formeln \mathfrak{C}_i ist. — Für die Grundformeln V war der Rang schon in § 2 angegeben. Falls übrigens die Herleitung im Rahmen des § 2 bleibt, ist der Rang einer Formel nach unserer jetzigen Definition der gleiche wie der damals angegebene.

Der Grad einer Formel wird rekursiv definiert. Formeln der Gestalt $\{\mathfrak{b}\}(a_1, \dots, a_n)$ oder $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ haben den Grad 1. Der Grad von $\bar{\mathfrak{A}}$ ist um eins höher als der von \mathfrak{A} , der von $(x)\mathfrak{A}(x)$ und $(Ex)\mathfrak{A}(x)$ um eins höher als der von $\mathfrak{A}(a)$. Die Formeln $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ haben den Grad $m + n$, wenn m der Grad von \mathfrak{A} und n der von \mathfrak{B} ist.

Wir wollen weiter jeder Formelreihe einer Herleitung eine Ordnungszahl zuordnen. Ich benutze dabei eine Symbolik für Ordnungszahlen, die ich an anderer Stelle entwickelt habe⁵). Mit Hilfe dieser Symbolik wurden die Ordnungszahlen, von der Ordnungszahl 1 aus-

⁵) W. ACKERMANN, Konstruktiver Aufbau eines Abschnitts der zweiten Cantorschen Zahlenklasse: *Math. Zeitschr.* 53 (1951), 403—413.

gehend, mit Hilfe des Zeichens $+$ und eines dreistelligen Klammerzeichens dargestellt. Für $1+1, 1+1+1, \dots$ gebrauchen wir die gewöhnlichen Zeichen $2, 3, \dots$ als Abkürzungen. Für $(1, 1, \alpha)$ gebrauchen wir auch, falls $\alpha < (1, 2, 1)$, die gewöhnliche Schreibweise ω^α als Abkürzung; für $\omega^2 + \omega^2, \omega^2 + \omega^2 + \omega^2, \dots$ usw. schreiben wir auch $\omega^2 \cdot 2, \omega^2 \cdot 3, \dots$ usw. Kleine griechische Buchstaben brauchen wir im folgenden für Ordnungszahlen überhaupt; m, n, k, l , für Ordnungszahlen kleiner als ω . Von den Ergebnissen der genannten Arbeit werden vor allen Dingen die Kriterien zur Größenvergleichung der Ordnungszahlen im folgenden gebraucht, die ich daher hier noch einmal zusammenstelle. Es bezeichnen dabei $\pi, \varrho, \pi_1, \varrho_1, \sigma, \dots$ Ordnungszahlen der Form 1 oder (α, β, γ) .

I. $1 < \alpha$ ($\alpha \neq 1$).

II. $\pi_1 + \dots + \pi_m < \pi_1 + \dots + \pi_m + \pi_{m+1} + \dots + \pi_{m+k}$.

III. $\pi_1 + \dots + \pi_m + \varrho_1 + \dots + \varrho_k < \pi_1 + \dots + \pi_m + \sigma_1 + \dots + \sigma_l$, falls $\varrho_1 < \sigma_1$, ($m \geq 0$).

IV. $(\alpha, \beta, \gamma_1) < (\alpha, \beta, \gamma_2)$, falls $\gamma_1 < \gamma_2$.

V. $(\alpha, \beta_1, \gamma_1) < (\alpha, \beta_2, \gamma_2)$, falls $\beta_1 < \beta_2$ und $\gamma_1 < (\alpha, \beta_2, \gamma_2)$.

VI. $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) < (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, falls $\alpha_1 < \alpha_2$ und β_1, γ_1 beide $< (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$.

VII. $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) < (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, falls $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \leq \gamma_2$ oder $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \leq \beta_2$ oder $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \leq \alpha_2$.

Mit Hilfe dieser Kriterien kann man für zwei verschiedene Ordnungszahlen immer feststellen, welche die kleinere und welche die größere ist. Das wird im folgenden ohne weitere Erklärung benutzt.

Die Zuordnung von Ordnungszahlen zu den Formelreihen geschieht so: Jede Grundreihe, mit Ausnahme einer Grundreihe V, erhält die Ordnungszahl 1. Grundreihen V 1, V 2, V 3, ... haben die Ordnungszahlen $(\omega^3, 1, 1)$, $(\omega^3 + 1, 1, 1)$, $(\omega^3 + 2, 1, 1), \dots$. Hat die Prämisse bei einem der S- oder N-Schemata die Ordnungszahl α (bzw. die Prämissen die Ordnungszahlen α und β), so ist $\alpha + 1$ bzw. $(\alpha \dot{+} \beta) + 1$ die Ordnungszahl der Konklusion. Unter $\alpha \dot{+} \beta$ verstehen wir dabei die „natürliche Summe“ von α und β im Sinne HESSENBERGS; d. h. wenn $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$ und $\beta = \beta_1 + \dots + \beta_n$ wo die α_i und β_i entweder 1 sind oder die Form $(\delta, \varepsilon, \zeta)$ haben, so ist $\alpha \dot{+} \beta = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{m+n}$, wobei die Reihe $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{m+n}$ eine absteigende Ordnung der α_i und β_i darstellt. Ist bei den Schemata U 1—U 5 α die Ordnungszahl der Prämisse bzw. die natürliche Summe der Ordnungszahlen der Prämissen, so ist $(1, 1, \alpha)$ die der Konklusion. Bei U 6 sei r der größte Rang, der unter den Formeln \mathfrak{A} und $\bar{\mathfrak{A}}$ vorkommt, g der Grad von \mathfrak{A} , α die natürliche Summe der Ordnungszahlen der Prämissen. Die Ordnungszahl der Konklusion ist dann $(\omega^2 r + g, 1, \alpha)$. Bei U 7 möge r der maximale Rang sein, der unter den Formeln $\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_m$ der Konklusion vorkommt. Die Prämissen $\mathfrak{P}_1, \langle \mathfrak{A}_1 \rangle, \dots, \mathfrak{P}_n, \langle \mathfrak{A}_n \rangle$ und $\mathfrak{Q}, \langle \mathfrak{C}_1 \rangle, \dots, \langle \mathfrak{C}_m \rangle$ mögen die Ordnungszahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ und β haben. Die Ordnungszahl der Kon-

klusion ist dann $(\omega^3 r + \omega, \beta, \alpha_1 \dot{+} \alpha_2 \dot{+} \dots \dot{+} \alpha_n)$. Unter der Ordnungszahl einer Herleitung verstehen wir die Ordnungszahl der Endreihe der Herleitung.

I. Eine Herleitung, die die Grundreihen V nicht benutzt, hat eine Ordnungszahl, die kleiner als $(\omega^3, 1, 1)$ ist.

Die Grundreihen I—IV haben nämlich die Ordnungszahl 1, die kleiner als $(\omega^3, 1, 1)$ ist. Ferner gilt: Ist $\alpha < (\omega^3, 1, 1)$, so auch $\alpha + 1$ und $(1, 1, \alpha)$. Sind α und β beide kleiner als $(\omega^3, 1, 1)$, so auch $\alpha \dot{+} \beta$, $(\omega^2 r + g, 1, \alpha)$ und $(\omega^2 r + \omega, \beta, \alpha)$. Das ergibt sich mit Hilfe der angegebenen Kriterien über die Größenvergleichung der Ordnungszahlen. Ebenso können wir zeigen, daß die Ordnungszahl einer Herleitung, die nur Grundreihen I—IV und V 1 benutzt, kleiner als $(\omega^3 + 1, 1, 1)$ ist, usw. Dieser Satz besagt also nichts anderes, als daß wir die Ordnungszahlen der Grundreihen V, die ja die Form $\mathfrak{A}(\alpha)$ haben, so festgesetzt haben, daß wir für jede Formel $\mathfrak{A}(\alpha)$ mit konstantem α eine Herleitung mit kleinerer Ordnungszahl angeben können.

II. Ändert man bei einer Herleitung den Beweis für eine dort benutzte Formelreihe so ab, daß die Ordnungszahl dieser Formelreihe sich verkleinert und daß keine Formel dieser Formelreihe einen größeren Rang als vorher erhält, und läßt man im übrigen die Herleitung unverändert, so wird die Ordnungszahl der gesamten Herleitung verkleinert.

Zunächst geht nämlich aus der Definition des Rangs hervor, daß in dem unveränderten Teile der Herleitung keine Formel einen größeren Rang erhält. Ferner geht aus der Art der Zuordnung von Ordnungszahlen zu den Formelreihen hervor, daß die Ordnungszahl einer Konklusion kleiner wird, falls die Ordnungszahl wenigstens einer der Prämissen kleiner, die der etwa vorhandenen anderen nicht größer wird und der Rang keiner Formel größer ist als vorher.

III. Man habe eine Herleitung für eine Formelreihe, die eine einzige freie Variable enthält. Betrachten wir nun eine zweite Formelreihe, die aus der ersten dadurch entsteht, daß die freie Variable überall durch einen konstanten Term ersetzt wird. Für diese Formelreihe läßt sich dann eine Herleitung angeben, deren Ordnungszahl nicht größer ist als die der ersten. Ferner hat jede Formel der zweiten Endreihe einen nicht größeren Rang als die entsprechende Formel der ersten Endreihe.

Wir verlegen nämlich die Einsetzungen bis in die Grundreihen zurück, wobei der Beweiszusammenhang durch die Schemata erhalten bleibt. Der Tatsache, daß einige Formeln der Herleitung infolge der Einsetzung ihren Formelcharakter verlieren könnten, können wir leicht dadurch begegnen, daß wir mit einigen Schemata geeignete Umbenennungen der gebundenen Variablen verbinden. Einsetzungen in die Grundreihen I—III ergeben aber wieder Grundreihen vom gleichen Rang und der gleichen Ordnungszahl. Einsetzungen in die Grund-

formeln V lassen sich beweisen und zwar so, daß die Ordnungszahl der durch Einsetzung entstehenden Formel nicht größer ist (Satz I). Der Rang ist ebenfalls gemäß der Definition der Grundformeln V nicht größer.

§ 5.

Der Widerspruchsfreiheitsbeweis.

Wir betrachten im folgenden nur solche Herleitungen, bei denen die Endreihe keine freien Variablen enthält. Ferner dürfen wir annehmen, daß eine derartige Herleitung keine überflüssigen freien Variablen enthält. Eine freie Variable heißt überflüssig, wenn sie in einer der Prämissen, aber nicht in der Konklusion auftritt, abgesehen von den bei den Schemata $N 12$, $N 13$, $N 14$, $N 17$ wesentlichen freien Variablen. Diese überflüssigen freien Variablen können wir nämlich immer durch Einsetzung entfernen. Unter dem *Endstück* einer Herleitung verstehen wir folgendes: Es gehört dazu die Endformelreihe, ferner mit jeder Formelreihe auch deren Prämissen, soweit diese keine freien Variablen enthalten, sonst aber nichts. Eine „oberste“ Formelreihe eines Endstücks kann also nur nach $N 12$, $N 13$, $N 14$, $N 17$ zustande kommen, falls sie nicht Grundreihe ist, keinesfalls aber durch ein U -Schema.

Es liege nun eine Herleitung vor, bei der eine Formelreihe des Endstücks durch ein U -Schema zustande kommt. Wir zeigen, daß wir dann die Herleitung so verändern können, daß sie eine kleinere Ordnungszahl erhält. Dieser Nachweis wird den Hauptteil der nachfolgenden Ausführungen ausmachen. — Zunächst können wir im Endstück eine Formelreihe finden, die nach einem der Schemata $U 1—U 7$ zustande kommt, während ihre Prämissen entweder Grundformeln sind oder aber nach einem der Schemata $S 1—S 3$, $N 1—N 18$ sich ergeben. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

A) Es sei \mathcal{G} die Formelreihe, die als Konklusion des U -Schemas auftritt. Eine Prämisse von \mathcal{G} entstehe durch ein Schema $S 1—S 3$, oder durch ein Schema $N 1—N 18$, im letzten Falle aber so, daß keine Hauptformel des U -Schemas auch Hauptformel des N -Schemas ist.

Handelt es sich um ein Schema mit einer Prämisse \mathfrak{F} , so wird diese Formelreihe \mathfrak{F} jetzt als die eine Prämisse des U -Schemas genommen; denn die Hauptformeln des U -Schemas kommen hier ja in gleicher Weise vor. Auf die Konklusion des U -Schemas wird dann das betreffende N -Schema angewandt und man erhält direkt oder nach Anwendungen des Schemas $S 3$ wieder \mathcal{G} . Ebenso ist es, falls es sich um ein Schema $S 1—S 3$ statt des N -Schemas handelt. Unter Umständen erhält man dann auch aus \mathfrak{F} direkt \mathcal{G} nach $S 1$, oder \mathfrak{F} ist mit \mathcal{G} identisch. Der Rang der Formeln in der Formelreihe, deren Beweis geändert wurde, ist dabei nicht größer geworden. \mathfrak{F} habe nun

die Ordnungszahl α . Die Ordnungszahl von \mathcal{G} bei der ursprünglichen Herleitung ist

- a) $(1, 1, \alpha + 1)$,
- b) $(\omega^2 r + m, 1, \alpha + \beta + 1)$,
- c) $(\omega^2 r + \omega, \alpha + 1, \beta)$,
- d) $(\omega^2 r + \omega, \beta, \alpha + \gamma_1 + \dots + \gamma_k + 1)$.

Bei der veränderten Herleitung ist sie höchstens

- a) $(1, 1, \alpha) + n$,
- b) $(\omega^2 r + m, 1, \alpha + \beta) + n$,
- c) $(\omega^2 r + \omega, \alpha, \beta) + n$,
- d) $(\omega^2 r + \omega, \beta, \alpha + \gamma_1 + \dots + \gamma_k) + n$

oder überhaupt nur $\alpha + n$. Sie ist also in jedem Falle kleiner geworden.

Handelt es sich um ein N-Schema mit zwei Prämissen \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 , so geht man ähnlich vor, indem auch hier die Reihenfolge des U-Schemas und des N-Schemas vertauscht wird. Wir wenden das U-Schema zweimal an, indem einmal \mathfrak{F}_1 und zum anderen \mathfrak{F}_2 als die eine Prämisse des U-Schemas genommen wird, während die anderen bleiben. Auf die beiden Konklusionen der U-Schemata wendet man das N-Schema an und erhält dann \mathcal{G} , eventuell unter weiterer Anwendung von S 3. \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 mögen die Ordnungszahlen α und β haben. Die Ordnungszahl von \mathcal{G} bei der ursprünglichen Herleitung ist

- a) $(1, 1, \alpha + \beta + 1)$,
- b) $(\omega^2 r + m, 1, \alpha + \beta + \gamma + 1)$,
- c) $(\omega^2 r + \omega, \alpha + \beta + 1, \gamma)$,
- d) $(\omega^2 r + \omega, \gamma, \alpha + \beta + \delta_1 + \dots + \delta_k + 1)$.

Bei der neuen Herleitung ist sie

- a) $(1, 1, \alpha) + (1, 1, \beta) + n$,
- b) $(\omega^2 r + m, 1, \alpha + \gamma) + (\omega^2 r + m, 1, \beta + \gamma) + n$,
- c) $(\omega^2 r + \omega, \alpha, \gamma) + (\omega^2 r + \omega, \beta, \gamma) + n$,
- d) $(\omega^2 r + \omega, \gamma, \alpha + \delta_1 + \dots + \delta_k) + (\omega^2 r + \omega, \gamma, \beta + \delta_1 + \dots + \delta_k) + n$.

Sie ist also kleiner geworden.

B) Der Fall A sei ausgeschlossen. Jede Prämisse des U-Schemas ist also entweder Grundreihe, und zwar eine Grundreihe I—IV, da die Grundreihen V freie Variable enthalten, oder aber sie entsteht durch ein N-Schema so, daß eine Hauptformel der Konklusion des N-Schemas auch Hauptformel der Prämisse des U-Schemas ist. Dieser Fall erfordert eine ausführliche Behandlung.

B 1) Es handele sich um ein U-Schema mit *einer* Prämisse, also um U 1, U 3, U 4, U 5.

Die Hauptformeln der Prämissen des U-Schemas haben hier die Gestalt $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\bar{\Gamma}$, $(E x) \mathfrak{A}(x)$ oder $\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}$. Keine dieser Prämissen kann

Grundreihe sein. Eine der Hauptformeln der Prämisse muß also Hauptformel der Konklusion eines N-Schemas sein. Das ist bei U 3 nicht möglich, so daß dieser Fall ausscheidet. Im übrigen entsteht $\Psi, \langle \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \rangle$; $\Psi, \langle (E x) \mathfrak{A}(x) \rangle$ oder $\Psi, \langle \Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \rangle$ entweder aus $\Psi_1, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Psi_2$; $\Psi_1, \mathfrak{A}(a), \Psi_2$; oder $\Psi_1, \mathfrak{A}, \Psi_2$ bzw. aus $\Psi_1, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Psi_2, \langle \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \rangle$; $\Psi_1, \mathfrak{A}(a), \Psi_2, \langle (E x) \mathfrak{A}(x) \rangle$ oder $\Psi_1, \mathfrak{A}, \Psi_2, \langle \Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \rangle$ nach N 1, N 11 oder N 6. Im zweiten schwierigeren Falle wendet man auf die genannten Formeln jetzt das betreffende U-Schema an, das $\Psi_1, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Psi_2, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}$; $\Psi_1, \mathfrak{A}(a), \Psi_2, (E x)(\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}(x))$; $\Psi_1, \mathfrak{A}, \Psi_2, \mathfrak{A}$ liefert (Ψ_1, Ψ_2 ist mit Ψ identisch).

Die erste und letzte Formel ergeben durch Anwendung von S-Schemata die ursprüngliche Konklusion des U-Schemas; die mittlere nach Anwendung von N 6, N 11 und S-Schemata. Im ersten Falle ist es entsprechend einfacher, da die Anwendung des U-Schemas ganz wegfällt. Der Rang der Formeln der Reihe \mathfrak{R} , deren Beweis geändert wurde, ist nicht größer geworden. Hat nun die Formelreihe, aus der die Prämisse des ursprünglichen U-Schemas nach einem N-Schema entstand, die Ordnungszahl α , so ist die Ordnungszahl von \mathfrak{R} bei der ursprünglichen Herleitung $(1, 1, \alpha + 1)$, bei der neuen Herleitung höchstens $(1, 1, \alpha) + n$ ($n < \omega$), unter Umständen auch kleiner. Demnach hat sich die Ordnungszahl verringert.

B 2) Es handele sich um U 2.

Hier kann $\Theta, \langle (E x) \mathfrak{B}(x) \rangle$ nur nach N 11 aus einer Formel $\Theta_1, \mathfrak{B}(a), \Theta_2$ oder $\Theta_1, \mathfrak{B}(a), \Theta_2, \langle (E x) \mathfrak{B}(x) \rangle$ zustande kommen. Beim neuen Beweis erhält man aus $\Psi, \langle \mathfrak{A} \rangle$ nach S 1—S 3 $\Psi, \Theta_1, \mathfrak{A}, \Theta_2$; aus $\Theta_1, \mathfrak{B}(a), \Theta_2$ nach S 1 $\Psi, \Theta_1, \mathfrak{B}(a), \Theta_2$, aus den zuletzt erhaltenen Formeln nach N 2 $\Psi, \Theta_1, \mathfrak{A} \& \mathfrak{B}(a), \Theta_2$, weiter nach N 11 $\Psi, \Theta_1, (E x)(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}(x)), \Theta_2$ und dann $\Psi, \Theta, (E x)(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}(x))$ eventuell nach S 3. — Oder man erhält aus $\Psi, \langle \mathfrak{A} \rangle$ und $\Theta_1, \mathfrak{B}(a), \Theta_2, \langle (E x) \mathfrak{B}(x) \rangle$ zunächst nach U 2 $\Psi, \Theta_1, \mathfrak{B}(a), \Theta_2, (E x)(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}(x))$, ferner $\Psi, \Theta_1, \mathfrak{A}, \Theta_2, (E x)(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}(x))$ aus $\Psi, \langle \mathfrak{A} \rangle$ durch S 1—S 3, aus den letzten beiden Formeln $\Psi, \Theta_1, (E x)(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}(x)), \Theta_2, (E x)(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}(x))$ nach N 2 und N 11, dann $\Psi, \Theta, (E x)(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}(x))$ durch S 2 und S 3. Es habe $\Psi, \langle \mathfrak{A} \rangle$ die Ordnungszahl α , die Prämisse von $\Theta, \langle (E x) \mathfrak{B}(x) \rangle$ die Ordnungszahl β . Die Ordnungszahl von $\Psi, \Theta, (E x)(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}(x))$ bei der ursprünglichen Herleitung ist $(1, 1, \alpha + \beta + 1)$, bei der neuen ist sie $\alpha + \beta + n$ bzw. $(1, 1, \alpha + \beta) + \alpha + n$, also kleiner als vorher. Der Rang der einzelnen Formeln in der letzten Formelreihe ist dabei nicht größer geworden.

B 3) Es handele sich um U 6, also um das Schema $\frac{\Psi, \langle \mathfrak{A} \rangle \quad \Theta, \langle \overline{\mathfrak{A}} \rangle}{\Psi, \Theta}$.

\mathfrak{A} hat eine der Gestalten 1) $\overline{\mathfrak{B}}$, 2) $\mathfrak{B} \& \mathfrak{C}$, 3) $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}$, 4) $\langle \mathfrak{b} \rangle$ (a_1, \dots, a_n), 5) $(x) \mathfrak{B}(x)$, 6) $(E x) \mathfrak{B}(x)$, 7) $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$. Abgesehen von dem Falle 7) ist weder $\Psi, \langle \mathfrak{A} \rangle$ noch $\Theta, \langle \overline{\mathfrak{A}} \rangle$ Grundreihe. \mathfrak{A} müßte nämlich dann die Gestalt 4) haben und \mathfrak{b} wäre ein Zeichen für ein spezielles Prädikat. Da weder \mathfrak{A} noch $\overline{\mathfrak{A}}$ dann die Hauptformel der Konklusion eines N-Schemas sein könnten, müßten beide Grundreihen sein, was nicht möglich

ist. — In den anderen Fällen mögen \mathfrak{F}_1 (bzw. \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2) die Prämissen von \mathfrak{P} , $\langle \mathfrak{A} \rangle$, \mathfrak{G}_1 (bzw. \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{G}_2) die von \mathfrak{Q} , $\langle \mathfrak{A} \rangle$ sein. Ferner wollen wir im folgenden eine leicht verständliche Symbolik für Beweise gebrauchen. Unter $Nk(\mathfrak{F}_1; \mathfrak{F}_2)$ verstehen wir eine Formelreihe, die aus \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 nach Nk entsteht, unter $Ul(\mathfrak{G})$ eine solche, die aus der einzigen Prämisse \mathfrak{G} nach Ul entsteht, usw.

1) \mathfrak{A} habe die Gestalt $\overline{\mathfrak{B}}$.

\mathfrak{G}_1 ist hier $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{B}, \mathfrak{Q}_2$ bzw. $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{B}, \mathfrak{Q}_2, \langle \overline{\mathfrak{B}} \rangle$. $U6(\mathfrak{G}_1; \mathfrak{P}, \langle \overline{\mathfrak{B}} \rangle)$ oder $U6(U6(\mathfrak{P}, \langle \overline{\mathfrak{B}} \rangle); \mathfrak{G}_1); \mathfrak{P}, \langle \overline{\mathfrak{B}} \rangle$ gibt bei der neuen Herleitung, nachdem man eventuell noch einige Male $S2$ und $S3$ angewandt hat, $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$. $\mathfrak{P}, \langle \overline{\mathfrak{B}} \rangle$ habe die Ordnungszahl α , m sei der maximale Rang der Formeln $\overline{\mathfrak{B}}$ in dieser Reihe, g der Grad von \mathfrak{B} . \mathfrak{G}_1 habe die Ordnungszahl β und k sei der maximale Rang der Formeln \mathfrak{B} und $\overline{\mathfrak{B}}$ in dieser Reihe. Sei ferner $r = \text{Max}(m, k)$. $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ hat zuerst die Ordnungszahl $(\omega^2 r + g + 1, 1, \alpha + \beta + 1)$ und hinterher die kleinere $(\omega^2 r + g, 1, \alpha + \beta) + n$ bzw. $(\omega^2 r, + g, 1, (\omega^2 r, + g + 1, 1, \alpha + \beta) + \alpha) + n$ ($r_1, r_2 \leq r$).

2) \mathfrak{A} habe die Gestalt $\mathfrak{B} \& \mathfrak{C}$.

\mathfrak{F}_1 ist $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{B}, \mathfrak{P}_2$ bzw. $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{B}, \mathfrak{P}_2, \langle \mathfrak{B} \& \mathfrak{C} \rangle$; \mathfrak{F}_2 ist $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{C}, \mathfrak{P}_2$ bzw. $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{C}, \mathfrak{P}_2, \langle \mathfrak{B} \& \mathfrak{C} \rangle$; \mathfrak{G}_1 ist $\mathfrak{Q}_1, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mathfrak{C}}, \mathfrak{Q}_2$ bzw. $\mathfrak{Q}_1, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mathfrak{C}}, \mathfrak{Q}_2, \langle \overline{\mathfrak{B} \& \mathfrak{C}} \rangle$. — Es genüge, wenn wir hier und im folgenden die kompliziertere Gestalt der Prämissen betrachten, da die einfacheren Fälle immer entsprechend erledigt werden, es sind nur wie schon bei 2) einige U-Schemata entbehrlich.

$U6(U6(\mathfrak{F}_1; \mathfrak{Q}, \langle \overline{\mathfrak{B} \& \mathfrak{C}} \rangle); U6(U6(\mathfrak{F}_2; \mathfrak{Q}, \langle \overline{\mathfrak{B} \& \mathfrak{C}} \rangle); U6(\mathfrak{P}, \langle \mathfrak{B} \& \mathfrak{C} \rangle); \mathfrak{G}_1))$ gibt bei der veränderten Herleitung $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$, nachdem eventuell noch S-Schemata angewandt worden sind. Es bedeuten $\alpha; \beta; \gamma; r; g_1; g_2$ die Ordnungszahlen von $\mathfrak{F}_1; \mathfrak{F}_2; \mathfrak{G}_1$; den maximalen Rang der Formeln $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mathfrak{C}}, \mathfrak{B} \& \mathfrak{C}, \overline{\mathfrak{B} \& \mathfrak{C}}$ in $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ und \mathfrak{G}_1 ; den Grad von \mathfrak{B} ; den Grad von \mathfrak{C} . Die ursprüngliche Ordnungszahl von $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ ist $(\omega^2 r + g_1 + g_2, 1, \alpha + \beta + \gamma + 2)$; bei der neuen Herleitung hat sie die kleinere Ordnungszahl $(\omega^2 r, + g_1, 1, \delta_1 + \delta_2) + n$, wo

$$\delta_1 = (\omega^2 r_2 + g_1 + g_2, 1, \alpha + \gamma + 1),$$

$$\delta_2 = (\omega^2 r_3 + g_2, 1, \delta_3 + \delta_4),$$

$$\delta_3 = (\omega^2 r_4 + g_1 + g_2, 1, \beta + \gamma + 1),$$

$$\delta_4 = (\omega^2 r_4 + g_1 + g_2, 1, \alpha + \beta + \gamma + 1)$$

und $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 \leq r$.

3) \mathfrak{A} habe die Gestalt $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}$.

\mathfrak{F}_1 ist hier $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{P}_2, \langle \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C} \rangle$; \mathfrak{G}_1 ist $\mathfrak{Q}_1, \overline{\mathfrak{B}}, \mathfrak{Q}_2, \langle \overline{\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}} \rangle$; \mathfrak{G}_2 ist $\mathfrak{Q}_1, \overline{\mathfrak{C}}, \mathfrak{Q}_2, \langle \overline{\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}} \rangle$. Die Vereinfachung der Herleitung geschieht ganz ähnlich wie im Falle 3).

4) \mathfrak{A} habe die Gestalt $\langle \mathfrak{b} \rangle (a_1, \dots, a_n)$.

Soll die letzte Formel Hauptformel der Konklusion eines N-Schemas sein, so ist die Gestalt von \mathfrak{A} genauer $\langle \hat{x}_1 \dots \hat{x}_n \mathfrak{B}(x_1, \dots, x_n) \rangle (a_1, \dots, a_n)$. \mathfrak{F}_1 ist $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{B}(a_1, \dots, a_n), \mathfrak{P}_2, \langle \mathfrak{A} \rangle$; \mathfrak{G}_1 ist $\mathfrak{Q}_1, \overline{\mathfrak{B}(a_1, \dots, a_n)}, \mathfrak{Q}_2, \langle \overline{\mathfrak{A}} \rangle$.

U6 (U6 ($\mathfrak{F}_1; \mathcal{O}, \overline{\mathfrak{A}}$); U6 ($\mathfrak{P}, \langle \mathfrak{A} \rangle; \mathfrak{G}_1$)) gibt die neue Herleitung von $\mathfrak{P}, \mathcal{O}$. α und β seien die Ordnungszahlen von \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{G}_1 , r der maximale Rang der Formeln \mathfrak{A} und $\overline{\mathfrak{A}}$ in $\mathfrak{P}, \langle \mathfrak{A} \rangle$ und $\mathcal{O}, \langle \overline{\mathfrak{A}} \rangle$, g der Grad von $\mathfrak{B}(a, \dots, a_n)$. $\mathfrak{P}, \mathcal{O}$ hat zuerst die Ordnungszahl $(\omega^2 r + 1, 1, \alpha + \beta + 2)$ und hinterher höchstens die Ordnungszahl

$$(\omega^2 r_1 + g, 1, (\omega^2 r_2 + 1, 1, \alpha + \beta + 1) + (\omega^2 r_3 + 1, 1, \alpha + \beta + 1)) + n$$

$(r_1 < r; \quad r_2, r_3 \leq r).$

5) \mathfrak{A} habe die Gestalt $(x)\mathfrak{B}(x)$.

\mathfrak{F}_1 ist $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{B}(a), \mathfrak{P}_2, \langle (x)\mathfrak{B}(x) \rangle$; \mathfrak{G}_1 ist $\mathcal{O}_1, \overline{\mathfrak{B}(a)}, \mathcal{O}_2, \langle \overline{(x)\mathfrak{B}(x)} \rangle$. Nach Satz III von § 4 erhält man eine Herleitung für $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{B}(a), \mathfrak{P}_2, \langle (x)\mathfrak{B}(x) \rangle$, deren Ordnungszahl nicht größer ist als die von \mathfrak{F}_1 und bei der keine Formel einen höheren Rang hat als die entsprechende vorher. Im übrigen verfahren wir wie bei 4).

6) \mathfrak{A} habe die Gestalt $(Ex)\mathfrak{B}(x)$.

\mathfrak{F}_1 ist $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{B}(a), \mathfrak{P}_2, \langle (Ex)\mathfrak{B}(x) \rangle$; \mathfrak{G}_1 ist $\mathcal{O}_1, \overline{\mathfrak{B}(a)}, \mathcal{O}_2, \langle \overline{(Ex)\mathfrak{B}(x)} \rangle$. Wir verfahren analog zu 5).

7) \mathfrak{A} habe die Gestalt $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$.

\mathfrak{G}_1 ist $\mathcal{O}, \mathfrak{B}, \mathcal{O}_2, \langle \overline{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}} \rangle$; \mathfrak{G}_2 ist $\mathcal{O}_1, \mathfrak{C} \rightarrow \overline{\Gamma}, \mathcal{O}_2, \langle \overline{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}} \rangle$. Der neue Beweis für $\mathfrak{P}, \mathcal{O}$ wird durch

$$U3(U7(U7(U6(\mathfrak{P}, \langle \mathfrak{A} \rangle; \mathfrak{G}_1); \mathfrak{P}, \langle \mathfrak{A} \rangle); U6(\mathfrak{P}, \langle \mathfrak{A} \rangle; \mathfrak{G}_1)))$$

und eventuelle Anwendungen von S-Schemata gegeben. Sei α die Ordnungszahl von $\mathfrak{P}, \langle \mathfrak{A} \rangle$; β und γ die von \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{G}_2 ; m der Rang von \mathfrak{B} in \mathfrak{G}_1 ; n der Rang von $\mathfrak{C} \rightarrow \overline{\Gamma}$ in \mathfrak{G}_2 ; k der maximale Rang der Formeln $\overline{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}}$ in \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{G}_2 ; l der maximale Rang der Formeln $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}$ in $\mathfrak{P}, \langle \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C} \rangle$. Die ursprüngliche Ordnungszahl von $\mathfrak{P}, \mathcal{O}$ ist $(\omega^2 r + 1, 1, \alpha + \beta + \gamma + 1)$, wo $r = \text{Max}(m + 1, n, k, l)$. Die neue ist höchstens $(1, 1, \delta_1) + p$ ($p < \omega$), wobei

$$\delta_1 = (\omega^2 r_1 + \omega, \delta_3, \delta_2) \quad (r_1 = \text{Max}(m, \delta l, \delta n),$$

$$\delta_2 = (\omega^2 r_2 + \omega, \alpha, \delta_4) \quad (r_2 = \text{Max}(m, \delta l),$$

$$\delta_3 = (\omega^2 r + 1, 1, \alpha + \gamma), \quad \delta_4 = (\omega^2 r + 1, 1, \alpha + \beta).$$

Sie ist also kleiner geworden.

B4) Es handele sich um das Schema U 7, also um das Schema

$$\frac{\mathfrak{P}_1, \langle \mathfrak{A}_1 \rangle \dots \mathfrak{P}_n, \langle \mathfrak{A}_n \rangle \quad \mathcal{O}, \langle \mathfrak{C}_1 \rangle, \dots, \langle \mathfrak{C}_m \rangle}{\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n, \mathcal{O}, \mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_m}.$$

Wir unterscheiden folgende Fälle:

1. $\mathcal{O}, \langle \mathfrak{C}_1 \rangle, \dots, \langle \mathfrak{C}_m \rangle$ sei Grundreihe, bestehe also aus einer einzigen Formel $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$; außerdem kann dann nur eine einzige andere Prämisse des U-Schemas von der Form $\mathfrak{P}, \langle \mathfrak{A} \rangle$ vorhanden sein. Die Konklusion ist $\mathfrak{P}, \mathfrak{B}$.

Bei der Veränderung der Herleitung müssen wir die einzelnen Grundreihen besonders behandeln. Die Nummer bei den folgenden Überlegungen zeigt jedesmal, um welche Grundreihe es sich handelt.

1) I 2 a, I 2 b, II 2, III 2 a.

In diesen Fällen erhalten wir \mathcal{P}, \mathcal{B} sofort aus $\mathcal{P}, \langle \mathcal{A} \rangle$ mit Hilfe von S-Schemata und N 1, N 11 oder N 7. Die Ordnungszahl von \mathcal{P}, \mathcal{B} ist zuerst $(\omega^2 r + \omega, 1, \alpha)$ und hinterher $\alpha + n$. Der Rang von \mathcal{B} ist nicht größer als vorher.

2) \mathcal{A} habe die Form $\mathcal{C} \& \mathcal{D}$. Das betrifft die Grundreihen I 1 a, I 1 b, I 3, I 4, I 5, I 6, II 6, III 1, III 4 a, III 5 a. $\mathcal{P}, \langle \mathcal{C} \& \mathcal{D} \rangle$ entsteht nach N 2 aus zwei Formelreihen $\mathcal{P}_1, \mathcal{C}, \mathcal{P}_2, \langle \mathcal{C} \& \mathcal{D} \rangle$ und $\mathcal{P}_1, \mathcal{D}, \mathcal{P}_2, \langle \mathcal{C} \& \mathcal{D} \rangle$, die die Ordnungszahlen α und β haben, Sei r der maximale Rang der Formeln \mathcal{A} in $\mathcal{P}, \langle \mathcal{A} \rangle$. Die Ordnungszahl von \mathcal{P}, \mathcal{B} ist bei der gegebenen Herleitung $(\omega^2 k + \omega, 1, \alpha + \beta + 1)$. Hierbei ist $k = r$, bzw. im Falle der Grundreihen I 4, III 5 a, I 6 $k = \text{Max}(r, 2)$. Der Rang von \mathcal{B} in \mathcal{P}, \mathcal{B} ist k . Wir wenden nun auf jede der beiden Prämissen von $\mathcal{P}, \langle \mathcal{A} \rangle$ und die gleiche Grundreihe wieder U 7 an und erhalten $\mathcal{P}_1, \mathcal{C}, \mathcal{P}_2, \mathcal{B}$ und $\mathcal{P}_1, \mathcal{D}, \mathcal{P}_2, \mathcal{B}$. Beide Formelreihen haben höchstens die Ordnungszahlen $(\omega^2 k + \omega, 1, \alpha)$ und $(\omega^2 k + \omega, 1, \beta)$, die wir zur Abkürzung mit δ_1 und δ_2 bezeichnen. Wir wollen diese Formelreihen \mathcal{F} und \mathcal{G} nennen. Der Rang der Formeln \mathcal{C} und \mathcal{D} in \mathcal{F} und \mathcal{G} ist höchstens r , der von \mathcal{B} in beiden Reihen höchstens k . Weiter gehen wir verschieden vor, je nachdem um welche Grundreihen es sich handelt.

I 1 a, I 1 b. \mathcal{P}, \mathcal{B} entsteht dann aus \mathcal{F} bzw. \mathcal{G} durch S-Schemata. Die Ordnungszahl dieser Reihe ist also $\delta_1 + n$ bzw. $\delta_2 + n$.

I 3. \mathcal{A} hat die Form $\mathcal{C} \& \mathcal{D} \vee \mathcal{E}$. Aus \mathcal{G} , d. h. $\mathcal{P}_1, \mathcal{D} \vee \mathcal{E}, \mathcal{P}_2, \mathcal{B}$ ergibt sich nach U 1 $\mathcal{P}_1, \mathcal{D}, \mathcal{C}, \mathcal{P}_2, \mathcal{B}$. Aus \mathcal{F} , d. h. $\mathcal{P}_1, \mathcal{C}, \mathcal{P}_2, \mathcal{B}$ ergibt sich durch S-Schemata $\mathcal{P}_1, \mathcal{D}, \mathcal{C}, \mathcal{P}_2, \mathcal{B}$, weiter nach N 2 $\mathcal{P}_1, \mathcal{D}, \mathcal{C} \& \mathcal{E}, \mathcal{P}_2, \mathcal{B}$, nach N 1 $\mathcal{P}_1, \mathcal{D} \vee (\mathcal{C} \& \mathcal{E}), \mathcal{P}_2, \mathcal{B}$, daraus nach S 2 und S 3 \mathcal{P}, \mathcal{B} . Die Ordnungszahl der letzten Formel ist $(1, 1, \delta_2) + \delta_1 + n$. Der Rang von \mathcal{B} in \mathcal{P}, \mathcal{B} ist nicht größer als vorher.

I 4, I 5, I 6, II 6, III 4 a.

Aus \mathcal{F} und \mathcal{G} erhalten wir \mathcal{P}, \mathcal{B} durch N 4, N 5, N 3, U 2, N 9. Bei I 4 und I 6 müssen wir allerdings zunächst die Fälle ausschließen, daß \mathcal{A} die Form $(\Gamma \rightarrow \mathcal{C}) \& (\Gamma \rightarrow \mathcal{D})$ bzw. $(\Gamma \rightarrow \mathcal{C}) \& (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D})$ hat, da sonst die Schemata N 4 und N 3 nicht anwendbar sind. Die neue Ordnungszahl von \mathcal{P}, \mathcal{B} ist $\delta_1 + \delta_2 + n$ bzw. $(1, 1, \delta_1 + \delta_2) + n$. Der Rang von \mathcal{B} ist nicht größer als vorher.

I 4. \mathcal{A} habe die Form $(\Gamma \rightarrow \mathcal{C}) \& (\Gamma \rightarrow \mathcal{D})$.

N 6 (N 2 (U 5 (\mathcal{F}); U 5 (\mathcal{G}))) und Anwendung von S-Schemata gibt den neuen Beweis für \mathcal{P}, \mathcal{B} , ohne daß sich der Rang von \mathcal{B} vergrößert hat. Die neue Ordnungszahl ist $(1, 1, \delta_1) + (1, 1, \delta_2) + n$.

I 6. \mathcal{A} habe die Form $(\Gamma \rightarrow \mathcal{C}) \& (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D})$.

N 6 (U 7 (U 5 (\mathcal{F}); \mathcal{G}))) und Anwendung von S-Schemata gibt den neuen Beweis für \mathcal{P}, \mathcal{B} . Die neue Ordnungszahl ist höchstens $(\omega^2 \delta r + \omega, \delta_2,$

$(1, 1, \delta_1) + n$, also kleiner als vorher, da $\delta r < \text{Max}(r, 2)$. Der Rang von \mathfrak{B} ist nicht größer geworden.

III 5 a.

N 10 (U 5 (\mathfrak{F}); \mathfrak{G}) und Anwendung von S-Schemata geben den neuen Beweis für $\mathfrak{P}, \mathfrak{B}$. $(1, 1, \delta_1) + \delta_2 + n$ ist die neue Ordnungszahl.

III 1.

U 6 (\mathfrak{F} ; \mathfrak{G}) und Anwendung von S-Schemata. $\mathfrak{P}, \mathfrak{B}$ hat die Ordnungszahl $(\omega^2 r + g, 1, \delta_1 + \delta_2) + n$.

3) II 8 a.

N 15 (U 5 ($\mathfrak{P}, \langle \mathfrak{A} \rangle$)) gibt die neue Herleitung. Die Ordnungszahl von \mathfrak{B} ist zuerst $(\omega^2 r + \omega, 1, \alpha)$ und später $(1, 1, \alpha) + n$. Der Rang von \mathfrak{B} ist nicht größer geworden, da mindestens eine der Formeln \mathfrak{A} in $\mathfrak{P}, \langle \mathfrak{A} \rangle$, nämlich diejenige, die Hauptformel der Konklusion eines N-Schemas ist, einen Rang > 1 hat.

4) In den übrigen Fällen, d. h. dem Vorliegen der Grundreihen I 7, I 8, I 9, II 1, II 3, II 4, II 5, II 7, II 8 b, III 2 b, III 3 a, III 3 b, III 4 b, III 5 b, III 6 a, III 6 b, III 7 a, III 7 b, III 8 a, III 8 b entsteht $\mathfrak{P}, \langle \mathfrak{A} \rangle$ aus einer bzw. zwei Prämissen, die wir \mathfrak{F} bzw. \mathfrak{F} und \mathfrak{G} nennen wollen und denen wir die Ordnungszahlen α und β zuschreiben, nach N 6, N 6, N 6, N 12, N 12, N 12, N 12, N 6, N 15, N 7, N 1, N 8, N 9, N 10, N 11, N 18, N 12, N 17, N 15, N 16. Sei r der maximale Grad der Formeln \mathfrak{A} in $\mathfrak{P}, \langle \mathfrak{A} \rangle$. k sei gleich r bzw. gleich $\text{Max}(r, 2)$, falls es sich um II 3 handelt. Die Ordnungszahl von $\mathfrak{P}, \mathfrak{B}$ ist $(\omega^2 k + \omega, 1, \alpha + 1)$ bzw. $(\omega^2 k + \omega, 1, \alpha + \beta + 1)$. Der Rang von \mathfrak{B} in $\mathfrak{P}, \mathfrak{B}$ ist k . Bei der neuen Herleitung wenden wir zunächst U 7 auf jede der Formeln \mathfrak{F} und \mathfrak{G} und die gleiche Grundreihe an, entsprechend wie bei 2). Die entstandenen Reihen nennen wir \mathfrak{F}_1 bzw. \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{G}_1 . Ihre Ordnungszahlen sind höchstens $(\omega^2 k + \omega, 1, \alpha)$ bzw. $(\omega^2 k + \omega, 1, \alpha + \beta)$, die wir mit δ_1 und δ_2 bezeichnen. Aus \mathfrak{F}_1 bzw. \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{G}_1 erhalten wir nun $\mathfrak{P}, \mathfrak{B}$ in der folgenden Weise, wobei wir zum Schluß angewandte S-Schemata nicht besonders erwähnen. I 7: N 6 (\mathfrak{F}_1). I 8: N 1 (N 6 (N 6 (U 1 (\mathfrak{F}_1))))). I 9: durch S-Schemata allein. II 1: durch Einsetzung in die Herleitung für \mathfrak{F} , gemäß Satz III von § 4. II 3: N 13 (\mathfrak{F}_1). Der Fall, daß \mathfrak{A} die Form $(x)(\Gamma \rightarrow \mathfrak{C}(x))$ hat, muß unten besonders behandelt werden, da in diesem Falle N 13 nicht anwendbar ist. II 4: N 14 (\mathfrak{F}_1). II 5: N 1 (N 12 (U 1 (\mathfrak{F}_1))). II 7: U 4 (\mathfrak{F}_1). II 8 b: N 6. III 2 b: nur S-Schemata. III 3 a: N 8 (\mathfrak{F}_1). III 3 b: N 1 (\mathfrak{F}_1). III 4 b: N 2 ($\mathfrak{F}_1; \mathfrak{G}_1$). III 5 b: N 10 ($\mathfrak{F}_1; \mathfrak{G}_1$). III 6 a: N 18 (\mathfrak{F}_1). III 6 b: N 11 (\mathfrak{F}_1). III 7 a: N 17 (\mathfrak{F}_1). III 7 b: N 12 (\mathfrak{F}_1). III 8 a: N 16 (\mathfrak{F}_1). III 8 b: N 15 (\mathfrak{F}_1). — Die neue Ordnungszahl von $\mathfrak{P}, \mathfrak{B}$ ist höchstens $\delta_1 + n$ bzw. $\delta_1 + \delta_2 + n$, mit Ausnahme der Fälle I 8 und II 5. Hier ist sie $(1, 1, \delta_1) + n$, in jedem Falle aber kleiner als vorher. Ferner ist der Rang von \mathfrak{B} in $\mathfrak{P}, \mathfrak{B}$ nicht größer als vorher. In den Fällen nämlich, in denen bei der neuen Herleitung die den Rang einer Formel erhöhenden Schemata N 6, N 10 und U 4 gebraucht werden, war der Rang der betreffenden Formel in \mathfrak{F} , kleiner als r .

II 3. \mathfrak{A} hat die Form $(x)(\Gamma \rightarrow \mathfrak{C}(x))$.

N 6 (N 12 (U 5 (\mathfrak{F}_i))) und Anwendung von S-Schemata geben die neue Herleitung für $\mathfrak{P}, \mathfrak{B}$. Die Ordnungszahl der letzten Formel ist $(1, 1, \delta_i) + n$. Der Rang von \mathfrak{B} ist $\delta r + 1$, also $\leq k$, da in diesem Falle $k = \text{Max}(r, 2)$.

II. Bei dem Schema U 7 entstehe die Prämisse $\mathfrak{O}, \langle \mathfrak{C}_1 \rangle, \dots, \langle \mathfrak{C}_m \rangle$ durch ein N-Schema. In Frage kommen nur die Schemata N 3, N 4, N 5, N 6, N 13 und N 14. Wir wollen die Prämissen von $\mathfrak{O}, \langle \mathfrak{C}_1 \rangle, \dots, \langle \mathfrak{C}_m \rangle$ \mathfrak{F} und \mathfrak{G} bzw. \mathfrak{J} nennen. Sie mögen die Ordnungszahlen β und γ bzw. β haben. Die Reihen $\mathfrak{P}_1, \langle \mathfrak{A}_1 \rangle \dots \mathfrak{P}_n, \langle \mathfrak{A}_n \rangle$ haben die Ordnungszahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Die Ordnungszahl von \mathfrak{H} , d. h. $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n, \mathfrak{O}, \mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_m$ ist

$(\omega^2 r + \omega, \beta + \gamma + 1, \alpha_1 + \dots + \alpha_n)$ bzw. $(\omega^2 r + \omega, \beta + 1, \alpha_1 + \dots + \alpha_n)$, wenn r der maximale Rang der Formeln $\mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_m$ ist.

N 3. \mathfrak{F} ist $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{A}_j \rightarrow \mathfrak{C}, \mathfrak{O}_2, \langle \mathfrak{C}_1 \rangle, \dots, \langle \mathfrak{C}_m \rangle$ und \mathfrak{G} ist $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}_k, \mathfrak{O}_2, \langle \mathfrak{C}_1 \rangle, \dots, \langle \mathfrak{C}_m \rangle$. Aus \mathfrak{F} und den Reihen $\mathfrak{P}_1, \langle \mathfrak{A}_1 \rangle \dots \mathfrak{P}_n, \langle \mathfrak{A}_n \rangle$ erhalten wir nach U 7 $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n, \mathfrak{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_m$ und aus dieser Formelreihe, $\mathfrak{P}_1, \langle \mathfrak{A}_1 \rangle \dots \mathfrak{P}_n, \langle \mathfrak{A}_n \rangle$ und \mathfrak{G} nach U 7 eine Formelreihe, aus der sich \mathfrak{H} durch S-Schemata ergibt. Die neue Ordnungszahl von \mathfrak{H} ist höchstens

$$(\omega^2 r + \omega, \gamma, \alpha_1 + \dots + \alpha_n + (\omega^2 r + \omega, \beta, \alpha_1 + \dots + \alpha_n)) + n,$$

also kleiner als vorher.

N 4. \mathfrak{F} ist $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{A}_j \rightarrow \mathfrak{C}, \mathfrak{O}_2, \langle \mathfrak{C}_1 \rangle, \dots, \langle \mathfrak{C}_m \rangle$ und \mathfrak{G} ist $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{A}_j \rightarrow \mathfrak{K}, \mathfrak{O}_2, \langle \mathfrak{C}_1 \rangle, \dots, \langle \mathfrak{C}_m \rangle$. $\mathfrak{C} \& \mathfrak{K}$ ist mit einem der \mathfrak{D}_i identisch. Aus $\mathfrak{P}_1, \langle \mathfrak{A}_1 \rangle \dots \mathfrak{P}_n, \langle \mathfrak{A}_n \rangle$ und je einer der beiden Formelreihen \mathfrak{F} und \mathfrak{G} erhalten wir nach U 7 $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_n, \mathfrak{O}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_m$ und $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n, \mathfrak{O}, \mathfrak{K}, \mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_m$, aus den letzten beiden Formeln durch N 2 und S-Schemata wieder \mathfrak{H} . Die Ordnungszahl von \mathfrak{H} ist jetzt höchstens

$$(\omega^2 r + \omega, \beta, \alpha_1 + \dots + \alpha_n) + (\omega^2 r + \omega, \gamma, \alpha_1 + \dots + \alpha_n) + n.$$

N 5. \mathfrak{F} ist $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}_i, \mathfrak{O}_2, \langle \mathfrak{C}_1 \rangle, \dots, \langle \mathfrak{C}_m \rangle$ und \mathfrak{G} ist $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{D}_i, \mathfrak{O}_2, \langle \mathfrak{C}_1 \rangle, \dots, \langle \mathfrak{C}_m \rangle$, wobei $\mathfrak{C} \vee \mathfrak{K}$ mit einem \mathfrak{A}_j identisch ist. Wir erhalten zunächst aus $\mathfrak{P}_j, \langle \mathfrak{A}_j \rangle$ nach U 1 $\mathfrak{P}_j, \mathfrak{C}, \mathfrak{K}$, weiter aus $\mathfrak{P}_1, \langle \mathfrak{A}_1 \rangle \dots \mathfrak{P}_n, \langle \mathfrak{A}_n \rangle$ und $\mathfrak{P}_j, \mathfrak{C}, \mathfrak{K}$ und \mathfrak{F} nach U 7 $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n, \mathfrak{K}, \mathfrak{O}, \mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_m$, aus der letzten Formel, $\mathfrak{P}_1, \langle \mathfrak{A}_1 \rangle \dots \mathfrak{P}_n, \langle \mathfrak{A}_n \rangle$ und \mathfrak{G} nach U 7 und weiteren Gebrauch von S-Schemata \mathfrak{H} . Die Ordnungszahl von \mathfrak{H} ist jetzt höchstens

$$(\omega^2 r + \omega, \gamma, \alpha_1 + \dots + \alpha_n + (\omega^2 r + \omega, \beta, \alpha_1 + \dots + \alpha_n + (1, 1, \alpha_j))) + n.$$

N 6. \mathfrak{F} ist $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{D}_i, \mathfrak{O}_2, \langle \mathfrak{C}_1 \rangle, \dots, \langle \mathfrak{C}_m \rangle$. Aus $\mathfrak{P}_1, \langle \mathfrak{A}_1 \rangle, \dots, \mathfrak{P}_n, \langle \mathfrak{A}_n \rangle$ und \mathfrak{F} ergibt sich nach U 7 und S-Schemata \mathfrak{H} . Die Ordnungszahl der letzten Reihe ist $(\omega^2 r + \omega, \beta, \alpha_1 + \dots + \alpha_n) + n$.

N 13. \mathfrak{F} hat die Form $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{A}_j \rightarrow \mathfrak{K}(a), \mathfrak{O}_2, \langle \mathfrak{C}_1 \rangle, \dots, \langle \mathfrak{C}_m \rangle$. Aus

$$\mathfrak{P}_1, \langle \mathfrak{A}_1 \rangle, \dots, \mathfrak{P}_n, \langle \mathfrak{A}_n \rangle$$

und \mathfrak{F} ergibt sich nach U 7 $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_n, \mathfrak{O}, \mathfrak{K}(a), \mathfrak{D}_1, \dots, \mathfrak{D}_m$, weiter nach N 12 und S-Schemata \mathfrak{H} . Die Ordnungszahl ist

$$(\omega^2 r + \omega, \beta, \alpha_1 + \dots + \alpha_n) + n.$$

N 14. \mathfrak{F} ist $\mathcal{C}_1, \mathcal{G}(a) \rightarrow \mathcal{D}_i, \mathcal{C}_2, \langle \mathcal{C}_1 \rangle, \dots, \langle \mathcal{C}_m \rangle$. Hierbei ist $(Ex)\mathcal{G}(x)$ gleich einem \mathcal{A}_j . $\mathcal{P}_j, \langle \mathcal{A}_j \rangle$ entsteht aus $\mathcal{P}_{j_1}, \mathcal{G}(a), \mathcal{P}_{j_2}, \langle \mathcal{A}_j \rangle$ nach N 11. Aus der letzten Formel, $\mathcal{P}_1, \langle \mathcal{A}_1 \rangle \dots \mathcal{P}_n, \langle \mathcal{A}_n \rangle$ (ohne $\mathcal{P}_j, \langle \mathcal{A}_j \rangle$) und $\mathcal{C}_1, \langle \mathcal{C}_1 \rangle, \dots, \langle \mathcal{C}_m \rangle$ erhalten wir nach U 7 $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_{j_1}, \mathcal{G}(a), \mathcal{P}_{j_2}, \mathcal{C}_1, \mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_m$. Nach Satz III von § 4 gibt es eine Herleitung für \mathfrak{F}_1 , d. h. $\mathcal{C}_1, \mathcal{G}(a) \rightarrow \mathcal{D}_i, \mathcal{C}_2, \langle \mathcal{C}_1 \rangle, \dots, \langle \mathcal{C}_m \rangle$, so daß diese Formelreihe keine größere Ordnungszahl als \mathfrak{F} und keine Formel in ihr einen größeren Rang als die entsprechende in \mathfrak{F} hat. Aus $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_{j_1}, \mathcal{G}(a), \mathcal{P}_{j_2}, \mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_m$ und $\mathcal{P}_1, \langle \mathcal{A}_1 \rangle \dots \mathcal{P}_n, \langle \mathcal{A}_n \rangle$ und \mathfrak{F}_1 erhalten wir nach U 7 eine Reihe, aus der sich \mathfrak{H} durch S-Schemata ergibt. Die Ordnungszahl von \mathfrak{H} ist jetzt

$$(\omega^2 r + \omega, \beta, \alpha_1 + \dots + \alpha_n + (\omega^2 r + \omega, \beta + 1, \alpha_1 + \dots + \alpha_{j-1} + \alpha'_j + \alpha_{j+1} + \dots + \alpha_n)) + n,$$

wobei $\alpha'_j + 1 = \alpha_j$.

Damit haben wir nun allgemein gezeigt, daß man jede Herleitung, bei der die Endreihe keine freie Variable enthält und bei der eine Formelreihe des Endstücks durch ein U-Schema zustande kommt, in eine andere mit der gleichen Endreihe, aber kleinerer Ordnungszahl verwandeln kann. Durch Fortsetzung des Verfahrens gelangt man also zu einer Herleitung, bei der keine Formelreihe des Endstücks mehr durch ein U-Schema entsteht. Zum Beweise der Widerspruchsfreiheit bleibt zu zeigen, daß $\bar{\Gamma}$ nicht Endreihe einer derartigen Herleitung sein kann. Wir wollen allgemeiner zeigen, daß eine Reihe $\bar{\Gamma}, \dots, \bar{\Gamma}$ nicht Endreihe sein kann. Eine derartige Reihe ist nämlich keine Grundreihe. Ferner kann keine ihrer Formeln Hauptformel der Konklusion eines N-Schemas sein. Gehört also eine solche Reihe zum Endstück, so muß sie nach S 1, S 2 oder S 3 aus einer Formel der gleichen Art zustande kommen, d. h. es müßte eine „oberste“ Formel des Endstücks von dieser Gestalt geben. Da aber die obersten Formelreihen des Endstücks, soweit sie nicht Grundreihen sind, nach N 12, N 13, N 14 oder N 17 zustande kommen, kann überhaupt im Endstück keine Formelreihe $\bar{\Gamma}, \bar{\Gamma}, \dots, \bar{\Gamma}$ auftreten. Damit ist die Widerspruchsfreiheit des Systems von § 3 und damit auch die des Systems von § 2 gezeigt.

Die Herleitung der Mathematik aus dem in § 2 aufgestellten System wird in einer sich anschließenden Abhandlung erfolgen.

(Eingegangen am 29. Januar 1952.)

On Meijer Transform.

By

J. P. Jaiswal in Lucknow (India).

1. MEIJER (1941) introduced the transform

$$(1) \quad F(s) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2}, m}(st) (st)^{-k-\frac{1}{2}} f(t) dt$$

and its inverse

$$(2) \quad f(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(1-k+m)}{2\pi i \Gamma(1+2m)} \int_{\beta-\lambda i}^{\beta+\lambda i} e^{\frac{1}{2}st} M_{k-\frac{1}{2}, m}(ts) (ts)^{k-\frac{1}{2}} F(s) ds$$

where $M_{k,m}(z)$ and $W_{k,m}(z)$ are the two WHITTAKER functions.

We will denote (1) symbolically as

$$(3) \quad f(t) \xrightarrow[k+\frac{1}{2}}{m} \Phi(s)$$

where $\Phi(s) = sF(s)$.

For $k = \pm m$, (1) reduces to LAPLACE transform, due to the identity

$$e^{-\frac{1}{2}st} \equiv (st)^{-m-\frac{1}{2}} W_{m+\frac{1}{2}, m}(st)$$

i. e.,

$$\Phi(s) = s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

which is symbolically denoted as

$$\Phi(s) \doteq f(t).$$

As in the case of LAPLACE transform, we will call $\Phi(s)$ the *image* of $f(t)$, $f(t)$ the *original* of $\Phi(s)$ and the transform to be *MEIJER transform*.

In this paper, we have given in section I, some of the rules of MEIJER transform, which are similar to those of LAPLACE transform. Also we have derived the MEIJER transforms of some of the known functions, which have later been used in illustrating the theorems given subsequently in sections II, III, IV.

Since MEIJER transform is a generalization of LAPLACE transform it must possess some properties, the analogues of which do not exist in the case of the LAPLACE transform. The theorems established disclose this fact. The theorems given in section III help us in evaluating certain integrals. The properties of WHITTAKER function have been utilised in deriving the properties of the MEIJER transform.

I.

2. Some of the rules of MEIJER transform are enumerated below:

1) If

$$f(t) \xrightarrow{\frac{k+\frac{1}{2}}{m}} \Phi(s),$$

then

$$(i) \quad f(at) \xrightarrow{\frac{k+\frac{1}{2}}{m}} \Phi\left(\frac{s}{a}\right) \quad (R. 1.)$$

$$(ii) \quad \left(t \frac{d}{dt}\right)^n \{f(t)\} \xrightarrow{\frac{k+\frac{1}{2}}{m}} \left(-s \frac{d}{ds}\right)^n \{\Phi(s)\} \quad (R. 2.)$$

$$(iii) \quad \int_0^t f(t) \frac{dt}{t} \xrightarrow{\frac{k+\frac{1}{2}}{m}} \int_s^\infty \Phi(s) \frac{ds}{s} \quad (R. 3.)$$

$$(iv) \quad \int_0^\infty f(t) \frac{dt}{t} \xrightarrow{\frac{k+\frac{1}{2}}{m}} \int_0^\infty \Phi(s) \frac{ds}{s} \quad (R. 4.)$$

$$(v) \quad \int_t^\infty f(t) \frac{dt}{t} \xrightarrow{\frac{k+\frac{1}{2}}{m}} \int_0^s \Phi(s) \frac{ds}{s} \quad (R. 5.)$$

2) If

$$f(t) \xrightarrow{\frac{k+\frac{1}{2}}{m}} \Phi(s),$$

then¹⁾

$$\int_0^\infty \Phi(s) \frac{ds}{s} = \frac{\Gamma_*(1-k \pm m)}{\Gamma(1-2k)} \int_0^\infty f(t) \frac{dt}{t} \quad (R. 6.)$$

provided $\Re(1-k \pm m) > 0$.

3) If

$$f_1(t) \xrightarrow{\frac{k+\frac{1}{2}}{m}} \Phi_1(s),$$

and

$$f_2(t) \xrightarrow{\frac{k+\frac{1}{2}}{m}} \Phi_2(s),$$

$$\text{then} \quad \int_0^\infty \Phi_1(u) f_2(u) \frac{du}{u} = \int_0^\infty f_1(v) \Phi_2(v) \frac{dv}{v} \quad (R. 7.)$$

provided the integrals are absolutely convergent and the change in the order of integration is justified.

4) If

$$f_r(t) \xrightarrow{\frac{k+\frac{1}{2}}{m}} \Phi_r(s),$$

then

$$\sum_{r=1}^n f_r(t) \xrightarrow{\frac{k+\frac{1}{2}}{m}} \sum_{r=1}^n \Phi_r(s) \quad (R. 8.)$$

¹⁾ The symbol

$\Gamma_*(\alpha \pm \beta)$ denotes $\Gamma(\alpha + \beta) \cdot \Gamma(\alpha - \beta)$.

provided $\Re(\mu - k + 1 \pm m) > 0$ where $f_r(t) = O(t^\mu)$ for small t . (R. 8.) also holds for $n \rightarrow \infty$, provided

(i) $\sum_{r=1}^{\infty} f_r(t)$ is uniformly and absolutely convergent for $t \geq 0$.

(ii) the integral is uniformly and absolutely convergent for

$$\Re(\mu - k + 1 \pm m) > 0,$$

where

$$f_r(t) = O(t^\mu) \text{ for small } t,$$

and

$$e^{-\frac{1}{2}s_0 t} (s_0 t)^{-k - \frac{1}{2}} W_{k + \frac{1}{2}, m}(s_0 t) f(t)$$

is bounded for $\Re(s) > s_0 > 0$; and

(iii) $\sum_{r=1}^{\infty} \Phi_r(s)$ is uniformly convergent.

The proofs of these rules can be developed on the same lines as given by BOSE [1] in the case of WHITTAKER transform.

3. We now obtain the MEIJER transform of some of the known functions as follows:

a) If

$$f(t) = t^n,$$

then

$$\Phi(s) = s \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k + \frac{1}{2}, m}(st) (st)^{-k - \frac{1}{2}} t^n dt.$$

Now using the integral²⁾ [3, p. 114]

$$(A) \int_0^{\infty} x^{l-1} e^{-(\alpha^2 + \frac{1}{2})x} W_{k, m}(x) dx = \frac{\Gamma_*(l + \frac{1}{2} \pm m)}{\Gamma(l + 1 - k)} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} l + \frac{1}{2} \pm m \\ l - k + 1 \end{matrix} ; -\alpha^2 \right]$$

$$l + \frac{1}{2} \pm m > 0, \quad \Re(\alpha^2 + 1) > 0, \text{ and } |\alpha| < 1.$$

And putting $\alpha^2 = 0$, we get

$$(4) \quad \Phi(s) = \frac{\Gamma_*(n - k + 1 \pm m)}{\Gamma(n - 2k + 1)} s^{-n} \quad \Re(n - k + 1 \pm m) > 0 \quad \Re(s) > 0.$$

If $k = m$ then (4) reduces to LAPLACE Transform [4, p. 14]

$$\Phi(s) = \Gamma(n + 1) s^{-n} \quad \Re(n + 1) > 0 \text{ and } \Re(s) > 0.$$

b) If

$$f(t) = t^v e^{-at},$$

then

$$\Phi(s) = s \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}st} W_{k + \frac{1}{2}, m}(st) (st)^{-k - \frac{1}{2}} t^v e^{-at} dt.$$

²⁾ The symbol

${}_2F_1 \left[\begin{matrix} \alpha \pm \beta \\ \gamma \end{matrix} ; x \right]$ denotes ${}_2F_1 \left[\begin{matrix} \alpha + \beta, \alpha - \beta \\ \gamma \end{matrix} ; x \right]$.

Evaluating the above integral by (A) with $\alpha^2 = a/s$, we get

$$(5) \quad \Phi(s) = \frac{1}{s^\nu} \frac{\Gamma_*(\nu - k \pm m + 1)}{\Gamma(\nu - 2k + 1)} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \nu - k + 1 \pm m; \\ \nu - 2k + 1 \end{matrix}; -\frac{a}{s} \right]$$

$\Re(\nu - k + 1 \pm m) > 0, \quad \Re(s + a) > 0, \text{ and } |s| > |a|.$

If we put $k = m$ in (5), then [4, p. 16]

$$\Phi(s) = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{(a + s)^{\nu+1}} s \quad \Re(\nu + 1) > 0 \text{ and } \Re(s + a) > 0.$$

c) If

$$f(t) = t^\lambda e^{-\frac{1}{2}t^2},$$

then

$$\Phi(s) = s \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}st} W_{k + \frac{1}{2}, m}(st) (st)^{-k - \frac{1}{2}} t^\lambda e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

writing the two infinite series for WHITTAKER function,

$$W_{k + \frac{1}{2}, m}(x) = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma(-m - k)} x^{m + \frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} {}_1F_1 \left[\begin{matrix} m - k \\ 2m + 1 \end{matrix}; x \right]$$

$$+ \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(m - k)} x^{-m + \frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} {}_1F_1 \left[\begin{matrix} -m - k \\ 1 - 2m \end{matrix}; x \right]$$

provided $2m$ is not an integer, and integrating term by term, which is justified since

- (i) each infinite series is uniformly convergent in an arbitrary interval,
- (ii) the two infinite integrals are absolutely and uniformly convergent when $\Re(\lambda - k + 1 \pm m) > 0$ and $\Re(s) > 0$, on account of the behaviour

$$W_{k + \frac{1}{2}, m}(x) = O(x^{\frac{1}{2} \pm m}) \text{ for small } x$$

$$= O(x^{k + \frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}) \text{ for large } x$$

and (iii) the resulting series is absolutely convergent; we get from WHITTAKER'S Integral [6] for WEBER'S parabolic cylinder function

$$(B) \quad D_{-n}(z) = \frac{e^{-\frac{1}{4}z^2}}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-t^2 - \frac{1}{2}tz} t^{n-1} dt; \quad \Re(n) > 0$$

$$\Phi(s) = \frac{\Gamma(-2m) \Gamma(2m + 1)}{\Gamma_*(-k \pm m)} e^{\frac{1}{4}s^2} s^{m-k+1} \times$$

$$\times \sum_{r=0}^\infty \frac{s^r}{r!} \frac{\Gamma(m - k + r) \Gamma(\lambda - k + m + r + 1)}{\Gamma(2m + r + 1)} D_{-(\lambda - k + m + r + 1)}(s).$$

(6) + (a series obtained by replacing m by $-m$ in the above),

provided $2m$ is not an integer and $\Re(\lambda - k + 1 \pm m) > 0$.

On putting $k = m$ in (6) we get [4, p. 12]

$$\Phi(s) = \Gamma(\lambda + 1) s e^{\frac{1}{4}s^2} D_{-(\lambda+1)}(s) \quad \Re(\lambda + 1) > 0.$$

d) If

$$f(t) = t^{n/2} J_n(2\sqrt{t}),$$

then

$$\Phi(s) = s \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2}, m}(st) (st)^{-k-\frac{1}{2}} t^{n/2} J_n(2\sqrt{t}) dt.$$

Expanding $J_n(2\sqrt{t})$ in an infinite series and changing the order of integration and summation which is permissible and integrating by the help of (A) with $\alpha^2 = 0$, we get

$$(7) \quad \Phi(s) = \frac{\Gamma_*(n-k+1 \pm m)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-2k+1)} s^{-n} {}_2F_2 \left[\begin{matrix} n-k+1 \pm m \\ n+1, n-2k+1 \end{matrix}; -\frac{1}{s} \right]$$

$\Re(n-k+1 \pm m) > 0$ and $\Re(s) > 0$,

when $k = m$ (7) reduces to [4, p. 28]

$$\Phi(s) = \frac{1}{s^n} e^{-\frac{1}{s}}; \quad \Re(n+1) > 0 \text{ and } \Re(s) > 0.$$

e) If

$$f(t) = t^\mu J_\nu(at),$$

then

$$\Phi(s) = s \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2}, m}(st) (st)^{-k-\frac{1}{2}} t^\mu J_\nu(at) dt.$$

Expanding J_ν and using (A) with $\alpha^2 = 0$, we get

$$(8) \quad \Phi(s) = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^\nu \Gamma_*(\mu+\nu-k+1 \pm m)}{s^{\mu+\nu} \Gamma(\mu+\nu-2k+1)\Gamma(\nu+1)} \times$$

$${}_4F_3 \left[\begin{matrix} \frac{\mu+\nu-k+1 \pm m}{2}, \frac{\mu+\nu-k+2 \pm m}{2} \\ \nu+1, \frac{\mu+\nu-2k+1}{2}, \frac{\mu+\nu-2k+2}{2} \end{matrix}; -\frac{a^2}{s^2} \right]$$

$\Re(\mu+\nu+1-k \pm m) > 0, \quad \Re(s) > 0$ and $|s| > |a|$.

When $k = m$, (8) reduces to [4, p. 28]

$$\Phi(s) = \frac{\Gamma(\mu+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{a}{2}\right)^\nu \frac{1}{s^{\mu+\nu}} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \frac{\mu+\nu+1}{2}, \frac{\mu+\nu+2}{2} \\ \nu+1 \end{matrix}; -\frac{a^2}{s^2} \right]$$

$\Re(\mu+\nu+1) > 0, \quad \Re(s) > 0$ and $|s| > |a|$.

f) If

$$f(t) = e^{-bt} t^\mu J_\nu(at),$$

then

$$\Phi(s) = s \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}st} W_{k+\frac{1}{2}, m}(st) (st)^{-k-\frac{1}{2}} e^{-bt} t^\mu J_\nu(at) dt.$$

Expanding J_ν and integrating by (A) with $\alpha^2 = \frac{b}{s}$, we get³⁾

$$(9) \quad \Phi(s) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r \left(\frac{a}{2}\right)^{\nu+2r} s^{-(\mu+1+2r)} \Gamma_*(\mu+\nu-k+2r+1 \pm m)}{r! \Gamma(\nu+r+1) \Gamma(\mu+\nu-2k+2r+1)} \times \\ \times {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \mu+\nu+2r-k+1 \pm m \\ \mu+\nu+2r-2k+1 \end{matrix} ; -\frac{b}{s} \right] \\ \Re(\mu+\nu-k+1 \pm m) > 0, \quad \Re(s+b) > 0 \quad \text{and} \quad |s+b| > |a|.$$

When $k = m$, (9) reduces to

$$\Phi(s) = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{\nu} \Gamma(\nu+\mu+1)s}{\Gamma(\nu+1)(b+s)^{\mu+\nu+1}} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \frac{\mu+\nu+1}{2}, \quad \frac{\mu+\nu+2}{2} \\ \nu+1 \end{matrix} ; -\left(\frac{a}{b+s}\right)^2 \right] \\ \Re(\mu+\nu+1) > 0, \quad \Re(b+s) > 0 \quad \text{and} \quad |s+b| > |a|.$$

4. A few applications of the rules of the MEIJER transform are illustrated below:

a) If

$$f_r(t) = \frac{(-)^{r+l} t^{r+n}}{(l-r)! r! \Gamma(n+r+1)},$$

then from equation (4) we have

$$\Phi_r(s) = \frac{(-)^{r+l} \Gamma_*(n+r-k+1 \pm m)}{(l-r)! r! \Gamma(n+1+r) \Gamma(n+r-2k+1)} \frac{1}{s^{n+r}}.$$

Now applying (R. 8) we obtain the image of $t^n T_n^l(t)$ as

$$(10) \quad \Phi(s) = \frac{(-)^{l+1}}{s^{n+1}} \frac{\Gamma_*(n-k+2 \pm m)}{(l-1)! \Gamma(n+2) \Gamma(n-2k+2)} {}_4F_3 \left[\begin{matrix} 1, 1-l, n-k+2 \pm m \\ 2, n+2, n-2k+2 \end{matrix} ; \frac{1}{s} \right] \\ \Re(n+2) > 0 \quad \text{and} \quad \Re(s) > 0.$$

Again, if we multiply (10) by $(-)^l \Gamma(l+n+1)$, we get the image of $t^n L_n^l(t)$, where $T_n^l(t)$ and $L_n^l(t)$ are respectively *polynome de SONINE* and *polynome de LAGUERRE étendu*.

Putting $k = m$ in (10), we get

$$\frac{(1-s)^l}{l! s^{n+l}} \doteq t^n T_n^l(t) \quad \Re(n+2) > 0, \quad \Re(s) > 0.$$

b) If

$$f(t) = C(t),$$

where

$$C(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$$

³⁾ The convergence of the series follows from the inequality

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} a+2r, b+2r \\ c+2r \end{matrix} ; x \right] < \frac{(c)_{2r}}{(A)_{2r}} (1-x)^{-2r} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; x \right]$$

where

$$(c)_r = \frac{\Gamma(c+r)}{\Gamma(c)} \quad \text{and} \quad A = \min(a, b, c).$$

and is known as *intégrale de FRESNEL*, then using (8) with

$$\mu = 1, \quad \nu = -\frac{1}{2}, \quad \text{and } a = 1;$$

and applying (R. 3), we get

$$(11) \quad \Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2s}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r \Gamma_* \left(\frac{3}{2} - k + 2r \pm m \right) (2s)^{-2r}}{r! \Gamma \left(r + \frac{1}{2} \right) \Gamma \left(2r - 2k + \frac{3}{2} \right) \Gamma \left(2r + \frac{1}{2} \right)}$$

$\Re \left(\frac{3}{2} - k \pm m \right) > 0, \quad \Re(s) > 0 \text{ and } |s| > 1.$

On putting $k = m$, (11) reduces to [4, p. 26]

$$\frac{1}{2} (s^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \left[\sqrt{(s^2 + 1)} - s \right]^{-\frac{1}{2}} \doteq C(t) \quad \Re(s) > 0.$$

Also when $k = \frac{1}{2}$, (11) reduces to

$$\Phi(s) = \frac{\sqrt{2} \Gamma_*(1 \pm m)}{\pi \sqrt{s}} {}_4F_3 \left[\begin{matrix} \frac{1}{2} \pm \frac{m}{2}, 1 \pm \frac{m}{2} \\ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4} \end{matrix}; -\frac{1}{s^2} \right]$$

$\Re(1 \pm m) > 0, \quad \Re(s) > 0 \text{ and } |s| > 1.$

(c) If

$$f(t) = \sin t,$$

then from equation (8) with

$$\mu = \frac{1}{2}, \quad \nu = \frac{1}{2}, \quad \text{and } a = 1;$$

and on applying (R. 2) with $n = 1$, we get on simplifying

$$(12) \quad t \cos t \xrightarrow{\frac{k + \frac{1}{2}}{m}} \frac{\Gamma_*(2 - k \pm m)}{s \Gamma(2 - 2k)} {}_4F_3 \left[\begin{matrix} \frac{2 - k \pm m}{2}, \frac{3 - k \pm m}{2} \\ \frac{1}{2}, 1 - k, \frac{3}{2} - k \end{matrix}; -\frac{1}{s^2} \right]$$

$\Re(2 - k \pm m) > 0, \quad \Re(s) > 0 \text{ and } |s| > 1,$

when $k = m$, (12) reduces to [4, p. 20]

$$\frac{s(s^2 - 1)}{(1 + s^2)^2} \doteq t \cos t, \quad \Re(s) > 0.$$

II.

5. Theorem 1. If

$$t^r f(t) \xrightarrow{\frac{m + r + \frac{1}{2}}{m}} \Phi_{r+m+\frac{1}{2}}(s)$$

and

$$\psi_{r_1}(s) \doteq t^{r_1} f(t),$$

then

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-s)^r}{r! \Gamma(2m+r+1)} \Phi_{r+m+\frac{1}{2}}(s) = e \sum_{r_1=0}^{\infty} \frac{(-s)^{r_1}}{r_1! \Gamma(2m+r_1+1)} \Psi_{r_1}(s)$$

provided $\Re(\lambda + 1) > 0$, $\Re(\lambda + 1 - 2m) > 0$, where $f(t) = O(t^\lambda)$ for small t , $e^{-s_0 t} t^{-m} J_{2m}(2\sqrt{s_0 t}) f(t)$ tends to zero as $t \rightarrow \infty$ for $\Re(s) > s_0 > 0$, and $f(t)$ is continuous for $t > 0$.

Proof. We know [3, p. 120]

$$(C) \quad e t^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}t} J_{2m}(2t^{\frac{1}{2}}) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r}{r! \Gamma(2m+r+1)} W_{r+m+\frac{1}{2}, m}(t).$$

Also

$$(13) \quad \Phi_{r+m+\frac{1}{2}}(s) = s \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}st} (st)^{-r-m-\frac{1}{2}} W_{r+m+\frac{1}{2}, m}(st) t^r f(t) dt.$$

On multiplying both sides by $\frac{(-)^r s^r}{r! \Gamma(2m+r+1)}$ and taking the sum from zero to infinity, we have

$$(14) \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r s^r}{r! \Gamma(2m+r+1)} \Phi_{r+m+\frac{1}{2}}(s) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r s}{r! \Gamma(2m+r+1)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}st} (st)^{-m-\frac{1}{2}} W_{r+m+\frac{1}{2}, m}(st) f(t) dt$$

$$(15) \quad = e s \int_0^{\infty} e^{-st} (st)^{-m} J_{2m}(2\sqrt{st}) f(t) dt$$

from (C).

On expanding $J_{2m}(2\sqrt{st})$, changing the order of integration and summation and interpreting term by term, we obtain

$$(16) \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r s^r}{r! \Gamma(2m+r+1)} \Phi_{r+m+\frac{1}{2}}(s) = e \sum_{r_1=0}^{\infty} \frac{(-)^{r_1} s^{r_1}}{r_1! \Gamma(2m+r_1+1)} \Psi_{r_1}(s)$$

where

$$\Psi_{r_1}(s) \doteq t^{r_1} f(t).$$

In order to justify the change of order in (2), we see that

(i) The series in (C) is uniformly convergent in any interval $0 \leqq t \leqq c$, c being arbitrary;

(ii) $f(t)$ is continuous for all $t > 0$, and

(iii) $\int_0^{\infty} e^{-st} |(st)^{-m} J_{2m}(2\sqrt{st}) f(t)| dt$ is convergent, if $\Re(\lambda + 1) > 0$,

where $f(t) = O(t^\lambda)$ for small t , and

$$e^{-\frac{1}{2}s_0 t} (s_0 t)^{-m} J_{2m}(2\sqrt{s_0 t}) f(t)$$

tends to zero as t tends to infinity for $\Re(s_0) > 0$.

The second change in order in (16) is justified in the same way.

Example 1. If

$$f(t) = t^{\nu} e^{-at},$$

then (from 3. (b))

$$(17) \quad \Phi_{\nu+m+\frac{1}{2}}(s) = \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu-2m+1)}{\Gamma(\nu-r-2m+1)s^{\nu+r}} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \nu+1, \nu-2m+1 \\ \nu-r-2m+1 \end{matrix}; -\frac{a}{s} \right]$$

provided $\Re(\nu+1) > 0$, $\Re(\nu-2m+1) > 0$, $\Re(a+s) > 0$, and $|s| > |a|$.

Now, [4, p. 16],

$$\Psi_{r_1}(s) = \frac{s\Gamma(\nu+r_1+1)}{(a+s)^{\nu+r_1+1}}; \quad \Re(\nu+1) > 0 \text{ and } \Re(a+s) > 0.$$

Hence by Theorem 1, we have

$$(18) \quad \Gamma(2m+1)\Gamma(1+\nu-2m) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r}{r! \Gamma(2m+r+1) \Gamma(\nu-r-2m+1)}$$

$${}_2F_1 \left[\begin{matrix} \nu+1, \nu-2m+1 \\ \nu-r-2m+1 \end{matrix}; -\frac{a}{s} \right] = \frac{e}{s} \left(\frac{s}{s+a} \right)^{\nu+1} {}_1F_1 \left[\begin{matrix} \nu+1 \\ 2m+1 \end{matrix}; \frac{-s}{a+s} \right]$$

provided $\Re(\nu+1) > 0$, $\Re(\nu-2m+1) > 0$, $\Re(s+a) > 0$, and $|s| > |a|$.

III.

6. Theorem 2. If

$$f(t) \xrightarrow[m]{m+n+\frac{1}{2}} \Phi(s),$$

n being a positive integer, then

$$(19) \quad \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}st} t^{-n-m-\frac{1}{2}} M_{n+m+\frac{1}{2},m}(st) f(t) dt = \frac{(-)^n \Gamma(2m+1)}{\Gamma(2m+n+1)} s^{n+m-\frac{1}{2}} \Phi(s)$$

provided $\Re(u-n+1) > 0$ where $f(t) = O(t^u)$ for small t , and

$$t^{-n-m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{s_0 t}{2}} M_{n+m+\frac{1}{2},m}(s_0 t) f(t)$$

tends to zero as t tends to infinity for $\Re(s) > s_0 > 0$.

Proof. We have

$$(20) \quad \Phi(s) = s \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}st} (st)^{-n-m-\frac{1}{2}} W_{n+m+\frac{1}{2},m}(st) f(t) dt.$$

Also, ERDÉLYI [2] has given

$$n! t^{m+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}t} L_{(n)}^{(2m)}(t) = \frac{\Gamma(n+2m+1)}{\Gamma(2m+1)} M_{n+m+\frac{1}{2},m}(t),$$

which may be written as

$$(D) \quad W_{n+m+\frac{1}{2},m}(st) = \frac{(-)^n \Gamma(2m+n+1)}{\Gamma(2m+1)} M_{n+m+\frac{1}{2},m}(st).$$

Using (D) in (20) we obtain

$$(21) \quad \Phi(s) = \frac{(-)^n \Gamma(2m+n+1)}{\Gamma(2m+1)} s^{-(n+m-\frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}st} t^{-n-m-\frac{1}{2}} M_{m+n+\frac{1}{2}, m}(st) f(t) dt.$$

Example 1. If

$$f(t) = t^{\nu} J_{\nu}(2\sqrt{t}),$$

then (from 3. (d)) with $k = m + n$ we obtain

$$(22) \quad \Phi(s) = \frac{\Gamma(\nu-n+1)}{\Gamma(\nu+1)} \frac{\Gamma(\nu-2m+1-n)s^{-\nu}}{\Gamma(\nu-2m-2n+1)} {}_2F_2 \left[\begin{matrix} \nu-n+1, \nu-2m-n+1 \\ \nu+1, \nu-2n-2m+1 \end{matrix}; -\frac{1}{s} \right]$$

$$\Re(\nu-n+1) > 0, \quad \Re(\nu-n-2m+1) > 0, \quad \text{and} \quad \Re(s) > 0.$$

Hence by Theorem 2, we have

$$(23) \quad \int_0^\infty t^{\frac{\nu}{2}-n-m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{st}{2}} M_{n+m+\frac{1}{2}, m}(st) J_{\nu}(2\sqrt{t}) dt \\ = \frac{(-)^n \Gamma(2m+1) \Gamma(\nu-n+1) \Gamma(\nu-2m-n+1) s^{\nu-n-m-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu+1) \Gamma(\nu-2n-2m+1) \Gamma(n+2m+1)} \times \\ \times {}_2F_2 \left[\begin{matrix} \nu-n+1, \nu-n-2m+1 \\ \nu+1, \nu-2n-2m+1 \end{matrix}; -\frac{1}{s} \right]$$

provided $\Re(\nu-n+1) > 0$, $\Re(\nu-n-2m+1) > 0$, and $\Re(s) > 0$.

7. Theorem 3. If

$$t^r f(t) \xrightarrow[n]{k+r+\frac{1}{2}} \Phi_r(s),$$

then

$$(24) \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{s^{r-1}}{r!} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right)^r \Phi_r(s) \\ = \alpha^{k+\frac{1}{2}} \int_0^\infty (st)^{-k-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\alpha st}{2}} W_{k+\frac{1}{2}, m}(\alpha st) f(t) dt$$

provided $\alpha > \frac{1}{2}$, $\Re(\mu - k + 1 \pm m) > 0$ where $f(t) = O(t^\mu)$ for small t ,

$$t^{-k-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}s_0 t} W_{k+\frac{1}{2}, m}(s_0 t) f(t)$$

is bounded for $t \geq 0$, $\Re(s) > s_0 > 0$, $f(t)$ is continuous in $t > 0$, and the series on the left is uniformly convergent.

Proof. We have

$$(25) \quad \Phi_r(s) = s \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}st} (st)^{-r-k-\frac{1}{2}} W_{r+k+\frac{1}{2}, m}(st) t^r f(t) dt.$$

Multiplying both sides by $\frac{1}{r!} \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^r$ and taking the sum from zero to infinity and using the result [3, p. 112]

$$(E) \quad \alpha^{k+\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\alpha t} W_{k+\frac{1}{2}, m}(\alpha t) = e^{-\frac{1}{2}t} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^r W_{k+r+\frac{1}{2}, m}(t)$$

where α is positive, we have

$$(26) \quad \begin{aligned} & \sum_{r=0}^{\infty} \frac{s^{r-1}}{r!} \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^r \Phi_r(s) \\ &= \int_0^{\infty} (st)^{-k-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}st} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^r}{r!} W_{k+r+\frac{1}{2}, m}(st) f(t) dt. \end{aligned}$$

Using (E), (26) reduces to

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{s^{r-1}}{r!} \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^r \Phi_r(s) = \alpha^{k+\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} (st)^{-k-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\alpha st} W_{k+\frac{1}{2}, m}(\alpha st) f(t) dt.$$

Regarding the change of order of integration and summation the method of Theorem 1 may be followed.

Example 1. If

$$f(t) = t^{\nu} e^{-at},$$

then (from 3 (b))

$$(27) \quad \Phi_r(s) = \frac{\Gamma_*(\nu - k + 1 \pm m)}{\Gamma(\nu - 2k + 1 - r) s^{\nu+r}} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \nu - k + 1 \pm m \\ \nu - 2k - r + 1 \end{matrix}, -\frac{a}{s} \right].$$

Hence by Theorem 3, we get

$$(28) \quad \begin{aligned} & \int_0^{\infty} (st)^{\nu-k-\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{\alpha s}{2} + a\right)t} W_{k+\frac{1}{2}, m}(\alpha st) dt \\ &= \frac{\Gamma_*(\nu - k + 1 \pm m)}{s \alpha^{k+\frac{1}{2}}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^r}{r! \Gamma(\nu - 2k - r + 1)} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \nu - k + 1 \pm m \\ \nu - 2k - r + 1 \end{matrix}, -\frac{a}{s} \right] \end{aligned}$$

provided

$$\alpha > \frac{1}{2}, \Re(\nu - k + 1 \pm m) > 0, \Re(\alpha s + a) > 0, \Re(s + a) > 0, \text{ and } |s| > |a|.$$

IV.

8. Theorem 4. If

$$t^{\mu} f(t) \xrightarrow{m} \Phi_{k+\frac{1}{2}, m, \mu}(s),$$

then

$$(29) \quad (i) \quad \Phi_{k+\frac{1}{2}, m, \mu}(s) = \Phi_{k, m-\frac{1}{2}, \mu}(s) + \frac{m-k}{s} \Phi_{k-\frac{1}{2}, m, \mu-1}(s)$$

$$(30) \quad (ii) \quad \Phi_{k+\frac{1}{2}, m, \mu}(s) = \Phi_{k, m+\frac{1}{2}, \mu}(s) + \frac{(-m-k)}{s} \Phi_{k-\frac{1}{2}, m, \mu-1}(s)$$

provided the integrals and the series involved are convergent.

Proof. (i) We have

$$(31) \quad \Phi_{k+\frac{1}{2}, m, \mu}(s) = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}st} (st)^{-k-\frac{1}{2}} W_{k+\frac{1}{2}, m}(st) t^\mu f(t) dt.$$

Using the recurrence formula for WHITTAKER function,

$$(F) \quad W_{k+\frac{1}{2}, m}(z) = z^{\frac{1}{2}} W_{k, m-\frac{1}{2}}(z) + (m-k) W_{k-\frac{1}{2}, m}(z)$$

in (31), we obtain

$$(32) \quad \Phi_{k+\frac{1}{2}, m, \mu}(s) = \Phi_{k, m-\frac{1}{2}, \mu}(s) + \frac{m-k}{s} \Phi_{k-\frac{1}{2}, m, \mu-1}(s)$$

provided the integrals and the series involved are convergent.

(ii) If instead of (F) we use

$$(G) \quad W_{k+\frac{1}{2}, m, \mu}(z) = z^{\frac{1}{2}} W_{k, m+\frac{1}{2}}(z) + (-k-m) W_{k-\frac{1}{2}, m}(z)$$

then

$$(33) \quad \Phi_{k+\frac{1}{2}, m, \mu}(s) = \Phi_{k, m+\frac{1}{2}, \mu}(s) + \frac{(-k-m)}{s} \Phi_{k-\frac{1}{2}, m, \mu-1}(s).$$

Theorem 4 helps us to find the recurrence relations of the images of the functions of the form $t^\mu f(t)$, where μ is an arbitrary constant, provided the integrals and the series involved are convergent. The same relation holds for the images of all functions of the type. Also it helps in summing up certain series.

Example 1. If

$$f(t) = J_\nu(at),$$

then (3. (e) gives)

$$(34) \quad \Phi_{k+\frac{1}{2}, m, \mu}(s) = \frac{\alpha^\nu \Gamma_*(\mu + \nu - k \pm m)}{s^{\mu+\nu} 2^\nu \Gamma(\mu + \nu - 2k + 1) \Gamma(\nu + 1)} \times \\ \times {}_4F_3 \left[\begin{matrix} \frac{\mu + \nu - k + 1 \pm m}{2}, & \frac{\mu + \nu - k + 2 \pm m}{2} \\ \nu + 1, & \frac{\mu + \nu - k + 2 + 1}{2}, & \frac{\mu + \nu - 2k + 2}{2} \end{matrix} ; -\frac{\alpha^2}{s^2} \right]$$

$$\Re(\mu + \nu + 1 - k \pm m) > 0, \quad \Re(s) > 0, \text{ and } |s| > |\alpha|.$$

Applying Theorem 4 (i), we get

$$\begin{aligned}
 (35) \quad & (\mu + \nu - 2k + 1) {}_4F_3 \left[\begin{matrix} \frac{\mu + \nu - k + 1 \pm m}{2}, \frac{\mu + \nu - k + 2 \pm m}{2} \\ \nu + 1, \frac{\mu + \nu - 2k + 1}{2}, \frac{\mu + \nu - 2k + 2}{2} \end{matrix}; -\frac{a^2}{s^2} \right] \\
 & = (\mu + \nu - k - m + 1) {}_4F_3 \left[\begin{matrix} \frac{\mu + \nu - k + 1 + m}{2}, \frac{\mu + \nu - k + 2 \pm m}{2}, \frac{\mu + \nu - k + 3 - m}{2} \\ \nu + 1, \frac{\mu + \nu - 2k + 2}{2}, \frac{\mu + \nu - 2k + 3}{2} \end{matrix}; -\frac{a^2}{s^2} \right] \\
 & \quad + (m - k) {}_4F_3 \left[\begin{matrix} \frac{\mu + \nu - k + 1 \pm m}{2}, \frac{\mu + \nu - k + 2 \pm m}{2} \\ \frac{\mu + \nu - 2k + 2}{2}, \frac{\mu + \nu - 2k + 3}{2}, \nu + 1 \end{matrix}; -\frac{a^2}{s^2} \right].
 \end{aligned}$$

Putting

$$\begin{aligned}
 \mu + \nu - k + m + 1 &= 2\alpha, \quad \mu + \nu - k - m + 1 = 2\beta, \quad \mu + \nu - 2k + 1 = 2\gamma, \\
 \text{and } \nu + 1 &= \delta.
 \end{aligned}$$

Equation (35) reduces to

$$\begin{aligned}
 (36) \quad & (\gamma) {}_4F_3 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta, \alpha + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2} \\ \gamma, \gamma + \frac{1}{2}, \delta \end{matrix}; -\frac{a^2}{s^2} \right] = (\beta) {}_4F_3 \left[\begin{matrix} \alpha, \alpha + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2}, \beta + 1 \\ \gamma + \frac{1}{2}, \gamma + 1, \delta \end{matrix}; -\frac{a^2}{s^2} \right] \\
 & \quad + (\gamma - \beta) {}_4F_3 \left[\begin{matrix} \alpha, \beta, \alpha + \frac{1}{2}, \beta + \frac{1}{2} \\ \gamma + \frac{1}{2}, \gamma + 1, \delta \end{matrix}; -\frac{a^2}{s^2} \right].
 \end{aligned}$$

Example 2. If

$$f(t) = t^\lambda e^{-\frac{1}{2}t^2},$$

then (3. (c)) gives

$$\begin{aligned}
 (37) \quad & \Phi_{k+\frac{1}{2}, m, \mu}(s) = \frac{\Gamma(-2m)\Gamma(2m+1)}{\Gamma_*(-k \pm m)} e^{\frac{1}{4}s^2} s^{m-k+1} \times \\
 & \times \sum_{r=0}^{\infty} \frac{s^r}{r!} \frac{\Gamma(m-k+r)\Gamma(\lambda+\mu-k+r+m+1)}{\Gamma(2m+1+r)} D_{-(\lambda+\mu-k+r+m+1)}(s) \\
 & \quad + (\text{a series obtained by replacing } m \text{ by } -m)
 \end{aligned}$$

provided $2m$ is not an integer and $\Re(\lambda + \mu - k + 1 \pm m) > 0$.

Hence by Theorem 4 (ii), with $k = m$ and after simplification, we obtain

$$\begin{aligned}
 (38) \quad & s^{2m} \Gamma(\lambda + \mu + 1) D_{-(\lambda+\mu+1)}(s) \\
 & = \frac{\Gamma(1-2m)\Gamma(2m+2)}{\Gamma(-2m)} s^{2m+1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{s^r \Gamma(\lambda + \mu + r + 2)}{\Gamma(2m+2+r)} D_{-(\lambda+\mu+r+2)}(s) \\
 & \quad - \Gamma(2m+1) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{s^r \Gamma(\lambda + \mu + r + 1 - 2m)}{\Gamma(r+1-2m)} D_{-(\lambda+\mu-2m+r+1)}(s) \\
 & \quad + \Gamma(2m+1) s^{2m} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{s^r \Gamma(\lambda + \mu + r + 1)}{\Gamma(2m+r+1)} D_{-(\lambda+\mu+r+1)}(s) \\
 & \quad + \Gamma(2m+1) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{s^r \Gamma(\lambda + \mu + r - 2m + 1)}{r!} D_{-(\lambda+\mu+r-2m+1)}(s)
 \end{aligned}$$

provided

$$\Re(\lambda + \mu + 1) > 0, \quad \Re(\lambda + \mu - 2m + 1) > 0,$$

and $2m$ is not an integer.

Example 3. If

$$f(t) = e^{-bt} J_\nu(at),$$

then by Theorem 4 (i) with $k = -m$, we have

$$\begin{aligned} & \left(\frac{s}{s+b}\right)^{\mu+\nu+1} \frac{\Gamma(\mu+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \frac{\mu+\nu+1}{2}, \frac{\mu+\nu+2}{2} \\ \nu+1 \end{matrix} ; -\left(\frac{a}{b+s}\right)^2 \right] \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r}{r!} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2r} \Gamma(\mu+\nu+2r+2)}{\Gamma(\nu+r+1)(\mu+\nu+2m+2r+1)} \times \\ & \quad \times {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \mu+\nu+2m+2r+1, \mu+\nu+2r+2 \\ \mu+\nu+2m+2r+2 \end{matrix} ; -\frac{b}{s} \right] \\ & \quad + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r}{r!} \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{2r} \Gamma(\mu+\nu+2r+1)}{\Gamma(\nu+r+1)(\mu+\nu+2m+2r+1)} \times \\ & \quad \times {}_2F_1 \left[\begin{matrix} \mu+\nu+2m+2r+1, \mu+\nu+2r+1 \\ \mu+\nu+2m+2r+2 \end{matrix} ; -\frac{b}{s} \right] \end{aligned} \tag{39}$$

provided

$$\Re(\mu + \nu + 1) > 0, \quad \Re(\mu + \nu + 2m + 1) > 0, \quad \Re(b + s) > 0, \quad \text{and } |(b + s)| > |a|.$$

I am thankful to Dr. S. K. BOSE of the Lucknow University for his help.

References.

BOSE, S. K.

[1] Bull. Calcutta Math. Soc., 41 (1949), p. 9—27.

ERDELYI, A.

[2] Mathematische Annalen, 113 (1936), p. 359.

GOLDSTEIN, S.

[3] Proc. of the London Math. Soc., 34 (1932), p. 103—125.

Mc LACHLAN, N. W. and HUMBERT, P.

[4] Formulaire pour le calcul symbolique. (1941).

MEIJER, C. S.

[5] Nederl. Akad. Wetensch., Proc. 44 (1941), p. 727—737.

WHITTAKER, E. T.

[6] Proc. of the London Math. Soc. (1), 35 (1903), p. 417—427.

(Eingegangen am 11. Juni 1951.)

Zum Beweis eines Satzes über die Polynomdarstellung der Ordnungszahlen.

Von

Walter Neumer in Mainz.

Herr KALUZA jr. hat folgenden Satz bewiesen¹⁾:

Nennt man in der CANTORSchen Normaldarstellung

$$(1) \quad \alpha = \omega^{\alpha_0} a_0 + \omega^{\alpha_1} a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_n} a_n \quad (\alpha_0 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_n)$$

einer Ordnungszahl α die Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Exponenten erster Stufe von α , deren Exponenten erster Stufe die Exponenten zweiter Stufe von α usf., so gelangt man nach endlich vielen, etwa q , Schritten zu Exponenten q -ter Stufe, die sämtlich ε -Zahlen oder Null sind (wobei der Exponent einer natürlichen Zahl ≥ 0 als 0 und der Exponent einer ε -Zahl $\alpha = \omega^\alpha$ als α festgesetzt wird).

Dieser Satz wurde von Herrn KALUZA mittels Betrachtungen aus der Theorie der Graphen bewiesen. Er läßt sich aber auch direkt einsehen wie folgt.

Wenn $\alpha = \omega^\alpha$, so ist nichts zu beweisen. Sei also $\alpha < \omega^\alpha$. Dann liefert (1) die Reihe von Ungleichungen

$$(2) \quad \alpha > \alpha_0 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_n.$$

Kein Exponent einer Zahl (2) ist $> \alpha_0$. Fügen wir also in die Reihe (2) noch die Exponenten zweiter Stufe der Größe nach ein, so weit sie nicht schon in (2) vorkommen, so erhalten wir eine Reihe

$$(3) \quad \alpha > \alpha_0 > \alpha'_1 > \alpha'_2 > \cdots > \alpha'_n.$$

Kein Exponent einer Zahl (3) außer α_0 ist $> \alpha'_1$; durch Einschleiben der neu auftretenden Exponenten dritter Stufe in (3) entsteht daher eine Reihe

$$(4) \quad \alpha > \alpha_0 > \alpha'_1 > \alpha''_2 > \alpha''_3 > \cdots > \alpha''_n.$$

Kein Exponent einer Zahl (4) außer α_0 und α'_1 ist $> \alpha''_2$ usw. Fortsetzung dieses Verfahrens liefert also eine absteigende Reihe von Zahlen $\alpha_i^{(i)}$, die abbrechen muß, so daß die Menge

$$(5) \quad M = \{\alpha, \alpha_0, \alpha'_1, \dots, \alpha_n^{(m)}\}$$

¹⁾ Zur Rolle der Epsilonzahlen bei der Polynomdarstellung von Ordnungszahlen. Math. Ann. **122** (1950), 321—322.

die Zahl α sowie die sämtlichen möglichen verschiedenen Exponenten aller Stufen von α , nach abnehmender Größe geordnet, darstellt. Die Zahl $\alpha_i^{(i)}$ ($0 \leq i \leq m$) kann nicht als Exponent höherer als $(i+1)$ -ter Stufe auftreten, es sei denn, sie sei ε -Zahl oder 0. $\alpha_m^{(m)}$ ist ε -Zahl oder 0.

Demnach stehen als Exponenten erster Stufe nur gewisse Zahlen aus der Menge $M - \{\alpha\}$ zur Verfügung, als Exponenten zweiter Stufe, wenn α_0 nicht ε -Zahl ist, nur gewisse Zahlen aus $M - \{\alpha, \alpha_0\}$, als Exponenten dritter Stufe, wenn nicht α_0 oder α_1' ε -Zahlen sind, nur gewisse Zahlen aus $M - \{\alpha, \alpha_0, \alpha_1'\}$ usw. Also müssen spätestens die Exponenten $(m+1)$ -ter Stufe ε -Zahlen oder Null sein.

(Eingegangen am 10. November 1951.)

Nachtrag zu der Arbeit „Abhängigkeit von Funktionen“ von Martin Kneser in Münster.

Wie mir erst jetzt bekannt wurde, sind die Ergebnisse der oben genannten Arbeit (diese Zeitschrift, Band 54 (1951), S. 34—51) enthalten in A. SARD: The measure of the critical values of differentiable maps; Bull. Amer. Math. Soc., 48 (1942), S. 883—890. Neu sind höchstens die Hilfssätze von § 1, die aber vielleicht auch an sich von Interesse sind.

(Eingegangen am 16. Januar 1952.)

Prize Essay Contest of the Institute for the Unity of Science.

The Institute for the Unity of Science is offering a prize of \$ 500 for the best essay on the theme „Mathematical Logic as a Tool of Analysis: Its Uses and Achievements in the Sciences and Philosophy“. Two additional prizes of \$ 200 each will be given for the next best two essays. It is an International Contest and is open to everyone. Essays must not exceed 25000 words. They may be written in English, French or German and must be submitted before January 1, 1953. Further information can be obtained from the Institute for the Unity of Science, American Academy of Arts and Sciences, 28 Newbury Street, Boston 16, Massachusetts (USA).