Séminaire de Théorie des Nombres
Année 1979-1980 - exposé n° 23



# SUR L'ACCÉLÉRATION DE LA CONVERGENCE DE CERTAINES FRACTIONS CONTINUES

par

Christian BATUT et Michel OLIVIER

-:-:-:-

A partir d'une fraction continue convergente, nous construisons une suite infinie de fractions continues déduites les unes des autres par des récurrences linéaires et qui convergent plus rapidement que la fraction continue donnée. Un procédé diagonal aboutit à une fraction continue accélérée. Nous obtenons ainsi de bonnes approximations rationnelles de certains nombres définis par des séries, ce qui permet parfois de prouver leur irrationalité. C'est le cas pour $\log 2$, $\zeta(2)$, $\zeta(3)$ par exemple.

Cet article est inspiré de la conférence faite par R. Apéry [1] lors des Journées Arithmétiques de Marseille-Luminy (juin 1978) dont un compte-rendu a été établi par M. Mendès France [7], et par un exposé fait par R. Apéry (non publié) au Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux (1980).

Dans la première partie, nous décrivons le processus de construction d'un "tableau de récurrences" dont les lignes (et les colonnes) sont des fractions continues déduites les unes des autres par des relations de récurrence, et nous donnons les formules qui permettent de cheminer dans ce tableau.

La deuxième partie étudie les séries de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$, où f est un polynôme de petit degré qui ne s'annule pas sur les entiers positifs. Le processus décrit plus haut permet dans certains cas d'accélérer la convergence de ces séries.

Suivent dans la troisième partie diverses applications numériques.

Enfin, la quatrième partie montre le lien entre ces "tableaux de récurrences" et les approximants de Padé pour les fonctions $\log(1+x)$, $e^x$, $(1+x)^{\omega}$.

En annexe figurent les "tableaux de récurrences" construits à partir des séries $\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $\xi(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\xi(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ et $\xi(-5) = (\sum_{n=1}^{\infty} n^5)$.

## 1. - Généralités sur les fractions continues et les "tableaux de récurrence"

1.1. - Rappelons tout d'abord quelques définitions concernant les fractions continues.

PROPOSITION 1. - Soient deux suites $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(q_n)_{n\geq 0}$ satisfaisant une relation de récurrence de la forme :

$$p_n = a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2},$$

pour tout $n \geq 2$.

Alors on a :

(i) si $p_o = 0$ et $q_o = 1$ ; pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{p_n}{q_n} = \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ddots + \cfrac{b_n}{a_n}}},$$

où $b_1 = p_1$, $a_1 = q_1$.

(ii) si $p_o \neq 0$ et $q_o \neq 0$ . Posons pour $n \geq 0$ :

$$p'_n = \frac{q_o p_n - p_o q_n}{q_o^2} \quad , \quad q'_n = \frac{q_n}{q_o} \ .$$

Pour tout $n \geq 0$ , on a :

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_o}{q_o} + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ddots + \cfrac{b_n}{a_n}}} \ ,$$

où $b_1 = \dfrac{p_1 q_o - p_o q_1}{q_o^2} = p'_1$ , $a_1 = \dfrac{q_1}{q_o} = q'_1$ .

Démonstration. - Immédiat compte tenu des définitions.

DÉFINITION 1. - La fraction continue de la proposition 1 est dite convergente vers S si :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{q_n} = S \ .$$

Nous poserons alors :

$$\rho_n = \cfrac{b_{n+1}}{a_{n+1} + \cfrac{b_{n+2}}{a_{n+2} + \ddots}}$$

PROPOSITION 2. - Avec les notations de la proposition 1 et de la définition 1, on a les relations :

pour tout $n \geq 1$ , $\qquad S = \dfrac{p_n + \rho_n p_{n-1}}{q_n + \rho_n q_{n-1}}$ , (1)

pour tout $n \geq 0$ , $\qquad b_{n+1} - \rho_n (a_{n+1} + \rho_{n+1}) = 0$ , (2)

Démonstration. - C'est un résultat classique de la théorie des fractions continues. Conférer par exemple [8].

PROPOSITION 3. - Considérons une série numérique

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n} \quad (\text{resp.} \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{u_n}) .$$

Cette série numérique peut se mettre sous forme de fraction continue de la manière suivante :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} = \cfrac{1}{u_1 - \cfrac{u_1^2}{(u_1+u_2) - \cfrac{u_2^2}{(u_2+u_3) - \ddots - \cfrac{u_{n-1}^2}{(u_{n-1}+u_n)}}}}$$

$$(\text{resp.} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{u_k} = \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{u_1^2}{(u_2-u_1) + \cfrac{u_2^2}{(u_3-u_2) + \ddots + \cfrac{u_{n-1}^2}{(u_n-u_{n-1})}}}} ).$$

Démonstration. - Il suffit de remarquer que la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 1}$ de la série $S$, satisfait la récurrence :

$$S_n = (1 + \frac{u_{n-1}}{u_n}) S_{n-1} - \frac{u_{n-1}}{u_n} S_{n-2} ,$$

pour tout $n \geq 2$.

On aboutit ainsi à la fraction continue :

$$S_n = \cfrac{1/u_1}{1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ddots + \cfrac{b_n}{a_n}}} ,$$

où $a_n = 1 + \frac{u_{n-1}}{u_n}$ , $b_n = - \frac{u_{n-1}}{u_n}$ .

1.2. - Dans cette section, nous définissons les "tableaux de récurrences".

PROPOSITION 4. - Soient $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$, $(a_n)_{n\geq 2}$, $(b_n)_{n\geq 2}$, $(r_n)_{n\geq 1}$, des suites liées par les relations :

$$u_n = a_n u_{n-1} + b_n u_{n-2}, \quad \text{pour tout } n\geq 2\ ; \tag{3}$$

$$v_n = u_{n+1} + r_{n+1} u_n \quad \text{pour tout } n\geq 0\ . \tag{4}$$

Posons : $R_n = r_{n+1} + a_{n+1}$ et $d_n = b_{n+1} - r_n R_n$, pour tout $n\geq 1$.

On a les relations :

(i)
$$v_n = b_{n+1} u_{n-1} + R_n u_n \quad \text{pour tout } n\geq 1\ ;$$
$$v_n = d_n u_{n-1} + R_n v_{n-1} \quad \text{pour tout } n\geq 1\ .$$

(ii) si $d_n \neq 0$,

$$v_n = \left(R_n - r_{n-1} \frac{d_n}{d_{n-1}}\right) v_{n-1} + \left(b_n \frac{d_n}{d_{n-1}}\right) v_{n-2} \quad \text{pour tout } n\geq 2\ .$$

Démonstration. - Elle découle de façon élémentaire des définitions.

La proposition 4 permet, étant donnée une suite récurrente $(u_n)_{n\geq 0}$ du type (3), de construire une suite $(v_n)_{n\geq 0}$ à l'aide de la relation (4), et qui satisfait à nouveau une récurrence du type (3) en vertu de (ii).

Le processus peut donc s'appliquer de nouveau à la suite $(v_n)_{n\geq 0}$.

Nous définissons ainsi de proche en proche une famille de suites déduites les unes des autres par une relation du type (4). Cette famille constitue un tableau à double entrée dont trois termes quelconques consécutifs sont liés par une relation linéaire : c'est le "tableau de récurrences".

Nous décrivons les résultats dans le théorème suivant :

**THÉORÈME 1.** - Soient $(u_{n,k})_{n\geq 0, k\geq 0}$, $(v_{n,k})_{n\geq 0, k\geq 0}$, $(a_{n,k})_{n\geq 2, k\geq 0}$, $(b_{n,k})_{n\geq 2, k\geq 0}$, $(r_{n,k})_{n\geq 1, k\geq 0}$ des suites liées par les relations :

(i) pour tout $k\geq 0$, la suite $n \to u_{n,k}$ satisfait la récurrence :

$$u_{n,k} = a_{n,k} u_{n-1,k} + b_{n,k} u_{n-2,k} \quad \text{pour tout } n\geq 2 \ ;$$

(ii) pour tout $k\geq 0$,

$$u_{n,k+1} = u_{n+1,k} + r_{n+1,k} u_{n,k} \quad \text{pour tout } n\geq 0 \ .$$

Posons pour tout $n\geq 1$ et $k\geq 0$ :

$$R_{n,k} = r_{n+1,k} + a_{n+1,k} ,$$

$$d_{n,k} = b_{n+1,k} - r_{n,k} R_{n,k} .$$

Supposons que pour tout $n\geq 1$ et $k\geq 0$, $d_{n,k} \neq 0$.

Alors :

(i) les suites $(a_{n,k})_{n\geq 2, k\geq 0}$ et $(b_{n,k})_{n\geq 2, k\geq 0}$ satisfont les identités :

$$a_{n,k+1} = R_{n,k} - r_{n-1,k} \frac{d_{n,k}}{d_{n-1,k}}$$

$$b_{n,k+1} = b_{n,k} \frac{d_{n,k}}{d_{n-1,k}} \quad \text{pour tout } n\geq 2 \text{ et } k\geq 0$$

(ii) pour tout $n\geq 0$, la suite $k \mapsto u_{n,k}$ satisfait la récurrence :

$$u_{n,k} = (r_{n+1,k-1} + R_{n+1,k-2})\, u_{n,k-1} + d_{n+1,k-2} u_{n,k-2}$$

(iii) considérons les trois suites diagonales $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$, $(\omega_n)_{n\geq 0}$ définies par :

$$u_n = u_{n,n} ,$$

$$v_{2n} = u_{n,n} \quad \text{et} \quad v_{2n+1} = u_{n,n+1} ,$$

$$\omega_{2n} = u_{n,n} \quad \text{et} \quad \omega_{2n+1} = u_{n+1,n} , \quad \text{pour tout } n\geq 0 \ .$$

Chacune de ces trois suites satisfait une récurrence du type (3) avec :

Pour $(u_n)$ :

$$a_n = R_{n,n-1} R_{n,n-2} + \frac{R_{n,n-1}}{R_{n-1,n-2}} d_{n,n-2} + b_{n+1,n-1}$$

$$= d_{n,n-1} + R_{n,n-1} R_{n-1,n-1} + \frac{R_{n,n-1}}{R_{n-1,n-2}} b_{n,n-1} ,$$

$$b_n = - \frac{R_{n,n-1}}{R_{n-1,n-2}} d_{n,n-2} b_{n,n-2} = - \frac{R_{n,n-1}}{R_{n-1,n-2}} d_{n-1,n-2} b_{n,n-1} .$$

Pour $(v_n)$ :

$$a_{2n} = R_{n,n-1} , \quad a_{2n+1} = R_{n,n} ,$$

$$b_{2n} = d_{n,n-1} , \quad b_{2n+1} = b_{n+1,n} .$$

Pour $(\omega_n)$ :

$$a_{2n} = R_{n,n-1} , \quad a_{2n+1} = R_{n+1,n-1} ,$$

$$b_{2n} = b_{n+1,n-1} , \quad b_{2n+1} = d_{n+1,n-1} .$$

Démonstration. - Elle est élémentaire. Démontrons seulement la partie (iii) du théorème. Pour les suites $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(\omega_n)_{n\geq 0}$, les récurrences sont conséquences des relations :

$$u_{n,k} = d_{n,k-1} u_{n-1,k-1} + R_{n,k-1} u_{n-1,k} ,$$

et

$$u_{n,k} = b_{n+1,k-1} u_{n-1,k-1} + R_{n,k-1} u_{n,k-1}$$

établies dans la proposition 4.

Pour $(u_n)_{n\geq 0}$, cela résulte de la proposition suivante appliquée à $(v_n)_{n\geq 0}$ ou à $(\omega_n)_{n\geq 0}$ :

PROPOSITION 5. - Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite satisfaisant une récurrence du type (3), alors la suite $n \mapsto u_{2n}$ satisfait la récurrence :

$$u_{2n} = (b_{2n} + a_{2n} a_{2n-1} + b_{2n-1} \frac{a_{2n}}{a_{2n-2}}) u_{2(n-1)} - (\frac{a_{2n}}{a_{2n-2}} b_{2n-1} b_{2n-2}) u_{2(n-2)} .$$

Démonstration. - Découle de façon directe des définitions.

## 2. - Accélération de la convergence des séries de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{f(n)}$

Dans ce paragraphe, $f$ est un polynôme de degré $s$, ne s'annulant pas sur les entiers positifs.

DÉFINITION 2. - Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)}$ (resp. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{f(k)}$) ; posons :

$$p_o = 0 \text{ et pour } n \geq 1 : p_n = f(1)\, f(2) \dots f(n)\, S_n ,$$

$$q_o = 1 \text{ et pour } n \geq 1 : q_n = f(1)\, f(2) \dots f(n) .$$

LEMME 1. - $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n \geq 0}$ constitue la $n$-ième réduite de la fraction continue dont les termes sont :

$$a_n = f(n-1) + f(n) \quad (\text{resp. } a_n = f(n) - f(n-1))$$

$$b_n = -f(n-1)^2 \quad (\text{resp. } b_n = f(n-1)^2) .$$

Démonstration. - Cela découle des définitions et de la proposition 3.

LEMME 2. - Sous les hypothèses du lemme 1 et de la définition 2, on a :

$$S_n = S + \frac{\alpha_{s-1}}{n^{s-1}} + \frac{\alpha_s}{n^s} + \dots + \frac{\alpha_t}{n^t} + O\left(\frac{1}{n^{t+1}}\right)$$

(resp. $S_n = S + (-1)^n \left(\frac{\alpha_s}{n^s} + \dots + \frac{\alpha_t}{n^t}\right) + O\left(\frac{1}{n^{t+1}}\right)$ ).

Démonstration. - Il suffit d'utiliser la formule sommatoire d'Euler Mac-Laurin.

LEMME 3. - Sous les hypothèses précédentes, soit $\rho_n$ défini par la formule (1) de la proposition 2. Alors :

(i) $\rho_n = r_n + O(\frac{1}{n})$, où $r_n$ est un polynôme en $n$ de degré $s$.

(ii) Posons $d_n = b_{n+1} - r_n (r_{n+1} + a_{n+1})$.

$d_n$ est un polynôme en $n$ de degré strictement inférieur à $s$.

Démonstration. - (i) La formule (1), compte tenu des définitions, permet d'écrire :

$$S = \frac{f(n)\, S_n + \rho_n S_{n-1}}{f(n) + \rho_n} .$$

D'où :

$$S = S_{n-1} + \frac{1}{\rho_n + f(n)} \qquad \left(\text{resp. } S = S_{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{\rho_n + f(n)}\right) .$$

Par conséquent :

$$\rho_n = -f(n) + \frac{1}{S - S_{n-1}} \qquad \left(\text{resp. } \rho_n = -f(n) + \frac{(-1)^{n-1}}{S - S_{n-1}}\right) .$$

Utilisant le lemme 2, on obtient le résultat.

(ii) Ce qui précède prouve que $d_n$ est un polynôme en $n$ de degré inférieur ou égal à $2s$ .

Posons : $\rho_n = r_n + \varepsilon_n$ , $\varepsilon_n = O(\frac{1}{n})$ ; $R_n = a_{n+1} + r_{n+1}$ .

On a :

$$d_n = r_n \varepsilon_{n+1} + \varepsilon_n R_n + \varepsilon_n \varepsilon_{n+1} .$$

Ceci montre que $d_n$ est en fait un polynôme en $n$ de degré strictement inférieur à $s$ .

Remarques : (1) Pratiquement, le lemme 3 permet de déterminer $r_n$ en procédant par coefficients indéterminés, en écartant la solution triviale $r_n = -f(n)$ .

(2) Lorsque le degré de $f$ est $2$ , $d_n$ est constant. Il en est de même lorsque $f(n) = (an+b)^3$ ou $(an^3 + bn)$. Ce qui rend les calculs particulièrement simples (cf. paragraphe 3).

LEMME 4. - Avec les notations précédentes, $r_n$ étant défini comme au lemme 3, posons : pour $n \geq 1$,

$$p_{n-1,1} = p_n + r_n p_{n-1}$$

$$q_{n-1,1} = q_n + r_n q_{n-1}$$

on a :

$$\frac{p_{n-1,1}}{q_{n-1,1}} - S = O\left(\frac{1}{n^{2s-1}}\right) \quad \left(\text{resp. } \frac{p_{n-1,1}}{q_{n-1,1}} - S = O\left(\frac{1}{n^{2s+1}}\right)\right) .$$

Démonstration. - En vertu des définitions et de la formule (2), on a :

$$\frac{p_{n-1,1}}{q_{n-1,1}} - S = \frac{p_n + r_n p_{n-1}}{q_n + r_n q_{n-1}} - \frac{p_n + \rho_n p_{n-1}}{q_n + \rho_n q_{n-1}} = \frac{-\varepsilon_n (p_{n-1} q_n - q_{n-1} p_n)}{(q_n + r_n q_{n-1})(q_n + \rho_n q_{n-1})} .$$

Mais d'autre part :

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - S = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n + \rho_n p_{n-1}}{q_n + \rho_n q_{n-1}} = \frac{p_{n-1} q_n - q_{n-1} p_n}{q_{n-1}(q_n + \rho_n q_{n-1})} .$$

En remplaçant dans l'expression qui précède, on obtient :

$$\frac{p_{n-1,1}}{q_{n-1,1}} - S = \left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - S\right)\left(-\varepsilon_n \frac{q_{n-1}}{q_{n-1,1}}\right) . \tag{5}$$

Or, on a :

$$q_{n-1} = f(1)\, f(2) \ldots f(n-1) , \quad \text{et} \quad q_{n-1,1} = f(1)\, f(2) \ldots f(n-1)\, (f(n) + r_n) .$$

Si $f(n)$ est de la forme :

$$f(n) = an^s + bn^{s-1} + \ldots ,$$

il est facile de voir que :

$$r_n = -an^s + [(s-1)a - b]\, n^{s-1} + \ldots \quad (\text{resp. } r_n = an^s + \ldots) .$$

Par conséquent :

$$\frac{q_{n-1}}{q_{n-1,1}} = O\left(\frac{1}{n^{s-1}}\right) \quad \left(\text{resp. } \frac{q_{n-1}}{q_{n-1,1}} = O\left(\frac{1}{n^s}\right)\right) .$$

Ce résultat, associé à la formule (5) démontre le lemme 4.

Remarque. - Nous venons au lemme 4 de construire la suite $\left(\frac{p_{n-1,1}}{q_{n-1,1}}\right)_{n\geq 1}$ des réduites d'une nouvelle fraction continue dont les termes sont **données** par le théorème 1, (i), et qui converge vers $S$ plus rapidement que la fraction continue initiale.

PROPOSITION 6. - Avec les hypothèses précédentes, il existe des suites $(p_{n,k})_{n\geq 0, k\geq 0}$, $(q_{n,k})_{n\geq 0, k\geq 0}$, $(a_{n,k})_{n\geq 2, k\geq 0}$, $(b_{n,k})_{n\geq 2, k\geq 0}$, $(r_{n,k})_{n\geq 1, k\geq 0}$ telles que :

(i) pour tout $k\geq 0$ et $n\geq 1$ : $p_{n-1,k+1} = p_{n,k} + r_{n,k}\, p_{n-1,k}$ ,

$$q_{n-1,k+1} = q_{n,k} + r_{n,k}\, q_{n-1,k}$$

(ii) pour tout $k\geq 0$, $a_{n,k}$ et $b_{n,k}$ sont les termes d'une fraction continue dont les réduites sont $\left(\frac{p_{n,k}}{q_{n,k}}\right)_{n\geq 0}$

(iii) pour tout $k\geq 0$, $a_{n,k}$ (resp. $b_{n,k}$) est une fraction rationnelle en $n$ dont la partie entière est un polynôme de degré $s$ (resp. $2s$)

(iv) posons, pour tout $k\geq 0$ et $n\geq 1$,

$$\rho_{n,k} = \cfrac{b_{n+1,k}}{a_{n+1,k} + \cfrac{b_{n+2,k}}{a_{n+2,k} + \ddots}} .$$

Alors :

$$\rho_{n,k} = r_{n,k} + O(\frac{1}{n}) ,$$

où $r_{n,k}$ est un polynôme en $n$ de degré $s$.

(v) Si pour tout $k\geq 0$ et $n\geq 0$, on pose :

$$d_{n,k} = b_{n+1,k} - r_{n,k}(r_{n+1,k} + a_{n+1,k}) ,$$

alors, $d_{n,k}$ est une fraction rationnelle en $n$ dont la partie entière est de degré strictement inférieur à $s$.

(vi) Pour tout $k\geq 0$, on a :

$$\frac{p_{n-1,k}}{q_{n-1,k}} - S = O(\frac{1}{n^{(k+1)s-1}}) \quad (\text{resp. } \frac{p_{n-1,k}}{q_{n-1,k}} - S = O(\frac{1}{n^{(k+1)s+k}})) .$$

Démonstration. - Par récurrence sur $k\geq 0$

(a) Pour $k = 0$, on pose pour tout $n\geq 0$

$$p_{n,0} = p_n \quad \text{et} \quad q_{n,0} = q_n .$$

Le lemme 4, avec $r_{n,0} = r_n$, définit les suites $(p_{n,1})_{n\geq 0}$ et $(q_{n,1})_{n\geq 0}$ telles que (i), (ii), (iii), (iv), (v) et (vi) sont satisfaits.
(Remarquons que $(a_{n,1})_{n\geq 2}$ et $(b_{n,1})_{n\geq 2}$ sont donnés en fonction des $(a_{n,0})_{n\geq 2}$ et $(b_{n,0})_{n\geq 2}$ par le théorème 1, (i)).

(b) Supposons avoir défini pour $0\leq j\leq k$, $(p_{n,j})_{n\geq 0}$, $(q_{n,j})_{n\geq 0}$, $(a_{n,j})_{n\geq 2}$, $(b_{n,j})_{n\geq 2}$, et pour $0\leq j\leq k-1$, $(r_{n,j})_{n\geq 1}$, satisfaisant la proposition. (Nous ne traiterons que le cas $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}$.)

On a donc, pour $j\leq k-1$ :

$$\begin{aligned} p_{n-1,j+1} &= p_{n,j}+r_{n,j}\,p_{n-1,j} \\ q_{n-1,j+1} &= q_{n,j}+r_{n,j}\,q_{n-1,j} \; . \end{aligned} \tag{6}$$

D'autre part :

$$S=\frac{p_{n,k}+\rho_{n,k}\,p_{n-1,k}}{q_{n,k}+\rho_{n,k}\,q_{n-1,k}} ,$$

d'où :

$$\rho_{n,k}=-\frac{p_{n,k}-S\,q_{n,k}}{p_{n-1,k}-S\,q_{n-1,k}} .$$

En itérant les relations (6), on obtient :

$$p_{n,k}=p_{n+k,0}+\lambda'_n\,p_{n+k-1,0}+\dots+\lambda^k_n\,p_{n,0}$$

et

$$q_{n,k}=q_{n+k,0}+\lambda'_n\,q_{n+k-1,0}+\dots+\lambda^k_n\,q_{n,0} ,$$

où $(\lambda^j_n)_{1\leq j\leq k}$ est une famille finie de fractions rationnelles en $n$ dont la partie entière est un polynôme de degré $js$.

Par conséquent :

$$p_{n,k}-S\,q_{n,k}=f(1)\dots f(n)\sum_{j=0}^{k} f(n+1)\dots f(n+k-j)\,\lambda^j_n\,(S_{n+k-j}-S) ,$$

et :

$$\rho_{n,k}=-f(n)\,\frac{\sum_{j=0}^{k}\mu^j_n\,(S_{n+k-j}-S)}{\sum_{j=0}^{k}\mu^j_{n-1}(S_{n+k-j}-S)} ,$$

où $(\mu^j_n)_{1\leq j\leq k}$ est une famille de fractions rationnelles en $n$ dont la partie entière est un polynôme de degré $ks$.

Compte tenu du lemme 2, on constate que $\rho_{n,k}$ admet un équivalent de la forme $\rho_{n,k}=r_{n,k}+O(\frac{1}{n})$, où $r_{n,k}$ est un polynôme de degré $s$ en $n$. Comme au lemme 3, on démontre que la fraction rationnelle $d_{n,k}$ a une partie entière de degré strictement inférieur à $s$. (Ce qui permet de calculer $r_{n,k}$ par la méthode des coefficients indéterminés.)

On définit alors $p_{n-1,k+1}$ et $q_{n-1,k+1}$ par (i).

Il est facile de voir en utilisant le théorème 1, (i), et en faisant une démonstration analogue à celle du lemme 4, que (ii), (iii), (iv), (v) et (vi) sont satisfaits.

THÉORÈME 2. - Avec les notations précédentes, posons :

$$c_{n,0} = r_{n,0} + f(n) \quad \text{et pour tout } k \geq 1, \quad c_{n,k} = r_{n,k} + R_{n,k-1}$$

(où : pour tout $k \geq 0$, $R_{n,k} = r_{n+1,k} + a_{n+1,k}$).

On a :

(i)
$$\frac{p_{n,k}}{q_{n,k}} = \frac{p_{0,k}}{q_{0,k}} + \cfrac{b_{1,k}}{a_{1,k} + \cfrac{b_{2,k}}{a_{2,k} + \ddots + \cfrac{b_{n,k}}{a_{n,k}}}}$$

(ii)
$$\frac{p_{n,k}}{q_{n,k}} = S_n + \cfrac{\varepsilon}{c_{n+1,0} + \cfrac{d_{n+1,0}}{c_{n+1,1} + \cfrac{d_{n+1,1}}{c_{n+1,2} + \ddots + \cfrac{d_{n+1,k-2}}{c_{n+1,k-1}}}}}$$

(iii)
$$S = S_n + \cfrac{\varepsilon}{c_{n+1,0} + \cfrac{d_{n+1,0}}{c_{n+1,1} + \cfrac{d_{n+1,1}}{c_{n+1,2} + \ddots + \cfrac{d_{n+1,k-2}}{c_{n+1,k-1} + \varepsilon_{n+1,k-1}}}}}$$

où :

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)} \\ -1 & \text{si } S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{f(n)} \end{cases}$$

et :

$$\varepsilon_{n,k} = -\frac{q_{n-1,k} - S p_{n-1,k}}{q_{n-1,k+1} - S q_{n-1,k+1}} = \rho_{n,k} - r_{n,k}.$$

Démonstration. - Le théorème 1, (ii) donne :

$$p_{n,k} = c_{n+1,k-1}\, p_{n,k-1} + d_{n+1,k-2}\, p_{n,k-2} ,$$

et

$$q_{n,k} = c_{n+1,k-1}\, q_{n,k-1} + d_{n+1,k-2}\, q_{n,k-2} ,$$

d'où la fraction continue (ii). (La fraction continue (i) est immédiate : utiliser la proposition 1.)

Par définition de $\varepsilon_{n,k}$, on a : (démonstration analogue à celle de la formule (5)) :

$$S = \frac{p_{n,k} + \varepsilon_{n+1,k-1}\, p_{n,k-1}}{q_{n,k} + \varepsilon_{n+1,k-1}\, q_{n,k-1}} ,$$

d'où :

$$S = S_n + \cfrac{\varepsilon}{c_{n+1,0} + \cfrac{d_{n+1,0}}{c_{n+1,1} + \ddots + \cfrac{d_{n+1,k-2}}{c_{n+1,k-1} + \varepsilon_{n+1,k-1}}}}$$

ce qui prouve le théorème.

Remarque. - Lorsque le processus décrit dans la proposition 6 donne des $d_{n,k}$ indépendants de $n$, il est facile de voir que la fraction continue "diagonale" du tableau de récurrences ainsi obtenu (cf. théorème 1, (iii)) converge exponentiellement vers $S$, c'est-à-dire :

$$\frac{p_n}{q_n} - S = O(\alpha^n) , \quad 0 < \alpha < 1$$

(il suffit d'évaluer l'ordre de grandeur de $q_n$ à l'aide de la relation de récurrence, et d'utiliser la relation :

$$S - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^n \frac{b_n b_{n-1} \cdots b_2 b_1}{q_n\, q_{n-1}} ).$$

3. - <u>Applications à l'accélération de la convergence des séries</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ <u>et</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{f(n)}$, <u>où</u> f <u>est un polynôme de degré</u> 1, 2, <u>ou</u> 3

Les résultats qui suivent sont des corollaires du théorème 1, proposition 6, et du théorème 2. Ils sont donnés sans démonstration, mais la vérification en est aisée.

3.1. - $f(n) = an^2 + bn + c$, $a \neq 0$

3.1.1. - $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$.

On a :

$$a_{n+1,k} = f(n) + f(n+1) + k(k+1)a$$

$$b_{n+1,k} = -f(n)^2$$

$$r_{n,k} = -an^2 + [(k+1)a-b]n - \frac{1}{2}[(k+1)^2 a - (k+1)b + 2c]$$

$$R_{n,k} = an^2 + [(k+1)a+b]n + \frac{1}{2}[(k+1)^2 a + (k+1)b + 2c]$$

$$d_{n,k} = \frac{1}{4}[(k+1)^2 a + (k+1)b + 2c][(k+1)^2 a - (k+1)b + 2c] .$$

3.1.2. - $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{f(n)}$

On a :

$$a_{n+1,k} = (2k+1)[f(n+1) - f(n)]$$

$$b_{n+1,k} = f(n)^2$$

$$r_{n,k} = an^2 + [b - 2(k+1)a]n + [2(k+1)^2 a - (k+1)b + c]$$

$$R_{n,k} = an^2 + [b + 2(k+1)a]n + [2(k+1)^2 a + (k+1)b + c]$$

$$d_{n,k} = -[2(k+1)^2 a - (k+1)b + c][2(k+1)^2 a + (k+1)b + c] .$$

3.1.3. - Cas particuliers

En choisissant convenablement (a, b, c) on obtient, grâce aux formules précédentes, une méthode d'accélération de la convergence des séries suivantes :

(a) $$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} ,$$

(b) $$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} ,$$

(c) $$\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}\,dt}{1+t^{\beta}} = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{\beta n+\alpha} ,$$

(d) $$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} ,$$

(e) $$\frac{1}{2}\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} ,$$

(f) $$c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \qquad \text{(constante de Catalan).}$$

Donnons, pour chacune d'elles, les fractions continues accélérées obtenues :

(a') $$\log 2 = S_k + \cfrac{(-1)^k}{(2k+1) + \cfrac{1^2}{(2k+1) + \cfrac{2^2}{(2k+1) + \ddots}}}$$

(notons que le tableau est symétrique, et que, par conséquent :

$$\frac{p_{n,k}}{q_{n,k}} = S_k + \cfrac{(-1)^k}{(2k+1) + \cfrac{1^2}{(2k+1) + \ddots + \cfrac{(n-1)^2}{(2k+1)}}} = S_n + \cfrac{(-1)^n}{(2n+1) + \cfrac{1^2}{(2n+1) + \ddots + \cfrac{(k-1)^2}{(2n+1)}}} ).$$

La fraction continue diagonale est :

$$\log 2 = \cfrac{2}{3 - \cfrac{1^2}{6 - \cfrac{2^2}{9 - \ddots}}}$$

(b') $$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \ddots}}}$$ (fraction continue "diagonale")

(c') $$\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t^{\beta}}\,dt = \cfrac{1}{\alpha + \cfrac{\alpha^2}{\alpha+\beta + \cfrac{\beta^2}{\alpha+2\beta + \cfrac{(\beta+\alpha)^2}{\alpha+3\beta + \cfrac{(2\beta)^2}{\alpha+4\beta + \cfrac{(\alpha+2\beta)^2}{\ddots}}}}}}$$

(d') $$\xi(2) = \cfrac{5}{p(0) + \cfrac{1^4}{p(1) + \cfrac{2^4}{p(2) + \ddots}}}$$ , (fraction continue diagonale),

où $p(n) = 11n^2 + 11n + 3$ .

(e') $$\frac{1}{2}\xi(2) = \frac{1}{2}S_k + \cfrac{1}{(2k+1) + \cfrac{1^4}{3(2k+1) + \ddots}} ,$$

avec :

$$\frac{p_{n,k}}{q_{n,k}} = \frac{1}{2}S_k + \cfrac{1}{(2k+1) + \cfrac{1^4}{3(2k+1) + \ddots + \cfrac{(n-1)^4}{(2n-1)(2k+1)}}}$$

$$= S'_n + \frac{1}{2}\,\cfrac{(-1)^n}{(n^2+n+1) - \cfrac{1^4}{(n^2+n+5) - \ddots - \cfrac{(k-1)^4}{n(n+1)+k^2+(k+1)^2}}} ,$$

où $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ , $S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ .

Ce tableau conduit à la même fraction continue diagonale que pour $\zeta(2)$ (cas (e)). En effet, les deux tableaux (cas (d) et (e)) se déduisent l'un de l'autre par symétrie par rapport à la diagonale.

(f')
$$c = \cfrac{1}{1+\cfrac{1^4}{13-\cfrac{4.2^4}{29+\ddots+\cfrac{\varepsilon_n n^4}{a_n+\ddots}}}}$$

où

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ impair} \\ -4 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

et

$$a_n = \begin{cases} (n+1)^2+(2n+1)^2 & \text{si } n \text{ impair,} \\ n^2+(2n+1)^2 & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$$

3.2. - $f(n) = an^3+bn$ , $a \neq 0$ .

3.2.1. - Pour la série $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ , on obtient :

$$a_{n+1,k} = f(n) + f(n+1) + 2ak(k+1)(2n+1)$$

$$b_{n+1,k} = -f(n)^2$$

$$r_{n,k} = -an^3+2a(k+1)n^2-[2a(k+1)^2+b]n+(k+1)[(k+1)^2a+b]$$

$$R_{n,k} = an^3+2a(k+1)n^2+[2a(k+1)^2+b]n+(k+1)[(k+1)^2a+b]$$

$$d_{n,k} = -(k+1)^2[(k+1)^2a+b]^2 .$$

Notons que : $r_{n+1,k-1} = -r_{k,n}$ , d'où il résulte que le tableau des $\left(\frac{p_{n,k}}{q_{n,k}}\right)_{n\geq 0,k\geq 0}$ est symétrique.

3.2.2. - Cas particuliers

En remplaçant dans le cas précédent, $n$ par $n+\frac{b}{a}$ et en multipliant par $a^3$, on obtient les suites $(r_{n,k})$, $(a_{n,k})$, $(b_{n,k})$ et $(R_{n,k})$ correspondant au polynôme $f(n)=(an+b)^3$.

3.2.3. - $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$

En faisant $a=1$, $b=0$ dans (3.2.1), on obtient pour $\zeta(3)$ un tableau symétrique de fractions continues dont on peut calculer les réduites :

$$\frac{p_{n,k}}{q_{n,k}} = S_k + \cfrac{1}{(2k^2+2k+1) - \cfrac{1^6}{(6k^2+6k+9) - \cfrac{2^6}{\ddots - \cfrac{(n-1)^6}{n^3+(n-1)^3+2k(k+1)(2n-1)}}}}$$

$$= S_n + \cfrac{1}{(2n^2+2n+1) - \cfrac{1^6}{(6n^2+6n+9) - \cfrac{2^6}{\ddots - \cfrac{(k-1)^6}{k^3+(k-1)^3+2n(n+1)(2k-1)}}}}$$

D'où une fraction continue diagonale :

$$\zeta(3) = \cfrac{6}{p(0) - \cfrac{1^6}{p(1) - \cfrac{2^6}{p(2) - \cfrac{3^6}{\ddots}}}}$$

où $p(n) = 34n^3+51n^2+27n+5$.

A noter le fait remarquable que cette fraction continue permet de démontrer l'irrationnalité de $\zeta(3)$ (cf. [5] et [2]).

3.2.4. - $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3}$

Dans (3.2.2) on choisit $a = 2$ , $b = -1$ . On construit ainsi la fraction continue :

$$\frac{7}{8}\zeta(3) = \cfrac{1}{p(0) - \cfrac{1^6}{p(1) - \cfrac{2^6}{p(2) - \ddots}}}$$

où $p(n) = 6n^3 + 9n^2 + 5n + 1$ .

3.3. - Quelques remarques

3.3.1. - Le processus utilisé dans cet article n'est simple que lorsque les $d_{n,k}$ sont des polynômes constants en $n$ .

3.3.2. - Calquant le procédé d'accélération décrit précédemment, on peut tenter d'accélérer des fractions continues plus générales que celles associées à des séries de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ .

Par exemple, on peut essayer de réaccélérer les fractions continues obtenues.

Considérons en particulier la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1}{x^{2n+1}}$ .

La fraction continue associée est :

$$\operatorname{Arctg}\frac{1}{x} = \cfrac{1}{x + \cfrac{1^2}{3x + \cfrac{2^2}{5x + \ddots}}}$$

Par le processus d'accélération décrit précédemment, on obtient :

$$\mathrm{Arc\,tg}\,\frac{1}{x} = \cfrac{2}{y + \cfrac{1}{3y + \cfrac{2^2}{5y + \ddots}}}$$

où $y = x + \sqrt{1+x^2}$ .

3.3.3. - Notons que l'on peut construire les "tableaux de récurrences" associées à des séries numériques divergentes.

Par exemple, partant des séries $\Sigma\, n^{-s}$ où $s<0$ , on obtient la valeur de $\zeta(s)$ correspondante lorsque $s$ est un entier négatif, de la manière suivante :

pour tout $n \geq 0$ , $\dfrac{p_{n,|s|+1}}{q_{n,|s|+1}} = \zeta(s)$ , et, pour tout $k > |s|+1$ :

$$\frac{p_{n,k}}{q_{n,k}} = 0 \ .$$

4. - Construction des approximants de Padé de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

DÉFINITION 3. - Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ une série entière, soient $p, q$ deux $\geq 0$ . On dit que $A_{p,q}(x) / B_{p,q}(x)$ est un approximant de Padé $[p/q]$ de $f(x)$ si :

(i) $A_{p,q}(x)$ est un polynôme en $x$ de degré $p$ ,

(ii) $B_{p,q}(x)$ est un polynôme en $x$ de degré $q$ ,

(iii) $f(x)\, B_{p,q}(x) - A_{p,q}(x)$ est une série entière d'ordre $p+q+1$ .

LEMME 5. - Soit $a_{p,q}$ le coefficient dominant de $A_{p,q}(x)$ . Alors :

$$A_{p,q+1} = A_{p+1,q} - \frac{a_{p+1,q}}{a_{p,q}} \times A_{p,q} ,$$

$$B_{p,q+1} = B_{p+1,q} - \frac{a_{p+1,q}}{a_{p,q}} \times B_{p,q} .$$

Démonstration. - C'est un résultat classique de la théorie des approximants de Padé (cf. [8]).

PROPOSITION 7. - Soit $f(x) = e^x$ (resp. $(1+x)^{\omega}$, resp. $\log(1-x)$).

Le tableau de récurrence décrit au théorème 1 permet de construire la table de Padé de $e^x$ (resp. la table de Padé de $(1+x)^{\omega}$, resp. la partie supérieure de la table de Padé de $\log(1-x)$).

Démonstration. - Posons : $S_p(x) = \sum_{k=0}^{p} c_k x^k$ où $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$,

$$A_{p,0}(x) = p!\, S_p(x) ,$$

$$B_{p,0}(x) = p!$$

Les récurrences du lemme 5 permettent d'utiliser le théorème 1.

Les quantités $(d_{n,k})$ sont dans chacun des trois cas indépendantes de $n$. Les dénominateurs de la diagonale du tableau sont les polynômes réciproques de Bessel (resp. les polynômes de Jacobi, resp. les polynômes de Legendre).

Remarque. - Nous retrouvons ainsi la classique fraction continue :

$$\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} = \cfrac{1}{x - \cfrac{1^2}{3x - \cfrac{2^2}{5x - \ddots}}}$$

Cette fraction permet de trouver des mesures d'irrationalité de logarithme (cf. [3] et [4]).

## 5. - Annexe

### 5.1. - Tableau de récurrences de $\log 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 0,6931471806\ldots$

| k \ n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{0}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{14}{24}$ | $\frac{94}{120}$ | $\frac{444}{720}$ | $\frac{3828}{5040}$ | $\frac{25584}{40320}$ |
| 1 | $\frac{1}{1}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{7}{10}$ | $\frac{29}{42}$ | $\frac{150}{216}$ | $\frac{914}{1320}$ | $\frac{6492}{9360}$ | $\frac{52380}{75600}$ | |
| 2 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{7}{10}$ | $\frac{36}{52}$ | $\frac{208}{300}$ | $\frac{1364}{1968}$ | $\frac{10148}{14640}$ | | | |
| 3 | $\frac{5}{6}$ | $\frac{29}{42}$ | $\frac{208}{300}$ | $\frac{1572}{2268}$ | $\frac{12876}{18576}$ | | | | |
| 4 | $\frac{14}{24}$ | $\frac{150}{216}$ | $\frac{1364}{1968}$ | $\frac{12876}{18576}$ | $\frac{128160}{184896}$ | | | | |
| 5 | $\frac{94}{120}$ | $\frac{914}{1320}$ | $\frac{10198}{14640}$ | | | | | | |
| 6 | $\frac{444}{720}$ | $\frac{6492}{9360}$ | | | | | | | |
| 7 | $\frac{3828}{5040}$ | $\frac{52380}{75600}$ | | | | | | | |
| 8 | $\frac{25584}{40320}$ | | | | | | | | |

### 5.2. - Tableau de récurrences de $\frac{1}{2}\xi(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} = 0,8224670334\ldots$

| k \ n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{0}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{31}{36}$ | $\frac{460}{516}$ | $\frac{12076}{14400}$ | $\frac{420336}{518400}$ | $\frac{21114864}{25401600}$ |
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{46}{56}$ | $\frac{770}{936}$ | $\frac{19896}{24192}$ | $\frac{734312}{892800}$ | $\frac{36667296}{44582400}$ | $\frac{1381692896}{2895782400}$ |
| 2 | $\frac{10}{16}$ | $\frac{66}{80}$ | $\frac{1000}{1216}$ | $\frac{26056}{31680}$ | $\frac{992960}{1207296}$ | $\frac{51353536}{62438400}$ | $\frac{3445044480}{4188672000}$ | |
| 3 | $\frac{196}{288}$ | $\frac{1660}{2016}$ | $\frac{35056}{42624}$ | $\frac{1253520}{1524096}$ | $\frac{64262016}{78133248}$ | | | |
| 4 | $\frac{6560}{9216}$ | $\frac{68256}{82944}$ | $\frac{1849472}{2248704}$ | $\frac{84318336}{102518784}$ | $\frac{5461862400}{6640828416}$ | | | |

5.3. - Tableau de récurrences de $\xi(3) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = 1.2020569031 59...$

| k \ n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{0}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{251}{216}$ | $\frac{16280}{13824}$ | $\frac{2048824}{1728000}$ | $\frac{444273984}{373248000}$ |
| 1 | $\frac{1}{1}$ | $\frac{6}{5}$ | $\frac{125}{104}$ | $\frac{6491}{5400}$ | $\frac{681304}{566714}$ | $\frac{126706264}{105408000}$ | |
| 2 | $\frac{9}{8}$ | $\frac{125}{104}$ | $\frac{5616}{4672}$ | $\frac{525520}{437184}$ | $\frac{87871936}{73101312}$ | | |
| 3 | $\frac{251}{216}$ | $\frac{6491}{5400}$ | $\frac{525520}{437184}$ | $\frac{81040176}{67417920}$ | | | |
| 4 | $\frac{16280}{13824}$ | $\frac{681304}{566784}$ | $\frac{87871936}{73101312}$ | | | | |
| 5 | $\frac{2048824}{1728000}$ | $\frac{126706264}{105408000}$ | | | | | |
| 6 | $\frac{444273984}{373248000}$ | | | | | | |

5.4. - Tableau de récurrence de $(1-2^6)\,\xi(-5) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, n^{+5}\right) = +\frac{1}{4}$

| k \ n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{0}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $-\frac{31}{1}$ | $\frac{212}{1}$ | $-\frac{812}{1}$ | $\frac{2313}{1}$ | $-\frac{5463}{1}$ | $\frac{11344}{1}$ | $-\frac{21424}{1}$ |
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{30}{2}$ | $\frac{181}{2}$ | $-\frac{600}{2}$ | $\frac{1501}{2}$ | $-\frac{3150}{2}$ | $\frac{5881}{2}$ | $-\frac{10080}{2}$ | |
| 2 | $-\frac{29}{4}$ | $\frac{151}{4}$ | $-\frac{419}{4}$ | $\frac{901}{4}$ | $-\frac{1649}{4}$ | $\frac{2731}{4}$ | $-\frac{4199}{4}$ | | |
| 3 | $\frac{122}{8}$ | $-\frac{268}{8}$ | $\frac{482}{8}$ | $-\frac{748}{8}$ | $\frac{1082}{8}$ | $-\frac{1468}{8}$ | | | |
| 4 | $-\frac{146}{16}$ | $\frac{214}{16}$ | $-\frac{266}{16}$ | $\frac{334}{16}$ | $-\frac{386}{16}$ | | | | |
| 5 | $\frac{68}{32}$ | $-\frac{52}{32}$ | $\frac{68}{32}$ | $-\frac{52}{32}$ | $\frac{68}{32}$ | | | | |
| 6 | $\frac{16}{64}$ | $\frac{16}{64}$ | $\frac{16}{64}$ | $\frac{16}{64}$ | $\frac{16}{64}$ | | | | |

## BIBLIOGRAPHIE


[1] R. APÉRY, Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, Société Mathématique de France, Astérisque 61 (1979), 11-13.

[2] F. BEUKERS, A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$, Bull. London Math. Soc. 11 (1979), 268-272.

[3] G. V. CHOODNOVSKY, Approximations rationnelles des logarithmes de nombres rationnels, C.R.A.S. t. 288 (1979), série A, 607-609.

[4] G. V. CHOODNOVSKY, Formules d'Hermite pour les approximants de Padé de logarithmes et de fonction binômes et mesures d'irrationalité, C.R.A.S. t. 288 (1979), série A, 965-967.

[5] H. COHEN, Démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$ (d'après R. Apéry), Séminaire de théorie des nombres (5 octobre 1978), Grenoble, VI.1-VI.9.

[6] J.W.L. GLAISHER, Methods of increasing the convergence of certain series of reciprocals, Quarterly J. of Maths XXXIV (1903), 87-98 et 252-347.

[7] M. MENDÈS FRANCE, Roger Apéry et l'irrationnel, La Recherche 97 (1979), 170-172.

[8] H.S. WALL, Analytic Theory of continued fractions, Chelsea (1973).


(texte reçu le 11 septembre 1980)

-:-:-:-

Christian BATUT
Michel OLIVIER
U.E.R. de Mathématiques
et d'Informatique
Université de Bordeaux I
F 33405 TALENCE CEDEX