Über gewisse mit den Kegelschnitten zusammenhängende ebene Kurven höherer Ordnung.

Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde der hohen philosophischen Fakultät der vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg vorgelegt von

Georg Eggers

aus Magdeburg.

Halle a. S., Druck von Heinrich John

1911.

Referent: Herr Professor Dr. A. Gutzmer.

Dem Andenken meiner lieben Eltern!

Einleitung.

In seinem Buche: „Spezielle ebene Kurven“ gibt Wieleitner ein Verfahren an[1]), aus zwei gegebenen Kurven durch Konstruktion neue abzuleiten. Eine Anwendung davon, eine Spezialisierung der Methode, zeigt die Arbeit von Rolle[2]), in der bekannte Kurven, die Kegelschnitte, als Grundlage dienen und durch Bilden der Differenz von Strahlen neue Kurven gewonnen werden. In der Hauptsache behandelt Rolle die Kurven, die aus Parabel, Ellipse und Hyperbel dadurch entstehen, dass man Brennstrahlen zieht, diese zum Schnitt mit den Kegelschnitten und ihren Hauptkreisen bringt und dann die Differenz von Kegelschnitt- und Hauptkreisradius vom Brennpunkt aus abträgt. Nun sind bekanntlich die Hauptkreise der Kegelschnitte Fusspunktkurven in Bezug auf den Brennpunkt, und es bietet sich daher eine naturgemässe Erweiterung der Arbeit von Rolle in der Richtung, dass man als Grundkurven neben den Kegelschnitten Fusspunktkurven in Bezug auf andere ausgezeichnete Punkte der Kegelschnitte wählt und die Konstruktionsstrahlen von diesen Punkten aus zieht. Es soll die Hauptaufgabe der vorliegenden Arbeit sein, diese Betrachtungen für Scheitel und Mittelpunkt der Kegelschnitte durchzuführen und die entstehenden Kurven möglichst genau zu diskutieren.

Im 1. Abschnitt soll der Scheitel der Kegelschnitte als Pol gewählt werden, Grundkurven sind also dann die Kegelschnitte und ihre Fusspunktkurven bezogen auf den Scheitel. Die Betrachtung wird im Vergleich zu der von Rolle insofern erweitert, als dieser nur die Differenz der Strahlenabschnitte

---

1) Wieleitner: „Spezielle ebene Kurven“ p. 3 (Sammlung Schubert LVI).

2) Rolle: „Über einige von den Kegelschnitten abgeleitete Kurven höheren Grades“. Schulprogramm, Ilmenau 1909.

bildete, während hier die Kurvengleichung lauten soll $\rho = \rho_K + \varepsilon \cdot \rho_F$, wo ρ_K und ρ_F Radienvektoren von Kegelschnitt, bezüglich Fusspunktkurve sind, während ε einen beliebigen Faktor darstellt, der in einigen Fällen auf $+1$ und -1 beschränkt werden soll. Im allgemeinen hat man also Kurvenscharen, denen auch die Kegelschnitte selbst angehören, man erhält sie für $\varepsilon = 0$.

§ 1 behandelt den Fall der Parabel, während Ellipse und Hyperbel den Paragraphen 2 und 3 zur Grundlage dienen.

Im zweiten Abschnitt, § 4 und § 5 sind zu Grundkurven gewählt die Mittelpunktskegelschnitte und ihre Fusspunktkurven bezüglich des Mittelpunktes. Zur Konstruktion, die ganz analog der im ersten Abschnitt durchgeführt ist, benutzt man hier Mittelpunktsstrahlen.

Der dritte Abschnitt, §§ 6 und 7, steht mit dem Vorhergehenden in loserem Zusammenhang, gewissermassen als Anhang bringt er eine andere Methode konstruktiv aus gegebenen Kurven neue zu gewinnen. Man nimmt nicht mehr Streckensummen oder Differenzen, sondern bildet die mittlere Proportionale und trägt diese vom Pol aus auf dem betreffenden Strahl ab. Als Beispiele wurden die Grundkurven gewählt, die Rolle am Schluss seiner Arbeit erwähnt, in § 6 die Mittelpunktskegelschnitte und ihr Hauptkreis, zur Konstruktion dienen Mittelpunktsstrahlen, in § 7 hat man neben Ellipse und Hyperbel die b-Achse, die y-Achse des Koordinatensystems. Dabei werden die Brennstrahlen der Kegelschnitte gezogen und zur Konstruktion benutzt.

In mehreren Fällen wurden auch die Hesseschen Kurven der gefundenen Kurven aufgestellt und diskutiert.

Von Wichtigkeit für die genaue Diskussion war mir ein Satz, den Herr Professor von Brill in Tübingen Herrn Professor Gutzmer brieflich mitgeteilt hat, und dessen Veröffentlichung an dieser Stelle er mir gütigst gestattete. Es handelt sich um die Multiplizität des Schnittes der Hesseschen Kurve mit ihrer Grundkurve in einem mehrfachen Punkte der letzteren bei teilweise zusammenfallenden Tangenten. Der Wortlaut der Mitteilung des Herrn von Brill ist folgender:

„Ist die Gleichung der Kurve $f \equiv f(x,y) \equiv b_k + c_{k+1} + d_{k+2} + \ldots = 0$, wo $b_k = \alpha_1{}^i \cdot \beta_{k-i}$ ist und $\alpha, \beta, b, c, d \ldots$ Binärformen von den Dimensionen des Index sind ($\alpha = \alpha_1$), dann hat f eine i-fache Tangente in $x = y = 0$. Man erhält dann für die Gleichung der Hesseschen Kurve die folgende Form (nach Dimensionen in x, y geordnet):

$0 = H(x,y) = H = H_{3k-4} + H_{3k-3} + H_{3k-2} + H_{3k-1} + \ldots\ldots$

und (für $1 < i \leqq k - 2$ jedenfalls):

$$H_{3k-4} = \alpha_1{}^{3i-2} \cdot \beta_{k-i} \cdot \gamma_{2k-2i-2};\ H_{3k-3} = \alpha_1{}^{2i-2} \cdot p_{3k-2i-1};$$

$$H_{3k-2} = \alpha_1{}^{i-2} \cdot q_{3k-i};\ H_{3k-1} = r_{3k-1};$$

usw., wo α, β die frühere Bedeutung haben, γ, p, q, r gegen sie (im allgemeinen) teilerfremde Binärformen sind. Man bilde nun:[1])

$$H'(x,y) \equiv H(x,y) - \alpha_1{}^{2i-2} \cdot \gamma_{2k-2i-2} \cdot f(x,y)$$

$$\equiv H'_{3k-3} + H'_{3k-2} + H'_{3k-1} + \ldots,$$

wo $H'_{3k-3} = \alpha_1{}^{2i-2} \cdot s_{3k-2i-1}$; $H'_{3k-2} = \alpha_1{}^{i-2} \cdot t_{3k-i}$; $H'_{3k-1} = u_{3k}$ u. s. w. ist und s, t, u gegen α, β teilerfremd sind.

Ist weiter: $H''(x,y) \equiv H'(x,y) \cdot \beta_{k-i} - \alpha_1{}^{i-2} \cdot s_{3k-2i-1} \cdot f(x,y)$

$$\equiv H''_{4k-i-2} + H''_{4k-i-1} + \ldots,$$

so ist $H''_{4k-i-2} = \alpha_1{}^{i-2} \cdot m_{4k-2i}$; $H''_{4k-i-1} = n_{4k-i-1}$ u. s. w., wo wieder m, n gegen α teilerfremd sind.

Endlich setze man:

$H'''(x,y) = H''(x,y) \cdot \alpha_1{}^2 \beta_{k-i} - m_{4k-2i} \cdot f(x,y) \equiv H'''_{5k-2i+1} + \ldots$

Dann ist $H'''_{5k-2i+1}$ gegen α und β teilerfremd.

Bezeichnet man nun mit (H''', f) die Anzahl der in die Stelle $x = y = 0$ fallenden Schnittpunkte von $H''' = 0$ mit $f = 0$, so ist $(H''', f) = k\,(5k - 2i + 1)$. Andererseits ist:

$(H''', f) = (H'' \cdot \alpha^2 \beta - m f, f) = (H'', f) + (\alpha^2, f) + (\beta, f) = (H'', f) + 2\,(k + 1) + (k - i)\,(k + 1)$; woraus sich ergibt:

$(H'', f) = 4k^2 - 2k - i \cdot k + i - 2$.

Andererseits ist: $(H'', f) = (H' \beta - \alpha s f, f) = (H', f) + (\beta, f) = (H', f) + (k - i)\,(k + 1)$. Daher:

$(H' f) = 3k\,(k - 1) + 2i - 2$.

Und weil $(H', f) = (H - \alpha \gamma f, f) = (H, f)$ ist, so ergibt sich für die Anzahl der in den Punkt $x = y = 0$ entfallenden Schnittpunkte von H mit f:

$$\underline{(H, f) = 3k\,(k - 1) + 2i - 2,}$$

eine Zahl, die mit der bekannten für $i = 2$ übereinstimmt."

[1]) Münch. Akad. Ber. 1888, p. 88.

1. Abschnitt.

Kurven, die von einem Kegelschnitt und seiner Scheitelfusspunktkurve abgeleitet sind.

§ 1. Der Kegelschnitt ist eine Parabel.

Die Parabel $y^2 = 2px$ besitzt als Fusspunktkurve in Bezug auf den Scheitel die Cissoide $x(x^2 + y^2) = -\frac{p}{2} y^2$, die ganz auf der negativen Seite der x-Achse liegt. Betrachtet man die absoluten Werte der Strecken, die auf den Nullpunktstrahlen von den Kurven abgeschnitten werden, so haben diese die Grösse:

$$\rho_P = \frac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \text{ und } \rho_C = \frac{p\cdot\sin^2\varphi}{2\cdot\cos\varphi},$$

wenn φ der Winkel des betreffenden Strahls mit der positiven x-Achse ist. Der Radiusvektor der zu untersuchenden Kurve hat dann die Gleichung:

$$\rho = \rho_P + \varepsilon\cdot\rho_C = \frac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi} + \varepsilon\cdot\frac{p\cdot\sin^2\varphi}{2\cdot\cos\varphi}.$$

Zur näheren Diskussion soll diese Gleichung in rechtwinklige Koordinaten transformiert werden. Man erhält folgende Form:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{2px\cdot\sqrt{x^2+y^2}}{y^2} + \varepsilon\cdot\frac{p\cdot y^2}{2x\cdot\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{oder:}$$

$$2xy^2(x^2+y^2) - 4px^2(x^2+y^2) - \varepsilon p y^4 = 0.$$

Wie gross auch ε sein mag, die Kurve ist von der fünften Ordnung. Für $\varepsilon = 0$ zerfällt sie in die Grundparabel, die y-Achse und ein imaginäres Geradenpaar. Zur genaueren Kenntnis der Eigenschaften der allgemeinen Kurve muss ihr Verhalten im Koordinatenanfang und im Unendlichen, der Schnitt mit den Achsen und den Grundkurven, die Lage der Maxima und Minima und endlich die der Wendepunkte bestimmt werden.

Die Eigenschaften des Koordinatenanfangs erkennt man dadurch, dass man die Kurve zum Schnitt mit der Geraden $y = \mu \cdot x$ bringt. Setzt man $y = \mu \cdot x$ in die Kurvengleichung ein, so erhält man:

$$x^4 \cdot \left\{ 2\mu^2 (1 + \mu^2) \cdot x - 4p(1 + \mu^2) - \varepsilon \cdot p \cdot \mu^4 \right\} = 0.$$

Der Koordinatenanfang ist also stets ein vierfacher Punkt der Kurve. Für $x = 0$ gibt die Klammer die Richtungsfaktoren μ der Tangenten in O: $\varepsilon \cdot p \cdot \mu^4 + 4p(1 + \mu^2) = 0$. Diese Gleichung hat die Wurzeln:

$$\mu^2 = \frac{2}{\varepsilon}\left(-1 \pm \sqrt{1 - \varepsilon}\right) \qquad \text{oder}$$

$$\mu_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}\left(-1 + \sqrt{1 - \varepsilon}\right)}; \quad \mu_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}\left(-1 - \sqrt{1 - \varepsilon}\right)}$$

Je nach der Grösse von ε werden die Tangenten im Koordinatenanfang verschiedene Lagen annehmen. Ist speziell $\varepsilon = -1$ und $\varepsilon = +1$ (Tafel 1 der Zeichnungen), so bekommt man für $\varepsilon = -1$: $\mu_{1,2} = \pm \sqrt{2(1 - \sqrt{2})}$ und $\mu_{3,4} = \pm \sqrt{2(1 + \sqrt{2})}$. Die Kurve besitzt im Koordinatenanfang zwei reelle und zwei imaginäre Tangenten, die alle von einander verschieden sind. Für $\varepsilon = +1$: $\mu_{1,2} = \pm i \cdot \sqrt{2}$; $\mu_{3,4} = \pm i \cdot \sqrt{2}$. Je zwei der imaginären Tangenten fallen zusammen, der Koordinatenanfang ist ein isolierter Punkt der Kurve. Die Zahl der Doppelpunkte, denen diese vierfachen Punkte äquivalent sind, wird sich erst ergeben, wenn die Hessesche Kurve benutzt wird.

Zur Bestimmung des Verhaltens unserer Kurve im Unendlichen ist es nötig, dass man die Kurvengleichung homogenisiert, indem man $x = \frac{x_1}{x_3}$ und $y = \frac{x_2}{x_3}$ setzt. Man bekommt dadurch folgende Gleichung in homogenen Koordinaten:

$$2x_1 x_2^2 (x_1^2 + x_2^2) - \left\{ 4p x_1^2 (x_1^2 + x_2^2) - \varepsilon \cdot p \cdot x_2^4 \right\} \cdot x_3 = 0.$$

Die unendlich fernen Punkte der Kurve erhält man, wenn man sie zum Schnitt bringt mit der unendlich fernen Geraden $x_3 = 0$. Für die Schnittpunkte gilt dann: $x_1 x_2^2(x_1^2 + x_2^2) = 0$. $x_1^2 + x_2^2 = 0$ zusammen mit $x_3 = 0$ gibt die imaginären Kreispunkte oder absoluten Punkte I und J, alle Kurven der Schar sind zirkulare Kurven. $x_2^2 = 0$ zeigt, dass die unendlich ferne Gerade im ersten Kardinalpunkt zwei Punkte mit der Kurve gemein hat, dass sie also Tangente ist. Hier verhalten sich alle Kurven der Schar wie die Parabel, sie berühren die unendlich ferne Gerade, also auch sich untereinander. $x_1 = 0$ bedeutet, dass auch in Richtung der y-Achse, der ersten Fundamentalgeraden, ein Kurvenpunkt zu suchen ist.

Zur Bestimmung der Asymptoten $y = m \cdot x + \alpha$ der Kurven muss man m und α aus den Aggregaten n^{ter} und $(n-1)^{ter}$ Ordnung berechnen. $f_n(1,m) = 2 m^2 (1 + m^2) = 0$ ergibt $m_{1,2} = 0$ $m_{3,4} = \pm i$. Die Gleichung $f_{n-1}(1, m) + \alpha \cdot f_n'(1, m) = -4 p (1 + m^2) - \varepsilon \cdot p m^4 + 4 \alpha m (1 + 2 m^2) = 0$ liefert für $m_{1,2} = 0$ folgenden Ausdruck: $-4 p + 4 \alpha \cdot 0 = 0$. Diese Gleichung kann nur durch $\alpha = \infty$ erfüllt werden. In homogenen Koordinaten lautet die Asymptotengleichung: $x_2 = m \cdot x_1 + \alpha \cdot x_3$. Für $m = 0$ und $\alpha = \infty$ geht sie über in: $x_3 = 0$. Die unendlich ferne Gerade ist Tangente im Punkte $(x_2 = 0;\ x_3 = 0)$, wie schon oben gefunden war. Setzt man $m_{3,4}$ in die Gleichung zur Bestimmung von α ein, so erhält man: $\alpha_{3,4} = \pm \frac{\varepsilon \cdot p \cdot i}{4}$. Die Asymptoten nach den imaginären Kreispunkte haben also die Gleichungen:

$$y = \pm i \cdot x \pm i \frac{\varepsilon \cdot p}{4}.$$

Um das Verhalten der Kurven im Punkte $(x_1 = 0;\ x_3 = 0)$ zu ermitteln, muss man von einem anderen Ansatz der Asymtotengleichung ausgehen, nämlich von der Form: $x = \mu y + \beta$. Nach derselben Methode wie oben erhält man: $\mu_1 = 0$; $\mu_{2,3} = \pm i$. $\mu_{2,3}$ gibt wieder die Asymptoten der imaginären Kreispunkte. Zu $\mu_1 = 0$ gehört $\beta_1 = \frac{\varepsilon \cdot p}{2}$. Die Asymptote des Punktes

$(x_1 = 0, x_3 = 0)$ hat also die Gleichung: $x = \frac{\varepsilon \cdot p}{2}$. Setzt man $x = \frac{\varepsilon \cdot p}{2}$ oder $x_1 = \frac{\varepsilon \cdot p}{2} \cdot x_3$ in die Kurvengleichung ein, so erhält man drei unendlich ferne Punkte. Der reelle Kurvenpunkt im Unendlichen ist demnach ein Wendepunkt der Kurven, das muss sich auch später bei der Berechnung der Hesseschen Kurve ergeben.

Die unendlich fernen Punkte sind bei allen Kurven identisch, wie gross auch ε sein mag, die Asymptoten dagegen verschieben sich und zwar liegt die reelle Asymptote auf der negativen Seite der x-Achse für negatives ε, auf der positiven für positives. Dieser reelle unendlich ferne Punkt der Kurvenschar ist auch unendlich ferner Punkt der Cissoide, die Cissoide wird also im Unendlichen von sämtlichen Kurven der Schar berührt, denn die Tangentenrichtung stimmt auch überein.

Schnittpunkte mit den Achsen besitzen die Kurven nicht, abgesehen vom Koordinatenanfang und den unendlich fernen Punkten. Auch die Parabel $y^2 = 2px$ wird in keinem anderen Punkte geschnitten, als im Scheitel und dem unendlich fernen Punkt der x-Achse. Anders verhält es sich mit der Cissoide. Für die Abscissen der Schnittpunkte unserer Kurven mit der Cissoide ergibt sich: $x = \frac{p}{1+\varepsilon}(-1 \pm i \cdot \sqrt{\varepsilon})$. Die Ordinaten werden dann: $y = \pm \sqrt{\frac{2px}{1+\varepsilon}}$.

Ist ε positiv, so wird jedes x imaginär, es gibt keine reellen Schnittpunkte mit der Cissoide. Für negative ε dagegen kann x reell und nagativ werden, denn nur dann kann man ja reelle Cissoidenpunkte erhalten. Ist ε, absolut genommen, kleiner als 1, so geben beide Vorzeichen negative x, der Ausdruck für y zeigt aber, dass es trotzdem keine reellen Schnittpunkte gibt, weil der Radikand negativ wird. Ist $|\varepsilon| > 1$, so ist im Ausdruck für x nur das $+$ Zeichen brauchbar, diesem einen Wert von x entsprechen dann zwei reelle y, man bekommt also zwei reelle Schnittpunkte der Kurven mit der Cissoide. Alle Kurven haben ausserdem noch den Koordinatenanfang und den unendlich fernen Punkt mit der Cissoide gemein.

Um den Verlauf der Kurven noch genauer festzustellen, ist es vorteilhaft zu bestimmen, wieviel Werte von y zu jedem x gehören und aus wieviel Zügen die Kurven bestehen. Setzt man in der Kurvengleichung $x = a \cdot p$ und löst nach y^2 auf, so erhält man: $y^2 = \frac{a^2 p^2}{2a - \varepsilon} \left(2 - a \pm \sqrt{(a+2)^2 - 4\varepsilon}\right)$.

Ist $a < \frac{\varepsilon}{2}$, so wird der Nenner negativ, $2 - a$ aber grösser als $\sqrt{(a+2)^2 - 4\varepsilon}$, y^2 also negativ. Zu keinem x, das kleiner ist als $\frac{\varepsilon \cdot p}{2}$, gehört ein reeller Kurvenpunkt. Wird $a > \frac{\varepsilon}{2}$, so ist der Nenner positiv, gleichzeitig aber $(2 - a) < \sqrt{(a+2)^2 - 4\varepsilon}$. Man erhält also zwei reelle Werte von y, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Dass die Kurven für das ganze Intervall von $x = \frac{\varepsilon \cdot p}{2}$ bis $x = +\infty$ zwei symmetrisch zur x-Achse liegende Teile haben, kann man daraus erkennen, dass die Wurzel $\sqrt{(a+2)^2 - 4\varepsilon}$ innerhalb dieses Intervalls nicht imaginär werden kann, denn nur für $(a+2)^2 < 4\varepsilon$, also für $a < 2\left(\sqrt{\varepsilon} - 1\right)$ wird der Radikand negativ. $2\left(\sqrt{\varepsilon} - 1\right)$ ist aber kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$. Ist $a < \frac{\varepsilon}{2}$, so gibt es eben, wie wir oben sahen, keine reellen Kurvenpunkte.

Zur Bestimmung der Maxima und Minima der Kurven muss man $\frac{d\varphi}{dx} = 6x^2y^2 + 2y^4 - 16px^3 - 8pxy^2$ bilden. Am einfachsten gestaltet sich die Rechnung, wenn man die Kurvengleichung und die für $\frac{d\varphi}{dx}$ homogenisiert, die erste durch x_2^5, die zweite durch x_2^4 dividiert und $\frac{x_1}{x_2}$ und $\frac{x_3}{x_2}$ als neue Unbekannte u und v ansieht. Die beiden Gleichungen lauten dann:

$$2u^3 + 2u - v\,(4pu^4 + 4pu^2 + \varepsilon p) = 0$$

$$6u^2 + 2 - 8v\,(2pu^3 + pu) = 0.$$

Eliminiert man v, so ergibt sich für u die Gleichung:

$$4 u^6 + 8 u^4 + (4-3 \varepsilon)\; u^2 - \varepsilon = 0.$$

Ist ε negativ, so kann diese Gleichung von keinem reellen u erfüllt werden. Zu einem imaginären u gehört auch ein imaginäres v. Nun war $v = \frac{x_3}{x_2}$. Von homogenen Koordinaten gelangt man dadurch wieder zu gewöhnlichen, dass man $x_3 = 1$ setzt und für x_1 und x_2 wieder x und y schreibt. Tut man das hier, so folgt aus dem imaginären v ein imaginäres y. Für negative ε besitzen also die Kurven kein reelles Maximum oder Minimum.

Ist dagegen ε positiv, so hat die obige Gleichung auf jeden Fall eine positive Wurzel u^2, also zwei reelle u. Doch ist damit noch nicht gesagt, dass es zwei Werte x gibt, zu denen ein Maximum oder Minimum gehört. Für den Fall $\varepsilon = +1$ tritt dies deutlich hervor. In der Gleichung 6^{ten} Grades steckt dann der Faktor $(2 u^2 + 1)$. Ohne diesen lautet die Gleichung: $2u^4 + 3 u^2 - 1 = 0$. Ihre Wurzeln sind: $u = \pm \sqrt{\frac{1}{4}(-3 \pm \sqrt{17})}$.
Aus der Kurvengleichung ergibt sich:

$$y = p \cdot \frac{(2 u^2 + 1)^2}{2 u (u^2 + 1)}; \quad x = p \cdot \frac{(2 u^2 + 1)^2}{2 (u^2 + 1)}.$$

Der ausgehobene Faktor $(2 u^2 + 1) = 0$ macht x und y zu Null, das ist nur das bekannte Resultat, dass im singulären Punkt die ersten Differentialquotienten verschwinden. Die anderen Werte von u geben für x und y:

$$x_{1,2} = \frac{p}{8} (-13 + 5 \cdot \sqrt{17}); \quad x_{3,4} = \frac{p}{8} (-13 - 5 \sqrt{17});$$

$$y_{1,2} = \pm \frac{p}{16} (23 + \sqrt{17}) \sqrt{-3 + \sqrt{17}};$$

$$y_{3,4} = \pm \frac{p}{16} (23 - \sqrt{17}) \cdot \sqrt{-3 - \sqrt{17}}.$$

Man bekommt also, trotzdem zwei verschiedene reelle x vorhanden sind, nur zwei reelle Punkte mit horizontalen Tangenten, die symmetrisch zur x-Achse liegen. Der zweite Differentialquotient hat die Gestalt: $\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{\text{Positiver Zähler}}{y \cdot \text{Positive Grösse}}$. Für ein positives y bekommt man also ein Minimum, für ein negatives ein Maximum.

Zur Bestimmung der Wendepunkte der Kurven benutzt man die Tatsache, dass die Hessesche Kurve $H(\varphi) = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \end{vmatrix}$ die Grundkurve ausser in den singulären Punkten noch in den Punkten schneidet, für die die Krümmung Null ist. Bildet man die zweiten Differentialquotienten und rechnet die Determinante aus, so bekommt man für $H(\varphi)$ folgende Gleichung:

$$16\, x_1^9 + 64\, x_1^7\, x_2^2 + (56 - 24\, \varepsilon)\, x_1^5\, x_2^4 + (8 - 16\, \varepsilon)\, x_1^3\, x_2^6 + (3\, \varepsilon^2 - 8\, \varepsilon)\, x_1\, x_2^8$$
$$- p \cdot x_3 \left\{ 32\, x_1^8 + (16 + 48\, \varepsilon)\, x_1^6\, x_2^2 - (16 - 64\, \varepsilon)\, x_1^4\, x_2^4 + (12\, \varepsilon^2 + 4\, \varepsilon)\, x_1^2\, x_2^6 + 2\, \varepsilon^2\, x_2^8 \right\} = 0$$

Eigentlich ist ja nur nötig, die Schnittpunkte dieser Kurve mit der Grundkurve zu bestimmen, doch soll hier eine möglichst vollständige Diskussion der Gleichung gegeben werden, da sich besonders bezüglich der singulären Punkte Resultate ergeben, die später noch verwertet werden sollen.

Setzt man in der Gleichung von $H(\varphi)$ $x_2 = \mu \cdot x_1$, so erhält man die Multiplizität des Koordinatenanfangs angegeben durch die Potenz von x_1, in der diese Grösse ausgehoben werden kann. Man erhält:

$$x_1^8 \cdot \Big\{ - p\, x_3 \cdot [32 + (16 + 48\, \varepsilon)\, \mu^2 - (16 - 64\, \varepsilon)\, \mu^4 + (12\, \varepsilon^2 + 4\, \varepsilon)\, \mu^6 + 2\, \varepsilon^2\, \mu^8] + x_1 \cdot [16 + 64\, \mu^2 + (56 - 24\, \varepsilon)\, \mu^4 + (8 - 16\, \varepsilon)\, \mu^6 + (3\, \varepsilon^2 - 8\, \varepsilon)\, \mu^8] \Big\} = 0 \qquad (1)$$

Der Koordinatenanfang ist demnach achtfacher Punkt der Hesseschen Kurve. Die Richtungsfaktoren der Tangenten in diesem Punkte folgen aus der Gleichung:

$$\varepsilon^2\, \mu^8 + (6\, \varepsilon^2 + 2\, \varepsilon) \cdot \mu^6 - (8 - 32\, \varepsilon)\, \mu^4 + (8 + 24\, \varepsilon)\, \mu^2 + 16 = 0.$$

Nun besteht zwischen dem vielfachen Punkt von φ und $H(\varphi)$ die Beziehung, dass ein k-facher Punkt von φ ein (3k—4)-facher von $H(\varphi)$ ist. k der Tangenten von $H(\varphi)$ sind identisch mit den k Tangenten der Grundkurve φ [1]). Für φ wären folgende Tangentenrichtungen gefunden: $\mu_{1,2}{}^2 = \frac{2}{\varepsilon}(-1 + \sqrt{1-\varepsilon})$ und $\mu_{3,4}{}^2 = \frac{2}{\varepsilon}(-1 - \sqrt{1-\varepsilon})$. Die Gleichung (1) muss also durch $\left(\mu^2 - \frac{2}{\varepsilon}(-1+\sqrt{1-\varepsilon})\right)\left(\mu^2 - \frac{2}{\varepsilon}(-1-\sqrt{1-\varepsilon})\right)$ teilbar sein.

Die Division ergibt: $u^4 + \left(6 - \frac{2}{\varepsilon}\right)\cdot \mu^2 + \frac{4}{\varepsilon} = 0$ oder

$$\mu_{5,6} = \pm \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}\left(1 - 3\varepsilon + \sqrt{1 - 10\varepsilon + 9\varepsilon^2}\right)};$$

$$\mu_{7,8} = \pm \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}\left(1 - 3\varepsilon - \sqrt{1 - 10\varepsilon + 9\varepsilon^2}\right)}.$$

Für positive ε hatte die Grundkurve im Koordinatenanfang vier imaginäre Tangenten, der Punkt lag isoliert. Für $\mu_{5,6}$ und $\mu_{7,8}$ erhält man in diesem Falle imaginäre oder reelle Werte je nach der Grösse von ε. Wird $\varepsilon > \frac{1}{9}$, so ist der Ausdruck unter der inneren Wurzel negativ, so lange ε ein echter Bruch bleibt. Dann ist also $\mu_{5,6}$ und $\mu_{7,8}$ imaginär. Ist $\varepsilon > 1$, so ist zwar $\sqrt{1 - 10\,\varepsilon + 9\,\varepsilon^2}$ reell, da aber dann $(1 - 3\,\varepsilon)$ negativ und, absolut genommen, grösser ist als die innere Wurzel, so wird der ganze Radikand negativ, die μ werden auch imaginär. Nur für $\varepsilon < \frac{1}{9}$ erhält man sowohl $\mu_{5,6}$, als auch $\mu_{7,8}$ reell. $H(\varphi)$ hat dann im Koordinatenanfang vier reelle Tangenten und zwar sind es die, die nicht mit denen von φ zusammenfallen.

Für negative ε wurden die Grundkurventangenten im Koordinatenanfang teils reell, teils imaginär und zwar, wie es ja bei der Symmetrie der Kurve zu erwarten ist, je zwei der vier Tangenten. Die Richtungsfaktoren der vier übrigen Tangenten von $H(\varphi)$ werden auch teilweise reell, teilweise imaginär, so dass $H(\varphi)$ vier reelle und vier imaginäre Tangenten in O hat. Für den Spezialfall $\varepsilon = -1$ haben die vier hinzukommenden Tangenten von $H(\varphi)$ die Gleichungen: $y = \pm\sqrt{-4 + 2\cdot\sqrt{5}}\cdot x$ und

[1]) v. Brill: „Über die Hessesche Kurve". Mathem. Ann. XIII, p. 178. Salmon-Fiedler: „Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven", p. 38. Wieleitner: „Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung", p. 66.

$y = \pm i \cdot \sqrt{4 + 2\sqrt{5}} \cdot x$. Ist $\varepsilon = +1$, so zerfällt $H(\varphi)$ in zwei Teile, in $(2x^2 + y^2)^2 = 0$ und $-4x^5 - 12x^3y^2 + 5xy^4 + p \cdot (8x^4 + 8x^2y^2 + 2y^4) = 0$. Der erste Teil ist ein imaginäres Geradenpaar mit dem reellen Schnittpunkt ($x = 0$; $y = 0$), wobei jede Gerade doppelt zu zählen ist. Der zweite Teil ist eine eigentliche Kurve fünfter Ordnung. Ihre Tangenten im Koordinatenanfang haben die Gleichung: $y = \pm i\sqrt{2} \cdot x$, das ist dieselbe, wie die der beiden imaginären Geraden. Je vier der acht Tangenten von $H(\varphi)$ in O fallen zusammen, das zeigt schon an, dass der Koordinatenanfang für $\varepsilon = +1$ eine höhere Singularität besitzen wird. Genauer wird dies später erörtert werden.

Die unendlich fernen Punkte der Hesseschen Kurve sind bestimmt durch $x_3 = 0$ und $16x_1^9 + 64x_1^7x_2^2 + (56 - 24\varepsilon)x_1^5x_2^4 + (8 - 16\varepsilon)x_1^3x_2^6 + (3\varepsilon^2 - 8\varepsilon)x_1x_2^8 = 0$. Setzt man die Asymptoten an: $x = \mu y + \beta$, so bestimmt sich μ aus der Gleichung: $\mu \left\{16\mu^8 + 64\mu^6 + (56 - 24\varepsilon)\mu^4 + (8 - 16\varepsilon)\mu^2 + (3\varepsilon^2 - 8\varepsilon)\right\} = 0$. Ein μ ist immer Null, wie gross auch ε sein mag. Zu diesem μ gehört $\beta_1 = \frac{2p\varepsilon}{3\varepsilon - 8}$; eine reelle Asymptote von $H(\varphi)$ hat demnach die Gleichung: $x = \frac{2p\varepsilon}{3\varepsilon - 8}$. Diese Asymptote ist parallel der y-Achse, für negative ε liegt sie auf der Seite der positiven x, ebenso für positive ε, die grösser als $\frac{8}{3}$ sind. Dagegen liegen die Asymptoten von $H(\varphi)$ bei positiven ε kleiner als $\frac{8}{3}$ auf der Seite der negativen x. Für $\varepsilon = \frac{8}{3}$ rückt sie ins Unendliche. $\varepsilon = 0$ gibt die y-Achse.

Ist ε negativ, so gibt die Bestimmungsgleichung der μ keinen weiteren reellen Wert, die Hessesche Kurve hat nur einen reellen Punkt im Unendlichen. Anders ist es für positive ε. Solange $\varepsilon < \frac{8}{3}$ ist, gibt es stets nur ein positives μ^2, zwei reelle μ, also zwei reelle Asymptoten. Ist $\varepsilon < \frac{8}{3}$, so können 2 oder 0 positive μ^2 existieren, dem entsprechend auch 4 oder 0 reelle Asymptoten. Für den Spezialfall $\varepsilon = +1$ werden die μ, denen reelle

Asymptoten entsprechen: $\mu = \pm \sqrt{\frac{-3 + \sqrt{14}}{2}}$. Dazu erhält man folgenden Wert für β: $\frac{42 - \sqrt{14}}{70} \cdot p$. Die Gleichungen der Asymptoten lauten daher:

$$x = \pm \sqrt{\frac{-3 + \sqrt{14}}{2}} \cdot y + \frac{42 - \sqrt{14}}{70} \cdot p.$$

Mit der y-Achse hat H (φ) keinen weiteren reellen Schnittpunkt, als den Koordinatenanfang, dagegen gibt $y = 0$ ausser $x^8 = 0$ noch $x = 2p$. Der Punkt ($x = 2p$; $y = 0$) ist allen Kurven H(φ) gemeinsam, wie gross auch ε ist. Der erste Differentialquotient zeigt, dass alle Kurven in diesem Punkte dieselbe Tangente haben, nämlich die Senkrechte auf der x-Achse.

Bevor die Schnittpunkte der Hesseschen Kurve mit der Grundkurve, also die Wendepunkte ermittelt werden, dürfte es am Platze sein, den Verlauf von H (φ) für die beiden Spezialfälle $\varepsilon = +1$ und $\varepsilon = -1$ etwas genauer zu verfolgen (Tafel 1, Figur 1 und 2).

Ist $\varepsilon = -1$, so hat H(φ) die Gleichung:

$$16x^9 + 64x^7y^2 + 80x^5y^4 + 24x^3y^6 + 11xy^8 - p(32x^8 - 32x^6y^2 - 80x^4y^4 + 8x^2y^6 + 2y^8) = 0.$$

Fasst man die gleichen Potenzen von y zusammen, so kann man die Glieder der Gleichung folgendermassen ordnen:

$$(16x^9 - 32px^8) + y^2(64x^7 + 32px^6) + y^4(80x^5 + 80px^4) + y^6(24x^3 - 8px^2) + y^8(11x - 2p) = 0.$$

Die Faktoren von y^2 und y^4 können für positive x ihr Zeichen nicht ändern, während jeder der anderen Faktoren für einen Wert von x durch Null hindurchgeht. Für positive x ergibt sich folgendes Zeichenschema:

x zwischen 0 und $\frac{2}{11}$ p	$- + + - -$	2 oder 0 positive Werte von y^2
x „ $\frac{2}{11}$ p „ $\frac{1}{3}$ p	$- + + - +$	3 „ 1 „ „ „ y^2
x „ $\frac{1}{3}$ p „ 2 p	$- + + + +$	1 positiver Wert von y^2
x grösser als 2 p	$+ + + + +$	kein positiver Wert von y^2.

Im Koordinatenanfang waren vier reelle Tangentenrichtungen vorhanden. Da die Kurve kontinuierlich sein muss, so folgt, dass es zwei positive Werte von y^2, also vier reelle y geben muss, wenn x von 0 bis $\frac{2}{11}p$ wächst. Für $x = \frac{2}{11}p$ werden 2 Werte von y unendlich, $x = \frac{2}{11}p$ ist eine Asymptote, und zwar eine Wendeasymptote, da die Kurve oben und unten auf derselben Seite berührt[1]). Wächst jetzt x weiter von $x = \frac{2}{11}p$ ab, so muss ein Wert von y^2 weniger da sein, man hat also zwischen $x = \frac{2}{11}p$ und $x = 2p$ einen positiven Wert von y^2, zwei reelle Kurvenpunkte. Für Abscissen grösser als $2p$ gibt es dann keine reellen Kurvenpunkte mehr. Für negative x kann man aus dem entsprechenden Zeichenschema nur entnehmen, dass zwischen $x = 0$ und $x = -p$ keine oder zwei positive Wurzeln von y^2 bestehen können, dass es dagegen für $x < -p$ keinen reellen Kurvenpunkt mehr gibt. Bis zu welchem Punkt aber 2 Werte y^2 da sind, lässt sich nicht erkennen. Ist $x = -\frac{p}{2}$, so bekommt man für y^2 die Gleichung: $3y^8 + 2p^2y^6 - p^4y^4 + \frac{1}{16}p^8 = 0$. Setzt man $\frac{y^2}{p^2} = \nu$, so hat man die Gleichung: $3\nu^4 + 2\nu^3 - \nu^2 + \frac{1}{16} = 0$. Wenn ein positives ν die Gleichung erfüllen soll, so muss $\nu^2 > \frac{1}{16}$; $\nu > \frac{1}{4}$ sein. Ausserdem muss aber auch bestehen: $\nu^2 > 3\nu^4 + 2\nu^3$ oder $\nu < \frac{1}{3}$. ν könnte also nur in den Grenzen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ liegen, oder y zwischen $0{,}5\,p$ und $0{,}577\,p$. Rechnet

---

[1]) Reuschle: „Praxis der Kurvendiskussion" p. 55.
Wieleitner: „Theorie der ebenen algebr. Kurven höherer Ordnung" p. 39.
Sauerbeck: „Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven." (Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik XV) p. 35.

man aber die ν aus der Gleichung 4^{ten} Grades wirklich aus, so sieht man, dass es für $x = -\frac{p}{2}$ kein reelles ν und damit auch kein reelles y gibt. Die beiden Schleifen von $H(\varphi)$ werden also nicht bis zur Geraden $x = -\frac{p}{2}$ gehen, sondern sich schon früher schliessen. Dieses Resultat erhält man auch, wenn man die Sturmsche Kette bildet und zusieht, wieviel Zeichenwechsel im Intervall von $\nu = 0$ bis $\nu = \frac{1}{2}$, in dem ja die reellen Wurzeln liegen müssten, verloren gegangen sind. Man erhält keinen verloren gegangenen Zeichenwechsel, also keine reelle Wurzel ν für $x = -\frac{p}{2}$. Für den Schnitt der Hesseschen Kurve mit der Parabel $y^2 = 2px$ gilt: $x^4 (16 x^5 + 96 p x^4 + 384 p^2 x^3 + 512 p^3 x^2 + 112 p^4 x - 32 p^5) = 0$. $x^4 = 0$ gibt den Koordinatenanfang, der ja sicher bei beiden Kurven als Punkt auftritt. Die Gleichung 5^{ten} Grades muss nach dem Satz von Descartes[1]) eine positive Wurzel haben, man bekommt also ein Paar reeller Schnittpunkte von $H(\varphi)$ mit der Parabel. Dies gilt nicht nur für $\varepsilon = -1$, sondern für jedes beliebige ε. Durch Einsetzen verschiedener Werte findet man zunächst, dass x zwischen 0,157 p und 0,158 p liegt. Mit Hilfe der Newtonschen Annäherungsmethode[2]) ergibt sich aus dem noch genaueren Wert 0,1578 p der Wert $x = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)} = 0{,}15782\,p$. Hierzu gehört $y = \pm 0{,}56182\,p$. Die Tangentenrichtung in diesen Punkten von $H(\varphi)$ findet man, wenn man in $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dx}}$ die gefundenen Werte einsetzt. Es ist $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\frac{H(\varphi)}{\text{Parabel}}} = \pm 7{,}805$.

Die Schnittpunkte von $H(\varphi)$ mit der Grundcissoide erhält man ganz analog. Die Gleichung für die Abscissen lautet:

[1]) Bauer: „Vorlesungen über Algebra.“ 2. Auflage p. 206.
[2]) „ „ „ „ „ p. 225.

$$19x^5 + 32x^4p - 21x^3p^2 - 46x^2p^3 - 18xp^4 - 2p^5 = 0.$$

Diese Gleichung hat 4, 2 oder 0 negative Wurzeln, nur diese kommen ja in Betracht. Durch Einsetzen der Werte $0, -\frac{p}{4}, -\frac{p}{2}, -p, -10p$ kann man sich überzeugen, dass zwischen den angegebenen Werten je eine Wurzel liegt. Als Schnittpunktskoordinaten kommen nur die Werte zwischen 0 und $-\frac{p}{2}$ in Frage, das sind zwei Werte von x, es wird also vier Schnittpunkte von $(H\varphi)$ mit der Cissoide geben. Die Koordinaten sind:

$$(x_{1,2} = -0{,}2099\,p;\; y_{1,2} = \pm 0{,}1785\,p);$$
$$(x_{3,4} = -0{,}3250\,p;\; y_{3,4} = \pm 0{,}4429\,p).$$

Ganz ebenso soll auch die Hessesche Kurve, die zu dem Fall $\varepsilon = +1$ gehört, näher untersucht werden. $H(\varphi)$ zerfällt hier, wie schon erwähnt wurde, in einen Teil 4ter Ordnung (zwei imaginäre Gerade, jede doppelt gezählt) und einen Teil 5ter Ordnung mit der Gleichung:

$$4x^4(x - 2p) + 4x^2y^2(3x - 2p) - y^4(5x + 2p) = 0. \quad (1)$$

Für positive x ist das letzte Glied stets negativ, während die beiden anderen das Zeichen wechseln können. Das folgende Schema:

x zwischen 0 und $\frac{2}{3}$p	— — —	Keine positive Wurzel y^2, kein reeller Kurvenpunkt.
x „ $\frac{2}{3}$ „ 2p	— + —	2 oder 0 positive Wurzeln y^2.
x grösser als 2p	+ + —	Eine positive Wurzel y^2, 2 reelle Kurvenpunkte.

gibt schon einigermassen ein Bild vom Verlauf der Kurve, nur muss noch die Stelle ermittelt werden, von der ab im Intervall $\frac{2}{3}$p bis 2p reelle Kurvenpunkte auftreten. Das wird sich weiter unten ergeben, wenn von den vertikalen Tangenten die Rede sein wird.

Für negative x ist das erste und zweite Glied der Gleichung (1) stets negativ, nur das dritte ändert das Zeichen, je nachdem $x \lesseqgtr -\frac{2}{5}p$ ist. Zwischen $x = 0$ und $x = -\frac{2}{5}p$ gibt es keinen reellen Kurvenpunkt, dagegen bekommt man stets zwei für Werte von x, die kleiner sind als $-\frac{2}{5}p$.

Da hier die Gleichung von $H(\varphi)$ so einfach ist, sollen auch die Maxima und Minima, sowie die Punkte ermittelt werden, die eine zur x-Achse senkrechte Tangente haben. Es ist $\frac{dH(\varphi)}{dx} = 20x^4 + 36x^2y^2 - 5y^4 - p(32x^3 + 16xy^2)$. Homogenisiert man $H(\varphi) = 0$ und $\frac{dH(\varphi)}{dx} = 0$ und setzt $\frac{x_1}{x_2} = u$ und $\frac{x_3}{x_2} = v$, so bekommt man folgende Gleichungen:

$$20u^4 + 36u^2 - 5 - p \cdot v \cdot (32u^3 + 16u) = 0$$
$$4u^5 + 12u^3 - 5u - p \cdot v \cdot (8u^4 + 8u^2 + 2) = 0$$

Eliminiert man v, so ergibt sich: $(20u^4 + 36u^2 - 5)(2u^2 + 1)^2 - 8u^2(2u^2 + 1)(4u^4 + 12u^2 - 5) = 0$. $(2u^2 + 1) = 0$ gibt kein reelles u, kein reelles Maximum. Es bleibt: $8u^6 - 4u^4 + 66u^2 - 5 = 0$. Setzt man als neue Unbekannte $u^2 = w$, so hat man die kubische Gleichung: $w^3 - \frac{1}{2}w^2 + \frac{33}{4}w - \frac{5}{8} = 0$ oder reduziert: $z^3 - \frac{49}{6}z + \frac{22}{27} = 0$. Diese Gleichung hat eine reelle Wurzel $z = -0{,}0906$. Daraus folgt $u^2 = 0{,}0761$; $u = \pm 0{,}2759$. x und y durch u ausgedrückt, lauten: $x = 16pu^2 \frac{2u^2 + 1}{20u^4 + 36u^2 - 5}$; $y = 16pu \cdot \frac{2u^2 + 1}{20u^4 + 36u^2 - 5}$. Setzt man für u den Wert ein, so ist $\underline{x = -0{,}654p}$; $\underline{y = \pm 2{,}372p}$. Dem + Zeichen in y entspricht ein Minimum, dem — Zeichen ein Maximum von $H(\varphi)$. Aus $\frac{d(H\varphi)}{dy}$ erhält man als Koordinaten der Punkte, deren Tangenten senkrecht zur x-Achse stehen: $\left(x = -\frac{2}{5}p; y = \pm\infty\right)$, den unendlich fernen Punkt der Asymptote, und $\left(x = \frac{10}{7}p;\ y = \pm\frac{5}{7}p \cdot \sqrt{2}\right)$. Diese Punkte geben an, von welcher Stelle an reelle Kurvenpunkte von $H(\varphi)$ im Intervall von $\frac{2}{3}p$ bis $2p$ auftreten. Dass die Tangente im Punkte $(x = 2p;\ y = 0)$ senkrecht der x-Achse verläuft, war ja für ein beliebiges ε gefunden, es gilt daher auch für $\varepsilon = +1$.

Der Schnitt von $H(\varphi)$ mit der Parabel $y^2 = 2px$ ergibt sich durch Elimination von y^2 aus der Gleichung von $H(\varphi)$. Das Resultat lautet: $x^2(x^3 + 4px^2 - 9p^2x - 2p^3) = 0$. $x^2 = 0$ gibt den Koordinatenanfang. Reduziert man die kubische Gleichung $x^3 + 4px^2 \ldots = 0$, so erhält man: $z^3 - \frac{43}{3}p^2z + \frac{328}{27}p^3 = 0$. Diese Gleichung hat zwar 3 reelle Wurzeln, doch ist die eine negativ und die andere positive kleiner als $\frac{3}{4}p$. Deshalb gibt es nur eine Schnittpunktsabscisse: $x = 1{,}760\,p$. Dazu $y = \pm 1{,}876\,p$.

Die Bestimmung der Schnittpunktskoordinaten von $H(\varphi)$ mit der Cissoide führt auch auf eine kubische Gleichung: $x^3 + \frac{4}{13}px^2 + \frac{3}{13}p^2x + \frac{2}{13}p^3 = 0$. Die reduzierte Gleichung $z^3 + \frac{101}{13 \cdot 39}p^2z + \frac{7850}{39^3}p^3 = 0$ hat nur eine reelle Wurzel $z = -\frac{14{,}928}{39}p$. Daraus folgt $x = -0{,}485\,p$; $y = \pm 2{,}758\,p$.

Jetzt sollen die Schnittpunkte der Kurve φ von Seite 8 mit der Hesseschen Kurve, also sämtliche singulären Punkte und die Wendepunkte von φ bestimmt werden. φ hatte die Gleichung: $2xy^2(x^2 + y^2) - 4px^2(x^2 + y^2) - \varepsilon py^4 = 0$. Die Gleichung von $H(\varphi)$ war: $16x^9 + 64x^7y^2 + (56 - 24\varepsilon)x^5y^4 + (8 - 16\varepsilon)x^3y^6 + (3\varepsilon^2 - 8\varepsilon)xy^8 - p\left\{32x^8 + (16 + 48\varepsilon)x^6y^2 - (16 - 64\varepsilon)x^4y^4 + (12\varepsilon^2 + 4\varepsilon)x^2y^6 + 2\varepsilon y^8\right\} = 0$.

Homogenisiert man beide Gleichungen und setzt wieder $\frac{x_1}{x_2} = u$ und $\frac{x_3}{x_2} = v$, so hat man die 2 Gleichungen:

$$2u^3 + 2u - pv(4u^4 + 4u^2 + \varepsilon) = 0 \quad \text{und}$$

$$16u^9 + 64u^7 + (56 - 24\varepsilon)u^5 + (8 - 16\varepsilon)u^3 + (3\varepsilon^2 - 8\varepsilon)u - p \cdot v\left\{32u^8 + (16 + 48\varepsilon)u^6 - (16 - 64\varepsilon)u^4 + (12\varepsilon^2 + 4\varepsilon)u^2 + 2\varepsilon^2\right\} = 0.$$

Durch Elimination von v erhält man:

$$u(4u^4 + 4u^2 + \varepsilon) \cdot \left\{16u^8 + 48u^6 + (48 - 48\varepsilon)u^4 + (16 - 44\varepsilon)u^2 + (3\varepsilon^2 - 12\varepsilon)\right\} = 0.$$

Die Koordinaten x und y der Schnittpunkte von φ und $H(\varphi)$ ergeben sich aus den Wurzeln dieser Gleichung durch die Beziehungen: $x = p \cdot \frac{4u^4 + 4u^2 + \varepsilon}{2(u^2+1)}$; $y = p \cdot \frac{4u^4 + 4u^2 + \varepsilon}{2u(u^2+1)}$, die aus φ folgen, wenn man $x = u \cdot y$ setzt.

Die Wurzeln von u sind: 1. $u = 0$. Dazu gehört $x = \frac{p \cdot \varepsilon}{2}$; $y = \infty$. Der Berührungspunkt der Asymptote $x = \frac{p \cdot \varepsilon}{2}$ ist demnach ein Wendepunkt von φ, $x = \frac{p \cdot \varepsilon}{2}$ eine Wendeasymptote. Einen reellen Wendepunkt haben also alle Kurven, wie gross auch ε sein mag. 2. Die vier Wurzeln der Gleichung $4u^4 + 4u^2 + \varepsilon = 0$ machen sowohl x als auch y zu Null, man bekommt den Koordinatenanfang. Dieser ist, wie Seite 9 gefunden wurde, vierfacher Punkt für φ. Abgesehen vom Fall $\varepsilon = +1$, der noch einer besonderen Erörterung bedarf, waren die Tangenten in diesem Punkte untereinander verschieden. Seite 14 ergab sich bei der Diskussion von $H(\varphi)$, dass der Punkt $(x = 0;\ y = 0)$ 8-fach ist und dass von den acht Tangenten vier identisch mit denen der Grundkurve sind. Wie man aus der auf Seite 15 angegebenen Literatur entnehmen kann, gilt daher der Koordinatenanfang für $4 \cdot 8 + 4 = 36$ Schnittpunkte von φ und $H(\varphi)$. Es bleiben jetzt noch die Wurzeln der Gleichung:

$$16u^8 + 48u^6 + (48 - 48\varepsilon)u^4 + (16 - 44\varepsilon)u^2 + (3\varepsilon^2 - 12\varepsilon) = 0$$

zu betrachten. Ist ε negativ, so gibt es kein reelles u, das diese Gleichung erfüllen kann, man bekommt keinen reellen Wendepunkt. Hierher gehört auch der Fall $\varepsilon = -1$. Ist ε positiv, so erhält man für alle ε, die kleiner als 4 sind, ein positives u^2, also zwei reelle u und dazu zwei reelle Wendepunkte von φ. In der Zeichnung (Tafel 1) gibt die 2. Figur den Fall $\varepsilon = +1$ wieder. Ist $\varepsilon > 4$, so kann man aus der Zeichenfolge nicht sicher bestimmen, ob φ vier Wendepunkte hat oder keinen. Die Entscheidung ist aber auf einem anderen Wege möglich. Die Kurve φ, die ja die Gleichung hatte: $(2xy^2 - 4px^2)(x^2 + y^2) - \varepsilon p y^4 = 0$, hat stets die Asymptote $x = \frac{\varepsilon \cdot p}{2}$. Im unendlich fernen Punkt der x-Achse berührt sie die Parabel $y^2 = 2\,p\,x$. Zwei reelle Wendepunkte müssen also jedenfalls da sein bei positivem ε, wenn die Parabel nicht geschnitten wird. Mehr als 2 Wendepunkte könnten nur auftreten, wenn die Asymptote von der Kurve geschnitten und von der anderen Seite berührt würde. Das tritt nun tatsächlich für $\varepsilon > 4$ ein. Setzt man $x = \frac{\varepsilon \cdot p}{2}$ in die Kurvengleichung ein, so bekommt man $y^2 = \infty$ und $y = \pm \frac{p \cdot \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon - 4}}$. Für $\varepsilon < 4$ gibt es keinen reellen Schnitt von φ mit der Asymptote, bei $\varepsilon = 4$ liegen vier Schnittpunkte im Unendlichen, der unendlich ferne Punkt ist Wendeflachpunkt. Für $\varepsilon > 4$ erhält man zwei reelle Schnittpunkte von φ mit der Asymptote, es treten noch zwei Wendepunkte mehr auf. Von den 9 Wendepunkten sind also für $\varepsilon > 4$ fünf reell und vier imaginär. Ist $\varepsilon \gtreqless +1$, so gibt es 9 Wendepunkte, der Koordinatenanfang vertrat 36 Schnittpunkte von φ und $H(\varphi)$, im ganzen hat man also 45 Schnittpunkte, wie es auch nach dem Bézoutschen Satz sein muss.

Der vielfache Punkt im Koordinatenanfang kann noch durch einfache singuläre Punkte, Doppelpunkte oder Spitzen, ersetzt werden. Im allgemeinen ist ein k-facher Punkt äquivalent $\frac{1}{2} k \cdot (k-1)$ Doppelpunkten (einschliesslich Spitzen). Hier ist $k = 4$, also $\frac{1}{2} k \cdot (k-1) = 6$. Da nun jeder gewöhnliche Doppelpunkt als 6-facher Schnittpunkt von φ und $H(\varphi)$ gezählt wird, so sieht man, dass unser 4-facher Punkt 6 einfachen Doppelpunkten äquivalent ist. Jetzt kann man aus den Plückerschen Formeln[1]) die Klasse der Kurven, die Zahl der Rückkehrpunkte und der Doppeltangenten ermitteln.

Ist n die Ordnung, m die Klasse, d die Zahl der Doppelpunkte, t die der Doppeltangenten, r die Zahl der Rückkehrpunkte, w die der stationären oder Wendetangenten, oder wie

---

[1]) **Plücker: „Theorie der algebraischen Kurven". Bonn 1839. Wieleitner: „Theorie der ebenen algebraischen Kurven", p. 67.**

man gewöhnlich sagt, der Wendepunkte, so hatten wir bereits folgende Zahlen: $n = 5$; $d = 6$; $w = 9$. Es folgt dann: $r = 0$; $m = 8$; $t = 12$. Die Kurven haben also keine Rückkehrpunkte, 12 Doppeltangenten und ihre Klassenzahl ist 8. Von einem beliebigen Punkte der Ebene sind also 8 Tangenten an φ möglich. Die Maximalzahl der Doppelpunkte einer Kurve n^{ter} Ordnung ist $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ [1]. Hier bei $n = 5$ wird diese Zahl 6. Nun gibt es, wie wir oben sahen, tatsächlich 6 Doppelpunkte, nämlich die Äquivalenzpunkte des Koordinatenanfangs, also ist das Geschlecht unserer Kurven Null[2].

Eine besondere Betrachtung ist noch nötig für den Fall $\varepsilon = +1$. In der Gleichung für u auf Seite 23 fällt dann das Glied $(48 - 48\,\varepsilon)\,u^4$ fort. Der Rest in der Klammer: $16\,u^8 + 48\,u^6 + (16 - 44)\,u^2 + (3-12)$ ist durch den Ausdruck: $4\,u^4 + 4\,u^2 + 1$ teilbar. Man bekommt für u folgende Gleichung: $u\,(4\,u^4 + 4\,u^2 + 1)^2 \cdot (4\,u^4 + 8\,u^2 - 9) = 0$. $u = 0$ gibt, wie im allgemeinen Fall den unendlich fernen Berührungspunkt der Asymptote. Dass der Ausdruck $4\,u^4 + 4\,u^2 + 1$, der ja den Koordinatenanfang ergab, quadratisch vorkommt, zeigt schon, dass dieser Punkt eine kompliziertere Beschaffenheit haben wird, als im allgemeinen Fall. Auf Seite 9 war gefunden worden, dass von den 4 Tangenten im 4-fachen Punkte der Kurve φ für $\varepsilon = +1$ je zwei zusammenfallen. Für die Hessesche Kurve ergab sich auf Seite 16, dass von den acht Tangenten in O je vier zusammenfallen, also liegen alle Tangenten von $H(\varphi)$ zusammen mit denen von φ. Nach dem auf Seite 7 mitgeteilten Satze des Herrn Professor von Brill stellt ein k-facher Punkt der Grundkurve, der i zusammenfallende Tangenten hat, $3\,k\,(k-1) + 2\,i - 2$ Schnittpunkte von φ mit $H(\varphi)$ dar. Bei unserer Kurve fallen aber nicht einmal, sondern zweimal i Tangenten zusammen.

---

[1]) Wieleitner: „Theorie der ebenen algebraischen Kurven", p. 71. Salmon-Fiedler: „Analyt. Geometrie der höheren ebenen Kurven", p. 38 u. 39.

[2]) Clebsch: „Über die Singularitäten algebraischer Kurven". Crellesches Journal LXIV p. 98—100.
Salmon-Fiedler: „Analyt. Geometrie der höheren ebenen Kurven", p. 38 u. 89.
Wieleitner: „Theorie der ebenen algebraischen Kurven, p. 71.

Deshalb wird die Multiplizität, da $k=4$ und $i=2$ ist, $12 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 40$. Im ganzen kann φ nur $\frac{(n-1)(n-2)}{2} = 6$ Doppelpunkte haben. Der k-fache Koordinatenanfang ist $\frac{1}{2}k(k-1) = 6$ Doppelpunkten äquivalent, andere singuläre Punkte kann es nicht geben. Unter den Doppelpunkten können auch noch Spitzen sein. Für d und r hat man also zunächst die Gleichung: $d + r = 6$. Bei der Zählung der Schnittpunkte von φ und $H(\varphi)$ ist nun ein Doppelpunkt 6-fach, ein Rückkehrpunkt 8-fach zu rechnen. Daher bekommt man für d und r die zweite Gleichung: $6d + 8r = 40$. Man erhält daraus $d = 4$ und $r = 2$. O ist also 4 Doppelpunkten und 2 Rückkehrpunkten äquivalent. Der noch übrigbleibende Teil der Gleichung für u: $4u^4 + 8u^2 - 9 = 0$ hat die vier Wurzeln $u = \pm\sqrt{-1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{13}}$. Dazu gehören folgende Wendepunktskoordinaten:

$$x = \frac{-26 \pm 14 \cdot \sqrt{13}}{13} \cdot p;\; y = \pm \frac{4p}{117}(65 \pm \sqrt{13}) \cdot \sqrt{\frac{-2 \pm \sqrt{13}}{2}}.$$

Ausser dem unendlich fernen hat also die Kurve für $\varepsilon = +1$ noch 2 reelle und 2 imaginäre Wendepunkte. Die Koordinaten der reellen sind in Zahlen: $x = 1{,}8829\,p$; $y = \pm 2{,}1015\,p$.

Aus den bekannten Plückerschen Zahlen: $n = 5$; $d = 4$; $r = 2$; $w = 5$ folgen die beiden noch fehlenden: $m = 6$; $t = 5$. Auch dieser Spezialfall ist vom Geschlecht Null, weil die Maximalzahl der Doppelpunkte vorhanden ist.

Wie alle Kurven vom Geschlecht Null, so lassen sich auch unsere rational durch Parameter darstellen. Setzt man $y = \lambda \cdot x$ in die Kurvengleichung: $2xy^2(x^2+y^2) - 4px^2(x^2+y^2) - \varepsilon p y^4 = 0$ ein, so bekommt man:

$$\underline{x = p \cdot \frac{4(1+\lambda^2) + \varepsilon \cdot \lambda^4}{2\lambda^2(1+\lambda^2)}};\quad \underline{y = p\,\frac{4(1+\lambda^2) + \varepsilon \cdot \lambda^4}{2\lambda(1+\lambda^2)}}.$$

Als Anwendung der Tatsache, dass sich die Kurve verhältnismässig einfach durch einen Parameter darstellen lässt, soll die Quadratur der Kurve durchgeführt werden. Es ist

$F = \int_{x_1}^{x_2} y \cdot dx$. Aus der Parameterdarstellung von x folgt:

$$dx = -p \cdot \frac{4 + 8\lambda^2 + (4 - \varepsilon) \cdot \lambda^4}{\lambda^3 (1 + \lambda^2)} \cdot d\lambda.$$

Es ist daher: $F = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{p^2}{2} \frac{(4 + 4\lambda^2 - \varepsilon\lambda^4)(4 + 8\lambda^2 + (4 - \varepsilon)\lambda^4)}{\lambda^4 (1 + \lambda^2)^3} d\lambda.$

Zerlegt man den Ausdruck unter dem Integral in Partialbrüche, so kann man die Integration ausführen und kommt auf elementare Funktionen. Es ist:

$$F = \frac{p^2}{2} \cdot \left[\frac{16}{3\lambda^3} - (4\varepsilon - \varepsilon^2) \operatorname{arc\,tg} \lambda - \left(2\varepsilon - \frac{5}{8}\varepsilon^2\right) \cdot \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \right.$$
$$\left. + \frac{\varepsilon^2 \lambda}{4(1+\lambda^2)^2} + \frac{(2\varepsilon - \frac{5}{8}\varepsilon^2)\lambda}{1+\lambda^2}\right]_{\lambda_1}^{\lambda_2}$$

Will man die Grösse des Flächeninhalts der Kurve von der Asymptote $x = \frac{\varepsilon p}{2}$ an berechnen, so muss man beim Parameter $\lambda = \infty$ beginnen. Für $\lambda = \infty$ nimmt die Klammer den Wert $-(4\varepsilon - \varepsilon^2) \cdot \frac{\pi}{2}$ an. Besondere Beachtung erfordert der Fall, dass ε negativ ist und zwar dann, wenn der Koordinatenanfang zwischen den beiden Grenzordinaten liegt. Man muss dann die Integration zerlegen von λ_1 bis λ_0 und von λ_0 bis λ_2, wo λ_0 der Parameterwert von O ist. λ_0 folgt aus der Gleichung: $\varepsilon \cdot \lambda_0^4 + 4\lambda_0^2 + 4 = 0$ als $\lambda_0 = \pm \sqrt{-\frac{2}{\varepsilon}(1 + \sqrt{1 - \varepsilon})}$. Nur für negative ε ist λ_0 reell. Das doppelte Vorzeichen vor der Wurzel deutet auf die zwei Teile der Kurve hin, die für negative ε durch O gehen. Das + Zeichen gehört zu dem Teil, der für positive x positive y und für negative x negative y hat, während das — Zeichen dem anderen Teil entspricht. Bei negativem ε erhält man für das Flächenstück zwischen den Asymptoten und den Kurvenstücken links der y-Achse:

$$F_1 = p^2 \left\{\frac{16}{3\lambda_0^3} - (4\varepsilon - \varepsilon^2) \cdot \operatorname{arc\,tg} \lambda_0 - \left(2\varepsilon - \frac{5}{8}\varepsilon^2\right) \cdot \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_0^2}} \right.$$
$$\left. + \frac{\varepsilon^2 \lambda_0}{4(1+\lambda_0^2)^2} + \frac{(2\varepsilon - \frac{5}{8}\varepsilon^2)\lambda_0}{1+\lambda_0^2} + (4\varepsilon - \varepsilon^2) \cdot \frac{\pi}{2}\right\}$$

Ist $\varepsilon = 0$, so erhält man die Parabel $y^2 = 2px$. Auch der Flächeninhalt F muss für $\varepsilon = 0$ in den der Parabel übergehen. Es ist $F_0 = \frac{8p^2}{3} \cdot \left[\frac{1}{\lambda^3}\right]_{\lambda_1}^{\lambda_2}$. Zum Parabelscheitel ($x = 0$; $y = 0$) gehört der Parameterwert $y = \infty$. Der Inhalt des Parabelsegments mit zur x-Achse senkrechter Sehne ist daher $\frac{16}{3}\frac{p^2}{\lambda^3}$. Als Parameterdarstellung der Parabel erhält man: $x = \frac{2p}{\lambda^2}$; $y = \frac{2p}{\lambda}$. Dann ist $\frac{4p^2}{\lambda^3} = x \cdot y$, wo x und y die Koordinaten des Parabelpunktes sind, der auf der Begrenzungssehne liegt. F_0 kann man daher auch schreiben: $F_0 = \frac{4}{3} x \cdot y$. Das ist das bekannte Resultat.

---

§ 2. Der Kegelschnitt ist eine Ellipse.

Der Betrachtung soll die Ellipse $\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ zugrunde liegen. Koordinatenanfang ist also der Scheitel der Ellipse, der in der Mittelpunktsform die Koordinaten ($-a$, 0) hat. Die Fusspunktkurve der Ellipse in Bezug auf diesen Scheitel ergibt sich durch Elimination von x_1 und y_1 aus den 3 Gleichungen:

$\frac{(x_1 - a)^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ (Ellipsenpunkt); $\frac{(x-a)(x_1-a)}{a^2} + \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1$ (Ellipsentangente); und $y = \frac{a^2 y_1}{b^2 (x_1 - a)} \cdot x$ (Lot von O auf die Tangente). Das Eliminationsergebnis liefert folgende Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) - b^2 y^2 = 0.$$

Ist $b = a$, die Ellipse also ein Kreis, so stellt diese Gleichung die Kardioide dar. Die Fusspunktkurve der Ellipse bezüglich des Scheitels ist eine Kurve, die eine Verallgemeinerung der Kardioide ist und, wenigstens solange $b < 2a$ ist, nicht wesentlich in der Gestalt von dieser abweicht. Ist $b > 2a$, so tritt im

Punkte (2 a, 0) eine Einbuchtung auf, was man erkennt, wenn man die Gerade $x = 2a$ zum Schnitt mit der Kurve bringt. Um analog der Entstehungsweise im vorigen Paragraphen auch hier die neue Kurve zu finden, muss man Ellipse und Fusspunktkurve in Polarkoordinaten darstellen. Es ist:

$$\rho_E = \frac{2ab^2 \cos\varphi}{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi};$$

$$\rho_F = a \cdot \cos\varphi \pm \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}.$$

Die Gleichung der gesuchten Kurve ist daher in Polarkoordinaten:

$$\underline{\rho = \frac{2ab^2\cos\varphi}{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi} + \varepsilon\left(a \cdot \cos\varphi \pm \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\right).}$$

Transformiert man die Gleichung in rechtwinklige Koordinaten, so ergibt sich:

$$\underline{(x^2+y^2)^2(b^2x^2+a^2y^2)^2 - b^2\varepsilon^2y^2(b^2x^2+a^2y^2)^2}$$

$$\underline{-2ax(x^2+y^2)(b^2x^2+a^2y^2)\cdot\left\{\varepsilon(b^2x^2+a^2y^2)+2b^2(x^2+y^2)\right\}}$$

$$\underline{+4a^2b^2x^2(x^2+y^2)\cdot\left\{\varepsilon(b^2x^2+a^2y^2)+b^2(x^2+y^2)\right\} = 0.}$$

Da die Diskussion der Gleichung bei beliebigem ε und veränderlichem Achsenverhältnis $\frac{a}{b}$ infolge des Auftretens mehrerer Veränderlicher auf erhebliche Schwierigkeiten stösst und genaue Kriterien über den Verlauf der Kurven nicht gewonnen werden können, so soll im Folgenden nur behandelt werden: 1. Der Fall der allgemeinen Ellipse mit beliebigen Achsen a und b, wobei ε auf die Werte ± 1 beschränkt wird; 2. der Spezialfall $b = a$, also der Kreis, wobei ε jeden beliebigen Wert annehmen soll.

Im Fall der allgemeinen Ellipse ist die Gleichung der Kurve vom achten Grade, die Kurve also von der achten Ordnung. Die Glieder höchster Potenz zeigen, dass unsere Kurve im Unendlichen keinen reellen Punkt haben kann, sie muss also ganz im Endlichen verlaufen. Die Asymptoten haben die Gleichungen:

$$y = i\,x - \frac{i\,\varepsilon}{2}(a - e);\ y = -i\,x + \frac{i\,\varepsilon}{2}(a - e);\ y = \frac{b}{a}\cdot i\,x - i\,b;$$

$$y = i\,x - \frac{i\,\varepsilon}{2}(a + e);\ y = -i\,x + \frac{i\,\varepsilon}{2}(a + e);\ y = -\frac{b}{a}\cdot i\,x + i\,b.$$

Die Kurve ist bizirkular; die imaginären Kreispunkte sind gewöhnliche isolierte Doppelpunkte.

Die beiden Asymptoten nach den anderen unendlich fernen Punkten sind doppelt zu zählen. Bringt man die Gerade $y = \frac{b}{a}\,i\,x - i\,b$ zum Schnitt mit der Kurve, so sieht man, dass in Richtung der Asymptote vier Kurvenpunkte hintereinander liegen. Da die Tangente in diesem unendlich fernen Punkte Doppelasymptote ist, ein gewöhnlicher Flachpunkt also nicht in Betracht kommt, so hat man es mit einem imaginären Selbstberührungspunkt oder Berührungsknoten zu tun. Jeder dieser 2 Punkte ist 2 Doppelpunkten äquivalent. Die Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden repräsentieren also im ganzen 6 Doppelpunkte.

Wie das Aggregat der Glieder niedrigster Potenz zeigt, ist der Koordinatenanfang ein sechsfacher Punkt der Kurve. Die Richtungsfaktoren der Tangenten in diesem Punkte ergeben sich aus der Gleichung:

$$a^4\,\varepsilon^2\,\mu^6 + 2\,a^2\,\mu^4\left\{(\varepsilon^2 - 2)\,b^2 - 2\,\varepsilon\,a^2\right\}$$

$$+\,\mu^2\left\{\varepsilon^2\,b^4 - 8\,a^2\,b^2 - 4\,a^2\,\varepsilon\,(a^2 + b^2)\right\} - 4\,a^2\,b^2\,(1 + \varepsilon) = 0.$$

Für $\varepsilon = +1$ lautet diese Gleichung: $a^4\,\mu^6 - 2\,a^2\mu^4\,(2\,a^2 + b^2) + \mu^2\,(b^4 - 12\,a^2\,b^2 - 4\,a^4) - 8\,a^2\,b^2 = 0$. Es kommt auf das Vorzeichen der Klammer $(b^4 - 12\,a^2\,b^2 - 4\,a^4)$ an, wenn man entscheiden will, wieviel positive μ^2 und damit, wieviel reelle μ die Gleichung erfüllen. Die Klammer ist negativ, wenn $b < a\sqrt{6 + 2\sqrt{10}} < 3{,}510\,a$ ist. Für $b < a$ hat man auf alle Fälle das Zeichenschema: $+---$. Es gibt nur einen Zeichenwechsel, nur eine positive Wurzel μ^2. Die Kurve hat im Koordinatenanfang 2 reelle Tangenten, während die anderen vier imaginär sind. Ist $b > a$, so gilt dasselbe Resultat nur solange, als $b < 3{,}510\,a$ ist. Wird dagegen $b > 3{,}510\,a$, so wäre es nach dem Zeichenschema möglich, dass 3 positive reelle Wurzeln μ^2 und damit 6 reelle Tangenten in O da wären. Um festzustellen, ob die kubische Gleichung:

$$a^4 z^3 - 2\,a^2 z^2 (2\,a^2 + b^2) + z\,(b^4 - 12\,a^2 b^2 - 4\,a^4) - 8a^2 b^2 = 0$$

drei reelle oder eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln hat, reduziert man sie auf die Form

$$u^3 - u\,\frac{b^4 + 52\,a^2 b^2 + 28\,a^4}{3\,a^4}$$

$$+ 2 \cdot \frac{b^6 - 138\,a^2 b^4 - 456\,a^4 b^2 - 136\,a^6}{27\,a^6} = 0.$$

Da der Faktor von u negativ ist, kommt es auf das Grössenverhältnis dieses Faktors zu dem von u freien Gliede an. Sind p und q diese Faktoren, so muss man feststellen, ob $\left(\frac{q}{2}\right)^2 \gtrless \left(\frac{p}{3}\right)^3$ ist. Rechnet man die ziemlich grossen Zahlen aus, so erhält man folgende Ungleichung:

$$18496\,a^{12} + 124032\,a^{10} b^2 + 245472\,a^8 b^4 + 125584\,a^6 b^6$$
$$+ 18132\,a^4 b^8 - 276\,a^2 b^{10} \gtrless 21952\,a^{12} + 122304\,a^{10} b^2$$
$$+ 229488\,a^8 b^4 + 149344\,a^6 b^6 + 8196\,a^4 b^8 + 156\,a^2 b^{10}.$$

Kürzt man noch durch gemeinsame Faktoren und bringt alle Grössen auf eine Seite, so ergibt sich: $8\,a^{10} - 4\,a^8 b^2 - 37\,a^6 b^4 + 55\,a^4 b^6 - 23\,a^2 b^8 + b^{10} \gtrless 0$. Die Ungleichung ist vom 5^{ten} Grade in $\frac{b^2}{a^2}$. Durch Einsetzen von Werten kann man die Zahl der Wurzeln der kubischen Gleichung ermitteln, die positiv und reell sind. Ist $0 < \frac{b}{a} < 1$, so ist die linke Seite der Ungleichung grösser als Null, die kubische Gleichung hat 3 reelle Wurzeln, davon ist aber nur eine positiv. Es gibt daher nur ein Paar reeller Tangenten in O (Tafel 2, Figur 1). Ist $1 < \frac{b}{a} < 4{,}516$, so ist die linke Seite der Ungleichung kleiner als Null, die kubische Gleichung hat nur eine reelle Wurzel. Weil negative reelle Wurzeln bei unserer Gleichung ganz ausgeschlossen sind, so muss die eine reelle Wurzel positiv sein. Für alle b kleiner als 4,516 a gibt es also in O nur 2 reelle Tangenten (Tafel 2, Figur 2). Ist aber $b > 4{,}516\,a$, so ist die linke Seite der Ungleichung wieder grösser als Null, die kubische Gleichung hat 3 reelle Wurzeln, die sämtlich positiv sein müssen, im Koordinatenanfang gibt es 6 reelle Tangenten. Die Kurve hat bei O 5 Schleifen (Tafel 2, Figur 3). Die 6 Tangenten, ob sie reell oder imaginär sind, sind alle verschieden. Deshalb hat die Hessesehe Kurve in O einen 14-fachen Punkt, von dessen 14 Tangenten 6 mit denen von φ zusammenfallen. Der Koordinatenanfang zählt demnach als 90 Schnittpunkte von φ und $H(\varphi)$, er ist 15 Doppelpunkten äquivalent.

Ist $\varepsilon = -1$, so hat man für die Richtungsfaktoren der Tangenten des Koordinatenanfangs die Gleichung:

$$\mu^2 \left\{ a^4 \mu^4 + 2\,a^2 \mu^2 (2\,a^3 - b^2) + (2\,a^2 - b^2)^2 \right\} = 0.$$

$\mu^2 = 0$ gibt die Achse $y = 0$ als doppelt zu zählende Tangente. Der Ausdruck in der Klammer gibt: $\mu = \pm \frac{1}{a} \cdot \sqrt{b^2 - 2\,a^2}$.

Ist $b < a \cdot \sqrt{2}$, so sind die weiteren Tangenten imaginär. Im Koordinatenanfang liegt dann eine reelle Spitze. Für $b > a \cdot \sqrt{2}$ erhält man dagegen 3 reelle Spitzen mit verschiedenen Tangenten (Tafel 2, Figur 6). Die beiden noch auftretenden Spitzen rühren daher, dass für $b > a \cdot \sqrt{2}$ die Fusspunktkurve der Ellipse, bezogen auf den Scheitel, mit der Ellipse 2 Punkte gemeinsam hat, abgesehen von den Endpunkten der Achse a. Fällt man bei $b > a \cdot \sqrt{2}$ die Lote vom Ellipsenscheitel auf die Tangente, so liegen die Fusspunkte zunächst unterhalb des Berührungspunktes. Für eine bestimmte Stelle, eben für den Winkel, der aus $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{a} \sqrt{b^2 - 2\,a^2}$ folgt, fällt Lotfusspunkt und Berührungspunkt zusammen und von da ab liegen die Fusspunkte oberhalb der Berührungspunkte. Bildet man die Differenz der Radien von Ellipse und Fusspunktkurve, so bekommt man in der Nähe des Koordinatenanfangs zwei schleifenartige Teile, ausserdem noch einen grösseren Kurvenzweig, der durch ($x = 2a$, $y = 0$) geht und ähnlich verläuft wie im Falle $\varepsilon = +1$. Dasselbe Resultat, dass nämlich Ellipse und Fusspunktkure für

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{a} \sqrt{b^2 - 2a^2}$$

einen gemeinsamen Punkt haben, erhält man auch, wenn man berechnet, für welche Ellipsenpunkte die Normalen durch den Koordinatenanfang gehen, wenn die Ellipse ihren Scheitel in O hat. Bei der Bestimmung der Äquivalenz des Koordinatenanfangs ist es gleichgültig, ob die Rückkehrtangenten reell oder imaginär sind. Nach der auf Seite 25 angegebenen Formel von Herrn Professor von Brill, erweitert auf den Fall, dass mehrere Male i Tangenten zusammenfallen, erhält man, dass der Koordinatenanfang bei dieser Kurve $3\,k\,(k-1) + s \cdot (2i-2) = 3 \cdot 6 \cdot (6-1) + 3 \cdot (2 \cdot 2 - 2)$ $= 96$ Schnittpunkte von φ und $H(\varphi)$ repräsentiert. Ein k-facher Punkt ist aber allgemein $\frac{1}{2}\,k\,(k-1)$ Doppelpunkten äquivalent. Für die Zahl der gewöhnlichen Doppelpunkte und die der Rückkehrpunkte hat man daher folgende beiden Gleichungen: $6\,d + 8\,r = 96$; $d + r = 15$. Daraus ergibt sich, dass der Koordinatenanfang der Kurven 12 Doppelpunkten und 3 Rückkehrpunkten äquivalent ist.

Die Schnittpunkte der Kurven mit den Achsen ergeben sich wie folgt: Auf der y-Achse gibt es ausser dem Koordinatenanfang stets 2 Kurvenpunkte, die Punkte $y = \pm \varepsilon \cdot b$, für $\varepsilon = +1 : y = \pm b$. Mit der x-Achse bekommt man die Schnittpunkte $x = 2a$ und $x = 2a\,(\varepsilon + 1)$. Für $= \varepsilon + 1$ hat der letzte Punkt die Abscisse 4a. In beiden Punkten stehen die Tangenten senkrecht auf der x-Achse. Ausser dem Berührungspunkt haben diese Tangenten im allgemeinen keinen weiteren Punkt mit φ gemeinsam, die Kurve ist in beiden Punkten konkav nach O zu, nur im Punkte (4a, 0) wird die Krümmung konvex gegen den Koordinatenanfang, die Kurve hat zwei reelle Wendepunkte und schneidet die Gerade $x = 4a$ noch in zwei weiteren Punkten, wenn $b > a \cdot \sqrt{2 + 2\sqrt{2}} > 2{,}197a$ ist. Dann zeigt die

Kurve im Punkte (4a, 0) eine Einbuchtung (Tafel 2, Figur 2 und 3). Für $\varepsilon = -1$ erhält man ausser dem Koordinatenanfang, der noch einen Punkt mehr aufnimmt, nur den Punkt (2a, 0). In ihm ist die Kurve konkav gegen den Koordinatenanfang gekrümmt, solange $b < a \cdot \sqrt{2}$ ist. Für $b > a \cdot \sqrt{2}$, also von demselben Grenzwert an, wo in O drei Spitzen auftreten, erhält man auch eine konvexe Krümmung. Die zur x-Achse senkrechte Tangente $x = 2a$ schneidet die Kurve dann noch in zwei weiteren reellen Punkten. Zwischen diesen und dem Achsenschnittpunkt muss notwendig auf jeder Seite der Achse ein reeller Wendepunkt liegen. (Tafel 2, Figur 6).

Aus den Ergebnissen der vorigen Seiten bezüglich der singulären Punkte der Kurven kann man nach den Plückerschen Formeln die weiteren charakteristischen Zahlen für die Fälle $\varepsilon = +1$ und $\varepsilon = -1$ ableiten. Für $\varepsilon = +1$ war gefunden: $n = 8$; $d = 21$; $r = 0$, denn die Maximalzahl der Doppelpunkte ist für $n = 8$ gleich 21. Man erhält dann: $m = 14$; $w = 18$; $t = 60$; p (Geschlecht) $= 0$. Die Kurve für $\varepsilon = -1$ hatte folgende Plückerschen Zahlen: $n = 8$; $d = 18$; $r = 3$. Daraus findet man: $m = 11$; $w = 12$; $t = 33$ und $p = 0$. Da beide Kurven vom Geschlecht 0 sind, so muss eine rationale Parameterdarstellung ihrer Koordinaten möglich sein. Man bekommt eine solche für ein beliebiges ε, daraus kann man schliessen, dass alle Kurven, wie gross auch ε sein mag, vom Geschlecht Null sein müssen, was auch allgemein gezeigt werden kann. Setzt man in der Kurvengleichung der Seite 29 $y = \lambda \cdot x$, so bekommt man:

$$x^8 (1+\lambda^2)^2 (b^2+a^2\lambda^2)^2 - 2ax^7(1+\lambda^2)(b^2+a^2\lambda^2) \cdot \Big\{\varepsilon(b^2+a^2\lambda^2) + 2b^2(1+\lambda^2)\Big\} + x^6 \cdot \Big\{4a^2b^2(1+\lambda^2) \cdot \big[\varepsilon(b^2+a^2\lambda^2) + b^2(1+\lambda^2)\big] - b^2\varepsilon^2\lambda^2(b^2+a^2\lambda^2)\Big\} = 0.$$

Abgesehen von $x^6 = 0$ ergibt sich eine quadratische Gleichung für x, die aufgelöst lautet:

$$x = a\left(\frac{\varepsilon}{1+\lambda^2} + \frac{2b^2}{b^2+a^2\lambda^2}\right) \pm \frac{\varepsilon}{1+\lambda^2} \cdot \sqrt{a^2+b^2\lambda^2}.$$

Dies ist aber noch keine rationale Parameterdarstellung. Um zu einer solchen zu gelangen, setze man $\sqrt{a^2+b^2\lambda^2} = \tau + b \cdot \lambda$.

Dann ist $\lambda = \frac{a^2 - \tau^2}{2\,b\,\tau}$; $\sqrt{a^2 + b^2\lambda^2} = \frac{a^2 + \tau^2}{2\,\tau}$;

$$1 + \lambda^2 = \frac{4\,b^2\tau^2 + (a^2 - \tau^2)^2}{4\,b^2\tau^2}; \quad b^2 + a^2\lambda^2 = \frac{4\,b^4\tau^2 + a^2(a^2 - \tau^2)^2}{4\,b^2\tau^2}.$$

Setzt man alle diese Werte in x ein, so bekommt man:

$$\underline{x = \frac{2\,\varepsilon\,b^2\,\tau\,(a + \tau)^2}{4\,b^2\tau^2 + (a^2 - \tau^2)^2} + \frac{8\,a\,b^4\,\tau^2}{4\,b^4\tau^2 + a^2(a^2 - \tau^2)^2}}$$

y war ja $\lambda \cdot x$, also

$$\underline{y = (a^2 - \tau^2) \cdot \left\{\frac{\varepsilon\,b\,(a + \tau)^2}{4\,b^2\tau^2 + (a^2 - \tau^2)^2} + \frac{4\,a\,b^3\,\tau}{4\,b^4\tau^2 + a^2(a^2 - \tau^2)^2}\right\}}$$

Setzt man $\varepsilon = 0$, so hat man eine Parameterdarstellung der Ellipse, bezogen auf den Scheitel als Koordinatenanfang.

Jetzt soll die Kurvenschar diskutiert werden, deren Gleichung aus der auf Seite 29 dadurch hervorgeht, dass $b = a = r$ gesetzt wird, dass also an Stelle der Ellipse der Kreis tritt. Die Gleichung lautet dann:

$$\underline{r^4(x^2 + y^2)^4 - 2\,r^5\,x\,(x^2 + y^2)^3(2 + \varepsilon) - r^6\varepsilon^2 y^2(x^2 + y^2)^2}$$

$$\underline{+ 4\,r^6 x^2 (x^2 + y^2)^2 (1 + \varepsilon) = 0.}$$

$r^4(x^2 + y^2)^2$ ist gemeinsamer Faktor. $(x^2 + y^2)^2$ bedeutet vier imaginäre Gerade, von denen je zwei zusammenfallen und die Gleichungen haben: $x + iy = 0$; $x - iy = 0$. Sieht man von diesem Teil ab, so bleibt die Gleichung 4ten Grades:

$$\underline{(x^2 + y^2)^2 - 2\,(2 + \varepsilon)\,r \cdot x\,(x^2 + y^2) + 4\,(\varepsilon + 1)\,r^2 x^2 - \varepsilon^2 r^2 y^2 = 0.}$$

Man sieht der Gleichung sofort an, dass die Kurve bizirkular ist. Die Asymptoten haben die Gleichungen: $y = i\,x - \frac{2 + \varepsilon}{2} \cdot i \cdot r$; $y = -i\,x + \frac{2 + \varepsilon}{2}\,i \cdot r$. Jede von ihnen ist doppelt zu zählen. Die imaginären Kreispunkte sind daher imaginäre Rückkehrpunkte. Die Kurven müssen ganz im Endlichen verlaufen, da reelle unendlich ferne Punkte nicht da sind.

Der Koordinatenanfang ist Doppelpunkt der Kurven. Die Richtungsfaktoren seiner Tangenten folgen aus der Gleichung: $m^2 \varepsilon^2 - 4(1+\varepsilon) = 0$ als $m = \pm \frac{2}{\varepsilon} \cdot \sqrt{1+\varepsilon}$. Ist $\varepsilon > -1$, also positiv oder ein negativer echter Bruch, so bekommt man in O zwei reelle Tangenten (Tafel 3, Figur 1). Für $\varepsilon = -1$ fallen beide Tangenten in die x-Achse zusammen, die Kurve hat in O eine Spitze (Fig. 2). Ist $\varepsilon < -1$, so werden die Tangenten imaginär, der Koordinatenanfang ist isolierter Punkt der Kurve (Fig. 3—6).

Die y-Achse hat mit den Kurven die Punkte $y = \pm \varepsilon \cdot r$ gemeinsam, während auf der x-Achse die Kurvenpunkte: $x = 2r$ und $x = 2r(1+\varepsilon)$ herausgeschnitten werden. Der erste Differentialquotient:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x(x^2+y^2) - (2+\varepsilon)r(3x^2+y^2) + 4(1+\varepsilon)r^2 x}{y \cdot \left\{2(x^2+y^2) - 2(2+\varepsilon)rx - r^2\varepsilon^2\right\}}$$

zeigt, dass die Tangenten in den beiden Schnittpunkten mit der x-Achse senkrecht auf dieser stehen. Ferner gibt er für die Schnittpunkte mit der y-Achse die Tangentenrichtungen: $\pm \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}$. Ist ε positiv, so bildet die Tangente im Punkte $(0, +\varepsilon r)$ mit der positiven x-Achse einen spitzen Winkel, für $\varepsilon = 0$, also für den Kreis selbst, steht sie senkrecht auf dieser Achse. Ist ε negativ, aber grösser als -2, so bildet die Tangente im Schnittpunkt mit der y-Achse, der jetzt für positive ε auf der negativen Seite liegt, mit der positiven x-Achse einen stumpfen Winkel, für $\varepsilon = -2$ ist sie parallel der x-Achse, und für $\varepsilon < -2$ wird der Tangentenwinkel wieder spitz.

Die Tangente im Punkte $(2r, 0)$ schneidet die Kurve noch in den zwei Punkten: $y = \pm r\sqrt{\varepsilon^2 + 4\varepsilon}$. Für positive ε und für negative ε kleiner als -4 bekommt man zwei reelle Schnittpunkte der Tangente mit der Kurve, dagegen treten für $0 > \varepsilon > -4$ keine reellen Schnittpunkte auf. Die reellen Schnitte bei den positiven ε rühren von dem äusseren Kurventeil her, der die x-Achse im Punkte $x = 2r(1+\varepsilon)$ schneidet. Für alle $\varepsilon > -4$ ist die Kurve im Punkte $(2r, 0)$ konkav gegen den Koordinatenanfang. Die Schnittpunkte für Kurven mit $\varepsilon < -4$ dagegen können nur dadurch entstehen, dass im Punkte $(2r, 0)$ eine Einbuchtung auftritt, die Kurve konvex gegen O wird (Tafel 3, Fig. 6). Auch die Tangente im Punkte $\left(x = 2r(1 + \varepsilon);\ y = 0\right)$ verhält sich verschieden, je nach der Grösse von ε. Die weiteren Schnittpunkte mit der Kurve sind ausgedrückt durch: $y = \pm r\sqrt{-\varepsilon(3\varepsilon + 4)}$. Ist ε positiv, so bekommt man keine reellen Schnitte der Tangente mit der Kurve. Auch für negative ε kleiner als $-\frac{4}{3}$ gilt dasselbe. Nur im Intervall von $\varepsilon = 0$ bis $\varepsilon = -\frac{4}{3}$ gibt es ausser dem Berührungspunkt noch weitere reelle gemeinsame Punkte von Kurve und Tangente (Tafel 3, Figur 3).

Von $\varepsilon = 0$ bis $\varepsilon = +\infty$ bildet der Kurventeil, der durch $(2r, 0)$ geht, den inneren Zug der kardioidenartigen Kurve. $\varepsilon = 0$ gibt den Grundkreis: $(x - r)^2 + y^2 = r^2$. Zwischen $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = -1$ wird die innere Schleife von dem Teil der Kurve gebildet, der durch $\left(2r(1 + \varepsilon),\ 0\right)$ geht, während der äussere Teil den Punkt $(2r, 0)$ enthält. Für $\varepsilon = -1$ hat die Kurve im Koordinatenanfang eine Spitze, die innere Schleife ist verschwunden. Man bekommt für $\varepsilon = -1$ die ursprüngliche Kardioide. Es ergibt sich also der bemerkenswerte S a t z:

Trägt man auf den Strahlen durch den Koordinatenanfang die Differenz der Radienvektoren des Kreises $(x - r)^2 + y^2 = r^2$ und der Kardioide $(x^2 + y^2)^2 - 2x(x^2 + y^2) - r^2 y^2 = 0$ von O aus auf, so bekommt man dieselbe Kardioide. (Figur 2 der Tafel 3).

Von $\varepsilon = -1$ bis $\varepsilon = -\frac{4}{3}$ hat die Kurve im Punkte $\left(x = 2r(1 + \varepsilon);\ y = 0\right)$ eine Einbuchtung, die immer flacher wird, bis sie bei $\varepsilon = -\frac{4}{3}$ verschwindet. Von jetzt an bis $\varepsilon = -4$ haben die Kurven die Gestalt eines Ovals. Als besonderer Fall innerhalb dieses Intervalls ist zu erwähnen $\varepsilon = -2$. Für $\varepsilon = -2$ bekommt man, abgesehen vom Koordinatenanfang als isoliertem Punkt, den Kreis $x^2 + y^2 = 4r^2$. Auch dieses Ergebnis kann man in dem S a t z aussprechen:

Trägt man auf den Nullpunktsstrahlen die Differenz des Radiusvektor des Kreises $(x - r)^2 + y^2 = r^2$ und des doppelten Radiusvektor der Kardioide $(x^2 + y^2)^2 - 2x(x^2 + y^2) - r^2 y^2 = 0$ von O aus auf, so bekommt man einen Kreis um O mit dem Radius $2r$. (Figur 4).

Ist $\varepsilon < -4$, so bekommt die Kurve im Punkte $(2r, 0)$ eine Einbuchtung. (Figur 6).

Die Klassenzahl der Kurven soll mit Hilfe der ersten Polaren bestimmt werden. Dadurch wird das Ergebnis, dass ein Doppelpunkt die Klassenzahl um 2, ein Rückkehrpunkt um 3 reduziert, abgeleitet. Die erste Polare hat die Gleichung: $y_1 \varphi_1 + y_2 \cdot \varphi_2 + y_3 \cdot \varphi_3 = 0$, wo y_1, y_2, y_3 die homogenen Koordinaten eines festen Punktes sind und $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ die ersten Differentialquotienten der Kurvengleichung $\varphi = 0$ bedeuten. Wählt man als festen Punkt $(y_1, 0, 0)$ so lautet die Polarengleichung:

$$4x_1(x_1^2 + x_2^2) - 6(2 + \varepsilon) r x_1^2 - 2(2 + \varepsilon) r x_2^2 + 8(1 + \varepsilon) r^2 x_1 = 0$$

Setzt man hieraus: $x_2^2 = \dfrac{6(2 + \varepsilon) r x_1^2 - 8(1 + \varepsilon) r^2 x_1 - 4x_1^3}{4x_1 - 2(2 + \varepsilon) r}$

in die Kurvengleichung ein, so erhält man eine Gleichung 6ten Grades für x_1, respektive x, wenn man $x_3 = 1$ setzt. Diese Gleichung lautet:

$$0 \cdot x^6 + 0 \cdot x^5 + 0 \cdot x^4 - 4\varepsilon^2(2 + \varepsilon) x^3$$
$$+ \varepsilon^2(16 + 16\varepsilon + 3\varepsilon^2) x^2 - 4\varepsilon^2(2 + 3\varepsilon + \varepsilon^2) r^2 x = 0.$$

3 Wurzeln der Gleichung, damit 6 Schnittpunkte von φ mit der ersten Polaren, fallen ins Unendliche. Jeder imaginäre Kreispunkt reduziert demnach die Klassenzahl um 3. Wie wir sahen, sind die absoluten Punkte Rückkehrpunkte, das Ergebnis stimmt also mit dem erwarteten überein. Ferner hat die Gleichung die Wurzel $x = 0$. Diesem Wert entsprechen 2 Schnittpunkte. Der Doppelpunkt im Koordinatenanfang vermindert demnach die Zahl der Tangenten von einem festen Punkt an die Kurve um 2. Es bleibt noch die quadratische Gleichung:

$$x^2 - \frac{16 + 16\varepsilon + 3\varepsilon^2}{4(2 + \varepsilon)} r \cdot x + \frac{(2 + 3\varepsilon + \varepsilon^2) \cdot r^2}{2 + \varepsilon} = 0.$$

Ihre Wurzeln sind:

$$x = \frac{16 + 16\,\varepsilon + 3\,\varepsilon^2}{8\,(2+\varepsilon)} \pm \frac{1}{8\,(2+\varepsilon)} \cdot \sqrt{32\,\varepsilon^2 + 32\,\varepsilon^3 + 9\,\varepsilon^4}.$$

Dies sind die Abscissen der Maxima, bezüglich Minima der Kurve φ, denn in ihnen sind die Tangenten parallel der x-Achse. Vom Punkte $(y_1, 0, 0)$ sind daher 4 Tangenten an die Kurve φ möglich, die Klassenzahl der Kurve ist also 4. Die beiden noch fehlenden Plückerschen Zahlen erhält man dann aus den Formeln. Es ist: $w = 2$ und $t = 1$. Die beiden Wendepunkte sind je nach der Wahl von ε reell oder imaginär. Die Kurven sind natürlich, wie die allgemeinen, vom Geschlecht 0.

---

§ 3. Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel.

Wenn man von der Hyperbel $\frac{(x-a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ausgeht, so erhält man alle Kurven, die von dieser Hyperbel abgeleitet werden, dadurch aus den entsprechenden der Ellipse, dass man $+b^2$ mit $-b^2$ und demzufolge b mit $i \cdot b$ vertauscht. Die Fusspunktkurve in Bezug auf den Scheitel hat daher die Gleichung:

$$\underline{(x^2 + y^2)^2 - 2\,a\,x\,(x^2 + y^2) + b^2 y^2 = 0.}$$

Die Haupteigenschaften dieser Kurve sollen kurz angegeben werden. Die Form der Gleichung zeigt, dass wir es mit einer bizirkularen Kurve zu tun haben. Der Koordinatenanfang ist Doppelpunkt mit der zusammenfallenden Tangente $y^2 = 0$. Es ist also ein gewöhnlicher Rückkehrpunkt der Kurve. $y = 0$ gibt als weiteren Schnittpunkt der Kurve mit der x-Achse den Punkt $x = 2a$, das ist der andere Hyperbelscheitel. Auf der y-Achse liegt kein reeller Kurvenpunkt. Ferner besitzt die Kurve je ein Maximum, resp. Minimum. Zwischen diesen beiden Punkten und der Spitze im Koordinatenanfang befinden sich notwendig Wendepunkte. Aus der Form der Gleichung in Polarkoordinaten:

$$\rho_F = a \cdot \cos\varphi \pm \sqrt{a^2 \cos^2\varphi - b^2 \sin^2\varphi}$$

sieht man, dass jeder Strahl, dessen Winkel mit der x-Achse kleiner ist, als $\operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b}$, die Kurve in zwei reellen Punkten schneidet. Für $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b}$ wird $\rho_F = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Ist $\varphi >$ $\operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b}$, so gibt es keinen reellen Kurvenpunkt mehr. Der Ausdruck von ρ_F für $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b}$ lässt sich konstruieren als Länge des Lotes von O auf die Asymptote der Hyperbel, wie sich leicht beweisen lässt. Der Fusspunkt dieses Lotes von O auf die Asymptote ist daher jedesmal der äusserste Punkt der Fusspunktkurve, der Punkt, dessen Tangente und Radiusvektor zusammenfallen.

Jetzt soll die Gleichung der eigentlichen Kurve analog dem Fall der Ellipse abgeleitet werden. In Polarkoordinaten ist ihre Gleichung:

$$\underline{\rho = \frac{2\,a\,b^2 \cos\varphi}{b^2 \cos^2\varphi - a^2 \sin^2\varphi} + \varepsilon\left(a \cos\varphi \pm \sqrt{a^2 \cos^2\varphi - b^2 \sin^2\varphi}\right) = 0.}$$

Ist $\varphi > \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b}$, so kann kein reelles ρ existieren, die Kurve verläuft zwischen den Schenkeln $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\left(+\frac{a}{b}\right)$ und $\varphi =$ $\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{a}{b}\right)$ des Winkels, der von der x-Achse halbiert wird. Je nachdem, ob die Hyperbelasymptote innerhalb oder ausserhalb dieses Winkelraumes liegt, geht die Kurve ins Unendliche oder bildet einen endlichen Zug. Dies richtet sich danach, ob $b \gtreqless a$ ist. In rechtwinkligen Koordinaten lautet die Kurvengleichung:

$$\underline{(x^2 + y^2)^2 (a^2 y^2 - b^2 x^2)^2 - \varepsilon^2 b^2 y^2 (a^2 y^2 - b^2 x^2)^2}$$

$$\underline{- 2\,a\,x\,(x^2 + y^2)(a^2 y^2 - b^2 y^2) \cdot \left\{\varepsilon (a^2 y^2 - b^2 x^2) - 2\,b^2 (x^2 + y^2)\right\}}$$

$$\underline{- 4\,a^2 b^2 x^2 (x^2 + y^2) \cdot \left\{\varepsilon (a^2 y^2 - b^2 x^2) - b^2 (x^2 + y^2)\right\} = 0.}$$

Die Ordnung der Kurve ergibt sich als acht. Hier wollen wir nur den Fall der allgemeinen Hyperbel behandeln, wobei ε auf die

Werte ± 1 beschränkt wird, weil die gleichseitige Hyperbel keinen einfacheren Fall darstellt als die allgemeine. — Die unendlich fernen Punkte sind dieselben, wie bei der Ellipsenkurve, nur die Asymptoten weichen etwas ab. Die imaginären Kreispunkte sind auch hier Doppelpunkte mit denselben Tangenten: $y = ix - \frac{i\varepsilon}{2}(a \pm e)$ und $y = -ix + \frac{i\varepsilon}{2}(a \pm e)$. Die anderen unendlich fernen Punkte haben die Asymptoten: $y = \frac{b}{a}x - b$; $y = -\frac{b}{a}x + b$. Es sind also stets reelle Kurvenpunkte mit den Hyperbelasymptoten als reellen Tangenten. Jede von diesen Tangenten ist doppelt zu zählen, die Punkte sind daher, wie bei der Ellipsenkurve, Selbstberührungspunkte. Ist $\varepsilon = +1$, so liegen beide Zweige dieses Berührungsknoten auf einer Seite der Tangente, während für $\varepsilon = -1$ ein Zweig links, der andere rechts der Asymptote liegt. Solange $b < a$ ist, geht die Kurve mit ihrem reellen Zuge ins Unendliche, während für $b > a$ der unendlich ferne Selbstberührungspunkt zwar reell bleibt, aber isoliert liegt[1]). Ist $b < a$, so endet die Kurve noch nicht im Unendlichen, sondern kehrt auf der negativen Seite der x-Achse ins Endliche zurück, wo sie sich dann schliesst oder noch im Koordinatenanfang einen Knotenpunkt besitzt und Schleifen bildet. Das Nähere darüber wird noch erörtert werden. Der Koordinatenanfang ist auch hier ein 6-facher Kurvenpunkt. Die Richtungen seiner Tangenten folgen aus der Gleichung:

$$a^4 \varepsilon^2 \mu^6 - 2a^2 \mu^4 \cdot \left\{(\varepsilon^2 - 2) b^2 + 2\varepsilon a^2\right\}$$

$$+ \mu^2 \left\{b^2 (\varepsilon^2 b^2 + 8a^2) - 4a^2 \varepsilon (a^2 - b^2)\right\} + 4a^2 b^2 (1 + \varepsilon) = 0.$$

Ist $\varepsilon = +1$, so hat man:

$$a^4 \mu^6 - 2a^2 \mu^4 (2a^2 - b^2) + \mu^2 (b^4 + 12a^2 b^2 - 4a^4) + 8a^2 b^2 = 0.$$

Ob es im Koordinatenanfang reelle Tangenten gibt, lässt sich entscheiden durch Betrachtung der Vorzeichen der einzelnen Glieder und mit Hilfe der reduzierten kubischen Gleichung. Solange $b > a \cdot \sqrt{2} > 1{,}414\,a$ ist, kann es kein positives μ^2, kein reelles μ geben, das die Gleichung erfüllt. Für $b < 1{,}414\,a$

[1]) Wieleitner: „Theorie der ebenen algebraischen Kurven" p. 280. Sauerbeck: „Einleitung in die Theorie der höheren algebraischen Kurven" p 56.

bekommt man aber zwei Zeichenwechsel, es wären also zwei positive μ^2 möglich. Negative μ^2 kann es bei $b > 1{,}414\,a$ drei oder eins geben, während für $b < 1{,}414\,a$ nur ein negatives reelles μ^2 existieren kann. Fasst man in der Gleichung der vorigen Seite μ^2 als Unbekannte auf, so kann man die nunmehr kubische Gleichung reduzieren und bekommt:

$$u^3 - u \cdot \frac{b^4 - 52\,a^2\,b^2 + 28\,a^4}{3\,a^4}$$

$$- \frac{2}{27\,a^6}\,(136\,a^6 - 456\,a^4\,b^2 + 138\,a^2\,b^4 + b^6) = 0.$$

Das Kriterium dafür, ob diese Gleichung drei reelle oder eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln hat, lässt sich in die Form bringen:

$$b^{10} + 23\,b^8\,a^2 + 55\,b^6\,a^4 + 37\,b^4\,a^6 - 4\,b^2\,a^8 - 8\,a^{10} \gtrless 0.$$

Für positive $\frac{b}{a}$ gibt es nur eine Stelle, bei der dieser Ausdruck zu Null wird, diese ist $\frac{b}{a} = 0{,}639$. Ist $b < 0{,}639\,a$, so wird die linke Seite kleiner als Null, es gibt 3 reelle Wurzeln der kubischen Gleichung, ist $b > 0{,}639\,a$, so gilt das obere Zeichen der Ungleichung, es gibt nur eine reelle Wurzel. Fasst man dieses Ergebnis mit dem früheren zusammen, so bekommt man folgendes Verhalten im Koordinatenanfang: Ist $b > 1{,}414\,a$, so gibt es nur eine reelle negative Wurzel μ^2, es kann also keine reelle Tangente in O existieren. Liegt b zwischen $1{,}414\,a$ und $0{,}639\,a$, so gilt dasselbe, wie vorher, das eine negative μ^2 kann keine reellen Tangenten liefern. Ist $b < 0{,}639\,a$, so besitzt die kubische Gleichung 3 reelle Wurzeln, eine ist negativ, zwei müssen daher positiv sein, es muss 4 reelle Tangenten in O geben. Für alle Kurven, bei denen $b < 0{,}639\,a$ ist, ergeben sich daher Schleifen, die um so grösser werden, je kleiner b im Verhältnis zu a ist (Tafel 4, Figur 1). Ist $\varepsilon = -1$, bildet man also die Differenzen der Kurvenradien, so erhält man für die μ folgende Gleichung:

$$\mu^2 \cdot \left\{a^4\,\mu^4 + 2\,a^2\,(2\,a^2 + b^2)\,\mu^2 + (2\,a^2 + b^2)^2\right\} = 0.$$

Diese hat 3 Doppelwurzeln, eine reelle und zwei imaginäre. Die Kurve besitzt also 3 Rückkehrpunkte in O, von denen einer reell ist. Dieser hat die x-Achse zur Tangente, während die beiden anderen $y = \pm \frac{i}{a}\sqrt{2a^2 + b^2} \cdot x$ lauten.

Die Plückerschen Zahlen sind für $\varepsilon = +1$ und für $\varepsilon = -1$ dieselben, wie sie bei den Kurven der Ellipse auf Seite 34 gefunden wurden. Man hat für $\varepsilon = +1$: $n = 8$; $d = 21$; $r = 0$; $m = 14$; $w = 18$; $t = 60$; $p = 0$; für $\varepsilon = -1$: $n = 8$; $d = 18$; $r = 3$; $m = 11$; $w = 12$; $t = 33$; $p = 0$. Da $p = 0$ ist, so müssen sich auch diese Kurven rational durch einen Parameter darstellen lassen. Man kann die Kurvengleichung in folgende Form bringen:

$$x = \frac{a b^2 \varepsilon (1+\tau)^2 \cdot (1+\tau^2)}{a^2 (1-\tau^2)^2 + b^2 (1+\tau^2)^2} - \frac{2 a b^4 (1+\tau^2)^2}{a^4 (1-\tau^2)^2 - b^4 (1+\tau^2)^2}.$$

$$y = \frac{a^2 b \varepsilon (1+\tau)^2 (1-\tau^2)}{a^2 (1-\tau^2)^2 + b^2 (1+\tau^2)^2} - \frac{2 a^2 b^3 (1-\tau^4)}{a^4 (1-\tau^2)^2 - b^4 (1+\tau^2)^2}.$$

Es bleibt jetzt noch übrig, die Eigenschaften der **Schnittpunkte der Kurven mit den Achsen** zu ermitteln. Die y-Achse hat die imaginären Schnittpunkte $y = \pm i \varepsilon b$. $y = 0$ gibt dieselben Punkte, wie bei der Ellipsenkurve: $x = 2a$ und $x = 2a(1+\varepsilon)$. Auch hier sind die Tangenten senkrecht zur x-Achse. Für weitere Schnittpunkte der Geraden $x = 2a$ mit der Kurve erhält man die Ordinaten aus folgender Gleichung:

$$y^6 + y^4 \left\{4a^2(2-\varepsilon) + b^2 \varepsilon^2\right\} + y^2 \cdot \left\{16 a^4 (1-\varepsilon) + 16 \varepsilon a^2 b^2 - 8 \varepsilon^2 b^4\right\} + 16 \left\{4 \varepsilon a^4 b^2 + \varepsilon^2 b^6\right\} = 0.$$

Ist $\varepsilon = +1$, so geht diese Gleichung über in:

$$y^6 + (4a^2 + b^2) y^4 + 8 b^2 (2a^2 - b^2) \cdot y^2 + 16 b^2 (4a^4 + b^4) = 0.$$

Für $b < a \cdot \sqrt{2}$ gibt es sicher keine weiteren Schnittpunkte mit der Kurve, dagegen könnten für $b > a\sqrt{2}$ zwei positive reelle y^2 auftreten. Reduziert man die kubische Gleichung und bildet das Kriterium für imaginäre und reelle Wurzeln, so bekommt man stets p negativ und $\left(\frac{q}{2}\right)^2 > \left(\frac{p}{3}\right)^3$. Es kann daher nur eine reelle Wurzel y^2 geben und diese muss negativ sein. Bei $\varepsilon = +1$ gibt es also ausser dem Berührungspunkt keinen Schnittpunkt der Geraden $x = 2a$ mit der Kurve. Ist $\varepsilon = -1$, so lautet die Gleichung der y:

$$y^6 + (12a^2 + b^2)\, y^4 + (32a^4 - 16a^2b^2 - 8b^4)\, y^2 + 16b^2(b^4 - 4a^4) = 0.$$

Für $b < a \cdot \sqrt{2} < 1{,}414\,a$ ergibt sich ein positives y^2, also zwei reelle Schnittpunkte der Geraden $x = 2a$ mit der Kurve und zwar mit dem Teil, der in O die Spitze hat. Für $b > a \cdot \sqrt{2}$ kann es zwei positive y^2 und damit vier reelle Schnittpunkte der Geraden $x = 2a$ mit der Kurve geben oder es gibt überhaupt keinen Schnittpunkt. Da ein reelles negatives y^2 stets da sein muss, so kommt es darauf an, ob die kubische Gleichung der y^2 drei reelle Wurzeln oder eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln hat. Der Teil der Kurve, der in O die Spitze hat, hat sich ja für $b > a$ mit dem anderen Teil, der durch den Punkt $(2a, 0)$ geht, zu einem im Endlichen geschlossenen Zuge verbunden (Tafel 5, Figur 4 und 5). Die Kurve besitzt zwei spitzenartige Teile, die mit wachsendem b kleiner werden. Nachdem für $b > a \cdot \sqrt{2}$ die Krümmung der Kurve im Punkte $(2a, 0)$, die bis dahin konvex war, konkav geworden ist und zwei weitere Schnittpunkte der Geraden $x = 2a$ hinzukommen, zieht sich der spitzenartige Teil so weit zusammen, dass überhaupt keine reellen Schnitte mit der Geraden $x = 2a$ mehr auftreten und verschwindet endlich ganz, so dass ein birnenförmiges Gebilde übrig bleibt (Tafel 5, Figur 5).

Der andere Schnittpunkt auf der x-Achse: $x = 2a\,(1 + \varepsilon)$, fällt für $\varepsilon = -1$ mit in den Koordinatenanfang und verursacht die Spitze, während er für $\varepsilon = +1$ an die Stelle $x = 4a$ rückt. Die Tangente in diesem Punkte hat mit der Kurve, solange $b < a \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2} - 1}$ ist, noch zwei Punkte gemeinsam. Diese liegen auf dem Teil der Kurve, der durch $(2a, 0)$ geht und sich ziemlich dicht an die Hyperbel anschmiegt. Ist $b > a \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2} - 1}$, so kann es nach der kubischen Gleichung für die y^2 entweder vier oder keine Schnittpunkte der Geraden $x = 4a$ mit der Kurve geben. Von $b = a \cdot \sqrt{2\sqrt{2} - 1}$ an wird φ im Punkte $(4a, 0)$ konkav gegen den Koordinatenanfang, während sie bis dahin konvex war. Auch hier verschwinden die erst bis ins Unendliche gehenden Spitzen, die sich für $b > a$ abgerundet und im Endlichen geschlossen haben, allmählich ganz, die Kurve nimmt die Gestalt eines schiefen Ovals an (Tafel 4, Figuren 3, 4 und 5).

Zum Schluss dieses Abschnittes soll noch gezeigt werden, dass alle bisher behandelten Kurven miteinander in engem Zusammenhang stehen. Die von der Hyperbel abgeleitete Kurve ging ja aus der Ellipsenkurve von Seite 29 durch Vertauschen von $+b^2$ mit $-b^2$ hervor. Hier fragt es sich noch, wie man die von der Parabel hergeleitete Kurve der Seite 8 aus den späteren Kurvengleichungen erhält. Wie die Parabel aus der Ellipse oder Hyperbel durch Grenzübergang entsteht, indem man einen Scheitel festhält, während der andere ins Unendliche rückt, wobei aber der Ausdruck: $+\frac{b^2}{a}$ einen endlichen Wert behält, so ergibt sich auch die Parabelkurve aus der Ellipsen- oder Hyperbelkurve, indem man die Achse a unendlich werden lässt, dabei aber $+\frac{b^2}{a}$ gleich $\pm p$ setzt. Das obere Zeichen gilt, wenn man von der Ellipsenkurve ausgeht, das untere bei der Hyperbelkurve. Die Gleichung der Ellipsen- bezüglich Hyperbelkurve lautete:

$$(x^2 + y^2)^2 (a^2 y^2 \pm b^2 x^2)^2 \mp b^2 \varepsilon^2 y^2 (a^2 y^2 \pm b^2 x^2)^2$$

$$- 2ax(x^2 + y^2)(a^2 y^2 \pm b^2 x^2) \cdot \{\varepsilon (a^2 y^2 \pm b^2 x^2) \pm 2 b^2 (x^2 + y^2)\}$$

$$\pm 4 a^2 b^2 x^2 (x^2 + y^2) \cdot \{\varepsilon (a^2 y^2 \pm b^2 x^2) \pm b^2 (x^2 + y^2)\} = 0.$$

Dividiert man die ganze Gleichung durch a^5, so bekommt man:

$$\frac{(x^2+y^2)^2}{a}\left(y^2 \pm \frac{b^2}{a^2}x^2\right)^2 \mp \frac{b^2}{a}\cdot \varepsilon^2 y^2 \left(y^2 \pm \frac{b^2}{a^2}x^2\right)^2$$

$$-2x(x^2+y^2)\left(y^2 \pm \frac{b^2}{a^2}x^2\right)\cdot\left\{\varepsilon\left(y^2 \pm \frac{b^2}{a^2}x^2\right) \pm 2\frac{b^2}{a^2}(x^2+y^2)\right\}$$

$$\pm 4\frac{b^2}{a}x^2(x^2+y^2)\cdot\left\{\varepsilon\left(y^2 \pm \frac{b^2}{a^2}x^2\right) \pm \frac{b^2}{a^2}(x^2+y^2)\right\} = 0.$$

Jetzt setzt man $a = \infty$ und $\pm\frac{b^2}{a} = p$, dann erhält man folgende Gleichung:

$$-2x\varepsilon y^4(x^2+y^2) - p\varepsilon^2 y^6 + 4\varepsilon p x^2 y^2 (x^2+y^2) = 0 \text{ oder}$$

$$-\varepsilon\cdot y^2\cdot\left\{2xy^2(x^2+y^2) - 4px^2(x^2+y^2) + \varepsilon p y^4\right\} = 0.$$

Bis auf das Vorzeichen des letzten Gliedes stimmt die Klammer mit der auf Seite 8 von der Parabel abgeleiteten Gleichung überein. Das verschiedene Vorzeichen des ε rührt daher, dass auf Seite 8 der absolute Wert des Cissoidenradius genommen wurde, während hier beim Grenzübergang dieser Radius mit dem negativen Zeichen in die Rechnung kommt. Die Parabelkurven gehen also aus der obenstehenden Gleichung durch Vertauschen von $+\varepsilon$ mit $-\varepsilon$ hervor. Auf die ganze Kurvenschar ist das natürlich ohne Einfluss, es wird nur die Reihenfolge vertauscht, jedem Wert von ε entspricht aber hier wie dort eine eindeutige Kurve.

2. Abschnitt.

Kurven, bei deren Ableitung ein Mittelpunktskegelschnitt und die Fusspunktkurve seines Mittelpunktes zugrunde liegen.

§ 4. Fall der Ellipse.

Bisher waren die Scheitel der Kegelschnitte als Koordinatenanfang gewählt worden und in Bezug auf diese die Fusspunktkurven konstruiert. Jetzt nimmt man den Mittelpunkt sowohl als Koordinatenanfang, als auch als Ausgangspunkt der Lote auf die Tangenten und der Strahlen der zu konstruierenden Kurven. Dabei können natürlich nur die Mittelpunktskegelschnitte, Ellipse und Hyperbel, in Betracht kommen. In diesem Paragraphen dient als Ausgangspunkt die Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Der Radiusvektor vom Mittelpunkt aus hat die Grösse: $\rho_E = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}$.

Die Fusspunktkurve der Ellipse bezüglich des Mittelpunktes besitzt in rechtwinkligen Koordinaten die Gleichung:

$$(x^2+y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2.$$

Führt man Polarkoordinaten ein, so wird: $\rho_F = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}$. Der Radiusvektor der neuen Kurve soll nun sein: $\rho = \rho_E + \varepsilon \cdot \rho_F$, also lautet die Gleichung in Polarkoordinaten:

$$\rho = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} + \varepsilon \cdot \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}$$

$$= \frac{a \cdot b + \varepsilon \cdot \sqrt{e^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + a^2 b^2}}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}$$

Führt man rechtwinklige Koordinaten ein, so bekommt man nach zweimaligem Quadrieren folgende Gleichung:

$$(x^2+y^2)^4(a^2y^2+b^2x^2)^2+(1-2\varepsilon^2+\varepsilon^4)a^4b^4(x^2+y^2)^4$$

$$-2(x^2+y^2)^2(a^2y^2+b^2x^2)\cdot\{a^2b^2(1+\varepsilon^2)(x^2+y^2)^2+\varepsilon^2e^4x^2y^2\}$$

$$+2\varepsilon^2(\varepsilon^2-1)\cdot a^2b^2e^4x^2y^2(x^2+y^2)^2+\varepsilon^4e^8x^4y^4=0.$$

Diese Gleichung ist vom zwölften Grade in Bezug auf x und y, und zwar kommen diese Grössen nur in gerader Potenz vor, die Kurve ist daher symmetrisch zu beiden Achsen, wie es ja auch die Grundkurven, Ellipse und Fusspunktkurve sind. Für den Fall $\varepsilon^2=1$, also $\varepsilon=\pm1$ vereinfacht sich die Kurvengleichung dadurch, dass zwei Glieder wegfallen. Es bleibt dann:

$$(x^2+y^2)^4(a^2y^2+b^2x^2)^2-2(x^2+y^2)^2(a^2y^2+b^2x^2)$$

$$\cdot\{2a^2b^2(x^2+y^2)^2+e^4x^2y^2\}+e^8x^4y^4=0.$$

Die Glieder höchster Potenz geben die unendlich fernen Kurvenpunkte. Man bekommt hier die imaginären Kreispunkte und die Punkte auf der unendlich fernen Geraden in der Richtung $\pm\frac{b}{a}\cdot i$. Die Asymptotengleichungen lauten:

$$y=\pm ix+\frac{e}{2};\quad y=\pm ix-\frac{e}{2};\quad y=\pm\frac{b}{a}ix.$$

Jede dieser Asymptoten ist doppelt zu zählen. Die imaginären Kreispunkte sind vierfache Punkte mit zweimal zwei zusammenfallenden Tangenten. Jeder dieser Punkte ist 4 Doppelpunkten und 2 Spitzen äquivalent, wie Seite 26 für einen Punkt mit denselben Eigenschaften festgestellt war. Die anderen Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden haben je ein zusammenfallendes Tangentenpaar. Analog den Punkten der Kurve auf Seite 30 hat man es mit imaginären Selbstberührungspunkten in Richtung der Asymptoten zu tun, von denen jeder 2 Doppelpunkten äquivalent ist. Die imaginären Kurvenpunkte repräsentieren also im ganzen 12 Doppelpunkte und 4 Rückkehrpunkte.

Die Form der Kurvengleichung

$$\rho=\frac{a\cdot b+\varepsilon\cdot\sqrt{e^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi+a^2b^2}}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}},$$

wo $\varepsilon = \pm$ ist, zeigt, dass die Kurve aus zwei völlig getrennt liegenden Teilen besteht, die sich im Endlichen schliessen, denn für $\varphi = 2\pi$ nimmt ja ρ denselben Wert an, wie für $\varphi = 0$. $\varepsilon = +1$ gibt den äusseren Kurventeil, $\varepsilon = -1$ den inneren.

Das Verhalten im Koordinatenanfang zeigt das Glied niedrigster Potenz der Kurvengleichung in rechtwinkligen Koordinaten. O ist ein achtfacher Punkt, dessen Tangenten aus $\mu^4 = 0$ als $y = 0$ (vierfach zu zählen) und $x = 0$ (auch vierfach) folgen. Je vier der acht Tangenten von O fallen also in die Koordinatenachsen. Nach der Formel für die Multiplizität eines k-fachen Punktes als Schnittpunkt der Grundkurve und der Hesseschen Kurve erhält man hier:

$$3\,k\,(k-1) + s \cdot (2\,i - 2) = 3 \cdot 8 \cdot 7 + 2 \cdot (8 - 2) = 180.$$

$6\,d + 8\,r$ ist also 180. Ferner ist $d + r = \frac{1}{2}\,k\,(k-1) = 28$. Daraus folgt $d = 22$; $r = 6$. Der Koordinatenanfang liefert 22 Doppelpunkte und 6 Rückkehrpunkte. Im ganzen besitzt daher die Kurve 34 Doppelpunkte und 10 Rückkehrpunkte. Da die Maximalzahl der Doppelpunkte (einschliesslich Rückkehrpunkte) bei einer Kurve zwölfter Ordnung $\dfrac{(n-1)\,(n-2)}{2} = 55$ ist, so hat die vorliegende Kurve das Geschlecht 11, an eine Parameterdarstellung ist also nicht zu denken. Die anderen charakteristischen Zahlen ergeben sich aus den Plückerschen Formeln. Es ist: $m = 34$; $w = 76$; $t = 441$. Unter den Wendepunkten und Doppeltangenten sind natürlich sehr viele imaginär. Später werden wir sehen, dass die Kurve höchstens 4 reelle Wendepunkte besitzt.

Der innere Teil der Kurve besteht aus vier Schleifen, je eine in einem Quadranten. Die gemeinsamen Tangenten sind die Koordinatenachsen. ρ wird von $\varphi = 0$ an wachsen bis zu einem äussersten Werte, dem ein bestimmtes φ entspricht. Von da an muss es wieder abnehmen, denn für $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ ist ρ wieder Null. Der Winkel des grössten Wertes von ρ ergibt sich aus $\dfrac{d\rho}{d\varphi} = 0$. Die vier Schleifen besitzen auch Punkte mit horizontaler und mit vertikaler Tangente. Der Symmetrie halber müssen diese Tangenten Doppeltangenten der Kurve sein. Dieser Kurventeil liegt also stets innerhalb eines Rechtecks, dessen Mitte im Koordinatenanfang liegt und dessen Seiten parallel zu den Achsen sind und durch diese halbiert werden. Die Länge dieser Seiten, die natürlich von der Grösse der Ellipsenachsen abhängen, müsste man aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ in Verbindung mit der Kurvengleichung ermitteln. Praktisch ist dies nicht durchführbar, weil man aus einer Gleichung 5^{ten} und einer 6^{ten} Grades, die beide sehr lange Koeffizienten besitzen, eine Unbekannte eliminieren müsste.

Der äussere Kurventeil schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten: $(x = \pm 2a, y = 0)$ und $(x = 0, y = \pm 2b)$. Der erste Differentialquotient besitzt im Zähler den Faktor x, im Nenner den Faktor y. Die anderen Faktoren im Zähler und Nenner bleiben für $x = 0$ und $y = 0$ endlich. Setzt man also die Koordinaten der Achsenschnittpunkte ein, so sieht man, dass die Tangenten den Achsen parallel sind. Es kann allgemein als Eigenschaft aller Kurven ausgesprochen werden, die symmetrisch zu einer der beiden Achsen sind, dass die Symmetrieachse von einfachen Kurvenzweigen, also von Zweigen, die mit der Achse einen gewöhnlichen Schnittpunkt haben, stets senkrecht durchschnitten wird. Nur wenn auf der Symmetrieachse ein Doppelpunkt oder Rückkehrpunkt liegt, kann eine andere Tangentenrichtung auftreten. Diese muss dann aber noch eine symmetrische besitzen.

Da die vorliegenden Kurven in so naher Beziehung zur Fusspunktkurve der Ellipse, bezogen auf den Mittelpunkt, stehen, liegt es nahe, dass sie sich in den Achsenschnittpunkten auch ähnlich verhalten, wie diese. Die Scheitel der Ellipsenfusspunktskurve bezüglich des Mittelpunkts haben folgende Eigenschaft: Ist $a > b$, so ist der Scheitel $(\pm a, 0)$ ein äusserster Punkt, jenseit der Kurventangente liegt kein reeller Kurvenpunkt mehr. Dagegen hängt die Kurvenkrümmung im Punkte $(0, \pm b)$ von der Beziehung $a^2 \gtreqless 2b^2$ ab. Ist $a < b \cdot \sqrt{2}$, so ist auch dieser Scheitel ein äusserster Punkt, das ist nicht mehr der Fall für $a > b \cdot \sqrt{2}$. Dann schneidet die Kurventangente parallel der x-Achse die Kurve noch in zwei reellen Punkten $(\pm \sqrt{a^2 - 2b^2}, 0)$. Analog ist die Betrachtung für $a < b$, man braucht nur a mit b vertauschen.

Jetzt betrachten wir wieder unsere Kurve mit der Gleichung von Seite 48. Setzt man in diese $y = 2b$ ein, so erhält man eine Gleichung 6^{ten} Grades für x^2, die sich aber auf den fünften reduziert. Es fehlt nämlich das Absolutglied, weil $y = 2b$ Kurventangente in einem Punkte der y-Achse ist. Die Grenzlage zwischen dem Fall, dass kein weiterer reeller Schnittpunkt der Tangente mit der Kurve da ist und dem, dass solche Schnitte auftreten, ist jedenfalls die, dass die beiden reellen Schnittpunkte mit in den Berührungspunkt fallen. Die Bedingung dafür, dass dies eintritt, ist, wie man leicht einsieht, dass das Absolutglied, hier also der Faktor von x^2 in der ursprünglichen Gleichung 6^{ten} Grades, Null wird. Das gibt: $a^4 - 2a^2b^2 - b^4 = 0$ oder $a^2 = b^2(1 + \sqrt{2})$. Ist $a^2 < b^2(1 + \sqrt{2})$, so gibt es keine weiteren Schnittpunkte der Tangente im Punkte $(0, 2b)$ mit der Kurve (Tafel 6, Figur 3 und 4). Wird $a^2 > b^2(1 + \sqrt{2})$, so erhält man noch zwei reelle Schnitte. Der Punkt $(0, +2b)$ ist dann ein Minimum der Kurve, links und rechts der y-Achse muss es noch je ein Maximum geben. (Tafel 6, Fig. 1 u. 2). Zwischen diesen beiden Punkten und dem Minimum im Scheitel müssen auf jeder Seite der y-Achse Wendepunkte liegen. Dasselbe gilt für den Kurventeil unterhalb der x-Achse, nur dass dort Maximum und Minimum vertauscht ist. Ist $a^2 > b^2(1 + \sqrt{2})$, so besitzt die Kurve 4 reelle Wendepunkte.

Ist $a < b$, so vertauschen nur die Scheitel ihre Rollen, der Punkt $(0, 2b)$ hat dann nie eine Einsenkung, während die Kurve im Punkte $(2a, 0)$ auch konvex gegen den Koordinatenanfang gekrümmt sein kann.

---

§ 5. Fall der Hyperbel.

Ganz analog der Betrachtung im vorigen Paragraphen gestaltet sich die Behandlung dieser Kurven, denen als Grundlage die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ und deren Fusspunktkurve in Bezug auf den Mittelpunkt: $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2$ dienen. Die Fusspunktkurve ist lemniskatenartig und geht für $a = b$ in die eigentliche Lemniskate über. In Polarkoordinaten ist

$$\rho_H = \frac{a\,b}{\sqrt{b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi}} \text{ und } \rho_F = \sqrt{a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi},$$

so dass für den Radiusvektor der gesuchten Kurve folgt:

$$\rho = \frac{a\cdot b}{\sqrt{b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi}} + \varepsilon\cdot\sqrt{a^2\cos^2\varphi - b^2\sin^2\varphi}.$$

In rechtwinkligen Koordinaten lautet die Kurvengleichung:

$$\begin{gathered}(x^2+y^2)^4(b^2x^2-a^2y^2)^2 + (1-2\varepsilon^2+\varepsilon^4)a^4b^4(x^2+y^2)^4\\ -2(x^2+y^2)^2(b^2x^2-a^2y^2)\cdot\left\{(1+\varepsilon^2)a^2b^2(x^2+y^2)^2-\varepsilon^2e^4x^2y^2\right\}\\ -2\varepsilon^2(\varepsilon^2-1)a^2b^2e^4x^2y^2(x^2+y^2)^2+\varepsilon^4e^8x^4y^4=0.\end{gathered}$$

Betrachtet man wieder nur die Fälle $\varepsilon = \pm 1$, so vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$\begin{gathered}\underline{(x^2+y^2)^4(b^2x^2-a^2y^2)^2-2(x^2+y^2)^2(b^2x^2-a^2y^2)}\\ \underline{\left\{2a^2b^2(x^2+y^2)^2-e^4x^2y^0\right\}+e^8x^4y^4=0.}\end{gathered}$$

D i e u n e n d l i c h f e r n e n P u n k t e sind identisch mit denen der Kurven des vorigen Paragraphen. Auch die Asymptoten nach den imaginären Kreispunkten stimmen überein, nur die doppelt zu zählenden Asymptoten nach den anderen unendlich fernen Punkten sind hier reell, während sie früher imaginär waren. Sie haben die Gleichung: $y = \pm \frac{b}{a}x$, es sind also die Hyperbelasymptoten. Der Charakter der Punkte ist derselbe geblieben, man hat es mit Selbstberührungspunkten zu tun. Sie sind stets reell, doch je nach der Grösse der Achsen sind es wirkliche Kurvenpunkte oder isolierte Punkte. Ist $b < a$, so bekommt man mit wachsendem Winkel φ zuerst die Hyperbelasymptote und dann die Doppelpunktstangente der Fusspunktkurve, die den Richtungsfaktor $\frac{a}{b}$ hat. Für Winkel, die grösser sind, als der dieser Tangente, gibt es keine reellen Kurvenpunkte mehr. Ist $b > a$, so ist $\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}$ kleiner als $\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$, die Kurve verläuft dann ganz im Endlichen und verhält sich ähnlich, wie die auch von der Hyperbel abgeleiteten Kurven der Seiten 39—46.

D e r K o o r d i n a t e n a n f a n g, der auch hier achtfacher Punkt mit denselben Tangenten wie bei der Ellipsenkurve ist, unterscheidet sich von diesem Falle nur dadurch, dass in Richtung der y-Achse keine reellen Kurvenzweige auftreten, während in Richtung der x-Achse eine reelle Doppelspitze vorhanden ist, die die x-Achse als vierfache Tangente besitzt. Die Multiplizität als Schnittpunkt von φ und $H(\varphi)$ und damit die Zahl der einfachen Singularitäten, die den Punkt ersetzen, ist nicht geändert. Deshalb sind auch die Plückerschen Zahlen dieselben geblieben. Es ist:

$$n = 8;\ d = 34;\ r = 10;\ m = 34;\ w = 76;\ t = 441;\ p = 11.$$

Die y-Achse schneidet unsere Kurve ausser im Koordinatenanfang in keinem reellen Punkte. Als Schnitt der x-Achse mit der Kurve ergibt sich $(x = \pm 2a, y = 0)$. Die Tangenten in den beiden zum Koordinatenanfang symmetrischen Punkten müssen senkrecht auf der x-Achse stehen. Die Gleichung für die Ordinaten der Schnittpunkte der Geraden $x = 2a$ mit der Kurve ist vom 6^ten^ Grad in y^2. Sie lautet:

$$y^{12} + y^{10}(16a^2 - 4b^2) + y^8(88a^4 - 80a^2b^2 - 8b^4)$$
$$+ 32y^6(6a^6 - 15a^4b^2 + b^6) + 16y^4(9a^8 - 60a^6b^2 + 354a^4b^4$$
$$+ 20a^2b^6 + b^8) + 512a^4b^2y^2(b^4 + 2a^2b^2 - a^4) = 0.$$

Die Koeffizienten der Gleichung sind so beschaffen, dass für $a > \sqrt{1 + \sqrt{2}} \cdot b$ oder $a > 1{,}554\, b$ ausser $y^2 = 0$ nur noch ein positives y^2 besteht. Die Tangente $x = 2a$ schneidet dann die Kurve nur in zwei reellen Punkten, die auf den Kurvenzweigen liegen, die in O die Spitze bilden (Tafel 7, Fig. 1). Ist $a < 1554\, b$, so wird die bis dahin gegen O konvexe Krümmung konkav, es treten auf jeder Seite zwei Wendepunkte auf, im ganzen also 4. Die Gerade $x = 2a$ wird dann von dem sie berührenden Kurvenzweige noch in zwei weiteren reellen Punkten geschnitten, ausser dem Berührungspunkt liegen also auf der Geraden $x = 2a$ vier reelle Kurvenpunkte, ebenso auf der Geraden $x = -2a$. Doch gibt es bei $b > a$ einen Grenzfall, von dem an sich die im Endlichen schliessende Kurve ganz auf einer Seite der Linie $x = 2a$ befindet, ausser dem Berührungspunkt also überhaupt keinen reellen Schnittpunkt mehr hat. Dann nimmt die Kurve die Gestalt zweier mit den Spitzen zusammenstossender birnenförmiger Gebilde an (Tafel 7, Figur 4).

III. Abschnitt.

Kurven, deren Radiusvektor mittlere Proportionale zwischen Strahlenabschnitten von bekannten Kurven ist.

Als Anhang sollen hier noch einige Betrachtungen gebracht werden, die zeigen, nach welcher Richtung hin die Methode der Konstruktion neuer Kurven aus bekannten Grundkurven weitergebildet werden kann. Rolle hatte in seiner Arbeit nur Differenzen von Kurvenradien gebildet, hier war die Addition zugrunde gelegt, nachdem ein Kurvenabschnitt mit einer beliebigen Zahl ε multipliziert war. Nun könnte man ja auch Produkte von Kurvenstrahlen nehmen, oder besser, um wieder lineare Gebilde zu erhalten, die mittlere Proportionale der Abschnitte der beiden gegebenen Kurven aufsuchen und diese vom Koordinatenanfang aus abtragen. Auf diese Weise bekommt man ziemlich einfache Kurven, wenn man von den Grundkurven ausgeht, die Rolle auf den letzten drei Seiten seiner Abhandlung erwähnt.

---

§ 6. Die Strahlenabschnitte sind der Radiusvektor der Ellipse, bezüglich Hyperbel vom Mittelpunkt aus und der Hauptkreisradius.

Um nicht viele Betrachtungen wiederholen zu müssen, soll der Fall der Ellipse und der der Hyperbel zusammen behandelt werden. Die gemeinsame Gleichung der beiden Mittelpunktskegelschnitte ist $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c} = 1$. Ist c positiv, so hat man die

Ellipse, c negativ gibt die Hyperbel. Die Achsen der Kegelschnitte sind a und $\sqrt{|c|}$. Der Radiusvektor vom Mittelpunkt aus hat die Länge: $\rho_K = \dfrac{a \cdot \sqrt{c}}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + c \cdot \cos^2 \varphi}}$. Der Radius des Hauptkreises ist a. ρ soll die mittlere Proportionale sein zwischen ρ_K und a, also wird $\underline{\rho^2 = \dfrac{a^2 \cdot \sqrt{c}}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + c \cdot \cos^2 \varphi}}}$. In rechtwinkligen Koordinaten lautet die Gleichung:

$$\underline{(x^2 + y^2)(a^2 y^2 + c \cdot x^2) = a^4 c}$$

Ist c positiv, so erhält man die von der Ellipse abgeleitete, ist c negativ, die von der Hyperbel abgeleitete Kurve. c kann also alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen.

Die unendlich fernen Punkte der Kurven sind die beiden imaginären Kreispunkte mit den Asymptoten $y = \pm i x$ und die zwei Punkte $\left(x_2 = \pm \dfrac{\sqrt{-c}}{a} \cdot x_1;\ x_3 = 0\right)$. Für positive c, im Falle der Ellipsenkurve, bekommt man also 4 imaginäre Asymptoten, während für negative c von diesen 4 Asymptoten 2 reell sind, nämlich die Hyperbelasymptoten $y = \pm \dfrac{b}{a} \cdot x$.

Der Koordinatenanfang ist kein Kurvenpunkt, die Gleichung besitzt ja ein absolutes Glied. Die Kurven liegen symmetrisch zu beiden Achsen, ihre Achsenschnittpunkte sind: $(y = 0;\ x = \pm a)$; $(y = 0;\ x = \pm i a)$; $\left(x = 0;\ y = \pm \sqrt{a\sqrt{c}}\right)$ $\left(x = 0;\ y = \pm \sqrt{-a \cdot \sqrt{c}}\right)$. Ist c positiv, so sind 2 Kurvenpunkte auf der x-Achse und 2 auf der y-Achse reell. Für negative c bekommt man dagegen nur 2 reelle Schnitte auf der x-Achse, auf der y-Achse liegen keine reellen Kurvenpunkte. Die Tangenten in den Achsenschnittpunkten müssen senkrecht auf den betreffenden Achsen stehen, was aus Symmetriegründen folgt und sich auch aus dem ersten Differentialquotienten ergibt.

Die Tangente $y = \sqrt{a \cdot \sqrt{c}}$ kann, wenn sie reell ist, die Kurve in keinem weiteren reellen Kurvenpunkt schneiden. Auch die Tangente $x = a$ gibt für positive c und für negative c,

$|c| < a^2$, keine reellen Schnitte, denn dann ist $y = \pm\sqrt{(a^2+c)}$ imaginär. Ist $|c| > a^2$, ist also die imaginäre Hyperbelachse grösser als die reelle, so gibt es noch 2 reelle Schnitte. Die Kurve, die für negatives c bis dahin konvex gegen den Koordinatenanfang war, wird nun konkav und muss zwischen Hyperbelscheitel und jedem weiteren Schnittpunkt mit der Scheiteltangente je einen Wendepunkt haben. (Tafel 8, Figur 4). Das wird sich noch aus dem Verhalten von $H(\varphi)$ ergeben. Die Gleichung der Hesseschen Kurve in homogenen Koordinaten lautet:

$$x_3^2\left\{2c(a^2+c)\cdot x^4+2a^2(a^2+c)y^4-(a^4-10a^2c+c^2)x^2y^2\right\}=0.$$

Die unendlich ferne Gerade ist also ein Bestandteil von $H(\varphi)$. Man könnte vermuten, dass die unendlich fernen Kurvenpunkte Wendepunkte sind. Doch muss ja $x_3 = 0$ zweimal genommen werden, die Punkte haben deshalb noch einen anderen Charakter, als gewöhnliche Wendepunkte. Setzt man in der homogenisierten Kurvengleichung: $(x_1^2+x_2^2)(a^2x_2^2+cx_1^2) - a^4cx_3^4 = 0$; $x_1 = \pm i x_2$ oder $x_1 = \pm\frac{a}{\sqrt{-c}}\cdot x_2$, so bekommt man $x_3^4 = 0$. In Richtung der Asymptoten gibt es also im Unendlichen jedesmal 4 aufeinander folgende Kurvenpunkte, die unendlich fernen Punkte sind Flachpunkte. Ein Flachpunkt mit vierfach berührender Tangente muss nun entstanden gedacht werden als Grenzfall einer Kurve mit zwei Wendepunkten[1]. Deshalb ist es natürlich, dass $H(\varphi)$ durch die unendlich fernen Punkte zweimal hindurchgeht. Ist c negativ, so werden 2 der unendlich fernen Flachpunkte reell, nämlich die in Richtung der Hyperbelasymptoten. Äusserlich sieht man hier das Vorhandensein einer höheren Berührung schon daran, dass die Kurve zwischen Hyperbel und Asymptote verläuft. Der andere Teil der Gleichung von $H(\varphi)$ stellt keine eigentliche Kurve 4^{ter} Ordnung dar, sondern zerfällt in 4 Gerade durch den Koordinatenanfang. Die Richtungsfaktoren dieser Geraden erhält man aus der Gleichung von $H(\varphi)$, wenn man $y = m\cdot x$ einsetzt. Für m bekommt man:

$$m = \pm\frac{1}{2a}\cdot\sqrt{\frac{a^4-10a^2c+c^2\pm(a^2+c)\sqrt{(a^2+c)^2-36a^2c}}{a^2+c}}.$$

[1]) Reuschle: „Praxis der Kurvendiskussion" p. 33.
Sauerbeck: „Einleitung in die anal. Geom. der algebr. Kurven", p. 29 u. 30.

Ist c positiv, so wird der Radikand der inneren Wurzel, der sich in $(a^2 + c + 6a\sqrt{c}) \cdot (a^2 + c - 6a\sqrt{c})$ zerlegen lässt, negativ, wenn a zwischen $(3 - 2\sqrt{2})\sqrt{c} = 0{,}172 \cdot \sqrt{c}$ und $(3 + 2\sqrt{2}) \cdot \sqrt{c} = 5{,}828 \cdot \sqrt{c}$ oder $\sqrt{c}$ zwischen 0,172 a und 5,828 a liegt, denn a und $\sqrt{c}$ sind für positive c vertauschbar. In diesem Falle gibt es sicher keine reellen Wendepunkte der Kurve. Nun kommt es aber noch auf das Vorzeichen des Ausdrucks: $a^4 - 10a^2c + c^2$ an. Dieser Ausdruck ist negativ, wenn $\sqrt{c} = b$ zwischen $\sqrt{5 - 2 \cdot \sqrt{6}} \cdot a = 0{,}316\,a$ und $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} \cdot a = 3{,}146\,a$ liegt. Für alle anderen Werte b ist er positiv. Das noch auszuschaltende Intervall fällt aber ganz in das erste. Für positive c, also bei den Ellipsenkurven, treten demnach 4 reelle Gerade durch O als $H(\varphi)$ und damit 8 reelle Wendepunkte der Kurve φ auf, wenn die kleine Achse b kleiner als 0,172 a oder grösser als 5,828 a ist (dann ist b natürlich grössere Achse). (Tafel 8, Figur 2).

Ist c negativ, so gibt es stets 2 reelle Gerade durch den Koordinatenanfang, gleichgültig, ob der Nenner positiv oder negativ ist, ob $a^2 \gtrless |c|$ ist. Man könnte daraus schliessen, dass die von der Hyperbel abgeleiteten Kurven stets vier reelle Wendepunkte haben. Doch ist noch zu beachten, dass die Kurve für negatives c nur innerhalb des Winkelraums der Hyperbelasymptoten verläuft, der von der x-Achse halbiert wird. Die Geraden durch O, deren Richtungsfaktoren also grösser sind als $\frac{b}{a}$, schneiden die Kurven in keinem reellen Punkte.

$m^2 \gtrless \frac{b^2}{a^2} \gtrless \frac{-c}{a^2}$ führt auf die Ungleichung:

$$a^4 - 6a^2c + 5c^2 \pm (a^2 - c) \cdot \sqrt{(a^2 + c)^2 - 36a^2c} \gtrless 0.$$

Ist $a^2 > |c|$, so gibt nur das $+$Zeichen vor der Wurzel eine reelle Gerade. Dann ist die linke Seite positiv, da ja c negativ sein soll. Es folgt $m^2 > \frac{b^2}{a^2}$, die Gerade durch O schneidet die Kurve nicht, es gibt keine reellen Wendepunkte, wenn $a > b$ ist. Für $a^2 < |c|$ gibt das $-$Zeichen vor der Wurzel die reellen Geraden. Dann kann die linke Seite sowohl positiv, als auch negativ sein. Die Entscheidung gibt die Ungleichung, die aus der vorigen entsteht, wenn man die Wurzel nach rechts bringt und quadriert. Diese lautet:

$$c^3 - a^2 c^2 - a^4 c + a^6 \gtreqless 0.$$

Ist $|c| > a^2$ oder $b > a$, so wird die linke Seite der Ungleichung negativ, also $m^2 < \frac{b^2}{a^2}$. Für $|c| < a^2$ und c negativ erhält man das schon vorher gefundene Resultat. Die Kurve, die von der Hyperbel abgeleitet ist, besitzt also keine reellen Wendepunkte, wenn $a > b$ ist, dagegen hat sie 4, in jedem Quadranten einen, wenn $a < b$ ist (Figur 3 und 4). Die Plückerschen Zahlen der Kurven sind: $n = 4$; $d = 0$; $r = 0$; $m = 12$; $w = 24$; $t = 56$; $p = 3$, gleichgültig, ob die Kurve von der Ellipse oder der Hyperbel abgeleitet ist. Die 24 Wendepunkte ergeben sich auch als Schnittpunkte von φ und $H(\varphi)$. Im Unendlichen hatte man $2 \cdot 4$ Punkte. Die 4 Geraden durch den Koordinatenanfang liefern mit der Kurve 4ter Ordnung $4 \cdot 4 = 16$ Schnittpunkte. Im ganzen hat man 24 gemeinsame Punkte von φ und $H(\varphi)$. Die unendlich fernen gemeinsamen Punkte sind gewöhnliche Flachpunkte.

---

§ 7. Die Strahlenabschnitte sind der Radiusvektor der Ellipse, bezüglich Hyperbel vom Brennpunkt aus und das Stück dieses Strahls zwischen den Koordinatenachsen.

An letzter Stelle erwähnt Rolle in seiner Arbeit Kurven, die folgendermassen entstehen: Man zieht die Brennstrahlen der Ellipse und Hyperbel, bringt diese zum Schnitt mit der y-Achse, die durch den Mittelpunkt der Kegelschnitte geht, und nimmt dann die Differenz zwischen Kegelschnittradius und dem Abschnitt vom Brennpunkt bis zur y-Achse als Radiusvektor der neuen Kurve. Hier soll nun, analog der Behandlung im vorigen Paragraphen, auf jedem Brennstrahl die mittlere Proportionale zwischen Kegelschnittabschnitt und dem Stück vom Brennpunkt bis zur y-Achse vom Brennpunkt aus aufgetragen werden. Die Länge des Brennstrahls des Kegelschnitts ist $\rho_K = \frac{c}{\pm a - e \cdot \cos\varphi}$. Ist c positiv, so hat man die Ellipse, dann gibt nur das + Zeichen vor dem a positive ρ. Ist dagegen der Kegelschnitt eine Hyperbel, also c negativ, dann können beide Vorzeichen des a positive ρ geben. Der Abschnitt auf dem Brennstrahl vom Brennpunkt bis zur y-Achse ist $\rho_A = \frac{e}{\cos\varphi}$. Bei dieser Ableitung ist der Brennpunkt mit den Koordinaten $(-e, 0)$ gewählt, man könnte natürlich auch den anderen nehmen. ρ soll nun mittlere Proportionale zwischen ρ_K und ρ_A sein, also lautet die Gleichung der gesuchten Kurve in Polarkoordinaten:

$$\underline{\rho^2 = \frac{c \cdot e}{\cos\varphi\,(\pm a - e\cos\varphi)}.}$$

Führt man rechtwinklige Koordinaten ein, so ergibt sich folgende Kurvengleichung:

$$\underline{c \cdot x^4 + a^2 x^2 y^2 - 2\,c\,e^2 x^2 - c^2 e^2 = 0.}$$

Diese Gleichung ist bezogen auf ein Koordinatensystem, dessen Anfang im Kegelschnittbrennpunkt liegt. Die Kurve ist symmetrisch zur x-Achse und zur neuen y-Achse, die durch F geht und der ursprünglichen y-Achse parallel ist. Die unendlich fernen Punkte der Kurven haben die Asymptoten: $y = \pm \frac{i \cdot \sqrt{c}}{a} \cdot x$ und $x = 0$, wovon die letzte doppelt zu zählen ist. Ist c positiv, so gibt es nur eine reelle Doppelasymptote $x = 0$. Wenn aber c negativ ist, so wird auch das andere Asymptotenpaar reell, alle unendlich fernen Punkte der Kurve sind reell. Der Punkt in Richtung der y-Achse, der diese als zweifache Tangente besitzt, muss notwendig wegen der Symmetrie der Kurve zu beiden Achsen ein Selbstberührungspunkt sein. Dies wird später durch das Verhalten der Hesseschen Kurve in diesem Punkte noch bestätigt.

Mit der y-Achse haben unsere Kurven ausser dem unendlich fernen Punkt keinen Punkt gemeinsam. Daraus kann man schliessen, dass in diesem 4 Schnittpunkte vereinigt sind, wie es beim Selbstberührungspunkt sein muss. Als Abscissen von Kurvenpunkten auf der x-Achse erhält man: $x = \pm\sqrt{e(e \pm a)}$. Im Fall der Ellipse ist $a > e$, dann gibt nur das $+$Zeichen reelle x, im Fall der Hyperbel, für $e > a$ sind beide Vorzeichen brauchbar, man bekommt 4 reelle Schnittpunkte mit der x-Achse. Wegen der Symmetrie der Kurven müssen die Tangenten in den Achsenschnittpunkten senkrecht auf der x-Achse stehen. Dass die Kurven keine Stelle besitzen können, in der die Tangente parallel der x-Achse ist, sieht man, wenn man aus $\frac{d\varphi}{dx} = 0$ und der Kurvengleichung y eliminiert. Man erhält: $x = \pm\sqrt{e}\cdot\sqrt{-c}$. Für positive c wird x ohne weiteres imaginär. Ist c negativ, gleich $-b^2$, so bekommt man zwei reelle x, $x = \pm\sqrt{e\cdot b}$. Die dazugehörigen y sind: $y = \pm\sqrt{-\frac{2b^2e}{a^2}(e-b)}$. Bei der Hyperbel ist nun aber $e > b$, also wird der Radikand stets negativ sein. Auch für negative c gibt es kein Maximum oder Minimum.

Die vertikalen Tangenten in den Kurvenpunkten auf der x-Achse haben keinen weiteren Punkt mit der Kurve gemeinsam, daher ist diese gegen O im Punkte $x = \sqrt{e(e+a)}$ stets konkav, dagegen im Punkte $x = \sqrt{e(e-a)}$ konvex.

Zur Bestimmung der Wendepunkte der Kurve soll die Gleichung der Hesseschen Kurve aufgestellt werden. $H(\varphi)$ hat die Gleichung:

$$x^2\cdot\{2cx^4 - a^2x^2y^2 - 3a^2cy^2 + 2c(e^2+3c)x^2 - 2c^2e^2\} = 0.$$

Die y-Achse ist also ein Bestandteil der Hesseschen Kurve. Die Klammer gibt eine eigentliche Kurve 4ter Ordnung. Die Asymptoten der $H(\varphi)$ sind: $x = \pm\sqrt{-3c}$ und $y = \pm\frac{\sqrt{2c}}{a}\cdot x$. Ist c positiv, hat man also den Fall der Ellipse, so sind nur die beiden letzten Asymptoten reell, es ist $y = \pm\frac{b\cdot\sqrt{2}}{a}\cdot x$. Im Fall der Hyperbel bekommt man als reelle Asymptoten: $x = \pm b\sqrt{3}$.

Die Hessesche Kurve schneidet die x-Achse im Punkte: $x = \pm\sqrt{\frac{-(a^2+2c)\pm a\sqrt{a^2+8c}}{2}}$. Ist c positiv, also gleich b^2 und $a > b$, so ist $a\cdot\sqrt{a^2+8c} > a^2+2c$, es gibt daher 2 reelle Wurzeln x, $H(\varphi)$ schneidet die x-Achse in 2 reellen Punkten. Für $a < b$ ist $a\cdot\sqrt{a^2+8c} < a^2+2c$, man bekommt keine reellen Schnittpunkte. Ist c negativ, gleich $-b^2$, so ist $a\cdot\sqrt{a^2+8c} < a^2+2c$. Die innere Wurzel wird imaginär, sobald $8b^2 > a^2$

oder $b > 0{,}353\,a$ ist. $(a^2 + 2c)$ ist positiv, wenn $b < \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2} < 0{,}707\,a$ wird. Liegt also b zwischen 0 und $0{,}353\,a$, so ist die innere Wurzel reell, $(a^2 + 2c)$ ist aber positiv. Da nun $(a^2 + 2c) > a\sqrt{a^2 + 8c}$ ist, so wird der Radikand negativ, x imaginär. Ist $b > 0{,}353\,a$, so wird die innere Wurzel und damit auch x imaginär. Die Hessesche Kurve für negative c schneidet also die x-Achse in keinem reellen Punkte.

Als Schnittpunkt von $H(\varphi)$ mit der y-Achse ergibt sich: $\left(x = 0,\ y = \pm \frac{1}{a}\sqrt{\frac{-2c\,(a^2 - c)}{3}}\right)$. Ist c positiv, gleich $+ b^2$, so ist der Schnittpunkt imaginär, wenn $a > b$ ist, dagegen reell für $a < b$ und zwar ist die Ordinate $y \pm \frac{b \cdot e}{a} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$. Für negative c, also für $c = - b^2$, gibt es stets reelle Kurvenpunkte auf der y-Achse mit den Ordinaten: $y = \pm \frac{b \cdot e}{a} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$. In den Achsenschnittpunkten stehen die Tangenten von $H(\varphi)$ senkrecht auf den betreffenden Achsen. Im Schnittpunkt mit der x-Achse ist die Hessesche Kurve konvex gegen den Koordinatenanfang, weil es keine weiteren Punkte der Kurve mit der vertikalen Tangente geben kann. 4 vertikale Tangenten sind vorhanden, die beiden imaginären Asymptoten $x = \pm\sqrt{-3c}$ und die beiden Tangenten in den Schnittpunkten mit der x-Achse. Mehr kann es für $c > 0$ nicht geben, wie man sich überzeugen kann, wenn man die Schnittpunkte von $\frac{dH(\varphi)}{dy} = 0$ und $H(\varphi) = 0$ bestimmt.

Kurvenpunkte mit horizontaler Tangente erhält man, wenn man aus $\frac{dH(\varphi)}{dx} = 0$ und $H(\varphi)$ das y eliminiert. Für die Abscissen solcher Punkte erhält man: $x^2 = -3c \pm 2e \cdot \sqrt{-c}$, abgesehen von $x = 0$, was ja schon früher gefunden wurde. Ist c positiv, so wird schon x^2 imaginär. Für negative c, die also gleich $-b^2$ sind, bekommt man: $x = \pm\sqrt{3b^2 \pm 2eb}$. Ist $3b > 2e$ oder $b > \frac{2}{5}a\sqrt{5} > 0{,}894\,a$, so hat man 4 reelle Werte von x. Da aber, wie wir sahen, die Hessesche Kurve zwischen den Asymptoten $x = \pm b \cdot \sqrt{3}$ verlaufen muss, so können nur die x reelle Kurvenpunkte geben, die kleiner sind als $b \cdot \sqrt{3}$. Das $+$ Zeichen unter der Wurzel gibt ein grösseres x, also wird nur das $-$ Zeichen zwei x liefern, denen tatsächlich Kurvenpunkte entsprechen. Für die Hyperbelkurve, das heisst für negative c, besitzt $H(\varphi)$ im Schnittpunkt mit der y-Achse dann eine Einsenkung, wenn $b > 0{,}894\,a$ ist. Die Krümmung, die bis dahin konvex gegen O war, wird nun konkav (Tafel 9, Figur 4). Ist $b < 0{,}894\,a$, so gibt das $+$ Zeichen kein reelles Maximum, weil das x grösser ist, als der Abschnitt der vertikalen Asymptote. Das $-$ Zeichen liefert nur imaginäre x, weil $3\,b^2 < 2\,e\,b$ ist. Für $b < 0{,}894\,a$ ist die $H(\varphi)$ im Schnittpunkt mit der y-Achse stets konvex gegen O.

Jetzt ist der Verlauf von $H(\varphi)$ schon ziemlich sicher festgestellt, doch um noch etwaige Zweifel zu zerstreuen, soll das Prinzip der Signierung auf die hauptsächlichsten Linien angewandt werden. Ist c positiv und $a > b$, so ist das Vorzeichen des Ausdrucks $H(\varphi)$ auf der ganzen y-Achse negativ, ebenso auf der x-Achse bis zum Schnitt mit der Kurve, von da an ist es positiv. Auf den Asymptoten hat man zunächst auch das Minuszeichen, dann wird $H(\varphi)$ Null für $y = \pm \frac{b^2}{a} \cdot \sqrt{2}$, also für $x = \pm b$. Die Hessesche Kurve schneidet daher ihre Asymptote und muss in jedem Quadranten einen Wendepunkt besitzen, damit sie sich derselben Linie asymptotisch nähern kann. Vom Schnittpunkt an wird $H(\varphi)$ auf der Asymptote positiv. Die Hessesche Kurve muss demnach die Gestalt einer Hyperbel haben, nur dass die 4 eben erwähnten Wendepunkte auftreten, unterscheidet sie von dieser. Der Schnittpunkt von $H(\varphi)$ mit der x-Achse hat nun von O eine geringere Entfernung als der Schnittpunkt von φ, es ist $\sqrt{\frac{-(2\,b^2 + a^2) + a\sqrt{8\,b^2 + a^2}}{2}} < \sqrt{e\,(e + a)}$. Da φ die y-Achse zur Asymptote hat und $H(\varphi)$ die Gerade $y = \frac{b}{a}\sqrt{2} \cdot x$, so müssen sich φ und $H(\varphi)$ in jedem Quadranten einmal schneiden, φ hat vier reelle Wendepunkte, wenn c positiv und $a > b$ ist.

Ist c positiv, aber $a < b$, so ist $H(\varphi)$ auf der ganzen x-Achse negativ, auf der y-Achse nur bis zum Schnittpunkt mit $H(\varphi)$, dann wird es positiv. Auf der Asymptote ist das Verhalten genau wie im vorigen Fall. Die Hessesche Kurve hat sich für $a < b$ der Gestalt nach nicht geändert, nur der Lage nach, sie ist um 90^0 gedreht. Auch hier erhält man 4 reelle Schnittpunkte von φ und $H(\varphi)$.

Für negative c wird $H(\varphi)$ auf der ganzen x-Achse negativ, auf der y-Achse bekommt man das Minuszeichen bis zum Schnitt mit $H(\varphi)$, von da an ein Pluszeichen. Auf der Asymptote $x = b \cdot \sqrt{3}$ ist $H(\varphi)$ stets negativ. Die Hessesche Kurve muss ganz innerhalb des Streifens zwischen $x = + b \cdot \sqrt{3}$ und $x = - b \cdot \sqrt{3}$ verlaufen. Die Grundkurve φ bestand nun aus einem inneren Teil, der ähnlich dem bei der Ellipse geformt war und aus einem äusseren, der eine hyperbelartige Gestalt hatte. $H(\varphi)$ schneidet nun jedenfalls nur den inneren Teil. Auch bei der Kurve, die von der Hyperbel abgeleitet ist, treten 4 reelle Wendepunkte auf. — Im Unendlichen hat $H(\varphi)$ zunächst mit der Grundkurve 8 Punkte gemeinsam, denn $x^2 = 0$ war ja ein Teil von $H(\varphi)$. Der andere Teil von $H(\varphi)$ hat aber auch noch diesen Punkt als Kurvenpunkt, wie das Glied höchster Potenz zeigt. Im ganzen liegen daher im unendlich fernen Punkt von φ 12 Schnittpunkte von $H(\varphi)$ mit φ, der Punkt ist 2 Doppelpunkten äquivalent, er ist Selbstberührungspunkt. Andere Doppelpunkte besitzt die Kurve φ nicht. Weil sie von der 4^ten^ Ordnung ist, die Maximalzahl der Doppelpunkte also 3 ist, so ist die Kurve vom Geschlecht 1. Die anderen Plückerschen Zahlen von φ sind: $m = 8$; $w = 12$; $r = 0$; $t = 8$. Von den Wendepunkten sind, wie wir sahen, stets nur 4 reell.

Zum Schluss möchte ich Herrn Professor von Brill in Tübingen für die freundliche Überlassung seiner auf Seite 7 wiedergegebenen Mitteilung, sowie Herrn Professor Wieleitner in Pirmasens für einige wertvolle Aufklärungen und Literaturhinweise meinen ergebensten Dank aussprechen.

Ganz besonderen Dank bin ich aber meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Gutzmer schuldig, der die vorliegende Arbeit angeregt und ihren Fortgang durch seinen gütigen Rat wesentlich gefördert hat.

Inhaltsübersicht.

Lebenslauf.

Geboren bin ich, Georg August Martin Eggers, evangelisch-lutherischer Konfession, preussischer Staatsangehörigkeit, am 12. Mai 1888 zu Magdeburg als Sohn des Buchbindermeisters August Eggers und seiner Ehefrau Elisabeth, geb. Strauss. Von Ostern 1898 bis November 1902 besuchte ich die Guerickeschule (Oberrealschule und Reformrealgymnasium) meiner Vaterstadt. Dezember 1902 trat ich in die Dreikönigschule (Reformrealgymnasium) zu Dresden-Neustadt ein, die ich Ostern 1907 mit dem Zeugnis der Reife verliess. Seitdem widmete ich mich an der Technischen Hochschule in Dresden dem Studium der Mathematik und Physik, bis ich Ostern 1909 zur Fortsetzung der Studien die Universität Halle bezog, der ich als immatrikulierter Student bis Ostern 1911 angehörte. Im März 1911 war ich vertretungsweise am Stadtgymnasium zu Halle und von April bis Juli 1911 in der Freien Schulgemeinde Wickersdorf in Thüringen als Mathematiker und Physiker tätig. Das Examen rigorosum bestand ich am 30. Oktober 1911.

Während meiner Studienzeit beteiligte ich mich an den Vorlesungen und Übungen folgender Herren Professoren:

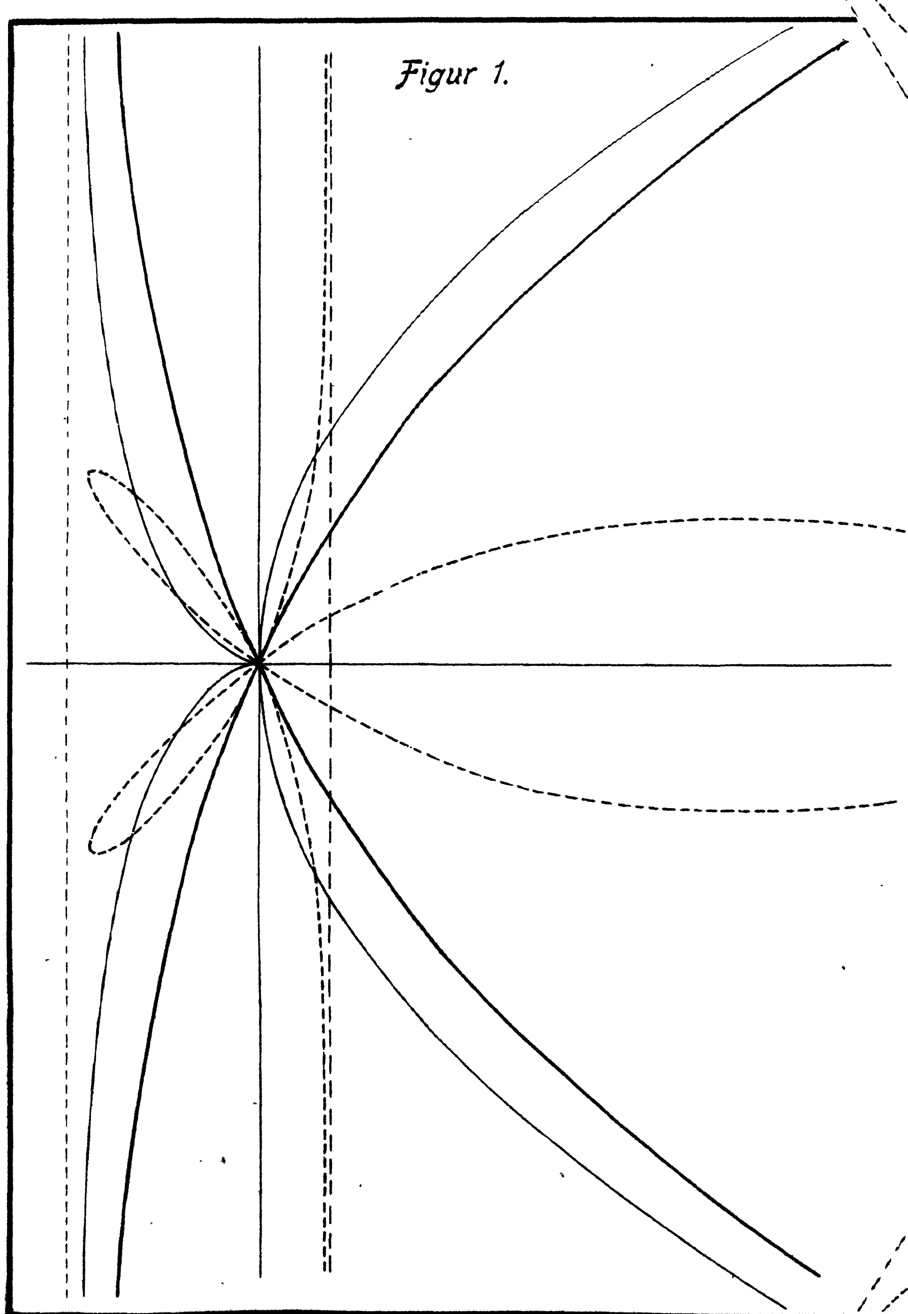
In Dresden: Disteli, Grübler, Hallwachs, Heger, Helm, W. Hempel, Krause, Naetsch, Pattenhausen, Toepler, Walzel.

In Halle: Dorn, Fries, Gutzmer, Menzer, Meumann, K. Schmidt, Wangerin.

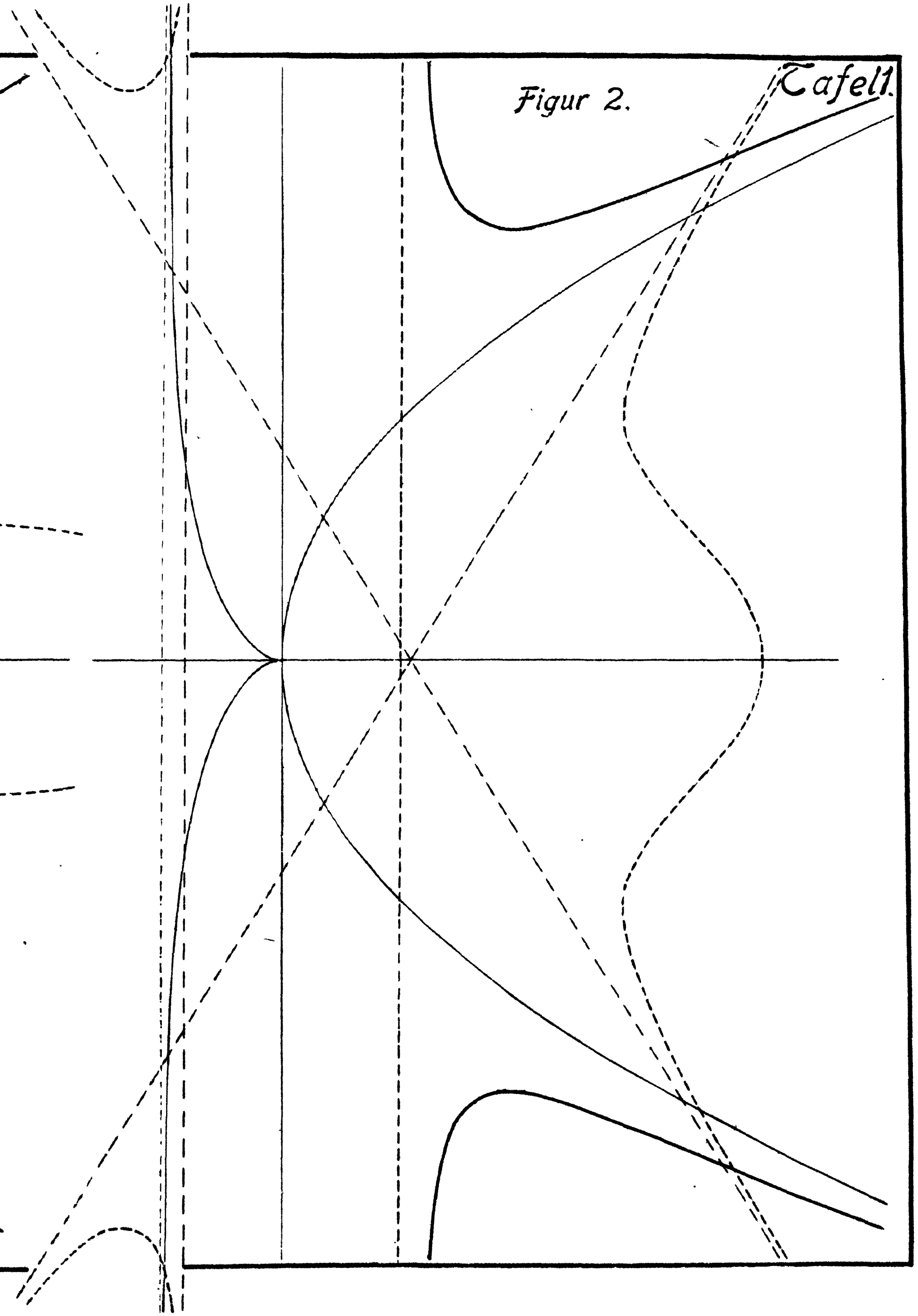
Allen meinen verehrten Lehrern bin ich zu grossem Danke verpflichtet.

Tafel 1.

Figur 1.

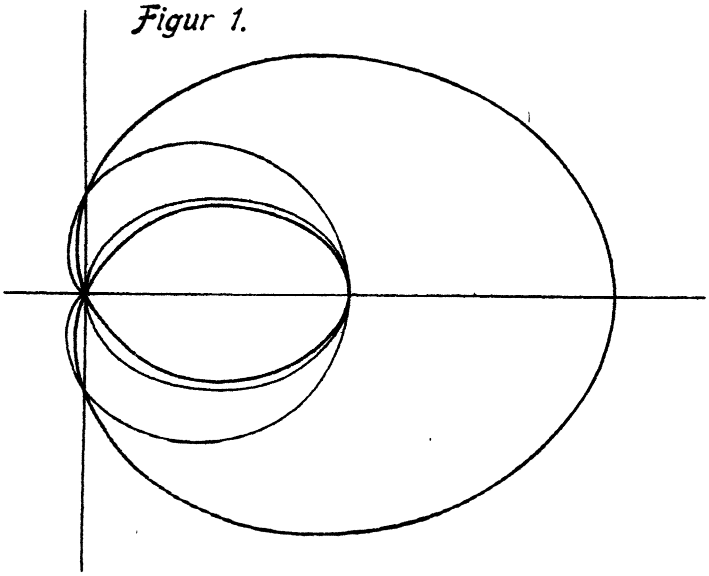


Figur 2.

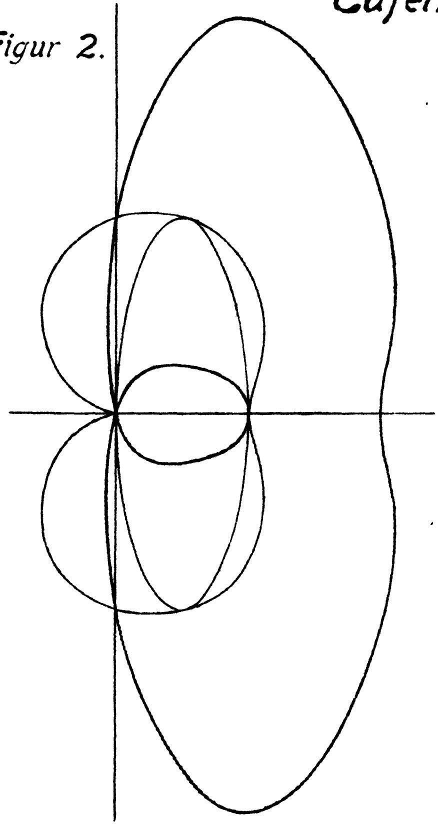


Tafel 2.

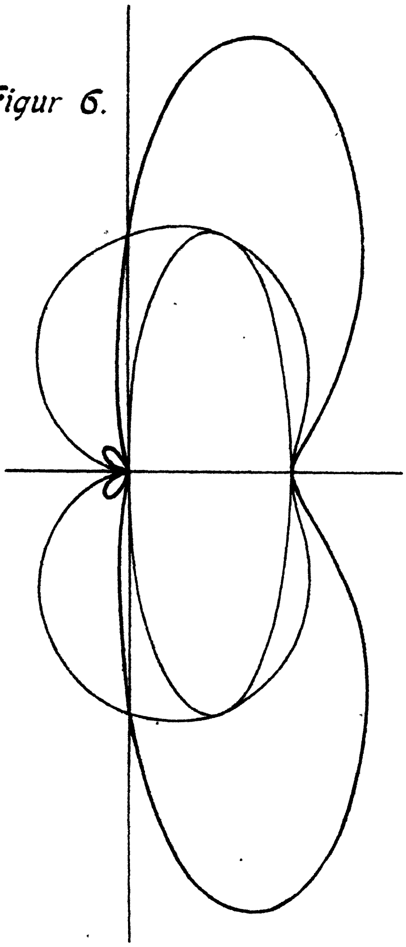
Figur 1.



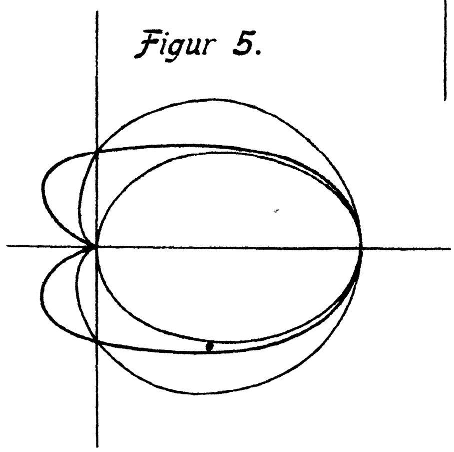
Figur 2.



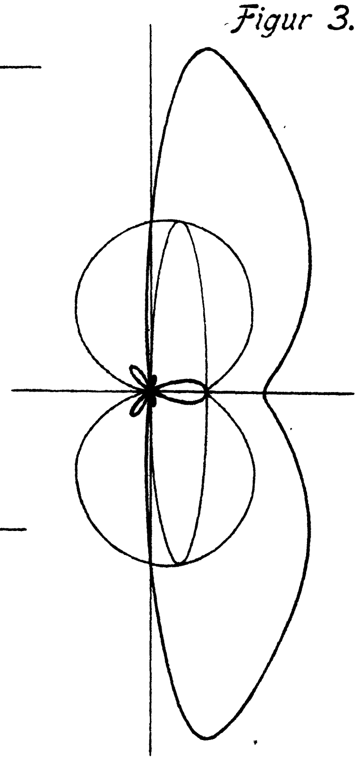
Figur 6.



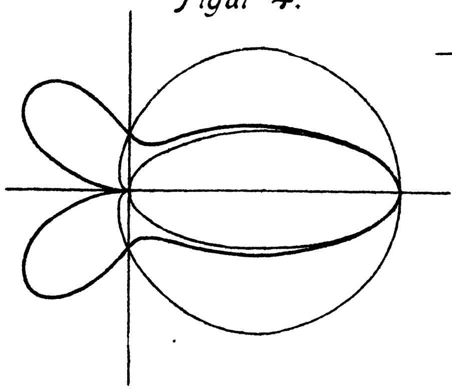
Figur 5.



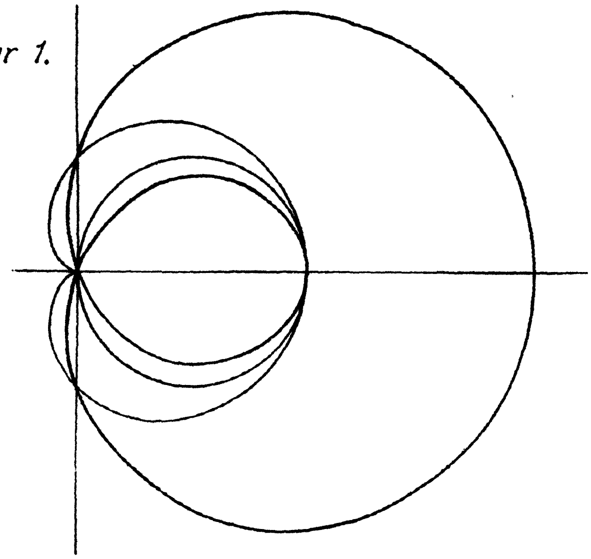
Figur 3.



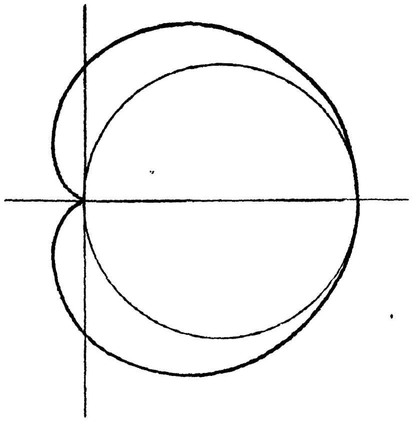
Figur 4.



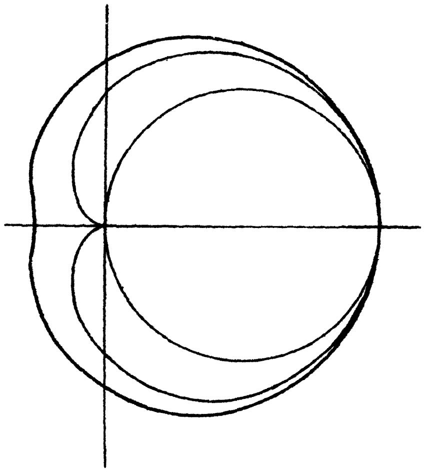
Figur 1.



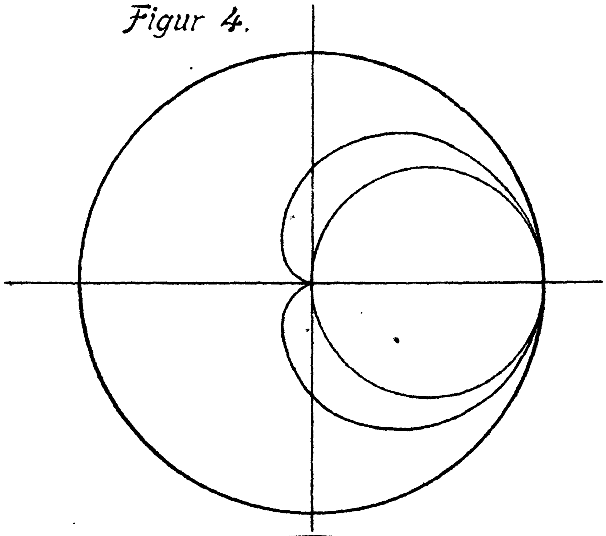
Figur 2.



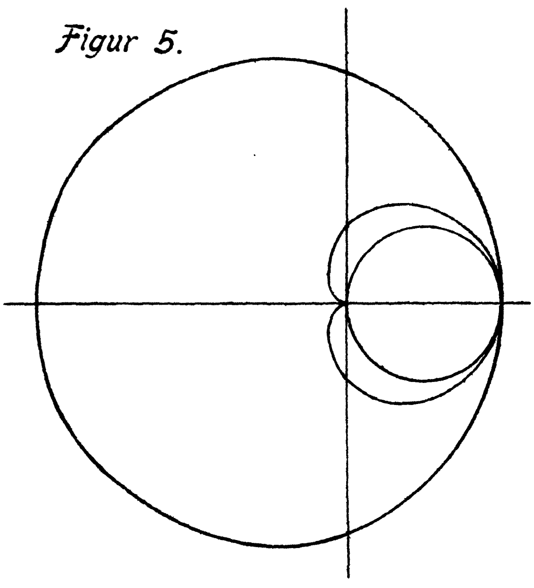
Figur 3.



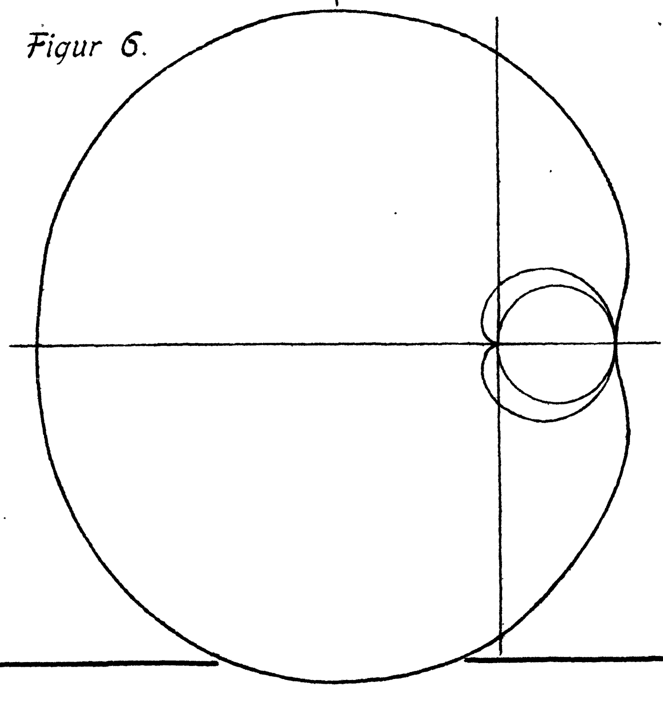
Figur 4.



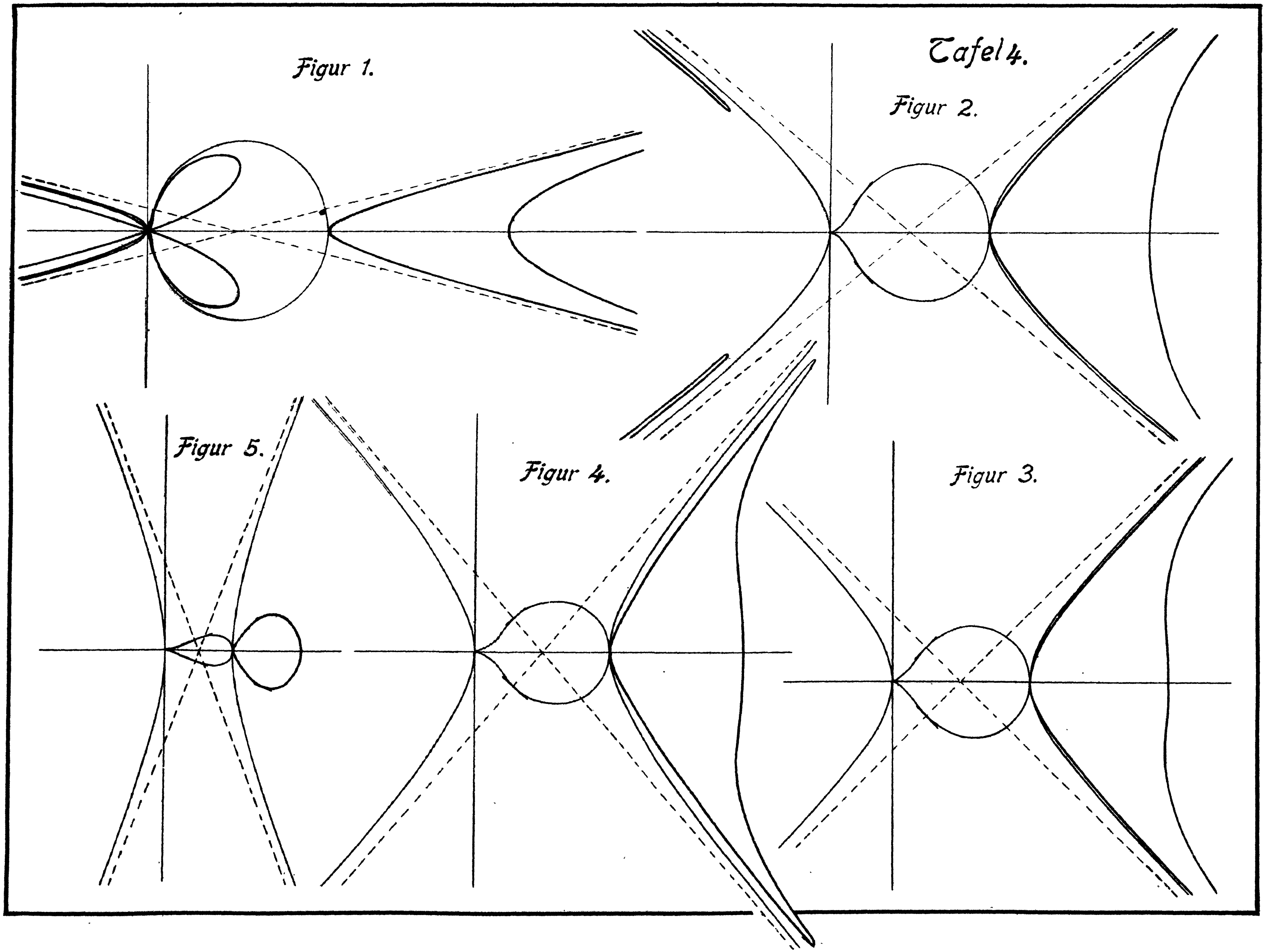
Figur 5.

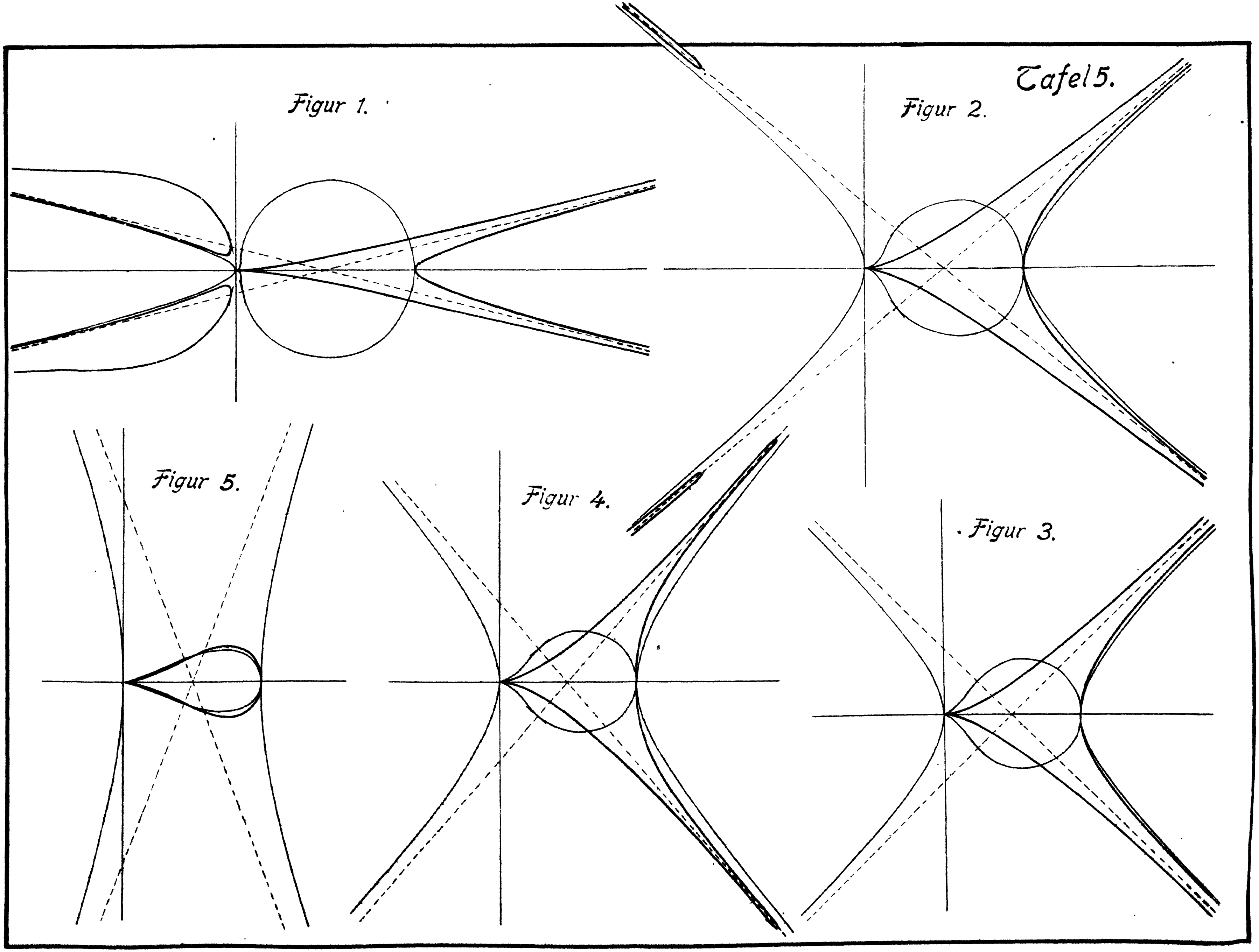


Figur 6.

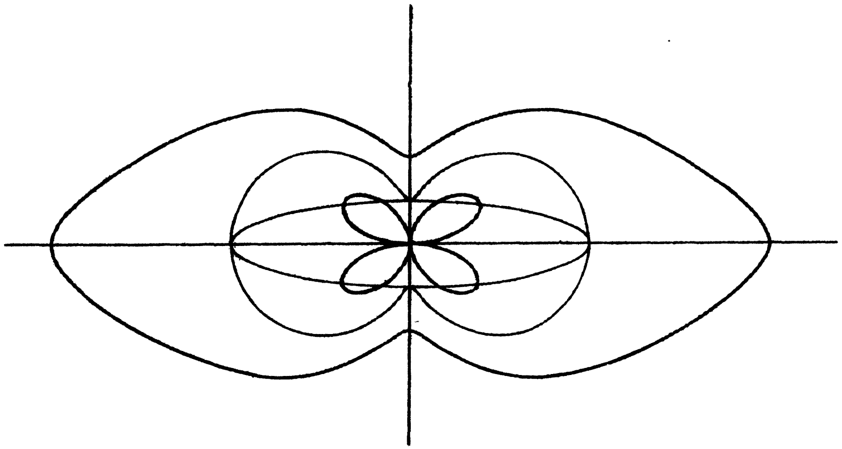


Tafel 4.

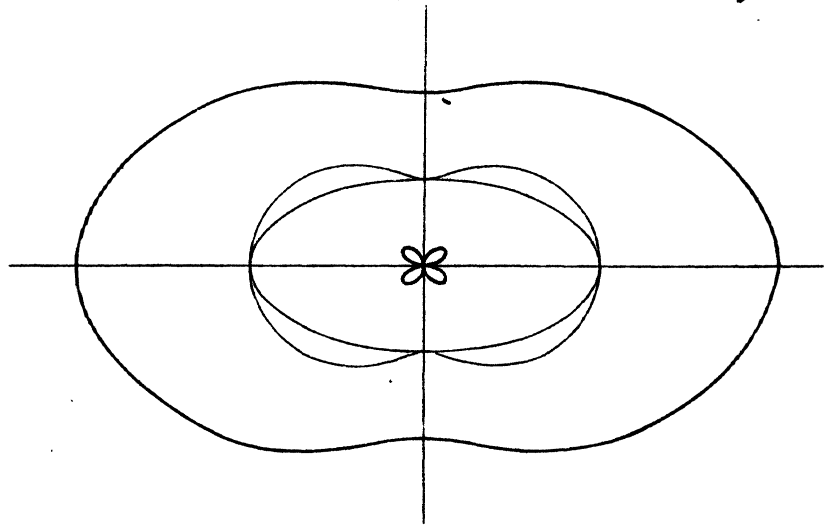



Tafel 5.
Figur 1.
Figur 2.
Figur 5.
Figur 4.
Figur 3.

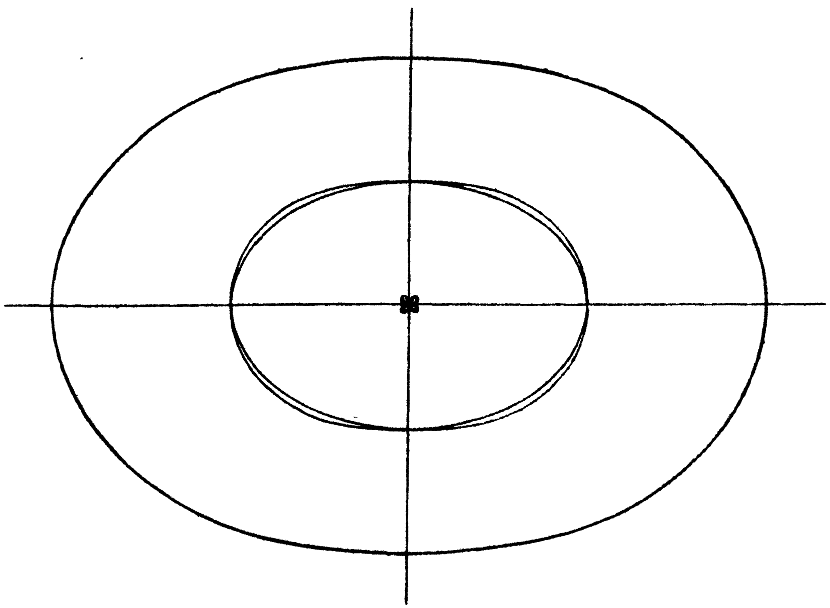
Figur 1.



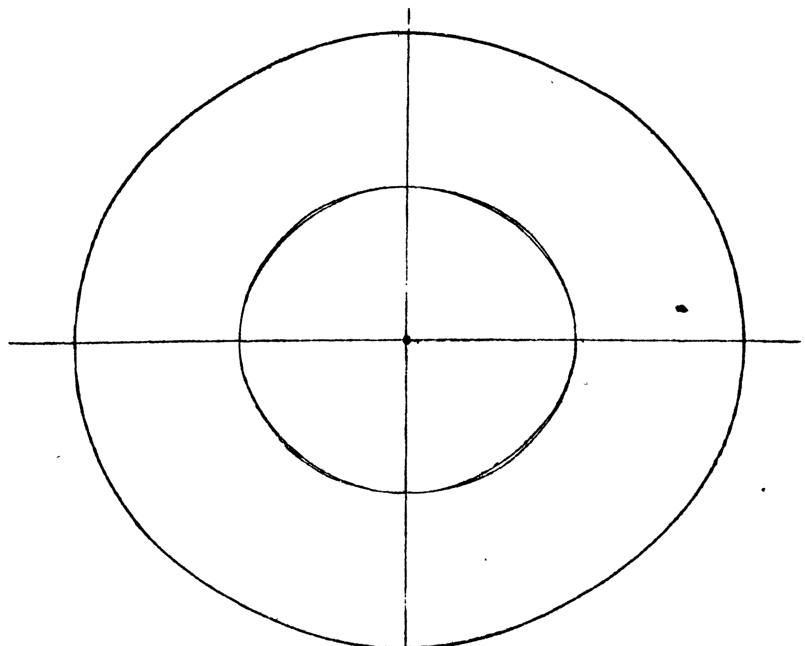
Figur 2.



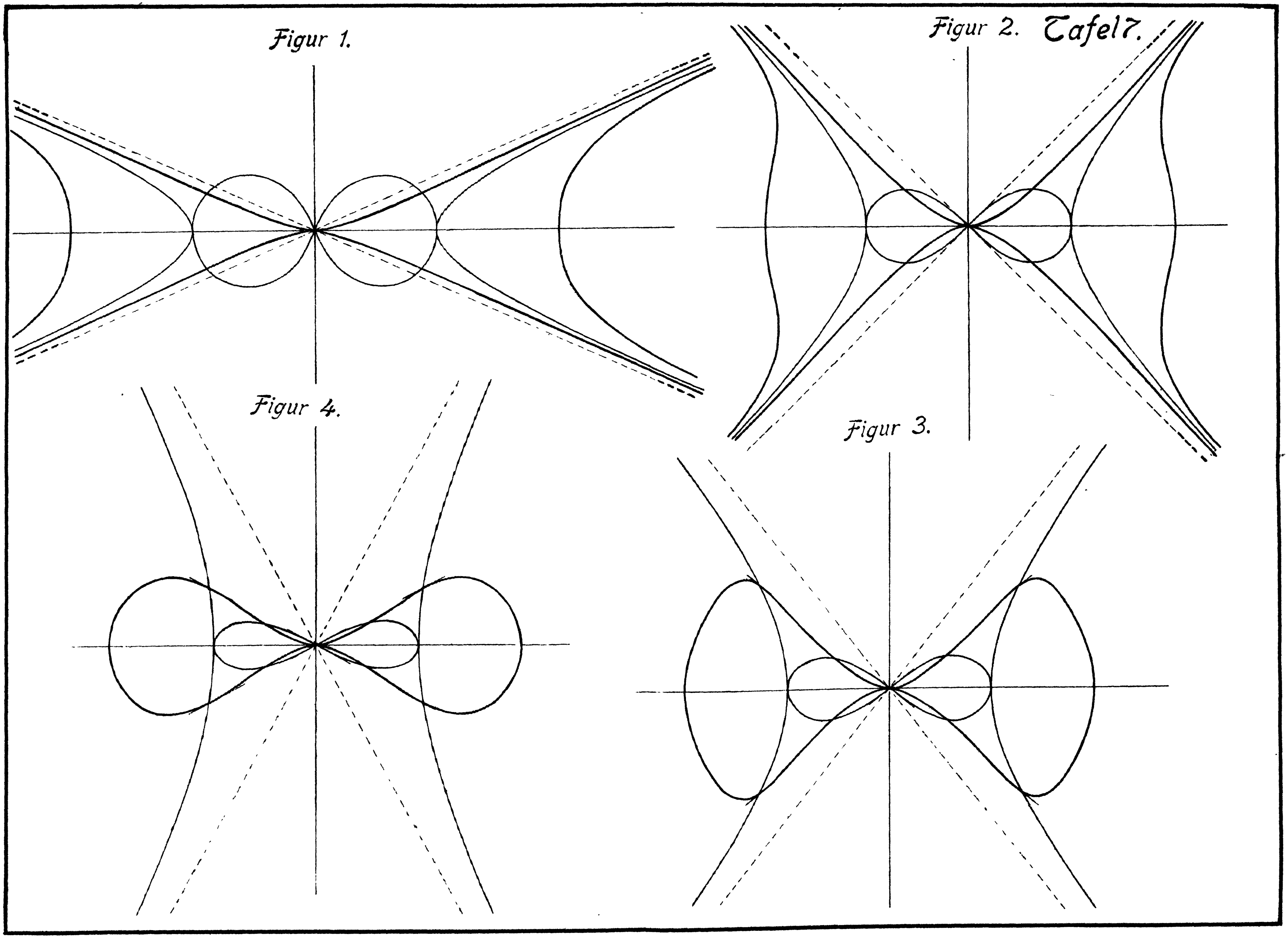
Figur 3.



Figur 4.

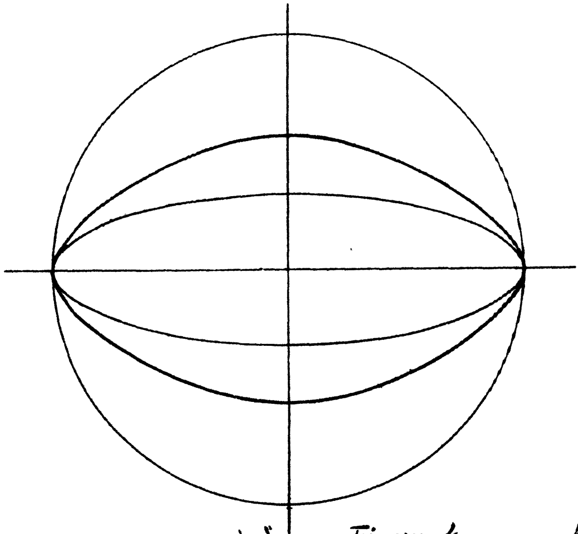


Tafel 7.

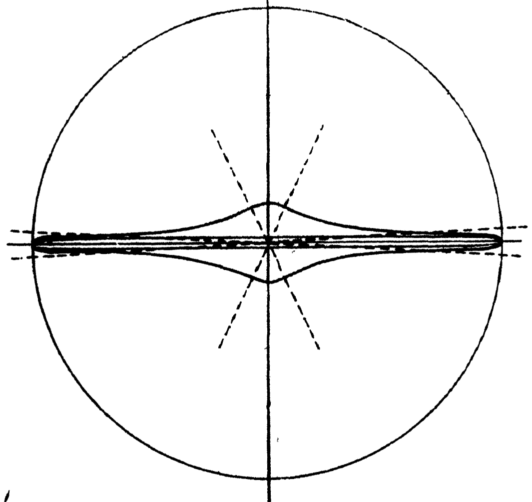


Tafel 8.

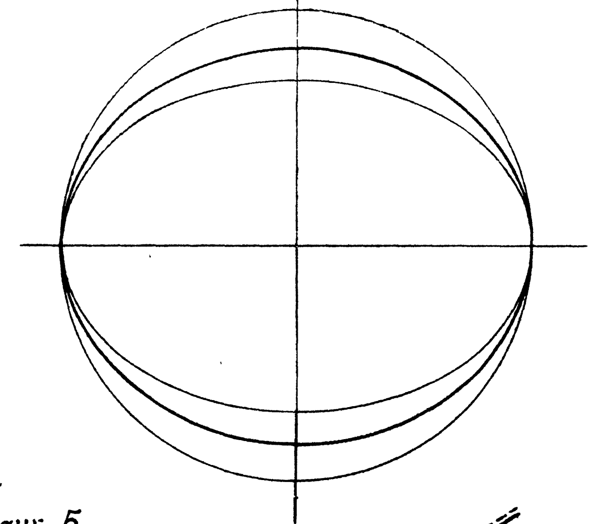
Figur 1.



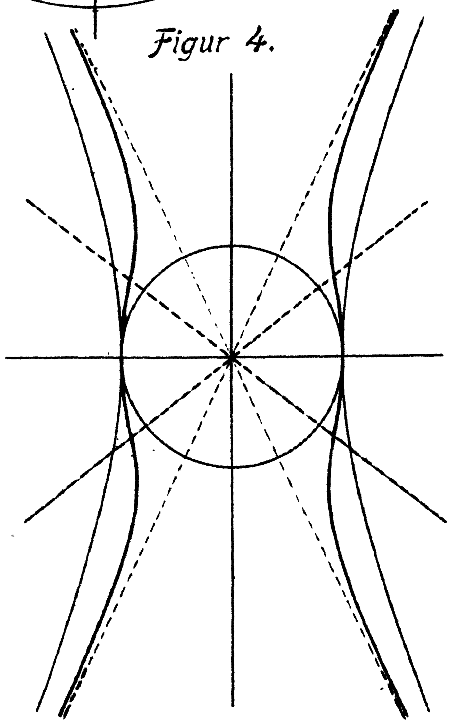
Figur 2.



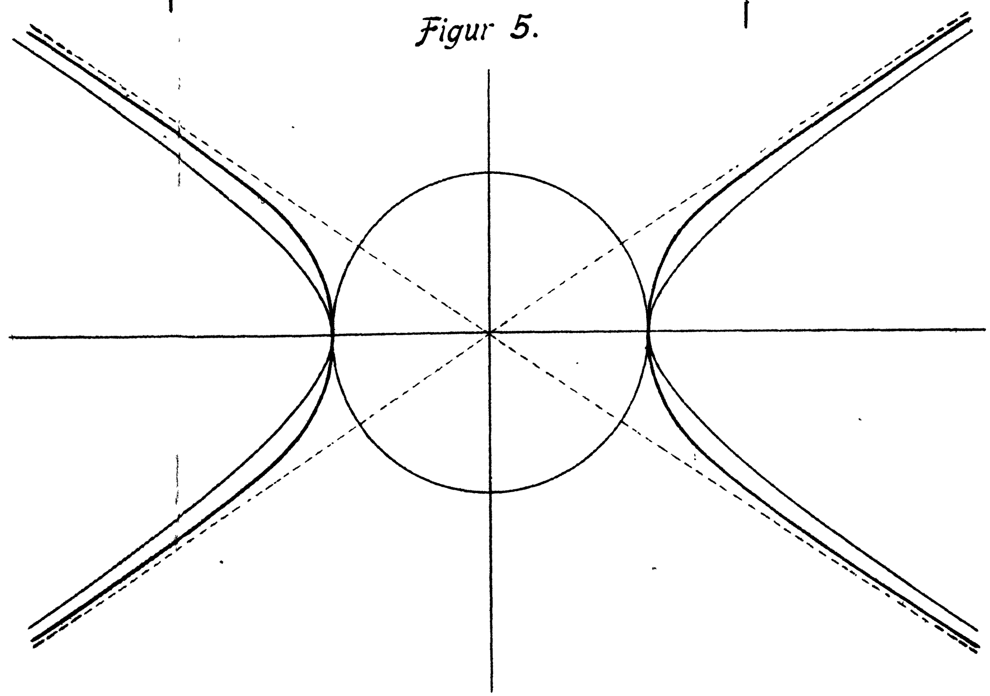
Figur 3.



Figur 4.



Figur 5.



Tafel 9