Werk

Titel: Das Näherungsverfahren Xn=[Phi](Xn-1) und seine Anwendung auf Theorie und Praxis
Autor: Vermeil, Hermann
Verlag: Noske
Ort: Borna-Leipzig
Jahr: 1914
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN316357316
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN316357316
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=316357316

Das Näherungsverfahren $x_n = \varphi(x_{n-1})$ und seine Anwendung auf Theorie und Praxis algebraischer und transzendenter Gleichungen.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

der hohen philosophischen Fakultät III. Sektion der Universität Leipzig

vorgelegt von

Hermann Vermeil

aus Dresden.

Borna-Leipzig

Buchdruckerei Robert Noske

1914.

Angenommen von der III. Sektion auf Grund der Gutachten der Herren Hölder und Herglotz.

Leipzig, den 19. Februar 1914.

Der Procancellar
Kirchner.

Meiner lieben Mutter!

Inhaltsübersicht.

K. Weierstraß hat am 12. Dezember 1859 vor der Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin einen neuen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra gelesen. Dieser wurde aber in der Öffentlichkeit erst durch die Herausgabe seiner Werke bekannt. In diesen findet man ihn in dem 1894 erschienenen 1. Bande auf S. 247—256. (Diese Abhandlung soll in der Folge immer kurz mit „Weierstraß" ohne weiteren Zusatz zitiert werden.) Jener Beweis gründet sich auf ein gewisses Näherungsverfahren zur Auflösung von Gleichungen. Dieses Näherungsverfahren ist verschiedener Erweiterungen und Anwendungen fähig, die den Gegenstand der folgenden Arbeit bilden sollen. Zum Schluß soll dann noch der Beweis von Weierstraß, der nicht ganz einwandfrei ist, vervollständigt werden. Für die Anregung zu dieser Arbeit und für manchen Rat bei deren Abfassung spreche ich Herrn Geheimrat O. Hölder meinen besten Dank aus.

§ 1.

Das Näherungsverfahren.

Wir wollen zuerst das von Weierstraß benutzte Näherungsverfahren kennen lernen, aber in einer etwas erweiterten Form: Wir beschränken uns nämlich nicht auf algebraische Gleichungen, sondern gehen gleich zu transzendenten über. Vorgelegt sei also eine transzendente Gleichung in x. Wir denken uns nun die in dieser Gleichung enthaltenen transzendenten Funktionen sämtlich in Reihen, welche nach steigenden Potenzen von x fortschreiten, entwickelt, das gemeinsame Konvergenzgebiet dieser Reihen (einen Kreis um den Nullpunkt der komplexen x-Ebene mit dem Radius r*) bestimmt und innerhalb desselben die Glieder der Potenzreihen so umgeordnet und zusammengefaßt und das Ganze durch den Koeffizienten von x, den wir verschieden von Null voraussetzen, dividiert, daß die vorgelegte Gleichung

$$f(x) \equiv x - a_0 - a_2 x^2 - a_3 x^3 - \cdots \text{ad inf.} = 0$$

lautet. In dieser Gleichung werden im allgemeinen Falle a_0, a_2, a_3, ... komplexe Zahlen sein. Wir schreiben die vorgelegte Gleichung $f(x) = 0$ nun in folgender Form

$$f(x) \equiv x - \varphi(x) = 0,$$

wo also $\varphi(x)$ für den Ausdruck

$$\varphi(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \tag{1}$$

gesetzt ist und eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius r^* darstellt. Aus

$$f(x) \equiv x - \varphi(x)$$

folgt durch Differentiation nach x

$$f'(x) \equiv 1 - \varphi'(x),$$

wo natürlich

$$\varphi'(x) = 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \cdots \tag{1'}$$

zu setzen ist und gleichfalls eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius r^* bedeutet.

Neben $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ definieren wir zwei neue Hilfsfunktionen $\varphi_0(x)$ und $\varphi_0'(x)$, die dadurch aus $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ entstehen, daß wir die Koeffizienten a_k dieser durch ihren absoluten Betrag $|a_k| = \alpha_k$ ersetzen. Es ist also

$$\varphi_0(x) = \alpha_0 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \cdots \tag{1a}$$

und

$$\varphi_0'(x) = 2 \alpha_2 x + 3 \alpha_3 x^2 + \cdots, \tag{1'a}$$

wo

$$\alpha_k = |a_k| \qquad (k = 0, 2, 3, \ldots)$$

gesetzt ist; $\varphi_0(x)$ und $\varphi_0'(x)$ haben beide gleichfalls den Konvergenzradius r^*.

Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir zur Besprechung des von W e i e r s t r a ß angewandten Näherungsverfahrens oder Iterationsverfahrens (so wollen wir dies spezielle Näherungsverfahren nach dem Vorgange von Runge[1]) auch bezeichnen) über. Vorgelegt sei also die Gleichung

$$f(x) \equiv x - \varphi(x) = 0$$

oder

$$x = \varphi(x).$$

Um nun eine Wurzel dieser Gleichung approximativ zu berechnen, bilden wir folgende unendliche Kette von Zahlen, von denen jede durch dasselbe Verfahren aus der vorhergehenden hervorgeht (daher der Name Iterationsverfahren):

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= \varphi(x_0) = a_0 \\ x_2 &= \varphi(x_1) \\ x_3 &= \varphi(x_2) \\ &\vdots \\ x_n &= \varphi(x_{n-1}) \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Damit nun diese Kette nicht irgendwo einmal abbricht, sondern jedes Glied sich ermitteln läßt, müssen wir natürlich die folgende notwendige **Forderung (A)** aufstellen:

> Jeder der sukzessive berechneten Werte $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$ muß dem Konvergenzbereich der unendlichen Reihe $\varphi(x)$ angehören; er muß also seinem absoluten Betrage nach $< r^*$ sein, damit $\varphi(x)$ für ihn absolut konvergiert. Speziell muß $\alpha_0 < r^*$ sein.

Angenommen, die Forderung A sei erfüllt; dann soll gezeigt werden, daß unter gewissen (noch zu ermittelnden) Bedingungen, wenn in der Kette (2) der Index n über alle Grenzen wächst, die Größe x_n sich einem bestimmten Grenzwert nähert. Dieser hat dann die Eigenschaft, daß er für x eingesetzt f(x) zu Null macht.

Es seien x und x′ zwei beliebige Größen des Konvergenzbereiches von $\varphi(x)$. Dann gilt

---

[1]) Runge, Praxis der Gleichungen, Sammlung Schubert, Bd. 14 p. 81 ff.

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x')-\varphi(x)&=a_2(x'^2-x^2)+a_3(x'^3-x^3)+\cdots\\&=(x'-x)\{a_2(x'+x)+a_3(x'^2+x'x+x^2)+\cdots\}\\&=(x'-x)\cdot\varphi(x',x)\end{aligned}\right\}. \quad (3)$$

Ganz analog erhält man

$$\left.\begin{aligned}\varphi_0(x')-\varphi_0(x)&=\alpha_2(x'^2-x^2)+\alpha_3(x'^3-x^3)+\cdots\\&=(x'-x)\{\alpha_2(x'+x)+\alpha_3(x'^2+x'x+x^2)+\cdots\}\\&=(x'-x)\cdot\varphi_0(x',x)\end{aligned}\right\} \quad (3a)$$

Die durch $\varphi(x',x)$ bezw. $\varphi_0(x',x)$ bezeichneten Funktionen sind Potenzreihen von x' und x, die für jedes $|x'|<r^*$ und für jedes $|x|<r^*$ absolut konvergieren, weil $\varphi(x')$ und $\varphi(x)$ bezw. $\varphi_0(x')$ und $\varphi_0(x)$ dies gleichfalls taten. (Dies gilt auch im Falle $x'=x$, denn dann wird

$$\varphi(x',x')=\varphi(x,x)=\varphi'(x) \text{ bezw. } \varphi_0(x',x')=\varphi(x,x)=\varphi_0'(x)).$$

Es gelten außerdem die Relationen:

$$\varphi(x',x)=\varphi(x,x') \quad (3')$$

$$\varphi_0(x',x)=\varphi_0(x,x'). \quad (3'a)$$

Da wir angenommen hatten, daß für $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n \ldots$ die Forderung A erfüllt ist, folgt aus (2) unter Benutzung von (3):

$$\left.\begin{array}{llllll}x_1-x_0 & = & & = & a_0 & \\ x_2-x_1 & =\varphi(x_1) & -\varphi(x_0) & = & (x_1-x_0)\,\varphi(x_1,x_0) & \\ x_3-x_2 & =\varphi(x_2) & -\varphi(x_1) & = & (x_2-x_1)\,\varphi(x_2,x_1) & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n-x_{n-1} & =\varphi(x_{n-1}) & -\varphi(x_{n-2}) & = & (x_{n-1}-x_{n-2})\,\varphi(x_{n-1},x_{n-2}) & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\end{array}\right\}. \quad (4)$$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\varphi(x_k, x_{k-1})=\psi_k \qquad (k=2,3,\ldots n,\ldots)$$

und speziell

$$\begin{aligned}x_2-x_1=\varphi(x_1)-\varphi(x_0)&=(x_1-x_0)\,\varphi(x_1,x_0)\\&=a_2 a_0^2+a_3 a_0^3+a_4 a_0^4+\cdots\\&=a_0(a_2 a_0+a_3 a_0^2+a_4 a_0^3+\cdots)=a_0\psi_1,\end{aligned}$$

so ergibt sich aus der Gleichungskette (4) die Kette

$$\left.\begin{array}{llll}
x_1 - x_0 & = & x_1 & = a_0 \\
x_2 - x_1 & = & (x_1 - x_0)\,\psi_1 & = a_0\,\psi_1 \\
x_3 - x_2 & = & (x_2 - x_1)\,\psi_2 & = a_0\,\psi_1\,\psi_2 \\
x_4 - x_3 & = & (x_3 - x_2)\,\psi_3 & = a_0\,\psi_1\,\psi_2\,\psi_3 \\
\vdots & & \vdots \qquad \vdots & \\
x_{m+1} - x_m & = & (x_m - x_{m-1})\,\psi_m & = a_0\,\psi_1\,\psi_2 \ldots \psi_m \\
\vdots & & \vdots \qquad \vdots & \\
x_n - x_{n-1} & = & (x_{n-1} - x_{n-2})\,\psi_{n-1} & = a_0\,\psi_1\,\psi_2 \ldots \psi_{n-1} \\
\cdots & & \cdots & \cdots
\end{array}\right\} . \quad (5)$$

Addition dieser Gleichungen liefert

$$x_n = a_0 \{1 + \psi_1 + \psi_1 \psi_2 + \psi_1 \psi_2 \psi_3 + \cdots + \psi_1 \psi_2 \cdots \psi_{n-1}\} \qquad (6)$$

und für $m < n$

$$\begin{aligned} x_n - x_m &= a_0 \{\psi_1 \psi_2 \cdots \psi_m + \psi_1 \psi_2 \cdots \psi_{m+1} + \cdots + \psi_1 \psi_2 \cdots \psi_{n-1}\} \\ &= a_0 \psi_1 \psi_2 \cdots \psi_m \{1 + \psi_{m+1} + \psi_{m+1} \psi_{m+2} + \cdots + \psi_{m+1} \cdots \psi_{n-1}\}. \qquad (6^*) \end{aligned}$$

Aus den Formeln (1) und (1a) bezw. (1′) und (1′a) folgt die Gültigkeit der Relationen

$$|\varphi(x)| \leqq \varphi_0(|x|) \qquad (7)$$

$$|\varphi'(x)| \leqq \varphi_0'(|x|). \qquad (7')$$

Ferner gilt, wenn ξ' und ξ positive Zahlen bedeuten,

$$\varphi_0(\xi) \leqq \varphi_0(\xi') \quad \text{für } \xi \leqq \xi' \qquad (8)$$

$$\varphi_0'(\xi) \leqq \varphi_0'(\xi') \quad \text{für } \xi \leqq \xi'. \qquad (8')$$

Unter Berücksichtigung von (3) und (3a) finden wir

$$|\varphi(x', x)| \leqq \varphi_0(|x'|, |x|). \qquad (9)$$

Bedeuten ξ' und ξ wieder positive Zahlen und ist $\xi \leqq \xi'$, so gilt

$$\begin{aligned} \varphi_0(\xi', \xi) &= \alpha_2(\xi' + \xi) + \alpha_3(\xi'^2 + \xi'\xi + \xi^2) + \cdots \\ &\leqq \alpha_2(\xi' + \xi') + \alpha_3(\xi'^2 + \xi'\xi' + \xi'^2) + \cdots \\ &= 2\alpha_2 \xi' + 3\alpha_3 \xi'^2 + \cdots = \varphi_0'(\xi'). \end{aligned}$$

Also

$$\varphi_0(\xi', \xi) = \varphi_0(\xi, \xi') \leqq \varphi_0'(\xi') \quad \text{für } \xi \leqq \xi'. \qquad (10)$$

Kombination mit (9) gibt

$$|\varphi(x', x)| = |\varphi(x, x')| \leqq \varphi_0'(|x'|) \text{ für } |x| \leqq |x'|. \tag{10*}$$

Endlich erhalten wir

$$\left.\begin{array}{l} |\psi_k| \leqq \varphi_0'(|x_k|), \text{ wenn } |x_k| \geqq |x_{k-1}| \text{ ist} \\ |\psi_k| \leqq \varphi_0'(|x_{k-1}|), \text{ wenn } |x_{k-1}| \geqq |x_k| \text{ ist} \end{array}\right\}. \tag{10**}$$

Wir zeigen nun, daß bei Erfülltsein der Forderung A und der folgenden Forderung unsere Kette (2) von Operationen konvergiert, d. h. daß x_n bei wachsendem Index n einem Grenzwert zustrebt. — Diese neue **Forderung (B)** lautet:

Es sei ξ eine beliebige positive Zahl, welche größer (nicht gleich) Eins ist. Dann soll $\alpha_0 = |a_0|$ der Ungleichung

$$\varphi_0'(\alpha_0 \xi) \equiv 2\alpha_2 (\alpha_0 \xi) + 3\alpha_3 (\alpha_0 \xi)^2 + 4\alpha_4 (\alpha_0 \xi)^3 + \cdots \leqq 1 - \frac{1}{\xi}$$

genügen. (Bei Weierstraß stehen zwei Ungleichungen an Stelle dieser einen.)

Solche Zahlen α_0 gibt es nach bekannten Stetigkeitssätzen für Potenzreihen immer, wenn nur $\varphi(x)$ und folglich auch $\varphi'(x)$ einen von Null verschiedenen Konvergenzradius r^* besitzt. Ist ferner α_0^* eine Zahl, für die die Forderung B erfüllt ist, so ist sie auch für jedes $|a_0| \leqq \alpha_0^*$ erfüllt.

Wir setzen zur Abkürzung

$$1 - \frac{1}{\xi} = \eta \quad \text{oder} \quad \xi = \frac{1}{1-\eta}.$$

Es soll nun zunächst der **Hilfssatz** bewiesen werden:

Ist die Forderung B erfüllt, dann sind

$$|x_1|, |x_2|, |x_3|, \ldots \text{ sämtlich} < \alpha_0 \xi \tag{11}$$

und

$$|\psi_1|, |\psi_2|, |\psi_3|, \ldots \text{ sämtlich} < \eta. \tag{12}$$

Beweis: Bei Weierstraß ist der Beweis dieser beiden Behauptungen, um so zu sagen, „chiastisch" geführt. Wir zerlegen ihn in zwei einfache Beweise. — Man sieht sofort, daß unsere Behauptungen sowohl für $|x_1| = \alpha_0$ als auch für $|\psi_1| < \varphi_0'(\alpha_0)$ gelten. — Wir beweisen nun die Richtigkeit der ersten Behauptung durch Schluß von m auf m + 1. Wir denken dazu nur an die aus (2) folgende Beziehung

$$x_{m+1} = a_0 + a_2 x_m^2 + a_3 x_m^3 + a_4 x_m^4 + \cdots$$

Geht man zu den absoluten Beträgen über, so hat man

$$|x_{m+1}| \leqq \alpha_0 + |a_2 x_m^2 + a_3 x_m^3 + a_4 x_m^4 + \cdots| .$$

Ist nun die Behauptung (11) für x_m erfüllt, so schließen wir

$$\begin{aligned} & |a_2 x_m^2 + a_3 x_m^3 + a_4 x_m^4 + \cdots| \\ & \quad \leqq \alpha_2 |x_m|^2 + \alpha_3 |x_m|^3 + \alpha_4 |x_m|^4 + \cdots \\ & \quad < \alpha_2 (\alpha_0 \xi)^2 + \alpha_3 (\alpha_0 \xi)^3 + \alpha_4 (\alpha_0 \xi)^4 + \cdots \\ & \quad < \alpha_0 \xi \{ 2 \alpha_2 (\alpha_0 \xi) + 3 \alpha_3 (\alpha_0 \xi)^2 + 4 \alpha_4 (\alpha_0 \xi)^3 + \cdots \} \\ & \quad = \alpha_0 \xi \cdot \varphi_0' (\alpha_0 \xi) \leqq \alpha_0 \xi \cdot \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) = \alpha_0 \xi - \alpha_0 \end{aligned}$$

und indem wir zusammenfassen

$$|x_{m+1}| < \alpha_0 \xi .$$

Damit ist die Richtigkeit der Behauptung (11) bewiesen. Es folgt dann sofort die Richtigkeit der Behauptung (12). In der Tat: weil $|x_1|$, $|x_2|$, $|x_3|$, $|x_4|$, ... sämtlich $< \alpha_0 \xi$ sind, erhält man mit den Formeln (10**) und (8′) sofort

$$|\psi_k| \leqq \left\{ \begin{array}{l} \text{entweder} \\ \quad \varphi_0' \left(|x_k| \right) \\ \text{oder} \\ \quad \varphi_0' \left(|x_{k-1}| \right) \end{array} \right\} < \varphi_0' (\alpha_0 \xi) \leqq 1 - \frac{1}{\xi} = \eta \qquad (k = 2, 3, 4, \ldots)$$

Also ist auch Formel (12) gültig.

An diesen Beweis unseres Hilfssatzes knüpfen wir folgende zwei wichtige **Folgerungen:**

1. Ist $|a_0| = \alpha_0$ so gewählt, daß die Forderung B erfüllt ist, so genügen die einzelnen Glieder der Kette (2) von selbst auch der Forderung A. Denn wegen (11) sind ja die Beträge der einzelnen Glieder der Kette (2) sämtlich $< \alpha_0 \xi$, und für alle Argumente $|x| \leqq \alpha_0 \xi$ hat ja $\varphi_0' (|x|)$ eine endliche Summe, d. h. konvergiert absolut. Dies gilt also erst recht für $\varphi(x)$, sobald $|x| \leqq \alpha_0 \xi$ ist.

2. Wir brauchen die Kette (2) nicht mehr bloß als eine Kette von Zahlen aufzufassen, sondern dürfen sie als eine Kette von Funktionen der $a_0, a_2, a_3, a_4, \ldots$ (und zwar transzendenter Funktionen mit dem Charakter von ganzen, also als Potenzreihenfunktionen) betrachten. Wir dürfen uns also denken: x_m sei eine Potenzreihe in den $a_0, a_2, a_3, a_4, \ldots$ etwa nach Potenzen von a_0 geordnet; um daraus x_{m+1} zu ermitteln, setzen wir diese Potenzreihe in $\varphi(x)$ für das Argument x ein; in dem Resultat dieser Einsetzung dürfen wir dann noch die einzelnen Glieder nach einem beliebigen Prinzip umordnen z. B. alle Glieder mit gleichen Potenzen von a_0 in ein neues zusammenfassen. Denn es sind ja alle Voraussetzungen des Weierstraßschen Satzes[1]) über das Einsetzen einer Potenzreihe in eine andere erfüllt. Einerseits ist nämlich

$$\varphi(y) = a_0 + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu y^\nu$$

für alle $|y| \leqq \alpha_0 \xi$ absolut konvergent [s. Beweis des Hilfssatzes], und andrerseits ist

$$\varphi\big(\varphi(x)\big) = a_0 + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu \left[\varphi(x)\right]^\nu$$

für alle $|x| \leqq \alpha_0 \xi$ absolut konvergent, weil für solche x $\varphi_0\big(|x|\big) < \alpha_0 \xi$ ist [s. Beweis des Hilfssatzes] und demnach $\big|\varphi\big(\varphi(x)\big)\big|$ kleiner als die Majorante $\varphi_0(\alpha_0 \xi)$ wird. Also ist nach dem Weierstraßschen Satz eine Umordnung von $\varphi\big(\varphi(x)\big)$ nach Potenzen von x erlaubt und demnach auch $\varphi\big(\varphi(x)\big)$ eine Potenzreihenfunktion von x, die für $|x| \leqq \alpha_0 \xi$ absolut konvergiert. — Speziell ist also wegen der Ungleichungen (11) $x_{m+1} = \varphi(x_m) = \varphi\big(\varphi(x_{m-1})\big)$ eine konvergente Potenzreihe von x_{m-1} und, wenn man diesen Schluß wiederholt, schließlich von $x_1 = a_0$.

Nach diesen Auseinandersetzungen können wir nun sofort zeigen, daß das Weierstraßsche Iterationsverfahren, wenn nur Forderung B erfüllt ist, immer zum Ziele führt, daß sich also immer eine Wurzel von $f(x) = 0$ berechnen läßt, falls nur das Absolutglied a_0 in $f(x)$ geeignet limitiert wird.

---

[1]) Weierstraß, Werke Bd. 2 S. 205 ff.

Es war nach (6*) für $n > m$

$$x_n - x_m = a_0 \psi_1 \psi_2 \cdots \psi_m \{1 + \psi_{m+1} + \psi_{m+1}\psi_{m+2} + \cdots + \psi_{m+1} \cdots \psi_{n-1}\}$$

Hieraus folgt nach den Sätzen über Absolutwerte

$$|x_n - x_m| \leqq a_0 |\psi_1| \cdot |\psi_2| \cdots |\psi_m| \{1 + |\psi_{m+1}| + |\psi_{m+1}| \cdot |\psi_{m+2}| + \cdots + |\psi_{m+1}| \cdots |\psi_{n-1}|\}$$

und mit (12)

$$< a_0 \eta^m \{1 + \eta + \eta^2 + \cdots + \eta^{n-1-m}\}$$

$$< a_0 \eta^m \{1 + \eta + \eta^2 + \cdots \text{ ad inf}\} = a_0 \eta^m \cdot \frac{1}{1-\eta}.$$

Also

$$|x_n - x_m| < \frac{a_0 \eta^m}{1-\eta} \text{ für jeden Wert n, der} > m \text{ ist.}$$

Nimmt man nun m beliebig groß an und läßt immer $n > m$ sein, so nähert sich $|x_n - x_m|$, weil η ein echter Bruch ist, dem Grenzwert Null, d. h. irgend zwei Näherungswerte der Kette (2), deren Indices n und m beide oberhalb einer genügend großen Zahl liegen, unterscheiden sich nur beliebig wenig; d. h. aber die Näherungswerte streben einem Grenzwert $\bar{x}$ zu. Nun war

$$f(x_m) \equiv x_m - \varphi(x_m) = x_m - x_{m+1}.$$

Somit erhält man beim Grenzübergang $m = \infty$

$$f(\bar{x}) = \bar{x} - \bar{x} = 0, \text{ w. z. b. w.}$$

Ordnet man das Resultat nach steigenden Potenzen von a_0, was, wie wir oben gesehen haben, erlaubt ist, so enthält es kein von a_0 freies Glied, und eine bestimmte Potenz von a_0 besitzt als Faktor nur ein Polynom von e n d l i c h e m Grade und von e n d l i c h e r Gliederzahl, gebildet aus den $a_2, a_3, a_4, \ldots$ mit e n d l i c h e m Index, das nach einer e n d l i c h e n Anzahl von Näherungsschritten sich nicht mehr ändern kann. Wir beweisen dies mit Schluß von n auf $n+1$. Angenommen, der Ausdruck für x_n besitze die geforderte Eigenschaft, dann bilden wir x_{n+1}, indem wir x_n in $\varphi(x)$ für x einsetzen und nach Potenzen von a_0 ordnen. Verfolgt man diesen Prozeß genauer, so folgt, daß auch x_{n+1} die geforderte Eigenschaft besitzt. $x_2 = \varphi(a_0)$ besitzt nun augenscheinlich die zu beweisende Eigenschaft. Damit ist unser Beweis erbracht, und wir können daher schreiben

$$\bar{x} = a_0 + A_2 a_0^2 + A_3 a_0^3 + \cdots$$

Hieraus folgt noch, daß für $a_0 = 0$ auch $\bar{x} = 0$ wird, daß also das Weierstraßsche Verfahren diejenige Wurzel $\bar{x}$ von $f(x) = 0$ liefert, welche mit $a_0 = 0$ stetig in Null übergeht.

Endlich sei noch darauf hingewiesen, daß das Weierstraßsche Näherungsverfahren vollständig eindeutig ist, d. h. daß es, wenn überhaupt, nur eine einzige Wurzel liefert.

§ 2.

Besprechung der Forderung B von § 1.

Wir hatten gesehen, daß bei Erfülltsein der Forderung B das Weierstraßsche Näherungsverfahren immer eine Wurzel der vorgelegten Gleichung liefert, daß also die Ausführbarkeit des Approximationsverfahrens gewährleistet ist, sobald man nur dieser einzigen Forderung genügt. — Forderung B verlangte: Nach Wahl eines positiven ξ, welches >1 ist, soll das Absolutglied α_0 der vorgelegten Gleichung so beschaffen sein, daß

$$\varphi_0'(\alpha_0 \xi) \leqq 1 - \frac{1}{\xi}$$

ist. Dieser Forderung geben wir nun für die praktische Anwendung eine bequemere Gestalt, indem wir bedenken, daß ja nicht ξ, sondern α_0 das primär Gegebene ist. Wir stellen jetzt also die **Forderung B*** auf: Es soll zu der vorgelegten Gleichung $x - \varphi(x) = 0$ mit dem Absolutglied α_0 ein positives ξ, welches >1 ist, auffindbar sein, so daß der Bedingung

$$\varphi_0'(\alpha_0 \xi) \leqq 1 - \frac{1}{\xi}$$

genügt wird. — Beide Forderungen sind ihrem Inhalte nach gleich; sie unterscheiden sich nur durch die Formulierung. Für die folgenden Untersuchungen wollen wir jedoch die erste Gestalt dieser Forderung beibehalten.

Diese verlangte, um es noch einmal zu sagen: Nach Wahl eines beliebigen positiven ξ, welches größer als die Einheit ist, soll die Relation

$$\varphi_0'(a_0 \xi) \leqq 1 - \frac{1}{\xi} \tag{1}$$

oder ausführlicher geschrieben

$$2 a_2 (a_0 \xi) + 3 a_3 (a_0 \xi)^2 + 4 a_4 (a_0 \xi)^3 + \cdots \leqq 1 - \frac{1}{\xi} \tag{1 a}$$

erfüllt werden. Je nachdem, wie man ξ wählt, wird die größte positive Zahl a_0, welche der Bedingung (1 a) für einen gegebenen Wert von ξ noch genügt (für die also in (1 a) das Gleichheitszeichen zu setzen ist), variieren. Wählt man ξ nur ganz wenig größer als Eins, so wird diese größte Zahl a_0 nur sehr wenig größer als Null sein können, weil ja die rechte Seite von (1 a) nahezu verschwindet und dies die linke auch tun muß. Nimmt man ferner ξ sehr groß an, so wird wieder diese größte Zahl a_0 nur sehr wenig größer als Null sein können, weil ja die rechte Seite von (1 a) kleiner als die Einheit ist und dies die linke auch sein muß. Läßt man jedoch ξ nicht in unmittelbare Nähe dieser beiden extremen Werte $+1$ und $+\infty$ gelangen, sondern zwischen ihnen variieren, so wird der größte positive Wert von a_0, der die Forderung B noch erfüllt, sicher von Null verschieden und größer als die Werte von a_0 sein, welche zu ξ sehr nahe bei Eins und zu sehr großen Werten von ξ gehören. Dieser Wert wird sich mit ξ stetig ändern und für ein ganz bestimmtes ξ sein Maximum erreichen. Daß a_0 eine stetige und nach ξ differenzierbare Funktion von ξ ist, sieht man folgendermaßen: a_0 ist als implizite Funktion von ξ durch die Gleichung $F(\xi, a_0) = 0$ definiert, wo

$$F(\xi, a_0) \equiv \left(-1 + \frac{1}{\xi}\right) + (2 a_2 \xi) a_0 + (3 a_3 \xi^2) a_0{}^2 + (4 a_4 \xi^3) a_0{}^3 + \cdots$$

gesetzt ist. Wir wissen nun, daß es Stellen $\bar{\xi}, \bar{a}_0$ gibt, für die die Gleichung $F(\xi, a_0) = 0$ befriedigt ist und für die $F(\xi, a_0)$ absolut konvergiert. Man schließt dann unter Benutzung der Potenzreihensätze, daß für eine gewisse Umgebung einer solchen Stelle $\bar{\xi}, \bar{a}_0$ die beiden partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = -\frac{1}{\xi^2} + (1 \cdot 2\, a_2)\, a_0 + (2 \cdot 3\, a_3\, \xi)\, a_0{}^2 + (3 \cdot 4\, a_4\, \xi^2)\, a_0{}^3 + \cdots$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_0} = 1\,(2\, a_2\, \xi) + 2\,(3\, a_3\, \xi^2)\, a_0 + 3\,(4\, a_4\, \xi^3)\, a_0{}^2 + \cdots$$

absolut konvergent, also vorhanden und stetig sind. Da ferner sicher $\frac{\partial F}{\partial a_0}$ nicht verschwindet, folgt aus den bekannten Sätzen über implizite Funktionen, daß a_0 zunächst in der Umgebung von $\bar{\xi}, \bar{a}_0$ und dann überhaupt für $1 < \xi < \infty$ eine stetige und nach ξ differenzierbare Funktion von ξ ist. Diese muß nach der oben angestellten Betrachtung im Intervall $1 < \xi < \infty$ ein Maximum besitzen. Dieses Maximum $a_0{}^*$ (welches reell und positiv sein muß) und der zugehörige Wert ξ^* von ξ (welcher gleichfalls reell und positiv und außerdem größer als Eins sein soll) wird nach den bekannten Regeln der Lehre vom Maximum und Minimum gefunden durch Auflösung der beiden Gleichungen

$$\xi^* \left\{ 1 - \varphi_0{}' (a_0{}^* \xi^*) \right\} = 1 \tag{2 a}$$

und

$$1 - \varphi_0{}' (a_0{}^* \xi^*) - a_0{}^* \xi^* \varphi_0{}'' (a_0{}^* \xi^*) = 0. \tag{2 b}$$

(2 a) ist nur eine andere Form von (1); (2 b) folgt aus der Bedingung

$$\left(\frac{d a_0}{d \xi}\right)_{\substack{a_0 = a_0{}^* \\ \xi = \xi^*}} = -\left(\frac{\left\{1 - \varphi_0{}'(a_0 \xi)\right\} + \xi \left\{-\varphi_0{}''(a_0 \xi)\right\} a_0}{\xi \left\{-\varphi_0{}''(a_0 \xi)\right\} \xi}\right)_{\substack{a_0 = a_0{}^* \\ \xi = \xi^*}} = 0.$$

Hierbei ist, wie beinahe selbstverständlich ist, unter $\varphi_0{}''(a_0 \xi)$ der Ausdruck

$$\varphi_0{}''(a_0 \xi) = 1 \cdot 2\, a_2 + 2 \cdot 3\, a_3\, (a_0 \xi) + 3 \cdot 4\, a_4\, (a_0 \xi)^2 + \cdots$$

zu verstehen.

Den Gleichungen (2 a) und (2 b) kann man noch die Form

$$1 - \varphi_0'(\alpha_0^* \xi^*) = \frac{1}{\xi^*} \tag{3 a}$$

$$\alpha_0^* \xi^* \cdot \varphi_0''(\alpha_0^* \xi^*) = \frac{1}{\xi^*} \tag{3 b}$$

mit den Bedingungen

$$\alpha_0^* > 0 \quad \text{und} \quad 1 < \xi^* < \infty \tag{3 c}$$

erteilen. Die Auflösung dieser Gleichungen würde, wie unsere obige Betrachtung lehrt, sicher ein Maximum α_0^* für die Werte α_0, welche die Relation (1 a) befriedigen, liefern. Daß es endlich im Intervall $1 < \xi < \infty$ nur ein Maximum von α_0^* gibt, folgt daraus, daß Gleichung (2 b), weil das Produkt $\alpha_0^* \xi^*$ positiv sein soll, nur durch einen Wert $\alpha_0^* \xi^*$ befriedigt wird, und daß sich zu diesem einzigen Wert von $\alpha_0^* \xi^*$ aus Gleichung (2 a) nur ein einziger Wert ξ^* ergibt. Es werden dann alle $|a_0| \leqq \alpha_0^*$ der Forderung B genügen, in welcher man ein für allemal $\xi = \xi^*$ setzen darf. Für $|a_0| > \alpha_0^*$ ist die Forderung B jedoch nicht erfüllbar, wie man auch ξ positiv und > 1 wählen mag. — Die wirkliche Auflösung der Gleichungen (3 a) und (3 b) ist im allgemeinen Falle durch geschlossene Ausdrücke kaum möglich, und man muß sich irgend eines Näherungsverfahrens bedienen. Es ist jedoch in manchen Fällen erwünscht, direkt Zahlen α_0 angeben zu können, welche der Forderung B sicher genügen; diese brauchen jedoch nicht die größten zu sein, welche dies tun. Die Ermittlung solcher Zahlen soll uns jetzt noch beschäftigen.

Wir verfahren hierzu wie folgt: Es sei r* der Konvergenzradius der Funktion $\varphi(x)$. Ist dann r eine positive Zahl, die kleiner als r* ist, so konvergiert nach bekannten Sätzen über Potenzreihen $\varphi'(r)$ absolut. Daraus folgt: Unter den Gliedern von

$$\varphi_0'(r) \equiv 2\alpha_2 r + 3\alpha_3 r^2 + 4\alpha_4 r^3 + \cdots + \varrho\alpha_\varrho r^{\varrho-1} + \cdots$$

muß ein größtes für den endlichen Wert p von ϱ vorhanden sein, weil sonst $\varphi_0'(r)$ nicht konvergieren würde. Dieses, also $p \cdot \alpha_p r^{p-1}$, heiße kurz P. Nun ist, vorausgesetzt daß

$$\alpha_0 \xi < r \tag{4}$$

ist,

$$\varphi_0'(\alpha_0\,\xi) = 2\,a_2\,r\cdot\left(\frac{\alpha_0\,\xi}{r}\right) + 3\,a_3\,r^2\left(\frac{\alpha_0\,\xi}{r}\right)^2 + 4\,a_4\,r^3\left(\frac{\alpha_0\,\xi}{r}\right)^3 + \cdots$$

$$< P\left(\frac{\alpha_0\,\xi}{r}\right) + P\left(\frac{\alpha_0\,\xi}{r}\right)^2 + P\left(\frac{\alpha_0\,\xi}{r}\right)^3 + \cdots$$

$$= P\,\frac{\alpha_0\,\xi}{r}\left\{1 + \left(\frac{\alpha_0\,\xi}{r}\right) + \left(\frac{\alpha_0\,\xi}{r}\right)^2 + \cdots\right\} = P\,\frac{\alpha_0\,\xi}{r}\cdot\frac{1}{1-\frac{\alpha_0\,\xi}{r}}$$

$$= \frac{P\,\alpha_0\,\xi}{r-\alpha_0\,\xi}.$$

Nun sollte $\varphi_0'(\alpha_0\,\xi) \leqq 1 - \frac{1}{\xi} = \frac{\xi-1}{\xi}$ sein. Diese Bedingung ist sicher erfüllt, wenn

$$\frac{P\,\alpha_0\,\xi}{r-\alpha_0\,\xi} = \frac{\xi-1}{\xi}$$

ist. Auflösung nach α_0 ergibt

$$\alpha_0 = r\,\frac{\xi-1}{\xi^2\,(P+1)-\xi}, \tag{5}$$

also α_0 als eine Funktion des bisher noch willkürlichen ξ. Wir wollen nun ξ noch so wählen, daß α_0 ein Maximum wird. Dieses Maximum heiße α_0'; der zugehörige Wert von ξ sei ξ' und der von η sei η'. Um das Maximum von α_0 zu bestimmen, differenzieren wir (5) nach ξ und setzen den so erhaltenen Ausdruck gleich Null. Wir erhalten so

$$r\,\frac{1\cdot[(P+1)\,\xi^2-\xi]-(\xi-1)\,[2\,(P+1)\,\xi-1]}{[(P+1)\,\xi^2-\xi]^2} = 0$$

oder

$$\xi^2 - 2\,\xi + \frac{1}{P+1} = 0.$$

Lösen wir nun noch ξ auf, so finden wir

$$\xi = 1 \pm \sqrt{1-\frac{1}{P+1}} = 1 \pm \sqrt{\frac{P}{P+1}}.$$

Nun muß $\xi > 1$ sein; also ist in dem vorstehenden Ausdruck nur das obere Vorzeichen zu berücksichtigen. $\left(\text{Unter} \sqrt{\frac{P}{P+1}}\right.$ verstehen wir den positiven Wurzelwert.$\Big)$ Demnach lautet der das Maximum von a_0 liefernde Wert von ξ

$$\xi' = 1 + \sqrt{\frac{P}{P+1}}. \tag{6}$$

Hieraus findet man zunächst

$$\eta' = \frac{\xi' - 1}{\xi'} = \frac{\sqrt{\frac{P}{P+1}}}{1 + \sqrt{\frac{P}{P+1}}}$$

oder

$$\eta' = P\left(\sqrt{\frac{P+1}{P}} - 1\right). \tag{7}$$

Weiter ergibt sich, wenn man (6) in (5) einsetzt,

$$a_0' = r \frac{\sqrt{\frac{P}{P+1}}}{(P+1)\left(1 + \frac{P}{P+1} + 2\sqrt{\frac{P}{P+1}}\right) - 1 - \sqrt{\frac{P}{P+1}}}$$

oder nach kurzer Rechnung

$$a_0' = r\left\{1 - 2P\left(\sqrt{\frac{P+1}{P}} - 1\right)\right\}. \tag{8}$$

Entwickelt man diesen Ausdruck, so erhält man

a) für $P > 1$

$$a_0' = r\left\{\frac{1}{4P} - \frac{1}{8P^2} + \frac{5}{64P^3} - \frac{7}{128P^4} + \cdots\right\},$$

b) für $P < 1$

$$a_0' = r\left\{1 + 2P - 2\sqrt{P}\left(1 + \frac{P}{2} - \frac{P^2}{8} + \frac{P^3}{16} - \frac{5P^4}{128} + \cdots\right)\right\},$$

c) für $P = 1$

$$a_0' = r \cdot 0{,}17158 \ldots$$

Aus (6) folgt leicht

$$\frac{1}{\xi'} = 1 - P\left(\sqrt{\frac{P+1}{P}} - 1\right).$$

Da der Klammerausdruck $\left(\sqrt{\frac{P+1}{P}} - 1\right)$ positiv ist, liefert uns die Vergleichung der letzten Formel mit Formel (8) die Beziehung

$$\alpha_0' < r \cdot \frac{1}{\xi'} \quad \text{oder} \quad \alpha_0' \xi' < r,$$

d. h. die Annahme (4) ist durch den Maximalwert α_0' und den zugehörigen Wert ξ' erfüllt.

Daß der Ausdruck (8) wirklich der Maximalwert von (5) für ξ im Intervalle $(+1 \cdots + \infty)$ ist, sieht man sofort, wenn man in (5) $\xi = 1$ und $\xi = \infty$ einsetzt; denn dann wird $\alpha_0 = 0$.

Anmerkungen:

1. Ist der Ausdruck $\varphi_0'(r^*)$ derartig beschaffen, daß keines seiner Glieder eine feste Zahl P^* überschreitet, so darf man in der ganzen vorstehenden Betrachtung einfach r durch r^* und P durch P^* ersetzen. Dann bleiben alle Aussagen richtig.

2. Ist $\varphi(x)$ eine beständig konvergente Potenzreihe oder ein Polynom, so setze man in der vorstehenden Herleitung einfach $r = 1$ und folglich $P = p\,a_\rho$. Es ändern sich auch hier die gemachten Aussagen nicht. In diesem Falle ist auch jede andere Wahl von r und demnach auch eines zugehörigen P zulässig.

3. Im Falle, daß $\varphi(x)$ ein Polynom ϱten Grades ist, kann man die Forderung B auch durch die jetzt zu ermittelnde hinreichende Forderung ersetzen. Es ist in unserm Falle

$$\varphi_0'(\alpha_0 \xi) = 2\,a_2\,(\alpha_0 \xi) + 3\,a_3\,(\alpha_0 \xi)^2 + \cdots + \varrho\,a_\varrho\,(\alpha_0 \xi)^{\varrho - 1}$$

und weil $\xi > 1$ sein soll

$$\begin{aligned}\varphi_0'(\alpha_0 \xi) &\leqq 2\,a_2\,\alpha_0 \cdot \xi^{\varrho-1} + 3\,a_3\,\alpha_0^2 \xi^{\varrho-1} + \cdots + \varrho\,a_\varrho\,\alpha_0^{\varrho-1} \xi^{\varrho-1} \\ &= \xi^{\varrho-1} \cdot \varphi_0'(\alpha_0).\end{aligned}$$

Also ist die Forderung B sicher erfüllt, wenn

$$\xi^{\varrho-1} \cdot \varphi_0'(\alpha_0) = 1 - \frac{1}{\xi}$$

ist, oder wenn α_0 so gewählt ist, daß

$$\varphi_0'(\alpha_0) = \frac{\xi - 1}{\xi^\varrho} \tag{9}$$

ist. Hier ist die rechte Seite noch eine Funktion des willkürlich gewählten ξ. Ihren Maximalwert wollen wir ermitteln. Der zugehörige Wert von ξ, der ξ'' heiße, ist Wurzel von

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi-1}{\xi^\varrho}\right) = \frac{1 \cdot \xi^\varrho - (\xi - 1)\,\varrho\,\xi^{\varrho-1}}{\xi^{2\varrho}} = 0$$

oder von

$$(\varrho - 1)\,\xi - \varrho = 0\,.$$

Es folgt

$$\xi'' = \frac{\varrho}{\varrho - 1} \tag{10}$$

und

$$\eta'' = \frac{\xi'' - 1}{\xi''} = \frac{1}{\varrho}. \tag{11}$$

Wir bemerken zunächst, ξ'' ist wirklich > 1, wie gefordert wird. Als Maximalwert der rechten Seite von (9) erhalten wir mit (10) die Zahl $\frac{(\varrho-1)^{\varrho-1}}{\varrho^\varrho}$. Die Forderung B läßt sich also für ein Polynom ϱ ten Grades ersetzen durch die Forderung: Es soll $|a_0|$ kleiner oder gleich derjenigen positiven Zahl α_0'' sein, welche Wurzel von

$$\varphi_0'(\alpha_0'') = \frac{(\varrho-1)^{\varrho-1}}{\varrho^\varrho} \tag{12}$$

ist.

Wir lösen mit dem bisher Bewiesenen nun noch folgende **Aufgabe:** Man soll eine obere Grenze $\overline{\alpha_0}$ für den Betrag von a_0 angeben, so daß für alle $|a_0| \leq \overline{\alpha_0}$ die durch das Weierstraßsche Iterationsverfahren gelieferte Wurzel $\overline{x}$ ihrem Betrage nach kleiner ist als eine vorgegebene positive Größe X.

Die Lösung ist höchst einfach. In der Tat: Wir machen zunächst

$$|a_0| \leq \alpha_0' = r\left\{1 - 2P\left(\sqrt{\frac{P+1}{P}} - 1\right)\right\}.$$

(Vgl. Formel (8) dieses Paragraphen.) Dann kann man für die Größe ξ, die mit α_0 in die Forderung B eingeht, ein für allemal den Ausdruck (6) und für $\eta = 1 - \frac{1}{\xi}$ den Ausdruck (7) setzen. Nach Ungleichung (11) des § 1 ist wegen des eben Gesagten für $|\mathrm{a}_0| \leqq \alpha_0'$

$$|\bar{\mathrm{x}}| < |\mathrm{a}_0| \cdot \xi'.$$

Damit also $|\bar{\mathrm{x}}| < \mathrm{X}$ sei, genügt es zu fordern, daß

$$|\mathrm{a}_0| \cdot \xi' \leqq \mathrm{X}$$

sei, oder daß

$$|\mathrm{a}_0| \leqq \mathrm{X} \cdot \frac{1}{\xi'} = \mathrm{X}\left\{1 - \mathrm{P}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{P}+1}{\mathrm{P}}} - 1\right)\right\}$$

ist.

Wenn wir nun zusammenfassen, erhalten wir das Resultat: Man nehme als $\bar{\alpha}_0$ die kleinere der beiden Zahlen

$$\alpha_0' = \mathrm{r}\left\{1 - 2\mathrm{P}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{P}+1}{\mathrm{P}}} - 1\right)\right\}$$

$$\mathrm{X} \cdot \frac{1}{\xi'} = \mathrm{X}\left\{1 - \mathrm{P}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{P}+1}{\mathrm{P}}} - 1\right)\right\}.$$

Dann wird einerseits das Weierstraßsche Approximationsverfahren für alle $|\mathrm{a}_0| \leqq \bar{\alpha}_0$ konvergieren, andrerseits wird die erhaltene Wurzel ihrem Betrage nach für alle $|\mathrm{a}_0| \leqq \bar{\alpha}_0$ kleiner als X sein. Die oben gemachten beiden Anmerkungen 1. und 2. haben auch hier Gültigkeit.

§ 3.

Geometrische Deutung des Näherungsverfahrens.

Im Falle, daß die Koeffizienten der vorgelegten Gleichung $\mathrm{x} - \varphi(\mathrm{x}) = 0$ alle reelle Zahlen sind, liefert das Näherungsverfahren, wenn überhaupt, so nur eine ganz bestimmte reelle Wurzel. Die Auffindung dieser Wurzel läßt eine einfache geometrische Deutung zu.

Wir zeichnen uns in ein rechtwinkliges Parallelkoordinatensystem die beiden Kurven

$$y = x \tag{1}$$

und

$$y = \varphi(x) \tag{2}$$

ein. Die erste ist einfach die Winkelhalbierende des rechten Winkels zwischen der $+$ x- und $+$ y-Achse. Die zweite ist eine Kurve, welche von jeder Parallelen zur Ordinatenachse nur in einem einzigen Punkte getroffen wird. Wegen $\varphi(0) = a_0$ und $\varphi'(0) = 0$ schneidet sie die $+$ y-Achse im Abstande a_0 und hat daselbst eine zur Abszissenachse parallele Tangente. Die Wurzel x der Gleichung $x - \varphi(x) = 0$ ist nun nichts anderes als die Abszisse des Schnittpunktes der beiden Kurven (1) und (2). Den arithmetischen Operationen des Näherungsverfahrens zur Ermittelung der Zahl $\bar{x}$ entsprechen nun folgende geometrische Konstruktionen zur Auffindung der Abszisse $\bar{x}$ (Fig. 1):

Man geht vom Nullpunkt $0 = A_0$ des Koordinatensystems aus vertikal auf der y-Achse entlang bis zu ihrem Schnittpunkt B_0 mit (2) und von dort horizontal weiter bis zum Schnittpunkt A_1 mit (1). Dann zieht man eine Vertikale durch A_1 bis zum Schnittpunkt B_1 mit (2) und durch B_1 eine Horizontale bis zum Schnittpunkt A_2 mit (1). Weiter zeichnet man durch A_2 eine Vertikale bis zum Schnittpunkt B_2 mit (2) und sodann eine Horinzontale durch B_2 bis zum Schnittpunkt A_3 mit (1). So fährt man fort, indem man immer abwechselnd vertikale Graden durch A_{n-1} auf $y = x$ zwecks Ermittelung von B_{n-1} auf $y = \varphi(x)$ und horizontale Graden durch B_{n-1} auf $y = \varphi(x)$ zwecks Ermittelung von A_n auf $y = x$ konstruiert. Man erhält dadurch sowohl auf $y = x$ eine unendliche Folge von Punkten A_n als auch auf $y = \varphi(x)$ eine unendliche Folge von Punkten B_n. Konvergiert das Iterationsverfahren, so werden die einzelnen Geradenstücke des Treppenzuges $A_0, B_0, A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 \ldots$ mit wachsendem Index n ihrer Endpunkte A_n und B_n immer kleiner und kleiner; die Folge der Punkte A_n bezw. B_n hat dann einen im Endlichen gelegenen Häufungspunkt $\bar{A}$ bezw. $\bar{B}$. Dabei sind $\bar{A}$ und $\bar{B}$ derselbe Punkt, und zwar der Schnittpunkt der Kurven (1) und (2).

Der Zusammenhang zwischen Rechnung und Zeichnung wird noch klarer, wenn man bedenkt, daß A_n die Koordinaten

$$x = x_n \qquad y = x_n$$

und daß B_n die Koordinaten

$$x = x_n \qquad y = \varphi(x_n)$$

besitzt, und daß folglich der Gleichung

$$x_n = \varphi(x_{n-1})$$

der Gleichungskette (2) von § 1 der Teil

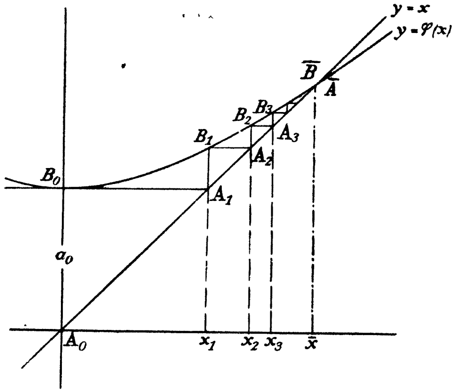

Fig. 1.

$$A_{n-1}\, B_{n-1}\, A_n$$

des Konstruktionszuges entspricht, durch welchen ja die Abszisse x_n aus der Abszisse x_{n-1} gefunden wird.

Wir wollen nun noch untersuchen, was der Forderung B für eine geometrische Bedeutung zukommt. Es sollte also die Forderung

$$\varphi_0'(a_0\, \xi) \leqq 1 - \frac{1}{\xi}$$

erfüllt sein. Wird ihr von a_0 Genüge getan, so folgt:

$$|\varphi'(x)| \leqq 1 - \frac{1}{\xi}$$

für

$$|x| \leqq a_0\, \xi .$$

Geometrisch gesprochen heißt dies einfach: die Kurve $y = \varphi(x)$ verläuft so, daß in allen ihren Punkten, deren Abszisssen dem abgeschlossenen Intervall $(-a_0\,\xi \cdots + a_0\,\xi)$ auf der x-Achse angehören, die Kurventangente mit der x-Achse Winkel einschließt, deren trigonometrische Tangensfunktion ihrem Betrage nach nicht größer als die Zahl $1 - \frac{1}{\xi}$ ist. (Wenn man alle Winkel so mißt, daß man sie nur als spitze Winkel auffaßt, so sind die Winkel der Kurventangente mit der x-Achse um einen endlichen Winkel kleiner als 45°.) Setzt man nun noch

$$1 - \frac{1}{\xi} = \frac{a_0 \xi - a_0}{a_0 \xi} = \operatorname{tg} \alpha,$$

so erkennt man leicht (Fig. 2), daß die Kurve $y = \varphi(x)$, solange $|x| \leqq a_0 \xi$ ist, nur in dem Winkelraum zwischen den beiden Geraden

$$y = a_0 + \operatorname{tg} \alpha \cdot x \tag{3 a}$$

$$y = a_0 - \operatorname{tg} \alpha \cdot x \tag{3 b}$$

verlaufen kann, welcher die Horizontale durch B_0 enthält, also nur in dem nicht schraffierten Winkelraum. Man sieht ferner, daß sich die Kurven (1) und (2) immer in einem Punkte dieses Winkelraums schneiden müssen, dessen Abszisse $\bar{x}$ einen kleineren Betrag hat als die Zahl $a_0 \xi$, also in einem Punkte, der in dem Streifen zwischen der y-Achse und einer Vertikalen durch den Schnittpunkt C der Geraden (1) und (3 a) liegt. Endlich zeigt eine einfache Überlegung, die sich auch auf die Tangentenrichtung von $y = \varphi(x)$ gründet, daß die Abstände der Punkte der Kurve $y = \varphi(x)$ von der Geraden $y = x$ immer nur kleiner werden (jedoch nie gleichbleiben oder gar größer werden können), wenn man sich auf der Kurve nach $\bar{B}$ hinbewegt. Daraus folgt, daß die einzelnen Strecken des oben erwähnten Treppenzuges $A_0 B_0 A_1 B_1 A_2 B_2 A_3 \cdots$ mit wachsendem Index notwendig abnehmen müssen sowohl bei einseitiger als auch bei zweiseitiger Approximation. (Man bedenke noch, daß die Dreiecke $A_{n-1} B_{n-1} A_n$ sämtlich gleichschenklig-rechtwinklig sind. Dann ist der Beweis sehr einfach.) Die folgenden Figuren stellen die Umgebung des Punktes $\bar{B}$ in den beiden angeführten Fällen dar.

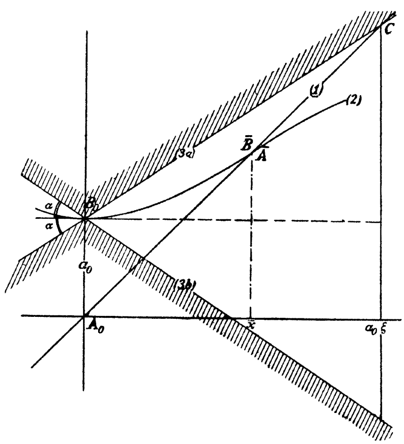

Fig. 2.

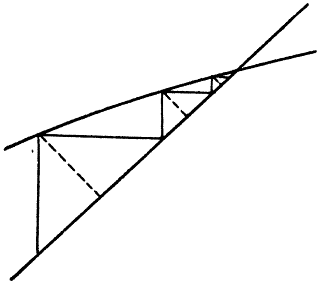

Fig. 3a.

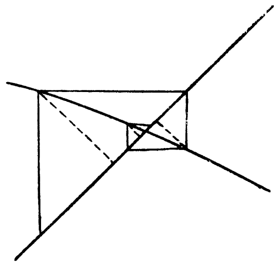

Fig. 3b.

Daß die Forderung B bei hinreichend kleiner Wahl von $\alpha_0 = |a_0|$ immer erfüllbar ist, heißt geometrisch nichts anderes als: Wenn man in der Fig. 2 die mit Schraffur versehenen Geraden (3a) und (3b) zusammen mit der Kurve (2) parallel zu sich nach dem Koordinatenursprung zu (in der Fig. 2 nach unten) verschiebt, so daß sich der Punkt B_0 auf der y-Achse dem Koordinatenursprung nähert, so kann man immer erreichen, daß die verschobene Kurve in dem verschobenen Winkelraum, soweit sie in dem Streifen zwischen der y-Achse und der Vertikalen durch C liegt (dieser Streifen wird bei der angedeuteten Verschiebung schmäler, weil der Schnittpunkt C von (1) und (3a) sich längs der Geraden $y = x$ nach 0 hinbewegt), Tangenten mit genügend kleiner Neigung gegen die x-Achse besitzt, denn die Tangentenrichtung ändert sich längs der Kurve stetig, und im Punkte B_0 hat die Kurve die Neigung Null gegen die x-Achse.

Endlich entnimmt man der Anschauung noch den **Satz:**

Solange die Forderung B erfüllt ist, liefert unser Iterationsverfahren, angewandt auf eine Gleichung mit reellen Koeffizienten, diejenige reelle Wurzel von möglichst kleinem absoluten Betrag, welche dasselbe Vorzeichen wie α_0 hat.

Ist die Forderung B nicht erfüllt, so darf man dies nicht behaupten, selbst wenn das Näherungsverfahren konvergiert. (Man vergleiche hier die Arbeiten von F. Chiò[1]) über die Reihe von Lagrange, ein Problem, das mit dem unsrigen eng verwandt ist.)

[1]) F. Chiò, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de France t. XII 1854 p. 340—468.

§ 4

Fehlertheorie des Näherungsverfahrens.

Wir beginnen diesen Paragraphen mit einem Zahlenbeispiel, indem wir uns die Aufgabe stellen, eine Wurzel der Gleichung

$$x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{10} = 0$$

durch Näherung bis auf 6 Dezimalen zu berechnen. Wir schreiben die Gleichung hierzu in der Form

$$x = 0{,}1 - 0{,}5\,x^2 + x^3,$$

wonach also

$$\varphi(x) = 0{,}1 - 0{,}5\,x^2 + x^3$$

ist. Es folgt

$$\varphi_0'(x) = x + 3\,x^2,$$

und man sieht leicht, daß die Forderung B im vorliegenden Falle erfüllt ist (denn man braucht nur $\xi = 3$, folglich $a_0\,\xi = 0{,}3$ und $1 - \frac{1}{\xi} = \frac{2}{3}$ zu setzen). Wir dürfen also unser Iterationsverfahren anwenden. Tun wir dies, so erhalten wir nach und nach

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0{,}1 \\
x_2 &= 0{,}1 - 0{,}5\,(0{,}1)^2 + (0{,}1)^3 \\
&= 0{,}1 - 0{,}005 + 0{,}001 = 0{,}096 \\
x_3 &= 0{,}1 - 0{,}5\,(0{,}096)^2 + (0{,}096)^3 \\
&= 0{,}1 - 0{,}004\,608 + 0{,}000\,885 = 0{,}096\,277 \\
x_4 &= 0{,}1 - 0{,}5\,(0{,}096\,277)^2 + (0{,}096\,277)^3 \\
&= 0{,}1 - 0{,}004\,635 + 0{,}000\,893 = 0{,}096\,258 \\
x_5 &= 0{,}1 - 0{,}5\,(0{,}096\,258)^2 + (0{,}096\,258)^3 \\
&= 0{,}1 - 0{,}004\,633 + 0{,}000\,892 = 0{,}096\,259 \\
x_6 &= 0{,}1 - 0{,}5\,(0{,}096\,259)^2 + (0{,}096\,259)^3 \\
&= 0{,}1 - 0{,}004\,633 + 0{,}000\,892 = 0{,}096\,259
\end{aligned}$$

$$\underline{\bar{x} = 0{,}096\,259}\,.$$

Nun wird man aber in Wirklichkeit noch etwas anders rechnen: Man wird nämlich nicht, wie es im vorstehenden Beispiel mit Absicht geschehen ist, bei der Rechnung unnötig viele Dezimalen mitschleppen (also z. B. x_3 nicht auf 6 Dezimalen ausrechnen), sondern man wird sich begnügen, bei jedem Näherungsschritt je nur eine Dezimale zum Resultat des vorhergehenden Schrittes hinzuzufügen. Also wird man wie folgt verfahren:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0{,}1 \\
x_2 &= 0{,}1 - 0{,}5\,(0{,}1)^2 + (0{,}1)^3 \\
&= 0{,}1 - 0{,}005 + 0{,}001 = 0{,}09(6) \\
x_3 &= 0{,}1 - 0{,}5\,(0{,}09)^2 + (0{,}09)^3 = \\
&= 0{,}1 - 0{,}0041 + 0{,}0007 = 0{,}096(4) \\
x_4 &= 0{,}1 - 0{,}5\,(0{,}096)^2 + (0{,}096)^3 \\
&= 0{,}1 - 0{,}004\,68 + 0{,}000\,88 = 0{,}096\,2(0) \\
x_5 &= 0{,}1 - 0{,}5\,(0{,}0962)^2 + (0{,}0962)^3 \\
&= 0{,}1 - 0{,}004\,627 + 0{,}000\,889 = 0{,}096\,25(5) \\
x_6 &= 0{,}1 - 0{,}5\cdot(0{,}096\,25)^2 + (0{,}096\,25)^3 \\
&= 0{,}1 - 0{,}004\,632 + 0{,}000\,891 = 0{,}096\,259 \\
x_7 &= 0{,}1 - 0{,}5\cdot(0{,}096\,259)^2 + (0{,}096\,259)^3 = \\
&= 0{,}1 - 0{,}004\,633 + 0{,}009\,892 = 0{,}096\,259 \\
&\underline{\bar{x} = 0{,}096\,259\,.}
\end{aligned}$$

Was an diesem Beispiel praktisch gezeigt ist, das soll nun in diesem Paragraphen theoretisch untersucht werden. Wir nehmen also an, wir hätten das W e i e r s t r a ß sche Näherungsschema

$$\left.\begin{aligned}
x_0 &= 0 \\
x_1 &= \varphi(x_0) \\
x_2 &= \varphi(x_1) \\
x_3 &= \varphi(x_2) \\
x_4 &= \varphi(x_3) \\
&\;\vdots \\
x_n &= \varphi(x_{n-1}) \\
&\;\vdots
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

nicht g e n a u durchgeführt, sondern bei jedem Schritt e i n e n g e w i s s e n F e h l e r gemacht, dessen Betrag unter einer vorgegebenen Größe (welche wir in der Folge bestimmen wollen) liegt. Wir wollen dann zeigen, daß das W e i e r s t r a ß sche Verfahren dennoch konvergiert und den richtigen Wurzelwert liefert.

Wir nehmen also jetzt an, unser Rechnungsschema laute

$$\left.\begin{array}{l} x_0' = 0 \qquad\qquad\qquad = x_0 \\ x_1' = \varphi(x_0') \quad + \delta_1 = x_1 + \Delta_1 \\ x_2' = \varphi(x_1') \quad + \delta_2 = x_2 + \Delta_2 \\ x_3' = \varphi(x_2') \quad + \delta_3 = x_3 + \Delta_3 \\ x_4' = \varphi(x_3') \quad + \delta_4 = x_4 + \Delta_4 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_n' = \varphi(x_{n-1}') + \delta_n = x_n + \Delta_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array}\right\}. \tag{2}$$

Hierbei bedeutet $\Delta_\varkappa$ den Unterschied zwischen dem genauen Näherungswert $x_\varkappa$ des Schemas (1) und des ungenauen Näherungswertes $x_\varkappa'$ des Schemas (2). Also ist $\Delta_\varkappa$ der Gesamtfehler, während $\delta_\varkappa$ nur ein Einzelfehler beim $\varkappa$ten Schritt ist. — Angenommen, wir hätten bereits erreicht, daß $\Delta_\varkappa$ so klein ist, daß es die Ungleichung

$$|x_\varkappa| + |\Delta_\varkappa| \leqq \alpha_0 \xi \tag{3}$$

befriedigt (ξ ist hier wieder diejenige Zahl, die mit α_0 zusammen der Forderung B genügt), also daß erst recht

$$|x_\varkappa + \Delta_\varkappa| \leqq \alpha_0 \xi$$

ist, so dürfen wir entwickeln und schreiben

$$\varphi(x_\varkappa + \Delta_\varkappa) = \varphi(x_\varkappa) + \lambda_\varkappa \cdot |\Delta_\varkappa| \cdot |\varphi'(\xi_\varkappa)|, \tag{4}$$

wo

$$0 \leqq |\lambda_\varkappa| \leqq 1$$

ist. In der Tat: Einerseits ist

$$\int_{x_\varkappa}^{x_\varkappa + \Delta_\varkappa} \varphi'(x)\,dx = \varphi(x_\varkappa + \Delta_\varkappa) - \varphi(x_\varkappa)$$

und andrerseits

$$\left| \int_{x_\varkappa}^{x_\varkappa + \Delta_\varkappa} \varphi'(x)\,dx \right| \leqq |\varphi'(\xi_\varkappa)| \cdot |\Delta_\varkappa|,$$

wo $\xi_\varkappa = x_\varkappa + \vartheta_\varkappa \Delta_\varkappa$ auf der Verbindungsgeraden von $x_\varkappa$ und $x_\varkappa + \Delta_\varkappa$ liegt. Hieraus folgt aber die obige Formel (4), in der $\lambda_\varkappa$ eine passend gewählte komplexe Zahl ist, deren Modul nicht größer als die Einheit ist. Diese Formel wollen wir noch etwas kürzer schreiben:

$$\varphi(x_\varkappa + \Delta_\varkappa) = \varphi(x_\varkappa) + \Delta_\varkappa \cdot \eta_\varkappa . \tag{4a}$$

Weil nun nach unsern Voraussetzungen auch die Größe

$$|\xi_\varkappa| = |x_\varkappa + \vartheta_\varkappa \Delta_\varkappa| \leqq a_0 \xi$$

ist, gilt (s. § 1 Formel (7′) und (8′))

$$|\varphi'(\xi_\varkappa)| \leqq \varphi_0'(a_0 \xi) \leqq 1 - \frac{1}{\xi} = \eta ,$$

also erst recht

$$|\eta_\varkappa| = |\lambda_\varkappa| \cdot |\varphi'(\xi_\varkappa)| \leqq \eta . \tag{5}$$

Unter Benutzung von (4a) ergibt sich

$$\begin{aligned} x_{\varkappa+1}' = \varphi(x_\varkappa') + \delta_{\varkappa+1} &= \varphi(x_\varkappa + \Delta_\varkappa) + \delta_{\varkappa+1} \\ &= \varphi(x_\varkappa) + \Delta_\varkappa \eta_\varkappa + \delta_{\varkappa+1} \end{aligned}$$

oder

$$x_{\varkappa+1}' = x_{\varkappa+1} + \Delta_\varkappa \eta_\varkappa + \delta_{\varkappa+1} .$$

Wenden wir diese Relation auf das Schema (2) an, so erhalten wir nach und nach

$$\left.\begin{array}{ll}
x_0' = x_0 & = 0 \\
x_1' = \varphi(x_0) + \delta_1 & = x_1 + \delta_1 \\
x_2' = \varphi(x_1 + \delta_1) + \delta_2 & = x_2 + \delta_1 \eta_1 + \delta_2 \\
x_3' = \varphi(x_2 + \delta_1 \eta_1 + \delta_2) + \delta_3 & = x_3 + \delta_1 \eta_1 \eta_2 + \delta_2 \eta_2 + \delta_3 \\
x_4' = \varphi(x_3 + \delta_1 \eta_1 \eta_2 + \delta_2 \eta_2 + \delta_3) + \delta_4 & = x_4 + \delta_1 \eta_1 \eta_2 \eta_3 + \delta_2 \eta_2 \eta_3 \\
 & \qquad + \delta_3 \eta_3 + \delta_4 \\
\vdots & \vdots \\
x_n' = \varphi(x_{n-1}' + \delta_1 \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_{n-2} + \cdots + \delta_{n-1}) + \delta_n & = x_n + \delta_1 \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_{n-1} + \cdots \\
 & \qquad + \delta_{n-1} \eta_{n-1} + \delta_n \\
\vdots & \vdots
\end{array}\right\} \tag{6}$$

vorausgesetzt, daß die δ_λ so gewählt sind, daß die Ungleichung (3) befriedigt wird. Wir schätzen nun ab. Aus § 1 Formel (6) und (12) folgt nach Sätzen über Absolutwerte leicht:

$$|x_n| < a_0 \frac{1 - \eta^n}{1 - \eta} = a_0 \xi (1 - \eta^n) . \tag{7}$$

Wir beschränken nun die Einzelfehler $\delta_\varkappa$ wie folgt: Es sei M eine positive Zahl, welche größer als Eins ist; dann setzen wir voraus, daß

$$|\delta_\varkappa| \leqq \alpha_0 \xi (M-1) \left(\frac{\eta}{M}\right)^\varkappa \tag{8}$$

sei, und wollen zeigen, 1. daß $|x_n'| < \alpha_0 \xi$ ist, daß also die Kette (2) dieses Paragraphen nie abbrechen kann, sondern stets Größen x_n' liefert, deren Absolutwert kleiner als $\alpha_0 \xi$ ist; 2. daß Δ_n mit wachsendem Index n gegen Null hin strebt, daß der Gesamtfehler also immer kleiner und kleiner wird, je weiter wir in der Kette (2) fortschreiten.

In der Tat unter Beachtung von (5) und (7) erhalten wir aus (6)

$$|x_n'| \leqq |x_n| + |\delta_1||\eta_1||\eta_2| \ldots |\eta_{n-1}| + |\delta_2||\eta_2||\eta_3| \ldots |\eta_{n-1}| + \cdots + |\delta_{n-1}||\eta_{n-1}| + |\delta_n|$$

$$< \alpha_0 \xi (1-\eta^n) + \alpha_0 \xi (M-1) \eta^n \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{M^2} + \cdots + \frac{1}{M^{n-1}} + \frac{1}{M^n}\right)$$

$$= \alpha_0 \xi (1-\eta^n) + \alpha_0 \xi (M-1) \frac{\eta^n}{M} \frac{1-\left(\frac{1}{M}\right)^n}{1-\frac{1}{M}}$$

$$= \alpha_0 \xi (1-\eta^n) + \alpha_0 \xi \eta^n \left(1-\left(\frac{1}{M}\right)^n\right) < \alpha_0 \xi (1-\eta^n) + \alpha_0 \xi \eta^n = \alpha_0 \xi .$$

Also ist einerseits

$$|x_n'| < \alpha_0 \xi$$

w. z. b. w.

Andrerseits ist wegen

$$\Delta_n = \delta_1 \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_{n-1} + \delta_2 \eta_2 \eta_3 \ldots \eta_{n-1} + \cdots + \delta_{n-1} \eta_{n-1} + \delta_n$$

ganz analog

$$|\Delta_n| \leqq \alpha_0 \xi \eta^n \left(1-\left(\frac{1}{M}\right)^n\right) < \alpha_0 \xi \eta^n .$$

Wegen $\eta < 1$ ist hiermit auch die zweite Behauptung bewiesen. Man hat zugleich gezeigt, daß wenn man die Einzelfehler $\delta_\varkappa$

gemäß Bedingung (8) limitiert, der Gesamtfehler $\Delta_\varkappa$ die Bedingung (3) von selbst erfüllt.

Im vorstehenden ist die theoretische Begründung dafür gegeben, daß man bei Zahlenbeispielen nur eine Dezimale (sehr selten mehrere Dezimalen) bei jedem Rechnungsschritt mehr als bei dem vorhergehenden berechnet und nicht unnötig viele Stellen ausrechnet und mitschleppt. Zugleich liefert unsere Betrachtung auch die Stütze dafür, daß wir in einigen der nachfolgenden Paragraphen bei Anstellung von Buchstabenrechnungen bei jedem Rechnungsschritt nur je ein Glied mehr neu bestimmen.

§ 5.

Umkehrung von Potenzreihen.

Die in den vorhergehenden Paragraphen erhaltenen Resultate lassen sich bei ganz einfacher Umdeutung auf das wichtige Problem der Umkehrung von Potenzreihen anwenden. Gegeben sei also die Potenzreihe

$$y - y_0 = \mathfrak{P}(x - x_0) = c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \cdots \quad (1)$$

mit dem Konvergenzradius r^*, wo

$$\mathfrak{P}'(0) \equiv \mathfrak{P}'(x_0 - x_0) \equiv c_1 \neq 0 \quad (2)$$

ist. Gesucht wird die Umkehrreihe $x - x_0 = \mathfrak{Q}(y - y_0)$, welche die Eigenschaft hat, daß sie für $x - x_0$ in (1) eingesetzt, die Gleichung (1) identisch befriedigt.

Aus (1) folgt wegen (2)

$$x - x_0 = \frac{y - y_0}{c_1} - \frac{c_2}{c_1}(x - x_0)^2 - \frac{c_3}{c_1}(x - x_0)^3 - \cdots \quad (3)$$

Man findet nun $x - x_0$ als Funktion von $y - y_0$, wenn man (3) als Gleichung für die Unbekannte $x - x_0$ anspricht. Wir wenden zu ihrer Auflösung das Weierstraßsche Näherungsverfahren an. Vorher setzen wir noch zur Abkürzung

$$\frac{y - y_0}{c_1} = a_0; \quad -\frac{c_2}{c_1} = a_2; \quad -\frac{c_3}{c_1} = a_3; \quad -\frac{c_4}{c_1} = a_4; \ldots \quad (4)$$

so daß (3) übergeht in

$$x-x_0=a_0+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+a_4(x-x_0)^4+\cdots \tag{5}$$

Dann lehrt uns der § 1, daß der Ausdruck

$$x-x_0=a_0+A_2a_0{}^2+A_3a_0{}^3+A_4a_0{}^4+\cdots \tag{6}$$

oder wegen (4)

$$x-x_0=\frac{1}{c_1}(y-y_0)+\frac{A_2}{c_1{}^2}(y-y_0)^2+\frac{A_3}{c_1{}^3}(y-y_0)^3+\cdots \tag{7}$$

der Gleichung (3), also auch der Gleichung (1) identisch genügt, wenn man nur

$$|a_0|=\left|\frac{y-y_0}{c_1}\right|$$

klein genug wählt. Dies ist aber nichts anderes als der Existenzsatz für die Umkehrreihe (7) der gegebenen Reihe (1). Wir haben also durch den § 1 zugleich den Satz bewiesen: Vorausgesetzt, daß die Bedingung (2) erfüllt ist, so existiert zu der gegebenen Potenzreihe

$$y-y_0=\mathfrak{P}(x-x_0)$$

eine Umkehrreihe

$$x-x_0=\mathfrak{Q}(y-y_0),$$

die absolut konvergiert, wenn nur der Betrag Differenz $y-y_0$ so klein gewählt wird, daß

$$2\left|\frac{c_2}{c_1}\right|\left(\left|\frac{y-y_0}{c_1}\right|\cdot\xi\right)+3\left|\frac{c_3}{c_1}\right|\left(\left|\frac{y-y_0}{c_1}\right|\cdot\xi\right)^2+\cdots\quad\leqq 1-\frac{1}{\xi} \tag{8}$$

ist. Ihre Koeffizienten setzen sich rational aus denen der ursprünglichen Reihe zusammen.

§ 2 liefert ferner für die Auffindung eines Bereiches, in dem die Umkehrreihe sicher konvergiert, folgende **Regel:** Es sei r^* der Konvergenzradius von $\mathfrak{P}(x-x_0)$. Man wähle dann ein positives r, welches kleiner als r^* ist, und bezeichne mit P den sicher existierenden größten Wert von

$$\varrho\left|\frac{c_\varrho}{c_1}\right|\cdot r^{\varrho-1}$$

für alle ganzzahligen und positiven Werte von ϱ. Dann konvergiert die Umkehrreihe $\mathfrak{Q}(y-y_0)$ sicher, sobald

$$\left|\frac{y-y_0}{c_1}\right| \leqq r\left\{1-2P\left(\sqrt{\frac{P+1}{P}}-1\right)\right\}$$

ist. Die Bemerkungen 1. und 2. von § 2 behalten auch hier ihre Gültigkeit. Wir bemerken noch: $|x-x_0| = |\mathfrak{Q}(y-y_0)|$ bleibt kleiner als eine vorgegebene Zahl X, sobald $\left|\frac{y-y_0}{c_1}\right|$ kleiner ist als die kleinste der zwei Zahlen:

$$r\left\{1-2P\left(\sqrt{\frac{P+1}{P}}-1\right)\right\}$$

$$X\left\{1-P\left(\sqrt{\frac{P+1}{P}}-1\right)\right\}$$

Geometrisch heißt dies: Wählt man eine Umgebung von y_0 aus, so daß für alle ihre Punkte y der Ausdruck $\left|\frac{y-y_0}{c_1}\right|$ kleiner als die kleinste der zwei angegebenen Zahlen ist, so wird diese Umgebung von y_0 durch die Umkehrreihe auf eine Umgebung von x_0 abgebildet, deren Punkte x der Ungleichung

$$|x-x_0| < X$$

genügen.

Die Schlußbemerkung von § 4 gibt den Grund an, warum man bei der praktischen Durchführung einer Reihenumkehr abgekürzt so rechnet, wie es folgendes Beispiel statt vieler Worte erläutern soll.

Gegeben sei die Reihe

$$y+1 = e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

Gesucht ist die Umkehrreihe $x = \operatorname{Log}(1+y)$.

Aus der gegebenen Reihe schließen wir

$$x = y-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}-\cdots$$

und berechnen als sukzessive Näherungswerte für die Umkehrreihe

$$x_1 = y - \cdots$$

$$x_2 = y - \frac{1}{2}(y - \cdots)^2 - \cdots$$

$$= y - \frac{y^2}{2} + \cdots$$

$$x_3 = y - \frac{1}{2}\left(y - \frac{y^2}{2} + \cdots\right)^2 - \frac{1}{6}(y - \cdots)^3 - \cdots$$

$$= y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \cdots$$

$$x_4 = y - \frac{1}{2}\left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \cdots\right)^2 - \frac{1}{6}\left(y - \frac{y^2}{2} + \cdots\right)^3 - \frac{1}{24}(y - \cdots)^4 - \cdots$$

$$= y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \cdots$$

u. s. f. u. s. f.

Man sieht deutlich, wie diese Durchführung einer Reihenumkehr dem Weierstraßschen Näherungsverfahren mit Zulassung von gewissen Fehlern (Weglassen der Glieder höherer Ordnung) entspricht.

§ 6.

Ausdehnung des Weierstraßschen Näherungsverfahrens auf einen zu dem Problem des § 1 komplementären Fall.

Wir wollen jetzt das Weierstraßsche Näherungsverfahren auf einen Fall ausdehnen, der zu dem in § 1 behandelten gewissermaßen ergänzend ist. Man wird bei dem hier zu führenden Konvergenzbeweis für das Näherungsverfahren viel Ähnlichkeit mit dem Konvergenzbeweis des § 1 entdecken. Deshalb wird der folgende Beweis an einigen Stellen sich kürzen lassen. Außerdem sei bemerkt, daß die Behandlung des vorliegenden Problems mich zu den in § 1 vorgenommenen Änderungen gegenüber dem ursprünglichen Weierstraßschen Beweis veranlaßt hat.

Vorgelegt sei wieder eine Gleichung von der Form

$$x = \varphi(x),$$

wo jetzt aber

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x^{-1} + b_2 x^{-2} + b_3 x^{-3} + \cdots \tag{1}$$

ist, also im allgemeinen Falle eine nach Potenzen von x^{-1} fortschreitende Potenzreihe. Sie besitze den Konvergenzradius R^*, d. h. für alle $|x| > R^*$ konvergiere $\varphi(x)$ absolut. Aus (1) folgt durch Differentiation

$$\varphi'(x) = -(b_1 x^{-2} + 2 b_2 x^{-3} + 3 b_3 x^{-4} + \cdots). \tag{1'}$$

In (1) und (1') sind $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$ im allgemeinen Falle komplexe Zahlen. Wir definieren nun wieder die zwei Hilfsfunktionen $\varphi_0(x)$ und $\varphi_0'(x)$, die dadurch aus (1) und (1') hervorgehen, daß wir für b_k seinen absoluten Betrag β_k einsetzen. Demnach ist

$$\varphi_0(x) = \beta_0 + \beta_1 x^{-1} + \beta_2 x^{-2} + \beta_3 x^{-3} + \cdots \tag{1 a}$$

und

$$\varphi_0'(x) = -(\beta_1 x^{-2} + 2 \beta_2 x^{-3} + 3 \beta_3 x^{-4} + \cdots), \tag{1' a}$$

wo

$$\beta_k = |b_k| \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

ist. (1 a) und (1' a) besitzen wie (1) und (1') den Konvergenzradius R^*. Um nun die vorgelegte Gleichung zu lösen, berechnen wir folgende Kette von Zahlen.

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \infty \\ x_1 &= \varphi(x_0) = b_0 \\ x_2 &= \varphi(x_1) \\ x_3 &= \varphi(x_2) \\ &\vdots \\ x_n &= \varphi(x_{n-1}) \\ &\vdots \end{aligned}\right\} . \tag{2}$$

Damit diese Kette nicht abbricht, sondern unbegrenzt fortschreitet, müssen wir natürlich die notwendige **Forderung C** aufstellen:

> Jeder der sukzessive berechneten Werte $x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_n \ldots$ muß dem Konvergenzbereich von $\varphi(x)$ angehören; sein absoluter Betrag muß daher größer als R^* sein. — Speziell muß $|b_0| = \beta_0 > R^*$ sein.

Für zwei beliebige Werte x und x', für die $\varphi(x)$ absolut konvergiert, finden wir:

$$\varphi(x') - \varphi(x) = b_1(x'^{-1} - x^{-1}) + b_2(x'^{-2} - x^{-2}) + b_3(x'^{-3} - x^{-3}) + \cdots$$

$$= b_1 \frac{x - x'}{x x'} + b_2 \frac{x^2 - x'^2}{(x x')^2} + b_3 \frac{x^3 - x'^3}{(x x')^3} + \cdots$$

$$= (x - x')\left\{ b_1 \frac{1}{x x'} + b_2 \frac{x + x'}{(x x')^2} + b_3 \frac{x^2 + x x' + x'^2}{(x x')^3} + \cdots \right\}$$

$$= -(x' - x)\left\{ b_1 \frac{1}{x x'} + b_2 \left(\frac{1}{x x'^2} + \frac{1}{x^2 x'}\right) \right.$$

$$\left. + b_3 \left(\frac{1}{x x'^3} + \frac{1}{x^2 x'^2} + \frac{1}{x^3 x'}\right) + \cdots \right\}$$

also

$$\varphi(x') - \varphi(x) = (x' - x) \cdot \varphi(x', x). \tag{3}$$

Analog ergibt sich

$$\varphi_0(x') - \varphi_0(x) = \beta_1(x'^{-1} - x^{-1}) + \beta_2(x'^{-2} - x^{-2}) + \beta_3(x'^{-3} - x^{-3}) + \cdots$$

$$= \beta_1 \frac{x - x'}{x x'} + \beta_2 \frac{x^2 - x'^2}{(x x')^2} + \beta_3 \frac{x^3 - x'^3}{(x x')^3} + \cdots$$

$$= (x - x')\left\{ \beta_1 \frac{1}{x x'} + \beta_2 \frac{x + x'}{(x x')^2} + \beta_3 \frac{x^2 + x x' + x'^2}{(x x')^3} + \cdots \right\}$$

$$= -(x' - x)\left\{ \beta_1 \frac{1}{x x'} + \beta_2 \left(\frac{1}{x x'^2} + \frac{1}{x^2 x'}\right) \right.$$

$$\left. + \beta_3 \left(\frac{1}{x x'^3} + \frac{1}{x^2 x'^2} + \frac{1}{x^3 x'}\right) + \cdots \right\}$$

also

$$\varphi(x') - \varphi(x) = (x' - x) \cdot \varphi_0(x', x). \tag{3 a}$$

Die durch (3) und (3 a) definierten Funktionen $\varphi(x', x)$ und $\varphi_0(x', x)$ sind Potenzreihen von x' und x, die für jedes $|x'| > R^*$ und für jedes $|x| > R^*$ absolut konvergieren, selbst im Falle $x' = x$, wo sie einfach in $\varphi'(x)$ bezw. $\varphi_0'(x)$ übergehen. Man sieht sofort, daß

$$\varphi(x', x) = \varphi(x, x') \tag{3*}$$

und

$$\varphi_0(x', x) = \varphi_0(x, x') \tag{3* a}$$

ist. Aus der Kette (2) folgt mit (3), vorausgesetzt, daß Forderung C erfüllt ist,

$$\left.\begin{array}{lllll}
x_1 & = & \varphi(x_0) & = & b_0 \\
x_2 - x_1 & = & \varphi(x_1) - \varphi(x_0) & = & (x_1 - x_0)\,\varphi(x_1, x_0) \\
x_3 - x_2 & = & \varphi(x_2) - \varphi(x_1) & = & (x_2 - x_1)\,\varphi(x_2, x_1) \\
x_4 - x_3 & = & \varphi(x_3) - \varphi(x_2) & = & (x_3 - x_2)\,\varphi(x_3, x_2) \\
\vdots\quad\vdots & & \vdots\qquad\quad\vdots & & \vdots\qquad\qquad\vdots \\
x_n - x_{n-1} & = & \varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_{n-2}) & = & (x_{n-1} - x_{n-2})\,\varphi(x_{n-1}, x_{n-2}) \\
\vdots\quad\vdots & & \vdots\qquad\quad\vdots & & \vdots\qquad\qquad\vdots
\end{array}\right\} \quad (4)$$

Das letzte Glied der rein formal hingeschriebenen zweiten Zeile dieses Schemas ist ein unbestimmter Ausdruck von der Form $\infty \cdot 0$. Um ihn zu vermeiden, schreiben wir

$$x_2 - x_1 = \varphi(x_1) - x_1 = \varphi(b_0) - b_0$$
$$= b_0 \left\{ b_1 \frac{1}{b_0^{\,2}} + b_2 \frac{1}{b_0^{\,3}} + b_3 \frac{1}{b_0^{\,4}} + \cdots \right\} = b_0\, \psi_1.$$

Ferner setzen wir zur Abkürzung

$$\varphi(x_k, x_{k-1}) = \psi_k \qquad (k = 2, 3, 4, \ldots).$$

Dann erhalten wir aus (4)

$$\left.\begin{array}{lllll}
x_1 & = & & = & b_0 \\
x_2 - x_1 & = & & = & b_0\, \psi_1 \\
x_3 - x_2 & = & (x_2 - x_1)\,\psi_2 & = & b_0\, \psi_1\, \psi_2 \\
x_4 - x_3 & = & (x_3 - x_2)\,\psi_3 & = & b_0\, \psi_1\, \psi_2\, \psi_3 \\
\vdots\quad\vdots & & \vdots\qquad\quad\vdots & & \vdots \\
x_{m+1} - x_m & = & (x_m - x_{m-1})\,\psi_m & = & b_0\, \psi_1\, \psi_2 \ldots \psi_m \\
\vdots\quad\vdots & & \vdots\qquad\quad\vdots & & \vdots \\
x_n - x_{n-1} & = & (x_{n-1} - x_{n-2})\,\psi_{n-1} & = & b_0\, \psi_1\, \psi_2 \ldots \psi_{n-1} \\
\vdots\quad\vdots & & \vdots\qquad\quad\vdots & & \vdots
\end{array}\right\} \quad (5)$$

Addition liefert uns

$$x_n = b_0 \left\{ 1 + \psi_1 + \psi_1 \psi_2 + \psi_1 \psi_2 \psi_3 + \cdots + \psi_1 \psi_2 \ldots \psi_{n-1} \right\} \quad (6)$$

und für $n > m$

$$x_n - x_m = b_0\, \psi_1\, \psi_2 \ldots \psi_m \left\{ 1 + \psi_{m+1} + \psi_{m+1} \psi_{m+2} + \cdots + \psi_{m+1} \ldots \psi_{n-1} \right\} \quad (6^*)$$

Aus den Gleichungen (1) und (1 a) folgt leicht

$$|\varphi(x)| \leqq \varphi_0(|x|) \quad (7)$$

und ähnlich aus (1') und (1' a)

$$|\varphi'(x)| \leqq [-\varphi_0'(|x|)]. \quad (7')$$

Ferner gilt, wenn ξ' und ξ positive Zahlen sind,

$$\varphi_0(\xi') \leqq \varphi_0(\xi) \text{ für } \xi \leqq \xi' \tag{8}$$

$$[-\varphi_0'(\xi')] \leqq [-\varphi_0'(\xi)] \text{ für } \xi \leqq \xi'. \tag{8'}$$

Aus Definition (3) und (3 a) schließt man

$$|\varphi(x', x)| \leqq [-\varphi_0(|x'|, |x|)]. \tag{9}$$

Bedeuten ξ' und ξ positive Zahlen und ist $\xi \leqq \xi'$, so ist

$$[-\varphi_0(\xi', \xi)] = \beta_1 \frac{1}{\xi'\xi} + \beta_2\left(\frac{1}{\xi'^2\xi} + \frac{1}{\xi'\xi^2}\right) + \beta_3\left(\frac{1}{\xi'^3\xi} + \frac{1}{\xi'^2\xi^2} + \frac{1}{\xi'\xi^3}\right) + \cdots$$

$$\leqq \beta_1 \frac{1}{\xi^2} + \beta_2\left(\frac{1}{\xi^3} + \frac{1}{\xi^3}\right) + \beta_3\left(\frac{1}{\xi^4} + \frac{1}{\xi^4} + \frac{1}{\xi^4}\right) + \cdots$$

$$= \beta_1 \xi^{-2} + 2\beta_2 \xi^{-3} + 3\beta_3 \xi^{-4} + \cdots = [-\varphi_0'(\xi)].$$

Also ist

$$[-\varphi_0(\xi', \xi)] = [-\varphi_0(\xi, \xi')] \leqq [-\varphi_0'(\xi)] \text{ für } \xi \leqq \xi'. \tag{10}$$

Kombination mit (9) gibt

$$|\varphi(x', x)| = |\varphi(x, x')| \leqq [-\varphi_0'(|x|)] \text{ für } |x| \leqq |x'|. \tag{10*}$$

Es folgt dann endlich

$$\left.\begin{array}{l} |\psi_k| \leqq [-\varphi_0'(|x_k|)], \text{ wenn } |x_k| \leqq |x_{k-1}| \text{ ist} \\ |\psi_k| \leqq [-\varphi_0'(|x_{k-1}|)], \text{ wenn } |x_{k-1}| \leqq |x_k| \text{ ist} \end{array}\right\}. \tag{10**}$$

Nachdem wir diese Ungleichungen gewonnen haben, ist es leicht zu zeigen, daß das Rechenschema (2) konvergiert (immer noch vorausgesetzt, daß die Forderung C erfüllt ist), wenn wir der folgenden **Forderung D** Genüge leisten.

Es sei ζ eine positive Zahl, die kleiner (nicht gleich) Eins und größer (nicht gleich) ein Halbes ist. Dann soll der absolute Betrag β_0 von b_0 die Ungleichung

$$[-\varphi_0'(\beta_0\zeta)]$$

$$\equiv \beta_1(\beta_0\zeta)^{-2} + 2\beta_2(\beta_0\zeta)^{-3} + 3\beta_3(\beta_0\zeta)^{-4} + \cdots \leqq \frac{1}{\zeta} - 1 < 1$$

befriedigen.

Solche Zahlen β_0 gibt es nach bekannten Stetigkeitssätzen immer, wenn nur überhaupt der Konvergenzradius R^* von $\varphi(x)$ endlich ist. Befriedigt ferner β_0^* die Forderung D, so wird diese auch von jedem $|b_0| \geqq \beta_0^*$ erfüllt.

Wir setzen zur Abkürzung

$$\frac{1}{\zeta} - 1 = \eta$$

und beweisen nun zunächst den **Hilfssatz:**

Ist der absolute Betrag β_0 von b_0 so beschaffen, daß er der Forderung D Genüge leistet, so sind

$$|x_1|,\ |x_2|,\ |x_3|,\ \cdots \text{ sämtlich} > \beta_0 \zeta \tag{11}$$

und

$$|\psi_1|,\ |\psi_2|,\ |\psi_3|,\ \cdots \text{ sämtlich} < \eta \tag{12}$$

Beweis. Man sieht sofort, daß unsere Behauptung sowohl für $|x_1| = \beta_0$ als auch für $|\psi_1| < [-\varphi_0'(\beta_0)]$ (vgl. Formel (8')) richtig ist.

Wir wollen jetzt zunächst die Richtigkeit der ersten Behauptung durch Schluß von m auf m + 1 beweisen. Angenommen also: es sei $|x_m| > \beta_0 \zeta$. Wir denken dann an die aus (2) folgende Beziehung

$$x_{m+1} = b_0 + b_1 x_m^{-1} + b_2 x_m^{-2} + b_3 x_m^{-3} + \cdots$$

Ist nun $|b_0|$ und folglich nach Voraussetzung auch $|x_m|$ groß genug, so wird das erste Glied b_0 über die Summe aller andern Glieder

$$b_1 x_m^{-1} + b_2 x_m^{-2} + b_3 x_m^{-3} + \cdots$$

überwiegen. Wir dürfen also unter dieser Voraussetzung, indem wir zu den absoluten Beträgen übergehen, schreiben:

$$|x_{m+1}| \geqq \beta_0 - |b_1 x_m^{-1} + b_2 x_m^{-2} + b_3 x_m^{-3} + \cdots|.$$

Nun ist nach Voraussetzung über x_m

$$\begin{aligned} &|b_1 x_m^{-1} + b_2 x_m^{-2} + b_3 x_m^{-3} + \cdots| \\ &\leqq \beta_1 |x_m|^{-1} + \beta_2 |x_m|^{-2} + \beta_3 |x_m|^{-3} + \cdots \\ &< \beta_1 (\beta_0 \zeta)^{-1} + \beta_2 (\beta_0 \zeta)^{-2} + \beta_3 (\beta_0 \zeta)^{-3} + \cdots \\ &< \beta_0 \zeta \{\beta_1 (\beta_0 \zeta)^{-2} + 2\beta_2 (\beta_0 \zeta)^{-3} + 3\beta_3 (\beta_0 \zeta)^{-4} + \cdots\} \\ &= \beta_0 \zeta [-\varphi_0'(\beta_0 \zeta)] \leqq \beta_0 \zeta \left[\frac{1}{\zeta} - 1\right] = \beta_0 - \beta_0 \zeta. \end{aligned}$$

Fassen wir zusammen, so finden wir

$$|x_{m+1}| > \beta_0 - (\beta_0 - \beta_0 \zeta) = \beta_0 \zeta .$$

Hiermit ist die Richtigkeit der Ungleichungen (11) bewiesen. Es folgt sofort, daß auch die Ungleichungen (12) richtig sind. In der Tat: Weil $|x_1|, |x_2|, |x_3|, \ldots$ sämtlich $> \beta_0 \zeta$ sind, folgt mit (10**) und (8′)

$$|\psi_k| \leqq \left\{\begin{array}{l} \text{entweder} \\ \quad [-\varphi_0'(|x_k|)] \\ \text{oder} \\ \quad [-\varphi_0'(|x_{k-1}|)] \end{array}\right\} < [-\varphi_0'(\beta_0 \zeta)] \leqq \eta \qquad \text{für } k = 2, 3, 4 \ldots$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Der Beweis für die Konvergenz des Näherungsverfahrens knüpft, wie in § 1, auch hier an die Gleichung (6*) an. Man zeigt jetzt ganz genau wie dort, indem man zu Absolutwerten übergeht und dann an die Ungleichungen (12) und daran, daß $\eta < 1$ ist, denkt, daß die Differenz zweier Näherungswerte x_n und x_m, wenn nur die Indizes n und m genügend groß gewählt werden, beliebig klein wird.

Bemerkung: Im vorliegenden Falle darf man die Näherungswerte nur als Zahlen, nicht als Funktionen von b_0, b_1, b_2, $b_3 \ldots$ auffassen. Die in § 1 aus der zweiten Auffassungsart gezogenen Schlüsse sind hier nicht richtig.

Es ist leicht einzusehen, daß wenn Forderung D erfüllt ist, auch Forderung C von selbst erfüllt wird. Denn wegen (11) folgt, daß $x_1, x_2, x_3, \ldots$ sämtlich dem Konvergenzbereich von $\varphi_0'(x)$ angehören (weil $\varphi_0'(\beta_0 \zeta)$ absolut konvergiert) und folglich erst recht dem Konvergenzbereich von $\varphi_0(x)$ und $\varphi(x)$.

§ 7.

Untersuchung der Forderung D des § 6.

Wir wollen auch jetzt wieder die Forderung D des vorhergehenden Paragraphen, auf deren Erfülltsein allein sich der Konvergenzbeweis für unser Näherungsverfahren stützte, näher betrachten. Sie lautete: Nach Wahl eines positiven ζ, welches

< 1 und $> \frac{1}{2}$ ist, soll der Absolutwert β_0 von b_0 so beschaffen sein, daß

$$[-\varphi_0'(\beta_0 \zeta)] \leqq \frac{1}{\zeta} - 1 \tag{1}$$

oder ausführlicher

$$\beta_1 \frac{1}{(\beta_0 \zeta)^2} + 2\beta_2 \frac{1}{(\beta_0 \zeta)^3} + 3\beta_3 \frac{1}{(\beta_0 \zeta)^4} + \cdots \leqq \frac{1}{\zeta} - 1 \tag{1a}$$

ist. Wir suchen nun einen möglichst kleinen positiven Wert β_0, der die Bedingung (1a) gerade noch erfüllt, für den also in (1a) das Gleichheitszeichen gilt. Je nachdem wie wir dabei ζ im Intervall $\left(\frac{1}{2} \cdots 1\right)$ wählen, wird dieser Wert von β_0 verschieden ausfallen. Nehmen wir z. B. ζ sehr nahe gleich 1 an, so wird auch $\frac{1}{\zeta}$ sehr nahe gleich 1; dann stimmt die linke Seite von (1a) nahezu mit

$$\beta_1 \frac{1}{\beta_0^2} + 2\beta_2 \frac{1}{\beta_0^3} + 3\beta_3 \frac{1}{\beta_0^4} + \cdots$$

und die rechte Seite nahezu mit Null überein, woraus folgt, daß wir besagten Wert von β_0 nahezu gleich $+\infty$ zu setzen haben. Nehmen wir dagegen ζ sehr nahe gleich $\frac{1}{2}$ an, so wird $\frac{1}{\zeta}$ sehr nahe gleich 2; dann ist die linke Seite von (1a) nahezu gleich

$$1 \cdot \beta_1 \cdot 2^2 \frac{1}{\beta_0^2} + 2\beta_2 \cdot 2^3 \frac{1}{\beta_0^3} + 3\beta_3 \cdot 2^4 \frac{1}{\beta_0^4} + \cdots$$

und die rechte Seite nahezu gleich 1; hieraus folgt, daß der besagte Wert von β_0 auch wieder sehr groß zu wählen ist, damit (1a) erfüllt wird.

Wählt man ζ nicht in der Nachbarschaft dieser beiden extremen Werte, so erhält man, wie leicht zu sehen ist, einen günstigeren Wert von β_0. Wir fragen nun nach dem **kleinsten positiven Wert** β_0^*, der (1a) noch befriedigt, wenn man ζ zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 variieren läßt. Der zugehörige Wert von ζ heiße ζ^*. Dann sagt die Lehre vom Maximum und Minimum, daß β^* und ζ^* Wurzeln der beiden Gleichungen

$$\zeta^* [-\varphi_0'(\beta_0^* \zeta^*)] + \zeta^* = 1 \tag{2a}$$

und

$$\varphi_0'(\beta_0^*\zeta^*) + \beta_0^*\zeta^*\varphi_0''(\beta_0^*\zeta^*) = 1 \tag{2b}$$

sind. (2a) ist eine andere Form von (1); (2b) folgt aus

$$\left(\frac{d\beta_0}{d\zeta}\right)_{\substack{\beta_0=\beta_0^*\\ \zeta=\zeta_0^*}} = -\left[\frac{[-\varphi_0'(\beta_0\zeta)] + \zeta[-\varphi_0''(\beta_0\zeta)]\beta_0 + 1}{\zeta\cdot[-\varphi_0''(\beta_0\zeta)]\zeta}\right]_{\substack{\beta_0=\beta_0^*\\ \zeta=\zeta^*}} = 0.$$

Hierbei ist

$$\varphi_0''(\beta_0\zeta) = 1\cdot 2\beta_1(\beta_0\zeta)^{-3} + 2\cdot 3\beta_2(\beta_0\zeta)^{-4} + 3\cdot 4\beta_3(\beta_0\zeta)^{-5} + \cdots$$

Wir können auch für (2a) und (2b) schreiben

$$1 - \varphi_0'(\beta_0^*\zeta^*) = \frac{1}{\zeta^*} \tag{3a}$$

und

$$\beta_0^*\zeta^*\cdot\varphi_0''(\beta_0^*\zeta^*) = \frac{1}{\zeta^*} \tag{3b}$$

mit den Bedingungen

$$\beta_0^* > 0 \text{ und } \frac{1}{2} < \zeta^* < 1. \tag{3c}$$

In den meisten Fällen werden (3a) und (3b) nicht auflösbar sein. Um dann Zahlen β_0 aufzufinden, die tatsächlich (1) befriedigen, verfahren wir wie folgt:

Es sei R* der Konvergenzradius von

$$\varphi(x) = b_1 x^{-1} + b_2 x^{-2} + b_3 x^{-3} + \cdots,$$

d. h. für jedes $|x| > R^*$ finde Konvergenz statt. Ist dann R eine positive Zahl, die größer R* ist, so konvergiert nach bekannten Sätzen über Potenzreihen $\varphi'(R)$ absolut. Daraus folgt: Unter den einzelnen Gliedern von

$$[-\varphi_0'(R)] = \beta_1 R^{-2} + 2\beta_2 R^{-3} + 3\beta_3 R^{-4} + \cdots + \varrho\beta_\varrho R^{-\varrho-1} + \cdots$$

muß für einen endlichen Index $\varrho = q$ ein größtes vorhanden sein. Dieses heiße $q\cdot\beta_q\cdot R^{-q-1} = Q$. Nun setzen wir voraus, daß

$$\beta_0\zeta > R \tag{4}$$

sei. Dann folgt

$$[-\varphi_0'(\beta_0\zeta)] \equiv \beta_1\left(\frac{1}{\beta_0\zeta}\right)^2 + 2\beta_2\left(\frac{1}{\beta_0\zeta}\right)^3 + 3\beta_3\left(\frac{1}{\beta_0\zeta}\right)^4 + \cdots$$
$$= \beta_1 R^{-2}\left(\frac{R}{\beta_0\zeta}\right)^2 + 2\beta_2 R^{-3}\left(\frac{R}{\beta_0\zeta}\right)^3 + 3\beta_3 R^{-4}\left(\frac{R}{\beta_0\zeta}\right)^4 + \cdots$$
$$< Q\left(\frac{R}{\beta_0\zeta}\right)^2 + Q\left(\frac{R}{\beta_0\zeta}\right)^3 + Q\left(\frac{R}{\beta_0\zeta}\right)^4 + \cdots$$
$$= Q\left(\frac{R}{\beta_0\zeta}\right)^2 \frac{1}{1-\dfrac{R}{\beta_0\zeta}} = \frac{QR^2}{\beta_0\zeta(\beta_0\zeta - R)}.$$

Damit also Bedingung (1) erfüllt ist, genügt es zu fordern, daß

$$\frac{QR^2}{\beta_0\zeta(\beta_0\zeta-R)} \leqq \frac{1}{\zeta} - 1 = \frac{1-\zeta}{\zeta}$$

ist. Auflösung dieser Relation ergibt:

$$QR^2 \leqq \beta_0(\beta_0\zeta - R)(1-\zeta) = \beta_0^2\zeta(1-\zeta) - \beta_0 R(1-\zeta)$$

oder

$$\beta_0^2 - \beta_0\frac{R}{\zeta} \geqq \frac{QR^2}{\zeta(1-\zeta)}$$

oder

$$\left(\beta_0 - \frac{R}{2\zeta}\right)^2 \geqq \frac{QR^2}{\zeta(1-\zeta)} + \frac{R^2}{4\zeta^2} = \frac{R^2}{4\zeta^2}\left(4Q\frac{\zeta}{1-\zeta} + 1\right)$$

oder

$$\beta_0 - \frac{R}{2\zeta} \geqq \pm\frac{R}{2\zeta}\sqrt{4Q\frac{\zeta}{1-\zeta}+1}$$

oder

$$\beta_0 \geqq \frac{R}{2\zeta}\left\{1 \underset{(-)}{\pm} \sqrt{4Q\frac{\zeta}{1-\zeta}+1}\right\}.$$

Hier ist vor der Wurzel das $+$-Zeichen zu wählen, weil β_0 eine positive Zahl sein sollte. Wir fragen nun nach dem Minimum β_0' von

$$\beta_0 = \frac{R}{2\zeta}\left\{1 + \sqrt{4Q\frac{\zeta}{1-\zeta}+1}\right\} \tag{5}$$

für variables ζ im Intervall $\left(\frac{1}{2}\cdots 1\right)$. Der das Minimum liefernde Wert ζ' von ζ ist Wurzel von

$$-\frac{1}{\zeta^2}\left(1+\sqrt{4Q\frac{\zeta}{1-\zeta}+1}\right)+\frac{1}{\zeta}\frac{4Q\frac{1-\zeta+\zeta}{(1-\zeta)^2}}{2\sqrt{4Q\frac{\zeta}{1-\zeta}+1}}=0$$

oder von

$$\sqrt{4Q\frac{\zeta}{1-\zeta}+1}=2Q\frac{\zeta}{(1-\zeta)^2}-4Q\frac{\zeta}{1-\zeta}-1$$

oder von

$$\zeta^2(4Q-1)-2\zeta(2Q-1)+(Q-1)=0.$$

Hieraus folgt

$$\zeta=\frac{2Q-1(\pm)\sqrt{Q}}{4Q-1}.$$

Weil nun ζ' eine positive Zahl sein sollte, muß hier vor $\sqrt{Q}$ das $+$-Zeichen stehen, wie eine einfache Überlegung lehrt. Es folgt dann

$$\zeta'=\frac{2Q-1+\sqrt{Q}}{4Q-1}=\frac{\sqrt{Q}+1}{2\sqrt{Q}+1}. \tag{6}$$

Aus (6) sieht man, daß $\frac{1}{2}<\zeta'<1$ ist. Setzt man nun (6) in (5) ein, so erhält man

$$\beta_0'=\frac{R}{2}\frac{2\sqrt{Q}+1}{\sqrt{Q}+1}\left\{1+\sqrt{4Q\frac{\sqrt{Q}+1}{2\sqrt{Q}+1-\sqrt{Q}-1}+1}\right\}$$
$$=R\left(2\sqrt{Q}+1\right). \tag{7}$$

Aus Multiplikation von (6) und (7) folgt

$$\beta_0'\zeta'=R\left(\sqrt{Q}+1\right),$$

d. h. Annahme (4) ist auch erfüllt.

Anmerkungen.

1. Ist der Ausdruck $[-\varphi_0'(R^*)]$ so beschaffen, daß keines seiner Glieder eine feste Zahl Q^* übersteigt, so darf man in der vorstehenden Betrachtung für R einfach R^* und für Q einfach Q^* schreiben, ohne daß sich etwas ändert.

2. Ist $\varphi(x)$ eine Potenzreihe von x^{-1}, die nur für $x=0$ nicht konvergiert, oder hat es nur endlich viele Glieder, so

setze man einfach $R = 1$ und folglich $Q = q\beta_q$. Dann bleiben alle unsere gemachten Aussagen richtig. — Dies ist gleichfalls der Fall bei anderer Wahl von R und eines zugehörigen Wertes von Q.

3. Im Falle, daß $\varphi(x)$ nur endlich viele Glieder hat, daß also die Forderung D

$$\beta_1 \frac{1}{(\beta_0 \zeta)^2} + 2\beta_2 \frac{1}{(\beta_0 \zeta)^3} + \cdots + \varrho \beta_\varrho \frac{1}{(\beta_0 \zeta)^{\varrho+1}} \leqq \frac{1}{\zeta} - 1 = \frac{1-\zeta}{\zeta}$$

lautet, genügt es, weil die linke Seite der obigen Gleichung wegen $\zeta < 1$ selbst kleiner als

$$\beta_1 \frac{1}{\zeta^{\varrho+1}} \frac{1}{\beta_0^2} + 2\beta_2 \frac{1}{\zeta^{\varrho+1}} \frac{1}{\beta_0^3} + \cdots + \varrho \beta_\varrho \frac{1}{\zeta^{\varrho+1}} \frac{1}{\beta_0^{\varrho+1}} = \frac{1}{\zeta^{\varrho+1}} [-\varphi_0'(\beta_0)]$$

ist, um die Forderung D zu erfüllen, β_0 so zu wählen, daß

$$[-\varphi_0'(\beta_0)] \leqq \zeta^\varrho (1-\zeta)$$

ist, oder wenn man noch das Maximum der rechten Seite für variables ζ im Intervall $\left(\frac{1}{2} \cdots 1\right)$ bestimmt, daß

$$[-\varphi_0'(\beta_0)] \leqq \frac{\varrho^\varrho}{(\varrho+1)^{\varrho+1}}$$

ist.

§ 8.

Die trinomische Gleichung. I. Teil: Ein Spezialfall.

Wir wollen das Weierstraßsche Iterationsverfahren jetzt dazu benutzen, eine der Wurzeln einer ganz einfachen Gleichung, nämlich der trinomischen Gleichung

$$x = a + b x^m, \tag{1}$$

wo m eine ganze positive Zahl ist, zu berechnen. Dies soll so geschehen, daß wir für die Wurzel eine unendliche Reihe in den Gleichungskoeffizienten ermitteln. Als Resultat werden wir die Lambertsche Reihe erhalten, so benannt nach J. H. Lambert,[1]) der sich zuerst mit unserem Problem befaßt

[1]) J. H. Lambert, „Observationes variae in Mathesin puram“. §§ 35 bis 40, § 47. in Acta Helvetica t. III. 1758.

hat. Bei ihm beruht die etwas dunkel gehaltene Ableitung des Resultates auf eigentümlichen Größenabschätzungen, die wahrscheinlich noch mit der Methode der unbestimmten Koeffizienten verknüpft wurde. Die Herleitung für ganze Exponenten ist umständlich und nicht mehr anwendbar, wenn die Gleichungskoeffizienten komplexe Zahlen werden. Von der Entwicklung für ganze Exponenten wird ohne Beweis zu der für gebrochene übergegangen. Außerdem hat sich L. Euler[1]) noch mit diesem Problem befaßt, und zwar in zwei Arbeiten, von denen die erste zum großen Teil die Ableitung verschweigt, während die zweite einen ganz eigentümlichen Beweis für die Richtigkeit der hingeschriebenen Reihe erbringt. Die übrigen Arbeiten über die trinomische Gleichung leiten teils die Lambertsche Reihe als Spezialfall aus der Lagrangeschen Reihe ab, teils erwähnen sie die Lambertsche Reihe überhaupt nicht, sondern geben nur bequeme Formeln für die numerische Berechnung der Wurzeln von (1) an.

Um eine Wurzel von

$$x = a + b\, x^m \tag{1}$$

zu berechnen, bilden wir nach Weierstraß folgende Kette von Näherungsausdrücken. Wir setzen das Rechenschema an:

$$x_n = a + b\, x_{n-1}^m$$

und nehmen als ersten Näherungswert

$$x_1 = a.$$

Dann wird

$$x_2 = a + b\, a^m.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} x_3 &= a + b\,(a + b\, a^m)^m \\ &= a + b\, a^m + A_2\, b^2\, a^{2m-1} + \cdots, \end{aligned}$$

wo

---

[1]) L. Euler, „Observationes circa radices aequationum“. §§ 11—12, § 17. in Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. t. XV. 1770. Was an dieser Arbeit auszusetzen ist, hat F. Chio (l. c.) dargelegt. L. Euler, „De serie Lambertina plurimisque eius insignibus proprietatibus“. in Acta Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae. t. II. 1779.

$$A_2 = \frac{m!}{(m-1)!\,1!} \times 1 = \frac{m}{1!}$$

ist.

Es ergibt sich weiter

$$x_4 = a + b\left(a + b\,a^m + \frac{m}{1!} b^2\, a^{2m-1} + \cdots\right)^m$$

$$= a + b\,a^m + \frac{m}{1!} b^2\, a^{2m-1} + A_3\, b^3\, a^{3m-2} + \cdots,$$

wo

$$A_3 = \frac{m!}{(m-1)!\,1!} \times \frac{m}{1!} \cdot + \frac{m!}{(m-2)!\,2!} \times 1^2 = \frac{m\,(3\,m-1)}{2!}.$$

Hiermit finden wir

$$x_5 = a + b\left(a + b\,a^m + \frac{m}{1!} b^2\, a^{2m-1} + \frac{m\,(3\,m-1)}{2!} b^3\, a^{3m-2} + \cdots\right)^m$$

$$= a + b\,a^m + \frac{m}{1!} b^2\, a^{2m-1} + \frac{m\,(3\,m-1)}{2!} b^3 a^{3m-2} + A_4 b^4 a^{4m-3} + \cdots,$$

wo

$$A_4 = \frac{m!}{(m-1)!\,1!} \times \frac{m\,(3\,m-1)}{2!} + \frac{m!}{(m-2)!\;1!\;1!} \times \frac{m}{1!} \cdot 1 + \frac{m!}{(m-3)!\,3!} \times 1^3$$

$$= \frac{m\,(4\,m-1)\,(4\,m-2)}{3!}.$$

Als nächsten Näherungswert erhalten wir:

$$x_6 = a + b\left(a + b\,a^m + \frac{m}{1!} b^2\, a^{2m-1} + \frac{m\,(3\,m-1)}{2!} b^3\, a^{3m-2} + \frac{m\,(4\,m-1)\,(4\,m-2)}{3!} b^4\, a^{4m-3} + \cdots\right)^m$$

$$= a + b\,a^m + \frac{m}{1!} b^2\, a^{2m-1} + \frac{m\,(3\,m-1)}{2!} b^3\, a^{3m-2} + \frac{m\,(4\,m-1)\,(4\,m-2)}{3!} b^4\, a^{4m-3} + A_5\, b^5\, a^{5m-4} + \cdots,$$

wo

$$A_5 = \frac{m!}{(m-1)!\,1!} \times \frac{m(4m-1)(4m-2)}{3!} + \frac{m!}{(m-2)!\,2!} \cdot \left(\frac{m}{1!}\right)^2$$
$$+ \frac{m!}{(m-2)!\,1!\,1!} \times \frac{m(3m-1)}{2!} \cdot 1$$
$$+ \frac{m!}{(m-3)!\,1!\,2!} \times \frac{m}{1!} \cdot 1^2 + \frac{m!}{(m-4)!\,4!} \times 1^4$$
$$= \frac{m(5m-1)(5m-2)(5m-3)}{4!}.$$

Die Bezeichnung der Koeffizienten wird übersichtlicher, wenn man bedenkt, daß

$$\frac{m(5m-1)(5m-2)(5m-3)}{4!} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5m(5m-1)(5m-2)(5m-3)}{4!} = \frac{1}{5}\binom{5m}{4}$$

$$\frac{m(4m-1)(4m-2)}{3!} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4m(4m-1)(4m-2)}{3!} = \frac{1}{4}\binom{4m}{3}$$

$$\frac{m(3m-1)}{2!} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3m(3m-1)}{2!} = \frac{1}{3}\binom{3m}{2}$$

$$\frac{m}{1!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2m}{1!} = \frac{1}{2}\binom{2m}{1}$$

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{1}\binom{1m}{0} = \binom{m}{0}$$

ist.

Wir erhalten dann für die Wurzel $\bar{x}$ von (1) den Ausdruck

$$\left.\begin{aligned}\bar{x} = a + \binom{m}{0} b\, a^m + \frac{1}{2}\binom{2m}{1} b^2 a^{2m-1} + \frac{1}{3}\binom{3m}{2} b^3 a^{3m-2} \\ + \frac{1}{4}\binom{4m}{3} b^4 a^{4m-3} + \frac{1}{5}\binom{5m}{5} b^5 a^{5m-4} \\ + \frac{1}{6}\binom{6m}{5} b^6 a^{6m-5} + \cdots\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

(Man sieht leicht, wie die folgenden Glieder lauten werden.) Wir fragen nun noch, wann konvergiert das Näherungsverfahren und folglich auch die Reihe (2) für die Wurzel $\bar{x}$ von (1). Konvergenz findet nach § 1 Forderung B sicher statt, wenn man $|a|$ so limitiert, daß

$$m \cdot |b| \cdot (|a| \cdot \xi)^{m-1} \leqq 1 - \frac{1}{\xi}$$

oder

$$m \cdot |b| \cdot |a|^{m-1} \leqq \frac{\xi - 1}{\xi^m}$$

ist, oder, indem man das Maximum der rechten Seite bestimmt (vgl. § 2 Formel (9)—(12)), wenn

$$|a|^{m-1} \leqq \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m} \cdot \frac{1}{m \cdot |b|} = \frac{(m-1)^{m-1}}{m^{m+1}} \cdot \frac{1}{|b|}$$

ist.

§ 9.

Die trinomische Gleichung. II. Teil: Der allgemeine Fall.

Wir wollen jetzt das im vorigen Paragraphen behandelte Problem erweitern, indem wir die dort gemachte Voraussetzung: m sei eine ganze Zahl, fallen lassen. Das so erweiterte Problem erfüllt zwar nicht mehr die beim Konvergenzbeweis für das Weierstraßsche Näherungsverfahren gemachte Voraussetzung, daß die in der Gleichung auftretenden Exponenten ganze Zahlen seien; aber wir werden nachträglich zeigen können, daß der nach demselben Verfahren berechnete Ausdruck tatsächlich eine Wurzel der vorgelegten trinomischen Gleichung darstellt.

Hatten wir im vorigen Paragraphen zur Berechnung der einzelnen Näherungswerte den polynomischen Lehrsatz für ganze Exponenten gebraucht, so werden wir hier den polynomischen Lehrsatz für beliebige Exponenten benutzen, wie er dargestellt wird durch die Formel

$$\left.\begin{aligned}&(1+x+y+z+\cdots)^m\\&=1+\binom{m}{1}\cdot(x+y+z+\cdots)^1+\binom{m}{2}\cdot(x+y+z+\cdots)^2+\cdots\\&\qquad+\binom{m}{n}\cdot(x+y+z+\cdots)^n+\cdots\end{aligned}\right\}\quad(\dagger)$$

Diese Entwicklung konvergiert unbedingt (läßt also Umordnung der einzelnen Glieder zu) für jedes m, sobald

$$|x|+|y|+|z|\cdots<1$$

ist.

Wir haben jetzt also die Gleichung

$$x=a+b\,x^m \tag{1}$$

für beliebiges m durch Iteration zu lösen. Wir finden wie in § 8 nach und nach, wenn nur a hinreichend klein ist (s. unten),

$$x_1=a$$

und

$$x_2=a+b\,a^m,$$

ferner

$$\begin{aligned}x_3&=a+b\,(a+b\,a^m)^m=a+b\,a^m\,(1+b\,a^{m-1})^m\\&=a+b\,a^m+A_2\,b^2\,a^{2m-1}+\cdots,\end{aligned}$$

wo

$$A_2=\binom{m}{1}\times 1=\frac{1}{2}\binom{2m}{1}$$

ist.

Hiermit folgt

$$\begin{aligned}x_4&=a+b\left(a+b\,a^m+\frac{1}{2}\binom{2m}{1}b^2\,a^{2m-1}+\cdots\right)^m\\&=a+b\,a^m\left(1+b\,a^{m-1}+\frac{1}{2}\binom{2m}{1}b^2\,a^{2m-2}+\cdots\right)^m\\&=a+b\,a^m+\frac{1}{2}\binom{2m}{1}b^2\,a^{2m-1}+A_3\,b^3\,a^{3m-2}+\cdots,\end{aligned}$$

wo

$$A_3=\binom{m}{1}\times\frac{1}{2}\binom{2m}{1}+\binom{m}{2}\times 1^2=\frac{1}{3}\binom{3m}{2}$$

ist.

Es folgt dann

$$x_5 = a + b\left(a + b a^m + \frac{1}{2}\binom{2m}{1} b^2 a^{2m-1} + \frac{1}{3}\binom{3m}{2} b^3 a^{3m-2} + \cdots\right)^m$$

$$= a + b a^m \left(1 + b a^{m-1} + \frac{1}{2}\binom{2m}{1} b^2 a^{2m-2} + \frac{1}{3}\binom{3m}{2} b^3 a^{3m-3} + \cdots\right)^m$$

$$= a + b a^m + \frac{1}{2}\binom{2m}{1} b^2 a^{2m-1} + \frac{1}{3}\binom{3m}{2} b^3 a^{3m-2} + A_4 b^4 a^{4m-3} + \cdots,$$

wo

$$A_4 = \binom{m}{1} \times \frac{1}{3}\binom{3m}{2} + \binom{m}{2} \times \frac{2!}{1!\,1!} \cdot \frac{1}{2}\binom{2m}{1} \cdot 1 + \binom{m}{3} \times 1^3 = \frac{1}{4}\binom{4m}{3}$$

ist.

Hiermit erhalten wir

$$x_6 = a + b\left(a + b a^m + \frac{1}{2}\binom{2m}{1} b^2 a^{2m-1} + \frac{1}{3}\binom{3m}{2} b^3 a^{3m-2}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\binom{4m}{3} b^4 a^{4m-3} + \cdots\right)^m$$

$$= a + b a^m \left(1 + b a^{m-1} + \frac{1}{2}\binom{2m}{1} b^2 a^{2m-2} + \frac{1}{3}\binom{3m}{2} b^3 a^{3m-3}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\binom{4m}{3} b^4 a^{4m-4} + \cdots\right)^m$$

$$= a + b a^m + \frac{1}{2}\binom{2m}{1} b^2 a^{2m-1} + \frac{1}{3}\binom{3m}{2} b^3 a^{3m-2}$$
$$+ \frac{1}{4}\binom{4m}{3} b^4 a^{4m-3} + A_5 b^5 a^{5m-4} + \cdots,$$

wo

$$A_5 = \binom{m}{1} \times \frac{1}{4}\binom{4m}{3} + \binom{m}{2} \times \frac{2!}{1!\,1!} \cdot \frac{1}{3}\binom{3m}{2} \cdot 1 + \binom{m}{2} \times \left[\frac{1}{2}\binom{2m}{1}\right]^2$$
$$+ \binom{m}{3} \times \frac{3!}{1!\,2!} \cdot \frac{1}{2}\binom{2m}{1} \cdot 1^2 + \binom{m}{4} \cdot 1^4 = \frac{1}{5}\binom{5m}{4}$$

ist.

Weiter finden wir

$$x_7 = a + b\left(a + b\,a^m + \frac{1}{2}\binom{2m}{1} b^2 a^{2m-1} + \frac{1}{3}\binom{3m}{2} b^3 a^{3m-2}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\binom{4m}{3} b^4 a^{4m-3} + \frac{1}{5}\binom{5m}{4} b^5 a^{5m-4}\right)^m$$
$$= a + b\,a^m\left(1 + b\,a^{m-1} + \frac{1}{2}\binom{2m}{1} b^2 a^{2m-2} + \frac{1}{3}\binom{3m}{2} b^3 a^{3m-3}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\binom{4m}{3} b^4 a^{4m-4} + \frac{1}{5}\binom{5m}{4} b^5 a^{5m-5}\right)^m$$
$$= a + b\,a^m + \frac{1}{2}\binom{2m}{1} b^2 a^{2m-1} + \frac{1}{3}\binom{3m}{2} b^3 a^{3m-2}$$
$$+ \frac{1}{4}\binom{4m}{3} b^4 a^{4m-3} + \frac{1}{5}\binom{5m}{4} b^5 a^{5m-4} + A_6 \cdot b^6 a^{6m-5} + \cdots,$$

wo

$$A_6 = \binom{m}{1} \times \frac{1}{5}\binom{5m}{4} + \binom{m}{2} \times \frac{2!}{1!\,1!} \cdot \frac{1}{4}\binom{4m}{3} \cdot 1$$
$$+ \binom{m}{2} \times \frac{2!}{1!\,1!} \cdot \frac{1}{3}\binom{3m}{2} \cdot \frac{1}{2}\binom{2m}{1}$$
$$+ \binom{m}{3} \times \frac{3!}{1!\,2!} \cdot \frac{1}{3}\binom{3m}{2} \cdot 1^2 + \binom{m}{3} \times \frac{3!}{2!\,1!} \cdot \left[\frac{1}{2}\binom{2m}{1}\right]^2 \cdot 1$$
$$+ \binom{m}{4} \times \frac{4!}{1!\,3!} \cdot \frac{1}{2}\binom{2m}{1} \cdot 1^3 + \binom{m}{5} \times 1^5 = \frac{1}{6}\binom{6m}{5}$$

ist.

Wir wollen nun das aus den vorstehenden Näherungswerten sich leicht ergebende Bildungsgesetz der Zahlkoeffizienten A_k in eine Regel fassen. Hierzu schreiben wir am bequemsten für A_k das Symbol:

$$A_k = [k\,m]$$

und bedenken noch, daß

$$A_1 = [1\,m] = 1$$

ist. Dann erhalten wir die **Regel:**

Um das Symbol $[(k+1)m]$ zu erhalten, wo m eine beliebige Zahl und k eine ganze positive Zahl bedeutet, zerlege man k auf alle möglichen Weisen in die Summanden k, k—1, k—2, ... 3, 2, 1; in jeder Art der Zerlegung heiße die Anzahl der Summanden l, die Anzahl, wie oft jeder der Summanden in der Zerlegung vorkommt, bezw. $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \vartheta, \iota, \varkappa$, so daß also

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \vartheta + \iota + \varkappa = l$$

ist. Dann ist

$$[(k+1)m]$$

$$= \sum_{l=1}^{k} \left\{ \binom{m}{l} \cdot l! \sum_{(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \vartheta, \iota, \varkappa)} \frac{[km]^{\alpha} \cdot [(k-1)m]^{\beta} [(k-2)m]^{\gamma} \ldots [3m]^{\vartheta} [2m]^{\iota} [1m]^{\varkappa}}{\alpha! \quad \beta! \quad \gamma! \quad \ldots \quad \vartheta! \quad \iota! \quad \varkappa!} \right\}.$$

Die zweite Summe ist über alle Kombinationen ganzzahliger positiver oder verschwindender $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \vartheta, \iota, \varkappa$ zu erstrecken, deren Summe l ist.

Das Symbol [1m] hat den Wert Eins.

Daß wir nach dieser Regel alle Glieder für den Koeffizienten A_{k+1} erhalten, sieht man leicht ein, wenn man sich an Formel (†) erinnert und bedenkt, daß A_{k+1} Koeffizient von

$$b^{k+1} a^{(k+1)m-k} = b \cdot a^m \times b^k a^{km-k} = b\, a^m \times (b\, a^{m-1})^k$$

ist.

Man bestätigt diese Regel leicht an den bisher berechneten Koeffizienten.

Für A_2 haben wir die Zerlegung

$$1 = 1,$$

für A_3

$$2 = 2 = 1 + 1,$$

für A_4

$$3 = 3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1,$$

für A_5

$$4 = 4 = 3 + 1$$
$$= 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1,$$

für A_6

$$5 = 5 = 4 + 1$$
$$= 3 + 2 = 3 + 1 + 1$$
$$= 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1,$$

und daraus folgen in der Tat die oben angegebenen Koeffizienten.

Für A_7 hätten wir ferner die Zerlegung

$$\begin{aligned}6=6&=5+1\\&=4+2=4+1+1\\&=3+3=3+2+1=3+1+1+1\\&\qquad=2+2+2=2+2+1+1=2+1+1+1+1\\&\qquad\qquad=1+1+1+1+1+1,\end{aligned}$$

und demnach wäre

$$\begin{aligned}A_7=&\binom{m}{1}\cdot 1!\left\{[6m]\right\}\\&+\binom{m}{2}\cdot 2!\left\{[5m][1m]+[4m][2m]+\frac{[3m]^2}{2!}\right\}\\&+\binom{m}{3}\cdot 3!\left\{\frac{[4m]}{1!}\frac{[1m]^2}{2!}+[3m][2m][1m]+\frac{[2m]^3}{3!}\right\}\\&+\binom{m}{4}\cdot 4!\left\{\frac{[3m]}{1!}\frac{[1m]^3}{3!}+\frac{[2m]^2}{2!}\frac{[1m]^2}{2!}\right\}\\&+\binom{m}{5}\cdot 5!\left\{\frac{[2m]}{1!}\frac{[1m]^4}{4!}\right\}\\&+\binom{m}{6}\cdot 6!\left\{\frac{[1m]^6}{6!}\right\}\end{aligned}$$

Wir hatten nun gesehen, daß der Koeffizient $A_{k+1}=[(k+1)m]$ gemäß obiger Regel sich als Doppelsumme aus den vorhergehenden Koeffizienten

$$A_k=[km],\ A_{k-1}=[(k-1)m],\ldots A_2=[2m],\ A_1=[1m]$$

aufbaut. Wir werden später auf anderem Wege zeigen, daß der Koeffizient A_{k+1} immer den Wert hat:

$$A_{k+1}=\frac{1}{k+1}\binom{(k+1)m}{k}.$$

Faßt man dies beides zusammen, so erhält man unter Benutzung des Symbols $[km]$ folgende Formel

$$\frac{1}{k+1}\binom{(k+1)m}{k}=\sum_{l=1}^{k}\left\{\binom{m}{l}l!\sum_{\alpha+\beta+\cdots+\iota+\varkappa=l}\frac{[km]^\alpha\cdot[(k-1)m]^\beta\ldots[2m]^\iota\,[1m]^\varkappa}{\alpha!\quad\beta!\quad\ldots\quad\iota!\quad\varkappa!}\right\}.$$

Auf der rechten Seite darf man auch schreiben

$$\sum_{\alpha,\beta,\ldots,\iota,\varkappa}\left\{\binom{m}{\alpha+\beta+\cdots+\iota+\varkappa}\cdot(\alpha+\beta+\cdots+\iota+\varkappa)!\frac{[k\,m]^\alpha\cdot[(k-1)m]^\beta\ldots[2m]^\iota\,[1m]^\varkappa}{\alpha!\qquad\beta!\qquad\ldots\quad\iota!\qquad\varkappa!}\right\}$$

wo die Summe über alle Kombinationen ganzzahliger positiver oder verschwindender Werte $\alpha, \beta, \ldots \iota, \varkappa$ zu erstrecken ist, die die Bedingung

$$\alpha\cdot k+\beta\cdot(k-1)+\cdots+\iota\cdot 2+\varkappa\cdot 1=k$$

erfüllen. Man erhält dann endlich, indem man die Symbole $[k\,m]$ durch ihre Bedeutung ersetzt, die bis jetzt noch nicht bekannte **kombinatorische Formel**

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{k+1}\binom{(k+1)\,m}{k}=\sum_{\alpha k+\beta(k-1)+\cdots+\iota\cdot 2+\varkappa\cdot 1=k}\Bigg\{&\binom{m}{\alpha+\beta+\cdots+\iota+\varkappa}\cdot(\alpha+\beta+\cdots+\iota+\varkappa)!\\ &\cdot\frac{\left[\frac{1}{k}\binom{k\,m}{k-1}\right]^\alpha\left[\frac{1}{k-1}\binom{(k-1)\,m}{k-2}\right]^\beta\cdots\left[\frac{1}{2}\binom{2m}{1}\right]^\iota\left[\frac{1}{1}\binom{1m}{0}\right]^\varkappa}{\alpha!\qquad\beta!\qquad\ldots\qquad\iota!\qquad\varkappa!}\Bigg\}\end{aligned}\right\}.\quad(2)$$

Kehren wir zu unserm Näherungsverfahren zurück; wir hatten für die Wurzel den Ausdruck gefunden

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}=a+b\,a^m+\frac{1}{2}\binom{2m}{1}b^2a^{2m-1}+\frac{1}{3}\binom{3m}{2}b^3a^{3m-2}\\ +\frac{1}{4}\binom{4m}{3}b^4a^{4m-3}+\frac{1}{5}\binom{5m}{4}b^5a^{5m-4}+\frac{1}{6}\binom{6m}{5}b^6a^{6m-5}+\cdots\end{aligned}\right\}(3)$$

Dieser stimmt mit Formel (2) von § 8 überein.

Wir bemerken hierzu noch, daß wir bei der Ableitung dieser Formel stillschweigend a als so klein vorausgesetzt hatten, daß

$$|A_1|\,|b\,a^{m-1}|+|A_2|\cdot|b^2a^{2m-2}|+|A_3|\cdot|b^3a^{3m-3}|+\cdots<1$$

ist, eine Bedingung, die hinreichend ist, um Formel (1) anzuwenden. Diese Beschränkung von a können wir jetzt wieder aufheben: unsere Formel (3) behält dann ihre Gültigkeit, solange a so beschaffen ist, daß die Reihe (3) [die Lambertsche Reihe] konvergiert (s. unten).

§ 10.

Die trinomische Gleichung.

III. Teil: Weitere Verallgemeinerung.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, nicht bloß die Wurzel selbst einer trinomischen Gleichung, sondern gleich ihre n-te Potenz, wo n eine ganz beliebige Zahl ist, zu berechnen. Um dies Problem zu lösen, gehen wir von Formel (3) des vorigen Paragraphen aus, welche wir unter Benutzung des Symbols [k m] in folgender Form schreiben

$$\bar{x} = a + [1m]\, b\, a^{m} + [2m]\, b^2 a^{2m-1} + [3m]\, b^3 a^{3m-2} + [4m]\, b^4 a^{4m-3} + \cdots$$

$$= a\left\{1 + [1m]\, b\, a^{m-1} + [2m]\, b^2 a^{2m-2} + [3m]\, b^3 a^{3m-3} + [4m]\, b^4 a^{4m-4} + \cdots\right\}.$$

Es ist nun zweckmäßig,

$$b\, a^{m-1} = c$$

zu setzen. Dann wird

$$\bar{x} = a\left\{1 + [1m]\, c + [2m]\, c^2 + [3m]\, c^3 + [4m]\, c^4 + \cdots\right\}. \quad (1)$$

Wir potenzieren nun diesen Ausdruck einfach unter Anwendung von Formel (†) des § 9. Wir erhalten dann

$$\bar{x}^n = a^n\Big\{1$$

$$+\binom{n}{1}\cdot\left([1m]c + [2m]c^2 + [3m]c^3 + [4m]c^4 + [5n]c^5 + [6n]c^6 + \cdots\right)$$

$$+\binom{n}{2}\Big([1m]^2 c^2 + [2m]^2 c^4 + [3m]^2 c^6 + \cdots$$

$$+ 2[1m][2m]c^3 + 2[1m][3m]c^4 + 2[1m][4m]c^5 + 2[1m][5m]c^6 + \cdots$$

$$+ 2[2m][3m]c^5 + 2[2m][4m]c^6 + \cdots + \cdots\Big)$$

$$+\binom{n}{3}\Big([1m]^3 c^3 + [2m]^3 c^6 + \cdots$$

$$+ 3[1m]^2[2m]c^4 + 3[1m]^2[3m]c^5 + 3[1m]^2[4m]c^6 + \cdots$$

$$+ 3[2m]^2[1m]c^5 + \cdots + \cdots$$

$$+ 6[1m][2m][3m]c^6 + \cdots + \cdots\Big)$$

$$+\binom{n}{4}\Big([1\,m]^4 c^4+\cdots$$

$$+4\,[1\,m]^3\,[2\,m]\,c^5+4\,[1\,m]^3\,[3\,m]\,c^6+\cdots+\cdots$$

$$+6\,[1\,m]^2\,[2\,m]^2\,c^6+\cdots+\cdots\Big)$$

$$+\binom{n}{5}\Big([1\,m]^5 c^5+\cdots$$

$$+5\,[1\,m]^4\,[2\,m]\,c^6+\cdots+\cdots\Big)$$

$$+\binom{n}{6}\Big([1\,m]^6 c^6+\cdots+\cdots\Big)$$

$$+\cdots\Big\}.$$

Fassen wir nun die gleichen Potenzen von c zusammen, so erhalten wir

$$\bar{x}^n = a^n\{1+B_1\,c+B_2\,c^2+B_3\,c^3+B_4\,c^4+B_5\,c^5+B_6\,c^6+\cdots\},$$

wo

$$B_1=\binom{n}{1}\cdot[1\,m]=n$$

$$B_2=\binom{n}{1}\cdot[2\,m]+\binom{n}{2}\,[1\,m]^2=\frac{n\,(2\,m+n-1)}{1\quad\cdot\quad 2}$$

$$B_3=\binom{n}{1}\cdot[3\,m]+\binom{n}{2}\cdot\frac{2\,!}{1!\,1!}\,[2\,m]\,[1\,m]+\binom{n}{3}\,[1\,m]^3$$

$$=\frac{n\,(3\,m+n-1)\,(3\,m+n-2)}{1\quad\cdot\quad 2\quad\cdot\quad 3}$$

$$B_4=\binom{n}{1}\cdot[4\,m]+\binom{n}{2}\,[2\,m]^2+\binom{n}{2}\frac{2!}{1!\,1!}\,[3\,m]\,[1\,m]$$

$$+\binom{n}{3}\frac{3!}{1!\,2!}\,[2\,m]\,[1\,m]^2+\binom{n}{4}\,[1\,m]^4$$

$$=\frac{n\,(4\,m+n-1)\,(4\,m+n-2)\,(4\,m+n-3)}{1\quad\cdot\quad 2\quad\cdot\quad 3\quad\cdot\quad 4}$$

$$B_5=\binom{n}{1}\cdot[5\,m]+\binom{n}{2}\frac{2!}{1!\,1!}\,[4\,m]\,[1\,m]+\binom{n}{2}\frac{2!}{1!\,1!}\,[3\,m]\,[2\,m]$$

$$+\binom{n}{3}\frac{3!}{1!\,2!}[3\,m]\,[1\,m]^2+\binom{n}{3}\frac{3!}{2!\,1!}[2\,m]^2[1\,m]$$

$$+\binom{n}{4}\frac{4!}{1!\,3!}[2\,m]\,[1\,m]^3+\binom{n}{5}\cdot[1\,m]^5$$

$$=\frac{n\,(5\,m+n-1)\,(5\,m+n-2)\,(5\,m+n-3)\,(5\,m+n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

$$B_6=\binom{n}{1}\cdot[6\,m]+\binom{n}{2}\cdot[3\,m]^2+\binom{n}{2}\frac{2!}{1!\,1!}[5\,m]\,[1\,m]$$

$$+\binom{n}{2}\frac{2!}{1!\,1!}[4\,m]\,[2\,m]$$

$$+\binom{n}{3}[2\,m]^3+\binom{n}{3}\frac{3!}{1!\,2!}[4\,m]\,[1\,m]^2+\binom{n}{3}\cdot\frac{3!}{1!\,1!\,1!}[3\,m]\,[2\,m]\,[1\,m]$$

$$+\binom{n}{4}\frac{4!}{1!\,3!}[3\,m]\,[1\,m]^3+\binom{n}{4}\frac{4!}{2!\,2!}[2\,m]^2[1\,m]^2$$

$$+\binom{n}{5}\frac{5!}{1!\,4!}[2\,m]\,[1\,m]^4+\binom{n}{6}[1\,m]^6$$

$$=\frac{n\,(6m+n-1)\,(6m+n-2)\,(6m+n-3)\,(6m+n-4)\,(6m+n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$$

Die Koeffizienten $B_1\,B_2\,B_3\cdots$ lassen sich noch etwas übersichtlicher schreiben, und zwar

$$B_1=\frac{n}{1}\binom{m+n-1}{0}=\frac{n}{1}$$

$$B_2=\frac{n}{2}\cdot\binom{2\,m+n-1}{1}$$

$$B_3=\frac{n}{3}\cdot\binom{3\,m+n-1}{2}$$

$$B_4=\frac{n}{4}\cdot\binom{4\,m+n-1}{3}$$

$$B_5=\frac{n}{5}\cdot\binom{5\,m+n-1}{4}$$

$$B_6=\frac{n}{6}\cdot\binom{6\,m+n-1}{5}.$$

Wir führen für B_k noch das Symbol ein:

$$B_k = [k\,m; n].$$

Wir werden später auf anderem Wege sehen, daß allgemein

$$B_k = [k\,m; n] = \frac{n}{k} \cdot \binom{k\,m + n - 1}{k - 1}$$

ist. Andrerseits ergibt sich für die Bildung der Koeffizienten B_k folgende **Regel,** die leicht zu bestätigen ist.

Man zerlege k auf alle möglichen Arten in die Summanden k, k—1, k—2, ⋯ 3, 2, 1. Die Gesamtzahl der Summanden bei jeder Zerlegungsart heiße l, jeder einzelne Summand komme dabei bezw. α, β, γ, ⋯ ϑ, ι, $\varkappa$ Male vor. Es ist dann [km; n] gleich der Doppelsumme

$$[k\,m; n] = \sum_{l=1}^{k} \left\{ \binom{n}{l} \cdot l! \sum_{(\alpha, \beta, \cdots \iota, \varkappa)} \frac{[k\,m]^{\alpha}}{\alpha!} \, \frac{[(k-1)m]^{\beta}}{\beta!} \cdots \frac{[2\,m]^{\iota}}{\iota} \, \frac{[1\,m]^{\varkappa}}{\varkappa!} \right\}.$$

Die zweite Summe ist über alle Kombinationen ganzzahliger positiver oder verschwindender Werte α, β, ⋯ ι, $\varkappa$ zu erstrecken, deren Summe gleich l ist.

Die rechte Seite können wir hier in eine einfache Summe zusammenfassen:

$$\sum_{(\alpha, \beta, \cdots \iota, \varkappa)} \left\{ \binom{n}{\alpha + \beta + \cdots + \iota + \varkappa} \cdot (\alpha + \beta + \cdots + \iota + \varkappa)! \, \frac{[k\,m]^{\alpha}}{\alpha!} \, \frac{[(k-1)m]^{\beta}}{\beta!} \cdots \frac{[2\,m]^{\iota}}{\iota!} \, \frac{[1\,m]^{\varkappa}}{\varkappa!} \right\}.$$

Die Summe ist dabei zu erstrecken über alle Kombinationen ganzzahliger oder verschwindender Werte α, β, ⋯ ι, $\varkappa$, die die Gleichung

$$\alpha \cdot k + \beta \cdot (k-1) + \cdots + \iota \cdot 2 + \varkappa \cdot 1 = k$$

befriedigen.

Erinnert man sich, daß sich zeigen läßt, daß $[k\,m; n] = \frac{n}{k} \binom{k\,m + n - 1}{k - 1}$ ist, und ersetzt man die Symbole [km] durch ihre Werte, so erhält man folgende **Kombinationsformel,** die bisher noch nicht bekannt war:

$$\left.\begin{aligned}\frac{n}{k}\cdot\binom{km+n-1}{k-1} = \sum_{\alpha k+\beta(k-1)+\cdots+\iota\cdot 2+\varkappa\cdot 1=k}\Bigg\{\binom{n}{\alpha+\beta+\cdots+\iota+\varkappa}\cdot(\alpha+\beta+\cdots+\iota+\varkappa)!\\ \cdot\frac{\left[\frac{1}{k}\binom{km}{k-1}\right]^{\alpha}\left[\frac{1}{k-1}\binom{(k-1)m}{k-2}\right]^{\beta}\cdots\left[\frac{1}{2}\binom{2m}{1}\right]^{\iota}\left[\frac{1}{1}\binom{1m}{0}\right]^{\varkappa}}{\alpha!\qquad\beta!\quad\cdots\quad\iota!\qquad\varkappa!}\Bigg\}.\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Kehren wir nun zu dieser Aufgabe zurück. Für $\overline{x}^n$ hatten wir die Formel gefunden

$$\left.\begin{aligned}\overline{x}^n = a^n\Big\{1+\frac{n}{1}\binom{1m+n-1}{0}c+\frac{n}{2}\binom{2m+n-1}{1}c^2+\frac{n}{3}\binom{3m+n-1}{2}c^3\\ +\frac{n}{4}\binom{4m+n-1}{3}c^4+\frac{n}{5}\binom{5m+n-1}{4}c^5+\frac{n}{6}\binom{6m+n-1}{5}c^6+\cdots\Big\},\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

wo

$$c = b\,a^{m-1}$$

ist, oder

$$\overline{x}^n = a^n\{1+[1m;n]c+[2m;n]c^2+[3m;n]c^3+[4m;n]c^4+\cdots\}. \quad (3a)$$

Mit Hilfe dieser Formel können wir nun leicht zeigen, daß, solange Reihe (3) konvergiert, $\overline{x}$ in der Tat eine Wurzel von $x = a + bx^m$ ist, wo m eine beliebige Zahl ist.

Wie man sofort bestätigt, gelten für das Symbol [km; n] die zwei speziellen Formeln

$$\left.\begin{aligned}[km;1] &= [km]\\ [km;m] &= [(k+1)m]\end{aligned}\right\}. \quad (4)$$

Mit Benutzung dieser folgt aus (3a):

$$\overline{x} = a\{1+[1m]c+[2m]c^2+[3m]c^3+[4m]c^4+\cdots\}$$

und

$$b\overline{x}^m = b\,a^m\{1+[2m]c+[3m]c^2+[4m]c^3+\cdots\}$$

oder wegen $b\,a^{m-1} = c$ und $1 = [1m]$

$$= a\{[1m]c+[2m]c^2+[3m]c^3+[4m]c^4+\cdots\}.$$

Also ist identisch

$$\overline{x} = a + b\,\overline{x}^m,$$

und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Nachdem, was wir bisher behandelt haben, können wir jetzt das Problem lösen, die p-te Potenz (wo p eine beliebige Zahl ist) der Wurzel einer trinomischen Gleichung von der Form

$$A\xi^{\mu} + B\xi^{\lambda} = 1 \qquad (\mu > \lambda) \tag{5}$$

in Reihenform anzugeben, wenn μ und λ ganze positive Zahlen sind. Zur Lösung setzen wir

$$\xi^{\lambda} = x,$$

folglich

$$\xi = x^{\frac{1}{\lambda}}. \tag{6}$$

Hiermit geht die vorgelegte Gleichung über in

$$A x^{\frac{\mu}{\lambda}} + B x = 1,$$

woraus folgt

$$x = \frac{1}{B} - \frac{A}{B} x^{\frac{\mu}{\lambda}}. \tag{5 a}$$

Setzen wir nun noch

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mu}{\lambda} &= m_1 \\ \frac{1}{B} &= a_1 \\ -\frac{A}{B} &= b_1 \end{aligned}\right\}, \tag{7}$$

so erhalten wir aus (5 a) die Gleichung

$$x = a_1 + b_1 x^{m_1},$$

also eine von der Form, wie wir sie im vorigen und diesem Paragraphen behandelt haben.

Wir wollten nun die Größe ξ^p bestimmen; um sie zu ermitteln, haben wir wegen (6) nur den Ausdruck $x^{\frac{p}{\lambda}}$ zu berechnen. Wir finden dann mit (3)

$$\xi^p = x^{\frac{p}{\lambda}} = a_1^{\frac{p}{\lambda}} \left\{ 1 + \frac{p}{1\lambda} \binom{1\,m_1 + \frac{p}{\lambda} - 1}{0} b_1 a_1^{m_1 - 1} + \frac{p}{2\lambda} \binom{2\,m_1 + \frac{p}{\lambda} - 1}{1} b_1^2 a_1^{2m_1 - 2} \right.$$

$$\left. + \frac{p}{3\lambda} \binom{3\,m_1 + \frac{p}{\lambda} - 1}{2} b_1^3 a_1^{3m_1 - 3} + \frac{p}{4\lambda} \binom{4\,m_1 + \frac{p}{\lambda} - 1}{3} b_1^4 a_1^{4m_1 - 4} + \cdots \right\}$$

oder unter Benutzung von (7)

$$\left.\begin{aligned} \xi^p = {} & B^{-\frac{p}{\lambda}} - \frac{p}{1\lambda} A B^{-\frac{p+\mu}{\lambda}} + \frac{p}{2\lambda^2} \frac{2\mu + p - \lambda}{1} A^2 B^{-\frac{p+2\mu}{\lambda}} \\ & - \frac{p}{3\lambda^3} \frac{(3\mu + p - \lambda)\,(3\mu + p - 2\lambda)}{1 \cdot 2} A^3 B^{-\frac{p+3\mu}{\lambda}} \\ & + \frac{p}{4\lambda^4} \frac{(4\mu + p - \lambda)\,(4\mu + p - 2\lambda)\,(4\mu + p - 3\lambda)}{1 \cdot 2 \cdot 3} A^4 B^{-\frac{p+4\mu}{\lambda}} \\ & - \cdots + \cdots \end{aligned}\right\} . \quad (8)$$

In der vorstehenden Formel ist für $B^{-\frac{1}{\lambda}}$ immer ein und dieselbe der λ möglichen Ausdrücke $B^{-\frac{1}{\lambda}}$ einzusetzen. Setzt man nacheinander diese λ verschiedenen Werte ein, so erhält man λ verschiedene Wurzeln der vorgelegten trinomischen Gleichung.

Man kann die Gleichung (5) aber auch noch auf eine andere Art auf die Form

$$y = a_2 + b_2\, y^{m_2}$$

bringen. Man setze nämlich

$$\frac{1}{\xi^{\mu - \lambda}} = y,$$

folglich

$$\xi = y^{-\frac{1}{\mu - \lambda}}. \qquad (9)$$

Dann wird aus (5)

$$A\, y^{-\frac{\mu}{\mu - \lambda}} + B\, y^{-\frac{\lambda}{\mu - \lambda}} = 1$$

oder indem man mit $y^{\frac{\mu}{\mu-\lambda}}$ erweitert

$$A \cdot 1 + B\, y = y^{\frac{\mu}{\mu-\lambda}}$$

oder

$$y = -\frac{A}{B} + \frac{1}{B} \cdot y^{\frac{\mu}{\mu-\lambda}}. \tag{5 b}$$

Wir setzen nun noch

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mu}{\mu-\lambda} &= m_2 \\ -\frac{A}{B} &= a_2 \\ \frac{1}{B} &= b_2 \end{aligned}\right\} . \tag{10}$$

Dadurch erhalten wir die gewünschte Form: $y = a_2 + b_2 y^{m_2}$.
Es wird dann wegen (9) und (3)

$$\begin{aligned} \xi^p = y^{-\frac{p}{\mu-\lambda}} = a_2^{-\frac{p}{\mu-\lambda}} \Bigg\{ 1 &- \frac{p}{1(\mu-\lambda)} \binom{1 m_2 - \frac{p}{\mu-\lambda} - 1}{0} b_2 a_2^{m_2-1} \\ &- \frac{p}{2(\mu-\lambda)} \binom{2 m_2 - \frac{p}{\mu-\lambda} - 1}{1} b_2^2 a_2^{2m_2-2} - \frac{p}{3(\mu-\lambda)} \binom{3 m_2 - \frac{p}{\mu-\lambda} - 1}{2} b_2^3 a_2^{3m_2-3} \\ &- \frac{p}{4(\mu-\lambda)} \binom{4 m_2 - \frac{p}{\mu-\lambda} - 1}{3} b_2^4 a_2^{4m_2-4} - \cdots \Bigg\}, \end{aligned}$$

und wenn wir (10) benützen,

$$\left.\begin{aligned} \xi^p = (-A)^{\frac{-p}{\mu-\lambda}} B^{-\frac{-p}{\mu-\lambda}} &- \frac{p}{1(\mu-\lambda)} (-A)^{\frac{\lambda-p}{\mu-\lambda}} B^{-\frac{\mu-p}{\mu-\lambda}} \\ &- \frac{p}{2(\mu-\lambda)^2} \frac{(\mu-p+\lambda)}{1} (-A)^{\frac{2\lambda-p}{\mu-\lambda}} B^{-\frac{2\mu-p}{\mu-\lambda}} \\ &- \frac{p}{3(\mu-\lambda)^3} \frac{(2\mu-p+\lambda)}{1} \frac{(\mu-p+2\lambda)}{2} (-A)^{\frac{3\lambda-p}{\mu-\lambda}} B^{-\frac{3\mu-p}{\mu-\lambda}} \\ &- \frac{p}{4(\mu-\lambda)^4} \frac{(3\mu-p+\lambda)}{1} \cdot \frac{(2\mu-p+2\lambda)}{2} \cdot \frac{(\mu-p+3\lambda)}{3} (-A)^{\frac{4\lambda-p}{\mu-\lambda}} B^{-\frac{4\mu-p}{\mu-\lambda}} \\ &- \cdots \end{aligned}\right\} . \tag{11}$$

In dieser Formel sind für $(-A)^{\frac{1}{\mu-\lambda}}$ und $B^{\frac{1}{\mu-\lambda}}$ immer ein und dieselben der $(\mu-\lambda)$ möglichen Ausdrücke $(-A)^{\frac{1}{\mu-\lambda}}$ und $B^{\frac{1}{\mu-\lambda}}$ zu setzen. Setzt man nacheinander alle verschiedenen Werte ein, so erhält man $(\mu-\lambda)$ verschiedene Wurzeln der gegebenen trinomischen Gleichung, welche, wie man leicht sieht, von den λ in der Form (8) enthaltenen verschieden sind.

Man kann die Gleichung (5) endlich noch auf eine dritte Art, auf die Form

$$z = a_3 + b_3 z^{m_3}$$

bringen. Wir setzen hierzu

$$\xi^{\mu} = z, \text{ folglich } \xi = z^{\frac{1}{\mu}}. \tag{12}$$

Dann wird aus (5)

$$Az + Bz^{\frac{\lambda}{\mu}} = 1$$

oder

$$z = \frac{1}{A} - \frac{B}{A} z^{\frac{\lambda}{\mu}}. \tag{5 c}$$

Setzen wir nun noch

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda}{\mu} &= m_3 \\ \frac{1}{A} &= a_3 \\ -\frac{B}{A} &= b_3 \end{aligned}\right\}, \tag{13}$$

so haben wir die gewünschte Form: $z = a_3 + b_3 z^{m_3}$. Wir finden wegen (12) aus (3)

$$\begin{aligned} \xi^{p} = z^{\frac{p}{\mu}} = a_3^{\frac{p}{\mu}} \Bigg\{ 1 &+ \frac{p}{1\mu}\binom{1m_3 + \frac{p}{\mu} - 1}{0} b_3 a_3^{m_3-1} \\ &+ \frac{p}{2\mu}\binom{2m_3 + \frac{p}{\mu} - 1}{1} b_3^2 a_3^{2m_3-2} + \frac{p}{3\mu}\binom{3m_3 + \frac{p}{\mu} - 1}{2} b_3^3 a_3^{3m_3-2} \\ &+ \frac{p}{4\mu}\binom{4m_3 + \frac{p}{\mu} - 1}{3} b_3^4 a_3^{4m_3-4} + \cdots \Bigg\} \end{aligned}$$

und mit (13)

$$\left.\begin{array}{l}\xi^{p} = A^{-\frac{p}{\mu}} - \frac{p}{1\mu} B A^{-\frac{p+\lambda}{\mu}} + \frac{p}{2\mu^2} \frac{2\lambda + p - \mu}{1} B^2 A^{-\frac{p+2\lambda}{\mu}} \\ - \frac{p}{3\mu^2} \cdot \frac{(3\lambda + p - \mu)(3\lambda + p - 2\mu)}{1 \cdot 2} B^3 A^{-\frac{p+3\lambda}{\mu}} \\ + \frac{p}{4\mu^4} \cdot \frac{(4\lambda + p - \mu)(4\lambda + p - 2\mu)(4\lambda + p - 3\mu)}{1 \cdot 2 \cdot 3} B^4 A^{-\frac{p+4\lambda}{\mu}} \\ - \cdots + \end{array}\right\} . \quad (14)$$

In dieser Formel ist für $A^{-\frac{1}{\mu}}$ immer ein und derselbe Wert der μ möglichen Werte von $A^{-\frac{1}{\mu}}$ einzusetzen. Setzt man nacheinander diese μ möglichen Werte ein, so erhält man μ verschiedene Wurzeln der vorgelegten trinomischen Gleichung.

Bezeichnet man die Glieder von

(8) der Reihe nach mit $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$

(11) „ „ „ „ $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$

(14) „ „ „ „ $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, \ldots$

so ist, wie schon Lambert,[1]) jedoch ohne Beweis, angibt,

$$\lim_{k=\infty} \left| \frac{a_{k+\lambda}}{a_k} \right| = \frac{\mu^\mu}{\lambda^\lambda (\mu - \lambda)^{\mu - \lambda}} \cdot \frac{|A|^\lambda}{|B|^\mu}$$

und, wie man durch passende Vertauschungen leicht findet,

$$\lim_{k=\infty} \left| \frac{b_{k+\mu-\lambda}}{b_k} \right| = \frac{\mu^\mu}{\lambda^\lambda (\mu - \lambda)^{\mu - \lambda}} \cdot \frac{|A|^\lambda}{|B|^\mu}$$

$$\lim_{k=\infty} \left| \frac{c_{k+\mu}}{c_k} \right| = \frac{\lambda^\lambda (\mu - \lambda)^{\mu - \lambda}}{\mu^\mu} \cdot \frac{|B|^\mu}{|A|^\lambda}.$$

Also folgert man mit dem Cauchyschen Konvergenzkriterium, daß einerseits die Reihen (8) und (11) beide gleichzeitig konvergieren, die Reihe (14) aber divergiert, wenn

[1]) J. H. Lambert, Observationes variae in Mathesin puram §§ 35—40, § 47 in Acta Helvetia t. III 1758.

$$\frac{\mu^\mu}{\lambda^\lambda(\mu-\lambda)^{\mu-\lambda}}\cdot\frac{|A|^\lambda}{|B|^\mu}<1 \tag{15}$$

ist, und daß andrerseits die Reihe (14) konvergiert, die Reihen (8) und (11) aber beide gleichzeitig divergieren, wenn

$$\frac{\mu^\mu}{\lambda^\lambda(\mu-\lambda)^{\mu-\lambda}}\cdot\frac{|A|^\lambda}{|B|^\mu}>1 \tag{16}$$

ist. Herr Westphal[1]) hat mit dem Raabeschen Konvergenzkriterium gezeigt, daß (8) und (11) auch konvergieren, wenn in (15) das Gleichheitszeichen steht, und daß (14) auch konvergiert, wenn in (16) das Gleichheitszeichen steht. Fassen wir diese Resultate und unsere Bemerkungen über die durch die Reihen (8), (11), (14) dargestellten Wurzeln zusammen, so erhalten wir den **Satz:**

Wir erhalten stets alle μ Wurzeln der trinomischen Gleichung (5) vom Grade μ, entweder λ durch die Entwicklung (8) und $(\mu-\lambda)$ durch die Entwicklung (11), wenn nämlich (15) erfüllt ist, oder μ durch die Entwicklung (14), wenn nämlich (16) befriedigt wird.

Es sei noch bemerkt, daß jeweils unter Benutzung von bezw. (7) oder (10) oder (13) folgt

$$\lim_{k=\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{m_1^{m_1}}{(m_1-1)^{m_1-1}}\right| |b_1|\,|a_1|^{m_1-1}$$

$$\lim_{k=\infty}\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = \left|\frac{m_2^{m_2}}{(m_2-1)^{m_2-1}}\right| |b_2|\,|a_2|^{m_2-1}$$

$$\lim_{k=\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \left|\frac{m_3^{m_3}}{(m_3-1)^{m_3-1}}\right| |b_3|\,|a_3|^{m_3-1}.$$

Hieraus ergibt sich, daß die in § 8 am Schluß aufgestellte Konvergenzbedingung zu eng ist, und da diese unter Benutzung von Forderung B abgeleitet wurde, daß Forderung B zwar hinreichend, aber nicht notwendig ist.

---

[1]) Westphal, Evolutio radicum aequationum algebraicarum e ternis terminis constantium in series infinitas, Göttingen 1850. (Preisgekrönte Arbeit.)

§ 11.

Die Reihe von Lagrange. I. Teil: Herleitung der Reihe.

Unser Näherungsverfahren erlaubt uns auch die berühmte Reihe von Lagrange auf verhältnismäßig einfachem Wege abzuleiten. Wegen der reichhaltigen Literatur, die über diesen Gegenstand existiert, verweise ich auf den Enzyklopädieartikel von Osgood, Allgemeine Theorie der komplexen Funktionen,[1]) auf den Bericht von Brill und Noether, Über die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen,[2]) und auf die Arbeit von G. Sudan, Sulla „serie de Lagrange".[3]) In diesen Arbeiten findet man die über den vorliegenden Gegenstand existierende Literatur übersichtlich zusammengestellt.

Bei der Reihe von Lagrange handelt es sich darum, aus der Gleichung

$$u - x + t\varphi(x) = 0, \tag{1}$$

in der $\varphi(x)$ eine in einer hinreichend großen Umgebung von $x = u$ eindeutige analytische Funktion ist, welche der Bedingung $\varphi(u) \neq 0$ genügt und in der u und t Konstante sind, eine Wurzel α oder vielmehr gleich eine in einer hinreichend großen Umgebung von $x = u$ eindeutige analytische Funktion $\psi(x)$ von α zu bestimmen. Weil sich (1) auf die Form:

$$x = u + t\varphi(x) \tag{1a}$$

bringen läßt, so läßt sich auf jeden Fall eine Wurzel von (1a) mittels des Weierstraßschen Iterationsverfahrens ermitteln, wenn sowohl $\varphi(0) = 0$ ist als auch u und t beide so klein sind, daß die Forderung B erfüllt wird. Wir wollen die Lagrangesche Reihe unter dieser Voraussetzung ableiten, dann aber zeigen, daß wir diese Voraussetzung fallen lassen dürfen. Dies ist so zu verstehen, daß wir wissen, wenn die besagte Voraussetzung erfüllt ist, so konvergiert die hingeschriebene Reihe, daß wir aber nicht wissen, ob die Reihe auch dann noch konvergiert, wenn

---

[1]) Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften II Bd. 1 Nr. 15.

[2]) Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung Bd. 3 (1892/93) S. 153 u. 178.

[3]) Giornale di matematiche di Battaglini 44 [(2) 13] p. 89—120.

die besagte Voraussetzung nicht erfüllt ist, obwohl sich an der Art und Weise der Ableitung des Resultates gar nichts ändert.

Bei der Ableitung verfahren wir ein klein wenig anders als in § 1, nach welchem wir für die einzelnen Näherungswerte der Wurzel α von (1a) einfach folgende Ausdrücke zu bilden hätten:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \mathrm{u} \\
\alpha_2 &= \mathrm{u} + \mathrm{t}\,\varphi(\mathrm{u}) \\
\alpha_3 &= \mathrm{u} + \mathrm{t}\,\varphi\big(\mathrm{u} + \mathrm{t}\,\varphi(\mathrm{u})\big) \\
\alpha_4 &= \mathrm{u} + \mathrm{t}\,\varphi\Big(\mathrm{u} + \mathrm{t}\,\varphi\big(\mathrm{u} + \mathrm{t}\,\varphi(\mathrm{u})\big)\Big) \\
\alpha_5 &= \mathrm{u} + \mathrm{t}\,\varphi\bigg(\mathrm{u} + \mathrm{t}\,\varphi\Big(\mathrm{u} + \mathrm{t}\,\varphi\big(\mathrm{u} + \mathrm{t}\,\varphi(\mathrm{u})\big)\Big)\bigg) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Denn die hier angedeutete Rechnung wirklich durchzuführen, indem wir nach dem Cauchy-Taylorschen Lehrsatze entwickeln, ist mit unnötig viel Rechnung verbunden. Der Umstand, welcher die Rechnung, die hier angedeutet ist, wesentlich abkürzt, ist der, daß wir uns gleich die erweiterte Aufgabe stellen, nicht nur die Wurzel α, sondern eine beliebige reguläre Funktion $\psi(\alpha)$ dieser Wurzel α zu bestimmen. Mit diesem Kunstgriff werden wir schnell zum Ziele gelangen.

Wenn α eine Wurzel von (1a) ist, so ist zunächst identisch

$$\psi(\alpha) \equiv \psi\big(\mathrm{u} + \mathrm{t}\,\varphi(\alpha)\big),$$

und wenn wir nach dem Cauchy-Taylorschen Lehrsatz entwickeln, erhalten wir für hinreichend kleine Werte von t, für die ja $\alpha \equiv \mathrm{u} + \mathrm{t}\,\varphi(\alpha)$ der Umgebung von u angehört:

$$\left.\begin{aligned}
\psi(\alpha) = \psi(\mathrm{u}) + \frac{\mathrm{t}\,\varphi(\alpha)}{1!}\,\psi'(\mathrm{u}) + \frac{\mathrm{t}^2\,\varphi(\alpha)^2}{2!}\,\psi''(\mathrm{u}) + \frac{\mathrm{t}^3\,\varphi(\alpha)^3}{3!}\,\psi'''(\mathrm{u}) \\
+ \cdots + \frac{\mathrm{t}^{\mathrm{n}}\,\varphi(\alpha)^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}!}\,\psi^{(\mathrm{n})}(\mathrm{u}) + \cdots
\end{aligned}\right\} . \quad (2)$$

Wir erinnern uns nun an folgende identische Differentationsformeln: Sind y und z zwei in einem gewissen Bereiche beliebig oft differenzierbare Funktionen von x, so ist für jedes ganzzahlig positive n:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}(y\cdot z) = y^{(n)}\cdot z + \binom{n}{1} y^{(n-1)}\cdot z' + \binom{n}{2} y^{(n-2)}\cdot z'' + \cdots \\ + \binom{n}{n-1} y'\cdot z^{(n-1)} + \binom{n}{n} y\cdot z^{(n)}\end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Ist ferner $\varphi(x)$ eine an der Stelle u analytische Funktion von x, so ist

$$\varphi(u)^k \cdot \frac{d}{du}\varphi(u)^l = \frac{1}{k+l}\cdot\frac{d}{du}\varphi(u)^{k+l}. \tag{4}$$

Aus (2) folgt zunächst

$$\psi(a) = \psi(u) + t(\cdots). \tag{5}$$

Speziell ist also, weil auch φ eine in der Umgebung von u reguläre Funktion ist,

$$\varphi(a) = \varphi(u) + t(\cdots). \tag{5 a}$$

Setzen wir dies in (2) ein, so erhalten wir

$$\psi(a) = \psi(u) + \frac{t\cdot[\varphi(u) + t(\cdots)]}{1!}\frac{d\psi(u)}{du} + t^2(\cdots)$$

oder

$$\psi(a) = \psi(u) + \frac{t}{1!}\varphi(u)\frac{d}{du}\psi(u) + t^2(\cdots). \tag{6}$$

Speziell ist also, weil auch φ und φ^2 in der Umgebung von u reguläre Funktionen sind,

$$\left.\begin{aligned}\varphi(a) &= \varphi(u) + \frac{t}{1!}\varphi(u)\frac{d}{du}\varphi(u) + t^2(\cdots) \\ \varphi(a)^2 &= \varphi(u)^2 + \frac{t}{1!}(\cdots)\end{aligned}\right\}. \tag{6 a}$$

Setzen wir dies in (2) ein, so finden wir

$$\begin{aligned}\psi(a) = \psi(u) &+ \frac{t\left[\varphi(u) + \frac{t}{1!}\varphi(u)\frac{d}{du}\varphi(u) + t^2(\cdots)\right]}{1!}\frac{d\psi(u)}{du} \\ &+ \frac{t^2\left[\varphi(u)^2 + \frac{t}{1!}(\cdots)\right]}{2!}\frac{d^2\psi(u)}{du^2} + t^3(\cdots)\end{aligned}$$

oder unter Benutzung von (3) und (4)

$$\left.\begin{aligned}\psi(\alpha) = \psi(u) + \frac{t}{1!}\left(\varphi(u)\frac{d}{du}\psi(u)\right) \\ + \frac{t^2}{2!}\frac{d}{du}\left(\varphi(u)^2\frac{d}{du}\psi(u)\right) + t^3(\cdots)\end{aligned}\right\}. \quad (7)$$

Speziell haben wir wieder:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\alpha) &= \varphi(u) + \frac{t}{1!}\left(\varphi(u)\frac{d}{du}\varphi(u)\right) + \frac{t^2}{2!}\frac{d}{du}\left(\varphi(u)^2\frac{d}{du}\varphi(u)\right) + t^3(\cdots) \\ \varphi(\alpha)^2 &= \varphi(u)^2 + \frac{t}{1!}\left(\varphi(u)\frac{d}{du}\varphi(u)^2\right) + \frac{t^2}{2!}(\cdots) \\ \varphi(\alpha)^3 &= \varphi(u)^3 + \frac{t}{1!}(\cdots)\end{aligned}\right\}. \quad (7\,a)$$

Durch Einsetzen in (2) ergibt sich:

$$\begin{aligned}\psi(\alpha) = \psi(u) &+ \frac{t\left[\varphi(u) + \frac{t}{1!}\left(\varphi(u)\frac{d}{du}\varphi(u)\right) + \frac{t^2}{2!}\frac{d}{du}\left(\varphi(u)^2\frac{d}{du}\varphi(u)\right) + t^3(\cdots)\right]}{1!}\frac{d\psi(u)}{du} \\ &+ \frac{t^2\left[\varphi(u)^2 + \frac{t}{1!}\left(\varphi(u)\frac{d}{du}\varphi(u)^2\right) + \frac{t^2}{2!}(\cdots)\right]}{2!}\frac{d^2\psi(u)}{du^2} \\ &+ \frac{t^3\left[\varphi(u)^3 + \frac{t}{1!}(\cdots)\right]}{3!}\frac{d^3\psi(u)}{du^3} + t^4(\cdots)\end{aligned}$$

oder unter Anwendung von (3) und (4)

$$\begin{aligned}\psi(\alpha) = \psi(u) + \frac{t}{1!}\left(\varphi(u)\frac{d\psi(u)}{du}\right) + \frac{t^2}{2!}\frac{d}{du}\left(\varphi(u)^2\frac{d\psi(u)}{du}\right) \\ + \frac{t^3}{3!}\frac{d^2}{du^2}\left(\varphi(u)^3\frac{d\psi(u)}{d\mu}\right) + t^4(\cdots).\end{aligned}$$

Wir vermuten, daß das allgemeine Glied der Entwicklung von $\psi(\alpha)$

$$\frac{t^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\,u^{n-1}}\left(\varphi(u)^n\frac{d\,\psi(u)}{d\,u}\right)$$

heißen wird. Daß dies wirklich der Fall ist, ist leicht durch Schluß von n auf $n+1$ zu beweisen. Wir nehmen also an, wir hätten bereits für $\psi(a)$ den Ausdruck

$$\left.\begin{aligned}\psi(a) = \psi(u) + \frac{t}{1!}\left(\varphi(u)\frac{d\,\psi(u)}{d\,u}\right) + \frac{t^2}{2!}\frac{d}{d\,u}\left(\varphi(u)^2\frac{d\,\psi(u)}{d\,u}\right) + \cdots\\ + \frac{t^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\,u^{n-1}}\left(\varphi(u)^n\frac{d\,\psi\,u}{d\,u}\right) + t^{n+1}(\cdots)\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

gefunden. Dann ergibt sich, weil φ, φ^2, ... φ^k, ... φ^n, φ^{n+1} gerade so in der Umgebung von u analytische Funktionen sind, wie es ψ ist, indem man in (8) der Reihe nach das Zeichen ψ durch die Zeichen φ, φ^2, ... φ^k, ... φ^n, φ^{n+1} ersetzt,

$$\begin{aligned}
\varphi(a) &= \varphi(u) + \cdots\cdots + \frac{t^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\,u^{n-1}}\left(\varphi(u)^n\frac{d}{d\,u}\varphi(u)\right) + t^{n+1}(\cdots)\\
\varphi(a)^2 &= \varphi(u)^2 + \cdots\cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^{n-2}}{d\,u^{n-2}}\left(\varphi(u)^{n-1}\frac{d}{d\,u}\varphi(u)^2\right) + t^n(\cdots)\\
&\vdots\\
\varphi(a)^k &= \varphi(u)^k + \cdots + \frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!}\frac{d^{n-k}}{d\,u^{n-k}}\left(\varphi(u)^{n-k+1}\frac{d}{d\,u}\varphi(u)^k\right) + t^{n-k+2}(\cdots\\
&\vdots\\
\varphi(a)^n &= \varphi(u)^n + \frac{t}{1!}\cdot\left(\varphi(u)\frac{d}{d\,u}\varphi(u)^n\right) + t^2(\cdots)\\
\varphi(a)^{n+1} &= \varphi(u)^{n+1} + t(\cdots)
\end{aligned}$$

Setzen wir diese Werte in (2) ein und suchen wir dann alle Koeffizienten von t^{n+1} auf, so finden wir als solche der Reihe nach:

$$\frac{1}{1!\,n!}\frac{d^{n-1}}{du^{n-1}}\left(\varphi(u)^n\frac{d}{du}\varphi(u)\right)\frac{d\psi(u)}{du}+\frac{1}{2!\,(n-1)!}\frac{d^{n-2}}{du^{n-2}}\left(\varphi(u)^{n-1}\frac{d}{du}\varphi(u)^2\right)\frac{d^2\psi(u)}{du^2}$$
$$+\cdots+\frac{1}{k!\,(n-k+1)!}\frac{d^{n-k}}{du^{n-k}}\left(\varphi(u)^{n-k+1}\frac{d}{du}\varphi(u)^k\right)\frac{d^k\psi(u)}{du^k}$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!\,1!}\left(\varphi(u)\frac{d}{du}\varphi(u)^n\right)\frac{d^n\psi(u)}{du^n}+\frac{1}{(n+1)!}\varphi(u)^{n+1}\cdot\frac{d^{n+1}\psi(u)}{du^{n+1}}.$$

Unter Benutzung von Formel (4) und weil

$$\frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!}\times\frac{k}{n+1}=\binom{n}{k-1}$$

ist, dürfen wir für diese Summe auch schreiben:

$$\frac{1}{(n+1)!}\left\{\frac{d^n}{du^n}\varphi(u)^{n+1}\times\psi'(u)+\binom{n}{1}\frac{d^{n-1}}{du^{n-1}}\varphi(u)^{n+1}\times\frac{d}{du}\psi'(u)\right.$$
$$+\cdots+\binom{n}{k-1}\frac{d^{n-k+1}}{du^{n-k+1}}\varphi(u)^{n+1}\times\frac{d^{k-1}}{du^{k-1}}\psi'(u)$$
$$+\cdots+\binom{n}{n-1}\frac{d}{du}\varphi(u)^{n+1}\times\frac{d^{n-1}}{du^{n-1}}\psi'(u)$$
$$\left.+\binom{n}{n}\varphi(u)^{n+1}\times\frac{d^n}{du^n}\psi'(u)\right\}.$$

Wenden wir hierauf noch die Formel (3) an, so erhalten wir als Koeffizienten von t^{n+1} den Ausdruck

$$\frac{1}{(n+1)!}\frac{d^n}{du^n}\left(\varphi(u)^{n+1}\cdot\psi'(u)\right)$$

womit der Beweis erbracht ist, daß wir das allgemeine Glied der Reihe von Lagrange richtig angegeben hatten, wenn wir behaupteten, daß es

$$\frac{t^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{du^{n-1}}\left(\varphi(u)^n\cdot\psi'(u)\right), \tag{9}$$

laute. Also haben wir

$$\left.\begin{aligned}\psi(\alpha)=\psi(u)+\frac{t}{1!}\left(\varphi(u)\psi'(u)\right)+\frac{t^2}{2!}\frac{d}{du}\left(\varphi(u)^2\cdot\psi'(u)\right)\\+\frac{t^3}{3!}\frac{d^2}{du^2}\left(\varphi(u)^3\psi'(u)\right)+\cdots+\frac{t^k}{k!}\frac{d^{k-1}}{du^{k-1}}\left(\varphi(u)^k\cdot\psi'(u)\right)+\cdots\end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

Dies ist die Reihe von Lagrange.

Wir können jetzt leicht berechnen, wie das allgemeine Glied der **Lambert**schen Reihe lautet. Hierzu haben wir nur auf die Gleichung

$$x = a + b x^m$$

die Formel (10) anzuwenden, in welcher wir in unserem Fall

$$u = a \quad ; \qquad t = 1$$
$$\varphi(x) = b\, x^m; \quad \psi(x) = x^n$$

zu setzen haben. Es ist dann

$$\varphi(u) = b\, a^m; \quad \psi'(u) = n\, a^{n-1}.$$

Also haben wir

$$\alpha^n = a^n + \frac{n}{1!}(b\, a^{m+n-1}) + \frac{n}{2!}\frac{d}{d\,a}(b^2\, a^{2m+n-1}) + \frac{n}{3!}\frac{d^2}{d\,a^2}(b^3\, a^{3m+n-1})$$
$$+ \cdots + \frac{n}{k!}\frac{d^{k-1}}{d\,a^{k-1}}(b^k\, a^{km+n-1}) + \cdots,$$

und wenn man die Differentationen ausführt, in der Tat:

$$\alpha^n = a^n + \frac{n}{1}\binom{1m+n-1}{0} b\, a^{m+n-1} + \frac{n}{2}\binom{2m+n-1}{1} b^2\, a^{2m+n-2}$$
$$+ \frac{n}{3}\binom{3m+n-1}{2} b^3\, a^{3m+n-3} + \cdots + \frac{n}{k}\binom{km+n-1}{k-1} b^k\, a^{km+n-k} + \cdots$$

Damit ist Formel (3) und folglich auch Formel (2) von § 10 bewiesen.

Setzt man noch $n = 1$, so erhält man

$$\alpha = a + \frac{1}{1}\binom{1m}{0} b\, a^m + \frac{1}{2}\binom{2m}{1} b^2\, a^{2m-1} + \frac{1}{3}\binom{3m}{2} b^3\, a^{3m-2}$$
$$+ \cdots + \frac{1}{k}\binom{km}{k-1} b^k\, a^{km+1-k} + \cdots$$

und damit den Beweis für Formel (3) und (2) von § 9.

§ 12.

Die Reihe von Lagrange. II. Teil: Konvergenz der Reihe.

In diesem Paragraphen soll einerseits die Konvergenz der Reihe von **Lagrange** untersucht werden; dies geschieht, indem wir ein Restglied ermitteln; zugleich werden die speziellen Annahmen des § 11 fallen gelassen. Andrerseits müssen wir uns über den Ausdruck „$\varphi(x)$ und $\psi(x)$ seien in einer hinreichend großen Umgebung von $x = u$ eindeutige, analytische Funktionen von x“ etwas ausführlicher verbreiten.

Um zu einem Restglied zu gelangen, vergleichen wir den Ausdruck

$$\frac{t^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{d\,u^{k-1}} \left(\varphi(u)^k \cdot \psi'(u)\right)$$

mit dem in seinem Aufbau symmetrischeren Ausdruck

$$\frac{t^k}{k!} \frac{d^k}{d\,u^k} \left(\varphi(u)^k \cdot \psi(u)\right).$$

Wir finden dann leicht die Beziehung:

$$\left.\begin{aligned} \frac{t^k}{k!} \cdot \frac{d^{k-1}}{d\,u^{k-1}} \left(\varphi(u)^k \cdot \psi'(u)\right) &= \frac{t^k}{k!} \frac{d^k}{d\,u^k} \left(\varphi(u)^k \cdot \psi(u)\right) \\ &- \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{d\,u^{k-1}} \left(\varphi(u)^{k-1} \cdot \psi(u) \times t\varphi'(u)\right) \cdots \end{aligned}\right\}. \quad (1)$$

Wir schreiben diese Beziehung jetzt für $k = n, n-1, n-2, \ldots 2, 1$ hin. Dann erhalten wir

$$\frac{t^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{d\,u^{n-1}} \left(\varphi(u)^n \cdot \psi'(u)\right)$$

$$= \frac{t^n}{n!} \frac{d^n}{d\,u^n} \left(\varphi(u)^n \cdot \psi(u)\right) - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\,u^{n-1}} \left(\varphi(u)^{n-1} \psi(u) \times t\varphi'(u)\right)$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-2}}{d\,u^{n-2}} \left(\varphi(u)^{n-1} \cdot \psi'(u)\right)$$

$$= \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\,u^{n-1}} \left(\varphi(u)^{n-1} \cdot \psi(u)\right) - \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \frac{d^{n-2}}{d\,u^{n-2}} \left(\varphi(u)^{n-2} \psi(u) \times t\varphi'(u)\right)$$

$$\frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \frac{d^{n-3}}{d\,u^{n-3}} \left(\varphi(u)^{n-2} \cdot \psi'(u)\right)$$

$$= \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \frac{d^{n-2}}{d\,u^{n-2}} \left(\varphi(u)^{n-2} \cdot \psi(u)\right) - \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} \frac{d^{n-3}}{d\,u^{n-3}} \left(\varphi(u)^{n-3} \psi(u) \times t\varphi'(u)\right)$$

. . . .

$$\frac{t^2}{2!}\,\frac{d}{du}\Big(\varphi(u)^2\cdot\psi'(u)\Big)\quad\vdots\qquad\qquad\vdots$$

$$=\frac{t^2}{2!}\,\frac{d^2}{du^2}\Big(\varphi(u)^2\cdot\psi(u)\Big)-\frac{t}{1!}\,\frac{d}{du}\Big(\varphi(u)\cdot\psi(u)\times t\varphi'(u)\Big)$$

$$\frac{t}{1!}\Big(\varphi(u)\cdot\psi'(u)\Big)\quad\vdots\qquad\qquad\vdots$$

$$=\frac{t}{1!}\,\frac{d}{du}\Big(\varphi(u)\cdot\psi(u)\Big)-\Big(\psi(u)\times t\varphi'(u)\Big)$$

$$\psi(u)=\psi(u)$$

Addieren wir nun diese Relationen, so erhalten wir leicht:

$$\left.\begin{aligned}&\psi(u)+\sum_{k=1}^{k=n}\frac{t^k}{k!}\,\frac{d^{k-1}}{du^{k-1}}\Big(\varphi(u)^k\cdot\psi'(u)\Big)\\&=\frac{t^n}{n!}\,\frac{d^n}{du^n}\Big(\varphi(u)^n\cdot\psi(u)\Big)+\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{t^k}{k!}\,\frac{d^k}{du^k}\Big[\varphi(u)^k\cdot\psi(u)\times\Big(1-t\varphi'(u)\Big)\Big]\end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Links steht in dieser Formel die Reihe von L a g r a n g e bis einschließlich zum $(n+1)$ten Gliede. Die rechte Seite wollen wir auf komplexem Wege umformen. Es sei $\varphi(x)$ eine innerhalb des Bereiches T_1 und $\psi(x)$ eine innerhalb des Bereiches T_2 der komplexen x-Ebene eindeutige analytische Funktion. Beide Bereiche T_1 und T_2 mögen einen gemeinsamen Teilbereich S besitzen. Liegt dann der Punkt $x = u$ im Innern von S, so zeichne man eine die Stelle $x = u$ umschließende Kurve C, deren Punkte sämtlich zu S gehören. Dann findet man unter Benutzung von bekannten Formeln[1]) für die rechte Seite von (2) den Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\big(t\varphi(x)\big)^n\,\psi(x)}{(x-u)^{n+1}}\,dx+\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{k=n-1}\int_C\frac{\big(t\varphi(x)\big)^k\cdot\psi(x)\,\big(1-t\varphi'(x)\big)}{(x-u)^{k+1}}\,dx. \qquad (3)$$

Hier läßt sich der zweite Bestandteil noch weiter umformen: Wir setzen zur Abkürzung

[1]) Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie 2. Aufl. 1912 Kap. 7 § 5, 1 S. 298.

$$\psi(x)\left(1-t\varphi'(x)\right)=f(x)\,.$$

Außerdem lassen sich Summenzeichen und Integralzeichen vertauschen. Hierdurch finden wir für den zweiten Bestandteil

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \sum_{k=0}^{k=n-1}\left\{\frac{f(x)}{x-u}\cdot\left(\frac{t\varphi(x)}{x-u}\right)^k\right\}dx=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(x)}{x-u}\cdot\frac{1-\left(\frac{t\varphi(x)}{x-u}\right)^n}{1-\frac{t\varphi(x)}{x-u}}\cdot dx\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(x)}{x-u-t\varphi(x)}\,dx-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\left(\frac{t\varphi(x)}{x-u}\right)^n\cdot\frac{f(x)}{x-u-t\varphi(x)}\,dx\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{\psi(x)\left(1-t\varphi'(x)\right)}{x-u-t\varphi(x)}\,dx-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\left(\frac{t\varphi(x)}{x-u}\right)^n\frac{\psi(x)\left(1-t\varphi'(x)\right)}{x-u-t\varphi(x)}\,dx
\end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Fassen wir die einzelnen Ausdrücke zusammen, setzen also (4) in (3) und dies in (2) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\psi(u)+\sum_{k=1}^{k=n}\frac{t^k}{k!}\frac{d^{k-1}}{du^{k-1}}\left(\varphi(u)^k\cdot\psi'(u)\right)&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{\psi(x)\left(1-t\varphi'(x)\right)}{x-u-t\varphi(x)}\,dx\\
&-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\left(\frac{t\varphi(x)}{x-u}\right)^n\psi(x)\left\{\frac{1-t\varphi'(x)}{x-u-t\varphi(x)}-\frac{1}{x-u}\right\}dx
\end{aligned}$$

oder

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{\psi(x)\left(1-t\varphi'(x)\right)}{x-u-t\varphi(x)}\,dx&=\psi(u)+\sum_{k=1}^{k=n}\frac{t^k}{k!}\frac{d^{k-1}}{du^{k-1}}\left(\varphi(u)^k\cdot\psi'(u)\right)\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int\left(\frac{t\varphi(x)}{x-u}\right)^n\cdot\frac{t\psi(x)}{x-u}\cdot\frac{\varphi(x)-(x-u)\varphi'(x)}{x-u-t\varphi(x)}\,dx
\end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Wir können nun leicht zeigen, daß wenn längs C: $\left|\frac{t\varphi(x)}{x-u}\right|\leqq 1$ ist und im Falle des Gleichheitszeichens $x-u-t\varphi(x)$ von Null verschieden ist, daß dann auf der linken Seite von (5) der Ausdruck $\psi(\alpha)$ steht. Der Beweis wird wie bei G. Sudan (vgl. die oben zitierte Arbeit) geführt, welcher allerdings den Fall des Gleichheitszeichens nicht behandelt. Hierzu stützt man sich auf die Sätze von logarithmischen Residuum und auf die Bemerkung, daß unter den gemachten Voraussetzungen die beiden Integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{1}{x-u}\,dx \text{ und } \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{1-t\varphi'(x)}{x-u-t\varphi(x)}\,dx$$

denselben ganzzahligen Wert „1" als Anzahl der innerhalb von C liegenden Wurzeln von $x-u=0$ und $x-u-t\varphi(x)=0$ ergeben. Die rechte Seite von (5) ist nichts anderes als die Lagrangesche Reihe mit einem Restglied in der Form eines komplexen Integrales. Diese ganze Ableitung wurde gegeben, weil in der Literatur entweder das Restglied nicht fertig ausgerechnet (vgl. die den umgekehrten Weg gehende Ableitung von Jordan[1]) oder gar falsch angegeben wurde (vgl. die Arbeit von Teixeira[2]).

Aus der Betrachtung des Restgliedes folgen die **Sätze:**

1. Die Lagrangesche Reihe konvergiert, wenn überall längs C: $\left|\frac{t\varphi(x)}{x-u}\right|<1$ ist. Zum Beweise zeigt man mittels ganz bekannter Abschätzungsmethoden, daß das Restglied mit wachsendem Werte n gegen Null konvergiert.

2. Die Lagrangesche Reihe konvergiert, wenn bis auf eine endliche Zahl von Punkten längs C $\left|\frac{t\varphi(x)}{x-u}\right|<1$ ist, in diesen Ausnahmepunkten aber zugleich $\left|\frac{t\varphi(x)}{x-u}\right|=1$ und $x-u-t\varphi(x)\neq 0$ ist. Der Beweis wird ebenso wie unter (1) geführt, nur daß man die Ausnahmepunkte mit kleinen Ausschlußintervallen auf C umgibt, die man nach Null konvergieren läßt. Dieser zweite Fall findet sich in der Literatur nirgends erwähnt.

3. In allen andern Fällen kann man nicht mehr allgemein beweisen, daß das Restglied mit wachsendem Werte n einem endlichen Grenzwert zustrebt und insbesondere verschwindet; die Reihe von Lagrange divergiert im allgemeinen in diesen Fällen.

---

[1]) Jordan, Cours d'analyse 1. Aufl. (nicht 2. Aufl.), Paris 1882 t. II S. 308 ff.

[2]) Teixeira, Journal des Mathématiques pures et appliquées 4e série t. V 1889 p. 67 ff.

Je nachdem, ob man die Kurve C als primär gegeben denkt oder erst sekundär eine passende Kurve C sucht, kann man die Konvergenzbedingung auch umformen in

A. Es sei S ein Gebiet der komplexen x-Ebene, in dem sowohl $\varphi(x)$ als auch $\psi(x)$ regulär sind, und das überdies den Punkt $x = u$ in seinem Innern enthält. Man zeichne dann alle Kreise K um den Punkt $x = u$ als Mittelpunkt, deren Randpunkte sämtlich zu S gehören. Berechnet man dann den „Modul des Maximums Maximorum M(r)" für jeden Kreis K und den „Hauptmodul μ" für alle Kreise K von der Funktion $\frac{\varphi(x)}{x-u}$, und ist dieser Hauptmodul ein „kritischer", so konvergiert die Reihe von Lagrange für alle $|t| < \frac{1}{\mu}$. — Hier ist der zum Hauptmodul gehörige Kreis K* als Kurve C gewählt.

Wegen der Bezeichnungen um Beweise vergleiche die oben zitierte Arbeit von G. Sudan und den Aufsatz von Nekrassoff.[1])

B. Ist die Gleichung $x = u + t\varphi(x)$ vorgelegt, so bestimme man eine positive Zahl T die größer (nicht gleich) $|t|$ ist. Dann ermittele man in der komplexen x-Ebene die Kurve

$$\left|\frac{\varphi(x)}{x-u}\right| = \frac{1}{T}.$$

Hat diese Kurve einen geschlossenen Teil, so heiße dieser C*. Ist nun der Punkt $x = u$ innerhalb von C* gelegen und gehören die inneren Punkte und die Randpunkte von C* dem oben gekennzeichneten Bereich S an, so konvergiert die Lagrangesche Reihe für die vorgelegte Gleichung und für alle gleichgebauten Gleichungen, für welche $|t| < T$, ist. — In dieser Form ist die Konvergenzbedingung bisher noch nicht ausgesprochen worden.

Bedenkt man, daß es auf der Kurve C* einen Punkt x' gibt derart, daß für ein komplexes $|t'| = T$ zugleich die beiden Gleichungen

$$x' - u - t'\varphi(x') = 0$$

und

$$1 - t'\varphi'(x) = 0$$

erfüllt sind, so kann man die obige Konvergenzbedingung auch

[1]) Nekrassoff, Mathematische Annalen Bd. 31 S. 337—358.

umformen in: Die Lagrangesche Reihe konvergiert für alle t, welche kleiner sind als ein solches $|t'|$, welches bewirkt, daß die vorgelegte Gleichung

$$x - u - t'\varphi(x) = 0$$

eine Doppelwurzel x' besitzt, welche auf C^* liegt.

§ 13.

Änderung einer Gleichungswurzel bei Änderung der Gleichungskoeffizienten.

Wir wollen jetzt zeigen, daß sich auch der Inhalt des zweiten Abschnittes der Weierstraßschen Arbeit von algebraischen auf transzendente Gleichungen übertragen läßt.

Vorgelegt sei die unendliche Reihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \text{ad inf} \tag{1}$$

mit dem Konvergenzradius r. Wir nehmen nun an, wir kennten eine einfache Wurzel c von $f(x) = 0$, die innerhalb des Konvergenzbereiches der Entwicklung von $f(x)$ nach Potenzen von x liegt; d. h. $|c|$ sei kleiner als r. Wir ändern nun sämtliche Koeffizienten a_i von $f(x)$ um geeignete kleine Inkremente p_i, so daß wir die unendliche Reihe

$$\left.\begin{aligned} F(x) = (a_0 + p_0) + (a_1 + p_1)x + (a_2 + p_2)x^2 \\ + (a_3 + p_3)x^3 + \cdots \text{ad inf} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

erhalten, die ihrerseits den Konvergenzradius R haben möge. Wir wollen uns nun die Frage vorlegen, ob wir, wenn die p_i nur hinreichend klein gewählt werden, eine Wurzel C von $F(x) = 0$ berechnen können, die innerhalb des Konvergenzbereiches der Potenzreihe $F(x)$ liegt und welche die Eigenschaft hat, daß sie, wenn man die p_i sämtlich gleich Null macht, in c übergeht.

Da (1) für $|x| < r$ absolut konvergiert und da (2) für $|x| < R$ absolut konvergiert, so werden beide gleichzeitig absolut konvergieren, wenn $|x|$ kleiner ist als die kleinere der beiden Zahlen r und R. Sie haben also einen gemeinsamen Konvergenzbereich, und diesen selbigen Konvergenzbereich hat auch ihre

Summe und ihre Differenz. Daher können wir für alle x, die diesem gemeinsamen Konvergenzbereich angehören, schreiben

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) + \varphi(x) \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \text{ad inf} \\ &\quad + p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \cdots \text{ad inf}, \end{aligned}$$

wo offenbar

$$\varphi(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + \cdots \text{ad inf} \tag{3}$$

ist. Wir setzen nun voraus, daß c auch innerhalb des Konvergenzbereiches von $F(x)$ liege, d. h. daß $|c| < R$ sei. Dann setzen wir in $F(x)$ für x die Größe $c + v$ ein und dürfen nach Potenzen von v entwickeln, so daß wir

$$\begin{aligned} F(x) &= F(c+v) = f(c+v) + \varphi(c+v) \\ &= f(c) + v \cdot \frac{f'(c)}{1!} + v^2 \cdot \frac{f''(c)}{2!} + v^3 \cdot \frac{f'''(c)}{3!} + \cdots \\ &\quad + \varphi(c) + v \frac{\varphi'(c)}{1!} + v^2 \frac{\varphi''(c)}{2!} + v^3 \cdot \frac{\varphi'''(c)}{3!} + \cdots \end{aligned}$$

erhalten. Diese Entwicklung konvergiert bekanntlich sicher immer dann, wenn $|v|$ kleiner ist als die kleinere der beiden Zahlen $r - |c|$ und $R - |c|$.

Nun sollte eine oben näher definierte Wurzel C von $F(x)$ ermittelt werden. Für C müssen wir jetzt, gemäß unserer Transformation $x = c + v$, schreiben

$$C = c + \varkappa,$$

und $\varkappa$ berechnet sich als Wurzel der Gleichung:

$$\begin{aligned} [f(c) + \varphi(c)] + [f'(c) + \varphi'(c)]\, v + [f''(c) + \varphi''(c)] \frac{v^2}{2!} \\ + [f'''(c) + \varphi'''(c)] \frac{v^3}{3!} + \cdots = 0. \end{aligned}$$

Wenn nun $f'(c) + \varphi'(c) \neq 0$ ist, gilt für $\varkappa$ gleichfalls die Gleichung

$$v = -\frac{f(c) + \varphi(c)}{f'(c) + \varphi'(c)} - \frac{1}{2!} \frac{f''(c) + \varphi''(c)}{f'(c) + \varphi'(c)} v^2 - \frac{1}{3!} \frac{f'''(c) + \varphi'''(c)}{f'(c) + \varphi'(c)} v^3 - \cdots$$

oder kurz

$$v = w_0 + w_2 v^2 + w_3 v^3 + \cdots, \tag{4}$$

wo

$$w_\mu = -\frac{1}{\mu!}\,\frac{f^{(\mu)}(c) + \varphi^{(\mu)}(c)}{f'(c) + \varphi'(c)} \quad (\mu = 2, 3, 4 \ldots) \tag{4a}$$

und

$$w_0 = -\frac{f(c) + \varphi(c)}{f'(c) + \varphi'(c)} = \frac{-\varphi(c)}{f'(c) + \varphi'(c)} \tag{4b}$$

ist, denn weil c Wurzel von $f(x) = 0$ ist, ist $f(c) = 0$. Auf die Gleichung (4) denken wir uns jetzt das Weierstraßsche Näherungsverfahren von § 1 angewandt. Dies führt sicher zum Ziele, wenn wir die p_i so limitieren können, daß 1. die auf der rechten Seite von (4) stehende Potenzreihe wirklich konvergiert, und daß 2. die Größe w_0 ihrem Betrage nach unter einer passend gegebenen Schranke liegt, so daß die Forderung B erfüllt ist. Diese beiden Bedingungen lassen sich nun in der Tat erfüllen.

Erstens hat ja die auf der rechten Seite von (4) stehende Potenzreihe, wenn nur $f'(c) + \varphi'(c) \neq 0$ ist, gemäß ihrer Entstehungsweise durch Entwicklung von $F(c+v)$ und $f(c+v)$ nach Potenzen von v einen Konvergenzradius, der bekanntlich nicht kleiner ist als die kleinere der beiden Zahlen $r - |c|$ und $R - |c|$. Hier hängt nun R noch von der Wahl der p_i ab. Wir wollen nun die p_i so limitieren, daß R nicht kleiner als r wird. Hierzu genügt es z. B.

$$|p_m| \leq K\left(\frac{1}{r}\right)^m \qquad (m = 0, 1, 2, 3, \ldots) \tag{5}$$

zu nehmen, wo K noch eine näher zu bestimmende Konstante ist. Denn unter dieser Voraussetzung ist zunächst der Konvergenzradius ϱ der Reihe (3) für $\varphi(x)$ nicht kleiner als r. Demzufolge ist auch der Konvergenzradius der Entwicklung von $F(x) = f(x) + \varphi(x)$ nach Potenzen von x nicht kleiner als r, weil ja $f(x)$ und $\varphi(x)$ beide für $|x| < r$ absolut konvergieren. Hieraus folgt wieder, daß die Entwicklung von $F(c+v)$ nach Potenzen von v für alle v absolut konvergiert, deren Betrag kleiner als

$$r - |c|$$

ist.

Zweitens schließt man mittels bekannter Sätze über Absolutwerte, daß

$$|\varphi(c)| \leqq \frac{K r}{r - |c|},$$

und daß ebenso

$$|\varphi'(c)| \leqq \frac{K r}{(r - |c|)^2}$$

ist. Damit also w_0 seinem Betrage nach kleiner als eine vorgegebene Größe $\overline{W}_0$ ist, genügt es, die Größe K so zu wählen, daß

$$\frac{\frac{K r}{r - |c|}}{|f'(c)| - \frac{K r}{(r - |c|)^2}} \leqq \overline{W}_0$$

wird, also

$$K \leqq \frac{(r - |c|)^2 \cdot |f'(c)|}{r} \cdot \frac{\overline{W}_0}{\overline{W}_0 + (r - |c|)}. \tag{6}$$

Man sieht also, alle Bedingungen für die Ausführbarkeit des Weierstraßschen Iterationsverfahrens sind erfüllt, wenn man die p_i so limitiert, daß die Bedingungen (5) und (6) befriedigt sind. Tut man dies, so ist auch der Nenner

$$f'(c) + \varphi'(c)$$

aller w_μ immer von Null verschieden. Denn $f'(c) \neq 0$, weil c eine einfache Wurzel von $f(x) = 0$ sein sollte. Folglich kann man $f'(c) + \varphi'(c)$ von Null verschieden machen: Damit dies immer eintrifft, ist ja nur nötig, daß für alle in Betracht kommenden Wertsysteme p_i

$$|f'(c)| > |\varphi'(c)|$$

wird. Weil nun aber

$$|\varphi'(c)| \leqq \frac{K r}{(r - |c|)^2}$$

war, genügt es zu fordern, daß

$$|f'(c)| > \frac{K r}{(r - |c|)^2},$$

oder daß

$$K < \frac{(r - |c|)^2 \cdot |f'(c)|}{r}$$

ist, eine Bedingung, die durch (6) schon erfüllt ist.

Bei der praktischen Ausführung der Limitation der p_i verfährt man noch etwas anders, z. B. wie folgt: Man wähle in Formel (5) die Größe K kleiner gleich einer solchen K_1, welche die Beschaffenheit hat, daß der Nenner $f'(c) + \varphi'(c)$ für $K \leqq K_1$ seinem Betrage nach größer als eine willkürliche positive Größe n ist, die ihrerseits um eine positive Größe h kleiner ist als $|f'(c)|$. Damit nun also

$$|f'(c) + \varphi'(c)| \geqq n = |f'(c)| - h$$

ist, genügt es

$$|\varphi'(c)| \leqq \frac{K r}{(r - |c|)} \leqq h,$$

also

$$K_1 = \frac{h}{r}(r - |c|)^2 \tag{7}$$

zu machen. Mit Hilfe dieser Werte von K_1 und n (bezw. h) bestimme man die oberen Schranken W_μ^* für die Beträge W_μ der w_μ ($\mu = 2, 3, 4, \cdots$). Diese oberen Schranken existieren nach unserer Annahme über c, weil f(c) und φ(c), folglich auch $f^{(\mu)}(c)$ und $\varphi^{(\mu)}(c)$, absolut konvergieren, und folgen aus Formel (4a), wobei

$$\frac{f^{(\mu)}(c)}{\mu!} = \binom{\mu}{0} a_\mu + \binom{\mu+1}{1} a_{\mu+1} c + \binom{\mu+2}{2} a_{\mu+2} c^2 + \binom{\mu+3}{3} a_{\mu+3} c^3 + \cdots$$

$$\frac{\varphi^{(\mu)}(c)}{\mu!} = \binom{\mu}{0} p_\mu + \binom{\mu+1}{1} p_{\mu+1} c + \binom{\mu+2}{2} p_{\mu+2} c^2 + \binom{\mu+3}{3} p_{\mu+3} c^3 + \cdots$$

ist, mittels einfacher Rechnung. — Dann bestimme man nach Wahl eines positiven $\xi > 1$ eine obere Schranke W_0^* für den Betrag W_0 von w_0 aus der Ungleichung

$$2 W_2^* (W_0 \xi) + 3 W_3^* (W_0 \xi)^2 + 4 W_4^* (W_0 \xi)^3 + \cdots \leqq 1 - \frac{1}{\xi}. \tag{8}$$

Eine solche existiert, wie wir in § 2 sahen, immer. — Mit Hilfe dieses Wertes bestimme man aus

$$\frac{|\varphi(c)|}{n} \leqq \frac{\frac{K r}{r - |c|}}{n} \leqq W_0^*$$

einen Wert

$$K_2 = W_0^* \cdot n \frac{r - |c|}{r}. \tag{9}$$

Die kleinere der beiden Zahlen K_1 und K_2 wird, wenn man sie in (5) für K einsetzt, zur Folge haben, daß sowohl

$$W_\mu \leqq W_\mu^* \quad (\mu = 2, 3, 4, \cdots)$$

als auch

$$W_0 \leqq W_0^*$$

ist für alle dann noch möglichen Wertesysteme der p_i, daß also für diese auch die Ungleichung (8) erfüllt ist und somit das Weierstraßsche Iterationsverfahren konvergiert.

Da die Größe $\varkappa$ eine Potenzreihe von w_0 ist und da diese für $|w_0| \leqq W_0^*$ gleichmäßig konvergent ist, folgt: $\varkappa$ ist eine stetige Funktion von w_0 für $|w_0| \leqq W_0^*$ und der sämtlichen Größen w_μ für $|w_\mu| \leqq W_\mu^*$. Da diese wiederum stetige Funktion der p_i sind, sobald die p_i nur der Bedingung (5), worin für K die kleinere der beiden Zahlen K_1 und K_1 zu setzen ist, entsprechend limitiert sind, folgt: $\varkappa$ ist eine stetige Funktion sämtlicher p_i, sobald diese nur klein genug gewählt werden. — Setzt man nun

$$p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = \cdots 0,$$

so wird $\varphi(c) = 0$, also auch $w_0 = 0$, und endlich auch $\varkappa = 0$, weil die nach dem Weierstraßschen Näherungsverfahren berechnete Wurzel $\varkappa$ von (4) eine Potenzreihe von w_0 ohne Absolutglied ist. Also geht die von uns berechnete Wurzel C von $F(x) = 0$ stetig in den Wert c über, wenn man die p_i sämtlich nach Null konvergieren läßt, einen Umstand, den wir noch zu zeigen hatten.

Überdies sei bemerkt, daß die nach dem Weierstraßschen Näherungsverfahren berechnete Wurzel $C = c + \varkappa$ immer innerhalb eines Kreises mit dem Radius $W_0 \xi$ um den Mittelpunkt c gelegen ist, weil $|\varkappa| < W_0 \xi$ ist. Wenn man nur K sehr klein annimmt, was zur Folge hat, daß auch die Beträge der Größen p_i sehr klein werden, so kann man erreichen, daß $|\varkappa|$ unter einer vorgegebenen Größe liegt, weil ja $|\varkappa| < W_0 \xi$ ist und weil W_0 mit K gegen Null hin abnimmt. Daraus folgt, daß sich $|\varkappa|$ mit K stetig der Null nähert oder daß sich $|\varkappa|$ mit sämtlichen p_i stetig der Null nähert.

Ist $r = \infty$, also f (x) beständig konvergent, so wird man alle Betrachtungen wiederholen können, wenn man in (5) und allen folgenden Formeln für r einen Wert r* einsetzt, der größer (nicht gleich) $|c|$ ist. Der Konvergenzradius der Entwicklungen von F (x) und φ (x) nach Potenzen von x ist dann nicht kleiner als r*. — Diese Bemerkung gilt besonders dann, wenn f (x) ein Polynom ist.

§ 14.

Ergänzungen zu dem neuen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra von K. Weierstraß.

Wir wollen in diesem Paragraphen den in der von uns zugrunde gelegten Arbeit gegebenen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra von K. Weierstraß, der einige Lücken aufweist, vervollständigen. Der Beweis zerfällt in drei Teile. Im ersten Teile wird gezeigt (ähnlich wie wir es in § 1 taten), daß man durch ein Approximationsverfahren zu einer Wurzel, der in der Form

$$x - a_0 - a_2 x^2 - a_3 x^3 - \cdots - a_\varrho x^\varrho = 0$$

geschriebenen Gleichung gelangen kann, wenn man nur nach beliebiger Annahme der Koeffizienten $a_2, a_3 \cdots a_\varrho$ den Betrag des Absolutgliedes a_0 klein genug wählt. Diese Wurzel hat die Eigenschaft, daß sie sich in eine Reihe

$$\bar{x} = a_0 + B_2 a_0^2 + B_3 a_0^3 + \cdots$$

entwickeln läßt, wo die Größen $B_2, B_3, \cdots$ ganze rationale Fraktionen von $a_2 a_3 \cdots a_\varrho$ sind. Im zweiten Teile wird gezeigt (ähnlich wie in § 13), daß, wenn man von einer Gleichung ϱ-ten Grades eine einfache Wurzel kennt, man auch zu einer zweiten Gleichung ϱ-ten Grades, deren Koeffizienten sich nur wenig von denen der ersten unterscheiden, mittels des Approximationsverfahrens des ersten Teiles eine Wurzel berechnen kann und daß diese Wurzel stetig in die der ersten Gleichung übergeht, wenn die Koeffizienten der zweiten Gleichung stetig in die der ersten übergehen. Auf dieser Tatsache fußend, soll nun im dritten Teile gezeigt werden, daß jede Gleichung ϱ ten Grades

$$f(x) = x^{\varrho} + A_1 x^{\varrho-1} + A_2 x^{\varrho-1} + \cdots + A_{\varrho},$$

deren Diskriminante nicht verschwindet, ϱ verschiedene Wurzeln besitzt. Indem Weierstraß von einer beliebigen Gleichung

$$f_0(x) = (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_{\varrho})$$
$$= x^{\varrho} + C_1 x^{\varrho-1} + C_2 x^{\varrho-2} + \cdots + C_{\varrho}$$

mit den ϱ verschiedenen Wurzeln $c_1, c_2, \cdots c_{\varrho}$, die sämtlich bekannt sind, ausgeht und einen geeigneten stetigen Übergang zwischen den Koeffizienten $C_1, C_1, \cdots C_{\varrho}$ und bezw. $A_1, A_2, \cdots A_{\varrho}$ herstellt, zeigt er, daß bei diesem stetigen Übergange von der einen zu der anderen Gleichung keine der ϱ Wurzeln verloren geht und daß sie alle verschieden bleiben. Dieser Beweis ist, wie O. Hölder[1]) gezeigt hat, nicht ganz vollständig. Hölder selbst gibt den Weg an, wie der Beweis zu vervollständigen wäre. Dies soll im folgenden näher ausgeführt werden mit einer kleinen Abänderung des dort beschriebenen Weges, die ich gleichfalls Herrn Geheimrat Hölder verdanke.

Es sei hier im voraus an folgende Tatsachen erinnert:

1. Wir gelangen zu der **Diskriminante** einer beliebigen Gleichung ϱ ten Grades

$$x^{\varrho} + A_1 x^{\varrho-1} + A_2 x^{\varrho-2} + \cdots + A_{\varrho} = 0$$

auf folgendem Wege: Wir bilden aus ϱ Linearfaktoren

$$x - b_1, \; x - b_2, \; \cdots \; x - b_{\varrho}$$

die Gleichung ϱ ten Grades:

$$(x - b_1) \cdot (x - b_2) \cdots (x - b_{\varrho})$$
$$= x^{\varrho} + B_1 x^{\varrho-1} + B_2 x^{\varrho-2} + \cdots + B_{\varrho} = 0,$$

die also die ϱ Wurzeln $b_1, b_2, \cdots b_{\varrho}$ besitzt. Aus letzteren bilden wir das Produkt der quadrierten Wurzeldifferenzen. Dieses ist

[1]) Göttinger gelehrte Anzeigen 1895 S. 367 ff.

eine symmetrische Funktion der Wurzeln $b_1, b_2, \cdots b_\varrho$. Folglich läßt es sich durch die elementarsymmetrischen Funktionen der Gleichungswurzeln, also auch durch die Gleichungskoeffizienten $B_1, B_2, \cdots B_\varrho$ rational und ganz ausdrücken. Derjenige Ausdruck nun, der aus den Koeffizienten $A_1, A_2, \cdots A_\varrho$ der beliebigen Gleichung ϱten Grades ebenso aufgebaut ist wie der eben beschriebene aus den Koeffizienten $B_1, B_2, \cdots B_\varrho$ der speziellen Gleichung ϱten Grades soll die Diskriminante jener Gleichung heißen; er ist aus ihren Koeffizienten als rationale und ganze Funktion gebildet. (Man vgl. hierzu den Gedankengang in Gauß' zweitem Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra.[1])) Hieraus folgt: Ist es auf irgendeinem Wege gelungen, zu zeigen, daß die Gleichung

$$x^\varrho + A_1 x^{\varrho-1} + A_2 x^{\varrho-2} + \cdots + A_\varrho = 0,$$

über deren Wurzelexistenz nichts vorausgesetzt wurde, ϱ Wurzeln besitzt, so ist ihre Diskriminante natürlich nichts anderes als das Produkt der quadrierten Differenzen ihrer Wurzeln.

2. Sind $b_1, b_2, \cdots b_\varrho$ die ϱ Wurzeln der Gleichung ϱten Grades

$$F(x) \equiv x^\varrho + B_1 x^{\varrho-1} + B_2 x^{\varrho-2} + \cdots + B_\varrho = 0,$$

so läßt sich ihre Diskriminante in der Form

$$F'(b_1) \cdot F'(b_2) \cdots F'(b_\varrho)$$

darstellen (Beweis mittels der Theorie der symmetrischen Funktionen).

Nachdem dies vorausgeschickt ist, können wir an den Beweis selbst herantreten. Um von der Ausgangsgleichung

$$f_0(x) = x^\varrho + C_1 x^{\varrho-1} + C_2 x^{\varrho-2} + \cdots + C_\varrho$$

einen stetigen Übergang zu der Endgleichung

$$f(x) = x^\varrho + A_1 x^{\varrho-1} + A_2 x^{\varrho-2} + \cdots + A_\varrho$$

herzustellen, bildet Weierstraß ϱ rationale Funktionen

$$g_1(t),\ g_2(t), \ldots g_\varrho(t)$$

eines Parameters t, der im folgenden ausschließlich reelle, dem

[1]) Gauß' Werke Bd. III S. 40—44.

Intervall $(0 \ldots 1)$ angehörige Werte annehmen soll, von der Beschaffenheit, daß

$$g_1(0) = C_1,\ g_2(0) = C_2, \ldots g_\varrho(0) = C_\varrho$$
$$g_1(1) = A_1,\ g_2(1) = A_2, \ldots g_\varrho(1) = A_\varrho$$

ist, und der zu führende Beweis besteht darin, daß er zeigt: Wenn man in der Funktion

$$f(x, t) = x^\varrho + g_1(t)\, x^{\varrho-1} + g_2(t)\, x^{\varrho-2} + \cdots + g_\varrho(t),$$

deren Diskriminante für keinen dem reellen Intervalle $(0 \ldots 1)$ angehörigen Wert von t verschwindet, t von 0 nach 1 laufen läßt, so geht dabei keine ihrer Nullstellen verloren und alle bleiben voneinander verschieden. Dabei ist $f(x, 0)$ die Funktion $f_0(x)$ mit den ϱ bekannten Nullstellen $c_1, c_2 \ldots c_\varrho$ und $f(x, 1)$ die Funktion $f(x)$, von der man die Anzahl der Nullstellen wissen will, und diese hätte demnach ϱ verschiedene Nullstellen.

Zunächst sei die Forderung, daß die Diskriminante von $f(x, t)$ von Null verschieden sein soll, näher untersucht. Der Ausdruck

$$(1 - z)\, f(x, 0) + z\, f(x, 1)$$

hat die Eigenschaft, daß er für $z = 0$ den Wert $f(x, 0) = f_0(x)$ und für $z = 1$ den Wert $f(x, 1) = f(x)$ annimmt; außerdem ist er für jeden bestimmten Wert von z eine Funktion von x allein. Betrachtet man ihn als solche und denkt man sich seine Diskriminante gemäß unserer Bemerkung gebildet, so wird diese eine ganze rationale Funktion der Koeffizienten von

$$x^\varrho + \left[(1 - z)\, C_1 + z A_1\right] x^{\varrho-1} + \left[(1 - z)\, C_2 + z A_2\right] x^{\varrho-2} + \cdots$$
$$+ \left[(1 - z)\, C_\varrho + z A_\varrho\right] = 0,$$

also auch eine ganze rationale Funktion von z. Eine solche hat aber höchstens so viele Nullstellen, als ihr Grad angibt (dies wird ohne Benutzung des Fundamentalsatzes mit elementaren Mitteln bewiesen), vorausgesetzt, daß sie nicht identisch verschwindet. Letzteres ist aber sicher nicht der Fall, denn sie verschwindet nach den Voraussetzungen, unter denen wir unsern

Beweis führen wollen, sicher nicht für $z = 0$ und $z = 1$. Man denke sich nun die in endlicher Anzahl vorhandenen Nullstellen der Diskriminante in einer z-Ebene markiert. Außerdem denke man sich eine t-Ebene. Beide Ebenen seien durch die Relation

$$z = \frac{(1 + k i) t}{1 + k i t}$$

aufeinander bezogen. Diese Relation, in der k eine noch zu bestimmende reelle Konstante sei, ist eine linear gebrochene, also eine eindeutige und bekanntlich eine Kreisverwandtschaft, d. h. von der Beschaffenheit, daß die Kreiseigenschaft bei der Abbildung der t-Ebene auf die z-Ebene erhalten bleibt. Ferner sind die Punkte $z = 0$ und $t = 0$ einerseits und $z = 1$ und $t = 1$ andrerseits, wie man auch k wählen mag, einander fest zugeordnet. Läßt man nun t die reellen Werte zwischen 0 und 1 annehmen, also auf der Geraden durch die festen Punkte $t = 0$ und $t = 1$ laufen, so durchläuft z gemäß der Kreisverwandtschaft einen Kreisbogen, der durch die Punkte $z = 0$ und $z = 1$ geht. Diesen Kreisbogen kann man durch Wahl eines reellen k noch auf unendlich viele Weisen so einrichten, daß er durch keine der markierten Nullstellen der Diskriminante hindurchgeht. Wir haben damit einen Weg in der z-Ebene konstruiert, der die Punkte $z = 0$ und $z = 1$ verbindet und längs dessen z nur solche Werte annimmt, die die Diskriminante nicht Null machen. Wir denken uns nun für alles Folgende k in dieser Weise fixiert. Wir führen dann in den vorstehenden Formeln für z überall $\frac{(1 + k i) t}{1 + k i t}$ ein. Dann wird aus: $(1 - z) f(x, 0) + z f(x, 1)$ ein Ausdruck von der Form $f(x, t)$, in welchem

$$g\;\;(t) = (1 - z) C_{\nu} + z A_{\nu} = \frac{(1 - t) C_{\nu} + (1 + k i) t A_{\nu}}{1 + k i t}$$

ist. Wir erhalten also das Resultat:

Die Funktion

$$f(x, t) = x^{\varrho} + g_1(t) x^{\varrho - 1} + g_2(t) x^{\varrho - 2} + \cdots + g_{\varrho}(t),$$

wo

$$g_{\nu}(t) = \frac{(1 - t) C_{\nu} + (1 + k i) t A}{1 + k i t}$$

ist und k den gemäß unserer Forderung fingierten Wert besitzt, hat die Eigenschaft, daß sie, wenn t von 0 bis 1 durch reelle Werte läuft, einen stetigen Übergang von der Ausgangsfunktion $f(x, 0) = f_0(x)$ zu der Endfunktion $f(x, 1) = f(x)$ vermittelt, und daß die Diskriminante dieser Funktion während dieses Überganges nicht verschwindet. (Denn den Werten $t = 0 \dots 1$ sind ja solche Werte z zugeordnet, für welche die Diskriminante nicht verschwindet.)

Nun ist die Diskriminante in dem abgeschlossenen reellen Intervalle $(0 \dots 1)$ eine stetige Funktion von t, die dort nirgends verschwindet. Deshalb besitzt ihr absoluter Betrag eine von Null verschiedene untere Grenze, die in der Folge mit δ bezeichnet werde. (Einen mehr arithmetisch-algebraischen Beweis für vorstehende Tatsachen hat Weierstraß[1]) selbst anläßlich eines zweiten Beweises des Fundamentalsatzes geführt.)

Es folgt aus dem zweiten Teil des Weierstraßschen Beweises zunächst, daß die Gleichung $f(x, t) = 0$ für hinreichend kleine Werte von t ϱ verschiedene Wurzeln besitzt. Denn wenn t nur wenig oberhalb von Null liegt, unterscheiden sich $g_\nu(t)$ und $g_\nu(0) = C_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3, \dots \varrho)$ nur wenig voneinander. Es lassen sich also zu den voneinander verschiedenen Wurzeln $c_1, c_2, \dots c_\varrho$ von $f(x, 0) = 0$ Zuwüchse $v_1, v_2, \dots v_\varrho$ berechnen, so daß $c_1 + v_1$, $c_2 + v_2, \dots c_\varrho + v_\varrho$ Wurzeln von $f(x, t) = 0$ sind, und zwar können die Zuwüchse $v_1, v_2, \dots v_\varrho$, wenn nur t klein genug ist, so klein gemacht werden, daß $c_1 + v_1$, $c_2 + v_2, \dots c_\varrho + v_\varrho$ sicher alle voneinander verschieden ausfallen. (Vgl. auch das in § 13 Gesagte und den Schluß dieses Paragraphen.)

Wir dürfen also annehmen, wir hätten bereits gezeigt, die Gleichung $f(x, t) = 0$ besitze für alle Werte $t' < t_0$ (nicht auch gleich t_0) ϱ verschiedene Wurzeln, und wollen zeigen, daß sie dann auch für alle Werte $t' < t_0 + \tau$, wo τ eine reelle positive Größe ist, ϱ verschiedene Wurzeln besitzt; und zwar sind hier besonders folgende zwei Punkte zu beachten, die sich bei Weierstraß nicht finden und auf die O. Hölder in seiner Besprechung aufmerksam gemacht hat.

---

[1]) Weierstraß' Werke Bd. 3 S. 268 ff.

I. Wir können von **jedem** Wert t', der kleiner als t_0 ist, beim Beweis der Wurzelexistenz um ein **endliches** Stück τ vorwärtsschreiten. Wir zeigen gleich noch etwas mehr, nämlich: Es gibt eine endliche, wenn auch kleine Größe $\bar{\tau}$, um die wir beim Beweis der Wurzelexistenz mindestens vorwärtsschreiten können, **welche von t' und t_0 ganz unabhängig ist.**

II. Es ist nicht möglich, daß an der Stelle t_0 mehrere der Wurzelwerte in einen zusammenliefen, und daß dabei diesem Wurzelwert nur ein Linearfaktor bei der Zerspaltung der Gleichung entspräche und folglich ein Restbestandteil der Gleichung übrigbliebe, der nicht in Linearfaktoren zerlegbar wäre.

Es sei nun t' irgendein bestimmter Wert von t, der kleiner als t_0 ist, und es seien $c_1', c_2', \ldots, c_\varrho'$ die ϱ verschiedenen Wurzeln der Gleichung $f(x, t') = 0$. Wir setzen dann, unter τ eine positive reelle Größe verstanden,

$$t = t' + \tau \quad \text{und} \quad x = c_\lambda' + v_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots \varrho)$$

und wollen die Gleichung

$$f(x, t) = f(c_\lambda' + v_\lambda, t' + \tau) = 0$$

nach v_λ entwickeln, indem wir für den Augenblick ein bestimmtes λ ins Auge fassen. Zunächst ist

$$g_\nu(t) = g_\nu(t' + \tau) = \frac{(1-t)\,C_\nu + (1+ki)\,t\,A_\nu}{1+kit}$$

$$= \frac{\{(1-t')\,C_\nu + (1+ki)\,t'A_\nu\} + \tau\,[(1+ki)\,A_\nu - C_\nu]}{\{1+kit'\} + ki\cdot\tau}.$$

Hieraus folgt:

$$\left\{1 + \frac{ki\tau}{1+kit'}\right\} g_\nu(t) = \frac{\{1+kit'\} + ki\tau}{1+kit'}\cdot g_\nu(t)$$

$$= \frac{(1-t')\,C_\nu + (1+ki)\,t'A_\nu}{1+kit'} + \tau\cdot\frac{[(t+ki)\,A_\nu - C_\nu]}{1+kit'}$$

$$= g_\nu(t') + \tau E_\nu,$$

wo $E_\nu = \frac{(1+ki)A_\nu - C_\nu}{1+kit'}$ ist und also von τ unabhängig ist. Diese Formeln gelten für $\nu = 1, 2, \ldots \varrho$. Wir setzen nun noch

$$E_0 = \frac{ki}{1+kit'}.$$

Dann ist

$$1 + \frac{ki\tau}{1+kit'} = 1 + \tau E_0 .$$

(Diese Formel folgt übrigens aus den vorangehenden, wenn man $C_0 = 1$, $A_0 = 1$ und demnach $g_0(t)$ dauernd $= 1$ setzt. Der Index 0 bezeichnet hier den Koeffizienten von x^ϱ.) Es ergibt sich nun sofort, daß

$$\begin{aligned}
&\left\{1 + \frac{ki\tau}{1+kit'}\right\} \cdot f(x, t' + \tau) \\
&\quad = \{1 + \tau E_0\} x^\varrho + \{g_1(t') + \tau E_1\} x^{\varrho - 1} + \{g_2(t') + \tau E_2\} x^{\varrho - 2} \\
&\qquad\qquad + \cdots + \{g_\varrho(t') + \tau E_\varrho\} \\
&\quad = f(x, t') + \tau\left[E_0 x^\varrho + E_1 x^{\varrho - 1} + E_2 x^{\varrho - 2} + \cdots + \bar{E}_\varrho\right]
\end{aligned}$$

ist. Da nun der Faktor $\left\{1 + \frac{ki\tau}{t+kit'}\right\}$ für kein reelles t' im Intervall $(0 \ldots 1)$ und für kein reelles endliches τ unendlich oder Null wird, so muß, wenn für ein bestimmtes x $f(x, t' + \tau) = 0$ wird, auch der Ausdruck

$$f(x, t') + \tau\left[E_0 x^\varrho + E_1 x^{\varrho - 1} + E_2 x^{\varrho - 2} + \cdots + E_\varrho\right]$$

für dasselbe x gleich Null werden und umgekehrt. Wir entwickeln nun diesen letzten Ausdruck nach v_λ, indem wir für x das Binom $c_\lambda' + v_\lambda$ einführen und erhalten

$$\left.\begin{aligned}
&f(c_\lambda' + v_\lambda, t') + \\
&\tau\left[E_0 (c_\lambda' + v_\lambda)^\varrho + E_1 (c_\lambda' + v_\lambda)^{\varrho - 1} + E_2 (c_\lambda' + v_\lambda)^{\varrho - 2} + \cdots + E_\varrho\right] \\
&\quad = f(c_\lambda', t') + \frac{v_\lambda}{1!} f'(c_\lambda', t') + \frac{v_\lambda^2}{2!} f''(c_\lambda', t') \\
&\qquad\qquad + \cdots + \frac{v_\lambda^\mu}{\mu!} f^{(\mu)}(c_\lambda', t') + \cdots + \frac{v_\lambda^\varrho}{\varrho!} f^{(\varrho)}(c_\lambda', t') \\
&\quad + U_{\lambda,0} + v_\lambda U_{\lambda,1} + v_\lambda^2 U_{\lambda,2} + \cdots + v_\lambda^\mu U_{\lambda,\mu} + \cdots + v_\lambda^\varrho U_{\lambda,\varrho}
\end{aligned}\right\} . \quad (1)$$

Hierbei sind $U_{\lambda,0}\ U_{\lambda,1} \dots U_{\lambda,\varrho}$ Abkürzungen für folgende Ausdrücke:

$$U_{\lambda,0} = \tau\left\{E_0 c_\lambda'^{\varrho} + E_1 c_\lambda'^{\varrho-1} + \cdots + E_\varkappa c_\lambda'^{\varrho-\varkappa} + \cdots + E_{\varrho-1} c_\lambda' + E_\varrho\right\}$$

$$U_{\lambda,1} = \tau\left\{E_0 \cdot \varrho\, c_\lambda'^{\varrho-1} + E_1 (\varrho-1)\, c_\lambda'^{\varrho-2} + \cdots + E_\varkappa (\varrho-\varkappa)\, c_\lambda'^{\varrho-\varkappa-1} + \cdots + E_{\varrho-2} \cdot 2\, c_\lambda' + E_{\varrho-1}\right\}$$

. . . .

$$U_{\lambda,\mu} = \tau\left\{E_0 \binom{\varrho}{\mu} c_\lambda'^{\varrho-\mu} + E_1 \binom{\varrho-1}{\mu} c_\lambda'^{\varrho-1-\mu} + \cdots + E_\varkappa \binom{\varrho-\varkappa}{\mu} c_\lambda'^{\varrho-\varkappa-\mu} + \cdots + E_{\varrho-\mu-1} (\mu+1)\, c_\lambda' + E_{\varrho-\mu}\right\}$$

. . . .

$$U_{\lambda,\varrho-1} = \tau\left\{E_0\, \varrho\, c_\lambda' + E_1\right\}$$

$$U_{\lambda,\varrho} = \tau E_0 .$$

Es bedeuten ferner die Akzente an dem Funktionszeichen f die Ableitungen nach dem Argument x. Endlich ist im Ausdruck (1) $f(c_\lambda', t') = 0$, weil nach Voraussetzung c_λ' eine Wurzel der Gleichung $f(x, t') = 0$ ist. Wenn nun $f(x, t) = 0$ für $t = t' + \tau \geqq t_0$ eine Wurzel hat, so muß sich ein $x = c_\lambda' + v_\lambda$ so bestimmen lassen, daß $f(x, t' + \tau) \equiv f(c_\lambda' + v_\lambda, t' + \tau) = 0$ wird und folglich nach einer vorangehenden Bemerkung auch der Ausdruck (1) verschwindet. Dieser gleich Null gesetzt, stellt also eine Gleichung für v_λ vor, welche wir an das Weierstraßsche Approximationsverfahren anzuwenden, folgendermaßen schreiben:

$$v_\lambda = w_{\lambda,0} + w_{\lambda,2} \cdot v_\lambda^2 + \cdots + w_{\lambda,\mu} \cdot v_\lambda^\mu + \cdots + w_{\lambda,\varrho} \cdot v_\lambda^\varrho. \quad (2)$$

Hierbei bedeutet:

$$w_{\lambda,0} = -\frac{U_{\lambda,0}}{U_{\lambda,1} + f'(c_\lambda', t')}; \quad w_{\lambda,2} = -\frac{U_{\lambda,2} + \frac{1}{2!} f''(c_\lambda', t')}{U_{\lambda,1} + f'(c_\lambda', t')}$$

$$\dots\dots\dots\dots;\quad w_{\lambda,\mu} = -\frac{U_{\lambda,\mu} + \frac{1}{\mu!} f^{(\mu)}(c_\lambda', t')}{U_{\lambda,1} + f'(c_\lambda', t')}$$

$$\dots\dots\dots\dots;\quad w_{\lambda,\varrho} = -\frac{U_{\lambda,\varrho} + \frac{1}{\varrho!} f^{(\varrho)}(c_\lambda', t')}{U_{\lambda,1} + f'(c_\lambda', t')}.$$

Können wir zeigen, daß das Näherungsverfahren von § 1 zu einer Lösung von (2) führt, so ist damit die Existenz einer Wurzel an der Stelle $t' + \tau$ nachgewiesen. Das Interationsverfahren nun führt sicher zum Ziel, wenn wir zeigen können, daß nach willkürlicher Festsetzung oberer Grenzen für die Beträge von $w_{\lambda,2}, \ldots w_{\lambda,\mu}, \ldots w_{\lambda,\varrho}$ auch der Betrag von $w_{\lambda,0}$ sich gemäß Forderung B von § 1 limitieren läßt.

Wir verfahren hierzu schrittweise wie folgt:

a) Obere Grenzen für die Größen $c_1', c_2', \ldots c_\varrho'$:

Die Größen c_λ' sind als Wurzeln der Gleichung $f(x, t') = 0$ definiert. Bekanntlich[1]) kann man für die Beträge der Wurzeln einer Gleichung eine obere Grenze angeben, ohne den Fundamentalsatz der Algebra zu benutzen. Hat nämlich die vorgelegte Gleichung die Form

$$x^\varrho + g_1 x^{\varrho-1} + g_2 x^{\varrho-2} + \cdots + g_\varrho = 0,$$

so ist die obere Grenze für die Beträge der Wurzeln gegeben durch den Ausdruck $1 + g$, wo g der größte der Beträge von $g_1, g_2, \ldots g_\varrho$ ist. Nun sind die $g_1, g_2, \ldots g_\varrho$ hier Funktionen von t'; aber für das abgeschlossene reelle Intervall $0 \leqq t' \leqq 1$ hat der Betrag jedes $g_\nu(t)$ eine obere Grenze $\overline{g}_\nu$. (Es war nämlich:

$$g_\nu(t) = \frac{(1-t)\,C_\nu + (1+ki)\,t\,A_\nu}{1+kit}.$$

Demnach wird, weil k reell ist:

$$|g_\nu(t)| = \frac{|(1-t)\,C_\nu + (1+ki)\,t\,A_\nu|}{|1+kit|} \leqq \frac{|(1-t)\,C_\nu + (1+ki)\,t\,A_\nu|}{1}$$
$$\leqq |(1-t)\,C_\nu| + |(1+ki)\,t\,A_\nu| \leqq |1-t| \cdot |C_\nu| + |1+ki| \cdot |t| \cdot |A_\nu|$$
$$< |C_\nu| + |\sqrt{1+k^2}| \cdot |A_\nu| \leqq |\sqrt{1+k^2}|\,\{|C_\nu| + |A_\nu|\},$$

und folglich können wir

$$\overline{g}_\nu = |\sqrt{1+k^2}|\,\{|C_\nu| + |A_\nu|\}$$

setzen.) Die größte der Zahlen $\overline{g}_\nu$ heiße $\overline{g}$. Dann ist sicher

$$|c_\lambda'| < 1 + \overline{g} = \Gamma \quad (\lambda = 1, 2, \ldots \varrho).$$

Diese Grenze ist von t' unabhängig.

---

[1]) Serret-Wertheim, Höhere Algebra 1878. Bd. I p. 87.

b) Obere Grenzen für die Ableitungen $f^{(\mu)}(c_\lambda', t')$: Die Ableitungen $f^{(\mu)}(c_\lambda', t')$ $(\mu = 1, 2, \ldots \varrho)$, wo der Buchstabe μ die Ordnung der Ableitung bezeichnet, haben die Form:

$$f^{(\mu)}(c_\lambda', t') = \binom{\varrho}{\mu} \cdot \mu! \cdot c_\lambda'^{\varrho-\mu} + g_1(t') \cdot \binom{\varrho-1}{\mu} \mu! \cdot c_\lambda'^{\varrho-\mu-1}$$

$$+ \cdots + g_\varkappa(t') \cdot \binom{\varrho-\varkappa}{\mu} \mu! \cdot c_\lambda'^{\varrho-\mu-\varkappa} + \cdots + g_{\varrho-\mu}(t') \cdot \mu!$$

Hieraus folgt mit Benutzung der Ergebnisse von (a) für das Intervall $0 \leqq t' \leqq 1$ nach den bekannten Sätzen über Absolutwerte

$$\left| f^{(\mu)}(c_\lambda', t') \right| < \mu! \left\{ \binom{\varrho}{\mu} \cdot \Gamma^{\varrho-\mu} + \bar{g}_1 \binom{\varrho-1}{\mu} \Gamma^{\varrho-1-\mu} \right.$$

$$\left. + \cdots + \bar{g}_\varkappa \binom{\varrho-\varkappa}{\mu} \cdot \Gamma^{\varrho-\varkappa-\mu} + \cdots + \bar{g}_{\varrho-\mu} \right\}$$

$$= \Phi^{(\mu)} \; (\lambda = 1, 2, \ldots \varrho;\; \mu = 1, 2, \ldots \varrho).$$

Diese Grenze ist wieder von t' unabhängig.

c) Untere Grenzen für die ersten Ableitungen $f'(c_\lambda', t')$: Nach unsern über die Diskriminante vorangeschickten Bemerkungen ist das Produkt

$$f'(c_1', t') \cdot f'(c_2', t') \cdots f'(c_\varrho', t')$$

gleich der Diskriminante D der Gleichung $f(x, t') = 0$. Da nun der Betrag dieser Diskriminante in dem abgeschlossenen reellen Intervalle $0 \leqq t' \leqq 1$ eine von Null verschiedene untere Grenze δ hatte, und da ferner nach (b) keine der Größen $f'(c_\lambda', t')$ daselbst unendlich groß werden kann, so kann auch keine der Größen $f'(c_\lambda', t')$ gleich Null werden. Es läßt sich sogar für den Betrag jedes der Faktoren $f'(c_\lambda', t')$ eine von Null verschiedene untere Grenze angeben. In der Tat: Es ist zunächst

$$|D| = |f'(c_1', t')| \cdot |f'(c_2', t')| \cdots |f'(c_\varrho', t')|.$$

Bezeichnen wir nun die obere Grenze von $|f'(c_\varkappa', t')|$ mit $\Phi_\varkappa'$, so ist der kleinste Wert φ_λ', den $|f'(c_\lambda', t')|$ überhaupt annehmen könnte, gegeben durch die Gleichung

$$\delta = \Phi_1' \cdot \Phi_2' \cdots \Phi_{\lambda-1}' \cdot \varphi_\lambda' \cdot \Phi_{\lambda+1}' \cdots \Phi_{\varrho-1}' \cdot \Phi_\varrho'.$$

Hieraus folgt

$$\varphi_\lambda{}' = \frac{\delta}{\Phi_1{}'\, \Phi_2{}' \cdots \Phi_{\lambda-1}{}'\, \Phi_{\lambda+1}{}' \cdots \Phi_{\varrho-1}{}'\, \Phi_\varrho{}'},$$

und wenn wir die einzelnen Faktoren des Nenners jetzt nicht mehr durch Indizes voneinander unterscheiden und die Bezeichnung von (b) benutzen (Die in (b), indem man dort $\mu = 1$ setzt, definierte Größe Φ' ist größer als $\Phi_\varkappa{}'$, wo $\varkappa = 1, 2, \ldots \lambda - 1, \lambda + 1 \ldots \varrho - 1, \varrho$ zu setzen ist), erhalten wir das Resultat

$$|\mathrm{f}'(\mathrm{c}_\lambda{}', \mathrm{t}')| \geqq \varphi_\lambda{}' > \frac{\delta}{\Phi'^{\varrho-1}} = \varphi' \quad (\lambda = 1, 2, \ldots \varrho).$$

Auch diese Grenze ist von t′ unabhängig.

d) Obere Grenzen für die Größen E_ν.

Es war

$$\mathrm{E}_\nu = \frac{(1 + \mathrm{k\,i})\, \mathrm{A}_\nu - \mathrm{C}_\nu}{1 + \mathrm{k\,i\,t'}} \quad (\nu = 1, 2, \ldots \varrho).$$

Hieraus folgt für das reelle Intervall $0 \leqq \mathrm{t}' \leqq 1$

$$|\mathrm{E}_\nu| = \frac{|(1 + \mathrm{k\,i})\, \mathrm{A}_\nu - \mathrm{C}_\nu|}{|1 + \mathrm{k\,i\,t'}|} \leqq \frac{|(1 + \mathrm{k\,i})\, \mathrm{A}_\nu - \mathrm{C}_\nu|}{1}$$
$$\leqq |(1 + \mathrm{k\,i})\, \mathrm{A}_\nu| + |\mathrm{C}_\nu|$$
$$= |\sqrt{1 + \mathrm{k}^2}| \cdot |\mathrm{A}_\nu| + |\mathrm{C}_\nu| \leqq |\sqrt{1 + \mathrm{k}^2}|\, \{|\mathrm{C}_\nu| + |\mathrm{A}_\nu|\} = \overline{\mathrm{g}}_\nu$$

Speziell ist

$$|\mathrm{E}_0| = \frac{|\mathrm{k\,i}|}{|1 + \mathrm{k\,i\,t'}|} \leqq \frac{|\mathrm{k\,i}|}{1} = |\mathrm{k}|.$$

Diese Grenzen sind gleichfalls von t′ unabhängig.

e) Obere Grenzen für die Größen $\mathrm{U}_{\lambda,0}, \mathrm{U}_{\lambda,1}, \ldots \mathrm{U}_{\lambda,\mu} \ldots \mathrm{U}_{\lambda,\varrho}$: Benutzen wir die Resultate von (a) und (d), so ist nach bekannten Sätzen über Absolutwerte

$$|\mathrm{U}_{\lambda,\mu}| < \tau \left\{ |\mathrm{k}| \cdot \binom{\varrho}{\mu} \Gamma^{\varrho-\mu} + \overline{\mathrm{g}}_1 \binom{\varrho - 1}{\mu} \Gamma^{\varrho-1-\mu} \right.$$
$$\left. + \cdots + \overline{\mathrm{g}}_\varkappa \binom{\varrho - \varkappa}{\mu} \cdot \Gamma^{\varrho-\varkappa-\mu} + \cdots + \overline{\mathrm{g}}_{\varrho-\mu} \right\}$$

oder

$$|\mathrm{U}_{\lambda,\mu}| < \tau \cdot \overline{\mathrm{U}}_\mu \quad (\lambda = 1, 2, \ldots \varrho;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots \varrho).$$

Hierin ist, wie man sofort sieht, $\overline{\mathrm{U}}_\mu$ eine Konstante, und folglich hängt die obere Grenze für $|\mathrm{U}_{\lambda,\mu}|$ nur noch von τ, nicht aber von t′ ab.

f) Limitierung der $w_{\lambda,2}$, $w_{\lambda,3}, \ldots w_{\lambda,\varrho}$ und von $w_{\lambda,0}$: Damit alle Größen $w_{\lambda,0}$, $w_{\lambda,2}$, $w_{\lambda,3} \ldots w_{\lambda,\varrho}$ endlich bleiben (hiermit wird zugleich bewiesen, daß der Übergang von Gleichung (1) zu Gleichung (2) erlaubt ist), ist notwendig, daß ihre Nenner von Null verschieden sind. Die Nenner sind nun alle dieselben, nämlich: $U_{\lambda,1} + f'(c_\lambda', t')$. Diese werden sicher von Null verschieden, ja ihre Beträge können sogar über einer geeignet gewählten positiven Konstanten n gehalten werden, wenn man den größten Betrag, den $U_{\lambda,1}$ überhaupt annehmen könnte, kleiner macht als den kleinsten Betrag, den $f'(c_\lambda', t')$ überhaupt annehmen könnte, vermindert um eben diese Konstante n, wenn man also unter Benutzung von (c) und (e)

$$\tau \cdot \overline{U}_1 \leqq \varphi' - n$$

setzt. (Hierbei ist natürlich n um eine endliche positive Größe h kleiner als φ' zu wählen, so daß man

$$\varphi' - n = h > 0$$

hat.) Denn dann ist

$$|U_{\lambda,1}| < |f'(c_\lambda', t')| - n$$

oder

$$n < |f'(c_\lambda', t')| - |U_{\lambda,1}| \leqq |f'(c_\lambda', t') + U_{\lambda,1}|,$$

d. h. der Betrag des Nenners ist größer als n. Für alle τ also, die kleiner sind als die endliche Größe

$$\tau_1 = \frac{\varphi' - n}{\overline{U}_1} = \frac{k}{\overline{U}_1}$$

ist der Betrag der Nenner von $w_{\lambda,0}$; $w_{\lambda,2}$; $w_{\lambda,3}$; $\ldots w_{\lambda,\varrho}$ größer als n. Dann folgt aber mit (b) und (e) sofort

$$\left.\begin{array}{l}
|w_{\lambda,2}| < \dfrac{\tau_1 \overline{U}_2 + \dfrac{1}{2!}\Phi''}{n} = \overline{w}_2 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
|w_{\lambda,\mu}| < \dfrac{\tau_1 \overline{U}_\mu + \dfrac{1}{\mu!}\Phi^{(\mu)}}{n} = \overline{w}_\mu \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
|w_{\lambda,\varrho}| < \dfrac{\tau_1 \overline{U}_\varrho + \dfrac{1}{\varrho!}\Phi^{(\varrho)}}{n} = \overline{w}_\varrho
\end{array}\right\} \text{für alle } \tau \leqq \tau_1.$$

Hierin sind die $\overline{w}_2, \overline{w}_3, \cdots \overline{w}_\varrho$ von t' unabhängige obere Grenzen für die Größen $|w_{\lambda,2}|, |w_{\lambda,3}|, \cdots |w_{\lambda,\varrho}|$, falls $\tau \leqq \tau_1$ bleibt. Endlich ist auch noch

$$|w_{\lambda,0}| < \frac{\tau \overline{U}_0}{n} \quad \text{für} \quad \tau \leqq \tau_1 .$$

Wir fassen die Punkte (a) — (f) noch einmal zusammen: Wir haben einerseits gezeigt, daß die Gleichung $f(x, t) = 0$ für $0 \leqq t \leqq 1$ keine Wurzel besitzen kann, deren Betrag größer als die feste Zahl Γ ist. Andrerseits haben wir bewiesen, daß man da, wo die Gleichung $f(x, t') = 0$ eine Wurzel c_λ' besitzt, über die Koeffizienten der Gleichung

$$f(c_\lambda' + v_\lambda, t' + \tau) = 0$$

oder

$$v_\lambda = w_{\lambda,0} + w_{\lambda,2} v_\lambda^2 + w_{\lambda,3} v_\lambda^3 + \cdots + w_{\lambda,\varrho} v_\lambda^\varrho, \tag{2}$$

die zur Bestimmung des Zuwachses v_λ dient, den man c_λ' geben muß, wenn man t' um τ vermehrt, folgendes aussagen kann:

1. Macht man $\tau \leqq \tau_1$, so sind

$$|w_{\lambda,2}|, |w_{\lambda,3}|, \cdots |w_{\lambda,\varrho}|$$

kleiner als die festen (d. h. von t' und t_0 unabhhängigen) Zahlen

$$\overline{w}_2, \overline{w}_3, \cdots \overline{w}_\varrho .$$

2. Unter derselben Voraussetzung ist

$$|w_{\lambda,0}| < \tau \cdot \frac{\overline{U}_0}{n},$$

wo $\frac{\overline{U}_0}{n}$ eine feste Zahl ist.

Das Weierstraßsche Approximationsverfahren, auf die Gleichung (2) angewandt, liefert, wie wir in § 1 sahen, sicher eine eindeutig bestimmte Wurzel v_λ, wenn sich nach Angabe oberer Grenzen für die $|w_{\lambda,2}|, |w_{\lambda,3}|, \cdots |w_{\lambda,\varrho}|$ (solche sind hier die Größen $\overline{w}_2, \overline{w}_3, \cdots \overline{w}_\varrho$) noch eine von Null verschiedene obere Grenze $\overline{w}_0$ für $|w_{\lambda,0}|$ aus folgender Ungleichung bestimmen läßt, in der ξ eine willkürliche positive Zahl, die > 1 ist, bedeutet:

$$2\,\overline{w}_2\,\xi\,\overline{w}_0 + 3\,\overline{w}_3\,(\xi\,\overline{w}_0)^2 + \cdots + \varrho\,\overline{w}_\varrho\,(\xi\,\overline{w}_0)^{\varrho-1} \leqq 1 - \frac{1}{\xi}.$$

Daß und wie eine solche Zahl $\overline{w}_0$ gefunden werden kann, haben wir in § 2 gesehen. Also hätten wir für alle $w_{\lambda,0}$, deren Betrag kleiner $\overline{w}_0$, eine Lösung der Gleichung (2). $|w_{\lambda,0}|$ ist nun aber kleiner als $\overline{w}_0$, wenn

$$\frac{\tau\,U_0}{n} \leqq \overline{w}_0,$$

oder wenn

$$\tau \leqq \frac{\overline{w}_0 \cdot n}{\overline{U}_0} = \tau_2$$

und zugleich

$$\tau \leqq \tau_1$$

ist. Bezeichnen wir nun mit $\overline{\tau}$ die kleinere der beiden Zahlen τ_1 und τ_2, so ergibt sich:

Für alle $\tau \leqq \overline{\tau}$ hat die Gleichung $f(x, t) = 0$ auch an der Stelle $t = t' + \tau$ eine Wurzel $x = c_\lambda' + v_\lambda$, wenn sie für $t = t'$ die Wurzel $x = c_\lambda'$ hatte. Hierbei ist, wie vorstehende Entwicklung lehrt, die Größe $\overline{\tau}$ von Null verschieden und von der Stelle t' ganz unabhängig.

Die ganzen vorstehenden Betrachtungen gelten für sämtliche ϱ Wurzeln c_λ' $(\lambda = 1, 2, \cdots \varrho)$ der Gleichung $f(x, t') = 0$ gleichermaßen, denn bei der Herleitung der Resultate wurde ja ein bestimmtes λ nur ins Auge gefaßt, nicht aber irgendwie bevorzugt; wir brauchen in der Entwicklung von Gleichung (1) und (2) nur der Reihe nach die speziellen Werte $c_1', c_2', \cdots c_\varrho'$ für c_λ' einzusetzen, um folgendes **Resultat** zu erhalten:

Hat die Gleichung $f(x, t') = 0$ für alle $t' < t_0$ ϱ verschiedene Wurzeln $c_1', c_2', \cdots c_\varrho$, so liefert das Weierstraßsche Approximationsverfahren für alle Zuwüchse $\tau \leqq \overline{\tau}$ von t', wo $\overline{\tau}$ eine Konstante ist, zu jeder Wurzel c_λ' $(\lambda = 1, 2, \cdots \varrho)$ einen eindeutig bestimmten

Zuwachs v_λ $(\lambda = 1, 2, \cdots \varrho)$ derart, daß $c_\lambda' + v_\lambda$ eine Wurzel der Gleichung $f(x, t' + \tau) = 0$ ist. Der Zuwachs v_λ läßt sich ferner in eine konvergente Potenzreihe von der Form

$$v_\lambda = w_{\lambda,0} + W_{\lambda,2} w_{\lambda,0}^{\,2} + W_{\lambda,3} w_{\lambda,0}^{\,3} + \cdots$$

entwickeln, wobei $W_{\lambda,2}, W_{\lambda,3}, \cdots$ ganze rationale Funktionen von $w_{\lambda,2}, \cdots w_{\lambda,\varrho}$ sind.

Es bleibt nun noch zu zeigen übrig, daß die Zuwüchse v_λ so beschaffen sind, daß die Gleichung $f(x, t) = 0$ nicht nur, wie aus dem Vorstehenden folgt, auch für alle $t < t_0 + \bar{\tau}$ mindestens eine Wurzel besitzt, sondern ϱ verschiedene Wurzeln hat, wenn man dies schon für alle $t < t_0$ weiß.

Wir beweisen zunächst folgende Tatsache: Weiß man, daß die Gleichung $f(x, t^*) = 0$ für ein bestimmtes t^* in ϱ Linearfaktoren zerlegbar ist, also ϱ Wurzeln hat, so kann der Betrag der Differenz irgend zweier ihrer Wurzeln nicht unter eine gewisse Grenze herabsinken, die von t^* ganz unabhängig ist.

Wir erinnern uns zum Beweise daran, daß nach der am Anfang dieses Paragraphen gegebenen Definition die Diskriminante einer Gleichung ϱten Grades, von der man weiß, daß sie ϱ Wurzeln hat, nichts anderes ist als das Produkt der quadrierten Wurzeldifferenzen. Daraus folgt, wenn wir den kleinsten Wert δ, den der Betrag der Diskriminante im abgeschlossenen Intervall $(0 \cdots 1)$ überhaupt annimmt, einführen, und wenn wir bedenken, daß die Differenz zweier Wurzeln ihrem Betrage nach kleiner als $2\,\Gamma$ ist, für den Betrag der Differenz irgend zweier Wurzeln c_μ^* und c_ν^* $(\mu \neq \nu)$ der Gleichung $f(x, t^*) = 0$ als untere Grenze

$$|c_\mu^* - c_\nu^*|^2 > \frac{\delta}{(2\,\Gamma)^{\varrho(\varrho-1)-2}}$$

oder

$$|c_\mu^* - c_\nu^*| > \frac{|\sqrt{\delta}|}{(2\,\Gamma)^{\frac{\varrho(\varrho-1)}{2}-1}} = 2\,\gamma,$$

d. h. der Betrag der Differenz irgend zweier der ϱ Wurzeln sinkt nicht unter die Konstante $2\,\gamma$ herab, was zu beweisen war.

Wir haben bisher gezeigt: Wenn wir zu der Zahl t', die kleiner als t_0 ist, eine Zahl τ hinzufügen, die kleiner als die von t' unabhängige Größe $\bar{\tau}$ ist, so berechnet sich aus der Gleichung (2) mittels unseres Approximationsverfahrens zu jeder Wurzel c_λ' $(\lambda = 1, 2, \ldots, \varrho)$ von $f(x, t') = 0$ ein Zuwachs v_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots \varrho)$ so daß $c_\lambda'' \equiv c_\lambda' + v_\lambda$ stets Wurzel von $f(x, t'') \equiv f(x, t' + \tau) = 0$ ist. Dabei ist nach § 1

$$|v_\lambda| < |w_{\lambda, 0}| \cdot \xi < \tau \cdot \left(\frac{\overline{U}_0}{n}\xi\right).$$

Weil $\frac{\overline{U}_0}{n}\xi$ eine feste Zahl ist, folgt: Wenn man τ klein genug wählt, z. B. $\tau \leqq \frac{n \cdot \gamma}{\overline{U}_0 \xi} = \tau_8$ (natürlich muß stets $\tau \leqq \bar{\tau}$ sein), kann man erreichen, daß $|v_\lambda| < \gamma$ wird. Hierbei können nun t' und τ so gewählt werden, daß $t' < t_0$, aber $t' + \tau > t_0$ ist. Da nun nach Voraussetzung die Gleichung $f(x, t') = 0$ für $t' < t_0$ ϱ verschiedene Wurzeln besaß, so gilt für zwei ihrer Wurzeln c_μ' und c_ν' $(\mu \neq \nu)$ nach obigem die Beziehung

$$|c_\mu' - c_\nu'| > 2\gamma.$$

Ferner war für hinreichend kleine τ (τ kleiner, gleich der kleineren der beiden Zahlen $\bar{\tau}$ und τ_8)

$$|c_\mu'' - c_\mu'| = |v_\mu| < \gamma \quad \text{und} \quad |c_\nu'' - c_\nu'| = |v_\nu| < \gamma.$$

Weil nun identisch

$$c_\mu'' - c_\nu'' = (c_\mu' - c_\nu') + (c_\mu'' - c_\mu') - (c_\nu'' - c_\nu')$$

ist, folgt mit den vorstehenden Ungleichungen

$$|c_\mu'' - c_\nu''| > 2\gamma - \gamma - \gamma = 0$$

oder

$$c_\mu'' \neq c_\nu'' \quad \text{für } \mu \neq \nu,$$

d. h. die Größen $c_\lambda'' \equiv c_\lambda' + v_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots \varrho)$ sind sämtlich voneinander verschieden. Da nun zu jeder Größe c_λ' eine Größe c_λ'' gehört, so gibt es ϱ verschiedene Zahlen c_λ'', die gemäß ihrer Definition Wurzeln von $f(x, t'') = 0$ sind; also hat die Gleichung $f(x\, t'') \equiv f(x, t' + \tau) = 0$, wo $t' + \tau > t_0$ sein kann, ϱ verschiedene Wurzeln. Für c_μ'' und c_ν'' gilt wieder $|c_\mu'' - c_\nu''| > 2\gamma$. Bezeichnet man endlich mit τ' die kleinere der beiden Zahlen $\bar{\tau}$ und τ_3, so erhält man, indem man die vorstehenden Betrachtungen zusammenfaßt, das **Resultat:**

Wenn die Gleichung $f(x, t') = 0$ für alle $t' < t_0$ ϱ verschiedene Wurzeln hat, so hat sie auch für alle $t'' < t_0 + \tau'$ ϱ verschiedene Wurzeln, deren Differenzen ihrem Betrage nach nie kleiner als 2γ werden.

Hieraus folgt, wenn man den Gedankengang des Beweises wiederholt, indem man an Stelle von t_0 die Größen

$$t_0 + \tau',\ t_0 + 2\tau', \ldots,\ t_0 + m\tau' \leqq 1$$

treten läßt und unter t' jetzt eine Zahl kleiner als

$$t_0 + \tau',\ t_0 + 2\tau', \ldots,\ t_0 + m\tau' \leqq 1$$

versteht, schrittweise:

Auch in den Intervallen mit den Endpunkten

$$t_0 + 2\tau',\ t_0 + 3\tau', \ldots\ t_0 + (m+1)\tau'$$

(hier hat t_0 seine ursprüngliche Bedeutung) hat $f(x, t) = 0$ ϱ verschiedene Wurzeln. Da hierbei τ' eine endliche Konstante ist, muß in einem der so gebildeten Intervalle auch der Wert $t = 1$ enthalten sein. Und demnach hat die Endfunktion

$$f(x, t) \equiv f(x) \equiv x^{\varrho} + A_1 x^{\varrho - 1} + A_2 x^{\varrho - 2} + \cdots + A_{\varrho}$$

ϱ verschiedene Nullstellen, falls ihre Diskriminante nicht verschwindet.

Robert Noske, Borna-Leipzig, Großbetrieb für Dissertationsdruck.

Lebenslauf.

Ich, Hans Anton Hermann Vermeil, wurde am 20. Oktober 1889 zu Dresden geboren als Sohn des verstorbenen Anstaltsoberinspektors Jacques Vermeil und seiner Gemahlin Elisabeth geb. v. Mangoldt und bin evangelisch-lutherischer Konfession. Meine Vorbildung empfing ich auf der VII. Bürgerschule zu Dresden, der ich von Ostern 1896 bis Ostern 1900 angehörte, und auf dem Wettiner Gymnasium zu Dresden, in welches ich Ostern 1900 eintrat, und welches ich Ostern 1909 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Dann widmete ich mich dem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften, und zwar studierte ich vier Semester (SS. 1909 bis WS. 1910/11) auf der technischen Hochschule zu Danzig, ein Semester (SS. 1911) an der Universität zu Tübingen und vom WS. 1911/12 bis jetzt auf der Universität zu Leipzig. Daselbst waren folgende Herren meine Lehrer: v. Mangoldt, Sommer, Schilling, H. Lorenz, M. Wien, Kalähne; Ruff, Wohl; Eggert, Rößler; v. Brunn, Pröll — A. v. Brill, Waitz (†), Perron, Gans, Thierfelder; Bürker — O. Hölder, Herglotz, Koebe, Rohn, Des Coudres, O. Wiener, Bjerknes, Marx, Wagner; Wundt, Spranger, P. Barth, Jungmann, Lehmann; Klemm, Bergmann.

Allen diesen Herren spreche ich meinen Dank aus für die Anregungen, die ich von ihnen während meines Studiums empfing. Ganz besonders aber danke ich Herrn Geheimrat Hölder für alle Förderung bei der Abfassung der vorstehenden Arbeit.