

Werk

Titel: Inventiones Mathematicae

Verlag: Springer

Jahr: 1982/83

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN356556735_0070

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN356556735_0070

LOG Id: LOG_0030

LOG Titel: Variétés abéliennes et indépendance algébrique. I.

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN356556735

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN356556735>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=356556735>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Variétés abéliennes et indépendance algébrique. I

P. Philippon

Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique,
Plateau de Palaiseau, F-91128 Palaiseau Cedex, France
Laboratoire Associé au C.N.R.S. N° 169

Introduction

Le présent article est centré sur l'étude des grands degrés de transcendance pour les corps de définition de certains points de variétés abéliennes définies sur $\mathbb{Q}$.

Le problème des grands degrés de transcendance consiste à expliciter des corps de degrés de transcendance arbitrairement grands. Ainsi le théorème de Lindemann-Weierstrass (cf. [21] et [17]) énonce que pour tout entier n le corps engendré par les valeurs de la fonction exponentielle en n points algébriques $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ est de degré de transcendance égal à n .

Dans le même ordre d'idée A.O. Gelfond et T. Schneider (cf. [16], problème n° 7, page 138) ont conjecturé que, sous les mêmes conditions, le degré de transcendance du corps $\mathbb{Q}(\zeta^{\alpha_1}, \dots, \zeta^{\alpha_n})$ où ζ est un nombre algébrique $\neq 0, 1$ est $\geq n-1$. Des minoration de ce degré de transcendance tendant vers l'infini avec n se déduisent des travaux de G.V. Choodnovsky en direction de la conjecture de Schanuel cf. [4] et [5], (voir également [8] et aussi [20], [13] et [15] pour le cas p -adique).

Des analogues elliptiques des résultats généraux de G.V. Choodnovsky ont été récemment obtenus par D.W. Masser et G. Wüstholz dans [12].

Dans cet article nous améliorons les résultats de D.W. Masser et G. Wüstholz dans le cadre d'un analogue sur les variétés abéliennes du problème de Gelfond-Schneider. Le théorème principal obtenu (voir théorème 3.2, §3) entraîne dans le cas elliptique le corollaire suivant qui sera démontré au §3.

Corollaire 0.1. *Soit $\wp$ une fonction elliptique de Weierstrass (resp. de Weil-Lutz pour un nombre premier p fixé, cf. [22]) d'invariants algébriques. Soit $\mathbf{k}$ le corps des multiplications de $\wp$. Soit β un nombre algébrique de degré $d \geq 2$ sur $\mathbf{k}$ et u un nombre complexe (resp. un nombre p -adique) tel que $\wp$ soit définie aux points $u, \beta u, \dots, \beta^{d-1}u$, alors le degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ du corps $\mathbb{Q}(\wp(u), \dots, \wp(\beta^{d-1}u))$ est supérieur ou égal à $d/4$ si $\mathbf{k} \neq \mathbb{Q}$ et à $d/6$ si $\mathbf{k} = \mathbb{Q}$.*

Notons que dans tous les cas on attend la minoration $d-1$, et que pour les petites valeurs de d de meilleurs résultats ont été donnés par D.W. Masser et G. Wüstholz dans [11] (voir aussi [3] pour un cas particulier). Dans le cas où $\wp(u)$ est algébrique, ce corollaire peut être amélioré :

Corollaire 0.2. *En reprenant les notations du corollaire 0.1, on suppose que $\wp(u)$ est algébrique et qu'aucun multiple entier de u n'est un pôle de $\wp$, alors le degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ du corps $\mathbb{Q}(\wp(\beta u), \dots, \wp(\beta^{d-1}u))$ est supérieur ou égal à $\max \left\{ 1, \frac{d-2}{2} \right\}$ si $\mathbf{k} \neq \mathbb{Q}$ et à $\max \left\{ 1, \frac{d-3}{3} \right\}$ si $\mathbf{k} = \mathbb{Q}$.*

Ce corollaire sera démontré au §5.

Dans le cas où $u=1$ le corollaire 0.1 correspond à une situation «de type Lindemann-Weierstrass», et pour les petites valeurs de d il a été traité par G.V. Choodnovsky dans [6]. L'introduction d'opérateurs de dérivations parallèlement aux endomorphismes utilisés ici devrait permettre d'améliorer notablement nos résultats présents pour une telle situation.

Le paragraphe 1 introduit deux critères d'indépendance algébrique qui sont utilisés au paragraphe 4. On peut donc, si l'on préfère, lire directement le paragraphe 2 quitte à revenir au paragraphe 1 à la fin. Les démonstrations reposent sur des techniques proches des résultants (cf. [9]) et s'apparentent aux résultats de [7].

Le paragraphe 2 présente les objets étudiés par la suite et démontre deux résultats auxiliaires très utiles. D'une part, un lemme décrivant la répartition de l'orbite d'un point d'une variété abélienne sous l'action d'un sous $\mathbb{Z}$ -module de l'anneau des endomorphismes de cette variété abélienne. D'autre part, un lemme donnant des représentations polynômiales de l'action des endomorphismes d'une variété abélienne plongée dans un espace projectif.

Le paragraphe 3 énonce le résultat principal et démontre, parmi d'autres, le corollaire 0.1 ainsi qu'un lemme technique.

Le paragraphe 4 donne la démonstration du théorème principal (théorème 3.2). Celle-ci utilise le résultat de [10] ainsi que les énoncés des paragraphes précédents. Nous discutons également quelques problèmes de transcendance qui se posent naturellement à la suite de notre travail.

Le paragraphe 5, enfin, démontre dans un contexte plus général le corollaire 0.2.

Je veux remercier ici D. Bertrand, D.W. Masser, K. Ribet, M. Waldschmidt et G. Wüstholz pour leurs conseils lors de l'élaboration de cet article. En particulier le lemme 3.4 est entièrement dû à D.W. Masser et le paragraphe 5 repose sur une suggestion de G. Wüstholz.

Avis au lecteur

Nous avons défini les constantes C_0, C_1, C_2 et C_3 une fois et une seule dans ce texte (lors de leurs définitions, nous avons indiqué de quels paramètres elles dépendent) alors qu'à chaque paragraphe nous avons redéfini les constantes $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{26}$ en précisant, soit pour chaque constante, soit globalement au

début du paragraphe pour toutes les constantes de quels paramètres elles dépendent.

Enfin signalons que le présent travail démontre tous les résultats annoncés précédemment dans [14].

1. Les critères d'indépendance algébrique

Le but de ce paragraphe est de démontrer deux «critères d'indépendance algébrique», à savoir les théorèmes 1.3 et 1.4, qui seront utilisés au paragraphe 4. Nous avons isolé sous forme de lemmes préliminaires l'argument central de la preuve de ces deux théorèmes.

Lemme 1.1. *Soit $\mathfrak{K}$ un corps de caractéristique zéro et $\mathfrak{r} = \mathfrak{K}[X_0, \dots, X_N]$. Soit $\mathfrak{I}$ un idéal de $\mathfrak{r}$ engendré par des polynômes $P_1, \dots, P_s$ homogènes de degrés $\leq d$. On suppose que $\mathfrak{I}$ est de codimension $N+1$, alors il existe un entier $D \leq (N+1)d$ tel que si $\mathfrak{r}_D$ et $\mathfrak{I}_D$ désignent les éléments homogènes de degré D en $X_0, \dots, X_N$ de $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{I}$ respectivement, on ait :*

$$\mathfrak{r}_D = \mathfrak{I}_D.$$

Démonstration. Avant d'en faire la démonstration remarquons que ce lemme classique apparaissait déjà essentiellement dans [7].

L'idéal $\mathfrak{I}$ étant de codimension $N+1$ on peut trouver une suite $Q_0, \dots, Q_N$ d'éléments homogènes de $\mathfrak{I}$ de degrés $\delta_0, \dots, \delta_N \leq d$ tels que pour $l=1, \dots, N$ on ait :

$$\{Q \in \mathfrak{r}; Q \cdot Q_l \in (Q_0, \dots, Q_{l-1})\} = (Q_0, \dots, Q_{l-1}).$$

Le complexe de Koszul de cette famille $Q_0, \dots, Q_N$ est alors la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathfrak{r}^{\binom{N+1}{N+1}} \rightarrow \mathfrak{r}^{\binom{N+1}{N}} \rightarrow \dots \rightarrow \mathfrak{r}^{\binom{N+1}{2}} \rightarrow \mathfrak{r}^{\binom{N+1}{1}} \rightarrow \mathfrak{r}^{\binom{N+1}{0}}$$

où les applications sont données pour $l=0, \dots, N$ par :

$$\partial_l: \mathfrak{r}^{\binom{N+1}{l+1}} \rightarrow \mathfrak{r}^{\binom{N+1}{l}}$$

$$(A_{i_0, \dots, i_l})_{0 \leq i_0 < \dots < i_l \leq N} \mapsto (B_{i_0, \dots, i_{l-1}})_{0 \leq i_0 < \dots < i_{l-1} \leq N}$$

avec $B_{i_0, \dots, i_{l-1}} = \sum_{j=0}^N A_{i_0, \dots, i_{l-1}, j} \cdot Q_j$ et la convention suivante

$$A_{i_0, \dots, i_{l-1}, j} = 0 \quad \text{si} \quad j = i_\alpha \quad (0 \leq \alpha \leq l-1)$$

et $A_{i_0, \dots, i_{l-1}, j} = \varepsilon \cdot A_{i_0, \dots, j, \dots, i_{l-1}}$ lorsque ε est la signature de la permutation qui ordonne $i_0, \dots, i_{l-1}, j$ de façon croissante.

Le conoyau du complexe de Koszul est $\mathfrak{r}/(Q_0, \dots, Q_N)$. On obtient donc en prenant les parties homogènes de degrés D de ce complexe que :

$$\dim_{\mathfrak{K}} \mathfrak{r}_D / (Q_0, \dots, Q_N)_D = \sum_{l=0}^{N+1} (-1)^l \dim_{\mathfrak{K}} \left(\prod_{0 \leq i_1 < \dots < i_l \leq N} \mathfrak{r}_{D - \delta_{i_1} - \dots - \delta_{i_l}} \right).$$

D'autre part, en remplaçant la suite $Q_0, \dots, Q_N$ par $X_0^{\delta_0}, \dots, X_N^{\delta_N}$ on calcule de même que :

$$\dim_{\mathfrak{R}} r_D / (X_0^{\delta_0}, \dots, X_N^{\delta_N})_D = \sum_{l=0}^{N+1} (-1)^l \dim_{\mathfrak{R}} \left(\prod_{0 \leq i_1 < \dots < i_l \leq N} r_{D - \delta_{i_1} - \dots - \delta_{i_l}} \right).$$

On a donc un isomorphisme entre les deux $\mathfrak{R}$ -espaces vectoriels

$$r_D / (Q_0, \dots, Q_N)_D \quad \text{et} \quad r_D / (X_0^{\delta_0}, \dots, X_N^{\delta_N})_D,$$

or on vérifie aisément que le second est nul lorsque $D \geq \delta_0 + \dots + \delta_N - N$, on en déduit que le premier l'est aussi sous cette même hypothèse, c'est-à-dire que

$$\mathfrak{I}_D \subseteq r_D = (Q_0, \dots, Q_N)_D \subseteq \mathfrak{I}_D \quad \text{pour} \quad D = \delta_0 + \dots + \delta_N - N \leq (N+1)d.$$

Ce qui achève la preuve du lemme 1.1.

Pour la suite de ce paragraphe, nous adoptons les notations suivantes :

- N est un entier ≥ 1 . On désigne par k un entier de l'intervalle $[0, N]$.
- m est un entier $> k$.
- $n_1, \dots, n_{N-k}, d_1, \dots, d_m$ sont des entiers ≥ 1 . Si $k=N$ la famille (n_i) est vide.
- pour tout entier $d \geq 0$ on désigne par $\mathcal{B}_d$ l'ensemble des monômes en les variables $X_0, \dots, X_N$ de degré total d . (Dans tout ce texte un monôme sera une expression de la forme $\underline{X}^{\underline{\lambda}} = X_0^{\lambda_0} \dots X_N^{\lambda_N}$).
- pour $i=1, \dots, N-k$ on désigne par $\mathcal{B}_d^{(i)}$ l'ensemble des monômes en les variables $X_0, \dots, X_{k+i-1}$ de degré total d .
- on considère les familles de variables indépendantes suivantes :

$$\begin{aligned} \text{pour } i=1, \dots, N-k \quad \mathcal{A}_i &= \{a_{i,j,m}; j=1, \dots, n_i, m \in \mathcal{B}_j^{(i)}\} \\ \text{pour } j=1, \dots, m \quad \mathcal{P}_j &= \{p_{j,m}; m \in \mathcal{B}_{d_j}\}. \end{aligned}$$

Si $k=N$ l'ensemble des familles $\mathcal{A}_i$ est vide.

- on pose $R = \mathbb{Z}[a_{i,j,m}; p_{j,m}]$. C'est un anneau commutatif unitaire et intègre. On note Ω son corps des fractions. La hauteur d'un élément de R est le logarithme du maximum des valeurs absolues de ses coefficients en tant que polynôme en les variables $a_{i,j,m}$ et $p_{j,m}$.
- pour $i=1, \dots, N-k$ on pose :

$$R_i(X_0, \dots, X_{k+i}) = X_{k+i}^{n_i} + \left(\sum_{m \in \mathcal{B}_1^{(i)}} a_{i,1,m} \cdot m \right) X_{k+i}^{n_i-1} + \dots + \left(\sum_{m \in \mathcal{B}_{n_i}^{(i)}} a_{i,n_i,m} \cdot m \right)$$

et pour $j=1, \dots, m$;

$$P_j(X_0, \dots, X_{k+i}) = \sum_{m \in \mathcal{B}_{d_j}} p_{j,m} \cdot m.$$

Ce sont des polynômes homogènes de $R[X_0, \dots, X_N]$. Si $k=N$ la famille (R_i) est vide.

- on pose $\mathfrak{R} = \Omega[X_0, \dots, X_N]$
- on note $I = (R_1, \dots, R_{N-k}, P_1, \dots, P_m)$ l'idéal homogène de $\mathfrak{R}$ de codimension $N+1$ engendré par les polynômes $R_1, \dots, R_{N-k}, P_1, \dots, P_m$.
- enfin si I_1 et I_2 sont deux idéaux homogènes de $\mathfrak{R}$ on définit $I_1 :_{\mathfrak{R}} I_2$ par

$$I_1 :_{\mathfrak{R}} I_2 = \{P \in \mathfrak{R}; \forall Q \in I_2, P \cdot Q \in I_1\}.$$

Lemme 1.2. *Il existe une famille finie Δ d'éléments non nuls de R et un entier $D \leq (N+1) \max\{n_i, d_j\}$ tels que pour tout $l \in \{0, \dots, N\}$, tout $\delta \in \Delta$ il existe un sous ensemble S de $\{1, \dots, m\}$ de cardinal $\leq n_1 \dots n_{N-k} (D+1)^k$ et des polynômes $(A_{i,l,\delta})_{i=1, \dots, N-k}$ et $(A'_{j,l,\delta})_{j \in S}$ de $R[X_0, \dots, X_N]$ homogènes de degrés en $X_0, \dots, X_N$ égaux à $D - n_i$ et $D - d_j$ respectivement, tels que:*

$$X_l^D \cdot \delta = \sum_{i=1}^{N-k} A_{i,l,\delta} \cdot R_i + \sum_{j \in S} A'_{j,l,\delta} \cdot P_j,$$

et que les coefficients des $(A_{i,l,\delta})$ et $(A'_{j,l,\delta})$ ainsi que les éléments de Δ soient des objets de R , homogènes en les variables $(p_{j,m})$ de degrés en ces variables $\leq n_1 \dots n_{N-k} (D+1)^k$, de degré total en les variables $(a_{i,j,m})$ ainsi que de hauteur

$$\leq \Lambda D^k [D + k \log D] \leq c_1 D^{k+1}$$

(où $\Lambda = 3ON n_1 \dots n_{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} \log(n_i + 1)$ et $c_1 = \Lambda(k+1)$).

Enfin lorsque l'on spécialise les variables $(a_{i,j,m})$ et $(p_{j,m})$ en des valeurs dans un corps $\mathfrak{R}$ de caractéristique zéro de sorte que l'idéal spécialisé $\mathfrak{s}(I) = (\mathfrak{s}(R_1), \dots, \mathfrak{s}(P_m))$ soit de codimension $N+1$ dans $\mathfrak{R}[X_0, \dots, X_N]$, la famille $\mathfrak{s}(\Delta)$, spécialisée de Δ , contient nécessairement un élément non nul de $\mathfrak{R}$.

Démonstration. Posons pour $i = 1, \dots, m$;

$$I_i = (R_1, \dots, R_{N-k}, P_1, \dots, P_{i-1}) :_{\mathfrak{R}} (P_i).$$

C'est un idéal homogène de $\mathfrak{R}$.

On a alors un isomorphisme de Ω -espaces vectoriels

$$\bigoplus_{i=1}^m \mathfrak{R}/I_i \xrightarrow{\sim} I/(R_1, \dots, R_{N-k}),$$

$$(A_1, \dots, A_m) \rightarrow \sum_{j=1}^m A_j P_j.$$

Maintenant si on désigne par $\mathfrak{R}_D, (I_i)_D, I_D, \dots$ les éléments homogènes de degrés D de $\mathfrak{R}, I_i, I, \dots$ l'isomorphisme ci-dessus s'écrit en degré D ;

$$(*) \quad \bigoplus_{i=1}^m \mathfrak{R}_{D-d_i}/(I_i)_{D-d_i} \xrightarrow{\sim} I_D/(R_1, \dots, R_{N-k})_D.$$

Mais I_D étant de codimension $N+1$ on sait d'après le lemme 1.1 qu'il existe un entier $D \leq (N+1) \max\{n_i, d_j\}$ tel que $I_D \simeq \mathfrak{R}_D$. On choisit pour $i = 1, \dots, m$ des

bases $\mathcal{B}'_i$ des Ω -espaces vectoriels $\mathfrak{R}_{D-d_i}/(I_i)_{D-d_i}$ formées de monômes. Et pour le Ω -espace vectoriel $\mathfrak{R}_D/(R_1, \dots, R_{N-k})_D$ on considère la base $\mathcal{B}$ formée des monômes de degrés totaux D par rapport à $X_0, \dots, X_N$ et de degrés partiels $< n_i$ par rapport à X_{k+i} pour $i=1, \dots, N-k$. Montrons que ces monômes forment bien une base de $\mathfrak{R}_D/(R_1, \dots, R_{N-k})_D$. Ils engendrent clairement cet Ω -espace vectoriel car R_i étant unitaire en tant que polynôme en X_{k+i} on peut réduire tout polynôme de $\mathfrak{R}_D$ modulo $(R_1, \dots, R_{N-k})$ à un polynôme de degrés partiels $< n_i$ en X_{k+i} pour $i=1, \dots, N-k$. Supposons que ces monômes soient linéairement dépendants sur Ω modulo $(R_1, \dots, R_{N-k})$, alors il existe une famille $(\lambda_m)_{m \in \mathcal{B}'}$ d'éléments de Ω telle que :

$$\sum_{m \in \mathcal{B}'} \lambda_m \cdot m = Q_1(X_0, \dots, X_N) R_1(X_0, \dots, X_{k+1}) + \dots \\ + Q_{N-k}(X_0, \dots, X_N) \cdot R_{N-k}(X_0, \dots, X_N).$$

Comme on peut diviser dans $\mathfrak{R}$ un polynôme en X_{k+i} par R_i (car R_i est unitaire en X_{k+i}), on peut supposer que :

$$\forall i > j \quad d_{X_{k+i}}^0 Q_j < d_{X_{k+i}}^0 R_i = n_i.$$

On doit donc avoir, $d_{X_N}^0(Q_{N-k} \cdot R_{N-k}) < n_{N-k}$ ce qui implique que Q_{N-k} doit être nul dans $\mathfrak{R}$ car $d_{X_N}^0 R_{N-k} = n_{N-k}$. Et par récurrence on a $d_{X_{k+i}}^0(Q_i R_i) < n_i$ pour $i = N-k, \dots, 1$ ce qui implique $Q_i = 0$ pour $i = 1, \dots, N-k$.

On a donc $\sum_{m \in \mathcal{B}'} \lambda_m \cdot m = 0$, d'où l'on déduit que pour tout $m \in \mathcal{B}'$ on a $\lambda_m = 0$ car les éléments de $\mathcal{B}'$ sont Ω -linéairement indépendants.

Nous allons écrire la matrice de l'isomorphisme (*) dans les bases choisies. Pour $m_i \in \mathcal{B}'_i$, on peut écrire :

$$m_i \cdot P_i = \sum_{m \in \mathcal{B}_{d_i}} p_{i,m} \cdot m \cdot m_i$$

mais pour $m \in \mathcal{B}_{d_i}$ et $m_i \in \mathcal{B}'_i$ on a :

$$m \cdot m_i = \sum_{m' \in \mathcal{B}'} a'_{m',m} \cdot m' + \sum_{j=1}^{N-k} A_{i,j,m}(X_0, \dots, X_N) \cdot R_j(X_0, \dots, X_{k+j})$$

où $a'_{m',m}$ et les coefficients de $A_{i,j,m}$ sont des éléments de R ne dépendant pas des $p_{j',m}$ de degrés totaux $\leq (N-k)D$ en les variables $a_{i,j,m}$ et de hauteur $\leq \left(\sum_{i=1}^{N-k} \log(n_i + 1) \right) N(D+1)$. On pose $p'_{i,m'} = \sum_{m \in \mathcal{B}_{d_i}} p_{i,m} \cdot a'_{m',m}$ pour $m' \in \mathcal{B}'$, et $A'_{i,j} = \sum_{m \in \mathcal{B}_{d_i}} p_{i,m} \cdot A_{i,j,m}$. On a alors :

$$m_i \cdot P_i - \sum_{j=1}^{N-k} A'_{i,j}(X_0, \dots, X_N) \cdot R_j(X_0, \dots, X_{k+j}) = \sum_{m' \in \mathcal{B}'} p'_{i,m'} \cdot m',$$

et la matrice de l'isomorphisme (*) introduit précédemment, s'écrit dans les bases $\prod_{i=1}^m \mathcal{B}'_i$ et $\mathcal{B}'$:

$$m' \begin{pmatrix} m_i \\ \vdots \\ -p'_{i,m'} - \end{pmatrix}$$

où m_i parcourt $\mathcal{B}'_i$ avec $i = 1, \dots, m$ et m' parcourt $\mathcal{B}'$.

Le déterminant de cette matrice est un élément δ de R non nul (car c'est le déterminant d'un isomorphisme). La taille de ce déterminant étant égale à la dimension de $\mathfrak{R}_D/(R_1, \dots, R_{N-k})_D$, est $\leq n_1 \dots n_{N-k} \binom{D+k}{k}$.

L'ensemble Δ du lemme 1.2 est l'ensemble des éléments δ ainsi obtenus lorsque l'on considère tous les choix possibles pour les bases $\mathcal{B}'_i$ ($i=1, \dots, m$) des Ω -espaces vectoriels $\mathfrak{R}_{D-d_i}/(I_i)_{D-d_i}$ formées de monômes.

Fixons maintenant un élément $\delta \in \Delta$, c'est-à-dire un choix de bases $\mathcal{B}'_i$ et montrons les estimations du lemme 1.2. Les $(p'_{i,m'})$ étant des formes linéaires en les $(p_{i,m})$ de degrés $\leq (N-k) \cdot D$ en les variables $(a_{i,j,m})$ et de hauteur $\leq \left(\sum_{l=1}^{N-k} \log(n_l+1) \right) N(D+1)$ on en déduit que δ est un polynôme homogène en les $(p_{i,m})$ de degré total en ces variables $\leq n_1 \dots n_{N-k} (D+1)^k$ et de hauteur ainsi que de degré total en les variables $(a_{i,j,m})$ inférieurs à

$$4N \left[\log(n_1 \dots n_{N-k} \cdot D^k) + \left(\sum_{l=1}^{N-k} \log(n_l+1) \right) D \right] \cdot n_1 \dots n_{N-k} \cdot D^k$$

et donc $\leq \frac{1}{3}AD^k[D+k \log D]$.

Mais, multipliant chaque ligne de la matrice ci-dessus par le monôme m' associé et additionnant le résultat sur la ligne correspondant au monôme m de $\mathcal{B}'$, on obtient pour tout $m \in \mathcal{B}'$ la relation:

$$\begin{aligned} m \cdot \delta &= \det \begin{pmatrix} m_i \\ \vdots \\ - \sum_{m' \in \mathcal{B}'} p'_{i,m'} \cdot m' \\ \vdots \end{pmatrix} - m \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{m_i \in \mathcal{B}'_i} \delta_{m_i, m} \cdot \left(\sum_{m' \in \mathcal{B}'} p'_{i,m'} \cdot m' \right) \end{aligned}$$

en développant suivant la ligne m . Les $\delta_{m_i, m}$ sont des cofacteurs de la matrice ci-dessus et sont donc des éléments de R satisfaisant aux mêmes estimations que δ .

On sait que

$$X_l^D = \sum_{m \in \mathcal{B}'} a'_{m,l} \cdot m + \sum_{j=1}^{N-k} A_{j,l} \cdot R_j$$

où $a'_{m,l}$ et les coefficients des $A_{j,l}$ sont des éléments de R ne dépendant pas des $(p_{j,m})$, de degrés totaux $\leq (N-k)D$ en les variables $(a_{i,j,m})$ et de hauteur $\leq \left(\sum_{l=1}^{N-k} \log(n_l+1) \right) N(D+1)$.

On a donc,

$$X_l^D \delta = \sum_{m \in \mathcal{B}'} \sum_{i=1}^m \sum_{m_i \in \mathcal{B}'_i} a'_{m,l} \cdot \delta_{m_i, m} \left(\sum_{m' \in \mathcal{B}'} p'_{i,m'} \cdot m' \right) + \sum_{j=1}^{N-k} A_{j,l} \cdot \delta \cdot R_j$$

mais

$$\sum_{m' \in \mathcal{B}'} p'_{i,m'} \cdot m' = m_i P_i - \sum_{j=1}^{N-k} A'_{i,j} \cdot R_j.$$

On pose

$$A_{j,l,\delta} = - \sum_{m \in \mathcal{B}'} \sum_{i=1}^m \sum_{m_i \in \mathcal{B}'_i} a'_{m,l} \cdot A'_{i,j} \cdot \delta_{m_i,m} + A_{j,l} \cdot \delta,$$

$$A'_{i,l,\delta} = \sum_{m \in \mathcal{B}'} \sum_{m_i \in \mathcal{B}'_i} a'_{m,l} \cdot \delta_{m_i,m} \cdot m_i$$

et on obtient

$$X_l^D \cdot \delta = \sum_{i=1}^{N-k} A_{i,l,\delta} R_i + \sum_{j \in S} A'_{j,l,\delta} \cdot P_j.$$

On remarque que j ne parcourt que le sous-ensemble S des $\alpha \in \{1, \dots, m\}$ tels que $\mathcal{B}'_\alpha \neq \emptyset$ qui est de cardinal inférieur à la taille du déterminant, donc $\leq n_1 \dots n_{N-k} (D+1)^k$. Enfin en reprenant les estimations que nous avons données au long de la démonstration, on vérifie facilement les majorations annoncées dans le lemme 1.2.

Pour montrer que par spécialisation des $(a_{i,j,m})$ et $(p_{j,m})$ dans un corps $\mathfrak{K}$, telle que $\mathfrak{s}(I)$ soit de codimension $N+1$ dans $\mathfrak{K}[X_0, \dots, X_N]$, il existe un élément $\mathfrak{s}(\delta)$ de l'ensemble spécialisé $\mathfrak{s}(\Delta)$ qui est non nul dans $\mathfrak{K}$, il suffit de remarquer que l'on a toujours l'isomorphisme (*) après spécialisation (et ceci sans hypothèse sur la codimension de $\mathfrak{s}(I)$) et que si $\mathfrak{s}(I)$ est de codimension $N+1$, on a d'après le lemme 1.1

$$\mathfrak{s}(I)_D \simeq \mathfrak{K}[X_0, \dots, X_N]_D.$$

On peut donc trouver un choix de bases $(\mathcal{B}'_i)_{i=1, \dots, m}$ des $\mathfrak{K}_{D-d_i}/(I_i)_{D-d_i}$ tel que les $\mathfrak{s}(\mathcal{B}'_i)$ forment des bases de $\mathfrak{K}[X_0, \dots, X_N]_{D-d_i}/(\mathfrak{s}(I_i))_{D-d_i}$, et l'élément $\mathfrak{s}(\delta)$ associé à ce choix de base est alors un élément de $\mathfrak{s}(\Delta)$, non nul car étant le déterminant d'un isomorphisme. On a donc complètement démontré le lemme 1.2.

On note F un corps de nombres d'anneau d'entiers $\mathcal{O}_F$ et F_v le complété de F pour une valeur absolue, notée $|\cdot|_v$, non triviale sur F . Dans tout ce qui suit $d^0 P$ désigne le degré total d'un polynôme P de $F[X_0, \dots, X_N]$ et $h(Q)$ la hauteur d'un élément Q de $\mathcal{O}_F[X_0, \dots, X_N]$, c'est-à-dire le logarithme du maximum des différentes valeurs absolues archimédiennes des coefficients de Q .

Nous démontrons maintenant notre premier critère d'indépendance algébrique.

Théorème 1.3. Soit $(\theta_0, \dots, \theta_N) \in F_v^{N+1}$ et I un idéal homogène de $F[X_0, \dots, X_N]$ de codimension $N+1$.

Soit $\mathcal{E}$ un idéal homogène de $F[X_0, \dots, X_N]$ de codimension $N-k$ et tel que, d'une part $F[X_0, \dots, X_N]/\mathcal{E}$ soit une extension entière de $F[X_0, \dots, X_k]$ et d'autre part que $e(\theta_0, \dots, \theta_N) = 0$ pour tout e dans $\mathcal{E}$.

Il existe une constante C_1 ne dépendant que de $\mathcal{E}, N, F$ et $\max\{|\theta_i|_v\}$ telle que: si $I = (\mathcal{E}, Q_1, \dots, Q_n)$ où Q_i est un polynôme homogène de $\mathcal{O}_F[X_0, \dots, X_N]$ vérifiant pour $i=1, \dots, n$

$$|Q_i(\theta_0, \dots, \theta_N)|_v \leq \exp[-C_1 \cdot \max_{i=1, \dots, n} \{h(Q_i) + d^0 Q_i\}] \cdot (\max_{i=1, \dots, n} \{d^0 Q_i\})^k$$

alors $\theta_0 = \dots = \theta_N = 0$.

Démonstration. Pour $i=1, \dots, N-k$ appelons R_i une relation homogène de dépendance intégrale de X_{k+i} sur $F[X_0, \dots, X_{k+i-1}]$ modulo $\mathcal{E}$ et notons $\{P_1, \dots, P_m\}$ un ensemble formé d'un choix de générateur de $\mathcal{E}$ et des $Q_1, \dots, Q_n$. Comme la codimension de I est $N+1$, lorsque l'on prend la valeur d'un élément convenable δ de l'ensemble Δ du lemme 1.2 pour les valeurs des variables $a_{i,j,m}$ et $p_{j',m'}$ correspondant aux polynômes $R_1, \dots, R_{N-k}, P_1, \dots, P_m$ ci-dessus, on trouve un élément non nul de F de taille majorée d'après les estimations du lemme 1.2 par

$$c_2 \left(\max_{i=1, \dots, n} \{h(Q_i) + d^0 Q_i\} \right) \cdot \left(\max_{i=1, \dots, n} \{d^0 Q_i\} \right)^k,$$

où c_2 ne dépend que de $\mathcal{E}$, N et F .

Reportant $(X_0, \dots, X_N) = (\theta_0, \dots, \theta_N)$ dans la relation du lemme 1.2 on a pour tout $l=0, \dots, N$ et S un sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}$

$$\theta_l^p \cdot \delta = \sum_{j \in S} A'_j(\theta_0, \dots, \theta_N) \cdot Q_j(\theta_0, \dots, \theta_N).$$

On obtient donc:

$$|\theta_l|_v^p \cdot |\delta|_v \leq \sum_{j \in S} |A'_j(\theta_0, \dots, \theta_N)|_v \cdot |Q_j(\theta_0, \dots, \theta_N)|_v$$

où $D \leq c_3 \max_{i=1, \dots, n} \{d^0 Q_i\}$ et c_3 ne dépend que de $\mathcal{E}$ et N .

Mais on a par l'inégalité de la taille dans F

$$|\delta|_v \geq \exp \left[-c_4 \left(\max_{i=1, \dots, n} \{h(Q_i) + d^0 Q_i\} \right) \cdot \left(\max_{i=1, \dots, n} \{d^0 Q_i\} \right)^k \right]$$

où c_4 ne dépend que de $\mathcal{E}$, N et F .

D'un autre côté, on a, au vu des estimations du lemme 1.2:

$$|A'_j(\theta_0, \dots, \theta_N)|_v \leq \exp(c_5 \max_{i=1, \dots, n} \{h(Q_i) + d^0 Q_i\} \cdot \left(\max_{i=1, \dots, n} \{d^0 Q_i\} \right)^k).$$

avec une constante c_5 ne dépendant que de $\mathcal{E}$, N , F et $\max\{|\theta_i|_v\}$. On voit donc que pour une constante C_1 convenable ne dépendant que de $\mathcal{E}$, N , F et $\max\{|\theta_i|_v\}$ on a une contradiction si l'un des $|\theta_i|_v$ est non nul. C'est donc que sous les hypothèses du théorème 1.3 on a bien $\theta_0 = \dots = \theta_N = 0$.

Le deuxième critère fait intervenir des idéaux de codimensions N et s'énonce:

Théorème 1.4. Soit $(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N) \in F_v^* \times F_v^N$ et $(I_d)_{d > d_0}$ une suite d'idéaux homogènes de $F[X_0, \dots, X_N] =: \mathcal{R}$ de codimensions N .

Soient $\delta(d)$ et $\sigma(d)$ deux fonctions croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et a un nombre réel > 0 tel que pour tout $d > d_0$;

$$\sigma(d+1) \leq a \sigma(d), \quad \delta(d+1) \leq a \delta(d) \quad \text{et} \quad \lim_{d \rightarrow \infty} \delta(d) = +\infty.$$

Soit $\mathcal{E}$ un idéal homogène premier de $\mathcal{R}$ de codimension $N-k$ tel que $\mathcal{R}/\mathcal{E}$ soit une extension entière de $F[X_0, \dots, X_k]$ et que, $e(\theta_0, \dots, \theta_N) = 0$ pour tout e dans $\mathcal{E}$.

Il existe une constante $C_2 > 0$ ne dépendant que de $a, \mathcal{E}, F, N$ et $\max \{|\theta_i|_v\}$, vérifiant l'assertion suivante: si pour tout $d > d_0$, I_d vérifie

$$\sqrt{I_d}: \mathfrak{A}(X_0) = \sqrt{I_d}.$$

et s'écrit sous la forme

$$I_d = (\mathcal{E}, Q_1^{(d)}, \dots, Q_{n(d)}^{(d)})$$

où $Q_i^{(d)}$ est un polynôme homogène de $\mathcal{O}_F[X_0, \dots, X_N]$ vérifiant pour un nombre réel $\alpha > 0$ et $\alpha \geq 2k-1$ et tout $i=1, \dots, n(d)$:

$$(i) \quad d^0 Q_i^{(d)} \leq \delta(d) \text{ et } h(Q_i^{(d)}) \leq \sigma(d),$$

$$(ii) \quad |Q_i^{(d)}(\theta_0, \dots, \theta_N)|_v \leq \exp(-C_2(\delta(d))^\alpha \cdot (\sigma(d) + \delta(d))),$$

alors θ_j/θ_0 est algébrique pour $j=1, \dots, N$, et de plus pour d assez grand on a: $Q_i^{(d)}(\theta_0, \dots, \theta_N) = 0$ pour $i=1, \dots, n(d)$.

Démonstration. Les constantes $c_6, c_7, \dots$ qui apparaissent dans la suite ne dépendent que de $\mathcal{E}, N, F$ et $\max \{|\theta_i|_v\}$. La stratégie de la preuve est de se ramener au «critère de Gelfond classique» (cf. [19], p. 144). Nous allons donc construire pour tout $i=1, \dots, N$ une suite $(G_d)_{d > d_0}$ de polynômes homogènes de $\mathcal{O}_F[X_0, X_1]$ vérifiant:

$$(i) \quad d^0 G_d \leq c_6 \delta(d)^k \text{ et } h(G_d) \leq c_6 \delta(d)^{k-1} (\sigma(d) + \delta(d)),$$

$$(ii) \quad |G_d(\theta_0, \theta_1)|_v \leq \exp(-(C_2 - c_7)(\sigma(d) + \delta(d)) \cdot \delta(d)^\alpha).$$

Pour simplifier l'écriture nous choisissons $i=1$. Et nous fixons un $d > d_0$. Appelons R_i pour $i=1, \dots, N-k$ une relation homogène de dépendance intégrale de X_{k+i} sur $F[X_0, \dots, X_{k+i-1}]$ modulo $\mathcal{E}$ et notons $\{P_1, \dots, P_m\}$ un ensemble formé d'un choix de générateurs de $\mathcal{E}$ et des $Q_1^{(d)}, \dots, Q_{n(d)}^{(d)}$.

Pour $i=1, \dots, m$ soit ${}^h P_i$ un polynôme de $F[X_0, X_1, Y, \dots, X_N]$ tel que ${}^h P_i(X_0, X_1, 1, \dots, X_N) = P_i(X_0, \dots, X_N)$, on a:

$${}^h P_i(X_0, X_1; Y, X_2, \dots, X_N) = \sum_{\underline{\alpha}} p_{\underline{\alpha}, i}(X_0, X_1) \cdot Y^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_N^{\alpha_N}$$

où la somme est étendue aux $\underline{\alpha}$ de longueur égale à $d_{X_2, \dots, X_N}^0 P_i$. Les $p_{\underline{\alpha}, i}$ sont des polynômes homogènes en X_0 et X_1 de degrés $d_{X_2, \dots, X_N}^0 P_i - \alpha_2 \dots - \alpha_N$ et de hauteur $\leq \sigma(d)$. Le degré en $Y, X_2, \dots, X_N$ de ${}^h P_i$ est $\leq \delta(d)$. On définit de même ${}^h R_i$ pour $i=1, \dots, N-k$.

Posons $L = F(X_0, X_1)$ et montrons que ${}^h I_d = ({}^h R_1, \dots, {}^h R_{N-k}, {}^h P_1, \dots, {}^h P_m)$ est un idéal homogène de $L[Y, X_2, \dots, X_N]$ de codimension N . Pour cela il suffit de constater que la variété des zéros de ${}^h I_d$ dans $\mathbb{P}_{N-1}(\bar{L})$, où $\bar{L}$ désigne la clôture algébrique de L , est vide. On distingue deux cas:

$\alpha)$ Dans l'hyperplan $Y=0$. On a, ou bien $d^0 P_i - d_{X_2, \dots, X_N}^0 P_i > 0$ et alors on a toujours $d^0 p_{\underline{\alpha}, i} > 0$ d'où $P_i(0, 0, X_2, \dots, X_N) = 0$, ou bien

$${}^h P_i(0, X_2, \dots, X_N) = \sum_{\substack{|\underline{\alpha}| = d_{X_2, \dots, X_N}^0 P_i \\ \alpha_1 = 0}} p_{\underline{\alpha}, i} X_2^{\alpha_2} \dots X_N^{\alpha_N} \quad \text{avec } p_{\underline{\alpha}, i} \in F.$$

Et si on a une solution non triviale dans $(\bar{L})^{N-1}$ du système;

$$\begin{aligned} {}^hR_i(0, X_2, \dots, X_N) &= 0 & i=1, \dots, N-k \\ {}^hP_j(0, X_2, \dots, X_N) &= 0 & j=1, \dots, m \end{aligned}$$

en la spécialisant on trouve des éléments $x_2, \dots, x_N$ de $\bar{F}$ non tous nuls tels que:

$$0 = \sum_{\substack{|\alpha|=d^0 \\ \alpha_1=0}} p_{\alpha,j} \cdot x_2^{\alpha_2} \dots x_N^{\alpha_N} = P_j(0, 0, x_2, \dots, x_N).$$

et de même $R_i(0, 0, x_2, \dots, x_N) = 0$.

Ainsi I_d a un zéro dans l'hyperplan $X_0=0$ de $\mathbb{P}_N(\bar{F})$ ce qui est impossible car $\sqrt{I_d}:_{\mathcal{A}}(X_0) = \sqrt{I_d}$. On en déduit que la variété des zéros de hI_d dans l'hyperplan $Y=0$ de $\mathbb{P}_{N-1}(\bar{L})$ est vide.

$\beta)$ Dans l'ouvert $Y \neq 0$. Soit $(1, x_2, \dots, x_N) \in (\bar{L})^N$ un zéro de hI_d dans l'ouvert $Y \neq 0$ de $\mathbb{P}_{N-1}(\bar{L})$, alors on a pour tout $i=1, \dots, N-k$ et $j=1, \dots, m$;

$${}^hR_i(1, x_2, \dots, x_N) = R_i(X_0, X_1, x_2, \dots, x_N) = 0 \quad \text{dans } \bar{L}$$

et

$${}^hP_i(1, x_2, \dots, x_N) = P_i(X_0, X_1, x_2, \dots, x_N) = 0 \quad \text{dans } \bar{L}.$$

Donc la variété des zéros de I_d dans $\mathbb{P}_N(\bar{F})$ doit être de dimension >0 contredisant l'hypothèse que I_d est de codimension N .

En résumé on a montré que la variété des zéros de hI_d dans $\mathbb{P}_{N-1}(\bar{L})$ est vide et donc que hI_d est de codimension N dans $L[Y, X_2, \dots, X_N]$. Le lemme 1.2 fournit un polynôme non nul G_d de $F[X_0, X_1]$ vérifiant pour un entier $D \leq c_8 \delta(d)$:

$$Y^D \cdot G_d = \sum_{i=1}^{N-k} A_i \cdot {}^hR_i + \sum_{j \in S} A'_j \cdot {}^hP_j.$$

Les estimations du lemme 1.2 permettent d'affirmer que G_d est un polynôme homogène en X_0 et X_1 de degré $\leq c_6 \delta(d)^k$ et de hauteur $\leq c_6 \delta(d)^{k-1}(\sigma(d) + \delta(d))$: (ici faire attention: N est remplacé par $N-1$ et k par $k-1$). G_d vérifie donc le point (i) requis, pour le point (ii) on remarque que

$$G_d(\theta_0, \theta_1) = \sum_{j \in S} A'_j(\theta_0, \dots, \theta_N) \cdot P_j(\theta_0, \dots, \theta_N).$$

Et donc comme d'après le lemme 1.2, A'_j est un polynôme, homogène en X_0 et X_1 de degré $\leq c_9 \delta(d)^k$, de degré en $X_2, \dots, X_N \leq c_9 \delta(d)$, et de hauteur $\leq c_9 \delta(d)^{k-1} \cdot (\sigma(d) + \delta(d))$ on en conclut d'après l'hypothèse (ii) sur les polynômes $Q_1^{(d)}, \dots, Q_n^{(d)}$ que

$$|G_d(\theta_0, \theta_1)|_v \leq \exp(-(C_2 - c_7) \cdot \delta(d)^\alpha (\sigma(d) + \delta(d))).$$

Le critère de Gelfond classique (cf. [19], p.144) affirme alors que θ_1/θ_0 est un nombre algébrique si C_2 est suffisamment grande par rapport à a, c_6 et c_7 , c'est-à-dire ne dépendant que de $a, \mathcal{E}, N, F$ et $\max \{|\theta_i|_v\}$.

Nous avons donc démontré la première partie du théorème 1.4. Mais alors pour $d > d_0$ et pour $i = 1, \dots, n(d)$ le nombre $Q_i^{(d)}\left(1, \dots, \frac{\theta_N}{\theta_0}\right)$ est algébrique de degré borné indépendamment de d et de taille $\leq c_{10}(\sigma(d) + \delta(d))$.

L'inégalité de la taille (cf. [19], p. 6) implique donc que si $Q_i^{(d)}(\theta_0, \dots, \theta_N) \neq 0$, on a

$$\left| Q_i^{(d)}\left(1, \dots, \frac{\theta_N}{\theta_0}\right) \right|_v > \exp(-c_{11}(\sigma(d) + \delta(d)));$$

Comme $\alpha > 0$ et $\delta(d) \xrightarrow{d \rightarrow \infty} \infty$ ceci contredit l'hypothèse (ii) du théorème pour d suffisamment grand. On a donc bien $Q_i^{(d)}(\theta_0, \dots, \theta_N) = 0$ pour $i = 1, \dots, n(d)$ et pour d assez grand, et ceci achève la preuve du théorème 1.4.

Pour terminer ce paragraphe, signalons que si le théorème 1.3 nous paraît tel quel relativement satisfaisant, il n'en n'est pas de même du théorème 1.4 où il serait très intéressant de remplacer la condition $\alpha \geq 2k - 1$ par $\alpha \geq k$. Notamment le fait de se ramener au critère de Gelfond classique semble bien un pis aller. Enfin pour $k = 1$ le théorème 1.4 redonne (heureusement) ce critère de Gelfond classique.

2. Endomorphismes de variétés abéliennes

Nous commençons par décrire la situation que nous considérons dans ce paragraphe et les suivants.

Soit A une variété abélienne simple de dimension g , définie sur un corps de nombres F . On note F_v le complété de F pour une valeur absolue, notée $|\cdot|_v$, non-triviale sur F et $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F . On pose $\mathbf{k} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \text{End } A$ et l'on suppose que tous les éléments de $\text{End } A$ sont définis sur F . Enfin pour d un entier positif on écrit $G = A^d$.

On se donne alors un corps K contenant $\mathbf{k}$, qui est un $\mathbf{k}$ -espace vectoriel de dimension d . Le choix d'une base de K sur $\mathbf{k}$ fournit un homomorphisme de $\mathbf{k}$ -algèbre ρ injectif de K dans l'algèbre $\mathcal{M}(d, \mathbf{k})$ des matrices $d \times d$ à coefficients dans $\mathbf{k}$, tel que $\rho(1)$ soit la matrice identité.

On se donne encore un sous-anneau unitaire $\mathcal{O}$ de $\text{End } A$, de rang r sur $\mathbb{Z}$, et un $\mathcal{O}$ -module libre Γ de rang d , engendrant K en tant que $\mathbf{k}$ -espace vectoriel, et tel que $\rho(\Gamma) \subset \mathcal{M}(d, \mathcal{O})$. L'action naturelle de $\mathcal{M}(d, \mathcal{O})$ sur G permet d'identifier $\rho(\Gamma)$ à une sous- $\mathbb{Z}$ -algèbre de $\text{End } G$. Remarquons que comme Γ engendre K en tant que $\mathbf{k}$ -espace vectoriel, si $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ sont des éléments de Γ linéairement indépendants sur $\mathcal{O}$ alors $\rho(\gamma_1), \dots, \rho(\gamma_t)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{k}$.

Des exemples de telles situations seront explicités au paragraphe 3.

Pour l'instant nous allons montrer un lemme précisant les points de $G(F_v)$ (noté encore G par la suite) dont l'orbite sous Γ est mal répartie dans G . Pour cela nous reprenons la définition du coefficient de «bonne répartition» d'un sous-groupe de type fini d'un groupe algébrique commutatif, donnée dans [10].

Posons $\Delta = \{\rho(\gamma) \cdot p; \gamma \in \Gamma\}$ pour $p \in G$, on a la définition:

$$\mu(\Delta, G) = \min_{H \subseteq G} \left(\frac{\text{corang}_\Delta \Delta \cap H}{\text{codim}_G H} \right)$$

où H parcourt l'ensemble des sous-groupes algébriques de G distincts de G .

On a toujours $\mu(\Delta, G) \leq \text{rang } \Delta / \dim G$ et l'on dit que Δ est «bien réparti» dans G si l'on a l'égalité.

Nous pouvons maintenant énoncer notre lemme:

Lemme 2.1. *Soit p un point de G et Δ l'orbite de p sous Γ , si $\mu(\Delta, G) < r/g$, alors p est un point de torsion de G .*

Démonstration. Elle repose sur une idée que m'a aimablement communiquée K. Ribet. Traduisons le fait que $\mu(\Delta, G) < r/g$. Cela signifie qu'il existe un sous-groupe algébrique H de G de dimension h tel que:

$$\text{corang}_\Delta \Delta \cap H < (r/g) \text{codim}_G H.$$

Si p n'est pas un point de torsion de G , on a $\text{rang}_{\mathbb{Z}} \Delta = \text{rang}_{\mathbb{Z}} \Gamma = rd$. En effet si l'on a $\text{rang}_{\mathbb{Z}} \Delta < \text{rang}_{\mathbb{Z}} \Gamma$ il existe un $\gamma \in \Gamma$ non nul, tel que $\gamma \cdot p = 0$, ce qui entraîne que $\deg(\gamma) \cdot p = 0$, c'est-à-dire p est un point de torsion. On peut donc, si p n'est pas de torsion, réécrire l'inégalité ci-dessus sous la forme:

$$\text{rang}_{\mathbb{Z}} \Delta \cap H > rh/g$$

ce qui entraîne

$$\text{rang}_{\mathcal{O}} \Delta \cap H > h/g.$$

Remarquons que H est isogène à une puissance de A , H et $\Delta \cap H$ sont donc bien des $\mathcal{O}$ -modules, et de plus on a g divise h . Posons $u = d - h/g$ et $t = \text{rang}_{\mathcal{O}} \Delta \cap H$, on a $t + u > d$.

On déduit de ce qui précède qu'il existe des éléments $\varphi_1, \dots, \varphi_u$ de $\text{Hom}(G, A)$ qui sont linéairement indépendants sur $\text{End } A$ (ce sont les projections de G sur les différents facteurs de la puissance A^u de A à laquelle G/H est isogène), et des éléments $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ de Γ qui sont linéairement indépendants sur $\mathcal{O}$ et tels que:

$$\varphi_i(\rho(\gamma_j) \cdot p) = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, u \quad \text{et } j = 1, \dots, t.$$

Comme nous l'avons déjà remarqué, le fait que $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ soit linéairement indépendants sur $\mathcal{O}$ entraîne que $\rho(\gamma_1), \dots, \rho(\gamma_t)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{k}$.

Nous allons reformuler notre problème en termes d'algèbre linéaire sur $\mathbf{k}$.

Introduisons $A_0 = A(F_v)/A(F_v)_{\text{tors}}$ et $V = K \otimes_{\mathbf{k}} A_0$ où l'on considère K et A_0 comme des $\mathbf{k}$ -espaces à gauche.

On munit V d'une structure de K -espace vectoriel de la façon suivante:

$$\forall \gamma, \gamma' \in K \quad \forall x \in A_0 \quad \gamma' \cdot (\gamma \otimes x) = (\gamma' \cdot \gamma) \otimes x.$$

L'application suivante identifie $\text{Hom}_{\mathbf{k}}(V, A_0)$ et $K^* = \text{Hom}_{\mathbf{k}}(K, \mathbf{k})$:

$$i_1: K^* \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbf{k}}(V, A_0)$$

$$\varphi \rightarrow (\gamma \otimes x \rightarrow \varphi(\gamma) \cdot x).$$

Identifions ensuite, non canoniquement, V et A_0^d en tant que K -espaces:

$$i_2: V \rightarrow A_0^d$$

$$\gamma \otimes x \rightarrow \rho(\gamma) \cdot (x, 0, \dots, 0).$$

L'application i_2 est clairement injective et pour montrer sa surjectivité il suffit de constater que pour tout x dans A_0 on a $i_2(K \otimes x) \subset (\mathbf{k} \cdot x)^d$ d'où l'on déduit, comme ces deux $\mathbf{k}$ -espaces vectoriels ont la même dimension d , que $i_2(K \otimes x) = (\mathbf{k} \cdot x)^d$ et enfin quand x parcourt A_0 on trouve $i_2(K \otimes A_0) = A_0^d$.

Maintenant la situation décrite un peu plus haut s'énonce: il existe $\varphi'_1, \dots, \varphi'_u \in K^*$ qui sont $\mathbf{k}$ -linéairement indépendants, et $\gamma_1, \dots, \gamma_t \in K$ qui sont $\mathbf{k}$ -linéairement indépendants tels que

$$i_1(\varphi'_i)(\gamma_j \cdot i_2^{-1}(p)) = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, u \quad \text{et } j = 1, \dots, t.$$

Ecrivons $i_2^{-1}(p) = \sum_l \gamma'_l \otimes p_l$ où les (p_l) sont $\mathbf{k}$ -linéairement indépendants, on a alors:

$$0 = i_1(\varphi'_i)(\sum_l (\gamma_j \cdot \gamma'_l) \otimes p_l) = \sum_l \varphi'_i(\gamma_j \cdot \gamma'_l) \cdot p_l,$$

et comme $\varphi'_i(\gamma_j \cdot \gamma'_l) \in \mathbf{k}$ on a pour tout l , tout i et tout j :

$$\varphi'_i(\gamma_j \cdot \gamma'_l) = 0.$$

Mais $t + u > d = \dim_{\mathbf{k}} K$ et les $(\varphi'_i)_{i=1, \dots, u}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{k}$, aussi pour tout l les $(\gamma_j \gamma'_l)_{j=1, \dots, t}$ doivent-ils être $\mathbf{k}$ -linéairement dépendants, et enfin les $(\gamma_j)_{j=1, \dots, t}$ étant linéairement indépendants sur $\mathbf{k}$ il s'ensuit que l'on doit avoir $\gamma'_l = 0$ pour tout l , c'est-à-dire $i_2^{-1}(p) = 0$ ou encore $p = 0$ dans A_0^d . Mais on avait fait l'hypothèse préalable que p n'était pas un point de torsion, on obtient donc une contradiction, qui démontre le lemme.

Nous aurons en fait besoin au paragraphe 4 d'une situation produit, ce qui nous amène à montrer le lemme suivant:

Lemme 2.2. Soient $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ des sous-groupes de type fini de groupes algébriques commutatifs G_1, G_2, G_3 , qui s'inscrivent dans le diagramme de suites exactes suivant:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & G_1 & \xrightarrow{f} & G_2 & \xrightarrow{g} & G_3 \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \Delta_1 & \longrightarrow & \Delta_2 & \longrightarrow & \Delta_3 \longrightarrow 0 \end{array}$$

alors

$$\mu(\Delta_2, G_2) \geq \min(\mu(\Delta_1, G_1); \mu(\Delta_3, G_3)).$$

De plus si les suites exactes sont scindées, on a l'égalité. On en déduit que si Δ est un sous-groupe de type fini d'un groupe algébrique G commutatif et q un entier ≥ 1 , on a

$$\mu(\Delta^q, G^q) = \mu(\Delta, G).$$

Démonstration. • Soit H_2 un sous-groupe algébrique de G_2 , posons $H_1 = f^{-1}(f(G_1) \cap H_2)$ et $H_3 = g(H_2)$ on a les suites exactes:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1 & \longrightarrow & H_2 & \longrightarrow & H_3 \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \Delta_1 \cap H_1 & \longrightarrow & \Delta_2 \cap H_2 & \longrightarrow & \Delta_3 \cap H_3 \end{array}$$

d'où l'on déduit les relations:

$$\dim H_2 = \dim H_1 + \dim H_3$$

$$\text{rang}_{\mathbb{Z}} \Delta_2 \cap H_2 \leq \text{rang}_{\mathbb{Z}} \Delta_1 \cap H_1 + \text{rang}_{\mathbb{Z}} \Delta_3 \cap H_3.$$

Comme par ailleurs on a:

$$\dim G_2 = \dim G_1 + \dim G_3$$

$$\text{rang}_{\mathbb{Z}} \Delta_2 = \text{rang}_{\mathbb{Z}} \Delta_1 + \text{rang}_{\mathbb{Z}} \Delta_3$$

on en déduit les relations suivantes:

$$\text{codim}_{G_2} H_2 = \text{codim}_{G_1} H_1 + \text{codim}_{G_3} H_3$$

$$\begin{aligned} \text{corang}_{\Delta_2} \Delta_2 \cap H_2 &\geq \text{corang}_{\Delta_1} \Delta_1 \cap H_1 + \text{corang}_{\Delta_3} \Delta_3 \cap H_3 \\ &\geq \mu(\Delta_1, G_1) \cdot \text{codim}_{G_1} H_1 + \mu(\Delta_3, G_3) \cdot \text{codim}_{G_3} H_3 \\ &\geq \min(\mu(\Delta_1, G_1); \mu(\Delta_3, G_3)) \cdot \text{codim}_{G_2} H_2. \end{aligned}$$

Lorsque H_2 parcourt l'ensemble des sous-groupes de G_2 de codimension > 0 on obtient:

$$\mu(\Delta_2, G_2) = \min_{H_2 \neq G_2} \frac{\text{corang}_{\Delta_2} \Delta_2 \cap H_2}{\text{codim}_{G_2} H_2} \geq \min(\mu(\Delta_1, G_1); \mu(\Delta_3, G_3)).$$

• Quand la suite exacte de groupes est scindée, le sous-groupe $H_2 = G_1 \times H_3$ montre, pour H_3 convenable, que:

$$\mu(\Delta_2, G_2) \leq \frac{\text{corang}_{\Delta_2} \Delta_1 \times (\Delta_3 \cap H_3)}{\text{codim}_{G_2} H_2} = \frac{\text{corang}_{\Delta_3} \Delta_3 \cap H_3}{\text{codim}_{G_3} H_3} = \mu(\Delta_3, G_3)$$

et de même le sous-groupe $H_2 = H_1 \times G_3$, pour H_1 convenable, montre que:

$$\mu(\Delta_2, G_2) \leq \frac{\text{corang}_{\Delta_2} (\Delta_1 \cap H_1) \times \Delta_3}{\text{codim}_{G_2} H_2} = \frac{\text{corang}_{\Delta_1} \Delta_1 \cap H_1}{\text{codim}_{G_1} H_1} = \mu(\Delta_1, G_1).$$

• Enfin pour la dernière assertion on raisonne par récurrence sur q . On a les suites exactes scindées suivantes:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & G^{q-1} & \longrightarrow & G^q & \longrightarrow & G \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \Delta^{q-1} & \longrightarrow & \Delta^q & \longrightarrow & \Delta \longrightarrow 0. \end{array}$$

Et donc, d'après ce qui précède, on a:

$$\mu(\Delta^q, G^q) = \min(\mu(\Delta^{q-1}, G^{q-1}); \mu(\Delta, G)) = \mu(\Delta, G).$$

On considère $\mathcal{M}(q, \Gamma)$ agissant sur G^q . Pour p un point de G^q appelons Δ_q l'orbite de p sous $\mathcal{M}(q, \Gamma)$. Nous utiliserons par la suite le corollaire suivant des lemmes 2.1 et 2.2.

Corollaire 2.3. *Soit p un point de G^q qui n'est pas de torsion, et Δ_q l'orbite de p sous $\mathcal{M}(q, \Gamma)$, alors $\mu(\Delta_q, G^q) \geq r/g$.*

Démonstration. On peut écrire le point p comme un q -uplet $(p_1, \dots, p_q)$ de points de G . Comme p n'est pas un point de torsion de G^q l'un au moins des $p_1, \dots, p_q$ n'est pas un point de torsion de G . Et, si p_{i_0} est ce point, Δ_q contient le sous-groupe de type fini suivant: $\{(\gamma_1 \cdot p_{i_0}, \dots, \gamma_q \cdot p_{i_0}); \gamma_1, \dots, \gamma_q \in \Gamma\}$ qui n'est autre que la puissance $q^{\text{ième}}$, Δ^q , de l'orbite Δ de p_{i_0} sous Γ . On a donc $\mu(\Delta_q, G^q) \geq \mu(\Delta^q, G^q) = \mu(\Delta, G)$ d'après le lemme 2.2. Et enfin comme p_{i_0} n'est pas un point de torsion de G on a par le lemme 2.1, $\mu(\Delta, G) = r/g$ ce qui achève la preuve du corollaire.

Pour continuer notre préparation des paragraphes suivants, nous allons utiliser un plongement de G^q dans un espace projectif. On sait qu'il existe un plongement

$$\Psi: G^q \rightarrow \mathbb{P}_N$$

de G^q dans un espace projectif $\mathbb{P}_N$ qui identifie G^q à une sous-variété projective lisse de $\mathbb{P}_N$. C'est un tel plongement que nous utiliserons dans toute la suite.

Il nous faut maintenant démontrer un lemme décrivant l'action des endomorphismes $\gamma \in \mathcal{M}(q, \Gamma)$ sur $\Psi(G^q)$.

Nous choisissons une fois pour toutes $\gamma_1, \dots, \gamma_{rd}$ des éléments $\mathbb{Z}$ -linéairement indépendants de Γ et nous définissons pour H entier positif

$$\Gamma_H = \{m_1 \gamma_1 + \dots + m_{rd} \gamma_{rd} \text{ où } |m_i| \leq H \text{ pour } i = 1, \dots, rd\}.$$

Nous énonçons alors:

Lemme 2.4. *Il existe un nombre réel $C_3 > 0$ ne dépendant que de $\gamma_1, \dots, \gamma_{rd}$, G et Ψ tel que pour tout $H \in \mathbb{N}$ il existe un recouvrement fini de $\Psi(G^q)$ (dépendant de H) par des ouverts de Zariski $(U_\alpha)_{\alpha \in A_H}$, tel que pour tout $\gamma \in \mathcal{M}(q, \Gamma_H)$ et tout $\alpha \in A_H$, il existe une famille de polynômes homogènes $F_\gamma^{(\alpha)} = (F_{0,\gamma}^{(\alpha)}, \dots, F_{N,\gamma}^{(\alpha)})$, en les variables $X_0, \dots, X_N$, à coefficients dans $\mathcal{O}_F$, de même degré $\leq C_3 H^2$ et de hauteur $\leq C_3 (H^2 + 1)$, tels que pour tout $Q = \Psi(p) \in \Psi(G^q)$ de coordonnées projectives $(X_0(Q), \dots, X_N(Q))$ la famille*

$$(F_{0,\gamma}^{(\alpha)}(X_0(Q), \dots, X_N(Q)), \dots, F_{N,\gamma}^{(\alpha)}(X_0(Q), \dots, X_N(Q)))$$

pour chaque $\alpha \in A_H$ ou bien soit identiquement nulle, ou bien forme un système de coordonnées projectives du point $\Psi(\gamma \cdot p)$ de $\Psi(G^q)$. De plus, pour tout Q et tout $\gamma \in \mathcal{M}(q, \Gamma_H)$ il existe un $\alpha \in A_H$ et un j tels que $F_{j,\gamma}^{(\alpha)}(X_0(Q), \dots, X_N(Q)) \neq 0$.

Démonstration. Considérons d'abord le morphisme de groupes algébriques suivant :

$$\begin{aligned} \varphi' : \quad G^q &\rightarrow (G^q)^{rd} \\ p = (p_1, \dots, p_q) &\rightarrow (\gamma_1 \cdot p_1, \dots, \gamma_1 \cdot p_q, \dots, \gamma_{rd} \cdot p_1, \dots, \gamma_{rd} \cdot p_q). \end{aligned}$$

On a pour ce morphisme un recouvrement fini de $\Psi(G^q)$ par des ouverts de Zariski $(W_{\beta'})_{\beta' \in B'}$ et des familles de $(N+1)rd$ polynômes homogènes $(\phi_{0,1}^{(\beta')}, \dots, \phi_{N,rd}^{(\beta')})_{\beta' \in B'}$ à coefficients dans $\mathcal{O}_F$ de degrés et hauteurs bornés par une constante c_1 ne dépendant que de G, Ψ et des $\gamma_1, \dots, \gamma_{rd}$ tels que pour tout point $Q = \Psi(p)$ de $W_{\beta'}$ de coordonnées projectives $(X_0(Q), \dots, X_N(Q))$, la famille $(\phi_{j,i}^{(\beta')}(X_0(Q), \dots, X_N(Q)))_{j=0, \dots, N}$ soit un système de coordonnées projectives du point $\Psi((\gamma_i \cdot p_1, \dots, \gamma_i \cdot p_q))$ de $\Psi(G^q)$, et ceci pour tout $i = 1, \dots, rd$.

Soit maintenant $\gamma \in \mathcal{M}(q, \Gamma_H)$, on a

$$\gamma = (\gamma_{i,j})_{\substack{i=1, \dots, q \\ j=1, \dots, q}} \text{ avec } \gamma_{i,j} = \sum_{l=1}^{rd} m_{ijl} \gamma_l \text{ et } |m_{ijl}| \leq H$$

pour tout i, j et l . L'action de γ sur un point p de G^q s'écrit

$$\gamma \cdot p = \gamma \cdot (p_1, \dots, p_q) = \left(\dots, \sum_{j=1}^q \sum_{l=1}^{rd} m_{ijl} \gamma_l \cdot p_j, \dots \right).$$

On considère alors les morphismes de groupes algébriques :

$$\begin{aligned} \varphi((m_{ijl})) : \quad (G^q)^{rd} &\rightarrow G^q \\ (p_1, \dots, p_{rd}) &\rightarrow \left(\dots, \sum_{j=1}^q \sum_{l=1}^{rd} m_{ijl} \cdot p_{j,l}, \dots \right) \end{aligned}$$

où $p_i = (p_{1,i}, \dots, p_{q,i}) \in G^q$, $(1 \leq i \leq rd)$.

D'après [18] lemme 7 pp. 176–177, et le fait que G est quasi-compact, on sait qu'il existe une constante c_2 ne dépendant que de G , telle que pour tout H entier positif, il existe un recouvrement fini $(V_{\beta})_{\beta \in B_H}$ de $(\Psi(G^q))^{rd}$ par des ouverts de Zariski, et pour toute famille (m_{ijl}) d'entiers satisfaisant $|m_{ijl}| \leq H$ il existe des $(N+1)$ -uplets $(\phi_0^{(\beta)}, \dots, \phi_N^{(\beta)})$ de polynômes homogènes à coefficients dans $\mathcal{O}_F$ de degrés majorés par $c_2 H^2$ et de hauteurs majorées par $c_2 (H^2 + 1)$ tels que si $Q = (\Psi(p_1), \dots, \Psi(p_{rd})) \in V_{\beta}$ de coordonnées multi-projectives

$$(X_0^{(1)}(Q), \dots, X_N^{(1)}(Q), \dots, X_0^{(rd)}(Q), \dots, X_N^{(rd)}(Q))$$

dans $(\mathbb{P}_N)^{rd}$, alors

$$(\phi_0^{(\beta)}(X_0^{(1)}(Q), \dots, X_N^{(rd)}(Q)), \dots, \phi_N^{(\beta)}(X_0^{(1)}(Q), \dots, X_N^{(rd)}(Q)))$$

soit un système de coordonnées projectives de $\Psi(\varphi((m_{ijl}))(p_1, \dots, p_{rd}))$ dans $\mathbb{P}_N$.

On pose alors $U_\alpha = W_{\beta'} \cap (\Psi \circ \phi' \circ \Psi^{-1})^{-1}(V_\beta)$ avec $\alpha = (\beta, \beta') \in B_H \times B' = A_H$ c'est un recouvrement fini de $\Psi(G^q)$, et

$$F_\gamma^{(\alpha)} = (\phi_0^{(\beta)}(\phi_{0,1}'(\beta'), \dots, \phi_{N,rd}'(\beta')), \dots, \phi_N^{(\beta)}(\phi_{0,1}'(\beta'), \dots, \phi_{N,rd}'(\beta'))).$$

Clairement pour tout point $Q = \Psi(p) \in \Psi(G^q)$ et tout $\gamma \in \mathcal{M}(q, \Gamma_H)$ il existe un $\alpha \in A_H$ et une famille $F_\gamma^{(\alpha)}(X_0(Q), \dots, X_N(Q))$ formant un système de coordonnées projectives du point $\Psi(\gamma \cdot p)$.

Soit $\alpha' \neq \alpha$ dans A_H . Les familles $F_\gamma^{(\alpha)}(X_0, \dots, X_N)$ et $F_\gamma^{(\alpha')}(X_0, \dots, X_N)$ sont des systèmes de coordonnées projectives de $\Psi(\gamma \cdot p')$ lorsque $\Psi(p')$, de coordonnées projectives $(X_0, \dots, X_N)$, parcourt un ouvert de Zariski de $\Psi(G^q)$. On a donc pour tout $i, j \in \{0, \dots, N\}$:

$$F_{j,\gamma}^{(\alpha')} \cdot F_{i,\gamma}^{(\alpha)} - F_{j,\gamma}^{(\alpha)} \cdot F_{i,\gamma}^{(\alpha')}|_{\Psi(G^q)} = 0.$$

Comme $F_\gamma^{(\alpha)}(X_0(Q), \dots, X_N(Q))$ est un système de coordonnées projectives de $\Psi(\gamma \cdot p)$ il existe un i_0 tel que $F_{i_0,\gamma}^{(\alpha)}(X_0(Q), \dots, X_N(Q)) \neq 0$, et l'on a donc:

$$\forall j=0, \dots, N \quad F_{j,\gamma}^{(\alpha')}(\underline{X}(Q)) = \frac{F_{i_0,\gamma}^{(\alpha')}(\underline{X}(Q))}{F_{i_0,\gamma}^{(\alpha)}(\underline{X}(Q))} \cdot F_{j,\gamma}^{(\alpha)}(\underline{X}(Q)).$$

Ceci montre que si $F_{i_0,\gamma}^{(\alpha')}(\underline{X}(Q)) = 0$ la famille $F_\gamma^{(\alpha')}(\underline{X}(Q))$ est identiquement nulle et sinon elle forme bien un système de coordonnées projectives du point $\Psi(\gamma \cdot p)$. Nous avons ainsi complété la preuve du lemme 2.4.

3. Le théorème principal

On reprend la situation du paragraphe précédent avec, notamment, $\mathcal{M}(q, \Gamma) \subset \text{End } G^q$ et $\Psi: G^q \rightarrow \mathbb{P}_N$ le plongement projectif déjà choisi.

Soit p un point de $G = G(F_v)$, nous posons la définition suivante:

Définition 3.1. *Un point p de G sera dite propre pour l'action de Γ , s'il existe un homomorphisme analytique injectif*

$$\varepsilon: \mathcal{V} \rightarrow G$$

d'un sous-groupe ouvert $\mathcal{V}$ de F_v dans l'ensemble des points F_v -rationnels de G , contenant un sous-groupe d'indice fini de l'orbite de p sous l'action de Γ .

Remarquons que dans le cas où v est une valuation archimédienne, on aura $\mathcal{V} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et si v est une valuation ultramétrique, $\mathcal{V}$ sera un sous-groupe compact de F_v .

Le théorème que nous allons montrer au paragraphe suivant s'énonce:

Théorème 3.2. *Soit p un point d'ordre infini de G propre pour l'action de Γ . Soit X la plus petite sous-variété algébrique de G définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et contenant p . Alors on a:*

$$\dim X \geq \min \{gdr/(4g+2r); (gdr-2g-r)/(2g+r)\}.$$

Remarquons tout de suite que la variété X est irréductible. Nous allons maintenant déduire le corollaire 0.1 du théorème 3.1.

Dédution du corollaire 0.1. On prend $G = E^d$ et si $\mathfrak{A}$ est l'anneau des endomorphismes de E , on pose $\Gamma = \mathfrak{A} + \dots + \mathfrak{A}\beta^{d-1}$ et $K = \mathbf{k}(\beta)$. On peut supposer que β est un entier algébrique. La représentation ρ est l'homomorphisme qui, à un élément $\gamma \in K$, fait correspondre dans $\mathcal{M}(d, \mathbf{k})$ la matrice dans la base $1, \dots, \beta^{d-1}$ (par exemple) de l'endomorphisme de multiplication par γ . Il est alors clair que le point $(\exp_E(u), \dots, \exp_E(\beta^{d-1}u)) \in E^d$ est propre pour l'action de Γ . (Tout point de E^d est propre pour l'action de $\mathfrak{A}$.) On est donc dans la situation du théorème avec $g=1$ et $r=2$ ou 1, suivant qu'il y a ou n'y a pas des multiplications complexes sur E . Enfin la dimension de X n'est autre que le degré de transcendance du corps $\mathbb{Q}(\wp(u), \dots, \wp(\beta^{d-1}u))$, et le théorème de Schneider nous assure que ce degré est ≥ 1 .

On a encore le corollaire suivant:

Corollaire 3.3. Soit A une variété abélienne simple définie sur F de dimension $g \geq 2$ et de type C.M. Soit p un point de $A(F_v)$, propre pour $\text{End } A$, et d'ordre infini. Alors le corps de définition de p a un degré de transcendance $\geq g/4$ sur $\mathbb{Q}$.

Démonstration. On prend $G = A$ et $\Gamma = \text{End } A$ (et $K = \mathbf{k}$). Comme A est à multiplications complexes, on a $\text{rang}_{\mathbb{Z}} \Gamma = 2g$ et p est un point de G propre pour Γ qui n'est pas de torsion, le théorème avec $r=2g$ et $d=1$ entraîne immédiatement le résultat si $g > 2$. Dans le cas $g=2$ on sait que $\dim X > 0$ (cf. [18], p. 106).

Soit TG l'espace tangent à l'origine du groupe G . On sait que l'application exponentielle $\exp_G$ du groupe de Lie G définit un difféomorphisme local à l'origine de $TG(F_v) \simeq F_v^{gd}$ vers G . Elle peut être représentée, au moyen du plongement Ψ , par des fonctions $\Theta_0, \dots, \Theta_N$ analytiques sur un voisinage de $\mathcal{F}_v$ de l'origine de F_v^{gd} qui ne s'annulent simultanément en aucun point de $\mathcal{F}_v$. Dans le cas archimédien (voir 18 p. 198) on peut choisir $\mathcal{F}_v = \mathbb{R}^{gd}$ ou $\mathbb{C}^{gd}$ et les fonctions $\Theta_0, \dots, \Theta_N$ sont d'ordre strict ≤ 2 . Dans le cas ultramétrique, $\mathcal{F}_v$ est nécessairement un sous-groupe compact de F_v^{gd} .

Un homomorphisme analytique $\varepsilon: \mathcal{V} \rightarrow G$ se factorise par l'application exponentielle de G , plus précisément on a (cf. [18] p. 22) le diagramme commutatif suivant où $\mathcal{L}$ est une application F_v -linéaire, de F_v dans $TG(F_v)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \xrightarrow{\varepsilon} & G \\ \mathcal{L}|_{\mathcal{V}} \searrow & & \nearrow \exp_G \\ & \mathcal{F}_v & \end{array}$$

Appelons $\varepsilon_q: \mathcal{V}^q \rightarrow G^q$ (resp. $\mathcal{L}_q: F_v^q \rightarrow TG^q$) l'application produit déduite de ε (resp. $\mathcal{L}$). En composant avec le plongement projectif Ψ de G^q on obtient avec $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_q) \in \mathcal{V}^q$:

$$\Psi \circ \varepsilon_q(\mathbf{z}) = \Psi \circ \exp_{G^q} \circ \mathcal{L}_q(\mathbf{z}) = (\varphi_0(\mathbf{z}), \dots, \varphi_N(\mathbf{z})).$$

où $\varphi_0, \dots, \varphi_N$ sont des fonctions analytiques de q -variables dans $\mathcal{V}^q$.

Soit p un point de G vérifiant les hypothèses du théorème 3.2. On peut supposer, quitte à remplacer p par un de ses multiples, que l'orbite de p sous Γ est contenue dans l'image de ε . Notons $\mathcal{E}$ l'idéal premier homogène de l'anneau $F[X_0, \dots, X_N]$ suivant :

$$\mathcal{E} = (P \in F[X_0, \dots, X_N]; P(\Psi(p, \dots, p)) = 0).$$

Soient $L_0, \dots, L_N$ des formes linéaires dans $F[X_0, \dots, X_N]$.

Et on dira que $L_i \in F[X_0, \dots, X_N]$ est entière sur $F[L_0, \dots, L_{i-1}]$ modulo $\mathcal{E}$ s'il existe une équation de dépendance intégrale $R \in F[L_0, \dots, L_i]$ telle que :

$$R(L_0, \dots, L_i) = L_i^m + a_{m-1}(L_0, \dots, L_{i-1})L_i^{m-1} + \dots + a_0(L_0, \dots, L_{i-1}) \in \mathcal{E}.$$

On note κ la dimension projective de l'idéal $\mathcal{E}$, c'est aussi la dimension de la variété X du théorème 3.2.

Pour pouvoir appliquer à la fin de la démonstration du théorème 3.2 le critère d'indépendance algébrique du §1 (théorème 1.4), nous sommes amenés dès à présent à «normaliser» convenablement le plongement $\Psi: G^q \rightarrow \mathbb{P}_N$, par une transformation linéaire des $X_0, \dots, X_N$ à coefficients entiers. Ce sera le lemme 3.5, mais auparavant montrons le résultat suivant que m'a communiqué D. Masser, que je remercie ici.

Lemme 3.4 (D. Masser). *Soient $L_0, \dots, L_n$ des formes linéaires en $X_0, \dots, X_N$ à coefficients dans $\bar{\mathbb{Q}}$. Il existe une constante $S = S(\Psi(G^q); L_0, \dots, L_n)$, telle que pour tout entier $s > S$ et tout entier $k = 0, \dots, n$, la forme linéaire,*

$$L'_s = L_0 + sL_1 + \dots + s^k L_k$$

s'annule en un point de torsion de $\Psi(G^q)$ si et seulement si les formes $L_0, \dots, L_k$ s'annulent toutes en ce même point.

Démonstration. Soit H_{abs} la hauteur absolue sur $\mathbb{P}_N(\bar{\mathbb{Q}})$ (pour une définition de $\log H_{\text{abs}}(X_0, \dots, X_N)$ on se reportera à [18] p. 19). Sur $\Psi(G^q(\bar{\mathbb{Q}}))$ on a la hauteur de Weil $\tilde{h}(p') = \log H_{\text{abs}}(p')$, $p' \in \Psi(G^q(\bar{\mathbb{Q}}))$, et on sait qu'il existe une constante c_1 ne dépendant que de $\Psi(G^q)$ telle que si p' est un point de torsion de $\Psi(G^q)$ alors $\tilde{h}(p') \leq c_1$. Si $P \in \bar{\mathbb{Q}}[Y] \setminus \{0\}$ on définit $H_0(P) = H_{\text{abs}}((p_0, \dots, p_m))$ dans $\mathbb{P}_m(\bar{\mathbb{Q}})$ où $P(Y) = p_0 Y^m + \dots + p_m$. Les deux faits suivants sont alors classiques (cf. [18] p. 21)

(i) $H_0(P) \geq 1$ pour $P \in \bar{\mathbb{Q}}[Y] \setminus \{0\}$,

(ii) $H_0(P \cdot Q) \geq e^{-d^0 P Q} \cdot H_0(P) \cdot H_0(Q)$ pour $P, Q \in \bar{\mathbb{Q}}[Y]$.

Si donc L'_s s'annule en un point p' de torsion de $\Psi(G^q)$, soit $\underline{x} = (x_0, \dots, x_N)$ un système de coordonnées projectives de p' dans $\bar{\mathbb{Q}}$, le polynôme $P(Y) = L_0(\underline{x}) + \dots + L_k(\underline{x}) Y^k$ de $\bar{\mathbb{Q}}[Y]$ s'annule en $Y=s$ on a donc :

$$P(Y) = (Y-s) \cdot Q(Y)$$

d'où, si $P \neq 0$:

$$\begin{aligned} s &= H_0(Y-s) \leq H_0(Y-s) \cdot H_0(Q) \leq H_0(P) \cdot e^{d^0 P} \\ &\leq c_2 \cdot H_{\text{abs}}(\underline{x}) \cdot e^k \leq c_2 \cdot e^{\tilde{h}(p') + n} \leq c_2 \cdot e^{c_1 + n} \end{aligned}$$

où c_2 ne dépend que de $L_0, \dots, L_n$. Si $S = c_2 e^{c_1 + n}$ et $s > S$ on a une contradiction qui entraîne que $P \equiv 0$, c'est-à-dire $L_0(x) = \dots = L_k(x) = 0$ et montre bien que les formes linéaires $L_0, \dots, L_k$ doivent s'annuler au point p' .

Lemme 3.5. *Il existe $N+1$ formes linéaires $L_0, \dots, L_N$ en les $X_0, \dots, X_N$ à coefficients entiers rationnels, linéairement indépendantes, telles que pour $i = \kappa + 1, \dots, N$ la forme L_i soit entière sur $F[L_0, \dots, L_{i-1}]$ modulo $\mathcal{E}$ et que de plus L_0 ne s'annule en aucun point de torsion de $\Psi(G^q)$.*

Démonstration. On déduit aisément du lemme 3.4 qu'il existe $N+1$ formes linéaires indépendantes et ne s'annulant en aucun point de torsion de $\Psi(G^q)$. (Appliquer ce lemme avec $n = k = N$, les formes linéaires $X_0, \dots, X_N$ et prendre $s = S + 1, \dots, S + N + 1$). Soient $L_0^{(N)}, \dots, L_N^{(N)}$ ces formes linéaires, on peut les supposer indexées de sorte que les images de $L_0^{(N)}, \dots, L_N^{(N)}$ dans $F[X_0, \dots, X_N]/\mathcal{E}$ forment une base de transcendance de ce domaine intègre de type fini.

Et maintenant nous allons construire par récurrence les formes L_i en commençant par L_N .

Comme hypothèse de récurrence supposons, pour $\kappa < i \leq N$, construites les formes linéaires $L_N, L_{N-1}, \dots, L_{i+1}$ ainsi que des formes linéaires $L_0^{(i)}, \dots, L_i^{(i)}$ ne s'annulant en aucun point de torsion de $\Psi(G^q)$ et telles que $L_{i+1}, \dots, L_N$ soient entières sur $F[L_0^{(i)}, \dots, L_i^{(i)}]$ modulo $\mathcal{E}$ et que l'on ait

$$F[L_0^{(i)}, \dots, L_i^{(i)}, L_{i+1}, \dots, L_N] = F[X_0, \dots, X_N].$$

Nous allons alors construire des formes linéaires $L_0^{(i-1)}, \dots, L_{i-1}^{(i-1)}$ ne s'annulant en aucun point de torsion de $\Psi(G^q)$ et telles que $L_0^{(i-1)}, \dots, L_{i-1}^{(i-1)}$ soient entières sur $F[L_0^{(i-1)}, \dots, L_{i-1}^{(i-1)}]$ modulo $\mathcal{E}$ et que

$$F[L_0^{(i-1)}, \dots, L_{i-1}^{(i-1)}, L_i^{(i)}, L_{i+1}, \dots, L_N] = F[X_0, \dots, X_N].$$

En posant $L_i = L_i^{(i)}$ nous serons ramenés à l'hypothèse de récurrence avec $i-1$ au lieu de i (en effet les formes linéaires $L_{i+1}, \dots, L_N$ étant entières sur $F[L_0^{(i)}, \dots, L_i^{(i)}]$ seront également entières sur $F[L_0^{(i-1)}, \dots, L_{i-1}^{(i-1)}]$ modulo $\mathcal{E}$).

Comme $i > \kappa$ on peut supposer, quitte à réordonner les formes linéaires $L_0^{(i)}, \dots, L_i^{(i)}$, que la forme $L_i^{(i)}$ est algébrique sur $F[L_0^{(i)}, \dots, L_{i-1}^{(i)}]$ modulo $\mathcal{E}$. Soit donc $R_1(Y; Y_0, \dots, Y_{i-1})$ un polynôme homogène, à coefficients dans F , $\neq 0$, et tel que $R_1(L_i^{(i)}; L_0^{(i)}, \dots, L_{i-1}^{(i)}) \in \mathcal{E}$. On note m son degré. On fait alors la substitution de variables:

$$Z_j = L_j^{(i)} + s_j L_i^{(i)} \quad \text{pour } j = 0, \dots, i-1$$

où $s_0, \dots, s_{i-1}$ désignent i éléments de F .

Le polynôme R_1 s'écrit alors en fonction de $Z_0, \dots, Z_{i-1}, L_i^{(i)}$:

$$R_1(L_i^{(i)}; L_0^{(i)}, \dots, L_{i-1}^{(i)}) = R_2(L_i^{(i)}, Z_0, \dots, Z_{i-1}) = R_1(1, -s_0, \dots, -s_{i-1})(L_i^{(i)})^m + \dots$$

où les pointillés désignent un polynôme en $Z_0, \dots, Z_{i-1}$ et $L_i^{(i)}$ de degré en $L_i^{(i)} < m$.

On choisit alors $s_0, \dots, s_{i-1}$ dans $\mathbb{Z}$ de sorte que pour $j = 0, \dots, i-1$ on ait $s_j > S(\Psi(G^q); L_j^{(i)}, L_i^{(i)})$ (cf. lemme 3.4 avec $k = 1$) et $R_1(1, -s_0, \dots, -s_{i-1}) \neq 0$, ce qui est possible car R_1 est un polynôme homogène $\neq 0$.

On pose $L_j^{(i-1)} = L_j^{(i)} + s_j L_i^{(i)}$. D'après le lemme 3.4 et le choix des s_j on sait que $L_j^{(i-1)}$ ne s'annule en aucun point de torsion de $\Psi(G^q)$ pour $j=0, \dots, i-1$.

Comme $R_1(1, -s_0, \dots, -s_{i-1}) \neq 0$ la relation $R_2(L_i^{(i)}, L_0^{(i-1)}, \dots, L_{i-1}^{(i-1)}) \in \mathcal{E}$ est une relation de dépendance intégrale de $L_i^{(i)}$ sur $F[L_0^{(i-1)}, \dots, L_{i-1}^{(i-1)}]$ modulo $\mathcal{E}$.

D'autre part on a $L_j^{(i)} = L_j^{(i-1)} - s_j L_i^{(i)}$, l'intégralité de $L_i^{(i)}$ sur $F[L_0^{(i-1)}, \dots, L_{i-1}^{(i-1)}]$ modulo $\mathcal{E}$ entraîne celles de $L_0^{(i)}, \dots, L_{i-1}^{(i)}$, de plus il est également clair que

$$F[L_0^{(i-1)}, \dots, L_{i-1}^{(i-1)}, L_i^{(i)}] = F[L_0^{(i)}, \dots, L_{i-1}^{(i)}, L_i^{(i)}].$$

Pour $i=N, \dots, \kappa+1$ on pose $L_i = L_i^{(i)}$ et pour $i=0, \dots, \kappa$ on note $L_i = L_i^{(\kappa)}$. Ces formes vérifient les assertions du lemme 3.5.

Remarquons, pour terminer ce paragraphe, que les formes linéaires $L_0, \dots, L_N$ fournies par le lemme 3.5 ne dépendent que de G , Ψ et $\mathcal{E}$. Dans le paragraphe suivant, nous nous placerons systématiquement dans la situation «normalisée» suivante: $X_0, \dots, X_N$ désigneront les formes linéaires $L_0, \dots, L_N$ données par le lemme 3.5 et Ψ sera la notation du plongement de G^q dans $\mathbb{P}_N$ obtenu en composant le plongement considéré au début de ce paragraphe avec la transformation linéaire définie par $L_0, \dots, L_N$.

4. Démonstration du théorème 3.2

On peut supposer que $gd - 1 - \frac{2g}{r} > 0$. Sinon $\frac{gdr}{2g+r} \leq 1$ et l'énoncé du théorème 3.2 est trivial. Soient alors D un entier arbitrairement grand, ε un nombre réel tel que

$$0 < \varepsilon < gd - 1 - \frac{2g}{r},$$

et q un entier vérifiant

$$\frac{gd(gd+1)}{q+gd} < \varepsilon.$$

Les constantes $c_0, c_1, \dots$ ne dépendent pas dans tout ce paragraphe de D .

Soit $\mathcal{G} = \{P \in F[X_0, \dots, X_N]; P|_{\Psi(G^q)} \equiv 0\}$, c'est un idéal homogène de codimension $N - gdq$ (car $\dim \Psi(G^q) = gdq$) de $F[X_0, \dots, X_N]$; Reprenons les fonctions $\varphi_0, \dots, \varphi_N$ introduites au paragraphe précédent, et soit $\overline{B(\mathbf{O}, R_0)}$ une boule circonferenciée contenue dans $\mathcal{V}^q$, on peut alors énoncer:

Lemme 4.1. *Pour tout entier $D > c_0$, il existe un polynôme P de $\mathbb{Z}[X_0, \dots, X_N]$ homogène de degré D et de hauteur bornée indépendamment de D tel que:*

- (i) $P \notin \mathcal{G}$,
- (ii) si $\Phi(z_1, \dots, z_q) = P(\varphi_0(\mathbf{z}), \dots, \varphi_N(\mathbf{z}))$ on ait pour $0 < R \leq R_0$;

$$\sup_{\mathbf{z} \in B(\mathbf{O}, R)} \{|\Phi(\mathbf{z})|_v\} \leq \exp(c_1 D^{g^{d-\varepsilon}} \cdot \log(R/R_0) + c_2 D R_0^2).$$

Démonstration. Nous allons construire un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_N]$ de degré D tel que $P \notin \mathcal{G}$ et que la fonction:

$$\Phi = P(\varphi_0, \dots, \varphi_N): \overline{B(\mathbf{O}, R_0)} \rightarrow F_v$$

s'annule à un ordre $\geq T = [c_3 D^{gd-\varepsilon}] + 1$ à l'origine, et que $H(P) \leq c_4$.

Soit Ξ un système maximal de monômes de degré D linéairement indépendants modulo $\mathcal{G}$. On sait que, $\mathcal{G}$ étant de codimension $N - g d q$, le cardinal de Ξ est $\geq c_5 D^{gdq}$. La fonction Φ s'écrit (on a noté $\underline{X}^\lambda = X_0^{\lambda_0} \times \dots \times X_N^{\lambda_N}$):

$$\Phi = \sum_{\underline{X}^\lambda \in \Xi} p_{\underline{\lambda}} \cdot \varphi_0^{\lambda_0} \times \dots \times \varphi_N^{\lambda_N}.$$

On choisit des bases de F_v^q et $TG(F_v^q)$ ainsi qu'une base de transcendance $\xi_1, \dots, \xi_s$ du corps $F(\xi_1, \dots, \xi_s, w)$ engendré sur F par les coefficients de la matrice de l'application linéaire $\mathcal{L}$ écrite dans les bases choisies de F_v^q et $TG(F_v^q)$.

En développant les fonctions $\varphi_0, \dots, \varphi_N$ en séries entières au voisinage de $\mathbf{O}$, on a:

$$\Phi(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{v} \in \mathbb{N}^q} \left(\sum_{\underline{X}^\lambda \in \Xi} a_{\underline{\lambda}, \mathbf{v}} p_{\underline{\lambda}} \right) z_1^{v_1} \times \dots \times z_q^{v_q},$$

où les $a_{\underline{\lambda}, \mathbf{v}}$ sont des éléments du corps $F(\xi_1, \dots, \xi_s, w)$.

Les $a_{\underline{\lambda}, \mathbf{v}}$ peuvent s'écrire:

$$a_{\underline{\lambda}, \mathbf{v}} = A_{\underline{\lambda}, \mathbf{v}}(\xi_1, \dots, \xi_s, w) / B(\xi_1, \dots, \xi_s)$$

où $A_{\underline{\lambda}, \mathbf{v}}$ est un polynôme de $F[Y_1, \dots, Y_s, Y]$ de degré total $\leq c_6 |\mathbf{v}|$ et de hauteur

$$\leq c_6 (|\underline{\lambda}| + |\mathbf{v}| \cdot \log |\mathbf{v}|), \quad (\text{où } |\mathbf{v}| = v_1 + \dots + v_q \text{ et } |\underline{\lambda}| = \lambda_0 + \dots + \lambda_N).$$

On a $s \leq g d$. Les équations $(\sum_{\underline{X}^\lambda \in \Xi} a_{\underline{\lambda}, \mathbf{v}} \cdot p_{\underline{\lambda}} = 0)_{|\mathbf{v}| < T}$ donnent donc au plus $c_7 T^{q+s}$ équations linéaires en les $(p_{\underline{\lambda}})_{\underline{X}^\lambda \in \Xi}$, à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et de tailles majorées par $c_8 T \cdot \log T$.

Le lemme de Siegel nous permet (cf. [19], p. 10) de trouver une famille $(p_{\underline{\lambda}})_{\underline{X}^\lambda \in \Xi}$ d'éléments de $\mathbb{Z}$, non tous nuls, vérifiant:

$$\sum_{\underline{X}^\lambda \in \Xi} a_{\underline{\lambda}, \mathbf{v}} \cdot p_{\underline{\lambda}} = 0 \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in \mathbb{N}^q; |\mathbf{v}| < T$$

et telle que:

$$\max_{\underline{X}^\lambda \in \Xi} \{|p_{\underline{\lambda}}|\} \leq \exp \left(c_9 D^{gd} \cdot \frac{D^{(gd-\varepsilon)(q+s)}}{D^{gdq}} \right) \leq c_{10} \quad \left(\text{car } \varepsilon > \frac{g d(s+1)}{q+s} \right).$$

Comme on sait que les fonctions $\varphi_0, \dots, \varphi_N$ sont analytiques sur $\overline{B(\mathbf{O}, R_0)}$ (et dans le cas archimédien d'ordre 2) on a donc:

$$\sum_{\mathbf{v} \in \mathbb{N}^q} |a_{\underline{\lambda}, \mathbf{v}}| \cdot R_0^{|\mathbf{v}|} \leq \exp(c_{11} D R_0^2) \quad \text{pour } \underline{X}^\lambda \in \Xi.$$

D'où l'on déduit que, pour $R \leq R_0$:

$$\begin{aligned}
 \sup_{\mathbf{z} \in B(\mathbf{O}, R)} \{|\Phi(\mathbf{z})|_v\} &\leq \sum_{|\mathbf{v}| \geq T} \left| \sum_{\underline{\lambda} \in \Xi} a_{\underline{\lambda}, \mathbf{v}} \cdot p_{\underline{\lambda}}|_v \cdot R^{|\mathbf{v}|} \right| \\
 &\leq \left(\frac{R}{R_0} \right)^T \cdot \sum_{\mathbf{v} \in \mathbb{N}^q} \left| \sum_{\underline{\lambda} \in \Xi} a_{\underline{\lambda}, \mathbf{v}} \cdot p_{\underline{\lambda}}|_v R_0^{|\mathbf{v}|} \right| \\
 &\leq \left(\frac{R}{R_0} \right)^T \cdot \sum_{\underline{\lambda} \in \Xi} |p_{\underline{\lambda}}|_v \left(\sum_{\mathbf{v} \in \mathbb{N}^q} |a_{\underline{\lambda}, \mathbf{v}}|_v \cdot R_0^{|\mathbf{v}|} \right) \\
 &\leq \left(\frac{R}{R_0} \right)^T \cdot \exp(c_2 D R_0^2).
 \end{aligned}$$

Ceci achève de démontrer (ii). Comme les $(p_{\underline{\lambda}})_{\underline{\lambda} \in \Xi}$ sont non tous nuls on a bien également (i).

Soit C_0 la constante ne dépendant que de $\Psi(G^q)$ intervenant dans le théorème de Masser-Wüstholz (cf. [10], p. 490).

Posons $H = \left[g d q \left(\frac{D}{C_0} \right)^{g/r} \right] + 1$, soit P le polynôme fourni par le lemme 4.1, considérons l'idéal suivant de l'anneau $F[X_0, \dots, X_N]$:

$$J_D = (\mathcal{E}, P(F_{0,\gamma}^{(\alpha)}, \dots, F_{N,\gamma}^{(\alpha)}); \gamma \in \mathcal{M}(q, \Gamma_H) \text{ et } \alpha \in A_H).$$

Comme $\mathcal{E} \supset \mathcal{G}$, si $(x_0, \dots, x_N)$ est un système de coordonnées projectives d'un point p' de $\mathbb{P}_N$ qui vérifie:

$$\forall Q \in J_D, \quad Q(x_0, \dots, x_N) = 0$$

alors on sait que p' est un point de $\Psi(G^q)$ et que l'on a de plus pour tout γ de $\mathcal{M}(q, \Gamma_H)$ et au moins un α de A_H (dépendant de γ):

$$0 = P(F_{0,\gamma}^{(\alpha)}(x_0, \dots, x_N), \dots, F_{N,\gamma}^{(\alpha)}(x_0, \dots, x_N))$$

où $(F_{i,\gamma}^{(\alpha)}(x_0, \dots, x_N))_{i=0, \dots, N}$ est égal à un système de coordonnées projectives du point $\gamma \cdot p'$. En conclusion, si p' appartient à la variété des zéros de J_D dans $\mathbb{P}_N(\mathbb{Q})$, que l'on notera $\mathcal{Z}(J_D)$, le polynôme P de degré D s'annule sur:

$$\mathcal{M}(q, \Gamma_H) \cdot p' = \{\gamma \cdot p'; \gamma \in \mathcal{M}(q, \Gamma_H)\},$$

et comme $P \notin \mathcal{G}$ le théorème principal de [10], p. 490 nous permet d'affirmer que

$$\mu(\mathcal{M}(q, \Gamma) \cdot p', \Psi(G^q)) < r/g.$$

Cette inégalité comparée au lemme 2.3 entraîne que p' est un point de torsion de $\Psi(G^q)$, et on peut énoncer le lemme:

Lemme 4.2. (i) Si $p' \in \mathcal{Z}(J_D)$ alors p' est un point de torsion de $\Psi(G^q)$.

(ii) La codimension de l'idéal homogène J_D de $F[X_0, \dots, X_N]$ est $\geq N$.

Démonstration. Nous venons de démontrer (i), et (ii) s'en déduit immédiatement.

Dans le but d'appliquer les théorèmes du paragraphe 1, pour conclure la démonstration du théorème 3.2, nous devons donner des estimations arithmétiques et analytiques pour les générateurs de l'idéal J_D .

On reprend le point p fixé au paragraphe 3 dont l'orbite sous Γ est contenue dans l'image de ε . On pose $p = \varepsilon(z_1)$ et $\mathbf{z}_1 = (z_1, \dots, z_1) \in F_v^q$.

Lemme 4.3. *Il existe des constantes c_{12} et c_{13} telles que pour tout entier $D > c_0$*

et si $H = \left[g d q \left(\frac{D}{C_0} \right)^{g/r} \right] + 1$, pour tout $\gamma \in \mathcal{M}(q, \Gamma_H)$ et $\alpha \in A_H$,

(i) $P(F_{0,\gamma}^{(\alpha)}(\underline{X}), \dots, F_{N,\gamma}^{(\alpha)}(\underline{X})) = P_{\gamma,\alpha}(\underline{X})$ soit un polynôme homogène de $\mathcal{O}_F[X_0, \dots, X_N]$ de degré et de hauteur $\leq c_{12} \cdot D^{\frac{2g+r}{r}}$.

(ii) $|P_{\gamma,\alpha}(\varphi_0(\mathbf{z}_1), \dots, \varphi_N(\mathbf{z}_1))|_v \leq \exp(-c_{13} D^{g d - \varepsilon})$.

Démonstration. (i) En utilisant le lemme 2.4, l'on constate que $P_{\gamma,\alpha}$ est un polynôme homogène de $\mathcal{O}_F[X_0, \dots, X_N]$ de degré $\leq C_3 D H^2$ et de hauteur $\leq c_{14} D(H^2 + 1)$, l'assertion (i) du lemme 4.3 en découle immédiatement.

(ii) On sait que, puisque l'orbite de p est contenue dans l'image de ε , pour tout $\gamma \in \Gamma$ il existe au moins un $z_\gamma \in \mathcal{V}$ tel que $\gamma \cdot p = \varepsilon(z_\gamma)$.

Choisissons arbitrairement des $z_{\gamma_1}, \dots, z_{\gamma_{rd}}$ dans $\mathcal{V}$ tels que $\gamma_i \cdot p = \varepsilon(z_{\gamma_i})$ ($i = 1, \dots, rd$) pour la base $\gamma_1, \dots, \gamma_{rd}$ de Γ fixée au §2. Et pour $\gamma = m_1 \gamma_1 + \dots + m_{rd} \gamma_{rd} \in \Gamma$ on pose $z_\gamma = m_1 z_{\gamma_1} + \dots + m_{rd} z_{\gamma_{rd}}$. On a bien $\gamma \cdot p = \varepsilon(z_\gamma)$.

Enfin pour $\gamma = (\gamma^{i,j})_{1 \leq i, j \leq q} \in \mathcal{M}(q, \Gamma)$ on pose,

$$\mathbf{z}_\gamma = (z_{\gamma,1}, \dots, z_{\gamma,q}) \quad \text{avec} \quad z_{\gamma,i} = \sum_{j=1}^q z_{\gamma^{i,j}}.$$

Et donc $(\varphi_0(\mathbf{z}_\gamma), \dots, \varphi_N(\mathbf{z}_\gamma))$ et un système de coordonnées projectives du point $\Psi(\gamma \cdot (p, \dots, p))$ de $\Psi(G^q)$.

Ainsi si $\varphi(\mathbf{z}_1) \in U_\alpha$ et si $i \in \{0, \dots, N\}$ on a équivalence entre $\varphi_i(\mathbf{z}_\gamma) \neq 0$ et $F_{i,\gamma}^{(\alpha)}(\varphi(\mathbf{z}_1)) \neq 0$, et alors :

$$\begin{aligned} P_{\gamma,\alpha}(\varphi(\mathbf{z}_1)) &= [F_{i,\gamma}^{(\alpha)}(\varphi(\mathbf{z}_1))]^{d^0 P} \cdot P \left(\frac{F_{0,\gamma}^{(\alpha)}(\varphi(\mathbf{z}_1))}{F_{i,\gamma}^{(\alpha)}(\varphi(\mathbf{z}_1))}, \dots, \frac{F_{N,\gamma}^{(\alpha)}(\varphi(\mathbf{z}_1))}{F_{i,\gamma}^{(\alpha)}(\varphi(\mathbf{z}_1))} \right) \\ &= [F_{i,\gamma}^{(\alpha)}(\varphi(\mathbf{z}_1))]^{d^0 P} \cdot P \left(\frac{\varphi_0(\mathbf{z}_\gamma)}{\varphi_i(\mathbf{z}_\gamma)}, \dots, \frac{\varphi_N(\mathbf{z}_\gamma)}{\varphi_i(\mathbf{z}_\gamma)} \right) \\ &= \left(\frac{F_{i,\gamma}^{(\alpha)}(\varphi(\mathbf{z}_1))}{\varphi_i(\mathbf{z}_\gamma)} \right)^{d^0 P} \cdot P(\varphi_0(\mathbf{z}_\gamma), \dots, \varphi_N(\mathbf{z}_\gamma)) \end{aligned}$$

où $\varphi(\mathbf{z}_1) = (\varphi_0(\mathbf{z}_1), \dots, \varphi_N(\mathbf{z}_1))$.

Nous devons maintenant distinguer le cas où v est une valuation archimédienne et le cas où v est une valuation ultramétrique.

ii, a) *Le cas où v est ultramétrique :*

Dans ce cas $\mathcal{V}$ est un sous-groupe ouvert de F_v et il existe une boule $\overline{B(\mathbf{O}, R)}$ circonferenciée de F_v^q contenue dans $\mathcal{V}^q$ telle que tous les $\mathbf{z}_\gamma$ ($\gamma \in \Gamma$) soient dans $B(\mathbf{O}, R)$, on choisit un $R_0 > R$ tel que, $B(\mathbf{O}, R_0) \subset \mathcal{V}^q$. Le lemme 4.1(ii) nous assure que pour $\gamma \in \Gamma$:

$$|\Phi(\mathbf{z}_\gamma)|_v \leq \exp(-c_{15} D^{g d - \varepsilon}).$$

(La constante c_{15} dépend du choix de R et R_0 mais celui-ci est fait indépendamment de D .)

Soit l le nombre premier associé à v ; quitte à considérer dans ce qui précède le point $l^v \cdot p$ au lieu du point p avec $v \in \mathbb{N}$, on peut supposer que les boules $B(\mathbf{O}, R)$ et $B(\mathbf{O}, R_0)$ sont suffisamment petites pour qu'une des fonctions $\varphi_0, \dots, \varphi_N$ ne s'annule pas sur $B(\mathbf{O}, R_0)$, soit φ_i une fonction réalisant cette condition. On a $\min_{\mathbf{z} \in B(\mathbf{O}, R_0)} \{|\varphi_i(\mathbf{z})|_v\} = c_{16} > 0$ et l'on déduit donc de ce qui précède et du fait que $DH^2 < c_{17} D^{gd-\varepsilon}$ que:

$$|P_{\gamma, \alpha}(\varphi(\mathbf{z}_1))|_v \leq \exp(-c_{13} D^{gd-\varepsilon}).$$

ii, b) *Le cas où v est archimédienne:*

Dans ce cas $\mathcal{V} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et posant $R = c_{18} H$ tous les z_γ ($\gamma \in \Gamma_H$) sont dans $B(\mathbf{O}, R)$, on prend $R_0 = 2R$ et l'on applique le lemme 4.1 (ii) qui donne, pour $\gamma \in \mathcal{M}(q, \Gamma_H)$:

$$|\Phi(\mathbf{z}_\gamma)|_v \leq \exp(-c_{19} D^{gd-\varepsilon})$$

$$(DR^2 < c_{17} D^{gd-\varepsilon} \text{ car } \varepsilon < gd - 1 - 2g/r).$$

Nous allons maintenant montrer que

$$\min_{\mathbf{z} \in B(\mathbf{O}, R)} \{ \max_{i=0, \dots, N} |\varphi_i(\mathbf{z})|_v \} \geq \exp(-c_{20} R^2).$$

Pour cela il suffit de montrer que si $B(\mathbf{O}, R)$ est la boule centrée en $\mathbf{O}$ de rayon R de $TG^q(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{g dq}$ on a, en reprenant les notations du début du § 3:

$$\min_{\mathbf{u} \in B(\mathbf{O}, R)} \{ \max_{i=0, \dots, N} |\Theta_i(\mathbf{u})|_v \} \geq \exp(-c_{20} R^2).$$

Mais cela est une conséquence facile de l'existence des équations fonctionnelles des fonctions thêta.

Combinant cette minoration avec la majoration de $|\Phi(\mathbf{z}_\gamma)|_v$ et l'égalité:

$$|P_{\gamma, \alpha}(\varphi(\mathbf{z}_1))|_v = \left| \frac{F_{i, \gamma}^{(\alpha)}(\varphi(\mathbf{z}_1))}{\varphi_i(\mathbf{z}_\gamma)} \right|_v^{d^0 P} \cdot |\Phi(\mathbf{z}_\gamma)|_v$$

on trouve finalement: $|P_{\gamma, \alpha}(\varphi(\mathbf{z}_1))|_v \leq \exp(-c_{13} D^{gd-\varepsilon})$ ce qui achève de montrer le lemme 4.3.

Démonstration du théorème 3.2. Réindexant les générateurs de l'idéal J_D , on peut écrire J_D sous la forme:

$$J_D = (\mathcal{E}, P_1^{(D)}, \dots, P_m^{(D)})$$

où $\mathcal{E}$ est l'idéal homogène premier de $F[X_0, \dots, X_N]$ de dimension κ égale à la dimension de la variété X intervenant dans le théorème 3.2, tel que $F[X_0, \dots, X_N]/\mathcal{E}$ soit une extension entière de $F[X_0, \dots, X_\kappa]$, et que:

$$e(\varphi_0(\mathbf{z}_1), \dots, \varphi_N(\mathbf{z}_1)) = 0 \quad \text{pour tout } e \text{ dans } \mathcal{E}.$$

Les polynômes $P_i^{(D)}$ sont des éléments homogènes de $\mathcal{O}_F[X_0, \dots, X_N]$ qui vérifient les assertions suivantes pour $i=1, \dots, m(D)$:

- (i) $d^0 P_i^{(D)}$ et $h(P_i^{(D)}) \leq c_{12} D^{\frac{2g+r}{r}}$ (lemme 4.3 (i)),
 (ii) $|P_i^{(D)}(\varphi_0(\mathbf{z}_1), \dots, \varphi_N(\mathbf{z}_1))|_v \leq \exp(-c_{13} D^{gd-\varepsilon})$ (lemme 4.3 (ii)).

De plus comme X_0 ne s'annule en aucun point de torsion de $\Psi(G^q)$, on conclut du lemme 4.2 que la forme linéaire X_0 n'est pas diviseur de zéro modulo $\sqrt{J_D}$ (ce qui s'écrit encore, cf. § 1, $\sqrt{J_D}: \mathcal{A}(X_0) = \sqrt{J_D}$). où $\mathcal{A} = F[X_0, \dots, X_N]$.

Posons: $\delta(D) = \sigma(D) = [c_{12} D^{\frac{2g+r}{r}}] + 1$. Si pour une infinité de D les idéaux J_D sont de codimension $N+1$, le théorème 1.3, joint à la non nullité de $\varphi(\mathbf{z}_1)$, nous permet de conclure que pour de tels D on a

$$D^{gd-\varepsilon} \leq c_{21} (\sigma(D))^{\kappa+1}.$$

Comme $\sigma(D) = [c_{12} D^{\frac{2g+r}{r}}] + 1$ en faisant tendre D vers l'infini, on obtient:

$$\kappa \geq \frac{(gd-\varepsilon)r}{2g+r} - 1.$$

Si l'on n'est pas dans ce cas, alors il existe un D_0 tel que pour tout $D > D_0$ les idéaux J_D soient de codimension N (à cause du lemme 4.2(ii)). Comme le point p considéré dans le théorème 3.2 n'est, par hypothèse, pas de torsion et que d'après le lemme 4.2(i) la variété $\mathcal{Z}(J_D)$ des zéros de J_D dans $\mathbb{P}_N$ est contenue dans les points de torsion de $\Psi(G^q)$, le théorème 1.4 nous permet de conclure que: $\kappa \geq (gd-\varepsilon)r/(4g+2r)$.

La construction du lemme 4.1 ayant été faite pour tout $0 < \varepsilon < gd-1-2g/r$ on en déduit que

$$\kappa \geq \min \left\{ \frac{gdr}{2g+r} - 1; \frac{gdr}{4g+2r} \right\}.$$

Le théorème 3.2 est ainsi démontré.

Nous avons donc démontré, lorsque $gdr-2g-r > 0$, que $\dim X \geq \frac{gdr}{4g+2r} > 0$ si p n'est pas un point de torsion. Il existe des cas, quand $\frac{gdr}{2g+r} \leq 1$, où le point p considéré peut-être algébrique sans être de torsion. Nous discutons dans la liste ci-dessous les différentes situations possibles avec $\frac{gdr}{2g+r} \leq 1$.

Avant d'aborder la discussion, nous voulons souligner un point: la définition de propre pour Γ (définition 3.1) que nous avons donnée au paragraphe 3 n'est pas équivalente, dans le cas archimédien, au fait qu'il existe un élément de $TG(F_p)$, l'espace tangent à l'origine de G , dont l'image par l'application exponentielle de G soit p , et qui soit propre pour l'action naturelle de l'application tangente à $\rho(\gamma)$ sur $TG(F_p)$ pour tout γ dans Γ . Si un point p vérifie cette dernière assertion, nous dirons qu'il est fortement propre.

1) $r=1, d=1$ et g quelconque: tous les points de G sont fortement propres pour $\mathcal{O}=\mathbb{Z}$. On ne peut donc espérer montrer en général que $\dim X > 0$.

2) $r=1, d=2$ et $g \geq 2$: le problème de savoir si $\dim X > 0$ est encore ouvert (cf. [18], p. 105) même pour les points fortement propres.

3) $r=1, d=2$ ou 3 et $g=1$: le théorème de Schneider nous assure que $\dim X > 0$ si p est fortement propre (cf. [2] pour le cas ultramétrique). En général, le problème est ouvert. En particulier si $\wp$ est une fonction elliptique de Weierstrass, ω_1 une période non nulle et u un point algébrique de $\wp$, non de torsion, le nombre $\wp\left(\frac{4u^2}{\omega_1 + \sqrt{\omega_1^2 + 8u^2}}\right)$ est-il transcendant?

4) $r=2, d=1$ et g quelconque: si G est une variété de type C.M. et τ un nombre irrationnel dans le corps des multiplications complexes fixé par le type C.M.; alors tous les points de G sont propres pour $\mathcal{O}=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$. On ne peut donc dans ce cas espérer montrer en général $\dim X > 0$.

5) $r=2, d=2$ et $g=1$: le théorème de Schneider nous assure que $\dim X > 0$ si p est fortement propre (cf. [18]). En général, le problème est ouvert, (voir le cas 3).

6) $r=3, d=1$ et $g=3$: le théorème de Schneider donne encore $\dim X > 0$ si p est fortement propre et non de torsion (cf. [1]). L'hypothèse $r=3$ exclut $g=1$ ou 2 .

7) $r=4, d=1$ et $g=2$: on sait que $\dim X > 0$ si p n'est pas de torsion et est (fortement) propre (cf. [18], p. 106). L'hypothèse $r=4$ exclut $g=1$, en outre dans ce cas particulier propre entraîne fortement propre.

5. Le cas sans torsion

Ce paragraphe repose sur une suggestion que m'a aimablement faite G. Wüstholz. Je veux l'en remercier en ces lignes. Grâce à cette idée, nous pouvons énoncer en reprenant les notations des paragraphes 2 et 3:

Théorème 5.1. Soit p un point de G propre pour l'action de Γ . Soit X la plus petite sous-variété algébrique de G définie sur $\mathbb{Q}$ et contenant p . Alors si X ne contient aucun point de torsion de G on a:

$$\dim X \geq (gdr - 2g - r)/(2g + r).$$

Avant de démontrer le théorème 5.1, déduisons-en le corollaire 0.2.

Déduction du corollaire 0.2. Soit E la courbe elliptique associée à la fonction elliptique $\wp$. Considérons le plongement canonique de Weierstrass $\Psi_1: E \rightarrow \mathbb{P}_2^1$. On peut voir $\Psi_1(E)^d$ comme une sous variété de $\mathbb{P}_2^d$. Soit p le point de $\Psi_1(E)^d$ de coordonnées multiprojectives $(\wp(u), \wp'(u), 1; \dots; \wp(\beta^{d-1}u), \wp'(\beta^{d-1}u), 1)$ (rappelons qu'aucun des points $u, \beta u, \dots, \beta^{d-1}u$ n'est pôle de $\wp$ d'après le

théorème de Schneider). Soit X la plus petite sous-variété de $G = \Psi_1(E)^d$ définie sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et contenant p ; puisque $\wp(u)$ est algébrique, cette variété est contenue dans $\{p_1\} \times \mathbb{P}_2^{d-1}$ si p_1 est le point de $\mathbb{P}_2$ de coordonnées projectives $(\wp(u), \wp'(u), 1)$. Et comme p_1 n'est pas un point de torsion de $\Psi_1(E)$ (car aucun multiple entier de u n'est pôle de $\wp$), $\{p_1\} \times \mathbb{P}_2^{d-1}$ ne contient aucun point de torsion de G . Il en est donc de même de X .

Si $\mathfrak{A}$ est l'anneau des endomorphismes de $\Psi_1(E)$ on prend $\Gamma = \mathfrak{A} + \dots + \mathfrak{A}\beta^{d-1}$ (β étant supposé entier algébrique). Comme au § 3, p. 19, si la représentation ρ est l'homomorphisme qui à $\gamma \in K$ fait correspondre dans $\mathcal{M}(d, \mathbf{k})$ la matrice dans la base $(1, \dots, \beta^{d-1})$ de l'endomorphisme de multiplication par γ , le point p est propre pour Γ (il est même fortement propre). On est donc dans la situation du théorème 5.1 avec $g=1$ et $r=2$ (resp. 1) s'il y a (resp. n'y a pas) des multiplications complexes. On a donc:

$$\dim X = \deg \operatorname{tr}_{\bar{\mathbb{Q}}}(\wp(\beta u), \dots, \wp(\beta^{d-1} u)) \geq \frac{d}{2} - 1 \left(\text{resp. } \frac{d}{3} - 1 \right).$$

Enfin on sait d'après le théorème de Schneider que l'on a toujours $\dim X \geq 1$.

Démonstration du théorème 5.1. Elle coïncide jusque, et y compris le lemme 4.3 avec la démonstration du théorème 3.2, § 2, 3 et 4, dont on reprend ici les notations, sauf pour le lemme 4.2 ii qui est remplacé par:

Lemme 5.2. (i) si $p' \in \mathcal{Z}(J_D)$ alors p' est un point de torsion de $\Psi(G^q)$,

(ii) la codimension de l'idéal homogène J_D de $F[X_0, \dots, X_N]$ est égale à $N+1$.

Démonstration. La démonstration du point (i) est identique à celle du point (i) du lemme 4.2. D'autre part, J_D contient l'idéal homogène de $F[X_0, \dots, X_N]$:

$$\mathcal{E} = (P \in F[X_0, \dots, X_N]; P(\Psi(p, \dots, p)) = 0).$$

Et donc $\mathcal{Z}(J_D) \subset \Psi(X^q)$, mais comme X ne contient aucun point de torsion de G , la sous-variété $\Psi(X^q)$ ne contient aucun point de torsion de $\Psi(G^q)$, et combinant ce fait avec (i) on en déduit que $\mathcal{Z}(J_D)$ est vide, d'où le (ii).

La suite de la démarche de la démonstration du théorème 5.1 reprend, en plus simple, la fin de la preuve du théorème 3.2. Nous donnerons les détails. Les constantes c_1, c_2, c_3, c_4 , ne dépendent pas de D . Réindexant les générateurs de l'idéal J_D , on peut écrire J_D sous la forme:

$$J_D = (\mathcal{E}, P_1^{(D)}, \dots, P_{m(D)}^{(D)}),$$

où les polynômes $P_i^{(D)}$ sont des éléments homogènes de $\mathcal{O}_F[X_0, \dots, X_N]$ qui vérifient les assertions suivantes, pour $i = 1, \dots, m(D)$:

$$(i) \ d^0 P_i^{(D)} \text{ et } h(P_i^{(D)}) \leq c_1 D^{\frac{2g+r}{r}} \text{ (lemme 4.3 (i))},$$

$$(ii) \ |P_i^{(D)}(\varphi_0(\mathbf{z}_1), \dots, \varphi_N(\mathbf{z}_1))|_v \leq \exp(-c_2 D^{g^{d-\varepsilon}}) \text{ (lemme 4.3 (ii))}.$$

Pour tout D les idéaux J_D sont de codimension $N+1$ (lemme 5.2(ii)). Le théorème 1.3 joint à la non-nullité de $\varphi(\mathbf{z}_1)$ nous permet donc de conclure que pour de tels D on a:

$$D^{g^{d-\varepsilon}} \leq c_4 \cdot D^{(2g+r/r)(\kappa+1)}.$$

En faisant tendre D vers l'infini, on obtient $\kappa \geq \frac{(gd-\varepsilon)r}{2g+r} - 1$. La construction du lemme 4.1 ayant été faite pour tout $0 < \varepsilon < gd - 1 - 2g/r$, on en déduit que :

$$\dim X = \kappa \geq \frac{gdr}{2g+r} - 1;$$

ce qui est bien l'affirmation du théorème 5.1.

Bibliographie

1. Bertrand, D.: Transcendence properties of abelian integrals. *Queen's Papers in Pure and Applied Math.* **54**, 309-318 (1980)
2. Bertrand, D.: Sous-groupes à un paramètre p -adique. *Invent. math.* **40**, 171-193 (1977)
3. Brownawell, W.D., Kubota, K.K.: The algebraic independence of Weierstrass functions and some related numbers. *Acta Arithm.* **33**, 111-149 (1977)
4. Choodnovsky, G.V.: The Gelfond-Baker method in problems of Diophantine Approximation. *Topics in Number Theory. Debrecen* **13**, 19-30 (1974)
5. Choodnovsky, G.V.: Algebraic independence of values of exponential and elliptic functions. *Proc. Int. Congress of Math., Helsinki 1978*, pp. 339-350
6. Choodnovsky, G.V.: Algebraic independence of the values of elliptic functions at algebraic points. *Invent. math.* **61**, 267-290 (1980)
7. Dvornichik, R.: A criterion for the algebraic dependence of two complex numbers. *Bollettino U.M.I.* **15-A**, 678-687 (1978)
8. Laurent, M.: Indépendance algébrique de nombres de Liouville élevés à des puissances algébriques. *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A*, t. **286**, 131-133 (1978)
9. Macaulay, F.S.: The algebraic theory of modular systems. New York and London: Steckert-Hafner Service Agency 1964
10. Masser, D.W., Wüstholz, G.: Zero estimates on group varieties. *Invent. math.* **64**, 489-516 (1981)
11. Masser, D.W., Wüstholz, G.: Algebraic independence properties of values of elliptic functions. *Journées Arith. d'Exeter (1980)*, London M.S. Lecture Notes.
12. Masser, D.W., Wüstholz, G.: On large transcendence degree. (manuscrit)
13. Philippon, P.: Indépendance algébrique de valeurs de fonctions p -adiques. *J. für die Reine und Angew. Math.* **329**, 42-51 (1981)
14. Philippon, P.: Indépendance algébrique et variétés abéliennes. *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, t. **294**, 257-259 (1982)
15. Reyssat, E.: Un critère d'indépendance algébrique. *J. für die Reine und Angew. Math.* **329**, 66-81 (1981)
16. Schneider, T.: Einführung in die Transzendenten Zahlen. *Grundlehren der Math. Wiss.*, vol. 81. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1957; Gauthiers-Villars 1959
17. Siegel, C.L.: Transcendental numbers. *Ann. of Math. Studies*, Princeton, n° **16**, 102pp (1949)
18. Waldschmidt, M.: Nombres transcendants et groupes algébriques. *Astérisque* 69-70 (1979)
19. Waldschmidt, M.: Nombres transcendants. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 402. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1974
20. Warkentin, P.: Algebraische Unabhängigkeit gewisser p -adischer Zahlen. Diplomarbeit Freiburg (1978).
21. Weierstrass, K.: Zu Lindemanns Abhandlung: „Über die Ludolphsche Zahl“. *Sitzgsber. Preuss. Akad. Wiss.* pp. 1067-1085 (1885)
22. Weil, A.: Sur les fonctions elliptiques p -adiques. *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. **203**, 22-24 (1936)