Inventiones math. 12, 57–61 (1971)

Die Fundamentalgruppe des Raumes der regulären Orbits einer endlichen komplexen Spiegelungsgruppe

E. BRIESKORN (Göttingen)

Die im Titel erwähnten Fundamentalgruppen spielen eine wichtige Rolle in der Deformationstheorie der rationalen Singularitäten und beim Studium des Zusammenhangs zwischen Singularitäten und exotischen Sphären ([3, 5]). Für die symmetrischen Gruppen haben Fox und Neuwirth [4] und unabhängig davon Arnol'd [1] bewiesen, daß die entsprechenden Fundamentalgruppen die von Artin eingeführten Zöpfegruppen sind. Als ich Tits auf diese Tatsache aufmerksam machte, vermutete er den nachstehenden Satz, der dieses Resultat auf beliebige Spiegelungsgruppen verallgemeinert. Ich bin Tits und Serre für hilfreiche Bemerkungen zu Dank verpflichtet.

Es sei E' ein endlichdimensionaler reeller Euklidischer Vektorraum und W eine endliche, von Spiegelungen erzeugte Gruppe linearer Transformationen von E'. Es sei Σ die Menge der Spiegelungen in W, und für $s \in \Sigma$ sei H'_s die von s punktweise fest gelassene Hyperebene. Es sei C eine Kammer, d.h. eine Zusammenhangskomponente von $E' - \bigcup_{s \in \Sigma} H'_s$ (zum Folgenden vgl. Bourbaki [2]). Es sei $\{H'_s\}_{s \in S}$ die Menge der Wände der Kammer C. Dann ist bekanntlich (W, S) ein Coxetersystem, d.h. W hat eine Präsentation mit S als Erzeugendensystem und $(s s')^{m(s,s')} = 1$ als Relationen, wo $m(s, s')$ die Ordnung von $s \cdot s'$ ist und $m(s, s) = 1$.

Nun sei E die Komplexifizierung von E' und die Hyperebenen H_s in E die Komplexifizierungen von H'_s. Es sei $E_{\text{reg}} = E - \bigcup_{s \in \Sigma} H_s$. Die Operation von W läßt sich natürlich auf E fortsetzen, und unter dieser erweiterten Operation geht E_{reg} in sich selbst über. E_{reg}/W sei der Orbitraum. Dies ist der Raum der regulären Orbits, dessen Fundamentalgruppe berechnet werden soll.

Satz. *Die Fundamentalgruppe des Raumes E_{reg}/W der regulären Orbits einer endlichen komplexen Spiegelungsgruppe W hat eine Präsentation mit Erzeugenden g_s, $s \in S$, und Relationen*

$$\underbrace{g_s\, g_t\, g_s \cdots}_{m(s,t)\ \text{Faktoren}} = \underbrace{g_t\, g_s\, g_t \cdots}_{m(s,t)\ \text{Faktoren}}.$$

Für die Anwendungen dieses Satzes in [3, 5] ist es wichtig, zu wissen, daß die Erzeugenden g_s durch eine bestimmte geometrische Konstruktion gewonnen werden. Diese wird im folgenden Zusatz beschrieben.

Zusatz. *Die Generatoren g_s von $\pi_1(E_{\text{reg}}/W)$ sind auf die folgende Art definiert. Es sei $p_0 \in C$ ein Basispunkt, und es sei L_s die komplexe Gerade in E durch p_0 und $p_s = s(p_0)$. Dann wird g_s durch eine Kurve $[0,1] \to L_s$ mit Anfangspunkt p_0 und Endpunkt p_s repräsentiert, die $[0, \frac{1}{3}]$ und $[\frac{2}{3}, 1]$ linear in die reelle Gerade durch p_0, p_s abbildet und $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ auf einen positiv durchlaufenen Halbkreis mit kleinem Radius um den Schnittpunkt von L_s und H_s.*

Beweis. Der Satz wird zunächst für den Fall $\dim E = 2$ bewiesen, und dann wird der allgemeine Fall auf diesen Spezialfall reduziert. Der Fall $\dim E = 1$ ist trivial.

Beweis für $\dim E = 2$. Wenn E' zweidimensional ist, ist W nach der Klassifikation der endlichen Spiegelungsgruppen eine Diedergruppe der Ordnung $2m$, die durch die Spiegelung an zwei Geraden erzeugt wird, welche einen Winkel von π/m bilden. Es ist $E/W = \mathbb{C}^2$, und E_{reg}/W ist das Komplement einer komplexen Kurve D in $\mathbb{C}^2$, die sich mittels der Invarianten von W leicht berechnen läßt. Die Algebra der invarianten Polynome wird durch zwei homogene Polynome vom Grade 2 bzw. m erzeugt. Es seien (x_1, x_2) Koordinaten bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis in E. Dann sind

$$y_1 = x_1^2 + x_2^2$$

$$y_2 = \prod_{j=1}^{m} (x_1 \cos 2\pi j/m - x_2 \sin 2\pi j/m)$$

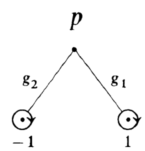
Invarianten vom richtigen Grad, also Erzeugende. Man sieht leicht, daß die Kurve D nach einer Koordinatentransformation von der Form $z_1 = y_1$, $z_2 = a\, y_2 + b\, y_1^{m/2}$ durch die Gleichung

$$z_1^m - z_2^2 = 0$$

beschrieben wird.

Die Fundamentalgruppe des Komplements dieser Kurve läßt sich leicht nach der Methode von Zariski [7], Chapter VIII, 1 berechnen (vgl. auch [5]). Dazu betrachtet man die Projektion $p\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ mit $p(z_1, z_2) = z_1$. Die Fasern von p sind komplexe Geraden L_z, $z \in \mathbb{C}$. Durch Beschränkung von p erhält man eine Faserung $p\colon \mathbb{C}^2 - D - L_0 \to \mathbb{C} - 0$ mit typischer Faser $L_1 - \{1, -1\}$. In dieser Faserung kann man zu jedem differenzierbaren geschlossenen Weg in $\mathbb{C} - 0$ mit Anfangspunkt 1 eine Isotopie $f_t\colon L_1 \to L_1$, $t \in [0, 1]$ mit $f_0 = \text{id}$ finden, welche eine den Weg überdeckende Familie von Diffeomorphismen der Fasern induziert und welche L_1 außerhalb einer kompakten Menge K fest läßt. Beispielsweise kann man für den Weg $z=e^{2\pi i t}$ die Abbildung f_t bezüglich Polarkoordinaten in L_1 durch $f_t(r,\varphi)=(r,\varphi+\pi m t\, h(r))$ definieren, wo $h(r)$ eine schwach monoton fallende C^∞-Funktion mit $h(r)=1$ für $r\leqq 1$ und $h(r)=0$ für $r\geqq 2$ ist. Die Abbildung f_1 induziert einen Diffeomorphismus f von $L_1-\{1,-1\}$ und einen entsprechenden Homomorphismus f_* der Fundamentalgruppe.

Nun wähle man in $L_1-\{1,-1\}$ einen Basispunkt $p\notin K$ und Repräsentanten für Generatoren g_1, g_2 von $\pi_1(L_1-\{1,-1\})$ in der durch die folgende Skizze angedeutete Weise.



Man überzeugt sich leicht, daß dann gilt:

$$f_*(g_1)=\underbrace{g_2^{-1}\,g_1^{-1}\,g_2^{-1}\cdots}_{m-1\ \textit{Faktoren}}\quad\underbrace{\cdots g_2\,g_1\,g_2}_{m\ \textit{Faktoren}}.$$

Es sei j_* der durch die Inklusion $j\colon L_1-\{1,-1\}\to\mathbb{C}^2-D$ induzierte Homomorphismus der Fundamentalgruppen. Dann ist nach Zariski $\pi_1(\mathbb{C}^2-D,p)$ die Gruppe mit den Erzeugenden $j_*\,g_i$ und den Relationen

$$j_*\,g_i=j_*\,f_*(g_i).$$

Das ist genau die zu beweisende Relation. Da man $\pi_1(\mathbb{C}^2-D,p)$ leicht mit $\pi_1(E_{\text{reg}}/W,p_0)$ so identifizieren kann, daß die Erzeugenden $j_*\,g_i$ in die im Zusatz definierten Erzeugenden g_s übergehen, ist damit für $\dim E=2$ der Satz bewiesen.

Reduktion auf $\dim E=2$. (0) Es sei $k=\dim E>2$. Es gilt $E=E'+i\,E'$, und die Operation von W ist mit dieser Zerlegung verträglich. Es sei $q\colon E\to E'$ die Projektion. $\bar{C}$ sei die abgeschlossene Hülle von C. Wir definieren eine Filtrierung

$$C=C^0\subset C^1\subset\cdots\subset C^k=\bar{C}$$

durch $C^n=\{x\in\bar{C}\,|\,x$ liegt in höchstens n Wänden von $\bar{C}\}$. Ferner definieren wir

$$X^n=\Big(q^{-1}(C^n)-\bigcup_{s\in\Sigma}H_s\Big)\Big/W.$$

Da $\bar{C}$ ein Fundamentalbereich für die Operation von W auf E' ist, gilt

$$X^0\subset X^1\subset\cdots\subset X^k=E_{\text{reg}}/W.$$

(i) Die durch die Inklusion induzierte Abbildung

$$\pi_1(X^n) \to \pi_1(X^k)$$

ist surjektiv für $n \geqq 1$ und bijektiv für $n \geqq 2$, da bekanntlich bei Mannigfaltigkeiten das Herausnehmen von Untermannigfaltigkeiten der Codimension > 2 die Fundamentalgruppe nicht ändert. Es ist also $\pi_1(X^2)$ zu berechnen.

(ii) Für $x \in E'$ sei W_x die Isotropiegruppe von x. Dann gilt offensichtlich die folgende Beschreibung von X^n:

$$X^n = \bigcup_{x \in C^n} \{x\} \times (i E' - \bigcup_{x \in H_s} H_s)/W_x.$$

(iii) Aus (ii) folgt leicht, daß X^1 homotopieäquivalent zu einem Bukett von 1-Sphären ist und daß bei der Homotopieäquivalenz die wie im Zusatz definierten $g_s \in \pi_1(X^1)$ in die kanonischen Erzeugenden der freien Gruppe $\pi_1(S^1 \vee \cdots \vee S^1)$ übergehen. Die g_s sind also Erzeugende. Die Relationen zwischen ihnen entstehen durch Hinzufügen von $X^2 - X^1$ zu X^1.

(iv) Es soll jetzt gezeigt werden, daß $\pi_1(X^2)$ eine Präsentation mit den g_s als Erzeugenden hat und mit einer Relation zwischen g_s und g_t für jedes Paar $s, t \in S$, $s \neq t$. Offensichtlich darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß W wesentlich ist, das heißt: den Nullpunkt als einzigen Fixpunkt hat. Dann ist C ein simplicialer Kegel, [2] V, 3.9. Es sei S^{k-1} eine Sphäre in E' um den Nullpunkt, und $C' = \bar{C} \cap S^{k-1}$. Dies C' läßt sich als abgeschlossenes $(k-1)$-Simplex auffassen. Es sei C'_{st} die Vereinigung derjenigen abgeschlossenen $(k-1)$-Simplices der barycentrischen Unterteilung von C', welche $(k-2)$-Seiten sowohl in H_s als auch in H_t haben. Ferner sei $\bar{C}_{st}$ der Kegel über C'_{st} mit dem Nullpunkt als Spitze, und schließlich sei

$$X^n_{st} = (q^{-1}(C^n \cap \bar{C}_{st}) - \bigcup_{s \in \Sigma} H_s)/W.$$

(v) Offensichtlich gilt $X^n = \bigcup_{s \neq t} X^n_{st}$.

(vi) Es sei $m(s,t)$ die Ordnung von $s \cdot t$, ferner E_{st} ein 2-dimensionaler komplexer Vektorraum und W_{st} eine Diedergruppe der Ordnung $2m(s,t)$, die auf E_{st} als Komplexifizierung einer Spiegelungsgruppe operiert. Aus (ii) folgt dann, daß X^2_{st} homotopieäquivalent zu $(E_{st})_{\mathrm{reg}}/W_{st}$ ist und daß bei der Homotopieäquivalenz die wie im Zusatz definierten einander entsprechenden Erzeugenden der Fundamentalgruppen ineinander übergehen. Daher gilt wegen der Berechnung von π_1 im Fall $k=2$ folgendes:

(vii) $\pi_1(X^2_{st})$ ist eine Gruppe mit zwei Erzeugenden g_s, g_t und einer Relation

$$\underbrace{g_s\, g_t\, g_s \cdots}_{m(s,t)\ \text{Faktoren}} = \underbrace{g_t\, g_s\, g_t \cdots}_{m(s,t)\ \text{Faktoren}}.$$

Die beiden Erzeugenden gehen bei dem Homomorphismus $\pi_1(X_{st}^2) \to \pi_1(X^2)$ in die wie im Zusatz definierten Erzeugenden über.

(viii) Wegen van Kampens Theorem [6] folgt aus (i), (v) und (vii) die Behauptung des Satzes.

Schlußbemerkung. Die im eben bewiesenen Satz definierten Gruppen stellen wegen der Klassifikation der endlichen irreduziblen Spiegelungsgruppen in die Typen A_k, B_k, D_k, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, H_3, H_4 und $I_2(m)$, $m=5$ oder $m \geqq 7$, eine ganz explizit und sehr einfach definierte Klasse von Gruppen dar, die die Zöpfegruppen verallgemeinern. Der obige Satz im Zusammenhang mit [3] zeigt die geometrische Bedeutung dieser Gruppen. Es wäre vielleicht interessant, algebraische Eigenschaften dieser Gruppen im Zusammenhang mit ihrer geometrischen Interpretation zu studieren.

Literatur

1. Arnol'd, V. I.: Braids of algebraic functions and cohomologies of swallowtails. Uspehi Mat. Nauk **23**, no. 4 (142), 247–248 (1968).
2. Bourbaki, N.: Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6. Éléments de Mathématique XXXIV. Paris: Hermann 1968.
3. Brieskorn, E.: Singular elements of semi-simple algebraic groups. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Nice 1970. (Erscheint demnächst.)
4. Fox, R., Neuwirth, L.: The braid groups. Math. Scand. **10**, 119–126 (1962).
5. Séminaire Shih Weishu: Singularités des variétés algébriques. IHES 1969/70. (Erscheint demnächst.)
6. Van Kampen, E.: On the connection between the fundamental groups of some connected spaces. Amer. J. Math. **55**, 261–267 (1933).
7. Zariski, O.: Algebraic surfaces. Erg. der Math. 3, no 5. Berlin: Springer 1935.

E. Brieskorn
Mathematisches Institut der Universität
BRD-3400 Göttingen, Bunsenstraße 3/5
Deutschland

(Eingegangen am 21. Oktober 1970)