SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Zur Theorie der Momentanbewegung eines ebenen ähnlich veränderlichen Systems
Autor: Hartmann, Theodor
Verlag: Thomas & Hubert
Ort: Weida i. Th.
Jahr: 1912
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN31492423X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN31492423X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=31492423X

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

1912 7068

Zur Theorie der Momentanbewegung eines ebenen ähnlich veränderlichen Systems.

Inaugural-Dissertation

der

Hohen Philosophischen Fakultät der Universität Rostock

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Theodor Hartmann

aus **Dresden.**

Weida i. Th.
Druck von Thomas & Hubert
Spezialdruckerei für Dissertationen
1912.

Referent:

Herr Kais. Russ. Staatsrat Professor Dr. Staude.

Meinem verehrten Lehrer

Herrn Geheimen Hofrat Dr. M. Krause

Ordentlicher Professor für Mathematik
an der Techn. Hochschule zu Dresden

in Dankbarkeit und Verehrung gewidmet.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 7

§ 1. Die Grundgleichungen der Bewegung eines ebenen ähnlich veränderlichen Systems 9

§ 2. Die beiden Polkurven 10

§ 3. Der Wendekreis der direkten und der umgekehrten Bewegung 12

§ 4. Die Kreispunktkurve der direkten und der umgekehrten Bewegung 23

§ 5. Die Krümmung der Polkurven 34

§ 6. Das Zerfallen der Kreispunktkurve 39

1. Das Zerfallen der Kreispunktkurve in zwei Kegelschnitte . 39

2. Das Zerfallen der Kreispunktkurve in eine Kurve dritter Ordnung und eine gerade Linie und Lösung der dabei auftretenden Differentialgleichung dritter Ordnung 42

3. Einiges Geometrische über die Kreispunktkurve dritter Ordnung 50

§ 7. Die erste Evolute der Bahnkurven und die zwischen den Bahnpunkten und ihren ersten Krümmungsmittelpunkten bestehende Verwandtschaft 55

§ 8. Die zweite Evolute der Bahnkurven und die zwischen den Bahnpunkten und ihren zweiten Krümmungsmittelpunkten bestehende Verwandtschaft 60

§ 9. Die höheren Berührungen der Bahntangente 77

§ 10. Die Burmesterschen Punkte 84

§ 11. Sätze über die Lage der Burmesterschen Punkte für die Bewegungen derjenigen ähnlich veränderlichen Systeme, deren Kreispunktkurve eine Fokale dritter Ordnung ist 89

§ 12. Die sechspunktige Berührung des Krümmungskreises mit der Bahnkurve 94

§ 13. Die Einhüllende einer Systemgeraden 97

§ 14. Die Einhüllende eines Systemkreises 109

Anhang:

§ 15. Normierung der Bewegungsgleichungen aller ähnlich veränderlichen Systeme, bei denen eine gerade Linie beständig durch einen festen Punkt geht, während eine zweite Gerade an einem festen Kreise hingleitet, und allgemeine Eigenschaften aller dieser Systeme 113

§ 16. Die Bewegung $f(t) = c_1 + c_2 \sin t + c_3 \cos t$ 120

§ 17. Die Bewegung $f(t) = \frac{1}{\cos t}$ 129

Einleitung.

Die komplane Bewegung eines ebenen ähnlich veränderlichen Systems wurde schon in früheren Jahren von den Herren Grouard[1]), Geisenheimer[2]) und Burmester[3]), eingehender aber erst in der jüngsten Zeit von Herrn R. Müller[4]) untersucht. Die Betrachtungsweise dieser Autoren ist die in der Kinematik übliche geometrisch-synthetische, hier und da mit analytischem Einschlag. Bei aller Eleganz der Müllerschen Untersuchungen dürfte doch die Fülle der eingeführten unendlich kleinen Winkel und Strecken dem in solcher Betrachtungsweise Ungeübten das Eindringen in die Materie erschweren. Es soll deshalb in der folgenden Arbeit die Theorie der Momentanbewegung eines ebenen ähnlich veränderlichen Systems in seiner Ebene auf Grund einer neuen, von Herrn M. Krause[5]) angeregten, rein analytischen Methode entwickelt werden, die — auf den Formeln für die Koordinatentransformation basierend — eine höchst übersichtliche und einheitliche Darstellung des vorliegenden Stoffes gestattet.

Es werden dabei zunächst die von Herrn Müller gefundenen Resultate neu abgeleitet, aber nur insoweit, als hierbei die neue Methode zur Geltung kommt; dann aber — und hierin besteht der wesentlichere und umfangreichere Teil der Arbeit —

---

[1]) L'Institut, Journal universel des sciences etc. 1870.

[2]) Zeitschrift für Mathematik und Physik 1879, Bd. 24, S. 129.

[3]) Lehrbuch der Kinematik 1888, S. 865.

[4]) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung XIX, 1910, Heft 1/2.

[5]) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung XIX, 1910, Heft 11/12.

werden vom Verfasser bisher noch nicht vorliegende, weitergehende Untersuchungen angestellt, so über das Zerfallen der Kreispunktkurve (§ 6), über die Anzahl und Lage der Burmesterschen Punkte bei gewissen Systemen (§ 11), über die sechspunktige Berührung des Krümmungskreises mit der Bahnkurve (§ 12), über die zweite Evolute der Bahnkurven und die damit zusammenhängende Verwandtschaft (§ 8), über die höheren Berührungen der Bahntangente (§ 9), über die Einhüllende einer Systemgeraden (§ 13). Zum Schluß werden die entwickelten Theorien auf die Bewegung zweier vom Verfasser gewählten Systeme angewendet (§ 16 und § 17), die zwei spezielle Glieder einer größeren Gruppe von ähnlich veränderlichen Systemen (§ 15) darstellen und einfache Beziehungen zu bekannten starren Systemen zeigen.

§ 1.

Die Grundgleichungen der Bewegung eines ebenen ähnlich veränderlichen Systems.

Ein ebenes ähnlich veränderliches System geht während einer bestimmten Bewegung in einer festen Ebene in verschiedene Zustände über, die wir mit Burmester[1]) die Phasen des Systems nennen wollen.

Fixieren wir in der festen Ebene ein Koordinatensystem x, y mit dem Ursprung 0, in der bewegten Ebene ein Koordinatensystem ξ, η mit dem Anfangspunkt Ω und führen als veränderlichen Parameter den Drehungswinkel t dieser beiden Systeme ein, so sind die Koordinaten a, b von Ω Funktionen von t. Ein beliebiger Punkt ξ, η des ähnlich veränderlichen Systems besitzt in jeder Phase desselben in bezug auf das ξ, η-System die Koordinaten $\xi f(t)$ und $\eta f(t)$, wobei $f(t)$ eine Funktion von t bedeutet, und es drücken sich dann die Koordinaten x, y desselben Punktes in bezug auf das feste System durch folgende Formeln[2]) aus:

$$\begin{aligned} x &= a + f(t)\,(\xi \cos t - \eta \sin t) \\ y &= b + f(t)\,(\xi \sin t + \eta \cos t). \end{aligned} \tag{1}$$

Diese Bewegungsgleichungen eines ähnlich veränderlichen Systems seien alle folgenden Untersuchungen zugrunde gelegt.

Wir haben zufolge der eben geführten Erörterungen in jedem Moment der Bewegung drei Ebenen zu unterscheiden: Die feste Ebene 1 (x, y), die bewegte zunächst als starr gedachte Ebene 2 (ξ, η) und die aus der jeweiligen Lage von 2

[1]) Lehrbuch der Kinematik 1888, S. 865.

[2]) Vergl. auch Staude, Flächen 2. Ordnung, S. 942, Anm. 74, II.

durch Streckung von Ω aus hervorgehende Ebene 3 [$\bar{\xi} = \xi f(t)$, $\bar{\eta} = \eta f(t)$].

Bei der zu jeder Bewegung eines ähnlich veränderlichen Systems gehörigen umgekehrten Bewegung vertauschen die Ebenen 1 und 3 ihre Rollen. Die Rechnung wird aber am übersichtlichsten, wenn wir zunächst die Ebenen 1 und 2 vertauschen und erst am Schluß der Rechnung die Transformation der Ebene 2 in die Ebene 3 vornehmen. Die Gleichungen der Bewegung, die aus der direkten durch Vertauschung der Ebenen 1 und 2 hervorgeht, erhalten wir, wenn wir die Formeln (1) nach ξ und η auflösen. Wir finden dann:

$$\begin{aligned} \xi &= a_1 + F(t_1)\,(x\cos t_1 - y\sin t_1) \\ \eta &= b_1 + F(t_1)\,(x\sin t_1 + y\cos t_1), \end{aligned} \tag{2}$$

wobei

$$\begin{aligned} a_1 &= F(t_1)\,(-a\cos t_1 + b\sin t_1) \\ b_1 &= F(t_1)\,(-a\sin t_1 - b\cos t_1) \end{aligned} \tag{3}$$

$$t_1 = -t, \qquad F(t_1) = \frac{1}{f(t)}$$

gesetzt wurde.

Die Gleichungen (2) haben dieselbe Form wie die Gleichungen (1), es ist nur an Stelle von:

	a,	b,	t,	$f(t)$
getreten:	a_1,	b_1,	t_1,	$F(t_1)$

und x, y mit ξ, η vertauscht.

§ 2.

Die beiden Polkurven.

Durch Differentiation nach t erhalten wir aus den Gleichungen (1) des § 1:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{da}{dt} + f'(t)\,(\xi\cos t - \eta\sin t) - f(t)\,(\xi\sin t + \eta\cos t) \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{db}{dt} + f'(t)\,(\xi\sin t + \eta\cos t) + f(t)\,(\xi\cos t - \eta\sin t) \end{aligned} \tag{1}$$

oder:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{da}{dt} + \frac{f'}{f}(x-a) - (y-b) \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{db}{dt} + \frac{f'}{f}(y-b) + (x-a). \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Momentanpoles, d. h. desjenigen Punktes, der sich momentan in Ruhe befindet, haben wir $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ der Null gleich zu setzen. Dann erhalten wir aus (2) die Koordinaten des Poles im festen System, indem wir nach x und y auflösen.

$$(3)\qquad \begin{aligned} x_p &= a - \frac{1}{1+\frac{f'^2}{f^2}}\left(\frac{db}{dt} + \frac{f'}{f}\frac{da}{dt}\right) \\ y_p &= b + \frac{1}{1+\frac{f'^2}{f^2}}\left(\frac{da}{dt} - \frac{f'}{f}\frac{db}{dt}\right). \end{aligned}$$

Der Ort aller Punkte x_p, y_p ist die feste Polkurve p.

Setzen wir ebenso die rechten Seiten der Relationen (1) der Null gleich und lösen nach ξ und η auf, so finden wir:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \xi_\pi &= \frac{1}{f\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)}\left\{\sin t\left(\frac{da}{dt} - \frac{f'}{f}\frac{db}{dt}\right) - \cos t\left(\frac{db}{dt} + \frac{f'}{f}\frac{da}{dt}\right)\right\} \\ \eta_\pi &= \frac{1}{f\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)}\left\{\sin t\left(\frac{db}{dt} + \frac{f'}{f}\frac{da}{dt}\right) + \cos t\left(\frac{da}{dt} - \frac{f'}{f}\frac{db}{dt}\right)\right\}. \end{aligned}$$

In jedem Moment t stellen diese Gleichungen die Koordinaten eines bestimmten Systempunktes des ähnlich veränderlichen Systems dar, dessen zu dem betreffenden Werte von t gehörige Phase sich mit dem Momentanpol deckt (s. Fig. 2). Die Gesamtheit aller Punkte ξ_π, η_π erfüllen eine Systemkurve π, deren jeweilige Phase $\bar{\pi}$ wir die bewegliche Polkurve nennen. Beide Polkurven berühren sich im Momentanpol. Bezeichnen wir ferner das Bogenelement von p mit ds_p, von π mit $d\sigma_\pi$, von $\bar{\pi}$ mit $d\sigma_{\bar{\pi}}$, so gilt die Beziehung:

$$(5)\qquad ds_p = f(t)\, d\sigma_\pi = d\sigma_{\bar{\pi}}$$

(Beweis siehe § 5).

Bei der Umkehrung der Bewegung vertauschen die beiden Polkurven ihre Rollen.

Es sei an dieser Stelle noch ein Satz abgeleitet:

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}$ den Momentanpol, mit A die zugehörige Lage eines beliebigen Systempunktes, und nennen den Winkel, den der Polstrahl $\mathfrak{P}A$ mit der positiven x-Richtung einschließt, α, den Winkel der Bahnnormalen gegen die positive x-Richtung β, so folgt für den vom Polstrahl aus in positivem

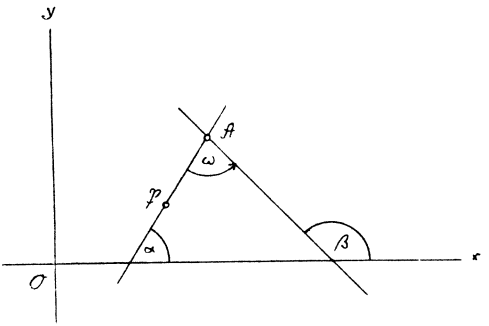


Fig. 1.

Drehsinn gemessenen Winkel ω, den Polstrahl und Bahnnormale des Punktes A einschließen:

$$\tan \omega = \tan (\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \tan \beta}.$$

Nun ist doch:

$$\tan \alpha = \frac{y - y_p}{x - x_p}, \quad \tan \beta = -\frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{da}{dt} + \frac{f'}{f}(x-a) - (y-b)}{\frac{db}{dt} + \frac{f'}{f}(y-b) + (x-a)}.$$

Setzen wir dies in ω ein, so ergibt die Ausrechnung:

$$\tan \omega = -\frac{f'}{f}. \tag{6}$$

Die Bahnnormalen aller Punkte bilden also mit den zugehörigen Polstrahlen momentan den Winkel ω.

§ 3.

Der Wendekreis der direkten und der umgekehrten Bewegung.

Da zufolge der Bewegungsgleichungen in § 1 die Bahnkurven in Parameterdarstellung gegeben sind, besitzen sie an den Stellen Wendepunkte, wo die Bedingung erfüllt ist:

$$(1) \qquad W = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Die Ausdrücke $\frac{d^2x}{dt^2}$ und $\frac{d^2y}{dt^2}$ verschaffen wir uns aus den Gleichungen (1) des § 2 durch nochmalige Differentiation nach t:

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2a}{dt^2} - [f(t) - f''(t)]\,[\xi \cos t - \eta \sin t] - 2f'(t)\,[\xi \sin t + \eta \cos t] \\ &= \frac{d^2a}{dt^2} - \left(1 - \frac{f''}{f}\right)(x-a) - 2\frac{f'}{f}(y-b) \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2b}{dt^2} - [f(t) - f''(t)]\,[\xi \sin t + \eta \cos t] + 2f'(t)\,[\xi \cos t - \eta \sin t] \\ &= \frac{d^2b}{dt^2} - \left(1 - \frac{f''}{f}\right)(y-b) + 2\frac{f'}{f}(x-a). \end{aligned}$$

Setzen wir aus diesen Gleichungen und aus den Gleichungen (2) des § 2 die Werte in die obige Bedingung ein, so geht diese über in:

$$(3) \quad \begin{aligned} &\left\{(x-a)^2 + (y-b)^2\right\}\left(1 + 2\frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f}\right) + (x-a)\left\{2\frac{f'}{f}\frac{da}{dt}\right. \\ &+ \left(1 - \frac{f''}{f}\right)\frac{db}{dt} - \frac{d^2a}{dt^2} + \left.\frac{f'}{f}\frac{d^2b}{dt^2}\right\} + (y-b)\left\{2\frac{f'}{f}\frac{db}{dt}\right. \\ &- \left(1 - \frac{f''}{f}\right)\frac{da}{dt} - \frac{d^2b}{dt^2} - \left.\frac{f'}{f}\frac{d^2a}{dt^2}\right\} + \left(\frac{da}{dt}\frac{d^2b}{dt^2} - \frac{db}{dt}\frac{d^2a}{dt^2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Denken wir uns einen bestimmten Wert des Parameters t vorgelegt, so stellt die letzte Gleichung diejenige Kurve dar, auf der alle die Bahnpunkte liegen, die in der gegebenen Systemlage Wendepunkte ihrer Bahnen durchschreiten. Diese Kurve ist also ein Kreis, den man als Wendekreis bezeichnet.

Wir können die Gleichung (3) einer Umformung unterziehen und sie schreiben:

$$(4) \quad \left\{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2\right\} \frac{1 + 2\frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f}}{1 + \frac{f'^2}{f^2}} = (x-x_p)\,a_2 + (y-y_p)\,b_2,$$

worin x_p, y_p die Koordinaten des Poles bedeuten, während a_2 und b_2 die Werte:

$$(5) \qquad a_2 = \frac{dy_p}{dt}, \qquad b_2 = -\frac{dx_p}{dt}$$

besitzen.

Wir verschieben jetzt das feste Koordinatensystem an den Pol und bezeichnen die neuen Koordinaten mit x_1, y_1; dann nimmt der Wendekreis die Form an:

$$(6) \qquad \frac{1+2\frac{f'^2}{f^2}-\frac{f''}{f}}{1+\frac{f'^2}{f^2}}(x_1^2+y_1^2)-a_2x_1-b_2y_1=0.$$

Wir drehen nun noch das x_1, y_1-System so, daß die neue Abszissenachse mit der Tangente, die neue Ordinatenachse mit der Normale an die feste Polkurve zusammenfällt.

Die Tangente der Polkurve lautet:

$$(x-x_p)\frac{dy_p}{dt}-(y-y_p)\frac{dx_p}{dt}=0$$

oder im x_1, y_1-System:

$$y_1=\frac{\frac{dy_p}{dt}}{\frac{dx_p}{dt}}x_1=-\frac{a_2}{b_2}x_1.$$

Wir haben also zu drehen um den Winkel φ, der durch

$$\tan\varphi=-\frac{a_2}{b_2},\quad \sin\varphi=-\frac{a_2}{N}=-\frac{\frac{dy_p}{dt}}{N},\quad \cos\varphi=+\frac{b_2}{N}=-\frac{\frac{dx_p}{dt}}{N}$$

bestimmt ist, wobei

$$(7) \qquad N=\sqrt{a_2^2+b_2^2}=\sqrt{\left(\frac{dx_p}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_p}{dt}\right)^2}=\frac{ds_p}{dt}$$

ist.

Bezeichnen wir die neuen Koordinaten mit x_2, y_2, so gelten die Transformationsformeln:

$$(8) \qquad \begin{aligned} x_1&=x_2\cos\varphi-y_2\sin\varphi=\frac{1}{N}(x_2b_2+y_2a_2)\\ &=\frac{1}{N}\left(-x_2\frac{dx_p}{dt}+y_2\frac{dy_p}{dt}\right)\\ y_1&=x_2\sin\varphi+y_2\cos\varphi=\frac{1}{N}(-x_2a_2+y_2b_2)\\ &=\frac{1}{N}\left(-x_2\frac{dy_p}{dt}-y_2\frac{dx_p}{dt}\right), \end{aligned}$$

mit deren Hilfe die Gleichung (6) des Wendekreises übergeht in:

$$(9) \qquad \left(1+2\frac{f'^2}{f^2}-\frac{f''}{f}\right)(x_2^2+y_2^2)-\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)Ny_2=0.$$

Er berührt also im Pole die feste Polbahn und besitzt die Mittelpunktskoordinaten:

$$x_2=0, \quad y_2=\frac{1+\frac{f'^2}{f^2}}{2\left(1+2\frac{f'^2}{f^2}-\frac{f''}{f}\right)}N.$$

Legen wir seinem Durchmesser das Vorzeichen der Mittelpunktsordinate bei, so hat derselbe den Wert:

$$(10) \qquad d_w=\frac{1+\frac{f'^2}{f^2}}{1+2\frac{f'^2}{f^2}-\frac{f''}{f}}N.$$

Wir wollen ferner die Gleichung einer Wendetangente aufstellen. Eine Bahntangente im Punkte X, Y hat die Gleichung:

$$(11) \qquad (x-X)\frac{dY}{dt}-(y-Y)\frac{dX}{dt}=0,$$

worin nach § 2

$$\frac{dX}{dt}=\frac{da}{dt}+\frac{f'}{f}(X-a)-(Y-b)$$
$$\frac{dY}{dt}=\frac{db}{dt}+\frac{f'}{f}(Y-b)+(X-a)$$

ist. Transformieren wir auf das x_2, y_2-System vermittels der Formeln:

$$(12) \qquad \begin{aligned} x&=x_p+\frac{1}{N}(-x_2x_p'+y_2y_p') \\ y&=y_p+\frac{1}{N}(-x_2y_p'-y_2x_p'), \end{aligned}$$

worin die Striche Differentiationen nach t bedeuten, so läßt sich die Bahntangente schreiben:

$$(13) \quad \left(\frac{f'}{f}X_2-Y_2\right)y_2-\left(X_2+\frac{f'}{f}Y_2\right)x_2+X_2^2+Y_2^2=0.$$

Soll diese Tangente eine Wendetangente sein, so muß der Punkt X_2, Y_2 auf dem Wendekreise liegen, also die Gleichung erfüllen:

$$X_2^2 + Y_2^2 = d_w Y_2.$$

Mithin besitzt eine Wendetangente die Gleichung:

$$(14)\quad \left[\frac{f'}{f}\sqrt{d_w Y_2 - Y_2^2} - Y_2\right] y_2 - \left[\sqrt{d_w Y_2 - Y_2^2} + \frac{f'}{f} Y_2\right] x_2 + d_w Y_2 = 0.$$

Bestimmen wir den Schnittpunkt zweier Wendetangenten, so finden wir, daß er von der Wahl der beiden Wendepunkte unabhängig ist. Es gilt sonach der

Satz: Alle Wendetangenten schneiden sich auf dem Wendekreise im Punkte:

$$(15)\qquad x_2 = \frac{\frac{f'}{f} d_w}{1 + \frac{f'^2}{f^2}}, \qquad y_2 = \frac{d_w}{1 + \frac{f'^2}{f^2}},$$

dem sogenannten Wendepole.

Es soll jetzt der Wendekreis der umgekehrten Bewegung bestimmt werden. Dabei rechnen wir nach den Ausführungen des § 1 zunächst mit der Ebene 2 (ξ, η) [Gleichungen (2) des § 1] und bringen erst am Schlußresultat die Transformation der Ebene 2 in ihre, nach § 1 als Ebene 3 bezeichnete, jeweilige Phase an. Wir unterziehen das jetzt feste ξ, η-Koordinatensystem einer analogen Transformation wie bei dem festen x, y-System der direkten Bewegung vorgenommen wurde, d. h. wir verschieben es an den Punkt ξ_π, η_π und drehen es um den durch:

$$\sin \varphi_1 = -\frac{\frac{d\eta_\pi}{dt_1}}{N_1}, \qquad \cos \varphi_1 = -\frac{\frac{d\xi_\pi}{dt_1}}{N_1}$$

definierten Winkel φ_1, wobei

$$(16)\qquad N_1 = \sqrt{\left(\frac{d\xi_\pi}{dt_1}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_\pi}{dt_1}\right)^2} = \frac{d\sigma_\pi}{dt}$$

bedeutet.

Das so entstehende ξ_2, η_2-Koordinatensystem ist gegen das x_2, y_2-System der direkten Bewegung um 180^0 gedreht, denn wie aus den Untersuchungen des § 5, Gleichung (6), hervorgeht, ist:

$$\frac{d\eta_\pi}{dt_1} = \frac{\frac{dx_p}{dt}\sin t - \frac{dy_p}{dt}\cos t}{f}, \qquad \frac{d\xi_\pi}{dt_1} = -\frac{\frac{dx_p}{dt}\cos t + \frac{dy_p}{dt}\sin t}{f}$$

und somit:

$$\sin\varphi_1 = \frac{1}{fN_1}\left\{-\frac{dx_p}{dt}\sin t + \frac{dy_p}{dt}\cos t\right\}$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{1}{fN_1}\left\{\frac{dx_p}{dt}\cos t + \frac{dy_p}{dt}\sin t\right\},$$

oder da wegen

$$ds_p = f(t)\,d\sigma_\pi$$

auch

$$N = f(t)N_1 \tag{17}$$

ist, wird:

$$\sin\varphi_1 = -\frac{\frac{dx_p}{dt}}{N}\sin t + \frac{\frac{dy_p}{dt}}{N}\cos t = \cos\varphi\sin t - \sin\varphi\cos t = -\sin(\varphi - t)$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{\frac{dx_p}{dt}}{N}\cos t + \frac{\frac{dy_p}{dt}}{N}\sin t = -\cos\varphi\cos t - \sin\varphi\sin t = -\cos(\varphi - t),$$

also

$$\varphi_1 = 180 + (\varphi - t).$$

Für die durch die Gleichungen (2) des § 1 definierte Bewegung wird im ξ_2, η_2-System der Wendekreis nach Analogie der Gleichung (9) die Gleichung besitzen:

$$\left(1 + 2\frac{F'^2}{F^2} - \frac{F''}{F}\right)(\xi_2^2 + \eta_2^2) - \left(1 + \frac{F'^2}{F^2}\right)N_1\eta_2 = 0, \tag{18}$$

wobei die Striche der Funktion F Differentiationen nach $t_1 = -t$ bedeuten. Die letzte Gleichung wollen wir noch einigen Umformungen unterwerfen. Zunächst drücken wir die Differentialquotienten von $F(t_1)$ nach t_1 durch die Differentialquotienten von $f(t)$ nach t aus.

$$
\begin{aligned}
F(t_1) &= \frac{1}{f(t)} \\
F'(t_1) &= \frac{dF(t_1)}{dt_1} = \frac{d\frac{1}{f(t)}}{dt} \cdot \frac{dt}{dt_1} = \frac{f'(t)}{f^2(t)} \\
F''(t_1) &= \frac{dF'(t_1)}{dt_1} = \frac{d\frac{f'}{f^2}}{dt} \cdot \frac{dt}{dt_1} = \frac{2f'^2 - ff''}{f^3} \\
F'''(t_1) &= \frac{dF''(t_1)}{dt_1} = \frac{1}{f^4}\left[6f'(f'^2 - ff'') + f^2 f'''\right]
\end{aligned} \tag{19}
$$

(Bei F bedeuten die Striche Differentiationen nach t_1, bei f Differentiationen nach t).

Die in (18) vorkommenden Größen werden dadurch zu:

$$1 + \frac{F'^2}{F^2} = 1 + \frac{f'^2}{f^2}, \quad 1 + 2\frac{F'^2}{F^2} - \frac{F''}{F} = 1 + \frac{f''}{f}. \tag{20}$$

Beachten wir neben diesen Beziehungen noch die Relation (17), so nimmt der Wendekreis (18) die Gestalt an:

$$f\left(1 + \frac{f''}{f}\right)(\xi_2^2 + \eta_2^2) - \left(1 + \frac{f'^2}{f^2}\right) N\eta_2 = 0. \tag{18'}$$

Dies ist aber noch nicht der Wendekreis der umgekehrten Bewegung, sondern wir haben, um ihn zu erhalten, die Ebene 2 noch auf ihre momentane Phase (Ebene 3) zu transformieren. Dies geschieht, indem wir in (18') für ξ_2, η_2 einführen:

$$\bar{\xi}_2 = \xi_2 f(t), \quad \bar{\eta}_2 = \eta_2 f(t).$$

Dann erhalten wir:

$$f\left(1 + \frac{f''}{f}\right)\left(\frac{\bar{\xi}_2^2}{f^2} + \frac{\bar{\eta}_2^2}{f^2}\right) - \left(1 + \frac{f'^2}{f^2}\right) N\frac{\bar{\eta}_2}{f} = 0, \tag{21}$$

oder wenn wir mit f multiplizieren und statt des $\bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2$-Systems das um 180° verdrehte x_2, y_2-System einführen, lautet die Gleichung des Wendekreises der umgekehrten Bewegung:

$$\left(1 + \frac{f''}{f}\right)(x_2^2 + y_2^2) + \left(1 + \frac{f'^2}{f^2}\right) N y_2 = 0. \tag{22}$$

Er berührt also ebenfalls die feste Polbahn im Pol und hat den Durchmesser:

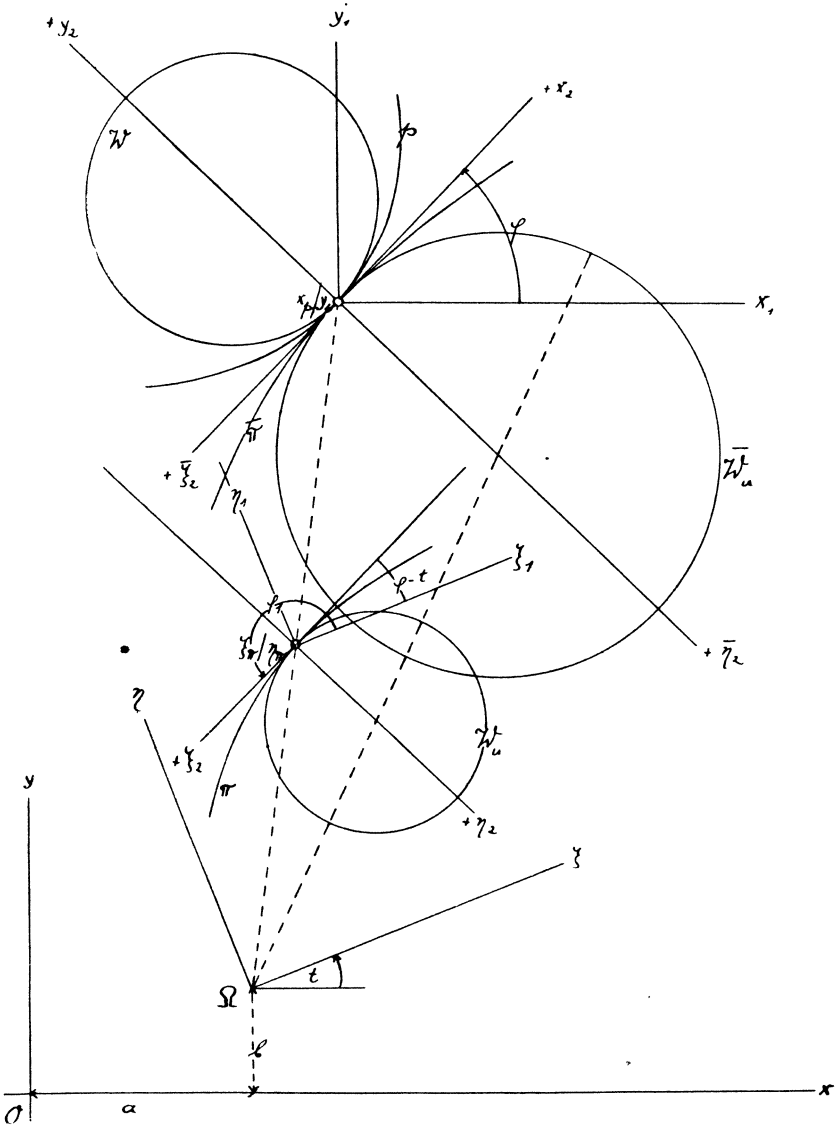


Fig. 2.

$$d_r = -\frac{1+\frac{f'^2}{f^2}}{1+\frac{f''}{f}} N, \tag{23}$$

wenn wir demselben wiederum das Vorzeichen der Mittelpunktsordinate beilegen.

Aus später ersichtlichen Gründen bezeichnet man den Wendekreis der umgekehrten Bewegung auch als Rückkehrkreis der direkten Bewegung und seinen dem Wendepol der direkten Bewegung entsprechenden Punkt:

$$x_2 = \frac{\frac{f'}{f} d_r}{1+\frac{f'^2}{f^2}}, \quad y_2 = \frac{d_r}{1+\frac{f'^2}{f^2}} \tag{24}$$

als Rückkehrpol.

Es dürfte angebracht sein, die Lage der verschiedenen Koordinatensysteme durch eine Figur zu erläutern (Fig. 2).

x_p/y_p ist der Momentanpol, ξ_π/η_π der Systempunkt, dessen zu dem betrachteten Werte von t gehörige Phase (der Streckungsfaktor $f(t)$ ist in der Figur gleich 2 angenommen) mit dem Pol zusammenfällt. p ist die feste Polkurve, π die Systemkurve, deren momentane Phase die bewegliche Polkurve $\bar{\pi}$ ergibt. W ist der Wendekreis der direkten Bewegung, W_u der Wendekreis der durch die Gleichungen (2) des § 1 definierten Bewegung [entsprechend der Gleichung (18′)]; $\overline{W}_u$ ist der Wendekreis der umgekehrten Bewegung, der aus W_u durch Streckung um $f(t)$ hervorgeht. Analog dem ξ_2, η_2-System der Ebene 2 erhalten wir in der Ebene 3 ein $\bar{\xi}_2$, $\bar{\eta}_2$-System, und in diesem hat, wie man sich leicht überzeugt, $\overline{W}_u$ eine Gleichung, die aus der von W_u im ξ_2, η_2-System hervorgeht, wenn man in letzterer für ξ_2, η_2 bez. setzt $\frac{\bar{\xi}_2}{f}$, $\frac{\bar{\eta}_2}{f}$ [Gleichung (21)].

Wir wollen dieses Kapitel mit einigen Bemerkungen über die Durchmesser des Wende- und Rückkehrkreises schließen, indem wir uns folgende Fragen vorlegen:

1. Wann ist wie bei starren Systemen $d_r = -d_w$?

Es muß dann die Differentialgleichung bestehen:

$$\frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f} = 0.$$

Wir können dieselbe auch schreiben:

$$f'^2 - ff'' = f'^2 - ff'\frac{df'}{df} = 0$$

und nach Abspaltung der Lösung $f' = 0$ bleibt:

$$\frac{df}{f} - \frac{df'}{f'} = 0.$$

Die Integration gibt:

$$lg\, f - lg\, f' = C$$

oder

$$\frac{f'}{f} = k$$

und durch nochmalige Integration folgt:

$$f(t) = Ce^{kt}.$$

Satz: Für alle ähnlich veränderlichen Systeme, deren $f(t) = Ce^{kt}$ ist, sind Wende- und Rückkehrkreis gleich groß und symmetrisch zur Polbahntangente gelegen.

2. Wann artet der Wendekreis in die Polbahntangente aus?

Es muß dann $d_w = \infty$ sein und mithin die Differentialgleichung bestehen:

$$1 + 2\frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f} = 0.$$

Dieselbe läßt sich schreiben:

$$2(f^2 + f'^2) - f(f + f'') = 0$$

$$2(f^2 + f'^2) - f\left(f + f'\frac{df'}{df}\right) = 0.$$

Wir führen für f' eine neue Veränderliche ein mittels der Substitution:

$$f^2 + f'^2 = F(f), \quad 2\left(f + f'\frac{df'}{df}\right) = \frac{dF}{df}.$$

Dann geht obige Differentialgleichung über in:

$$4\frac{df}{f}-\frac{dF}{F}=0.$$

Die Integration gibt:

$$4\,lgf-lgF=C$$

oder

$$F=Kf^4.$$

Wir haben nun noch die Differentialgleichung zu lösen:

$$f^2+f'^2=Kf^4$$

$$f'=f\sqrt{Kf^2-1}$$

$$t+c=\int\frac{df}{f\sqrt{Kf^2-1}}.$$

Das Integral auf der rechten Seite löst man mit Hilfe der Substitution $f=\frac{1}{\varphi\sqrt{K}}$:

$$\int\frac{df}{f\sqrt{Kf^2-1}}=\int\frac{df}{\sqrt{K}f^2\sqrt{1-\frac{1}{Kf^2}}}=-\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varphi^2}}=-\arcsin\varphi.$$

Unsere Differentialgleichung besitzt also die Lösung:

$$t+c=-\arcsin\frac{1}{f\sqrt{K}}$$

$$f(t)=\frac{1}{c_1\sin t+c_2\cos t}.$$

Satz: Für alle ähnlich veränderlichen Systeme, deren $f(t)=\frac{1}{c_1\sin t+c_2\cos t}$ ist, entartet in jedem Moment der Wendekreis zur Polbahntangente.

3. Wann artet der Rückkehrkreis in die Polbahntangente aus?

Es muß hier $d_r=\infty$ sein und mithin die Differentialgleichung

$$1+\frac{f''}{f}=0$$

bestehen, deren Lösung:

$$f(t)=c_1\sin t+c_2\cos t$$

ist.

Satz: Für alle ähnlich veränderlichen Systeme, deren $f(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t$ ist, entartet in jedem Moment der Rückkehrkreis zur Polbahntangente.

§ 4.

Die Kreispunktkurve der direkten und der umgekehrten Bewegung.

Bezeichnen wir im folgenden die Ableitungen von x und y nach t mit Strichen, so lautet die Bedingungsgleichung für vierpunktiges Berühren des Krümmungskreises mit der Bahnkurve:

$$(1) \quad K = (x'^2 + y'^2)(x'y''' - y'x''') - 3(x'y'' - y'x'')(x'x'' + y'y'') = 0$$

— immer unter der Voraussetzung, daß x' und y' nicht gleichzeitig der Null gleich werden —.

Wir wollen diese Bedingung für die ähnlich veränderlichen Systeme, und zwar im x_2, y_2-System ausgedrückt, aufstellen.

Nach § 2 und § 3 ist:

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{da}{dt} + \frac{f'}{f}(x-a) - (y-b), \quad \frac{dy}{dt} = \frac{db}{dt} + \frac{f'}{f}(y-b) + (x-a).$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2a}{dt^2} - \left(1 - \frac{f''}{f}\right)(x-a) - 2\frac{f'}{f}(y-b) \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2b}{dt^2} - \left(1 - \frac{f''}{f}\right)(y-b) + 2\frac{f'}{f}(x-a). \end{aligned}$$

Indem wir die Gleichungen (2) des § 3 nochmals nach t differentiieren, erhalten wir:

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{d^3x}{dt^3} &= \frac{d^3a}{dt^3} - \left(3\frac{f'}{f} - \frac{f'''}{f}\right)(x-a) + \left(1 - 3\frac{f''}{f}\right)(y-b) \\ \frac{d^3y}{dt^3} &= \frac{d^3b}{dt^3} - \left(3\frac{f'}{f} - \frac{f'''}{f}\right)(y-b) - \left(1 - 3\frac{f''}{f}\right)(x-a). \end{aligned}$$

Wir haben nun die Ausdrücke (2), (3) und (4) vermöge der Formeln (12) des § 3, welche lauteten:

$$(5)\qquad \begin{aligned} x &= x_p + \frac{1}{N}(-x_2 x'_p + y_2 y'_p) \\ y &= y_p + \frac{1}{N}(-x_2 y'_p - y_2 x'_p), \end{aligned}$$

auf das x_2, y_2-System zu transformieren. Dabei war

$$N = \sqrt{x'^2_p + y'^2_p}$$

gesetzt worden.

Es erweist sich von Vorteil, noch folgende Abkürzungen einzuführen:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \varrho_1 &= 1 + \frac{f'^2}{f^2} \\ \varrho_2 &= 1 + 2\frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f}, & \chi_2 &= \frac{f'}{f} + \frac{f'f''}{f^2} \\ \varrho_3 &= 1 + 3\frac{f'^2}{f^2} - 3\frac{f''}{f} - \frac{f'f'''}{f^2}, & \chi_3 &= 2\frac{f'}{f} + 3\frac{f'f''}{f^2} - \frac{f'''}{f}. \end{aligned}$$

Das allgemeine Bildungsgesetz dieser Größen wird aus späteren Untersuchungen ersichtlich werden (§ 9, S. 83).

Mit deren Benutzung ergibt sich für die ersten Differentialquotienten von x und y nach t, auf das x_2, y_2-System transformiert:

$$(7)\qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{N}(-\alpha x_2 + \beta y_2), \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{N}(-\beta x_2 - \alpha y_2).$$

Hierin bedeuten die Größen α und β:

$$(8)\qquad \begin{aligned} \alpha &= \frac{f'}{f} x'_p - y'_p = \frac{1}{\varrho_1}\left(\chi_2 \frac{da}{dt} - \varrho_2 \frac{db}{dt} - \varrho_1 \frac{d^2a}{dt^2}\right) \\ \beta &= \frac{f'}{f} y'_p + x'_p = \frac{1}{\varrho_1}\left(\varrho_2 \frac{da}{dt} + \chi_2 \frac{db}{dt} - \varrho_1 \frac{d^2b}{dt^2}\right). \end{aligned}$$

Des weiteren liefert die Transformation auf das x_2, y_2-System für die zweiten Differentialquotienten von x und y nach t die Ausdrücke:

$$(9)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha + \frac{1}{N}(\gamma x_2 - \delta y_2), \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\beta + \frac{1}{N}(\delta x_2 + \gamma y_2),$$

worin γ und δ die Bedeutung haben:

$$\gamma = \left(1 - \frac{f''}{f}\right) x'_p + 2\frac{f'}{f} y'_p, \qquad \delta = -2\frac{f'}{f} x'_p + \left(1 - \frac{f''}{f}\right) y'_p.$$

Endlich finden wir für die dritten Differentialquotienten die Werte:

$$(10)\quad \frac{d^3x}{dt^3} = \alpha_1 + \frac{1}{N}(\gamma_1 x_2 - \delta_1 y_2), \quad \frac{d^3y}{dt^3} = \beta_1 + \frac{1}{N}(\delta_1 x_2 + \gamma_1 y_2),$$

wobei

$$(11)\quad \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{\varrho_1}\left(\varrho_3 \frac{da}{dt} + \chi_3 \frac{db}{dt} + \varrho_1 \frac{d^3a}{dt^3}\right) \\ \beta_1 &= \frac{1}{\varrho_1}\left(-\chi_3 \frac{da}{dt} + \varrho_3 \frac{db}{dt} + \varrho_1 \frac{d^3b}{dt^3}\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \left(3\frac{f'}{f} - \frac{f'''}{f}\right)x'_p - \left(1 - 3\frac{f''}{f}\right)y'_p \\ \delta_1 &= \left(1 - 3\frac{f''}{f}\right)x'_p + \left(3\frac{f'}{f} - \frac{f'''}{f}\right)y'_p \end{aligned}$$

gesetzt wurde.

Wie die Größen ϱ_r und χ_r, so spielen auch die Größen α_r und β_r (für $r = 0$ wurde der Index fortgelassen) in der Theorie der ähnlich veränderlichen Systeme eine große Rolle und treten immer wieder auf. Auch ihr allgemeines Bildungsgesetz geht aus dem schon erwähnten späteren Paragraphen hervor. Die Gleichungen (7), (9) und (10) setzen uns instand, die einzelnen Faktoren der Bedingungsgleichung (1) zu berechnen. Wir bekommen:

$$(12)\quad \begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= \varrho_1(x_2^2 + y_2^2) \\ x'y'' - y'x'' &= \varrho_2(x_2^2 + y_2^2) - \varrho_1 N y_2 \\ x'x'' + y'y'' &= \chi_2(x_2^2 + y_2^2) + \varrho_1 N x_2 \\ x'y''' - y'x''' &= \chi_3(x_2^2 + y_2^2) + \frac{1}{N}[-(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)x_2 + (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)y_2]. \end{aligned}$$

Rechnen wir zusammen, so stellt sich die Bedingungsgleichung für vierpunktiges Berühren des Krümmungskreises mit der Bahnkurve in der Gestalt dar:

$$(13)\quad K = P(x_2^2 + y_2^2)^2 + (x_2^2 + y_2^2)(Lx_2 + My_2) + Qx_2y_2 = 0,$$

wobei die Koeffizienten die Bedeutung haben:

$$
\begin{aligned}
P &= \varrho_1 \chi_3 - 3\varrho_2 \chi_2 \\
L &= -\frac{\varrho_1}{N}(3\varrho_2 N^2 + \alpha\beta_1 - \alpha_1\beta) \\
M &= -\frac{\varrho_1}{N}(3\chi_2 N^2 + \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1) \\
Q &= 3\varrho_1^2 N^2.
\end{aligned} \tag{14}
$$

Denken wir uns wieder eine bestimmte Momentanlage vorgegeben, so liegen alle Bahnpunkte, die in der betreffenden Systemlage Bahnstellen mit vierpunktig berührendem Krümmungskreis durchlaufen, auf obiger Kurve vierter Ordnung (13), die man in der Kinematik Kreispunktkurve nennt. Ihre Punkte bezeichnet man auch vielfach als „Punkte stationärer Krümmung“.

Für die ähnlich veränderlichen Systeme wurde die Kreispunktkurve von Rodenberg[1]) und von R. Müller[2]) aufgestellt und behandelt.

Die Form der Gleichung (13) zeigt, daß sie eine bizirkulare Kurve vierter Ordnung ist. Wir wollen ihr Verhalten im Pole $\mathfrak{P}$ untersuchen und bilden zu dem Zwecke in demselben die partiellen Ableitungen:

$$
\frac{\partial K}{\partial x_2} = \frac{\partial K}{\partial y_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 K}{\partial y_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial x_2 \partial y_2} = Q,
$$

$$
\frac{\partial^3 K}{\partial x_2^3} = 6L, \quad \frac{\partial^3 K}{\partial y_2^3} = 6M.
$$

Der Pol ist also ein Doppelpunkt, dessen Tangentenrichtungen sich aus

$$
\frac{\partial^2 K}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 K}{\partial x_2 \partial y_2}\frac{dy_2}{dx_2} + \frac{\partial^2 K}{\partial y_2^2}\left(\frac{dy_2}{dx_2}\right)^2 = 0
$$

zu $\frac{dy_2}{dx_2} = 0$ oder ∞ ergeben.

---

[1]) Göttinger Nachrichten 1888. S. 181.

[2]) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung XIX, 1910, Heft 1 u. 2.

Aus der Formel:

$$\frac{d^3K}{dx_2^3} = \left(\frac{\partial K}{\partial x_2} + \frac{\partial K}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx_2}\right)^{(3)} + 3\left(\frac{\partial^2 K}{\partial x_2 \partial y_2} + \frac{\partial^2 K}{\partial y_2^2}\frac{dy_2}{dx^2}\right)\frac{d^2y_2}{dx_2^2} + \frac{\partial K}{\partial y_2}\frac{d^3y_2}{dx_2^3} = 0$$

finden wir für $\frac{dy_2}{dx_2} = 0$ den zweiten Differentialquotient zu:

$$\frac{d^2y_2}{dx_2^2} = -\frac{\frac{\partial^3 K}{\partial x_2^3}}{3\frac{\partial^2 K}{\partial x_2 \partial y_2}} = -2\frac{L}{Q}.$$

Für $\frac{dy_2}{dx_2} = \infty$ ist $\frac{dx_2}{dy_2} = 0$ und wir finden durch analoge Rechnung, wenn wir nur x_2 mit y_2 vertauschen, daß jetzt $\frac{d^2x_2}{dy_2^2} = -2\frac{M}{Q}$ ist.

Der die x_2-Achse im Pol berührende Zweig der Kurve hat im Pol die Krümmungsmittelpunktskoordinaten:

$$x_2 = 0, \qquad y_2 = \frac{1}{\frac{d^2y_2}{dx_2^2}} = -\frac{Q}{2L}$$

und der die y_2-Achse im Pol berührende Ast die Krümmungsmittelpunktskoordinaten:

$$x_2 = \frac{1}{\frac{d^2x_2}{dy_2^2}} = -\frac{Q}{2M}, \qquad y_2 = 0.$$

Geben wir den Durchmessern der beiden Krümmungskreise der Kurve im Pol das Vorzeichen der Mittelpunktsordinate resp. -abszisse, so haben diese beiden Durchmesser die Werte:

$$d_o = -\frac{Q}{L}, \qquad d_o' = -\frac{Q}{M}.$$

Dies alles ergibt den von Müller[1]) gefundenen

Satz: Die Kreispunktkurve der ähnlich veränderlichen Systeme ist eine bizirkulare Kurve vierter Ordnung. Sie hat im Pol einen Doppelpunkt und berührt in ihm die Tangente und die Normale der festen

[1]) loc. cit.

Polbahn. Ihre Krümmungskreise im Pol haben die Durchmesser $-\frac{Q}{L}$ bez. $-\frac{Q}{M}$.

Müller findet weiter, daß sich eine solche Kurve erzeugen läßt durch zwei projektive Kreisbüschel:

$$x_2^2 + y_2^2 - \delta y_2 = 0$$

und

$$x_2^2 + y_2^2 - \delta' x_2 = 0,$$

deren Parameter δ und δ' durch die Gleichung verbunden sind:

$$P\delta\delta' + L\delta + M\delta' + Q = 0.$$

Trifft ein Kreis des ersten Büschels die y_2-Achse im Punkte Y_2 und der zugeordnete des zweiten die x_2-Achse im Punkte X_2, so ist der der Kreispunktkurve angehörige Schnittpunkt K dieser beiden Kreise zugleich der Fußpunkt des vom Pol auf die Gerade $X_2\ Y_2$ gefällten Lotes. Hieraus folgt, daß die Kreispunktkurve auch die Fußpunktkurve derjenigen Kurve ist, die von den Geraden $X_2\ Y_2$ umhüllt wird.

Nun kann, wie man durch leichte Rechnung findet, die Gleichung der Geraden $X_2\ Y_2$ geschrieben werden:

$$(15) \qquad \delta^2(Px_2 + L) + \delta(Mx_2 - Ly_2 + Q) - Qy_2 = 0.$$

Zur Bestimmung der Einhüllenden differentiieren wir (15) nach δ

$$(16) \qquad 2\delta(Px_2 + L) + (Mx_2 - Ly_2 + Q) \qquad = 0$$

und eliminieren aus (15) und (16) den Parameter δ. Wir erhalten:

$$(17)\ M^2x_2^2 + 2(2PQ - LM)x_2y_2 + L^2y_2^2 + 2Q(Mx_2 + Ly_2) + Q^2 = 0.$$

Die Geraden $X_2\ Y_2$ umhüllen also einen Kegelschnitt und es gilt der von Müller gefundene

Satz: Die Kreispunktkurve ist auch darstellbar als Fußpunktkurve eines Kegelschnitts. Selbiger ist im allgemeinen eine Ellipse oder Hyperbel, im Falle $P = 0$ aber eine Parabel.

Wendekreis und Kreispunktkurve schneiden sich — vom Pol und den imaginären Kreispunkten der Ebene abgesehen — nur noch in einem Punkte und dieser beschreibt momentan eine Bahnstelle mit vierpunktig berührender Tangente, ist also ein sogenannter Undulationspunkt seiner Bahn. Wie bei starren Systemen bezeichnen wir ihn als den Ballschen Punkt B_a der Systemphase. Seine Koordinaten bestimmen sich aus den beiden Gleichungen:

$$x_2^2 + y_2^2 - d_w y_2 = 0$$

$$P(x_2^2 + y_2^2)^2 + (x_2^2 + y_2^2)(Lx_2 + My_2) + Qx_2y_2 = 0$$

zu:

$$(18) \qquad \begin{aligned} x_2 &= -\frac{d_w^2(Pd_w + M)(Ld_w + Q)}{d_w^2(Pd_w+M)^2 + (Ld_w+Q)^2} \\ y_2 &= \frac{d_w(Ld_w + Q)^2}{d_w^2(Pd_w+M)^2 + (Ld_w+Q)^2}. \end{aligned}$$

Ist $Ld_w + Q = 0$, also $d_w = -\frac{Q}{L}$, so fällt der Ballsche Punkt mit dem Pol zusammen. Beachten wir die Werte von d_w, Q und L, so finden wir, daß dies für $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 0$ eintritt.

Satz: Ist $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 0$, so fällt der Ballsche Punkt in den Pol und der Wendekreis oskuliert die Kreispunktkurve.

Wir wenden uns jetzt zur Bestimmung der Kreispunktkurve der umgekehrten Bewegung.

Zunächst rechnen wir wieder mit den Bewegungsgleichungen (2) des § 1, die aus denen der direkten Bewegung hervorgingen, indem wir an Stelle von a, b, t, $f(t)$, x, y resp. setzten a_1, b_1, t_1, $F(t_1)$, ξ, η.

Für die fernere Rechnung benötigen wir die Differentialquotienten von a_1 und b_1, die wir uns daher zuerst verschaffen wollen:

$$a_1 = F(t_1)\,(-a\cos t_1 + b\sin t_1)$$

$$\frac{da_1}{dt_1} = F(t_1)\left(a\sin t_1 + b\cos t_1 - \frac{da}{dt_1}\cos t_1 + \frac{db}{dt_1}\sin t_1\right) + F'(t_1)\,(-a\cos t_1 + b\sin t_1)$$

$$\frac{d^2a_1}{dt_1^2} = F(t_1)\left(a\cos t_1 - b\sin t_1 + 2\frac{da}{dt_1}\sin t_1 + 2\frac{db}{dt_1}\cos t_1 - \frac{d^2a}{dt_1^2}\cos t_1 + \frac{d^2b}{dt_1^2}\sin t_1\right) + 2F'(t_1)\left(a\sin t_1 + b\cos t_1 - \frac{da}{dt_1}\cos t_1 + \frac{db}{dt_1}\sin t_1\right) + F''(t_1)\,(-a\cos t_1 + b\sin t_1)$$

(19)

$$\frac{d^3a_1}{dt_1^3} = F(t_1)\left(-a\sin t_1 - b\cos t_1 + 3\frac{da}{dt_1}\cos t_1 - 3\frac{db}{dt_1}\sin t_1 + 3\frac{d^2a}{dt_1^2}\sin t_1 + 3\frac{d^2b}{dt_1^2}\cos t_1 - \frac{d^3a}{dt_1^3}\cos t_1 + \frac{d^3b}{dt_1^3}\sin t_1\right) + 3F'(t_1)\left(a\cos t_1 - b\sin t_1 + 2\frac{da}{dt_1}\sin t_1 + 2\frac{db}{dt_1}\cos t_1 - \frac{d^2a}{dt_1^2}\cos t_1 + \frac{d^2b}{dt_1^2}\sin t_1\right) + 3F''(t_1)\left(a\sin t_1 + b\cos t_1 - \frac{da}{dt_1}\cos t_1 + \frac{db}{dt_1}\sin t_1\right) + F'''(t_1)\,(-a\cos t_1 + b\sin t_1).$$

Da

$$b_1 = F(t_1)\,(-b\cos t_1 - a\sin t_1)$$

ist, erhalten wir seine Differentialquotienten aus den entsprechenden von a_1, indem wir a mit b und b mit $-a$ vertauschen.

Die Indexstriche der Größe $F(t_1)$ bedeuten wie früher Differentiationen nach t_1.

Im ξ_2, η_2-System hat die Kreispunktkurve der jetzt betrachteten Bewegung nach Analogie von (13) die Gleichung:

$$P_u(\xi_2^2 + \eta_2^2)^2 + (\xi_2^2 + \eta_2^2)(L_u\xi_2 + M_u\eta_2) + Q_u\xi_2\eta_2 = 0. \tag{20}$$

wobei die Koeffizienten, ausführlich geschrieben, folgende Werte haben:

$$P_u = \left(1+\frac{F'^2}{F^2}\right)\left(2\frac{F'}{F}+3\frac{F'F''}{F^2}-\frac{F'''}{F}\right)-3\frac{F'}{F}\left(1+\frac{F''}{F}\right)\left(1+2\frac{F'^2}{F^2}-\frac{F''}{F}\right)$$

$$L_u = -\frac{1+\frac{F'^2}{F^2}}{N_1}\left[3\left(1+2\frac{F'^2}{F^2}-\frac{F''}{F}\right)N_1^2+\alpha_u\beta_{1u}-\alpha_{1u}\beta_u\right]$$

(21)

$$M_u = -\frac{1+\frac{F'^2}{F^2}}{N_1}\left[3\frac{F'}{F}\left(1+\frac{F''}{F}\right)N_1^2+\alpha_u\alpha_{1u}+\beta_u\beta_{1u}\right]$$

$$Q_u = 3\left(1+\frac{F'^2}{F^2}\right)^2 N_1^2.$$

Die in L_u und M_u enthaltenen Größen α_u, β_u, $\alpha_1 u$, $\beta_1 u$ erhalten wir aus den entsprechenden der direkten Bewegung durch Vertauschung von a, b, t, $f(t)$ bez. mit a_1, b_1, t_1, $F(t_1)$ und finden:

$$\alpha_u = \frac{1}{1+\frac{F'^2}{F^2}}\left\{\frac{F'}{F}\left(1+\frac{F''}{F}\right)\frac{da_1}{dt_1}-\left(1+2\frac{F'^2}{F^2}-\frac{F''}{F}\right)\frac{db_1}{dt_1}-\left(1+\frac{F'^2}{F^2}\right)\frac{d^2a_1}{dt_1^2}\right\}$$

(22)

$$\beta_u = \frac{1}{1+\frac{F'^2}{F^2}}\left\{\left(1+2\frac{F'^2}{F^2}-\frac{F''}{F}\right)\frac{da_1}{dt_1}+\frac{F'}{F}\left(1+\frac{F''}{F}\right)\frac{db_1}{dt_1}-\left(1+\frac{F'^2}{F^2}\right)\frac{d^2b_1}{dt_1^2}\right\}$$

sowie:

$$\alpha_{1u} = \frac{1}{1+\frac{F'^2}{F^2}}\left\{\left(1+3\frac{F'^2}{F^2}-3\frac{F''}{F}-\frac{F'F'''}{F^2}\right)\frac{da_1}{dt_1}+\left(2\frac{F'}{F}+3\frac{F'F''}{F^2}-\frac{F'''}{F}\right)\frac{db_1}{dt_1}\right.$$
$$\left.+\left(1+\frac{F'^2}{F^2}\right)\frac{d^3a_1}{dt_1^3}\right\}$$

(23)

$$\beta_{1u} = \frac{1}{1+\frac{F'^2}{F^2}}\left\{-\left(2\frac{F'}{F}+3\frac{F'F''}{F^2}-\frac{F'''}{F}\right)\frac{da_1}{dt_1}+\left(1+3\frac{F'^2}{F^2}-3\frac{F''}{F}-\frac{F'F'''}{F^2}\right)\frac{db_1}{dt_1}\right.$$
$$\left.+\left(1+\frac{F'^2}{F^2}\right)\frac{d^3b_1}{dt_1^3}\right\}.$$

Wir wollen nun versuchen, die Koeffizienten der Kreispunktkurve (20) durch die Koeffizienten der direkten Bewegung auszudrücken. In den Gleichungen (19) des § 3 hatten wir bereits die Differentialquotienten von $F(t_1)$ nach t_1 durch die Differentialquotienten von $f(t)$ nach t ausgedrückt. Mit Hilfe der dort gefundenenen Resultate können wir die in den

Koeffizienten der Gleichung (20) enthaltenen Ausdrücke von $F(t_1)$ durch folgende von $f(t)$ ersetzen:

$$1+\frac{F'^2}{F^2}=1+\frac{f'^2}{f^2}$$

$$1+\frac{F''}{F}=1+2\frac{f'^2}{f^2}-\frac{f''}{f}$$

(24)
$$1+2\frac{F'^2}{F^2}-\frac{F''}{F}=1+\frac{f''}{f}$$

$$2\frac{F'}{F}+3\frac{F'F''}{F^2}-\frac{F'''}{F}=2\frac{f'}{f}+3\frac{f'f''}{f^2}-\frac{f'''}{f}$$

$$1+3\frac{F'^2}{F^2}-3\frac{F''}{F}-\frac{F'F'''}{F^2}=1+3\frac{f'^2}{f^2}-3\frac{f''}{f}-\frac{f'f'''}{f^2}+6\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)\left(\frac{f''}{f}-\frac{f'^2}{f^2}\right).$$

Führen wir in den Gleichungen (22) und (23) die Werte der Gleichungen (19) ein unter Berücksichtigung von (24) und unter Ersetzung von t_1 durch $-t$, so erkennen wir nach etwas langwieriger Rechnung, die hier übergangen sei, daß sich die Größen $\alpha_u \ldots$ usw. aus den Größen $\alpha \ldots$ usw. wie folgt zusammensetzen lassen:

$$\alpha_u=-\frac{1}{f}(\beta\sin t+\alpha\cos t)$$

$$\beta_u=\frac{1}{f}(\alpha\sin t-\beta\cos t)$$

(25)
$$\alpha_{1u}=\frac{1}{f}\left\{\sin t\left(3\alpha+3\frac{f'}{f}\beta+\beta_1\right)-\cos t\left(3\beta-3\frac{f'}{f}\alpha-\alpha_1\right)\right\}$$

$$\beta_{1u}=\frac{1}{f}\left\{\sin t\left(3\beta-3\frac{f'}{f}\alpha-\alpha_1\right)+\cos t\left(3\alpha+3\frac{f'}{f}\beta+\beta_1\right)\right\}.$$

Dann wird:

$$\alpha_u\beta_{1u}-\alpha_{1u}\beta_u=-\frac{1}{f^2}\left\{(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)+3(\alpha^2+\beta^2)\right\}$$

$$=-\frac{1}{f^2}\left\{(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)+3\varrho_1N^2\right\}$$

(26)
$$\alpha_u\alpha_{1u}+\beta_u\beta_{1u}=-\frac{1}{f^2}\left\{(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)+3\frac{f'}{f}(\alpha^2+\beta^2)\right\}$$

$$=-\frac{1}{f^2}\left\{(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)+3\frac{f'}{f}\varrho_1N^2\right\},$$

da nach (8)

$$\alpha^2+\beta^2=\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)\left(x_p'^2+y_p'^2\right)=\varrho_1N^2$$ ist.

Beachten wir noch, daß nach § 3

$$N_1 = \frac{N}{f}$$

ist, dann drücken sich zufolge der Relationen (24) und (26) die Koeffizienten der Gleichung (20) durch die der Gleichung (13) folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} P_u &= P \\ L_u &= -\frac{1}{f}(L + 3\varrho_1^2 N) \\ M_u &= -\frac{1}{f}\left(M - 3\frac{f'}{f}\varrho_1^2 N\right) \\ Q_u &= \frac{Q}{f^2}, \end{aligned}$$

sodaß die Gleichung (20) geschrieben werden kann:

$$P(\xi_2^2+\eta_2^2)^2 + \frac{\xi_2^2+\eta_2^2}{f}\left\{-\xi_2(L+3\varrho_1^2 N) - \eta_2\left(M - 3\frac{f'}{f}\varrho_1^2 N\right)\right\} + \frac{Q}{f^2}\xi_2\eta_2 = 0.$$

Jetzt haben wir noch, um die Kreispunktkurve der umgekehrten Bewegung zu erhalten, wie auf Seite 18 die Ebene ξ, η auf ihre momentane Phase zu transformieren vermittels der Relationen:

$$\bar{\xi}_2 = \xi_2 f(t), \quad \bar{\eta}_2 = \eta_2 f(t)$$

und erhalten:

$$P\frac{(\bar{\xi}_2^2+\bar{\eta}_2^2)^2}{f^4} + \frac{\bar{\xi}_2^2+\bar{\eta}_2^2}{f^3}\left\{-\frac{\bar{\xi}_2}{f}(L+3\varrho_1^2 N) - \frac{\bar{\eta}_2}{f}\left(M - 3\frac{f'}{f}\varrho_1^2 N\right)\right\} + \frac{Q\bar{\xi}_2\bar{\eta}_2}{f^4} = 0.$$

Multiplizieren wir mit f^4 und transformieren auf das x_2, y_2-System, so nimmt die Kreispunktkurve der umgekehrten Bewegung die Gleichung an:

$$P(x_2^2+y_2^2)^2 + (x_2^2+y_2^2)\left\{(L+3\varrho_1^2 N)x_2 + \left(M - 3\frac{f'}{f}\varrho_1^2 N\right)y_2\right\} + Qx_2y_2 = 0. \tag{27}$$

Sie ist also eine Kurve der gleichen Art wie die Kreispunktkurve der direkten Bewegung. Bei den starren Systemen be-

stehen zwischen den beiden Kreispunktkurven gewisse Beziehungen, die sich aus der Tatsache herleiten, daß die Krümmungszentra der Bahnkurven, welche die Punkte der Kreispunktkurve der direkten Bewegung beschreiben, auf der Kreispunktkurve der umgekehrten Bewegung liegen. Diese Beziehungen bleiben für die ähnlich veränderlichen Systeme nicht bestehen, da hier der Kreispunktkurve als Ort der zugehörigen Krümmungsmittelpunkte, wie wir später sehen werden, eine Kurve fünfter Ordnung entspricht (s. S. 59).

§ 5.

Die Krümmung der Polkurven.

Es handelt sich in diesem Paragraphen darum, das Analogon zu der für starre Systeme so bekannten speziellen „Euler-Savaryschen Formel“ aufzustellen, die einen Zusammenhang zwischen den Krümmungsradien der beiden Polkurven und dem Durchmesser des Wendekreises gibt. Die feste Polkurve besaß nach § 2 die Gleichungen:

$$x_p = a - \frac{1}{1+\frac{f'^2}{f^2}}\left(\frac{db}{dt}+\frac{f'}{f}\frac{da}{dt}\right), \quad y_p = b + \frac{1}{1+\frac{f'^2}{f^2}}\left(\frac{da}{dt}-\frac{f'}{f}\frac{db}{dt}\right).$$

Die ersten Differentialquotienten nach t können wir mit Hilfe der Formeln (8) des § 4 durch die Größen α und β ausdrücken:

$$x'_p = \frac{1}{1+\frac{f'^2}{f^2}}\left(\frac{f'}{f}\alpha+\beta\right), \qquad y'_p = \frac{1}{1+\frac{f'^2}{f^2}}\left(\frac{f'}{f}\beta-\alpha\right).$$

Wir bilden die zweiten:

$$x''_p = \frac{1}{\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)^2}\left\{\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)\left(\frac{f'}{f}\frac{d\alpha}{dt}+\frac{d\beta}{dt}+\left[\frac{f''}{f}-\frac{f'^2}{f^2}\right]\alpha\right)\right.$$
$$\left. -2\frac{f'}{f}\left(\frac{f''}{f}-\frac{f'^2}{f^2}\right)\left(\frac{f'}{f}\alpha+\beta\right)\right\}$$

$$y''_p = \frac{1}{\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)^2}\left\{\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)\left(\frac{f'}{f}\frac{d\beta}{dt}-\frac{d\alpha}{dt}+\left[\frac{f''}{f}-\frac{f'^2}{f^2}\right]\beta\right)\right.$$
$$\left. -2\frac{f'}{f}\left(\frac{f''}{f}-\frac{f'^2}{f^2}\right)\left(\frac{f'}{f}\beta-\alpha\right)\right\}$$

und erhalten für den Ausdruck $x'_p y''_p - y'_p x''_p$ den Wert:

$$x'_p y''_p - y'_p x''_p = \frac{1}{\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)^2}\left\{\left(\frac{f''}{f}-\frac{f'^2}{f^2}\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)+\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)\left(\alpha\frac{d\beta}{dt}-\beta\frac{d\alpha}{dt}\right)\right\}.$$

Nun lassen sich die Differentialquotienten von α und β wie folgt durch die Größen α, β, α_1, β_1 ausdrücken:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{1+\frac{f'^2}{f^2}}\left\{-\frac{f'}{f}\left(1+\frac{f''}{f}\right)\alpha+\left(1+2\,\frac{f'^2}{f^2}-\frac{f''}{f}\right)\beta-\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)\alpha_1\right\}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{1+\frac{f'^2}{f^2}}\left\{-\frac{f'}{f}\left(1+\frac{f''}{f}\right)\beta-\left(1+2\,\frac{f'^2}{f^2}-\frac{f''}{f}\right)\alpha-\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)\beta_1\right\},$$

sodaß:

$$\alpha\frac{d\beta}{dt}-\beta\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{1+\frac{f'^2}{f^2}}\left\{-\left(1+2\,\frac{f'^2}{f^2}-\frac{f''}{f}\right)\left(\alpha^2+\beta^2\right)-\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)\left(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta\right)\right\}$$

wird.

Dann aber ergibt sich unter Rücksicht auf:

$$(1)\qquad \alpha^2+\beta^2 = \left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)\left(x'^2_p+y'^2_p\right) = \left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)N^2$$

obiger Ausdruck zu:

$$(2)\quad x'_p y''_p - y'_p x''_p = \frac{\left[\left(\frac{f''}{f}-\frac{f'^2}{f^2}\right)-\left(1+2\,\frac{f'^2}{f^2}-\frac{f''}{f}\right)\right]N^2-(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)}{\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)}.$$

Der Krümmungsmittelpunkt der festen Polkurve im Pol hat die Koordinaten:

$$x_m = x_p - \frac{x'^2_p+y'^2_p}{x'_p y''_p - y'_p x''_p}\,y'_p$$

$$y_m = y_p + \frac{x'^2_p+y'^2_p}{x'_p y''_p - y'_p x''_p}\,x'_p.$$

In dem an den Pol verschobenen und um den Winkel φ

$$\left(\sin\varphi = -\frac{y'_p}{N},\quad \cos\varphi = -\frac{x'_p}{N}\right)$$

gedrehten x_2, y_2-System ergibt sich dann vermöge der Transformationsformeln:

$$x = x_p + x_2\cos\varphi - y_2\sin\varphi = x_p + \frac{1}{N}\left(-x_2 x'_p + y_2 y'_p\right)$$

$$y = y_p + x_2\sin\varphi + y_2\cos\varphi = y_p + \frac{1}{N}\left(-x_2 y'_p - y_2 x'_p\right)$$

für diese Koordinaten:

$$(3) \qquad x_{2,m} = 0, \qquad y_{2,m} = -\frac{N^3}{x'_p y''_p - y'_p x''_p},$$

und wir finden aus (2) und (3) für den reziproken Krümmungsradius der festen Polkurve, wenn wir demselben das Vorzeichen der Ordinate des Krümmungszentrums geben, den Wert:

$$(4) \qquad \frac{1}{R_p} = \frac{\left[\left(1+2\frac{f'^2}{f^2}-\frac{f''}{f}\right)-\left(\frac{f''}{f}-\frac{f'^2}{f^2}\right)\right]N^2+(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)}{\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)N^3}.$$

Die Gleichungen der Systemkurve π, deren momentane Phase die bewegliche Polkurve ergibt, lauteten nach § 2:

$$\xi_\pi = \frac{1}{f\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)}\left\{\sin t\left(\frac{da}{dt}-\frac{f'}{f}\frac{db}{dt}\right)-\cos t\left(\frac{db}{dt}+\frac{f'}{f}\frac{da}{dt}\right)\right\}$$

$$\eta_\pi = \frac{1}{f\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)}\left\{\sin t\left(\frac{db}{dt}+\frac{f'}{f}\frac{da}{dt}\right)+\cos t\left(\frac{da}{dt}-\frac{f'}{f}\frac{db}{dt}\right)\right\}.$$

Wir können also die Koordinaten des Systempunktes ξ_π, η_π aus denen des festen Poles wie folgt zusammensetzen:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \xi_\pi &= \frac{1}{f}\left\{(x_p-a)\cos t+(y_p-b)\sin t\right\} \\ \eta_\pi &= \frac{1}{f}\left\{-(x_p-a)\sin t+(y_p-b)\cos t\right\} \end{aligned}$$

und bekommen für die ersten Differentialquotienten nach t:

$$(6) \qquad \xi'_\pi = \frac{1}{f}(x'_p\cos t+y'_p\sin t), \qquad \eta'_\pi = \frac{1}{f}(-x'_p\sin t+y'_p\cos t),$$

woraus folgt:

$$N_1^2 = \left(\frac{d\xi_\pi}{dt_1}\right)^2+\left(\frac{d\eta_\pi}{dt_1}\right)^2 = \left(\frac{d\xi_\pi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta_\pi}{dt}\right)^2 = \frac{1}{f^2}(x'^2_p+y'^2_p) = \frac{N^2}{f^2}$$

oder:

$$(7) \qquad \frac{d\sigma_\pi}{dt} = \frac{1}{f}\frac{ds_p}{dt}.$$

Hiervon ist in unseren bisherigen Untersuchungen schon mehrfach Gebrauch gemacht worden. Die zweiten Differentialquotienten ergeben sich zu:

$$\xi''_\pi = \frac{1}{f}\left\{(-x'_p \sin t + y'_p \cos t) - \frac{f'}{f}(x'_p \cos t + y'_p \sin t) + (x''_p \cos t + y''_p \sin t)\right\}$$

$$\eta''_\pi = \frac{1}{f}\left\{-(x'_p \cos t + y'_p \sin t) - \frac{f'}{f}(-x'_p \sin t + y'_p \cos t) + (-x''_p \sin t + y''_p \cos t)\right\},$$

sodaß

$$\xi'_\pi \eta''_\pi - \eta'_\pi \xi''_\pi = \frac{1}{f'^2}\left\{(x'_p y''_p - y'_p x''_p) - (x'^2_p + y'^2_p)\right\}$$

$$(8) \qquad = \frac{-2\left(1+2\frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f}\right)N^2 - (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)}{f^2\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)}$$

wird. Die Systemkurve π hat im Punkte ξ_π, η_π die Krümmungsmittelpunktskoordinaten:

$$\xi_m = \xi_\pi - \frac{\xi'^2_\pi + \eta'^2_\pi}{\xi'_\pi \eta''_\pi - \eta'_\pi \xi''_\pi}\eta'_\pi$$

$$\eta_m = \eta_\pi + \frac{\xi'^2_\pi + \eta'^2_\pi}{\xi'_\pi \eta''_\pi - \eta'_\pi \xi''_\pi}\xi'_\pi.$$

Verschieben wir das ξ, η-System an den Punkt ξ_π, η_π und drehen es um den Winkel $\varphi - t$, so entsteht ein ξ^1_2, η^1_2-System, welches gegen das auf Seite 17 eingeführte ξ_2, η_2-System um 180^0 verdreht, also mit dem x_2, y_2-System parallel ist. Zwischen dem ξ, η- und dem ξ^1_2, η^1_2-System bestehen dabei die Transformationsformeln:

$$\xi = \xi_\pi + \xi^1_2 \cos(\varphi - t) - \eta^1_2 \sin(\varphi - t)$$

$$= \xi_\pi + \frac{1}{N}\left\{-\xi^1_2(x'_p \cos t + y'_p \sin t) + \eta^1_2(-x'_p \sin t + y'_p \cos t)\right\}$$

$$\eta = \eta_\pi + \xi^1_2 \sin(\varphi - t) + \eta^1_2 \cos(\varphi - t)$$

$$= \eta_\pi + \frac{1}{N}\left\{-\xi^1_2(-x'_p \sin t + y'_p \cos t) - \eta^1_2(x'_p \cos t + y'_p \sin t)\right\}.$$

Mit ihrer Hilfe finden wir für die Krümmungsmittelpunktskoordinaten der Systemkurve π unter Beachtung der Gleichungen (6) und (8):

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\xi^1_{2,m} = 0, \\ &\eta^1_{2,m} = -\frac{N^3}{f^3(\xi'_\pi \eta''_\pi - \eta'_\pi \xi''_\pi)} = -\frac{N^3}{f^3\{(x'_p y''_p - y'_p x''_p) - (x'^2_p + y'^2_p)\}}. \end{aligned}$$

Wir bilden jetzt von der Kurve π die der Systemlage t entsprechende Phase $\bar{\pi}$; dann hat das Krümmungszentrum der so gewonnenen beweglichen Polkurve $\bar{\pi}$ die Koordinaten (vergl. S. 18 und 20):

$$(10) \qquad x_{2,m} = 0, \qquad y_{2,m} = -\frac{N^3}{(x'_p y''_p - y'_p x''_p) - (x'^2_p + y'^2_p)},$$

und somit besitzt der reziproke Krümmungsradius der beweglichen Polkurve unter der bewußten Festsetzung des Vorzeichens den Wert:

$$(11) \qquad \frac{1}{R_{\bar{\pi}}} = \frac{2\left(1+2\frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f}\right)N^2 + (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)}{\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)N^3}.$$

Derselbe läßt sich auch schreiben:

$$\frac{1}{R_{\bar{\pi}}} = -\frac{1+2\frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f}}{\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)N} + \frac{3\left(1+2\frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f}\right)N^2 + (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)}{\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)N^3}$$

und infolgedessen wegen den Gleichungen (10) des § 3 und (14) des § 4 auch:

$$\frac{1}{R_{\bar{\pi}}} = -\frac{1}{d_w} - 3\frac{L}{Q}.$$

Nach Seite 27 besitzt der Kreis, welcher den die Polbahntangente berührenden Zweig der Kreispunktkurve im Pole oskuliert, den Durchmesser $d_0 = -\frac{Q}{L}$; also gilt die sich auch bei Müller findende Beziehung:

$$(12) \qquad \frac{1}{R_{\bar{\pi}}} = \frac{3}{d_o} - \frac{1}{d_w}.$$

Ist $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 0$, so oskuliert nach Seite 29 der Wendekreis die Kreispunktkurve, es ist also $d_w = d_0$. Dann gilt aber nach (12):

$$\frac{1}{R_{\bar{\pi}}} = \frac{2}{d_w}, \quad d_w = 2R_{\bar{\pi}},$$

d. h. der Wendekreis oskuliert auch die bewegliche Polkurve im Pol.

Satz: Ist $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 0$, so oskuliert der Wendekreis neben der Kreispunktkurve auch die bewegliche Polkurve im Pol.

Zwischen den Krümmungsradien der festen und der beweglichen Polkurve besteht nach (4) und (11) die Beziehung:

$$\frac{1}{R_{\bar{\pi}}} - \frac{1}{R_p} = \frac{1}{N}. \tag{13}$$

Andererseits gilt zwischen den Durchmessern des Wende- und des Rückkehrkreises nach (10) und (23) des § 3 die Relation:

$$\frac{1}{d_w} - \frac{1}{d_r} = \frac{2}{N}, \tag{14}$$

sodaß wir mit Müller die Beziehung finden:

$$\frac{1}{R_{\bar{\pi}}} - \frac{1}{R_p} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{d_w} - \frac{1}{d_r}\right). \tag{15}$$

Da nach Seite 21 für alle ähnlich veränderlichen Systeme, deren $f(t) = Ce^{kt}$ ist, $d_r = -d_w$ ist, geht für diese speziellen ähnlich veränderlichen Systeme, zu denen auch die starren Systeme als Sonderfall hinzugerechnet werden können, Gleichung (15) über in die Euler-Savarysche Formel:

$$\frac{1}{R_\pi} - \frac{1}{R_p} = \frac{1}{d_w}.$$

§ 6.

Das Zerfallen der Kreispunktkurve.

1. Das Zerfallen der Kreispunktkurve in 2 Kegelschnitte.

Wann zerfällt die Kreispunktkurve:

$$P(x_2^2 + y_2^2)^2 + (x_2^2 + y_2^2)(Lx_2 + My_2) + Qx_2y_2 = 0 \tag{1}$$

als Kurve vierter Ordnung in 2 Kegelschnitte?

Der Ansatz für die in 2 Kegelschnitte zerfallende Kurve vierter Ordnung lautet allgemein:

$$\begin{aligned}(a_{11}x_2^2 + 2a_{12}x_2y_2 + a_{22}y_2^2 + 2a_{13}x_2 + 2a_{23}y_2 + a_{33})(b_{11}x_2^2 \\ + 2b_{12}x_2y_2 + b_{22}y_2^2 + 2b_{13}x_2 + 2b_{23}y_2 + b_{33}) = 0.\end{aligned} \tag{2}$$

Da in der Gleichung der Kreispunktkurve kein Absolutglied auftritt, muß in (2)

$$a_{33} b_{33} = 0 \tag{3}$$

sein; da ferner die Kreispunktkurve keine linearen und reinquadratischen Glieder enthält, müssen in (2) noch folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} 2(a_{13} b_{33} + a_{33} b_{13}) &= 0 \\ 2(a_{23} b_{33} + a_{33} b_{23}) &= 0 \\ a_{11} b_{33} + a_{33} b_{11} + 4 a_{13} b_{13} &= 0 \\ a_{22} b_{33} + a_{33} b_{22} + 4 a_{23} b_{23} &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Der Bedingung (3) kann auf drei verschiedene Weisen genügt werden:

$$\text{(I.)}\ a_{33} = 0,\quad b_{33} \neq 0; \qquad \text{(II.)}\ a_{33} \neq 0,\quad b_{33} = 0;$$
$$\text{(III.)}\ a_{33} = 0,\quad b_{33} = 0.$$

Für den Fall (I.) müßte wegen (4) $a_{13} = a_{23} = a_{11} = a_{22} = 0$ sein, dann würde Gleichung (2) zu

$$2 a_{12} x_2 y_2 (b_{11} x_2^2 + 2 b_{12} x_2 y_2 + b_{22} y_2^2 + 2 b_{13} x_2 + 2 b_{23} y_2 + b_{33}) = 0. \tag{5}$$

Da in ihr keine vierten und keine dritten Potenzen von x_2 und y_2 vorkommen, müßte die Gleichung der Kreispunktkurve (1) sich für den vorliegenden Fall reduzieren auf:

$$x_2 y_2 = 0.$$

Dies aber erfordert, daß in der Gleichung (5)

$$b_{11} = b_{12} = b_{22} = b_{13} = b_{23} = 0$$

ist. Hierdurch würde sich der eine der Kegelschnitte auf $b_{33} = 0$ reduzieren, was unmöglich ist.

Der Fall (II.) erledigt sich in analoger Weise.

Der Fall (III.) spaltet sich wegen (4) in vier Unterfälle, nämlich:

1.) $a_{13} = a_{23} = 0$, 2.) $b_{13} = b_{23} = 0$
3.) $a_{13} = b_{23} = 0$, 4.) $b_{13} = a_{23} = 0$.

Die beiden ersten Unterfälle führen ebenfalls auf Unmöglichkeiten, z. B. würde bei 1.) der Ansatz lauten:

$$\begin{aligned} (a_{11} x_2^2 + 2 a_{12} x_2 y_2 + a_{22} y_2^2)(b_{11} x_2^2 + 2 b_{12} x_2 y_2 + b_{22} y_2^2 \\ + 2 b_{13} x_2 + 2 b_{23} y_2) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Soll nun Gleichung (1) mit (6) übereinstimmen, so müßte

$$Q = 0$$

sein;

$$Q \text{ ist aber } = 3\left(1 + \frac{f'^2}{f^2}\right)^2 N^2,$$

kann also nimmermehr der Null gleich werden.

Der Unterfall 2.) ist mit dem ersten ganz gleichbedeutend, daher auch unmöglich. Ebenso sind der 3.) und 4.) Unterfall in ihrem Wesen identisch, wir können uns daher auf den 3.) Unterfall beschränken und finden:

Für das Zerfallen der Kreispunktkurve in 2 Kegelschnitte ist nur ein Ansatz erlaubt von der Form:

$$(7) \quad \begin{aligned}(a_{11}x_2^2 + 2a_{12}x_2y_2 + a_{22}y_2^2 + 2a_{23}y_2)(b_{11}x_2^2 + 2b_{12}x_2y_2 \\ + b_{22}y_2^2 + 2b_{13}x_2) = 0.\end{aligned}$$

Zufolge dieser Gleichung kann also die Kreispunktkurve nur in 2 Kegelschnitte zerfallen, von denen der eine im Koordinatenanfang die x_2-Achse, der andere daselbst die y_2-Achse berührt. Dieses Resultat konnte man voraussehen, da ja die Kreispunktkurve im Koordinatenursprung beide Achsen berührt und demgemäß diese Eigenschaft auch bei dem Zerfallen der Kurve erhalten bleiben muß. Bedenken wir ferner, daß die Kreispunktkurve eine bizirkulare Kurve vierter Ordnung ist, also die beiden imaginären Kreispunkte der Ebene als Doppelpunkte besitzt, so erkennen wir, daß, damit diese Eigenschaft beim Zerfallen der Kurve bestehen bleibt, die beiden obigen Kegelschnitte nur zwei Kreise sein können. Wir finden somit den

Satz: Die Kreispunktkurve kann nur in zwei Kreise zerfallen, von denen der eine im Ursprung die x_2-Achse, der andere daselbst die y_2-Achse berührt.

Schreiben wir für $2a_{23} : a_{23}$, für $2b_{13} : b_{13}$, so lautet die Gleichung der zerfallenden Kreispunktkurve:

$$(8) \quad [a_{11}(x_2^2 + y_2^2) + a_{23}y_2] \cdot [b_{11}(x_2^2 + y_2^2) + b_{13}x_2] = 0.$$

Soll nun die Gleichung (1) mit (8) übereinstimmen, so müssen die Faktoren der einen Gleichung proportional sein den entsprechenden der andern. Es muß mithin:

$$P = \lambda a_{11} b_{11}$$
$$L = \lambda a_{11} b_{13}$$
$$M = \lambda b_{11} a_{23}$$
$$Q = \lambda a_{23} b_{13}$$

sein und demzufolge tritt ein Zerfallen in zwei Kreise nur ein für:

$$PQ = LM. \tag{9}$$

2. Das Zerfallen der Kreispunktkurve in eine Kurve dritter Ordnung und eine gerade Linie und Lösung der dabei auftretenden Differentialgleichung dritter Ordnung.

Wir machen hier wieder von der Tatsache Gebrauch, daß die Kreispunktkurve vierter Ordnung je zweimal durch die imaginären Kreispunkte der Ebene geht. Da es nun keine Kurve dritter Ordnung von der gleichen Eigenschaft gibt, sondern eine Kurve dritter Ordnung die imaginären Kreispunkte höchstens nur als einfache Punkte besitzen kann, so muß bei dem in diesem Kapitel angenommenen Zerfallen der bizirkularen Kurve vierter Ordnung neben einer zirkularen Kurve dritter Ordnung die unendlich ferne Gerade auftreten, die ja die Kreispunkte enthält.

Satz: Die Kreispunktkurve kann nur in eine zirkulare Kurve dritter Ordnung und die unendlich ferne Gerade zerfallen.

Dies tritt ein für $P = 0$ und die zirkulare Kurve dritter Ordnung hat die Gleichung:

$$(x_2^2 + y_2^2)(Lx_2 + My_2) + Qx_2y_2 = 0.$$

Wir erkennen leicht, daß diese Kurve dritter Ordnung wieder entweder in die Polbahntangente und einen die Polbahnnormale im Pol berührenden Kreis (für $L = 0$) oder in die Polbahn-

normale und einen die Polbahntangente im Pol berührenden Kreis (für $M=0$) oder in die Polbahntangente, -normale und die unendlich ferne Gerade (für $L=M=0$) zerfallen kann und finden somit den

Satz: Die Kreispunktkurve kann endlich noch in die unendlich ferne Gerade, einen Kreis und eine Gerade oder in die doppelt zu zählende unendlich ferne Gerade und zwei Gerade zerfallen.

Die Größe P, die der Null gleich gesetzt die Bedingung des Zerfallens der Kreispunktkurve in die unendlich ferne Gerade und eine Kurve dritter Ordnung angibt, hat nach § 4 den Wert:

$$P=\varrho_1\chi_3-3\varrho_2\chi_2=\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)\left(2\frac{f'}{f}+3\frac{f'f''}{f^2}-\frac{f'''}{f}\right)-3\frac{f'}{f}\left(1+\frac{f''}{f}\right)\left(1+2\frac{f'^2}{f^2}-\frac{f''}{f}\right),$$

der sich zusammenfassen läßt zu:

$$P=-\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)\left(\frac{f'}{f}+\frac{f'''}{f}\right)-3\frac{f'}{f}\left(1+\frac{f''}{f}\right)\left(\frac{f'^2}{f^2}-\frac{f''}{f}\right).$$

Die Bedingung $P=0$ läßt sich demnach schreiben:

$$(1)\qquad f(f^2+f'^2)(f'+f''')+3f'(f+f'')(f'^2-ff'')=0$$

und wir erhalten den wesentlichen

Satz: Ganz unabhängig von der sonstigen Bewegung des ähnlich veränderlichen Systems zerfällt für jedes $f(t)$, welches obiger Differentialgleichung dritter Ordnung genügt, die Kreispunktkurve einer jeden Systemlage in die unendlich ferne Gerade und eine Kurve dritter Ordnung.

Wir wollen uns jetzt mit der Lösung der Differentialgleichung dritter Ordnung (1) beschäftigen. Da sie nur die Funktion f und ihre Ableitungen, nicht aber das Argument t enthält, können wir sie auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung reduzieren, indem wir setzen:

$$f''=f'\frac{df'}{df},\quad f'''=f'\frac{df''}{df}=f'\frac{d\left(f'\frac{df'}{df}\right)}{df}=f'\left[f'\frac{d^2f'}{df^2}+\left(\frac{df'}{df}\right)^2\right].$$

Führen wir dies in (1) ein, so erhalten wir:

$$ff'(f^2+f'^2)\left[1+\left(\frac{df'}{df}\right)^2+f'\frac{d^2f'}{df^2}\right]+3f'^2\left(f+f'\frac{df'}{df}\right)\left(f'-f\frac{df'}{df}\right)=0$$

und nach Abspaltung der Lösung $f'=0$, $f=K$ bleibt die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(2)\quad f(f^2+f'^2)\left[1+\left(\frac{df'}{df}\right)^2+f'\frac{d^2f'}{df^2}\right]+3f'\left(f+f'\frac{df'}{df}\right)\left(f'-f\frac{df'}{df}\right)=0.$$

Wir führen jetzt für f' eine neue Veränderliche $F(f)$ ein mittels der Substitution:

$$(3)\qquad f^2+f'^2=F(f).$$

Dann gelten die Beziehungen:

$$f^2+f'^2=F(f), \qquad f'^2=F-f^2$$

$$f+f'\frac{df'}{df}=\frac{1}{2}\frac{dF}{df}, \qquad f'\frac{df'}{df}=\frac{1}{2}\frac{dF}{df}-f$$

$$1+\left(\frac{df'}{df}\right)^2+f'\frac{d^2f'}{df^2}=\frac{1}{2}\frac{d^2F}{df^2}, \qquad f'\left(f'-f\frac{df'}{df}\right)=F-\frac{1}{2}f\frac{dF}{df}$$

und unsere Differentialgleichung (2) geht über in:

$$\frac{1}{2}fF\frac{d^2F}{df^2}+\frac{3}{2}\frac{dF}{df}\left(F-\frac{1}{2}f\frac{dF}{df}\right)=0$$

oder:

$$(4)\qquad \frac{d^2F}{df^2}+3\frac{dF}{df}\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{2F}\frac{dF}{df}\right)=0.$$

Dieselbe können wir auch wie folgt schreiben:

$$\frac{\frac{d^2F}{df^2}}{\frac{dF}{df}}+3\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{2}\frac{\frac{dF}{df}}{F}\right)=0$$

$$\frac{\frac{d\left(\frac{dF}{df}\right)}{df}}{\frac{dF}{df}}+3\left(\frac{1}{f}-\frac{1}{2}\frac{\frac{dF}{df}}{F}\right)=0$$

$$(5)\qquad \frac{d\left(\frac{dF}{df}\right)}{\frac{dF}{df}}+3\left(\frac{df}{f}-\frac{1}{2}\frac{dF}{F}\right)=0.$$

Die Integration ergibt:

$$\lg \frac{dF}{df} + 3\left(\lg f - \frac{1}{2}\lg F\right) = C$$

$$\frac{dF \cdot f^3}{df \cdot F^{\frac{3}{2}}} = C$$

$$\frac{dF}{F^{\frac{3}{2}}} = \frac{C\,df}{f^3}. \tag{6}$$

Die Veränderlichen sind getrennt und wir können nochmals integrieren:

$$\frac{F^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} = C\frac{f^{-2}}{-2} + K$$

$$\frac{1}{\sqrt{F}} = \frac{C_1}{f^2} + K_1 = \frac{C_1 + K_1 f^2}{f^2},$$

oder wenn wir quadrieren und bei den Konstanten die Indizes wieder fortlassen:

$$F = \frac{f^4}{(C + Kf^2)^2}. \tag{7}$$

Da nach (3) $F = f^2 + f'^2$ war, haben wir jetzt noch die Differentialgleichung zu lösen:

$$f^2 + f'^2 = \frac{f^4}{(C + Kf^2)^2} \tag{8}$$

oder:

$$f' = \frac{f}{C + Kf^2}\sqrt{f^2 - (C + Kf^2)^2}.$$

Durch Integration folgt:

$$t + c = \int \frac{C + Kf^2}{f\sqrt{f^2 - (C + Kf^2)^2}}\,df. \tag{9}$$

Wir beschäftigen uns jetzt mit dem Integral:

$$J = \int \frac{C + Kf^2}{f\sqrt{f^2 - (C + Kf^2)^2}}\,df.$$

Zunächst substituieren wir:

$$f^2 = u, \quad 2f\,df = du, \quad \frac{df}{f} = \frac{du}{2f^2} = \frac{du}{2u}.$$

Dann wird unser Integral zu:

$$J = \frac{1}{2}\int \frac{C + Ku}{u\sqrt{u - (C + Ku)^2}}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{C + Ku}{u\sqrt{-K^2u^2 + (1 - 2CK)u - C^2}}\,du$$

und spaltet sich also in die beiden Integrale:

$$J_1 = \frac{K}{2}\int \frac{du}{\sqrt{-K^2u^2+(1-2CK)u-C^2}}$$

und

$$J_2 = \frac{C}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{-K^2u^2+(1-2CK)u-C^2}}.$$

Nun ist allgemein:

$$\int \frac{du}{\sqrt{Au^2+2Bu+C}} = \frac{1}{\sqrt{-A}} \arcsin\left(-\frac{Au+B}{\sqrt{B^2-AC}}\right)$$

und vermittels der Substitution $u=\frac{1}{z}$, $du=-\frac{dz}{z^2}$:

$$\int \frac{du}{u\sqrt{Au^2+2Bu+C}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{Cz^2+2Bz+A}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin\left(-\frac{Cz+B}{\sqrt{B^2-AC}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin\left(-\frac{C+Bu}{u\sqrt{B^2-AC}}\right).$$

In unserem Falle ist für A zu setzen $-K^2$

B „ „ $\frac{1}{2}-CK$

C „ „ $-C^2$

und demnach wird:

$$J_1 = \frac{K}{2}\frac{1}{K} \arcsin\left(-\frac{-K^2u+\frac{1}{2}-CK}{\sqrt{\frac{1}{4}-CK}}\right) = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{K^2u+CK-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}-CK}}\right)$$

(10)

$$J_2 = -\frac{C}{2}\frac{1}{C} \arcsin\left(-\frac{-C^2+(\frac{1}{2}-CK)u}{u\sqrt{\frac{1}{4}-CK}}\right) = -\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{(CK-\frac{1}{2})u+C^2}{u\sqrt{\frac{1}{4}-CK}}\right).$$

Diese beiden Integrale haben wir zu addieren. Zwei arcsin können wir aber nach folgender bekannten Formel zusammenfassen:

$$\arcsin w_1 - \arcsin w_2 = \arcsin\left[w_1\sqrt{1-w_2^2} - w_2\sqrt{1-w_1^2}\right].$$

Bei uns ist:

$$w_1 = \frac{K^2u+CK-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}-CK}}, \qquad w_2 = \frac{(CK-\frac{1}{2})u+C^2}{u\sqrt{\frac{1}{4}-CK}}$$

$$1-w_1^2 = \frac{-K^2(K^2u^2-u+2CKu+C^2)}{\frac{1}{4}-CK}$$

$$1-w_2^2 = \frac{-C^2(K^2u^2-u+2CKu+C^2)}{u^2(\frac{1}{4}-CK)}$$

$$w_1\sqrt{1-w_2^2} - w_2\sqrt{1-w_1^2} = \frac{2(uK-C)}{u(1-4CK)}\sqrt{-(uK-C)^2+(1-4CK)u}.$$

Also wird die Summe der beiden Integrale (10):

$$(11)\quad t+c=\frac{1}{2}\arcsin\left\{\frac{2(uK-C)}{(1-4CK)u}\sqrt{(1-4CK)u-(uK-C)^2}\right\}$$

und damit ist die Differentialgleichung (8) gelöst.

Wir wollen aber noch u als Funktion von t ausdrücken. Aus (11) folgt:

$$\sin 2(t+c)=\frac{2(uK-C)}{(1-4CK)u}\sqrt{(1-4CK)u-(uK-C)^2},$$

quadriert gibt:

$$(1-4CK)^2u^2\cdot\sin^2[2(t+c)]=4(uK-C)^2[(1-4CK)u-(uK-C)^2]$$

$$(1-4CK)^2u^2-(1-4CK)^2u^2\cos^2[2(t+c)]-4(1-4CK)(uK-C)^2u$$
$$+4(uK-C)^4=0$$

$$[2(uK-C)^2-(1-4CK)u]^2=(1-4CK)^2u^2\cos^2[2(t+c)].$$

Wir ziehen links und rechts die Wurzel und erhalten:

$$2(uK-C)^2-(1-4CK)u=\pm(1-4CK)u\cos[2(t+c)]$$

$$2(uK-C)^2=(1-4CK)u[1\pm\cos 2(t+c)]$$

$$(12)\quad (uK-C)^2=(1-4CK)u\,\frac{\cos^2}{\sin^2}(t+c).$$

Wir führen die folgende Rechnung nur für cos weiter. Division durch K^2 gibt:

$$\left(u-\frac{C}{K}\right)^2=\left(\frac{1}{K^2}-4\frac{C}{K}\right)u\cos^2(t+c).$$

Setzen wir:

$$\frac{C}{K}=C_1,\qquad \frac{1}{K^2}-4\frac{C}{K}=2K_1,$$

so geht die letzte Gleichung über in:

$$(u-C_1)^2=2K_1u\cos^2(t+c)$$

$$u^2-2u[C_1+K_1\cos^2(t+c)]+C_1^2=0.$$

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung sind:

$$u=C_1+K_1\cos^2(t+c)\pm\cos(t+c)\sqrt{2C_1K_1+K_1^2\cos^2(t+c)},$$

die wir auch schreiben können:

$$u=C_1+(\sqrt{K_1}\cos c\cdot\cos t-\sqrt{K_1}\sin c\cdot\sin t)^2\pm(\sqrt{K_1}\cos c\cdot\cos t$$
$$-\sqrt{K_1}\sin c\cdot\sin t)\sqrt{2C_1+(\sqrt{K_1}\cos c\cdot\cos t-\sqrt{K_1}\sin c\cdot\sin t)^2}.$$

Setzen wir:

$$C_1 = c_1, \quad -\sqrt{K_1}\sin c = c_2, \quad \sqrt{K_1}\cos c = c_3,$$

so nimmt u die Gestalt an:

$$(13) \qquad \begin{aligned} u &= c_1 + (c_2 \sin t + c_3 \cos t)^2 \\ &\pm (c_2 \sin t + c_3 \cos t)\sqrt{2\,c_1 + (c_2 \sin t + c_3 \cos t)^2}. \end{aligned}$$

Nach Seite 45 war $u = f^2(t)$ gesetzt worden. Da nun in (13) $2u$ das vollständige Quadrat liefert:

$$2u = \left[(c_2 \sin t + c_3 \cos t) \pm \sqrt{2\,c_1 + (c_2 \sin t + c_3 \cos t)^2}\right]^2,$$

können wir links und rechts die Wurzel ausziehen und erhalten, wenn wir noch

$$c_1 = k_1, \quad \frac{c_2}{\sqrt{2}} = k_2, \quad \frac{c_3}{\sqrt{2}} = k_3$$

setzen, für $f(t)$ den Ausdruck:

$$(14) \qquad f(t) = k_2 \sin t + k_3 \cos t \pm \sqrt{k_1 + (k_2 \sin t + k_3 \cos t)^2}.$$

Wir haben aber noch eine Lösung übergangen. Wir durften nämlich (12) nicht durch K^2 dividieren, wenn $K = 0$ ist. Für $K = 0$ wird (12) zu:

$$C^2 = u\cos^2(t+c) = f^2\cos^2(t+c)$$

$$f = \pm\frac{C}{\cos(t+c)} = \pm\frac{C}{\cos c \cdot \cos t - \sin c \cdot \sin t}$$

$$(15) \qquad f(t) = \frac{1}{c_1 \sin t + c_2 \cos t}.$$

Hätten wir in (12) statt cos den sin gewählt, so würden sich in (14) und (15) nur die Konstanten ändern.

Wir finden den

Satz: Die Differentialgleichung (1) besitzt die Lösungen (14) und (15), also zerfällt für jedes ähnlich veränderliche System, dessen $f(t)$ einen der genannten Werte besitzt, die Kreispunktkurve in die unendlich ferne Gerade und eine Fokalkurve dritter Ordnung.

Auf Seite 22/23 fanden wir, daß für $f(t) = \frac{1}{c_1 \sin t + c_2 \cos t}$ der Wendekreis, für $f(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t$ der Rückkehrkreis zur Polbahntangente entartet; da nun sowohl $f(t) = \frac{1}{c_1 \sin t + c_2 \cos t}$ [nach (15)], als auch $f(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t$ [nach (14) für $k_1 = 0$] partikuläre Integrale der Differentialgleichung $P = 0$ sind, gilt der weitere

Satz: Artet bei einem ähnlich veränderlichen System der Wende- oder der Rückkehrkreis in die Polbahntangente aus, so zerfällt auch die Kreispunktkurve in die unendlich ferne Gerade und eine Fokalkurve dritter Ordnung.

(Wohlgemerkt, der Satz gilt nicht umgekehrt.)

Die Differentialgleichung $P = 0$ bleibt ungeändert, wenn man an Stelle von $f(t)$ setzt $\frac{1}{f(t)}$. Die Folge davon ist, daß wenn die Kreispunktkurve der direkten Bewegung in eine Fokalkurve dritter Ordnung und die unendlich ferne Gerade zerfällt, das Gleiche bei der umgekehrten Bewegung, bei welcher ja $\frac{1}{f(t)}$ an die Stelle von $f(t)$ tritt, stattfindet.

Es ist daher auch

$$(16) \qquad f(t) = \frac{1}{k_2 \sin t + k_3 \cos t \pm \sqrt{k_1 + (k_2 \sin t + k_3 \cos t)^2}}$$

eine Lösung der Differentialgleichung $P = 0$. Aber sie bringt, wenn $k_1 \neq 0$, nichts Neues, da ich sie auch schreiben kann:

$$f(t) = \frac{(k_2 \sin t + k_3 \cos t) \mp \sqrt{k_1 + (k_2 \sin t + k_3 \cos t)^2}}{-k_1}$$

$$= K_2 \sin t + K_3 \cos t \pm \sqrt{K_1 + (K_2 \sin t + K_3 \cos t)^2}.$$

Für $k_1 = 0$ wird (16) zu:

$$f(t) = \frac{1}{c_1 \sin t + c_2 \cos t},$$

was schon in (15) berücksichtigt wurde.

3. Einiges Geometrische über die Kreispunktkurve dritter Ordnung.

Wir haben soeben gefunden, daß für die Lösungen der Differentialgleichung $P = 0$ die Kreispunktkurve in die unendlich ferne Gerade und eine zirkulare Kurve dritter Ordnung zerfällt von der Gleichung:

$$(1) \qquad (x_2^2 + y_2^2)(Lx_2 + My_2) + Qx_2y_2 = 0.$$

Diese Kurve hat im Pole $\mathfrak{P}$ einen Doppelpunkt und berührt daselbst die Polbahntangente und -normale (Fig. 3). Sie ist wie die Kreispunktkurve der starren Systeme, deren $f(t) = 1$ ja als partikuläres Integral der Differentialgleichung $P = 0$ betrachtet werden kann, eine Fokalkurve dritter Ordnung c und kann als solche erzeugt werden durch die Schnittpunkte entsprechender Kurven eines Kreisbüschels mit in $\mathfrak{P}$ vereinigten Grundpunkten und eines ihm projektiven Strahlenbüschels, dessen Strahlen durch die Mittelpunkte der zugeordneten Kreise gehen. Bezeichnen wir das Zentrum des Strahlenbüschels — das Fokalzentrum der Kurve c — mit C, so liegen die Mittelpunkte jener Kreise auf der durch $\mathfrak{P}$ gehenden Geraden, die zu $\mathfrak{P}C$ in bezug auf die Polbahntangente symmetrisch ist — die Fokalachse von c.

Für die starren Systeme ist die Fokale dritter Ordnung eingehend untersucht worden, vor allem von Rodenberg[1]), Grübler[2]), R. Müller[3]), Allievi[4]). Aber auch schon früher wurde diese Art von Kurven dritter Ordnung rein geometrisch, unabhängig von der Kinematik behandelt von Salmon-Fiedler[5]), Eckart[6]), Schröter[7]), Durège[8]). Soweit die Sätze und Konstruktionen aller der genannten Autoren rein geometrische Eigenschaften der Fokale dritter Ordnung betreffen, behalten

[1]) Zeitschrift für Mathematik u. Physik, Bd. 36, S. 271.
[2]) Zeitschrift für Mathematik u. Physik, Bd. 37, S. 35.
[3]) Zeitschrift für Mathematik u. Physik, Bd. 37, S. 129 u. 417.
[4]) Cinematica della Biella piana, Napoli 1895, p. 35.
[5]) Kegelschnitte.
[6]) Zeitschrift für Mathematik u. Physik, Bd. 10, S. 321.
[7]) Math. Annalen, Bd. 5, S. 50, u. Bd. 6, S. 85.
[8]) Math. Annalen, Bd. 5, S. 83.

sie auch für die als Kreispunktkurve unsrer speziellen ähnlich veränderlichen Systeme auftretende Kurve dritter Ordnung volle Gültigkeit, soweit sie aber mit der Bewegung der starren Systeme in Zusammenhang stehen, natürlich nicht. Es seien hier für unsere Kurve (1) nur wenige Sätze über die Krümmung im Pol, die Asymptote und den Wendepunkt angeführt, im übrigen aber auf die angegebene Literatur verwiesen.

Allgemein besitzt eine Fokale dritter Ordnung, wenn man ihren Doppelpunkt zum Koordinatenanfang und die rechtwinklig aufeinander stehenden Tangenten in demselben zu Koordinatenachsen macht, die Gleichung:

$$(2) \qquad (x_2^2 + y_2^2)(nx_2 + my_2) - 2(m^2 + n^2)x_2 y_2 = 0,$$

wobei $nx_2 + my_2 = 0$ die Gleichung der Fokalachse g bedeutet, während m und n die Koordinaten des Fokalzentrums C sind.

Sollen nun die Gleichungen (1) und (2) übereinstimmen, so muß

$$\frac{n}{2(m^2+n^2)} = -\frac{L}{Q}, \qquad \frac{m}{2(m^2+n^2)} = -\frac{M}{Q}$$

sein. Die Koordinaten des Fokalzentrums C lauten sonach:

$$(3) \qquad m = -\frac{MQ}{2(L^2+M^2)}, \qquad n = -\frac{LQ}{2(L^2+M^2)},$$

während

$$(4) \qquad Lx_2 + My_2 = 0$$

die Gleichung der Fokalachse g ist.

Für starre Systeme gilt nach Müller[1]) der Satz, daß wenn wir in C auf $\mathfrak{P}C$ ein Lot errichten, dieses die x_2- resp. y_2-Achse in den Krümmungsmittelpunkten M_x resp. M_y der Kreispunktkurve im Pol trifft. Dieser Satz bleibt für unsre ähnlich veränderlichen Systeme bestehen. Denn die Gerade $\mathfrak{P}C$ hat die Gleichung:

$$Lx_2 - My_2 = 0$$

und das in C auf $\mathfrak{P}C$ errichtete Lot die Gleichung:

$$(5) \qquad Ly_2 + Mx_2 + \frac{Q}{2} = 0.$$

[1]) Zeitschrift für Mathematik u. Physik, Bd. 36, S. 197.

Letzteres schneidet somit die x_2-Achse im Punkte $x_2 = -\frac{Q}{2M}$, die y_2-Achse im Punkte $y_2 = -\frac{Q}{2L}$. Dies sind aber nach Seite 27 in der Tat die Krümmungsmittelpunkte der Kreispunktkurve im Pol.

Wir wollen jetzt die Asymptote unsrer Fokalkurve bestimmen. Sie möge die Gleichung $y_2 = m'x_2 + \mu'$ haben. Be-

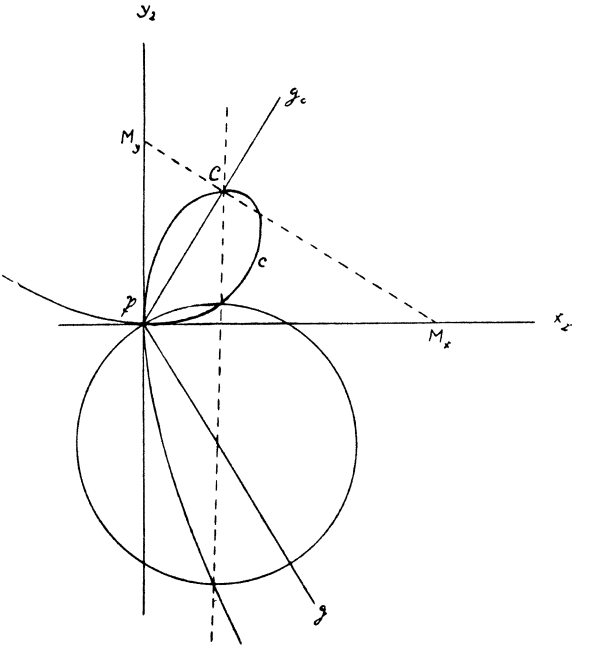


Fig. 3.

zeichnen wir die Glieder dritter Potenz der Gleichung (1) mit U_3, so bestimmt sich der Richtungskoeffizient m' der Asymptote aus:

$$\lim_{x_2=\infty} \frac{U_3}{x_2^3} = \lim_{x_2=\infty} \left[\left(1+\frac{y_2^2}{x_2^2}\right)\left(L+M\frac{y_2}{x_2}\right)\right] = 0,$$

wenn wir hierin $\lim_{x_2=\infty} \frac{y_2}{x_2} = m'$ setzen.

Aus

$$(1+m'^2)(L+Mm') = 0$$

folgt als einziger reeller Wert:

$$m' = -\frac{L}{M}.$$

Setzen wir

$$y_2 = -\frac{L}{M}x_2 + \mu'$$

in die Gleichung der Fokalkurve ein, dividieren durch x_2^2 und gehen zur Grenze $x_2 = \infty$ über, so erhalten wir zur Bestimmung von μ' eine lineare Gleichung, aus der sich

$$\mu' = \frac{LQ}{L^2 + M^2}$$

ergibt.

Die Asymptote hat also die Gleichung:

$$y_2 = -\frac{L}{M}x_2 + \frac{LQ}{L^2 + M^2}. \tag{6}$$

Satz: Unsere Fokalkurve besitzt eine einzige reelle Asymptote, die der Fokalachse parallel läuft und auf der y_2-Achse die doppelte negativ genommene Ordinate des Fokalzentrums abschneidet.

Wir hatten auf Seite 28 bemerkt, daß sich die Kreispunktkurve der ähnlich veränderlichen Systeme als Fußpunktkurve eines Kegelschnitts für $\mathfrak{P}$ als Lotpunkt darstellen läßt. Ist die Kreispunktkurve dritter Ordnung, so ist besagter Kegelschnitt eine Parabel von der Gleichung:

$$(Mx_2 - Ly_2)^2 + 2Q(Mx_2 + Ly_2) + Q^2 = 0, \tag{7}$$

wie sich aus Gleichung (17) des § 4 für $P = 0$ ergibt. Durch leichte Rechnung finden wir, daß die Leitlinie dieser Parabel durch den Punkt $\mathfrak{P}$ geht. Damit bestätigt sich der von Schröter[1]) gefundene Satz: „Fällt man aus irgend einem Punkte $\mathfrak{P}$ der Leitlinie einer Parabel die Perpendikel auf sämtliche Tangenten derselben, so ist der Ort ihrer Fußpunkte eine Fokale mit dem Doppelpunkt $\mathfrak{P}$“. Diese Auffassung unsrer Kreispunktkurve als Fußpunktkurve einer Parabel setzt uns instand, mit Hilfe eines ebenfalls von Schröter[1]) ab-

[1]) Mathematische Annalen, Bd. 6.

geleiteten Satzes die Wendepunkte unsrer Fokalkurve zu bestimmen. Schröter findet nämlich: „Die 3 Wendepunkte der betrachteten Fokale (von denen nur einer reell, die beiden anderen imaginär sind) liegen auf der Polaren des Doppelpunktes $\mathfrak{P}$ in bezug auf die Parabel."

Die Polare des Punktes $\mathfrak{P}$ in bezug auf unsere Parabel besitzt die Gleichung:

$$Mx_2 + Ly_2 + Q = 0, \tag{8}$$

sie ist also der Geraden $M_x M_y$ (Gleichung 5) parallel und hat auf den Achsen doppelt so große Abschnitte wie jene. Damit haben wir den **Satz** gefunden:

Die Verbindungsgerade der Punkte, in denen die beiden Krümmungskreise der Kreispunktkurve (dritter Ordnung) im Pol die Achsen zum zweiten Male schneiden, trifft die Kurve in ihrem einzigen reellen Wendepunkte.

Wir können auch leicht die Koordinaten dieses Wendepunktes angeben. Zu diesem Zwecke führen wir aus (8) $y_2 = -\frac{Mx_2 + Q}{L}$ in die Kurvengleichung (1) ein und erhalten:

$$L^4 x_2^3 = M(Mx_2 + Q)^3,$$

sodaß wir links und rechts die Kubikwurzel ziehen können:

$$L\sqrt[3]{L}\,x_2 = \sqrt[3]{M}\,(Mx_2 + Q).$$

Demnach hat der Wendepunkt die Koordinaten:

$$x_2 = \frac{\sqrt[3]{M}\cdot Q}{L\sqrt[3]{L} - M\sqrt[3]{M}}, \qquad y_2 = \frac{-\sqrt[3]{L}\cdot Q}{L\sqrt[3]{L} - M\sqrt[3]{M}}. \tag{9}$$

Unsere Fokale schneidet den Wendekreis in dem Ballschen Punkte B_a, der nach den Gleichungen (18) des § 4, da jetzt $P = 0$ ist, die Koordinaten besitzt:

$$x_{2;B} = -\frac{d_w^2 M(Ld_w + Q)}{d_w^2 M^2 + (Ld_w + Q)^2}, \qquad y_{2,B} = \frac{d_w(Ld_w + Q)^2}{d_w^2 M^2 + (Ld_w + Q)^2}. \tag{10}$$

§ 7.

Die erste Evolute der Bahnkurven und die zwischen den Bahnpunkten und ihren ersten Krümmungsmittelpunkten bestehende Verwandtschaft.

Eine Bahnkurve hat an der Stelle x, y den Krümmungsmittelpunkt u, v, dessen Koordinaten lauten:

$$(1) \qquad u = x - qy', \qquad v = y + qx',$$

wobei

$$q = \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}$$

gesetzt ist.

Wir transformieren mit Hilfe der bereits wiederholt angewendeten Formeln:

$$(2) \qquad x = x_p + \frac{1}{N}(-x_2 x'_p + y_2 y'_p), \quad y = y_p + \frac{1}{N}(-x_2 y'_p - y_2 x'_p)$$

auf das x_2, y_2-System.

In diesem haben nach den Formeln (7) und (8) des § 4 die ersten Differentialquotienten von x und y nach t die Werte:

$$(3) \qquad \begin{aligned} x' &= \frac{1}{N}\left\{-\left(\frac{f'}{f}x'_p - y'_p\right)x_2 + \left(\frac{f'}{f}y'_p + x'_p\right)y_2\right\} \\ y' &= \frac{1}{N}\left\{-\left(\frac{f'}{f}y'_p + x'_p\right)x_2 - \left(\frac{f'}{f}x'_p - y'_p\right)y_2\right\}, \end{aligned}$$

während der Ausdruck $x'y'' - y'x''$ als linke Seite W des Wendekreises nach § 3:

$$(4) \qquad W = \left(1 + 2\frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f}\right)(x_2^2 + y_2^2) - \left(1 + \frac{f'^2}{f^2}\right)Ny_2$$

ist. Führen wir die Transformation aus, so ergibt sich zunächst:

$$u_2 = x_2 - q\frac{x'y'_p - y'x'_p}{N}$$

$$v_2 = y_2 - q\frac{x'x'_p + y'y'_p}{N},$$

oder da nach (3):

$$x'y'_p - y'x'_p = (x_2 + \frac{f'}{f}y_2)N, \quad x'x'_p + y'y'_p = (y_2 - \frac{f'}{f}x_2)N$$

ist, wird die erste Evolute der Bahnkurve im x_2, y_2-System dargestellt durch die Gleichungen:

$$(5)\qquad \begin{aligned} u_2 &= x_2 - q\left(x_2 + \frac{f'}{f} y_2\right) \\ v_2 &= y_2 + q\left(\frac{f'}{f} x_2 - y_2\right), \end{aligned}$$

wobei nach (3) und (4) die Größe q die Bedeutung hat:

$$q = \frac{\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)(x_2^2+y_2^2)}{\left(1+2\frac{f'^2}{f^2}-\frac{f''}{f}\right)(x_2^2+y_2^2) - \left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right) N y_2}.$$

Für den Krümmungsradius der Bahnkurve bekommen wir:

$$(6)\qquad R = \frac{r^3 \sqrt{1+\frac{f'^2}{f^2}}^3}{W},$$

worin $r = \sqrt{x_2^2+y_2^2}$ gesetzt ist und W die linke Seite der auf Null reduzierten Gleichung des Wendekreises bedeutet.

Mit der Krümmung der Bahnkurven in ebenen ähnlich veränderlichen Systemen hat sich Geisenheimer[1]) und vor allem R. Müller[2]) beschäftigt. Schon Geisenheimer gibt eine Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes zu gegebenem Bahnpunkt, Müller fügt neue Konstruktionen hinzu und behandelt dann eingehend das umgekehrte Problem: Zu einem gegebenen Krümmungsmittelpunkt die zugehörigen Bahnpunkte (es gibt im allgemeinen zwei) zu bestimmen. Es sei nach dieser Richtung hin auf die unten angeführten Arbeiten verwiesen.

Denken wir uns eine bestimmte Momentanlage t des ähnlich veränderlichen Systems vorgegeben, so vermitteln die Gleichungen (5) eine Verwandtschaft zwischen der Ebene S der Bahnpunkte $A\,(x_2, y_2)$ und der Ebene $\mathfrak{S}$ ihrer zugehörigen Krümmungsmittelpunkte $\mathfrak{A}\,(u_2, v_2)$. Aus den Gleichungen (5) lassen sich leicht einfachere Beziehungen zwischen den beiden Ebenen S und $\mathfrak{S}$ herleiten.

---

[1]) Zeitschrift für Mathematik u. Physik, 1879, Bd. 24.

[2]) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, XIX, 1910, Heft 1 und 2.

Aus (5) folgt nämlich:

$$(u_2 - x_2)\left(\frac{f'}{f}x_2 - y_2\right) + (v_2 - y_2)\left(x_2 + \frac{f'}{f}y_2\right) = 0$$

oder:

$$\frac{f'}{f}(x_2^2 + y_2^2) - \left(\frac{f'}{f}x_2 - y_2\right)u_2 - \left(x_2 + \frac{f'}{f}y_2\right)v_2 = 0. \tag{7}$$

Des weiteren lassen sich aus (5) folgende Relationen ableiten:

$$u_2x_2 + v_2y_2 = (1-q)(x_2^2+y_2^2) = \frac{x_2^2+y_2^2}{W}\left\{\left(\frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f}\right)(x_2^2+y_2^2) - \left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)Ny_2\right\}$$

$$u_2y_2 - v_2x_2 = -\frac{f'}{f}q(x_2^2+y_2^2) = \frac{x_2^2+y_2^2}{W}\left\{-\frac{f'}{f}\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)(x_2^2+y_2^2)\right\},$$

also:

$$\begin{aligned}(u_2x_2+v_2y_2)\frac{f'}{f}\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right) + (u_2y_2 - v_2x_2)\left(\frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f}\right)\\ = -\frac{f'}{f}\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)^2\frac{N}{W}(x_2^2+y_2^2)y_2.\end{aligned} \tag{8}$$

Nun ist aber nach (5) auch:

$$\frac{f'}{f}(u_2 - x_2) + (v_2 - y_2) = -\frac{\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)^2}{W}(x_2^2+y_2^2)\,y_2, \tag{9}$$

sodaß aus (8) und (9) die Gleichung resultiert:

$$\begin{aligned}\frac{f'}{f}\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)(u_2x_2+v_2y_2) + \left(\frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f}\right)(u_2y_2 - v_2x_2)\\ - \frac{f'}{f}N\left\{\frac{f'}{f}(u_2 - x_2) + (v_2 - y_2)\right\} = 0.\end{aligned} \tag{10}$$

Satz: Zufolge der Gleichungen (7) und (10) besteht zwischen der Ebene S der Bahnpunkte $A\ (x_2, y_2)$ und der Ebene $\mathfrak{S}$ ihrer ersten Krümmungsmittelpunkte $\mathfrak{A}\ (u_2, v_2)$ eine ein-zweideutige Verwandtschaft.

Diese hat Müller eingehendst untersucht. Von seinen Resultaten seien hier zum Vergleich mit unseren folgenden Untersuchungen über die zweiten Krümmungsmittelpunkte der Bahnkurven die hauptsächlichsten kurz angeführt:

Jedem Punkte von S entspricht ein Punkt von $\mathfrak{S}$. Eine Ausnahme machen die imaginären Kreispunkte I und J und

der Pol $\mathfrak{P}$. Jedem der Punkte $\mathfrak{P}$, I, J der Ebene S ist nämlich in $\mathfrak{S}$ nicht wieder ein Punkt, sondern eine Gerade zugeordnet, nämlich dem Punkte $\mathfrak{P}$ die Gerade $\mathfrak{P}N_w$, die mit der x_2-Achse den in § 2 erklärten Winkel ω bildet, dessen $\tan\omega = -\frac{f'}{f}$, und jedem der imaginären Kreispunkte seine Verbindungslinie mit dem reellen Punkte Z, in welchem der Rückkehrkreis von der Geraden $y_2 = \tan(\omega+\chi)\cdot x_2$ getroffen wird, wobei $\tan\chi = \frac{f'(f^2+f'^2)}{f(f'^2-ff'')}$ ist. Jeder Punkt der imaginären Geraden $\mathfrak{P}I$ und $\mathfrak{P}J$, zu S gerechnet, entspricht sich selbst. Liegt A (Fig. 4)

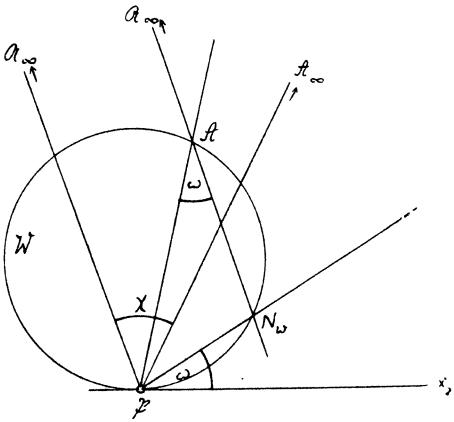


Fig. 4.

auf dem Wendekreise W, so entspricht ihm in $\mathfrak{S}$ der unendlich ferne Punkt $\mathfrak{A}_\infty$ seiner Verbindungslinie mit N_w. Einem unendlich fernen Punkte A_∞ ist in $\mathfrak{S}$ ein unendlich ferner Punkt $\mathfrak{A}_\infty$ zugeordnet, dessen Richtung mit der Richtung von A_∞ den Winkel χ bildet. Der Polbahntangente von S entspricht in $\mathfrak{S}$ die Gerade $v_2 = \tan\chi\cdot u_2$ und außerdem, für den Punkt $\mathfrak{P}$, die doppelt zählende Gerade $\mathfrak{P}N_w$. Einer Geraden g von S entspricht in $\mathfrak{S}$ eine Kurve dritter Ordnung $\mathfrak{g}$, geht aber g durch den Pol, so ist die entsprechende Kurve in $\mathfrak{S}$ eine Hyperbel, die im Pol die betrachtete Gerade g berührt.

Es seien jetzt umgekehrt die Punkte $\mathfrak{A}$ der Ebene $\mathfrak{S}$ gegeben.

Dann entspricht jedem Punkte von $\mathfrak{S}$ ein Punktepaar in S. Dem Punkte $\mathfrak{A}_\infty$ ist in S außer A_∞ noch der Schnittpunkt von $N_w\mathfrak{A}_\infty$ mit dem Wendekreise zugeordnet. Zu einer beliebigen Geraden $\mathfrak{d}$ von $\mathfrak{S}$ gehört in S eine zirkulare Kurve dritter Ordnung d, die im allgemeinen im Pol vom Wendekreis oskuliert wird. Alle diese Kurven d haben in den imaginären Kreispunkten I und J gemeinsame Asymptoten, die sich in einem reellen Punkte Z_m, dem gemeinschaftlichen Fokalzentrum aller Kurven d, schneiden. Geht die Gerade $\mathfrak{d}$ durch $\mathfrak{P}$, so hat die entsprechende zirkulare Kurve dritter Ordnung d in $\mathfrak{P}$ einen Doppelpunkt mit den Tangenten $\mathfrak{d}$ und $y_2 = 0$, wird aber im allgemeinen vom Wendekreise nicht mehr oskuliert, sondern nur berührt. Eine Oskulation mit dem Wendekreise findet nur für die der Geraden $\mathfrak{P}N_w$ entsprechende Kurve d statt.

Auf Grund dieser Resultate kann Müller die folgenden Sätze aussprechen:

Einer Kurve n^{ter} Ordnung a von S entspricht in $\mathfrak{S}$ eine Kurve $\mathfrak{a}$ von der Ordnung $3n$. Aber jeder Durchgang der Kurve a durch den Pol $\mathfrak{P}$ vermindert die Ordnung der entsprechenden Kurve $\mathfrak{a}$ um eins, zwei oder drei, je nachdem a mit dem Wendekreise in $\mathfrak{P}$ einen oder zwei oder drei zusammenfallende Punkte gemein hat; jeder Durchgang der Kurve a durch einen der imaginären Kreispunkte I, J vermindert die Ordnung der entsprechenden Kurve um eins, die gleichzeitige Berührung seiner Verbindungslinie mit Z_m bewirkt eine weitere Verminderung der Ordnungszahl um eins.

Einer Kurve ν^{ter} Ordnung $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{S}$ entspricht in S eine Kurve b von der Ordnung 3ν.

Satz: Die ein-zweideutige Verwandtschaft zwischen den Bahnpunkten und ihren ersten Krümmungsmittelpunkten ist dritten Grades.

Zufolge dieser Resultate entspricht der Kreispunktkurve von S in $\mathfrak{S}$ eine Kurve von der Ordnung:

$$3 \cdot 4 - (1 + 2) - 2 \cdot 2 = 5$$

wegen $\quad \mathfrak{P} \quad \mathfrak{P} \quad I \quad J$

und jedem Kreis von S, der die Polbahntangente in $\mathfrak{P}$ berührt, eine Kurve von der Ordnung:

$$3 \cdot 2 - 2 - 2 = 2,$$

wegen $\mathfrak{P}$ IJ

und zwar wieder ein Kreis.

§ 8.

Die zweite Evolute der Bahnkurven und die zwischen den Bahnpunkten und ihren zweiten Krümmungsmittelpunkten bestehende Verwandtschaft.

Die Krümmung der Bahnevoluten hat für starre Systeme R. Müller[1]) untersucht, für die ähnlich veränderlichen Systeme liegt eine analoge Untersuchung noch nicht vor. Sie soll im folgenden durchgeführt werden. Der Krümmungsmittelpunkt U, V der Bahnevolute u, v besitzt die Koordinaten:

$$(1) \qquad \begin{aligned} U &= u - \frac{u'^2 + v'^2}{u'v'' - v'u''} v' \\ V &= v + \frac{u'^2 + v'^2}{u'v'' - v'u''} u'. \end{aligned}$$

Da nach § 7 die Bahnevolute die Gleichungen hatte:

$$u = x - \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''} y', \qquad v = y + \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''} x',$$

finden wir für die Differentialquotienten von u und v nach t:

$$u' = x' - \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''} y'' - \frac{2(x'x'' + y'y'')(x'y'' - y'x'') - (x'^2 + y'^2)(x'y''' - y'x''')}{(x'y'' - y'x'')^2} y'$$

$$u' = -\frac{(x'^2 + y'^2)(x'y''' - y'x''') - 3(x'y'' - y'x'')(x'x'' + y'y'')}{(x'y'' - y'x'')^2} y' = \frac{K}{W^2} y'$$

und analog:

$$v' = -\frac{K}{W^2} x', \qquad (2)$$

wobei nach § 3 und § 4 $W = 0$ den Wendekreis, $K = 0$ die Kreispunktkurve bedeutet.

Die zweiten Differentialquotienten ergeben sich zu:

$$u'' = \frac{K}{W^2} y'' + \frac{WK' - 2KW'}{W^3} y' = \frac{1}{W^3}\left\{WKy'' + (WK' - 2KW')y'\right\}$$

$$v'' = -\frac{K}{W^2} x'' - \frac{WK' - 2KW'}{W^3} x' = -\frac{1}{W^3}\left\{WKx'' + (WK' - 2KW')x'\right\}.$$

[1]) Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 36, S. 193.

sodaß die Ausdrücke $u'^2+v'^2$ und $u'v''-v'u''$ die Werte annehmen:

$$u'^2+v'^2=\frac{K^2}{W^4}(x'^2+y'^2)$$

$$u'v''-v'u''=\frac{K^2}{W^4}(x'y''-y'x'')$$

und mithin:

$$\frac{u'^2+v'^2}{u'v''-v'u''}=\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''}=q, \tag{3}$$

wobei q die in § 7 Formel (5) angegebene Größe ist.

Mit Rücksicht auf (2) und (3) gestalten sich dann die Formeln (1) zu:

$$U=u+q\frac{K}{W^2}x'. \qquad V=v+q\frac{K}{W^2}y'. \tag{4}$$

Wir transformieren jetzt analog § 7 auf das x_2, y_2-System und bekommen:

$$\begin{aligned} U_2&=u_2-q\frac{K}{W^2}\frac{x'x'_p+y'y'_p}{N}=u_2+q\frac{K}{W^2}\left(\frac{f'}{f}x_2-y_2\right)\\ V_2&=v_2+q\frac{K}{W^2}\frac{x'y'_p-y'x'_p}{N}=v_2+q\frac{K}{W^2}\left(x_2+\frac{f'}{f}y_2\right), \end{aligned} \tag{5}$$

oder endlich wegen den Gleichungen (5) des § 7 nimmt die zweite Evolute der Bahnkurve die Gleichungen an:

$$\begin{aligned} U_2&=x_2-q\left(x_2+\frac{f'}{f}y_2\right)+q\frac{K}{W^2}\left(\frac{f'}{f}x_2-y_2\right)\\ V_2&=y_2+q\left(\frac{f'}{f}x_2-y_2\right)+q\frac{K}{W^2}\left(x_2+\frac{f'}{f}y_2\right), \end{aligned} \tag{6}$$

während der Krümmungsradius der Bahnevolute sich ergibt zu:

$$R^*=\frac{r^3\sqrt{1+\frac{f'^2}{f^2}}^3\cdot K}{W^3}, \tag{7}$$

worin $r=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$ gesetzt ist und W resp. K die linke Seite der auf Null reduzierten Gleichung des Wendekreises resp. der Kreispunktkurve bedeutet.

Den zu einem Bahnpunkt $A(x_2, y_2)$ gehörigen Krümmungsmittelpunkt $\mathfrak{A}'(U_2, V_2)$ seiner Bahnevolute wollen wir kurz als zweiten Krümmungsmittelpunkt von A bezeichnen. Dann vermitteln die Gleichungen (6) bei vorgegebener Momentanlage des

ähnlich veränderlichen Systems eine Verwandtschaft zwischen der Ebene S der Bahnpunkte $A(x_2, y_2)$ und der Ebene $\mathfrak{S}'$ ihrer zugehörigen zweiten Krümmungsmittelpunkte $\mathfrak{A}'(U_2, V_2)$. Um diese Verwandtschaft zu untersuchen, handelt es sich zunächst darum, Verwandtschaftsgleichungen von niederem Grade als dem der Gleichungen (6) zu finden. Diese schwierige Aufgabe soll im folgenden durchgeführt werden. Dabei erinnern wir uns, daß nach früheren Resultaten:

$$W = \varrho_2(x_2^2 + y_2^2) - \varrho_1 N y_2$$

$$K = P(x_2^2 + y_2^2)^2 + (x_2^2 + y_2^2)(Lx_2 + My_2) + Qx_2y_2 \tag{8}$$

$$q = \frac{\varrho_1(x_2^2 + y_2^2)}{W}$$

ist (vergl. § 4).

Zum ersten gelten nach (6) folgende Beziehungen:

$$U_2x_2 + V_2y_2 = (x_2^2 + y_2^2)\left(1 - q + \frac{f'}{f}\, q\, \frac{K}{W^2}\right)$$

$$U_2y_2 - V_2x_2 = -(x_2^2 + y_2^2)\left(\frac{f'}{f}\, q + q\, \frac{K}{W^2}\right),$$

aus denen folgt:

$$\begin{aligned}(U_2x_2 + V_2y_2) + (U_2y_2 - V_2x_2)\frac{f'}{f} &= (x_2^2 + y_2^2)(1 - \varrho_1 q) \\ &= (x_2^2 + y_2^2)\left(1 - \frac{\varrho_1^2(x_2^2 + y_2^2)}{W}\right).\end{aligned} \tag{9}$$

Diese Gleichung können wir auch in die nachstehenden Formen bringen:

$$W\left\{(U_2x_2 + V_2y_2) + \frac{f'}{f}(U_2y_2 - V_2x_2) - (x_2^2 + y_2^2)\right\} = -\varrho_1^2(x_2^2 + y_2^2)^2 \tag{9a}$$

oder:

$$\begin{aligned}(\varrho_1^2 - \varrho_2)(x_2^2 + y_2^2)^2 + (x_2^2 + y_2^2)\Big\{\varrho_2\Big[(U_2x_2 + V_2y_2) + \frac{f'}{f}(U_2y_2 - V_2x_2)\Big] \\ + \varrho_1 N y_2\Big\} - \varrho_1 N y_2\Big\{(U_2x_2 + V_2y_2) + \frac{f'}{f}(U_2y_2 - V_2x_2)\Big\} = 0.\end{aligned} \tag{9b}$$

Zweitens lassen sich aus den Gleichungen (6) auch folgende Relationen ableiten:

$$W^3(U_2 - x_2) = \varrho_1(x_2^2 + y_2^2)\left\{-W^2\left(x_2 + \frac{f'}{f}y_2\right) + K\left(\frac{f'}{f}x_2 - y_2\right)\right\} \tag{10}$$

$$W^3(V_2 - y_2) = \varrho_1(x_2^2 + y_2^2)\left\{W^2\left(\frac{f'}{f}x_2 - y_2\right) + K\left(x_2 + \frac{f'}{f}y_2\right)\right\}. \tag{11}$$

Wir multiplizieren (10) mit $\varkappa$, (11) mit λ und bestimmen $\varkappa$ und λ so, daß

$$\left(\frac{f'}{f}x_2 - y_2\right)\varkappa + \left(x_2 + \frac{f'}{f}y_2\right)\lambda = W^2$$
$$= \varrho_2^2(x_2^2+y_2^2)^2 - 2\varrho_1\varrho_2 N y_2(x_2^2+y_2^2) + \varrho_1^2 N^2 y_2^2$$

wird; dann müssen $\varkappa$ und λ die Form besitzen:

$$\varkappa = a x_2(x_2^2+y_2^2) + b x_2 y_2 + c y_2$$
$$\lambda = a y_2(x_2^2+y_2^2) + b y_2^2 + c_1 y_2$$

und es wird:

$$\left(\frac{f'}{f}x_2 - y_2\right)\varkappa + \left(x_2 + \frac{f'}{f}y_2\right)\lambda = a\frac{f'}{f}(x_2^2+y_2^2)^2 + b\frac{f'}{f}y_2(x_2^2+y_2^2)$$
$$+\left(\frac{f'}{f}c + c_1\right)x_2 y_2 - \left(c - \frac{f'}{f}c_1\right)y_2^2.$$

Vergleichen wir mit W^2, so muß:

$$a = \frac{f}{f'}\varrho_2^2, \quad b = -2\frac{f}{f'}\varrho_1\varrho_2 N, \quad c = -\varrho_1 N^2, \quad c_1 = \frac{f'}{f}\varrho_1 N^2$$

sein. Die Größen $\varkappa$ und λ ergeben sich also zu:

$$\varkappa = \frac{f}{f'}\left\{\varrho_2^2 x_2(x_2^2+y_2^2) - 2\varrho_1\varrho_2 N x_2 y_2 - \frac{f'}{f}\varrho_1 N^2 y_2\right\}$$
$$\lambda = \frac{f}{f'}\left\{\varrho_2^2 y_2(x_2^2+y_2^2) - 2\varrho_1\varrho_2 N y_2^2 + \frac{f'^2}{f^2}\varrho_1 N^2 y_2\right\}. \tag{12}$$

Multiplizieren wir (10) mit $\varkappa$, (11) mit λ und addieren, so resultiert:

$$W^3\left\{(U_2 - x_2)\varkappa + (V_2 - y_2)\lambda\right\}$$
$$= \varrho_1(x_2^2+y_2^2)W^2\left\{K - \left(x_2 + \frac{f'}{f}y_2\right)\varkappa + \left(\frac{f'}{f}x_2 - y_2\right)\lambda\right\}.$$

Dividieren wir hierin links und rechts durch $W^2\frac{f}{f'}$ und setzen die Werte von $\varkappa$ und λ ein, so nimmt die letzte Gleichung die Gestalt an:

$$W(U_2 - x_2)\left\{\varrho_2^2 x_2(x_2^2+y_2^2) - 2\varrho_1\varrho_2 N x_2 y_2 - \frac{f'}{f}\varrho_1 N^2 y_2\right\}$$
$$+W(V_2 - y_2)\left\{\varrho_2^2 y_2(x_2^2+y_2^2) - 2\varrho_1\varrho_2 N y_2^2 + \frac{f'^2}{f^2}\varrho_1 N^2 y_2\right\}$$
$$= \varrho_1(x_2^2+y_2^2)\left\{\frac{f'}{f}K - \varrho_2^2(x_2^2+y_2^2)^2 + 2\varrho_1\varrho_2 N y_2(x_2^2+y_2^2)\right.$$
$$\left.+\frac{f'}{f}\varrho_1^2 N^2 x_2 y_2\right\}. \tag{13}$$

Die linke Seite von (13) läßt sich auch schreiben:

$$W\Big\{\varrho_2(U_2x_2+V_2y_2)[\varrho_2(x_2^2+y_2^2)-2\varrho_1Ny_2]-\frac{f'}{f}\varrho_1N^2y_2[(U_2-x_2)$$
$$-\frac{f'}{f}(V_2-y_2)]+2\varrho_1\varrho_2Ny_2(x_2^2+y_2^2)-\varrho_2^2(x_2^2+y_2^2)^2\Big\}.$$

Die rechte Seite von (13) lautet unter Berücksichtigung des Wertes von K:

$$\varrho_1(x_2^2+y_2^2)\Big\{\frac{f'}{f}[P(x_2^2+y_2^2)^2+(x_2^2+y_2^2)(Lx_2+My_2)+Qx_2y_2]$$
$$-\varrho_2(x_2^2+y_2^2)[\varrho_2(x_2^2+y_2^2)-2\varrho_1Ny_2]+\frac{f'}{f}\varrho_1^2N^2x_2y_2\Big\}.$$

Nun hat nach Gleichung (14) des § 4 Q den Wert:

$$Q=3\varrho_1^2N^2,$$

also wird mit Rücksichtnahme auf den Wert von W:

$$\frac{f'}{f}Qx_2y_2+\frac{f'}{f}\varrho_1^2N^2x_2y_2=4\frac{f'}{f}\varrho_1^2N^2x_2y_2=4\frac{f'}{f}\varrho_1Nx_2[\varrho_2(x_2^2+y_2^2)-W],$$

sodaß die rechte Seite von (13) auch geschrieben werden kann:

$$\varrho_1(x_2^2+y_2^2)\Big\{\frac{f'}{f}(x_2^2+y_2^2)[P(x_2^2+y_2^2)+Lx_2+My_2]$$
$$-\varrho_2(x_2^2+y_2^2)[\varrho_2(x_2^2+y_2^2)-2\varrho_1Ny_2-4\frac{f'}{f}\varrho_1Nx_2]-4\frac{f'}{f}\varrho_1Nx_2W\Big\}.$$

Bringen wir je das letzte Glied der linken und rechten Seite von (13) auf die andere Seite, so erhält die Gleichung (13) das folgende Aussehen:

$$W\Big\{\varrho_2(U_2x_2+V_2y_2)[\varrho_2(x_2^2+y_2^2)-2\varrho_1Ny_2]-\frac{f'}{f}\varrho_1N^2y_2[(U_2-x_2)$$
$$-\frac{f'}{f}(V_2\quad y_2)]+2\varrho_1N(x_2^2+y_2^2)\,[2\frac{f'}{f}\varrho_1x_2+\varrho_2y_2]\Big\}=(x_2^2$$
(13a)
$$+y_2^2)^2\Big\{\frac{f'}{f}\varrho_1[P(x_2^2+y_2^2)+Lx_2+My_2]+\varrho_2[\varrho_2(\varrho_2-\varrho_1)(x_2^2+y_2^2)$$
$$+4\frac{f'}{f}\varrho_1^2Nx_2+\varrho_1(2\varrho_1-\varrho_2)Ny_2]\Big\}.$$

Jetzt dividieren wir die linken und rechten Seiten der Gleichungen (9a) und (13a) durcheinander, dann entsteht eine Gleichung vierten Grades in x_2 und y_2, die sich zusammenfassen läßt zu:

$$
\begin{aligned}
&-(x_2^2+y_2^2)^2\left\{\frac{f'}{f}\varrho_1 P+\varrho_2^2(\varrho_2-\varrho_1)\right\}+(x_2^2+y_2^2)\left\{\left[\frac{f'}{f}\varrho_1 P+\varrho_2^2(\varrho_2\right.\right.\\
&\left.\left.-\varrho_1)\right]\left[(U_2x_2+V_2y_2)+\frac{f'}{f}(U_2y_2-V_2x_2)\right]+\varrho_1\left[\varrho_1\varrho_2^2(U_2x_2\right.\right.\\
&\left.\left.+V_2y_2)-\frac{f'}{f}(Lx_2+My_2)+4\frac{f'}{f}\varrho_1(\varrho_1^2-\varrho_2)Nx_2-\varrho_2(2\varrho_1-2\varrho_1^2\right.\right.\\
&\left.\left.-\varrho_2)Ny_2\right]\right\}+\varrho_1\left\{(U_2x_2+V_2y_2)+\frac{f'}{f}(U_2y_2-V_2x_2)\right\}\left\{\frac{f'}{f}(Lx_2\right.\\
&\left.+My_2)+4\frac{f'}{f}\varrho_1\varrho_2Nx_2+\varrho_2(2\varrho_1-\varrho_2)Ny_2\right\}-\varrho_1^3Ny_2\left\{2\varrho_2(U_2x_2\right.\\
&\left.+V_2y_2)+\frac{f'}{f}N\left[(U_2-x_2)-\frac{f'}{f}(V_2-y_2)\right]\right\}=0.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Aus den Gleichungen (9b) und (14) können wir uns durch Elimination von $(x_2^2+y_2^2)^2$ eine Gleichung dritten Grades in x_2, y_2 verschaffen. Diese lautet:

$$
\begin{aligned}
&(x_2^2+y_2^2)\left\{\varrho_1^2\left[P+\frac{f'}{f}\varrho_2^2\right](U_2x_2+V_2y_2)+\varrho_1\left[\frac{f'}{f}\varrho_1 P+\varrho_2^2(\varrho_2\right.\right.\\
&\left.\left.-\varrho_1)\right](U_2y_2-V_2x_2)-(\varrho_1^2-\varrho_2)\left[L-4\varrho_1(\varrho_1^2-\varrho_2)N\right]x_2-\left[(\varrho_1^2\right.\right.\\
&\left.\left.-\varrho_2)M-\varrho_1PN+\frac{f'}{f}\varrho_1\varrho_2(\varrho_2-2\varrho_1^2)N\right]y_2\right\}+(U_2x_2+V_2y_2)\left\{(\varrho_1^2\right.\\
&\left.-\varrho_2)(L+4\varrho_1\varrho_2N)x_2+\left[(\varrho_1^2-\varrho_2)M-\varrho_1PN+\frac{f'}{f}\varrho_1\varrho_2(\varrho_2\right.\right.\\
&\left.\left.-2\varrho_1^2)N\right]y_2\right\}+(U_2y_2-V_2x_2)\left\{\frac{f'}{f}(\varrho_1^2-\varrho_2)(L+4\varrho_1\varrho_2N)x_2\right.\\
&\left.+\left[\frac{f'}{f}(\varrho_1^2-\varrho_2)M-\frac{f'}{f}\varrho_1PN+\varrho_1\varrho_2(2\varrho_1^2-\varrho_1\varrho_2-\varrho_2)N\right]y_2\right\}\\
&-\varrho_1^2(\varrho_1^2-\varrho_2)N^2y_2\left\{(U_2-x_2)-\frac{f'}{f}(V_2-y_2)\right\}=0.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Die Verwandtschaft zwischen den Bahnpunkten $A(x_2, y_2)$ und ihren zweiten Krümmungsmittelpunkten $\mathfrak{A}'(U_2, V_2)$ ist dann entweder durch die Gleichungen (6) oder durch die Gleichungen (9b) und (15) definiert.

Jedem Punkte x_2, y_2 ist zufolge dieser Gleichungen eindeutig ein Punkt U_2, V_2 zugeordnet. Ist umgekehrt ein Punkt U_2, V_2 gegeben, so sind die demselben zugeordneten Punkte x_2, y_2 bestimmt als Schnitte der beiden Kurven (9b) und (15).

Für ein bestimmtes Wertepaar U_2, V_2 stellt die Gleichung (9b) eine bizirkulare Kurve vierter Ordnung, die Gleichung (15) eine zirkulare Kurve dritter Ordnung dar. Beide Kurven gehen durch den Pol und wir wollen ihr Verhalten in demselben untersuchen. Zu dem Zwecke bezeichnen wir die linke Seite von (9b) mit $\Phi_1(x_2, y_2)$, die von (15) mit $\Phi_2(x_2, y_2)$. Durch fortgesetzte Differentiation der Gleichung:

$$\Phi(x_2, y_2) = 0$$

erhält man unter Anwendung der hier üblichen symbolischen Bezeichnungsweise:

$$\frac{d\Phi(x_2, y_2)}{dx_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx_2} = 0.$$

$$(16)\quad \frac{d^2\Phi(x_2, y_2)}{dx_2^2} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx_2}\right)^{(2)} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_2}\frac{d^2y_2}{dx_2^2} = 0.$$

$$\frac{d^3\Phi(x_2, y_2)}{dx_2^3} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx_2}\right)^{(3)} + 3\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2 \partial y_2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_2^2}\frac{dy_2}{dx_2}\right)\frac{d^2y_2}{dx_2^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_2}\frac{d^3y_2}{dx_2^3} = 0.$$

Für die Kure (9b) erhalten wir im Nullpunkt:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y_2^2} = -2\varrho_1 N\left(V_2 + \frac{f'}{f}U_2\right),$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_2 \partial y_2} = -\varrho_1 N\left(U_2 - \frac{f'}{f}V_2\right), \quad \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x_2^3} = 6\varrho_2\left(U_2 - \frac{f'}{f}V_2\right).$$

Sie hat also im Pol einen Doppelpunkt, dessen Tangentenrichtungen sich aus der zweiten der Gleichungen (16) ergeben zu:

$$\frac{dy_2}{dx_2} = 0 \text{ oder } = \frac{-2\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_2 \partial y_2}}{\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y_2^2}} = -\frac{U_2 - \frac{f'}{f}V_2}{V_2 + \frac{f'}{f}U_2}.$$

Für $x_2 = 0$, $y_2 = 0$, $\frac{dy_2}{dx_2} = 0$ folgt aus der dritten der Gleichungen (16):

$$\frac{d^2y_2}{dx_2^2} = -\frac{\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x_2^3}}{3\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_2 \partial y_2}} = \frac{2\varrho_2}{\varrho_1 N},$$

und der zugehörige Krümmungsradius wird bei der von uns schon wiederholt angewandten Vorzeichenfestsetzung:

$$R = \frac{1}{\frac{d^2 y_2}{dx_2^2}} = \frac{\varrho_1 N}{2\varrho_2} = \frac{dw}{2},$$

der Krümmungskreis fällt also mit dem Wendekreise zusammen. Wir haben gefunden: Die bizirkulare Kurve vierter Ordnung (9b) besitzt im Pole einen Doppelpunkt und der eine durch den Pol gehende Ast der Kurve wird in demselben vom Wendekreise oskuliert.

Für die Kurve (15) wird im Nullpunkt:

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi_2}{\partial y_2} = -\varrho_1^2(\varrho_1^2 - \varrho_2) N^2 (U_2 - \frac{f'}{f} V_2),$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x_2^2} = 2(\varrho_1^2 - \varrho_2)(L + 4\varrho_1\varrho_2 N)(U_2 - \frac{f'}{f} V_2)$$

und nach den Gleichungen (16):

$$\frac{dy_2}{dx_2} = -\frac{\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}}{\frac{\partial \Phi_2}{\partial y_2}} = 0, \qquad \frac{d^2 y_2}{dx_2^2} = -\frac{\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x_2^2}}{\frac{\partial \Phi_2}{\partial y_2}} = \frac{2(L + 4\varrho_1\varrho_2 N)}{\varrho_1^2 N^2}.$$

Diese Kurve wird also im Pole wohl von der Polbahntangente berührt, aber im allgemeinen nicht vom Wendekreise oskuliert. Oskulation mit dem Wendekreise findet nur statt, wenn

$$\frac{d^2 y_2}{dx_2^2} = \frac{2\varrho_2}{\varrho_1 N}$$

wird. Es müßte dann:

$$L + 4\varrho_1\varrho_2 N = \varrho_1\varrho_2 N$$

also:

$$L + 3\varrho_1\varrho_2 N = 0$$

sein. Nun ist nach Seite 26 $L = -\frac{\varrho_1}{N}(3\varrho_2 N^2 + \alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)$, mithin wird unsere Bedingung zu $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 0$. Es ist dies der bereits S. 29 u. S. 38 aufgetretene Sonderfall. Wir haben also weiter gefunden:

Die zirkulare Kurve dritter Ordnung (15) besitzt den Pol als einfachen Punkt und berührt in ihm die Polbahntangente, ohne im allgemeinen vom Wendekreise oskuliert zu werden, was nur für $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 0$ eintritt.

Diese Kurve dritter Ordnung (15) berührt sonach im Pole den einen Ast der Kurve (9 b) und schneidet den anderen Ast, hat also mit der Kurve (9 b) im Pole 3 Punkte gemein. Da die Kurve vierter Ordnung (9b) bizirkular ist, d. h. die beiden imaginären Kreispunkte I und J der Ebene zu Doppelpunkten hat, während die Kurve (15) als zirkulare Kurve je einmal durch I und J geht, haben beide Kurven in den imaginären Kreispunkten 4 Punkte gemein. Sie schneiden sich also vom Pol und den imaginären Kreispunkten abgesehen, noch in $3 \cdot 4 - 3 - 4 = 5$ Punkten, d. h. jedem Punkte U_2, V_2 sind im allgemeinen 5 verschiedene Punkte x_2, y_2 zugeordnet. Nur wenn $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 0$ ist, haben die beiden Kurven im Pole 4 Punkte gemein, und dann entsprechen jedem Punkte U_2, V_2 nur 4 Punkte x_2, y_2. Unter solchen Umständen gilt der

Satz: Zwischen der Ebene S der Bahnpunkte $A(x_2, y_2)$ und der Ebene $\mathfrak{S}'$ ihrer zweiten Krümmungsmittelpunkte $\mathfrak{A}'(U_2, V_2)$ besteht eine durch die Gleichungen (6) oder (9b) und (15) definierte ein-fünfdeutige Verwandtschaft, die für den Fall, daß der Wendekreis die Kreispunktkurve im Pol oskuliert ($\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 0$) in eine ein-vierdeutige übergeht.

Wir wollen jetzt kurz die wichtigsten Beziehungen dieser Verwandtschaft ableiten:

Wir denken uns zunächst die Punkte A (x_2, y_2) von S gegeben. Dann entspricht jedem Punkte von S ein Punkt in $\mathfrak{S}'$. Jeder Punkt der beiden imaginären Geraden $\mathfrak{P}I$ und $\mathfrak{P}J$, die den Pol mit den imaginären Kreispunkten verbinden, entspricht sich selbst; denn für $r = 0$ wird in den Gleichungen (6) $q = 0$ und mithin $U_2 = x_2$, $V_2 = y_2$.

Liegt A auf dem Wendekreise, so ist $W = 0$ und mithin $R^* = \infty$, der entsprechende Punkt $\mathfrak{A}'$ also unendlich fern.

Bildet dabei der Strahl $\mathfrak{P}A$ gegen die x_2-Achse den Winkel ν, so ist nach (6):

$$\lim_{W=0}\frac{V_2}{U_2}=\lim_{W=0}\frac{W^3y_2+W^2\varrho_1(x_2^2+y_2^2)\left(\frac{f'}{f}x_2-y_2\right)+K\varrho_1(x_2^2+y_2^2)\left(x_2+\frac{f'}{f}y_2\right)}{W^3x_2-W^2\varrho_1(x_2^2+y_2^2)\left(x_2+\frac{f'}{f}y_2\right)+K\varrho_1(x_2^2+y_2^2)\left(\frac{f'}{f}x_2-y_2\right)}$$

$$=\frac{x_2+\frac{f'}{f}y_2}{\frac{f'}{f}x_2-y_2}=\frac{1+\frac{f'}{f}\tan\nu}{\frac{f'}{f}-\tan\nu},$$

oder da nach § 7 $\tan\omega=-\frac{f'}{f}$, wird:

$$\lim_{W=0}\frac{V_2}{U_2}=\frac{1-\tan\omega\tan\nu}{-\tan\omega-\tan\nu}=-\frac{1}{\tan(\omega+\nu)}.$$

Unter Zuhilfenahme der Figur 4 des § 7 finden wir:

Liegt A auf dem Wendekreise, so ist $\mathfrak{A}'$ der unendlich ferne Punkt der Normalen zu AN_w. Aber für den Schnittpunkt B_a von Wendekreis und Kreispunktkurve, dem sog. Ballschen Punkte, erscheint nach (7) der Wert von R^* in der Form $\frac{0}{0}$; dem Punkte B_a entspricht also jeder Punkt der unendlich fernen Geraden.

Einem unendlich fernen Punkte A_∞ ist nach den Gleichungen (6) in $\mathfrak{S}'$ ein unendlich ferner Punkt $\mathfrak{A}'_\infty$ zugeordnet.

Die der Polbahntangente von S in $\mathfrak{S}'$ entsprechende Kurve ergibt sich, wenn wir in (6) $y_2=0$ setzen. Dann wird:

$$U_2=x_2(1-q)+\frac{f'}{f}q\frac{K}{W^2}x_2,\quad V_2=\frac{f'}{f}qx_2+q\frac{K}{W^2}x_2,$$

worin jetzt

$$W=\varrho_2x_2^2,\quad q=\frac{\varrho_1}{\varrho_2},\quad K=Px_2^4+Lx_2^3$$

ist. Diese Gleichungen lassen sich also schreiben:

$$\varrho_2^3U_2=\varrho_2^2(\varrho_2-\varrho_1)x_2+\frac{f'}{f}\varrho_1(Px_2+L)$$

$$\varrho_2^3V_2=\frac{f'}{f}\varrho_1\varrho_2^2x_2+\varrho_1(Px_2+L).$$

Durch Elimination von x_2 folgt, daß der Polbahntangente von S in $\mathfrak{S}'$ die Gerade:

$$\varrho_1\varrho_2\left(\frac{f'}{f}\varrho_2^2+P\right)U_2-\varrho_2\left(\varrho_2^2(\varrho_2-\varrho_1)+\frac{f'}{f}\varrho_1 P\right)V_2 \\ -\varrho_1(\varrho_1^2-\varrho_2)L=0 \tag{17}$$

entspricht.

Um zu einer durch den Pol gehenden Geraden die zugeordnete Kurve in $\mathfrak{S}'$ zu erhalten, setzen wir in (9b) und (15) $y_2=\tan\alpha\cdot x_2$. Dann werden beide Gleichungen quadratisch in x_2, und die Elimination von x_2 gibt eine Gleichung vierten Grades in U_2 und V_2, der ein Absolutglied fehlt und deren lineare Glieder sich in die Form $C(V_2-U_2\tan\alpha)$ bringen lassen.

Satz: Jeder durch den Pol gehenden Geraden g von S entspricht in $\mathfrak{S}'$ eine Kurve vierter Ordnung $\mathfrak{g}'$, die im Pole die gegebene Gerade g berührt.

Für $\alpha=0$ wird diese Kurve vierter Ordnung dargestellt durch:

$$\left(U_2-\frac{f'}{f}V_2\right)^3\left\{\varrho_1\varrho_2\left(\frac{f'}{f}\varrho_2^2+P\right)U_2-\varrho_2\left(\varrho_2^2(\varrho_2-\varrho_1)+\frac{f'}{f}\varrho_1 P\right)V_2 \right.\\ \left.-\varrho_1(\varrho_1^2-\varrho_2)L\right\}=0,$$

zerfällt also in die dreifach zu zählende Gerade: $U_2-\frac{f'}{f}V_2=0$ und in die Gerade (17). Da letztere der Polbahntangente zugeordnet war, muß die Gerade $U_2-\frac{f'}{f}V_2=0$ allein dem Punkte $\mathfrak{P}$ entsprechen, und wir finden den

Satz: Dem Pole $\mathfrak{P}$ entspricht in $\mathfrak{S}'$ die dreifach zählende Gerade $\mathfrak{P}N_w'$, die im Pole auf der Geraden $\mathfrak{P}N_w$ senkrecht steht.

Setzen wir ferner $\tan\alpha=i$, nehmen also die imaginäre Gerade $y_2=ix_2$, so spaltet sich die entsprechende imaginäre Kurve vierter Ordnung in die Gerade $U_2+iV_2=0$ und ein imaginäres Gebilde dritter Ordnung $\mathfrak{i}'$. Da nun jeder endliche Punkt der Geraden $x_2+iy_2=0$, von $\mathfrak{P}$ abgesehen, sich selbst entspricht, kann dem imaginären Gebilde dritter Ordnung $\mathfrak{i}'$ nur

der unendlich ferne Punkt von $x_2 + iy_2 = 0$ zugeordnet sein. Dies gibt den

Satz: Jedem der imaginären Kreispunkte I, J entspricht in $\mathfrak{S}'$ ein imaginäres Gebilde dritter Ordnung $\mathfrak{i}'$ resp. $\mathfrak{j}'$.

Die der unendlich fernen Geraden von S in $\mathfrak{S}'$ zugeordnete Kurve besteht dann außer der unendlich fernen Geraden noch aus den beiden Gebilden dritter Ordnung $\mathfrak{i}'$ und $\mathfrak{j}'$. Dies erlaubt den **Satz** zu schließen:

Jeder Geraden g von S entspricht in $\mathfrak{S}'$ im allgemeinen eine Kurve siebenter Ordnung $\mathfrak{g}'$.

Dies folgt auch aus den Gleichungen (9b) und (15), wenn wir darin $y_2 = \tan\alpha \cdot x_2 + b$ setzen; denn dann ist (9b) vom vierten und (15) vom dritten Grade in x_2, während die Koeffizienten sich linear aus U_2 und V_2 zusammensetzen. Die Elimination von x_2 führt also auf eine Gleichung siebenten Grades in U_2 und V_2.

Es seien jetzt umgekehrt die Punkte $\mathfrak{A}'$ der Ebene $\mathfrak{S}'$ gegeben. Im allgemeinen sind dann jedem Punkte von $\mathfrak{S}'$ fünf verschiedene Punkte in S zugeordnet. Wir fragen uns jetzt nach der Kurve d, die einer beliebigen Geraden $\mathfrak{d}'$ von $\mathfrak{S}'$ in S konjugiert ist. $\mathfrak{d}'$ möge die Gleichung besitzen:

$$V_2 = m\,U_2 + n.$$

Dann erhalten wir die Gleichung von d, indem wir hierin U_2 und V_2 nach den Gleichungen (6) durch x_2 und y_2 ausdrücken, was ergibt:

$$\begin{aligned}(18)\qquad &(y_2 - m x_2 - n)\,W^3 + \varrho_1 (x_2^2 + y_2^2)\left\{W^2\left[\left(\frac{f'}{f}x_2 - y_2\right) + m\left(x_2 + \frac{f'}{f}y_2\right)\right]\right. \\ &\left. + K\left[\left(x_2 + \frac{f'}{f}y_2\right) - m\left(\frac{f'}{f}x_2 - y_2\right)\right]\right\} = 0.\end{aligned}$$

Berücksichtigen wir die Werte von W und K und ordnen nach Potenzen von x_2 und y_2, so läßt sich (18) schreiben:

$$(x_2^2+y_2^2)^3\Big\{\varrho_2^3(y_2-mx_2)+\varrho_1\varrho_2^2\Big[\Big(\frac{f'}{f}x_2-y_2\Big)+m\Big(x_2+\frac{f'}{f}y_2\Big)\Big]$$
$$+\varrho_1 P\Big[\Big(x_2+\frac{f'}{f}y_2\Big)-m\Big(\frac{f'}{f}x_2-y_2\Big)\Big]\Big\}+(x_2^2+y_2^2)^2\Big\{-\varrho_2^3 n(x_2^2$$
$$+y_2^2)-3\varrho_1\varrho_2^2 N y_2(y_2-mx_2)-2\varrho_1^2\varrho_2 N y_2\Big[\Big(\frac{f'}{f}x_2-y_2\Big)$$
$$(19)\quad +m\Big(x_2+\frac{f'}{f}y_2\Big)\Big]+\varrho_1(Lx_2+My_2)\Big[\Big(x_2+\frac{f'}{f}y_2\Big)-m\Big(\frac{f'}{f}x_2-y_2\Big)\Big]\Big\}$$
$$+(x_2^2+y_2^2)\Big\{3\varrho_1\varrho_2^2 nNy_2(x_2^2+y_2^2)+3\varrho_1^2\varrho_2 N^2 y_2^2(y_2-mx_2)$$
$$+\varrho_1^3 N^2 y_2^2\Big[\Big(\frac{f'}{f}x_2-y_2\Big)+m\Big(x_2+\frac{f'}{f}y_2\Big)\Big]+\varrho_1 Qx_2y_2\Big(x_2+\frac{f'}{f}y_2\Big)$$
$$-m\Big(\frac{f'}{f}x_2-y_2\Big)\Big]\Big\}-3\varrho_1^2\varrho_2 nN^2y_2^2(x_2^2+y_2^2)-\varrho_1^3N^3y_2^3(y_2-mx_2-n)=0.$$

Wir haben es also zu tun mit einer Kurve siebenter Ordnung. Zunächst sei ihr Verhalten im Nullpunkt untersucht; wir bilden zu dem Zwecke in demselben die partiellen Ableitungen, wobei wir die linke Seite von (19) kurz mit $\Phi(x_2, y_2)$ bezeichnen. Es wird im Nullpunkt:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}=\frac{\partial\Phi}{\partial y_2}=0, \qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2\partial y_2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y_2^2}=0,$$
$$\frac{\partial^3\Phi}{\partial x_2^3}=\frac{\partial^3\Phi}{\partial x_2^2\partial y_2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2\partial y_2^2}=0, \qquad \frac{\partial^3\Phi}{\partial y_2^3}=6\varrho_1^3 nN^3,$$
$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial x_2^4}=\frac{\partial^4\Phi}{\partial x_2^3\partial y_2}=0, \qquad \frac{\partial^4\Phi}{\partial x_2^2\partial y_2^2}=-12\varrho_1^2\varrho_2 nN^2,$$
$$\frac{\partial^4\Phi}{\partial x_2\partial y_2^3}=6\varrho_1^3 mN^3, \quad \frac{\partial^4\Phi}{\partial y_2^4}=-24\varrho_1^2N^2(3\varrho_2 n+\varrho_1 N).$$

Ist n von 0 verschieden, so verschwinden im Nullpunkt sämtliche ersten und zweiten Differentialquotienten, die Kurve besitzt also im Pol einen dreifachen Punkt. Die 3 Werte von $\frac{dy_2}{dx_2}$ in demselben ergeben sich aus der Gleichung:

$$\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}+\frac{\partial\Phi}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx_2}\Big)^{(3)}=0,$$

die sich in unsrem Falle reduziert auf:

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y_2^3}\left(\frac{dy_2}{dx_2}\right)^3 = 0,$$

sodaß dreimal der Wert $\frac{dy_2}{dx_2} = 0$ auftritt.

Ist n der Null gleich, so verschwinden im Nullpunkt auch noch die sämtlichen dritten Differentialquotienten und die Kurve d besitzt somit im Nullpunkt einen vierfachen Punkt, dessen Tangentenrichtungen sich ergeben aus:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx_2}\right)^{(4)} = 0,$$

welche Gleichung sich bei uns reduziert auf:

$$4\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2 \partial y_2^3}\left(\frac{dy_2}{dx_2}\right)^3 + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y_2^4}\left(\frac{dy_2}{dx_2}\right)^4 = 0.$$

Die Wurzeln derselben lauten:

$$\left(\frac{dy_2}{dx_2}\right)^3 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dy_2}{dx_2} = \frac{-4\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x_2 \partial y_2^3}}{\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y_2^4}} = m.$$

Einer Geraden $\mathfrak{d}'$ von $\mathfrak{S}'$ entspricht also in S eine Kurve 7. Ordnung d, welche im Pol einen dreifachen Punkt mit der x_2-Achse als dreifach zählender Tangente besitzt. Geht die Gerade $\mathfrak{d}'$ durch den Pol, so hat die entsprechende Kurve d im Pol einen vierfachen Punkt mit der x_2-Achse als dreifacher und der Geraden $\mathfrak{d}'$ als einfacher Tangente.

Da der Gleichung (18) durch $W = 0$, $K = 0$ genügt wird, geht die Kurve d durch den Schnittpunkt von Wendekreis und Kreispunktkurve, d. h. durch den Ballschen Punkt B_a, und besitzt in ihm die Tangente:

$$(y_2 - y_{2,B})\frac{\partial \Phi}{\partial y_{2,B}} + (x_2 - x_{2,B})\frac{\partial \Phi}{\partial x_{2,B}} = 0,$$

wenn wir mit $x_{2,B}$, $y_{2,B}$ die Koordinaten des Punktes B_a bezeichnen. Nach Gleichung (18) wird im Punkte B_a:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_{2,B}} = \varrho_1 (x_{2,B}^2 + y_{2,B}^2)\left[\left(x_{2,B} + \frac{f'}{f} y_{2,B}\right) - m\left(\frac{f'}{f} x_{2,B} - y_{2,B}\right)\right] \frac{\partial K}{\partial x_{2,B}}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_{2,B}} = \varrho_1 (x_{2,B}^2 + y_{2,B}^2)\left[\left(x_{2,B} + \frac{f'}{f} y_{2,B}\right) - m\left(\frac{f'}{f} x_{2,B} - y_{2,B}\right)\right] \frac{\partial K}{\partial y_{2,B}},$$

sodaß die Tangente von d in B_a die Gleichung hat:

$$(y_2 - y_{2,B}) \frac{\partial K}{\partial y_{2,B}} + (x_2 - x_{2,B}) \frac{\partial K}{\partial x_{2,B}} = 0.$$

Dies ist aber auch die Tangente T_B der Kreispunktkurve im Ballschen Punkte. Die Kurve d berührt also im Ballschen Punkte die Kreispunktkurve. Gleichung (19) läßt erkennen, daß die Kurve 7. Ordnung d mit einem beliebigen Kreise höchstens 8 reelle Schnittpunkte haben kann, es müssen also von den 14 vorhandenen Schnittpunkten 6 in die imaginären Kreispunkte I, J der Ebene fallen, d. h. d geht je dreimal durch I und J. Wir wollen die Asymptoten der Kurve d in I aufsuchen. Dieselben haben die Gleichungen $y_2 = ix_2 + \mu$. Zur Bestimmung von μ setzen wir $y_2 = ix_2 + \mu$ in die Gleichung (19) ein und erhalten dann, da $x_2^2 + y_2^2 = \mu(2ix_2 + \mu)$ ist, eine Gleichung vierten Grades in x_2, deren Koeffizient von x_2^4 der Null gleich gesetzt uns eine kubische Gleichung für μ liefert. Da dieser Koeffizient, wie man sich leicht überzeugt, geschrieben werden kann:

$$(i - m)(A\mu^3 + B\mu^2 + C\mu + D),$$

wobei dann die Faktoren A, B, C, D weder m noch n enthalten, bestimmen sich die drei Werte von μ aus der Gleichung:

$$A\mu^3 + B\mu^2 + C\mu + D = 0,$$

sind also von m und n unabhängig. Was für I gilt, bleibt analog auch für den Kreispunkt J bestehen, nur tritt $-i$ an Stelle von i. Jede Kurve d hat also in den imaginären Kreispunkten I, J der Ebene je drei Asymptoten T_I, T_I', T_I'' bez. T_J, T_J', T_J'' (wobei T_J aus T_I usw. durch Vertauschung von i mit $-i$ hervorgeht), und die reellen Schnittpunkte von T_I mit T_J, von T_I' mit T_J', von T_I'' mit T_J'' sind die drei Doppelbrennpunkte der Kurve d. Da diese Asymptoten in I und J

nach oben von m und n unabhängig sind, sind sie allen Kurven d, die den Geraden von $\mathfrak{S}'$ entsprechen, gemeinsam. Zusammenfassend können wir den **Satz** aussprechen:

Den Geraden $\mathfrak{d}'$ von $\mathfrak{S}'$ entsprechen in S im allgemeinen trizirkulare Kurven siebenter Ordnung d mit drei gemeinschaftlichen Doppelbrennpunkten. Dieselben haben im Pol einen dreifachen Punkt mit der dreifach zählenden Tangente $y_2 = 0$ und berühren im Ballschen Punkte die Kreispunktkurve.

Wir sind jetzt imstande, auch die allgemeinste Zuordnung der beiden Ebenen S und $\mathfrak{S}'$ auszusprechen.

Gegeben die Kurven der Ebene S.

Wir bezeichnen mit a eine Kurve n^{ter} Ordnung von S, die weder den Pol, noch den Ballschen Punkt, noch die imaginären Kreispunkte enthält, mit $\mathfrak{a}'$ die entsprechende Kurve in $\mathfrak{S}'$. Ziehen wir in $\mathfrak{S}'$ irgend eine Gerade $\mathfrak{d}'$, so wird die zugeordnete Kurve d von a in $7 \cdot n$ Punkten geschnitten, und diesen entsprechen auf $\mathfrak{d}'$ ebensoviele Punkte von $\mathfrak{a}'$. Die Kurve $\mathfrak{a}'$ ist also von der Ordnung $7n$.

Geht aber a durch den Pol $\mathfrak{P}$, so entspricht diesem Punkte allein die Gerade $\mathfrak{P}N_w'$. Die Kurve a hat dann mit jeder Kurve d, die einer beliebigen Geraden $\mathfrak{d}'$ zugeordnet ist, in $\mathfrak{P}$ entweder drei oder sechs zusammenfallende Punkte gemein, je nachdem sie die Polbahntangente in $\mathfrak{P}$ schneidet oder berührt; d wird also — vom Pole abgesehen — von a nur noch in $7n-3$ resp. $7n-6$ Punkten geschnitten. Da dem Punkte $\mathfrak{P}$ von d der jeweilige Schnittpunkt von $\mathfrak{d}'$ mit $\mathfrak{P}N_w'$ entspricht, also im allgemeinen kein Schnitt von $\mathfrak{a}'$ mit $\mathfrak{d}'$, trifft folglich $\mathfrak{a}'$ jede Gerade $\mathfrak{d}'$ nur in $7n-3$ resp. $7n-6$ Punkten.

Resultat: Jeder Durchgang der Kurve a durch den Pol $\mathfrak{P}$ vermindert die Ordnung der entsprechenden Kurve $\mathfrak{a}'$ um drei, die gleichzeitige Berührung mit der Polbahntangente um sechs.

Geht a durch den Ballschen Punkt B_a, so zerfällt die entsprechende Kurve in die unendlich ferne Gerade und einen

Rest $\mathfrak{a}'$. Dann hat die Kurve a mit allen Kurven d, die den Geraden $\mathfrak{d}'$ von $\mathfrak{S}'$ entsprechen, in B_a entweder einen oder zwei zusammenfallende Punkte gemein, je nachdem sie von der Geraden T_B an dieser Stelle geschnitten oder berührt wird. Durch analoge Schlußweise wie oben finden wir das

Resultat: Jeder Durchgang der Kurve a durch den Ballschen Punkt B_a vermindert die Ordnung der entsprechenden Kurve $\mathfrak{a}'$ um eins, erfolgt aber der Durchgang in der Richtung T_B, so wird die Ordnungszahl um zwei vermindert.

Geht endlich die Kurve a durch einen der imaginären Kreispunkte, etwa I, so spaltet sich die entsprechende Kurve in das imaginäre Gebilde dritter Ordnung $\mathfrak{i}'$ und eine Restkurve $\mathfrak{a}'$. Die Kurve a hat dann mit jeder Kurve d, die einer beliebigen Geraden $\mathfrak{d}'$ konjugiert ist, in I drei zusammenfallende Punkte gemein oder, falls a in I eine der Asymptoten T_I, T_I', T_I'' berührt, vier zusammenfallende Punkte, und wir schließen das

Resultat: Jeder Durchgang der Kurve a durch einen der imaginären Kreispunkte I oder J vermindert die Ordnung der entsprechenden Kurve $\mathfrak{a}'$ um drei, geschieht aber der Durchgang in einer der Richtungen T_I, T_I', T_I'' bez. T_J, T_J', T_J'', so wird die Ordnungszahl um vier vermindert.

Gegeben die Kurven der Ebene $\mathfrak{S}'$.

Ist $\mathfrak{d}'$ eine Kurve ν^{ter} Ordnung in $\mathfrak{S}'$, b die ihr in S entsprechende Kurve, g eine beliebige Gerade von S und $\mathfrak{g}'$ die zugehörige Kurve siebenter Ordnung von $\mathfrak{S}'$, so sind den 7ν Schnittpunkten von $\mathfrak{d}'$ und $\mathfrak{g}'$ ebensoviele Schnittpunkte von b und g zugeordnet, d. h. b ist von der Ordnung 7ν.

Abschließend können wir das **Ergebnis** aussprechen:

Zwischen den Bahnpunkten und ihren zweiten Krümmungsmittelpunkten besteht eine ein-fünfdeutige Verwandtschaft siebenten Grades. (Bei starren Systemen ist die analoge Verwandtschaft ein-vierdeutig vom sechsten Grade).

Zufolge unsrer Resultate entspricht der Kreispunktkurve von S in $\mathfrak{S}'$ eine Kurve von der Ordnung:

$$7 \cdot 4 - (3+6) - 2 - 4 \cdot 3 = 5,$$

wegen $\quad \mathfrak{P} \quad \mathfrak{P} \quad B_a \quad IJ$

und jedem die Polbahntangente im Pol berührenden Kreis eine Kurve von der Ordnung:

$$7 \cdot 2 - 6 - 6 = 2,$$

wegen $\quad \mathfrak{P} \quad IJ$

und zwar wieder ein Kreis.

§ 9.

Die höheren Berührungen der Bahntangente.

Für starre Systeme hat M. Krause[1]) die hinreichenden und notwendigen Bedingungen für eine n-punktig berührende Bahntangente aufgestellt, für die ähnlich veränderlichen Systeme gestaltet sich die analoge Untersuchung weit komplizierter. Sie durchzuführen sei die Aufgabe dieses Paragraphen.

3-punktige Berührung.

Die Bedingungsgleichung für eine 3-punktige Berührung der Bahntangente lautet:

$$x'y'' - y'x'' = 0, \tag{1}$$

wobei die Indexstriche Differentiationen nach t bezeichnen.

Die Differentialquotienten von x und y wurden bereits in § 4, S. 23 berechnet. Wir wollen die dortigen Ausdrücke auf das an den Pol verschobene x_1, y_1-System transformieren und machen dabei Gebrauch von den auf S. 24 eingeführten Abkürzungen:

$$\varrho_1 = 1 + \frac{f'^2}{f^2}$$

$$\varrho_2 = 1 + 2\frac{f'^2}{f^2} - \frac{f''}{f}, \qquad \chi_2 = \frac{f'}{f} + \frac{f'f''}{f^2} \tag{2}$$

$$\varrho_3 = 1 + 3\frac{f'^2}{f^2} - 3\frac{f''}{f} - \frac{f'f'''}{f^2}, \quad \chi_3 = 2\frac{f'}{f} + 3\frac{f'f''}{f^2} - \frac{f'''}{f},$$

sowie:

[1]) Archiv der Mathematik und Physik, III. Reihe, XVI. Heft 1.

$$(3)\quad \begin{aligned} \varrho_1 a &= \chi_2 a' - \varrho_2 b' - \varrho_1 a'', \quad & \varrho_1 a_1 &= \varrho_3 a' + \chi_3 b' + \varrho_1 a''', \\ \varrho_1 \beta &= \varrho_2 a' + \chi_2 b' - \varrho_1 b'', & \varrho_1 \beta_1 &= -\chi_3 a' + \varrho_3 b' + \varrho_1 b'''. \end{aligned}$$

Dann wird:

$$x' = \frac{f'}{f} x_1 - y_1, \quad y' = \frac{f'}{f} y_1 + x_1$$

$$x'' = -\alpha - \left(1 - \frac{f''}{f}\right) x_1 - 2\frac{f'}{f} y_1, \quad y'' = -\beta - \left(1 - \frac{f''}{f}\right) y_1 + 2\frac{f'}{f} x_1,$$

sodaß obige Bedingung (1) übergeht in:

$$(4)\qquad \varrho_2 (x_1^2 + y_1^2) + \left(\alpha - \frac{f'}{f}\beta\right) x_1 + \left(\beta + \frac{f'}{f}\alpha\right) y_1 = 0.$$

Es ist dies die Gleichung (4) des Wendekreises von S. 13.

4-punktige Berührung.

Die Bedingung für eine 4-punktig berührende Bahntangente erhalten wir durch eine nochmalige Differentiation von (1) nach t zu:

$$(5)\qquad x' y''' - y' x''' = 0.$$

Im x_1, y_1-System nehmen die auf Seite 23 berechneten dritten Differentialquotienten von x und y die Werte an:

$$x''' = a_1 - \left(3\frac{f'}{f} - \frac{f'''}{f}\right) x_1 + \left(1 - 3\frac{f''}{f}\right) y_1$$

$$y''' = \beta_1 - \left(3\frac{f'}{f} - \frac{f'''}{f}\right) y_1 - \left(1 - 3\frac{f''}{f}\right) x_1,$$

sodaß die Bedingung (5) die Gestalt erhält:

$$(6)\qquad -\chi_3 (x_1^2 + y_1^2) + \left(a_1 - \frac{f'}{f}\beta_1\right) x_1 + \left(\beta_1 + \frac{f'}{f} a_1\right) y_1 = 0.$$

Für die Bahnpunkte, in denen eine 4-punktige Berührung mit der Tangente stattfindet, die sogen. Undulationspunkte, müssen die Gleichungen (4) und (6) zusammen bestehen. Aus ihnen ergeben sich als Gleichungen der Undulationskurve:

$$(7)\quad x_1 = -\varrho_1 (\alpha\beta_1 - a_1\beta) \frac{\lambda_1}{x_1^2 + \lambda_1^2}, \quad y_1 = \varrho_1 (\alpha\beta_1 - a_1\beta) \frac{x_1}{x_1^2 + \lambda_1^2},$$

wobei

$$(8)\qquad \begin{aligned} \varkappa_1 &= \chi_3\left(\alpha - \frac{f'}{f}\beta\right) + \varrho_2\left(\alpha_1 - \frac{f'}{f}\beta_1\right) \\ \lambda_1 &= \chi_3\left(\beta + \frac{f'}{f}\alpha\right) + \varrho_2\left(\beta_1 + \frac{f'}{f}\alpha_1\right) \end{aligned}$$

gesetzt ist.

Aus den Gleichungen (7) folgt der

Satz: Die Koordinaten x_1, y_1 der Bahnpunkte, in welchen eine 4-punktige Berührung mit der Tangente stattfindet, leisten den Gleichungen Genüge:

$$(9)\qquad x_1\varkappa_1 + y_1\lambda_1 = 0, \quad y_1\varkappa_1 - x_1\lambda_1 = \varrho_1(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta).$$

5-punktige Berührung.

Die Bedingungsgleichung der 5-punktigen Berührung resultiert aus (5) durch abermalige Differentiation nach t. Wir finden dann:

$$(x'y''' - y''x''') + (x'y^{IV} - y'x^{IV}) = 0.$$

Da aber außerdem noch die Gleichungen (1) und (5) gelten:

$$x'y'' - y'x'' = 0, \quad x'y''' - y'x''' = 0,$$

besteht die Beziehung:

$$x''y''' - y''x''' = 0,$$

sodaß obige Bedingung übergeht in:

$$(10)\qquad x'y^{IV} - y'x^{IV} = 0.$$

Die vierten Differentialquotienten von x und y erhalten wir durch Differentiation der Gleichungen (4) des § 4, und zwar wird unter Erwägung der Beziehungen:

$$\frac{d(x-a)}{dt} = \frac{f'}{f}(x-a) - (y-b), \qquad \frac{d(y-b)}{dt} = \frac{f'}{f}(y-b) + (x-a),$$

$$(11)\qquad \begin{aligned} \frac{d^4x}{dt^4} &= \frac{d^4a}{dt^4} + \left(1 - 6\frac{f''}{f} + \frac{f^{IV}}{f}\right)(x-a) + \left(4\frac{f'}{f} - 4\frac{f'''}{f}\right)(y-b) \\ \frac{d^4y}{dt^4} &= \frac{d^4b}{dt^4} + \left(1 - 6\frac{f''}{f} + \frac{f^{IV}}{f}\right)(y-b) - \left(4\frac{f'}{f} - 4\frac{f'''}{f}\right)(x-a). \end{aligned}$$

Führen wir jetzt die Abkürzungen ein:

$$\varrho_4 = 1 + 4\frac{f'^2}{f^2} - 6\frac{f''}{f} - 4\frac{f'f'''}{f^2} + \frac{f^{IV}}{f}$$

(12)

$$\chi_4 = 3\frac{f'}{f} + 6\frac{f'f''}{f^2} - 4\frac{f'''}{f} - \frac{f'f^{IV}}{f^2},$$

sowie:

$$\varrho_1 a_2 = \chi_4 a' - \varrho_4 b' + \varrho_1 a^{IV}$$

(13)

$$\varrho_1 \beta_2 = \varrho_4 a' + \chi_4 b' + \varrho_1 b^{IV},$$

so lauten die Gleichungen (11) auf das x_1, y_1-System transformiert:

$$x^{IV} = a_2 + \left(1 - 6\frac{f''}{f} + \frac{f^{IV}}{f}\right)x_1 + \left(4\frac{f'}{f} - 4\frac{f'''}{f}\right)y_1$$

$$y^{IV} = \beta_2 + \left(1 - 6\frac{f''}{f} + \frac{f^{IV}}{f}\right)y_1 - \left(4\frac{f'}{f} - 4\frac{f'''}{f}\right)x_1,$$

und die Bedingung (10) nimmt die Form an:

$$\varrho_4(x_1^2 + y_1^2) + \left(a_2 - \frac{f'}{f}\beta_2\right)x_1 + \left(\beta_2 + \frac{f'}{f}a_2\right)y_1 = 0. \tag{14}$$

Diese Gleichung muß zusammen mit den Gleichungen (4) und (6) bestehen. Aus (4) und (6) folgten die Gleichungen (9). Da nun (14) aus (6) durch Vertauschung von χ_3 mit $-\varrho_4$, a_1 mit a_2, β_1 mit β_2 hervorgeht, folgt aus (4) und (14) der

Satz: Die Koordinaten x_1, y_1 der Bahnpunkte, in welchen die Tangente 5-punktig berührt, leisten neben den früheren den Gleichungen Genüge:

$$x_1 \varkappa_2 + y_1 \lambda_2 = 0, \qquad y_1 \varkappa_2 - x_1 \lambda_2 = \varrho_1(\alpha\beta_2 - a_2\beta), \tag{15}$$

wobei bedeutet:

$$\varkappa_2 = -\varrho_4\left(\alpha - \frac{f'}{f}\beta\right) + \varrho_2\left(a_2 - \frac{f'}{f}\beta_2\right)$$

(16)

$$\lambda_2 = -\varrho_4\left(\beta + \frac{f'}{f}\alpha\right) + \varrho_2\left(\beta_2 + \frac{f'}{f}a_2\right).$$

Wegen des Zusammenbestehens der Gleichungen (9) und (15) ergibt sich der

Satz: Die hinreichende und notwendige Bedingung für eine fünfpunktige Berührung lautet: Es muß neben (9) die Gleichung erfüllt sein:

$$\varkappa_1 \lambda_2 - \lambda_1 \varkappa_2 = 0. \tag{17}$$

Beachten wir die Gleichungen (8) und (16), so läßt sich die Bedingung (17) auch zusammenrechnen zu:

$$(18)\quad \varrho_4(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)+\chi_3(\alpha\beta_2-\alpha_2\beta)+\varrho_2(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)=0.$$

Berücksichtigen wir endlich die Bedeutung der Größen $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$, so kann man der Bedingung auch folgende Form geben:

$$\begin{aligned}(19)\quad &(\varrho_3\varrho_4+\chi_3\chi_4)(a'b''-b'a'')+(-\varrho_2\chi_4+\chi_2\varrho_4)(a'b'''-b'a''')\\ &-\varrho_1\varrho_4(a''b'''-b''a''')+(\varrho_2\varrho_3+\chi_2\chi_3)(a'b^{IV}-b'a^{IV})\\ &-\varrho_1\chi_3(a''b^{IV}-b''a^{IV})+\varrho_1\varrho_2(a'''b^{IV}-b'''a^{IV})=0.\end{aligned}$$

6-punktige Berührung.

Die diesbezügliche Bedingungsgleichung lautet zunächst:

$$2(x''y^{IV}-y''x^{IV})+(x'y^{V}-y'x^{V})=0,$$

die sich aber wegen des Mitbestehens der Relationen (1) und (10) reduziert auf:

$$(20)\quad x'y^{V}-y'x^{V}=0.$$

Durch nochmalige Differentiation der Gleichungen (11) folgt:

$$\begin{aligned}(21)\quad \frac{d^5x}{dt^5}&=\frac{d^5a}{dt^5}+\left(5\frac{f'}{f}-10\frac{f'''}{f}+\frac{f^{V}}{f}\right)(x-a)-\left(1-10\frac{f''}{f}+5\frac{f^{IV}}{f}\right)(y-b)\\ \frac{d^5y}{dt^5}&=\frac{d^5b}{dt^5}+\left(5\frac{f'}{f}-10\frac{f'''}{f}+\frac{f^{V}}{f}\right)(y-b)+\left(1-10\frac{f''}{f}+5\frac{f^{IV}}{f}\right)(x-a)\end{aligned}$$

und durch Transformation auf das x_1, y_1-System:

$$\begin{aligned}x^{V}&=-\alpha_3+\left(5\frac{f'}{f}-10\frac{f'''}{f}+\frac{f^{V}}{f}\right)x_1-\left(1-10\frac{f''}{f}+5\frac{f^{IV}}{f}\right)y_1\\ y^{V}&=-\beta_3+\left(5\frac{f'}{f}-10\frac{f'''}{f}+\frac{f^{V}}{f}\right)y_1+\left(1-10\frac{f''}{f}+5\frac{f^{IV}}{f}\right)x_1,\end{aligned}$$

wobei gesetzt wurde:

$$\begin{aligned}(22)\quad \varrho_5&=1+5\frac{f'^2}{f^2}-10\frac{f''}{f}-10\frac{f'f'''}{f^2}+5\frac{f^{IV}}{f}+\frac{f'f^{V}}{f^2}\\ \chi_5&=4\frac{f'}{f}+10\frac{f'f''}{f^2}-10\frac{f'''}{f}-5\frac{f'f^{IV}}{f^2}+\frac{f^{V}}{f},\end{aligned}$$

sowie:

$$\begin{aligned}(23)\quad \varrho_1\alpha_3&=\varrho_5a'+\chi_5b'-\varrho_1a^{V}.\\ \varrho_1\beta_3&=-\chi_5a'+\varrho_5b'-\varrho_1b^{V}.\end{aligned}$$

Die Bedingung (20) gestaltet sich dann:

$$(24) \qquad -\chi_5(x_1^2+y_1^2)+\left(\alpha_3-\frac{f'}{f}\beta_3\right)x_1+\left(\beta_3+\frac{f'}{f}\alpha_3\right)y_1=0.$$

Diese Gleichung muß zusammen mit den Gleichungen (4), (6) und (14) bestehen. Aus (4) und (24) finden wir den

Satz: Die Koordinaten x_1, y_1 der Bahnpunkte, in welchen eine 6-punktige Berührung mit der Tangente stattfindet, leisten neben den früheren den Gleichungen Genüge:

$$(25) \qquad x_1\varkappa_3+y_1\lambda_3=0, \qquad y_1\varkappa_3-x_1\lambda_3=\varrho_1(\alpha\beta_3-\alpha_3\beta),$$

wobei

$$(26) \qquad \begin{aligned}\varkappa_3&=\chi_5\left(\alpha-\frac{f'}{f}\beta\right)+\varrho_2\left(\alpha_3-\frac{f'}{f}\beta_3\right)\\ \lambda_3&=\chi_5\left(\beta+\frac{f'}{f}\alpha\right)+\varrho_2\left(\beta_3+\frac{f'}{f}\alpha_3\right)\end{aligned}$$

gesetzt ist.

Da die Gleichungen (9) und (25) zusammenbestehen, erhalten wir den

Satz: Für eine sechspunktige Berührung ist hinreichend und notwendig, daß neben (9) und (17) die Bedingung erfüllt ist:

$$(27) \qquad \varkappa_1\lambda_3-\lambda_1\varkappa_3=0,$$

die sich auch in die Formen bringen läßt:

$$(28) \qquad -\chi_5(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)+\chi_3(\alpha\beta_3-\alpha_3\beta)+\varrho_2(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)=0,$$

oder:

$$(29) \qquad \begin{aligned}&(\varrho_3\chi_5-\chi_3\varrho_5)(a'b''-b'a'')+(\varrho_2\varrho_5+\chi_2\chi_5)(a'b'''-b'a''')\\ &-\varrho_1\chi_5(a''b'''-b''a''')+(\varrho_2\varrho_3+\chi_2\chi_3)(a'b^{\mathrm{V}}-b'a^{\mathrm{V}})\\ &-\varrho_1\chi_3(a''b^{\mathrm{V}}-b''a^{\mathrm{V}})+\varrho_1\varrho_2(a'''b^{\mathrm{V}}-b'''a^{\mathrm{V}})=0.\end{aligned}$$

n-punktige Berührung.

Unsere Untersuchungen setzen uns in den Stand, die Bedingungen für eine n-punktige Berührung der Bahntangente anzugeben:

Lehrsatz: Definieren wir die Funktionen $\varrho_n(f)$ und $\chi_n(f)$:

$$\varrho_n(f) = 1 + n_1 \frac{f'^2}{f^2} - n_2 \frac{f''}{f} - n_3 \frac{f'f'''}{f^2} + n_4 \frac{f^{IV}}{f} + n_5 \frac{f'f^V}{f^2} - \cdots + (-1)^r n_{2r} \frac{f^{(2r)}}{f} + (-1)^r n_{2r+1} \frac{f'f^{(2r+1)}}{f^2} \cdots$$

$$\chi_n(f) = (n_1 - 1)\frac{f'}{f} + n_2 \frac{f'f''}{f^2} - n_3 \frac{f'''}{f} - n_4 \frac{f'f^{IV}}{f^2} + n_5 \frac{f^V}{f} + \cdots + (-1)^{r+1} n_{2r} \frac{f'f^{(2r)}}{f^2} + (-1)^{r+2} n_{2r+1} \frac{f^{(2r+1)}}{f} \cdots,$$

wobei n_1, n_2 usw. die Binomialkoeffizienten bedeuten, ferner die Funktionen α_n und β_n:

für gerades n:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1 \alpha_n &= \chi_{n+2} a' - \varrho_{n+2} b' \mp \varrho_1 a^{(n+2)} \\ \varrho_1 \beta_n &= \varrho_{n+2} a' + \chi_{n+2} b' \mp \varrho_1 b^{(n+2)} \end{aligned}\right\} \text{für} \begin{matrix} n = 0, 4, 8 \ldots \text{oberes} \\ n = 2, 6, 10 \ldots \text{unteres} \end{matrix} \text{Zeichen,}$$

für ungerades n:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1 \alpha_n &= \varrho_{n+2} a' + \chi_{n+2} b' \pm \varrho_1 a^{(n+2)} \\ \varrho_1 \beta_n &= -\chi_{n+2} a' + \varrho_{n+2} b' \pm \varrho_1 b^{(n+2)} \end{aligned}\right\} \text{für} \begin{matrix} n = 1, 5, 9 \ldots \text{oberes} \\ n = 3, 7, 11 \ldots \text{unteres} \end{matrix} \text{Zeichen,}$$

(in der Rechnung wurde $\alpha_0 = a$ geschrieben)

und endlich die Funktionen $\varkappa_n$ und λ_n:

für gerades n:

$$\varkappa_n = -\varrho_{n+2}\left(\alpha - \frac{f'}{f}\beta\right) + \varrho_2\left(\alpha_n - \frac{f'}{f}\beta_n\right)$$

$$\lambda_n = -\varrho_{n+2}\left(\beta + \frac{f'}{f}\alpha\right) + \varrho_2\left(\beta_n + \frac{f'}{f}\alpha_n\right),$$

für ungerades n:

$$\varkappa_n = \chi_{n+2}\left(\alpha - \frac{f'}{f}\beta\right) + \varrho_2\left(\alpha_n - \frac{f'}{f}\beta_n\right)$$

$$\lambda_n = \chi_{n+2}\left(\beta + \frac{f'}{f}\alpha\right) + \varrho_2\left(\beta_n + \frac{f'}{f}\alpha_n\right),$$

so lauten die hinreichenden und notwendigen Bedingungen für eine n-punktige Berührung der Bahntangente: $\varkappa_1 \lambda_r - \lambda_1 \varkappa_r = 0$ für $r = 2, 3 \ldots n-3$,

und die Koordinaten der betreffenden Punkte leisten den Gleichungen Genüge:

$$\begin{aligned} x_1 \varkappa_r + y_1 \lambda_r &= 0 \\ y_1 \varkappa_r - x_1 \lambda_r &= \varrho_1 (\alpha \beta_r - \alpha_r \beta) \end{aligned} \quad \text{für } r = 1, 2 \ldots n-3.$$

Die hinreichenden und notwendigen Bedingungen für eine n-punktige Berührung kann man auch noch in die Formen bringen:

$$\varrho_{r+2}(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta) + \chi_3(\alpha\beta_r - \alpha_r\beta) + \varrho_2(\alpha_1\beta_r - \alpha_r\beta_1) = 0$$
$$\text{für } r = 2, 4, 6 \ldots n-3,$$

$$-\chi_{r+2}(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta) + \chi_3(\alpha\beta_r - \alpha_r\beta) + \varrho_2(\alpha_1\beta_r - \alpha_r\beta_1) = 0$$
$$\text{für } r = 3, 5, 7 \ldots n-3;$$

oder:

$$(\varrho_3\varrho_{r+2} + \chi_3\chi_{r+2})(a'b'' - b'a'') + (-\varrho_2\chi_{r+2} + \chi_2\varrho_{r+2})(a'b''' - b'a''')$$
$$- \varrho_1\varrho_{r+2}(a''b''' - b''a''') \pm [(\varrho_2\varrho_3 + \chi_2\chi_3)(a'b^{(r+2)} - b'a^{(r+2)})$$
$$- \varrho_1\chi_3(a''b^{(r+2)} - b''a^{(r+2)}) + \varrho_1\varrho_2(a'''b^{(r+2)} - b'''a^{(r+2)})] = 0$$

für $r = 2, 4, 6 \ldots n-3$ und dabei $\begin{matrix}\text{oberes}\\ \text{unteres}\end{matrix}$ Zeichen für $\begin{matrix} r = 2, 6 \ldots \\ r = 4, 8 \ldots \end{matrix}$

$$(\varrho_3\chi_{r+2} - \chi_3\varrho_{r+2})(a'b'' - b'a'') + (\varrho_3\varrho_{r+2} + \chi_2\chi_{r+2})(a'b''' - b'a''')$$
$$- \varrho_1\chi_{r+2}(a''b''' - b''a''') \pm [(\varrho_2\varrho_3 + \chi_2\chi_3)(a'b^{(r+2)} - b'a^{(r+2)})$$
$$- \varrho_1\chi_3(a''b^{(r+2)} - b''a^{(r+2)}) + \varrho_1\varrho_2(a'''b^{(r+2)} - b'''a^{(r+2)})] = 0$$

für $r = 3, 5, 7 \ldots n-3$ und dabei $\begin{matrix}\text{oberes}\\ \text{unteres}\end{matrix}$ Zeichen für $\begin{matrix} r = 3, 7 \ldots \\ r = 5, 9 \ldots \end{matrix}$

§ 10.

Die Burmesterschen Punkte.

Die Bedingungsgleichung dafür, daß der Krümmungskreis die Bahnkurve fünfpunktig berührt, erhalten wir, wenn wir die Gleichung der Kreispunktkurve von § 4:

(1) $$K = (x'^2 + y'^2)(x'y''' - y'x''') - 3(x'y'' - y'x'')(x'x'' + y'y'') = 0$$

nochmals nach t differentiieren. Dann finden wir:

(2) $$K' = (x'^2 + y'^2)(x'y^{IV} - y'x^{IV}) - (x'y'' - y'x'')[3(x''^2 + y''^2) + 4(x'x''' + y'y''')] = 0.$$

Diese Bedingung wollen wir jetzt für die ähnlich veränderlichen Systeme aufstellen, ausgedrückt im x_2, y_2-System.

Die Werte der ersten bis dritten Differentialquotienten von x und y nach t, berechnet für das x_2, y_2-System, wurden auf Seite 24/25 des § 4 gegeben; die vierten Differentialquotienten wurden auf Seite 79 des § 9 zunächst für das x, y-System aufgestellt, wir haben die dortigen Ausdrücke noch auf das x_2, y_2-System zu transformieren und finden:

$$(3)\quad \frac{d^4x}{dt^4} = \alpha_2 + \frac{1}{N}(\gamma_2 x_2 - \delta_2 y_2), \quad \frac{d^4y}{dt^4} = \beta_2 + \frac{1}{N}(\delta_2 x_2 + \gamma_2 y_2),$$

wobei

$$\gamma_2 = -\left(1 - 6\frac{f''}{f} + \frac{f^{IV}}{f}\right)x'_p - \left(4\frac{f'}{f} - 4\frac{f'''}{f}\right)y'_p$$

$$\delta_2 = \left(4\frac{f'}{f} - 4\frac{f'''}{f}\right)x'_p - \left(1 - 6\frac{f''}{f} + \frac{f^{IV}}{f}\right)y'_p$$

gesetzt wurde.

Wir sind jetzt in der Lage, die einzelnen Faktoren der Bedingungsgleichung (2) zu berechnen und bekommen unter Benutzung der Größen $\varrho_r, \chi_r, \alpha_r, \beta_r, N$:

$$x'^2 + y'^2 = \varrho_1(x_2^2 + y_2^2)$$

$$(4)\quad x'y'' - y'x'' = \varrho_2(x_2^2 + y_2^2) - \varrho_1 N y_2$$

$$x''^2 + y''^2 = \frac{1}{\varrho_1}\left[(\varrho_2^2 + \chi_2^2)(x_2^2 + y_2^2) + 2\varrho_1 N(\chi_2 x_2 - \varrho_2 y_2) + \varrho_1^2 N^2\right]$$

$$x'x''' + y'y''' = -\varrho_3(x_2^2 + y_2^2) - \frac{1}{N}\left[(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)x_2 + (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)y_2\right]$$

$$x'y^{IV} - y'x^{IV} = -\varrho_4(x_2^2 + y_2^2) - \frac{1}{N}\left[(\alpha\beta_2 - \alpha_2\beta)x_2 - (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2)y_2\right].$$

Setzen wir die Resultate der Gleichungen (4) in (2) ein, so ergibt sich als Bedingung einer fünfpunktigen Berührung des Krümmungskreises eine Gleichung von der Form:

$$(5)\quad \begin{aligned}(x_2^2 + y_2^2)\left\{P_1(x_2^2 + y_2^2) + L_1 x_2 + M_1 y_2 + R_1\right\} \\ + y_2\left\{Q_{11}x_2 + Q_{12}y_2 + S_1\right\} = 0,\end{aligned}$$

deren Koeffizienten die Werte haben:

$$P_1 = -\varrho_1\varrho_4 - 3\frac{\varrho_2}{\varrho_1}(\varrho_2^2+\chi_2^2) + 4\varrho_2\varrho_3$$

$$L_1 = \frac{1}{N}\left[-6\varrho_2\chi_2 N^2 + 4\varrho_2(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1) - \varrho_1(\alpha\beta_2-\alpha_2\beta)\right]$$

$$M_1 = \frac{1}{N}\left[(3\chi_2^2-4\varrho_1\varrho_3+9\varrho_2^2)N^2 + 4\varrho_2(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)+\varrho_1(\alpha\alpha_2+\beta\beta_2)\right]$$

(6) $$R_1 = -3\varrho_1\varrho_2 N^2$$

$$Q_{11} = 2\varrho_1\left[3\chi_2 N^2 - 2(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)\right]$$

$$Q_{12} = -2\varrho_1\left[3\varrho_2 N^2 + 2(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)\right]$$

$$S_1 = 3\varrho_1^2 N^3.$$

Die Punkte mit fünfpunktig berührendem Krümmungskreis, die wir nach Analogie der bei starren Systemen üblichen Bezeichnung die Burmesterschen Punkte der betrachteten Systemphase nennen wollen, müssen aber auch auf der Kreispunktkurve liegen, also die Gleichung (13) des § 4 erfüllen, die wir schreiben können:

(7) $$(x_2^2+y_2^2)\left\{P(x_2^2+y_2^2)+Lx_2+My_2\right\}+Qx_2y_2 = 0.$$

Dann müssen die Koordinaten der Burmesterschen Punkte aber auch folgender Gleichung dritten Grades genügen, die durch Kombination der Gleichungen (5) und (7) entsteht:

(8) $$\begin{aligned} &Qx_2\left\{P_1(x_2^2+y_2^2)+L_1x_2+M_1y_2+R_1\right\} \\ &-(Q_{11}x_2+Q_{12}y_2+S_1)\left\{P(x_2^2+y_2^2)+Lx_2+My_2\right\} = 0. \end{aligned}$$

Nunmehr können wir die Burmesterschen Punkte erhalten als Schnitte der Kreispunktkurve (7) mit der Kurve dritter Ordnung h (8). Die Kreispunktkurve besitzt als bizirkulare Kurve vierter Ordnung in den imaginären Kreispunkten der Ebene Doppelpunkte, die Kurve h geht als zirkulare Kurve dritter Ordnung ebenfalls durch die imaginären Kreispunkte. Beide Kurven haben also in den imaginären Kreispunkten 4 Punkte gemein. Der Pol ist ein Doppelpunkt der Kurve (7) und ein einfacher Punkt der Kurve (8). Die beiden betrachteten Kurven haben mithin im Pol 2 Punkte gemein. Sie schneiden sich ferner auf

der Polbahnnormalen im Punkte Y_c mit den Koordinaten $x_2 = 0$, $y_2 = -\frac{M}{P}$. Von den imaginären Kreispunkten, dem Pol und dem Punkte Y_c[1]) der Polbahnnormalen abgesehen, haben somit die beiden Kurven noch 5 Punkte gemein, und es folgt der von Müller gefundene

Satz: In jeder Phase eines ähnlich veränderlichen Systems gibt es im allgemeinen 5 Burmesterschе Punkte. Dieselben sind bestimmt als Schnitte der Kreispunktkurve mit der zirkularen Kurve dritter Ordnung h.

Zufolge der Gleichungen (7) und (5) sind die Polarkoordinaten r, φ der Burmesterschen Punkte bestimmt durch:

$$(7') \qquad Pr^2 + r(L\cos\varphi + M\sin\varphi) + Q\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

$$(5') \qquad \begin{aligned} P_1 r^3 + r^2(L_1\cos\varphi + M_1\sin\varphi) + r(R_1 + Q_{11}\sin\varphi\cos\varphi \\ + Q_{12}\sin^2\varphi) + S_1\sin\varphi = 0. \end{aligned}$$

Nach den Gleichungen (6) dieses Paragraphen und den Gleichungen (14) des § 4 bestehen unter Rücksicht auf den Wert des Wendekreisdurchmessers $d_w = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} N$ zwischen den Koeffizienten von (7') und (5') die Beziehungen:

$$(9) \qquad \begin{aligned} S_1 &= NQ = -R_1 d_w \\ R_1 &= -\frac{NQ}{d_w} \\ Q_{12} &= 4NL + 2\frac{NQ}{d_w} \end{aligned}$$

$$QR_1 - LS_1 = -\frac{NQ}{d_w}(Ld_w + Q) = R_1(Ld_w + Q).$$

Führen wir mit Müller[2]) den durch den Punkt r, φ gehenden Kreis ein, der die Polbahntangente im Pol berührt, und bezeichnen seinen Durchmesser mit d, so ist $r = d\sin\varphi$ (womit das Vorzeichen von d in gleicher Weise festgesetzt ist wie

[1]) Der Punkt Y_c kommt nicht in Betracht, da er nicht der Gleichung (5) genügt.

[2]) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung XIX, 1910, Heft 1 u. 2.

früher bei d_w, d_r, d_o usw.), und die Gleichungen (7') und (5') lassen sich schreiben:

$$\tan\varphi\,(Pd+M)\,d+Ld+Q=0$$

$$\tan^2\varphi\,(P_1d^3+M_1d^2+R_1d+Q_{12}d+S_1)+\tan\varphi\,(L_1d+Q_{11})\,d+(R_1d+S_1)=0.$$

Hieraus folgt durch Elimination von $\tan\varphi$ für d die Gleichung 5. Grades:

$$(Ld+Q)^2(P_1d^3+M_1d^2+R_1d+Q_{12}d+S_1)-d^2(Ld+Q)(Pd+M)(L_1d+Q_{11})+d^2(Pd+M)^2(R_1d+S_1)=0.$$

In dieser lautet der Faktor von d:

$$a_4=Q^2(R_1+Q_{12})+2LQS_1$$

$$=Q^2\left(-\frac{NQ}{d_w}+4NL+2\frac{NQ}{d_w}\right)+2NLQ^2$$

$$a_4=NQ^2\left(6L+\frac{Q}{d_w}\right)$$

und das Absolutglied:

$$a_5=Q^2S_1=NQ^3.$$

Nach der Theorie der symmetrischen Funktionen folgt dann für die 5 Wurzeln d_1, d_2, . . . d_5 die Beziehung:

$$\sum\frac{1}{d_i}=-\frac{a_4}{a_5}=-6\frac{L}{Q}-\frac{1}{d_w}$$

oder wegen Seite 27:

$$=\frac{6}{d_o}-\frac{1}{d_w},$$

und wir finden mit Müller[1]) den

Satz: Zwischen den 5 Größen d_i, dem Durchmesser d_w des Wendekreises und dem Durchmesser d_o des Krümmungskreises der Kreispunktkurve besteht die Beziehung:

$$\sum_{i=1}^{i=5}\frac{1}{d_i}+\frac{1}{d_w}=\frac{6}{d_o}.$$

[1]) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung XIX, 1910, Heft 1 u. 2.

Für die Kurve h wird im Pol:

$$\frac{dy_2}{dx_2} = \frac{QR_1 - LS_1}{MS_1}.$$

In dem schon wiederholt erwähnten Spezialfall, wo die Kreispunktkurve vom Wendekreise im Pol oskuliert wird, ist nach Seite 29 $Ld_w + Q = 0$, also wegen (9) auch obiges $\frac{dy_2}{dx_2} = 0$. Es wird dann die Kurve h im Pole von der Polbahntangente berührt, hat also daselbst mit der Kreispunktkurve 3 Punkte gemein, und es gibt sonach nur noch 4 Burmestersche Punkte.

Satz: Oskuliert der Wendekreis die Kreispunktkurve im Pol, so zählt letzterer als Burmesterscher Punkt, und für die übrigen 4 gilt, da jetzt $d_0 = d_w$ ist, die Relation:

$$\sum_{i=1}^{i=4} \frac{1}{d_i} = \frac{4}{d_w}.$$

§ 11.

Sätze über die Lage der Burmesterschen Punkte für die Bewegungen derjenigen ähnlich veränderlichen Systeme, deren Kreispunktkurve eine Fokale dritter Ordnung ist.

Für $P = 0$ zerfällt die Kreispunktkurve in die unendlich ferne Gerade und eine Fokalkurve dritter Ordnung c, die im Pol einen Doppelpunkt hat. Da die in § 6 gefundenen Lösungen der Differentialgleichung $P = 0$, wie man sich durch Einsetzen überzeugt, auch der Differentialgleichung $P_1 = 0$ genügen, spaltet sich wegen $P = P_1 = 0$ die bei der Theorie der Burmesterschen Punkte auftretende Kurve dritter Ordnung h (Gleichung (8) des § 10) in die unendlich ferne Gerade und einen durch den Pol gehenden Kegelschnitt k. Beide Kurven — c und k — haben im Pol 2 Punkte gemein und demgemäß reduziert sich die Anzahl der Burmesterschen Punkte auf $6 - 2 = 4$.

Satz: Bei den Bewegungen aller der durch die in § 6 gefundenen $f(t)$ charakterisierten ähnlich veränderlichen Systeme, bei denen in jedem Moment die

Kreispunktkurve in die unendlich ferne Gerade und eine Fokalkurve dritter Ordnung zerfällt, reduziert sich die Anzahl der Burmesterschen Punkte auf vier.

Dieselben sind bestimmt als Schnittpunkte der Kreispunktkurve c:

$$(1) \qquad (x_2^2+y_2^2)(Lx_2+My_2)+Qx_2y_2=0$$

mit der Kurve dritter Ordnung (vergl. § 10, Gleichg. (5)):

$$(2) \quad (x_2^2+y_2^2)(L_1x_2+M_1y_2+R_1)+y_2(Q_{11}x_2+Q_{12}y_2+S_1)=0,$$

oder dem durch Kombination beider Gleichungen gewonnenen Kegelschnitt k:

$$(3) \quad \begin{aligned}&(L_1Q-LQ_{11})x_2^2+(M_1Q-MQ_{11}-LQ_{12})x_2y_2-MQ_{12}y_2^2\\&+(QR_1-LS_1)x_2-MS_1y_2=0.\end{aligned}$$

Führen wir Polarkoordinaten r, φ ein, so genügen nach (1) und (2) die Burmesterschen Punkte auch den Gleichungen:

$$r(L\cos\varphi+M\sin\varphi)+Q\sin\varphi\cos\varphi=0$$

$$\begin{aligned}&r^2(L_1\cos\varphi+M_1\sin\varphi)+r(R_1+Q_{11}\sin\varphi\cos\varphi+Q_{12}\sin^2\varphi)\\&+S_1\sin\varphi=0.\end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Elimination von r für $\tan\varphi$ die biquadratische Gleichung:

$$(4) \quad \begin{aligned}&M^2S_1\tan^4\varphi-M[Q(Q_{12}+R_1)-2LS_1]\tan^3\varphi+\cdots\\&+L(LS_1-QR_1)=0.\end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit φ_{I}, φ_{II}, φ_{III}, φ_{IV} die Anomalien der 4 Burmesterschen Punkte, so bestehen zwischen denselben nach Gleichung (4) die Beziehungen:

$$\tan\varphi_{\mathrm{I}}+\tan\varphi_{\mathrm{II}}+\tan\varphi_{\mathrm{III}}+\tan\varphi_{\mathrm{IV}}=\frac{M[Q(Q_{12}+R_1)-2LS_1]}{M^2S_1}=\frac{2Ld_w+Q}{Md_w}$$

$$\tan\varphi_{\mathrm{I}}\cdot\tan\varphi_{\mathrm{II}}\cdot\tan\varphi_{\mathrm{III}}\cdot\tan\varphi_{\mathrm{IV}}=\frac{L(LS_1-QR_1)}{M^2S_1}=\frac{L(Ld_w+Q)}{M^2d_w},$$

wobei die rechten Seiten dieser Relationen nach den Gleichungen (9) des § 10 umgeformt wurden.

Wir führen noch die Anomalien φ_B des Ballschen Punktes und φ_C des Fokalzentrums der Kurve c ein. Nach den Formeln

(10) und (3) des dritten Abschnittes von § 6 hat der Ballsche Punkt die Koordinaten:

$$(5)\quad x_{2,B} = -\frac{d_w^2 M(Ld_w+Q)}{d_w^2 M^2+(Ld_w+Q)^2},\quad y_{2,B} = \frac{d_w(Ld_w+Q)^2}{d_w^2 M^2+(Ld_w+Q)^2}$$

und das Fokalzentrum die Koordinaten:

$$(6)\qquad x_{2,C} = -\frac{MQ}{2(L^2+M^2)},\qquad y_{2,C} = -\frac{LQ}{2(L^2+M^2)},$$

sodaß:

$$\tan\varphi_B = -\frac{Ld_w+Q}{Md_w},\qquad \tan\varphi_C = \frac{L}{M}$$

ist. Dann aber folgt der

Satz: Für die ähnlich veränderlichen Systeme, deren Kreispunktkurve eine Fokale dritter Ordnung ist, bestehen zwischen den sechs Winkeln φ_I, φ_{II}, φ_{III}, φ_{IV}, φ_B, φ_C ähnlich wie bei starren Systemen die Gleichungen:

$$\tan\varphi_I+\tan\varphi_{II}+\tan\varphi_{III}+\tan\varphi_{IV} = \tan\varphi_C-\tan\varphi_B$$

$$\tan\varphi_I\cdot\tan\varphi_{II}\cdot\tan\varphi_{III}\cdot\tan\varphi_{IV} = -\tan\varphi_B\cdot\tan\varphi_C.$$

R. Müller[1]) hat die analogen Formeln für starre Systeme abgeleitet, führt aber statt der Anomalie φ_B des Ballschen Punktes die Anomalie φ_E des Fokalzentrums der Kreispunktkurve für die umgekehrte Bewegung ein, da bei starren Systemen zwischen φ_E und φ_B die Beziehung $\varphi_E = -\varphi_B$ besteht. Diese Beziehung gilt für die betrachteten ähnlich veränderlichen Systeme nicht und die Formeln lassen sich daher nur in obiger Gestalt aussprechen.

Es sollen im folgenden noch einige Sätze über die Burmesterschen Punkte bei unseren speziellen ähnlich veränderlichen Bewegungen abgeleitet werden, die den Sätzen analog sind, die Müller[2]) für die starren Systeme gefunden hat. Der Kegelschnitt k, auf dem die vier Burmesterschen Punkte liegen, geht durch den Pol und besitzt daselbst die Tangente:

$$(QR_1-LS_1)x_2-MS_1y_2 = 0,$$

[1]) Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 37, S. 214.

[2]) Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 37, S. 119.

die wegen den Gleichungen (9) des § 10 auch geschrieben werden kann:

$$(L d_w + Q) x_2 + M d_w y_2 = 0.$$

Ihr wird durch die Koordinaten (5) des Ballschen Punktes genügt und wir finden: Der Kegelschnitt k, auf dem die 4 Burmesterschen Punkte liegen, hat im Pol die Verbindungslinie $\mathfrak{P} B_a$ des letzteren mit dem Ballschen Punkte zur Tangente.

Wir nehmen jetzt an, der Ballsche Punkt B_a gehöre zu den Burmesterschen Punkten. Dann muß der Kegelschnitt k durch B_a gehen. Da aber nach oben k in $\mathfrak{P}$ die Gerade $\mathfrak{P} B_a$ berührt, kann beiden Bedingungen nur genügt werden, wenn der Kegelschnitt k in die Gerade $\mathfrak{P} B_a$ und eine zweite Gerade zerfällt. Wir erhalten somit den

Satz: Für alle ähnlich veränderlichen Systeme, bei denen die Kreispunktkurve in die unendlich ferne Gerade und eine Fokalkurve dritter Ordnung zerfällt, gilt wie bei starren Systemen: Befindet sich unter den 4 Burmesterschen Punkten der Ballsche Punkt, so liegen die 3 übrigen auf einer Geraden.

Gelten die beiden Bedingungen:

$$L_1 Q - L Q_{11} + M Q_{12} = 0$$
$$M_1 Q - M Q_{11} - L Q_{12} = 0,$$

so verwandelt sich der Kegelschnitt k in den Kreis:

$$(7) \qquad -M Q_{12}(x_2^2 + y_2^2) + (Q R_1 - L S_1) x_2 - M S_1 y_2 = 0.$$

Es fallen dann zwei der Burmesterschen Punkte mit den imaginären Kreispunkten der Ebene zusammen; die noch verbleibenden zwei ergeben sich als Schnitte des Kreises (7) mit der Kreispunktkurve (1). Unter Beachtung der Gleichungen (9) des § 10 finden wir aus (1) und (7) für den Quotienten $\frac{y_2}{x_2}$ die beiden Werte:

$$\frac{y_2}{x_2} = \frac{L}{M} \quad \text{und} \quad \frac{y_2}{x_2} = \frac{L d_w + Q}{M d_w}.$$

Ein Vergleich mit (5) und (6) ermöglicht uns, den Satz auszusprechen:

Satz: Für alle ähnlich veränderlichen Systeme, deren Kreispunktkurve eine Fokale dritter Ordnung ist, gilt ähnlich wie bei starren Systemen: Fallen 2 der Burmesterschen Punkte mit den imaginären Kreispunkten der Ebene zusammen, so sind die beiden anderen das Fokalzentrum C der Kreispunktkurve c und der Punkt D, in welchem die zur Verbindungslinie $\mathfrak{P}B_a$ des Pols $\mathfrak{P}$ mit dem Ballschen Punkte B_a in bezug auf die Polbahntangente symmetrische Gerade von der Kreispunktkurve geschnitten wird.

Der Unterschied gegen die starren Systeme zeigt sich darin, daß auf der Geraden $\mathfrak{P}D$ nicht auch das Fokalzentrum für die Kreispunktkurve der umgekehrten Bewegung liegt.

Wir nehmen ferner den Fall an, der Ballsche Punkt liege auf der Polbahnnormalen (ohne in den Pol selbst zu fallen). Dann muß $M=0$ sein. Für diesen Fall besitzt der Ballsche Punkt die Koordinaten $x_2=0$, $y_2=d_w$, und die Kreispunktkurve c zerfällt in die Polbahnnormale n und einen die Polbahntangente im Pol berührenden Kreis f, während sich der Kegelschnitt k in die Polbahnnormale n und die Gerade g spaltet:

$$(L_1Q-LQ_{11})x_2+(M_1Q-LQ_{12})y_2+(QR_1-LS_1)=0.$$

Dann liegen zwei der Burmesterschen Punkte auf n. Ihre Entfernungen von $\mathfrak{P}$ ergeben sich aus (2), wenn wir $x_2=0$ setzen, was die Gleichung gibt:

$$M_1y_2^2+(R_1+Q_{12})y_2+S_1=0.$$

Die beiden anderen Burmesterschen Punkte sind die Schnitte der Geraden g mit dem Kreise f.

Satz: Liegt bei den ähnlich veränderlichen Systemen, deren Kreispunktkurve eine Fokale dritter Ordnung ist, der Ballsche Punkt auf der Polbahnnormalen, so zerfällt die Kreispunktkurve c in die Polbahnnormale n und den Kreis f, der Kegelschnitt k in die Polbahnnormale n und die Gerade g. Es liegen dann

zwei der Burmesterschen Punkte auf n, die beiden anderen ergeben sich als Schnitte des Kreises f mit der Geraden g.

§ 12.

Die sechspunktige Berührung des Krümmungskreises mit der Bahnkurve.

Soll die Bahnkurve mit ihrem Krümmungskreis sechs unendlich benachbarte Punkte gemein haben, so muß neben den Bedingungen:

$$K = 0, \quad K' = 0$$

des § 10 noch die Gleichung: $K'' = 0$ erfüllt sein. Durch Differentiation der Gleichung (2) des § 10 folgt:

$$\begin{aligned} (1) \qquad & K'' = (x'^2 + y'^2)\left\{(x'y^{V} - y'x^{V}) + 3(x''y^{IV} - y''x^{IV})\right\} \\ & - 2(x'y'' - y'x'')\left\{(x'x^{IV} + y'y^{IV}) + 5(x''x''' + y''y''')\right\} \\ & - (x'y''' - y'x''')\left\{3(x''^2 + y''^2) + 4(x'x''' + y'y''')\right\} = 0. \end{aligned}$$

Wir wollen diese Bedingung für das x_2, y_2-System aufstellen. Die ersten bis vierten Differentialquotienten von x und y wurden früher gegeben.

Für die fünften finden wir:

$$(2) \qquad \frac{d^5x}{dt^5} = -\alpha_3 + \frac{1}{N}(\gamma_3 x_2 - \delta_3 y_2), \quad \frac{d^5y}{dt^5} = -\beta_3 + \frac{1}{N}(\delta_3 x_2 + \gamma_3 y_2),$$

wobei die Bedeutung von α_3 und β_3 in § 9 erklärt und

$$\gamma_3 = -\left(5\frac{f'}{f} - 10\frac{f'''}{f} + \frac{f^{V}}{f}\right)x'_p + \left(1 - 10\frac{f''}{f} + 5\frac{f^{IV}}{f}\right)y'_p$$

$$\delta_3 = -\left(1 - 10\frac{f''}{f} + 5\frac{f^{IV}}{f}\right)x'_p - \left(5\frac{f'}{f} - 10\frac{f'''}{f} + \frac{f^{V}}{f}\right)y'_p$$

gesetzt ist.

Wir sind wiederum imstande, sämtliche Faktoren der Bedingungsgleichung (1) durch die Größen $\varrho_r, \chi_r, \alpha_r, \beta_r, N$ auszudrücken. Ein Teil dieser Faktoren wurde schon in den Gleichungen (12) des § 4 und (4) des § 10 berechnet. Neu treten noch hinzu die Ausdrücke:

$$x'x^{IV}+y'y^{IV}=-\chi_4(x_2^2+y_2^2)-\frac{1}{N}[(\alpha\alpha_2+\beta\beta_2)x_2+(\alpha\beta_2-\alpha_2\beta)y_2]$$

$$x'y^{V}-y'x^{V}=-\chi_5(x_2^2+y_2^2)+\frac{1}{N}[(\alpha\beta_3-\alpha_3\beta)x_2-(\alpha\alpha_3+\beta\beta_3)y_2]$$

$$\begin{aligned}x''x'''+y''y'''=&\frac{\varrho_2\chi_3-\chi_2\varrho_3}{\varrho_1}(x_2^2+y_2^2)\\&-\frac{1}{\varrho_1 N}[\varrho_1\varrho_3N^2+\chi_2(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)+\varrho_2(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)]x_2\\&-\frac{1}{\varrho_1 N}[\varrho_1\chi_3N^2-\varrho_2(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)+\chi_2(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)]y_2-(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x''y^{IV}-y''x^{IV}=&\frac{\varrho_2\chi_4-\chi_2\varrho_4}{\varrho_1}(x_2^2+y_2^2)\\&-\frac{1}{\varrho_1 N}[\varrho_1\varrho_4N^2-\varrho_2(\alpha\alpha_2+\beta\beta_2)+\chi_2(\alpha\beta_2-\alpha_2\beta)]x_2\\&-\frac{1}{\varrho_1 N}[\varrho_1\chi_4N^2-\chi_2(\alpha\alpha_2+\beta\beta_2)-\varrho_2(\alpha\beta_2-\alpha_2\beta)]y_2-(\alpha\beta_2-\alpha_2\beta).\end{aligned}$$

Führen wir die Werte der einzelnen Faktoren in die Bedingungsgleichung (1) ein, so nimmt diese die Gestalt an:

$$\begin{aligned}(3)\quad&(x_2^2+y_2^2)\Big\{P_2(x_2^2+y_2^2)+L_2x_2+M_2y_2+R_2\Big\}+Q_{21}x_2y_2\\&+Q_{22}y_2^2+Q_{23}x_2^2+S_{21}y_2+S_{22}y_2=0,\end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten folgende Werte haben:

$$P_2=-\varrho_1\chi_5+5\varrho_2\chi_4+4\varrho_3\chi_3-3\varrho_4\chi_2-3\chi_3\frac{\varrho_2^2+\chi_2^2}{\varrho_1}-10\varrho_2\frac{\varrho_2\chi_3-\chi_2\varrho_3}{\varrho_1}$$

$$\begin{aligned}L_2=&\frac{1}{N}\Big\{-(3\varrho_1\varrho_4-10\varrho_2\varrho_3+6\chi_2\chi_3)N^2+\frac{2}{\varrho_1}(2\varrho_1\chi_3+5\varrho_2\chi_2)(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)\\&-\frac{1}{\varrho_1}(4\varrho_1\varrho_3-13\varrho_2^2-3\chi_2^2)(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)+5\varrho_2(\alpha\alpha_2+\beta\beta_2)\\&-3\chi_2(\alpha\beta_2-\alpha_2\beta)+\varrho_1(\alpha\beta_3-\alpha_3\beta)\Big\}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}M_2=&\frac{1}{N}\Big\{-(5\varrho_1\chi_4-26\varrho_2\chi_3+10\varrho_3\chi_2)N^2+\frac{2}{\varrho_1}(2\varrho_1\chi_3+5\varrho_2\chi_2)(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)\\&+\frac{1}{\varrho_1}(4\varrho_1\varrho_3-13\varrho_2^2-3\chi_2^2)(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)+5\varrho_2(\alpha\beta_2-\alpha_2\beta)\\&+3\chi_2(\alpha\alpha_2+\beta\beta_2)-\varrho_1(\alpha\alpha_3+\beta\beta_3)\Big\}\end{aligned}$$

$$R_2=-3\varrho_1\chi_3N^2+10\varrho_2(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)-3\varrho_1(\alpha\beta_2-\alpha_2\beta)$$

$$\begin{aligned}Q_{21}=&-10\varrho_1\varrho_3N^2-16[\chi_2(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)+\varrho_2(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)]\\&+\frac{4}{N^2}[(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)^2-(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)^2]-2\varrho_1(\alpha\alpha_2+\beta\beta_2)\end{aligned}$$

$$Q_{22} = -10\varrho_1\chi_3 N^2 + 16\varrho_2(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1) - 10\chi_2(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta) + \frac{4}{N^2}(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta) - 2\varrho_1(\alpha\beta_2 - \alpha_2\beta)$$

$$Q_{23} = 6\chi_2(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta) - \frac{4}{N^2}(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)$$

$$S_{21} = -13\varrho_1(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)N$$

$$S_{22} = +3\varrho_1(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta)N.$$

Die Bahnpunkte mit sechspunktig berührendem Krümmungskreis müssen aber außer der Gleichung (3) auch der Gleichung der Kreispunktkurve, sowie der Bedingungsgleichung für die Burmesterschen Punkte Genüge leisten. Die Polarkoordinaten r, φ eines solchen Punktes müssen also die 3 Gleichungen erfüllen:

$$Pr^2 + r(L\cos\varphi + M\sin\varphi) + Q\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

$$P_1 r^3 + r^2(L_1\cos\varphi + M_1\sin\varphi) + r(R_1 + Q_{11}\sin\varphi\cos\varphi + Q_{12}\sin^2\varphi) + S_1\sin\varphi = 0$$

$$P_2 r^3 + r^2(L_2\cos\varphi + M_2\sin\varphi) + r(R_2 + Q_{21}\sin\varphi\cos\varphi + Q_{22}\sin^2\varphi + Q_{23}\cos^2\varphi) + S_{21}\sin\varphi + S_{22}\cos\varphi = 0.$$

Wir führen wiederum den durch den Punkt r, φ gehenden Kreis ein, der die Polbahntangente im Pol berührt und bezeichnen seinen Durchmesser mit d. Da dann $r = d\sin\varphi$ ist, lassen sich die 3 letzten Gleichungen schreiben:

$$\tan\varphi(Pd + M)d + Ld + Q = 0 \tag{5}$$

$$\tan^2\varphi[P_1 d^3 + M_1 d^2 + (R_1 + Q_{12})d + S_1] + \tan\varphi(L_1 d + Q_{11})d + (R_1 d + S_1) = 0 \tag{6}$$

$$\tan^3\varphi[P_2 d^3 + M_2 d^2 + (R_2 + Q_{22})d + S_{21}] + \tan^2\varphi(L_2 d^2 + Q_{21}d + S_{22}) + \tan\varphi[(R_2 + Q_{23})d + S_{21}] + S_{22} = 0. \tag{7}$$

Aus (5) und (6) ergibt sich durch Elimination von $\tan\varphi$ eine Gleichung fünften Grades in d:

$$a_0 d^5 + \ldots + a_5 = 0, \tag{8}$$

welche die 5 Burmesterschen Punkte bestimmt (vergl. S. 88). Aus (5) und (7) folgt durch Elimination von $\tan\varphi$ eine Gleichung sechsten Grades in d:

$$b_0 d^6 + \ldots + b_6 = 0. \tag{9}$$

Eliminieren wir d aus (8) und (9), so erhalten wir die Bedingung, welche bestehen muß, wenn einem der 5 Burmesterschen Punkte ein sechspunktig berührender Krümmungskreis zukommen soll. Soll dies bei zweien der Burmesterschen Punkte geschehen, so gelangen wir zu zwei Bedingungen, indem wir ausdrücken, daß die Gleichungen (8) und (9) zwei gemeinschaftliche Wurzeln besitzen müssen usw.

§ 13.

Die Einhüllende einer Systemgeraden.

Die Bewegungsgleichungen eines ähnlich veränderlichen Systems lauteten:

$$(1)\quad x = a + f(t)(\xi\cos t - \eta\sin t),\quad y = b + f(t)(\xi\sin t + \eta\cos t).$$

In der beweglichen Ebene sei nun eine gerade Linie gegeben in der Form:

$$(2)\qquad \xi = u\cos\alpha + m,\quad \eta = u\sin\alpha + m_1,$$

wobei u einen veränderlichen Parameter bezeichnet.

Der dem Parameterwerte u entsprechende Punkt der vorgelegten Geraden besitzt die Bewegungsgleichungen:

$$(3)\qquad \begin{aligned} x &= a + f(t)\,[m\cos t - m_1\sin t + u\cos(t+\alpha)] \\ y &= b + f(t)\,[m\sin t + m_1\cos t + u\sin(t+\alpha)]. \end{aligned}$$

Um die bei der Bewegung des ähnlich veränderlichen Systems entstehende Einhüllende der gegebenen Geraden zu bestimmen, haben wir den Ausdruck:

$$(4)\qquad \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial u} = 0$$

zu bilden und mit seiner Hilfe u aus den Gleichungen (3) zu eliminieren. Die Gleichung (4) läßt sich schreiben:

$$(5)\qquad \begin{aligned} u\cdot f(t) = &-(m\cos\alpha + m_1\sin\alpha)\,f(t) + (m\sin\alpha - m_1\cos\alpha)\,f'(t) \\ &+ \frac{da}{dt}\sin(t+\alpha) - \frac{db}{dt}\cos(t+\alpha). \end{aligned}$$

Diesen Wert von $u\cdot f(t)$ setzen wir in die Gleichungen (3) ein und erhalten:

$$x = a + (m\sin\alpha - m_1\cos\alpha)\,f(t)\sin(t+\alpha) + \cos(t+\alpha)\,[(m\sin\alpha - m_1\cos\alpha)\,f'(t) + \frac{da}{dt}\sin(t+\alpha) - \frac{db}{dt}\cos(t+\alpha)]$$

$$y = b - (m\sin\alpha - m_1\cos\alpha)\,f(t)\cos(t+\alpha) + \sin(t+\alpha)\,[(m\sin\alpha - m_1\cos\alpha)\,f'(t) + \frac{da}{dt}\sin(t+\alpha) - \frac{db}{dt}\cos(t+\alpha)].$$

Setzen wir jetzt:

$$(6)\qquad p = m\sin\alpha - m_1\cos\alpha, \quad \varphi_0(t) = a + p\,f(t)\sin(t+\alpha), \quad \psi_0(t) = b - p\,f(t)\cos(t+\alpha),$$

so wird:

$$p\,f'(t) + \frac{da}{dt}\sin(t+\alpha) - \frac{db}{dt}\cos(t+\alpha) = \varphi_0'(t)\sin(t+\alpha) - \psi_0'(t)\cos(t+\alpha),$$

und es ergeben sich für die gesuchte Einhüllende die Gleichungen:

$$(7)\qquad \begin{aligned} x &= \varphi_0(t) + \cos(t+\alpha)\,[\varphi_0'(t)\sin(t+\alpha) - \psi_0'(t)\cos(t+\alpha)] \\ y &= \psi_0(t) + \sin(t+\alpha)\,[\varphi_0'(t)\sin(t+\alpha) - \psi_0'(t)\cos(t+\alpha)]. \end{aligned}$$

In dieser Form hat die Enveloppe einer geraden Linie zuerst M. Krause[1]) aufgestellt.

Der Ort der Spitzen aller Einhüllenden.

Die Einhüllende einer Systemgeraden besitzt eine Spitze, wenn zugleich:

$$(8)\qquad \frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dt} = 0$$

ist. Aus (7) folgt:

$$(9)\qquad \frac{dx}{dt} = \mathfrak{F}_0(t)\cos(t+\alpha), \quad \frac{dy}{dt} = \mathfrak{F}_0(t)\sin(t+\alpha),$$

wobei unter $\mathfrak{F}_0(t)$ die Funktion verstanden wird:

$$(10)\quad \mathfrak{F}_0(t) = [2\varphi_0'(t) - \psi_0''(t)]\cos(t+\alpha) + [2\psi_0'(t) + \varphi_0''(t)]\sin(t+\alpha).$$

Die Gleichungen (8) sind also erfüllt, wenn $\mathfrak{F}_0(t) = 0$ ist. Greifen wir die Einhüllende einer bestimmten Systemgeraden heraus, d. h. denken wir uns bestimmte Werte von m, m_1 und α vor-

[1]) Archiv der Mathematik und Physik, III. Reihe, XVI. Heft 1.

gegeben, so stellt die Bedingung $\mathfrak{F}_0(t) = 0$ eine Gleichung in t dar, deren Wurzeln die Parameterwerte derjenigen Punkte der betrachteten Einhüllenden ergeben, die Rückkehrpunkte sind. Wir wollen uns jetzt aber umgekehrt den Parameter t gegeben denken und fragen uns nach dem Ort aller Rückkehrpunkte, die momentan von Systemgeraden erzeugt werden. Wir erhalten diesen Ort, wenn wir aus den Gleichungen (7) mit Hilfe der Beziehung $\mathfrak{F}_0(t) = 0$ die Größen p und α eliminieren. Aus der Gleichung $\mathfrak{F}_0(t) = 0$ folgt:

$$(11)\quad p = -\frac{1}{f+f''}\left\{\left(2\frac{da}{dt} - \frac{d^2b}{dt^2}\right)\cos(t+\alpha) + \left(2\frac{db}{dt} + \frac{d^2a}{dt^2}\right)\sin(t+\alpha)\right\}.$$

Diesen Wert von p setzen wir in die Gleichungen (7) ein, die dann nur noch die Größe α enthalten, deren Elimination die Gleichung liefert:

$$\begin{aligned}(12)\quad &\left\{(x-a)^2 + (y-b)^2\right\}\left(1+\frac{f''}{f}\right) + (x-a)\left\{2\frac{f'}{f}\frac{da}{dt} + \left(3+\frac{f''}{f}\right)\frac{db}{dt}\right.\\ &\left. + \frac{d^2a}{dt^2} - \frac{f'}{f}\frac{d^2b}{dt^2}\right\} + (y-b)\left\{2\frac{f'}{f}\frac{db}{dt} - \left(3+\frac{f''}{f}\right)\frac{da}{dt} + \frac{d^2b}{dt^2} + \frac{f'}{f}\frac{d^2a}{dt^2}\right\}\\ &+ \left\{\frac{da}{dt}\left(2\frac{da}{dt} - \frac{d^2b}{dt^2}\right) + \frac{db}{dt}\left(2\frac{db}{dt} + \frac{d^2a}{dt^2}\right)\right\} = 0.\end{aligned}$$

Drehung und Verschiebung des Koordinatensystems in das x_2, y_2-System lassen Gleichung (12) übergehen in:

$$(13)\qquad \left(1+\frac{f''}{f}\right)(x_2^2 + y_2^2) + \left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)Ny_2 = 0.$$

Dies ist aber nach § 3 der Wendekreis der umgekehrten Bewegung, der deshalb für die direkte Bewegung als Rückkehrkreis bezeichnet wird.

Die Tangente eines Rückkehrpunktes x_0, y_0 der Enveloppe einer durch m, m_1, a bestimmten Geraden besitzt die Gleichung:

$$(x-x_0)\frac{d^2y_0}{dt^2} - (y-y_0)\frac{d^2x_0}{dt^2} = 0,$$

wobei die Koordinaten x_0, y_0 den Gleichungen (7) genügen.

Wegen (9) und wegen $\mathfrak{F}_0(t) = 0$ wird für einen Rückkehrpunkt:

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = \mathfrak{F}_0'(t)\cos(t+\alpha), \qquad \frac{d^2y_0}{dt^2} = \mathfrak{F}_0'(t)\sin(t+\alpha),$$

sodaß die Gleichung einer Rückkehrtangente lautet:

$$(x-x_0)\sin(t+\alpha) + (y-y_0)\cos(t+\alpha) = 0, \tag{14}$$

worin die sich aus $\mathfrak{F}_0(t) = 0$ ergebenden Parameterwerte von t einzusetzen sind. Jetzt halten wir aber wieder t fest, d. h. betrachten eine Momentanlage des Systems, und fassen die Rückkehrtangenten der Enveloppen aller Geraden ins Auge. Dann ist in (14) p und α variabel, aber zwischen beiden Größen besteht die Beziehung (11), sodaß wir aus (14) mit Hilfe von (11) p eliminieren und die Gleichung einer Rückkehrtangente schreiben können:

$$\left\{y-b-\frac{1}{1+\frac{f''}{f}}\left(2\frac{da}{dt}-\frac{d^2b}{dt^2}\right)\right\} - \tan(t+\alpha)\left\{x-a+\frac{1}{1+\frac{f''}{f}}\left(2\frac{db}{dt}+\frac{d^2a}{dt^2}\right)\right\} = 0. \tag{15}$$

Wir erkennen, daß sich alle diese Tangenten im Punkte:

$$x = a-\frac{1}{1+\frac{f''}{f}}\left(2\frac{db}{dt}+\frac{d^2a}{dt^2}\right), \qquad y = b+\frac{1}{1+\frac{f''}{f}}\left(2\frac{da}{dt}-\frac{d^2b}{dt^2}\right)$$

schneiden, dessen Koordinaten sich im x_2, y_2-System ergeben zu:

$$x_2 = \frac{-\frac{f'}{f}N}{1+\frac{f''}{f}}, \qquad y_2 = -\frac{N}{1+\frac{f''}{f}}.$$

Dies ist aber nach Seite 20 der Rückkehrpol. Somit gilt der

Satz: Auch bei ähnlich veränderlichen Systemen ist der Rückkehrkreis der Ort aller Rückkehrpunkte, die momentan von Systemgeraden erzeugt werden, und alle diese Geraden schneiden sich auf dem Rückkehrkreis im Rückkehrpol.

Die n^{te} Evolute der Einhüllenden einer Geraden.

Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes der durch die Gleichungen (7) definierten einhüllenden Kurve lauten:

$$u_1 = x - \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}} \cdot \frac{dy}{dt}, \qquad v_1 = y + \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Nun ist nach (9):

$$\frac{dx}{dt} = \mathfrak{F}_0(t)\cos(t+\alpha), \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \mathfrak{F}_0'(t)\cos(t+\alpha) - \mathfrak{F}_0(t)\sin(t+\alpha)$$
$$\frac{dy}{dt} = \mathfrak{F}_0(t)\sin(t+\alpha), \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \mathfrak{F}_0'(t)\sin(t+\alpha) + \mathfrak{F}_0(t)\cos(t+\alpha),$$

sodaß:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = \mathfrak{F}_0^2(t)$$

wird und die Gleichungen der ersten Evolute die Gestalt annehmen:

$$u_1 = x - \frac{dy}{dt}, \qquad v_1 = y + \frac{dx}{dt},$$

oder wegen (7), (9) und (10):

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi_0(t) - \psi_0'(t) - \sin(t+\alpha)\Big\{[\varphi_0'(t) - \psi_0''(t)]\cos(t+\alpha) \\ &\qquad + [\psi_0'(t) + \varphi_0''(t)]\sin(t+\alpha)\Big\} \\ v_1 &= \psi_0(t) + \varphi_0'(t) + \cos(t+\alpha)\Big\{[\varphi_0'(t) - \psi_0''(t)]\cos(t+\alpha) \\ &\qquad + [\psi_0'(t) + \varphi_0''(t)]\sin(t+\alpha)\Big\}. \end{aligned} \tag{16}$$

Diese Gleichungen haben dieselbe Form wie die Gleichungen (7) der Einhüllenden, nur daß an Stelle der Funktionen:

$$\varphi_0(t) \quad \text{und} \quad \psi_0(t)$$

die Funktionen getreten sind:

$$\varphi_1(t) = \varphi_0(t) - \psi_0'(t), \qquad \psi_1(t) = \psi_0(t) + \varphi_0'(t) \tag{17}$$

und $\alpha + \frac{\pi}{2}$ an Stelle von α.

Man erkennt jetzt leicht, daß sich bei den folgenden Evoluten ähnliche Formen ergeben müssen.

Definieren wir die Funktionen:

$$\begin{aligned} \Phi_n(t) &= a - n_1\frac{db}{dt} - n_2\frac{d^2a}{dt^2} + \cdots + (-1)^r n_{2r}\frac{d^{2r}a}{dt^{2r}} \\ &\qquad + (-1)^{r+1} n_{2r+1}\frac{d^{2r+1}b}{dt^{2r+1}} + \cdots \\ \Psi_n(t) &= b + n_1\frac{da}{dt} - n_2\frac{d^2b}{dt^2} - \cdots + (-1)^r n_{2r}\frac{d^{2r}b}{dt^{2r}} \\ &\qquad + (-1)^r n_{2r+1}\frac{d^{2r+1}a}{dt^{2r+1}} + \cdots, \end{aligned} \tag{18}$$

wobei n_1, n_2 usw. die Binomialkoeffizienten bedeuten, und ferner die Funktionen:

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= \Phi_n(t) + p\, f^{(n)}(t) \sin\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right) \\ \psi_n(t) &= \Psi_n(t) - p\, f^{(n)}(t) \cos\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right), \end{aligned} \tag{19}$$

so gilt der

Satz: Die Koordinaten der n^{ten} Krümmungsmittelpunkte der Einhüllenden einer Systemgeraden lauten:

$$\begin{aligned} u_n = \varphi_n(t) &+ \cos\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right)\left[\varphi_n'(t)\sin\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right)\right. \\ &\left. - \psi_n'(t)\cos\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right)\right] \\ v_n = \psi_n(t) &+ \sin\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right)\left[\varphi_n'(t)\sin\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right)\right. \\ &\left. - \psi_n'(t)\cos\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{20}$$

Für die starren Systeme hat M. Krause[1]) die analogen Formeln aufgestellt. Es zeigt sich dort gegen unsre ähnlich veränderlichen Systeme der wesentliche Unterschied, daß die Größe p herausfällt, die Gestalt der n^{ten} Evolute also von den Größen m und m_1 unabhängig ist, was bei den ähnlich veränderlichen Systemen nicht zutrifft.

Die Einhüllenden der Geraden einer Parallelenschar.

Die Gleichungen (20) lassen sich auch schreiben:

$$\begin{aligned} u_n = p f^{(n)}(t) &\sin\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right) + p f^{(n+1)}(t)\cos\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right) \\ &+ \Phi_n(t) + \Phi_n'(t)\sin\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right) \\ &- \Psi_n'(t)\cos^2\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right) \\ v_n = -p f^{(n)}(t) &\cos\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right) + p f^{(n+1)}(t)\sin\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right) \\ &+ \Psi_n(t) - \Psi_n'(t)\sin\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right) \\ &+ \Phi_n'(t)\sin^2\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right), \end{aligned} \tag{21}$$

[1]) Archiv der Mathematik und Physik, III. Reihe, XVI. Heft 1.

wobei zu beachten ist, daß hierin nach (18) die Funktionen $\Phi_n(t)$ und $\Psi_n(t)$ Funktionen von t allein sind.

Wir fassen jetzt ein System paralleler Geraden ins Auge, halten also α fest, und fragen uns, wo liegen in jeder Phase t der Bewegung die n^{ten} Krümmungsmittelpunkte der Enveloppen dieser parallelen Geraden. Da jetzt nur noch die Größen m und m_1 variabel sind, diese aber nur in der Verbindung $m \sin \alpha - m_1 \cos \alpha = p$ auftreten, ist die vorgelegte Aufgabe sofort gelöst, wenn wir aus den Gleichungen (21) die Größe p eliminieren. Die Elimination liefert das Resultat:

$$g_1 u_n + g_2 v_n + g_3 = 0, \tag{22}$$

wobei gesetzt ist:

$$g_1 = f^{(n)}(t) \cos\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right) - f^{(n+1)}(t) \sin\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$g_2 = f^{(n)}(t) \sin\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right) + f^{(n+1)}(t) \cos\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$g_3 = -\Phi_n(t) g_1 - \Psi_n(t) g_2 - \Phi_n'(t) f^{(n)}(t) \sin\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right) + \Psi_n'(t) f^{(n)}(t) \cos\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right),$$

sodaß der Satz folgt:

Satz: Die n^{ten} Krümmungsmittelpunkte der Enveloppen paralleler Geraden liegen momentan auf einer geraden Linie.

Wir betrachten jetzt sämtliche Parallelenscharen. Wo schneiden sich dann die zugehörigen momentanen Ortsgeraden der n^{ten} Krümmungsmittelpunkte ihrer Enveloppen? Die in Rede stehende Ortsgerade hat für eine Parallelenschar vom Richtungswinkel α die Gleichung (22), für eine zweite Parallelenschar vom Richtungswinkel α' gilt analog:

$$g_1' u_n + g_2' v_n + g_3' = 0. \tag{23}$$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden (22) und (23) hat die Koordinaten:

$$u_n = \frac{g_2 g_3' - g_2' g_3}{g_1 g_2' - g_1' g_2}, \qquad v_n = \frac{g_3 g_1' - g_3' g_1}{g_1 g_2' - g_1' g_2}.$$

Da:

$$g_2 g_3' - g_2' g_3 = (g_1 g_2' - g_1' g_2)\Phi_n(t) + \sin(\alpha - \alpha') f^{(n)}(t)[f^{(n+1)}(t)\Phi_n'(t) + f^{(n)}(t)\Psi_n'(t)]$$

$$g_3 g_1' - g_3' g_1 = (g_1 g_2' - g_1' g_2)\Psi_n(t) - \sin(\alpha - \alpha') f^{(n)}(t)[f^{(n)}(t)\Phi_n'(t) - f^{(n+1)}(t)\Psi_n'(t)]$$

$$g_1 g_2' - g_1' g_2 = -\sin(\alpha - \alpha')\left[(f^{(n)}(t))^2 + (f^{(n+1)}(t))^2\right]$$

ist, ergeben sich diese Koordinaten zu:

$$(24)\qquad \begin{aligned} u_n &= \Phi_n(t) - f^{(n)}(t)\frac{f^{(n+1)}(t)\,\Phi_n'(t) + f^{(n)}(t)\,\Psi_n'(t)}{[f^{(n)}(t)]^2 + [f^{(n+1)}(t)]^2} \\ v_n &= \Psi_n(t) + f^{(n)}(t)\frac{f^{(n)}(t)\,\Phi_n'(t) - f^{(n+1)}(t)\,\Psi_n'(t)}{[f^{(n)}(t)]^2 + [f^{(n+1)}(t)]^2}. \end{aligned}$$

Da dieselben reine Funktionen von t und n sind, also unabhängig von α und α', schneiden sich im Punkte $\mathfrak{P}_n$ mit den Koordinaten (24) die Ortsgeraden sämtlicher Parallelenscharen, und es folgt der

Satz: Die zu jeder Phase der Bewegung gehörigen geraden Linien, auf denen die n^{ten} Krümmungsmittelpunkte der Enveloppen der Geraden von Parallelenscharen liegen, gehen sämtlich durch ein und denselben Punkt $\mathfrak{P}_n$.

Für $n = 0$, also für die Einhüllenden selbst, ist $\mathfrak{P}_{n=0}$ der Momentanpol der Bewegung; für $n = 1$, d. h. für die ersten Krümmungsmittelpunkte der Enveloppen, liegt $\mathfrak{P}_{n=1}$ auf dem Rückkehrkreis.

Die Einhüllenden der Geraden eines Büschels.

Für die folgenden Untersuchungen wollen wir die Gleichungen (21) der n^{ten} Evolute unsrer einhüllenden Kurve noch einer Umformung unterziehen. Zu dem Ende führen wir die Funktionen ein:

$$(25)\qquad \begin{aligned} r_n(t) &= f^{(n)}(t)\cos\left(t + n\frac{\pi}{2}\right) - f^{(n+1)}(t)\sin\left(t + n\frac{\pi}{2}\right) \\ s_n(t) &= f^{(n)}(t)\sin\left(t + n\frac{\pi}{2}\right) + f^{(n+1)}(t)\cos\left(t + n\frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

die also von t und n allein abhängig sind. Dann können wir unsre n^{te} Evolute in die Form bringen:

$$(26)\qquad \begin{aligned} 2u_n &= Q_n(t) + S_n(t)\sin 2\alpha + T_n(t)\cos 2\alpha \\ 2v_n &= R_n(t) + T_n(t)\sin 2\alpha - S_n(t)\cos 2\alpha, \end{aligned}$$

wobei sich die Funktionen Q_n, R_n, S_n, T_n wie folgt aus den Größen Φ_n, Ψ_n, r_n, s_n zusammensetzen:

$$(27)\qquad \begin{aligned} Q_n(t) &= 2\Phi_n(t) - \Psi_n'(t) + m r_n(t) - m_1 s_n(t) \\ R_n(t) &= 2\Psi_n(t) + \Phi_n'(t) + m s_n(t) + m_1 r_n(t) \\ S_n(t) &= \Psi_n'(t)\sin 2\left(t+n\frac{\pi}{2}\right) + \Phi_n'(t)\cos 2\left(t+n\frac{\pi}{2}\right) + m s_n(t) - m_1 r_n(t) \\ T_n(t) &= \Phi_n'(t)\sin 2\left(t+n\frac{\pi}{2}\right) - \Psi_n'(t)\cos 2\left(t+n\frac{\pi}{2}\right) - m r_n(t) - m_1 s_n(t). \end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt alle Systemgeraden, die durch den Punkt:

$$\xi = m, \quad \eta = m_1$$

der beweglichen Ebene hindurchgehen, halten also m und m_1 fest, während der Winkel α variabel bleibt, und fragen uns, wo liegen in jedem Moment t die Punkte der n^{ten} Evoluten, die zu den Berührungspunkten der Einhüllenden mit den entsprechenden Geraden gehören?

Zur Beantwortung dieser Frage haben wir aus den Gleichungen (26) den Winkel α zu eliminieren, was mit Leichtigkeit geschehen kann und das Resultat liefert:

$$(28)\qquad [2u_n - Q_n(t)]^2 + [2v_n - R_n(t)]^2 = S_n^2(t) + T_n^2(t).$$

Der gesuchte geometrische Ort ist also ein Kreis. Wir wollen der Gleichung desselben noch eine andere Gestalt geben.

Die Größen $Q_n(t)$ und $R_n(t)$ lassen sich auch schreiben:

$$\begin{aligned} Q_n(t) &= 2\Phi_n(t) - \Psi_n'(t) + f^{(n)}(t)\left\{m\cos\left(t+n\frac{\pi}{2}\right) - m_1\sin\left(t+n\frac{\pi}{2}\right)\right\} \\ &\quad - f^{(n+1)}(t)\left\{m\sin\left(t+n\frac{\pi}{2}\right) + m_1\cos\left(t+n\frac{\pi}{2}\right)\right\} \\ R_n(t) &= 2\Psi_n(t) + \Phi_n'(t) + f^{(n)}(t)\left\{m\sin\left(t+n\frac{\pi}{2}\right) + m_1\cos\left(t+n\frac{\pi}{2}\right)\right\} \\ &\quad + f^{(n+1)}(t)\left\{m\cos\left(t+n\frac{\pi}{2}\right) - m_1\sin\left(t+n\frac{\pi}{2}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Nun folgt aus (17), daß auch

$$\Phi_n(t) - \Psi_n'(t) = \Phi_{n+1}(t)$$
$$\Psi_n(t) + \Phi_n'(t) = \Psi_{n+1}(t)$$

ist. Führen wir noch die Abkürzungen ein:

$$U_n(t) = f^{(n)}(t)\left\{m\cos\left(t+n\frac{\pi}{2}\right) - m_1 \sin\left(t+n\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$
(29)
$$V_n(t) = f^{(n)}(t)\left\{m\sin\left(t+n\frac{\pi}{2}\right) + m_1\cos\left(t+n\frac{\pi}{2}\right)\right\},$$

so wird:

$$Q_n(t) = \Phi_n(t) + U_n(t) + \Phi_{n+1}(t) + U_{n+1}(t)$$
$$R_n(t) = \Psi_n(t) + V_n(t) + \Psi_{n+1}(t) + V_{n+1}(t),$$

oder unter Benutzung der Abkürzungen:

(30) $$u_n' = \Phi_n(t) + U_n(t), \quad v_n' = \Psi_n(t) + V_n(t)$$

wird:

(31) $$Q_n(t) = u_n' + u_{n+1}', \quad R_n(t) = v_n' + v_{n+1}'.$$

Für die Größe $S_n^2(t) + T_n^2(t)$ finden wir durch leichte Rechnung, daß sie sich schreiben läßt:

(32) $$S_n^2(t) + T_n^2(t) = (u_n' - u_{n+1}')^2 + (v_n' - v_{n+1}')^2.$$

Vermöge der Gleichungen (31) und (32) nimmt die Kreisgleichung (28) die folgende Form an:

$$\left\{2u_n - (u_n' + u_{n+1}')\right\}^2 + \left\{2v_n - (v_n' + v_{n+1}')\right\}^2$$
$$= (u_n' - u_{n+1}')^2 + (v_n' - v_{n+1}')^2$$

oder:

(33) $$(u_n - u_n')(u_n - u_{n+1}') + (v_n - v_n')(v_n - v_{n+1}') = 0.$$

Unsere Untersuchungen lassen uns also den nachstehenden Lehrsatz aussprechen:

Lehrsatz: Betrachten wir alle Systemgeraden durch den Punkt m/m_1, so liegen in jedem Moment die Punkte der n^{ten} Evoluten, die zu den Berührungspunkten der Einhüllenden mit den entsprechenden Geraden gehören, auf einem Kreise, der durch die Punkte:

$$u_n = u_n', \quad v_n = v_n' \quad \text{und} \quad u_n = u_{n+1}', \quad v_n = v_{n+1}'$$

geht und über der Verbindungslinie beider als Durchmesser beschrieben ist. Dabei hat der Punkt u'_n, v'_n die Koordinaten:

$$u'_n = \Phi_n(t) + U_n(t), \qquad v'_n = \Psi_n(t) + V_n(t),$$

worin:

$$\Phi_n(t) = a - n_1 \frac{db}{dt} - n_2 \frac{d^2a}{dt^2} + \cdots, \quad \Psi_n(t) = b + n_1 \frac{da}{dt} - n_2 \frac{d^2b}{dt^2} - \cdots$$

Funktionen von t allein sind und

$$U_n(t) = f^{(n)}(t)\left\{m \cos\left(t + n\frac{\pi}{2}\right) - m_1 \sin\left(t + n\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$V_n(t) = f^{(n)}(t)\left\{m \sin\left(t + n\frac{\pi}{2}\right) + m_1 \cos\left(t + n\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

ist.

Die Gleichung der Tangente an die n^{te} Evolute im Punkte u_n, v_n lautet:

$$(u - u_n)\frac{dv_n}{dt} - (v - v_n)\frac{du_n}{dt} = 0.$$

Nach (9) und (10) ist:

$$\frac{du_n}{dt} = \mathfrak{F}_n(t) \cos\left(t + \alpha + n\frac{\pi}{2}\right), \quad \frac{dv_n}{dt} = \mathfrak{F}_n(t) \sin\left(t + \alpha + n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\mathfrak{F}_n(t) = [2\varphi'_n(t) - \psi''_n(t)] \cos\left(t + \alpha + n\frac{\pi}{2}\right) + [2\psi'_n(t) + \varphi''_n(t)] \sin\left(t + \alpha + n\frac{\pi}{2}\right),$$

sodaß obige Tangente übergeht in:

$$(u - u_n) \sin\left(t + \alpha + n\frac{\pi}{2}\right) - (v - v_n) \cos\left(t + \alpha + n\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

oder wegen (20):

$$[u - \varphi_n(t)] \sin\left(t + \alpha + n\frac{\pi}{2}\right) - [v - \psi_n(t)] \cos\left(t + \alpha + n\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

oder wegen (19):

$$[u - \Phi_n(t)] \sin\left(t + \alpha + n\frac{\pi}{2}\right) - [v - \Psi_n(t)] \cos\left(t + \alpha + n\frac{\pi}{2}\right) - p f^{(n)}(t) = 0.$$

Dieser Gleichung wird für jeden Wert von α durch

$$u = u'_n, \qquad v = v'_n$$

genügt.

Ebenso besitzt die Normale an die n^{te} Evolute die Gleichung:

$$(u-u_n)\cos\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right)+(v-v_n)\sin\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$[u-\varphi_n(t)+\psi_n'(t)]\cos\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right)+[v-\psi_n(t)-\varphi_n'(t)]\sin\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$[u-\Phi_{n+1}(t)]\cos\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right)+[v-\Psi_{n+1}(t)]\sin\left(t+\alpha+n\frac{\pi}{2}\right)$$
$$-p\,f^{(n+1)}(t)=0.$$

Für jeden Wert von α wird diese Gleichung durch

$$u=u_{n+1}', \quad v=v_{n+1}' \qquad \text{erfüllt.}$$

Satz: Die Tangenten, die in den betrachteten Punkten an die n^{ten} Evoluten gelegt werden können, gehen alle durch den Punkt u_n'/v_n', die Normalen alle durch den Punkt u_{n+1}'/v_{n+1}'.

Der Kreis (33) und der Punkt u_n'/v_n' sind das Analogon zu dem bei starren Systemen von R. Müller[1]) als n^{ter} Rückkehrkreis und $(n-1)^{\text{ter}}$ Rückkehrpol bezeichneten Kreis resp. Punkt. Hervorzuheben aber ist, daß was bei starren Systemen für die sämtlichen Geraden der Ebene gilt, bei den ähnlich veränderlichen Systemen nur für die Geraden eines Büschels bestehen bleibt. Wir können daher die Bezeichnungen n^{ter} Rückkehrkreis und $(n-1)^{\text{ter}}$ Rückkehrpol auf unsre ähnlich veränderlichen Systeme schwerlich übertragen. Denn diese Namen rechtfertigen sich bei starren Systemen dadurch, daß für $n=1$ der besagte Kreis mit dem momentanen Rückkehrkreis identisch ist, d. h. also daß die ersten Krümmungsmittelpunkte der Enveloppen aller Geraden der Ebene in jedem Moment auf dem Rückkehrkreise liegen. Dies bleibt aber bei den ähnlich veränderlichen Systemen nicht bestehen, da auch der für $n=1$ sich ergebende Kreis (33) die Größen m und m_1 enthält, d. h. von der Lage des Büschelmittelpunktes abhängt, sodaß es also in jedem Moment unendlich viele solche Kreise gibt, von denen keiner mit dem Rückkehrkreis (12) der Bewegung zusammenfällt, wie man sich leicht überzeugt.

[1]) Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 37, S. 134 und Bd. 42.

Da der Gleichung des Kreises (33) durch die Koordinaten (24) des Punktes $\mathfrak{P}_n$ genügt wird, und zwar für jedes Wertepaar m, m_1, schneiden sich in diesem Punkte die Ortskreise aller Strahlenbüschel. Dies gibt den

Satz: Die zu jeder Phase der Bewegung gehörigen Kreise, auf denen die n^{ten} Krümmungsmittelpunkte der Enveloppen der Geraden von Strahlenbüscheln liegen, schneiden sich ebenfalls sämtlich in dem schon erwähnten Punkte $\mathfrak{P}_n$.

Für $n=0$, also für die Einhüllenden selbst, ist $\mathfrak{P}_{n=0}$ der Momentanpol und der Punkt $u'_{n=0}/v'_{n=0}$ hat die Koordinaten: $u'_{n=0}=a+f(t)\,(m\cos t-m_1\sin t)$, $v'_{n=0}=b+f(t)\,(m\sin t+m_1\cos t)$; dies ist aber die Momentanlage des Büschelmittelpunktes. Wir finden somit den

Satz: Der Kreis, den die Berührungspunkte der Geraden eines Büschels mit ihren Enveloppen in jeder Phase der Bewegung bilden, geht durch den momentanen Büschelmittelpunkt sowie durch den Momentanpol.

Die Tangente dieses Kreises in dem Punkte, in dem sich der Büschelmittelpunkt momentan befindet, ist sowohl die momentane Lage einer dem Büschel zugehörigen Geraden als auch, wie man sich durch leichte Rechnung überzeugt, die Tangente der Bahnkurve, die der Büschelmittelpunkt beschreibt. Damit aber haben wir den **Satz** gefunden:

Die Bahnkurve eines beliebigen Systempunktes umhüllt die Enveloppen aller durch ihn gehenden Geraden.

§ 14.

Die Einhüllende eines Systemkreises.

Es sei ein Systemkreis gegeben in der Form:

(1) $$\xi=m+r\cos v,\quad \eta=n+r\sin v,$$

worin m und n die Koordinaten des Kreismittelpunktes, r den Radius des Kreises und v einen veränderlichen Parameter bezeichnet.

Dann hat ein dem Parameterwerte v zugehöriger Punkt des vorgegebenen Kreises die Bewegungsgleichungen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} x &= a + f(t)\,[m\cos t - n\sin t + r\cos(t+v)] \\ y &= b + f(t)\,[m\sin t + n\cos t + r\sin(t+v)]. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Einhüllenden des gegebenen Systemkreises bilden wir den Ausdruck:

$$(3)\qquad \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

Für diesen finden wir:

$$(4)\qquad A(t)\cdot\sin v + B(t)\cdot\cos v + C(t) = 0,$$

wobei

$$(5)\qquad \begin{aligned} A(t) &= -\frac{da}{dt}\sin t + \frac{db}{dt}\cos t + m f(t) + n f'(t) \\ B(t) &= \frac{da}{dt}\cos t + \frac{db}{dt}\sin t + m f'(t) - n f(t) \\ C(t) &= r f'(t) \end{aligned}$$

gesetzt ist.

Die Gleichung (4) gestattet uns, v aus den Gleichungen (2) zu eliminieren. Zu dem Ende verschaffen wir uns aus (4) die Größen $\sin(t+v)$ und $\cos(t+v)$, ausgedrückt durch t.

Da nach (4)

$$\sin v = \frac{1}{A^2+B^2}\left(-AC \pm B\sqrt{A^2+B^2-C^2}\right)$$

$$\cos v = \frac{1}{A^2+B^2}\left(-BC \mp A\sqrt{A^2+B^2-C^2}\right)$$

ist, wird:

$$\sin(t+v) = -\frac{1}{A^2+B^2}\left\{C(A\cos t + B\sin t) \mp \sqrt{A^2+B^2-C^2}\,(B\cos t - A\sin t)\right\}$$

$$\cos(t+v) = -\frac{1}{A^2+B^2}\left\{C(B\cos t - A\sin t) \pm \sqrt{A^2+B^2-C^2}\,(A\cos t + B\sin t)\right\}.$$

Wegen (5) ist hierin:

$$A\cos t + B\sin t = \frac{db}{dt} + f(t)(m\cos t - n\sin t) + f'(t)(m\sin t + n\cos t)$$

$$B\cos t - A\sin t = \frac{da}{dt} - f(t)(m\sin t + n\cos t) + f'(t)(m\cos t - n\sin t).$$

Führen wir jetzt die Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= a + f(t)\,(m\cos t - n\sin t)\\ \psi(t) &= b + f(t)\,(m\sin t + n\cos t),\end{aligned} \tag{6}$$

so wird:

$$B\cos t - A\sin t = \varphi'(t), \qquad A\cos t + B\sin t = \psi'(t),$$

$$A^2 + B^2 = \varphi'^2(t) + \psi'^2(t)$$

und mithin:

$$\begin{aligned}\sin(t+v) &= -\frac{1}{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\left\{rf'(t)\psi'(t) \mp \varphi'(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)-r^2f'^2(t)}\right\}\\ \cos(t+v) &= -\frac{1}{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\left\{rf'(t)\varphi'(t) \pm \psi'(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)-r^2f'^2(t)}\right\}.\end{aligned} \tag{7}$$

Diese Größen führen wir in (2) ein und erhalten den

Satz: Die Einhüllende eines Systemkreises kann in folgende Gleichungen gefaßt werden:

$$\begin{aligned}x &= \varphi(t) - \frac{rf'(t)}{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\left\{rf'(t)\varphi'(t) \pm \psi'(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)-r^2f'^2(t)}\right\}\\ y &= \psi(t) - \frac{rf'(t)}{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\left\{rf'(t)\psi'(t) \mp \varphi'(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)-r^2f'^2(t)}\right\}.\end{aligned} \tag{8}$$

Wir betrachten jetzt ein System konzentrischer Kreise und stellen die Frage: Wo liegen in jedem Augenblick der Bewegung die Berührungspunkte dieser Kreise mit ihren entsprechenden Enveloppen?

Zur Beantwortung dieser Frage haben wir aus den Gleichungen (8) die Größe r zu eliminieren. Die Elimination liefert:

$$[x-\varphi(t)]^2 + [y-\psi(t)]^2 = -\frac{f(t)}{f'(t)}\left\{[x-\varphi(t)]\,\varphi'(t) + [y-\psi(t)]\,\psi'(t)\right\}$$

oder:

$$[x-\varphi(t)]\left[x-\varphi(t)+\frac{f(t)}{f'(t)}\varphi'(t)\right] + [y-\psi(t)]\left[y-\psi(t)+\frac{f(t)}{f'(t)}\psi'(t)\right] = 0. \tag{9}$$

Wir haben es also mit einem Kreise zu tun, der durch den Punkt $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, d. h. durch die momentane Lage des gemeinsamen Mittelpunktes der betrachteten Systemkreise, geht.

Beachten wir, daß die Differentialquotienten von $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ geschrieben werden können:

$$\varphi'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}\varphi(t) - \psi(t) - \frac{f'(t)}{f(t)}a + b + \frac{da}{dt} = -\frac{f'(t)}{f(t)}[x_p-\varphi(t)] + [y_p-\psi(t)]$$

$$\psi'(t) = \varphi(t) + \frac{f'(t)}{f(t)}\psi(t) - a - \frac{f'(t)}{f(t)}b + \frac{db}{dt} = -[x_p-\varphi(t)] - \frac{f'(t)}{f(t)}[y_p-\psi(t)],$$

wobei x_p, y_p die Koordinaten des Momentanpoles sind, so läßt sich der Kreis (9) auch in die Form bringen:

$$(10)\quad [x-\varphi(t)]\left\{x-x_p+\frac{f(t)}{f'(t)}[y-\psi(t)]\right\}+[y_p-\psi(t)]\left\{y-y_p-\frac{f(t)}{f'(t)}[x_p-\varphi(t)]\right\}=0.$$

Dieser Gleichung wird aber durch die Koordinaten des Momentanpols genügt.

Satz[1]**:** Die Berührungspunkte eines Systems konzentrischer Kreise mit ihren Einhüllenden bilden in jeder Phase der Bewegung einen Kreis, der durch die momentane Lage des allen Kreisen gemeinsamen Mittelpunktes, sowie durch den Momentanpol läuft.

[1]) Dieser Satz findet sich auf andere Weise abgeleitet bei Geisenheimer, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 24.

Anhang.

Es sollen im folgenden die von uns entwickelten allgemeinen Theorien noch auf einige spezielle Bewegungen ähnlich veränderlicher Systeme angewendet werden, ohne daß dieselben nach allen Richtungen hin untersucht werden sollen. Da wir in den allgemeinen Bewegungsgleichungen drei willkürliche Funktionen a, b, f von t haben, ist die Bewegung eines ähnlich veränderlichen Systems durch 3 Bedingungen bestimmt. Wir wollen nun so verfahren, daß wir 2 Bedingungen vorgeben und die Bewegungsgleichungen aller der ähnlich veränderlichen Systeme aufstellen, die diesen beiden Bedingungen genügen. Aus der unendlichen Fülle derselben wollen wir dann zwei spezielle besonders einfache herausgreifen, die auch leicht mit gewissen starren Systemen in Zusammenhang gebracht werden können.

§ 15.

Normierung der Bewegungsgleichungen aller ähnlich veränderlichen Systeme, bei denen eine gerade Linie beständig durch einen festen Punkt geht, während eine zweite Gerade an einem festen Kreise hingleitet, und allgemeine Eigenschaften aller dieser Systeme.

Die allgemeinen Bewegungsgleichungen lauteten:

$$x = a + f(t)\,(\xi \cos t - \eta \sin t)$$
$$y = b + f(t)\,(\xi \sin t + \eta \cos t).$$

Es seien nun zwei gerade Linien des beweglichen Systems gegeben:

$$\eta = m_1 \xi + n_1, \qquad \eta = m_2 \xi + n_2.$$

Von diesen soll die erste während ihrer Bewegung beständig durch den festen Punkt x_1, y_1 gehen, während die zweite an einem festen Kreise hingleitet. Die Gleichung dieses Kreises können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit in der Form:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

annehmen, da wir ja den Ursprung des festen Koordinatensystems in den Kreismittelpunkt legen können.

Die Punkte der Geraden $\eta = m_\varepsilon \xi + n_\varepsilon$ haben die Bewegungsgleichungen:

$$x = a + f(t)\,[\xi(\cos t - m_\varepsilon \sin t) - n_\varepsilon \sin t]$$
$$y = b + f(t)\,[\xi(\sin t + m_\varepsilon \cos t) + n_\varepsilon \cos t].$$

Eliminieren wir aus diesen ξ, so erhalten wir die Gleichung der Geraden in ihren einzelnen Phasen:

$$x(\sin t + m_\varepsilon \cos t) - y(\cos t - m_\varepsilon \sin t) + n_\varepsilon f(t)$$
$$= (a \sin t - b \cos t) + m_\varepsilon (a \cos t + b \sin t).$$

Setzen wir:

$$a \sin t - b \cos t = a_1$$
$$a \cos t + b \sin t = b_1,$$

so ergibt sich:

$$a_1 + m_\varepsilon b_1 = x(\sin t + m_\varepsilon \cos t) - y(\cos t - m_\varepsilon \sin t) + n_\varepsilon f(t)$$

als Gleichung der Phasen einer Systemgeraden.

Für die erste Gerade ($\varepsilon = 1$) sollen alle diese Phasen durch den festen Punkt x_1, y_1 gehen, also haben wir als erste Bedingungsgleichung:

I. $a_1 + m_1 b_1 = x_1(\sin t + m_1 \cos t) - y_1(\cos t - m_1 \sin t) + n_1 f(t)$.

Für die zweite Gerade ($\varepsilon = 2$) sollen alle Phasen Tangenten des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ sein, also die Gleichungen besitzen:

$$x x_0 + y y_0 = r^2,$$

wobei

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2$$

ist. Dann muß:

$$x_0 = \lambda(\sin t + m_2 \cos t), \quad y_0 = -\lambda(\cos t - m_2 \sin t),$$
$$r^2 = \lambda(a_1 + m_2 b_1 - n_2 f)$$

sein.

Durch Quadrieren und Addieren der beiden ersten Relationen folgt:

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2 = \lambda^2(1 + m_2^2).$$

Eliminieren wir aus dieser und der dritten der obigen Gleichungen den Faktor λ, so folgt als zweite Bedingungsgleichung:

II. $$a_1 + m_2 b_1 = n_2 f(t) \pm r\sqrt{1 + m_2^2}.$$

Aus den beiden Bedingungsgleichungen I und II berechnen wir die Größen a_1 und b_1 und finden:

$$a_1 = A \sin t + A_1 \cos t + Cf(t) + D_1$$
$$b_1 = B \sin t + B_1 \cos t + C_1 f(t) + D,$$

wobei gesetzt wurde:

$$A = \frac{-m_2(x_1 + m_1 y_1)}{m_1 - m_2}, \qquad A_1 = \frac{m_2(y_1 - m_1 x_1)}{m_1 - m_2},$$

$$B = \frac{x_1 + m_1 y_1}{m_1 - m_2}, \qquad B_1 = \frac{-(y_1 - m_1 x_1)}{m_1 - m_2},$$

$$C = \frac{m_1 n_2 - n_1 m_2}{m_1 - m_2}, \qquad C_1 = \frac{n_1 - n_2}{m_1 - m_2},$$

$$D_1 = \frac{\pm r m_1 \sqrt{1 + m_2^2}}{m_1 - m_2}, \qquad D = \frac{\mp r\sqrt{1 + m_2^2}}{m_1 - m_2}.$$

Die Größen a und b selbst stellen sich dann in folgender Gestalt dar:

$$a = D_1 \sin t + D \cos t + A \sin^2 t + (A_1 + B) \sin t \cos t + B_1 \cos^2 t + f(t)\,(C \sin t + C_1 \cos t)$$

$$b = D \sin t - D_1 \cos t + B \sin^2 t - (A - B_1) \sin t \cos t - A_1 \cos^2 t + f(t)\,(C_1 \sin t - C \cos t).$$

Verschieben wir den Ursprung des beweglichen Koordinatensystems an den Schnittpunkt der beiden vorgelegten Geraden, d. h. schreiben wir an Stelle von $\xi + C_1 : \xi$, von $\eta - C : \eta$, so können wir die Bewegungsgleichungen eines jeden ähnlich veränderlichen Systems von den verlangten Eigenschaften in die Form bringen:

$$(1)\quad \begin{aligned} x &= D_1 \sin t + D\cos t + A\sin^2 t + (A_1 + B)\sin t\cos t + B_1\cos^2 t \\ &\quad + f(t)\,(\xi\cos t - \eta\sin t) \\ y &= D\sin t - D_1\cos t + B\sin^2 t - (A - B_1)\sin t\cos t - A_1\cos^2 t \\ &\quad + f(t)\,(\xi\sin t + \eta\cos t). \end{aligned}$$

Wir können aber diese Grundgleichungen unsrer Bewegung, ohne der Allgemeinheit zu schaden, noch weiter vereinfachen. Bis jetzt haben wir das bewegliche Koordinatensystem an den Schnittpunkt der beiden gegebenen Graden verschoben und das feste an den Mittelpunkt des Kreises. Wir können nun noch das bewegliche ξ, η-System so drehen, daß die Gerade, die beständig durch den festen Punkt x_1, y_1 gehen soll, mit der ξ-Achse zusammenfällt, und ferner das feste x, y-System so drehen, daß der Punkt x_1, y_1 auf die x-Achse zu liegen kommt. Die Verhältnisse liegen dann so, daß

die Gerade $\eta = 0$ beständig durch den Punkt $x = x_1$, $y = 0$ geht und die Gerade $\eta = m_2\xi$ beständig den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ berührt.

Es wird dann:

$$m_1 = 0 \text{ und } y_1 = 0,$$

und demzufolge nehmen die Konstanten die Werte an:

$$A = x_1, \quad A_1 = 0, \quad B = -\frac{x_1}{m_2}, \quad B_1 = 0,$$

$$D = \pm\frac{r\sqrt{1+m_2^2}}{m_2}, \quad D_1 = 0.$$

Wir haben sonach den Satz gefunden:

Satz: Die Bewegungsgleichungen eines jeden ähnlich veränderlichen Systems von der Eigenschaft, daß eine gerade Linie beständig durch einen festen Punkt geht, während eine zweite Gerade an einem festen Kreise hingleitet, können in die Form gebracht werden:

$$(2)\quad \begin{aligned} x &= D\cos t + A\sin^2 t + B\sin t\cos t + f(t)\,(\xi\cos t - \eta\sin t) \\ y &= D\sin t - A\sin t\cos t + B\sin^2 t + f(t)\,(\xi\sin t + \eta\cos t), \end{aligned}$$

wobei $f(t)$ eine noch völlig willkürliche Funktion ist.

Da bei den soeben definierten Bewegungen zwei bestimmte Systemgeraden so einfache Eigenschaften besitzen, dürfte es

von Interesse sein, das Verhalten einer beliebigen Systemgeraden während der Bewegung des Systems ins Auge zu fassen, d. h. ihre einhüllende Kurve zu bestimmen. Nach unseren allgemeinen Theorien besitzt die Einhüllende einer Systemgeraden:

$$\xi = u\cos\alpha + \mu, \quad \eta = u\sin\alpha + \nu \tag{3}$$

die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= \varphi_0(t) + \cos(t+\alpha)\,[\varphi_0'(t)\sin(t+\alpha) - \psi_0'(t)\cos(t+\alpha)] \\ y &= \psi_0(t) + \sin(t+\alpha)\,[\varphi_0'(t)\sin(t+\alpha) - \psi_0'(t)\cos(t+\alpha)], \end{aligned} \tag{4}$$

wobei:

$$\varphi_0(t) = a + pf(t)\sin(t+\alpha), \quad \psi_0(t) = b - pf(t)\cos(t+\alpha),$$
$$p = \mu\sin\alpha - \nu\cos\alpha$$

ist. Im Falle der Bewegungsgleichungen (2) ist:

$$\begin{aligned} a &= D\cos t + A\sin^2 t + B\sin t\cos t \\ b &= D\sin t - A\sin t\cos t + B\sin^2 t \\ \frac{da}{dt} &= -D\sin t + 2A\sin t\cos t + B(\cos^2 t - \sin^2 t) \\ \frac{db}{dt} &= D\cos t - A(\cos^2 t - \sin^2 t) + 2B\sin t\cos t, \end{aligned}$$

und die Gleichungen (4) nehmen nach einiger Rechnung die Gestalt an:

$$\begin{aligned} x &= A\cos^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + D\sin\alpha\sin(t+\alpha) \\ &\quad + p[f(t)\sin(t+\alpha) + f'(t)\cos(t+\alpha)] \\ y &= A\sin\alpha\cos\alpha + B\sin^2\alpha - D\sin\alpha\cos(t+\alpha) \\ &\quad - p[f(t)\cos(t+\alpha) - f'(t)\sin(t+\alpha)]. \end{aligned} \tag{5}$$

Da in diesen Gleichungen $p = \mu\sin\alpha - \nu\cos\alpha$ für $\tan\alpha = \frac{\nu}{\mu}$ der Null gleich wird, d. h. für alle die Geraden, die durch den Ursprung des beweglichen Systems gehen, finden wir den

Satz: Alle ähnlich veränderlichen Systeme mit den Bewegungsgleichungen (2) besitzen die Eigenschaft, daß sämtliche durch den Ursprung des beweglichen Koordinatensystems gehende Geraden während der Bewegung des Systems an festen Kreisen hingleiten, von denen einer (für $\alpha = 0$) in einen Punkt übergeht.

Diese Gleitkreise haben die Gleichungen:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

wobei nach (5)

$$x_0 = \cos\alpha\,(A\cos\alpha + B\sin\alpha), \quad y_0 = \sin\alpha\,(A\cos\alpha + B\sin\alpha),$$
$$r = D\sin\alpha \qquad \text{ist.}$$

Der kleinste Gleitkreis (für $\alpha = 0^0$) hat also den Radius $r = 0$ und die Mittelpunktskoordinaten $x_0 = A$, $y_0 = 0$, während für den größten Gleitkreis ($\alpha = 90^0$) $r = D$, $x_0 = 0$, $y_0 = B$ ist. Die Mittelpunkte sämtlicher Gleitkreise liegen auf dem Kreise:

$$K) \qquad x^2 + y^2 - Ax - By = 0.$$

Wir wollen noch eine weitere gemeinsame Eigenschaft aller unsrer Systeme in Betracht ziehen. Der Punkt $\xi = \eta = 0$ beschreibt nämlich bei sämtlichen Systemen die gleiche Bahn, die nach (2) durch die Gleichungen:

$$(6) \qquad \begin{aligned} x &= D\cos t + A\sin^2 t + B\sin t\cos t \\ y &= D\sin t - A\sin t\cos t + B\sin^2 t \end{aligned}$$

gegeben ist.

Verschieben wir das x, y-System an den Punkt $x = A$, $y = 0$ und drehen es um den Winkel φ, für den

$$\tan\varphi = -\frac{B}{A}, \qquad \sin\varphi = +\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \qquad \cos\varphi = -\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ist, so nimmt, wenn wir t eliminieren, die durch (6) gegebene Bahnkurve die Gleichung an:

$$(7) \qquad (X^2 + Y^2 - \sqrt{A^2 + B^2}\,X)^2 = D^2(X^2 + Y^2).$$

Wir haben es also mit einer Pascalschen Schnecke zu tun.

Die Pascalsche Schnecke ist die Fußpunktkurve eines Kreises in bezug auf einen beliebigen Punkt. Bezeichnen wir den Radius des Kreises mit R, den Lotpunkt mit P und den Abstand des Kreismittelpunktes M von P mit q, so besitzt, wenn wir P zum Pol, PM zur Achse eines Polarkoordinatensystems ϱ, ψ machen, die Pascalsche Schnecke die Gleichung:

$$\varrho = R + q\cos\psi$$

oder in kartesischen Koordinaten:

$$(X^2 + Y^2 - qX)^2 = R^2(X^2 + Y^2).$$

Der Lotpunkt P ist hierbei ein singulärer Punkt und zwar eine Schleife, Spitze oder ein isolierter Punkt, je nachdem $q^2 \gtreqless R^2$ ist.

Im Falle der Gleichung (7) ist $R = D$, $q = \sqrt{A^2+B^2}$, und da ferner die X-Achse weiter nichts ist als diejenige Gerade, die die Mittelpunkte des größten und des kleinsten der oben genannten Gleitkreise mit einander verbindet, ist die Kurve (7) die Fußpunktkurve des Maximal-Gleitkreises in bezug auf den Minimal-Gleitkreis als Lotpunkt.

Die Ungleichung $q^2 \gtreqless R^2$ geht in unsrem Falle über in:

$$A^2+B^2 \gtreqless D^2,$$

oder wenn wir berücksichtigen, daß nach Seite 116:

$$A = x_1. \qquad B = -\frac{x_1}{m_2}, \qquad D = \pm\frac{r\sqrt{1+m_2^2}}{m_2}$$

ist, in:

$$x_1^2 \gtreqless r^2,$$

d. h. je nachdem der feste Punkt außerhalb, auf oder innerhalb des festen Kreises liegt, ist der singuläre Punkt der Pascalschen Schnecke (7) eine Schleife, Spitze oder ein isolierter Punkt.

Für $q = 0$, d. h. $A = 0$, $B = 0$, also $x_1 = 0$ entartet unsre Pascalsche Kurve in einen Kreis. Dieser Fall tritt also ein, wenn der feste Punkt mit dem Zentrum des festen Kreises zusammenfällt.

Zusammenfassend können wir den

Satz aussprechen: Bei allen ähnlich veränderlichen Systemen von der Eigenschaft, daß eine Gerade beständig durch einen festen Punkt geht, während eine zweite Gerade an einem festen Kreise hingleitet, beschreibt der Ursprung des beweglichen Systems diejenige Pascalsche Schnecke, die entsteht als Fußpunktkurve des größten der im vorigen Satz erklärten Gleitkreise in bezug auf den in seinen Mittelpunkt zusammengeschrumpften kleinsten als Lotpunkt.

Die eben genannte Pascalsche Kurve geht dabei in eine Kardioide über, wenn der feste Punkt auf der

Peripherie des festen Kreises liegt, und entartet zu einem Kreis, wenn der feste Punkt mit dem Zentrum des festen Kreises zusammenfällt.

Aus den beiden letzten Sätzen folgt auf Grund des von uns auf Seite 109 entwickelten Lehrsatzes, daß nämlich die Bahnkurve eines beliebigen Systempunktes die Enveloppen aller durch ihn gehenden Geraden umhüllt, der bekannte

Satz: Jede Pascalsche Schnecke kann erzeugt werden als Einhüllende eines Kreises, desson Mittelpunkt sich auf einem Kreise K) bewegt und dessen Radius sich in bestimmter Weise ändert.

§ 16.

Die Bewegung $f(t) = c_1 + c_2 \sin t + c_3 \cos t$.

Den Betrachtungen dieses und des folgenden Paragraphen liegen die Bewegungsgleichungen (2) von Seite 116 zugrunde, welche lauteten:

$$(8)\quad \begin{aligned} x &= D\cos t + A\sin^2 t + B\sin t\cos t + f(t)\,(\xi\cos t - \eta\sin t) \\ y &= D\sin t - A\sin t\cos t + B\sin^2 t + f(t)\,(\xi\sin t + \eta\cos t). \end{aligned}$$

Die noch völlig willkürliche Funktion $f(t)$ wollen wir jetzt in geeigneter Weise wählen und die sich dann ergebenden Bewegungen näher ins Auge fassen.

Herleitung der Bewegung $f(t) = c_1 + c_2 \sin t + c_3 \cos t$ aus dem Zerfallen der Kreispunktkurve.

Zunächst fragen wir uns, wie muß $f(t)$ beschaffen sein, damit die Kreispunktkurve der durch die Gleichungen (8) definierten Bewegung in jedem Moment in zwei Kreise zerfällt.

Nach unsern allgemeinen Theorien (S. 42) zerfällt die Kreispunktkurve eines ähnlich veränderlichen Systems in zwei Kreise, wenn

$$PQ = LM$$

ist. Beachten wir die Werte von P, Q, L, M (S. 26), so können wir diese Bedingung allgemein in die Form bringen:

$$3(\alpha^2+\beta^2)\left\{\left(2\frac{f'}{f}+3\frac{f'f''}{f^2}-\frac{f'''}{f}\right)(\alpha^2+\beta^2)+\left(1+2\frac{f'^2}{f^2}-\frac{f''}{f}\right)(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)\right.$$
(9)
$$\left.+\frac{f'}{f}\left(1+\frac{f''}{f}\right)(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)\right\}+\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)=0.$$

Für unsere Bewegungen (8) lassen sich die Größen α_1 und β_1, wie man durch leichte Rechnung findet, schreiben:

$$\alpha_1=3\beta-\frac{\frac{f'}{f}+\frac{f'''}{f}}{1+\frac{f'^2}{f^2}}\left(\frac{db}{dt}+\frac{f'}{f}\frac{da}{dt}\right),\quad \beta_1=-3\alpha+\frac{\frac{f'}{f}+\frac{f'''}{f}}{1+\frac{f'^2}{f^2}}\left(\frac{da}{dt}-\frac{f'}{f}\frac{db}{dt}\right),$$

sodaß:

$$(10)\quad \alpha\alpha_1+\beta\beta_1=-\frac{\frac{f'}{f}+\frac{f'''}{f}}{1+\frac{f'^2}{f^2}}H,\quad \alpha\beta_1-\alpha_1\beta=\frac{\frac{f'}{f}+\frac{f'''}{f}}{1+\frac{f'^2}{f^2}}H_1-3(\alpha^2+\beta^2)$$

wird, worin H und H_1 bedeuten:

$$H=\left(\alpha\frac{db}{dt}-\beta\frac{da}{dt}\right)+\frac{f'}{f}\left(\alpha\frac{da}{dt}+\beta\frac{db}{dt}\right)$$
$$H_1=\left(\alpha\frac{da}{dt}+\beta\frac{db}{dt}\right)-\frac{f'}{f}\left(\alpha\frac{db}{dt}-\beta\frac{da}{dt}\right).$$

Führen wir die Ausdrücke (10) in die Bedingung (9) ein, so nimmt diese die Gestalt an:

$$\left(\frac{f'}{f}+\frac{f'''}{f}\right)^2HH_1+3\left(\frac{f'}{f}+\frac{f'''}{f}\right)(\alpha^2+\beta^2)\left\{\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)(\alpha^2+\beta^2)\right.$$
(11)
$$\left.+\left(\frac{f'^2}{f^2}-\frac{f''}{f}\right)H-\frac{f'}{f}\left(1+\frac{f''}{f}\right)H_1\right\}=0.$$

Es ist also

$$(12)\qquad f'+f'''=0$$

eine Lösung derselben. Die Differentialgleichung (12) ist leicht zu integrieren und besitzt das allgemeine Integral:

$$(13)\qquad f(t)=c_1+c_2\sin t+c_3\cos t.$$

Satz: Bei unsrer Bewegung (8) zerfällt für $f(t)=c_1+c_2\sin t+c_3\cos t$ die Kreispunktkurve einer jeden Systemlage in zwei Kreise.

Da $f=c_1$ und $f=c_2\sin t+c_3\cos t$ zugleich partikuläre Integrale der Differentialgleichung dritter Ordnung sind, die beim Entarten der Kreispunktkurve in eine Kurve dritter Ordnung

auftrat (vergl. S. 48), muß für $f = c_1$ und $f = c_2 \sin t + c_3 \cos t$ ein Kreis oder beide in eine Gerade entarten, und zwar finden wir:

Satz: Bei unsrer Bewegung zerfällt in jedem Moment für $f(t) = c_1$ die Kreispunktkurve in zwei Gerade (Polbahntangente und -normale) und für $f(t) = c_2 \sin t + c_3 \cos t$ in einen Kreis und eine Gerade (Polbahnnormale und einen die Polbahntangente im Pol berührenden Kreis).

Zusammenhang der Bewegung $f(t) = c_1 + c_2 \sin t + c_3 \cos t$ mit der eines starren Systems.

R. Müller beweist im 58. Bande der Zeitschrift für Mathematik und Physik den folgenden Satz: Bewegt sich ein ähnlich veränderliches System so, daß drei seiner Punkte Kreise beschreiben, so beschreibt ein jeder andere Punkt eine Koppelkurve. M. Krause[1]) bemerkte, daß „dieser Satz nur als ein Glied in einer Kette von Sätzen anzusehen sei, die sämtlich Beziehungen zwischen den Bahnkurven ähnlich veränderlicher und starrer Systeme herstellen", und entwickelt eine Reihe solcher Sätze.

Auch in dem uns vorliegenden Fall gelingt es, das ähnlich veränderliche System mit einem starren in Verbindung zu bringen. Das von uns betrachtete ähnlich veränderliche System hat die Bewegungsgleichungen:

$$(14)\quad \begin{aligned} x &= D\cos t + A\sin^2 t + B\sin t\cos t + (c_1 + c_2\sin t \\ &\quad + c_3\cos t)(\xi\cos t - \eta\sin t) \\ y &= D\sin t - A\sin t\cos t + B\sin^2 t + (c_1 + c_2\sin t \\ &\quad + c_3\cos t)(\xi\sin t + \eta\cos t), \end{aligned}$$

die auch geschrieben werden können:

$$\begin{aligned} x &= A_1 + A_2\cos^2 t + B_2\sin t\cos t + \xi'\cos t - \eta'\sin t \\ y &= B_1 - B_2\cos^2 t + A_2\sin t\cos t + \xi'\sin t + \eta'\cos t, \end{aligned}$$

[1]) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung XIX, 1. Abt. Heft 11/12.

worin gesetzt ist:

$$A_1 = A - c_2\eta,\ B_1 = B + c_2\xi,\ A_2 = -A + c_2\eta + c_3\xi,\ B_2 = B + c_2\xi - c_3\eta,$$

$$\xi' = c_1\xi + D,\quad \eta' = c_1\eta.$$

Wir nehmen nun mit dem festen Koordinatensystem die durch die Relationen:

$$x_1 = (x - A_1)\cos\delta - (y - B_1)\sin\delta$$

$$y_1 = (x - A_1)\sin\delta + (y - B_1)\cos\delta$$

vermittelte Koordinatentransformation vor und erhalten für x_1 und y_1:

$$x_1 = A_3\cos^2 t + B_3\sin t\cos t + \xi''\cos t - \eta''\sin t$$

$$y_1 = -B_3\cos^2 t + A_3\sin t\cos t + \xi''\sin t + \eta''\cos t,$$

wobei gesetzt wurde:

$$A_3 = A_2\cos\delta + B_2\sin\delta,\qquad B_3 = B_2\cos\delta - A_2\sin\delta,$$

$$\xi'' = \xi'\cos\delta - \eta'\sin\delta,\qquad \eta'' = \xi'\sin\delta + \eta'\cos\delta.$$

Den vorläufig noch willkürlichen Drehungswinkel δ bestimmen wir so, daß

$$B_3 = 0$$

wird oder also:

$$\tan\delta = \frac{B_2}{A_2}$$

ist. Dann formen sich unsre Bewegungsgleichungen zu:

$$x_1 = A_3\cos^2 t + \xi''\cos t - \eta''\sin t$$

(15)

$$y_1 = A_3\sin t\cos t + \xi''\sin t + \eta''\cos t,$$

worin

$$A_3 = \sqrt{A_2^2 + B_2^2},\qquad \xi'' = \frac{A_2\xi' - B_2\eta'}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}},\qquad \eta'' = \frac{B_2\xi' + A_2\eta'}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

ist. Dies sind aber die Bewegungsgleichungen eines Punktes ξ'', η'' eines starren Systems, welches sich in seiner Ebene so bewegt, daß von zwei in einem Punkte fest verbundenen und senkrecht auf einander stehenden Geraden die eine immer durch einen festen Punkt geht, die andere an einem festen Kreise hingleitet. Wir finden also den

Satz: Die Bahnkurven aller Punkte eines ebenen ähnlich veränderlichen Systems, bei welchem eine Gerade beständig durch einen festen Punkt hindurchgeht, während eine zweite Gerade längs eines festen Kreises gleitet, bei dem ferner die Funktion $f(t)$ den Wert $c_1 + c_2 \sin t + c_3 \cos t$ hat, sind auch Bahnkurven eines starren Systems von oben definierter Art.

Die Bahnkurven und die Einhüllenden der Systemgeraden bei unsrer Bewegung.

Um die Gleichung der allgemeinen Bahnkurve des uns vorliegenden ähnlich veränderlichen Systems zu finden, haben wir aus den Gleichungen (14) den Parameter t zu eliminieren. Wir bilden zu dem Zwecke zunächst:

$$x \cos t + y \sin t = (c_1 \xi + D) + (B + c_2 \xi) \sin t + c_3 \xi \cos t$$

$$x \sin t - y \cos t = -c_1 \eta + (A - c_2 \eta) \sin t - c_3 \eta \cos t.$$

Hieraus läßt sich t leicht eliminieren und wir erhalten als allgemeine Bahngleichung:

$$\begin{aligned}(16)\quad &\Big\{(x-A+c_2\eta)(x-c_3\xi)+(y-B-c_2\xi)(y-c_3\eta)\Big\}^2 = \Big\{(c_1\xi+D)(y-c_3\eta)\\ &-c_1\eta(x-c_3\xi)\Big\}^2+\Big\{(c_1\xi+D)(x-A+c_2\eta)+c_1\eta(y-B-c_2\xi)\Big\}^2.\end{aligned}$$

Um die Natur dieser Bahnkurve zu erkennen, müssen wir einige Koordinatentransformationen vornehmen. Für ein gegebenes Wertepaar ξ, η verschieben wir das x, y-System an den Punkt:

$$x_0 = \tfrac{1}{2}(A - c_2\eta + c_3\xi), \qquad y_0 = \tfrac{1}{2}(B + c_2\xi + c_3\eta),$$

dann nimmt im neuen System die Kurve (16) die Gleichung an:

$$\begin{aligned}&\Big\{x'^2+y'^2-\tfrac{1}{4}[(A-c_2\eta-c_3\xi)^2+(B+c_2\xi-c_3\eta)^2]\Big\}^2-\Big\{(c_1\xi+D)^2\\ &+c_1^2\eta^2\Big\}\Big\{x'^2+y'^2+\tfrac{1}{4}[(A-c_2\eta-c_3\xi)^2+(B+c_2\xi-c_3\eta)^2]\Big\}\\ &+x'\Big\{2c_1\eta(c_1\xi+D)(B+c_2\xi-c_3\eta)+[(c_1\xi+D)^2-c_1^2\eta^2](A-c_2\eta\\ &-c_3\xi)\Big\}+y'\Big\{2c_1\eta(c_1\xi+D)(A-c_2\eta-c_3\xi)-[(c_1\xi+D)^2\\ &-c_1^2\eta^2](B+c_2\xi-c_3\eta)\Big\}=0.\end{aligned}$$

Wir bezeichnen hierin zur Abkürzung den Faktor von x' mit E, den von y' mit F und drehen nun das x', y'-System um den durch

$$\sin\varphi = -\frac{F}{\sqrt{E^2+F^2}}, \qquad \cos\varphi = -\frac{E}{\sqrt{E^2+F^2}}$$

bestimmten Winkel.

Im gedrehten System geht die letzte Gleichung über in:

$$\Big\{X^2+Y^2-\tfrac{1}{4}[(A-c_2\eta-c_3\xi)^2+(B+c_2\xi-c_3\eta)^2]\Big\}^2-\Big\{(c_1\xi+D)^2 + c_1^2\eta^2\Big\}\Big\{X^2+Y^2+X\sqrt{(A-c_2\eta-c_3\xi)^2+(B+c_2\xi-c_3\eta)^2} + \tfrac{1}{4}[(A-c_2\eta-c_3\xi)^2+(B+c_2\xi-c_3\eta)^2]\Big\}=0.$$

Verschieben wir endlich noch das X, Y-System an den Punkt:

$$X_0 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{(A-c_2\eta-c_3\xi)^2+(B+c_2\xi-c_3\eta)^2}, \qquad Y_0=0,$$

so nimmt die allgemeine Bahnkurve die Gestalt an:

$$\Big\{X'^2+Y'^2-\sqrt{(A-c_2\eta-c_3\xi)^2+(B+c_2\xi-c_3\eta)^2}\,X'\Big\}^2 = \Big\{(c_1\xi+D)^2+c_1^2\eta^2\Big\}(X'^2+Y'^2). \tag{17}$$

Dieselbe ist also eine Pascalsche Schnecke.

Für den durch: $c_1\xi+D=0$, $c_1\eta=0$ bestimmten Systempunkt A_1 mit den Koordinaten:

$$\xi_1 = -\frac{D}{c_1}, \qquad \eta_1 = 0,$$

sowie den durch: $A-c_2\eta-c_3\xi=0$, $B+c_2\xi-c_3\eta=0$ bestimmten Punkt A_2 mit den Koordinaten:

$$\xi_2 = \frac{c_3A-c_2B}{c_2^2+c_3^2}, \qquad \eta_2 = \frac{c_2A+c_3B}{c_2^2+c_3^2}$$

entartet die Pascalsche Kurve in einen Kreis.

Unter solchen Umständen erhalten wir den folgenden

Satz: Bei der von uns betrachteten Bewegung beschreibt jeder Punkt des ähnlich veränderlichen Systems eine Pascalsche Schnecke, die für die soeben festgestellten Punkte A_1 und A_2 in einen Kreis übergeht.

Wir wollen jetzt die Einhüllende einer beliebigen Systemgeraden bestimmen. Dazu haben wir in den

Gleichungen (5) der Seite 117 $f(t) = c_1 + c_2 \sin t + c_3 \cos t$ zu setzen und erhalten, wenn wir beachten, daß $p = \mu \sin \alpha - \nu \cos \alpha$ war, für die besagte Einhüllende die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
x = {} & c_3 \mu \sin^2 \alpha + (B + c_2 \mu - c_3 \nu) \sin \alpha \cos \alpha + (A - c_2 \nu) \cos^2 \alpha \\
& + \sin (t + \alpha) [(D + c_1 \mu) \sin \alpha - c_1 \nu \cos \alpha] \\
y = {} & (B + c_2 \mu) \sin^2 \alpha + (A - c_2 \nu - c_3 \mu) \sin \alpha \cos \alpha + c_3 \nu \cos^2 \alpha \\
& - \cos (t + \alpha) [(D + c_1 \mu) \sin \alpha - c_1 \nu \cos \alpha].
\end{aligned} \tag{18}
$$

Diese Einhüllenden sind also Kreise und für $\nu = 0$, $\mu = -\frac{D}{c_1}$ Punkte Π mit den Koordinaten:

$$
\begin{aligned}
2x &= \left(A - \tfrac{c_3}{c_1} D\right) + \left(B - \tfrac{c_2}{c_1} D\right) \sin 2\alpha + \left(A + \tfrac{c_3}{c_1} D\right) \cos 2\alpha \\
2y &= \left(B - \tfrac{c_2}{c_1} D\right) + \left(A + \tfrac{c_3}{c_1} D\right) \sin 2\alpha - \left(B - \tfrac{c_2}{c_1} D\right) \cos 2\alpha.
\end{aligned}
$$

Betrachten wir alle Geraden durch den Punkt $\mu = -\frac{D}{c_1}$, $\nu = 0$, so bilden die zugehörigen Punkte Π eine Kurve, die aus den letzten Gleichungen durch Elimination von α hervorgeht und sich ergibt als:

$$
(x - A)\left(x + \tfrac{c_3}{c_1} D\right) + y\left(y - B + \tfrac{c_2}{c_1} D\right) = 0.
$$

Wir können somit den Lehrsatz aussprechen:

Satz: Das betrachtete ähnlich veränderliche System besitzt die Eigenschaft, daß alle Systemgeraden während ihrer Bewegung Kreise umhüllen. Für alle Geraden, die durch den Systempunkt: $\xi_1 = -\frac{D}{c_1}$, $\eta_1 = 0$ laufen, schrumpfen diese Kreise in Punkte zusammen, deren Gesamtheit wieder einen Kreis bildet.

Die höheren Berührungen des Krümmungskreises und der Tangente mit der Bahnkurve.

Wir wissen bereits, daß die Kreispunktkurve unsrer Bewegung in zwei Kreise zerfällt. Nehmen wir die Untersuchung auf eine fünfpunktige Berührung des Krümmungskreises vor, so finden wir, daß außer den Punkten A_1 und A_2, die, da sie

Kreise durchlaufen, eine n-punktige Berührung mit ihren Krümmungskreisen besitzen, es bei der betrachteten Bewegung keine Burmesterschen Punkte gibt. Damit sind die höheren Berührungen des Krümmungskreises erledigt.

Wir wenden uns jetzt zur mehrpunktig berührenden Tangente, beschränken uns aber dabei der Einfachheit halber auf die Funktion $f(t) = c_2 \sin t + c_3 \cos t$. Dann haben wir also die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} x &= D\cos t + A\sin^2 t + B\sin t\cos t + (c_2\sin t \\ &\quad + c_3\cos t)(\xi\cos t - \eta\sin t) \\ y &= D\sin t - A\sin t\cos t + B\sin^2 t + (c_2\sin t \\ &\quad + c_3\cos t)(\xi\sin t + \eta\cos t), \end{aligned} \tag{19}$$

und ein beliebiger Systempunkt beschreibt nach (17) die Pascalsche Schnecke:

$$\left\{X'^2 + Y'^2 - \sqrt{(A - c_2\eta - c_3\xi)^2 + (B + c_2\xi - c_3\eta)^2}\,X'\right\}^2 = D^2(X'^2 + Y'^2). \tag{20}$$

Wir sehen also, daß jetzt alle auf einem Kreise

$$(A - c_2\eta - c_3\xi)^2 + (B + c_2\xi - c_3\eta)^2 = \text{const.}$$

gelegenen Punkte kongruente Pascalsche Schnecken durchlaufen.

Wir stellen nun die Gleichung des Wendekreises auf. Dazu bilden wir vorerst die Differentialquotienten von x und y nach t:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -D\sin t + \varkappa\sin 2t + \lambda\cos 2t \\ \frac{dy}{dt} &= D\cos t + \lambda\sin 2t - \varkappa\cos 2t, \end{aligned}$$

wobei gesetzt ist:

$$\varkappa = A - c_2\eta - c_3\xi, \quad \lambda = B + c_2\xi - c_3\eta.$$

Die weiteren Differentialquotienten können wir schreiben:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\frac{dy}{dt} + D\cos t, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + D\sin t,$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = -4\frac{dx}{dt} - 3D\sin t, \qquad \frac{d^3y}{dt^3} = -4\frac{dy}{dt} + 3D\cos t.$$

Dann aber wird die allgemeine Gleichung des Wendekreises:

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

in unsrem Falle zu:

$$(21) \qquad 2(\varkappa^2 + \lambda^2) + 3D(\lambda \sin t - \varkappa \cos t) + D^2 = 0.$$

Setzen wir bestimmte Werte von ξ, η und damit von $\varkappa$, λ voraus, so stellt (21) eine Gleichung in t dar, deren Wurzeln die Parameterwerte derjenigen Punkte der betreffenden Bahnkurve ergeben, die Wendepunkte sind. Ersetzen wir cos t durch sin t, so liefert (21) für sin t die quadratische Gleichung:

$$9D^2(\varkappa^2 + \lambda^2)\sin^2 t + 6D\lambda \sin t\,[2(\varkappa^2 + \lambda^2) + D^2] + [2(\varkappa^2 + \lambda^2) + D^2]^2 - 9D^2\varkappa^2 = 0,$$

deren Diskriminante lautet:

$$-36D^2\varkappa^2[(\varkappa^2 + \lambda^2) - D^2][4(\varkappa^2 + \lambda^2) - D^2].$$

Dieselbe ist also nur positiv, wenn

$$\frac{D^2}{4} < \varkappa^2 + \lambda^2 < D^2$$

ist. Vergleichen wir die Bahnkurve (20) mit der auf Seite 118 abgeleiteten gewöhnlichen Schreibweise einer Pascalschen Schnecke, so erkennen wir, daß $\varkappa^2 + \lambda^2 = q^2$, $D = R$ ist, und finden losgelöst von der kinematischen Betrachtung den bekannten

Satz: Eine Pascalsche Schnecke:

$$(X^2 + Y^2 - qX)^2 = R^2(X^2 + Y^2)$$

besitzt nur dann zwei reelle Wendepunkte, wenn:

$$\frac{R}{2} < q < R$$

(dem absoluten Werte nach) ist.

Wir fragen uns ferner nach den Punkten ξ, η, bei deren Bahnen Undulationspunkte auftreten. Bei jedem Werte von t gibt es einen solchen Punkt ξ, η, dessen Koordinaten sich aus (21) und aus folgender Gleichung bestimmen:

$$(22) \qquad \frac{dx}{dt}\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{dy}{dt}\frac{d^3x}{dt^3} = 3D(\varkappa \sin t + \lambda \cos t) = 0.$$

Eliminieren wir aus (21) und (22) den Parameter t, so finden wir, daß alle diese Punkte der Gleichung genügen:

$$4(\varkappa^2+\lambda^2)^2-5D^2(\varkappa^2+\lambda^2)+D^4=0$$

oder:

$$[(\varkappa^2+\lambda^2)-D^2][4(\varkappa^2+\lambda^2)-D^2]=0.$$

Da $\varkappa^2+\lambda^2-D^2=0$, wie man sich leicht überzeugt, die bewegliche Polkurve liefert, kommt nur der Faktor $4(\varkappa^2+\lambda^2)-D^2$ der obigen Gleichung in Betracht und wir finden: Die gesuchten Punkte ξ, η liegen auf dem Kreise:

$$(A-c_2\eta-c_3\xi)^2+(B+c_2\xi-c_3\eta)^2=\frac{D^2}{4}.$$

Damit aber erhalten wir den bekannten

Satz: Für $q=\frac{R}{2}$ besitzt die Pascalsche Schnecke eine vierpunktig berührende Tangente.

Es liegen also die Verhältnisse folgendermaßen: Die Pascalschen Schnecken mit Schleifen ($q>R$) oder Spitzen ($q=R$) haben keine Wendepunkte, die mit isoliertem Punkt ($q<R$) scheiden sich in zwei Klassen, solche mit zwei Wendepunkten $\left(q>\frac{R}{2}\right)$ und solche ohne Wendepunkte $\left(q<\frac{R}{2}\right)$; der Zwischenfall $q=\frac{R}{2}$ ergibt eine vierpunktig berührende Tangente.

Die letzten Betrachtungen zeigen uns, wie die Kinematik gelegentlich für die Geometrie spezieller Kurven fruchtbar wird.

§ 17.

Die Bewegung $f(t)=\frac{1}{\cos t}$.

Wir wollen als zweites Beispiel die Bewegung eines ähnlich veränderlichen Systems behandeln, die entsteht, wenn wir in den Gleichungen (2) des § 15 $A=0$, $B=0$ setzen, also den festen Punkt mit dem Zentrum des festen Kreises zusammenfallen lassen, und der Funktion $f(t)$ den Wert $\frac{1}{\cos t}$ geben. Wir haben es dann mit den Bewegungsgleichungen zu tun:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x&=D\cos t+\frac{1}{\cos t}(\xi\cos t-\eta\sin t)\\ y&=D\sin t+\frac{1}{\cos t}(\xi\sin t+\eta\cos t). \end{aligned}$$

Zusammenhang dieser Bewegung mit der eines starren Systems.

Auch dieses ähnlich veränderliche System läßt sich mit einem starren in Beziehung bringen. Zunächst können wir unsere obigen Bewegungsgleichungen auch schreiben:

$$x = \xi - \eta \tan t + D \cos t$$
$$y = \eta + \xi \tan t + D \sin t.$$

Es werde nun mit dem x, y-System eine Koordinatentransformation vorgenommen vermittels der Formeln:

$$x_1 = (x - \xi) \cos \delta - (y - \eta) \sin \delta$$
$$y_1 = (x - \xi) \sin \delta + (y - \eta) \cos \delta.$$

Dieselbe führt auf die Gleichungen:

$$x_1 = -(\xi \sin \delta + \eta \cos \delta) \tan t + D \cos \delta \cos t - D \sin \delta \sin t$$
$$y_1 = (\xi \cos \delta - \eta \sin \delta) \tan t + D \sin \delta \cos t + D \cos \delta \sin t.$$

Den Winkel δ wählen wir so, daß die Größe

$$\xi \sin \delta + \eta \cos \delta$$

der Null gleich wird, für welchen Fall also die Gleichung bestehen muß:

$$\tan \delta = -\frac{\eta}{\xi}.$$

Dann nehmen die Bewegungsgleichungen die Gestalt an:

$$(2) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \xi' \cos t - \eta' \sin t \\ y_1 &= a \tan t + \xi' \sin t + \eta' \cos t, \end{aligned}$$

wobei gesetzt wurde:

$$\xi \cos \delta - \eta \sin \delta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = a, \quad D \cos \delta = \xi', \quad D \sin \delta = \eta'.$$

Diese Bewegungsgleichungen besitzt aber ein starres System, welches sich in seiner Ebene so bewegt, daß eine seiner Geraden fortwährend durch einen festen Punkt hindurchgeht und ein Punkt derselben eine gerade Linie durchläuft. Wir haben damit den Lehrsatz gefunden:

Satz: Die sämtlichen Bahnkurven eines ähnlich veränderlichen Systems, bei welchem eine Gerade an

einem festen Kreise gleitet und eine zweite Gerade beständig durch den Mittelpunkt dieses Kreises geht, bei dem ferner die Funktion $f(t)$ den Wert $\frac{1}{\cos t}$ besitzt, sind auch Bahnkurven eines starren Systems, bei welchem eine Gerade fortwährend durch einen festen Punkt hindurchgeht und ein Punkt derselben eine gerade Linie durchläuft.

Die Bahnkurven unserer Bewegung.

Die Bahn, die ein Punkt ξ, η unseres ähnlich veränderlichen Systems beschreibt, erhalten wir aus (1) durch Elimination von t.

Aus (1) folgt einerseits:

$$x(\xi \sin t + \eta \cos t) - y(\xi \cos t - \eta \sin t) = D\eta$$

oder:

$$\cos t = \frac{D\eta - (\xi x + \eta y)\sin t}{\eta x - \xi y} \tag{3}$$

und anderseits:

$$x \sin t - y \cos t = \tan t\,(\xi \cos t - \eta \sin t) - (\xi \sin t + \eta \cos t)$$

oder:

$$\cos t = \frac{y - \eta - y \sin^2 t}{x \sin t}. \tag{4}$$

Indem wir die rechten Seiten von (3) und (4) einander gleich setzen, erhalten wir für $\sin t$ folgende quadratiche Gleichung:

$$\xi(x^2 + y^2)\sin^2 t - D\eta\, x \sin t + (y - \eta)(\eta x - \xi y) = 0, \tag{5}$$

während sich durch Quadrieren von (3) ergibt:

$$(\xi^2 + \eta^2)(x^2 + y^2)\sin^2 t - 2D\eta(\xi x + \eta y)\sin t + D^2\eta^2 - (\eta x - \xi y)^2 = 0. \tag{6}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt durch Elimination von $\sin^2 t$:

$$\sin t = \frac{[(\xi^2 + \eta^2) - (\xi x + \eta y)](\eta x - \xi y) + D^2 \xi \eta}{D\xi(\xi x + \eta y) - D\eta(\eta x - \xi y)} \tag{7}$$

und hieraus nach (3):

$$\cos t = -\frac{[(\xi^2 + \eta^2) - (\xi x + \eta y)](\xi x + \eta y) + D^2\eta^2}{D\xi(\xi x + \eta y) - D\eta(\eta x - \xi y)}. \tag{8}$$

Durch Quadrieren und Addieren von (7) und (8) finden wir als Gleichung der allgemeinen Bahnkurve unsres ähnlich veränderlichen Systems (1):

$$(9)\quad \begin{aligned}&(x^2+y^2)\left\{[\xi x+\eta y-(\xi^2+\eta^2)]^2-D^2\eta^2\right\}-D^2(\xi x+\eta y)^2\\&+2D^2\eta\left\{\eta(\xi x+\eta y)+\xi(\eta x-\xi y)\right\}+D^4\eta^2=0.\end{aligned}$$

Wir wollen jetzt die Asymptoten und die Doppelpunkte dieser Bahnkurve bestimmen.

Die Asymptote einer Kurve können wir in der Gleichungsform annehmen:

$$y=m_s x+\mu_s.$$

Der Richtungsfaktor m_s bestimmt sich folgendermaßen: Wir dividieren die Gesamtheit der Glieder vierter Dimension U_4:

$$U_4=(x^2+y^2)(\xi x+\eta y)^2$$

durch x^4 und erhalten, indem wir $\lim\limits_{x=\infty}\frac{y}{x}=m_s$ setzen, für m_s die Gleichung:

$$\lim_{x=\infty}\frac{U_4}{x^4}=(1+m_s^2)(\xi+\eta m_s)^2=0,$$

welche von imaginären Lösungen abgesehen, die Doppelwurzel $m_s=-\frac{\xi}{\eta}$ besitzt. Unsere Bahnkurven haben also zwei parallele Asymptoten.

Um die zugehörigen Werte des Abschnittes μ_s der Asymptote auf der y-Achse zu finden, setzen wir $y=-\frac{\xi}{\eta}x+\mu_s$ in die Bahngleichung (9) ein und erhalten:

$$\begin{aligned}x^2\left(1+\frac{\xi^2}{\eta^2}\right)&[\eta^2\mu_s^2-2\eta(\xi^2+\eta^2)\mu_s+(\xi^2+\eta^2)^2-D^2\eta^2]\\&+\text{lin. Gl. von } x+\text{abs. Gl.}=0.\end{aligned}$$

Indem wir diese Gleichung durch x^2 dividieren und dann x unendlich groß werden lassen, finden wir zur Bestimmung von μ_s die quadratische Gleichung:

$$\eta^2\mu_s^2-2\eta(\xi^2+\eta^2)\mu_s+(\xi^2+\eta^2)^2-D^2\eta^2=0,$$

deren Wurzeln:

$$\mu_s=\frac{\xi^2+\eta^2}{\eta}\pm D$$

sind.

Resultat: Die Bahnkurven besitzen zwei parallele Asymptoten mit den Gleichungen:

$$y = -\frac{\xi}{\eta}x + \frac{\xi^2+\eta^2}{\eta} \pm D.$$

Zu den Doppelpunkten der Bahnkurven gelangen wir durch folgende Überlegung: Durch die Gleichungen (7) und (8) ist zu jedem Punkte x, y der zugehörige Winkel t eindeutig bestimmt. Die Eindeutigkeit hört aber auf, wenn $\sin t$ und $\cos t$ die Form $\frac{0}{0}$ annehmen. Somit müssen für die Doppelpunkte folgende Gleichungen zusammen bestehen:

$$[(\xi^2+\eta^2) - (\xi x + \eta y)](\eta x - \xi y) + D^2\xi\eta = 0$$
$$\xi(\xi x + \eta y) - \eta(\eta x - \xi y) = 0.$$

Aus diesen ergeben sich für die Koordinaten der Doppelpunkte die Werte:

$$(10) \qquad x = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}\left[(\xi^2+\eta^2) \pm \sqrt{(\xi^2+\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}\right]$$

$$(11) \quad y = \frac{\eta^2-\xi^2}{2\xi\eta}x = \frac{\eta^2-\xi^2}{2\eta(\xi^2+\eta^2)}\left[(\xi^2+\eta^2) \pm \sqrt{(\xi^2+\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}\right].$$

Resultat: Die Bahnkurven besitzen zwei Doppelpunkte, deren Koordinaten durch (10) und (11) dargestellt werden; sie liegen auf einer Geraden durch den Ursprung.

Bemerkt sei noch, daß der Punkt $\xi = \eta = 0$ den Kreis $x^2+y^2=D^2$ durchläuft, und die Punkte der beständig durch den Ursprung des festen Systems gehenden Geraden $\eta = 0$ die Bahnen beschreiben:

$$(x^2+y^2)(x-\xi)^2 - D^2x^2 = 0,$$

also Konchoiden des Nikomedes.

Die Bahn eines beliebigen Punktes ξ, η läßt sich leicht zeichnen, da wir in jedem Moment die Lage des beweglichen Systems angeben können; denn der Ursprung $\xi = \eta = 0$ beschreibt den Kreis $x^2+y^2=D^2$, die η-Achse gleitet an diesem Kreise hin und die ξ-Achse geht beständig durch den Mittelpunkt desselben.

Die beiden Polkurven.

Die feste Polkurve p besitzt allgemein die Gleichungen:

$$x = a - \frac{1}{1+\frac{f'^2}{f^2}}\left(\frac{db}{dt} + \frac{f'}{f}\frac{da}{dt}\right), \qquad y = b + \frac{1}{1+\frac{f'^2}{f^2}}\left(\frac{da}{dt} - \frac{f'}{f}\frac{db}{dt}\right).$$

Bei unsrer Bewegung ist:

$$a = D\cos t, \quad \frac{da}{dt} = -D\sin t, \quad b = D\sin t, \quad \frac{db}{dt} = D\cos t,$$

$$f(t) = \frac{1}{\cos t}, \quad f'(t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t},$$

sodaß die Gleichungen der festen Polkurve die Gestalt annehmen:

$$(12) \qquad x = D\sin t \sin 2t, \qquad y = -D\sin t\cos 2t,$$

oder in kartesischen Koordinaten:

$$(13) \qquad 4(x^2+y^2)^2(x^2+y^2-D^2)+D^4x^2 = 0.$$

Dieselbe ist also eine Kurve sechster Ordnung, die zur x- und y-Achse symmetrisch liegt. Ihre 3 Schnittpunkte mit der Abszissenachse sind Doppelpunkte der Kurve und zwar ist der Koordinatenanfang ein Selbstberührungspunkt mit der Ordinatenachse als Tangente, die beiden anderen Punkte Schleifen. Die Kurve hat ferner 3 Maxima und 3 Minima. Sie ist eine spezielle Rhodonee[1]). Ihre Gestalt ist auf Tafel I, Fig. 1 wiedergegeben (der hinzugefügte Kreis hat den Radius D).

Die Systemkurve π, deren Phase die bewegliche Polkurve darstellt, hat allgemein die Gleichungen:

$$\xi = \frac{1}{f\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)}\left\{\sin t\left(\frac{da}{dt} - \frac{f'}{f}\frac{db}{dt}\right) - \cos t\left(\frac{db}{dt} + \frac{f'}{f}\frac{da}{dt}\right)\right\}$$

$$\eta = \frac{1}{f\left(1+\frac{f'^2}{f^2}\right)}\left\{\sin t\left(\frac{db}{dt} + \frac{f'}{f}\frac{da}{dt}\right) + \cos t\left(\frac{da}{dt} - \frac{f'}{f}\frac{db}{dt}\right)\right\},$$

die für unsre Bewegung lauten:

$$(14) \qquad \xi = -D\cos^3 t, \qquad \eta = -D\cos^2 t\sin t,$$

---

[1]) Siehe Loria: Spezielle algebraische und transz. ebene Kurven, 1902, S. 305.

oder in Polarkoordinaten:

$$r = D\cos^2\varphi, \tag{15}$$

oder in kartesischen Koordinaten:

$$(\xi^2+\eta^2)^3 - D^2\xi^4 = 0. \tag{16}$$

Sie ist also ebenfalls eine Kurve sechster Ordnung, die zu beiden Achsen symmetrisch liegt. Der Koordinatenanfang ist ein vierfacher Punkt (Doppelspitze) mit der η-Achse als Tangente. In Fig. 2 der Tafel I ist der Verlauf der Kurve, die man als Doppeleilinie[1]) bezeichnet, dargestellt.

Wendekreis, Kreispunktkurve, Burmestersche Punkte.

Wir berechnen zunächst die für die weiteren Untersuchungen nötigen Ausdrücke: ϱ_r, χ_r, α_r, β_r. Da:

$$a = D\cos t, \qquad b = D\sin t$$

und:

$$f = \frac{1}{\cos t}, \quad f' = \frac{\sin t}{\cos^2 t}, \quad f'' = \frac{1+\sin^2 t}{\cos^3 t}, \quad f''' = \frac{\sin t\,(5+\sin^2 t)}{\cos^4 t},$$

$$f^{IV} = \frac{5+18\sin^2 t+\sin^4 t}{\cos^5 t}, \quad f^{V} = \frac{\sin t\,(61+58\sin^2 t+\sin^4 t)}{\cos^6 t}$$

ist, wird:

$$\varrho_1 = \frac{1}{\cos^2 t}, \qquad \varrho_2 = 0, \qquad \varrho_3 = -\frac{2(1+2\sin^2 t)}{\cos^4 t},$$

$$\varrho_4 = 0, \qquad \varrho_5 = \frac{8\,(2+11\sin^2 t+2\sin^4 t)}{\cos^6 t},$$

$$\chi_2 = \frac{2\sin t}{\cos^3 t}, \qquad \chi_3 = 0, \qquad \chi_4 = -\frac{8\sin t\,(2+\sin^2 t)}{\cos^5 t}, \qquad \chi_5 = 0,$$

und:

$$\alpha = \frac{D}{\cos t}(1-3\sin^2 t), \qquad \beta = 3D\sin t$$

$$\alpha_1 = \frac{3D\sin t}{\cos^2 t}(1+\sin^2 t), \qquad \beta_1 = -\frac{3D}{\cos t}(1+\sin^2 t)$$

$$\alpha_2 = \frac{D}{\cos^3 t}(1+14\sin^2 t+9\sin^4 t), \qquad \beta_2 = -\frac{3D\sin t}{\cos^2 t}(5+3\sin^2 t)$$

$$\alpha_3 = -\frac{15D\sin t}{\cos^4 t}(1+6\sin^2 t+\sin^4 t), \qquad \beta_3 = \frac{15D}{\cos^3 t}(1+6\sin^2 t+\sin^4 t).$$

[1]) Siehe Loria, S. 311.

Wir wollen hier gleich noch folgende Größen berechnen:

$$\alpha^2+\beta^2=\frac{D^2}{\cos^2 t}(1+3\sin^2 t). \qquad N^2=D^2(1+3\sin^2 t)$$

$$\alpha\alpha_1+\beta\beta_1=-6D^2\frac{\sin t}{\cos^3 t}(1+\sin^2 t)$$

$$\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=-3D^2\frac{1}{\cos^2 t}(1+\sin^2 t)$$

$$\alpha\alpha_2+\beta\beta_2=D^2\frac{1}{\cos^4 t}(1-34\sin^2 t-15\sin^4 t)$$

$$\alpha\beta_2-\alpha_2\beta=-6D^2\frac{\sin t}{\cos^3 t}(3+\sin^2 t)$$

$$\alpha\alpha_3+\beta\beta_3=30D^2\frac{\sin t}{\cos^5 t}(1+6\sin^2 t+\sin^4 t)$$

$$\alpha\beta_3-\alpha_3\beta=15D^2\frac{1}{\cos^4 t}(1+6\sin^2 t+\sin^4 t).$$

Wegen der Form von $f(t)=\frac{1}{\cos t}$ wird zufolge der allgemeinen Theorie (vergl. S. 22) der Wendekreis in jedem Moment durch die Polbahntangente dargestellt. Dann aber folgt nach S. 49, daß die Kreispunktkurve in die unendlich ferne Gerade und eine Fokalkurve dritter Ordnung zerfällt. In dem an den Pol verschobenen und in die Polbahntangente gedrehten System besitzt diese Fokalkurve die Gleichungsform:

$$(x_2^2+y_2^2)(Lx_2+My_2)+Qx_2y_2=0.$$

Dabei ist das x_2, y_2-System gegen das x, y-System um einen Winkel φ gedreht, dessen

(17)
$$\sin\varphi=-\frac{\frac{dy_p}{dt}}{N}=\frac{\cos t(1-6\sin^2 t)}{\sqrt{1+3\sin^2 t}}$$

$$\cos\varphi=-\frac{\frac{dx_p}{dt}}{N}=\frac{2\sin t(3\sin^2 t-2)}{\sqrt{1+3\sin^2 t}}$$

ist. Da bei uns alle geraden ϱ und alle ungeraden χ der Null gleich werden, nehmen nach den Gleichungen (14) des § 4 die Koeffizienten der obigen Fokalkurve die Werte an:

$$L = -\frac{\varrho_1}{N}(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta) = \frac{3D(1+\sin^2 t)}{\cos^4 t\sqrt{1+3\sin^2 t}}$$

$$M = \frac{\varrho_1}{N}(3\chi_2 N^2 + \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1) = \frac{12D\sin^3 t}{\cos^5 t\sqrt{1+3\sin^2 t}}$$

$$Q = 3\varrho_1^2 N^2 = \frac{3D^2(1+3\sin^2 t)}{\cos^4 t},$$

sodaß die Kreispunktkurve selbst geschrieben werden kann:

$$(18)\qquad \begin{aligned}&(x_2^2+y_2^2)\left\{(1+\sin^2 t)\cos t\, x_2 + 4\sin^3 t\, y_2\right\}\\ &+ D\cos t\sqrt{1+3\sin^2 t}^{\,3}\, x_2 y_2 = 0.\end{aligned}$$

In § 11 fanden wir, daß sich für jedes ähnlich veränderliche System, dessen Kreispunktkurve eine Fokale dritter Ordnung ist, die Anzahl der Burmesterschen Punkte von fünf auf vier reduziert. Dieselben sind bestimmt als Schnitte der Kreispunktkurve mit der Kurve:

$$(19)\quad (x_2^2+y_2^2)(L_1 x_2 + M_1 y_2 + R_1) + y_2(Q_{11}x_2 + Q_{12}y_2 + S_1) = 0.$$

Die in § 10 allgemein angegebenen Koeffizienten dieser Gleichung erhalten für unsre Bewegung die Werte:

$$L_1 = -\frac{\varrho_1}{N}(\alpha\beta_2 - \alpha_2\beta) = \frac{6D\sin t\,(3+\sin^2 t)}{\cos^5 t\sqrt{1+3\sin^2 t}}$$

$$M_1 = \frac{1}{N}[(3\chi_2^2 - 4\varrho_1\varrho_3)N^2 + \varrho_1(\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2)] = \frac{3D(3+6\sin^2 t+23\sin^4 t)}{\cos^6 t\sqrt{1+3\sin^2 t}}$$

$$R_1 = 0$$

$$Q_{11} = 2\varrho_1[3\chi_2 N^2 - 2(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)] = \frac{12D^2\sin t\,(3+5\sin^2 t)}{\cos^5 t}$$

$$Q_{12} = -4\varrho_1(\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta) = \frac{12D^2(1+\sin^2 t)}{\cos^4 t}$$

$$S_1 = 3\varrho_1^2 N^3 = \frac{3D^3\sqrt{1+3\sin^2 t}^{\,3}}{\cos^4 t},$$

sodaß die Gleichung (19) übergeht in:

$$(20)\qquad \begin{aligned}&(x_2^2+y_2^2)\left\{2\sin t\cos t(3+\sin^2 t)x_2 + (3+6\sin^2 t+23\sin^4 t)y_2\right\}\\ &+ y_2 D\cos t\sqrt{1+3\sin^2 t}\left\{4\sin t(3+5\sin^2 t)x_2 + 4\cos t(1+\sin^2 t)y_2\right.\\ &\left.+ D\cos t\sqrt{1+3\sin^2 t}^{\,3}\right\} = 0.\end{aligned}$$

Führen wir in den Gleichungen (18) und (20) Polarkoordinaten ein, so erhalten wir für die Koordinaten r, φ der Burmesterschen Punkte die beiden Bedingungsgleichungen:

$$r\left\{(1+\sin^2 t)\cos t\cdot\cos\varphi+4\sin^3 t\cdot\sin\varphi\right\}+D\cos t\sqrt{1+3\sin^2 t}^{\,3}\cdot\sin\varphi\cos\varphi=0$$

$$r^2\Big\{2\sin t\cos t\,(3+\sin^2 t)\cdot\cos\varphi+(3+6\sin^2 t+23\sin^4 t)\cdot\sin\varphi\Big\}+4rD\cos t\sqrt{1+3\sin^2 t}\,\Big\{\sin t\,(3+5\sin^2 t)\cdot\sin\varphi\cos\varphi+\cos t\,(1+\sin^2 t)\cdot\sin^2\varphi\Big\}+D^2\cos^2 t(1+3\sin^2 t)^2\sin\varphi=0,$$

aus denen durch Elimination von r für $\tan\varphi$ die biquadratische Gleichung folgt:

$$16\sin^6 t\cdot\tan^4\varphi-8\sin^3 t\cos t\,(1+\sin^2 t)\cdot\tan^3\varphi+4\sin^2 t\,(3-\sin^2 t+2\sin^4 t)\cdot\tan^2\varphi-2\sin t\cos t\,(3+2\sin^2 t+3\sin^4 t)\cdot\tan\varphi+(1+\sin^2 t)^2\cos^2 t=0. \tag{21}$$

Da wir wissen, daß ein Punkt unsres Systems einen Kreis beschreibt, kennen wir in jeder Phase der Bewegung einen Burmesterschen Punkt, nämlich den Punkt A mit den Koordinaten:

$$x=D\cos t,\quad y=D\sin t,$$

oder im x_2, y_2-System:

$$x_2=-\frac{2D\sin t\cos t}{\sqrt{1+3\sin^2 t}},\quad y_2=-\frac{D\cos^2 t}{\sqrt{1+3\sin^2 t}}.$$

Für den Burmesterschen Punkt A ist also:

$$\tan\varphi=\frac{1}{2}\operatorname{cotang} t. \tag{22}$$

Dieser Wert von $\tan\varphi$ muß eine Wurzel der Gleichung (21) sein; ja er ist sogar eine Doppelwurzel, denn (21) läßt sich durch

$$(\tan\varphi-\frac{1}{2}\operatorname{cotang} t)^2$$

dividieren. Führen wir die Division aus, so läßt sich nach vorgenommener Kürzung die restierende Gleichung schreiben:

$$4\sin^4 t\cdot\tan^2\varphi-2\sin t\cos^3 t\cdot\tan\varphi+(1+\sin^2 t)^2=0. \tag{23}$$

Resultat: Von den vier Burmesterschen Punkten fallen zwei in den Punkt A, die beiden anderen bestimmen sich aus (23).

Die sechspunktige Berührung des Krümmungskreises mit der Bahnkurve.

Wir fragen uns: Gibt es Systemphasen, in denen einer der beiden nicht in den Punkt A fallenden Burmesterschen Punkte einen 6-punktig berührenden Krümmungskreis besitzt? Für solche Punkte müßte neben (23) noch die folgende Gleichung (vergl. § 12 der allgemeinen Theorie) erfüllt sein:

$$(24)\quad \begin{aligned}(x_2^2+y_2^2)\left\{P_2(x_2^2+y_2^2)+L_2x_2+M_2y_2+R_2\right\}+Q_{21}x_2y_2\\ +Q_{22}y_2^2+Q_{23}x_2^2+S_{21}y_2+S_{22}x_2=0.\end{aligned}$$

Die Koeffizienten derselben haben für unsre Bewegung die Werte:

$$P_2=0$$

$$L_2=\frac{1}{N}\left\{-\frac{1}{\varrho_1}(4\varrho_1\varrho_3-3\chi_2^2)(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)-3\chi_2(\alpha\beta_2-\alpha_2\beta)+\varrho_1(\alpha\beta_3-\alpha_3\beta)\right\}$$
$$=\frac{3D(-3+30\sin^2t-11\sin^4t)}{\cos^6t\sqrt{1+3\sin^2t}}$$

$$M_2=\frac{1}{N}\left\{-(5\varrho_1\chi_4+10\varrho_3\chi_2)N^2+\frac{1}{\varrho_1}(4\varrho_1\varrho_3-3\chi_2^2)(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)\right.$$
$$\left.+3\chi_2(\alpha\alpha_2+\beta\beta_2)-\varrho_1(\alpha\alpha_3+\beta\beta_3)\right\}=\frac{24D\sin t(6+13\sin^2t+17\sin^4t)}{\cos^7t\sqrt{1+3\sin^2t}}$$

$$R_2=-3\varrho_1(\alpha\beta_2-\alpha_2\beta)=\frac{18D^2\sin t(3+\sin^2t)}{\cos^5t}$$

$$Q_{21}=-10\varrho_1\varrho_3N^2-16\chi_2(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)+\frac{4}{N^2}[(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)^2-(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)^2]$$
$$-2\varrho_1(\alpha\alpha_2+\beta\beta_2)=\frac{18D^2(-1+29\sin^2t+97\sin^4t+67\sin^6t)}{\cos^6t(1+3\sin^2t)}$$

$$Q_{22}=-10\chi_2(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)+\frac{4}{N^2}(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)-2\varrho_1(\alpha\beta_2-\alpha_2\beta)$$
$$=\frac{24D^2\sin t(7+21\sin^2t+12\sin^4t)}{\cos^5t(1+3\sin^2t)}$$

$$Q_{23}=6\chi_2(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)-\frac{4}{N^2}(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)$$
$$=-\frac{36D^2\sin t(1+\sin^2t)(3+5\sin^2t)}{\cos^5t(1+3\sin^2t)}$$

$$S_{21}=-13\varrho_1(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)N=\frac{78D^3\sin t(1+\sin^2t)}{\cos^5t}\sqrt{1+3\sin^2t}$$

$$S_{22}=3\varrho_1(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)N=-\frac{9D^3(1+\sin^2t)}{\cos^4t}\sqrt{1+3\sin^2t}.$$

Führen wir diese in (24) ein, so erhalten wir unter Benutzung von Polarkoordinaten r und φ die Bedingungsgleichung:

$$
\begin{aligned}
& r^2 \sqrt{1+3\sin^2 t}\,\Big\{\cos t\,(-3+30\sin^2 t-11\sin^4 t)\cdot\cos\varphi \\
& \quad +8\sin t\,(6+13\sin^2 t+17\sin^4 t)\cdot\sin\varphi\Big\} \\
& +2rD\cos t\,\Big\{3\sin t\cos t\,(3+\sin^2 t)(1+3\sin^2 t)+3\,(-1 \\
& \quad +29\sin^2 t+97\sin^4 t+67\sin^6 t)\cdot\sin\varphi\cos\varphi \\
& \quad +4\sin t\cos t\,(7+21\sin^2 t+12\sin^4 t)\cdot\sin^2\varphi \\
& \quad -6\sin t\cos t\,(1+\sin^2 t)\,(3+5\sin^2 t)\cdot\cos^2\varphi\Big\} \\
& +D^2\cos^2 t\,(1+\sin^2 t)\sqrt{1+3\sin^2 t}^{\,3}\,(26\sin t\cdot\sin\varphi \\
& \quad +3\cos t\cdot\cos\varphi)=0.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Kombinieren wir hierzu die Gleichung der Kreispunktkurve und eliminieren r, so finden wir für $\tan\varphi$ die folgende Gleichung 5. Grades:

$$
\begin{aligned}
& 26\cdot 16\sin^7 t\,(1+\sin^2 t)\cdot\tan^5\varphi-8\sin^4 t\cos t\,(11+68\sin^2 t \\
& +37\sin^4 t)\cdot\tan^4\varphi+8\sin^3 t\,(27+54\sin^2 t+5\sin^4 t \\
& +18\sin^6 t)\cdot\tan^3\varphi-2\sin^2 t\cos t\,(81+167\sin^2 t+131\sin^4 t \\
& +85\sin^6 t)\cdot\tan^2\varphi+2\sin t\cos^2 t\,(1+\sin^2 t)\,(22+32\sin^2 t \\
& +22\sin^4 t)\cdot\tan\varphi-3\cos^3 t\,(1+\sin^2 t)^3=0.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Diese Gleichung muß sicher für den Punkt A erfüllt sein, muß also die Doppelwurzel besitzen:

$$\tan\varphi=\frac{1}{2}\operatorname{cotang} t.$$

Dividieren wir (26) durch:

$$(\tan\varphi=\frac{1}{2}\operatorname{cotang} t)^2,$$

so bleibt die kubische Gleichung:

$$
\begin{aligned}
& 104\sin^5 t\,(1+\sin^2 t)\cdot\tan^3\varphi+2\sin^2 t\cos t\,(-11-16\sin^2 t \\
& +15\sin^4 t)\cdot\tan^2\varphi+8\sin t\,(1+\sin^2 t)\,(4+5\sin^2 t+4\sin^4 t) \\
& \cdot\tan\varphi-3\cos t\,(1+\sin^2 t)^3=0.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Soll einer der beiden nicht in den Punkt A fallenden Burmesterschen Punkte einen sechspunktig berührenden Krümmungs-

kreis besitzen, so müssen die Gleichungen (23) und (27) zusammen bestehen. Eliminieren wir aus beiden Gleichungen $\tan\varphi$, so erhalten wir die Bedingungsgleichung, der der Winkel t genügen muß. Besagte Elimination führen wir am einfachsten wie folgt durch:

Wir multiplizieren Gleichung (23) mit $-26\sin t(1+\sin^2 t)\cdot\tan\varphi$ und addieren sie zu (27), dann resultiert die Beziehung:

$$(28)\qquad \begin{aligned} &2\sin^2 t(15-16\sin^2 t-11\sin^4 t)\cdot\tan^2\varphi \\ &+6\sin t\cos^2 t(1+\sin^2 t)\cdot\tan\varphi-3(1+\sin^2 t)^3=0. \end{aligned}$$

Addieren wir zu dieser die mit $3(1+\sin^2 t)$ multiplizierte Gleichung (23), so folgt für t die Bedingungsgleichung:

$$(29)\qquad \sin^4 t+2\sin^2 t-3=0.$$

Die Wurzeln derselben sind $\sin^2 t=+1$ oder -3.

Da dem Werte $\sin^2 t=-3$ keine reelle Systemlage entspricht und es für die Systemlagen $\sin t=\pm 1$ keine reellen Burmesterschen Punkte (von A abgesehen) gibt, folgt das

Resultat: Es gibt bei unsrer Bewegung keine reelle sechspunktige Berührung des Krümmungskreises mit der Bahnkurve.

Konstruktion des Poles, der Kreispunktkurve und der Burmesterschen Punkte (siehe Tafel II).

Es sei durch Angabe des Winkels t eine bestimmte Momentanlage des ähnlich veränderlichen Systems vorgelegt. Dann kennen wir die zugehörige Lage des Ursprungs A des beweglichen Koordinatensystems auf dem um 0 mit dem Radius D geschlagenen Kreise, wobei $0A$ die Bahnnormale ist. Da die Tangente des Winkels ω, den die Bahnnormalen aller Punkte mit den zugehörigen Polstrahlen momentan bilden, bei unsrer Bewegung gleich: $\tan\omega=-\frac{f'}{f}=-\tan t$ ist, also ω selbst $=180-t$, können wir den Polstrahl $A\mathfrak{A}$ des Punktes A ziehen. Da ferner nach (12) der Momentanpol die Koordinaten: $x=D\sin t\sin 2t$, $y=-D\sin t\cos 2t$ besitzt, ergibt eine leichte Überlegung, daß wir den Pol finden als Fußpunkt $\mathfrak{P}$ des von

0 auf $A\mathfrak{A}$ gefällten Lotes. Weiter können wir uns die Polbahntangente leicht verschaffen zufolge der auf Seite 138 gefundenen Bemerkung, daß der Polstrahl des Punktes A mit der Polbahntangente einen Winkel φ_A bildet, dessen $\tan \varphi_A = \frac{1}{2} \operatorname{cotang} t$ ist.

Die positive x_2- und y_2-Richtung ist durch die Formeln (17) bestimmt. Wir wenden uns nun zur Konstruktion der Kreispunktkurve. Dieselbe läßt sich sofort punktweise ausführen, wenn wir die Fokalachse und das Fokalzentrum haben. Die Fokalachse g besitzt nach (18) die Gleichung:

$$(1 + \sin^2 t) \cos t\, x_2 + 4 \sin^3 t\, y_2 = 0$$

und ist daher leicht zu konstruieren. Dann liegt das Fokalzentrum C sicher auf der zu g in bezug auf die Polbahntangente symmetrisch gelegenen Geraden g_0. Da wir einen Punkt A der Kreispunktkurve kennen, finden wir das Fokalzentrum selbst, indem wir das Mittellot von $\mathfrak{P}A$ ziehen, das die Fokalachse g in G schneidet. Die Gerade GA trifft g_0 im gesuchten Fokalzentrum C. Zur Kontrolle können wir — ganz wie bei starren Systemen[1]) — noch einen von der Konstruktion der Fokalachse g unabhängigen geometrischen Ort für das Fokalzentrum C angeben. Trifft nämlich das Mittellot von $\mathfrak{P}A$ die x_2- resp. y_2-Achse im Punkte K_x resp. K_y, so liegt C auf dem über $K_x K_y$ als Durchmesser geschlagenen Kreise. Errichten wir in C auf g_0 ein Lot, so schneidet dieses nach Seite 51 die x_2- resp. y_2-Achse in den Krümmungsmittelpunkten M_x resp. M_y der Kreispunktkurve im Pol. Der Krümmungskreis um M_x werde mit δ, sein Durchmesser mit $\mathfrak{P}D$ bezeichnet. Nach S. 53 und 54 können wir noch leicht die Asymptote, sowie die Gerade, welche die Kreispunktkurve in ihrem Wendepunkte trifft, zeichnen.

Wir wollen jetzt die zur betrachteten Systemphase gehörigen Burmesterschen Punkte konstruieren. Da wir wissen, daß 2 der vorhandenen 4 Burmesterschen Punkte in den Punkt A fallen, können wir die beiden anderen konstruieren nach einer Methode, die Müller im 37. Bande der Zeitschrift

[1]) Rodenberg, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 36, S. 269.

für Mathematik und Physik, S. 213 bei starren Systemen für das ebene Gelenkviereck anwendet. Dieselbe gründet sich auf eine in unseren allgemeinen Theorien § 11 abgeleitete Formel, die bei allen ähnlich veränderlichen Systemen, deren Kreispunktkurve eine Fokale dritter Ordnung ist, für die 4 Burmesterschen Punkte einer beliebigen Systemlage gilt. Bezeichnen wir die Winkel, welche die Polstrahlen $\mathfrak{P}B_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{P}B_{\mathrm{II}}$, .. der Burmesterschen Punkte mit der Polbahntangente einschließen, mit φ_{I}, $\varphi_{\mathrm{II}}, \ldots$, und die Winkel, welche die Polstrahlen des Ballschen Punktes B_a, sowie des Fokalzentrums C mit der Polbahntangente bilden, mit φ_B resp. φ_C, so fanden wir, daß zwischen den genannten 6 Winkeln die Relationen bestehen:

$$\tan\varphi_{\mathrm{I}} + \tan\varphi_{\mathrm{II}} + \tan\varphi_{\mathrm{III}} + \tan\varphi_{\mathrm{IV}} = \tan\varphi_C - \tan\varphi_B.$$

$$\tan\varphi_{\mathrm{I}} \cdot \tan\varphi_{\mathrm{II}} \cdot \tan\varphi_{\mathrm{III}} \cdot \tan\varphi_{\mathrm{IV}} = -\tan\varphi_B \cdot \tan\varphi_C.$$

Allgemein ist dabei:

$$\tan\varphi_B = -\frac{L d_w + Q}{M d_w}, \quad \tan\varphi_C = \frac{L}{M}.$$

Da bei unsrer Bewegung $d_w = \infty$ ist, wird:

$$\tan\varphi_B = -\frac{L}{M} = -\tan\varphi_C.$$

Da ferner 2 der Burmesterschen Punkte, etwa B_{III} und B_{IV}, mit A zusammenfallen, ist $\varphi_{\mathrm{III}} = \varphi_{\mathrm{IV}} = \varphi_A$.

Somit sind dann die Winkel φ_{I} und φ_{II} der beiden anderen Burmesterschen Punkte bestimmt durch die Gleichungen:

$$(30) \qquad \begin{aligned} \tan\varphi_{\mathrm{I}} + \tan\varphi_{\mathrm{II}} &= 2\tan\varphi_C - 2\tan\varphi_A \\ \tan\varphi_{\mathrm{I}} \cdot \tan\varphi_{\mathrm{II}} &= \frac{\tan^2\varphi_C}{\tan^2\varphi_A}. \end{aligned}$$

Auf Grund derselben verläuft die Konstruktion der Burmesterschen Punkte B_{I} und B_{II} wie folgt:

Die Polstrahlen $\mathfrak{P}A$ resp. $\mathfrak{P}C$ der Punkte A und C mögen den Kreis δ in den Punkten $\mathfrak{A}$ resp. $\mathfrak{C}$ treffen. Legt man dann in den Punkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ die Tangenten an den Kreis δ, so schneiden diese die Polbahnnormale im Punkte N' resp. N, die Polbahntangente im Punkte T' resp. T. Wir ziehen nun DR parallel zu $N'T'$ bis NT, bestimmen die Schnittpunkte V und

W von NT mit $N'T'$ resp. mit der Parallelen zu $N'T'$ durch $\mathfrak{P}$ und legen durch W und R zu $\mathfrak{P}V$ zwei Parallelen; die erste trifft die Polbahnnormale in N'', die zweite die Polbahntangente in T''. Die Gerade $N''T''$ schneidet den Kreis δ in den Punkten $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{B}_{\mathrm{II}}$, und $\mathfrak{P}\mathfrak{B}_{\mathrm{I}}$ resp. $\mathfrak{P}\mathfrak{B}_{\mathrm{II}}$ sind dann die Polstrahlen der beiden gesuchten Burmesterschen Punkte B_{I} und B_{II}. Den Burmesterschen Punkt selbst, etwa B_{II}, finden wir auf seinem zugehörigen Polstrahl durch folgende Konstruktion: Wir bestimmen U_{II} als Fußpunkt des Lotes aus $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{B}_{\mathrm{II}}\mathfrak{C}$; dann schneidet die Gerade $U_{\mathrm{II}}C$ den Strahl $\mathfrak{P}\mathfrak{B}_{\mathrm{II}}$ im gesuchten Burmesterschen Punkte B_{II}.

Alle die angegebenen Konstruktionen, besonders die der Burmesterschen Punkte B_{I} und B_{II}, sind auf Tafel II für eine bestimmte Systemlage durchgeführt. Auf Tafel III sind die zugehörigen Bahnen s_{I} und s_{II} (mit den Krümmungskreisen in den Burmesterschen Punkten) gezeichnet.

Herrn Geh. Hofrat Prof. Dr. M. Krause drängt es mich, auch an dieser Stelle für die Anregung zur vorliegenden Arbeit sowie das bei der Abfassung derselben mir bewiesene rege Interesse und gütig erteilten Rat meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Herrn K. Russ. Staatsrat Prof. Dr. Staude bin ich für die gütige Übernahme des Referates zu Danke verpflichtet.

Tafel I.

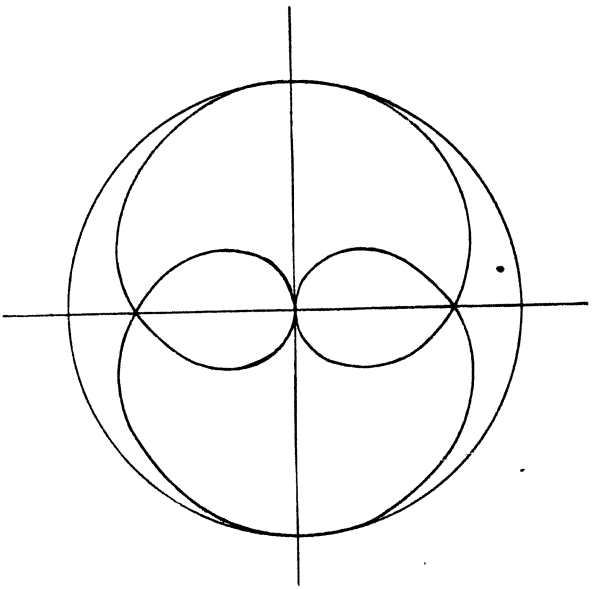


Fig. 1.

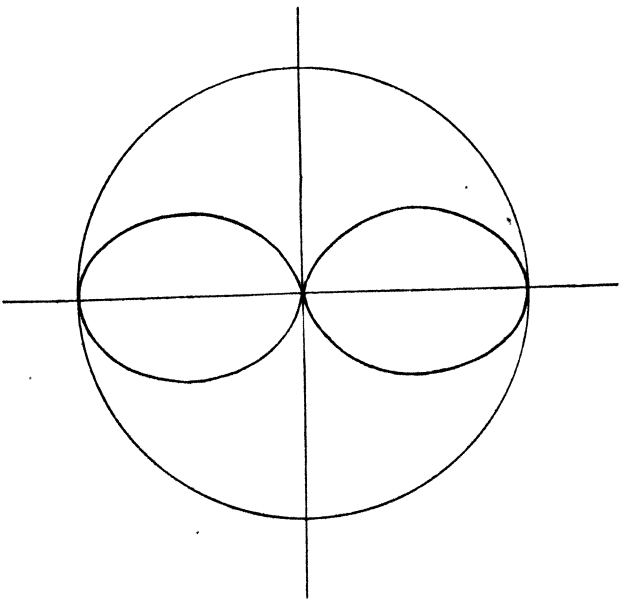
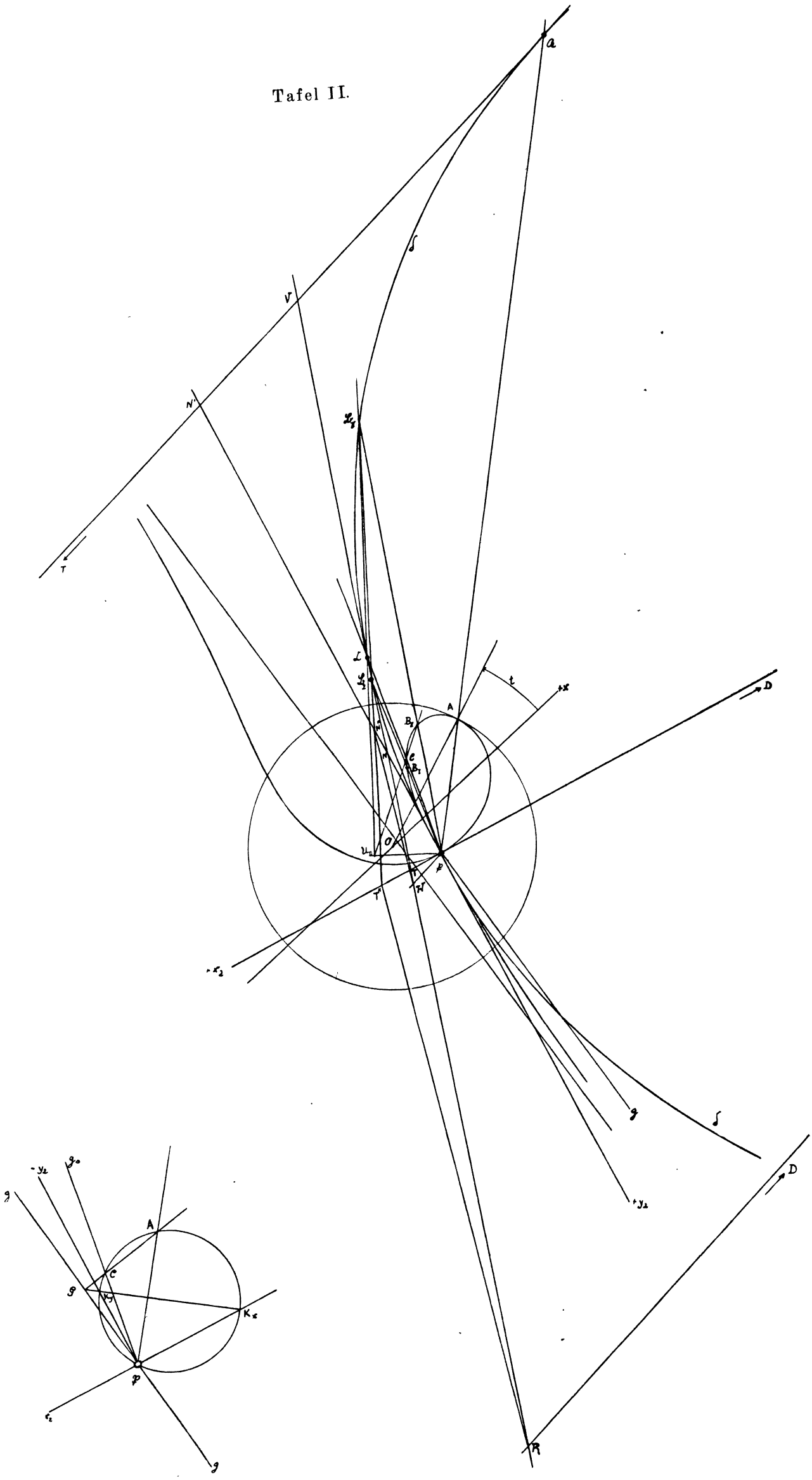
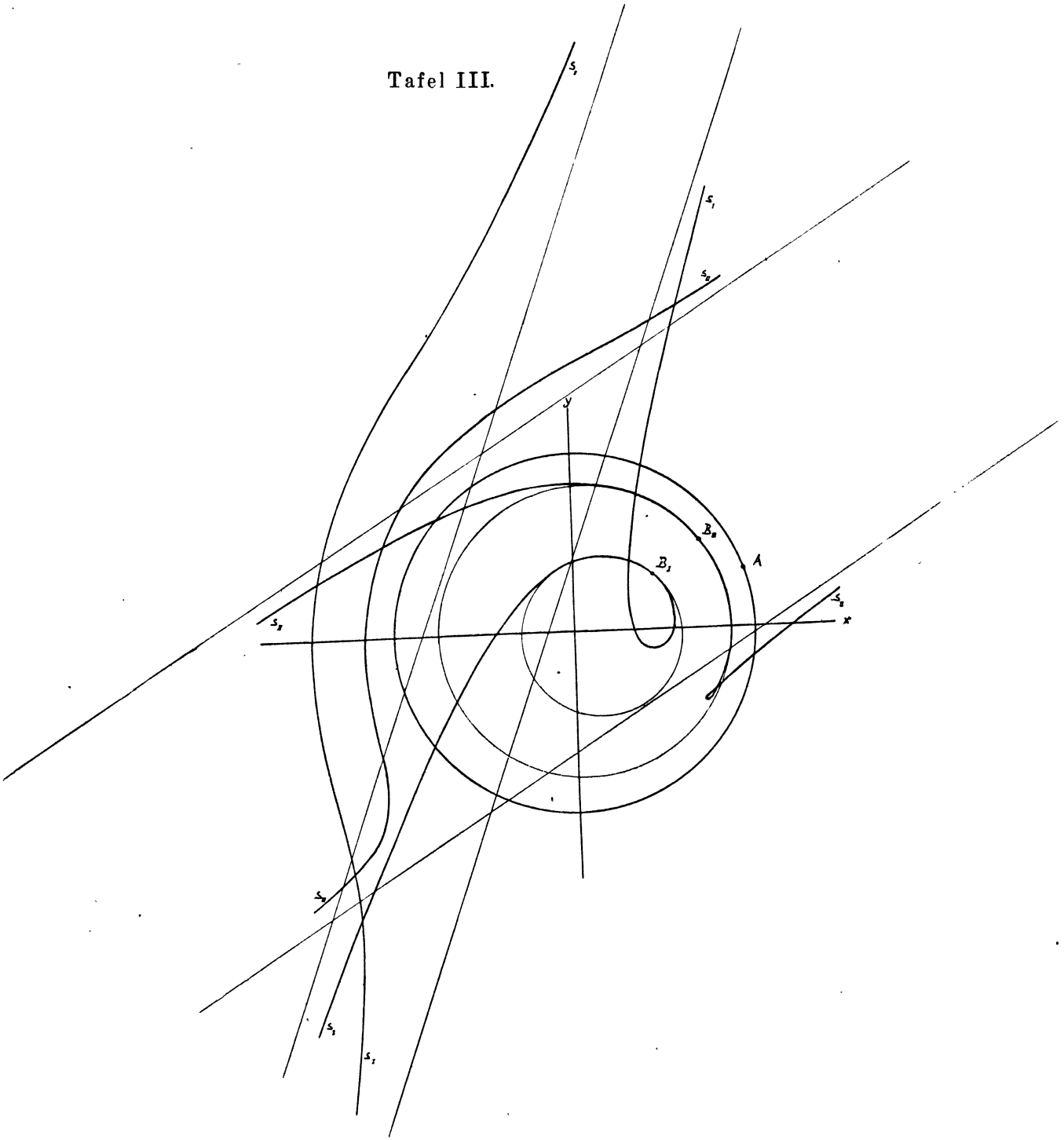


Fig. 2.

Tafel II.



Tafel III.



Lebenslauf.

Ich, Theodor Friedrich Edwin Hartmann, wurde geboren am 13. Dezember 1887 zu Dresden als Sohn des Optikers Edwin Hartmann und seiner Ehefrau Flora geb. von Glasser. Nach dreijährigem Besuch der I. Bürgerschule in Dresden absolvierte ich daselbst von Ostern 1897 ab das Wettiner Gymnasium, welches ich Ostern 1906 mit dem Reifezeugnis verließ. Ich wandte mich nun dem Studium der Mathematik und Physik an der Königl. Technischen Hochschule Dresden zu und arbeitete hier vor allem im Mathematischen Seminare des Herrn Geh. Hofrats Prof. Dr. M. Krause. Michaelis 1911 siedelte ich an die Universität Rostock über und bestand daselbst am 2. März 1912 das Examen rigorosum.

Ich besuchte die Vorlesungen und Übungen der Herren Professoren: Disteli, Elsenhans, Grübler, Hallwachs, Heger, Helm, Hempel, Kalkowsky, Krause, Ludwig, Naetsch, Pattenhausen, Schultze, Stern, Toepler, Walzel in Dresden, Heydweiller, Staude, Weber in Rostock.

Ihnen allen, besonders aber den Herren Geh. Hofrat Prof. Dr. Krause und Geh. Hofrat Prof. Dr. Helm spreche ich für meine Förderung meinen herzlichsten Dank aus.